UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE CIENCIAS

Escuela Profesional de Matemáticas

El Principio Variacional de Ekeland y Algunas de sus Aplicaciones

TESIS PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE

LICENCIADO EN MATEMATICAS

PRESENTADO POR

FELIX RICARDO VILLANUEVA SANTOS

LIMA - PERU

1992

INDICE

INTRODUCCION

El Principio Variacional de Ekeland, desde que apareció en 1972, ha tenido muchas aplicaciones en diferentes campos del Análisis.

Por ejemplo, este Principio es aplicado en Ecuaciones Diferenciales Parciales; en la demostración de Teoremas de Min-Max en el Análisis Convexo. En este trabajo, esencialmente presentaremos el Principio Variacional de Ekeland y su aplicación en la demostración de un Teorema de Min-Max de Ambrosetti y Rabinowitz.

Luego, en menor proporción, veremos una aplicación de este Principio en el Análisis Convexo para estudiar los puntos de soporte de una funcional y las funcionales de soporte de conjuntos convexos.

El primer capitulo es dedicado a establecer algunas definiciones y argumentos teóricos que serán utilizados posteriormente. Ahí, consideraremos funciones $f\ X \longrightarrow \mathbb{R}$ donde X es, en general, un espacio topológico de Hausdorff. A este tipo de funciones la llamaremos funcionales. Definiremos los conceptos de funcionales inferiormente contínuas; el subdiferencial de una funcional y el índice de puntos fijos. También será establecidos algunos resultados importantes sobre estos conceptos.

El segundo capitulo es la parte central de este trabajo. Ahi, estableceremos el Principio Variacional de Ekeland en sus versiones débil y fuerte. Inmediatamente después veremos algunas aplicaciones directas de este principio a la Teoría de Puntos Fijos y a funcionales definidas en espacios de Banach. Como consecuencia de lo anterior obtendremos algunos resultados de funciones que satisfacen la famosa condición de Palais-Smale (condición P-S).

La parte central del capitulo 3 es la aplicación del Principio Variacional de Ekeland en la demostración del Principio Variacional de tipo Min-Max de Ambrosetti-Rabinowitz. Previamente caracterizaremos el subdiferencial de la funcional $\theta \cdot E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$\theta(x) = \max_{t\in K} x(t)$, donde K es un espacio métrico compacto y E es el espacio vectorial real de todas las funcionales contínuas definidas en K.

El capítulo 4 es dedicado a aplicaciones del Principio Variacional de tipo Min-Max visto en el capítulo 3. Ahí veremos el Teorema del Paso de la Montaña en sus formas simple y generalizada, y condiciones suficientes para la existencia de puntos criticos. En la prueba de estos teoremas es justamente donde utilizaremos la Teoría del Indice de los Puntos Fijos.

Finalmente, el capitulo 5 es dedicado a estudiar algunos conceptos nuevos como puntos de soporte y funcionales de soporte. Dados un espacio de Banach X, $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ una funcional, C un subconjunto no vacio y convexo de X y $x_0 \in C$, el objetivo del capitulo 5 es "cuantificar" el conjunto de puntos de soporte de f y el conjunto de funcionales de soporte de x_0.

CAPITULO 1

FUNDAMENTOS TEORICOS

En este capítulo serán establecidos algunos conceptos y resultados que nos servirán en los capítulos posteriores. Veremos algunos resultados de minimización de funciones inferiormente continuas, de análisis convexo y alguna teoría del índice de puntos fijos. Algunos resultados serán establecidos sin prueba, pero indicaremos la bibliografía dónde hallarla.

1.1.- MINIMIZACION DE FUNCIONES INFERIORMENTE CONTINUAS.-

Definición.- Sean X un espacio topológico y

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

una función.

1) Se dice que f es inferiormente continua en un punto $x_o \in X$ si, y sólo si, para cada $a \in \mathbb{R}$ con $a < f(x_o)$, existe una vecindad abierta $V(x_o)$ de x_o tal que:

$$a < f(x), \ \forall\ x \in V(x_o).$$

2) Se dice que f es inferiormente continua si, y sólo si, para cada $x \in X$, f es inferiormente continua en X.

TEOREMA 1.1.- Sean:

X un espacio topológico, y

$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función.

Luego, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f es inferiormente continua.

b) Para cada $a \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$f^{-1}(\langle a,\infty\rangle) = \{ x \in X \ / \ a < f(x) \}$$

es abierto.

Prueba.- a) $\longrightarrow$ b): Supongamos que f es inferiormente continua. Sea $a \in \mathbb{R}$ dado y consideremos el conjunto

$$f^{-1}(\langle a,\infty\rangle) = \{ x \in X \ / \ a < f(x) \}.$$

Veamos que $f^{-1}(\langle a,\infty\rangle)$ es abierto: Sea $x_o \in f^{-1}(\langle a,\infty\rangle)$

cualquiera. Así, $a < f(x_o)$ y como f es inferiormente continua en x_o, existe una vecindad abierta $V(x_o)$ de x_o tal que:

$$a < f(z),\ \forall\ z \in V(x_o)$$

Así, $V(x_o) \subset f^{-1}(\langle a,\infty\rangle)$ y por lo tanto, $f^{-1}(\langle a,\infty\rangle)$ es abierto.

b) $\Longrightarrow$ a): Supongamos que b) se cumple. Sea $x_o \in X$ cualquiera. Veamos que f es inferiormente continua en x_o: Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a < f(x_o)$. Luego, x_o esta en el conjunto

$$A = \{\ x \in X \ /\ a < f(x)\ \}$$

y como éste es abierto, existe una vecindad abierta $V(x_o)$ de x_o con $V(x_o) \subset A$. Es decir,

$$\forall\ z \in V(x_o):\ a < f(z).$$

Así, f es inferiormente continua en x_o, y como x_o fue tomado arbitrariamente, se sigue a). ∎

TEOREMA 1.2.- Sean:

X un espacio topológico compacto,

$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\ +\infty\ \}$ una función inferiormente continua.

Luego: a) f es acotada inferiormente y

b) El ínfimo de f es alcanzado en un punto $\hat{x} \in X$.

Prueba.- Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{\ x \in X \ /\ -n < f(x)\ \}$.

Los conjuntos A_n forman un cubrimiento abierto para X, y como éste es compacto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$. De aquí obtenemos que $\forall\ x \in X$: $-N < f(x)$ y entonces f es acotada inferiormente. Se sigue que $\alpha = \inf_X f(x) \in \mathbb{R}$.

b) Tomemos $\alpha_n \downarrow \alpha$. Los conjuntos $F_n = \{\ x \in X \ /\ f(x) \leq \alpha_n\ \}$ son cerrados y $F_{n+1} \subset F_n$, $n \in \mathbb{N}$. De aquí, los F_n tienen la propiedad de la intersección finita. Como X es compacto,

$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. Si $\hat{x} \in F$, entonces $f(\hat{x}) = \alpha$. Así, el ínfimo de f es alcanzado en $\hat{x}$. ■

<u>Definición.-</u> Sean: X un espacio topológico, y

$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función.

a) Se dice que f es secuencialmente inferiormente continua en $x_o \in X$ si, y sólo si, para cada sucesión (x_n) con $x_n \xrightarrow{n} x_o$ se tiene que:

$$f(x_o) \leq \lim\inf f(x_n).$$

b) Se dice que f es secuencialmente inferiormente continua si, y sólo si, para cada $x \in F$, f es secuencialmente inferiormente continua en x.

<u>TEOREMA 1.3.-</u> Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función.

a) Si f es inferiormente continua, entonces f es secuencialmente inferiormente continua.

b) Si X satisface el Primer Axioma de Contabilidad, se cumple el recíproco de a).

<u>Prueba.-</u> a) Supongamos que $x_n \longrightarrow x_o$ en X. Si $f(x_o) < +\infty$, dado $\varepsilon > 0$, consideremos el conjunto abierto

$$A = \{ x \in X \,/\, f(x) > f(x_o) - \varepsilon \}.$$

Como $x_o \in A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que: $\forall\, n \geq N$, $f(x_n) > f(x_o) - \varepsilon$

Entonces, $\lim\inf f(x_n) \geq f(x_o) - \varepsilon$ y como ε fue tomado arbitrariamente, se sigue que $f(x_o) \leq \lim\inf f(x_n)$.

Si $f(x_o) = +\infty$, dado $m > 0$, consideramos el conjunto abierto

$$\{ x \in X \,/\, f(x) > m\}$$

al cual pertenece x_o. De aquí resulta que $\lim\inf f(x_n) \geq m$ y como m es arbitrario, $\lim\inf f(x_n) = +\infty$. Así, f es secuencialmente inferiormente continua.

b) Sea $a \in \mathbb{R}$ cualquiera. Probaremos que el conjunto

$$F = \{ x \in X \,/\, f(x) \leq a \}$$

es cerrado. Para ello, como X satisface el Primer Axioma de Contabilidad, es suficiente mostrar que el límite de toda sucesión convergente en F, está en F. Sea $(x_n) \subset F$ con $x_n \longrightarrow x_o$. Como estamos suponiendo que f es secuencialmente inferiormente continua se tiene que $f(x_o) \leq \liminf f(x_n) \leq a$ y por lo tanto $x_o \in F$. ■

COROLARIO 1.4.- Sean: (X,d) un espacio métrico,

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

una función. Luego: f es inferiormente continua si, y sólo si, f es secuencialmente inferiormente continua.

Prueba.- Esto es una consecuencia directa del Teorema 1.2 ya que todo espacio métrico satisface el Primer Axioma de Contabilidad. ■

ALGUNOS EJEMPLOS CUANDO $X = \mathbb{R}$.-

Supongamos que $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función. Luego:

1.-f es inferiormente continua en cada punto de continuidad.

2.- Si x_o es un punto de discontinuidad con salto de f y ésto es inferiormente continua en x_o, entonces

$$f(x_o) \leq \min \{ f(x_o^-) , f(x_o^+) \}.$$

En efecto, si $f(x_o^-) < f(x_o^+)$ mostraremos que:

$$f(x_o) \leq f(x_o^-).$$

Hagamos la prueba por contradicción: Si $f(x_o^-) < f(x_o)$, tomamos $L \in \mathbb{R}$ con $f(x_o^-) < L < f(x_o)$. Como $L < f(x_o)$ y f es inferiormente continua en x_o, existe $r > 0$ tal que:

$$\forall\, x \in \langle x_o - r , x_o + r \rangle : L < f(x).$$

De aquí se sigue que $L \leq f(x_o^-)$, lo cual no puede ser. Luego, $f(x_o) \leq f(x_o^-)$.

FUNCIONALES DEFINIDAS EN ESPACIOS DE BANACH.-

Sea X un espacio de Banach. En X hay dos topologías a saber. La topología fuerte, denotada por $T_{\|\cdot\|}$, que es la topología dada por la norma $\|\cdot\|$ y la topología débil que definiremos a continuación.

Consideremos el espacio dual X^* de X,

$$X^* = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f \text{ es lineal y continua } \}.$$

La topología débil de X es denotada por $\sigma(X, X^*)$ y se define como la topología menos fina que hace continuas a todas las $f \in X^*$.

ALGUNAS PROPIEDADES DE $\sigma(X,X^*)$.-

1.- Es claro de la definición de $\sigma(X,X^*)$ que $\sigma(X, X^*) \subset T_{\|\cdot\|}$.

Una consecuencia inmediata de esto es que todo conjunto abierto (cerrado) débilmente es también abierto (cerrado) fuertemente.

2.- La inclusión en 1.- es estricta. Es decir,

$$\sigma(X,X^*) \subsetneq T_{\|\cdot\|}.$$

En efecto: Supongamos que X es un espacio de Banach de dimensión infinita. El conjunto $S = \{ x \in X \ / \ \|x\| = 1 \}$ es fuertemente cerrado y por lo tanto $X \setminus S \in T_{\|\cdot\|}$.

Mostraremos que $X \setminus S \notin \sigma(X,X^*)$. Es suficiente mostrar que

$$\{ x \in X \ / \ \|x\| < 1 \} \subset Cl_d(S)$$

pues esto implica que S no es cerrado débilmente y entonces $X \setminus S \notin \sigma(X, X^*)$.

Ahora probemos que:

$$\{ x \in X \ / \ \|x\| < 1 \} \subset Cl_d(S) \qquad (1)$$

Sea $x_o \in X$ con $\|x_o\| < 1$ y sea $V \in \sigma(X, X^*)$ con $x_o \in V$.

Podemos suponer que V es de la forma:

$$V = \{ x \in X \ / \ |f_i(x) - f_i(x_o)| < \varepsilon; \ \forall \ i \in I \}$$

donde $\varepsilon > 0$, I es un conjunto finito de índices y

$$\{ f_i \ / \ i \in I \} \subset X^*.$$

Veamos que:

$$\exists\ y_0 \in X\setminus\{0\} \ / \ \forall\ i \in I : f_i(y_0) = 0 \tag{2}$$

Por contradicción: Supongamos que

$$\forall\ y \in X\setminus\{0\},\ \exists\ i \in I : f_i(y) \neq 0 \tag{3}$$

Definamos $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por:

$$F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)),\ \forall\ x \in X.$$

De (3) se tendría que F sería inyectiva y de aquí $\dim X = n$, lo cual es una contradicción pues $\dim X = +\infty$. Así, (2) queda probado.

Definamos $g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ por:

$$g(t) = \| x_0 + ty_0 \|,\ \forall\ t \geq 0.$$

Entonces, g es continua,

$$g(0) = \|x_0\| < 1 \ \text{ y } \ \lim_{t\longrightarrow\infty} g(t) = +\infty.$$

Así, debe existir $\hat{t} > 0$ con $\| x_0 + \hat{t}y_0 \| = 1$ y entonces

$$x_0 + \hat{t}y_0 \in S \cap V.$$

Así, para cada $V \in \sigma(X,X^*)$ con $x_0 \in V$, $S \cap V \neq \emptyset$. Luego, $x_0 \in Cl_d(S)$ y ésto prueba (1).

3.- Sea $C \subset X$ un conjunto convexo. Luego, C es cerrado fuertemente si, y sólo si, C es cerrado débilmente.

En efecto: Supongamos que C es cerrado en $T_{\|\cdot\|}$. Veamos que $X\setminus C \in \sigma(X,X^*)$: Sea $x_0 \in X\setminus C$; como C es convexo y cerrado, el teorema de Hahn-Banach implica que existen $f \in X^*$ y $a \in \mathbb{R}$ tales que:

$$f(x_0) < a < f(x),\ \forall\ x \in C.$$

Si tomamos $V = \{ x \in X \ / \ f(x) < a \}$ se tiene que $V \in \sigma(X,X^*)$, $x_0 \in V$ y $V \cap C = \emptyset$. Luego, $x_0 \in V \subset X\setminus C$ y $V \in \sigma(X,X^*)$, esto prueba que $X\setminus C \in \sigma(X,X^*)$. De aquí se sigue que C es cerrado débilmente.

El recíproco ya fue visto en la propiedad 1.

4.- Si $x_n \longrightarrow x_o$ en $T_{\|\cdot\|}$, entonces $x_n \longrightarrow x_o$ en $\sigma(X,X^*)$.

En efecto: Sea $V \in \sigma(X,X^*)$ con $x_o \in V$. Luego, $V \in T_{\|\cdot\|}$ y como $x_n \longrightarrow x_o$ en $T_{\|\cdot\|}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que: $\forall\ n \geq N$: $x_n \in V$. Así, $x_n \longrightarrow x_o$ en $\sigma(X,X^*)$.

<u>TEOREMA 1.5.-</u> Supongamos que:

X es un espacio de Banach,

$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función secuencialmente inferiormente continua en $\sigma(X,X^*)$.

Entonces: f es secuencialmente inferiormente continua en $T_{\|\cdot\|}$.

<u>Prueba.-</u> Sea $(x_n) \longrightarrow x_o$ en $T_{\|\cdot\|}$; entonces $x_n \longrightarrow x_o$ en $\sigma(X,X^*)$. Como f es secuencialmente inferiormente continua en $\sigma(X,X^*)$ se tiene que $f(x_o) \leq \liminf f(x_n)$. ∎

<u>TEOREMA 1.6.-</u> Supongamos que:

X es un espacio de Banach,

$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función inferiormente continua en $\sigma(X,X^*)$.

Entonces, f es inferiormente continua en $T_{\|\cdot\|}$.

<u>Prueba.-</u> Sea $a \in \mathbb{R}$ cualquiera. El conjunto

$$f^{-1}(\langle a,\infty\rangle) \in \sigma(X,X^*) \subset T_{\|\cdot\|}$$

y de aquí, $f^{-1}(\langle a,\infty\rangle) \in T_{\|\cdot\|}$. ∎

<u>OBSERVACION.-</u> En general, una función inferiormente continua en $T_{\|\cdot\|}$ no es inferiormente continua en $\sigma(X,X^*)$. Sin embargo, estos conceptos coinciden si la función es convexa como veremos en el siguiente teorema.

TEOREMA 1.7.- Supongamos que:

X es un espacio de Banach,

$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función convexa.

Luego: f es inferiormente continua en $T_{\|\cdot\|}$ si, y sólo si, lo es en $\sigma(X, X^*)$.

Prueba.- ($\Longrightarrow$) Si f es inferiormente continua en $T_{\|\cdot\|}$, entonces para cada $a \in \mathbb{R}$ el conjunto $A = \{ x \in X \ / \ f(x) > a \}$ esta en $T_{\|\cdot\|}$. Luego, $X \setminus A$ es cerrado fuertemente y convexo, y con la ayuda de la propiedad 3 se sigue que $X \setminus A$ es cerrado débilmente y entonces $A \in \sigma(X, X^*)$.

($\Longleftarrow$) Es el teorema 1.6. ∎

1.2.- ALGUNOS CONCEPTOS Y RESULTADOS DE ANALISIS CONVEXO.-

En esta sección definiremos el concepto de subdiferencial de una funcional definida en un espacio de Banach X. Este subdiferencial es un subconjunto del dual X^* de X y uno de los resultados que estableceremos da condiciones suficientes para que este conjunto sea no vacío y compacto en la topología ω^* de X^*.

Definición.- Supongamos que:

X es un espacio de Banach,

$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funcional convexa, inferiormente continua y $f \not\equiv +\infty$.

$Dom(f) = \{ x \in X \ / \ f(x) < \infty \}$.

Para cada $x \in X$, el subdiferencial de f en x se denota por $\partial f(x)$ y se define como sigue:

$$\partial f(x) = \{ \mu \in X^* \ / \ f(y) \geq f(x) + \langle \mu, y-x \rangle, \ \forall \ y \in X \}.$$

Véase que si $x \notin Dom(f)$, entonces $\partial f(x) = \emptyset$. Además, $\partial f(x)$ es un conjunto convexo y ω^*-cerrado. Para $x \in Dom(f)$ es posible que $\partial f(x)$ sea vacío o que $\partial f(x)$ no sea acotado. Pero la siguiente proposición da condiciones suficientes para que $\partial f(x)$ sea no vacío, acotado y ω^*-compacto.

PROPOSICION 1.8.- Supongamos que:

X es un espacio de Banach,

$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una funcional convexa, inferiormente continua y $f \not\equiv +\infty$,

$x_o \in \mathrm{Dom}(f)$ y f es continua en x_o.

Entonces, $\partial f(x_o) \neq \emptyset$; $\partial f(x_o)$ es acotado y ω^*-compacto.

Definición.- Supongamos que:

X es un espacio de Banach,

$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una funcional convexa continua con $\mathrm{Dom}(f) \neq \emptyset$,

$x \in \mathrm{Dom}(f)$, $y \in X$

Definamos la función $r : \langle 0,+\infty\rangle \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ mediante

$$r(t) = \frac{f(x+ty) - f(x)}{t}, \quad \forall\, t \in \langle 0,\infty\rangle.$$

A partir de la convexidad de f se puede probar que r es una función creciente. En consecuencia, el límite $\lim\limits_{t \downarrow 0} r(t)$ existe y es llamado la derivada direccional de f en x en la dirección y, y se denota por $f'(x,y)$. El resultado que damos a continuación (sin demostración) será utilizado en el capítulo III en la prueba del Principio Variacional de Tipo Min-Max.

PROPOSICION 1.9.- Supongamos que:

X es un espacio de Banach,

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa y continua,

$x, y \in X$ son puntos fijos.

Entonces:

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x+ty) - f(x)}{t} = \max_{\mu \in \partial f(x)} \langle \mu, y\rangle$$

La prueba de la proposición 1.9 se puede ver en [13].

1.3.- TEORIA DEL INDICE DE PUNTOS FIJOS NECESARIA.-

En esta sección veremos lo estrictamente necesario de la Teoría del Indice de Puntos Fijos. Los resultados que establezcamos aquí serán usados solamente en la prueba de los Teoremas de Punto de Silla y el Teorema del Paso de la Montaña Generalizado en el capítulo 4.

Definición.- Supongamos que: X é Y son espacios de Banach,
G es un subconjunto no vacío de X,
$f : G \longrightarrow Y$ es una aplicación.

Se dice que f es una aplicación compacta si, y sólo si, f es continua y $f(G)$ es relativamente compacto.

Definición.- Sean X un espacio de Banach y $G \subset X$ un conjunto no vacío, abierto y acotado.

1.- Denotaremos por $V(G,X)$ al conjunto de todas las aplicaciones $f : X \longrightarrow X$ que satisfacen:

(a) $f : \overline{G} \longrightarrow X$ es compacta,

(b) f no tiene puntos fijos sobre la frontera ∂G de G.

2.- Sean $f, g \in V(G,X)$. Diremos que f y g son compactamente homotópicas sobre ∂G si, y sólo si, existe una función H que satisface lo siguiente:

(c) $H : \overline{G} \times [0,1] \longrightarrow X$ es compacta.

(d) $H(x,t) \neq x$, $\forall (x,t) \in \partial G \times [0,1]$.

(e) $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$ sobre $\overline{G}$.

En este caso escribiremos $\partial G : f \cong g$ y H será llamada una homotopía compacta.

Observaciones.-

1.- Por brevedad, las homotopías compactas serán llamadas simplemente homotopías.

2.- La definición de $\partial G : f \cong g$ puede ser debilitada como sigue:

f y g son compactamente homotópicas sobre ∂G si, y sólo si, existe una función $H : \partial G \times [0,1] \longrightarrow X$ que satisface lo siguiente:

(c') $H : \partial G \times [0,1] \longrightarrow X$ es compacta.

(d') $H(x,t) \neq x$, $\forall\ (x,t) \in \partial G \times [0,1]$.

(e') $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$ sobre ∂G.

3.- La prueba de que (c'), (d') y (e') implican (c), (d) y (e) se encuentra en [15].

4.- La observación 2 quiere decir que para saber si f y g son o no compactamente homotópicas es suficiente conocer los valores de f y g sobre ∂G. En particular, si $f = g$ en ∂G, entonces

$$\partial G : f \cong g,$$

puesto que $H(x,t) = f(x)$, $\forall\ (x,t) \in \partial G \times [0,1]$ es, en este caso, una homotopía compacta.

En el siguiente teorema, enunciaremos (sin demostración) algunas propiedades de los elementos de $V(G,X)$ y de funciones compactamente homotópicas. La demostración de este teorema se puede ver en [15].

<u>TEOREMA 1.10.-</u> Supongamos que X es un espacio de Banach y que G es un subconjunto abierto no vacío y acotado de X.

1.- Para cada $f \in V(G,X)$: $\inf\limits_{x\in\partial G} \| f(x) - x \| > 0$.

2.- Para cada $f \in V(G,X)$; el conjunto de sus puntos fijos es compacto.

3.- La relación $\partial G : f \cong g$ es una relación de equivalencia.

4.- Si $f,g \in V(G,X)$ y $\sup\limits_{x\in\partial G} \| f(x)-g(x) \| < \inf\limits_{x\in\partial G} \| f(x) - x \|$ entonces $\partial G : f \cong g$.

<u>EL SISTEMA DE AXIOMAS DEL INDICE DE PUNTOS FIJOS.-</u>

En lo que sigue, a cada $f \in V(G,X)$ le asignaremos un número entero denotado por $i(f,G)$, que es llamado el índice de puntos fijos de f sobre G, de tal manera que nos dé alguna medida del número de puntos fijos de f sobre G. Una cuestión natural sería saber sobre la existencia y unicidad ese número entero que le queremos asignar a cada $f \in V(G,X)$. Aquí, asumiremos la existencia y unicidad de este número natural por medio de una serie de axiomas. Pero en la sección 12.7 de [15] se prueba que, en efecto, existe ese índice de puntos fijos que satisfacen los axiomas que daremos a continuación.

Definición.- Para cada $f \in V(G,X)$, existe un único entero denotado por $i(f,G)$ y llamado el índice de puntos fijos de f sobre G, que satisface los siguientes axiomas:

(A1) Normalización: Si $f(x) = x_o$, $\forall\ x \in \overline{G}$, donde $x_o \in G$, entonces $i(f,G) = 1$.

(A2) Principio de Existencia de Kronecker: Si $i(f,G) \neq 0$, entonces f tiene al menos un punto fijo en G.

(A3) Aditividad: Si $\overline{G} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{G}_j$ donde $G_j \subset X$ es abierto y

$$f \in V(G_j,X) \text{ para cada } j \in \{1,\dots,n\};$$

$$G_j \cap G_k = \emptyset, \text{ si } j \neq k;$$

entonces

$$i(f,G) = \sum_{i=1}^{n} i(f,G_j).$$

(A4) Invarianza por homotopías: Si $\partial G : f \cong g$, entonces $i(f,G) = i(g,G)$.

Observaciones.-

1.- En (A1), x_o es el único punto fijo de f en G.

2.- El axioma (A2) es, en realidad, un criterio suficiente para determinar la existencia de puntos fijos.

3.- El axioma (A4) muestra la estabilidad del índice de punto fijo bajo deformaciones continuas que no creen puntos fijos sobre ∂G.

En el siguiente teorema mostraremos algunos resultados que son consecuencias inmediatas de los axiomas.

TEOREMA 1.11.- Sean f y $g \in V(G,X)$ cualesquiera. Luego:

1.- Dependencia de los valores en la frontera: Si $f = g$ en ∂G, entonces $i(f,G) = i(g,G)$.

2.- Si f no tiene puntos fijos en G, entonces $i(f,G) = 0$.

3.- Si $G_1 \subset G$, G_1 es abierto y f no tiene puntos fijos en

$G \setminus G_1$, entonces $i(f,G) = i(f,G_1)$.

4.- Continuidad del índice de punto fijo: Si

$$\sup_{x\in\partial G} \| f(x) - g(x) \| < \inf_{x\in\partial G} \| f(x) - x \|$$

entonces $i(f,g) = i(f,G)$.

Prueba.- Veamos 4: Como

$$\sup_{x\in\partial G} \| f(x) - g(x) \| < \inf_{x\in\partial G} \| f(x) - x \|,$$

el Teorema 1.10 implica que $\partial G : f \cong g$. Del axioma (A4) se sigue que $i(f,G) = i(g,G)$.

1 es un caso particular de 4, y 2 es una consecuenci inmediata de (A2).

Veamos 3: Como $G = G\setminus G_1 \cup G_1$, (A3) implica que

$$i(f,G) = i(f,G\setminus G_1) + i(f,G_1).$$

Como f no tiene puntos fijos en $G\setminus G_1$, entonces $i(f,G) = i(f,G_1)$. ∎

Observación.- Una estrategia para mostrar que una función

$$f \in V(G,X)$$

tiene un punto fijo en G es como sigue: Conectamos f, po medio de una homotopía, con una función g más simple, cuyo índice de punto fijo $i(f,G)$ sea conocido y diferente de cero. Aplicamos el axioma (A4) para obtener $i(f,G) = i(g,G)$, y luego (A2) implica que f tiene un punto fijo en G.

CAPITULO 2

EL PRINCIPIO VARIACIONAL DE EKELAND

Vimos en el capítulo I que una funcional acotada inferiormente asume su ínfimo si tiene algún tipo de continuidad en una topología en la cual el dominio de dicha funcional sea compacto. Sin embargo, en muchas situaciones de interés éste no es el caso. Por ejemplo, funcionales definidos en espacios de Hilbert (infinito dimensionales) son continuas en la topología de la norma pero no en la topología débil. Problemas de este tipo pueden ser manejados eficientemente por el Principio Variacional de Ekeland. Este principio descubierto en 1972 ha hallado una multitud de aplicaciones en diferentes campos del análisis. También ha servido para dar pruebas simples y elegantes de resultados conocidos.

2.1.- EL PRINCIPIO VARIACIONAL DE EKELAND.-

TEOREMA 2.1 (PRINCIPIO DE EKELAND - FORMA DEBIL).-

Supongamos que: (X,d) es un espacio métrico completo, $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funcional inferiormente continua y acotada inferiormente.

Entonces: dado $\varepsilon > 0$, existe $\mu = \mu_\varepsilon \in X$ tal que:

$$f(\mu_\varepsilon) \leq \inf_X f + \varepsilon \tag{2.1}$$

$$f(\mu_\varepsilon) < f(\mu) + \varepsilon\, d(\mu,\mu_\varepsilon),\ \forall\, \mu \neq \mu_\varepsilon. \tag{2.2}$$

TEOREMA 2.2 (PRINCIPIO DE EKELAND - FORMA FUERTE).-

Supongamos que: (X,d) es un espacio métrico completo, $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es inferiormente continua y acotada inferiormente,

$\varepsilon > 0$ y $\tilde{\mu} \in X$ son tales que $f(\tilde{\mu}) \leq \inf_X f + \frac{\varepsilon}{2}$

Entonces: dado $\delta > 0$, existe $\mu = \mu_\delta \in X$ tal que:

$$f(\mu_\delta) \leq f(\tilde{\mu}) \tag{2.3}$$

$$d(\mu_\delta, \tilde{\mu}) \leq \delta \tag{2.4}$$

$$f(\mu_\delta) < f(\mu) + \frac{\varepsilon}{\delta}\, d(\mu, \mu_\delta), \ \forall\, \mu \neq \mu_\delta. \tag{2.5}$$

Prueba.- Para simplificar la notación, sea:

$$d_\delta(x, y) = \frac{1}{\delta}\, d(x, y).$$

Definamos en X el siguiente orden parcial:

$$\mu \leq v \Longleftrightarrow f(\mu) \leq f(v) - \varepsilon\, d_\delta(\mu, v) \tag{2.6}$$

Veamos que $\leq$ es reflexiva: Como $d_\delta(\mu, \mu) = 0$, es claro que

$$\mu \leq \mu, \ \forall\, \mu \in X.$$

Veamos que $\leq$ es antisimétrica: Si $\mu \leq v$ y $v \leq \mu$, entonces:

$$f(\mu) \leq f(v) - \varepsilon\, d_\delta(\mu, v) \quad y \quad f(v) \leq f(\mu) - \varepsilon\, d_\delta(v, \mu)$$

de lo cual obtenemos que $d_\delta(\mu, v) = 0$ y por lo tanto $\mu = v$.

Veamos que $\leq$ es transitiva: Si $\mu \leq v$ y $v \leq w$, entonces:

$$f(\mu) \leq f(v) - \varepsilon\, d_\delta(\mu, v) \quad y \ f(v) \leq f(w) - \varepsilon\, d_\delta(v, w).$$

Luego, de las desigualdades:

$$f(\mu) \leq f(w) - \varepsilon\, [d_\delta(\mu, v) + d_\delta(\mu, v)] \leq f(w) - \varepsilon\, d_\delta(\mu, w)$$

se sigue que $\mu \leq w$.

Definamos las sucesiones $(\mu_n) \subset X$ y $(A_n) \subset 2^X$ como sigue:

Sea $\mu_1 = \tilde{\mu}$ y sea $A_1 = \{ \mu \in X \,/\, \mu \leq \mu_1 \}$. Es claro que $A_1 \neq \emptyset$ (pues $\mu_1 \in A_1$) y como f es inferiormente continua se tiene que A_1 es cerrado. Por inducción, sea $A_n = \{ \mu \in X \,/\, \mu \leq \mu_n \}$ y sea $\mu_{n+1} \in X$ tal que:

$$\mu_{n+1} \in A_n \quad y \quad f(\mu_{n+1}) < \inf_{A_n} f + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

entonces definimos $A_{n+1} = \{ \mu \in X \,/\, \mu \leq \mu_{n+1} \}$.

Cada A_n es no vacío y como f es inferiormente continua, cada A_n es cerrado.

Veamos que $A_{n+1} \subset A_n \ \forall\ n \in \mathbb{N}$: Si $\mu \in A_{n+1}$, entonces $\mu \leq \mu_{n+1}$ y como $\mu_{n+1} \in A_n$ se tiene que $\mu_{n+1} \leq \mu_n$. La transitividad de $\leq$ implica que $\mu \leq \mu_n$, es decir, $\mu \in A_n$. Así, $A_{n+1} \subset A_n$.

Veamos que $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$: Sea $\mu \in A_n$ cualquiera, entonces:

$$\varepsilon\, d_\delta(\mu, \mu_n) \leq f(\mu_n) - f(\mu).$$

Por la elección de μ_n se sigue que $f(\mu_n) \leq \inf\limits_{A_{n-1}} f + \dfrac{\varepsilon}{2^n}$ y como $\mu \in A_{n-1}$ se concluye que $f(\mu_n) \leq f(\mu) + \dfrac{\varepsilon}{2^n}$. Luego,

$$\varepsilon\, d_\delta(\mu, \mu_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$$

y de aquí $d_\delta(\mu, \mu_n) \leq \dfrac{1}{2^n}$, $\forall\ \mu \in A_n$.

De aquí obtenemos que $\forall\ \mu, v \in A_n$: $d_\delta(\mu, v) \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ y luego:

$$\operatorname{diam}(A_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Esto último implica claramente que $\lim \operatorname{diam}(A_n) = 0$.

Como X es completo, existe un único $\mu_\delta \in X$ tal que:

$$\mu_\delta \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Veamos que se cumple (2.3): Como $\mu_1 = \tilde{\mu}$ y $\mu_\delta \in A_1$ se tiene que $\mu_\delta \leq \tilde{\mu}$; es decir, $f(\mu_\delta) \leq f(\tilde{\mu}) - \varepsilon\, d_\delta(\mu_\delta, \tilde{\mu})$ lo cual implica (2.3).

Veamos que se cumple (2.5): Sea $\mu \in X$ con $\mu \neq \mu_\delta$ cualquiera. Afirmamos que $\mu \nleq \mu_\delta$. En efecto, si tuviéramos que $\mu \leq \mu_\delta$ y como $\mu_\delta \in A_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ se cumpliría que $\mu \leq \mu_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, es decir que $\mu \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, lo cual no puede ser; y así, $\mu \nleq \mu_\delta$.

Como $\mu \preceq \mu_\delta$ se sigue que $f(\mu) > f(\mu_\delta) - \varepsilon\, d_\delta(\mu,\mu_\delta)$, lo cual implica (2.5)

Veamos que se cumple (2.4): Para cada $j \in \mathbb{N}$: $\mu_{j+1} \in A_j$, entonces $d_\delta(\mu_j,\mu_{j+1}) \leq \frac{1}{2^j}$.

De $d_\delta(\tilde{\mu},\mu_n) = d_\delta(\mu_1,\mu_n) \leq \sum_{j=1}^{n-1} d_\delta(\mu_j,\mu_{j+1}) \leq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^j} \leq 1$ se obtiene que $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $d_\delta(\tilde{\mu},\mu_n) \leq 1$, lo cual, junto con las desigualdades:

$$d_\delta(\tilde{\mu},\mu_\delta) \leq d_\delta(\tilde{\mu},\mu_n) + d_\delta(\mu_n,\mu_\delta) \leq 1 + \frac{1}{2^{n-1}},$$

después de tomar límite cuando $n \longrightarrow \infty$, dan $d_\delta(\tilde{\mu},\mu_\delta) \leq 1$ y de aquí (2.4). ∎

Observaciones.- Los resultados anteriores y otros teoremas de este capítulo son debidos a Ekeland. Ver [9], [10], [11].

2.2.- CONEXIONES CON LA TEORIA DE PUNTOS FIJOS.- Ahora, a partir del Principio Variacional de Ekeland, mostraremos un teorema de punto fijo, debido a Caristi. Mas aún, estos dos resultados son equivalentes en el sentido que el Principio Variacional de Ekeland puede ser mostrado a partir del Teorema de Caristi.

TEOREMA 2.3.- (TEOREMA DE PUNTO FIJO DE CARISTI) [6]

Supongamos que: (X,d) es un espacio métrico completo,

$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una funcional inferiormente continua y acotada inferiormente,

$T : X \rightrightarrows X$ es una correspondencia tal que:

$$f(y) \leq f(x) - d(x,y); \quad \forall\, y \in Tx;\ \forall\, x \in X \tag{2.7}$$

Entonces: Existe $x_0 \in X$ tal que $x_0 \in Tx_0$.

Prueba.- Tomando $\varepsilon = 1$ en el Teorema 1, se obtiene $x_o \in X$ tal que:

$$\forall\ x \in X \text{ con } x \neq x_o:\ f(x_o) < f(x) + d(x,x_o) \qquad (2.8)$$

Afirmamos que $x_o \in Tx_o$. Si no fuera así, se tendría que todo elemento de Tx_o es diferente de x_o y de (2.8) se sigue que:

$$\forall\ y \in Tx_o:\ f(x_o) < f(y) + d(y,x_o).$$

Pero esto es una contradicción con (2.7) al tomar $x = x_o$. Así, $x_o \in Tx_o$. ∎

Prueba del Teorema 2.1 a partir del Teorema 2.3.-

Sea $\varepsilon > 0$ dado y consideremos la métrica $d_1 = \varepsilon\, d$ que es equivalente a d. Procedamos por contradicción: Supongamos que no existe μ_ε tal que (2.2) se cumpla. Así, para cada $x \in X$ el conjunto $\{\ y \in X \ /\ f(x) \geq f(y) + d_1(x,y),\ y \neq x\ \}$ sería no vacío. Para cada $x \in X$ definamos Tx precisamente como:

$$Tx = \{\ y \in X \ /\ f(x) \geq f(y) + d_1(x,y)\ ;\ y \neq x\ \}.$$

Es claro que $x \notin Tx$, $\forall\ x \in X$. Luego, T es una correspondencia que satisface (2.7). Por el Teorema 2.3, existiría $x_o \in X$ con $x_o \in Tx_o$ lo cual no puede ser. Por consiguiente, se satisface (2.2). ∎

Observación.- Supongamos que (X,d) es un espacion métrico completo y que $T : X \longrightarrow X$ es una contracción; es decir, existe $k \in [0,1)$ tal que:

$$\forall\ x,y \in X:\ d(Tx,Ty) \leq k\ d(x,y).$$

Usando el Teorema 2.3, mostraremos que T tiene un punto fijo. En efecto, definamos $f(x) = \dfrac{1}{1-k}\, d(x,Tx)$ para cada $x \in X$; entonces f es inferiormente continua y acotada inferiormente. Además se cumple:

$$\begin{aligned} f(Tx) &= \frac{1}{1-k}\, d(Tx,T^2x) \leq \frac{k}{1-k}\, d(x,Tx) \\ &= \frac{1-(1-k)}{1-k}\, d(x,Tx) = f(x) - d(x,Tx),\ \forall\ x \in X. \end{aligned}$$

Por consiguiente se cumple (2.7). El Teorema 2.3 implica que existe $x_o \in X$ tal que $Tx_o = x_o$.

2.3.- APLICACION DEL TEOREMA 2.1 A FUNCIONALES DEFINIDAS EN ESPACIOS DE BANACH.-

Definición.- Supongamos que:

X é Y son espacios de Banach,

$U \subset X$ es un conjunto abierto no vacío,

$f : U \longrightarrow Y$ una función y $x_o \in U$.

Se dice que f es Gâteaux diferenciable en x_o (o simplemente G-diferenciable) si existe una aplicación lineal de $L(X,Y)$, que denotaremos por $Df(x_o)$, tal que para cada $v \in X$:

$$\lim_{t \to o} \frac{f(x_o + tv) - f(x_o)}{t} = \langle Df(x_o) , v \rangle.$$

TEOREMA 2.4.- Supongamos que:

X es un espacio de Banach,

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una funcional inferiormente continua y acotada inferiormente que es G-diferenciable en cada $x \in X$.

Entonces: Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \mu_\varepsilon \in X$ tal que:

$$f(\mu_\varepsilon) \leq \inf_X f + \varepsilon, \text{ y} \tag{2.9}$$

$$\| Df(\mu_\varepsilon) \|_{X^*} \leq \varepsilon \tag{2.10}$$

Prueba.- Sea $\varepsilon > 0$ dado. La funcional f satisface las hipótesis del Teorema 2.1, en virtud del cual se puede decir que existe $\mu_\varepsilon \in X$ que satisface (2.9) y además:

$$f(\mu_\varepsilon) < f(\mu) + \varepsilon \| \mu - \mu_\varepsilon \|, \ \forall \mu \neq \mu_\varepsilon \tag{2.11}$$

Para cada $v \in X$, $v \neq 0$, $t \neq 0$ escribimos $\mu = \mu_\varepsilon + tv$. Luego, $\mu \neq \mu_\varepsilon$ y por (2.11) se tiene que:

$$f(\mu_\varepsilon) < f(\mu_\varepsilon + tv) + \varepsilon \| tv \|, \ t \neq 0.$$

De la G-diferenciabilidad de f en μ_ε se tiene que:

$$|\langle Df(\mu_\varepsilon) \, , \, v \rangle| \leq \varepsilon \, \|v\|, \; \forall \; x \in X,$$

y esto implica (2.10). ■

Observaciones.-

1.- El hecho que f sea G-diferenciable no implica que f sea necesariamente continua. Por ejemplo, si f es la función dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = y^2, \; y > 0, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

entonces f es G-diferenciable en 0, y $\langle Df(0),v\rangle = 0$, $\forall \; v \in \mathbb{R}^2$, pero f no es inferiormente continua en 0.

2.- En términos de ecuaciones funcionales, el Teorema 2.4 significa lo siguiente: Supongamos que $T : X \longrightarrow X^*$ es un operador lineal que es un gradiente. Es decir, existe una funcional $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $T = Df$. La funcional f es llamada el potencial de T. Supongamos además que f satisface las hipótesis del Teorema 2.4. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe $x^* \in B(0^*,\varepsilon) \subset X^*$ tal que la ecuación $Tx = x^*$ tiene una solución.

Teorema 2.5.- Supongamos que:

Se cumplen las hipótesis del Teorema 2.4.

Además, $k > 0$, $c \in \mathbb{R}$ son constantes tales que:

$$f(x) \geq k \, \| \, x \, \| - c; \; \forall \; x \in X : \; \| \, x \, \| \geq r, \quad \text{para algún } r > 0 \tag{2.14}$$

$$B^* = \{ \, x^* \in X^* \, / \, \| \, x^* \, \| \leq 1 \, \}.$$

Entonces: $Df(X)$ es denso en kB^*.

Prueba.- Debemos probar que dados $\varepsilon > 0$ y $x^* \in kB^*$, existe $\mu_\varepsilon \in X$ tal que:

$$\| \, Df(\mu_\varepsilon) - x^* \, \| < \varepsilon \tag{2.13}$$

En efecto, sean $\varepsilon > 0$ y $x^* \in kB^*$ dados. La funcional

$$g = f - \langle x^*, \cdot \rangle$$

es inferiormente continua y G-diferenciable en cada $x \in X$ con

$$Dg(x) = Df(x) - x^{*}.$$

Es claro que g es acotada inferiormente en $B(0,r)$ y (2.12) implica que g es acotada inferiormente en $X \setminus B(0,r)$ y así, g es inferiormente acotada. El Teorema (2.4) implica que existe $\mu_{\varepsilon} \in X$ tal que $\| Dg(\mu_{\varepsilon}) \|_{X^{*}} < \varepsilon$. Es decir,

$$\| Df(\mu_{\varepsilon}) - x^{*} \|_{X^{*}} \leq \varepsilon$$

y así, $Df(x)$ es denso en kB^{*}.

$\square$

<u>Teorema 2.6.-</u> Supongamos que:

Se cumplen las hipótesis del Teorema 2.4. Además, $\varphi : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua con

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = +\infty,$$

$$f(x) \geq \varphi(\|x\|), \ \forall\, x \in X.$$

Entonces: $Df(X)$ es denso en X^{*}.

<u>Prueba.-</u> Sea $k > 0$ dado. Como $\lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = +\infty$, existe $r > 0$ tal que $\varphi(t) \geq kt$, $\forall\, t \geq r$. Luego, $\varphi(\|x\|) \geq k\|x\|$, $\forall\, \|x\| \geq r$, y de aquí obtenemos:

$$f(x) \geq k\,\|x\|, \ \forall\, \|x\| \geq r.$$

Por el Teorema 2.5, $Df(X)$ es denso en kB^{*} y como $k > 0$ fue tomado arbitrariamente, $Df(X)$ es denso en X^{*}. $\square$

<u>CONDICION DE PALAIS-SMALE (CONDICION P-S)</u>

Supongamos que X es un espacio de Banach y que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una funcional de clase C^{1}.

Se dice que f satisface la condición de Palais-Smale (abreviadamente, condición P-S) si, y sólo si, para toda sucesión $(x_n) \subset X$ con $|f(x_n)| \leq$ constante y $Df(x_n) \longrightarrow 0$ en X^{*}, existe una subsucesión (x_{k_n}) que converge fuertemente en X.

Nota.- Observamos que la condición (P-S) es una especie de condición de compacidad para la funcional f.

TEOREMA 2.7. Supongamos que:

X es un espacio de Banach,

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una funcional de clase C^1 que satisface la condición (P-S) y que es inferiormente acotada.

Entonces: El ínfimo de f es alcanzado en un punto $x_o \in X$ el cual es un punto crítico de f ($Df(x_o) = 0$).

Prueba.- La funcional f satisface las hipótesis del Teorema 2.4, en virtud del cual se puede decir que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que:

$$f(x_n) \leq \inf_X f + \frac{1}{n}, \text{ y}$$

$$\| Df(x_n) \| \leq \frac{1}{n}.$$

Las dos últimas desigualdades muestran que $(f(x_n))$ es acotada y que $Df(x_n) \longrightarrow 0$ en X^*. Como f satisface la condición (P-S), existe una subsucesión (x_{k_n}) que converge fuertemente en X. Sea $x_o = \lim_{n\to+\infty} x_{k_n}$. Como f es de clase C^1, se concluye que $\inf_X f = f(x_o)$ y $Df(x_o) = 0$. ∎

Observación.- El Teorema 2.7 se cumple también si la condición "Df es continua" la reemplazamos por "f es Fréchet-diferenciable en cada $x \in X$". Véase que no usamos la continuidad de Df para probar que f alcanza su ínfimo.

Veamos ahora que si $f(x_o) = \inf_X f$ y f es F-diferenciable en cada $x \in X$, entonces $Df(x_o) = 0$: En efecto, sea $v \in X$ con $\|v\| = 1$ cualquiera. Para $t > 0$ tenemos que:

$$f(x_o) \leq f(x_o + tv) = f(x_o) + t \langle Df(x_o), x \rangle + o(t),$$

donde $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \dfrac{o(t)}{t} = 0$. De aquí se obtiene que:

$$| < Df(x_o), v > | \leq \frac{o(t)}{t}, \ \forall\ t > 0.$$

Cuando $t \downarrow 0$, obtenemos $| < Df(x_o), v > | = 0$, $\forall\ v \in X$ con $\|v\| = 1$. Así, $Df(x_o) = 0$.

CAPITULO 3

PRINCIPIO VARIACIONAL

DE TIPO MIN-MAX

En este capítulo, usaremos el Principio Variacional de Ekeland para obtener un principio variacional general de tipo min-max. Ver [12]. A partir de este resultado mostraremos como derivar el Teorema del Paso de la Montaña de Ambrosetti y Rabinowitz [1], así como también el Punto de Silla y el Teorema del Paso de la Montaña Generalizado de Rabinowitz, respectivamente. En la sección I usaremos la definición del subdiferencial y notaciones dadas en la sección II del Capítulo I. El objetivo de la sección I es precisamente caracterizar el subdiferencial de una funcional que utilizaremos en la prueba del Principio Variacional del tipo min-max, mencionado anteriormente.

3.1.- EL SUBDIFERENCIAL DE UNA FUNCIONAL ESPECIAL.-

Supongamos que K es un espacio métrico compacto. Denotemos por E el espacio de todas las funcionales continuas en K; es decir,

$$E = C(K,\mathbb{R}) = \{ x : K \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ x \text{ es continua } \}.$$

En E consideramos la norma $\| x \|_{\infty} = \sup\limits_{t \in K} | x(t) |$, $\forall x \in E$ y denotaremos por $\mathscr{A}$ a la σ-álgebra de Borel en K.

En esta sección, procuramos caracterizar el subdiferencial en cada $x \in E$ de la siguiente funcional:

$$\begin{aligned} \theta &: E \longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta(x) &= \max_{t \in K} x(t), \ \forall x \in E. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Empezaremos estableciendo algunas definiciones y hechos que nos servirán más adelante.

Definiciones.-

1.- Sea $\mu : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ una medida. Se dice que μ es una medida regular si, y sólo si, para cada $B \in \mathscr{A}$ y cada $\varepsilon > 0$, existen $V_\varepsilon \subset B$, V_ε abierto y $F_\varepsilon \subset B$, F_ε cerrado, tales que:

$$\mu(V_\varepsilon) < \mu(B) + \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \mu(B) - \varepsilon < \mu(F_\varepsilon).$$

2.- Definimos el espacio $\mathcal{M}(K,\mathbb{R})$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{M}(K,\mathbb{R}) = \{ \mu : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ \mu \text{ es una medida regular } \}.$$

$\mathcal{M}(K,\mathbb{R})$ es un espacio de Banach provisto de la norma:

$$\| \mu \| = \\ = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} | \mu(E_i) | \ \Big/ \ \begin{array}{l} E_i \subset K, \ \forall\, i = 1,\dots,n;\ n \in \mathbb{N} \\ E_i \cap E_j = \emptyset \ (i \neq j) \end{array} \right\}$$

TEOREMA DE REPRESENTACION DE RIESZ.-

Para cada funcional lineal acotada $\Lambda : E \longrightarrow \mathbb{R}$, existe una única medida regular $\mu : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\Lambda(x) = \int_K x \, d\mu, \ \forall\, x \in E.$$

Por el Teorema de Representación de Riesz, es claro que E^* y $\mathcal{M}(K,\mathbb{R})$ son espacios isomorfos, y así, los elementos de ambos espacios se pueden identificar biunívocamente. Así, si $\mu \in \mathcal{M}(K,\mathbb{R})$, entonces denotaremos por $\hat{\mu}$ su elemento correspondiente en E^* y definimos:

$$\langle \hat{\mu} , x \rangle = \int_K x \, d\mu.$$

Definiciones.- Sea $\mu \in \mathcal{M}(K,\mathbb{R})$.

1.- Se dice que μ es positiva, lo cual se denota por $\mu \geq 0$, si, y sólo si, se cumple:

$$\forall\, x \in E \text{ con } x \geq 0 : \langle \hat{\mu} , x \rangle \geq 0.$$

2.- Se dice que μ tiene masa 1, si, y sólo si, $\langle \hat{\mu} , \mathbb{1} \rangle = 1$, donde $\mathbb{1} \in E$ y esta definida por $\mathbb{1}(t) = 1$, $\forall\, t \in K$.

3.- Sea $U \subset K$ un conjunto abierto. Se dice que μ se anula en U si, y sólo si, para cada $x \in E$ con $\text{sop}(x) \subset U$ se cumple que $\langle \hat{\mu} , x \rangle = 0$.

Propiedad importante.- Usando la partición de la unidad se puede probar que si $\mu \in \mathcal{M}(K,\mathbb{R})$ se anula en cada elemento de una colección de conjuntos abiertos $\{ U_\alpha \ / \ \alpha \in \Lambda \}$, entonces μ se anula en la unión $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$.

En efecto, sea $\mu \in \mathcal{M}(K,\mathbb{R})$ y $\{ U_\alpha \ / \ \alpha \in \Lambda \}$ una colección de conjuntos abiertos. Supongamos que μ se anula en cada U_α; veamos que μ se anula en la unión $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$.

Sea $x \in E$ con $\mathrm{sop}(x) \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$. Como $\mathrm{sop}(x)$ es compacto, existe un número finito de conjuntos abiertos $U_{\alpha_1}, \ldots$ tales que:

$$\mathrm{sop}(x) \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{\alpha_j}$$

Por la partición de la unidad, existen funciones:

$$h_j \in E, \ j = 1,\ldots,n$$

tales que $0 \leq h_j \leq 1$ y $\mathrm{sop}(h_j) \subset U_{\alpha_j}$, $j = 1,\ldots,n$ y

$$h_1 + \ldots + h_n = \mathbb{1}.$$

Luego, $x = \sum_{j=1}^{n} h_j x$ y entonces $\langle \hat{\mu} , x \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle \hat{\mu} , h_j x \rangle$.

Como $\mathrm{sop}(h_j x) \subset \mathrm{sop}(h_j) \subset U_{\alpha_j}$ y μ se anula en U_{α_j} se que $\langle \hat{\mu} , h_j x \rangle = 0$ para cada $j = 1,\ldots,n$. De aquí, se sigue que $\langle \hat{\mu} , x \rangle = 0$. Así, μ se anula en $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$.

De la propiedad anterior, se sigue que existe un conjunto mayor $\tilde{U}$ en el cual μ se anula. Esto da lugar a la siguiente definición:

Definición.- Sea $\mu \in \mathcal{M}(K,\mathbb{R})$. El soporte de μ es denotado por $\mathrm{sop}(\mu)$ y se define como $\mathrm{sop}(\mu) = K \setminus \tilde{U}$, donde $\tilde{U}$ es el mayor conjunto en el cual μ se anula.

PROPOSICION 3.1.- Supongamos que:

$\mu \in \mathcal{M}(K,\mathbb{R})$,

$x \in E$ es tal que $x(t) = 0$, $\forall\ t \in sop(\mu)$.

Entonces: $\langle \hat{\mu}\ ,\ x \rangle = 0$.

Prueba: Para cada $\varepsilon > 0$, sea

$$(sop\ \mu)_{\varepsilon} = \{\ t \in K\ /\ dist(t, sop\ \mu) < \varepsilon\ \}.$$

Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $K \setminus (sop\ \mu)_{2/n} \subset K \setminus (sop\ \mu)_{1/n}$. De aquí, se sigue, utilizando el Teorema de Urysohn, que existe $\varphi_n \in E$ tal que:

$$\varphi_n(t) = 0,\ \forall\ t \in (sop\ \mu)_{1/n},\ y \tag{3.2}$$

$$\varphi_n(t) = 1,\ \forall\ t \notin (sop\ \mu)_{2/n} \tag{3.3}$$

(3.2) y (3.3) implican que $\varphi_n x \xrightarrow{n} x$ en E y entonces

$$\langle \hat{\mu}\ ,\ x \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle \hat{\mu}\ ,\ \varphi_n x \rangle.$$

De $sop(\varphi_n x) \subset sop\ \varphi_n \subset K \setminus (sop\ \mu)_{1/n} \subset K \setminus (sop\ \mu)$ se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\langle \hat{\mu}\ ,\ \varphi_n x \rangle = 0$ y de aquí $\langle \hat{\mu}\ ,\ x \rangle = 0$ que es lo que se quería probar. ◻

Ahora sí estamos en condiciones de dar una caracterización del subdiferencial, en cada $x \in E$, de la funcional definida en:

TEOREMA 3.2.- De la funcional θ definida en (3.1), se puede afirmar lo siguiente:

1) θ es continua y convexa.

2) Para cada $x \in E$: $\hat{\mu} \in \partial\theta(x)$ si, y sólo si:

$$\mu \geq 0 \tag{3.4}$$

$$\langle \hat{\mu}\ ,\ \mathbb{1} \rangle = 1 \tag{3.5}$$

$$sop(\mu) \subset \{\ t \in K\ /\ x(t) = \theta(x)\ \} \tag{3.6}$$

Prueba.- 1) Es fácil probar la convexidad de θ.

En cuanto a la continuidad de θ: Sean $x, y \in E$ cualesquiera y sea $\hat{t} \in K$ tal que $\theta(x) = x(\hat{t})$.

De $\theta(x) - \theta(y) = x(\hat{t}) - \theta(y) \leq x(\hat{t}) - y(\hat{t}) \leq \|\ x - y\ \|$ se sigue que $|\ \theta(x) - \theta(y)\ | \leq \|x - y\|$ y de aquí la continuidad de θ.

2) Sea $x \in E$ cualquiera.

($\Longrightarrow$) Supongamos que $\hat{\mu} \in \partial\theta(x)$, entonces

$$\theta(y) \geq \theta(x) + \langle \hat{\mu} , y - x \rangle, \ \forall\, y \in E. \qquad (3.7)$$

Veamos que se cumple (3.4): Sea $z \in E$ con $z \geq 0$ cualquiera. De $x - z \leq x \leq \theta(x)$ se obtiene que

$$\theta(x-z) \leq \theta(x) \qquad (3.8)$$

Si en (3.7) elegimos $y = x - z$, obtenemos:

$$- \langle \hat{\mu} , z \rangle \leq \theta(x-z) - \theta(x)$$

lo cual junto con (3.8) implica que $\langle \hat{\mu} , z \rangle \geq 0$. Así, se cumple (3.4).

Veamos que se cumple (3.5): Sea $c \in \mathbb{R}$ cualquiera. Si en (3.7) escribimos $y = x + c\mathbb{1}$, obtenemos

$$c \langle \hat{\mu} , \mathbb{1} \rangle \leq \theta(x + c\mathbb{1}) - \theta(x) \qquad (3.9)$$

Pero el lado derecho de (3.9) es menor o igual que c; así, se sigue que $c \langle \hat{\mu} , \mathbb{1} \rangle \leq c$, para todo $c \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\langle \hat{\mu} , \mathbb{1} \rangle = 1$$

y se cumple (3.5).

Veamos que se cumple (3.6): $S = \{ t \in K \,/\, \theta(x) = x(t) \}$, entonces S es un conjunto cerrado. Para probar (3.6) es suficiente mostrar que μ se anula en cada subconjunto abierto $U \subset K \setminus S$.

Sea $U \subset K \setminus S$ un conjunto abierto y sea $z \in E$ cuyo soporte, que lo denotaremos por K_o, esté contenido en U. Si

$$L = \theta(x) - \max_{K_o} x,$$

entonces $L > 0$ (si $L = 0$, obtendríamos que $K_o \cap S \neq \emptyset$ lo cual no puede ser). Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que

$$\pm\, \varepsilon\, z(t) \leq L, \ \forall\, t \in K \qquad (3.10)$$

Si en (3.7), elegimos $y = x \pm \varepsilon z$, obtenemos

$$\pm\, \varepsilon \langle \hat{\mu} , z \rangle \leq \theta(x \pm \varepsilon z) - \theta(x). \qquad (3.11)$$

Si $t \in K_o$, entonces $x(t) \pm \varepsilon\, z(t) \leq \max_{K_o} x + L = \theta(x)$ y si $t \in K \setminus K_o$, $x(t) \pm \varepsilon\, z(t) = x(t) \leq \theta(x)$. Esto implica que

$\theta(x \pm \varepsilon z) - \theta(x) \leq 0$, lo cual junto con (3.11) muestra que $\langle \hat{\mu} , z \rangle = 0$. Así, μ se anula en U y por lo tanto (3.6) queda probado.

($\Longleftarrow$) Supongamos ahora que se cumplen (3.4), (3.5) y (3.6): Sea $z = x - \theta(x)\mathbb{1}$, entonces $z \in E$. De (3.6) se tiene que para cada $t \in \mathrm{sop}(\mu)$, $z(t) = 0$ y usando la Proposición (3.1) se sigue que $\langle \hat{\mu} , z \rangle = 0$. Usando (3.5) obtenemos:

$$\langle \hat{\mu} , x \rangle = \theta(x).$$

Para cada $y \in E$, es obvio que $\theta(y)\mathbb{1} - y \geq 0$ y como $\hat{\mu} \geq 0$, se tiene que $\langle \hat{\mu} , \theta(y)\mathbb{1} - y \rangle \geq 0$ y por medio de (3.5) se consigue $\theta(y) \geq \langle \hat{\mu} , y \rangle$, lo cual junto con la igualdad $\langle \hat{\mu} , x \rangle = \theta(x)$ dan

$$\theta(y) \geq \theta(x) + \langle \hat{\mu} , y - x \rangle, \ \forall\, y \in E,$$

esto es, $\hat{\mu} \in \partial\theta(x)$. ∎

3.2.- EL PRINCIPIO VARIACIONAL DE TIPO MIN MAX:

En esta sección usaremos el Principio Variacional de Ekeland para obtener un principio variacional de tipo min-max. Este resultado nos servirá en el próximo capítulo para establecer el Teorema del Paso de la Montaña, el Teorema del Punto de Silla y el Teorema del Paso de la Montaña Generalizado.

Supongamos que: X es un espaci de Banach,

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una funcional de clase C^1,

K es un espacio métrico compacto y K_0 un subconjunto cerrado de K,

$f_0 : K_0 \longrightarrow X$ es una aplicación continua dada,

$\Gamma = \{ g \in C(K,X) \,/\, g = f_0 \text{ en } K_0 \}$

$c = \inf\limits_{g\in\Gamma} \max\limits_{t\in K} f(g(t)).$

TEOREMA 3.3.- Si

$$\max_{t\in K_0} f(g(t)) < \max_{t\in K} f(g(t)), \ \forall\, g \in \Gamma \qquad (3.12)$$

entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $\mu_\varepsilon \in X$ tal que:

$$c \leq f(\mu_\varepsilon) \leq c + \varepsilon, \ y \qquad (3.13)$$

$$\| f'(\mu_\varepsilon) \|_{X^*} \leq \varepsilon \qquad (3.14)$$

Observación.- Véase que en el Teorema 3.3 no se asume que f satisfaga la condición (P-S). Pero el Teorema dice que bajo las hipótesis anteriores, existe una sucesión de Palais-Smale; es decir, una sucesión $(u_n) \subset X$ tal que

$$f(\mu_n) \longrightarrow c \quad y \quad f(\mu_n) \longrightarrow 0.$$

Así, si adicionamos la hipótesis que f satisfaga la condición (P-S), se tendría un punto critico μ_0 en el nivel c; es decir,

$$f(\mu_0) = c \quad y \quad f'(\mu_0) = 0.$$

Prueba.- En Γ definamos la métrica:

$$d(g,h) = \max_{t\in K} \| g(t) -h(t) \|, \ \forall\, g,h \in \Gamma$$

con la cual Γ se convierte en un espacio métrico completo.

Definamos la funcional $\mathbb{G} : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$\mathbb{G}(g) = \max_{t\in K} f(g(t)), \ \forall\, g \in \Gamma.$$

Buscaremos que aplicar el Principio Variacional de Ekeland a la funcional $\mathbb{G}$. Veamos que se satisfacen las hipótesis de dicho resultado.

Si $b = \max_{t\in K} f(f_0(t))$, de (3.12) se sigue que $b < \mathbb{G}(g)$ para cada $g \in \Gamma$.

Esto significa que $\mathbb{G}$ es acotada inferiormente.

Veamos ahora que $\mathbb{G}$ es continua: Si $g,h \in \Gamma$, entonces $g(K) \cup h(K)$ es compacto, pues g y h son continuas y K es compacto.

Luego, f es uniformemente continua en $g(K) \cup h(K)$; esto es: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$x,y \in g(K) \cup h(K);\ \|x - y\| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \qquad (3.15)$$

Si $h, g \in \Gamma$ con $d(h,g) < \delta$, elegimos $\hat{t} \in K$ tal que:

$$f(h(\hat{t})) = \max \{ f(h(t)) \ / \ t \in K \} = G(h).$$

Entonces:

$$G(h) - G(g) = f(h(\hat{t})) - \max_{t \in K} f(g(t)) \leq$$

$$f(h(\hat{t})) - f(g(\hat{t})) \leq \tag{3.16}$$

$$\leq |f(h(\hat{t})) - f(g(\hat{t}))|$$

y además:

$$\| h(\hat{t}) - g(\hat{t}) \| < \delta \tag{3.17}$$

De (3.15), (3.16) y (3.17) se sigue que $G(h) - G(g) < \varepsilon$. Intercambiando los papeles de g y h obtenemos:

$$G(g) - G(h) < \varepsilon.$$

Por consiguiente se cumple:

$$\forall \ g, h \in \Gamma \text{ con } d(h,g) < \delta : \ |G(g) - G(h)| < \varepsilon,$$

y por lo tanto G es continua en Γ.

Por el Principio Variacional de Ekeland, dado $\varepsilon > 0$, existe $g_\varepsilon \in \Gamma$ tal que:

$$c \leq G(g_\varepsilon) \leq c + \frac{\varepsilon}{2}, \quad y \tag{3.18}$$

$$G(g_\varepsilon) \leq G(g) + \frac{\varepsilon}{2} d(g, g_\varepsilon) \ , \quad \forall \ g \in \Gamma \tag{3.19}$$

Sea $\Gamma_0 = \{ g \in C(K,X) \ / \ g(t) = 0, \ \forall \ t \in K_0 \}$. Para cada $r > 0$ y cada $g \in \Gamma_0$ se tiene que $g_\varepsilon + rg \in \Gamma$ y si la elegimos como g en (3.19) se consigue:

$$G(g_\varepsilon) \leq G(g_\varepsilon + rg) + \frac{\varepsilon}{2} r \ \|g\|, \ \forall \ g \in \Gamma_0 \tag{3.20}$$

Para cada $t \in K$, $r > 0$ y $g \in \Gamma_0$ se tiene que:

$$f(g_\varepsilon(t) + r \ g(t)) = f(g_\varepsilon(t)) + r \ \langle f'(g_\varepsilon(t)) \ , \ g(t) \rangle + \varphi(t, r \ g(t))$$

donde:

$$\lim_{r \to 0} \frac{\varphi(t, r \ g(t))}{r \ \| \ g(t) \ \|} = 0, \tag{3.21}$$

de lo cual se sigue que:

$$G(g_\varepsilon + rg) \leq \max_{t\in K} \{ f(g_\varepsilon(t)) + r \langle f'(g_\varepsilon(t)),g(t)\rangle \} + + \max_{t\in K} \varphi(t,r\, g(t)) \qquad (3.22)$$

De (3.21), para $\varepsilon > 0$ y $r > 0$ suficientemente pequeño se sigue que:

$$\varphi(t,r\, g(t)) < \frac{\varepsilon\, r\, \|g(t)\|}{2} \leq \frac{\varepsilon\, r\, \|g\|}{2}, \quad \forall\, t \in K;\ \forall\, g \in \Gamma_0$$

y de aquí:

$$\max_{t\in K} \varphi(t,r\, g(t)) \leq \frac{\varepsilon\, r\, \|g\|}{2}, \quad \forall\, g \in \Gamma_0,$$

$r > 0$ suficientemente pequeño (3.23)

De (3.20), (3.22) y (3.23) se sigue que:

$$G(g_\varepsilon) \leq \max_{t\in K} \{ f(g_\varepsilon(t)) + \langle f'(g_\varepsilon(t)),g(t)\rangle \} + \varepsilon\, r\, \|g\| \qquad (3.24)$$

Consideremos las funciones:

$$x : K \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad y : K \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x(t) = f(g_\varepsilon(t)),\ t \in K. \qquad y(t) = \langle f'(g_\varepsilon(t)),g(t)\rangle \quad t \in K.$$

y sea θ la funcional definida en la sección (I). Entonces, (3.24) se puede escribir como $\theta(x) \leq \theta(x + ry) + \varepsilon\, r\, \|g\|$ y de aquí:

$$-\varepsilon\, \|g\| \leq \frac{\theta(x+ry) - \theta(x)}{r}, \quad \forall\, g \in \Gamma_0 \text{ y } r > 0$$

suficientemente pequeño.

Si hacemos que r tienda a cero y usamos la Proposición 1.9, obtenemos:

$$-\varepsilon\, \| g \| \leq \max_{\hat{\mu}\in\partial\theta(x)} \langle \hat{\mu}, y \rangle, \quad \forall\, g \in \Gamma_0.$$

Véase que y depende de G y si en la última desigualdad reemplazamos g por $-g$ obtenemos:

$$\min_{\hat{\mu}\in\partial\theta(x)} \langle \hat{\mu}, y \rangle \leq \varepsilon\, \| g \|, \quad \forall\, g \in \Gamma_0$$

y por lo tanto:

$$\sup_{\substack{g\in\Gamma_0 \\ \|g\|\leq 1}} \min_{\hat{\mu}\in\partial\theta(x)} \langle \hat{\mu}, y \rangle \leq \varepsilon .$$

Utilizando el Teorema de Simons ([14]) se tiene que:

$$\min_{\hat{\mu}\in\partial\theta(x)} \ \sup_{\substack{g\in\Gamma_0 \\ \|g\|\leq 1}} \ \langle \hat{\mu} \ , \ y \rangle \leq \varepsilon \tag{3.25}$$

Para cada $\hat{\mu} \in \partial\theta(x)$ veamos que se cumple:

$$\sup_{\substack{g\in\Gamma_0 \\ \|g\|\leq 1}} \ \langle \hat{\mu} \ , \ \langle f'(g_\varepsilon(\cdot)),g(\cdot)\rangle \ \rangle = \tag{3.26}$$

$$= \sup_{\substack{g\in C(K,X) \\ \|g\|\leq 1}} \langle\hat{\mu},\langle f'(g_\varepsilon(\cdot)),g(\cdot)\rangle \ \rangle$$

Si denotamos por α y β los lados izquierdo y derecho de (3.26) respectivamente, es claro que $\alpha \leq \beta$. Probaremos la otra desigualdad.

Si $K_1 = \left\{ t \in K \ / \ f(g_\varepsilon(t)) = \max\limits_{t\in K} f(g_\varepsilon(t)) \right\}$ y como $\hat{\hat{\mu}} \in \partial\theta(x)$, el Teorema 3.2 muestra que $\operatorname{sop}(\hat{u}) \subset K_1$. Además, de (3.12) se sigue que $K_0 \cap K_1 = \emptyset$ y como estos conjuntos son compactos, entonces existe una función $\varphi : K \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que:

$$\varphi(t) = 1, \ \forall \ t \in K_1 \ ,$$

$$\varphi(t) = 0, \ \forall \ t \in K_0 \ ,$$

$$0 \leq \varphi(t) \leq 1, \ \forall \ t \in K.$$

Veamos, ahora sí, que $\beta \leq \alpha$: Sea $g \in C(K,X)$ con $\|g\| \leq 1$ cualquiera. La función $g_1 = \varphi g \in \Gamma_0$ y $\|g_1\| \leq 1$ y si

$$z(t) = \langle \ f'(g_\varepsilon(t)) \ , \ g(t) - g_1(t) \ \rangle, \ \forall \ t \in K,$$

se tiene que $z(t) = 0, \ \forall \ t \in K_1$; es decir, $\operatorname{sop}(z) \subset K\setminus K_1$ y como $\operatorname{sop}(\hat{\mu}) \subset K_1$ entonces $\langle \hat{\mu} \ , \ z \rangle = 0$. Luego:

$$\langle \hat{\mu} \ , \ \langle f'(g_\varepsilon(\cdot)),g(\cdot)\rangle \ \rangle = \langle \hat{\mu} \ , \ \langle f'(g_\varepsilon(\cdot)),g_1(\cdot)\rangle \ \rangle$$

$$\leq \alpha, \ \forall \ g \in C(K,X), \ \|g\| \leq 1.$$

Esto implica que $\beta \leq \alpha$ y dé aquí sigue (3.26).

Ahora que (3.26) ya esta probado, de (3.25) se tiene que:

$$\min_{\hat{\mu}\in\partial\theta(x)} \sup_{\substack{g\in\Gamma_D \\ \|g\|\le 1}} \langle \hat{\mu} , \langle f'(g_\varepsilon(\cdot)),g(\cdot)\rangle \rangle \le \varepsilon \quad ó$$

$$\min_{\hat{\mu}\in\partial\theta(x)} \langle \hat{\mu} , \|f'(g_\varepsilon(\cdot))\| \rangle \le \varepsilon \tag{3.27}$$

Como $\partial\theta(x)$ es ω^*-compacto (ver Proposición 1.8), existe $\hat{\mu} \in \partial\theta(x)$ en el cual el mínimo de (3.27) es alcanzado:

$$\langle \hat{\mu} , \|f'(g_\varepsilon(\cdot))\| \rangle \le \varepsilon.$$

Como $\hat{\mu}$ tiene masa 1 y $\mathrm{sop}(\hat{\mu}) \subset K_1$ (ver Teorema 3.2) se sigue que existe $\hat{t} \in K_1$ tal que:

$$\| f'(g_\varepsilon(\hat{t})) \| \le \varepsilon \tag{3.28}$$

Si tomamos $\mu_\varepsilon = g_\varepsilon(\hat{t})$ se tiene:

$$f(\mu_\varepsilon) = \max_{t\in K} f(g_\varepsilon(t)) = G(g_\varepsilon) . \tag{3.29}$$

Finalmente, de (3.18), (3.28) y (3.29) se tiene que:

$$\underline{c \le} f(\mu_\varepsilon) \le c + \varepsilon \quad y \quad \| f'(\mu_\varepsilon) \| \le \varepsilon$$

que es lo que se quería probar. $\square$

CAPITULO 4

EL TEOREMA DEL PASO DE LA MONTAÑA Y ALGUNAS DE SUS VARIANTES

En este capítulo aplicaremos el Principio Variacional de Tipo Min-Max para establecer el Teorema del Paso de la Montaña y también probaremos una generalización de este teorema. Finalmente veremos algunas versiones más débiles para establecer la existencia de puntos críticos.

TEOREMA 4.1.- (TEOREMA DEL PASO DE LA MONTAÑA) [1]

Supongamos que: X es un espacio de Banach,

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una funcional de clase C^1 que satisface la condición (P-S),

$S \subset X$ es un conjunto no vacío y cerrado que disconecta X,

x_0, x_1 son puntos de X que estan en distintas componentes conexas de $X \setminus S$,

f esta acotada inferiormente en S, digamos por b:

$$b \leq \inf_{x \in S} f(x) \qquad (4.1)$$

$$\max \{ f(x_0) , f(x_1) \} < b \qquad (4.2)$$

$$\Gamma = \{ g \in C([0,1],X) \ / \ g(0) = x_0, \ g(1) = x_1 \}.$$

Entonces:

$$\inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} f(g(t)) = c > -\infty \qquad (4.3)$$

y c es un valor critico; es decir, existe $\mu \in X$ tal que:

$$f(\mu) = c \quad y \quad f'(\mu) = 0 \qquad (4.4)$$

Prueba.- El Teorema del Paso de la Montaña es una consecuencia del Teorema (3.3). Para esto tomamos $K = [0,1]$,

$K_0 = \{0,1\}$, $f_0 : K \longrightarrow \mathbb{R}$ la función continua definida por $f_0(0) = x_0$ y $f_0(1) = x_1$; en consecuencia, tomamos

$$\Gamma = \{ g \in C([0,1],X) \ / \ g(0) = x_0 \quad y \quad g(1) = x_1 \}.$$

A continuación probaremos que (4.1) y (4.2) implican (3.12). Como S disconecta X y x_0, x_1 estan en diferentes componentes conexas de $X \setminus S$ se tiene que:

$$\forall\, g \in \Gamma,\ \exists\ \hat{t} \in \langle 0,1 \rangle \ / \ g(\hat{t}) \in S. \tag{4.5}$$

Veamos que se cumple (3.12): Sea $g \in \Gamma$ cualquiera y sea $\hat{t} \in \langle 0,1 \rangle$ que satisface (4.5). De (4.1) y (4.2) se obtiene:

$$\max_{t \in K_0} f(g(t)) = \max \{ f(x_0) , f(x_1) \} < b \le \inf_{x \in S} f(x)$$

$$\le f(g(\hat{t})) \le \max_{t \in K} f(g(t))$$

de lo cual se sigue inmediatamente (3.12). Por el Teorema (3.3) se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\mu_n \in X$ tal que:

$$c \le f(\mu_n) \le c + \frac{1}{n} \quad y \quad \| f'(\mu_n) \|_{X^*} \le \frac{1}{n} .$$

Como f satisface la condición (P-S), existe una subsucesión $(\mu_{k_n}) \subset X$ y $\mu \in X$ tales que $\mu_{k_n} \longrightarrow \mu$ fuertemente en X.

Como $f \in C^1(X)$, se tiene que $f(\mu) = c$ y $f'(\mu) = 0$. Esto prueba el Teorema del Paso de la Montaña. $\square$

<u>Observación.-</u> La conexidad referida anteriormente es conexidad por arcos. Así, $X \setminus S$ es una unión de componentes abiertas conexas por arcos. Así, estando x_0, x_1 en componentes distintas, se sigue que cualquier arco en X que conecta x_0 con x_1, intercepta S.

<u>TEOREMA 4.2.- (TEOREMA DE PUNTO DE SILLA)</u>

Supongamos que: X es un espacio de Banach,

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una funcional de clase C^1 que satisface la condición (P-S),

$V \subset X$ un subespacio finito-dimensional,

W un complemento topológico de V, es decir, W es un subespacio cerrado de X con $X = V \oplus W$, r, a, b son números reales tales que:

$$a < b$$

$$b \leq \inf_{x \in W} f(x) \tag{4.6}$$

$$\max_{x \in \partial D} f(x) \leq a \tag{4.7}$$

donde $D = V \cap B_r(0)$; $B_r(0) = \{x \in X \ / \ \|x\| < r\}$

$$\Gamma = \{ g \in C(\overline{D}, X) \ / \ g(x) = x, \ \forall \ x \in \partial D \}$$

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \sup_{x \in \overline{D}} f(g(x))$$

Entonces, $c > -\infty$ y c es un valor crítico.

<u>Prueba.-</u> El Teorema (4.2) es también una consecuencia del Teorema 3.3. En efecto: Tomemos

$$K = \overline{D} = V \cap \overline{B}_r(0); \ K_0 = \partial D = V \cap \{ x \in X \ / \ \|x\| = r \}$$

y probemos ahora que se cumple (3.12).

Sea $g \in \Gamma$ cualquiera. Es suficiente probar que:

$$\exists \ \hat{x} \in D \ / \ P(g(\hat{x})) = 0 \ \text{ó} \ g(\hat{x}) \in W \tag{4.8}$$

donde P es la proyección sobre V a lo largo de W. Pues es ese caso se cumple:

$$\max_{x \in \partial D} f(g(x)) = \max_{x \in \partial D} f(x) \leq a < b \leq$$

$$\leq \inf_{x \in W} f(x) \leq f(g(\hat{x})) \leq \max_{x \in \overline{D}} f(g(x))$$

lo cual implica (3.12). Por el Teorema (3.3), existe una sucesión $(\mu_n) \subset X$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$c \leq f(\mu_n) \leq c + \frac{1}{n} \quad y \quad \|f'(\mu_n)\|_{X^*} \leq \frac{1}{n}.$$

Como f satisface la condición (P-S) se concluye que existe $\mu \in X$ con $f(\mu) = c$ y $f'(\mu) = 0$.

Ahora probaremos (4.8): Definamos $h : \overline{D} \longrightarrow V$ por

$$h(x) = x - P(g(x)), \ \forall \ x \in \overline{D}$$

y denotemos por $\mathbb{O}$ la función cero. Es claro que $h = \mathbb{O}$ en ∂D (si $x \in \partial D$, entonces $g(x) = x$ y de aquí $P(g(x)) = x$), entonces por el Teorema 1.11: $i(h,D) = i(\mathbb{O},D)$ y del axioma A1 se sigue que $i(h,D) = 1$. Es decir, h tiene un punto fijo

$\hat{x} \in D$ y por lo tanto $P(g(\hat{x}))=0$. Esto prueba (4.8). ▣

TEOREMA 4.3.- (TEOREMA DEL PASO DE LA MONTANA GENERALIZADO)

Supongamos que: X es un espacio de Banach,

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una funcional de clase C^1 que satisface la condición (P-S),

$X = V \oplus W$ donde V es finito-dimensional,

$w_0 \in W$ y $0 < \rho < R$ donde ρ y R son números dados,

$Q = \{ v + rw_0 \ / \ v \in V;\ \|v\| \leq R;\ 0 \leq r \leq R \}$,

a y b son números reales tales que:

$$\max_{x\in\partial Q} f(x) \leq a < b \leq \inf_{x\in W\cap\partial B_\rho} f(x) \qquad (4.9)$$

donde ∂B_ρ es la frontera de $B_\rho(0)$,

$\Gamma = \{ g \in C(Q,X) \ / \ g(x) = x,\ \forall\ x \in \partial Q \}$,

$c = \inf\limits_{g\in\Gamma} \sup\limits_{x\in Q} f(g(x))$.

Entonces, $c > -\infty$ y c es un valor crítico.

Prueba.- El Teorema 4.3 es una consecuencia del Teorema 3.3. En efecto: ya que Q se puede escribir como:

$$Q = \overline{B(0,R)} + [0,R]w_0$$

y V es finito-dimensional se tiene que Q es compacto y entonces podemos tomar $K = Q$ y $K_0 = \partial Q$.

Veamos que se cumple (3.12): Sea $g \in \Gamma$ cualquiera. Es suficiente demostrar que:

$$\exists\ \hat{x} \in Q \ / \ g(\hat{x}) \in W \cap \partial B_\rho \qquad (4.10)$$

pues en ese caso, de (4.9) se tiene:

$$\max_{x\in K_0} f(g(x)) = \max_{x\in\partial Q} f(g(x)) = \max_{x\in\partial Q} f(x) \leq$$

$$\leq a < b \leq \inf_{x\in W\cap\partial B_\rho} f(x)$$

$$\leq f(g(\hat{x})) \leq \max_{x\in Q} f(g(x))$$

y de aquí obtenemos (3.12). Por el Teorema 3.3, existe una sucesión $(\mu_n) \subset X$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$c \leq f(\mu_n) \leq c + \frac{1}{n} \quad y \quad \|f'(\mu_n)\|_{X^*} \leq \frac{1}{n}.$$

Además, como f satisface la condición (P-S) se concluye que existe $\mu \in X$ con $f(\mu) = c$ y $f'(\mu) = 0$.

Probemos ahora (4.10): Definamos $h : Q \longrightarrow V \oplus \mathbb{R}w_o$ por:

$h(v+rw_o) = -P(g(v+rw_o)) - \|(I-P)(g(v+rw_o))\|w_o + v + rw_o + \rho w_o$

$\forall\ v + rw_o \in Q$, donde P es la proyección sobre V.

Se prueba fácilmente que $h(v+rw_o) = \rho w_o$, $\forall\ v + rw_o \in \partial Q$. Si definimos $\hat{h} : Q \longrightarrow V \oplus \mathbb{R}w_o$ por $\hat{h}(x) = \rho w_o$, $\forall\ x \in Q$, se tiene que $h = \hat{h}$ sobre ∂Q y como $\rho w_o \in int(Q)$, entonces:

$i(h, int(Q)) = i(\hat{h}, int(Q)) = 1.$

El axioma A2 del índice del punto fijo (ver Capítulo 1) muestra que h tiene un punto fijo en $int(Q)$. Es decir, existe $\hat{v} + \hat{r}w_o \in Q$ tal que $h(\hat{v} + \hat{r}w_o) = \hat{v} + \hat{r}w_o$ y luego:

$$P(g(\hat{v} + \hat{r}w_o)) = 0 \quad y \quad \|(I-P)(g(\hat{v} + \hat{r}w_o))\| = \rho.$$

Esto último da:

$$g(\hat{v} + \hat{r}w_o) \in W \cap \partial B_\rho$$

y así queda probado (4.10). $\square$

TEOREMA 4.4.- (SOBRE LA NATURALEZA DE UN MINIMO LOCAL)

Supongamos que: X es un espacio de Banach,

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una funcional de clase C^1 que satisface la condición (P-S),

x_o es un mínimo local de f; es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall\ x \in B(x_o, \varepsilon) : f(x_o) \leq f(x)$.

Entonces: Dado $\delta \in \langle 0, \varepsilon]$ se cumple exactamente una de las siguientes alternativas:

(A) Existe $r \in \langle 0, \delta\rangle$ tal que

$$f(x_o) < \inf \{ f(x) \ / \ \| x - x_o \| = r \}$$

(B) Para cada $r \in \langle 0,\delta\rangle$, f tiene un mínimo local x_r en el conjunto $\{ x \in X \,/\, \| x - x_o \| = r \}$ tal que:

$$f(x_r) = f(x_o) \quad y \quad f'(x_r) = 0.$$

<u>Prueba.-</u> Supongamos que (A) no se cumple, entonces:

$$\forall\, r \in \langle 0,\delta\rangle :$$

$$f(x_o) = \inf \{ f(x) \,/\, \| x - x_o \| = r \} \tag{4.11}$$

Para $r \in \langle 0.\delta\rangle$, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que: $0 < r - \frac{1}{n} < r < r + \frac{1}{n} < \delta$ y para cada $m \geq N$ consideremos f restringido al anillo:

$$R_m = \{ x \in X \,/\, r - \frac{1}{m} \leq \| x - x_o \| \leq r + \frac{1}{m} \} .$$

De (4.11) se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in \partial B(x_o,r)$ con:

$$f(x_o) \leq f(x_n) \leq f(x_o) + \frac{1}{n} \tag{4.12}$$

Por el Principio Variacional de Ekeland (Forma Fuerte), se tiene que existe $(y_n) \subset R_m$ tal que:

$$f(y_n) \leq f(x_n) \tag{4.13}$$

$$\| y_n - x_n \| \leq \frac{1}{n} \tag{4.14}$$

$$f(y_n) < f(x) + \frac{1}{n} \| x - y_n \|, \ \forall\, x \in R_m \ , \ x \neq y_n \tag{4.15}$$

De (4.12) y (4.13) se sigue que $(f(y_n))$ es acotada y (4.14) implica que para n suficientemente grande y_n esta en el interior de R_m.

Veamos que $f'(y_n) \longrightarrow 0$ en X^*: Sean $w \in X$ con $\|w\| = 1$ cualquiera y $t > 0$. Si en (4.15) elegimos $x = y_n - tw$, obtenemos:

$$f(y_n) < f(y_n - tw) + \frac{t}{n} .$$

Pero $f(y_n - tw) = f(y_n) - t \langle f'(y_n),w \rangle + o(tw)$, lo cual junto con la desigualdad anterior implica que:

$$\langle f'(y_n),w \rangle < \frac{o(tw)}{t} + \frac{1}{n} .$$

Tomando límite cuando $t \longrightarrow 0$ se obtiene:

$$\langle f'(y_n), w \rangle \leq \frac{1}{n}, \ \forall\, w \in X,\ \|w\| = 1,$$

y de aquí: $\| f'(y_n) \| \leq \frac{1}{n}$; es decir, $f'(y_n) \longrightarrow 0$ en X^*.

Por lo tanto, $(f(y_n))$ es acotada y $f'(y_n) \longrightarrow 0$ en X^* y como f satisface la condición (P-S), existen una subsucesión (y_{k_n}) de (y_n) y un $x_m \in R_m$ tales que $y_{k_n} \longrightarrow x_m$ y $f'(x_m) = 0$.

De (4.11) (4.12) y (4.13) se sigue que $f'(x_m) = 0$ y $f(x_m) = f(x_o)$. Usando nuevamente el hecho que f satisface la condición (P-S) se obtiene una subsucesión (x_{k_m}) de (x_m) y un $x_r \in X$ tales que $x_m \longrightarrow x_r$ fuertemente. Como $f \in C^1$, se tiene que $f'(x_r) = 0$ y $f(x_r) = f(x_o)$. Finalmente, como $x_m \in R_m$:

$$r - \frac{1}{m} \leq \| x_m - x_o \| \leq r + \frac{1}{m},$$

y tomando límite cuando $m \longrightarrow +\infty$ se tiene que $\| x - x_o \| = r$ y de aquí $x_r \neq x_o$. Esto prueba (B). □

TEOREMA 4.5.- Supongamos que:

X es un espacio de Banach,

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una funcional de clase C^1, que satisface la condición (P-S),

f no es acotada inferiormente,

$x_o \in X$ es un mínimo local estricto de f.

Entonces: f tiene un punto crítico $\hat{x} \neq x_o$.

Prueba.- Como x_o es un mínimo local estricto de f, existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\forall\, x \text{ con } 0 < \| x - x_o \| < \varepsilon : f(x_o) < f(x).$$

Además, se cumple la alternativa (A) del Teorema 4.4. Así, existe $0 < r < \varepsilon$ tal que si $S = \{ f(x) \,/\, \| x - x_o \| = r \}$, entonces:

$$f(x_0) < \inf_{x\in S} f(x).$$

Como f no es acotada inferiormente, existe $x_1 \in X$ con $\|x_1 - x_0\| > \varepsilon$ tal que $f(x_1) < f(x_0)$ y de aquí, $\max\ \{ f(x_0), f(x_1) \} < \inf_{x\in S} f(x)$.

Si $\Gamma = \{ g \in C([0,1],X) \ /\ g(0) = x_0,\ g(1) = x_1 \}$, el Teorema del Paso de la Montaña implica que:

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} f(g(t)) > -\infty$$

y existe $\tilde{x} \in X$ con $f(\tilde{x}) = c$ y $f'(\tilde{x}) = 0$.

Para cada $g \in \Gamma$, sea $t_g \in \langle 0,1\rangle$ tal que $g(t_g) \in S$ y sea

$$T = \{ t_g \ /\ g \in \Gamma \}.$$

De:

$$f(\tilde{x}) = \inf_{g\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} f(g(t)) \geq \inf_{g\in\Gamma} f(g(t_g))$$

$$\geq \inf_{x\in S} f(x) > f(x_0)$$

se tiene que $\tilde{x} \neq x_0$. Esto prueba el Teorema 4.5. $\square$

CAPITULO 5

PUNTOS DE SOPORTE

Y FUNCIONALES DE SOPORTE

En primer lugar, definamos los conceptos de puntos de soporte y funcionales de soporte.

Supongamos que X es un espacio de Banach y que C es un subconjunto convexo y cerrado de X (siempre asumiremos que $\emptyset \neq C \subsetneqq X$). Un punto $x_o \in C$ es llamado un punto de soporte, si, y sólo si, existe una funcional lineal acotada $f \in X^*$ tal que:

$$\sup_C f = f(x_o).$$

Una funcional $f \in X^*$, se dice que es una funcional de soporte, si existe $x_o \in C$ tal que: $\sup\limits_C f = f(x_o)$ (siempre asumiremos que $f \neq 0$).

La terminologia "soporte" viene del hecho geométrico que el hiperplano $\mathscr{H} = \{ x \in X \,/\, f(x) = f(x_o) \}$ toca C en x_o y deja C en uno de los semiespacios determinados por $\mathscr{H}$. En este capitulo, nos dedicaremos a estudiar los siguientes problemas:

<u>Problema 1:</u> Dado un subconjunto convexo cerrado C de X, ¿todo $x \in \partial C$ es un punto de soporte? Si no fuera así, ¿cómo podríamos cuantificar el conjunto de puntos de soporte?

<u>Problema 2:</u> Dado un subconjunto convexo cerrado C de X, ¿toda $f \in X^*$ es una funcional de soporte? Si no fuera así, ¿cómo se podría cuantificar el conjunto de funcionales de soporte?

Para resolver los problemas anteriores aplicaremos esencialmente el Principio Variacional de Ekeland y el

Teorema de Hahn-Banach. Veamos ahora algunas observaciones y ejemplos:

1) De hecho, las cuestiones anteriores tienen sentido si f es acotada sobre C; es decir, si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) \leq m, \ \forall \ x \in C.$$

En particular, ésto ocurre si C es acotada. Por lo general, en lo que sigue, asumiremos que C es un subconjunto convexo, cerrado y acotado de X.

2) Dados f y C, no es cierto, en general, que f soporte C en algún punto. Por ejemplo, si

$$C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, \ y > 0, \ xy \geq 1 \}$$

y

$$f(x,y) = -y, \ \forall \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

es claro que, $\sup_{(x,y)\in C} f(x,y) = 0$ y sin embargo ningún $(x,y) \in C$ satisface $f(x,y) = 0$. Pero si C es un subconjunto cerrado, convexo y acotado de un espacio de Banach reflexivo, entonces cualquier $f \in X^*$ soporta C en algún punto.

<u>En efecto:</u> Tendríamos que C es un conjunto débilmente compacto y si $f \in X^*$ se sigue que $-f$ es inferiormente continua. El Teorema 1.1 muestra que existe $x_o \in C$ tal que:

$$-f(x_o) = \inf_{x\in C} (-f(x));$$

es decir, $f(x_o) = \sup_{x\in C} f$ y por lo tanto f soporta C.

3) El resultado anterior es falso si quitamos la condición de reflexividad de X.

<u>En efecto:</u> Si

$$X = \{ x : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ \begin{matrix} x \text{ es continua}, \\ x(0) = x(1) = 0 \end{matrix} \}$$

provisto de la norma:

$$\| x \|_\infty = \max_{t\in[0,1]} | x(t) |,$$

entonces $(X, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach pero no es reflexivo. Consideremos $f \in X^*$ dada por $f(x) = \int_0^1 x(t)dt$, $x \in X$ y sea $C = \{ x \in X \,/\, \|x\|_\infty \leq 1 \}$. Entonces se cumple que:

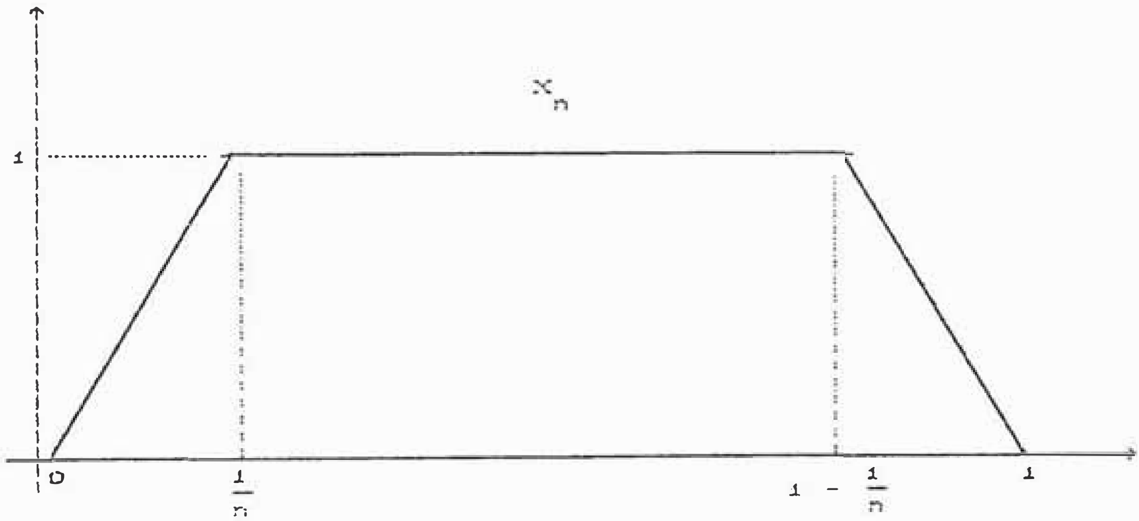
$$f(x) \leq 1, \ \forall\, x \in C.$$

Veamos que $\sup_C f = 1$: Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in C$ cuya gráfica se muestra. Luego, $f(x_n) = 1 - \frac{1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Si $\varepsilon > 0$ es dado, elegimos $n \in \mathbb{N}$ con $\frac{1}{n} < \varepsilon$ para obtener:

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n} < f(x_n).$$

Esto muestra que $\sup_C f = 1$.



Veamos que $f(x) < 1$, $\forall\, x \in C$: Sea $x \in C$ cualquiera. Como $x(0) = x(1) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|\, x(t) \,| \leq \frac{1}{3}, \ \forall\, t \in [0,\delta] \cup [1-\delta,1].$$

De <u>ésto</u> se sigue que:

$$\left| \int_0^1 x(t)dt \right| \leq \int_0^\delta |x(t)|dt + \int_\delta^{1-\delta} |x(t)|dt$$

$$+ \int_{1-\delta}^1 |x(t)|dt \leq$$

$$\leq \frac{2}{3}\delta + 1 - \delta = 1 - \frac{\delta}{3} < 1;$$

y ésto implica que $f(x) < 1$, $\forall\, x \in C$. Así, f no soporta C

en ningún punto.

4) Sea C un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach X y sea $x_0 \in \partial C$. No es cierto, en general, que exista una funcional $f \in X^*$ que soporte C en x_0.

Por ejemplo: tomemos $X = \ell^2$ y

$$C = \{ x = (x_j) \in \ell^2 / x_j \geq 0, \ \| x \|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \leq 1 \}$$

Primero veamos que $C = \partial C$: Sean $x = (x_j) \in C$ y $\varepsilon > 0$ dados. Elegimos $N \in \mathbb{N}$ tal que $| x_N | < \frac{\varepsilon}{2}$; entonces el punto:

$$\hat{x} = (x_1 , \ldots , x_{N-1}, -\frac{\varepsilon}{2} , x_{N+1} , \ldots) \notin C \quad y$$

$$\| x - \hat{x} \| = \| x_N + \frac{\varepsilon}{2} \| < \varepsilon.$$

De aquí, $x \in \partial C$ y por lo tanto $C = \partial C$.

Ahora mostraremos que los puntos $\hat{x} \in C$ con $x_j > 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$, y $\| \hat{x} \| < 1$ no son puntos de soporte.

Fijemos $\hat{x} \in C$ con $x_j > 0$ y $\| \hat{x} \| < 1$ y supongamos que exista una funcional $f \in X^*$ tal que $\sup_C f = f(\hat{x})$. Como $0 \in C$, se sigue que $0 \leq f(\hat{x})$. Además, existe $t > 1$ tal que $t\hat{x} \in C$, entonces $f(t\hat{x}) \leq f(\hat{x})$, lo cual implica que $f(\hat{x}) = 0$. Por el Teorema de Representación de Riesz, existe $y = (y_j) \in \ell^2$, $y \neq 0$ tal que $f(x) = \langle x,y \rangle$, $\forall x \in \ell^2$ y de aquí $\sum_{j=1}^{\infty} \hat{x}_j y_j = 0$, lo cual implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_{n_0} > 0$. El punto:

$\hat{\hat{x}} = e_{n_0} = (\delta_{n_0})_{j\in\mathbb{N}}$ pertenece a C y $f(\hat{\hat{x}}) = y_{n_0}$, lo cual contradice el hecho que $\sup_{C} f = 0$.

5) Sin embargo, si el conjunto cerrado, acotado y convexo C tiene interior no vacío, entonces todos los puntos de la frontera ∂C son puntos de soporte. Esto es una consecuencia directa del Teorema de Hahn-Banach.
Como vimos en el ejemplo 4, si int C = ∅, entonces hay puntos en C $(=\partial C)$ que no son puntos de soporte. Sin embargo, el Teorema 5.3 dará una respuesta satisfactoria al problema 1.

6) El ejemplo 3) da una respuesta negativa a la primera parte del problema 2. Una respuesta satisfactoria la encontraremos en el Teorema 5.6.

TEOREMA 5.1 (EL TEOREMA DE LA GOTA)

Supongamos que: X es un espacio de Banach,
S un subconjunto cerrado de X,
$y \in X \setminus S$ y $R = \mathrm{dist}(y,S)$,
r y ρ son números reales tales que:

$$0 < r < R < \rho.$$

Entonces: existe $x_0 \in S$ tal que:

$$\| y - x_0 \| \leq \rho \quad y \quad D(y,r;x_0) \cap S = \{ x_0 \} \qquad (5.1)$$

donde $D(y,r;x_0) = \mathrm{Co}\,(\overline{B}_r(y) \cup \{ x_0 \})$.

Observación: $D(y,r;x_0)$ es llamado una gota debido a su evocativa geométrica. Por definición,

$$\mathrm{dist}(y,S) = \inf \{ \| y - x \| \;/\; x \in S \}$$

y cuando X es reflexivo, este ínfimo es alcanzado, pero en general no es así. La notación "Co" significa la cápsula convexa y $B_r(y) = \{ x \in X \;/\; \| x - y \| < r \}$.

Prueba del Teorema 5.1.- Por una traslación podemos suponer que $y = 0$. Sea $F = \overline{B}_{\rho}(0) \cap S$, el cual es una subconjunto cerrado de X y por lo tanto un espacio métrico completo con la distancia inducida por la norma de X.
Definamos la funcional $\Phi : F \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Phi(x) = \frac{\rho + r}{R - r} \| x \|, \quad \forall\, x \in F.$$

Es fácil verificar que Φ satisface las hipótesis del Principio Variacional de Ekeland, en virtud del cual, para $\varepsilon = 1$, existe $x_0 \in F$ tal que:

$$\Phi(x_0) < \Phi(x) + \| x - x_0 \|, \ \forall x \in F: \ x \neq x_0. \qquad (5.2)$$

Como $x_0 \in F = \bar{B}_\rho(0) \cap S$, es claro que x_0 satisface el primer requerimiento de (5.1) y que $x_0 \in D(y,r;x_0) \cap S$.

Veamos ahora que $D(y,r;x_0) \cap S = \{ x_0 \}$. Procedamos por contradicción, suponiendo que existe otro $x_1 \in D(y,r;x_0) \cap S$ con $x_1 \neq x_0$.

Asi tenemos que:

$$x_1 \in S \quad y \quad x_1 = (1-t) x_0 + t \vec{v} \qquad (5.3)$$

para algún $\vec{v} \in \bar{B}_r(0)$ y para algún $t \in \langle 0,1]$.

En realidad, el t que aparece en (5.3) esta en $\langle 0,1\rangle$, pues si $t = 0$ se tendría que $x_1 = x_0$ lo cual no es cierto y si $t = 1$, entonces $x_1 = \vec{v}$, es decir, $x_1 \in B_r(0)$, lo cual no puede ser, puesto que $B_r(0) \cap S = \emptyset$.

De (5.3) se tiene que $\| x_1 \| \leq (1 - t) \| x_0 \| + t \| \vec{v} \|$ de lo cual se sigue que:

$$t(R-r) \leq t (\| x_0 \| - \| \vec{v} \|) \leq \| x_0 \| - \| x_1 \| \qquad (5.4)$$

De (5.2) y (5.3) se consigue:

$$\frac{\rho + r}{R - r} \| x_0 \| < \frac{\rho + r}{R - r} \| x_1 \| + t \| x_0 - \vec{v} \| \qquad (5.5)$$

pero por (5.4), $\| x_1 \| < \| x_0 \| - t(R-r)$ y

$$\| x_0 - \vec{v} \| \leq \rho + r$$

lo cual junto con (5.5) implican que $\| x_0 \| < \| x_0 \|$, lo cual obviamente no puede ser.

Asi, queda probado el Teorema 5.1. $\square$

<u>Observación:</u> El teorema anterior se debe a Danes, quién dió en [7] una prueba diferente de la mostrada aqui, usando el siguiente resultado de Krasnoselski y Sabreiko:

" Si X es un espacio de Banach y $x, y \in X$ son tales que:

$$0 < r < \rho < \| x - y \|,$$

entonces:

$$\operatorname{diam} [D(x,r;y) \setminus B_{\rho}(x)] \leq \frac{2(\|x-y\| + r)}{\|x-y\| - r} (\|x-y\| - \rho). "$$

La prueba que hemos dado aquí se encuentra esencialmente en Brondsted [5]. La relación entre el Teorema de la Gota y el Principio Variacional de Ekeland ha sido resaltada por muchos autores como Brezis y Brodwer en [4], Danes [7].

TEOREMA 5.2.- (Brodwer [4])

Supongamos que: X es un espacio de Banach,

S es un subconjunto cerrado de X,

$\varepsilon > 0$ es dado y $z \in \partial S$.

Entonces: Existen $\delta > 0$ y un cono convexo cerrado K con interior no vacio y $x_0 \in S$ tales que:

$$\| x_0 - z \| < \varepsilon \quad \text{y} \quad S \cap (x_0 + K) \cap B_{\delta}(x_0) = \{ x_0 \} \quad (5.6)$$

Observación: El Teorema anterior significa que un conjunto cerrado S satisface una condición de cono local (exterior) sobre un conjunto denso de ∂S.

Prueba del Teorema 5.2.- Tomemos $y \notin S$ tal que $\| z - y \| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, entonces $R = \operatorname{dist}(y,S) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Tomemos también $\rho = \frac{\varepsilon}{2}$ y $r \in \langle 0,R \rangle$. El Teorema 5.1 implica que existe $x_0 \in S$ tal que:

$$\| x_0 - y \| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad D(y,r;x_0) \cap S = \{ x_0 \} \qquad (5.7)$$

Como $\| x_0 - z \| \leq \| x_0 - y \| + \| y - z \| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$, es claro que se cumple la primera afirmación de (5.6).

Como $r < R = \operatorname{dist}(y,S) \leq \| x_0 - y \|$ se tiene que $r < \| x_0 - y \|$ y podemos tomar $\delta > 0$ tal que:

$$\delta < \| x_0 - y \| - r.$$

Es suficiente probar que los puntos:

$$x = x_0 + t(v - x_0); \; t \geq 0, \; v \in \bar{B}_r(y), \; \| x - x_0 \| < \delta \quad (5.8)$$

están en $D(y,r;x_0)$, pues en ese caso tomamos:

$$K = \{ \mu \in X \,/\, \mu = t(v - x_0),\ t \geq 0,\ v \in \overline{B}_r(y) \}$$

y así,

$$x_0 + K = \{ x_0 + t(v - x_0) \,/\, t \geq 0,\ v \in \overline{B}_r(y) \}.$$

Esto implica que: $(x_0 + K) \cap B_\delta(x_0) \subset D(y,r;x_0)$, lo cual junto con (5.7) muestra que $S \cap (x_0 + K) \cap B_\delta(x_0) = \{ x_0 \}$.

Probemos ahora (5.8): Es suficiente probar que los t que aparecen en (5.8) son menores o iguales que 1.

Si x es como (5.8), entonces x se puede escribir así:

$$x = x_0 + t(y - x_0) + t(v - y)$$

lo cual implica que:

$$t\,(\, \| y - x_0 \| - \| v - y \| \,) < \delta \qquad (5.9)$$

Finalmente, de $t(\| y - x_0 \| - r) \leq t(\| y - x_0 \| - \| v - y \|)$ y de (5.9) y de acuerdo a cómo δ fue escogido, se sigue que:

$$t\,(\, \| y - x_0 \| - r \,) < \| y - x_0 \| - r;$$

es decir, t < 1. Así, queda probado el Teorema 5.2. □

<u>TEOREMA 5.3.- (Bishop-Phelps [2])</u>

Supongamos que: X es un espacio de Banach,

C es un subconjunto convexo cerrado de X.

Entonces, el conjunto de puntos de soporte de C es denso en ∂C.

<u>Prueba.-</u> Sean $z \in \partial C$ y $\varepsilon > 0$ dados. Por el Teorema 5.2, existen $x_0 \in C$, K un cono convexo cerrado con interior no vacío y $\delta > 0$ tales que:

$$\| x_0 - z \| < \varepsilon \ \text{ y } \ C \cap (x_0 + K) \cap B_\delta(x_0) = \{ x_0 \} \qquad (5.10)$$

Ahora veamos que:

$$C \cap (x_0 + K) = \{ x_0 \} \qquad (5.11)$$

Procedamos por contradicción, suponiendo que:

$$\exists\, x_1 \in C \cap (x_0 + K) \text{ con } x_1 \neq x_0.$$

Entonces para t > 0 suficientemente pequeño, el punto:

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0)$$

es diferente de x_0 y esta en $C \cap (x_0 + K) \cap B_\delta(x_0)$ lo cual contradice (5.10). Por lo tanto se cumple (5.11). De aquí se sigue que si $U = int(x_o + K)$, entonces $C \cap U = \emptyset$. Así, por el Teorema de Hahn-Banach, existe una funcional $f \in X^*$ tal que $\sup_C f \leq \inf_U f$. Luego, $\sup_C f \leq f(x_o)$ y como $x_o \in C$ se tiene que $\sup_C f = f(x_o)$.

Así, tenemos que $\| x_o - z \| < \varepsilon$ y x_o es un punto de soporte de C. Esto prueba el Teorema 5.3. $\square$

Observación: El Teorema 5.3 da una respuesta al Problema 1. Ahora estableceremos dos lemas que serán utilizados para dar una respuesta al Problema 2.

LEMA 5.4.-

Supongamos que: X es un espacio de Banach,

S es un subconjunto cerrado de X,

$f \in X^*$, $\| f \|_{X^*} = 1$ y $\sup_S f < \infty$.

Entonces: el conjunto K definido por:

$$K = \{ x \in X \ / \ k \| x \| \leq f(x) \} \tag{5.12}$$

es un cono convexo cerrado.

Además: para cada $z \in S$, existe $x_o \in S$ tal que:

$$x_o \in z + K \quad y \quad S \cap (x_o + K) = \{ x_o \}.$$

Prueba.- Es fácil ver que K es un cono convexo cerrado.

Para probar (5.13), sea $F = (z + K) \cap S$ el cual es un espacio métrico completo con la métrica inducida por la norma de X.

Definamos $\Phi : F \longrightarrow \mathbb{R}$ como $\Phi = -f|_F$; es claro que Φ satisface las hipótesis del Principio Variacional de Ekeland. Así, tomando $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon < k$ se tiene que existe $x_o \in F$ (y de aquí, se sigue que $x_o \in z + K$) tal que:

$$-f(x_o) < -f(x) + \varepsilon \| x_o - x \|, \ \forall \ x \in F, \ x \neq x_o \tag{5.14}$$

Es claro que $x_o \in S \cap (x_o + K)$.

Veamos que:

$$S \cap (x_o + K) = \{ x_o \} \tag{5.15}$$

Procedamos por contradicción, suponiendo que:

$$\exists \ y \in S \cap (x_o + K) \ / \ y \neq x_o.$$

De (5.14) se obtiene que:

$$f(y) - f(x_0) < \varepsilon \, \| x_0 + y \|. \tag{5.16}$$

Como $y \in x_0 + K$, entonces $y - x_0 \in K$, lo cual implica que:

$$k \, \| y - x_0 \| \leq f(y) - f(x_0),$$

lo cual junto con (5.16) implica que $k < \varepsilon$, y ésto es una contradicción. Así, queda probado (5.15). □

<u>LEMA 5.5.-</u>

Supongamos que: X es un espacio de Banach,

C es un subconjunto convexo y cerrado de X,

$f \in X^*$ con $\| f \|_{X^*} = 1$,

$k \in (0,1)$ y k es como en (5.12),

$x_0 \in C$ es tal que:

$$C \cap (x_0 + K) = \{ x_0 \} \tag{5.17}$$

Entonces: existe $g \in X^*$, $g \neq 0$ tal que:

$$\sup_C g = g(x_0) \quad \text{y} \quad \| g - f \|_{X^*} \leq k \tag{5.18}$$

<u>Prueba.-</u> Consideremos la funcional $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\Phi(x) = k \, \| x \| - f(x), \ \forall \ x \in X.$$

Es claro que Φ es continua y convexa. Definamos los subconjuntos C_1 y C_2 de $X \times \mathbb{R}$ como sigue:

$$C_1 = \{ (x,r) \in X \times \mathbb{R} \ / \ \Phi(x) < r \}$$

y

$$C_2 = \{ (x,r) \in X \times \mathbb{R} \ / \ x \in C - x_0 ; \ r = 0 \}.$$

Tenemos que C_1 es el interior del epigrafo epi Φ, el cual es abierto y convexo; C_2 es convexo y cerrado y $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Por el Teorema de Hahn-Banach, existe $F \in (X \times \mathbb{R})^*$, $F \neq 0$ tal que:

$$\sup_{C_2} F \leq \inf_{C_1} F \tag{5.19}$$

Observemos que a F le corresponden, de manera única, un $g \in X^*$ y $t \in \mathbb{R}$ tales que $F(x,r) = g(x) + tr$, $\forall \ (x,r) \in X \times \mathbb{R}$.

Como $(0,0) \in C_2 \cap \overline{C}_1$, se sigue que $\sup_{C_2} F = 0 = \inf_{C_1} F$. Además, para cada $x \in X$, se tiene que $(x,\Phi(x)) \in \overline{C}_1$ de lo cual se sigue que:

$$g(x) + t\ \Phi(x) \geq 0,\ \forall\ x \in X. \tag{5.20}$$

Si $t = 0$, de (5.20) se tendría que $g(x) \geq 0$, $\forall\ x \in X$ lo cual implica que $g = 0$. Entonces F sería nula, lo cual no puede ser. Por lo tanto, $t \neq 0$.

Como $(0,1) \in C_1$ se tiene que $0 \leq F(0,1) = t$ y por lo tanto $t > 0$. Se puede suponer, sin pérdida de generalidad que $t = 1$. De (5.20) y de la definición de Φ se sigue que:

$$g(x) + k\ \| x \|\ \ f(x) \geq 0,\ \forall\ x \in X,$$

lo cual implica que $\| g - f \|_{X^*} \leq k$.

Finalmente, para cada $x \in C$ se tiene que $(x-x_0, 0) \in C_2$, lo cual muestra que $g(x-x_0) \leq 0$, $\forall\ x \in C$ y de aquí se sigue que:

$$\sup_C g = g(x_0).$$

Esto prueba (5.17). ■

TEOREMA 5.6.- (Bishop-Phelps [2])

Supongamos que: X es un espacio de Banach,

C es un subconjunto convexo, acotado y cerrado de X

Entonces: el conjunto de funcionales lineales continuas que soportan C es denso en X^*.

Prueba.- Sea $\hat{f} \in X^*$, $\hat{f} \neq 0$ y sea $\varepsilon > 0$. Con el objetivo de aplicar los lemas anteriores tomemos: $f = \dfrac{\hat{f}}{\|\hat{f}\|_{X^*}}$; K es como el conjunto definido en (5.12) donde $k = \dfrac{\varepsilon}{\|\hat{f}\|_{X^*}}$ (para ésto se debe tomar $\varepsilon < \|\hat{f}\|_{X^*}$).

Elijamos $z \in C$, entonces por el Lema 5.4, existe $x_o \in C$ tal que:

$$x_o \in z + K \quad y \quad C \cap (x_o + K) = \{ x_o \}.$$

Además, el Lema 5.5 implica que existe $g \in X^*$, $g \neq 0$ tal que:

$$\| g - f \|_{X^*} \leq \frac{\varepsilon}{\| \hat{f} \|_{X^*}} \quad y \quad g \text{ soporta } C \qquad (5.21)$$

Definiendo $\hat{g} = \| \hat{f} \|_{X^*} g$, de (5.20) se sigue que $\| \hat{g} - \hat{f} \|_{X^*} \leq \varepsilon$ y $\hat{g}$ soporta C. Esto muestra la densidad. □

B I B L I O G R A F I A

1. A. AMBROSETTI and P. H. RABINOWITZ - Dual Variational Methods in Critical Point Theory - J. Functional Anal. 14, (1973), 349 - 381.
2. E. BISHOP and R. R. PHELPS - The Support Functionals of a convex set. Proc. Symp. Pure Math. - Amer. Math. Soc, Vol 7 - (1962), 27 - 35.
3. Haïm BRÉZIS - Analisis Funcional - Alianza Universidad Textos (1983)
4. F. E. BRODWER - Normal Solvability for Nonlinear Mappings into Banach spaces - Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), 73 - 77.
5. A. BRONDSTED - On a Lemma of Bishop and Phelps - Pac. J. Math 55 (1974), 335 - 341.
6. J. CARISTI - Fixed Points Theorems for Mappings satisfying Unwardness Conditions - Trans. Amer. Math. Soc. 215 (1976), 241 - 251.
7. J. DANES - Equivalence of some Geometric and related results of Nonlinear Functional Analysis - Comm. Math. Univ. Carolona 26 (1985), 443 - 454.
8. Klaus DEIMLING - Nonlinear Functional Analysis - Springer Verlag - (1985).
9. I. EKELAND - Sur les Problémes Variationnels, CR Acad. Sci. Paris 275 (1972), 1057 - 1059.
10. I. EKELAND - On the Variational Principle, J. Math. Anal. Appl. 17 (1974), 324 - 353.
11. I. EKELAND - Nonconvex Minimization Problems - Bull. Amer. Math. Soc. 1 (1979), 443 - 474.
12. I. EKELAND and J. P. AUBIN - Applied Nonlinear Analysis - John Wiley and sons (1984).
13. D. G. de FIGUEREDO - Lectures on the Ekeland Variational Principle with applications and detours - (1989).
14. F. JARA, Un Teorema General y Flexible de Min-Max - UNI (1992).
15. Eberhard ZEIDLER - Nonlinear Functional Analysis and its applications, V. I. 528.