UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS

“UN INDICADOR DE COMPLEJIDAD EN SISTEMAS DINÁMICOS”

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE DOCTOR EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA

ELABORADA POR:

HELMUTH VILLAVICENCIO FERNÁNDEZ

ASESOR:

Dr. ROGER JAVIER METZGER ALVÁN

Co-ASESOR:

Dr. CARLOS ARNOLDO MORALES ROJAS

LIMA – PERÚ

2018

Agradecimientos

Durante estos años son muchas las personas e instituciones que han contribuido en el desarrollo de este trabajo y a quienes quiero expresar mi gratitud por el apoyo y la confianza que me han prestado de forma desinteresada.

En primer lugar quiero agradecer a la Facultad de Ciencias de la Universidad de Nacional de ingeniería y al Instituto de Matemática y Ciencias Afines por su acogida y el apoyo recibido durante los largos y fructíferos periódos en los que he desarrollado mi labor investigadora.

Debo un especial reconocimiento al FONDECYT por la confianza que mostraron en mí al concederme una beca gracias al convenio CG 217-2014 con la cual fue posible aventurame en esta travesía.

También me complace agradecer la acogida, el apoyo y los medios recibidos en los distintos centros donde he desarrollado parte de mi investigación; el Instituto de Matemática Pura y Aplicada, el Centro de Modelamiento Matemático y el Departamento de Matemática de la Universidad Nacional de Colombia.

No puedo olvidar a mis compañeros y amigos con los cuales he compartido grandes momentos e incontables horas de trabajo. Gracias a todos. De entre ellos, quiero destacar a Manuel, Jack, Alberto, Jesús, Argenis, Aldo y Andrés.

Un sincero agradecimiento al profesor Félix Escalante y a mis asesores de tesis, Dr. Roger Metzger y Dr. Carlos Morales, por todo el tiempo que me han dado, por sus sugerencias e ideas de las que tanto provecho he sacado, por su respaldo y paciencia para conmigo.

Todo esto nunca hubiera sido posible sin el amparo de mi familia, mis padres, mis hermanos y sin el apoyo incondicional de mi compañera y pareja, Bertha. Este es también un logro de ustedes.

UN INDICADOR DE COMPLEJIDAD EN SISTEMAS DINÁMICOS

RESUMEN

Inicialmente, consideramos la noción de medida $\mathcal{F}$-expansiva para flujos (donde $\mathcal{F}$ es un subconjunto del conjunto de reparametrizaciones $\mathcal{H}$) generalizando la definida por Carrasco y Morales en [17]. A su vez, analizamos el comportamiento topológico del conjunto de medidas $\mathcal{F}$-expansivas obteniendo condiciones suficientes para que este sea un conjunto $G_{\delta\sigma}$. Seguidamente, introducimos el concepto de punto $\mathcal{F}$-sombreable para flujos y probamos que esta noción satisface propiedades que extienden las dadas en [30]. Además, mejoramos la clasificación topológica del conjunto de puntos sombreables, dada por Kawaguchi en [20], al probar que este es un subconjunto G_δ. También, probamos que el atractor geométrico de Lorenz, cuyo mapeo de retorno f satisfaga $f(0) \neq 0$ ó $f(1) \neq 1$, no admite puntos $\mathcal{F}$-sombreables.

Finalmente, definimos la noción de complejidad para flujos que actuará como un indicador de complejidad más fino que la entropía topológica, siempre que existan medidas positivamente $\mathcal{F}$-expansivas (extendiendo los resultados de [29]). Este indicador depende tan solo del tiempo-uno del flujo, es invariante por conjugaciones y suspensiones. Adicionalmente, obtenemos un estimado de las órbitas periódicas de un sistema expansivo cuyos puntos $\mathcal{F}$-sombreables contienen al conjunto no errante y admite complejidad.

AN INDICATOR OF COMPLEXITY IN DYNAMICAL SYSTEMS

ABSTRACT

Initially, we consider the notion of $\mathcal{F}$-expansive measure for flows (where $\mathcal{F}$ is a subset of the set of reparametrizations $\mathcal{H}$) generalizing the one defined by Carrasco and Morales in [17]. In addition, we analyze the topological behavior of the set of $\mathcal{F}$-expansive measures obtaining sufficient conditions for these to be a $G_{\delta\sigma}$ set. Next, we introduce the concept of $\mathcal{F}$-shadowable point for flows and we prove that this notion satisfies properties that extend those given in [30]. Moreover, we improved the topological classification of the set of shadowable points, given by Kawaguchi in [20], by proving that this one is a G_δ set. Also, we proved that the geometric Lorenz attractor, whose return mapping f satisfies $f(0) \neq 0$ ó $f(1) \neq 1$, does not have $\mathcal{F}$-shadowable points.

Finally, we define the notion of dynamical complexity for flows that will act as an indicator of complexity rather than the topological entropy whenever there are positive measures $\mathcal{F}$-expansive (extending the result of [29]). This indicator depends only on the time-one of the flow, it is invariant by conjugations and suspensions. In addition, we obtain an estimate of the periodic orbits of an expansive system whose $\mathcal{F}$-shadowable points contain the non-wandering set and admit complexity.

Contenido

Introducción

Esta Tesis Doctoral se enmarca dentro del área de Sistemas Dinámicos, y recoge nuestras aportaciones en el estudio de la complejidad del comportamiento de las órbitas en sistemas continuos. Su importancia es tanto teórica como aplicada por su estrecha relación con la inestabilidad y la Teoría del Caos.

En sistemas dinámicos, la noción de complejidad admite muchas variantes; pudiéndose consultar, por ejemplo, las referencias [1–3, 12, 19]. Nosotros abordaremos la complejidad de funciones, debido a su estrecha relación con las nociones de entropía topológica y expansividad. En sistemas discretos, por ejemplo, esta última fue introducida por Utz en [40] y subsecuentemente extendida por Bowen y Walters en [14] para sistemas continuos haciendo uso en su definición del conjunto de reparametrizaciones $\mathcal{H} = \{h \in C(\mathbb{R}) : h(0) = 0\}$. Por otro lado, la noción de entropía topológica tiene una relación cuantitativa con la complejidad, puesto que entropía positiva es un buen indicador de la caoticidad de un sistema. Sin embargo, sistemas con entropía nula requieren otros métodos para detectar su complejidad. Cabe destacar que sistemas que satisfacen la propiedad de sombreamiento para pseudo órbitas, POTP, tienen relación con la entropía topológica (ver [27]).

En [3], Afraimovich y Glebsky introducen la noción de (δ, n)-*complejidad*, la que denotaremos por $\mathcal{E}(\delta, m, f)$, en función de la cardinalidad de los conjuntos (δ, n)-*separados* inducidos por un mapeo continuo f en el espacio de fase. A su vez, Morales en [29] destaca la existencia de una constante $\delta > 0$ (que llamaremos constante de complejidad de f) que satisface $\mathcal{E}(\delta, m, f) \to \infty$ cuando $m \to \infty$ y muestra que la presencia de medidas positivamente expansivas en el sistema implica la existencia de una tal constante. De este modo, si entendemos por *sistemas complejos* aquellos que admiten alguna constante de complejidad (en cuyo caso diremos que f admite complejidad) es posible mostrar que estos satisfacen múltiples propiedades relacionadas con la entropía topológica. Por ejemplo, f admite complejidad en cualesquiera de los siguientes casos:

- Existe $A \subset X$ invariante tal que $f_{|A}$ admite complejidad.
- f es positivamente expansiva.
- Existen medidas positivamente expansivas para f.
- Existe un factor de f que admita complejidad.
- $h_{top}(f) > 0$.

Recíprocamente si f es un homeomorfismo admitiendo complejidad, entonces:

- Toda conjugación de f admite complejidad.
- f^m admite complejidad para todo $m \geq 1$.
- f no es equicontinuo (es decir $\{f^m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ no es familia equicontinua).

Todo esto a nivel de sistemas discretos. Es así que, motivados por la reciente aparición de las medidas expansivas para flujos continuos en [17], nos proponemos estudiar el caos dinámico para los sistemas continuos, específicamente: la complejidad en los sistemas continuos. Es más, apuntamos a obtener un nuevo indicador para detectar la complejidad de estos sistemas. Para ello, debido a la presencia de reparametrizaciones de tiempo en los flujos, introduciremos las nociones de medidas $\mathcal{F}$-expansivas y puntos $\mathcal{F}$-sombreables, donde $\mathcal{F}$ es un subconjunto de $\mathcal{H}$.

A continuación, describiremos las motivaciones para la implementación de cada una de estas nociones y los resultados obtenidos de ellas a lo largo del trabajo.

En [21], Keynes y Sears extienden la noción de flujo expansivo de Bowen y Walters para transformaciones de grupos destacando en esta extensión la restricción del conjunto de reparametrizaciones $\mathcal{H}$ para subconjuntos $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ dando origen al concepto de $\mathcal{F}$-expansividad para transformaciones de grupos. La relevancia de esta definición radica en los resultados que podemos obtener al tomar una acción de $\mathbb{R}$ sobre un espacio métrico, es decir un flujo, y restringir el conjunto de reparametrizaciones a un subconjunto $\mathcal{F}$ dotado de cierta topología.

Motivados por ello, en el capítulo 2, hacemos una extensión análoga para las medidas expansivas definidas por Carrasco y Morales en [17]; esto es, consideramos la noción de expansividad para medidas sobre flujos en los cuales el conjunto de reparametrizaciones sea un subconjunto de $\mathcal{H}$.

De esta manera, en la sección 2.1, introducimos la siguiente noción:

Definición 2.1.2 *Dados (X, d) un espacio métrico compacto y $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$, decimos que una medida de probabilidad Boreliana μ de X es $\mathcal{F}$-expansiva para un flujo continuo ϕ en X si existe $\delta > 0$ tal que:*

$$\mu(\Gamma^{\phi}_{\delta}(x, \mathcal{F})) = 0, \text{ para cada } x \in X.$$

donde $\Gamma^{\phi}_{\delta}(x, \mathcal{F}) = \bigcup_{h\in\mathcal{F}} \bigcap_{t\in\mathbb{R}} \phi_{-h(t)}(B[\phi_t(x), \delta])$.

El Ejemplo 2.1.1 muestra que esta noción generaliza la de [17] y el Ejemplo 2.1.2 muestra que la bola dinámica $\mathcal{F}$-dependiente no siempre es cerrada en X. Por ello, en la sección 2.2 dotamos al conjunto $\mathcal{H}$ con una ∞-métrica en el sentido que esta permite una distancia infinita entre dos puntos: $\widehat{d}(f, g) = \sup\{|f(x)-g(x)| : x \in \mathbb{R}\}$. Usando esta noción probamos que si $\mathcal{F}$ es compacto, la bola dinámica $\mathcal{F}$-dependiente es un conjunto compacto en X (Proposición 2.2.1) y probamos, en el Teorema 2.2.5, que una medida μ es $\mathcal{F}$-expansiva si y solo si μ es $\overline{\mathcal{F}}$-expansiva. Además, en la sección 2.3 probamos que estas medidas satisfacen algunas interesantes propiedades (Teorema 2.3.4). Estas incluyen la equivalencia con la expansividad cuando $\mathcal{F}$=$\mathcal{H}$, la anulación a lo largo de las órbitas, la ausencia de singularidades en el soporte, la $\mathcal{F}$-expansividad con respecto a los homeomorfismos tiempo-t, la invarianza por equivalencias y suspensiones.

Luego, en la sección 2.4, analizamos el comportamiento topológico del conjunto de medidas $\mathcal{F}$-expansivas para el flujo ϕ, primeramente para las medidas que se anulan a lo largo de las órbitas (Teorema 2.4.1) y luego en general, obteniendo el siguiente resultado:

Teorema 2.4.2 *El conjunto de medidas $\mathcal{F}$-expansivas de un flujo ϕ en un espacio métrico compacto X es un $G_{\delta\sigma}$ en $\mathcal{M}(X)$ en cualquiera de los siguientes casos:*

(1) *Si $\mathcal{F}$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{H}$ o*

(2) *Si $\mathcal{F} = \mathcal{H}$ y el flujo ϕ no tiene singularidades.*

Finalmente, en el Teorema 2.4.12 extendemos para flujos algunos resultados de aproximación de medidas $\mathcal{F}$-expansivas dados para sistemas discretos por Morales en [31]. Cabe mencionar que los resultados de este capítulo fueron publicados en el trabajo intitulado *$\mathcal{F}$-expansivity for Borel measures* [41].

Por otro lado, Morales en [30] generalizó la definición de sombreamiento para homeomorfismos en espacios métricos compactos, al considerar una especie de sombreamiento puntual en el espacio, dando origen al concepto de puntos sombreables, los cuales son puntos donde la propiedad de sombreamiento se tiene únicamente para las pseudo órbitas que pasan a través de ellos. Además es posible mostrar que esta noción guarda relación con los sistemas complejos:

- Si existen p, q sombreables, relacionados ($p \sim q$) y alguno de ellos es periódico, entonces f admite complejidad.

Lo cual refuerza nuestra consideración de los puntos sombreables en este trabajo.

Recientemente, Kawaguchi en [20] extiende esta noción introduciendo el concepto de puntos sombreables cuantitativos que permiten, entre otros resultados, obtener una clasificación del conjunto de puntos sombreables de un homeomorfismo probando que este es un conjunto de Borel. Sin embargo, en [30] los puntos sombreables de los ejemplos mostrados forman un conjunto G_δ en X. Quedando por tanto la interrogante de si es posible mejorar esta clasificación para los puntos sombreables y también el estudiar esta noción para el caso de flujos, puesto que la propiedad de sombreamiento para flujos es más elaborada que la misma en el caso discreto, por la presencia de reparametrizaciones.

Teniendo lo anterior en mente, en el capítulo 3, introducimos el siguiente concepto:

Definición 3.1.3 *Un elemento $p \in X$ es $\mathcal{F}$-sombreable si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que toda $(\delta, 1)$-pseudo órbita que pasa a través de p es $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-sombreable.*

Seguidamente, mostramos que esta noción satisface las siguientes propiedades (Teorema 3.2.1): el conjunto de puntos $\mathcal{F}$-sombreables es un conjunto invariante para el flujo. Un flujo satisface la propiedad de $\mathcal{F}$-sombreamiento si y solo si cada uno de los puntos del conjunto es $\mathcal{F}$-sombreable. El conjunto recurrente por cadenas y el conjunto no errante coinciden cuando cada punto recurrente por cadenas es $\mathcal{F}$-sombreable. Los puntos recurrentes por cadenas que son $\mathcal{F}$-sombreables son exactamente aquellos que pueden ser aproximados por puntos periódicos, en el caso que el flujo sea expansivo. Además, realizamos un estudio del conjunto de puntos $\mathcal{F}$-sombreables de un homeomorfismo y su flujo suspensión.

Luego en la sección 3.3, con ayuda del $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-sombreamiento a través de un conjunto, probamos el siguiente resultado:

Teorema 3.3.3 *El conjunto de puntos $\mathcal{F}$-sombreables es un conjunto G_δ en X.*

Proyectando al cociente, mejoramos la clasificación de los puntos sombreables para homeomorfismos dada en [20] al probar que este conjunto es un subconjunto G_δ en el espacio de fase (Corolario 3.3.4).

Finalmente, en la sección 3.4 estudiamos al conjunto de puntos $\mathcal{F}$-sombreables a futuro y obtenemos condiciones suficientes para que dicho conjunto sea cerrado (Proposición 3.4.1) y probamos que en caso el flujo sea recurrente por cadenas, los puntos sombreables son triviales, esto es, no conforman un subconjunto propio del espacio:

Teorema 3.4.2 *Si $\mathcal{F}$ es invariante y el flujo ϕ es recurrente por cadenas, entonces el conjunto de puntos $\mathcal{F}$-sombreables a futuro es todo el espacio X o es vacío.*

Como una consecuencia directa del Teorema anterior obtenemos en el Corolario 3.4.4 que el atractor geométrico de Lorenz cuyo mapeo de retorno f satisfaga $f(0) \neq 0$ ó $f(1) \neq 1$ no tiene puntos $\mathcal{F}$-sombreables para todo $\mathcal{F}$ que consiste de reparametrizaciones crecientes. Todos estos resultados fueron publicados, en el caso particular que $\mathcal{F}$ consiste únicamente de funciones crecientes, en el trabajo intitulado *Shadowable points for flows* [5].

En el capítulo 4, finalmente, implementamos la noción de complejidad para flujos, lo cual, como en el caso discreto, debe ser hecho por etapas. Por ello, en la sección 4.1 consideramos la siguiente noción:

Definición 4.1.2 *Decimos que un flujo ϕ tiene $\mathcal{F}$-complejidad si existe un $\delta > 0$ (que llamaremos constante de $\mathcal{F}$-complejidad) satisfaciendo la siguiente propiedad:*

$$\lim_{t \to \infty} \mathcal{E}(\delta, t, \phi, \mathcal{F}) = \infty,$$

donde $\mathcal{E}(\delta, t, \phi, \mathcal{F}) = \max\{\operatorname{Card}(E) : E \subset X \text{ es } (\delta, t, \mathcal{F})\text{-separado}\}$.

Notemos que todo flujo con $\mathcal{F}$-complejidad tiene $\{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}$-complejidad, donde $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ es la identidad en $\mathbb{R}$, pero lo recíproco no es cierto (Ejemplo 2.1.1). Sin embargo, refinando la noción de complejidad podemos hallar una equivalencia entre estas nociones (Lema 4.1.3). Motivo por el cual, en la sección 4.2 introducimos la noción de complejidad de un flujo continuo (Definición 4.2.1). El Ejemplo 4.2.2 muestra que los sistemas complejos pueden tener entropía topológica nula. De esta forma la complejidad es más fina que la entropía topológica.

El Teorema 4.2.3 muestra una equivalencia de esta noción con la complejidad del tiempo-uno del flujo y la invarianza por conjugaciones. También mostramos la relación de esta noción sobre un homeomorfismo y su flujo suspensión (Teorema 4.2.5). Luego, obtenemos un análogo del resultado entre la complejidad y la existencia de medidas expansivas dado en caso discreto por Morales en [29].

Teorema 4.2.6 *Todo flujo ϕ soportando medidas positivamente $\mathcal{F}$-expansivas, tiene $\mathcal{F}$-complejidad en cualquiera de los siguientes casos:*

(1) *Si $\mathcal{F} = \mathcal{H}$ y ϕ no tiene singularidades o*

(2) *Si $\mathcal{F}$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{H}$.*

Adicionalmente, obtenemos un estimado de las órbitas periódicas de un sistema expansivo cuyos puntos sombreables contienen al conjunto no errante.

Teorema 4.2.8 *Sea ϕ un flujo expansivo en un espacio métrico compacto X. Si $\Omega(\phi) \subset Sh(\phi, \mathcal{S})$ y el flujo tiene una cantidad finita de órbitas periódicas, entonces no admite alta complejidad.*

Finalmente, en el Teorema 4.2.9 probamos que cada sistema no singular soportando $\mathcal{F}$-complejidad no admite conjuntos estables de medida positiva para toda medida no atómica y que, por tanto, no puede ser equicontinuo (Corolario 4.2.11).

Vale la pena resaltar que en el capítulo 1 describimos brevemente los preliminares necesarios para hacer más entendible este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

A continuación fijaremos las nociones y notaciones básicas que usaremos para el desarrollo del resto de capítulos.

1.1 Sistemas Dinámicos

Estos, junto a las propiedades que podamos definir en ellos, serán nuestros principales objetos de estudio. Consideramos adecuado mencionar que a pesar de que el estudio de estos sistemas usualmente se realice en variedades diferenciables y por tanto sea implícita la noción de suavidad; nosotros tomaremos una orientación más inclinada a la Topología Dinámica por lo cual nuestro espacio de fase será un espacio métrico.

Si bien uno tiene la idea intuitiva de que un sistema dinámico es un sistema cuyo estado evoluciona con el tiempo, es adecuado distinguir entre una dinámica *discreta* y una *continua*; dado que cada una de estas dinámicas presenta propiedades particulares. Por otro lado, existen nexos entre estos tipos de dinámicas que permiten transportar propiedades entre ellas, los más conocidos son las *suspensiones* y las *transformaciones de Poincaré*. A su vez, en una misma dinámica estas relaciones se efectúan mediante las *conjugaciones* y *equivalencias.*

A continuación formalizaremos algunas de estas nociones.

En adelante $X = (X, d)$ denotará un espacio métrico.

Definición 1.1.1 *Un sistema dinámico discreto en* X *es una aplicación continua* $F : \mathbb{Z} \times X \to X$ *que satisface las siguientes condiciones:*

- $F(0, \cdot\,) = \mathrm{Id}_X$, *(aplicación identidad en* X*)*
- $F(n, F(m, x)) = F(n + m, x)$, *para todo* $m, n \in \mathbb{Z}$ *y cada* $x \in X$.

Si denotamos por F_n a la aplicación $F(n, \cdot) : X \to X$ donde $n \in \mathbb{Z}$, se sigue que $f = F(1, \cdot)$ es un homeomorfismo en X tal que $F_n = f^n$; es por ello que usualmente decimos que un sistema dinámico discreto es generado por un homeomorfismo.

Definición 1.1.2 *Un sistema dinámico continuo o flujo en* X *es una aplicación continua* $\phi : \mathbb{R} \times X \to X$ *tal que:*

- $\phi(0, \cdot) = \mathrm{Id}_X$,
- $\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(t + s, x)$, *para todo* $t, s \in \mathbb{R}$ *y cada* $x \in X$.

Al igual que el caso discreto, si denotamos por ϕ_t a la aplicación $\phi(t, \cdot) : X \to X$, obtenemos una familia de homeomorfismos $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, conocidos como homeomorfismos *tiempo-t*, tales que $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ para cada $t, s \in \mathbb{R}$.

Dados $A \subset X$, $I \subset \mathbb{R}$ consideremos el siguiente conjunto:

$$\phi_I(A) = \{\phi_t(x) : (t, x) \in I \times A\}.$$

Si A consiste de un único elemento x, entonces escribimos $\phi_I(x)$ en lugar de $\phi_I(\{x\})$; en particular, el conjunto $\phi_{\mathbb{R}}(x)$ es llamado *órbita* de ϕ por x. De otro lado, si $x \in X$ satisface que $\phi_{\mathbb{R}}(x) = \{x\}$, diremos que x es una *singularidad* del flujo ϕ y denotaremos por $Sing(\phi)$ al conjunto de singularidades de ϕ.

Un subconjunto A de X se dice *invariante por* ϕ (o ϕ-invariante) en caso que $\phi_t(A) = A$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

1.1.1 Equivalencias

Una *equivalencia* entre flujos sobre espacios métricos X e Y es un homeomorfismo $f : X \to Y$ que transporta las órbitas en X en órbitas en Y preservando orientación; cuando esto ocurre decimos que los flujos son *equivalentes*.

Si $f : X \to Y$ es una equivalencia entre ϕ en X y ψ en Y respectivamente, se muestra en [14] que para cada $x \in X$ existe un homeomorfismo $h_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h_x(0) = 0$ y que satisface

$$\phi(h_x(t), x) = f^{-1}(\psi(t, f(x))) \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Adicionalmente, si $h_x = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ para todo $x \in X$, f se dice *conjugación* entre X e Y.

En ausencia de singularidades es posible mejorar la definición anterior en el sentido de que la aplicación $h : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x,t) = h_x(t)$ sea continua y los h_x pueden ser tomados crecientes. El lector puede ver los detalles en [37].

1.1.2 Suspensiones

Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo y sea $\tau : X \to (0, +\infty)$ una aplicación continua. Consideremos el espacio cociente $X^{\tau,f} = \{(x,t) : 0 \leq t \leq \tau(x), x \in X\}/\sim$, donde $(x, \tau(x)) \sim (f(x), 0)$ para todo $x \in X$. *El flujo suspensión de f con función altura τ* es el flujo $\Phi = \{\phi_t^{\tau,f}\}_{t\in\mathbb{R}}$ en $X^{\tau,f}$ definido para $t \geq 0$ como

$$\phi_t^{\tau,f}(x,s) = \left(f^m(x), s + t - \sum_{i=0}^{m-1} \tau(f^i(x)) \right),$$

donde $m \in \mathbb{N}$ es tal que $\sum_{i=0}^{m-1} \tau(f^i(x)) \leq s + t < \sum_{i=0}^{m} \tau(f^i(x))$ y cuando $t < 0$

$$\phi_t^{\tau,f}(x,s) = \left(f^{-m}(x), s + t + \sum_{i=1}^{m} \tau(f^{-i}(x)) \right),$$

donde $m \in \mathbb{N}$ satisface la siguiente relación $0 \leq s + t - \sum_{i=1}^{m} \tau(f^{-i}(x)) \leq \tau(f^{-m}(x))$.

Si X es acotado, esto es $diam(X) < \infty$, podemos suponer que $diam(X) = 1$, basta tomar la métrica $\frac{d}{diam(X)}$. En estas condiciones es posible definir una métrica en $X^{\tau,f}$ llamada *métrica de Bowen-Walters*, el lector puede ver los detalles en [14]. Cabe destacar que cuando X es compacto, $X^{\tau,f}$ también es compacto.

Toda suspensión de f es equivalente a la suspensión de f con altura constante 1. Un homeomorfismo entre $X^{1,f}$ y $X^{\tau,f}$ que conjuga los flujos $\phi^{1,f}$ y $\phi^{\tau,f}$ es dado por la siguiente aplicación $(x,t) \mapsto (x, t\tau(x))$.

1.2 Sombreamiento

La Teoría del Sombreamiento juega un rol importante en la Teoría Cualitativa de los Sistemas Dinámicos. Además, ha sido ampliamente estudiada por muchos investigadores y está bien documentada, el lector puede consultar [32]. Esta se refiere al problema general de la aproximación de órbitas obtenidas en presencia de ruido o error de redondeo (por ejemplo soluciones obtenidas por cálculos numéricos).

En el caso que nos interesa, los flujos, hay varias maneras de definir esta propiedad conocida como la *propiedad de trazado para pseudo órbitas* y usualmente denotada por POTP, vea por ejemplo [35] y las referencias allí. En esencia, la idea central entre la mayoría de las definiciones de sombreamiento para flujos es la siguiente: incluso si ocurren pequeños errores en cada iteración, se puede rastrear la pseudo-órbita resultante por una órbita verdadera con una ayuda de una reparametrización de tiempo.

A continuación pasamos a formalizar la noción de sombreamiento que usaremos.

Sea $f\colon X \to X$ un homeomorfismo. Dado $\delta > 0$, decimos que una secuencia bi-infinita $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una *δ-pseudo-órbita*, si para cada entero n se tiene que:

$$d(f(x_n),\, x_{n+1}) \leq \delta.$$

Definición 1.2.1 *Decimos que f tiene la POTP si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda δ-pseudo-órbita $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, existe un elemento $q \in X$ tal que $d(f^n(q),\, x_n) \leq \varepsilon$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.*

En el caso de flujos la formulación de la POTP, como veremos a continuación, es un tanto más elaborada.

Dados $\delta,\, T > 0$, $a \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ donde $a \leq b$, decimos que una secuencia de pares $(x_i,\, t_i)_{i=a}^{b}$ en $X \times \mathbb{R}$ es una $(\delta,\, T)$-*pseudo-órbita* del flujo ϕ en X si para cada índice entero i tal que $a \leq i \leq b-1$ se tiene que:

$$t_i \geq T \quad \text{ y } \quad d(\phi_{t_i}(x_i),\, x_{i+1}) \leq \delta.$$

Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $ab \leq 0$, decimos que esta es una $(\delta,\, T)$-*pseudo-órbita finita.* Si $a = 0$ y $b = \infty$ diremos que esta es una $(\delta,\, T)$-*pseudo-órbita positiva* y en caso $a = 0$ y $b < \infty$ diremos que esta es una $(\delta,\, T)$-*cadena.* (ver [22, 36]).

Para cualquier secuencia de números $(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ denotaremos

$$s_i = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{i-1} t_j & i > 0, \\ 0 & i = 0, \\ \displaystyle -\sum_{j=i}^{-1} t_j & i < 0. \end{cases}$$

Dada $(x_i, t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ una $(\delta,\, T)$-pseudo-órbita de ϕ y dado $t \in \mathbb{R}$, denotamos por $x_0 \star t$ al elemento que está a t unidades de x_0 a lo largo de la $(\delta,\, T)$-pseudo-órbita. Más específicamente,

$$x_0 \star t = \phi_{t - s_i}(x_i) \text{ siempre que } s_i \leq t < s_{i+1}.$$

Denotemos por Rep al conjunto de funciones $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente crecientes y sobreyectivas tales que $h(0) = 0$.

Con estas notaciones podemos, finalmente, enunciar la siguiente definición [36]:

Definición 1.2.2 *Un flujo ϕ tiene la POTP si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cada $(\delta,\, 1)$-pseudo-órbita $(x_i,\, t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, existe un $z \in X$ y existe una función $h \in \mathrm{Rep}$ que satisfacen la siguiente propiedad:*

$$d(x_0 \star t,\, \phi_{h(t)}(z)) \leq \varepsilon, \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

1.3 Recurrencia

La recurrencia tiene una importancia crucial en el estudio de los Sistemas Dinámicos puesto que uno de los principales objetivos de esta línea es la descripción del eventual comportamiento de las órbitas de un sistema dado. A seguir, estableceremos algunas nociones de recurrencia para flujos que usaremos en el trabajo.

Definición 1.3.1 *Un punto periódico de ϕ es un elemento $x \in X$ para el cual existe un $t > 0$ minimal que satisface $\phi_t(x) = x$, esto es, $t = \inf\{s > 0 : \phi_s(x) = x\} > 0$.*

Este minimal t es llamado *periodo* de x y $Per(\phi)$ denotará al conjunto de puntos periódicos de ϕ. Cabe destacar que aún cuando X es compacto, el conjunto $Per(\phi)$ no es necesariamente cerrado en X.

La siguiente noción es de importancia pues caracteriza a los puntos cuya dinámica, en el sentido de recurrencia, es relevante.

Definición 1.3.2 *Decimos que un elemento $p \in X$ es no errante si para cada vecindad U de p y cada $T \in \mathbb{R}$ es posible hallar un $t \geq T$ tal que $\phi_t(U) \cap U \neq \emptyset$.*

Otra noción de recurrencia interesante es la recurrencia por cadenas. Para definirla necesitamos introducir algunas notaciones adicionales.

Dos elementos p y q se dicen (δ, T)-relacionados si existen dos (δ, T)-cadenas $(x_i, t_i)_{i=0}^m$ y $(y_i, s_i)_{i=0}^n$ tales que $p = x_0 = y_n$ e $q = y_0 = x_m$. Con esto en mente, decimos que p y q están relacionados (denotando esto con $p \sim q$) si ellos son (δ, T)-relacionados para cada δ, $T > 0$.

Definición 1.3.3 *Un elemento $p \in X$ se dice recurrente por cadenas cuando $p \sim p$.*

Denotemos por $\Omega(\phi)$ y $CR(\phi)$ al conjunto de puntos no errantes y recurrentes por cadenas de ϕ respectivamente. Estos conjuntos son cerrados e invariantes en X.

Claramente se tienen las siguientes inclusiones que pueden ser propias (ver [4]):

$$Per(\phi) \subset \Omega(\phi) \subset CR(\phi).$$

1.4 Expansividad

La noción de *expansividad* ha sido determinante en el desarrollo de la Teoría de los Sistemas Dinámicos. Desde su introducción para homeomorfismos, gracias a Utz en [40], una extensa literatura relacionada con esta noción ha sido desarrollada. Este concepto fue subsecuentemente extendido a flujos por Bowen y Walters en [14]. Básicamente, la idea de ellos es que puntos de órbitas diferentes puedan alejarse una distancia determinada al mismo tiempo con ayuda de una reparametrización.

Por otro lado, en [28] Morales introduce la noción de *medidas expansivas* las cuales permiten extender la expansividad para medidas de probabilidad Borelianas considerando el comportamiento de la bola dinámica respecto de la medida. Luego, Carrasco y Morales extendieron esta noción para flujos continuos en [17]. Otras referencias útiles, sobre la expansividad de medidas, son las dadas en [18] y [26].

Daremos ahora las definiciones formales relacionadas con la expansividad que serán de ayuda en los capítulos siguientes.

1.4.1 Sistemas Expansivos

Definición 1.4.1 *Un homeomorfismo $f : X \to X$ se dice expansivo si existe un $\delta > 0$ con la siguiente propiedad: para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$, se satisface que $d(f^k(x), f^k(y)) > \delta$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.*

Equivalentemente en términos de la bola dinámica de radio $\delta > 0$, denotada por $\Gamma_\delta^f(\cdot)$, diremos que f es expansiva cuando para cada $x \in X$ se tiene:

$$\Gamma_\delta^f(x) := \{y \in X : d(f^n(x), f^n(y)) \leq \delta, \forall n \in \mathbb{Z}\} = \{x\}.$$

Para definir la expansividad en flujos necesitamos algunas notaciones adicionales. Denotemos por $\mathcal{H}$ al conjunto de mapeos continuos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $h(0) = 0$. Dado un flujo ϕ en X, un elemento $x \in X$ y un $\delta > 0$ definimos la *bola dinámica* de la siguiente manera:

$$\Gamma_\delta^\phi(x) := \bigcup_{h\in\mathcal{H}} \{y \in X : d(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) \leq \delta, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Con estas notaciones podemos dar una reformulación del concepto de flujo expansivo introducido por Bowen y Walters en [14].

Definición 1.4.2 *Un flujo ϕ en X es expansivo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ que satisface la siguiente inclusión: $\Gamma_\delta^\phi(x) \subset \phi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x)$, para todo $x \in X$.*

1.4.2 Medidas Expansivas

La σ-algebra de Borel de X es la σ-algebra, denotada por $\mathcal{B}(X)$, generada por los subconjuntos abiertos de X. Una medida de probabilidad Boreliana es una medida σ-aditiva μ definida en $\mathcal{B}(X)$ tal que $\mu(X) = 1$. A su vez, esta se dice *no atómica* si $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in X$. Con esto, enunciamos la noción de [28]:

Definición 1.4.3 *Una medida de probabilidad Boreliana μ es expansiva para el homeomorfismo $f : X \to X$ en caso que exista un $\delta > 0$ satisfaciendo:*

$$\mu(\Gamma_\delta^f(x)) = 0, \text{ para cada } x \in X.$$

Note que $x \in \Gamma_\delta^f(x)$ para todo $x \in X$, entonces toda μ expansiva es no atómica.

En el caso de flujos la noción (dada en [17]) es análoga.

Definición 1.4.4 *Una medida de probabilidad Boreliana μ se dice expansiva para el flujo ϕ en X si existe un $\delta > 0$ (llamado constante de expansividad de μ) tal que:*

$$\mu(\Gamma_\delta^\phi(x)) = 0, \quad \text{para todo } x \in X.$$

Finalizamos esta sección resaltando que las definiciones 1.4.2 y 1.4.4 admiten versiones positivas, es decir, podemos definir flujo (medida) *positiviamente* expansiva al considerar, en las definiciones mencionadas, la siguiente bola dinámica *positiva*:

$$\Phi_\delta(x) = \bigcup_{h\in\mathcal{H}} \{z \in X : d(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(z)) \leq \delta, \forall t \geq 0\}.$$

1.5 (δ, n)-Complejidad

En general, la inestabilidad de las órbitas en un sistema dinámico induce cierta *complejidad* en el sistema; la cual puede ser cuantitativamente reflejada por la *entropía topológica* (pueden verse, por ejemplo, las referencias [1], [12]). Lo cual muestra un enlace directo entre estos parámetros del caos dinámico. A continuación formalizaremos estas nociones.

Consideremos ahora $X = (X, d)$ un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una aplicación continua. Fijado un par $(\delta, m) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$, decimos que un conjunto E de X es (δ, m)-*separado* si para cada par de elementos diferentes $x, y \in E$, existe $0 \leq i < m$ tal que $d(f^i(x), f^i(y)) > \delta$. Denotamos por $\mathrm{Card}(\,\cdot\,)$ al operador cardinalidad.

Definición 1.5.1 *La (δ, m)-complejidad de X es el número real*

$$\mathcal{E}(\delta, m, f) := \max\{\, \mathit{Card}(E) : E \text{ es } (\delta, m)\text{-separado} \,\}.$$

Note que la compacidad garantiza la buena definición de la (δ, m)-complejidad. A su vez, esta noción de complejidad puede ser interpretada como un indicador del grado de expansividad del mapeo (ver [3]) y además tiene una estrecha relación con la entropía topológica como veremos a seguir (ver [42]).

Definición 1.5.2 (Bowen-Dinaburg) *La entropía topológica de f es definida de la siguiente manera* $h_{top}(f) := \lim\limits_{\delta \to 0} \limsup\limits_{m \to \infty} \frac{1}{m} \log \mathcal{E}(\delta, m, f)$.

En [29], Morales realiza un estudio de la relación entre la complejidad y la existencia de medidas positivamente expansivas. Para ello, se descata la existencia de un $\delta > 0$, que llamaremos *constante de complejidad* de f, que satisface la siguiente condición:

$$\lim_{m \to \infty} \mathcal{E}(\delta, m, f) = \infty.$$

Como fue mostrado en la Introducción, los sistemas discretos que admiten una tal constante satisfacen variadas propiedades dinámicas. Así, en el capítulo 4 implementaremos esta noción para el caso de flujos.

Capítulo 2

$\mathcal{F}$-Expansividad de Medidas

En este capítulo, haremos una breve descripción de las nociones introducidas en el trabajo intitulado *$\mathcal{F}$-Expansivity for Borel measures* (ver [41]). Cabe descatar que dicho trabajo fue galardonado con el premio TWAS 2018 de Ciencias Básicas para Investigadores Jóvenes de la ANCYT.

2.1 $\mathcal{F}$-Expansividad

A lo largo del capítulo (X, d) denota un espacio métrico compacto. Dado el par $(x, \delta) \in X \times \mathbb{R}_+$ denotamos por $B[x, \delta]$ y $B(x, \delta)$ a la bola cerrada y abierta en X respectivamente.

Con el fin de motivar nuestra principal definición recordaremos la generalización de expansividad para el caso de flujos introducida por Keynes y Sears en [21]: Dado un flujo ϕ en X, un elemento $x \in X$, un $\delta > 0$ y un subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{H}$, definimos la bola dinámica $\mathcal{F}$-dependiente como:

$$\Gamma_\delta^\phi(x, \mathcal{F}) = \bigcup_{h \in \mathcal{F}} \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \phi_{-h(t)}(B[\phi_t(x), \delta]).$$

Definición 2.1.1 *Un flujo ϕ en X es $\mathcal{F}$-expansivo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ que satisface: $\Gamma_\delta^\phi(x, \mathcal{F}) \subset \phi_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(x)$, para cada $x \in X$.*

Claramente los flujos $\mathcal{H}$-expansivos son precisamente los flujos expansivos en el sentido de Bowen y Walters. Combinando esta definición con la de medida expansiva para flujos, resulta nuestro principal objeto de estudio para el presente capítulo.

Definición 2.1.2 *Dado $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ decimos que una medida de probabilidad Boreliana μ de X es $\mathcal{F}$-expansiva para un flujo ϕ si existe $\delta > 0$ tal que*

$$\mu(\Gamma_\delta^\phi(x, \mathcal{F})) = 0, \text{ para cada } x \in X.$$

La constante δ se denomina constante de $\mathcal{F}$-expansividad para la medida μ.

Claramente de la definición, toda medida $\mathcal{H}$-expansiva para un flujo es expansiva en el sentido de Carrasco y Morales en [17].

Ejemplo 2.1.1 Considere ϕ el flujo en $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \in [1, 4]\}$ inducido por la ecuación diferencial:

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(-y, x).$$

Este flujo no admite medidas que sean $\mathcal{H}$-expansivas, puesto que todas las órbitas son periódicas y por tanto $\mu(Per(\phi)) = \mu(X) = 1$ lo cual contradice el Teorema 1.1 de [17]. Sin embargo, este flujo es $\{\mathrm{Id}_\mathbb{R}\}$-expansivo, ver [8], por lo cual toda medida que sea absolutamente continua con la medida de Lebesgue en X, es $\{\mathrm{Id}_\mathbb{R}\}$-expansiva pero no $\mathcal{H}$-expansiva.

Recordemos que $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ admite la siguiente métrica que lo hace compacto:

$$d(x, y) = \min\{|a - b|, 1 - |a - b| : a \sim x, b \sim y, \{a, b\} \subset [0, 1)\}$$

Ejemplo 2.1.2 Sea $X = [0, 1] \times \mathbb{S}^1$, con la métrica $D[(x, \theta), (y, \psi)] = |x - y| + d(\theta, \psi)$ y el flujo $\phi_t(x, \theta) = (x, tf(x) + \theta \bmod \mathbb{Z})$ donde $f : [0, 1] \to [0, 1]$ es continua y satisface que $f(0) = 0$ y $f(x) > 0$ cuando $x \neq 0$. Notemos en principio que, al igual que el ejemplo anterior, este flujo no admite medidas $\mathcal{H}$-expansivas. Sin embargo, con la finalidad de entender el comportamiento de la bola dinámica, probaremos esto directamente. Para todo $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ se tiene:

$$\begin{aligned} &B(z,\delta) \setminus (\{0\} \times \mathbb{S}^1) \subset \Gamma_\delta^\phi(z,\mathcal{H}), \text{ para cada } z = (x,\theta) \in X \text{ con } x \neq 0, \text{ y} \\ &B(z,\delta) \subset \Gamma_\delta^\phi(z,\mathcal{H}) \text{ si } z \in \{0\} \times \mathbb{S}^1. \end{aligned} \tag{2.1}$$

En efecto, dado $z = (x,\theta) \in X$ y $w = (y,\psi) \in B(z,\delta) \setminus (\{0\} \times \mathbb{S}^1)$ definimos la función $h(t) = t\frac{f(x)}{f(y)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces $h \in \mathcal{H}$ y además:

$$D[\phi_t(z), \phi_{h(t)}(w)] = |x-y| + d(tf(x)+\theta, h(t)f(y)+\psi) = D[z,w] \leq \delta,$$

de donde $w \in \Gamma_\delta^\phi(z,\mathcal{H})$; con ello, si existe alguna medida expansiva μ para el flujo, obtenemos que existe un $\delta > 0$ tal que $\mu(B(z,\delta)) = 0$, para cada $z \in X$. Lo cual junto a la compacidad de X es un absurdo.

A pesar de esto, si consideramos el conjunto $\mathcal{B} = \{h \in \mathcal{H} : h \text{ es limitada}\}$ entonces para un $\delta \in (0, \frac{1}{3})$ se tiene:

$$\begin{aligned} &\Gamma_\delta^\phi(z,\mathcal{B}) = \emptyset, \text{ para cada } z = (x,\theta) \in X \text{ con } x \neq 0, \text{ y} \\ &B(z,\tfrac{\delta}{2}) \subset \Gamma_\delta^\phi(z,\mathcal{B}) \text{ si } z \in \{0\} \times \mathbb{S}^1. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Por tanto cualquier medida de probabilidad Boreliana μ en X concentrada en $Z = X \setminus (I_{\frac{\delta}{2}}(0) \times \mathbb{S}^1)$, esto es $\mu(Z) = 1$, será $\mathcal{B}$-expansiva para ϕ.

Los ejemplos anteriores resaltan la importancia de la restricción del conjunto de reparametrizaciones $\mathcal{H}$ en un flujo, ya que hace posible la existencia de medidas $\mathcal{F}$-expansivas en un sistema que no posee $\mathcal{H}$-expansivas. Además, en la prueba del Ejemplo 2.1.2 notamos muchas particularidades que en adelante analizaremos.

2.2 Bola dinámica y Topología

En el Ejemplo 2.1.2, la relación (2.1) muestra que en general la bola dinámica no siempre es cerrada en X. Motivados por esto, introduciremos condiciones sobre la familia $\mathcal{H}$ para entender la naturaleza de la bola dinámica sobre flujos. Para esto nosotros dotamos al conjunto $\mathcal{H}$ con la "distancia" siguiente:

$$\widehat{d}(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathbb{R}\}.$$

Lo cual convierte al conjunto $\mathcal{H}$ en un espacio con una ∞-*métrica* en el sentido que esta permite una distancia infinita entre dos puntos (ver [16]).

A continuación describimos la compacidad en este tipo de espacios. Dado $f \in \mathcal{H}$, definimos el conjunto $\mathcal{A}_f = \{h \in \mathcal{H} : \widehat{d}(f,h) < \infty\}$ y $d_f = \widehat{d}_{|\mathcal{A}_f \times \mathcal{A}_f}$; entonces $(\mathcal{A}_f, d_f)$ es un espacio métrico en el sentido usual. Se sigue que $\mathcal{H}$ puede ser escrito como una unión de espacios métricos $(\mathcal{A}_f, d_f)$. Con esto podemos enunciar la siguiente caracterización: un subconjunto de $\mathcal{H}$ es compacto si y solo si es una unión de un número finito de subconjuntos compactos cada uno ellos pertenecientes algún espacio $(\mathcal{A}_f, d_f)$ (pág. 15 en [16]).

El siguiente resultado muestra una condición suficiente para la cerradura de la bola dinámica.

Proposición 2.2.1 *Sea ϕ un flujo en un espacio métrico compacto X. Si $\mathcal{F}$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{H}$, entonces para cada $x \in X$ y cada $\delta > 0$ la bola dinámica $\mathcal{F}$-dependiente, $\Gamma_\delta^\phi(x, \mathcal{F})$, es un conjunto compacto de X.*

Demostración. Sean $(x, \delta) \in X \times \mathbb{R}_+$ y $(z_m) \subset \Gamma_\delta^\phi(x, \mathcal{F})$. Dado $m \in \mathbb{N}$, existe $h_m \in \mathcal{F}$ que satisface: $d(\phi_t(x), \phi_{h_m(t)}(z_m)) \leq \delta$, para cada $(t, m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. Por la compacidad de $\mathcal{F}$ podemos asumir que existe un $f \in \mathcal{F}$ tal que $h_m \in \mathcal{A}_f$ para cada $m \in \mathbb{N}$, y $d_f(h_m, h) \to 0$ para algún $h \in \mathcal{A}_f \cap \mathcal{F}$. También podemos considerar que existe $(z_{m_k}) \subset (z_m)$ tal que $z_{m_k} \to z$ donde $z \in X$. Fijando $t \in \mathbb{R}$, se tiene

$$d(\phi_t(x), \phi_{h_{m_k}(t)}(z_{m_k})) \leq \delta, \text{ para cada } k \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Haciendo $k \to \infty$ en (2.3), obtenemos que $d(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(z)) \leq \delta$ lo cual implica $z \in \Gamma_\delta^\phi(x, \mathcal{F})$. Así, $\Gamma_\delta^\phi(x, \mathcal{F})$ es compacto. ■

En particular, la proposición anterior muestra que la compacidad de $\mathcal{F}$ garantiza la cerradura de la bola dinámica $\mathcal{F}$-dependiente. Sin embargo, en el caso de medidas $\mathcal{F}$-expansivas, veremos que la cerradura de $\mathcal{F}$ siempre es posible.

Lema 2.2.2 *Las siguientes propiedades se verifican para cualquier flujo ϕ en un espacio métrico compacto X y cualquier medida de probabilidad Boreliana μ en X:*

(1) *Si $\mathcal{F}$ es un subconjunto de $\mathcal{H}$ y μ es $\mathcal{F}$-expansiva, entonces μ es $\mathcal{F}_0$-expansiva para cualquier $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$.*

(2) *Si μ es $\mathcal{F}_i$-expansiva, donde $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{H}$ para cada $i = 1, \cdots, k$, entonces μ es $(\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i)$-expansiva.*

Demostración. El Item (1) es como sigue: dada una medida $\mathcal{F}$-expansiva μ para el flujo ϕ, para cada subconjunto $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ se tiene $\Gamma_\delta^\phi(x, \mathcal{F}_0) \subset \Gamma_\delta^\phi(x, \mathcal{F})$ para todo $x \in X$; de este modo la prueba se sigue por la monoticidad de la medida. Para probar el Item (2), sea $\delta_i > 0$ una constante de $\mathcal{F}_i$-expansividad para μ. Tomemos $\alpha = \min\limits_{1 \le i \le k} \delta_i > 0$, claramente

$$\Gamma_\alpha^\phi(x, \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_{\delta_i}^\phi(x, \mathcal{F}_i), \text{ para cada } x \in X.$$

Dado que $\mu\left(\Gamma_{\delta_i}^\phi(x, \mathcal{F}_i)\right) = 0$ para todo $i \in \{1, \cdots, k\}$, usando la sub-aditividad de la medida, obtenemos que $\mu\left(\Gamma_\alpha^\phi(x, \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i)\right) = 0$ para cualquier $x \in X$. Por lo cual μ es $(\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i)$-expansiva. ■

La operación de clausura en X la denotamos por $\overline{(\cdot)}$.

Teorema 2.2.3 *Sea ϕ un flujo en un espacio métrico compacto X, μ una medida de probabilidad Boreliana en X y sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de $\mathcal{H}$. Entonces, la medida μ es $\mathcal{F}$-expansiva si y solo si μ es $\overline{\mathcal{F}}$-expansiva.*

Demostración. Inicialmente notemos que dado $\delta > 0$, por la compacidad de X existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\phi_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(x) \subset B(x, \frac{\delta}{2})$ para cualquier $x \in X$. Además dado $f \in \mathcal{F}$, el conjunto $\mathcal{U}_f = \{g \in \mathcal{H} : \widehat{d}(f,g) < \varepsilon\}$ es un abierto en $(\mathcal{A}_f, d_f)$, y afirmamos que:

$$\Gamma^{\phi}_{\frac{\delta}{2}}(x,\mathcal{U}_f) \subset \Gamma^{\phi}_{\delta}(x,\{f\}) \text{ para todo } x \in X. \tag{2.4}$$

En efecto, sean $z, x \in X$ tales que $z \in \Gamma^{\phi}_{\frac{\delta}{2}}(x,\mathcal{U}_f)$; por consiguiente, existe un $g \in \mathcal{U}_f$ verificando:

$$d(\phi_t(x), \phi_{g(t)}(z)) \leq \frac{\delta}{2} \text{ para cualquier } t \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Por otro lado, fijado $t \in \mathbb{R}$, de $\phi_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(\phi_{f(t)}(z)) \subset B\left(\phi_{f(t)}(z), \frac{\delta}{2}\right)$, obtenemos:

$$d(\phi_{f(t)}(z), \phi_{g(t)}(z)) = d\left(\phi_{f(t)}(z), \phi_{g(t)-f(t)}(\phi_{f(t)}(z))\right) < \frac{\delta}{2}. \tag{2.6}$$

Luego de (2.5) y (2.6) tenemos que:

$$d(\phi_t(x), \phi_{f(t)}(z)) \leq d(\phi_t(x), \phi_{g(t)}(z)) + d(\phi_{f(t)}(z), \phi_{g(t)}(z)) < \delta \text{ para cualquier } t \in \mathbb{R}.$$

Esto es, $z \in \Gamma^{\phi}_{\delta}(x,\{f\})$ probando la afirmación.

Notemos también que por el Lema 2.2.2 para probar el Teorema es suficiente mostrar que si μ es $\mathcal{F}$-expansiva entonces también es $\overline{\mathcal{F}}$-expansiva. Para ello tome $\delta > 0$ una constante de $\mathcal{F}$-expansividad de μ y $z, x \in X$ tales que $z \in \Gamma^{\phi}_{\frac{\delta}{2}}(x, \overline{\mathcal{F}})$. Existe $f \in \overline{\mathcal{F}}$ satisfaciendo $d(\phi_t(x), \phi_{f(t)}(z)) \leq \frac{\delta}{2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y existe también $h \in \mathcal{F}$ tal que $f \in \mathcal{U}_h$, por tanto por (2.4) se tiene que $z \in \Gamma^{\phi}_{\delta}(x,\{h\}) \subset \Gamma^{\phi}_{\delta}(x,\mathcal{F})$. De este modo μ es $\overline{\mathcal{F}}$-expansiva. ■

Corolario 2.2.4 *Si μ es $\mathcal{F}$-expansiva y $g \in \mathcal{H}$ es tal que para todo $x \in X$ y cada $\delta > 0$ existe un $f \in \mathcal{F}$ con $d(\phi_{g(t)}(x), \phi_{f(t)}(x)) \leq \delta$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$, entonces μ es $(\mathcal{F} \cup \{g\})$-expansiva.*

Finalizaremos esta sección con una caracterización de las medidas $\mathcal{F}$-expansivas usando la compacidad de $\mathcal{F}$.

Proposición 2.2.5 *Sea ϕ un flujo en un espacio métrico compacto X y μ una medida de probabilidad Boreliana en X. Si $\mathcal{F}$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{H}$, entonces μ es $\mathcal{F}$-expansiva si y solo si μ es $\{f\}$-expansiva para cada $f \in \mathcal{F}$.*

Demostración. Si μ es $\mathcal{F}$-expansiva, por Lema 2.2.2, obtenemos que μ es $\{f\}$-expansiva para cada $f \in \mathcal{F}$. Recíprocamente, dado $f \in \mathcal{F}$ sea $\delta > 0$ una constante de $\{f\}$-expansividad para μ. Por la afirmación hecha en la prueba anterior, se tiene:

$$\Gamma^{\phi}_{\frac{\delta}{2}}(x,\mathcal{U}_f) \subset \Gamma^{\phi}_{\delta}(x,\{f\}) \text{ para todo } x \in X, \tag{2.7}$$

de este modo, para cada $f \in \mathcal{F}$ existe una vecindad abierta $\mathcal{U}_f$ de f que satisface (2.7). Por compacidad podemos escoger $f_1, \cdots, f_m \in \mathcal{F}$ tales que $\mathcal{F} \subset \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{U}_{f_i}$ y finalmente, por Lema 2.2.2, μ es $\mathcal{F}$-expansiva. ■

2.3 Propiedades

En el Ejemplo 2.1.2 notamos que en general la bola dinámica $\mathcal{F}$-dependiente no necesariamente contiene a su centro. Motivados por ello, consideramos la siguiente noción:

Definición 2.3.1 *Decimos que $\mathcal{F}$ es regular para un flujo ϕ en X toda vez que:*

$$x \in \Gamma^{\phi}_{\delta}(x,\mathcal{F}), \text{ para cualesquiera } x \in X \text{ y } \delta > 0. \tag{2.8}$$

Claramente si $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \in \mathcal{F}$, se sigue que el conjunto $\mathcal{F}$ es regular para el flujo ϕ. El resultado siguiente muestra una suerte de recíproco de esta afirmación.

Proposición 2.3.2 *Sea ϕ un flujo sin singularidades definido en un espacio métrico compacto X. Si $\mathcal{F}$ es regular para ϕ, entonces* $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \in \overline{\mathcal{F}}$.

Demostración. Supongamos que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \notin \overline{\mathcal{F}}$. Podemos tomar un $0 < \lambda < \widehat{d}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}, \mathcal{F})$ suficientemente pequeño y aplicar el Lema 2.4.4, por lo cual existe un $\gamma > 0$ tal que $d(\phi_\lambda(w), z) > \gamma$ siempre que $d(w,z) < \gamma$. Dado que $\mathcal{F}$ es regular, para $x \in X$ existe $g \in \mathcal{F}$ que satisface $d(\phi_t(x), \phi_{g(t)}(x)) < \gamma$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Además, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(t_0) - t_0 = \lambda$ y entonces $d(\phi_{t_0}(x), \phi_{g(t_0)}(x)) = d(\phi_{t_0}(x), \phi_{g(t_0)-t_0}(\phi_{t_0}(x))) > \gamma$, lo cual contradice la condición de regularidad (2.8). ■

Denote por $\mathcal{M}(X)$ al conjunto de todas las medidas de probabilidad Borelianas en X. Dada $\mu \in \mathcal{M}(X)$ decimos que esta medida *se anula a lo largo de órbitas* del flujo ϕ cuando $\mu(\phi_{\mathbb{R}}(x)) = 0$ para todo $x \in X$. Notemos que cada medida que se anula a lo largo de órbitas es no atómica, pero lo recíproco no es cierto (basta tomar una medida Boreliana soportada en un órbita periódica). También, si ϕ es $\mathcal{F}$-expansiva, entonces toda medida que se anula en órbitas de ϕ es $\mathcal{F}$-expansiva para ϕ, ya que en aquel caso la bola $\mathcal{F}$-dependiente de un punto está contenida en la órbita que pasa por dicho punto.

El *soporte* de una medida $\mu \in \mathcal{M}(X)$ es el conjunto $\text{supp}(\mu)$ de puntos $x \in X$ tales que para cada vecindad U de x, $\mu(U) > 0$. Se sigue entonces que $\text{supp}(\mu)$ es un conjunto compacto no vacío de X.

Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo y $\tau : X \to (0, +\infty)$ una función continua. Considere el flujo suspensión $(X^{\tau,f}, \phi^{\tau,f})$ y el mapeo $T^{\tau,f} : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X^{\tau,f})$ de modo tal que $T^{\tau,f}(\mu) = \frac{1}{\mu(\tau)}(\mu \times m)|_{X^{\tau,f}}$ donde $\mu(\tau) = \int_X \tau(x) d\mu(x)$ y m es la medida de Lebesgue. Así, para cada función continua $h : X^{\tau,f} \to \mathbb{R}$ se tiene

$$\int_{X^{\tau,f}} h(y) dT^{\tau,f}(\mu) = \frac{1}{\mu(\tau)} \int_X \int_0^{\tau(x)} h(\phi_t^{\tau,f}(x,0)) dt \; d\mu(x).$$

Por otro lado, dado otro espacio métrico compacto Y y un mapeo Borel medible $f : X \to Y$ podemos definir el pushforward de medidas $f_* : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(Y)$ tal que $f_*(\mu) = \mu \circ f^{-1}$.

Denotamos con $\mathcal{S}$ al subconjunto de $\mathcal{H}$ de homeomorfismos crecientes. Dado un subconjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ escribimos $\mathcal{SFS} \subset \mathcal{F}$ si $g_1 \circ f \circ g_2 \in \mathcal{F}$ toda vez que $g_1, g_2 \in \mathcal{S}$ y $f \in \mathcal{F}$. Recordemos que $\mathcal{B}$ denota al conjunto de funciones limitadas de $\mathcal{H}$. En [21], se define una especie de conjuntos *invariantes* de $\mathcal{H}$ los cuales satisfacen la propiedad de *cerradura sobre traslación normalizada.*

Definición 2.3.3 *Decimos que $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ es invariante si para cada $c \in \mathbb{R}$ y cada $f \in \mathcal{F}$, la función $f_c \in \mathcal{H}$ definida por $f_c(t) = f(t+c) - f(c)$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$*

también pertenece a $\mathcal{F}$.

Claramente los conjuntos: $\mathcal{H}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{B}$, $\{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}$, las dilataciones homogéneas de la recta $\mathcal{D} = \{h : h(t) = at,\ a \in \mathbb{R}\}$ y los polinomios que fijan el origen son invariantes.

Con estas definiciones, podemos enunciar las siguientes propiedades que fueron motivadas por los Teoremas 2.1, 2.2 y 2.4 en [17].

Teorema 2.3.4 *Las siguientes propiedades se tienen para cada flujo ϕ definido en un espacio métrico compacto, cada medida de probabilidad boreliana μ y cada subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{H}$:*

(1) *Si $\mathcal{F}$ es regular y μ es $\mathcal{F}$-expansiva, entonces μ se anula a lo largo de órbitas.*

(2) *Si μ es $\mathcal{F}$-expansiva y $\mathcal{F} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$, entonces $supp(\mu) \cap Sing(\phi) = \emptyset$.*

(3) *Si $\mathcal{S}\mathcal{F}\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$ y f es una equivalencia entre ϕ y ψ, entonces μ es $\mathcal{F}$-expansiva si y solo si $f_*(\mu)$ es $\mathcal{F}$-expansiva.*

(4) *Si $\mathcal{F}$ es regular y μ es $\mathcal{F}$-expansiva, entonces μ es una medida expansiva del homeomorfismo ϕ_T para cada $T \neq 0$.*

(5) *Si $\mathcal{F}$ es regular y $T^{1,f}(\mu)$ es $\mathcal{F}$-expansiva, entonces μ es expansiva.*

(6) *Si $\mathcal{F}$ es invariante y μ es expansiva para f, entonces $T^{1,f}(\mu)$ es $\mathcal{F}$-expansiva.*

Antes de realizar la prueba de este Teorema daremos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.3.1 El recíproco del Item (1) es falso en general. Considere ϕ el flujo definido por la ecuación diferencial $(\dot{x}, \dot{y}) = (-y, x)$ para este flujo la medida de Lebesgue m, la cual se anula a lo largo de órbitas, no es $\{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}$-expansiva.

Ejemplo 2.3.2 La recíproca del Item (2) es falso en general. En efecto, considere el flujo del Ejemplo 2.1.1 este no tiene singularidades pero admite medidas $\{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}$-expansivas.

Ejemplo 2.3.3 El recíproco del Item (4) es falso. Basta notar que en [17] se muestra que el *atractor geométrico de Lorenz* admite una medida μ que es expansiva para cada ϕ_t pero que contiene una singularidad en su soporte, por lo cual usando el Item (2) se tiene que μ no es $\mathcal{D}$-expansiva.

2.3.1 Prueba del Teorema 2.3.4

Previamente mostraremos dos resultados que serán de utilidad.

Lema 2.3.5 *Sea ϕ un flujo en un espacio métrico compacto X y sea $\mathcal{F}$ regular para ϕ. Si para cada par $(x,\delta) \in X \times \mathbb{R}_+$ existen $\gamma > 0$ tales que si $y \in X$ satisface que $d(\phi_t(x), \phi_t(y)) \leq \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ toda vez que $d(x,y) \leq \gamma$, entonces $y \in \Gamma_\delta^\phi(x, \mathcal{F})$.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $\delta > 0$. Dado $y \in B[x,\gamma]$ donde $\gamma > 0$ es tal que

$$d(\phi_t(x), \phi_t(y)) \leq \frac{\delta}{2} \text{ para cada } t \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Por la condición de regularidad de $\mathcal{F}$ existe $h \in \mathcal{F}$ con la siguiente propiedad

$$d(\phi_t(y), \phi_{h(t)}(y)) \leq \frac{\delta}{2} \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Entonces, de (2.9) y (2.10), se obtiene $d(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) \leq \delta,$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$. De esta forma $y \in \Gamma_\delta^\phi(x, \mathcal{F})$. ■

El siguiente resultado es motivado por el Lema 2.9 en [17].

Lema 2.3.6 *Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de $\mathcal{H}$. Si $f : X \to X$ es un homeomorfismo en un espacio métrico compacto X, entonces para cada $z = (x, \lambda) \in X^{1,f}$ y $0 < \delta < \frac{1}{4}$ tenemos que*

(1) *Si $\mathcal{F}$ es invariante, existe un $\widehat{\delta} > 0$ tal que $\Gamma_{\widehat{\delta}}^{\phi^{1,f}}(z, \mathcal{F}) \subset \Gamma_\delta^f(x) \times [0,1]$ y*

(2) *Si $\mathcal{F}$ es regular, entonces $\Gamma_{\frac{\delta}{2}}^f(x) \times (\lambda - \frac{\delta}{2}, \lambda + \frac{\delta}{2}) \subset \Gamma_\delta^{\phi^{1,f}}(z, \mathcal{F})$.*

Demostración. Probamos a continuación el Item (1). Tome $\widehat{\delta} > 0$ con la propiedad que $\widehat{\delta} < \delta$ y además para $d(x, y) \leq \widehat{\delta}$ se tenga $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \leq \delta$. Sea $y_0 = (y, s) \in \Gamma_{\widehat{\delta}}^{\phi^{1,f}}(z, \mathcal{F})$. Entonces existe un $h \in \mathcal{F}$ tal que

$$d^{1,f}(\phi_t^{1,f}(z), \phi_{h(t)}^{1,f}(y_0)) \leq \widehat{\delta}, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Existe un número r con $|r| \leq \frac{1}{2}$ tal que $\phi_r^{1,f}(z) = (x, \frac{1}{2})$. Haciendo $z' = \phi_r^{1,f}(z)$, $y_0' = \phi_{h(r)}^{1,f}(y_0)$ y $\widehat{h}(t) = h(t + r) - h(r)$ se tiene que $\widehat{h} \in \mathcal{F}$ y también

$$d^{1,f}(\phi_t^{1,f}(z'), \phi_{\widehat{h}(t)}^{1,f}(y_0')) \leq \widehat{\delta}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Dado que $\phi_1^{1,f}(z') = (x, \frac{3}{2})$ y $\phi_{\widehat{h}(1)}^{1,f}(y_0') = (y, h(1+r)+s)$ entonces $|h(1+r)+s-\frac{3}{2}| \leq \widehat{\delta}$. Como $0 < \widehat{\delta} < \delta < \frac{1}{4}$ obtenemos $1 \leq h(1+r)+s \leq 2$ por lo cual $\phi_{\widehat{h}(1)}^{1,f}(y_0') = (f(y), t_1)$ para algún $0 \leq t_1 \leq 1$. Entonces

$$\tfrac{1}{2}d(f(x), f(y)) + \tfrac{1}{2}d(f^2(x), f^2(y)) \leq d^{1,f}(\phi_t^{1,f}(z'), \phi_{\widehat{h}(t)}^{1,f}(y_0')) \leq \widehat{\delta},$$

lo que implica $d(f(x), f(y)) \leq \widehat{\delta}$ o $d(f^2(x), f^2(y)) \leq \widehat{\delta}$. En cualquier caso, por la elección de $\widehat{\delta}$, se tiene $d(f(x), f(y)) \leq \delta$. Análogamente, es posible mostrar que $d(f^k(x), f^k(y)) \leq \delta$ para cada $k \in \mathbb{Z}$; esto es, $y_0 \in \Gamma_\delta^f(x) \times [0, 1]$.

Para ver el Item (2), tome $y_0 = (y, s) \in \Gamma_{\frac{\delta}{2}}^f(x) \times (\lambda - \frac{\delta}{2}, \lambda + \frac{\delta}{2})$ y $t \in \mathbb{R}$ por lo tanto:

$$\begin{aligned}
d^{1,f}(\phi_t^{1,f}(z), \phi_t^{1,f}(y_0)) &\leq d^{1,f}(\phi_t^{1,f}(z), \phi_t^{1,f}(y, \lambda)) + d^{1,f}(\phi_t^{1,f}(y, \lambda), \phi_t^{1,f}(y_0)) \\
&= d^{1,f}\left((f^r(x), \alpha), (f^r(y), \alpha)\right) + |s - \lambda|, \qquad (\alpha, r) \in [0, 1] \times \mathbb{Z} \\
&\leq (1 - \alpha)d(f^r(x), f^r(y)) + \alpha d(f^{r+1}(x), f^{r+1}(y)) + |s - \lambda| \\
&\leq (1 - \alpha)\frac{\delta}{2} + \alpha\frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.
\end{aligned}$$

Por consiguiente $y_0 = (y, s) \in \Gamma_\delta^{\phi^{1,f}}(z, \mathcal{F})$. ■

Prueba del Teorema 2.3.4. Veamos la prueba del Item (1), sea $\delta > 0$ una constante de $\mathcal{F}$-expansividad para μ. Para dicho $\delta > 0$, existe $\alpha > 0$ que satisface lo siguiente:

$$\text{Si } y \in \phi_{(-\alpha,\alpha)}(x), \text{ entonces } d(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \tfrac{\delta}{2} \text{ para cada } (x,t) \in X \times \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Tome $y \in \phi_{(-\alpha,\alpha)}(x)$. Dado que $\mathcal{F}$ es regular, por (2.11) y Lema 2.3.5, se sigue que $y \in \Gamma_\delta^\phi(x, \mathcal{F})$; esto es, $\phi_{(-\alpha,\alpha)}(x) \subset \Gamma_\delta^\phi(x, \mathcal{F})$ para cada $x \in X$. Además dado cualquier $x \in X$, la órbita $\phi_{\mathbb{R}}(x)$ es un conjunto separable en X. Por tanto, existe una secuencia $\{x_n\} \subset \phi_{\mathbb{R}}(x)$ densa en $\phi_{\mathbb{R}}(x)$ y por lo cual $\{\phi_{(-\alpha,\alpha)}(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ cubre $\phi_{\mathbb{R}}(x)$ lo que implica:

$$\mu(\phi_{\mathbb{R}}(x)) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\phi_{(-\alpha,\alpha)}(x_n)) = 0.$$

De este modo μ se anula a lo largo de órbitas.

Ahora probaremos el Item (2). Por la $\mathcal{F}$-expansividad de μ, existe un $\delta > 0$ tal que para todo elemento en X, y en particular para cada $\sigma \in Sing(\phi)$, se verifica $\mu(\Gamma_\delta^\phi(\sigma, \mathcal{F})) = 0$. Por otro lado, dado $h \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}$, escogemos un $\lambda > 0$ que satisface $|h(t)| \leq \lambda$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Fijado $\sigma_0 \in Sing(\phi)$, es posible hallar un $\gamma > 0$ tal que

$$d(\phi_s(y), \sigma_0) \leq \delta \text{ para todo } |s| \leq \lambda, \text{toda vez que } d(\sigma_0, y) \leq \gamma.$$

Entonces, se cumple $B[\sigma_0, \gamma] \subset \Gamma_\delta^\phi(\sigma_0, \mathcal{F})$; por tanto, $\mu(B[\sigma_0, \gamma]) = 0$. Lo cual implica que $\sigma_0 \notin \operatorname{supp}(\mu)$.

Veamos la prueba del Item (3), sea $f : X \to Y$ una equivalencia entre los flujos ϕ en X y ψ en Y. Previamente, probaremos la siguiente afirmación: para cualquier $\delta > 0$ existe un $\alpha > 0$ tal que $f^{-1}(\Gamma_\alpha^\psi(z, \mathcal{F})) \subset \Gamma_\delta^\phi(f^{-1}(z), \mathcal{F})$, para cada $z \in Y$. En efecto, sea $\delta > 0$. Por compacidad de Y, sabemos que f^{-1} es uniformemente continua, por tanto, existe un $\beta > 0$ con la siguiente propiedad $d(f^{-1}(z), f^{-1}(w)) \leq \delta$ toda vez que $d(z, w) \leq \beta$ con $z, w \in Y$. Fijemos $0 < \alpha < \beta$. Dados $z, w \in Y$ tales que $w \in \Gamma_\alpha^\psi(z, \mathcal{F})$, existe $h \in \mathcal{F}$ que satisface:

$$d(\psi_t(z), \psi_{h(t)}(w)) \leq \alpha, \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$d(f^{-1}(\psi_t(z)), f^{-1}(\psi_{h(t)}(w))) \leq \delta, \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

y usando la propiedad de equivalencia se tiene $d(\phi_t(f^{-1}(z)), \phi_{\widehat{h}(t)}(f^{-1}(w))) \leq \delta$ para cada $t \in \mathbb{R}$, donde $\widehat{h} = h_{f^{-1}(w)} \circ h \circ h^{-1}_{f^{-1}(z)}$ y $h \in \mathcal{F}$. Sabemos por condición que $\mathcal{SFS} \subset \mathcal{F}$, por lo cual $\widehat{h} \in \mathcal{F}$ y de esta manera $f^{-1}(w) \in \Gamma^{\phi}_{\delta}(f^{-1}(z), \mathcal{F})$.

Continuando con la prueba del Item (3), tome $\delta > 0$ como la constante de $\mathcal{F}$-expansividad de $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Dados $z \in Y$ y B un conjunto de Borel tal que $B \subset \Gamma^{\psi}_{\alpha}(z, \mathcal{F})$. Por la afirmación anterior: $f^{-1}(B) \subset \Gamma^{\phi}_{\delta}(f^{-1}(z), \mathcal{F})$, por lo cual, $f_*\mu(B) = \mu(f^{-1}(B)) = 0$; esto es, $f_*\mu(\Gamma^{\psi}_{\alpha}(z, \mathcal{F})) = 0$. Luego $f_*\mu$ es $\mathcal{F}$-expansiva. La implicación recíproca es análoga (basta colocar f en lugar de f^{-1}).

Probemos ahora el Item (4). Sin pérdida de generalidad supondremos que $T > 0$. Para cada $\delta > 0$ existe un $\alpha > 0$ tal que

$$d(\phi_t(z), \phi_t(w)) \leq \delta \text{ para cada } t \in [0, T] \text{ siempre que } z, w \in X \text{ y } d(z, w) \leq \alpha.$$

Sean $x, y \in X$ con $y \in \Gamma^{\phi_T}_{\alpha}(x)$. Dado $t \in \mathbb{R}$ existe un único $m \in \mathbb{Z}$ que satisface $t \in [mT, (m+1)T]$. Entonces

$$d(\phi_t(x), \phi_t(y)) = d(\phi_{t-mT}(\phi_{mT}(x)), \phi_{t-mT}(\phi_{mT}(y))) \leq \delta,$$

puesto que $d(\phi_{mT}(x), \phi_{mT}(y)) \leq \alpha$ y $t - mT \in [0, T]$. Por la condición de regularidad de $\mathcal{F}$ y Lema 2.3.5 se tiene que $y \in \Gamma^{\phi}_{\delta}(x, \mathcal{F})$; de esta manera $\Gamma^{\phi_T}_{\alpha}(x) \subset \Gamma^{\phi}_{\delta}(x, \mathcal{F})$ lo que concluye la prueba.

Para probar el Item (5), supongamos que $T^{1,f}(\mu)$ es $\mathcal{F}$-expansiva para el flujo suspensión $\phi^{1,f}$. Tome $\delta \in (0, \frac{1}{4})$ una constante de $\mathcal{F}$-expansividad de $T^{1,f}(\mu)$. Usando el Lema 2.3.6 podemos concluir que para todo $x \in X$, existe una partición del $[0, 1)$; esto es, existen $t_1, \cdots, t_{k(x)} \in [0, 1)$ que satisfacien $[0, 1) = \bigcup_{1 \leq j \leq k(x)} [t_j, t_{j+1})$ y

$$\Gamma^{f}_{\frac{\delta}{2}}(x) \times [0, 1) \subset \bigcup_{j=1}^{r=k(x)} \Gamma^{\phi^{1,f}}_{\delta}(x, t^*_j),$$

donde t_j^* es el punto medio de $[t_j, t_{j+1})$. Luego, por la expansividad de $T^{1,f}(\mu)$, para cada $x \in X$ se tiene:

$$\mu(\Gamma^f_{\frac{\delta}{2}}(x)) \leq \sum_{j=1}^{j=k(x)} \int_{\Gamma^{\phi^{1,f}}_{\delta}(x,t_j^*)} dT^{1,f}(\mu) = \sum_{j=1}^{j=k(x)} T^{1,f}(\mu)(\Gamma^{\phi^{1,f}}_{\delta}(x, t_j^*)) = 0.$$

Por tanto μ es expansiva para f.

Finalmente, veamos el Item (6). Sea μ y tome δ una constante de expansividad y un $\widehat{\delta}$ satisfaciendo las condiciones del Lema 2.3.6. Entonces, dado $z = (x, \lambda) \in X^{1,f}$ se verifica

$$T^{1,f}(\mu)(\Gamma^{\phi^{1,f}}_{\widehat{\delta}}(z, \mathcal{F})) = \int_{\Gamma^{\phi^{1,f}}_{\widehat{\delta}}(z,\mathcal{F})} dT^{1,f}(\mu) \leq \int_{\Gamma^f_{\delta}(x)\times[0,1)} dT^{1,f}(\mu) = \mu(\Gamma^f_{\delta}(x)) = 0,$$

por lo cual $T^{1,f}(\mu)$ es $\mathcal{F}$-expansiva.

■

2.4 Conjunto de medidas $\mathcal{F}$-expansivas

En adelante estudiaremos el comportamiento topológico del conjunto de medidas $\mathcal{F}$-expansivas de ϕ. Para motivar ello, haremos las siguientes notaciones:

- $\mathcal{M}_{ex}(X, \phi, \mathcal{F}) = \{\mu \in \mathcal{M}(X) : \mu$ es $\mathcal{F}$-expansiva para $\phi\}$.
- $\mathcal{M}_{orb}(X, \phi) = \{\mu \in \mathcal{M}(X) : \mu$ se anula a lo largo de las órbitas de $\phi\}$.

En principio, por el Teorema 2.3.4, estos conjuntos satisfacen en general:

$$\mathcal{M}_{ex}(X, \phi, \mathcal{F}) \subsetneqq \mathcal{M}_{orb}(X, \phi) \subsetneqq \mathcal{M}(X).$$

Los contenidos estrictos pueden observarse, por ejemplo, considerando el siguiente flujo: sea $\alpha \in \mathbb{Q}$, tome ϕ como la suspensión de R donde $R(x) = x + \alpha$ en $\mathbb{S}^1$. Entonces $\mathcal{M}_{ex}(X, \phi, \mathcal{F}) = \emptyset$, $T^{1,f}(m) \in \mathcal{M}_{orb}(X, \phi)$ donde m es la medida de Lebesgue en $\mathbb{S}^1$ y si $\delta_p \in \mathcal{M}(X)$ es la medida soportada en $\{p\}$, se tiene que $\delta_p \notin \mathcal{M}_{orb}(X, \phi)$.

Un ejemplo menos artifical para el segundo contenido estricto fue dado por Beck [10], quien construye un flujo ϕ en el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ tal que $m \notin \mathcal{M}_{orb}(X, \phi)$.

Veamos ahora un caso donde se da la igualdad de la primera inclusión: considere $f : X \to X$ un *esencialmente N-expansivo* homeomorfismo, esto es, $\Gamma_\delta^f(\cdot)$ tiene cardinal N en X (ver [9]). Entonces, la suspensión $\phi^{1,f}$ no es un flujo $\mathcal{H}$-expansivo, pero satisface $\mathcal{M}_{ex}(X, \phi, \mathcal{H}) = \mathcal{M}_{orb}(X, \phi)$.

Así, teniendo en cuenta las particularidades de estos conjuntos, a continuación analizaremos el comportamiento topológico de cada uno de ellos. Para dicho fin, es necesario fijar algunas notaciones.

El conjunto $\mathcal{M}(X)$ de todas las medidas de probabilidad Borelianas de X es un espacio topológico compacto metrizable con la *topología débil estrella* definida por la convergencia débil, esto es, $\mu_n \to \mu$ si y solo si $\int \phi d\mu_n \to \int \phi d\mu$ para cada mapeo continuo $\phi : X \to \mathbb{R}$. En adelante, toda aproximación entre medidas será considerada en esta topología.

Un subconjunto Z de un espacio topológico Y se dice G_δ si es la intersección numerable de conjuntos abiertos en Y y se dice $G_{\delta\sigma}$ si es la unión contable de conjuntos G_δ.

Con estas nociones podemos mostrar la primera caracterización.

Teorema 2.4.1 *Sea ϕ un flujo en un espacio métrico compacto X. El conjunto de medidas que se anulan a lo largo de las órbitas de ϕ es un conjunto G_δ de $\mathcal{M}(X)$.*

Demostración. Para cada $(\lambda, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+^2$ definimos:

$$\Lambda(\lambda, \varepsilon) = \{\mu \in \mathcal{M}(X) : \mu(\phi_{[-\lambda,\lambda]}(x)) \geq \varepsilon \text{ para algún } x \in X\}.$$

Se sigue que

$$\mathcal{M}_{orb}(X, \phi) = \bigcap_{(k,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \left(\mathcal{M}(X) \setminus \Lambda\left(k, \frac{1}{m}\right)\right).$$

Resta, por tanto, probar que $\Lambda(\lambda, \varepsilon)$ es cerrado. Sea $\mu_n \in \Lambda(\lambda, \varepsilon)$ una secuencia con la propiedad $\mu_n \to \mu$ para algún $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Tome una secuencia $x_n \in X$ tal que

$$\varepsilon \leq \mu_n(\phi_{[-\lambda,\lambda]}(x_n)), \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Por la compacidad de X, podemos suponer que $x_n \to x$ para algún $x \in X$. Fije una vecindad compacta K de $\phi_{[-\lambda,\lambda]}(x)$. Supongamos que exista una subsecuencia $n_j \to \infty$ tal que $\phi_{[-\lambda,\lambda]}(x_{n_j}) \not\subset \text{int}(K)$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Entonces, es posible encontrar una secuencia $w_j \in \phi_{[-\lambda,\lambda]}(x_{n_j}) \setminus \text{int}(K)$ y así se obtiene $t_j \in [-\lambda, \lambda]$ de modo tal que $w_j = \phi_{t_j}(x_{n_j})$. Sin pérdida de generalidad, asumiremos que $t_j \to t$ y $w_j \to w$ donde $w = \phi_t(x)$; por tanto, $w \in \text{int}(K)$ lo cual es una contradicción. Entonces, $\phi_{[-\lambda,\lambda]}(x_n) \subset K$ para todo n suficientemente grande. Dado que $\mu_n \to \mu$, obtenemos:

$$\varepsilon \leq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(\phi_{[-\lambda,\lambda]}(x_n)) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(K) = \mu(K).$$

Por lo cual, $\varepsilon \leq \mu(\phi_{[-\lambda,\lambda]}(x))$ y en consecuencia $\mu \in \Lambda(\lambda, \varepsilon)$. ■

El resultado anterior muestra, en particular, que el conjunto de medidas que se anulan a lo largo de las órbitas de un flujo $\mathcal{F}$-expansivo, es un G_δ de $\mathcal{M}(X)$. Además, en este caso se tiene $\mathcal{M}_{ex}(X, \phi, \mathcal{F}) = \mathcal{M}_{orb}(X, \phi)$, por lo que podemos concluir que $\mathcal{M}_{ex}(X, \phi, \mathcal{F})$ es un G_δ de $\mathcal{M}(X)$. Motivados por esto último, daremos condiciones suficientes para garantizar que el conjunto de medidas $\mathcal{F}$-expansivas de un flujo tenga un comportamiento topológico definido en $\mathcal{M}(X)$.

Teorema 2.4.2 *El conjunto de medidas $\mathcal{F}$-expansivas de un flujo en un espacio métrico compacto X es un $G_{\delta\sigma}$ en $\mathcal{M}(X)$ en cualquiera de los siguientes casos:*

(1) *Si $\mathcal{F}$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{H}$ o*

(2) *Si $\mathcal{F} = \mathcal{H}$ y el flujo ϕ no tiene singularidades.*

El siguiente resultado es inmediato.

Corolario 2.4.3 *Si ϕ es un flujo sin singularidades en un espacio métrico compacto X, entonces el conjunto de medidas expansivas de ϕ es un $G_{\delta\sigma}$ en $\mathcal{M}(X)$.*

2.4.1 Prueba del Teorema 2.4.2

Con el fin de hacer más entendible la prueba, previamente mostraremos algunos resultados y notaciones.

En [38], Thomas realiza una variante de la bola dinámica de un flujo para definir la noción de *h-expansividad fuerte* con la cual prueba que un flujo sin singularidades es *h-expansivo*. De este modo, teniendo en mente las ideas de Keynes, Sears y Thomas introducimos una nueva bola dinámica con interesantes propiedades. Más precisamente, dado un flujo ϕ de X, $x \in X$, $\delta > 0$ y un subconjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$, definimos la *$\mathcal{F}$-dependiente bola dinámica fuerte* como:

$$\widetilde{\Gamma}_{\delta}^{\phi}(x, \mathcal{F}) = \bigcap_{r>0} \bigcap_{\gamma>\delta} \bigcup_{h\in\mathcal{F}} \bigcap_{|t|\leq r} \phi_{-h(t)}(B[\phi_t(x), \gamma]). \tag{2.12}$$

Una importante propiedad de esta bola, que veremos más adelante, es que en ausencia de singularidades, $\widetilde{\Gamma}_{\delta}^{\phi}(x, \mathcal{F})$ es un conjunto cerrado para cada $x \in X$. Claramente $\Gamma_{\delta}^{\phi}(x, \mathcal{F}) \subset \widetilde{\Gamma}_{\delta}^{\phi}(x, \mathcal{F})$ para cada $x \in X$. La proposición siguiente es una especie de recíproco para esta afirmación en el caso no singular.

Lema 2.4.4 *Sea ϕ un flujo en un espacio métrico compacto X. Si el flujo ϕ no tiene singularidades, entonces existe $T_0 > 0$ tal que para cada λ satisfaciendo $0 < \lambda < T_0$ existe un $\gamma > 0$ que verifica la propiedad: $d(\phi_{\pm\lambda}(x), z) > \gamma$ siempre que $x, z \in X$ y $d(x, z) < \gamma$.*

Demostración. Ver Lema 1 en [14]. ■

Proposición 2.4.5 *Si el flujo ϕ no tiene singularidades, entonces para cada subconjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ y cada $\delta > 0$ existe un $\delta' \in (0, \delta)$ tal que*

$$\widetilde{\Gamma}^{\phi}_{\delta'}(x, \mathcal{F}) \subset \Gamma^{\phi}_{\delta}(x, \mathcal{H}) \quad \textit{para cualquier } x \in X.$$

Demostración. Por Lema 2.2.2 Item (1), es suficiente probar el resultado para el caso $\mathcal{F} = \mathcal{H}$. Fije T_0 como en el Lema 2.4.4. Dado $\delta > 0$, existe un $0 < \lambda < T_0$ con la propiedad que:

$$d(\phi_t(x), x) < \frac{\delta}{2} \text{ para cada } x \in X \text{ siempre que } |t| < \lambda. \tag{2.13}$$

Por Lema 2.4.4, para este $\lambda > 0$ existe $\gamma > 0$ tal que:

$$d(\phi_\lambda(x), y) > \gamma \text{ toda vez que } d(x, y) < \gamma. \tag{2.14}$$

Considere $m \in \mathbb{N}$ satisfaciendo $\delta < \gamma m$ y tome $\delta' = \frac{\delta}{3m} > 0$. Dado un $z \in \widetilde{\Gamma}^{\phi}_{\delta'}(x, \mathcal{H})$, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un $h_k \in \mathcal{H}$ verificando:

$$d(\phi_t(x), \phi_{h_k(t)}(z)) < \frac{3\delta'}{2} \text{ para cada } |t| \leq k. \tag{2.15}$$

Se sigue que para cada $-k \leq t \leq k$ se tiene:

$$d(\phi_{h_{k+1}(t)}(z), \phi_{h_k(t)}(z)) \leq d(\phi_t(x), \phi_{h_{k+1}(t)}(z)) + d(\phi_t(x), \phi_{h_k(t)}(z)) < 3\delta' < \gamma.$$

Por tanto,

$$d(\phi_{h_{k+1}(t) - h_k(t)}(\phi_{h_k(t)}(z)), \phi_{h_k(t)}(z)) = d(\phi_{h_{k+1}(t)}(z), \phi_{h_k(t)}(z)) < \gamma.$$

De la relación (2.14) y de $(h_{k+1} - h_k)(0) = 0$ se obtiene que $|h_{k+1}(t) - h_k(t)| < \lambda$ para todo $-k \leq t \leq k$. Con esto, definimos una función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo inductivo. Defina $h = h_1$ en $[-1, 1]$. Sabemos que $|h_2(1) - h_1(1)| < \lambda$, por lo cual existe una función continua h en $[1, 2]$ tal que $h(1) = h_1(1)$, $h(2) = h_2(2)$ y $|h(t) - h_2(t)| < \lambda$ para cada $t \in [1, 2]$. A su vez, se tiene $|h_2(-1) - h_1(-1)| < \lambda$ por lo que existe una función continua (que llamaremos h también) en $[-2, -1]$ tal que $h(-1) = h_1(-1)$,

$h(-2) = h_2(-2)$ y $|h(t) - h_2(t)| < \lambda$ para cualquier $t \in [-2,-1]$. Continuando del mismo modo, obtenemos en particular una función continua $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(0) = 0$, esto es, $h \in \mathcal{H}$. Afirmamos que este h sirve para la definición de bola dinámica. En efecto, tome $t \in \mathbb{R}$ y suponga por comodidad que $t > 0$. Analizaremos dos casos:

Caso 1: $t \in [0,1]$.

En este caso, por la desigualdad (2.15) obtenemos que:

$$d(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(z)) = d(\phi_t(x), \phi_{h_1(t)}(z)) < \frac{3\delta'}{2} = \frac{\delta}{2m} < \delta.$$

Caso 2: $t \in [k, k+1]$, para algún $k \geq 1$.

Dado que $|h(t) - h_{k+1}(t)| < \lambda$, por la desigualdad (2.13) se sigue que:

$$d(\phi_{h(t)}(z), \phi_{h_{k+1}(t)}(z)) < \frac{\delta}{2},$$

y finalmente, por (2.15), se tiene:

$$d(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(z)) \leq d(\phi_t(x), \phi_{h_{k+1}(t)}(z)) + d(\phi_{h(t)}(z), \phi_{h_{k+1}(t)}(z)) < \frac{3\delta'}{2} + \frac{\delta}{2}.$$

De donde

$$d(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(z)) < \frac{\delta}{2m} + \frac{\delta}{2} \leq \delta.$$

Así, $z \in \Gamma^{\phi}_{\delta}(x, \mathcal{H})$. ■

La proposición anterior muestra, en particular, que el estudio de las medidas expansivas puede ser realizado utilizando la bola dinámica definida en (2.12), lo cual puede ser deducido directamente del siguiente Corolario.

Corolario 2.4.6 *Si el flujo ϕ no tiene singularidades, entonces para cada $\delta > 0$ existe un $\delta' \in (0, \delta)$ tal que:*

$$\widetilde{\Gamma}^{\phi}_{\delta'}(x, \mathcal{H}) \subset \Gamma^{\phi}_{\delta}(x, \mathcal{H}) \subset \widetilde{\Gamma}^{\phi}_{\delta}(x, \mathcal{H}) \quad \textit{para todo } x \in X.$$

Una relación más fuerte es obtenida en el caso que las reparametrizaciones formen un conjunto compacto.

Lema 2.4.7 *Sea ϕ un flujo en un espacio métrico compacto X y sea $\delta > 0$. Si $\mathcal{F}$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{H}$, entonces*

$$\widetilde{\Gamma}_\delta^\phi(x, \mathcal{F}) = \Gamma_\delta^\phi(x, \mathcal{F}) \text{ para cada } x \in X.$$

Demostración. Dado que $\Gamma_\delta^\phi(x, \mathcal{F}) \subset \widetilde{\Gamma}_\delta^\phi(x, \mathcal{F})$ para cada $x \in X$, bastará probar entonces la inclusión recíproca. Considere $z \in \widetilde{\Gamma}_\delta^\phi(x, \mathcal{F})$, entonces, para cada $r > 0$ y $\gamma > \delta$ existe un $h \in \mathcal{F}$ con la propiedad que:

$$d(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(z)) \leq \gamma, \text{ para cada } -r \leq t \leq r.$$

En particular, dado $m \in \mathbb{N}$, existe $h_m \in \mathcal{F}$ satisfaciendo:

$$d(\phi_t(x), \phi_{h_m(t)}(z)) \leq \delta + \frac{1}{m}, \text{ para todo } -m \leq t \leq m. \tag{2.16}$$

De la compacidad de $\mathcal{F}$ podemos suponer que existe un $f \in \mathcal{F}$ tal que $h_m \in \mathcal{B}_f$ para cada $m \in \mathbb{N}$ y $h_m \to h$ para algún $h \in \mathcal{B}_f \cap \mathcal{F}$. Sea $t \in \mathbb{R}$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $-m_0 \leq t \leq m_0$ y por (2.16) tenemos:

$$d(\phi_t(x), \phi_{h_m(t)}(z)) \leq \delta + \frac{1}{m}, \text{ para cualquier } m \geq m_0.$$

Haciendo $m \to \infty$, obtenemos $d(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(z)) \leq \delta$ y por tanto $z \in \Gamma_\delta^\phi(x, \mathcal{F})$. ■

El siguiente resultado es una variante del Lema 12 en [38].

Lema 2.4.8 *Sea ϕ un flujo sin singularidades en un espacio métrico compacto X. Para cada $\lambda > 0$ suficientemente pequeño, existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $x, y \in X$ y para cada intervalo $[T_1, T_2]$ conteniendo el origen y todo $\alpha \in \mathcal{H}$, se tiene lo siguiente: si $d(\phi_t(x), \phi_{\alpha(t)}(y)) \leq \varepsilon$ para cada $t \in [T_1, T_2]$, entonces $|\alpha(t) - t| < \lambda$ para $|t| \leq 2$ en $[T_1, T_2]$ y $|\alpha(t) - t| < |t|\lambda$ para $|t| > 2$ en $[T_1, T_2]$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $T_1 = 0$. Fijado $0 < \lambda < T_0$, escogemos $\gamma > 0$ satisfaciendo la hipótesis del Lema 2.4.4. Tome

$0 < \varepsilon < \gamma$ con la propiedad que:

$$d(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \gamma \text{ para todo } 0 \leq t \leq 2 \text{ toda vez que } d(x,y) \leq \varepsilon. \tag{2.17}$$

Sea $\alpha \in \mathcal{H}$ tal que $d(\phi_t(x), \phi_{\alpha(t)}(y)) \leq \varepsilon$ para cada $t \in [0,2]$. Afirmamos que

$$|\alpha(t) - t| < \lambda \text{ para todo } t \in [0,2].$$

En efecto, en caso contrario existe un $t_0 \in (0,2]$ tal que la función continua $g(t) = |\alpha(t) - t|$ satisface $g(t_0) = \lambda$. Podemos suponer que $\alpha(t_0) > t_0$. Dado que $d(x,y) \leq \varepsilon$ por la condición (2.17) se tiene que $d(\phi_{t_0}(x), \phi_{t_0}(y)) < \gamma$, y así, por Lema 2.4.4 se tiene $\gamma < d(\phi_{t_0}(x), \phi_\lambda(\phi_{t_0}(y))) = d(\phi_{t_0}(x), \phi_{\alpha(t_0)-t_0}(\phi_{t_0}(y))) = d(\phi_{t_0}(x), \phi_{\alpha(t_0)}(y))$, lo cual contradice la hipótesis, por lo tanto, de la condición $g(0) = 0$, se sigue que $g(t) < \lambda$ para cada $t \in [0,2]$. Esto prueba la afirmación hecha.

Para el caso $t \in [2,4]$, suponga que $d(\phi_t(x), \phi_{\alpha(t)}(y)) \leq \varepsilon$. Entonces, haciendo $u = t - 2$, se tiene:

$$d(\phi_u(\phi_2(x)), \phi_{\alpha(u+2)-\alpha(2)}(\phi_{\alpha(2)}(y))) = d(\phi_{u+2}(x), \phi_{\alpha(u+2)}(y)) = d(\phi_t(x), \phi_{\alpha(t)}(y)) \leq \varepsilon.$$

Si definimos $G : u \in [0,2] \mapsto \alpha(u+2) - \alpha(2)$ se tiene que $G(0) = 0$ y también:

$$d(\phi_u(\phi_2(x)), \phi_{G(u)}(\phi_{\alpha(2)}(y))) \leq \varepsilon \text{ para todo } 0 \leq u \leq 2.$$

Repitiendo el argumento anterior, se obtiene que $|G(u) - u| < \lambda$ para cada $u \in [0,2]$, entonces para cada $t \in [2,4]$ obtenemos:

$$\lambda \geq |G(t-2) - (t-2)| = |\alpha(t) - \alpha(2) - t + 2| \geq |\alpha(t) - t| - |\alpha(2) - 2|,$$

y se sigue que $|\alpha(t) - t| \leq 2\lambda$. Usando un argumento similar, se puede probar por inducción que para $n \geq 1$ se cumple $|\alpha(t) - t| \leq n\lambda$, siempre que $2n - 2 \leq t \leq 2n$. Finalmente, para cada $t > 2$ en $[0, T_2]$ tenemos que $n < t$ y así:

$$|\alpha(t) - t| \leq n\lambda = \frac{n}{t} t\lambda \leq t\lambda.$$

■

Lema 2.4.9 *Sea ϕ un flujo sin singularidades en un espacio métrico compacto X. Existe un $\varepsilon > 0$ tal que para cada $x \in X$, $r > 0$ y cada par de secuencias (h_n) en $\mathcal{H}$ e (y_n) en X con $y_n \to y$, donde $y \in X$, se tiene lo siguiente: si $d(\phi_t(x), \phi_{h_n(t)}(y_n)) \leq \varepsilon$ para todo $(n,t) \in \mathbb{N}\times[-r,r]$, entonces para cada $\delta > 0$ existe un $M \in \mathbb{N}$ satisfaciendo*

$$d(\phi_{h_n(t)}(y_n), \phi_{h_n(t)}(y)) \leq \delta \quad \textit{para cualquier } -r \leq t \leq r \textit{ y } n \geq M.$$

Demostración. Dado $0 < \lambda < T_0$ podemos escoger $\varepsilon > 0$ satisfaciendo el Lema 2.4.8 con respecto de λ. Si el resultado no es cierto, entonces existen las secuencias (y_{n_k}), (h_{n_k}) y (t_k) con la propiedad que $-r \leq t_k \leq r$ y

$$d(\phi_{h_{n_k}(t_k)}(y_{n_k}), \phi_{h_{n_k}(t_k)}(y)) > \delta \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{2.18}$$

Por el Lema 2.4.8 para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$|h_{n_k}(t_k) - t_k| < 2\lambda \max\{|t_k|, 1\}.$$

Dado que $-r \leq t_k \leq r$, existen $a_r, b_r \in \mathbb{R}$ tales que $a_r \leq h_{n_k}(t_k) \leq b_r$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Así, podemos asumir que $h_{n_k}(t_k) \to t_0$ donde $t_0 \in [a_r, b_r]$, por consiguiente, haciendo $k \to \infty$ en (2.18) obtenemos una contradicción. ∎

A continuación exploraremos las propiedades topológicas de la bola dinámica introducida en (2.12). Para esto necesitamos tener en mente algunas nociones de convergencia sobre mapeos multivaluados.

Denote por 2^X_c el conjunto de todos los subconjuntos compactos de X dotado con la *distancia de Hausdorff* d_H [24]. Con esta métrica, el espacio $(2^X_c, d_H)$ es compacto. Un mapeo multivaluado $\Psi : X \to 2^X_c$ se dice *semicontinuo superior* si para cada $x \in X$ y cualquier abierto $V \subset X$ conteniendo $\Psi(x)$, existe una vecindad U de x en X tal que V contiene $\Psi(w)$ para todo $w \in U$. Por ejemplo, en $\mathbb{S}^2$ el mapeo multivaluado $x \mapsto B[x, 1]$ es semicontinuo superior.

Con estas nociones podemos enunciar el siguiente resultado.

Lema 2.4.10 *Si el flujo ϕ no tiene singularidades, entonces existe un $\delta_0 > 0$ tal que las siguientes propiedades se tienen para cada $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ y todo $\delta \in (0, \delta_0)$:*

1. *Para cada $x \in X$ la $\mathcal{F}$-dependiente bola dinámica fuerte, $\widetilde{\Gamma}_{\delta}^{\phi}(x, \mathcal{F})$, es compacta.*
2. *El mapeo multivaluado*

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & X & \longrightarrow & 2_c^X \\ & x & \mapsto & \widetilde{\Gamma}_{\delta}^{\phi}(x, \mathcal{F}), \end{array}$$

   es semicontinuo superior.

Demostración. Escoga $\delta_0 > 0$ satisfaciendo el Lema 2.4.9. Sea $0 < \delta < \delta_0$. para probar el Item (1) es suficiente probar que para cada $x \in X$ y cada $r > 0$, el conjunto $\bigcap_{\gamma > \delta} B_r^{\phi}[x, \gamma, \mathcal{F}]$ es cerrado en X, donde:

$$B_r^{\phi}[x, \gamma, \mathcal{F}] = \bigcup_{h \in \mathcal{F}} \{z \in X : d(\phi_s(x), \phi_{h(s)}(z)) \leq \gamma, \forall\ 0 \leq s \leq r\},\ \forall x \in X,$$

Fije $(r, x) \in \mathbb{R}_+ \times X$. Sea (y_n) cualquier secuencia en $\bigcap_{\gamma > \delta} B_r^{\phi}[x, \gamma, \mathcal{F}]$ y asuma que y_n converge hacia y en X. Dado $\gamma > 0$ tal que $\delta < \gamma < \delta_0$ tome $\beta \in (\delta, \gamma)$. Entonces, existe una secuencia (h_n) en $\mathcal{F}$ con la siguiente propiedad:

$$d(\phi_t(x), \phi_{h_n(t)}(y_n)) \leq \beta \quad \text{para cada } |t| \leq r. \tag{2.19}$$

Dado que $\gamma - \beta > 0$, usando el Lema 2.4.9, existe un $M \in \mathbb{N}$ satisfaciendo

$$d(\phi_{h_n(t)}(y_n), \phi_{h_n(t)}(y)) \leq \gamma - \beta \quad \text{para cualquier } |t| \leq r \text{ y } n \geq M. \tag{2.20}$$

Luego, por (2.19) y (2.20) para cada $-r \leq t \leq r$ y $n \geq M$ tenemos:

$$d(\phi_t(x), \phi_{h_n(t)}(y)) \leq d(\phi_t(x), \phi_{h_n(t)}(y_n)) + d(\phi_{h_n(t)}(y_n), \phi_{h_n(t)}(y)) \leq \gamma.$$

Entonces $y \in B_r^{\phi}[x, \gamma, \mathcal{F}]$ y dado que $\gamma > \delta$ fue escogido arbitrariamente, el resultado se sigue.

Probemos ahora el Item (2), notemos inicialmente que por el Item (1) el mapeo multivaluado:

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & X & \longrightarrow & 2_c^X \\ & x & \mapsto & \widetilde{\Gamma}_\delta^\phi(x, \mathcal{F}), \end{array}$$

está bien definido. Fije $x \in X$. Si Φ no es semicontinua superior en x, entonces existe una vecindad abierta V de $\Phi(x)$ y una secuencia x_n convergiendo para x tal que $\Phi(x_n) \not\subset V$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo cual, podemos seleccionar una nueva secuencia $z_n \in \Phi(x_n) \backslash V = \widetilde{\Gamma}_\delta^\phi(x_n, \mathcal{F}) \backslash V$. Dado $m \in \mathbb{N}$ y $r > 0$, existe una secuencia $g_n \in \mathcal{F}$ que satisface:

$$d(\phi_t(x_n), \phi_{g_n(t)}(z_n)) \leq \delta + \frac{1}{3m}, \text{ para cada } |t| \leq r. \tag{2.21}$$

Por compacidad podemos asumir que $z_n \to z$ para algún $z \in X$ y como V es abierto se tiene, en consecuencia, que $z \notin V$. Por otro lado, existe un $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(\phi_t(x_n), \phi_t(x)) \leq \frac{1}{3m} \text{ para cada } |t| \leq r \text{ y } n \geq K. \tag{2.22}$$

Entonces por (2.21) y (2.22) para cada $-r \leq t \leq r$ y $n \geq K$ obtenemos:

$$d(\phi_t(x), \phi_{g_n(t)}(z_n)) \leq d(\phi_t(x), \phi_t(x_n)) + d(\phi_t(x_n), \phi_{g_n(t)}(z_n)) \leq \delta + \frac{2}{3m}. \tag{2.23}$$

Si m es escogido de tal modo que satisfaga $\delta + \frac{2}{3m} < \delta_0$, entonces por el Lema 2.4.9, existe un $M \in \mathbb{N}$ verificando:

$$d(\phi_{g_n(t)}(z_n), \phi_{g_n(t)}(z)) \leq \frac{1}{3m} \text{ para cualquier } |t| \leq r \text{ y } n \geq M. \tag{2.24}$$

Luego de (2.23) y (2.24) resulta que para $-r \leq t \leq r$ y $j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande:

$$d(\phi_t(x), \phi_{g_j(t)}(z)) \leq d(\phi_t(x), \phi_{g_j(t)}(z_j)) + d(\phi_{g_j(t)}(z_j), \phi_{g_j(t)}(z)) \leq \delta + \frac{1}{m}.$$

De donde se sigue que $z \in \Phi(x) = \widetilde{\Gamma}_\delta^\phi(x, \mathcal{F}) \subset V$, por tanto, $z \in V$; lo cual es una contradicción. ■

Prueba del Teorema 2.4.2. Para cada $\delta, \varepsilon > 0$ definimos el conjunto:

$$C(\delta, \varepsilon, \mathcal{F}) = \{\mu \in \mathcal{M}(X) : \mu(\widetilde{\Gamma}_\delta^\phi(x, \mathcal{F})) \geq \varepsilon \ \text{ para algún } x \in X\}.$$

Lo cual implica la siguiente equivalencia para el conjunto de medidas expansivas con la bola dinámica fuerte:

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{ex}(X, \phi, \mathcal{F}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\mathcal{M}(X) \setminus C\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}, \mathcal{F}\right)\right).$$

La estrategia será la siguiente: probaremos que el conjunto $C(\delta, \varepsilon, \mathcal{F})$ es cerrado en $\mathcal{M}(X)$ para cada $\delta, \varepsilon > 0$, con lo cual $\widetilde{\mathcal{M}}_{ex}(X, \phi, \mathcal{F})$ se torna un subconjunto $G_{\delta\sigma}$ de $\mathcal{M}(X)$. Con ello, haciendo uso de los casos para el sistema $(X, \phi, \mathcal{F})$, obtendremos el resultado deseado.

Para probar que $C(\delta, \varepsilon, \mathcal{F})$ es cerrado, tome una secuencia $\mu_n \in C(\delta, \varepsilon, \mathcal{F})$ tal que $\mu_n \to \mu$ para algún $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Luego escoja una secuencia $x_n \in X$ tal que:

$$\varepsilon \leq \mu_n(\widetilde{\Gamma}_\delta^\phi(x_n, \mathcal{F})), \text{ para cualquier } \ n \in \mathbb{N}.$$

Por la compacidad, podemos suponer que $x_n \to x$ para algún $x \in X$. Fije una vecindad compacta K de $\widetilde{\Gamma}_\delta^\phi(x, \mathcal{F})$.

Afirmamos que existe un $N \in \mathbb{N}$ con la siguiente propiedad:

$$\widetilde{\Gamma}_\delta^\phi(x_n, \mathcal{F}) \subset \operatorname{int}(K) \text{ para todo } n \geq N.$$

Probaremos esta afirmación en los dos casos:

Caso 1: $\mathcal{F}$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{H}$.

Supongamos que existe una subsecuencia $n_k \to \infty$ con la propiedad:

$$\widetilde{\Gamma}_\delta^\phi(x_{n_k}, \mathcal{F}) \not\subset \operatorname{int}(K) \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Entonces, podemos escoger una secuencia $z_k \in \widetilde{\Gamma}_\delta^\phi(x_{n_k}, \mathcal{F}) \setminus \operatorname{int}(K)$ y así para cada $(\gamma, r) \in \mathbb{R}_+$, por definición de bola dinámica fuerte, obtenemos una secuencia $g_k \in \mathcal{F}$ tal que:

$$d(\phi_t(x_{n_k}), \phi_{g_k(t)}(z_k)) \leq \delta + \gamma, \text{ para cada } t \in [-r, r]. \tag{2.25}$$

Dado que $\mathcal{F}$ es compacto, podemos asumir que $z_k \to z$ y $g_k \to g$ para algún $z \in X$ y algún $g \in \mathcal{F}$. Como $\text{int}(K)$ es abierto, entonces $z \notin \text{int}(K)$. Haciendo $k \to \infty$ en (2.25) se obtiene que:

$$d(\phi_t(x), \phi_{g(t)}(z)) \leq \delta + \gamma.$$

Por consiguiente, se tiene que $z \in \widetilde{\Gamma}_\delta^\phi(x, \mathcal{F})$, por lo cual $z \in \text{int}(K)$, lo cual es una contradicción.

Caso 2: El flujo ϕ no tiene singularidades y $\mathcal{F} = \mathcal{H}$.

En este caso, por el Item (2) del Lema 2.4.10, el mapeo Φ es semicontinuo superior, en consecuencia, se tiene que $\Phi(x_n) \subset K$ para n suficientemente grande, lo cual prueba la afirmación hecha.

Por consiguiente, en ambos casos, tenemos que $\widetilde{\Gamma}_\delta^\phi(x_n, \mathcal{F}) \subset \text{int}(K)$ para n grande. Además, de la convergencia $\mu_n \to \mu$ obtenemos:

$$\varepsilon \leq \limsup_{x \to \infty} \mu_n(\widetilde{\Gamma}_\delta^\phi(x_n, \mathcal{F})) \leq \limsup_{x \to \infty} \mu_n(K) \leq \mu(K).$$

Entonces $\varepsilon \leq \mu(\widetilde{\Gamma}_\delta^\phi(x, \mathcal{F}))$, de donde se sigue que $C(\delta, \varepsilon, \mathcal{F})$ es cerrado en $\mathcal{M}(X)$ para cualesquier $(\delta, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+^2$, por tanto, $\widetilde{\mathcal{M}}_{ex}(X, \phi, \mathcal{F})$ es un subconjunto $G_{\delta\sigma}$, pero por Corolario 2.4.6 y el Lema 2.4.7 se tiene que $\widetilde{\mathcal{M}}_{ex}(X, \phi, \mathcal{F}) = \mathcal{M}_{ex}(X, \phi, \mathcal{F})$ en los casos analizados. Lo cual finaliza la prueba del Teorema. ∎

2.4.2 Aproximación por medidas de soporte constante

Ahora veremos algunos resultados de aproximación en el caso que el conjunto de medidas $\mathcal{F}$-expansivas sea un subconjunto de Baire, por lo cual, daremos previamente algunos conceptos topológicos usuales.

Un subconjunto Z de Y se dice *nunca denso* en Y si la clausura de Z en Y tiene interior vacío en Y, y se dice *magro* si es una unión numerable de conjuntos nunca densos en Y. Un espacio topológico Y es un *espacio de Baire* si la intersección de una familia contable de abiertos y densos en Y es denso en Y. Un conjunto $A \subset Y$ es un *subconjunto de Baire* de Y si A es un espacio de Baire con respecto a la topología inducida por Y.

El siguiente concepto es una generalización de la definición del *centro medible-expansivo*, definida recientemente en [31].

Definición 2.4.11 *El centro medible $\mathcal{F}$-expansivo de un flujo ϕ, que denotaremos por $E(\phi, \mathcal{F})$, es la unión de los soportes de todas las medidas $\mathcal{F}$-expansivas de ϕ.*

En muchos casos es posible tener que $E(\phi, \mathcal{F}) = X$, por ejemplo si X es una variedad riemanniana compacta y ϕ es un flujo expansivo sin singularidades, la medida de Lebesgue m en X tiene soporte total, esto es $\operatorname{supp}(m) = X$, y además es expansiva. También es posible mostrar flujos en los cuales $E(\phi, \mathcal{F})$ es un subconjunto propio de X: considere el flujo $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_1$ definido en el disco unitario complejo $\mathbb{D}_1$ de la siguiente manera: $\phi(t, z) = ze^{2\pi it}$. Entonces para cada $\delta > 0$, se tiene $B(0, \delta) \subset \Gamma_\delta^\phi(0, \mathcal{B})$, por tanto, para cualquier medida $\mathcal{B}$-expansiva μ se tiene $0 \notin \operatorname{supp}(\mu)$, por lo tanto, $0 \notin E(\phi, \mathcal{B})$.

Lo anterior no es más que un caso particular del siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4.1 Si el conjunto $\mathcal{F} \cap \mathcal{B}$ es no vacío, entonces toda medida $\mathcal{F}$-expansiva, por el Teorema 2.3.4, no contiene singularidades del flujo en su soporte, con lo cual $E(\phi, \mathcal{F}) \cap Sing(\phi) = \emptyset$.

Con esta definición, podemos obtener el siguiente resultado que generaliza uno de los resultados de aproximación de [31].

Teorema 2.4.12 *Sea ϕ un flujo en un espacio métrico compacto X y sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$. Suponga que el conjunto de medidas $\mathcal{F}$-expansivas forma un subconjunto de Baire en $\mathcal{M}(X)$, entonces el conjunto de medidas $\mathcal{F}$-expansivas es no vacío si y solo si cada medida $\mathcal{F}$-expansiva puede ser aproximada por una medida $\mathcal{F}$-expansiva cuyo soporte es igual al centro medible $\mathcal{F}$-expansivo de ϕ.*

Demostración. Notemos que basta probar la suficiencia, para ello, supongamos que el conjunto $\mathcal{M}_{ex}(X, \phi, \mathcal{F})$ es no vacío y de Baire. Entonces, haciendo uso del Corolario 1 pág. 71 en [24], el conjunto de discontinuidades $\mathcal{D}$ del mapeo multivaluado $\Psi : \mathcal{M}_{ex}(X, \phi, \mathcal{F}) \to 2_c^X$ definido por $\Psi(\mu) = \text{supp}(\mu)$ es un conjunto magro en $\mathcal{M}_{ex}(X, \phi, \mathcal{F})$, de este modo, el conjunto $\mathcal{R} = \mathcal{M}_{ex}(X, \phi, \mathcal{F}) \setminus \mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{M}_{ex}(X, \phi, \mathcal{F})$. Dado $\mu \in \mathcal{R}$ y $\nu \in \mathcal{M}_{ex}(X, \phi, \mathcal{F})$, definamos una medida μ_n con la siguiente propiedad:

$$\mu_n = (1 - \tfrac{1}{n})\mu + \tfrac{1}{n}\nu \text{ para cualquier } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces $\mu_n \in \mathcal{M}_{ex}(X, \phi, \mathcal{F})$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\mu_n \to \mu$ cuando $n \to \infty$. Como $\mu \notin \mathcal{D}$, Ψ es continua en μ y de esta manera la secuencia $\Psi(\mu_n) = \text{supp}(\mu) \cup \text{supp}(\nu)$ converge para $\Psi(\mu) = \text{supp}(\mu)$. Por lo tanto, $\text{supp}(\nu) \subset \text{supp}(\mu)$ y se sigue que $E(\phi, \mathcal{F}) = \text{supp}(\mu)$. Así, existe un subconjunto denso $\mathcal{R}$ de $\mathcal{M}_{ex}(X, \phi, \mathcal{F})$ cuyos soportes son todos iguales a $E(\phi, \mathcal{F})$. ■

Corolario 2.4.13 *Supongamos que el conjunto de medidas $\mathcal{F}$-expansivas forma un conjunto de Baire en $\mathcal{M}(X)$, entonces las medidas $\mathcal{F}$-expansivas son densas en $\mathcal{M}(X)$ si y solo si las medidas $\mathcal{F}$-expansivas con soporte total son densas en $\mathcal{M}(X)$.*

Demostración. Nuevamente basta probar la suficiencia. Supongamos que el conjunto de medidas $\mathcal{F}$-expansivas $\mathcal{M}_{ex}(X, \phi, \mathcal{F})$ es denso en $\mathcal{M}(X)$. Usando un argumento similar al del Lema 5 en [31], obtenemos $E(\phi, \mathcal{F}) = X$. Por Teorema 2.4.12 existe un conjunto $\mathcal{R}$ denso en $\mathcal{M}_{ex}(X, \phi, \mathcal{F})$ tal que $\text{supp}(\mu) = E(\phi, \mathcal{F}) = X$ para cada $\mu \in \mathcal{R}$. Por consiguiente, usando la condición sobre $\mathcal{M}_{ex}(X, \phi, \mathcal{F})$, podemos concluir que $\mathcal{R}$ es denso en $\mathcal{M}(X)$. ■

Corolario 2.4.14 *Si las medidas $\mathcal{F}$-expansivas forman un subconjunto Baire y denso en $\mathcal{M}(X)$, entonces X no tiene puntos aislados.*

Capítulo 3

Puntos $\mathcal{F}$-sombreables

En este capítulo, presentamos las nociones introducidas recientemente en el trabajo intitulado *Shadowable points for flows* (ver [5]).

3.1 Puntos $\mathcal{F}$-sombreables

Como en el capítulo anterior (X, d) denota un espacio métrico compacto. Con la finalidad de motivar la principal definición de esta sección veremos, inicialmente, la noción de *puntos sombreables* para sistemas dinámicos discretos introducidos recientemente por Morales en [30].

Sea $f\colon X \to X$ un homeomorfismo. Dado $\delta > 0$, diremos que una bi-secuencia $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una δ-pseudo órbita que pasa a través del punto $p \in X$, si $x_0 = p$ y para cada entero n se verifica que $d(f(x_n),\, x_{n+1}) \leq \delta$.

Definición 3.1.1 *Se dice que $p \in X$ es* sombreable *si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier δ-pseudo órbita $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ que pasa a través de p, existe un punto $q \in X$ tal que $d(f^n(q),\, x_n) \leq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

A su vez, el conjunto de puntos sombreables de f es denotado por $Sh(f)$ y se prueba en [30], entre otras propiedades, que f tiene la POTP si y solo si $Sh(f) = X$.

Por otro lado, sabemos que la POTP para flujos hace uso de reparametrizaciones, por tanto, combinando la noción de puntos sombreables para homeomorfismos y la restricción a subconjuntos $\mathcal{F}$ del conjunto de reparametrizaciones $\mathcal{H}$, obtenemos las siguientes nociones que extienden la propiedad de sombreamiento para flujos.

Sea ϕ un flujo en X. Dado $\mathcal{F}$ un subconjunto de $\mathcal{H}$ y los números positivos δ, T y ε, diremos que una $(\delta,\, T)$-pseudo órbita $(x_i,\, t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de ϕ *pasa a través de* p toda vez que $x_0 = p$, y diremos que es $(\mathcal{F},\, \varepsilon)$-*sombreable* si existe un elemento $y \in X$ y una función $h \in \mathcal{F}$ que satisface $d(x_0 \star t,\, \phi_{h(t)}(y)) \leq \varepsilon,$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Definición 3.1.2 *Un flujo ϕ tiene la $\mathcal{F}$-POTP si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que toda $(\delta,\, 1)$-pseudo órbita es $(\mathcal{F},\, \varepsilon)$-sombreable.*

La versión puntual de esta noción es la siguiente.

Definición 3.1.3 *Diremos que un elemento $p \in X$ es $\mathcal{F}$-sombreable si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que toda $(\delta,\, 1)$-pseudo órbita que pasa a través de p es $(\mathcal{F},\, \varepsilon)$-sombreable.*

Denotaremos con $Sh(\phi, \mathcal{F})$ al conjunto de puntos $\mathcal{F}$-sombreables de ϕ en X. Ahora, daremos algunos ejemplos relacionados con esta noción.

Ejemplo 3.1.1 Si ϕ es un flujo en X que tiene la $\mathcal{F}$-POTP entonces trivialmente $Sh(\phi,\, \mathcal{F}) = X$; es más, la implicación recíproca también es cierta (Teorema 3.2.1).

Por una isometría en X entenderemos un homeomorfismo $f : X \to X$ tal que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para cualesquier $x, y \in X$.

Ejemplo 3.1.2 Si $f : X \to X$ es una isometría en X donde X tiene una componente conexa no trivial y un punto aislado que es fijo para f, entonces f no satisface la POTP, por lo cual, haciendo uso del Teorema 2 en [36] el flujo suspensión $\phi^{1,f}$ no admite $\mathcal{S}$-POTP en $X^{1,f}$. Sin embargo, si $p \in X$ es punto fijo de f, entonces $(p, 0) \in X^{1,f}$ es $\mathcal{S}$-sombreable ya que su órbita es periódica y aislada.

Ejemplo 3.1.3 Si un flujo ϕ no tiene singularidades en X y $Sh(\phi,\, \mathcal{F}) \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{F} \not\subset \mathcal{B}$; en efecto, sea $p \in Sh(\phi,\, \mathcal{F})$ por Teorema 3 en [14] para un $\lambda > 0$ suficientemente pequeño, existen $\varepsilon_\lambda > 0$ y $\tau_\lambda > 0$ tales que si $(x_i,\, t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ es una $(\delta,\, 1)$-pseudo órbita que pasa a través de p, donde $\delta > 0$ es la constante correspondiente a ε_λ, $x_{i+1} = \phi_{t_i}(x_i)$, y existen $h \in \mathcal{F}$ y $z \in X$ con $d(x \star t,\, \phi_{h(t)}(z)) \leq \varepsilon$ para cada $t \in \mathbb{R}$, entonces $h(t+\lambda) - h(t) \geq \tau_\lambda$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo cual $h \notin \mathcal{B}$.

El siguiente resultado muestra en particular que existen flujos con finitos puntos sombreables.

Proposición 3.1.4 *Si ϕ es un flujo $\mathcal{F}$-expansivo en X donde $\mathcal{F} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$, entonces $Sh(\phi,\, \mathcal{F}) = Sing(\phi)$ toda vez que* $\mathrm{Id}_\mathbb{R} \notin \overline{\mathcal{F}}$.

Demostración. Note que de $\mathcal{F} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$ se sigue que las singularidades son aisladas. Por el Lema 2.4.4 para $\lambda > 0$ pequeño tal que $\lambda < \widehat{d}\,(\mathrm{Id}_\mathbb{R}, \mathcal{F})$ existe un $\gamma > 0$ con la propiedad que $d(\phi_{\pm\lambda}(x),\, y) > \gamma$ siempre que $x, y \in X \setminus Sing(\phi)$ y $d(x,\, y) < \gamma$. Por otro lado, existe un $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\text{Si } y \in \phi_{(-\varepsilon,\, \varepsilon)}(x), \text{ entonces } d(\phi_t(x),\, \phi_t(y)) < \frac{\gamma}{2},\ \forall (x,\, t) \in (X \setminus Sing(\phi)) \times \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Fije un $x \in Sh(\phi,\, \mathcal{F}) \setminus Sing(\phi)$ y tome $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\varepsilon_0 < \min\{\frac{\gamma}{2},\, \delta_0\}$ donde δ_0 es la constante de $\mathcal{F}$-expansividad de ϕ para tal $\varepsilon > 0$. A su vez, existe un $\delta > 0$ tal que cada $(\delta,\, 1)$-pseudo órbita que pasa a través de x puede ser $(\mathcal{F},\, \varepsilon_0)$-sombreable. Sea $(x_i,\, t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ una $(\delta,\, 1)$-pseudo órbita para ϕ tal que $x_{i+1} = \phi_{t_i}(x_i)$ y $x_0 = x$, por tanto, existen $h \in \mathcal{F}$ y $z \in X \setminus Sing(\phi)$ satisfaciendo:

$$d(x \star t,\, \phi_{h(t)}(z)) = d(\phi_t(x),\, \phi_{h(t)}(z)) \leq \varepsilon_0, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}.$$

De la expansividad, existe $s \in (-\varepsilon,\, \varepsilon)$ tal que $z = \phi_s(x)$. Entonces, por (3.1) para cada $t \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$d(\phi_t(z),\, \phi_{h(t)}(z)) \leq d(\phi_t(z),\, \phi_t(x)) + d(\phi_t(x),\, \phi_{h(t)}(z)) < \gamma,$$

de donde $d(\phi_t(z), \phi_{h(t)-t}(\phi_t(z))) < \gamma$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Luego, $\widehat{d}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}, h) < \lambda$ por la hipótesis sobre γ, lo cual es una contradicción. Así, $Sh(\phi, \mathcal{F}) \subset Sing(\phi)$. La otra inclusión es trivial. ■

3.2 Propiedades

A continuación listaremos una serie de propiedades de los puntos sombreables.

Teorema 3.2.1 *Dado un subconjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ y un flujo ϕ en un espacio métrico compacto (X, d), el conjunto de puntos $\mathcal{F}$-sombreables de ϕ satisface las siguientes propiedades:*

(1) *$Sh(\phi, \mathcal{F})$ es invariante.*

(2) $Sh(\phi, \overline{\mathcal{F}}) = Sh(\phi, \mathcal{F})$

(3) *El flujo ϕ tiene $\mathcal{F}$-POTP si y solo si $Sh(\phi, \mathcal{F}) = X$.*

(4) *Si $CR(\phi) \subseteq Sh(\phi, \mathcal{S})$, entonces $CR(\phi) = \Omega(\phi)$.*

(5) *Si ϕ is expansivo y $CR(\phi) \subseteq Sh(\phi, \mathcal{S})$, entonces $CR(\phi) = \overline{Per(\phi)}$.*

(6) *Si f es una equivalencia entre ϕ y ψ, entonces $f(Sh(\phi, \mathcal{F})) = Sh(\psi, \mathcal{F})$ toda vez que $\mathcal{SFS} \subset \mathcal{F}$.*

(7) *Si f es un homeomorfismo en X y $\tau : X \to (0, +\infty)$ es una función continua, entonces $Sh(\phi^{\tau,f}, \mathcal{S}) = (Sh(f) \times [0, 1])/ \sim$.*

Antes de realizar la prueba de estas propiedades, mostraremos algunos ejemplos relacionados al Teorema 3.2.1.

Recordemos que un flujo ϕ en X se dice isométrico si se verifica $d(\phi_t(x), \phi_t(y)) = d(x, y)$ para cada $x, y \in X$ y todo $t \in \mathbb{R}$, a su vez, ϕ se llama minimal si todas sus órbitas son densas en X.

Ejemplo 3.2.1 Si ϕ y ψ son flujos continuos en X y $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$, entonces no siempre se tiene la siguiente inclusión $Sh(\phi,\, \mathcal{F}) \times Sh(\psi,\, \mathcal{F}) \subset Sh(\phi \times \psi,\, \mathcal{F})$, en este caso $(\phi \times \psi)(t,(z,w)) = (\phi(t,z),\psi(t,w))$; en efecto, basta considerar $\phi(t,z) = e^{2\pi i t}z$, definido en el círculo unitario $\mathbb{S}^1$, el cual tiene la $\mathcal{S}$-POTP. Luego $Sh(\phi,\, \mathcal{S}) = \mathbb{S}^1$ por el Item (3) del Teorema 3.2.1. En caso la inclusión referida sea cierta, obtenemos que $Sh(\phi \times \phi,\, \mathcal{S}) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$; entonces, por el Item (3), el flujo $\phi \times \phi$ debe satisfacer la $\mathcal{S}$-POTP. Sin embargo, esto no es posible dado que este flujo es isométrico pero no minimal, ver [22].

Ejemplo 3.2.2 Todo flujo isométrico en X con una componente conexa no trivial no tiene la $\{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}$-POTP. En efecto, sean $a, b \in X$ diferentes y tales que para cada $\delta > 0$ existe una cadena de puntos $z_0 = a, \ldots, z_n = b$ que satisface $d(z_{k+1}, z_k) < \delta$ para todo $k = 0, \ldots, n-1$. (a y b están es la misma componente en X). Sea

$$x_k = \begin{cases} \phi_k(a), & k < 0 \\ \phi_k(z_k), & 0 \leq k \leq n \\ \phi_k(b), & k > n. \end{cases}$$

Entonces, $(x_k, 1)_{k\in\mathbb{Z}}$ es una $(\delta, 1)$-pseudo órbita, dado que para cada $k = 0, \ldots, n-1$ se tiene $d(\phi_{t_k}(x_k), x_{k+1}) = d(\phi_{1+k}(z_k), \phi_{1+k}(z_{k+1})) = d(z_k, z_{k+1}) < \delta$ y para otros valores de k se tiene $x_{k+1} = \phi_1(x_k)$. Supongamos que $a \in Sh(\phi, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})$, luego para $\varepsilon = d(a,b)/3$, existe un x satisfaciendo $d(a \star t, \phi_t(x)) < \varepsilon$ para todo t. Entonces $d(x,a) < \varepsilon$ y $d(\phi_{n+1}(b), \phi_{n+1}(x)) = d(x,b) < \varepsilon$, luego $d(a,b) \leq 2\varepsilon$ lo cual es una contradicción; por consiguiente, $Sh(\phi, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) \neq X$ y por el Item (3) el flujo no satisface la $\{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}$-POTP.

Ejemplo 3.2.3 Sea C el conjunto ternario de Cantor usual en $[0,\, 1]$ y considere $X = C \cup [1,\, 2]$ con la métrica usual de $\mathbb{R}$. El Ejemplo 2.1 en [30] muestra que $Sh(\mathrm{Id}_X) = C \setminus \{1\}$, por tanto, usando el Item (7) del Teorema 3.2.1 se tiene que $Sh(\phi^{1,f},\, \mathcal{S}) = (C \setminus \{1\}) \times [0,1]/\sim$ el cual es un subconjunto propio de $X^{1,f}$.

3.2.1 Prueba del Teorema 3.2.1

Previamente introduciremos algunas nociones auxiliares. Diremos que una secuencia $(x_n, t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en $X \times \mathbb{R}$ atraviesa al subconjunto $K \subseteq X$ si $x_0 \in K$ (ver [30]). Con esto en mente, decimos que un flujo ϕ en X tiene la $\mathcal{F}$-POTP a través de K con respecto al parámetro $T > 0$, si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que cada (δ, T)-pseudo órbita que atraviesa K puede ser $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-sombreada. A su vez, diremos que ϕ tiene $\mathcal{F}$-POTP a través de K si la tiene con respecto al parámetro $T = 1$.

En caso que $K = X$ esta noción coincide con la clásica $\mathcal{F}$-POTP. Note que no requerimos que la $(\delta, 1)$-pseudo órbita esté enteramente contenida en K.

Una secuencia de pares $(x_i, t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ es una (δ, T_1, T_2)-pseudo órbita de ϕ toda vez que es (δ, T_1)-pseudo órbita de ϕ y además satisface $t_i \leq T_2$, para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Estas nociones nos permiten enunciar el siguiente resultado que será de gran utilidad y que es una variante de los resultados en [36].

Lema 3.2.2 *Sean $a > 0$, $K \subseteq X$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ y ϕ un flujo en un espacio métrico compacto X. Entonces, los siguientes resultados son equivalentes:*

(1) *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que cada $(\delta, a, 2a)$-pseudo órbita que atraviesa K es $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-sombreada por una órbita de ϕ.*

(2) *El flujo ϕ tiene la $\mathcal{F}$-POTP a través de K con respecto al parámetro a.*

(3) *El flujo ϕ tiene la $\mathcal{F}$-POTP a través de K.*

Demostración. Claramente (2) implica (1). Para ver que (1) implica (2), suponga que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que cada $(\delta, a, 2a)$-pseudo órbita que atraviesa K es $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-sombreada por una órbita de ϕ. Sea $(x_i, t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ cualquier (δ, a)-pseudo órbita de ϕ pasando a través de K. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, existe un $m_n \in \mathbb{N}$ que satisface $t_n = m_n a + r_n$ donde $a \leq r_n < 2a$. Sea $(s_n^m)_{n\in\mathbb{Z}}$ la secuencia de sumas asociada a $m = (m_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Denote $A_n = s_n^m + n$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ y considere la secuencia $(y_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ en X tal que $y_i = \phi_{a(i-A_n)}(x_n)$ si $A_n \leq i < A_{n+1}$. Luego, defina una nueva secuencia $\lambda = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de números reales del siguiente modo: para cada $i \in \mathbb{Z}$, considere

$$\lambda_i = \begin{cases} a & \text{si} \quad A_n \leq i < A_{n+1} - 1, \\ r_n & \text{si} \quad i = A_{n+1} - 1. \end{cases}$$

Afirmamos que $(y_i, \lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ es una $(\delta, a, 2a)$-pseudo órbita de ϕ que atraviesa K; en efecto, fijado $i \in \mathbb{Z}$ note que $a \leq \lambda_i < 2a$ y tome $n \in \mathbb{Z}$ satisfaciendo $A_n \leq i < A_{n+1}$. Tenemos dos casos para analizar:

Caso 1: $i < A_{n+1} - 1$, entonces

$$d(\phi_{\lambda_i}(y_i), y_{i+1}) = d(\phi_a(\phi_{a(i-A_n)}(x_n)), \phi_{a(i+1-A_n)}(x_n)) = 0.$$

Caso 2: $i = A_{n+1} - 1$. Con esta condición y teniendo en mente que $A_{n+1} - A_n = s^m_{n+1} - s^m_n + 1 = m_n + 1$, obtenemos:

$$\begin{aligned} d(\phi_{\lambda_i}(y_i), y_{i+1}) = d(\phi_{r_n}(\phi_{a(A_{n+1}-1-A_n)}(x_n)), x_{n+1}) &= d(\phi_{r_n}(\phi_{am_n}(x_n)), x_{n+1}) \\ &= d(\phi_{t_n}(x_n), x_{n+1}) \leq \delta. \end{aligned}$$

Lo cual prueba la afirmación. Entonces, por hipótesis, existen $z \in X$ y $h \in \mathcal{F}$ tales que $d(\phi_{r-s^\lambda_n}(y_n), \phi_{h(r)}(z)) \leq \varepsilon$ donde $s^\lambda_n \leq r < s^\lambda_{n+1}$ y (s^λ_i) es la secuencia de sumas asociada a la secuencia $\lambda = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Sean $w \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$ tales que $s^t_n \leq w < s^t_{n+1}$, donde (s^t_n) es la secuencia de sumas asociada a $t = (t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Dado que $s^t_n = s^\lambda_{A_n}$, entonces $s^\lambda_{A_n} \leq w < s^\lambda_{A_{n+1}} = s^\lambda_{A_n+m_n+1}$, por lo cual, existe un $0 \leq j \leq m_n$ tal que $s^\lambda_{A_n+j} \leq w < s^\lambda_{A_n+j+1}$ y en consecuencia:

$$\begin{aligned} \varepsilon \geq d(\phi_{w-s^\lambda_{A_n+j}}(y_{A_n+j}), \phi_{h(w)}(z)) &= d(\phi_{w-s^t_n}(\phi_{s^t_n-s^\lambda_{A_n+j}}(y_{A_n+j})), \phi_{h(w)}(z)) \\ &= d(\phi_{w-s^t_n}(\phi_{s^t_n-s^\lambda_{A_n+j}}(\phi_{aj}(x_n))), \phi_{h(w)}(z)) \\ &= d(\phi_{w-s^t_n}(x_n), \phi_{h(w)}(z)). \end{aligned}$$

Lo que implica que ϕ tiene la $\mathcal{F}$-POTP a través de K con respecto al parámetro a. Ahora veamos que (2) implica (3). Sin pérdida de generalidad podemos asumir que

$a > 1$. Fije $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq a$. Dado $\varepsilon > 0$ escoga un $\delta > 0$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

(1) Cada (δ, a)-pseudo órbita que atraviesa K es $(\mathcal{F}, \frac{\varepsilon}{2})$-sombreable.

(2) Para cada $0 \leq t \leq 2m$ se tiene $d(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$, siempre que $d(x, y) < \delta$.

Sea $0 < \delta' < \delta/m$ y tome $0 < \beta < \delta'$ tal que $d(x, y) < \beta$ implica $d(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \delta'$ para todo $0 \leq t \leq 2m$. Sea $(x_n, t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una $(\beta, 1)$-pseudo órbita de ϕ que atraviesa K y que satisface $1 \leq t_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Considere la secuencia de pares $(x_{im}, \lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ donde $\lambda_i = \sum_{j=0}^{m-1} t_{j+im}$ para cada $i \in \mathbb{Z}$ y denote $\lambda_i(k) = \sum_{j=k}^{m-1} t_{j+im}$ para $0 \leq k < m$. Entonces:

$$d(\phi_{\lambda_i}(x_{im}), x_{(i+1)m}) \leq \sum_{r=1}^{m} d(\phi_{\lambda_i(r)}(\phi_{t_{im+r-1}}(x_{im+r-1})), \phi_{\lambda_i(r)}(x_{im+r})) \leq m\delta' < \delta,$$

puesto que $a \leq \lambda_i \leq 2m$; por consiguiente, $(x_{im}, \lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ es una (δ, a)-pseudo órbita de ϕ que atraviesa K. Luego, por condición, existen $z \in X$ y $h \in \mathcal{F}$ tales que $d(\phi_{t-s_n^\lambda}(x_{nm}), \phi_{h(t)}(z)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ donde $s_n^\lambda \leq t < s_{n+1}^\lambda$. Además, si para $0 \leq k < m$ uno denota $s_k^t(r) = \sum_{j=r}^{k-1} t_j$ se obtiene:

$$d(\phi_{s_k^t}(x_0), x_k) \leq \sum_{r=1}^{k} d(\phi_{s_k^t(r)}(\phi_{t_{r-1}}(x_{r-1})), \phi_{s_k^t(r)}(x_r)) < k\delta' < \delta.$$

Por lo cual, para $s_k^t \leq t < s_{k+1}^t$ se verifica:

$$d(\phi_{t-s_k^t}(x_k), \phi_{h(t)}(z)) \leq d(\phi_{t-s_k^t}(x_k), \phi_{t-s_k^t}(\phi_{s_k^t}(x_0))) + d(\phi_t(x_0), \phi_{h(t)}(z)) \leq \varepsilon.$$

Cuando $m \leq k < 2m$, es posible realizar un análisis similar. De esta manera se obtiene que la órbita $(\phi_t(z))_{t\in\mathbb{R}}$ $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-sombrea a la $(\beta, 1, 2)$-pseudo órbita de ϕ que atraviesa K. Aplicando la equivalencia entre (1) y (2) podemos conluir que es posible $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-sombrear toda $(\beta, 1)$-pseudo órbita de ϕ que atraviesa K. De forma análoga, se muestra que (3) implica (2). Esto finaliza la prueba. ■

Notemos que si un flujo tiene la $\mathcal{F}$-POTP a través de K entonces, naturalmente, cada punto de K es $\mathcal{F}$-sombreable. Lo recíproco también es cierto en el caso que K sea compacto.

Lema 3.2.3 *Sea ϕ un flujo en un espacio métrico compacto X. Si todo punto del subconjunto compacto K de X es $\mathcal{F}$-sombreable, entonces ϕ tiene la $\mathcal{F}$-POTP a través de K.*

Demostración. Supongamos por contradicción que exista un subconjunto compacto y no vacío K tal que cada punto de K es $\mathcal{F}$-sombreable pero el flujo no tiene la $\mathcal{F}$-POTP a través de K. Entonces, usando el Lema anterior, existen $\varepsilon > 0$ y una secuencia $(\xi^k)_{k\in\mathbb{N}} = (\xi_n^k,\, t_n^k)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $(\frac{1}{k},\, 1,\, 2)$-pseudo órbitas que atraviesan K que no pueden ser $(\mathcal{F}, 2\varepsilon)$-sombreadas. Como K y $[1,\, 2]$ son compactos, podemos asumir que $\xi_0^k \to p$ para algún $p \in K$ y $t_0^k \to t_0$ para algún $t_0 \in [1,\, 2]$. Sabemos que p es $\mathcal{F}$-sombreable, en consecuencia para el mencionado ε, es posible escoger $\delta > 0$ proveniente del $\mathcal{F}$-sombreamiento de p satisfaciendo $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$. Como $\phi|_{[0,\,2]\times X}$ es uniformemente continuo, podemos asumir que δ también satisface que si $d((t,x),\, (s,y)) \leq \delta$ entonces $d(\phi_t(x),\, \phi_s(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ para cada $0 \leq s,\, t \leq 2$. Ahora, consideramos las siguientes secuencias $\hat{\xi}^k = (\hat{\xi}_n^k,\, \hat{t}_n^k)_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$\hat{\xi}^k = \begin{cases} (\xi_n^k,\, t_n^k), & \text{si } n \neq 0, \\ (p,\, t_0), & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Claramente, estas secuencias atraviesan K. Además,

$$d(\phi_{\hat{t}_n^k}(\hat{\xi}_n^k),\, \hat{\xi}_{n+1}^k) = \begin{cases} d(\phi_{t_n^k}(\xi_n^k),\, \xi_{n+1}^k), & \text{si } n \neq 0,\, -1, \\ d(\phi_{t_0}(p),\, \xi_1^k), & \text{si } n = 0, \\ d(\phi_{t_{-1}^k}(\xi_1^k),\, p), & \text{si } n = -1, \end{cases}$$

por lo cual obtenemos las siguientes desigualdades:

$$d(\phi_{\hat{t}_n^k}(\hat{\xi}_n^k),\, \hat{\xi}_{n+1}^k) \leq \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{si } n \neq 0,\, -1, \\ d(\phi_{t_0}(p),\, \phi_{t_0^k}(\xi_0^k)) + \frac{1}{k}, & \text{si } n = 0, \\ d(\xi_0^k,\, p) + \frac{1}{k}, & \text{si } n = -1. \end{cases}$$

Usando la continuidad de ϕ y la convergencia $(\xi_0^k,\, t_0^k) \to (\xi_0,\, p)$ concluimos que $(\hat{\xi}_n^k)$ es una $(\delta,\, 1,\, 2)$-pseudo órbita para k suficientemente grande; en consecuencia, para un tal k se sigue que existen $x_k \in X$ y $h \in \mathcal{F}$ tales que $d(p \star t,\, \phi_{h(t)}(x_k)) \leq \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por otro lado, dadas las secuencias $(\hat{t}_i^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ y $(t_i^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ denotaremos:

$$\hat{s}_i^k = \begin{cases} \sum_{j=0}^{i-1} \hat{t}_j^k & i > 0, \\ 0 & i = 0, \\ -\sum_{j=i}^{-1} \hat{t}_j^k & i < 0, \end{cases}$$

y

$$s_i^k = \begin{cases} \sum_{j=0}^{i-1} t_j^k & i > 0, \\ 0 & i = 0, \\ -\sum_{j=i}^{-1} t_j^k & i < 0. \end{cases}$$

Tenemos tres posibles casos a ser analizados: $t_0^k < \hat{t}_0^k$, $t_0^k = \hat{t}_0^k$ y $t_0^k > \hat{t}_0^k$. Note que en cualquier caso se verifica $|s_i^k - \hat{s}_i^k| = |t_0^k - \hat{t}_0^k|$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Consideraremos únicamente el caso $t_0^k < \hat{t}_0^k$ siendo los otros de análogo procedimiento. Entonces $s_i^k < \hat{s}_i^k$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Considere $t \in \mathbb{R}$ e $i \in \mathbb{Z}$ tales que $s_i^k \leq t < s_{i+1}^k$. Como no sabemos la ubicación de $\hat{s}_i^k$, analizaremos cada caso por separado:

Caso 1: si $\hat{s}_i^k \leq t < s_{i+1}^k$, en particular $\hat{s}_i^k \leq t < \hat{s}_{i+1}^k$, de este modo:

$$\begin{aligned} d(\phi_{t-s_i^k}(\xi_i^k),\, \phi_{h(t)}(x_k)) &\leq d(\phi_{t-s_i^k}(\xi_i^k),\, \phi_{t-\hat{s}_i^k}(\hat{\xi}_i^k)) + d(\phi_{t-\hat{s}_i^k}(\hat{\xi}_i^k),\, \phi_{h(t)}(x_k)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \varepsilon < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Caso 2: si $s_i^k \leq t < \hat{s}_i^k$, nuevamente en particular, $\hat{s}_{i-1}^k \leq t < \hat{s}_i^k$, por tanto:

$$\begin{aligned} d(\phi_{t-s_i^k}(\xi_i^k),\, \phi_{h(t)}(x_k)) &\leq d(\phi_{t-s_i^k}(\xi_i^k),\, \phi_{t-\hat{s}_{i-1}^k}(\hat{\xi}_{i-1}^k)) + d(\phi_{t-\hat{s}_{i-1}^k}(\hat{\xi}_{i-1}^k),\, \phi_{h(t)}(x_k)) \\ &\leq d(\phi_{t-s_i^k}(\xi_i^k),\, \hat{\xi}_i^k) + d(\hat{\xi}_i^k,\, \phi_{\hat{t}_{i-1}^k}(\hat{\xi}_{i-1}^k)) + d(\phi_{\hat{t}_{i-1}^k}(\hat{\xi}_{i-1}^k),\, \phi_{t-\hat{s}_i^{k-1}}(\hat{\xi}_{i-1}^k)) + \varepsilon \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \varepsilon = 2\varepsilon, \end{aligned}$$

luego, en cualquier caso, $d(\phi_{t-s_i^k}(\xi_i^k),\, \phi_{h(t)}(x_k)) \leq 2\varepsilon$ para cualquier $s_i^k \leq t < s_{i+1}^k$. Esto muestra que ξ^k puede ser $(\mathcal{F}, 2\varepsilon)$-sombreado, lo cual es una contradicción. ■

Lema 3.2.4 *Dado un flujo ϕ es un espacio métrico compacto (X, d), entonces $Sh(\phi, \mathcal{F})$ es invariante; por tanto, si es no vacío es unión de órbitas de ϕ.*

Demostración. Sea x un punto $\mathcal{F}$-sombreable de X. Dados $\varepsilon > 0$ y $s \in \mathbb{R}$ por la continuidad uniforme de ϕ_s, podemos escoger un $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ tal que $d(x, y) < \varepsilon'$ implique $d(\phi_s(x), \phi_s(y)) < \varepsilon$. Para ε', sea $\delta > 0$ tal que cualquier $(\delta, 1)$-pseudo órbita que pasa por x puede ser $(\mathcal{F}, \varepsilon')$-sombreada. Similarmente, podemos escoger un $\delta' > 0$ con la propiedad que $d(\phi_{-s}(x), \phi_{-s}(y)) \leq \delta$ siempre que $d(x, y) < \delta'$. Tome ahora $(x_i, t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ una $(\delta', 1)$-pseudo órbita pasando por $\phi_s(x)$. Dado que $d(\phi_{t_i}(x_i), x_{i+1}) \leq \delta'$ se tiene por la elección de δ' que:

$$d(\phi_{-s}(\phi_{t_i}(x_i)),\, \phi_{-s}(x_{i+1})) = d(\phi_{t_i}(\phi_{-s}(x_i)),\, \phi_{-s}(x_{i+1})) \leq \delta,$$

en consecuencia $(\phi_{-s}(x_i), t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ es una $(\delta, 1)$-pseudo órbita que pasa por x. Luego, existen $h \in \mathcal{F}$ e $y \in X$ tales que $d(x \star t, \phi_{h(t)}(y)) \leq \varepsilon'$, para cualquier $t \in \mathbb{R}$, esto es, $d(\phi_{t-s_i}(\phi_{-s}(x_i)), \phi_{h(t)}(y)) \leq \varepsilon'$ toda vez que $s_i \leq t < s_{i+1}$, lo que implica $d(\phi_{t-s_i}(x_i), \phi_{h(t)}(\phi_s(y))) \leq \varepsilon$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Así, cada $(\delta', 1)$-pseudo órbita que pasa por $\phi_s(x)$ puede ser $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-sombreada en X. Lo cual completa la prueba. ■

Lema 3.2.5 *Si ϕ es un flujo en un espacio métrico compacto X, entonces se verifica la siguiente inclusión: $Sh(\phi, \mathcal{S}) \cap CR(\phi) \subseteq \Omega(\phi)$.*

Demostración. Sea $p \in Sh(\phi, \mathcal{S}) \cap CR(\phi)$ y $\varepsilon > 0$ un número positivo, en consecuencia, existe un $\delta > 0$ del $\mathcal{S}$-sombreamiento en p. Como p es también recurrente por cadenas, existe una $(\delta,\, 1)$-cadena $(x_i,\, t_i)_{i=0}^{k}$ tal que $p = x_0 = x_k$. Luego si para cada entero n hacemos $x_{kn+i} = x_i$, $t_{kn+i} = t_i$ para cada $0 \leq i < k$, obtenemos que $(x_i,\, t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ es una $(\delta,\, 1)$-pseudo órbita de ϕ y de este modo existen $y \in X$ y $g \in \mathcal{S}$ tales que $d(p{\star}t,\, \phi_{g(t)}(y)) \leq \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Note que $y \in B[p,\, \varepsilon]$ ya que $g(0) = 0$. Si para cada $j \geq 0$ hacemos $m_j = j \sum_{i=0}^{k-1} t_i$, entonces:

$$\begin{aligned} d(x,\, \phi_{g(m_j)}(y)) &= d(x \star m_j, \phi_{g(m_j)}(y)) \\ &\leq \varepsilon,\ \forall\, j \geq 0. \end{aligned}$$

Además, como $m_j \geq jk$ para cada $j \geq 0$ entonces $m_j \to \infty$ $(j \to \infty)$; por lo cual, $g(m_j) \to \infty$. Por lo tanto $x \in \Omega(\phi)$. ■

Lema 3.2.6 *Si ϕ es un flujo expansivo en un espacio métrico compacto X, entonces se verifica la siguiente inclusión: $CR(\phi) \cap Sh(\phi, \mathcal{S}) \subset \overline{Per(\phi)}$.*

Demostración. Si pérdida de generalidad, por la expansividad, podemos asumir que el flujo no tiene singularidades. Sea $x \in CR(\phi) \cap Sh(\phi, \mathcal{S})$ y $\varepsilon \in (0, 1)$. Podemos considerar también que ε satisface el Lema 2.4.8 con respecto a $\lambda = \frac{1}{2}$. Tome $\delta \in (0, \varepsilon)$ satisfaciendo la definición de expansividad para el ε dado y sea $\delta' > 0$ la constante asociada por el $\mathcal{S}$-sombreamiento para $\frac{\delta}{2}$. Dado que $x \in CR(\phi)$, existe una $(\delta',\, 3)$-cadena $(x_i,\, t_i)_{i=1}^{k}$ donde $x_0 = x_k = x$ y $t_i \geq 3$ la cual puede ser extendida a una $(\delta',\, 3)$-pseudo órbita de ϕ. Por lo que existen $z \in X$ y $\alpha \in \mathcal{S}$ tales que $d(\phi_{t-s_i}(x_i),\, \phi_{\alpha(t)}(z)) \leq \frac{\delta}{2}$ para todo $s_i \leq t < s_{i+1}$. Haciendo $L = t_0 + \ldots + t_{k-1}$, obtenemos $d(\phi_{\alpha(t+L)}(z),\, \phi_{t-s_i}(x_i)) \leq \frac{\delta}{2}$ para $s_i \leq t < s_{i+1}$ y en general:

$$d(\phi_{\alpha(t+L)}(z), \phi_{\alpha(t)}(z) \leq \delta \text{ para cualquier } t \in \mathbb{R}.$$

Si hacemos $u = \alpha(t)$, entonces para cualquier $u \in \mathbb{R}$:

$$d(\phi_{\alpha(\alpha^{-1}(u)+L)}(z),\, \phi_u(z)) = d(\phi_{\alpha(\alpha^{-1}(u)+L)-\alpha(L)}(\phi_{\alpha(L)}(z)),\, \phi_u(z)) \leq \delta,$$

donde $\alpha(\alpha^{-1}(u) + L) - \alpha(L) \in \mathcal{S}$; por lo que $\phi_{\alpha(L)}(z) \in \phi_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(z)$. Además de $d(\phi_{\alpha(t)}(z),\, \phi_t(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $0 \leq t < t_0$, concluimos, por Lema 2.4.8, que $\frac{1}{2}s \leq \alpha(s)$ para algún $2 \leq s \leq t_0$. Entonces $\varepsilon \leq \alpha(s) \leq \alpha(L)$ puesto que $s \leq L$, en consecuencia, $z \in Per(\phi)$. ■

Lema 3.2.7 *Si $\phi^{1,f}$ es la suspensión de un homeomorfismo f en un espacio métrico compacto X y $(z, t) \in Sh(\phi^{1,f}, \mathcal{F})$ para algún $t \in [0, 1)$, entonces $z \in Sh(f)$.*

Demostración. Por la invarianza del conjunto de los puntos $\mathcal{F}$-sombreables para $\phi^{1,f}$, podemos considerar que $(z, \frac{1}{2}) \in Sh(\phi^{1,f}, \mathcal{F})$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\varepsilon' > 0$ tal que $\varepsilon' < \min\{\varepsilon, \frac{1}{4}\}$ y verificando $d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon$ para $i = -1, 0, 1$, toda vez que $d(x, y) < \varepsilon'$. Elijamos $\delta > 0$ de la definición de punto $\mathcal{F}$-sombreable para $\phi^{1,f}$ con respecto de ε'. A su vez, consideremos $0 < \delta' < \delta$ tal que $d(x, y) < \delta'$ implique $d(f(x), f(y)) < \delta$. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ cualquier δ'-pseudo órbita de f con $x_0 = z$ y formemos con esta las secuencias $(x_n, \frac{1}{2})_{n\in\mathbb{Z}}$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tales que $t_n = 1$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$\begin{aligned} d^{1,f}(\phi^{1,f}_{t_n}(x_n, \tfrac{1}{2}), (x_{n+1}, \tfrac{1}{2})) &= d^{1,f}((f(x_n), \tfrac{1}{2}), (x_{n+1}, \tfrac{1}{2})) \\ &= \tfrac{1}{2}d(f(x_n), x_{n+1}) + \tfrac{1}{2}d(f^2(x_n), f(x_{n+1})) \leq \delta. \end{aligned}$$

Esto es, $((x_n, \frac{1}{2}), t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una $(\delta, 1)$-pseudo órbita de $\phi^{1,f}$ pasando a través de $x_0 = z$; por consiguiente, existen $(x, s) \in X^{1,f}$ y $\alpha \in \mathcal{F}$ tales que:

$$d^{1,f}(\phi^{1,f}_{\alpha(t)}(x, s), \phi^{1,f}_{t-n}(x_n, \tfrac{1}{2})) < \varepsilon', \quad \text{para } n \leq t < n + 1 \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{3.2}$$

En caso que $t = 0$, se tiene:

$$d^{1,f}((x, s), (z, \tfrac{1}{2})) < \tfrac{1}{4},$$

de donde $|s - \frac{1}{2}| < \frac{1}{4}$. Además, dado que $d^{1,f}(\phi^{1,f}_{\alpha(t)}(x,s), \phi^{1,f}_t(z, \frac{1}{2})) < \varepsilon' < \frac{1}{4}$ para cada $0 \leq t < 1$, se obtiene que $d^{1,f}((x, s + \alpha(1)), (z, \frac{3}{2})) < \frac{1}{4}$; por lo cual se verifica:

$$|\tfrac{3}{2} - s - \alpha(1)| < \tfrac{1}{4}.$$

Entonces $1 \leq s + \alpha(1) < 2$ y de esta manera $\phi^{1,f}_{\alpha(1)}(x,s)$ puede ser representado como $(f(x), s^{(1)})$ donde $0 \leq s^{(1)} < 1$. De manera similar $d^{1,f}(\phi^{1,f}_{\alpha(t)}(x,s), \phi^{1,f}_{t-1}(x_1, \frac{1}{2})) < \varepsilon' < \frac{1}{4}$ para todo $1 \leq t < 2$, por lo que $d^{1,f}((f(x), \alpha(2) + s - 1), (x_1, \frac{3}{2})) < \frac{1}{4}$, por consiguiente $\phi^{1,f}_{\alpha(2)}(x,s)$ puede ser representado por $(f^2(x), s^{(2)})$ donde $0 \leq s^{(2)} < 1$. Prosiguiendo de manera análoga obtenemos que $\phi^{1,f}_{\alpha(n)}(x,s)$ puede ser representado por $(f^n(x), s^{(n)})$ donde $0 \leq s^{(n)} < 1$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Haciendo $t = n$ en (3.2), se tiene que:

$$d^{1,f}(\phi^{1,f}_n(x,s), (x_n, \tfrac{1}{2})) = d^{1,f}((f^n(x), s^{(n)}), (x_n, \tfrac{1}{2})) < \varepsilon'.$$

Si $f^n(x) = x_n$, $d(f^n(x), x_n) < \varepsilon$ es trivial. En caso que $f^n(x) \neq x_n$, se sigue que:

$$\tfrac{1}{2}d(f^n(x), x_n) + \tfrac{1}{2}d(f^{n+1}(x), f(x_n)) \leq d^{1,f}((f^n(x), s^{(n)}), (x_n, \tfrac{1}{2})) < \varepsilon'.$$

Por consiguiente $d(f^n(x), x_n) < \varepsilon'$ ó $d(f^{n+1}(x), f(x_n)) < \varepsilon'$, entonces, de la manera en que fue elegido ε' se obtiene que $d(f^n(x), x_n) < \varepsilon$ para cada $n \in \mathbb{Z}$; esto es, $z \in Sh(f)$. ■

Prueba del Teorema 3.2.1. La prueba del Item (1) se sigue directamente del Lema 3.2.4. Para probar el Item (2), notemos que es suficiente probar una inclusión; por ello, sea $x \in Sh(\phi, \overline{\mathcal{F}})$ y $\varepsilon > 0$. Existe un $\delta > 0$ tal que para cada $(\delta, 1)$-pseudo órbita de ϕ que pasa por x puede ser $(\overline{\mathcal{F}}, \varepsilon)$-sombreada. Entonces, dada $(x_i, t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ una $(\delta, 1)$-pseudo órbita de ϕ que pasa por x, existen $h \in \overline{\mathcal{F}}$ y $z \in X$ que satisfacen $d(x \star t, \phi_{h(t)}(z)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, para cada $t \in \mathbb{R}$. Tome un $\varepsilon_0 > 0$ verificando $\phi_{(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)}(x) \subset B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ para todo $x \in X$. A continuación, fije un $g \in \mathcal{F}$ tal que $\widehat{d}(h, g) < \varepsilon_0$ y tome cualquier $t \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$d(x \star t, \phi_{g(t)}(z)) \leq \frac{\varepsilon}{2} + d(\phi_{h(t)}(z), \phi_{g(t)}(z)).$$

Por la inclusión $\phi_{(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)}(\phi_{h(t)}(z)) \subset B(\phi_{h(t)}(z), \frac{\varepsilon}{2})$ y $\widehat{d}(h,g) < \varepsilon_0$, obtenemos:

$$d(\phi_{h(t)}(z), \phi_{g(t)}(z)) = d(\phi_{h(t)}(z), \phi_{g(t)-h(t)}(\phi_{h(t)}(z))) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo cual, $d(x \star t, \phi_{g(t)}(z)) \leq \varepsilon$ y así $x \in Sh(\phi, \mathcal{F})$.

El Item (3) se consigue haciendo $K = X$ en el Lema 3.2.3 con ello se tiene que ϕ tiene la $\mathcal{F}$-POTP si y solo si $Sh(\phi, \mathcal{F}) = X$.

Probemos ahora el Item (4), trivialmente $\Omega(\phi) \subset CR(\phi)$; por tanto, resta probar el otro contenido. Por hipótesis $CR(\phi) \subset Sh(\phi, \mathcal{S})$, de donde $\Omega(\phi) = CR(\phi)$ utilizando el Lema 3.2.5.

El Item (5) se sigue directamente de $\overline{Per(\phi)} \subset CR(\phi)$ y el Lema 3.2.6.

Para probar el Item (6), consideremos $f\colon X \to Y$ una equivalencia entre los flujos ϕ y ψ definidos en los espacios métricos compactos (X, d_x) e (Y, d_y) respectivamente. Por definición, para cada $x \in X$ existe $h_x \in \mathcal{S}$ tal que:

$$f^{-1}(\psi(h_x(t), f(x))) = \phi(t, x), \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Sea $a = \min\{h_x(1) : x \in X\} > 0$. Dado $\varepsilon > 0$, tome un $\varepsilon' > 0$ verificando que $d_y(y_1, y_2) < \varepsilon'$ implique $d_x(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) < \varepsilon$ para cualesquier $y_1, y_2 \in Y$. Considere $p \in f^{-1}(Sh(\psi, \mathcal{F}))$. Por Lema 3.2.2, existe un $\delta' > 0$ tal que cada (δ', a)-pseudo órbita que atraviesa $f(p)$ puede ser $(\mathcal{F}, \varepsilon')$-sombreada por una órbita de ψ. A su vez, tome $\delta > 0$ tal que $d_y(f(x_1), f(x_2)) < \delta'$ toda vez que $d_x(x_1, x_2) < \delta$ para cada $x_1, x_2 \in X$. Si $(x_n, t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una $(\delta, 1)$-pseudo órbita de ϕ pasando a través de p, entonces $d_y(f(\phi_{t_n}(x_n)), f(x_{n+1})) < \delta'$. Por definición de equivalencia se tiene:

$$d_y(\psi_{h_{x_n}(t)}(f(x_n)), f(x_{n+1})) < \delta', \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Consideremos la secuencia $(f(x_n), h_{x_n}(t_n))_{n\in\mathbb{Z}}$. Como $t_n \geq 1$ se tiene que $h_{x_n}(t_n) \geq a$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, por lo cual, $(f(x_n), h_{x_n}(t_n))_{n\in\mathbb{Z}}$ es una (δ', a)-pseudo órbita de ψ que pasa a través de $f(p)$. Entonces, existen $y = f(z)$ en Y y $\alpha \in \mathcal{F}$ tales que

$$d_y(f(x_0) \star t, \psi_{\alpha(t)}(y)) < \varepsilon', \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Es decir,

$$d_x\left(f^{-1}(f(x_0)\star t), f^{-1}(\psi_{\alpha(t)}(f(z)))\right) < \varepsilon, \quad \text{para cualquier } t \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Ahora fijemos $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$ satisfaciendo $s_n \leq t < s_{n+1}$. Como las reparametrizaciones h_{x_n} son crecientes, entonces $0 \leq h_{x_n}(t - s_n) < h_{x_n}(t_n)$. Por tanto, si denotamos $\widehat{s}_n = \sum_{j=0}^{n-1} h_{x_j}(t_j)$ para $n \geq 1$ y $\widehat{s}_n = -\sum_{j=n}^{-1} h_{x_j}(t_j)$ para $n \leq 0$ tenemos que $\widehat{s}_n \leq h_{x_n}(t - s_n) + \widehat{s}_n < \widehat{s}_{n+1}$. Tome $\widehat{t} = h_{x_n}(t - s_n) + \widehat{s}_n$, de esta manera $\psi^{\widehat{t}}(f(x_0)) = \psi_{h_{x_n}(t-s_n)}(f(x_n))$. Haciendo $t = \widehat{t}$ en (3.3) se sigue que:

$$d_x(\phi_{t-s_n}(x_n), \phi_{h_z^{-1}(\alpha(\widehat{t}\,))}(z)) = d_x(f^{-1}(\psi_{\widehat{t}-\widehat{s}_n}(f(x_n))), f^{-1}(\psi_{\alpha(\widehat{t}\,)}(f(z)))) < \varepsilon.$$

Luego, si denotamos $\widehat{\alpha}(t) = h_z^{-1}(\alpha(h_{x_n}(t - s_n) + \widehat{s}_n))$ obtenemos:

$$d_x(x_0 \star t, \phi_{\widehat{\alpha}(t)}(z)) < \varepsilon, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Además, dado que $t \mapsto h_{x_n}(t - s_n) + \widehat{s}_n$ es creciente y $\mathcal{SFS} \subset \mathcal{F}$, entonces $\widehat{\alpha} \in \mathcal{F}$; en consecuencia, $f^{-1}(Sh(\psi, \mathcal{F})) \subseteq Sh(\phi, \mathcal{F})$. La inclusión recíproca es análoga.

Finalmente probemos el Item (7), sin pérdida de generalidad por el Item (6) podemos asumir que $\tau \equiv 1$. Además por el Lema 3.2.7 es suficiente verificar que dado un punto sombreable de f podemos inducir un punto $\mathcal{S}$-sombreable de $\phi^{1,f}$. Con esto en mente, sean $z \in Sh(f)$ y $r \in [0,1]$. Dado $\varepsilon > 0$, tome $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ tal que $d(x,y) < \varepsilon'$ implique $d(f^i(x), f^i(y)) < \frac{1}{2}\varepsilon$ para $i = 0, 1, 2$. Fijemos δ satisfaciendo $0 < \delta < \frac{1}{2}\varepsilon'$ y verificando la definición de punto sombreable para f respecto de ε'. Tome $0 < \delta' < \min\{\frac{1}{4}, \delta\}$ como en el Lema 2.5 de [36] y $((x_k, s_k), (t_k))_{k\in\mathbb{Z}}$ una $(\delta', 2, 4)$-pseudo órbita que pasa a través de (z, r) para el flujo $\phi^{1,f}$. Denote por $w_k = [s_k + t_k]$ la parte entera de $s_k + t_k$. Entonces

$$d^{1,f}((f^{w_k}(x_k), s_k + t_k - w_k), (x_{k+1}, s_{k+1})) < \delta' \quad \text{para cada } k \in \mathbb{Z}.$$

Como $\delta' < \frac{1}{4}$, por el Lema 2.4 de [36], se tiene que $|s_k + t_k - w_k - s_{k+1}| < \delta'$ ó $|1 + s_k + t_k - w_k - s_{k+1}| < \delta'$ ó $|1 + s_{k+1} + w_k - t_k - s_k| < \delta'$. Ahora, sea n_k un entero positivo definido del siguiente modo:

$$n_k = \begin{cases} w_k & \text{si } |s_k + t_k - w_k - s_{k+1}| < \delta', \\ w_k - 1 & \text{si } |1 + s_k + t_k - w_k - s_{k+1}| < \delta', \\ w_k + 1 & \text{si } |1 + s_{k+1} + w_k - t_k - s_k| < \delta'. \end{cases}$$

Entonces por Lema 2.5 en [36] obtenemos que $d(f^{n_k}(x_k), x_{k+1}) < \delta$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$. Definamos una secuencia $(y_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ en X como sigue:

$$y_i = f^{i-N_k}(x_k) \quad \text{para } N_k \le i < N_{k+1},$$

donde $(N_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es la secuencia de sumas asociada a $(n_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Obviamente, esta secuencia es una δ-pseudo órbita de f que pasa a través de z; por consiguiente, existe un $x \in X$ tal que $d(f^i(x), y_i) < \varepsilon'$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Por tanto, tenemos:

$$d(f^{j+N_k}(x), f^j(x_k)) < \varepsilon' \quad \text{para } 0 \le j < n_k \ (k \in \mathbb{Z}). \tag{3.4}$$

Ahora, tome un elemento $(x, t) \in X^{1,f}$ y defina $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del siguiente modo:

$$\alpha(t) = \frac{s_{k+1} + n_k - s_k}{t_k}(t - T_k) + s_k + N_k - s_0, \quad \text{toda vez que } T_k \le t < T_{k+1},$$

donde $(T_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es la secuencia de sumas asociada a $(t_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Claramente α es una función continua y $\alpha(0) = 0$. A su vez, $\alpha \in \mathcal{S}$ puesto que $n_k \ge 1$. Afirmamos que $\phi^{1,f}_{\mathbb{R}}(x, r)$ es una órbita en $X^{1,f}$ que $(\mathcal{S}, \varepsilon)$-sombrea a $((x_k, s_k), (t_k))_{k\in\mathbb{Z}}$. Sea $t \in \mathbb{R}$ y sea $k \in \mathbb{Z}$ que satisface $T_k \le t < T_{k+1}$, entonces:

$$\begin{aligned} |\alpha(t) - s_k - N_k + s_0 - (t - T_k)| &= \left| \frac{s_{k+1} + n_k - s_k - t_k}{t_k}(t - T_k) \right| \\ &= |s_{k+1} + n_k - s_k - t_k| \left| \frac{t - T_k}{t_k} \right|. \end{aligned}$$

Dado que $|s_k + t_k - n_k - s_{k+1}| < \delta'$ y $0 \le t - T_k < t_k$, se obtiene:

$$|\alpha(t) - s_k - N_k + s_0 - (t - T_k)| < \delta'.$$

Ahora, si j es un entero positivo que satisface $0 \le s_k + t - T_k - j < 1$, entonces $0 \le j \le s_k + t_k \le n_k + 2$. De este modo, por (3.4) y la elección de ε' concluimos que $d(f^{j+N_k}(x), f^j(x_k)) < \frac{1}{2}\varepsilon$ para cada $0 \leq j \leq n_k + 2$. Finalmente

$$
\begin{aligned}
d^{1,f}(\phi^{1,f}_{\alpha(t)}(x,r), \phi^{1,f}_{t-T_k}(x_k, s_k)) &= d^{1,f}\left((f^{N_k}(x), r + \alpha(t) - N_k), (x_k, s_k + t - T_k)\right) \\
&= d^{1,f}\left((f^{j+N_k}(x), r + \alpha(t) - N_k - j), (f^j(x_k), s_k + t - T_k - j)\right) \\
&\leq d^{1,f}\left((f^{j+N_k}(x), r + \alpha(t) - N_k - j), (f^{j+N_k}(x_k), s_k + t - T_k - j)\right) \\
&\quad + d^{1,f}\left((f^{j+N_k}(x_k), s_k + t - T_k - j), (f^j(x_k), s_k + t - T_k - j)\right) \\
&\leq |r + \alpha(t) - N_k - j - (s_k + t - T_k - j)| + (s_k + t - T_k - j) d(f^{j+N_k+1}(x), f^{j+1}(x_k)) \\
&\quad + (1 - s_k - t + T_k + j) d(f^{j+N_k}(x), f^j(x_k)) \\
&< \delta' + \tfrac{1}{2}(1 - (s_k + t - T_k - j))\varepsilon + \tfrac{1}{2}(s_k + t - T_k - j)\varepsilon \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente $(x, r) \in Sh(\phi^{1,f})$. ■

3.3 Conjunto de puntos $\mathcal{F}$-sombreables

En [30], Morales muestra algunos ejemplos en los cuales el conjunto de puntos sombreables es un conjunto G_δ en el espacio de fase. Quedando la interrogante de si este conjunto siempre tendrá aquel comportamiento. Recientemente, en [20] Kawaguchi prueba que el conjunto de puntos sombreables de un homeomorfismo es un subconjunto de Borel; es más, se prueba que este conjunto es un $F_{\sigma\delta}$ en el espacio de fase, es decir, una intersección numerable de uniones numerables de conjuntos cerrados.

Motivados por esto, nos proponemos hacer un análisis similar al conjunto de puntos $\mathcal{F}$-sombreables de un flujo, por lo cual introducimos la siguiente noción.

Definición 3.3.1 *Dados $\varepsilon > 0$, $\mathcal{F}$ y K un subconjunto de X. Decimos que un flujo ϕ tiene la $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-POTP a través del conjunto K si existe un $\delta > 0$ tal que toda* $(\delta, 1)$*-pseudo órbita que pasa a través K puede ser $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-sombreada.*

Note que si un flujo tiene la $\mathcal{F}$-POTP a través de un conjunto K, entonces tiene la $(\mathcal{F},\varepsilon)$-$POTP$ a través del mismo para todo $\varepsilon > 0$; más aún, el siguiente resultado extiende esta inclusión.

Lema 3.3.2 *Sea ϕ un flujo en un espacio métrico compacto X y sea $\varepsilon > 0$. Si el flujo ϕ tiene la $\mathcal{F}$-POTP a través de un conjunto K, entonces existe un $\delta > 0$ tal que ϕ tiene la $(\mathcal{F}, 2\varepsilon)$-POTP a través de $B[K,\, \delta]$.*

Demostración. Supongamos por contradicción que el flujo ϕ tiene la $\mathcal{F}$-POTP a través de un conjunto K, pero para cada $\delta > 0$ es posible hallar una $(\delta,\, 1)$-pseudo órbita pasando a través de $B[K,\, \delta]$ que no puede ser $(\mathcal{F}, 2\varepsilon)$-sombreada.

Tome un $\delta > 0$ de la definición de $\mathcal{F}$-POTP a través de K tal que $\delta < \varepsilon$, y sea $(\xi^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una secuencia de $(\frac{1}{k},\, 1)$-pseudo órbitas pasando a través de $B[K,\, \frac{1}{k}]$ que no pueden ser $(\mathcal{F}, 2\varepsilon)$-sombreadas. Para cada $k \in \mathbb{N}$ escribimos $\xi^k = (\xi^k_n,\, t^k_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Existe una secuencia $x_k \in K$ que satisface $d(\xi^k_0, x_k) \leq \frac{1}{k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por la continuidad uniforme de ϕ en $X \times [-t^1_0,\, t^1_0]$, es posible escoger un k con la propiedad que:

$$\max\{\max_{-t^1_0\leq t\leq t^1_0}\{d(\phi_t(\xi^k_0),\, \phi_t(x_k))\},\, \tfrac{1}{k}\} \leq \frac{\delta}{2}.$$

Fijado k, definimos la secuencia $\xi = (\xi_n,\, t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ como:

$$(\xi_n,\, t_n) = \begin{cases} (\xi^k_n,\, t^k_n) & \text{si } n \neq 0, \\ (x_k,\, t^k_0) & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Afirmamos que ξ es una $(\delta,\, 1)$-pseudo órbita. Claramente, $d(\phi_{t_n}(\xi_n),\, \xi_{n+1}) \leq \frac{1}{k} < \delta$ para $n \neq -1,\, 0$. Veamos el resto de casos:

$$d(\phi_{t_{-1}}(\xi_{-1}),\, \xi_0) = d(\phi_{t^k_{-1}}(\xi^k_{-1}),\, x_k) \leq d(\phi_{t^k_{-1}}(\xi^k_{-1}),\, \xi^k_0) + d(x_k,\, \xi^k_0) \leq \tfrac{1}{k} + \tfrac{1}{k} = \frac{2}{k} \leq \delta,$$

y

$$d(\phi_{t_0}(\xi_0),\, \xi_1) = d(\phi_{t^1_0}(x_k),\, \xi^k_1) \leq d(\phi_{t^1_0}(x_k),\, \phi_{t^1_0}(\xi^k_0)) + d(\phi_{t^1_0}(\xi^k_0),\, \xi^k_1) \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Además $\xi_0 = x_k \in K$, probando así la afirmación. Por lo cual, ξ puede ser $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-sombreada por un punto $y \in X$; es decir, existe $h \in \mathcal{F}$ tal que:

$$d(\xi_0 \star t,\, \phi_{h(t)}(y)) < \varepsilon, \quad \text{para cualquier } t \in \mathbb{R}.$$

Notemos que para $i \neq 0$ y t tal que $s_i \leq t < s_{i+1}$, se tiene:

$$\xi_0 \star t = \phi_{t-s_i}(\xi_i) = \phi_{t-s_i}(\xi_i^k) = \xi_0^k \star t.$$

Por consiguiente $\xi_0 \star t = \xi_0^k \star t$ para todo $t \notin [s_0,\, s_1)$. Además, para $t \in [s_0,\, s_1)$,

$$\begin{aligned} d(\xi_0^k \star t,\, \phi_{h(t)}(y)) &\leq d(\xi_0^k \star t,\, \xi_0 \star t) + d(\xi_0 \star t),\, \phi_{h(t)}(y)) \\ &\leq d(\phi_t(\xi_0^k),\, \phi_t(\xi_0)) + d(\xi_0 \star t,\, \phi_{h(t)}(y)) \\ &\leq \frac{\delta}{2} + \varepsilon \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

De este modo, $d(\xi_0^k \star t,\, \phi_{h(t)}(y)) \leq 2\varepsilon$ para cada $t \in \mathbb{R}$, por tanto, ξ^k es $(\mathcal{F}, 2\varepsilon)$-sombreable, lo cual es una contradicción. ■

Ahora podemos mostrar el principal resultado de esta sección.

Teorema 3.3.3 *El conjunto de puntos $\mathcal{F}$-sombreables de un flujo continuo ϕ en X es un subconjunto G_δ de X.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ denotemos por $Sh(\phi, \mathcal{F}, \varepsilon)$ al conjunto de puntos $p \in X$ tales que el flujo tiene la $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-POTP a través de $\{p\}$ (ver Definición 3.3.1). Notemos que:

$$Sh(\phi, \mathcal{F}) = \bigcap_{\varepsilon > 0} Sh(\phi, \mathcal{F}, \varepsilon). \tag{3.5}$$

Fije $\varepsilon_0 > 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $Sh(\phi, \mathcal{F}) \neq \emptyset$. Dado $x \in Sh(\phi, \mathcal{F})$, por Lema 3.3.2 existe un $\delta_{x,\varepsilon_0} > 0$ tal que cada $(\delta_{x,\varepsilon_0},\, 1)$-pseudo órbita que pasa a través de $B[x,\, \delta_{x,\varepsilon_0}]$ puede ser $(\mathcal{F}, \varepsilon_0)$-sombreada, por tanto, $B(x,\, \delta_{x,\varepsilon_0}) \subset Sh(\phi, \mathcal{F}, \varepsilon_0)$. Así, para cada $\varepsilon_0 > 0$ tenemos:

$$Sh(\phi, \mathcal{F}, \varepsilon_0) = A(\varepsilon_0) \cup B(\varepsilon_0),$$

donde $A(\varepsilon_0) = \bigcup_{x\in Sh(\phi)} B(x,\, \delta_{x,\varepsilon_0})$ y $B(\varepsilon_0) = Sh(\phi, \mathcal{F}, \varepsilon_0) \setminus A(\varepsilon_0)$. Además, notemos que $A(\varepsilon_0)$ es abierto y $B(\varepsilon_0) \subset Sh(\phi, \mathcal{F}, \varepsilon_0) \setminus Sh(\phi, \mathcal{F})$. Entonces, por (3.5) obtenemos $\bigcap_{\varepsilon_0>0} B(\varepsilon_0) = \emptyset$ y de esta manera:

$$Sh(\phi, \mathcal{F}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Sh(\phi, \mathcal{F}, \tfrac{1}{n}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A(\tfrac{1}{n}) \cup B(\tfrac{1}{n}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A(\tfrac{1}{n}).$$

Por lo cual, $Sh(\phi, \mathcal{F})$ es un subconjunto G_δ de X. ■

Retornando al caso de homeomorfismos, haciendo uso del Teorema 3.3.3, nosotros mejoramos el resultado obtenido por Kawaguchi al probar que el conjunto de puntos sombreables es siempre un subconjunto G_δ del espacio de fase.

Corolario 3.3.4 *El conjunto de puntos sombreables de un homeomorfismo f en un espacio métrico compacto X es un subconjunto G_δ de X.*

Demostración. Por el Teorema 3.3.3, la suspensión $\phi^{1,f}$ satisface que $Sh(\phi^{1,f}, \mathcal{F})$ es un subconjunto G_δ de $X^{1,f}$. De esta manera existe una secuencia $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos abiertos en $X^{1,f}$ con la siguiente propiedad $Sh(\phi^{1,f}, \mathcal{F}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Por otro lado usando el Teorema 3.2.1 se tiene:

$$p(Sh(f) \times [0,1]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

donde $p : X \times [0,1] \to X^{1,f}$ es el mapeo cociente de $X^{1,f}$. Además, por la invarianza de $Sh(f)$ respecto de f se puede probar que $Sh(f) \times [0,1] = p^{-1}(p(Sh(f) \times [0,1]))$. Por consiguiente

$$Sh(f) \times [0,1] = \bigcap_{n=1}^{\infty} p^{-1}(A_n). \tag{3.6}$$

Así, dado $z \in Sh(f)$, por (3.6) se tiene que $z \times [0,1] \subset p^{-1}(A_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado que $p^{-1}(A_n)$ es abierto, existe un $\varepsilon_{z,n} \leq \frac{1}{n}$ tal que $B(z, \varepsilon_{z,n}) \times [0,1] \subset p^{-1}(A_n)$.

Finalmente, haciendo $V_n = \bigcup_{z\in Sh(f)} B(z, \varepsilon_{z,n})$ podemos concluir:

$$Sh(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n.$$

Lo cual termina la prueba. ■

3.4 $\mathcal{F}$-sombreamiento a Futuro

Denotemos por $Sh^+(\phi, \mathcal{F})$ al conjunto de puntos $p \in X$ tales que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que cada $(\delta, 1)$-pseudo órbita $(x_i, t_i)_{i=0}^{\infty}$ *positiva* pasando a través de $\{p\}$ puede ser $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-sombreada. Cada elemento de $Sh^+(\phi, \mathcal{F})$ se dice *$\mathcal{F}$-sombreable a futuro.* Claramente se tiene $Sh(\phi, \mathcal{F}) \subset Sh^+(\phi, \mathcal{F})$ y cuando $\mathcal{F}$ es invariante obtenemos una condición suficiente para su cerradura.

Proposición 3.4.1 *Si $\mathcal{F}$ es un subconjunto invariante y $Sh^+(\phi, \mathcal{F})$ tiene $\mathcal{F}$-POTP, entonces $Sh^+(\phi, \mathcal{F})$ es cerrado en X.*

Demostración. Suponga que existe un $p \in \overline{Sh^+(\phi, \mathcal{F})} \setminus Sh^+(\phi, \mathcal{F})$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe una $(\delta, 1)$-pseudo órbita que pasa a través de $\{p\}$ que no puede ser $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-sombreada. Dado $\delta > 0$ (de la $\mathcal{F}$-POTP a través de $Sh^+(\phi, \mathcal{F})$) tome $w \in B[p, \delta] \cap Sh^+(\phi, \mathcal{F})$ y sea $(x_i, t_i)_{i=0}^{\infty}$ una $(\delta, 1)$-pseudo órbita que pasa a través de $\{p\}$ que no puede ser $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-sombreada. Considere $(y_i, T_i)_{i=0}^{\infty}$ que satisface

$$(y_i, T_i) = \begin{cases} (\phi_{-1}(w), 1), & \text{si } i = 0, \\ (x_{i-1}, t_{i-1}), & \text{otro caso}. \end{cases}$$

Entonces $(y_i, T_i)_{i=0}^{\infty}$ es $(\delta, 1)$-pseudo órbita que pasa a través de $\{\phi_{-1}(w)\}$. Por el Lema 3.2.4, $\phi_{-1}(w) \in Sh^+(\phi, \mathcal{F})$ por lo que existen $z \in X$ y $h \in \mathcal{F}$ tales que $d(\phi_{t-S_i}(y_i)\phi_{h(t)}(z))$ para $S_i \leq t < S_{i+1}$, donde (S_i) es la secuencia de sumas asociada a (T_i). Si (s_i) es la secuencia de sumas asociada a (t_i), entonces se verifica que

$S_{i+1} = 1 + s_i$ para todo $i \geq 1$, por tanto: $d(\phi_{t-s_i}(x_i)\phi_{h^\star(t)}(z^\star))$ para $s_i \leq t < s_{i+1}$ donde $z^\star = \phi_{h(1)}(z)$ y $h^\star(t) = h(t+1) - h(1)$. Luego $h^\star \in \mathcal{F}$, por consiguiente, $z^\star$ $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-sombrea $(x_i,\, t_i)_{i=0}^{\infty}$ lo cual es absurdo. ■

En [30], se hace la pregunta de cuándo un homeomorfismo transitivo posea un conjunto de puntos sombreables *no trivial*, es decir, que sea un subconjunto no vacío y propio del espacio de fase. En [20] el autor responde esta interrogante de forma negativa. A continuación haremos un análisis similar para los flujos con sombreamiento a futuro.

Recordemos que un flujo es recurrente por cadenas si satisface que $CR(\phi) = X$.

Teorema 3.4.2 *Si $\mathcal{F}$ es invariante y el flujo ϕ es recurrente por cadenas, entonces $Sh^+(\phi, \mathcal{F})$ es trivial.*

Demostración. Supongamos que $Sh^+(\phi, \mathcal{F}) \neq \emptyset$. Sean $p \in Sh^+(\phi, \mathcal{F})$ y $q \in X$. Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta > 0$ de la definición de $\mathcal{F}$-sombreamiento a futuro de p. Sea $(x_i,\, t_i)_{i=0}^{\infty}$ una $(\delta,\, 1)$-pseudo órbita positiva pasando a través de q y sea $(y_i,\, s_i)_{i=0}^{m}$ una $(\delta,\, 1)$-cadena tal que $y_0 = p$ e $y_m = q$. Consideremos las secuencia de pares $(z_j,\, r_j)_{j=0}^{\infty}$ dados por:

$$(z_j,\, r_j) = \begin{cases} (y_j,\, s_j) & \text{si } 0 \leq j < m, \\ (x_{j-m},\, t_{j-m}) & \text{otro caso .} \end{cases}$$

Entonces $(z_j,\, r_j)_{j=0}^{\infty}$ es una $(\delta,\, 1)$-pseudo órbita positiva pasando a través de p, por tanto, existen $h \in \mathcal{F}$ e $y \in X$ tales que $d(p \star t,\, \phi_{h(t)}(y)) \leq \varepsilon$, para todo $t \in [0,\, \infty)$. Ahora, considere las secuencias:

$$\hat{r}_i = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{i-1} r_j & i > 0, \\ 0 & i = 0, \end{cases}$$

y

$$\hat{t}_i = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{i-1} t_j & i > 0, \\ 0 & i = 0. \end{cases}$$

Note que

$$\hat{r}_{m+k} - \hat{r}_m = \sum_{j=0}^{m+k-1} r_j - \sum_{j=0}^{k-1} r_j = \sum_{j=m}^{m+k-1} t_j = \hat{t}_k.$$

De modo que, si $\hat{t_k} \leq t < \hat{t}_{k+1}$ donde $k \geq 0$, entonces $\hat{r}_{m+k} \leq t + \hat{r}_m < \hat{r}_{k+m+1}$ y haciendo $g(t) = h(t + \hat{r}_m) - h(\hat{r}_m)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} d(q \star t,\, \phi_{g(t)}(\phi_{h(\hat{r}_m)}(y))) &= d(\phi_{t-\hat{t}_k}(x_k),\, \phi_{h(t+\hat{r}_m)-h(\hat{r}_m)}(\phi_{h(\hat{r}_m)}(y))) \\ &= d(\phi_{t+\hat{r}_m-\hat{r}_{m+k}}(z_{m+k}),\, \phi_{h(t+\hat{r}_m)}(y)) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Hemos probado entonces que dada una $(\delta,\, 1)$-pseudo órbita pasando a través de q podemos $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-sombrearla por $\phi_{h(\hat{t}_m)}(y)$, por consiguiente, $q \in Sh^+(\phi)$. Lo cual muestra que $Sh^+(\phi) = X$. ■

Recordemos que un flujo ϕ se dice *transitivo* si existe un $x \in X$ tal que $\omega(x) = X$ donde $\omega(x) = \{y \in X \colon y = \lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(x)$ para alguna secuencia $t_n \to +\infty\}$.

Corolario 3.4.3 *Si $\mathcal{F}$ es invariante y ϕ transitivo, entonces $Sh^+(\phi)$ es trivial.*

El Corolario 3.4.3 puede ser utilizado para obtener información sobre el atractor geométrico de Lorenz [23,43]. En [23], Komuro prueba que si ϕ el atractor geométrico de Lorenz, entonces este no tiene POTP a futuro en caso que su mapeo de retorno f satisfaga $f(0) \neq 0$ ó $f(1) \neq 1$. Es decir, $Sh^+(\phi, \mathcal{S}) \neq X$ por lo cual $Sh^+(\phi, \mathcal{S}) = \emptyset$. Lo que prueba el siguiente resultado.

Corolario 3.4.4 *El atractor geométrico de Lorenz cuyo mapeo de retorno satisfaga $f(0) \neq 0$ ó $f(1) \neq 1$ no tiene puntos $\mathcal{F}$-sombreables si $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ es invariante.*

Capítulo 4

Complejidad dinámica

En este capítulo final, estaremos interesados en la implementación de la noción de *complejidad* para flujos; lo cual, como en el caso discreto, debe ser hecho por etapas.

4.1 $\mathcal{F}$- complejidad

En el caso de flujos, la noción de (ε, t)-*complejidad* depende de la noción de conjunto separado que se tome en el espacio de fase: conjunto (ε, t)-*separado* introducida por Bowen en [15] o conjunto *fuertemente* (ε, t)-*separado* dada por Thomas en [38]. Cada una de estas nociones está directamente relacionada al conjunto de reparametrizaciones que el flujo soporte, en efecto, si ϕ es un flujo en un espacio compacto (X, d), dado $(\delta, t) \in \mathbb{R}_+^2$ y dado $E \subset X$, se dice que:

- E es un conjunto (δ, t)-separado de X si para cada $x, y \in E$, con la propiedad que $x \neq y$ se tiene $d(\phi_s(x), \phi_s(y)) > \delta$ para algún $s \in [0, t]$.
- E es un conjunto fuertemente (δ, t)-separado en X si para cada $x, y \in E$, $x \neq y$ y para cada $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ se verifica $d(\phi_{\alpha(s)}(x), \phi_s(y)) > \delta$ para algún $s \in [0, t]$ ó $d(\phi_{\beta(\gamma)}(y), \phi_\gamma(x)) > \delta$ algún $\gamma \in [0, t]$.

Motivados por esto, introducimos la noción de conjunto $(\varepsilon, t, \mathcal{F})$-*separado* de tal modo que las nociones de separación, dadas en [15, 38], queden unificadas.

Definición 4.1.1 *Dados* $(\delta, t) \in \mathbb{R}^2_+$*,* $E \subset X$ *y* $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$*, decimos que* E *es un conjunto* $(\delta, t, \mathcal{F})$*-separado de* X *si para cada* $x, z \in E$ *con* $x \neq z$ *y cada* $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ *se satisface que* $d(\phi_{\alpha(s)}(x), \phi_s(z)) > \delta$ *para algún* $s \in [0, t]$ *ó* $d(\phi_{\beta(\gamma)}(z), \phi_\gamma(x)) > \delta$ *para algún* $\gamma \in [0, t]$.

Claramente, cada conjunto $(\delta, t, \mathcal{S})$-separado es fuertemente (δ, t)-separado y cada $(\delta, t, \{\mathrm{Id}_\mathbb{R}\})$-separado es (δ, t)-separado.

Considerando la siguiente notación

$$B_t^\phi[x, \delta, \mathcal{F}] = \bigcup_{h \in \mathcal{F}} \{z \in X : d(\phi_s(x), \phi_{h(s)}(z)) \leq \delta, \forall\ 0 \leq s \leq t\},\ \forall x \in X,$$

podemos obtener una formulación equivalente: E es un conjunto $(\delta, t, \mathcal{F})$-separado de X si para cada $x, y \in E$ con $x \neq y$ se tiene $y \notin B_t^\phi[x, \delta, \mathcal{F}]$ ó $x \notin B_t^\phi[y, \delta, \mathcal{F}]$.

Cuando $\mathrm{Id}_\mathbb{R} \in \mathcal{F}$, la compacidad de X implica que existen finitos conjuntos $(\delta, t, \mathcal{F})$-separados, en consecuencia, en adelante supondremos que $\mathcal{F}$ contiene tal elemento. Dicho esto, definimos la $\mathcal{F}$-*complejidad* para flujos.

Definición 4.1.2 *Decimos que un flujo* ϕ *tiene* $\mathcal{F}$*-complejidad si existe un* $\delta > 0$ *(que llamaremos constante de* $\mathcal{F}$*-complejidad) satisfaciendo la siguiente propiedad:*

$$\lim_{t \to \infty} \mathcal{E}(\delta, t, \phi, \mathcal{F}) = \infty,$$

donde $\mathcal{E}(\delta, t, \phi, \mathcal{F}) = \max\{\, \mathrm{Card}(E) : E \subset X \text{ es } (\delta, t, \mathcal{F})\text{-separado}\,\}$.

Notemos que todo flujo con $\mathcal{F}$-complejidad tiene $\{\mathrm{Id}_\mathbb{R}\}$-complejidad, pero lo recíproco no es cierto; un ejemplo de ello puede verse considerando el flujo del Ejemplo 2.1.1. Sin embargo, si consideramos flujos de *alta* complejidad podemos hallar una equivalencia entre estas nociones de complejidad.

Decimos que ϕ tiene alta complejidad si existen $\delta > 0$ y $k \in [3, +\infty)$ tales que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathcal{E}(\delta, t, \phi, \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\})}{k^t} = \infty.$$

El siguiente resultado es motivado por la Proposición 14 en [39].

Lema 4.1.3 *Sea ϕ un flujo sin singularidades de alta complejidad y sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$. Entonces ϕ tiene $\mathcal{F}$-complejidad si y solo si tiene $\{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}$-complejidad.*

Demostración. Basta probar que la $\{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}$-complejidad implica la $\mathcal{F}$-complejidad. Tome $\delta > 0$ de la hipótesis y elija un $\beta > 0$ tal que $d(\phi_s(w), w) \leq \frac{\delta}{6}$ siempre que $w \in X$ y $|s| \leq \beta$. Fije $0 < \lambda < \min\{T_0, \frac{\beta}{9}\}$ y $\gamma > 0$ como en el Lema 2.4.4. Por otro lado, existe $\varepsilon \in (0, \frac{\delta}{6})$ tal que:

$$d(\phi_s(x), \phi_s(y)) \leq \gamma \text{ para cada } 0 \leq s \leq 2 \text{ toda vez que } d(x, y) < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Introducimos una notación dada por Thomas en [38]: $E \subset X$ se dice que (t, ε)-*traza* X si para cada $x \in X$, existen $e \in E$ y $\alpha \in \mathcal{S}$ tales que $d(\phi_s(x), \phi_{\alpha(s)}(e)) \leq \varepsilon$ para todo $0 \leq s \leq t$ (en este caso x es (t, ε)-trazado por e). Denote por $T_t(X, \varepsilon)$ a la menor cardinalidad de los conjuntos que (t, ε)-trazan X.

Fije $t \geq 0$ y tome E un conjunto que (t, ε)-traza X de cardinalidad $T_t(X, \varepsilon)$. Se sigue que $X = \bigcup_{e\in E}\{\text{puntos } (t, \varepsilon)\text{-trazados por } e\}$. Dado $e \in E$, si (a_k) es una secuencia finita de enteros donde $k = 0, 1 \ldots, [t/2]$, definimos:

$$A[e, (a_k), \varepsilon] = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{F}} \{x \in X : e \in B_t^{\phi}[x, \varepsilon, \{\alpha\}], \alpha_k = a_k \, \forall k\},$$

donde

$$\alpha_k = \left\{ \left[\frac{\alpha(2k) - 2k}{3\lambda} \right] \right\}, \quad k = 0, 1 \ldots, [t/2].$$

Entonces, si P_t denota al conjunto de secuencias enteras con $[t/2] + 1$ elementos relacionadas con las secuencias (a_k), se verifica que:

$$\text{Puntos } (t, \varepsilon)\text{-trazados por } e = \bigcup_{(a_k)\in P_t} A[e, (a_k), \varepsilon].$$

Afirmamos que para todo $z \in A[e,(a_k),\varepsilon]$ se satisface $A[e,(a_k),\varepsilon] \subset B_t^{\phi}[z,\frac{\delta}{2},\{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}]$. En efecto, dado $w \in A[e,(a_k),\varepsilon]$ existe un $\alpha \in \mathcal{F}$ con $\alpha_k = a_k$ para cada k y además $d(\phi_s(w),\phi_{\alpha(s)}(e)) \leq \varepsilon$ para cada $0 \leq s \leq t$. Luego de (4.1) y el Lema 2.4.4 se obtiene: $|\alpha(t_1)-\alpha(t_2)-(t_1-t_2)| \leq 3\lambda$, toda vez que $|t_1-t_2| \leq 2$. De $z \in A[e,(a_k),\varepsilon]$, se sigue que existe un $\eta \in \mathcal{F}$ con $\eta_k = a_k$ para cada k. Por tanto, para cada $s \in [0,t]$,

$$\begin{aligned}
|\alpha(s)-\eta(s)| &\leq |\alpha(\left[\tfrac{s}{2}\right]2)-\eta(\left[\tfrac{s}{2}\right]2)| + |\alpha(s)-\alpha(\left[\tfrac{s}{2}\right]2)-\{\eta(s)-\eta(\left[\tfrac{s}{2}\right]2)\}| \\
&\leq |\alpha(\left[\tfrac{s}{2}\right]2)-\left[\tfrac{s}{2}\right]2-\eta(\left[\tfrac{s}{2}\right]2)+\left[\tfrac{s}{2}\right]2| + 3\lambda \\
&\leq 6\lambda + 3\lambda = 9\lambda \leq \beta.
\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}
d(\phi_s(z),\phi_s(w)) &\leq d(\phi_s(z),\phi_{\eta(s)}(e)) + d(\phi_{\eta(s)}(e),\phi_{\alpha(s)}(e)) + d(\phi_s(w),\phi_{\alpha(s)}(e)) \\
&\leq \varepsilon + \tfrac{\delta}{6} + \varepsilon \leq \tfrac{\delta}{2},
\end{aligned}$$

esto es, $w \in B_t^{\phi}[z,\delta,\{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}]$. Lo que prueba la afirmación hecha. Entonces, si para cada secuencia $(a_k) \in P_t$ elejimos un $z(e) \in A[e,(a_k),\varepsilon]$, se tiene que:

$$X = \bigcup_{e \in E} \bigcup_{j \in P_t} B_t^{\phi}[z_j(e),\tfrac{\delta}{2},\{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}].$$

Notemos que $\mathrm{Card} P_t \leq 3^{[t/2]+1}$, por lo cual, para cada $t' > t$ se satisface:

$$\frac{\mathcal{E}\left(\delta,t,\phi,\{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}\right)}{3^{[t/2]+1}} \leq T_t(X,\varepsilon) \leq \mathcal{E}\left(\tfrac{\delta}{2},t',\phi,\mathcal{F}\right),$$

donde la última desigualdad es obtenida del Lema 11 en [38]. Por tanto, haciendo $t \to \infty$ obtenemos que el flujo tiene $\mathcal{F}$-complejidad. ■

El resultado anterior muestra que en presencia de flujos no singulares de alta complejidad, el uso de reparametrizaciones diferentes de la identidad es obsoleto en el sentido que la $\mathcal{F}$-complejidad se torna equivalente a la $\{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}$-complejidad. En general existen muchos flujos altamente complejos, basta tomar flujos con una variante de la *entropía polinomial* positiva [25]. Motivados por esto, en adelante solo trabajaremos con la $\{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}$-complejidad.

4.2 Complejidad dinámica

Introducimos ahora la principal noción de este capítulo.

Definición 4.2.1 *Un flujo tiene complejidad si tiene* $\{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}$*-complejidad.*

Una constante positiva δ de $\{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}$-complejidad será llamada constante de complejidad o de no haber peligro de confusión, constante de complejidad del flujo. En el caso discreto, sobre mapeos, una constante de expansividad positiva puede ser considerada como una constante de complejidad, esto es, todo mapeo positivamente expansivo tiene complejidad (ver [29]). Sin embargo, en el caso de flujos la situación es diferente.

Ejemplo 4.2.1 Todo flujo positivamente expansivo no tiene complejidad. En efecto, sea ϕ positivamente expansivo, entonces para cada $\delta > 0$ existe un $\eta > 0$, tal que $d(\phi_s(x), \phi_s(z)) \leq \frac{\delta}{2}$ para cada $s \geq 0$, siempre que $z \in \phi_{[-\eta,\eta]}(x)$. Haciendo uso del Teorema 4.2 en [7], obtenemos que X es la unión de un número finito de órbitas periódicas y puntos singulares. Sea K_δ un conjunto de puntos tal que cada punto de X esté a menos de η de uno de ellos. Así, para cada $\delta > 0$ no es posible hallar conjuntos $(\delta, t, \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\})$-separados en X con cardinalidad tan grande como uno desee, puesto que $\mathcal{E}(\delta, t, \phi, \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}) \leq \mathrm{Card}(K_\delta)$ para cada $t \in \mathbb{R}_+$. Por lo cual, ϕ no admite alguna constante de complejidad.

El siguiente ejemplo muestra una forma directa para reconocer flujos que admiten complejidad. Para ello, recordemos que la noción de entropía topológica para flujos, $h_{top}(\phi)$, se define como (ver [13]):

$$h_{top}(\phi) = \lim_{\delta\to 0} \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log(\mathcal{E}(\delta, t, \phi, \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\})).$$

Ejemplo 4.2.2 Si un flujo tiene entropía topológica positiva, entonces admite complejidad, empero, la implicación recíproca no es cierta. Basta considerar el homeomorfismo $f : X \to X$ donde $X = \{-1, 1\} \cup \{-1 - (1/n) : n \leq -2\} \cup \{1 - (1/n) :$

$n \geq 1\}$ con la topología inducida por $\mathbb{R}$ y tal que f mantenga fijos los puntos ± 1 y envíe cualquier otro elemento al siguiente a su derecha. Entonces, la suspensión $\phi^{1,f}$ admite complejidad (ver Ejemplo 4.2.3). Así, $\phi^{1,f}$ es un flujo expansivo, tiene complejidad y además $h_{top}(\phi^{1,f}) = 0$.

El ejemplo anterior muestra que la complejidad es más fina que la entropía topológica, no obstante, como veremos a continuación, satisface una serie de caracterizaciones que tienen cierta relación con la entropía topológica.

Previamente fijamos algunas notaciones que nos serán de gran utilidad. Dados los subconjuntos $E, F \subset X$ decimos que E (δ, t)-genera F cuando $F \subset \bigcup_{x \in E} B_t^{\phi}[x, \delta, \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}]$. Notemos que para mapeos continuos $f : X \to X$ podemos definir, similarmente, conjuntos (δ, m)-generadores, basta utilizar la siguiente m-bola dinámica:

$$B_m^f[x, \delta] = \{y \in X : d(f^k(x), f^k(y)) \leq \delta, \ \forall\, 0 \leq k < m\}.$$

Lema 4.2.2 *Sea ϕ un flujo en un espacio métrico compacto X. Si $\delta > 0$ es una constante de complejidad para ϕ y existen $\alpha > 0$ y $T \neq 0$ satisfaciendo:*

$$B_m^{\phi_T}[x, \alpha] \subset B_{t_m}^{\phi}\left[x, \tfrac{\delta}{2}, \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}\right] \text{ para cada } (x, m) \in X \times \mathbb{N}, \qquad (\star)$$

donde $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ verifica $t_m \to \infty$ cuando $m \to \infty$, entonces α es una constante de complejidad para ϕ_T.

Demostración. Sea E un conjunto (α, m)-generador de X de mínima cardinalidad. De $(\star)$, se sigue que $X = \bigcup_{x \in E} B_{t_m}^{\phi}\left[x, \frac{\delta}{2}, \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}\right]$, por tanto, E es un conjunto $\left(\frac{\delta}{2}, t_m\right)$-generador de X. Entonces $\mathcal{G}\left(\frac{\delta}{2}, t_m, \phi\right) \leq \mathcal{G}(\alpha, m, \phi_T)$, donde $\mathcal{G}(\delta, t, \phi)$ denota la menor cardinalidad de cualquier conjunto (δ, t)-generado en (X, ϕ) y $\mathcal{G}(\alpha, m, \phi_T)$ denota la menor cardinalidad de cualquier conjunto (α, m)-generado en (X, ϕ_T). Por el Lema 1 de [13] se obtiene que $\mathcal{E}(\delta, t_m, \phi, \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}) \leq \mathcal{G}(\alpha, m, \phi_T) \leq \mathcal{E}(\alpha, m, \phi_T)$, por tanto, haciendo $m \to \infty$ concluimos la prueba. ∎

El resultado anterior también muestra que si $\delta > 0$ es una constante de complejidad, entonces $\alpha > 0$ también lo es, toda vez que $\alpha \leq \frac{\delta}{2}$.

Teorema 4.2.3 *Los siguientes enunciados son equivalentes para cada flujo ϕ en un espacio métrico compacto X:*

(1) *El flujo ϕ tiene complejidad.*

(2) *El homeomorfismo ϕ_1 tiene complejidad.*

(3) *Si ψ es conjugado a ϕ, entonces ψ tiene complejidad.*

Demostración. Inicialmente, veamos que (1) $\Leftrightarrow$ (2). Para cada $\delta > 0$ existe $\alpha > 0$ tal que $d(\phi_s(z), \phi_s(w)) \leq \delta$ para todo $s \in [0,1]$ toda vez que $z, w \in X$ y $d(z,w) \leq \alpha$. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $x, y \in X$ tales que $y \in B_m^{\phi_1}[x, \alpha]$. Dado un número real $s \in [0, m-1]$, existe un único $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq m-1$ que satisface $s \in [k, (k+1)]$. Entonces $d(\phi_s(x), \phi_s(y)) = d(\phi_{s-k}(\phi_k(x)), \phi_{s-k}(\phi_k(y))) \leq \delta$, puesto que $d(\phi_k(x), \phi_k(y)) \leq \alpha$ y $s - k \in [0,1]$, por lo cual, se sigue que $y \in B_{m-1}^{\phi}[x, \delta, \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}]$; es decir $B_m^{\phi_1}[x, \alpha] \subset B_{m-1}^{\phi}[x, \delta, \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}]$ para cada $x \in X$. Tomando 2δ como la constante de complejidad de ϕ, por el Lema 4.2.2 tenemos que α es una constante de complejidad de ϕ_1. Recíprocamente, si $\delta > 0$ es una constante de complejidad de ϕ_1 y $t \in \mathbb{R}_+$ se muestra, como antes, que $B_t^{\phi}\left[x, \frac{\delta}{2}, \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}\right] \subset B_{[t]+1}^{\phi_1}\left[x, \frac{\delta}{2}\right]$ para cada $x \in X$, de manera que, ϕ admite complejidad.

Para terminar, resta mostrar que (1) $\Rightarrow$ (3). Sea $f : X \to Y$ una conjugación entre ϕ y ψ y sea $\delta > 0$ una constante de complejidad de ϕ, entonces:

$$f^{-1}(B_t^{\psi}[x, \alpha, \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}]) \subset B_t^{\phi}[f^{-1}(x), \tfrac{\delta}{2}, \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}] \text{ para cada } x \in X.$$

De donde usando el Lema 4.2.2, obtenemos que ψ tiene complejidad.

$\blacksquare$

4.2.1 Complejidad y Suspensiones

Previamente enunciaremos un resultado sobre la relación entre las m-bolas de un homeomorfismo y su flujo suspensión.

Lema 4.2.4 *Si $f : X \to X$ es un homeomorfismo en un espacio métrico compacto X, entonces para todo $0 < \delta < \frac{1}{4}$, $m \in \mathbb{N}$ y cada $z = (x, \lambda) \in X^{1,f}$ se verifica que:*

(1) *Existe $\widehat{\delta} > 0$ que satisface: $B_m^{\phi^{1,f}}[z, \widehat{\delta}, \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}] \subset \left(B_m^f[x, \delta]\right) \times [0, 1]$, para $\lambda \leq \frac{1}{2}$.*

(2) $B_{m+2}^f[x, \frac{\delta}{2}] \times (\lambda - \frac{\delta}{2}, \lambda + \frac{\delta}{2}) \subset B_m^{\phi^{1,f}}[z, \delta, \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}]$.

Demostración. Es una versión "en tiempo finito" del Lema 2.3.6. ■

Teorema 4.2.5 *Si $f : X \to X$ es un homeomorfismo en un espacio métrico compacto X, entonces f tiene complejidad si y solo si la suspensión $\phi^{\tau,f}$ también la tiene con $\tau \equiv 1$.*

Demostración. Supongamos que f presenta complejidad con constante $\delta > 0$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $0 < \delta < \frac{1}{4}$. Sea $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $t_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$. Tome $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ con la siguiente propiedad: $n_k = [t_k]$, donde $[t_k]$ es la parte entera de t_k. Sea E un conjunto (δ, n_k)-separado en X con máxima cardinalidad. Sea $\pi_{\frac{1}{2}} : X \to X^{1,f}$ el mapeo inclusión de nivel $\frac{1}{2}$, esto es, $\pi_{\frac{1}{2}}(x) = (x, \frac{1}{2})$ para cada $x \in X$. Entonces por el Item (1) del Lema 4.2.4, $\pi_{\frac{1}{2}}(E)$ es un conjunto $(\widehat{\delta}, n_k, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})$-separado en $X^{1,f}$. Por tanto

$$\mathcal{E}(\delta, n_k, f) \leq \mathcal{E}(\widehat{\delta}, n_k, \phi^{1,f}, \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}) \leq \mathcal{E}(\widehat{\delta}, t_k, \phi^{1,f}, \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Haciendo $k \to \infty$, obtenemos $\lim\limits_{t_k\to\infty} \mathcal{E}(\widehat{\delta}, t_k, \phi^{1,f}, \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}) = \infty$. Por consiguiente, $\widehat{\delta}$ es una constante de complejidad de $\phi^{1,f}$, es decir, $\phi^{1,f}$ tiene complejidad.

Recíprocamente, sea $\delta > 0$ una constante de complejidad de $\phi^{1,f}$. Tome $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq 2$ y $n_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$. Dado $z = (x, \lambda) \in X^{1,f}$, denote por $K_\delta(z)$ el conjunto de puntos (w, s) de $X^{1,f}$ tales que $|\lambda - s| \leq \frac{\delta}{8}$. Por el Item (2) del

Lema 4.2.4, dado $x \in X$, cada conjunto $(\frac{\delta}{2}, n_k - 2, \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\})$-separado con puntos en $K_\delta(x)$ es proyectado en un conjunto $(\frac{\delta}{4}, n_k)$-separado en X. Fije $y_0 \in X \times \{0\}$. Sea M_δ un conjunto de puntos $y_1, y_2, \ldots, y_p$ de menor cardinalidad de $\phi^{1,f}_{(0,1)}(y_0)$ tales que cada punto en $\phi^{1,f}_{[0,1)}(y_0)$ esté a menos de $\frac{\delta}{8}$ de alguno de ellos. Para cada $y \in M_\delta$, sea $E(k, y)$ un conjunto $(\frac{\delta}{2}, n_k - 2, \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\})$-separado de $K_\delta(y)$ de máxima cardinalidad. Entonces el conjunto $\bigcup_{y \in M_\delta} E(k, y)$ $(\frac{\delta}{2}, n_k - 2)$-genera $X^{1,f}$. Usando el Lema 1 en [13], si $t_k = \frac{n_k - 2}{2}$ tenemos que:

$$\mathcal{E}(\delta, t_k, \phi^{1,f}, \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}) \leq \mathcal{G}\left(\tfrac{\delta}{2}, n_k - 2, \phi^{1,f}\right) \leq \mathrm{Card}\left(\bigcup_{y \in M_\delta} E(k, y)\right).$$

Por lo cual, $\mathrm{Card}(E(k, y)) \to \infty$ para algún $y \in M_\delta$ cuando $k \to \infty$, en consecuencia, $\frac{\delta}{4}$ es una constante de complejidad para f, puesto que $\mathrm{Card}(E(k, y)) \leq \mathcal{E}(\frac{\delta}{4}, n_k, f)$, para cualquier $k \in \mathbb{N}$. ■

Ejemplo 4.2.3 Dado un $a > 0$, consideremos el homeomorfismo $f : X \to X$ donde $X = \{-a, a\} \cup \{-a - (a/n) : n \leq -2\} \cup \{a - (a/n) : n \geq 1\}$ con la topología inducida por $\mathbb{R}$ y tal que $f(-a) = -a$, $f(a) = a$ y f envía cualquier otro elemento al siguiente a su derecha. Entonces, por Teorema 4.2.4, la suspensión $\phi^{1,f}$ admite complejidad, puesto que $\mathcal{E}(\frac{a}{3}, m, f) \geq m$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

4.2.2 Complejidad y Medidas Expansivas

Para motivar nuestro próximo resultado, veamos el siguiente ejemplo que muestra como hallar una constante de complejidad de manera explícita para ciertos flujos.

Ejemplo 4.2.4 Sea un espacio métrico compacto X soportando un homeomorfismo N-expansivo $f : X \to X$ (ver [9]). Sabemos que $\phi^{1,f}$ admite medidas positivamente $\mathcal{F}$-expansivas, por ejemplo, $T^{1,f}(\mu)$ para alguna medida no atómica μ en X. Sea $\delta > 0$ una constante de $\mathcal{F}$-expansividad para $T^{1,f}(\mu)$. Dado que $B_t^{\phi^{1,f}}[z, \delta, \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}] \subset \Phi_\delta(z, \mathcal{F})$ para cada $t \geq 0$ entonces $T^{1,f}(\mu)\left(B_t^{\phi^{1,f}}[z, \delta, \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}]\right)$ tiende a cero para cada z en $X^{1,f}$ cuando $t \to \infty$. Por tanto, los subconjuntos $(\delta, t, \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\})$-separados de $X^{1,f}$ incrementan su cardinalidad cuando $t \to \infty$, por tanto, δ se torna una constante de complejidad para $\phi^{1,f}$.

El ejemplo anterior muestra que al igual que el caso discreto, ver [29], la presencia de medidas expansivas induce un grado de complejidad en el flujo. Resultando así, otra manera para reconocer flujos que soporten complejidad.

Teorema 4.2.6 *Todo flujo ϕ en un espacio métrico compacto X soportando medidas positivamente $\mathcal{F}$-expansivas, tiene $\mathcal{F}$-complejidad en cualquiera de los siguientes casos:*

(1) *$\mathcal{F} = \mathcal{H}$ y ϕ no tiene singularidades o*

(2) *$\mathcal{F}$ es compacto.*

Demostración. Trararemos cada caso separadamente.

Caso 1: El flujo ϕ no tiene singularidades y $\mathcal{F} = \mathcal{H}$. Al igual que en la prueba del Teorema 2.4.2 podemos considerar una variante de la bola dinámica positiva. Más precisamente, dados $x \in X$, $\delta > 0$ definimos

$$\widetilde{\Phi}_\delta(x, \mathcal{F}) = \bigcap_{t \geq 0} \bigcap_{\gamma > \delta} B_t^\phi[x, \gamma, \mathcal{F}].$$

Sea ν una medida $\mathcal{F}$-expansiva para el flujo ϕ y tome $\delta_0 > 0$ como una constante de $\mathcal{F}$-expansividad de ν. Entonces, de manera análoga al Corolario 2.4.6 y al Lema 2.4.10, podemos hallar un $\delta \in (0, \delta_0)$ tal que $\widetilde{\Phi}_\delta(x, \mathcal{H}) \subset \Phi_{\delta_0}(x)$ para todo $x \in X$ y el mapeo multivaluado $x \mapsto \widetilde{B}_t^\phi[x, \delta, \mathcal{F}]$, sea semicontinuo superior, donde $\widetilde{B}_t^\phi[x, \delta, \mathcal{F}] = \bigcap_{\gamma > \delta} B_t^\phi[x, \gamma, \mathcal{F}]$. Dado $t \geq 0$, definimos $\Psi_t : X \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\Psi_t(x) = \nu\left(\widetilde{B}_t^\phi[x, \delta, \mathcal{H}]\right), \quad \forall (x, t) \in X \times \mathbb{R}_+.$$

Afirmamos que la secuencia $(\Psi_t)_{t \geq 0}$ converge uniformemente a cero en X. En efecto, dado que

$$\widetilde{\Phi}_\delta(x,\mathcal{H}) = \bigcap_{t\geq 0} \widetilde{B}_t^\phi[x,\delta,\mathcal{H}],$$

se verifica:

$$\lim_{t\to\infty} \nu\left(\widetilde{B}_t^\phi[x,\delta,\mathcal{H}]\right) = \nu\left(\widetilde{\Phi}_\delta(x,\mathcal{H})\right).$$

De modo que $\Psi_t \to 0$ puntualmente, por lo que usando el Teorema de Dini (ver [11]) basta probar que Ψ_t es semicontinua superior. Lo cual es cierto por la regularidad de la medida (ver [33]) y el hecho que $x \mapsto \widetilde{B}_t^\phi[x,\delta,\mathcal{F}]$ es semicontinua superior.

Luego, para cada $\varepsilon > 0$, existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\Psi_t(x) < \varepsilon$ para todo $x \in X$ y $t \geq t_0$, en consecuencia, fijado $t \geq t_0$, si E es un conjunto que $(\delta, t, \mathcal{H})$-genera X, se tiene que $X = \bigcup_{x\in E} B_t^\phi[x,\delta,\mathcal{H}]$. Por lo cual

$$\nu(X) \leq \nu\left(\bigcup_{x\in E} B_t^\phi[x,\delta,\mathcal{H}]\right) \leq \sum_{x\in E} \nu(B_t^\phi[x,\delta,\mathcal{H}]) \leq \sum_{x\in E} \nu\left(\widetilde{B}_t^\phi[x,\delta,\mathcal{H}]\right) \leq \varepsilon.\mathrm{card}(E).$$

Así $\dfrac{1}{\varepsilon} \leq \mathcal{G}(\delta,t,\phi) \leq \mathcal{E}(\delta,t,\phi)$. De donde podemos concluir que $\lim\limits_{t\to\infty} \mathcal{E}(\delta,t,\phi) = \infty$.

Caso 2: Si $\mathcal{F}$ es compacto en $\mathcal{H}$. Notemos que dado $(\delta,t) \in \mathbb{R}_+^2$, se verifica:

$$\widetilde{B}_t^\phi[x,\delta,\mathcal{F}] = B_t^\phi[x,\delta,\mathcal{F}], \text{ para cada } x \in X.$$

En consecuencia, el mapeo $x \mapsto \Phi_t(x) = B_t^\phi[x,\delta,\mathcal{F}]$ está bien definido. De manera que, para seguir la prueba del Caso 1, es suficiente probar que Φ_t es semicontinuo superior en X. Fije $x \in X$ y suponga por contradicción que existe un abierto U de $\Phi_t(x)$ y una secuencia x_n convergiendo para x tal que $\Phi_t(x_n) \not\subset U$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, podemos hallar dos secuencias $z_n \notin U$ y $g_n \in \mathcal{F}$ con la siguiente propiedad:

$$d(\phi_s(x_n), \phi_{g_n(s)}(z_n)) \leq \delta, \text{ para cualquier } 0 \leq s \leq t. \tag{4.2}$$

Podemos suponer que $z_n \to z$ para algún $z \in X$ y $g_n \to g$ donde $g \in \mathcal{F}$. Además $z \notin U$, y haciendo $n \to \infty$ en (4.2) se obtiene:

$$d(\phi_s(x), \phi_{g(s)}(z)) \leq \delta, \text{ para cada } 0 \leq s \leq t.$$

Por tanto $z \in \Phi_t(x) \subset U$, lo cual no es posible. ■

Corolario 4.2.7 *Todo flujo soportando medidas positivamente $\mathcal{F}$-expansivas, tiene complejidad.*

En [29], en el caso discreto, Morales menciona que no conoce si la presencia de complejidad implica la existencia de medidas positivamente expansivas; sin embargo, en el caso flujos esto no es posible, esto es, el recíproco del Teorema 4.2.6 no es válido. Para ver ello basta considerar el flujo del Ejemplo 4.2.3 y notar que este a pesar de tener complejidad no soporta medidas expansivas dado que tiene una cantidad finita de órbitas.

4.2.3 Complejidad y Puntos $\mathcal{F}$-sombreables

En principio, estas nociones no tienen alguna relación directa, pues existen flujos con puntos sombreables que no admiten complejidad (Ejemplo 3.1.2) y a su vez; existen flujos que admiten complejidad pero ningún punto sombreable (Ejemplo 2.3.3).

En el caso de flujos expansivos, tenemos un resultado.

Teorema 4.2.8 *Sea ϕ un flujo expansivo en un espacio métrico compacto X. Si $\Omega(\phi) \subset Sh(\phi, \mathcal{S})$ y el flujo tiene una cantidad finita de órbitas periódicas, entonces no admite alta complejidad.*

Demostración. Se sigue del Teorema 3.2.1 y Lema 4.1.3. ■

4.2.4 Complejidad y Estabilidad

Sabemos por los comentarios finales del Teorema 4.2.6, que la complejidad no implica la existencia de medidas positivamente $\mathcal{F}$-expansivas; sin embargo, a continuación mostraremos que existe una suerte de recíproco.

Recordemos que $x \in X$ es un *punto estable* de ϕ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces existe un $f \in \mathcal{S}$ tal que $d(\phi_s(x), \phi_{f(s)}(y)) \leq \varepsilon$ para cada $s \geq 0$. De manera similar al Lemma 2.5 en [6], podemos obtener que el conjunto de puntos estables de ϕ, que denotaremos por $\mathrm{Stab}(\phi)$, es despreciable respecto de cualquier medida positivamente $\mathcal{S}$-expansiva. Lo cual nos motiva a pensar que los puntos estables deben ser despreciables en algún sentido en presencia de complejidad.

Teorema 4.2.9 *Si ϕ es un flujo sin singularidades que admite $\mathcal{S}$-complejidad en un espacio métrico compacto X, entonces existe una medida de probabilidad Boreliana ν tal que $\nu(\mathrm{Stab}(\phi)) = 0$.*

Probaremos antes el siguiente resultado motivados por el Lema 2.6 en [29].

Lema 4.2.10 *Dado $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$. Existen $e > 0$ y una secuencia de medidas de probabilidad Borealianas $(\mu_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de X satisfaciendo:*

$$\lim_{m \to \infty} \mu_m \left(B_m^{\phi}[x, e, \mathcal{F}] \right) = 0, \text{ para cada } x \in X.$$

Demostración. Sea $\delta_0 > 0$ una constante de $\mathcal{F}$-complejidad de ϕ. Dado $\lambda \in (0, 1)$, elijamos $\delta_1 \in (0, \frac{\delta_0}{2})$ satisfaciendo las hipótesis del Lema 2.4.8 con respecto de λ, por tanto, δ_1 es también una constante de $\mathcal{F}$-complejidad de ϕ. Existe una secuencia $(E_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de conjuntos $(\delta_1, (1 - \lambda)m, \mathcal{F})$-separados tales que:

$$\lim_{m \to \infty} \mathrm{Card}(E_m) = \infty.$$

Denote por δ_y a la medida concentrada en $y \in X$ y defina la siguiente secuencia $(\mu_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de medidas de probabilidad Borealianas como:

$$\mu_m = \frac{1}{\mathrm{Card}(E_m)} \sum_{y\in E_m} \delta_y, \text{ para cada } m \in \mathbb{N}.$$

Dado $\varepsilon > 0$. Existe un entero positivo $M \geq 2$ que satisface: $\mathrm{Card}(E_m) \geq \frac{1}{\varepsilon}$, toda vez que $m \geq M$. Fije $m \geq M$ y $x \in X$. Afirmamos que si consideramos $e = \delta_1/2$, entonces se verifica:

$$\mathrm{Card}\left(E_m \cap B_m^{\phi}[x, e, \mathcal{F}]\right) \leq 1.$$

En efecto, si $y, z \in E_m \cap B_m^{\phi}[x, e, \mathcal{F}]$, entonces $y, z \in E_m$ y además

$$d(\phi_s(x), \phi_{\alpha(s)}(y)) \leq e, \quad d(\phi_s(x), \phi_{\beta(s)}(z)) \leq e \tag{4.3}$$

para algunos $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ y para todo $0 \leq s \leq m$. Luego $d(\phi_{\alpha(s)}(y), \phi_{\beta(s)}(z)) \leq \delta_1$. Haciendo $u = \beta(s)$, obtenemos: $d(\phi_{\alpha\beta^{-1}(u)}(y), \phi_u(z)) \leq \delta_1$, para cada $0 \leq u \leq \beta(m)$. Del Lema 2.4.8 en (4.3), obtenemos que $(1-\lambda)m \leq \beta(m)$ entonces:

$$d(\phi_{\alpha\beta^{-1}(u)}(y), \phi_u(z)) \leq \delta_1, \text{ para cada } 0 \leq u \leq (1-\lambda)m.$$

De modo que, $y \in B^{\phi}_{(1-\lambda)m}[z, \delta_1, \mathcal{F}] \cap E_m$ y análogamente, $z \in B^{\phi}_{(1-\lambda)m}[y, \delta_1, \mathcal{F}] \cap E_m$. Luego $y = z$, puesto que E_m es un conjunto $(\delta_1, (1-\lambda)m, \mathcal{F})$-separado en X. Lo que prueba la afirmación hecha.

Por consiguiente, concluimos:

$$\mu_m\left(B_m^{\phi}[x, e, \mathcal{F}]\right) = \frac{\mathrm{Card}\left(E_m \cap B_m^{\phi}[x, e, \mathcal{F}]\right)}{\mathrm{Card}(E_m)} \leq \frac{1}{\mathrm{Card}(E_m)} \leq \varepsilon, \quad \text{para cada } m \geq M.$$

De manera que $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_m\left(B_m^{\phi}[x, e, \mathcal{F}]\right) = 0$, para cada $x \in X$. ■

Prueba del Teorema 4.2.9. Por el Lema 4.2.10 existe $e > 0$ y una secuencia de medidas $(\mu_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de X tales que:

$$\lim_{m\to\infty} \mu_m\left(B_m^{\phi}[x, e, \mathcal{S}]\right) = 0, \text{ para cada } x \in X.$$

Sea ν un punto límite de la secuencia $(\mu_m)_{m\in\mathbb{N}}$. De la definición de punto estable, obtenemos: $B(x,\delta_x)\subset B_m^{\phi}[x,e,\mathcal{S}]$, para todo $(x,m)\in \mathrm{Stab}(\phi)\times\mathbb{N}$. De manera que la colección $\{B(x,\delta_x) : x\in\mathrm{Stab}(\phi)\}$ se torna un cubrimiento abierto de $\mathrm{Stab}(\phi)$ del cual es posible extraer un subcubrimiento numerable. Entonces

$$\nu\left(\mathrm{Stab}(\phi)\right)\leq\sum_{i\in\mathbb{N}}\nu\left(B(x_i,\delta_{x_i})\right).$$

Por otro lado, fijado $i\in\mathbb{N}$, se tiene:

$$\nu\left(B(x_i,\delta_{x_i})\right)\leq\liminf_{m\to\infty}\mu_m\left(B(x_i,\delta_{x_i})\right)\leq\liminf_{m\to\infty}\mu_m\left(B_m^{\phi}[x_i,e,\mathcal{S}]\right)=0.$$

En consecuencia, $\nu\left(\mathrm{Stab}(\phi)\right)=0$. ■

Recordemos que un flujo ϕ es *equicontinuo* si para cada $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que si $x,y\in X$ satisfacen $d(x,y)<\delta$ entonces $d(\phi_s(x),\phi_s(y))\leq\varepsilon$ para $s\in\mathbb{R}$.

Note que cuando $\mathcal{F}=\{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}$ es posible repetir la prueba del Lema 4.2.10 en el caso que el flujo admita singularidades. Además, $\mathrm{Stab}(\phi)=X$ en caso ϕ sea equicontinuo. Lo que prueba el siguiente resultado.

Corolario 4.2.11 *Todo flujo en un espacio métrico compacto que admita complejidad, no puede ser equicontinuo.*

Finalmente, usando el Ejemplo 4.2.2 obtenemos otra prueba de un hecho conocido.

Corolario 4.2.12 *Si ϕ es equicontinuo, entonces $h_{top}(\phi)=0$.*

Conclusiones

Los resultados obtenidos en esta Tesis Doctoral brindan un mayor conocimiento acerca de la complejidad del comportamiento de las órbitas en los sistemas continuos. También, se muestra que la restricción del conjunto de reparametrizaciones del flujo conduce a importantes resultados; por ejemplo, en el Capítulo 2 la principal contribución fue dada mediante el Teorema 2.4.2 donde, bajo ciertas condiciones, el conjunto de medidas $\mathcal{F}$-expansivas de un flujo en un espacio métrico compacto X es un subconjunto $G_{\delta\sigma}$ en $\mathcal{M}(X)$. Siendo natural preguntarnos sobre la posibilidad de mejorar esta clasificación topológica.

En caso que el flujo sea expansivo el Teorema 2.4.1 responde parcialmente esta cuestión, pues muestra que dicho conjunto es un G_δ en $\mathcal{M}(X)$. Lo cual motiva a plantearnos el siguiente problema para un trabajo futuro:

Problema 1. *¿Bajo qué condiciones sobre $\mathcal{F}$ el conjunto de medidas $\mathcal{F}$-expansivas de un flujo en un espacio métrico compacto X es un conjunto de Baire en $\mathcal{M}(X)$?*

Tras resolver esto, los resultados de aproximación de medidas $\mathcal{F}$-expansivas con soporte constante tendrían más ejemplos de aplicación.

Por otro lado, en el Capítulo 3 los principales aportes son los Teoremas 3.3.3 y 3.4.2 que permiten mejorar la clasificación del conjunto de puntos sombreables y probar la no existencia de tales puntos en el atractor geométrico de Lorenz. Además, el Ejemplo 3.2.2 muestra que todo flujo isométrico con una componente conexa no trivial en su espacio de fase no tiene la $\{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}$-POTP. A su vez, sabemos que un flujo isométrico es distal, por lo que se genera la siguiente cuestión:

Problema 2. *¿Todo espacio métrico compacto soportando un flujo distal con la* $\{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}$*-POTP es una union de órbitas periódicas?*

Otro problema relacionado con los puntos sombreables es una extensión de un resultado cierto en el caso discreto:

Problema 3. *¿Si existen* p *y* q *sombreables tales que* $p \sim q$ *y alguno de ellos es periódico, el flujo admitirá complejidad?*

En el Capítulo 4 lo más destacado es la introducción de la complejidad para flujos y su relación con la existencia de medidas positivamente expansivas (Teorema 4.2.6). A su vez, en el Corolario 4.2.11 se muestra que un flujo equicontinuo no puede tener complejidad, por lo cual tiene entropía topológica nula y es conocido que, en sistemas discretos, los sistemas minimales distales también tienen esta propiedad (ver [34]). De este modo, es válido plantearnos el siguiente problema:

Problema 4. *¿Un flujo minimal distal puede tener* $\mathcal{F}$*-complejidad?*

Una respuesta negativa a este problema mostraría, en particular, que la complejidad es un invariante más fino que la entropía topológica a ser tomado en cuenta para detectar el caos dinámico de un sistema.

Finalmente, esperamos que el estudio y desarrollo de estos problemas generen nuevas herramientas para el entendimiento del Caos y la complejidad de las órbitas de los sistemas dinámicos discretos y continuos.

Bibliografía

[1] Afraimovich, V., Glebsky, L., Complexity, fractal dimensions and topological entropy in dynamical systems. *Chaotic dynamics and transport in classical and quantum systems*, 35–72, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 182, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2005.

[2] Afraimovich, V., Glebsky, L., Measures of ε-complexity. *Taiwanese J. Math.* 9 (2005), no. 3, 397–409.

[3] Afraimovich, V., Glebsky, L., Measures related to (ε, n)-complexity functions. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 22(1–2), 23–34 (2008).

[4] Alongi, J., Nelson, G., *Recurrence and topology.* Graduate Studies in Mathematics, 85. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[5] Aponte, J., Villavicencio, H. J Dyn Control Syst (2017). https://doi.org/10.1007/s10883-017-9381-8

[6] Arbieto, A., Morales, C., Some properties of positive entropy maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 34 (2014), no. 3, 765–776.

[7] Artigue, A., Positive expansive flows. *Topology Appl.* 165 (2014), 121–132.

[8] Artigue, A., Kinematic expansive flows, *Ergodic Theory Dynam. Systems* 36 (2016), no.2, 390–421.

[9] Artigue, A., Pacífico, M.J. and Vieitez, J., N-expansive homeomorphisms on surfaces. *Commun. Contemp. Math.* 19 (2017), 1–18.

[10] Beck, A., A pathological flow in the torus, *Proc. Amer. Math. Soc* 82, 1981, 303–306.

[11] Billingsley, P., *Convergence of probability measures*, Second edition. In: Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999

[12] Blanchard, F., Host, B., Maass, A., Topological complexity. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 20 (2000), no. 3, 641–662.

[13] Bowen, R., Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 153 (1971) 401–414.

[14] Bowen, R., Walters, P., Expansive one-parameter flows, *J. Differential Equations*, 12 (1972), 180–193.

[15] Bowen, R., Entropy-expansive maps. *Trans. Amer. Math. Soc.* 164 1972 323–331.

[16] Bugaro, D., Bugaro, Y., Ivanov, S., *A course in metric geometry*, Providence, RI: American Mathematical Society, 2001. 415 p. (Graduate studies in Mathematics; v. 33).

[17] Carrasco-Olivera, D., Morales, C.A., Expansive measures for flows, *J. Differential Equations*, Volume 256, Issue 7, 1 April 2014, Pages 2246–2260.

[18] Fakhari, Abbas, Morales, C.A., Tajbakhsh, Khosro, Asymptotic measure expansive diffeomorphisms, *J. Math. Anal. Appl.* 435 (2016), no. 2, 1682–1687.

[19] Ferenczi, S., Complexity of sequences and dynamical systems. *Combinatorics and number theory (Tiruchirappalli, 1996).* Discrete Math. 206 (1999), no. 1-3, 145–154.

[20] Kawaguchi, N., Quantitative shadowable points, *Dyn. Syst.*, 2017. http://dx.doi.org/10.1080/14689367.2017.1280664

[21] Keynes, H.B., Sears, M., $\mathcal{F}$-expansive transformation groups, *General Topology and its Applications*, Volume 10, Issue 1, February 1979, Pages 67–85.

[22] Komuro, M., One-parameter flows with the pseudo-orbit tracing property. *Monatsh. Math.* 98 (1984), no. 3, 219–253.

[23] Komuro, M., Lorenz attractors do not have the pseudo-orbit tracing property. *J. Math. Soc. Japan* 37 (1985), no. 3, 489–514.

[24] Kuratowski, K., *Topology. Vol. II*, New edition, revised and augmented. Translated from the French by A. Kirkor Academic Press, New York-London; Państwowe Wydawnictwo Naukowe Polish Scientific Publishers, Warsaw 1968.

[25] Labrousse, C. Marco, JP. *Regul. Chaot. Dyn.*(2014) 19: 374. https://doi.org/10.1134/S1560354714030083

[26] Lee, K., Oh, J., Weak measure expansive flows, *J. Differential Equations* 260 (2016), no. 2, 1078–1090.

[27] Moothathu, T., Implications of pseudo-orbit tracing property for continuous maps on compacta. *Topology Appl.* 158 (2011), no. 16, 2232–2239.

[28] Morales, C.A., Measure-expansive systems, Preprint IMPA Série D (2011).

[29] Morales, C. A., On the complexity of expansive measures. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)* 31 (2015), no. 9, 1501–1507.

[30] Morales, C., A., Shadowable points. *Dyn. Syst.* 31 (2016), no. 3, 347–356.

[31] Morales, C.A., On supports of expansive measures, Preprint 14 Jan 2016. arXiv:1601.03618v1 [math.DS]

[32] Palmer, K., *Shadowing in Dynamical Systems.* Theory and Applications, Kluwer, 2000.

[33] Parthasarathy, K. R., *Probability Measures on Metric Spaces*, Reprint of the 1967 original, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2005.

[34] Parry, W., Zero entropy of distal and related transformations. *Topological Dynamics* (Symposium, Colorado State Univ., Ft. Collins, Colo., 1967) pp. 383–389 Benjamin, New York, 1968.

[35] Pilyugin, S., Y., *Shadowing in dynamical systems.* Lecture Notes in Mathematics, 1706. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[36] Thomas, R., F., Stability properties of one-parameter flows. *Proc. London Math.* Soc. (3) 45 (1982), no. 3, 479–505.

[37] Thomas, R., F., Topological Stability: Some Fundamental Properties. *J. Differential Equations* 90 (1985), no. 52, 103–122.

[38] Thomas, R.,F., Entropy of expansive flows, *Ergodic Theory Dynam. Systems* 7 (1987), no. 4, 611–625.

[39] Thomas, R., Topological entropy of fixed-point free flows. *Trans. Amer. Math. Soc.* 319 (1990), no. 2, 601–618.

[40] Utz, W.R., Unstable homeomorphisms, *Proc. Amer. Math. Soc.* 1 (1950), no. 6, 769–774.

[41] Villavicencio, H., $\mathcal{F}$-expansivity for Borel measures. *J. Differential Equations* 261 (2016), no. 10, 5350–5370.

[42] Walters, P., *An Introduction to Ergodic Theory*, Graduate Texts in Mathematics, 79, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[43] Williams, R., The structure of Lorenz attractors. *Inst. Hautes Études Sci. Publ.* Math. No. 50 (1979), 73–99.