

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL

SECCION DE POST-GRADO



OPTIMIZACION DE ESTRUCTURAS APORTICADAS DE
CONCRETO ARMADO

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
CON MENCIÓN EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL

ING. SEBASTIAN JAIME ROMANI LOAYZA

LIMA - PERU

2002

OPTIMIZACIÓN DE ESTRUCTURAS APORTICADAS DE CONCRETO ARMADO

INDICE

	Pág.
Resumen	
Resumen en Ingles (Abstract)	ii
Objetivos	iii
1. INTRODUCCIÓN.	1
2. MARCO TEORICO.	3
2.1. Algunos Conceptos y Técnicas de Optimización.	3
2.1.1. Conceptos Básicos	3
2.1.2. Técnicas de Optimización.	4
2.2. Estado del arte de la optimización de estructuras aporticadas de concreto armado.	8
2.3. Resumen.	14
3. CONSIDERACIONES DEL ANALISIS Y DISEÑO ESTRUCTURAL.	15
3.1. Modelo Estructural tridimensional	15
3.2. Análisis por Combinación modal Espectral	22
3.3. Resumen	25
4. FORMULACION DEL PROBLEMA	26
4.1. Función Objetivo	27
4.2. Formulación de las Restricciones de Diseño	29
4.3. Resumen	35

5. PROCEDIMIENTO DE OPTIMIZACION	36
5.1. Programación Secuencial Cuadrática	37
5.2. Adecuación del problema de optimización estructural	42
5.2.1. Variables de Diseño	42
5.2.2. Función Objeto	44
5.2.3. Gradiente de las Restricciones	45
5.3. Resumen	55
6. IMPLEMENTACION COMPUTACIONAL Y ANALISIS DE RESULTADOS	56
6.1. Implementación Computacional.	56
6.2. Análisis de Resultados.	61
6.3. Resumen.	76
7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	77
7.1. Conclusiones	77
7.2. Recomendaciones y Líneas de Investigación Futura	79
BIBLIOGRAFIA	80
APENDICE	83
A. Código fuente del programa de cómputo ADORC3D.	83

RESUMEN

La presente tesis propone un procedimiento para obtener el diseño de estructuras aporricadas de mínimo costo. Se parte como consideración que el costo de la estructura está relacionada directamente con la cantidad de concreto, acero de refuerzo y encofrado. El diseño de mínimo costo u óptimo de una estructura está sujeto a restricciones relacionadas principalmente con aspectos estructurales, dadas por el análisis estructural, los códigos de diseño correspondiente (Norma de diseño sismorresistente peruana E.030 y el código ACI_99) así como la buena práctica constructiva. La técnica numerica utilizada en el proceso de optimización es la denominada programación secuencial cuadrática.

El procedimiento propuesto es aplicable a estructuras planas y tridimensionales sujetas a cargas muertas, vivas y de sismo. Para estructuras tridimensionales se da la opción de tener un análisis sísmico por cargas estáticas equivalentes o por combinación modal espectral. Para el caso de una estructura plana se considera la distribución óptima de los vanos con la posibilidad de considerar una optimización topológica, esto es la eliminación de elementos de columna superfluos.

ABSTRACT

This thesis proposes a procedure to obtain the optimum design of frame structures. We have as consideration that the cost of the structure is related with the quantity of concrete, reinforcement steel and formwork. The optimum design or in another words the frame structure of minimum cost, it is mainly subject to restrictions with structural aspects, given by the structural analysis, the design codes (Peruvian design code E.030 and the code ACI_99) as well as the good constructive practice. The numerical technique used in the process of optimization is the denominated sequential quadratic programming.

The proposed procedure is applicable to plane and three-dimensional structures subject to dead, live and seismic lateral loads. For three-dimensional structures the option is given of having a seismic analysis by equivalent static loads or by spectral modal combination. In the case of a plane structure it is considered the good bays distribution with the possibility of considering a topology optimization, this is the elimination of superfluous column elements.

OBJETIVOS

Diseñar una estructura aperturada de concreto armado buscando que el diseño elegido sea aquel de menor costo. En ese propósito se propondrá un modelo de optimización estructural.

Desarrollar las expresiones matemáticas necesarias para el proceso de optimización, buscando que éstas sean de fácil implementación computacional.

Implementar un programa de cómputo utilizando los procedimientos desarrollados en la presente tesis.

Buscar los parámetros más influyentes en el costo de la estructura.

CAPITULO 01

INTRODUCCION

La presente investigación nace como consecuencia de encontrar un diseño posible de una estructura aporticada de concreto armado el cual sea de entre otros diseños el de costo más económico. En una estructura aporticada de concreto armado el costo está relacionada directamente con la cantidad de concreto, acero de refuerzo y encofrado, entonces nacen las siguientes preguntas: ¿cuáles deberán ser las dimensiones adecuadas de los elementos de la estructura y las proporciones de acero para que el diseño estructural sea económico es decir óptimo? y ¿cuál será el procedimiento adecuado para conseguir dicho propósito?. La presente tesis establece un procedimiento con el cual se pretende responder esas preguntas.

El propósito de esta tesis es establecer un procedimiento de optimización de estructuras aporticadas de concreto armado, y de dar al ingeniero una herramienta de cómputo que le ayude en la búsqueda de un diseño estructural conveniente.

Es aproximadamente tres décadas atrás que investigadores han formulado y propuesto procedimientos para la optimización estructural en concreto armado, inicialmente varias de esas investigaciones trataron sobre optimización de vigas continuas, vigas preesforzadas y losas armadas, otros investigadores se preocuparon en la optimización de columnas de concreto, en los años ochenta se tiene investigaciones sobre estructuras aporticadas planas de concreto armado y es recién en los noventa que aparecen investigaciones en la optimización de estructuras aporticadas tridimensionales de concreto armado.

La presente tesis esta dividida en siete capítulos. En el segundo capítulo de la tesis se expone el marco teórico. En el tercer capítulo hacemos una breve descripción de las consideraciones que se han tenido para el análisis y diseño estructural. En un cuarto capítulo se hace la formulación del problema de investigación. El quinto capítulo, que es básicamente la parte esencial de la presente tesis, discutimos el procedimiento para optimización estructural. El sexto capítulo se refiere a los resultados obtenidos desarrollando una serie de ejemplos para finalmente luego en el último capítulo presentar nuestras conclusiones.

Los frutos principales de la presente tesis se encuentran en el desarrollo de dos programas de cómputo denominados ADORC y ADORC3D. El primero implementado para optimizar estructuras planas aporticadas de concreto armado sujeto a cargas estáticas con todas las combinaciones de carga y además considera el problema de la mejor distribución de los vanos. El segundo implementado para optimizar estructuras aporticadas tridimensionales de concreto armado sujeto cargas estáticas, está adecuado para considerar en el proceso de optimización un análisis sísmico dinámico por combinación modal y considera el diseño biaxial de columnas.

CAPITULO 02

MARCO TEORICO

2.1 ALGUNOS CONCEPTOS Y TÉCNICAS DE OPTIMIZACIÓN.

2.1.1 Conceptos Básicos

La optimización es un procedimiento que trata de encontrar valores que deben tener ciertas variables las cuales minimizan o maximizan una función, además esas variables deben satisfacer ciertas condiciones.

La función que queremos maximizar o minimizar, se denomina función objetivo. Para el caso en estudio nuestra función objetivo debe representar el costo de la estructura.

Se define como variables aquellos parámetros que afectan directamente el valor de nuestra función objetivo; por ejemplo las dimensiones de los elementos en una estructura (variables de diseño). Muchas de las variables están sujetas a ciertas condiciones o relaciones y que se denominan restricciones; por ejemplo: todos los valores de las variables deben ser positivas, en el caso de diseño estructural se tiene que el momento resistente a la flexión en una viga debe ser mayor que el momento actuante en dicha sección, etc.

La forma de expresar matemáticamente un problema de optimización es:

$$\begin{array}{l} \text{minimizar una función:} \quad \min f(x) \\ \text{sujeto a restricciones:} \quad \begin{array}{l} g(x) > 0 \\ h(x) = 0 \end{array} \quad \Bigg| \quad (2.1) \end{array}$$

donde "x", representa las variables de diseño.

2.1.2 Técnicas De Optimización

Los problemas de optimización en su mayoría dependen de muchas variables y muchas restricciones; para encontrar las posibles soluciones en ese espacio multidimensional se debe recurrir a los métodos numéricos denominados programación matemática (optimización numérica).

El campo de la optimización es amplio tal es así que encontramos sub-áreas y dentro de cada una de ellas muchos algoritmos desarrollados, a continuación describiremos alguna de esas áreas.

Optimización Discreta.- las variables en este tipo de problemas son discretas, por ejemplo encontrar el óptimo de una función escogiendo el valor de las variables entre un número finito de posibles valores de esas variables o tal vez si se tienen variables enteras.

Optimización Continua.- las variables en este tipo de problemas son continuas dentro de un rango, por tanto los posibles valores de las variables son infinitas.

Optimización Sin Restricciones.- en estos problemas sólo se tiene la función objeto sin ninguna restricción.

Optimización Con Restricciones.- problemas en los que se tienen las funciones de restricción. Dentro de esas restricciones tenemos aquellas cuyas relaciones de las variables son lineales y otras son no lineales.

Podemos observar en la figura 2.1 un diagrama que nos muestra como están distribuidos los campos de optimización.

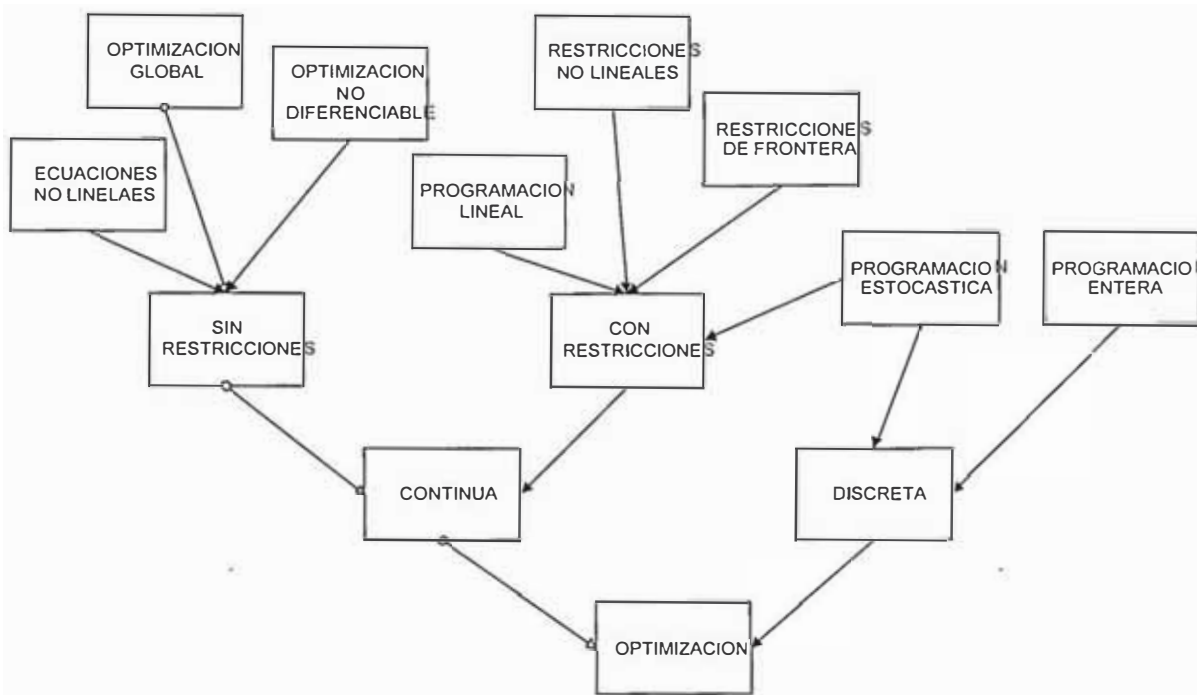


FIG. 2.1 CAMPOS DE OPTIMIZACION

Debemos de observar que en los problemas de optimización de ingeniería las funciones son en su mayoría relaciones no lineales de sus variables por lo que estamos dentro de lo que se denomina programación no-lineal (NLP). En cuanto a la programación lineal (LP) las funciones son relaciones lineales de sus variables, en este campo existen procesos de optimización muy usados y populares, son eficientes y pueden ser usados como cajas negras, pero no los podemos usar directamente para nuestros problemas de optimización estructural.

La Programación Secuencial Lineal (SLP).-

Muchos problemas de programación no lineal, se pueden resolver usando la programación lineal (v.gr. simplex) en forma iterativa; el procedimiento consiste en que todas nuestras expresiones no lineales las linearizamos para un punto particular de las variables, resolvemos el problema de optimización lineal y luego encontrando los nuevos valores de las variables (nuevo punto); en el nuevo punto volvemos a repetir el proceso hasta la convergencia.

En la SLP se debe de restringir el tamaño del cambio de las variables entre los pasos secuenciales, estas restricciones son por lo común llamadas límites de movimiento.

La SLP es un procedimiento simple para resolver problemas de optimización restringida, sin embargo hay limitaciones muy importantes que deben ser muy bien entendidas:

El método no puede ser usada como una caja negra para los problemas de ingeniería. La elección de los límites de movimiento es un proceso de prueba y error y puede ser mejorado en modo iterativo. Los límites de movimiento pueden ser muy restrictivos, resultando sin solución el subproblema de programación no-lineal, o ellos pueden ser muy largos, resultando en oscilaciones en los puntos de diseño.

El método es no convergente debido al uso de una función no descendente.

El método puede oscilar entre dos puntos si la solución óptima para el problema de optimización no lineal no es un vértice (intersección de restricciones).

Programación Secuencial Cuadrática [SQP].-

La idea de la SQP es básicamente reemplazar la función objetivo no lineal por una aproximación cuadrática, y las restricciones por una aproximación lineal.

Sea la ecuación 2.1 el problema de optimización, se define la función lagrangiana como sigue:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x) \quad (2.2)$$

La optimización se transforma en la solución repetitiva de un problema de programación cuadrática (QP) la cual es:

$$\min_p L(x + p) \cong p \nabla f(x) + p' \nabla^2 L p \quad (2.3)$$

$$\text{sujeto a: } g(x + p) \cong g(x) + p' \nabla g(x) \geq 0 \quad (2.4)$$

Los valores “ p ”, definen la variación de las variables es decir $x_{k+1} = x_k + p$. Para el subproblema de programación cuadrática (QP) existen elaborados diversos algoritmos; una de las dificultades que se tiene en la SQP

es el cálculo de la matriz $Q = \nabla^2 L$ (hessiano) pues implica la evaluación de las segundas derivadas de la función lagrangiana respecto a todas las variables, lo cual no es sencillo.

Asumamos que se tiene resuelto el problema cuadrático, por tanto se ha calculado los valores de “p”, entonces se calculan las nuevas aproximaciones $x_{k+1} = x_x + p$, esta aproximación es un mejor valor de “x” que se acerca al óptimo, luego se repite el proceso hasta la convergencia.

Detalle de este método se expone en el capítulo 5.

Procedimientos de Criterio Óptimo.-

Los métodos de Criterio Óptimo (OC), y los métodos de programación matemática tienen los mismos objetivos pero ellos difieren en el paso de rediseño. Mientras que en los métodos matemáticos la función objeto es minimizada directamente por varios algoritmos numéricos, en el método OC se define un criterio a priori y la premisa es que cuando este criterio es satisfecho el óptimo es encontrado. La aplicación de los métodos de OC involucran la deducción de un criterio apropiado para las condiciones de diseño especializado y establecen un procedimiento iterativo para la mejora del diseño final. Basado en la elección del criterio, los métodos de OC pueden ser clasificados como sigue:

- a) Físicos (o intuitivos) métodos de OC, en el cual las relaciones de recurrencia explícita para el diseño son derivadas, basados en las expresiones aproximadas de las restricciones y en términos de las variables de diseño. En algunos casos estos métodos muestran pobre convergencia y tienden a ser inestables. Sin embargo la eficiencia (i.e. el número de análisis requeridos) es usualmente bueno e independiente del tamaño del problema. La técnica de “diseño totalmente esforzado” es probablemente la más sobresaliente de los métodos OC, y ha motivado mucho interés en esta área.
- b) Matemáticos (o rigurosos) algoritmos OC, basado en la condición necesaria del óptimo Kuhn-Tucker. Estas ecuaciones son no lineales las cuales pueden ser resueltas iterativamente. Un problema en usar este procedimiento es identificar el conjunto de restricciones activas en el óptimo a priori.

2.2 ESTADO DEL ARTE DE LA OPTIMIZACIÓN DE ESTRUCTURAS APORTICADAS DE CONCRETO ARMADO.

La optimización de estructuras de concreto armado tiene como uno de los primeros iniciadores a Uri Kirsch (1972), él presenta el diseño de costo mínimo de una viga presforzada continua de dos tramos sujeta a restricciones de esfuerzos, fuerza pretensora y ubicación del tendón, el problema de optimización pertenece a un caso no lineal, por lo que el autor linealiza las expresiones y usa un procedimiento de programación lineal.

En la publicación “Cost Optimization of Concrete Structures” hecha por Kamal C. Sarma y Hojjat Adeli (1998), presentan una revisión de la gran mayoría de las publicaciones sobre optimización de estructuras de concreto hechas hasta ese año, la mayoría de esas publicaciones se refieren a la optimización de vigas continuas de concreto armado, vigas presforzadas y losas armadas, también se tienen publicaciones pero muy pocas sobre columnas de concreto armado. Nuestro interés en especial es por las estructuras aporticadas de concreto armado por lo que a continuación detallamos en letra cursiva la revisión hecha por estos autores respecto a la optimización de estructuras aporticadas.

Andam y Knapton (1980) discute el costo de diseño mínimo de un portal prefabricado de CA pero no presenta mucho detalle. Krishnamoorthy y Mosi (1981) presenta optimización en costo de un estructuras aporticadas planas con secciones rectangulares de los elementos usando una técnica de minimización secuencial no restringida (SUMT), ellos consideran relaciones constitutivas no lineales pero no con un código de diseño actual. Su función costo incluye sólo el costo del concreto, acero de refuerzo y encofrado. Ellos presentan ejemplos de uno a seis pisos.

Huanchum an Zhen (1985) presenta un costo de diseño mínimo aproximado de dos niveles para pórticos planos de CA de acuerdo al código de diseño chino. En el primer nivel ellos tratan de encontrar la estructura más flexible satisfaciendo restricciones globales tal como la distorsión lateral, usando la técnica la programación secuencial lineal. En

el segundo nivel el costo de la estructura es minimizada considerando las condiciones locales para cada miembro de la estructura y usando un método de búsqueda discreta para el ancho y peralte de una sección. La función costo incluye el costo de material para vigas y columnas solamente. Choi y Kwak (1990) minimizan los costos de vigas y columnas rectangulares y de pórticos de concreto armado usando un método de búsqueda directa para seleccionar una apropiada sección desde algunas secciones predeterminadas discretas basado en el código (ACI-1977) y código coreano, su función costo incluye los costo del material del concreto, acero y encofrado.

Spires y Arora (1990) discute el diseño óptimo de estructuras tubulares aporticadas altas de CA, con doble simetría en el plano basada en el código (ACI-1983) usando un procedimiento de programación secuencial cuadrática. Sin embargo ellos reducen la doble simetría de la estructura dentro de un pórtico plano equivalente usando un procedimiento de elementos finitos aproximado propuesto por Khan (1974). Su función costo incluye los costos del material concreto, acero y encofrado para vigas y columnas. Ellos también consideran las restricciones de frecuencia para limitar las fuerzas de viento y sismo. Ellos presentan ejemplos para pórticos planos de cinco y cuarenta pisos.

Dinno y Mekha (1993) discuten el diseño de mínimo costo de estructuras de uno y dos pisos de CA, basado en el código (ACI 1983) usando una relación inelástica trilineal del momento curvatura para vigas y columnas y (SUMT). Ellos consideran los costos del material concreto, acero y encofrado. Ellos concluyen que los diseños óptimos usando análisis inelástico resulta un diseño algo más económico.

Moharrami y Grierson (1993) presentan el diseño de costo mínimo de estructuras aporticadas de CA sujeto a cargas verticales y laterales basado en el código (ACI-1989) usando la aproximación de criterio óptimo. Las columnas tienen formas rectangulares y las vigas pueden ser rectangulares, L, o T. Las variables de diseño son el ancho, el peralte y la longitud del refuerzo para vigas y columnas. Su función costo incluye los costos del material concreto, acero y encofrado. Su mas largo ejemplo es una estructura aporticada de CA de cinco niveles de un solo vano.

Ellos concluyen que el procedimiento del criterio óptimo converge lentamente cuando se incluyen restricciones de rigidez en la formulación.

Adamu y Cárihaloo (1995) uso un método de discretización tipo continua de criterio óptimo (DCOC) para el diseño de mínimo costo de pórticos planos de CA de múltiples pisos y múltiples vanos. Basado en el código australiano de 1988 y el código europeo de estados limites de diseño de 1990. Su función costo incluye los costos del material concreto, acero y encofrado. Las variables de diseño son las dimensiones de las secciones de los elementos y las cuantías de acero. Por razones económicas, ellos asumen dimensiones de vigas y columnas uniformes en todos los pisos pero varían en las cuantías para cada miembro. Esto también reduce el costo del encofrado porque estos pueden ser reusados más frecuentemente. Ellos presentan un diseño óptimo de un pórtico de siete pisos. En otro trabajo de estos mismos en el mismo año, toman en consideración la flexión biaxial de columnas de esquina, pero aún dentro de un pórtico plano.

Fadaee y Grierson (1996) presentan el diseño de mínimo costo de estructuras aporricadas tridimensionales con miembros sujetos a flexión biaxial y fuerzas de corte usando un procedimiento de criterio óptimo basado en el código (ACI-1995). Vigas y columnas son asumidas rectangulares. Su función costo incluye los costos del material concreto, acero y encofrado. El trabajo se enfoca en la formulación de las restricciones apropiadas para la combinación de cargas axiales, momentos biaxiales, y corte biaxial. Su ejemplo es sólo un pórtico espacial de un solo vano y una sola bahía. Ellos concluyen que el efecto biaxial es una importante consideración para el diseño de columnas, y su inclusión incrementa el costo de la estructura óptima significativamente.

Balling y Yao (1997) presenta un estudio comparativo de optimización de pórticos tridimensionales con columnas rectangulares y vigas de sección rectangular, T ó L de acuerdo al código (ACI-1989) usando estructuras de uno, dos y cuatro pisos y empleando un método de programación secuencial cuadrática o un método basado en la gradiente. Para acero de refuerzo, ellos consideran dos diferentes definiciones para las variables de diseño. En una primera definición, el

área de acero en cada miembro es la única variable de diseño usada para el acero en ese miembro. En la segunda definición ellos consideran el número, el diámetro y la distribución longitudinal de las barras de refuerzo y realizan una optimización de dos niveles. Ellos intentan incluir los costos de los materiales, fabricación, puesta en obra en la función costo, asumiendo que los materiales y los costos de fabricación del acero de refuerzo son proporcionales a su peso y el costo de puesta en obra es proporcional al número de barras y estribos. Ellos concluyen que los costos óptimos basados en las dos definiciones son muy cercanas una de otra, y así, no hay necesidad de incluir el segundo de mayor tiempo computacional.

De esta muy valiosa revisión hecha por Kamal C. Sarma y Hojjat Adeli (1998), vemos que hasta el año 1997 existen sólo dos publicaciones referidas a la optimización de estructuras aporticadas tridimensionales de concreto armado.

En una revisión detallada respecto a la publicación hecha por Balling y Yao (1997) sobre la optimización de estructuras aporticadas de concreto armado, los autores distinguen dos métodos que usan frecuentemente los investigadores para este tipo de optimización y proponen uno adicional; el primero llamado "método multinivel", el segundo denominado "método tradicional", y el propuesto es uno denominado "método simplificado"; estos los describimos a continuación:

El Método Multinivel

El método multinivel subdivide el problema de optimización en un "problema de optimización del sistema" y un "problema de optimización individual".

El problema de optimización del sistema determina las dimensiones de las secciones (b y h) para todos los miembros en la estructura.

El problema de optimización para cada miembro individual determina la topología del refuerzo y las variables de selección de la varilla de refuerzo (número de varillas y diámetro de las varillas), las cuales son variables discretas.

La organización del método la podemos describir de la siguiente manera: La optimización del sistema determina las dimensiones de la sección cada miembro, este llama luego al análisis estructural global para determinar deflexiones y restricciones en el desplazamiento como también las envolventes de las fuerzas internas del elemento; lo anterior puede ser hecho puesto que se tiene un diseño previo; La optimización del sistema envía entonces las envolventes de las fuerzas internas y dimensiones de la sección como parámetros constantes a los optimizadores de miembro individual, en donde el refuerzo es diseñado y el óptimo costo del miembro y restricciones son determinadas y retornadas.

Debe de considerarse que la optimización individual en cada miembro son funciones discretas. Por tanto algoritmos de optimización basados en la gradiente no pueden ser usados para la optimización del sistema, por lo que un algoritmo de búsqueda estocástica (simulated annealing) es usado. El autor afirma que el costo computacional en este método es muy alto y puede ser usado en forma práctica sólo para pórticos pequeños.

El Método Tradicional

El método tradicional refleja la filosofía que ha sido adoptada por más investigadores en la optimización de estructuras de concreto. Distinto al método multinivel, el método tradicional no subdivide las variables de diseño en una optimización del sistema y una optimización individual del miembro. Todas las variables de diseño son determinadas dentro del sistema de optimización total.

En este método las variables de diseño son:

1. Las dimensiones de las secciones, b y h .
2. El área de acero para cada columna.
3. El área de acero para cada ubicación del momento crítico en las vigas.

Se deberá considerar un análisis individual de cada miembro, pero donde se asume el número de varillas, la topología del refuerzo, el diámetro de las varillas y otros parámetros. Para este método tradicional podrían usarse algoritmos basados en la gradiente. o un algoritmo como la programación secuencial cuadrática (SQP).

El Método Simplificado

Basado en el método tradicional, el método simplificado elimina la variable correspondiente al área de acero, expresando todas las restricciones correspondientes al acero en función de las demás variables y parámetros; igualmente podrían usarse algoritmos basados en la gradiente o un algoritmo como la programación secuencial cuadrática (SQP).

En lo que se ha desarrollado más en optimización es en el diseño de estructuras de acero que en general podemos decir presentan menos problemas que estructuras de concreto armado. Mencionamos la optimización en este campo pues rescatamos procedimientos que nos pueden ayudar en la optimización de estructuras aporricadas en concreto armado.

En el libro titulado "Guide of Structural Optimización" editado por J. S. Arora, el investigador Kevin Z. Truman nos dice acerca de cómo optimizar estructuras sujetas a cargas sísmicas, aunque no es muy explícito en la presentación de las ecuaciones, nos es de mucha ayuda pues ha sido la base para desarrollar nuestras propias expresiones para formular nuestro problema de optimización para el caso de análisis por combinación modal.

2.3 RESUMEN.

En este capítulo se dio una descripción básica de los conceptos de optimización, haciendo énfasis en la optimización no lineal; así mismo se ha hecho una revisión de las investigaciones realizadas en el campo de optimización estructural especialmente aquellas orientadas a la optimización de estructuras aporticadas de concreto armado.

Dentro de la optimización se ve que se han desarrollado diferentes técnicas numéricas. En la optimización no lineal con muchas restricciones el método favorito por muchos investigadores en estos últimos años es la programación secuencial cuadrática.

Se observa que son tres décadas atrás que los investigadores han formulado y propuesto procedimientos para la optimización estructural en concreto armado, inicialmente varias de esas investigaciones trataron sobre optimización de vigas continuas, vigas preesforzadas y losas armadas, otros investigadores se preocuparon en la optimización de columnas de concreto, en los años ochenta se tiene investigaciones sobre estructuras aporticadas planas de concreto armado y es recién en los noventa que aparecen investigaciones en la optimización de estructuras aporticadas tridimensionales de concreto armado.

CAPITULO 03

CONSIDERACIONES DEL ANALISIS Y DISEÑO ESTRUCTURAL

3.1 MODELO ESTRUCTURAL TRIDIMENSIONAL

En un modelo aporticado tridimensional, el numero de grados de libertad por nudo son seis, tres traslacionales y tres rotacionales, esto hace que la matriz de rigidez de cada elemento sea una matriz de doce por doce.

Un elemento podrá estar orientado en diversas formas en el espacio por lo que se define tres ejes ortogonales locales al elemento que cumplen la regla de la mano derecha, el eje local 1 que es longitudinal al elemento y los ejes locales 2 y 3 que yacen sobre la sección transversal del elemento.

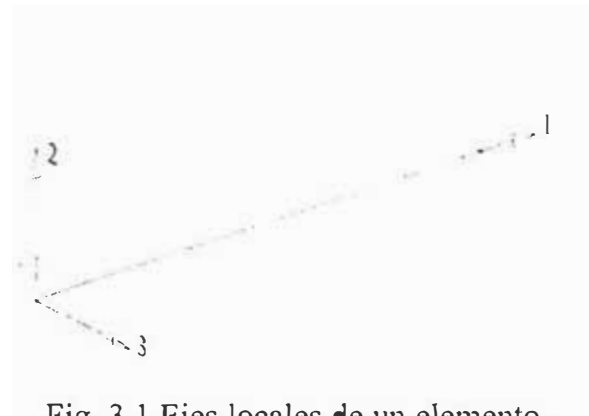


Fig. 3.1 Ejes locales de un elemento

Para poder conocer y definir la orientación de un elemento, debemos adoptar algunas convenciones.

a) Orientación por defecto.

Se define tres ejes ortogonales locales al elemento que cumplen la regla de la mano derecha, el eje local 1 que es longitudinal al elemento y los ejes locales 2 y 3 que yacen sobre la sección transversal del elemento.

El plano que forman los ejes locales 1 y 2 es un plano vertical es decir paralelo al eje global "Z" además el eje local 2 tiene una dirección siempre ascendente.

El eje local 3 es horizontal o paralelo al plano XZ, en caso que el elemento sea vertical (paralelo a Z) el eje local 3 será paralelo al eje global "Y".

b) Desviación del elemento (coordenada ángulo).

Si los ejes locales 2 y 3 no se encuentran en la orientación por defecto, se considera un ángulo medido desde la orientación por defecto a la nueva orientación, a este ángulo se le conoce como coordenada ángulo

Matriz de rigidez de un elemento de marco según ejes locales

La matriz de rigidez para un elemento considerando los doce grados de libertad y los efectos de corte es:

$$ke = \begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} & & & & & & & & & & & & & \\
 0 & \frac{12EI_3}{(1+\phi_2)L^3} & & & & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & \frac{12EI_2}{(1+\phi_3)L^3} & & & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & \frac{6EI_2}{(1+\phi_3)L^2} & 0 & \left(\frac{4+\phi_3}{1+\phi_3}\right)\frac{EI_2}{L} & & & & & & & & & \\
 0 & \frac{6EI_3}{(1+\phi_2)L^2} & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{4+\phi_2}{1+\phi_2}\right)\frac{EI_3}{L} & & & & & & & & \\
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & & & & & & & \\
 0 & \frac{12EI_3}{(1+\phi_2)L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_3}{(1+\phi_2)L^2} & 0 & \frac{12EI_3}{(1+\phi_2)L^3} & & & & & & \\
 0 & 0 & \frac{12EI_2}{(1+\phi_3)L^3} & 0 & \frac{6EI_2}{(1+\phi_3)L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_2}{(1+\phi_3)L^3} & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & & & & \\
 0 & 0 & \frac{6EI_2}{(1+\phi_3)L^2} & 0 & \left(\frac{2-\phi_3}{1+\phi_3}\right)\frac{EI_2}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_2}{(1+\phi_3)L^2} & 0 & \left(\frac{4+\phi_3}{1+\phi_3}\right)\frac{EI_2}{L} & & & \\
 0 & \frac{6EI_3}{(1+\phi_2)L^2} & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{2-\phi_2}{1+\phi_2}\right)\frac{EI_3}{L} & 0 & -\frac{6EI_3}{(1+\phi_2)L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{4+\phi_2}{1+\phi_2}\right)\frac{EI_3}{L} & \\
 \end{bmatrix} \quad \text{SIMETRICA} \quad (3.1)$$

Donde: $\phi_2 = \frac{12EI_3}{GA_{s2}L^2}$ $\phi_3 = \frac{12EI_2}{GA_{s3}L^2}$

Siendo:

I_2 y I_3 : Momento de inercia de la sección respecto a los ejes locales 2 y 3.

A_{s2} y A_{s3} : Áreas de corte efectiva

J : Constante torsional de la sección.

Para secciones rectangulares de dimensiones “b” y “h”, los valores de A_{s2} , A_{s3} y J están dados por:

$$A_{s2} = A_{s3} = \frac{5}{6}bh$$

$$J \equiv \frac{b^3h}{3} - \frac{64b^4}{\pi^5} \tanh\left(\frac{\pi h}{2b}\right)$$

Transformación de Coordenadas

Dado un vector cualquiera “v”, se desea establecer las expresiones para la transformación de las componentes de este vector de un sistema coordenado a otro.

La transformación del sistema global X,Y,Z al sistema local 1,2,3 se expresa matricialmente por:

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a_{1x} & \cos a_{1y} & \cos a_{1z} \\ \cos a_{2x} & \cos a_{2y} & \cos a_{2z} \\ \cos a_{3x} & \cos a_{3y} & \cos a_{3z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

$$v^{local} = \Gamma^T v^{global}$$

Esta matriz que transforma un vector de un sistema a otro, tiene la siguiente propiedad: $\Gamma^T = \Gamma^{-1}$, por tanto podemos escribir $v^{global} = \Gamma v^{local}$.

Para la orientación por defecto de nuestros elementos tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \cos a_{1x} = cx = \frac{\Delta x}{L}; \quad \cos a_{1y} = cy = \frac{\Delta y}{L}; \quad \cos a_{1z} = cz = \frac{\Delta z}{L} \\ \cos a_{3x} = \frac{cy}{\sqrt{cx^2 + cy^2}} \quad \cos a_{3y} = \frac{-cx}{\sqrt{cx^2 + cy^2}} \quad \cos a_{3z} = 0 \\ e_2 = \frac{e_3 \times e_1}{|e_3 \times e_1|} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Considerando la coordenada ángulo (β), los vectores e_2 y e_3 debe ser modificado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} e_2' &= e_2 \cos \beta + e_3 \sin \beta \\ e_3' &= -e_2 \sin \beta + e_3 \cos \beta \end{aligned} \quad (3.4)$$

Matriz de rigidez de un elemento de marco según ejes globales

Teniéndose la matriz de rigidez expresado en coordenadas locales, haciendo uso de las expresiones de transformación, podemos deducir la matriz de rigidez en coordenadas globales.

La relación entre fuerzas y desplazamiento está dada por:

$$\text{En coordenadas locales: } f_e^l = k_e^l u_e^l + f_o^l \quad (3.5)$$

$$\text{En coordenadas globales } f_e = k_e u_e + f_o \quad (3.6)$$

(el superíndice "l", denota orientación local)

Los vectores de fuerza del sistema local y global están relacionados por:

$$f_e^l = T^T f_e \quad (3.7)$$

en este caso la matriz de transformación "T" es de doce por doce siendo:

$$T = \begin{bmatrix} \Gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Similarmente para los desplazamientos tenemos:

$$u_e^l = T^T u_e \quad (3.9)$$

De las ecuaciones 3.5, 3.7 y 3.9 tenemos:

$$\begin{aligned} T^T f_e &= k_e^l T^T u_e + f_o^l \\ f_e &= T k_e^l T^T u_e + T f_o^l \end{aligned} \quad (3.10)$$

Comparando 3.10 con la ecuación 3.6 tenemos que:

$$k_e = T k_e^l T^T \quad (3.11)$$

$$f_o = T f_o^l \quad (3.12)$$

Donde denominamos a k_e matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales y f_o el vector de fuerzas de empotramiento en coordenadas globales.

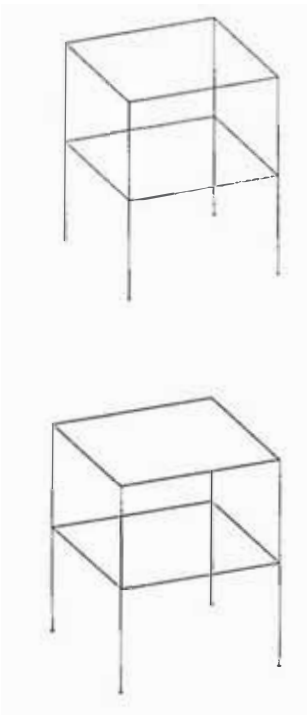
Proceso de ensamblaje

El proceso denominado ensamblaje, no es más que un proceso de equilibrio entre las fuerzas internas y externas que se realiza en todos los grados de libertad, ordenando todas las ecuaciones resultantes en un arreglo matricial. Este proceso nos lleva a la expresión matricial conocida:

$$P = KU \quad (3.13)$$

Comportamiento de Diafragma Rígido

En una estructura aporticada donde se considera que las losas de techo son cuerpos de movimiento rígido plano, nos lleva a una disminución apreciable del número de grados de libertad.



Por ejemplo consideremos un pórtico de dos niveles con las columnas empotradas en la base, en un sistema sin diafragmas rígidos el número de grados de libertad será igual al número de nudos no restringidos multiplicado por seis que nos da en este caso 48.

Consideremos el mismo pórtico de dos niveles, en un sistema con diafragmas rígidos el número de grados de libertad será igual al número de nudos no restringidos multiplicado por tres más el número de diafragmas rígidos multiplicado por tres que nos da en este caso 30.

El diafragma rígido lo que hace es relacionar el movimiento de todos los puntos que yacen sobre el plano del diafragma con uno solo de ellos, a este punto se le conoce como nudo maestro, se debe notar que estamos refiriéndonos sólo al movimiento en el plano del diafragma y no a los otros restantes que se mantienen “independientes” .

Encontremos la relación que hay entre el movimiento de un nudo "i" cualquiera (nudo esclavo) en el diafragma y el nudo maestro "o".

$$\begin{aligned} u_i &= u_o - r\theta_o \text{sen}(\alpha) \\ v_i &= v_o + r\theta_o \text{cos}(\alpha) \\ \theta_i &= \theta_o \end{aligned}$$

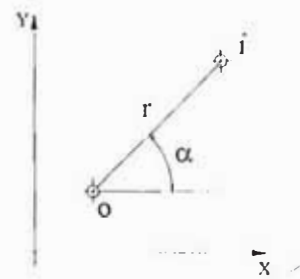


Fig. 3.2 Relación de nudos esclavo y maestro.

Expresándolo matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -r\text{sen}(\alpha) \\ 0 & 1 & r\text{cos}(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_o \\ v_o \\ \theta_o \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Un conjunto de fuerzas en el plano del diafragma aplicadas en "i", tienen sus equivalentes en otro conjunto de fuerzas aplicadas en "o", teniéndose la siguiente relación:

$$\begin{Bmatrix} F_{xo} \\ F_{yo} \\ M_{zo} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -r\text{sen}(\alpha) & r\text{cos}(\alpha) & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ M_{zi} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

Matriz de Rigidez de Elemento para el Ensamble Directo

La existencia de las condiciones de movimiento, como el de los diafragmas rígidos, hace que halla una modificación en la expresión de la matriz de rigidez del elemento. En la expresión: $f_e = k_e u_e + f_o$, el vector u_e tiene como componentes a los desplazamientos en los extremos del elemento, similarmente f_e y f_o son vectores con componentes de fuerza en los extremos del elemento. Pero en la ecuación $P = KU$, los grados de libertad no están directamente asociados con los grados u_e de cualquier elemento.

Para el caso de diafragma rígido se encontró anteriormente las expresiones entre las fuerzas o desplazamientos de un nudo cualquiera del diafragma y el nudo maestro, rescribiendo estas se tiene:

$$\begin{bmatrix} u_{xo} \\ u_{yo} \\ u_{zo} \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r \operatorname{sen}(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & r \operatorname{cos}(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{zi} \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$u_o = g u_e$$

Podemos escribir ahora para el caso de un elemento:

$$G = \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Esta matriz "G" es importante para nosotros puesto que nos permite describir la ecuación: $f_e = k_e u_e + f_o$; multipliquemos esta por G^T

$$G^T f_e = G^T k_e u_e + G^T f_o$$

luego: $G^t f_e = G^t k_e G u_e^d + G^t f_o$

finalmente: $f_e^d = k_e^d u_e^d + f_o^d$ (3.18)

$$f_o^d = G^t f_o, \quad k_e^d = G^t k_e G u_e^d \quad (3.19)$$

siendo:

f_o^d : Vector de fuerzas de empotramiento para el ensamble directo.

k_e^d : Matriz de rigidez del elemento para el ensamble directo.

3.2 ANALISIS POR COMBINACION MODAL ESPECTRAL

Frecuencias y Modos De Vibración

Conocidas las características de rigidez y distribución de masas de la estructura, las frecuencias naturales de vibración se obtienen encontrando las raíces del polinomio característico obtenido de:

$$|K - \omega^2 M| = 0 \quad (3.20)$$

Y las formas de modo resolviendo el sistema homogéneo de ecuaciones:

$$Kx_i = \omega_i^2 Mx_i \quad (3.21)$$

x_i : Forma de modo asociada a la frecuencia ω_i .

Existen métodos muy eficientes para resolver el problema de los autovalores y autovectores, uno de los más conocidos es el método de Jacobi.

Es conveniente normalizar las formas de modo respecto a la matriz de masas de la siguiente manera:

$$\phi_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^T M x_i}} \quad (3.22)$$

De modo que $\phi^T M \phi = 1$, donde ϕ es la forma de modo normalizada.

Espectro De Aceleraciones

Los espectros de aceleraciones son importantes para la estimación precisa de las respuestas máximas esperadas en la estructura.

La aceleración espectral según la norma de diseño sismorresistente peruana está dada por:

$$S_a = \frac{ZUCS}{R} g \quad (5.23)$$

donde Z es el factor de zona, U es el coeficiente importancia de la edificación, C es el factor de amplificación sísmica, S es el factor de amplificación del suelo, R es el coeficiente de reducción y la gravedad "g".

Cálculo De La Respuesta Modal

El máximo desplazamiento modal, para un modelo estructural, puede ser calculado para un modo “n” con período T_n y valor espectral correspondiente $S(T_n)$. La máxima respuesta modal asociada al período T_n está dada por:

$$y(T_n)_{MAX} = \frac{S(T_n)}{\omega_n^2} \quad (3.24)$$

La respuesta máxima del desplazamiento modal del modelo estructural es calculada mediante:

$$u_n = p_{ni} y(T_n)_{MAX} \phi_n \quad (3.25)$$

Donde $p_{ni} = -\phi_n^T M_i$ son los factores de participación modal en la dirección de análisis $i=x,y,z$.

Las correspondientes fuerzas modales internas, pueden ser calculadas a partir del análisis matricial de estructuras empleando las mismas ecuaciones requeridas para el análisis estático.

Método CQC Para Combinación Modal

El método más conservador que se usa para estimar un valor pico de desplazamiento o fuerza en una estructura es la Suma de los Valores Absolutos (Sum Abs) de las respuestas modales. Esta aproximación supone que los máximos valores modales, para todos los modos, ocurren al mismo instante.

Otra aproximación muy común es la Raíz Cuadrada de la Suma de los Cuadrados (SRSS) de los máximos valores modales para determinar los valores de desplazamientos o fuerzas. El método SRSS supone que todos los máximos valores modales son estadísticamente independientes. Para estructuras tridimensionales, en las cuales un gran número de frecuencias son casi idénticas, esta suposición no está bien justificada.

Un mejor método para combinación modal es la Combinación Cuadrática Completa (CQC), método publicado por primera vez en 1981. Está basado en teorías de vibración aleatoria y ha encontrado una amplia aceptación por muchos ingenieros, de modo tal que ha sido incorporado como una opción en los más recientes programas de cómputo para el análisis sísmico.

El valor pico de una fuerza puede estimarse de los máximos valores modales, con el método CQC, mediante la siguiente ecuación:

$$F = \sqrt{\sum \sum f_n \rho_{nm} f_m} \quad (3.26)$$

Donde f_n es la fuerza modal asociada al modo n. La doble sumatoria es realizada a lo largo de todos los modos. Ecuaciones similares pueden ser aplicadas a desplazamientos nodales, desplazamientos relativos, cortantes en la base y momentos de volteo.

Los coeficientes ρ_{nm} para el método CQC con amortiguamiento constante son:

$$\rho_{nm} = \frac{8\beta^2(1+r)r^{3/2}}{(1-r^2)^2 + 4\beta^2r(1+r)^2} \quad (3.27)$$

Donde $r = \omega_n/\omega_m$ y debe ser igual o menor que 1.0. Es importante notar que el arreglo de coeficientes ρ_{nm} es simétrico y que todos los términos son positivos.

3.3 RESUMEN.

Las consideraciones en cuanto al análisis estructural se dan básicamente para la configuración tridimensional y que son las que empleamos en nuestro modelo de optimización. Entonces tenemos pórticos tridimensionales cuyas losas las modelamos como diafragmas rígidos, esto hace que se cree una condición de movimiento, este comportamiento se consigue con una modificación en las matrices de rigideces de los elementos y un ensamble adecuado de las ecuaciones.

En cuanto al análisis sísmico modal se describe el método de combinación cuadrática completa (CQC), que también será empleado en nuestro modelo de optimización.

CAPÍTULO 04

FORMULACION DEL PROBLEMA

El problema básico es diseñar una estructura aporticada de concreto armado de menor costo posible, que satisfaga todos los requerimientos establecidos por las normas y códigos de diseño, así como también aquellos requerimientos establecidos por el diseñador.

El conseguir el diseño de costo óptimo de la estructura, nos lleva a plantear en primer lugar una función que represente el costo, denominada función objetivo. Esta función debe incluir los parámetros que influyen en el valor de ella, por ejemplo las dimensiones de las secciones, precios de los materiales, etc. Si bien existen muchos parámetros que integran el costo real de una estructura aporticada, debemos de considerar dentro de la expresión de la función objetivo sólo aquellos parámetros que al cambiar su valor, realmente causan una variación importante en el costo de la estructura.

Dentro de los muchos parámetros que se encuentran influyentes en el costo, debemos identificar nuestras variables, el identificar adecuadamente las variables en nuestro problema nos facilitará la implementación computacional, por ejemplo en muchos problemas de optimización estructural es conveniente tener como variables el área y la inercia de una sección especialmente para estructuras de acero, en el caso de estructuras concreto nos es conveniente tener como variables las dimensiones de la sección como el ancho y el peralte debido a que en nuestras expresiones de diseño nos referimos directamente a ellas.

4.1 FUNCION OBJETIVO.

El objetivo para el problema de optimización planteado es minimizar el costo total de la estructura; podemos identificar que el costo de la estructura depende principalmente de:

El volumen total del concreto.

La cantidad de acero de refuerzo.

El área de superficies de concreto a encofrar.

El costo unitario de los materiales concreto, acero y encofrado.

Podemos escribir la siguiente expresión para la función objetivo.

$$\begin{aligned}
 F.O. = & C_c \sum_{k=1}^{nc} (A_c L_c) + \gamma C_s \sum_{k=1}^{nc} (A_{sc} L_c) + \gamma C_s \sum_{k=1}^{nc} (n_{stc} A_{stc} L_{stc}) + \\
 & C_v \sum_{k=1}^{nv} (A_v L_v) + \gamma C_s \sum_{k=1}^{nv} \sum_{j=1}^{ng} (A_{sv} L_{sv}) + \gamma C_s \sum_{k=1}^{nc} (n_{stv} A_{stv} L_{stv}) + \\
 & C_{ec} \sum_{k=1}^{nc} (p_{mc} L_c) + C_{ev} \sum_{k=1}^{nv} (p_{mv} L_v)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde:

C_c =Costo del concreto en columnas por m³

C_v =Costo del concreto en vigas por m³

C_s =Costo del acero habilitado y colocado por kg

C_{ec} =Costo del encofrado de columnas por m²

C_{ev} =Costo del encofrado de vigas por m²

γ_s =Peso específico del acero kg/(cm³)

A_c =Area de sección de una columna (m²)

A_v =Area de sección de una viga (m²)

A_{sc} =Area de acero total en la sección de columna (cm²)

A_{sv} =Area de un grupo de barras de acero en una viga (cm²)

L_{sv} =Longitud de un grupo de barras de acero en una de viga(m)

L_c =Longitud de un elemento de columna(m)

L_v =Longitud de un elemento de viga(m)

L_{stc} = Longitud del refuerzo transversal en una columna (m)

n_{stc} = número de refuerzos transversales distribuidos longitudinalmente en una columna.

n_g = número de grupos de barras.

A_{stc} = Área de la varilla del refuerzo transversal en una columna (cm²)

L_{stv} = Longitud del estribo en una viga (m).

n_{stv} = número de estribos distribuidos longitudinalmente en una columna.

A_{stv} = Área de la varilla de estribo en una viga (cm²)

p_{mc} = Perímetro mojado de columnas (m²)

p_{mv} = Perímetro mojado de vigas (m²)

4.2 FORMULACION DE LAS RESTRICCIONES DE DISEÑO

Como en todo diseño estructural, debemos cumplir con los requisitos de resistencia, comportamiento y servicio, dadas por los códigos de diseño, las buenas prácticas constructivas y otras como las arquitectónicas.

a) Secciones críticas por flexión en vigas.

Se consideran tres las secciones críticas en vigas, en los extremos y la sección de momento positivo máximo. En estas secciones tiene que cumplirse que el momento resistente último de la sección tiene que ser superior al momento actuante.

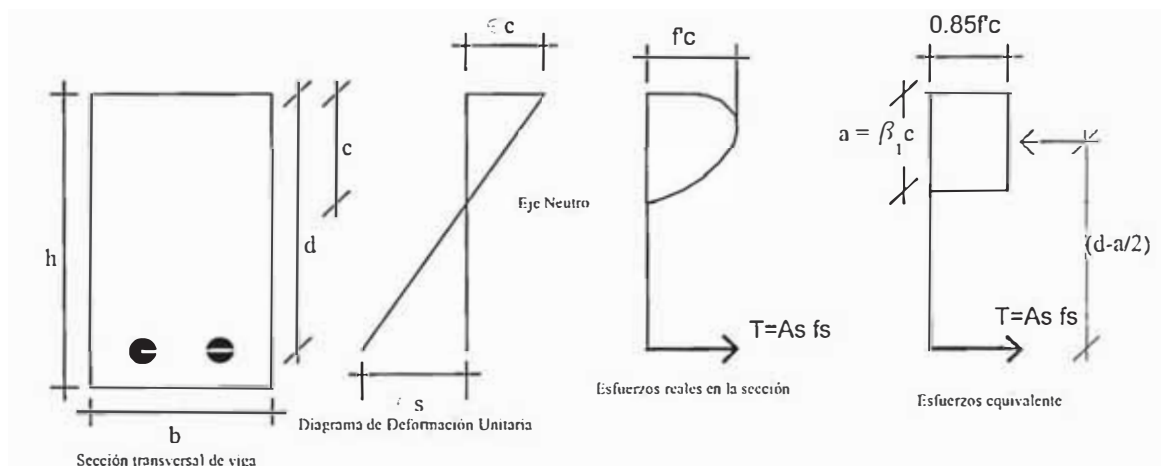


Fig. 4.1 Análisis de una sección de viga.

$$\phi M_n \geq M_u \quad (4.2)$$

$$\phi M_n = \phi b d^2 f_y \rho \left(1 - 0.59 \rho \frac{f_y}{f_c} \right) \quad (4.3)$$

donde:

ϕM_n = el momento resistente último.

M_u = momento actuante en la sección.

d = distancia de la fibra en compresión al centroide del acero en tracción.

b = ancho de la viga.

ρ = cuantía del refuerzo.

Se debe notar que en expresión 4.3 interviene el peralte efectivo “d”, la cual es función del peralte total “h”, del diámetro de la varilla longitudinal, el número de capas de refuerzo y el diámetro del estribo; se considerará alternativamente que el peralte está dado por $d = h - s$, donde “s” es la distancia menor de la cara de la sección al centroide del acero, asumiendo ser este un valor constante.

b) Diseño por corte en Vigas.

El cálculo del número de estribos en una viga estará dado de acuerdo a la siguiente expresión:

$$n_{est} = \int_0^L \frac{dx}{s(x)} \quad (4.4)$$

donde “x” es la distancia desde uno de los extremos de la viga, $s(x)$ es el espaciamiento del estribo requerido en determinada sección y dada por:

$$s(x) = \min \left\{ \frac{d}{2}, \frac{A_v f_y d}{V_s(x)} \right\} \quad (4.5)$$

Aquí $V_s(x) = \frac{V_u(x)}{\phi} - V_c$ es la fuerza cortante que resiste el acero y

$V_c = 0.53 \sqrt{f'_c} b d$ es la fuerza cortante que resiste el concreto.

c) Secciones críticas por flexo_compresión en columnas.

Se consideran como secciones críticas los extremos de cada columna en la cual actúan la fuerza axial y la flexión biaxial.

La flexión biaxial o en dos sentidos (M_{u2} y M_{u3}) tiene como resultante otro momento de magnitud:

$$M_u = \sqrt{M_{u2}^2 + M_{u3}^2} \quad (4.6)$$

M_{u2} : Momento actuante alrededor del eje local 2.

M_{u3} : Momento actuante alrededor del eje local 3.

El momento M_u actúa alrededor de un eje de flexión orientado un ángulo respecto a uno de los ejes locales de la sección, este ángulo es:

$$\alpha = \frac{-M_{u2}}{M_{u3}} \quad (4.7)$$

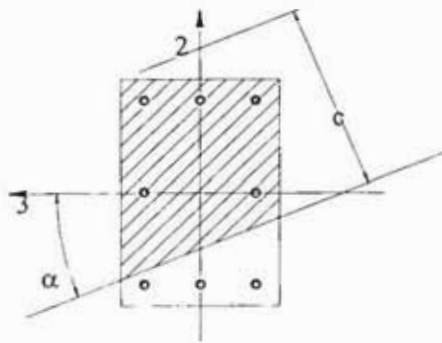


Fig. 4.2 Sección de Columna sujeta a flexocompresión biaxial.

Toda sección de columna con una geometría y cantidad de refuerzo dada tiene capacidad de resistir fuerzas actuantes, esta capacidad esta dada por las expresiones:

$$\frac{\phi P_n}{\phi} = 0.85 f'_c A_c + \sum_{i=1}^n A_{si} f_{si} \quad (4.8)$$

$$\frac{\phi M_n}{\phi} = 0.85 f'_c A_c (y_o - a/2) + \sum_{i=1}^n A_{si} f_{si} (d_i - y_o) \quad (4.9)$$

Siendo: $f_{si} = 98.1 * 6000 \left(\frac{c - d_i}{c} \right)$ (kN/m²)

$a = \beta_1 c$

donde:

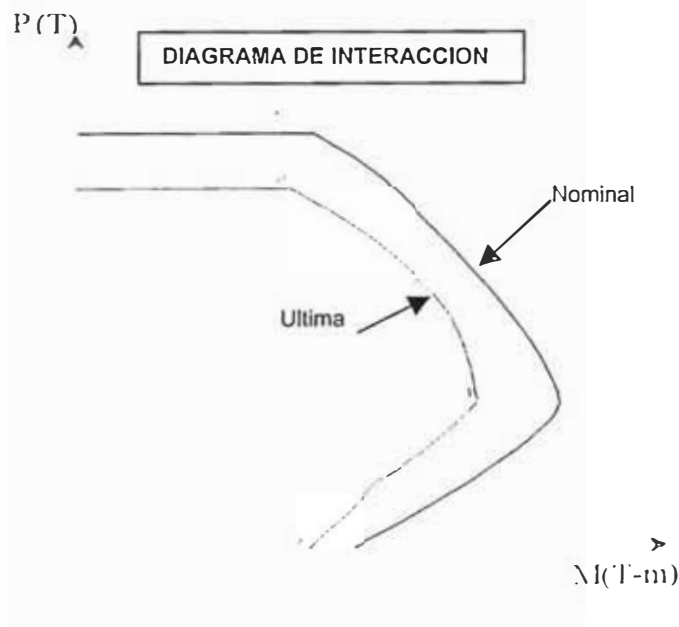
c = profundidad del eje neutro.

d_i = Distancia de la fibra extrema en compresión a cada una de las varillas de acero.

ϕP_n = Fuerza axial resistente de la sección de columna.

ϕM_n = Momento nominal resistente de la sección de columna.

Los valores de los momentos y fuerzas axiales resistentes que nos dan las expresiones anteriores dependen del ángulo de flexión analizado y de la profundidad del eje neutro. Si graficamos para un ángulo de flexión “ α ” los valores de ϕM_n versus ϕP_n para distintos valores de “ c ”, se forma un gráfico denominado diagrama de interacción.



Las fuerzas y momento actuantes deben de yacer siempre dentro del diagrama de interacción. Una forma de expresar esto es escribiendo la siguiente expresión:

$$1 - \left(\frac{\sqrt{M_u^2 + P_u^2}}{\sqrt{(\phi M_u)^2 + (\phi P_u)^2}} \right) \geq 0 \quad (4.9)$$

Notar en esta expresión ϕM_u y ϕP_u , son calculados para una determinada excentricidad $e = \frac{M_u}{P_u}$ y un determinado ángulo de flexión

$\alpha = \frac{-M_{u2}}{M_{u3}}$. La excentricidad "e" nos permite obtener la profundidad del eje

neutro "c" a partir de la ecuación: $e = \frac{M_n(c, h, b, \rho)}{P_n(c, h, b, \rho)}$, la solución analítica

de esta ecuación no es sencilla, es más conveniente usar una técnica iterativa de ecuaciones no lineales como la de Newton o también bisección.

Distorsión lateral de Entrepiso

Este tipo de restricciones es la que nos dan los reglamento de diseño sismorresistente, en la cual siguiendo procedimiento de análisis estático o dinámico, se debe de buscar que las distorsiones máximas de un entrepiso no sea mayor a un valor aceptable; en nuestro caso el reglamento peruano exige:

$$R \frac{\Delta u}{L} \leq 0.007$$
$$R \frac{u_s - u_i}{L} \leq 0.007 \quad (4.10)$$

("R" factor de reducción sísmica).

Para el caso estático las distorsiones en este caso son debidas a las fuerzas sísmicas calculadas según la norma sismorresistente peruana E.030.

Para el caso dinámico usando un análisis modal espectral descrito también por las norma sismorresistente peruana E.030.

Valores límites de las Variables.

Siguiendo las pautas que nos da nuestro código de referencia, la arquitectura y la práctica constructiva tenemos tenemos:

Dimensiones de las secciones de los elementos.

$$b \geq 0.25m$$

$$h \geq 0.25m$$

Cuantías mínimas máximas en vigas.

$$\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}$$

Cuantías mínimas máximas en columnas.

$$0.01 \leq \rho \leq 0.06$$

Longitudes de vanos (dependientes de la arquitectura).

4.3 RESUMEN.

Se han establecido los puntos básicos en nuestro problema de optimización identificando y describiendo nuestra función objetivo, nuestras restricciones, nuestras variables de diseño.

La función objetivo encierra en ella el costo de la estructura que incluye los costos del concreto, acero de refuerzo y encofrado, expresados en función de las variables seleccionadas. Las variables identificadas en nuestro problema corresponden a las dimensiones de una sección rectangular ya sea de viga o columna, las cuantías de acero, las longitudes de las barras de acero y el número de estribos de refuerzo transversal. En cuanto a la funciones de restricción, se ha identificado restricciones de resistencia que son la flexión en las secciones críticas de vigas, flexocompresión en columnas, diseño por corte, restricciones debido al desplazamiento lateral de entrepiso y restricciones debido a los límites máximos y mínimos de las variables.

CAPITULO 05

PROCEDIMIENTO DE OPTIMIZACION

En nuestro problema de optimización estructural la función objeto y las restricciones son funciones no lineales de sus variables, existiendo restricciones tanto de igualdad y en mayor cantidad los de desigualdad. Si bien en un diseño normal nosotros tenemos parámetros discretos, es decir por ejemplo los diámetros de las varillas, las dimensiones de las secciones que son redondeadas a los cinco centímetros, etc., nosotros consideraremos que todas las variables son reales y continuas para el proceso de optimización y que el diseño final será ajustado siguiendo las prácticas comunes de diseño el cual será también un diseño óptimo.

Además del principal objetivo que es el de buscar el diseño de mínimo costo de una estructura aperturada, está también en buscar un procedimiento que nos de soluciones rápidas y que ayuden al diseñador a tomar decisiones inmediatas. Se debe tener en mente la búsqueda de un diseño óptimo, que signifique un ahorro apreciable del diseño normal, evitando buscar en forma precisa la solución teórica sino tendiendo hacia ella.

Existen varias técnicas de optimización tal como vimos en la revisión bibliográfica. Es de interés especial las técnicas numéricas de optimización no lineal de funciones de variables continuas, encontramos muchas investigaciones al respecto sobre las técnicas de optimización, en especial de funciones no lineales sujetas a gran cantidad de funciones de restricción también de característica no lineales. Uno de los métodos favoritos sobre el cual se ha hecho y se sigue haciendo mejoras por los investigadores es el método SQP (programación secuencial cuadrática) y es el que nosotros también tomaremos para nuestro propósito.

5.1 PROGRAMACION SECUENCIAL CUADRATICA

La programación secuencial cuadrática es un método popular considerado ser efectivo y confiable para resolver problemas no lineales con restricciones de desigualdad.

Sea la función a minimizar dependiente de varias variables $f(x)$, la solución que hace mínima esta función deberá satisfacer también ciertas funciones de restricción. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ \text{sujeto a: } & \begin{aligned} & h(x) = 0 \\ & g(x) \geq 0 \end{aligned} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Consideremos en primer lugar sólo las restricciones de igualdad $h(x)$, la forma de minimizar una función sujeta a restricciones de igualdad es utilizando la función lagrangiana que está definida por:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda h(x) \quad (5.2)$$

siendo λ los multiplicadores de Lagrange. Con el fin de encontrar un mínimo (o una condición estacionaria) se tiene que cumplir:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad (5.3)$$

Para el caso de las restricciones de desigualdad nosotros podemos aplicar el concepto de multiplicadores de Lagrange, adicionando unas variables adicionales de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} g(x) & \geq 0 \\ g(x) + s & = 0 \end{aligned}$$

a “ s ” la denominamos variables sueltas (slack variables), debiendo ser $s < 0$, con esto nuestra función lagrangiana queda:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda h(x) + \nu(h(x) + s) \quad (5.4)$$

siendo ν los multiplicadores de Lagrange para las condiciones de desigualdad.

La condición estacionaria estará ahora dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \nu} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial s} = \nu_i s_i = 0 \quad (5.5)$$

Se debe observar que en la ecuación 5.5 se debe cumplir que: o bien “ ν_i ” es cero, es decir la desigualdad “i” es inactiva, o “ s_i ” es cero, es decir la desigualdad es activa $g(x) = 0$

Sea “ x_k ” el vector que contiene el valor inicial de las variables, si nosotros deseamos modificar dichos valores de tal manera que sea una mejor aproximación a la solución del problema es decir: $x_{k+1} = x_k + p_k$, donde p_k se denomina la dirección de búsqueda, debemos expandir la función lagrangiana utilizando los tres primeros términos de la serie de Taylor, para lo cual por comodidad suprimamos el subíndice “k” y por ahora llamemos a las restricciones de igualdad y desigualdad simplemente $g(x)$.

$$\begin{aligned}
 L(x + p) &\cong L(x) + p\nabla L + p^t \nabla^2 L p \\
 L(x + p) &\cong f(x) + \nu g(x) + p^t \nabla f(x) + \nu \nabla g(x) + p^t \nabla^2 L p \\
 L(x + p) &\cong f(x) + \nu g(x) + \nu \nabla g(x) + p^t \nabla f(x) + p^t \nabla^2 L p \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

En la ecuación 5.6 x_k es constante para este paso, y las nuevas variables son ahora p_k . El problema ahora se convierte en encontrar el mínimo valor de p_k , que hace mínimo $L(x + p)$. Debe notarse que sólo en los dos últimos términos de la ecuación 5.6 interviene “ p_k ” por tanto es equivalente plantear:

$$\min_p L(x + p) \cong p \nabla f(x) + p^t \nabla^2 L p \quad (5.7)$$

Podemos ahora linearizar las restricciones $g(x)$.

$$h(x + p) \cong h(x) + \nabla h(x)^T p = 0 \quad (5.8)$$

$$g(x + p) \cong g(x) + \nabla g(x)^T p \geq 0 \quad (5.9)$$

Las ecuaciones 5.7, 5.8 y 5.9 representan el problema de optimización cuadrática (QP).

Denominemos: $Q = \nabla^2 L$ que es el hesiano de la función lagrangiana o una posible aproximación, $c = \nabla f(x)$, $A = \nabla h(x)^T$, $C = \nabla g(x)^T$, $b = -h(x)$, $d = -g(x)$, se introduce unas variables adicionales “s” denominada variables sueltas (slack variables), de tal manera que el problema cuadrático quede:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{Min } c^T p + \frac{1}{2} p^T Q p \\
 Ax = b \\
 Cp + s = d \\
 s \leq 0
 \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Existen diferentes procedimientos para la solución del problema cuadrático, una de los recomendados y desarrollados últimamente por los investigadores son los denominados procedimientos del punto interior (IP).

Debemos recordar que cualquiera que fuere el procedimiento numérico de optimización con variables continuas, la solución óptima debe satisfacer las condiciones necesarias de primer orden, conocidas como condiciones de Karush-Kun-Tucker (KKT). Para el problema cuadrático estas condiciones son:

$$\left. \begin{aligned}
 Qp + A^T \lambda + C^T \nu + c = 0 \\
 Ap = b \\
 Cp + s = d \\
 SVe = 0 \\
 (s, \nu) \leq 0
 \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

Aquí λ y ν son los multiplicadores para las igualdades y desigualdades respectivamente. $S = \text{diag}\{s\}$, $V = \text{diag}\{\nu\}$, $e = [1, 1, \dots, 1]^T$. Debemos notar que el sistema de ecuaciones es lineal a excepto de SVe .

Uno de los problemas que se tiene con estos algoritmos es que el hessiano del lagrangiano (Q), no es de fácil evaluación directa y causa mucho esfuerzo de cómputo, alternativamente se han planteado aproximaciones al hessiano, una de las más conocidas y la más usada en los métodos SQP es la aproximación de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS), la cual es:

$$B_{k+1} = B_k + \frac{y y^T}{(p^T y)} - \frac{B_k p p^T B_k}{p^T B_k p} \quad (5.12)$$

donde: $p = x_{k+1} - x_k$
 $y = L(x_{k+1}, \lambda_{k+1}) - L(x_k, \lambda_{k+1})$

Aquí B_{k+1} es una mejor aproximación del hessiano (Q), se debe iniciar con una primera aproximación del hessiano comúnmente es la matriz identidad.

La convergencia global de los métodos de optimización no lineal se asegura por un procedimiento que se llama método de búsqueda lineal (line search methods). Ciertos métodos en su forma elemental, como el método de Newton, tienen rápida convergencia local, pero pueden no converger para todos los puntos de inicio. Los métodos de búsqueda lineal aseguran una convergencia global mientras que disminuyen la rápida convergencia local.

Los métodos de búsqueda lineal lo que en sí hacen es limitar el tamaño del paso en la iteración de un punto a otro de la siguiente forma:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha p \quad (5.13)$$

donde p es la dirección de búsqueda obtenida del subproblema cuadrático y α es un escalar positivo denominado tamaño de paso.

Cuando las restricciones son lineales, conseguir que a cada iteración se tenga que las variables satisfagan todas las restricciones, es decir sean factibles, es relativamente sencillo; pero con restricciones no lineales la factibilidad a cada iteración resulta difícil. Para iteraciones no factibles, no es obvio en forma inmediata escogerle tamaño del paso " α "; puesto que nosotros queremos buscar una siguiente iteración que minimice la función objetivo, pero también queremos reducir la no factibilidad en las restricciones. Para asegurar el progreso hacia la solución es que definimos la función de mérito (merit function) la cual puede usarse para medir si un punto es mejor que otro.

Si una función de mérito es usada en forma conjunta con un procedimiento de búsqueda lineal para escoger el tamaño del paso " α " a cada iteración, tendremos que el método de optimización SQP puede asegurar la convergencia global.

Lo que distingue a los procedimientos SQP, es la elección de la función de mérito usado en búsqueda lineal que determina el tamaño del paso; una de

esas tanto funciones es por ejemplo la función de mérito del lagrangiano aumentado ligeramente:

$$L_A(x, \lambda, s, \rho) = f(x) - \lambda^T (g(x) - s) + \frac{1}{2} \rho (g(x) - s)^T (g(x) - s) \quad (5.13)$$

donde $\rho > 0$ es el parámetro de penalidad. El espacio de búsqueda para esta función de merito incluye la iteración “ x ”, y en adición, los multiplicadores de Lagrange λ y las variables sueltas (slack) $s \geq 0$.

La función de merito para una nueva iteración se denota por:

$$\phi(\alpha) = L_A(x + \alpha p, \lambda + \alpha \varepsilon, s + \alpha q, \rho)$$

donde p, ε, q son las componente de la dirección de búsqueda en los subespacios correspondientes a x, λ, s .

Un algoritmo básico para el método SQP es el siguiente:

Dada una aproximación inicial x_o, λ_o, B_o .

1. Formar y resolver el problema cuadrático QP y obtener (p, ε) .
2. Seleccionar el tamaño del paso α .

$$\phi(x + \alpha p) < \phi(x)$$

$$g(x + \alpha p) \leq -\beta_c$$

β_c es un límite de violación de las restricciones.

3. Calcular:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} + \alpha_k \begin{bmatrix} p_k \\ \varepsilon_k \end{bmatrix}$$

4. Parar si converge.
5. Calcular la nueva aproximación del hesiano B_{k+1} .
6. Regresar al paso 1.

5.2 ADECUACION DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACION ESTRUCTURAL.

Como vimos en la sección anterior, la técnica de optimización requiere lo siguiente:

- Valores iniciales para todas las variables de diseño.
- Evaluación de la función objetivo.
- Evaluación de las funciones de restricción.
- Gradiente de la función objetivo respecto a todas las variables.
- Gradiente de las restricciones respecto a todas las variables.

5.2.1 Variables de Diseño

Recordando que las variables de diseño son todos los parámetros que afectan el valor de la función objeto, si bien es cierto existen parámetros que afectan le valor de esa función ampliamente hay otras que afectan muy poco y las podríamos considerar como parámetros constantes. Según esto podemos identificar las siguientes.

Longitudes de los elementos (L)

Esta variable considera la longitud principalmente de los vanos de nuestra estructura aporticada, y entra como variable diseño sólo en el caso de búsqueda de la distribución más conveniente de vanos en la estructura.

Dimensiones de la sección.-

Son dos las variables de diseño que describen las dimensión de la sección rectangular de columnas y vigas, llamadas ancho " b " y peralte " h ". En nuestra formulación consideraremos sólo elementos de sección rectangulares.

Cuantías de refuerzo.-

Estas variables consideran la cantidad de acero que se requiere en determinada sección del elemento (relación del área de acero y el área de la sección del elemento). Se considera la cuantía como variable de diseño en lugar de usar directamente el área de acero por comodidad en nuestras expresiones y además que se controla mejor los límites del refuerzo.

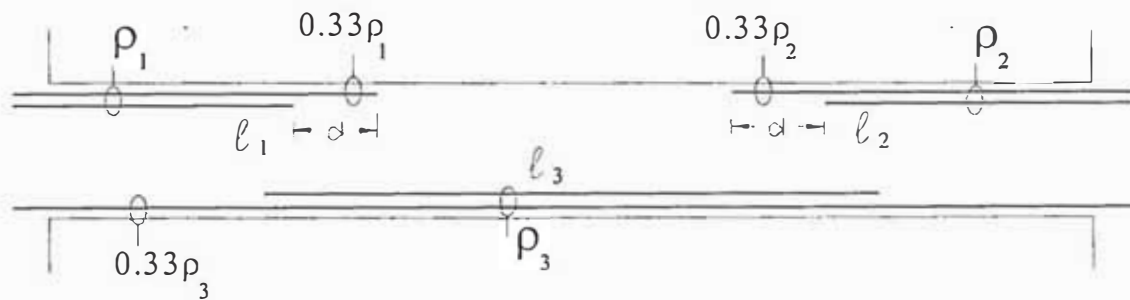
Se considera para las columnas una cuantía de refuerzo para una distribución preestablecida de este, por ejemplo una sección con ocho barras distribuidas.



En el caso de un elemento de vigas se consideran tres las secciones de cálculo de refuerzo, por tanto tendremos dos cuantías para los momentos negativos y una cuantía para el momento positivo.

Topología del refuerzo.-

Nos referimos con topología del refuerzo a la distribución longitudinal de este en los elemento de viga.



Estribos y refuerzo transversal.

Se considera como variable de diseño sólo el número de estribos o refuerzo transversal que se tiene en cada elemento, pero se considera como valores asumidos el diámetro de estos.

5.2.2 Función Objeto

Considerando las variables de diseño que hemos seleccionado para nuestro proceso, la función objeto finalmente es:

$$\begin{aligned}
 F.O. = & C_c \sum_{k=1}^{nc} (bhL_c) + \gamma C_s \sum_{k=1}^{nc} (\rho_c bhL_c) + \gamma C_s \sum_{k=1}^{nc} (n_{stc} A_{stc} (2b + 2h)) + \\
 & C_v \sum_{k=1}^{nv} (bhL_v) + \gamma C_s \sum_{k=1}^{nv} \sum_{j=1}^{ng} (\rho_{vj} bhL_{sv}) + \gamma C_s \sum_{k=1}^{nc} (n_{stv} A_{stv} (2b + 2h)) + \\
 & C_{ec} \sum_{k=1}^{nc} ((2b + 2h)L_c) + C_{ev} \sum_{k=1}^{nv} ((b + 2h - 2h_f)L_v)
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

donde:

C_c = Costo del concreto en columnas por m³.

C_v = Costo del concreto en vigas por m³.

C_s = Costo del acero habilitado y colocado por kg

C_{ec} = Costo del encofrado de columnas por m²

C_{ev} = Costo del encofrado de vigas por m²

γ_s = Peso específico del acero kN/(m³)

b = Dimensión perpendicular al eje local 2 de un elemento (m).

h = Dimensión perpendicular al eje local 3 de un elemento (m).

h_f = Espesor de losa (m), éste es un parámetro constante.

ρ_c = Cuantía de acero en la sección de columna.

ρ_{vj} = Cuantía del grupo "j" de barras de acero en una sección de viga.

L_{sv} = Longitud de un grupo de barras de acero en una de viga (m).

L_c = Longitud de un elemento de columna (m)

L_v = Longitud de un elemento de viga (m), se considera variable sólo para la optimización topológica.

n_{stc} = número de refuerzos transversales distribuidos longitudinalmente en una columna.

n_g = número de grupos de barras.

A_{stc} = Area de la varilla del refuerzo transversal en una columna (m²), se considera parámetro constante, es decir se debe asumir un diámetro para los refuerzos transversales.

n_{stc} = número de estribos distribuidos longitudinalmente en una columna.

A_{stc} = Area de la varilla de estribo en una viga (m^2) se, considera parámetro constante, es decir se debe asumir un diámetro para los refuerzos transversales.

5.2.3 Gradiente De Las Restricciones

Según el algoritmo seleccionado para el proceso de optimización, se requiere que se evalúe las funciones y sus gradientes para los valores que tengan las variables en cada paso. Varias de las restricciones son funciones m que dependen directamente del análisis de la estructura para las variables dadas en ese paso.

5.2.3.1 Caso de un análisis estático

Si en cada paso nosotros resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$P = KU \quad (5.15)$$

$$U = K^{-1}P \quad (5.16)$$

Lo cual nos permite conocer los desplazamientos en los grados de libertad de la estructura y por tanto conocer las fuerzas internas en todos los elementos:

$$f_e = k_e u_e + f_o \quad (5.17)$$

Ahora la obtención de las derivadas de los desplazamientos y de las fuerzas internas respecto a todas las variables de diseño lo obtenemos a partir de las ecuaciones 5.15 a 5.17.

Derivemos la ecuación 5.15, entonces tenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\partial K}{\partial x_i} U + K \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (5.18)$$

despejando $\frac{\partial U}{\partial x_i}$, se tiene:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = K^{-1} \left[\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial K}{\partial x_i} U \right] \quad (5.19)$$

Se debe notar que para los grados de libertad activos se cumple:

$$\frac{\partial K}{\partial x_i} U = \frac{\partial k_e}{\partial x_i} u_e \quad (5.20)$$

Por lo general $\frac{\partial P}{\partial x_i}$ se considera cero, puesto que las cargas estáticas

se consideran constantes y la variación del peso propio de los elementos no es considerable, pero debido a que también es nuestro objetivo considerar la variación de la longitud de los vanos en pórticos planos, debemos de considerar la variación de “ P ”, por tanto:

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = -\frac{\partial f_o}{\partial x_i} \quad (5.21)$$

Las variables x_i son los $L, b, h, ioff$ y $joff$ de todos los elementos.

Siendo:

L : Longitud de un elemento entre ejes de la estructura.

b : Dimensión menor de los elementos.

h : Dimensión mayor de los elementos o peralte.

$ioff$: Longitud de los brazos rígidos en el extremo “i” del elemento.

$joff$: Longitud de los brazos rígidos en el extremo “j” del elemento.

Se considera adicionalmente la longitud de brazos rígidos como variables por comodidad pues estos podrían bien asumirse como la mitad de la dimensión del elemento perpendicular, pero esto complicaría nuestras expresiones por lo que se considera como variables adicionales a nuestro problema.

Una vez determinados las derivadas de los desplazamientos respecto a las variables de diseño, $\frac{\partial U}{\partial x_i}$, podemos encontrar las derivadas de las fuerzas

internas de la siguiente manera:

$$\frac{\partial f_e}{\partial x_i} = \frac{\partial k_e}{\partial x_i} u_e + k_e \frac{\partial u_e}{\partial x_i} + \frac{\partial f_o}{\partial x_i} \quad (5.22)$$

Con estas expresiones nosotros podemos formular y determinar la gradiente de nuestras restricciones, para el caso de un análisis estático.

5.2.3.2 Caso de un análisis dinámico modal espectral

En un análisis dinámico modal, lo primero es encontrar las características dinámicas como son las formas de modo y sus periodos de vibración que son dependientes de la rigidez de la estructura y la distribución de masas; las funciones de restricción depende de estas características.

Una de las primeras dificultades es primeramente obtener la gradiente de las formas de modo y de los periodos de vibración. A continuación ilustramos el procedimiento para ello.

De la ecuación 3.20, denominemos $\lambda = \omega^2$ y considerando las formas de modo normalizadas tenemos:

$$K\phi = \lambda M\phi \quad (5.23)$$

Premultiplicando por la transpuesta del eigenvector.

$$\phi' K\phi = \lambda \phi' M\phi \quad (5.24)$$

Aplicando derivadas parciales tenemos:

$$\partial \phi' K\phi + \phi' \partial K\phi + \phi' K\partial\phi = \partial \lambda \phi' M\phi + \lambda \partial \phi' M\phi + \lambda \phi' \partial M\phi + \lambda \phi' M\partial\phi$$

agrupando: $\partial \phi' (K - \lambda M)\phi + \phi' \partial K\phi + \phi' (K - \lambda M)\partial\phi = \partial \lambda \phi' M\phi + \lambda \phi' \partial M\phi$

observar que los términos: $(K - \lambda M)\phi$ se hacen cero.

Por tanto:
$$\partial \lambda = \frac{\phi' (\partial K - \lambda \partial M)\phi}{\phi' M\phi} \quad (5.25)$$

Nota: Se deberá entender en esta sección que todas las derivadas son respecto a las variables de diseño x_i , es decir por ejemplo $\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \equiv \partial \lambda$.

Luego la gradiente de las frecuencias será:

$$\omega = \sqrt{\lambda} \Rightarrow \partial \omega = \frac{0.5}{\sqrt{\lambda}} \partial \lambda \quad (5.26)$$

De esta expresión se puede ver que la gradiente de las frecuencias naturales de vibración respecto a todas las variables de diseño, se obtiene conociendo en primer lugar los vectores propios y las gradiente de la matriz de rigidez y de la matriz de masas respecto a cada variable.

Con respecto a las formas de modo podemos decir a priori que sus gradientes no son valores únicos, es decir depende de cómo los normalicemos; derivemos la ecuación 5.23:

$$K\phi = \lambda M\phi$$

$$\partial K\phi + K\partial\phi = \partial\lambda M\phi + \lambda\partial M\phi + \lambda M\partial\phi$$

$$\text{agrupando: } (K - \lambda M)\partial\phi = (\partial\lambda M + \lambda\partial M - \partial K)\phi \quad (5.26)$$

En la expresión 5.26 la solución para $\partial\phi$, no se obtiene directamente, puesto que el rango de $(K - \lambda M)$ es menor a su dimensión, en otras palabras $\partial\phi$ tendrá infinitas soluciones; seleccionemos una de esas tantas soluciones y procedamos a normalizarlos de la siguiente manera:

Normalizando las formas de modo: $\phi_n = \frac{\phi}{\sqrt{\phi' M \phi}}$ y obteniendo su

primera derivada tenemos:

$$\partial\phi_n = \frac{\partial\phi}{\sqrt{\phi' M \phi}} - \frac{1}{2} \phi \frac{\partial\phi' M \phi + \phi' \partial M \phi + \phi' M \partial\phi}{(\phi' M \phi)^{3/2}} \quad (5.27)$$

Esta última es la derivada de las formas de modo normalizadas.

Siguiendo el procedimiento de análisis modal espectral, debemos de obtener las pseudo-aceleraciones espectrales (S_a) y los pseudo-desplazamientos espectrales (S_d) para cada modo y por tanto sus gradientes. La aceleración espectral depende del periodo o de las frecuencias naturales.

La aceleración espectral según la norma de diseño sismorresistente está dada por:

$$S_a = \frac{ZUCS}{R} g \quad (5.28)$$

donde Z es el factor de zona, U es el coeficiente importancia de la edificación, C es el factor de amplificación sísmica, S es el factor de amplificación del suelo, R es el coeficiente de reducción y la gravedad "g".

El factor de amplificación sísmica es:

$$C = 2.5 \left(\frac{T_p}{T} \right) = 2.5 \left(T_p \frac{\omega}{2\pi} \right) \quad (5.29)$$

donde T_p es el periodo que depende del suelo y T es el periodo natural del sistema.

El único parámetro que depende de los periodos naturales del sistema es el factor de amplificación sísmica, entonces derivando la expresión 5.28 y 5.29 tenemos:

$$\boxed{\partial S_a = \frac{ZUS}{R} g \partial C} \quad (5.30)$$

$$\partial C = 2.5 \left(\frac{T_p}{T} \right) = 2.5 \left(T_p \frac{\partial \omega}{2\pi} \right) \quad (5.31)$$

Las expresiones 5.30 y 5.31 nos permite encontrar las gradientes de las pseudo-aceleraciones espectrales. Como nos es más cómodo trabajar con los pseudo-desplazamientos tenemos:

$$S_d = \frac{S_a}{\omega^2} \quad (5.32)$$

$$\boxed{\partial S_d = \frac{\partial S_a}{\omega^2} - 2 \frac{S_a}{\omega^3} \partial \omega} \quad (5.33)$$

Ahora es necesario obtener las gradientes de los factores de participación de masa en cada una de las direcciones en la que actúa el sismo:

Los factores de participación de masa Γ_i^{dir} están dadas por:

$$\Gamma_i^{dir} = \frac{\phi^t M^{dir} I}{\phi^t M \phi} \quad (5.34)$$

donde $I = [1, 1, \dots, 1]^T$ y M^{dir} es la matriz de masa asociada a una de las direcciones ortogonales de análisis X, Y ó Z.

Derivando la expresión 5.34, tenemos:

$$\partial \Gamma_i^{dir} = \frac{\partial \phi^t M^{dir} I + \phi^t \partial M^{dir} I}{\phi^t M \phi} - \phi^t M^{dir} I \frac{[\partial \phi^t M \phi + \phi^t \partial M \phi + \phi^t M \partial \phi]}{(\phi^t M \phi)^2} \quad (5.35)$$

Luego de haber obtenido las gradientes de los eigenvectores, eigenvalores, pseudo-aceleraciones, pseudo-desplazamiento y los factores de participación debemos encontrar las gradientes respuestas máximas esperadas tanto para

las fuerzas internas como para los desplazamientos. Se ha optado un criterio de combinación modal espectral (CQC), por lo que las gradientes las obtenemos a partir de la siguiente expresión:

$$F = \sqrt{\sum_n \sum_m f_n \rho_{nm} f_m} \quad (5.36)$$

En esta expresión f_n , representa la respuesta modal asociada con el modo n.

donde:
$$\rho_{nm} = \frac{8\beta^2(1+r)r^{3/2}}{(1-r^2)^2 + 4\beta^2r(1+r)^2} \quad (5.37)$$

con $r = \omega_n / \omega_m$, ahora derivemos la ecuación 5.37.

$$\partial \rho_{nm} = \left[\frac{8\beta^2(1.5r^{1/2} + 2.5r^{3/2})}{(1-r^2)^2 + 4\beta^2r(1+r)^2} - \frac{8\beta^2(1+r)r^{3/2}}{[(1-r^2)^2 + 4\beta^2r(1+r)^2]^2} \left[(4r^3 - 4r) + 4\beta^2(1+4r+3r^2) \right] \right] \partial r \quad (5.38)$$

siendo:
$$\partial r = \frac{1}{\omega_m} \partial \omega_n - \left(\frac{\omega_n}{\omega_m} \right)^2 \partial \omega_m \quad (5.39)$$

Calculemos la gradiente de los máximos desplazamientos en los nudos, en este caso f_n es el desplazamiento modal asociado al modo n, entonces:

$$f_n = \Gamma S_d \phi \quad (5.40)$$

$$\partial f_n = \partial \Gamma S_d \phi + \Gamma \partial S_d \phi + \partial \Gamma S_d \partial \phi \quad (5.41)$$

Luego:
$$\partial F = \frac{0.5}{F} \sum_n \sum_m \left(\partial f_n \rho_{nm} f_m + f_n \partial \rho_{nm} f_m + f_n \rho_{nm} \partial f_m \right) \quad (5.42)$$

La expresión 5.42 representa la gradiente de los máximos desplazamientos respecto a cada una de las variables de diseño.

5.2.3.3 Secciones Críticas Por Flexión En Vigas.

Se han considerado 3 secciones críticas en vigas, en los extremos y la sección de momento positivo máximo. En estas secciones tiene que cumplirse lo siguiente:

$$g_i(x) = 1 - \frac{M_u}{\phi M_n} \geq 0 \quad (5.43)$$

Entonces la gradiente será:

$$\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_i} = -\frac{\partial M_u}{\partial x_i} \frac{1}{\phi M_n} + \frac{M_u}{\phi (M_n)^2} \frac{\partial M_n}{\partial x_i} \geq 0 \quad (5.44)$$

Donde: $\phi M_n = \phi b d^2 f_y \rho \left(1 - 0.59 \rho \frac{f_y}{f_c} \right)$, es el momento resistente último;

y las derivadas del momento nominal respecto a cada variable de diseño estarán dadas por:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_n}{\partial \rho} &= b d^2 f_y \left(1 - 2 \times 0.59 \rho \frac{f_y}{f_c} \right) \\ \frac{\partial M_n}{\partial b} &= d^2 f_y \rho \left(1 - 0.59 \rho \frac{f_y}{f_c} \right) \\ \frac{\partial M_n}{\partial h} &= 2 b d f_y \rho \left(1 - 0.59 \rho \frac{f_y}{f_c} \right) \\ \frac{\partial M_n}{\partial i_{off}} &= \frac{\partial M_n}{\partial j_{off}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.45)$$

5.2.3.4 Secciones Críticas Por Flexo-Compresión En Columnas.

Se consideran como secciones críticas los extremos de cada columna, en la cual tiene que cumplirse lo siguiente.

$$1 - \left(\frac{\sqrt{M_u^2 + P_u^2}}{\sqrt{(\phi M_n)^2 + (\phi P_n)^2}} \right) \geq 0 \quad (5.46)$$

Esta expresión considera que para cualquier par de valores de los momentos y fuerzas axiales actuantes éstas deben caer dentro del diagrama de interacción. Notar en esta expresión ϕM_n y ϕP_n , son calculados para una determinada excentricidad y un determinado ángulo de flexión.

Para la obtención de la gradiente de esta función, debemos de encontrar las derivadas de $\sqrt{(\phi M_n)^2 + (\phi P_n)^2}$, respecto a las variables de diseño; entonces:

$$\text{Sea } R = \sqrt{(\phi M_n)^2 + (\phi P_n)^2} \quad (5.47)$$

Siendo R función de la excentricidad ($e = \frac{M_u}{P_u}$), de sus dimensiones (b, h) , de la cuantía de acero (se asume una distribución de las varillas) y del ángulo de flexión. Es común expresar para un ángulo de flexión dada los momentos y fuerzas axiales nominales en función de la profundidad del eje neutro (c).

$$M_n = f(c, h, b, \rho)$$

$$P_n = f(c, h, b, \rho)$$

Siendo además " c " función de la excentricidad $c = c(e, h, b, \rho)$, expresada implícitamente en la expresión:

$$e = \frac{M_n(c, h, b, \rho)}{P_n(c, h, b, \rho)} = k(c, h, b, \rho)$$

Resolviendo esta última ecuación, obtenemos la profundidad del eje neutro " c " para el valor conocido de la excentricidad (e), y para los valores actuales de h, b, ρ .

Derivemos “R” en la ecuación 5.47 respecto a cada una de las variables de diseño, supongamos “h”:

$$\frac{\partial R}{\partial h} = \frac{\partial R(h)}{\partial h} + \frac{\partial R(c)}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial h} + \frac{\partial R(\alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial h} \quad (5.48)$$

con:
$$\frac{\partial c}{\partial h} = \frac{\partial c(h)}{\partial h} + \frac{\partial c(e)}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial h} \quad (5.49)$$

Determinemos $\frac{\partial c(h)}{\partial h}$, para ello derivemos $e = \frac{M_n(c, h)}{P_n(c, h)} = k(c, h)$, notar que ésta es una relación sólo entre “c” y “h”, la excentricidad “e” ahora se considera constante:

$$0 = \frac{\partial k(c, h)}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial h} + \frac{\partial k(c, h)}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial h}$$

por tanto:
$$\frac{\partial c(h)}{\partial h} = - \frac{\frac{\partial k(c, h)}{\partial h}}{\frac{\partial k(c, h)}{\partial c}} \quad (5.50)$$

Determinemos $\frac{\partial c(e)}{\partial e}$, entonces derivando: $e = \frac{M_n(c)}{P_n(c)}$

$$\partial e = \left(\frac{\partial M_n(c)}{\partial c} - \frac{M_n(c)}{P_n(c) \times P_n(c)} \frac{\partial P_n(c)}{\partial c} \right) \partial c$$

$$\frac{\partial c(e)}{\partial e} = 1 / \left(\frac{\partial M_n(c)}{\partial c} - \frac{M_n(c)}{P_n(c) \times P_n(c)} \frac{\partial P_n(c)}{\partial c} \right) \quad (5.51)$$

Determinemos $\frac{\partial e}{\partial h}$, lo obtenemos a partir de $e = \frac{M_u}{P_u}$, entonces:

$$\frac{\partial e}{\partial h} = \frac{1}{P_u} \frac{\partial M_u}{\partial h} - \frac{M_u}{(P_u)^2} \frac{\partial P_u}{\partial h} \quad (5.52)$$

Expresiones similares se encuentran para los valores de las derivadas de “R” respecto a las otras variables de diseño. La evaluación de algunas de estas gradientes es más conveniente obtenerlas por diferencias finitas.

5.2.3.5 Desplazamiento Lateral de Entrepiso

Sea cual fuera el tipo de análisis considerado es decir estático o dinámico, se debe cumplir que las distorsiones máximas de entrepiso debe de ser:

$$R \frac{\Delta u}{L} \leq 0.007$$

$$R \frac{u_s - u_i}{L} \leq 0.007$$

Siendo "R" es el factor de reducción sísmica, la gradiente la obtenemos directamente.

$$\boxed{R \frac{\partial u_s - \partial u_i}{L} \leq 0.007} \quad (5.53)$$

5.3 RESUMEN.

En nuestro problema de optimización estructural, las variables son tratadas como variables reales, la función objeto y las funciones de restricción son continuas dentro de un dominio de las variables. El método que se emplea para el proceso de optimización es la programación secuencial cuadrática, en este método se necesita la evaluación de las funciones y sus gradientes para cada punto.

La evaluación de las gradientes ha implicado que se determinen las expresiones adecuadas, buscando que dichas expresiones de cómo resultado un tiempo de cómputo realmente corto. La mayoría de las funciones de restricción dependen directamente del análisis estructural y de las expresiones de diseño en concreto armado, lo que origina que las variables de diseño no aparezcan explícitamente en nuestras expresiones, pero haciendo uso de la derivación parcial y usando técnicas de diferencias finitas salvamos este obstáculo. Se considera que las expresiones que han sido más laboriosas en determinar son las gradientes para la flexocompresión biaxial en columnas y las gradientes debidas a aquellas de un análisis sísmico modal espectral.

CAPITULO 06

IMPLEMENTACION COMPUTACIONAL Y ANALISIS DE RESULTADOS

6.1 IMPLEMENTACION COMPUTACIONAL

Se han elaborado dos programas de cómputo (ADORC) y (ADORC3D) siguiendo las pautas de los capítulos anteriores.

a) Programa “ADORC”

El programa ADORC, realiza la optimización de pórticos planos, usando una técnica de programación secuencial cuadrática (SQP), el programa considera:

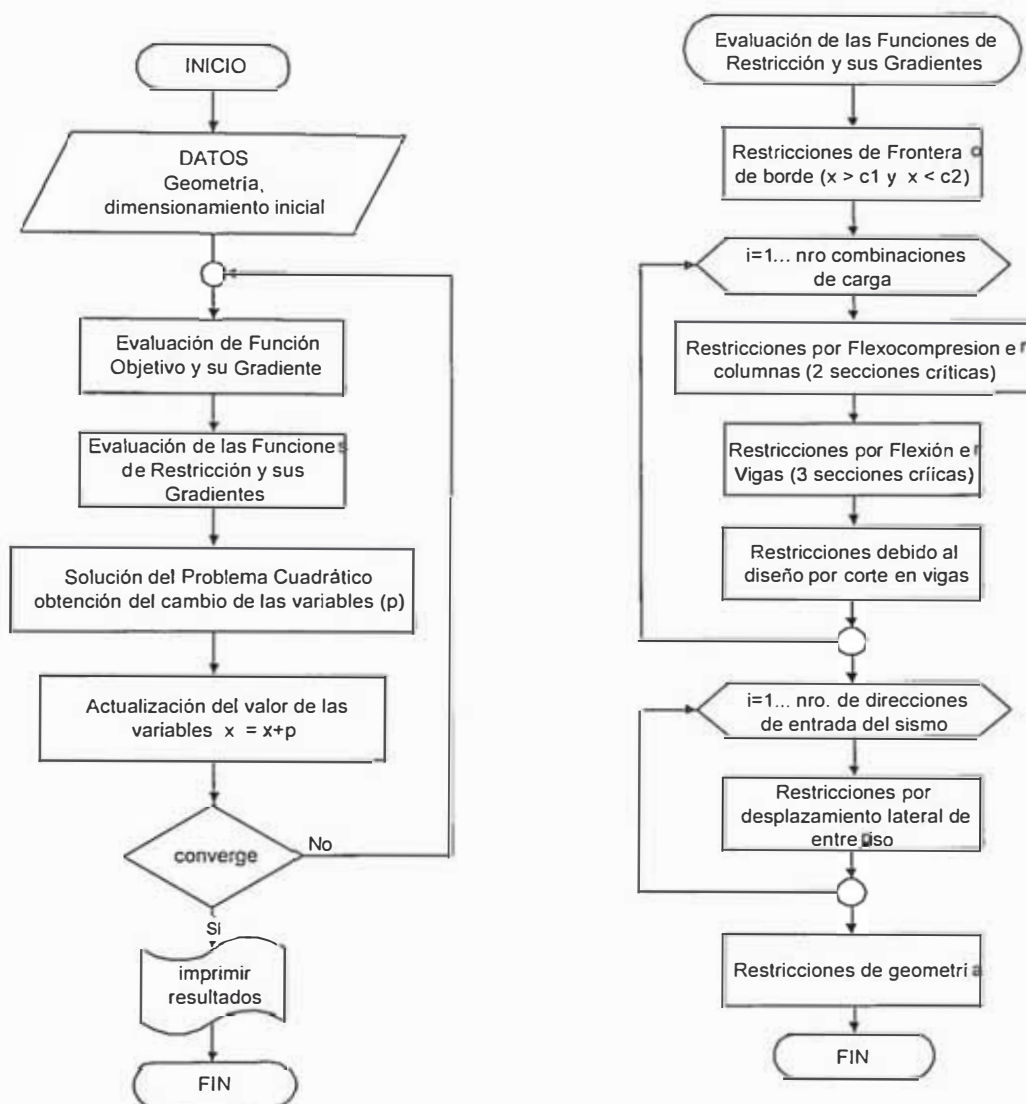
- Análisis estructural estático.
- Optimización topológica busca la ubicación conveniente de las columnas.
- Dimensionamiento óptimo de las secciones así como el cálculo de los refuerzos en los elementos.
- Restricciones de resistencia para todas las combinaciones de carga estática.
- Restricciones de distorsión de entrepiso.
- Restricciones para las dimensiones impuestas de los elementos.
- Considera la presencia de zonas rígidas en los elementos.
- Cálculo de la distribución longitudinal del refuerzo en las vigas.

b) Programa “ADORC3D”

El programa ADORC3D, realiza la optimización de estructuras aporticadas tridimensionales, usando una técnica de programación secuencial cuadrática (SQP), el programa considera:

- Análisis estructural estático y dinámico, según elección del diseñador.
- Modelamiento de los pisos como diafragmas rígidos (todos los nudos del nivel considerado tienen un movimiento en el plano de cuerpo rígido).
- Para el caso de análisis estático las cargas laterales sísmica actúan en el centro de masa, el cual es dato.
- Para el caso de análisis dinámico se tiene un análisis modal espectral, considerando el método de la Combinación Cuadrática Completa (CQC) para la combinación de las respuestas modales.
- Diseño óptimo de las secciones así como el cálculo de los refuerzos en los elementos.
- Restricciones de resistencia para todas las combinaciones de carga estática.
- Restricciones de distorsión de entrepiso para el caso de un análisis estático.
- Restricciones de distorsión de entrepiso para el caso de un análisis dinámico, considera además la variación de la masa de los elementos.

El algoritmo básico de los programas realizados se muestra en los diagramas de flujo que a continuación presentamos:



El lenguaje de programación utilizado para la implementación computacional es el “Lenguaje C++”, debiendo de comentar que este nos ha sido de mucho ayuda en el manejo de gran cantidad de código y además que nos permite hacer una programación orientada a objetos.

Debemos comentar que se ha utilizado rutinas de las librerías IMSL, en especial la referida a la solución del problema de optimización cuadrático (QP), en esta misma librería encontramos también un algoritmo de programación secuencial cuadrática (SQP) que se ha utilizado en nuestros programas de computo, pero se ha encontrado que está limitado hasta alrededor de unas 1500 ecuaciones de restricción, es por ello que se ha tenido la necesidad de implementar nuestro propio algoritmo de programación secuencial cuadrática.



Como ejemplo ilustrativo solucionaremos con detalle el problema de optimización de un pórtico de 1 sólo nivel y 1 sólo vano, sujeto sólo a cargas de gravedad viva y muerta.

Carga Muerta (CM) = 25.0 kN/m.

Carga Viva (CV) = 12.5 kN/m.

Consideraremos sólo la combinación de carga 1.4CM+1.7CV.

Las variables de diseño se describen a continuación:

Elemento	Descripción de Variables	nro de variable	Valor Inicial
Viga	peralte (m)	1	0.85
	cuantía extremo izq.	2	0.01
	cuantía extremo der.	3	0.01
	cuantía centro de luz	4	0.01
Columna 01	Dimensión en flexión (m)	5	0.50
	cuantía	6	0.02
Columna 02	Dimensión en flexión (m)	7	0.50
	cuantía	8	0.02

En una primera iteración se evalúa la función objeto para los valores iniciales de las variables, se determina la gradiente de la función objeto, los valores que tienen las funciones de restricción y sus respectivas gradientes tal como se observa en la siguiente tabla

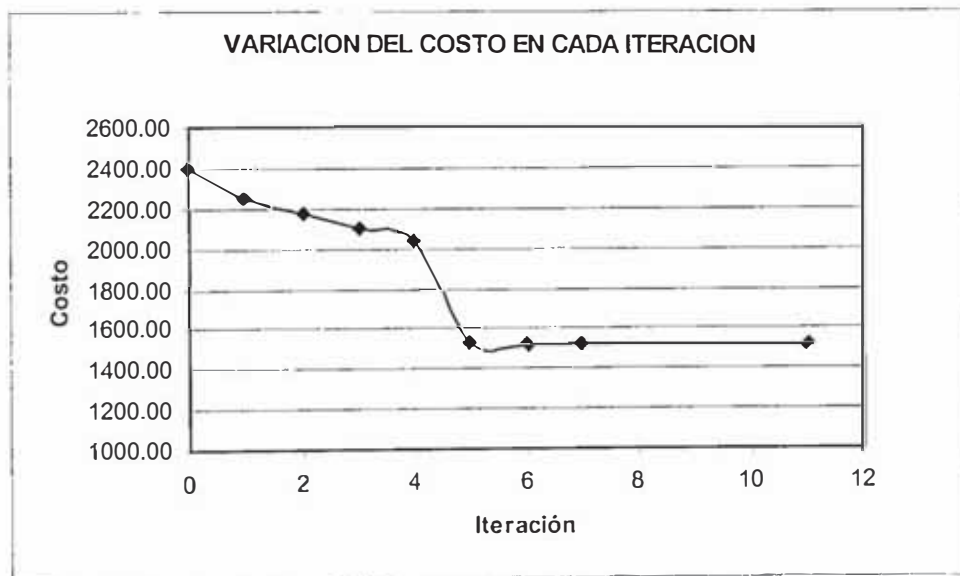
FUNCION	Valor de la Función	Gradiente de la función respecto a la variable "i"								
		1	2	3	4	5	6	7	8	
F. Objeto	2400.76	1444.47	6134.84	6134.84	17995.54	1020.06	8860.00	1020.06	8860.00	
Restricción por flexión en Viga	Extremo i	0.8169	0.8460	15.8566	0.0000	0.0000	-0.4534	0.0000	-0.1808	0.0000
	Extremo j	0.8169	0.8460	0.0000	15.8566	0.0000	-0.1808	0.0000	-0.4534	0.0000
	Centro luz	0.5079	0.8632	0.0000	0.0000	42.6264	0.3171	0.0000	0.3171	0.0000
Flexocompresión Columna 1	Sup.	0.9537	0.1355	0.0000	0.0000	0.0000	0.3345	1.9516	-0.2052	0.0000
	Inf.	0.8118	1.0571	0.0000	0.0000	0.0000	0.7782	15.9544	-0.5126	0.0000
Flexocompresión Columna 2	Sup.	0.9537	0.1355	0.0000	0.0000	0.0000	-0.2052	0.0000	0.3345	1.9516
	Inf.	0.8118	1.0571	0.0000	0.0000	0.0000	-0.5126	0.0000	0.7782	15.9544

Estos resultados nos permite resolver el problema cuadrático, recordando que se inicia con una aproximación del hesiano igual a la identidad.

En la siguiente tabla observamos como han variado el valor de las variables y de la función objeto en cada iteración.

Iteración	0	1	2	3	4	5	6	7	11	
Variable	1	0.8500	0.7946	0.7421	0.7039	0.6753	0.7041	0.6925	0.6988	0.7054
	2	0.0100	0.0093	0.0087	0.0082	0.0077	0.0033	0.0033	0.0033	0.0033
	3	0.0100	0.0093	0.0087	0.0082	0.0077	0.0033	0.0033	0.0033	0.0033
	4	0.0100	0.0103	0.0109	0.0114	0.0118	0.0082	0.0085	0.0092	0.0091
	5	0.5000	0.4750	0.4525	0.4322	0.4140	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500
	6	0.0200	0.0190	0.0239	0.0241	0.0252	0.0100	0.0112	0.0117	0.0111
	7	0.5000	0.4750	0.4525	0.4322	0.4140	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500
	8	0.0200	0.0190	0.0202	0.0223	0.0234	0.0161	0.0161	0.0114	0.0111
F. Objeto	2400.76	2250.33	2180.86	2103.14	2039.77	1524.57	1520.46	1520.31	1523.09	

Podemos decir que la convergencia es rápida, es decir se consigue el óptimo en pocas iteraciones. Si graficamos la variación del costo en cada iteración veremos en este ejemplo que se alcanza el valor del óptimo alrededor de la 6ta iteración.



6.2 ANALISIS DE RESULTADOS

Los resultados de la tesis se han plasmado en implementación de los programas de computo ADORC y ADORC3D tal como vimos en la sección 6.1, en este capítulo mostraremos algunos ejemplos que se han resuelto utilizando estos programas. Los ejemplos o problemas de aplicación que veremos nos servirán para poder conocer y analizar los alcances que se han conseguido en la presente tesis. Todos los problemas que veremos a continuación se han resuelto utilizando una ordenador Pentium IV con un procesador 1.5GHz.

Problema 01. Pórtico plano de un solo nivel

En este problema se analiza un pórtico plano de un solo nivel el cual tiene que cubrir una longitud de 20m., analizaremos dicho pórtico para varias configuraciones, es decir, considerando 6, 5, 4 y 3 columnas. Para cada configuración obtendremos el óptimo y además encontraremos que configuración es la más adecuada.

Este es un problema de optimización topológica en la cual se buscará la mejor ubicación de las columnas para cada configuración.

Las cargas actuantes para el diseño sólo serán las de gravedad (viva y muerta).



Fig. 6.1 Modelo de un solo nivel

Para todas las configuraciones se asumirán vigas de las mismas dimensiones; inicialmente se tendrán vanos espaciados a igual dimensión, columnas de 0.30m x 0.40m, vigas de 0.25m x 0.50m. Se considerará además una dimensión mínima de sección de columnas de 0.30 m.

Nosotros asumimos una primera distribución de las columnas, consideramos seis columnas igualmente espaciadas, utilizando el programa

ADORC procedemos a la optimización y como resultado se tiene que las columnas se han desplazado hasta encontrar una ubicación óptima, tal como se observa en la Fig. 6.2(a). El tiempo promedio de uso de CPU para cada configuración es de 8 segundos.

Como es de nuestro interés encontrar otra configuración óptima del sistema procedemos a ir quitando uno a uno elementos de columna y procediendo a optimizar para cada nueva configuración, teniendo como los resultados los que se observan en las figuras 6.2 (a), (b) y (c).

En todos los casos las columnas se han ubicado buscando la óptima ubicación que deben tener las columnas, así como las dimensiones que deben tener los elementos y las proporciones adecuadas de acero.

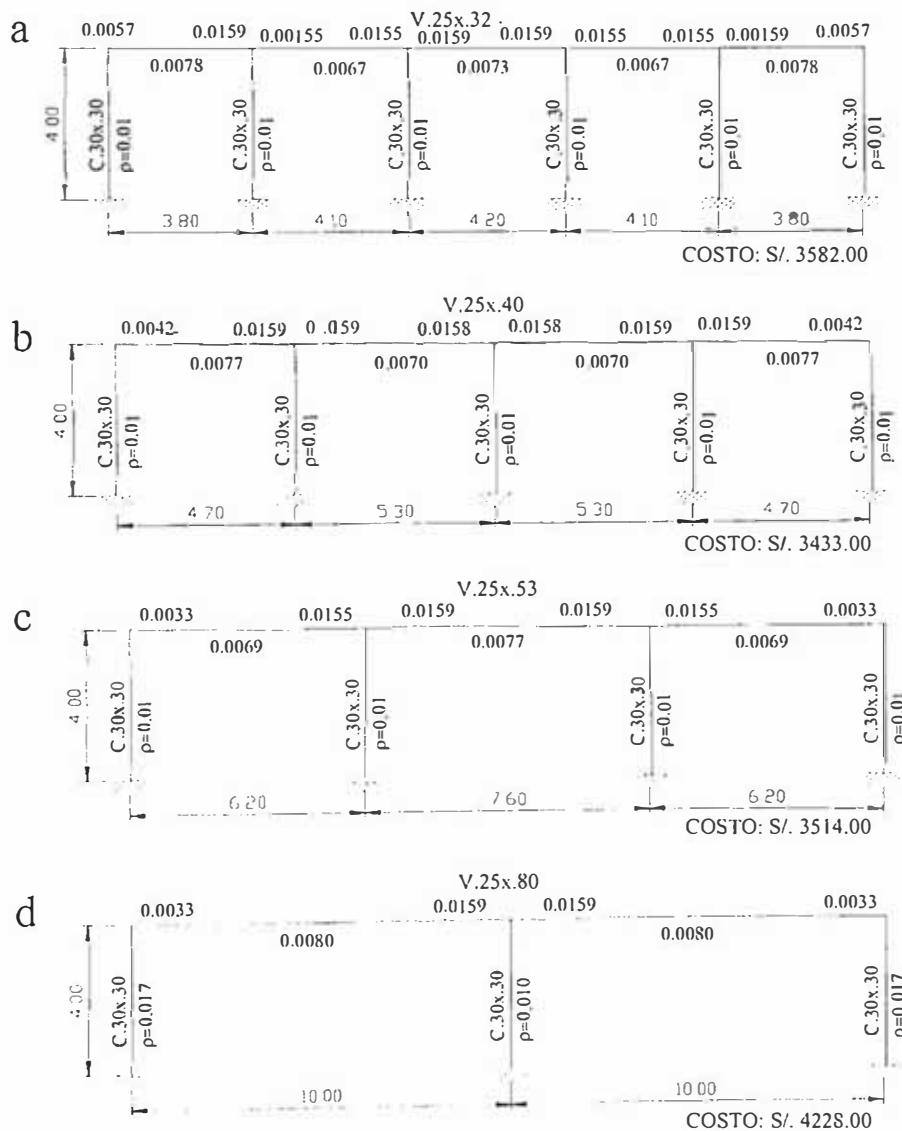
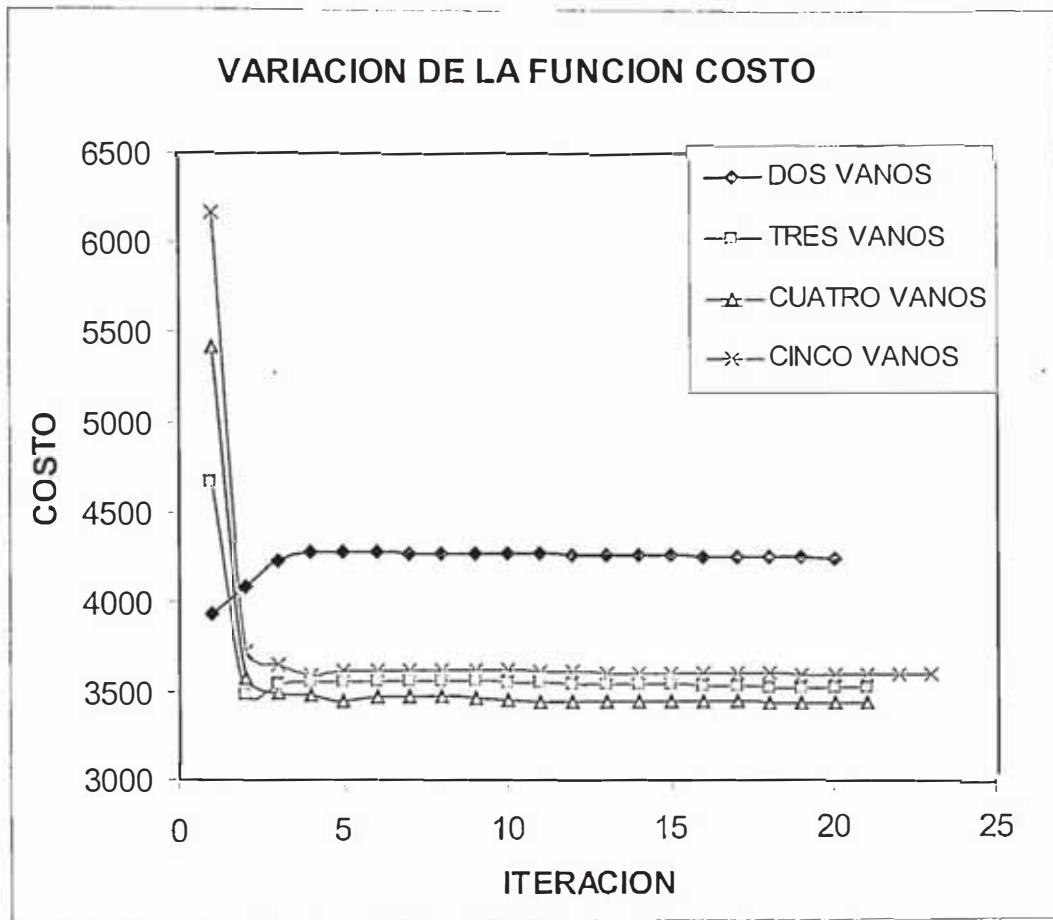


Fig. 6.2 Configuraciones óptimas del pórtico de un sólo nivel

A continuación mostramos la variación de la función costo para cada una de las configuraciones, en ésta vemos la rápida convergencia hacia el óptimo y es alrededor de la cuarta iteración que se ha reducido significativamente el tamaño de violación de las restricciones.



Problema 02. Pórtico plano de 6 niveles y 3 valles.

Se buscará el diseño óptimo de un pórtico plano de 6 niveles y 3 vanos, sujeto a cargas de gravedad y cargas laterales sísmicas.

Las carga de gravedad, distribuidas en las vigas son:

Muerta:(Piso 1 al 5) 25.0 kN/m.

(Techo) 20.0 kN/m.

Viva: (Nivel 1 al 5) 12.5 kN/m.

(Techo) 7.5 kN/m.

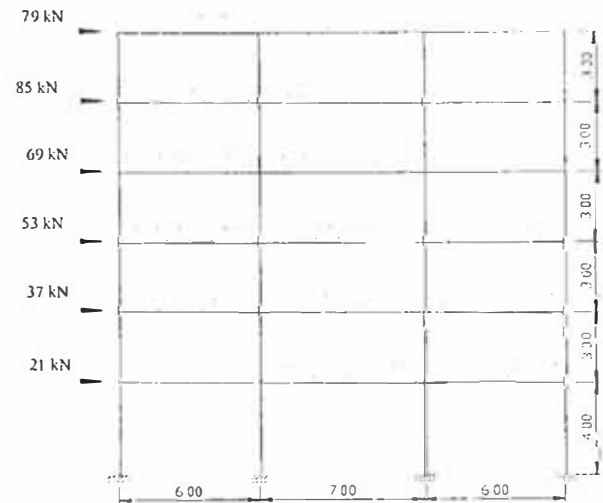


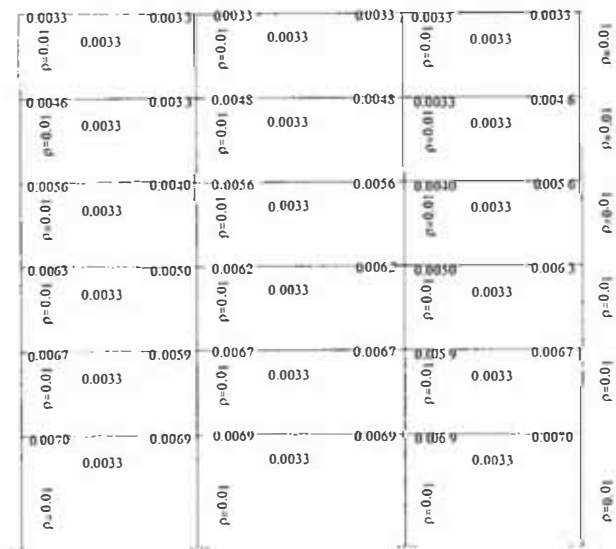
Fig. 6.3 Pórtico plano de 6 niveles

Las cargas laterales sísmicas, se muestran en la figura 6.3, la cuales están de acuerdo al reglamento de diseño sísmico peruano.

Para iniciar el proceso de optimización asumiremos valores iniciales de nuestras variables, para lo cual consideremos vigas de 0.25m x 0.60m y columnas de 0.30m x 0.60m., cuantías igual a 0.01 en columnas y en secciones críticas en vigas con un costo inicial igual a S/. 28,639.

Las dimensión menor de las columnas será de 0.30m y de las vigas será de 0.25m.

Una primera solución óptima que se busca será considerar a todas las vigas de las mismas dimensiones y a las columnas de igual modo, introduciendo los datos respectivos al programa ADORC nos da los resultados que se observan en la figura 6.4. Debemos observar que el costo óptimo



Vigas (0.25x0.85m)
Columnas (0.25x0.67m)
COSTO: S/. 30,397
Tiempo CPU: 0h0m6.60s

Fig. 6.4 Solución óptima con vigas de igual dimensión y columnas de igual dimensión.

resulta ser mayor al inicial, esto es debido a que los valores iniciales de nuestras variables no satisfacen a priori todas las restricciones.

Una segunda alternativa para el diseño óptimo es considerar, a diferencia de la primera, que las columnas cambian de dimensiones en cada piso; el diseño óptimo se observa en la figura 6.5.

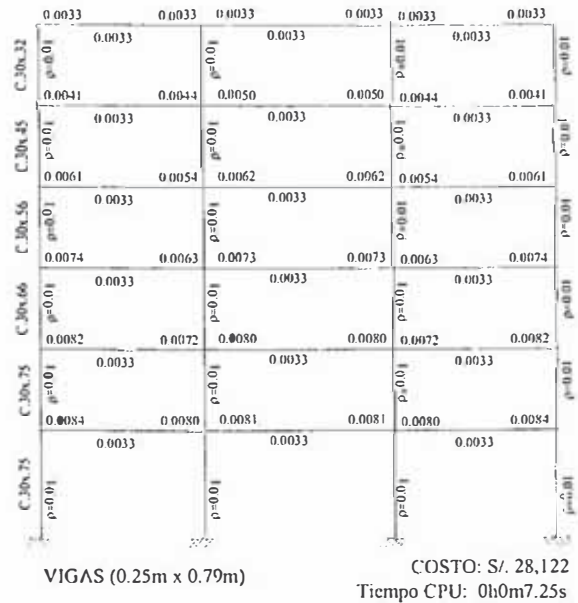


Fig. 6.5 Solución óptima con vigas de igual dimensión y columnas de igual dimensión por piso.

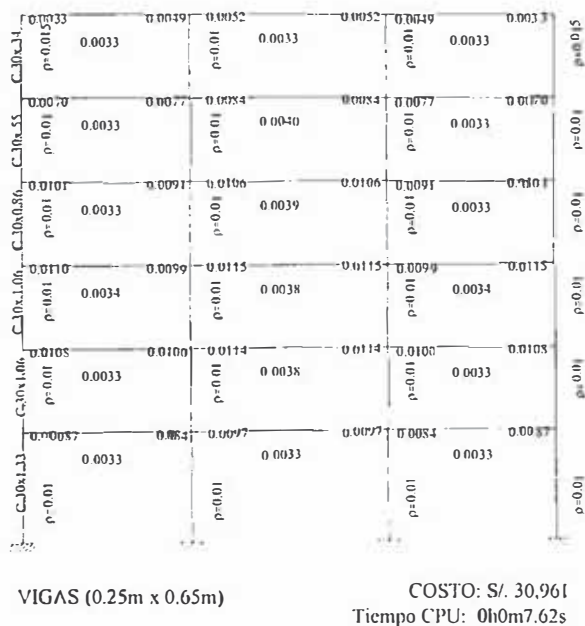


Fig. 6.6 Solución óptima con vigas de dimensión preestablecida y columnas de igual dimensión por piso.

Una tercera alternativa es considerar una dimensión preestablecida de las vigas de 0.25mx0.65m, considerando también que las dimensiones de las columnas son las mismas para un piso dado pero varían en altura; el diseño óptimo se observa en la figura 6.6, siendo en este caso el costo obtenido de S/. 30,961.00

Debemos mencionar que en todas las alternativas, las restricciones que son activas siempre en el óptimo y que determinan el costo de la estructura, son las restricciones de desplazamiento lateral de entrepiso, restricciones de resistencia a la flexión en las vigas así como los de flexocompresión en columnas. Las restricciones de resistencia al corte no son activas en ningún caso. Se ha considerado sólo en este problema variables referidas a las dimensiones de los elementos y las cuantías, las otras variables como los puntos de corte y el número de estribos en los elementos se han considerado

como parámetros constantes cuyo valor es un estimado, es decir por ejemplo la longitud el refuerzo negativo en vigas es igual a la luz del elemento entre cuatro.

Para verificar lo asumido anteriormente se considera una cuarta alternativa, la cual es similar a la tercera alternativa con la diferencia que se considera variables referidas a los puntos de corte de refuerzo vigas; en la figura 6.7 ilustramos los resultados de la solución óptima que para este caso el costo optimo es S/.31,563.00.

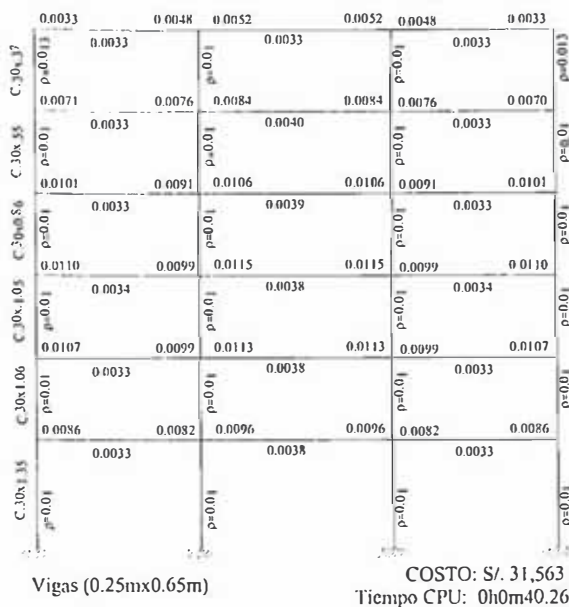
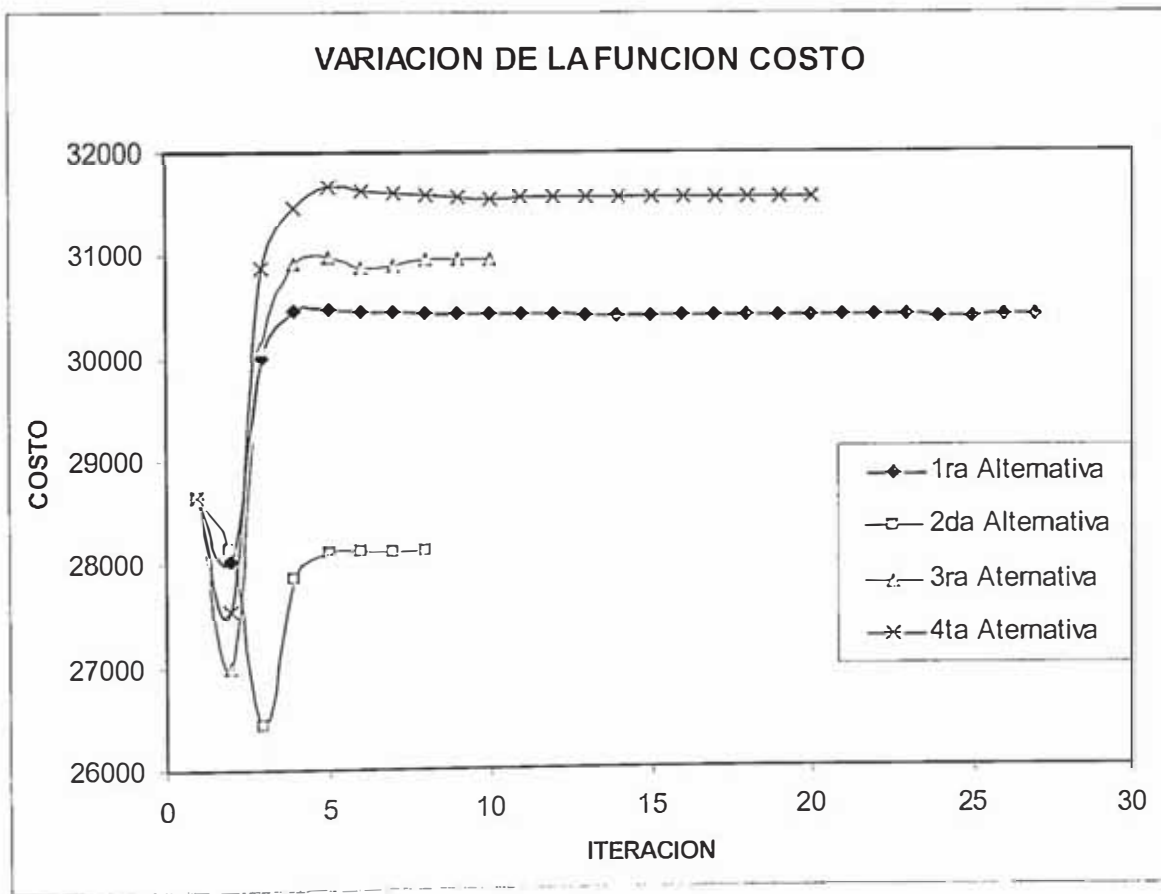


Fig. 6.7 Solución óptima con vigas de dimensión preestablecida columnas de igual dimensión por piso, incluye variables referidas a los puntos de corte.



Si bien en la cuarta alternativa el costo aumenta en un 2% respecto a la tercera alternativa, vemos que los valores de las dimensiones de las secciones y las cuantías son prácticamente las mismas, eso quiere decir que el no considerar como variables de diseño los puntos de corte para el proceso de optimización es conveniente desde el punto de vista que reducimos las variables de diseño y por tanto un menor tiempo de computo.

Finalmente debemos comentar que si bien las dimensiones de los elementos no son múltiplos de cinco centímetros tal como los de un diseño normal, queda a criterio del diseñador hacer los redondeos respectivos y estar en la completa seguridad de que su diseño final es también un óptimo.

Problema 03. Estructura aporticada tridimensional, de 1 nivel y 1 valle.

Se pretende optimizar una estructura aporticada tridimensional, de 1 nivel y 1 vano en cada sentido, sujeto a cargas de gravedad y cargas laterales estáticas. La carga muerta consistente en el aligerado de 0.20m más cobertura son de 3924 Pa (400 kgf/m²); la carga viva de techo igual a 981 Pa 100 kgf/m². Las cargas sísmicas estáticas de acuerdo al reglamento sismorresistente peruano: Zona 3 (Z=0.4), suelo rígido (S=1, Tp=0.4s), Edificación común

(U=1), factor de reducción (R=0.8). $C = 2.5 \left(\frac{T_p}{T} \right) = 2.5$. El peso total del piso,

considerando un primer dimensionamiento de los elementos para el cómputo del peso propio, es un 100% de las cargas permanente más un 25% de las cargas vivas se tiene: $P = 248 \text{ KN}$ (25.3 T). $\frac{ZUCS}{R} = 0.125P = 31 \text{ KN}$. La

distorsión lateral máxima deberá ser de 0.007.

Excentricidades accidentales:

Sismo X : $e_y = 0.05 \times 6 = 0.3 \text{ m}$

Sismo Y : $e_x = 0.05 \times 7 = 0.35 \text{ m}$

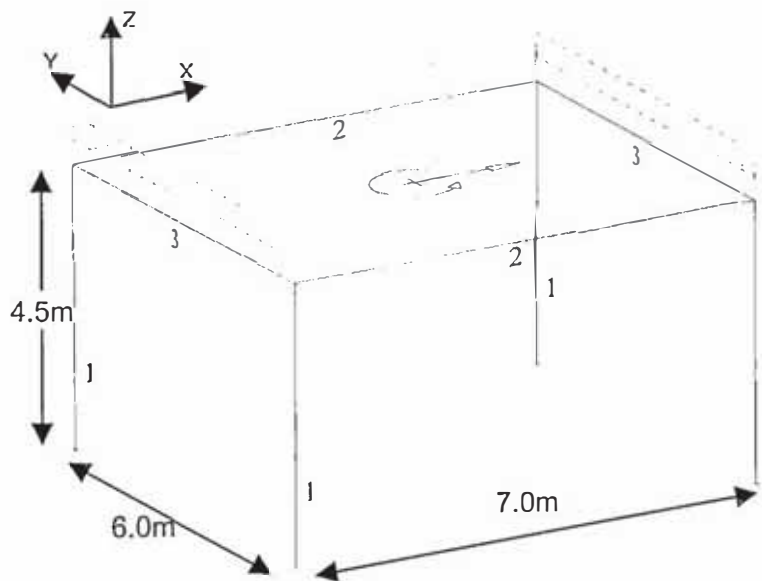


Fig. 6.8 Pórtico tridimensional de un nivel.

La solución al problema planteado la resolveremos utilizando el programa ADORC3D, el techo se considera como diafragma rígido, consideraremos dimensiones iguales para todas las columnas, asimismo para las vigas orientadas en X y las vigas orientadas en Y.

PREDIMENSIONAMIENTO INICIAL

Columna	b(m.)	h(m.)	cuantía
1	0.40	0.40	0.0100

Viga	b(m.)	h(m.)	cuantía		
			Mi(-)	M(+)	Mj(-)
2	0.25	0.50	0.0100	0.0100	0.0100
3	0.25	0.50	0.0100	0.0100	0.0100

Costo \$/.	5201.00
------------	---------

DISEÑO OPTIMO

Columna	b(m.)	h(m.)	cuantía
1	0.30	0.36	0.0162

Viga	b(m.)	h(m.)	cuantía		
			Mi(-)	M(+)	Mj(-)
2	0.25	0.36	0.0124	0.0111	0.0124
3	0.25	0.36	0.0033	0.0033	0.0033

Costo \$/.	4034.00
------------	---------

DISEÑO FINAL OPTIMO

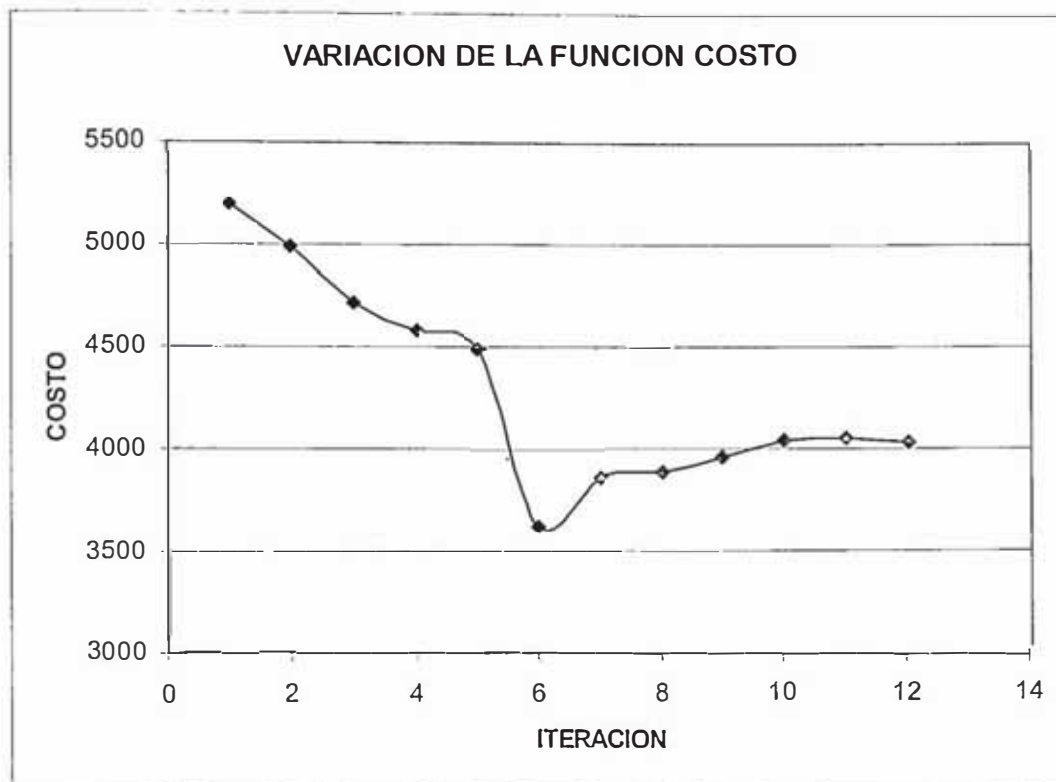
Columna	B	h	cuantía
1	0.30	0.35	0.0166

Viga	b(m.)	h(m.)	Cuantía		
			Mi(-)	M(+)	Mj(-)
2	0.25	0.40	0.0089	0.0092	0.0089
3	0.25	0.40	0.0033	0.0033	0.0033

Costo \$/.	4091.00
------------	---------

El diseño óptimo denota un ahorro considerable respecto al dimensionamiento inicial, las restricciones activas son en primer lugar la de los desplazamiento de entrepiso, luego las debidos a la flexión vigas y flexocompresión en columnas. Debido a la necesidad de redondear nuestro diseño, es que se presenta el diseño final óptimo en el cual las vigas y columnas se dan como dimensiones preestablecidas y nuevamente se procede al diseño utilizando el programa ADORC vemos que la diferencia de costos entre el diseño óptimo y el diseño final óptimo es mínima.

La variación de la función objetivo se muestra a continuación. Sólo han sido necesarios doce iteraciones para llegar al óptimo, las violación de las restricciones son en general menores al 0.5%.



Problema 04. Estructura aporticada tridimensional, de 1 nivel y 1 valle considerando un análisis modal dinámico

Considerando la estructura del problema 03, procederemos a la optimización considerando que las restricciones de desplazamientos provienen de un análisis modal. Haciendo uso del programa ADORC3D tenemos:

PREDIMENSIONAMIENTO INICIAL

Columna	b(m.)	h(m.)	cuantía
1	0.40	0.40	0.0100

Viga	b(m.)	h(m.)	cuantía			
			Mi(-)	M(+)	Mj(-)	
2	0.25	0.50	0.0100	0.0100	0.0100	
3	0.25	0.50	0.0100	0.0100	0.0100	
					Costo S/.	5201.00

PERIODOS: (s)

Modo 01	0.3062
Modo 02	0.3001
Modo 03	0.2106

DISEÑO OPTIMO

Columna	b(m.)	h(m.)	cuantía
1	0.32	0.36	0.0158

Viga	b(m.)	h(m.)	cuantía			
			Mi(-)	M(+)	Mj(-)	
2	0.25	0.34	0.0145	0.0118	0.0145	
3	0.25	0.37	0.0035	0.0033	0.0035	
					Costo S/.	4104.63

PERIODOS: (s)

Modo 01	0.4226
Modo 02	0.4221
Modo 03	0.2794

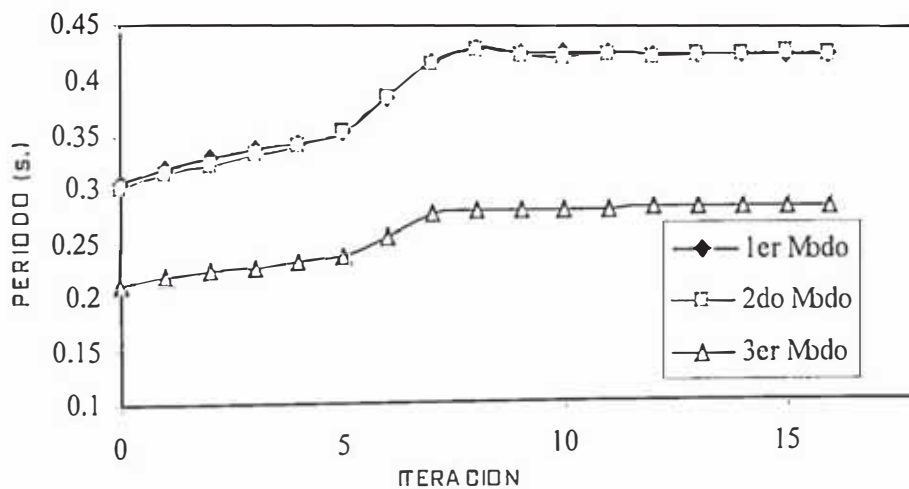
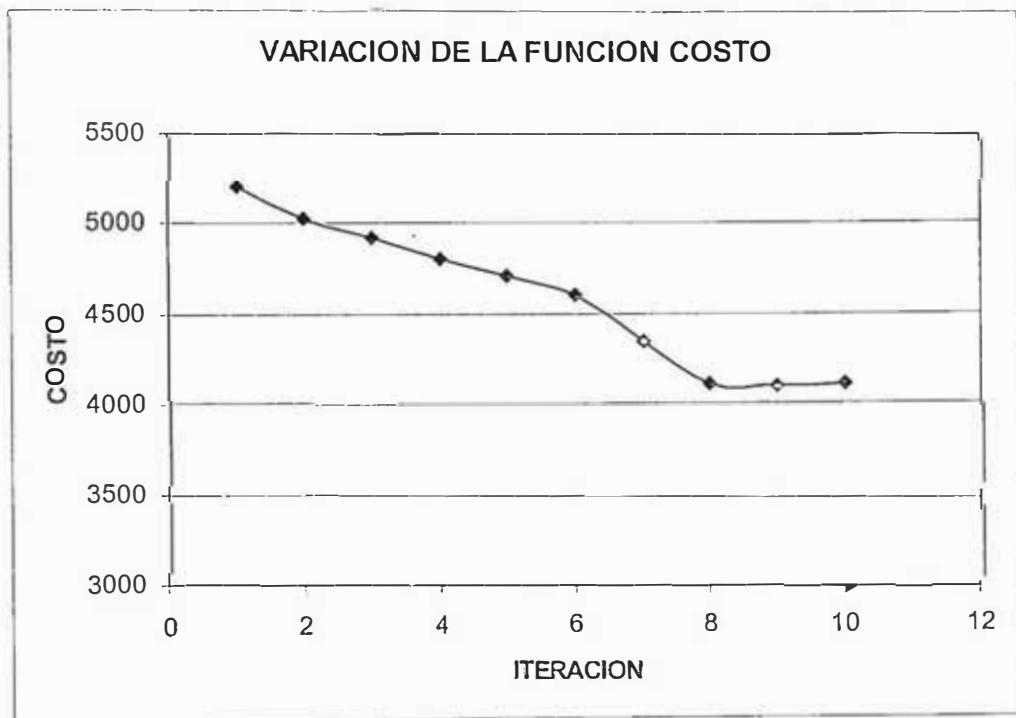


Fig. 6.9 VARIACION DE LOS PERIODOS EN CADA ITERACION

El tiempo CPU empleado en este problema 04 es de 0h0m35.77s y que representan la evaluación de dieciséis veces las gradientes de las funciones de restricción y objetivo. En la figura 6.9 vemos la variación de los valores de los periodos de las formas de modo en cada iteración hasta encontrar sus valores óptimos.

La variación de la función objetivo se muestra a continuación. Sólo ha sido necesario diez iteraciones para llegar al óptimo.



Problema 05. Estructura aporticada tridimensional de 3 niveles.

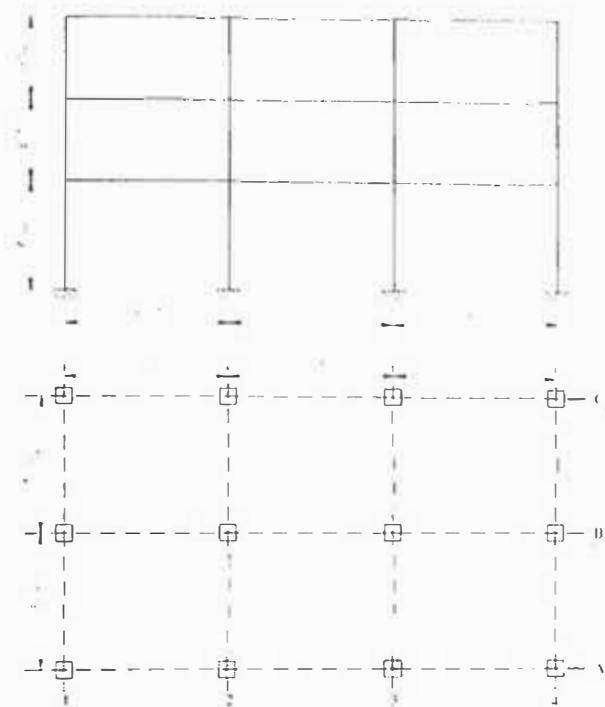


Fig. 6.10 Portico de 03 niveles (Elevación y planta)

Se pretende optimizar una estructura aporticada tridimensional de 3 niveles, 3 valles en la dirección "X" y 3 vanos en "Y", tal como se observa en la figura 6.10, sujeto a cargas de gravedad y cargas laterales sísmica estáticas.

Edificio de oficinas, con sobre carga 2453 Pa (250 kgf/m²); pisos de losa aligerada (h=0.20m) cuyo peso es: 2943 Pa (300 kgf/m²), los acabados y tabiquería contribuyen a la carga muerta en 1472 Pa (220 kgf/m²)

además del peso propio de elementos estructurales.

Las cargas sísmicas estáticas de acuerdo al reglamento sismorresistente peruano: Zona 3 (Z=0.4), suelo rígido (S=1, Tp=0.4s), Edificación común (U=1), factor de reducción (R=0.8). $C = 2.5 \left(\frac{T_p}{T} \right) = 2.5$. El peso total del piso

considerando un primer dimensionamiento de los elementos para el cómputo del peso propio, 100% de las cargas permanentes más un 25% de las cargas vivas se tiene:

NIVEL	Peso (KN)	Fuerza Lateral sísmica (KN)
1	193.6	141
2	188.4	241
3	142.9	261

Excentricidades accidentales :

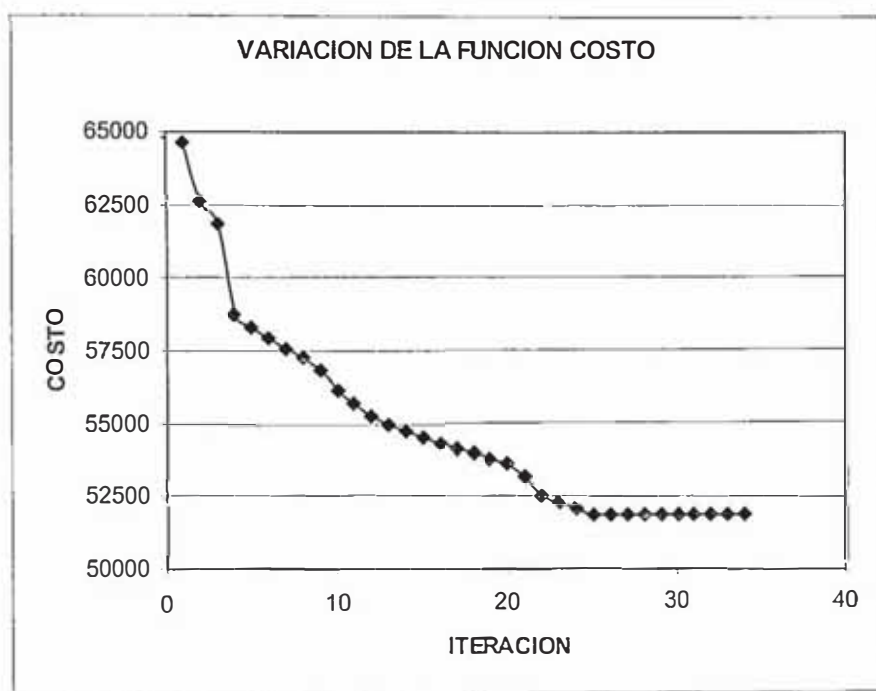
Sismo X : $e_y = 0.05 \times 18 = 0.5 \text{ m}$

Sismo Y : $e_x = 0.05 \times 7 = 0.9 \text{ m}$

El proceso de optimización inicia con un predimensionamiento inicial es decir un valor inicial de las variables, asumiremos columnas de 0.65mx0.65m y con vigas de 0.25mx0.50m, con un costo inicial de las estructuras de S/.64,662.

Se consideran los pisos como diafragmas rígidos, consideraremos en cada piso todas las columnas son de la misma dimensión, con dimensiones iguales para las columnas en los dos primeros pisos, forman un conjunto de vigas iguales aquellas orientadas en X y otro conjunto similar las vigas orientadas en Y

Haciendo uso del programa ADORC3D, se obtiene la variación de la función costo en cada iteración la cual ilustramos a continuación.



El diseño óptimo arroja un costo de S/. 51,814, el tiempo CPU empleado para este ejemplo es de 0h10m39.32s, fundamentalmente las restricciones activas que determinan el costo de la estructura son las de distorsión de entrepiso, flexión en vigas y flexocompresión en columnas, se presenta los resultados esquematizados en la figura 6.11.

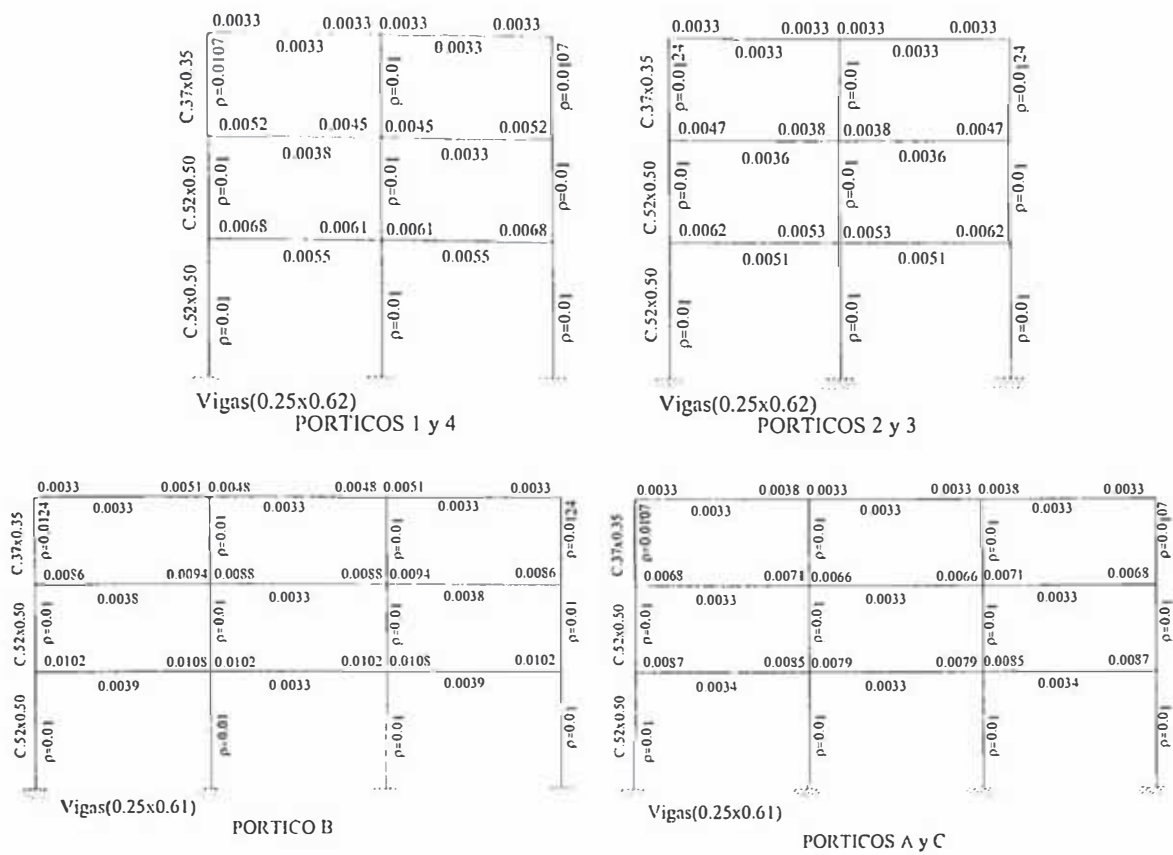


Fig. 6.11 Solución óptima para la estructura de tres niveles

6.3 RESUMEN

Se han implementado dos programas de cómputo ADORC y ADOC3D para la optimización de estructuras aporticadas planas y tridimensionales respectivamente. En este capítulo se muestra el algoritmo básico para la implementación de cada una de ellas. El listado del programa ADORC3D se muestra en el anexo "A" de esta tesis.

Los programas implementados nos ha permitido optimizar seis ejemplos de estructuras aporticadas. La aplicación la hemos realizado en una estructura plana de un nivel, pórtico plano de seis niveles, estructura aporticada tridimensional de un nivel, y estructura aporticada tridimensional de tres niveles. En todos los ejemplos elaborados se tiene que el óptimo se consigue teniendo como restricciones activas a las referidas con la flexión en vigas, flexocompresión en columnas y distorsión lateral de entrepiso.

CAPITULO 07

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

7.1 CONCLUSIONES

La optimización de estructuras aporricadas de concreto armado es un procedimiento matemático y numérico que envuelve el manejo de una gran cantidad de variables de diseño así como una gran número de restricciones las cuales se han incluido en el método de optimización denominado programación secuencial cuadrática.

Las expresiones que nos da el análisis y el diseño estructural se combinan para dar como resultado las funciones de restricción, considerando luego que tenemos un diseño factible si se cumplen las condiciones de igualdad o desigualdad dadas por esas funciones.

Variabes como los puntos de corte del refuerzo en vigas, al no ser consideradas modifican el diseño final óptimo de la estructura muy ligeramente. En la presente tesis se ha reconocido como variables de diseño importantes aquellas referidas a las dimensiones de las secciones tanto en vigas y columnas así como a las cuantías, el resto de las variables simplemente las consideramos como parámetros constantes cuyos valores deben ser dados previamente de acuerdo al criterio del diseñador. El considerar un mínimo número de variables favorece el tiempo de cómputo disminuyéndolo considerablemente.

Entre las principales contribuciones de la tesis está en haber desarrollado las expresiones para el cálculo de las gradientes de las funciones de restricción, principalmente aquellas referidas a la flexocompresión biaxial en columnas, y las restricciones que dependen del caso de análisis sísmico modal. Se ha verificado que las expresiones formuladas para restricciones de diseño son correctas en el sentido que permiten la adecuada convergencia en el proceso de optimización.

Se ha identificado que las restricciones de diseño que son activas es decir que están en los límites que permiten los códigos de diseño son las siguientes:

- Restricciones por distorsión lateral de entresijos
- Restricciones por la resistencia a la flexión en vigas.
- Restricciones por flexocompresión en columnas.

Las otras restricciones como las encontradas debido al diseño por corte en ningún caso son activas.

7.2 RECOMENDACIONES Y LINEAS DE INVESTIGACION FUTURA

En este trabajo no se ha tenido en consideración el diseño por torsión en los elementos, por lo que se recomienda adicionar funciones de restricción que consideren este efecto.

En la presente tesis se ha considerado por la fácil implementación computacional que en cada elemento existen variables independientes y se consideran como restricciones adicionales la igualdad que existe entre variables con otros elementos, es decir por ejemplo si se consideran que todas las columnas de un piso son cuadradas y de las mismas dimensiones entonces se tendrá un número de variables igual a dos veces el número de columnas cuando realmente existiría sólo una variable. Por ello se recomienda implementar un algoritmo que permita considerar sólo las variables realmente existentes con el fin de reducir el tiempo y el esfuerzo computacional.

En la presente tesis no se ha considerado la existencia de muros de corte explícitamente, se recomienda en futuras investigaciones implementar un elemento tipo panel para la optimización de estructuras aporticadas con muros de corte e identificando las respectivas variables de diseño de este elemento.

En investigaciones futuras se deberá considerar en el modelo de optimización aspectos de: a) modelación de muros de corte, b) consideración de diferentes tipos de secciones en columnas diferentes a las rectangulares, b) modelos estructural, c) modelación de diafragmas de losa flexible, d) elementos acartelados, e) consideraciones de diseño en zonas de alto riesgo sísmico y otras.

BIBLIOGRAFIA

1. Frank Ayres, Jr, "Matrices", Mc Graw Hill, México 1969..
2. American Concrete Institute (1999), "Building Code Requirements for Structural Concrete (318-99)".
3. Arora J. S. (1997) "Guide to Structural Optimization", ASCE Manuals and Reports on Engineering Practice No. 90.
4. Balling, R. J. y Yao, X. (1997) "Optimization of Reinforced Concrete Frames", Journal of Structural Engineering ASCE, Vol 123(2), pp.193-202.
5. Boggs, P. T. y Tolle J. W. (1995) "Sequential Quadratic Programming", National Institute of Standards and Technology USA.
6. Chan, C., Grierson, Donald y Sherbourne A. (1995) "Automatic Optimal Design of Tall Steel Building Frameworks", Journal of Structural Engineering ASCE, Vol 121(5), pp. 838-847.
7. Goldsmith, Meredith J. (1999) "Sequential Quadratic Programming Methods Based On Indefinite Hessian Approximations" Stanford University.
8. Gopal, V. y Biegler L.T. (1998) "Large Scale Inequality Constrained Optimization and Control", Departament of Chemical Engineering, Carnegie Mellon University, Pittsburgh.
9. Harmen T. E. y Mayorca J.P. "Diseño de estructuras de concreto Armado", segunda edición, PUCP 2000.

10. Kirsch, Uri (1981) "Optimum Structural Design, Concepts, Methods and Applications", McGraw Hill, New York.
11. Kirsch, Uri (1993) "Structural Optimization, Fundamentals and Applications", Springer-Verlag.
12. Kirsch, Uri (1997) "Effective Move Limits for Structural Optimization", Journal of Structural Engineering ASCE, Vol 123(2), pp. 210-217.
13. Lawrence, Craig y Tits, André "A computationally efficient feasible sequential quadratic programming algorithm", SIAM J. OPTIM. Vol. 11 No 4, pp 1092 -1118.
14. Miranda Zúñiga, Manuel; Apuntes de clase del curso de "Optimización Estructural", Programa de Maestría en Ingeniería Estructural UNI-FIC, Perú 2000.
15. Morales Morales, Roberto; "Diseño en Concreto Armado", Capítulo Peruano del American Concrete Institute, 2000.
16. Nawy, Edward "Concreto Reforzado", Prentice-Hall Hispanoamericana, México 1988.
17. Pique y Scaletti "Análisis Sísmico de Edificios", Colección del Ingeniero Civil, CIP-CDL 1991.
18. Reglamento Nacional de Construcciones - NTE E.030 Diseño Sismorresistente (Rev. Set. 2001).
19. Romani Loayza, S. (2000) "Programas en Computadora Para el Diseño en Concreto Armado", Tesis de grado para optar el título de Ingeniero Civil, FIC - UNI.

20. Rosenblueth, E. Newmark, N. "Fundamentos de Ingeniería Sísmica", México, Diana, 1978.
21. Sarma, Kamal C. y Adeli, Hojjat (1998) "Cost Optimization of Concrete Structures", Journal of Structural Engineering ASCE, Vol 124(5), pp. 570-578.
22. Soegiarso, R. y Adeli, H. (1997) "Optimum Load and Resistance Factor Design of Steel Space-Frame Structures", Journal of Structural Engineering ASCE, Vol 123(2), pp. 184-192.
23. Wilson, Edward "Dynamic Analysis Using Response Spectrum Seismic Loading", CSI 1998.
24. Zapata Baglietto, Luis. y Velazquez, Antonio (1983) "Optimización Estructural de Miembros de Armaduras", Tecnica, Vol 2 (2), UNI-PERU.
25. Zienkiewicz, O. C. y Taylor R. L. "El Método de los elementos Finitos", Cuarta Edición Vol 2, McGraw-Hill/Interamericana de España, 1995.