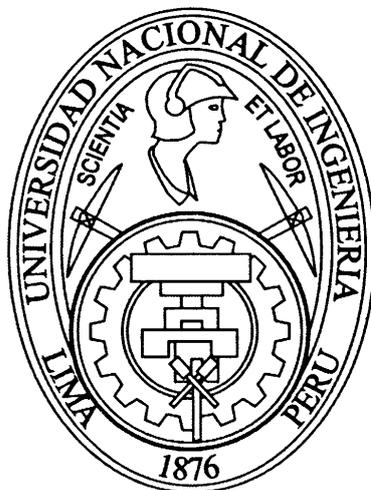


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS



**“MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN DE
VALORES SINGULARES PARA LA
APROXIMACIÓN DEL
ELECTROCARDIOGRAMA FETAL
MEDIANTE SEÑALES OBTENIDAS DE
ELECTRODOS”**

TESIS

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN
CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA

ELABORADO POR

LAURA BETZABÉ LA ROSA OBANDO

Asesor

Mg. WILLIAM CARLOS ECHEGARAY CASTILLO

LIMA-PERU

2018

CIP - CATALOGO DE PUBLICACIÓN

MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN
DE VALORES SINGULARES PARA LA APROXIMACIÓN
DEL ELECTROCARDIOGRAMA FETAL MEDIANTE
SEÑALES OBTENIDAS DE ELECTRODOS / LAURA
BETZABÉ LA ROSA OBANDO. – EPM - FC - UNI, 2018.

p.: il.

Tesis de Maestría—Universidad Nacional de Ingeniería,
Facultad de Ciencias, Sección de Posgrado, Lima, 2018.
Asesor: WILLIAM CARLOS ECHEGARAY CASTILLO

A mis dos
hijos Luis Ángel Gabriel
y Esteban Leonardo los
hombres que cambiaron
mi vida e hicieron que
mis días fueran in-
olvidables.



AGRADECIMIENTO

◇
A mi
madre por
estar a mi lado y
pensar en el bienestar
de mis hijos, a mi asesor el
Profesor W. Echegaray Castillo, y
a todas aquellas personas que
de una u otra forma me
ayudaron a ter-
minar este
trabajo.
◇

RESUMEN

Un método de factorización de matrices es la descomposición de valores singulares (DVS) (o SVD por sus siglas en inglés), que establece que para toda matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$ con $m \leq n$ existen dos matrices unitarias $V \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, y una matriz $\tilde{\Sigma} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tal que $A = V\tilde{\Sigma}U^*$ y $\tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde $\Sigma = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$ y $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r > 0$ son los valores singulares positivos de A .

La descomposición de valores singulares (DVS) tiene múltiples áreas de aplicación como la ingeniería biomédica, teoría de control, el procesamiento de señales e imágenes y el reconocimiento de patrones.

En este trabajo se considera los temas que permiten desarrollar el método de descomposición de valores singulares, sus propiedades y su algoritmo; y se desarrolla una de las aplicaciones de la DVS en el área de la ingeniería biomédica, que consiste en aproximar el electrocardiograma fetal (ECGF) de datos reales de dos diferentes bases de datos **The DaISy database** y **PhysioNet**, que contienen información de electrodos sobre el abdomen y el tórax de una mujer en estado de gestación. Estas señales están mezcladas con otras señales biomédicas, como la del electrocardiograma materno (ECGM) y una señal de ruido (generada por la respiración, la actividad estómacal, las contracciones del útero, y por interferencias externas provocadas por la red eléctrica o el ruido térmico).

INTRODUCCIÓN

La obtención de la actividad cardíaca fetal durante el estado de gestación de una mujer es muy importante para los médicos, ya que permite dar un diagnóstico temprano de alguna anomalía cardíaca del feto.

Una técnica para obtener ECGF consiste en colocar electrodos sobre el abdomen y el tórax de una mujer en estado de gestación. Las señales obtenidas presentan una combinación de las señales ECGM y ECGF acompañadas de una señal de ruido (generada por la respiración, la actividad estómacal, las contracciones del útero, y por interferencias externas provocadas por la red eléctrica o el ruido térmico)[1].

Esta técnica tiene como principal interferencia el ECGM que genera una perturbación al medir el ECGF, pues las señales del corazón materno son mas fuertes que la del corazón del feto.

Este trabajo esta basado en los artículos [1], [2], [3], los libros [4], [5] entre otros más, en los que se considera el siguiente contenido:

En el capítulo 1, inicia con la definición y los tipos de matrices en $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} , seguido de los espacios fundamentales de una matriz para luego estudiar la matriz proyección sobre un subespacio de \mathbb{R}^n . Luego, se da la definición de norma matricial, los valores propios y valores singulares de una matriz y algunas propiedades. Además, se menciona algunos métodos de factorización, como el método de factorización QR y las iteraciones QR que permiten acelerar su convergencia.

En el capítulo 2, se parte de la descomposición en valores singulares de una matriz en $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, luego para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se da una interpretación geométrica de la factorización, además se estudia algunas propiedades que resultan de la DVS.

En el capítulo 3, se detalla el algoritmo Golub - Kahan - Reinsh (GR-DVS) [13], [14], que data de 1970, que ha sido el más usado desde entonces y cuya ejecución consiste de dos etapas. La primera etapa transforma la matriz original $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ con $m \geq n$, mediante transformaciones Householder a una matriz bidiagonal superior de la forma $\begin{bmatrix} B \\ O \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, donde $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz bidiagonal y la matriz $O \in \mathcal{M}_{m-n,n}(\mathbb{R})$ tiene todos sus elementos nulos. La segunda etapa consiste en que mediante la aplicación sucesiva de la factorización QR a la matriz bidiagonal B se

construye una sucesión de matrices del mismo tipo que converge a una matriz diagonal. Este algoritmo ha sido el algoritmo estándar para el cálculo de la DVS de una matriz.

En el capítulo 4, se desarrolla una de las aplicaciones de la DVS en el área de la ingeniería biomédica, que consiste en aproximar los electrocardiogramas fetales de dos diferentes bases de datos **The DaISy database** y **PhysioNet**, que contienen información de electrodos en el abdomen y tórax de una mujer embarazada, que luego se almacenan en una matriz dato M , para luego aplicar el método de la DVS y obtener el ECGF aproximado ejecutando el pseudocódigo en PYTHON 3 del apéndice A-1.

En el capítulo 5, se mencionan las conclusiones de los resultados obtenidos en el capítulo 5.

En el apéndice $A - 1$, contiene el pseudocódigo en **PYTHON 3** que se utilizó en el capítulo 5.

En el apéndice $A - 2$, se hace un breve resumen del electrocardiograma, que es la representación gráfica de la actividad eléctrica del corazón, ya que el ECG fetal como ECG del adulto muestran ondas P, QRS y T correspondientes a los eventos eléctricos del corazón durante cada latido, estas características en el ECGF permiten al médico observar ciertas anomalías para hacer un diagnóstico del estado fetal.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS	x
1 PRELIMINARES	1
1.1 Definiciones y propiedades básicas:	1
1.1.1 Matrices	1
1.1.2 Espacios fundamentales de una matriz	2
1.1.3 Proyección ortogonal	3
1.1.4 Norma matricial	4
1.1.5 Valores propios y valores singulares de una Matriz	5
1.1.6 Factorizaciones de una matriz	8
1.1.6.1 Iteración QR	11
2 DESCOMPOSICIÓN DE VALORES SINGULARES (DVS)	14
2.1 DVS de una matriz	14
2.1.1 Interpretación Geométrica.	17
2.2 Propiedades de la DVS de una matriz	18
2.3 Descomposición en valores Singulares Generalizada (DVSG)	27
3 ALGORITMO DE DVS	31
3.1 DVS y PYTHON 3	41
4 APLICACIÓN: LA DVS EN LA INGENIERÍA BIOMÉDICA	42
4.1 Modelamiento del problema de ECGF	43
4.2 DVS para obtención del ECG fetal	44

4.3 Aplicación:	47
4.3.1 Aplicación del método a datos de The DaIsy	47
4.3.2 Aplicación del método a datos de PhysioNet	54
5 CONCLUSIONES:	60
ANEXO A-1 PSEUDOCODIGO EN PYTHON 3	61
ANEXO A-2 ELECTROCARDIOGRAMA (ECG)	65
A-2.1 Electrocardiograma	65
A-2.1.1 Derivaciones	67
A-2.1.2 Medición de la frecuencia cardíaca con papel ECG:	69
A-2.1.3 Intervalos y segmentos	70
BIBLIOGRAFIA	74

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Proceso de transformación bajo A de los vectores unitarios v_1 y v_2 .	17
Figura 3.1	Gráfico $S^1 \rightarrow AS^1$	41
Figura 4.1	Método DVS [21].	42
Figura 4.2	DaIsy: Señales ECG	47
Figura 4.3	Señales fuentes obtenidas de las señales de medición de la figura 4.2.	48
Figura 4.4	Contribución ECGF en cada señal de la figura 4.2.	49
Figura 4.5	Contribución del ECGM en cada señal de la figura 4.2.	50
Figura 4.6	Señales fuentes fetales y aproximación del ECGF.	51
Figura 4.7	Señales fuentes fetales y aproximación del ECGF en tiempo corto. .	51
Figura 4.8	Las 6 señales utilizadas en [1].	52
Figura 4.9	Las señales fuentes de la figura 4.8.	53
Figura 4.10	Aproximación del ECGF fetal.	53
Figura 4.11	Señales PhysioNet ECG 244.	54
Figura 4.12	Señales fuentes obtenidas de las señales de medición de la figura 4.11.	55
Figura 4.13	Contribución ECGF en cada señal de la figura 4.11.	56
Figura 4.14	Contribución del ECGM en cada señal de la figura 4.11.	57
Figura 4.15	Señales fuentes fetales y aproximación del ECGF.	58
Figura 4.16	Señales fuentes fetales y aproximación del ECGF en tiempo corto. .	58
Figura A-2.1	Ciclo Cardíaco [48].	65
Figura A-2.2	Onda P, el complejo QRS y la onda T [49].	66
Figura A-2.3	Papel milimetrado [50].	67
Figura A-2.4	Bipolares [48].	67

Figura A-2.5	Aumentada [48].	68
Figura A-2.6	Unipolares [48].	68
Figura A-2.7	ECG estandar [52].	69
Figura A-2.8	Intervalos y segmentos [51].	70
Figura A-2.9	Patologías [53].	71

LISTA DE SIGLAS y NOTACIONES

DVS Descomposición en valores singulares o **SVD** por sus siglas en ingles.

ECG Electrocardiograma.

ECGM Electrocardiograma materno.

ECGF Electrocardiograma fetal.

\mathbb{K} Cuerpo de escalares \mathbb{K} que puede ser \mathbb{R} o \mathbb{C} .

$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ Conjunto de matrices de orden $m \times n$ con elementos en \mathbb{K} .

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ Conjunto de matrices de orden $n \times n$ con elementos en \mathbb{K} .

$\text{span}(\{u_1, u_2, \dots, u_r\})$ Espacio generado por el conjunto de vectores $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$.

$\text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$ matriz diagonal en $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ con elementos en la diagonal $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$.

\mathbf{I}_n Matriz identidad en $M_n(\mathbb{K})$

\mathbf{A}^* Matriz transpuesta conjugada de A .

$\mathcal{F}(A)$ Espacio fila de la matriz A .

$\mathcal{C}(A)$ Espacio columna de la matriz A .

$\mathcal{N}(A)$ Espacio nulo de la matriz A .

$\text{Ima}(A)$ Espacio imagen de la matriz A .

$\sigma(A)$ El espectro de la matriz A .

$\rho(A)$ El radio espectral de la matriz A .

$\dim(A)$ La dimensión de la matriz A .

$P_A(\lambda)$ El polinomio característico de A .

$R_A(x)$ El cociente de Rayleigh de x respecto a A

1 PRELIMINARES

En este capítulo se recopila de [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], entre otros más; algunas definiciones y resultados para el desarrollo del presente trabajo.

1.1 Definiciones y propiedades básicas:

1.1.1 Matrices

Sean \mathbb{K} un cuerpo de escalares (\mathbb{R} ó \mathbb{C}) y $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ el conjunto de todas las matrices de tamaño $m \times n$ (m filas y n columnas) con elementos en \mathbb{K} . Si $m = n$ se escribe $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en vez de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Definición 1.1.1 Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se dice que:

- A es **triangular superior**, si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$.
- A es **triangular inferior**, si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$.
- A es **diagonal**, si $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$ y se denota por $A = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$.
- A es **Hessenberg superior**, si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j + 1$.
- A es **Hessenberg superior no reducida**, si A es Hessenberg superior y $a_{i,i-1} \neq 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$.
- A es **Hessenberg inferior**, si $a_{ij} = 0$ para todo $j > i + 1$.
- A es **Hessenberg inferior no reducida**, si A es Hessenberg inferior y $a_{i,i+1} \neq 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$.
- A es **bidiagonal**, si $a_{ij} = 0$ para $i > j$ e $i + 1 < j$.
- A es **tridiagonal**, si $a_{ij} = 0$ siempre que $|i - j| > 1$.

Definición 1.1.2 Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se dice invertible o no singular, si existe una matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AB = BA = I_n$ (donde I_n es la matriz identidad en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), la matriz B se denota por A^{-1} llamada matriz inversa de A .

Se dice que dos matrices A y $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son semejantes, si existe una matriz no singular $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A = S^{-1}BS$.

Definición 1.1.3 Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Se define la matriz $A^* \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ como $A^* = \overline{A}^T = (\overline{a_{ji}})$ llamada matriz transpuesta conjugada de A .

Sea la matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se dice que es:

- Hermitiana, si $A = A^*$ (simétrica, si $A = A^T$).
- Unitaria, si $A^{-1} = A^*$ (ortogonal, si $A^{-1} = A^T$).
- Normal, si $AA^* = A^*A$.

1.1.2 Espacios fundamentales de una matriz

Una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ puede representarse como:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^1 & A^2 & \cdots & A^n \end{bmatrix},$$

donde

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

son las filas de A y

$$A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} & a_{2j} & \cdots & a_{mj} \end{pmatrix}^T, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

las columnas de A . Sean los siguientes espacios:

- El espacio fila de A , generado por las filas de A denotado por

$$\mathcal{F}(A) = \text{span} \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \subseteq \mathbb{K}^n$$

- El espacio columna de A , generado por las columnas de A denotado por

$$\mathcal{C}(A) = \text{span} \{A^1, A^2, \dots, A^n\} \subseteq \mathbb{K}^m.$$

- El espacio nulo de la matriz A o núcleo, dado por

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{K}^n / Ax = 0\}.$$

- El espacio imagen de A o rango, dado por

$$\text{Ima}(A) = \{Ax / x \in \mathbb{K}^n\}$$

- El rango de la matriz A es definido por

$$\text{rango}(A) = \dim(\text{Ima}(A)).$$

Teorema 1.1.4 *Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ se cumple que:*

1. $\dim(\mathcal{F}(A)) = \dim(\mathcal{C}(A))$.
2. $\mathcal{C}(A) = \text{Ima}(A)$.
3. Si P y Q son matrices invertibles de tamaño apropiado:
 - (a) $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(AQ)$.
 - (b) $\mathcal{F}(A) = \mathcal{C}(PA)$.
4. $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^T A)$.
5. $\mathbb{K}^n = \mathcal{F}(A) \oplus \mathcal{N}(A)$ y $\mathbb{K}^m = \mathcal{C}(A) \oplus \mathcal{N}(A^T)$.

Demostración: Ver [7, pp. 159–164], [9, pp. 21–22]. ■

1.1.3 Proyección ortogonal

Definición 1.1.5 *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un subespacio. $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es la proyección ortogonal en S , o simplemente, la matriz proyección, si $\text{Ima}(P) = S$, $P^2 = P$ y $P^T = P$; y se denota por P_S .*

Si las columnas de

$$Q = \begin{bmatrix} q^1 & q^2 & \cdots & q^k \end{bmatrix}$$

son una base ortogonal de S entonces $P = QQ^T$ es la única proyección ortogonal en S [4, p. 82]. La matriz P se conoce como la *matriz de proyección* sobre el espacio generado por las columnas de la matriz Q .

1.1.4 Norma matricial

Definición 1.1.6 Una norma $\|\cdot\|$ definida en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se denomina *norma matricial*, si para todo par de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ satisface

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

En $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ las siguientes normas son normas matriciales:

- La norma de Frobenius (también se llama norma Schur o Euclidiana),

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2}.$$

- La norma l^q ,

$$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^q \right)^{1/q}.$$

Definición 1.1.7 Sea $\|\cdot\|$ una norma en \mathbb{K}^n . Esta induce una norma matricial en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ definida por

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{K}^n, \\ \|x\| \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

También llamada *norma matricial inducida o subordinada por la norma $\|\cdot\|$* .

Proposición 1.1.8 Sea la norma matricial inducida por $\|\cdot\|$ en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

1. Para toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la norma $\|A\|$ es también definida por

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{K}^n, \\ \|x\|=1}} \|Ax\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{K}^n, \\ \|x\| \leq 1}} \|Ax\|.$$

2. La matriz identidad satisface $\|I_n\| = 1$.

Demostración: Ver [10, p. 47]. ■

Lema 1.1.9 Sean $\|\cdot\|_2$ la norma matricial inducida por la norma Euclidian en \mathbb{K}^n y $A, U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si U es una matriz unitaria ($U^* = U^{-1}$) entonces

$$\|UA\|_2 = \|AU\|_2 = \|A\|_2.$$

Demostración: Ver [10, pp. 50–51]. ■

Definición 1.1.10 Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ no singular y $\|\cdot\|$ una norma matricial. El número de condición de la matriz A con respecto a la norma matricial $\|\cdot\|$ es dada por

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

Si la norma matricial $\|\cdot\|$ es la norma inducida por la norma $\|\cdot\|_p$, el número de condición se denota por $\text{cond}_p(\cdot)$ y si la norma matricial es la inducida por $\|\cdot\|_\infty$ el número de condición se denota por $\text{cond}_\infty(\cdot)$.

Observación 1 Una secuencia $\{A_k\} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ converge si existe una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A_k - A\| = 0$. Donde $\|\cdot\|$ es una norma matricial en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ [5, p 30].

1.1.5 Valores propios y valores singulares de una Matriz

Definición 1.1.11 Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se dice que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un **valor propio** o **autovalor** de A , si existe un vector no nulo $x \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$Ax = \lambda x \quad \text{o} \quad (A - \lambda I_n)x = 0.$$

El vector x es llamado *vector propio* o *autovector* de A asociado con el valor propio λ . El conjunto de valores propios de una matriz A es llamado *espectro* de A , denotado por $\sigma(A)$ y al máximo de los módulos de los valores propios de la matriz A es llamado el *radio espectral* de A , el cual es denotado por $\rho(A)$.

Definición 1.1.12 Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. El polinomio definido en \mathbb{C} por

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

es llamado *polinomio característico* de A .

Este polinomio es de grado n y posee n raíces en \mathbb{C} , el cual puede escribirse como

$$P_A(\lambda) = \sum_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) \quad (1.1)$$

donde $\lambda_i \in \sigma(A)$, $i = 1, 2, \dots, n$. La *multiplicidad algebraica* de un valor propio es su multiplicidad como raíz de $P_A(\lambda)$. Además, se cumple que

$$\lambda \in \sigma(A) \text{ si y sólo si } \mathcal{N}(A - \lambda I) \neq \{0\},$$

y la *multiplicidad geométrica* del valor propio λ de A , se define como la dimensión del subespacio $\mathcal{N}(A - \lambda I)$. La multiplicidad geométrica de un valor propio no excede a su multiplicidad algebraica [8, p. 325]. Si dos matrices son semejantes entonces tienen los mismos valores propios [8, p. 317].

Teorema 1.1.13 *Los vectores propios asociados con los distintos valores propios de una matriz son linealmente independiente.*

Demostración: Ver [7, pp. 204–205], [8, pp. 172–173]. ■

Definición 1.1.14 *Para toda matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ las raíces cuadradas de los valores propios de A^*A son llamadas **valores singulares** de A .*

Proposición 1.1.15 *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se tiene que*

$$\|A\|_2 = \|A^*\|_2 = \sqrt{\text{el mayor valor propio de } A^T A} = \text{mayor valor singular de } A.$$

Demostración: Ver [5, p. 27]. ■

Definición 1.1.16 *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Entonces:*

$$R_A(x) = \frac{x^* A x}{x^* x} \quad (1.2)$$

es llamado el **cociente de Rayleigh** de x respecto a A .

Si x es un vector propio de A asociado con el valor propio λ entonces:

$$R_A(x) = \frac{x^* Ax}{x^* x} = \frac{x^* \lambda x}{x^* x} = \lambda.$$

Teorema 1.1.17 (Teorema Min-Max o Principio Minimax de Courant-Fisher)

Sean $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ los valores propios de una matriz hermitiana $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, entonces

$$\lambda_k = \min_{\substack{S \\ \dim(S)=n-k+1}} \max_{\substack{x \in S, \\ x \neq 0}} R_A(x). \quad (1.3)$$

Demostración: Ver [11, pp. 30–31], [10, pp. 32–33]. ■

Observación 2 Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se tiene que en la ecuación (1.3) para:

$k = 1$: El mínimo es tomado sobre todos los subespacios S de dimensión n , que es el mismo \mathbb{R}^n . Así,

$$\lambda_1 = \lambda_{\max} = \max_{x \neq 0} \frac{x^T Ax}{x^T x}.$$

$k = n$: El mínimo se toma sobre un subespacio S de dimensión 1, que consiste de un solo vector x y sus múltiplos αx . Así,

$$\lambda_n = \lambda_{\min} = \min_{x \neq 0} \frac{x^T Ax}{x^T x}.$$

Teorema 1.1.18 Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica. Si $A' = A + E$ una perturbación de la matriz A , donde $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ y $\lambda'_1 \geq \dots \geq \lambda'_n$ son los valores propios de A y A' respectivamente, entonces

$$|\lambda'_i - \lambda_i| \leq \|E\|_2, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Demostración: Ver [11, pp. 30–31]. ■

1.1.6 Factorizaciones de una matriz

Teorema 1.1.19 (Forma canónica de Jordan) Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Entonces existe una matriz no singular $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que

$$A = S \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} S^{-1} = SJS^{-1}$$

y $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Donde

$$J_{n_i}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$$

es el **bloque de Jordan** asociado al valor propio λ_i de A , $i = 1, \dots, k$ y J es la **matriz de Jordan** de A .

Demostración: Ver [7, pp. 232-235]. ■

Teorema 1.1.20 (Descomposición Simétrica Real de Schur) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica, entonces existe una matriz ortogonal real Q tal que

$$Q^T A Q = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Demostración: Ver [4, p. 410]. ■

Teorema 1.1.21 (Factorización LU) Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donde todas las submatrices diagonales de orden k son no singulares, entonces existe un único par de matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & * & \ddots & 0 \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ \vdots & \ddots & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

donde U triangular superior y L triangular inferior, tal que $A = LU$.

Demostración: Ver [6, pp. 132–133], [10, pp. 104–106], [12, p. 140]. ■

Definición 1.1.22 Diremos que $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz Householder si existe $u \in \mathbb{R}^n$ no nulo tal que $H = H_u$, donde:

$$H_u = I_n - \frac{2uu^T}{u^T u} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

llamada matriz de Householder asociada a u .

La matriz Householder H es simétrica y ortogonal [38, p. 91], además para todo vector no nulo $x \in \mathbb{R}^n$, existe una matriz Householder $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que Hx es un múltiplo de $e_1 \in \mathbb{R}^n$ [5, p. 135].

Teorema 1.1.23 (Factorización QR-Householder) Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, existe una matriz ortogonal Q y una matriz triangular superior R tal que

$$A = QR.$$

La matriz Q puede escribirse como $Q = H_1 H_2 \cdots H_{n-1}$, donde cada matriz H_i es una matriz Householder. Esta factorización también es llamada factorización QR de la matriz A .

Demostración: Ver [5, p. 137], [6, pp. 251–253]. ■

Teorema 1.1.24 (Reducción a la forma de Hessenberg) Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ existe una matriz ortogonal $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que

$$\hat{H} = PAP^T$$

una matriz Hessenberg superior.

Demostración: Ver [5, p. 146]. ■

Teorema 1.1.25 Dado una matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, existe una matriz simétrica P producto de $n - 2$ matrices Householder, tal que la matriz $P^T A P$ es tridiagonal

Demostración: Ver [12, p. 199]. ■

entonces la matriz triangular superior $R_2R_1^{-1}$ es igual a la matriz ortogonal $Q_2^*Q_1$, que además es diagonal. Luego, existe una matriz diagonal D tal que

$$R_2R_1^{-1} = Q_2^*Q_1 = D \implies \begin{cases} R_2 = DR_1, \\ Q_1 = Q_2D. \end{cases}$$

De esta última igualdad se tiene que $|D_{ii}| = 1$, para $i = 1, 2, \dots, n$.

1.1.6.1 Iteración QR

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, entonces consideremos la siguiente iteración

$$\begin{aligned} T_0 &= A \\ \text{Para } k &= 1, 2, \dots, \\ T_{k-1} &= Q_k R_k \quad (\text{Factorización QR}) \\ T_k &= R_k Q_k \end{aligned} \tag{1.4}$$

Teorema 1.1.28 (Convergencia de la iteración QR) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es inversible tal que:

- sus valores propios $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ satisfacen

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0,$$

- y la matriz inversible P tal que

$$A = P^{-1}DP, \quad \text{con } D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

satisface que la matriz P^{-1} tiene una factorización LU,

entonces la sucesión de matrices $\{T_k\}$ obtenida de la iteración QR satisface:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (T_k)_{ii} &= \lambda_i, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (T_k)_{ij} &= 0 \quad 1 \leq j < i \leq n. \end{aligned}$$

Demostración: Ver [29, p. 160]. ■

Un método para acelerar la convergencia de la iteración QR cuando A tiene valores propios en valor absoluto muy cercanos unos a otros es el método de iteración QR con desplazamiento.

La iteración QR con desplazamiento $\mu \in \mathbb{R}$ es definido como sigue:

$$\begin{aligned} T_0 &= (Q_0)^T A Q_0 \quad (\text{Hessenberg superior}) \\ \text{Para } k &= 1, 2, \dots \\ T_{k-1} - \mu I &= Q_k R_k \quad (\text{Factorización QR}) \\ T_k &= R_k Q_k + \mu I \end{aligned} \tag{1.5}$$

Si se varia μ de iteración en iteración, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T_0 &= (Q_0)^T A Q_0 \quad (\text{Hessenberg superior}) \\ \text{Para } k &= 1, 2, \dots \\ \mu &= (T_{k-1})_{nn} \\ T_{k-1} - \mu I &= Q_k R_k \quad (\text{Factorización QR}) \\ T_k &= R_k Q_k + \mu I \end{aligned} \tag{1.6}$$

se tiene la iteración QR con desplazamiento simple.

Si se considera el método de iteración con desplazamiento de forma que de iteración en iteración se elige desplazamientos de manera estratégica, se tiene la iteración

$$\begin{aligned} T_0 &= Q_0^T A Q_0 \quad (\text{Forma de Hessenberg}) \\ \text{Para } k &= 1, 2, \dots, \\ &\text{un desplazamiento } \sigma_k \\ T_{k-1} - \sigma_k I &= Q_k R_k \quad (\text{Factorización QR}) \\ T_k &= R_k Q_k + \sigma_k I \end{aligned} \tag{1.7}$$

donde los desplazamientos σ_k son elegidos para acelerar la convergencia y los elementos fuera de la diagonal de T_k son rápidamente llevados a cero.

Para la elección de desplazamiento, podemos considerar las siguientes estrategias:

- **Desplazamiento cociente de Rayleigh:**

Consiste en considerar el desplazamiento al cociente de Rayleigh (1.2) de la última columna de la matriz ortogonal Q^k

$$\sigma_k = \frac{\langle q_n^k, A q_n^k \rangle}{\langle q_n^k, q_n^k \rangle} = (q_n^k)^T A q_n^k.$$

Este cociente aparece en el termino de la posición (n, n) de T_k , desde que

$$(q_n^k)^T A q_n^k = (Q^k e_n)^T A Q^k e_n = e_n^T (Q^k)^T A Q^k e_n = e_n^T T_k e_n = (T_k)_{nn}.$$

- **Desplazamiento de Wilkinson:**

La estrategia de Wilkinson consiste en usar los valores propios λ_1 y λ_2 de la submatriz orden 2×2 de T_k

$$\begin{pmatrix} t_{n-1,n-1}^k & t_{n-1,n}^k \\ t_{n,n-1}^k & t_{n,n}^k \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

como desplazamientos, es decir $\sigma_k = \lambda_1$ y $\sigma_{k+1} = \lambda_2$; esta es llamada la estrategia de doble desplazamiento, el cual consiste:

$$\begin{aligned} T_{k-1} - \lambda_1 I &= Q_1 R_1 \\ T_k &= R_1 Q_1 + \lambda_1 I \\ T_k - \lambda_2 I &= Q_2 R_2 \\ T_{k+1} &= R_2 Q_2 + \lambda_2 I \end{aligned}$$

En el caso de que (1.8) sea simétrica se tiene que:

$$\sigma_k = t_{n,n}^k + r - \text{sign}(r) \sqrt{r^2 + (t_{n,n-1}^k)^2}$$

donde $r = \frac{t_{n-1,n-1}^k - t_{n,n}^k}{2}$.

Este es un valor cercano a $(T_k)_{n,n}$ y siempre converge con este desplazamiento.

Observación 5 Para la convergencia se considera los siguientes criterios:

$$\begin{aligned} |t_{n,n-1}^k| &\leq \varepsilon_0 \|A\|_\infty \\ |t_{n,n-1}^k| &\leq \varepsilon_0 \{|t_{n-1,n-1}^k| + |t_{n,n}^k|\} \end{aligned} \quad (1.9)$$

donde ε_0 igual a la unidad de redondeo o precisión de la máquina.

2 DESCOMPOSICIÓN DE VALORES SINGULARES (DVS)

Un método de factorización de matrices es la descomposición en valores singulares DVS (o SVD por sus siglas en ingles).

2.1 DVS de una matriz

Teorema 2.1.1 (Descomposición DVS.) *Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ una matriz con r valores singulares positivos. Entonces existen dos matrices unitarias $V \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y una matriz $\tilde{\Sigma} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tal que*

$$A = V\tilde{\Sigma}U^* \quad y \quad \tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

donde $\Sigma = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_r)$, y $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r > 0$ son los valores singulares positivos de A .

Demostración: Sin pérdida de generalidad se asume que $m \geq n$, para $m < n$ se aplica la descomposición DVS para la matriz A^* y se deduce el resultado para A tomando la transpuesta conjugada de (2.1).

Se denotan por $\mu_1^2, \mu_2^2, \dots, \mu_n^2$ los valores propios de A^*A tales que $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r > \mu_{r+1} = \mu_{r+2} = \dots = \mu_n = 0$. Los vectores propios u_1, u_2, \dots, u_n correspondientes a los valores propios de $\mu_1^2, \mu_2^2, \dots, \mu_n^2$ son ortonormales y satisfacen:

$$A^*Au_i = \mu_i^2 u_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Luego, se define la matriz unitaria $U = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix}$, y satisface:

$$A^*AU = \begin{bmatrix} A^*Au_1 & \dots & A^*Au_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1^2 u_1 & \dots & \mu_n^2 u_n \end{bmatrix} = U \text{diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2),$$

Por lo que

$$U^*A^*AU = \text{diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2) = \tilde{\Sigma}^T \tilde{\Sigma}$$

donde

$$\tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & \mu_n \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

con $\Sigma = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_r)$.

Además, se tiene que:

$$\langle Au_i, Au_j \rangle = \langle A^* Au_i, u_j \rangle = \mu_i^2 \langle u_i, u_j \rangle = \mu_i^2 \delta_{i,j},$$

en particular, $Au_i = 0$, si $r < i \leq n$.

Para $1 \leq i \leq r$, por ser $\mu_i \neq 0$, se considera los vectores unitarios $v_i \in \mathbb{C}^m$ como $v_i = Au_i/\mu_i$. Se completa la base ortonormal $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{C}^m$, con los cuales se define la matriz

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_m \end{bmatrix}$$

que satisface:

$$\begin{aligned} V\tilde{\Sigma}U^* &= \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_m \end{bmatrix} \tilde{\Sigma}U^* \\ &= \begin{bmatrix} \mu_1 v_1 & \cdots & \mu_n v_n \end{bmatrix} U^* \\ &= \begin{bmatrix} \mu_1 u_1 & \cdots & \mu_r u_r & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= \begin{bmatrix} Au_1 & \cdots & Au_r & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} U^* = AUU^* = A. \end{aligned}$$

■

Las columnas de U son llamados vectores singulares a la derecha de A y las de V son llamados vectores singulares a la izquierda de A ; y satisfacen:

$$Au_i = \mu_i v_i, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$A^* v_i = \mu_i u_i, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

El conjunto de valores singulares $\{\mu_i\}$ es llamado espectro singular de la matriz A . Para cada i , la terna (v_i, μ_i, u_i) se le denomina i -ésimo triplete singular de A , donde v_i

y u_i son i -ésimo vector singular a izquierda y derecha respectivamente.

La descomposición en valores singulares de $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n & v_{n+1} & \cdots & v_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & \mu_n \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{bmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}}_{\widehat{V}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}}_{\widehat{\Sigma}} \begin{bmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

donde la expresión $A = \widehat{V}\widehat{\Sigma}U^*$ se conoce como la descomposición reducida de valores singulares de A . Además, la matriz A puede ser escrita como:

$$A = \sum_{i=1}^r \mu_i v_i u_i^* \quad (2.2)$$

donde (v_i, μ_i, u_i) es el i -ésimo triplete singular de A , para $i = 1, 2, \dots, r$.

La representación (2.2) se suele denominar como expansión DVS, expansión de producto exterior o descomposición diádica de A .

Para cada $k < r$ la matriz

$$A_k = \sum_{i=1}^k \mu_i v_i u_i^*$$

es llamada matriz de descomposición A_k .

Observación 6 *El teorema (2.1.1) se puede definir para $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, donde las matrices V y U son ortogonales y reales.*

2.1.1 Interpretación Geométrica.

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz no singular y $A = V\tilde{\Sigma}U^T$ su descomposición DVS. La imagen de la esfera unitaria

$$S^{n-1} = \left\{ (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}$$

por A es una elipsoide. Como la matriz U^T es ortogonal, entonces esta transforma toda base ortogonal en otra base ortogonal. Luego, se tiene que $U^T S^{n-1} = S^{n-1}$ y

$$\tilde{\Sigma} S^{n-1} = \left\{ (x'_1, \dots, x'_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^n (x'_i / \mu_i)^2 = 1 \right\},$$

es una elipsoide E^{n-1} de semiejes $\mu_i e_i$. Desde que V es una matriz de cambio de base ortogonal, $AS^{n-1} = VE^{n-1}$ es una rotación de E^{n-1} . En conclusión, AS^{n-1} es una elipsoide de semiejes $\mu_i v_i$, donde v_i es la i -ésima columna de V .

La siguiente figura ilustra la secuencia de la transformación bajo la matriz no singular $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ a los vectores unitarios v_1 y v_2 (y todos los vectores unitarios del círculo unitario S^1), con $U = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$.

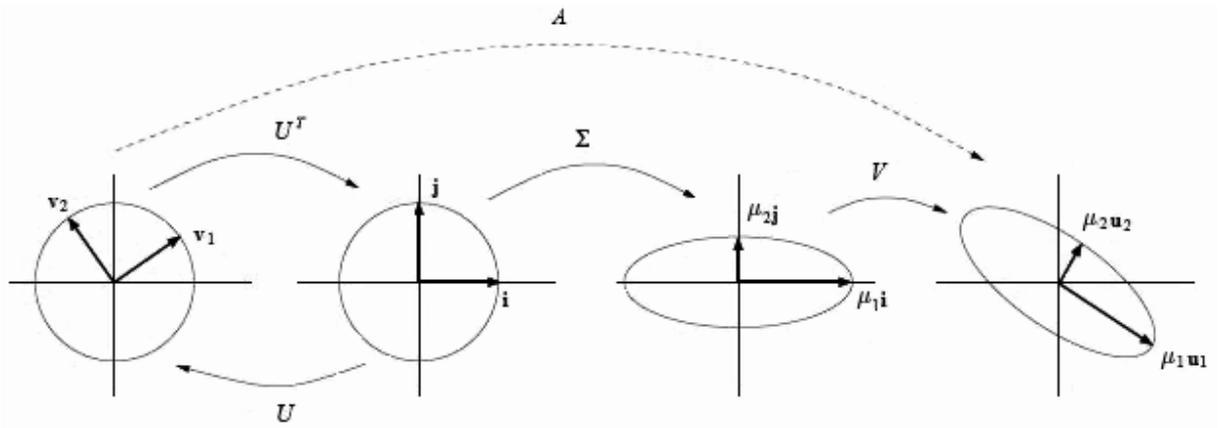


Figura 2.1: Proceso de transformación bajo A de los vectores unitarios v_1 y v_2 .

2.2 Propiedades de la DVS de una matriz

El DVS de una matriz A nos proporciona algunos detalles acerca su estructura.

Lema 2.2.1 Si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ son matrices unitarias y $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ entonces los valores singulares de A coinciden con los valores singulares de PAQ .

Demostración: Si $A = V\tilde{\Sigma}U^*$ es la DVS de A , entonces

$$PAQ = P(V\tilde{\Sigma}U^*)Q = (PV)\tilde{\Sigma}(Q^*V)^*$$

es la DVS de PAQ , pues PV y Q^*V son unitaria. La matriz $\tilde{\Sigma}$ de A es la misma para PAQ , por la que poseen los mismos valores singulares. ■

Corolario 2.2.2 Sea $A = V\tilde{\Sigma}U^*$ la descomposición de valores singulares de $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ y $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r > \mu_{r+1} = \mu_{r+2} = \dots = \mu_n = 0$ los valores singulares de A , entonces:

1. $\text{Ima}(A) = \text{span}\{v_1, \dots, v_r\}$.
2. $\mathcal{N}(A) = \text{span}\{u_{r+1}, \dots, u_n\}$
3. $\text{rango}(A) = r$

Demostración:

1. Se probará:
 - $\text{Ima}(A) \subseteq \text{span}\{v_1, \dots, v_r\}$:
Sea $y \in \text{Ima}(A)$, entonces existe un x tal que $y = Ax$.

Luego:

$$\begin{aligned}
 y &= V\tilde{\Sigma}U^*x \\
 &= \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*x \\
 &= \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 z_1 \\ \vdots \\ \mu_r z_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \mu_1 z_1 v_1 + \cdots + \mu_r z_r v_r \in \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_r\}
 \end{aligned}$$

donde $z = \begin{pmatrix} z_1 & \cdots & z_n \end{pmatrix}^T = U^*x$.

- $\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_r\} \subseteq \text{Ima}(A)$:

Sea $y \in \text{span}\{v_1, \dots, v_r\}$, entonces $y = \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i$, con $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Para $x = U \begin{pmatrix} \alpha_1/\mu_1 & \cdots & \alpha_r/\mu_r & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 Ax &= V\tilde{\Sigma}UU^* \begin{pmatrix} \alpha_1/\mu_1 & \cdots & \alpha_r/\mu_r & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T \\
 &= V\tilde{\Sigma} \begin{pmatrix} \alpha_1/\mu_1 & \cdots & \alpha_r/\mu_r & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T \\
 &= \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_r & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T \\
 &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_r v_r = y \in \text{Ima}(A).
 \end{aligned}$$

2. Se cumple:

$$Ax = 0 \Leftrightarrow V\tilde{\Sigma}U^*x = 0$$

Para $z = U^*x$, se tiene:

$$\tilde{\Sigma}U^*x = 0 \Leftrightarrow \tilde{\Sigma}z = 0 \Leftrightarrow z = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & z_{r+1} & \cdots & z_n \end{pmatrix}^T.$$

Luego:

$$x = Uz = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \sum_{i=r+1}^n z_i u_i \in \text{span}\{u_{r+1}, \dots, u_n\},$$

Por lo tanto, $N(A) = \text{span}\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$.

3. Los vectores $\{v_1, \dots, v_r\}$ forman una base ortonormal de $\text{Ima}(A)$ y $\text{rango}(A) = \dim(\text{Ima}(A))$. Por (1) se tiene que $\text{rango}(A) = r$. ■

Lema 2.2.3 Si $A = V\tilde{\Sigma}U^*$ es la DVS de $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ donde $V = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_m \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$ y $r = \text{rango}(A)$, entonces:

1. $\text{Ima}(A^*) = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$.
2. $\mathcal{N}(A^*) = \text{span}\{v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_m\}$

Demostración: Las demostraciones son análogas al lema anterior. ■

Observación 7 (Proyección ortogonal y DVS) Sea $A = V\tilde{\Sigma}U^*$ la DVS de $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ con $r = \text{rango}(A)$, si escribimos V y U como

$$V = \begin{pmatrix} V_r & V_{m-r} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} U_r & U_{n-r} \end{pmatrix}$$

donde $V_r \in \mathcal{M}_{r,m}(\mathbb{R})$, $V_{m-r} \in \mathcal{M}_{m-r,m}(\mathbb{R})$, $U_r \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$, $U_{n-r} \in \mathcal{M}_{n-r,n}(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned} V_r V_r^T & \text{ es la proyección ortogonal sobre } \text{Ima}(A), \\ V_{m-r} V_{m-r}^T & \text{ es la proyección ortogonal sobre } \text{Ima}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*), \\ U_r U_r^T & \text{ es la proyección ortogonal sobre } \mathcal{N}(A)^\perp = \text{Ima}(A^*), \\ U_{n-r} U_{n-r}^T & \text{ es la proyección ortogonal sobre } \mathcal{N}(A). \end{aligned}$$

Lema 2.2.4 Sea $A = V\tilde{\Sigma}U^*$ la descomposición de valores singulares de $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ y $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r > \mu_{r+1} = \mu_{r+2} = \dots = \mu_n = 0$ los valores singulares de A , entonces:

1. $\|A\|_F^2 = \mu_1^2 + \dots + \mu_r^2$.
2. $\|A\|_2 = \mu_1$.

Demostración:

1. Como $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = \text{traza}(AA^T)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\|A\|_F^2 &= \text{traza}(V\tilde{\Sigma}U^T(V\tilde{\Sigma}U^T)^T) \\
&= \text{traza}\left((V\tilde{\Sigma}U^T)(U\tilde{\Sigma}^T V^T)\right) \\
&= \text{traza}(V\tilde{\Sigma}\tilde{\Sigma}^T V^T) \\
&= \text{traza}(V^T V\tilde{\Sigma}\tilde{\Sigma}^T) \\
&= \text{traza}(\tilde{\Sigma}\tilde{\Sigma}^T) \\
&= \text{traza}(\text{diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_r^2, 0, \dots, 0)) \\
&= \mu_1^2 + \mu_2^2 + \dots + \mu_r^2.
\end{aligned}$$

2. Por (1.1.15) y (1.1.9) se tiene:

$$\begin{aligned}
\|A\|_2 &= \max_{\|x\|=1} (\|Ax\|) \\
&= \max_{\|x\|=1} (\|V^*Ax\|) \\
&= \max_{\|Uy\|=1} (\|V^*AUy\|) \\
&= \max_{\|Uy\|=1} (\|V^*V\tilde{\Sigma}U^*Uy\|) \\
&= \max_{\|y\|=1} (\|\tilde{\Sigma}y\|) \\
&= \max_{\|y\|=1} (\sqrt{\mu_1^2|y_1|^2 + \dots + \mu_r^2|y_r|^2}).
\end{aligned}$$

Como μ_1 es el mayor valor singular, se tiene que:

$$\sqrt{\mu_1^2|y_1|^2 + \dots + \mu_r^2|y_r|^2} \leq \mu_1 \sqrt{|y_1|^2 + \dots + |y_n|^2} = \mu_1 \|y\|$$

lo que implica que

$$\max_{\|y\|=1} (\{\|\tilde{\Sigma}y\|\}) \leq \mu_1.$$

Para $y = e_1$ se cumple que:

$$\mu_1 = \|\tilde{\sigma}y\| \leq \max_{\|y\|=1} (\{\|\tilde{\sigma}y\|\}).$$

Por lo tanto $\max_{\|y\|=1} (\{\|\tilde{\Sigma}y\|\}) = \mu_1$.

■

Proposición 2.2.5 Sea $A = V\tilde{\Sigma}U^*$ la descomposición DVS de la matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ con r valores singulares no nulos ordenados en forma decreciente. Para $1 \leq k < r$, la

matriz $A_k = \sum_{i=1}^k \mu_i v_i u_i^*$ satisface:

Para toda matriz $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rango k , tenemos que:

$$\|A - A_k\|_2 \leq \|A - X\|_2.$$

Además,

$$\|A - A_k\|_2 = \mu_{k+1}.$$

Demostración: Se tiene que

$$A - A_k = \sum_{i=1}^r \mu_i v_i u_i^* - A_k = \sum_{i=k+1}^r \mu_i v_i u_i^* = \begin{bmatrix} v_{k+1} & \cdots & v_r \end{bmatrix} \text{diag}(\mu_{k+1}, \dots, \mu_r) \begin{bmatrix} u_{k+1}^* \\ \vdots \\ u_r^* \end{bmatrix}.$$

Se denota por $D = \text{diag}(0, \dots, 0, \mu_{k+1}, \dots, \mu_r, 0, \dots, 0) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, luego, $A - A_k = VDU^*$; desde que la norma Euclidiana es invariante bajo una transformación unitaria, se tiene que

$$\|A - A_k\|_2 = \|D\|_2 = \mu_{k+1}.$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$, por lo tanto

$$\|Ax\|_2 = \|V\tilde{\Sigma}U^*x\|_2 = \|\tilde{\Sigma}U^*x\|_2. \quad (2.3)$$

Sea E el subespacio \mathbb{R}^n , de dimensión $k + 1$, generado por los vectores u_1, \dots, u_{k+1} .

Si $x \in E$ se tiene que $x = \sum_{i=1}^{k+1} x_i u_i$ y

$$U^* x = U^* \sum_{i=1}^{k+1} x_i u_i = \sum_{i=1}^{k+1} x_i U^* u_i = \sum_{i=1}^{k+1} x_i e_i,$$

donde e_i es el i -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Así tenemos:

$$\tilde{\Sigma} U^* x = \left(\mu_1 x_1 \quad \cdots \quad \mu_{k+1} x_{k+1} \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \right)^T.$$

Por (2.3) se tiene que:

$$\|Ax\|_2 \geq \mu_{k+1} \|x\|_2, \text{ para todo } x \in E. \quad (2.4)$$

Si la matriz $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ con rango $k < r$, su núcleo es de dimensión $n - k \geq r - k \geq 0$, y para todo $x \in \mathcal{N}(X)$, tenemos:

$$\|Ax\|_2 = \|(A - X)x\|_2 \leq \|A - X\|_2 \|x\|_2.$$

Por el método del absurdo, se supone que existe un X que cumple:

$$\|A - X\|_2 < \|A - A_k\|_2.$$

Desde que para todo $x \in \mathcal{N}(X)$,

$$\|Ax\|_2 = \|(A - X)x\|_2 \leq \|A - X\|_2 \|x\|_2 < \|A - A_k\|_2 \|x\|_2 = \mu_{k+1} \|x\|_2,$$

y además, si $x \in E \cap \mathcal{N}(X)$ con $x \neq 0$, se tiene que:

$$\|Ax\|_2 < \mu_{k+1} \|x\|_2$$

con el cual se llega a una contradicción con (2.4). ■

Como consecuencia de la proposición se tiene que la matriz A_k es la mejor aproximación de A por matrices de rango k .

Teorema 2.2.6 *Sea $A = V\tilde{\Sigma}U^*$ la DVS de $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, con $m \geq n$ y $r = \text{rango}(A)$, entonces:*

$$1. U^*(A^*A)U = \text{diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_r^2, 0, \dots, 0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

$$2. V^*(A^*A)V = \text{diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_r^2, 0, \dots, 0) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}).$$

Demostración: Como

$$\begin{aligned} A^*A &= U \underbrace{\tilde{\Sigma}^T \tilde{\Sigma}}_{\hat{\Sigma}} U^* = U \hat{\Sigma} U^*, \\ AA^* &= V \underbrace{\tilde{\Sigma} \tilde{\Sigma}^T}_{\hat{\Sigma}'} V^* = V \hat{\Sigma}' V^*, \end{aligned}$$

donde

$$\hat{\Sigma} = \text{diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_r^2, 0, \dots, 0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

y

$$\hat{\Sigma}' = \text{diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_r^2, 0, \dots, 0) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}).$$

■

Proposición 2.2.7 Sea $A = U\tilde{\Sigma}V^*$ la descomposición DVS de la matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ no singular, entonces

$$\text{cond}_2(A) = \frac{\mu_1}{\mu_n}.$$

Demostración: Como $A = U\tilde{\Sigma}V^*$ y $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n > 0$ los valores singulares de A . Por (2.2.4) ítem (2) se tiene que $\|A\|_2 = \|\tilde{\Sigma}\|_2 = \mu_1$ es el mayor valor singular de A , y como $\frac{1}{\mu_n} \geq \dots \geq \frac{1}{\mu_1} > 0$, se tiene que $\|A^{-1}\|_2 = \|V^*A^{-1}U\|_2 = \|\tilde{\Sigma}^{-1}\|_2 = \frac{1}{\mu_n}$. ■

Teorema 2.2.8 Sean $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $m \geq n$ y $C \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$ definida por

$$C = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$$

y μ_1, \dots, μ_n los valores singulares de A . Entonces, los valores propios de C son $\mu_1, \dots, \mu_n, -\mu_1, \dots, -\mu_n$ y ceros repetidos $m - n$ veces.

Demostración: Sea $A = V\tilde{\Sigma}U^*$ la DVS de A y se escribe $V = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}$ y $\tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donde $V_1 \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $V_2 \in \mathcal{M}_{m,m-n}(\mathbb{C})$ y $\Sigma_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Para

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}V_1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}V_1 & V_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}U & \frac{1}{\sqrt{2}}U & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C}),$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} P^*CP &= P^* \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}V_1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}V_1 & V_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}U & \frac{1}{\sqrt{2}}U & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}V_1^* & \frac{1}{\sqrt{2}}U^* \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}V_1^* & \frac{1}{\sqrt{2}}U^* \\ V_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}AU & \frac{1}{\sqrt{2}}AU & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}A^*V_1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}A^*V_1 & A^*V_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(V_1^*A^*U + U^*A^*V_1) & \frac{1}{2}(V_1^*AU - U^*A^*V_1) & \frac{1}{\sqrt{2}}U^*A^*V_2 \\ \frac{1}{2}(-V_1^*AU + U^*A^*V_1) & -\frac{1}{2}(V_1^*AU + U^*A^*V_1) & \frac{1}{\sqrt{2}}U^*A^*V_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}V_2^*AU & \frac{1}{\sqrt{2}}V_2^*AU & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Desde que $AU = V\tilde{\Sigma}$, se tiene:

$$V\tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{pmatrix} = V_1\Sigma_1 + V_20 = V_1\Sigma_1$$

Luego:

$$P^*CP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(V_1^*V_1\Sigma_1 + (V_1\Sigma_1)^*V_1) & \frac{1}{2}(V_1^*V_1\Sigma_1 - (V_1\Sigma_1)^*V_1) & \frac{1}{\sqrt{2}}(V_1\Sigma_1)^*V_2 \\ \frac{1}{2}(-V_1^*V_1\Sigma_1 + (V_1\Sigma_1)^*V_1) & -\frac{1}{2}(V_1^*V_1\Sigma_1 + (V_1\Sigma_1)^*V_1) & \frac{1}{\sqrt{2}}(V_1\Sigma_1)^*V_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}V_2^*V_1\Sigma_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}V_2^*V_1\Sigma_1 & 0 \end{pmatrix}$$

como $(V_1 \Sigma_1)^* = \Sigma_1^* V_1^* = \Sigma_1 V_1^*$ y por ser $V = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}$ ortogonal, se tiene:

$$P^* C P = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n, -\mu_1, \dots, -\mu_n, 0, \dots, 0).$$

Por lo que los valores propios de C son $\mu_1, \dots, \mu_n, -\mu_1, \dots, -\mu_n$ y ceros repetidos $m-n$ veces. ■

Definición 2.2.9 Sea $A = V \tilde{\Sigma} U^*$ la descomposición DVS de la matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ que tiene r valores singulares no nulos. La matriz $A^\dagger \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ definida por

$$A^\dagger = U \tilde{\Sigma}^\dagger V^*$$

con

$$\tilde{\Sigma}^\dagger = \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$$

se le denomina matriz pseudoinversa de A .

Observación 8 Sea $A = V \tilde{\Sigma} U^*$ la descomposición DVS de la matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, se cumple que:

- $A^\dagger A = U \tilde{\Sigma}^\dagger \tilde{\Sigma} U^* = U \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* = \sum_{i=1}^r u_i u_i^*.$
- $AA^\dagger = V \tilde{\Sigma} \tilde{\Sigma}^\dagger V^* = V \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^* = \sum_{i=1}^r v_i v_i^*.$
- $A^\dagger = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\mu_i} u_i v_i^*.$
- Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ tiene rango máximo ($r = n \leq m$), su pseudoinversa es dada por $A^\dagger = (A^* A)^{-1} A^*.$
- Si A es una matriz cuadrada no singular ($r = n = m$), se tiene que $A^\dagger A = AA^\dagger = I_n$. Luego, $A^\dagger = A^{-1}.$

Teorema 2.2.10 (Teorema de perturbación para valores singulares) Sean A y $B = A + E \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$. Sean μ_1, \dots, μ_n y $\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_n$ los valores singulares

de A y B , respectivamente, en orden decreciente. Entonces, para cada i se cumple:

$$|\mu_i - \tilde{\mu}_i| \leq \|E\|_2.$$

Además

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (\tilde{\mu}_i - \mu_i)^2} \leq \|E\|_F.$$

Demostración: Consideremos las matrices:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \tilde{E} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E^* & 0 \end{pmatrix}$$

tenemos que $\tilde{B} - \tilde{A} = \tilde{E}$. Por el teorema (2.2.8), se tiene que $\mu_1, \dots, \mu_n, -\mu_1, \dots, -\mu_n$ son los valores propios de \tilde{A} , donde $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n$ los valores singulares de A y $\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_n, -\tilde{\mu}_1, \dots, -\tilde{\mu}_n$ son los valores propios de \tilde{B} , donde $\tilde{\mu}_1 \geq \dots \geq \tilde{\mu}_n$ los valores singulares B .

Los valores propios de \tilde{B} y \tilde{A} están relacionados por el teorema (1.1.18) del cual se tiene para cada $i = 1, 2, \dots, n$ que

$$|\tilde{\mu}_i - \mu_i| \leq \|E\|_2.$$

Por el corolario (2.2.2) se tiene que

$$\sum_{i=1}^n (\tilde{\mu}_i - \mu_i)^2 \leq \|E\|_F^2.$$

■

2.3 Descomposición en valores Singulares Generalizada (DVSG)

Definición 2.3.1 Los B -valores singulares de una matriz A son los elementos del conjunto $\mu(A, B)$ definido por

$$\mu(A, B) = \{\mu \geq 0 / \det(A^*A - \mu^2 B^*B) = 0\},$$

donde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$ y $B \in \mathcal{M}_{s,n}(\mathbb{R})$.

Teorema 2.3.2 (Descomposición de valores singulares generalizada (DVSG))

Sean $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{s,n}(\mathbb{R})$ y $m \geq n$, existen matrices ortogonales $U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ y $V \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$, y una matriz no singular $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que

$$\begin{aligned} U^T A X &= D_A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n), & \alpha_i &\geq 0, \\ V^T B X &= D_B = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_q), & \beta_i &\geq 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde $q = \min\{s, n\}$, $r = \text{rango}(B)$ y $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_r > \beta_{r+1} = \dots = \beta_q = 0$.

Si $\alpha_j = 0$ para $r+1 \leq j \leq n$, entonces $\mu(A, B) = \{\mu / \mu \geq 0\}$.
O bien $\mu(A, B) = \left\{ \frac{\alpha_i}{\beta_i} / i = 1, \dots, r \right\}$ [31].

Demostración: Sea

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Z_1^T$$

la DVS de la matriz $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ donde $D = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ con $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_k > 0$ y $k = \text{rango} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$.

Se escribe las matrices $Q \in \mathcal{M}_{m+s,k}(\mathbb{R})$ y la matriz ortogonal $Z_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ como

$$Q = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad Z_1 = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \end{bmatrix}$$

donde $A_1 \in \mathcal{M}_{m,k}(\mathbb{R})$, $B_1 \in \mathcal{M}_{s,k}(\mathbb{R})$, $Z_{11} \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ y $Z_{12} \in \mathcal{M}_{n,n-k}(\mathbb{R})$.

Se tiene que $A_1 = A Z_{11} D^{-1}$ y $B_1 = B Z_{11} D^{-1}$ y además como $Q^T Q = I_k$, luego:

$$A_1^T A_1 + B_1^T B_1 = I_k.$$

Si $r = \text{rango}(B)$ y

$$B_1 = V \tilde{\Sigma} Z_2^T, \quad (2.6)$$

denota la DVS de B_1 con $\tilde{\Sigma} = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_p)$, $p = \min\{s, k\}$ y $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_r > \beta_{r+1} = \dots = \beta_p = 0$.

Como $V^T B_1 Z_2 = V^T B Z_{11} D^{-1} Z_2 = \tilde{\Sigma}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
V^T B Z_1 \begin{pmatrix} D^{-1} Z_2 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} &= V^T B \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} D^{-1} Z_2 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \\
&= V^T B \begin{bmatrix} Z_{11} D^{-1} Z_2 & Z_{12} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} V^T B Z_{11} D^{-1} Z_2 & V^T B Z_{12} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma} & V^T B_1 D (Z_{11}^T Z_{12}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_q),
\end{aligned}$$

entonces:

$$V^T B Z_1 \begin{pmatrix} D^{-1} Z_2 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_q), \quad (2.7)$$

donde $\beta_{p+1} = \dots = \beta_q = 0$ y $q = \min\{s, n\}$.

Además, se cumple:

$$\begin{aligned}
(A_1 Z_2)^T (A_1 Z_2) &= Z_2^T (A_1^T A_1) Z_2 \\
&= Z_2^T (I_k - B_1^T B_1) Z_2 \\
&= Z_2^T I_k Z_2 - (B_1 Z_2)^T B_1 Z_2 \\
&= I_k - (V \tilde{\Sigma})^T V \tilde{\Sigma} \\
&= I_k - \tilde{\Sigma}^T \tilde{\Sigma} \\
&= \text{diag}(1 - \beta_1^2, \dots, 1 - \beta_k^2).
\end{aligned}$$

Luego, existe una matriz ortogonal $U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ tal que

$$A_1 Z_2 = U \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{M}_{m,k}(\mathbb{R}).$$

Se asume que los α_i son no negativos en (2.8). Si $\alpha_i = 0$ para $i = k+1, \dots, n$, entonces

$$U^T A Z_1 \begin{pmatrix} D^{-1} Z_2 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} = D_A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (2.8)$$

Por lo tanto, (2.5) se obtiene de considerar $X = Z_1 \begin{pmatrix} D^{-1}Z_2 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$ en (2.8) y (2.7). Para demostrar que $\mu(A, B) = \{\mu \geq 0 / \det(A^*A - \mu^2 B^*B) = 0\}$, de (2.5) se tiene:

$$\begin{aligned} A^T A - \mu^2 B^T B &= (X^{-1})^T D_A^T D_A X^{-1} - \mu^2 (X^{-1})^T D_B^T D_B X^{-1} \\ &= (X^{-1})^T (D_A^T D_A - \mu^2 D_B^T D_B) X^{-1}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

y además

$$D_A^T D_A - \mu^2 D_B^T D_B = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 - \mu^2 \beta_1^2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \alpha_r^2 - \mu^2 \beta_r^2 & & & \vdots \\ \vdots & & & \alpha_{r+1}^2 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha_n^2 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

De (2.9) y (2.10)

$$\det(A^T A - \mu^2 B^T B) = \det(X)^{-2} \prod_{i=1}^r (\alpha_i^2 - \mu^2 \beta_i^2) \prod_{i=r+1}^n \alpha_i^2. \quad (2.11)$$

Si $\alpha_j = 0$ para $r+1 \leq j \leq n$, de la ecuación (2.11) se obtiene que $\det(A^T A - \mu^2 B^T B) = 0$ para todo μ , por lo que $\mu(A, B) = \{\mu / \mu \geq 0\}$.

En caso contrario, la ecuación (2.11) se anula cuando $\prod_{i=1}^r (\alpha_i^2 - \mu^2 \beta_i^2) = 0$, por lo que $\mu(A, B) = \left\{ \frac{\alpha_i}{\beta_i} / i = 1, \dots, r \right\}$. ■

3 ALGORITMO DE DVS

El algoritmo mas usado para calcular la DVS de una matriz es el algoritmo Golub - Kahan - Reinsh (GR-DVS) (1970)([13],[14],[15]).

Sea la matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, con $m \geq n$, el algoritmo consiste de dos etapas:

■ I ETAPA:

Se construye dos sucesiones finitas de matrices Householder

$$P_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

y

$$Q_k, \quad k = 1, 2, \dots, n - 2$$

tal que

$$P_n, \dots, P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \dots Q_{n-2} = \begin{bmatrix} B \\ O \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & * & * & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & * & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & * \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Se reduce la matriz A a una matriz bidiagonal superior de la forma

$$\begin{bmatrix} B \\ O \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),$$

donde $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz bidiagonal y la matriz $O \in \mathcal{M}_{m-n,n}(\mathbb{R})$ tiene todos sus elementos nulos.

Este proceso consiste primeramente en aplicar una matriz Householder $P_1 \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ a la derecha de la matriz A de manera que se anule los elementos de la primera columna por debajo de la subdiagonal, es decir del elementos de la primera columna en las posiciones $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, m)$

$$P_1 A = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & * & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & * \\ 0 & * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}$$

y segundo aplicar por la derecha otra matriz Householder $Q_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de tal manera que anule los elementos de la primera en las posición $(3, 1), (4, 1), \dots, (n, 1)$, obteniendo

$$P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} * & * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

La matriz anterior puede ser expresada de la siguiente forma

$$P_1 A Q_1 = \left(\begin{array}{c|cccc} * & * & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right) B_1$$

donde $B_1 \in \mathcal{M}_{m-1, n-1}(\mathbb{R})$.

El siguiente paso consiste en aplicar el proceso anterior a la matriz B_1 , de donde se tiene que existen matriz Householder $\tilde{P}_2 \in \mathcal{M}_{m-1}(\mathbb{R})$ y $\tilde{Q}_2 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ tal que

$$\tilde{P}_1 B_1 \tilde{Q}_1 = \begin{pmatrix} * & * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cccc} * & * & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right) B_2$$

al considerar

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & O_{1 \times (m-1)} \\ O_{(m-1) \times 1} & \tilde{P}_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & O_{1 \times (n-1)} \\ O_{(n-1) \times 1} & \tilde{Q}_2 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$P_2 P_1 A Q_1 Q_2 = \left(\begin{array}{cc|ccc} * & * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & * & 0 \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & B_2 & \\ 0 & 0 & & & \end{array} \right).$$

Al aplicar de manera sucesiva los procesos anteriores se obtiene una sucesión de matrices Househ lder $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_{n-2}$ de tal manera que la matriz A se transforma en una matriz de la forma (3.1) el cual denotaremos por J_0 .

Desde que todas las transformaciones introducidas son matrices ortogonales, los valores singulares de J_0 son las mismas que las de la matriz A .

Este algoritmo es llamado el algoritmo de Bidiagonalizaci n Househ lder [4, pp. 236–237]

$$\underbrace{P_n \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_{n-2}}_{J_0} = \begin{bmatrix} B \\ O \end{bmatrix}$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} d_1 & f_1 & & & \\ & d_2 & f_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & f_{n-1} \\ & & & & d_n \end{pmatrix}.$$

■ II ETAPA:

Por una variante del algoritmo QR, la matriz J_0 es diagonalizable en forma iterativa, tal que

$$J_0 \longrightarrow J_1 \longrightarrow J_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Sigma \quad (3.2)$$

La sucesi n $\{J_k\}$ es dada tal que

$$J_{k+1} = S_k^T J_k T_k,$$

donde $S_k \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ y $T_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ son ortogonales. Las matrices T_k se eligen tal que la sucesi n $M_k = J_k^T J_k$ converge a una matriz diagonal, mientras que S_k se eligen de modo que todos los J_k son de la forma bidiagonal.

El proceso parte de la matriz bidiagonal $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ obtenida en la etapa I, sucesivamente construimos una sucesión de matrices bidiagonales $\{B_k\}$, tal que cada B_i tiene las entradas fuera de la diagonal mas pequeñas que la anterior.

La sucesión $\{J_k\}$ esta relacionada con la sucesión $\{B_k\}$ de la siguiente manera:

$$J_k = \begin{pmatrix} & B_k & \\ & & \\ O_{(m-n) \times n} & & \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Describiremos brevemente el proceso y por conveniencia notacional, dejamos de usar los sufijos denotando:

$$J \equiv J_k, \quad \bar{J} \equiv J_{k+1}, \quad B \equiv B_k, \quad \bar{B} \equiv B_{k+1}, \quad S \equiv S_k, \quad T \equiv T_k.$$

A continuación veremos la descripción de un solo paso de la iteración del método.

Paso principal del algoritmo DVS:

Para simplificar la notación escribimos

$$B = \begin{pmatrix} d_1 & f_1 & & & \\ & d_2 & f_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & f_{n-1} \\ & & & & d_n \end{pmatrix}$$

suponiendo que no es reducida.

[1] Aplicando un paso de QR con desplazamiento de Wilkinson a la matriz

$$B^T B = \begin{pmatrix} d_1^2 & d_1 f_1 & & & \\ d_1 f_1 & d_2^2 + f_1^2 & d_2 f_2 & & \\ & d_2 f_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & d_{n-1}^2 + f_{n-2}^2 & d_{n-1} f_{n-1} \\ & & & & d_{n-1} f_{n-1} & d_n^2 + f_{n-1}^2 \end{pmatrix}$$

donde $G_i = G(i, i + 1, \theta_i)$ y $\widehat{G}_i = G(i, i + 1, \gamma_i)$ de tal forma que \bar{B} tiene la misma forma que B .

De (3.4) se tiene que $\bar{B} = \bar{U}^T B \bar{V}$, por lo que podemos definir:

$$S = \begin{pmatrix} \bar{U} & O_{n \times (m-n)} \\ O_{(m-n) \times n} & I_{m-n} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} B \\ O_{(m-n) \times n} \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad T = \bar{V}.$$

Luego, se tiene:

$$\bar{J} = S^T J T.$$

El paso principal dado anteriormente permite generar los términos de la sucesión de matrices $\{J_k\}$.

Primeramente obtendremos los primeros términos de la sucesión, donde el elemento de la posición $(n, n - 1)$ de cada matriz de la sucesión forman una sucesión $\{J_{n, n-1}^k\}$ que converge a cero.

Considerando $\delta = \varepsilon_0 \|J_0\|_\infty$ donde ε_0 es la precisión de la máquina, El criterio para su convergencia es:

Si $|f_{n-1}^k| \leq \delta$ para algún k (donde $k = k_n$), entonces d_n^k es aceptado como valor singular y B_k es dado por

$$B_k \approx \begin{pmatrix} B_1^k & O_{(n-1) \times 1} \\ 0 & d_n^k \end{pmatrix}$$

donde $B_1^k \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

Luego analizamos los elementos de la matriz

$$B_1^k = \begin{pmatrix} d_1^k & f_1^k & & & \\ & d_2^k & f_2^k & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & f_{n-2}^k \\ & & & & d_{n-1}^k \end{pmatrix}$$

Acabamos de describir un paso del algoritmo de bidiagonalización DVS. Como mencionamos anteriormente por aplicaciones repetitivas del algoritmo, uno construye una sucesión de matrices $\{B_k\}$ con las entradas en la diagonal $d_1^k, d_2^k, \dots, d_n^k$ y las entradas de la superdiagonal $f_1^k, f_2^k, \dots, f_{n-1}^k$.

De la convergencia del algoritmo de iteración QR con desplazamiento de Wilkinson se tiene que f_{n-1}^k converge a cero.

Habiendo hecho f_{n-1}^k cero (según el criterio), la matriz es reducida y el algoritmo es repetido en una y mas matrices de orden $(n - 1)$ o inferior.

El proceso es seguido hasta que

$$B_k \equiv B = \begin{pmatrix} d_1 & f_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & f_{n-1} \\ & & & & d_n \end{pmatrix}$$

se convierta en diagonal al considerar el siguiente criterio:

Criterios para anular las entradas fuera de la diagonal

1. La entrada fuera de la diagonal f_i será nula, si

$$|f_i| \leq \epsilon(|d_i| + |d_{i+1}|) \quad (3.5)$$

donde ϵ es un múltiplo pequeño de la precisión de la máquina ϵ_0 .

2. La entrada en la diagonal d_i será nula, si

$$|d_i| \leq \epsilon \|A\|_\infty \quad (3.6)$$

donde ϵ es un múltiplo pequeño de la precisión de la máquina ϵ_0 .

Golub y Reincsh (1970) han señalado que el total de *flops* es

$$4m^2n + 8mn^2 + 9n^3, \quad m \geq n$$

que incluye el costo de V , Σ , y U [4, p. 493].

Observación 9 *El algoritmo de Golub - Kahan - Reinsch (Golub and Kahan (1965) [13], Golub and Reinsch(1970) [14]), ha sido el algoritmo estándar para el*

cálculo de la DVS de una matriz, este algoritmo en lenguaje Algol fue publicado en ([14], 1970). A partir de ese momento han habido avances en la construcción de algoritmos para el cálculo de la DVS de una matriz, que han sido incluidos a los programas contenidos en la librería de algoritmos de álgebra lineal numérica LAPACK (<http://www.netlib.org/lapack/>).

3.1 DVS y PYTHON 3

En la librería de álgebra lineal LAPACK se encuentra una versión revisada del algoritmo que apareció en [4] presentado por [16, pp 873–912].

PYTHON 3 incluye una función para calcular la descomposición de valores singulares de una matriz al escribir el comando `numpy.linalg.svd`, que utiliza la subrutina `dgesvd` LAPACK cuyo código puede verse en <http://www.netlib.no/netlib/lapack/double/dgesvd.f>

Ejemplo 3.1.1 Al aplicar la función `numpy.linalg.svd` de PYTHON 3 en el proceso la transformación del círculo unitario por una matriz no singular $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.2 & -1 \end{pmatrix}$, se obtiene las matrices V , U y S son:

$$V = \begin{pmatrix} -0.81558 & 0.57864 \\ 0.57864 & 0.81558 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1.20948 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.90948 \end{pmatrix} \quad y \quad U = \begin{pmatrix} -0.57864 & 0.81558 \\ -0.81558 & -0.57864 \end{pmatrix}.$$

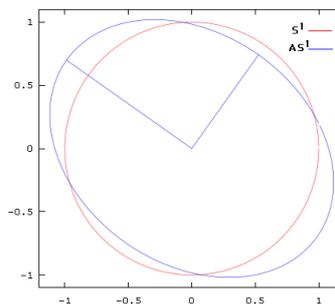


Figura 3.1: Gráfico $S^1 \rightarrow AS^1$.

4 APLICACIÓN: LA DVS EN LA INGENIERÍA BIOMÉDICA

Durante el periodo de gestación de una mujer es muy importante para los médicos conocer la actividad cardíaca del feto o electrocardiograma fetal (ECGF), ya que permite monitorear su estado y llevar a cabo la detección y diagnóstico de posibles enfermedades, de manera que se efectúe el tratamiento adecuado.

Los métodos mas precisos son invasivos, ya que utilizan electrodos colocados sobre el cuero cabelludo del feto, esta técnica solo es posible durante el parto cuando el cuero cabelludo del feto es accesible. Una técnica no invasiva es el de la obtención del electrocardiograma fetal registrado por electrodos en el abdomen y tórax de la madre. Este procedimiento tiene como principal interferencia el ECG materno (ECGM) ya que es de mayor voltaje en comparación con el voltaje del ECGF, además de otros niveles de ruido (que derivan del ruido del músculo materno, la respiración materna, la actividad estómacal, contracciones del útero) y el ruido térmico procedente de los equipos electrónicos (los electrodos, cables, conexiones, amplificadores, etc); además la posición de los electrodos también es muy importante, pues la elección de las posiciones de los electrodos puede ser completamente útil en el curso de un experimento debido a los movimientos fetales [1],[2].

En el área de la ingeniería biomédica una de las aplicaciones de la DVS consiste en aproximar el electrocardiograma fetal (ECGF) de señales que fueron obtenidas de electrodos en el abdomen y tórax de una mujer embarazada.

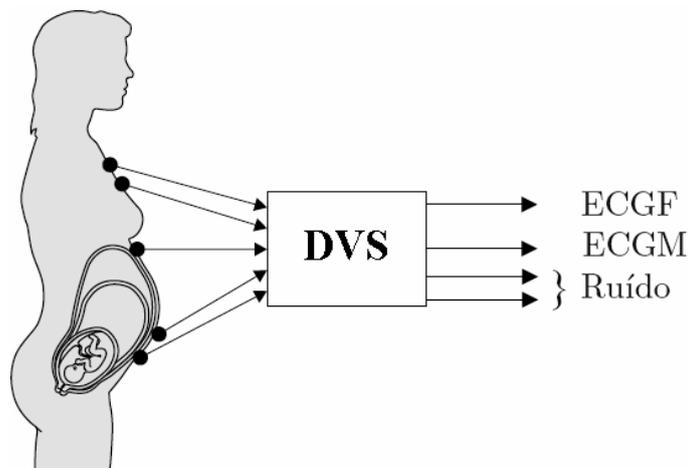


Figura 4.1: Método DVS [21].

4.1 Modelamiento del problema de ECGF

Las señales obtenidas a partir de la colocación de electrodos en el abdomen de la madre, presentan una combinación de las señales electrocardiográficas maternas (ECGM) y fetales (ECGF), acompañadas de ruido de fondo. Para formular el problema del Electrocardiograma Fetal (ECGF) en términos matemáticos se debe tener en cuenta lo siguiente:

- La actividad eléctrica del corazón puede ser modelada, Plonsey (1989) [17], afirma que a cierta distancia del corazón su actividad bioeléctrica puede ser representada por un dipolo de corriente tridimensional.
- Las características de propagación entre de las fuentes bioeléctricas y los electrodos.

R. Plonsey en [17] afirma que cualquier señal ECGM medido del abdomen de la madre se puede expresar como la superposición de tres señales ortogonales, espacial y estadísticamente independiente, “llamadas señales fuentes del ECGM”. Estas tres señales fuentes del ECGM generan un espacio vectorial tridimensional llamado subespacio del ECGM. De la misma manera, se define el subespacio ECGF, generado por las “señales fuentes del ECGF”. La dimensión del subespacio no es necesariamente igual al tres, sino que esta sujeta a cambios durante el embarazo [17],[18].

Supongamos que r señales fuentes son suficientes para representar la actividad de todas las fuentes de corrientes bioeléctricas internos denotadas por s_i , $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Entonces en un instante t podemos definir el vector de las r señales fuentes $s(t)$, llamada vector “señal fuente”:

$$s(t) = \left(s_1(t) \quad s_2(t) \quad \cdots \quad s_r(t) \right)^T \quad (4.1)$$

Estas señales no se pueden medir directamente, pero si se puede medir la diferencia de potencial entre dos pares de electrodos colocados sobre el abdomen de la gestante, estas señales de medición se denotan por $m_i(t)$. Supongamos que p señales de medición de pares de electrodos son medidos y arreglados en un vector $m(t)$, llamado el vector

de señal de medición, como

$$m(t) = \begin{pmatrix} m_1(t) & m_2(t) & \cdots & m_p(t) \end{pmatrix}^T$$

Según [17] existe una relación lineal entre $m(t)$ y $s(t)$, donde cada una de las señales de medición $m_i(t)$ puede escribirse como una combinación lineal de las r señales fuente $s_j(t)$, además de la adición de ruido, representado por una señal de $n_i(t)$. Luego, se tiene las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} m_1(t) &= t_{11}s_1(t) + t_{12}s_2(t) + \cdots + t_{1r}s_r(t) + n_1(t) \\ m_2(t) &= t_{21}s_1(t) + t_{22}s_2(t) + \cdots + t_{2r}s_r(t) + n_2(t) \\ &\vdots \\ m_p(t) &= t_{p1}s_1(t) + t_{p2}s_2(t) + \cdots + t_{pr}s_r(t) + n_p(t) \end{aligned} \tag{4.2}$$

equivale a escribir

$$m(t) = Ts(t) + n(t) \tag{4.3}$$

donde $n(t) = \begin{pmatrix} n_1(t) & n_2(t) & \cdots & n_p(t) \end{pmatrix}^T$ y $T = (t_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$ es llamada matriz de transferencia, que depende de la geometría del cuerpo y su conductibilidad, las posiciones de los electrodos y la conductividad de los tejidos del cuerpo [17].

El problema consiste en obtener una estimación de las señales fuente $s_j(t)$ que se generan por un conjunto determinado de señales de medición externa.

4.2 DVS para obtención del ECG fetal

Supongamos que existen p señales de los electrodos (p entre 6 a 8), los datos mostrados para en cada instante de tiempo t son almacenados en $m(t)$ generando un sistema igual a (4.2) cuya forma matricial (4.3) es dada por:

$$m(t) = Ts(t) + n(t). \tag{4.4}$$

Se pueden hallar los ECGM y ECGF al encontrar las estimaciones de las señales fuente $s_i(t)$, $i = 1, \dots, r$ de:

$$s(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) & s_2(t) & \cdots & s_r(t) \end{pmatrix}^T$$

Si tomamos q muestras consecutivas en los instantes de tiempo t_1, \dots, t_q , estas son almacenados en una matriz $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ de la siguiente forma:

$$M = \begin{pmatrix} m_1(t_1) & m_1(t_2) & \cdots & \cdots & m_1(t_q) \\ m_2(t_1) & m_2(t_2) & \cdots & \cdots & m_2(t_q) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ m_p(t_1) & m_p(t_2) & \cdots & \cdots & m_p(t_q) \end{pmatrix}$$

Las p señales observadas $m_i(t)$ (las filas de la matriz M) son modeladas por (4.3). Así, el modelo tiene la siguiente forma:

$$M = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1r} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{p1} & t_{p2} & \cdots & t_{pr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(t_1) & s_1(t_2) & \cdots & s_1(t_q) \\ s_2(t_1) & s_2(t_2) & \cdots & s_2(t_q) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_r(t_1) & s_r(t_2) & \cdots & s_r(t_q) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_1(t_1) & n_1(t_2) & \cdots & n_1(t_q) \\ n_2(t_1) & n_2(t_2) & \cdots & n_2(t_q) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n_p(t_1) & n_p(t_2) & \cdots & n_p(t_q) \end{pmatrix}$$

o de forma matricial

$$M = TS + N$$

donde $T \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$, $S \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{R})$ y $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

La DVS de la matriz de datos $M = V\Sigma U^T$, bajo ciertas condiciones en la colocación de los electrodos y el ECGM lo suficientemente fuerte comparado el ECGF, proporciona una aproximación del ECGF libre del ECGM.

La matriz Σ de la DVS de M puede ser escrito como:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_M & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_F & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_0 \end{pmatrix}$$

donde Σ_M contiene r_M valores singulares asociados con el corazón de la madre ($r_M = 3$), Σ_F contiene r_F valores singulares asociados con el corazón del feto ($r_F = 2$) y Σ_0 contiene $r_0 = p - r_M - r_F$ valores singulares asociadas a otras posibles fuentes de actividad bioeléctrica y el ruido ($r_0 = 1$).[2]

Desde que:

$$\text{Ima}(M) = \mathcal{C}(M) = \mathcal{C}(V\Sigma U^T) = \mathcal{C}(V)$$

el subespacio de dimensión p generado por las columnas de la matriz de datos M es igual al subespacio generado por las columnas de V .

La matriz V se puede escribir de la siguiente forma:

$$V = \begin{pmatrix} r_M & r_F & r_0 \\ V_M & V_F & V_0 \end{pmatrix}$$

dando lugar a tres subespacios ortogonales unos a otros, siendo estos:

- Subespacio materno S_M , con $\dim(S_M) = r_M$.
- Subespacio fetal S_F , con $\dim(S_M) = r_F$.
- Subespacio de otras fuentes bioeléctrica y ruido S_R , con $\dim(S_R) = r_0$.

Entonces, solo se necesita proyectar las señales dato almacenadas en M al subespacio fetal S_F , donde las contribuciones del ECGM y del ruido son eliminados.

Desde que el subespacio fetal $S_F = \mathcal{C}(V_F)$, se pueden obtener las contribuciones del ECGF en cada señal medida al proyectar las señales dato M al subespacio fetal S_F , dicha matriz se denota por $F \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ y es dada por:

$$F = \text{Proy}_{S_F} M = V_F V_F^T M = \sum_{i=r_M+1}^{r_M+r_F} \Sigma_i v_i u_i^T \quad (4.5)$$

donde v_i es la columna i -ésima columna de V , u_i es la i -ésima columna de U y Σ_i el i -ésimo valor singular de M .

La matriz

$$\widehat{S} = V^T M = \begin{pmatrix} V_M^T \\ V_F^T \\ V_0^T \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} V_M^T M \\ V_F^T M \\ V_0^T M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{S}_M \\ \widehat{S}_F \\ \widehat{S}_0 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

donde $\widehat{S} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ contiene las p estimaciones de las señales fuentes de la ecuación (4.1). Las señales en la matriz $\widehat{S}_F = V_F^T M \in \mathcal{M}_{r_F,q}(\mathbb{R})$ contiene las señales fuentes fetales que también son llamados las señales principales del feto, cada contribución fetal en los datos se pueden encontrar como una combinación lineal de las únicas r_F principales señales fetales [1],[2]. La aproximación del ECGF se obtiene al hacer un promedio de las aproximaciones de las dos señales fuentes fetales [2].

De manera similar a (4.5) se puede obtener la contribución del ECGM en cada señal medida.

4.3 Aplicación:

Se aplicará el método a datos de dos diferentes bases de datos.

4.3.1 Aplicación del método a datos de *The DaIsy*

The DaIsy database: De Moor B.L.R. (ed.), DaIsy: Database for the Identification of Systems, Department of Electrical Engineering, ESAT/STADIUS, KU Leuven, Belgium, URL: <http://homes.esat.kuleuven.be/~smc/daisy/>, 29/07/2018. [Used dataset: Cutaneous potential recordings of a pregnant woman, Biomedical Systems, 96-012.]

- Descripción: grabaciones de potenciales cutáneos de una mujer embarazada (8 canales: 1-5: abdominal; 6,7, 8: torácicas).
- Muestreo: 5 seg.
- Número de datos: 2500 x 8



Figura 4.2: DaIsy: Señales ECG

Los datos son almacenados en una matriz de medida M , donde las cinco primeras columnas de M corresponden a los datos medidos del abdomen y las tres ultimas a las medida en el tórax, tal como se muestra en la figura 4.2.

De la ecuación (4.6) se tiene la estimación de las señales fuentes, donde la cuarta y quinta señal de la figura 4.3 son las señales fuentes fetales.

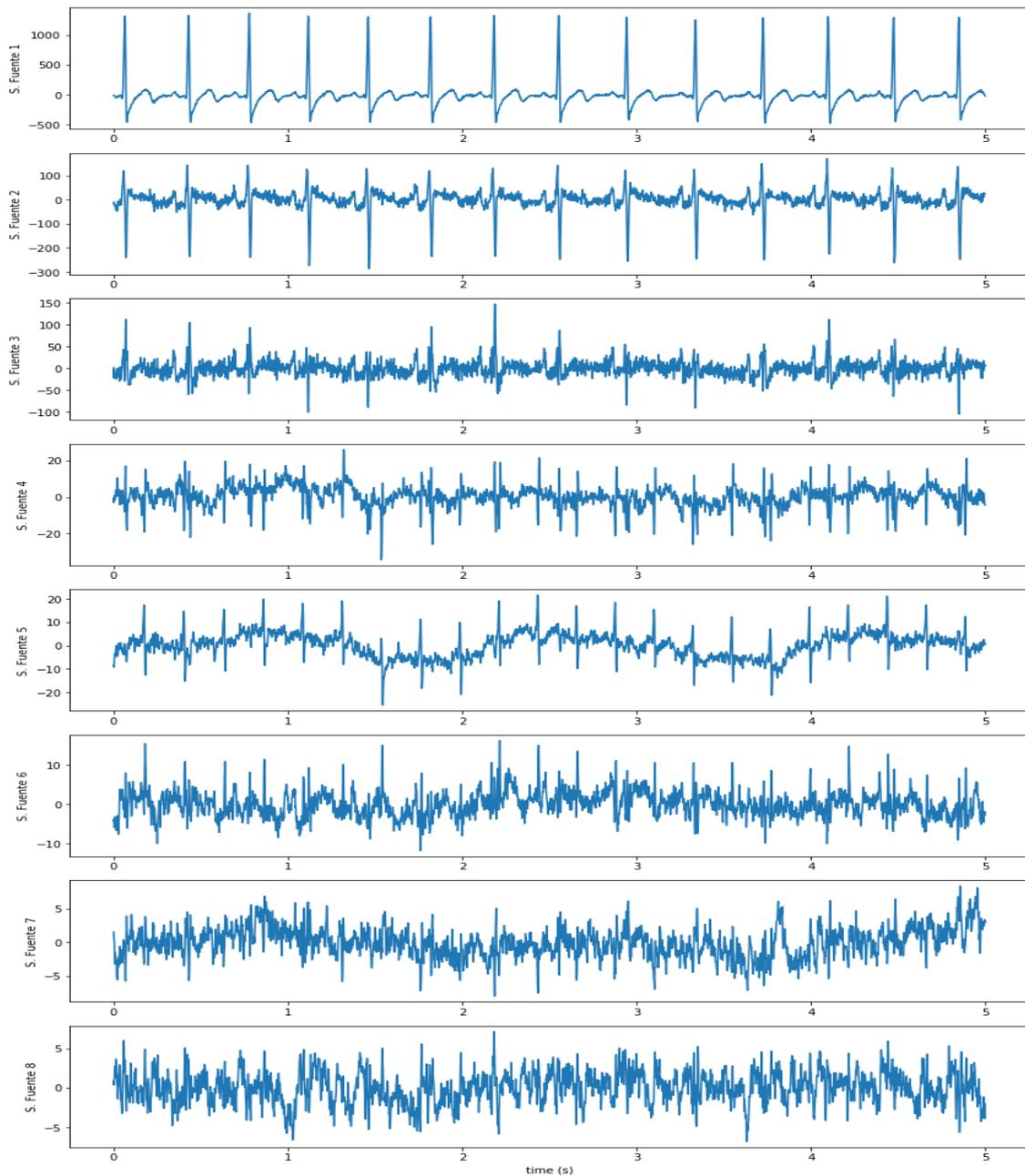


Figura 4.3: Señales fuentes obtenidas de las señales de medición de la figura 4.2.

La contribución del ECGF en cada una de las señales de medición de la figura 4.2 se obtienen de la ecuación (4.5) y se muestra en la figura 4.4.

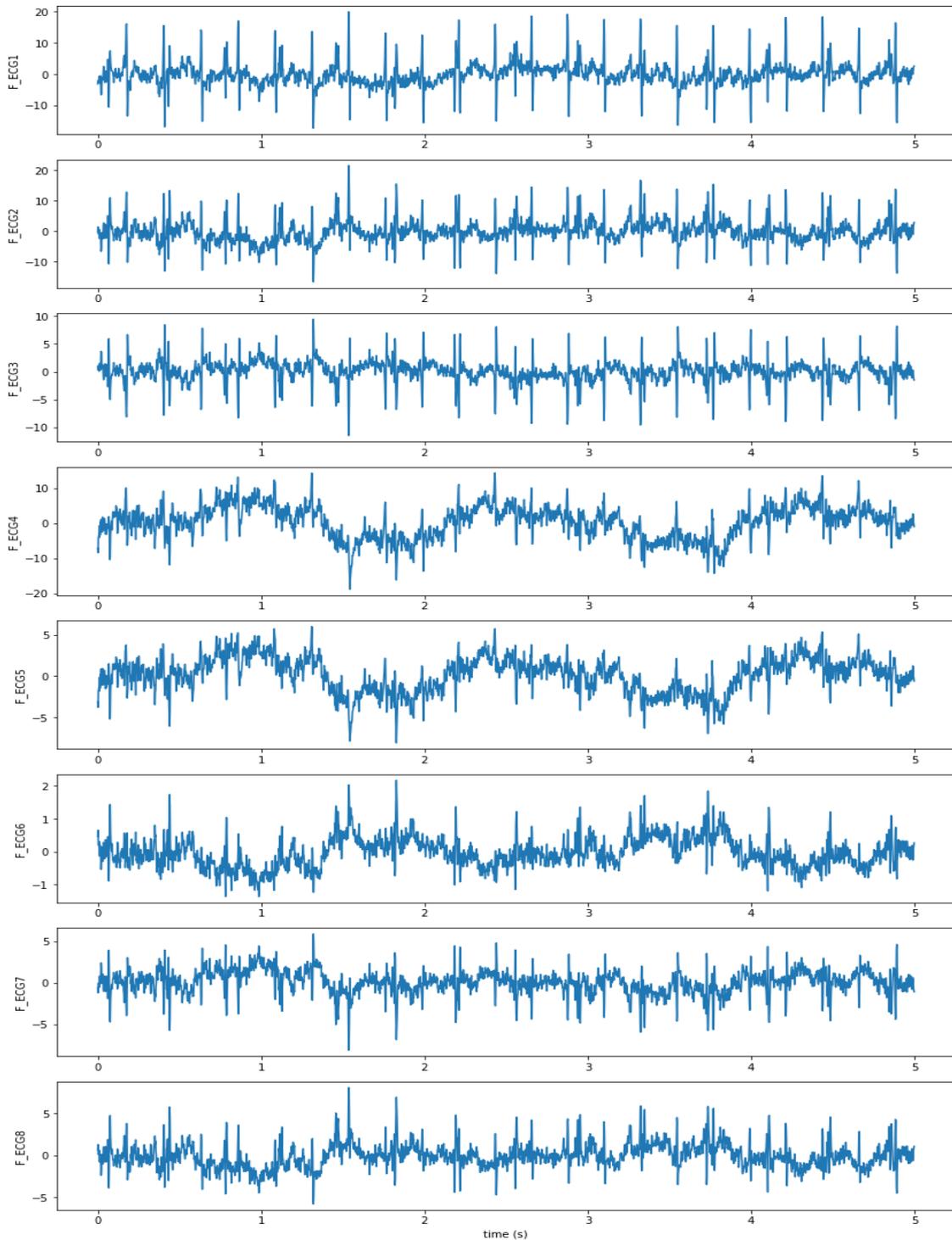


Figura 4.4: Contribución ECGF en cada señal de la figura 4.2.

De manera similar se obtiene la contribución del ECGM en cada una de las señales de medición de la figura 4.2 y se muestra en la figura 4.5.

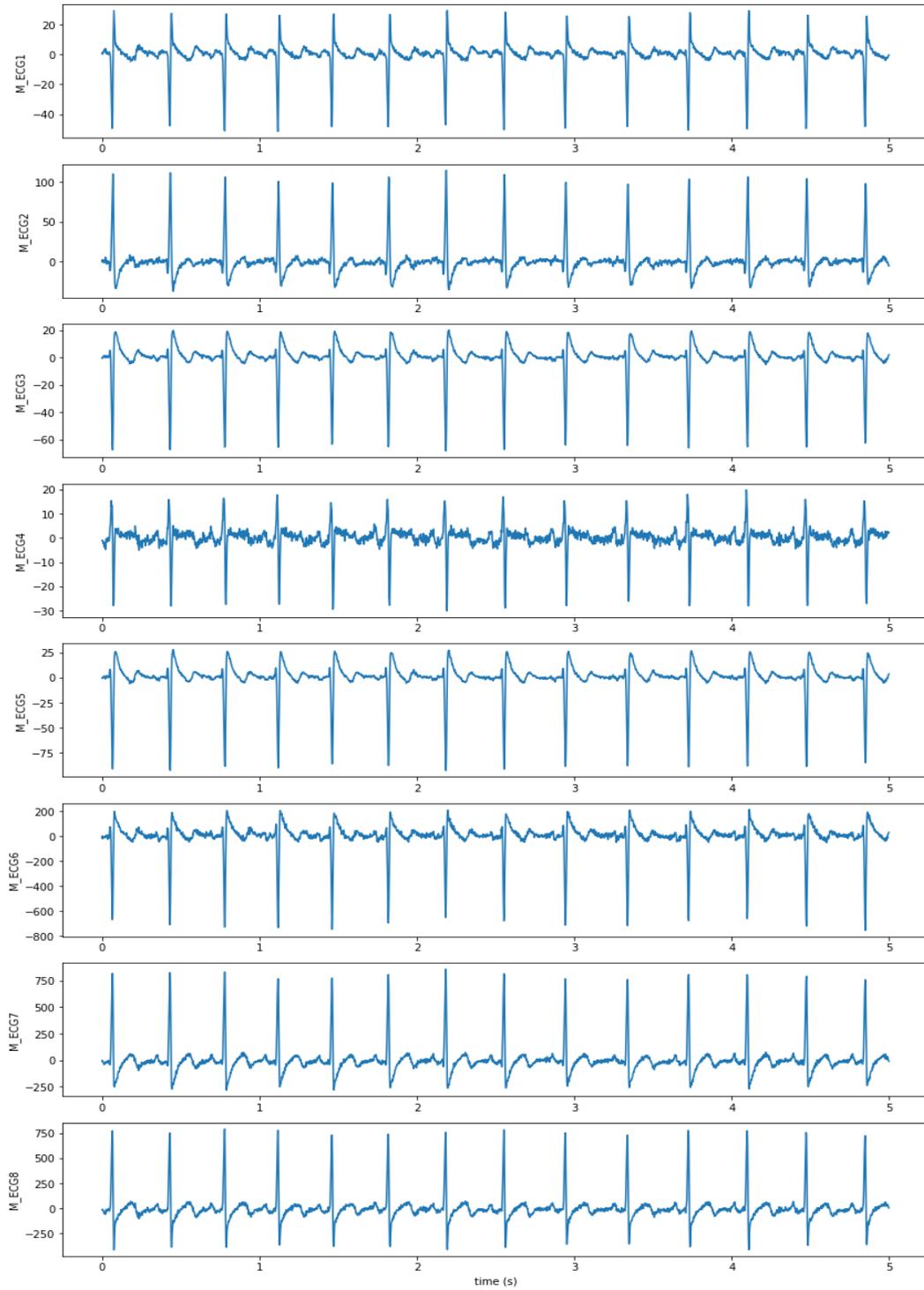


Figura 4.5: Contribución del ECGM en cada señal de la figura 4.2.

La aproximación del ECGF se obtiene al promediar las señales fuentes fetales [2].

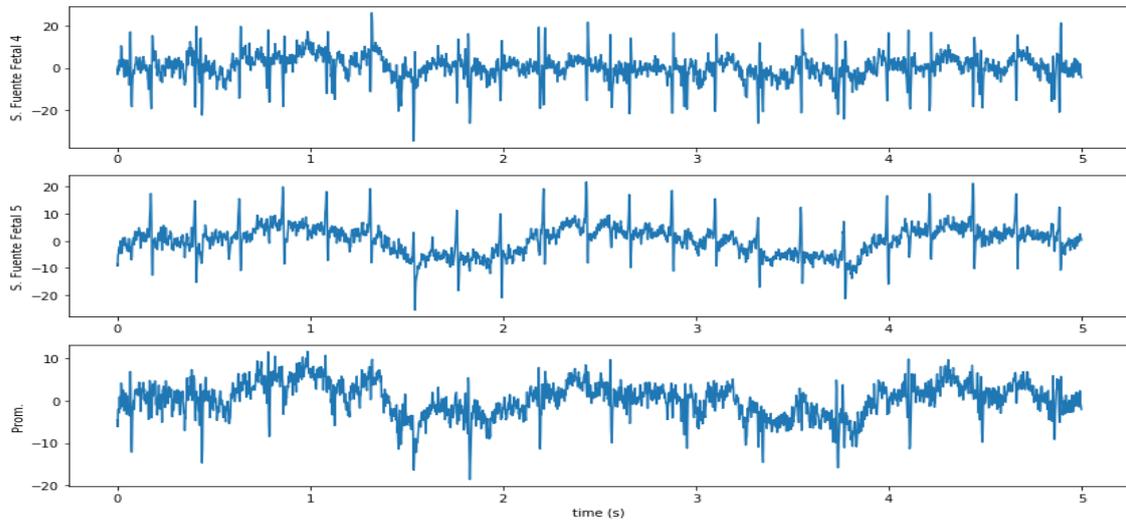


Figura 4.6: Señales fuentes fetales y aproximación del ECGF.

De la figura 4.6 notemos que la señal aproximada del ECGF esta muy distorsionada, para verlo con mas claridad se considera el tiempo entre 0.16 y 0.24 seg. tal como se muestra en la figura (4.7); se aprecia que el complejo QRS no tiene la forma usual,

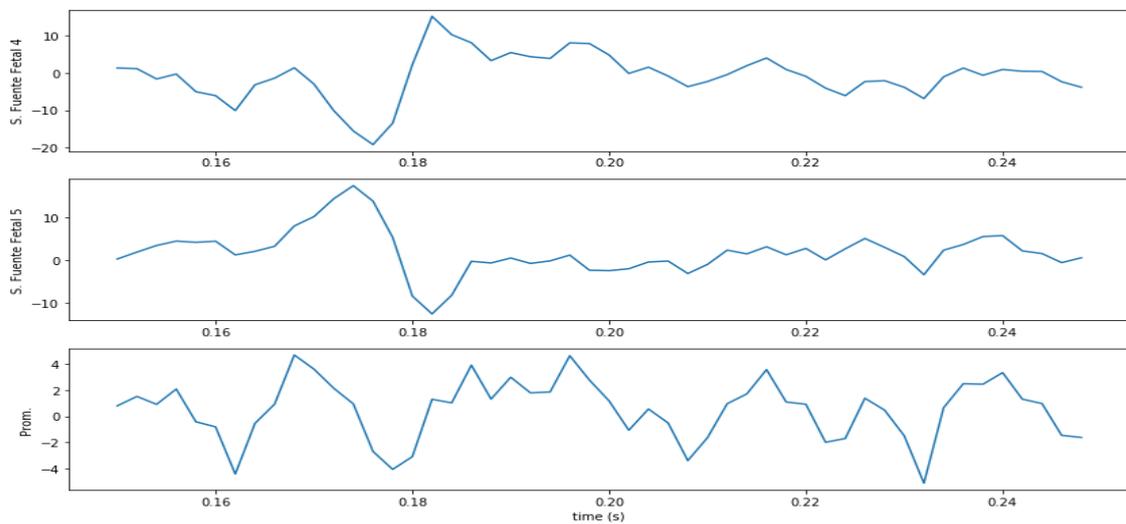


Figura 4.7: Señales fuentes fetales y aproximación del ECGF en tiempo corto.

lo que nos indica que el método para la aproximación del ECGF usando la DVS al consideramos los datos completos (8 señales) del artículo [2], resulta ser poco eficiente, ya que este método funciona bajo condiciones específicas como la colocación apropiada

de los electrodos, la cantidad adecuada de electrodos en el tórax y el abdomen de la madre. Para obtener buenos resultados se necesitaría tomar múltiples muestras variando posición y cantidad de electrodos hasta obtener los datos reales que al aplicar el método proporcione óptimos resultados.

En el artículo [2] de las 8 señales que se tiene como data se consideraron 6 señales (3 abdominales y 3 torácicas) de las cuales no se especifica cuales de las 5 señales abdominales se utilizo para ejecutar el método y que criterio se considero para su elección, por ello es que este uno de los factores por la cual no llegamos a un resultado eficiente.

Al hacer todas las posible elecciones de como podrían haberse elegido las 3 señales del abdomen de las 5 señales que poseen los datos, se observo las señales del Abdomen_1, Abdomen_2 y Abdomen_5 junto con las otras 3 del tórax según la figura 4.8 fueron las que mostraron mejores resultados por lo que se asume que éstas se utilizaron en [2],

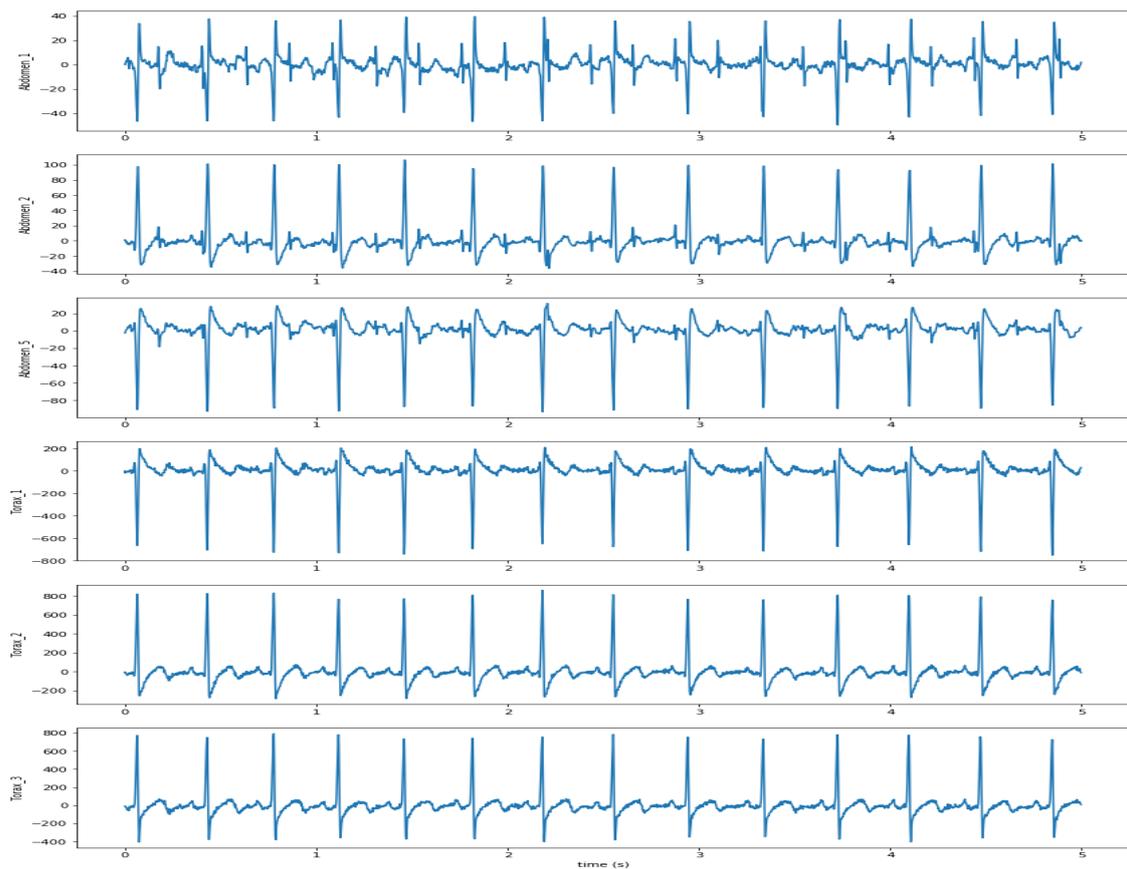


Figura 4.8: Las 6 señales utilizadas en [1].

ya que al observar sus señales fuentes dada en la figura 4.9.

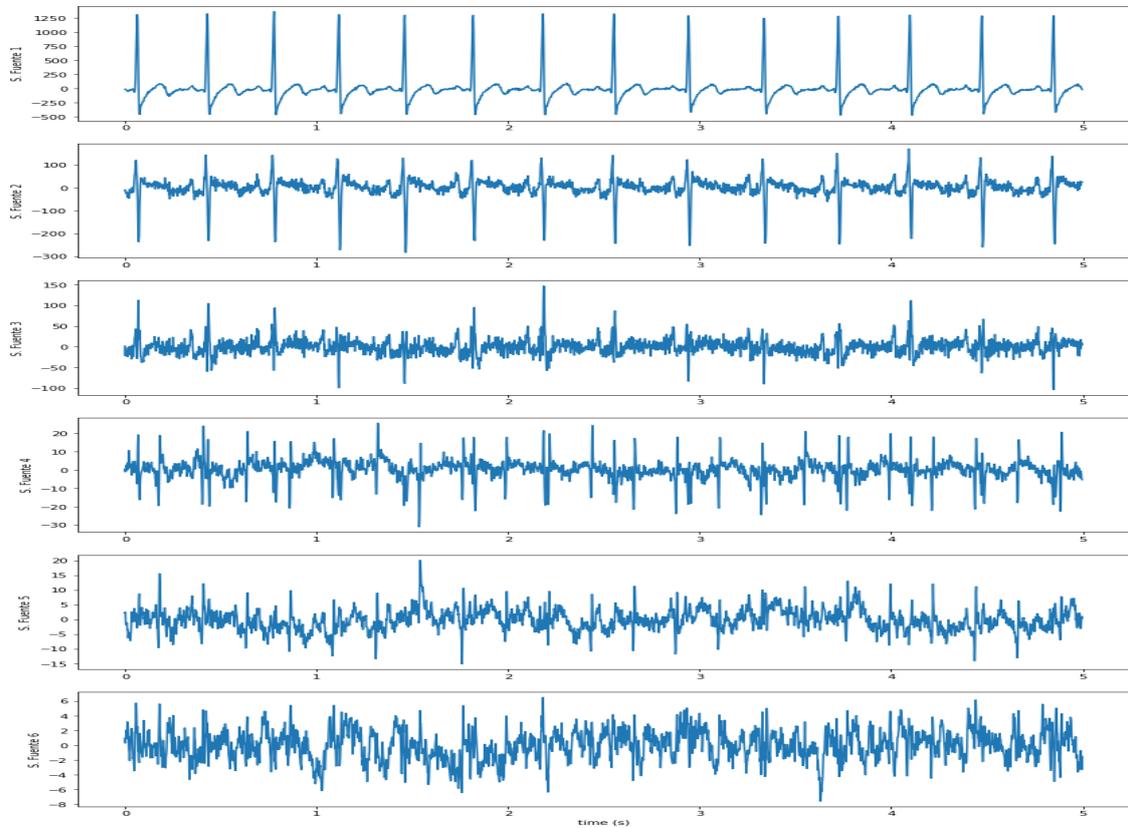


Figura 4.9: Las señales fuentes de la figura 4.8.

En las señales fuentes fetales y la aproximación del ECGF se aprecia de una manera mas clara la onda del complejo QRS, tal como se muestra en las figuras 4.10

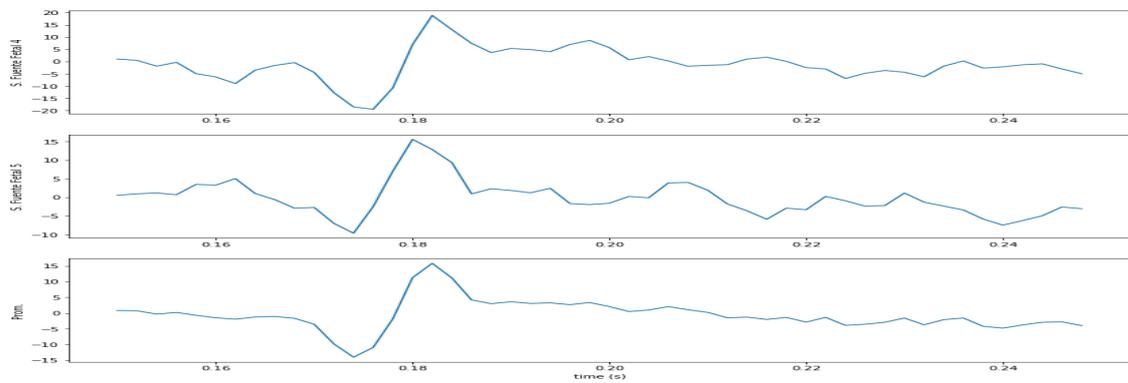


Figura 4.10: Aproximación del ECGF fetal.

4.3.2 Aplicación del método a datos de *PhysioNet*

The PhysioNet database: Archivo EDF `ecga244data.edf` de <http://www.physionet.org/pn3/nifecqdb>.

- Descripción: grabaciones de potenciales cutáneos de una mujer embarazada de 38 semanas (6 canales: 1-2 torácicas mV ; 3-6: abdominales μV) tomadas el 8 de Marzo de 2004.
- Muestreo: 5 seg
- Número de datos: 3000 x 6

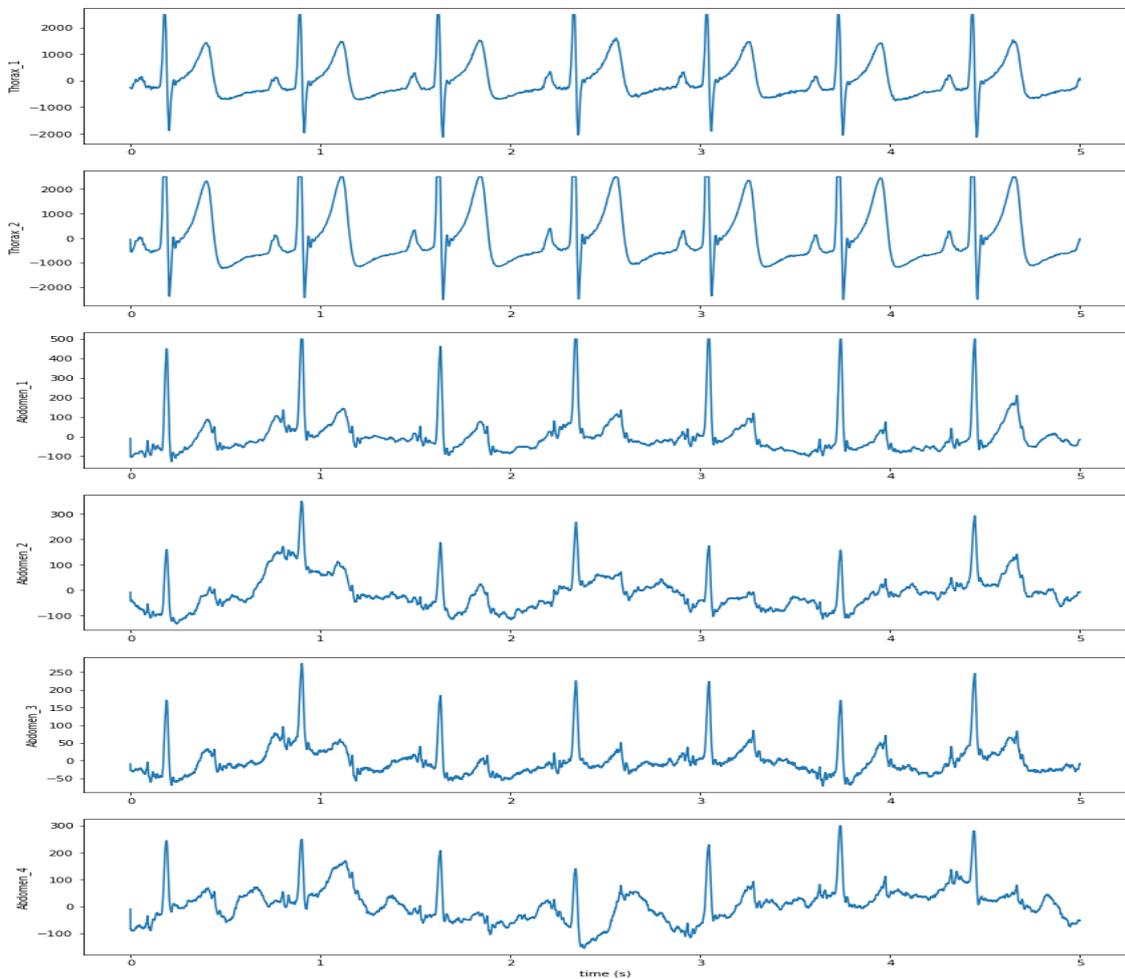


Figura 4.11: Señales PhysioNet ECG 244.

Siguiendo el mismo esquema para los datos que en la base de datos DaIsy, los datos del PhysioNet del ECG 244 de la figura 4.11 son almacenados en una matriz

de medida M , donde las dos primeras columnas de M corresponden a los datos medidos del tórax y las cuatro últimas a las medidas en el abdomen de la mujer gestante.

Aplicando la ecuación (4.6) se tiene la estimación de las señales fuentes, donde la cuarta y quinta señal de la figura 4.12 son las señales fuentes fetales.

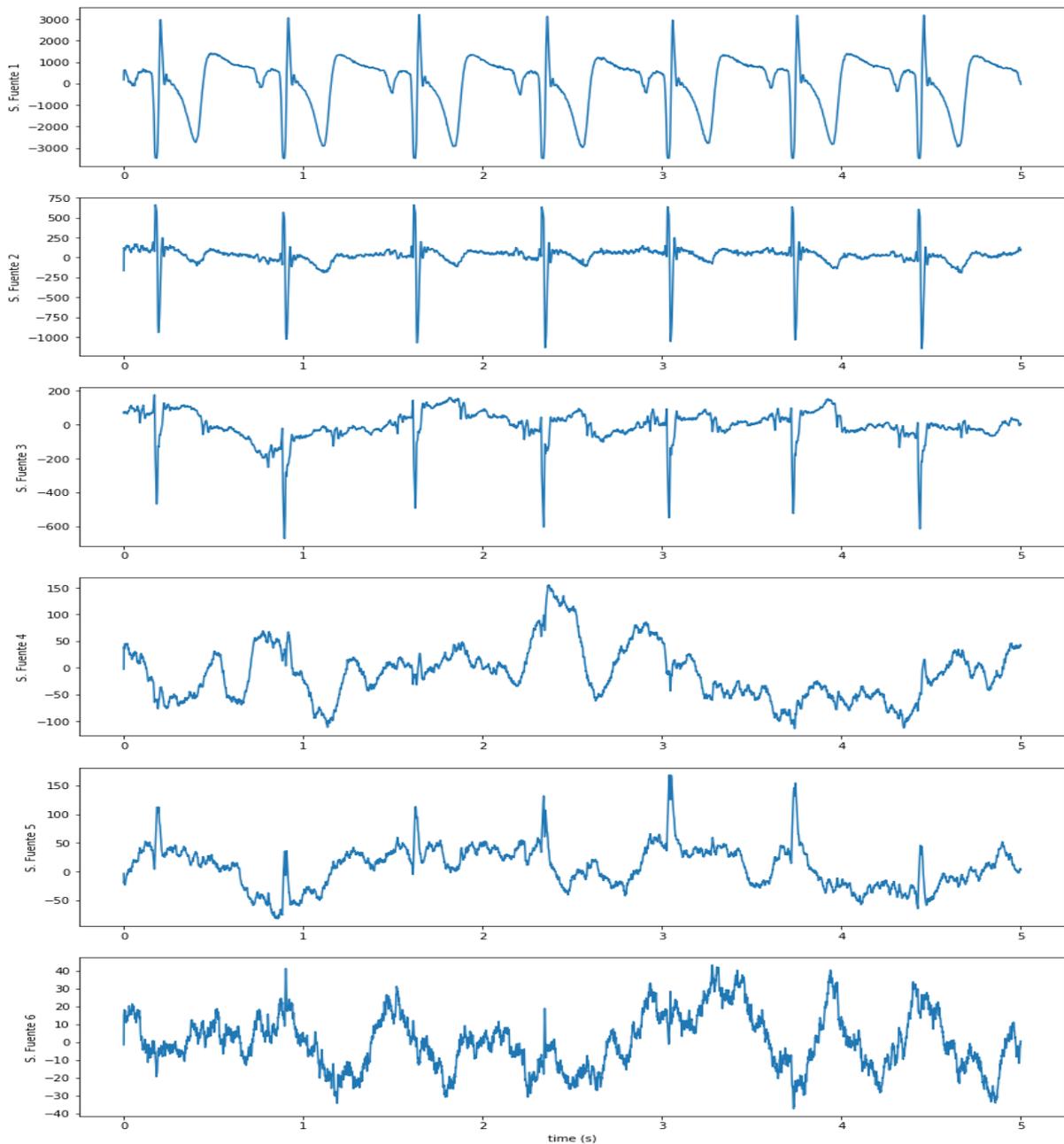


Figura 4.12: Señales fuentes obtenidas de las señales de medición de la figura 4.11.

La contribución del ECGF en cada una de las señales de medición de la figura 4.11 se obtienen de la ecuación (4.5) y se muestra en la figura 4.13.

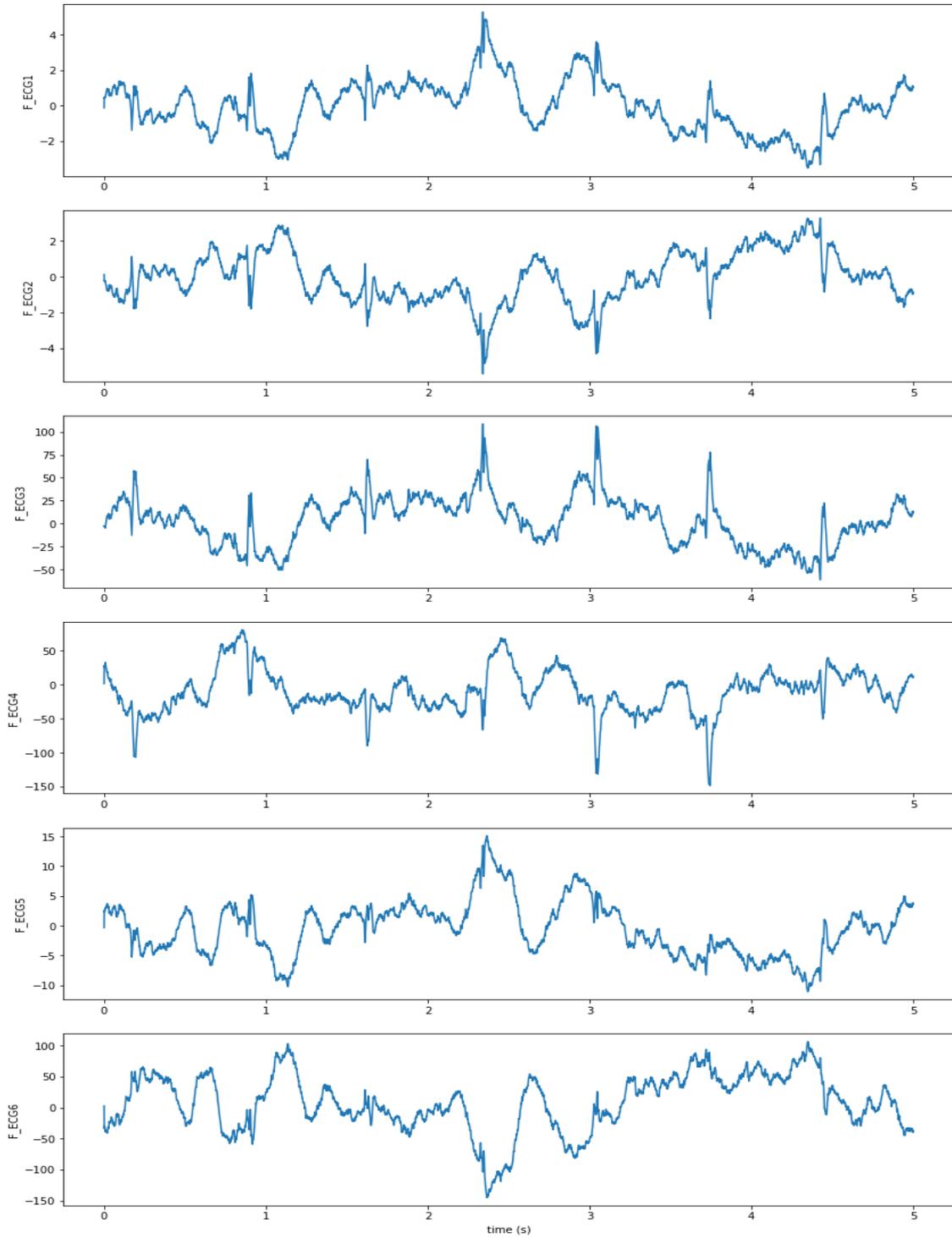


Figura 4.13: Contribución ECGF en cada señal de la figura 4.11.

De manera similar se obtiene la contribución del ECGM en cada una de las señales de medición de la figura 4.11 y se muestra en la figura 4.14.

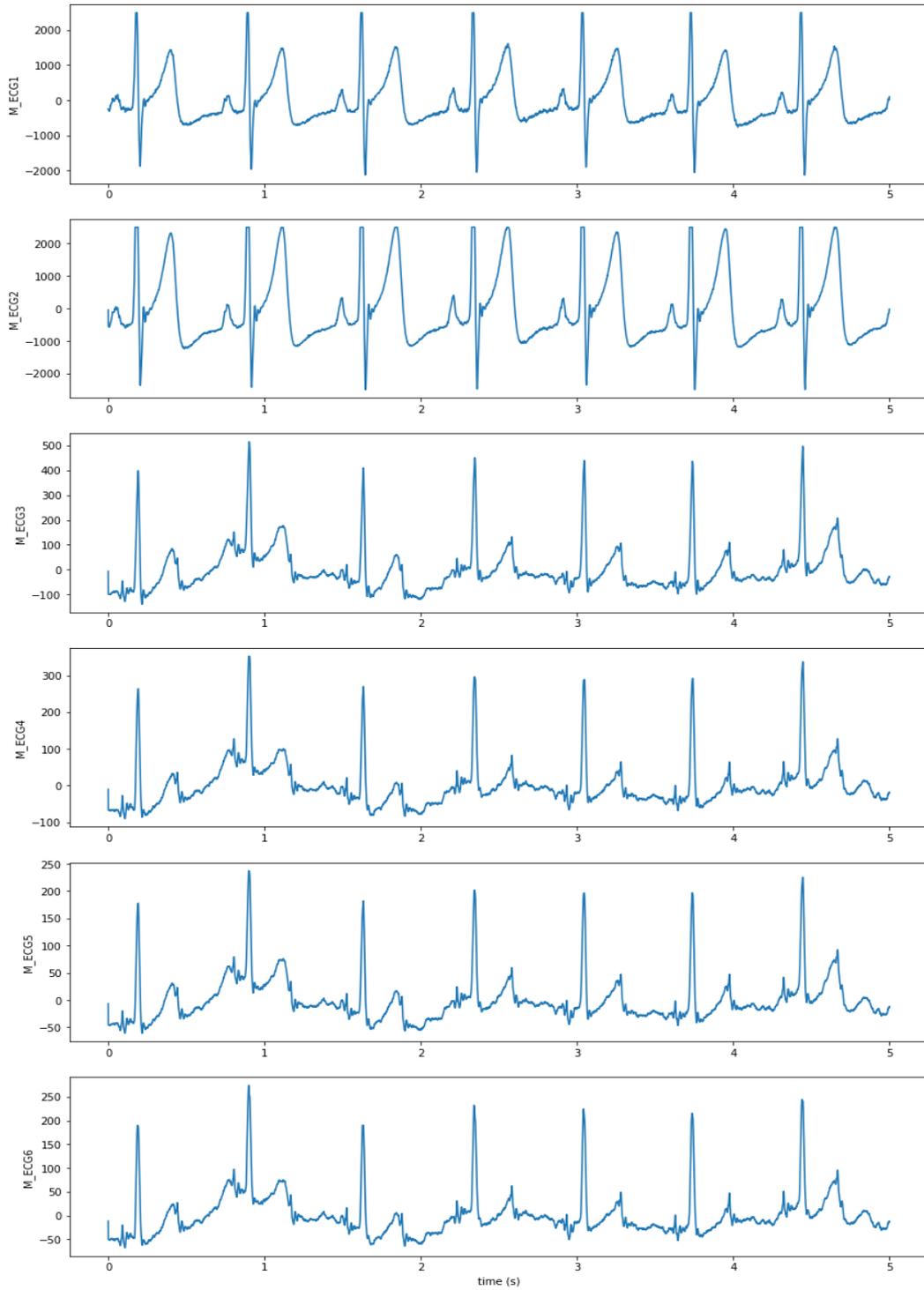


Figura 4.14: Contribución del ECGM en cada señal de la figura 4.11.

La aproximación del ECGF se obtiene al promediar las señales fuentes fetales [2].

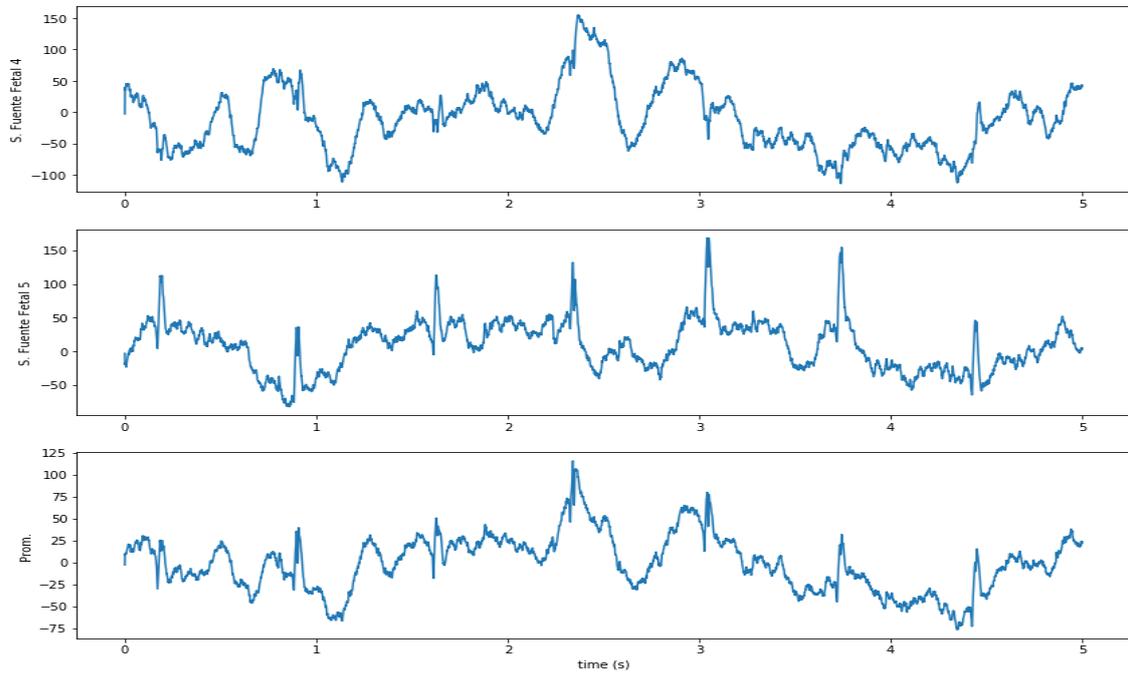


Figura 4.15: Señales fuentes fetales y aproximación del ECGF.

De la figura 4.15 notemos que la señal aproximada del ECGF esta muy distorsionada, para verlo con mas claridad se considera el tiempo entre 0.16 y 0.24 seg. tal como se muestra en la figura (4.16); se aprecia que el complejo QRS no tiene la forma usual,

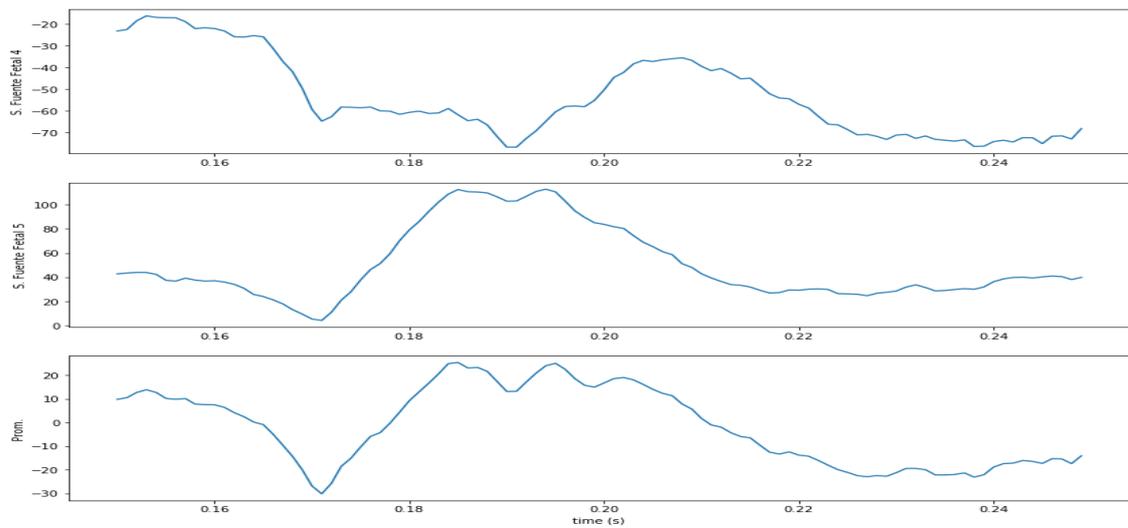


Figura 4.16: Señales fuentes fetales y aproximación del ECGF en tiempo corto.

lo que nos indica que el método para la aproximación del ECGF sigue siendo poco eficiente, ya que no se obtiene con claridad la onda del complejo QRS. Lo que nos confirma que se necesita mas señales dato y seleccionar los adecuados para un mejor resultado.

5 CONCLUSIONES:

1. La descomposición de valores singulares (DVS) de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ con r valores singulares positivos garantiza que existen dos matrices unitarias $V \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y una matriz $\tilde{\Sigma} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tal que

$$A = V\tilde{\Sigma}U^* \quad y \quad \tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\Sigma = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_r)$, y $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r > 0$. Proporcionando información respecto a la matriz A , como $\text{Ima}(A)$, $\mathcal{N}(A)$, $\text{rango}(A)$, $\|A\|_2$, $\text{cond}_2(A)$, entre otros.

2. El algoritmo mas utilizado para calcular la descomposición DVS de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ es el algoritmo de Golub-Kahan-Reinsch (1970) y una versión revisada para el calculo de SVD de una matriz se encuentra en la libreria de álgebra lineal LAPACK.
3. La evaluación del electrocardiograma fetal (ECGF) es importante para el diagnóstico de diversas anomalías cardíacas. El ECGF puede obtenerse de manera no invasiva mediante la colocación de electrodos sobre el abdomen y el tórax de la madre, el problema de esta técnica es que la señal obtenida esta distorsionada pues tiene como principal interferencia el electrocardiograma materno (ECGM), ya que las señales del corazón materno son mas fuertes que la del corazón del feto y además se mezcla con otras señales biomédicas, un método para aproximar el ECG fetal es la descomposición de valores singulares (DVS).
4. El método para la aproximación del ECGF usando la DVS utilizando datos reales de las base de datos DaIisy y PhysioNet resulta que no es eficiente, ya que el método funciona bajo condiciones especificas, como la colocación apropiada de los electrodos, la cantidad de estos en el tórax y el abdomen de la madre. Para obtener mejores resultados es necesitaría tomar múltiples muestras variando posición y cantidad de electrodos.

ANEXO A-1 PSEUDOCODIGO EN PYTHON 3

```
import numpy as np
fname='./foetal_ecg.dat' #Daisy
#fname="./ecgca244.edf" #Physionet
muestras=2500

def separacion(M):
    (U, S, Vh) = np.linalg.svd(M,
        full_matrices=True)
    #r=len(S)
    #signals2 = (U[:, :r] @ np.diag(S)) @ Vh[:, :]
    #np.allclose(signals, signals2)
    SP = U.T @ M # SENALES FUENTE
    rM=3
    rF=2
    CF=U[:, rM:rM+rF] @ SP[rM:rM+rF, :]
    CM=U[:, :rM] @ SP[:, rM, :]
    return(CF, CM, SP)

import os.path
tipo_arch = os.path.splitext(fname)[1]
if tipo_arch==" .dat":
    a=np.loadtxt(fname, dtype='f').T
    muestras=min([a.shape[1], muestras])
    M = a[1:, 0:muestras]
    time_label=a[0, 0:muestras]
    n = M.shape[0]
    signal_labels =(['Abdomen_1', 'Abdomen_2', 'Abdomen_3',
        'Abdomen_4', 'Abdomen_5', 'Torax_1',
        'Torax_2', 'Torax_3'])
    origen='daisy'
    freq=500 #Hz
    duracion=5 #segundos
    muestras=int(freq*duracion)
elif tipo_arch==" .mat":
```

```

import scipy.io as sio
mat_var = sio.loadmat(fname)
a = mat_var[list(mat_var.keys())[0]]
muestras=min([a.shape[1],muestras])
M = a[0:,0:muestras]
time_label=range(muestras)
n = M.shape[0]
origen='sim'

```

```

elif tipo_arch==".edf":

```

```

    import pyedflib
    ecg_edf = fname
    f = pyedflib.EdfReader(ecg_edf)
    n = f.signals_in_file
    signal_labels = f.getSignalLabels()
    origen='nifecgdb'
    freq=1000 #Hz
    duracion=5 #segundos
    muestras=int(freq*duracion)
    muestras=min([f.getNSamples().min(),muestras])
    freq=f.getSampleFrequencies()[0]
    time_label = np.linspace(0,muestras/freq,muestras)
    M = np.zeros((n,muestras),dtype='f')
    for i in np.arange(n):
        M[i, :] = f.readSignal(i)[:muestras]
    M[0,:]=1000*M[0,:]
    M[1,:]=1000*M[1,:]
    f._close()
    del f

```

```

(CF,CM,SP)=separacion(M)

```

```

from matplotlib.pyplot import (plot, show, title, subplot,
                                ylabel, xlabel, subplots)

```

```

fig, ax = subplots(figsize=(14,24))

```

```

title('ECGM+ECGF')
for idx in range(n):
    subplot(n, 1, idx+1)
    plot(time_label[0:muestras],M[idx,0:muestras])
    ylabel(signal_labels[idx])
xlabel('time_(s)')
fig.savefig('ecg_{0}.png'.format(origen), bbox_inches='tight')
show()

```

```

fig, ax = subplots(figsize=(14,24))
title('Separacion')
for idx in range(n):
    subplot(n, 1, idx+1)
    plot(time_label[0:muestras],SP[idx,0:muestras])
    ylabel('S_{0}Fuente_{0}'.format(idx+1))

xlabel('time_(s)')
fig.savefig('senales_fuentes_{0}.png'.format(origen),
            bbox_inches='tight')
show()

```

```

fig, ax = subplots(figsize=(14,24))
title('Contribucion_del_FECG')
for idx in range(n):
    subplot(n, 1, idx+1)
    plot(time_label[0:muestras],CF[idx,0:muestras])
    ylabel('F_ECG{0}'.format(idx+1))

xlabel('time_(s)')
fig.savefig('ecg_fetal_{0}.png'.format(origen), bbox_inches='tight')
show()

```

```

fig, ax = subplots(figsize=(14,24))
title('Contribucion_del_MECG')
for idx in range(n):
    subplot(n, 1, idx+1)

```

```

    plot(time_label[0:muestras],CM[idx,0:muestras])
    ylabel('MECG{0}'.format(idx+1))

xlabel('time_(s)')
fig.savefig('ecg_materno_{0}.png'.format(origen), bbox_inches='tight')
show()

fig, ax = subplots(figsize=(14,24))
title('Promedio_de_senales_fuente')
canales_fetal=[4,5]
n_can = len(canales_fetal)
for idx in range(n_can):
    subplot(n, 1, idx+1)
    plot(time_label[0:muestras],SP[canales_fetal[idx]-1,0:muestras])
    ylabel('S._Fuente_Fetal_{0}'.format(canales_fetal[idx]))
subplot(n, 1, n_can+1)
plot(time_label[0:muestras],
      SP[np.array(canales_fetal)-1,0:muestras].mean(axis=0))
ylabel('Prom. ')

xlabel('time_(s)')
fig.savefig('promedio_fuentes_feto_{0}.png'.format(origen), bbox_inches='tight')
show()

```

ANEXO A-2 ELECTROCARDIOGRAMA (ECG)

Esta sección se basa de [47] entre otros más, cuyo contenido permite conocer que es el electrocardiograma, su gráfica y las ondas mas representativas de ella, sus derivaciones, intervalos y segmentos.

A-2.1 Electrocardiograma

El electrocardiograma (ECG ó EKG), inventado por el doctor Willem Einthoven (1860-1927) en 1903, es un método no invasivo que registra la corriente eléctrica que presenta el músculo cardíaco durante las distintas fases de la contracción. El paso del potencial a través de las células cardíacas genera formas de onda, las cuales, sumadas entre sí, generan una gráfica electrocardiográfica (A-2.1).

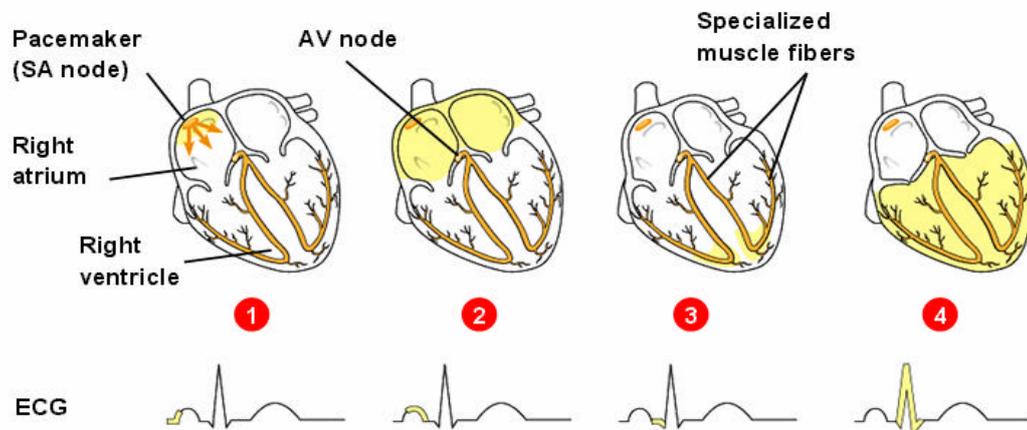


Figura A-2.1: Ciclo Cardíaco [48].

En un trazado electrocardiográfico se observan las formas de onda más representativas: la onda P, el complejo QRS y la onda T.(A-2.2)

- **Onda P:** El nodo SA genera el impulso y se da la despolarización de las aurículas, primero la aurícula derecha, luego la izquierda (evento eléctrico). Se produce la sístole auricular (evento mecánico). Dura entre 0.09 seg. y 0.11 seg.

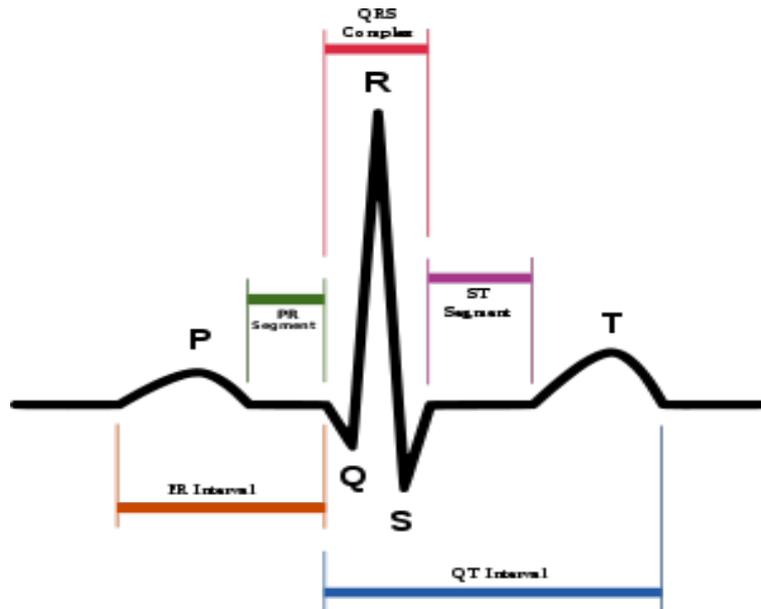


Figura A-2.2: Onda P, el complejo QRS y la onda T [49].

- **Intervalo P-Q:** Es el espacio comprendido entre el fin de la onda P y el inicio del complejo QRS. Dura entre 0.11 seg. y 0.20 seg. Muestra el tiempo de conducción aurículoventricular, incluyendo el retardo fisiológico a través del nodo AV.
- **Complejo QRS:** El nodo AV reenvía el estímulo eléctrico y se da la despolarización de los ventrículos (evento eléctrico) y por esto, se da la sístole ventricular (evento mecánico). La aurícula se repolariza (evento eléctrico) y se genera la diástole auricular (evento mecánico). Dura entre 0.07 seg. y 0.11 seg.
- **Segmento ST:** Compreendida entre el fin del complejo QRS y el inicio de la onda T. Suele ser isoelectrico en los ECG normales.
- **Onda T:** repolarización de ventrículos (evento eléctrico) y se genera una diástole ventricular (evento mecánico). Tiene igual polaridad al complejo QRS.

El registro del electrocardiograma se lleva a cabo mediante la colocación de electrodos en diferentes posiciones del cuerpo (el pecho, los brazos y las piernas) que la actividad eléctrica del corazón y envían la señal a un aparato llamado electrocardiógrafo al cual se conectan e imprime el trazado en papel milimetrado (A-2.3). En el sentido horizontal se mide el tiempo y en el sentido vertical el voltaje. Cada milímetro corresponde a 0.04 segundos. Cada 5 mm (0.20 segundos) existe una línea vertical más marcada. Cinco de estas líneas constituyen un segundo. El papel corre a 25 mm/seg.

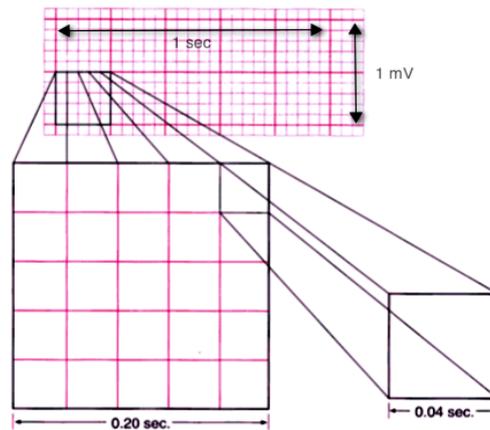


Figura A-2.3: Papel milimetrado [50].

A-2.1.1 Derivaciones

En electrocardiografía, la palabra "derivaciones" se refiere a la medida del voltaje entre dos electrodos. Las derivaciones de un ECG utilizan diferentes combinaciones de electrodos para medir distintas señales procedentes del corazón. Se clasifican en tres tipos los cuales son:

- Bipolares: Registran la diferencia de potencial entre las extremidades del cuerpo de la siguiente forma:

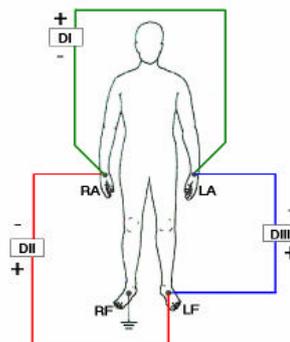


Figura A-2.4: Bipolares [48].

- el brazo izquierdo (LA) y el brazo derecho (RA): DI
- la pierna izquierda (LF) y el brazo derecho (RA): DII
- la pierna izquierda (LF) y el brazo izquierdo (LA): DIII

- Aumentada:
 - Son variantes de las bipolares.
 - brazo derecho: aVR
 - brazo izquierdo: aVL
 - pie izquierdo: aVF

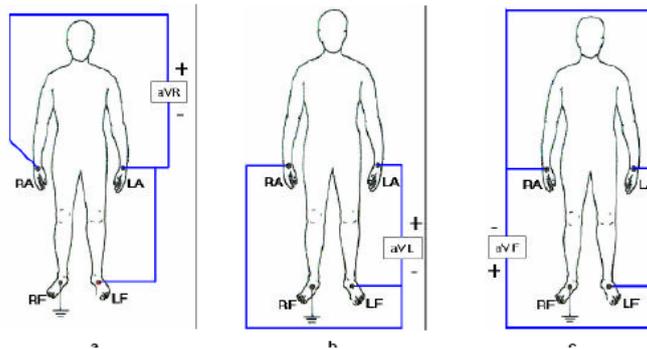


Figura A-2.5: Aumentada [48].

- Unipolares:
 - Se obtienen de los electrodos ubicados en el pecho del paciente.

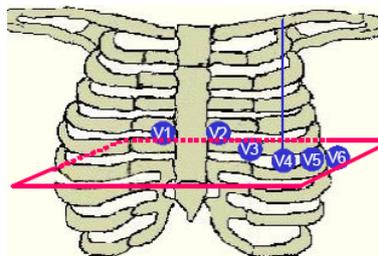


Figura A-2.6: Unipolares [48].

- V1: Cuarto espacio intercostal parasternal derecho.
- V2: Cuarto espacio intercostal parasternal izquierdo
- V3: Punto intermedio entre V2 y V4
- V4: Quinto espacio intercostal izquierdo
- V5: Al nivel horizontal de V4 en la línea axilar anterior izquierda
- V6: Al nivel horizontal de V4 en la línea media axilar izquierda.

Para realizar un ECG estándar de 12 derivaciones, hacen falta 10 electrodos. Cada uno de ellos se numera y se coloca sobre el paciente de la forma siguiente:

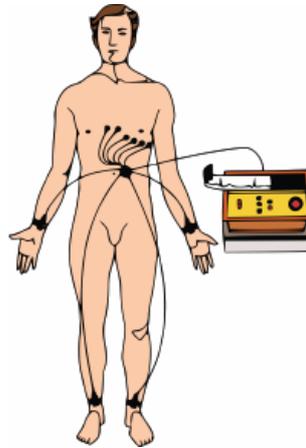


Figura A-2.7: ECG estandar [52].

La altura del trazado electrocardiográfico está sujeta al voltaje que los electrodos capten. El estándar define que una altura de 10 mm. establece una diferencia de potencial de 1 mV. La altura de las formas de onda revela detalles del funcionamiento del corazón.

A-2.1.2 Medición de la frecuencia cardíaca con papel ECG:

Cuando ya se tiene un registro ECG en papel, se puede proceder a realizar un análisis de la señal. Entre los parámetros de interés se encuentra la frecuencia cardíaca.

Para hallar el ritmo ventricular se tienen 3 métodos:

- Contar el número de ondas R en 6 segundos y multiplicar por 10
- Dividir 1500 entre el número de cuadros pequeños que hay entre ondas R consecutivas
- Dividir 300 entre el número de cuadrados grandes (cinco cuadros pequeños en cada cuadro grande) que hay entre ondas R consecutivas.

A-2.1.3 Intervalos y segmentos

Los intervalos y segmentos entre las diferentes ondas del electrocardiograma son importantes para el diagnóstico clínico.

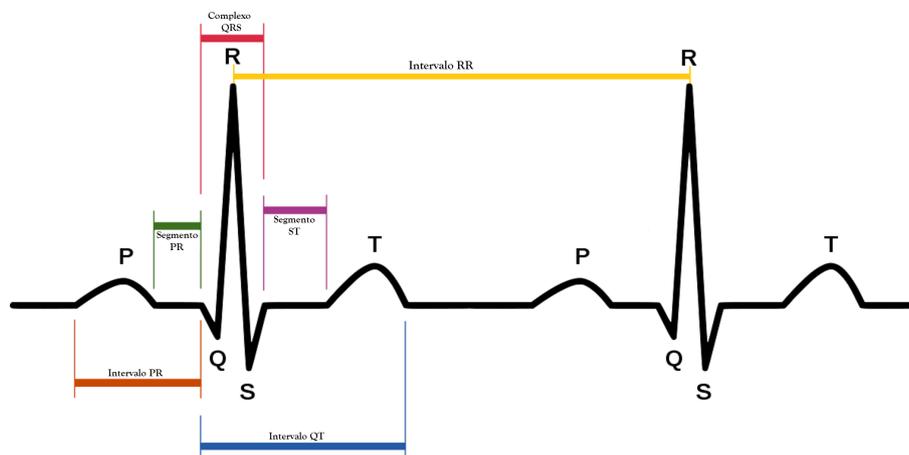


Figura A-2.8: Intervalos y segmentos [51].

- **Intervalo RR:** formado por los picos de dos ondas R consecutivas y que definen la frecuencia cardíaca instantánea.
- **Intervalo PR:** medido entre el inicio de la onda P y el inicio del complejo QRS. Representa el tiempo de conducción de la actividad eléctrica de las aurículas a los ventrículos.
- **Segmento PR:** periodo comprendido entre el fin de la onda P y el inicio del complejo QRS. Representa el tiempo de transmisión del frente de despolarización por el nodo aurículo-ventricular.
- **Segmento ST:** comprendido entre el fin del complejo QRS (o punto J) y el inicio de la fase ascendente de la onda T. Corresponde al tiempo durante el cual el conjunto de células miocárdicas son despolarizadas y, en el caso normal, debe ser isoelectrónica.
- **Intervalo QT:** comprendido entre el inicio del complejo QRS y el final de la onda T. Representa una indicación de la duración de las fases de despolarización y de repolarización ventricular.

El estudio del ECG permite identificar patologías a partir de cambios en la morfología de la señal.

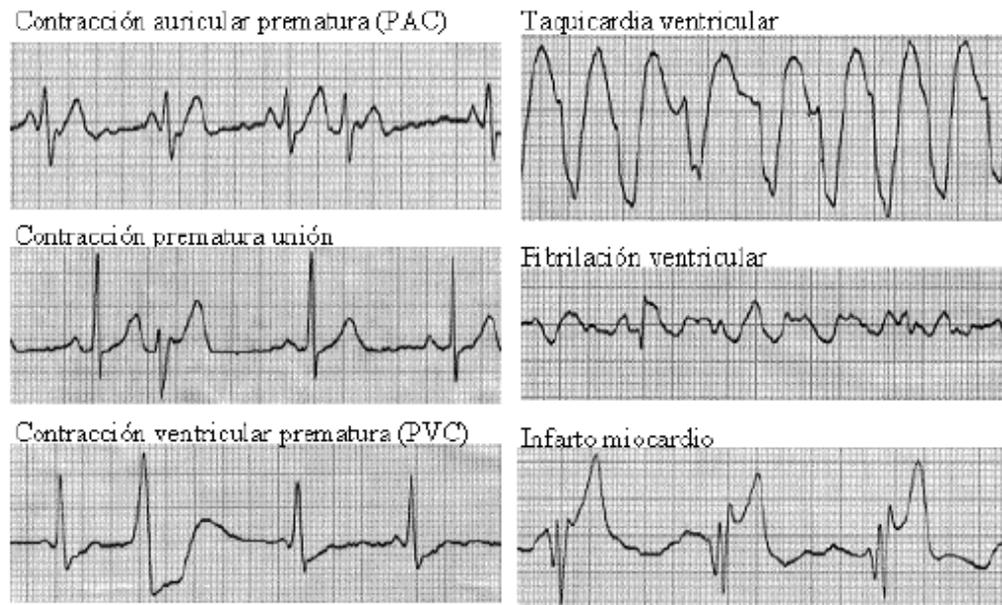


Figura A-2.9: Patologías [53].

Otro tipo de patologías están asociadas al ritmo o frecuencia cardíaca, es decir, variaciones en el número de pulsos por minuto a que late el corazón.

Observación 10 *De la misma manera que para los adultos, es posible observar la actividad eléctrica del corazón del feto a través del electrocardiograma fetal (ECGF). Una técnica no invasiva para obtener el ECGF consiste en la colocación de electrodos sobre el abdomen y tórax de la madre; estos registros contienen un nivel muy débil de ruido y bajos valores de voltaje del ECGF en relación al electrocardiograma materno ECGM; por lo tanto la señal observada en cada electrodo es un complejo de señales asociadas a la superposición de muchas fuentes. Existen varias técnicas de procesamiento de señales que han sido introducidas para la extracción del ECGF:*

- *Filtrado adaptativo.*
- *Técnicas de correlación.*
- *Descomposición de valor singular (DVS).*

- *Redes neuronales.*
- *Separación Ciega de Fuentes (BSS).*

GLOSARIO

Corazón: Es el órgano principal del aparato circulatorio y tiene la función de ser el motor propulsor de la sangre en el interior del organismo a través de un sistema cerrado de canales: las venas y arterias; llevando sustancias nutritivas y oxígeno a todas las células que componen nuestro cuerpo. Para esto, el corazón genera de forma continua impulsos eléctricos que provocan una serie de eventos rítmicamente ordenados [47].

Ingeniería Biomédica: Es el resultado de la aplicación de los principios y técnicas de la ingeniería al campo de la medicina [54].

Eléctrodos: Son los dispositivos que ponen en contacto al paciente con el electrocardiógrafo. A través de ellos se obtiene la información eléctrica para la impresión y el análisis del electrocardiograma [55].

La teoría de control: Es un campo interdisciplinario de la ingeniería y las matemáticas, que tiene que ver con el comportamiento de sistemas dinámicos [56].

Estadísticamente independiente: Se dice que dos variables estadísticas son estadísticamente independientes cuando el comportamiento estadístico de una de ellas no se ve afectado por los valores que toma la otra [57].

Dependencia espacial o auto-correlación: La dependencia espacial es la co-variación de las propiedades dentro del espacio geográfico: las características en las ubicaciones proximales parecen estar correlacionadas, positivamente o negativamente. La dependencia espacial conduce al problema de autocorrelación espacial en las estadísticas, ya que, al igual que la autocorrelación temporal, esto viola las técnicas estadísticas estándar que asumen la independencia entre las observaciones [58].

BIBLIOGRAFIA

- [1] Dirk Callaerts, Joos Vandewalle, Willy Sansen, J. Janssens and G. Vantrappen *Acquisition and processing of the antepartum FEKG*, Elsevier Science B. V., Chapter 43, pp 371-380, 1994.
- [2] D. Callaerts, B. De Moor, J. Vandewalle, W. Sansen in co-operation with G. Vantrappen, J. Janssens *Comparison of SVD methods to extract the foetal electrocardiogram from cutaneous electrode signal*, Med. Biol. Eng. Comput. 28, 217-224, 1990.
- [3] Joos Vanderwalle y Bart De Moor, *A variety of applications of singular values decomposition in identification and signal processing*, North Holland, Elseviers Science Publishers B.V., pp. 43-91, 1988.
- [4] Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, *Matrix Computations*, Fourth Edition, The Johns Hopkins University Press Baltimore, 2013.
- [5] Biswa Nath Datta, *Numerical Linear Algebra and applications*, Springer, 1998.
- [6] David Kincaid and Ward Cheney, *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*, Brooks/Cole Publishing Company, 1991.
- [7] Carlos Vhavez Vega, *Álgebra Lineal*, UNI-FC, editorial Moshera S.R.L, 2004.
- [8] Elon Lages Lima, *Álgebra Lineal*, Textos del IMCA, 1998.
- [9] Miguel A. Marmolejo L., Manuel M. Villegas L., *Tópicos den Álgebra Lineal*, Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle.
- [10] Grégoire Allaire, Sidi Mahmoud Kaber, *Numerical linear Algebra*, Springer, 2008.
- [11] Yosef Saad, *Numerical methods for large eignvalue problems*, Copyright 2011 by the Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011.
- [12] Philippe G. Ciarlet, *Introduction to Numerical Linear algebra and optimisation*, Cambridge University Press, 1989.
- [13] G. Golub and W. Kahan, *Calculating the singular values and pseudo-inverse of matrix*, J. SIAM Numer. Anal. Ser. B., Vol 2, N° 2, 1965.

- [14] G. Golub, G.H. and Reinsch, C., *Singular value decomposition and least squares solutions*, Number. Math. 14, 403-420 , 1970.
- [15] Tony F. Chan, *An improved algorithm for computing the Singular Value Decomposition*, ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 8, N°. 1, March 1982.
- [16] J. Demmel, W. Kahan, *Valores Singulares precisas de Bidiagonal Matrices*, SIAM J. Sci. Stat. Comput., 11, 1990.
- [17] R. Plonsey, *Bioelectric Phenomena*, Nueva York, McGraw-Hill, 1969.
- [18] Vicente Zarzoso Gascón-Pelegri y Asoke K. Nande, *Extracción del ECG fetal mediante tecnicas de separación ciega de fuentes* , University of de Strathclyde, U. K., Actas CASEIB'98, Valencia.
- [19] Lieven De Lathauwer, Bart de Moor, Joos Vanderwalle, *Fetal Electrocardiogram Extraction by Blind Source Subspace Separation*, IEEE Transactions on Biomedicak Engineering, Vol. 47, No. 5, May 2000.
- [20] Ary L. Goldberger, MD; Luis A. N. Amaral, PhD; Leon Glass, PhD; Jeffrey M. Hausdorff, PhD; Plamen Ch. Ivanov, *Circulation Electronic Pages PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet Components of a New Research Resource for Complex Physiologic Signals*, Circulación 101 (23): e215-e220 <http://circ.ahajournals.org/cgi/content/full/101/23/e215>; 2000 (junio 13).
- [21] Valéria Chirstina Maria Nascimento Leite, *separação cega de sinais: Análise Comparativa entre algoritmos*, Tesis de Mestre en Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Itajubá, Junio 2004.
- [22] Fernando de Terán Vergara. *Apuntes de Álgebra II*, Universidad Carlos II de Madrid, Departamento de Matemáticas.
- [23] Luis O. Sarmiento, Irina Vélez, Neralia Flórez, Juan C. Otero, Francisco Manrique, *Estimación no invasiva de la frecuencia cardiaca fetal mediante técnica de separación ciega de fuentes*, Revista Colombiana de Cardiología, Vol. 17 N°. 4 ISSN 0120-5633, 2010.
- [24] Raul Galan, *Detección ECG Fetal en ECG Materno*, Version 1.1: May 16, 2010 12:49 pm GMT-5, <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/>.

- [25] Richard L. Burden, *Numerical Analysis*, Brooks/Cole, 2011.
- [26] Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1990.
- [27] Volker Mehrmann, Tu Berlin, *Numerical Linear Algebra*, Course Material NetworkMaths Graduate Programme, Maynooth 2010.
- [28] Javier Garcia de Jalón de la Fuente, *Álgebra Lineal Numérica con Matlab*, Universidad Politécnica de Madrid, 2004.
- [29] James Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra*, MIT, September 1996.
- [30] Peter Lancaste, Miron Tismenetsky, *The Theory of matrices Second Edition with Applications*, Academic Press, 1985.
- [31] Charles F. Van Loan, *Generalizing the singular value decomposition*, SIAM J. Numer. Anal., Vol 13, Nº 1, March 1976.
- [32] Francisco Pedroche Sánchez, *Sobre el uso de la descomposición en valores singulares para mejorar la compresión de imágenes mediante transformadas wavelet*, Programa d'Incentiu a la Investigació de la Universitat Politècnica de València, 2001.
- [33] Gregorio Quintana Ortí y Enrique S. Quintana Ortí, *Descomposiciones ortogonales para el cálculo del rango numérico matricial*, Revista Internacional de Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería, Vol. 15, 4, 461-470, 1990.
- [34] Ion Zaballa, *Valores singulares. ¿Que son?. ¿Para que sirven?*, Departamento de Matemática Aplicada y EIO, Universidad del país Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea.
- [35] Ilham Saadane, *Detection of the abdominal fetal electrofardiogram: A Study into changes in the optimal recording sites during gestation and the evaluation of non-contact sensors*, Technische universiteit Eindhoven, 2005.
- [36] J. H. Wilkinson, *Algebraic Eigenvalue Problem*, Clarendon Press- Oxford, 1988.
- [37] Jhoan Samuel Romero Peña, Irina Vélez López, Msc. Luis Omar Sarmiento, Dr. Juan Carlos Otero Pinto, Dr. Francisco Manrique, *Entorno software para la*

- obtención del electrocardiograma fetal*, Grupo de Investigación de Procesamiento de señal GIPSE, Universidad Santo Tomas, Bucaramanga, XIII Simposio de tratamiento de señales, imágenes y visión artificial, STSIVA 2008.
- [38] José Luis de la Fuente O’connor, *Técnicas de cálculo para sistemas de ecuaciones, programación lineal y programación*
- [39] Juan F. Guerrero Martínez, *Bioseñales*, Escola Técnica Superior de Ingeniería, Ingeniería Biomédica, curso 2010-2011.
- [40] Luis Ángel Corrales Rodríguez, *Análisis Comparativo de Diferentes Algoritmos de Compresión de Electrocardiogramas Mediante la Calidad en la Medición de sus Intervalos Característicos*, Tesis de Maestría en Informática Aplicada, Universidad Autónoma de Sinaloa, Julio de 2008.
- [41] Luis O. Sarmiento, Irina Vélez, Natalia Flórez, Juan C. Otero, Francisco Manrique, José Millet, *Estimación no invasiva de la frecuencia cardiaca fetal mediante técnicas de separación ciega de fuentes*, Revista Colombiana de Cardiología Julio/Agosto 2010, Vol. 17 No. 4 ISSN 0120-5633.
- [42] Neilson JP, *Electrocardiograma fetal (ECG) para la monitorización del feto durante el trabajo de parto*, La Biblioteca Cochrane Plus, 2008 Número 2. Oxford: Update Software Ltd, 2006.
- [43] Reza Sameni, Christian Jutten, Mohammad B. Shamsollahi, *What ICA Provides for ECG Processing: Application to Noninvasive Fetal ECG Extraction*, IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology, 2006.
- [44] Ricardo Noé Rodríguez Vera, *Algoritmo para la construcción en tiempo real del cardiotacograma materno y fetal a partir del ECG abdominal*, Tesis de Maestría en Ingeniería Biomédica, Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa, 1997.
- [45] Sonia Leach, *Singular Value Decomposition- A primer*, Department of Computer Science, Brown University, Providence, RI 02912.
- [46] Steven T. Karris, *Numerical Analysis Using MATLAB® and Excel®*, Orchard Publications-Printed in the United States of America, 2007.
- [47] <http://www.oocities.org/vifibio/01ECG.PDF>

- [48] La señal ECG, Oocities, 2004; <http://www.oocities.org/vifibio/01ECG.PDF>
- [49] <https://www.guidingtech.com/61604/heart-rate-sensors/>
- [50] <https://www.practicalclinicalskills.com/ekg-lesson-es?coursecaseorder=1&courseid=2301>
- [51] <https://ccenf.pt/portals/0/Images/ecgs/ekg.png>
- [52] <https://es.wikipedia.org/wiki/Electrocardiograma>
- [53] Open Course Ware de la Universitat de València, 13079 - Ingeniería Biomédica, 2010/2011, http://ocw.uv.es/ingenieria-y-arquitectura/1-5/ib_material/IB_T2_OCW.pdf
- [54] https://es.wikipedia.org/wiki/Ingeniera_biomdica
- [55] <http://www.my-ekg.com/generalidades-ekg/electrodos-ekg.html>
- [56] https://es.wikipedia.org/wiki/Teora_del_control
- [57] <https://www.uv.es/ceaces/base/descriptiva/independencia.htm>
- [58] https://es.wikipedia.org/wiki/Anlisis_espacial