UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS

"EL TEOREMA DE LA ENVOLVENTE Y APLICACIONES A LOS MECANISMOS DE JUEGOS"

PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

ELABORADO POR

ANGELO JONATHAN DIAZ SOTO

ASESORA

Dra. YBOON VICTORIA GARCÍA RAMOS

LIMA - PERÚ

2018

Este trabajo lo dedico a todas la personas que han hecho posible este logro. Entre ellas está mi madre, la Sra. Nelly Soto cochas, que con su grán esfuerzo supo guiarme por el camino del estudio. Además por su apoyo incondicional en mi carrera, por lo cual le estaré simpre agradecido. También agradecerle a mi padre, el Sr. Martin Diaz de la Cruz, quien me ha apoyado durante toda mi vida académica. Agradecerle a la Dra. Yboon Garcia Ramos, quién no solo me apoyó para la realización de la tesis, como asesora, si no que también lo ha hecho en el campo laboral y en desiciones dificiles en el ámbito académico.
Agradecerle a Dios por permitirme cada día seguir creciendo en lo profesional y lo humano. Cada día uno aprende y se fortalece en este camino que es la vida. Siempre estaré contento del rumbo que ha tomado mi vida y espero poder contribuir en el hermoso mundo del conocimiento.

RESUMEN

El teorema de la envolvente desarrollada por Milgrom y Segal en el año 2002 ha traído consigo diferentes avances en muchas áreas de la matemática y otras áreas de la ciencia. Uno de estos grandes avances se dá en la teoría de los diseños de mecanismos, el cual es un campo de la teoría de juegos con información incompleta.

En este trabajo, en el primer capítulo desarrollaremos los antecedentes históricos que han permitido desarrollar las teorías más importantes aquí expuestas. En el segundo capítulo mostraremos las herramientas matemáticas necesarias para poder tener un mejor entendimiento de los temas más relevantes del trabajo.

En el tercer capítulo estudiaremos la teoría de la utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern, el cual es muy importante para entender con más claridad el campo de la teoría de juegos.

En el cuarto capítulo realizaremos la teoría necesaria de teoría de juegos, con el fin de entender bien lo que es un diseño de mecanismos. Dentro de este desarrollo veremos las dos maneras de representar los juegos, los cuales son, los juegos en forma estrátegica y en forma extensiva. Además estudiaremos los juegos con información completa e incompleta. Dentro del área de los juegos con información incompleta, estudiaremos los diseños de mecanismos.

Posteriormente, en el cuarto capítulo estudiaremos los avances realizados por Milgrom y Segal, las principales aplicaciones al mundo de la matemática y los diseños de mecanismos. Por último, en el quinto capítulo daremos nuestras conclusiones del trabajo.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Durante el siglo XVII se desarrolló una de las teorías más importantes para la humanidad, entre los años 1664 y 1675 dos mentes maravillosas desarrollaron lo que se conoce como la teoría del cálculo. Estos dos persojanes fueron el físico, filósofo y matemático inglés Isaac Newton (1642-1727) y el filósofo, lógico y matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).
La teoría del cálculo revolucionó el mundo de las matemáticas, así como el mundo de muchas otras ciencias, como la física, la economía, la biología, etc, y el mundo de la ingeniería.
A partir de la unificación del cálculo, con los trabajos de Newton y Leibniz, durante el siglo XVIII, con los trabajos de los hermanos Bernoulli se dieron a conocer la teoría del cálculo de variaciones, con el trabajo del matemático francés Monge se conoció la geometría descriptiva. Lagrange realizó contribuciones al estudio de las ecuaciones diferenciales. Euler aportó ideas fundamentales sobre el cálculo y sus aplicaciones.
Posteriormente, durante el siglo XIX, Dirichlet propuso la definición, en los términos actuales, de la noción de función. En 1821, el matemático francés Cauchy dió un enfoque lógico y apropiado del cálculo y una definición precisa de *función continua.*
Así, hemos tenido y seguimos teniendo más contribuciones al mundo del cálculo.
Algunas aplicaciones del cálculo se muestran a continuación: En la física revolucionó el estudio de los cuerpos en movimiento, también se desarrolló estudios importantes sobre la velocidad y la aceleración. En la economía se formalizó el estudio de maximizar y minimizar intereses, gastos, beneficios, costos, etc. El análisis marginal es quizás la aplicación más directa del cálculo en la economía. En la química se estudió la velocidad de reacción de los compuesto químicos y como optimizarlos. En Medicina se aplica a la epidemiología y la inmunología. En la ingeniería, tenemos aplicaciones en la optimización de procesos, ya sea energéticos, químicos, industriales, etc. En la matemática se desarrolló el campo de la optimización, el cálculo de variaciones, el control óptimo, etc.

La optimización matemática es el área dentro de las matemáticas que se encarga de la elección de la mejor alternativa entre las posibles, para un problema formulado en términos matemáticos. La palabra óptimo proviene de **optimismo** y significa **"elegir el mejor curso de acción posible"**, aunque su uso no se popularizó hasta inicios del siglo XX.
El término **"optimal"** fue introducido en 1710 por Leibnitz en su obra **Theodicee** para designar la mejor alternativa posible. De ahí que cuando se habla de optimización, se refiere a la elección de la mejor solución cuando existen dos o más alternativas posibles.
Así, por optimizar se entiende **maximizar** o **minimizar** el objetivo u objetivos que se pretende, teniendo en cuenta las restricciones que puede limitar la elección de valores de las variables de decisión.
Muchos problemas de optimización pueden formalizarse y tratarse matemáticamente, dicho enfoque matemático es lo que constituye la disciplina que se denomina **optimización matemática**.
El objeto de estudio son problemas matemáticos con la siguiente estructura:

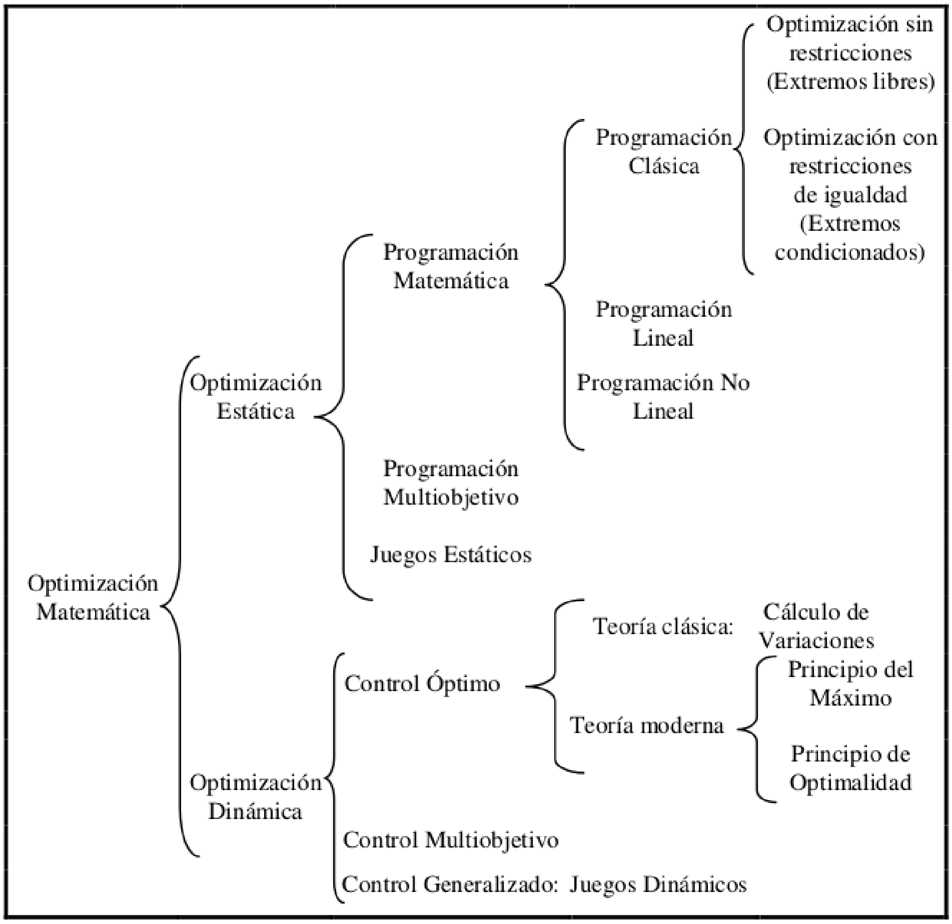
$$\begin{array}{ll} Opt. & f(x) \\ s.a & x \in S, \end{array}$$

donde $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, es la función objetivo con un dominio arbitrario X, cuyo valor se maximiza o minimiza respecto a cada variable de decisión $x \in S$, siendo S el conjunto de restricciones.
Esta área es muy amplia, debido a la diversidad de situaciones que se pueden plantear y a las distintas maneras de enfocar la resolución del problema.
Es así que nace muchas ramas dentro de la optimización matemática, las cuales se pueden clasificar dependiendo de cada tipo de problema.
Así, por ejemplo, cuando se desconoce completamente la relación funcional entre las variables que definen la función objetivo y/o las restricciones, se recurre a la **optimización experimental**. Las variables de decisión pueden tomar valores reales (valores continuos) o valores discretos (valores enteros o binarios), o una combinación de ambas posibilidades. En función de ello se puede hablar de **optimización continua** frente a **optimización discreta**, en la que se puede establecer a su vez subclasificaciones: **optimización entera**, **optimización binaria**, etc, y también está la **optimización mixta** (cuando el problema de optimización tiene tanto variables continuas como variables discretas).
Dentro de la optimización discreta se ubica la **optimización combinatoria**, una familia especial de problemas con estructuras particulares (problema de la mochila, problema del viajante, problema del camino más corto, problemas de secuenciación, problemas de asignación de puestos de trabajo, etc) cuyas soluciones factibles son valores enteros, generalmente binarios $\{0, 1\}$, que satisfacen ciertas condiciones de tipo combinatorio.

En función del contexto del problema algunas de las variables pueden aparecer como parámetros, tomando valores fijos, de modo que los valores óptimos que tomen las variables de decisión y la función objetivo son valores paramétricos que se modificarán ante variaciones en el valor de los parámetros. Cuando se plantea el problema en estos términos, y aunque en realidad se trate de resolver una familia de problemas de optimización sobre un espacio paramétrico, se suele hablar de **optimización paramétrica**.
Así, se puede seguir dando más casos y nos encontraríamos con más ramas de la optimización matemática (optimización determinista, optimización suave, optimización escalar, optimización linealmente restringida, etc).
Dos grandes clasificaciones que se da, son las siguientes:
Optimización estática, la cual se centra en problemas en espacios vectoriales de dimensión finita, lo que supone que hay una total abstracción de cualquier consideración temporal y/o espacial. Dentro de esta área encontramos a la **optimización escalar**, que es semejante hablar de la **programación matemática**, cuya característica principal es que posee un único objetivo y un único agente decisor. Así, la programación matemática se subclasifica en **programación lineal, no lineal, cuadrática, geométrica, etc.**
Optimización dinámica, donde las variables de decisión están indexadas respecto de una variable de referencia que generalmente es el tiempo, aunque también existen problemas en los que es la distancia.
En la optimización dinámica tenemos a los problemas de control óptimo, el cual se subdivide en dos tipos de problemas: el **problema variacional clásico** y el **problema de control óptimo moderno**.
Sus bases matemáticas de análisis y resolución son el cálculo variacional y sus extensiones al problema de control óptimo, conocido como **"Principio del máximo"** de Pontryagin[1], así como la programación dinámica u optimización por etapas de Bellman[2].
En el siguiente gráfico se resume el avance del área de la optimización matemática.

[1]Para mayor información puede consultar: **Pontryagin L.S. Boltyanskii V.G. Gamkrelidze R.V. Mischenko E.F., The Mathematical Theory of Optimal Processses, Interscience Publishers, Wiley y Sons. (1962).**

[2]Para mayor información puede consultar: **Bellman R.E. Dynamic Programming. (1957).**



Como podemos apreciar en el gráfico anterior, dentro del campo de la optimización estática encontramos a los juegos estáticos, y dentro del campo de la optimización dinámica están los juegos dinámicos. Este trabajo está enfocado en estudiar el campo de los juegos estáticos, con algunos resultados del campo de la optimización.

Un problema simple de cálculo de variaciones, dentro de la optimización dinámica en tiempo continuo, se puede expresar como:

$$Maximizar(Minimizar) \qquad \int_0^T f(x(t), x^{'}(t), t)dt$$

$$s.a \qquad (x(t), x^{'}(t)) \in A,$$

$$x(0) = k_0,$$

donde $t \in [0, T]$ es la variable tiempo, $x(t)$ es el camino de variable de estados cuya trayectoria óptima debemos determinar, k_0 el valor inicial del camino y A es el conjunto de restricciones.

Cuando queremos parametrizar nuestro problema, formamos la función $V : P \longrightarrow \mathbb{R}$, de la forma

$$\begin{aligned} V(p) = \quad & Maximizar(Minimizar) \quad \int_0^T f(x(t), x^{'}(t), t)dt \\ & s.a \qquad (x(t), x^{'}(t)) \in A, \\ & \qquad\qquad x(0) = p, \end{aligned}$$

donde P es el conjunto de parámetros.
La función V recibe el nombre de **función valor** o también llamada **función valor óptimo, función de perturbación** o **función envolvente**.
Estudiar las propiedades de esta función son importantes en diversos problemas de optimización. Por ejemplo, estudiar la derivabilidad, bajo determinados supuestos, garantiza conocer las variaciones del valor óptimo de la función objetivo ante cambios en los parámetros del modelo.
En general, se puede resaltar dos objetivos principales en el campo de la optimización:

- Identificar bajo que condiciones sobre la función objetivo y el conjunto de restricciones está garantizada la existencia de la solución del problema de optimización; lo cual lo establece los **Teoremas de Existencia**.

- Obtener una caracterización del conjunto de puntos óptimos: condiciones necesarias y/o suficientes, unicidad de la solución, sensibilidad y estabilidad de las soluciones; esto esta garantizado por los **Teoremas de caracterización.**

Los teoremas de la envolvente, los cuales son teoremas de caracterización de las soluciones, durante el siglo XX fueron mostrados de una manera diferencial, considerando condiciones topológicas en su formulación. En el 2002, Milgrom y Segal desarrollaron su teorema de la envolvente de manera integral, el cual puede ser aplicable en muchas áreas de la matemática y economía. Principalmente se dio un gran avance en el área de los diseños de mecanismos.
El área de los diseños de mecanismos pertenece al área de la teoría de juegos con información incompleta. En esta área hubo grandes avances con el trabajo de Milgrom y Segal. Algunos de estos desarrollos serán estudiados en este trabajo.
Para entender esto, veremos algunos conceptos matemáticos previos, como el concepto de diferenciabilidad, convexidad, concavidad, correspondencias. También veremos el concepto de la utilidad esperada de Von Neumann - Morgenstern, para así entender bien la definición de un juego. Estos temas serán estudiados en los capítulos 2, 3 y 4.
Posteriormente se estudiará el trabajo de Milgrom y Segal, hasta llegar a las aplicaciones en los diseños de mecanismos.

CAPÍTULO 2

DEFINICIONES PREVIAS

2.1. Introducción

Antes de comenzar con los temas principales de este trabajo, debemos recordar algunos temas necesarios para la comprensión del mismo (Ver [1],[2],[3] y [4]).
En primer lugar, recordemos las nociones de derivadas direccionales, diferenciabilidad, doblemente diferenciable y de clase C^1 para funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$.
Además, necesitamos las reglas de la cadena y de Leibniz, así como el teorema del valor medio.
En segundo lugar, debemos tener presente la definición de absolutamente continua y el teorema fundamental del cálculo de Lebesgue.
En tercer lugar, necesitamos la definición de conjuntos convexos, esto para garantizar la buena definición de funciones cóncavas y convexas que daremos más adelante.
Así, en cuarto lugar, recordamos las definiciones de funciones cóncavas y convexas.
En quinto lugar, mostramos las definiciones de semicontinuidad y derivadas laterales.
Por último, veremos las nociones necesarias de la teoría de correspondencias.
Además, denotaremos por $||\cdot||$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a la norma y el producto interno usual del espacio $\mathbb{R}^n$ respectivamente, a no ser que se mencione algo diferente.

2.2. Funciones diferenciables

Definición 2.2.1 (Derivadas direccionales)**.** Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $x_0 \in X$, la función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}^n$. La derivada direccional de f en x_0, en la dirección de v, se define como

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}.$$

Definición 2.2.2. Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $x_0 \in X$. Decimos que la función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es **diferenciable** en x_0 si existe una transformación lineal continua $Df(x_0)$ tal que

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Df(x_0)h + o(h),$$

para todo $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $x + h \in X$ y donde o[1] cumple que

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{|| \ h \ ||} = 0,$$

y decimos que f es **doblemente diferenciable** en x_0 si existe una transformación lineal continua $Df(x_0)$ y una forma cuadrática $D^2 f(x_0)$, inducida por una matriz simétrica H (es decir, $D^2 f(x_0)(h) = hHh^T$) tal que

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Df(x_0)h + \frac{1}{2} hHh^T + o(h),$$

para todo $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $x + h \in X$ y se cumple que

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{|| \ h \ ||^2} = 0.$$

Definición 2.2.3. Dado $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto no vacío. Decimos que la función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es **diferenciable** si es diferenciable en todo punto de X. De la misma manera, decimos que la función f es **doblemente diferenciable** si es doblemente diferenciable en todo punto de X.

Observación 2.2.1. Dado $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $x_0 \in X$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$,

1) Un resultado importante nos dice que si f es diferenciable en $x_0 \in X$, entonces

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right),$$

[1, página 125], donde $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ es la derivada direccional para $v = e_i$.

2) El vector $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$ es llamado **gradiente** de f en x_0.

3) Intuitivamente, la función f es diferenciable en x_0 si y solo si puede ser aproximada por su derivada en una vecindad de x_0.

[1] Notación de Landau: Notación para la comparación asintótica de funciones.

Proposición 2.2.1 (Regla de la cadena)**.** [1, página 127]
Sean los conjuntos abiertos $X \subset \mathbb{R}^m, Y \subset \mathbb{R}^n$ diferentes del vacío y la función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $f(X) \subset Y$. Si $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, donde cada $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ es diferenciable en $x_0 \in X$, además sea $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $y_0 = f(x_0)$, entonces se cumple que la función compuesta $g_o f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en x_0 y sus derivadas direccionales vienen dadas por

$$\frac{\partial(g_o f)}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial f_k}(y_0)\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x_0).$$

Definición 2.2.4 (Clase C^1)**.** Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto no vacío, decimos que la función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 en X cuando:

1) Para cada $x \in X$, existen las derivadas direccionales $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$.

2) Las funciones $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas en X.

Proposición 2.2.2 (Teorema del valor medio)**.** [1, página 137]
Dado $X \subset \mathbb{R}^n$ diferente del vacío. Sea $f : X \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en todos los puntos del segmento de recta abierto $(x_0, x_0 + v) \subset X$ y continua en el segmento de recta cerrado $[x_0, x_0 + v] \subset X$. Entonces existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$f(x_0 + v) - f(a) = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a + \theta v), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a + \theta v), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a + \theta v) \right), v \right\rangle.$$

Proposición 2.2.3 (Regla de Leibniz)**.** [1, Página 143]
Dado $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto no vacío, sea $f : X \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con las siguientes propiedades:

1) Para cada $x \in X$, la función $f(x, .) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable.

2) La función f es de clase C^1.

Entonces la función $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x) = \displaystyle\int_a^b f(x, t)dt$, posee la i-ésima derivada parcial dada por

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)dt.$$

2.3. Conjuntos convexos

Definición 2.3.1. Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es llamado **convexo** si se cumple que

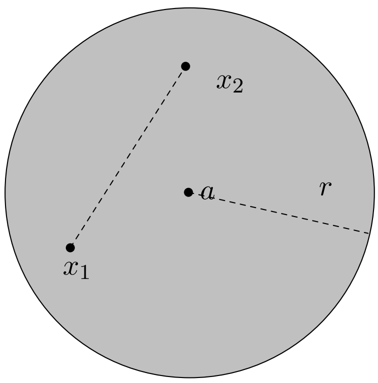
$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X \qquad , \forall x_1, x_2 \in X \text{ y } \forall \lambda \in [0,1].$$

Ejemplo. La bola cerrada de centro $a \in \mathbb{R}^n$ y de radio $r > 0$ es un conjunto convexo. En efecto, para todo $x_1, x_2 \in B_r(a)$, se cumple que $|| \; x_1 - a \; || \leq r$ y $|| \; x_2 - a \; || \leq r$, entonces para todo $\lambda \in [0,1]$, se cumple que

$$|| \; \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - a \; || = || \; \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - \lambda a - (1-\lambda)a \; || = || \; \lambda(x_1 - a) + (1-\lambda)(x_2 - a) \; || \, .$$

$$\leq \lambda \; || \; x_1 - a \; || + (1-\lambda) \; || \; x_2 - a \; || \leq \lambda r + (1-\lambda) r = r$$

Por lo tanto $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in B_r(a)$, y con esto demostramos la convexidad. ∎



Gráfica 1.- Bola cerrada de centro a y radio r.

2.3.1. Ejemplos de conjuntos convexos

Definición 2.3.2. Dado $d \in \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}$. Un **hiperplano** es un conjunto afín en $\mathbb{R}^n$, definido como

$$H(d,a) = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle d, x \rangle = a\}.$$

El vector d es llamado **vector normal** al hiperplano $H(d,a)$.

Proposición 2.3.1. Todo hiperplano es un conjunto convexo.

Prueba: Considerando $d \in \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}$ fijos y arbitrarios.
Tomamos $x_1, x_2 \in H(d,a)$ arbitrarios, entonces se cumple que $\langle d, x_1 \rangle = a$ y $\langle d, x_2 \rangle = a$.

Sea $\lambda \in [0,1]$, entonces

$$\langle d, \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \rangle = \langle d, \lambda x_1 \rangle + \langle d, (1-\lambda)x_2 \rangle$$

$$= \lambda \langle d, x_1 \rangle + (1-\lambda)\langle d, x_2 \rangle = \lambda a + (1-\lambda)a = a.$$

Por lo tanto, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in H(d,a)$. $\blacksquare$

Definición 2.3.3. Dado $d \in \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}$.
Los conjuntos cerrados, dados por

$$H^+(d,a) = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle d, x \rangle \geq a\} \text{ y } H^-(d,a) = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle d, x \rangle \leq a\},$$

o abiertos, dados por

$$H^{++}(d,a) = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle d, x \rangle > a\} \text{ y } H^{--}(d,a) = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle d, x \rangle < a\},$$

son llamados **semiespacios asociados** al hiperplano $H(d,a)$.

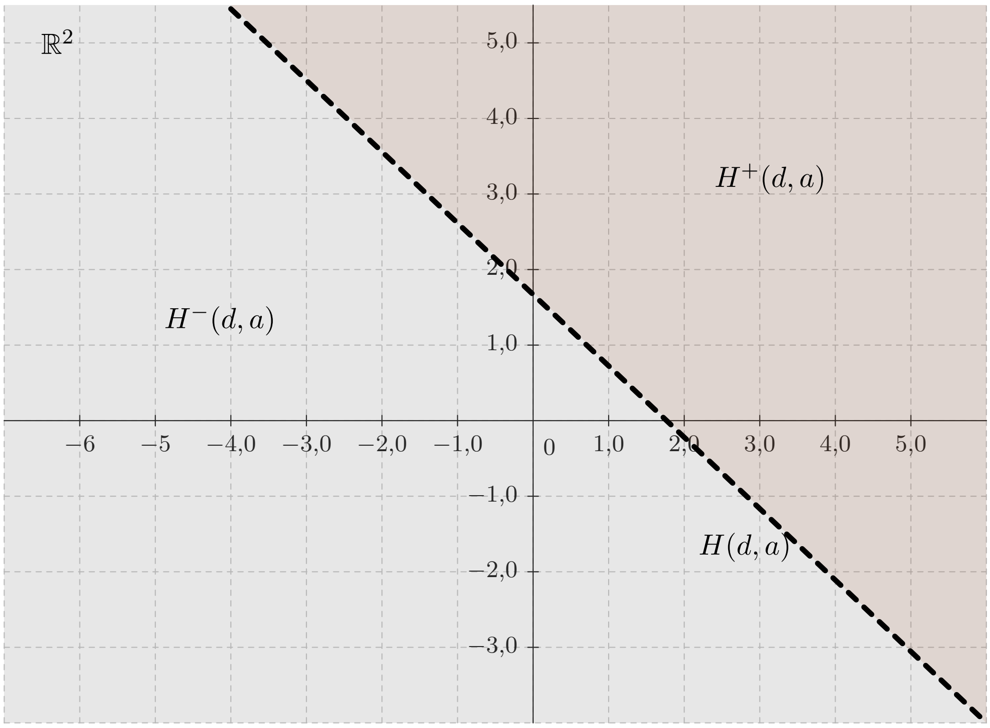
Proposición 2.3.2. Dado el hiperplano H(d,a), los semiespacios asociados son conjuntos convexos.

Prueba: Haremos la demostración para el semiespacio $H^+(d,a) = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle d, x \rangle \geq a\}$, ya que para los otros casos las pruebas son similares.
Tomemos $x_1, x_2 \in H^+(d,a)$ arbitrarios, entonces se cumple que $\langle d, x_1 \rangle \geq a$ y $\langle d, x_2 \rangle \geq a$. Sea $\lambda \in [0,1]$, entonces

$$\langle d, \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \rangle = \langle d, \lambda x_1 \rangle + \langle d, (1-\lambda)x_2 \rangle$$

$$= \lambda \langle d, x_1 \rangle + (1-\lambda)\langle d, x_2 \rangle \geq \lambda a + (1-\lambda)a = a,$$

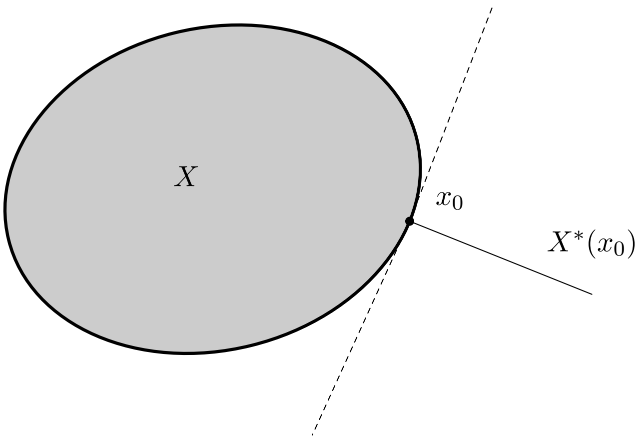
por lo tanto, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in H^+(d,a)$. $\blacksquare$



Gráfica 2.- Ejemplo de un hiperplano $H(d,a)$ en $\mathbb{R}^2$ y sus semiespacios asociados a este.

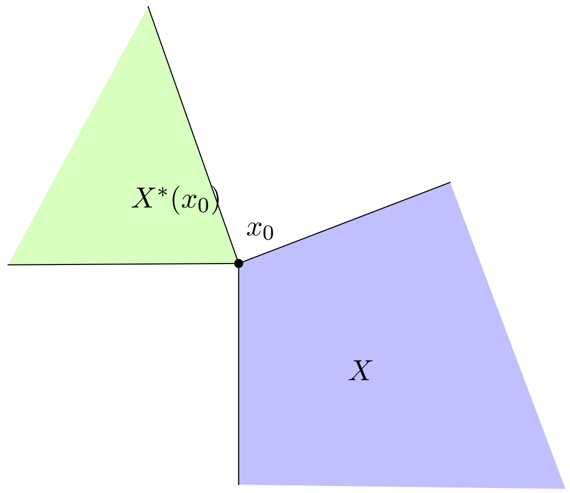
Definición 2.3.4. Dado $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, definimos el **cono normal o polar** de X en el punto $x_0 \in \partial X$[2] como

$$X^*(x_0) = \{y \in \mathbb{R}^n / \langle y - x_0, x - x_0 \rangle \leq 0, \forall x \in X\}.$$



Gráfica 3.- Cono normal en un punto de frontera suave.

[2]∂X denota la frontera de X.



Gráfica 4.- Cono normal en un punto de frontera no suave.

Proposición 2.3.3. Dado $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. El **cono normal o polar** de X en todo punto $x_0 \in \partial X$ es convexo.

Prueba: Tomando $x_0 \in \partial X$ fijo y arbitrario. Sean $x_1, x_2 \in X^*(x_0)$ y $\lambda \in [0,1]$, entonces se cumple que

$$\langle x_1 - x_0, x - x_0 \rangle \leq 0, \forall x \in X \tag{2.1}$$

y

$$\langle x_2 - x_0, x - x_0 \rangle \leq 0, \forall x \in X. \tag{2.2}$$

Luego, para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned}\langle \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - x_0, x - x_0 \rangle &= \langle \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - \lambda x_0 - (1-\lambda)x_0, x - x_0 \rangle \\ &= \lambda \langle x_1 - x_0, x - x_0 \rangle + (1-\lambda)\langle x_2 - x_0, x - x_0 \rangle. \end{aligned} \tag{2.3}$$

De (2.1) y (2.2) en (2.3), obtenemos que

$$\langle \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - x_0, x - x_0 \rangle \leq \lambda 0 + (1-\lambda)0 = 0,$$

por lo tanto $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X^*(x_0)$. Así demostramos que $X^*(x_0)$ es convexo y como $x_0 \in \partial X$ es arbitrario, entonces $X^*(x_0)$ es convexo para todo $x_0 \in \partial X$. ■

2.4. Funciones cóncavas y convexas

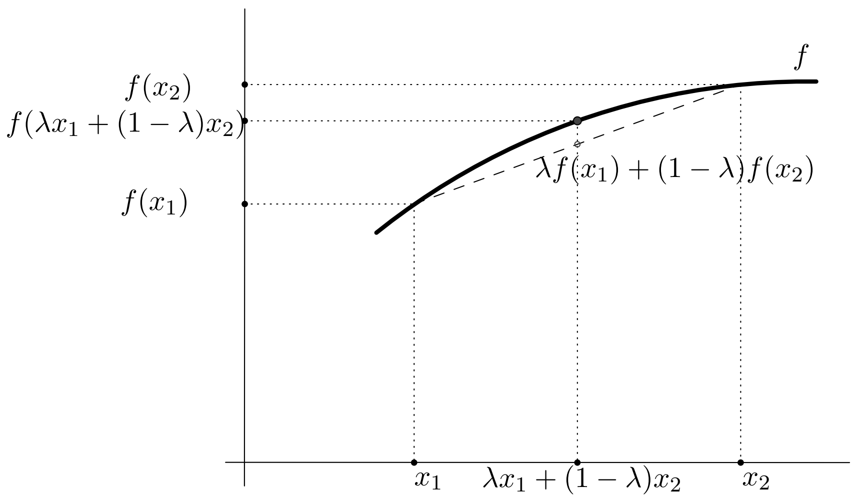
Definición 2.4.1. Dada la función $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, se llama **gráfica** de f al conjunto

$$gr_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} / x \in X\}.$$

Definición 2.4.2. Dado $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y no vacío. La función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada **cóncava** en X si y solo si para todo $x_1, x_2 \in X$ y todo $\lambda \in [0, 1]$ se cumple que

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Interpretación geométrica:
El segmento de recta que une dos puntos arbitrarios de la gráfica de la función queda por debajo o coincide con la gráfica misma.



Gráfica 5: Interpretación geométrica de una función cóncava.

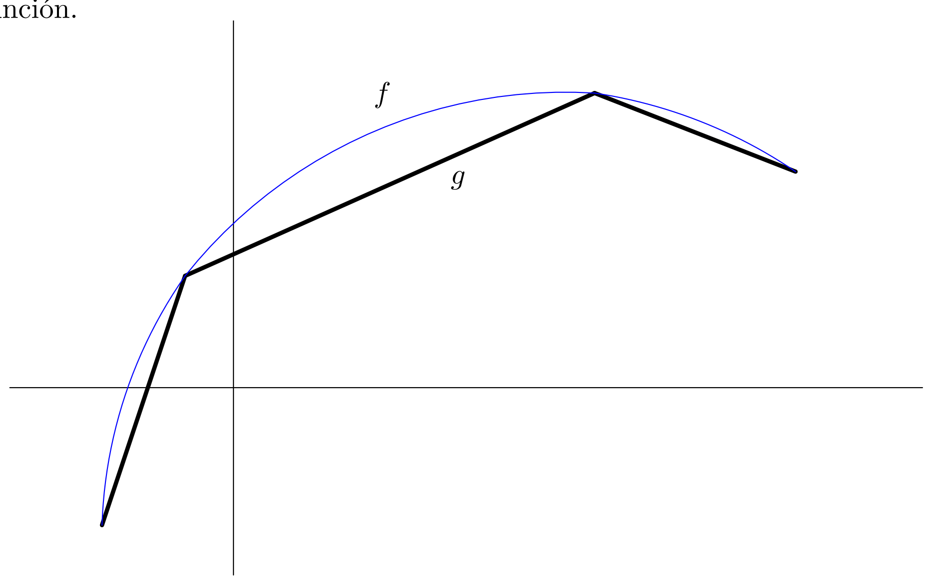
Definición 2.4.3. Dado $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y no vacío. La función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada **convexa** en X si y solo si $-f$ es cóncava.

En este caso, la interpretación geométrica es que el segmento de recta que une dos puntos arbitrarios de la gráfica de la función queda por encima o coincide con la gráfica misma.

Definición 2.4.4. Dado $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y no vacío. La función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada **estrictamente cóncava** en X si y solo si para todo $x_1, x_2 \in X$, con $x_1 \neq x_2$, y todo $\lambda \in (0, 1)$ se cumple que

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

A diferencia de la definición de función cóncava, el segmento de recta que une dos puntos arbitrarios, salvo los extremos, queda completamente por debajo de la gráfica de la función.



Gráfica 6.- f estrictamente cóncava, g cóncava.

De manera similar se define una función estrictamente convexa.

Definición 2.4.5. Dados un conjunto convexo, abierto y no vacío $X \in \mathbb{R}^n$ y la función cóncava $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Si tomamos un $x \in X$ fijo y arbitrario, por ser X abierto, existe un $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset X$. Dado $d \in \mathbb{R}^n$ no nulo, definimos el conjunto

$$R_x = \{h > 0/ \parallel hd \parallel < r\}.$$

Proposición 2.4.1. Dados $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y abierto, $x \in X, d \in \mathbb{R}^n$ y sea la función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ cóncava, entonces la función $g : R_x \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$g(h) = \frac{f(x+hd) - f(x)}{h},$$

es no creciente en R_x.

Prueba: Considerando $h_1 > h_2 > 0$ que pertenecen a R_x, los puntos $x, x+h_1d, x+h_2d \in X$ y $\lambda = \frac{h_2}{h_1}$, además como f es cóncava, se cumple que

$$f(x+h_2d) = f(\lambda(x+h_1d) + (1-\lambda)x) \geq \lambda f(x+h_1d) + (1-\lambda)f(x),$$

entonces

$$f(x+h_2d) - f(x) \geq \lambda \left(f(x+h_1d) - f(x)\right).$$

Así llegamos a tener que

$$g(h_2) = \frac{f(x+h_2d) - f(x)}{h_2} \geq \frac{f(x+h_1d) - f(x)}{h_1} = g(h_1),$$

por lo tanto llegamos a demostrar que g es no creciente en R_x. $\blacksquare$

Proposición 2.4.2. Dado $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, abierto y no vacío, y sea la función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ cóncava, entonces para todo $x \in X$ existe la derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial d}(x)$ en toda dirección $d \in \mathbb{R}^n$ no nula.

Prueba: Manteniendo $x \in X$ fijo y arbitrario, podemos formar el conjunto
$R_x = \{h > 0/ \parallel hd \parallel < r\}$ para toda dirección $d \in \mathbb{R}^n$, esto de la definición 2.4.5.
Como necesitamos que $h \longrightarrow 0^+$, entonces $\parallel hd \parallel \longrightarrow 0$. Así, para h bien pequeño, se tiene que $h \in R_x$, entonces por la proposición anterior tenemos que la función $g : R_x \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$g(h) = \frac{f(x + hd) - f(x)}{h},$$

es no creciente en R_x.
Así, cuando h se acerca a cero, la función $g(h)$ va creciendo.
Ahora veamos que $g(h)$ sea acotada superiormente.
Manteniendo $d \in \mathbb{R}^n$ fijo y arbitrario, tal que $\parallel d \parallel < r$ y $h \in R_x$, como

$$x = \frac{h}{1+h}(x - d) + \frac{1}{1+h}(x + hd).$$

Además, $x - d$ y $x + hd$ pertenecen a X y como f es cóncava, se cumple que

$$f(x) = f\left(\frac{h}{1+h}(x - d) + \frac{1}{1+h}(x + hd)\right) \geq \frac{h}{1+h}f(x - d) + \frac{1}{1+h}f(x + hd),$$

así,

$$f(x) - f(x - d) \geq \frac{f(x + hd) - f(x)}{h} = g(h),$$

por lo tanto, g es acotado superiormente.
Con esto demostramos que el siguiente límite

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x + hd) - f(x)}{h}$$

existe, y es exactamente la derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial d}(x)$. $\blacksquare$

Proposición 2.4.3. Dado $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto convexo, abierto y no vacío, y sea la función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ cóncava, entonces para todo $y \in X$ se cumple que

$$f^{'}(y^+) \leq f^{'}(y^-).$$

Prueba: Sean $x, y, z \in X$ tal que $x < y < z$, luego $\frac{z-y}{z-x} + \frac{y-x}{z-x} = 1$, por la concavidad de f se cumple que

$$f(y) = f(\frac{z - y}{z - x}x + \frac{y - x}{z - x}z) \geq \frac{z - y}{z - x}f(x) + \frac{y - x}{z - x}f(z). \tag{2.4}$$

Sumando $-f(x)$ a ambos lados de (2.4), obtenemos que

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}, \tag{2.5}$$

y sumando $-f(z)$ a ambos lados de (2.4), obtenemos que

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \geq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}, \tag{2.6}$$

así, de (2.5) y (2.6),

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

o también que

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

Tomando límite para cuando $x \longrightarrow y$, obtenemos que

$$f^{'}(y^{-}) \geq \frac{f(z)-f(y)}{z-y},$$

y tomando límite ahora para cuando $z \longrightarrow y$, obtenemos que

$$f^{'}(y^{-}) \geq f^{'}(y^{+}),$$

donde y es cualquier punto en X.
Así demostramos que para todo $y \in X$, se cumple que

$$f^{'}(y^{+}) \leq f^{'}(y^{-}). \qquad \blacksquare$$

2.5. Funciones semicontinuas y derivadas laterales

Definición 2.5.1. La función $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es **semicontinua superior** en $x_0 \in X$ si se cumple alguna de las siguientes dos condiciones:

1) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $\| x - x_0 \| < \delta$, entonces $f(x) - f(x_0) < \varepsilon$.

2) Si $x_n \longrightarrow x_0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leq f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0)$.

Definición 2.5.2. La función $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es **semicontinua inferior** en $x_0 \in X$ si se cumple alguna de las siguientes dos condiciones:

1) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $\| x - x_0 \| < \delta$, entonces $f(x_0) - f(x) < \varepsilon$.

2) Si $x_n \longrightarrow x_0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \geq f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0)$.

Decimos que f es semicontinua superior (semicontinua inferior) en X si es semicontinua superior (semicontinua inferior) en todo $x \in X$.

Ejemplo. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ -(x-2)^2 + 3 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Sea una sucesión $\{x_n\}$ que se acerque a $x = 1$, si x_n se acerca por la derecha, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 2 = f(1)$ y si x_n se acerca por la izquierda, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1 < 2 = f(1)$. Por lo tanto, f es semicontinua superior en $x = 1$. ■

Ejemplo. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ -(x-2)^2 + 3 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Sea una sucesión $\{x_n\}$ que se acerque a $x = 1$, si x_n se acerca por la derecha, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 2 > f(1) = 1$ y si x_n se acerca por la izquierda, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1 = f(1)$. Por lo tanto, f es semicontinua inferior en $x = 1$. ■

Por la definición de semicontinuidad superior e inferior, se cumple que, f es continua en $x \in X$ si y solo si f es semicontinua superior e inferior en x respectivamente.
Además, una función puede ser semicontinua superior o inferior sin la necesidad de ser continua por la derecha o por la izquierda, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Sea la función $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 2 & \text{si } x = 1, \\ \frac{1}{2} + (1-x) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

El cual es semicontinua superior en $x = 1$, ya que para cualquier sucesión que se acerque a 1, la imagen siempre va a estar por debajo de $f(1) = 2$, y por esto último, f no es semicontinua inferior en $x = 1$.
Además se cumple que f no es continua ni por la derecha ni por la izquierda, ya que el límite de la imagen por la derecha es $\frac{1}{2} \neq 2$ y por la izquierda es $1 \neq 2$. ■

Recordemos que el teorema de Weierstrass nos dice que si f es continua en X, donde X es compacto no vacío, entonces f alcanza un máximo global[3] y un mínimo global en X.

[3]Dada la función $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, decimos que f alcanza un máximo (mínimo) local en X si existe un $x_0 \in X$ y una vecindad $U \subset X$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$(respectivamente $f(x) \geq f(x_0)$) para todo $x \in U$, y decimos que f alcanza un máximo (mínimo) global en X si existe un $x_0 \in X$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$(respectivamente $f(x) \geq f(x_0)$) para todo $x \in X$.

La hipótesis de continuidad de la función f puede relajarse a la hipótesis de que sea semicontinua superior en X para garantizar la existencia de un máximo global y a la hipótesis de que sea semicontinua inferior en X para garantizar la existencia de un mínimo global.

Teorema 2.5.1. [2, Página 198] Sea la función $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es semicontinua superior (inferior) en X y X es compacto y no vacío, entonces existe un máximo (mínimo) de f.

Definición 2.5.3. Dada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Las siguientes expresiones se denominan derivadas de f en $x \in (a, b)$.

$$D^+ f(x) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \qquad D_+ f(x) = \liminf_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$D^- f(x) = \limsup_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \qquad D_- f(x) = \liminf_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

$D^+ f(x)$ se denomina derivada superior lateral derecha y $D^- f(x)$ se denomina derivada superior lateral izquierda. Igualmente, $D_+ f(x)$ se denomina derivada inferior lateral derecha y $D_- f(x)$ se denomina derivada inferior lateral izquierda.
Luego, podemos concluir que f es diferenciable por la derecha en x si y solo si $D^+ f(x) = D_+ f(x) \neq \pm\infty$. Recíprocamente, f es diferenciable por la izquierda en x si y solo si $D^- f(x) = D_- f(x) \neq \pm\infty$. En consecuencia, tenemos que f es diferenciable en x si

$$f'(x) = D^+ f(x) = D_+ f(x) = D^- f(x) = D_- f(x) \neq \pm\infty.$$

En el caso que x es uno de los extremos del intervalo $[a, b]$, entonces se considera solo las derivadas laterales correspondientes.

2.6. Teorema fundamental del cálculo

Definición 2.6.1 (Absolutamente continua)**.** La función $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada **absolutamente continua** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$$

son intervalos disjuntos de $[a, b]$, tales que cumplen que $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \mid F(b_i) - F(a_i) \mid < \varepsilon.$$

El teorema fundamental del cálculo de la teoría clásica de Riemann asegura que:

1) Dada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es Riemann integrable en $[a, b]$ y definimos $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ como
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$
entonces F es continua en $[a, b]$. Además, si f es continua en $x \in (a, b)$, entonces F es diferenciable en x y $F^{'}(x) = f(x)$.

2) Dada $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si F es diferenciable en (a, b) y $F^{'}$ es Riemann integrable en $[a, b]$, entonces se cumple que
$$F(b) - F(a) = \int_a^b F^{'}(t)dt.$$

El siguiente teorema muestra los resultados correspondientes a la teoría de Lebesgue, el cual establece que:
Dada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ lebesgue integrable en $[a, b]$ y sea $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$
entonces F es absolutamente continua en $[a, b]$ y por lo tanto continua en $[a, b]$.
Un resultado sencillo de ver es el siguiente:
Si f es continua en $x \in (a, b)$, entonces F es diferenciable en x y $F^{'}(x) = f(x)$.
Ya que si f es continua en $x \in [a, b]$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $| y - x | < \delta$, entonces $| f(y) - f(x) | < \varepsilon$.
Considerando $0 < r < \delta$, tal que $x + r \in [a, b]$, tendríamos que
$$\left| \frac{F(x + r) - F(x)}{r} - f(x) \right| \leq \frac{1}{r} \int_x^{x+r} | f(t) - f(x) | \, dt < \varepsilon.$$
Así demostramos que F es diferenciable en x con $F^{'}(x) = f(x)$.
Pero el teorema no solo nos dice eso, menciona que no es necesario que f sea continua, siempre tendremos que $F^{'} = f$ en casi todo punto. Además, si F es absolutamente continua en $[a, b]$, entonces es de la forma
$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt,$$
donde f es lebesgue integrable y $f = F^{'}$ en casi todo punto.
Sin más, enunciamos el teorema.

Teorema 2.6.1 (Teorema Fundamental del Cálculo Integral de Lebesgue)**.** [3, Teorema 7.18] Sea la función $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si F es absolutamente continua, entonces es diferenciable en casi todo punto de $[a, b]$, $F^{'}$ es lebesgue integrable y
$$F(x) = F(a) + \int_a^x F^{'}(t)dt.$$
Recíprocamente, si $F(x) = F(a) + \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, donde f es lebesgue integrable, entonces F es absolutamente continua y $f = F^{'}$ en casi todo punto.

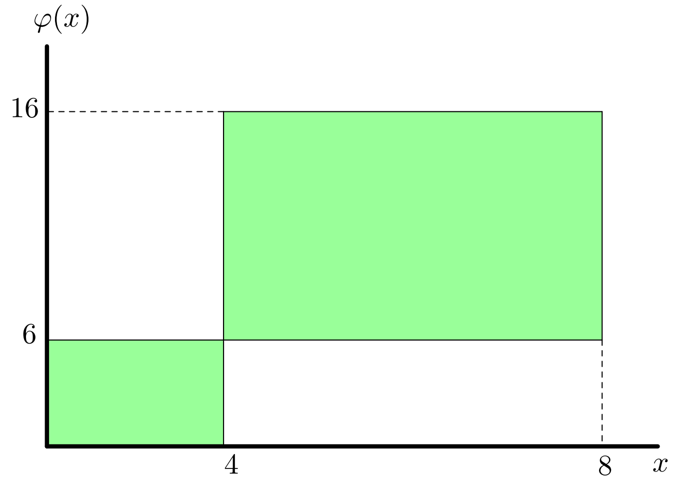
2.7. Correspondencias

Sean X, Y espacios métricos.

Definición 2.7.1. Una correspondenia $\varphi : X \rightrightarrows Y$ es una relación que asocia a cada punto $x \in X$ un conjunto $\varphi(x) \subset Y$.

Ejemplo 2.7.1. $\varphi : [0,8] \rightrightarrows [0,16]$, dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} [0,6], & x \in [0,4), \\ [0,16]\,, & x = 4, \\ [6,16]\,, & x \in (4,8]. \end{cases}$$



Gráfica 7.- Vista gráfica de la correspondencia del ejemplo 2.7.1.

Observemos que esta definición es más general que el de las funciones, ya que para las funciones se cumple que para cada $x \in X$ se asocia solo un $y \in Y$, dicho de otra manera, si $y = f(x)$ y $y^{'} = f(x)$, entonces $y = y^{'}$.

Definición 2.7.2. La correspondencia $\varphi : X \rightrightarrows Y$ es llamada:

1) **Valor-convexo**, si para todo $x \in X$, $\varphi(x)$ es convexo.

2) **Valor-cerrado**, si para todo $x \in X$, $\varphi(x)$ es cerrado.

3) **Valor-compacto**, si para todo $x \in X$, $\varphi(x)$ es compacto.

Definición 2.7.3. Dada la correspondencia $\varphi : X \rightrightarrows Y$, considerando $B \subset Y$, definamos: La **imagen inversa superior** de φ como

$$\varphi_{+}^{-}(B) = \{x \in X / \varphi(x) \subset B\}.$$

La **imagen inversa inferior** de φ como

$$\varphi^{-}_{-}(B) = \{x \in X / \varphi(x) \cap B \neq \varnothing\}.$$

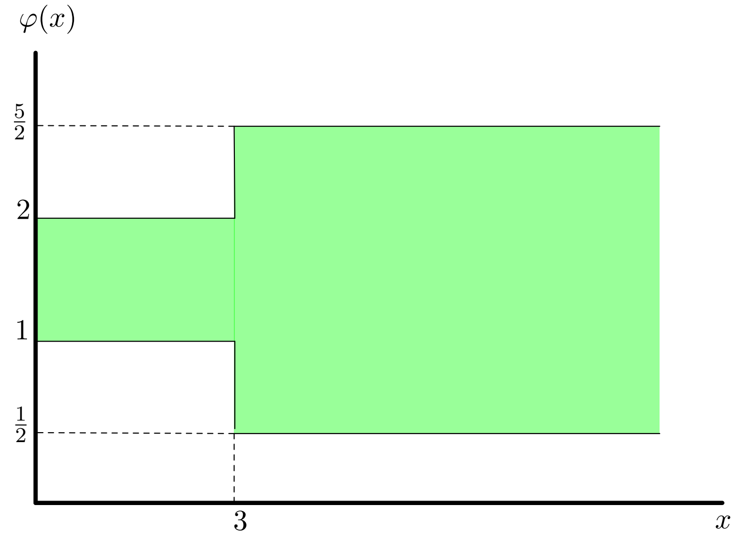
Definición 2.7.4 (**Hemicontinuidad superior (uhc)**). Dada la correspondencia $\varphi : X \rightrightarrows Y$, se dice que es hemicontinua superior en $x_0 \in X$ si para toda vecindad abierta $V \subset Y$ de $\varphi(x_0)$ existe una vecindad abierta $U \subset X$ de x_0 tal que si $x \in U$, entonces $\varphi(x) \subset V$, y decimos que es **hemicontinua superior** si es hemicontinua superior en cada punto de su dominio.

Es decir, las imágenes inversas superiores de las vecindades abiertas de $\varphi(x_0)$ son vecindades abiertas de x_0.

Ejemplo 2.7.2. La correspondencia $\varphi : [0, \infty) \rightrightarrows \mathbb{R}$, dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} [1,2], & x \in [0,3], \\ \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right], & x \geq 3, \end{cases}$$

es hemicontinua superior en 3, ya que dado cualquier vecindad V en $\varphi(3)$, es decir $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right] \subset V$, para cualquier $\varepsilon > 0$ menor que $\frac{1}{2}$, se cumple que si $y \in (3-\varepsilon, 3+\varepsilon)$ entonces $\varphi(y) \subset \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right] \subset V$, esto de la definición de correspondencias. Por lo tanto, φ es hemicontinua superior en 3. Más aún, se comprueba fácilmente que es hemicontinua superior en todo punto de su dominio. ■



Gráfica 8.-Vista gráfica de la correspondencia del ejemplo 2.7.2.

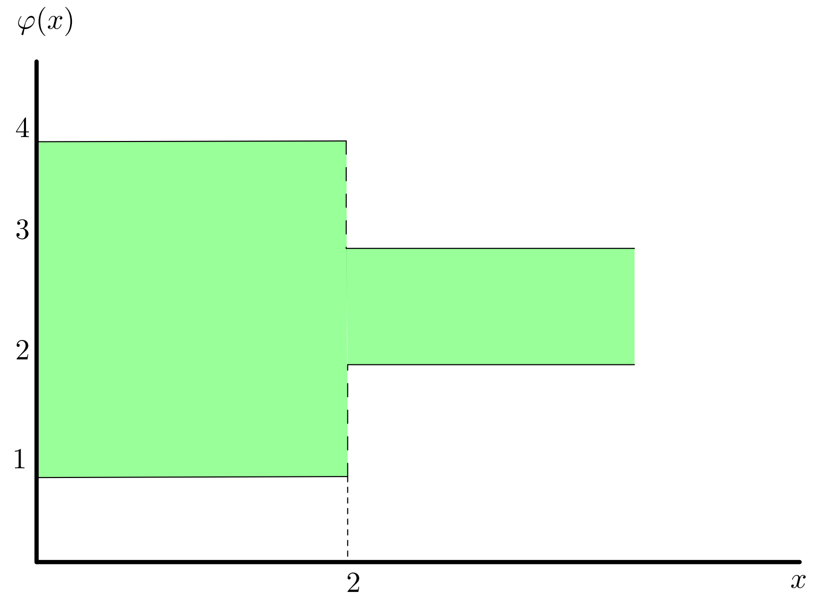
Definición 2.7.5. Hemicontinuidad inferior (lhc) Dada la correspondencia $\varphi : X \rightrightarrows Y$, se dice que es hemicontinua inferior en $x_0 \in X$ si para todo conjunto abierto $V \subset Y$, tal que $\varphi(x_0) \cap V \neq \varnothing$, existe una vecindad abierta $U \subset X$ de x_0 tal que si $x \in U$, entonces $\varphi(x) \cap V \neq \varnothing$, y decimos que es **hemicontinua inferior** si es hemicontinua inferior en cada punto de su dominio.

Es decir, las imágenes inversas inferiores de vecindades abiertas que se intercectan con $\varphi(x_0)$ son vecindades abiertas de x_0.

Ejemplo 2.7.3. La correspondencia $\varphi : [0, \infty) \rightrightarrows \mathbb{R}$, dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} [1,4], & x \in [0,2), \\ [2,3], & x \geq 2, \end{cases}$$

es hemicontinua inferior en 2, ya que para cualquier conjunto abierto V tal que $V \cap \varphi(2) \neq \emptyset$, es decir $V \cap [2,3] \neq \emptyset$, para cualquer $\varepsilon > 0$, menor que 1, y para todo $y \in (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$ se cumple que $[2,3] \subset \varphi(y)$, entonces $\varphi(y) \cap V \neq \emptyset$ (Ver gráfica 9). ■



Gráfica 9.-Vista gráfica de la correspondencia del ejemplo 2.7.3.

Se dice que φ es **hemicontinua(hc)**(o simplemente continua) en $x_0 \in X$, si es uhc y lhc en x_0.
Con todo esto, caracterizamos la **hemicontinuidad superior y la hemicontinuidad inferior** como[4]:
La correspondencia $\varphi : X \rightrightarrows Y$ es hemicontinuidad superior si la imagen inversa superior $\varphi_+^-(G)$ de todo abierto G de Y es abierto de X, y φ es hemicontinua inferior si la imagen inversa inferior $\varphi_-^-(G)$ de todo abierto G de Y es abierto de X.

Proposición 2.7.1. Caracterización secuencial de la hemicontinuidad superior
La correspondencia $\varphi : X \rightrightarrows Y$ es uhc en $x_0 \in X$ y $\varphi(x_0)$ es compacto, si y solo si para cada secuencia $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset X$, tal que converja a x_0, para toda secuencia $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset Y$, tal que $y_i \in \varphi(x_i), \forall i \in \mathbb{N}$, existe una subsecuencia $\{y_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ que converge a un elemento $y_0 \in \varphi(x_0)$.

Proposición 2.7.2. Caracterización secuencial de la hemicontinuidad inferior La correspondencia $\varphi : X \rightrightarrows Y$ es lhc en $x_0 \in X$ si y solo si para cada $y_0 \in \varphi(x_0)$ y para cada secuencia $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset X$, tal que converja a x_0, existe una secuencia $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset Y$, donde $y_i \in \varphi(x_i), \forall i \in \mathbb{N}$, que converge a y_0.

Definición 2.7.6. Para X, Y convexos, decimos que $\varphi : X \rightrightarrows Y$ es una correspondencia convexa si para todo $x_1, x_2 \in X$ y $\lambda \in [0, 1]$, tal que $y_1 \in \varphi(x_1)$ y $y_2 \in \varphi(x_2)$, implica que

$$\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in \varphi(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2).$$

Ahora estableceremos la concavidad de la función valor óptimo en un problema de maximización de una función objetivo cóncava sobre una correspondencia convexa.

Lema 2.7.1. *Para X, Y convexos, escribimos la función $V : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:*

$$V(x) = \max f(x, y)$$
$$s.a. \quad y \in \varphi(x).$$

Donde $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función cóncava y $\varphi : X \rightrightarrows Y$ es una correspondencia convexa.
Asumiendo que existe $y^*(x) \in \varphi(x)$ que soluciona el problema para cada $x \in X$, entonces podemos afirmar que V es una función cóncava.
Prueba*: Sean $x_1, x_2 \in X$ y $\lambda \in [0, 1]$, entonces*

$$V(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = f\left(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, y^*(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)\right).$$

Como φ es convexa, entonces se cumple que

$$\lambda y^*(x_1) + (1 - \lambda)y^*(x_2) \in \varphi(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2),$$

entonces por la definición de la función valor, se cumple que

$$V(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y^*(x_1) + (1 - \lambda)y^*(x_2))$$
$$= f(\lambda(x_1, y^*(x_1)) + (1 - \lambda)(x_2, y^*(x_2))),$$

luego por la concavidad de f, tenemos que

$$V(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1, y^*(x_1)) + (1 - \lambda)f(x_2, y^*(x_2)),$$

por lo tanto

$$V(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda V(x_1) + (1 - \lambda)V(x_2).$$

Así demostramos que V es cóncava. ■

Definición 2.7.7. Dada la correspondencia $\varphi : X \rightrightarrows Y$. La **gráfica** de la correspondencia se define como:

$$Gr_\varphi = \{(x, y)/x \in X \wedge y \in \varphi(x)\}.$$

Definición 2.7.8. Decimos que $\varphi : X \rightrightarrows Y$ es una correspondencia cerrada si Gr_φ es cerrada en $X \times Y$.
Esto es, φ una correspondencia cerrada si para toda sucesión $\{x_n\} \subset X$ tal que $x_n \longrightarrow x$ y toda sucesión $\{y_n\} \subset Y$ tal que $y_n \longrightarrow y$, con $(x_n, y_n) \in Gr_\varphi$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $(x, y) \in Gr_\varphi$.

Ejemplo. La correspondencia $\varphi : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$, dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0, \end{cases}$$

es cerrada ya que si $(x, y) \in \overline{Gr_\varphi} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, entonces existen $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ y $\{y_n\} \subset \varphi(\mathbb{R})$, con $(x_n, y_n) \in Gr_\varphi$ y $x_n \longrightarrow x$ y $y_n \longrightarrow y$. Entonces se cumple que $y_n \in \varphi(x_n)$, es decir, $y_n = \frac{1}{x_n}$ si $x_n \neq 0$ y $y_n = 0$ si $x_n = 0$.
Si $x \neq 0$, entonces existe una subsucesión $\{x_n^{'}\}$ de $\{x_n\}$ que converge a x tal que cada elemento es diferente de cero, tomando límite para cuando n va al infinito en $y_n^{'} = \frac{1}{x_n^{'}}$, obtenemos que $y = \frac{1}{x}$. Así, $y \in \varphi(x)$, y con esto, $(x, y) \in Gr_\varphi$.
Si $x = 0$, si suponemos que existe una subsucesión $\{x_n^{'}\}$ de $\{x_n\}$ que converge a 0 tal que cada elemento es diferente de cero, entonces de $y_n^{'} = \frac{1}{x_n^{'}}$, obtenemos que $y_n^{'} \longrightarrow \pm\infty$, entonces la subsucesión $\{x_n^{'}\}$ de $\{x_n\}$ que converge a 0 está dado por ceros, así $y_n^{'} = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $y = 0$, así $(x, y) = (0, 0) \in Gr_\varphi$.
Con todo esto demostramos que φ es una correspondencia cerrada.

Definición 2.7.9. Dado un conjunto de parámetros P, un conjunto X arbitrario, una correspondencia $\varphi : P \rightrightarrows X$ que restringe las posibles opciones a X y una función $f : X \times P \longrightarrow \mathbb{R}$.
El problema de optimización parametrizada (X, P, φ, f) consiste en encontrar para cada $p \in P$ un $x^* \in \varphi(p)$ tal que

$$f(x^*, p) \geq f(x, p), \forall x \in \varphi(p).$$

Teorema 2.7.1 (Teorema del máximo de Berge-1959)**.** [5, Teorema 1. Página 121]
Si (X, P, φ, f) es un problema de optimización parametrizada, donde P, X son espacios métricos, φ es una correspondencia valor-compacto y continua y f es una función continua, entonces

$$M(p) := \{x \in \varphi(p) / f(x, p) \geq f(y, p), \forall y \in \varphi(p)\}$$

define una correspondencia uhc valor-compacto y la función valor, definida por

$$V(p) := \max_{x \in \varphi(p)} f(x, p),$$

es continua.

Teorema 2.7.2 (Teorema de Kakutani)**.** [7, Corolario 15.3] Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ compacto, convexo y no vacío, y sea $\varphi : X \rightrightarrows X$ una correspondencia hemicontinua superior con imágenes convexas no vacías, entonces φ posee un punto fijo.

CAPÍTULO 3

UTILIDAD ESPERADA DE VON NEUMANN-MORGENSTERN

3.1. Introducción

El economista Adam Smith propuso el principio de interés propio como una guía de las acciones individuales. El matemático Antoine Augustin Cournot (1801-1877) presenta una formalización en el contexto de pagos monetarios. Con esto, la racionalidad de un individuo será planteada en términos de maximizar su utilidad.
Los fundamentos de la maximización de la utilidad bajo incertidumbre fue aportado por Von Neumann y Morgenstern, veamos que antecedentes ocurrieron en la historia.
El tema de la decisión bajo incertidumbre aparece por primera vez a inicios del siglo XVIII con la paradoja de San Petesburgo, propuesta por el matemático Nicolaus Bernoulli en el año 1713. Este problema consiste en un juego de apuestas con un valor esperado infinito, donde cada jugador paga una apuesta para participar en el juego. Luego, cada uno realiza lanzamientos sucesivos de una moneda hasta que salga sello por primera vez, ahi se detiene el juego. Se cuenta el número de lanzamientos que se han producido y el jugador obtiene de pago de 2^n monedas. La pregunta es, ¿cuanto dinero aportaría usted para que entre en el juego?.
Cada posible resultado tiene una probabilidad de que ocurra. Así, el jugador obtiene el pago de 2 monedas con una probabilidad de $\frac{1}{2}$, un pago de 2^2 monedas con una probabilidad de $\frac{1}{2^2}$, un pago de 2^3 monedas con una probabilidad de $\frac{1}{2^3}$, y así sucesivamente.
El valor esperado para n lanzamientos es n, y si el número de lanzamientos es infinito, entonces el valor esperado también sería infinito.
Ninguna persona pagaría más de lo que puede recibir, esto es, si $n = 5$ entonces su pago esperado es 5 monedas, por ende las personas solo pagarían 5 monedas o menos. Este problema fue resuelto por el matemático Daniel Bernoulli, primo de Nicolaus. Él propuso usar una función de utilidad, ya que considera que a los individuos no les interesa el premio final x, si no la utilidad del premio, esto será representado por $U(x)$.

Así, mientras el valor esperado está dado por $\sum p(x_i)x_i$, donde $p(x_i)$ es la probabilidad que salga el resultado x_i, la utilidad esperada está dada por $\sum p_i U(x_i)$, donde $p_i = p(x_i)$. Bernoulli propuso una función de utilidad de tipo logaritmo. Él demostró que el individuo no va a estar dispuesto a apostar mucho, aún si el premio mayor es infinitas monedas. Entonces el individuo dará una apuesta de un poco más de 2 monedas.
Sin embargo, con el tiempo se observó que las funciones de utilidad logarítmicas no eran tan consistentes.
John von Neumann (1903-1957) y Oskar Morgenstern (1902-1977) desarrollaron una teoría más amplia de la utilidad esperada. Mostraron que la utilidad esperada introducida por Daniel Bernoulli se podía derivar de una serie de acciones simples.
En este capítulo veremos los trabajos que desarrollaron von Neumann y Morgenstern en esta área, quienes aportaron mucho con su teoría de la utilidad esperada, el cual sirve para modelar las decisiones bajo incertidumbre. Uno de los alcances más importantes se dá en la teoría de juegos, en la cual, la teoría de la utilidad esperada es primordial. Esto porque en la teoría de juegos encontramos incertidumbre endógena, esto es, incertidumbre de los jugadores al no saber las acciones que van a realizar los demás jugadores, y encontramos incertidumbre exógena, esto proveniente de variables externas a los jugadores, por ejemplo el clima.

3.2. Preferencias

El conjunto de opciones que son elegibles para un agente recibe el nombre de **conjunto de elección**, el cual será representado por X.
Por ejemplo, X puede ser el conjunto de coches en una empresa automotriz dedicada al rubro de venta de vehículos.
Una preferencia $\succeq$ sobre un conjunto de elección X es una relación en X, es decir $\succeq \subset X \times X$.
Representaremos por $x \succeq y$ al elemento $(x, y) \in \succeq$ y lo leeremos como "x es preferente a y" o "x es por lo menos tan bueno como y".
En función de esto, definamos las relaciones $\succ$ y $\sim$ en X como:

$$\left.\begin{array}{l} (x,y) \in \succ \Longleftrightarrow (x \succeq y) \wedge \sim (y \succeq x) \\ (x,y) \in \sim \Longleftrightarrow (x \succeq y) \wedge (y \succeq x) \end{array}\right\} \ldots (*)$$

respectivamente.
Representaremos por $x \succ y$ al elemento $(x, y) \in \succ$ y lo leeremos como "x es preferido a y", y representaremos por $x \sim y$ al elemento $(x, y) \in \sim$ y lo leeremos como "x es indiferente a y".

Las preferencias ayudan a modelar y expresar las decisiones de los agentes cuando estamos en un problema de elección.
Hay situaciones en las cuales es difícil entender ciertas preferencias. Por ejemplo, una persona que recibe la noticia que puede tomar vacaciones en su trabajo, tiene tres opciones: Irse de viaje, quedarse en su casa o trabajar con su hermano en su bodega durante ese periodo. Entre ir de viaje y quedarse en su casa, él prefiere quedarse en su casa. Entre quedarse en su casa y trabajar con su hermano, prefiere trabajar con su hermano. Por último, entre trabajar con su hermano e ir de viaje, prefiere ir de viaje.
Para no encontrarnos con estos casos, necesitaremos que la preferencia sea **transitiva**, es decir, si $x \succeq y$ y $y \succeq z$, para todo $x, y, z \in X$, entonces debe cumplirse que $x \succeq z$.
También necesitamos que el agente sea capaz de decidir. Esto es, que pueda ser capaz de elegir entre dos elementos, siendo esta propiedad la completitud de la preferencia. Entonces diremos que $\succeq$ es **completa** si para todo $x, y \in X$, se cumple que $x \succeq y$ o $y \succeq x$.
Cuando $\succeq$ es transitiva y completa, decimos que es **racional**.

Proposición 3.2.1. Sea X un conjunto de elección y sea $\succeq$ una preferencia sobre X racional. Entonces para las relaciones $\succ$ y $\sim$, definidas en función de la preferencia $\succeq$ como en (*), se cumplen las siguientes propiedades.
Para todo $x, y, z, w \in X$:

1) Si $x \succ y$ e $y \succ z$, entonces $x \succ z$.

2) Si $x \sim y$ e $y \sim z$, entonces $x \sim z$.

3) Si $x \sim y, z \sim w$ e $y \succ z$, entonces $x \succ w$.

Prueba: Para $x, y, z, w \in X$ fijos y arbitrarios.

1) Si $x \succ y$, entonces se cumple que

$$(x \succeq y) \wedge \sim (y \succeq x), \tag{3.1}$$

además, si $y \succ z$, se cumple que

$$(y \succeq z) \wedge \sim (z \succeq y). \tag{3.2}$$

Por la transitividad de $\succeq$, de (3.1) y (3.2) se cumple que $x \succeq z$.
Supongamos que se cumple que $z \succeq x$, de (3.1) tenemos que $x \succeq y$, entonces nuevamente por la transitividad se cumple que $z \succeq y$, lo cual no puede ser, ya que de (3.2) tenemos que $\sim (z \succeq y)$. Entonces negando lo supuesto, se tiene que $\sim (z \succeq x)$.
Así tenemos que $(x \succeq z) \wedge \sim (z \succeq x)$. Por lo tanto, $x \succ z$.

2) Si $x \sim y$, entonces se cumple que

$$(x \succeq y) \wedge (y \succeq x), \tag{3.3}$$

además, si $y \sim z$, se cumple que

$$(y \succeq z) \wedge (z \succeq y). \tag{3.4}$$

Por la transitividad de $\succeq$, de (3.3) y (3.4) se cumple que $x \succeq z$ y $z \succeq x$, por lo tanto, $x \sim z$.

3) Si $x \sim y$ entonces se cumple que

$$(x \succeq y) \wedge (y \succeq x), \tag{3.5}$$

si $z \sim w$, se cumple que

$$(z \succeq w) \wedge (w \succeq z) \tag{3.6}$$

y si $y \succ z$, entonces

$$(y \succeq z) \wedge \sim (z \succeq y). \tag{3.7}$$

Por la transitividad de $\succeq$ y de (3.5), (3.6) y (3.7), tenemos que $x \succeq w$.
Supongamos ahora que $w \succeq x$, entonces como $z \succeq w$ (de (3.6)) y $x \succeq y$ (de (3.5)), nuevamente por la transitividad de la preferencia se tiene que $z \succeq y$, lo cual contradice a (3.7). Entonces negando lo supuesto, se cumple que $\sim (w \succeq x)$.
Así tenemos que $(x \succeq w) \wedge \sim (w \succeq x)$. Por lo tanto $x \succ w$. ∎

3.3. Función de utilidad

Dado un conjunto de elección X, se define el conjunto
$\mathbb{R}^X = \{u : X \longrightarrow \mathbb{R} / u$ es una función$\}$, donde cada elemento recibe el nombre de **función de utilidad**.
En economía, las funciones de utilidad son utilizadas para medir la **satisfacción** o **utilidad** que obtienen los consumidores de unos determinados bienes.

Definición 3.3.1. Una función de utilidad $u \in \mathbb{R}^X$ representa a una preferencia $\succeq \subset X \times X$ si se cumple que:

$$\forall x, y \in X, x \succeq y \Longleftrightarrow u(x) \geq u(y).$$

Teorema 3.3.1. Dada $u \in \mathbb{R}^X$, entonces la preferencia $\succeq$ en X dada por:

$$\forall x, y \in X, x \succeq y \Longleftrightarrow u(x) \geq u(y),$$

es racional y u es una función de utilidad para esta preferencia.

Prueba: Demostremos la racionalidad de la preferencia $\succeq$.
Veamos primero la completitud.

Dado $x, y \in X$, tenemos que $u(x), u(y) \in \mathbb{R}$, entonces $u(x) \geq u(y)$ o $u(y) \geq u(x)$.
En el primer caso, si $u(x) \geq u(y)$, entonces $x \succeq y$. En el segundo caso, si $u(y) \geq u(x)$, entonces $y \succeq x$. Por lo tanto, se tiene que para $x, y \in X, x \succeq y$ o $y \succeq x$.
Veamos ahora la transitividad.
Dado $x, y, z \in X$, si $x \succeq y$ e $y \succeq z$, entonces $u(x) \geq u(y)$ y $u(y) \geq u(z)$, con esto tenemos que $u(x) \geq u(z)$. Por lo tanto $x \succeq z$.
Por otro lado, por la misma construcción de la preferencia, es fácil ver que u representa a esta preferencia. ■

Con este teorema vemos que para una función de utilidad $u \in \mathbb{R}^X$, existe una preferencia racional en X. ¿Ocurrirá el caso contrario?, es decir, ¿para una preferencia en X, existirá una función de utilidad que lo represente?.
La respuesta es no, un ejemplo muy presentado en diferentes textos es dada por la preferencia lexicográfrica, para la cual se demuestra que no existe función de utilidad que la represente. El lector interesado puede consultar [8, Páginas 12,13.].
Un teorema muy importante dentro del campo de las preferencias y la teoría del consumidor fue propuesto por Gérard Debreu (1921-2004) en el año 1959, el cual permite asegurar que para las preferencias que cumplan con una cierta característica, existen funciones de utilidad que las representen.
Antes de enunciar el teorema, definamos la propiedad de continuidad de las preferencias.

Definición 3.3.2. Dado el conjunto de elección X, una preferencia $\succeq$ en X es continua si y solo si los conjuntos $\{y \in X / y \succeq x\}$ y $\{y \in X / x \succeq y\}$, para todo $x \in X$, son cerrados en X.

Teorema 3.3.2 (Teorema de Debreu)**.** Sea $\succeq$ una preferencia racional y continua sobre el conjunto de elección X, el cual es un espacio topológico con base segundo numerable[1], entonces existen funciones de utilidad $u \in \mathbb{R}^X$ continuas que representan a la preferencia.

[1] Recordemos que un espacio topológico se dice de base segundo numerable si su topología tiene una base numerable.

3.4. Loterías

Hasta ahora hemos considerado que al momento de la elección, la opción escogida por el agente, de nuestro conjunto de elección, es realizada con total seguridad. Es decir, el agente sabe con seguridad que opción está escogiendo, pero esto no siempre es así. Por ejemplo, al comprar un vehículo de segunda para taxi, tenemos las opciones de comprar o no comprar, pero no se sabe con seguridad si este va a generar ganancias o pérdidas. Por lo tanto, no hay seguridad en comprar o no comprar.
En economía se ven muchos temas donde hay incertidumbre, por ejemplo en la teoría de mercados incompletos, juegos con información incompleta, etc.
Ahora entraremos en el análisis de la teoría de la elección con incertidumbre, esto en base a la teoría de la utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern (1944), propuesta en la obra *Theory of Games and Economic Behavior.*
Consideraremos el conjunto Z como el conjunto de opciones para un determinado evento de elección (lo denominaremos como, "evento Z"). Considerando que el número de opciones es finito, lo escribiremos como $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$.
Dado el evento $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, definimos el conjunto X como el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre la variable aleatoria[2] Y en Z, esto es:

$$X = \left\{ x : Y(Z) \rightarrow \mathbb{R} / \sum_{i=1}^{n} x(Y(z_i)) = 1 \right\},$$

donde $x(Y(z_i))$ es la probabilidad que le da la distribución x al resultado $Y(z_i)$.

Como estamos considerando el conjunto de opciones Z finito, con n resultados. Entonces haremos la equivalencia que cada $x \in X$ puede verse como un vector en $\mathbb{R}^n$. Así X puede verse como un simplex n-dimensional, esto es, $X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ / \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$, donde $x_i = x(Y(z_i))$.
Cada $x \in X$ recibe el nombre de **lotería** para el evento Z, por eso llamaremos a X el conjunto de loterías.

[2] Una variable aleatoria es una función que asigna un valor numérico a cada resultado de un experimento aleatorio.

Denotaremos por $\delta_{\{z\}} \in X$ a la lotería que da probabilidad 1 a la opción z.
Considerando el simplex n-dimensional

$$\triangle^{n-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ / \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\},$$

damos la siguiente definición.

Definición 3.4.1. Sean $\{x^i\}_{i=1}^m \subset X$ una colección de elementos del conjunto de loterías X sobre el evento $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, y sea $\alpha \in \triangle^{m-1}$. Se define la combinación lineal de las loterías $\{x_i\}_{i=1}^m$ respecto de α como la lotería $x^{'} \in X$ dada por[3]

$$x_i^{'} = x^{'}(Y(z_i)) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_i^j, \forall i = 1, 2, \ldots, n,$$

donde $x_i^j = x^j(Y(z_i))$.

Ejemplo. Dado $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$, sean las loterías $x^1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), x^2 = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ y $x^3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ y sea $\alpha = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) \in \triangle^2$.
Entonces la combinación lineal de las tres loterías respecto de α está dada por:

$$x^{'} = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5}\left(0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{17}{60}, \frac{23}{60}\right).$$

Donde $x_1^{'} = \frac{1}{3}$ es la probabilidad que le da la lotería $x^{'}$ al resultado $Y(z_1)$ y así sucesivamente.

3.5. Preferencias sobre loterías y la utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern

En esta sección tomaremos nuestras decisiones sobre el conjunto de loterías X, esto para el evento Z, modelándolo mediante una preferencia sobre X. Si pudieramos representarlo mediante una función de utilidad, entonces esto nos permitiría encontrar una relación matemática en las decisiones.
Por el teorema 3.3.2 tenemos que si la preferencia es continua y racional, y estamos en un espacio topológico de base segundo numerable, obtenemos funciones de utilidad que representen a nuestra preferencia.

[3]Recordar que $x^{'}$ es una distribución de probabilidad.

La teoría de la utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern muestra una forma particular de hallar la función de utilidad que represente a una preferencia en X. Esta función de utilidad calcula el valor esperado de las utilidades de las opciones de Z.
Dada una preferencia $\succeq$ sobre X, veamos que condiciones debe cumplir para asegurar que existe una función de utilidad de Von Neumann-Morgenstern que la represente.

C1) $\succeq$ es completa y transitiva (Racional).

C2) $\succeq$ satisface la siguiente condición de continuidad.
Para todo $x, y, z \in X$, los conjuntos

$$\{\alpha \in [0,1]/\alpha x + (1-\alpha)y \succeq z\}$$

y

$$\{\alpha \in [0,1]/z \succeq \alpha x + (1-\alpha)y\}$$

son subconjuntos cerrados de $[0,1]$.

C3) $\succeq$ satisface la siguiente condición de independencia.
Para todo $x, y, z \in X$ y para cualquier $\alpha \in (0,1)$, se cumple que

$$x \succeq y \Longleftrightarrow \alpha x + (1-\alpha)z \succeq \alpha y + (1-\alpha)z.$$

La condición 1 se refiere a la racionalidad de las decisiones, la condición 2 nos menciona que a pequeños cambios en las probabilidades de dos loterías, no se altera el orden de la preferencia sobre una tercera lotería, y la condición 3 nos dice que si tenemos dos loterías y la combinamos con otra lotería arbitraria cada una, mediante un valor $\alpha \in (0,1)$, entonces la preferencia de estas dos combinaciones está dada por la preferencia de las dos loterías iniciales.

Teorema 3.5.1. Dado el evento Z y el conjunto de loterías respectivo X. Si la preferencia $\succeq$ en X satisface la condición $C3$, entonces para todo $x, y \in X$ y para todo $\alpha \in (0,1)$ se cumple que:

1) $x \succeq y \Longleftrightarrow x \succeq \alpha x + (1-\alpha)y$,

2) $x \succeq y \Longleftrightarrow \alpha x + (1-\alpha)y \succeq y$.

Prueba: Por la condición $C3$ se tiene que

$$\forall x, y, z \in X \wedge \forall \alpha_1 \in (0,1), x \succeq y \Longleftrightarrow \alpha_1 x + (1-\alpha_1)z \succeq \alpha_1 y + (1-\alpha_1)z. \tag{3.8}$$

1) Para todo $x, y \in X$ y para todo $\alpha \in (0,1)$, considerando en (3.8), $z = x$ y $\alpha_1 = 1-\alpha$, tenemos que:

$$x \succeq y \Longleftrightarrow (1-\alpha)x + \alpha x \succeq (1-\alpha)y + \alpha x \equiv x \succeq \alpha x + (1-\alpha)y.$$

2) Para todo $x, y \in X$ y para todo $\alpha \in (0,1)$, considerando en (3.8), $z = y$ y $\alpha_1 = \alpha$, tenemos que:

$$x \succeq y \Longleftrightarrow \alpha x + (1-\alpha)y \succeq \alpha y + (1-\alpha)y \equiv \alpha x + (1-\alpha)y \succeq y. \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.5.2. Dado el evento Z y el conjunto de loterías respectivo X. Si la preferencia $\succeq$ en X cumple la condición $C3$, entonces para todo $x, y, z, w \in X$ y para todo $\alpha \in (0,1)$ se cumple que:

1) $x \succ y \Longleftrightarrow \alpha x + (1-\alpha)z \succ \alpha y + (1-\alpha)z$.

2) Si $x \sim y$ y $z \sim w$, entonces $\alpha x + (1-\alpha)z \sim \alpha y + (1-\alpha)w$.

Prueba:

1) Por la condición $C3$ se tiene que:

$$\forall x, y, z \in X \wedge \forall \alpha \in (0,1), x \succeq y \Longleftrightarrow \alpha x + (1-\alpha)z \succeq \alpha y + (1-\alpha)z. \tag{3.9}$$

Para todo $x, y, z \in X$ y para todo $\alpha \in (0,1)$,

$$x \succ y \Longleftrightarrow (x \succeq y) \wedge \sim (y \succeq x). \tag{3.10}$$

Luego, de (3.9) tenemos que:

$$x \succeq y \Longleftrightarrow \alpha x + (1-\alpha)z \succeq \alpha y + (1-\alpha)z,$$

e igualmente, intercambiando x con y en (3.9), tenemos que:

$$y \succeq x \Longleftrightarrow \alpha y + (1-\alpha)z \succeq \alpha x + (1-\alpha)z.$$

Por lo tanto en (3.10), llegamos a que:

$$x \succ y \Longleftrightarrow (\alpha x + (1-\alpha)z \succeq \alpha y + (1-\alpha)z) \wedge \sim (\alpha y + (1-\alpha)z \succeq \alpha x + (1-\alpha)z)$$
$$\Longleftrightarrow \alpha x + (1-\alpha)z \succ \alpha y + (1-\alpha)z.$$

2) Como $x \sim y \Longleftrightarrow (x \succeq y) \wedge (y \succeq x)$, entonces por la condición $C3$, para todo $\alpha \in (0,1)$ se cumple que:

$$(\alpha x + (1-\alpha)z \succeq \alpha y + (1-\alpha)z) \wedge (\alpha y + (1-\alpha)z \succeq \alpha x + (1-\alpha)z). \tag{3.11}$$

Como $z \sim w \Longleftrightarrow (z \succeq w) \wedge (w \succeq z)$, entonces por la condición $C3$, para $1-\alpha$ se cumple que:

$$((1-\alpha)z + \alpha y \succeq (1-\alpha)w + \alpha y) \wedge ((1-\alpha)w + \alpha y \succeq (1-\alpha)z + \alpha y). \tag{3.12}$$

De (3.11) y (3.12) se deduce que:

$$(\alpha x + (1-\alpha)z \succeq \alpha y + (1-\alpha)w) \wedge (\alpha y + (1-\alpha)w \succeq \alpha x + (1-\alpha)z),$$

por lo tanto $\alpha x + (1-\alpha)z \sim \alpha y + (1-\alpha)w$. $\blacksquare$

Definición 3.5.1. Dado el evento $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ y el espacio de loterías respectivo X. Diremos que una función de utilidad $U : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern** si existe una función de utilidad sobre el conjunto de opciones Z, dada por $u : Z \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que para toda lotería $x \in X$ se tiene que:

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} u(z_i) x_i.$$

Observemos que si hay seguridad sobre la elección de la opción $z \in Z$, entonces su única lotería está dada por δ_z. Por lo tanto,

$$U(\delta_z) = u(z).$$

Esto quiere decir que U es una extensión de u.

Proposición 3.5.1. Considerando el evento $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ y el espacio de loterías respectivo X. Si una función de utilidad $U : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern, entonces esta función es lineal en las loterías, es decir, dado $\{x^i\}_{i=1}^{m} \subset X$ y $\alpha \in \triangle^{m-1}$, se tiene que:

$$U\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i U(x^i).$$

Prueba: Si $U : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern, entonces existe una función de utilidad $u : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in X$ se tiene que:

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} u(z_i) x_i.$$

Para toda familia $\{x^j\}_{j=1}^{m} \subset X$ y todo $\alpha \in \triangle^{m-1}$, se cumple que

$$\begin{aligned} U\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x^j\right) &= \sum_{i=1}^{n} u(z_i) \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x^j\right)_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} u(z_i) \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_i^j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{n} u(z_i) x_i^j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j U(x^j). \end{aligned}$$

Con esto demostramos la linealidad en las loterías de U. ■

Ahora mostremos el teorema más importante de la teoría de la utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern, el cual muestra bajo que requisitos en la preferencia podemos asegurar que existe una utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern que la represente.

Primero veamos los siguientes lemas.

Lema 3.5.1. Dado el evento Z, el espacio de loterías respectivo X y la preferencia $\succeq$ en X que cumple la condición $C3$, entonces para todo $x, y \in X$ y para todo $\alpha \in (0,1)$ se cumple que:

1) $x \succ y \Longleftrightarrow x \succ \alpha x + (1-\alpha)y$,

2) $x \succ y \Longleftrightarrow \alpha x + (1-\alpha)y \succ y$.

Prueba: Por el teorema (3.5.2) se tiene que:

$$\forall x, y, z \in X \wedge \forall \alpha_1 \in (0,1), x \succ y \Longleftrightarrow \alpha_1 x + (1-\alpha_1)z \succ \alpha_1 y + (1-\alpha_1)z. \tag{3.13}$$

1) Para todo $x, y \in X$ y para todo $\alpha \in (0,1)$, considerando en (3.13), $z = x$ y $\alpha_1 = 1-\alpha$, tenemos que:

$$x \succ y \Longleftrightarrow (1-\alpha)x + \alpha x \succ (1-\alpha)y + \alpha x \equiv x \succ \alpha x + (1-\alpha)y.$$

2) Para todo $x, y \in X$ y para todo $\alpha \in (0,1)$, considerando en (3.13), $z = y$ y $\alpha_1 = \alpha$, tenemos que:

$$x \succ y \Longleftrightarrow \alpha x + (1-\alpha)y \succ \alpha y + (1-\alpha)y \equiv \alpha x + (1-\alpha)y \succ y. \qquad \blacksquare$$

Lema 3.5.2. Dado el evento Z, el espacio de loterías respectivo X y la preferencia $\succeq$ en X que cumple la condición $C3$, entonces para todo $x, y \in X$ y todo $\lambda, \mu \in [0,1]$ se cumple que:
si $x \succ y$,

$$1 \geq \lambda > \mu \geq 0 \Longleftrightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \succ \mu x + (1-\mu)y.$$

Prueba: Considerando que $x \succ y$.
Veamos primero la condición necesaria.
Para todo $x, y \in X$ y para todo $\lambda, \mu \in [0,1]$.

- Si $\mu = 0$, veamos los casos para λ.

  - Si $\lambda < 1$, entonces como $x \succ y$, por el lema 3.5.1 se tiene que $\lambda x + (1-\lambda)y \succ y = 0x + (1-0)y$.
  - Si $\lambda = 1$, entonces se tiene el dato inicial $x \succ y \equiv x + (1-1)y \succ 0x + (1-0)y$.

- Si $\mu > 0$.

  - Si $\lambda < 1$, entonces como $x \succ y$, por el lema 3.5.1, $\lambda x + (1-\lambda)y \succ y$.
    Como $0 < \frac{\mu}{\lambda} < 1$, entonces nuevamente por el lema 3.5.1, se tiene que $\lambda x + (1-\lambda)y \succ \frac{\mu}{\lambda}(\lambda x + (1-\lambda)y) + (1-\frac{\mu}{\lambda})y = \mu x + (1-\mu)y$.

- Si $\lambda = 1$, entonces como $x \succ y$, por el lema 3.5.1, $x \succ \mu x + (1-\mu)y$
  $\equiv x + (1-1)y \succ \mu x + (1-\mu)y$.

Ahora veamos la suficiencia.
De dato tenemos que para $\lambda, \mu \in [0,1]$ se cumple que

$$\lambda x + (1-\lambda)y \succ \mu x + (1-\mu)y. \tag{3.14}$$

Supongamos que $\lambda \leq \mu$.
Si $\lambda < \mu$, de manera similiar a lo hecho en la condición necesaria, llegamos a que $\mu x + (1-\mu)y \succ \lambda x + (1-\lambda)y$, lo cual contradice lo expuesto en (3.14).
Si $\lambda = \mu$, entonces $\lambda x + (1-\lambda)y \sim \mu x + (1-\mu)y$, lo cual también contradice lo expuesto en (3.14).
Por lo tanto, negando lo supuesto, tenemos que $1 \geq \lambda > \mu \geq 0$. ■

Teorema 3.5.3. *(Teorema de la utilidad esperada de Von Neumann - Morgenstern)* Considerando el evento $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, el espacio de loterías respectivo X y una preferencia $\succeq$ en X, son equivalentes las siguientes proposiciones:

1) La preferencia $\succeq$ satisface las condiciones $C1, C2$ y $C3$.

2) La preferencia $\succeq$ es representada por una utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern.

Prueba: Veamos primero la suficiencia.
Si la preferencia $\succeq$ es representada por una utilidad de Von Neumann-Morgenstern $U : X \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces existe una función de utilidad en Z, dada por $u : Z \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que se cumple que:

$$\forall x, y \in X, x \succeq y \Longleftrightarrow U(x) = \sum_{i=1}^{n} u(z_i)x_i \geq \sum_{i=1}^{n} u(z_i)y_i = U(y).$$

Por el teorema 3.3.1 tenemos que $\succeq$ es racional, entonces se cumple la condición $C1$.
Veamos ahora la condición $C2$.
Dados $x, y, z \in X$ fijos y arbitrarios. Sea $\alpha_0 \in \overline{\{\alpha \in [0,1]/\alpha x + (1-\alpha)y \succeq z\}}$, por definición de clausura existe $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{\alpha \in [0,1]/\alpha x + (1-\alpha)y \succeq z\}$ tal que $\alpha_n \longrightarrow \alpha_0$.
Con esto se cumple que $\alpha_n x + (1-\alpha_n)y \succeq z, \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $U(\alpha_n x + (1-\alpha_n)y) \geq U(z), \forall n \in \mathbb{N}$.
Luego por la linealidad de la utilidad esperada[4] se tiene que $\alpha_n U(x) + (1-\alpha_n)U(y) \geq U(z), \forall n \in \mathbb{N}$.
Tomando límite cuando n va al infinito, se tiene que $\alpha_0 U(x) + (1-\alpha_0)U(y) \geq U(z)$. Nuevamente por la linealidad de U se tiene que $U(\alpha_0 x + (1-\alpha_0)y) \geq U(z)$. Por lo tanto, $\alpha_0 x + (1-\alpha_0)y \succeq z$ y así $\alpha_0 \in \{\alpha \in [0,1]/\alpha x + (1-\alpha)y \succeq z\}$, y con esto demostramos que el conjunto $\{\alpha \in [0,1]/\alpha x + (1-\alpha)y \succeq z\}$ es cerrado.

[4] Ver la proposición 3.5.1.

Análogamente se prueba que el conjunto $\{\alpha \in [0,1]/z \succeq \alpha x + (1-\alpha)y\}$ es cerrado.
Así se demuestra la condición $C2$.
Ahora demostremos la condición $C3$.
Para todo $x, y, z \in X$ y para todo $\alpha \in (0,1)$ se cumple que

$$x \succeq y \Longleftrightarrow U(x) \geq U(y)$$

$$\Longleftrightarrow \alpha U(x) + (1-\alpha)U(z) \geq \alpha U(y) + (1-\alpha)U(z)$$

$$\Longleftrightarrow U(\alpha x + (1-\alpha)z) \geq U(\alpha y + (1-\alpha)y)$$

$$\Longleftrightarrow \alpha x + (1-\alpha)z \succeq \alpha yx + (1-\alpha)z.$$

Por lo tanto se cumple la condición $C3$.
Ahora veamos la condición necesaria.
Partimos del dato que la preferencia $\succeq$ cumple las condiciones $C1, C2$ y $C3$.
Considerando las loterías $x^1 = (1,0,\ldots,0), x^2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, x^n = (0,\ldots,0,1)$[5]. Ya que son finitas y dado que la preferencia es racional, entonces podemos ordenar estas loterías de mayor a menor preferencia. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x^1 \succeq x^2 \succeq \ldots \succeq x^n$.
Para todo $x \in X$, se tiene que $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ con $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, entonces $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i$.
Veamos los diferentes casos que puede tomar la lotería x.

- Si $x = x^i, \forall i = \{1,2,\ldots,n\}$, entonces $x^1 \succeq x$.
  Ahora analicemos el valor de α_1.

- Si $\alpha_1 = 0$, pasamos a analizar el valor de α_2.

- Si $\alpha_1 \in (0,1)$, entonces por el teorema (3.5.1), parte (a), se cumple que:

$$x^1 \succeq \alpha_1 x^1 + (1-\alpha_1)(0, \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}, \ldots, \frac{\alpha_n}{1-\alpha_1}) = x$$

$$\Longleftrightarrow x^1 \succeq (0, \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}, \ldots, \frac{\alpha_n}{1-\alpha_1})^6. \tag{3.15}$$

[5] Observemos que para cada $i, x^i = \delta_{\{z_i\}}$.

[6] Observemos que $(0, \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}, \ldots, \frac{\alpha_n}{1-\alpha_1}) \in X$, ya que $\sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_1} = 1$.

Analicemos el valor de α_2.

- Si $\alpha_2 = 0$, entonces pasamos a analizar el valor de α_3.

- Si $\alpha_2 \in (0,1)$, por el teorema 3.5.1, parte (a), se tiene que

$$x^2 \succeq \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}x^2+(1-\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1})(0,0,\frac{\alpha_3}{1-\alpha_1-\alpha_2},\ldots,\frac{\alpha_n}{1-\alpha_1-\alpha_2}) = (0,\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1},\ldots,\frac{\alpha_n}{1-\alpha_1})$$

$$\Longleftrightarrow x^2 \succeq (0,0,\frac{\alpha_3}{1-\alpha_1-\alpha_2},\ldots,\frac{\alpha_n}{1-\alpha_1-\alpha_2})^7. \tag{3.16}$$

Analicemos el valor de α_3.

- Si $\alpha_3 = 0$, entonces pasamos a analizar el valor de α_4.

- Si $\alpha_3 \in (0,1)$, por el teorema 3.5.1, parte (a), se tiene que

$$x^3 \succeq \frac{\alpha_3}{1-\alpha_1-\alpha_2}x^3+(1-\frac{\alpha_3}{1-\alpha_1-\alpha_2})(0,0,0,\frac{\alpha_4}{1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},\ldots,\frac{\alpha_n}{1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3})$$

$$= (0,0,\frac{\alpha_3}{1-\alpha_1-\alpha_2},\ldots,\frac{\alpha_n}{1-\alpha_1-\alpha_2})$$

$$\Longleftrightarrow x^3 \succeq (0,0,0,\frac{\alpha_4}{1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},\ldots,\frac{\alpha_n}{1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3})^8. \tag{3.17}$$

Siguiendo la misma analogía para los valores de $\alpha_4, \alpha_5, \ldots, \alpha_{n-2}$.
Analicemos el valor de α_{n-1}.

- Si $\alpha_{n-1} = 0$, entonces pasamos a analizar el valor de α_n

- Si $\alpha_{n-1} \in (0,1)$, por el teorema 3.5.1, parte (a), se tiene que

$$x^{n-1} \succeq \frac{\alpha_{n-1}}{1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{n-2}}x^{n-1}+(1-\frac{\alpha_{n-1}}{1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{n-2}})(0,\ldots,0,\frac{\alpha_n}{1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{n-1}})$$

$$= (0,\ldots,0,\frac{\alpha_{n-1}}{1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{n-2}},\frac{\alpha_n}{1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{n-2}})^9$$

$$\Longleftrightarrow x^{n-1} \succeq (0,\ldots,0,\frac{\alpha_n}{1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{n-1}}) = x_n. \tag{3.18}$$

- Si $\alpha_n = 0$, entonces debe existir un $j \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ tal que $\alpha_j \neq 0$, cuyo caso ya fue analizado en los casos anteriores.

- Si $\alpha_n \in (0,1)$, entonces se cumple que $x^{n-1} \succeq x^n$, por lo supuesto inicialmente.

[7] Observemos que $(0,0,\frac{\alpha_3}{1-\alpha_1-\alpha_2},\ldots,\frac{\alpha_n}{1-\alpha_1-\alpha_2}) \in X$, ya que $\displaystyle\sum_{i=3}^{n}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_1-\alpha_2} = 1$.

[8] Observemos que $(0,0,0,\frac{\alpha_4}{1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},\ldots,\frac{\alpha_n}{1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}) \in X$, ya que $\displaystyle\sum_{i=4}^{n}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} = 1$.

[9] Donde $(0,\ldots,0,\frac{\alpha_{n-1}}{1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{n-2}},\frac{\alpha_n}{1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{n-2}}) \in X$, ya que $\displaystyle\sum_{i=n-1}^{n}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{n-2}} = 1$.

Con todo esto, si vemos las ecuaciones (3.15), (3.16), (3.17) y (3.18) de atrás hacia adelante, y tenemos presente el supuesto inicial que $x^1 \succeq x^2 \succeq \ldots \succeq x^n$, se concluye que $x^1 \succeq x$.
Por lo tanto, podemos asegurar que existe $\overline{x} \in X$, con $\overline{x} = x^j$ para algún $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tal que $\overline{x} \succeq x, \forall x \in X$.
Haciendo un análisis similar, pero ahora usando la parte (b) del teorema 3.5.1, podemos asegurar que existe $\underline{x} \in X$, con $\underline{x} = x^j$ para algún $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tal que $x \succeq \underline{x}, \forall x \in X$.
Sea $x \in X$ fijo y arbitrario, definamos los sigientes conjuntos:

$$A = \{\alpha \in [0, 1] / \alpha\overline{x} + (1 - \alpha)\underline{x} \succeq x\}$$

y

$$B = \{\alpha \in [0, 1] / x \succeq \alpha\overline{x} + (1 - \alpha)\underline{x}\}.$$

Por la condición $C2$ tenemos que A y B son cerrados, con $1 \in A$ y $0 \in B$.
Como $A \cup B = [0, 1]$, y $[0, 1]$ es conexo, entonces $A \cap B \neq \varnothing$, así $\exists \alpha^* \in [0, 1]$ tal que $(\alpha^*\overline{x} + (1 - \alpha^*)\underline{x} \succeq x) \wedge (x \succeq \alpha^*\overline{x} + (1 - \alpha^*)\underline{x})$, dicho de otra manera, $x \sim \alpha^*\overline{x} + (1 - \alpha^*)\underline{x}$.
Si tenemos $\alpha^*, \alpha_* \in A \cap B$, entonces $x \sim \alpha^*\overline{x} + (1 - \alpha^*)\underline{x}$ y $x \sim \alpha_*\overline{x} + (1 - \alpha_*)\underline{x}$, supongamos que $\alpha^* < \alpha_*$, entonces por el lema 3.5.2 se cumple que $\alpha_*\overline{x} + (1 - \alpha_*)\underline{x} \succ \alpha^*\overline{x} + (1 - \alpha^*)\underline{x}$.
Con esto llegamos a tener que:

$$x \sim \alpha_*\overline{x} + (1 - \alpha_*)\underline{x} \succ \alpha^*\overline{x} + (1 - \alpha^*)\underline{x} \sim x.$$

Por lo tanto, por la proposición 3.2.1, $x \succ x$, lo cual es una contradicción.
De la misma manera llegamos a una contradicción si suponemos que $\alpha^* > \alpha_*$.
Por lo tanto, $\alpha^* = \alpha_*$, así demostramos que $A \cap B$ tiene un solo elemento.
Con esto podemos decir que para cada $x \in X$, existe un único $\alpha_x \in [0, 1]$ tal que $x \sim \alpha_x\overline{x} + (1 - \alpha_x)\underline{x}$.
Definamos ahora la función $U : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:
$\forall x \in X$,

$$U(x) = \alpha_x.$$

Veamos si esta función es una utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern.
Para todo x, y y para todo $\lambda \in [0, 1]$, existen $\alpha_x, \alpha_y \in [0, 1]$ tal que:

$$x \sim \alpha_x\overline{x} + (1 - \alpha_x)\underline{x}$$

y

$$y \sim \alpha_y\overline{x} + (1 - \alpha_y)\underline{x}.$$

Si $\lambda \in (0, 1)$, por el teorema 3.5.2, se cumple que:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \sim \lambda(\alpha_x\overline{x} + (1 - \alpha_x)\underline{x}) + (1 - \lambda)(\alpha_y\overline{x} + (1 - \alpha_y)\underline{x})$$

$$= (\lambda\alpha_x + (1 - \lambda)\alpha_y)\overline{x} + (1 - (\lambda\alpha_x + (1 - \lambda)\alpha_y))\underline{x}.$$

Si $\lambda = 1$, entonces,
$x = 1x + (1-1)y \sim 1(\alpha_x \overline{x} + (1-\alpha_x)\underline{x}) + (1-1)(\alpha_y \overline{x} + (1-\alpha_y)\underline{x}) = \alpha_x \overline{x} + (1-\alpha_x)\underline{x}$.
Si $\lambda = 0$, entonces,
$y = 0x + (1-0)y \sim 0(\alpha_x \overline{x} + (1-\alpha_x)\underline{x}) + (1-0)(\alpha_y \overline{x} + (1-\alpha_y)\underline{x}) = \alpha_y \overline{x} + (1-\alpha_y)\underline{x}$.
Por lo tanto, para todo $\lambda \in [0,1]$, se cumple que $\alpha_{\lambda x+(1-\lambda)y} = \lambda\alpha_x + (1-\lambda)\alpha_y$.
Así se tiene que $U(\lambda x + (1-\lambda)y) = \alpha_{\lambda x+(1-\lambda)y} = \lambda\alpha_x + (1-\lambda)\alpha_y = \lambda U(x) + (1-\lambda)U(y)$.
De manera inductiva se demuestra que para toda familia finita $\{x^i\}_{i=1}^m \subset X$ y todo $\lambda \in \triangle^{m-1}$ se cumple que:

$$U(\sum_{i=1}^m \lambda_i x^i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i U(x^i).$$

Con esto tenemos que U es lineal en las loterías.
Para todo $x \in X$, este puede escribirse como $x = \sum_{i=1}^n x_i \delta_{\{z_i\}}$.
Luego,
$U(x) = U(\sum_{i=1}^n x_i \delta_{z_i}) = \sum_{i=1}^n x_i U(\delta_{\{z_i\}}) = \sum_{i=1}^n U(\delta_{\{z_i\}}) x_i$.
Definiendo la función de utilidad $u : Z \longrightarrow \mathbb{R}$, como $u(z) = \alpha_{\delta_{\{z\}}}$[10], entonces:

$$U(x) = \sum_{i=1}^n u(z_i) x_i.$$

Así se demuestra que U es una utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern.
Ahora veamos que U representa a la preferencia $\succeq$.
Para todo $x, y \in X$.
Si $x \succeq y$, sabemos que $x \sim \alpha_x \overline{x} + (1-\alpha_x)\underline{x}$ y $y \sim \alpha_y \overline{x} + (1-\alpha_y)\underline{x}$.
Supongamos que $\alpha_y > \alpha_x$, entonces por el lema 3.5.2 se cumple que
$\alpha_y \overline{x} + (1-\alpha_y)\underline{x} \succ \alpha_x \overline{x} + (1-\alpha_x)\underline{x}$, por lo que llegamos a tener que
$y \sim \alpha_y \overline{x} + (1-\alpha_y)\underline{x} \succ \alpha_x \overline{x} + (1-\alpha_x)\underline{x} \sim x$, y por la proposición 3.2.1, se cumple que $y \succ x$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\alpha_x \geq \alpha_y$, así tenemos que $U(x) \geq U(y)$.
Ahora, partiendo del dato que $U(x) \geq U(y)$, entonces $\alpha_x \geq \alpha_y$.
Si $\alpha_x > \alpha_y$, entonces por el lema 3.5.2 se tiene que $\alpha_x \overline{x} + (1-\alpha_x)\underline{x} \succ \alpha_y \overline{x} + (1-\alpha_y)\underline{x}$, y como $x \sim \alpha_x \overline{x} + (1-\alpha_x)\underline{x}$ y $y \sim \alpha_y \overline{x} + (1-\alpha_y)\underline{x}$, entonces por la proposición 3.2.1, $x \succ y$, entonces $(x \succeq y) \wedge \sim (y \succeq x)$.
Si $\alpha_x = \alpha_y$, entonces $x \sim \alpha_x \overline{x} + (1-\alpha_x)\underline{x} = \alpha_y \overline{x} + (1-\alpha_y)\underline{x} \sim y$, y por la transitividad de $\sim$ (ver proposición 3.2.1) se tiene que $x \sim y$. Por lo tanto, $(x \succeq y) \wedge (y \succeq x)$.
En cualquiera de los dos casos se llega a que $x \succeq y$.
Así demostramos que U representa a la preferencia $\succeq$. ■

[10] El cual está bien definido, esto por la unicidad de $\alpha_{\delta_{\{z_i\}}}$.

CAPÍTULO 4

TEORÍA DE JUEGOS

4.1. Introducción

Todas las personas diariamente interactuamos en diferentes ámbitos. Por ejemplo, cuando vamos al mercado, cuando subimos a un bus, etc.
Estas interacciones, muchas veces pueden considerarse **juegos**. Por ejemplo, cuando tomamos un taxi e interactuamos con el conductor por el pago, o cuando tenemos una reunión de trabajo y cerramos un negocio.
Además hay juegos en los cuales solo hay un jugador. Por ejemplo, los juegos de máquinas en los casinos.
Entonces ante la pregunta ¿qué es un juego?, muchos autores mencionan que un juego puede considerarse como la interacción de un grupo de personas o la interacción de una persona con su medio, los cuales buscan un objetivo individual o común.
La teoría de juegos es el área de la matemática aplicada que estudia los tipos de juegos que se pueden dar en un grupo de personas o entes, con el objetivo de comprender las interacciones, desarrollar modelos para simular tales interacciones y lograr una solución óptima del juego.
La teoría de juegos, como la conocemos ahora, fue creada en 1944 por John von Neumann y Oskar Morgenstern con su obra "The theory of games behavior". Aunque se considera como precursores de esta área al matemático Antoine Augustin Cournot y al economista Francis Ysidro Edgeworth (1845-1926).
Cournot es considerado como el matemático que comenzó la sistematización formal de la economía. Fue también uno de los precursores de las Teorías económicas del oligopolio, junto al matemático economista Joseph Louis François Bertrand (1822-1900) y Francis Ysidro Edgeworth.
El libro "The theory of games behavior" de Von Neumann y Morgenstern es reconocido como el primer libro sobre teoría de juegos.

Los principios fundamentales de la teoría de juegos ya habían sido enunciados por Von Neumann en 1928 con el **teorema minimax**, pero no despertó mucho interés, hasta que en 1944 Von Neumann y Morgenstern publicaron su obra. Von Neumann propuso el lenguaje de la teoría de juegos y la teoría del equilibrio general para la economía. Caracterizar el comportamiento racional competitivo y cooperativo forma parte de la teoría de la decisión, desarrollada por Von Neumann años después.
Von Neumann y Morgenstern desarrollaron dos planteamientos distintos dentro de la teoría de juegos. El primero es el **planteamiento estratégico o no cooperativo**, el cual consiste en detallar el campo de libertad de los jugadores, es decir, la posibilidades que estos cuentan al momento de elegir. El objetivo de cada jugador es maximizar su función de utilidad, esto es, cada participante desea llegar a su equilibrio de manera independiente de los demás. Un ejemplo caraterístico de este planteamiento son los juegos de suma cero, o también llamados juegos estrictamente competitivos, donde hay dos jugadores y los beneficíos que estos obtienen al final del juego son opuestos, es decir, uno gana y el otro pierde en la misma proporción a lo que gana el otro. Entre estos juegos tenemos por ejemplo al ajedrez y al póquer.
El segundo es el **planteamiento coalicional o cooperativo**, el cual consiste en describir conductas óptimas donde hay muchos jugadores, teniendo la oportunidad de formar grupos que busquen objetivos en común.
La teoría de juegos ha ido evolucionando desde los trabajos de Von Neumann y Morgenstern. Lloyd Stowell Shapley (1923-2016) investigó en los campos de la economía matemática y especialmente en la teoría de juegos. Él ha sido considerado como la personificación misma de la teoría de juegos, luego de los trabajos de von Neumann y Morgenstern. Junto a Alvin E. Roth ganó el Premio Nobel de economía en el año 2012.
En los años 50 hubo un desarrollo importante de estas ideas en la universidad de Princeton, con los trabajos de R. Duncan Luce (1925-2012) and Howard Raiffa (1024-2016) en el año 1957, Harold W. Kuhn (1925-2014) en el año 1953, quién permitió establecer una forma de atacar los juegos cooperativos, y John Forbes Nash (1928-2015), quien en 1950 definió el equilibrio que lleva su nombre, lo que permitió extender la teoría de juegos no cooperativos más generales que los de suma cero.
John Harsanyi (1920-2000) en 1967 logró extender la teoría de juegos de información incompleta, estos son aquellos juegos donde los jugadores no conocen todas las características del juego. Por ejemplo, los pagos que los jugadores brindan a cada posible juego final.
Ante la multiplicidad de equilibrios de Nash, muchos equilibrios no eran soluciones razonables a los juegos. Así Reinhard Selten (1930-2016) en 1975 definió el concepto de equilibrio perfecto en el subjuego para juegos de información completa y una generalización para el caso de juegos de información imperfecta. John Forbes Nash, John Harsanyi y Reinhard Selten obtuvieron el premio Nobel de Economía en 1994.

Robert J. Aumann amplió la comprensión del conflicto y cooperación en la teoría de juegos, al igual que Thomas C. Schelling, quién publico su obra “The Strategy of Conflic”. Ambos obtuvieron el premio Nóbel de economía en el año 2005.
La Teoría de Juegos ha alcanzado un alto grado de sofisticación matemática. Desde su primera publicación como área de estudio, a crecido el número de científicos dedicados a esta área, y este número sigue creciendo.
La teoría de juegos tiene muchas aplicaciones en diferentes áreas de las ciencias. Por ejemplo en economía, sociología, la ciencia política, la biología, la filosofía, la psicología, etc.
EL filósofo Thomas Hobbes dijo que el hombre se carateriza por su fortaleza física, sus pasiones, su experiencia y su razón. La teoría de juegos toma en cuenta estas consideraciones a la hora de tomar decisiones. Las pasiones y experiencias corresponden a las preferencias y creencias de los jugadores respectivamente, la razón se expone en la racionalidad y la fortaleza física en las características de los jugadores.
Nuestro trabajo está principalmente enfocado en estudiar los juegos no cooperativos, dentro de los cuales encontramos a los juegos con información completa e información incompleta.

4.2. Juegos con información completa

Cuando hablamos de información completa, nos referimos al hecho que cada jugador (participante) tiene conocimiento acerca del juego. Esto es, su formulación, las estrategias de los demás jugadores, los pagos que los jugadores brindan a cada posible resultado del juego, etc. A esto se le conoce de **conocimiento común**.
Se supone que los jugadores son racionales, inteligentes y están bien informados. Dentro de los juegos con información completa encontramos diferentes tipos de juegos.
Partiendo por ejemplo de la secuencialidad de la elección de los jugadores, la dividimos entre juegos estratégicos y juegos en la forma extensiva, los cuales serán expuestos con más detalle en las siguientes subsecciones. Si la dividimos por la cantidad de jugadores, encontraremos a los juegos de un solo jugador (monopolios), dos jugadores (juegos de suma cero, duopolios) y muchos jugadores (polipolios).
La noción de conocimiento común es importante en varios resultados obtenidos, por ejemplo en el equilibrio de Nash.
La noción de equilibrio es muy importante para la teoría de juegos, esto porque anticipa que los jugadores elegirán jugar con las estrategias del equilibrio. Hay dos maneras de ver que esto sea posible, el educativo nos dice que los jugadores eligen jugar con el equilibrio luego de razonar cuidadosamente, y el evolutivo nos dice que los jugadores llegan al equilibrio luego de jugar tanteando por varios periodos de tiempo.

4.2.1. Juegos en su forma estratégica

Un juego en su forma *estratégica*, o también llamado un juego en su forma *normal*, está modelado por la terna $\{N, \{S_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}\}$. Donde N representa al conjunto de jugadores, si consideramos que los jugadores son finitos, entonces escribiremos $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, donde cada jugador será representado por un número $i \in N$. La familia $\{S_i\}_{i\in N}$ representa al conjunto de estratégias de cada uno de los jugadores, esto es, para cada jugador i, S_i representa su conjunto de estratégias (posibles acciones) en el juego, el cual será llamado *espacio de estrategias puras* del jugador i. Por último, la familia $\{u_i\}_{i\in N}$ representa a las funciones de utilidad de cada jugador, comunmente se les conoce como las funciones de pago. Así cada $u_i : S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función de pago del jugador i, además estas funciones se interpretan como utilidades de Von Neumann-Morgenstern[1].
La forma estratégica es usada para modelar un juego donde los jugadores eligen su estratégia de manera simultánea. Simultánea en el aspecto de desconocer las estrategias que toman los demás participantes. Así, en cierta manera, la estratégia que cada jugador elige no depende de la estrategia que elijan los demás jugadores.
Lo que cada jugador desea es maximizar su función de pago, esto para maximizar su beneficio en el juego. Debemos considerar que cada jugador conoce la estructura del juego, que todos los jugadores conocen la estructura del juego, además cada jugador conoce que los demás jugadores conocen la estructura del juego y que cada jugador conoce que los demás conocen que todos conocen la estructura del juego. Con esto decimos que el juego es de *conocimiento común*.
Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo (Cara o Sello)**.** Tenemos dos jugadores, 1 y 2, los cuales están reunidos en un bar y deciden jugar de la siguiente manera, ambos sentados en mesas diferentes y sentados sin poder ver la mesa contraria. Cada uno coloca en su mesa una moneda mostrando cara o sello. Si en ambas monedas tenemos la misma posición (cara o sello), entonces el jugador 1 se lleva las monedas, caso contrario el jugador 2 se lleva las monedas.
Además, supongamos que las monedas tienen el mismo valor, así el espacio de estrategias puras de los jugadores son $S_1 = S_2 = \{C, S\}$, donde C es cara y S es sello, y representemos por 1 si el jugador 1 o 2 gana y por -1 si el jugador 1 o 2 pierde.
Con lo anterior se muestra la tabla de pagos respectivo: donde se muestra las estrategias puras de cada jugador, además se muestra los respectivos pagos que cada jugador da a las posibles combinaciones de las estrategias puras. Las primeras componentes de la matriz interior son los pagos del jugador 1 y las segundas componentes son los pagos del jugador 2.[2]

[1]De aqui en adelante representaremos por G a un juego en forma estratégica. Así, $G = \{N, \{S_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}\}$.
[2]Este orden en la tabla de pagos lo vamos a usar en todas las tablas de aquí en adelante en este trabajo.

$1 \setminus 2$	C	S
C	1,-1	-1,1
S	-1,1	1,-1

Cuadro 4.1: Tabla de pagos en juego Cara-Sello

Así podemos apreciar los espacios de estrategias puras de los dos participantes $S_1 = S_2 = \{C, S\}$, también sus respectivos pagos, el cual es deducido de la tabla anterior. ■

Para cada espacio de estrategias puras S_i, representaremos por Σ_i a su conjunto de loterías respectivo, el cual será llamado **espacio de estrategias mixtas** del jugador i. Considerando el espacio de estrategias puras de cada jugador un conjunto finito, entonces podemos definir el conjunto de loterías respectivo para cada espacio de estrategias como lo definido en el capítulo 2. Así, para cada jugador $i \in N$, para cada $s_i \in S_i$ y cada $\sigma_i \in \Sigma_i, \sigma_i(s_i)$ indica la probabilidad que le da σ_i al resultado s_i.
Definamos el espacio de estrategias mixtas del juego como el espacio $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \ldots \times \Sigma_n$, y considerando que las estrategias mixtas de los jugadores son estadísticamente independientes, entonces del capítulo 2, como cada función de pago de cada jugador es una utilidad de Von Neumann-Moergenstern, estas se pueden generalizar a espacios de estrategias mixtas. Así, para cada jugador $i \in N$, extendiendo el dominio de cada función de pago a Σ, $u_i : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ se expresa como:

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \left(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j(s_j) \right) u_i(s),$$

donde $S = S_1 \times S_2 \times \times \ldots \times S_n$.
Esto viene directamente de la definición de la utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern, teniendo presente que para cada $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S$ y cada $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in \Sigma$, $\sigma(s) = \prod_{j=1}^{n} \sigma_j(s_j)$, y esto es por la independencia estadística de las estrategias mixtas.
Veamos esto del ejemplo anterior Cara-Sello.

Ejemplo. En el juego Cara-Sello se tiene las estrategias $S_1 = S_2 = \{C, S\}$, y los pagos están dados por el cuadro 4.1.
Para cada $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, con $\sigma_1 = (p, 1-p), \sigma_2 = (q, 1-q) \in \Sigma_1$, donde $p, q \in [0, 1]$.
Para el jugador 1, se tiene que

$$u_1(\sigma) = pq1 + p(1-q)(-1) + (1-p)q(-1) + (1-p)(1-q)1 = 4pq - 2p - 2q + 1,$$

y para el jugador 2,

$$u_2(\sigma) = pq(-1) + p(1-q)1 + (1-p)q1 + (1-p)(1-q)(-1) = -4pq + 2p + 2q - 1.$$ ■

Ahora pasemos a definir que es una estrategia pura dominada, pero primero veamos la siguiente representación matemática que vamos a usar de aquí en adelante.
Para cada jugador $i \in N$, dado el vector $s \in S$, representaremos por s_{-i} al vector compuesto por las componentes del vector s quitando la componente s_i, es decir,
$s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{s+1}, \ldots, s_n)$. De esta manera podemos representar $s = (s_i, s_{-i})$.
Siguiendo la misma lógica, representamos σ_{-j}, luego S_{-i} y Σ_{-i} están dados por
$S_{-1} = S_1 \times \ldots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \ldots \times S_n$ y $\Sigma_{-1} = \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_{i-1} \times \Sigma_{i+1} \times \ldots \times \Sigma_n$.

Definición 4.2.1 (Estrategia dominada)**.** Una estrategia pura $s_i^* \in S_i$ es dominada para el jugador i si existe $\sigma_i^* \in \Sigma_i$ tal que:

$$u_i(\sigma_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i^*, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}, \tag{4.1}$$

y se dirá que la estrategia es estrictamente dominada cuando la desigualdad en (4.1) es estricta.
Con la existencia de σ_i^*, se dice que esta domina (estrictamente) a la estrategia pura s_i^*.

Observación 4.2.1. La representación $u_i(\sigma_i^*, s_{-i})$ en la ecuación (4.1) se interpreta como $u_i(\sigma_i^*, \gamma_{\{s_{-i}\}})$, donde $\gamma_{\{s_{-i}\}} = (\gamma_{\{s_1\}}, \ldots, \gamma_{\{s_{i-1}\}}, \gamma_{\{s_{i+1}\}}, \ldots, \gamma_{\{s_n\}})$.[3]
Así, reescribiendo la ecuación (4.1), obtenemos que:

$$\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i^*(s_i) u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i^*, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}. \tag{4.2}$$

Proposición 4.2.1. De la definición de estrategia dominante, se cumple la desigualdad (4.1) si y solo si se cumple que

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}) \geq u_i(s_i^*, \sigma_{-i}), \forall \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}. \tag{4.3}$$

Prueba: Veamos la condición necesaria.
$\forall \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$,

$$\begin{aligned} u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}) &= \sum_{\substack{s_{-i} \in S_{-i} \\ s_i \in S_i}} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \sigma_j(s_j) \right) \sigma_i^*(s_i) u_i(s_i, s_{-i}) \\ &= \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sum_{s_i \in S_i} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \sigma_j(s_j) \right) \sigma_i^*(s_i) u_i(s_i, s_{-i}) \\ &= \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \sigma_j(s_j) \right) \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i^*(s_i) u_i(s_i, s_{-i}). \end{aligned} \tag{4.4}$$

[3]Recordemos del capítulo 2 que $\gamma_{\{s_j\}}$ representa a la lotería que da probabilidad 1 al resultado s_j, esto para el jugador j.

Por la observación 4.2.1 se cumple (4.2), esto en (4.4) obtenemos que:

$$\begin{aligned} u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}) &= \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \sigma_j(s_j) \right) \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i^*(s_i) u_i(s_i, s_{-i}) \\ &\geq \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \sigma_j(s_j) \right) u_i(s_i^*, s_{-i}) \\ &= u_i(s_i^*, \sigma_{-i}). \end{aligned}$$

Para demostrar la suficiencia, es simplemente tomar cada
$\sigma_{-i} = \gamma_{\{s_{-i}\}} = (\gamma_{\{s_1\}}, \ldots, \gamma_{\{s_{i-1}\}}, \gamma_{\{s_{i+1}\}}, \ldots, \gamma_{\{s_n\}})$, para cada $s_{-i} \in S_{-i}$.
Así:
$\forall s_{-i} \in S_{-i}$,

$$u_i(\sigma_i^*, s_{-i}) = u_i(\sigma_i^*, \gamma_{\{s_{-i}\}}) \geq u_i(s_i^*, \gamma_{\{s_{-i}\}}) = u_i(s_i^*, s_{-i}). \qquad \blacksquare$$

Veamos el ejemplo clásico del lema del prisionero, el cual fue descubierto por el matemático Albert William Tucker (1905-1995) en 1950 que se basó en el análisis psicoanalítico del estudio transaccional. Tucker dio el nombre de *"dilema del prisionero"* al modelo de cooperación y conflicto de Merrill M. Flood y Melvin Dresher.

Dilema del Prisionero

Se ha producido un robo en una tienda farmacéutica y se ha logrado capturar a los dos posibles delincuentes. Hay indicios que ambos cometieron el robo pero se carece de pruebas. A ambos detenidos se les coloca en celdas diferentes, sin comunicación entre ellos, y se les plantea la posibilidad de declarar su culpa, esto es, declarar que ambos cometieron el robo. Se les comenta, a cada uno, que si ambos confiesan que cometieron el robo, ambos reciben una pena de 1 año de carcel, si uno confiesa que cometió el robo y el otro lo niega, entonces el que confieza recibe una pequeña recompensa y sale en libertad por ayudar a la justicia, y el otro se va preso por un periodo de 2 años por obstrucción de la justicia, y si ambos niegan que cometiron el robo, entonces ambos salen en libertad por falta de pruebas.
El juego puede representarse en su forma estratégica, donde $N = \{1, 2\}$,
$S_1 = S_2 = \{C, N\}$, donde C representa al acto de confesar y N es el acto de negar, y los pagos de las funciones de utilidad, $\{u_i\}_{i=1}^2$, son representados en la siguiente tabla:

$1 \setminus 2$	C	N
C	-1,-1	1,-2
N	-2,1	0,0

Cuadro 4.2: Tabla de pagos del dilema del prisionero.

Podemos decir que el caso más beneficioso para ambos detenidos es que ambos digan que no cometieron el crimen, es decir, elegir el resultado (N, N), así ellos salen libres. Pero como estamos trabajando con utilidades de Von Neumann-Mogenstern, entonces ambos son racionales, así ambos siempre quedrán maximizar su utilidad. Con esto, si no hubiese un incentivo fuerte entre ambos para elegir (N, N), cada jugador racionalmente debe elegir la condición C. Por lo tanto, la solución del juego para ambos detenidos es (C, C).
Formalmente podemos asegurar que para cada jugador $i = 1, 2$, la estrategia N es estrictamente dominada por la distribución $\sigma_1 = \sigma_2 = (1, 0)$ respectivamente.
Veamos esto para el jugador 1 :
$u_1(\sigma_1, C) = u_1(C, C) = -1 > -2 = u_1(N, C)$, para $C \in S_{-1} = S_2$, y
$u_1(\sigma_1, N) = u_1(C, N) = 1 > 0 = u_1(N, N)$, para $N \in S_{-1} = S_2$.
Ahora veamos para el jugador 2 :
$u_2(\sigma_2, C) = u_2(C, C) = -1 > -2 = u_2(C, N)$, para $C \in S_{-2} = S_1$, y
$u_2(\sigma_2, N) = u_2(N, C) = 1 > 0 = u_2(N, N)$, para $N \in S_{-2} = S_1$.

Observación 4.2.2. Cuando la estrategia mixta $\sigma_i = \gamma_{\{s_k\}}$, para el jugador i y algún $s_k \in S_i$, domina a la estrategia pura $s_j \in S_i$, entonces diremos que la estrategia pura s_j es dominada por la estrategia pura s_k para el jugador i. Así, en el ejemplo anterior, para cada jugador se tiene que la estrategia pura N es estrictamente dominada por la estrategia pura C.

Veamos otro ejemplo en la cual también vamos a ver como una estrategia pura es dominante en el juego para cada jugador.

Ejemplo (Subasta de segundo precio)**.** En un centro comercial, una tienda pone en subasta un bien indivisible. Se presentan n postores queriendo comprar el producto. Cada postor dá una valoración propia por el producto.
Como los postores son finitos, ordenamos las valoraciones de manera creciente, esto es, de menor a mayor valoración, obteniendo $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \ldots \leq v_n$. Otorgando también una numeración para cada jugador.
Cada postor entrega su pago por el bien en un sobre cerrado. Cada pago será representado por s_i, para cada jugador i. Estos pagos están dentro del conjunto de estratégias factibles dado por $[0, \infty\rangle$ para cada uno de los jugadores.

Las reglas de la subasta son dados de la siguiente manera: Gana la subasta el postor con el pago mayor, pero este paga por el bien, el segundo mejor pago.
Con esto tendríamos que si el jugador i gana la subasta con $s_i > \max\limits_{i \neq j} s_j$, entonces su pago estará dado por $\max\limits_{i \neq j} s_j$. Luego su utilidad estará dada por $u_i = v_i - \max\limits_{i \neq j} s_j$.
Para los demás jugadores su utilidad estaría dada por cero, ya que no pagarían.
En el caso en que se obtenga varios ganadores, es decir, muchos postores pagan el mismo valor, entonces el ganador es asignado aleatoriamente entre ellos.
Demostraremos que para cada jugador, elegir la opción $s_i = v_i$ es una estrategia débilmente dominante.
Veamos, denotando por $r_i = \max\limits_{i \neq j} s_j$, para cada jugador i se cumple que:
Primero, tomando $s_i > v_i$.
Si $r_i \geq s_i$, entonces $u_i = 0$, ya que $v_i - r_i < 0$. Ahora, si $r_i \leq s_i$, entonces $u_i = v_i - r_i$, si $r_i < v_i$, entonces $u_i = v_i - r_i < s_i - r_i$, y si $v_i \leq r_i$, entonces $u_i = v_i - r_i \leq 0$.
Ahora, tomando $s_i < v_i$.
Si $r_i \leq s_i$, entonces $u_i = v_i - r_i$, si $r_i < v_i$, entonces $u_i = v_i - r_i > s_i - r_i$, y si $v_i \leq r_i$, entonces $u_i = v_i - r_i \leq 0$. Si $r_i \geq s_i$, entonces $u_i = 0$.
Con todo esto, elegir la opción $s_i = v_i$ es la mejor opción razonable para todos los postores.
Por lo tanto, el postor n sería el ganador de la subasta, con $u_n = v_n - v_{n-1}$, ya que para los demás postores $u_j = 0$.

Veamos el siguiente ejemplo en la cual no ocurre que una estrategia pura domina a otra estrategia pura.

Ejemplo. Consideremos dos jugadores con la siguiente tabla de pagos, donde se muestra las estrategias puras de cada uno y sus respectivos pagos.

$1 \setminus 2$	A	B
X	1,1	1,0
Y	4,3	0,2
Z	0,1	4,3

Cuadro 4.3: Tabla de pagos.

Para el jugador 1 se puede ver que ninguna estrategia pura domina a otra estrategia pura, pero se tiene que la estrategia X es estrictamente dominada por la estrategia mixta $\sigma_1 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Veamos:

$$u_1(\sigma_1, A) = 0u_1(X, A) + \frac{1}{2}u_1(Y, A) + \frac{1}{2}u_1(Z, A) = 0 + (\frac{1}{2})4 + 0 = 2 > 1 = u_1(X, A),$$

y

$$u_1(\sigma_1, B) = 0u_1(X, B) + \frac{1}{2}u_1(Y, B) + \frac{1}{2}u_1(Z, B) = 0 + 0 + (\frac{1}{2})4 = 2 > 1 = u_1(X, B). \qquad \blacksquare$$

No siempre se tendrá que una estrategia pura esté dominada por otra estrategia[4] (pura o mixta). Esto se puede ver en el ejemplo Cara-Sello, donde se tiene que la estrategia pura C, para el jugador 1, no está dominada por alguna estrategia mixta.
Esto se puede demostrar considerando la estrategia $\sigma_1 = (p, 1-p)$, para $p \in [0, 1)$ fijo y arbitrario, y la estrategia pura $C \in S_{-1} = S_2$.
Así, $u_1((p, 1-p), C) = 2p - 1 < 1 = u_1(C, C)$, ya que $0 \leq p < 1$.
De la misma manera se tiene que la estrategia pura S, para el jugador 1, no es dominada por alguna estrategia mixta, considerando la estrategia $\sigma_1 = (p, 1-p)$, para $p \in (0, 1]$ fijo y arbitrario, y la estrategia pura $S \in S_{-1} = S_2$.
Así, $u_1((p, 1-p), S) = 1 - 2p < 1 = u_1(S, S)$, ya que $0 < p \leq 1$.

Equilibrio de Nash

Von Neumann y Morgenstern tenían dos barreras en la teoría de juegos, ellos se autoimpusieron la restricción de que en juegos no cooperativos estratégicos, no era posible desarrollar una teoría ideal de equilibrio. En 1950, Jhon Forbes Nash rompe esa barrera de la teoría de juegos, definiendo el quilibrio que lleva su nombre y permitiendo extender la teoría de juegos no cooperativos más generales que los de suma cero.
Resultó muy importante en el campo militar, ya que la mayor parte de aplicaciones de suma cero se concentraba en el campo militar.
Nash es quizás el hombre más destacado de la teoría de juegos, con 21 años desarrolló su equilibrio para juegos estratégicos no cooperativos, el cual nos dice que el punto de equilibrio de Nash es tal situación en la cual ninguno de los jugadores tiene la tentación de cambiar de estrategia, ya que si lo hace disminuiría su función de pago.
Nash contribuyó en muchos otros trabajos dentro de la teoría de juegos, por ejemplo, en el proyecto del programa de Nash, el cual consistía en reducir todos los juegos cooperativos a un marco no cooperativo. En 1994 ganó el premio nobel de economía junto a Jhon C. Harsanyi y Reinhart Selten.
Ahora mostremos la teoría del quilibrio de Nash, el cual existe para un grupo grande de juegos.

[4]Notar que toda estrategia pura es dominada por si misma.

Definición 4.2.2. Dado el juego G en forma estratégica, una estrategia mixta $\sigma^* \in \Sigma$ es un equilibrio de Nash si para cada jugador $i \in N$ se cumple que:

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(s_i, \sigma_{-i}^*), \forall s_i \in S_i. \tag{4.5}$$

Un equilibrio de Nash es una estrategia mixta que nos dice que ningún jugador, bajo esta estrategia adoptada por todos los jugadores, puede cambiar a una estrategia pura de tal manera que esta última le genere un mayor beneficio.

Observación 4.2.3. De manera similar a la proposición 4.2.1, de la definición del equilibrio de Nash, se concluye que se cumple la ecuación (4.5) si y solo si para cada jugador i se cumple que:

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*), \forall \sigma_i \in \Sigma_i. \qquad \blacksquare$$

Con esto tenemos que ninguna estrategia mixta, que pueda tomar un jugador $i \in N$, va a generar un mayor beneficio que el que le genera el equilibrio de Nash.
Un equilibrio de Nash asume que todos los jugadores son racionales en el sentido que todos quieren maximizar sus pagos individuales.
En el ejemplo del dilema del prisionero, se puede demostrar que el equilibrio (C, C) es un equilibrio de Nash, para esto veamos la siguiente proposición.

Proposición 4.2.2. Considerando el juego G en forma estratégica, si σ_i^*, para el jugador $i \in N$, es una estrategia dominante, esto es, para todo $s_i \in S_i$, esta es dominada por σ_i^*, entonces la estrategia mixta $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*) \in \Sigma$ es un equilibrio de Nash de G.

Prueba: Si σ_i^* es una estrategia dominante para cada jugador i,, entonces se cumple la desigualdad (4.1) para cada $s_i \in S_i$. Por la proposición 4.2.1 se cumple que:

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}) \geq u_i(s_i, \sigma_{-i}), \forall \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}.$$

Luego, considerando $\sigma_{-i} = \sigma_{-i}^*$, entonces se cumple que para cada jugador $i \in N$ y para cada $s_i \in S_i, u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(s_i^*, \sigma_{-i}^*)$.
Esto se traduce como:

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(s_i, \sigma_{-i}^*), \forall s_i \in S_i,$$

y así demostramos que σ^* es un equilibrio de Nash. $\blacksquare$
En el ejemplo del dilema del prisionero, el juego (C, C) es un equilibrio de Nash.
Ahora veamos otro ejemplo, este consiste del modelo del duopolio de Cournot.

Ejemplo (Competición de Cournot)**.** Tenemos dos firmas que producen un bien homogéneo. Los niveles de producción de cada jugador están dados por $q_i \in Q_i \subset [0, \infty\rangle$, los cuales representan a las estrategias que son infinitas.

Cuando las venden en el mercado, obtienen el precio $p(q)$, donde $q = q_1 + q_2$.
El costo de producción de la firma i esta dado por $c_i(q_i)$ y su pago total está dado por $u_i(q_1, q_2) = q_i p(q) - c_i(q_i)$.
Con todo lo anterior tenemos el juego en forma estratégica $\{N, \{S_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}\}$, con $N = \{1, 2\}, S_1 = S_2 = [0, \infty\rangle$ y $u_i(q_1, q_2) = q_i p(q) - c_i(q_i)$.
Consideremos ahora las funciones de reacción de Cournot, dados por $r_1 : Q_2 \longrightarrow Q_1$ y $r_2 : Q_1 \longrightarrow Q_2$. Esto es, que acción tomará cada uno de los jugadores dependiendo de lo que haga su contrincante.
Considerando condiciones necesarias para que exista y se pueda hallar un único óptimo para cada uno de los jugadores, supongamos que cada u_i sea diferenciable y estrictamente cóncava, y Q_1, Q_2 son conjuntos abiertos.
Por la condición de primer orden para cada función de utilidad obtenemos que:

$$\frac{\partial u_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = p(r_1(q_2) + q_2) + r_1(q_2)p^{'}(r_1(q_2) + q_2) - c_1^{'}(r_1(q_2)) = 0 \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial u_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} = p(q_1 + r_2(q_1)) + r_2(q_1)p^{'}(q_1 + r_2(q_1)) - c_2^{'}(r_2(q_1)) = 0 \tag{4.7}$$

La intersección de los valores hallados en las reacciones r_1, r_2 de las ecuaciones anteriores, que satisfacen que $q_1^* = r_1(q_2^*)$ y $q_2^* = r_2(q_1^*)$, será el equilibrio de Nash, ya que maximiza sus respectivos pagos.
Considerando los siguientes supuestos: $p(q) = \max\{0, 1 - q\}$, y que $c_i(q_i) = cq_i$, con $0 \leq c \leq 1$.
Entonces, de las ecuaciones (4.6) y (4.7) obtenemos que:

$$r_1(q_2) = \frac{1 - q_2 - c}{2}$$

y

$$r_2(q_1) = \frac{1 - q_1 - c}{2}.$$

Luego, el equilibrio de Nash satisface que: $q_1^* = r_1(q_2^*)$ y $q_2^* = r_2(q_1^*)$.
Así, resolviendo obtenemos el equilibrio de Nash dado por: $q_1^* = q_2^* = \frac{1-c}{3}$. ■

En algunos juegos no necesariamente vamos a encontrar un equilibrio de Nash en la forma de estrategia pura, si no que están en la forma mixta.

Ejemplo (Cara-Sello)**.** Recordando el juego Cara-Sello, dado anteriormente, tenemos que la estrategia mixta $\left((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right)$ es un equlibrio de Nash, ya que para todo $p, q \in [0, 1]$ se tiene que:
Para el jugador 1,

$$u_1(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)) = 0 \geq 0 = u_1(C, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right))$$

y

$$u_1(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)) = 0 \geq 0 = u_1(S, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)).$$

Para el jugador 2,

$$u_2(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)) = 0 \geq 0 = u_2(C,\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right))$$

y

$$u_2(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)) = 0 \geq 0 = u_2(S,\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)). \qquad \blacksquare$$

Podemos también encontrar juegos en los cuales haya más de un equilibrio de Nash. Veamos el juego de la batalla de los sexos.

Ejemplo (Batalla de los sexos)**.** Una pareja desea salir a festejar su aniversario y para eso se deben reunir en un lugar de la ciudad.
Partiendo del hecho de que no puedan comunicarse hasta el lugar del encuentro, ambos deben llegar a un acuerdo antes de salir a trabajar. Cada uno tiene sus preferencias, mientras que el joven desea ir a bailar a una discoteca, la señorita desea ir a cenar, pero en cualquiera de los casos, siempre desean estar juntos.
Representando al joven como 2 y a la señorita como 1, mostremos los pagos respectivos en la siguiente tabla de pagos:

$1 \setminus 2$	C	D
C	3,2	1,1
D	0,0	2,3

Cuadro 4.4: Tabla de pagos de la batalla de los sexos.

Donde C representa a la opción cenar y D a la opción de ir a bailar a una discoteca.
Las estrategias puras (C, C) y (D, D) son equilibrios de Nash[5].
Verificando para la estrategia (C, C).
Para el jugador 1,

$$u_1(C, C) = 3 \geq 3 = u_1(C, C),$$

$$u_1(C, C) = 3 > 0 = u_1(D, C),$$

y para el jugador 2,

$$u_2(C, C) = 2 \geq 2 = u_2(C, C),$$

$$u_2(C, C) = 2 > 0 = u_2(D, C).$$

Verificando para la estrategia (D, D).
Para el jugador 1,

$$u_1(D, D) = 2 > 1 = u_1(C, D),$$

$$u_1(D, D) = 3 \geq 3 = u_1(D, D),$$

[5]Esto es, las estrategias mixtas $((1, 0), (1, 0))$ y $((0, 1), (0, 1))$ son equilibrios de Nash.

y para el jugador 2,

$$u_2(D,D) = 3 > 1 = u_2(C,D),$$

$$u_2(D,D) = 3 \geq 3 = u_2(D,D). \qquad \blacksquare$$

Teorema 4.2.1 (Existencia del equilibrio de Nash)**.** Todo juego G finito en forma estratégica tiene un equilibrio de Nash.

Prueba: Dado un juego finito en forma estratégica G, definamos la correspondencia $\rho_i : \Sigma \rightrightarrows \Sigma$ para cada jugador i de la forma:

$$\rho_i(\sigma) = \{\sigma_i^* \in \Sigma_i / u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i^{'}, \sigma_{-i}), \forall \sigma_i^{'} \in \Sigma_i\},$$

donde $\sigma = (\sigma_i, \sigma_{-i})$.
Del teorema del máximo de Berge, para cada jugador i fijo y arbitrario, consideraremos $X = \Sigma_i, P = \Sigma$, además la correspondencia constante $\varphi : \Sigma \rightrightarrows \Sigma_i$ dada por $\varphi(\sigma) = \Sigma_i$, el cual es valor-compacto y continua. Entonces del problema de optimización parametrizado (X, P, φ, f), vista como $V(p) = \max\limits_{x \in \varphi(p)} f(x,p)$, considerando la función $f : \Sigma_i \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(\sigma_i, \sigma) = u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$, obtenemos el problema de optimización parametrizada $(\Sigma_i, \Sigma, \varphi, f)$, vista como:

$$V(\sigma) = \max_{\sigma_i \in \Sigma_i} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}).$$

Por lo tanto, por el teorema del máximo de Berge, tenemos que

$$\rho_i(\sigma) = \{\sigma_i^* \in \Sigma_i / u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i^{'}, \sigma_{-i}), \forall \sigma_i^{'} \in \Sigma_i\}$$

es hemicontinua superior.
Así $\rho(\sigma) = (\rho_1(\sigma), \rho_2(\sigma), \ldots, \rho_n(\sigma))$ es hemicontinua superior.
Con esto definamos $\rho : \Sigma \rightrightarrows \Sigma$ como:

$$\rho(\sigma) = (\rho_1(\sigma), \rho_2(\sigma), \ldots, \rho_n(\sigma)).$$

El espacio Σ es compacto, convexo y no vacío.
Dado $\sigma \in \Sigma$ fijo y arbitrario. Sea $\sigma^1, \sigma^2 \in \rho(\sigma)$, entonces para todo i, $\sigma_i^1, \sigma_i^2 \in \rho_i(\sigma)$.
Esto es

$$u_i(\sigma_i^1, \sigma_{-i}) \geq u_i(\hat{\sigma}_i, \sigma_{-i}), \forall \hat{\sigma}_i \in \Sigma_i,$$

$$u_i(\sigma_i^2, \sigma_{-i}) \geq u_i(\hat{\sigma}_i, \sigma_{-i}), \forall \hat{\sigma}_i \in \Sigma_i.$$

Luego, sea $\lambda \in [0,1], \forall \hat{\sigma}_i \in \Sigma_i$,

$$u_i(\lambda \sigma_i^1 + (1-\lambda)\sigma_i^2, \sigma_{-i}) = {}^6 \lambda u_i(\sigma_i^1, \sigma_{-i}) + (1-\lambda) u_i(\sigma_i^2, \sigma_{-i})$$

$$\geq \lambda u_i(\hat{\sigma}_i, \sigma_{-i}) + (1-\lambda) u_i(\hat{\sigma}_i, \sigma_{-i}) = u_i(\hat{\sigma}_i, \sigma_{-i}).$$

Así tenemos que $\lambda \sigma_i^1 + (1-\lambda)\sigma_i^2 \in \rho_i(\sigma)$, entonces $\lambda \sigma^1 + (1-\lambda)\sigma^2 \in \rho(\sigma)$. Por lo tanto, las imágenes de ρ son convexas, además de ser no vacía. Esto último porque para cada i, la función de utilidad es bilineal, entonces es continua, y por ser Σ_i compacto, siempre se va a obtener un máximo en cada $\rho_i(\sigma)$.
Entonces por el teorema de Kakutani, llegamos a que existe un punto fijo, esto es:

$$\rho(\sigma^*) = \sigma^*.$$

Entonces, $\forall i \in N$:

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(\sigma_i^{'}, \sigma_{-i}^*), \forall \sigma_i^{'} \in \Sigma_i.$$

Por lo tanto, σ^* es un equilibrio de Nash. ■

4.2.2. Juegos en su forma extensiva

A diferencia de los juegos estratégicos, aquí ocurre una variación en los tiempos de elección de cada jugador.
Volvamos a ver el ejemplo de la batalla de los sexos.

La batalla de los sexos

Partimos primero del hecho que no puedan comunicarse hasta el lugar del encuentro, esto es, las estrategias que ambos tienen son independientes, entonces los pagos respectivos son dados por el cuadro 4,4.
En la forma estratégica los dos equilibrios de Nash son (D, D) y (C, C), como vimos anteriormente.
Pasemos ahora a analizar el caso en que las elecciones se realizan consecutivamente.
Primero analicemos el caso donde la señorita elije primera. El juego se representa como un árbol de la siguiente manera:

[6] Por la linealidad de la función de utilidad.

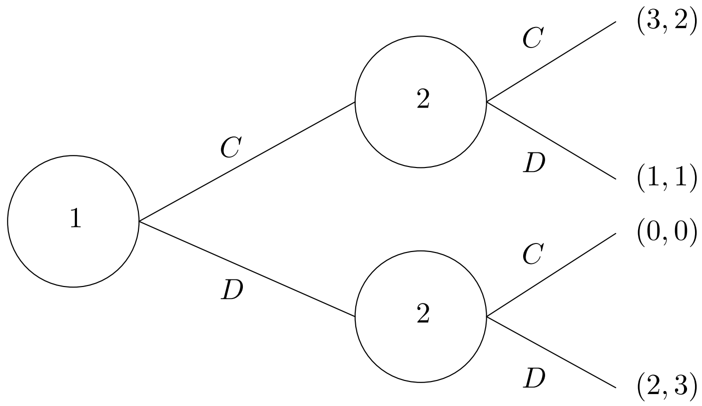


Figura 1

Así, aunque haya dos equilibrios de Nash en la forma estratégica, en este caso, como la señorita elige primero, racionalmente ella elegirá la opción C (cenar). Ante esto, el joven siendo racional elegirá ir con ella. Por lo tanto, el equilibro se da en (C, C).
Caso contrario, si es el joven es quien elige primero, analizando de manera similar, llegamos a que el equilibrio se da en (D, D).
Esta manera de pasar de un juego en su forma estratégica, donde los jugadores eligen sus estrategias de manera independiente, sin saber la decisión de los demás jugadores, a un juego secuencial, donde los jugadores eligen su estrategia de manera consecutiva, se conoce como extención del juego estratégico. Así, cuando los jugadores juegan de manera consecutiva se le conoce como un *juego en su forma extensiva.*

Formalicemos ahora un juego en forma extensiva. Estos juegos, los cuales serán representados por Γ, están conformados por las siguientes componentes $\{N, R, \{K_i\}_{i\in N}, \{H_i\}_{i\in N}, \{\{u_i^j\}_{i\in N}\}^{j\in\mathbb{Z}}\}$. Donde N es el conjunto de jugadores, los cuales serán representados por números naturales. Así, si la cantidad de jugadores es finito, entonces $N = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$[7], donde el cero indica a la naturaleza, estas son las variables exógenas que puedan intervenir en el juego, el cual se interpreta como que la naturaleza da las condiciones iniciales para realizarse el juego, como ejemplos está; el clima, los pagos iniciales, la cantidad de dinero que se tiene antes de iniciar un negocio, etc.

[7]Igual que para los juegos estratégicos, consideraremos que los jugadores son finitos

Para hablar de $R, \{K_i\}_{i\in N}, \{H_i\}_{i\in N}$ y $\{\{u_i^j\}_{i\in N}\}^{j\in\mathbb{Z}}$ debemos mencionar como está modelado un juego en la forma extensiva.
Ordenando a los jugadores, asumamos sin pérdida de generalidad que la naturaleza juega primero, luego el jugador 1 y así consecutivamente hasta el jugador n[8]. Esto se modela mediante un árbol de sucesos[9], definiendo K como el conjunto de todos los nodos del árbol. Es aquí donde aparece R, definiéndola como la relación binaria en K que cumpla las siguientes propiedades:

- Irreflexividad: $\forall x \in K, \sim (xRx)$.

- Transitividad: $\forall x, y, z \in K$, si xRy e yRz, entonces xRz.

El término xRy será interpretado como: x es presidido por y en el árbol.
Ahora definamos la relación binaria de precedencia P en K como:

$$\forall x, y \in K, xPy \Longleftrightarrow (xRy) \wedge (\nexists z \in K/xRz \text{ y } zRy).$$

Con lo anterior definamos la correspondencia de predecesores inmediatos $\mathbb{P} : K \rightrightarrows K$ como $\mathbb{P}(x) = \{y \in K/yPx\}$, y definamos la correspondencia de sucesores inmediatos $\mathbb{S} : K \rightrightarrows K$ como $\mathbb{S}(x) = \{y \in K/xPy\}$.

Considerando el árbol de sucesos como (K, R), este debe cumplir las siguientes propiedades (de árbol) muy importantes a la hora de representar un juego en la forma extensiva:

1) Existe un único nodo inicial x_0, esto es, $\mathbb{P}(x_0) = \emptyset$ y para todo $x \in K$ tal que $x \neq x_0$ se tiene que $x_0 Rx$.

2) Para cada $x \in K$ tal que $x \neq x_0$, existe una única colección de elementos de K que son predecesores de x. Esto es, $\exists!\{x_1, x_2, \ldots, x_r\} \subset K$ tal que $x_i \in \mathbb{P}(x_{i+1})$, para $i = 1, 2, \ldots, r-1, x_0 \in \mathbb{P}(x_1)$ y $x_r \in \mathbb{P}(x)$. Con esto también se deduce que para todo $x \in K$ tal que $x \neq x_0$, se cumple que $\#\mathbb{P}(x) = 1$.

Ahora definamos el conjunto de nodos finales como $Z = \{x \in K/\mathbb{S}(x) = \emptyset\}$. Entonces Z se puede interpretar como el conjunto de resultados posibles del juego, teniendo presente que se puede llegar al mismo resultado pero con predecesores diferentes.
Con lo anterior ya podemos mencionar al conjunto $\{K_i\}_{i\in N}$, donde cada $K_i \subset K \setminus Z$ representa al conjunto de nodos en los cuales el jugador i toma su elección en el juego, por ejemplo $K_0 = \{x_0\}$.

[8]Esto no siempre es así, como veremos más adelante, puede que cada jugador juegue no solo una vez, si no que participen en diferentes etapas, o que dos o más jugadores jueguen simultáneamente.

[9]Recordemos de la definición de grafos que un árbol es un grafo conexo que no posee ciclos. En este caso debe cumplir ciertas propiedades más, las cuales serán mencionadas más adelante.

Definamos ahora el conjunto de posibles acciones en el juego para el jugador i en el nodo $x \in K_i$ como $A_i(x)$, entonces estamos listos para mencionar a los elementos del conjunto $\{H_i\}_{i\in N}$, donde cada H_i representa al conjunto de subconjuntos de K_i con la siguiente propiedad: Para todo $M \in H_i$, se cumple que para todo $x, y \in M, A_i(x) = A_i(y)$. Esto quiere decir que ambos nodos, x, y, tienen el mismo conjunto de acciones posibles para el jugador i.
Estos elementos H_i reciben el nombre de **conjuntos de información**.
Por último, el conjunto $\{\{u_i^j\}_{i\in N}\}^{j\in\mathbb{Z}}$ representa el conjunto de vectores de pagos de cada resultado del juego. El conjunto $\mathbb{Z}$ representa la numeración y la equivalencia que se puede dar al conjunto de nodos finales[10], si asumimos que estos son finitos, entonces $\mathbb{Z} = \{1, 2, \ldots, m\}$, donde $m = \#Z$. Luego, para cada $j \in \mathbb{Z}, \{u_i^j\}_{i\in N}$ representa al vector de pagos $\{u_i^j\}_{i\in N} \equiv (u_1^j, u_2^j, \ldots, u_n^j)$, donde cada u_i^j es el pago respectivo de cada jugador i al juego resultante j.
Además, con abuso de notación, $u_i^j = u_i(k^j)$, donde cada función $u_i : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ es una utilidad de Von Neumann-Morgenstern para cada jugador i.
Veamos los siguientes ejemplos, donde mediante los gráficos del árbol se pueden apreciar todos los elementos del juego extensivo explicados anteriormente.

Ejemplo 4.2.1. Observemos el siguiente árbol de sucesos, el cual representa a un juego secuencial de dos personas.

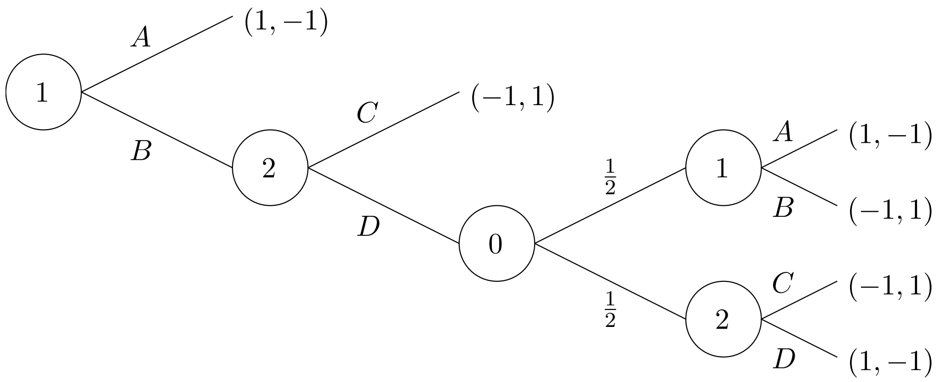


Figura 2

[10]Esto es, los elementos del conjunto Z pueden ser representados por un número natural, el cual está dentro del rango de su cardinal. Así, $1 \equiv z_1, 2 \equiv z_2, \ldots$, donde $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$.

Como podemos apreciar, cuando el jugador 1 elige la opción A, se acaba el juego saliendo él ganador del juego, el cual es representado por el pago de 1, mientras que el jugador 2 termina perdiendo, el cual es representado por el pago de -1. Pero si el jugador 1 elige la opción B, entonces le da la oportunidad al jugador 2 de terminar el juego o de seguir jugando. Así, si el jugador 2 elige la opción C, se acaba el juego saliendo él ganador, y si elige la opción D, se realiza un juego de azar mediante una moneda para determinar quién finaliza el juego. Si sale cara, el jugador 1 es quién juega, y si elige A gana y si elige B pierde. Por el contrario, si sale sello, el jugador 2 es quién juega, y si elige C gana y si elige D pierde.

Estamos frente a un juego donde la naturaleza se manifiesta durante el juego. También observamos que hay resultados finales intermedios.

Aquí los conjuntos de información están conformados solo por un elemento, el cual es cada nodo. Los conjuntos de acciones posibles están dados por $A_1(1) = \{A, B\}$ y $A_2(2) = \{C, D\}$, esto para ambas intervenciones de ambos jugadores en el juego. Además que el conjunto de acciones posibles para la naturaleza es $A_0 = \{\text{cara, sello}\}$. ∎

Ejemplo 4.2.2. Recordemos el ejemplo cara-sello, pero ahora supongamos que un árbitro lanza las dos monedas al aire, esto es, la naturaleza decide la posición final de las monedas, y no muestra las posiciones finales. El árbitro pregunta al jugador 1 si desea seguir jugando o se retira del juego. Si el jugador 1 se retira, entonces se termina el juego y nadie gana ni pierde (el cual es representado con el pago $(0, 0)$), caso contrario, si el jugador 1 decide continuar jugando, entonces el árbitro pregunta al jugador 2 si decide seguir jugando o retirarse, si se retira, entonces se termina el juego y nadie gana ni pierde, por el contrario, si desea seguir jugando, entonces los pagos son como lo mencionado en el juego cara-sello, esto es, si ambas monedas tienen la misma posición, el jugador 1 es quién gana, caso contrario gana el jugador 2.

El juego en la forma extensiva está dado por la representación siguiente, donde R representa la opción de retirarse y A la opción de seguir jugando.[11]

[11] Observemos que este juego posee resultados finales intermedios.

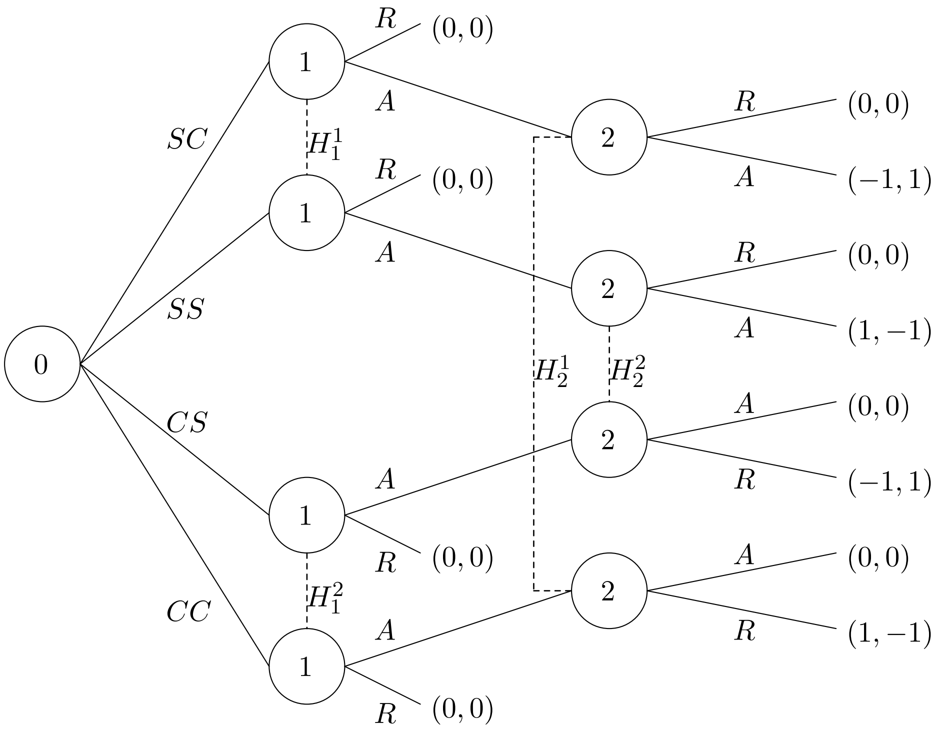


Figura 3

Los nodos que pertenecen a un mismo conjunto de información serán unidas por una línea punteada. Esta representación será usada en todo el trabajo. Así $H_1 = \{H_1^1, H_1^2\}$ y $H_2 = \{H_2^1, H_2^2\}$.
Los conjuntos de posibles acciones de cada jugador están dados por $A_1 = A_2 = \{A, R\}$, esto en cualquier nodo que pertenece a K_1, del jugador 1, y a K_2, del jugador 2. ■

4.2.3. Relación entre juegos en forma estratégica y su forma extensiva

Como mencionamos anteriormente, vamos a suponer que la cantidad de jugadores es finita, $N = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, . Dado el juego en la forma extensiva $\Upsilon = \{N, R, \{K_i\}_{i\in N}, \{H_i\}_{i\in N}, \{\{u_i^j\}_{i\in N}\}^{j\in Z}\}$, ¿podemos representarlo en la forma estratégica $G = \{N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{u_i\}_{i=1}^n\}$ y viceversa?.
En un juego en forma estratégica, las estrategias puras de cada jugador solo depende de sus posibilidades de jugar en el juego, esto es, es independiente de las acciones de los otros jugadores. Mientras que en un juego en la forma extensiva, las estrategias de cada jugador pueden depender de las estrategias que tomen los jugadores que juegan antes y la naturaleza. Así, el conjunto de estrategias varía de acuerdo a que modelo vamos a usar para representar el juego.

Desarrollaremos ahora tres preguntas. Primero, ¿que relación hay entre estos dos tipos de juego?. Segundo, como lo mencionamos antes, ¿como pasar de un juego en la forma extensiva a la forma estratégica y viceversa?. Por último, ¿que condiciones se deben cumplir para obtener una semejanza en los modelos con el fin de llegar a un equilibrio?, así no preocuparse por saber que modelo es más conveniente.

Resolviendo la primera pregunta, una relación que hay entre ambos tipos de juego (modelos) es la complementariedad que tienen. En su mayoría, los juegos no cooperativos son modelados por uno de estos tipos de juego. Dependiendo si hay simultaneidad o no. Otra relación importante es la posibilidad de pasar un juego de la forma estratégica a la forma extensiva y viceversa.

Resolviendo la segunda pregunta, pasar un juego en la forma estratégica a su forma extensiva es simple. Considerando la tabla de pagos de la forma estratégica, simplemente se asume que el jugador 1 juega primero, luego el segundo jugador, así sucesivamente. Formando el árbol de sucesos y sus respectivos nodos, con los cuales tenemos los conjuntos K_i. Como estamos en un juego "simultáneo", esto se asegura en el juego extensivo considerando $H_i = \{K_i\}$, y por último u_i^j se toma similarmente como lo mencionado anteriormente, definiendo la función $\varsigma : K \times \mathbb{S}(K) \longrightarrow \Lambda = \cup_{i \in N} \Lambda_i$, donde $\Lambda_i = \cup_{\substack{h \in H_i \\ x \in h}} A_i(x)$ y recordando que $A_i(x)$ es el conjunto de posibles acciones del jugador i en el nodo x. Se define $\varsigma(x, \mathbb{S}(x)) = a_x \in A_i(x)$, tal que $x \in K_i$ y a_x es la acción que nos lleva de x a un nodo de $\mathbb{S}(x)$ en el juego[12]. Por la misma forma del juego, para el nodo final k_j, la colección única de elementos predecesores $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset K$[13] nos da las estrategias $s_1 = \varsigma(x_1, x_2), s_2 = \varsigma(x_2, x_3), \ldots, s_n = \varsigma(x_n, k_j)$[14], así $u_i^j = u_i(s_1, s_2, \ldots, s_n)$.

[12]Visto en la noción de grafos, $A_i(x)$ es el conjunto de aristas que unen al nodo x y los nodos que pertenecen a $\mathbb{S}(x)$.

[13]Aquí la naturaleza no está considerada.

[14]En la teoría de grafos, los s_i son las aristas que unen el punto inicial x_1 y z_j.

Ejemplo. Recordando el ejemplo del dilema del prisionero, formamos el juego es su forma extensiva representado por:

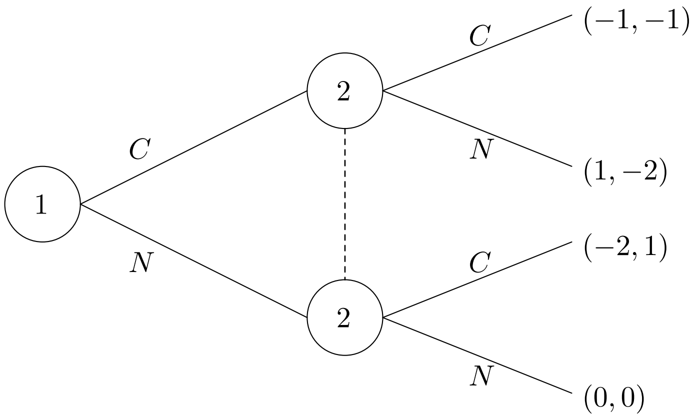


Figura 4

O también como:

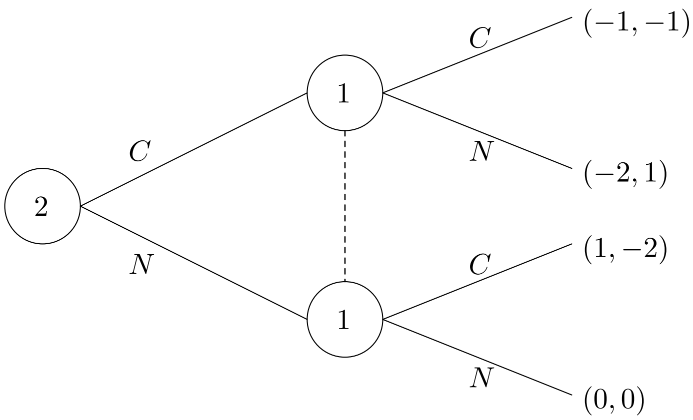


Figura 5

La diferencia entre estas dos representaciones es solo la posición de los jugadores en los nodos. Esto porque representamos la "simultaneidad" de las acciones mediante la linea punteada[15], el cual une los nodos que pertenecen a un mismo conjunto de información. ■

[15]El cual más adelante veremos que es muy importante al momento de pasar un juego en la forma extensiva a un juego en la forma estratégica.

En este otro ejemplo también podemos apreciar que no existe una manera única de representar la forma estratégica en la forma extensiva.

Ejemplo (Juego de las puertas)**.** Dos personas compiten en un juego con las siguientes características. Ambos jugadores están en cuartos diferentes. El jugador 1 tiene la opción de elegir entre dos opciones, continuar jugando o retirarse, las cuales serán representadas con las letras J, R respectivamente. El jugador 2 tiene dos puertas al frente suyo, puerta A y puerta B, al elegir una puerta, debe elegir entre seguir jugando o retirarse.
Estas opciones serán representadas por las letras AJ, AR, BJ y BR. Donde por ejemplo, AJ representa la opción de haber elegido la puerta A y la opción de seguir jugando, de la misma manera se interpretan las otras letras.
Los pagos respectivos están representados en la siguiente tabla:

$1 \setminus 2$	AJ	AR	BJ	BR
J	-1,3	2,0	3,-1	-1,0
R	0,1	1,-1	-1,3	0,0

Cuadro 4.5: Tabla de pagos del juego de las puertas.

Ahora veamos las distintas maneras de representarlo en la forma extensiva.

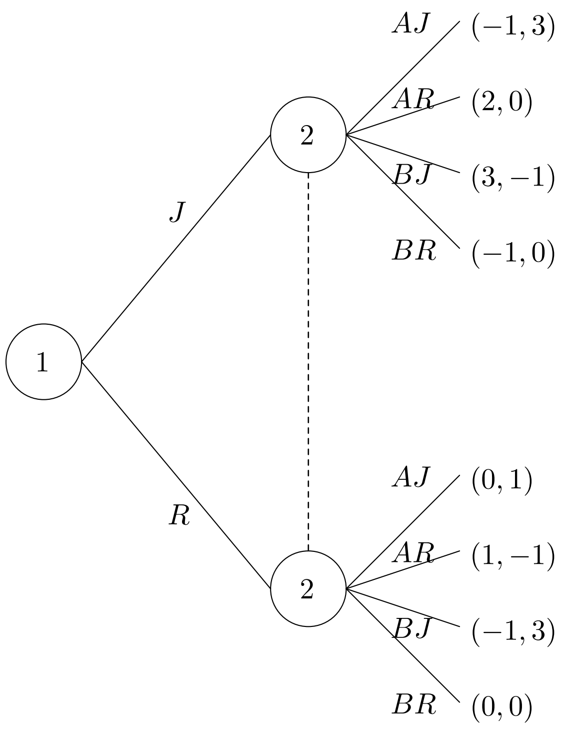


Figura 6: Representación en la forma extensiva 1.

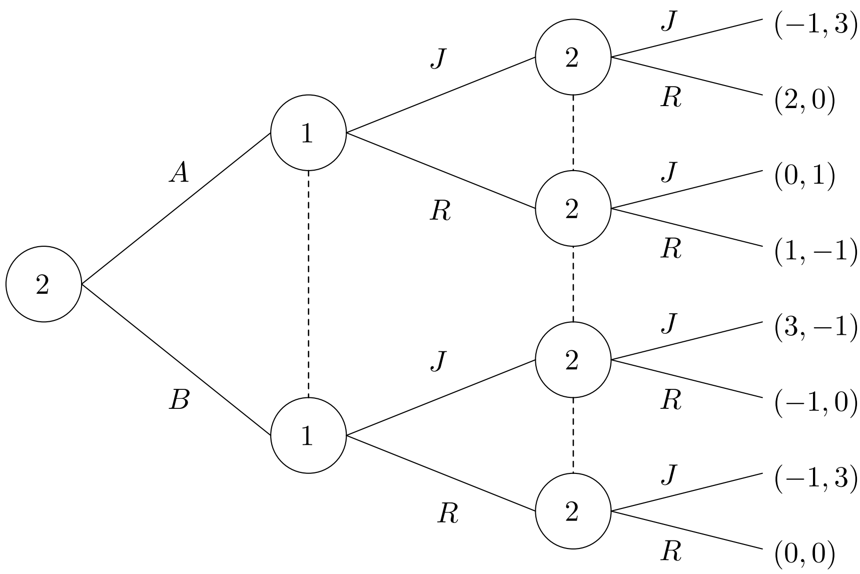


Figura 7: Representación en la forma extensiva 2.

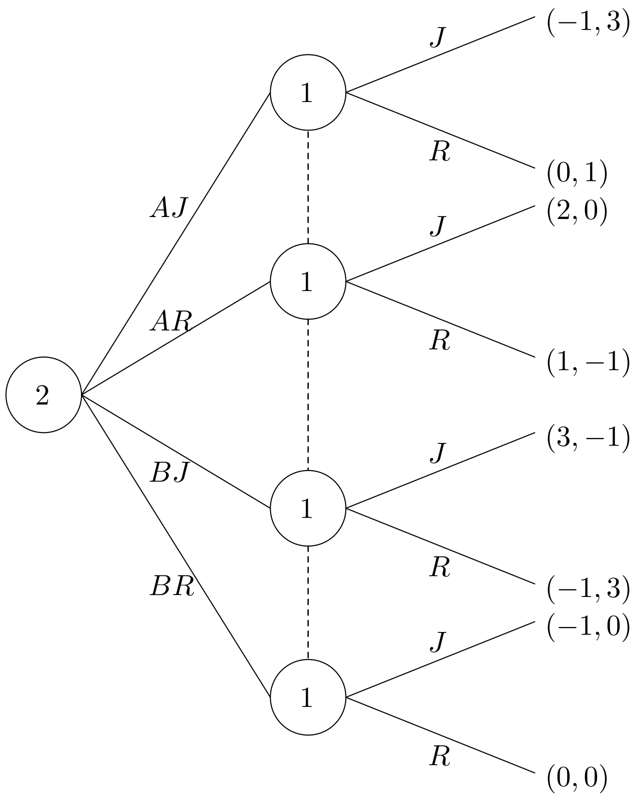


Figura 8: Representación en la forma extensiva 3.

Ahora veamos el caso inverso.
Teniendo el juego en forma extensiva $\Upsilon = \{N, R, \{K_i\}_{i\in N}, \{H_i\}_{i\in N}, \{\{u_i^j\}_{i\in N}\}^{j\in Z_i}\}$, para cada jugador $i \in N$ definamos la relación $\Xi_i : H_i \longrightarrow \Lambda_i$ como $\Xi_i(M) \in A_i(x)$, con $x \in M$.
Ahora definamos $S_0 = A_0(x_0)$, esto es el conjunto de estratégias puras para la naturaleza, y definamos para cada jugador i, $S_i = \{(m_1, m_2, \ldots, m_k)\}$, con $m_j = \Xi_i(M_j)$ para $j = 1, 2, \ldots, k$, donde $k = \#H_i$. Así, $\{M_j\}_{j=1}^{k} = H_i$, es decir, cada M_j es un elemento del conjunto H_i.
Por último definimos $u_i(s) = u_i(s_1, s_2, \ldots, s_n) = E(u_i^j)$, donde esto último representa a la utilidad esperada respecto a la naturaleza de todos los nodos finales k_j tales que la colección única de elementos predecesores, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset K$, sin incluir a la naturaleza, satisface que:
Cada $\varsigma(x_j, x_{j+1}), j \in 1, 2, \ldots, n-1$, y $\varsigma(x_n, k_j)$ es una componente de algún s_i.

Con esto representamos el juego en forma extensiva como un juego en forma estratégica.

Ejemplo. Considerando el juego de la batalla de los sexos. Si consideramos que cada acción se maneja de manera simultánea, esto es, sin saber la decisión del otro participante, la gráfica del árbol de sucesos está dada por:

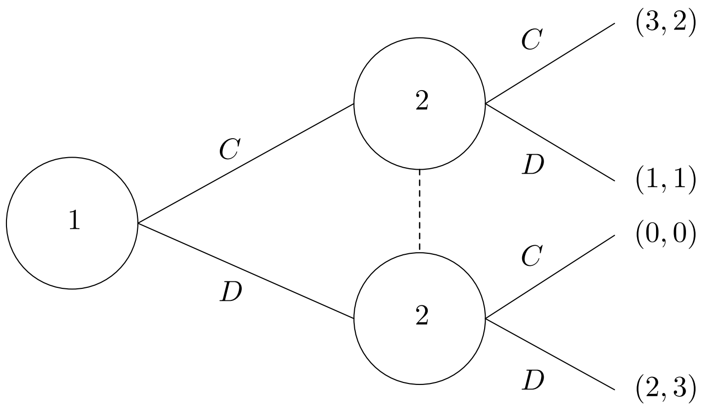


Figura 9

Independientemente de quién juegue primero, tendremos los espacios de estrategias puras $S_1 = \{C, D\}, S_2 = \{C, D\}$ y la siguiente tabla de pagos[16]:

$1 \setminus 2$	C	D
C	3,2	1,1
D	0,0	2,3

Cuadro 4.6: Tabla de pagos de la batalla de los sexos (simultáneo).

El cual comparando con el cuadro 4.6 podemos ver la semejanza.
Por el contrario, si consideramos que el juego es consecutivo, es decir, cada participante conoce la acción del participante anterior, y asumiendo que la señorita juegue primero, la gráfica en la forma extensiva es:

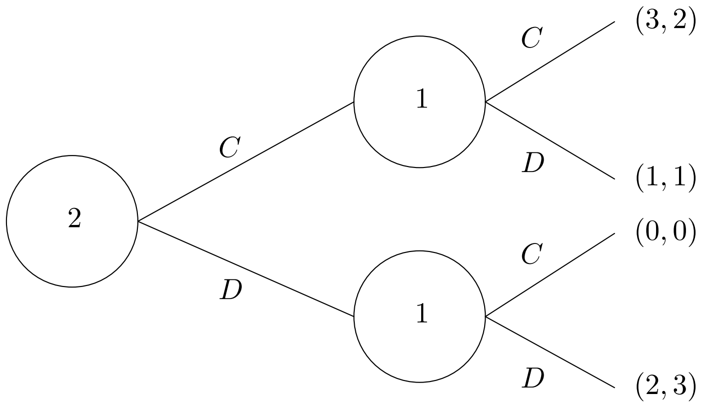


Figura 10

Así tendremos los espacios de estrategias puras $S_1 = \{C, D\}$,
$S_2 = \{(C, C), (C, D), (D, C), (D, D)\}$ y la siguiente tabla de pagos:

$1 \setminus 2$	(C, C)	(C, D)	(D, C)	(D, D)
C	3,2	3,2	1,1	1,1
D	0,0	2,3	0,0	2,3

Cuadro 4.7: Tabla de pagos de la batalla de los sexos (simultáneo).

[16]Recordando que 1 representa a la señorita y 2 al joven.

Estrategias mixtas y estrategias de comportamiento

Ahora extendamos la noción que tenemos de estrategias mixtas para un juego en la forma extensiva.
Recordemos que las estrategias mixtas en los juegos de la forma estratégica consistía en realizar una valoración probabilística de las estrategias puras, es decir, cada estrategia mixta del jugador i, $\sigma_i \in \Sigma_i$ era una variable aleatoria, y si el espacio de estrategias puras era finito, entonces el espacio de estrategias mixtas es vista como el convexo

$$\Delta_i^{'} = \{\alpha \in \mathbb{R}_+^{\#S_i} / \sum_{i=1}^{\#S_i} \alpha_i = 1\}.$$

Para cada jugador $i \in N$, considerando que el conjunto de posibles acciones $A_i(x)$ es finito para cada $x \in K_i$, definamos la función **estrategia de comportamiento** como
$e_i : H_i \longrightarrow \Delta H_i$, donde $e_i(M) \in \Delta_i^{'}(M) = \{\alpha \in \mathbb{R}_+^{\#A_i(x)} / \sum_{i=1}^{\#A_i(x)} \alpha_i = 1 \wedge x \in M\}$, donde α_i es la probabilidad que le da el jugador i a la acción $a_i \in A_i(x)$.
Además, $\Delta H_i = \cup_{M \in H_i} \Delta_i^{'}(M)$.
Luego, el conjunto de estrategias de comportamiento para el jugador i está dado por
$E_i \equiv \{\Delta_i^{'}(M)\}_{M \in H_i}$.
Ahora veamos que relación hay entre las estrategias mixtas y las estrategias de comportamiento. Sabemos que un juego en la forma extensiva puede ser representado en la forma estratégica y viceversa. Así, cuando tenemos un juego en su forma extensiva y lo representamos en su forma estratégica, entonces se genera el espacio de estrategias puras S_i para cada jugador i, con lo cual también se genera el espacio de estrategias mixtas Σ_i para cada jugador.
Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2.3. Dos empresas rivales se dedican al rubro de la construcción, se presenta la opción de realizar un proyecto juntos. La empresa 1 tiene que decidir en participar (P) o retirarse (R), si este decide participar, la empresa 2 tiene la opción de participar o de retirarse, si este decide participar, entonces la empresa 1 debe decidir si invertir más en la calidad de sus materiales. Los pagos la podemos ver en la representación gráfica siguiente:

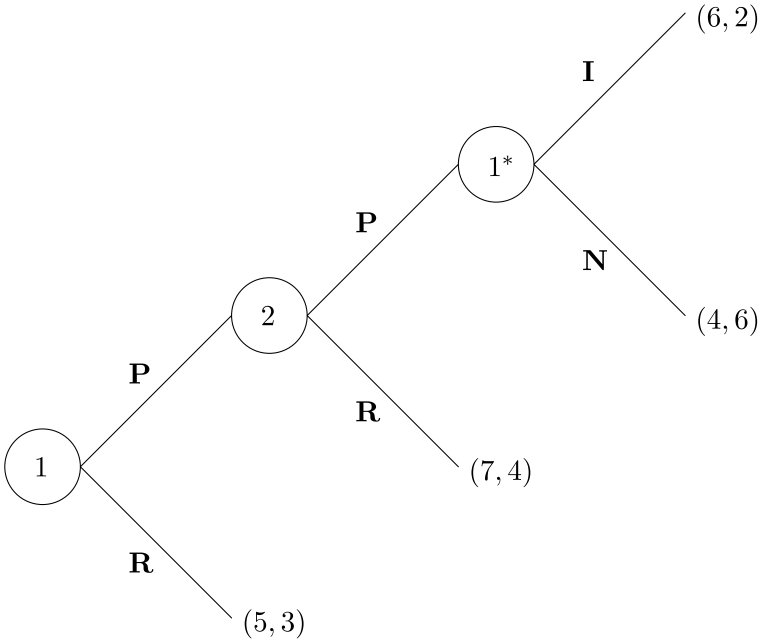


Figura 11

Luego, las estrategias puras de cada participante están dadas por:
$S_1 = \{(P, I), (P, N), (R, I), (R, N)\}$ y $S_2 = \{P, R\}$.
Para el jugador 1 consideremos la estrategia mixta $\sigma_1 = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$, luego la probabilidad que ocurra el evento N como segunda elección del jugador 1[17] es:

$$\sum_{s_1 \in S_1/\Xi_1(1^*)=D} \sigma_1(s_1) = 0 + \frac{1}{2}.$$

Pero analizando el juego, para que se pueda elegir la acción D en el nodo 1^*, el jugador 1 debe elegir en la primera acción el evento P. Así solo tendríamos que la probabilidad que ocurra el evento N como segunda elección del jugador 1 es $\sigma_1(P, N) = 0$. ■

Debemos considerar que dado una estrategia mixta, esta debe mostrar las probabilidades de que ocurra cada evento para cada $M \in H_i$, en el juego extensivo.
Entonces, ¿como relacionar las estrategias mixtas y de comportamiento?.
Veamos la siguiente definición.

Definición 4.2.3. Dado un conjunto de información M, luego de representar el juego en forma extensiva Γ en su forma estratégica G, diremos que una estrategia pura $s_i \in S_i$ es **compatible** con M si la estrategia admite la posibilidad de que el juego visite un nodo en M para alguna estrategia de los demás jugadores.
Además definimos por $S_i^*(M)$ al conjunto de estrategias puras que son compatibles con M.

Para el ejemplo 4.2.3, $S_1^*(\{1^*\}) = \{(P, I), (P, N)\}$.

[17] Representaremos por 1^* al segundo nodo de elección del jugador 1.

Definición 4.2.4. Para cada jugador i y para cada estrategia mixta $\sigma_i \in \Sigma_i$, definimos la estrategia de comportamiento asociada a cada elemento M del conjunto de información del jugador i como:

$$e_i^*(M)(a) = \begin{cases} \dfrac{\displaystyle\sum_{s_i \in S_i^*(M)/\Xi_i(M)=a} \sigma_i(s_i)}{\displaystyle\sum_{s_i \in S_i^*(M)} \sigma_i(s_i)}, & \text{si} \displaystyle\sum_{s_i \in S_i^*(M)} \sigma_i(s_i) > 0 \\ \\ \displaystyle\sum_{s_i \in S_i/\Xi_i(M)=a} \sigma_i(s_i), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 4.2.4. Para el ejemplo 4.2.3 tenemos que $S_1 = \{(P, I), (P, N), (R, I), (R, N)\}$, para el conjunto $M = \{1^*\}$ se tiene que $S_1^*(\{1^*\}) = \{(P, I), (P, N)\}$.
Considerando la estrategia mixta $\sigma_1 = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$, como $\displaystyle\sum_{s_1 \in S_1^*(\{1^*\})} \sigma_1(s_1) = \frac{1}{2} + 0 > 0$, se tiene que:

$$e_i^*(\{1^*\})(I) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 0} = 1$$

y

$$e_i^*(\{1^*\})(N) = \frac{0}{\frac{1}{2} + 0} = 0.$$

Memoria perfecta

Entonces resulta interesante saber, bajo que condiciones podemos asegurar que ambas estrategias pueden dar resultados similares en cuanto al desarrollo del juego.
Primero veamos la siguiente definición.

Definición 4.2.5 (Memoria perfecta)**.** Un juego en la forma extensiva Γ se dice que posee memoria perfecta si para cada jugador $i \in N$ se cumple lo siguiente:

1- i no olvida las acciones que realizó en todo nodo $x \in K_i$.
Esto es, $\forall x^{'}, x^{''}$ con $x^{'} \neq x^{''}$, tal que $x = P(x^{'}) = P(x^{''})$, se cumple que si $x^{'} R\overline{x}, x^{''} R\widetilde{x}, \overline{x} \in K_i$ y $\widetilde{x} \in K_i$ entonces $M_i(\overline{x}) \neq N_i(\widetilde{x})$.
Donde $M_i(\overline{x})$ y $N_i(\widetilde{x})$ representan a elementos del conjuntos de información H_i que poseen como uno de sus nodos (elementos) a $\overline{x}, \widetilde{x}$ respectivamente.

2- i no olvida las informaciones precedentes.
Esto es, $\forall x^{'}, x^{''} \in K_i$ tales que ambos pertenecen a un mismo elemento del conjunto de información $M_i \in H_i$. Si $\widetilde{x} \in K_i$ tal que $\widetilde{x} R x^{'}$, entonces existe $\overline{x} \in N_i(\widetilde{x})$ tal que $\overline{x} R x^{''}$.
Donde $N_i(\widetilde{x})$ representa al elemento de H_i que posee como uno de sus nodos a $\widetilde{x}$.

Diremos que las estrategias mixtas y de comportamiento son **estratégicamente equivalentes** si se cumple lo siguiente:
Para cada jugador i, las distribuciones de probabilidad relativas a nodos finales del juego en la forma extensiva son iguales, tanto si partimos de que el jugador elige jugar con estrategias mixtas en el juego en forma estratégica o elige jugar con su estrategia de comportamiento, generado por la estrategia mixta del juego estratégico. Además, esto sin importar que estrategia elijan los demás jugadores (mixtas o de comportamiento).
Este resultado lo dio a conocer Harold William Kuhn (1925-2014) en el año 1953 con el siguiente teorema.

Teorema 4.2.2 (Teorema de Khun)**.** En un juego con memoria perfecta, las estrategias mixtas y de comportamiento asociado son estratégicamente equivalentes.

Veamos ahora el siguiente ejemplo en la cual se puede apreciar que en un juego donde no hay memoria perfecta no se cumple la equivalencia estratégica.

Ejemplo (Juego con pérdida de memoria)**.** Consideremos el siguiente juego en la forma extensiva:

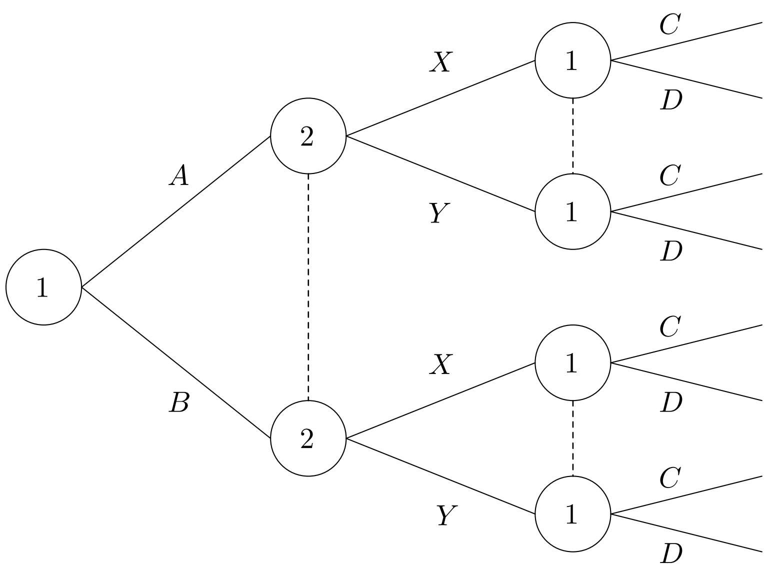


Figura 12

Aquí podemos apreciar que existe memoria perfecta, donde sus estrategias puras luego de pasar al juego en su forma estratégica son dadas por:
$S_1 = \{(A,C,C),(A,C,D),(A,D,C),(A,D,D),(B,C,C),(B,C,D),(B,D,C),(B,D,D)\}$ y $S_2 = \{X,Y\}$.
Analizando para el jugador 1. Dado cualquier $\sigma_1 \in \Sigma_1$ se tendría la estrategia de comportamiento $E_1 = \{E_{11}, E_{12}, E_{13}\}$ asociada a los tres elementos de su conjunto de información.
Ahora consideremos el mismo juego pero donde no hay memoria perfecta:

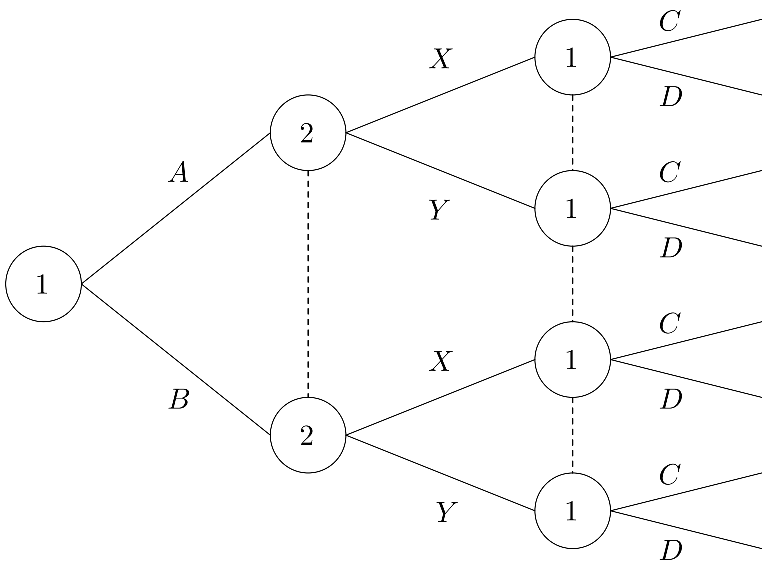


Figura 13

Aquí podemos apreciar que el jugador 1 olvida que acción realizó en su primer juego.
En este caso, los conjuntos de estrategias puras en el juego estratégico son:
$S_1 = \{(A,C),(A,D),(B,C),(B,D)\}$ y $S_2 = \{X,Y\}$.
Consideremos ahora la estrategia mixta $\sigma_1 = (\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2})$, entonces la estrategia de comportamiento asociado es $E_1 = \{(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$.
La estrategia E_1 no es estrategicamente equivalente a σ_1, ya que si el jugador 2 juega la estrategia X, entonces la estrategia σ_1 induce probabilidades $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ en los nodos finales para los juegos $A-X-C$ y $B-X-D$ respectivamente, pero la estrategia E_1 induce una probabilidad de $\frac{1}{4}$ en cada uno de estos juegos finales. ■

4.3. Juegos con información incompleta

Cuando hablamos de información incompleta nos referimos al hecho de no conocer específicamente algunos datos del juego, es decir, no es de conocimiento común.
Por ejemplo, al querer realizar un negocio, los jugadores no saben con seguridad la valoración inicial que le dán cada uno de los demás participantes del negocio. Entonces puede ocurrir que el negocio fracase o que este resulte de la mejor manera. Cada pago final de cada jugador depende de la valoración inicial que este le dé al negocio, es decir, los pagos finales dependen de como aprecia cada jugador el futuro negocio (sus **características iniciales**). Aquí estamos en el caso donde cada jugador desconoce los pagos respectivos de cada uno de los otros jugadores, así cada jugador conoce solamente su propio pago.
También vemos información incompleta cuando se desconoce que acción tomará cada participante y por consiguiente sus pagos. Por ejemplo, en el **juego del posible robo**, cuando se encuentra un delicuente en la calle, observando a otro sujeto y decidiendo si robarle o no. Entonces el delincuente tiene dos opciones, dejarlo ir o asaltarlo, mientras que la posible víctima tiene también dos opciones, defenderse o no reaccionar si el delicuente decide asaltarlo. Cada acción de los participantes dependen de las características que estos poseen al inicio del juego, así el delincuente puede ser una persona audaz y violenta sin miedo a nada o puede ser una persona con miedo ya que puede ser la primera vez que va a robar, mientras que la posible víctima puede ser alguien preparado y sabe defenderse o puede ser una persona que aprecia mucho su vida y en estos casos nunca reacciona.
Resumiendo, los juegos con información incompleta, en su mayoria, son los juegos en los cuales cada jugador desconoce los pagos de los otros jugadores, los otros tipos de juegos de información incompleta se pueden aproximar a estos.
Estos pagos, como lo hemos visto en párrafos anteriores, dependen de las características iniciales que poseen los jugadores. Al conjunto de características de cada jugador se le denominará **tipo**. Así, cada tipo de cada jugador representa al conjunto de sus características iniciales en el juego. Además, cada elemento del tipo de cada jugador será llamado **perfil**.
Un enfoque muy usado en el mundo de la teoría de juegos con información incompleta es el propuesto por John Charles Harsanyi, el cual consiste en asumir que la naturaleza es quien elige de manera aleatoria e independiente los tipos de cada jugador, y esta elección es filtrada a cada uno de los jugadores de manera privada.

¿A que nos referimos con la noción de tipos?

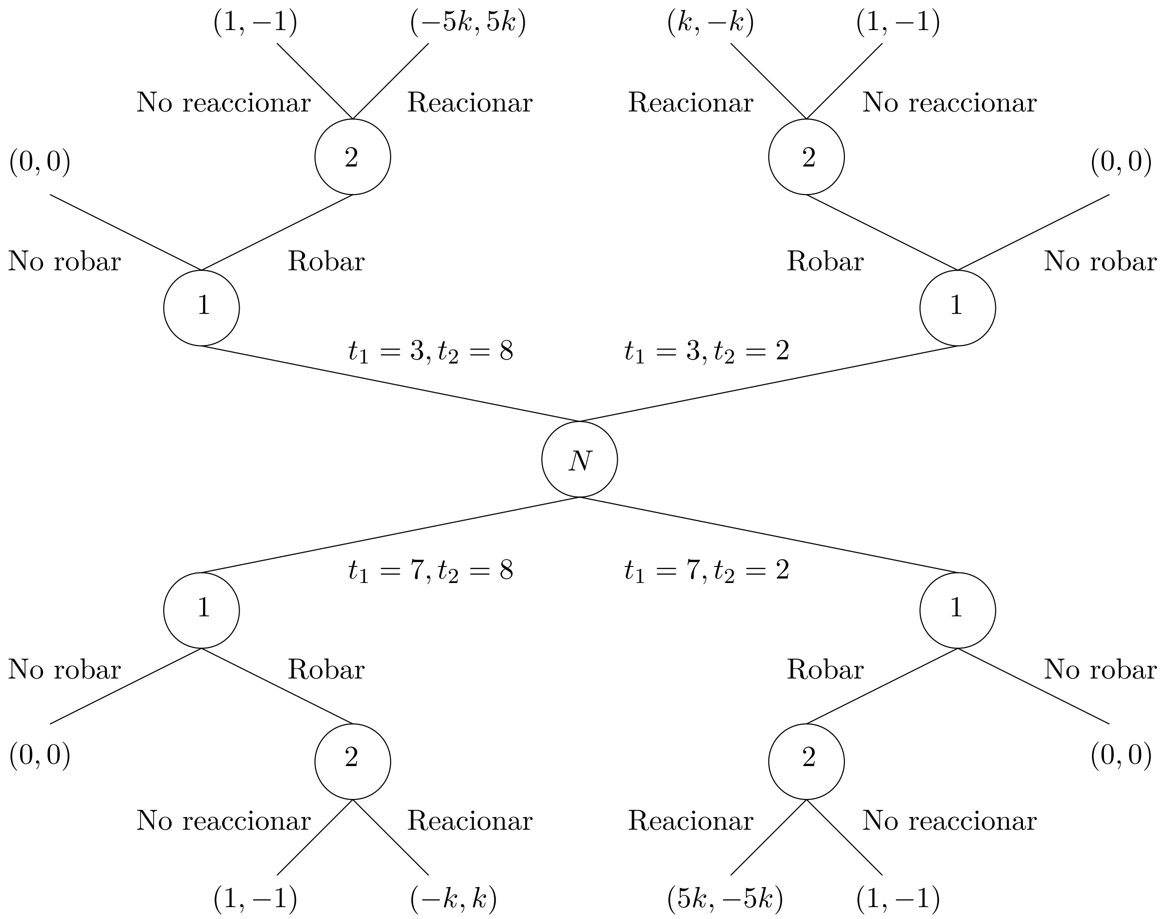
Ahora veamos a que nos referimos cuando hablamos de características iniciales de los jugadores, a los cuales le hemos dado el nombre de tipos. La noción de tipo, de cada jugador, representa[18] al conjunto de cada información privada que posee el jugador. Es decir, las informaciones del jugador que no son de conocimiento común en el juego.
Así, relacionamos a los tipos, los pagos de cada jugador, las creencias sobre los pagos de los otros jugadores, las creencias de las creencias de los pagos de los otros jugadores, así sucesivamente. Por ejemplo, al realizar un negocio, los tipos de los jugadores están dados por la valoración inicial que estos dán al negocio. En el ejemplo del posible robo, los tipos están dados por las características psicológicas y físicas de los participantes.
Además podemos apreciar que en el ejemplo del negocio posible asumimos que el pago final de cada jugador depende exclusivamente de su propio tipo, pero también puede ocurrir que los pagos finales de los jugadores dependan también de los tipos de los otros jugadores. Así, en el ejemplo del posible robo, se puede decir que si el delincuente decide actuar y si la posible víctima decide defenderse, entonces el pago va a ser proporcional a la diferencia de sus perfiles. Esto es, para el delicuente su pago será $k(t_1 - t_2)$ y el pago de la víctima será $k(t_2 - t_1)$, donde k es una constante que está entre $(0, 1)$, t_1 es el perfil del delincuente y t_2 es el perfil de la víctima.
Cuando estamos en un juego en la forma extensiva y observamos que existen conjuntos de información, entonces hablamos de **información imperfecta**.
Veamos con más detalle el juego del posible robo.

Ejemplo (Posible robo)**.** Se tiene un delicuente en la calle, observando a otro sujeto y decidiendo si robarle o no. Entonces el conjunto de estrategias para el delincuente es $S_1 = \{\text{Robar}, \text{No robar}\}$, miestras que para la posible víctima $S_2 = \{\text{Reaccionar}, \text{No Reaccionar}\}$.
La naturaleza da la siguiente distribución en la elección de los tipos: $t_1 = 3$ si el delincuente es inexperto, $t_1 = 7$ si el delincuente es experto, $t_2 = 2$ si la posible víctima decide no defenderse y por último $t_2 = 8$ si la posible víctima se defiende[19].
Los pagos de los participantes son dados de la siguiente manera:
Si el delincuente decide actuar y si la víctima decide defenferse, entonces el pago del delicuente será $k(t_1 - t_2)$ y el pago de la victima será $k(t_2 - t_1)$, donde k es una constante que pertenece al intervalo $(0, 1)$. Por otro lado, si el delincuente decide robar y la víctima decide no defenderse, entonces el pago es 1 para el delincuente y -1 para la víctima.

[18] Representar en el sentido de relacionar (dependencia) toda la información privada de cada jugador con este conjunto.

[19] Como podemos apreciar, estamos resumiendo las distintas personalidades que pueden ocurrir en solo dos casos, tanto para el delincuente como para la posible víctima. Así estamos asegurando que los jugadores solo se van a comportar como uno de los casos opuestos, es decir, el delincuente es inexperto o experto y la posible víctima se defiende o no.

Por último, si el delincuente decide no robar, entonces el pago de cada uno es cero.
Este juego puede verse como un árbol en el juego extensivo como:



4.3.1. Juegos Bayesianos y el equilibrio de Bayes

Tradicionalmente los juegos con información incompleta (también conocidos como juegos con asimetría) son modelados como un juego bayesiano. La probabilidad bayesiana es el nombre que se da a las interpretaciones relacionadas con las probabilidades que se miden como una confianza epistémica.
En un juego con jugadores finitos, ningún jugador sabe con claridad que estrategias van a utilizar los oponentes. Se dá la creencia de que un jugador elegirá sus acciones dependiendo de lo que sabe de sus oponentes.
No va a ser posible saber con claridad que van a realizar los jugadores, pero al menos los jugadores deben saber, de conocimiento común, que todos son bayesianos racionales.
Un jugador bayesiano asigna una cierta probabilidad subjetiva a cada estrategia pura que posee. Entonces cada jugador escoge una estrategia que maximiza su pago esperado con respecto a estas probabilidades subjetivas.

Los jugadores bayesianos revisan sus probabilidades subjetivas a medida que obtienen nuevas informaciones, luego deciden sus acciones para maximizar sus pagos esperados, ahora de acuerdo a las creencias actuales.
El juego bayesiano propuesto por Harsanyi en el año 1967, aparte de incluir a la naturaleza como jugador, permite pasar un juego de información incompleta a un juego de información imperfecta. Esto es, la historía del juego no está disponible para todos los jugadores.
Cada jugador tiene creencias iniciales sobre los tipos de los demás jugadores, y estas creencias se van actualizando en función a como estos juegan. La falta de información de conocer los tipos de los jugadores y mediante el modelado de las creencias de los jugadores, nos permite analizar juegos con infomación imperfecta.
Un juego bayesiano posee las siguientes componentes:

- El conjunto de jugadores, el cual será representado por N. Siendo la cantidad de jugadores finito, entonces $N = \{0, 1, \ldots, n\}$, incluyendo a la naturaleza.

- La familia de los conjuntos de estrategias puras de los jugadores $\{S_i\}_{i\in N}$.

- La familia de los tipos de los jugadores $\{\Theta_i\}_{i\in N}$, donde cada Θ_i representa al tipo del jugador i.

- La familia de funciones de probabilidad $\{\pi_i\}_{i\in N}$, donde $\pi_i : \Theta_i \longrightarrow \triangle(\Theta_{-i})$, para cada $i \in N \setminus \{0\}$, y $\triangle(\Theta_{-i})$ representa al conjunto de funciones de probabilidad sobre Θ_{-i}.
  Para cada $t_i \in \Theta_i$, la función de probabilidad $\pi_i(t_i)$, sobre el espacio Θ_{-i}, será representado por $\pi_i(\cdot \mid t_i)$. Así, para cada $t_{-i} \in \Theta_{-i}, \pi_i(t_{-i} \mid t_i)$ denota la probabilidad subjetiva que el jugador i asignaría al caso donde los perfiles de los otros jugadores son t_{-i}, si su perfil es t_i.

- La familia de funciones de utilidad de los jugadores $\{u_i\}_{i\in N}$, donde cada función de utilidad u_i es de la forma $u_i : S \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$, con $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$.
  Esto quiere decir que cada función de pago depende del conjunto de estrategias puras de los jugadores y de los tipos de los jugadores.

Un juego bayesiano será representado por $\Gamma^b = (N, \{S_i\}_{i\in N}, \{\Theta_i\}_{i\in N}, \{\pi_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N})$.
En estos modelos suponemos que los datos iniciales como el conjunto de estrategias de los jugadores y las funciones de probabilidad son de conocimiento común. Las funciones de pago de los jugadores de cierta manera también son de conocimiento común, ya que se conoce la forma de las funciones de pago pero se desconoce su valor, esto porque depende de los posibles perfiles.

La información incompleta se da cuando la naturaleza es la que elije los tipos y los perfiles de los jugadores, y cada perfil $t_i \in \Theta_i$ es revelado exclusivamente a cada jugador i. Además, tenemos que el conjunto de estrategias puras (acción posible) de cada jugador, S_i, vá a depender de su perfil. Para esto definimos las funciones $\varrho_i : \Theta_i \longrightarrow S_i$, a los cuales se les denominarán como: **función de estrategias del jugador i en el juego bayesiano**[20].

Equilibrio de Bayes

Thomas Bayes (1702-1761) fue un matemático que nació en Londres. Estudió el problema de la determinación de la probabilidad de las causas a través de los efectos observados. Es más conocido por su famoso teorema de bayes en probabilidades, el cual se refiere a la probabilidad de un suceso condicionada a otro suceso.
Gracias a los aportes de Bayes en el área de las probabilidades, se ha desarrollado grandes aportes a muchas otras áreas, como por ejemplo en la teoría de juegos con información incompleta, con el famoso equilibrio de Bayes.

Definición 4.3.1. Dado el juego bayesiano $\Gamma^b = (N, \{S_i\}_{i\in N}, \{\Theta_i\}_{i\in N}, \{\pi_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N})$. Un equilibrio de bayes es una familia de funciones $\{\varrho_i\}_{i\in N}$, donde cada $\varrho_i \in S_i^{\Theta_i}$, esto es, $\varrho_i : \Theta_i \longrightarrow S_i$, y que cumplen que:
$\forall i \in N, \forall t_i \in \Theta_i$,

$$\varrho_i(t_i) \in \arg\max_{s_i^* \in S_i} E_i[u_i(s_i^*, \varrho_{-i}(t_{-i}), t) \mid t_i].$$

Para cada jugador i, la función ϱ_i será llamada: **Función de estrategias del jugador i en el juego bayesiano**.

En el caso finito, las funciones de estrategias $\{\varrho_i\}_{i\in N}$ definen un equilibrio bayesiano si:
$\forall i \in N, \forall t_i \in \Theta_i, \forall s_i \in S_i$ se satisface que

$$\sum_{t_{-i}\in\Theta_{-i}} \pi_i(t_{-i} \mid t_i) u_i(\varrho_i(t_i), \varrho_{-i}(t_{-i}), t_i, t_{-i}) \geq \sum_{t_{-i}\in\Theta_{-i}} \pi_i(t_{-i} \mid t_i) u_i(s_i, \varrho_{-i}(t_{-i}), t_i, t_{-i}).$$

Un juego bayesiano, escrito de manera estratégica, como la podemos apreciar en la formulación anterior, se puede representar de manera extensiva, como en el ejemplo del posible robo. En este caso la naturaleza juega primero.
Bajo este análisis, un equilibrio de Bayes es visto como un equilibrio de Nash de un juego con información incompleta que incluye a la naturaleza como jugador, por esta razón se le conoce comunmente al equilibrio de Bayes como **equilibrio bayesiano de Nash**.
La existencia del equilibrio de Bayes es consecuencia de la existencia del equilibrio de Nash.

[20] Notar que con esta definición, al elegir $\varrho(t) = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, estamos eligiendo la estrategia pura $s_i \in S_i$.

Ejemplo (Competición de Cournot con información incompleta)**.** Ahora veremos la competición de Cournot de dos firmas con información incompleta.
La función de utilidad, para la firma i, está dada por $u_i(q_1, q_2) = q_i(t_i - q_i - q_j)$, donde t_i representa al perfil de la firma i, el cual está relacionado a su costo unitario, y q_i representa a su estrategia, esto es, $s_i = q_i$.
Es de conocimiento común que para la firma $1, t_1 = 1$. Esto se interpreta como: La firma 2 tiene información completa acerca de la firma 1. Por otro lado, la firma 2 tiene información privada acerca de su costo unitario.
La firma 1 cree que $t_2 = \frac{3}{4}$, con probabilidad $\frac{1}{2}$, y cree que $t_2 = \frac{5}{4}$, con probabilidad $\frac{1}{2}$. Esta creencia es de conocimiento común.
El termino q_1 es la notación del nivel de producción de la firma 1. Denotaremos por q_2^* a la producción de la firma 2 cuando $t_2 = \frac{5}{4}$, y denotaremos por q_2^{**} a la producción de la firma 2 cuando $t_2 = \frac{3}{4}$.
Así, $\varrho_1(1) = q_1, \varrho_2(\frac{5}{4}) = q_2^*$ y por último $\varrho_2(\frac{3}{4}) = q_2^{**}$.
La función de estrategia de equilibrio de la firma 2, dada por $\varrho_2(\theta_2)$, debe cumplir que:

$$\varrho_2(\theta_2) \in arg\max_{q_2}\{q_2(\theta_2 - q_1 - q_2)\}.$$

Luego, analizando por la condición de primer orden, obtenemos que $\varrho_2(\theta_2) = \frac{\theta_2 - q_1}{2}$.
Por otro lado, la firma 1 no sabe cual es el perfil de la firma 2. Así el pago del jugador 1 es el valor esperado sobre los perfiles de la firma 2. Luego, la función de estrategia de equilibrio, el cual es directamente q_1, satisface que:

$$\varrho_1(1) = q_1 \in arg\max_{q_1}\{\frac{1}{2}q_1(1 - q_1 - q_2^*) + \frac{1}{2}q_1(1 - q_1 - q_2^{**})\}.$$

Entonces, por la condición de primer orden, se tiene que: $q_1 = \frac{2 - q_2^* - q_2^{**}}{4}$.
Desarrollando, obtenemos que:
$\varrho_2(\frac{5}{4}) = q_2^* = \frac{\frac{5}{4} - q_1}{2}$, entonces $2q_2^* = \frac{5}{4} - \frac{2 - q_2^* - q_2^{**}}{4}$. Por lo tanto, $7q_2^* = 3 + q_2^{**}$.
De la misma manera,
$\varrho_2(\frac{3}{4}) = q_2^{**} = \frac{\frac{3}{4} - q_1}{2}$, entonces $2q_2^{**} = \frac{3}{4} - \frac{2 - q_2^* - q_2^{**}}{4}$. Por lo tanto, $7q_2^{**} = 1 + q_2^*$.
De estos dos resultados obtenemos que $q_2^* = \frac{11}{24}, q_2^{**} = \frac{5}{24}$ y además $q_1 = \frac{1}{3}$.
Así obtenemos el equilibrio de Bayes, ϱ_1, ϱ_2, definido anteriormente como
$\varrho_2(\frac{5}{4}) = \frac{11}{24}, \varrho_2(\frac{3}{4}) = \frac{5}{24}$ y $\varrho_1(1) = \frac{1}{3}$. ■

4.3.2. Diseño de mecanismos

Introducción

El **diseño de mecanismos** es un campo de la teoría económica, dedicada a analizar si es posible diseñar un conjunto de reglas que tenga como fin llegar a un objetivo deseado por el diseñador, a este conjunto de reglas se le conoce como **mecanismo**.

Un mecanismo consiste de dos partes: En primer lugar está la especificación de estrategias para cada jugador, normalmente se les conoce como el conjunto de los **mensajes** de los jugadores. Mediante estos mensajes, los jugadores pueden transmitir su información privada pertenecientes al conjunto de sus tipos. En segundo lugar, consiste de una regla que determina qué resultados producen las posibles combinaciones de las estrategias de los jugadores.

Los diseños de mecanismos, según los historiadores, nace con los socialistas utópicos. Pero el desarrollo más importante se dá con el matemático estadounidense de origen polaco Leonid Hurwicz (1917-2008), quien desarrolló teorías importantes e introdujo la noción de compatibilidad de incentivos.

La Teoría de la Compatibilidad de Incentivos cambió el modo en que los economistas pensaban acerca de los resultados, explicando cómo los incentivos individuales pueden constituir una gran diferencia a la hora de tomar decisiones.

En economía teórica, muchas veces lo que se busca es explicar o anticipar los resultados sociales o económicos que las instituciones económicas[21] generan.

En teoría de diseños de mecanismos sucede lo contrario, esto es, identificamos primero nuestro objetivo deseado, luego nos preguntamos si un mecanismos (institución económica) apropiado puede ser diseñado para alcanzar este objetivo, si esto es posible, estudiamos la forma que este mecanismo debe tener.

Según Milgrom (2002) y Fundenberg y Tirole (1990), un mecanismo esencialmente es un conjunto de reglas para guiar las interacciones entre las partes.

Un mecanismo por sí solo no es un juego, pero al dotar a cada uno de los jugadores de una función de utilidad de Von Neumann, los jugadores poseen preferencias sobre el conjunto de resultados. Así, cuando combinamos el mecanismo con estas preferencias, lo que obtenemos sí es un juego.

Si es posible diseñar un mecanismo, el estudio se centra en analizar la forma que este mecanismo debe tener para lograr el objetivo deseado. Para esto se escoge el concepto de solución de un juego, el cual debe ser adoptado por los jugadores.

Tenemos tres conceptos de solución de referencia, los cuales son: el equilibrio en estrategias dominantes, el equilibrio de Nash y el equilibrio de Bayes[22].

---

[21] En economía se conoce como instituciones económicas a las normas, usos y costumbres que rigen las relaciones sociales y económicas entre los miembros de un grupo.

[22] También se le suele llamar **equilibrio bayesiano** o **equilibrio Bayes-Nash**.

Una vez escogido el concepto de solución, diremos que el resultado deseado es **implementable mediante el mecanismo diseñado** si este resultado es producido por estrategias que conforman un equilibrio de la forma del concepto escogido.
El diseño de mecanismos es visto de manera inversa al análisis de la teoría de juegos. Ya que cuando se analiza un juego, se parte de las estrategias que disponen los jugadores y se investiga qué resultados se pueden obtener para el juego. Obteniendo, si es posible, las estrategias de equilibrio, los cuales pueden ser, equilibrios de estrategias dominantes, de Nash o de Bayes.
En este juego, el principal trataría de condicionar su comportamiento según información que conoce de los demás jugadores. Sin embargo, esta información brindada por los jugadores no necesariamente es la verdad o es completa. Por ejemplo, alguien que desea comprar una casa no puede obtener la información simplemente preguntando al vendedor, ya que a este, en algunos casos, le interesa distorsionar la verdad para garantizar la venta. Ante esto, la teoría del diseño de mecanismos ofrece la ventaja de diseñar un juego (mecanismo óptimo) cuyas reglas favorezcan a que los demás participantes actúen del modo que el principal logre el beneficie que deseaba obtener. Así, cuando las reglas del mecanismo y el objetivo del principal se especificaron, el principal aplica algún criterio de solución para predecir el resultado y luego evaluar los resultados según el propósito.

Modelando los diseños de mecanismos

Formalmente, los modelos de los diseños de mecanismos se dividen en dos partes, un ambiente y un mecanismo. En el caso más simple, un ambiente es un trio (N, Ω, Θ), donde $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ representa a los jugadores del mecanismo, los cuales se clasifican en dos tipos, **el principal** y **los participantes**, y cuando es conveniente incluir al diseñador, se escribe $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. $\Theta = \Theta^1 \times \Theta^2 \times \ldots \times \Theta^n$ es el conjunto de los tipos de los jugadores en el juego. Así, para $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \Theta$, tenemos que cada t_i indica la información del jugador i; creencias, preferencias, etc. Por último, Ω es el conjunto de los resultados posibles del juego, donde los jugadores tienen sus preferencias.
Estos perfiles y los posibles resultados generan la función de utilidad individual[23]
$u_i : \Omega \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $u_i(\xi, t)$ denota la rentabilidad o utilidad que el jugador $i \in N$ obtiene cuando el resultado es ξ y los perfiles de los jugadores están dados por t.
Un caso particular se da cuando la utilidad de cada jugador es independiente de los tipos de los otros jugadores, es decir, solo depende de su propio tipo y del posible resultado ξ. Así tendríamos que $u_i : \Omega \times \Theta_i \longrightarrow \mathbb{R}$.
Un mecanismo es un par (S, ω), donde $S = S_0 \times \ldots \times S_n$ es el conjunto de estrategias posibles. Así, S_i es el conjunto de estrategias posibles del jugador $i \in N_0$. Por otro lado, $\omega : S \longrightarrow \Omega$ mapea estrategias posibles para resultados.

[23]También llamada función **payoff**.

Con todo lo anterior, para cada $t \in \theta$ podemos definir el juego en forma estratégica $(N, \{S_i\}_{i\in N}, \{U_i(\cdot, t)\}_{i\in N})$, donde $U_i(s, t) = u_i(\omega(s), t)$.
En la mayoría de los modelos del diseño de mecanismos se asume que los jugadores tienen incertidumbre acerca de lo que conocen los otros participantes. En el modelo bayesiano, esta condición se modela mediante las funciones de probabilidad $\pi_i(t \mid t_i)$, para cada jugador i, el cual describe las creencias de los jugadores.
Entonces, si ahora consideramos el espacio de los perfiles y adicionamos una familia de funciones de probabilidad $\{\pi_i\}_{i\in N}$, formamos un juego bayesiano.
El objetivo es identificar el mecanismo que maximize la **performance**[24] de acuerdo con el propósito requerido. Por ejemplo, el objetivo puede ser encontrar una subasta que maximize el precio de las ventas esperadas.
Como vimos anteriormente, si cada estrategia s_i depende de t_i, tendríamos que
$\xi(t) = \omega(s_1(t_1), s_2(t_2), \ldots, s_n(t_n))$ define una performance correspondiente al mecanismo (S, ω).

Ejemplo. En la sierra de Huancayo hay dos pueblos que requieren energía eléctrica. Estos pueblos serán representados por las letras A y B.
Una compañia energética es la encargada de brindar energía a estos dos pueblos. Esta compañia tiene las siguientes opciones de fuentes de energía: gas, petróleo, energía solar y carbón.
Supongamos que hay dos posibles estados en esta sociedad. En el estado 1, los pueblos prefieren el presente sobre el futuro, esto quiere decir que tienen tasas de descuento temporales más altas. En el estado 2, los pueblos le dan bastante importancia al futuro, lo que significa que sus tasas de descuento son más bajas.
En el pueblo A, en comunidad, el estado 1 preferirá el gas como primera opción, en segundo lugar el petróleo, en tercer lugar el carbón y por último a la energía solar. Mientras que en el estado 2, la lista de mayor a menor preferencia es dada por: energía solar, gas, carbón y petróleo.

[24]Formalmente, una **performance** es uma función que mapea los posibles ambientes en sus resultados.

En el pueblo B, en el estado 1, la lista de mayor a menor preferencia es dada por: energía solar, el petróleo, el carbón y el gas. Mientras que en el estado 2 la lista de mayor a menor preferencia es dada por: el petróleo, el gas, el carbón y la energía solar.
Para resumir, los rankings de los consumidores en los dos estados se presentan en las siguientes tablas.

Estado 1

Pueblo A	Pueblo B
gas	energía solar
petróleo	petróleo
carbón	carbón
energía solar	gas

Estado 2

Pueblo A	Pueblo B
energía solar	petróleo
gas	gas
carbón	carbón
petróleo	energía solar

El objetivo de la compañía energética es seleccionar una fuente de energía con la que ambos pueblos estén felices. Si interpretamos “felices” como alcanzar la primera o la segunda opción de cada uno de los pueblos, entonces el petróleo es la elección óptima en el estado 1, mientras que el gas es la elección óptima en el estado 2.
Matemáticamente tendremos los dos posibles tipos $\theta = \{\text{estado1}, \text{estado2}\}$, los cuales serán representados por E1 al estado 1 y por E2 al estado 2. La función de elección social $f : \theta \longrightarrow S$, el cual representa a una performance, está dada por f(E1)=petróleo y f(E2)=gas.
Supongamos ahora que la compañia no conoce el estado preferente de los pueblos, solo los pueblos conocen su estado preferente, entonces la empresa desconoce si el petróleo o el gas es el óptimo.

Probablemente el mecanismo más sencillo es aquel donde la compañía pidiera a cada pueblo que anuncie su estado preferente. Así, si ambos pueblos anuncian que prefieren el E1, entonces se elegiría al petróleo como fuente energética, si ambos anuncian el E2, entonces se elegiría al gas como fuente energética, y si cada uno prefiere un estado diferente, entonces mediante una moneda se decidirá la fuente energética, entre petróleo y gas.
Notar que en este mecanismo, el pueblo A tiene un incentivo para decidirce por el E2, ya que prefiere el gas antes que el petróleo, esto en cualquiera de los estados. Probabilísticamente podemos decir que si elige el E2, entonces su probabilidad de obtener su resultado preferido aumenta de 0 a $0,5$ si el pueblo B elige el E1 y de $0,5$ a 1 si el pueblo B elige el E2. Por lo tanto, se espera que el pueblo A elija el E2.
Analizando de manera similar, llegamos a que el pueblo B elegiría el E1, ya que prefiere el petróleo antes que el gas en ambos estados.
Con todo esto, llegamos a que el resultado es una probabilidad de 0.5 para el petróleo y de 0.5 para el gas.
Supongamos ahora que la compañía pide a los pueblos participar del mecanismo dado por la siguiente tabla:

		Pueblo B	
		B1	B2
Pueblo A	A1	petróleo	carbón
	A2	energía solar	gas

Entonces tenemos que para el pueblo A sus estrategias disponibles son "A1" y "A2", mientras que para el pueblo B sus estrategias son "B1" y "B2", y los resultados son dados por la tabla anterior.
Pordemos observar que en el estado 1, el pueblo B lograría un mayor beneficio eligiendo la opción "B1", sin importar lo que haga el pueblo A. Esto porque si el pueblo A escoge la opción "A1", entonces se obtendría como resultado al petróleo, el cual el pueblo B preferiría, mientras que si escoge la opción "A2", entonces se obtendría como resultado a la energía solar, el cual es el resultado preferido por el pueblo B. Es decir, la opción "B1" es la "estrategia dominante" para el pueblo B en el estado 1.
Con este análisis, dado que el pueblo B elegirá la opción "B1", entonces el pueblo A tendría que elegir la opción "A1", esto porque prefiere el petróleo antes que la energía solar.
Entonces, en el estado 1, la predicción es que el pueblo A elija la opción "A1" y el pueblo B elija la opción "B1", así (A1,B1) es el único equilibrio de Nash.
Por lo tanto, en el estado 1 el resultado óptmo es el petróleo.

Analizando de igual manera para el estado 2, observamos que la opción "A2" es la estrategia dominante para el pueblo A. Esto porque si el pueblo B decide optar por la opción "B1", entonces se obtendría como resultado a la energía nuclear, el cual es preferido por el pueblo A. Caso contrario, si el pueblo B opta por la opción "B2", entonces se tendría como resultado al gas, el cual también es óptimo para el pueblo A.
Ahora, como el pueblo A elegirá la opción "A2", entonces el pueblo B elegiría la opción "B2" ya que prefiere el gas antes que la energía solar.
Por lo tanto tendríamos que en el estado 2, el único equilibrio de Nash es (A2,B2). Con lo cual se obtendría como resultado óptimo al gas.
Entonces hemos visto que en cualquier estado, el mecanismo implementado en la tabla anterior alcanza el resultado óptimo. Esto incluso cuando el diseñador del mecanismo, el cual es la compañía, no conoce el estado real, o también cuando los pueblos A y B están interesados sólo en sus propias preferencias.
Resumiendo, este mecanismo funciona porque los equilibrios de Nash coinciden con los resultados óptimos en cada estado. Entonces podemos decir que el mecanismo implementa la regla de elección social de la compañía en equilibrio de Nash. $\blacksquare$

CAPÍTULO 5

TEOREMA DE LA ENVOLVENTE DE MILGROM Y SEGAL

5.1. Introducción

El teorema de la envolvente mayormente es presentado en una forma diferencial y casi siempre depende de algunas suposiciones sobre la convexidad o estructura topológica del dominio o las restricciones[9]. Sin embargo no es correcto considerar tales suposiciones en la teoría de los diseños de mecanismos, ya que el conjunto de mensajes X, en el problema de la elección, no necesariamente tiene una estructura necesaria. También puede ocurrir que la función de utilidad no sea diferenciable en algunos puntos de su dominio.
En la teoría del contrato se considera mecanismos de incentivos con espacios de mensajes arbitrarios y funciones de utilidad arbitrarios. Además que la función de utilidad de cada agente no necesita ser diferenciable respecto a su tipo. Sin embargo esta puede ser representada como una integral de la derivada parcial de la función de pago del agente con respecto a su tipo.
El objetivo es eliminar las asimetrías de la información, para así generar un buen contrato y confiabilidad en este. Dentro del estudio económico, ha tomado importancia aquellos análisis relacionados con obtener algún tipo de información privada.
Dentro de la relación que puede existir entre dos individuos, existen diversas maneras de acceder a la información privada, una de estas maneras es a través de un sistema de incentivos.
La teoría de incentivos se ocupa del problema que afronta un planeador (o principal, el que realiza el contrato) cuando sus objetivos no coinciden con los de los miembros de la sociedad (o agentes). La función objetivo del planeador debe depender de la información de los agentes o de su comportamiento.

En este capítulo mostraremos parte del trabajo desarrollado por **Paul Robert Milgrom** y **Ilya R. Segal** en el año 2002, titulado **"Envelope theorems for arbitrary choice sets"**. Aquí se estudia problemas de optimización con conjuntos de selección arbitraria y se muestra que la fórmula de la envolvente tradicional se mantiene en cualquier punto de diferenciación de la función valor.
Además se ofrecen condiciones para que la función valor sea absolutamente continua, diferenciable a la izquierda y a la derecha, o totalmente diferenciable.
Estos resultados se pueden aplicar a la programación convexa, a los problemas de optimización continua, a los problemas con restricciones parametrizadas, para examinar los problemas de producción no convexas, desarrollar la teoría de la "monótona" o estática comparativa "robustas" y a los diseños de mecanismos, el cual será visto en la última sección de este capítulo.
En los últimos años, se han desarrollado numerosas generalizaciones respecto al trabajo de Milgrom y Segal, estas extensiones han sido frecuentemente utilizado para estudiar las restricciones de incentivos en la teoría del contrato y la teoría de juegos.
Primero veremos la formulación general de los problemas de optimización paramétrica desarrollados por Milgrom y Segal. Luego veremos el teorema de la envolvente en la forma integral. Posteriormente, añadiendo una propiedad importante como es la "equidifereciabilidad", mostraremos resultados muy importantes en algunas aplicaciones que veremos seguidamente. Así, se mostrarán dos aplicaciones importantes que serán de gran ayuda para la última sección del capítulo, donde se muestra las aplicaciones a la teoría de los diseños de mecanismos.

Milgrom y Segal derivaron una fórmula al analizar los problemas de optimización dados por:

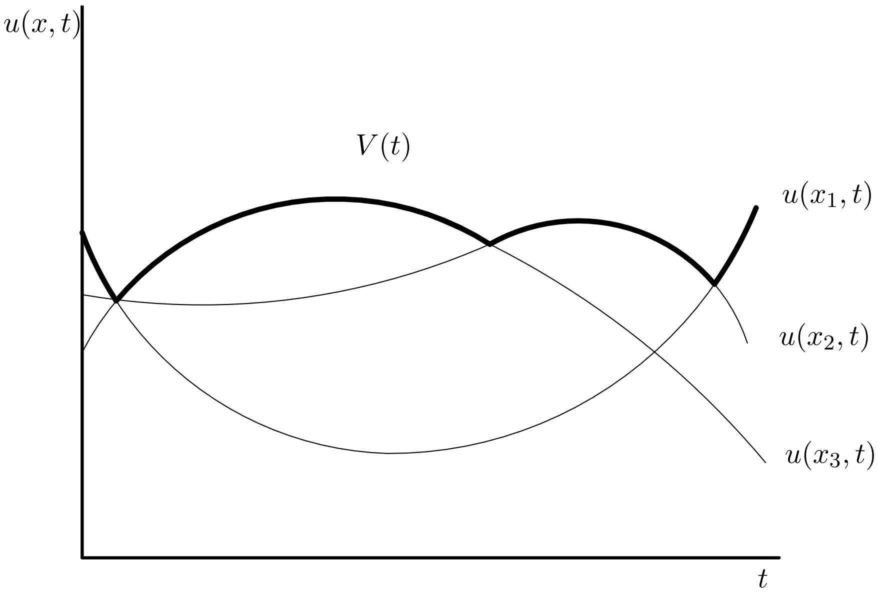
$$\sup_{x\in X} \ u(x,t)$$
$$s.a. \quad t = t_0 \in [0,1].$$

Logrando parametrizar el problema por $t \in [0,1]$, estudiaron la función valor dada por:
$V : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ con

$$V(t) = \sup_{x\in X} \ u(x,t), \tag{5.1}$$

A la función valor a veces se le llama **función envolvente** por causa de su representación gráfica.

Por ejemplo, considerando $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, considerando las funciones $u(x, \cdot) : [0, 1] \to \mathbb{R}$, para cada $x \in X$. La función V es la función que envuelve superiormente esas funciones.



Gráfica 10.- Vista gráfica de la función valor.

La **correspondencia de elección óptima** $X^*(t) = \{x \in X / u(x,t) = V(t)\}$[1] es el conjunto de soluciones óptimas. Para algunos valores del parámetro este conjunto puede ser vacío.

Representaremos por $x^*(t) \in X^*(t)$, para todo t tal que $X^*(t) \neq \varnothing$, a los elementos del conjunto $X^*(t)$ que satisfacen que $u(x^*(t), t) = V(t)$. También se les suele llamar **elección de X^***.

El objetivo del mecanismo planeado por el principal es determinar un resultado $y = \{x^*(t), t\}$, donde este consiste de "una decisión" $x^*(t) \in X$ y un vector t que representa al perfil de los jugadores, que optimize el objetivo general.

Los teoremas de la envolvente establecen una relación entre la función valor y cualquier elección x^* de X^*.

[1] También se suele escribir $X^*(t) \equiv \arg\max_{x \in X} u(x,t)$.

5.2. Teorema de la envolvente

El primer resultado realizado por Milgrom y Segal relaciona la derivada de la función valor y la derivada parcial de la función objetivo con respecto al parámetro t, la cual será representada como $u_2(x,t)$.

Observación 5.2.1. En esta subsección vamos a suponer que $X^*(t)$ es no vacío en varios puntos t, según sea necesario. En la subsección 5.4 veremos como esta condición es asegurada por una estructura adicional disponible en diversas aplicaciones económicas.

Teorema 5.2.1. Sea $t \in [0,1]$ tal que existe un óptimo $x^*(t) \in X^*(t)$, supongamos que $u_2(x^*(t),t)$ existe. Si $t > 0$ y V es diferenciable por la izquierda en t, entonces $u_2(x^*(t),t) \geq V^{'}(t^-)$. Si $t < 1$ y V es diferenciable por la derecha en t, entonces $u_2(x^*(t),t) \leq V^{'}(t^+)$[2]. Si $t \in (0,1)$ y V es diferenciable en t, entonces $V^{'}(t) = u_2(x^*(t),t)$.

Demostración

De (5.1), obtenemos que para todo $t^{'} \in [0,1]$,

$$u(x^*(t),t^{'}) - u(x^*(t),t) \leq V(t^{'}) - V(t). \tag{5.2}$$

Si $t > 0$, tomando $t^{'} \in (0,t)$, dividiendo $t^{'} - t < 0$ a los dos lados de (5.2), obtenemos que

$$\frac{u(x^*(t),t^{'}) - u(x^*(t),t)}{t' - t} \geq \frac{V(t^{'}) - V(t)}{t' - t}.$$

Tomando límite cuando $t^{'} \longrightarrow t$, obtenemos que $u_2(x^*(t),t) \geq V^{'}(t^-)$, si esta derivada existe.
Si $t < 1$, tomando $t^{'} \in (t,1)$, dividiendo $t^{'} - t > 0$ a los dos lados de (5.2), obtenemos que

$$\frac{u(x^*(t),t^{'}) - u(x^*(t),t)}{t' - t} \leq \frac{V(t^{'}) - V(t)}{t' - t}.$$

Tomando límite cuando $t^{'} \longrightarrow t$, obtenemos que $u_2(x^*(t),t) \leq V^{'}(t^+)$, si esta derivada existe.
Por último, cuando V es diferenciable en $t \in (0,1)$, se tiene que

$$V^{'}(t) = V^{'}(t^+) = V^{'}(t^-) = u_2(x^*(t),t). \qquad \blacksquare$$

[2]Notemos que estas representaciones significan: $V^{'}(t^+) = \lim\limits_{t^{'} \to t^+} \dfrac{V(t^{'}) - V(t)}{t' - t}$ y $V^{'}(t^-) = \lim\limits_{t^{'} \to t^-} \dfrac{V(t^{'}) - V(t)}{t' - t}$.

El teorema de la envolvente en la forma integral presentado aquí fue realizado por Milgrom y Segal [10], y ofrece condiciones suficientes para que la función valor sea absolutamente continua. Así, la función valor es diferenciable en casi todo punto y puede ser representada como la integral de su derivada. Este resultado especificamente es de gran importancia en la teoría de los diseños de mecanismos, cuando se trabaja en el desarrollo de mecanismos óptimos [11].

Teorema 5.2.2 (Teorema de la envolvente en la forma integral). Supongamos que $u(x,\cdot):[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ es absolutamente continua para todo $x\in X$. Supongamos también que existe una función integrable (Riemann) $b:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}_+$, tal que $\mid u_2(x,t)\mid\leq b(t)$ para todo $x\in X$ y casi todo $t\in[0,1]$. Entonces V es absolutamente continua.
Si además suponemos que $u(x,\cdot):[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ es diferenciable en $(0,1)$ para todo $x\in X$ y que $X^*(t)\neq\varnothing$ en casi todo punto de $[0,1]$, entonces para cualquier elección $x^*(t)\in X^*(t)$ se cumple que

$$V(t)=V(0)+\int_0^t u_2(x^*(s),s)ds. \tag{5.3}$$

Demostración
Como $u(x,t)$ es absolutamente continua, entonces $u_2(x,t)$ existe en casi todo punto y

$$u(x,t)=u(x,0)+\int_0^t u_2(x,s)ds,$$

esto por el teorema de Lebesgue (ver: teorema 2.6.1, de la página 19).
De la definición de la función valor (5.1), considerando $t^{'},t^{''}\in[0,1]$ tal que $t^{'}<t^{''}$, tenemos que

$$\left|V(t^{''})-V(t^{'})\right|\leq\sup_{x\in X}\left|u(x,t^{''})-u(x.t^{'})\right|. \tag{5.4}$$

Además,

$$u(x,t^{''})=u(x,0)+\int_0^{t^{''}}u_2(x,s)ds$$

y

$$u(x,t^{'})=u(x,0)+\int_0^{t^{'}}u_2(x,s)ds.$$

Por lo tanto,

$$\left|u(x,t^{''})-u(x.t^{'})\right|=\left|\int_{t^{'}}^{t^{''}}u_2(x,s)ds\right|.$$

Reemplazando esto en (5.4), obtenemos que

$$\left|V(t^{''})-V(t^{'})\right|\leq\sup_{x\in X}\left|\int_{t^{'}}^{t^{''}}u_2(x,s)ds\right|\leq\sup_{x\in X}\int_{t^{'}}^{t^{''}}\left|u_2(x,s)\right|ds$$

$$\leq\int_{t^{'}}^{t^{''}}\sup_{x\in X}\left|u_2(x,s)\right|ds\leq\int_{t^{'}}^{t^{''}}b(t)dt.$$

Así concluimos que

$$\left|V(t^{''}) - V(t^{'})\right| \leq \int_{t^{'}}^{t^{''}} b(t)dt, \qquad \forall t^{'}, t^{''} \in [0,1] \text{ con } t^{'} < t^{''}. \tag{5.5}$$

Sea $\varepsilon > 0$ y sean los intervalos arbitrarios disjuntos $\{(t_i^{'}, t_i^{''})\}_{i=1}^{n}$, para $i = 1, \ldots, n$. Ya que b es integrable (Riemann), entonces existe un $\delta > 0$ tal que si

$$\sum_{i=1}^{n} \left|t_i^{''} - t_i^{'}\right| < \delta,$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t_i^{'}}^{t_i^{''}} b(t)dt < \varepsilon. \tag{5.6}$$

De (5.5), tenemos que

$$\left|V(t_i^{''}) - V(t_i^{'})\right| \leq \int_{t_i^{'}}^{t_i^{''}} b(t)dt, \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n \ \ (t_i^{'} < t_i^{''}),$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \left|V(t_i^{''}) - V(t_i^{'})\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{t_i^{'}}^{t_i^{''}} b(t)dt.$$

Por lo tanto, de (5.6)

$$\sum_{i=1}^{n} \left|V(t_i^{''}) - V(t_i^{'})\right| < \varepsilon.$$

Así, V es absolutamente continua, $V^{'}$ existe en casi todo punto y

$$V(t) = V(0) + \int_0^t V^{'}(s)ds. \tag{5.7}$$

Ahora, si $u(x, \cdot)$ es diferenciable en $(0,1)$ para todo $x \in X$ y $X^*(t) \neq \varnothing$ en casi todo punto de $[0,1]$, entonces por el teorema 5.2.1 se cumple que $V^{'}(t) = u_2(x^*(t), t)$ para todo $t \in (0,1)$ tal que $x^*(t)$ existe y podemos reescribir el resultado (5.7) de la siguiente forma:

$$V(t) = V(0) + \int_0^t u_2(x^*(s), s)ds. \qquad \blacksquare$$

Como aplicación a la teoría de los diseños de mecanismos, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.2.1. Supongamos que la función de utilidad de cada jugador i, dada por $u^i : \Omega \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$, es diferenciable en $t \in (0,1)$, absolutamente continua en $[a,b]$ para todo $\xi \in \Omega$ y además que $\sup_{\xi \in \Omega} \left|u_2^i(\xi, \cdot)\right|$ es integrable en $[0,1]$. Entonces la utilidad de equilibrio de cada participante, V^i (la cual es la función valor dada en (5.3) para la función de utilidad del jugador i), en cualquier mecanismo que implemente una regla de elección ξ^*, debe satisfacer la siguiente condición integral:

$$V^i(t) = V^i(0) + \int_0^t u_2^i(\xi^*(s), s)ds.$$

Prueba: Es fácil darse cuenta que para la función $u^i : \Omega \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$, de cada jugador i, se cumplen todas las condiciones del teorema 5.2.2. Por lo tanto, para cada jugador i se cumple que

$$V^i(t) = V^i(0) + \int_0^t u_2^i(\xi^*(s), s)ds. \qquad \blacksquare$$

Los supuestos del teorema 5.2.2 no aseguran que la función valor V sea difereciable en todo $t \in (0,1)$, como lo podemos apreciar en la gráfica 10. Sin embargo, en la gráfica se aprecia que la función valor es derecha e izquierda diferenciable en todas partes.
Esta observación se puede extender desde un conjunto finito hacia conjuntos de elección arbitrarios, siempre que la familia de funciones $\{u(x,\cdot)\}_{x\in X}$[3] satisfaga la siguiente propiedad.

Definición 5.2.1. La familia de funciones $\{u(x,\cdot)\}_{x\in X}$ es equidiferenciable en $t \in (0,1)$ si para toda función $u(x,\cdot)$ que pertenece a la familia $\{u(x,\cdot)\}_{x\in X}$, $\frac{u(x,t^{'})-u(x,t)}{t^{'}-t}$ converge uniformemente para cuando $t^{'} \longrightarrow t$.

Ahora veamos la definición de equicontinuidad de una familia de funciones.

Definición 5.2.2. La familia de funciones $\{u(x,\cdot)\}_{x\in X}$ es equicontinua en $t \in [0,1]$ si para toda función $u(x,\cdot)$ que pertenece a la familia $\{u(x,\cdot)\}_{x\in X}$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $s \in (t-\delta, t+\delta)$ se cumple que $|u(x,s) - u(x,t)| < \varepsilon$. Decimos que $\{u(x,\cdot)\}_{x\in X}$ es equicontinua si es equicontinua en todo $t \in [0,1]$.

Proposición 5.2.1. Si la familia de funciones $\{u(x,\cdot)\}_{x\in X}$ es equidiferenciable en $t \in (0,1)$, entonces es equicontinua en t.

Prueba: Si la familia de funciones $\{u(x,\cdot)\}_{x\in X}$ es equidiferenciable en $t \in (0,1)$, entonces $\frac{u(x,t^{'})-u(x,t)}{t^{'}-t}$ converge a $u_2(x,t)$, esto para toda función $u(x,\cdot)$. Luego, $\frac{u(x,t^{'})-u(x,t)}{t^{'}-t}$ es acotada, por lo que existen $\delta_1 > 0$ y $M > 0$ tal que si $\left|t^{'} - t\right| < \delta_1$, entonces
$\left|u(x,t^{'}) - u(x,t)\right| \leq M\left|t^{'} - t\right|$.
Sea $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{M}\}$, si $\left|t^{'} - t\right| < \delta$, entonces $\left|t^{'} - t\right| < \delta_1$. Por lo tanto

$$\left|u(x,t^{'}) - u(x,t)\right| \leq M\left|t^{'} - t\right|,$$

y como $\left|t^{'} - t\right| < \delta \leq \frac{\varepsilon}{M}$, entonces

$$\left|u(x,t^{'}) - u(x,t)\right| \leq M\left|t^{'} - t\right| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Con esto demostramos que $u(x,\cdot)$ es continua en t, y como esto es para toda función $u(x,\cdot)$, entonces la familia de funciones $\{u(x,\cdot)\}_{x\in X}$ es equicontinua en t. $\blacksquare$

[3]Considerando cada $x \in X$ fijo y arbitrario, obtenemos la función $u(x,\cdot) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Lema 5.2.1. Una condición suficiente para la equidiferenciabilidad de $\{u(x,\cdot)\}_{x\in X}$ en $(0,1)$ es proporcionado por la equicontinuidad de $\{u_2(x,\cdot)\}_{x\in X}$ en (0,1).

Prueba*:* Sea $t \in (0,1)$ fijo y arbitrario. Por el teorema del valor medio 2.2.2, podemos escribir

$$\frac{u(x,t^{'}) - u(x,t)}{t' - t} = u_2(x,s)$$

para s que está entre $t^{'}$ y t, y la condición de equicontinuidad de $\{u_2(x,\cdot)\}_{x\in X}$ en t implica que esta expresión converge uniformemente a $u_2(x,t)$ cuando $t^{'}$ se acerca a t.
Así, $\{u(x,\cdot)\}_{x\in X}$ es equidiferenciable en t. ■

Teorema 5.2.3. Supongamos que la familia de funciones $\{u(x,\cdot)\}_{x\in X}$ es equidiferenciable en $t_0 \in (0,1)$, donde $\sup\limits_{x\in X} |u_2(x,t_0)| < \infty$ y que $X^*(t) \neq \emptyset$ para todo $t \in [0,1]$. Entonces V es derecha e izquierda diferenciable en t_0, donde para cada elección $x^*(t) \in X^*(t)$, las derivadas direccionales de V están dadas por:

$$V^{'}(t_0^+) = \lim_{t\to t_0^+} u_2(x^*(t),t_0) \text{ para } t_0 < 1, \tag{5.8}$$

$$V^{'}(t_0^-) = \lim_{t\to t_0^-} u_2(x^*(t),t_0) \text{ para } t_0 > 0. \tag{5.9}$$

Además, V es diferenciable en $t_0 \in (0,1)$ si y solo si la función $u_2(x^*(\cdot),t_0)$[4] es continua en t_0.

Prueba*:* La equidiferenciabilidad de $\{u(x,\cdot)\}_{x\in X}$ en $t_0 \in (0,1)$ implica la equicontinuidad de $\{u(x,\cdot)\}_{x\in X}$ en t_0, esto por la proposición 5.2.1.
De la definición de la función valor (5.1), tenemos que

$$|V(t) - V(t_0)| \leq \sup_{x\in X} |u(x,t) - u(x,t_0)|.$$

Tomando límite para $t \to t_0$, y como $\{u(x,\cdot)\}_{x\in X}$ es equicontinua en t_0, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0} |V(t) - V(t_0)| &\leq \lim_{t\to t_0}\sup_{x\in X} |u(x,t) - u(x,t_0)| \\ &= \sup_{x\in X}\lim_{t\to t_0} |u(x,t) - u(x,t_0)| = 0.\end{aligned}$$

Así demostramos que V es continua en t_0.
Para $t_0 < 1$, considerando $t_0 < t^{'} < t^{''} < 1$. De (5.1) y como $X^*(t) \neq \emptyset$, tenemos que

$$\frac{u(x^*(t^{'}),t^{''}) - u(x^*(t^{'}),t^{'})}{t'' - t'} \leq \frac{V(t^{''}) - V(t^{'})}{t'' - t'} \leq \frac{u(x^*(t^{''}),t^{''}) - u(x^*(t^{''}),t^{'})}{t'' - t'}. \tag{5.10}$$

Tomando el límite superior para $t^{'} \to t_0^+$ en (5.10), usando la equicontinuidad de $\{u(x,\cdot)\}_{x\in X}$ y la continuidad de V en t_0, obtenemos que

$$\limsup_{t'\to t_0^+} \frac{u(x^*(t^{'}),t^{''}) - u(x^*(t^{'}),t_0)}{t'' - t_0} \leq \frac{V(t^{''}) - V(t_0)}{t'' - t_0} \leq \frac{u(x^*(t^{''}),t^{''}) - u(x^*(t^{''}),t_0)}{t'' - t_0}. \tag{5.11}$$

[4]La función mencionada está dada por $u_2(x^*(\cdot),t_0) : [0,1] \to \mathbb{R}$.

También por la equidiferenciabilidad de $\{u(x,\cdot)\}_{x\in X}$ en t_0, de (5.11) obtenemos que

$$\limsup_{t'\to t_0^+} \; u_2(x^*(t^{'}),t_0)+\frac{o(t^{''}-t_0)}{t^{''}-t_0}\leq \frac{V(t^{''})-V(t_0)}{t^{''}-t_0}\leq u_2(x^*(t^{''}),t_0)+\frac{o(t^{''}-t_0)}{t^{''}-t_0}. \quad (5.12)$$

Tomando el límite inferior para cuando $t^{''}\to t_0^+$ en (5.12) (teniendo presente que $\sup_{x\in X}|u_2(x,t_0)|<\infty$), obtenemos que

$$\limsup_{t'\to t_0^+} \; u_2(x^*(t^{'}),t_0)\leq V^{'}(t_0^+)\leq \liminf_{t''\to t_0^+} \; u_2(x^*(t^{''}),t_0). \quad (5.13)$$

De esto de obtiene que

$$\limsup_{t'\to t_0^+} \; u_2(x^*(t^{'}),t_0)\leq \liminf_{t''\to t_0^+} \; u_2(x^*(t^{''}),t_0).$$

Por lo tanto, el límite $\lim_{t\to t_0^+} u_2(x^*(t),t_0)$ existe[5] y de (5.13) obtenemos que

$$V^{'}(t_0^+)=\lim_{t\to t_0^+} u_2(x^*(t),t_0).$$

Si tomamos ahora $t_0>0$, considerando $0<t^{''}<t^{'}<t_0$. De (5.1) y como $X^*(t)\neq\emptyset$, tenemos que

$$\frac{u(x^*(t^{'}),t^{''})-u(x^*(t^{'}),t^{'})}{t^{''}-t^{'}}\geq \frac{V(t^{''})-V(t^{'})}{t^{''}-t^{'}}\geq \frac{u(x^*(t^{''}),t^{''})-u(x^*(t^{''}),t^{'})}{t^{''}-t^{'}}. \quad (5.14)$$

Tomando el límite inferior para $t^{'}\to t_0^-$ en (5.14), usando la equicontinuidad de $\{u(x,\cdot)\}_{x\in X}$ y la continuidad de V en t_0, obtenemos que

$$\frac{u(x^*(t^{''}),t^{''})-u(x^*(t^{''}),t_0)}{t^{''}-t_0}\leq \frac{V(t^{''})-V(t_0)}{t^{''}-t_0}\leq \liminf_{t'\to t_0^-} \; \frac{u(x^*(t^{'}),t^{''})-u(x^*(t^{'}),t_0)}{t^{''}-t_0}. \quad (5.15)$$

También por la equidiferenciabilidad de $\{u(x,\cdot)\}_{x\in X}$ en t_0, de (5.15) obtenemos que

$$u_2(x^*(t^{''}),t_0)+\frac{o(t^{''}-t_0)}{t^{''}-t_0}\leq \frac{V(t^{''})-V(t_0)}{t^{''}-t_0}\leq \liminf_{t'\to t_0^-} \; u_2(x^*(t^{'}),t_0)+\frac{o(t^{''}-t_0)}{t^{''}-t_0}. \quad (5.16)$$

Tomando el límite superior para cuando $t^{''}\to t_0^-$ en (5.16), obtenemos que

$$\limsup_{t''\to t_0^-} \; u_2(x^*(t^{''}),t_0)\leq V^{'}(t_0^-)\leq \liminf_{t'\to t_0^-} \; u_2(x^*(t^{'}),t_0). \quad (5.17)$$

De esto de obtiene que

$$\limsup_{t\to t_0^-} \; u_2(x^*(t),t_0)\leq \liminf_{t\to t_0^-} \; u_2(x^*(t),t_0).$$

[5]Teniendo presente que para toda función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ siempre se cumple que:

$$\liminf_{x\to x_0} \; f(x)\leq \limsup_{x\to x_0} \; f(x).$$

Por lo tanto, el límite $\lim\limits_{t \to t_0^-} u_2(x^*(t), t_0)$ existe y de (5.17) obtenemos que

$$V^{'}(t_0^-) = \lim_{t \to t_0^-} u_2(x^*(t), t_0).$$

Podemos ver fácilmente que V es diferenciable en t_0 si y solo si la función $u_2(x^*(t), t_0)$ es continua en t_0. ■

El siguiente ejemplo muestra como una simple diferenciabilidad de $u(x,t)$ en la variable t, para todo $x \in X$, no es suficiente para garantizar las conclusiones del teorema 5.2.3.

Ejemplo. Sea $X = \{1, 2, \ldots\}$ y

$$u(x,t) = \begin{cases} t sen \ln t & , \text{ si } t > \exp\{\frac{-\pi}{2} - 2\pi x\}, \\ -t & , \text{ si } t \leq \exp\{\frac{-\pi}{2} - 2\pi x\}. \end{cases}$$

De la definición de la función valor dada en (5.1), obtenemos que $V(t) = t sen \ln t$. Observemos que $u(x,t)$ es diferenciable en la variable t para todo x, además $|u_2(x,t)| \leq 2$ para todo (x,t). Sin embargo, la familia $\{u(x, \cdot)\}_{x \in X}$ no es equidiferenciable en $t = 0$, esto porque

$$\sup_{x \in X} \left| \frac{u(x,t) - u(x,0)}{t - 0} - u_2(x,0) \right| = \sin \ln t + 1,$$

y

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \sin \ln t + 1 \nrightarrow 0.$$

También vemos que V no tiene derivada derecha e izquierda en 0, ya que $t > 0$ y

$$\limsup_{t \to 0^+} \frac{V(t)}{t} = 1 \neq \liminf_{t \to 0^+} \frac{V(t)}{t} = -1.$$

Por lo tanto, no se cumplen los resultados del teorema 5.2.3. ■

5.3. Aplicaciones matemáticas

5.3.1. Programación convexa con parametrización convexa

Si la función objetivo es cóncava, tanto en la variable x como en el parámetro t, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 5.3.1. Supongamos que X es un conjunto convexo y $u : X \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función cóncava. También supongamos que dado $t \in (0,1)$ existe algún $x^*(t) \in X^*(t)$ de modo que $u_2(x^*(t), t)$ exista. Entonces V es diferenciable y $V^{'}(t) = u_2(x^*(t), t)$.

Demostración
Considerando $t^{'}, t^{''} \in [0,1]$ y $\lambda \in [0,1]$. Por la convexidad de X y por la concavidad de u, para cualquier $x^{'}, x^{''} \in X$ se tiene que

$$u(\lambda x^{'} + (1-\lambda)x^{''}, \lambda t^{'} + (1-\lambda)t^{''}) \geq \lambda u(x^{'}, t^{'}) + (1-\lambda)u(x^{''}, t^{''}).$$

Tomando el supremo sobre los $x^{'}, x^{''} \in X$ y como $\lambda t^{'} + (1-\lambda)t^{''}) \in [0,1]$, entonces

$$V(\lambda t^{'} + (1-\lambda)t^{''}) \geq \lambda V(t^{'}) + (1-\lambda)V(t^{''}).$$

Así demostramos que V es cóncava. Esto implica que V es direccionalmente diferenciable en cada $t \in (0,1)$, y por la proposición 2.4.3 se cumple que $V^{'}(t^{-}) \geq V^{'}(t^{+})$.
Por otro lado, por el teorema 5.2.1, se cumple que $V^{'}(t^{-}) \leq u_2(x^*(t), t) \leq V^{'}(t^{+})$,
por lo tanto V es diferenciable en t con $V^{'}(t) = u_2(x^*(t), t)$. ■

5.3.2. Funciones objetivo continuas en conjuntos de elección compactos

Considerando X un espacio compacto no vacío, además que $u(x,t)$ es semicontinua superior en X, entonces $X^*(t)$ es no vacío para todo $t \in [0,1]$. Si además $u_2(x,t)$ es continua, entonces todas las hipótesis de los teoremas 5.2.2 y 5.2.3 se satisfacen.
También en este caso, nosotros podemos simplificar las expresiones para las derivadas direccionales de V y la caracterización de los puntos de diferenciabilidad de V.
Estos resultados lo mostramos en el siguiente corolario.

Corolario 5.3.2. Supongamos que X es un espacio compacto no vacío, $u(x,t)$ es semicontinua superior en X y $u_2(x,t)$ es continua en ambas variables. Entonces,

i) V es absolutamente continua y la representación integral (5.3) se cumple.

ii) $V^{'}(t^{+}) = \max\limits_{x \in X^*(t)} u_2(x,t)$ para cada $t \in [0,1)$ y $V^{'}(t^{-}) = \min\limits_{x \in X^*(t)} u_2(x,t)$ para cada $t \in (0,1]$.

iii) V es diferenciable en un determinado $t \in (0,1)$ si y solo si $\{u_2(x,t)/x \in X^*(t)\}$ posee un único valor, y en este caso $V^{'}(t) = u_2(x,t)$ para todo $x \in X^*(t)$.

Prueba: De dato tenemos que $u(x,t)$ es semi-continua superior en x, y como X es compacto, entonces por el teorema 2.5.1 de la página 18, $X^*(t) \neq \emptyset$ para todo $t \in [0,1]$.
La función continua $|u_2(x,t)|$ es acotada en $X \times [0,1]$, entonces tenemos que es integrable acotada. Además $u(x,t)$ es absolutamente continua en la variable t para cada $x \in X$, esto ya que $u(x,t)$ es continuamente diferenciable en la variable t.
Con todo esto, vemos que se cumplen todas las condiciones del teorema de la envolvente en la forma integral (teorema 5.2.2). Así demostramos el item i).

Luego, la continuidad de $u_2(x,t)$ y la compacidad de X y $[0,1]$ implican que la familia de funciones $\{u_2(x,\cdot)\}_{x\in X}$ sea equicontinua. Entonces por el lema 5.2.1, la familia de funciones $\{u(x,\cdot)\}_{x\in X}$ es equidiferenciable en cada $t \in (0,1)$.
Como $u_2(x,t)$ es acotada en el compacto $X \times [0,1]$ y $X^*(t) \neq \emptyset$ para todo $t \in [0,1]$, entonces se cumplen todas las condiciones necesarias del teorema 5.2.3. Por lo tanto las derivadas direccionales de V están dadas por (5.8) y (5.9).
Tomando $t_0 \in [0,1)$, por el teorema 2.7.1 de la página 24 (las condiciones se cumplen ya que considerando $X, P = [0,1], \varphi(p) = X$ y $f = u$, entonces el problema de optimización parametrizado, $(X, [0,1], X, u)$, cumple que $X, [0,1]$ son espacios métricos, la correspondencia $\varphi(p) = X$ es valor compacta y continua y $u(x,t)$ es continua en la variable t) y la continuidad de u_2, obtenemos que para cada elección $x^*(t) \in X^*(t)$ se cumple que

$$\limsup_{t\to t_0^+} u_2(x^*(t), t_0) \leq \max_{x\in X^*(t_0)} u_2(x, t_0). \tag{5.18}$$

Así, de (5.8) y (5.18) obtenemos que

$$V'(t_0^+) \leq \max_{x\in X^*(t_0)} u_2(x, t_0), \tag{5.19}$$

y por el teorema 5.2.1 obtenemos que $u_2(x,t_0) \leq V'(t_0^+)$, con lo cual

$$\max_{x\in X^*(t_0)} u_2(x, t_0) \leq V'(t_0^+). \tag{5.20}$$

Por lo tanto, de (5.19) y (5.20)

$$V'(t_0^+) = \max_{x\in X^*(t_0)} u_2(x, t_0).$$

Tomando ahora $t_0 \in (0,1]$, igualmente por el teorema 2.7.1 y la continuidad de u_2, tenemos que para cada elección $x^*(t) \in X^*(t)$ se cumple que

$$\min_{x\in X^*(t_0)} u_2(x, t_0) \leq \liminf_{t\to t_0^-} u_2(x^*(t), t_0). \tag{5.21}$$

Así, de (5.9) y (5.21) obtenemos que

$$\min_{x\in X^*(t_0)} u_2(x, t_0) \leq V'(t_0^-), \tag{5.22}$$

y por el teorema 5.2.1 obtenemos que $V'(t_0^-) \leq u_2(x,t_0)$, con lo cual

$$V'(t_0^-) \leq \min_{x\in X^*(t_0)} u_2(x, t_0). \tag{5.23}$$

Por lo tanto, de (5.22) y (5.23)

$$V'(t_0^-) = \min_{x\in X^*(t_0)} u_2(x, t_0).$$

Así demostramos el item ii).

Ahora, si V es diferenciable en $t_0 \in (0,1)$, entonces $V^{'}(t_0^+) = V^{'}(t_0^-)$. Es decir, $\max\limits_{x\in X^*(t_0)} u_2(x,t_0) = \min\limits_{x\in X^*(t_0)} u_2(x,t_0)$. Así, el comjunto $\{u_2(x,t)/x \in X^*(t)\}$ posee un único valor, entonces $V^{'}(t_0) = u_2(x,t_0)$ para todo $x \in X^*(t_0)$.
Por otro lado, si $\{u_2(x,t)/x \in X^*(t)\}$ posee un único valor, entonces $V^{'}(t_0^+) = u_2(x,t_0) = V^{'}(t_0^-)$ para todo $x \in X^*(t_0)$. Por lo tanto, $V^{'}(t_0^+) = V^{'}(t_0^-)$. Así demostramos que V es diferenciable en t_0.
Con esto demostramos el item iii). ■

El siguiente ejemplo muestra que sin la condición de la compacidad de X, en el corolario 5.3.2, no obtenemos las conclusiones del corolario respectivamente.

Ejemplo. Sea $X = \{0\} \cup (\frac{1}{2}, 1]$ y

$$u(x,t) = \begin{cases} -(t-x)^2, & \text{para} \quad x \in (\frac{1}{2},1], \\ \frac{1}{2} - t, & \text{para} \quad x = 0. \end{cases}$$

Trabajando con la topología euclidiana en X, podemos notar que la función u cumple con las condiciones del corolario 5.3.2 a excepción de la compacidad de X.
Para $t \in [0, \frac{1}{2}], -(t-x)^2 < 0$ para $x \in (\frac{1}{2}, 1]$ y $\frac{1}{2} - t \geq 0$ para $x = 0$, entonces $X^*(t) = \{0\}$ con $V(t) = \frac{1}{2} - t$. Si $t \in (\frac{1}{2}, 1], \frac{1}{2} - t < 0$ para $x = 0$ y $-(t-x)^2 \leq 0$ para $x \in (\frac{1}{2}, 1]$, con $-(t-x)^2 = 0$ si $x = t$. Así, $X^*(t) = \{t\}$, con $V(t) = 0$.
Entonces

$$V(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - t, & \text{para} \quad t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 0, & \text{para} \quad t \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

donde

$$V^{'}(\frac{1}{2}^+) = \lim_{t\to\frac{1}{2}^+} \frac{V(t) - V(\frac{1}{2})}{t - \frac{1}{2}} = \lim_{t\to\frac{1}{2}^+} \frac{0-0}{t-\frac{1}{2}} = 0$$

y

$$V^{'}(\frac{1}{2}^-) = \lim_{t\to\frac{1}{2}^-} \frac{V(t) - V(\frac{1}{2})}{t - \frac{1}{2}} = \lim_{t\to\frac{1}{2}^-} \frac{\frac{1}{2} - t - 0}{t - \frac{1}{2}} = -1.$$

Así, V no es diferenciable en $t = \frac{1}{2}$ y

$$V^{'}(\frac{1}{2}^+) = 0 \neq -1 = \max_{x\in X^*(\frac{1}{2})} u_2(x, \frac{1}{2}) = \max_{x\in\{0\}} u_2(x, \frac{1}{2}),$$

$$V^{'}(\frac{1}{2}^-) = -1 = \min_{x\in X^*(\frac{1}{2})} u_2(x, \frac{1}{2}) = \min_{x\in\{0\}} u_2(x, \frac{1}{2}).$$

Esto ya que

$$u_2(x,t) = \begin{cases} -2(t-x), & \text{para} \quad x \in (\frac{1}{2},1], \\ -1, & \text{para} \quad x = 0. \end{cases}$$

Así su derivada derecha no está dada por el item ii) del corolario 5.3.2. ■

5.4. Aplicaciones a los diseños de mecanismos

En esta sección veremos como podemos aplicar el teorema de la evolvente en el campo de los diseños de mecanismos.
Es muy importante los alcances que ha tenido el teorema de la envolvente en los diseños de mecanismos, como en el estudio de mecanismos óptimos, en los resultados de Roger B. Myerson y Bengt Holmstrom [12] y muchos otros más.

Considere un jugador arbitrario del juego cuya función de utilidad está dada por $u : X \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$. Esta función está definida sobre el conjunto de resultados posibles del juego, X, y su tipo $\Theta = [0, 1]$.
La función V, definida en (5.1), representa a la función valor óptimo para el jugador, y el conjunto $X^*(\cdot)$ representa a los resultados posibles para llegar a maximizar la utilidad. Así, cada elemento $x^*(t) \in X^*(t)$ representa una regla de elección que implementa el mecanismo.
Veamos el siguiente teorema.

Teorema 5.4.1. Supongamos que la función de utilidad del jugador, u, es diferenciable y absolútamente continua en su segunda variable, y además se cumple que $\sup\limits_{x\in X} |u_2(x, t)|$ es integrable en $[0, 1]$. Entonces obtenemos que la función valor V, para cualquier regla x^* que implemente el mecanismo, satisface la ecuación (5.3).

Prueba: De dato tenemos que la función $u(x, \cdot)$ es diferenciable y absolutamente continua para todo $x \in X$.
Considerando la función $b : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$, dada por $b(t) = \sup\limits_{x\in X} |u_2(x, t)|$, tenemos que es integrable en $[0, 1]$ por dato, y además se cumple que $|u_2(x, t)| \leq b(t)$ para todo $x \in X$ y todo $t \in [0, 1]$.
Entonces se cumplen todas las condiciones del teorema 5.2.2. Por lo tanto, para cualquier regla x^* que implemente el mecanismo se satisface la ecuación (5.3). $\blacksquare$
Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Consideremos el caso de una subasta de una casa de campo. El resultado de cada licitador está dado de la forma $x = (p, q) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^+$, donde p representa la probabilidad de que el licitador gane la casa de campo y q es el pago monetario que este realiza en la subasta.
Considerando un licitador fijo, elegido arbitrariamente, consideraremos que su función de utilidad es de la forma $u((p, q), t) = tp - q$, donde t pertenece a su propio tipo. Esto último nos dice que su utilidad solo depende de su propio espacio de perfiles.
Asumamos que el tipo más bajo posible para el licitador es cero.

Es fácil darnos cuenta que la función de utilidad, dada anteriormente, para cada (p, q), es diferenciable y absolutamente continua en t. Por otro lado, $\sup_{(p,q)\in X} |p|$ es integrable en $[0, 1]$. Por lo tanto, del teorema anterior, la función valor $V(t) = \sup_{(p,q)\in X} u((p, q), t)$ satisface la ecuación (5.3). Esto es,

$$V(t) - V(0) = \int_0^t p^*(s)ds.$$

Esto es interpretado como:
En una subasta en la que los licitadores tienen valores privados independientes, la máxima utilidad obtenida de cada licitador, considerando su perfil t, está determinada por sus probabilidades, $p^*(s)$, de ganar la subasta para los perfiles $s \in [0, t]$ y además de la utilidad máxima de su perfil más bajo, $V(0)$. $\blacksquare$

Ahora supongamos que estamos frente a un caso donde el conjunto de los tipos no son unidimensionales, es decir, $\Theta \in \mathbb{R}^m$.
También supongamos que para cada dos puntos $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ existe un camino que los une suavemente. Esto es, existe un camino continuamente diferenciable $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \Theta$ tal que $\gamma(0) = \theta_1$ y $\gamma(1) = \theta_2$.
Siendo S el espacio de mensajes para el jugador, esto es, el espacio de estrategias, y la función $\omega : S \longrightarrow \Omega$ que mapea estrategias en resultados, esto proveniente del mecanismo.
Formamos para cada jugador, el conjunto de resultados posibles $Y = \{\omega(s)/s \in S\}$, donde $Y \subset X$.
Con todo esto, obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 5.4.2. Considerando un jugador fijo y arbtrario. Supongamos que la función de utilidad del jugador, $u : Y \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$, es diferenciable en su segunda variable. Supongamos también que la gradiente $u_2(x, \theta)$ es acotada en $X \times \Theta$, y que el espacio Θ es suavemente conectado.[6] Entonces, para cuaquier camino suave $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \Theta$, tal que $\gamma(0) = \theta_0$ y $\gamma(1) = \theta$, se cumple que

$$V(\theta) - V(\theta_0) = \int_\gamma \frac{\partial u(x^*(s), s)}{\partial \theta} \cdot ds.^7$$

[6] Para todo par de elementos de Θ, existe un camino que las une suavemente.
[7] Esto representa una integral de linea.

Prueba: Considerando el camino suave fijo y arbitrario $\gamma : [0,1] \longrightarrow \Theta$, tal que $\gamma(0) = \theta_0$ y $\gamma(1) = \theta$. Definamos la función $v : X \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, como $v(x,t) = u(x, \gamma(t))$, entonces se cumplen las condiciones del teorema 5.4.1 para v, con la función valor

$$V \circ \gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(V \circ \gamma)(t) = \sup_{x \in X} v(x,t).$$

Así, se cumple que

$$(V \circ \gamma)(1) - (V \circ \gamma)(0) = \int_0^1 v_2(x^*(l), l) dl.$$

Además, como

$$v_2(x,t) = \frac{dv(x,t)}{dt} = \frac{du(x,\gamma(t))}{dt} = \frac{\partial u(x,\gamma(t))}{\partial \theta} \cdot \frac{d\gamma(t)}{dt},$$

entonces se cumple que

$$V(\theta) - V(\theta_0) = V(\gamma(1)) - V(\gamma(0)) = \int_0^1 \frac{\partial u(x^*(\gamma(l)), \gamma(l))}{\partial \theta} \cdot \gamma^{'}(l) dl = \int_\gamma \frac{\partial u(x^*(s), s)}{\partial \theta} \cdot ds. \quad \blacksquare$$

Además de lo expuesto anteriormente, es muy importante, en varios casos de interés en los diseños de mecanismos, que la función valor, V, sea diferenciable. Veamos el siguiente teorema.

Teorema 5.4.3. Supongamos que el mecanismo establece una regla de elección x^*, considerando la función valor de los agentes, V, y que $t_0 \in \arg \max_{t \in (0,1)} V(t)$. Si $\{u(x, \cdot)\}_{x \in X}$ es equidiferenciable en $(0,1)$ y $\sup_{x \in X} |u_2(x, t_0)| < +\infty$. Entonces V es diferenciable en t_0, y $V^{'}(t_0) = u_2(x^*(t_0), t_0) = 0$.

Prueba: De dato tenemos que $\{u(x, \cdot)\}_{x \in X}$ es equidiferenciable en $(0,1)$ y $\sup_{x \in X} |u_2(x, t_0)| < +\infty$, además que $X^*(t) \neq 0$ para todo $t \in [0,1]$, ya que existe una regla de elección x^*. Entonces se cumplen las condiciones del teorema 5.2.3, por lo tanto V es direccionalmente diferenciable en t_0.
Como $t_0 \in \arg \max_{t \in (0,1)} V(t)$, entonces se cumple que

$$V^{'}(t_0^-) = \lim_{t \to t_0^-} \frac{V(t) - V(t_0)}{t - t_0} \geq 0,$$ [8]

y

$$V^{'}(t_0^+) = \lim_{t \to t_0^+} \frac{V(t) - V(t_0)}{t - t_0} \leq 0.$$ [9]

Por lo tanto, $V^{'}(t_0^-) \geq 0 \geq V^{'}(t_0^+)$.
Por el teorema 5.2.1, $V^{'}(t_0^-) \leq u_2(x^*(t_0), t_0) \leq V^{'}(t_0^+)$.
Por lo tanto $V^{'}(t_0) = u_2(x^*(t_0), t_0) = 0$. $\blacksquare$

[8] Ya que $V(t_0) \geq V(t)$ y $t < t_0$.
[9] Ya que $V(t_0) \geq V(t)$ y $t > t_0$.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

En este trabajo se mostró resultados que son de gran importancia en muchas áreas de la matemática, en especial en la teoría de juegos, siendo más específico, en el área de los diseños de mecanismos. Así mismo, los resultados mostrados son muy útiles en la teoría económica, como por ejemplo en la teoría del contrato, en la teoría de incentivos, en la teoría del bienestar, la teoría de subastas, etc.

Uno de los temas abordados en este trabajo fue la teoría de la utilidad esperada de Von Neumman-Morgenstern. Esta teoría es de mucha utilidad en el desarrollo de la teoría de juegos, el cual también es abordado en este trabajo. Desarrollando juegos con información completa e incompleta, tanto en la forma estratégica como extensiva.

Posteriormente se desarrolló la versión del teorema de la envolvente en la forma integral, mostrando aplicaciones a problemas de optimización matemática como la programación convexa con parametrización convexa y cuando las funciones objetivo son continuas en conjuntos de elección compactos. Además de mostrar aplicaciones del teorema de la envolvente en el área de los diseños de mecanismos.

Uno de los resultados más importantes obtenidos fue la diferenciabilidad de la función valor óptimo de los jugadores, esto bajo ciertos supuestos. El cual es muy importante para poder caracterizar el maximo de la función.

La versión del teorema de la envolvente desarrollada en este trabajo relaciona la derivada de la función valor V y la derivada parcial de la función objetivo con respecto al parámetro t $(u_2(x,t))$, bajo los supuestos que la función objetivo $u(x,t)$ sea absolutamente continua respecto al parámetro t y la función $u_2(x,t)$ sea acotada por una función integrable (Riemann).

El teorema de la envolvente en la forma integral se aplica en problemas donde la función objetivo u es parametrizada, pero el conjunto de estrategias factibles X no lo es. De ahí la gran importancia del teorema de la envolvente en los diseños de mecanismos.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Elon Lages Lima.*Curso de análise volume 2.* Tercera edición. IMPA, 1989. 557 p.

[2] Olvi L. Mangasarian. Nonlinear Programming. Primera edición. McGraw-Hill, New York, 1969. 220 p.

[3] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis.* Tercera edición. McGraw-Hill International Editions. Singapore, 1987. 416 p.

[4] Eugen Blum Ruckstuhi. *Teoría de las corresponndencias continuas y correspondencias cerradas.* Revista TECNIA. Lima, Agosto de 1987, vol. 3 No. 2 .

[5] Claude Berge. Espaces Topologiques: Fonctions Multivoques. Primera edición. Dunod, Paris, 1959. 282 p.

[6] Kim C. Border. Fixed point theorems with applications to economics and game theory. Primera edición. Cambridge University, 1985. 129 p.

[7] Olvi L. Mangasarian. Apéndice C: Continuous and Semicontinuous Functions, Minima and Infima. Nonlinear Programming. Primera edición. McGraw-Hill, New York, 1969. 220 p.

[8] Aloísio Araújo. Introdução à Economía Matemática. IMPA, 2011, 120 p.

[9] Lawrence M. Benveniste y José Alexandre Scheinkman. *On The Differentiability of The Value Function in Dynamic Models of Economics.* Econométrica, Vol. 47, No. 3, mayo de 1979.

[10] Paul Milgrom, Ilya Segal. Envelope theorems for arbitrary choice sets. Econométrica, Marzo del 2002, Vol. 70, No. 2.

[11] Drew Fudenberg, Jean Tirole. *Game theory.* Cambridge, Massachusetts, 1991. 579 p.

[12] Paul Milgrom. Tercera sección: The Envelope Theorem and Payoff Equivalence. Putting Auction Theory to Work. Primera edición. Cambridge University, 2004, 337 p.