UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICAS

Algoritmos en Programación Lineal Paramétrica

TESIS

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

Licenciado en Matemática

JOSE ALBERTO FLORES SALINAS

LIMA - PERU

1,997

INDICE

I. INTRODUCCION

La Programación Lineal Paramétrica (P.L.P.) estudia los cambios en la solución óptima de un problema de Programación Lineal (P.L.) debido a variaciones continuas predeterminadas en los parámetros del modelo, de un programa de la forma:

$$\min c^T x$$

$$Ax \geq b$$

como la disponibilidad de recursos que representa b, cambios de utilidades o costos que representa c ó cambios en la matriz A del lado izquierdo de las restricciones.

En otras palabras la P.L.P. permitirá un ahorro considerable en los costos de utilización de una computadora.

Se presenta también la formalización de la solución del P.L.P. mediante algoritmos que dan la solución de las mismas, si existen.

Del programa anterior $x, c \in R^n$, $b \in R^m$ y A es una matriz de orden m x n ($m \geq n$) rango es igual a n.

Las variaciones sobre el programa a ser analizadas son las siguientes:

i) Cambios en el vector c:

$$\min (c + \theta f)^T x$$

$$Ax \geq b \quad , \quad \theta \geq 0 \text{ y } f \in R^n$$

ii) Cambios en b, lado derecho de las restriciones :

$$\min c^T x$$

$$Ax \geq b + \theta f \quad , \quad \theta \geq 0 \text{ y } f \in R^m$$

iii) Cambios en una fila a_j de la matriz no básica de A :

$$\min c^T x$$

$$A(\theta)\, x \geq b$$

donde $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ : \\ a_n \\ a_{n+1} \\ : \\ a_j \\ : \\ a_m \end{bmatrix}$, $A(\theta) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ : \\ a_n \\ a_{n+1} \\ : \\ a_j + \theta\, v_j \\ : \\ a_m \end{bmatrix}$

con a_i , $i \in \{1 .. m\}$ se denotará la fila i-ésima de la matriz A.

Se dice que A_B es matriz básica si es una submatriz invertible de A_{mxn} ($m \geq n$), A_B es de rango n.

$a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots\ldots, a_{in}$ filas de la matriz básica.

Se dice matriz no básica a la matriz constituida por las filas de A y que no corresponden a una matriz básica.

$a_{i\,n+1}, \ldots, a_{ij}, \ldots\ldots, a_{im}$ filas de la matriz no básica.

v_j : es un vector fila que modifica a cualquier fila no básica y que se estudia en el caso iii).

θ : es un parámetro no negativo.

En los tres casos se hace un análisis para determinar los valores de θ para los cuales la solución óptima no cambia, y correspondientemente los valores de θ para los cuales la solución óptima si cambia. En esta parte de la introducción hacemos mención de algunos fundamentos del algoritmo simplex que nos servirá como base para el estudio en capítulos posteriores.

En lo capítulos II y III se trata de las variaciones de los vectores c y b respectivamente. Con respecto al capítulo IV se hace el estudio de las variaciones de la fila a_j de la matriz no básica de A.

Por último, se presentan tres anexos A, B y C; el primero presenta el análisis de sensibilidad (en programación lineal) y los dos últimos son dos programas en Lenguaje C++ que resuelve las variaciones de c y b respectivamente de la P.L.P.

I.1 Fundamentos del algoritmo Simplex

En las siguientes definiciones se considerará los programas primal y dual L y L* respectivamente, como siguen:

$$L : \min c^T x \qquad\qquad L^* : \operatorname{Max} b^T u$$
$$A\,x \geq b \qquad\qquad A^T u = c$$
$$u \geq o$$

Definiciones :

i) Una base A_B de una matriz A es una sub matriz invertible de rango n.

Si A_B es una base de A podemos escribir A,b y las restricciones de L y L* como sigue :

$$A = \begin{pmatrix} A_B \\ A_N \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_B \\ b_N \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} A_B \\ A_N \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} b_B \\ b_N \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{matrix} A_B\,x \geq b_B \\ A_N\,x \geq b_N \end{matrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} u_B \\ u_N \end{pmatrix} \Rightarrow A^T u = \begin{pmatrix} A^T{}_B , A^T{}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_B \\ u_N \end{pmatrix}$$

$$= A^T{}_B\, u_B + A^T{}_N\, u_N = c$$

donde:

A_B : Matriz Básica
A_N : Matriz No Básica

ii) La única solución $x_B = A_B^{-1} b_B$ del sistema $A_B x = b_B$ se llama solución básica asociada a A_B

iii) u se llama solución básica de L* asociada a A_B^T

$$\text{si} \qquad u = \begin{pmatrix} u_B \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A_B^T)^{-1} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

iv.) Las soluciones básicas x_B y $u = \begin{pmatrix} u_B \\ 0 \end{pmatrix}$ asociadas a una misma base A_B se llaman soluciones básicas conjugadas.

v) Se dice que x_B, $u = \begin{pmatrix} u_B \\ 0 \end{pmatrix}$. son soluciones básicas admisibles para L y L* respectivamente si cumplen:

$$Ax_B \geq b, \quad u_B \geq 0$$

vi) Si x_B y u son soluciones básicas admisibles conjugadas para L y L* respectivamente decimos que (x_B, u) es admisible para (L,L*).

Teorema 1.1

Sea A_B una base de A y A_N una matriz no básica de A, donde $B = \{ i_1, i_2, \ldots, i_s, \ldots i_n \}$ y $N = \{ i_{n+1}, i_{n+2}, \ldots\ldots i_m \}$ son conjuntos de índices de A_B y A_N respectivamente.

Sean $x_B = A_B^{-1} b_B$, $\quad u = \begin{pmatrix} u_B \\ o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A_B^T)^{-1} c \\ o \end{pmatrix}$

a. Si x_B es admisible pero no óptimo para L entonces existe un

$o \neq t \in R^n$ tal que $a_i^T\ t = o \quad \forall\, i \in B - \{r\}$

(r es un subíndice de B)

b. Si u es admisible pero no óptimo para L*, entonces $\exists\, o \neq v \in R^n$

y un $s \in N$ tal que $v_i = o \quad \forall i \in N - \{s\}$, $v_s = 1$ (s es un subíndice de la no básica N)

$$A^T v = o, \quad b^T v > o$$

<u>**Demostración**</u>

a. Como x_B es admisible pero no óptimo, se cumple que $u_B \not\geq o$ (si $u_B \geq o$, u_B sería solución óptima).

Elegimos $r = i_p \in B$ tal que $\bar{u}_r = u_{ip} < o$

El sistema $a_i^T\ t = o \quad i \in B - \{i_p\}$, $[A_B\, t = 1_p]$; $1_p = (0, 0,\ldots 0, 1, 0,\ldots 0)$

tiene exactamente una solución $t \neq o$ (el 1 está en la posición p-ésima)

$t = A_B^{-1}\ 1_p$. Si $A_B^{-1} = (\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_n)$ entonces $t = \beta_p$

como $c = A_B^T\ u_B$

$$= \sum_{i \in B} a_i^T\ u_i$$

si se multiplica por t a la transpuesta de c se tiene:

$$c^T t = \sum_{i \in B} u_i\, a_i^T\, t$$

$$= \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\, a_{ij}^T \beta_p . \text{ Pero } a_{ij}^T \beta_p = \delta_{jp} = (o,o,o,\ldots,1,o,o,o,o,\ldots,o)$$

(el 1 está en la posición p-ésima)

Luego :

$$c^T t = u_{ip} = u_r < o$$

b. Como $u = \begin{pmatrix} u_B \\ o \end{pmatrix}$ es admisible pero no óptimo para L^*, se cumple :

$d = A\,x_B - b \not\geq o$ (Por criterio de optimidad. Si $Ax_B - b \geq o$ entonces u_B sería óptimo)

Se cumple $d_B = o \Rightarrow d_i = o \ \forall\, i \in B$, elegimos $s \in N$ tal que $d_s < o$.

Si $v = \begin{pmatrix} v_B \\ v_N \end{pmatrix}$ elegimos v_N como sigue :

$$v_i = 0,\ \forall i \in N - \{s\}$$
$$v_s = 1$$

Determinamos v_B tal que:

$$o = A^T v = A_B^T v_B + A_N^T v_N$$

$$= A_B^T v_B + \sum_{i \in N} v_i a_i$$

$$= A_B^T v_B + a_s$$

entonces se tiene que : $v_B = -(A_B^T)^{-1} a_s$

$$d_B = o \Rightarrow b^T v = (A\,x_B - d)^T v$$

$$= x_B^T A^T v - d^T v$$

$$= -d^T v$$

$$= -d_B^T v_B - d_N^T v_N$$

$$= -d_N^T v_N$$

$$= -d_s > o$$

Propiedad 1.1

Sean los programas.

$L : \min c^T x$ $\qquad\qquad$ $L^* : \text{Max } b^T u$

$Ax \geq b$ $\qquad\qquad$ $A^T u = c$

$u \geq o$

Luego ,si x_B y u_B son soluciones básicas admisibles conjugadas y $c^T x_B = b^T u_B$

entonces x_B y u_B son soluciones óptimas de L y L^*

Prueba

Se cumple lo siguiente

$$\min c^T x = \text{Max } b^T u$$

$$c^T x \geq \min c^T x = \text{Max } b^T u \geq b^T u$$

$$\Rightarrow c^T x \geq b^T u \Rightarrow c^T x_B \geq b^T u_B = c^T x_B$$

$$c^T x \geq c^T x_B \Rightarrow x_B \text{ es óptimo para L.}$$

Por otra parte $b^T u_B \geq b^T u$ entonces u_B es óptimo para L^*

Algoritmo Simplex Primal para L

(Dual para L*)

En el siguiente algoritmo se muestran los pasos a seguir para resolver un programa primal-dual :

$L : \min c^T x$ $\qquad\qquad$ $L^* : \text{Max } b^T u$

$Ax \geq b$ $\qquad\qquad$ $A^T u = c$

$u \geq o$

En el capitulo II y III hacemos uso de estos pasos considerando los cambios de c y b respectivamente.

Paso 1 : Se parte de una solución básica admisible.

$x_B = A_B^{-1}\ b_B$ (x_B : solución básica asociada a A_B)

$d = Ax_B - b \geq o$

$u_B = (A_B^T)^{-1} c$ (u_B: solución básica de L^* asociada a A^T_B).

Si $u_B \geq o$ entonces (x_B, u) es óptimo para (L, L^*), luego parar.

Otro caso, ir al paso 2.

Paso 2: Se elige $r = i_p \in B$ con $u_r < o$

$[A_B^T = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots\ldots, a_{in})]$

Si $A_B^{-1} = (\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_n)$ entonces para

β_p se cumple :

$$u_i^T \beta_p = o\ \forall\ i \in B - \{r\}$$

$$u_r^T \beta = a_{ir}^T \beta_p = 1;\ c^T \beta_p < o$$

$A_B^T \beta_p$ es admisible y $\lim_{\lambda \to +\infty} (c^T (x_B + \lambda \beta_p)) = c^T x_B + c^T \beta_p \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda = -\infty$

Entonces Inf (L) = $-\infty$ y el dominio admisible de L^* es $\varnothing$, luego parar.

Si $a_j^T \beta_p < o$ para algún $j \in N$; entonces ir al paso 3.

Paso 3: $$\lambda_o = \min \left\{ \frac{-d_j}{a_j^T \beta_p} \quad / \; a_j^T \beta_p < o \; ; \; j \in N \right\}$$

$$\lambda_o = \frac{-d_s}{a_s^T \beta_p} > o \; ; \; s \in N$$

Entonces : $x_B + \lambda \beta_p$ es admisible para L; $\forall \lambda \in [o, \lambda_o]$, y no es admisible. $\forall \lambda > \lambda_o$. Para éste caso se hace un cambio de base de la siguiente forma :

Sea $\overline{x} = x_B + \lambda_o \beta_p$ que cumple :

$a_i^T \overline{x} = b_i \qquad \forall i \in B \setminus \{i_p\} \; ; \; a_{ip}^T \overline{x} > b_{ip}$

$a_s^T \overline{x} = b_s$

Si $B = BU \{s\} \setminus \{i_p\}$ entonces A_B es una base de A

y $\overline{x} = \overline{x_B} = (A_B)^{-1} b_B$

Esto es, $\overline{x}$ es solución básica admisible correspondiente a A_B Entonces se regresa al paso 1.

Algoritmo Simplex Tabular (Primal para L)

Si bien es cierto que el algorítmo simplex primal-dual permite resolver problemas siguiendo los pasos deductivos, esto no representa una facilidad de seguimiento para dicha solución: es por ello que el formalismo dado por el algoritmo simplex se presenta en una tabla que por su visualización gráfica nos permitirá resolver los problemas de manera más agil y versatil.

$T_B =$

$c^T x_B$	d^T	
u_B	$(A_B^T)^{-1} A^T$	B

$d = Ax_B - b$; $T_B = [T_{ij}]$ $i = 0, 1, \ldots n$ filas de la tabla

$j = 0, 1, \ldots m$ columnas de la tabla

Paso1: Se empieza con $T_{oj} \geq o \quad \forall j \geq 1$.

Si $T_{io} \geq o \; \forall i \geq 1$ entonces (x_B, u) es óptimo para (L, L^*) luego parar.

Otro caso, ir al paso 2.

Paso2: Se elige cualquier $r \geq 1$ tal que $T_{ro} < o$.

Si $T_{rj} \geq o \quad \forall j \geq 1$ entonces L es no acotado y el dominio admisible de L^* es vacío, luego parar.

Otro caso, ir al paso 3

Paso 3: Si $T_{rj} < o$ para algún $j \geq 1$

$$\text{se calcula } \min \left\{ \frac{T_{oj}}{|T_{rj}|} \,/\, T_{rj} < o \right\} = \frac{T_{os}}{|T_{rs}|} \quad o$$

Entonces a_s^T entra en la base

Si $\overline{B} = B \cup \{s\} - \{i_r\}$ entonces $A_{\overline{B}}$ es la nueva base. Se regresa al paso 1

II. VARIACIÓN EN EL VECTOR C

En este capítulo analizaremos los cambios en la solución óptima si el vector c del siguiente programa lineal cambia.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax \geq b \end{aligned}$$

Para esto presentamos un programa lineal adicional

$$\begin{aligned} \min \quad & f^T x \\ & Ax \geq b \end{aligned}$$

y formamos un tercer programa lineal

$$\min \quad c^T(\theta)\, x \qquad \text{donde } c(\theta) = c + \theta f$$

$$Ax \geq b$$

Analizaremos el tercer programa para cada valor de $\theta \geq 0$ cuando el primero tenga solución óptima y el segundo solución básica, por último mostraremos un algoritmo que solucione el tercer programa.

Propiedad 2.1

Sean los programas

I:	$\min c^T x$	I* :	$\operatorname{Max} b^T u$
	$Ax \geq b$		$A^T u = c$
			$u \geq 0$
II:	$\min f^T x$	II* :	$\operatorname{Max} b^T u$
	$Ax \geq b$		$A^T u = f$
			$u \geq 0$
III:	$\min c^T(\theta) x$	III*:	$\operatorname{Max} b^T u$
	$Ax \geq b$		$A^T u = c(\theta)$
			$u \geq 0$

donde $c(\theta) = c + \theta f$, $\theta \geq 0$.

Luego, si $u_B = (A_B^T)^{-1} c$ es solución óptima de I* y $w_B = (A_B^T)^{-1} f$ es solucion básica de II* se tiene que :

i) Si $w_B \geq 0$ entonces $u_B + \theta w_B$ es solución óptima de III*

ii) Si $w_i < 0$ algún i y $\theta_1 = \dfrac{-u_r}{w_r} = \min_{i \in B} \left\{ \dfrac{-u_i}{w_i} \;/\; w_i < 0 \right\}$,

u_i componente de u_B, w_i componente de w_B, entonces $u_B + \theta w_B$ es solución óptima de III* $\forall \theta \in [0, \theta_1]$

Prueba

i) Si $\theta = 0$ entonces

$u_B + \theta w_B = u_B$; $c(\theta) = c + \theta f = c$

Para este caso el programa I* es igual al programa III*; desde que u_B es solución óptima de I* se tiene que $u_B + \theta\, w_B$ es solución óptima de III*.

Ahora si $\theta > 0$ y x_B solución óptima de I, se tiene lo siguiente:

$$(c^T + \theta f^T) x_B = c^T x_B + \theta f^T x_B$$

$$= x_B^T (c + \theta f)$$

$$= b_B^T [(A_B^T)^{-1} c + \theta (A_B^T)^{-1} f]$$

$$= b_B^T (u_B + \theta w_B) \ldots (1)$$

ahora, veamos que x_B, $u_B + \theta w_B$ son soluciones admisibles del programa III y III*.

Puesto que x_B es solución óptima de I, se deduce que x_B es solución admisible de III

Por otra parte,

$$A^T_B (u_B + \theta w_B) = A^T_B u_B + \theta A^T_B w_B$$
$$= c + \theta f$$
$$= c(\theta) \ldots (2) \text{ (por propiedad 1.1 del capítulo I)}$$

Por lo tanto considerando (1) y (2) se deducen que x_B, $u_B + \theta w_B$ son soluciones óptimas de III y III* respectivamente.

ii) Sea $\theta_1 = \min \{ -\dfrac{u_i}{w_i} \,/\, w_i < 0 \}$

Luego :

$\theta_1 \leq -u_i / w_i$, para todo i tal que $w_i < 0$

De donde se deduce $u_i + \theta_1 w_i \geq 0$

Ahora, sea $\theta \in [0, \theta_1]$

entonces $\theta \leq \theta_1$

De donde resulta $u_i + \theta w_i \geq u_i + \theta_1 w_i$

Deduciéndose que $u_i + \theta w_i \geq 0 \;\; \forall i$

Es decir $u_B + \theta\, w_B \geq 0$

Por lo tanto se tiene que $u_B + \theta\, w_B$ es solución óptima de III*.

Observación:

Dado el programa $\quad \text{mín } c^T(\theta)\, x$

$$A\,x \geq b$$

y nuestra tabla

T_B:	$c^T(\theta)x_B$	d^T	
	u_B	$(A_B^{-1})^T A^T$	B

$T_B : [T_{ij}] \quad i : 0, 1, \ldots, n$
$\qquad\qquad\;\; j : 0, 1, \ldots, m$

Si $\theta \geq \theta_1$ cualquiera entonces se presentan dos casos

a) Si $T_{rj} = b^T{}_r\, a_j \geq 0\ \forall j \geq 0$ entonces no existe solución de III*

Veamos :

Se tiene que $T_{rj} = b^T{}_r\, a_j \geq 0\ \forall j \geq 0$ entonces $x_B + \lambda\, b_r$ es admisible para III $\forall \lambda > 0$ Como $A^T{}_B\, u_B = c + \theta f$ se tiene que :

$$
\begin{aligned}
(c+\theta f)^T (x_B + \lambda b_r) &= (c+\theta f)^T x_B + \lambda\, (u_B{}^T A_B)\, b_r \\
&= (c+\theta f)^T x_B + \lambda\, (\textstyle\sum u_i a_i^T)\, b_r \\
&= (c+\theta f)^T x_B + \lambda \textstyle\sum u_i\, (a_i^T b_r) \\
&= (c+\theta f)^T x_B + \lambda\, u_{ir}
\end{aligned}
$$

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} (c + \theta f)^T (x_B + \lambda b_r) = -\infty$ (ver 4 notas del curso Optimización I y II)

(Pues $u_{ir} < 0$)

entonces $\text{Inf}(III) = -\infty$ y el dominio admisible III* es vacio por lo tanto no existe solución para III* .

b) Si $T_{rj} < 0$ para algún $j \geq 0$, entonces ejecutamos un cambio de base en T_B usando como fila de intercambio la fila r:

Calculamos:

$$\min \left\{ \frac{T_{0j}}{|T_{rj}|} \;\Big/\; T_{rj} < 0;\ 1 \leq j \leq m \right\} = \frac{T_{0s}}{|T_{rs}|}$$

$\Rightarrow \bar{B} = B \cup \{s\} \setminus \{i_r\}$

$\Rightarrow a^T{}_s$ entra a la base A_B , y regresamos a i)

Sea $u_B{}^* = u_B + \theta_1 w_B = (A_B{}^{-1})^T (c + \theta_1 f)$

$$\Rightarrow u_B{}^* \geq 0;$$

Por lo tanto :

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_B{}^* \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

De esto se deduce que u es solución básica admisible de III* asociada a la nueva base $A_{\bar{B}}$, y luego usamos la propiedad (2.1) a lo mas $C_n{}^m$ veces.($c_n{}^m$ combinación de m elementos tomados de n en n) mas aún, como u es una solución básica admisible se tiene que A_B es una base admisible de III .

La 0-ésima columna se deja escribir.

$$b_{\bar{B}}{}^T (A_{\bar{B}})^{-1} c \qquad + \qquad (\theta - \theta_1)\, b_{\bar{B}}{}^T (A_{\bar{B}})^{-1} f$$

$$(A_{\bar{B}}{}^T)^{-1} c \qquad + \qquad (\theta - \theta_1)\, (A_{\bar{B}}{}^T)^{-1} f$$

Entonces haciendo el cambio de parámetro $u = \theta - \theta_1$ repetimos el procedimeinto ya descrito en III.

Luego, $T_{\bar{B}}(u)$ es tabla óptima de III

Ahora teniendo la nueva tabla consideramos lo siguiente :

1) Si $w_{\bar{B}} \geq 0$ $A_{\bar{B}}$ es base óptima para III; $\forall$ u ≥ 0

2) Si $w_i < 0$ para algún $i \in B$ calculamos:

$$u_1 = \frac{-u_r}{w_r} = \min \left\{ \frac{-u_i}{w_i} \Big/ 1 \leq i \leq n\ ;\ w_i < 0 \right\}$$

$A_{\bar{B}}$ es base óptima para III $\forall u \in [\,0, u_1\,]$ es decir $\forall \theta \in [\,\theta_1\,, \theta_1 + u_1\,] = [\theta_1\,, \theta_2]$

Para $\theta > \theta_2$ será necesario efectuar al menos un cambio de base para obtener una tabla óptima para (III , III*).

II. 1 Algoritmo paramétrico usando tablas

Presentamos un algoritmo por tablas que resuelva los cambios de c, donde partimos de una tabla óptima.

T_B:

$c^T x_B$	d^T	
u_B	$(A_B^{-1})^T A^T$	B

$T_B = [T_{ij}]$
$i = 0, 1, ..., n$
$j = 0, 1, ..., m$

Añadimos la columna T_{-1} a la tabla T_B como sigue :

$$T_{-1} = \begin{pmatrix} f^T x_B \\ w_B \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} u_B &= (A_B^{-1})^T c \\ w_B &= (A_B^{-1})^T f \quad \text{...............(2.2)} \end{aligned}$$

T_{-1}	T_B		
$f^T x_B$	$c^T x_B$	d^T	
w_B	u_B	$(A_B^{-1})^T A^T$	B

Paso1 : Si $w_B \geq 0$ entonces A_B es base óptima para (III, III*) $\forall\theta > 0$, luego parar. Otro caso, ir al paso 2.

Paso 2 : Si $w_B \not\geq 0$, sea $w_i < 0$ componente de w_B, para algún i

$$\theta_1 = \min\left(\frac{-T_{i,0}}{T_{i,-1}} \;/\; T_{i,-1} < 0 \right) = \frac{-T_{r,0}}{T_{r,1}} > 0$$

donde $T_{i,0} = u_i$; $T_{i,-1} = w_i$

Luego,

i) A_B es base óptima para (III, III*) $\forall\theta\in[0,\theta_1]$. Pero A_B ya no es base óptima para $\theta > \theta_1$, entonces ir a ii).

ii) Si $\theta > \theta_1$ entonces consideramos:

$$T_0 = T_0 + \theta_1 T_{-1}$$

a) Si $T_{rj} \geq 0$ $\not\exists$ solución para III*, luego parar. Otro caso ir al paso b.

b) Si $T_{rj} < 0$; algún j, a^T_{rj} sale de la base y haciendo un cambio de base regresar a paso 1 con la nueva base B.

Ejemplo 1

Sea el programa :

$L^*(\theta)$: Max $3u_1 + 2u_2 + 5u_3$

$$u_1+2u_2+u_3 \leq 440 + 2000\theta$$

$$3u_1+1u_3 \leq 480 - 1000\theta$$

$$u_i \geq 0 \quad ; i = 1, 2, 3$$

Teniendo en cuenta el programa primal-dual

$$\min c^T x \qquad\qquad \text{Max } b^T u$$

$$Ax \geq b \qquad\qquad A^T u = c$$

$$u \geq 0 ;$$

consideramos variables de holgura para dar forma a las restricciones según el dual para nuestro ejemplo.

$L^*(\theta)$: max $3u_1+2u_2+5u_3$

$$u_1+2u_2+u_3+u_4 = 440+2000\theta$$

$$3u_1+u_3+u_5 = 480-1000\theta$$

$$u_i \geq 0 ; \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$L^*(0)$; la tabla cuando $\theta = 0$

$L^*(0) =$

0	-3	-2	-5	0	0	
440	1	2	1	1	0	4
480	3	0	1	0	1	5

T_B:

2200	2	8	0	5	0	
440	1	2	1	1	0	3
40	2	-2	0	-1	1	5

T_B es la tabla óptima de $L^*(0)$.

Cálculo de T_{-1} de acuerdo a (2.2)

$$c(\theta) = c+\theta f \qquad f= \begin{pmatrix} 200 \\ -100 \end{pmatrix}$$

$$(A_B^{-1})^T f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ -300 \end{pmatrix}$$

$$T_{0,-1} = b_B^T \; (A_B^{-1})^T f = (5,0) \begin{pmatrix} 200 \\ -300 \end{pmatrix} = 1000 \text{ ; añadimos } T_{-1} \text{ a } T_B$$

T_{-1} | T_B

T_{-1}	T_B						
1000	2200	2	8	0	5	0	
200	440	1	2	1	1	0	3
-300	40	2	-2	0	-1	1	5

$$T_{2,-1} = -300 \Rightarrow \theta_1 = \frac{40}{300} = \frac{2}{15}$$

Entonces A_B es una base óptima para $(L(\theta) ; L^*\theta)$ donde $\theta \in [0, 2/15]$

Ahora , consideramos $\theta > \theta_1$

Ajustamos la columna T_0

$\overline{T_0} = T_0 + \theta_1 T_{-1}$

$$\begin{bmatrix} 2200 + \dfrac{2}{15}(1000) \\ \\ 440 + \dfrac{2}{15}(200) \\ \\ 40 + \dfrac{2}{15}(-300) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{7000}{3} \\ \\ \dfrac{1400}{3} \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

1000	7000/3	2	8	0	5	0	
200	1400/3	1	2	1	1	0	3
-300	0	2	-2	0	-1	-1	5

Cambio de base con la segunda como fila de intercambio $\exists$ j ≥ 1 con $T_{2j} < 0$ y el j elegido es igual a 2 entonces se obtiene la siguiente tabla

-200	7000/3	10	0	0	1	4	
-100	1400/3	3	0	1	0	1	3
150	0	-1	1	0	1/2	-1/2	2

$$\theta_2 = \frac{-T_{1,0}}{T_{1,-1}} = \frac{-1400/3}{-100} = 14/3$$

$$\Rightarrow \bar{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow A_B \text{ es una base óptima}$$

$$\forall\, \theta \in [\theta_1, \theta_1+\theta_2]$$

$$= \left[\frac{2}{15}, \frac{14}{3} + \frac{2}{15} \right] = \left[\frac{2}{15}, \frac{72}{15} \right]$$

$T_{rj} \geq 0$ $\forall j \geq \theta$ luego el dominio admisible de $L^*(\theta)$ es vacio $\forall\theta \geq 72/15$, entonces no existe solución por lo tanto paramos.

Ejemplo 2:

Una refinería puede comprar dos tipos de petróleo : petróleo crudo ligero y petróleo crudo pesado . El costo por barril de estos tipos de petróleo es $ 11 y 9 respectivamente. De cada tipo de petróleo se producen por barril las siguientes cantidades de gasolina, kerosene y combustible para reactores:

	Gasolina	Kerosene	Combustible para Reactores
Petróleo crudo ligero	0.4	0.2	0.35
Petróleo crudo pesado	0.32	0.4	0.20

La refinería tiene un contrato para entregar 1 000,000 de barriles de gasolina, 400,000 barriles de kerosene y 250, 000 barriles de combustible para reactores.

Si el costo de barril ligero y pesado baja en 18.18% y 44.4% respectivamente, en un periodo de 10 años y se asume una variación uniforme en el tiempo, indicar cuantos años, dentro de dicho periodo, tienen que pasar para que cambie el número de barriles de petróleo ligero y pesado. (Handy Taha - Investigación de Operaciones pag. 190)

En el ejemplo tenemos el problema

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax \geq b \end{aligned} \quad \text{........(1)}$$

donde c cambia. Para esto resolvemos el problema (1) , y según ésto hacemos una aplicación de l algoritmo paramétrico desarrollado en el apéndice B.

Solución

I : $\min 11 x_1 + 9x_2$

$$0.4\, x_1 + 0.32\, x_2 \geq 1$$

$$0.2\, x_1 + 0.4\, x_2 \geq 0.4$$

$$0.35\, x_1 + 0.2\, x_2 \geq 0.25$$

I^* : Máx $u_1 + 0.4u_2 + 0.25\, u_3$

$$0.4\, u_1 + 0.2u_2 + 0.35\, u_3 + u_4 = 11$$

$$0.32\, u_1 + 0.4u_2 + 0.2\, u_3 + u_5 = 9$$

$c = (11, 9, 0, 0, 0)$

$f = (-2, -4, 0, 0, 0)$ pérdida en c cada 10 años.

θ : variación del costo por unidad de tiempo a intervalos de 10 años

$c(\theta) = c + \theta f$

Máx $u_1 + 0.4u_2 + 0.25\, u_3$

$$0.4\, u_1 + 0.2u_2 + 0.35\, u_3 + 1u_4 = 11-2\theta$$

$$0.32\, u_1 + 0.4u_2 + 0.2\, u_3 + 1u_5 = 9-4\theta \qquad \ldots\ldots\ldots(\alpha_2)$$

$T_B(0)$ es la tabla óptima para el programa I*.

$T_B(0)$ =

27.500	0.000	1.000	0.625	2.500	0.010	
27.500	1.000	0.500	-0.875	2.500	0.000	1
0.200	0.000	0.240	-0.080	-0.800	1.000	5

...........(B_2)

$$T_{-1} = \begin{pmatrix} -5.000 \\ -5.000 \\ -2.400 \end{pmatrix}$$

<u>**La Tabla aumentada con T_{-1} es:**</u>

T_{-1}	T_0						
- 5.000	27.500	0.000	1.000	0.625	2.500	0.001	
- 5.000	27.500	1.000	0.500	-0.875	2.500	0.000	1
- 2.400	0.200	0.000	0.240	-0.080	-0.080	1.000	5

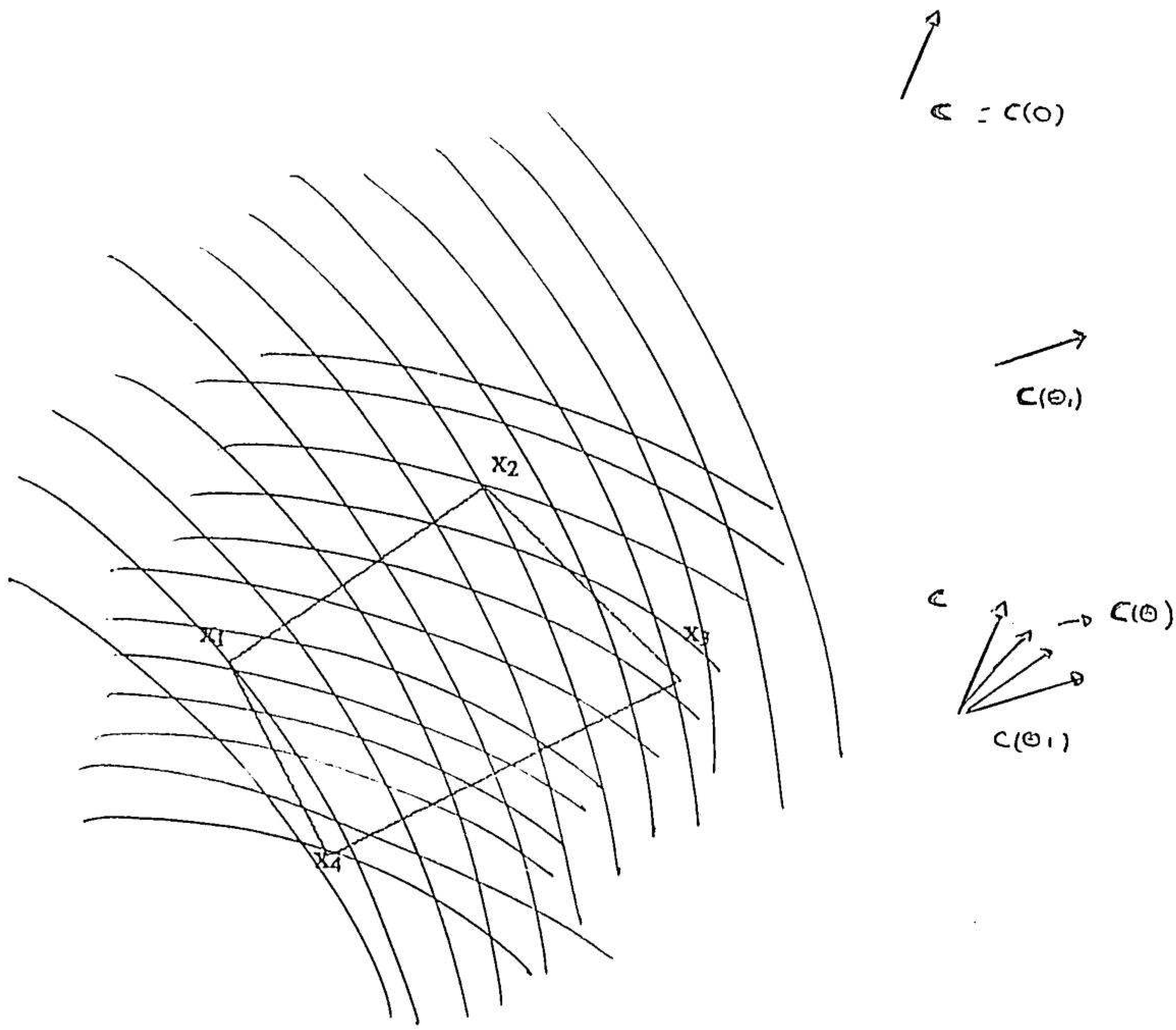
$\theta = \min \{T_{i0} / |T_{i,-1}| \} = 0.083$

$B = \{1,5\}$ $\theta \in [0, 083]$; mediante el análisis de sensibilidad como varía c y la base se mantiene igual en ese intervalo entonces se concluye que x_B se mantiene igual aproximadamente 10 meses (Los cálculos se efectuaron usando el programa listado en el anexo B).

INTERPRETACION GEOMETRICA

Variación del vector c

Siendo x_1 , x_2 , x_3, y x_4 soluciones básicas, cuando el parámetro $\theta \in [0,\theta_1]$ existe solución. En otro caso, no hay solución.



III. VARIACIÓN EN EL VECTOR b

En este capítulo analizaremos los cambios de la solución óptima si el vector b cambia en el siguiente programa lineal

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax \geq b \end{array}$$

Para esto presentamos dos programa lineales

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax \geq b \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax \geq f \end{array} \qquad \text{con sus}$$

respectivos duales y sus tablas; formamos un tercer programa lineal

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax \geq b(\theta) \end{array} \quad ; \qquad \text{donde } b(\theta) = b + \theta f \; ; \; \theta \geq 0$$

Analizaremos la solución del tercer programa para cada valor de $\theta \geq 0$; todos los análisis se hacen a partir de la tabla óptima del primero, para finalmente mostrar un algoritmo para hallar la solución óptima del tercer programa.

Propiedad 3.1

Sean los siguientes programas

$$\text{I: } \begin{array}{l} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{array} \qquad \text{I}^*: \begin{array}{l} \text{Max } b^T u \\ A^T u = c \\ u \geq 0 \end{array}$$

donde se tiene su tabla óptima :

	$c^T x_B$	$d^T = Ax_B - b$	
T_B:	u_B	$(A_B^{-1})^T A^T$	B

$\text{II: } \min c^T x$ $\qquad$ $\text{II}^*: \quad \text{Máx } f^T u$

$Ax \geq f$ $\qquad$ $A^T u = c$

$u \geq 0$

donde se tiene su tabla óptima:

	$c^T x_B$	$D^T = Ax_B - f$	
T_B:	u_B	$(A_B^{-1})^T A^T$	B

$\text{III: } \min c^T x$ $\qquad$ $\text{III}^*: \text{Máx } b^T(\theta)\, u$

$Ax \geq b(\theta)$ $\qquad$ $A^T u = c$

$u \geq 0$

donde $b(\theta) = b + \theta f,\ \theta \geq 0$

Luego si:

i) $D \geq 0$, entonces A_B es una base

óptima para $(\text{III}, \text{III}^*)\ \forall\ \theta \geq 0$

ii) Si $D_j < 0$ algún componente de D y

$$\theta_1 = \frac{-ds}{Ds} = \min\left\{ \frac{-d_j}{D_j} \Big/ j > 1 \right\};$$

d_j componente de d

D_j componente de D

entonces $d(\theta) \geq 0, \quad \forall\, \theta \in [0,\theta_1]$ donde $d(\theta) = d+\theta D$

Prueba

i) Si $D \geq 0$ entonces es obvio que A_B es una base óptima para (III , III*), $\forall\, \theta \geq 0$

ii) Siendo $d(\theta) = d + \theta D$ y $D_j < 0$ y teniendo

en cuenta que

$$\theta_1 = \frac{-d_s}{D_s} = \min \left\{ \frac{-d_j}{D_j} \Big/ j \geq 1 \right\}$$

se tiene que:

$$\theta_1 \leq \frac{-d_j}{D_j} \quad \text{y} \quad D_j < 0$$

$$\Rightarrow \quad \theta_1 D_j \geq -d_j$$

$$\Rightarrow \quad d_j + \theta_1 D_j \geq 0 \quad \ldots (1)$$

si $\theta \in [0,\theta_1]$

$$0 \leq \theta \leq \theta_1 \quad \text{y} \quad D_j < 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \geq \theta D_j \geq \theta_1 D_j$$

$$\Rightarrow \quad \theta D_j \geq \theta_1 D_j \quad \text{Sumando } d_j$$

$$\Rightarrow \quad d_j + \theta D_j \geq d_j + \theta_1 D_j \geq 0 \text{ por } (1)$$

$$\Rightarrow \quad d_j + \theta D_j \geq 0 \quad \forall\, j \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad d + \theta D \geq 0 \quad \forall\, \theta \in [0,\theta_1]$$

$$\Rightarrow \quad d(\theta) \geq 0 \quad \forall\, \theta \in [0,\theta_1]$$

entonces A_B es base óptima para (III , III*)

Observación :

Dado el programa $\min c^T x$ y su respectiva tabla
$Ax \geq b(\theta)$

	$c^T x_B$	$d^T(\theta)$	
T_B:	u_B	$(A_B^{-1})^T A^T$	B

$T_B = [T_{ij}]$; $i = 1, ..., n$
$j = 1, ..., m$

Si $\theta > \theta_1$ ocurren dos casos

a) Si $T_{is} \leq 0$; $1 \leq i \leq n$, entonces no existe solución para III*

Veamos:

se tiene que $\theta > \theta_1$ donde

$$\theta_1 = \frac{-d_s}{D_s} = \min \left\{ \frac{-d_j}{D_j} \;\Big/\; j > 1 \right\}$$

y $T_{is} \leq 0 \;\forall\; 1 \leq i \leq n$, entonces

$\bar{u} + \lambda v$ es admisible para III*

$\forall\, \lambda \geq 0$ donde

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_B \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v_i = \left\{ \begin{array}{ll} v_i = 1 & s = i \\ v_i = 0 \;\forall i \in N \setminus \{s\} \end{array} \right\} , \; v = [v_i]$$

Considerando que :

$A^T v = 0$

$v_B = -(A_B^{-1})^T a_s = -T_s \quad \forall i \in N \setminus \{s\}$

$$
\begin{aligned}
A^T v &= A_B^T v_B + A_N^T v_N \\
&= A_B^T v_B + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \\
&= A_B^T v_B + a_s \\
&= A_B^T (-A_b^{-1})^T a_s + a_s \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Finalmente considerando :

$b(\theta) = b + \theta f$; $\qquad x_B = A_B^{-1} b_B$; $\quad d(\theta) = A^{-1}{}_B\, x_B - b(\theta)$

Se tiene

$$
\begin{aligned}
b^T(\theta)\,(\bar{u} + \lambda v) &= b^T(\theta)\,\bar{u} + \lambda b^T(\theta)\, v \\
&= b^T(\theta) u + \lambda (A x_B - d(\theta))^T v \\
&= b^T(\theta) u + (\lambda x_B^T A^T - \lambda d(\theta)^T)\, v \\
&= b^T(\theta) u + \lambda x_B^T A^T v - \lambda d(\theta)^T v \\
&= b^T(\theta)\, u - \lambda d(\theta)_s
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda \to +\infty} b^T(\bar{u} - \lambda v) = +\infty$$

$$\Rightarrow \operatorname{Sup} III^* = +\infty$$

Por lo tanto, el dominio admisible de III es vacio $\forall\ \theta > \theta_1$, puesto que el supremo del conjunto vacio es infinito. Por consiguiente no existe solución para III*.

b) Si $T_{is} > 0$ para algún $i \geq 1$ entonces ejecutamos un cambio de base en la tabla de usando como fila de intercambio la fila r.

Calculamos

$$\min \left\{ \frac{-T_{i0}}{T_{is}} \;/\; T_{is} > 0, \quad 1 \leq i \leq n \right\} = \frac{-T_{r0}}{T_{rs}}$$

$\Rightarrow \bar{B} = BU \{s\} \setminus \{ i_r \}$

$\Rightarrow a_s^T$ entra a la Base A_B, y regresamos a i)

III.1 Algoritmo Paramétrico usando Tablas

Se añade a la tabla óptima una fila T_{-1} tal que :

$$T_{-1} = \left[c^T A^{-1}{}_B f_B \;,\; D^T \right]$$

donde $D = A\, A^{-1}{}_B f_B - f = T_{-1,j}$; $j \geq 1$

T_{-1}	$c^T A^{-1}{}_B f_B$	D^T	
	$c^T x_B$	d^T	
T_B	u_B	$(A_B^{-1})^T A^T$	B

Paso 1 : Si $T_{-1,j} \geq 0$ $\forall j \geq 1$ entonces A_B es una base óptima de (III , III*) $\forall \theta \geq 0$, luego parar. Otro caso ir al paso 2.

Paso 2 : i) Como $T_{-1,j} < 0$ para algún $j \geq 1$ se calcula

$$\theta_1 = \min \left\{ \frac{-T_{0j}}{T_{-1,j}} \;/\; T_{-1,j} < 0,\; j \geq 1 \right\} = \frac{-T_{0s}}{T_{-1,s}}$$

A_B es una base óptima para III, $\forall \theta \in [0, \theta_1]$, y A_B ya no es base óptima para $\theta > \theta_1$, luego ir a ii).

ii) Se calcula $\overline{T}_0 = T_0 + \theta T_{-1}$
Para la tabla modificada se hace un cambio de base usando la columna s como columna de intercambio.

a) Si $T_{is} \leq 0$ entonces $\nexists$ solución para III*, luego parar.
Otro caso ir a b).

b) Si $T_{is} > 0$ para algún i ≥ 1 entonces se ejecuta un cambio de base.
Luego, $A_{\overline{B}}$ será base óptima para III, $\forall\, \theta \in [\theta_1, \theta_2]$

$$\text{donde } \overline{B} = B \cup \{s\} \setminus \{i_r\}, \text{ ir al paso 1}$$

Ejemplo 1

$L^*(\theta)$: Max $(3+\theta)\, u_1 + (2+\theta)\, u_2 + (5+2\theta)\, u_3$

$$u_1 + 2\,u_2 + u_3 + u_5 \qquad = 440$$

$$3u_1 + u_3 + u_5 \qquad = 480$$

$$u_i \geq 0$$

Solución :

$T_B(0)$ es la tabla óptima de $L^*(0)$; cuando $\theta = 0$

$T_B(0)=$	2200	2	8	0	5	0	
	440	-1	2	1	1	0	3
	40	2	-2	0	-1	1	5

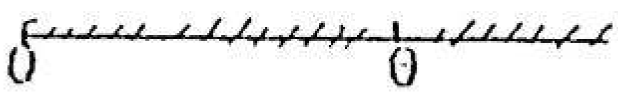
Cálculo de T_{-1} : $f = (1, 1, 2, 0, 0)$

$$x_B = A_B^{-1} f_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D = A_N\, x_B - f_N$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \geq 0$$

Luego, A_B es una base óptima, $B = \{3, 5\}$
para $L(\theta)$; $\theta \geq 0$



(Este gráfico representa para que valores de θ existe solucion; A_B es fijo en el semieje positivo constante en el semieje positivo)

Si cambiamos

$$f = (1, 2, -2, 0, 0)$$

$$\Rightarrow x_B = (A_B)^{-1} f_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_{-1,0} = c^T x_B = (440, 480)\,(-2, 0) = -880$$

$$D_N = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $T_{-1,j} < 0$ para algún $j \geq 1$

Calculamos $\theta_1 = \min\{2/3, 8/6, 5/6\} = 2/3$

$\Rightarrow A_B$ es base óptima para $\theta \in [0, 2/3]$

Veamos para $\theta > \theta_1$ ajustamos la fila T_0 con la fila T_{-1} como sigue

$\Rightarrow \quad \overline{T_0} = T_0 + 2/3\ T_{-1}$

$4800/3 = 2200 + 2/3\ (-880)$

$0 = 2 + 2/3\ (-3)$

$4 = 8 + 2/3\ (-6)$

$11/3 = 5 + 2/3\ (-2)$

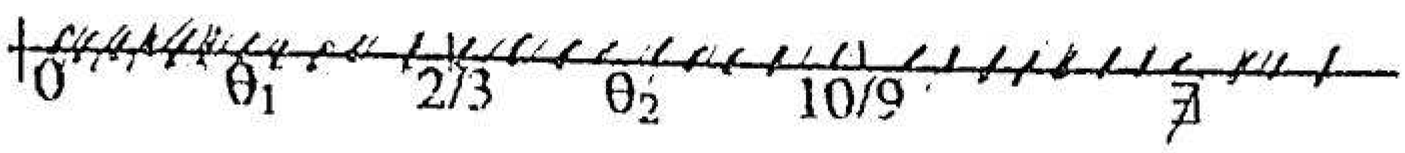
Luego, se tiene la siguiente tabla :

- 880	-3	-6	0	-2	0	
4800/3	1	4	0	11/3	0	
440	1	2	1	1	0	3
40	2	-2	0	-1	1	5

Observando la tabla, sale el indice 5 y entra el indice 1; obteniéndose lo siguiente :

- 820	0	-9	0	-7/2	3/2	
4800/3	0	4	0	11/3	0	
420	0	-3	1	3/2	1/2	3
20	1	-1	0	-1/2	1/2	1

Puesto que el mínimo se dá en el índice 2, y $T_{i2} \leq 0$ esto $\nexists$ solución



(Este gráfico representa los valores de θ para los que existe solución.

Si $\theta \in [0, 2/3]$, A_B es base óptima, donde $B = \{3,5\}$.

Si $\theta \in [2/3, 10/9]$, A_B es base óptima, donde $B = \{3,1\}$.

Si $\theta > 10/9$ no existe solución)

Ejemplo 2

Considerando las hipótesis del ejemplo 2 del capítulo II, si la oferta de gasolina y kerosene se reducen en 5% y 12.5% al mes respectivamente, y la demanda del combustible para reactores se incrementa en 20% mensual, determinar el intervalo del tiempo en el cual el costo de producción se pueda minimizar. Es decir, obtener soluciones reales para las variables que representa al Petróleo crudo ligero y pesado respectivamente.

En el ejemplo tenemos el problema (Handy Taha - Investigación de Operaciones pág. 195)

$$\min \quad c^T x \qquad \text{........ (1)}$$
$$Ax \geq b$$

donde b cambia. Para esto resolvemos (1), y según esto hacemos una aplicación del algoritmo paramétrico desarrollado en el apéndice C.

Solución :

$b = (1,\ 0.4,\ 0.25)$ millones
$f = (-0.05, -0.05, 0.05)$ millones, son los cambios de b mensualmente
θ : variación de la cantidad con respecto al tiempo a intervalos mensuales
$b(\theta) = b + \theta f$
x_1: número de barriles de petróleo crudo ligero.
x_2: número de barriles de petróleo crudo pesado.

$$\min\ 11x_1 + 9x_2$$

$$0.4x_1 + 0.32x_2 \geq 1 - 0.05\theta$$
$$0.2x_1 + 0.2x_2 \geq 0.4 - 0.05\theta$$
$$0.35x_1 + 0.2x_2 \geq 0.2 - 0.05\theta$$

$0.35x_1 + 0.2x_2 \geq 0.2 - 0.05\theta$

y su dual respectivo es

$$\text{Max } (1 - 0.05\theta)\, u_1 + (0.4 - 0.05\theta)\, u_2 + (0.25 + 0.05\theta)\, u_3$$

$$0.4\, u_1 + 0.2\, u_2 + 0.35\, u_3 + u_4 = 11$$
$$0.32\, u_1 + 0.2\, u_2 + 0.20\, u_3 + u_5 = 9$$

Considerando (α_2 y B_2 del capítulo II) y teniendo en cuenta que agregamos T_{-1} como una fila adicional a la tabla B_2 (T_{-1} = 1.375 0.000 0.025 -0.094 -0.125 0.000) se tiene la siguiente tabla :

T_B es la tabla óptima de $T(0)$

T(0) =

1.375	0.000	0.025	-0.094	-0.125	0.000	}T_{-1}
27.500	0.000	1.000	0.625	2.500	0.000	}T_o
27.500	1.000	1.500	-0.875	2.500	0.000	1
0.020	0.000	0.240	-0.080	-0.800	1.000	5

$\theta = \min \{-T_{0,s} / T_{-1,s}\} = \{-T_{0,3} / T_{-1,3}\} = 6.667$

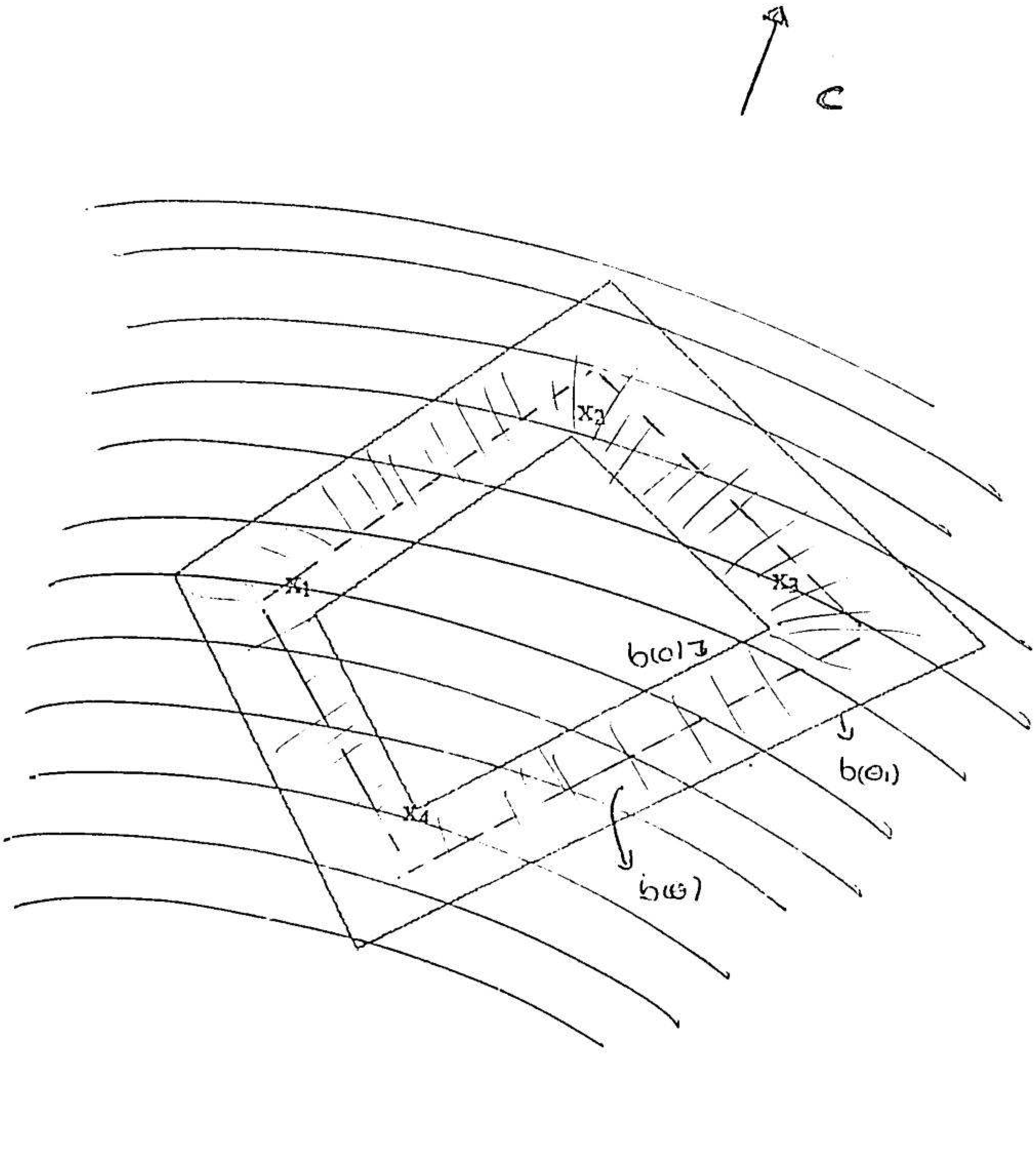
$B = \{1,5\}$ es óptimo $\forall\ \theta \in [0, 6.667]$

Mediante el análisis de sensibilidad varía b entonces x_B cambió, por lo tanto la solución óptima cambia, pero este cambio aproximadamente se hace en seis meses y diesiocho dias; después de ese tiempo no habrá solución.
Por otra parte se tiene que $T_{i,3} < 0$, $\forall\ i \geq 1$ entonces no existe solución para $\theta > 6.667$.
(Los cálculos se efectuaron usando el programa listado en el anexo C).

INTERPRETACION GEOMETRICA

Variación del vector b

Siendo x_1 , x_2 , x_3, y x_4 soluciones básicas, cuando el parámetro $\theta \in [0,\theta_1]$ existe solución. En otro caso, no hay solución.



IV. VARIACIÓN EN FILAS NO BÁSICAS DE LA MATRIZ A

En este capítulo analizaremos el cambio del elemento a_{ij} fila de la matriz no básica. Para esto presentamos dos programas

$$\begin{array}{lll} \min c^T x & \text{y} & \min c^T x \\ Ax \geq b & & A(\theta)\, x \geq b \qquad \text{donde} \end{array}$$

$$A(\theta) = A + \theta \hat{A};$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_B \\ \hat{A}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{A}_N \end{bmatrix}$$

$$(\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \hat{A}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o \\ \vdots \\ o \\ v_{n+1} \\ \\ v_m \end{bmatrix} \begin{matrix} \} \text{ n filas de la matriz básica} \\ \} \text{ m - n filas de la matriz no básica} \end{matrix}$$

donde n es el rango de la matriz básica A_B)

En este caso se hace un análisis de la solución del segundo programa con respecto al primero, teniendo en cuenta que el primero tiene solución óptima.

Propiedad 4.1

Sean los programas:

$$\begin{array}{ll} \text{I: } \min c^T x & \text{I*: } \quad \text{Máx } b^T u \\ \quad Ax \geq b & \qquad A^T u = c \\ & \qquad u \geq 0 \end{array}$$

Con su tabla óptima :

	$c^T x_B$	$d^T = Ax_B - b$	
T_B :	u_B	$(A_B^{-1})^T A^T$	B

II : $\min c^T x$

$\quad A(\theta)\, x \geq b$

II* : $\text{Máx } b^T u$

$\quad A^T(\theta) u = c$

$\quad u \geq 0$

donde $A(\theta) = A + \theta \hat{A}$

T_B :	$c^T x_B$	$d^T(\theta) = A(\theta)\, x_B - b$	
	u_B	$(A_B^{-1})^T A^T(\theta)$	B

Luego :

i. Si $\hat{A} x_B \geq 0$ entonces x_B es solución optima de II

ii. Si $v_i x_B < 0$ para algún v_i no básico, $i \in N$ (no básico)

y $\displaystyle \theta_1 = \min_{i \in N} \left\{ \frac{-d_i}{v_i x_B} \Big/ v_i x_B < 0 \right\}$ entonces x_B es solución óptima de II.

para todo $\theta \in [0, \theta_1]$

<u>**Prueba**</u> :

i.
$$
\begin{aligned}
d^T(\theta) &= A(\theta)\, x_B - b \\
&= (A + \theta \hat{A})\, x_B - b \\
&= (A x_B - b) + \theta \hat{A} x_B
\end{aligned}
$$

del programa I $A x_B - b \geq 0$ y considerando la hipótesis se tiene que

$d^T(\theta) \geq 0 \therefore x_B$ es solución óptima de II.

ii. Se tiene que :

$$\theta_1 \leq -d_i / v_i x_B$$

$\Rightarrow \quad \theta_1 v_i x_B + d_i \geq 0$ Para algún $i \in N$

Si $\quad \theta \in [0, \theta_1]$

$$\theta \leq \theta_1 \leq -d_i / v_i x_B$$

$\theta v_i x_B + d_i \geq 0$ Para algún $i \in N$

Ahora para los demás i que no cumplen

que $v_i x_B < 0$ se tiene que

$$v_i x_B \geq 0 \Rightarrow \theta v_i x_B \geq 0;$$

$\theta v_i x_B + d_i \geq 0$ para los demás i

$\Rightarrow \quad \theta v_i x_B + d_i \geq 0 \quad \forall i \in N$

$\Rightarrow \quad \theta \hat{A} x_B + A x_B - b \geq 0$

$\Rightarrow \quad (A + \theta \hat{A}) x_B - b \geq 0$

$\Rightarrow \quad d(\theta) \geq 0$

$\therefore \quad x_B$ es solución óptima de II.

$$\forall \theta \in [0, \theta_1]$$

Ejemplo :

$$L(\theta): \qquad \min \quad 440x_1 + 480x_2$$

$$(1-\theta)\,x_1 + (3+4\theta)\,x_2 \geq 3$$

$$2\,x_1 \geq 2$$

$$3\,x_1 + x_2 \geq 4$$

Solución :

Se tiene la tabla óptima :

$T_B(\theta) =$

2200	2	8	0	5	0	
440	1	2	1	1	0	3
40	2	-2	0	-1	1	5

donde los indices no básicos son 1, 2, 4

Por otra parte :

$$v_1\, x_B = v_1\, A_B^{-1}\, b_B$$

$$= \begin{bmatrix} -1, 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = -5$$

más aún $\quad \theta_1 = \dfrac{-d_1}{v_1\, x_B} = \dfrac{-2}{-5} = \dfrac{2}{5}$

En consecuencia

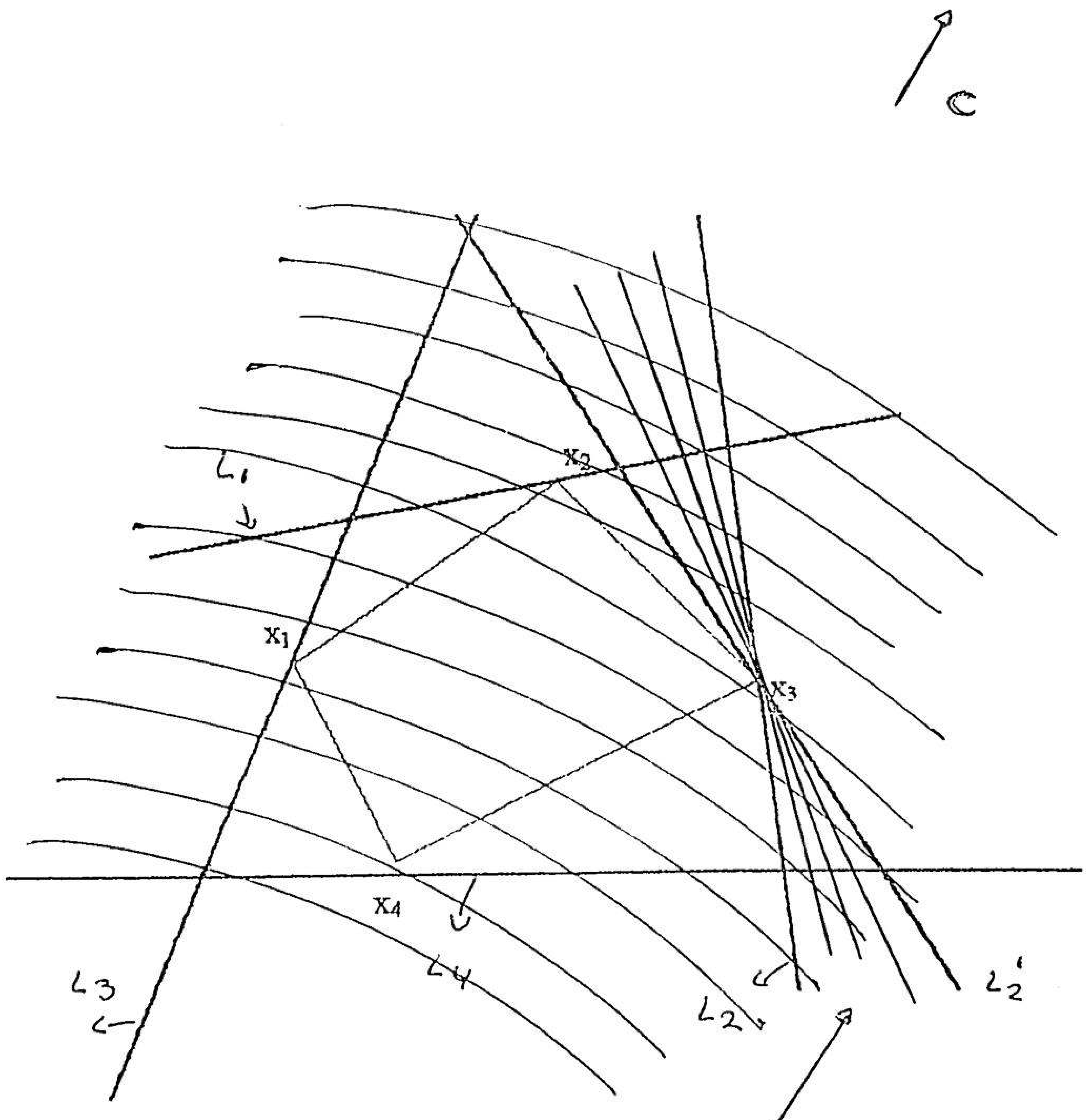
x_B es solución óptima de L (θ) para todo $\theta \in [0, 2/5]$

INTERPRETACION GEOMETRICA

Variación de la fila no básica de A

Sean x_1, x_2, x_3 y x_4, soluciones básicas; L_1, L_2, L_3, L_4 rectas no básicas.

Si L_2 cambia hasta un L'_2 para un parámetro $\theta \in [0,\theta_1]$, la solución óptima sigue siendo la misma.



Región donde la solución no cambia.

V. CONCLUSIONES

Con respecto al programa lineal $\min c^T x$

$$Ax \geq b$$

si modificamos c a la forma $c + \theta f$, donde f es constante y θ es el parámetro entonces no hay ninguna dificultad en hacer el análisis de los cambios de la tabla óptima, porque solamente se cambia la columna 0 de dicha tabla, y el algoritmo que determina la solución del programa no tiene ninguna restricción.

Similarmente, si cambiamos b a la forma $b + \theta f$, donde f es constante y θ es el parámetro, tampoco hay restricción en hacer el análisis de todas las modificaciones de la tabla óptima, porque solo cambia la fila 0 de dicha tabla, y el algoritmo de la solucion del programa no tiene limitaciones.

En cambio si variamos alguna fila de la matriz de restricciones, y que es fila de la matriz básica, entonces cambiarán todas las componentes de la tabla, lo cual no permitirá hacer un análisis por su complejidad. En cambio, si se considera variaciones en las filas de la matriz no básica sólo se requiere algunos cambios en la tabla óptima.

La programación lineal paramétrica es un estudio que forma parte del análisis de sensibilidad.

BIBLIOGRAFIA

1.- Optimization Theory and Applications.
Lamberto Cesary.
Springer Verlag. New York, 1983

2. Investigacion de Operaciones.
Handy Taha.
Mexico Alfaomega, 1991

3.- Parametric Linear Programming and Sensitivity Analysis.
John Cooper, Isaac Leon.
Spring - Verlag. New York . 1972

4. Notas del curso Optimización I y II
Eugen Blum.
Biblioteca de la Facultad de Ciencias (UNI), 1995

5.- Linear Programming
Ivar Ekeland, Roger Teman.
American Elsevier Publishing Company. Inc - New York, 1980

6. Optimization Theory and Applications
Frank Clarke.
John Wiley & Sons; Inc; 1990

7. Mathematical Programming
Vajda Peter.
Mac Graw - Hill Book Company; New York; 1991