UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICAS

" PROGRAMACION DINAMICA Y CONTROL OPTIMO "

TESIS

PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE LICENCIATURA

EN CIENCIAS MENCION MATEMATICAS

WILFREDO SOSA SANDOVAL

LIMA-PERU

1990

PROLOGO

El objetivo principal de esta tesis es desarrollar los aspectos más importantes de la programación dinámica continua para obtener algoritmos efectivos que resuelvan problemas particulares de control óptimo.

Para esto hemos establecido cuatro capitulos; el primero de ellos consiste en introducir un conjunto de conceptos modernos de la teoría de control, los cuales facilitarán la formulación del problema del control óptimo que se establece en el segundo capitulo, el tercer capitulo que es la parte central de esta tesis es dedicada a desarrollar la teoría de la programación dinámica concluyendo que la teoría clásica de Hamilton-Jacobi esta comprendida en la teoría de la programación dinámica continua. Y finalmente el capitulo cuarto es dedicado a establecer y resolver dos problemas típicos del regulador lineal.

W.S.S.

INDICE

CAPITULO 1

CONCEPTOS BASICOS:

INTRODUCCION:

En este capítulo introduciremos un conjunto de definiciones de la teoría moderna del control óptimo, las cuales en el capítulo siguiente nos facilitarán formular el problema de control óptimo.

También presentaremos cuatro ejemplos entre los cuales consideramos un modelo de la teoría del crecimiento económico y un sistema de Leontief.

DEFINICIONES:

Cuando se investiga un fenómeno evolutivo, el punto de partida son los datos experimentales obtenidos en base observaciones ya sea directamente o simulando al fenómeno evolutivo. Luego de alguna manera se determinan funciones que aproximan en cierto sentido la evolución del fenómeno. Esto quiere decir que la experiencia demuestra hasta ahora que la investigación de un fenómeno evolutivo la podemos realizar en base a tres elementos:

* Los tiempos de observación.
* Los datos experimentales a los cuales llamaremos señales.

* Las funciones que aproximan al fenómeno evolutivo a las cuales llamaremos comportamientos.

La siguiente definición es una expresión matemática genérica de un fenómeno evolutivo a la cual llamaremos sistema dinámico.

DEFINICION 1:

Definimos a un sistema dinámico como un triplete:

$$SD = \{ T , \bar{S} , C \}$$

donde:

T representa el espacio de tiempos.

$\bar{S}$ representa el espacio de señales, es decir que $\bar{S}$ es el conjunto de todos los datos experimentales posibles para el fenómeno evolutivo.

C representa al espacio de comportamientos, es decir que C es un conjunto de funciones:

$$w : T \mapsto \bar{S}$$

donde w es una función que representa una forma de evolución posible del fenómeno.

Generalmente los fenómenos evolutivos de interés en el campo de la industria, economía, biología, etc. son tales que el ser humano puede alterar su funcionamiento (por ejemplo los procesos industriales, la economía de un país, una enfermedad venerea, etc.) alterando ciertos datos experimentales por medio de decisiones que son tomadas por el ser humano. Pero cuando se toma una decisión , casi siempre se hace considerando las consecuencias de las señales anteriores (u observaciones anteriores) a las cuales llamaremos consecuencias de las señales con respecto a la decisión. Cuando esto sucede, las decisiones y las consecuencias de las decisiones resultan ser también señales a ser tomadas en consideración.

Según esto llamaremos señales externas a las decisiones y a las consecuencias de las señales con respecto a las decisiones y al resto de las señales las llamaremos señales internas o estados del sistema dinámico.

Por ejemplo imaginemos al sistema como una caja cerrada y le aplicamos una decisión, entonces en principio esta decisión genera un estado para el sistema, luego este estado y la decisión generan señales que salen del sistema, y si consideramos que este sistema interactua con otros sistemas, entonces, estos otros sistemas le envían señales al sistema, graficamente, esto se puede representar como:

Sistema

Decisión → [Señales Internas del Sistema] → Señales Externas del Sistema

↑

Señales de Otros sistemas

Si consideramos las señales de los otros sistemas dentro de las decisiones, entonces podemos representar al sistema como:

Sistema

Decisión $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Señales Internas del Sistema}}$ $\xrightarrow{\text{Señales Externas}}$ del Sistema

DEFINICION 2:

Definimos un modelos de espacio de estados como una cuadruple

$$MEE = \{ T , S , X , C \}$$

donde:

T representa al espacio de tiempos.

S representa al espacio de señales externas, es decir que S es el conjunto de todas las decisiones y todas las consecuencias de las señales con respecto a las decisiones posibles para el sistema dinamico.

X representa al espacio de estados o señales internas.

C representa al espacio de comportamientos. Esto es, un conjunto de pares (w,x) que representan una evolución posible del sistema, donde $w : T \mapsto S$, $x : T \mapsto X$.

AXIOMA DE ESTADO: Sean (ω_1,x_1) y (ω_2,x_2) en C.

Si para algún $t_0 \in T$ se tiene que $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ entonces (ω,x) definido de la siguiente manera:

$$(\omega(t),x(t)) = \begin{cases} (\omega_1(t),x_1(t)) & \text{para } t < t_0 \\ (\omega_2(t),x_2(t)) & \text{para } t_0 \leq t \end{cases}$$

también pertenece a C.

OBSERVACIONES:

1.-) El axioma de estado quiere decir que el estado pasado $x_1(t)$ para $t<t_0$ y el estado futuro $x_2(t)$ para $t>t_0$ son independientes, dado el estado presente $x(t_0)$, considerando que el tiempo presente es $t=t_0$.

2.-) Para cada $t \in T$, u_t representara la decisión tomada en el tiempo t; x_t representara el estado del sistema en el tiempo t e $_t$ representara la consecuencia de las señales con respecto a la decisión en el tiempo t.

DEFINICION 3:

Consideremos un modelo de espacio de estados $MEE = \{T,S,X,C\}$ con $S = U \times Y$ donde:

U representa el espacio de todas las decisiones posibles para el sistema dinamico.

Y representa el espacio de todas las consecuencias de las señales con respecto a las decisiones.

Entonces este modelo de espacio de estados es llamado un sistema de control si se cumplen las siguientes propiedades:

PROPIEDAD 1: Sea $t_0 \in T$, $x_0 \in X$ y $u : T \mapsto U$, entonces existe a lo mas una función $x : T \mapsto X$ tal que $x_0(t_0) = x_0$ y $(u,y,x) \in C$ para algun $y : T \mapsto Y$.

OBSERVACION: A $(t_0,x_0) \in T \times X$ le llamaremos condiciones iniciales y a $u : T \mapsto U$ le llamaremos un control, entonces la propiedad establece que si se tiene una condicion inicial (t_0,x_0) y se elige un control u, entonces existe a lo más una función $x : T \mapsto X$ tal que $x(t_0) = x_0$ y $(u,y,x) \in C$ para una función $y: T \mapsto Y$ a la funcion x la llamaremos la trayectoria asociada a (t_0,x_0,u) y la denotaremos de la siguiente manera $x(t) = x(t;t_0,x_0,u)$.

PROPIEDAD 2: Si se tiene que : $(u,y,x) \in C$ y $(u,\bar{y},x) \in C$ entonces $y = \bar{y}$

OBSERVACION: La propiedad nos dice que si el control u y la trayectoria x son dados, entonces existe una única función $y : T \mapsto Y$, tal que $(u,y,x) \in C$.

Además a la función y se le puede representar de la siguiente manera $y(t) = r(t,x(t),u(t))$ a la cual llamaremos función de salida.

Por otro lado a la trayectoria asociada a (t_0,x_0,u) la podemos representar como : $x(t) = x(t;t_0,x_0,u)$ y se supondrá además que tiene las siguientes propiedades:

DIRECCION DEL TIEMPO: $x(t;s,y,u)$ esta definida para $t \geq s$; pero no necesariamente para $t < s$ (se supone $t \in T$).

CONSISTENCIA: $x(t;t,x,v) = x$ para todo $t \in T$, para todo $x \in X$ y para todo $v \in U$.

SEMIGRUPO: Sean $t_0 \leq t_1 \leq t_2$ todos en T, $x_0 \in X$ y un control $u : [t_0,t_2] \mapsto U$, entonces se tiene lo siguiente $x(t_2;t_1,x(t_1;t_0,x_0,u),u) = x(t_2;t_0,x_0,u)$ siempre que $x(t_i;t_0,x_0,u)$ sea definida para $i = 1,2$.

CAUSALIDAD: sea $[t_0,t_1] \subset T$ y $u,v : T \mapsto U$ dos controles tal que $u(t) = v(t)$ en $[t_0,t_1]$, entonces $x(t_1;t_0,y,u) = x(t_1;t_0,y,v)$ para $\forall\ y \in X$.

OBSERVACIONES:

La propiedad de semigrupo quiere decir que si hacemos

$x_1 = x(t_1; t_0, x_0, u)$,entonces $x(t; t_0, x_0, u)$ y $x(t; t_1, x_1, u)$, coincidan en $t = t_2$.

La propiedad de causalidad quiere decir que las trayectorias $x(t; t_0, y, u)$ y $x(t; t_0, y, v)$, coinciden en $t = t_1$ cualquiera que sea el estado $y \in X$ y cualquiera que sean los controles $u, v : T \mapsto U$, siempre que las decisiones entre t_0 y t_1 sean las mismas. Es decir que $x(t; t_0, y, u) = x(t; t_0, y, v)$ para: $\forall\ t \in [t_0, t_1]$, $\forall\ y \in X$ siempre que $u(t) = v(t)$ para: $\forall\ t \in [t_0, t_1]$.

DEFINICION 4:

Un sistema dinámico $SD = \{ T, \bar{S}, C \}$ es llamado lineal si $\bar{S}$ es un espacio vectorial y C es un subconjunto convexo de el siguiente espacio :

$$F(T, \bar{S}) = \{ w : T \mapsto \bar{S} \ / \ w \text{ es una función lineal} \}$$

Ahora denotemos por $\mathbb{U}$ al conjunto de todas las funciones seccionalmente continuas definidas en algún intervalo $[t_0, t_1]$ contenido en T y cuyo rango esta en U es decir :

$u \in \mathbb{U}$ si sólo si $\exists\ [t_0, t_1] \subset T$ tal que $u : [t_0, t_1] \mapsto U$ y u es una función seccionalmente continua.

OBSERVACION:

El conjunto U será considerado un conjunto cerrado.

Los intervalos $[t_0, t_1]$ pueden ser diferentes para diferentes elementos de $\mathbb{U}$.

A cada elemento $u \in \mathbb{U}$ se le llamara una función de control o simplemente control.

El conjunto $\mathbb{U}$ de controles será asumido a tener la siguiente propiedad:

Si $u,v \in \mathbb{U}$ tal que: $u : [t_0,t_1] \mapsto U$, $v : [t'_0,t'_1] \mapsto U$ y $t_0 < t'_0 \leq t_1 < t'_1$ entonces $\upsilon : [t_0,t'_1] \mapsto U$ definida de la siguiente manera:

$$\upsilon(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } t \in [t_0,t_1] \\ v(t) & \text{si } t \in ([t'_0,t'_1] \setminus [t_0,t_1]) \end{cases}$$

también pertenece a $\mathbb{U}$.

DEFENICION 5:

Sea X un conjunto de un espacio topológico.

Un sistema de control es llamado diferenciable si para cada $(t_0,x_0,u) \in T \times X \times \mathbb{U}$, la trayectoria asociada $x(t;t_0,x_0,u)$ (si es que existe) es diferenciable en $t = t_0$.

ALCANZABILIDAD, CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD:

Un estado x_1 es llamado a ser alcanzable desde algún estado x_0 en el tiempo t_0 si existe un control $u \in \mathbb{U}$ tal que $x(t;t_0,x_0,u) = x_1$ para algún tiempo $t_1 > t_0$.

La controlabilidad se refiere a que algún estado final x_1 (usualmente localizado por conveniencia en el origen) puede ser alcanzado desde algún estado x_0 en el tiempo t_0 por la elección apropiada de algún control $u \in \mathbb{U}$. Así la controlabilidad es una condición necesaria para la existencia de una solución.

La observabilidad significa la habilidad para determinar el estado inicial x desde las observaciones de las señales.

EJEMPLO 1:

Este ejemplo es basado en los primeros estudios de Leontief sobre la estructura de una economia nacional con una desagregación intermedia. En su aproximación, las actividades de producción de la economía son desagragados a n sectores de la industria y la transacción de bienes entre los sectores es analizada.

Las hipótesis son las siguientes:

* Son: producidos, negociados, consumidos e invertidos en la economía, "n" clase de bienes.
* Cada sector produce una y sólo una clase de bienes y distintos sectores producen distintas clases de bienes. Así "n" sectores "n" clases de bienes estan en una correspondencia biyectiva.
* En cada sector, la producción significa la transformación de varias clases de bienes (posiblemente todas, en algunas cantidades) en cierta cantidad del bien que se produce en el sector.

Explicitamente, en un sistema de Leontief, estas hipótesis le dan la siguiente forma especial.

"Para producir una unidad del j-ésimo bien, a(i,j) unidades del i-ésimo bien son necesarias como entradas para i=1,..,n en el sector j-ésimo y λ unidades de producción total del j-ésimo bien requiere $\lambda a(i,j)$ unidades del i-ésimo bien. Esas n^2 magnitudes $a(i,j)$, llamados coeficientes tecnológicos son asumidos a ser constantes.

Sea $x_i(t)$ la producción total del i-ésimo bien por unidad de tiempo, en el tiempo t (por ejemplo años). Parte de esta producción total es consumida como entradas necesarias en las actividades de producción para el próximo tiempo (t+1), la cual es igual a: $\sum_{j=1}^{n} a(i,j)x_j(t+1)$. (esto es obtenido de la forma especial que tiene un sistema de Leontief).

Si d_i es la demanda del bien i en el período t, entonces se debe cumplir:

$$x_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a(i,j)x_j(t+1) = d_i(t) \quad ....(*)$$

Si hacemos:

$$T = \mathbb{Z} \quad , \bar{S} = \mathbb{R}^{2n} \quad , C = \{ w : T \mapsto \bar{S} \}$$

donde: $w(t)=(x_1(t),...,x_n t),d_1(t),...,d_n(t))$ es solución de la ecuación (*).

entonces $SD = \{ T , \bar{S} , C \}$ es un sistema dinámico.

EJEMPLO 2:

Este ejemplo es basado sobre la teoria del crecimiento económico, en el cual se considera una economia dentro de la cual se produce un bien con la ayuda de un capital y una fuerza laboral, tal que este bien producido tiene que ser consumido o invertido para el consumo futuro y lo que se analiza es :

"cuanto se debe consumir ahora y cuanto se debe invertir para el consumo futuro, para obtener utilidades positivas".

Los economistas suponen que:

1) El capital se deprecia a una proporción constante μ.

2) La inversión es utilizada para aumentar el stock del capital y para reponer el capital depreciado.

3) La fuerza laboral crece a una proporción exponencial conocida "n".

4) La producción total por trabajador es asumida a ser una función conocida que depende del capital percápita, siendo además continua, acotada superiormente, estrictamente positiva y estrictamente cóncava.

EL MODELO:

Si denotamos por K(t) al capital, L(t) a la fuerza laboral, Y(t) a la producción total, C(t) al consumo e I(t) a la inversión, en el tiempo t respectivamente, entonces :

*) De 3) obtenemos: $\frac{d}{dt}L(t) = nL(t)$.

*) de 1) y 2) obtenemos: $I(t) = \frac{d}{dt}K(t) + \mu K(t)$.

*) De 4) obtenemos: $\frac{Y(t)}{L(t)} = f\left(\frac{K(t)}{L(t)} \right)$.

*) Y por último: $Y(t) = C(t) + I(t)$.

Por otro lado :

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)}, \quad c(t) = \frac{C(t)}{L(t)}, \quad i(t) = \frac{I(t)}{L(t)}, \quad k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$$

serán la producción total, el consumo, la inversión, y el capital por trabajador (o percápita) respectivamente.

Entonces:

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} = f(k(t)) = \frac{C(t)}{L(t)} + \frac{I(t)}{L(t)} = c(t) + i(t) \quad ..(1).$$

Como: $$I(t) = \frac{d}{dt}K(t) + \mu K(t)$$

entonces: $$i(t) = \frac{\frac{d}{dt}K(t)}{L(t)} + \mu k(t) \quad ..... (2)$$

pero: $$\frac{d}{dt}k(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{K(t)}{L(t)} \right) = \frac{(\frac{d}{dt}K(t))L(t) - K(t)(\frac{d}{dt}L(t))}{(\ L(t)\ )^2}$$

entonces: $$\frac{d}{dt}k(t) = \left(\frac{\frac{d}{dt}K(t)}{L(t)} \right) - \left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)\left(\frac{\frac{d}{dt}L(t)}{L(t)} \right).$$

entonces: $$\frac{d}{dt}k(t) = \left(\frac{\frac{d}{dt}K(t)}{L(t)} \right) - nk(t)$$

entonces: $$\frac{\frac{d}{dt}K(t)}{L(t)} = \frac{d}{dt}k(t) + nk(t) \quad ..... (3)$$

reemplazando (3) en (2) obtenemos:

$$i(t) = \frac{d}{dt}k(t) + (n + \mu)k(t) \quad .....(4)$$

reemplazando (4) en (1) obtenemos:

$$f(k(t)) = c(t) + \frac{d}{dt}k(t) + (n + \mu)k(t) ...(5)$$

obteniendo finalmente:

$$\frac{d}{dt}k(t) = f(k(t)) - (n + \mu)k(t) - c(t) \quad .... (6)$$

Sea k_o el capital percápita en el tiempo inicial t_o, es decir que: $k(t_o) = k_o$ ..... (7)

Si aceptamos que la utilidad global se puede expresar como:

$$w(t) : \int_{t_o}^{t} e^{(-\delta(s-t_o))} U(c(s))ds \quad ....(8)$$

donde: $E(c(t))$ es la función que mide la utilidad instantanea de la economia.

Si hacemos:

$$T = [t_o, +\infty\rangle$$

$$X = [0, +\infty\rangle$$

$$U = [0, M]$$

$$Y = [0, +\infty\rangle$$

$$C = \{ g = (c,k,w) : T \mapsto (U \times Y \times X) \}$$

donde:

$M = \sup \{ f(k(t)) / t \in T \}$

$c : T \mapsto U$ es la funcion de consumo (funcion de control).

$k : T \mapsto X$ es la funcion del capital (funcion de estado).

$E : T \mapsto Y$ es la funcion de utilidad instantanea de la economia (función de salida).

y las funciones c, k, E satisfacen las ecuaciones (6), (7), (8). Entonces $MEE = \{ T , X , S , C \}$ con $S = U \times Y$ es u sistema de control diferenciable.

<u>EJEMPLO 3:</u>

Consideremos un sistema de control diferenciable $MEE = \{T,S,X,C\}$

donde: $(t_o, x_o) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ son las condiciones iniciales fijas del sistema.

$T = [t_o, \infty\rangle$

$U \subset \mathbb{R}^m$, cerrado.

$Y = \mathbb{R}^r$

$S = U \times Y$.

$X = \mathbb{R}^n$.

$\mathbb{U}$ el conjunto de todas las funciones seccionalmente continuas en algún intervalo $[t_0, t_1] \subset T$.

entonces para cada función $u : [t_0, t_1] \mapsto U$ que pertenece a $\mathbb{U}$, existe a lo más una trayectoria $x(t)=x(t;t_0,x_0,u)$ la cual debe ser diferenciable en t_0 (puesto que MEE es un sistema de control diferenciable), es mas para cada $\tau \in [t_0, t_1]$, $x(t)$ es diferenciable en τ (basta aplicar la propiedad de semigrupo).

Entonces podemos definir:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t,x(t),u(t)) \quad \text{para cada} \quad t \in [t_0, t_1]$$

luego x es solución del siguiente problema de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = F(t,x(t),u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

el cual es llamado un problema de Cauchy.

Luego, las ecuaciones a considerar en el modelo matemático para el sistema de control diferenciable:

MEE $= \{T, S, X, C\}$ serán:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = F(t,x(t),u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \\ y(t) = r(t,x(t),u(t)) \end{cases}$$

donde $(u,y,x) \in C$

vale decir que si se tiene condiciones inciales fijas (t_0, x_0) y se elige un control $u : [t_0, t_1] \mapsto U$, entonces la trayectoria $x(t;t\ ,x\ ,u)$ debe ser la única solución del problema de Cauchy, esto quiere decir que F es tal que garantiza la unicidad de la solución y depende del problema en particular.

En el ejemplo anterior (crecimiento económico), la función F toma la forma:

$$F(t,x(t),u(t)) = f(x(t)) - (n+u)x(t) - u(t)$$

EJEMPLO 4:

Consideremos un sistema de control diferenciable:

$$MEE = \{T,X,S,C\}$$

Entonces por el ejemplo anterior, las ecuaciones a considerar en el modelo matemático serán:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = F(t,x(t),u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \\ y(t) = r(t,x(t),u(t)) \end{cases}$$

donde $(u,y,x) \in C$

¿Qué caracteristicas tendria este sistema de control diferenciable, para que sea un sistema de control diferenciable y lineal?

veamos:

Consideremos (u_1,y_1,x_1) y (u_2,y_2,x_2) en C, como C es convexo, entonces por definición de conjunto convexo, se tiene que

$$[\alpha(u_1, y_1, x_1) + \beta(u_2, y_2, x_2)] = [\alpha u_1 + \beta u_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta x_2) \in C$$

$$\forall\ \alpha+\beta=1 \qquad \alpha,\beta \geq 0$$

$$\frac{d\,[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)]}{dt} = F(t, \alpha x_1(t) + \beta x_2(t), \alpha u_1(t) + \beta u_2(t))$$

$$= F(t, \alpha(x_1, u_1) + \beta(x_2, u_2)) \qquad \ldots(1)$$

pero: $$\frac{d\,[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)]}{dt} = \alpha\frac{dx_1(t)}{dt} + \beta\frac{dx_2(t)}{dt}$$

$$= \alpha F(t, x_1(t), u_1(t)) + \beta F(t, x_2(t), u_2(t)) \qquad \ldots(2)$$

entonces de (1) y (2):

$$F(t, \alpha(x_1, u_1) + \beta(x_2, u_2)) = \alpha F(t, x_1, u_1) + \beta F(t, x_2, u_2)$$

es decir que F debe de ser lineal con respecto a (x,u). Entonces sin perdida de generalidad podemos considerar:

$$F(t, x(t), u(t)) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad \ldots(1)$$

Analogamente (bajo los mismos argumentos) podemos considerar $r(t, x(t), u(t)) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$ de donde podemos concluir que ecuaciones a considerar en un sistema de control diferenciable y lineal son:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

donde $(u, y, x) \in C$

CAPITULO 2

FORMULACION DEL PROBLEMA DE CONTROL OPTIMO

INTRODUCCION:

En esta parte primeramente introduciremos la función objetivo, como una forma de cuantificar el funcionamiento de un sistema dinamico, considerando un objetivo dado.

Esta función objetivo será establecida mediante una funcional que dependerá de las condiciones iniciales y del control puesto que ambas cosas definen el estado del sistema dinámico. Y sin perdida de generalidad consideraremos el caso de minimización de la función objetivo.

Luego formularemos: un problema de control de Lagrange y un particular de control óptimo, para después enunciar algunas tecnicas que permiten resolver este problema.

FUNCION OBJETIVO:

Consideremos:

*)EL sistema de Leontief del ejemplo 1 y lo que deseamos es alterar el sistema denámico de tal manera que la producción neta total despues de p periodos sea máxima y para esto consideramos:

$d(t) = (d_1(t),\dots,d_n(t))$ como la funcion de control y

$x(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))$ como la funcion de estado del sistema.

entonces lo que se desea hallar para cada $t \in \{1,\ldots,p\}$ un vector $d^*(t)$ tal que al resolver el sistema de ecuaciones

$$x_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a(i,j)x_j(t+1) = d_i(t)$$

Se obtenga $x^*(t)$, de tal manera que: $u^*(t)$ y $x^*(t)$ para $t = 1,\ldots,p$ maximice la producción neta total, para lo cual necesitamos una forma de cuantificar la producción neta total, la cual cuantificará el funcionamiento del sistema dinámico en el sentido de la producción neto total.

*)En el modelo del crecimiento economico del ejemplo 2, lo que deseamos es alterar el sistema dinamico de tal manera que la utilidad global en el periodo $[t_0,t_1]$ sea maxima.

Si para esto consideramos:

c como la funcion de control

k como la función de estado del sistema

E como la función de salida

entonces lo que se desea es hallar $c^*: [t_0,t_1] \mapsto U$ tal que c^*, $k(t;t_0,k_0,c^*)$ maximicen la utilidad global en $[t_0,t_1]$. También para esto necesitamos una forma de cuantificar la utilidad global, la cual para este caso le podemos asumir como.

$$\int_{t_0}^{t} e^{(-\delta(s-t_0))}E(c(s))ds$$

vale decir que la ecuación anterior cuantifica el funcionamiento del sistema dinámico en el sentido de utilidad global.

En conclusión si se tiene un sistema dinámico y lo que se desea es alterar su funcionamiento de acuerdo a un objetivo predefinido; entonces lo que necesitamos es una forma de cuantificar el funcionamiento del sistema dinamico en el sentido del objetivo predefinido.

DEFINICION:

Definimos a la función objetivo como una funcional que cuantifique en algún sentido al funcionamiento del sistema dinámico y ademas que dependa de: las decisiones, los estados, la función de salida y las condiciones iniciales.

NOTACION:

En el Control Optimo existen tres problemas equivalentes, el problema de Mayer, el problema de Lagrange y el problema de Bolza, estos tres problemas generan tres formas de establecer la funcion objetivo antes mencionada.

a.-) PARA EL PROBLEMA DE MAYER

Consideremos $\phi : (\mathcal{T} \times \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X}) \mapsto \mathbb{R}$ una funcional de clase C^1, entonces la función objetivo para el problema de Mayer tendra la siguiente forma:

$$J(t_0,x_0,u) = \phi(t_0;t_1,x(t_0),x(t_1))$$

donde u es una funcion de control definida en algún intervalo $[t_0,t_1] \subset \mathcal{T}$, x es la trayectoria asociada a (t_0,x_0,u). $(x(t) = x(t;t_0,x_0,u))$

b.-) PARA EL PROBLEMA DE LAGRANGE

Consideremos $L : (\mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}) \mapsto \mathbb{R}$, una funcional de clase C^1, entonces la función objetivo para e problema de Lagrange tendra la siguiente forma:

$$J(t_0,x_0;u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt$$

c.-) PARA EL PROBLEMA DE BOLZA

Si consideramos ϕ y L como en los dos problemas anteriores, entonces la función objetivo para el problema de Bolza tendra la siguiente forma:

$$J(t_0,x_0,u) = \phi(t_0;t_1,x(t_0),x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt$$

Donde u es una función de control definida en algún intervalo $[t_0,t_1] \subset T$, x es la trayectoria asociada a (t_0,x_0,u),

FORMULACION DEL PROBLEMA DE CONTROL DE LAGRANGE:

En nuestra vida cotidiana , el proposito de controlar se interpreta como alterar el comportamiento de un sistema dinamico de acuerdo a los deseos del hombre.

Si consideramos un sistema de control para un sistema dinámico dado, entonces interpretaremos el problema de control óptimo como sigue:

Determinar una función de estado $x : T \mapsto X$, generada por una función de control $u : T \mapsto U$ de tal manera que la función objetivo que cuantifica o mide el funcionamiento del sistema dinámico sea minimizada o maximizada considerando ciertas condiciones iniciales, (sin pérdida de generalidad sólo consideraremos el caso de minimización). Por tanto las componentes de un problema de control óptimo se pueden resumir en :

*) Un sistema dinámico.

*) Un sistema de control.

*) Una función objetivo o índice de funcionamiento .

En consecuencia, el problema de control óptimo, puede ser formulado matematicamente de la siguiene manera:

$$\begin{cases} \min \ \{ J(t_0,x_0;u) \} \\ \text{sujeto al siguiente sistema de control} \\ MEE = \{ T, S, X, C \} \quad \text{con} \quad S = U \times Y \end{cases}$$

Es decir : Dada las condiciones iniciales $(t_0,x_0) \in T \times X$, debemos de elegir una funcion de control tal que la trayectoria asociada a $(t_0,x_0;u)$, el control u y las condiciones iniciales minimizen la función objetivo.

FORMULACION DE UN PROBLEMA PARTICULAR DE CONTROL OPTIMO

Si en la formulación general consideramos un sistema de control diferenciable $MEE=\{T,S,X,C\}$ con $S = U \times Y$, en donde las condiciones iniciales son fijas y las condiciones finales variando en un subconjunto cerrado $M \subset T \times X$, es decir que los controles que nos interesan son aquellos $u : [t_0, t_1) \mapsto U$, que pertenecen a $\mathbb{U}$, cuyas trayectorias $x(t) = x(t;t_0,x_0,u)$ sean tal que $(t_1,x(t)) \in M$ entonces interpretamos este problema de control óptimo como sigue:

Determinar una función de control $u : [t_0,t_1] \mapsto U$ en $\mathbb{U}$, cuya trayectoria $x(t)=x(t;t_0,x_0,u)$ satisfaga $(t_1,x(t_1)) \in M$ y minimicen a la función objetivo $J(t_0,x_0;u)$.

En consecuencia, las ecuaciones a considerar en el modelo matemático para este problema de control óptimo son:

$$\begin{cases} \min \left\{ \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt \right\} \\ \text{sujeto a :} \\ \qquad \frac{d}{dt} x(t) = F(t,x(t),u(t)) \\ \qquad x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

METODOS DE SOLUCION:

El origen de los primeros métodos para resolver un problema de control óptimo son basados en las tecnicas del calculo fundamental, las cuales consideran lo siguiente:

Sea: X es un espacio topológico lineal, $S \subset X$ y $F : S \mapsto \mathbb{R}$ es una función continua.

Se plantea el siguiente problema P :

Determinar $\hat{x} \in S$ tal que $F(x) \geq F(\hat{x})$, para $\forall \ x \in S$ ...(*)

este problema así planteado, se llama un programa matemático y lo escribiremos como:

$$P : \min \{ F(x) \ / \ x \in S \}$$

donde:

F es la función objetivo

S es el dominio admisible de P

Un punto x que satisface (*) se llama una solución optima de P.

Se define y se denota al valor óptimo P como:

$$\inf(P) = \inf \{ F(x) \ / \ x \in S \}$$

Como consecuencias del análisis del problema del cálculo fundamental y de la extención de este a espacios más generales (problemas del cálculo variacional), se tienen los siguientes métodos para resolver un problema de control óptimo:

a.-) <u>METODOS DE PROGRAMACION MATEMATICA</u>

La ventaja de estos métodos, es que se dispone de una gran variedad de algorítmos computacionales de programación matemática y la desventaja es que al transformar un problema de control óptimo (ya sea que el número de variables sea pequeño) a un problema de programación matemática, el problema resultante tendrá un número de variables muy grande (con respecto al número de variables del problema de control óptimo), lo cual origina dificultades desde el punto de vista computacional.

b.-) <u>EL PRINCIPIO DEL MINIMO DE PONTRYAGIN</u>

Se basa en métodos variacionales para establecer condiciones necesarias de optimalidad que culminaron en 1956, con el enunciado del principio del mínimo Pontryagin.

c.-) <u>LA PROGRAMACION DINAMICA:</u>

Es el método que expondremos aquí y que fué propuesto por Richard Bellman a principios de la década de los años 50 y se basa en el principio de optimidad de Bellman, que dice:

"Una política optimal tiene la propiedad que, cualquiera que sea el estado inicial y la decisión inicial, el resto de las decisiones deben de constituir una política optimal considerando sólo el estado resultante desde la decisión final".

Es decir, si u^* es un control óptimo que lleva al sistema del estado x_0 al estado x_1, entonces para cualquier tiempo $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$, el control intermedio $u^*: [t, t_1\rangle \mapsto U$ es el control óptimo que lleva al sistema del estado $A = x^*(t)$ al estado x_1

t_0 t t_1

CAPITULO 3

PROGRAMACION DINAMICA

INTRODUCCION:

Esta tecnica es muy utizada para resolver diferentes problemas, puesto que ofrece una forma recursiva de calcular los controles y los estados para el sistema, su estudio es basado en una funcional llamada funcion valor y para establecerla se considerara una familia de problemas de control de Lagrange con condiciones iniciales fijas y condiciones finales en un conjunto cerrado M, llamado el conjunto terminal.

El principal problema de esta tecnica radica en que no siempre la funcion valor es diferenciable.

EL PROBLEMA DE OPTIMIZACION ASOCIADO:

En esta parte consideraremos un problema de control óptimo con las siguientes hipòtesis.

*) El sistema de control, sea un sistema de control diferencial.

*) Las condiciones iniciales $(t_0,x_0) \in T \times X$ fijas y las condiciones finales variando en un subconjunto cerrado $M \subset T \times X$.

*) $T = [t_0,\infty)$.

*) $X \subset \mathbb{R}^n$.

*) U un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^m$.

*) $\mathbb{U}$ el conjunto de todas las funciones seccionalmente continuas $u : [t_1, t_2] \mapsto U$, donde $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$.

*) $J(t_0, x_0; u) = [\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))dt]$.

*) $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ continua.

Vale decir que el conjunto de controles $u \in \mathbb{U}$ que nos interesan, son aquellos $u : [t_0, t_1] \mapsto U$, cuyas trayectorias $x(t) = x(t; t_0, x_0, u)$ satisfagan:

1) El problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

2) $(t_1, x(t_1)) \in M$

esto quiere decir que las ecuaciones que se consideraran en el modelo matematico serán las siguientes:

$$\begin{cases} \min \{ \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))dt \} \\ \text{sujeto a: } \quad \dfrac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t), u(t)) \\ \qquad\qquad\quad x(t_0) = x_0 \\ (t_1, x(t_1)) \in M \\ (u, x) \in C \end{cases}$$

Vale aclarar que la función "y" no es tomada encuenta explicitamente puesto siempre es posible tomarla en cuenta implicitamente, en:

*) La función objetivo como en el ejemplo 2.

DEFINICION :

Definimos y denotamos por $\mathcal{F}_{(t_0,x_0)}$ al conjunto de controles admisibles para el problema de control óptimo anterior, como el conjunto de funciones $u : [t_0,t_1] \mapsto U$ en $\mathbb{U}$, cuyas trayectorias $x(t)=x(t;t_0,x_0,u)$ sean tales que $(t_1,x(t_1)) \in M$

De acuerdo a la definición anterior, el programa matemático siguiente:

$$P_{(t_0,x_0)} : \min \left[J(t_0,x_0;u) / u \in \mathcal{F}_{(t_0,x_0)} \right]$$

esta bien formulado.

Entonces a este programa matemático $P_{(t_0,x_0)}$ lo llamaremos el problema de optimización asociado al problema de control óptimo anterior.

NOTA:

*) A cada elemento $u \in \mathcal{F}_{(t_0,x_0)}$ se llamará un control admisible para el problema de control y a la trayectoria asociada $x(t) = x(t;t_0,x_0,u)$ se le llamará trayectoria admisible al problema de control.

*) Si existe $u^* \in \mathcal{F}_{(t_0,x_0)}$ tal que $J(t_0,x_0;u^*) \leq J(t_0,x_0;u)$ $\forall\ u \in \mathcal{F}_{(t_0,x_0)}$ entonces u^* será llamado control óptimo y la trayectoria asociada $x^*(t) = x(t;t_0,x_0,u^*)$ será llamada trayectoria óptima al problema de Control.

LA FUNCION VALOR :

Primeramente construyamos una familia de problemas de optimización asociados al problema de control óptimo anterior.

Para esto tomemos $(s,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y definamos $\mathfrak{F}_{(s,y)} \subset \mathbb{U}$ como el conjunto de funciones $u : [s,t_1] \mapsto U$ que pertenecen a $\mathbb{U}$ tal que existe una unica trayectoria $x(t) = x(t;s,y,u)$ la cual es solución del problema de Cauchy siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = F(t,x(t),u(t)) \\ x(s) = y \end{cases}$$

y además $(t_1,x(t_1)) \in M$

Entonces para cada $(s,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ obtenemos el siguiente programa matemático:

$$P(s,y) : \min \; [J(s,y;u) = \int_s^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt] \;/\; u \in \mathfrak{F}_{(s,y)}]$$

Para la siguiente definición asumiremos que el valor optimal de $P(s,y) = +\infty$ siempre que $\mathfrak{F}_{(s,y)} = \phi$.

DEFINICION :

Se define a la función valor para el problema de control óptimo como una funcional: $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ tal que:

$$V(s,y) = \inf[P(s,y)] = \inf \; [J(s,y;u) / u \in \mathfrak{F}_{(s,y)}]$$

PROPIEDADES DE LA FUNCION VALOR:

Es en esta parte donde se empieza a desarrollar la programación dinámica en base a las propiedades de la función valor, y la primera propiedad la estableceremos en este primer teorema en base a controles y trayectorias admisibles.

TEOREMA 1:

Sea $u : [t_0, t_1] \mapsto U$ un control en $\mathcal{F}_{(t_0, x_0)} \neq \phi$, cuya trayectoria es $x(t) = x(t; t_0, x_0, u)$, donde $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ entonces para todo τ_1, τ_2 en $\mathbb{R}$ tal que $t_0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq t_1$ se tiene que:

$$V(\tau_1, x(\tau_1)) \leq V(\tau_2, x(\tau_2)) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(t, x(t), u(t))dt$$

DEMOSTRACION:

Como $u \in \mathcal{F}_{(t_0, x_0)} \neq \phi$, entonces u restringido a $[\tau_2, t_1]$ pertenece a $\mathcal{F}_{(\tau_2, x(\tau_2))} \Rightarrow \mathcal{F}_{(\tau_2, x(\tau_2))} \neq \phi$.

Sea $u_2 : [\tau_2, t_1'] \mapsto U$ cualquier control admisible en $\mathcal{F}_{(\tau_2, x(\tau_2))}$.

Definamos $u_1 : [\tau_1, t_1'] \mapsto U$ de la siguiente manera

$$u_1(t) = \begin{cases} u(t), & \text{si } t \in [\tau_1, \tau_2] \\ u_2(t), & \text{si } t \in [\tau_2, t_1'] \end{cases}$$

entonces $u_1 \in \mathcal{F}_{(\tau_1, x(\tau_1))}$, lo que implica que:

$$V(\tau_1, x(\tau_1)) \leq \int_{\tau_1}^{t_1'} L(t, x_1(t), u_1(t))dt \qquad \ldots(1)$$

donde $x_1(t) = x(t; \tau_1, x(\tau_1), u_1)$.

pero:

$$\int_{\tau_1}^{t_1'} L(t, x_1(t), u_1(t))dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(t, x(t), u(t))dt + \int_{\tau_2}^{t_1'} L(t, x_2(t), u_2(t))dt \qquad \ldots(2)$$

donde $x_2(t) = x(t;\tau_2,x(\tau_2),u_2)$

((2) es correcto puesto que u_1 y u_2 coinciden en $[\tau_2,t_1']$ también u_1 y u coinciden en $[\tau_1,\tau_2]$).

Reemplazando (2) en (1) obtenemos:

$$V(\tau_1,x(\tau_1)) \le \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(t,x(t),u(t))dt + \int_{\tau_2}^{t_1'} L(t,x_2(t),u_2(t))dt$$

y como $u_2 \in \mathfrak{F}_{(\tau_2,x(\tau_2))}$ es cualquiera, esto implica que:

$$V(\tau_1,x(\tau_1)) \le \inf\{\int_{\tau_1}^{\tau_2} L(t,x(t),u(t))dt+\int_{\tau_2}^{t_1'} L(t,x_2(t),u_2(t))dt/$$

$$u_2\in \mathfrak{F}_{(\tau_2,x(\tau_2))}\}$$

$$\le \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(t,x(t),u(t))dt + \inf\{\int_{\tau_2}^{t_1'} L(t,x_2(t),u_2(t))dt/$$

$$u_2\in \mathfrak{F}_{(\tau_2,x(\tau_2))}\}$$

$$\therefore \quad V(\tau_1,x(\tau_1)) \le \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(t,x(t),u(t))dt + V(\tau_2,x(\tau_2))$$

<u>COROLARIO:</u>

Sea u y x como en el teorema anterior y definamos $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(\tau) = V(\tau,x(\tau)) - \int_{\tau}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt$. Entonces g es una funcion no decreciente en $[t_0,t_1]$.

<u>DEMOSTRACION:</u>

Sea τ_1 y τ_2 en $\mathbb{R}$ tal que $t_0\le \tau_1 \le \tau_2 \le t_1$ entonces poe el teorema anterior, se tiene que:

$$V(\tau_1,x(\tau_1)) \le V(\tau_2,x(\tau_2)) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(t,x(t),u(t))dt \qquad \ldots(1)$$

sumando $(-\int_{\tau_1}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt)$ en (1), obtenemos:

$$g(\tau_1) = V(\tau_1,x(\tau_1)) - \int_{\tau_1}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt \leq V(\tau_2,x(\tau_2)) - \int_{\tau_2}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt = g(\tau_2)$$

de donde $g(\tau_1) \leq g(\tau_2)$.

La segunda propiedad de la función valor es basada sobre controles óptimos y será establecido en el siguiente teorema:

TEOREMA 2:

Supongamos que existe un control óptimo $u^*: [t_0,t_1] \mapsto U$ en $\mathcal{F}_{t_0,x_0} \neq \phi$ cuya trayectoria óptima es $x^*(t) = x(t;t_0,x_0,u^*)$.

Entonces:

$$V(\tau,x^*(\tau)) = \int_{\tau}^{t_1} L(t,x^*(t),u^*(t))dt \text{ para } \forall\ \tau \in [t_0,t_1]$$

DEMOSTRACION :

Como u^* es un control óptimo en $\mathcal{F}_{(t_0,x_0)}$,esto implica que:

$$J(t_0,x_0;u^*) \leq J(t_0,x_0;u) \text{ para } \forall\ u \in \mathcal{F}_{(t_0,x_0)} \neq \phi$$

pero:

$$J(t_0,x_0;u^*) = \min\{ J(t_0,x_0;u) / u \in \mathcal{F}_{(t_0,x_0)}\} = V(t_0,x_0) \quad \ldots(1)$$

Por otro lado :

$$V(\tau,x^*(\tau)) = \inf \{ J(\tau,x^*(\tau);u) / u \in \mathcal{F}_{(\tau,x^*(\tau))} \}$$

y u^* restringido a $[\tau,t_1]$ pertenece a $\mathcal{F}_{(\tau,x^*(\tau))}$ implica:

$$V(\tau,x^*(\tau)) \leq \int_{\tau}^{t_1} L(t,x^*(t),u^*(t))dt \quad \ldots(2)$$

luego sumando $\int_{t_0}^{\tau} L(t,x^*(t),u^*(t))dt$ en (2) obtenemos:

$$V(\tau,x^*(\tau))+\int_{t_0}^{\tau} L(t,x^*(t),u^*(t))dt\leq\int_{t_0}^{t_1} L(t,x^*(t),u^*(t))dt=J(t_0,x_0;u^*)$$

luego por el teorema anterior y por (1), obtenemos:

$$V(t_0,x_0) \leq V(\tau,x^*(\tau)) + \int_{t_0}^{\tau} L(t,x^*(t),u^*(t))dt \leq$$

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t,x^*(t),u^*(t))dt = V(t_0,x_0)$$

esto implica que:

$$V(\tau,x^*(\tau)) + \int_{t_0}^{\tau} L(t,x^*(t),u^*(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x^*(t),u^*(t))dt$$

finalmente:

$$\therefore \quad V(\tau,x^*(\tau)) = \int_{\tau}^{t_1} L(t,x^*(t),u^*(t))dt$$

COROLARIO:

Consideremos u^* y x^* como en el teorema anterior y g como en el corolario anterior. Entonces:

1) u^* restringido a $[t,t_1]$ es un control optimo para $\forall \ t \in [t_0,t_1]$ para el problema de control con condiciones iniciales $(t,x^*(t))$.

2) g es identicamente nula para $\forall \ t \in [t_0,t_1]$

DEMOSTRACION:

Sea $t \in [t_0,t_1]$ cualquiera. Luego por el teorema anterior se tiene que:

$$V(t,x^*(t)) = \int_t^{t_1} L(s,x^*(s),u^*(s))ds = J(t,x^*(t);u^*)$$

pero como $u^* \in \mathfrak{F}_{(t_0,x_0)}$, esto implica que u^* restringido a $[t,t_1]$ pertenece a $\mathfrak{F}_{(t,x^*(t))}$ y como

$$J(t,x^*(t),u^*) = V(t,x^*(t)) = \inf\{J(t,x^*(t);u) \;/\; u \in \mathfrak{F}_{(t,x^*(t))}\}$$

esto implica que u^* restringido a $[t,t_1]$ sea un control óptimo para las condiciones iniciales $(t,x^*(t))$.

Por otro lado $\quad g(t) = V(t,x^*(t)) - \int_t^{t_1} L(s,x^*(s),u^*(s))ds = 0$

para $\forall\ t \in [t_0,t_1]$

OBSERVACIONES:

Note que las propiedades anteriores son condiciones necesarias de optimidad para el problema de control, entonces es natural preguntarse si esas propiedades conducen a condiciones suficientes de optimidad para el problema de control.

El siguiente teorema nos asegura que la respuesta a la pregunta anterior es positiva.

TEOREMA 3:

Sea $W : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ una función con las siguientes tres propiedades:

1) $W(s,v) = 0$ para $\forall\ (s,v) \in M$

2) Sean u y x dos funciones que satisfacen las hipótesis

del teorema 1 , entonces $W(t,x(t))$ es finita para $\forall\ t \in [t_0,t_1]$ además

$$W(\tau_1,x(\tau_1)) \leq V(\tau_2,x(\tau_2)) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(t,x(t),u(t))dt \ ,$$

$$\forall\ (\tau_1,\tau_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } t_0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq t_1$$

3) $\exists$ un control $u^* \in \mathfrak{F}_{(t,x)} \neq \phi$, con la trayectoria

$x^*(t) = x(t;t_0,x_0,u^*)$ tal que:

$$W(t,x^*(t)) = \int_{t}^{t_1} L(s,x^*(s),u^*(s))ds$$

Entonces u^* es un control óptimo y $W(t_0,x_0) = V(t_0,x_0)$ donde V es la función valor

DEMOSTRACION:

Por hipótesis se tiene que:

$$W(t_0,x_0) \leq \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt + W(t_1,x(t_1)) \text{ para } \forall\ u \in \mathfrak{F}_{(t_0,x_0)}$$

Pero: $(t_1,x(t_1)) \in M$ y por la propiedad (1) , implica que $W(t_1,x(t_1)) = 0$ por lo tanto :

$$W(t_0,x_0) \leq \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt \qquad \text{para } \forall\ u \in \mathfrak{F}_{(t_0,x_0)}$$

esto implica que $\quad W(t_0,x_0) \leq V(t_0,x_0) \quad$ ....(1)

Por otro lado: como $u^* \in \mathfrak{F}_{(t_0,x_0)}$, esto implica que:

$$V(t_0,x_0) \leq \int_{t_0}^{t_1} L(t,x^*(t),u^*(t))dt$$

y por la propiedad (3) obtenemos que $V(t_0,x_0) \leq W(t_0,x_0)$ ...(2)

luego de (1) y (2) obtenemos que :

$$W(t_0,x_0) = V(t_0,x_0) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x^*(t),u^*(t))dt$$

lo cual implica que u^* es un control optimo.

COMENTARIOS:

Hasta aqui hemos establecido que una condicion necesaria y suficiente para que un control sea optimo , es que exista una funcion $W(s,y)$ definida en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ tal que $W(s,y)$ satisfaga las propiedades 1) 2) y 3) del teorema anterior.

Evidentemente el resultado es muy importante, pero surgen varias preguntas tales como:

¿ En la practica, es posible verificar estas tres propiedades sobre un conjunto de trayectorias ?

¿ Se puede reducir esta verificacion a un conjunto pequeño de condiciones ?

¿ Es posible encontrar un metodo sistematico para construir funciones $W(s,y)$ las cuales sean candidatas a funciones valor ?

Trataremos que los siguientes resultados respondan a estas preguntas que hemos formulado.

LA INECUACION DIFERENCIAL PARCIAL DE LA PROGRAMACION DINAMICA:

En primer lugar establecemos algunas definiciones y resultados conocidos que sean necesarios posteriormente.

1) A^T denotará la transpuesta de una matriz

2) Sea $A \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \rightarrow int(A)=\{ \bar{x} \in A / \exists \varepsilon > 0$ tal que $B(\bar{x},\varepsilon) \subset A\}$

3) Una función $V : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ es diferenciable en $(s_o,y_o) \in int(dom(V))$ si existe un escalar a y un vector b tal que :

$$\lim_{(s,y)\mapsto(s_o,y_o)} (|s-s_o|+|y-y_o|)^{-1}|V(s,y)-V(s_o,y_o)-a(s-s_o)-b^T(y-y_o)|=0$$

4) Una función $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ es llamada lipshitziana, sobre un conjunto $R \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, si y sólo si existe una constante k tal que:

$$|g(s_1,y_1) - g(s_2,y_2)| \leq k(|s_1-s_2| + |y_1-y_2|),$$

para todo (s_1,y_1) , (s_2,y_2) en R.

5) Una función $h : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ es localmente lipschitziana sobre R, si y sólo si g restringida a cualquier conjunto compacto $R_1 \subset R$ es lipschitziana en R_1, donde la constante de lipschitz k depende generalmente del compacto R_1, es decir $K = k(R_1)$.

6) Si una función f es localmente lipschitziana en R, entonces f es diferenciable en casi todo punto interior de R en el sentido de la medida de Lebesque, es decir que f es diferenciable excepto en un conjunto de medida Lebesgue cero.

* Vale decir que (6) es el teorema de Rademacher.

7) Si R es convexo y $g: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ es de clase C^1 sobre R, entonces una condicion suficiente para que g sea lipschitziana es que:

$$\left(\left| \frac{\partial g}{\partial s} \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| \right) \leq k$$

8) El infimo de una familia de funciones lipschitzianas con

una constante de lipschitz común, es también lipschitziana.

9) Consideremos funciones $m,g,h\colon [s,T] \mapsto \mathbb{R}$ con las siguiente propiedades:

a) m continua y no negativa.

b) g no negativa tal que $\int_s^T g(t)dt < \infty$

c) h acotada.

Si $m(t) \leq h(t) + \int_s^T g(\tau)m(\tau)d\tau$ para $\forall\ t \in [s,T]$, entonces se cumple que:

$$m(t)\leq h(t) + \int_s^t (g(r)h(r)\exp[\int_s^r g(u)du])dr \quad \text{para } \forall\ t \in [s,T].$$

10) Sea $m{:}[s,T]$ una función continua y no negativa; C y D constantes no negativas.

Si $m(t) \leq D + C\int_s^t m(r)dr$ para $\forall\ t \in [s,T]$, entonces se cumple que $m(t) \leq De^{c(t-s)}$ para $\forall\ t \in [s,T]$.

11) La composición de dos funciones diferenciables es también una función diferenciable.

12) Una condición suficiente para que $V : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ sea diferenciable es que V tenga primeras derivadas parciales continuas.

13) $g(t+0) = \lim_{h \mapsto 0+} g(t+h)$.

Ahora retomemos nuestro último problema de control con condiciones iniciales fijas y condiciones finales variando en M.

DEFINICION:

Definimos y denotemos al conjunto alcanzable, como:

$$\mathbb{Q} = \{ (s,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \ / \ \mathfrak{F}_{(s,y)} \neq \phi \}$$

Vale decir que $\mathbb{Q}$ es el conjunto de puntos iniciales (s,y), para lós cuales existe un control $u \in \mathfrak{F}_{(s,y)}$ cuya trayectoria $x(t) = x(t;s,y,u)$ conduce al sistema desde las condiciones iniciales (s,y), hasta el conjunto terminal $\mathbb{M}$.

Ahora trataremos algunos resultados fundamentales de la programación dinamica.

TEOREMA 4:

Sea $(s,y) \in int(\mathbb{Q})$ tal que $V(s,y)$ es diferenciable en (s,y). Entonces $V(s,y)$ satisface la inecuación diferencial parcial siguiente:

$$\frac{\partial V}{\partial s}(s,y) + \frac{\partial V}{\partial y}(s,y)^T F(s,y,v) + L(s,y,v) \geq 0$$

$$\text{para } \forall\ v \in \mathbb{U} \qquad \ldots(4.1)$$

Además:

Si existe $u^*:[s,t^*] \mapsto \mathbb{U}$ un control óptimo en $\mathfrak{F}_{(s,y)}$, entonces $V(s,y)$ satisface la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\min \{\frac{\partial V}{\partial s}(s,y) + \frac{\partial V}{\partial y}(s,y)^T F(s,y,v) + L(s,y,v) \ / \ v \in \mathbb{U} \} =$$

$$\frac{\partial V}{\partial s}(s,y) + \frac{\partial V}{\partial y}(s,y)^T F(s,y,u^*(s+0)) + L(s,y,u^*(s+0)) = 0 \qquad \ldots(4.2)$$

DEMOSTRACION:

Sea $v \in \mathbb{U}$ cualquiera

Como $(s,y) \in int(\mathbb{Q})$, esto implica que existe $\varepsilon>0$ y $u \in \mathfrak{F}_{(s,y)}$ tal que, se cumplan las siguientes propiedades:

a) $u(t) = v$ para $\forall\ t \in [s,s+\varepsilon]$

b) Si $x(t) = x(t;s,y,u)$, entonces $(t,x(t)) \in \mathbb{Q}$ para

$\forall\ t \in [s,s+\varepsilon]$.

Ahora consideremos $u_1: [s+\varepsilon,t\rangle \mapsto U$ que pertenece a $\mathcal{Y}_{(s+\varepsilon,x(s+\varepsilon))}$.

Luego definamos $u_\varepsilon: [s,t_1] \mapsto U$ tal que

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} u(t)\ , \text{ si } & t \in [s,s+\varepsilon] \\ u_1(t)\ , \text{ si } & t \in [s+\varepsilon,t_1] \end{cases}$$

esto implica que $u_\varepsilon \in \mathcal{Y}_{(s,y)}$,

como u_ε es seccionalmente continua, esto implica que:

$$\frac{d}{dt}x_\varepsilon(t+0) = F(t;x_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t+0))$$

donde $x_\varepsilon(t) = x(t;s,y,u_\varepsilon)$.

Por otro lado, el corolario 1, nos asegura que la función:

$$g(t) = V(t,x_\varepsilon(t)) - \int_t^{t_1} L(s,x_\varepsilon(s),u_\varepsilon(s))ds$$ es una funcion no decreciente.

Esto implica que $\frac{d}{dt}g(t+0)\geq 0$ para $\forall\ t \in [s,t_1]$, en la derivada unilateral existe.

Pero:

$$\frac{d}{dt}g(t) = \frac{\partial V}{\partial s}(t,x_\varepsilon(t)) + \frac{\partial V}{\partial y}(t,x_\varepsilon(t))^T F(t,x_\varepsilon,u_\varepsilon(s+0)) +$$
$$L(t,x_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t)) \geq 0$$

luego evaluando en (s,y) (punto en el cual las derivadas unilaterales si existen), entonces tendremos que:

$$\frac{\partial V}{\partial s}(s,y) + \frac{\partial V}{\partial y}(s,y)^T F(s,y,v)+L(s,y,v)\geq 0 \quad \text{para } \forall\ v \in U \text{ ....(4.3)}$$

demostrandose así la inecuación 4.1, la cual es llamada la inecuación diferencial parcial de la programación dinámica.

Pero si consideramos, que existe un control optimal

$u^* \in \mathfrak{F}_{(s,y)}$ entonces el corolario 2, implica que:

$$V(t,x^*(t)) - \int_t^{t^*} L(s,x^*(s),u^*(s))ds = g(t)=0 \text{ para } \forall\ t \in [s,t^*]$$

donde $x^*(t) = x(t;s,y,u^*)$, esto implica que:

$$\frac{\partial V}{\partial s}(t,x^*(t)) + \frac{\partial V}{\partial y}(t,x^*(t))^T F(t,x^*(t),u^*(s+0)) +$$

$$L(s,y,u^*(s+0)) = 0 \qquad \text{....(4.4)}$$

luego 4.3) y 4.4) implica que:

$$\min_{v \in U} \left\{ \frac{\partial V}{\partial s}(s,y) + \frac{\partial V}{\partial y}(s,y)^T F(s,y,v) + L(s,y,v) \right\} =$$

$$\frac{\partial V}{\partial s}(s,y) + \frac{\partial V}{\partial y}(s,y)^T F(s,y,u^*(s+0)) + L(s,y,u^*(s+0)) = 0$$

demostrando así ...(4.2)

OBSERVACION:

A la ecuación (4.4) se le llama la ecuación diferencial parcial de la programación dinámica.

Antes de continuar, hagamos un resumen de lo que hasta ahora hemos desarrollado en la programación dinámica.

Para el problema de control óptimo que hemos precisado, el cual tiene condiciones iniciales fijas y condiciones finales en un conjunto terminal $\mathbb{M}$.

1) Para cada $(s,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ hemos definido $\mathfrak{F}_{(s,y)} \subset \mathbb{U}$ tal que para cada $u \in \mathfrak{F}_{(s,y)}$ y la trayectoria asociada $x(t) = x(t;s,y,u)$, conducen al sistema desde el punto (s,y) hasta el conjunto terminal $\mathbb{M}$.

En otras palabras, hemos construido una familia de problemas de control con condiciones inciales (s,y) fijas y condiciones finales $(t_1,x(t_1)) \in M$.

2) Hemos definido al conjunto alcanzable $\mathbb{Q}$, como el conjunto de $(s,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{F}_{(s,y)} \neq \phi$, el cual nos permite definir a la función valor que es el corazón de la programación dinámica.

3) Por último, bajo la hipótesis que:

-) $(t_0,x_0) \in int(\mathbb{Q}) \neq \phi$

-) V es diferenciable en (t_0,x_0)

hemos demostrado que V es solución de la inecuación diferencial parcial de la programación dinámica y si añadimos otra hipótesis:

*) Existe un control óptimo para el problema que hemos precisado.

También hemos demostrado que V es solución de la ecuación diferencial parcial de la programación dinámica mediante la cual es posible obtener el control optimo para el problema de control que hemos precisado.

Luego es natural preguntarse:

¿Cuándo la función valor es diferenciable?.

Para responder a esta pregunta, establescamos un mecanismo parecido al utilizado para definir la función valor. Es decir, construir una familia de problemas de control.

Para esto sea $[\tau_0,\tau] \subset \mathbb{R}$ un intervalo fijo y para cada punto $(s,y) \in [\tau_0,\tau]\times\mathbb{R}^n$ consideremos el problema de control con condiciones iniciales fijas, y tiempo final fijo y estado final libre, es decir que $\mathcal{F}_{(s,y)}$ es el conjunto de funciones $u:[s,T] \mapsto \mathbb{U}$ tal que pertenecen a $\mathcal{U}$ tal que existe a lo mas una trayectoria $x(t)=x(t;s,y,u)$ definido en $[s,T]$ la cual es solución del siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = F(t,x(t),u(t)) \\ x(s) = y \end{cases}$$

en este caso el estado final $x(T)$ no interesa, es por eso que es libre.

En el teorema siguiente consideraremos la familia de problemas de control construida anteriormente.

TEOREMA 5:

Sea $\mathbb{U}$ compacto, F y L localmente lipschitzianas con respecto a x en $\mathbb{R}^n$.

Entonces V es diferenciable en $[T_0,T]\times\mathbb{R}^n$, excepto un conjunto de medida-Lebesque cero.

DEMOSTRACION:

Fijemos $(s,y) \in [T_0,T]\times\mathbb{R}^n$, cualquiera $\delta > 0$ tal que $R_1 \subset [s,T]\times\bar{B}(y,s)\times\mathbb{U} \subset [T_0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{U}$.

a) Primero demostraremos que las soluciones $x(t) = x(t;s,y,u)$ del siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = F(t,x(t),u(t)) \\ x(s) = y \end{cases}$$

son localmente lipschitzianas con respecto a (s,y) en $[T_0,T]\times\mathbb{R}^n$, con constante de lipschitz común para todo $u \in \mathcal{V}_{(s,y)}$.

En efecto:

Sea $u: [s,T] \mapsto U$ que pertenece a $\mathcal{F}_{(s,y)}$ y $x(t)=x(t;s,y,u)$.

Tómemos: (s_1,y_1) y (s_2,y_2) en R_1.

Sin pérdida de generalidad, podemos considerar $s_1 < s_2$.

Denotemos por: x_i a la solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = F(t,x(t),u(t)) \\ \\ x(s_i) = x_i \end{cases}$$

para $i = 1,2$

esto implica que:

$$|x_1(t) - x_2(t)| = \left| y_1 - y_2 + \int_{s_1}^{s_2} F(\tau,x_1(\tau),u(\tau))d\tau + \int_{s_2}^{t} [\, F(\tau,x_1(\tau),u(\tau)) - F(\tau,x_2(\tau),u(\tau)) \,] d\tau \right|$$

$$\leq |y_1 - y_2| + \int_{s_1}^{s_2} |F(\tau,x_1(\tau),u(\tau))| d\tau + \int_{s_2}^{t} |F(\tau,x_1(\tau),u(\tau))-F(\tau,x_2(\tau),u(\tau))| d\tau \qquad \ldots(1)$$

definamos

$$C_1(R_1) = \sup \{ \, |F(t,x,u)| \,/\, (t,x,u) \in R_1 \} \qquad \ldots(2)$$

Por hipótesis F es localmente lipschitziana, esto implica existe $C_2(R_1)$, tal que

$$|F(\tau,x_1(\tau),u(\tau))-F(\tau,x_2(\tau),u(\tau))| \leq C_2(R_1)\,|x_1(\tau)-x_2(\tau)| \ldots(3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1), obtenemos:

$$|x_1(t)-x_2(t)| \leq |y_1-y_2| + \int_{s_1}^{s_2} C_1(R_1)d\tau + \int_{s_2}^{t} C_2(R_1)\,|x_1(\tau)-x_2(\tau)|\,d\tau$$

$$\Rightarrow |x_1(t) - x_2(t)| \leq |y_1 - y_2| + C_1(R_1)|s_2 - s_1| +$$

$$C_2(R_1)\int_{s_2}^{t}|x_1(\tau) - x_2(\tau)|d\tau \quad ....(4)$$

aplicando el resultado (8) a (4) obtenemos:

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq (|y_1-y_2| + C_1(R_1)|s_2-s_1|)\exp(C_2(R_1)(t-s_2))$$

$$\Rightarrow |x_1(t) - x_2(t)| \leq (|y_1-y_2| + C_1(R_1)|s_2-s_1|)\exp(C_2(R_1)|T-T_0|)$$

Si hacemos

$$K_1(R_1) = \max\{\exp(C_2(R_1)|T-T_0|), \exp(C_2(R_1)|T-T_0|)C_1(R_1)\}$$

entonces obtenemos que:

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq K_1(R_1)(|y_1-y_2| + |s_2-s_1|) \quad ...(5)$$

de donde (5) demuestra (a)

b) Veamos que $J(s,y;u)$ sea localmente lipschitziana, con constante de lipschitz independiente de u con respecto a (s,y) en $[T_0,T]\times\mathbb{R}^n$

En efecto:

Sea (s_1,y_1) , (s_2,y_2) en $[T_0,T]\times\mathbb{R}^n$

También sin pérdida de generalidad consideremos $s_1 < s_2$

luego:

$$|J(s_1,y_1;u) - J(s_2,y_2;u)| = |\int_{s_1}^{s_2} L(t,x_1(t),u(t))dt +$$

$$\int_{s_1}^{T}[L(t,x_1(t),u(t)) + L(t,x_2(t),u(t))]\,dt|$$

donde x_i es solución de:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = F(t,x(t),u(t)) \\ x(s_i) = x_i \end{cases}$$

para $i= 1,2$

$$\Rightarrow \quad |J(s_1,y_1;u) - J(s_2,y_2;u)| \leq \int_{s_1}^{s_2} |L(t,x_1(t),u(t))|dt +$$

$$\int_{s_2}^{T} |L(t,x_1(t),u(t)) + L(t,x_2(t),u(t))]\,|dt$$

si hacemos $\quad C_3(R_1) = \sup\{\,|L(t,x,u)| \;/\; (t,x,u) \in R_1\}$

Por hipotesis L es localmente lipschitziana, esto implica que existe: $C_4(R_1) \in \mathbb{R}$ tal que:

$|L(t,x_1(t),u(t))|-|L(t,x_2(t),u(t))| \leq C_4(R_1)|x_1(t)-x_2(t)|$ en R_1

$$\Rightarrow \quad |J(s_1,y_1;u) - J(s_2,y_2;u)| \leq C_3(R_1)|s_2 - s_1| +$$

$$C_3(R_1)\int_{s_2}^{T} |x_1(t) - x_2(t)|dt \qquad \ldots(6)$$

reemplazando (5) en (6).

$$\Rightarrow \quad |J(s_1,y_1;u) - J(s_2,y_2;u)| \leq C_3(R_1)|s_2 - s_1| +$$

$$C_3(R_1)K_1(R_1)\int_{s_2}^{T} (|y_1 - y_2| + |s_1 - s_2|)dt$$

$$\Rightarrow \quad |J(s_1,y_1;u) - J(s_2,y_2;u)| \leq C_3(R_1)|s_2 - s_1| +$$

$$C_3(R_1)K_1(R_1)(T)(|y_1 - y_2| + |s_1 - s_2|)$$

Si hacemos $K_2(R_1) = C_3(R_1)(1 + TK_1(R_1))$ obtenemos que:

$$|J(s_1,y_1;u) - J(s_2,y_2;u)| \leq K_2(R_1)(|y_1-y_2| + |s_1-s_2|) \qquad \ldots(7)$$

lo cual de muestra (b)

c) Veamos que $V(s,y)$ sea localmente lipschitziana en el $[T_0,T]\times\mathbb{R}^n$.

En efecto:

Consideremos a la familia de funciones $J(s,y;u)$, para cada $u \in \mathcal{F}_{(s,y)}$.

Por la parte b) esta familia de funciones es lipschitziana y con una constante común de lipschitz. $(k_2(R_1))$ en R_1 luego por el resultado (8) se obtiene que:

$$\inf \{ J(s,y;u) \ / \ u \in \mathcal{F}_{(s,y)} \} = V(s,y)$$

tambien es lipschitziana en $[\tau_0,\tau]\times\mathbb{R}^n$.

d) Finalmente, aplicando el teorema de Rademacher ver resultado (6), se demuestra que $V(s,y)$ es diferenciable en $[\tau_0,\tau]\times\mathbb{R}^n$ excepto un conjunto de medida-Lebesgue cero.

Bien ahora retomemos el problema de control que habiamos precisado (con condiciones iniciales fijas y condiciones finales en un conjunto M) y trataremos de establecer hipotesis para que las soluciones de la ecuación diferencial parcial de la programacion dinamica, satisfagan las condiciones suficientes de optimidad establecidas en el teorema 3.

Para esto consideraremos que las soluciones son de clase C^1.

TEOREMA 6:

Sea $W: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ una solución de clase C^1 de la ecuacion diferencial parcial de la programación dinámica, que satisface la siguiente condición de frontera.

$$W(s,y) = 0 \quad \text{para } \forall \ (s,y) \in M$$

Sea $(t_0,x_0) \in \mathbb{Q}$, $u : [t_0,t_1] \mapsto U$ que pertenece a $\mathcal{F}_{(t_0,x_0)}$ y $x(t) = x(t;t_0,x_0,u)$.

Entonces:
$$W(t,x(t)) \leq W(s,x(s)) + \int_t^s L(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau$$

$$\text{para } \forall \ t,s \text{ en } \mathbb{R} \text{ tal que } t_0 \leq t \leq s \leq t_1 \quad \ldots(1)$$

Si $u^*: [t_0,t^*] \mapsto \mathbb{U}$ pertenece a $\mathfrak{F}_{(t_0,x_0)}$ y $x^*(t)=x(t;t_0,x_0,u^*)$

son tales que:

$$\frac{\partial W}{\partial s}(t,x^*(t)) + \frac{\partial W}{\partial y}(t,x^*(t))^T F(t,x^*(t),u^*(t)) + L(t,x^*(t),u^*(t))=0$$

Para $\forall\ t \in [t_0,t^*]$.

Entonces u^* es un optimo en $\mathfrak{F}_{(t_0,x_0)}$ ....(2)

finalmente $W(s,y) = V(s,y)$, donde V es la función valor.

DEMOSTRACION:

1) Como W es solución de la ecuación diferencial parcial de la programación dinamica, se tiene que:

$$\min \left\{ \frac{\partial W}{\partial s}(s,y) + \frac{\partial W}{\partial y}(s,y)^T F(s,y,v) + L(s,y,v) \ / \ v \in \mathbb{U} \right\} = 0$$

Sea $u : [t_0,t_1] \mapsto \mathbb{U}$ en $\mathfrak{F}_{(t_0,x_0)}$ y $x(t)=x(t;t_0,x_0,u)$

entonces:

$$\frac{\partial W}{\partial s}(t,x(t))+\frac{\partial W}{\partial y}(t,x(t))^T F(t,x(t),u(t))+L(t,x(t),u(t)) \geq 0 \quad ...(3)$$

Para todo $t \in [t_0,t_1]$.

Pero:

$$\frac{dW}{dt}(t,x(t)) = \frac{\partial W}{\partial s}(t,x(t)) + \frac{\partial W}{\partial y}(t,x(t))^T F(t,x(t),u(t)) \quad ...(4)$$

$$\text{y} \qquad L(t,x(t),u(t)) = \frac{d}{dt}\left[-\int_t^{t_1} L(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau \right] \quad ....(5)$$

Reemplazando (4) y (5) en (8):

$$\frac{d}{dt}\left[W(t,x(t)) - \int_t^{t_1} L(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau \right] \geq 0 \text{ para } \forall\ t \in [t_0,t_1]$$

entonces:

la funcion $g(t) = W(t,x(t)) - \int_t^{t_1} L(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau$

es una funcion no decreciente en $[t_0, t_1]$

Sea $t_1 \in [t_0, t_1]$ tal que $t \le s$.

Entonces: $g(t) \le g(s)$

$$W(t,x(t)) - \int_t^{t_1} L(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau \le W(s,x(s)) - \int_s^{t_1} L(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau$$

$$\rightarrow W(t,x(t)) \le W(s,x(s)) + \int_t^{s} L(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau$$

demostrando asi (1)

2) Aplicando el teorema (3) se concluye que u^* es un control optimo y $W = V$.

OTROS PROBLEMAS

Sabemos que existen tres problemas en control optimo:

El Problema de Mayer.

El Problema de Lagrange.

El Problema de Bolza.

Tambien sabemos que la diferencia entre las formulaciones estos problemas radica en la funcion objetivo.

Por ejemplo, las ecuaciones consideradas en la formulacion del problema de control que hemos precisado son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \; \{J(t_0,x_0,u)\} = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt \\ \text{sujeto a:} \quad \dfrac{dx(t)}{dt} = F(t,x(t),u(t)) \\ \qquad\qquad\quad x(t_0) = \end{array} \right.$$

donde $u : [t_0, t_1] \mapsto U$ pertenece a $\mathcal{U}_{(t_0, x_0)}$

Por tanto este problema asi formulado es un problema de control Lagrange.

Pero si consideramos:

a) $J(t_0,x_0;u) = \phi(t_0,x_0,t_1,x(t_1))$, entonces el problema asi formulado seria un problema de control de Mayer.

b) $J(t_0,x_0;u) = \phi(t_0,x_0,t_1,x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt$,

entonces resultaria un problema de control de Bolza.

Ahora veamos que los problemas de Mayer y Bolza se pueden expresar como problemas de Lagrange.

1) PARA EL PROBLEMA DE MAYER:

Las ecuaciones a considerar en la formulación de este problema son:

$$\begin{cases} \min \{ \phi(t_0,x_0,t_1,x(t_2))\} \\ \text{sujeto a: } \dfrac{dx(t)}{dt} = F(t,x(t),u(t)) \\ \qquad\qquad x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

donde $u : [t_0,t_1] \mapsto U$ pertenece a $\mathcal{J}_{(t_0,x_0)}$

Consideremos $u : [t_0,t_1] \mapsto U$ que pertenece a $\mathcal{J}_{(t_0,x_0)}$ cualquiera, $x(t) = x(t;t_0,x_0,u)$.

Ahora definamos una componente adicional x^0, para la trayectoria con las siguientes propiedades:

$$\frac{dx^0(t)}{dt} = 0 \qquad ....(1)$$

$$x^0(t_0) = \frac{\phi(t_0,x_0,t_1,x(t_1))}{(t_1 - t_0)} \qquad ....(2)$$

luego de (1) y (2) se obtiene que:

$$x^{\circ}(t) = \frac{\phi(t_{\circ},x_{\circ},t_{1},x(t_{1}))}{(t_{1} - t_{\circ})}$$

además:

$$\int_{t_{\circ}}^{t_{1}} x^{\circ}(t)dt = \int_{t_{\circ}}^{t_{1}} \left[\frac{\phi(t_{\circ},x_{\circ},t_{1},x(t_{1}))}{(t_{1} - t_{\circ})} \right] dt = \phi(t_{\circ},x_{\circ},t_{1},x(t_{1})) \quad ..(3)$$

Luego de (1), (2) y (3), podemos formular el problema de control de Mayer como un problema de Lagrange, donde las ecuaciones a considerar son:

$$\begin{cases} \min \left\{ \int_{t_{\circ}}^{t_{1}} x^{\circ}(t)\, dt \right\} \\ \text{sujeto a:} \quad \dfrac{dx(t)}{dt} = F(t,x(t),u(t)) \\ \qquad\qquad \dfrac{dx^{\circ}(t)}{dt} = 0 \\ \qquad\qquad x(t_{\circ}) = x_{\circ} \\ \qquad\qquad x^{\circ}(t_{\circ}) = \dfrac{\phi(t_{\circ},x_{\circ},t_{1},x(t_{1}))}{(t_{1} - t_{\circ})} \end{cases}$$

donde $u : [t_{\circ},t_{1}] \mapsto U$ pertenece a $\mathcal{S}_{(t_{\circ},x_{\circ})}$

Con respecto a la forma de la ecuación diferencial parcial de la programación dinamica indicaremos que:

Procediendo como para el caso de Lagrange (es decir reproducir los teoremas 1), 2), y 3), la función valor para el problema de Mayer resulta ser una funcion creciente a lo largo de una trayectoria admisible y resulta ser una función constante si la trayectoria es una trayectoria óptima). consecuencia se concluye que la programacion dinamica para este problema de control de Mayer seria:

$$\min \left\{ \frac{\partial V}{\partial s}(s,y) + \frac{\partial V}{\partial y}(s,y)^T F(s,y,v) \; / \; v \in U \right\} = 0$$

PARA EL PROBLEMA DE BOLZA :

Para este problema, las ecuaciones a considerar en la formulacion son:

$$\begin{cases} \min \left\{ \phi(t_0,x_0,t_1,x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt \right\} \\ \text{sujeto a: } \dfrac{dx(t)}{dt} = F(t,x(t),u(t)) \\ \qquad\qquad x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

donde $u : [t_0,t_1] \mapsto U$ pertenece a $\mathcal{F}_{(t_0,x_0)}$

Luego utilizando exactamente el mismo argumento que fue utilizado para el problema de Mayer, se puede formular el problema de Bolza, como un problema de control de Lagrange donde las ecuaciones a considerar son:

$$
\begin{cases}
\min \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \left[L(t,x(t),u(t)) + x^{0}(t)\right] dt \right\} \\
\text{sujeto a:} \quad \dfrac{dx(t)}{dt} = F(t,x(t),u(t)) \\
\qquad\qquad\quad \dfrac{dx^{0}(t)}{dt} = 0 \\
\qquad\qquad\quad x(t_0) = x_0 \\
\qquad\qquad\quad x^{0}(t_0) = \dfrac{\phi(t_0,x_0,t_1,x(t_1))}{(t_1 - t_0)}
\end{cases}
$$

donde $u : [t_0,t_1] \mapsto U$ pertenece a $\mathcal{Y}_{(t_0,x_0)}$.

Por otro lado la ecuacion diferencial parcial de la programacion dinamica seria:

$$
\min_{v \in U} \left\{ \frac{\partial V}{\partial s}(s,y) + \frac{\partial V}{\partial y}(s,y)^{T} F(s,y,v) + L(s,y,v) \right\} = 0
$$

OBSERVACION:

Vale decir que esta ecuacion (al igual como para el caso de Mayer), se puede obtener reproduciendo los teoremas 1), 2), y 3).

LA ECUACION DE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN :

Retomemos el problema de control de Lagrange que hemos precisado, es decir aquel que tiene condiciones iniciales (t_0,x_0) fijas y condiciones finales en el conjunto terminal M, cuyas ecuaciones a considerar son:

$$
\begin{cases}
\min \left\{ \int_{t_o}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt \right\} \\
\text{sujeto a:} \quad \dfrac{dx(t)}{dt} = F(t,x(t),u(t)) \\
\qquad\qquad x(t_o) = x_o
\end{cases}
$$

donde $u : [t_o,t_1] \mapsto U$ pertenece a $\mathcal{F}_{(t_o,x_o)}$.

Supongamos que para cada $(s,y) \in int(\mathbb{Q})$:

1) Existe un control $u^* : [s,t_1] \mapsto U$ optimo en $\mathcal{F}_{(s,y)}$.

2) La funcion valor es diferenciable en (s,y)

Entonces:

*) La función valor satisface la ecuación diferencial parcial de la programación dinámica, es decir:

$$\min \left\{ \frac{\partial V}{\partial s}(s,y) + \frac{\partial V}{\partial y}(s,y)^T F(s,y,v) + L(s,y,v) \;/\; v \in U \right\} = 0$$

la cual podemos expresar como:

$$\frac{\partial V}{\partial s}(s,y) + \min \left\{ \frac{\partial V}{\partial y}(s,y)^T F(s,y,v) + L(s,y,v) / v \in U \right\} = 0 \quad ....(1)$$

definamos: $H : \mathbb{R}x\mathbb{R}^n x\mathbb{R}^n x\mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$H(t,x,p,v) = L(t,x,v) + p^T F(t,x,v)$$

Si consideramos $\quad p = \dfrac{\partial V}{\partial y}(s,y)$

Entonces la ecuacion (1) puede ser expresada como:

$$\frac{\partial V}{\partial y}(s,y) + \min \left\{ H(s,y, \frac{\partial V}{\partial y}(s,y), v) \;/\; v \in U \right\} = 0 \quad ....(2)$$

estableciendo así la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

*) Si a la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman le aplicamos el teorema (4), obtendremos:

$$\frac{\partial V}{\partial y}(s,y) + H(s,y, \frac{\partial V}{\partial y}(s,y), u^*(s + 0)) = 0 \quad ....(3)$$

la cual es tambien considerada como la ecuación de Hamilton-Jacobi Bellman.

OBSERVACIONES DE LA TEORIA DE HAMILTON-JACOBI:

Consideremos (t_0, x_0) y (t_1, x_1) fijos en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.

Sin perdida de generalidad podemos asumir que $t_0 < t_1$

Definamos :

1) $D^1[t_0, x_0]$ como el conjunto de todas las funciones continuas $x : [t_0, x_0] \mapsto \mathbb{R}^n$ cuya derivada $\dfrac{dx(t)}{dt}$ existe y es continua en $[t_0, x_0]$ excepto en un conjunto finito de puntos.

2) $\mathcal{X} = \{ x \in D^1[t_0, x_0] \ / \ x(t_0) = x_0 \ \ x(t_1) = x_1 \}$

Ademas consideraremos $L : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ una función al menos de clase C^2, es decir $L \in C^k$ para $k \geq 2$.

Luego el siguiente programa matematico P :

$$P : \min \{ \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt})dt \ / \ x \in \mathcal{X} \}$$

es llamado el problema simple del calculo variacional.

Si definimos:

$$u : [t_0, x_0] \mapsto \mathbb{R}^n \quad \text{tal que:} \quad \frac{dx(t)}{dt} = u(t)$$

Entonces podemos formular este problema como un problema de control de Lagrange, donde las ecuaciones a considerar son:

$$
\begin{cases}
\min \left\{ \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt \right\} \\
\text{sujeto a:} \quad \dfrac{dx(t)}{dt} = u(t) \\
\qquad\qquad x(t_0) = x_0
\end{cases}
$$

dondo el conjunto terminal es $M = \{ (t_1,x_1) \}$

Establescamos las siguientes hipotesis:

1) $(t_0,x_0) \in int(Q) \neq \emptyset$

2) Existe $u^* : [t_0,t^*] \mapsto \mathbb{R}^n$ un control optimo

3) V es diferenciable en Q

Entonces V es solucion de la ecuacion de Hamilton-Jacobi-bellman, es decir que para valores de $t \in [t_0,t^*]$ para los cuales $V(t,x^*(t))$ es diferenciable, se tiene que u^* es solución de:

$$\frac{\partial V}{\partial y}(t,x^*(t)) + \min \left\{ H(t,x^*(t), \frac{\partial V}{\partial y}(t,x^*(t)), v) \;/\; v \in \mathbb{R}^n \right\} = 0$$

donde $H(t,x,p,v) = p^T v + L(t,x,v)$.

luego para hallar el minimo de :

$$H(t,x^*(t), \frac{\partial V}{\partial y}(t,x^*(t)), v)$$

procedemos mediante las reglas de calculo elemental, es decir:

1) Calcular $\dfrac{\partial H}{\partial v}$ e igualar al vector nulo.

2) Calcular $\dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2}$ y verificar que sea definida positiva en

los u tal que $\left.\dfrac{\partial H}{\partial v}\right|_{u=v} = 0$

Realizando 1)

$$\frac{\partial H}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial y} V(t,x^*(t)) + \frac{\partial}{\partial v} L(t,x^*(t),v) = 0$$

pero como:

1) $u^*(t)$ es un control optimo

2) $$V(t,x^*(t)) = \int_t^{t^*} L(s,x^*(s),u^*(s))ds$$

esto implica que:

$$\frac{\partial}{\partial v} L(t,x^*(t),u^*(t)) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_t^{t^*} L(s,x^*(s),u^*(s))ds \right)$$

pero por el calculo elemental sabemos que :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_t^{t^*} L(s,x^*(s),u^*(s))ds \right) = \int_t^{t^*} \left(\frac{\partial}{\partial y} L(s,x^*(s),u^*(s))\right)ds$$

esto implica que:

$$\frac{\partial}{\partial v} L(t,x^*(t),u^*(t)) + \int_t^{t^*} \left(\frac{\partial}{\partial y} L(s,x^*(s),u^*(s))\right)ds = 0 \quad ..(1)$$

luego derivando (1) con respecto de t :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial v} L(t,x^*(t),u^*(t)) \right) - \frac{\partial}{\partial y} L(s,x^*(s),u^*(s)))ds = 0$$

y como: $\dfrac{dx^*(t)}{dt} = u^*(t)$,

se concluye que :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial v} L(t,x^*(t),\frac{dx^*(t)}{dt})\right) = \frac{\partial}{\partial y} L(s,x^*(s),\frac{dx^*(t)}{dt})ds \quad ..(2)$$

La cual es llamada la ecuación de Euler-Lagrange

Realizando 2)

$$\frac{\partial^2 H}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial V(t,x^*(t))}{\partial y} + \frac{\partial L(t,x^*(t),v)}{\partial v}\right)$$

lo cual implica que :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 L(t,x^*(t),v)}{\partial v^2}$$

Esto significa que debemos asumir que:

$$\frac{\partial^2 L(t,x^*(t),v)}{\partial v^2}$$

sea definida positiva.

Con estas observaciones queda establecido que la teoria clasica de Hamilton-Jacobi esta comprendida en la teoria de la programación dinamica continua.

CONTROLES DE REALIMENTACION:

El concepto de realimentación es muy importante porque tecnicamnte son mas faciles de realizar y permiten responder inmediatamente a la perturbacion del sistema en consideración.

Formalmente se define un control de realimentación como una funcion de la forma $u = u(t,x)$ definido sobre un conjunto Q de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ sobre U tal que para cada $(s,y) \in Q$ existe una unica solución $x(t) = x(t;s,y,u)$ de la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt} x(t) = F(t,x(t),u(t,x(t)))$$

sobre un intervalo $[s,t_1]$ sobre el cual esta definido el control tal que $(t,x(t)) \in Q$ para $s \in [s,t_1]$ y $(t_1,x(t_1)) \in \dot{M}$

Observe que con esta definición $Q \subset \mathbb{Q}$.

CAPITULO 4

EL PROBLEMA DEL REGULADOR LINEAL

INTRODUCCION :

Muchos problemas de la ingenieria electrica y electronica, de la ingenieria mecanica, del campo del control de procesos industriales, de la economia, etc. conducen al problema de control optimo llamado el problema del regulador lineal.

En esta parte trataremos de resolver dos casos particulares del problema del regulador lineal utilizando la tecnica de la la programacion dinamica continua desarrollada anteriormente.

FORMULACION DEL PROBLEMA:

En esta parte consideraremos:

1) Sistema de Control diferencial lineal, es decir que las ecuaciones a considerar son:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

donde $A(t) \in M_{(n,n)}$, $B(t) \in M_{(n,m)}$; son funciones matriciales continuas en $[0,T]$, siendo T una constante dada y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fijo.

2) Funciones objetivos del tipo cuadratico de la forma:

$$J(0,x_0;u) = \int_0^T [x(t)^T M(t)x(t) + u(t)^T N(t)u(t)]dt + x(T)^T D x(T)$$

donde $M(t) \in M_{(n,n)}$, $N(t) \in M_{(m,m)}$; son tambien funciones matriciales continuas y definidas no-negativas.

Sin perdida de generalidad, podemos considerar que M(t), N(t) y D son simétricas, puesto que:

Para $\forall\ y \in \mathbb{R}^n$, $\forall\ R \in M_{(n,n)}$: $y^T R y = y^T (\frac{R + R^T}{2}) y$

Si suponemos que la funcion valor para este problema es diferenciable en $(s,y) \in \mathbb{R}^{n+1}$, entonces la ecuacion de Hamilton-jacobi-Bellman sera:

$$\frac{\partial V}{\partial s}(s,y) + \min \{H(s,y,\frac{\partial V}{\partial y}(s,y),v) \ / \ v \in \mathbb{R}^m\} = 0$$

donde:

$$H(s,y,\frac{\partial V}{\partial y}(s,y),v)=\left[\frac{\partial V}{\partial y}(s,y)\right]^T [\ A(s)y+B(s)v] +y^T M(s)y+v^T N(s)v$$

Sea $\varphi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ tal que: $\varphi(v) = H(s,y,\frac{\partial V}{\partial y}(s,y),v)$

Luego, una condicion necesaria y suficiente para que φ tenga un minimo es que φ sea extrictamente convexa. Es decir que : $\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} = 2N(s)$ sea definida positiva.

Por consiguiente de ahora en adelante consideraremos a la matriz N(s) definida positiva para todo $s \in [0,T]$.

Consideremos el siguiente problema de control optimo llamado el problema elemental del regulador lineal.

$$\begin{cases} \min \{\int_0^T [x(t)^T M(t)x(t)+ u(t)^T N(t)u(t)]dt + x(T)^T Dx(T)\} \\ \text{sujeto a: } \quad \frac{dx}{t} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ \qquad\qquad\quad x(0) = x_o \end{cases}$$

donde, A(t), B(t), M(t), N(t), D, T, x_o, son definidas como antes y ademas solicitamos que N(t) sea definida positiva.

OBS:

Al tiempo T, se le llamará horizonte.

$\mathcal{F}_{(t,x_0)} = \{ u : [t,T] \mapsto \mathbb{R}^r \ / \ u$ es seccionalmente continua $\}$

para todo $t \in [0,T]$.

EL PROBLEMA DEL REGULADOR LINEAL CON HORIZONTE FINITO:

En esta parte consideraremos el problema del regulador lineal con horizonte finito es decir, que $T \in \langle 0,\infty\rangle$ fijo.

Lo que se desea en este problema es hallar $u^*: [0,T] \mapsto \mathbb{R}^m$ que pertenezca a $\mathcal{F}_{(0,x_0)}$, tal que minimice a la funcion objetivo $J(0,x_0;u)$, donde:

$$J(0,x_0;u)= \int_0^T [x(t)^T M(t)x(t)+ \quad u(t)^T N(t)u(t)]dt \quad + \quad x(T)^T Dx(T)$$

Los siguientes resultados son para demostrar que este problema tiene una unica solucion y calcularemos esta solucion, utilizando la tecnica de programacion dinamica desarrollada anteriormente.

LEMA:

Sea $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$ cualquiera.

Si la funcion valor para el problema anterior es diferenciable entonces se cumple que $V(t,x)$ es una forma cuadratica en x.

DEMOSTRACION:

Del analisis se tiene que:

$V(t,x)$ es una forma cuadratica si y solo si las siguientes propiedades se cumplen:

$V(t,\lambda x) = \lambda^2 V(t,x)$ para $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ ....(1)

$V(t,x_1) + V(t,x_2) = \frac{1}{2}\,[\,V(t,x_1+ x_2) + V(t,x_1 - x_2)]$ ....(2)

veamos que (1) se cumple:

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ cualquiera y $u \in \mathcal{F}_{(t,x)}$ cualquiera, cuya trayectoria es $x(s) = x(s;t,x,u)$.

$$\Rightarrow \frac{d\lambda x(s)}{ds} = \lambda\frac{dx(s)}{ds} = A(s)(\lambda x(s)) + B(s)(\lambda u(s))$$

y como $x(t) = x \quad \Rightarrow \quad \lambda x(t) = \lambda x$

es decir que $\lambda u \in \mathcal{F}_{(t,\lambda x)}$, cuya trayectoria asociada $\lambda x(s)$, donde $x(s) = x(s;t,x,u)$

Por otro lado:

$$J(t,\lambda x;\lambda u)=\int_t^T [\lambda x(s)^T M(s)\lambda x(s)+\lambda u(s)^T N(s)\lambda u(s)]ds+\lambda x(T)^T D\lambda x(T)$$

$$= \lambda^2 \int_t^T [x(s)^T M(s)x(s) + u(s)^T N(s)u(s)]ds + \lambda^2 x(T)^T Dx(T)$$

$$= \lambda^2 J(t,x;u) \quad ....(3)$$

Si $\lambda=0$

Entonces (1) se cumple

Si $\lambda \neq 0$

Por definicion de V y por (3) se cumple que :

$V(t,\lambda x) \le J(t,\lambda x;\lambda u) = \lambda^2 J(t,x;u) \qquad \forall\ u \in \mathcal{F}_{(t,x)}$ ...(4)

hallando el infimo en (4):

$V(t,\lambda x) \le \lambda^2 V(t,x)$ ....(5)

como $\lambda \neq 0$ esto implica que $\lambda^{-1} \neq 0$

$V(t,x) \le V(t,\lambda^{-1}(\lambda x)) \le (\lambda^{-1})^2 V(t,\lambda x)$

multiplicando por λ^2:

$\lambda^2 V(t,x) \le V(t,\lambda x)$ ....(6)

luego de (5) y (6) :

$V(t,\lambda x) = \lambda^2 V(t,x)$

demostrando asi (1).

2) Sean: (t,x_1) y (t,x_2) en $[0,T]x\mathbb{R}^n$ cualesquiera,

y $u_1 \in \mathcal{F}_{(t,x_1)}$ y $u_2 \in \mathcal{F}_{(t,x_2)}$ tambien cualesquiera

Ademas: $x_1(s) = x(s;t,x_1,u_1)$ y $x_2(s) = x(s;t,x_2,u_2)$

Considerando que, para $\forall$ x,y $\in \mathbb{R}^n$ y $\forall$ R $\in M_{(n,n)}$

$$\frac{1}{2} [(x+y)^T R(x+y) + (x-y)^T R(x-y)] = x^T Rx + y^T Ry$$

entonces:

$$J(t,x_1;u_1) + J(t,x_2;u_2) = \frac{1}{2} [J(t,x_1 + x_2;u_1 + u_2) + J(t,x_1 - x_2;u_1 - u_2)] \quad ....(7)$$

ademas:

$$\frac{d}{dt}(x_1(t) \pm x_2(t)) = \frac{d}{ds}x_1(t) \pm \frac{d}{ds}x_2(t) = A(t)(x_1(t) \pm x_2(t)) + B(t)(u_1(t) \pm u_2(t))$$

Entonces : $(u_1 \pm u_2) \in \mathcal{F}_{(t,x_1 \pm x_2)}$ cuya trayectoria es $(x_1 \pm x_2)(t)$ donde $x_1(s) = x(s;t,x_1,u_1)$ y $x_2(s) = x(s;t,x_2,u_2)$

luego de (7) se obtiene que.

$$\frac{1}{2} [V(t,x_1 + x_2) + V(t,x_1 - x_2)] \leq J(t,x_1;u_1) + J(t,x_2;u_2)$$

$$\forall\ u_1 \in \mathcal{F}_{(t,x_1)},\ \forall\ u_2 \in \mathcal{F}_{(t,x_2)}$$

$$\frac{1}{2}[V(t,x_1 + x_2) + V(t,x_1 - x_2)] \leq V(t,x_1) + V(t,x_2) \quad ....(8)$$

Pero: $V(t,x_1) + V(t,x_2) = [V(t,\frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)) + V(t,\frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \frac{1}{2}(x_1 - x_2)]$

Entonces:

$$V(t,x_1) + V(t,x_2) \leq 2[V(t,\tfrac{1}{2}(x_1+x_2)) + V(t,\tfrac{1}{2}(x_1-x_2)] \quad ....(9)$$

aplicando la parte (1) al miembro derecho de (9):

$$V(t,x_1) + V(t,x_2) \leq \frac{1}{2} [V(t,(x_1+x_2)) + V(t,(x_1-x_2))] \quad ...(10)$$

luego de (8) y (10) se obtiene que:

$$V(t,x_1) + V(t,x_2) = \frac{1}{2} [V(t,(x_1 + x_2)) + V(t,(x_1 - x_2)]$$

quedando demostrado asi que V(t,x) es una forma cuadrática.

Ahora consideraremos la siguiente hipotesis:

Hipotesis: La funcion del valor tiene la forma: $V(s,y) = y^T Q(s) y$ donde Q es una matriz simetrica de clase C^1 tal que $Q(T)=D$.

Para que $V(s,y)=y^T Q(s)y$ satisfaga la ecuación de Hamilton-jacobi-Bellman, se debe cumplir que:

$$\frac{\partial V}{\partial s}(s,y) + \min\{ H(s,y,\frac{\partial V}{\partial y}(s,y),v) / \ v \in \mathbb{R}^m \} = 0$$

donde $H(s,y,\frac{\partial V}{\partial y}(s,y),v) = \left[\frac{\partial V}{\partial y}(s,y)\right]^T [A(s)y+B(s)v] + y^T M(s)y$

$v^T N(s)v$

Como en la pagina 60, consideremos :

$$\varphi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R} \text{ tal que } \varphi(v) = H(s,y,\frac{\partial V}{\partial y}(s,y),v)$$

Entonces φ es extrictamente convexa.

Por consiguiente una condición necesaria y suficiente para que u minimice a φ en $\mathbb{R}^m$ es que:

$$\nabla \varphi(u) = \frac{\partial}{\partial v} \{H(s,y,\frac{\partial V}{\partial y}(s,y),u\} = B(s)^T \frac{\partial V}{\partial y}(s,y) + 2N(s)u = 0$$

de donde:

$$u = -\frac{1}{2} N(s)^{-1} B(s)^T \frac{\partial V}{\partial y}(s,y) \qquad ....(11)$$

Pero: $V(s,y) = y^T Q(s)y \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y}(s,y) = 2\, Q(s)y \qquad ....(12)$

reemplazando (12) en (11) : $u = -N(s)^{-1} B(s)^T Q(s)y$

entonces el control óptimo bajo las hipótesis anteriores sería:

$$u^*(t) = -\frac{1}{2} N(t)^{-1} B(t)^T q(t) x^*(t) \qquad ....(13)$$

donde x^* es la trayectoria optima asociada.

Luego: sustituyendo (13) en la ecuacion diferencial parcial de la programación dinámica, tendremos:

$$\frac{\partial V}{\partial s}(t,x^*(t)) = \frac{\partial V}{\partial y}(t,x^*(t))^T[\, A(t)x^*(t) + B(t)u^*(t)] +$$

$$x^*(t)^T M(t)x^*(t) + u^*(t)^T N(t)u^*(t) = 0 \qquad \text{....(14)}$$

Pero: $\quad V(t,x^*(t)) = x^*(t)^T Q(t)x^*(t) \qquad$ y

$$u^*(t) = -N(t)^{-1}B(t)^T Q(t)x^*(t)$$

$\Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial s}(t,x^*(t)) = x^*(t)^T \frac{d}{dt}Q(t)x^*(t) \qquad$ y

$$\frac{\partial V}{\partial y}(t,x^*(t)) = 2Q(t)x^*(t) \qquad \text{....(15)}$$

reemplazando (15) en (14) :

$$x^*(t)^T[\,\frac{d}{dt}Q(t)]\,x^*(t) + x^*(t)^T[\; Q(t)A(t) - A(t)^T Q(t)\;]\,x^*(t) -$$

$$x^*(t)^T[\,2Q(t)B(t)N(t)^{-1}B(t)^T Q(t)]\,x^*(t) \quad + \quad x^*(t)^T M(t)x^*(t) \quad +$$

$$x^*(t)^T Q(t)B(t)(N(t)^{-1})N(t)(N^{-1}(t))B(t)^T Q(t)x^* = 0 \qquad \text{...(16)}$$

Una condicion suficiente para que se cumpla (16) es:

$$\frac{d}{dt}Q(t) + Q(t)A(t) + A(t)^T Q(t) - 2Q(t)B(t)N(t)^{-1}B(t)^T Q(t) +$$

$$M(t) + Q(t)B(t)N(t)^{-1}B(t)^T Q(t) = 0$$

Es decir:

$$\frac{d}{dt}Q(t) = Q(t)B(t)N(t)^{-1}B(t)^T Q(t) - Q(t)A(t) - A(t)^T Q(t) - M(t) \qquad (16)$$

Por otro lado sabemos que : $\quad V(T,x^*(T)) = J(T,x^*(T);u^*)$

Pero : $V(T,x^*(T)) = x^*(T)^T Q(T)x^*(T)$

Y ademas : $J(T,x^*(T);u^*) = x^*(T)^T Dx^*(T)$

Entonces : $V(T,x^*(T)) - J(T,x^*(T);u^*) = x^*(T)^T[\,Q(T) - d]\,x^*(T)$

Luego una condicion suficiente para que la ecuacion anterior se cumpla es que: $\quad Q(T) = D \quad$ ....(17)

Por consiguiente supondremos que (17) sera la condicion de frontera para la ecuacion diferencial matricial (16).

OBS: A la ecuacion (16) se le conoce como la ecuacion matricial de Ricatti.

luego utilizando el teorema (3), podemos resumir el analisis en el siguiente teorema:

TEOREMA:

Si existe una solucion $Q(s)$ de clase C^1 de la ecuacion matrici de Ricatti (16), con la condicion de frontera (17) definida $[0,T]$ entonces:

$$W(s,y) = y^T Q(s) y$$

es una solucion de clase C^1 de la ecuacion diferencial parcial de la programacion dinamica y

$$u^*(t) = -N(t)^{-1} B(t)^T Q(t) x^*(t)$$

es el unico control óptimo en $\mathcal{S}_{(0,x_0)}$, donde x^* es la trayectoria optima asociada a $(0,x_0,u^*)$.

Finalmente se cumple que $W(s,y)=V(s,y)$ $\forall$ $s \in [0,T]$,$\forall$ $y \in \mathbb{R}^n$

Ahora solo falta encontrar condiciones que nos garanticen que la ecuacion de Ricatti (16) con la condicion de frontera (17) tiene una solucion de clase C^1.

TEOREMA:

Sea $D \in M_{(n,n)}$, $M(s) \in M_{(n,n)}$, matrices definidas no negativas y $N(s) \in M_{(m,m)}$ definida positiva para $\forall$ $s \in [0,T]$.

Entonces la ecuación de Ricatti tiene una solucion definida en $\langle -\infty,T]$.

OSB: El teorema anterior es un resultado obtenido dentro de la teoria de las ecuaciones diferenciales, y el tema de esta esta tesis no es precisamente esto, es por esta razon que omitimos su demostración, la cual la pueden encontrar en [ ].

Ahora establescamos un algoritmo de solucion para este problema, para ello consideremos una partición del intervalo $[0,T]$ de la siguiente forma:

$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{l-1} < t_l = T$ donde $t_i - t_{i-1} = (T/l)$ para todo $i = 1,2,\ldots,l-1,l$.

UN ALGORITMO DE SOLUCION

1) Inicio:

1.1) $Q^0 = D$

1.2) $\varepsilon = T/l$

2) Iteraciones descendentes:

2.1) Para $k = l-1$ hasta $k = 0$ hacer:

2.1.1) $P^k(t) = -N(t)^{-1}B(t)^T Q^{l-(k+1)}(t)$

2.1.2) Hallar $Q^{l-k}(t)$ como solución de la ecuacion de Ricatti (16) y condicion de frontera siguiente: $Q(t_{k+1}) = Q^{l-(k+1)}(t_{k+1})$.

3) Iteraciones ascendentes:

3.1) $x^0 = x_0$

3.2) Para $k = 1$ hasta $k = l$ hacer:

3.2.1) $u^{k-1}(t) = P^{k-1}(t)x^{k-1}(t)$

3.2.2) Hallar x^k como solucion de

$$\frac{dx(t)}{dt} = [\,A(t)-B(t)N(t)^{-1}B(t)^T Q(t)]\,x(t)$$

$$x(t_{k-1}) = x^{k-1}(t_{k-1})$$

EL PROBLEMA DEL REGULADOR CON HORIZONTE INFINITO:

En esta sección consideraremos un caso particular del problema elemental del Regulador Lineal, para el cual se asumirá que:

*) El sistema es totalmente controlable (en el mismo sentido de la interpretación de la controlabilidad del capítulo 1).

*) El horizonte $T = \infty$

*) La matriz D es nula

Por lo tanto las ecuaciones a considerar serán:

$$\begin{cases} \min \left\{ \int_0^{\infty} [x(t)^T M(t)x(t) + u(t)^T N(t)u(t)]dt \right\} \\ \text{sujeto a: } \quad \dfrac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ \qquad\qquad\quad x(0) = x_o \end{cases}$$

OBSERVACIONES:

Para resolver el problema, consideraremos los resultados obtenidos del problema del Regulador Lineal con tiempo finito.

Sean: $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $t_1 \in \mathbb{R}$ cualesquiera talque $t < t_1$.

Denotemos mediante $P(t,t_1)$ a la solución de la ecuación de Ricatti siguiente:

$$\frac{dP}{dt} = PB(t)N(t)^{-1}B(t)^TP - M(t) - PA(t) - A(t)^TP$$

con condiciones de frontera: $P(t_1,t_1) = 0$

AFIRMACION 1: El limite siguiente existe para todo $t \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{t_1 \to +\infty} P(t,t_1)$$

En efecto:

Como el sistema es totalmente controlable entonces para cada (t,x), existe un control $\bar{u}$ y un $t_2 \in \mathbb{R}$ con $t_2 > t$ tal que la trayectoria $x(s) = x(s;t,x,u)$ satisface : $x(t_2) = 0$.

Ahora definamos:

$$\hat{u}(s) = \begin{cases} \bar{u}(s) & , \text{ si } s \in [t,t_2] \\ 0 & , \text{ si } s \in [t_2,\infty) \end{cases}$$

Denotemos tambien mediante $V(t,x;t_1)$ a la funcion valor del problema de control siguiente:

$$\begin{cases} \min \left\{ \int_t^{t_1} [x(s)^T M(s)x(s) + u(s)^T N(s)u(s)] ds \right\} \\ \text{sujeto a:} \quad \frac{dx}{ds}(s) = A(s)x(s) + B(s)u(s) \\ \qquad\qquad\quad x(t) = x \end{cases}$$

donde (t,x) y t_1 son fijos y $x(t_1)$ es libre.

<u>OBSERVACION:</u> Denotemos por $\mathcal{U}_{(t,x,t_1)}$ al conjunto controles admisibles.

Como este problema es un problema del regulador lineal con horizonte finito, entonces se tiene que:

*) $V(t,x;t_1) = x^T P(t;t_1)x$

*) $P(t;t_1)$ es solución de la ecuacion matricial de Ricatti (16) con condición de frontera $P(t_1,t_1) = 0$

*) El control optimo al cual denotamos por $u^*(t;t_1)$ es tal que: $u^*(t;t_1) = -N(t)^{-1}B(t)^T P(t;t_1)x^*(t)$, donde $x^*(t)$ es la trayectoria optima.

luego: $x^T P(t;t_1)x = V(t,x;t_1)$

$$\leq \int_t^{t_1} [\hat{x}(s)^T M(s)\hat{x}(s) + \hat{u}(s)^T N(s)\hat{u}(s)] ds$$

$$< \int_{t}^{\infty} [\hat{x}(s)^T M(s)\hat{x}(s) + \hat{u}(s)^T N(s)\hat{u}(s)]\, ds \quad \ldots(1)$$

Pero como $\hat{u} = \bar{u}$ en $[t_1, t_2]$ y se tienen las mismas condiciones iniciales entonces por la propiedad de causalidad $\hat{x}(s) = \bar{x}(s)$ en $[t_1, t_2]$ donde $\hat{x}(s) = x(s;t,x,\hat{u})$ y $\bar{x}(s) = x(s;t,x,\bar{u})$.

Ademas se sabe que $\hat{x}(s)$ para $s \geq t_2$ es solucion del problema de Cauchy siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) = A(t)x(t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{pues } u \equiv 0 \text{ en } [t_2, \infty)) \\ x(t_2) = 0 \end{cases}$$

entonces $\hat{x} = 0$ en $[t_2, \infty)$

$$\int_{t_2}^{\infty} [\hat{x}(s)^T M(s)\hat{x}(s) + \hat{u}(s)^T N(s)\hat{u}(s)] ds = 0 \qquad \ldots(2)$$

luego considerando (2) en (1)

$$x^T P(t;t_1)x < \int_{t}^{t_2} [\bar{x}(s)^T M(s)\bar{x}(s) + \bar{u}(s)^T N(s)\bar{u}(s)]\, ds = cte \quad ..(3)$$

y como t_1 es cualquiera, esto quiere decir que $P(t;t_1)$ acotada por una constante real cte independientemente de t_1

Sean: t_1, t_1', t cualesquiera tal que $t < t_1 \leq t_1'$ y $x \in \mathbb{R}^n$

entonces:

$$\int_{t}^{t_1} [x(s)^T M(s)x(s) + u(s)^T N(s)u(s)]\, ds \leq \int_{t}^{t_1'} [x(s)^T M(s)x(s) + u(s)^T N(s)u(s)]\, ds$$

para todo $u : [t, t_1'] \to U$ que pertenece a $\mathcal{S}_{(t,x,t_1')}$

<u>OBSERVACION:</u> Si $u \in \mathcal{S}_{(t,x,t_1')}$ esto implica que u restringido a $[t, t_1]$ pertenece a $\mathcal{S}_{(t,x,t_1)}$.

$$\Rightarrow \quad V(t,x_1,t_1) \leq \int_{t}^{t_1} [x(s)^T M(s)x(s) + u(s)^T N(s)u(s)]\, ds$$

$$\Rightarrow \qquad V(t,x_1,t_1) \leq V(t,x_1,t_1') \qquad ....(4)$$

Si utilizamos el hecho de que toda sucesion creciente y acotada superiormente es convergente, entonces de (3) y (4) concluimos que $\lim_{t_1 \mapsto +\infty} P(t;t_1)$ existe.

Denotemos: $\bar{P}(t) = \lim_{t_1 \mapsto +\infty} P(t;t_1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$

AFIRMACION 2: $\bar{P}(t)$ satisface la ecuacion matricial de Ricatti (16).

En efecto:

Denotemos por $P(t,t_1,A)$ a la solucion de la ecuacion de Ricatti (16) , con condiciones de frontera $P(t_1) = A$.

Observe que : $P(t,t_1) = P(t,t_1,0)$

consideremos $t<t_1<t_1'$

se tiene que: $P(t,t_1',0) = P(t,t_1,P(t_1,t_1',0))$

Para t_1 fijo, la solución $P(t,t_1,A)$ depende continuamente de A, entonces:

$$\bar{P}(t) = \lim_{t_1' \mapsto +\infty} P(t;t_1') = \lim_{t_1' \mapsto +\infty} P(t,t_1,P(t_1,t_1',0))$$

$$= P(t,t_1,\lim_{t_1' \mapsto +\infty} P(t_1,t_1')) = P(t,t_1,\bar{P}(t_1))$$

con esto queda probaremos que $\bar{P}(t)$ es solucion de la ecuacion de Ricatti (16).

Y finalmente aplicando los dos ultimos teoremas se concluye que:

*) $u^*(t) = -N(t)^{-1}B(t)\bar{P}(t)x^*(t)$ es control óptimo donde $x^*(t)$ es la trayectoria optima asociada.

OTROS PROBLEMAS:

Existen otros problemas que generalizan al problema del regulador lineal, entre estos tenemos :

*)EL REGULADOR: Para este caso el sistema tiene estado inicial no nulo y se desea calcular un control $u \in \mathcal{F}_{(0,x_0)}$, tal que la trayectoria $x(t) = x(t;0,x_0,u)$ sea tal que $x(T)=0$.

*)EL SEGUIMIENTO: Para este problema consideraremos que el sistema tiene una trayectoria ideal y lo que se desea es minimizar la desviación (en una norma establecida) entre la trayectoria ideal y las trayectorias posibles del sistema.

BILIOGRAFIA

*) INTRODUCTORY OPTIMIZATION DYNAMICS

PIERE N.V. TU

SPRINGER VERLAG, LONDON 1984

*) APPLIED OPTIMAL CONTROL

ARTHUR E. BRYSON JR.

HEMISPHERE PUBLISHING CORPORATION, NEW YORK 1975

*) LINEAR OPTIMAL CONTROL

BRIAN D.O. ANDERSON AND JOHN MOORE

PRENTICE HALL INC., NEW JERSEY 1971

*) OPTIMIZATION THEORY AND APPLICATIONS

LAMBERTO CESARY

SPRINGER VERLAG, NEW YORK 1983

DETERMINISTIC AND STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL

FLEMING W. H.

SPRINGER VERLAG, NEW YORK 1975

*) FOUNDATION OF OPTIMAL CONTROL THEORY

E.B. LEE AND L. MARKUS

JOHN WILEY, NEW YORK 1967

*) THE CALCULUS OF VARIATION AND OPTIMAL CONTROL

GEORGE LEITMANN

PLENUM PRESS, NEW YORK 1981

*) MULTIVARIABLE AND OPTIMAL SYSTEMS

D. H. OWENS

ACADEMIC PRESS, LONDON 1981

*) ALGORITMOS PARA RESOLVER EL PROBLEMA DEL REGULADOR LINEAL.

EUGEN BLUM R.

ARTICULO PUBLICADO EN EL IV COLOQUIO ORGANIZADO POR LA SOCIEDAD MATEMATICA PERUANA, AREQUIPA (PERU) 1986.

*) NOTES ON CONTROL THEORY

WILFREDO SOSA S.

POSTER PUBLISHED IN THE SECOND WORKSHOP ON MATHEMATICS IN INDUSTRY ORGANIZED BY INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS, TRIESTE (ITALY) 1987.

*) TEORIA DE CONTROL

ONESIMO HERNANDEZ LERMA

ARTICULO PUBLICADO EN EL III COLOQUIO DE MATEMATICAS, ORGANIZADO POR EL CENTRO DE INVESTIGACION ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO NACIONAL DE MEXICO "LA TRINIDAD" TIAXCALA (MEXICO) 1983.