UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

SECCIÓN DE POST-GRADO Y SEGUNDA

ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS
MENCIÓN MATEMÁTICA APLICADA

TITULADA:

LA HIPÓTESIS DE RIEMANN DESDE EL PUNTO DE VISTA DEL ANÁLISIS FUNCIONAL

PRESENTADA POR:

OSWALDO JOSÉ VELÁSQUEZ CASTAÑÓN

LIMA-PERU
2003

Contenido

Introducción

El objetivo del presente trabajo es el de mostrar los avances concernientes al estudio de un problema central en las matemáticas actuales, la *Hipótesis de Riemann*, tratado mediante las técnicas del análisis funcional, como una ecuación integral. En seguida establecemos rápidamente los marcos teóricos e histórico de ambas teorías, para luego explicar la relación entre ambas.

La Hipótesis de Riemann

El problema de verificar la *Hipótesis de Riemann* es uno de los problemas más importantes de la matemática actual. Por más de 140 años de antigüedad, este problema ha atraido la atención de innumerables matemáticos, incluyendo a Hilbert, quien lo incluyó en la famosa lista de los 23 problemas publicados en su artículo *Mathematische Probleme* en el 1900. Ahora figura entre los siete problemas del milenio, cuyas soluciónes son premiadas por el *Clay Mathematics Institute*. No es para menos, pues este problema está estrechamente relacionado con el problema de la distribución de los números primos, problema central en la teoría de números. A continuación presentamos una breve reseña sobre el problema de la Hipótesis de Riemann, además de algunas de sus posibles implicaciones en las matemáticas.

La *función zeta de Riemann* es la función de variable compleja definida para $\mathrm{Re}(s) > 1$ por la serie

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

y extendida por continuación analítica a todo el plano complejo, exceptuando el punto $s = 1$, donde posee un polo simple con residuo 1.

La relación

$$\prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

descubierta por Euler para $s > 1$ real (y publicada en el libro *Introductio in Analysin Infinitorum* en 1748), pero válida para $s \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(s) > 1$, deja entrever la relación existente entre la función zeta de Riemann y los números primos.

Gauss descubre, allá por el año 1849, que el número de primos menores o iguales a un número

x dado, denotado por $\pi(x)$, estaba bien aproximado por la función

$$\mathrm{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t}.$$

Fue Tchebychev, en 1848, quien logra probar lo conjeturado por Gauss años antes. Publicado en 1850, este fue el primer estudio de la función $\pi(x)$ por métodos analíticos; en este trabajo, Tchebychev prueba que si existe una fórmula asintótica para $\pi(x)$ por una suma finita $\sum a_k x/(\log x)^k$ hasta un orden $O(x/(\log x)^N$, entonces $a_k = (k-1)!$ para $1 \leq k \leq N-1$, que es justamente la expansión asintótica para $\mathrm{Li}(x)$. Más adelante, en un segundo artículo, Tchebychev daría cotas inferiores y superiores precisas para $\pi(x)$, probadas rigurosamente. Las ideas de Tchebychev influirían notablemente en el trabajo de Riemann.

En el único artículo publicado por Riemann sobre teoría de números, publicado en 1859 (que puede verse en [22]), Riemann establece la ecuación

$$2\,\mathrm{sen}(\pi s)\Gamma(s)\zeta(s) = i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1}\,dx,$$

donde Γ es la función *Gamma de Euler* definida por

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} y^{s-1}e^{-y}dy.$$

De ahí realiza la continuación analítica de ζ al plano complejo, y encuentra los llamados ceros *triviales* de esta función, los enteros pares negativos. A continuación, utilizando propiedades de la función Γ prueba la ecuación funcional

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

e introduce la función $\xi(t) = \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)$ de $s = \frac{1}{2} + ti$. Riemann prueba que la función $\xi(t)$ sólo puede anularse si la parte imaginaria de t está entre $\frac{1}{2}i$ y $-\frac{1}{2}i$. Luego deduce que el número de raíces de $\zeta(t) = 0$, cuyas partes reales están entre 0 y T es aproximadamente $\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$; más precisamente, Riemann conjetura para $T \geq 2$ la fórmula

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + 0(\ln T).$$

Es entonces cuando menciona: *uno encuentra aproximadamente este número de raíces reales entre dichos límites, y es muy probable de que todas las raíces sean reales.* Riemann menciona intentos por probar dicha conjetura, intentos dejados de lado por no tener la necesidad de utilizar dicho resultado en su investigación. En términos de la función ζ, la Hipótesis de Riemann se lee como sigue:

todos los ceros de $\zeta = \zeta(s)$ *sobre la franja* $0 < \mathrm{Re}(s) \leq 1$ *están en la recta* $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

Al final de su trabajo, Riemann expresa la función $\pi(x)$ en términos de los ceros de la función $\zeta(s)$.

La Hipótesis de Riemann tiene implicaciones interesantes en la teoría de números. Una de sus equivalencias permite mejorar la precisión con la que se estima el error obtenido al calcular $\pi(x)$ por la integral logarítmica $\mathrm{Li}(x)$:

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(\sqrt{x}\log x).$$

Entre algunos avances con respecto a la solución del problema (o evidencia que apoya la hipótesis) destacamos: Hadamard y de la Vallée Poussin probaron, independientemente, que la función ζ no posee ceros sobre la recta $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) = 1\}$, probando el Teorema del Número Primo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)\ln n}{n} = 1.$$

La importancia del teorema del número primo radica en que nos dice que podemos calcular $\pi(n)$ aproximadamente, calculando $n/\ln n$ (aunque no da un estimado del error asociado). El matemático inglés Hardy probó que existen infinitos ceros de ζ sobre la recta $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) = 1/2\}$. En la actualidad se conoce que más del 40% de los ceros no triviales de ζ son simples y satisfacen la Hipótesis de Riemann.

La descripción oficial del *Clay Mathematics Institute* del problema de la Hipótesis de Riemann, debida a E. Bombieri, puede hallarse en [9]; diversas implicaciones de la Hipótesis en la teoría de números pueden hallarse en [28]. Existe un proyecto en la Internet, denominado *ZetaGrid*, que tiene el objetivo de calcular numéricamente los ceros de la función zeta de Riemann (actualmente van calculados más de 100,000,000,000 ceros, y la Hipótesis de Riemann está verificada para los ceros s de $\zeta(s)$ con $|\mathrm{Im}(s)| < 29,538,618,432.236$); basta descargar un pequeño software en su propia máquina para participar del proyecto (http://www.zetagrid.net).

Las implicaciones de la Hipótesis de Riemann son amplias y profundas, dentro y fuera de la teoría de números. Por ejemplo, hasta hace poco, admitir la Hipótesis de Riemann era la única forma de hallar algoritmos polinomiales para determinar primalidad de números enteros, problema importante en criptografía. La importancia de este problema se ve además en la medida en que ha sido reformulado como problemas de análisis funcional, sistemas dinámicos y física, entre otros.

La Teoría de Fredholm

Las ecuaciones integrales aparecen a partir de diversos problemas en la física. El matemático Abel, en un artículo del 1823 sobre la tautócrona, es el primero en plantear y resolver una ecuación integral. La ecuación estudiada era de la forma

$$f(x) = \int_0^x \frac{\phi(y)}{\sqrt{x-y}}\,dy,$$

donde ϕ era la función incógnita. Este viene a ser uno de los primeros ejemplos de lo que llamamos una *ecuación integral de primera especie*

$$\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = \psi(x),$$

ecuación donde tenemos que hallar φ dados K y ψ. Más adelante, en 1865 A. Beer llega, mediante el estudio del problema de Dirichlet, a una ecuación de la forma

$$\sigma(x) + \int_a^b K(x,y)\sigma(y)dy = f(x)$$

donde K es un núcleo continuo y simétrico. Este resulta ser un caso particular de una *ecuación integral de segunda especie.* Si consideramos la integral como un operador actuando sobre cierto tipo de funciones, la ecuación toma la forma

$$(I+K)\sigma = f$$

de donde la solución formal está dada por la serie

$$\sigma = (I+K)^{-1}f = f - Kf + K^2 - K^3 f + K^4 f - \cdots$$

Beer plantea que si la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-K)^n f$ converge en algún sentido adecuado a una función σ, esta sería la solución; Sin embargo Beer no podría, en ese entonces, probar la convergencia; C. Neumann utilizaría más adelante (en 1877) la misma técnica obteniendo cierto éxito.

En 1888 P. du Bois-Reymond sugiere el nombre de *ecuaciones integrales* para tales problemas, y propone desarrollar una teoría general para ellas. La importancia de estas ecuaciones es precisamente la alternativa que proporcionan a resolver problemas de ecuaciones diferenciales. Avances importantes en este sentido fueron obtenidos por V. Volterra, en 1896, cuando establece la existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones de la forma

$$f(x) + \int_a^x K(x,t)f(t)dt = g(x).$$

Este trabajo tiene una gran influencia sobre I. Fredholm, quien, en el 1900 publica *Sur une Nouvelle Méthode pour la Résolution du Problème de Dirichlet*, y más adelante, en 1903 *Sur une classe d'Équations Fonctionelles* (en [7]), artículos que cambiarían definitivamente el futuro curso del análisis funcional.

A continuación revisamos algunas de las técnicas para estudiar la ecuación integral de segunda especie, halladas en el segundo artículo de Fredholm. Consideremos la ecuación de segunda especie

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt, \tag{1}$$

donde $f \in C[a,b]$ y $K \in C([a,b]\times[a,b])$ son funciones dadas, $\lambda \in \mathbb{C}$ es un parámetro, y $\varphi \in C[a,b]$ es una función a determinar. La técnica de Fredholm consiste en discretizar el problema. Introduciendo $s_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$, $\delta = \dfrac{b-a}{n}$,

$$f_i = f(s_i), \qquad \varphi_i = \varphi(s_i), \qquad K_{pq} = K(s_p, s_q)$$

transformamos el problema (1) al de resolver la ecuación

$$\varphi_p = f_p + \lambda \sum_{q=1}^{n} K_{pq}\varphi_q\delta,$$

o equivalentemente

$$\varphi_p - \lambda \sum_{q=1}^{n} K_{pq}\varphi_q\delta = f_p,$$

el cual es un sistema lineal de orden n. El determinante del sistema es

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda K_{11}\delta & -\lambda K_{12}\delta & \cdots & -\lambda K_{1n}\delta \\ -\lambda K_{21}\delta & 1-\lambda K_{22}\delta & & -\lambda K_{2n}\delta \\ \vdots & & \ddots & \\ -\lambda K_{n1}\delta & -\lambda K_{n2}\delta & \cdots & 1-\lambda K_{nn}\delta \end{vmatrix},$$

quc posee el desarrollo

$$D_n(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{1!}\sum_{p_1=1}^{n} K_{p_1p_1}\delta + \frac{\lambda^2}{2!}\sum_{p_1,p_2=1}^{n} \begin{vmatrix} K_{p_1p_1} & K_{p_1p_2} \\ K_{p_2p_1} & K_{p_2p_2} \end{vmatrix}\delta^2 + \cdots +$$

$$\frac{(-1)^n}{n!}\lambda^n \sum_{p_1,\ldots,p_n=1}^{n} \begin{vmatrix} K_{p_1p_1} & K_{p_1p_2} & \cdots & K_{p_1p_n} \\ K_{p_2p_1} & K_{p_2p_2} & & K_{p_2p_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ K_{p_np_1} & K_{p_np_2} & \cdots & K_{p_np_n} \end{vmatrix}\delta^n.$$

Observe que la suma

$$\sum_{p_1,\ldots,p_k=1}^{k} \begin{vmatrix} K_{p_1p_1} & K_{p_1p_2} & \cdots & K_{p_1p_k} \\ K_{p_2p_1} & K_{p_2p_2} & & K_{p_2p_k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ K_{p_kp_1} & K_{p_np_2} & \cdots & K_{p_kp_k} \end{vmatrix}\delta^k$$

es una aproximación para la integral

$$d_n = \int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) & \cdots & K(t_1,t_k) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) & & K(t_2,t_k) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2) & \cdots & K(t_n,t_k) \end{vmatrix} dt_1dt_2\cdots dt_k.$$

Introducimos

$$K\begin{pmatrix} x_1\, x_2\, \ldots\, x_n \\ y_1\, y_2\, \ldots\, y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1,y_1) & K(x_1,y_2) & \cdots & K(x_1,y_n) \\ K(x_2,y_1) & K(x_2,y_2) & & K(x_2,y_n) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ K(x_n,y_1) & K(x_n,y_2) & \cdots & K(x_n,y_n) \end{vmatrix}.$$

Haciendo $n \to \infty$, obtenemos

$$D(\lambda) = \lim_{n\to\infty} D_n(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_n, \tag{2}$$

donde

$$d_n = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K\begin{pmatrix} t_1\, t_2\, \ldots\, t_n \\ t_1\, t_2\, \ldots\, t_n \end{pmatrix} dt_1 dt_2 \cdots dt_k. \tag{3}$$

La función $D = D(\lambda)$ así obtenida es llamada *determinante de Fredholm.* La función determinante D es entera. En efecto, a través de la *desigualdad de Hadamard*

$$|\det(x_{ij})|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |x_{1j}|^2 \sum_{j=1}^{n} |x_{2j}|^2 \cdots \sum_{j=1}^{n} |x_{nj}|^2,$$

se puede probar que

$$|d_n| \leq n^{n/2} M^n (b-a)^n,$$

de donde la serie

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^n}{n!} n^{n/2} M^n (b-a)^n$$

converge para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, lo cual implica la convergencia de la serie para D por el criterio de Weierstrass.

La construcción de esta función *determinante*, sugiere una analogía con la teoría de ecuaciones lineales. Veamos cómo se da esto.

Supongamos que la serie de potencias

$$\varphi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(s) \lambda^n, \tag{4}$$

para $|\lambda|$ pequeño, es solución de (1). Introduciendo la serie en la ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi_0(s) &= f(s) \\ \varphi_n(s) &= \int_a^b K(s,t) \varphi_{n-1}(t) dt, \end{aligned}$$

para $n \geq 1$. Siendo f y K funciones continuas, existen constantes positivas m y M tales que

$$|f(s)| \leq m, \qquad |K(s,t)| \leq M,$$

para $s, t \in [a, b]$. De ahí
$$|\varphi_n(s)| \leq m[M(b-a)]^n$$
para $n \geq 0$ de donde la serie mencionada converge si $|\lambda| < 1/[M(b-a)]$.

Definimos los núcleos iterados $K_n(s,t)$ mediante

$$K_1(s,t) = K(s,t); \qquad K_n(s,t) = \int_a^b K_{n-1}(s,t_1)K(t_1,t)dt_1 \text{ para } n \geq 2.$$

Es fácil ver que

$$K_n(s,t) = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(s,t_{n-1})K(t_{n-1},t_{n-2}) \cdots K(t_2,t_1)K(t_1,t)dt_1dt_2 \cdots d_{t_{n-1}}$$

de donde, para $n \geq 1$,
$$\varphi_n(s) = \int_a^b K_n(s,t)f(t)dt.$$
Gracias a esto se puede escribir

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b K_{n+1}(s,t)\lambda^n f(t)dt = f(s) + \lambda \int_a^b R(s,t;\lambda)f(t)dt,$$

donde la serie
$$R(s,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(s,t)\lambda^n, \tag{5}$$
es la *resolvente* de la ecuación (1). Se verifica entonces que

$$|K_n(s,t)| \leq M^n(b-a)^{n-1},$$

para todo $n \geq 1$, de donde la serie (5) converge en el disco $|\lambda| < 1/[M(b-a)]$.

Ahora definimos la función $D(s,t;\lambda)$ por

$$D(s,t;\lambda) = D(\lambda)R(s,t;\lambda).$$

Notamos que $D(s,t;\lambda)$ está bien definida para $|\lambda| < 1/[M(b-a)]$. Puede hallarse un desarrollo de $D(s,t;\lambda)$ convergente para todo λ, más precisamente

$$D(s,t;\lambda) = K(s,t) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_n(s,t) \tag{6}$$

donde
$$d_n(s,t) = \int_a^b \cdots \int_a^b K\begin{pmatrix} s & t_1 & \ldots & t_n \\ t & t_1 & \ldots & t_n \end{pmatrix} dt_1 \cdots dt_n.$$
Dado que $D(\lambda)$ es también una función entera, entonces

$$R(s,t;\lambda) = \frac{D(s,t;\lambda)}{D(\lambda)},$$

de modo que el resolvente de la ecuación (1) existirá siempre que $D(\lambda) \neq 0$. En este caso $R(s,t;\lambda)$ está bien definido, y existe una única solución de la ecuación (1) dada por

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b R(s,t;\lambda) f(t) dt.$$

Queda entonces analizar qué ocurre en los ceros de D. Se cumple que todo cero de $D(\lambda)$ es un polo de $R(s,t;\lambda)$. Se prueba que los *valores propios* de la ecuación integral, esto es, los $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales la ecuación integral (denominada ecuación *homogénea*)

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t) dt$$

tiene solución no nula (denominada *función propia* correspondiente al valor propio λ), son los ceros de $D(\lambda)$. El espacio de funciones propias correspondiente a un autovalor λ, es un espacio vectorial; en cuanto a la dimensión de este espacio, es éste un espacio de dimensión finita.

Podemos asímismo estudiar la relación existente entre la ecuación de segunda especie

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t) dt \tag{7}$$

con la llamada *ecuación adjunta*,

$$\psi(s) = g(s) + \lambda \int_a^b K(t,s)\psi(t) dt, \tag{8}$$

esta no es más que una ecuación de segunda especie con un núcleo $K_0(s,t) = K(t,s)$. De ahí obtenemos el determinante de Fredholm $D_0(\lambda)$ y la función $D_0(s,t;\lambda)$ de

$$D_0(s,t;\lambda) = D(t,s;\lambda), \qquad D_0(\lambda) = D(\lambda).$$

Considerando la ecuación homogénea

$$\psi(s) = \lambda \int_a^b K(t,s)\psi(t) dt. \tag{9}$$

y como el determinante de Fredholm correspondiente a una ecuación y a su adjunta son los mismos, ellas poseen los mismos valores propios. De ahí deducimos que, si λ no es un valor propio, existen soluciones tanto de una ecuación como de su adjunta.

Sea λ es un valor propio de las ecuaciones, esto es, $D(\lambda) = 0$. Para f dada, existe una solución para el problema (7) si y sólo si

$$\int_a^b f(s)\psi(s) ds = 0$$

para toda solución ψ de la ecuación adjunta homogénea (9). Puede probarse incluso que una ecuación homogénea y su ecuación adjunta poseen el mismo número de soluciones linealmente independientes.

El trabajo de Fredholm marcaría un cambio radical en el desarrollo del análisis funcional. En adelante, muchos de los problemas en física matemática podrían tratarse de manera rutinaria. La investigación posterior de Hilbert sobre ecuaciones integrales marcaría el origen de los espacios de Hilbert (ver *Über lineare funktionalgleichungen*, Acta Math., vol. 41, 1918, pp. 71-98). F. Riesz publicaría en 1918 un artículo que trata las ecuaciones integrales por medio de técnicas abstractas; esto serviría para que, posteriormente, Banach y la escuela Polaca desarrollaran la maquinaria abstracta de operadores (ver *Théorie des Opérations Linéaires*, Warsaw, 1935).

La Hipótesis de Riemann como un problema de Análisis Funcional

Un artículo de A. Beurling (ver [8]) transforma el problema de la Hipótesis de Riemann al problema de determinar que una cierta familia de funciones sea densa en el espacio $L_2(0,1)$. A partir de esto, en 1993 J. Alcántara Bode reformula la Hipótesis de Riemann como un problema de Análisis Funcional (en [2]), complementando más adelante este estudio en otro artículo ([3]). En este sentido, el enfoque del problema es nuevo y presenta nuevas posibilidades al problema de la Hipótesis de Riemann.

Este trabajo se divide en dos grandes capítulos. En el primer capítulo se revisan los hechos necesarios de análisis complejo y análisis funcional para el estudio de la Hipótesis de Riemann en el segundo capítulo. Se pone particular énfasis en el desarrollo de la teoría espectral, para estudiar luego los operadores compactos y su clasificación. Más adelante se hace el estudio de los determinantes de Fredholm para ciertos tipos de operadores compactos especiales; obteniendo como caso particular las fórmulas originales de Fredholm mencionadas. En el segundo capítulo, estudiamos la transformación de la Hipótesis de Riemann, en una ecuación integral de primera especie; para luego hacer un estudio detallado del espectro del operador y su determinante. Asimismo se presentan otras formulaciones de la Hipótesis de Riemann.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se revisa la maquinaria del análisis complejo y análisis funcional necesaria para entender el trabajo posterior. Se asume que el lector ya posee conocimientos básicos de análisis complejo: funciones holomorfas y meromorfas, teoría de residuos, entre otros. Asímismo, conocimientos básicos de análisis funcional: espacios de Banach y de Hilbert, los teoremas fundamentales en espacios de Banach (teorema de Hahn-Banach, teorema de la aplicación abierta), operadores acotados, entre otros tópicos. Decidimos proporcionar las pruebas en ciertos hechos conocidos sobre operadores acotados (por ejemplo en teoría espectral) ya que algunas de ellas nos permiten luego probar más fácilmente otros hechos no tan triviales (los valores singulares de un operador), y para mostrar, desde un inicio, el uso intensivo de las técnicas del análisis complejo para probar resultados de análisis funcional.

1.1 Análisis complejo

1.1.1 Orden y tipo de una función entera

En esta sección recopilamos algunas propiedades, sin pruebas, de las funciones enteras que serán utilizadas en los siguientes capítulos. Recordemos que una función compleja es *entera* si es analítica en todo el plano complejo. Una función $f \in H(\mathbb{C})$ tal posee una expansión en serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1.1}$$

convergente para todo $z \in \mathbb{C}$. De acuerdo con la fórmula de Cauchy-Hadamard para el radio de convergencia (el cual es ∞),

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

Pretendemos estudiar el crecimiento de una función entera. Para ello introducimos la función

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|,$$

para $r > 0$. Si una función compleja f no es constante, entonces por el Principio del Módulo Máximo y el teorema de Liouville,

$$\lim_{r\to\infty} M(r) = \infty.$$

Si

$$\underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r} < \infty,$$

entonces f es un polinomio. Una función compleja f que no es un polinomio es denominada *trascendente.*

Una función $f \in H(\mathbb{C})$ tiene *orden finito* si existe $\mu > 0$ tal que, para todo r lo suficientemente grande, se cumple que

$$M(r) < e^{r^{\mu}}.$$

Si tal μ no existe, el orden de f es *infinito.* El ínfimo de los μ para los cuales esto se cumple se denomina *orden de f* y se denota por ρ.

Teorema 1.1. Si $f \in H(\mathbb{C})$, entonces

$$\rho = \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r}.$$

Si f tiene orden ρ y existe una constante $K > 0$ tal que

$$M(r) < e^{Kr^{\rho}}$$

para todo r lo suficientemente grande, se dice que f tiene *tipo finito.* Si tal K no existe entonces se dice que f tiene *tipo infinito.* El ínfimo de tales K se denomina el *tipo de f* y se le denota por σ.

Si $\sigma = 0$, se dice que la función f es de *tipo minimal*, y si $0 < \sigma < \infty$ de *tipo normal.*

Teorema 1.2. Sea $f \in H(\mathbb{C})$, entonces

$$\sigma = \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{r^{\rho}}.$$

Teorema 1.3. Si una función entera f se escribe como serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

entonces

$$\rho = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}$$

y

$$\sigma = \frac{1}{e\rho} \overline{\lim}_{n\to\infty} n|a_n|^{\rho/n}.$$

Teorema 1.4. Una función entera y sus derivadas tienen el mismo tipo y orden.

En cuanto al producto de funciones enteras, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.5.

1. El orden del producto de dos funciones enteras de distintos órdenes es igual al mayor de los órdenes de los factores, y el tipo es igual al tipo de la función que tiene el mayor orden.

2. El producto de dos funciones enteras del mismo orden, una de las cuales tiene tipo normal σ y la otra de tipo minimal, es una función entera del mismo orden y tipo σ.

Ejemplo 1.1. Para las funciones $e^z, \operatorname{sen} z, \cos z$, se tiene que $\rho = 1$ y $\sigma = 1$.

Ahora estudiamos el comportamiento de una función entera en el interior de un sector angular:

Teorema 1.6. Sea f una función entera no constante con orden menor o igual a ρ. Sea G el interior de un ángulo de $\alpha\pi$ radianes $(0 < \alpha \leq 2)$, con $\partial G = \Gamma$ (la unión de dos rayos que van del origen al infinito), y supongamos que f está acotada en Γ. Si $\alpha < \dfrac{1}{\rho}$, entonces f está acotada en G.

Si $\rho > \dfrac{1}{2}$ y dividimos el plano en sectores de amplitud menor o igual a $\dfrac{\pi}{\rho}$, entonces f no estará acotada al menos en alguno de los rayos correspondiente a las fronteras de los conjuntos, si el orden de f es menor que ρ.

Si f tiene orden menor que $\dfrac{1}{2}$ u orden $\dfrac{1}{2}$ y tipo mínimo (tipo cero), entonces f no está acotada en ningún rayo que va del origen al infinito.

Observación. El teorema anterior no es válido si f tiene orden $_2$ y tipo positivo (tipo normal). En efecto, la función entera

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} \sigma\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

tiene orden $\dfrac{1}{2}$ y tipo σ y está acotada en $[0, +\infty[$.

1.1.2 Ceros y descomposición de una función entera

Dada una función entera trascendente, se da una de las siguientes posibilidades:

1. f no posee ceros. En este caso,

$$f(z) = e^{g(z)}$$

donde g es una función entera, conocida como *logaritmo* de f.

2. f posee un número finito de ceros. Entonces en este caso

$$f(z) = (z - z_1)^{k_1} \cdots (z - z_m)^{k_m} e^{g(z)},$$

donde $z_1, \ldots, z_m$ son los ceros de $f(z)$, y $k_1, \ldots, k_m$ son los órdenes respectivos de los ceros, y g una función entera.

3. f posee un número infinito de ceros. El conjunto de ceros de f, $Z(f)$, es entonces un subconjunto de $\mathbb{C}$ sin punto de acumulación finito, y por lo tanto numerable. Este es el caso que estudiaremos aquí.

Consideremos una variación del primer caso. Supongamos que f es entera, y $A \notin f(\mathbb{C})$. Entonces

$$f(z) = e^{g(z)} + A,$$

donde g es entera (pues $f - A$ no tiene ceros). ¿Para cuáles valores de A se tiene que $A \notin f(\mathbb{C})$? El siguiente teorema responde a la pregunta.

Teorema 1.7 (Picard). Si f es una función entera, entonces $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ o bien existe $A \in \mathbb{C}$ tal que $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{A\}$.

Ejemplo 1.2. $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\operatorname{sen}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Vamos ahora a ver qué ocurre en caso que f sea una función entera de orden finito.

Teorema 1.8. Sea f una función entera, de orden finito ρ.

1. Si existe $A \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$, entonces $\rho \in \mathbb{N}$ y existe un polinomio P de grado ρ tal que

$$f(z) = A + e^{P(z)}.$$

2. Si la ecuación $f(z) = A$ tiene un número finito de soluciones $z = z_1, \ldots, z_n$ con multiplicidades $k_1, \ldots, k_m$ respectivamente, entonces $\rho \in \mathbb{N}$ y existe un polinomio P de grado ρ tal que

$$f(z) = A + (z - z_1)^{k_1} \cdots (z - z_m)^{k_m} e^{P(z)}.$$

3. Si el orden de f no es entero, entonces la ecuación $f(z) = A$ posee infinitas soluciones para todo $A \in \mathbb{C}$.

Teorema 1.9 (Weierstrass). Sea $M = \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un conjunto numerable de elementos no nulos del plano complejo que no tiene un punto de acumulación finito, y escribimos una sucesión

$$0, \ldots, 0, a_1, \ldots, a_n, \ldots, \tag{1.2}$$

donde los a_i no son necesariamente distintos, y 0 se repite s veces. Entonces existe una función entera f tal que $Z(f) = M$,

$$f(z) = z^s \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) \exp\left(\frac{z}{a_k} + \cdots + \frac{z^k}{k a_k}\right). \tag{1.3}$$

Además, el orden de cada cero es exactamente el número de veces que se repite en la sucesión (1.2) (por ejemplo, si $0 \notin Z(f)$ entonces $s = 0$).

Observación. Observe que la función f dada tiene orden infinito.

Gracias a este teorema, dada una función g entera, con $Z(f) = \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, podemos hallar una función f mediante (1.3) tal que g/f no posee ceros, y por lo tanto

$$g(z) = f(z)e^{h(z)}$$

donde h es una función entera.

Quisiéramos modificar el teorema anterior a modo de obtener f de orden finito. Supongamos que existe $\lambda > 0$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^{\lambda}} < \infty.$$

Sea τ el ínfimo de tales valores de λ. El número λ es llamado *exponente de convergencia de* $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Teorema 1.10. El exponente de convergencia τ de la sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ puede calcularse por

$$\tau = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln |a_n|}.$$

Si f es una función entera de orden ρ y $\{a_k\}$ el conjunto de sus ceros (considerando multiplicidades), entonces $\tau \leq \rho$.

Teorema 1.11. Sea μ el mayor entero para el cual

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{\mu} = \infty,$$

entonces

$$f(z) = z^s \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) \exp\left(\frac{z}{a_k} + \cdots + \frac{z^{\mu}}{\mu a_k^{\mu}}\right),$$

es una función entera tal que el conjunto de ceros de f es exactamente $\{a_k\}$, más $z = 0$ si $s > 0$; además el orden de cada cero es exactamente el número de veces que se repite en la sucesión, y si $s > 0$ la multiplicidad del cero $z = 0$ es s. La función f tiene orden menor o igual a $\mu + 1$ y tipo minimal.

Observe además que $\mu \leq [\![\tau]\!] \leq [\![\rho]\!]$; aquí $[\![x]\!]$ denota la parte entera de x, esto es, el único entero $[\![x]\!]$ tal que $[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1$.

Corolario 1.12. Bajo las condiciones del teorema anterior, si g es una función entera cuyo conjunto de ceros es exactamente $\{a_i\}$ (los a_i no necesariamente distintos, dependiendo de la multiplicidad de los ceros), entonces

$$g(z) = f(z)e^{h(z)},$$

donde h es una función entera. Si además f tiene orden finito ρ, entonces h es un polinomio de orden menor o igual a $[\![\rho]\!]$.

Teorema 1.13 (Lindelöf). Si ρ es un entero positivo, y la función entera de orden ρ es de tipo finito, entonces las sumas

$$S(r) = \sum_{|z_n| \leq r} z_n^{-\rho}$$

son acotadas, donde $\{z_n\}$ es el conjunto de ceros de f, contando sus multiplicidades.

Teorema 1.14. Sea f una función entera trascendente de orden menor que dos, tal que $f(z) \in \mathbb{R}$ si $z \in \mathbb{R}$, sólo con ceros reales y de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

entonces

$$(n+1)a_{n+1}a_{n-1} < na_n^2,$$

para todo $n \geq 1$.

El siguiente teorema corresponde a una conjetura debida a Polya-Wiman, la que fue probada en [14]:

Teorema 1.15. Sea f una función entera de orden menor que dos, tal que $f(z) \in \mathbb{R}$ si $z \in \mathbb{R}$, y que posee tan sólo un número finito de ceros no reales, entonces existe un entero positivo m_0 tal que si $m \geq m_0$, entonces $f^{(m)}$ posee sólo ceros reales.

1.1.3 Otros resultados sobre funciones complejas

Más adelante necesitaremos un estimado para el número de ceros de una función entera en un círculo:

Teorema 1.16. Sea f una función holomorfa en el círculo $|z| \leq er$. Sea $n_f(t)$ el número de ceros de f, distintos del origen, en el círculo $|z| < t$. Si $|f(0)| = 1$, entonces

$$n_f(r) \leq \ln M(er).$$

Teorema 1.17 (Borel-Caratheodory). Sea f analítica en una vecindad de $|z| \leq R$. Entonces para todo $r < R$,

$$\max_{|z|\leq r} |f(z)| \leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z|=R}[\mathrm{Re}(f(z))] + \frac{R+r}{R-r}|f(0)|. \tag{1.4}$$

Prueba. Podemos suponer que $f(0) = 0$; ya que de otro modo podemos hacer $h(z) = f(z) - f(0)$ y trabajar con h. Sea $A = \max_{|x|=R}[\mathrm{Re}f(z)]$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que f no es idénticamente nula, de modo que $A > 0$. Por el principio del módulo máximo aplicado a e^f,

$$e^{\mathrm{Re}f(z)} = |e^{f(z)}| \leq e^{f(z_0)} = e^A$$

donde $\mathrm{Re}f(z_0) = A$, de modo que $\mathrm{Re}f(z) \leq A$ para todo z con $|z| \leq R$. Luego

$$g(z) = \frac{f(z)}{z(2A - f(z))}$$

es una función analítica para $|z| < R$. Escribiendo $f = u + iv$, vemos que si $|z| = R$,

$$|g(z)|^2 = \frac{1}{R^2}\frac{u^2 + v^2}{(2A - u)^2 + v^2} \leq \frac{1}{R}$$

pues $|u| \leq |2A - u|$. Por lo tanto, $|g(z)| \leq 1/R$ para todo $|z| \leq R$ por el principio del módulo máximo. Pero ahora

$$f(z) = \frac{2Azg(z)}{1 + zg(z)}$$

vemos que para $|z| = r$,

$$|f(z)| \leq \frac{2Ar/R}{1 - r/R} = \frac{2Ar}{R - r}.$$

Aplicando nuevamente el principio del módulo máximo, obtenemos (1.4). ∎

Teorema 1.18. Sea X un espacio de Banach complejo. Sea $F : X \to \mathbb{C}$ una función con las siguientes propiedades:

1. Para cada $x, y \in X$, $\mu \to F(x + \mu y)$ es una función entera de μ.

2. Para alguna función monótona creciente G sobre $[0, \infty)$,

$$|F(x)| \leq G(\|x\|)$$

   para todo $x \in X$.

Entonces

$$|F(x) - F(y)| \leq \|x - y\| G(\|x\| + \|y\| + 1) \tag{1.5}$$

para $x, y \in X$ cualesquiera.

Prueba. Fijemos $x, y \in X$ y definamos la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por

$$f(\mu) = F(\frac{1}{2}(x + y) + \mu(y - x)).$$

De (i) f es una función entera. Ahora

$$|F(x) - F(y)| = |f(-\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2})| \leq \sup_{-1/2 \leq t \leq 1/2} |f'(t)|.$$

Por la fórmula integral de Cauchy

$$f'(t) = (2\pi i)^{-1} \int_{|\mu - t| = \|x - y\|^{-1}} \frac{f(\mu)}{(\mu - t)^2}\, d\mu$$

de manera que

$$\sup_{|t|\leq 1/2} |f'(t)| \leq \|x-y\| \sup_{|\mu|\leq 1/2+\|x-y\|^{-1}} |f(\mu)|.$$

Para $|\mu| \leq \frac{1}{2} + \|x-y\|^{-1}$, tenemos que

$$\|\frac{1}{2}(x+y) + \mu(y-x)\| \leq \|x\| + \|y\| + 1$$

de modo que, para tales μ

$$|f(\mu)| \leq G(\|x\| + \|y\| + 1)$$

por (ii). Reuniendo las desigualdades tenemos (1.5). ∎

1.2 Funciones complejas sobre espacios de Banach

Sea X un espacio de Banach, una curva rectificable C dada por $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $f : U \to X$ una función definida sobre un conjunto que contiene a $\alpha[a,b]$. Sea P una partición del intervalo $[a,b]$: $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, definimos la norma de P por $|P| = \max_{1\leq i\leq n} |t_i - t_{i-1}|$ y

$$S(P) = \sum_{j=1}^{n} f(\alpha(t_i))[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})].$$

Si existe el $\lim_{|P|\to 0} S(P)$, entonces definimos la *integral de línea* de f sobre la curva α como este límite, y al cual denotamos por

$$\int_C f(\alpha)d\alpha = \lim_{|P|\to 0} S(P).$$

No desarrollaremos la teoría de integración de funciones complejas en detalle. Sin embargo, hay algunos hechos que debemos resaltar puesto que son generalización natural de cuestiones que ocurren con funciones complejas definidas sobre $\mathbb{C}$.

De interés particular para nosotros es el estudio de las funciones analíticas: Sea G un conjunto abierto en $\mathbb{C}^n$. Una función $f : G \to X$ es *analítica* sobre G si es continua y existen sus derivadas parciales en todo punto de G. Resulta evidente de la definición, que si f es una función analítica vectorial, entonces para cada $g \in X^*$ (espacio de funcionales lineales acotadas), $g \circ f$ es una función analítica compleja.

El teorema fundamental en la teoría de funciones complejas es el *teorema integral de Cauchy*. Sea U un abierto acotado $U \subset \mathbb{C}$, y $B = \partial U$, la frontera de U, tal que

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k,$$

esto es, formado por un número finito de curvas cerradas rectificables de Jordan, i.e. $B_j = \alpha_j(I_j)$, $I_j = \{t : a_j \leq t \leq b_j\}$, los B_i cerrados disjuntos, y las curvas orientadas en sentido antihorario.

Sea f analítica en una vecindad de $U \cup B$. Entendemos por la integral sobre B a

$$\int_B f(\alpha)d\alpha = \sum_{j=1}^{k} \int_{B_j} f(\alpha)d\alpha.$$

El *teorema integral de Cauchy* establece que

$$\int_B f(\alpha)d\alpha = 0.$$

Esto se sigue de su valides para funciones complejas: dada $g \in X^*$, $g \circ f : V \to \mathbb{C}$ donde $V \subset \mathbb{C}$, y entonces

$$g \int_B f(\alpha)d\alpha = \int_B g \circ f(\alpha)d\alpha = 0$$

para todo $g \in X^*$. Por un corolario del teorema de Hahn-Banach ([19], p.77 cor. 2) $\int_B f(\alpha)d\alpha = 0$.

El mismo uso de funcionales lineales, prueba la *fórmula integral de Cauchy*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_B \frac{f(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha$$

donde $z \in U$.

Una generalización natural del teorema integral de Cauchy se obtiene de la siguiente manera: sea $A \subset \mathbb{C}$ compacto, V una vecindad de A, de modo que contiene un número finito de curvas cerradas de Jordan rectificables, orientadas en sentido antihorario. Sea f analítica en $V \setminus A$. Entonces $\int_B f(\alpha)d\alpha$ depende sólo de la función f y el conjunto A, y es independiente de la elección particular de la vecindad U de A. En otras palabras,

$$\int_B f(\alpha)d\alpha = \int_{B'} f(\alpha)d\alpha$$

si B y B' acotan dominios U y U' respectivamente, que contiene el mismo conjunto de singularidades de f (entendiendo por singularidad un punto donde f no está definida y analítica).

Si f es analítica en una vecindad de la clausura del conjunto acotado U, el cual está acotado por una colección finita B de curvas de Jordan cerradas rectificables, orientadas en sentido antihorario, se sigue de la fórmula integral de Cauchy derivando p veces que

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_B \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z)^{p+1}} d\alpha.$$

Tal función admite la *expansión de Taylor*

$$f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!} (z - z_0)^p,$$

para $z_0 \in U$, donde la serie converge absoluta y uniformemente para z en todo disco cerrado $\{z : |z - z_0| \leq r\}$ contenido en U. Recíprocamente, toda serie de potencias

$$f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p (z - z_0)^p$$

define una función analítica en el conjunto abierto $\{z : |z - z_0| < r\}$, donde r está dado por la *fórmula de Hadamard*

$$r^{-1} = \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n}.$$

Si $|z - z_0| > r$, entonces la serie diverge, y converge absoluta y uniformemente en todo conjunto $\{z : |z - z_0| \leq r'\}$ con $r' < r$. Además, la serie está únicamente determinada por f, esto es

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

para $n \geq 0$.

Ahora generalizamos la situación anterior. Una función f analítica en un anillo $r_1 < |z - z_0| < r_2$ posee una única *expansión de Laurent*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

la cual converge absoluta y uniformemente en todo anillo $r_1 + \varepsilon \leq |z - z_0| \leq r_2 - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$. Los coeficientes a_n están dados por las fórmulas

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z_0)^{n+1}} \, d\alpha$$

para $n \in \mathbb{Z}$, donde C es una curva cerrada rectificable de Jordan en el anillo $r_1 < |z - z_0| < r_2$ que separa los círculos $\{z : |z - z_0| = r_1\}$ y $\{z : |z - z_0| = r_2\}$.

Si f es analítica en el anillo $\{z : 0 < |z - z_0| < r\}$ pero no en $\{z : |z - z_0| < r\}$, decimos que z_0 es una *singularidad aislada* de f. La expansión de Laurent de $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, convergente en el anillo $\{z : 0 < |z - z_0| < r\}$, es llamada *expansión de Laurent* de f alrededor de z_0.

1. Si un número infinito de coeficientes a_n con $n < 0$ son no nulos, decimos que z_0 es una *singularidad esencial* de f.

2. Si sólo un número finito de estos coeficientes a_n con $n < 0$ son no nulos, aunque por lo menos uno lo es, decimos que z_0 es un *polo* de f. El entero $m < 0$ tal que $a_n = 0$ para $n \leq m$ pero $a_m \neq 0$ es llamado el *orden* del polo z_0.

3. Si todos los a_n con $n < 0$ son nulos, y hacemos $f(z_0) = a_0$, entonces f se hace analítica en z_0, y llamamos a la singularidad en z_0 *removible*. Si $a_n = 0$ para $n \leq 0$, z_0 es llamado *cero* de f; esto es, z_0 es un cero de f si $f(z_0) = 0$. Si, en este caso, $a_n = 0$ para $n < m$ pero $a_m \neq 0$, m es llamado el *orden* del cero z_0.

Una función $f : \mathbb{C} \to X$ analítica sobre todo el plano complejo es llamada *entera*. El *teorema de Liouville* establece lo siguiente: toda función entera acotada es constante. Para probar esto, consideremos $g : \mathbb{C} \to X$ definida por $g(z) = f(z) - f(0)$; Entonces g es entera y acotada, y

$g(0) = 0$. Para cada $h \in X^*$, $h \circ g$ es una función acotada y entera; luego por el teorema de Liouville para el caso de funciones a valores complejos, $h \circ g$ es constante, $h \circ g = 0$. Como $h \in X^*$ fue arbitraria, $g = 0$, y $f(z) = f(0)$ como se quería.

Otros teoremas, tales como el *principio del módulo máximo*, siguen siendo válidos. A continuación veremos cómo estas herramientas ayudan a realizar el análisis espectral de un operador acotado en un espacio de Banach.

1.3 Teoría espectral

Definición 1.1. Sea X un espacio de Banach, $T \in \mathscr{L}(X)$. Se dice que el número $\lambda \in \mathbb{C}$ es un *autovalor* de T si existe $x \in X$, $x \neq 0$ tal que $Tx = \lambda x$. El vector x es llamado *autovector* asociado a λ. Más generalmente, $x \in H$, $x \neq 0$ es un *autovector generalizado* para λ si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$(T - \lambda I)^m(x) = 0.$$

En cualquier caso, decimos que λ está en el *espectro puntual* de T, definido por

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es inyectivo}\}.$$

El concepto de autovalor no es suficiente para el estudio de los operadores acotados, como en el caso finito dimensional, por lo que debemos introducir el concepto de espectro.

Definición 1.2. Sea $T \in \mathscr{L}(X)$. Definimos el *espectro* de T como el conjunto

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es invertible}\}$$

y el *resolvente* de T como

$$\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T).$$

Observaciones 1.1.

1. Evidentemente, el espectro puntual de un operador está contenido en su espectro.

2. Por el teorema de la aplicación abierta, $\lambda I - T$ posee una inversa acotada si es biyectiva.

Lema 1.19 (Expansión de Neumann). Sea $T \in \mathscr{L}(X)$, $\|T\| < 1$. Entonces $I - T$ es invertible y

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Además

$$\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Prueba. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ es absolutamente convergente en $\mathscr{L}(X)$ pues

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| = \frac{1}{1-\|T\|},$$

de donde es convergente. Es fácil comprobar que

$$(I-T)\left(\sum_{n=0}^{\infty} T^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} T^n\right)(I-T) = I.$$

∎

Definición 1.3. Dado $\lambda \in \rho(T)$, definimos el operador *resolvente* $R_\lambda(T)$ por

$$R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}.$$

Teorema 1.20. El conjunto $\rho(T)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $R_\lambda(T)$ es una función analítica $\mathscr{L}(X)$-valuada. Más precisamente, dado $\lambda_0 \in \rho(T)$, $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}$, entonces $\lambda \in \rho(T)$ y

$$R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R_{\lambda_0}^{n+1}.$$

Además,

$$\|R_\lambda(T)\| \leq \frac{\|R_{\lambda_0}\|}{1 - |\lambda_0 - \lambda| \|R_{\lambda_0}\|}.$$

Prueba. Escribimos

$$\lambda I - T = (\lambda_0 I - T) - (\lambda_0 - \lambda)I = R_{\lambda_0}^{-1} - (\lambda_0 - \lambda)I = R_{\lambda_0}^{-1}[I - (\lambda_0 - \lambda)R_{\lambda_0}],$$

de donde

$$(\lambda I - T)^{-1} = [I - (\lambda_0 - \lambda)R_{\lambda_0}]^{-1} R_{\lambda_0},$$

pues $\|(\lambda_0 - \lambda)R_{\lambda_0}\| < 1$,

$$R_\lambda = \left(\sum_{n=0}^{\infty} [(\lambda_0 - \lambda)R_{\lambda_0}]^n\right) R_{\lambda_0},$$

y por lo tanto

$$R_\lambda - R_{\lambda_0} = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R_{\lambda_0}^{n+1}.$$

El último estimado se sigue fácilmente. ∎

Teorema 1.21. El espectro de un operador $T \in \mathscr{L}(X)$ es un conjunto compacto y no vacío. Además

$$\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|T\|\}. \tag{1.6}$$

Prueba. Para $\lambda \neq 0$

$$(\lambda I - T) = \lambda(I - \lambda^{-1}T),$$

de donde $R_\lambda(T)$ existe si $\|\lambda^{-1}T\| < 1$, esto es, si $\|T\| < |\lambda|$. Esto prueba (1.6). Como $\sigma(T)$ es el complemento de $\rho(T)$, un conjunto abierto, entonces es cerrado. Como además probamos que es acotado, es compacto. Probemos que es no vacío. Por el desarrollo de la serie de Neumann,

$$R_\lambda(T) = \lambda^{-1}[I + \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda^{-1}T)^n]$$

y

$$\|R_\lambda(T)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\|T\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}.$$

Luego, si $|\lambda| \to \infty$, $\|R_\lambda(T)\| \to 0$. Si suponemos que $\sigma(T) = \emptyset$, entonces $R_\lambda(T)$ será una función entera acotada. Por el teorema de Liouville, $R_\lambda(T) = 0$ lo cual es absurdo. Por lo tanto, $\sigma(T)$ es no vacío. ∎

Teorema 1.22. Si $\lambda, \mu \in \rho(T)$ entonces

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda)R_\lambda(T)R_\mu(T).$$

Prueba. En efecto, esto se sigue de

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = R_\lambda(T)(\mu I - T)R_\mu(T) - R_\lambda(T)(\lambda I - T)R_\mu(T).$$ □

Definición 1.4. Dado $T \in \mathscr{L}(X)$, definimos el *radio espectral* de T por

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Lema 1.23. Sean $T \in \mathscr{L}(X)$ y $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ un polinomio de grado n sobre $\mathbb{C}$. Si definimos el operador $P(T) \in \mathscr{L}(X)$ por

$$P(T) = \sum_{j=0}^{n} a_j T^j,$$

entonces

$$\sigma(P(T)) = P(\sigma(T)).$$

Prueba. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, escribimos la factorización de $P - \lambda$

$$P(z) - \lambda = a_n(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_n)$$

de donde

$$P(A) - \lambda I = a_n(A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_n I).$$

De esta última ecuación, notamos que $P(A) - \lambda I$ no es invertible si y sólo si alguno de los $A - \lambda_j I$ no lo es. Pero $P(\lambda_j) = \lambda$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Por lo tanto $\lambda \in \sigma(P(A))$ si y sólo si $\lambda = P(\lambda_j) \in P(\sigma(A))$. ☐

Teorema 1.24. Sea $T \in \mathscr{L}(X)$. Entonces

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Prueba. Sabemos que para $|\lambda| > r(T)$, $\lambda \in \rho(T)$ y

$$R_\lambda(T) = \frac{1}{\lambda}\left[I + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{T^n}{\lambda^n}\right)\right]; \tag{1.7}$$

ésta es una serie de Laurent en $1/\lambda$ en 0. Dado que la serie converge si $|1/\lambda| < r(T)^{-1}$, $r(T)^{-1}$ no ha de ser mayor que el radio de convergencia de la serie, dado por la fórmula de Hadamard, i.e.

$$r(T)^{-1} \leq (\overline{\lim}_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n})^{-1},$$

de donde

$$r(T) \geq \overline{\lim}_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}.$$

Por otro lado, $\sigma(T^n) = [\sigma(T)]^n$ para todo $n \geq 1$ por el lema, de donde $r(T^n) = r(T)^n$. Como $r(T) \leq \|T\|$ para todo $T \in L(X)$, entonces $r(T^n) \leq \|T^n\|$ y

$$r(T) = r(T^n)^{1/n} \leq \|T^n\|^{1/n},$$

para todo n, de donde $r(T) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}$. Por lo tanto existe el $\lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ y es igual a $r(T)$. ☐

Corolario 1.25. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Si A es autoadjunto, entonces $r(A) = \|A\|$.

Prueba. En efecto, si A es autoadjunto, $A = A^*$ entonces de la fórmula $\|A^*A\| = \|A\|^2$, $\|A^2\| = \|A\|^2$ y más generalmente, $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$, de donde

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|A^{2^n}\|^{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} \|A\| = \|A\|.$$ ☐

Teorema 1.26 (Phillips). Sea $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert, entonces $\sigma(T^*) = \{\lambda : \overline{\lambda} \in \sigma(T)\}$ y $R_{\overline{\lambda}}(T^*) = R_\lambda(T)^*$.

Prueba. En efecto, $(\lambda I - T)B = I$ si y sólo si

$$B^*(\overline{\lambda} I - T^*) = B^*(\lambda I - T)^* = [(\lambda I - T)B]^* = I^* = I.$$

de donde $\rho(T^*) = \{\lambda : \overline{\lambda} \in \rho(T)\}$ y $R_{\overline{\lambda}}(T^*) = R_\lambda(T)^*$. ☐

Teorema 1.27. Sea A un operador autoadjunto sobre un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$.

1. El espectro $\sigma(A)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

2. Los autovectores correspondientes a autovalores distintos de A son ortogonales.

Prueba.

1. Veamos que si B es un operador tal que $\|Bx\| \geq r\|x\|$ con $r > 0$, para todo $x \in \mathscr{H}$, entonces B es inyectivo, y posee una inversa acotada sobre su rango Ran$B$, el cual es cerrado. La inyectividad de B es evidente, y si $x = B^{-1}y$, entonces $\|B^{-1}y\| = \|x\| \leq r^{-1}\|y\|$ de donde B es acotado sobre su imagen. Sea $y \in \overline{\text{Ran}B}$, $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ con $y_n \in \text{Ran}B$, $y_n = Bx_n$. Como $\{y_n\}_n$ es una sucesión convergente, es de Cauchy, y por lo tanto de la desigualdad

$$\|x_m - x_n\| \leq r^{-1}\|B(x_m - x_n)\| = r^{-1}\|y_m - y_n\|$$

tenemos que $\{x_n\}_n$ es de Cauchy. Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathscr{H}$ y por la continuidad de B, $y = Bx$ de donde Ran$B$ es cerrado.

Sean $\lambda = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$. De la desigualdad

$$\|(A - (a + ib)x\|^2 = \|(A - a)x\|^2 + b^2\|x\|^2 \geq b^2\|x\|^2$$

tenemos que si $b \neq 0$, entonces $A - (a + ib)$ posee una inversa acotada sobre su rango, el cual es cerrado. Si $\text{Ran}(A - (a + ib)) \neq \mathscr{H}$, entonces podemos tomar $z \in \text{Ran}(A - (a + ib))^{\perp} = \text{Ker}((A - (a + ib))^*) = \text{Ker}((A - (a - ib)))$ y luego $a - ib$ está en el espectro puntual de A, lo cual es imposible por la desigualdad (aplicada a $-b$ en lugar de b). Por lo tanto, si $b \neq 0$, entonces $a + ib \in \rho(A)$.

2. Si $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$ con $\lambda \neq \mu$, entonces

$$(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle - \mu\langle x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle - \langle x, Ay\rangle = 0$$

de donde $\langle x, y\rangle = 0$. □

Ahora extenderemos el teorema espectral para polinomios, lema 1.23 a una clase más grande de funciones sobre operadores.

Definición 1.5. Sea $A \in \mathscr{L}(X)$. Denotamos por $\mathscr{F}(A)$ a la familia de todas las funciones f analíticas en alguna vecindad de $\sigma(A)$. Sea $f \in \mathscr{F}(A)$, y sea U un conjunto abierto cuya frontera C consiste de un número finito de curvas de Jordan rectificables, orientadas en sentido antihorario. Supongamos que $\sigma(A) \subset U$, y que $U \cup C$ está contenido en el dominio de analiticidad de f. Definimos al operador $f(T)$ por la ecuación

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\lambda)R_\lambda(A)d\lambda.$$

Teorema 1.28. Sea $A \in \mathscr{L}(X)$, $f, g \in \mathscr{F}(A)$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces

(i) $\alpha f + \beta g \in \mathscr{F}(A)$ y $\alpha f(A) + \beta g(A) = (\alpha f + \beta g)(A)$;

(ii) $f \cdot g \in \mathscr{F}(A)$ y $f(A) \cdot g(A) = (f \cdot g)(A)$;

(iii) si f se escribe como $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^k$ en una vecindad de $\sigma(A)$, entonces $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k$.

Prueba. La prueba de (i) es directa. Probemos (ii). Sean U_1 y U_2 dos vecindades de $\sigma(T)$ cuyas fronteras B_1 y B_2 consisten de un número finito de curvas de Jordan, orientadas en sentido antihorario, y $U_1 \cup B_2 \subset U_2$. Entonces

$$\begin{aligned}
f(T)g(T) &= -\frac{1}{4\pi^2}\left(\int_{B_1} f(\lambda)R_\lambda(T)d\lambda\right)\left(\int_{B_2} g(\mu)R_\mu(T)d\mu\right)\\
&= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{B_1}\int_{B_2} f(\lambda)g(\mu)R_\lambda(T)R_\mu(T)d\mu\, d\lambda\\
&= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{B_1}\int_{B_2} \frac{f(\lambda)g(\mu)[R_\lambda(T)-R_\mu(T)]}{\mu-\lambda}d\mu\, d\lambda\\
&= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{B_1} f(\lambda)R_\lambda(T)\int_{B_2}\left(\frac{g(\mu)}{\mu-\lambda}d\mu\right)d\lambda + \frac{1}{4\pi^2}\int_{B_2} g(\mu)R_\mu(T)\left(\int_{B_1}\frac{f(\lambda)}{\mu-\lambda}d\lambda\right)d\mu\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{B_1} f(\lambda)g(\lambda)R_\lambda(T)d\lambda = (f\cdot g)(T)
\end{aligned}$$

por el teorema 1.22 y la fórmula integral de Cauchy. Para probar (iii), sea $r > 0$ tal que $r > r(T)$ y $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^k$ converge uniformemente en $C = \{z : |z - z_0| = r\}$, entonces

$$\begin{aligned}
f(T) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\lambda^k\right)R_\lambda(T)d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\int_C \lambda^k R_\lambda(T)d\lambda\\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\int_C \lambda^k\left(\sum_{j=0}^{\infty}T^j/\lambda^{j+1}\right)d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k T^k
\end{aligned}$$

de la ecuación 1.7.

Teorema 1.29 (Teorema de la aplicación espectral). Sea $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Si $f \in \mathscr{F}(A)$, entonces $f(\sigma(A)) = \sigma(f(A))$.

Prueba. Sea $\lambda \in \sigma(A)$, y definimos la función g en el dominio de definición de f, U, por

$$g(\xi) = (f(\lambda) - f(\xi))/(\lambda - \xi), \quad \xi \neq \lambda, \qquad g(\lambda) = f'(\lambda).$$

Entonces $g \in \mathscr{F}(A)$ y por el teorema anterior, (iii), $f(\lambda)I - f(A) = (\lambda I - A)g(A)$. De esto vemos fácilmente que si $f(\lambda)I - f(A)$ posee una inversa acotada T, entonces $g(A)T$ sería una inversa acotada para $\lambda I - A$. Por consiguiente $f(\lambda) \in \sigma(f(A))$. Recíprocamente, sea $\mu \in \sigma(f(A))$, y supongamos que $\mu \notin f(\sigma(A))$, si f es holomorfa en una vecindad V de $\sigma(A)$, entonces $\sigma(A) \subset \{z \in V : f(z) \neq \mu\} = U$, y U es una vecindad de $\sigma(A)$. Definiendo $h(\xi) = (f(\xi) - \mu)^{-1}$ sobre U, tenemos que $h \in \mathscr{F}(A)$. Por el teorema anterior, (iii), $h(A)(f(A) - \mu I) = I$, contradiciendo la hipótesis de que $\mu \in \sigma(f(A))$. ◼

1.4 Operadores positivos y descomposición polar

Definición 1.6. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert. Un operador $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ es *positivo* si $\langle Bx, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathscr{H}$. Escribimos $B \geq 0$ si B es positivo y $B \leq A$ si $A - B \geq 0$.

Todo operador positivo es autoadjunto. En efecto, $\langle Ax, x\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} = \langle x, Ax\rangle$. Por la identidad de polarización ([19], p.63, ej. 4(a)), $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ para cualesquiera $x, y \in \mathscr{H}$.

Para todo $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ se tiene que $A^*A \geq 0$ pues $\langle A^*Ax, x\rangle = \|Ax\|^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathscr{H}$. Análogamente a $|z| = \sqrt{\bar{z}z}$, buscamos definir $|A| = \sqrt{A^*A}$. Para ello debemos definir la raíz cuadrada de un operador positivo.

Lema 1.30 (Raíz cuadrada). Sea $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ positivo. Entonces existe un único operador positivo $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tal que $B^2 = A$. Además, si $C \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ es tal que $CA = AC$, entonces $CB = BC$. El operador B es conocido como la *raíz cuadrada* de A y se denota por $B = \sqrt{A}$.

Prueba. Veamos primero que la serie de potencias para $\sqrt{1-z}$ alrededor del punto 0 converge absolutamente para $|z| \leq 1$. Escribiendo

$$\sqrt{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

siendo $\sqrt{1-z}$ analítica para $|z| < 1$, la serie converge absolutamente para $|z| < 1$. Derivando repetidamente la serie probamos que los c_i son negativos para $i \geq 1$. De ahí

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| = 2 - \sum_{n=0}^{N} c_n = 2 - \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{N} c_n x^n \leq 2 - \lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} = 2$$

para todo N, de donde $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| \leq 2$ y la serie converge absolutamente para $|z| = 1$.

Ahora probamos la existencia de raíz cuadrada para A. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\|A\| \leq 1$. Como $0 \leq I - A \leq I$,

$$\|I - A\| = \sup_{\|\varphi\|=1} |\langle (I-A)\varphi, \varphi\rangle| \leq 1$$

y la observación anterior implica que la serie

$$I + \sum_{j=1}^{\infty} c_j (I-A)^j$$

converge (pues converge absolutamente) a un operador $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Como la convergencia de la serie es absoluta podemos reordenarla convenientemente, probando que $B^2 = A$, y que B conmuta con cualquier operador que conmuta con A. Además $0 \leq \langle \varphi, (I-A)^n \varphi\rangle \leq 1$ para todo $\varphi \in \mathscr{H}$ con $\|\varphi\| = 1$. Por lo tanto

$$\langle \varphi, B\varphi\rangle = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi, (I-A)^n \varphi\rangle \geq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sqrt{1-1} = 0$$

pues $c_n < 0$. Esto prueba que $B \geq 0$.

Veamos la unicidad. Supongamos que $B' \geq 0$ satisface $(B')^2 = A$. Como

$$B'A = (B')^3 = AB'$$

entonces $B'B = BB'$. Por lo tanto

$$(B - B')B(B - B') + (B - B')B'(B - B') = (B^2 - B'^2)(B - B') = 0.$$

Los dos términos en la suma a la izquierda son positivos, de donde deben ser 0, $(B-B')B(B-B') = (B - B')B'(B - B') = 0$. Luego la diferencia de ellos es 0, $(B - B')^3 = 0$. Como $B - B'$ es autoadjunto,

$$\|B - B'\|^4 = \|(B - B')^4\| = 0$$

lo que prueba que $B = B'$. ∎

Definición 1.7. Sea $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Definimos el *valor absoluto* de A como el operador $|A| \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ dado por

$$|A| = \sqrt{A^*A}.$$

Sabemos que para $z \in \mathbb{C}$, podemos escribir $z = u|z|$ con $|u| = 1$. Ahora veamos cuál es análogo de u para operadores.

Definición 1.8. Un operador $U \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ es llamado *isometría* si $\|Ux\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathscr{H}$. U es llamado *isometría parcial* si la restricción $U \restriction (\operatorname{Ker} U)^{\perp}$ es una isometría.

Teorema 1.31 (Descomposición Polar). Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Entonces existe una isometría parcial U tal que

$$A = U|A|.$$

El operador U está únicamente determinado por la condición $\operatorname{Ker} U = \operatorname{Ker} A$. Además, $\operatorname{Ran} U = \overline{\operatorname{Ran} A}$ y

$$|A| = U^*A.$$

Prueba. Definimos $U : \operatorname{Ran}|A| \to \operatorname{Ran} A$ por $U(|A|\psi) = A\psi$. Como

$$\||A|\psi\|^2 = \langle \psi, |A|^2\psi \rangle = \langle \psi, A^*A\psi \rangle = \|A\psi\|^2 \tag{1.8}$$

entonces U está bien definida pues si $|A|\psi = |A|\phi$ entonces $A\psi = A\phi$. Así definida U es isométrica, luego puede extenderse naturalmente a $U : \overline{\operatorname{Ran}|A|} = \overline{\operatorname{Ran} A}$ mediante $Ux = \lim_{n\to\infty} Ux_n$ si $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in \overline{\operatorname{Ran}|A|}$ (por la continuidad uniforme de U, el límite existe y U está bien definida). Definiendo U como cero sobre $(\operatorname{Ran}|A|)^{\perp}$ queda U extendida a $\mathscr{H}$ pues $\mathscr{H} = \overline{\operatorname{Ran}|A|} \oplus (\operatorname{Ran}|A|)^{\perp}$. Como $|A|$ es autoadjunto, $(\operatorname{Ran}|A|)^{\perp} = \operatorname{Ker}|A|$. De (1.8) tenemos que $\operatorname{Ker}|A| = \operatorname{Ker} A$. Por lo tanto, $\operatorname{Ker} U = \operatorname{Ker} A$. ∎

1.5 Operadores compactos

Definición 1.9. Sean X, Y espacios de Banach. Un operador $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ es llamado *compacto* si dado un conjunto acotado $B \subset X$, la imagen $T(B) \subset Y$ es un conjunto *precompacto* ($\overline{T(B)}$ es compacto). Equivalentemente, T es compacto si y sólo si para toda sucesión acotada $\{x_n\} \subset X$, $\{Tx_n\}$ posee una subsucesión convergente en Y.

Ejemplo 1.3. Sea $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Consideremos el operador $T : C[a,b] \to C[a,b]$ definido por

$$(T\varphi)(x) = \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy.$$

Entonces T es un operador compacto sobre $C[a,b]$.

De la desigualdad

$$|(T\varphi)(x)| \leq \left(\sup_{a\leq x,y\leq b} |K(x,y)|\right)\left(\sup_{a\leq y\leq b} |\varphi(y)|\right)$$

y definiendo $\|f\|_\infty = \sup\limits_{a\leq x\leq b} |f(x)|$, tenemos que

$$\|T\varphi\|_\infty \leq \left(\sup_{a\leq x,y\leq b} |K(x,y)|\right)\|\varphi\|_\infty$$

y por lo tanto K es un operador acotado sobre $C[a,b]$.

Sea B un subconjunto acotado de $C[0,1]$, esto es, existe $M > 0$ tal que $B \subset \{\varphi \in C[a,b] : \|\varphi\|_\infty \leq M\}$. Como K es continua sobre el compacto $[a,b] \times [a,b]$, es uniformemente continua, de donde, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - x'| < \delta$ implica $|K(x,y) - K(x',y)| < \varepsilon$ para todo $y \in [0,1]$. Por lo tanto, si $\varphi \in B$,

$$|(K\varphi)(x) - (K\varphi)(x')| \leq \left(\sup_{0\leq y\leq 1} |K(x,y) - K(x',y)|\right)\|\varphi\|_\infty \leq \varepsilon M,$$

lo que prueba que $T(B)$ es un conjunto de funciones equicontinuas. Como $T(B)$ es además uniformemente acotado (acotado por $\|K\|M$), por el teorema de Ascoli ([19], pag. 30, teo. I.28), $T(B)$ es precompacto.

Ejemplo 1.4 (Operadores de rango finito). Supongamos que el rango de T es de dimensión finita. Entonces existe una familia finita $\{y_i\}_{i=1}^N$ en Y que es base de $\mathrm{Ran}(T)$, i.e. para cada x, $Tx = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i(x)y_i$ donde los $\alpha_i(x)$ son escalares. Si x_n es una sucesión acotada en X, entonces los correspondientes $\alpha_i(x_n)$ son acotados siendo T acotada. A través de la extracción sucesiva de subsucesiones, puede extraerse una subsucesión convergente de $\{Tx_n\}$. Por lo tanto T es compacto.

Teorema 1.32. Un operador compacto lleva sucesiones débilmente convergentes en fuertemente convergentes.

Prueba. Sea $\{x_n\} \subset X$ una sucesión débilmente convergente a $x \in X$, $T : X \to Y$ compacto. La sucesión $\{x_n\}$ está acotada por el teorema de acotación uniforme ([19], p. 81, teo. III.9). Sea $y_n = Tx_n$, $y = Tx$. Para toda $f \in Y'$, $T'f \in X'$ y

$$f(y_n) - f(y) = f(Tx_n) - f(Tx) = (T'f)(x_n - x).$$

(T' es el adjunto de Banach de T). Por lo tanto $y_n \rightharpoonup y$ (converge débilmente). Por reducción al absurdo, supongamos que y_n no converge a y fuertemente. Entonces existen $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $\{y_{k_n}\}$ de $\{y_n\}$ tales que

$$\|y_{k_n} - y\| \geq \varepsilon.$$

Como $\{x_{k_n}\}$ es acotada y T compacto, entonces y_{k_n} posee una subsucesión convergente a $z \in Y$. Pero entonces $y_{k_n} \rightharpoonup y$, $y_{k_n} \rightharpoonup z$ y $z \neq y$, absurdo. ∎

Teorema 1.33. Sean X e Y espacios de Banach, $T \in \mathscr{L}(X,Y)$.

(i) Si los operadores $\{T_n\}$son compactos y $T_n \to T$ fuertemente, entonces T es compacto.

(ii) Si $S, T \in \mathscr{L}(X,Y)$ son compactos, entonces $S + T$ es compacto.

(iii) Si $S \in \mathscr{L}(Y,Z)$ con Z espacio de Banach, y si T o S es compacto, entonces ST es compacto.

(iv) Si X e Y son espacios de Hilbert, entonces T es compacto si y sólo si T^* es compacto.

Prueba.

(i) Para todo $x \in X$, $\{T_n x\}_n$ es una sucesión de Cauchy en Y (pues

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\|$$

y $\{T_n\}_n$ es de Cauchy en $\mathscr{L}(X,Y)$); luego existe el $\lim\limits_{n\to\infty} K_n x$.
Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión acotada en X; digamos por una constante $c > 0$. Como T_1 es compacto, existe una subsucesión $\{x_{1n}\}_n$ de $\{x_n\}_n$ tal que $\{T_1 x_{1n}\}_n$converge. Como T_2 es compacto, existe una subsucesión $\{x_{2n}\}_n$ de $\{x_{1n}\}_n$ tal que $\{T_2 x_{2n}\}_n$es convergente. Prosiguiendo de este modo, obtenemos, para cada $j \geq 2$, una subsucesión $\{x_{jn}\}_n$ de $\{x_{j-1,n}\}_n$ tal que $\{T_j x_{jn}\}_n$ converge. Probemos que la sucesión diagonal $\{Tx_{nn}\}_n$ es convergente, lo que probaría que T es compacto. Dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\|T - T_p\| < \varepsilon/(4c)$. Ahora $\{T_p x_{nn}\}_n$ converge ya que $n \geq p$ implica que es ésta subsucesión de la sucesión convergente $\{T_p x_{pn}\}_n$; por lo tanto $\{T_p x_{nn}\}_n$ es de Cauchy, de donde existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n \geq n_0$, $\|T_p x_{nn} - T_p x_{mm}\| < \varepsilon/2$. Luego para $m, n \geq \max\{n_0, p\}$

$$\begin{aligned}
\|Tx_{nn} - Tx_{mm}\| &\leq \|Tx_{nn} - T_p x_{nn}\| + \|T_p x_{nn} - T_p x_{mm}\| + \|T_p x_{mm} - Tx_{mm}\| \\
&\leq 2c\|T_p - T\| + \|T_p x_{nn} - T_p x_{mm}\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,
\end{aligned}$$

lo que prueba que $\{Tx_{nn}\}_n$ es una sucesión de Cauchy, y por lo tanto convergente por la completitud de Y.

(ii) Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión acotada. Como S es compacto, existe una subsucesión $\{x_{k_n}\}_n$ de $\{x_n\}_n$ tal que $\{Sx_{k_n}\}_n$ es convergente. De igual manera, por la compacidad de T, existe una subsucesión $\{x_{k'_n}\}_n$ de $\{x_{k_n}\}_n$ con $\{Tx_{k'_n}\}_n$ convergente. Luego $\{Sx_{k'_n}\}_n$ es convergente y por lo tanto $\{(S+T)x_{k'_n}\}_n$ es convergente.

(iii) Supongamos que T es compacto y S es continua. Dada una sucesión acotada $\{x_n\}_n$ en $\mathscr{H}$, existe una subsucesión $\{x_{k_n}\}_n$ de $\{x_n\}_n$ tal que $\{Tx_{k_n}\}_n$ es convergente; entonces $\{STx_{k_n}\}_n$ es convergente por la continuidad de S.

(iv) Probaremos la segunda afirmación. Supongamos que A sea compacto. Sea $\{x_n\}_n \subset X$ una sucesión acotada, digamos por una constante $K > 0$. Como AA^* es compacto, existe una subsucesión $\{x_{k_n}\}_n$ de $\{x_n\}_n$ tal que $\{AA^*x_{k_n}\}_n$ converge, lo que implica que $\{AA^*x_{k_n}\}_n$ es una sucesión de Cauchy. Entonces

$$\begin{aligned}\|A^*x_{k_n} - A^*x_{k_m}\| &= \langle AA^*(x_{k_n} - x_{k_m}), (x_{k_n} - x_{k_m})\rangle \leq \|AA^*(x_{k_n} - x_{k_m})\|\|x_{k_n} - x_{k_m}\| \\ &\leq 2K\|AA^*(x_{k_n} - x_{k_m})\|,\end{aligned}$$

de donde $\{A^*x_{k_n}\}_n$ es de Cauchy, y por lo tanto, convergente en X. Por lo tanto A^* es compacto. Si A^* es compacto, por lo que acabamos de probar, $A = (A^*)^*$ es compacto. □

Supongamos que $X = \mathscr{L}(\mathscr{H})$ es un espacio de Hilbert. Denotamos por $\mathscr{J}_\infty$ al conjunto de operadores compactos de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. Con estas notaciones, tenemos:

Corolario 1.34. $\mathscr{J}_\infty$ es un $*$-ideal en $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, esto es,

(i) $\mathscr{J}_\infty$ es un espacio vectorial.

(ii) Si $A \in \mathscr{J}_\infty$ y $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, entonces $AB \in \mathscr{J}_\infty$ y $BA \in \mathscr{J}_\infty$.

(iii) Si $A \in \mathscr{J}_\infty$, entonces $A^* \in \mathscr{J}_\infty$.

Además, $\mathscr{J}_\infty$ es cerrado.

A partir de ahora trabajaremos con espacios de Hilbert, en algunos casos separables.

Teorema 1.35. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert separable. Todo operador compacto sobre $\mathscr{H}$ es el límite de una sucesión de operadores de rango finito.

Prueba. Sea $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ compacto. Dada una base ortonormal $\{\varphi_n\}_{j=1}^N$ en $\mathscr{H}$ (N puede ser ∞), definimos, para cada $n \geq 1$,

$$\lambda_n = \sup_{\substack{\psi \in [\varphi_1, \ldots, \varphi_n]^\perp \\ \|\psi\|=1}} \|A\psi\|. \tag{1.9}$$

La sucesión λ es claramente monótona no creciente, de donde converge a algún $\lambda \geq 0$. Por definición de supremo, podemos escoger una sucesión $\psi_n \in [\varphi_1, \dots, \varphi_n]^{\perp}$ con $\|\psi\| = 1$ y $\|A\psi_n\| \geq \lambda/2$. Es claro que $\psi_n \rightharpoonup 0$ (convergencia débil) pues de la desigualdad de Bessel

$$\sum_{i=1}^{N} |\langle \psi_i, y\rangle|^2 \leq \|y\|^2$$

tenemos que $\langle \psi_i, y\rangle \to 0$ cuando $i \to \infty$. Por el teorema 1.32, $A\psi_n \to 0$. Por lo tanto $\lambda = 0$. Por lo tanto

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j, \cdot\rangle A\varphi_j - A \right\| = \lambda_n \to 0, \tag{1.10}$$

esto es $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j, \cdot\rangle A\varphi_j \to T$. ∎

Teorema 1.36 (Teorema de Fredholm, analítico). Sea D un subconjunto abierto conexo de $\mathbb{C}$. Sea $f : D \to \mathscr{L}(\mathscr{H})$ una función analítica operador-valuada tal que $f(z)$ es compacto para cada $z \in D$. Entonces, se cumple una de las siguientes alternativas:

(i) $(I - f(z))^{-1}$ no existe para ningún $z \in D$.

(ii) $(I - f(z))^{-1}$ existe para todo $z \in D \setminus S$ donde S es un conjunto discreto de D (un conjunto sin punto límite). En este caso, $(I - f(z))^{-1}$ es meromorfa en D, analítica en $D \setminus S$, los residuos en los polos son operadores de rango finito, y si $z \in S$ entonces $f(z)\psi = \psi$ posee una solución no nula en $\mathscr{H}$.

Prueba. Dado $z_0 \in D$, por la continuidad de f, podemos escoger $r > 0$ tal que $|z - z_0| < r$ implica $\|f(z) - f(z_0)\| < \frac{1}{2}$. Siendo $f(z_0)$ un operador compacto, existe un operador de rango finito con $\|f(z_0) - F\| < \dfrac{1}{2}$. Luego, si $|z - z_0| < r$, entonces

$$\|f(z) - F\| < 1.$$

Por el lema de la expansión de Neumann, podemos expander en serie geométrica

$$(I - f(z) + F)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (f(z) - F)^k$$

y comprobar que es analítica.

Como F posee rango finito, existen vectores linealmente independientes $\psi_1, \dots, \psi_N$ tales que $F(\varphi) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \alpha_i(\varphi)\psi_i$. Se comprueba que las α_i son funcionales lineales acotadas, de donde por el lema de Riesz, podemos escribir $\alpha_i(\varphi) = \langle \varphi_i, \varphi\rangle$ para algún $\varphi_i \in \mathscr{H}$, y

$$F(\varphi) = \sum_{n=1}^{N} \langle \varphi_n, \varphi\rangle \psi_n$$

para todo $\varphi \in \mathscr{H}$. Definimos $\varphi_n(z) = ((I - f(z) + F)^{-1})^* \varphi_n$ y

$$g(z) = F(I - f(z) + F)^{-1} = \sum_{n=1}^{N} \langle \varphi_n(z), \cdot \rangle \psi_n,$$

de donde

$$(I - f(z)) = (I - g(z))(I - f(z) + F).$$

De esta última ecuación, vemos que $I - f(z)$ es inversible en $B_r(z_0) = \{z : |z - z_0| < r\}$ si y sólo si $I - g(z)$ es inversible, más aún la ecuación $f(z)\varphi = \varphi$ posee solución no nula si y sólo si $f(z)\varphi = \varphi$ posee también solución no nula.

Si $g(z)\varphi = \varphi$, entonces $\varphi = \sum_{n=1}^{N} \beta_n \psi_n$ donde los β_n cumplen

$$\beta_n = \sum_{m=1}^{N} \langle \varphi_n(z), \psi_m \rangle \beta_m. \tag{1.11}$$

Recíprocamente, si la ecuación (1.11) posee una solución $\beta_1, \ldots, \beta_N$, entonces $\varphi = \sum_{n=1}^{N} \beta_n \psi_n$ es solución de la ecuación $g(z)\varphi = \varphi$. La existencia de solución de (1.11) es equivalente a la condición de que el determinante

$$d(z) = \det\{\delta_{nm} - \langle \varphi_n(z), \psi_m \rangle\} = 0.$$

Fácilmente se ve que $d(z)$ es una función analítica en $B_r(z_0)$. De ahí tenemos que o bien $S = \{z \in B_r(z_0) : d(z) = 0\}$ es un conjunto discreto de $B_r(z_0)$ o $S = B_r(z_0)$. Supongamos que $d(z) \neq 0$. Entonces, dado $\psi \in \mathscr{H}$, resolvemos la ecuación $(I - g(z))\varphi = \psi$ haciendo $\varphi = \psi + \sum_{n=1}^{N} \beta_n \psi_n$, donde $\beta_1, \ldots, \beta_N$ son tales que

$$\beta_n = \langle \varphi_n(z), \psi \rangle + \sum_{m=1}^{N} \langle \varphi_n(z), \psi_m \rangle \beta_m. \tag{1.12}$$

Esta última ecuación posee evidentemente solución dado que $d(z) \neq 0$. Por lo tanto $(I - g(z))$ es sobreyectiva, de donde es inversible si y sólo si $z \notin S$.

Probemos por último que $(I - g(z))^{-1}$ es meromorfa, y que posee residuos de rango finito en los polos. Sea z_0 una singularidad de $(I - g(z))^{-1}$ y $\varepsilon > 0$ tal que $(I - g(z))^{-1}$ no posee singularidades en $0 < |z - z_0| < \varepsilon$; esto es $d(z) \neq 0$. Dado $\psi \in \mathscr{H}$ escribimos

$$(I - f(z))^{-1}\psi = (I - f(z) + F)^{-1}(I - g(z))^{-1}\psi = (I - f(z) + F)^{-1} \left(\psi + \sum_{n=1}^{N} \beta_n(z, \psi) \psi_n \right)$$

donde los $\beta_n = \beta_n(z, \psi)$ forman la solución de (1.12). Por la regla de Cramer ([15], teorema 7.10) podemos escribir explícitamente los β_n como $\beta_n = \det \alpha_n(\zeta, \psi)/d(z)$, donde α_n es la matriz obtenida al reemplazar la i-ésima columna por $(\langle\varphi_n,\psi\rangle_{1\leq n\leq N})$. Desarrollando el determinante de esta matriz por la columna m,

$$\beta_n(z,\psi)=\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+m}\langle\varphi_n(z),\psi\rangle\frac{\alpha_{m,n}(z)}{d(z)}=\langle\gamma_n(z),\psi\rangle/d(z)$$

donde $\alpha_{m,n}(z)$ es el menor de la matriz $(\delta_{m,n}-\langle\varphi_n(z),\psi_m\rangle)_{1\leq n,m\leq N}$ obtenido al retirar la fila n y la columna m; $\gamma_n(z)$ holomorfa alrededor de z_0. Por lo tanto

$$(I-f(z))^{-1}\psi=(I-f(z)+F)^{-1}\left(\psi+\sum_{n=1}^{N}\frac{\langle\gamma_n(z),\psi\rangle}{d(z)}\psi_n\right)$$

y $(I-f(z))^{-1}$ es meromorfa. Integrando sobre una circunferencia $C=\{z:|z-z_0|=r\}$ con $0<r<\varepsilon$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}((I-f(z))^{-1},z_0)\psi &= \frac{1}{2\pi i}\int_C(I-f(\zeta)+F)^{-1}\left(\psi+\sum_{n=1}^{N}\frac{\langle\gamma_n(\zeta),\psi\rangle}{d(\zeta)}\psi_n\right)d\zeta\\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{N}\int_C(I-f(\zeta)+F)^{-1}\frac{\langle\gamma_n(\zeta),\psi\rangle}{d(\zeta)}\psi_n d\zeta\end{aligned}$$

y por lo tanto el residuo es de rango finito. □

Corolario 1.37 (Teorema de la Alternativa de Fredholm). Si A es un operador compacto sobre $\mathscr{H}$, entonces o bien $(I-A)^{-1}$ existe o $A\psi=\psi$ posee solución.

Prueba. Basta tomar $f(z)=zA$, $z=1$ y aplicar el teorema anterior. □

Teorema 1.38 (Riesz-Schauder). Sea A un operador compacto sobre $\mathscr{H}$, entonces $\sigma(A)$ es un conjunto discreto cuyo único posible punto de acumulación es el origen. Además, todo $\lambda\in\sigma(A)$, $\lambda\neq 0$ es un autovalor de multiplicidad finita (el correspondiente autoespacio tiene dimensión finita).

Prueba. Sea $f(z)=zA$. Entonces f es una función entera con $f(z)$ compacto para cada z. Sea $D=\{z\in\mathbb{C}: zA\psi=\psi$ posee solución $\psi\neq 0\}$. Por el teorema 1.36, como $D\neq\mathbb{C}$ (pues $0\notin D$) entonces D es un subconjunto discreto de $\mathbb{C}$. Si $1/\lambda\notin D$, entonces

$$(\lambda I-A)^{-1}=\lambda^{-1}(I-\lambda^{-1}A)^{-1}$$

existe. Probemos que el espacio de autovectores de $\lambda\neq 0$ tiene dimensión finita. Equivalentemente, la bola unitaria cerrada en este autoespacio,

$$B_\lambda=\{x\in H:\|x\|\leq 1,\ Ax=\lambda x\}$$

es compacta (teorema de Riesz). Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión en B_λ; como A es compacto y $\|x_n\|\leq 1$, la sucesión $\{Ax_n\}_n$ posee una subsucesión convergente $\{Ax_{k_n}\}_n$, $Ax_{k_n}\to y$. pero entonces existe

$$x=\lim_{n\to\infty}x_{k_n}=\frac{1}{\lambda}\lim_{n\to\infty}Ax_{k_n}=\frac{1}{\lambda}y.$$

Como x_{k_n} es convergente y A un operador acotado, $Ax = y$ y por lo tanto $Ax = \lambda x$. Como además $\|x\| \leq 1$, entonces la bola B_λ es compacta. ∎

Teorema 1.39 (Hilbert-Schmidt). Sea A un operador compacto autoadjunto sobre $\mathscr{H}$. Entonces, existe una base ortonormal $\{\phi_n\}$ de $\mathscr{H}$ tal que $A\phi_n = \lambda_n(A)\phi_n$ y $\lambda_n(A) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Prueba. Para cada autovalor λ_j de A, escogemos una base ortonormal del espacio de autovectores $\{\varphi \in \mathscr{H} : A\varphi = \lambda\varphi\}$ de λ. Como los autovectores correspondientes a autovalores distintos de A son ortogonales entonces la colección de todos los autovectores correspondientes a todos los autovalores, $\{\varphi_n\}$, es un conjunto ortonormal. Sea $M = \overline{\text{span}\{\phi_n\}_n}$. Entonces $AM \subset M$, pues si $x \in M$, existe λ tal que $Ax = \lambda x \in M$; además $AM^\perp \subset M^\perp$ pues si $x \in M^\perp$, para todo $z \in M$, $Az = \lambda z$ para algún λ y $\langle Ax, z\rangle = \langle x, Az\rangle = \langle x, \lambda z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle = 0$. Consideremos la restricción $B = A \restriction M^\perp$ de A a $M^\perp$; $B : M^\perp \to M^\perp$ es autoadjunto y compacto como A. Por el teorema de Riesz-Schauder, todo $\lambda \in \sigma(B) \setminus \{0\}$ es un autovalor de B, y por lo tanto de A. Esto implica que $r(B) = \sup\limits_{\lambda\in\sigma(B)} |\lambda| = 0$, pero entonces $\|B\| = r(B) = 0$, de donde B es el operador nulo sobre $M^\perp$. De aquí se sigue que $M^\perp = \{0\}$ pues si $z \in M^\perp$, entonces $Az = 0 = 0z$ y $z \in M$. Por lo tanto $M = \mathscr{H}$ y $\{\phi_n\}_n$ es una base ortonormal. El hecho que $\lambda_n \to 0$ se sigue del teorema anterior. □

Sea $\{\lambda_n(A)\}_{n=1}^{N(A)}$ una lista de los autovalores de A, un operador compacto, contados según su multiplicidad, ordenados de modo tal que $|\lambda_{n+1}(A)| \leq |\lambda_n(A)|$ y $\arg\lambda_{n+1}(A) \geq \arg\lambda_n(A)$ si $|\lambda_{n+1}(A)| = |\lambda_n(A)|$ donde $\arg\lambda_i \in [0, 2\pi)$.

Teorema 1.40 (Forma canónica de los operadores compactos). Sea A un operador compacto sobre $\mathscr{H}$. Entonces existen conjuntos ortonormales (no necesariamente completos) $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ y $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ y números reales no negativos $\{\mu_n(A)\}_{n=1}^N$ con $\mu_n(A) \to 0$ tales que

$$A = \sum_{n=1}^{N} \mu_n(A)\langle\psi_n, \cdot\rangle\phi_n.$$

Esta suma, que puede ser finita o infinita, converge fuertemente. Los números $\mu_n(A)$ son llamados *valores singulares* de A, y son precisamente los autovalores de $|A|$.

Prueba. Como A es compacto, por el teorema 1.33 A^*A es compacto; es directo además que es autoadjunto y positivo. Por el teorema de Hilbert-Schmidt, existe una base ortonormal de $\mathscr{H}$, $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ tal que $A^*A\varphi_n = \mu_n\varphi_n$. Si consideramos sólo el conjunto de autovectores $\{\varphi_{n'}\}$ correspondientes a autovalores $\mu_n \neq 0$, entonces este conjunto es ortonormal, y A^*A es cero en el subespacio ortogonal a $\{\varphi_{n'}\}$. Ahora $\mu_{n'} > 0$ de donde, definiendo $\lambda_{n'} = \sqrt{\mu_{n'}} > 0$ y $\phi_{n'} = 1/\lambda_{n'} A\varphi_{n'}$, los vectores $\varphi_{n'}$ son ortonormales $(\|A\varphi_{n'}\|^2 = \langle\varphi_{n'}, A^*A\varphi_{n'}\rangle = \mu_{n'} = \lambda_{n'}^2$ de donde

$\|\varphi_{n'}\| = 1$) y

$$A\varphi = \sum_{n'} \alpha_{n'}(\varphi)\phi_{n'}$$

donde

$$\alpha_{n'}(\varphi) = \langle \phi_{n'}, A\varphi\rangle = \langle A^*\phi_{n'}, \varphi\rangle = 1/\lambda_{n'}\langle A^*A\varphi_{n'}, \varphi\rangle = \mu_{n'}/\lambda_{n'}\langle \varphi_{n'}, \varphi\rangle = \lambda_{n'}\langle \varphi_{n'}, \varphi\rangle.$$

El hecho de que los valores singulares de A sean los autovalores de $|A| = \sqrt{A^*A}$ se sigue de la definición de los mismos. □

Observación. Una representación del operador A de la forma

$$A\varphi = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \langle \varphi_n, \varphi\rangle \phi_n$$

donde los $\{\varphi_n\}_n$, $\{\phi_n\}_n$ son conjuntos de vectores ortonormales, es conocida como *representación de Schmidt* de A. En esta representación, los α_n son forzosamente los valores singulares de A; esto se sigue al desarrollar A^*A e identificar los autovalores de este operador.

Puntos aislados del espectro y espectro puntual

Sea $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, y λ_0 un punto singular aislado del resolvente $R_\lambda(A)$. Sea $R > 0$ tal que $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - \lambda_0| < R\}$ no contiene singularidades de $R_\lambda(T)$, y $0 < r < R$. Escribimos la expansión en serie de Laurent para el resolvente

$$R_\lambda(A) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n A_n, \qquad A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C (\lambda - \lambda_0)^{-n-1} R_\lambda(A) d\lambda,$$

donde $C = \{\lambda \in \mathbb{C} : |z - \lambda_0| = r\}$.

Teorema 1.41. Los operadores A_k son operadores lineales acotados, que conmutan entre sí, que satisfacen:

(i) $AA_k = AA_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$

(ii) $A_k A_m = 0$ para todo $k \geq 0$, $m \leq -1$

(iii) $A_n = (-1)^n A_0^{n+1}$ para $n \geq 1$

(iv) $A_{-p-q+1} = A_{-p}A_{-q}$ para $p, q \geq 1$.

Prueba. Para $k \in \mathbb{Z}$,

$$\|A_n\| \leq \frac{1}{2\pi}|2\pi| r^{-n-1} \max_{|\lambda-\lambda_0|=r} \|R_\lambda(A)\|$$

y como $\|R_\lambda(T)\| \leq 1/(|\lambda| - \|T\|)$, $|\lambda| \geq |\lambda_0| - r$

$$\|A_n\| \leq \frac{r^{-n-1}}{|\lambda_0| - \varepsilon}.$$

Del teorema 1.22,

$$A_m A_n = \left(\frac{1}{2\pi i}\right) \int_C \int_C (\lambda - \lambda_0)^{-n-1} (\xi - \lambda_0)^{-n-1} R_\lambda(A) R_\xi(A) d\lambda d\xi$$

conmutan pues $R_\lambda(A)R_\xi(A) = R_\xi(A)R_\lambda(A)$. Esto también prueba (i). Del mismo teorema, reemplazando la serie de Laurent en la ecuación del resolvente $R_\lambda(A) - R_\xi(A) = (\xi - \lambda)R_\lambda(A)R_\xi(A)$,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k A_k - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\xi - \lambda_0)^k A_k = (\xi - \lambda) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k A_m (\lambda - \lambda_0)^k (\xi - \lambda_0)^m,$$

de donde

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \frac{(\lambda - \lambda_0)^k - (\xi - \lambda_0)^k}{(\lambda - \lambda_0) - (\xi - \lambda_0)} = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_k A_m (\lambda - \lambda_0)^k (\xi - \lambda_0)^m$$

Luego el coeficiente de A_n es (del lado izquierdo)

$$(\lambda - \lambda_0)^{n-1} + (\lambda - \lambda_0)^{n-2}(\xi - \lambda_0) + \cdots + (\xi - \lambda_0)^{n-1}, \quad n \geq 1,$$

$$-\{(\lambda - \lambda_0)^n (\xi - \lambda_0)^{-1} + (\lambda - \lambda_0)^{n+1}(\xi - \lambda_0)^{-2} + \cdots + (\lambda - \lambda_0)^{-1}(\xi - \lambda_0)^n\}, \quad n < 0$$

y por lo tanto los términos conteniendo $(\lambda - \lambda_0)^k (\xi - \lambda_0)^m$ con $k \geq 0$, $m \leq -1$, no se encuentran en la suma. Esto prueba (ii).

De lo anterior, tenemos además que

$$R_\lambda^+ = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\lambda - \lambda_0)^n, \qquad R_\lambda^- = \sum_{n=-\infty}^{-1} A_n (\lambda - \lambda_0)^n$$

deben ambos satisfacer la ecuación del resolvente

$$R_\lambda^+ - R_\xi^+ = (\xi - \lambda) R_\lambda^+ R_\xi^+, \qquad R_\lambda^- - R_\xi^- = (\xi - \lambda) R_\lambda^- R_\xi^-.$$

De la primera ecuación, haciendo $\lambda - \lambda_0 = h$, $\xi - \lambda_0 = k$,

$$\sum_{p=1}^{\infty} A_p (h^p - k^p) = (k - h) \left(\sum_{p=0}^{\infty} A_p h^p\right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} A_q k^q\right),$$

de donde

$$- \sum_{p=1}^{\infty} A_p (h^{p-1} + h^{p-2}k + \cdots + k^{p-1}) = \sum_{p,q=0}^{\infty} h^p k^q A_p A_q,$$

y comparando los coeficientes de las series,

$$-A_{p+q+1} = A_p A_q, \text{ para } p, q \geq 0.$$

En particular

$$A_1 = -A_0^2, \quad A_2 = -A_1A_0 = (-1)^2A_0^3, \dots, A_n = (-1)^nA_0^{n+1} \text{ para } n \geq 1$$

lo que prueba (iii). De manera similar, de la ecuación del resolvente para R_λ^-, haciendo $(\lambda-\lambda)^{-1}h$, $(\xi-\lambda_0)^{-1} = k$,

$$\sum_{p=1} A_{-p}(h^{p-1} + h^{p-2}k + \cdots + k^{p-1}) = \sum_{p,q=1}^{\infty} h^{p-1}k^{q-1}A_{-p}A_{-q},$$

de donde

$$A_{-p-q+1} = A_{-p}A_{-q}, \text{ para } p,q \geq 1,$$

probando (iv). ☐

Teorema 1.42. Se cumplen:

(i) $A_n = (A-\lambda_0 I)A_{n+1}$ para $n \geq 0$

(ii) $(A-\lambda_0 I)A_{-n} = A_{-(n+1)} = (A-\lambda_0 I)^n A_{-1}$ para $n \geq 1$

(iii) $(A-\lambda_0 I)A_0 = A_{-1} - I$.

Prueba. En efecto,

$$\begin{aligned} I &= (\lambda I - T)\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k(\lambda-\lambda_0)^k = \{(\lambda-\lambda_0)I + (\lambda_0 - A)\}\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k(\lambda-\lambda_0)^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k(\lambda-\lambda_0)^{k+1} + \sum_{k=-\infty} (\lambda_0 I - A)A_k(\lambda-\lambda_0)^k \end{aligned}$$

de donde

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (A-\lambda_0 I)A_k(\lambda-\lambda_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{k-1}(\lambda-\lambda_0)^k - I$$

y se siguen los resultados. ☐

Teorema 1.43. Si λ_0 es un polo de $R_\lambda(A)$ de orden m, entonces λ_0 es un autovalor de A. Tenemos

$$\operatorname{Ran}(A_{-1}) = \operatorname{Ker}((\lambda_0 I - A)^n), \qquad \operatorname{Ran}(I - A_{-1}) = \operatorname{Ran}((\lambda_0 I - A)^n) \text{ para } n \geq m.$$

En particular

$$\mathscr{H} = \operatorname{Ker}((\lambda_0 I - T)^n) \oplus \operatorname{Ran}((\lambda_0 I - T)^n) \text{ para } n \geq m.$$

Prueba. El operador A_{-1} es lineal y acotado, $A_{-1}^2 = A_{-1}$, de donde es una proyección (no necesariamente ortogonal). Es fácil verificar entonces que

$$\operatorname{Ker}(A_{-1}) = \operatorname{Ran}(I - A_{-1}), \qquad \mathscr{H} = \operatorname{Ker}(A_{-1}) \oplus \operatorname{Ran}(A_{-1}).$$

Sean $X_1 = \mathrm{Ker}(A_{-1}) = \mathrm{Ran}(I - A_{-1})$, $X_2 = \mathrm{Ran}(A_{-1})$, $K_n = \mathrm{Ker}((\lambda_0 I - T)^n)$, $R_n = \mathrm{Ran}((\lambda_0 I - T)^n)$ para $n \geq 1$.

Sea $x \in K_n$, $n \geq 1$. Como $(A - \lambda_0 I)^n A_{n-1} = (A - \lambda_0 I)A_0 = A_{-1} - I$, entonces

$$0 = A_{n-1}(A - \lambda_0 I)^n x = (A - \lambda_0 I)^n A_{n-1} x = (A - \lambda_0 I)A_0 x = A_{-1}x - x,$$

de donde $x = A_{-1}x \in X_2$.

Recíprocamente, sea $x \in X_2$. Luego para algún $y \in \mathscr{H}$, $x = A_{-1}y$ y $x = A_{-1}A_{-1}y = A_{-1}x$, de donde $(A - \lambda_0 I)^n x = A_{-(n+1)}x$ (pues $(A - \lambda_0 I)^n A_{-1} = A_{-(n+1)})$. Como $n \geq m$, entonces $A_{-(n+1)} = 0$, por hipótesis. Por lo tanto $x \in K_n$ para $n \geq m$. Ahora $(A - \lambda 0 I)A_{-m} = A_{-(m+1)} = 0$ y $A_{-m} \neq 0$, de donde λ_0 es un autovalor de A. Notamos que $X_1 = \mathrm{Ker}(A_{-1} = \mathrm{Ran}(I - A_{-1}) \subset R_n$ pues

$$(A - \lambda_0 I)^n A_{n-1} = A_{-1} - I.$$

Afirmamos que si $n \geq m$, entonces $R_n \cap K_n = \{0\}$. En efecto, si $x \in R_n \cap K_n$, $x = (\lambda_0 I - A)^n y$ y $(\lambda_0 I - T)^n x = 0$, entonces de lo probado anteriormente, $y \in K_{2n} = K_n$, de donde $x = 0$. Ahora supongamos que $x \in R_n$ con $n \geq m$. Escribiendo $x = x_1 + x_2$ donde $x_1 \in (I - A_{-1})x \in X_1$, $x_2 \in A_{-1}x \in X_2$, como $X_1 \subset R_n$, entonces $x_2 = x - x_1 \in R_n$. Pero $x_2 \in X_2 = K_n$, de donde $x_2 \in R_n \cap K_n = \{0\}$. Por lo tanto $x_2 = 0$ y $x = x_1 \in X_1$, lo que prueba que $R_n = X_1$ para $n \geq m$. ⊡

Ahora estudiamos el caso donde $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ es compacto. Sabemos que si $\lambda_0 \in \sigma(A) \setminus \{0\}$, entonces λ_0 es un autovalor de A, esto es, $\mathrm{Ker}(\lambda_0 I - A) \neq \{0\}$.

Por el teorema 1.43, la sucesión de subespacios

$$\mathrm{Ker}(\lambda_0 I - A) \subset \mathrm{Ker}((\lambda_0 I - A)^2) \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}((\lambda_0 I - A)^n) \subset \ldots$$

se estabiliza en algún $m \geq 1$. Más precisamente, existe un menor entero $m \geq 1$ tal que

$$\mathrm{Ker}((\lambda_0 I - A)^n) = \mathrm{Ker}((\lambda_0 I - A)^m) = \mathrm{Ran}(\mathrm{A}_{-1}) \text{ si } n \geq m. \tag{1.13}$$

Por el teorema 1.36, A_1 es un operador de rango finito. Además $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{Ker}(\lambda_0 I - A)^k = \mathrm{Ker}(\lambda_0 I - A)^m$. Todo esto le da sentido a la siguiente definición:

Definición 1.10. Sea $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ compacto, $\lambda_0 \in \sigma(A) \setminus \{0\}$. Entonces $m(\lambda_0) = \dim \mathrm{Ker}(\lambda_0 I - A) < \infty$ es la *multiplicidad geométrica* del autovalor λ_0, y $\mu(\lambda_0) = \dim \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{Ker}((\lambda_0 I - A)^k) < \infty$ es la *multiplicidad algebraica* de λ_0; es la dimensión del *autoespacio generalizado o gométrico* asociado a λ.

Resulta evidente de la definición que la multiplicidad geométrica de un autovalor no excede a la multiplicidad algebraica del mismo.

El residuo de la expansión del resolvente, A_{-1}, es de especial interés:

Definición 1.11. Sea $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ compacto, y $\lambda_0 \in \sigma(A) \setminus \{0\}$. Sea $\varepsilon > 0$ es tal que $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\} \cap \sigma(A) = \emptyset$. Para cualquier r con $0 < r < \varepsilon$, definimos el operador

$$P_{\lambda_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu-\lambda_0|=r} (\mu I - A)^{-1} d\mu.$$

De hecho, $P_{\lambda_0} = A_{-1}$ es el residuo en la expansión del resolvente en serie de Laurent. Se cumplen las siguientes propiedades para este operador:

Proposición 1.44. Se cumple que $P_{\lambda_0} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$,

(i) $P_{\lambda_0}^2 = P_{\lambda_0}$, esto es, P_{λ_0} es una proyección (no necesariamente ortogonal) sobre el subespacio generalizado de λ_0:

$$\operatorname{Ran}(P_{\lambda_0}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{Ker}((\lambda_0 I - A)^k).$$

(ii) $AP_{\lambda_0} = P_{\lambda_0} A$.

(iii) Existe un menor entero $m \geq 1$ tal que $\operatorname{Ker}((\lambda_0 I - A)^n) = \operatorname{Ker}((\lambda_0 I - A)^m)$ para $n \geq m$, este entero será llamado *índice* de λ_0; y si λ_0 posee multiplicidad geométrica uno, entonces $m = \mu(\lambda_0)$ (multiplicidad algebraica de λ_0).

(iv) Si $B = A \restriction \operatorname{Ker} P_\lambda$, entonces $\lambda \notin \sigma(B)$.

Prueba. Las afirmaciones (i) y (ii) se siguen de los teoremas 1.41 y 1.43. En la sucesión de subespacios

$$\operatorname{Ker}(\lambda_0 I - A) \subset \operatorname{Ker}((\lambda_0 I - A)^2) \subset \cdots \subset \operatorname{Ker}((\lambda_0 I - A)^n) \subset \ldots$$

si para algún m, $\operatorname{Ker}((\lambda_0 I - A)^m) = \operatorname{Ker}((\lambda_0 I - A)^{m+1})$, entonces para $n \geq m$,

$$\operatorname{Ker}((\lambda_0 I - A)^n) = \operatorname{Ker}((\lambda_0 I - A)^{n+1}).$$

En efecto, si $x \in \operatorname{Ker}((\lambda_0 I - A)^{n+1})$ entonces $(\lambda_0 I - A)^{n+1} x = (\lambda_0 I - A)^{m+1} (\lambda_0 I - A)^{n-m} x = 0$, de donde $(\lambda_0 I - A)^{n-m} x \in \operatorname{Ker}((\lambda_0 I - A)^m) = \operatorname{Ker}((\lambda_0 I - A)^{m+1})$, y $(\lambda_0 I - A)^n x = (\lambda_0 I - A)^m (\lambda_0 I - A)^{n-m} x = 0$, esto es, $x \in \operatorname{Ker}((\lambda_0 I - A)^{n+1})$. Por lo tanto, si m es el menor entero para el cual la sucesión anterior se estabiliza, tenemos una sucesión finita estricta de subespacios

$$\{0\} \subsetneqq \operatorname{Ker}(\lambda_0 I - A) \subsetneqq \operatorname{Ker}((\lambda_0 I - A)^2) \subsetneqq \cdots \subsetneqq \operatorname{Ker}((\lambda_0 I - A)^{m-1}) \subsetneqq \operatorname{Ker}((\lambda_0 I - A)^m) = \operatorname{Ran}(P_{\lambda_0}). \tag{1.14}$$

Esto prueba la primera parte de (iii). Para probar la última afirmación, que $m = \mu(\lambda_0)$, probaremos que si $j \leq m$, entonces $\dim \operatorname{Ker}((\lambda_0 I - A)^j) = j$, lo que será suficiente. Para $j = 1$ esta es la hipótesis, $\dim \operatorname{Ker}(\lambda_0 I - A) = 1$. Procediendo inductivamente, si $\dim \operatorname{Ker}((\lambda_0 I - A)^{j-1}) = j - 1$ y $j \leq m$, podemos escoger una base $\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}$ de $\operatorname{Ker}((\lambda_0 I - A)^{j-1})$. Como

$$\operatorname{Ker}((\lambda_0 I - A)^{j-1}) \subsetneqq \operatorname{Ker}((\lambda_0 I - A)^j),$$

podemos escoger $\varphi_m \in \mathrm{Ker}((\lambda_0 I - A)^j) \setminus \mathrm{Ker}((\lambda_0 I - A)^{j-1})$. Veamos que los vectores $\varphi_1, \ldots, \varphi_j$ forman una base de $\mathrm{Ker}((\lambda_0 I - A)^j)$. De la elección de φ_j, $(\lambda I - A)^{j-1}\varphi_j \neq 0$ y los vectores $\varphi_1, \ldots, \varphi_j$ son l.i. Si $x \in \mathrm{Ker}((\lambda_0 I - A)^j)$, como $(\lambda I - A)^j x = 0$, entonces $(\lambda_0 I - A)^{m-1}x \in \mathrm{Ker}(\lambda_0 I - A)$. Luego $(\lambda_0 I - A)^{m-1}x = \beta\varphi_1$. Del mismo modo, $(\lambda_0 I - A)^{m-1}x = \gamma\varphi_1$, pero en este caso necesariamente $\gamma \neq 0$. Luego

$$(\lambda_0 I - A)^{m-1}\left(x - \frac{\beta}{\gamma}\varphi_j\right) = 0,$$

de donde $x - \frac{\beta}{\gamma}\varphi_j \in \mathrm{Ker}(\lambda I - A)^{m-1}$, y $x - \frac{\beta}{\gamma}\varphi_j = \beta_1\varphi_1 + \cdots + \beta_{j-1}\varphi_{j-1}$, esto es, $x \in \mathrm{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_j\}$. Esto prueba (iii).

Consideremos el operador A_0 de la expansión del resolvente. De los teoremas 1.41, (i) y 1.42, (ii) tenemos que $A_0 A = A A_0$ y

$$A_0(\lambda I - A) = (\lambda I - A)A_0 = I - P_\lambda$$

de donde $\mathrm{Ker}P_\lambda$ es invariante por A_0. Luego

$$A_0(\lambda I - B) = (\lambda I - B)A_0 = I \restriction \mathrm{Ker}P_\lambda$$

de donde $\lambda \notin \sigma(B)$. Esto prueba (iv). □

En cuanto al operador adjunto, tenemos:

Proposición 1.45. Sea $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ compacto y $\lambda_0 \in \sigma(A) \setminus \{0\}$. Entonces $\overline{\lambda_0} \in \sigma(A^*) \setminus \{0\}$ y

(i) $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 I) = \dim \mathrm{Ker}(A^* - \overline{\lambda_0} I)$; esto es, las multiplicidades geométricas de λ_0 como autovalor de A y de $\overline{\lambda_0}$ como autovalor de A^* coinciden.

(ii) Si P_{λ_0} es el operador proyección de λ_0 con respecto al operador A, entonces $P^*_{\lambda_0}$ es el operador proyección de $\overline{\lambda_0}$ con respecto al operador A^*.

Prueba. La afirmación inicial del teorema es conocida (teorema 1.26).

(i) Sean $\{v_i\}_{i=1}^n$ y $\{w_i\}_{i=1}^m$ bases ortonormales de $\mathrm{Ker}(A - \lambda_0 I)$ y $\mathrm{Ker}(A^* - \lambda_0 I)$ respectivamente; debemos probar que $n = m$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $n < m$. Definimos el operador $S \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ por

$$Sx = Ax - \sum_{i=1}^{n}\langle v_i, x\rangle w_i.$$

El operador S es evidentemente compacto. Probaremos que $\lambda_0 \notin \sigma_p(S)$. Sea $x \in \mathscr{H}$ tal que $(S - \lambda_0 I)x = 0$, entonces

$$(A - \lambda_0 I)x = \sum_{i=1}^{n}\langle v_i, x\rangle w_i.$$

Luego

$$\langle v_j, x\rangle = \langle w_j, \sum_{i=1}^{n}\langle v_i, x\rangle w_i\rangle = \langle w_j, (A-\lambda_0 I)x\rangle = \langle (A^* - \overline{\lambda_0})w_j, x\rangle = 0$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Entonces $x \in \operatorname{Ker}(A-\lambda_0 I)^{\perp}$, de donde $x = 0$.

Como $\operatorname{Ker}(S-\lambda_0 I) = \{0\}$, entonces $\operatorname{Ran}(S-\lambda_0 I) = \mathscr{H}$ por el corolario 1.37. Sea $z \in \mathscr{H}$ tal que $(S-\lambda_0 I)z = w_{n+1}$, entonces

$$\begin{aligned}\|w_{n+1}\|^2 &= \langle w_{n+1}, (S-\lambda_0 I)z\rangle = \langle w_{n+1}(A-\lambda_0 I)z - \sum_{i=1}^{n}\langle v_i, z\rangle w_i\rangle \\ &= \langle w_{n+1}, (A-\lambda_0 I)z\rangle = \langle (A^* - \overline{\lambda_0} I)w_{n+1}, z\rangle = 0,\end{aligned}$$

lo cual es absurdo pues $\|w_{n+1}\| = 1$ por hipótesis. Suponer que $n > m$ lleva análogamente a otra contradicción (pues $A - \lambda_0 I = (A^* - \overline{\lambda_0} I)^*$).

(ii) Considerando la expansión del resolvente $R_\lambda(A) = \sum_{n=-\infty} (\lambda-\lambda_0)^n A_n$ y el teorema 1.26, tenemos que

$$R_{\overline{\lambda}}(A^*) = R_\lambda(A)^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\overline{\lambda} - \overline{\lambda_0})^n A_n^*,$$

y $R_\lambda(A^*) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda - \overline{\lambda_0})^n A_n^*$, de donde el residuo en la expansión, la proyección $Q_{\overline{\lambda_0}}$ sobre el autoespacio generalizado de $\overline{\lambda_0}$ con respecto a A^*, es

$$Q_{\overline{\lambda_0}} = A_{-1}^* = P_{\lambda_0}^*.$$

□

El siguiente teorema proviene de [13], y es válido bajo condiciones más débiles.

Teorema 1.46. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert. Sea λ_0 un autovalor del operador compacto A con índice p. Entonces la multiplicidad algebraica del autovalor λ_0 del operador A es igual a la multiplicidad algebraica del autovalor $\overline{\lambda_0}$ con respecto al operador adjunto A^*.

Sea n la multiplicidad algebraica de λ y m la multiplicidad geométrica. Entonces existe una base $\{e_{j,k}\}$, $k = 1, 2, \dots, n_i$, $j = 1, 2, \dots, m$ de $\bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{Ker}((\lambda_0 I - A)^k)$ tal que

$$(A-\lambda_0 I)e_{j,1} = 0, \qquad (A-\lambda_0 I)e_{j,k} = e_{j,k-1} \text{ para } k = 2, \dots, n_j \tag{1.15}$$

y

$$\max\{n_i : j = 1, 2, \dots, m\} = p, \qquad \sum_{j=1}^{m} n_j = n.$$

El autoespacio generalizado $\bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{Ker}((\overline{\lambda_0} I - A^*)^k)$ del operador dual posee una base correspondiente $\{u_{j,k}\}$ tal que

$$(A^* - \overline{\lambda_0} I)u_{j,1} = 0, \qquad (A^* - \overline{\lambda_0} I)u_{j,k} = u_{j,k-1} \text{ para } k = 2, \dots, n_j, \tag{1.16}$$

y además pueden escogerse las bases de modo que se tenga

$$\langle u_{l,n_i-h+1}, e_{j,k}\rangle = \delta_{i,l}\delta_{k,h} \tag{1.17}$$

y

$$P_{\lambda_0}x = \sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_j}\langle u_{j,n_j-k+1}, x\rangle v_{i,k} \tag{1.18}$$

Prueba. Por la proposición anterior, (i),

$$\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^k = \dim \operatorname{Ker}(A^*-\overline{\lambda} I)^k$$

para todo $k \geq 1$; tomando k lo suficientemente tenemos que ambas dimensiones son iguales a n, lo que da la igualdad de las multiplicidades algebraicas.

Consideremos los subespacios

$$N_i = \operatorname{Ker}((A-\lambda_0 I)^i), i \geq 1;$$

entonces $N_p = \bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{Ker}((A-\lambda_0 I)^k)$ es el autoespacio generalizado para λ_0. Si $p > 1$, entonces N_{p-1} es un subespacio propio de N_p. Siendo así, podemos hallar un subespacio complementario M_p de N_{p-1} de modo que $N_p = N_{p-1} \oplus M_p$. Definiendo $N_0 = \{0\}$; afirmamos que para $j = 1, \ldots, n$, se da la descomposición

$$N_j = N_{j-1} \oplus M_j \oplus (A-\lambda_0 I)M_{j+1} \oplus \cdots \oplus (A-\lambda_0 I)^{p-j}M_p \tag{1.19}$$

para subespacios M_j de N_j convenientes. Esto ya fue probado para $j = p$; probaremos que si (1.19) se cumple para j, entonces se cumple para $j-1$.

Dado un subespacio V de N_j, se tiene que $(A-\lambda_0 I)V \subset (A-\lambda_0 I)N_j \subset N_{j-1}$; luego N_{j-2}, $(A-\lambda_0 I)M_j$, ..., $(A-\lambda_0 I)^{p-j+1}M_p$ son subespacios de N_{j-1}. Veamos que la suma $N_{j-2} + (A-\lambda_0 I)M_j + \cdots + (A-\lambda_0 I)^{p-j+1}M_p$ es directa: supongamos que

$$x_0 + \sum_{k=j}(A-\lambda_0 I)x_k = 0$$

con $x_0 \in N_{j-2}$, $x_k \in (A-\lambda_0 I)^{k-j}M_k$, entonces $y = \sum_{k=j}^{p} x_k \in M_j \oplus (A-\lambda_0 I)M_{j+1} \oplus \cdots \oplus (A-\lambda_0 I)^{p-j}M_p$ y además $y = -x_0 \in N_{j-1}$, de donde $y = 0$ por (1.19) y luego $x_k = 0$, $k = j, \ldots, p$, $x_0 = 0$. Por lo tanto escribimos

$$N_{j-2} \oplus (A-\lambda_0 I)M_j \oplus \cdots \oplus (A-\lambda_0 I)^{p-j+1}M_p \subset N_{j-1},$$

luego hallamos un subespacio complementario M_{j-1} (que puede ser trivial) de modo que (1.19) se cumpla para $j-1$.

Al mismo tiempo que probamos lo anterior, probamos que $\dim((A-\lambda_0 I)^{k-j+1}M_k) = \dim((A-\lambda_0 I)^{k-j}M_k)$; en efecto, $(A-\lambda_0 I)x_k = 0$ con $x_k \in (A-\lambda_0 I)^{k-j}M_k$ implica que $x_k = 0$ (es decir, la transformación $A-\lambda_0 I$ restringida a M_k es inyectiva).

De (1.19) obtenemos la descomposición

$$N_p = M_1 \oplus M_2 \oplus (A-\lambda_0 I)M_2 \oplus \cdots \oplus M_p \oplus (A-\lambda_0 I)M_p \oplus \cdots \oplus (A-\lambda_0 I)^{p-j}M_p.$$

Escogemos elementos básicos $v_{j,p}$, $j = 1,\ldots,m_p$ para M_p; definiendo

$$v_{j,p-k} = (A-\lambda_0 I)^k v_{j,p}, \text{ para } j = 1,2,\ldots,m_p, \quad k = 1,2,\ldots,p-1$$

obtenemos elementos básicos para $(A-\lambda_0 I)^k M_p$. De manera similar, esocgemos una base $v_{j,p-1}$, $j = m_p+1,\ldots,m_p+m_{p-1}$ para M_{p-1} y obtenemos una base para $(A-\lambda_0 I)^k M_{p-1}$ definiendo los elementos

$$v_{j,p-1-k} = (A-\lambda_0 I)^k v_{j,p-1}.$$

Hacemos $n_i = p$ para $j = 1,\ldots,m_p$, $n_j = p-1$ para $j = m_p+1,\ldots,m_p+m_{p-1}$ y así sucesivamente; y definimos $m = m_1+\cdots+m_p$. Así obtenemos la basc para N_p que satisface (1.15).

La proyección sobre el autoespacio generalizado de λ_0 está dada por $P_{\lambda_0}x = \sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_j} f_{j,k}(x)v_{i,k}$. para cada x, donde los $f_{j,k}(x)$ son escalares unívocamente determinados por x. Se verifica entonces que $f_{j,k}$ es una funcional lineal acotada, de donde por el teorema de Riesz, $f(x) = \langle u_{j,k}, x\rangle$ para $u_{j,k} \in \mathscr{H}$ de manera única; luego

$$P_{\lambda_0}x = \sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_j}\langle u_{j,k}, x\rangle v_{i,k}. \tag{1.20}$$

Como $P_{\lambda_0}v_{l,h} = v_{l,h}$, entonces $v_{l,h} = \sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_j}\langle u_{j,k}, v_{l,h}\rangle v_{j,k}$, de donde por la unicidad de la representación de $v_{l,h}$ se tiene que

$$\langle u_{j,k}, v_{l,h}\rangle = \delta_{l,j}\delta_{h,k}.$$

Por la proposición anterior, (ii), de la representación (1.20) se deriva rápidamente que el proyector dual posee la representación

$$P_{\lambda_0}^* w = \sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_j}\langle v_{i,k}, w\rangle u_{j,k}.$$

Como las multiplicidades algebraicas de λ_0 para A y de $\overline{\lambda_0}$ para A^* son iguales, entonces los $u_{j,k}$ forman una base de $\bigcup_{k=1}^{\infty}\operatorname{Ker}((A^*-\overline{\lambda}I)^k)$ (son en número igual a los $v_{j,k}$ y generan el subespacio).

Como

$$\langle (A^*-\overline{\lambda_0}I)u_{l,h}, v_{j,k}\rangle = \langle u_{l,h}, (A-\lambda_0 I)v_{j,k}\rangle = \langle u_{l,h}, v_{j,k-1}\rangle = \delta_{l,j}\delta_{h,k-1},$$

entonces

$$(A^* - \overline{\lambda_0}I)u_{l,h} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_j}\langle v_{j,k}, (A^* - \overline{\lambda_0}I)u_{l,h}\rangle u_{j,k} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_j}\delta_{l,j}\delta_{h,k-1}u_{j,k},$$

suma de donde sólo puede sobrevivir el término $j = l$, $k = h + 1$ (si $h \neq n_j$), obteniendo

$$(A^* - \overline{\lambda}I)u_{l,h} = u_{l,h+1} \text{ para } h = 1, \ldots, n_i - 1, \quad \text{y } (A^* - \overline{\lambda}I)u_{l,n_j} = 0.$$

Haciendo $w_{j,k} = u_{j,n_j-k+1}$ obtenemos (1.16), (1.17) y (1.18). ◻

Necesitaremos más adelante de un refinamiento del teorema espectral 1.29, para el espectro puntual. Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.47. Sea $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, y $f \in \mathscr{F}(A)$.

(i) Si $\varphi \in \mathscr{H}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ son tales que $A\varphi = \lambda\varphi$, entonces $f(A)\varphi = f(\lambda)\varphi$.

(ii) Si f es una función no constante, entonces $f(\sigma_p(A)) = \sigma_p(f(A))$.

(iii) Si $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ es compacto y $f(A)$ es compacto, y si denotamos por $\mu(\lambda; A)$ a la multiplicidad algebraica de λ como autovalor de A, entonces para $\lambda \in \sigma_p(f(A))$

$$\mu(\lambda; f(A)) = \sum_{z \in f^{-1}(\lambda) \cap \sigma_p(A)} \mu(z; A). \tag{1.21}$$

Prueba. Si $A\varphi = \lambda\varphi$, entonces $\lambda \in \sigma(A)$. Definimos g en una vecindad de $\sigma(A)$ como $g(z) = (f(z) - f(\lambda))/(z - \lambda)$ para $z \neq \lambda$ y $g(\lambda) = f'(\lambda)$; evidentemente $g \in \mathscr{F}(A)$ y $f(z) - f(\lambda) = g(z)(z - \lambda)$ de donde por el teorema 1.28,

$$f(A) - f(\lambda)I = g(A)(A - \lambda I).$$

Como $(A - \lambda I)\varphi = 0$, entonces $(f(A) - f(\lambda)I)\varphi = 0$, lo que prueba (i). De esto es evidente que si $\lambda \in \sigma_p(T)$, entonces $f(\lambda) \in \sigma_p(f(A))$; probar (ii) se reduce a probar la otra inclusión. Sea $\mu \in \sigma_p(f(A))$, por el teorema espectral 1.29, la función definida por $g(z) = f(z) - \mu$, $g \in \mathscr{F}(A)$, posee por lo menos un cero en $\sigma(A)$. De hecho, existen a lo más un número finito de ceros de g en $\sigma(A)$ (por ser compacto). Escribimos entonces

$$f(z) - \mu = h(z)(z - \lambda_1)^{m_1}(z - \lambda_2)^{m_2} \cdots (z - \lambda_n)^{m_n}$$

donde los λ_i son los ceros distintos de g, contados de acuerdo a sus multiplicidades, y h no tiene ceros en $\sigma(A)$. Podemos hallar una vecindad U de $\sigma(A)$ donde h no posee ceros; definiendo $g(z) = (h(z))^{-1}$ sobre U, $g \in \mathscr{F}(A)$ y $g(z)f(z) = 1$ en una vecindad de U, de donde $g(A)h(A) = I$ por el teorema 1.28, probando que $h(A)$ es invertible. Además (teorema 1.28)

$$f(A) - \mu I = h(A)(A - \lambda_1 I)^{m_1}(A - \lambda_2 I)^{m_2} \cdots (A - \lambda_n I)^{m_n} \tag{1.22}$$

como $f(A)-\mu I$ no es inyectivo y $h(A)$ invertible, entonces algún $A-\lambda_i I$ es inyectivo y $\lambda_i \in \sigma_p(A)$, de donde $\mu = f(\lambda_i) \in f(\sigma_p(A))$. Esto prueba (ii).

Probemos (iii). En el procedimiento anterior, podemos suponer que $\lambda_i \in \sigma_p(A)$ para todo $i = 1, \ldots, n$. De otro modo, podemos agrupar los operadores $A - \lambda_i I$ con $\lambda_i \notin \sigma_p(A)$ junto con $h(A)$ obteniendo un nuevo operador inyectivo $h(A)$. Siendo así

$$f^{-1}(\mu) \cap \sigma_p(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}.$$

Definimos los subespacios (subespacios de vectores generalizados)

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{Ker}((f(A) - \mu I)^k), \quad E_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{Ker}((A - \lambda_i I)^k), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Veamos que si $i \neq j$, entonces $E_i \cap E_j = \{0\}$. En efecto, dado $\psi \in E_i \cap E_j$, existen enteros $k_i, k_j \geq 1$ tales que

$$(A - \lambda_i)^{k_i}\psi = 0 = (A - \lambda_j)^{k_j}\psi.$$

Como el m.c.d. de los polinomios $(z-\lambda_i)^{k_i}$ y $(z-\lambda_j)^{k_j}$ es 1, existen polinomios $r_i(z)$, $r_j(z)$ con

$$1 = r_i(z)(z-\lambda_i)^{k_i} + r_i(z)(z-\lambda_j)^{k_j}$$

(considerando las funciones polinomiales asociadas a los polinomios $r_i(z)$, $r_j(z)$) y luego $r_i \in \mathscr{F}(A)$, $r_j \in \mathscr{F}(A)$ y

$$\psi = r_i(A)(A-\lambda_i I)^{k_i}\psi + r_j(A)(A-\lambda_j I)^{k_j}\psi = 0 + 0 = 0$$

lo que prueba la afirmación. De (a), tenemos que

$$(A - \lambda_i I)\varphi = 0 \text{ implica } (f(A) - \mu I)\varphi = 0. \tag{1.23}$$

Luego para $\varphi \in E_i$, $(A-\lambda_i I)^k\varphi = 0$ y $(A-\lambda_i I)(A-\lambda_i I)^{k-1}\varphi = 0$ implica por (1.23) que

$$(A-\lambda_i I)^{k-1}(f(A)-\mu I) = (f(A)-\mu I)(A-\lambda_i I)^{k-1}\varphi = 0.$$

La aplicación repetida de (1.23) nos da $(f(A)-\mu I)^k\varphi = 0$, de donde $\varphi \in E$. Esto prueba que $E_i \subset E$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y

$$E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n \subset E.$$

Probaremos que se da la igualdad en la expresión anterior. Sea $\psi \in E$, $(f(A)-\mu I)^k\psi = 0$ con $k \geq 1$. Haciendo $k_i = km_i$, $i = 1, \ldots, n$ tenemos por (1.22)

$$0 = (f(A)-\mu I)^k = h^k(A)(A-\lambda_1 I)^{k_1}\cdots(A-\lambda_n I)^{k_n}\psi = 0$$

y de la inyectividad de $h(A)$,

$$(A-\lambda_1 I)^{k_1}\cdots(A-\lambda_n I)^{k_n}\psi = 0 \tag{1.24}$$

Los polinomios $s_1(z), \ldots, s_n(z)$ definidos por $s_i(z) = \prod_{j \neq i}(z - \lambda_j)^{k_j}$, $i = 1, \ldots, n$ tienen m.c.d. igual a 1, de donde existen polinomios $r_1(z), \ldots, r_s(z)$ con

$$1 = r_1(z)s_1(z) + \cdots + r_n(z)s_n(z).$$

De (1.24),

$$(A - \lambda_i I)^{k_i}(r_i s_i)(A)\psi = r_i(A)(A - \lambda_i I)^{k_i} s_i(A)\psi = 0$$

de donde $(r_i s_i)(A)\psi E_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$ y por lo tanto

$$\psi = (r_1 s_1)(A)\psi + \cdots + (r_n s_n)(A)\psi \in E_1 \oplus \cdots \oplus E_n,$$

lo que prueba la igualdad $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$. Calculando la dimensión de este subespacio de $\mathscr{H}$ obtenemos (1.21). ∎

1.5.1 Traza y operadores de Hilbert-Schmidt

Teorema 1.48. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert separable, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal. Entonces para todo $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ positivo, definimos

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n, A\varphi_n \rangle.$$

El número $\mathrm{Tr}(A)$ es llamado *traza* de A, y es independiente de la base elegida. Además

(i) $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$

(ii) $\mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{Tr}(A)$, para todo $\lambda \geq 0$

(iii) $\mathrm{Tr}(U^{-1}AU) = \mathrm{Tr}(A)$ para todo operador unitario U

(iv) Si $0 \leq A \leq B$, entonces $\mathrm{Tr}(A) \leq \mathrm{Tr}(B)$.

Prueba. Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal, escribimos $\mathrm{Tr}_{\varphi}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n, A\varphi_n \rangle$ para enfatizar dependencia de la base. Si $\{\psi_m\}_{m=1}^{\infty}$ es otra base ortonormal, entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_{\varphi}(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n, A\varphi_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \|A^{1/2}\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\langle \psi_m, A^{1/2}\varphi_n \rangle|^2 \right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle A^{1/2}\psi_m, \varphi_n \rangle|^2 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \|A^{1/2}\psi_m\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \psi_m, A\psi_m \rangle = \mathrm{Tr}_{\psi}(A)
\end{aligned}$$

Si U es un operador unitario y $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ una base ortonormal, entonces $\{U\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una base ortonormal, $U^* = U^{-1}$ y

$$\mathrm{Tr}(U^{-1}AU) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_m, U^{-1}AU\varphi_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_m, U^*AU\varphi_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle U\varphi_m, AU\varphi_m \rangle = \mathrm{Tr}(A),$$

lo que prueba (c). Las demás propiedades son evidentes. ∎

Definición 1.12. Un operador $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ es de la *clase traza* si y sólo si $\mathrm{tr}|A| < \infty$. La familia de tales operadores se denota por $\mathscr{I}_1$.

Lema 1.49. Todo operador $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ puede escribirse como combinación lineal de cuatro operadores unitarios.

Prueba. En efecto, siempre podemos escribir B como

$$B = \frac{1}{2}[B + B^*] - \frac{1}{2}[i(B - B^*)]$$

combinación lineal de dos operadores autoadjuntos. Si A es autoadjunto, $\|A\| > 1$ dividimos A entre su norma a modo de obtener $\|A\| \leq 1$. Luego $I \geq A^2$ y

$$A = \frac{1}{2}(A + i\sqrt{I - A^2}) + \frac{1}{2}(A - i\sqrt{I - A^2})$$

donde los operadores $A \pm i\sqrt{I - A^2}$ son unitarios. Para $A + \sqrt{I - A^2}$,

$$\begin{aligned}(A + i\sqrt{I - A^2})^*(A + i\sqrt{I - A^2}) &= (A - i\sqrt{I - A^2})(A + i\sqrt{I - A^2}) \\ &= A^2 + iA\sqrt{I - A^2} - i\sqrt{I - A^2}A + (I - A^2) \\ &= I + i(A\sqrt{I - A^2} - \sqrt{I - A^2}A) = I\end{aligned}$$

por el lema 1.30. ◻

Teorema 1.50. $\mathscr{I}_1$ es un $*$-ideal en $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, esto es,

(i) $\mathscr{I}_1$ es un espacio vectorial.

(ii) Si $A \in \mathscr{I}_1$ y $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, entonces $AB \in \mathscr{I}_1$ y $BA \in \mathscr{I}_1$.

(iii) Si $A \in \mathscr{I}_1$, entonces $A^* \in \mathscr{I}_1$.

Prueba. Si $A \in \mathscr{I}_1$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $|\lambda A| = |\lambda||A|$ de donde $\mathrm{Tr}(|\lambda A|) = |\lambda|\mathrm{Tr}(|A|) < \infty$ si $A \in \mathscr{I}_1$. Sean $A, B \in \mathscr{I}_1$. Sean U, V, W isometrías parciales provenientes de la descomposición polar de los operadores $A + B$, A y B, respectivamente (teorema 1.31):

$$A + B = U|A + B|, \qquad A = V|A|, \qquad B = U|B|.$$

Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal para $\mathscr{H}$, entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}|A + B| &= \sum_{n=1}^{N}\langle\varphi_n, |A + B|\varphi_n\rangle = \sum_{n=1}^{N}\langle\varphi_n, U^*(A + B)\varphi_n\rangle = \sum_{n=1}^{N}\langle\varphi_n, U^*(V|A| + W|B|)\varphi_n\rangle \\ &\leq \sum_{n=1}^{N}\langle\varphi_n, U^*V|A|\varphi_n\rangle + \sum_{n=1}^{N}\langle\varphi_n, U^*W|B|\varphi_n\rangle \\ &\leq \sum_{n=1}^{N}\langle|\varphi_n, U^*V|A|\varphi_n\rangle| + \sum_{n=1}^{N}\langle|\varphi_n, U^*W|B|\varphi_n\rangle|.\end{aligned} \tag{1.25}$$

Sea $\{\psi_m\}_{m=1}^{\infty}$ una base ortonormal para $\mathscr{H} = \text{Ker}V \oplus (\text{Ker}V)^{\perp}$, formada uniendo bases de Ker$V$ y $(\text{Ker}V)^{\perp}$, tenemos que $\{V\psi_m\}_{m=1}^{\infty}$ es un conjunto ortogonal (no necesariamente completo) de $\mathscr{H}$, de donde $\text{Tr}(V|A|V^*) \leq \text{Tr}(|A|)$, y razonando de manera análoga para U,

$$\text{Tr}(U^*(V|A|V^*)U) \leq \text{Tr}(V|A|V^*) \leq \text{Tr}|A|.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \langle |\varphi_n, U^*V|A|\varphi_n\rangle| &= \sum_{n=1}^{N} \langle |A|^{1/2}V^*U\varphi_n, |A|^{1/2}\varphi_n\rangle \leq \sum_{n=1}^{N} \| |A|^{1/2}V^*U\varphi_n\| \| |A|^{1/2}\varphi_n\| \\
&= \left(\sum_{n=1}^{N} \| |A|^{1/2}V^*U\varphi_n\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N} \| |A|^{1/2}\varphi_n\|\right)^{1/2} \\
&= (\text{Tr}(U^*(V|A|V^*)U))^{1/2}(\text{Tr}|A|)^{1/2} \leq \text{Tr}|A|
\end{aligned}$$

por lo anterior, lo que acota el primer sumando en la última desigualdad de 1.25. Acotando de manera similar el otro sumando, tenemos

$$\text{Tr}|A + B| \leq \text{Tr}|A| + \text{Tr}|B| < \infty, \tag{1.26}$$

y por lo tanto $A + B \in \mathscr{I}_1$. Esto prueba (i).

Por el lema 1.49, basta probar (ii) cuando $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ es unitario. Sea $A \in \mathscr{I}_1$. Como $|BA|^2 = (BA)^*(BA) = A^*(B^*B)A = A^*A = |A|^2$ de donde $|BA| = |A|$, y $BA \in \mathscr{I}_1$. Además $|AB|^2 = (AB)^*AB = B^*A^*AB = B^{-1}|A|^2B = (B^{-1}|A|B)^2$ de donde $|AB| = B^{-1}|A|B$, y por el teorema 1.48 (iii), $AB \in \mathscr{I}_1$.

De las descomposiciónes polares de $A \in \mathscr{I}_1$ y A^*

$$A = U|A|, \qquad A^* = V|A^*|,$$

tenemos que $|A^*| = V|A|U^*$ de donde por (b), $|A^*| \in \mathscr{I}_1$ y $A^* = V|A^*| \in \mathscr{I}_1$. □

La prueba anterior muestra que $\text{Tr}|\cdot|$ es una norma. Más precisamente, se puede probar lo siguiente:

Teorema 1.51. Sea $\|\cdot\|_1$ definida por $\mathscr{I}_1$ por $\|A\|_1 = \text{Tr}|A|$. Entonces $\mathscr{I}_1$ es un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|_1$ y $\|A\| \leq \|A\|_1$.

Teorema 1.52. Si $A \in \mathscr{I}_1$ entonces $A \in \mathscr{I}_\infty$. Dado $A \in \mathscr{I}_\infty$, tenemos que $A \in \mathscr{I}_1$ si y sólo si $\|A\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A) < \infty$.

Prueba. Dado $|A| \in \mathscr{I}_1$, entonces $|A|^2 \in \mathscr{I}_1$ y por lo tanto $\text{Tr}(|A|^2) < \infty$. En particular, para una base $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ de $\mathscr{H}$, $\text{Tr}(|A|^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \|A\varphi_n\|^2 < \infty$. Para probar que es compacto, probaremos que A es el límite de una sucesión de operadores de rango finito. De las ecuaciones (1.9) y (1.10), es suficiente probar que, dada una base ortonormal $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ de $\mathscr{H}$, la sucesión $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$\lambda_n = \sup_{\substack{\psi\in[\varphi_1,\ldots,\varphi_n]^{\perp} \\ \|\psi\|=1}} \|A\psi\|.$$

converge a cero. En efecto, dados $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ y $\psi \in [\varphi_1, \ldots, \varphi_n]^{\perp}$ con $\|\psi\| = 1$, podemos extender el conjunto ortogonal $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi\}$ a una base de $\mathscr{H}$, de donde

$$\sum_{j=1}^{n} \|A\varphi_j\|^2 + \|A\psi\|^2 \leq \mathrm{Tr}(|A|^2).$$

Luego

$$\lambda_n \leq \mathrm{Tr}(|A|^2) - \sum_{j=1}^{n} \|A\varphi_j\|^2$$

y como $\sum_{j=1}^{n} \|A\varphi_j\|^2 \to \mathrm{Tr}(|A|^2)$, entonces $\lambda_n \to 0$, como queríamos. Esto prueba que A es compacto.

Por el teorema de 1.39, podemos hallar una base ortonormal $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ de $\mathscr{H}$ para $|A|$ tal que $|A|\varphi_m = \mu_m(A)\varphi_m$. Tenemos entonces que

$$\mathrm{Tr}|A| = \sum_{m=1}^{\infty} \langle \varphi_m, |A|\varphi_m \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_n(A),$$

de donde concluimos. $\square$

Corolario 1.53. Los operadores de rango finito son $\|\cdot\|_1$-densos en $\mathscr{J}_1$.

Definición 1.13. Un operador $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ es de *Hilbert-Schmidt* si y sólo si $\mathrm{Tr}\, T^*T < \infty$. La familia de todos los operadores de Hilbert-Schmidt se denota por $\mathscr{J}_2$.

Teorema 1.54. (i) $\mathscr{J}_2$ es un $*$-ideal.

(ii) Si $A, B \in \mathscr{J}_2$, entonces para toda base ortonormal $\{\varphi_n\}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n, A^*B\varphi_n \rangle$$

es una serie absolutamente convergente, y su límite, denotado por $\langle A, B\rangle_2$, es independiente de la base ortonormal elegida.

(iii) $\mathscr{J}_2$ es un espacio de Hilbert con $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

(iv) Si $\|A\|_2 = \sqrt{\langle A, A\rangle_2} = (\mathrm{Tr} A^*A)^{1/2}$, entonces

$$\|A\| \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_1 \quad \text{y} \quad \|A\|_2 = \|A^*\|_2.$$

(v) Si $A \in \mathscr{J}_2$, entonces $A \in \mathscr{J}_\infty$. Dado $A \in \mathscr{J}_\infty$, $A \in \mathscr{J}_2$ si y sólo si $\|A\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A)^2\right)^{1/2} < \infty$.

(vi) Los operadores de rango finito son $\|\cdot\|_2$-densos en $\mathscr{J}_2$.

Teorema 1.55. Si $A \in \mathscr{J}_1$ y $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal cualquiera, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n, A\varphi_n \rangle$ converge absolutamente y el límite es independiente de la elección de la base.

Prueba. Escribimos $A = U|A| = U|A|^{1/2}|A|^{1/2}$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \||A|^{1/2}\varphi_n\|^2 = \mathrm{Tr}|A| < \infty$, $|A|^{1/2} \in \mathscr{J}_2$ y $|A|^{1/2}U^* \in \mathscr{J}_2$, y entonces para cada m

$$\sum_{n=1}^{m} |\langle \varphi_m, A\varphi_m \rangle| \leq \sum_{n=1}^{m} \||A|^{1/2}U^*\varphi_n\|\||A|^{1/2}\varphi_n\| \leq \left(\sum_{n=1}^{m} \||A|^{1/2}U^*\varphi_n\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{m} \||A|^{1/2}\varphi_n\|^2\right)^{1/2},$$

de donde $\sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_m, A\varphi_m \rangle$ converge absolutamente. La independencia de la base se prueba de la misma manera que en el teorema 1.48. □

Definición 1.14. El mapeo $\mathrm{Tr} : \mathscr{J}_1 \to \mathbb{C}$ definido por

$$\mathrm{Tr}\, A = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n, A\varphi_n \rangle$$

donde $\{\varphi_n\}$ es cualquier base ortonormal, es llamado *traza.*

Nota. Es evidente de la definición que el mapeo traza es lineal.

Analizamos un caso concreto para el ideal $\mathscr{J}_2$, cuando $\mathscr{H} = L^2(M, \mu)$.

Teorema 1.56. Sea (M, μ) un espacio de medida y $\mathscr{H} = L^2(M, \mu)$. Si existe una función

$$K \in L^2(M \times M, d\mu \times d\mu)$$

($d\mu \times d\mu$ es la medida producto) tal que

$$(Af)(x) = \int K(x, y) f(y) d\mu(y)$$

para toda $f \in L^2(M, \mu)$, entonces $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, es de Hilbert-Schmidt, y

$$\|A\|_2^2 = \int |K(x, y)|^2 d\mu(x) d\mu(y).$$

Prueba. Sea $K \in L^2(M \times M, d\mu \times d\mu)$ y A_K el operador integral asociado. Dada $f \in \mathscr{H}$, $x \in M$,

$$\begin{aligned} |(A_K f)(x)| &= \left|\int K(x,y)f(y)d\mu(y)\right| \leq \left(\int |K(x,y)|^2 d\mu(y)\right)^{1/2} \left(\int |f(y)|^2 d\mu(y)\right)^{1/2} \\ &= \left(\int K(x,y)d\mu(y)\right)^{1/2} \|f\| \end{aligned}$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, y entonces

$$\int |(A_K f)(x)|^2 d\mu(x) = \left(\int K(x,y)d\mu(y)d\mu(x)\right) \|f\| = \|K\|_{L^2}\|f\|$$

de donde $A_K f \in \mathscr{H}$ (A_K está bien definido) y $\|A_k f\| \leq \|K\|_{L^2}\|f\|$ para toda $f \in \mathscr{H}$, i.e.

$$\|A_K\| \leq \|K\|_{L^2}. \tag{1.27}$$

Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal para $L^2(M, d\mu)$. Entonces $\{\varphi_n(x)\overline{\varphi_m(y)}\}_{n,m=1}^{\infty}$ es una base ortonormal para $L^2(M \times M, d\mu \times d\mu)$, de modo que

$$K(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \alpha_{nm}\varphi_n(x)\overline{\varphi_m(y)}.$$

Definiendo para cada $p \geq 1$ entero el operador

$$K_p(x,y) = \sum_{n,m=1}^{p} \alpha_{nm}\varphi_n(x)\overline{\varphi_m(y)},$$

vemos que cada K_p es el núcleo integral de un operador de rango finito,

$$A_{K_p} = \sum_{m=1}^{p} \alpha_{nm}\langle\varphi_m, \cdot\rangle\varphi_n.$$

Como $\|K_p - K\|_{L^2} \to 0$ cuando $p \to \infty$, entonces $\|A_{K_p} \to A_k\| \to 0$ por (1.27). Por lo tanto A_K es compacto y

$$\mathrm{Tr}(A_k^* A_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \|A_k\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |\alpha_{mn}|^2 = \|K\|_{L^2},$$

de donde A_K es de Hilbert-Schmidt y $\|A_k\|_2 = \|K\|_{L^2}$. ∎

Nota. Es fácil probar que todo operador de Hilbert-Schmidt en $\mathscr{H} = L^2(M, d\mu)$ proviene de un núcleo K en $L^2(M \times M, d\mu \times d\mu)$ (vea [19]); sin embargo el resultado demostrado es suficiente para nuestros propósitos.

1.5.2 Desigualdades en autovalores y valores singulares

Lema 1.57. Sea A un operador compacto. Entonces existe un conjunto ortonormal (no necesariamente completo) $\{e_n\}_{n=1}^{N(A)}$ tal que

$$Ae_n = \lambda_n(A)e_n + \sum_{m=1}^{n-1} v_{nm}e_m$$

para v_{nm} convenientes. En particular,

$$\langle e_n, Ae_n\rangle = \lambda_n(A).$$

Este conjunto ortonormal es llamado *base de Schur* (que puede no ser una base).

Prueba. Sean $P_i = P_{\lambda_i}$ las proyecciones espectrales para los autovalores no nulos de A. El operador $A \restriction \mathrm{Ran}P_i$ es un operador en un espacio de dimensión finita. Entonces podemos escribir la forma de Jordan para $A \restriction \mathrm{Ran}P_i$, esto es, un conjunto de vectores algebraicamente independientes $\{f_j\}_{j=1}^{N(A)}$ de modo que

$$Af_n = \lambda_n(A)f_n + \beta_n f_{n-1}$$

donde β_n es 0 o 1. Aplicando el procedimiento de Gram-Schmidt a este conjunto, encontramos un conjunto ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^{N(A)}$ tal que

$$e_n = \sum_{m=1}^{n} \gamma_{nm}f_m$$

con $\gamma_{nn} \neq 0$. Reuniendo lo obtenido tenemos el resultado. □

Teorema 1.58 (Schur-Lalesco-Weyl). Para todo $1 \leq p < \infty$,

$$\sum_{n=1}^{N(A)} |\lambda_n(A)|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A)^p$$

donde A es compacto, $\{\lambda_n(A)\}$ sus autovalores, y $\{\mu_n(A)\}$ sus valores singulares. En particular, si $A \in \mathscr{I}_1$,

$$\sum_{n=1}^{N(A)} |\lambda_n(A)| < \infty.$$

Prueba. Considere la expansión canónica para A (teorema 1.40)

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A)\langle f_n, \cdot\rangle g_n$$

donde $\{f_n\}_n$ y $\{g_n\}_n$ son conjuntos ortonormales. Sea $\{e_n\}_{n=1}^{N(A)}$ una base de Schur para A, entonces

$$\lambda_m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn}\mu_n(A)$$

donde

$$\alpha_{mn} = \langle f_n, e_m \rangle \langle e_m, g_n \rangle.$$

De las desigualdades de Schwarz y de Bessel,

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\alpha_{mn}| \leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\langle f_n, e_m \rangle|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\langle g_n, e_m \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq \|f_n\| \|g_n\| = 1$$

Análogamente, $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{mn}| \leq 1$. Sea $q > 0$ el índice dual de p, esto es, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Por la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{M} |\lambda_m(A)|^p &\leq \sum_{m=1}^{M} |\lambda_m(A)|^{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{mn}| |\mu_n(A)| = \sum_{n,m} |\alpha_{nm}|^{1/p} |\alpha_{nm}|^{1/q} |\lambda_m(A)|^{p-1} |\mu_n(A)| \\
&\leq \left(\sum_{n,m} |\alpha_{nm}| |\mu_n(A)|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n,m} |\alpha_{nm}| |\lambda_m(A)|^p \right)^{1/q} \\
&\leq \left(\sum_{n} |\mu_n(A)|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{m=1}^{M} |\lambda_m(A)|^p \right)^{1/q}
\end{aligned}$$

y por lo tanto, dividiendo la última expresión,

$$\left(\sum_{m=1}^{M} |\lambda_m(A)|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{m=1}^{M} |\lambda_m(A)|^p \right)^{1-1/q} \leq \left(\sum_{n} |\mu_n(A)|^p \right)^{1/p}$$

para todo M. Haciendo $M = N(A)$ (si $N(A) < \infty$) o $M \to \infty$ ($N(A) = \infty$), obtenemos el resultado. □

Antes de proseguir, necesitamos una fórmula explícita para los valores singulares de un operador. Sea $A \neq$ un operador compacto autoadjunto positivo. De la compacidad del espectro $\sigma(A)$, existe $\lambda \in \sigma(A)$ tal que $|\lambda| = r(A)$, y del corolario 1.25, $r(A) = \|A\|$. Como $\lambda \neq 0$, λ es un autovalor de T y luego $r(A) = |\lambda| \leq |\lambda_1(A)| \leq r(A)$. Para un operador tal, la norma puede calcularse por $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$. Por lo tanto

$$\lambda_1(A) = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle.$$

La generalización natural de esta ecuación es la siguiente:

Lema 1.59. Si A es un operador compacto autoadjunto positivo, entonces

$$\lambda_n(A) = \min_{\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}} \max_{\substack{\psi \in [\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}]^{\perp} \\ \|\psi\|=1}} \langle A\psi, \psi \rangle. \tag{1.28}$$

Prueba. De la descomposición canónica de A,

$$A\psi = \sum_{m=1}^{N} \lambda_m(A)\langle\psi, \varphi_m\rangle\varphi_m,$$

donde $\{\varphi_m\}_{m=1}^N$ es una base ortonormal de autovectores de A, con $\|\varphi_m\| = 1$ para todo $m \geq 1$. Sea $B = A \upharpoonright [\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}]^\perp$. Luego para $\psi \in [\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}]^\perp$,

$$B\psi = \sum_{n=m}^{N} \lambda_m(A)\langle\psi, \varphi_m\rangle\varphi_m,$$

de donde por la ecuación de Rayleigh

$$\lambda_n(A) = \lambda_1(B) = \max_{\substack{\psi\in[\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}]^\perp \\ \|\psi\|=1}} \langle B\psi, \psi\rangle = \max_{\substack{\psi\in[\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}]^\perp \\ \|\psi\|=1}} \langle A\psi, \psi\rangle. \tag{1.29}$$

Es así como tenemos una fórmula para $\lambda_n(A)$, aunque dependiente de los autovectores φ_n.

Ahora verifiquemos (1.28). Es claro de (1.29) que

$$\lambda_n(A) \geq \min_{\phi_1,\ldots,\phi_{n-1}} \max_{\substack{\psi\in[\phi_1,\ldots,\phi_{n-1}]^\perp \\ \|\psi\|=1}} \langle A\psi, \psi\rangle.$$

Para verificar la desigualdad opuesta, debemos probar que para cualquiera colección $\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}$ de vectores en $\mathscr{H}$, existe $\psi \in [\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}]^\perp$, $\|\psi\| = 1$ tal que $\langle A\psi, \psi\rangle \geq \lambda_n(A)$. Consideremos $\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}$. Se cumple que

$$\operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \cap [\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}]^\perp \neq \{0\}.$$

En efecto, el sistema lineal homogéneo de $n-1$ ecuaciones y n incógnitas

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\langle\varphi_i, \phi_j\rangle = 0, \qquad j = 1, \ldots, n-1$$

debe tener una solución no trivial $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, de donde obtenemos $x = \varphi_1\varphi_1 + \cdots + \varphi_n\varphi_n \neq 0$ con $x \in [\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}]^\perp$. Luego

$$\begin{aligned}
\langle Ax, x\rangle &= \langle A(\alpha_1\varphi_1 + \cdots + \alpha_n\varphi_n), \alpha_1\varphi_1 + \cdots + \alpha_n\varphi_n\rangle \\
&= \langle \alpha_1\lambda_1\varphi_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n\varphi_n, \alpha_1\varphi_1 + \cdots + \alpha_n\varphi_n\rangle \\
&= \alpha_1|\alpha_1|^2\|\varphi_1\|^2 + \cdots + \alpha_n|\alpha_n|^2\|\varphi_n\|^2 \\
&\geq \lambda\|\alpha_1\varphi_1 + \cdots + \alpha_n\varphi_n\|^2 = \lambda_n\|x\|^2
\end{aligned}$$

de donde tomando $\psi = x/\|x\|$, $\langle A\psi, \psi\rangle \geq \lambda_n$ con $\|\psi\| = 1$, lo que prueba (1.28). □

En realidad, en el lema anterior, no es necesario asumir que A sea positivo; basta probar la fórmula para λ_1 sin asumir este hecho para llegar al resultado. Pero el resultado más importante es el siguiente:

Teorema 1.60. Si A es compacto, entonces

$$\mu_n(A) = \min_{\phi_1,\ldots,\phi_{n-1}} \max_{\substack{\psi\in[\phi_1,\ldots,\phi_{n-1}]^\perp \\ \|\psi\|=1}} \|A\psi\|.$$

Prueba. Basta considerar el operador A^*A en el teorema anterior, pues $\mu_n^2(A) = \lambda_n(A^*A)$, $\langle A^*A\psi, \psi\rangle = \|A\psi\|^2$. □

Teorema 1.61. Sea A un operador compacto. Entonces

$$\mu_n(A^*) = \mu_n(A).$$

Prueba. De la forma canónica para A (teorema 1.40), $A = \sum_n \mu_n(A)\langle\phi_n, \cdot\rangle\psi_n$, se prueba fácilmente que $A^* = \sum_n \mu_n(A)\langle\psi_n, \cdot\rangle\phi_n$, lo que implica que $AA^* = \sum_n \mu_n(A)^2\langle\psi_n, \cdot\rangle\psi_n$. Pero entonces los valores singulares de AA^* son los $\mu_n(A)^2$. Como las raíces cuadradas de estos valores singulares son precisamente los valores singulares de A^*, entonces $\mu_n(A^*) = \mu_n(A)$. □

Teorema 1.62. Si A es compacto y B es acotado entonces

$$\mu_n(AB) \leq \|B\|\mu_n(A), \qquad \mu_n(BA) \leq \|B\|\mu_n(A).$$

Prueba. Tenemos, para $n \geq 1$,

$$\mu_n(BA) = \min_{\phi_1,\ldots,\phi_{n-1}} \max_{\substack{\psi\in[\phi_1,\ldots,\phi_{n-1}]^\perp \\ \|\psi\|=1}} \|BA\psi\| \leq \|B\| \min_{\phi_1,\ldots,\phi_{n-1}} \max_{\substack{\psi\in[\phi_1,\ldots,\phi_{n-1}]^\perp \\ \|\psi\|=1}} \|A\psi\| = \|B\|\mu_n(A).$$ □

Teorema 1.63. Si A y B son compactos entonces

$$\mu_{m+n+1}(A+B) \leq \mu_{n+1}(A) + \mu_{m+1}(B).$$

Prueba. En efecto,

$$\begin{aligned}
\max_{\substack{\psi\in[\phi_1,\ldots,\phi_{n+m}]^\perp \\ \|\psi\|=1}} \|(A+B)\psi\| &\leq \max_{\substack{\psi\in[\phi_1,\ldots,\phi_{n+m}]^\perp \\ \|\psi\|=1}} \|A\psi\| + \max_{\substack{\psi\in[\phi_1,\ldots,\phi_{n+m}]^\perp \\ \|\psi\|=1}} \|B\psi\| \\
&\leq \max_{\substack{\psi\in[\phi_1,\ldots,\phi_n]^\perp \\ \|\psi\|=1}} \|A\psi\| + \max_{\substack{\psi\in[\phi_{n+1},\ldots,\phi_{n+m}]^\perp \\ \|\psi\|=1}} \|B\psi\|
\end{aligned}$$

Al minimizar sobre las variables $\phi_1, \ldots, \phi_{n+m}$, al lado derecho, como el primer término de la suma sólo depende de las variables $\phi_1, \ldots, \phi_n$ y el segundo sólo de $\phi_{n+1}, \ldots, \phi_{n+m}$,

$$\begin{aligned}
\mu_{n+m+1}(A+B) &= \min_{\phi_1,\ldots,\phi_{n+m}} \max_{\substack{\psi\in[\phi_1,\ldots,\phi_{n+m}]^\perp \\ \|\psi\|=1}} \|(A+B)\psi\| \\
&\leq \min_{\phi_1,\ldots,\phi_{n+m}} \left(\max_{\substack{\psi\in[\phi_1,\ldots,\phi_n]^\perp \\ \|\psi\|=1}} \|A\psi\| + \max_{\substack{\psi\in[\phi_{n+1},\ldots,\phi_{n+m}]^\perp \\ \|\psi\|=1}} \|B\psi\| \right) \\
&= \min_{\phi_1,\ldots,\phi_{n-1}} \max_{\substack{\psi\in[\phi_1,\ldots,\phi_n]^\perp \\ \|\psi\|=1}} \|A\psi\| + \min_{\phi_1,\ldots,\phi_{n-1}} \max_{\substack{\psi\in[\phi_{n+1},\ldots,\phi_{n+m}]^\perp \\ \|\psi\|=1}} \|B\psi\| \\
&= \mu_{n+1}(A) + \mu_{m+1}(B).
\end{aligned}$$ □

Esto concluye la prueba. ∎

1.5.3 Ideales de operadores compactos

Ahora establecemos una generalización de los ideales traza y Hilbert-Schmidt, $\mathscr{J}_1$ y $\mathscr{J}_2$ que será útil más adelante.

Definición 1.15. Sea $p \geq 1$. Un operador K está en $\mathscr{J}_p$ si y sólo si $\{\mu_n(K)\} \in \ell_p$. Denotamos

$$\|K\|_p = \|\{\mu_n(K)\}\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(K)^p\right)^{1/p}.$$

Teorema 1.64. (i) $\mathscr{J}_p$ es un $*$-ideal.

(ii) $\mathscr{J}_p$ es un espacio vectorial.

(iii) Si $A \in \mathscr{J}_p$, entonces $A \in \mathscr{J}_\infty$. Dado $A \in \mathscr{J}_\infty$, $A \in \mathscr{J}_p$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A)^p < \infty$.

Prueba. La afirmación (iii) es evidente. Por el teorema 1.61, $\mu_n(A) = \mu_n(A^*)$ de donde si $A \in \mathscr{J}_p$, entonces $A^* \in \mathscr{J}_p$ y $\|A\|_p = \|A^*\|_p$. Probemos (ii). Es evidente del teorema 1.60 que para $\lambda \in \mathbb{C}$, $\|\lambda A\|_p = |\lambda|\|A\|_p$ y $\lambda A \in \mathscr{J}_p$.

Dados $A, B \in \mathscr{J}_p$, del teorema 1.63,

$$\mu_{2n+1}(A+B)^p \leq \mu_{2n}(A+B)^p \leq (\mu_{n+1}(A) + \mu_n(B))^p$$

de donde como $\{\mu_n(A)\}_n \in \ell_p$ y $\{\mu_n(B)\}_n \in \ell_p$, tenemos que $\{\mu_n(A) + \mu_n(B)\}_n \in \ell_p$, y de la desigualdad anterior $\{\mu_{2n}(A)\}_n \in \ell_p$ y $\{\mu_{2n+1}(A)\}_n \in \ell_p$ y por lo tanto $\{\mu_n(A)\}_n \in \ell_p$; esto es $A + B \in \mathscr{J}_p$.

Del teorema 1.62, si $A \in \mathscr{J}_p$ es compacto y B es acotado entonces

$$\mu_n(AB)^p \leq \|B\|^p \mu_n(A)^p, \qquad \mu_n(BA)^p \leq \|B\|^p \mu_n(A)^p$$

y por lo tanto, la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A)^p$ implica la convergencia de las series $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(AB)^p$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(BA)^p$, de donde $AB \in \mathscr{J}_p$ y $BA \in \mathscr{J}_p$. Sumando además las desigualdades anteriores, tenemos que $\|AB\|_p^p \leq \|B\|^p \|A\|_p^p$ y $\|BA\|_p^p \leq \|B\|^p \|A\|_p^p$, i.e.

$$\|AB\|_p \leq \|B\|\|A\|_p, \qquad \|BA\|_p \leq \|B\|\|A\|_p, \tag{1.30}$$

para cualesquiera $A \in \mathscr{J}_p$, $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. □

Nota. Puede probarse que, de hecho $\|\cdot\|_p$ es una norma sobre $\mathscr{J}_p$; para efectos del estudio a realizar sólo necesitamos el hecho de que $\mathscr{J}_p$ es un ideal. Estos ideales $\mathscr{J}_p$ se comportan de manera muy similar a los espacios de sucesiones ℓ_p.

1.5.4 Determinantes

Ahora extenderemos el concepto de determinante, conocido en dimensión finita, a la familia de operadores de la clase traza.

$\mathscr{H}$ espacio de Hilbert separable.

Dado un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$, denotemos por $\mathrm{Hom}^n(\mathscr{H})$ al espacio de funcionales n-lineales sobre $\mathscr{H}$,

$$\mathrm{Hom}^n(\mathscr{H}) = \{l : H \times \cdots \times H \to \mathbb{C}/l \text{ es multilineal }\}.$$

Dados $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \mathscr{H}$, denotamos por $\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n$ la funcional multilineal definida por

$$(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n)(\psi_1, \ldots, \psi_n) = \prod_{i=1}^{n} \langle \phi_i, \psi_i \rangle.$$

El subespacio de $\mathrm{Hom}^n(\mathscr{H})$ generado por tales funcionales,

$$\mathrm{Hom}^n_f(\mathscr{H}) = \mathrm{span}\{\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n / \phi_i \in \mathscr{H},\ i = 1, \ldots, n\}$$

posee un producto interno natural definido por

$$\langle l, \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n \rangle = l(\phi_1, \ldots, \phi_n).$$

Es fácil ver que este producto interno está bien definido y

$$\langle \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n, \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n \rangle = \prod_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, \phi_i \rangle.$$

El completamiento de $\mathrm{Hom}^n_f(\mathscr{H})$ con este producto interno se denota por $\otimes^n \mathscr{H}$.

Dado $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, definimos el operador $\Gamma_n(A) \in \mathscr{L}(\otimes^n \mathscr{H})$ por

$$[\Gamma_n(A)(l)](\psi_1, \ldots, \psi_n) = l(A^*\psi_1, \ldots, A^*\psi_n),$$

lo que implica

$$\Gamma_n(A)(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n) = (A\phi_1) \otimes \cdots \otimes (A\phi_n).$$

Es trivial ver que Γ_n es un funtor, i.e. $\Gamma_n(AB) = \Gamma_n(A)\Gamma_n(B)$.

Si $\{\phi_i\}_i$ es una base ortonormal para H, entonces $\{\phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_n}\}_{i_1, \ldots, i_n}$ es una base ortonormal para $\otimes^n \mathscr{H}$.

Sea σ_n el grupo de permutaciones de $\{1, \ldots, n\}$. Denotemos por $\mathrm{sgn}(\pi)$ el signo de una permutación $\pi \in \sigma_n$. Dados $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathscr{H}$, definimos $\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \in \otimes^n \mathscr{H}$ por

$$\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in \sigma_n} \mathrm{sgn}(\pi)[\psi_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\pi(n)}]$$

y

$$\Lambda^n(\mathscr{H}) = \mathrm{span}\{\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n / \psi_i \in \mathscr{H},\ i = 1, \ldots, n\}$$

para $n \geq 1$; $\Lambda^0(\mathscr{H}) = \mathbb{C}$.

Unos cálculos simples muestran que

$$\langle \psi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n, \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \rangle = \det(\langle \psi_i, \psi_j \rangle_{1 \leq i,j \leq n})$$

donde

$$\det(a_{ij}) = \sum_{\pi \in \sigma_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}.$$

De esto último, observamos que si $\{\psi_i\}_i$ es una base ortonormal para $\mathscr{H}$, entonces $\{\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_n}\}_{i_1 < \cdots < i_n}$ es una base ortonormal para $\Lambda^n \mathscr{H}$. Para $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, $\Lambda^n(\mathscr{H})$ es invariante por $\Gamma^n(A)$, de hecho

$$\Gamma^n(A)(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) = A\psi_1 \wedge \cdots \wedge A\psi_n.$$

Denotamos entonces por $\Lambda^n(A)$ a la restricción de $\Gamma^n(A)$ a $\Lambda^n(\mathscr{H})$. De igual modo que para Γ^n,

$$\Lambda^n(AB) = \Lambda^n(A)\Lambda^n(B). \tag{1.31}$$

y además

$$\Lambda^n(A^*) = \Lambda^n(A)^*.$$

Nota. En los espacios de funciones como $L^2(a, b)$, el producto tensorial se identifica con el producto usual de funciones, esto es, para $f, g \in L^2(a, b)$, $f \otimes g$ se identifica de la manera siguiente:

$$[f \otimes g](x_1, x_2) = f(x_1)g(x_2).$$

De hecho, esta identificación es una isometría natural entre $L^2(a, b) \otimes L^2(a, b)$ y $L^2((a, b) \times (a, b))$.

Lema 1.65 (Relación entre *det* y Λ^n). Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert.

(i) Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión n. Entonces $\Lambda^k(\mathscr{H})$ tiene dimensión $\binom{n}{k}$. En particular, $\Lambda^n(\mathscr{H})$ es unidimensional.

(ii) Si $\mathscr{H}$ tiene dimensión n, entonces $\Lambda^n(A)$ es multiplicación por $\det(A)$.

(iii) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Prueba.

(i) Sea $e_1, \ldots, e_n$ una base ortonormal para $\mathscr{H}$, entonces

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}$$

es una base ortonormal para $\Lambda^k \mathscr{H}$. En efecto, estos vectores son evidentemente ortonormales, y generan $\Lambda^k(\mathscr{H})$ pues $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_k \rangle \mapsto \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k$ es multilineal y alternada.

(ii) Como $\Lambda^n(A)$ es unidimensional, entonces $\Lambda^n(A)$ es simplemente multiplicación por un escalar α. Si $e_1, \dots, e_n$ es una base ortonormal, entonces $\Lambda^n(A)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = \alpha(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)$, de donde

$$\alpha = \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, \Lambda^n(A)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)\rangle = \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, Ae_1 \wedge \cdots \wedge Ae_n\rangle = \det((\langle e_i, Ae_j\rangle)) = \det(A).$$

(iii) Se sigue de (b) y (1.31). □

Vamos a motivar la definición de $\det(I - A)$ que daremos para $A \in \mathscr{J}_1$. Supongamos que $\dim \mathscr{H} = n$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de A y $e_1, \dots, e_n$ una base de Schur para A,

$$\det(I - A) = \det(\langle e_i, (I - A)e_j\rangle) = \prod_{i=1}^{n}(1 - \lambda_i)$$

puesto que $\lambda_i = \langle e_i, Ae_i\rangle$ y $\langle e_i, Ae_j\rangle = 0$ si $i > j$. Por otro lado,

$$\operatorname{Tr}(\Lambda^k(A)) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \langle e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}, Ae_{i_1} \wedge \cdots \wedge Ae_{i_n}\rangle = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}.$$

Por lo tanto

$$\det(I - A) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \operatorname{Tr}(\Lambda^j(A)). \tag{1.32}$$

Esta es la definición que daremos para $A \in \mathscr{J}_1$.

Lema 1.66. Sea $A \in \mathscr{J}_1$ con valores singulares $\mu_n(A)$. Entonces, para todo k, $\Lambda^k(A)$ es de la clase traza y

$$\|\Lambda^k(A)\|_1 = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \mu_{i_1}(A) \cdots \mu_{i_k}(A),$$

$$\|\Lambda^k(A)\|_1 \leq \frac{\|A\|_1^k}{k!}.$$

Prueba. Si $A = U|A|$ es la descomposición polar de A, entonces

$$\Lambda^k(A) = \Lambda^k(U)\Lambda^k(|A|) \tag{1.33}$$

es la descomposición polar de $\Lambda^k(A)$. En particular,

$$|\Lambda^k(A)| = \Lambda^k(|A|).$$

Dada una base ortonormal $\{e_i\}_i$ de autovectores para $|A|$ (el cual es compacto y autoadjunto), $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}\}$ es una base ortonormal de autovectores para $\Lambda^k(|A|)$ Luego

$$\operatorname{Tr}(|\Lambda^k(A)|) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \mu_{i_1}(A) \cdots \mu_{i_k}(A) \leq \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} \mu_{i_1}(A) \cdots \mu_{i_k}(A) = \frac{[\operatorname{Tr}(|A|)]^k}{k!} = \frac{\|A\|_1^k}{k!},$$

de donde $\Lambda^k(A)$ es de la clase traza y se cumple (1.33). □

Definición 1.16. Sea $A \in \mathscr{J}_1$. Definimos $\det(1 - A)$ por

$$\det(I - A) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^j \mathrm{Tr}(\Lambda^k(A)). \tag{1.34}$$

Lema 1.67. La suma (1.34) converge para todo $A \in \mathscr{J}_1$. Además

(i) $|\det(I - A)| \leq \prod_{j=1}^{\infty}(1 + \mu_j(A))$.

(ii) $|\det(I - A)| \leq \exp(\|A\|_1)$.

(iii) Para todo $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{J}_1$, la aplicación

$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto \det(I - \sum_{i=1}^{n} z_i A_i)$$

es una función entera analítica de n variables.

(iv) Para $A, B \in \mathscr{J}_1$,

$$|\det(I - A) - \det(I - B)| \leq \|A - B\|_1 \exp(\|A\|_1 + \|B\|_1 + 1)$$

(continuidad de $\det(1 - A)$).

Prueba. Como $|\mathrm{Tr}(\Lambda^k(A))| \leq \|\Lambda^k(A)\|_1 / k!$, la convergencia del determinante (1.34) y (i), (ii) se siguen del lema 1.66. Para probar (iii), observe que para los términos de

$$\det(I - \sum_{i=1}^{n} z_i A_i) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Tr}(\Lambda^k(z_1 A_1 + \cdots + z_n A_n))$$

tenemos estimados $\|\Lambda^k(z_1 A_1 + \cdots + z_k A_k)\| \leq \dfrac{|z_1|\|A_1\| + \cdots + |z_k|\|A_k\|}{k!}$, los cuales son uniformes sobre conjuntos compactos en $\mathbb{C}^n$. Por lo tanto, es suficiente probar que para cada k, la aplicación

$$(z_1, \ldots, z_k) \mapsto \Lambda^k(z_1 A_1 + \cdots + z_k A_k)$$

es analítica. Es fácil ver que $\Lambda^k(z_1 A_1 + \cdots + z_k A_k)$ es una función analítica $\mathscr{J}_1$-valuada, de donde la traza Tr es una funcional lineal acotada sobre $\mathscr{J}_1$. Esto prueba (c). El item (d) se sigue del teorema 1.18. □

Teorema 1.68. Para cualesquiera $A, B \in \mathscr{J}_1$:

$$\det(I - A) \det(I - B) = \det(I - A - B + AB).$$

Prueba. Como los operadores de rango finito son densos en $\mathscr{J}_1$ (corolario 1.53) y $\det(I - \cdot)$ es continua por (d) del teorema anterior, entonces basta verificar el resultado para A y B de rango finito. Sea

$$V = \text{span}(\text{Ker}(A)^{\perp} \cup \text{Ker}(B)^{\perp} \cup \text{Ran}(A) \cup \text{Ran(B)}).$$

Entonces V es de dimensión finita, invariante bajo A, B, A^* y B^*, y además $A \restriction V^{\perp} = 0$, $B \restriction V^{\perp} = 0$. Luego A y B dejan V y $V^{\perp}$ invariantes. Sea $\tilde{A} = A \restriction V$, $\tilde{B} = B \restriction V$. Entonces $\text{Tr}(\Lambda^k(A)) = \text{Tr}(\Lambda^k(\tilde{A}))$ y $\text{Tr}(\Lambda^k(B)) = \text{Tr}(\Lambda^k(\tilde{B}))$, para cada k. Por lo tanto

$$\det(I - A) = \det{}_V(I - \tilde{A}), \qquad \det(I - B) = \det{}_V(I - \tilde{B})$$

y

$$\det(I - A - B + AB) = \det{}_V(I - \tilde{A} - \tilde{B} - \tilde{A}\tilde{B}).$$

Ahora el resultado se sigue del caso en dimensión finita,

$$\det{}_V(I - \tilde{A} - \tilde{B} - \tilde{A}\tilde{B}) = \det{}_V(I - \tilde{A})\det{}_V(I - \tilde{B}),$$

lema 1.65(c) y (1.32). ◻

Teorema 1.69. Sea $A \in \mathscr{J}_1$. Entonces $\det(I - A) \neq 0$ si y sólo si $I - A$ es inversible.

Prueba. Si $I - A$ es inversible, entonces $(I - A)^{-1} = I - B$ donde $B = -A(I - A)^{-1} \in \mathscr{J}_1$. Por el teorema anterior

$$\det(I - A)\det(I - B) = \det(I) = 1$$

de donde $\det(I - A) \neq 0$. Si $I - A$ no es inversible, entonces 1 es un autovalor de A y entonces $\det(I - A) = 0$ por el siguiente resultado. ◻

Teorema 1.70. Si μ^{-1} es un autovalor de multiplicidad k de A, entonces $F(z) = \det(I - zA)$ posee un cero de orden precisamente k en $z = \mu$.

Prueba. Sea $P = P_{\mu^{-1}}$ la proyección espectral para μ^{-1} (definición 1.11). Sea $B = AP$ y $C = A(I - P)$. Entonces $I - zA = (I - zB)(I - zC)$, de donde

$$\det(I - zA) = \det(I - zB)\det(I - zC)$$

por el teorema 1.68. Como $I - zC$ es invertible para z en una vecindad de μ^{-1} ($\mu^{-1} \notin \sigma(C)$ por el teorema 1.44 y μ^{-1} es aislado), entonces $\det(I - zC) \neq 0$ por el teorema anterior. Luego debemos probar que $\det(I - zB)$ posee un cero de orden k en μ^{-1}. Extendiendo una base de Schur para B a una base para $\mathscr{H}$, tenemos una base ortonormal, con

$$Be_i = \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} e_j$$

con $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = \mu^{-1}$ y $\lambda_m = 0$ para $m \geq k + 1$. Se sigue entonces que $\text{Tr}(\Lambda^k(B)) = \binom{n}{k}(\mu^{-1})^k$ para $k \leq n$ y $\text{Tr}(\Lambda^k(B)) = 0$ para $k > n$. Por lo tanto $\det(I - zB) = (1 - z\mu^{-1})^k$ posee un cero de orden n en $z = \mu$. ◻

Teorema 1.71. Para todo $\varepsilon > 0$, existe una constante $C_\varepsilon > 0$ dependiendo de A, tal que

$$|\det(I - zA)| \leq C_\varepsilon \exp(\varepsilon|z|)$$

para todo z.

Prueba. Sean $\mu_n(A)$ los valores singulares de A. Sea N entero tal que

$$\sum_{n>N} \mu_n(A) < \varepsilon/2.$$

entonces $\prod_{j>N}(1 + |z|\mu_j(A)) < \exp(\varepsilon/2)$ y luego

Por el lema 1.67 y el hecho de que $1 + x \leq \exp(x)$ para $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}
|\det(I - zA)| &\leq \prod_{j=1}^{\infty}(1 + |z|\mu_j(A)) \leq \prod_{j=1}^{N}(1 + |z|\mu_j(A)) \cdot \prod_{j>N} \exp(|z|\mu_j(A)) \\
&= \prod_{j=1}^{N}(1 + |z|\mu_j(A)) \cdot \exp(\sum_{j>N} |z|\mu_j(A)) < \prod_{j=1}^{N}(1 + |z|\mu_j(A)) \exp(1/2\varepsilon|z|).
\end{aligned}$$

Además, como $\prod_{j=1}^{N}(1 + |z|\mu_j(A))$ es un polinomio en $|z|$, podemos hallar una constante C_ε con

$$\prod_{j=1}^{N}(1 + |z|\mu_j(A)) \leq C_\varepsilon \exp(\frac{1}{2}\varepsilon|z|),$$

(por ser un polinomio una función entera de orden menor que 1) de donde se sigue el resultado. □

Teorema 1.72. Para todo $A \in \mathscr{I}_1$ y $\mu \in \mathbb{C}$:

$$\det(I - \mu A) = \prod_{j=1}^{N(A)} (1 - \mu\lambda_j(A)).$$

Prueba. Sea $F(z) = \det(I - zA)$, y

$$G(z) = \prod_{j=1}^{N(A)} (1 - z\lambda_j(A)).$$

Si $N(A) = \infty$, el producto converge a una función analítica pues $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j(A)| < \infty$ por el teorema 1.58. Mostraremos que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. De la defininición de G y los teoremas 1.69 y 1.70, F y G tienen exactamente el mismo conjunto de ceros, contando multiplicidades, así que $F/G = V$ es una función entera sin ceros, de donde existe una función entera h tal que

$$F = Ge^h,$$

(logaritmo holomorfo de h), y como $f(0) = g(0) = 1$, podemos exigir que $h(0) = 0$ (para evitar ambigüedades). Mostraremos que $h(z) = 0$ para $|z| < 1$. de donde tendrá que ser idénticamente igual a cero. Para $R \geq 2$, y $|z| < R$, definimos

$$f_R(z) = f(z) / \prod_{|\lambda_j|^{-1} \leq R} (1 + z\lambda_j), \qquad h_R(z) = \ln(f_R(z)),$$

donde $h_R(0) = 0$, y

$$k_R(z) = - \sum_{|\lambda_j|^{-1} > R} \ln(1 + z\lambda_j(A)),$$

donde $k_R(0) = 0$.

Observe que f_R es entera, y que $h = h_R + k_R$. Mostraremos que $|h_R(z)| \to 0$ y que $|k_R(z)| \to 0$ cuando $R \to \infty$, para cada $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \leq 1$, de donde se seguirá el resultado. Como la función $\ln(1 + x)$ se anula en $x = 0$ y es analítica en una vecindad de $\{x : |x| \leq 1/2\}$, podemos acotar $|\ln(1 + x)/x|$ en dicha vecindad, de donde obtenemos $C > 0$ tal que $|\ln(1 + x)| \leq C|x|$ para todo x tal que $|x| \leq 1/2$. Luego, cuando $R \to \infty$,

$$|k_R(z)| \leq \sum_{|\lambda_j|^{-1} > R} |z||\lambda_j(A)| = |z| \sum_{|\lambda_j|^{-1} > R} |\lambda_j(A)| \to 0$$

por la convergencia de $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j(A)|$.

Ahora analizamos f_R. Sea $\varepsilon > 0$ dado. Si $|z| = 2R$ y $|\lambda_j^{-1}| \leq R$, entonces

$$|1 + z\lambda_j| \geq |z\lambda_j| - 1 \geq 2R R^{-1} - 1 = 1$$

de modo que si $|z| = 2R$, entonces $|f_R(z)| \leq C_\varepsilon \exp(2R\varepsilon)$ por el teorema 1.77. Por el principio del módulo máximo, este estimado vale para todo z con $|z| \leq 2R$, en particular cuando $|z| = R$. Como $f_R(z) = \exp(h_R(z))$, entonces $|f_R(z)| = \exp(\mathrm{Re}(h_R(z)))$ y

$$\mathrm{Re}(h_R(z)) = \ln |f_R(z)| \leq \ln C_\varepsilon + 2R\varepsilon$$

cuando $|z| = R$. Por el teorema de Borel-Caratheodory (teorema 1.17), considerando que $h_R(0) = 0$,

$$\max_{|z| \leq 1} |h_R(z)| \leq 2(R - 1)^{-1}[\ln C_\varepsilon + 2R\varepsilon],$$

de donde, para todo z con $|z| \leq 1$,

$$\overline{\lim_{R \to \infty}} |h_R(z)| \leq 4\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ fue arbitrario, entonces $\overline{\lim_{R \to \infty}} |h_R(z)| = 0$, de donde $|h_R(z)| \to 0$ cuando $R \to \infty$. □

Corolario 1.73 (Teorema de Lidskii). Si $A \in \mathscr{J}_1$, entonces

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{j=1}^{N(A)} \lambda_j(A).$$

Prueba. Del teorema anterior, para $\mu \in \mathbb{C}$

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\mu^j \operatorname{Tr}(\Lambda^j(A)) = \prod_{j=1}^{N(A)}(1-\mu\lambda_j(A)) = 1-\mu\sum_{j=1}^{N(A)}\lambda_j(A)+\mu^2\sum_{1\leq i<j\leq N(A)}^{N(A)}\lambda_i(A)\lambda_j(A)-\cdots$$

Considerando el coeficiente de μ a ambos lados de la ecuación obtenemos el resultado deseado. □

Nota. Considerar otros términos en la expansión anterior no proporciona mayor información. De hecho, considerando el coeficiente para μ^k, obtenemos

$$\operatorname{Tr}(\Lambda^k(A)) = \sum_{j=1}^{N(\Lambda^k(A))}\lambda_j(\Lambda^k(A)) = \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_k\leq N(A)}\lambda_{j_1}(A)\cdots\lambda_{j_k}(A),$$

lo que es precisamente el teorema de Lidskii aplicado a $\operatorname{Tr}(\Lambda^k(A))$. Se deduce entonces que el teorema 1.72 y el corolario 1.73 son equivalentes.

Determinantes Regularizados

Lema 1.74. Para todo $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, definimos

$$R_n(A) = I - \left[(I-A)\exp\left(\sum_{k=1}^{n-1}A^k/k\right)\right].$$

Entonces:

(i) Si $A \in \mathscr{J}_n$, entonces $R_n(A) \in \mathscr{J}_1$.

(ii) Para cualesquiera $A_1,\ldots,A_m \in \mathscr{J}_1$, la aplicación

$$(z_1,\ldots,z_n) \mapsto \det(I-\sum_{i=1}^{m}z_iA_i)$$

es una función entera analítica de m variables.

Prueba. Sea $f(z) = 1-(1-z)\exp(\sum_{j=1}^{n-1}z^j/j)$. Como $f(0)=0$ y $f'(z) = z^{n-1}\exp(\sum_{j=1}^{n-1}z^j/j)$ (la suma $\sum_{j=1}^{n-1}z^j/j$ es la parte inicial de la serie de Taylor de $\ln(1-z)$), $h(z) = f(z)/z^n$ tiene una singularidad removible en $z=0$, y puede ser extendida a una función entera h. Luego $h \in \mathscr{F}(A)$ y $h(A) \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, $g(A) = A^n h(A)$ (teorema 1.28). Para $A \in \mathscr{J}_n$, no es difícil ver que $A^n \in \mathscr{J}_1$, y por lo tanto $g(A) \in \mathscr{J}_1$. La analiticidad de R_n es evidente. □

Definición 1.17. Para $A \in \mathscr{J}_n$, definimos

$$\det_n(I-A) = \det(I-R_n(A)).$$

Teorema 1.75. Sean $\lambda_1(A), \dots$ los autovalores de $A \in \mathscr{I}_n$. Entonces

$$\det_n(I - \mu A) = \prod_{m=1}^{\infty} \left[(1 - \mu\lambda_m(A)) \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} \mu^k \lambda_m(A)^k / k \right) \right]. \tag{1.35}$$

Además, para $A \in \mathscr{I}_{n-1}$:

$$\det_n(I - A) = \det_{n-1}(I - A) \exp(\operatorname{Tr}(A^{n-1})/n - 1) \tag{1.36}$$

y en particular, para $A \in \mathscr{I}_1$:

$$\det_n(I - A) = \det(I - A) \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{Tr}(A^k)/k \right). \tag{1.37}$$

Prueba. Por el teorema de la aplicación espectral 1.47, los autovalores de $R_n(\mu A)$ son

$$1 - (1 - \mu\lambda_m(A)) \exp(\sum_{k=1}^{n-1} \mu^k \lambda_m(A)^k / k),$$

contando multiplicidades (salvo posiblemente si A es inyectivo, en cuyo caso el autovalor 0 no está en la sucesión de los $\lambda_m(A)$). Luego (1.35) se sigue del teorema 1.72 (los factores correspondientes a $R_n(\mu\lambda_m) = 0$ y $R_n(0) = 0$ son 1 en la productoria).

Sea $A \in \mathscr{I}_1$. Por el teorema espectral 1.47 aplicado a la función $f(z) = 1 - \exp(z)$, los autovalores de $f(A)$ son $1 - \exp(\lambda_k(A))$ (vea la observación anterior) de donde por el teorema de Lidskii y (i)

$$\begin{aligned} \det(\exp(A)) &= \det(I - [I - \exp(A)]) = \prod_{k=1}^{\infty} (I - [I - \exp(\lambda_k(A))]) = \prod_{k=1}^{\infty} \exp(\lambda_k(A)) \\ &= \exp(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A)) = \exp(\operatorname{Tr}(A)). \end{aligned}$$

De la ecuación anterior y la igualdad

$$(I - R_n(A)) = (I - R_{n-1}(A)) \exp(A^{n-1}/(n-1))$$

válida para $A \in \mathscr{I}_{n-1}$, se sigue que

$$\det(I - R_n(A)) = \det(I - R_{n-1}) \det(A^{n-1}/(n-1)) = \det(I - R_{n-1}) \exp(\operatorname{Tr}(A^{n-1})/(n-1))$$

(por el teorema 1.68), probando (1.36). La ecuación (1.37) se sigue por inducción. □

Corolario 1.76. Sea $A \in \mathscr{I}_n$. Entonces $I - A$ es inversible si y sólo si $\det_n(I - A) \neq 0$.

Es fácil ver que, para cada $n \geq 1$, existe una constante Γ_n tal que

$$\left| (1 - z) \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} z^k / k \right) \right| \leq \exp(\Gamma_n |z|^n) \tag{1.38}$$

pues el lado izquierdo de la inecuación es una función de orden menor que n. Esto nos lleva al siguiente

Teorema 1.77. Para todo $n \geq 1$,

$$|\det_n(I - A)| \leq \exp(\Gamma_n \|A\|_n^n).$$

Teorema 1.78. La función $\det_n(I - A)$ es de Lipschitz sobre $\mathscr{J}_n$ uniformemente sobre bolas. Explícitamente:

$$|\det_n(I - A) - \det_n(I - B)| \leq \|A - B\|_n \exp[\Gamma_n(\|A\|_n + \|B\|_n + 1)^n].$$

Prueba. Se sigue de los teoremas 1.77, 1.18 y la analiticidad de $\det_n(I - \mu A)$, lema 1.74 (ii). ■

Teorema 1.79 (Fórmula de Plemelj-Smithies). Sea $A \in \mathscr{J}_n$. Entonces

$$\det_n(I - \mu A) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \mu^m \alpha_m^{(n)}(A)/m! \tag{1.39}$$

donde la serie converge para todo $\mu \in \mathbb{C}$, $\alpha_0^{(n)}(A) = 1$ y para $m \geq 1$

$$\alpha_m^{(n)}(A) = \begin{vmatrix} \sigma_1^{(n)} & m-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sigma_2^{(n)} & \sigma_1^{(n)} & m-2 & & 0 & 0 \\ \sigma_3^{(n)} & \sigma_2^{(n)} & \sigma_1^{(n)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \sigma_{m-1}^{(n)} & \sigma_{m-2}^{(n)} & \sigma_{m-3}^{(n)} & \cdots & \sigma_1^{(n)} & 1 \\ \sigma_m^{(n)} & \sigma_{m-1}^{(n)} & \sigma_{m-2}^{(n)} & \cdots & \sigma_2^{(n)} & \sigma_1^{(n)} \end{vmatrix} \tag{1.40}$$

donde

$$\sigma_k^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{Tr}(A^k), & k \geq n \\ 0, & k \leq n-1. \end{cases}$$

Prueba. Como $D(\mu) = \det(I - \mu A)$ es una función entera, claramente posee una expansión (1.39) convergente para todo $\mu \in \mathbb{C}$; evidentemente $\alpha_0^{(n)} = D(0) = 1$.

Para $|\mu| < |\lambda_1(A)|^{-1}$, $D(\mu) \neq 0$; como para $g(\mu) = (1 - \mu\lambda)\exp(\sum_{k=1}^{n-1} \mu^k \lambda^k / k)$, entonces $g'(\mu) = -\mu^{n-1}\lambda^n \exp(\sum_{k=1}^{n-1} \mu^k \lambda^k / k)$; luego la derivada logarítimica de D (de la expansión en producto 1.35) es

$$\frac{D'(\mu)}{D(\mu)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\mu^{n-1}\lambda_m(A)}{1 - \mu\lambda_m(A)} = -\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \lambda_m^k \right) \mu^{n-1} \lambda_m^n = -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k+n-1} \lambda_m^{k+n}$$

y luego por la convergencia absoluta de la serie (teorema 1.58)

$$\frac{D'(\mu)}{D(\mu)} = -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu^{k-1} \lambda_m^k = -\sum_{k=n-1} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^{k+1} \right) \mu^k.$$

Por el teorema espectral (1.47) y el teorema de Lidskii, los autovalores no nulos de A^k son λ_m^k y $\mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^k$ para $k \geq n$. Luego

$$\frac{D'(\mu)}{D(\mu)} = -\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{k+1}^{(n)} \mu^k. \tag{1.41}$$

Introduciendo el desarrollo en serie para D (1.39), la ecuación anterior equivale a

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\alpha_{m+1}^{(n)}}{m!} \mu^m = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{m+1}^{(n)} \mu^m \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\alpha_m^{(n)}}{m!} \mu^m \right)$$

de donde por la fórmula del producto Cauchy de series,

$$(-1)^{m+1} \frac{\alpha_{m+1}^{(n)}}{m!} = \sum_{k=0}^{m} (-\sigma_{k+1}^{(n)})(-1)^{m-k} \frac{\alpha_{m-k}^{(n)}}{(m-k)!}, \qquad m \geq 0.$$

Luego para $m \geq 1$,

$$(-1)^m \frac{\alpha_m^{(n)}}{(m-1)!} = \sum_{k=0}^{m-1} \sigma_{k+1}^{(n)} (-1)^{m-k} \frac{\alpha_{m-k-1}^{(n)}}{(m-k-1)!} = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k^{(n)} (-1)^{k+1} \frac{\alpha_{m-k}^{(n)}}{(m-k)!},$$

y por lo tanto

$$\alpha_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^{(n)} \alpha_{m-k}^{(n)} (-1)^{k+1} \frac{(m-1)!}{(m-k)!}$$

para $m \geq 1$, que es precisamente la expansión determinante (1.40) por la primera columna. □

1.5.5 Fórmulas Explícitas

Definimos el operador $A \in \mathscr{L}(L^2(a,b))$,

$$(Af)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y) dy, \tag{1.42}$$

donde K es continua sobre $[a,b] \times [a,b]$.

Teorema 1.80. Si $A \in \mathscr{J}_1$ es de la forma (1.42), entonces

$$\mathrm{Tr}(A) = \int_a^b K(x,x) dx, \tag{1.43}$$

Prueba. Probemos la fórmula (1.43) cuando $[a,b] = [0,1]$. Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la familia de funciones $\{\phi_{n;m}\}_{m=1}^{2^n}$ definida por

$$\phi_{n;m}(x) = \begin{cases} 2^{n/2}, & (m-1)/2^n \leq x < m/2^n \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Sea P_n la proyección ortogonal sobre $V_n = \text{span}\{\phi_{n;m}\}_{m=1}^{2^n}$. Dado $f \in L^2(0,1)$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $g \in V_n$ tales que $\|f - g\|_2 < \varepsilon$; luego $\cup_{m=1}^{\infty}\{\phi_{n;m}\}_{m=1}^{2^n}$ genera un subespacio denso en $L^2(0,1)$. Construimos una base $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ para este subespacio del siguiente modo: hacemos $\varphi_1 = \phi_{1;1}$, $\varphi_2 = \phi_{1;2}$, y suponiendo definidos $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2^n}$, como $V_n \subset V_{n+1}$, completamos este conjunto a una base $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2^{n+1}}$ de V_{n+1}. En general, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ no es una base ortonormal, así que aplicamos el proceso de Gram-Schmidt obteniendo una base ortonormal $\psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots$ de $L^2(0,1)$, tal que $\text{span}\{\psi_k\}_{k=1}^{n} = \text{span}\{\phi_k\}_{k=1}^{n}$ para cada $n \geq 1$. Así $\psi_1, \ldots, \psi_{2^n} \in V_n$ y

$$\begin{aligned}\text{Tr}(A) &= \sum_{k=1}^{\infty}\langle\psi_k, A\psi_k\rangle = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\langle\psi_k, A\psi_k\rangle = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\langle P_n\psi_k, AP_n\psi_k\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\langle\psi_k, P_nAP_n\psi_k\rangle = \lim_{n\to\infty}\text{Tr}(P_nAP_n).\end{aligned}$$

Pero

$$\text{Tr}(P_nAP_n) = \sum_{m=1}^{2^n}\langle\phi_{n;m}, A\phi_{n;m}\rangle = 2^n\sum_{m=1}^{2^n}\int\int_{(m-1)/2^n \leq x,y<m/2^n}[K(x,y)]dx\,dy;$$

de donde por la continuidad uniforme de K, la integral converge a $\displaystyle\int_0^1 K(x,x)dx$ cuando $n \to \infty$.
■

Teorema 1.81. Si $A \in \mathscr{J}_1$ está dado por (1.42), entonces

$$\det(I - A) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\alpha_n/n!$$

donde

$$\alpha_n = \int_a^b \cdots \int_a^b K\begin{pmatrix}x_1 & \ldots & x_n\\ x_1 & \ldots & x_n\end{pmatrix}dx_1\cdots dx_n,$$

con

$$K\begin{pmatrix}x_1 & \ldots & x_n\\ y_1 & \ldots & y_n\end{pmatrix} = \det[(K(x_i,y_j))_{1\leq i,j\leq n}].$$

Nota. Esta fue la expansión original del determinante de Fredholm, presentada en la introducción.

Prueba. Para cada $n \geq 1$, definimos $Q_n : \otimes^n L^2(a,b) \to \Lambda^n(L^2(a,b))$ por

$$Q_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\sigma_n}\text{sgn}(\pi)f_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\pi(n)} = \frac{1}{\sqrt{n!}}f_1 \wedge \cdots \wedge f_n.$$

Es fácil probar que $Q_n^* = Q_n$ y $Q_n^2 = Q_n$; luego Q_n es la proyección ortogonal sobre $\text{Ran}\, Q_n = \Lambda^n(L^2(a,b))$.

Definimos $C_n = Q_n(\otimes^n A)Q_n = Q_n\Lambda^n(A)Q_n$; escogiendo cualquier base ortonormal $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $L^2(a,b)$,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\Lambda^n(A) &= \sum_{i_1<\cdots<i_n} \langle \varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_n}, \Lambda^n(A)\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_n}\rangle \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_n} \frac{1}{n!}\langle \varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_n}, \Lambda^n(A)\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_n}\rangle \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_n} \langle Q_n\varphi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{i_n}, \Lambda^n(A)Q_n\varphi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{i_n}\rangle \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_n} \langle \varphi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{i_n}, Q_n\Lambda^n(A)Q_n\varphi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{i_n}\rangle = \operatorname{Tr} C_n.
\end{aligned}
$$

El operador C_n está determinado por

$$
C_n(f_1\otimes\cdots\otimes f_n) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\sigma_n}\operatorname{sgn}(\pi)Af_{\pi(1)}\otimes\cdots\otimes Af_{\pi(n)},
$$

$$
\begin{aligned}
&[C_n(f_1\otimes\cdots\otimes f_n)](x_1,\ldots,x_n) \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\sigma_n}\int\cdots\int \operatorname{sgn}(\pi)K(x_1,y_{\pi(1)})\cdots K(x_n,y_{\pi(n)})f_1(y_1)\cdots f_n(y_n)dy_1\cdots dy_n \\
&= \frac{1}{n!}\int\cdots\int K\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ y_1 & \ldots & y_n\end{pmatrix}(f_1\otimes\cdots\otimes f_n)(y_1,\ldots,y_n)dy_1\cdots dy_n.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la traza de C_n está dada como en la fórmula (1.43), i.e.

$$
\operatorname{Tr} C_n = \frac{1}{n!}\alpha_n.
$$

Esto concluye la prueba. □

Teorema 1.82 (Fórmula de Hilbert-Fredholm). Sea $A \in \mathscr{I}_2$ de la forma (1.42). Entonces $\det_2(I-A) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\alpha_m^{(2)}(A)/m!$ donde

$$
\alpha_m^{(2)} = \int_a^b\cdots\int_a^b \tilde{K}\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ x_1 & \ldots & x_n\end{pmatrix}dx_1\cdots dx_n,
$$

y

$$
\tilde{K}\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ y_1 & \ldots & y_n\end{pmatrix} = \det[(K(x_i,y_j)(1-\delta_{ij}))_{1\le i,j\le n}];
$$

($\det_2$ está dado por la fórmula anterior para det si $K(x,x)=0$ para todo x).

Prueba. Probaremos el resultado para $A \in \mathscr{I}_1$, de donde se seguirá por continuidad para $A \in \mathscr{I}_2$. Sea

$$
\alpha_m(\lambda) = \int_a^b\cdots\int_a^b K_\lambda\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ x_1 & \ldots & x_n\end{pmatrix}dx_1\cdots dx_n,
$$

donde $(K_\lambda)_{ij} = K(x_i, x_j)(1 - \lambda\delta_{ij})$ para $1 \leq i, j \leq n$. Derivamos α_m con respecto a λ; usamos para esto la fórmula conocida de la derivada del determinante. Así obtenemos

$$\frac{d\alpha_m}{d\lambda} = -m\left(\int_a^b K(x,x)dx\right)\alpha_{m-1}(\lambda),$$

de donde

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\alpha_m(\lambda)}{m!}\right) = (\operatorname{Tr} A)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\alpha_m(\lambda)}{m!}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\alpha_m(\lambda)}{m!} = e^{\lambda \operatorname{Tr}(A)}\det(1-A);$$

esta última fórmula para $\lambda = 1$ junto con la ecuación (1.36) prueban el resultado. $\square$

1.6 Otros resultados

Consideremos, para $\alpha \in \mathbb{R}$, la función h^α en $[0,1]$ definida por $h^\alpha(x) = x^\alpha$. La prueba del siguiente resultado, generalización natural del teorema de Weierstrass (que dice que los polinomios son densos en $L_2(0,1)$) puede hallarse en [1]:

Teorema 1.83 (Müntz). Supongamos que $\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}$ es una sucesión tal que

$$0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots .$$

Entonces $\overline{\operatorname{span}\{h^{\lambda_i}\}_{i=0}^{\infty}} = L_2(0,1)$ si y sólo si $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i} = \infty$.

Definición 1.18. Sea $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Un vector $h \in \mathscr{H}$ es llamado *vector cíclico* para A si

$$\overline{\operatorname{span}\{A^n h\}_{n=0}^{\infty}} = \mathscr{H}.$$

El siguiente resultado será de gran utilidad:

Teorema 1.84. Sea $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un operador acotado con un vector cíclico $h \in \mathscr{H}$. Entonces¡

(i) A^* es inyectivo.

(ii) Si $\varphi \neq 0$ es un autovector para A^*, entonces $\langle h, \varphi\rangle \neq 0$.

Prueba. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $A^*\varphi = \lambda\varphi$. Para cada $n \geq 0$,

$$\langle A^n h, \varphi\rangle = \langle h, A^{*n}\varphi\rangle = \langle h, \lambda^n\varphi\rangle = \lambda^n\langle h, \varphi\rangle,$$

de donde si $\lambda = 0$ (cuando A^* no fuere inyectivo, $\varphi \in \operatorname{Ker}(A^*)$) o $\langle h, \varphi\rangle = 0$, entonces

$$\varphi \in [\operatorname{span}\{A^n h\}_{n=0}^{\infty}]^\perp = \mathscr{H}^\perp = \{0\}$$

de la definición de vector cíclico. ■

Utilizaremos el siguiente resultado, hallado en [30]. La prueba, aunque larga, es bastante elemental y de fácil comprensión.

Teorema 1.85. Consideremos el espacio $E = L^p(\mu)$, $1 \leq p \leq +\infty$, donde (X, Σ, μ) es un espacio provisto de una medida σ-finita. Supongamos que $T \in \mathscr{L}(E)$ sea un operador dado por un núcleo $K \geq 0$ $\Sigma \times \Sigma$-medible, y verificando las siguientes hipótesis:

(i) Alguna potencia T^n de T es compacta;

(ii) Si $S \in \Sigma$, $\mu(S) > 0$ y $\mu(X \setminus S) > 0$ entonces

$$\int_{X \setminus S} \int_S K(s,t) d\mu(s) d\mu(t) > 0.$$

Entonces $r(T)$ es un valor propio simple de T correspondiente a una función propia f tal que $f(s) > 0$ en casi todo punto. Además, si $K(s,t) > 0$ en casi todo punto (con respecto a $\mu \times \mu$), entonces todo otro valor propio μ de T posee módulo $|\lambda| < r(T)$.

El siguiente resultado puede hallarse en [16].

Teorema 1.86. Sea B un espacio de Banach. Sea $A \in \mathscr{L}(B)$ un operador que no posee singularidades en el semieje negativo, y

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq C|\lambda^{-1}|$$

para todo $\lambda < 0$. Entonces $\mathrm{Ker}(A) \cap \overline{\mathrm{Ran}(A)} = \emptyset$ la suma de los subespacios $\mathrm{Ker}(A)$ y $\overline{\mathrm{Ran}(A)}$ es un subespacio cerrado, y si B es reflexivo, entonces

$$B = \mathrm{Ker}(A) \oplus \overline{\mathrm{Ran}(A)}.$$

El siguiente teorema es la base de la reformulación de la Hipótesis de Riemann que será estudiada. Este teorema, ha servido para establecer además otras reformulaciones de la Hipótesis de Riemann. La prueba puede hallarse en [8]:

Teorema 1.87 (Beurling). Sea $\rho(x) = x - [\![x]\!]$ la parte fraccionaria de x y

$$M = \left\{ f / f(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \rho\left(\frac{\theta_k}{x}\right), \sum_{k=1}^{N} a_k \theta_k = 0,\ 0 < \theta_k \leq 1, a_k \in \mathbb{C}, 1 \leq k \leq N \right\}$$

entonces $\overline{M} = L^p(0,1)$, $1 \leq p \leq \infty$ si y sólo si $\zeta(s) \neq 0$, para todo $\sigma > p^{-1}$.

Capítulo 2

La Hipótesis de Riemann como un problema de Análisis Funcional

En este capítulo reformulamos la Hipótesis de Riemann (denotada HR) como un problema de análisis funcional; más precisamente, a una ecuación integral de primera especie, mediante un operador A_ρ. Entre otras cosas, se realiza el análisis del operador A_ρ, caracterizando el espectro de éste como el conjunto de ceros de una función entera, relacionada con el determinante de Fredholm del operador. Luego se dan algunos resultados sobre la distribución angular de los autovalores de A_ρ, no muy comunes en la literatura. Finalmente, se analizan otros problemas asociados al análisis del operador A_ρ, tales como el problema de completitud de la perturbación $A_\rho(\alpha)$ de A_ρ.

2.1 El operador A_ρ y la reformulación del problema

Necesitaremos el siguiente lema:

Lema 2.1. Si $\displaystyle\int_0^1 \frac{|f(x)|}{x}dx < \infty$, entonces

$$\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) f(x)dx = \theta \int_0^1 \frac{f(x)}{x}dx - \sum_{n=1}^{\infty} n \int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} f(x)dx.$$

donde $\rho(x) = x - [\![x]\!]$ es la parte fraccionaria de x.

Prueba. Denotamos por χ_S a la función característica del conjunto S, la función $\chi_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in S, \\ 0, & \text{si } x \notin S. \end{cases}$$

Si $\theta, x \in (0,1]$, entonces $\dfrac{\theta}{n+1} < x \leq \dfrac{\theta}{n}$ si y sólo si $n \leq \dfrac{\theta}{x} < n+1$, esto es $\chi_{(\frac{\theta}{n+1},\frac{\theta}{n}]}(x) = 1$ si y sólo si $\rho\left(\dfrac{\theta}{n}\right) = \dfrac{\theta}{x} - n$;

Así escribimos

$$\rho\left(\frac{\theta}{x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\theta}{x} - n\right)\chi_{(\frac{\theta}{n+1},\frac{\theta}{n}]}(x) + \frac{\theta}{x}\chi_{(\theta,1]}(x), \tag{2.1}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) f(x)dx &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}}\left(\frac{\theta}{x} - n\right) f(x)dx + \int_\theta^1 \frac{\theta}{x} f(x)dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\theta\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} \frac{f(x)}{x}dx - n\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} f(x)dx\right] + \theta\int_\theta^1 \frac{f(x)}{x}dx.
\end{aligned}$$

Luego si $\displaystyle\int_0^1 \frac{|f(x)|}{x}dx < \infty$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) f(x)dx &= \left[\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} \frac{f(x)}{x}dx + \int_\theta^1 \frac{f(x)}{x}dx\right] - \sum_{n=1}^{\infty} n\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} f(x)dx \\
&= \theta\int_0^1 \frac{f(x)}{x}dx - \sum_{n=1}^{\infty} n\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} f(x)dx
\end{aligned}$$

□

Usaremos el teorema 1.87; para ello utilizamos

$$M = \left\{ f \in L^2(0,1) : f(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k\rho\left(\frac{\theta_k}{x}\right), \sum_{k=1}^{N} a_k\theta_k = 0,\ 0 < \theta_k \leq 1, a_k \in \mathbb{C}, 1 \leq k \leq N \right\}.$$

Definición 2.1. Definimos el operador $A_\rho : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ mediante

$$[A_\rho f](\theta) = \int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) f(x)dx$$

para $f \in L^2(0,1)$.

El siguiente teorema no sólo muestra que A_ρ está bien definido, sino que lo clasifica dentro de una conocida subclase de los operadores compactos:

Teorema 2.2. El operador A_ρ es de Hilbert-Schmidt.

Prueba. En efecto, de $0 \leq \rho\left(\dfrac{\theta}{x}\right) \leq 1$ se sigue que

$$\int_0^1\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right)^2 d\theta\, dx < \infty.$$

Por lo tanto se cumplen las hipótesis del teorema 1.56, de donde se sigue el resultado. □

Presentamos dos reformulaciones de la Hipótesis de Riemann, en términos del operador A_ρ; esto justifica nuestro interés en este operador:

Teorema 2.3. La Hipótesis de Riemann es equivalente a cualquiera de las siguientes afirmaciones:

(i) $\mathrm{Ker} A_\rho = \{0\}$;

(ii) $h \notin \mathrm{Ran} A_\rho$, donde $h(x) = x$ para todo x (es decir, h es la función identidad).

Prueba.

(HR$\Rightarrow$ ii) Supongamos que no se cumple (ii), esto es, existe $g \in L^2(0,1)$ tal que $h = A_\rho g$,

$$\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) g(x)dx = \theta.$$

Luego si $f \in M$;

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \rho\left(\frac{\theta_k}{x}\right), \qquad \sum_{k=1}^{N} a_k\theta_k = 0;$$

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=1}^{N} a_k \left\langle \rho\left(\frac{\theta_k}{x}\right), g(x)\right\rangle = 0$$

y luego $g \in M^\perp$, $g \neq 0$ lo que implica que $\overline{M} \neq L^2(0,1)$. Esto niega la HR (por el teorema 1.87).

(ii $\Rightarrow$ HR) Verifiquemos la fórmula

$$\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) x^r dx = \frac{\theta}{r} - \frac{\zeta(r+1)}{r+1}\theta^{r+1}, \tag{2.2}$$

válida para $\mathrm{Re}\, r > -1$, $r \neq 0$. En efecto, del lema 2.1 aplicado a $f(x) = x^r$, $\mathrm{Re}\, r > 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) x^r dx &= \theta\int_0^1 x^{r-1}dx - \sum_{n=1}^{\infty} n \int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} x^r dx \\
&= \frac{\theta}{r} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r+1}\left[\left(\frac{\theta}{n}\right)^{r+1} - \left(\frac{\theta}{n+1}\right)^{r+1}\right] \\
&= \frac{\theta}{r} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r+1}\theta^{r+1} n\left[\frac{1}{n^{r+1}} - \frac{1}{(n+1)^{r+1}}\right] \\
&= \frac{\theta}{r} - \frac{\theta^{r+1}}{r+1}\sum_{n=1}^{\infty} n\left[\frac{1}{n^{r+1}} - \frac{1}{(n+1)^{r+1}}\right] \\
&= \frac{\theta}{r} - \frac{\theta^{r+1}}{r+1}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} - \frac{1}{(n+1)^r} + \frac{1}{(n+1)^{r+1}}\right] \\
&= \frac{\theta}{r} - \frac{\theta^{r+1}}{r+1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{r+1}}\right] = \frac{\theta}{r} - \frac{\theta^{r+1}}{r+1}\zeta(r+1).
\end{aligned}$$

Extendemos esta fórmula para $\mathrm{Re}\, r > -1$; para esto basta comprobar que ambos lados de la ecuación (2.2), válida por ahora para $\mathrm{Re}\, r > 0$, son funciones analíticas para $\mathrm{Re}\, r > -1$, $r \neq 0$ de donde se sigue la igualdad para $\mathrm{Re}\, r > -1$, $r \neq 0$.

Ahora, supongamos que no se cumple la HR, esto es, existe $r \notin \mathbb{R}$ con $\operatorname{Re} r > -\dfrac{1}{2}$ tal que $\zeta(r+1) = 0$. De la ecuación (2.2)

$$\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) r x^r dx = \theta, \tag{2.3}$$

esto es, $h \in \operatorname{Ran} A_\rho$. Por lo tanto negamos (ii)

(HR$\Rightarrow$i) Si existe $g \in L^2(0,1)$ tal que $A_\rho g = 0$, es decir

$$\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) g(x) dx = 0,$$

de donde $g \in M^\perp$ y por lo tanto $\overline{M} \neq L^2(0,1)$.

(i$\Rightarrow$HR) Supongamos que no se cumple la HR, esto es, existe $r \notin \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Re} r > -\dfrac{1}{2}$ y $\zeta(r+1) = 0$. Por lo tanto (2.3) se cumple, y tomando partes imaginarias

$$\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) \operatorname{Im}(r x^r) dx = 0,$$

de donde $\operatorname{Ker} A_\rho \neq \{0\}$. $\square$

2.2 Análisis espectral de A_ρ

Teorema 2.4. Si $A_\rho \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda$, $\lambda \neq 0$, $\varphi_\lambda \in L^2(0,1)$, $\varphi_\lambda \neq 0$, entonces $T(\lambda^{-1}) = 0$ y $\varphi_\lambda(x) = xT'(x/\lambda)$, donde

$$T(\mu) = 1 - \mu + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r+1} \frac{\prod_{l=1}^{r} \zeta(l+1)}{(r+1)!(r+1)} \mu^{r+1}.$$

Prueba. Si

$$\lambda \varphi_\lambda(\theta) = \int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) \varphi_\lambda(x) dx$$

entonces

$$|\lambda||\varphi_\lambda(\theta)| \leq \left[\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right)^2\right]^{1/2} \left[\int_0^1 \varphi_\lambda(x)^2 dx\right]^{1/2} \tag{2.4}$$

Elevando al cuadrado e integrando en la ecuación (2.1)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right)^2 dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} \left(\frac{\theta}{x} - n\right)^2 dx + \int_\theta^1 \left(\frac{\theta}{x}\right)^2 dx \\
&= \theta \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} (y^{-1} - n)^2 dy + \theta^2 \int_\theta^1 \frac{dx}{x^2} = \theta \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} (y^{-1} - n)^2 dy + \theta - \theta^2 \\
&= \theta \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} (y^{-1} - n)^2 dy + 1 - \theta\right) \leq \theta \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} (y^{-1} - n)^2 dy + 1\right) = C\theta,
\end{aligned}$$

donde C es una constante positiva (no depende de θ). Reemplazando en (2.4)

$$|\lambda||\varphi_\lambda(\theta)| \leq C\|\varphi_\lambda\|_2\theta^{1/2} \tag{2.5}$$

lo que implica que $\int_0^1 \frac{|\varphi_\lambda(\theta)|}{\theta}d\theta < \infty$. Por el lema 2.1

$$\lambda\,\varphi_\lambda(\theta) = \theta\int_0^1 \frac{\varphi_\lambda(x)}{x}dx - \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} \varphi_\lambda(x)dx.$$

Por la cota dada por (2.5):

$$\begin{aligned}
n\left|\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} \varphi_\lambda(x)dx\right| &\leq C\|\varphi_\lambda\|_2|\lambda^{-1}|n\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} x^{1/2}dx\\
&= C\|\varphi_\lambda\|_2\theta^{3/2}|\lambda^{-1}|n\left[\frac{1}{n^{3/2}} - \frac{1}{(n+1)^{3/2}}\right]\\
&\leq C\|\varphi_\lambda\|_2|\lambda^{-1}|n\left[\frac{1}{n^{3/2}} - \frac{1}{(n+1)^{3/2}}\right]\\
&= C\|\varphi_\lambda\|_2|\lambda^{-1}|n\left[n^{-1/2} - (n+1)^{-1/2} + (n+1)^{-3/2}\right]
\end{aligned}$$

de donde la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} \varphi_\lambda(x)dx$ converge uniformemente. Los términos de esta serie son funciones continuas, pues el integrando es acotado por (2.5). Por lo tanto la suma de la serie es continua, y φ_λ es continua.

Probemos que $\varphi_\lambda \in C^\infty[0,1]$. Observe que para todo $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m}\frac{d}{d\theta}\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} \varphi_\lambda(x)dx &= \sum_{n=1}^{m} n\left[\varphi_\lambda\left(\frac{\theta}{n}\right)\frac{1}{n} - \varphi_\lambda\left(\frac{\theta}{n+1}\right)\frac{1}{n+1}\right]\\
&= \sum_{n=1}^{m}\varphi_\lambda\left(\frac{\theta}{n}\right) - \sum_{n=1}^{m}\varphi_\lambda\left(\frac{\theta}{n+1}\right) + \sum_{n=1}^{m}\varphi_\lambda\left(\frac{\theta}{n+1}\right)\frac{1}{n+1}\\
&= -\varphi_\lambda\left(\frac{\theta}{m+1}\right) + \varphi_\lambda(\theta) + \sum_{n=1}^{m}\frac{\varphi_\lambda\left(\frac{\theta}{n+1}\right)}{n+1}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, por (2.5)

$$\left|\varphi_\lambda\left(\frac{\theta}{n+1}\right)\right| \leq C|\lambda^{-1}|\|\varphi_\lambda\|_2\theta^{1/2}(n+1)^{-1/2},$$

de donde la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_\lambda(\frac{\theta}{n+1})}{n+1}$ converge uniformemente, a una función continua. Por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{d\theta}\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} \varphi_\lambda(x)dx$ converge uniformemente a una función continua,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{d\theta}\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} \varphi_\lambda(x)dx = \varphi_\lambda(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_\lambda(\frac{\theta}{n+1})}{n+1}.$$

Por todo lo anterior, $\varphi_\lambda \in C^1[0,1]$,

$$\frac{d}{d\theta}\sum_{n=1}^{\infty} n \int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} \varphi_\lambda(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{d\theta} \int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} \varphi_\lambda(x)dx.$$

De manera análoga, probamos que $\varphi_\lambda \in C^{(k+1)}[0,1]$ y

$$\lambda \varphi_\lambda^{(k+1)}(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_\lambda^{(k)}(\frac{\theta}{n})}{n^{k+1}} \tag{2.6}$$

para todo $k \geq 1$.

Si $\|\varphi_\lambda\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |\varphi_\lambda(x)|$ entonces de (2.6)

$$\|\varphi_\lambda^{k+1}\|_\infty \leq |\lambda^{-1}| \|\varphi_\lambda^{(k)}\|_\infty \zeta(k+1) \leq |\lambda^{-1}| \|\varphi_\lambda'\|_\infty \prod_{l=1}^{\infty} \zeta(l+1),$$

donde $\prod_{l=1}^{\infty} \zeta(l+1)$ converge pues

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} [\zeta(l+1) - 1] &= \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{l+1}} = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{n^{l+1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{n^l} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 < \infty. \end{aligned}$$

Por el teorema de Taylor

$$\varphi_\lambda(x) = \sum_{l=0}^{n} \frac{\varphi_\lambda^{(l)}(0)}{l!} x^l + \frac{\varphi_\lambda^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

donde $\xi \in [0,1]$ y

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\varphi_\lambda^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \lim_{n\to\infty} \left| |x|^{n+1} \frac{|\lambda|^{-n}}{(n+1)!} \prod_{l=1}^{\infty} \zeta(l+1) \|\varphi_\lambda'\| \right| = 0;$$

lo que prueba que φ_λ es analítica en $[0,1]$. Pero esto prueba además que φ_λ puede ser extendida a una función entera (la suma de la serie arriba tiene, según la fórmula, radio de convergencia infinito). Como $\varphi_\lambda(0) = 0$ por (2.4) escribimos $\varphi_\lambda(x) = \sum_{r=1}^{\infty} c_r x^r$, con $c_r = c_r(\lambda)$. Substituyendo en la ecuación

$$A_\rho \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} c_r \int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) x^r dx &= \int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) \left[\sum_{r=1}^{\infty} c_r x^r\right] dx = \int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) \varphi_\lambda(x) dx \\ &= \lambda \varphi_\lambda(\theta) = \lambda \sum_{r=1}^{\infty} c_r \theta^r = \sum_{r=1}^{\infty} \lambda c_r \theta^r. \end{aligned}$$

De la ecuación (2.2),

$$\sum_{r=1}^{\infty} c_r \left[\frac{\theta}{r} - \frac{\theta^{r+1}}{r+1}\zeta(r+1)\right] = \lambda c_1 \theta + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda c_{r+1}\theta^{r+1},$$

de donde $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{c_r}{r} = \lambda c_1$, y para todo $r \geq 1$

$$-\frac{\zeta(r+1)}{r+1} c_r = \lambda c_{r+1}, \tag{2.7}$$

y

$$c_{r+1} = c_1(-1)^{-r}\frac{\lambda^{-r}}{(r+1)!}\prod_{l=1}^{r}\zeta(l+1),$$

para todo $r \geq 1$. Es obvio que $c_1 \neq 0$, de otro modo $c_{r+1} = 0$, para todo $r \geq 1$, y entonces $\varphi_\lambda = 0$, absurdo.

Por último

$$\begin{aligned} T(\lambda^{-1}) &= 1 - \lambda^{-1} - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{c_{r+1}}{c_1} \cdot \frac{\lambda^{-1}}{r+1} = 1 - \lambda^{-1} - \frac{\lambda^{-1}}{c_1}\left[\sum_{r=1}^{\infty} \frac{c_{r+1}}{r+1}\right] \\ &= 1 - \lambda^{-1} - \frac{\lambda^{-1}}{c_1}\left[\sum_{r=1}^{\infty}\frac{c_r}{r} - c_1\right] = 1 - \frac{\lambda^{-1}}{c_1}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{c_r}{r}; \end{aligned}$$

de donde como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_r}{r} = \lambda c_1$, entonces $T(\lambda^{-1}) = 0$. De la fórmula para T'

$$T'(\mu) = -1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1}\prod_{l=1}^{r}\zeta(l+1)}{(r+1)!}\mu^r$$

tenemos

$$\begin{aligned} T'\left(\frac{x}{\lambda}\right) &= -1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1}\prod_{l=1}^{r}\zeta(l+1)}{(r+1)!}\frac{x^r}{\lambda^r} = -1 - \sum_{r=1}^{\infty}\frac{c_{r+1}}{c_1}x^r \\ &= -c_1^{-1}\sum_{r=0}^{\infty} c_{r+1}x^r = -c_1^{-1}\sum_{r=1}^{\infty} c_r x^{r-1} = -c_1^{-1}x^{-1}\varphi_\lambda(x), \end{aligned}$$

esto es,

$$\varphi_\lambda(x) = -c_1 x T'(x/\lambda).$$

El escalar $c_1 \neq 0$ en la última ecuación puede elegirse libremente; tomamos $c_1 = -1$. □

Observamos de la prueba del último teorema que

$$A_\rho \varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda + \lambda T(\lambda^{-1})h. \tag{2.8}$$

para todo $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$. En efecto, de las relaciones (2.7),

$$\begin{aligned}
[A_\rho\varphi_\lambda](\theta) &= \sum_{r=1}^{\infty} c_r \left[\frac{\theta}{r} - \frac{\theta^{r+1}}{r+1}\zeta(r+1)\right] = \sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{c_r}{r}\theta + \lambda c_{r+1}\theta^{r+1}\right] \\
&= \lambda\sum_{r=1}^{\infty} c_{r+1}\theta^{r+1} + \theta\sum_{r=1}^{\infty}\frac{c_r}{r} = \lambda\left[\sum_{r=1}^{\infty} c_r\theta^r - c_1\theta\right] + \theta\sum_{r=1}^{\infty}\frac{c_r}{r} \\
&= \lambda\sum_{r=1}^{\infty} c_r\theta^r - \lambda c_1\left[1 - \frac{\lambda^{-1}}{c_1}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{c_r}{r}\right]\theta \\
&= \lambda\varphi_\lambda(\theta) + \lambda(-c_1)T(\lambda^{-1})h(\theta) = \lambda\varphi_\lambda(\theta) + \lambda T(\lambda^{-1})h(\theta)
\end{aligned}$$

Reescribimos la ecuación (2.2) como

$$A_\rho h^r = \frac{1}{r}h - \alpha_r h^{r+1} \tag{2.9}$$

donde $\alpha_r = \dfrac{\zeta(r+1)}{r+1} \neq 0$. De ahí

$$\operatorname{span}\{A_\rho^n h\}_{n=0}^{\infty} = \operatorname{span}\{h^n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Por el teorema de Müntz 1.83 (con $\lambda_k = k+1$, $k \geq 0$)

$$\overline{\operatorname{span}\{A_\rho^n h\}_{n=0}^{\infty}} = \overline{\operatorname{span}\{h^n\}_{n=1}^{\infty}} = L^2(0,1) = \mathscr{H}$$

y por lo tanto h es un vector cíclico para A_ρ. De la ecuación (2.8), se sigue que φ_λ es un vector cíclico para A_ρ si $T(\lambda^{-1}) \neq 0$.

Hemos probado además que A_ρ^* es inyectivo (teorema 1.84).

Lema 2.5. La función T es una función entera de orden uno y tipo uno.

Prueba. Escribimos $T(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r$, donde

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = -1, \qquad a_r = \frac{(-1)^r}{r!r}\prod_{l=1}^{r-1}\zeta(l+1) \text{ para } r \geq 2. \tag{2.10}$$

Verificamos primero que T es entera hallando el radio de convergencia R de la serie dada arriba. Por la fórmula de Hadamard

$$R^{-1} = \overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n|^{1/n},$$

pero existe el límite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\prod_{l=1}^{n}\zeta(l+1)/(n+1)!(n+1)}{\prod_{l=1}^{n-1}\zeta(l+1)/n!n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\zeta(n+1)}{(n+1)^2} = 0,$$

pues dado que $\prod_{l=1}^{\infty}\zeta(l+1)$ converge, $\lim_{n\to\infty}\zeta(n+1)=1$. Por lo tanto, por el criterio de la razón

$$R^{-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=0,$$

y $R=\infty$.

Ahora calculamos el orden ρ y el tipo σ de la función T usando el teorema 1.3.

$$\rho=\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(1/\sqrt[n]{|a_n|})}=\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{\ln(1/|a_n|)}=\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\ln n^n}{\ln(1/|a_n|)}=\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$$

donde $x_n=\ln n^n$, $y_n=\ln(1/|a_n|)$. Usamos el criterio de Stolz ([18], teorema 9.1): $\lim_{n\to\infty}y_n=\infty$ y

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)^{n+1}-\ln n^n}{\ln\dfrac{(n+1)!(n+1)}{\prod_{l=1}^{n}\zeta(l+1)}-\ln\dfrac{n!n}{\prod_{l=1}^{n-1}\zeta(l+1)}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+1/n)^n+\ln(n+1)}{\ln(1+1/n)-\ln\zeta(n+1)+\ln(n+1)}=1,\end{aligned}$$

de donde

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=1.$$

Como $\rho=1$,

$$\sigma=\frac{1}{e}\overline{\lim}_{n\to\infty}n|a_n|^{1/n}=\frac{1}{e}\overline{\lim}_{n\to\infty}(n^n|a_n|)^{1/n}=\frac{1}{e}\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n^{1/n}$$

donde $x_n=n^n|a_n|$. Calculando

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\prod_{l=1}^{n}\zeta(l+1)/(n+1)!(n+1)}{n^n\prod_{l=1}^{n-1}\zeta(l+1)/n!n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{n\zeta(n+1)}{n+1}=e,\end{aligned}$$

de donde por el criterio de la razón

$$\sigma=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{e}\cdot e=1.$$

El resultado está probado. ∎

Notas. Analizando la representación (2.10) de $T(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, tenemos:

(i) Como los a_n son reales,

$$\overline{T(z)} = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n} = \sum_{n=1} \overline{a_n}\, \overline{z}^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{z}^n = T(\overline{z})$$

y los autovalores de A_ρ vienen en pares conjugados ($T(\lambda^{-1}) = 0$ implica $T(\overline{\lambda}^{-1}) = \overline{T(\lambda^{-1})} = 0$).

(ii) Como $a_n = (-1)^n |a_n|$ para todo $n \geq 0$, si r es un real negativo,

$$T(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(-r)^n \geq |a_0| = 1$$

y por lo tanto A_ρ no posee autovalores negativos.

Teorema 2.6. La función entera T y todas sus derivadas $T^{(q)}$, $q \geq 1$, poseen un número infinito de ceros no reales.

Prueba. Usaremos el teorema 1.14. Mostremos que ni T ni ninguna de sus derivadas $T^{(q)}$, $q \geq 1$, obedecen las desigualdades dadas en el teorema. En efecto, escribimos $T(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r$ donde los a_r están dados por (2.10). Entonces

$$T^{(q)}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+q)!}{r!} a_{r+q} z^r,$$

para $q \geq 0$. Suponemos, por reducción al absurdo, que se cumplen las desigualdades dadas en el teorema 1.14 para $T^{(q)}$:

$$(r+1)\frac{(r+q+1)!}{(r+1)!} a_{r+q+1} \frac{(r+q-1)!}{(r-1)!} a_{r+q-1} < r \left[\frac{(r+q)!}{r!} a_{r+q}\right]^2$$

entonces

$$\zeta(r+q+1) < (1-(r+q)^{-2})\zeta(r+q)$$

o

$$(r+q)^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-r-q} < \sum_{n=2}^{\infty} n^{-r-q}(1-n^{-1}),$$

desigualdad que no es válida para r lo suficientemente grande (pues el lado izquierdo decrece según un factor polinomial, mientras que el lado derecho lo hace exponencialmente). Por lo tanto $T^{(q)}$ para $q \geq 0$ posee ceros no reales. Finalmente, por el teorema 1.15, entonces $T^{(q)}$, $q \geq 0$, posee un número infinito de ceros no reales. ∎

Teorema 2.7. Para el operador A_ρ, se cumple que $\lambda_1(A_\rho) = r(A_\rho) > 0$, el cual es un autovalor de multiplicidad algebraica uno. Además, todo otro autovalor λ de T satisface $|\lambda| < r(A_\rho)$.

Prueba. Basta verificar las condiciones del teorema 1.85. En efecto, para

$$K(\theta, x) = \rho(\theta/x),$$

se cumple que $K(\theta, x) \geq 0$, y $K(\theta, x) = 0$ si y sólo si $\theta/x = k$ es un entero. Luego Fijando $x \in [0,1]$, $K(\theta, x) = 0$ sólo si $\theta = kx$ con k entero, lo que forma un conjunto discreto, de medida cero. Luego si $\mu(S) > 0$, $S \subset [0,1]$ entonces

$$\int_S K(\theta, x) d\mu(\theta) > 0$$

para todo $x \neq 0$, y si $\mu([0,1] \setminus S) > 0$,

$$\int_{[0,1]\setminus S} \int_S K(\theta, x) d\mu(\theta) d\mu(x) > 0.$$

Más aún

$$\{(\theta, x) \in [0,1] : K(\theta, x) = 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(\theta, x) \in [0,1] : \theta = kx\},$$

un conjunto de medida cero siendo unión numerable de conjuntos de medida cero. ∎

2.3 Determinante de Fredholm de A_ρ

Como hemos visto, los valores propios no nulos de A_ρ son exactamente los ceros de la función T definida. Resulta entonces natural estudiar la relación entre T y el determinante de Fredholm $\det_2(\lambda I - A_\rho)$, función compleja que goza de la misma propiedad. Primero establecemos un lema:

Lema 2.8. En las fórmulas de Plemelj-Smithies (teorema 1.79), tenemos que

$$\alpha_2^{(2)} = \frac{\zeta(2)}{2} - 1.$$

Prueba. De las fórmulas de Hilbert-Fredholm (teorema 1.82),

$$\alpha_2^{(2)} = \int_0^1 \int_0^1 \left[-\rho\left(\frac{\theta}{x}\right) \rho\left(\frac{x}{\theta}\right) \right] dx\, d\theta.$$

Por la simetría del integrando,

$$\begin{aligned}
\alpha_2^{(2)} &= -2 \int_0^1 \int_0^\theta \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) \rho\left(\frac{x}{\theta}\right) dx\, d\theta = -2 \int_0^1 \int_0^\theta \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) \frac{x}{\theta}\, dx\, d\theta \\
&= -2 \left[\int_0^1 \int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) \frac{x}{\theta}\, dx\, d\theta - \int_0^1 \int_\theta^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) \frac{x}{\theta}\, dx\, d\theta \right] \\
&= -2 \left[\int_0^1 \int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) \frac{x}{\theta}\, dx\, d\theta - \int_0^1 \int_\theta^1 \frac{\theta}{x} \frac{x}{\theta}\, dx\, d\theta \right] \\
&= -2 \left[\int_0^1 \frac{1}{\theta} \left[\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) x\, dx \right] d\theta - \int_0^1 \int_\theta^1 dx\, d\theta \right]
\end{aligned}$$

Finalmente, de la fórmula (2.2),

$$\alpha_2^{(2)} = -2\int_0^1 \frac{1}{\theta}\left[\theta - \frac{\zeta(2)}{2}\theta^2\right] d\theta + 1 = -2\int_0^1 \left[1 - \frac{\zeta(2)}{2}\theta\right] d\theta + 1 = 1 - \frac{\zeta(2)}{2}. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.9. Para todo $\mu \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\det_2(I - \mu A_\rho) = e^\mu T(\mu).$$

Prueba. Sea $\lambda_j = \lambda_j(A_\rho) \in \sigma(A_\rho)\backslash\{0\}$ un autovalor de A_ρ; sabemos que λ_j tiene multiplicidad geométrica uno. Sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$\Omega_j = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda - \lambda_j| < \varepsilon\}, \qquad \Omega_j \cap \sigma(A_\rho) = \emptyset.$$

Sea $p_j = \mu(\lambda_j)$ la multiplicidad algebraica de λ_j, y $P_j = P_{\lambda_j}$ la proyección correspondiente. Por la proposición 1.44, el índice de λ_j con respecto al operador A_ρ es p_j; por el teorema 1.46, existen vectores principales $\{\varphi_{j;k}\}_{1\le k\le p_j}$ para A_ρ asociados al autovalor λ_j, y vectores principales $\{\psi_{j;k}\}_{1\le k\le p_j}$ de A_ρ^* asociados al autovalor $\overline{\lambda_j}$ tales que

$$\begin{array}{lll} (A_\rho - \lambda_j I)\varphi_{j;1} = 0, & (A_\rho - \lambda_j I)\varphi_{j;i+1} = \varphi_{j;i}, & 1 \le i \le p_j - 1; \\ (A_\rho^* - \overline{\lambda_j} I)\psi_{j;1} = 0, & (A_\rho^* - \overline{\lambda_j} I)\psi_{j;i+1} = \psi_{j;i}, & 1 \le i \le p_j - 1; \end{array}$$

$$\langle \psi_{j;p_j+1-l}, \varphi_{j;k}\rangle = \delta_{l,k}, \qquad 1 \le l, k \le p_j;$$

y la proyección sobre el autoespacio generalizado para λ_j está dada por

$$P_j w = \sum_{n=1}^{p_j} \langle \psi_{j;p_j+1-n}, w\rangle \varphi_{j;n}, \tag{2.11}$$

para todo $w \in L^2(0,1)$.

Reescribimos la ecuación (2.8) para $T(\lambda^{-1}) \neq 0$ en la forma (2.8) se escribe como

$$(\lambda I - A_\rho)^{-1} h = -\frac{\varphi_\lambda}{\lambda T(\lambda^{-1})}. \tag{2.12}$$

Integrando la ecuación (2.12) sobre $\Gamma_j = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_j| = r\}$ donde $0 < r < \varepsilon$, tenemos por que (2.11)

$$\sum_{n=1}^{p_j} \langle \psi_{j;p_j+1-n}, h\rangle \varphi_{j;n} = P_j h = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} (\lambda I - A_\rho)^{-1} h d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{\varphi_\lambda}{\lambda T(\lambda^{-1})} d\lambda.$$

Aplicaremos ahora $(A_\rho - \lambda_j)^k$, $1 \le k \le p_j - 1$ a la ecuación anterior; observe que

$$(A_\rho - \lambda_j I)^k \varphi_{j;n} = 0 \text{ si } n \le k, \qquad (A_\rho - \lambda_j I)^k \varphi_{j;n} = \varphi_{j;n-k} \text{ si } n \ge k+1.$$

Tenemos por (2.11) y el teorema 1.42, (ii) sobre la expansión del resolvente en λ_j,

$$\begin{aligned} \sum_{n=k+1}^{p_j} \langle \psi_{j;p_j+1-n}, h\rangle \varphi_{j;n-k} &= (A_\rho - \lambda_j I)^k P_j h = (A_\rho - \lambda_j I)^k A_{-1} h = A_{-(k+1)} h \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} (\lambda - \lambda_j)^k R_\lambda(A_\rho) h d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} (\lambda - \lambda_j)^k \frac{\varphi_\lambda}{\lambda T(\lambda^{-1})} d\lambda \end{aligned}$$

Para $k = p_j - 1$ tenemos:

$$\langle \psi_{j;1}, h\rangle \varphi_{j;1} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} (\lambda - \lambda_j)^{p_j - 1}\frac{\varphi_\lambda}{\lambda T(\lambda^{-1})}\,d\lambda.$$

Como h es un vector cíclico para A_ρ, entonces $\langle \psi_{j;1}, h\rangle \neq 0$ (teorema 1.84). Sea q_j la multiplicidad de λ_j^{-1} como cero de T. Como la integral a la derecha en la última ecuación no se anula, entonces el exponente correspondiente a la potencia de $(\lambda - \lambda_j)$ debe ser negativo, esto es $p_j - 1 - q_j < 0$, de donde $p_j \leq q_j$.

Probemos ahora que $p_j \geq q_j$. Definimos las funciones $\psi_{\mu;n}(x) = x^n T^{(n)}(\mu x)$ para $n \geq 1$. Observe ahora que $\psi_{\mu;1}(x) = xT'(\mu x) = \varphi_{\mu^{-1}}(x)$, de donde reescribimos la ecuación 2.8 como

$$A_\rho(\mu\psi_{\mu;1}) = \psi_{\mu;1} + T(\mu)h$$

para todo $\mu \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Como el lado derecho de esta ecuación es diferenciable con respecto a μ y A_ρ lineal, podemos derivar la ecuación para obtener

$$A_\rho(n\psi_{\mu;n} + \mu\psi_{\mu;n+1}) = \psi_{\mu;n+1} + T^{(n)}(\mu)h \tag{2.13}$$

para $n \geq 1$, lo que es fácil de probar por inducción, considerando que $\psi'_{\mu;n} = \psi_{\mu;n+1}$ para todo $n \geq 1$. Como q_j es la multiplicidad del cero λ_j^{-1} de T, entonces $T^{(l)}(\lambda_j^{-1}) = 0$ para $0 \leq l \leq q_j - 1$ y $T^{(q_j)}(\lambda_j^{-1}) \neq 0$. Haciendo $\mu = \lambda_j^{-1}$ en la ecuación (2.13) y considerando $1 < l \leq q_j$, tenemos:

$$(A_\rho - \lambda_j I)\psi_{\lambda_j^{-1},l} = -(l-1)\lambda_j A_\rho \psi_{\lambda_j^{-1};l-1} = -(l-1)\lambda_j[(A_\rho - \lambda_j I)\psi_{\lambda_j^{-1};l-1} + \lambda_j \psi_{\lambda_j^{-1};l-1}];$$

aplicando $(A_\rho - \lambda_j I)^{l-2}$ obtenemos

$$(A_\rho - \lambda_j I)^{l-1}\psi_{\lambda_j^{-1},l} = -(l-1)\lambda_j(A_\rho - \lambda_j I)^{l-1}\psi_{\lambda_j^{-1};l-1} - (l-1)\lambda_j^2(A_\rho - \lambda_j I)^{l-2}\psi_{\lambda_j^{-1};l-1}$$

ecuación de donde se prueba por inducción que

$$(A_\rho - \lambda_j I)^{l-1}\psi_{\lambda_j^{-1};l} = (-1)^{l-1}(l-1)!\lambda_j^{2(l-1)}\psi_{\lambda_j^{-1};1} \quad \text{para} \quad 2 \leq l \leq q_j$$
$$\text{y} \quad (A_\rho - \lambda_j I)^{l}\psi_{\lambda_j^{-1};l} = 0, \quad \text{para} \quad 1 \leq l \leq q_j.$$

Esto prueba que el conjunto de vectores $\{\psi_{\lambda_j^{-1};l}\}_{1\leq l\leq q_j}$ es un subconjunto de vectores l.i. de $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{Ker}((\lambda_j I - A_\rho)^k)$, lo que implica que $q_j \leq p_j$.

Las funciones D, $D(\mu) = \det_2(\mu I - A)$ y T son dos funciones enteras que poseen los mismos ceros, considerando multiplicidades. Luego existe una función entera V sin ceros tal que

$$D = VT.$$

Como A_ρ es de Hilbert-Schmidt, el orden de D es menor o igual a dos (teorema 1.77) y el orden de T es uno (un entero), por el teorema 1.12, $V = e^P$ donde P es un polinomio de grado menor o igual a 2, $P(\mu) = a\mu^2 + b\mu + c$. Entonces

$$D(\mu) = e^{a\mu^2 + b\mu + c}T(\mu), \tag{2.14}$$

para todo $\mu \in \mathbb{C}$.

A continuación evaluamos los valores de T, D y sus derivadas primera y segunda: de la expansión de T (2.10)

$$T(0) = 1, \qquad T'(0) = -1, \qquad T''(0) = 2a_2 = 2(-1)^2\frac{\zeta(2)}{2!2} = \frac{\zeta(2)}{2},$$

y de las fórmulas de Plemelj-Smithies (teorema 1.79) y el lema 2.8

$$D(0) = 1, \qquad D'(0) = 0, \qquad D''(0) = \alpha_2^{(2)}(A) = \frac{\zeta(2)}{2} - 1.$$

De la ecuación (2.14) en $\mu = 0$,

$$e^c = e^c T(0) = D(0) = 1,$$

de donde $D(\mu) = e^{a\mu^2 + b\mu}T(\mu)$. Derivando esta ecuación, tenemos

$$D'(\mu) = (2a\mu + b)D(\mu) + e^{a\mu^2+b\mu}T'(\mu),$$

y en $\mu = 0$,

$$0 = D'(0) = bD(0) + T'(0) = b - 1,$$

de donde $b = 1$ y $D(\mu) = e^{a\mu^2+\mu}T(\mu)$. Derivando por segunda vez la función D,

$$D''(\mu) = 2aD(\mu) + (2a\mu + 1)D'(\mu) + (2a+1)e^{a\mu^2+b\mu}T'(\mu) + e^{a\mu^2+\mu}T''(u),$$

y

$$\frac{\zeta(2)}{2} - 1 = D''(0) = 2aD(0) + D'(0) + T'(0) + T''(0) = 2a + 0 - 1 + \frac{\zeta(2)}{2},$$

de donde $a = 0$. Esto concluye la prueba del teorema. □

El resultado obtenido del teorema nos permite evaluar las trazas $\sigma_p^{(2)}$ para $p > 1$:

Teorema 2.10. $\sigma_2^{(2)} = 1 - \dfrac{\zeta(2)}{2}$, y para $p > 1$,

$$\sigma_{p+1}^{(2)} = -(p+1)a_{p+1} - a_p - \sum_{r=1}^{p-1} a_{p-r}\sigma_{r+1}^{(2)}. \tag{2.15}$$

Prueba. De las fórmulas de Plemelj-Smithies y el lema 2.8

$$\sigma_2^{(2)} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sigma_2^{(2)} & 0 \end{vmatrix} = -\alpha_2^{(2)} = 1 - \frac{\zeta(2)}{2}.$$

De la ecuacion (1.41), para μ lo suficientemente pequeño,

$$\frac{D'(\mu)}{D(\mu)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{n+1}^{(2)}\mu^n.$$

Si en esta fórmula reemplazamos $D(\mu) = e^{\mu}T(\mu)$,

$$1 + \frac{T'(\mu)}{T(\mu)} = \frac{e^{\mu}T(\mu) + e^{\mu}T'(\mu)}{e\mu T(\mu)} = \frac{D'(\mu)}{D(\mu)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{n+1}^{(2)} \mu^n$$

de donde

$$T'(\mu) = T(\mu)\left(-1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{n+1}^{(2)} \mu^n\right).$$

Reemplazando la expansión de T (2.10) y haciendo $b_0 = -1$, $b_n = -\sigma_{n+1}^{(2)}$ para $n \geq 1$,

$$\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)a_{p+1}\mu^p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \mu^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \mu^n\right),$$

y luego de la fórmula para el producto de Cauchy de series

$$(p+1)a_{p+1} = \sum_{r=0}^{p} a_{p-r}b_r = -a_p - \sum_{r=1}^{p-1} a_{p-r}\sigma_{r+1}^{(2)} - \sigma_{p+1}^{(2)}$$

para $p > 1$, lo cual prueba el resultado. ◻

El procedimiento descrito anteriormente nos permite hallar los determinantes de otros tipos de operadores, relacionados con A_ρ. Introducimos el parámetro α, $0 < \alpha < 1$ y definimos el operador

$$[A_\rho(\alpha)f](\theta) = \int_0^1 \rho\left(\frac{\alpha\theta}{x}\right) f(x)dx \tag{2.16}$$

sobre $L^2(0,1)$. Para relacionar $A_\rho(\alpha)$ con A_ρ, definimos el operador V_α sobre $L^2(0,1)$ mediante

$$[V_\alpha f](x) = f\left(\frac{x}{\alpha}\right)\chi_{[0,\alpha]}(x),$$

donde χ_C es la función característica del conjunto C. Entonces es fácil ver que

$$[V_\alpha^* g](x) = \alpha g(\alpha x), \qquad A_\rho(\alpha)V_\alpha = \alpha A_\rho, \quad A_\rho(\alpha) = \frac{1}{\alpha}V_\alpha^* A_\rho.$$

Por lo tanto $A_\rho(\alpha)$ es de Hilbert-Schmidt, y entonces se puede probar que

$$\det_2(I - \mu A_\rho(\alpha)) = e^{\alpha\mu}T_\alpha(\mu)$$

para todo $\mu \in \mathbb{C}$, donde

$$T_\alpha(\mu) = 1 - \alpha\mu + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1}\alpha^{(r+1)(r+2)/2}}{(r+1)!(r+1)} \prod_{l=1}^{r} \zeta(l+1)\mu^{r+1}. \tag{2.17}$$

Además T_α es una función entera de orden cero (teorema 1.3), de donde D_α^* posee orden uno y tipo α (teorema 1.5).

2.4 Distribución espectral de A_ρ

Como la sucesión de los autovalores $\{\lambda_j\}_{j\geq 1}$ de A_ρ son los inversos de los ceros de la función entera T de orden uno, entonces por el teorema 1.10, el exponente de convergencia de T no es mayor que uno, y por lo tanto $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^{1+\varepsilon} < \infty$, para todo $\varepsilon > 0$.

Sea $M(r) = \max_{|z|=r} |T(z)|$ para $r > 0$. Como en la expansión $T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (2.10) tenemos que $|a_n| = (-1)^n a_n$ para todo $n \geq 0$, entonces

$$|T(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n = \sum_{n=0} a_n(-|z|)^n = T(-|z|) \tag{2.18}$$

y $M(r) = T(-r)$. Por el teorema 1.16, si $n_T(t)$ es el número de ceros de T en el círculo $\{z : |z| < t\}$ tenemos ($T(0) = 1$) que

$$n_T(r) \leq \log M(er) = \log T(-er)$$

y como $\log T(-er) \leq er$, entonces $|\lambda_n| \leq \frac{e}{n}$, para todo $n \geq 1$.

Teorema 2.11. $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| = \infty$.

Prueba. Supongamos, por reducción al absurdo que $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < \infty$. Como la serie es absolutamente convergente, entonces es convergente, $c = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j$. De la factorización del determinante de Fredholm (teorema 1.75)

$$D(\mu) = \det{}_2(\mu I - A_\rho) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - \lambda_j) e^{\lambda_j \mu}$$

y luego por el teorema 2.9

$$T(\mu) = e^{-\mu} D(\mu) = e^{(c-1)\mu} \prod_{j=1}^{\infty} (1 - \lambda_j \mu). \tag{2.19}$$

En la ecuación anterior, el lado derecho es el producto de dos funciones enteras, una de orden 1 y tipo $|c-1|$ y otra de orden menor o igual a 1 y tipo minimal, de donde tiene orden 1 y tipo $|c-1|$ por el teorema 1.5. Comparando el lado izquierdo y derecho de la ecuación tenemos que $|c-1| = 1$ (T tiene tipo 1), de donde $c = 0$ o $c = 2$. Si $c = 2$, reemplazando en (2.19) tenemos que $\lim_{u\to-\infty} T(\mu) = 0$, lo que junto con el hecho de que $M(r) = T(-r)$ nos da que $\lim_{r\to\infty} M(r) = 0$, de donde T sería de orden minimal, absurdo. Por lo tanto $c = 0$, y D es una función entera de orden menor o igual a uno y tipo mínimo. Como una función y sus derivadas poseen el mismo orden y tipo (1.4), entonces las funciones $g_k(\mu) = e^{\mu}T^{(k)}(\mu)$ para $k \geq 1$, tienen orden menor o igual a 1 y tipo minimal (lo que se prueba fácilmente por inducción a partir de la hipótesis auxiliar). No es difícil probar que si $g(u) = \mu T'(\mu)$, entonces

$$g'(\mu) = -1 - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-1}g(\frac{\mu}{n+1}) \tag{2.20}$$

y $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{-1}g(\frac{\mu}{n+1})$ es una función entera de orden uno y tipo 1/2. Derivando (2.20)

$$[(g''(u) + g'(u))e^{\mu}]e^{-\mu} = -\frac{d}{d\mu}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{-1}g(\frac{\mu}{n+1}). \tag{2.21}$$

La función al lado izquierdo de la ecuación es el producto de dos funciones, una de ellas de orden menor o igual a uno y tipo minimal, y la otra de orden uno y tipo uno; por el teorema 1.5 esta función tiene orden uno y tipo uno. Pero el lado derecho de la ecuación tiene orden uno y tipo 1/2, lo que prueba el teorema. ∎

Nota. De las condiciones $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n| = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^{1+\varepsilon}$, por el teorema 1.10,

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln|\lambda_n^{-1}|} = 1.$$

Teorema 2.12. Si $\varphi \in [0, \pi/2)$, entonces en el complemento de cada uno de los sectores

$$W_{\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\text{Im}\lambda| \leq \tan\varphi \text{Re}\lambda\}, \qquad -W_{\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : -\lambda \in W_{\varphi}\},$$

A_ρ posee una número infinito de autovalores.

Prueba. Probaremos el resultado para el sector W_λ; la prueba para el otro caso es completamente análoga. Supongamos, por reducción al absurdo, el complemento de W_λ contiene sólo un número finito de autovalores de A_ρ, entonces W_λ contiene a todos los autovalores de A_ρ, a excepción de un número finito. Más precisamente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $\lambda_n \in W_\varphi$; en particular Re $\lambda_n \geq 0$. Luego para $m \geq m_0$,

$$\sum_{n=n_0}^{m}|\text{Re}\lambda_n| = \sum_{n=n_0}^{m}\text{Re}\lambda_n = \text{Re}\left(\sum_{n=n_0}^{m}\lambda_m\right) \leq \left|\sum_{n=n_0}^{m}\lambda_m\right|.$$

Por el teorema de Lindelöf 1.13, las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n$ son acotadas, por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\text{Re}\lambda_n$ es absolutamente convergente. Pero entonces, para $n \geq n_0$, $\lambda_n \in W_\varphi$,

$$|\lambda_n| \leq |\text{Re}\lambda_n| + |\text{Im}\lambda_n| \leq |\text{Re}\lambda_n| + \tan\varphi\,\text{Re}\lambda_n = |\text{Re}|\lambda_n(1 + \tan\varphi)$$

y luego por el criterio de comparación de series, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|$ es absolutamente convergente, contradiciendo el teorema anterior. El teorema está probado. ∎

2.5 Otros resultados

Probemos que el operador A_ρ no es un operador normal, lo que prueba además que no es autoadjunto.

Teorema 2.13. El operador A_ρ es no normal.

Prueba. Por reducción al absurdo, supongamos que A_ρ es normal. Escogemos $\lambda \neq 0$, $f \neq 0$ tales que $A_\rho^* f = \lambda f$. Como A_ρ es normal, entonces $A_\rho f = \overline{\lambda} f$; de donde la autofunción f es analítica, en particular posee derivada continua.

Derivamos la fórmula

$$[A_\rho^* f](x) = \frac{1}{x}\int_0^1 \theta f(\theta)d\theta - \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\sum_{n=1}^{k}\int_{nx}^{1} f(\theta)d\theta\right]\cdot \chi_{]\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]}(x)\right\}.$$

(la cual se obtiene con la ayuda del lema 2.1, hallando el operador adjunto para cada uno de los miembros de la suma para $A_\rho f$) de donde si $\lambda f(x) = [A_\rho^* f](x)$,

$$\lambda f'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^1 \theta f(\theta) + \sum_{n=1}^{k} n f(nx),$$

y para $k \in \mathbb{N}$

$$\lambda f'(\tfrac{1}{k+1}+) = \sum_{n=1}^{k} n f(\frac{n}{k+1}) - (k+1)^2\int_0^1 \theta f(\theta)d\theta,$$

$$\lambda f'(\tfrac{1}{k+1}-) = \sum_{n=1}^{k+1} n f(\frac{n}{k+1}) - (k+1)^2\int_0^1 \theta f(\theta)d\theta,$$

(aquí $f(x+)$ y $f(x-)$ denotan, respectivamente, los límites f por la derecha e izquierda de f en x) y

$$\lambda f'(\frac{1}{k+1}+) - \lambda f'(\frac{1}{k+1}-) = (k+1)f(1).$$

Como f posee derivada continua, entonces $f(1) = 0$. Pero entonces

$$\langle h, f\rangle = \int_0^1 \theta f(\theta)d\theta = [A_\rho^* f](1) = \lambda f(1) = 0,$$

lo cual contradice el teorema (1.84). Por lo tanto A_ρ es no normal. ∎

Teorema 2.14. Si para algún $\varphi \in [0, 2\pi)$, el operador $e^{-\varphi}A_\rho$ no posee autovalores negativos y además hay una constante $C > 0$ tal que

$$\|(e^{-i\varphi}A_\rho + \lambda)^{-1}\| \leq C\lambda^{-1}$$

para todo $\lambda > 0$, entonces se cumple la Hipótesis de Riemann.

Prueba. Del teorema 1.86 se sigue que

$$L^2(0,1) = \mathrm{Ker}(e^{-i\varphi}A_\rho) \oplus \overline{\mathrm{Ran}(e^{-i\varphi}A_\rho)}.$$

Como A_ρ posee el vector cíclico h ($h(x) = x$) entonces

$$\overline{\mathrm{Ran}(A_\rho)} = \overline{\mathrm{Ran}(e^{-i\varphi}A_\rho)} = L^2(0,1)$$

y por lo tanto

$$\mathrm{Ker}(A_\rho) = \mathrm{Ker}(e^{-i\varphi}A_\rho) = \{0\}$$

de donde se sigue la Hipótesis de Riemann (teorema 2.3). ∎

Otro problema de interés en la teoría de operadores es el problema de determinar la *completitud* de un operador, esto es, determinar si el subespacio generado por los autovectores y autovectores generalizados, correspondientes a autovalores no nulos, es un subespacio denso en la clausura del rango del operador, $\overline{\mathrm{Ran}A_\rho}$. La razón es que, de hecho, la no completitud de un operador está relacionada con la existencia de cierto tipo de soluciones no triviales para ecuaciones diferenciales (relacionadas con operadores diferenciales).

En un trabajo nuevo de J. Alcántara-Bode, se prueba de hecho que los operadores $A_\rho(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, son completos. Vamos a bosquejar la prueba de este resultado.

Teorema 2.15. El operador $A_\rho(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$ es completo.

Prueba. Consideremos el operador V_α definido en (2.16). Si $\xi \in \mathrm{Ker}(V_\alpha^*)$, entonces

$$A_\rho(\alpha)\xi = \alpha\left(\int_\alpha^1 \frac{\xi(x)}{x}dx\right)h.$$

Tomando, por ejemplo $\xi(x) = x \cdot \chi_{[\alpha,1]}(x)$, tenemos $\displaystyle\int_\alpha^1 \frac{\xi(x)}{x}dx = 1 - \alpha \neq 0$ y por lo tanto $h \in \mathrm{Ran}(A_\rho(\alpha))$. Si en cambio tomamos

$$\xi(x) = x\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right)^n \chi_{[\alpha,1]}(x),$$

con $n \geq 1$ entero impar, entonces $\displaystyle\int_\alpha^1 \frac{\xi(x)}{x}dx = 0$ y $\xi \in \mathrm{Ker}(A_\rho(\alpha))$, lo que prueba que $A_\rho(\alpha)$ no es inyectivo, es más, $\mathrm{Ker}(A_\rho(\alpha))$ tiene dimensión infinita.

La función T_α dada en (2.17) no es un polinomio; por el teorema 1.8, item 2, T_α posee infinitos ceros (de otro modo sería un polinomio por la exponencial de un polinomio de orden cero; i.e. una función constante, lo cual es absurdo). Por lo tanto, $\sigma(A_\rho(\alpha))$ es infinito.

Observemos ahora que

$$A_\rho(\alpha)h^r = \frac{\alpha h}{r} - \frac{\alpha^{r+1}\zeta(r+1)}{r+1}h^{r+1} \tag{2.22}$$

para $\mathrm{Re}\, r > -1$, $r \neq 0$, en analogía con (2.9). Como

$$\operatorname{span}\{h^r\}_{r=1}^{\infty} = \operatorname{span}(\{h\} \cup \{A_\rho(\alpha)h^r\}_{r=1}^{\infty}) \subset \operatorname{Ran}(A_\rho(\alpha))$$

por el teorema de Müntz 1.83, $\overline{\operatorname{Ran}(A_\rho(\alpha))} = L^2(0,1)$. Esto prueba además que $\operatorname{Ker}(A_\rho(\alpha)^*) = \{0\}$.

Tenemos además que si $A_\rho(\alpha) = \mu^{-1}\psi_{\mu;\alpha}$, $\mu \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\psi_{\mu;\alpha} \in L^2(0,1)\setminus\{0\}$, entonces $T_\alpha(\mu) = 0$ y $\psi_{\mu;\alpha}(x) = \mu x T'_\alpha(\mu x)$. Más generalmente

$$(A_\rho(\alpha) - \mu^{-1})\psi_{\mu;\alpha} = \alpha h T_\alpha(\mu)$$

para $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; o bien

$$\alpha(A_\rho(\alpha) - \lambda)^{-1}h = \frac{\psi_{\lambda^{-1};\alpha}}{T_\alpha(\lambda^{-1})}, \tag{2.23}$$

análogamente a (2.12).

Denotemos por E al subespacio formado por los autovectores y autovectores generalizados, correspondientes a los autovalores no nulos de $A_\rho(\alpha)$. Para probar que $\overline{E} = L^2(0,1)$, probamos que $E^\perp = \{0\}$. Primero analicemos $f \in E^\perp$, $f \in C[0,1]$. Puede probarse entonces que la función $S_{f;\alpha}$, definida por

$$S_{f;\alpha}(\mu) = \langle (A_\rho(\alpha) - \mu^{-1})^{-1}h, f\rangle$$

es entera (a través del teorema 1.46), y

$$S_{f;\alpha}(\mu) = -\mu \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r \langle A_\rho(\alpha)^r h, f\rangle.$$

De (2.23), $S_{f;\alpha}(\mu) = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\langle \psi_{\mu;\alpha}, f\rangle}{T_\alpha(\mu)}$, de donde obtenemos la cota

$$|S_{f;\alpha}(\mu)| \leq \frac{\|f\|_\infty}{\alpha} \quad \text{para} \quad u \leq 0$$

($S_{f;\alpha}$ está acotada en un rayo que parte del origen). Si $S_{f;\alpha}(\mu)$ no es constante, por una de las consecuencias del teorema 1.6, posee por lo menos orden $1/2$. Luego, por el teorema 1.5, $\langle \psi_{\mu;\alpha}, f\rangle = \alpha S_{f;\alpha}(\mu) T_\alpha(\mu)$ tendría por lo menos orden $1/2$. Sin embargo

$$|\langle \psi_{\mu;\alpha}, f\rangle| \leq -\|f\|_\infty |\mu| T'_\alpha(-|\mu|),$$

de donde como T'_α tiene orden cero (igual orden que T_α), $\langle \psi_{\mu;\alpha}, f\rangle$ tendría orden cero, absurdo. Por lo tanto $S_{f;\alpha}$ es constante, $S_{f;\alpha}(\mu) = S_{f;\alpha}(0) = 0$ y $\langle A_\rho(\alpha)^r h, f\rangle = 0$ para $r \geq 0$. De esto último y (2.22), $\langle h^r, f\rangle = 0$, y finalmente, por el teorema de Müntz 1.83 $f = 0$, lo que prueba el resultado para $f \in C[0,1]$. Si ahora $f \in E^\perp$ es arbitrario en $L^2(0,1)$, entonces $A_\rho(\alpha)^* f \in E^\perp$, y puede probarse que $A_\rho(\alpha)^* f \in C[0,1]$ de donde $A_\rho(\alpha)^* f = 0$ por lo anterior. Siendo $A_\rho(\alpha)$ inyectivo, esto implica que $f = 0$, como esperábamos. ∎

2.6 Conclusiones

- La Hipótesis de Riemann puede ser reformulada, con éxito, a un problema de análisis funcional, específicamente a una ecuación de primera especie.
- El estudio del espectro del operador A_ρ involucrado en la reformulación, nos conduce a un método que nos permite determinar el espectro de operadores similares, lo que nos lleva la la fórmula explícita del determinante de Fredholm.
- El operador A_ρ no es autoadjunto, siquiera normal, y su espectro no está *bien* distribuido en el plano complejo.
- Pueden determinarse otras propiedades, tales como completitud, para los operadores $A_\rho(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, relacionados con A_ρ.

Bibliografía

[1] N. I. Achieser (1992) *Approximation Theory*, Dover Publications, New York.

[2] J. Alcántara-Bode (1993) *An Integral equation formulation of the Riemann Hypothesis*, J. Integral Equations and Operator Theory 17, 151-168.

[3] J. Alcántara-Bode (2001) *An Algorithm for the evaluation of certain Fredholm determinants*, J. Integral Equations and Operator Theory 39, 153-158.

[4] J. Alcántara-Bode (1999) *Génesis de la Hipótesis de Riemann*, Pro Mathematica, Vol. XIII, n°s 25-26, 5-10.

[5] J. Alcántara-Bode (2003) *A Completeness Problem Related to the Riemann Hypothesis*, Pre-Print.

[6] R.P. Boas (1954) *Entire Functions*, Academic Press, New York.

[7] I. Fredholm (1903) *Sur une Class d'Équations Fonctionnelles*, de *A collection of Modern Mathematical Analysis*, edited by Richard Bellman, 1961, Dover Publications, New York.

[8] A. Beurling (1955) *A closure problem related to the Riemann Zeta-function*, Proc. Nat. Acad. Sci. 41, 312-314.

[9] E. Bombieri, *Problems of the Millenium: The Riemann Hypothesis*, Descripción oficial del problema, disponible en http://www.claymath.org/Millenium_Prize_Problems/

[10] T. Craven, G. Csordas y W. Smith (1987) *The zeros of the derivatives of entire functions and the Polya-Wiman conjecture*, Annals of Math. 125, 405-431.

[11] N. Dunford y J.T. Schwartz (1988) *Linear Operators, Part I: General Theory*, John Wiley and Sons.

[12] N. Dunford y J.T. Schwartz (1988) *Linear Operators, Part II: Spectral Theory*, John Wiley and Sons.

[13] K. Jörgens, (1982) *Linear Integral Operators*, translated by G. F. Roach., Financial Times-Prentice Hall Books.

[14] Y.O.Kim (1990) *A proof of the Polya-Wiman conjecture*, Proc. Amer. Math. Soc. 109, 1045-1052.

[15] S. Lipschutz (1992) *Álgebra Lineal*, Segunda Edición, McGraw-Hill, España.

[16] A. S. Markus (1969) *Some criteria for the completeness of a system of root vectors of a linear operator in a Banach space*, A.M.S. Transl. (2) 85, 51-91.

[17] A. Markushevich (1978) *Teoría de las Funciones Analíticas*, Vol. II, Editorial Mir, Moscow.

[18] C. Martínez y M. Sanz (1992) *Análisis de una variable real*, Editorial Reverté, España.

[19] M. Reed y B. Simon (1980) *Methods of Modern Mathematical Physics, vol. I: Functional Analysis*, Academic Press.

[20] M. Reed y B. Simon (1978) *Methods of Modern Mathematical Physics, vol. IV: Analysis of Operators*, Academic Press.

[21] J. R. Retherford (1993) *Hilbert Space: Compact Operators and the Trace Theorem*, London Mathematical Society Student Texts, 27, Cambridge University Press.

[22] B. Riemann (1859) *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, traducido del alemán al inglés por D.R. Wilkins, 1998.

[23] W. Rudin (1974) *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York.

[24] W. Rudin (1991) *Functional Analysis*, 2nd. ed., McGraw-Hill Book Co.

[25] B. Simon (1977) *Notes on infinite determinants of Hilbert space operators*, Advances in Mathematics 24, 244-273.

[26] B. Simon (1979) *Trace Ideals and their Applications*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press.

[27] V. Smirnov (1975) *Cours de Mathématiques Supérieures, tome IV*, première partie, Editions Mir, Moscou.

[28] E. C. Titchmarsh (1986) *The theory of the Riemann Zeta-function*, Second Edition revised by D.R. Heath-Brown, Oxford University Press.

[29] K. Yosida (1995) *Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York.

[30] M. Zerner (1987), *Quelques propriétés spectrales des operateurs positifs*, Journal of Functional Analysis 72, 381-417.