

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL
SECCIÓN DE POST-GRADO**



PROCESO H-ADAPTIVO Y GENERACIÓN AUTOMÁTICA DE ELEMENTOS FINITOS

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIA
CON MENCIÓN EN INGENIERIA ESTRUCTURAL

Ing. PERCY ANTONIO PEÑAFIEL BARRAZA

LIMA – PERU

2002

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo es estudiar el refinamiento automático de mallas de elementos finitos con el fin de obtener soluciones cuyos errores no excedan ciertos límites preestablecidos.

Uno de los mayores obstáculos que enfrenta el uso de los Elementos Finitos es la discretización de la geometría en una malla confiable. No solamente la tarea de generación de la malla es tediosa y propensa a error; la exactitud y el costo del análisis dependen del tamaño, forma y cantidad de elementos en la malla.

En el presente trabajo se desarrolló tres aspectos. El primer aspecto está relacionado a la *Estimación de error y refinamiento adaptable*, en el cual se describe las normas de error frecuentemente usadas y las técnicas de predicción del tamaño de los elementos con el fin de no exceder cierto límite preestablecido. El segundo aspecto está relacionado a la *Generación automática de la malla*, en el cual se desarrolla las técnicas para la generación de los nudos y elementos basándose en la predicción del tamaño de los elementos, determinados anteriormente. El tercer y último aspecto está relacionado a la *Enumeración eficiente de nudos*, en el cual se incorpora una rutina que permite la optimización del ancho de banda, debido a que la generación de elementos producido anteriormente no considera ningún orden en la enumeración de sus nudos y elementos.

Para visualizar como estos tres aspectos interactúan durante todo el proceso se desarrolló dos ejemplos, el primero fue el *Estudio de la filtración bajo un tablestacado*, y el segundo el *Estudio de la torsión de una barra cuadrada*.

ABSTRACT

The goal of this work is to study automatic mesh refinement for finite elements analysis, in order to obtain solutions where errors do not exceed certain set up limits.

One of the greatest obstacles that the use of Finite Elements faces is the discretization of the geometry on a reliable mesh. Not only is the mesh generation task tedious and prone to error, but also the accuracy and the cost of the analysis depend directly on the size, shape, and number of elements in the mesh.

In this work we develop three aspects. The first one is related to the *Error Estimation and Adaptivity Refinement*, in which we describe frequently used error norms and techniques to predict the size of the elements in order to not exceed certain set up limits. The second aspect is related to the *Automatic Mesh Generation*, in which we develop techniques for the generation of the nodes and elements relying upon the prediction of the size of the element previously calculated. The third and last aspect is related to the *Efficient Labeling of the nodes*, in which we incorporate a routine which allows the optimization of the bandwidth due to the generation of the previously produced elements, which does not take into account any label order of the nodes and elements.

Finally, to visualize how those three aspects interact during the whole process, we develop two examples: the first is the *Study of the Filtration Under a Sheet Pile*, and the second is *The Study of the Torsion of a Square Bar*.

INDICE

Capítulo 1 El proceso de discretización de elementos finitos

1.1 Introducción.....	1
1.2 El procedimiento <i>h</i> -adaptivo.....	3
1.3 Objetivo del estudio.....	5
1.4 Descripción de los temas a tratar.....	5

Capítulo 2 Estimación de error y refinamiento adaptable

2.1 Introducción.....	9
2.2 Normas de error.....	9
2.3 Velocidad de convergencia.....	11
2.4 Estimación de error.....	15
2.5 Adaptabilidad.....	28

Capítulo 3 Generación automática de la malla

3.1 Introducción.....	32
3.2 Terminología y datos requeridos.....	32
3.3 Generación de nudos.....	34
3.4 Generación de elementos.....	34

Capítulo 4 Enumeración eficiente de nudos

4.1 Introducción.....	68
4.2 Notación y definiciones.....	71
4.3 Algoritmo.....	74

Capítulo 5 Aplicaciones

5.1 Estudio de la filtración bajo un tablestacado.....	80
5.2 Estudio de la torsión de una barra cuadrada.....	91

Conclusiones y recomendaciones.....	96
-------------------------------------	----

Bibliografía.....	100
-------------------	-----

Definiciones

λ . *Parámetro de singularidad*

ϵ *Función de deformaciones en elasticidad*

σ *Función de tensiones ó esfuerzos en elasticidad*

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_6$ *Tolerancias angulares*

α, β *Parámetros de la función de forma*

Ω *Campo*

η *Error relativo*

θ *Índice de efectividad*

d_1, d_2, d_3, \dots *Distancia entre nudo*

D *Matriz de elasticidad*

e_u *Error medido en desplazamientos*

e_σ *Error medido en tensiones*

$\|e\|$ *Norma de error*

$h = f(x,y)$ *Función que mide el tamaño de los elementos*

$h = f(s)$ *Función que mide el tamaño de los segmentos en la frontera*

N *Función de forma*

N_i *Nudo i*

p *Parámetro de la función de campo ó grado del polinomio en la función de forma*

q *Función de flujo*

S *Operador que define las deformaciones*

u *Función de campo (desplazamientos en elasticidad)*

$\|\mu\|$ *Norma de la función de campo*

V *Vector*

$|V|$ *Longitud del vector*

Capítulo 1

El Proceso de Discretización de Elementos Finitos

1.1 Introducción.

Aunque fue antecedido por los grandes logros de las escuelas de elasticidad francesa, tales como las de Navier y St. Venant, el período que va desde 1850 a 1875 podría considerarse un punto de partida para esta reseña. Durante ese período aparecieron los conceptos relacionados al análisis de pórticos desarrollados, entre otros, por Maxwell,³⁵ Castigliano,¹¹ y Mohr.³⁷ Estos conceptos representan la base fundamental del análisis estructural matricial, los cuales tomaron forma luego de 80 años y sirvieron de sustento al análisis de los elementos finitos.

El desarrollo de las teorías y técnicas analíticas que contribuyeron al análisis de los elementos finitos fueron particularmente lentos entre los años 1875 y 1920. Esto fue debido, en gran medida, a las limitaciones en la solución de las ecuaciones algebraicas con más de unas pocas incógnitas. Se puede notar que para las estructuras de gran interés en esa época, tales como las armaduras y pórticos, los conceptos basados en la distribución de esfuerzos, considerando a las fuerzas como incógnitas, fueron empleados casi universalmente.

Aproximadamente en 1920, las ideas básicas del análisis de armaduras y pórticos basados en considerar al desplazamiento como incógnita se consolidaron con los trabajos desarrollados por Maney³⁴ en los Estados Unidos y Ostenfeld⁴⁵ en Dinamarca. Estas ideas fueron las precursoras del concepto de análisis estructural matricial que está en uso el día de hoy. Sin embargo, las limitaciones respecto al tamaño del problema, tanto con incógnitas de fuerzas como de desplazamientos, continuaron predominando hasta 1932, cuando Hardy Cross introdujo el método de distribución de momentos.¹³ Este método hizo factible la solución de problemas de análisis estructural de mayor complejidad que los efectuados por los métodos previos. La Distribución de Momentos se convirtió por lo tanto en el elemento principal de la práctica del análisis estructural para los siguientes 25 años.

Las computadoras digitales aparecieron en los comienzos de 1950 pero sus aportes tanto a la teoría, como a la práctica no fueron inmediatos. Sin embargo algunos investigadores predijeron este impacto y emprendieron la codificación de los ya bien establecidos procedimientos de análisis de pórticos en un formato matricial adecuado para la computadora. Tales contribuciones, que son muy numerosas para revisar en detalle

aquí, son mencionadas por Argyris y Patton.⁶ Dos publicaciones dignas de mención fueron las de Argyris y Kelsey⁷ y Turner Clough, Martín, y Topp.⁵⁹ Estas publicaciones combinan conceptos de análisis de pórticos y medios continuos y plantean procedimientos en un formato matricial. También representan una influencia predominante en el desarrollo del método de los elementos finitos en los años venideros. Sin embargo podría ser inexacto atribuir todos los aspectos básicos del método de los elementos finitos a estos trabajos porque importantes características del método fueron tratadas aún antes de 1950 en las publicaciones hechas por Courant,¹² McHenry,³⁶ y Hrenikoff.¹⁷ El trabajo de Courant es particularmente significativo debido a que trata de aplicaciones distintas a situaciones mecánicas estructurales.

La tecnología del análisis de los elementos finitos ha avanzado a través de un gran número de etapas desde mediados de 1950. Una revisión detallada de estos progresos es efectuada por Zienkiewicz.⁶² Las formulaciones que obtuvo para elementos de estado plano de esfuerzo motivaron a investigadores a establecer relaciones para elementos sólidos, placas en flexión, cáscaras delgadas, y otras formas estructurales. Una vez estos fueron establecidos para los propósitos del análisis lineal, estático y elástico, la atención se dirigió a fenómenos especiales tales como respuesta dinámica, pandeo, y no-linealidad geométrica y del material. Sin embargo, no solamente fue necesario extender la formulación del elemento sino también la del proceso general para el análisis de pórticos. Estas etapas fueron seguidas por un periodo de intenso desarrollo de programas de cómputo de “propósito general”, procurando colocar las capacidades del método en manos de los profesionales. Los programas de propósito general para el análisis de elementos finitos se usan ahora extensamente. La adquisición de tales programas a un modesto costo explica la gran cantidad de aplicaciones del método.

En el lado experimental muchos investigadores se dedicaron a formular nuevos elementos, desarrollar algoritmos para fenómenos especiales y desarrollar nuevos programas de cómputo. Las aplicaciones del método a fenómenos no estructurales e interdisciplinarios cobraron mayor interés. Como por ejemplo las aplicaciones en el análisis termo-estructural y en hidro-elasticidad.

A pesar que se ha dado énfasis a ciertas distinciones y ventajas especiales del método de los elementos finitos en mecánica estructural, es improbable que el método en su forma presente sea la última palabra en los procedimientos de análisis. Debe ser visto dentro de una etapa en el continuo desarrollo de las herramientas del análisis y diseño estructural. Libros tales como el de Timoshenko *Historia de la Resistencia de Materiales*⁵⁸ son un

invalorable componente en la educación de los profesionales de ingeniería estructural. Nuevos libros relacionados a este tema ó libros técnicos con un énfasis en la historia continúan publicándose y merecen atención.

1.2 El procedimiento h-adaptivo.

El concepto básico de la técnica de los elementos finitos es que un medio continuo puede ser modelado subdividiéndolo en elementos. El comportamiento de cada elemento es descrito por funciones que representan aproximadamente, en el caso de mecánica estructural, los esfuerzos y desplazamientos dentro de la región. Estas funciones son elegidas de tal manera que permiten asegurar la continuidad en desplazamientos dentro de todo el medio continuo. Sin embargo en la mayor parte de los casos no es posible asegurar la continuidad en los esfuerzos.

La ventaja especial del método reside en su facilidad de representar estructuras y estados de carga complejos e irregulares. Sin embargo, uno de los mayores obstáculos que enfrenta este método es la discretización de la geometría en una malla confiable de elementos finitos. No solamente la tarea de generación de la malla es tediosa y propensa a error; la exactitud y el costo del análisis dependen del tamaño, forma y cantidad de elementos en la malla.

El proceso de refinamiento h-adaptivo está vinculado al error generado a nivel del elemento. Si estos errores se encuentran dentro de los límites establecidos por el analista (5% por ejemplo) entonces la malla queda completamente definida. Pero en la práctica estos límites frecuentemente se ven superados y es necesario refinar.

En las aproximaciones con elementos finitos existen varias posibilidades de refinamiento. La más común es el empleo de elementos con funciones de forma definidas por polinomios de grado “p” constantes y depender, para el mejoramiento de la solución, de la reducción del tamaño “h” del elemento. El proceso alternativo, p-adaptivo, en el cual se aumenta el grado del polinomio de interpolación en todos (o algunos) de los elementos, requiere el desarrollo de un nuevo código. Si el costo de la solución es poco importante, este proceso es muy eficiente, especialmente si se desea una muy alta exactitud.

Dentro del procedimiento de refinamiento “h” existen muchas alternativas para obtener una mejor calidad en la malla. La subdivisión de la malla es por supuesto posible e indudablemente ha sido usada en recientes análisis adaptivos, en el cual el mejoramiento necesita muchas etapas y por lo que la subdivisión local de la malla se ha efectuado repetidamente. Sin embargo, tales procesos son antieconómicos e inevitablemente el

enriquecimiento de la malla trae consigo transiciones complejas. Una mejor alternativa es regenerar completamente la malla, la cual puede ser establecida según una función de densidad de malla especificada. Algunos autores introducen la nomenclatura refinamiento-*r* en el cual una malla existente es modificada por el cambio en la localización del nudo para alcanzar mejoras en la exactitud^{51,52}. Esto por supuesto no es un procedimiento separado pero es una variante del refinamiento “*h*” con una forma de regeneración de malla especial. Este proceso ofrece solo mejoras sobre una solución existente; sin embargo, no es posible obtener la exactitud especificada.

En la actualidad se han desarrollado una gran variedad de algoritmos para la generación de malla con elementos triangulares (para problemas planos) y elementos tetraédricos (para problemas tridimensionales). La ventaja de generar una malla con triángulos o tetraedros es debida a que son los elementos más fáciles de emplear para discretizar dominios de cualquier forma por compleja que esta sea. Los algoritmos más representativos y ampliamente usados son los propuestos por Cavendish^{24,25} el cual emplea la Triangulación de Delauney, la Técnica Frontal usada por Lo⁵⁴, la Técnica Frontal Avanzada usada por Peraire^{43,22}, Shepard^{32,46} usando las técnicas modificadas de Quadtree y Octree. Estas técnicas son robustas y versátiles, al menos en la generación de mallas en dos dimensiones.

Los cuadriláteros y hexaedros fueron usados en la técnica del Mapeo Isoparamétrico, descrito por primera vez por Zienkiewicz y Phillips⁴² en la década de los 70, y en la técnica del Mapeo Transfinito⁶⁰ la que es ampliamente usada en la actualidad. De hecho, estas técnicas semiautomáticas de generación de malla son actualmente el soporte principal de los generadores de malla comerciales. Cuando la técnica de mapeo es usada en la generación de malla, el dominio del modelo tiene que ser subdividido manualmente en regiones simples las cuales son luego mapeadas sobre cuadrículas regulares. Este proceso manual es tedioso y difícil, particularmente en el caso de un dominio con una geometría compleja. Como el tamaño de los elementos es controlado por la subdivisión de las subregiones más simples, entonces más subregiones son necesarias para generar una malla que pueda acomodarse al tamaño de los elementos deseados. Esto es aún más complicado por el diseño de una malla cercana a la óptima dentro de un análisis adaptivo, el cual requiere una malla con tamaños de elementos ampliamente diferentes⁴⁴. Sin embargo la principal característica de la técnica de mapeo es que, una vez el dominio es descompuesto manualmente sobre subregiones mapeables, la generación de los elementos es mucho más fácil que cualquier método existente. Además, los elementos

generados por la técnica de mapeo son ligeramente distorsionados. Recientemente se ha hecho un intento por emplear la técnica de mapeo automático⁵⁶; sin embargo la descomposición automática de un dominio complejo en subregiones mapeables parece ser una tarea significativa.

Otros procedimientos para la generación de mallas con elementos cuadriláteros han sido propuestos por Sluiter y Hansen³¹, y muy recientemente implementadas por Talbert y Parkinson¹⁹. En los algoritmos descritos por estos autores, el dominio bajo análisis es descompuesto recursivamente en elementos. Este método da algunas consideraciones en la distribución del tamaño de los elementos sobre el dominio en proceso de descomposición. El tamaño del elemento definido por el usuario es especificado sobre el contorno; el espaciamiento de nudos y por consiguiente el tamaño del elemento dentro del dominio es determinado por los valores sobre el contorno mediante interpolación. Este obviamente no es un procedimiento adecuado para generar una malla en el interior, la cual solo puede ser definida por consideraciones físicas. Sin embargo, este método ha mostrado ser capaz de generar automáticamente mallas compuestas enteramente por cuadriláteros sobre geometrías complejas^{31,19}.

1.3 Objetivo del estudio.

Estudiar técnicas para el refinamiento automático de mallas de elementos finitos con el fin de obtener soluciones cuyos errores no excedan ciertos límites preestablecidos.

Tres aspectos importantes se consideran en el proceso de adaptación “h”:

- a) Estimación del error en cada elemento
- b) Predicción del refinamiento necesario para alcanzar una exactitud o un error especificado.
- c) Generación automática de la malla empleando elementos cuadriláteros.

1.4 Descripción de los temas a tratar.

El proceso h-adaptivo y la generación automática de elementos finitos involucran un gran número de operaciones que serán explicadas en detalle más adelante. Como introducción se pueden resumir de la manera siguiente:

1. Solución de la ecuación armónica: $\nabla^T K \nabla u + p = 0 \dots \dots \dots (1.1)$, obteniéndose una aproximación continua para “u” y discontinua para sus componentes de flujo $q = K \nabla u \dots \dots \dots (1.2)$

2. Estimación del error⁴⁴. Se obtiene un campo continuo de flujo q^* mediante promediado o “proyección” utilizando funciones de interpolación del mismo tipo que las utilizadas para representar al campo “ u ”, es decir:

$$u = N\alpha \dots \dots \dots (1.3)$$

$$q^* = N\beta \dots \dots \dots (1.4)$$

la ecuación aproximada se consigue exigiendo la igualdad entre q^* y q , de forma ponderada, esto es,

$$\int_{\Omega} N^T (q^* - q) d\Omega = 0 \dots \dots \dots (1.5)$$

dando el sistema de ecuaciones:

$$A\beta = b \dots \dots \dots (1.6)$$

$$A = \int_{\Omega} N^T N d\Omega \dots \dots \dots (1.7)$$

$$b = \int_{\Omega} N^T q d\Omega \dots \dots \dots (1.8)$$

Con ambos campos q y q^* disponibles, se tiene que el error en el flujo puede estimarse con gran precisión como:

$$e_{\sigma} = q^* - q \dots \dots \dots (1.9)$$

La inserción de esta cantidad en la expresión de la norma de energía después de la solución del problema (esto es, a posteriori) permite calcular el error.

$$\|e\| = \left[\int_{\Omega} (q^* - q) K^{-1} (q^* - q) d\Omega \right]^{1/2} \dots \dots \dots (1.10)$$

La expresión anterior puede ser evaluada sobre el dominio total o sobre subdominios, o incluso sobre elementos individuales.

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^m \|e\|_i^2 \dots \dots \dots (1.11)$$

donde “ i ” se refiere a elementos individuales Ω_i , tal que su unión sea Ω .

La expresión del error relativo de la norma en energía en porcentaje es:

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|u\|} \times 100\% \dots \dots \dots (1.12)$$

siendo,

$$\|u\| = \left[\int_{\Omega} u^T L u d\Omega \right]^{1/2} \dots\dots\dots(1.13)$$

y

$$L = \nabla^T K \nabla \dots\dots\dots(1.14)$$

3. Proceso de refinamiento⁴⁴. En este caso el error relativo en la norma de energía η debe ser menor que algún valor especificado η^* . (por ejemplo $\eta^* = 0.05$)

$$\eta \leq \eta^* \dots\dots\dots(1.15)$$

En una “malla óptima” es deseable que la distribución del error en norma de energía sea igual para todos los elementos. Así, si el error permisible total está determinado por

$$\eta^* \left(\|u\|^2 + \|e\|^2 \right)^{1/2} \dots\dots\dots(1.16)$$

se podría exigir una condición en la que el error en cualquier elemento “i” fuera

$$\|e\|_i < \eta^* \left(\frac{\|u\|^2 + \|e\|^2}{m} \right)^{1/2} \equiv \hat{e}_m \dots\dots\dots(1.17)$$

donde “m” es el número de elementos implicados.

Los elementos en los que no se cumple lo anterior son claros candidatos para el refinamiento. Así, si se define el coeficiente

$$\xi_i = \frac{\|e\|_i}{\hat{e}_m} \dots\dots\dots(1.18)$$

El refinamiento podría llevarse a cabo progresivamente refinando solamente un cierto número de elementos en los que el coeficiente sea mayor que uno. De hecho se puede desrefinar o usar espaciamiento mayor entre elementos si se desea un ahorro en el tiempo de cómputo. Este procedimiento, aunque lleva finalmente a una solución satisfactoria obtenida con un número relativamente pequeño de grados de libertad, no es en general económico, ya que el número total de soluciones de prueba puede ser excesivo.

Un procedimiento más eficaz es diseñar una malla completamente nueva que cumpla el requisito:

$$\xi_i \leq 1 \dots\dots\dots(1.19)$$

Basándose en los criterios de velocidad de convergencia, el tamaño “h” de la malla esta dado por el grado “p” del polinomio:

$$h_{nueva} = hi\xi^{-1/p} \dots\dots\dots(1.20)$$

Sin embargo, cuando se consideren elementos adyacentes a singularidades, es recomendable definir el tamaño de la malla como:

$$h_{nueva} = hi\xi^{-1/\lambda} \dots\dots\dots(1.21)$$

Un número conveniente para utilizar en este caso es $\lambda=0.5$, ya que la mayoría de los parámetros de singularidad están entre 0.5-1.0.

Idénticas predicciones son aplicables a problemas con múltiples estados de cargas aplicados ($i=1,2,\dots,n$). El tamaño “h” más pequeño será usado para generar la malla final.

$$h_{nueva}^m = \min(h_{nueva(1)}^m, h_{nueva(2)}^m, \dots\dots\dots, h_{nueva(i)}^m, \dots\dots\dots, h_{nueva(n)}^m) \dots\dots\dots(1.22)$$

Por supuesto es de esperar que la malla excederá la exactitud requerida para cada estado de carga individual.

4. Generación de elementos⁵⁷. Los valores obtenidos para el tamaño de la malla h_{nueva} pueden ser asociados a cada nudo, definiendo así una función de densidad de malla $h=h(x,y)$ que permitirá la generación de una malla completamente nueva. La técnica de pavimentación que se empleará primero genera nudos en la frontera del dominio y luego genera elementos cuadriláteros en el interior del dominio.
5. Re-enumeración. La generación de nudos empleando la técnica de pavimentación no considera ningún orden en la enumeración, generando anchos de banda y por lo tanto un perfil de la matriz ensamblada no óptimos. Se propone un algoritmo desarrollado por S.W. Sloan⁵³ para generar numeraciones eficientes y reducir el perfil de la matriz ensamblada.

Capítulo 2

Estimación de Error y Refinamiento Adaptable

2.1 Introducción

Uno de los mayores problemas encontrados en la aplicación de programas de elementos finitos es la confiabilidad de los resultados. La mayoría de los programas de elementos finitos no proveen ninguna estimación de los errores producidos luego del análisis. Además, la verificación de los resultados efectuando un análisis de convergencia consume demasiado tiempo y por lo tanto resulta muy costosa para efectuarse en la práctica. Por esta razón, actualmente se presta mucha atención al desarrollo de procesos adaptivos automáticos, en los cuales la precisión requerida puede ser alcanzada económicamente.

Un procedimiento h-adaptivo involucra una serie de pasos en cada uno de los cuales se introducen nuevos elementos del mismo tipo usado originalmente, pero de menor tamaño, o se eliminan elementos dependiendo del valor del error relativo en la norma de la energía en cada elemento, logrando que este no exceda un valor especificado.

Una malla óptima mantiene una distribución del error en norma de energía igual para todos los elementos.

El refinamiento podrá llevarse a cabo progresivamente refinando solamente un cierto número de elementos y manteniendo esencialmente la malla original o diseñando una malla completamente nueva.

2.2 Normas de error

El método de los elementos finitos ofrece solamente una aproximación a la solución exacta de un sistema de ecuaciones diferenciales. Las diferencias entre las soluciones exactas y aquellas aproximadas, por ejemplo errores en desplazamientos:

$$e_u = u - \hat{u} \dots\dots\dots(2.1)$$

o errores en tensiones:

$$e_\sigma = \sigma - \hat{\sigma} \dots\dots\dots(2.2)$$

disminuyen si el tamaño de la subdivisión, h , se reduce. Esto establece un criterio de convergencia y por tanto la aceptabilidad o no de varias formas de elementos finitos.

La determinación del error local establecido de esta manera no es general conveniente y puede resultar no confiable. Por ejemplo, bajo una carga puntual ambos errores, en desplazamientos y tensiones, serán localmente infinitos pero la solución en conjunto podría ser aceptable. Situaciones similares se darán cerca de ángulos entrantes donde, como es sabido, existen singularidades de tensiones al hacer análisis elásticos. Por esta razón se introducen a menudo varias “normas” que representan alguna cantidad escalar integral para medir el error o la función misma.

En una ecuación general lineal de la forma siguiente:

$$L u + p = 0 \text{ en } \Omega \dots\dots\dots(2.3)$$

u: función incógnita

L: operador diferencial vectorial

p: función ó constante

se puede definir una “norma de energía” escrita para el error como

$$\|e\| = \left(\int_{\Omega} e^T L e d\Omega \right)^{1/2} \equiv \left[\int_{\Omega} (u - \hat{u})^T L(u - \hat{u}) d\Omega \right]^{1/2} \dots\dots\dots(2.4)$$

Esta medida escalar corresponde de hecho a la raíz cuadrada del funcional cuadrático. En problemas de elasticidad la norma de energía se define de forma idéntica y resulta, tras integración por partes, en

$$\|e\|^2 = \int_{\Omega} (S e)^T D(S e) d\Omega \dots\dots\dots(2.5)$$

$$\varepsilon = S u \text{ y } \hat{\varepsilon} = S \hat{u}$$

$$\sigma = D \varepsilon \text{ y } \hat{\sigma} = D \hat{\varepsilon}$$

D es la matriz de elasticidad.

S es el operador que define las deformaciones.

La norma de energía puede, por lo tanto, escribirse alternativamente como

$$\|e\| = \left[\int_{\Omega} (\varepsilon - \hat{\varepsilon})^T D(\varepsilon - \hat{\varepsilon}) d\Omega \right]^{1/2} \dots\dots\dots(2.6a)$$

$$\|e\| = \left[\int_{\Omega} (\varepsilon - \hat{\varepsilon})(\sigma - \hat{\sigma}) d\Omega \right]^{1/2} \dots\dots\dots(2.6b)$$

$$\|e\| = \left[\int_{\Omega} (\sigma - \hat{\sigma})^T D^{-1} (\sigma - \hat{\sigma}) d\Omega \right]^{1/2} \dots\dots\dots(2.6c)$$

y su relación con la energía de deformación es evidente.

Fácilmente pueden ser ideadas otras normas escalares. Por ejemplo, la llamada norma de desplazamientos L_2 o el error en tensiones pueden escribirse como

$$\|e_u\|_{L_2} = \left[\int_{\Omega} (u - \hat{u})^T (u - \hat{u}) d\Omega \right]^{1/2} \dots\dots\dots(2.7a)$$

$$\|e_{\sigma}\|_{L_2} = \left[\int_{\Omega} (\sigma - \hat{\sigma})^T (\sigma - \hat{\sigma}) d\Omega \right]^{1/2} \dots\dots\dots(2.7b)$$

Tales normas nos permiten fijarnos en la cantidad particular de interés y realmente es posible calcular valores tales como la “raíz cuadrada de la media cuadrática” (RMC) de su error. Por ejemplo, el error RMC en tensiones es, para el dominio Ω

$$|\Delta_{\sigma}| = \left(\frac{\|e_{\sigma}\|_{L_2}^2}{\Omega} \right)^{1/2} \dots\dots\dots(2.8) \qquad \text{RMC} = |\Delta_{\sigma}|$$

Cualquiera de las normas mencionadas puede ser evaluada sobre el dominio total o sobre subdominios, o incluso sobre elementos individuales.

Nótese que

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^m \|e\|_i^2 \dots\dots\dots(2.9)$$

donde i se refiere a elemento individuales Ω_i , tal que su unión sea Ω .

Señalemos además que la norma de energía expresada en función de las tensiones, la norma L_2 de tensiones y el error RMC en tensiones tienen una estructura muy similar y que éstas se aproximan de forma análoga.

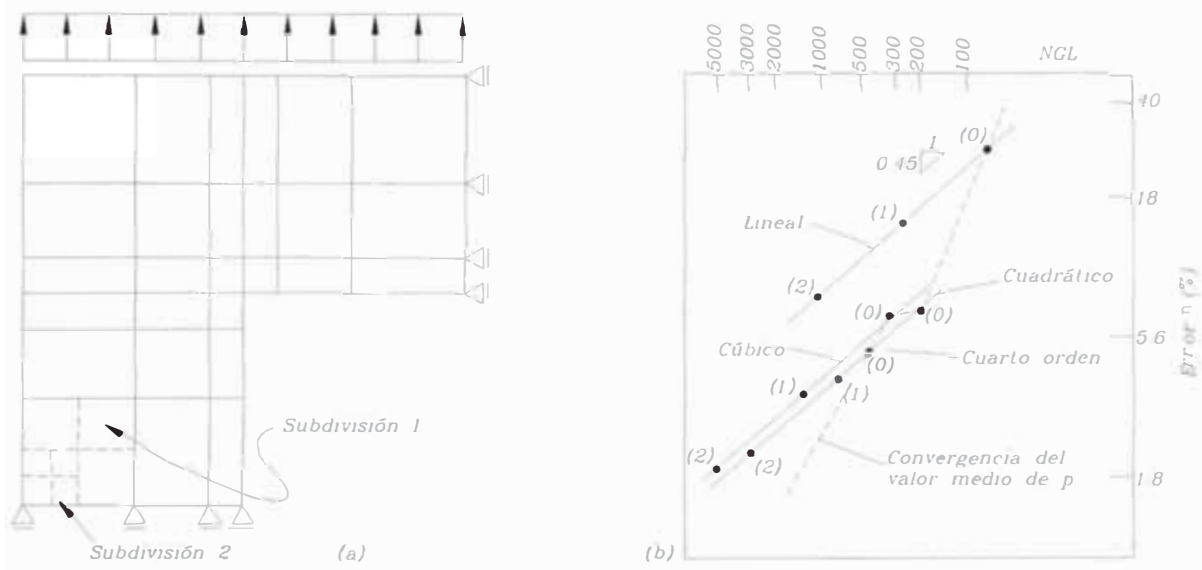
2.3 Velocidad de convergencia

Se observa que empleando funciones de grado “ p ” en la formulación con desplazamientos, los errores en tensiones son del orden $O(h)^p$. Este orden debe, por lo

tanto, corresponderse con el error de la norma de energía, $\|e\|$. Estos argumentos son correctos para problemas sin singularidades, pero es interesante ver como la regla anterior es violada cuando éstas existen.

En los ejemplos mostrados a continuación⁴¹ se muestra la variación del error relativo de la norma en energía (η en %) vs el número de grados de libertad (NGL) para distintos grados de funciones de interpolación y una subdivisión uniforme de la malla inicial.

$$\eta = \frac{e}{u} \times 100\% \dots \dots \dots (2.10)$$



Análisis de un dominio en forma L. Convergencia tipo h para varios valores de p. Tensión plana $E = 1, \nu = 0.3$ (a) Malla inicial (0) y subdivisiones uniformes (1) (b) % error () versus NGL (número de grados de libertad)

Figura 2.1

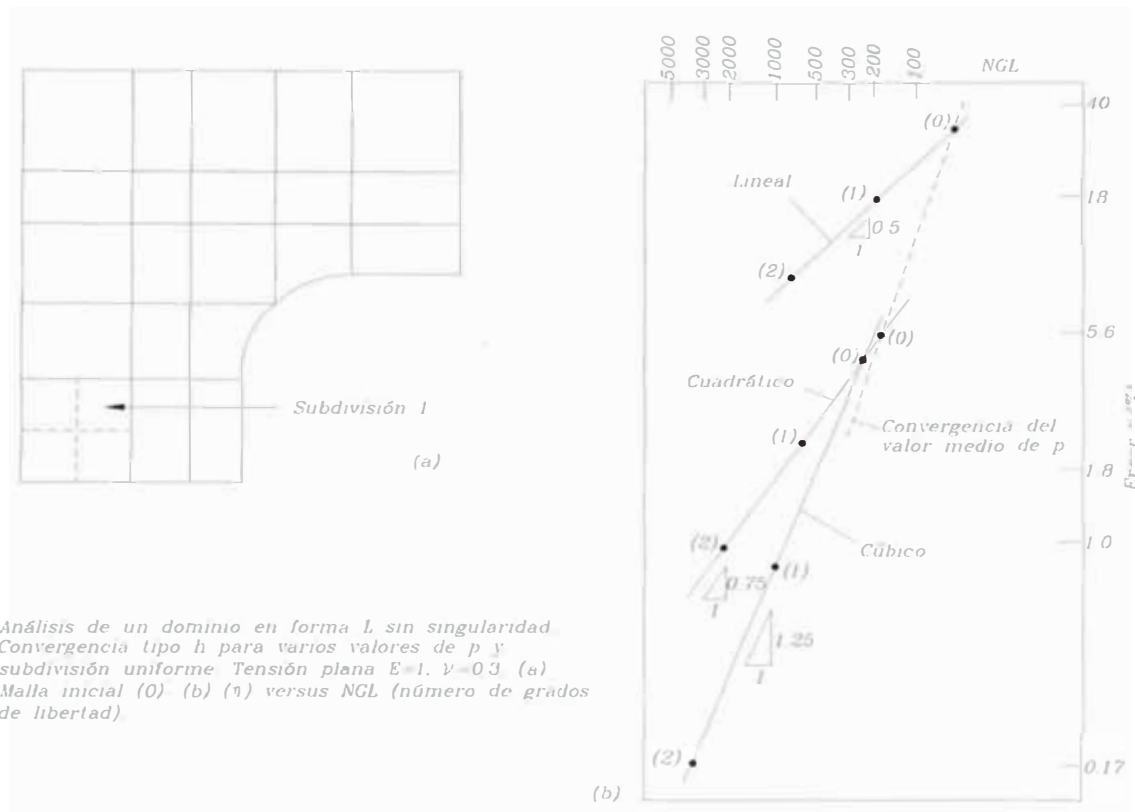


figura 2.2

Para un refinamiento tipo h resultante de una subdivisión uniforme de la malla inicial y para un refinamiento tipo p en el que el orden del polinomio aumenta en toda la malla original es interesante notar dos cosas:

a) Las velocidades de convergencia tipo h para funciones de forma polinómica con diferentes grados son casi las mismas en el ejemplo con singularidad (figura 2.1) y están muy por debajo del orden teórico predicho $O(h)^p$, [o $O(NGL)^{-p/2}$ ya que el número de grados de libertad es aproximadamente inversamente proporcional a h^2]

b) En el caso de la figura 2.2, donde se evita la singularidad redondeando el ángulo, la velocidad de convergencia mejora para elementos de orden más alto, aunque no se consiguen las velocidades teóricas (asintóticas).

La razón de este comportamiento es la singularidad y en general puede demostrarse que la velocidad de convergencia para problemas con singularidad es

$$O(NGL)^{-[\min(\lambda, p)]/2} \dots\dots\dots(2.11)$$

donde λ es un número asociado a la intensidad de la singularidad. Para problemas de elasticidad, λ varía desde 0.5 para una figura casi cerrada a 0.71 para un ángulo de 90° . La

velocidad de convergencia que se muestra en la figura 2.1 se acerca al valor controlado por la singularidad para todos los valores de p utilizados en los elementos.

En la figura 2.3¹⁰ se muestra otro problema con una influencia de singularidad.

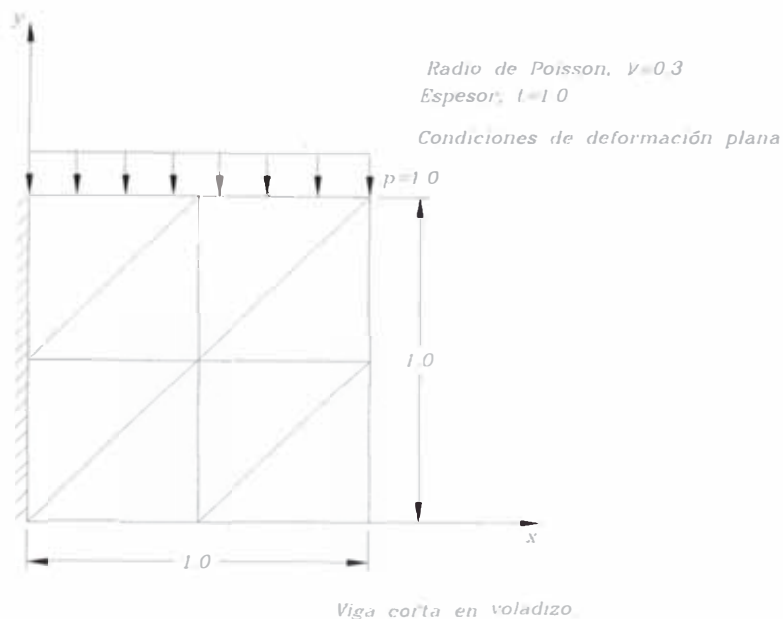
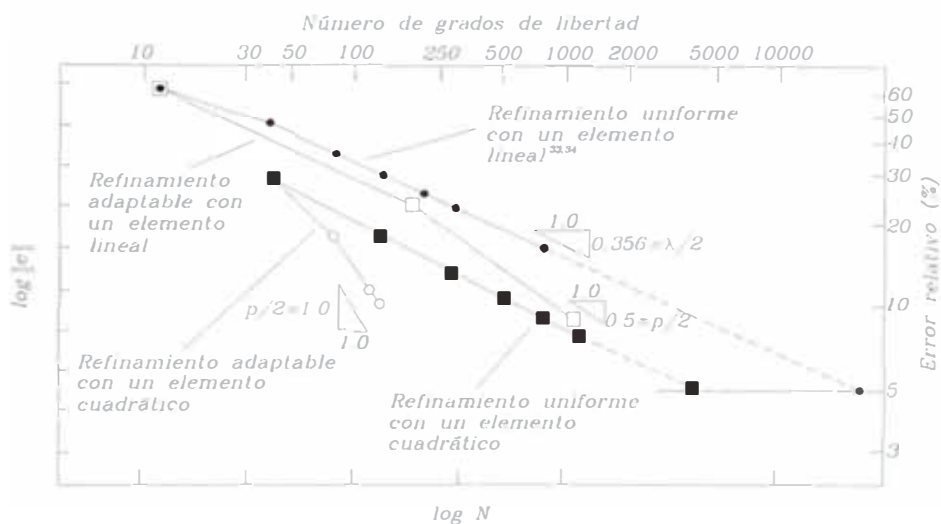


Figura 2.3

En la figura 2.4 se observa que la velocidad de convergencia para una subdivisión uniforme de triángulos cuadráticos y lineales es casi la misma en el límite (dominado por la singularidad), a menos que se utilice la secuencia de las mallas que se muestra en la figura 2.5.



$\lambda/2=0.356$, Velocidad teórica de convergencia para un refinamiento uniforme
 $p/2$ máxima velocidad de convergencia

Velocidades experimentales de convergencia para la viga corta en voladizo

Figura 2.4

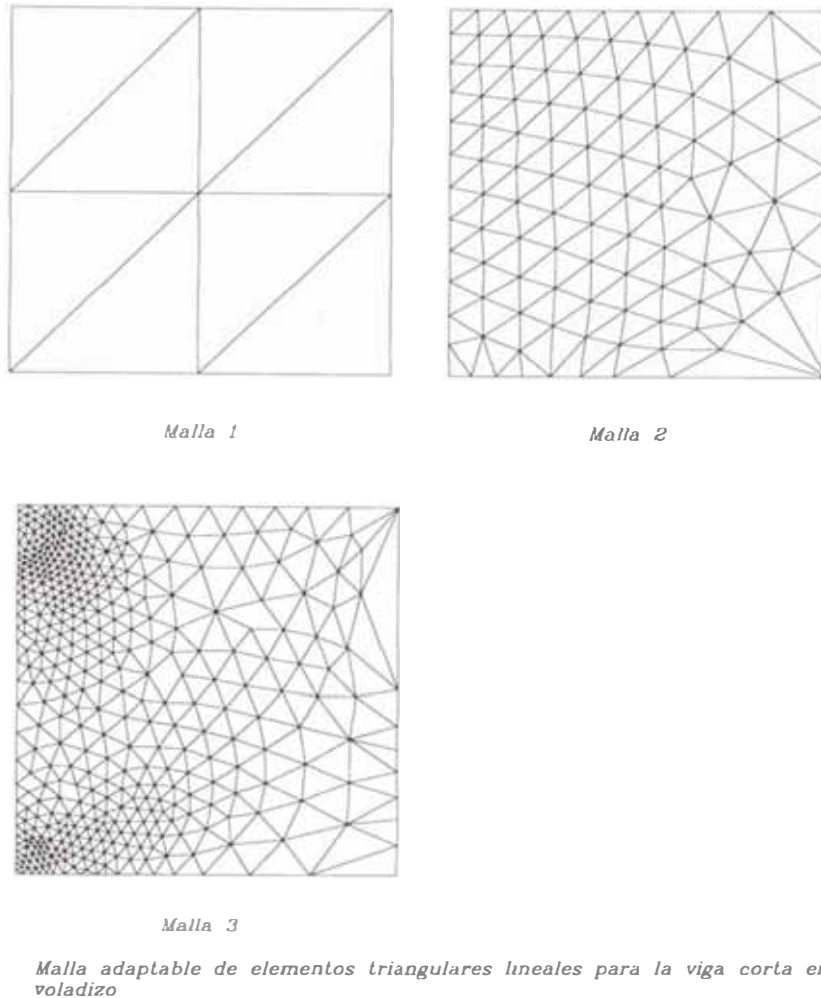


Figura 2.5

2.4 Estimación de error.

En aproximaciones irreducibles a la elasticidad lineal y problemas de campo se ha supuesto en general una aproximación Co continua para \hat{u} (el desplazamiento) y esto conlleva tensiones discontinuas $\hat{\sigma}$. Si σ^* es un campo Co continuo interpolado mediante funciones del mismo tipo que las utilizadas para representar el campo \hat{u} , o sea,

$$\hat{u} = N u$$

y

$$\sigma^* = N \bar{\sigma}^*$$

La ecuación aproximada se consigue exigiendo la igualdad entre σ^* y $\hat{\sigma}$, de forma ponderada, esto es:

$$e = \sigma^* - \hat{\sigma} = N \bar{\sigma}^* - \hat{\sigma}$$

$$\int e^2 d\Omega = \text{Minimo} \dots \dots \dots (2.12)$$

$$\int_{\Omega} (N\sigma^* - \hat{\sigma})^T (N\sigma^* - \hat{\sigma}) d\Omega = \text{Minimo}$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^*} \left| \int_{\Omega} (\sigma^{*T} N^T N \sigma^* - 2\sigma^{*T} N^T \hat{\sigma} + \hat{\sigma}^T \hat{\sigma}) d\Omega \right| = 0$$

$$\int_{\Omega} N^T N d\Omega \sigma^* = \int_{\Omega} N^T \hat{\sigma} d\Omega$$

$$A = \int_{\Omega} N^T N d\Omega$$

$$\sigma^* = A^{-1} \int_{\Omega} N^T \hat{\sigma} d\Omega = 0 \dots \dots \dots (2.13)$$

Con ambos campos σ y σ^* disponibles, se tiene que el error en tensiones puede estimarse con gran precisión como

$$e_{\sigma} = \sigma^* - \hat{\sigma} \dots \dots \dots (2.14)$$

La inserción de esta cantidad en cualquiera de las ecuaciones de la norma $\|e\|$ después de la solución del problema (esto es, a posteriori) permite calcular el error.

Las estimaciones así obtenidas son excelentes, tal como indican las comparaciones con los valores exactos de error. Seguidamente se muestran una serie de ejemplos en los que se representa el índice de efectividad de la estimación de error para diversas mallas y tipos de elemento (figuras 2.6 a 2.14)⁴⁴.

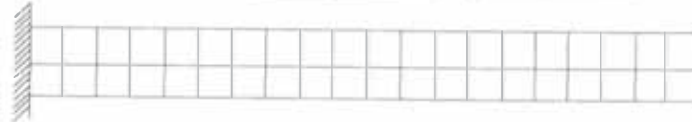
Este índice se define como:

$$\theta = \frac{e_{\text{estimado}}}{e_{\text{exacto}}} \dots \dots \dots (2.15)$$



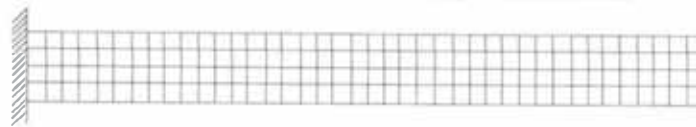
Malla 1, 40 GDL

33.4	29.8	32.8	0.88	0.97
45.1	21.3	23.4	0.85	0.93



Malla 2, 120 GDL

17.9	16.5	18.2	0.92	1.01
13.7	12.1	13.3	0.88	0.97



Malla 3, 400 GDL

η	η°	η^*	θ	θ^*
η_L	η_L°	η_L^*	θ_L	θ_L^*

η % de error real en norma de energía

η° % de error predicho en norma de energía

η^* % de error predicho usando factor de corrección

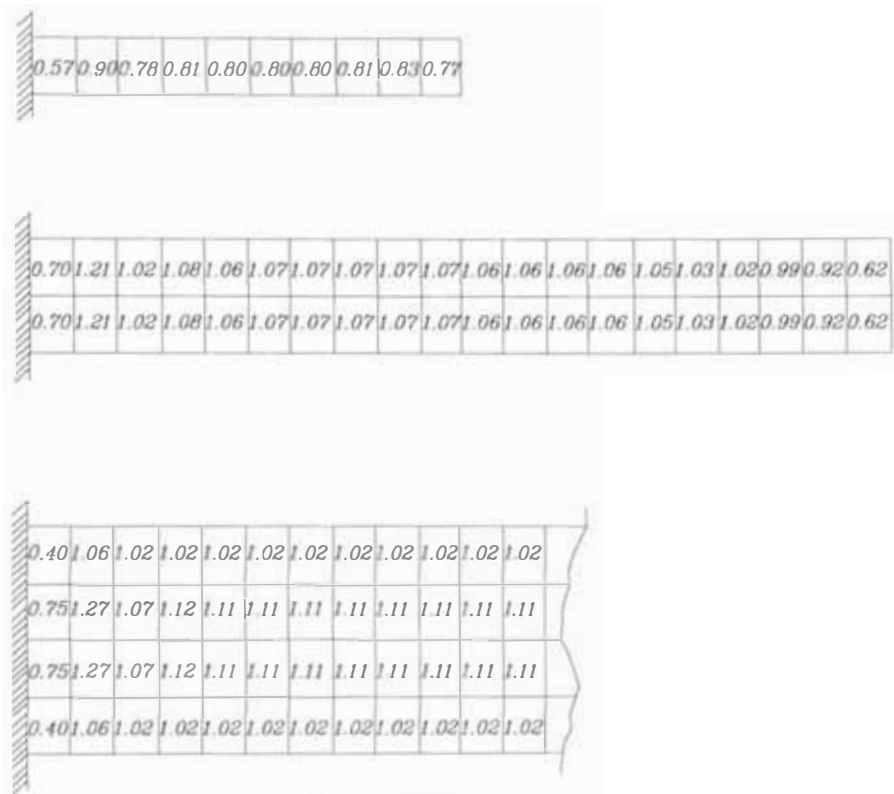
θ % Índice de efectividad

θ^* % Índice de efectividad usando factor de corrección

El sufijo L indica uso de la norma L_2

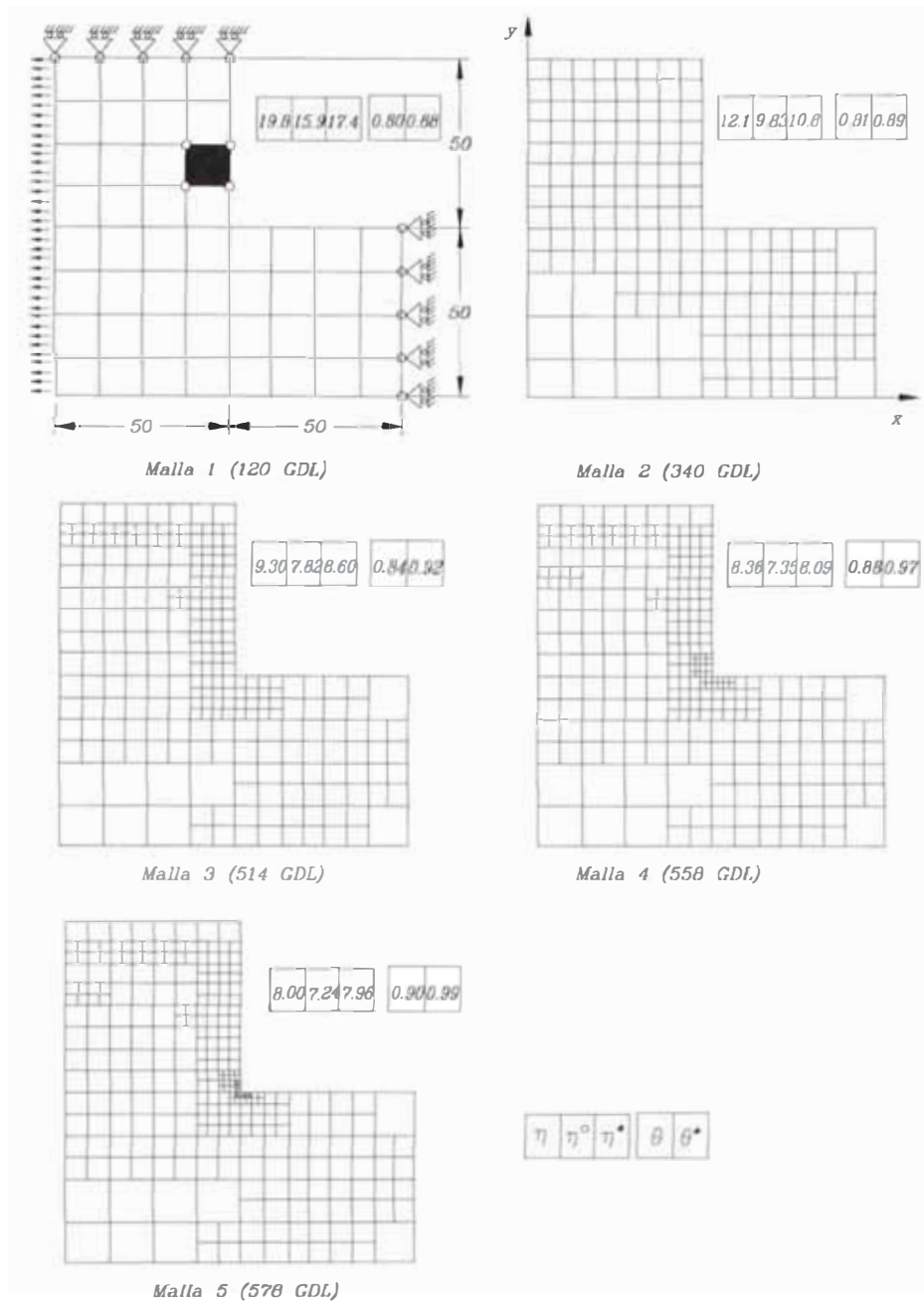
Elementos bilineales. Viga en voladizo, tensión plana, $E=10$, $\nu=0.3$.
Análisis y estimación del error para subdivisión uniforme

Figura 2.6



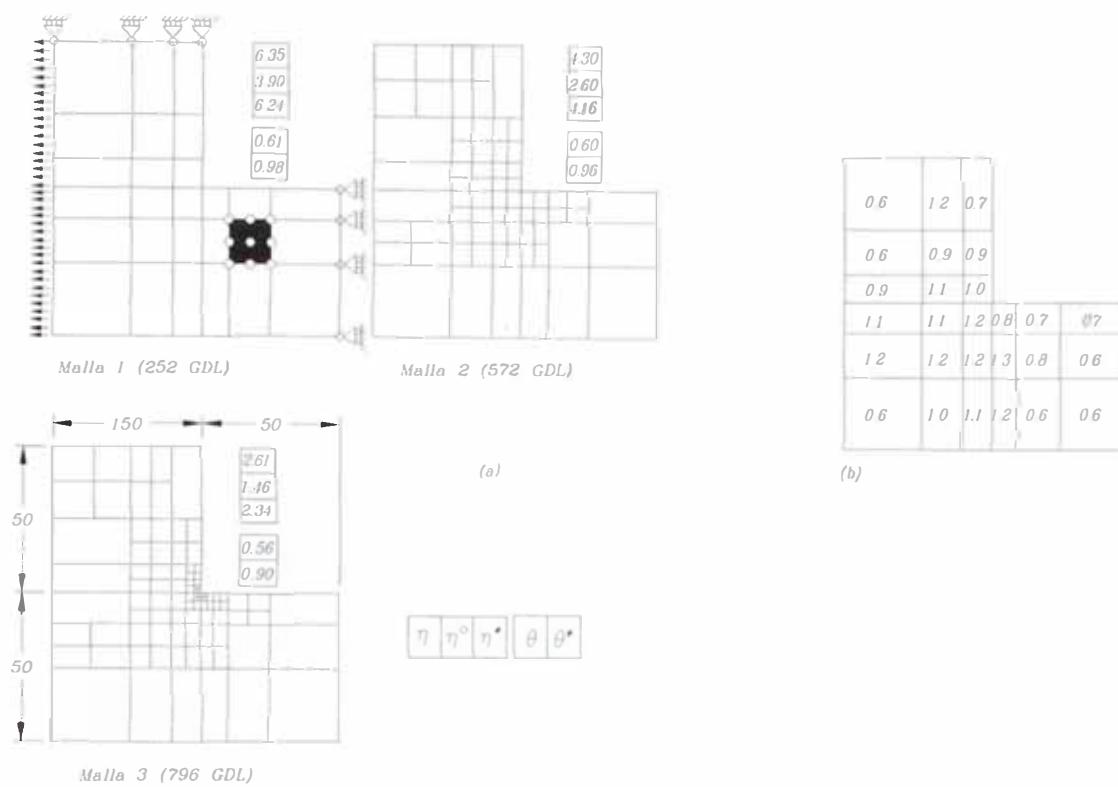
Indices de efectividad local para el problema de la figura 2.6 (mallas 1 a 3) (θ^* norma de energía, en la norma L_2 los resultados son muy similares)

Figura 2.7



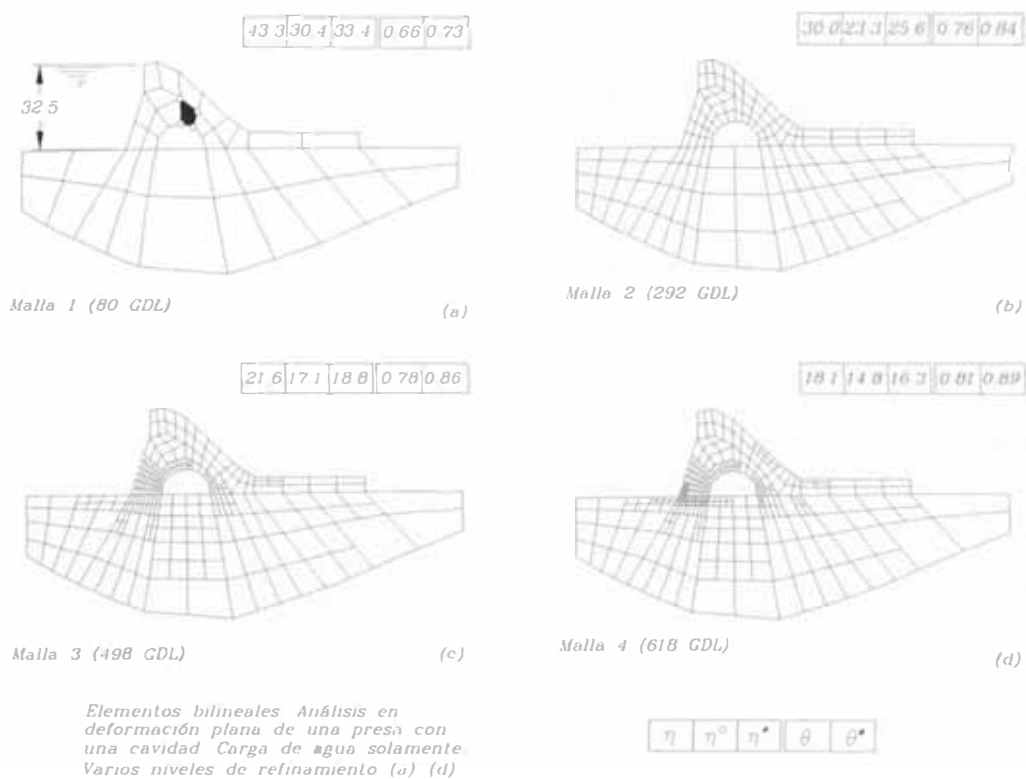
Elementos bilineales Una región en forma de L en tensión plana. Secuencia de refinamiento de malla.

Figura 2.8



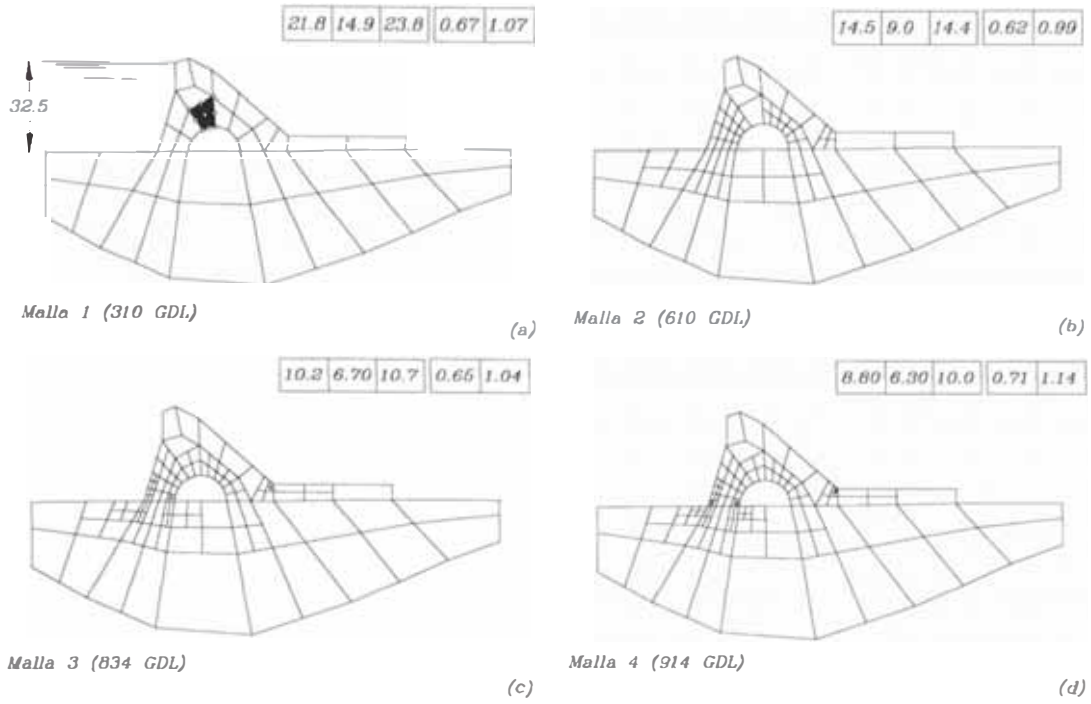
Elementos bicuadráticos (nueve nodos) Región en forma de L en tensión plana (a) Secuencias de refinamiento de malla (b) Índices de efectividad local (malla 1) (η)

Figura 2.9



Elementos bilineales Análisis en deformación plana de una presa con una cavidad Carga de agua solamente. Varios niveles de refinamiento (a) (d)

Figura 2.10



Elemento bicuadrático. Análisis en deformación plana de una presa con una cavidad. Carga de agua solamente. Varios niveles de refinamiento (a)-(d)

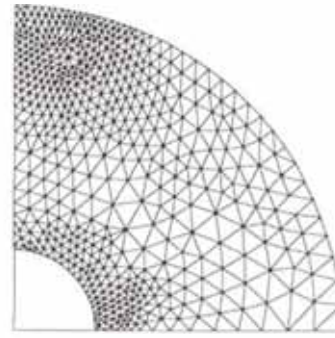
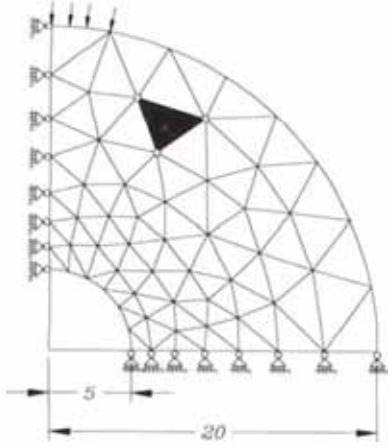
$$\begin{bmatrix} \eta \\ \eta^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta^* \\ \eta^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \theta^\circ \end{bmatrix}$$

Figura 2.11

η	η°	η^*	θ	θ^*
34.2	16.6	21.6	0.46	0.60

η	η°	η^*	θ	θ^*
8.47	6.15	6.00	0.72	0.94

$p=1$



Malla 1 (108 GDL) Malla original

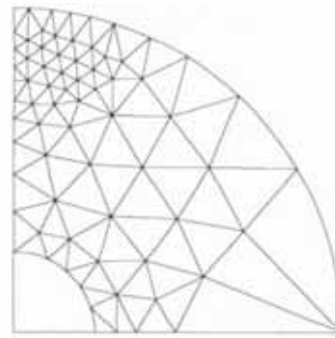
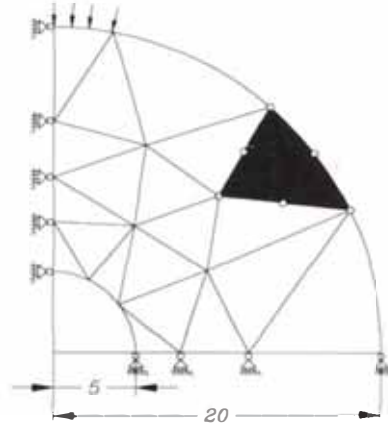
Malla 2 (1201 GDL) Malla predicha

(a)

η	η°	η^*	θ	θ^*
18.3	8.7	12.2	0.47	0.66

η	η°	η^*	θ	θ^*
4.06	4.47	3.46	0.61	0.85

$p=1$



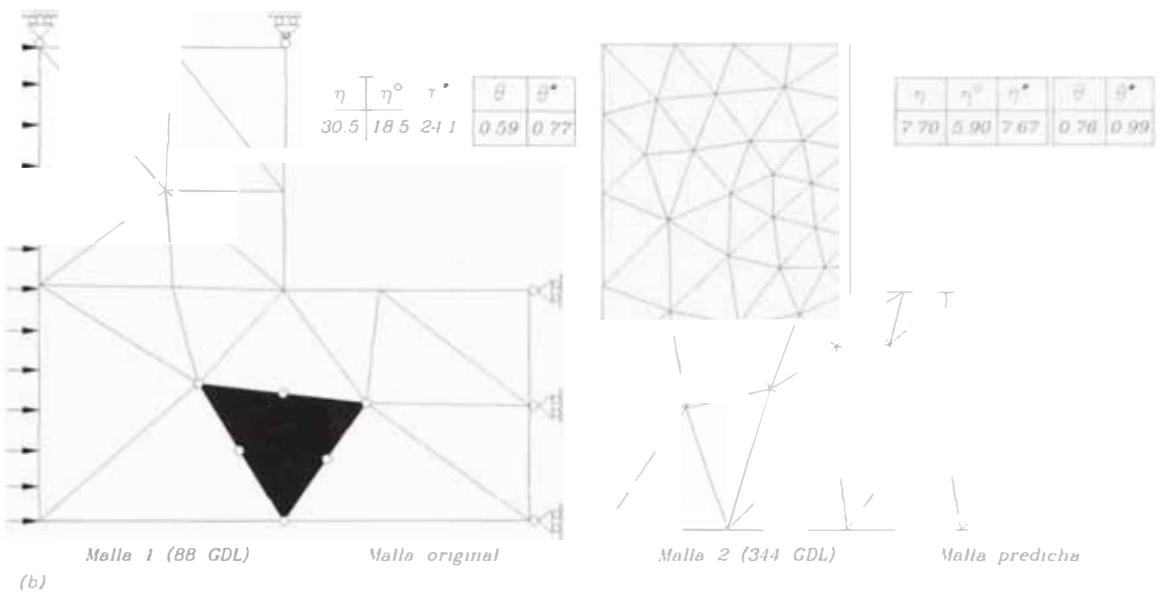
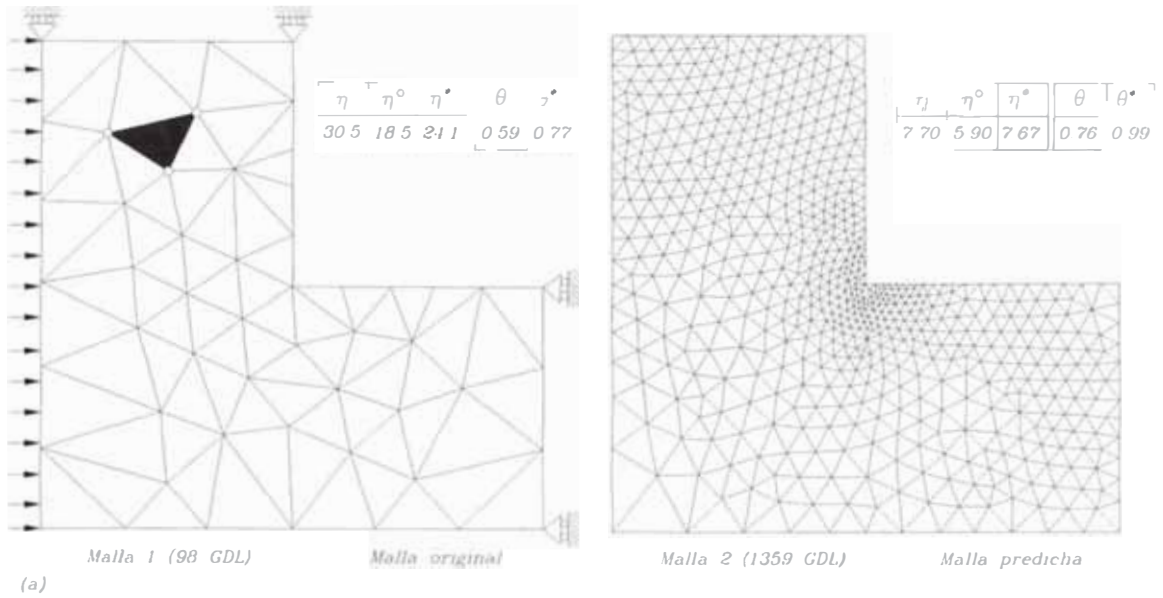
Malla 1 (94 GDL) Malla original

Malla 2 (482 GDL) Malla predicha

(b)

Generación automática de malla para alcanzar el 5 por ciento de precisión: cilindro grueso bajo carga diametral (a) Elementos lineales. (b) Elementos cuadráticos

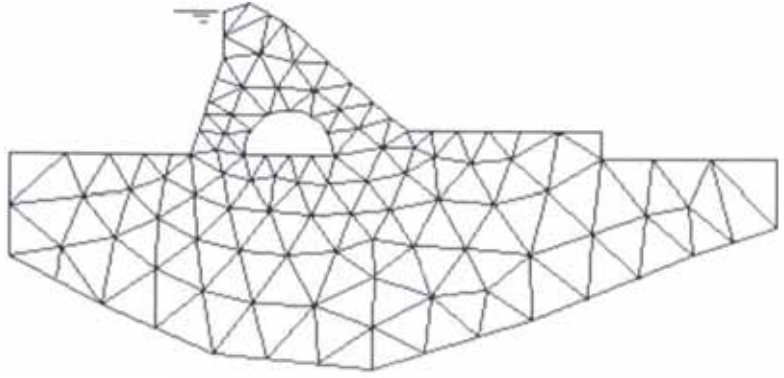
Figura 2.12



Generación automática de malla para conseguir el 5 por ciento de precisión Región en forma de L en tensión plana (a) Triángulo lineal (b) Triángulo cuadrático Con la presencia de refinamiento de la Ec (2.25) se alcanza, en una operación, una precisión del 4.61 por ciento con 358 GDL²⁸

Figura 2.13

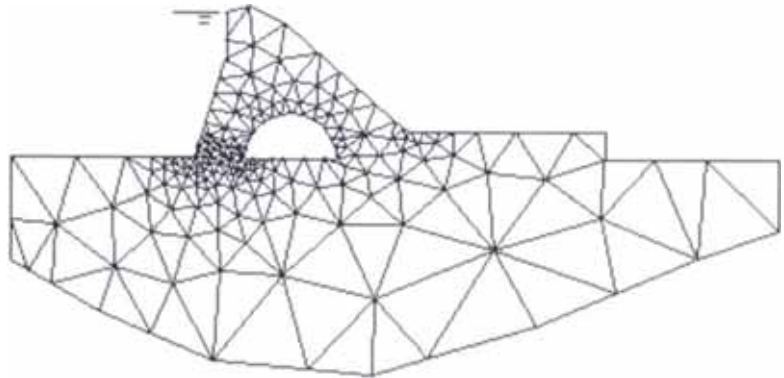
18.6	12.4	17.4	0.78	1.08
------	------	------	------	------



Malla 1 (728 GDL)

(a)

8.73	5.10	7.13	0.78	1.08
------	------	------	------	------



Malla 2 (1764 GDL)

(b)

η	η^0	η^*	θ	θ^*
--------	----------	----------	----------	------------

Triángulo cuadrático. Generación automática de malla para alcanzar el 5 por ciento de precisión. Análisis de deformación plana de una presa con una cavidad bajo carga de agua solamente. (a) Malla original. (b) Malla refinada. Con la estrategia de refinamiento de la Ec. (2.25) se alcanza, en una operación, una precisión del 4.88 por ciento con 1764 GDL.²⁸

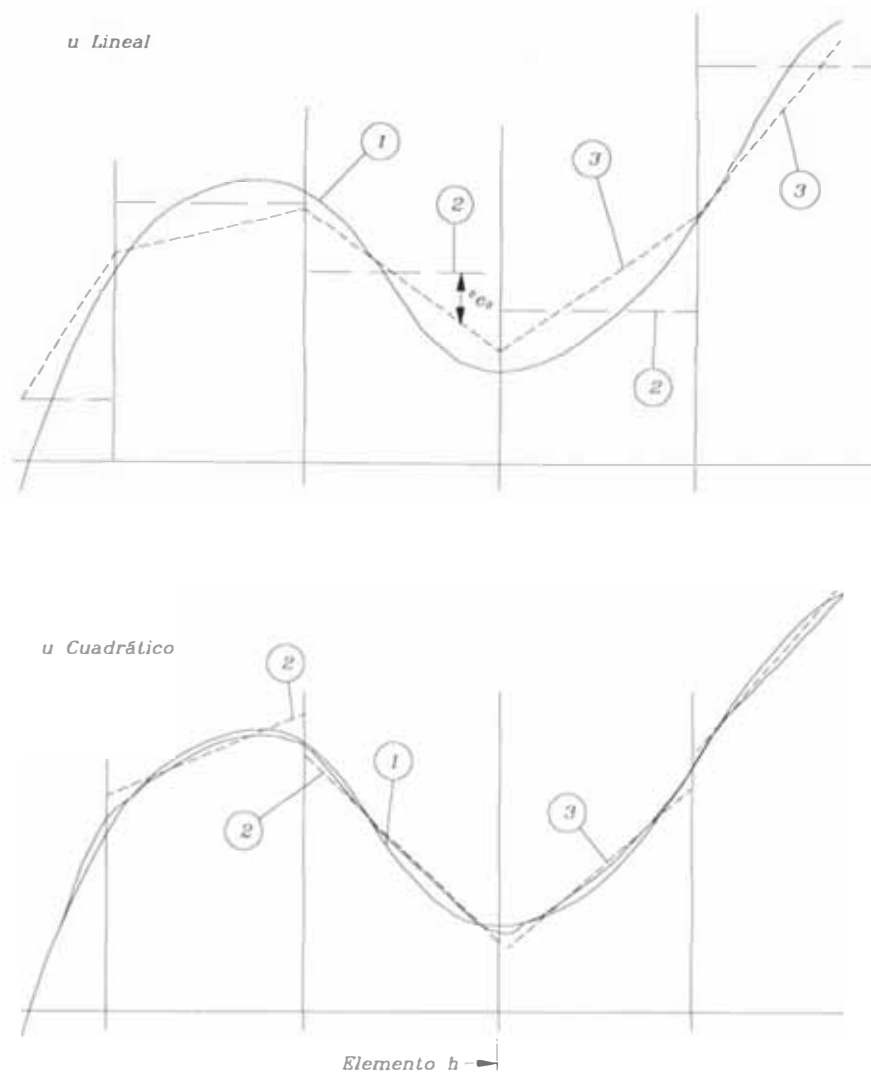
Figura 2.14

Se encuentra empíricamente que este índice (η y, por tanto, la estimación del error) puede mejorarse corrigiendo la estimación directa por un factor constante.

Tipo de elemento	Factor
Cuadrilaterales bilineales	1.1
Triangulares lineales	1.3
Bicuadráticos de nueve nodos	1.6
Triangulares cuadráticos	1.4

De esta manera se obtienen los valores θ^* y η^* que se muestran en las figuras. Sin embargo, incluso sin este recurso empírico los índices de efectividad son buenos.

Aunque resulta intuitivamente “obvio” que las tensiones “alisadas” σ^* son más precisas que las discontinuas y que, por consiguiente, las estimaciones del error basadas en la ecuación (2.14) deberían ser buenas, se necesitaría una prueba más matemática de la corrección de la estimación. En la figura 2.15⁴¹ se muestra una solución para un problema elástico unidimensional con un módulo constante, utilizando elementos cuadráticos y lineales. En este caso los valores de σ son proporcionales a du / dx , y es evidente que el proceso de proyección o alisado es simplemente una aproximación en diferencias de mayor orden de la derivada nodal que la utilizada para calcular σ . Los argumentos son similares en dos y tres dimensiones.



Porqué la proyección da una aproximacion de mayor orden (1) σ
 Solución exacta (2) $\tilde{\sigma}$ solución MEF=aproximación por mínimos
 cuadrados a σ (discontinua) (3) σ^* solución proyectada=aproximación
 por mínimos cuadrados a $\tilde{\sigma}$ (continua de alto orden).

Figura 2.15

El estimador de error presentado anteriormente es uno de los más sencillos de evaluar y de utilizar en la práctica. Su exactitud puede compararse con otros en los que el cálculo conlleva la evaluación de residuos obtenidos mediante la sustitución de la solución aproximada \hat{u} en la ecuación del problema.

$$r = L\hat{u} + p \dots\dots\dots(2.16)$$

Este residuo se evalúa fácilmente dentro de cada elemento, pero en las interfaces entre elementos resulta infinito si, por ejemplo, se tiene una ecuación diferencial de segundo orden y una aproximación continua C_0 . El efecto integrado del residuo cerca de una interfase I cuando $d\Omega \rightarrow 0$ es equivalente a una integral de línea de la discontinuidad en los gradientes de u (o tracciones en un problema elástico) que llamaremos J (salto). Así :

$$\int_{\Omega} r d\Omega \equiv \int_I J dl \dots\dots\dots(2.17)$$

Los estimadores de error que usan la norma de energía obtenidos por varios autores tienen la forma general (con $r^2 \equiv r^T r$, etc.)

$$\|e\|^2 = C_1 \int_{\Omega} r^2 d\Omega + C_2 \int_I J^2 dl \dots\dots\dots(2.18)$$

donde Ω es el dominio total e I la interface total entre elementos.

Para un único elemento, una expresión particular para problemas de dos dimensiones da una contribución elemental de la forma.

$$\|e_i\|^2 = \frac{h^2}{24kp^2} \int_{\Omega^e} r^2 d\Omega + \frac{h}{24kp} \int_{I^e} J^2 dl \dots\dots\dots(2.19)$$

donde k depende del problema (siendo $E / (1-\nu)$ para elasticidad en tensión plana), p es el orden polinómico de las aproximaciones utilizadas, y h el tamaño del elemento.

Se debe indicar que:

- a) El estimador es más complejo de utilizar que el obtenido anteriormente ya que implica una evaluación de integrales de línea de las discontinuidades;
- b) Se puede demostrar que el estimador simple utilizando alisado de tensiones es equivalente al obtenido en el caso de elementos bilineales (cuatro nudos);
- c) Que para elementos de bajo orden la mayor contribución a las integrales (2.19) viene del término que incluye discontinuidades de las fuerzas de superficie entre elementos. Los usuarios de elementos finitos a menudo toman estas discontinuidades como una medida directa de error y existe de hecho una justificación teórica para esto, como se mencionó anteriormente.

2.5 Adaptabilidad.

Los estimadores de error tratados en la sección anterior permiten determinar la norma de energía global del error y los errores a nivel local (a nivel de elemento) también quedan bien representados como muestran las Figuras 2.7 y 2.9. Si estos errores se encuentran dentro de los límites prescritos por el analista, entonces el trabajo puede considerarse terminado. Sin embargo, frecuentemente estos límites se ven superados y es necesario refinar. El tema que se trata en esta sección es cómo llevar a cabo este refinamiento de forma óptima. Naturalmente son posibles muchas estrategias y mucho depende de los objetivos que se quieren alcanzar.

En el caso más simple se intentará, por ejemplo, hacer el porcentaje de error relativo en la norma de energía, η , menor que algún valor especificado $\bar{\eta}$ (por ejemplo, 5 por ciento podría ser apropiado en muchas aplicaciones de ingeniería). Así, debe conseguirse que

$$\eta \leq \bar{\eta}$$

En una “malla óptima” es deseable que la distribución del error en norma de energía (esto es, $\|e\|_i$) sea igual para todos los elementos. Así, si el error permisible total está determinado (suponiendo que viene dado por el resultado de un análisis aproximado) por

$$\bar{\eta} (\hat{u}^2 + e^2)^{1/2} \dots\dots\dots(2.20)$$

se podría exigir una condición en la que el error en cualquier elemento i fuera

$$\|e\|_i < \bar{\eta} \left(\frac{\hat{u}^2 + e^2}{m} \right)^{1/2} \equiv \bar{e}_m \dots\dots\dots(2.21)$$

donde m es el número de elementos implicados.

Los elementos en los que no se cumple lo anterior son claros candidatos para el refinamiento. Así, si se define el coeficiente

$$\frac{\|e\|_i}{\bar{e}_m} = \xi_i \dots\dots\dots(2.22)$$

se refinará allí donde

$$\xi_i > 1$$

El refinamiento podría llevarse a cabo progresivamente refinando solamente un cierto número de elementos en los que ξ_i sea mayor que un cierto límite y cada vez dividir a la mitad el tamaño de tales elementos.

En las figuras 2.8 a 2.11 se muestra este tipo de proceso, conocido como enriquecimiento de malla. Aunque lleva finalmente a una solución satisfactoria obtenida con un número relativamente pequeño de grados totales de libertad, no es en general económico, ya que el número total de soluciones de prueba puede ser excesivo.

Un procedimiento más eficaz es diseñar una malla completamente nueva que cumpla el requisito

$$\xi_i < 1$$

En este caso una posibilidad es recurrir a los criterios de velocidad de convergencia asintótica a nivel de elemento (aunque se ha visto que no son realistas en presencia de singularidades) y predecir la distribución de tamaños de elementos. Por ejemplo, supongamos

$$|e_i| \sim \alpha \cdot h_i^p \dots \dots \dots (2.23)$$

donde h_i es el tamaño del elemento actual y p el orden polinómico de aproximación.

Entonces, el tamaño del elemento no debería ser mayor que

$$h = \xi^{-1/p} h_i \dots \dots \dots (2.24)$$

En la figura 2.5 y las figuras 2.12 a 2.14 se muestra como, empezando por una solución relativamente grosera, una única predicción de malla permite una solución que (casi) satisface el nivel de precisión especificado como deseable.

La razón del éxito de la regeneración de malla basada en el simple supuesto de velocidad de convergencia asintótica (2.23) es que, con refinamiento, la malla tiende a ser “óptima” y la influencia de la singularidad localizada ya no afecta a la convergencia global. (figura 2.5)

Por supuesto los efectos de la singularidad estarán todavía presentes en los elementos adyacentes a la misma, y la subdivisión de malla puede mejorarse si en tales elementos se utiliza la convergencia adecuada, es decir:

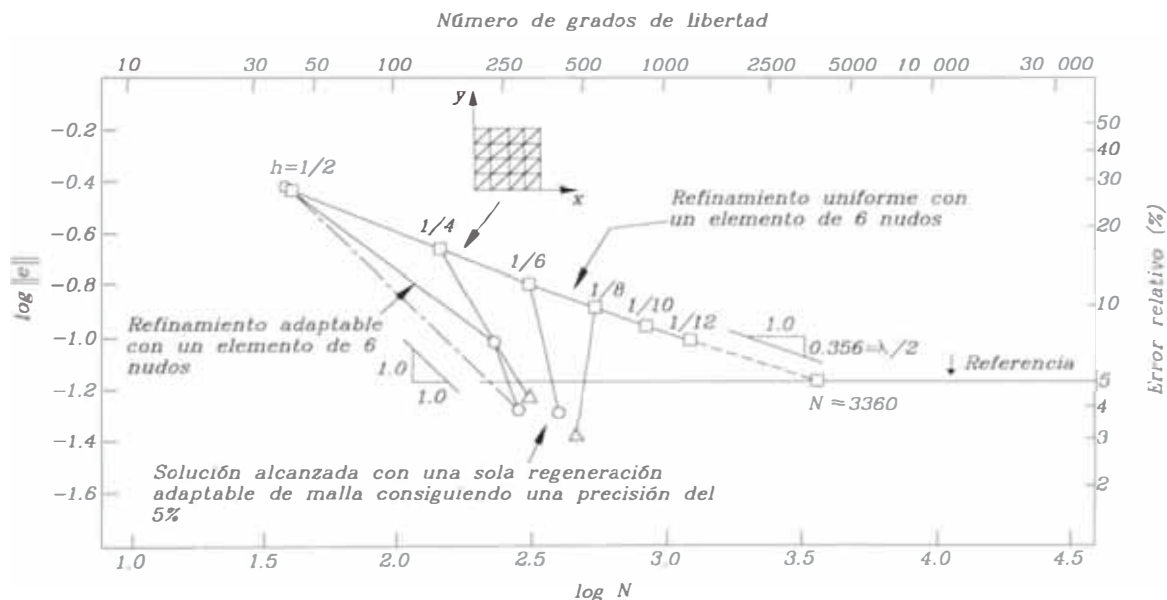
$$h = \xi_i^{-1/\lambda} h_i \dots \dots \dots (2.25)$$

en la que λ es la potencia de la singularidad. Un número conveniente para utilizar en este caso es $\lambda = 0.5$, ya que la mayoría de los parámetros de singularidad están entre 0.5 y 1.0. Con este procedimiento añadido a la estrategia de refinamiento se alcanza mejor precisión que el 5 por ciento en un remallado para los problemas de las figuras 2.13 y 2.14.

En los ejemplos ilustrados hasta ahora se ha mostrado en general un proceso de refinamiento con el número total de grados de libertad aumentando en cada nivel, aunque la malla sea rediseñada. Este no debe ser siempre el caso, ya que una malla fina pero mal estructurada puede tener un error mucho mayor que otra casi óptima. Para ilustrar este punto se muestra en la figura 2.16⁴¹ el refinamiento de un solo nivel diseñado para alcanzar un 5 por ciento de precisión en un paso empezando desde subdivisiones de malla uniforme. El problema aquí es el mismo que el que se muestra en las figuras 2.3 a 2.5 y en el proceso de refinamiento se utilizan los criterios de malla (2.24) y (2.25).

Notese que ahora, en al menos un refinamiento, se produce un descenso de error total con una reducción de grados totales de libertad (empezando para subdivisión uniforme 8x8 con $NGL = 544$ y $\eta = 9.8$ por ciento hasta $NGL = 460$ y $\eta = 3.1$ por ciento).

Ninguna de las estrategias sugeridas es óptima, en el sentido que un refinamiento de malla uniforme no es de ninguna manera necesario si el problema muestra características direccionales, esto es, si la función u puede variar rápidamente a lo largo de alguna coordenada local x' y a una velocidad menor a lo largo de y'). Para tales situaciones podrían introducirse indicadores de corrección que muestren en que dirección es más efectivo el refinamiento.



Influencia de la malla inicial en la velocidad de convergencia en versión tipo h Refinamiento adaptable utilizando elementos triangulares cuadráticos.

Figura 2.16

Idénticas predicciones son aplicables a problemas con múltiples estados de cargas aplicados ($i=1,2,\dots,n$). El tamaño “h” más pequeño será usado para generar la malla final.

$$h_{nueva}^m = \min(h_{nueva(1)}^m, h_{nueva(2)}^m, \dots, h_{nueva(i)}^m, \dots, h_{nueva(n)}^m)$$

Por supuesto, es de esperar que para cada estado de carga individual la malla excederá la exactitud requerida.

Capítulo 3

Generación de Elementos

3.1 Introducción.

Existen diversas alternativas para la generación automática de elementos, muchas de las cuales emplean técnicas de triangulación como las desarrolladas por Delaunay⁸. La limitación de esta técnica es que permitía generar solo elementos triangulares, cuya calidad es inferior a la de los elementos rectangulares. Aunque en la actualidad su uso se ha extendido para la generación de elementos cuadriláteros. Sin embargo, muchos programas comerciales usan técnicas de mapeo paramétrico para generar mallas con elemento cuadriláteros. La limitación de esta técnica de generación de elementos es que no es automática y el dominio debe descomponerse en regiones simples que sean fácilmente mapeables. Debido a que esta técnica es laboriosa se desarrolló alternativamente la técnica de “Pavimentación”.

La técnica de Pavimentación está diseñada para generar automáticamente una malla de elementos cuadriláteros mediante la colocación de filas de elementos hacia el interior de la región, como se muestra en la figura 3.1. Estas filas eventualmente llenan la región interior. Tan pronto comienzan a trasladarse en el interior de la geometría, éstas son cuidadosamente conectadas para formar una malla cuadrilátera válida.

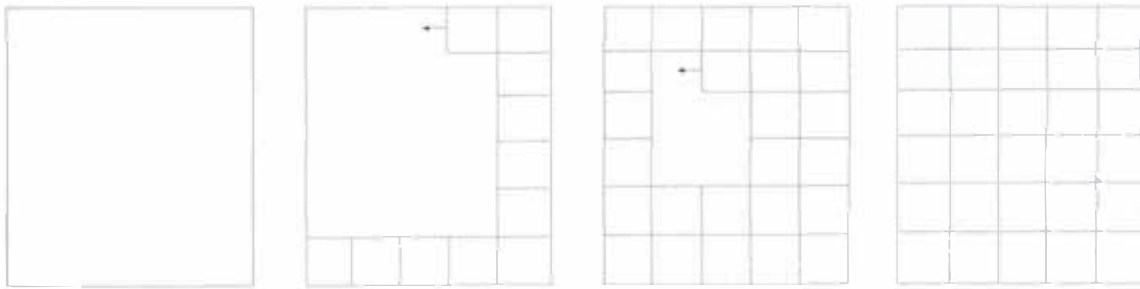


Figura 3.1

3.2 Terminología y datos requeridos.

Para iniciar el proceso de pavimentación se requieren definir las fronteras del dominio a ser pavimentado. Estas fronteras consisten en un lazo exterior cerrado y uno o más lazos interiores cerrados en el caso en que el dominio tenga aberturas interiores.

Estos lazos están formados por segmentos que unen puntos de control, tal como se aprecia en la figura 3.2. Los lazos exteriores tienen sentido antihorario y los interiores sentido horario.

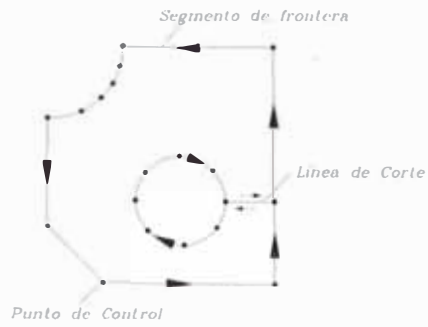


Figura 3.2

El segundo dato requerido es la función de espaciamiento $h=f(x,y)$ (ver figura 3.3). Para lo cual se requiere definir una malla que contenga completamente al dominio. Esta malla es conocida como “Malla de Base” y está formada por elementos triangulares o cuadriláteros. En los nudos de esta malla se asignan los valores que determinan la densidad de la nueva malla a construir (ver figura 3.4).

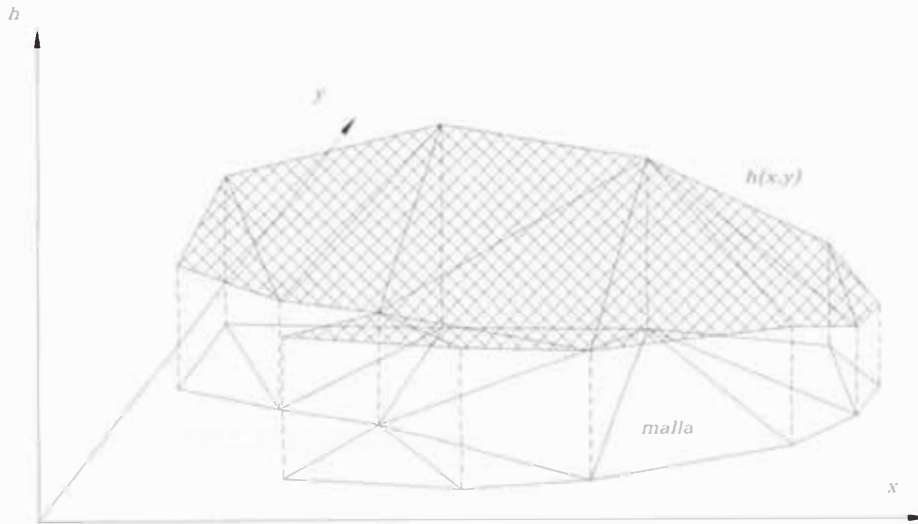


Figura 3.3

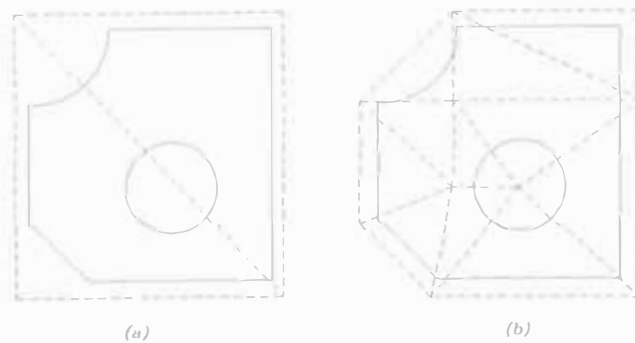


Figura 3.4

3.3 Generación de nudos.

Las fronteras del dominio pueden ser discretizadas como un polígono con un número par de lados.

Suponiendo que la frontera consiste de M segmentos, para un segmento con longitud típica “l_i” (i=1,2,3,...,M), un juego de puntos provisionales uniformemente distribuidos son colocados a lo largo del segmento “i”. La densidad h=f(x,y) asociada a cada punto provisional es determinada interpolando sus valores prescritos en la malla de base. Una función de densidad h=f(s), siendo “s” el parámetro de longitud de arco de la curva, es definida por interpolación lineal de los valores de densidad en los puntos provisionales a lo largo de la longitud de la curva.

Sea N_i el número de lados en el que el segmento de la frontera debe ser dividido para ser consistente con la distribución de la función de densidad h=f(s). N_i se elige como el entero mas cercano a:

$$A_i = \int_b^{l_i} \frac{1}{f(s)} dl \dots \dots \dots (3.1)$$

Donde 1/f(s) puede ser interpretada como una función de densidad nodal a lo largo del segmento de frontera.

La posición de los nudos n_k (k=0,1,2,...,N_i) a ser generados sobre la frontera se define por s_k y es determinada por la ecuación:

$$k = \frac{N_i}{A_i} \int_b^{s_k} \frac{1}{f(s)} dl \dots \dots \dots (3.2)$$

La generación de los nudos en la frontera será efectuada segmento por segmento, siguiendo el procedimiento anterior. Sin embargo, en el último segmento de la frontera l_M, el número de lados a ser generados, N_M, será elegido como el entero más cercano a A_M ó el entero más cercano a A_M mas 1, tal que

$$I = N_1 + N_2 + N_3 + \dots \dots \dots + N_M \dots \dots \dots (3.3)$$

sea un número entero.

3.4 Generación de elementos.

Los nudos generados en la frontera determinan dos nuevas clases de frontera: una frontera permanente exterior y una frontera permanente interior (ver figura 3.5).

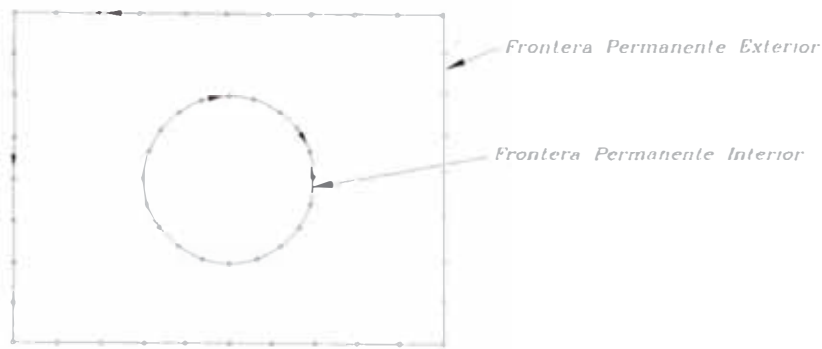


Figura 3.5

Durante el proceso de generación de la malla, la técnica de pavimentación opera siempre sobre fronteras de nudos conectados llamadas “Fronteras de Pavimentación”.

Las fronteras de pavimentación son transitorias por naturaleza y cambian mientras la malla es generada (ver figura 3.6). Inicialmente cada frontera de pavimentación es idéntica a la frontera permanente. Los elementos agregados a la malla eventualmente separan la frontera de pavimentación de su respectiva frontera permanente.

Así como las fronteras permanentes, las fronteras de pavimentación son categorizadas como exterior o interior. Una frontera de pavimentación exterior es pavimentada en sentido antihorario y progresa hacia el interior desde la frontera exterior. Inicialmente hay solo una frontera de pavimentación exterior en una región; durante la pavimentación se pueden formar algunas más. Del mismo modo, una frontera de pavimentación interior es pavimentada en sentido horario y progresa hacia fuera desde el interior de la frontera permanente.

Los nudos en la malla son también categorizados como se muestra en la figura 3.6. Un Nudo de Pavimentación es definido como cualquier nudo sobre una frontera de pavimentación. Un Nudo Fijo es definido como cualquier nudo sobre la frontera permanente. Un Nudo Flotante es definido como cualquier nudo que no está sobre una frontera permanente. Así, una frontera de pavimentación puede consistir de nudos fijos, nudos flotantes, o una combinación de ambos. Cada nudo de la frontera de pavimentación tiene un ángulo interior, el cual es el ángulo entre una línea que conecta el nudo al nudo precedente y una línea del nudo al nudo siguiente de la frontera de pavimentación (ver figura 3.6).

Cada frontera de pavimentación debe contener un número par de nudos. Esta es una condición necesaria cuando se generan mallas de elementos cuadriláteros.

El tamaño de los elementos en la malla es determinado por la función $h=f(x,y)$.

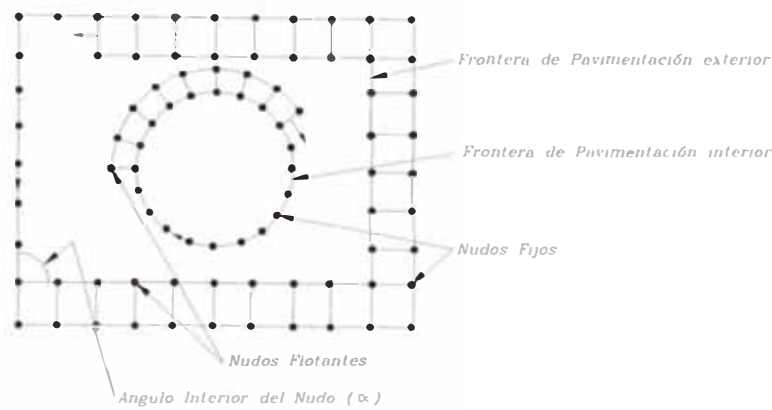


Figura 3.6

3.4.1 Descripción de los pasos del proceso de pavimentación.

Elección de Fila. Se determinan los nudos inicial y final de la siguiente secuencia o fila de elementos a ser agregada.

Verificación de Cierre. Se efectúa una verificación para asegurarse que no más de seis nudos quedan en la frontera de pavimentación.

Generación de Fila. La siguiente fila de elementos identificada en el proceso de Elección de Fila es agregada incrementalmente en la frontera.

Suavización. Los nudos flotantes son ajustados para mejorar la calidad de la malla y la suavidad de la frontera.

Costura. Los ángulos interiores pequeños en la frontera de pavimentación son cosidos ó cerrados por la conexión de elementos opuestos.

Ajuste de Fila. La nueva fila es ajustada por la formación de cuñas dentro de la fila. Esto permite corregir elementos que tienden a ser muy pequeños o muy grandes.

Intersección. Se revisa si existen intersecciones en la frontera de pavimentación consigo misma o con otras fronteras de pavimentación. Las intersecciones son conectadas y forman nuevas y a menudo separadas fronteras de pavimentación.

Limpieza. La malla completa es ajustada siendo eliminados y/o añadidos elementos para mejorar la calidad completa de la malla.

3.4.2 Secuencia de control.

El proceso de pavimentación es un método iterativo. El control de cada uno de los pasos es crítico para la formación de una malla de alta calidad. La secuencia de control usada para la pavimentación es la siguiente:

repetir

efectuar ELECCIÓN DE FILA

repetir

AGREGAR porción de FILA

SUAVIZAR porción de fila

COSER frontera

si INTERSECCION ocurre entonces

Conectar traslapes

COSER frontera

fin de si

hasta que una fila completa sea agregada

efectuar AJUSTE DE FILA

si INTERSECCION ocurre entonces

Conectar traslapes

COSER frontera

fin de si

hasta que VERIFICACIÓN DE CIERRE sea positivo

LIMPIEZA DE MALLA

3.4.3 Elección de Fila.

La primera etapa en la técnica de Pavimentación es determinar la localización de la siguiente fila de elementos. Es indispensable que los elementos sean colocados por filas y esas filas deben ser elegidas cuidadosamente de modo que se procure mantener el contorno de la frontera, minimizar el número de nudos irregulares y controlar la colocación de nudos irregulares. Una fila es definida por apropiados nudos de pavimentación inicial y final. Esto considera primero, una clasificación de los nudos de pavimentación sobre la frontera de pavimentación. Segundo, una cuidadosa observación de la frontera de pavimentación la cual puede formar figuras simples (rectángulos, triángulos, círculos ó semicírculos) que se pueden clasificar como regiones primitivas y tercero, la inserción consecutiva de la nueva fila.

3.4.3.1 Clasificación de Nudos.

Para empezar el proceso de Elección de Fila, a cada nudo de pavimentación ubicado en la actual frontera de pavimentación se le asigna primeramente un estado de ángulo y

posteriormente una clasificación de nudo. El estado del ángulo es una categorización que está basada solamente en el tamaño del ángulo interior del nudo, α (ver figura 3.6), y la asignación de las tolerancias angulares, $\sigma_1, \dots, \sigma_6$. Las tolerancias angulares representan una desviación permitida de un valor angular esperado. Las categorías del estado angular son:

- Fila final ($\alpha < \pi/2 + \sigma_1$). Un nudo de fila final es un nudo en el cual la fila termina. Solo un nuevo elemento será insertado en un nudo de fila final, como se muestra en la figura 3.7.
- Fila Ambigua final/lado ($\pi/2 + \sigma_1 < \alpha < \pi - \sigma_2$). Un nudo de fila ambigua final/lado puede funcionar como una fila final ó como fila de lado.
- Fila de lado ($\pi - \sigma_2 < \alpha < \pi - \sigma_3$). Un nudo de fila de lado es un nudo a lo largo del cual la fila continua normalmente. Dos nuevos elementos son unidos a cada nudo de fila de lado, como se muestra en la figura 3.7.
- Fila ambigua lado/esquina ($\pi + \sigma_3 < \alpha < 3\pi/2 - \sigma_4$). Un nudo ambiguo de fila de lado/esquina puede funcionar como un nudo de fila de lado o como un nudo de fila de esquina.
- Fila de esquina ($3\pi/2 - \sigma_4 < \alpha < 3\pi/2 + \sigma_5$). Un nudo de fila de esquina es un nudo en el cual la fila voltea una esquina lógica. Tres nuevos elementos son unidos a cada nudo de fila de esquina, como el mostrado en la figura 3.7.
- Fila ambigua esquina/reversa ($3\pi/2 + \sigma_5 < \alpha \leq 2\pi - \sigma_6$). Un nudo ambiguo de fila de esquina/reversa puede funcionar como un nudo de fila de esquina o un nudo de fila en reversa.
- Fila en reversa ($\alpha > 2\pi - \sigma_6$). Un nudo de fila en reversa es un nudo en el cual la fila gira dos esquinas lógicas secuenciales, o reversa su dirección. Cuatro nuevos elementos son unidos a cada nudo de fila en reversa, como se muestra en la figura 3.7.

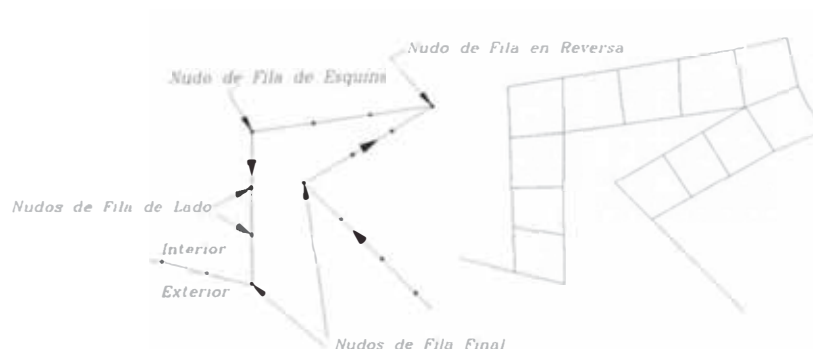


Figura 3.7

Estas clasificaciones son resumidas en la figura 3.8. Todos los nudos son eventualmente clasificados como nudo de fila final, de lado, equina, o reversa. Como se puede apreciar en la figura 3.8, la oportunidad de que un nudo de pavimentación se localice dentro de esta categoría ambigua de estado de ángulo es muy alta. Estas ambigüedades son resueltas buscando figuras simples o primitivas, o evitando la generación de nudos irregulares.

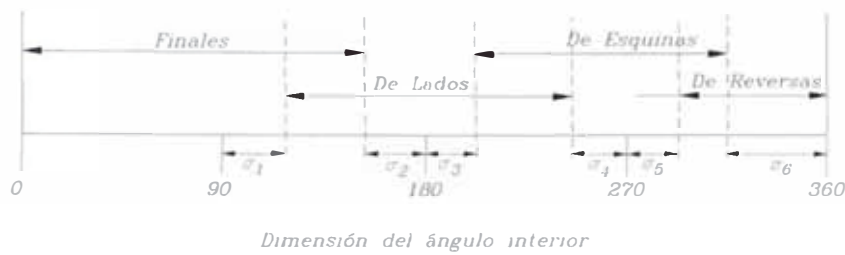


Figura 3.8

La mayoría de fronteras de pavimentación contienen dos nudos de fila final donde la siguiente fila puede empezar y terminar. Sin embargo, hay tres casos especiales de fronteras de pavimentación que no contienen dos nudos de fila final y deben ser manejados de modo diferente, tal como se muestra en la figura 3.9. Los elementos mostrados en la figura 3.9 muestran como la primera fila podría ser insertada en estos casos de geometría especial.

- Caso 1 es una frontera de pavimentación con solamente nudos de fila de lado (ejemplo un círculo). En este caso el nudo con el ángulo más pequeño es elegido como el nudo inicial y final en la nueva fila a ser generada.
- Caso 2 es una frontera de pavimentación con solo un nudo de fila final y cualquier cantidad de nudos de fila de lado, esquina, o reversa (ejemplo forma de corazón). En este caso el nudo de fila final se convierte en el inicio y final para la nueva fila.
- Caso 3 es una frontera de pavimentación sin nudos de fila final pero con algunos nudos de fila de esquina y/o reversa (ejemplo una forma de club). En este caso el nudo de fila de esquina ó fila reversa con el ángulo interior más pequeño es elegido como nudo inicial y final.



Figura 3.9

3.4.3.2 Clasificación de figuras Primitivas.

El segundo factor considerado para la determinación de la siguiente fila a pavimentar es la formación de figuras simples ó primitivas. La determinación de formas primitivas conlleva a tener una mayor perspectiva global de la frontera de pavimentación actual. Si formas primitivas son identificadas desde esta perspectiva global, la colocación de nuevas filas puede ser ajustada tan así para completar la pavimentación de la forma primitiva con un mínimo de nudos irregulares. Las formas primitivas actualmente usadas en pavimentación son el rectángulo, el triángulo y el semicírculo. La búsqueda de formas primitivas está basada en posibles combinaciones de todos los nudos de fila final y fila de lado en la frontera de pavimentación. Desde que una forma primitiva, por definición, no contiene ningún nudo de fila de esquina ó reversa, las fronteras que contienen nudos de fila de esquina ó reversa no son evaluadas como formas primitivas.

La clasificación de formas primitivas empieza con una búsqueda combinatoria de todas las posibles interpretaciones de nudos de fila final y fila de lado. Todos los nudos que han sido categorizados como nudos ambiguos de fila final/lado son evaluados como final ó lado para cada una de las posibles interpretaciones. Para preservar la posibilidad de una forma primitiva, cualquier nudo ambiguo de fila de lado/esquina es siempre interpretado como lado. Sin embargo es posible que una región dada puede tener un alto número de interpretaciones; en la práctica el número máximo es alrededor de 10 y el promedio es 1 ó 2. Cada combinación de las interpretaciones de frontera es evaluada por calidad y validación. La calidad está basada en la formación de nudos irregulares a lo largo de la frontera existente, la desviación del ángulo desde un nudo final ó lado perfecto y el número de nudos irregulares a ser esperados dentro del interior de la forma primitiva resultante conforme se vaya enmallando. La validación depende en los requerimientos de cada primitiva³³. La interpretación de una forma primitiva que sea válida y que tenga la más alta calidad es considerada como la mejor interpretación.

Por ejemplo, la frontera de pavimentación mostrada en la figura 3.10(a) contiene dos nudos de fila final, nudos 1 y 3, dos nudos ambiguos de fila final/lado, nudos 2 y 4 y el resto de nudos son de lado. Con este juego de nudos, hay cuatro posibles interpretaciones:

1. Nudos 2 y 4 pueden ser ambos clasificados como nudos de fila de lado. En este caso un válido semicírculo primitivo (dos nudos final) podría formarse. Su calidad podría ser afectada por el hecho que los ángulos interiores de los nudos de lado 2 y 4 son significativamente menores que π , el hecho que el nudo 4 podría convertirse

en nudo irregular, y el hecho que un semicírculo forme dos nudos adicionales irregulares, como se muestra en la figura 3.10(b).

2. Nudo 2 puede ser clasificado como nudo de fila final, y nudo 4 como nudo de lado. En este caso se forma un triángulo primitivo inválido (tres nudos final).
3. Nudo 2 puede ser clasificado como nudo de fila de lado, y nudo 4 como nudo de fila final. Nuevamente es formado un triángulo primitivo inválido (3 nudos final).
4. Nudos 2 y 4 pueden ser ambos clasificados como nudos de fila final. En este caso puede ser formado un rectángulo primitivo válido (4 nudos final). Su calidad podría ser afectada por el hecho que los ángulos interiores de los nudos final 2 y 4 son significativamente mayores que $\pi/2$ y el hecho que el nudo 2 podría ser un nudo irregular. Sin embargo, el rectángulo no forma ningún nudo adicional irregular, tal como se muestra en la figura 3.10(c), y en este caso podría ser la mejor interpretación.

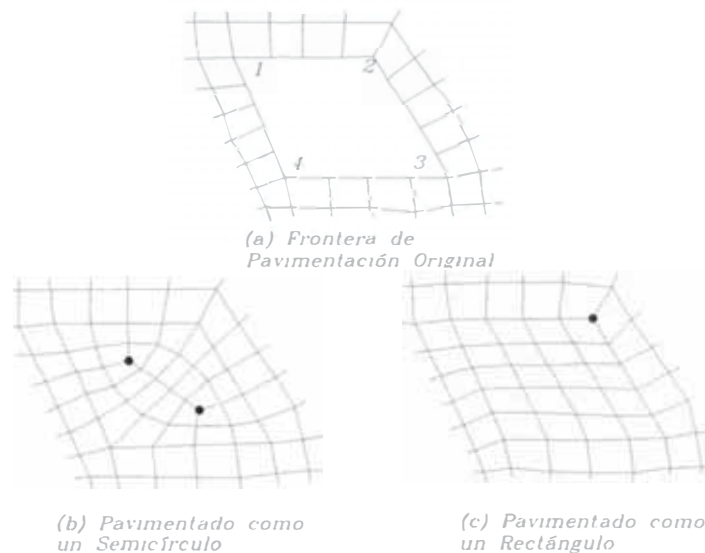


Figura 3.10

Si una aceptable evaluación de forma primitiva existe, esa evaluación es usada en determinar la colocación de la siguiente fila. La clasificación de los nudos se procura mantener en las sucesivas filas de tal forma de no invalidar la forma primitiva mientras se mantiene el orden secuencial.

Esta técnica de evaluación es solo una limitada visión global de la frontera desde que no contiene información de toda la forma completa, la posición y orientación de varias fronteras con respecto a otras, la proximidad de posibles traslapes, etc. Debido a las limitaciones en esta simple técnica de evaluación, las formas de las fronteras son a menudo mal interpretadas. Sin embargo, desde que el mecanismo de interpretación es repetido cada que se completa una fila, las evaluaciones son auto corregidas.

Por ejemplo, la frontera de pavimentación de la figura 3.11(a) es inicialmente mal interpretada como un rectángulo. Al agregar la primera fila de elementos crea una frontera de pavimentación que se auto intersecta y que es posteriormente corregida, como se muestra en la figura 3.11(b). Las dos fronteras de pavimentación exteriores formadas son luego correctamente interpretadas como triángulos primitivos. Estas fronteras de pavimentación son completadas obteniendo solo un nudo irregular, como se muestra en la malla completa de la figura 3.11(c). Como se muestra con este ejemplo, interpretaciones incorrectas de formas complejas como primitivas no afectan adversamente la generación de filas de elementos. De otro lado, correctas interpretaciones de formas simples a menudo minimizan el número de nudos irregulares.

Cuando no existe una aceptable evaluación de forma primitiva, todos los nudos ambiguos son clasificados basados en el tamaño del ángulo y la posibilidad de generar un nudo irregular. Por ejemplo, si clasificamos un nudo ambiguo lado/esquina como un nudo lado podría formar un nudo irregular, mientras que si lo clasificamos como un nudo esquina no. A la clasificación de nudo esquina se le permite una mayor tolerancia angular.

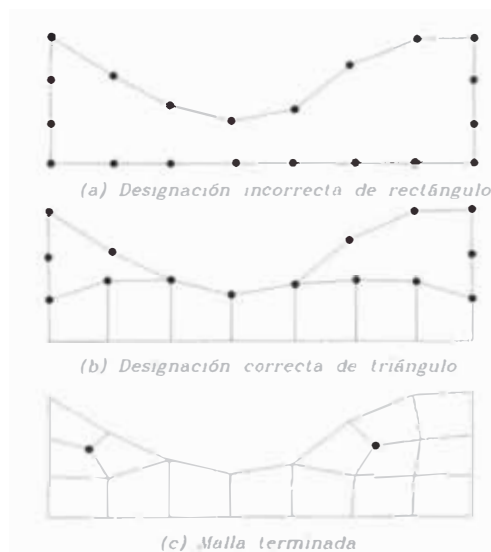


Figura 3.11

3.4.3.3 Ordenamiento consecutivo de filas.

El asunto final en la selección de la fila es que la frontera de pavimentación puede propagarse sucesivamente hacia adentro y lejos de todas su fronteras permanentes. Esto se cumple debido a la preferencia de nuevas filas que son secuenciales a la última fila instalada en la frontera de pavimentación. Las filas son inicialmente instaladas alrededor de fronteras de pavimentación exterior de manera secuencial y en sentido antihorario. Luego de completar el recorrido de la frontera de pavimentación exterior, cada frontera de pavimentación interior es pavimentada de manera secuencial con un recorrido completo en

sentido horario. Sin embargo las filas pueden no formar verdaderos anillos dentro de la frontera, el ordenamiento secuencial en la colocación de filas generalmente fuerza a las fronteras a unirse hacia el interior de la región. Esto tiende a colocar nudos irregulares en los interiores de la geometría lejos de los elementos de frontera más críticos.

3.4.4 Verificación de Cierre.

Antes de agregar una nueva fila de elementos a la malla, se verifica si la frontera de pavimentación contiene seis ó menos nudos. Si la frontera contiene cero nudos, la pavimentación ha sido completada. Si la frontera contiene dos nudos, la pavimentación puede ser completada con una simple Costura. Si la frontera contiene cuatro nudos, un elemento cuadrilátero adicional es agregado para cerrar la frontera. El cierre para fronteras conteniendo seis nudos está basado en la configuración de esos nudos y pueden cerrarse para formar dos, tres o cuatro nuevos elementos, como se muestra en la figura 3.12. Los números encima de cada caso en la figura indican cuantos bordes del elemento están sobre cada lado de la figura (ejemplo, en un triángulo 3-2-1, el primer lado del triángulo está formado de la combinación de tres lados del elemento, el segundo de dos lados elementos, y el tercero de un lado del elemento). Algunos de los elementos mostrados en la figura 3.12 son elementos cuadriláteros pobres. Sin embargo, debido a que los cierres usualmente se forman en el centro de la malla, los procedimientos Suavizar y Limpieza casi siempre mejoran ó eliminan los elementos problemáticos.

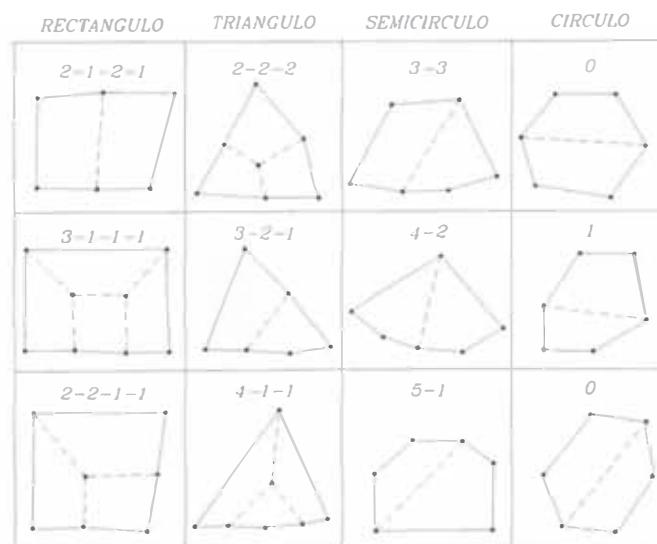


Figura 3.12

3.4.5 Generación de Filas.

Una vez que los límites de la nueva fila han sido elegidos, la generación puede comenzar. La generación de filas se efectúa por la proyección de nuevos nudos en un

apropiado ángulo y distancia de cada nudo de la frontera. Esta proyección está basada en la clasificación del nudo y la distancia entre nudos de la frontera inmediatamente precedente y posterior. Los elementos y nudos son siempre generados de manera secuencial a lo largo de la fila. Seguidamente se describen las proyecciones desde nudos de fila de lado, esquina y reversa, así como también un caso especial. Finalmente se discute la finalización de la fila.

3.4.5.1 Proyección desde un nudo de fila de lado.

La proyección desde un nudo de fila de lado se muestra en la figura 3.13. Llamemos al nudo de lado existente como N_i . El nuevo nudo, N_j , es colocado en el extremo de un vector V con origen en N_i . V está orientado de tal forma que biseca el ángulo interior, α , en N_i . Llamemos d_1 la distancia desde N_i a N_{i-1} y d_2 la distancia desde N_i a N_{i+1} . Entonces la longitud del vector V , $|V|$, está dado por

$$|V| = \frac{(d_1 + d_2)/2}{\text{seno}(\alpha/2)} \dots\dots\dots(3.4)$$

El termino seno en la ecuación tiende a suavizar de lo contrario se formarían filas con irregularidades. Un nuevo elemento definido por los nudos N_i , N_{i-1} , N_{j-1} y N_j es agregado a la malla.

Como se puede ver en la figura 3.13, la proyección desde un nudo de fila de lado (N_i) usualmente lo transforma en nudo de fila final. Es decir mueve el nudo de fila final un paso hacia delante.

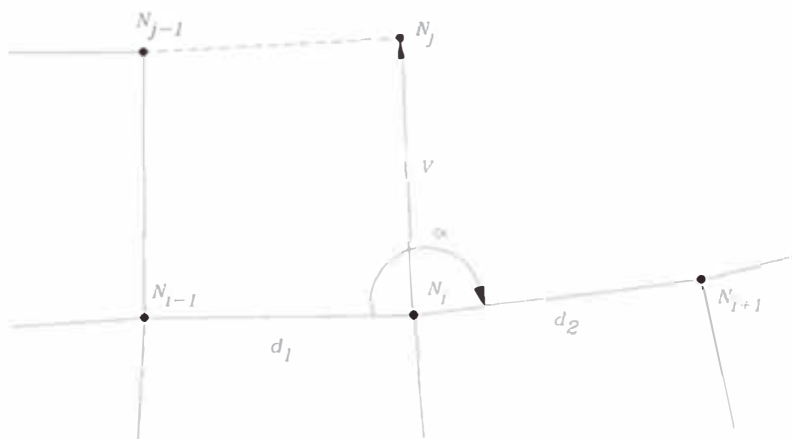


Figura 3.13

3.4.5.2 Proyección desde un nudo de fila de esquina.

La proyección desde un nudo de fila de esquina es mostrada en la figura 3.14. Llamemos al nudo esquina existente otra vez N_i . Tres nuevos nudos, N_j , N_k , y N_l , son colocados en los extremos de los vectores V_j , V_k y V_l respectivamente. Todos los tres vectores originados en N_i , como V_i , V_j y V_l son orientados respectivamente en sentido horario a $1/3$, $1/2$ y $2/3$ del ángulo interior de N_i . Como antes, llamemos d_1 a la distancia desde N_i a N_{i-1} y d_2 la distancia desde N_i a N_{i+1} . Las magnitudes de los vectores están dadas por

$$|V_j| = \frac{(d_1 + d_2)/2}{\text{seno}(\alpha/3)} \dots\dots\dots(3.5)$$

$$|V_k| = \sqrt{2}|V_j| \dots\dots\dots(3.6)$$

$$|V_l| = |V_j| \dots\dots\dots(3.7)$$

Dos nuevos elementos son agregados a la malla: el primero definido por los nudos N_i , N_{i-1} , N_{j-1} y N_j , y el segundo definido por los nudos N_i , N_j , N_k , y N_l .

Luego de que el primer elemento ha sido agregado en la fila de esquina, se efectúan las operaciones de suavización, costura e intersección. Esto es necesario porque en algunos casos coser la porción completa de la fila puede ser apropiado pero puede colocar un nudo interior N_i en la malla que impide con la continuación de la fila. Del mismo modo, puede encontrarse una intersección de una porción de fila, que forma nuevas fronteras y puede colocar un nudo N_l interior en la malla o sobre una reciente frontera formada. Otra vez esto podría atentar la continuación de la fila. En tal situación, las transferencias de control regresan al procedimiento de Elección de fila descrito anteriormente para la determinación de una nueva fila a pavimentar.

Como se puede ver en la figura 3.14, la proyección desde una nudo de fila de esquina (N_i) no solamente propaga el nudo de fila final alrededor de la esquina, sino que introduce otro nuevo nudo de fila de esquina (N_k) dentro de la frontera de pavimentación.

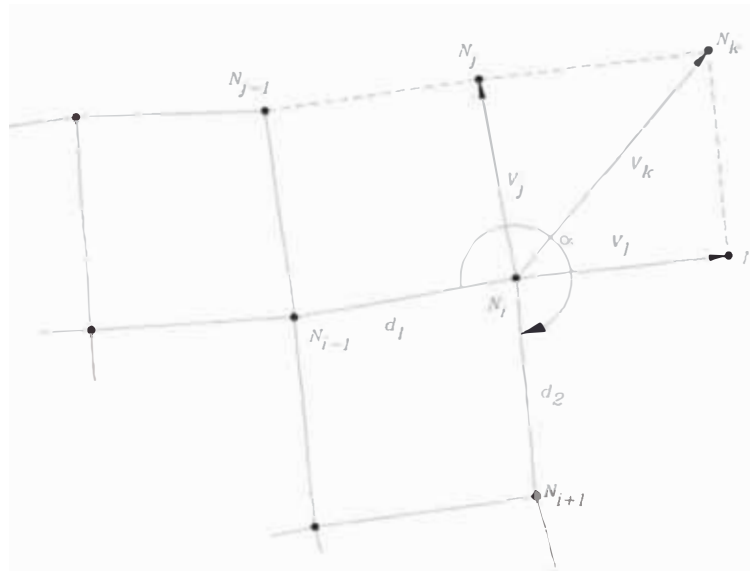


Figura 3.14

3.4.5.3 Proyección desde un nudo de fila reversa.

La proyección desde un nudo de fila reversa es mostrada en la figura 3.15. Llamemos al nudo esquina existente otra vez N_i . Cinco nuevos nudos, N_j , N_k , N_l , N_m y N_n , son colocados en los extremos de los vectores V_j , V_k , V_l , V_m y V_n respectivamente. Todos los cinco vectores originados en N_i son orientados respectivamente en sentido horario a $1/4$, $3/8$, $1/2$, $5/8$ y $3/4$ del ángulo interior de N_i . Como antes, llamemos d_1 a la distancia desde N_i a N_{i-1} y d_2 a la distancia desde N_i hasta N_{i+1} respectivamente. Las magnitudes de los vectores están dadas por:

$$|V_j| = \frac{(d_1 + d_2)/2}{\text{seno}(\alpha/4)} \dots\dots\dots(3.8)$$

$$|V_k| = \sqrt{2}|V_j| \dots\dots\dots(3.9)$$

$$|V_l| = |V_j| \dots\dots\dots(3.10)$$

$$|V_m| = |V_k| \dots\dots\dots(3.11)$$

$$|V_n| = |V_j| \dots\dots\dots(3.12)$$

Tres nuevos elementos son agregados a la malla: el primero definido por los nudos N_i , N_{i-1} , N_{j-1} , y N_j , el segundo definido por los nudos N_i , N_j , N_k y N_l , y el tercer elemento definido por los nudos N_i , N_l , N_m y N_n .

Otra vez, como se mencionó para una proyección de un nudo de fila de esquina, se efectúan los procedimientos suavizar, coser y verificación de intersección luego de agregar el primer elemento y otra vez luego de agregar el segundo elemento. Esto es para asegurar que la continuación de la fila sea productiva.

Como se puede ver en la figura 3.15, una proyección de un nudo de fila reversa usualmente produce dos nuevos nudos de fila de esquina. Esto significa que un nudo de fila reversa puede ocurrir solo sobre una frontera permanente y que la primera fila generada oculta el enorme ángulo interior.

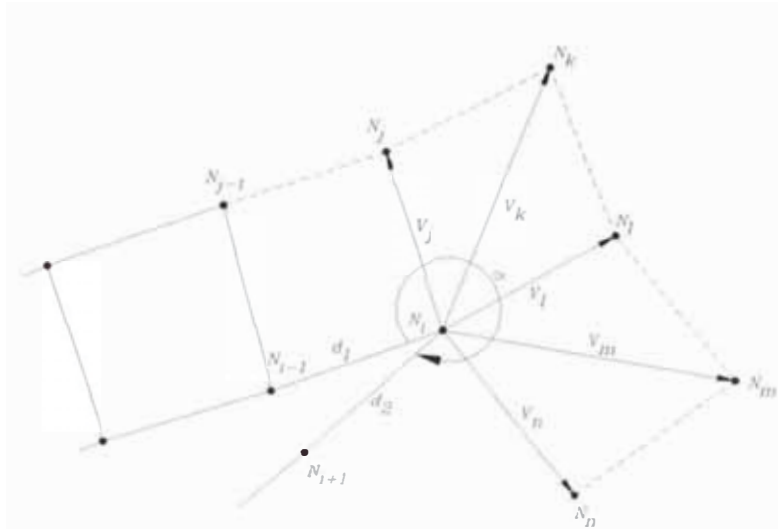


Figura 3.15

3.4.5.4 Proyección cuando con todos los nudos son de fila de lado.

De los casos especiales mencionados, solo uno, el caso de una fila con solamente nudos de fila de lado, requieren un esquema de proyección adicional. La proyección para empezar una fila con solamente nudos de lado es mostrada en la figura 3.16. Llamemos al nudo inicial (y final) por N_i . Dos nuevos nudos, N_j y N_k , son colocados en los extremos de los vectores V_j y V_k respectivamente. V_j originado en N_i y V_k originado en N_{i+1} . V_j es orientado para bisecar el ángulo interior, α , en N_i . V_k es orientado para bisecar el ángulo interior, β , en N_{i+1} . Llamemos d_1 a la distancia desde N_i a N_{i-1} , d_2 a la distancia desde N_i a N_{i+1} , y d_3 a la distancia desde N_{i+1} a N_{i+2} . Las magnitudes de los vectores son dadas por:

$$|V_j| = \frac{(d_1 + d_2)/2}{\text{seno}(\alpha/2)} \dots\dots\dots(3.13)$$

$$|V_k| = \frac{(d_1 + d_3)/2}{\text{seno}(\beta/2)} \dots\dots\dots(3.14)$$

Un nuevo elemento, definido por los nudos N_i , N_j , N_k y N_{i+1} , es agregado a la malla.

Como se puede ver en la figura 3.16, la proyección desde una fila con todos sus nudos de lado genera dos nudos de fila final los cuales sirven para propagar y eventualmente terminar la formación de la fila.

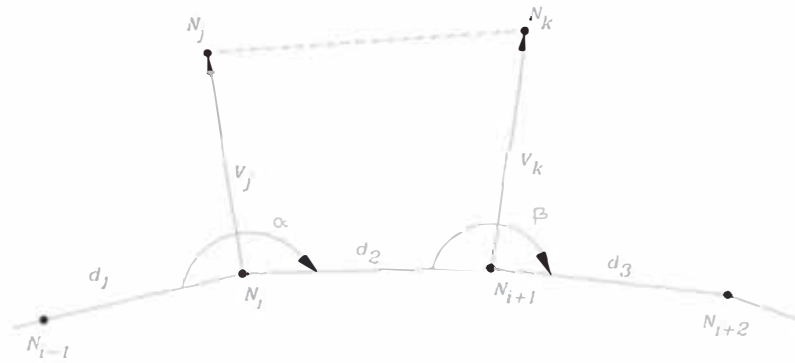


Figura 3.16

3.4.5.5 Terminación de la fila.

Con cada una de las proyecciones descritas anteriormente, los nudos proyectados desde ellos, se convierten, en efecto, en nudos de fila final. Así cuando la fila ha progresado de modo tal que el siguiente nudo, N_i , en la fila es el nudo final predeterminado de la fila, la fila es terminada simplemente cerrando el elemento final de la fila. El proceso de la terminación de la fila es mostrado en la figura 3.17. El elemento final en la fila es definido por los nudos N_{i-1} , N_j , N_{i+1} , y N_i .

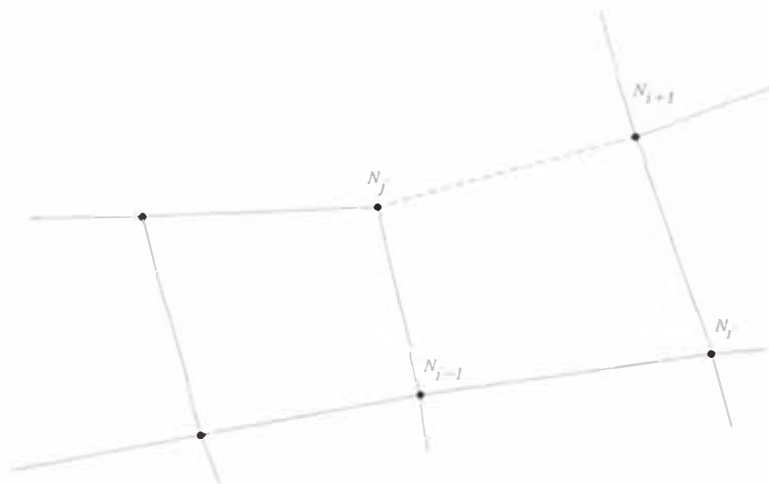


Figura 3.17

3.4.6 Suavización.

Esta es la mayor herramienta usada durante el proceso de pavimentación. Es usada no solo luego de que las filas son agregadas y las intersecciones completadas, como se muestra en la secuencia de control, sino esencialmente luego de cada modificación de la malla. Operaciones locales que envuelven solo unos pocos nudos tal como las proyecciones durante la generación de la fila, costura, intersección, etc., tienden a distorsionar a las mallas vecinas y a las fronteras de pavimentación. El proceso de Suavizar atenta a restaurar y mantener en el elemento su tamaño, perpendicularidad, y suavidad en

toda la frontera de pavimentación y la malla completa; un conjunto de criterios que son a menudo conflictivos.

Los requerimientos para el proceso de pavimentación difieren de otras aplicaciones de generación de malla en que una frontera libre debe ser mantenida mientras la frontera de pavimentación se mueve desde la frontera permanente fija hacia el interior de la región. Así, para el proceso de pavimentación se desarrollan tres pasos secuenciales. Primero, todos los nudos que no están sobre la frontera de pavimentación se consideran fijos y el proceso de suavizar es aplicado a cualquier nudo flotante sobre la frontera de pavimentación. Esto es llamado proceso de suavizar la frontera de pavimentación. Segundo, siguiendo la suavización de la frontera, todos los nudos de la frontera a pavimentar son fijos y todos los nudos flotantes, los cuales no están en la frontera a pavimentar son suavizados. Esto es llamado como proceso de suavizar el interior. Finalmente el proceso de suavizar la frontera es repetido. En esta sección se describirá primero el proceso de suavizar la frontera de pavimentación, seguidamente el proceso de suavizar el interior, y finalmente un mecanismo de localización para reducir el costo del proceso de suavización.

3.4.6.1 Suavización de los nudos de frontera.

Como se menciona antes, el proceso de suavizar la frontera es limitado a nudos sobre la actual frontera de pavimentación que no forman parte de la frontera exterior original. El proceso de suavizar la frontera es un proceso de suavización isoparamétrico modificado. Para empezar el proceso de suavización, se calcula el movimiento del nudo basado en un proceso de suavizado isoparamétrico verdadero. Llamemos V_i al vector desde el origen al nudo N_i . Suponiendo que N_i está unido a n elementos, llamemos V_{mj} , V_{mk} , V_{ml} a los vectores desde el origen a los respectivos nudos N_j , N_k , y N_l del elemento m . Los nudos deben estar ordenados en sentido horario o antihorario alrededor del elemento. Un nuevo vector desde el origen a una nueva localización propuesta del nudo N_i , vector V'_i , está dado por:

$$V'_i = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n V_{mj} + V_{ml} - V_{mk} \dots \dots \dots (3.15)$$

Llamemos al vector Δ_A que define el cambio en la localización del nudo N_i para un proceso de suavizado isoparamétrico verdadero. Este vector es:

$$\Delta_A = V'_i - V_i \dots \dots \dots (3.16)$$

El proceso de suavizado isoparamétrico ajusta los nudos de modo que los elementos son más próximos a ser paralelepípedos. Sin embargo, no necesariamente mantienen el tamaño deseado del elemento o la deseada rectangularidad de un elemento. Esto se hace un problema para nudos de pavimentación que son unidos a dos elementos. Para tales nudos de pavimentación el cambio en la localización del nudo es modificado para reflejar una longitud deseada y una deseada suavidad angular.

Primero se examinará el criterio de longitud deseada. Llamemos al nudo N_j al nudo opuesto al nudo N_i sobre la frontera común entre dos elementos unidos al nudo N_i , como se muestra en la figura 3.18. Nuevamente, llamemos V_i y V_j a los vectores desde el origen a los nudos N_i y N_j respectivamente. Llamemos l_D a la longitud deseada del nudo N_i , el cual es la longitud de la proyección del vector usado para inicialmente generar el nudo. Llamemos l_A longitud del vector V_{ij} desde el nudo N_i a la nueva localización de N'_i determinada del proceso suavizado isoparamétrico (extremo del vector V'_i). Un cambio en la modificación en posición del vector, Δ_B , se define como:

$$\Delta_B = V_j - V_i + (\Delta_A + V_i - V_j) \frac{l_D}{l_A} \dots \dots \dots (3.17)$$

Este ajuste puede ser comprendido como un ajuste de la longitud del vector V_{ij} , sin ajuste de su orientación, como se muestra en la figura 3.18. El ajuste de la longitud ayuda a proteger el tamaño deseado del elemento generado tanto como su razón de aspecto. Sin embargo, la perpendicularidad de las esquinas del elemento no está garantizada.

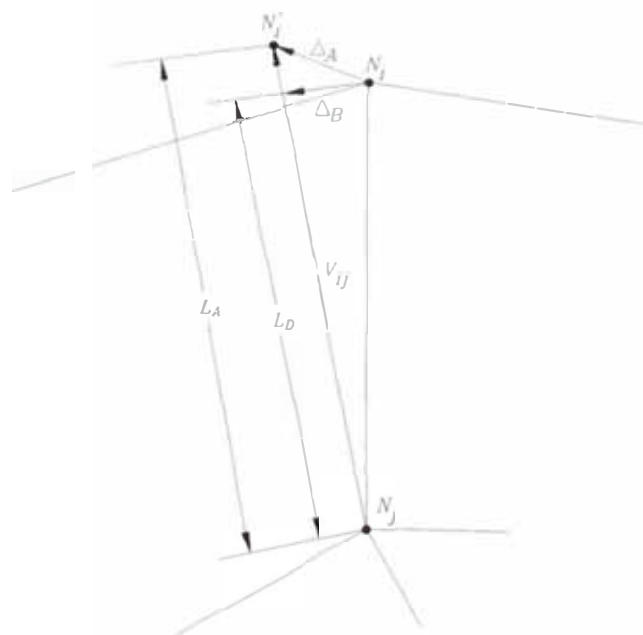


Figura 3.18

El ajuste final durante un suavizado de la fila a pavimentar se refiere a la suavización del ángulo. Llamemos otra vez N_j al nudo opuesto al nudo N_i sobre una frontera común, como se muestra en la figura 3.19. Llamemos N_{i-1} y N_{i+1} al nudo precedente y posterior al nudo N_i respectivamente sobre la frontera. Llamemos P_i , P_{i-1} y P_{i+1} a los vectores desde el nudo N_j a los nudos N_i , N_{i-1} y N_{i+1} respectivamente. Un nuevo vector, P_{B1} , es definido, el cual bisecta el ángulo entre P_{i-1} y P_{i+1} . Llamemos a un vector nuevo, P_{B2} , ahora por encontrarse. Este vector determinará la localización ajustada de N_i . El talón de este vector es colocado en N_j . La dirección de P_{B2} es definida a lo largo del ángulo bisector del ángulo entre P_{B1} y P_i .

Seguidamente la longitud del vector P_{B2} debe ser determinada. Primero, la localización de un nuevo punto, Q , es calculada como la intersección entre P_{B2} extendida, y una línea que conecta los nudos N_{i-1} y N_{i+1} . Llamemos a la longitud desde Q hasta N_j como l_Q y la longitud de proyección original de N_i como l_D . La longitud del vector P_{B2} , $|P_{B2}|$, es luego definida a partir de las longitudes relativas de l_D y l_Q :

$$|P_{B2}| = \frac{l_Q + l_D}{2} \dots \text{si } l_D > l_Q \dots (3.18)$$

$$|P_{B2}| = l_D \dots \text{si } l_D \leq l_Q \dots (3.19)$$

Ahora ha sido definida la nueva localización de N_i basada en un procedimiento de suavización angular. El cambio en la posición del vector para la suavización angular, Δ_C , es así definido como:

$$\Delta_C = P_{B2} - P_i \dots (3.20)$$

Este ajuste en la suavización del ángulo funciona para mantener la perpendicularidad en las esquinas y ayuda a mantener una frontera de pavimentación suavizada.

El cambio final en la localización del vector, Δ_i , para el nudo N_i unido solo a dos elementos de la frontera puede ser definido ahora como

$$\Delta_i = \frac{\Delta_B - \Delta_C}{2} \dots (3.21)$$

Para nudos en la frontera los cuales son unidos a mas o menos de dos elementos, el cambio en la localización está basado solamente en el proceso de suavización isoparamétrica del cambio del vector, Δ_A , como se definió antes. Sin embargo a pesar su complejidad en su

implementación, la suavización de la fila es crítica para la correcta formación de las filas. Esto también converge rápidamente, usualmente en tres o cuatro iteraciones.

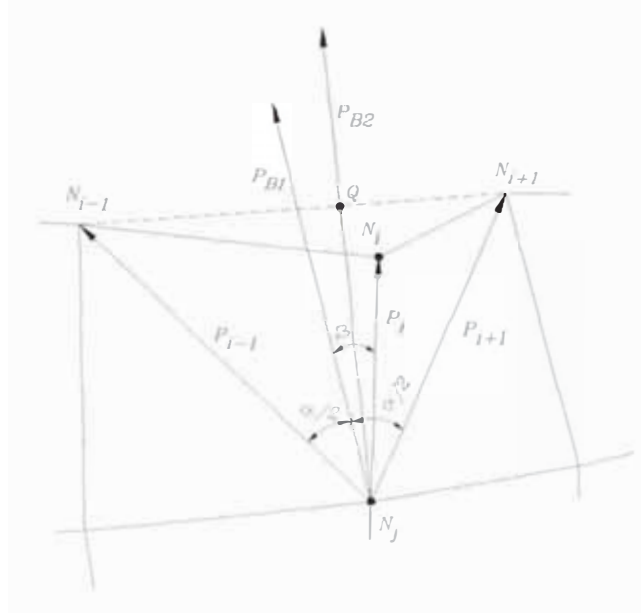


Figura 3.19

3.4.6.2 Suavización de nudos interiores.

Siguiendo el proceso inicial de suavización de la frontera de pavimentación, todos los nudos de la frontera son fijos y el resto de los nudos flotantes son suavizados. Un proceso modificado de suavización laplaciano peso-longitud es usado. Esta técnica usa un juego de vectores desde un nudo interior a todos sus nudos ligados por un borde común. Llamemos vector contribución, C_j , como vector contribución de un nudo ligado, N_j , cuando se suaviza el nudo interior, N_i . Para definir C_j , llamemos V_j al vector desde el nudo N_i al nudo N_j , como se muestra en la figura 3.20. Si el nudo N_j no está en la frontera permanente, entonces el vector contribuyente C_j es equivalente a V_j . Si el nudo N_j está sobre una frontera permanente, entonces C_j se define como:

$$C_j = V_j + \Delta_{C_j} \dots \dots \dots (3.22)$$

Donde el vector Δ_{C_j} es definido usando el criterio de suavización angular definido en la ecuación anterior.

Ahora, llamemos Δ_i al vector que define el cambio en la localización de N_i . Este vector, Δ_i , es definido como la suma de todos los vectores contribuyentes desde nudos ligados ponderados por la longitud de los vectores contribuyentes. Si hay n nudos ligados a N_i como muestra la figura 3.20 entonces:

$$\Delta_i = \frac{\sum_{j=1}^n |c_j| c_j}{\sum_{j=1}^n |c_j|} \dots\dots\dots(3.23)$$

Esta modificación Laplaciana de longitudes ponderadas tienden a mantener elementos a lo largo del exterior de la región perpendicular a la frontera. Esta suavización también tiende a mover nudos una igual distancia desde sus vecinos ligados y converge rápidamente.

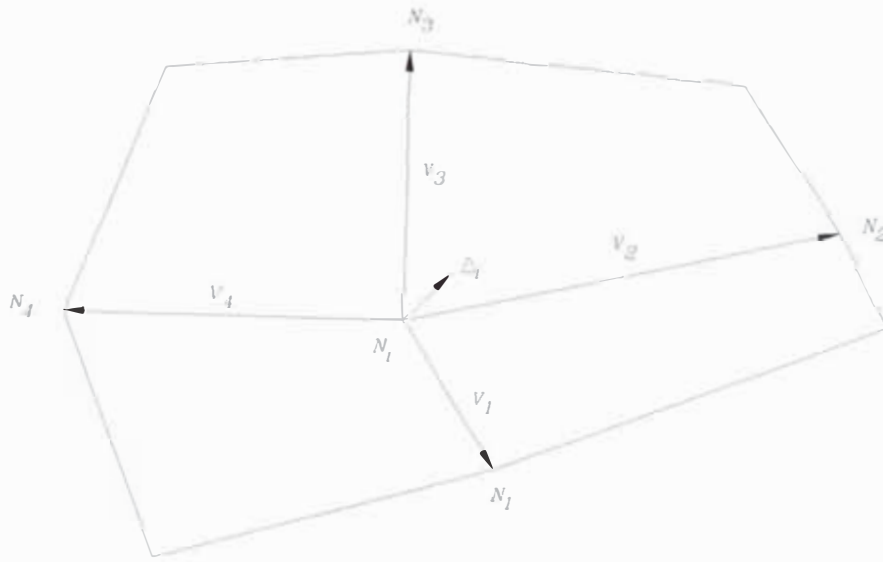


Figura 3.20

3.4.6.3 Localización de la suavización.

Desde que el proceso de suavización es un procedimiento frecuentemente repetido y por lo tanto bastante caro, se usa para minimizar el costo un suavizado localizado. Si se cambia una malla suavizada por medio de algunas operaciones locales es razonable suponer que, durante el subsiguiente suavizado, los nudos próximos a la disturbancia requerirán más ajuste que aquellos más distantes. De hecho, los nudos ocultos más allá de tres capas de elementos desde la disturbancia raramente se mueven significativamente. Así, para ahorrar tiempo de cómputo, el suavizado ha sido restringido a nudos dentro de las tres capas de elementos a cualquier nudo relacionado con una disturbancia. Por ejemplo, cuando una fila es agregada, solo los nudos con tres filas de profundidad dentro de la malla existente son suavizados. Esta simple localización mejora los tiempos de cómputo significativamente.

3.4.7 Costura.

El proceso de Costura puede ser entendido como un proceso para cerrar grietas en la frontera de pavimentación, las cuales a menudo se forman durante el proceso. Los

extremos de las grietas son fácilmente reconocidos como nudos de frontera con ángulos interiores muy pequeños.

El criterio para cerrar una grieta está basado en el ángulo interior del nudo, α , el número de bordes ligados, N_E , y si el nudo es un nudo fijo (sobre una frontera permanente). Hay tres tipos de procesos de Cosedura los cuales deben considerarse: (i) Coser un nudo flotante de la frontera de pavimentación, (ii) Coser un nudo fijo, y (iii) Coser entre dos lados de elementos de longitud desigual (zona de transición).

3.4.7.1 Coser nudos interiores.

El proceso de coser nudos flotantes sobre una frontera de pavimentación es el tipo más común de coser. Tales nudos pueden ser cosidos sí:

$$\begin{aligned} \alpha < \varepsilon_1, \dots, \text{para } N_E > 5 \\ \alpha < \varepsilon_2, \dots, \text{otros casos} \\ \text{siendo } \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \end{aligned}$$

Como se observa en las expresiones anteriores, la tolerancia decrece mientras el número de elementos ligados se incrementa. Esta tolerancia cambia la apreciación de la costura, la cual forma un nudo regular o reduce la irregularidad de un nudo en el extremo de una grieta. Por ejemplo, el nudo N_i en la figura 3.21(a) está ligado a cuatro bordes de elementos ($N_E=4$). Coser este nudo, como se muestra en la figura 3.21(b), cambia N_i a un nudo irregular, el cual está ligado a solo tres elementos. Así, en general, el ángulo interior de un nudo ligado a cuatro bordes de elementos debe ser relativamente pequeño para que este tipo de costura sea provechoso. En este caso el ángulo del nudo N_i fue negativo y la costura fue necesaria. Por otro lado, coser en el nudo N_i , mostrado en la figura 3.21(c), el cual está ligado a cinco bordes de elemento, cambia N_i a un nudo interior regular ligado a cuatro elementos como se muestra en la figura 3.21(d). Este tipo de costura es así permitida para ángulos interiores más grandes.

Como se puede ver en la figura 3.21, cada costura es efectuada por una simple combinación del nudo precedente a N_i , N_{i-1} , y el nudo siguiente a N_i , N_{i+1} , como un simple nudo, N_j . Esto también reduce el número de bordes de elemento, N_E , ligados al nudo N_i en uno. El ejemplo de la costura mostrada en la figura 3.21 también muestra que una vez que una grieta comienza a cerrar (3.21(b)) la costura tiende a continuar hasta que se forma una clara esquina en ángulo recto. (3.21(d)).

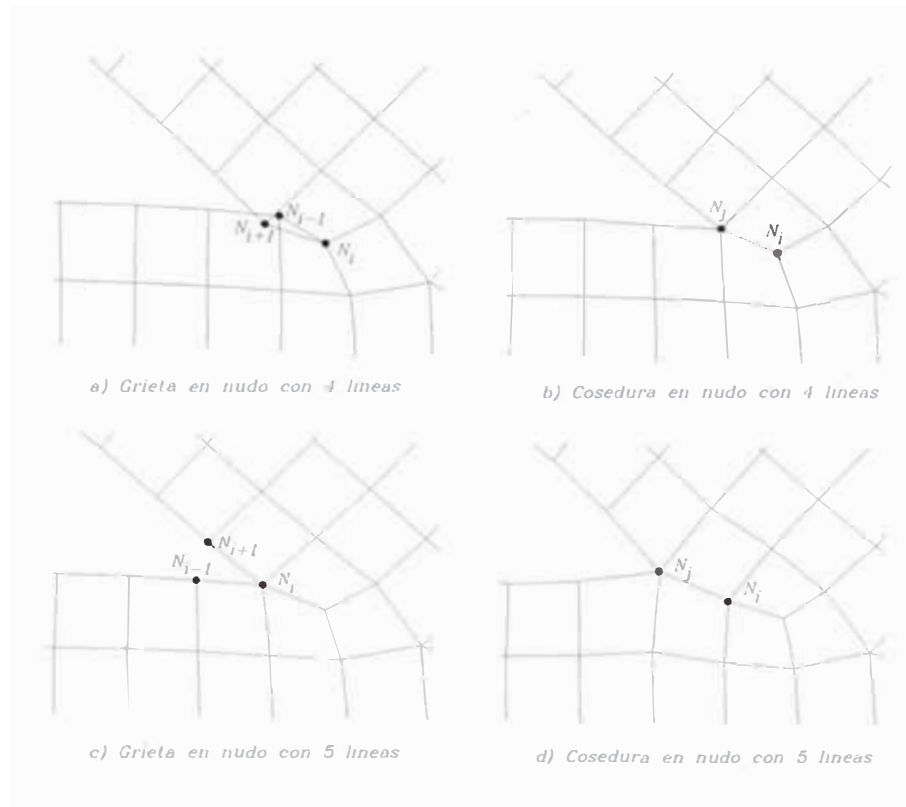


Figura 3.21

3.4.7.2 Coser nudos fijos.

La costura de grietas que consideran nudos fijos sobre la frontera permanente debe ser efectuada más juiciosamente. Desde que los nudos exteriores no están libres para moverse, la suavización no puede mejorar elementos que tienen dos o más lados sobre la frontera exterior. Así, se debe tomar cuidado que la costura no cree elementos con malos ángulos interiores, los que no pueden ser mejorados. Esto es principalmente concerniente cuando las fronteras exteriores forman ángulos pequeños. Como se muestra debajo, el problema es superado simplemente dilatando el cerrado de la grieta donde este problema ocurre.

La figura 3.22(a) muestra un ejemplo de un problema para coser un nudo fijo. La primera fila colocada dentro de la pequeña porción de ángulo de la frontera permanente forma un ángulo interior muy pequeño en el nudo N_i . Sin embargo, coser el nudo N_i podría crear un elemento cuadrilátero degenerado con un ángulo interior aproximadamente igual a π . Como se muestra en la figura 3.22(b), la costura de esta grieta se ignora y la siguiente fila es insertada como si la pequeña grieta no existiera. Esto, por supuesto, causa que la fila tenga un serio traslape. Sin embargo, ahora los nudos a ser cosidos son todos nudos flotantes y puede ser suavizado como se necesite. La malla resultante de este coser dilatado es mostrada en la figura 3.22(c). Para geometrías que contengan ángulos interiores muy

pequeños, la malla cuadrilátera generada por el algoritmo de pavimentación es casi siempre similar a la malla mostrada en la figura 3.22(c).

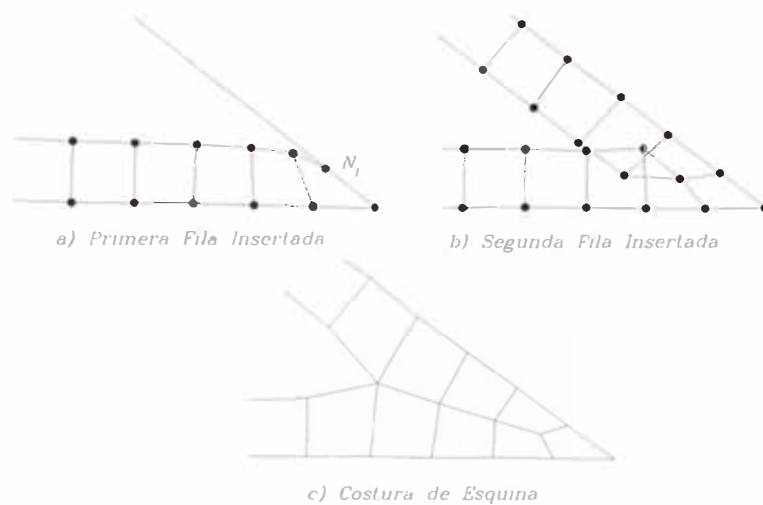


Figura 3.22

3.4.7.3 Coser transiciones.

A menudo, para fronteras de pavimentación con requerimientos de transición, puede requerirse la costura entre dos lados de elementos de tamaños desproporcionados, como se muestra en la figura 3.23(a). Así, antes que se efectúe alguna costura, las longitudes relativas de los dos lados de los elementos a ser cosidos se comparan. Si la razón de la longitud más larga a la más corta es mayor que un valor mínimo, por ejemplo 2.5, se agrega a la malla un elemento cuña, como se explicará más adelante. La cuña es posicionada de tal forma que efectivamente corta al elemento más largo en tres partes, como se muestra en la figura 3.23(b). Este nuevo arreglo de elementos es luego cosido como se muestra en la figura 3.23(c), y el resultado de la costura luego de la suavización es mostrado en la figura 3.23(d). Como se puede ver en este ejemplo, la inserción de una cuña durante la operación de coser permite transiciones elegantes que de otra manera generarían situaciones dificultosas de cierre de frontera.

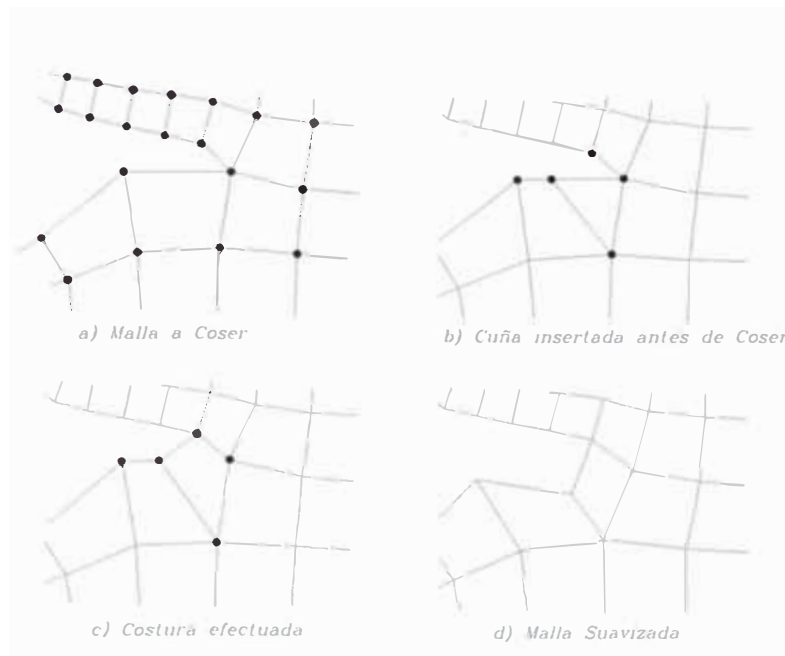


Figura 3.23

3.4.8 Ajuste de fila.

Mientras las filas son agregadas a la malla, la geometría, tanto como la topología de la fila, afectan la forma de los elementos generados. Para porciones de fila que atraviesan un segmento cóncavo de la frontera, los elementos en cada sucesiva fila tienden a hacerse más pequeños. Como es de esperar, si la porción de fila atraviesa un segmento convexo de la frontera, los elementos tienden a hacerse más largos con cada fila adicional. Esta no deseada expansión o contracción del tamaño de elementos, mostrado en la figura 3.24, puede ser corregida con un apropiado ajuste de fila. Esta sección describe las técnicas usadas para reconocer y corregir este fenómeno: primero la inserción de cuñas en filas en expansión, y segundo la formación de cuñas en filas en contracción.

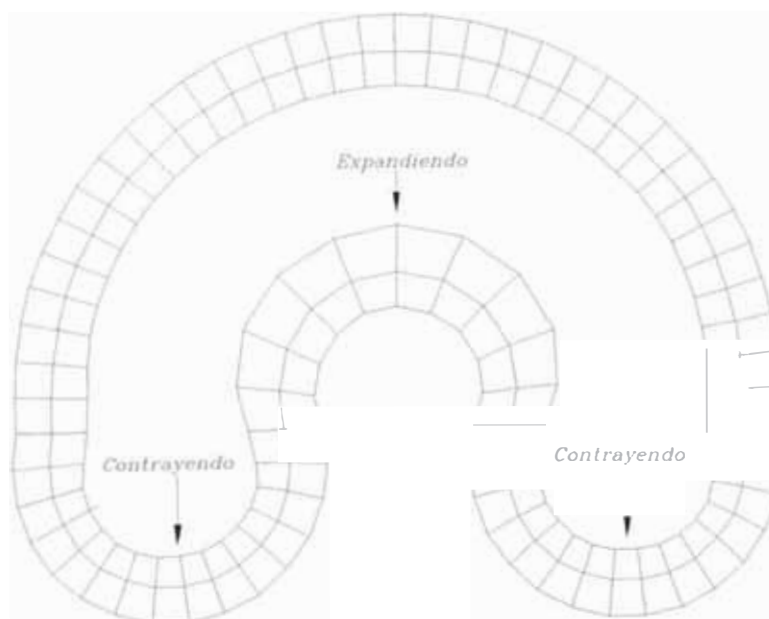


Figura 3.24

3.4.8.1 Inserción de cuñas.

Las cuñas son usadas para controlar la expansión del tamaño de los elementos en porciones de una fila de frontera. El proceso de inserción de cuña puede ser visualizado como agrietar la fila en un nudo flotante de la frontera de pavimentación y forzar un elemento adicional dentro de la grieta. Este nuevo elemento esencialmente forma una cuña que separa dos elementos conectados previamente y forma un nudo de fila de esquina en la fila.

En la práctica la inserción de cuñas causa la generación de dos nuevos nudos y un nuevo elemento. Refiriéndose a la figura 3.25(a), para la inserción de una cuña en el nudo N_i , un nuevo nudo, N'_i , es generado y usado para reemplazar a N_i en la definición del elemento que está en el lado derecho de N_i . El nudo N_i es recolocado sobre una línea imaginaria que une al nudo N_{i-1} y la posición original de N_i en la distancia de $1/3$ de la distancia original desde N_i a N_{i-1} . Como es de suponer, el nudo N'_i es posicionado sobre una línea imaginaria que une la posición original de N_i y el nudo N_{i+1} en una distancia de $1/3$ de la distancia original desde N_i a N_{i+1} . Esto forma la grieta referida antes. El segundo nuevo nudo, N_k , es luego colocado en una localización definida usando la ecuación de suavización isoparamétrica, ecuación (12), usando los nudos N_i , N_j y N'_i en la ecuación. El nuevo elemento es luego definido por los nudos N_i , N_j , N'_i y N_k , como se muestra en la figura 3.25(b). Se efectúa entonces la suavización y los resultados son mostrados en la figura 3.25(c).

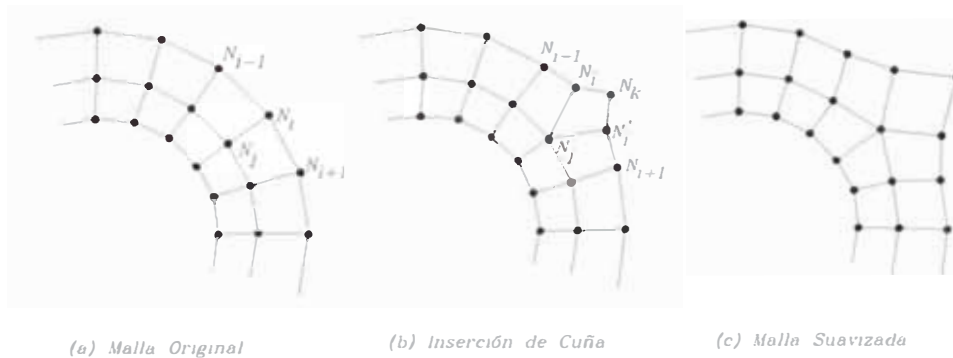


Figura 3.25

Las porciones de fila donde la inserción de cuña podría ser útil son detectadas basándose en dos criterios: primero, sobre una razón de expansión la cual es la razón de la longitud deseada y la distancia real entre nudos adyacentes de la frontera de pavimentación, y segundo, en el ángulo interior del nudo. Si la razón de expansión y el ángulo interior son ambos más grandes que valores críticos predeterminados (razón de expansión = 1.25 y ángulo interior = 183), entonces el nudo califica para la inserción de una cuña. El número

real de cuñas y su localización está basadas en el número de nudos secuenciales de la frontera de pavimentación que califican para la inserción de la cuña, y el ángulo total recorrido por la frontera para esta secuencia de conjunto de nudos. La colocación óptima de cuña podría ser en los puntos medios de cada porción de $\pi/2$ del ángulo total recorrido por esta secuencia de nudos de la frontera de pavimentación. Por ejemplo, en la figura 3.26(a) todos los nudos de la frontera de pavimentación en la frontera interior (alrededor del agujero) califican para la inserción de cuña. Desde que el ángulo total recorrido por esta secuencia de nudos elegibles es 2π , y desde que hay más que cuatro nudos en la secuencia, cuatro cuñas son insertadas en los nudos N_A , N_B , N_C y N_D , como se muestra en la figura 3.25(b). Los nudos donde las cuñas son colocadas son localizados en el sentido horario a $1/8$, $3/8$, $5/8$ y $7/8$ puntos (punto medio de cada porción $\pi/2$) del ángulo recorrido. Ningún intento se efectúa para asegurar la alineación de estas cuñas con otra frontera existente, a pesar de que en este ejemplo el alineamiento si ocurre. Luego que todas las cuñas han sido insertadas dentro de la porción de fila, se hace una suavización localizada.

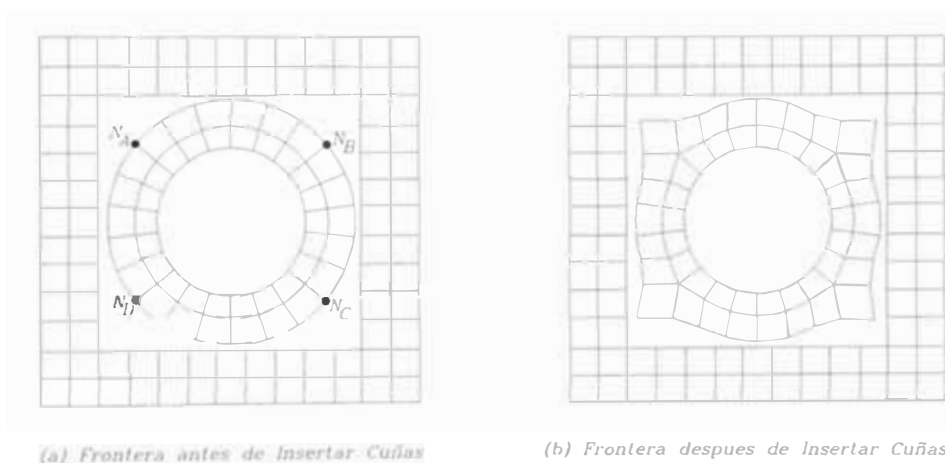


Figura 3.26

3.4.8.2 Formación de Pliegues.

Los Pliegues son usados para comprobar la reducción del tamaño de los elementos en porciones de la fila de la frontera. El proceso de formación de los pliegues puede ser visualizado como una combinación de dos elementos de fila adyacentes en uno. Este proceso de combinación crea un nudo de fila final donde existieron previamente tres nudos de fila de lado.

Una formación de pliegue elimina dos nudos de frontera y un elemento. Refiriéndonos a la figura 3.27, para la formación de un pliegue en el nudo N_i , un elemento debe primero ser eliminado. Llamemos al lado del elemento S_A como el lado del elemento que conecta los nudos N_i y N_j . El elemento ligado al lado S_A es eliminado, como se muestra en la figura

3.27(b). Llamemos S_B al lado del elemento que conecta los nudos N_k y N_j , S'_B el lado del elemento que conecta los nudos N_i y N_k , S_C lado del elemento que conecta los nudos N_j y N_{j+1} , y S'_C el lado del elemento que conecta N_i y N_l . El pliegue se completa por la superposición de los lados S_B y S_C sobre los lados S'_B y S'_C respectivamente, como se muestra en la figura 3.27(c). Esta superposición reemplaza los nudos N_j con el nudo N_i y el nudo N_{j+1} con el nudo N_l dentro de todos los elementos asociados. Una suavización completa el pliegue y produce la malla mostrada en la figura 3.27(d).

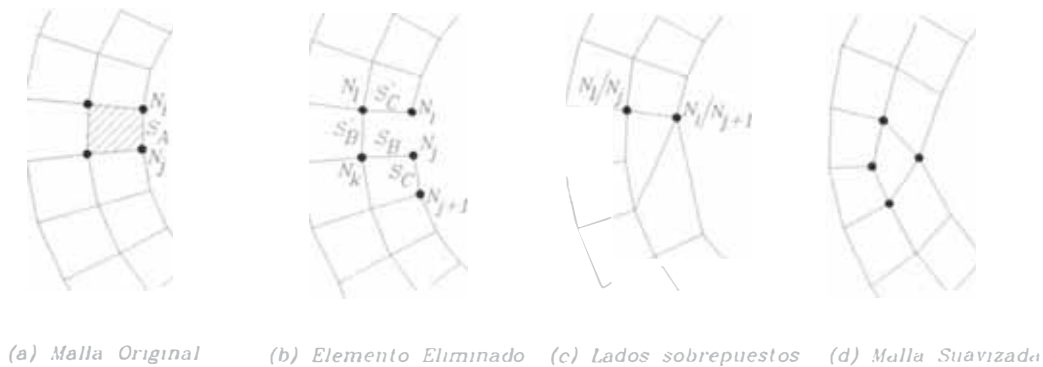


Figura 3.27

Así como la cuña, las porciones de fila donde la formación de pliegue podría beneficiar son detectadas basándose en dos criterios: primero, en una razón de reducción, la cual es la razón de la longitud deseada a la distancia actual entre nudos de frontera adyacente, y segundo, en el ángulo interior del nudo. Si la razón de reducción y el ángulo interior son ambos inferiores que ciertos valores críticos (razón de reducción 0.8 y ángulo interior 177°), entonces el nudo califica para la formación de un pliegue. Nuevamente, como en las cuñas, el número verdadero de pliegues y su localización están basados en el número de nudos de frontera secuenciales que califican para la formación de pliegues y en el ángulo total recorrido por la frontera por este conjunto de nudos secuenciales. La colocación óptima de pliegue podría ser en el punto medio de cada porción $\pi/2$ del ángulo total recorrido. Por ejemplo, en la figura 3.28(a), existen tres conjuntos secuenciales de nudos que califican para la formación de pliegue. El primer conjunto es el nudo de frontera del extremo superior derecho N_1 , el segundo conjunto es del lazo izquierdo en sentido antihorario desde el nudo N_2 a N_3 , y el tercer juego es el nudo de frontera inferior derecho N_4 . Por supuesto, dado que el primero y el tercero conjunto son compuestos por solo un nudo, solo un pliegue es tomado en el nudo en cada conjunto. El ángulo recorrido por el segundo conjunto secuencial es aproximadamente $3\pi/2$ y hay más de tres nudos en la secuencia. Así se forman tres pliegues en los nudos N_A , N_B y N_C , como se muestra en la figura 3.25(b).

Los nudos N_A , N_B y N_C están en el sentido antihorario en puntos a $1/6$, $1/2$ y $5/6$ (punto medio de cada porción $\pi/2$) del ángulo recorrido, respectivamente.

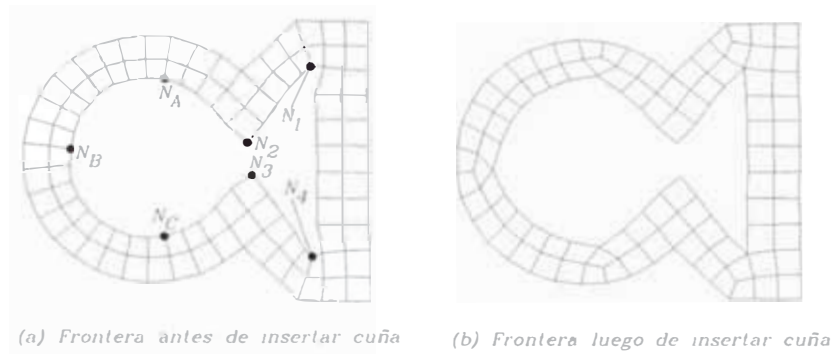


Figura 3.28

3.4.9 Manejo de intersecciones en el perímetro.

Cuando las fronteras de pavimentación se propagan dentro de la región, es común tener intersecciones o traslapes en algunas porciones existentes de la malla. Estas intersecciones pueden estar asociadas con un ángulo interior negativo y así pueden ser completamente eliminadas durante la operación de costura, como previamente se observó en la figura 3.21. Sin embargo, muchas veces el traslape es simplemente debido a la geometría original. Como se muestra en la figura 3.29, el traslape puede ser de dos tipos: (i) una simple frontera de pavimentación intersectando a sí misma, y (ii) una frontera de pavimentación intersectando otra frontera de pavimentación (huecos dentro de una región). Aquí se describe el mecanismo para la detección y corrección de estos dos tipos de intersecciones.

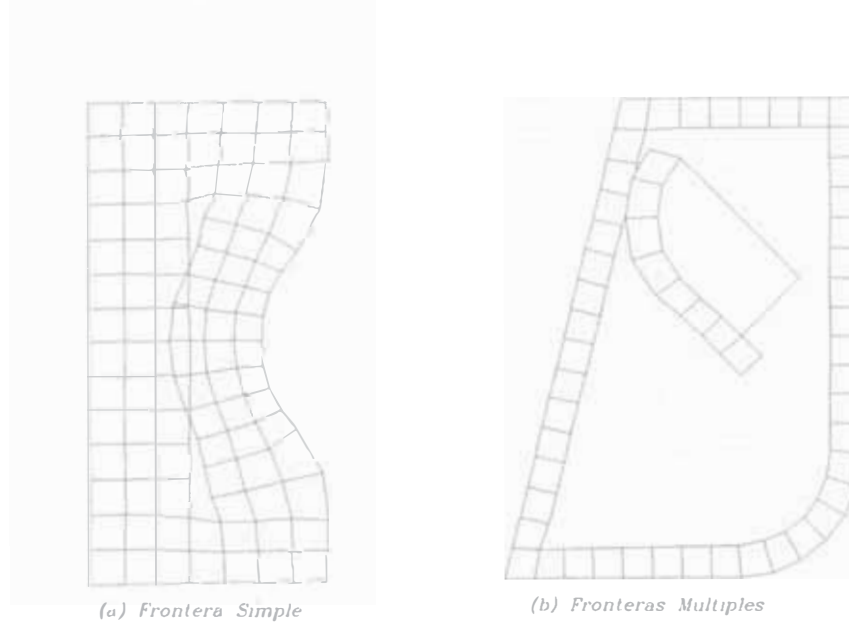


Figura 3.29

3.4.9.1 Intersección simple de una frontera de pavimentación.

Cuando una frontera de pavimentación se traslapa a sí misma, como se muestra en la figura 3.29(a), hay por lo menos dos pares de líneas (conexiones entre nudos de frontera) que se intersectan entre ellas. La intersección es detectada por el cálculo de la intersección de dos segmentos de líneas rectas. La fórmula de cálculo para la intersección usada es rápida e informativa, proveyendo no solo la verificación de una intersección pero también la localización de la intersección y las longitudes proporcionales de los cuatro segmentos de línea que podrían ser formados si las líneas fueran divididas en la intersección. Como se muestra en la figura 3.30, llamemos V_A al el vector posición desde el origen hasta el extremo del punto A del segmento de línea AB. Llamemos al vector V_B al vector desde el extremo del punto A al extremo del punto B del segmento de línea AB. Así mismo, llamemos V_C al vector posición del punto final C del segmento de línea CD y V_D al vector desde C a D del segmento de línea CD. Un vector posición P a cualquier punto a lo largo del segmento de línea AB puede ser luego descrito como $P(u)=V_A+uV_B$, donde $u \in [0,1]$. Similarmente, un vector posición Q a cualquier punto a lo largo de la segunda línea CD puede ser descrita como $Q(w)=V_C+wV_D$, donde $w \in [0,1]$. Llamemos R al vector posición del punto de intersección. Si una intersección existe entonces:

$$R-P(u)=Q(w)\dots\dots\dots(3.24)$$

$$V_A+uV_B=V_C+wV_D\dots\dots\dots(3.25)$$

En dos dimensiones, esto conduce a dos ecuaciones lineales (una para cada dirección coordenada) y dos incógnitas, u y w:

$$Ax+uBx=Cx+wDx\dots\dots\dots(3.26a)$$

$$Ay+uBy=Cy+wDy\dots\dots\dots(3.26b)$$

En la solución de estas ecuaciones, si $0 < u \leq 1$, entonces las líneas se intersectan y la localización relativa de la intersección es indicada por los valores de u y w. Por ejemplo, si $u=0.25$, entonces la intersección ocurre en un punto a un cuarto de la línea AB más cerca al punto A. Una similar relación se sostiene para el valor de w y la línea CD. Este tipo de información es esencial en una corrección apropiada del traslape, como se explica debajo.

Una vez que la intersección ha sido detectada, es corregida por la conexión de las porciones traslapadas en la mejor manera posible. Para este caso de una frontera simple intersectandose a sí misma, la conexión resultará en dos nuevas fronteras de pavimentación formadas. En muchos casos la mejor conexión será entre dos líneas que se intersectan. Sin

embargo, es a menudo ventajoso combinar líneas adyacentes a las líneas intersectadas en cualquiera de los dos lados y en cualquiera de las dos direcciones. Para asegurar que la conexión formada será válida y evitara la formación de nudos irregulares donde sea posible se tiene en cuenta lo siguiente:

- *Apremiar uniformidad.* Las dos nuevas fronteras de pavimentación deben contener un número par de elementos. Si la conexión de las líneas de intersección produce fronteras de pavimentación con un número impar de nudos, la localización de la conexión se ajusta basándose en los valores relativos de u y w .
- *Examinar hacia delante/atrás.* En algunos casos, la conexión de las líneas de intersección puede producir una malla más irregular que conectando las dos líneas adelante o atrás de un nudo de la intersección verdadera. De este modo se comparan los resultados de conectar líneas un paso en cada dirección basándose en su proximidad y en qué tan cerca están las líneas de ser paralelas.
- *Diferencias en tamaños.* Si la longitud de las líneas de intersección respectivas difieren significativamente, se inserta una cuña similar al proceso descrito antes para habilitar una más fácil transición.
- *Explorar todas las intersecciones.* Habrá siempre un número par de intersecciones de una frontera de pavimentación cerrada sobre sí misma. Por la conexión de una intersección y luego de efectuar la costura, como se explicó antes, por lo menos una intersección más es eliminada. Así, todas las intersecciones son encontradas y comparadas y la mejor (nuevamente basándose en la proximidad y paralelismo de las dos líneas de intersección) se conecta primero.

Una vez que la más apropiada conexión ha sido encontrada y las líneas combinadas, se procura una costura para ambas nuevas fronteras formadas. Dado que cualquier porción de frontera que permanezca traslapada formara ángulos internos negativos en el punto de intersección, una costura integrará a todos estos en la malla existente. Como pueden ocurrir intersecciones múltiples con la intersección de alguna fila, deben estudiarse cada una de las nuevas fronteras de pavimentación formadas.

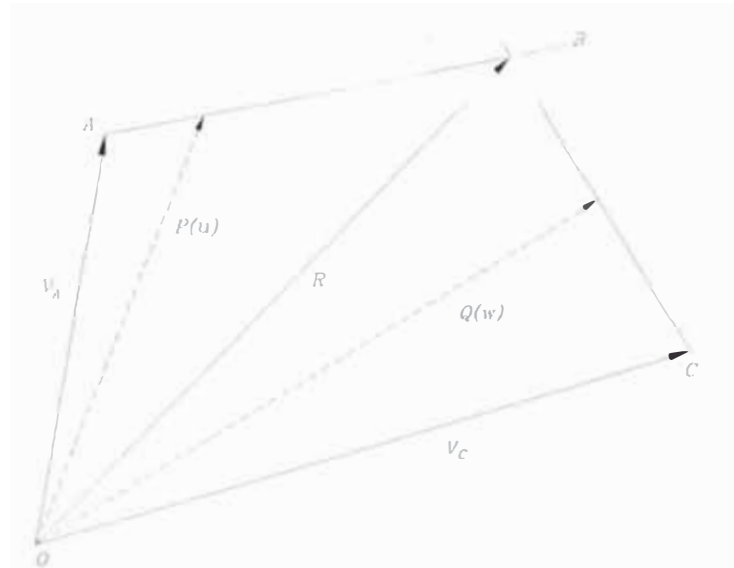


Figura 3.30

La figura 3.31 ilustra la conexión de un frontera intersectándose a sí misma. En la figura 3.31(a), se ha agregado una nueva fila que traslapa una porción de la frontera de pavimentación existente. En este caso hay dos localizaciones de intersecciones encontradas, como se resalta por las líneas ocultas en la figura 3.31(a). La intersección de abajo podría ser conectada para formar dos lazos con un número par de nudos de frontera. Sin embargo, la intersección de arriba podría formar dos lazos con un número impar de nudos de frontera, y así tantos pasos en cualquier dirección son considerados. La pareja resaltada en la figura 3.31(b) es la mejor conexión para la intersección de arriba. Esta conexión es también preferible en lugar de la conexión de abajo, basándose en la proximidad a ser paralela, y es así conectado como se muestra en la figura 3.31(c). En este ejemplo la operación de coser siguiendo la conexión cierra ambas nuevas fronteras de pavimentación formadas. La malla completa es mostrada en la figura 3.31(d).

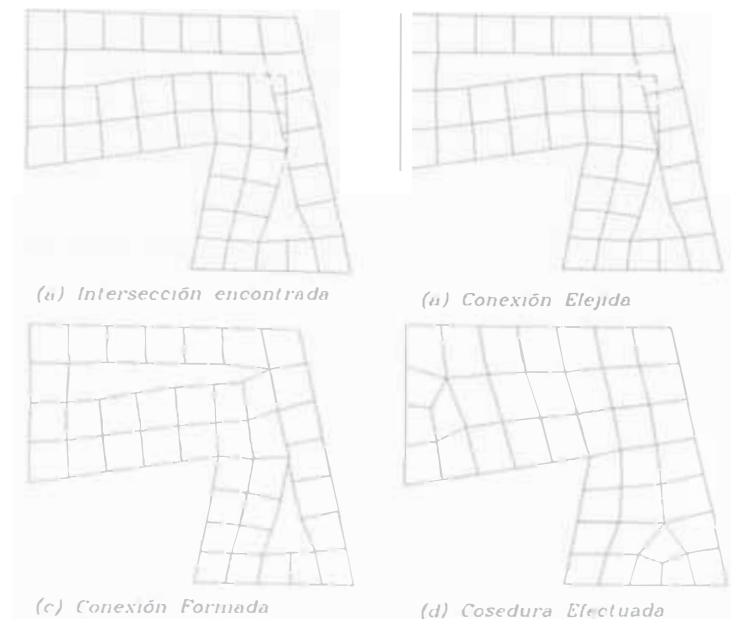


Figura 3.31

3.4.9.2 Intersección de múltiples fronteras.

Cuando una región a pavimentar contiene fronteras de pavimentación interiores (agujeros), todas ellas deben ser conectadas antes que el cierre sea posible. Las intersecciones son encontradas de forma similar a la verificación de las intersecciones efectuadas para una simple frontera que se intersecta así misma. Sin embargo, como cada frontera debe contener un número par de intervalos, no es posible generar un lazo de frontera impar desde la conexión de cualquiera de dos fronteras de pavimentación. Así, la conexión está basada solo en la virtud de la conexión. Este tipo de intersección puede ocurrir entre las fronteras de pavimentación interna y externa o entre cualquiera de dos fronteras de pavimentación interna.

La figura 3.32 ilustra la intersección y conexión de fronteras múltiples. Como se muestra en la figura 3.32(a), la frontera de pavimentación exterior intersecta tres de las fronteras de pavimentación interior (huecos circulares). Las intersecciones con estas tres fronteras son evaluadas, la más apropiada conexión elegida, conectada y cosida como se muestra en la figura 3.32(b). En este punto hay solo dos fronteras de pavimentación que se han dejado, la frontera de pavimentación exterior y la frontera interior alrededor del agujero central. Estas dos fronteras son luego pavimentadas hasta que se traslapen y son conectadas como se muestra en la figura 3.32(c), formando una simple frontera exterior. La malla completa es mostrada en la figura 3.32(d).

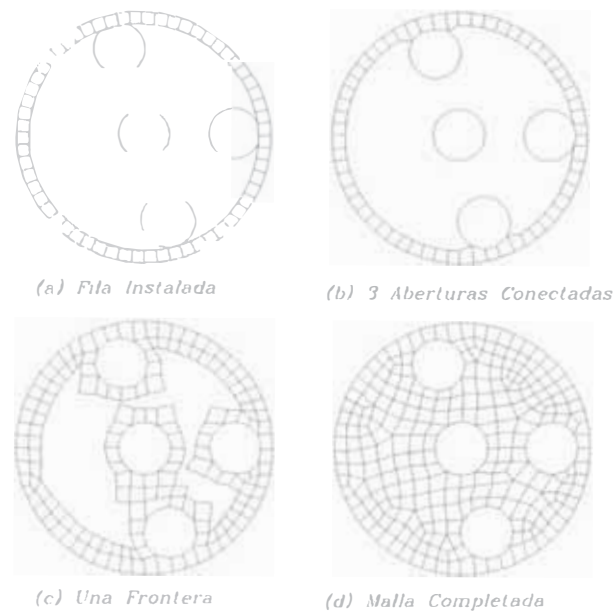


Figura 3.32

3.4.10 Limpieza completa de la malla.

Luego que la región ha sido completamente pavimentada, se procuran efectuar ajustes locales para mejorar la calidad total de la malla terminada. Estos ajustes son esencialmente una inserción o eliminación de un elemento para mejorar las razones de aspecto locales, reducir el número de nudos irregulares, o eliminar elementos con ángulos interiores malos. Los factores que controlan los ajustes incluyen el número de bordes de elementos unidos a un nudo, el ángulo interior de todos los elementos ligados al nudo y la probabilidad anticipada de mejorar la malla localmente.

La figura 3.33 muestra un ejemplo de la eliminación de un elemento para el mejoramiento de la malla. En la figura 3.33(a), el elemento formado por los nudos N_i , N_j , N_k y N_l han sido blancos para eliminación. De los nudos que forman este elemento, solo N_i es un nudo regular. Los nudos N_j y N_l están ligados a tres elementos y el nudo N_k está ligado a cinco elementos. La eliminación es efectuada por el colapso del elemento como muestran las flechas en la figura 3.33(a). Los nudos N_j y N_l y los bordes del elemento ligado son combinados durante la eliminación. Como resultado de la eliminación, un nudo regular, N_i es transformado en un nudo irregular, como muestra la figura 3.33(b). Sin embargo, dos nudos irregulares, N_j y N_l son combinados en un nudo regular, y otro nudo irregular, N_k , es transformado en un nudo regular. Así, la calidad total de la malla ha sido mejorada.

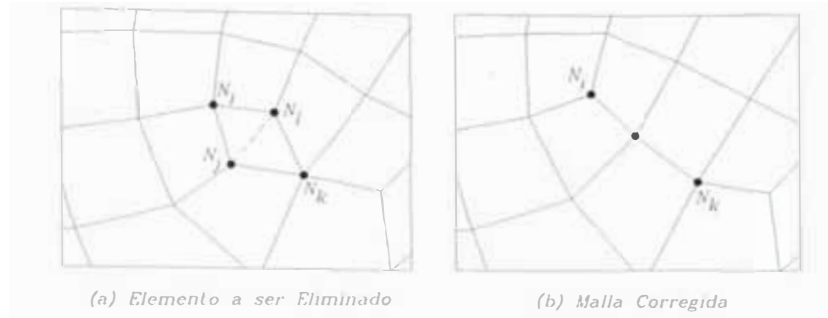


Figura 3.33

La figura 3.34 muestra un ejemplo de la inserción de un elemento, para mejorar la malla. En la figura 3.34(a), los dos elementos resaltados con líneas ocultas han sido blancos para una inserción de elemento. Estos tipos de elementos alargados usualmente solo ocurren durante la pavimentación cuando una transición larga es necesaria. La figura 3.34(b) muestra como la inserción de un elemento no solo reduce la razón de aspecto de este elemento, si no que también mejora el ángulo interior de los elementos.

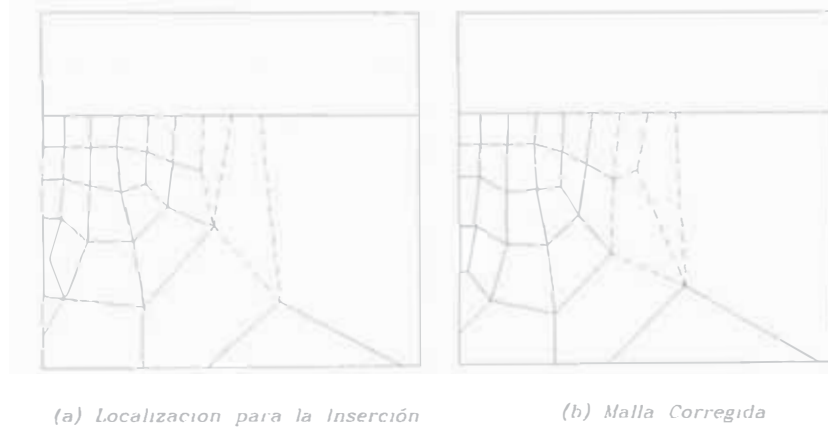


Figura 3.34

Capítulo 4

Enumeración eficiente de nudos

4.1 Introducción.

Muchos problemas de ingeniería requieren la solución de un conjunto de Ecuaciones matriciales de la forma:

$$[A]\{x\}=[b] \quad (4.1)$$

Donde $[A]$ es una matriz conocida de orden $N \times N$, simétrica y de baja densidad. $\{x\}$ es un vector de incógnitas de orden N , y $[b]$ es un vector conocido, también de orden N . Este tipo de ecuaciones surgen por ejemplo, en las aplicaciones de elementos finitos y son usualmente resueltas usando algunas formas de eliminación Gaussiana.

Las estrategias de ancho de banda para implementación de la eliminación procuran reunir los elementos distintos de cero de $[A]$ en posiciones lo más cercanas posibles a la diagonal principal y luego aprovechar la naturaleza de la banda de las ecuaciones. El ancho de banda de $[A]$ puede ser definido como

$$B = \max \{b_i\} \quad 1 \leq i \leq N \quad (4.2)$$

Donde b_i es la diferencia entre $i+1$ y el índice de la columna de la primera entidad distinta de cero en la fila i de $[A]$. Nótese que esta definición de ancho de banda incluye el término diagonal. En un algoritmo de solución de banda tradicional, todas las entidades dentro de la envolvente del ancho de banda son almacenadas y operados, aun si ellos son cero. Si N y B son grandes, el número de operaciones aritméticas requeridas en un simple paso de eliminación para un esquema de ancho de banda es $O(NB^2)$. Dado que el tamaño de B está relacionado al orden en el cual las ecuaciones son eliminadas (el orden en el cual ellos son etiquetados), es aconsejable etiquetar las ecuaciones para producir un ancho de banda pequeño y así evitar pérdidas de tiempo en las operaciones con ceros.

En análisis de elementos finitos, donde el orden de eliminación es dictado por el etiquetado de los nudos, se procura un pequeño ancho de banda minimizando la máxima diferencia positiva entre los números de nudo en cada elemento. Para grandes sistemas de ecuaciones, ó problemas con una estructura de matriz complicada, es impráctico generar un etiquetado eficiente a mano y se hace necesario un procedimiento automático. Varios esquemas para reducir automáticamente el ancho de banda han sido inventados; los más exitosos de ellos son los de Cuthill y Mckee,¹⁴ Collins⁴⁸ y Gibbs et al.⁴⁰

A pesar que los esquemas de solución de ancho de banda son simples de implementar, ellos tienen la desventaja de que su economía está gobernada solamente por el ancho de banda. Estos esquemas pueden ser ineficientes para matrices de baja densidad, las que contienen un número significativo de ceros dentro de la envolvente del ancho de banda. Una alternativa a la estrategia del ancho de banda consiste en descartar a todos los ceros sobresalientes en cada fila y columna y almacenar solo el perfil de la matriz. Se han descrito varias formas de implementación de esquemas de perfil, incluyendo los discutidos por Jennings² y Taylor,⁴⁹ y ellos son a menudo usados para resolver las ecuaciones matriciales de baja densidad que surgen en el cálculo de elementos finitos. Para optimizar el comportamiento del método del perfil, es necesario etiquetar las ecuaciones de modo tal que pocos ceros sigan al cero principal en cada fila y columna. Si se considera solo el triángulo superior de [A], esto es equivalente a minimizar la suma de las alturas de columna. Para una matriz que tiene un arreglo simétrico de ceros, la suma de las alturas de columna es conocida como el *perfil* y es definido por

$$P = \sum_{i=1}^N h_i \dots \dots \dots (4.3)$$

El número de operaciones aritméticas requeridas en un paso de eliminación simple para un esquema de perfil es aproximadamente proporcional a la suma de las alturas de columna elevadas al cuadrado. Se han diseñado diversos algoritmos específicamente para reducir el perfil de una matriz de baja densidad, incluyendo aquellos de King¹⁸ y Gibbs.³⁸ El método inverso de Cuthill-McKee, propuesto por George¹, invierte el proceso de etiquetado del esquema de Cuthill-McKee para reducir el perfil. Recientemente, Lewis²¹ ha descrito una implementación eficiente del algoritmo de Gibbs, que se comporta bien en las 30 pruebas de matrices propuestas por Everstine¹⁵. El esquema publicado por Gibbs parece ser uno de los medios disponibles más efectivos para la reducción del perfil, dado que es rápido, confiable y habitualmente produce perfiles menores que los producidos por otros algoritmos.

Otra técnica frecuentemente usada para resolver ecuaciones con matrices de baja densidad es el método de solución frontal (ver, por ejemplo, Irons⁹). Este método ha encontrado amplias aplicaciones en el campo del análisis de elementos finitos, pero es generalmente aplicable a cualquier sistema de ecuaciones de matrices de baja densidad. En el algoritmo frontal nunca se ensambla explícitamente la totalidad de la matriz [A]. En vez de eso, las fases de ensamble y eliminación son intercaladas con cada ecuación, siendo eliminada tan

pronto como es completamente ensamblada. Es posible combinar los pasos de ensamble y eliminación en esta manera debido a la naturaleza del algoritmo de eliminación de Gauss. Para optimizar el comportamiento del método frontal, las ecuaciones deben ser etiquetadas como para minimizar el número de ecuaciones activas durante cada etapa del proceso de eliminación. Con referencia a la ecuación (4.1), la columna j de la fila i es activa si $j \geq i$ y no hay ceros en la columna j de la fila k para $k \geq i$. Si llamamos a f_i al número de ecuaciones que son activas durante la eliminación de la variable x_i , el máximo frente de $[A]$ esta dado por

$$F = \max\{f_i\} \quad 1 \leq i \leq N \quad (4.4)$$

Desde que se asume que $[A]$ tiene un arreglo simétrico de ceros, se sigue que:

$$P = \sum_{i=1}^N f_i = \sum_{i=1}^N b_i \dots \dots \dots (4.5)$$

Según Everstine¹⁵, la media aritmética simple y la media cuadrática del frente puede ser definido respectivamente como:

$$\bar{F} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i = \frac{P}{N} \dots \dots \dots (4.6)$$

$$\hat{F} = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i^2 \right)^{1/2} \dots \dots \dots (4.7)$$

El número de operaciones aritméticas en un paso de eliminación empleando una solución frontal, asumiendo que N y \bar{F} son muy grandes, es proporcional a $O(N \hat{F}^2)$. Se debe tener en cuenta también que al emplear una solución frontal el orden de los elementos es más importante que el orden en los nudos. Esto es porque las ecuaciones son ensambladas sobre una base de elemento por elemento, a pesar de que ellas son aun eliminadas nudo por nudo. Desde que la conectividad de los nudos es la que determina cuando una ecuación puede ser eliminada, un eficiente etiquetado de elementos puede ser obtenido ordenando primero los nudos para minimizar F . Los elementos son luego etiquetados tal que la secuencia de eliminación implicada por la nueva numeración nodal es seguida tan cercanamente como sea posible. En la práctica, esto puede ser alcanzado por el procesamiento de los elementos en secuencia ascendente de sus nudos numerados más bajos. Varios algoritmos para reducir el máximo frente de una matriz de baja densidad, con énfasis particular en aplicaciones de elementos finitos, han sido propuestos. Algunos de

estos incluyen los métodos descritos por Levy,⁴⁷ Sloan y Randolph,⁵⁵ Akin y Pardue,²⁰ Razzaque³ y Pina.¹⁶ Adicionalmente, todos los algoritmos de reducción del perfil, discutidos previamente pueden ser usados.

Para ilustrar la definición previa de ancho de banda, perfil y frente, la figura 4.1 ilustra una malla de elementos finitos de una dimensión y la correspondiente matriz de rigidez estructural. En este diagrama, las líneas gruesas denotan columnas activas. Usando las ecuaciones (4.2)-(4.7), vemos que $B=4$, $P=12$, $F=3$, $\bar{F}=2.4$ y $\bar{F}^A=2.53$.

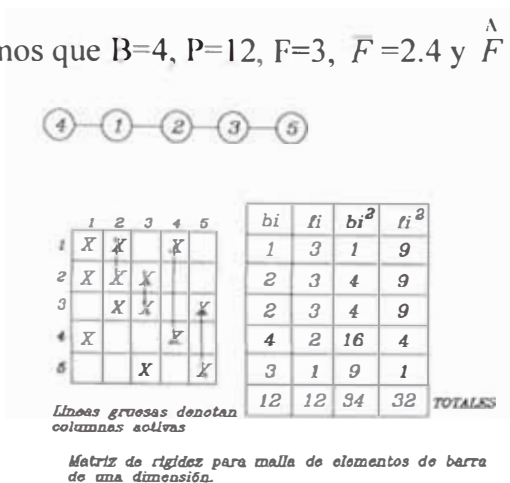


Figura 4.1

A continuación se describe un algoritmo para reducción del perfil y frente de una matriz de baja densidad. El procedimiento es aplicable a cualquier matriz de baja densidad con un arreglo simétrico de ceros y puede ser usada para generar un etiquetamiento eficiente para mallas de elementos finitos. En particular puede ser usado para proveer una eficiente numeración nodal para esquemas de solución del perfil, tanto como una eficiente enumeración de elementos para esquemas de solución frontal. Aplicaciones del algoritmo a los problemas de prueba de Everstine indican que es más efectivo que los esquemas inversos de Cuthill-McKee,¹ Gibbs et al.⁴⁰ Lewis²¹ y Levy.⁴⁷ Comparaciones oportunas detalladas indican que el nuevo algoritmo es sustancialmente más rápido que el algoritmo de Lewis,²¹ y también requiere menor almacenamiento. Una mayor atracción del esquema propuesto es su simplicidad.

4.2 Notación y Definiciones.

Como fue discutido por Cuthill y Mckee¹⁴, la derivación de un ordenamiento eficiente de una matriz de baja densidad esta relacionada al etiquetamiento de grafos no dirigidos. Algunos conceptos elementales de la teoría de un grafo son útiles en el desarrollo de estrategias de etiquetamiento heurístico y es apropiado afirmar algunas definiciones básicas.

Un *grafo* G es definido como un par $(N(G), E(G))$ donde $N(G)$ es un conjunto finito no vacío de miembros llamados *nudos*, y $E(G)$ es un conjunto finito de pares no ordenados comprendido de miembros distintos de $N(G)$, llamados *bordes*. Un grafo que satisface la definición anterior se dice ser *no dirigido* porque $E(G)$ esta comprendido de pares no ordenados. La ocurrencia de lazos (bordes que unen nudos consigo mismo) y bordes múltiples (pares de nudos los cuales son conectados por más de un borde) están excluidos.

El *grado* de un nudo i en G es definido como el número de bordes que inciden a i . Dos nudos i y j en G se dicen ser adyacentes si hay un borde uniendo a ellos.

Un *camino* en G es definido por una secuencia de bordes tal que bordes consecutivos compartan un nudo común. Dos nudos se dicen ser conectados si hay un camino uniéndolos. Un grafo G es conectado sí cada par de nudos distintos están conectados.

La distancia entre los nudos i y j en G esta denotada por $d(i,j)$, y es definido como el número de bordes en el camino más corto que los conecta. El diámetro de G es definido como la distancia máxima entre cualquier par de nudos.

$$D(G) = \max\{d(i,j) : i,j \in N(G)\} \dots\dots\dots(4.8)$$

Los nudos que están en los extremos opuestos del diámetro de G son conocidos como nudos periféricos.

Siguiendo la notación de Gibbs et al.,⁴⁰ el pseudo-diámetro, $\delta(G)$, es definido por cualquier par de nudos i y j por el cual $d(i,j)$ esta cerca de $D(G)$. Un pseudo-diámetro puede ser ligeramente menor que ó igual que el verdadero diámetro y es encontrado por algunos algoritmos aproximados. Los nudos que definen un pseudo-diámetro son conocidos como nudos pseudo-periféricos.⁴

Un concepto importante en el desarrollo de algoritmos de etiquetamiento de grafos es la estructura de nivel de raíz. Una estructura de nivel de raíz es definida como la partición de $N(G)$ en niveles $l_1(r), l_2(r), \dots\dots\dots l_h(r)$ tal que:

1. $l_1(r) = \{r\}$ donde r es el nudo raíz de la estructura de nivel.
2. Para $i > 1$, $l_i(r)$ es el conjunto de nudos, aun no asignados un nivel, los cuales son adyacentes a los nudos en $l_{i-1}(r)$.

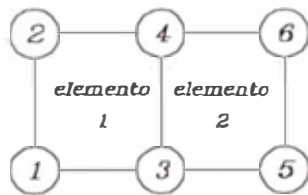
La estructura de nivel de raíz en el nudo r puede ser expresada como el conjunto $L(r) = \{l_1(r), l_2(r), \dots\dots\dots l_h(r)\}$ donde h es el número total de niveles y es conocido como profundidad. El ancho del nivel i es definido por $|l_i(r)|$ (número de nudos en el nivel i) y el ancho de la estructura de nivel esta dado como

$$w = \max\{|l_i(r)|\} \quad 1 < i < h \dots\dots\dots(4.9)$$

Para ilustrar algunas de estas definiciones, considerar la malla de elementos finitos en dos dimensiones mostrada en la figura 4.2. Esta malla esta comprendida de cuadriláteros de cuatro nudos con dos ecuaciones por nudo. Para una formulación de elementos finitos en desplazamientos, el grafo que corresponde a la matriz de rigidez global es mostrado en la figura 4.3. (todos los nudos que comparten un borde son conectados por un borde) Con referencia a la figura 4.3 $N(G)$ es el conjunto $\{1,2,3,4,5,6\}$ y $E(G)$ es el conjunto $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}$. La distancia entre nudos uno y seis es dos, y estos nudos también definen el diámetro del grafo. (El diámetro es también definido por nudos uno y cinco, nudos dos y seis, y nudos dos y cinco). La figura 4.4 muestra la estructura de nivel de este grafo el cual tiene raíz en el nudo uno (las cajas denotan números de nivel). Mas formalmente, esta estructura de nivel con raíz puede ser expresada como

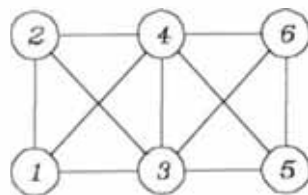
$$L(1)=\{l_1(1), l_2(2), l_3(1)\}$$

Donde $l_1(1)=\{1\}$, $l_2(1)=\{2,3,4\}$ y $l_3(1)=\{5,6\}$. El ancho y profundidad para este nivel de estructura son idénticos e igual a tres.



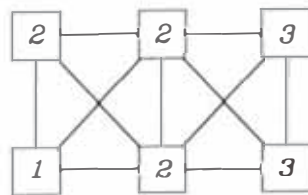
Malla de cuadrilateros de 4 nudos

Figura 4.2



Grafo correspondiente a la Malla de cuadrilateros de 4 nudos

Figura 4.3



Una estructura de nivel de raíz

Figura 4.4

4.3 Algoritmo.

Una vez que se establece el grafo correspondiente a la matriz de baja densidad, el esquema de etiquetado es comprendido de dos pasos distintos. Cada una de estas será discutida seguidamente:

4.3.1 Selección de nudos pseudo-periféricos.

Cuando se usaba el algoritmo de Cuthill-McKee¹⁴ para reducir el ancho de banda de un grafo. Gibbs et al.⁴⁰ observó que es a menudo beneficioso empezar el proceso de etiquetado en los nudos periféricos ó pseudo-periféricos. Las estructuras de nivel asociadas con estos nudos son generalmente profundas y angostas, la cual habilita el esquema de Cuthill-McKee para producir un ancho de banda pequeño. (Se debe señalar que el algoritmo de Cuthill-McKee debe producir un ancho de banda el cual es menor o igual que $2w$, donde w es el ancho del nivel de la estructura originado en el nudo de partida) Ha sido demostrado por Gibbs³⁸ y Sloan y Randolph,⁵⁵ que los nudos pseudo-periféricos también son buenos puntos de partida para los algoritmos de reducción del perfil. Procedimientos para la localización de los nudos pseudo-periféricos han sido hechos por Gibbs et al.,⁴⁰ Sloan y Randolph⁵⁵ y George y Liu.⁴

Un método para la localización de nudos pseudo-periféricos, los cuales son puntos extremos de un pseudo-diámetro, es como sigue:

1. *Suponer primero un nudo de partida.* Examinar todos los nudos del grafo y seleccionar un nudo "s" con el grado más pequeño.
2. *Generar una estructura de nivel.* Generar una estructura de nivel con raíz en nudo "s", $L(s) = \{l_1(s), l_2(s), \dots, l_h(s)\}$
3. *Ordenar último nivel.* Ordenar los nudos en $l_h(s)$ en secuencia de grado ascendente. Estos nudos tienen la máxima distancia desde "s".
4. *Contraer último nivel.* Asignar m el valor de $|l_h(s)|$. Contraer el último nivel formando una lista Q de las primeras $\lfloor (m+2)/2 \rfloor$ entidades en la lista ordenada $l_h(s)$.
5. *Inicializar.* Asignar $w_{min} \leftarrow \infty$ y $h_{max} \leftarrow h$
6. *Examen para finalización.* Para cada nudo $i \in Q$, en orden de grado ascendente, generar $L(i) = \{l_1(i), l_2(i), \dots, l_h(i)\}$. Si $h > h_{max}$ y $w = \max\{|l_j(i)|\} < w_{min}$ asignar $s \leftarrow i$ y regresar al paso 3. De lo contrario, si $w < w_{min}$, asignar $e \leftarrow i$ y $w_{min} \leftarrow w$.
7. *Salida.* Salir con el nudo de partida s y el nudo final e los cuales definen un pseudo-diámetro.

El algoritmo anterior es similar al procedimiento dado por Gibbs et al.,⁴⁰ pero incluye dos importantes modificaciones. La primera modificación es la introducción de la estrategia de contracción en el paso 4. Este paso reduce significativamente la cantidad de cómputo necesario para localizar los nodos pseudo-periféricos, pero al mismo tiempo asegura que sus estructuras de nivel de raíz sean profundas y angostas. Siguiendo naturalmente de la observación empírica que nodos con alto grado no son a menudo seleccionados como potenciales nodos inicial y final en el paso 6. Eligiendo las primeras $\lfloor (m+2)/2 \rfloor$ entidades en el nivel último ordenado restringen la atención a nodos con grados los cuales son menores o iguales que el valor medio para todos los nodos en $l_h(s)$. Las estrategias de contracción discutidas por George y Liu⁴ demuestran ser no apropiadas para la presente aplicación ya que se encontró que determinaban nodos con nivel ancho de estructura.

La segunda modificación ocurre en el paso 6 e incorpora el “circuito corto”. Estrategia usada por George y Liu⁴. Insertando la condición de que w debe ser menor que w_{min} permite el ensamblaje de estructuras de nivel ancho ser abortadas antes de completar y a menudo conducen a considerables ahorros (especialmente para grafos muy grandes). La inclusión de la estrategia de circuito corto, el cual puede ocasionalmente examinar un nivel de estructura ligeramente más profundo, no afecta el comportamiento del algoritmo de etiquetado. Esto es debido al hecho que los niveles profundos de estructura son usualmente angostos. Además, no es particularmente importante si el pseudo-diámetro calculado es ligeramente menor que el verdadero diámetro, siempre que el nivel de estructura asociado con el nudo final es angosto.

El algoritmo anterior usualmente localiza los nodos pseudo-periféricos en dos o tres iteraciones. El pseudo-diámetro producido es a menudo un diámetro verdadero, pero no hay garantía de esto.

4.3.2 Algoritmo de Etiquetado de Nudos.

Esta sección describe un algoritmo para etiquetar nodos de un grafo y producir un perfil pequeño. Dos nodos pseudo-periféricos, encontrados por el procedimiento resumido en la sección previa, son requeridos como datos de ingreso. Inicialmente los nodos son etiquetados arbitrariamente con enteros que abarcan desde 1 hasta N , donde N es el número de nodos del grafo. Las etiquetas de los nuevos nodos son generadas en un simple paso.

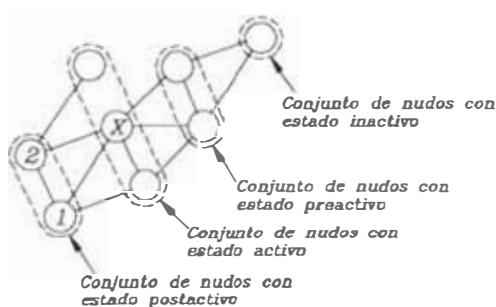
En orden para describir el algoritmo brevemente, es conveniente mencionar algunas definiciones. Cualquier nudo el cual ha sido asignado una nueva etiqueta se dice tener un estado *postactivo*. Cualquier nudo el cual esta adyacente a un nudo postactivo, pero no tiene un estado postactivo, es definido para tener un estado *activo*. Los nudos que son adyacentes a un nudo activo, pero que no tienen estado activo o postactivo, son definidos con estado *preactivo*. Los nudos que no tienen un estado postactivo, activo ó preactivo son definidos como *inactivo*.

El *grado actual* es una cantidad la cual mide el crecimiento incremental en el número de nudos activo durante el proceso de etiquetado, y es definido para cada nudo en el grafo. El grado actual n_i del nudo i en G es definido por

$$n_i = (m_i - c_i) + k_i, \dots\dots\dots(4.10)$$

Donde m_i es el grado de i , c_i es el número de nudos adyacentes a i los cuales tienen un estado postactivo ó activo, y k_i es un entero de valor cero ó uno (cero sí el nudo i es activo ó postactivo, uno en otros casos). Antes de empezar el algoritmo de etiquetado, el grado actual de cada nudo en el grafo es simplemente igual a su grado mas uno. Luego que el etiquetado es completado, el grado actual de todos los nudos del grafo es igual a cero.

La figura 4.5 ilustra un grafo parcialmente etiquetado y el uso de los términos anteriores. El grado actual del nudo x , por ejemplo, es dos.



Terminología para el algoritmo de etiquetado de nudos

Figura 4.5

Para empezar el procedimiento de etiquetado; dos nudos pseudo-periféricos, los cuales definen un pseudo-diámetro, son requeridos. Estos sirven como nudos de inicio y fin para el etiquetado. El algoritmo re-etiqueta el nudo inicial como nudo uno y luego forma una lista de nudos que son elegibles para recibir la etiqueta siguiente. Esta lista contiene todos los nudos activo y preactivo, y es mantenido como una cola prioritaria. El nudo con la más alta prioridad es etiquetado seguidamente. La prioridad de cada nudo en la cola es relacionada

a su grado actual y su distancia desde el nudo final. Los nudos con bajo grado actual y distancias grandes desde el nudo final asumen la más alta prioridad. Una vez que un nudo es seleccionado para el etiquetado, es eliminado de la cola y re-enumerado. La cola de nudos elegibles es luego actualizada por el uso de la información de conectividad para el grafo y el proceso es repetido hasta que todos los nudos han sido asignados nuevas etiquetas.

El algoritmo para el etiquetado de un grafo con N nudos es como sigue:

1. *Datos de entrada.* Ingresar nudos extremos del pseudo-diámetro, nudos s y e .
2. *Calcular distancias.* Generar la estructura de niveles con raíz en el nudo final, $L(e)$, y usar esto para formar un vector dando la distancia de cada nudo desde el nudo final. Notar que si el nudo i está localizado en el nivel j de $L(e)$, entonces $d(e, i) = j - 1$.
3. *Asignar estado inicial y prioridad.* Asignar a cada nudo en el grafo un estado inactivo y una prioridad. Para cada nudo $i \in N(G)$ asignar:

$$P_i \leftarrow (n_{\max} - n_i) * W_1 + d(e, i) * W_2 \dots \dots \dots (4.11)$$

donde P_i es la prioridad inicial de i , W_1 y W_2 son peso enteros, n_i es el grado inicial actual de i , y $n_{\max} = \max\{n_i\}_{1 \leq i \leq N}$. Por conveniencia n_{\max} puede ser igual a N (desde que el máximo grado actual en cualquier grafo con N nudos es N , esto asegura que la prioridad siempre será no negativa.

4. *Inicializar cola de nudos elegibles.* Insertar el nudo de partida, s , en la cola de nudos elegibles y asignarle un estado preactivo.
5. *Prueba para terminación.* Mientras que la lista de nudos elegibles no este vacía, efectuar los pasos 6-9.
6. *Seleccionar nudo a ser etiquetado.* Buscar la cola de nudos elegibles y seleccionar el nudo con la más alta prioridad, rompiendo lazos arbitrariamente. Dejemos que este nudo sea i .
7. *Actualizar prioridades y cola.* Eliminar el nudo i de la cola. Si i no es preactivo, ir al paso 8. De lo contrario, examinar cada nudo j el cual es adyacente a i y asignar $P_j \leftarrow P_j + W_1$. Si j es inactivo, insertar j dentro de la cola de nudos elegibles y asignarle un estado preactivo.
8. *Etiquetar siguiente nudo.* Etiquetar nudo i con su nuevo número y asignarle un estado postactivo.

9. *Actualizar prioridades y cola.* Examinar cada nudo j el cual sea adyacente al nudo i . Si j no es preactivo, no efectuar ninguna acción. De lo contrario, asignar $P_j \leftarrow P_j + W_1$, asignar a j un estado activo y examinar cada nudo k el cual es adyacente a j . Si el nudo k es activo ó preactivo, asignar $P_k \leftarrow P_k + W_1$. De lo contrario, si k es inactivo, asignar $P_k \leftarrow P_k + W_1$, insertar k dentro de la cola de nudos elegibles, y asignar k un estado preactivo.
10. *Salida.* Salir con nueva etiqueta de nudos.

La idea básica detrás del algoritmo es que, durante cada etapa del proceso de etiquetado, los nudos con pequeño grado actual y distancias grandes desde el nudo final son etiquetados primero. Seleccionando nudos con pequeño grado actual causa que el actual frente de nudos activos crezca por una mínima cantidad durante cada paso, mientras seleccionando nudos con distancias largas desde el nudo final procuran tomar la estructura global del grafo dentro de consideración. Los valores asignados a los pesos W_1 y W_2 en el paso 3 determinan la importancia de cada uno de estos criterios. Se mostrara que pesos para $W_1=2$ y $W_2=1$ dan etiquetados excelentes, y estos valores son usados para todos los resultados presentados.

Notar que si se seleccionan $W_1=1$ y $W_2=0$, el algoritmo anterior es similar a uno de los procedimientos propuestos por King.¹⁸ El comportamiento del esquema de King, a pesar de ser bueno para cierto tipos de problemas, puede ser algunas veces errado. Como fue anotado por Gibbs et al.,³⁹ esto es debido a la naturaleza local del criterio de etiquetamiento el cual ignora la estructura global del grafo.

El anterior esquema puede ser usado para generar etiquetados eficientes para nudos o elementos en mallas de elementos finitos. Para una estrategia de solución del perfil es el orden de los nudos el cual importa mas, y el etiquetado es completado. Para un algoritmo de solución frontal, sin embargo, es aun necesario determinar un etiquetado eficiente de elementos. Esto puede ser alcanzado por el etiquetamiento de los elementos en secuencia ascendente de sus (nuevos) más bajos nudos numerados.⁵⁵ Procesando los elementos en esta manera asegura que las ecuaciones sean eliminadas en un orden el cual es similar al dictado por las nuevas etiquetas de los nudos. Para mallas que comprenden de un simple tipo de elemento de orden alto, Sloan y Randolph⁵⁵ han notado que es necesario considerar solo los nudos vértices cuando sé re-etiquetan los elementos para un esquema de solución frontal. Esto sigue a la observación que un etiquetado óptimo para una malla de elementos de orden bajo es la misma como un etiquetado optimo para una malla equivalente de

elementos de orden alto. Desde que una malla de elementos de alto orden pueden tener un numero pequeño de nudos vértices, pero un número largo de nudos por lo general, esto conduce a economías considerables en la fase de re-etiquetado.

Capítulo 5

Aplicaciones

Para visualizar mejor cada uno de los pasos del proceso de generación de elementos, dos ejemplos comentados se muestran a continuación. El primero se refiere a la filtración bajo un tablestacado y el segundo a la torsión de una barra cuadrada.

Como complemento al segundo problema se muestra también un ejemplo de la eficiencia en la técnica de reenumeración de los nudos.

5.1 Estudio de la filtración bajo un tablestacado.

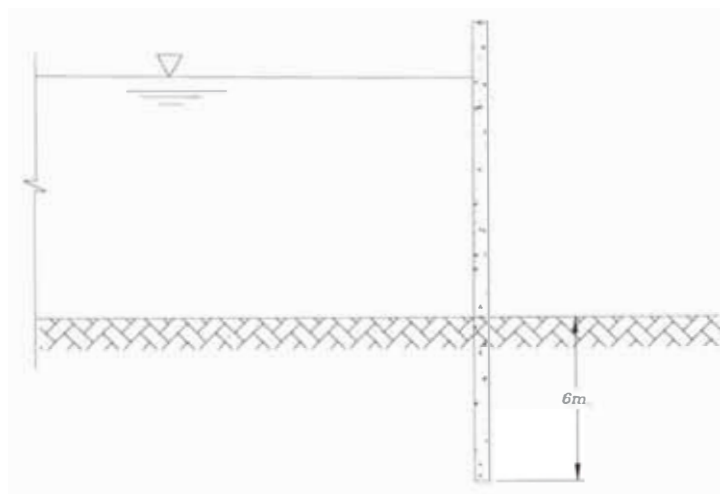


Figura 5.1

En este tipo de problemas de campo se determinan dos funciones; la función de corriente y la función potencial.

5.1.1 Función de corriente.

El problema fue modelado como se muestra en la figura 5.2, en el cual se indican también las condiciones de borde consideradas.

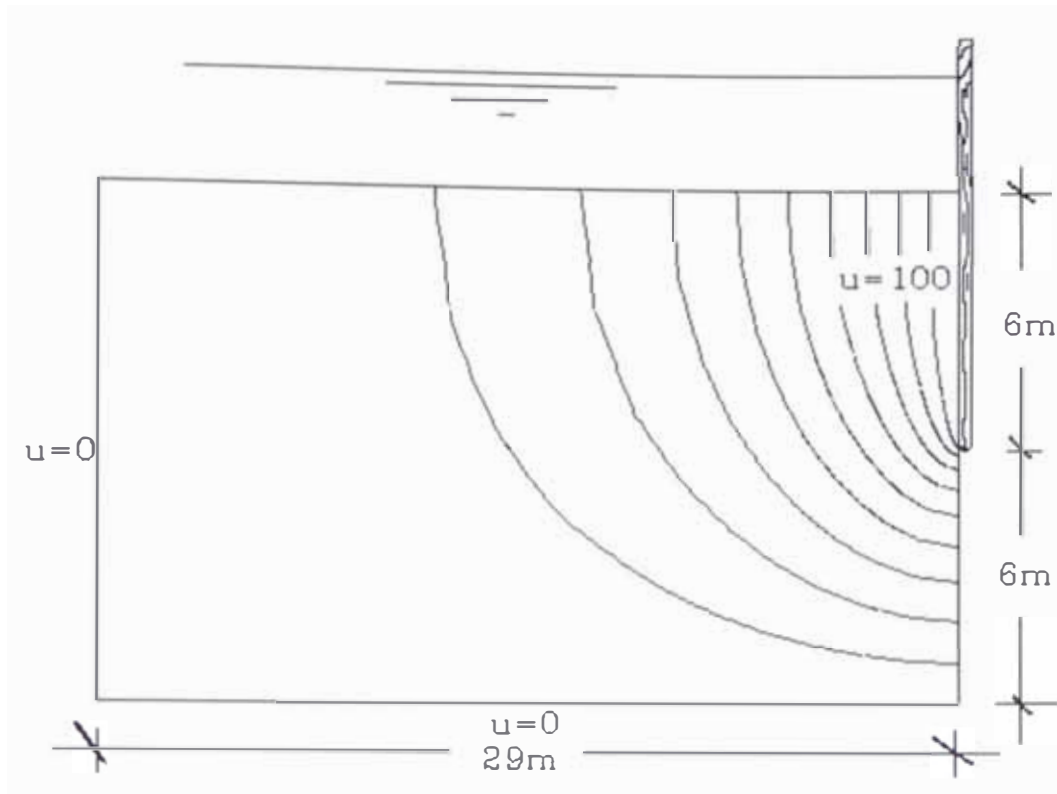


Figura 5.2

La malla inicial de elementos finitos fue generada mediante archivo de datos según el formato del programa H2eWin, una adaptación del programa H2e para el sistema operativo windows.

La segunda y tercera mallas fueron generadas automáticamente mediante la técnica de pavimentación utilizando para ello el programa Mesh2D desarrollado para este trabajo.

Para el análisis de cada una de los modelos se utilizó el programa H2eWin el cual incorpora la técnica de renumeración eficiente de nudos.

Los resultados obtenidos del error relativo en la norma de energía (η) para cada una de las mallas se muestran en la figura 5.3

Como se puede apreciar en ninguno de los casos se alcanza el 5% de error esperado. Esto se debe a que existe una singularidad en las inmediaciones del extremo de la tablestaca (exactamente en la zona en que existe una concentración mayor de elementos).

Para superar el problema originado por la presencia de la singularidad se ha resuelto el mismo problema empleando la ecuación 2.25 del capítulo 2. (Ver figuras 5.5(a), 5.5(b) y 5.5(c)).

Examinando los errores locales en cada elemento se puede observar que los errores en los elementos ubicados en las inmediaciones del extremo de la tablestaca mantienen errores locales en todas las mallas de alrededor del 30%. En cambio el resto de los elementos disminuyen sus errores locales bastante por debajo al 5%. Esto explica el hecho de que el error global haya disminuido.

Nota:

En los ejemplos desarrollados, la medida del error está expresada en norma de energía para lo cual se empleó la ecuación 2.6(c). El error relativo se calculó empleando la ecuación 2.10 y para la predicción del refinamiento se emplearon las ecuaciones 2.22 y 2.24. Los resultados del refinamiento utilizan esta malla como malla de base (ver figura 3.3) que es usada en la generación de la siguiente malla de elementos. El proceso termina al alcanzar el error permisible especificado.

5.1.2 Función potencial.

El modelo empleado es el mostrado en la figura 5.6 el cual indica también las condiciones de borde consideradas.

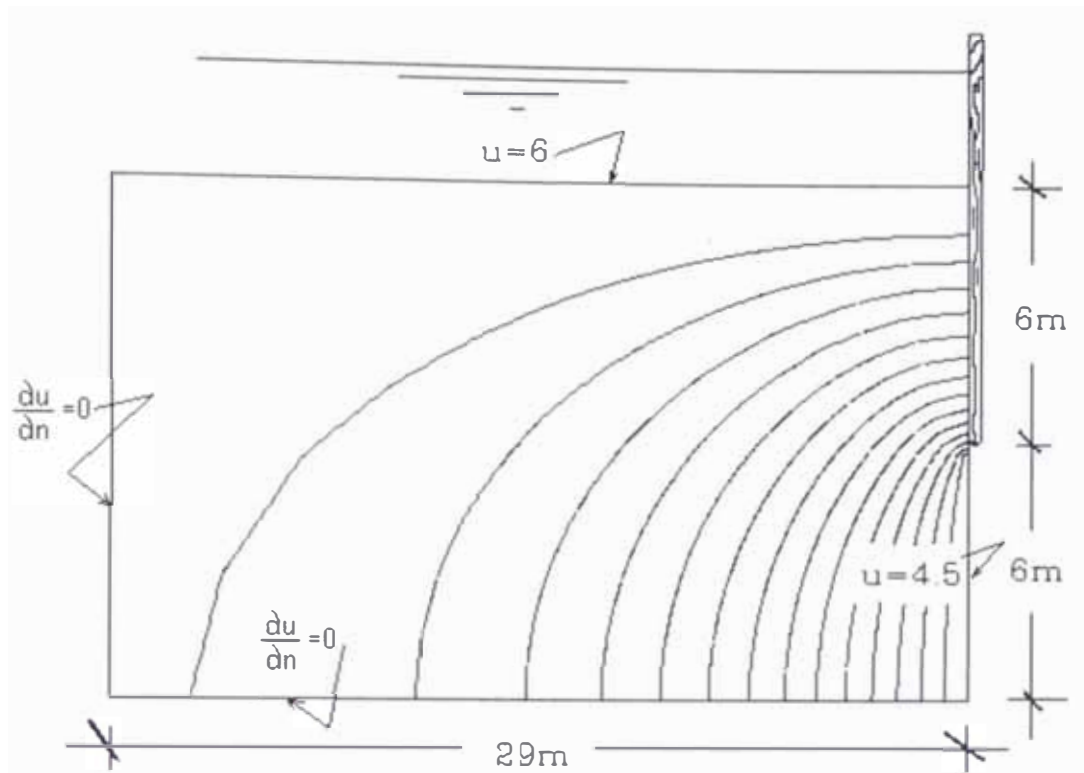


Figura 5.6

Este caso también se resolvió partiendo de una malla inicial definida mediante un archivo de datos según el formato empleado por el programa H2e. Las sucesivas mallas fueron generadas automáticamente usando el programa Mesh2D.

En el análisis efectuado con el programa h2eWin se incluye la rutina de reenumeración eficiente de los nudos.

Las etapas de generación y los resultados están resumidos en la figura 5.7

Como se puede apreciar también, los resultados no alcanzan el 5% de error esperado debido a la singularidad producida en el extremo de la tablestaca.

A continuación se grafica η (error relativo en la norma de energía) versus NGL (número de grados de libertad) para los casos de las figuras 5.3, 5.4, 5.5 y 5.7.

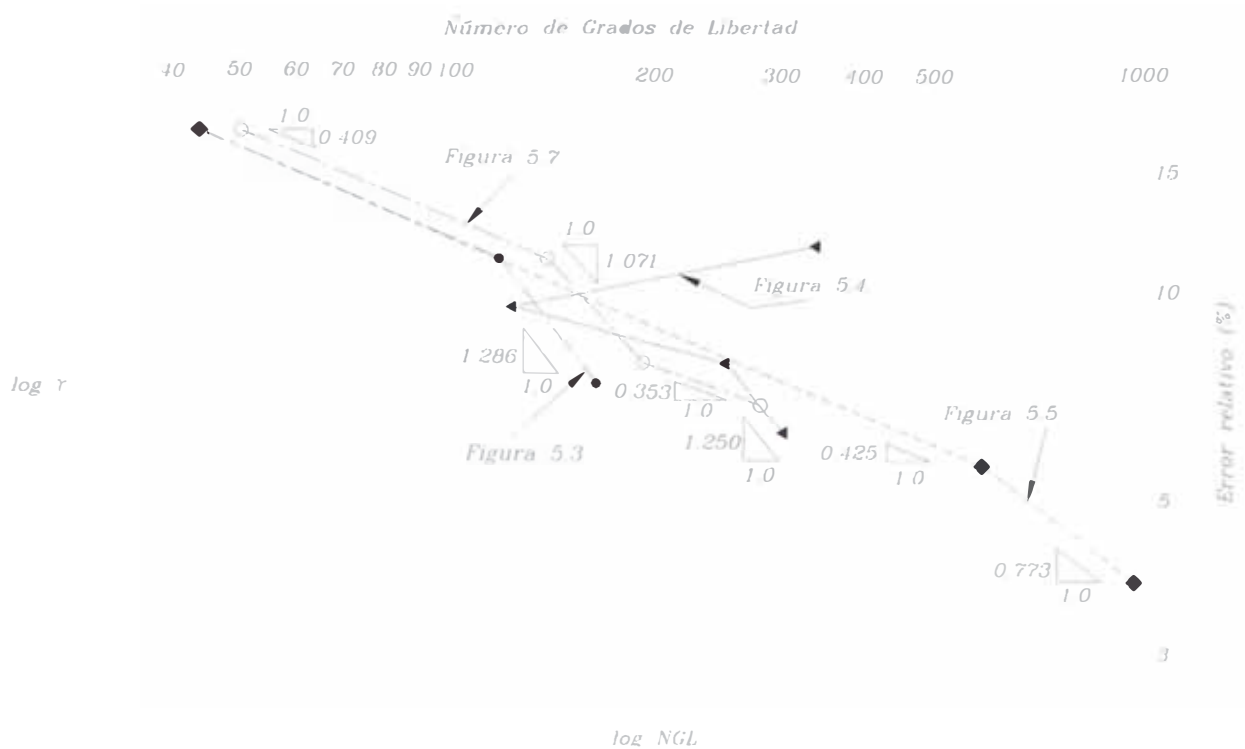


Figura 5.8

Es importante observar que las velocidades iniciales de convergencia en todos los casos, excepto el de la figura 5.4, son similares e inferiores a $p/2=0.5$ (Velocidad Máxima de convergencia).

En los casos de las figuras 5.3 y 5.4, que parten de distintas mallas iniciales, se observa que sus velocidades finales de convergencia se aproximan bastante.

En el caso de la figura 5.5, su velocidad final de convergencia es mayor a $p/2$.

En el caso de la figura 5.7, su velocidad final de convergencia es menor a $p/2$.

Se debe notar que partiendo de diferentes formulaciones (figuras 5.3 y 5.7) las velocidades de convergencia tienen una tendencia similar. El desfase inicial se debe a que parten de distintos número de grados de libertad.

5.2 Estudio de la torsión de una barra cuadrada.

En este ejemplo se analiza una barra de sección cuadrada sometida a una acción de torsión, la cual produce un giro relativo de sus extremos en una cantidad angular de 1 radián.

Como dato adicional se supone un módulo de corte del material $G=9466 \text{ Mpa}$.

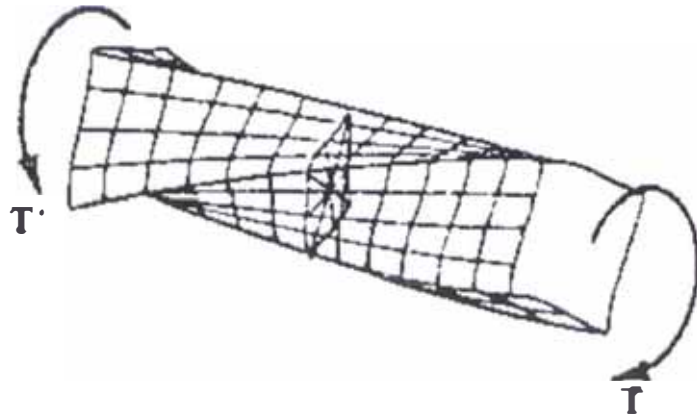


Figura 5.9

En todos los casos no se utilizó un archivo de datos inicial, la generación de la malla fue efectuada por el programa Mesh2D.

5.2.1 Caso 1: Análisis de un cuarto de la sección por consideraciones de simetría.

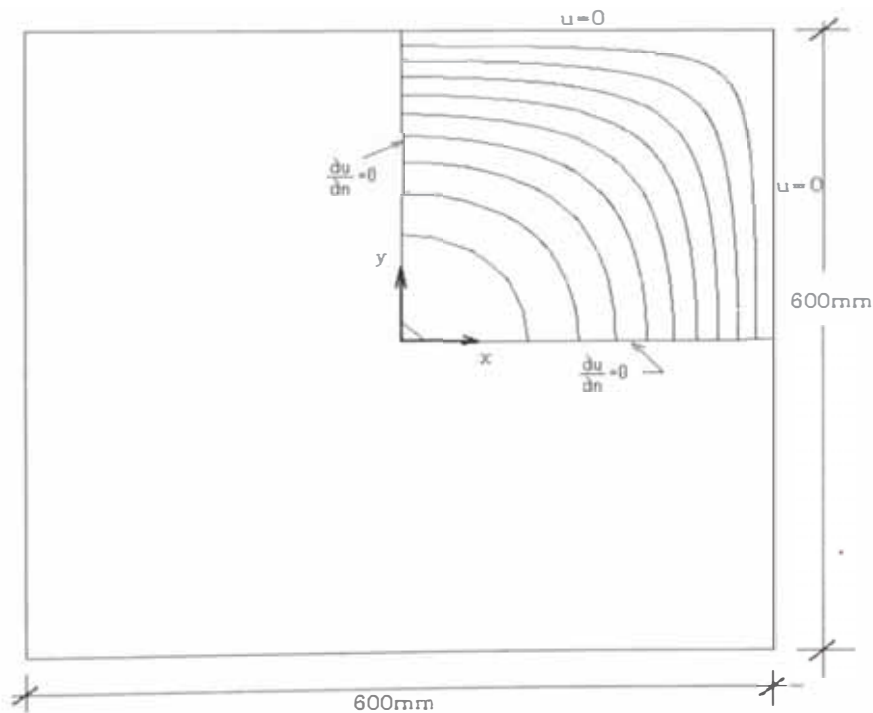
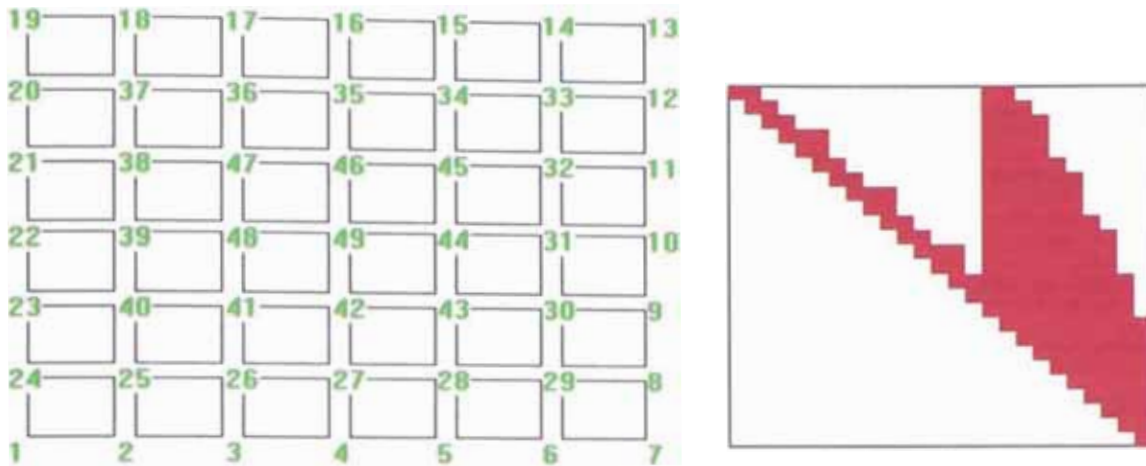


Figura 5.10

5.2.3 Eficiencia de la rutina de reenumeración.

Como ejemplo se ha considerado la malla 1 del caso 2. En la figura 5.15 se muestra la enumeración generada por el programa Mesh2D y el perfil y ancho de banda correspondiente a la matriz de rigidez.

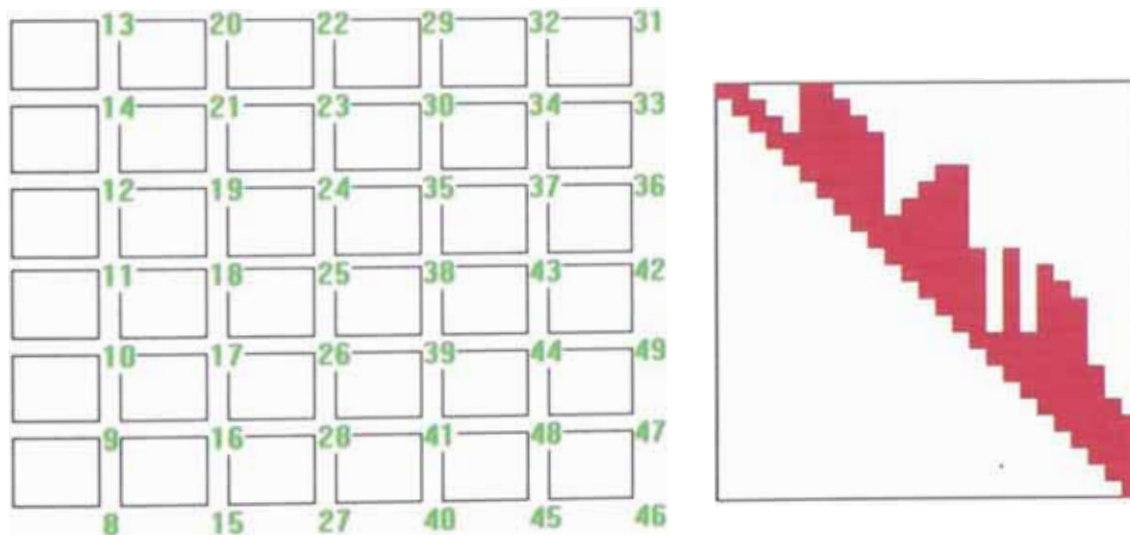


Perfil de la matriz de rigidez

NGL= 25
Posiciones de Memoria=175

Figura 5.15

En la figura 5.16 se muestra la enumeración generada por la rutina de optimización y su perfil y ancho de banda correspondiente.



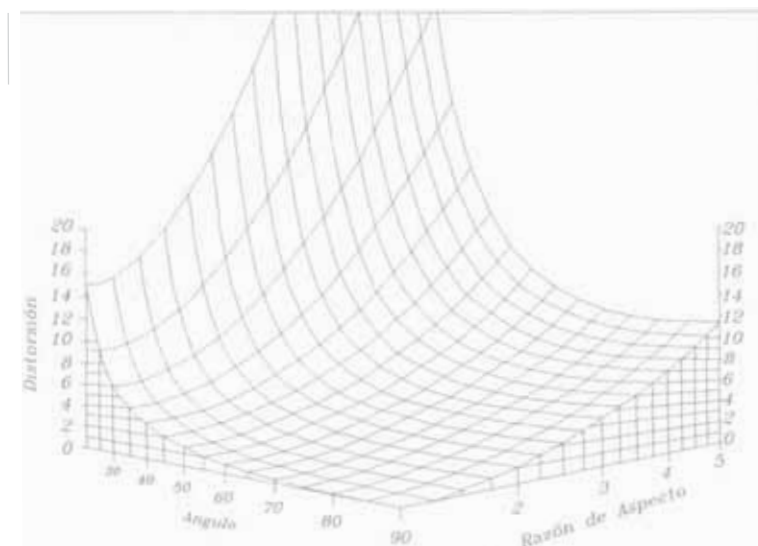
Perfil de la matriz de rigidez

NGL = 25
Posiciones de Memoria = 140

Figura 5.16

Conclusiones

1. La estimación del error mediante promediado ó “proyección” demuestra ser bastante eficiente. Sin embargo la solución tiende a ser deficiente para valores pares del polinomio p . Por lo tanto factores de corrección son necesarios para $p=2$, $p=4$, etc.
2. La velocidad de convergencia en el caso de encontrarse con problemas con una fuerte singularidad es lineal para cualquier grado de polinomio de interpolación que se use.
3. La técnica de Pavimentación demuestra ser eficiente en la generación automática de elementos cuadriláteros de alta calidad. Como lo demuestran los resultados obtenidos de la medida de la distorsión propuesta por Oddy et al⁵(Figura A), que en promedio se obtienen valores bastante buenos aun tratándose de geometrías complejas y transiciones extremas.



Superficie de Distorsión en Paralelogramos

Figura A

En la figura, la Razón de Aspecto viene a ser la razón de longitudes de los lados no paralelos del paralelogramo. El ángulo corresponde al ángulo agudo entre los lados no paralelos.

En las siguientes figuras⁵⁷ se indican los valores obtenidos para la distorsión de un elemento (D) y el promedio de la distorsión en la malla (\bar{D}).

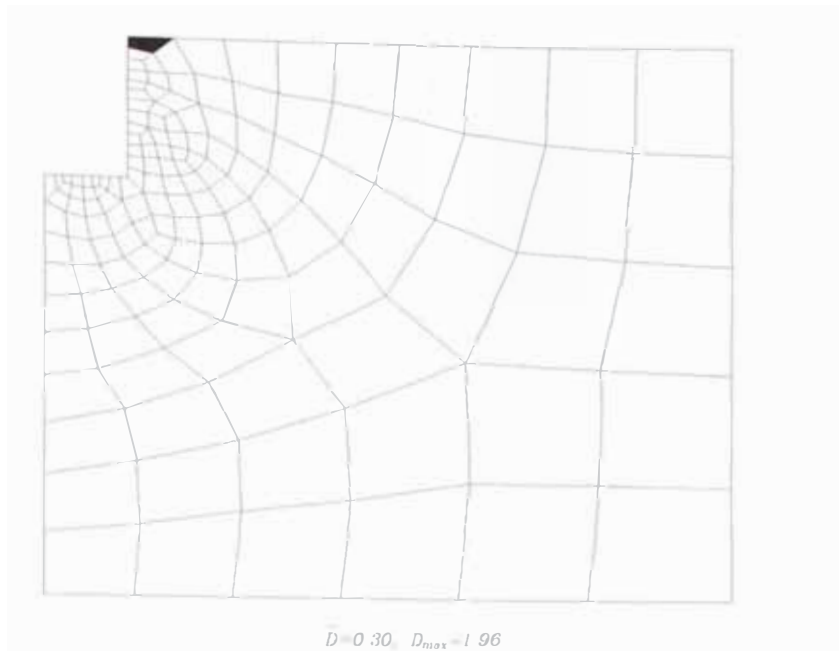


Figura E

4. La técnica de Pavimentación ha probado ser bastante poderosa con la combinación de estimadores de error para el análisis adaptivo iterativo. El uso de una función que define el tamaño del elemento requerido en cualquier punto dentro de la región ha mejorado la técnica.
5. La técnica de Pavimentación ha probado empíricamente ser robusta y rápida para casos de geometrías complejas y transiciones muy drásticas (Figura G). Sin embargo la técnica falla ó se interrumpe cuando se encuentran transiciones imposibles sobre un área muy restringida (Figura F). Sin embargo el problema puede ser resuelto si se permiten efectuar ajustes en las fronteras permanentes (inserción o eliminación de nudos).

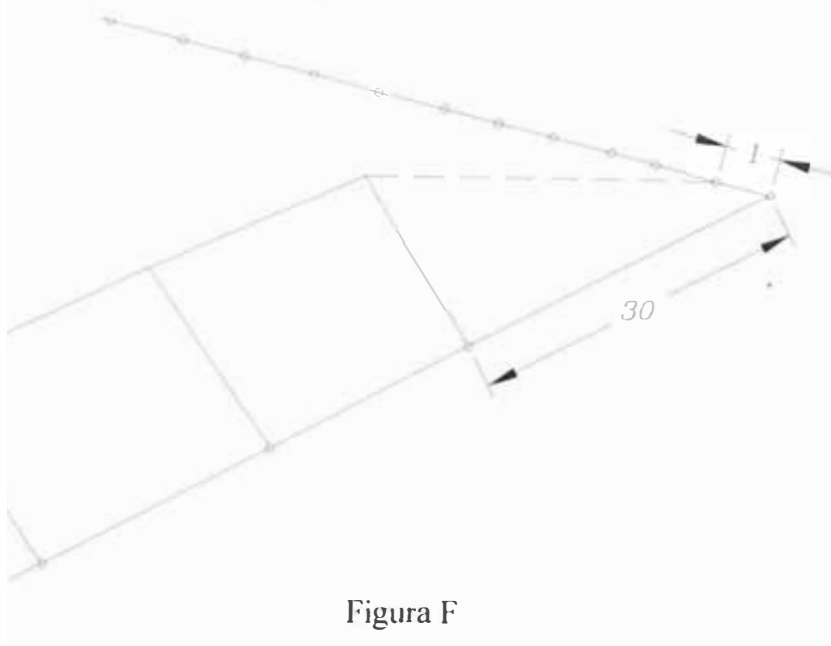


Figura F

Bibliografía

- 1) A. George, "Computer implementation of the finite element method", *Ph.D. Thesis*, Stanford Univ., 1971.
- 2) A. Jennings, *Matrix Computation for Engineers and Scientists*, Wiley, New York, 1977.
- 3) A. Razzaque, "Automatic reduction of frontwidth for finite element analysis", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 15, 1315-1324, 1980.
- 4) A. George y J.W.H. Liu, "An implementation of a pseudo-peripheral node-finder," *ACM Trans. Math. Software*, 5, 284-295 (1979)
- 5) A.Oddy J. Goldak, M. McDill y M. Bibby, "A distortion metric for isoparametric finite elements." *Trans. CSME*. No. 38-CSME-32, Accession No. 2161 (1988)
- 6) Argyris, J. H. y P. C. Patton, "Computer Oriented Research in a University Milieu," *Appl. Mech. Rev.*, 19, No. 12, Dec., 1966, pp. 1029-1039.
- 7) Argyris, J. y S. Kelsey, *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butter-worth Scientific Publications, London. 1960.
- 8) B. Joe, "Delaunay triangular meshes in convex poligons," *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 7, 514-539 (1986)
- 9) B. M. Irons, "A frontal solution program for finite element analysis", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2, 5-32, 1970.
- 10) B.A. Szabo, "Estimation and control of error based on p-convergence," Chapter 3, *Accuracy Estimates and Adaptive Refinement in Finite Element Computations*, pp. 61-73, Wiley, 1986
- 11) Castigliano, A., *Theorie de l'equilibre des Systemes Elastiques*, Turin, 1879 (English Translation by Dover Publications).
- 12) Courant, R., "Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration," *Bull. Am. Math. Soc.*, 49, pp. 1-43, 1943.
- 13) Cross, H., "Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments," *Trans. ASCE*, 96, 1932, pp. 1-10.
- 14) E. Cuthill y J.McKee, "Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices," *Proc. ACM Nat. Conf.*, Association of Computing Machinery, New York (1969)
- 15) G. C. Everstine, "A comparison of three resequencing algorithms for the reduction of matrix profile and wavefront", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 14, 837-853, 1979.
- 16) H. L. Pina, "An algorithm for frontwidth reduction", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 17, 1539-1545, 1981.

- 17) Hrenikoff, A., "Solution of Problems in Elasticity by the Framework Method," *J. Appl. Mech.*, 8, pp. 169-175, 1941.
- 18) I.P. King, "An automatic reordering scheme for simultaneous equations derived from network systems", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2, 523-533, 1970.
- 19) J. A. Talbert y A. R. Parkinson, "Development of an automatic, two-dimensional finite element mesh generator using quadrilateral elements and Bezier curve boundary definition," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 29, 1551-1567 (1990)
- 20) J. E. Akin y R.M. Pardue, "Element resequencing for frontal solutions", *The Mathematics of Finite Elements and Applications (MAFELAP)* (Ed. J.R. Whiteman), Academic Press, London, pp. 535-541, 1975.
- 21) J. G. Lewis, "Implementation of the Gibbs-Poole-Stockmeyer and Gibbs-King algorithms", *ACM Trans. Math. Software*, 8, 180-189, 1982.
- 22) J. Peraire, J. Peiro, L. Formaggia K. Morgan and O.C. Zienkiewicz, "Finite element Euler computations in three dimensions," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 26, 2135-2159 (1988)
- 23) J. Wu, J.Z. Zhu, O.C. Zienkiewicz, "Error estimation and adaptivity in Navier-Stokes incompressible flows," *Comp. Mech.*, 6, 259-270 (1990)
- 24) J.C.Cavendish, "Automatic triangulation of arbitrary planar domains for the finite element method," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 8, 679-697 (1974)
- 25) J.C.Cavendish, "An approach to automatic three dimensional finite element mesh generation," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 21, 329-347 (1985)
- 26) J.F. Thompson, F.C.Thomas y C.W.Mastin, "Automatic numerical generation of body fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies," *J.Comp.Phys.*, 15, 299-319 (1974)
- 27) J.Peraire, M.Vahdati, K.Morgan and O.C.Zienkiewicz, "Adaptive remeshing for compressible flow computations," *J. Comp. Phys.*, 72, 449-466 (1987)
- 28) J.Z. Zhu, O.C. Zienkiewicz, "Adaptive techniques in finite element method," *Comm. App. Num. Math.*, 4, 197-204, 1988.
- 29) J.Z. Zhu, O.C. Zienkiewicz y A.W. Craig, "Adaptive techniques in finite element analysis," *Proc. NUMETA*, Conference S3/1 to S3/10, Martinus Nijhoff Publ., 1987.
- 30) J.Z.Zhu, O.C.Zienkiewicz, E.Hinton and J.Wu , "A new approach to the development of automatic quadrilateral mesh generation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 32, 849-866 (1991)

- 31) M. L. C. Sluite y D.C. Hansen, "A general purpose automatic mesh generation for shell and solid finite elements," *Proc. 2nd International Computer Engineering Conference, Computers in Engineering, ASME Computer Engineering Division*, 1982, pp. 29-34.
- 32) M.A. Yerry and M.S. Shepard, "Automatic three-dimensional mesh generation by the modified-octree technique," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 20, 1965-1990 (1984)
- 33) M.B. Stephenson y T.D. Blacker, "Using conjoint meshing primitives to generate quadrilateral and hexahedral elements in irregular regions," *Proc. ASME Computations in Engineering Conference*, 1989
- 34) Maney, G. B., *Studies in Engineering*-No. 1, U. Of Minnesota, Minneapolis, Minn., 1915.
- 35) Maxwell, J.C. "On the Calculations of the Equilibrium and Stiffness of Frames," *Phil. Mag.* (4), 27, 294, 1864.
- 36) McHenry, D., "A Lattice Analogy for the Solution of Plane Stress Problems" *J. Inst. Civil Eng.*, 21, pp. 59-82, 1943.
- 37) Mohr, O., "Beitrag zur Theorie der Holz-und Eisen Konstrucktionen," *Zeit. Des Architekten und Ingenieur Verienes zu Hannover*, 1868.
- 38) N.E. Gibss, "A hybrid profile reduction algorithm," *ACM Trans. Math. Software*, 2, 378-387 (1976)
- 39) N.E. Gibss, W.G. Poole y P.K. Stockmeyer "A comparison of several bandwidth and profile reduction algorithms," *ACM Trans. Math. Software*, 2, 322-330 (1976)
- 40) N.E. Gibss. W.G. Poole and P.K. Stockmeyer, "An Algorithm for reducing the profile and bandwidth of a sparse matrix," *SIAM J. Numer. Anal.*, 13, 236-250 (1976)
- 41) O.C. Zienkiewicz, *El método de los elementos finitos*, McGraw-Hill Book Co., London, 1971. Capítulo 14.
- 42) O.C. Zienkiewicz and D.V Phillips, "An automatic mesh generation scheme for plane and curved surfaces by isoparametric co-ordinates," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 3, 519-528 (1971)
- 43) O.C.Zienkiewicz y J.Z.Zhu, "Adaptivity and Mesh Generation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 32, 783-810 (1991)
- 44) O.C.Zienkiewicks y J. Z. Zhu, "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 24, 337-357 (1987)
- 45) Ostenfeld, A., *Die Deformationsmethode*, Springer-Verlag OHG, Berlin, 1926.

- 46) P.L. Baehmann, S.L. Wittchen, M.S. Shepard, K.R. Grice and M.A. Yerry, "Robust, geometrically based, automatic two-dimensional mesh generation," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 24, 1043-1078 (1987)
- 47) R. Levy, "Resequencing of the structural stiffness matrix to improve computational efficiency", *Jet Propulsion Lab. Quart. Tech. Rec.*, 1, 61-70, 1971.
- 48) R.J. Collins, "Bandwidth reduction by automatic renumbering", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 6, 345-256, 1973.
- 49) R.L. Taylor, *The Finite Element Method* (Ed. Zienkiewicz. O. C.), ch. 24, McGraw-Hill, London, 1977.
- 50) Richard H. Gallaguer, *Finite Element Analysis – Fundamentals*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey , 1975. Capítulo 1.
- 51) Rivara, M. C. "A grid generator based on 4-triangles conforming mesh-refinement algorithms," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, 1343-1354 (1987).
- 52) Rivara, M. C. "Algorithms for refining triangular grids suitable for adaptive and multigrid techniques," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, 745-756 (1984).
- 53) S.W.Sloan, "An Algorithm for Profile and Wavefront Reduction of Sparse Matrices," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, 239-251 (1986)
- 54) S.H.Lo, "A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 21, 1403-1426 (1985)
- 55) S.W. Sloan y M.F. Randolph, "Automatic element reordering for finite element analysis with frontal solution schemes," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 19, 1153-1181 (1983)
- 56) T. D. Blacke, J. L. Mitchiner, L. R. Phillips y Y. T. Lin, "Knowledge system approach to automated two dimensional quadrilateral mesh generation," *Proc. ASME Int. Comput. Eng. Conf.*, Vol. 3, 1988, pp. 153-162
- 57) Ted D. Blacker, Michael B. Stephenson, "Paving: A new approach to automated quadrilateral mesh generation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, 811-847 (1991)
- 58) Timoshenko, S., *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill Book Co., New York, N.Y., 1953.
- 59) Turner, M., R. Clough, H. Martin, y L. Topp, "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures," *J. Aero. Sci.*, 23, No. 9, Sept., 1956, pp. 805-823.

- 60) W. J. Gordon y C.A. Hall, "Construction of curvilinear co-ordinate systems and applications to mesh generation," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 7, 461-477 (1973)
- 61) William H. Frey, "Selective Refinement: A new strategy for automatic node placement in graded triangular meshes," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, 2183-2200 (1987)
- 62) Zienkiewicz, O. C., "The Finite Element Method: From Intuition to Generality," *Appl. Mech. Rev.*, 23, No. 23, Mar., 1970, pp. 249-259.