

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

**FACULTAD DE INGENIERIA GEOLOGICA,
MINERA Y METALURGICA**

SECCION DE POST GRADO



**“MODELOS MATEMÁTICOS PARA LA SOLUCION
DE ESFUERZOS PRINCIPALES EN LAS MASAS
ROCOSAS”**

TESIS

**PARA OPTAR EL GRADO DE MAESTRO EN
CIENCIAS CON MENCIÓN EN ;
INGENIERIA DE MINAS**

PRESENTADO POR :

Orison Evans Delzo Salomé

**LIMA-PERU
2001**

RESUMEN

La mecánica de rocas estudia el efecto y la respuesta que producen las fuerzas, esfuerzos, deformaciones totales y deformaciones unitarias en las rocas y masas rocosas. La teoría de elasticidad, es un buen método para estudiar los esfuerzos, deformaciones y los desplazamientos de materiales y estructuras que están bajo la acción de fuerzas y cargas. La teoría supone que la relación entre esfuerzo y deformación unitaria es lineal. En un macizo rocoso hay cargas o esfuerzos debido a la gravedad, peso del material suprayacente y la restricción lateral ofrecida por la masa rocosa circundante.

Dado un cuerpo o una estructura rocosa sometida a un sistema de fuerzas: No coplanares, no concurrentes y no paralelas; una sección cualquiera está sometida a esfuerzos. La fuerza por unidad de área o intensidad de las cargas distribuidas sobre la superficie de la sección transversal de un espécimen de roca se conoce como esfuerzo.

Para los esfuerzos y deformaciones en las masas rocosas, se analiza el caso tridimensional (Sistema Triaxial) o en un punto o esfuerzo en el espacio; previo a ello es necesario analizar el estado plano de esfuerzos (Sistema Biaxial).

Los esfuerzos en un punto o cubo pueden representarse en 3 dimensiones, actuando en cada cara un esfuerzo normal y 2 esfuerzos cortantes. Los esfuerzos sobre las caras del cubo que son puramente normales se denomina esfuerzos principales, se denota σ_1 = esfuerzo principal mayor, σ_2 = Esfuerzo principal intermedio y σ_3 = Esfuerzo principal menor, siendo en este caso el esfuerzo cortante nulo, es decir, esto se puede expresar como $\tau = 0$ en el plano; y por otro lado se cumple que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

En 1999 se inició la ejecución del trabajo de investigación “Modelos matemáticos para la solución de los esfuerzos principales en las masas rocosas”. Se formuló el problema de investigación ¿cómo se puede determinar los esfuerzos principales en forma óptima en el espacio en mecánica de rocas?. Teniendo como objetivo general: Expresar los resultados de los esfuerzos principales actuantes en un punto de una masa rocosa en forma de un modelo matemático en mecánica de rocas. Para tal efecto se planteó como hipótesis de trabajo: “Los métodos numéricos pueden determinar la solución de los esfuerzos principales en el espacio en mecánica de rocas”.

La determinación de los esfuerzos principales actuantes en las caras de un cubo, se calcula a partir de un tensor de esfuerzos, que implica la formulación de una ecuación cúbica $S^3 - I_1 S^2 + I_2 S - I_3 = 0$, donde S_1, S_2 y S_3 son los esfuerzos principales e I_1, I_2 y I_3 son las invariantes de esfuerzos; el procedimiento de análisis y solución es dominio de la Teoría Matemática de la Elasticidad. Estas ecuaciones son de la forma $f(x) = 0$; que para su resolución se aplican métodos de análisis numérico a fin de determinar una raíz real de la

ecuación; luego aplicando la división de polinomios por el método de Ruffini se determina la ecuación de segundo grado de la forma $f(x) = 0$ y resolviendo se determina las 2 raíces reales de la ecuación, con lo que se demuestra la hipótesis. Finalmente se hace una aplicación de los modelos matemáticos a la cantera de la empresa Cemento Andino S. A. con un programa de cómputo diseñado para tal efecto, utilizando el Software MATHEMATICA 4.

SUMMARY

Rock mechanics studies the effects and response that are generated by forces, stresses, absolute deformations and strains in rocks and rock masses. The theory of elasticity is a good method for studying the stress, strength and displacements of materials and structures caused by action of forces and loads. This theory supposes a relationship strain and deformation is linear. There are loads or stresses in a massive rock, originated by gravity, weight of the adjacent material and lateral constraint offered by surrounding rock mass.

Given a body or a rock structure which is subjected to forces system, which is not coplanar, concurrent and parallel, i.e.; any section is subjected to a stress field. The force per unit area or intensity of forces that are distributed on rock specimen is defined as stress.

For stress and strain the case is analyzed in three dimensions (Triaxial system) or a stress field in space; before this, it is necessary to analyze the plane state of stresses (Biaxial System).

The stresses on a point or on a cube can be represented in three dimensions, a normal stress and two shearing stresses are impacting on each side of the cube. The stresses on each cube's side that are purely normal are denominated principal stresses, and they are denoted as follows: σ_1 = major principal stress, σ_2 = intermediate principal stress and σ_3 = minor principal stress, so that the shearing stress is null, i.e., $\tau = 0$ in the plane; and the other hand the relationship $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ is fulfilled.

The research work titled "Mathematical models for solving the principal stresses in rock masses" was started in 1999. The research problem was formulated: How can we determine the principal stresses in space in rock mechanics?. It is proposed a general objective in order to express the results of the performing principal stresses in a rock mass; it is a mathematical model in rock mechanics. For such reason the work hypothesis was established as follows: "the numerical methods can determine the solutions of the principal stresses in space in rock mechanics".

The determination of the principal stresses performing on cube's sides are calculated from a stress tensor, which implies the formulation of a cubic equation: $S^3 - I_1 S^2 + I_2 S - I_3 = 0$, where S_1, S_2 and S_3 are the principal stresses and I_1, I_2 and I_3 are the stress invariants; the procedure of analysis and solutions is of domain of the MATHEMATICAL THEORY OF ELASTICITY. These equations are like $f(x) = 0$; for the solution numerical methods of analysis are applied in order to determine a real root of the equation, then applying the polynomial division by Ruffini's method we determine a quadratic equation, which has the form of $f(x) = 0$, and then we solve the 2 real roots of the equation, and with this the hypothesis is proved. Finally an application of mathematical models to Cemento Andino's quarry is done with the MATHEMATICA 4 software, which is designed for this goal.

INTRODUCCION

La mecánica de rocas como un arte ha sido practicada por los mineros desde hace muchos años, pero con escasa importancia científica; es sólo a partir de los años cincuenta que se le reconoce como una ciencia. Conceptuada según la definición dada en 1974 por el Comité de Mecánica de Rocas de la Academia de Ciencias de los Estados Unidos; como la ciencia teórica y aplicada que trata sobre el comportamiento mecánico de las rocas y de los macizos rocosos, y su respuesta a los esfuerzos aplicados en su entorno físico y medio ambiente.

En el desarrollo de la mecánica de rocas en estas tres últimas décadas, entre los problemas que han mostrado dificultad para solucionarse, se tiene a la determinación del estado de esfuerzos in situ. Son diversos los aparatos y técnicas desarrollados para lograr este objetivo.

El propósito de este trabajo de investigación es la formulación y aplicación de Modelos matemáticos para la determinación de los esfuerzos principales en las masas rocosas, y que éste a su vez pueda servir de guía a los Ingenieros y estudiantes para afianzar sus conocimientos de la mecánica de rocas, en lo que respecta al análisis de esfuerzos y deformaciones en una masa

rocosa. Partió del problema ¿Cómo se puede determinar los esfuerzos principales en forma óptima en el espacio en mecánica de rocas?, teniendo como objetivo general expresar los resultados de los esfuerzos principales actuantes en un punto de una masa rocosa en forma de un modelo matemático en mecánica de rocas. Se planteó **la hipótesis de trabajo** “Los métodos numéricos determinan la solución aproximada de los esfuerzos principales en el espacio en mecánica de rocas”.

En la minería peruana, mientras no tenemos en cuenta la determinación del estado de esfuerzos del macizo rocoso donde se ubican nuestras excavaciones, la minería seguirá siendo mas un arte, que una ciencia. Si la mecánica de rocas se ha de desarrollar como una ciencia con aplicaciones prácticas en ingeniería, debemos poner a punto métodos adecuados para la medida de esfuerzos in situ y el cómputo y determinación de los esfuerzos principales actuantes en puntos representativos de la masa rocosa.

El estado natural de esfuerzos en la corteza terrestre se debe a la gravedad, peso de la cobertura rocosa y el efecto de esfuerzos latentes, fuerzas tectónicas como las “Plate Tectonics” y movimientos de la corteza terrestre. Estos esfuerzos o tensiones son σ_v = esfuerzo vertical y σ_H = esfuerzo horizontal.

El análisis de esfuerzos y deformaciones corresponde a la teoría de la elasticidad aplicada a la mecánica de rocas y en general a la mecánica de sólidos. Los esfuerzos triaxiales u octaédricos son los que se presentan en uno o más puntos de una masa rocosa.

El trabajo de investigación está dividido en capítulos: En el Capítulo I - Planteamiento del problema, Capítulo II - Análisis de esfuerzo-deformación, Capítulo III - Composición de esfuerzos, Capítulo IV - Teoría de la elasticidad aplicada a la mecánica de rocas, Capítulo V - Mediciones de esfuerzos in-situ, Capítulo VI - Esfuerzos en el espacio, Capítulo VII - Modelos matemáticos para la solución de los esfuerzos principales en el espacio en mecánica de rocas, Capítulo VIII - Consideraciones geológicas, Capítulo IX - Aplicación a la Cantera de Cemento Andino S. A. y finalmente las conclusiones y recomendaciones.

La escritura de los números en la tesis es: Los números decimales se escribió con el punto decimal (.). Es decir las cifras situadas a la izquierda del punto forma la parte entera; las de la derecha la parte decimal. La coma (,) separa en órdenes de números a el millar o mil unidades.

INDICE

	Pág.
Resumen	
Summary	ii
Introducción	ii

CAPITULO I PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Formulación del problema	16
1.2. Objetivos de la Investigación	16
1.3. Alcances de la Investigación	17
1.4. Concepción actual de la Mecánica de Rocas	17
1.5. Hipótesis	20

CAPITULO II ANALISIS DE ESFUERZO – DEFORMACIÓN

2.1. Esfuerzos o tensiones	22
2.1.1. Definiciones	22
2.1.2. Tensiones en un punto	22
2.1.3. Componentes de esfuerzo en un punto	25
2.2. Deformaciones	28
2.2.1. Definiciones	28
2.2.2. Deformaciones en un punto.	29

CAPITULO III COMPOSICION DE ESFUERZOS

3.1. Naturaleza del problema	32
------------------------------	----

3.2. Representación y determinación de los planos	33
3.3. Círculo de Mohr	34
3.4. Casos a analizar	35
3.4.1. Primer Caso	35
3.4.2. Segundo Caso	39
3.4.3. Tercer Caso	43

CAPITULO IV

TEORIA DE LA ELASTICIDAD APLICADA A LA MECANICA DE ROCAS

4.1. Relaciones Esfuerzo - Deformación en un medio elástico	52
4.2. Curva Esfuerzo - Deformación para Rocas	56
4.3. Constantes Elásticas de las Rocas	57
4.4. Ecuaciones Básicas en Teoría Elástica	63
4.5. Elasticidad en Rocas	64
4.5.1. Rocas Cuasi-Elásticas	65
4.5.2. Rocas Semi-Elásticas	66
4.5.3. Rocas no Elásticas	66

CAPITULO V

MEDICIONES DE ESFUERZO IN SITU

5.1. Aproximaciones teóricas	69
5.2. Mediciones In Situ	69
5.2.1. Método de liberación de esfuerzos	71
5.2.1.1. Método del triángulo equilátero	71
5.2.1.2. Método de la perforación concéntrica	73
5.2.2. Método de la Restauración de Esfuerzos	74
5.2.2.1. Método de la Gata Hidráulica	74
5.2.2.2. Fracturamiento Hidráulico	75

CAPITULO VI
ESFUERZOS EN EL ESPACIO

6.1. Estado de Esfuerzos en un Punto	79
6.2. Ecuaciones de Equilibrio	80
6.3. Esfuerzos sobre un Plano Arbitrario	82
6.4. Tensiones Primarias en un Medio Rocosos	86

CAPITULO VII
MODELOS MATEMATICOS PARA LA SOLUCION DE LOS ESFUERZOS
PRINCIPALES EN EL ESPACIO EN MECANICA DE ROCAS

7.1. Método de Ruffini	90
7.2. Método de Bisección	91
7.3. Método de Regula Falsi	97
7.4. Método de Newton – Raphson	101

CAPITULO VIII
CONSIDERACIONES GEOLÓGICAS

8.1. La Geología en la Mecánica de Rocas	107
8.2. Importancia de la Litología o Tipo de Roca	109
8.3. Clasificación de las Rocas en Ingeniería	111
8.4. Características estructurales de los macizos rocosos	112
8.4.1. Representación de las discontinuidades geológicas	112
8.4.2. Presentación de los resultados	113
8.5. Clasificación de las Rocas “In Situ” para obras de Ingeniería	113

CAPITULO IX
APLICACION A LA CANTERA DE CEMENTO ANDINO S.A.

9.1. Aspectos Generales	117
9.2. Geología Local	118
9.2.1. Estratigrafía	118
9.2.2. Geología Estructural.	120
9.2.3. Rocas Igneas	120
9.3. Reservas Mineras	120
9.4. Características Físico-Mecánicas de la masa rocosa	121
9.5. Cantera Cemento Andino	122
9.5.1. Método de explotación	123
9.5.2. Elementos básicos para el diseño de un tajo abierto	124
9.5.3. Secuencia de minado y ritmo de producción	127
9.5.4. Determinación y selección de equipos	128
9.6. Programa para la determinación de los esfuerzos principales en la masa rocosa de la Cantera Cemento Andino.	132
9.6.1. Cálculo de los esfuerzos principales en un macizo rocoso	132
9.6.2. Cálculo de los esfuerzos principales en la masa rocosa de la Cantera Cemento Andino	135
9.6.3. Programa para la determinación de los esfuerzos principales en el macizo rocoso de la Cantera Cemento Andino.	141
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	
• Conclusiones	148
• Recomendaciones	150
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	
VITA	
ANEXOS	

CAPITULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La mecánica de rocas, es la ciencia básica de la minería. Se basa, en cuanto rama parcial independiente de la mecánica técnica, especialmente en la física tanto en lo que se refiere a la presentación de los problemas, como a los procedimientos de ensayo y a los métodos de medida.

El problema de la determinación de los esfuerzos existentes en las rocas de la corteza terrestre con suficiente precisión, ha llegado a ser en los años recientes, de gran interés para los Ingenieros de Minas y Civiles. Los ingenieros de Minas están interesados, porque ellos desean tener la capacidad que les permita un mejor control de las fuerzas existentes en las rocas, que ellos minan y obtener una producción más segura y económica.

Los Ingenieros Civiles están interesados, porque ellos están diseñando construcciones más grandes, los que descansan sobre rocas y cuya estabilidad dependerá de la capacidad de la roca para soportar la carga a que estarán sujetos. Como resultado, los Ingenieros están interesados en las dos etapas de ocurrencia de esfuerzos en las rocas: 1) Los esfuerzos existentes en la roca antes de que se haya ejecutado una excavación o la adición sobre ella de una

construcción y 2) La alteración de los esfuerzos en las rocas debido a la ejecución de una excavación o a otra causa que induzcan concentración de esfuerzos.

Como práctica general, las excavaciones mineras han sido diseñadas en base a experiencias pasadas. Esta práctica ha sido necesaria debido a la falta de conocimiento de: 1) Esfuerzos pre-existentes 2) Los efectos de una excavación sobre los esfuerzos preexistentes y 3) Los efectos de condiciones geológicas complejas. Debido a esta falta de información para el diseño fue necesario aplicar factores de seguridad, los que en muchos casos han sido excesivos, para asegurar la estabilidad de las construcciones mineras.

1.1. Formulación del Problema

Los esfuerzos octaédricos son los que se presentan en el interior de una masa rocosa. En un plano de rotura se producen esfuerzos normales y cortantes o tangenciales o de cizallamiento. En las caras de un cubo, cuando los esfuerzos normales toman valores máximos y mínimos se conocen como esfuerzos principales, siendo los cortantes igual a cero en este caso.

Se puede formular el problema; ¿Como se puede determinar los esfuerzos principales en forma óptima en el espacio en mecánica de rocas?.

1.2. Objetivos de la Investigación

Los objetivos del presente trabajo son los siguientes:

- Expresar los resultados de los esfuerzos principales actuantes en un punto de una masa rocosa en forma de un modelo matemático en mecánica de rocas.
- Resolver problemas de esfuerzos en el espacio en mecánica de rocas mediante modelos matemáticos.
- Establecer un programa de cómputo para la solución de esfuerzos principales en el espacio en un macizo rocoso.

1.3. Alcances de la Investigación

Los alcances del presente trabajo son los siguientes:

1. Transmitir a la Industria minera y constructores civiles peruanos, los procedimientos para la solución de los esfuerzos principales actuantes en un punto de un macizo rocoso.
2. Incentivar a la comunidad minera nacional la aplicación de la mecánica de rocas en el diseño de aberturas mineras, teniendo en cuenta la actuación de los esfuerzos in situ; que se pueden también calcular mediante las mediciones de las deformaciones en las minas.
3. Difundir académicamente la solución físico - matemática de los esfuerzos principales actuantes en un punto de la masa rocosa en eventos técnicos-científicos, tales como seminarios, simposia, convenciones, "workshops", etc.

1.4. Concepción actual de la Mecánica de Rocas

Al practicar una excavación en un medio rocoso, se produce un desequilibrio en el mismo; al extraer los materiales, se produce

inevitablemente la eliminación del soporte natural de la masa rocosa circundante, lo que da lugar a una alteración de las condiciones de equilibrio, las mismas que es necesario conocerlas, a fin de asegurar la estabilidad o inducir la falla.

Los problemas de estabilidad asociadas a la construcción de excavaciones rocosas para diversos propósitos ha dado lugar al establecimiento de la disciplina que hoy se conoce como mecánica de rocas, como rama de la mecánica ha llegado a ser reconocida como una disciplina ingenieril distinta y coherente. Consiste de un conjunto de conocimientos sobre las propiedades físicas - mecánicas de las rocas, una serie de técnicas para el análisis de esfuerzos en la rocas bajo la acción de alguna perturbación impuesta, un conjunto de principios establecidos para expresar la respuesta del macizo rocoso a las cargas a que está sometido y una metodología lógica para la aplicación de estos principios y técnicas a problemas físico – mecánicos reales.

“La Mecánica de Rocas ha sido descuidada por la Minería y esto es desventajoso para la industria. Los mineros han permitido de que ésta se transforme en un misterio oculto de exclusiva incumbencia de un pequeño grupo que habla de símbolos, fórmulas y métodos como el de elementos finitos. Ese aire de misterio debe ser eliminado”.⁽¹⁰⁾

⁽¹⁰⁾ PARKER, Jack and Others.- ROCK MECHANICS IN MINING PRACTICE, Ed. Sam Publication-M.J. Book, Edembridge - England, 1985. Pág. 1.

Una definición ampliamente aceptada de la Mecánica de Rocas es aquella ofrecida inicialmente por el **Comité Nacional de Mecánica de Rocas de Estados Unidos de Norte América** en 1964 y luego modificada en 1974:

“La mecánica de rocas es la ciencia teórica y aplicada del comportamiento mecánico de las rocas y de los macizos rocosos; esto es, aquella rama de la mecánica que trata con la respuesta de las rocas y de los macizos rocosos a los campos de fuerzas de su entorno físico”.⁽¹⁾

El objetivo científico de la mecánica de rocas es el descubrimiento del estado natural de la corteza terrestre, provocadas por la perturbación de la actividad minera. Se debe examinar, en particular, el comportamiento del terreno alrededor de las excavaciones por acción de cargas pesadas y también el de cuerpos materiales en condiciones extremas, este es un problema genuino de física. El estudio de las leyes físicas y su generalización matemática, es que puedan hacerse afirmaciones no sólo cualitativas, sino también cuantitativas para su utilización práctica.

Las áreas donde la aplicación de los conceptos de la mecánica de rocas ha demostrado tener gran valor industrial son principalmente: La industria minera y la amplia gama de aplicaciones en la ingeniería civil. Hoy en día, su desarrollo nos permite estar en capacidad de realizar diseños de ingeniería de rocas, no concebibles hace tres décadas, dando explicación a los fenómenos observados en la

⁽¹⁾ BRADY, B.H.- BROWN, E.T.-”ROCK MECHANICS FOR UNDERGROUND MINING”; Pub. G. Allen&Unwin Ltd, London, 1985, Pag.(1) (Traducido).

práctica y alternativas de solución a los problemas encontrados. Su desarrollo asimismo está contribuyendo a racionalizar la invaluable experiencia práctica acumulada a través de los años en la construcción de excavaciones rocosas.

1.5. Hipótesis

Para el problema ¿Cómo se puede determinar los esfuerzos principales en forma óptima en el espacio en Mecánicas de Rocas?.

Se **planteó** la siguiente **hipótesis**: “Los métodos numéricos determinan la solución aproximada de los esfuerzos principales en el espacio en Mecánica de Rocas”.

Geológicamente, todo agregado de materia mineral que constituye una parte apreciable de la corteza terrestre o asociación física de minerales, es una roca.

En mecánica de rocas: la roca, se refiere a roca intacta o sustancia rocosa. Entendiéndose por roca intacta aquella que se puede tomarse muestras (testigos) por medio de un sondaje para su ensayo en laboratorio, no presentando características estructurales de gran escala (roca sólida). La masa rocosa, es la roca insitu compuesto de sustancia rocosa y de las discontinuidades estructurales.

El cálculo de los esfuerzos en un cubo o en el espacio se desarrollo para la masa rocosa.

CAPITULO II

ANALISIS DE ESFUERZO-DEFORMACION

En toda obra de ingeniería es necesario determinar las dimensiones físicas de las partes que componen un sistema estructural. Dichas partes deben tener las proporciones adecuadas para que resistan las fuerzas reales o probables que habrán de aplicárselos.

En la mecánica ingenieril, el término “**estructura**” está asociado a la idea de una serie de elementos conectados entre sí, de tal modo que forman un sistema capaz de soportar cargas externas o debidos al peso propio de los elementos.

La mecánica de rocas, como aplicación a los problemas prácticos de ingeniería, está relacionado con la aplicación de los principios de la mecánica ingenieril al diseño de las estructuras rocosas; la estructura en este caso estará constituida por la masa rocosa en la que, por efecto de haberse practicado en la misma una excavación, se ha producido un cambio de esfuerzos con respecto a su situación original, la que trae por consecuencia la necesidad de garantizar la estabilidad de toda la zona.

Las deformaciones ocurren en un cuerpo que ha sido afectado por esfuerzos. Dichas **deformaciones** estarán relacionadas con la magnitud de los esfuerzos que las causan.

2.1. Esfuerzos o tensiones

2.1.1. Definiciones:

- **Tensión o esfuerzo.**- Fuerza interna por unidad de área cuando dicha área tiende a cero. Es conveniente aclarar la palabra "**Presión**" para indicar la fuerza medida exterior normal por unidad de área, aunque en el contorno son iguales la presión y el esfuerzo normal en cada punto.
- **Tensión o esfuerzo normal (σ).**- Es el componente normal del esfuerzo, es decir, el componente perpendicular al plano sobre el que actúa el esfuerzo.
- **Esfuerzo tangencial o cortante (τ).**- Es el componente tangencial u horizontal del esfuerzo es decir el componente paralelo al plano, sobre el que actúa el esfuerzo.

2.1.2. Tensiones o esfuerzos en un punto

Por definición el área sobre el que actúa el esfuerzo es infinitesimal. Por lo que los esfuerzos en un punto se ejerce sobre elementos de área infinitesimal.

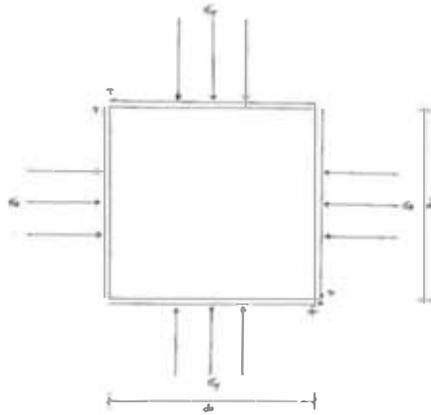


Fig. 2.1

En la figura 2.1 muestra los esfuerzos que actúan sobre las caras de un cubo elemental. Si los esfuerzos sobre las caras paralelas al plano del dibujo son nulos, el problema se reduce a un caso de esfuerzo plano.

Consideremos τ_x en X y τ_y en Y. Tomando momentos en O, se tiene:

$$\sum M = \sigma_x \frac{dy^2}{2} - \sigma_x \frac{dy^2}{2} + \sigma_y \frac{dx^2}{2} - \sigma_y \frac{dx^2}{2} + \tau_x dx dy - \tau_y dx dy = 0$$

$$\tau_x = \tau_y \quad (3)$$

Consideremos ahora la figura 2.2.

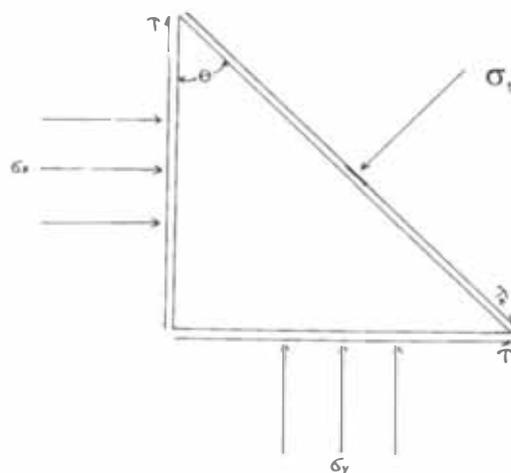


Fig. 2.2

⁽³⁾ COATES, D. F.- Fundamentos de la mecánica de Rocas. Ed. Blume – Madrid, España, 1979, Pag. 17 y 18.

Para determinar la magnitud y sentido de σ_t y τ_t en $f(\sigma_x, \sigma_y$ y $\tau)$ hacemos la ecuación de equilibrio:

$$\sum F_x = \sigma_x dy + \tau dy \operatorname{tg} \theta - \left(\sigma_t \frac{dy}{\operatorname{Cos} \theta} \right) \operatorname{Cos} \theta + \left(\tau_t \frac{dy}{\operatorname{Cos} \theta} \right) \operatorname{Sen} \theta = 0$$

$$\sum F_y = \sigma_y dy \operatorname{tg} \theta + \tau dy - \left(\sigma_t \frac{dy}{\operatorname{Cos} \theta} \right) \operatorname{Sen} \theta + \left(\tau_t \frac{dy}{\operatorname{Cos} \theta} \right) \operatorname{Cos} \theta = 0$$

Despejando σ_t y τ_t tenemos:

$$\sigma_t = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{Cos} 2\theta + \tau \operatorname{Sen} 2\theta \quad (2.a) \quad (3)$$

$$\tau_t = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{Sen} 2\theta + \tau \operatorname{Cos} 2\theta \quad (2.b)$$

De (2.a) y (2.b) observamos que σ_t y τ_t varían con θ . Esta variación puede determinarse estudiando los máximos y mínimos de τ_t . Derivando σ_t respecto a θ e igualando a cero,

$$\text{tenemos: } \frac{d\sigma_t}{d\theta} = -2 \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \operatorname{Sen} 2\theta + 2\tau \operatorname{Cos} 2\theta = 0, \text{ de donde}$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (3)$$

O sea los máximos y mínimos se producen en planos cuyos ángulos son $f(\sigma_x, \sigma_y$ y $\tau)$.

Hay dos valores para 2θ que verifican las ecuaciones y que se diferencian en 180° , ó hay dos valores de θ que verifican la ecuación y que se diferencia en 90° . Al sustituir estos dos valores de θ en σ_t , uno es máximo y el otro es mínimo. Al

⁽³⁾ COATES, D. F.- Fundamentos de la mecánica de Rocas. Ed. Blume – Madrid, España, 1979, Pag. 18.

⁽³⁾ IBID. Pag. 3.

sustituir los valores anteriores de θ en la ecuación (2.b) se obtiene $\tau_t = 0$. Estos planos se denominan **“Planos principales”** y los esfuerzos normales correspondientes a ellos **“Esfuerzos principales”**. σ_1 = esfuerzo principal mayor, σ_2 = esfuerzo principal intermedio y σ_3 = esfuerzo principal menor. En mecánica de rocas son positivos (+) los esfuerzos de compresión y son negativos (-) los esfuerzos de tracción. Podemos expresar σ_t y τ_t en $f(\sigma_1$ y $\sigma_3)$ y θ que define el ángulo de orientación del plano.

$$\sigma_t = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta \quad (19)$$

$$\tau_t = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta$$

2.1.3. Componentes de esfuerzo en un punto

Consideramos un plano de orientación aleatoria en el cuerpo y un área infinitesimal dA , la cual contiene al punto “0”. (Fig. 2.3).

da = Área infinitesimal que contiene al punto “0”.

dF = Resultante de todas las fuerzas ejercidas en dA

$$P_0 = \lim \frac{dF}{dA} = \frac{\Delta F}{\Delta A} \text{ Esfuerzo normal actuando en “0”.} \quad (12)$$

⁽¹⁹⁾ WOODRUEFF, Seth D.- METHODS OF WORKING COAL AND METAL MINES. Volume 1 Ed. Pergamon Press, Made in Great Britain Pág. 154.

⁽¹²⁾ RAGAN, Donald M.- GEOLOGIA ESTRUCTURAL, Ed. Omega S.A. Barcelona - España, 1980, Pág. 141.

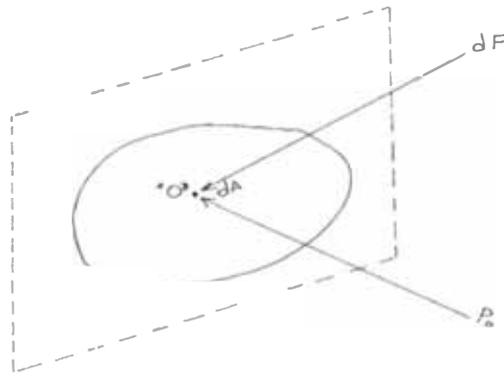


Fig. 2.3

Para cada punto en un cuerpo existe un vector P_0 que define la magnitud del esfuerzo en cada dirección. El vector P_0 , puede ser representado por 03 componentes: Una componente direccional, una componente de esfuerzo normal y tangencial en ángulos rectos; o si la orientación del plano es conocida, por 03 componentes de esfuerzos. Para analizar estos esfuerzos, el plano sobre el cual actúan puede ponerse en coordenadas rectangulares espaciales (X,Y,Z):

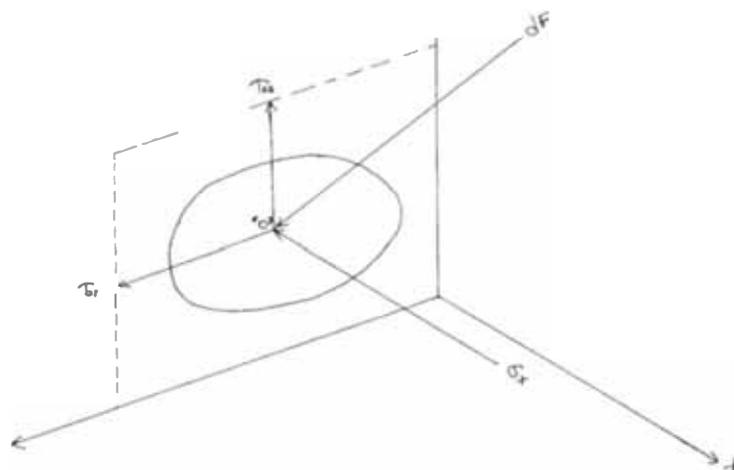


Fig. 2.4

$\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ actúan en e plano YZ. Fig. 2.4
 dF cae en el plano YZ.
 $P_0 = \sigma_x =$ Esfuerzo normal, es normal a dA .

τ_{xy} y τ_{xz} = Esfuerzos tangenciales.

Análogamente si dF cae en el plano XZ las componentes del esfuerzo normal y de corte en "0" son: σ_y , τ_{yz} , τ_{yx} ; y en el plano XY es: σ_z , τ_{zx} , τ_{zy} .

Los esfuerzos en un punto puede ser representado en tres dimensiones, graficando tenemos (Fig. 2.5):

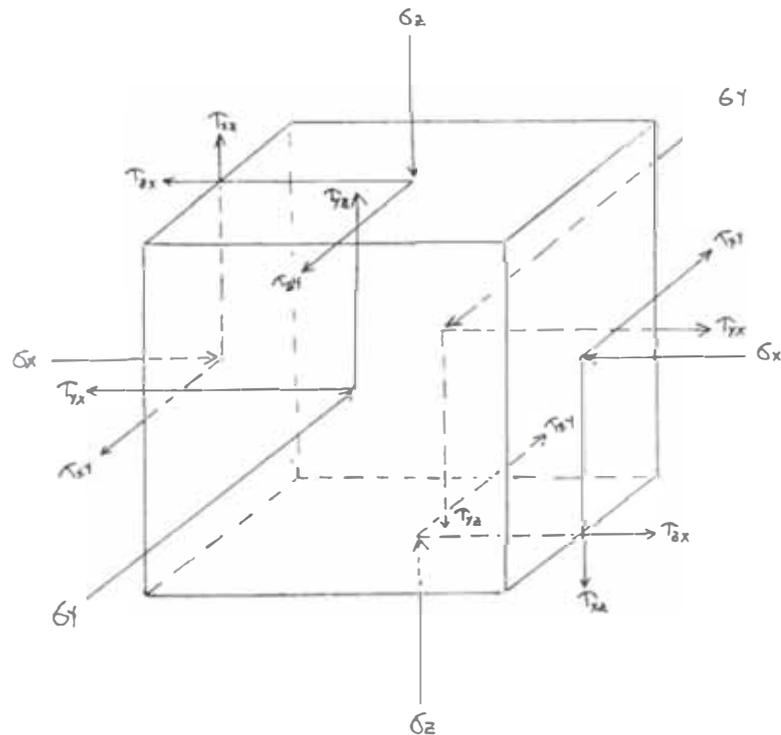


Fig. 2.5

σ = Esfuerzo normal ⁽⁹⁾

τ = Esfuerzo Cortante

Las componentes de esfuerzo sobre las 03 caras visibles son todos positivos, por equilibrio rotacional: $\tau_{yx} = \tau_{xy}$,

$\tau_{zy} = \tau_{yz}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, estos pares de esfuerzo de corte son denominados esfuerzos de corte conjugados.

⁽⁹⁾ OBERT L. & DUVALL, W.I.- ROCK MECHANICS AND THE DESIGN OF STRUCTURES IN ROCK. Ed. John Wiley & Sons INC N. Y. U.S.A. Pág. 12 y 13.

2.2. Deformaciones

2.2.1. Definiciones

Deformación (δ).- Es el movimiento absoluto o relativo de un punto de un cuerpo, o es la variación de una dimensión lineal (extensión o contracción). (Fig. 2.6)

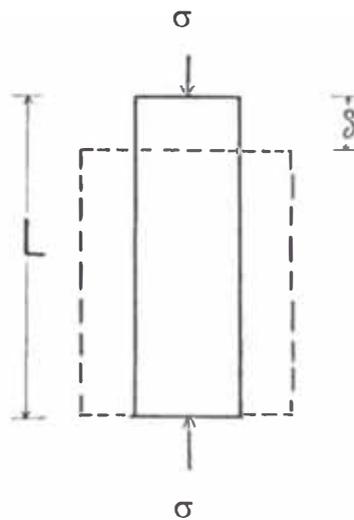


Fig. 2.6

Deformación unitaria.- Es la deformación por unidad de longitud.

Deformación unitaria normal (ϵ).- Es la deformación unitaria en la dirección de la deformación.

$$\epsilon = \frac{\delta}{L}$$

Deformación unitaria tangencial o cortante o distorsión

(γ).- Es la variación relativa del ángulo que forman los lados de un elemento infinitesimal $\gamma = \text{tang}\alpha$ (Fig. 2.7). Es la deformación, cuando la longitud sobre la que se produce la

deformación, es perpendicular a la dirección de la deformación que se toma.

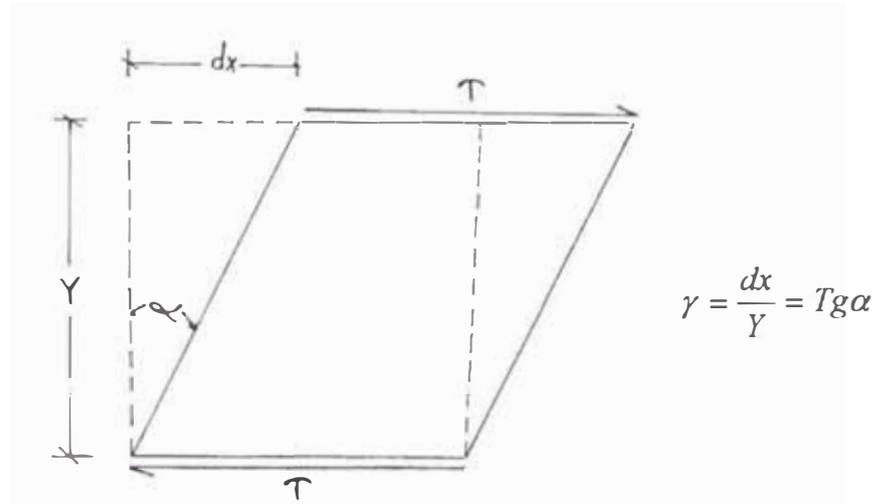


Fig. 2.7

2.2.2. Deformaciones en un punto

El análisis de deformación lo visualizamos como un fenómeno biaxial, desde que las deformaciones laterales serán siempre inducidos por una deformación normal. La representación más simple de una deformación plana en un punto es similar al análisis de fuerzas planas. Definiendo una **deformación normal** y **de corte** en el **plano XZ** con referencia a una dirección especificada tenemos.

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_x \cos^2 \theta + \gamma_{xz} \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_z \sin^2 \theta \\ \gamma &= (\varepsilon_z - \varepsilon_x) \sin 2\theta + \gamma_{xz} \cos 2\theta\end{aligned}$$

Estas ecuaciones son directamente comparables con las ecuaciones de esfuerzo, para el esfuerzo normal y esfuerzo de corte, y su deformación de un valor límite de θ donde γ llega a ser cero (0), esto ocurre cuando:

$$\text{Tang}2\theta = \frac{\gamma_{xz}}{\varepsilon_z - \varepsilon_x} \quad (9)$$

Que definen los “ejes principales de deformación”, direcciones en la cual la deformación de corte es cero (0). Las deformaciones normales pueden ser considerados “deformaciones principales” ε_1 y ε_2 . Haciendo $\varepsilon_z = \varepsilon_1$ y $\varepsilon_x = \varepsilon_2$ y $\gamma_{xz} = 0$, las deformaciones “normal” y de “corte” en la dirección θ a la deformación principal máxima son dadas por:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \text{Cos}2\theta \quad (9)$$

$$\gamma = (\varepsilon_z - \varepsilon_x) \text{Sen}2\theta$$

Eso parecerá extraño desde que la deformación es medida en término de elongación por técnicas de esfuerzo (en mediciones de deformaciones en roca).

Estas ecuaciones pueden ser usadas para determinar las deformaciones principales y su dirección sobre la superficie del sólido deformado utilizando los Strain Gauges en forma de roseta es colocado en ángulo de 45° unos de otros en tres direcciones A,B y C, luego: Si ε_A , ε_B y ε_C son las deformaciones medidas en cada dirección, entonces se tiene:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_A + \varepsilon_C$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = [(\varepsilon_A - 2\varepsilon_B + \varepsilon_C)^2 + (\varepsilon_A - \varepsilon_C)^2]^{1/2}$$

(9) OBERT L. & DUVALL, W.I. - ROCK MECHANICS AND THE DESIGN OF STRUCTURES IN ROCK. Ed. John Wiley & Sons INC N. Y. U.S.A. Pág. 38.

(9) IBID.

$$\text{Tang}2\theta = \frac{\varepsilon_A - 2\varepsilon_B + \varepsilon_C}{\varepsilon_A - \varepsilon_C}$$

La teoría de deformaciones en un punto puede ser desarrollada en el caso tridimensional mostrando tres ejes principales de deformación y tres deformaciones principales ε_1 , ε_2 y ε_3 , actuando en un punto de un cuerpo sólido.

CAPITULO III

COMPOSICION DE ESFUERZOS

Los esfuerzos que actúan en una sección transversal, son normales o cortantes. Sin embargo en algunos casos pueden actuar simultáneamente esfuerzos normales y cortantes en una porción de un elemento estructural. De hecho si una fuerza axial o un momento flexionante, actúa junto con una fuerza cortante o un momento de torsión, algunas porciones elementales quedarán sometidas a esfuerzos normales y a esfuerzos cortantes.

En algunos casos se conoce los esfuerzos en un plano o planos determinados y se desea conocer la fatiga en otros planos o se puede presentar el caso que se desea conocer el valor de los esfuerzos máximos y mínimos y en que planos se presentan. Los esfuerzos normales y momento flector, originan fatigas normales (σ). Los esfuerzos cortantes y momento torsor, originan fatigas cortantes (τ).

3.1. Naturaleza del problema

Muchas veces se conoce el esfuerzo unitario o fatiga en un plano o planos determinados y se desea conocer la fatiga en otros planos.

También se puede presentar el caso de que sea necesario conocer

el valor de las fatigas máximas y en que planos se presentan. A estos estudios se conoce con el nombre de composición de fatigas o composición esfuerzos unitarios. Las fatigas o esfuerzos unitarios son vectores.

Para efecto del estudio teórico de composición de esfuerzos unitarios o fatigas, asumiremos que las fatigas en determinados planos o punto han sido calculados, sin interesarnos cómo se ha hecho el cálculo.

3.2. Representación y determinación de los planos

Como las fatigas actúan sobre planos, es preciso adoptar una representación convencional y adoptar un medio que permita determinarlos exactamente. Para representar un plano usaremos su traza sobre el papel, sombreando el lado del plano hacia el cual hay material (Fig. 3.1). La posición de cada plano queda fijada por su normal exterior.

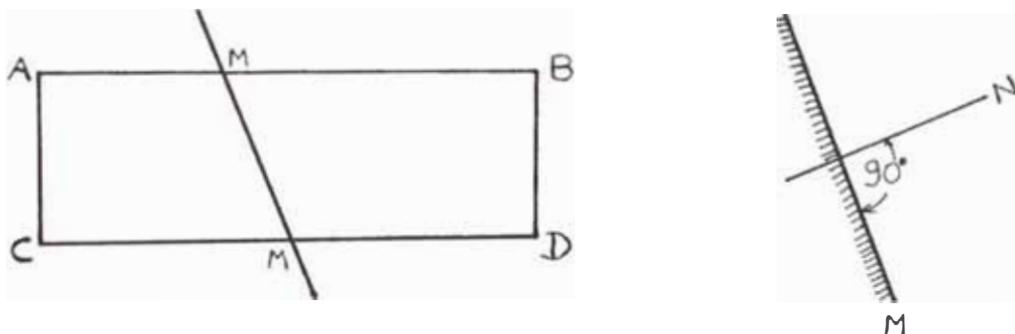


Fig. 3.1

3.3. Círculo de Mohr

El círculo de Mohr, es un círculo ubicado en un plano cartesiano cuyo eje de abscisas corresponde a las fatigas normales (σ) y el eje de ordenadas a las fatigas cortantes (τ). Las coordenadas de cada punto de la circunferencia representa las fatigas normal y cortante de un plano determinado, de allí deberán llamarse circunferencia de Mohr y no círculo de Mohr.

Para el signo de las fatigas normales en mecánica de rocas es:

- La fatiga normal de compresión es positiva ($+\sigma$)
- La fatiga normal de tracción es negativa ($-\sigma$).

Para el signo de las fatigas cortantes, en principio las fatigas cortantes sobre dos planos paralelos infinitamente cercanos pueden considerarse de igual valor, pero son de sentido contrario. Si el par que genera tiene el mismo sentido de rotación que las agujas del reloj, la fatiga cortante será positiva; pero si el sentido de rotación del par es de sentido contrario a la rotación de las agujas del reloj, la fatiga cortante será negativa (Fig. 3.2).

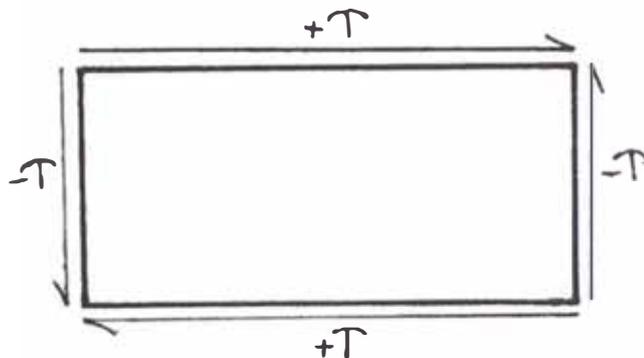


Fig. 3.2

En la fig. 3.3 del círculo de Mohr, las coordenadas del punto B representa las fatigas de un plano M, es decir $OA = \sigma$ y $OB = \tau$.

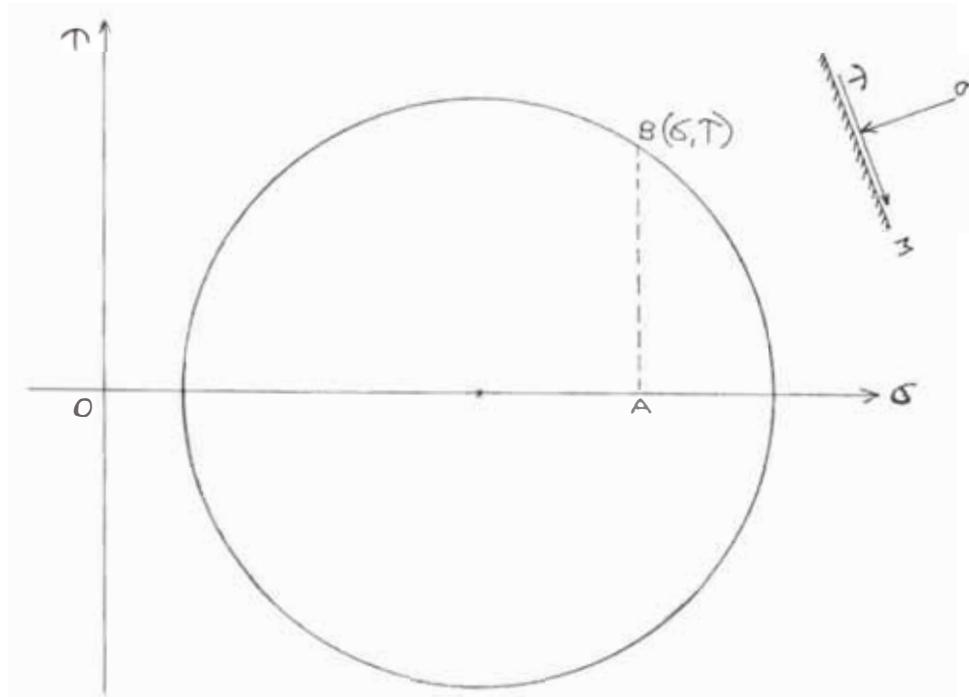


Fig. 3.3

3.4. Casos a analizar

Analítica y gráficamente, mediante el círculo de Mohr, analizaremos los siguientes casos en los cuales la posición de los planos están determinados por sus normales:

3.4.1. Primer caso

Sobre un plano A actúan sólo fatiga normal $(\sigma_A, 0)$ y sobre un plano B normal a A, no actúa ninguna fatiga $(0, 0)$.

a) Determinar las fatigas sobre un plano C (σ_C, τ_C) que forma un ángulo ϕ con A.

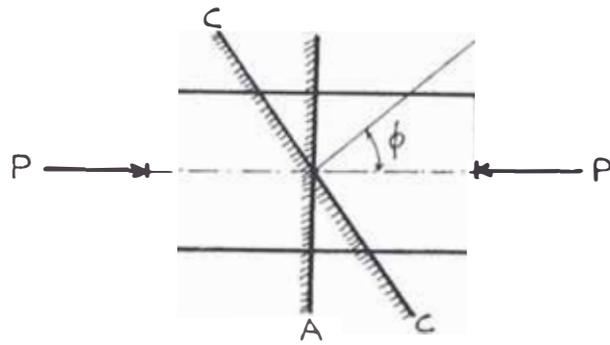


Fig. 3.4

(1) Solución analítica

En los extremos de la pieza prismática de la fig. 3.4, cuya sección normal tiene un área A , actúa una fuerza P .

En el plano AA, normal al eje actúa una fatiga: $\sigma_A = \frac{P}{A}$

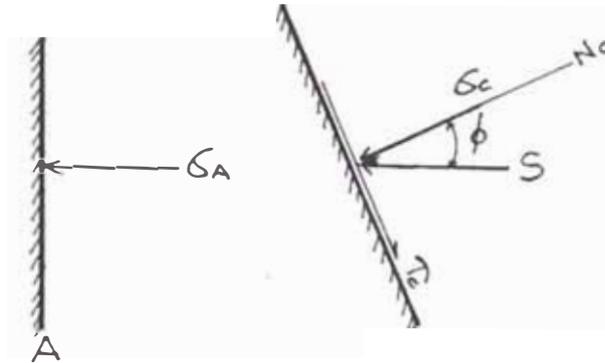


Fig. 3.5

Sobre el plano C, cuya sección tiene por áreas K y que forma un ángulo ϕ con el plano A, la fatiga S , paralela a la fuerza P vale (Fig. 3.5):

$$S = \frac{P}{K} = \frac{P}{A / \cos \phi} = \frac{P}{A} \cos \phi = \sigma_A \cos \phi$$

Para hallar la fatiga normal y cortante del plano C, descomponemos la fatiga S :

$$\sigma_C = S \cos \phi = \sigma_A \cos^2 \phi$$

$$\tau_C = S \sin \phi = \sigma_A \cos \phi \sin \phi = \frac{\sigma_A}{2} \sin 2\phi$$

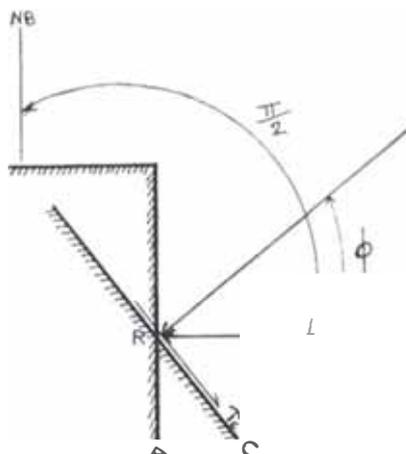
El signo de ϕ es positivo si su sentido es trigonométrico y negativo en caso contrario.

(2) Solución gráfica

Tenemos el plano A ($\sigma_A, 0$) y plano B(0,0), en el plano cartesiano del círculo de Mohr ubiquemos sus puntos (Fig. 3.6).

El segmento BA será el diámetro del círculo, por ser su ángulo en el centro: π , doble del ángulo entre los planos A y B: $\pi/2$. Por consiguiente el radio del círculo $OA = OB = \sigma_A/2$. Con este radio trazamos el círculo de Mohr.

Para hallar las fatigas en el plano C con centro en O, medimos a partir de OA y en el mismo sentido de (NA - R - NC) con ángulo 2ϕ . Las coordenadas del punto C así determinado, son las fatigas que actúan en el plano C.



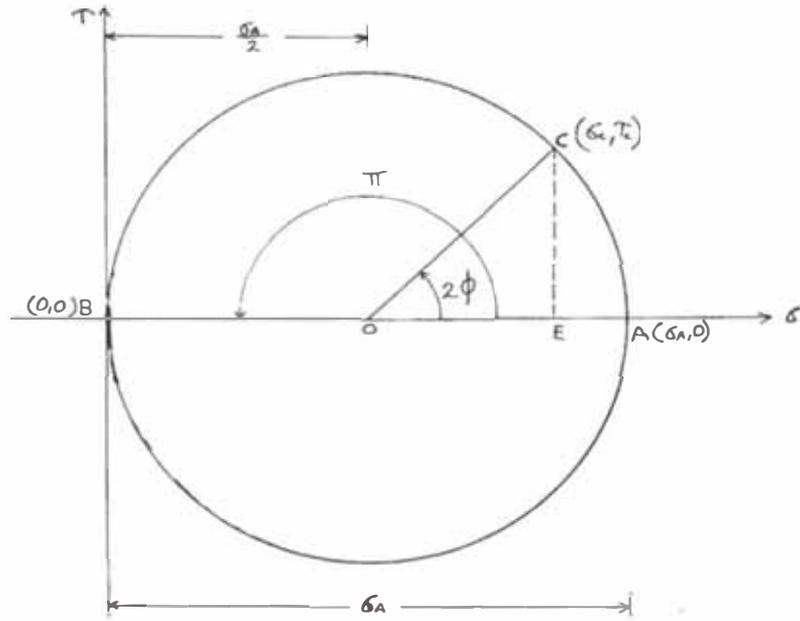


Fig. 3.6

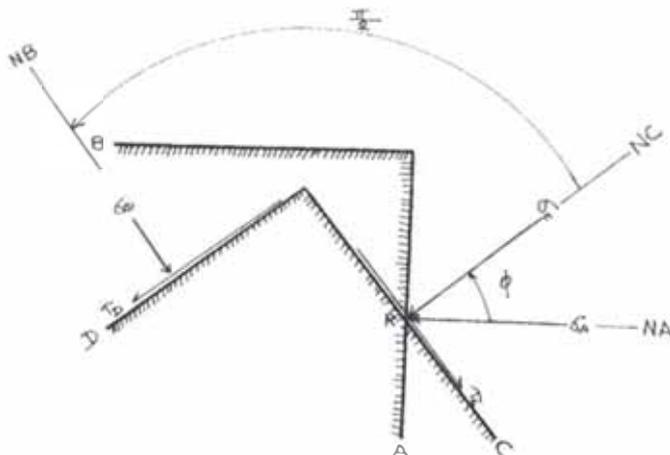
$$BE = BO + OE = BO + OC \cos 2\phi = \frac{\sigma_A}{2} + \frac{\sigma_A}{2} \cos 2\phi$$

$$= \sigma_A \cos^2 \phi = \sigma_C$$

$$CE = OC \sin 2\phi = \frac{\sigma_A}{2} \sin 2\phi = \tau_C$$

b) Determinar las fatigas sobre dos planos C y D, normales entre sí, formando el plano C un ángulo con el plano A.

Trazamos el círculo de Mohr, como en el caso anterior y ubicamos C Fig. (3.7).



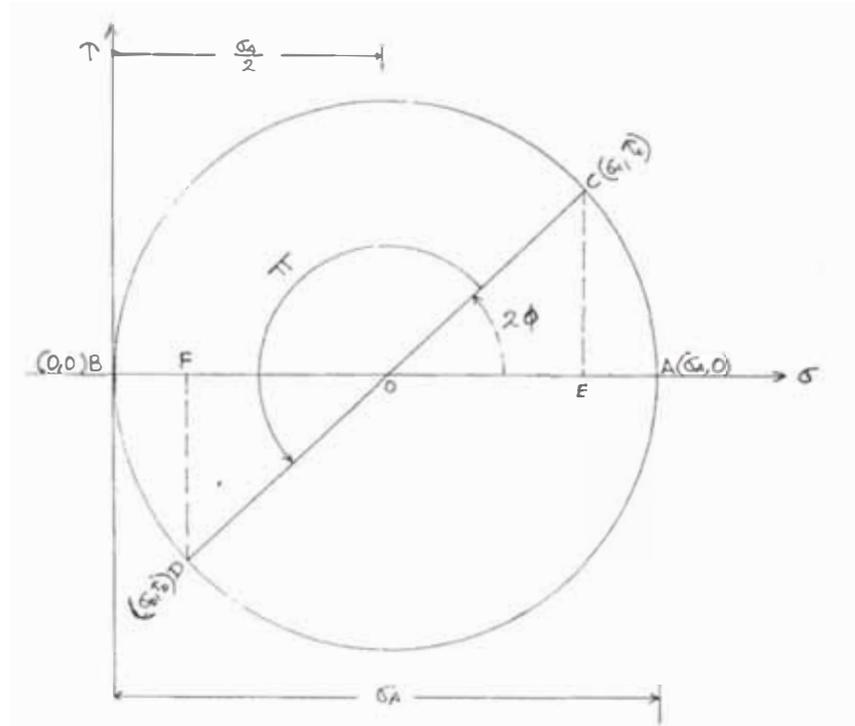


Fig. 3.7

A partir de OC medimos un ángulo π , es en el doble del ángulo entre los planos C y D y determinamos el punto D, cuyas coordenadas son las fatigas en el plano D.

$$BF = OB (1 - \cos 2\phi) = \frac{\sigma_A}{2} (1 - \cos 2\phi) = \sigma_A \sin^2 \phi = \sigma_D$$

$$DF = -OD \sin 2\phi = -\frac{1}{2} \sigma_A \sin 2\phi = \tau_D$$

Determinamos;

$$\sigma_C + \sigma_D = \sigma_A \cos^2 \phi + \sigma_A \sin^2 \phi = \sigma_A (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = \sigma_A$$

$$\tau_C = -\tau_D$$

3.4.2. Segundo caso

Sobre dos planos normales entre sí actúan solamente fatigas

normales $(\sigma_A, 0)$ y $(\sigma_B, 0)$:

a) Determinar las fatigas sobre un plano C (σ_C, τ_C) que forman un ángulo ϕ con el plano A.

(1) Solución analítica

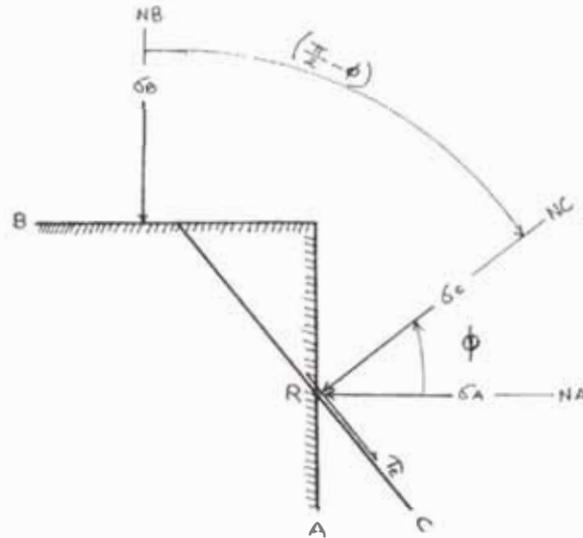


Fig. 3.8

Debido a la acción de σ_A :

$$\sigma_C' = \sigma_A \cos^2 \phi$$

$$\tau_C' = \frac{\sigma_A}{2} \operatorname{Sen} 2\phi$$

Debido a la acción de σ_B :

$$\sigma_C'' = \sigma_B \cos^2 \left[-\left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \right] = \sigma_B \operatorname{sen}^2 \phi$$

$$\tau_C'' = \frac{\sigma_B}{2} \operatorname{Sen} 2 \left[-\left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \right] = -\frac{1}{2} \sigma_B \operatorname{Sen} 2\phi$$

Entonces:

$$\sigma_C = \sigma_C' + \sigma_C'' = \sigma_A \cos^2 \phi + \sigma_B \operatorname{sen}^2 \phi$$

$$\tau_C = \tau_C' + \tau_C'' = \frac{\sigma_A}{2} \operatorname{Sen} 2\phi - \frac{\sigma_B}{2} \operatorname{Sen} 2\phi$$

$$= \frac{\sigma_A - \sigma_B}{2} \operatorname{Sen} 2\phi$$

(2) Solución Gráfica

Supongamos $\sigma_B > \sigma_A$

Ubiquemos en el plano cartesiano los puntos $A(\sigma_A, 0)$ y $B(\sigma_B, 0)$. (Fig. 3.9)

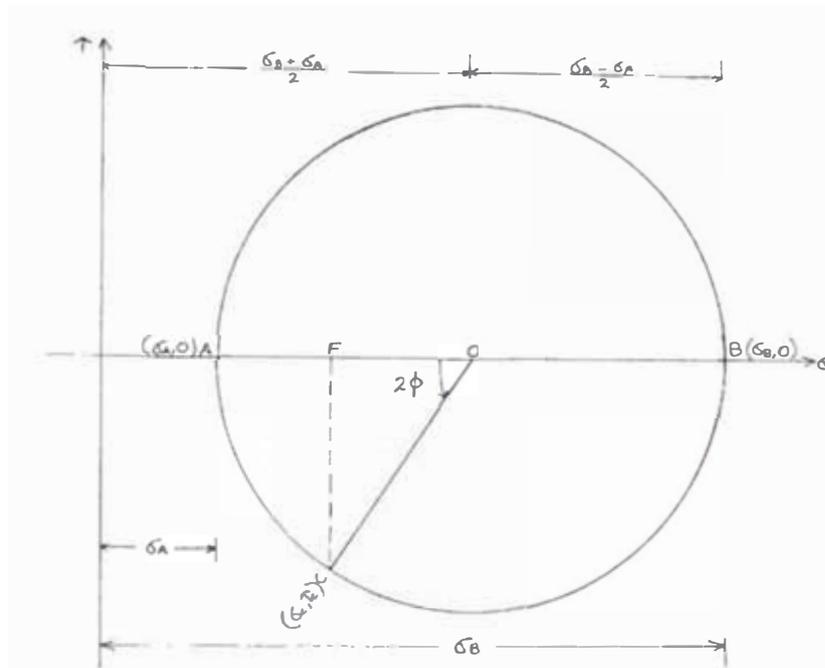


Fig. 3.9

Los puntos A y B son los extremos de un diámetro, por consiguiente las coordenadas del centro del círculo O serán:

$$\left(\frac{\sigma_A + \sigma_B}{2}, 0 \right)$$

y el radio $r = \frac{\sigma_B - \sigma_A}{2}$

En el círculo, a partir de OA trazamos un ángulo $AOC = 2\phi$ en el mismo sentido de ϕ (N_A -R- N_C). Las coordenadas del punto C así determinado dará las fatigas en el plano C (σ_C , τ_C), y son:

$$EF = EO - OF = EO - OC \cos 2\phi = \frac{\sigma_A + \sigma_B}{2} - \frac{\sigma_B - \sigma_A}{2} \cos 2\phi$$

$$= \frac{\sigma_A + \sigma_B}{2} + \frac{\sigma_B - \sigma_A}{2} \cos 2\phi = \sigma_A \cos^2 \phi + \sigma_B \sin^2 \phi = \sigma_C \quad (4)$$

$$FC = CO \sin 2\phi = \frac{\sigma_A - \sigma_B}{2} \sin 2\phi = \tau_C$$

b) Determinar las fatigas sobre dos planos C y D, normales entre sí, formando el plano C un ángulo ϕ con el plano A.

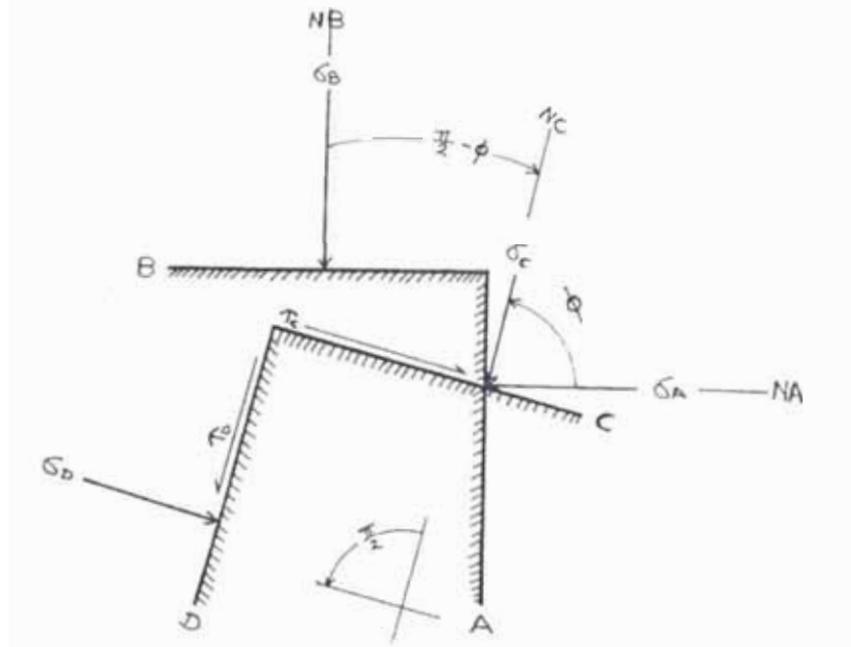
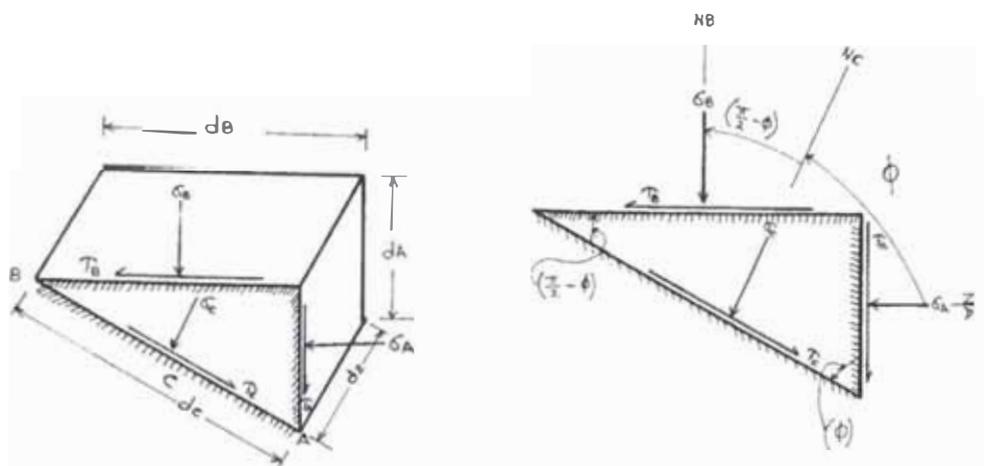


Fig. 3.10

Tracemos en el círculo de Mohr como en el caso anterior y ubicamos C. A partir de OC midamos un ángulo π , que es doble del ángulo entre los planos C y D y determinamos el punto D cuyas coordenadas son las fatigas en el plano D (Fig. 3.11).

⁽⁴⁾ DE SITTER, L.U.- GEOLOGIA ESTRUCTURAL, Ed. Omega S.A., Barcelona-España, 1970, Pág. 32.

Tomemos elementos de cada plano, de longitudes dA , dB y dC y de ancho igual a dZ , (Fig. 3.12).



(Fig. 3.12)

Las fatigas sobre el plano C serán las resultantes de la composición de fatigas de los planos A y B.

$$\sigma_C \cdot dZ \cdot dC = \sigma_A \cos \phi \cdot dZ \cdot dA + \sigma_B \cos \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) dZ \cdot dB$$

$$\tau \sin \phi \cdot dZ \cdot dA - \tau \sin \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) dZ \cdot dB$$

Suprimiendo dZ y reemplazando:

$$dA = dC \cos \phi \text{ y } dB = dC \sin \phi$$

$$\sigma_C \cdot dC = \sigma_A \cos^2 \phi \cdot dC + \sigma_B \sin^2 \phi - \tau \sin \phi \cdot \cos \phi dC - \tau \cos \phi \sin \phi dC$$

$$\sigma_C = \sigma_A \cos^2 \phi + \sigma_B \sin^2 \phi - 2\tau \sin \phi \cdot \cos \phi$$

pero:

$$\sin^2 \phi = \frac{1 - \cos 2\phi}{2}$$

$$\cos^2 \phi = \frac{1 + \cos 2\phi}{2}$$

Entonces obtenemos:

$$\sigma_C = \frac{\sigma_A + \sigma_B}{2} + \frac{\sigma_A - \sigma_B}{2} \cos 2\phi - \tau \sin 2\phi \quad (11)$$

Del mismo modo:

$$\begin{aligned} \tau_C dZ \cdot dC = \sigma_A \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) dZ \cdot dA - \sigma_B \cos \phi dZ \cdot dB + \\ \tau \cos \phi dZ \cdot dA - \tau \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) dZ \cdot dA \end{aligned} \quad (11)$$

$$\tau_C = \sigma_A \sin \phi \cos \phi - \sigma_B \sin \phi \cos \phi - \tau \sin^2 \phi$$

$$\tau_C = \frac{\sigma_A - \sigma_B}{2} \sin 2\phi + \tau \cos 2\phi$$

El signo de τ es el que tiene esta fatiga en el plano A.

(2) Solución gráfica

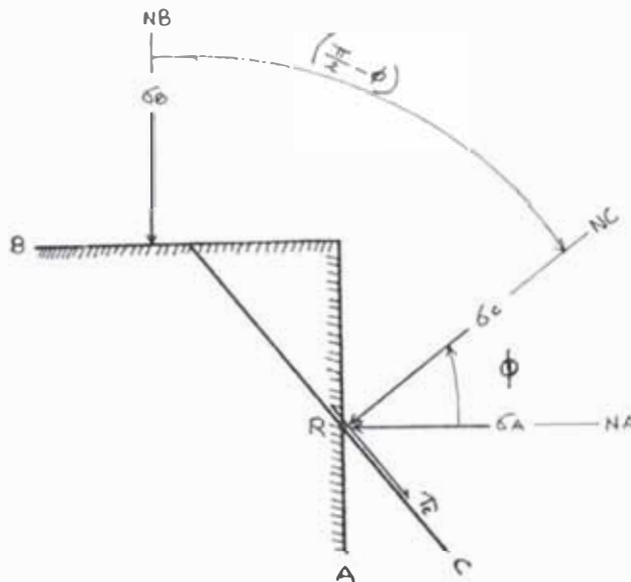


Fig. 3.13

Asumamos $\sigma_A > \sigma_B$

Ubiquemos en el plano cartesiano $A(\sigma_A, \tau)$ y $B(\sigma_B, \tau)$

⁽¹¹⁾ POPOV, Egor P. - MECÁNICA DE MATERIALES. Ed. Limusa, Mexico, 1982, Pág. 278.

⁽¹¹⁾ IBID Pág. 278.

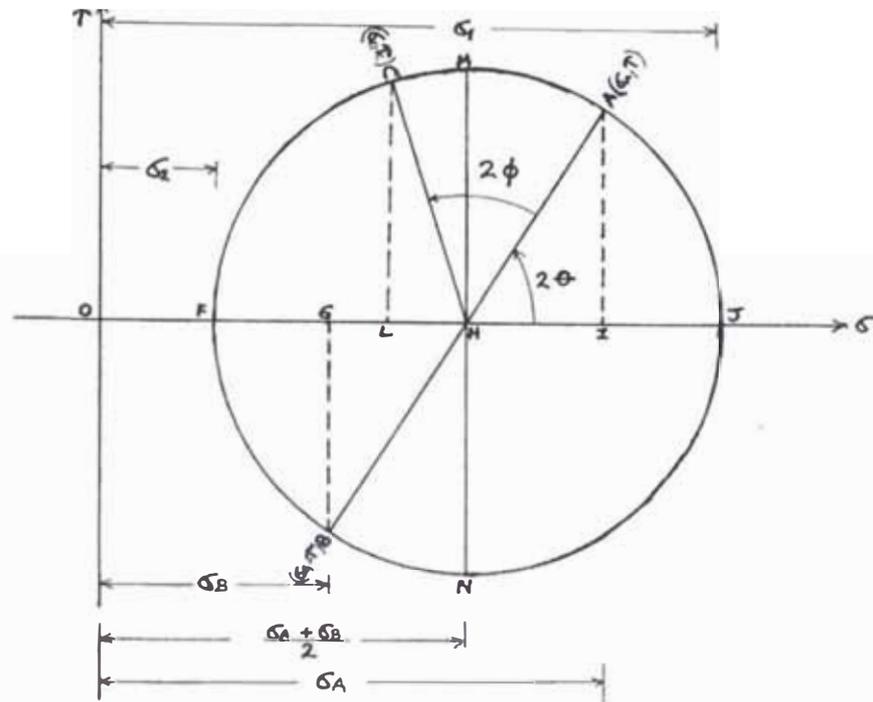


Fig. 3.14

Los puntos A y B son los extremos de un diámetro y el punto H, sobre el eje de abscisas será el centro del círculo (Fig. 3.14):

$$\text{Coordenadas de H} \left(\frac{\sigma_A + \sigma_B}{2}, 0 \right)$$

Radio del círculo:

$$\overline{CH} = \overline{AH} = \sqrt{\overline{HI}^2 + \overline{AI}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_a - \sigma_b}{2} \right)^2 + \tau^2}$$

A partir de HA tracemos el ángulo $AHC = 2\phi$ en el mismo sentido que el ángulo $NA-R-NC = \phi$.

Las coordenadas del punto C, así determinado nos dará las fatigas en el plano $C(\sigma_c, \tau_c)$.

$$\begin{aligned}
 OL &= OH - HL = \frac{\sigma_A + \sigma_B}{2} - CH \cos[\pi - (2\phi + 2\theta)] \\
 &= \frac{\sigma_A + \sigma_B}{2} + CH \cos(2\phi + 2\theta)
 \end{aligned}$$

Pero:

$$\cos 2\theta = \frac{HI}{AH} = \frac{\frac{\sigma_A - \sigma_B}{2}}{\sqrt{\frac{(\sigma_A - \sigma_B)^2}{4} + \tau^2}};$$

$$\sin 2\theta = \frac{AI}{AH} = \frac{\tau}{\sqrt{\frac{(\sigma_A - \sigma_B)^2}{4} + \tau^2}}$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned}
 OL &= \frac{(\sigma_A + \sigma_B)}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_A - \sigma_B)^2}{4} + \tau^2} \\
 &\left[\cos 2\phi \frac{\frac{\sigma_A - \sigma_B}{2}}{\sqrt{\frac{(\sigma_A - \sigma_B)^2}{4} + \tau^2}} - \sin 2\phi \frac{\tau}{\sqrt{\frac{(\sigma_A - \sigma_B)^2}{4} + \tau^2}} \right]
 \end{aligned}$$

Tenemos:

$$OL = \frac{\sigma_A + \sigma_B}{2} + \frac{\sigma_A - \sigma_B}{2} \cos 2\phi - \tau \sin 2\phi = \sigma_c$$

$$CL = CH \sin[\pi - (2\phi - 2\theta)] = \frac{\sigma_A - \sigma_B}{2} \sin 2\phi + \tau \cos 2\phi = \tau_c$$

b) Determinar las fatigas normales máxima y mínima y los planos sobre los que actúan denominados planos principales.

(1) Solución Analítica.

Se sabe:

$$\sigma_c = \frac{\sigma_A + \sigma_B}{2} + \frac{\sigma_A - \sigma_B}{2} \cos 2\phi - \tau \sin 2\phi$$

Para valores de σ_A y σ_B , la fatiga σ_C varía con el ángulo ϕ .

Para hallar su valor máximo y su valor mínimo es necesario derivar σ_C con respecto a ϕ , e igualar a cero:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = -(\sigma_A - \sigma_B)\text{Sen}2\phi - 2\tau\text{Cos}2\phi = 0$$

$$\text{Tang}2\phi = -\frac{\tau}{\frac{(\sigma_A - \sigma_B)}{2}}$$

Expresión que determina la posición de los planos principales, de donde:

$$\text{Sen}2\phi = \frac{\mp\tau}{\sqrt{\frac{(\sigma_A - \sigma_B)^2}{4} + \tau^2}} \text{ y}$$

$$\text{Cos}2\phi = \frac{\pm \frac{(\sigma_A - \sigma_B)}{2}}{\sqrt{\frac{(\sigma_A - \sigma_B)^2}{4} + \tau^2}}$$

Reemplazando estos valores en la expresión general de σ , obtendremos las fatigas principales σ_1 y σ_2 .

$$\sigma_1 = \frac{(\sigma_A + \sigma_B)}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_A - \sigma_B)^2}{4} + \tau^2} \quad (2)$$

$$\sigma_2 = \frac{(\sigma_A + \sigma_B)}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_A - \sigma_B)^2}{4} + \tau^2}$$

(2) Solución Gráfica

Observando el círculo de Mohr la Fig. 3.14 las fatigas normales principales son:

⁽²⁾ BEER, F.P. - JOHNSTON, E.R. - MECÁNICA DE MATERIALES. Ed. Mc. Graw Hill, Mexico, 1989, Pág. 293.

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= OJ = OH + HJ = \frac{(\sigma_A + \sigma_B)}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_A - \sigma_B)^2}{4} + \tau^2} \\ \sigma_2 &= OF = OH - HF = \frac{(\sigma_A + \sigma_B)}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_A - \sigma_B)^2}{4} + \tau^2}\end{aligned}\quad (2)$$

c) Determinar las fatigas cortantes máximas y mínimas y los planos sobre los que actúa.

(1) Solución Analítica

$$\text{Se tiene : } \tau_C = \frac{\sigma_A - \sigma_B}{2} \text{Sen}2\phi + \tau \text{Cos}2\phi$$

$$\text{Derivando : } \frac{d\tau_C}{d\phi} = (\sigma_A - \sigma_B) \text{Cos}2\phi - 2\tau \text{Sen}2\phi = 0$$

$$\text{Co tg}2\phi = \frac{\tau}{\frac{(\sigma_A - \sigma_B)}{2}}$$

Hallando el seno y coseno de este ángulo y reemplazando en la fórmula inicial:

$$\tau_{\max}^{\min} = \pm \sqrt{\frac{(\sigma_A - \sigma_B)^2}{4} + \tau^2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (9)$$

Es decir las fatigas cortantes máximas y mínimas tienen por valor el radio del círculo de Mohr.

⁽²⁾ BEER, F.P.- JOHNSTON, E.R.- MECÁNICA DE MATERIALES. Ed. Mc. Graw Hill, Mexico, 1989, Pág. 293.

⁽⁹⁾ OBERT L. & DUVAL, W.I.- ROCK MECHANICS AND THE DESIGN OF STRUCTURES IN ROCK. Ed. John Wiley & Sons INC N. Y. U.S.A. 1967 Pág. 16.

(2) Solución Gráfica

Observando el círculo de Mohr de la fig. 3.14, las fatigas cortantes máxima y mínima está dado por:

$$\tau_{max} = HM = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$
$$\tau_{min} = HN = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

⁽¹⁷⁾ THE CANADIAN MINING AND METALLURGICAL BULLETIN.-ROCK MECHANICS & GROUND SUPPORT Vol. 77 N° 868, 984, Pág. 55 y 56.

CAPITULO IV

TEORIA DE LA ELASTICIDAD APLICADA A LA MECANICA DE ROCAS

La mecánica de materiales tiene una antigüedad, y por lo general se considera que se inicia con los trabajos de Galileo a principios del siglo XVII. Galileo fue el primero que intentó explicar, sobre una base racional, el comportamiento de un cuerpo sometido a cargas. Desde luego ha habido grandes progresos, pero no hay que olvidar a los científicos franceses Coulomb, Poisson, Navier, Saint Venant y Cauchy, quienes contribuyeron al desarrollo de la teoría de la elasticidad.

La **teoría de la elasticidad está restringida a materiales sólidos**, con las siguientes propiedades elásticas idealizadas:

- Linearidad entre esfuerzo-deformación
- Homogeneidad.
- Isotropía.
- Elasticidad perfecta.

La teoría de la elasticidad aplicada a las masas rocosas y a las excavaciones practicadas en las mismas fueron desarrolladas por Leonard Obert y Wilbur

Duvall del U.S. Bureau of Mines a partir del año de 1938, publicando su libro en 1967 "ROCK MECHANICS AND THE DESIGN OF STRUCTURES IN ROCK" [Mecánica de rocas y diseño de estructuras en rocas], en el cual analiza los esfuerzos y deformaciones en los macizos rocosos.

El modo más simple de relacionar los esfuerzos y las deformaciones es por la linealidad directa (ley de Hooke). Esta es la base fundamental de la teoría de la elasticidad, la cual postula un medio elástico en la cual todas las deformaciones son instantánea y totalmente recuperables, cuando se renuevan los esfuerzos (elasticidad perfecta). Un medio elástico es una idealización de las propiedades del material; cuando un material es menos ideal (incluyendo las rocas) habrá menos recuperación que la recuperación total. Por consiguiente es necesario en las consideraciones de reacción de la roca bajo la acción de las cargas, definir inicialmente su elasticidad y compararlo con el medio ideal, a fin de definir las limitaciones del análisis por la teoría elástica.

4.1. Relaciones Esfuerzo - Deformación en un medio elástico

En un medio elástico el esfuerzo es directamente proporcional a la deformación y los dos están linealmente relacionados en la **Ley de Hooke**: $E = \sigma/\epsilon$, donde "E" es una constante conocida como el "módulo de elasticidad o módulo de Young" en una dirección simple.

Ley de Hooke (1678): "El esfuerzo es directamente proporcional a la deformación unitaria".

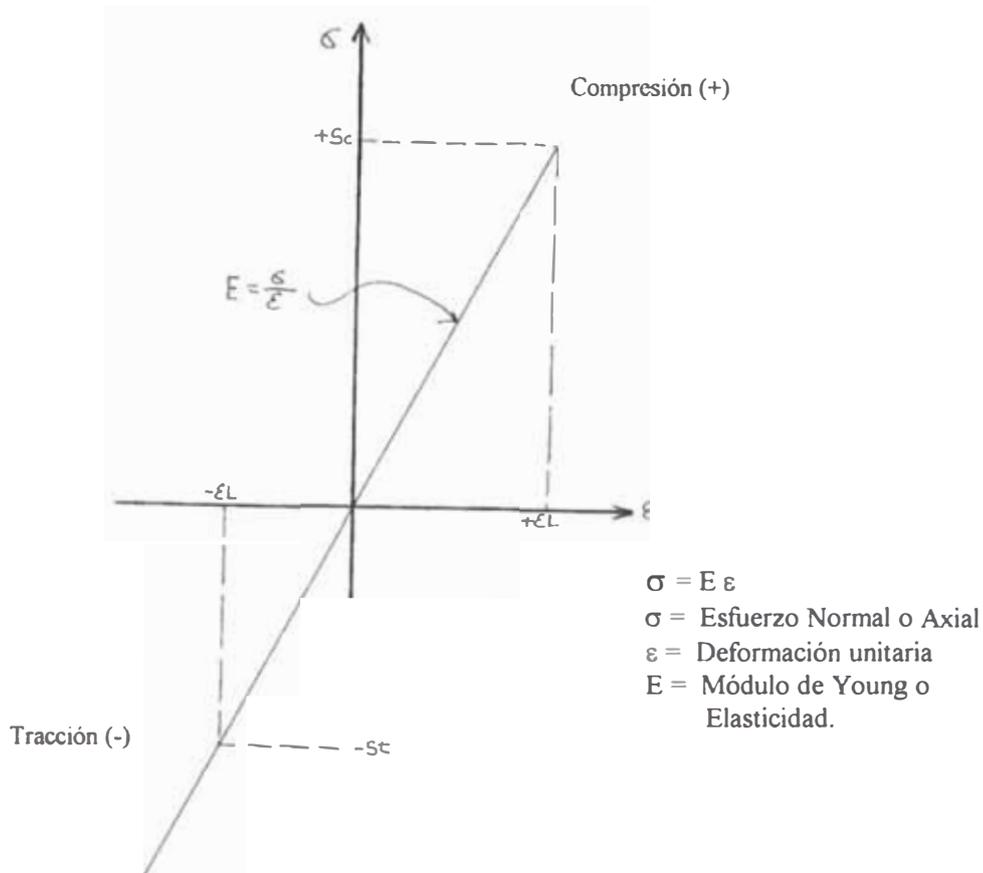


Fig. 4.1

El límite de la **deformación elástica** por compresión ($+\epsilon_L$) es considerablemente mayor en compresión que en tracción ($-\epsilon_L$) (fig. 4.1). Desde que en materiales frágiles este límite representa el punto de fractura o resistencia (S) del material, éste tiene una considerable importancia en rocas.

“Una deformación elástica se define como aquella que desaparece cuando desaparece la carga que ha producido la deformación. Una elasticidad ideal sería aquella en que la carga y la descarga tuviesen lugar instantáneamente. Sin embargo esto nunca puede conseguirse,

puesto que siempre existe retraso la descarga, conocido con el nombre de histéresis".⁽⁴⁾

Si consideramos un cubo cargado verticalmente (fig. 4.2), se asume que, como consecuencia de esta carga, la roca es libre para expandirse lateralmente y se comporta elásticamente como la mayoría de las rocas duras, a niveles de esfuerzo debajo de su resistencia compresiva.

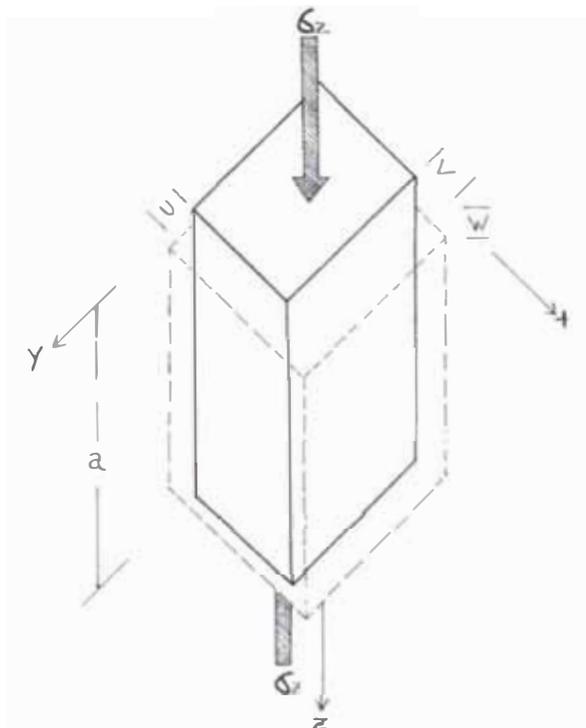


Fig. 4.2

La dimensión vertical disminuirá una cantidad w , mientras que la dimensión lateral aumentará una cantidad $u/a = v$.

La deformación unitaria vertical será $\epsilon_z = w/a$ aplicando la Ley de Hooke $\epsilon_z = \sigma_z/E$, mientras que la deformación unitaria lateral será $\epsilon_x = \epsilon_y = -u/a$

⁽⁴⁾ DE SITTER, L.U.- GEOLÓGIA ESTRUCTURAL, Ed. Omega S.A., Barcelona-España, 1970, Pág. 26 pp.

La relación $\mu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z}$ es denominado relación de Poisson. La

deformación lateral relacionada al esfuerzo vertical

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{\mu\sigma_z}{E}$$

Si en el cubo consideramos las caras laterales sometidas al esfuerzo vertical (tensión plana o biaxial), las deformaciones serán:

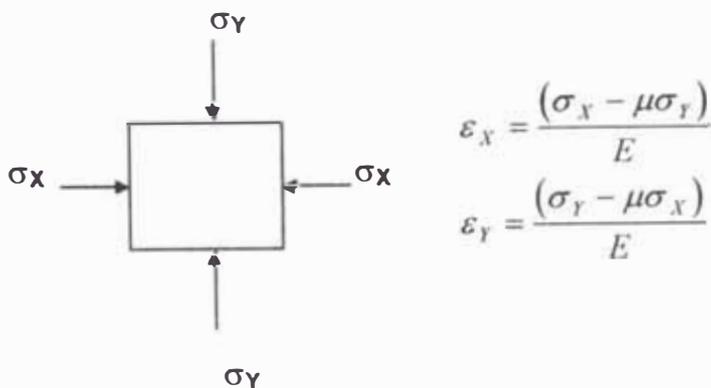


Fig. 4.3

Por el principio de superposición, las deformaciones unitarias en el cubo, sujeto a esfuerzos σ_x , σ_y y σ_z uniformemente distribuidas en los lados, serán:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad (9)$$

Si el cubo estuviera sometido a tres esfuerzos compresivos principales σ_1 , σ_2 y σ_3 las deformaciones unitarias principales serían:

⁽⁹⁾ OBERT L. & DUVALL, W.I.- ROCK MECHANICS AND THE DESIGN OF STRUCTURES IN ROCK. Ed. John Wiley & Sons INC N. Y. U.S.A. Pág. 50.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

4.2. Curva Esfuerzo - deformación para rocas

Las principales rasgos en las relaciones puede ser generalizada en forma de una curva máxima pendiente dando lugar a una curva de descenso de pendiente con el incremento del esfuerzo conforme se alcanza la rotura.

La curva representa una roca en compresión uniaxial. La curva puede ser como representativa de una deformación tipo elástica de una roca, ellos adolecen de una dificultad en la obtención de un valor satisfactorio del módulo de elasticidad. Este puede ser determinado de 3 modos:

1. Como la secante (E_s), módulo en un punto particular, dado un valor promedio de E bajo un límite de esfuerzo especificado.
2. El módulo tangente (E_t) en un punto particular de la curva, dado un valor aparente de E a un esfuerzo especificado.
3. El módulo de tangente inicial (E_i), la pendiente de la línea tangencial a la curva pasando a través del origen, dando el valor de E bajo carga cero.

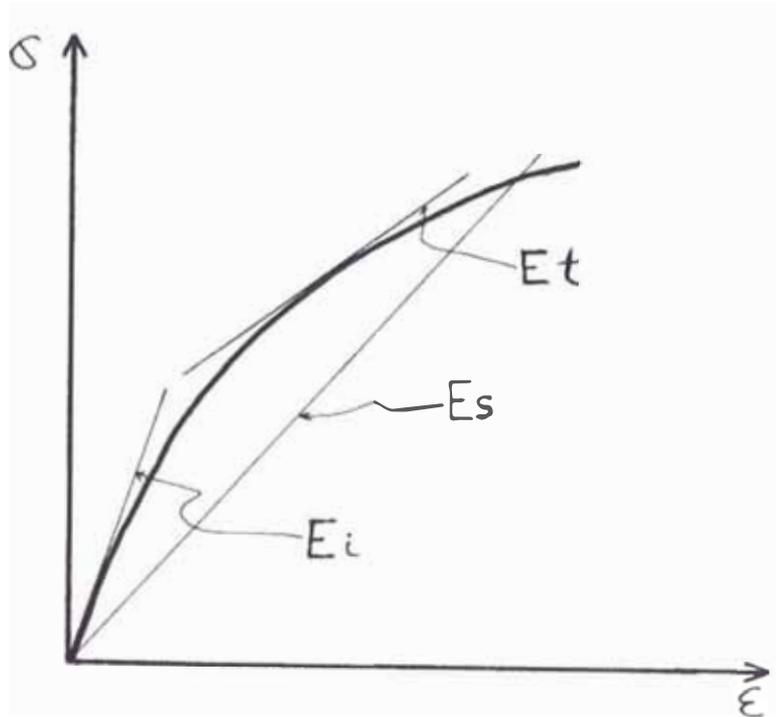


Fig. 4.6

El valor de E obtenido en cualquier punto de la curva pueden ser cercanamente relativos al promedio de la roca, aunque sus valores actuales pueden diverger hasta el 100%. Por esta razón, el valor de E para una roca es normalmente el “módulo tangente inicial”, desde que esta es la más precisa obtenida bajo condiciones de ensayo.

4.3. Constantes elásticas de las rocas

a) Módulo de Young o elasticidad (E)

Del diagrama esfuerzo – deformación (Fig. 4.6), nos dá unas curvas típicas de las rocas. El módulo de Young, es representada por la relación tensión y deformación unitaria.

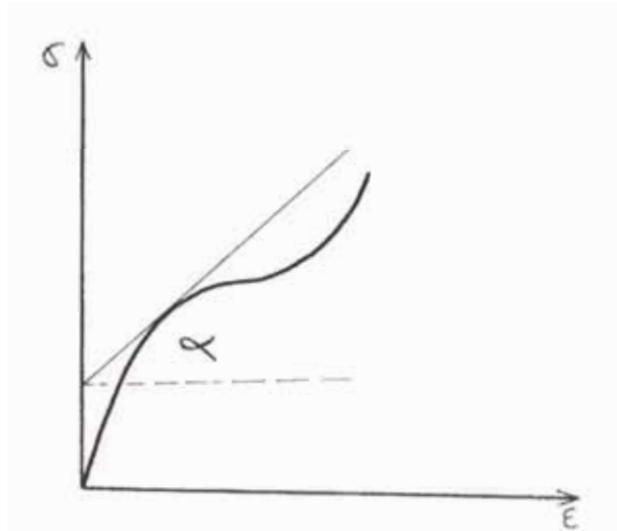


Fig. 4.6

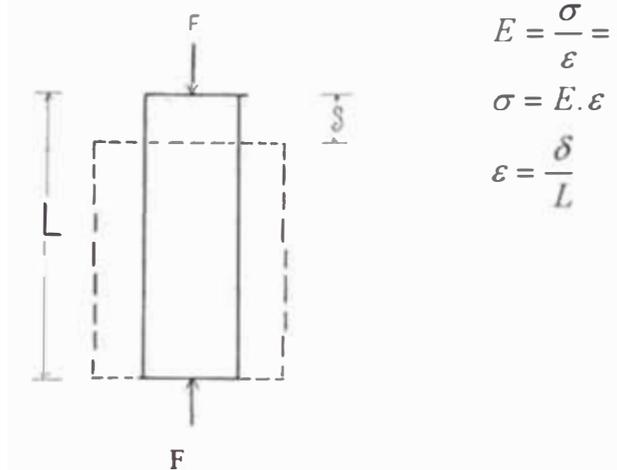


Fig. 4.7

De la Ley de Hooke, fig. 4.7 ($\sigma = k\varepsilon$): la constante K de proporcionalidad fue calculada en 1802 por Thomas Young, se le conoce como módulo de elasticidad o módulo de Young (E).

E para una roca dura, varía en el rango de 5 a 15 x 10⁶ lb/pulg² (35 - 105 x 10³ mpa)

⁽⁷⁾ HOEK, E & BROWN, E.T.- UNDERGROUND EXCAVATIONS IN ROCK, Ed. IMM. London, 1985, Pág. 91.

b) Relación de Poisson (μ)

Representa la relación entre la deformación unitaria lateral y la deformación unitaria axial.

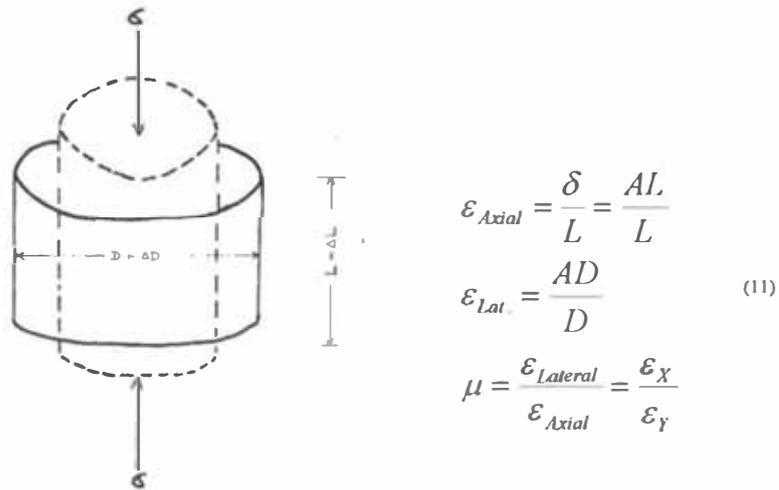
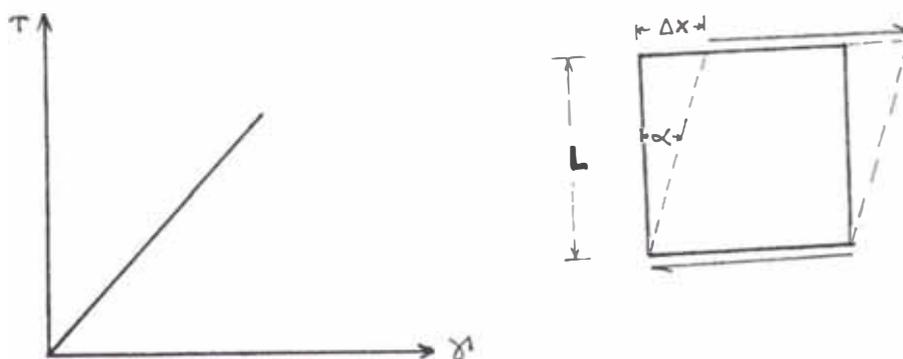


Fig. 4.8

Para las rocas la relación de Poisson (μ) varía de 0.115 a 0.45.

c) Módulo de rigidez o cizalla (G)

Llamado también módulo de elasticidad transversal o módulo de corte.



α = deformación angular o cortante

Fig. 4.9

⁽¹⁾ POPOV, Egor P. MECÁNICA DE MATERIALES, Ed. Limusa, México, 1982, Pág. 63 y 64.

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{\text{Esfuerzo cortante}}{\text{Deformación unitaria de corte}} \quad (13)$$

$$\gamma = \frac{\Delta X}{L} = \text{Tang}\alpha$$

La relación entre E y G es $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$

$$1/3 E < G < 1/2 E$$

d) Módulo de Bulk o expansión (o compresibilidad) (K)

Si H y e son los invariantes de los esfuerzos y deformaciones.

$$H = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

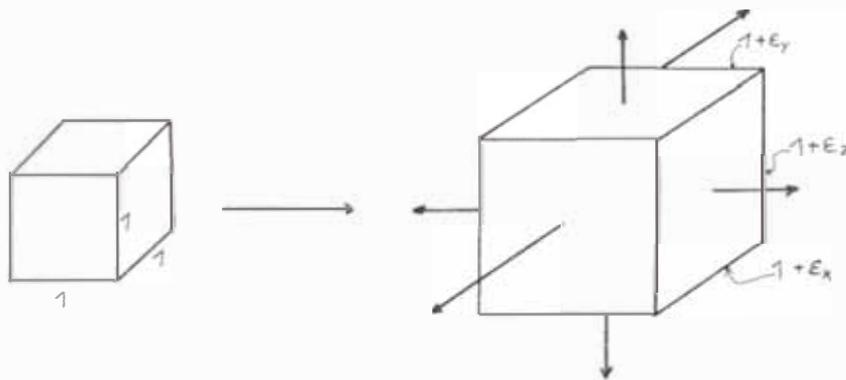


Fig. 4.10

$$V = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)$$

$$V = 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

e = cambio de volumen o dilatación o invariante de las deformaciones

$$e = V - 1 = 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z - 1$$

$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ = representa cambio de volumen por unidad de volumen.

⁽¹³⁾ RAMIREZ OYANGUREN, P. Y otros.- MECÁNICA DE ROCAS APLICADA A LA MINERÍA METALÍCA SUBTERRANEA. Ed. IGM. España, 1984 Pág. 233

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Pero se tiene por la Ley de Hooke generalizada:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$e = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{E} - \frac{2\mu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E}$$

$$e = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$e = \frac{1-2\mu}{E} x.H$$

Si a un cuerpo se le somete a una presión hidrostática uniforme:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = P$$

$$e = \frac{3(1-2\mu)P}{E} = \frac{P}{K} \quad (9)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

K= módulo de expansión (o de compresibilidad) o módulo volumétrico.

e) Constante de Lamé (λ)

La Ley generalizada de Hooke podemos escribir en términos de las deformaciones.

⁽⁹⁾ OBERT L. & DUVAL, W.I.- ROCK MECHANICS AND THE DESIGN OF STRUCTURES IN ROCK. Ed. John Wiley & Sons INC N. Y. U.S.A. Pág. 52.

$$\sigma_x = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} e + \frac{E}{(1+\mu)} \varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} e + \frac{E}{(1+\mu)} \varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} e + \frac{E}{(1+\mu)} \varepsilon_z$$

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} = \text{Constante de Lamé} \quad (9)$$

$$\sigma_x = \lambda e + 2G \varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2G \varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2G \varepsilon_z$$

Las relaciones esfuerzo - deformación o Ley generalizada de Hooke se puede escribir:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_x (1+\mu) - \mu \cdot H \right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left[\sigma_y (1+\mu) - \mu \cdot H \right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left[\sigma_z (1+\mu) - \mu \cdot H \right]$$

La relación de Poisson también es expresada:

$$\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} = \mu$$

⁽⁹⁾ OBERT Leonard & DUVALL, Wilbur I.- ROCK MECHANICS AND THE DESIGN OF STRUCTURES IN ROCK. Ed. John Wiley & Sons INC New York. U.S.A. 1967, Pág. 52.

4.4. Ecuaciones básicas en teoría elástica

El problema en la teoría de elasticidad es determinar; dentro de un cuerpo elástico, en cada dirección y en cada punto, las seis componentes de esfuerzo, $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ y los 6 componentes de deformaciones $(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$

Dado:

- Las constantes elásticas del cuerpo.
- Las medidas y formas del cuerpo.
- Las condiciones de borde.

Las condiciones de borde pueden ser ordenadas conforme se apliquen las cargas, o los desplazamientos o ambos.

Las condiciones necesarias y suficientes que deben satisfacer las componentes de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos, a fin de obtener una solución de un problema de elasticidad, son los siguientes:

1. Relaciones esfuerzo /deformación.
2. Relaciones deformación/desplazamiento
3. Condiciones de equilibrio
4. Condiciones de compatibilidad.
5. Condiciones de borde en la superficie exterior del cuerpo.

Las primeras condiciones deben ser satisfechas en cada punto del cuerpo, la (5) solo en la superficie exterior.

4.5. Elasticidad en rocas

La elasticidad es una propiedad de un material ideal. Es una propiedad de materiales ingenieriles, incluyendo rocas, en una mayor o menor extensión, dependiendo que tan cercanamente se aproximan a lo ideal. En la práctica esto depende de 3 factores principales: **la homogeneidad, la isotropía y la continuidad**; posibilita a una estimación somera de la probable elasticidad de la roca.

a) Isotropía

Es una medida de la propiedad direccional del material, por ejemplo en un suceso estadístico un cuerpo granular será isotrópico si todos sus grados tiene orientación aleatoria y un plano de igual dimensión interceptando el cuerpo en cualquier dirección exponen un número igual de granos.

Luego desde que **las rocas** tienen orientaciones de partículas y cristales preferenciales, ellos son anisotrópicos estrictamente hablando y se espera que reaccionen diferentemente a los esfuerzos en distintas direcciones dependiendo del grado de anisotropía.

b) Homogeneidad

Es una medida de la **continuidad física de un cuerpo**. En un material homogéneo, los constituyentes son distribuidos de tal modo que un fragmento cortado en cualquier parte del cuerpo tendrá constituyente y por lo tanto propiedades representativas del

todo. La homogeneidad es por consiguiente independiente de la escala y podría ser posible describir un macizo rocoso de grano fino como un cuerpo homogéneo, mientras una roca de granos grandes y con dimensiones limitantes debe ser considerado como no homogéneo.

c) Continuidad

Puede ser tomado para referirse a la cantidad de juntas, grietas y espacios porosos en un cuerpo rocoso particular . El grado de continuidad afectará su cohesión y la transmisión de esfuerzo a través del cuerpo. Los extremos en la consideración de continuidad rocosa podría ser una masa de roca fracturada, la cual es completamente discontinua y un macizo rocoso de granos finos, masivo, con pocas juntas, sería un medio cercanamente continuo.

Todas las rocas son en alguna extensión anisotrópicas, no homogéneas y discontinuas, por consiguiente son menos que perfectamente elásticas. Sin embargo algunas rocas se aproximan en grados variados a alguna propiedad elástica, particularmente con cargas de deformación bajas.

4.5.1. Rocas cuasi elásticas

Obviamente la mayoría de las rocas elásticas serán de grano fino, masivas y compactas. Una propiedad características de las rocas ígneas extrusivas e hipabisales y algunas rocas

metamórficas de grano fino. Estas rocas se aproximan de gran modo a las propiedades de un material elástico frágil, teniendo una relación esfuerzo-deformación cercanamente lineal hasta el punto de falla y son denominadas "rocas cuasi elásticas", $E = 6 \text{ a } 11 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$.

4.5.2. Rocas semielásticas

Las rocas ígneas de granos grueso y los sedimentos compactados de grano fino son menos elástico, teniendo baja porosidad y una razonable cantidad de cohesión, a estas rocas se le denomina "rocas semielásticas". Estos tienen una relación esfuerzo-deformación en la cual, la pendiente de la curva disminuye con el incremento del esfuerzo, tienen un módulo de elasticidad bajo ($4\text{-}7 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$).

4.5.3. Rocas no elásticas

En esta categorías incluye las rocas menos cohesivas, con espacios porosos grandes (mayoría de veces sedimentarias débiles) con una evidencia no elástica. Cualquier análisis basado en la elasticidad podría ser peligroso. Exhibe características variable en la curva esfuerzo-deformación. La pendiente promedio, la cual indica la compactación y cierre de grietas antes que ocurra una deformación cercanamente lineal. $E < 5 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$.

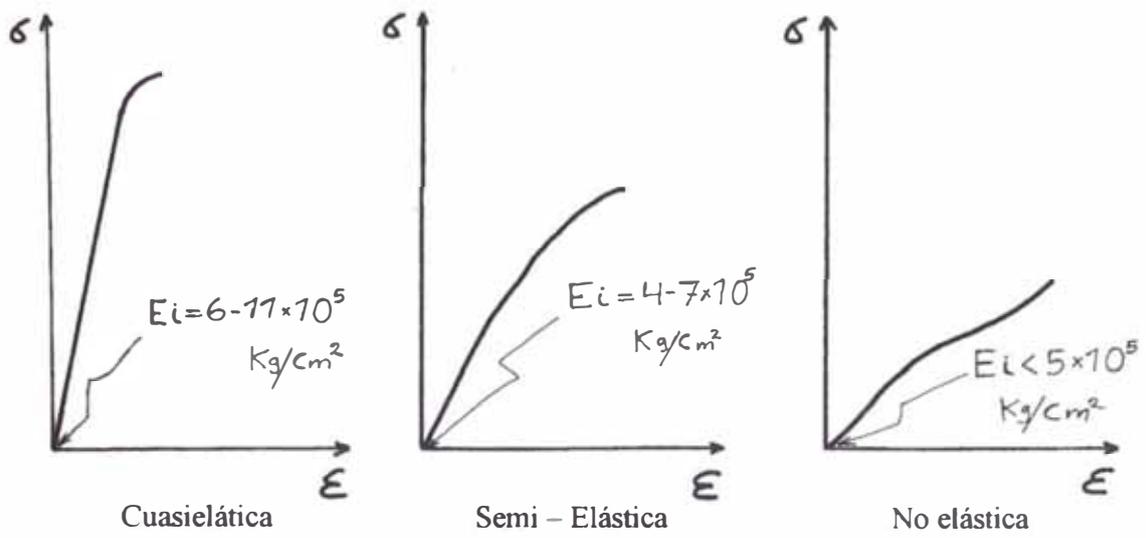


Fig. 4.11

CAPITULO V

MEDICIONES DE ESFUERZO INSITU

Hasta la fecha no es posible la medición directa de los esfuerzos in situ en las rocas, por lo que es necesario medir otra propiedad que pueda ser matemáticamente relacionada al esfuerzo. El procedimiento normal es medir deformaciones y luego calcular esfuerzos por la relación existente entre estas dos propiedades. Cuando un cuerpo sólido sufre la acción de una fuerza se deforma. Para la mayoría de materiales incluyendo las rocas, el esfuerzo es proporcional a la deformación dentro de los límites de elasticidad del material.

Se han usado métodos sínicos para medir los esfuerzos alrededor de los trabajos subterráneos. Cuando un sólido sufre un impacto, una onda de energía se transmitirá a través de él. Se formarán una onda longitudinal y una de corte, y se desplazarán a una velocidad que ha sido calculada por la teoría de la elasticidad y sus ecuaciones son:

$$V_c = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1-\mu)(1-2\mu)}}$$
$$V_p = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1-\mu)}}$$

V_c = Velocidad de la onda de compresión.

V_t = Velocidad de la onda de corte.

E = Módulo de Young o elasticidad.

μ = Módulo de Poisson.

ρ = Densidad de la roca.

Si alguno de estos valores cambia con el esfuerzo, la velocidad también cambiará. La aplicación de este método se halla limitado por defectos en las rocas en relación a la homogeneidad.

Los profesores A. Roberts de la Universidad de Sheffield, C. L. Emery de Canadá, han realizado el análisis de los esfuerzos por el uso de la foto-elasticidad. Ha empleado inclusiones sólidas, tapones foto-elásticos con el fin de registrar los cambios de esfuerzos en las rocas.

Probablemente los métodos más efectivos para la determinación indirecta de los esfuerzos en una roca minada son: Método de la liberación de esfuerzos y método de la restauración de esfuerzos.

5.1. Aproximaciones teóricas

Esfuerzo insitu o esfuerzo de campo: En 1912 el Profesor Heim, introdujo el concepto de presión geostática, en el que la tensión vertical a una profundidad determinada es una función lineal de la profundidad.

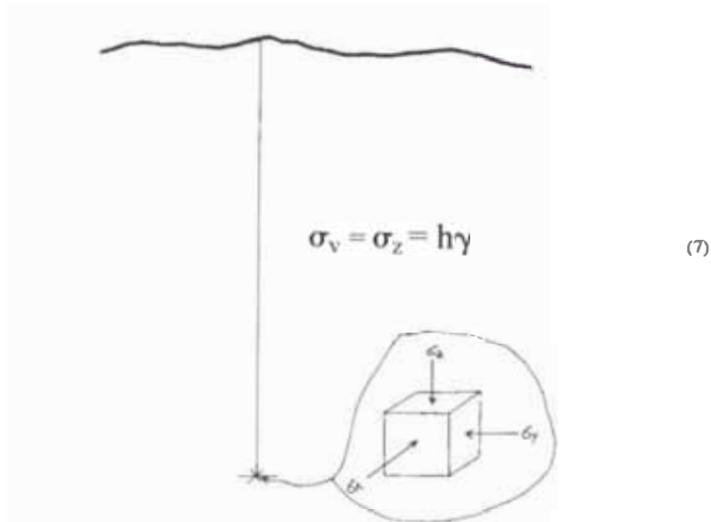


Fig. 5.1

Suponiendo: $\epsilon_x = \epsilon_y$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_H$$

De la Ley generalizada de Hooke:

$$\epsilon_x = \epsilon_y \rightarrow \sigma_x = \sigma_y = \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_z$$

$$\sigma_H = \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_v \quad k = \frac{\mu}{1-\mu} = \frac{\sigma_H}{\sigma_v}$$

$$\sigma_H = k \sigma_v$$

k = Factor de restricción lateral.

γ = Peso unitario de la roca.

h = Profundidad

σ_v = Tensión vertical

σ_H = Tensión horizontal.

(7) HOEK, E & BROWN, E.T.- UNDERGROUND EXCAVATIONS IN ROCK Ed. I.M.M., London, 1985, Pág. 96.

5.2. Mediciones Insitu

Los esfuerzos in-situ pueden ser medidos en perforaciones diamantinas, en afloramiento o paredes de las excavaciones subterráneas, o calculadas a partir de mediciones de deformación hechas en aberturas subterráneas. Los métodos más comunes son:

5.2.1. Método de liberación de esfuerzos

5.2.1.1. Método del triángulo equilátero

Se le conoce también como “Borehole deformation method” o de taladros de sondaje diamantino (diamondrill). Se perfora con taladros de broca EX (38.1 mm ϕ) hasta una profundidad deseada en labores no muy perturbadas (Ejemplo: labores realizadas por raise boring) los taladros hacen entre sí un ángulo de 60° (Fig. 5.2), la distancia entre taladros 10-70 cm., se mide las deformaciones entre taladros; las medidas se hacen con barras de extensión o barra invar. El módulo de elasticidad (E) y la razón de Poisson (μ) se determinan en laboratorio, también con un “strain gauge” se mide las deformaciones en los taladros (RM-590-EX White Pine Borehole Deformation Gauge) ⁽¹⁶⁾

⁽¹⁶⁾ SOILTEST, INC.- ROCK MECHANICS AND MINE INSTRUMENTS Pinterd in USA, 1974, Pág. 18.

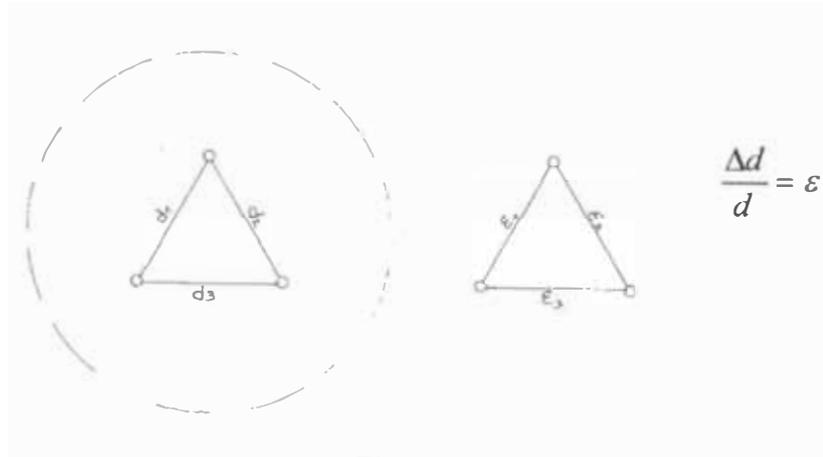


Fig. 5.2

La dirección y magnitud de los esfuerzos pueden calcularse usando las siguientes fórmulas de R.H. Merrill y J.R. Peterson [“Deformation of a borehole in rock”, U.S. Bureau of Mines, Rept. Invest. 5881 (1961)]:

$$\sigma_1 + \sigma_3 = \frac{E}{3D(1-\mu^2)}(U_1 + U_2 + U_3)$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\sqrt{2}E}{6D(1-\mu^2)} \left[(U_1 - U_2)^2 + (U_2 - U_3)^2 + (U_1 - U_3)^2 \right]^{1/2} \quad (15)$$

$$\text{Tg}2\theta_1 = \frac{\sqrt{3}(U_2 - U_3)}{2U_1 - U_2 - U_3}$$

σ_1 = Esfuerzo Principal mayor (S)

σ_2 = Esfuerzo Principal menor (T)

E = Módulo de Young

μ = Relación Poisson

⁽¹⁵⁾ STAGG, K. G.- ZIENKIEWICZ, O.C.- ROCK MECHANICS IN ENGINEERING PRACTICE, Ed. Wiley, London, 1980, Pág. 161

U_1, U_2, U_3 = Corrimientos o desplazamientos o deformaciones en diámetros separados por 60° .

D = Longitud inicial del taladro (Diámetro del taladro).

θ_1 = Angulo desde S a U_1 medido en sentido contrario a las agujas del reloj, en una roseta de 60° .

5.2.1.2. Método de la perforación concéntrica.

Se le conoce como overcoring, se hace con sondajes diamantinos. Una porción de la roca es completamente descargada de tensiones mediante la perforación concéntrica de otro testigo de mayor diámetro al mismo tiempo que se miden las deformaciones superficiales en la perforación interior. Estos datos, con las medidas de módulo de elasticidad y módulo de Poisson de laboratorio, nos permite calcular el estado de tensiones y la dirección de los ejes principales.

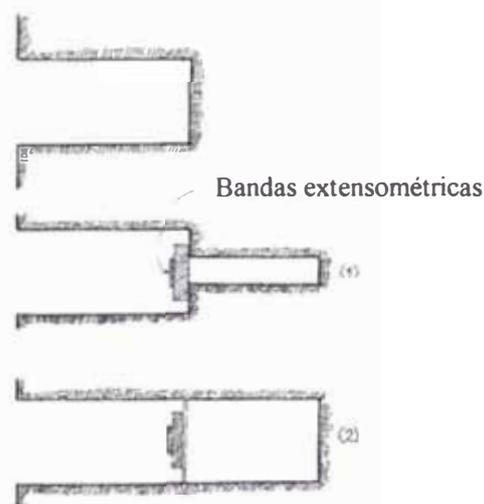


Fig. 5.3

1. Se toma las mediciones iniciales.
2. Medición después de la liberación.

$$R = \delta x \frac{L}{A} \quad (1)$$

$$\Delta R = \delta \frac{\Delta L}{\Delta A} \quad (2)$$

$$\frac{\Delta R}{R} = k \frac{\Delta L}{\Delta A} \rightarrow \frac{\Delta R}{R} = k \varepsilon$$

k = Factor de banda (lo da el fabricante)

5.2.2. Método de la restauración de esfuerzos

5.2.2.1. Método de la gata hidráulica

Se conoce también como manga de presión o Flat Jack, es usado cuando se tiene una cara libre, ya sea una galería o excavación subterránea, que no haya sufrido fracturación debido a la voladura. Se instalan puntos de observación para medir las deformaciones en los bordes superiores e inferiores de la ranura y se toman lecturas iniciales de la distancia entre las marcas. Se corta la ranura de dimensiones similares a la manga, la misma que deberá ser perpendicular a la cara libre.

Se introduce la manga y se llena con cemento el espacio entre la manga y la roca. El ensayo consiste en llenar ha presión de aceite el interior de la manga

y así forzar que la roca circundante regrese a su posición inicial, es decir, antes de abrir la ranura. La presión de aceite que existe en el interior de la manga es aproximadamente igual al esfuerzo normal al plano de la manga.

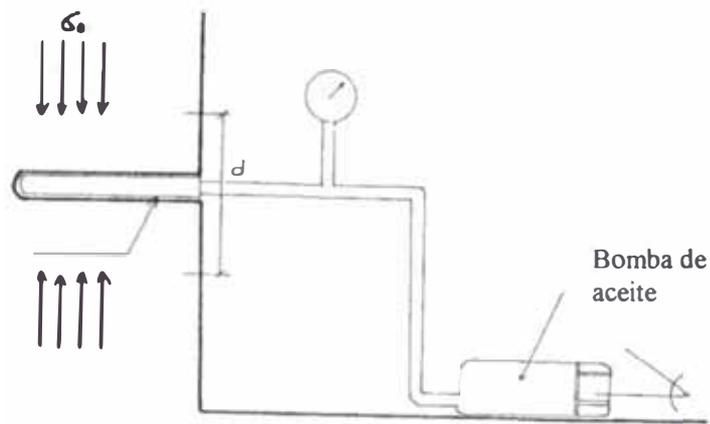


Fig. 5.4

5.2.2.2. Fracturamiento hidráulico

Todavía no se usa en minería, se utiliza en la industria del petróleo. El método consiste en preparar un taladro de perforación diamantina y luego bombear agua a una sección del taladro que ha sido aislada mediante tapones. Al aumentar la presión de agua, las tensiones de compresión en las paredes de la perforación se reducen hasta volverse, en algunos puntos, tensiones de tracción, que eventualmente pueden llegar a exceder la resistencia a la tracción de la roca, produciéndose rajaduras. Como

resultado, la presión de agua disminuye llegando a un punto donde la presión se estabiliza. La presión de agua al producirse la fracturación de la roca es P_{cl} y la presión estabilizada es P_s .

Para la interpretación de los resultados es necesario conocer aproximadamente cuál es la orientación de las fracturas inducidas esto puede hacerse utilizando una cámara fotográfica especial o una manga deformable de jebe que permita identificar las fracturas. En general las fracturas inducidas son verticales.

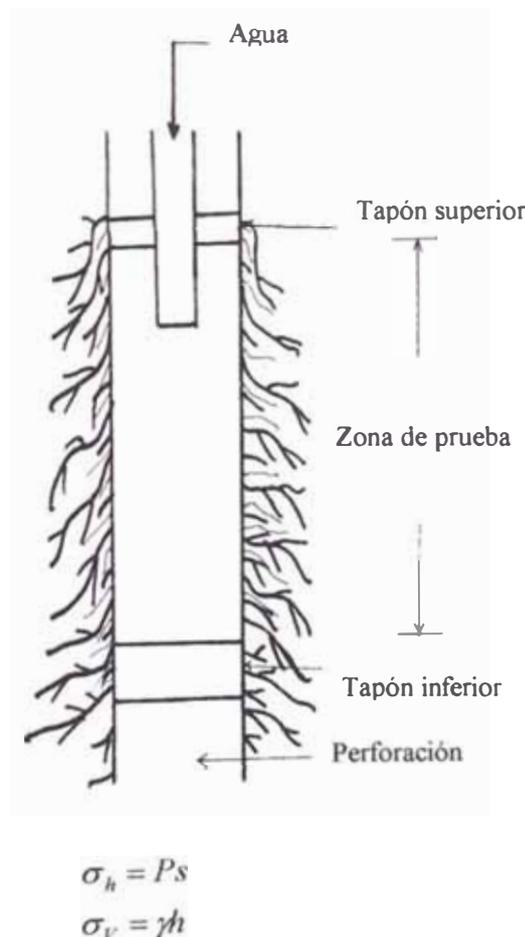


Fig. 5.5

CAPITULO VI

ESFUERZOS EN EL ESPACIO [\mathbb{R}^3]

Si nos imaginamos un elemento cúbico de roca como el que se ilustra en la figura 6.1, habrá una fuerza vector de tres componentes (una normal y dos tangenciales) actuando en cada una de las caras del cubo, dando un total de 18 componentes. Como se mantiene el equilibrio, los esfuerzos en las caras opuestas deberán ser iguales, y como se mantiene el equilibrio rotacional, las componentes tangenciales (o de corte) en caras adyacentes también serán iguales; siendo así que solo se requiere de seis componentes para especificar las fuerzas en un punto de un cuerpo sólido.

Luego la figura 6.1.a, es equivalente a la fig. 1.b y esta equivalente a un sistema de tres esfuerzos principales normales entre si $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$; como se muestra en la fig. 6.1.c, donde los tres ejes a lo largo de los que actúan las fuerzas x, y i z con ángulos α, β, γ respectivamente.

En un campo tridimensional, los esfuerzos en un punto, por consiguiente, pueden especificarse en términos de las magnitudes y direcciones de los esfuerzos principales actuando mutuamente en ángulos rectos. Consecuentemente, para obtener la información necesaria para la

determinación de los esfuerzos en un sólido tridimensional serán necesarios tres medidas y para un campo de esfuerzos bidimensionales se requerirán dos medidas.

Al considerar el estado natural de esfuerzos en mecánica de rocas conviene referirse a los esfuerzos principales en tres direcciones ortogonales, una de ellas vertical. De hecho, estas son tensiones principales secundarias que sirven para identificar las primarias, desconocidas en magnitud y dirección. Se puede determinar los esfuerzos principales si se conocen las nueve componentes de esfuerzo que actúan sobre un cubo elemental (fig. 6.1.a). Estas componentes son función de seis variables independientes.

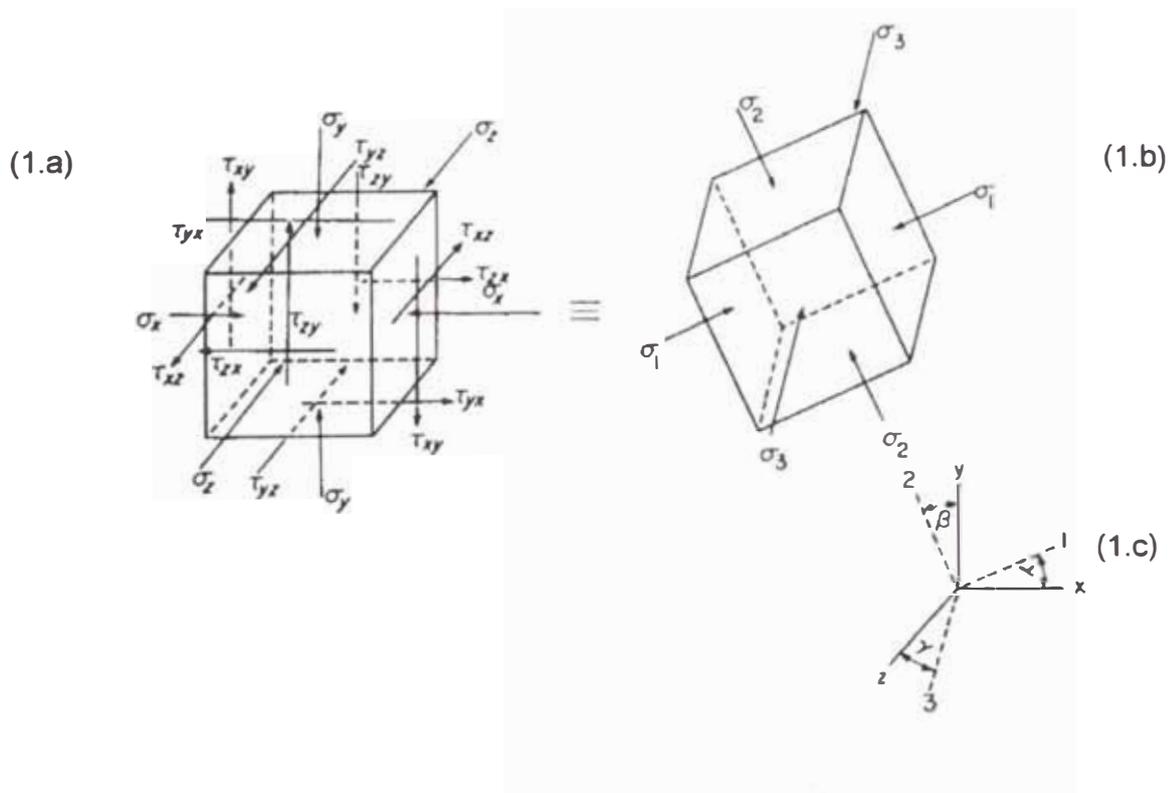


Fig. 6.1 Esfuerzos actuando en un punto de un sólido.

6.1. Estado de esfuerzos en un punto

Para definir plenamente el estado de los esfuerzos en un punto dentro de un cuerpo sólido, será necesario considerar un pequeño elemento de volumen que encierra el punto. Para un mejor estudio, referiremos el cuerpo a un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares (X,Y,Z). Tomamos planos paralelos a los planos coordenados con las que definimos un elemento de volumen alrededor del punto (Fig. 6.2).

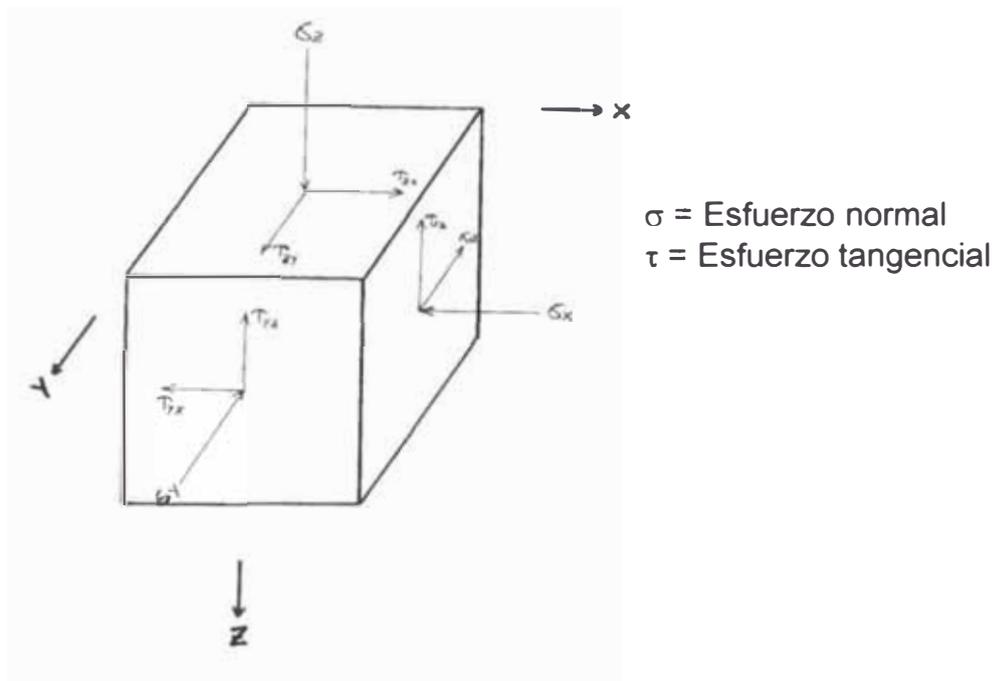


Fig. 6.2

Las compresiones de superficie en las tres caras visibles son todas positivas. Los lados del elemento se consideran tan pequeños que se desvanecen de modo que las componentes de compresión en cada cara oculta son las mismas que las de la cara visible correspondiente. Esto implica que las condiciones del traslado del

equilibrio quedan automáticamente satisfechas. Se puede ver que para satisfacer las condiciones de equilibrio de rotación:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

Los pares de esfuerzos cortantes (τ_{xy}, τ_{yx}) , (τ_{yz}, τ_{zy}) y (τ_{xz}, τ_{zx}) se conoce como esfuerzos cortantes conjugados. Para definir completamente el estado del esfuerzo que actúa sobre este elemento, necesitamos conocer los valores de las seis cantidades independientes σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} y τ_{zx} , que se llaman componentes del esfuerzo en un punto. En los esfuerzos normales (σ_x , σ_y y σ_z) el subíndice indica el paralelismo al eje cartesiano, en caso τ el 1er sufijo indica la componente del esfuerzo normal y el 2do sufijo la dirección.

6.2. Ecuaciones de equilibrio

Consideremos un cuerpo en equilibrio, sobre el que actúan fuerzas exteriores y un entorno volumétrico del punto P. Si suponemos que dicho entorno volumétrico tiene dimensiones pequeñas pero no despreciables, no podemos decir que los esfuerzos actuantes sobre caras opuestas son iguales y de sentido contrario. Los esfuerzos actuantes en el entorno volumétrico se muestra en la figura 6.3.

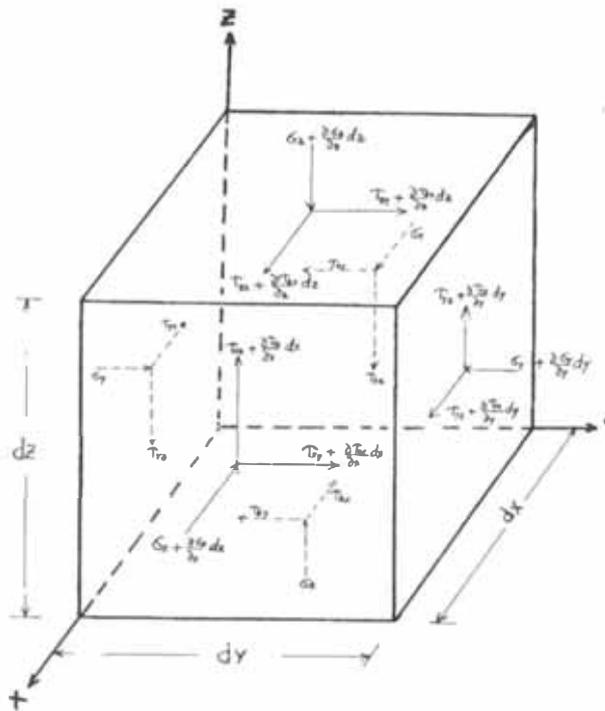


Fig. 6.3

Las condiciones de equilibrio debe satisfacer.

$$\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0$$

La condición de equilibrio de fuerzas sobre el eje X, es (considerando nulas o despreciables las fuerzas de volumen)

$$\sum F_x = \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dzdx - \tau_{yx} dzdx + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dxdy - \tau_{zx} dxdy + X dxdydz = 0$$

operando y simplificando, nos queda

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial z} = 0$$

Procediendo análogamente según los otros ejes.

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

Para analizar la condición de equilibrio de momentos, consideremos las fuerzas que tienden a hacer rotar el entorno volumétrico sobre el eje paralelo a X.

$$\sum M_x = \frac{\tau_{yz} dx dz dy}{2} + \frac{\tau_{yz} dx dy}{2} - \frac{\tau_{zy} dx dy dz}{2} - \frac{\tau_{zy} dx dy dz}{2} = 0$$

Similar ecuación de $\sum M_y = 0$ y $\sum M_z = 0$. operando (dividiendo por dx, dy y dz) y simplificando en relación a cada eje resulta:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \end{aligned} \quad (7)$$

6.3. Esfuerzos sobre un plano arbitrario

Consideremos un plano genérico que pase por el punto P, definido por sus cosenos directores, (en relación a la normal del plano ABC).

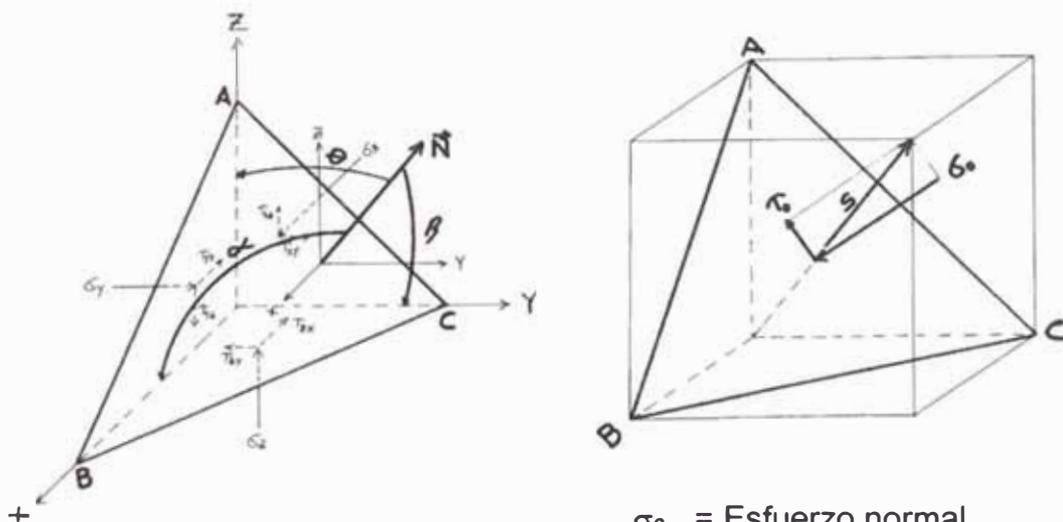


Fig. 6.4

σ_0 = Esfuerzo normal
 τ_0 = Esfuerzo tangencial
 o cortante.

⁽⁷⁾ HOEK, E & BROWN, E. I.- UNDERGROUND EXCAVATIONS IN ROCK Ed. I. M. M., London, 1985, Pág. 89.

Angulos directrices de la normal del plano ABC: α, β, θ

$$\text{Cos } \alpha = l$$

$$\text{Cos } \beta = m$$

$$\text{Cos } \theta = n$$

$X(S_x), Y(S_y)$ y $Z(S_z)$, componentes del esfuerzo (S) en el plano ABC paralelo a los ejes X, Y, Z respectivamente.

$$\text{Area del plano ABC} = \Delta$$

$$\text{Area del plano OBC} = \Delta \text{ Cos } \alpha = \Delta l$$

$$\text{Area del plano OAC} = \Delta \text{ Cos } \beta = \Delta m$$

$$\text{Area del plano OAB} = \Delta \text{ Cos } \theta = \Delta n$$

$$S^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

Aplicando la condición de equilibrio según la dirección de los ejes coordenados:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: \Delta X - \sigma_x \Delta l - \tau_{yx} \Delta m - \tau_{zx} \Delta n &= 0 \\ X = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0: \Delta Y - \tau_{xy} \Delta l - \sigma_y \Delta m - \tau_{zy} \Delta n &= 0 \\ Y = \tau_{xy} l - \sigma_y m - \tau_{zy} n \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sum F_z = 0: \Delta Z - \tau_{xz} \Delta l - \tau_{yz} \Delta m - \sigma_z \Delta n &= 0 \\ Z = \tau_{xz} l - \tau_{yz} m - \sigma_z n \end{aligned} \quad (3)$$

Ordenando:

$$\begin{cases} X = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ Y = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ Z = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \tau_{xy} \tau_{xz} \\ \tau_{yx} \sigma_y \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \tau_{zy} \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

Componentes de esfuerzo tensor de esfuerzos Cosenos directores de la normal

$$S^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

$$S^2 = \sigma_0^2 + \tau_0^2 \rightarrow \tau_0^2 = S^2 - \sigma_0^2$$

Variación del esfuerzo normal (σ_0)

$\sigma_0 = \sum$ proyecciones de X, Y, Z sobre N.

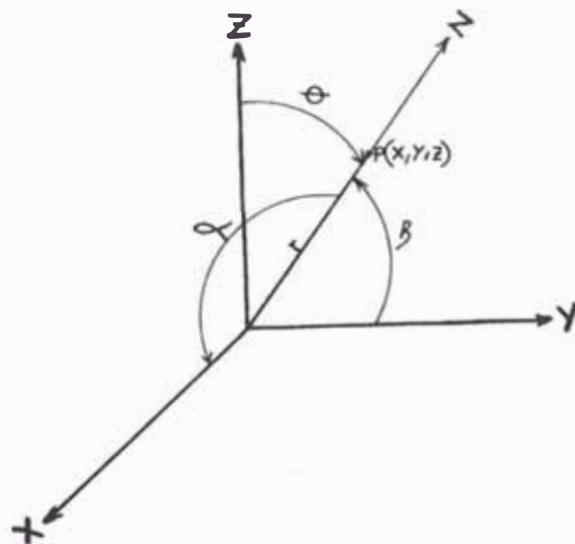
$$\sigma_0 = X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \theta = Xl + Ym + Zn \quad (5)$$

De (4) en (5)

$$\sigma_0 = \sigma_x l^2 + \tau_{xy} lm + \tau_{xz} ln + \tau_{yx} lm + \sigma_y m^2 + \tau_{yz} mn + \tau_{zx} ln + \tau_{zy} mn + \sigma_z n^2 \quad (6)$$

$$\sigma_0 = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{xz} ln + 2\tau_{yz} mn$$

$$\sigma_0 = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2(\tau_{xy} lm + \tau_{xz} ln + \tau_{yz} mn)$$



$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{X}{r} = l \\ \cos \beta = \frac{Y}{r} = m \\ \cos \theta = \frac{Z}{r} = n \end{cases} \quad (7)$$

Fig. 6.5

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \theta = 1$$

De (7) en (6)

$$\sigma_0 = \sigma_x \frac{X^2}{r^2} + \sigma_y \frac{Y^2}{r^2} + \sigma_z \frac{Z^2}{r^2} + 2\tau_{xy} \frac{XY}{r^2} + 2\tau_{yz} \frac{YZ}{r^2} + 2\tau_{xz} \frac{XZ}{r^2} \quad (8)$$

$$\sigma_0 r^2 = \sigma_x X^2 + \sigma_y Y^2 + \sigma_z Z^2 + 2\tau_{xy} XY + 2\tau_{yz} YZ + 2\tau_{xz} XZ$$

$$\sigma_0 r^2 = K \quad (\text{Constante que depende de la escala})$$

$$K = \sigma_x X^2 + \sigma_y Y^2 + \sigma_z Z^2 + 2\tau_{xy} XY + 2\tau_{xz} XZ + 2\tau_{yz} YZ \quad (9)$$

(Ecuación general de una superficie de 2º grado).

Cuando los esfuerzos cortantes τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} son iguales a cero, los esfuerzos normales en las caras del cubo son principales.

Sea S un esfuerzo principal $S = \sigma_p$ (dirección de la normal) aplicando la ecuación (4)

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \sigma_p \begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = 0$$

al desarrollar se tiene

$$\sigma_p^3 - I_1 \sigma_p^2 + I_2 \sigma_p - I_3 = 0 \quad \text{Ecuación cúbica completa} \quad (1)$$

donde:

(1) BRADY, B.H.- BROWN, E.T.- ROCK MECHANICS FOR UNDERGROUND MINING; Pub. G. Allen & Unwin Ltd., London, 1985, Pag. 25.

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

Resolviendo la ecuación cúbica se tiene $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, los cuales se denominan (esfuerzos principales).

6.4. Tensiones primarias en un medio rocoso

La corteza terrestre está sometido a un campo de tensiones o esfuerzos, que resulta de la combinación de varios factores, siendo los principales el peso del material suprayacente, los esfuerzos tectónicos residuales y la restricción lateral ofrecida por la masa rocosa circundante. El campo de tensiones conocido también como tensiones primarias o Pre-existentes, es el estado de tensiones que existe en el medio rocoso, antes de que se excave en él una abertura o perforación.

La condición de equilibrio en la que está la masa rocosa antes de practicar una excavación en ella, hace que cualquier punto de la misma está sometida a un campo de esfuerzos original o primario (Esfuerzos octaédricos o triaxial).

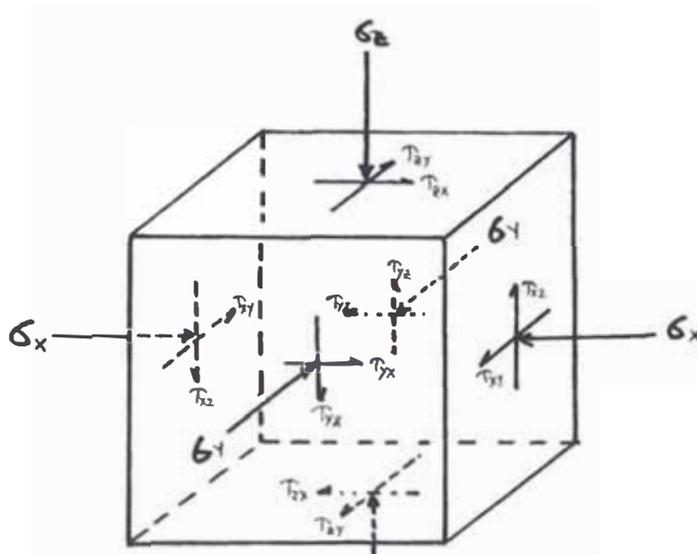


Fig. 6.6

Este cubo imaginario representa obviamente una condición ideal de roca sana, homogénea e isotrópica. Si los esfuerzos normales indicados correspondieran a los esfuerzos principales, los esfuerzos tangenciales desaparecerían.

La magnitud y dirección de las fuerzas que actúan sobre un punto cualquiera de la masa rocosa dependerá del campo de esfuerzos inicial o primario.

Al practicarse una excavación en un medio rocoso la presencia de la abertura altera las condiciones de los esfuerzos preexistentes, induciendo a una redistribución, alrededor de la excavación, que se conoce con el término genérico de esfuerzos inducidos o secundarios. La magnitud y profundidad de la zona en la que se presenta esta alteración del campo de esfuerzos depende de la

forma y dimensiones de la excavación, así como del método de excavación empleado, pero rara vez se extiende más allá del ancho de la excavación.

Volviendo al cubo ideal, se puede afirmar que el confinamiento lateral impedirá la expansión del mismo bajo la acción de la carga vertical σ_z y siendo condición para el equilibrio que la suma de las deformaciones elásticas sea nula, se tendrá:

$$\frac{1}{E} \cdot \mu \cdot \sigma_z + \frac{1}{E} \cdot \mu \cdot \sigma_y - \frac{1}{E} \sigma_x = 0$$

$$\sigma_z - \sigma_y - \frac{1}{\mu} \cdot \sigma_x = 0$$

$$\text{Si } \sigma_x = \sigma_y \rightarrow \sigma_x = \sigma_y = \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \sigma_z = k \sigma_z$$

donde:

E = módulo elástico longitudinal.

μ = relación de Poisson.

K = factor de restricción lateral.

Suponiendo que el campo de esfuerzos existentes sea el origen exclusivamente gravitacional la tensión o esfuerzo vertical en cualquier punto de la masa rocosa estará dada por:

$$\sigma_z = \gamma h$$

donde:

γ = Peso unitario de la roca.

h = Profundidad.

σ_z = Esfuerzo vertical.

CAPITULO VII

MODELOS MATEMATICOS PARA LA SOLUCION DE LOS ESFUERZOS

PRINCIPALES EN EL ESPACIO EN MECANICA DE ROCAS

El álgebra tiene por objeto el estudio de las funciones algebraicas, es decir, el estudio de los algoritmos, entendiéndose por algoritmo a toda combinación de operaciones fundamentales en virtud de la cual de números cualquiera a, b, c, \dots, l , se obtiene un número k , definido por la igualdad $k = \varphi(a, b, c, \dots, l)$.

Los modelos son representaciones idealizadas de un sistema, en las cuales podrían hacerse observaciones para producir la exacta performance del sistema que se llama prototipo. Un modelo matemático, son representaciones realizadas de un sistema, pero se expresan en términos de símbolos y expresiones matemáticas; ejemplos las fórmulas físicas, tales como: $F = m \times a$ y $\sigma = E\varepsilon$, similarmente un modelo matemático de un problema de operaciones, es el sistema de ecuaciones y expresiones que describen la esencia del problema. Los modelos formales o matemáticos, son los que usa como lenguaje

a la matemática, puesto que la formalización es un lenguaje creado especialmente para facilitar los razonamientos lógico – deductivos.

El esfuerzo octaédrico o en el espacio va producir rotura teniendo en cuenta los esfuerzos principales tomando un valor crítico en el plano ABC o plano octaédrico (Fig. 6.4). Los esfuerzos principales que actúan en las caras de un cubo a partir de un tensor de esfuerzos genera la ecuación cúbica $\sigma_p^3 - I_1\sigma_p^2 + I_2\sigma_p - I_3 = 0$, que son ecuaciones de la forma $f(x) = 0$, que puede solucionarse aplicando los siguientes métodos:

7.1. Método de Ruffini

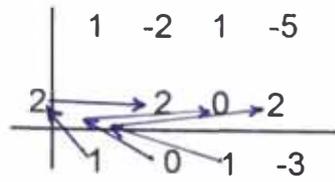
Este método es aplicable a divisores de la forma $(x \pm a)$ y con ciertas restricciones a divisores de la forma $(ax^n \pm b)$.

Para dividir por el método de Ruffini se trazan dos rayas que se intersectan, una vertical y otra horizontal. Encima de la raya horizontal y a la derecha de la vertical se colocan los coeficientes del dividendo con su propio signo y encima de la raya horizontal y a la izquierda de la vertical se coloca aquel valor de "X" que anula el divisor. Ejemplo dividir $x^3 - 2x^2 + x - 5$ entre $x - 2$:

- Las disposiciones de los coeficientes sería
-

	1	-2	1	-5
2				

- El valor de X que anula el divisor (x-2) es X=2
- Para comenzar a dividir se procede



$$\text{Cociente } Q(x) = x^2 + 1$$

$$\text{Residuo } R(x) = -3$$

7.2. Método de bisección

Sea $Y = f(x)$ una función dada, la cual es continua en todo el intervalo $[a,b]$. Aceptamos además, la existencia dentro de dicho intervalo de un cierto valor X , solución $f(x) = 0$; ello se comprobará fácilmente verificando $f(a) \cdot f(b) < 0$. ⁽⁸⁾

El proceso de solución a la ecuación $f(x) = 0$, será considerado del siguiente modo:

1. Calcular el valor C punto medio del intervalo $[a,b]$: $C = \frac{(a+b)}{2}$.
2. Evaluar la función en el valor C, anteriormente calculado, hallando $f(c)$.
3. Reemplazar uno de los extremos del intervalo inicial de solución, por el valor C, verificando que dentro del nuevo intervalo se encuentra la solución buscada. Considerarse:

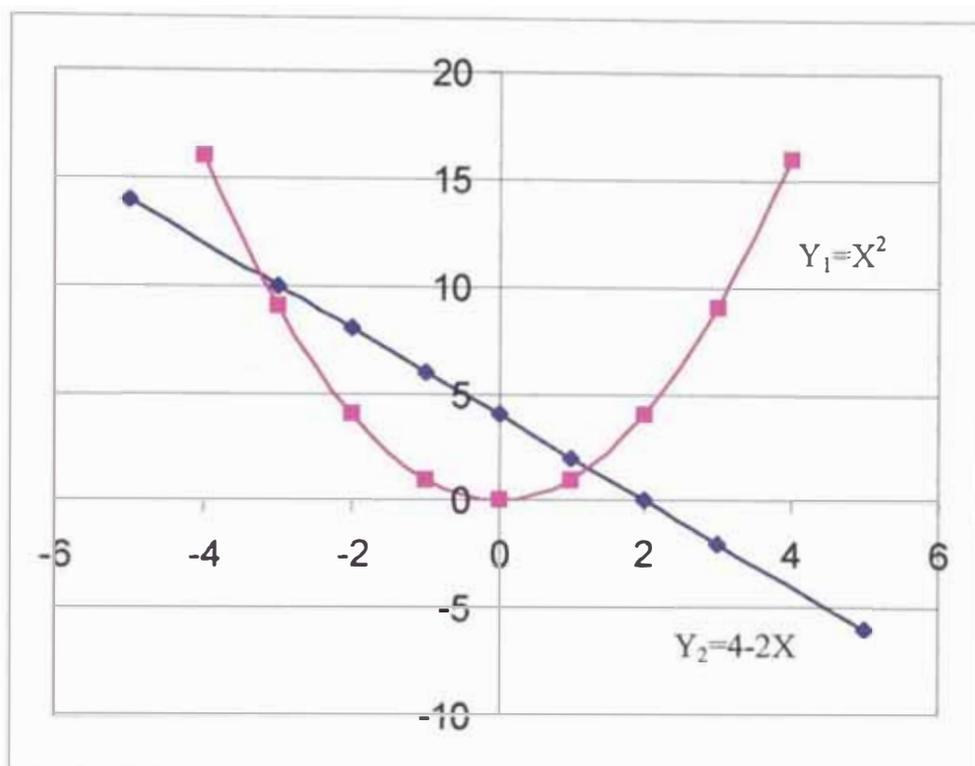
$$b = c \quad \text{si } f(a) \cdot f(c) < 0$$

$$a = c \quad \text{si } f(a) \cdot f(c) > 0$$

⁽⁸⁾ NINE, Iván - ZUCKERMAN, Herbert.- INTRODUCCION A LA TEORIA DE LOS NUMEROS, Ed. Limusa - Wiley, México, 1989.

4. Repetir el proceso a partir del primer paso, hasta obtener la solución deseada.

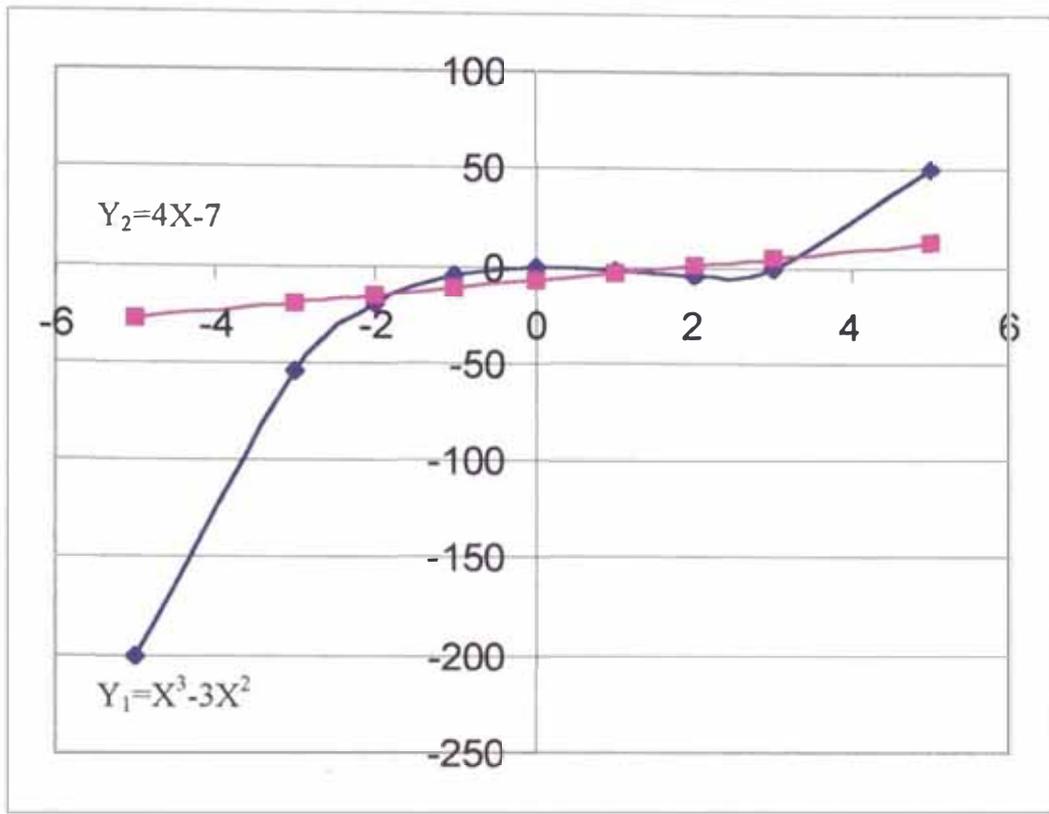
Ejemplo: Hallar la raíz positiva de la ecuación $x^2 + 2x - 4 = 0$. La ecuación a resolverse puede ser expresada: $x^2 = 4 - 2x$, al graficarla, tendremos que el intervalo solución es $[1,2]$ y, $x = 1.236$



Ejemplo: Hallar la raíz de la ecuación $x^3 - 3x^2 - 4x + 7 = 0$.

La ecuación puede ser expresada $x^3 - 3x^2 = 4x - 7$ que al graficarla en forma independiente, tendremos que el intervalo solución es $[1,2]$, el valor de $C = \frac{a+b}{2}$, efectuando las iteraciones se tiene

$x = 1.13$



7.3. Método de regla falsi o falsa posición

Consideremos $Y = f(x)$ a una función continua en todo el intervalo $[a,b]$ donde a y b han sido determinados de modo que el producto $f(a)$ y $f(b)$ sea menor que cero.

Por consiguiente es factible pensar que dentro de dicho intervalo existe por lo menos un valor X , el cual es solución de $f(x) = 0$. El proceso es del modo siguiente:

1. Evaluamos la función $f(x)$ en los puntos $x = a$ y $x = b$, hallando de este modo $f(a)$ y $f(b)$.
2. Unimos mediante una línea recta, los puntos de coordenadas $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ los cuales se ha determinado respecto a un sistema referencial.
3. Determinamos el valor C , como el punto de intersección de la recta dada con el eje horizontal de referencia el cual esta definido por $Y = 0$.
4. Evaluamos la función $Y = f(x)$ en el punto C , calculándose así $f(c)$.
5. Reemplazar uno de los extremos del intervalo inicial de solución por el valor C , verificando que se encuentre en el nuevo intervalo, la solución buscada para $f(x) = 0$. Para ello seguir el siguiente procedimiento:

hacer $b = c$	si $f(a) * f(c) < 0$
hacer $a = c$	si $f(a) * f(c) > 0$
6. Repetir el proceso desde el segundo paso, hasta obtener la aproximación deseada.

Ejemplo: Hallar la raíz de la ecuación $x^2 + 2x - 4 = 0$.

Efectuemos las interacciones, partiendo del intervalo $[1,2]$

$$a = 1 \rightarrow f(a) = -1$$

$$b = 2 \rightarrow f(b) = 4$$

$$c = \frac{1(4) - 2(-1)}{4 - (-1)} = 1.2$$

$$f(c) = -0.16$$

Como: $f(a) \cdot f(c) = (-1)(-0.16) = 0.16 > 0$, entonces

$$a = 1.2 \quad f(a) = -0.16$$

$$b = 2 \quad f(b) = 4$$

$$c = \frac{1.2(4) - 2(-0.16)}{4 - (-0.16)} = 1.23$$

$$f(c) = -0.0237$$

Como: $f(a) \cdot f(c) = (-0.16)(-0.0271) = 0.0043 > 0$ el nuevo intervalo está dado por $a = 1.23$ y $b = 2$. Siguiendo este procedimiento se tiene finalmente $c = 1.23607$.

Ejemplo: Hallar una raíz positiva de la ecuación

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 7 = 0$$

Efectuamos las iteraciones, partiendo del intervalo $[1,2]$

$$a = 1 \rightarrow f(a) = 1 \quad C = \frac{1(-5) - 2(1)}{-5 - 1} = 1.17$$

$$b = 2 \rightarrow f(b) = -5 \quad f(c) = -0.19$$

Como $f(a) \cdot f(c) = (1)(-0.19) = -0.19 < 0$, entonces

$$a = 1 \rightarrow f(a) = 1$$

$$b = 1.17 \rightarrow f(b) = -0.19 \quad C = \frac{1(-0.19) - 1.17(1)}{(-0.19) - (1)} = 1.14$$

Entonces el valor de $x = 1.14$

7.4. Método de Newton-Raphson

Para una función $Y = f(x)$, el método propone localizar la raíz

$f(x) = 0$ mediante el siguiente algoritmo:

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)} \quad (14)$$

Partiendo para ello de un valor X_0 inicial, el cual ha sido calculado mediante los métodos de localización de raíces.

El método será convergente y aplicable a la resolución de $f(x) = 0$ en el intervalo $[a,b]$ cuando:

1. Dentro del intervalo escogido existe por lo menos una raíz de $f(x) = 0$, para ello bastará verificar:
 $f(a) \cdot f(b) < 0$
2. La derivada de la función $Y = f(x)$ evaluada cualquiera de los valores contenidos en el intervalo $[a,b]$ deberá de ser diferente de cero.
3. La primera y segunda derivada de la función $Y = f(x)$ no cambian de signo en el intervalo considerado $[a,b]$.

Ejemplo: Hallar con análisis numérico iterativo la raíz positiva de $x^2 + 2x - 4 = 0$. Aplicando el algoritmo tendremos:

⁽¹⁴⁾ SALAS L. Saturnino - HILLE, Einar.- CALCULUS, Ed. Reverte, Madrid - España, 1988.

$$F = x^2 + 2x - 4$$

$$D = 2x + 2$$

Entonces: $X_0 = 2$

$$X_1 = 2 - 4/6 = 1.3333$$

$$X_2 = 1.3333 - 0.4444/4.6666 = 1.2381$$

$$X_3 = 1.2381 - 0.00907/4.47619 = 1.23607.$$

Ejemplo: Hallar con análisis numérico interactivo una raíz de la ecuación $x^3 - 3x^2 - 4x + 7 = 0$.

Aplicando el algoritmo tenemos:

$$F = x^3 - 3x^2 - 4x + 7$$

$$D = 3x^2 - 6x - 4$$

Entonces: $X_0 = 1.5$.

$$X_1 = 1.5 - \frac{2.375}{6.25} = 1.12$$

Una raíz de la ecuación es $X_1 = 1.12$.

CAPITULO VIII

CONSIDERACIONES GEOLOGICAS

La situación geológica estructural que se puede encontrar en cualquier sitio, es el producto de la historia geológica de la región. Por lo tanto los tipos de roca, pliegues, fallas y fracturas que se presentan en el macizo rocoso que enfrentará el Ingeniero de Minas al realizar una excavación forman parte de un conjunto mucho más importante en el que se reflejan los procesos geológicos a que fue sometida la región. El conocimiento de estos procesos geológicos puede a veces resultar muy útil para formarse una idea clara del lugar de la obra, ya que posiblemente señalará tendencias estructurales que no puede ser conocida por medio de la información local. En el análisis de la masa rocosa con fines ingenieriles es bien conocido que su comportamiento mecánico es gobernado por la presencia de las discontinuidades en el interior del macizo rocoso.

La ingeniería geológica está considerada como una rama de la geotécnica, ciencia aplicada a la industria de la construcción, que tiene como otras ramas a la mecánica de suelos y la mecánica de rocas, las que se complementan con el objeto de definir con mayor grado de certeza las incertidumbres, propiedades y comportamiento de las condiciones naturales, donde se ejecutará una obra de

infraestructura, tales como, edificaciones, carreteras, túneles, presas, control de estabilidad, etc.

La **Mecánica de Rocas** nos permite penetrar en los fenómenos de deformación de las rocas y masas rocosas, del plegamiento y fallas de la corteza terrestre, y del origen y propagación de los terremotos. Desde el punto de vista de la Ingeniería Civil y de Minas, la creciente magnitud de las obras, así como la responsabilidad que las mismas entrañan, hacen necesario una gran cantidad de información de la caracterización del medio geológico.

8.1. La geología en la mecánica de rocas

C. Jaeger de Cambridge University Press, London, en 1972 definió la Mecánica de Rocas como la mecánica de los medios discontinuos o mecánica de los medios diaclasados.

Podemos definir a la Mecánica de Rocas según el Comité de Mecánica de Rocas de la Academia Nacional de Ciencias con sede en Washington D.C. – E.U.A.; (1974), **“La mecánica de rocas es la ciencia teórica y aplicada del comportamiento mecánico de las rocas y de los macizos rocosos; la rama de la Mecánica que trata con la respuesta de la rocas y de los macizos rocosos a los campos de fuerzas de su entorno físico”**.

La mecánica de rocas, como aplicación a los problemas prácticos de ingeniería, está relacionado con la aplicación de los principios de la mecánica ingenieril al diseño de las estructuras rocosas; la estructura en este caso estará constituido por la masa rocosa en la que, por haberse practicado en la misma excavación, se ha producido un cambio de

esfuerzo con respecto a su situación original, lo que trae como consecuencia la necesidad de garantizar la estabilidad de toda la zona.

El papel de la geología es evidente; todos los materiales estudiados son masas rocosas situadas en un entorno geológico o extraídos de él. Los materiales poseen ciertas características físicas que son función de su origen y de los procesos geológicos posteriores que han actuado sobre ellos. El comportamiento de un macizo rocoso sometido a una gran variación de esfuerzos viene determinado por las propiedades mecánicas del material rocoso y por el número y naturaleza de las discontinuidades geológicas existentes en el mismo.

La aplicación práctica y efectiva de la mecánica de rocas demanda su integración filosófica con otras áreas que tratan con la respuesta mecánica de todos los materiales geológicos, todo esto en conjunto es lo que se denomina la geomecánica. Luego, la mecánica de rocas vendrá acompañado principalmente por la geomorfología, geología estructural, la hidrología subterránea y la geofísica; juntos conforman la base conceptual y verdadera a partir de la cual se pueden desarrollar procedimientos para la predicción y control del comportamiento de estructuras rocosas.

En la industria minera, la mecánica de rocas tradicionalmente ha sido considerada como un asunto ligado primordialmente a la seguridad, lo cual es muy importante para la reducción de accidentes por caída de rocas, de tal manera de evitar o minimizar los daños al personal y a los equipos. Recientemente, hay un reconocimiento creciente del impacto de

la mecánica de rocas en los aspectos económicos de las operaciones mineras, por esta razón está habiendo importantes progresos en integrar esta herramienta tecnológica dentro del proceso cotidiano de toma de decisiones, no solamente para mejorar la seguridad sino también la producción y productividad de la mina.

La reducción en los costos de rehabilitación por la colocación de una adecuada cantidad y calidad del sostenimiento inicial, el ahorro potencial que se puede tener por las no interrupciones de la producción debido a problemas de inestabilidad, la ganancia que se puede tener en la producción por la dedicación de los trabajadores a esta tarea en lugar de dedicarse a la rehabilitación de áreas inestables, la mayor recuperación de mineral que se puede tener por un adecuado dimensionamiento de los tajeos, puentes y pilares, la reducción de los costos por el minado masivo de grandes aberturas dimensionadas adecuadamente, el ahorro en el consumo de cemento de los rellenos cementados, etc., son algunos ejemplos de cómo se puede mejorar la productividad en las minas subterráneas controlando la estabilidad de las excavaciones. Por otro lado, en las minas a cielo abierto, el diseño apropiado de los taludes y el control de la estabilidad, significará dejar de mover cantidades innecesarias de desmonte y ganar reservas minerales, o evitar las pérdidas potenciales por la falla de los taludes y sus consecuencias.

8.2. Importancia de la litología o tipo de roca

La litología de una roca hace referencia a su mineralogía, textura y fábrica y a algún sistema de clasificación. Los nombres y clasificación son

geológicos. Algunos ingenieros que tienen que ver con la mecánica de rocas, poca importancia le dan al nombre geológico, para ellos sólo tiene importancia las propiedades mecánicas, pero es importante conservar los términos litológicos. Las propiedades mecánicas va depender de la litología y otras características estructurales de la roca o masa rocosa. Por ejemplo la resistencia a la compresión simple de la caliza puede variar de 35 a 250 MPa.

La textura, fábrica y anisotropía estructural de la roca está relacionado a un determinado origen. Por ejemplo las rocas ígneas en su mayoría tienen una estructura densa, con muy pequeñas diferencias de dirección en las propiedades mecánicas; las rocas sedimentarias, están estratificadas y por lo tanto muestran una anisotropía considerable en las propiedades mecánicas; las rocas metamórficas en su mayoría presentan superficies de exfoliación bien desarrolladas y se componen de minerales de estructura hojosa que dan lugar a grandes diferencias en la resistencia y el módulo de deformación.

Otra razón para conservar el nombre geológico es la asociación que puede hacerse entre ciertos tipos de roca y otras características in situ que pueden presentarse. Por ejemplo la presencia en el terreno de caliza, yeso y sal gema puede inducir al investigador a la búsqueda de fenómenos de disolución como cavidades y fisuras. La presencia de lava basáltica puede indicar la posible presencia de un diaclasado columnar. La existencia de sal gema y otras evaporitas pueden dar lugar a problemas de deformación con fluencia.

8.3. Clasificación de las rocas en Ingeniería

Fue propuesto por Deere y Miller. La clasificación se basa en dos propiedades importantes de la roca y de muestras con ensayo de laboratorio en roca intacta: La resistencia a la compresión simple y el módulo de elasticidad. El módulo empleado es el módulo tangente correspondiente a un nivel de esfuerzos igual a la mitad de la resistencia de la roca. La resistencia a compresión simple se determina con muestras de relación longitud/diámetro igual o mayor a 2.

Clasificación de roca intacta ⁽¹⁵⁾

I. Basada en la resistencia a compresión simple (σ_c)

Clase	Descripción	Resistencia, compresión simple MPa
A	Resistencia muy alta	>200
B	Resistencia alta	100-200
C	Resistencia media	50-100
D	Resistencia baja	25-50
E	Resistencia <u>muy baja</u>	<25

II. Basada en el módulo relativo (E_r/σ_c)

Clase	Descripción	Resistencia, compresión simple MPa
H	Elevado módulo relativo	>500
M	Módulo relativo medio	200-500
L	Módulo relativo bajo	<200

Las rocas se clasifican según su resistencia y módulo relativo en AM, BL, BH, CM, etc.

⁽¹⁵⁾ STAGG, K.G.- ZIENKIEWCZ.- ROCK MECHANICS IN ENGINEERING PRACTICE, Ed. Wiley, London, 1980, Pág. 18.

8.4. Características estructurales de los macizos rocosos

Desde el punto de vista de la mecánica de rocas tiene una gran importancia cualquier estructura geológica que pueda influir sobre las propiedades de la roca in situ, como la resistencia, el módulo de deformación o la permeabilidad. Las singularidades estructurales más comunes son las diaclasas, los planos de estratificación, esquistosidad y las fallas. Debido a que constituyen discontinuidades planas o cuasi-planas tienen un importante efecto anisotrópico sobre las propiedades del macizo rocoso.

8.4.1. Representación de las discontinuidades geológicas

Es importante representar cuidadosamente todas las estructuras geológicas indicando su emplazamiento, orientación (dirección y buzamiento) y separación. Deben también describir las características físicas. En las perforaciones diamantinas, puede observarse la abertura e irregularidad de las superficies de discontinuidad así como el tipo de material de relleno en las diaclasas o a lo largo de superficies adyacentes, siendo necesario registrar estos datos. Los términos abierto o cerrado pueden aplicarse para describir el grado de abertura; plano, curvo o irregular para señalar la homogeneidad del perfil; y pulida, lisa o rugosa para indicar la textura superficial. Los reconocimientos de campo pueden dar resultados muy útiles, pero se debe tener cuidado y bastante práctica (tener cuidado en los afloramientos); por eso no solo se debe realizar levantamientos superficiales,

también realizar pozos de reconocimiento, galerías y sondeos. También se debe usar métodos fotográficos.

8.4.2. Presentación de los resultados

Los datos obtenidos por observación directa de las discontinuidades geológicas pueden representarse básicamente de dos formas:

1. Como un plano de situación real, con las distintas singularidades estructurales identificadas en lo referente a su tipo, características físicas, orientación y emplazamiento. El plano, permite dibujar secciones verticales. Los planos geológicos debe estar acompañado con la simbología correspondiente.
2. Como diagramas estadísticos señalando las frecuencias relativas de las discontinuidades de diferentes orientaciones encontradas en el lugar. Los diagramas estadísticos mas comunes son la roseta de diaclasas y la proyección estereográfica.

8.5. Clasificación de las rocas "In Situ" para obras de Ingeniería

Además de las representación gráfica o estadística de las discontinuidades geológicas es necesario clasificar las rocas en base al espaciamiento de las fisuras que permita la caracterización del macizo rocoso. Para unificar la terminología en la descripción de las diaclasas, Deere, D.U. ha hecho la siguiente clasificación.

Descripción	Espaciamiento de fisuras	Apreciación de la roca
Muy separado.	>3 m.	Sólida
Separado.	1m a 3m	Masiva
Medianamente cerca	0.3m a 1m	Bloques punteados
Cerca	50 mm a 300 mm	Fracturada.
Muy cerca	< 50 mm	Triturada y molida

(7)

⁽⁷⁾ HOEK, E. & BROWN, E.T.- UNDERGROUND EXCAVATIONS IN ROCK; Ed. I.M.M., London, 1985, Pag. 25.

CAPITULO IX

APLICACION A LA CANTERA DE CEMENTO ANDINO S. A.

Las excavaciones mineras, rompen el equilibrio de las rocas de la corteza terrestre y es bien conocida la existencia de una zona de perturbación en la distribución de esfuerzos alrededor de una cavidad. En las dos últimas décadas un gran esfuerzo se ha puesto en la medición y evaluación de los esfuerzos alrededor de una cavidad subterránea y en las proximidades de los taludes de los tajos a cielo abierto. El análisis de la distribución de estos esfuerzos en el terreno real es un problema difícil, el cual no tiene soluciones simples o directas.

Se han intentado muchas soluciones teóricas para la determinación del estado de los esfuerzos de las rocas. La mayoría de estos intentos se han basado en la asunción de que la roca es homogénea, isotrópica y elástica. Otra asunción que se hace es que la roca está sujeta a la carga debido a la gravedad o peso de la roca superyacente, el que es igual a la columna encima de la zona en estudio (presión geostática). La tercera asunción es que la zona en estudio tiene condiciones hidrostáticas a grandes profundidades.

Con el conocimiento de los esfuerzos actuando en una zona en estudio es posible diseñar operaciones mineras con el máximo de seguridad y economía. Será posible elegir la mejor forma, tamaño, orientación y tipo de reporte para la construcción de cavidades tales como piques y túneles. Será también posible la predicción de la estabilidad de tajos y de taludes de los tajos a cielo abierto.

El óptimo diseño de los taludes de roca debe asumir una particular importancia, ya que cualquier pequeño cambio en los ángulos de talud afecta considerablemente el costo de la mina. El diseño de taludes de roca de una estabilidad óptima, es una tarea considerable, ya que existen factores muy diversos que pueden ser tenidos en cuenta. La complicada naturaleza de los problemas de la estabilidad de los taludes de roca puede ser juzgada por los factores de influencia: espacio y carácter de las diaclasas de las rocas y planos de falla; distribución de aguas subterráneas; magnitud y distribución de esfuerzos; resistencias características de la roca, diaclasas y planos de falla; condiciones climáticas; efectos sísmicos y eólicos, etc.

Toda forma de deformación de taludes en tajo abierto esta relacionado en cierto grado a la variación de estado de esfuerzos de las rocas originadas por los trabajos mineros. Como se sabe, en las condiciones naturales la masa rocosa se encuentra en estado de equilibrio tensional, donde actúan las fuerzas gravitacionales y tectónicas; así como, las condiciones hidrogeológicas. Los trabajos de minado a cielo abierto intensifican el desequilibrio del estado de comprensión de las rocas y conduce al incremento del esfuerzo tangencial o cortante en los taludes del macizo rocozo y con frecuencia excede el límite permisible originándose la inestabilidad de taludes.

En un punto de una masa rocosa actúan esfuerzos en tres dimensiones que se puede modelar como un tensor de esfuerzos, al resolver para el caso de esfuerzos principales se tiene una ecuación cúbica de la forma $\sigma_p^3 - I_1\sigma_p^2 + I_2\sigma_p - I_3 = 0$, que se resuelve con métodos numéricos. Para la Cantera de Cemento Andino S.A., en la solución de los esfuerzos principales en un punto de la masa rocosa se resolvió con los softwares siguientes: **EXCEL, MATHCAD Y MATHEMATICA.**

9.1. Aspectos Generales

9.1.1. Ubicación.- La fábrica de Cemento Andino S.A., al igual que todas sus concesiones que se explotan para obtener las materias primas para el cemento, políticamente están ubicadas en el anexo de Condorcocha, Distrito de La Unión-Leticia, Provincia de Tarma, Departamento de Junín.

Geográficamente pertenece al lado Este de los Andes Occidentales del centro del Perú y están ubicadas alrededor:

Latitud	11° 22' 23" Sur
Longitud	75° 77' 40" Oeste
Altitud	3,850 m.s.n.m.

9.1.2. Acceso.- Desde la capital, vía carretera central - Oroya 188 Kms. Carretera asfaltada; Oroya-Junín (hasta el cruce Caripa): 26 Kms. Carretera asfaltada y Caripa-fábrica: 12 Kms carretera afirmada.

9.1.3. Clima.- El clima es seco y frío, con intermitentes lluvias, durante el mes de enero a marzo.

9.1.4. Vegetación.- La vegetación lo constituye fundamentalmente el ichu, musgos y líquenes, con áreas de cultivo en las zonas abrigadas.

9.1.5. Relieve.- El relieve terrestre es accidentado presentando valles en "U" y elevaciones con cumbres redondeadas.

9.2. Geología Local

9.2.1. Estratigrafía.- Las rocas que constituyen los afloramientos del Cerro Palo, corresponden a una secuencia carbonatada pertenecientes al grupo Pucará, siendo en este caso de la formación Chambará del Triásico Superior. Esta secuencia está compuesta por calizas dolomíticas a dolomías, calizas micríticas, calizas silíceas y calizas brechosas; observando una caracterización litológica que las individualiza. Es importante la presencia de un estrato guía que consiste de una arenisca beige a gris plomiza, de grano fino, algo calcárea y arcillosa.

De piso a techo se describe las siguientes unidades litológicas:

Caliza Dolomítica (Marginal Piso).- Color beige, grano fino a medio, algunos intervalos con moderada recristalización, otras con aspecto arenoso, con escasas venillas de calcita. Se observa alternancia de calizas gris negruzca, micríticas; y también alternan dolomías beige.

Caliza Micrítica (Alta Ley) .- De color gris negruzco a gris azulado, característica por olor fétido por liberar H_2S al partirlas, micrítica, regular a intensa ocurrencia de venillas de calcita,

moderada ocurrencia de geodas, con calcita recristalizada, del mismo modo se observan pequeñas cavernas en los afloramientos.

Arenisca fina (Estéril).- Considerado como estrato guía, color beige a gris plomizo, grano fino, moderadamente calcáreas y arcillosas. Alternan delgadas arcilitas color ocre, con espesor 3.5 metros.

Caliza Silíceea (Baja Ley).- De color gris a gris blanquecino, grano muy fino a fino, con escasa y muy fina disseminación de cuarzo amorfo.

Caliza Brechosa (Marginal techo).- Sobreyace a calizas gris oscuras, los cuales descansan sobre el estrato guía. Las calizas brechosas son de tonalidad gris plomiza a gris beige, contiene clastos o fragmentos de chert, los cuales incrementan en tamaño y en cantidad de piso a techo, llegando a tener diámetros de 35 cm. Se observa que la caliza matriz de estos cláustos, toman una textura granular de fino a medio, observando una muy fina disseminación de cuarzo amorfo. Las calizas brechosas de tonalidad beige ocurren hacia el tope y se tornan dolomíticas.

Arcilitas-Calizas Brechosas.- Hacia el tope de toda la secuencia mencionada ocurre un estrato de aproximadamente 10 m. de espesor, compuesto por una alternancia de arcilitas verdosas y amarillentas, intercaladas con calizas brechosas dolomíticas gris plomizas con fragmentos de chert.

9.2.2. Geología Estructural.- La disposición estructural actual de los estratos carbonatados del Cerro Palo, está controlada en forma conjunta por un sistema de plegamiento y fallamiento. El desarrollo del plegamiento ocasionó una serie de fallas inversas y posteriores fallas normales de reacomodo. Esta secuencia de deformación tuvo como resultado diversos desplazamientos de estratos y también ciertos engrosamientos y recristalizaciones calcíticas en la zona de la charnela del plegamiento.

Es importante mencionar una falla inversa que corta a todo Cerro Palo, cuyo rumbo sigue una línea semicircular elongada, siendo N 55° E en el sector Oeste del Cerro Palo y de N85°W en el sector Este. Tiene un salto vertical de 40-45m en el extremo Oeste y de 20m en el extremo Este.

9.2.3. Rocas Igneas

No se observa rocas ígneas en el Cerro Palo ni en las inmediaciones, lugar donde se encuentra el tajo Cemento Andino.

9.3. Reservas Mineras

Para el trabajo de corto y mediano plazo la Cantera Cemento Andino que está en el Cerro Palo cuenta con las siguientes reservas Probadas:

		%CaCo3	%MgO
Caliza de Alta Ley	5.7 millones de toneladas.	> 90	< 1.20
Caliza de Baja Ley	1.8 millones de toneladas.	70-80	< 1.20
Desmante	0.54 millones de toneladas.		

9.4. Características físico-mecánicas de la masa rocosa.

La mayor parte de las excavaciones subterráneas y superficiales se encuentran ubicadas en medios geológicos, en los que a pesar de su aparente homogeneidad del material, existen infinidad de discontinuidades (fisuras, fracturas, etc.), las cuales representan zonas de debilidad en la masa rocosa y que afectan adversamente su comportamiento mecánico.

A la roca in situ compuesto de sustancia rocosa y de discontinuidades estructurales se le conoce como masa rocosa.

La masa rocosa del Cerro Palo que en un 70% aproximadamente son calizas, sus propiedades físicas y mecánicas son:

a) Propiedades físicas

- Densidad (ρ)

$$\rho = 2.5. \text{ gr/cm}^3$$

- Peso específico (γ)

$$\gamma = 24.53 \text{ kN/m}^3$$

- Porosidad (n)

$$n = 16.40 \%$$

- Relación de vacíos (e)

$$e = 0.196$$

- Absorción (Abs)

$$\text{Abs} = 2.64\%$$

b) Propiedades mecánicas

- Índice de carga de punta (I_s)

$$I_s = 1.69 \text{ MPa}$$

- Compresión simple (σ_c)

$$\sigma_c = 87.92 \text{ MPa}$$

- Tracción indirecta (σ_t) (Método Brasileiro)

$$\sigma_t = 8.29 \text{ MPa}$$

- Esfuerzo Cortante (τ) (Ensayo de corte directo)

$$\tau = 2.42 \text{ MPa} \quad \sigma = 3.80 \text{ MPa}$$

- Constantes elásticas

$$E = 0.27 \times 10^5 \text{ Mpa (Módulo de elasticidad longitudinal)}$$

$$\mu = 0.25 \text{ Mpa (Razón de Poisson)}$$

9.5. Cantera Cemento Andino

Los tajos abierto para la explotación de carbón se denomina "Cortas" y; para rocas de construcción y similares "canteras".

Las canteras son explotaciones de rocas ornamentales, rocas de construcción y otros minerales industriales no metálicos. Extracción muy cuidadosa de bloques de gran tamaño o la explotación en capas horizontales en forma escalonada. Se llama cantera al yacimiento de donde se extrae las piedras para la construcción y análogos.

La Cantera de Cemento Andino S. A. se encuentra ubicado en el flanco derecho del Cerro Palo.

El resultado de los estudios efectuados en la exploración del yacimiento de las calizas del Cerro Palo, nos permite aplicar y adecuar sistemas de explotación superficial tanto de derribo abierto, como el método convencional por bancos, esta combinación de métodos nos permite

explotar el yacimiento racionalmente, logrando la mayor eficiencia con la máxima seguridad.

Los aspectos que se toman en cuenta para aplicar los sistemas antes mencionados son:

- Formación geológica del yacimiento.
- La geología estructural del yacimiento.
- Altura del yacimiento (pendiente).
- Necesidad de mezclas del material.

9.5.1. Métodos de explotación

Dentro de los métodos de explotación superficial se tiene la siguiente clasificación:

- a) Canteras o "Quarrying"
- b) "Open pit" o Cielo abierto"
- c) Descubierta o minería de transferencia o "strip mining".

Para la Cantera Cemento Andino se puede explotar con los siguientes sistemas:

I) Sistema de Derribo Abierto

Consiste en cortar en tajadas de arriba hacia abajo, por medio de banqueo y limpieza con tractor, hasta llegar a la plataforma de carguío (Nivel 3930), una vez terminado el primer corte se inicia nuevamente otro corte, formando hasta 20 bancos.

Efectuadas la perforación y voladura los materiales (caliza o desmonte) son derribados con tractor bulldozer hacia la

plataforma de carguío, en este caso tratándose del Plan a Corto Plazo desde el nivel 4150 hasta el nivel 3930, para posteriormente ser cargado y transportado hacia la Chancadora Primaria, con una distancia promedio de 800 mts.

II) Sistema Convencional por Bancos

Consiste en explotar los bancos A, B, C, que se encuentra en la parte superior de los tajos intermedio y Vicuña. Efectuando la perforación y voladura para luego ejecutar el carguío en dichos bancos, para el caso del Plan a Corto Plazo en los niveles 4050, 4060, 4070 y proceder al transporte con una distancia de 2,600 mts. hasta la Chancadora Primaria.

Este método implica la implementación de accesos a los niveles superiores (bancos), que significan recorridos más largos, en comparación al sistema de derribo abierto.

9.5.2. Elementos básicos para el diseño de un tajo abierto

9.5.2.1. Elementos básicos para el diseño del tajo:

a) Relación de desbroce

Para el planeamiento a corto plazo, se ha considerado las siguientes cantidades:

Mineral útil	7.48 TM
Desmonte	0.54 TM
Relación de desbroce	0.07

b) Talud final del PIT

Se ha fijado en 49°, de acuerdo a las siguientes consideraciones:

Angulo de reposo de la caliza	40° - 50°
Factor de expansión de la caliza :	0.81
Angulo operacional del banco	70°
Altura del tajo	200 mts.

c) Ley mínima explotable o CUT OFF

Para la fabricación del cemento, se requiere primeramente el “clinker” que posteriormente mezclado y molido con el yeso se obtiene el cemento. Para la fabricación del “clinker” se requiere de las siguiente materias primas: caliza (alta y baja en contenido de carbonatos), arcilla, óxido de fierro y sílice.

Para el cemento se necesita calizas:

	CO_3C_2 (%)
Alta	82-84
Baja	62-64

9.5.2.2. Parámetros de Banco**Altura de Banco**

Para el sistema de explotación de Derribo Abierto se ha considerado que la altura del banco sea de 10 metros.

Tratándose del Sistema Convencional por bancos se aplicó la siguiente fórmula:

$$L = L_m (F_{ex})$$

donde:

$$L_m = \text{Altura máxima del cargador} \quad : \quad 6.17$$

$$F_{ex} = \text{Factor de expansión del material} \quad : \quad 0.81$$

Para tal efecto se calculó, previamente el **tamaño del equipo de carguío**.

$$L = 6.17 * 0.81 \cong 5.00 \text{ metros.}$$

Ancho de Banco

Para el cálculo del **ancho del banco** se utilizó la siguiente fórmula:

$$A = L_c + A_c + L_p + Z$$

$$Z = \left(\frac{1}{2F_{ex}} \right) [L.Cot \alpha + 2y(1 - F_{ex})]$$

donde:

$$L_c = \text{Largo del Cargador} \quad = 7.24$$

$$A_c = \text{Ancho del Camión} \quad = 3.20$$

$$L_p = \text{Largo de Perforadora} \quad = 4.60$$

$$Z = \text{Distancia de Esparcimiento} \quad = 3.29$$

$$F_{ex} = \text{Factor de Expansión del material} \quad = 0.81$$

$$\alpha = \text{Angulo de reposo del Material} \quad = 45^\circ$$

$$A = 7.24 + 3.20 + 4.60 + 3.29 = 18.33 \text{ m.}, \text{considerando} = 20 \text{ m}$$

Este cálculo se considera tanto para el sistema de Derribo Abierto como en el sistema Convencional.

Angulo de inclinación de banco

Para el ángulo de operación del banco de explotación se ha considerado 70°, el cual garantiza la estabilidad del talud.

Berma

La berma de seguridad es de 5.00 metros.

9.5.3. Secuencia de minado y ritmo de producción

La explotación se llevará a cabo de una manera combinada de sistemas de explotación, el derribo abierto que se desarrolla en la zona del Tajo Vidal con una producción de 80% y el sistema convencional se desarrollará en tres bancos superiores al primer corte del tajo intermedio con una producción de 20%, esto nos permitirá realizar una explotación racional, debido a la necesidad de efectuar mezclas para garantizar el suministro tanto en calidad como en cantidad requerida por la planta, para esto se debe realizar una limpieza (desbroce) programada.

El ritmo de producción está determinado por el requerimiento de la planta, el cual es de 4,807 Ton/día.

9.5.4. Determinación y selección de equipos

9.5.4.1. Equipo de perforación y diseño del trazo del disparo.

Selección, método y equipo de perforación:

Para la determinación del método se tuvo en cuenta lo siguiente:

- Requerimientos diarios. 4,807 TON
- Fragmentación a obtener en la voladura < 1.00 m
- Densidad de la roca 2.5
- Coeficiente de dureza 3
- Coeficiente de expansión 1.8
- Relación entre la dureza de la roca y el tipo de perforación.

Caliza: **Tipo de perforación Rotatoria.**

Velocidad de perforación: Media/Rápida

Cálculo del número de perforaciones (NP)

$$NP = \frac{\frac{T}{Día}}{\frac{T}{MP} \times \frac{Turno}{Día} \times \frac{Hora}{Turno} \times \frac{MP}{Hora} \times E}$$

Donde:

$\frac{T}{MP}$ = Perforación específica.

$\frac{MP}{Hora}$ = Velocidad promedio de perforación.

E = Eficiencia.

Se determinó la necesidad de utilizar 01 (una) perforadora, en nuestro caso se utiliza un DTH (Down The Hole) con colector de polvos.

De acuerdo a este análisis se determinó aplicar el método de perforación a percusión, determinando que muchas marcas cumplen con las condiciones antes mencionadas.

Costo CIF : US\$ 448,000.00

Costo Horario : US\$ 90 / Hora

Diseño del trazo del disparo

Para el diseño del trazo del disparo se tuvo en cuenta lo siguiente:

- Explosivo a utilizarse (análisis de sus propiedades)

Información básica.

Roca : Caliza

Dureza : 2.7

Producción requerida

Caliza : 125,000 Ton/Mes

Desmonte : 8,500 Ton/Mes

Nº de disparos por mes aprox. : 2(62,500 Ton).

Altura de banco : 10
 Inclinación de banco : 70°
 Diámetro de taladros : 5"

Explosivos a usar:

- BOOSTER
- FANEL
- ANFO
- CORDON DETONANTE
- FULMINANTE N° 6
- CORDON DE SEGURIDAD

Calculando los parámetros del disparo se obtuvo lo siguiente:

	Malla de Perforación	Factor de Carga
Derribo Abierto	5x5 mts.	0.150 Kg/Ton.
Sistema Convencional	4.5x4.5 mts	0.194 Kg/Ton

9.5.4.2. Equipo de Remoción

Se aplicó la siguiente fórmula.

$$C_c = \frac{Yd^3 / \text{horaxTon.}}{60xExF_{ex}}$$

Donde:

Ton : Ciclo de operación.

E : factor de eficiencia.

F_{ex} : Factor de expansión.

Equipo requerido por capacidad D8R o equivalente.

Costo CIF : US\$ 517,000.00

Depreciación : 10,000 hrs.

Precio Horario : US\$ 100.00/Hora.

9.5.4.3. Equipo de Carguío

Para la elección del tamaño del equipo de carguío se usó la siguiente fórmula.

$$C_c = \frac{\text{Producción hora x Ton}}{60 \times E \times F \times F_{ex}}$$

Donde:

C_c : Capacidad de cuchara Yd^3

Ton: Ciclo de carguío en minutos

E : Factor de eficiencia a tiempo 62%

F : Factor de eficiencia de carguío 0.7

F_{ex} : Factor de expansión del material 0.8

Siendo necesario en las operaciones realizar mezclas, el equipo que se adecúa es el cargador frontal cuya capacidad tiene que ser equivalente o superior al de un 988 F.

Costo CIF: US\$ 551,566.00

Capacidad de cuchara : 6.1 m³.

Para el cálculo del precio horario se tuvo en cuenta lo siguiente:

Depreciación: 10,000 hrs.

Costo propiedad (Amortización, intereses, seguros).

Costo operacional (Mantenimiento, combustible, lubricación y mano de obra).

Precio Horario US\$ 118.71/Hora

9.5.4.4. Equipo de Transporte

Para la elección del equipo de transporte se calcularon lo siguiente:

- Requerimiento de producción
- Ciclo de transporte
- Promedio de Viajes/Hora
- Producción de c/camión por hora.
- N° de camiones requeridos.
- Módulo de flota.

Con respecto al módulo de camiones actualmente se viene trabajando con camiones de 40 TON de capacidad de tolva, que es la capacidad operativa mínima.

Costo CIF	: US\$ 365,695.00
Capacidad	: 41.6 Tons.
Depreciación	: 10,000 hrs.
Costo Propiedad	: US\$ 46.30
Costo Operacional	: US\$ 32.27
Precio Horario	: US\$ 78.57/Hora.

9.6. Programa para la determinación de los esfuerzos principales en la masa rocosa de la cantera Cemento Andino.

9.6.1. Cálculo de los esfuerzos principales en un macizo rocoso.

En el caso de esfuerzos en el espacio o esfuerzos octaédricos; representando los esfuerzos en un punto por Leeman. Los esfuerzos principales en un cubo al producir rotura (esfuerzos sobre

un plano arbitrario) para su solución o determinación provienen de la ecuación cúbica del siguiente tipo:

$$\sigma_p^3 - I_1\sigma_p^2 + I_2\sigma_p - I_3 = 0$$

Ejemplo: El tensor de esfuerzos para un punto de una masa rocosa de $\gamma_e = 26.25 \text{ KN/m}^3$ y a una profundidad de 800 m. está dado por la siguiente expresión:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 14 \\ 6 & 10 & 5 \\ 14 & 5 & 21 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 14 \\ 6 & 10 & 5 \\ 14 & 5 & 21 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \sigma_x = 7 & \tau_{xy} = 6 \\ \tau_{xy} = 6 & \sigma_y = 10 & \tau_{yz} = 5 \\ \tau_{xz} = 14 & \tau_{zy} = 5 & \sigma_z = 21 & \tau_{zx} = 14 \end{matrix}$$

Se halla los esfuerzos principales a partir de la ecuación cúbica siguiente:

$$S^3 - I_1 S^2 + I_2 S - I_3 = 0.$$

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 7 + 10 + 21 = 38$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - (\tau_{xy})^2 - (\tau_{yz})^2 - (\tau_{xz})^2 = 170$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 14 \\ 6 & 10 & 5 \\ 14 & 5 & 21 \end{vmatrix} = -581$$

$$f(S) = S^3 - 38S^2 + 170S + 581$$

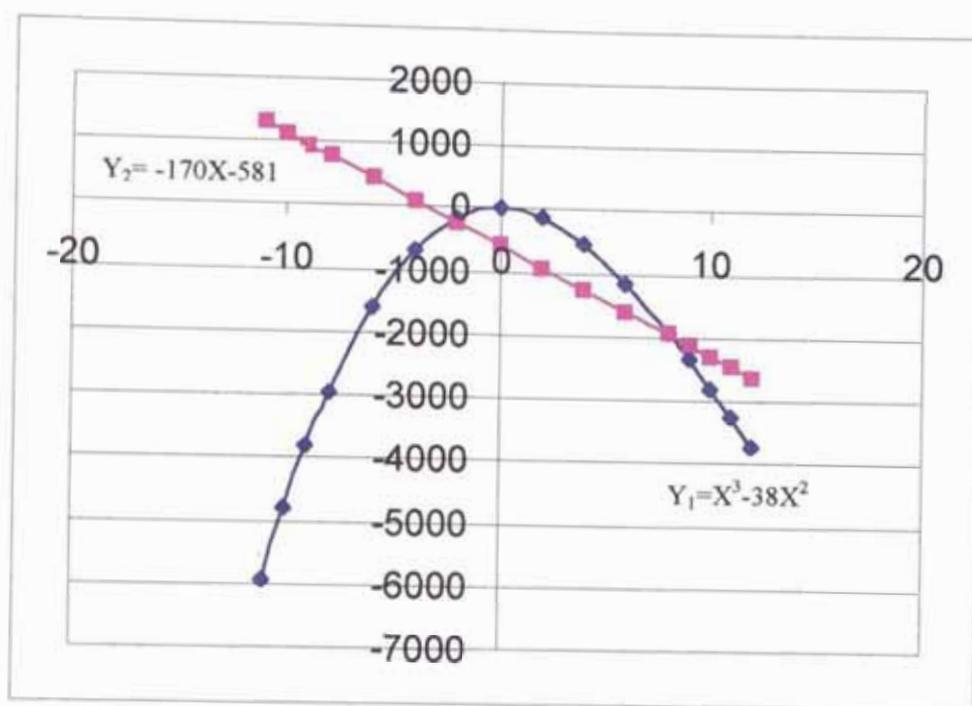
$$f'(S) = 3S^2 - 76S + 170$$

- Localizamos gráficamente las raíces reales de la ecuación. La función $f(X)=0$ se descompone en $f_1(X) = f_2(X)$.

- Ubicamos un intervalo $[A,B]$ en el cual ambas curvas se intersectan.

$$f_2(X) = -170x - 581$$

$$f_1(X) = X^3 - 38X^2$$



Intervalo $[8,9]$

- Por el método de Newton-Raphson calculamos el valor aproximado de una raíz de la ecuación.

$$X_1 = X_0 - \frac{f(X_0)}{f'(X_0)}$$

$$x_0 = 9$$

$$X_1 = 9 - \frac{-238}{-271}$$

$$f(9) = 38(9)^2 + 170(9) + 581 = -238$$

$$X_1 = 48.122 \text{ MPa}$$

$$f'(9) = 3(9)^2 - 76(9) + 170 = -271$$

$$x_1 = 8.122$$

$$x'_1 = 8.122 - \frac{-9.22}{-249.37}$$

$$f(8.122) = -9.22$$

$$x_1 = 8.085 \text{ MPa}$$

$$f'(8.1222) = -249.37$$

- Por el método de Ruffini determinamos los valores de los términos de la ecuación cuadrática ($AX^2+BX+C=0$):

	1	-38	170	581
8.085		8.085	-241.863	581.01
	1	-29.915	-71.863	-0.01

$$S^2 - 29.915 S - 71.863 = 0$$

$$(X^2 - 29.915X - 71.863 = 0)$$

- La ecuación de segundo grado se resuelve con la fórmula:

$$X = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$X_{2,3} = \frac{-(-29.915) \pm \sqrt{(-29.915)^2 - 4(1)(-71.63)}}{2(1)}$$

$$X_2 = 32.157 \text{ MPa}$$

$$X_3 = -2.235 \text{ MPa}$$

- Los esfuerzos principales son:

$$\sigma_1 = 32.15 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 8.085 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = -2.235 \text{ MPa}$$

9.6.2. Cálculo de los esfuerzos principales en la masa rocosa de la cantera Cemento Andino

$$\sigma_v = \sigma_z = \gamma h = 24.53 \text{ KN} / \text{m}^3 \times 230 \text{ m} = 5.64 \text{ MPa.}$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_H = \frac{1}{3} \sigma_v = 1.88 \text{ MPa.}$$

El ensayo de corte:

$$\tau = 2.42 \text{ Mpa y } \sigma = 3.80 \text{ MPa}$$

de ello se deduce:

$$\frac{\sigma}{\tau} = \frac{\sigma_z}{\tau_{zx}} \Rightarrow \frac{3.80}{2.42} = \frac{5.64}{\tau_{zx}} \Rightarrow \tau_{zx} = 3.59 \text{ MPa}$$

$$\frac{\sigma}{\tau} = \frac{\sigma_y}{\tau_{yz}} \Rightarrow \frac{3.80}{2.42} = \frac{1.90}{\tau_{yz}} \Rightarrow \tau_{yz} = 1.21 \text{ MPa}$$

$$\frac{\sigma}{\tau} = \frac{\sigma_x}{\tau_{xy}} \Rightarrow \frac{3.80}{2.42} = \frac{1.90}{\tau_{xy}} \Rightarrow \tau_{xy} = 1.21 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 1.21 \text{ MPa, } \tau_{yz} = 1.21 \text{ MPa y } \tau_{xz} = 3.59 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 1.90 & 1.21 & 3.59 \\ 1.21 & 1.90 & 1.21 \\ 3.59 & 1.21 & 5.64 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.90 & 1.21 & 3.59 \\ 1.21 & 1.90 & 1.21 \\ 3.59 & 1.21 & 5.64 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \sigma_x = 1.9 & \tau_{xy} = 1.21 \\ \sigma_y = 1.9 & \tau_{yz} = 1.21 \\ \sigma_z = 5.64 & \tau_{xz} = 3.59 \end{matrix}$$

Hallando los esfuerzos principales de la ecuación cúbica:

$$S^3 - I_1 S^2 + I_2 S - I_3 = 0$$

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 1.9 + 1.9 + 5.64 = 9.44$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - (\tau_{xy})^2 - (\tau_{yz})^2 - (\tau_{xz})^2 = 9.24$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1.90 & 1.21 & 3.59 \\ 1.21 & 1.90 & 1.21 \\ 3.59 & 1.21 & 5.64 \end{vmatrix} = -4.65$$

$$f(S) = S^3 - 9.44S^2 - 9.24S + 4.65$$

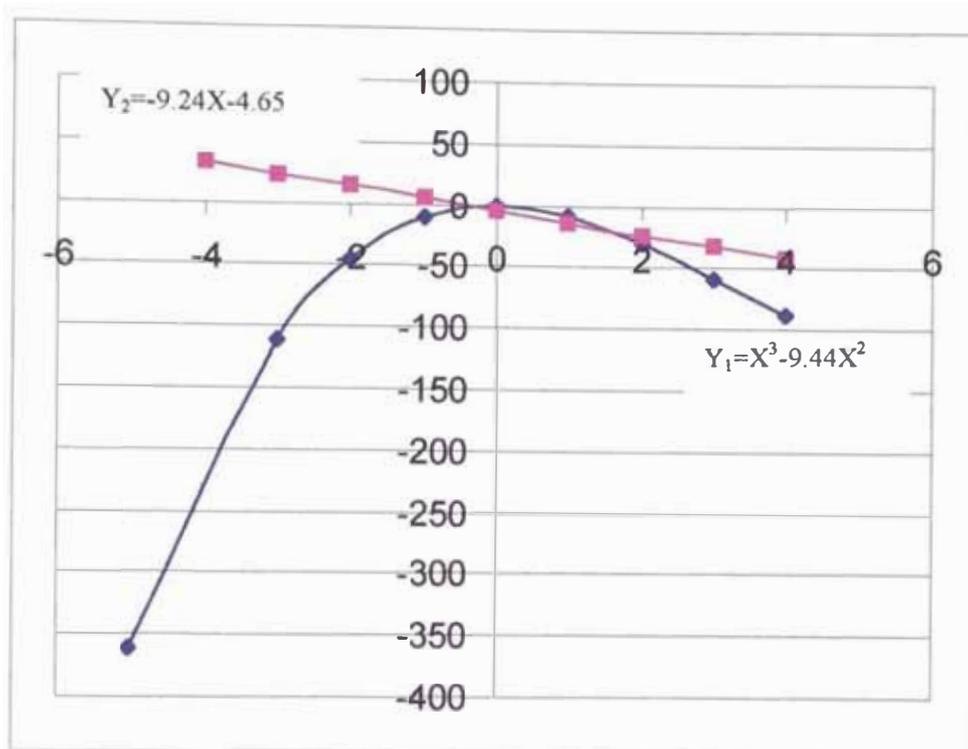
$$f'(S) = 3S^2 - 18.88S - 9.24$$

- Localizamos gráficamente las raíces reales de la ecuación. La función $f(X) = 0$ o se descompone en $f_1(X) = f_2(X)$.

- Ubicamos un intervalo $[A,B]$ en la cual ambas curvas se intersectan.

$$f_1(X) = X^3 - 9.44X^2 = 0$$

$$f_2(X) = -9.24X - 4.65$$



Intervalo $[1,2]$

- Por el método Newton-Raphson calculamos el valor aproximado de una raíz de la ecuación.

$$X_1 = X_0 - \frac{f(X_0)}{f'(X_0)} \quad X_0 = 2$$

$$f(2) = 2^3 - 9.44(2)^2 - 9.24(2) = -6.63$$

$$f'(2) = 3(2)^2 - 18.88(2) + 9.24 = -16.52$$

$$X_1 = 2 - \frac{-6.63}{-16.52}$$

$$X_1 = 1.6$$

$$X_1' = 1.6 - \frac{-0.6364}{20.84} \quad X_1 = 1.6$$

$$X_1'' = 1 \quad f(1.6) = -0.6364$$

$$\quad \quad \quad f'(1.6) = -20.84$$

$$X_1'' = 1.57 - \frac{-0.242}{-13.01} \quad X_1' = 1.57$$

$$X_1''' = 1.55 \quad f(1.57) = -0.242$$

$$\quad \quad \quad f'(1.57) = -13.01$$

- Por el método de Ruffini determinamos el valor de la ecuación cuadrática ($AX^2+BX+C=0$).

	1	-9.44	9.24	4.65
1.55		-1.55	-12.23	-4.63
	1	-7.89	-2.99	-0.02

$$S^2 - 7.89S - 2.99 = 0$$

- La ecuación de segundo grado se resuelve con la fórmula:

$$X = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$X_{2,3} = \frac{-(-7.89) \pm \sqrt{(-7.89)^2 - 4(1)(-2.99)}}{2(1)}$$

$$X_2 = 8.25 \text{ MPa}$$

$$X_3 = -0.36 \text{ MPa}$$

- Los esfuerzos principales son:

$$\sigma_1 = 8.25 \text{ MPa}$$

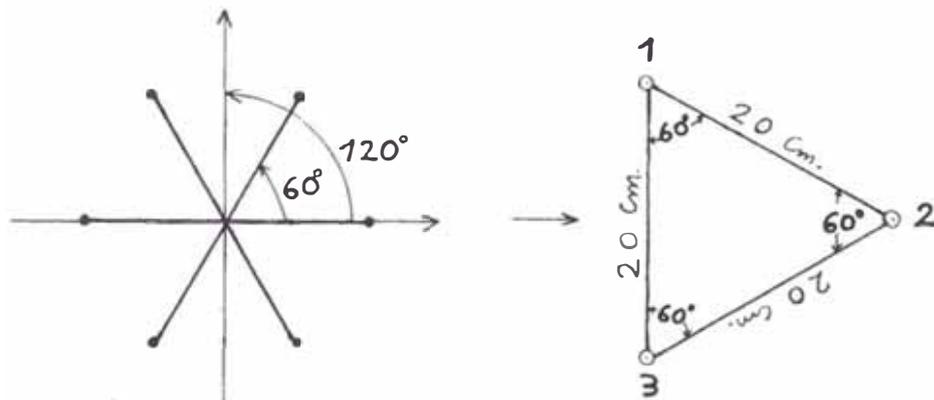
$$\sigma_2 = 1.55 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = -0.36 \text{ MPa}$$

Como control, en la base del Cerro Palo o cantera Cemento Andino, se ha perforado 3 taladros diamantinos horizontales, formando un triángulo equilátero, con una broca EX a una profundidad de 1.5 metros y distancia entre taladros 20 cm. (Noviembre de 1999).

La deformación normal se puede determinar en cualquier dirección, dada en la superficie de un elemento estructural. Las mediciones de deformación longitudinal son particularmente fáciles de efectuar y se han desarrollado técnicas en extremos confiables para este propósito.

Las **acumulaciones o líneas de medición en un punto se llama roseta de deformaciones.**



ROSETA EQUIANGULAR O EN DELTA

Se tiene los siguientes datos de laboratorio para la caliza:

$$\mu = 0.25$$

$$E = 0.27 \times 10^5 \text{ MPa}$$

Con un micrómetro de interiores se midió los taladros después de la perforación y a 2 meses de perforados, y se tiene:

$$d = 38.1 \text{ mm} \text{ ----- } 0.0381 \text{ m}$$

$$U_1 = 0.005 \text{ mm} \text{ ----- } 5 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$U_2 = 0.026 \text{ mm} \text{ ----- } 26 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$U_3 = 0.004 \text{ mm} \quad 4 \times 10^{-6} \text{ m}$$

Calculando la magnitud y dirección de los esfuerzos, para lo cual se aplicó las ecuaciones que se hallan en el reporte de investigación 5881 del Bureau of Mines de los Estados Unidos.

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{E}{3d(1-\mu^2)}(U_1 + U_2 + U_3)$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{0.27 \times 10^5 (5 + 26 + 4) \times 10^{-6}}{30.0381(1 - 0.25^2)} = 8.82$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\sqrt{2}E}{6d(1-\mu^2)} \left[(U_1 - U_2)^2 + (U_2 - U_3)^2 + (U_1 - U_3)^2 \right]^{1/2}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\sqrt{2} \times 0.27 \times 10^5 \times 10^{-6}}{6 \times 0.0381(1 - 0.25^2)} \left[(21)^2 + (22)^2 + (1)^2 \right]^{1/2} = 5.42$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 8.82 \text{ Mpa (} 10^6 \text{ Pascales)}$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 5.42 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_1 = 7.12 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 1.70 \text{ MPa}$$

$$\text{Tg} 2\theta_1 = \frac{\sqrt{3}(U_2 - U_3)}{2U_1 - U_2 - U_3}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \times 22 \times 10^{-6}}{(2 \times 5 - 26 - 4) \times 10^{-6}} = -1,9$$

$$\theta_1 = 148^\circ 52' 45''$$

$$\theta_1 = 148^\circ 52' 45'' - 30^\circ = \theta_1 = 118^\circ 52' 45''$$

El resultado obtenido difiere de -1.13% Mpa y + 0.15% Mpa respecto a la solución del modelo matemático. Lo cual se considera aceptable.

9.6.3. Programa para la determinación de los esfuerzos principales en el macizo rocoso de la cantera Cemento Andino.

Software EXCEL:

Programa de invariantes.- para cómputo de I_1 , I_2 y I_3

Se desarrolló con la hoja de cálculo Microsoft EXCEL para el cálculo de las invariantes de esfuerzos, I_1 , I_2 e I_3 con el siguiente programa:

$$I_1 = B_3 + C_4 + D_5$$

$$I_2 = B_3 * C_4 + C_4 * D_5 + B_3 * D_5 - B_4^2 - D_4^2 - D_3^2$$

$$I_3 = B_3 * C_4 * D_5 + B_4 * C_5 * D_3 + C_3 * D_4 * D_5 - B_5 * C_4 * D_3 - B_4 * C_3 * D_5 - C_5 * D_4 * B_3$$

Ejemplo:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 10 \\ 9 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = 21$$

$$I_2 = -15$$

$$I_3 = 284$$

Programa de Ecuación Cúbica.- Para la resolución de la ecuación de tercer grado $\sigma_p^3 - I_1\sigma_p^2 + I_2\sigma_p - I_3 = 0$ ($ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$) se desarrolló con la hoja electrónica de cálculo (EXCEL) la solución de sus raíces x_1 , x_2 y x_3 con el siguiente programa:

$$1.- p = [(3*A3*C3)-(B3)^2]/(3*(A3)^2=$$

$$p = B11$$

$$2.- q = (2*(B3)^3-9*(A3*B3*C3)+27*(A3)^2*D3)/(27*(A3)^3)$$

$$q = B12$$

$$3.- \text{Discriminante} = B12^2/4+B11^3/27$$

$$4.- \text{Discriminante} > 0$$

$$C14 = B11^3/27$$

$$C16 = B3/(3*A3)$$

$$5.- \text{Discriminante} < 0$$

$$\rho = 14^{(1/2)}$$

$$\rho = B23$$

$$\theta = \text{Acoss}((-B12/2)/B23)*180/\pi$$

$$\theta = B24$$

$$\theta/3 = (B24)/3 = D22$$

$$\theta/3 + 120 = D23$$

$$\theta/3 + 240 = D24$$

$$6.- \text{Solución o respuesta:}$$

$$X1 = 2*(B23^{(1/3)}*\text{cos}(D22*\pi/180)+C16$$

$$X2 = 2*(B23^{(1/3)})*\text{cos}(D23*\pi/180)+C16$$

$$X3 = 2*(B23^{(1/3)})*\text{cos}(D24*\pi/180)+C16$$

- 2.- Los coeficientes y el término independiente de la ecuación los escribimos en una matriz de 1*4(1columna x 4 filas). Comenzando por el término independiente al coeficiente de la ecuación cúbica, con la ayuda de las barras de herramientas: Matrix, Arithmetic y Evaluation.

$$v := \begin{bmatrix} D \\ C \\ B \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. - Escribimos

$$r := \text{Polyroots}(v)$$

4. - $r = \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix}$

5. - Enter

6. -

$$r := \begin{bmatrix} r_3 \\ r_2 \\ r_1 \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad r := \begin{bmatrix} \sigma_3 \\ \sigma_2 \\ \sigma_1 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO:

$$f(x) := X^3 - 15 \cdot X^2 - 66 \cdot X + 530$$

$$v := \begin{bmatrix} 530 \\ -66 \\ -15 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r := \text{polyroots}(v)$$

$$r = \begin{bmatrix} -6.693 \\ 4.645 \\ 17.048 \end{bmatrix}$$

Programa para tensor de esfuerzos

Con el software MATHCAD.8 Professional. Empleando la barra de herramientas Evaluation y Matrix, escribimos $g(\sigma) := \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$ dentro de la matriz escribimos los valores de tensor de esfuerzos poniendo el cursor en la matriz, escribimos con la barra de herramientas Evaluation \rightarrow luego presionamos enter y obtenemos como resultado una ecuación cúbica procediendo a su solución.

$$f(\sigma) := \sigma^3 - 9.44 \cdot \sigma^2 + 9.24 \cdot \sigma + 4.65$$

$$w := \begin{bmatrix} 4.65 \\ 9.24 \\ -9.44 \\ 1 \end{bmatrix} \quad r := \text{polyroots}(w)$$

$$r = \begin{bmatrix} -0.363 \\ 1.551 \\ 8.252 \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

$$g(\sigma) := \begin{bmatrix} 1.90 - \sigma & 1.21 & 3.59 \\ 1.21 & 1.90 - \sigma & 1.21 \\ 3.59 & 1.21 & 5.64 - \sigma \end{bmatrix} \rightarrow -4.654066 - 9.2257\sigma + 9.44\sigma^2 - \sigma^3$$

$$Z := \begin{bmatrix} -4.65 \\ -9.23 \\ 9.44 \\ -1 \end{bmatrix} \quad r := \text{polyroots}(Z)$$

$$r = \begin{bmatrix} -0.363 \\ 1.55 \\ 8.253 \end{bmatrix}$$

Con el software MATHCAD.8 Professional, empleando las barras de herramientas Evaluation y Matrix, escribimos en la matriz el tensor de esfuerzos. Empleamos el comando **eigenvals** y se obtiene directamente la solución de las raíces de la ecuación cúbica, o sea **los tres valores de los esfuerzos principales**.

Ejemplo: Dado un tensor de esfuerzos.

$$A := \begin{bmatrix} 1.90 & 1.21 & 3.59 \\ 1.21 & 1.90 & 1.21 \\ 3.59 & 1.21 & 5.64 \end{bmatrix}$$

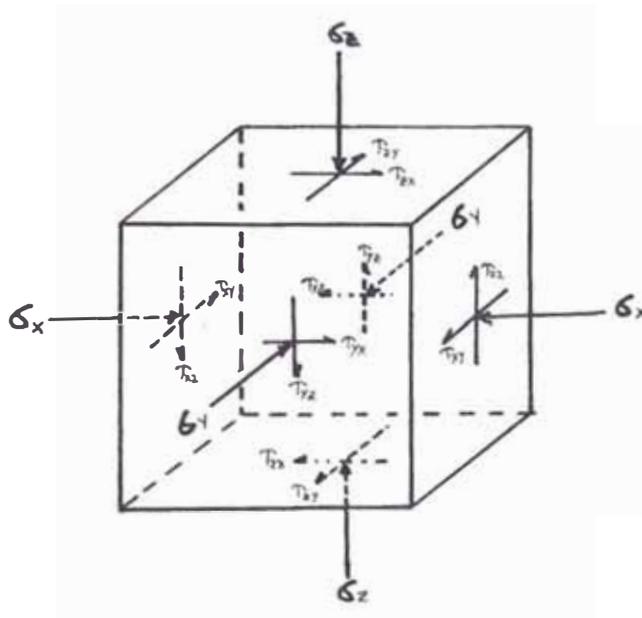
Con la utilización del software y comando respectivo se halló:

$$c := \text{eigenvals}(A)$$
$$c = \begin{bmatrix} 1.55 \\ -0.364 \\ 8.254 \end{bmatrix}$$

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

1. Los esfuerzos en un punto de un macizo rocoso, es tridimensional u octaédrico; puede ser representado con un cubo ubicado en el 1er. octante, actuando en cada cara un esfuerzo normal y dos esfuerzos cortantes.



2. La composición de esfuerzos nos permite determinar los esfuerzos actuantes en otros planos; conociendo previamente los esfuerzos unitarios actuantes en un plano.
3. La teoría de la elasticidad es una buena guía para el cálculo de los esfuerzos y deformaciones actuantes en un punto de un macizo rocoso. Debido a que las rocas son los materiales que tienen un comportamiento menos elástico o tienen un comportamiento de estado plástico o fracturado. Se asume que la roca tiene un comportamiento elástico.

4. Para analizar y comprender los esfuerzos en un punto de una masa rocosa, es necesario conocer la **Mecánica de Cuerpos Sólidos Deformables**, la **Mecánica de Rocas** y en forma especial la **Teoría de la Elasticidad**.
5. Para determinar los esfuerzos principales, actuantes en un punto de una masa rocosa, se debe conocer las 9 componentes del tensor de esfuerzos; éstos a su vez se pueden sintetizar en función de 6 componentes independientes: σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} y τ_{zx} . La representación matricial del tensor de esfuerzos en el espacio (R^3) se generaliza como:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

6. La determinación de los esfuerzos principales actuantes en un punto de una masa rocosa se efectúa resolviendo la ecuación cúbica: $\sigma_p^3 - I_1\sigma_p^2 + I_2\sigma_p - I_3 = 0$ que nos da $\sigma_1 =$ esfuerzo principal mayor, $\sigma_2 =$ esfuerzo principal intermedio y $\sigma_3 =$ esfuerzo principal menor. Los coeficientes I_1 , I_2 y I_3 son invariantes de los esfuerzos.
7. Teniendo la ecuación cúbica $\sigma_p^3 - I_1\sigma_p^2 + I_2\sigma_p - I_3 = 0$ y una raíz de la ecuación ($X_1 = C$); el más práctico hallar la ecuación cuadrática aplicando el método de Ruffini.
8. Los esfuerzos principales son esfuerzos normales y actúan en planos principales. La roca está sujeta a esfuerzos compresivos. Cualquier estado de esfuerzos puede ser descrito y resumido, por los esfuerzos principales. Cuando éstos esfuerzos no son iguales aparecen además los esfuerzos

cortantes o tangenciales en planos inclinados con respecto a la dirección de los esfuerzos principales.

9. Los esfuerzos en un punto de una masa rocosa expresado en el tensor de esfuerzos es equivalente a un sistema de tres esfuerzos principales (σ_1 , σ_2 y σ_3) normales entre sí. Para la celeridad del cálculo de los esfuerzos principaleses con la aplicación de Softwares: EXCEL, MATHCAD, MATEMÁTICA, etc.
10. Los esfuerzos principales a una profundidad de 230 m. en el Cerro Palo (Cantera Cemento Andino), en un punto de la masa rocosa es $\sigma_1 = 32.15$ MPa, $\sigma_2 = 8.085$ MPa y $\sigma_3 = -2.235$ MPa.

RECOMENDACIONES

1. En la resolución de ecuaciones cúbicas de la forma $f(x)=0$ que se aplica en la determinación de los esfuerzos principales en un punto de una masa rocosa para determinar raíces reales, el método de análisis numérico más adecuado aplicar es el de "Newton – Raphson. Iteration".
2. La forma más práctica de resolver la ecuación $\sigma_p^3 - I_1\sigma_p^2 + I_2\sigma_p - I_3 = 0$ es con un programa de computadora. Se obtendrá los valores σ_1 , σ_2 y σ_3 (esfuerzos principales), cumpliéndose que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.
3. Para determinar los desplazamientos en los taladros de perforación (Método del triángulo equilátero), en la roseta de deformaciones, se debe emplear medidores de deformación transversal (Borehole deformation gauge). En caso de excavaciones subterráneas, para medir los desplazamientos o convergencias relativas a dos puntos de una excavación, podemos emplear

extensómetro de cinta o barra telescópica extensométrica y determinar las deformaciones principales por el método de la roseta.

4. En la actividad minera al diseñar aberturas subterráneas o superficiales, se debe tener en cuenta los esfuerzos actuantes en el macizo rocoso.
5. Para el análisis de estabilidad de excavaciones subterráneas o superficiales, se debe aplicar el método de los elementos finitos, que consiste en la evaluación de los esfuerzos y deformaciones que ocurre en la roca, circunstante de la excavación. En el análisis de estabilidad de taludes, con el método de elementos finitos, consiste en dividir las paredes del talud en mallas o elementos triangulares o rectangulares, las esquinas o nodos de estos elementos son conectados.
6. La enseñanza de la matemática y/o métodos numéricos desde el nivel de Pre-grado debe ser asistido por el software **MATHEMATICA 4** u otro similar, como el **MECHMAT** de los doctores LARDNER y ARCHER, el cual es un software especializado para resolver problemas de “Mecánica de Sólidos” y de “Mecánica de rocas”.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. BRADY, B.H.-BROWN.- ROCK MECHANICS FOR UNDERGROUND MINING, Ed. George Allen&UnwinLtd, London-England, 1985, 527 pp.
2. BEER, F.P.- JOHNSTON, E.R.- MECANICA DE MATERIALES, Ed. McGraw Hill, México, 1981, 618 pp.
3. COATES, D.F.- FUNDAMENTOS DE MECANICA DE ROCAS, Ed. Blume, España, 1979, 577 pp.
4. DE SITTER, L.U.- GEOLOGIA ESTRUCTURAL, Ed. Omega S.A., Barcelona-España, 1970, 521 pp.
5. GOODMAN, Richard E.- INTRODUCTION TO ROCK MECHANICS Ed. Jhon Wiley & Sons, USA, 1987, 478 pp.
6. HARVEY, J. C.- GEOLOGY FOR GEOTECHICAL ENGINEERS, Cambridge University Press, England, 1994, 157 pp.
7. HOEK, E&BROWN, E.T. UNDERGROUND EXCAVATIONS IN ROCK, Ed.. Institution of Mining and Metallurgical, London, 1985, 527 pp.
8. NINE, Iván - ZUCKERMAN, Herbert.- INTRODUCCION A LA TEORIA DE LOS NUMEROS, Ed. Limusa - Wiley, México, 1989.
9. OBERT, Leonard - DUVALL, Wilburt ROCK MECHANICS AND THE DESIGN OF STRUCTURES IN ROCK, Ed. John Wiley&Sons Inc., New York- U.S.A., 1967, 650 pp.
10. PARKER, Jack and Others.- ROCK MECHANICS IN MINING PRACTICE , Ed. Sam Publication- M.J. Book, Edembridge - England, 1985.

11. POPOV, Egor P. MECANICA DE MATERIALES, Ed. Limusa, México, 1982, 676 pp.
12. RAGAN, Donald M.- GEOLOGIA ESTRUCTURAL, Ed. Omega S.A. Barcelona - España, 1980, 207 pp.
13. RAMIREZ OYANGÜREN, P y otros.- MECANICA DE ROCAS APLICADA A LA MINERIA METALICA SUBTERRANEA, Ed. Instituto Geológico y Minero de España, Madrid, 1984, 362 pp.
14. SALAS L., Saturnino - HILLE, Einar.- CALCULUS, Ed. Reverte, Madrid - España, 1988.
15. STAGG, K.G. & ZIENKIEWICZ, O.C. ROCK MECHANICS IN ENGINEERING PRACTICE, Ed. Wiley, London England, 1980, 398 pp.
16. SOILTEST, INC.- ROCK MECHANICS AND MINE INSTRUMENTS Printed in USA, 1974, 34 pp.
17. THE CANADIAN MINING AND METALLURGICAL BULLETIN.-ROCK MECHANICS & GROUND SUPPORT Vol. 77 N° 868, Canada, August 1984, 96 pp.
18. TIMOSHINKO, S. & J. N. GOODIER, J. N.- THEORY OF ELASTICITY, ed. Mc. Graw Hill, New York, 1968, 546 pp.
19. WOODRUFF, Seth D. METHODS OF WORKING COAL AND METAL MINES: Theory and application of rock mechanics to roof control and support problems, T₁, Pergamon Press, Made in Great Britain, 1966, 538 pp.
20. WOLFRAM, Stephen.- MATHEMATICA, Published by Wolfram Media Inc., United States of America, 1996, 1395 pp.