UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICA

"LA HIPOTESIS DE RIEMANN COMO PROBLEMA DE ANALISIS FUNCIONAL"

T E S I S

Para Optar el Título Profesional de
Licenciatura en Matemática

Presentado por:

FERNANDO ENRIQUE ECHAIZ ESPINOZA

Lima, Febrero 1994

Resumen

Este trabajo trata uno de los problemas antiguos y abierto de las matemáticas como es la Hipotesis de Riemann [3]. Investigadores de multiples áreas [4] en todo el mundo tratan de poder decir si la Hipotesis de Riemann es cierta ó es falsa.

El Capítulo 1, trata sobre el método clasico de Chebyshev. En el Capítulo 2 tratamos sobre la Función Zeta de Riemann. En el Capítulo 3 se demuestra el Teorema de los Números Primos.

El problema de la Hipotesis de Riemann por lo general se trata usando Analisis Complejo (lo que se conoce como Teoria analitica de números).

Pero en el Capítulo 4, se reformula la Hipotesis de Riemann como un problema de analisis funcional [1], usando un teorema de Beurling [2].

Contenido

Lista de Figuras

Capítulo 1

El metodo de Chebyschev

El proposito de este capitulo es demostrar la existencia de los limites superiores e inferiores para $\dfrac{\pi(x)\log x}{x}$

Proposición 1.0.1

$$\underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} \geq \frac{1}{2}\log 2$$

Prueba

Ya que todos los factores primos de $\binom{2n}{n}$ son menores que $2n$, se deduce que

$$\binom{2n}{n} \leq \prod_{\substack{p\leq 2n \\ p \text{ primo}}} p^{\left[\frac{\log 2n}{\log p}\right]}$$

pero ya que $p^{\left[\frac{\log 2n}{\log p}\right]} \leq 2n$, entonces

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &\leq \prod_{\substack{p\leq 2n \\ p \text{ primo}}} p^{\left[\frac{\log 2n}{\log p}\right]} \leq \prod_{\substack{p\leq 2n \\ p \text{ primo}}} 2n \\ \binom{2n}{n} &\leq (2n)^{\pi(2n)} \end{aligned}$$

por otro lado, ya que

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n+2)(n+1)n!}{n!n!} \\ &= \underbrace{\frac{2n}{n}\cdot\frac{2n-1}{n-1}\cdot\frac{2n-2}{n-2}\cdots\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n+1}{1}}_{n \text{ factores}} \end{aligned}$$

y como cada factor es mayor o igual que 2 entonces $\binom{2n}{n} \geq 2^n$ y asi

$$\begin{aligned}
2^n &\leq \binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)} \\
2^n &\leq (2n)^{\pi(2n)} \text{ , deduciendose que} \\
\pi(2n) &\geq \frac{n \log 2}{\log(2n)} \\
\frac{\pi(2n)\log(2n)}{2n} &\geq \frac{1}{2}\log 2
\end{aligned}$$

lo que significa que $\underset{n \to \infty}{\underline{\lim}} \dfrac{\pi(2n)\log(2n)}{2n} \geq \dfrac{1}{2}\log 2$, para acabar la demostración debemos ver que

$$\frac{\pi(2n+1)\log(2n+1)}{2n+1} \quad \frac{\pi(2n)\log(2n)}{2n}$$

para esto basta verificar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\pi(2n+1)\log(2n+1)}{2n+1}}{\dfrac{\pi(2n)\log(2n)}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n\pi(2n+1)\log(2n+1)}{(2n+1)\pi(2n)\log(2n)} = 1$$

en efecto, es claro que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\log(2n+1)}{\log(2n)} = 1$
Ahora

$$\begin{aligned}
\text{ya que,} \quad 2n < 2n+1 \Rightarrow \pi(2n) \leq \pi(2n+1) &\implies 1 \leq \frac{\pi(2n+1)}{\pi(2n)} \\
\text{y ademas } \pi(2n+1) - \pi(2n) \leq 1 &\implies \frac{\pi(2n+1)}{\pi(2n)} \leq 1 + \frac{1}{\pi(2n)}
\end{aligned}$$

de donde, $1 \leq \dfrac{\pi(2n+1)}{\pi(2n)} \leq 1 + \dfrac{1}{\pi(2n)}$.
Y por el Teorema de Euler $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\pi(2n+1)}{\pi(2n)} = 1$ ■

Proposición 1.0.2

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{\pi(x)\log x}{x} \leq 2\log 2$$

Prueba

Ya que

- $\forall p$ primo : $p \in \langle n, 2n] : p | (n+1)(n+2)\cdots(2n)$
- $\forall p$ primo : $p \in \langle n, 2n] : p \not| n!$
- $\forall p$ primo : $p \in \langle n, 2n] : p | \binom{2n}{n}$
- $\forall p$ primo : $p \in \langle n, 2n] : p | \binom{2n}{n} \Longrightarrow p \leq \binom{2n}{n}$

de donde concluimos que

$$\prod_{\substack{n<p\leq 2n \\ p \text{ primo}}} p \leq \binom{2n}{n}$$

pues $p_1 p_2 \cdots p_k \leq p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, donde $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \geq 1$.

de otra parte es claro que $\binom{2n}{n} \leq \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{n} = 2^{2n}$

$$\begin{aligned} n^{\pi(2n)-\pi(n)} &\leq \prod_{\substack{n<p\leq 2n \\ p \text{ primo}}} p \leq 2^{2n} \\ n^{\pi(2n)-\pi(n)} &\leq 2^{2n} \\ \pi(2n)-\pi(n) &\leq \frac{2n\log 2}{\log n} \end{aligned}$$

Sea $2n_1$ el número par mas grande que es menor o igual que n, esto es

$$2n_1 \stackrel{\text{def}}{=} \max\{2k : 2k \leq n, \ k = 1, 2, \cdots n_1\}$$

es claro que

$$2n_1 = \begin{cases} n & , \text{si } n \text{ es par} \\ n-1 & , \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

- Si n es par, $\pi(2n_1) = \pi(n)$

$$\begin{aligned} \pi(2n) - \pi(2n_1) = \pi(2n) - \pi(n) &\leq \frac{2n\log 2}{\log n} \\ &\leq 1 + \frac{2n\log 2}{\log n} \end{aligned}$$

- Si n es impar, $\pi(2n_1) = \pi(n-1)$. Ya que $\pi(n) - \pi(n-1) \leq 1$, entonces, $-\pi(n-1) \leq 1 - \pi(n)$

$$\begin{aligned}
\pi(2n) - \pi(n-1) &\leq 1 + \pi(2n) - \pi(n) \\
&\leq 1 + (\pi(2n) - \pi(n)) \leq 1 + \frac{2n \log 2}{\log n} \\
\pi(2n) - \pi(2n_1) &\leq 1 + \frac{2n \log 2}{\log n}
\end{aligned}$$

de donde concluimos que

$$\pi(2n) - \pi(2n_1) \leq 1 + \frac{2n \log 2}{\log n}$$

tambien sabemos que $\forall m \in \mathbb{Z}^+ : \ 0 \leq m < 2n \Rightarrow \log\left(\frac{2n-m}{2}\right) \leq \log n$, y como

$$\begin{aligned}
\frac{n}{\log n} &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\log n} \leq \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\log\left(\frac{2n-m}{2}\right)} \\
\frac{n}{\log n} &\leq \frac{1}{\log\left(\frac{2n}{2}\right)} + \frac{1}{\log\left(\frac{2n-1}{2}\right)} + \frac{1}{\log\left(\frac{2n-2}{2}\right)} + \cdots + \frac{1}{\log\left(\frac{n+2}{2}\right)} + \frac{1}{\log\left(\frac{n+1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

pero como

$$\begin{aligned}
2n_1 \leq n &\implies 2n_1 < n+1 \Rightarrow \frac{2n_1+1}{2} < \frac{n+1}{2} \\
&\implies \frac{1}{\log\left(\frac{n+1}{2}\right)} \leq \frac{1}{\log\left(\frac{2n_1+1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

de donde resulta que

$$\frac{n}{\log n} \leq \frac{1}{\log\left(\frac{2n}{2}\right)} + \frac{1}{\log\left(\frac{2n-1}{2}\right)} + \frac{1}{\log\left(\frac{2n-2}{2}\right)} + \cdots + \frac{1}{\log\left(\frac{2n_1+2}{2}\right)} + \frac{1}{\log\left(\frac{2n_1+1}{2}\right)}$$

y llegamos a la siguiente relación

$$\pi(2n) - \pi(2n_1) \leq \frac{1}{\log\left(\frac{2n}{2}\right)} + \frac{1}{\log\left(\frac{2n-1}{2}\right)} + \cdots + \frac{1}{\log\left(\frac{2n_1+2}{2}\right)} + \frac{1}{\log\left(\frac{2n_1+1}{2}\right)} \qquad (1)$$

Analogamente sea $2n_2$ el número par mas grande que es menor o igual que n_1, esto es

$$2n_2 \stackrel{\text{def}}{=} \max\{2k : \ 2k \leq n_1, \ k = 1, 2, \cdots n_2\}$$

es claro que

$$2n_2 = \begin{cases} n_1 & \text{, si } n_1 \text{ es par} \\ n_1 - 1 & \text{, si } n_1 \text{ es impar} \end{cases}$$

y con un procedimiento totalmente analogo al hecho antes se obtiene

$$\pi(2n_1) - \pi(2n_2) \leq \frac{1}{\log\left(\frac{2n_1}{2}\right)} + \frac{1}{\log\left(\frac{2n_1-1}{2}\right)} + \cdots + \frac{1}{\log\left(\frac{2n_2+2}{2}\right)} + \frac{1}{\log\left(\frac{2n_2+1}{2}\right)} \qquad (2)$$

Repetiremos el proceso de definir los $2n_1, 2n_2, 2n_3, \cdots$, pero este proceso es finito; de modo que tiene que finalizarse digamos en $2n_k = 2$. Donde $k < \left[\frac{\log n}{\log 2}\right]$, y sumando una tras otra cada lado de las desigualdades de la forma 1 y 2 tenemos

$$\begin{aligned}
\pi(2n) - \pi(2n_k) &\leq \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k \text{ veces}} + 2\log 2 \sum_{m=3}^{2n} \frac{1}{\log \frac{m}{2}} \\
\pi(2n) - \pi(2) &\leq k + 2\log 2 \sum_{m=3}^{2n} \frac{1}{\log \frac{m}{2}} \\
\pi(2n) - \pi(2) &\leq \left[\frac{\log n}{\log 2}\right] + 2\log 2 \sum_{m=3}^{2n} \frac{1}{\log \frac{m}{2}}
\end{aligned}$$

$$\pi(2n) \leq \left[\frac{\log n}{\log 2}\right] + 1 + 2\log 2 \sum_{m=3}^{2n} \frac{1}{\log \frac{m}{2}}$$

Ahora para un n grande, es posible expresar

$$\sum_{m=3}^{2n} \frac{1}{\log \frac{m}{2}} = \sum_{3 \leq m \leq 2n/(\log n)^2} \frac{1}{\log \frac{m}{2}} + \sum_{2n/(\log n)^2 < m \leq 2n} \frac{1}{\log \frac{m}{2}}$$

Ahora acotaremos cada una de las dos sumatorias de la ultima expresión

- Como $\frac{3}{2} \leq \frac{m}{2} \Rightarrow \frac{1}{\log \frac{m}{2}} \leq \frac{1}{\log \frac{3}{2}}$, entonces

$$\sum_{3 \leq m \leq 2n/(\log n)^2} \frac{1}{\log \frac{m}{2}} \leq \frac{1}{\log \frac{3}{2}} \sum_{3 \leq m \leq 2n/(\log n)^2} 1 = \frac{1}{\log \frac{3}{2}} \left(\left[\frac{2n}{(\log n)^2}\right] - 2 \right)$$

pero $\left[\frac{2n}{(\log n)^2}\right] - 2 < \left[\frac{2n}{(\log n)^2}\right] \leq \frac{2n}{(\log n)^2}$, y asi

$$\sum_{3 \leq m 2n/(\log n)^2} \frac{1}{\log \frac{m}{2}} \leq \frac{2}{\log \frac{3}{2}} \frac{n}{(\log n)^2}$$

- Como $\dfrac{2n}{(\log n)^2} < m \leq 2n \Rightarrow \dfrac{1}{\log n} \leq \dfrac{1}{\log \frac{m}{2}} < \dfrac{1}{\log \dfrac{n}{(\log n)^2}}$, entonces

$$\sum_{2n/(\log n)^2 < m \leq 2n} \frac{1}{\log n} \leq \sum_{2n/(\log n)^2 < m \leq 2n} \frac{1}{\log \dfrac{m}{2}} < \sum_{2n/(\log n)^2 < m \leq 2n} \frac{1}{\log \dfrac{n}{(\log n)^2}}$$

$$\left(2n - \left[\frac{2n}{(\log n)^2}\right]\right) \frac{1}{\log n} \leq \sum_{2n/(\log n)^2 < m \leq 2n} \frac{1}{\log \frac{m}{2}} < \left(2n - \left[\frac{2n}{(\log n)^2}\right]\right) \frac{1}{\log \dfrac{n}{(\log n)^2}}$$

y los extremos de estas desigualdades equivalen a $\dfrac{2n}{\log 2n}$ ■

Capítulo 2

La Función Zeta de Riemann

Definición 1 *$\forall \sigma \in I\!R : \sigma > 1$ a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}$ se le conoce como la función Zeta de Riemann y se denota por $\zeta(\sigma)$*

Proposición 2.0.3

$$\forall \sigma > 1 : \frac{1}{\sigma - 1} \leq \zeta(\sigma) < \frac{\sigma}{\sigma - 1}$$

Prueba

Ya que

$$\begin{aligned}
\int_1^n \frac{dx}{x^{\sigma}} &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{\sigma}} \\
\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{dx}{x^{\sigma}} &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{\sigma}} \\
\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\sigma}} &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{\sigma}} = \zeta(\sigma) \\
\frac{1}{\sigma - 1} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\sigma}} &\leq \zeta(\sigma)
\end{aligned}$$

Finalmente, es claro que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{\sigma}} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\sigma}}$ ■

Proposición 2.0.4

$$\lim_{\sigma \to 1^+} \zeta(\sigma) = \infty$$

Prueba

Esto es inmediato a partir de 2.0.3 y haciendo $\sigma \to 1^+$. Esto tambien tiene sentido puesto que $\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. ■

Proposición 2.0.5

$$\lim_{\sigma \to 1^+} \log \zeta(\sigma) = +\infty$$

Prueba

Por 2.0.3 $\forall \sigma > 1 : 0 < \frac{1}{\sigma - 1} \leq \zeta(\sigma)$, y siendo log una función creciente tenemos $\forall \sigma > 1 : -\log(\sigma - 1) \leq \log \zeta(\sigma)$; y como $\lim_{\sigma \to 1^+} \log(\sigma - 1) = -\infty \Longrightarrow \lim_{\sigma \to 1^+} -\log(\sigma - 1) = +\infty$, de donde por comparación afirmamos que $\lim_{\sigma \to 1^+} \log \zeta(\sigma) = +\infty$. ■

Proposición 2.0.6 (La formula del producto de Euler)

$$\forall \sigma \in I\!R : \sigma > 1 : \zeta(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} = \prod_{p \text{ primos}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{n\sigma}} = \prod_{p \text{ primos}} (1 - p^{-\sigma})^{-1}$$

Prueba

Ya que cada serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{n\sigma}}$ es convergente (pues es tan solo una serie geometrica), y esto para cualquier p que es primo. Y por los mismos argumentos dados en la prueba del $\lim_{x \to \infty} \pi(x) = +\infty$ se tiene nuestro resultado. ■

Proposición 2.0.7

$$\forall \sigma \in I\!R : \sigma > 2 : \frac{1}{\sigma - 1} \leq \zeta(\sigma) \leq \zeta(\sigma - 1)$$

Prueba

$$\begin{aligned}
\forall \sigma > 2,\ n \in I\!N \quad &: \quad n^\sigma > n^{\sigma - 1} \Longrightarrow \frac{1}{n^\sigma} \leq \frac{1}{n^{\sigma - 1}} \\
&: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma - 1}} \\
&: \quad \zeta(\sigma) \leq \zeta(\sigma - 1)
\end{aligned}$$

Y finalmente usamos 2.0.3 ■

De aqui podemos deducir que como

$$\begin{aligned}
\sigma > 2 \Longrightarrow \forall n \in I\!N : n^\sigma \geq n^2 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{n^\sigma} \leq \frac{1}{n^2} \\
&\Longrightarrow \quad \zeta(\sigma) \leq \zeta(2)
\end{aligned}$$

Figura 1: Grafica de $\zeta(s)$ en los reales

Y por 2.0.3

$$\forall \sigma \in I\!R: \ \sigma \geq 2: \ \frac{1}{\sigma - 1} \leq \zeta(\sigma) \leq \zeta(2)$$

Ahora $\forall \sigma \in I\!R : \sigma \in \langle 1, 2 \rangle, \ n \in I\!N : n^\sigma \leq n^{\sigma+1} \Longrightarrow \frac{1}{n^{\sigma+1}} \leq \frac{1}{n^\sigma}$ obteniendose

$$\forall \sigma \in I\!R : \sigma \in \langle 1, 2 \rangle : \zeta(\sigma + 1) \leq \zeta(\sigma)$$

Y de todo esto concluimos que $\forall \sigma \in I\!R : \sigma > 1$ la función $\zeta(\sigma)$ es decreciente; y tambien por 2.0.4 tenemos el siguiente esbozo para la función $\zeta(\sigma), \ \sigma > 1$.

Proposición 2.0.8

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in I\!R : \sigma > 1 : \log \zeta(\sigma) &= \sum_{p \ primos} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{\sigma n}} \\ &= \sum_{p \ primos} \left[\frac{1}{p^\sigma} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{\sigma n}} \right] \\ &= \sum_{p \ primos} \frac{1}{p^\sigma} + \sum_{p \ primos} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{\sigma n}} \end{aligned}$$

Prueba

Por 2.0.6

$$\log \zeta(\sigma) = \log \prod_{p \ primos} (1 - p^{-\sigma})^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{p\ primos} \log(1-p^{-\sigma})^{-1} \\
&= -\sum_{p\ primos} \log(1-p^{-\sigma})
\end{aligned}
$$

y como $p > 2 \Longrightarrow \forall\sigma > 1 : p^{-\sigma} < \dfrac{1}{2^{\sigma}} < 1$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\log\zeta(\sigma) &= -\sum_{p\ primos}\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(p^{-\sigma})^n}{n}\right) \\
&= \sum_{p\ primos}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{np^{\sigma n}}
\end{aligned}
$$

pues $\forall x \in \langle -1, 1\rangle : \log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

Ahora veamos que $\forall\sigma > 1 : \log\zeta(\sigma)$ esta bien definido, esto es:

- Veamos que $\forall\sigma > 1$ la serie $\displaystyle\sum_{p\ primos}\frac{1}{p^{\sigma}}$ converge

  Esto es obvio a partir del hecho de $\displaystyle\sum_{p\ primos}\frac{1}{p^{\sigma}} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma}}$

- Veamos que $\forall\sigma > 1$ la serie $\displaystyle\sum_{p\ primos}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{np^{\sigma n}}$ converge

  Como $n > 1 \Longrightarrow \frac{1}{n} < 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{np^{\sigma n}} < \dfrac{1}{p^{\sigma n}}$, y asi $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{np^{\sigma n}} \leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{p^{\sigma n}}$. Pero

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{p^{\sigma n}} &= \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{p^{\sigma}}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p^{\sigma}}\right)^{n+2} \\
&= \frac{1}{p^{2\sigma}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p^{\sigma}}\right)^n = \frac{1}{p^{2\sigma}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^{\sigma}}}\right)
\end{aligned}
$$

  Y asi tenemos

$$
\forall\sigma > 1 : \sum_{p\ primos}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{np^{\sigma n}} \leq \sum_{p\ primos}\frac{1}{p^{2\sigma}}\left(1-\frac{1}{p^{\sigma}}\right)^{-1}
$$

Ahora como $p \geq 2 \Longrightarrow \forall\sigma > 1 : p^\sigma \geq 2^\sigma \geq 2 \Longrightarrow p^\sigma - 1 \geq 1 \Longrightarrow \frac{1}{p^\sigma - 1} \leq 1 \Longrightarrow$ $1 + \frac{1}{p^\sigma - 1} \leq 2$, y como $(1 - \frac{1}{p^\sigma})^{-1} = 1 + \frac{1}{p^\sigma - 1}$, entonces

$$\begin{aligned}
\forall\sigma > 1 \quad &: \left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right)^{-1} \leq 2 \\
&: \frac{1}{p^{2\sigma}}\left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right)^{-1} \leq \frac{2}{p^{2\sigma}} \\
&: \sum_{p\ primos} \frac{1}{p^{2\sigma}}\left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right)^{-1} \leq \sum_{p\ primos} \frac{2}{p^{2\sigma}} = 2\sum_{p\ primos} \frac{1}{p^{2\sigma}}
\end{aligned}$$

Ahora como $\displaystyle\sum_{p\ primos} \frac{1}{p^{2\sigma}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\sigma}}$, entonces tenemos

$$\sum_{p\ primos} \frac{1}{p^{2\sigma}}\left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right)^{-1} \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\sigma}}$$

Ahora como $\forall\sigma > 1,\ \forall n \in I\!N : n^\sigma \geq n > 0 \Longrightarrow n^{2\sigma} \geq n^2 > 0$ de donde $\forall\sigma > 1,\ \forall n \in I\!N : \dfrac{1}{n^{2\sigma}} \leq \dfrac{1}{n^2} \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\sigma}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, teniendose

$$\sum_{p\ primos} \frac{1}{p^{2\sigma}}\left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right)^{-1} \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\sigma}} \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2\zeta(2)$$

y por lo tanto hemos concluido que

$$\forall\sigma > 1 : \sum_{p\ primos} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{\sigma n}} \leq \sum_{p\ primos} \frac{1}{p^{2\sigma}}\left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right)^{-1} \leq 2\zeta(2) \qquad (*)$$

Y vemos que nuestra proposición es realmente cierta. ■

Proposición 2.0.9

$$\lim_{\sigma \to 1^+} \sum_{p\ primos} \frac{1}{p^\sigma} = +\infty$$

Prueba

Para esto supongamos que $\displaystyle\lim_{\sigma \to 1^+} \sum_{p\ primos} \frac{1}{p^\sigma} < \infty$. Ahora de 2.0.8 se tendria que:

$$\lim_{\sigma \to 1^+} \log\zeta(\sigma) = \lim_{\sigma \to 1^+} \sum_{p\ primos} \frac{1}{p^\sigma} + \lim_{\sigma \to 1^+} \sum_{p\ primos} \sum_{n=2} \frac{1}{np^{\sigma n}}$$

Ademas por la ecuación (*) en la prueba de 2.0.8 tendriamos que $\lim_{\sigma\to 1^+} \log\zeta(\sigma) < \infty$, pero esto contradice 2.0.5. ■

Proposición 2.0.10

$$\sum_{p \ primos} \frac{1}{p} = +\infty$$

Prueba

Supongamos que $\displaystyle\sum_{p \ primos} \frac{1}{p} < \infty$.

$$\begin{aligned}
\forall \sigma \in \mathbb{R} : \sigma > 1 \ \ &: \ p^{\sigma} \geq p \Longrightarrow \frac{1}{p^{\sigma}} \leq \frac{1}{p} \\
&: \ \sum_{p \ primos} \frac{1}{p^{\sigma}} \leq \sum_{p \ primos} \frac{1}{p} \\
&: \ \lim_{\sigma\to 1^+} \sum_{p \ primos} \frac{1}{p^{\sigma}} \leq \sum_{p \ primos} \frac{1}{p} < \infty
\end{aligned}$$

de donde se concluiria que $\displaystyle\lim_{\sigma\to 1^+} \sum_{p \ primos} \frac{1}{p^{\sigma}} < \infty$, pero esto contradice a 2.0.9. ■

Proposición 2.0.11

$$\forall \sigma \in \mathbb{R} : \sigma > 1 : \sum_{p \ primos} \frac{1}{p^{\sigma}} \leq \sigma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^{\sigma+1}}$$

Prueba

Es claro que $\displaystyle\sum_{p \ primos} \frac{1}{p^{\sigma}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n) - \pi(n-1)}{n^{\sigma}}$.

Ahora

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} \frac{\pi(n) - \pi(n-1)}{n^{\sigma}} &= \sum_{n=1}^{k} \frac{\pi(n)}{n^{\sigma}} - \sum_{n=1}^{k} \frac{\pi(n-1)}{n^{\sigma}} \\
&= \sum_{n=1}^{k} \frac{\pi(n)}{n^{\sigma}} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\pi(n)}{(n+1)^{\sigma}} \\
&= \frac{\pi(k)}{k^{\sigma}} - \frac{\pi(0)}{1^{\sigma}} + \sum_{n=1}^{k-1} \pi(n) \left[\frac{1}{n^{\sigma}} - \frac{1}{(n+1)^{\sigma}} \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi(k)}{k^\sigma} + \sum_{n=1}^{k-1} \pi(n)\left[\frac{1}{n^\sigma} - \frac{1}{(n+1)^\sigma}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{\pi(n)-\pi(n-1)}{n^\sigma} = \lim_{k\to\infty} \frac{\pi(k)}{k^\sigma} + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k-1} \pi(n)\left[\frac{1}{n^\sigma} - \frac{1}{(n+1)^\sigma}\right]$$

deduciendose que

$$\forall\sigma > 1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)-\pi(n-1)}{n^\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(n)\left[\frac{1}{n^\sigma} - \frac{1}{(n+1)^\sigma}\right]$$

es facil ver que $\frac{1}{n^\sigma} - \frac{1}{(n+1)^\sigma} = \sigma \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{\sigma+1}}$, y por el mismo argumento usado en la demostración de 2.0.3 podemos afirmar que $\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{\sigma+1}} \leq \frac{1}{n^{\sigma+1}}$, asi mismo $\forall n \geq 2 : \pi(n) > 0$, de donde

$$\begin{aligned}
\forall\sigma > 1 \quad &: \pi(n)\left[\frac{1}{n^\sigma} - \frac{1}{(n+1)^\sigma}\right] = \pi(n)\left[\sigma\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^{\sigma+1}}\right] \leq \frac{\sigma\pi(n)}{n^{\sigma+1}} \\
&: \pi(n)\left[\frac{1}{n^\sigma} - \frac{1}{(n+1)^\sigma}\right] \leq \frac{\sigma\pi(n)}{n^{\sigma+1}} \\
&: \sum_{n=2}^{k} \pi(n)\left[\frac{1}{n^\sigma} - \frac{1}{(n+1)^\sigma}\right] \leq \sigma \sum_{n=1}^{k} \frac{\pi(n)}{n^{\sigma+1}} \\
&: \lim_{k\to\infty} \sum_{n=2}^{k} \pi(n)\left[\frac{1}{n^\sigma} - \frac{1}{(n+1)^\sigma}\right] \leq \sigma \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{\pi(n)}{n^{\sigma+1}} \\
&: \sum_{n=2}^{\infty} \pi(n)\left[\frac{1}{n^\sigma} - \frac{1}{(n+1)^\sigma}\right] \leq \sigma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^{\sigma+1}}
\end{aligned}$$

de donde, finalmente

$$\forall\sigma > 1 : \sum_{p\ primos} \frac{1}{p^\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)-\pi(n-1)}{n^\sigma} \leq \sigma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^{\sigma+1}} \qquad \blacksquare$$

Proposición 2.0.12

$$\nexists\alpha < 1 : \pi(n) = O(n^\alpha)$$

Prueba

Supongamos que $\exists\alpha < 1 : \pi(n) = O(n^\alpha)$; esto significa que $\exists M > 0 : |\pi(n)| \leq Mn^\alpha$.

Ahora por 2.0.11 tenemos

$$
\begin{aligned}
\forall\sigma > 1 : \sum_{p\ primos} \frac{1}{p^\sigma} &\leq \sigma\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi(n)}{n^{\sigma+1}} \leq \sigma M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^\alpha}{n^{\sigma+1}} \\
&\leq \sigma M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma+1-\alpha}} \\
\lim_{\sigma\to 1^+}\sum_{p\ primos}\frac{1}{p^\sigma} &\leq \lim_{\sigma\to 1^+}\sigma M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma+1-\alpha}} \\
\lim_{\sigma\to 1^+}\sum_{p\ primos}\frac{1}{p^\sigma} &\leq M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-\alpha}}
\end{aligned}
$$

pero como $\alpha < 1 \Longrightarrow 2-\alpha > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-\alpha}} < \infty$. Pero esto significa que $\lim_{\sigma\to 1^+}\sum_{p\ primos}\frac{1}{p^\sigma} < \infty$, pero contradice 2.0.9. ■

2.1 La Función $\zeta(s)$ en la region Re(s)> 1

De aqui en adelante consideraremos que $s \in \mathbb{C}$. Y sea $\sigma = Re(s)$, y $Im(s) = t$, de modo que $s = \sigma + it$. Se define

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

Proposición 2.1.13

$$\forall s \in \mathbb{C} : \sigma > 1 : \zeta(s)\ \textit{converge uniformemente}$$

Prueba

Sabemos que $n^s = e^{s\log n} = e^{[\sigma+it]\log n} = e^{\sigma\log n}e^{it\log n} = n^\sigma e^{it\log n}$, y asi $\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{e^{\sigma\log n}}\frac{1}{|e^{it\log n}|} = \frac{1}{e^{\sigma\log n}} = \frac{1}{n^\sigma}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{1}{n^s}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}$ y sabemos que esta serie converge siempre que $\sigma > 1$ y como toda serie absolutamente convergente converge, por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\ \text{converge uniformemente para}\ \sigma > 1$$

que en palabras significa que $\forall\sigma > 1 : \zeta(s)$ esta bien definida.

Por otro lado como $|\frac{1}{n^s}| = \frac{1}{n^\sigma} < (\frac{2}{n})^\sigma$, con $\sigma > 1$, obviamente $\forall n \in I\!N : (\frac{2}{n})^\sigma > 0$, y como

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{n})^\sigma = 2^\sigma \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}}_{\text{converge}} \quad \text{con } \sigma > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{n})^\sigma \text{ converge}$$

y por el Teorema de Weierstrass nuestra proposión es cierta. ∎

Proposición 2.1.14

$$\forall s \in \mathbb{C} : \sigma > 1 : \zeta(s) \text{ } \textit{es analitica y regular}$$

y ademas $\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^s}$

Prueba

Como cada termino de la serie de $\zeta(s)$ es una función analitica y regular en $Re(s) > 1$ y por 2.1.13, entonces podemos diferenciar cada termino de la serie y ademas $\zeta'(s)$ converge uniformenente cuando $\sigma > 1$ ∎

Proposición 2.1.15

$$\forall s \in \mathbb{C}: \ \sigma > 1 : \ -\zeta(s) = \zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

Prueba

En primer lugar veamos que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$ converge absolutamente para $\sigma > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^\sigma} \text{ por A.0.39}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right| < \infty$$

Tambien por 2.1.13 $\zeta(s)$ converge absolutamente para $\sigma > 1$, entonces $\forall s \in \mathbb{C}: \ \sigma > 1 :$

$$\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \sum_{n|k} \Lambda(n)^1$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^s} \quad \text{Por A.0.40}$$

y finalmente usamos 2.1.15 ■

Proposición 2.1.16

$$\forall s \in \mathbb{C}: \ \sigma > 1 : \ \zeta(s) \neq 0$$

Prueba

Antes que nada sea $\epsilon > 0$ un número arbitrario, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ converge uniformemente para $\sigma > 1 + \epsilon$, luego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ es regular para $\sigma > 1$.

Supongamos que $\exists s_0 \in \mathbb{C}: \ Re(s_0) > 1 : \ \zeta(s_0) = 0$, y ademas que s_0 es un cero de orden p $(p \geq 1)$ para $\zeta(s)$. Luego afirmamos que s_0 es un cero de orden p para $\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$, pues $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ es regular para $\sigma > 1$; y por 2.1.15 afirmamos que s_0 es un cero de orden p para $\zeta'(s)$.

Pero como estamos suponiendo que s_0 es un cero de orden p para $\zeta(s)$, entonces s_0 es tambien un cero para $\zeta'(s)$ pero de orden $p - 1$.

De donde concluimos que s_0 es un cero para $\zeta'(s)$ pero no tiene un orden (orden del cero). ■

Proposición 2.1.17 *Sea p un número primo arbitrario pero fijo, entonces*

$$\forall s \in \mathbb{C}: \ Re(s) > 1 : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p^s}\right)^k \ \textit{converge absolutamente}$$

---

[1] Dadas dos series de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$ las cuales son absolutamente convergentes. Entonces $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$, donde $c_n = \sum_{\substack{d \\ d|n}} a_d b_{n|d}$

Prueba

Es clara a partir de,

$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{1}{p^s}\right)^k\right| &= \left|\frac{1}{p^{sk}}\right| = \left|\frac{1}{e^{sk\log p}}\right| = \frac{1}{\left|e^{(\sigma+\imath t)k\log p}\right|} \\
&= \frac{1}{\left|e^{k\sigma\log p}e^{\imath kt\log p}\right|} = \frac{1}{e^{k\sigma\log p}\left|e^{\imath kt\log p}\right|} \\
&= \frac{1}{e^{k\sigma\log p}} = \frac{1}{p^{k\sigma}} = \left(\frac{1}{p^\sigma}\right)^k, \text{ y asi} \\
\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{p^s}\right|^k &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p^\sigma}\right)^k
\end{aligned}$$

Ahora por el criterio de la raiz $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{1}{p^\sigma}\right)^k} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{p^\sigma} = \frac{1}{p^\sigma}$, pero como $p \geq 2$, $\sigma > 1 \Longrightarrow p^\sigma \geq 2^\sigma \Longrightarrow \frac{1}{p^\sigma} \leq \frac{1}{2^\sigma} \leq \frac{1}{2} < 1$. ■

Proposición 2.1.18 (La identidad de Euler)

$$\forall\sigma > 1 : \zeta(s) = \prod_{p\ primos}(1-p^{-s})^{-1}$$

Esta identidad es conocida como la "identidad de Euler" y muestra la relación entre $\zeta(s)$ y los números primos.

Prueba

La idea de la demostración es empezar a tomar productos finitos en la productoria.

Para esto, sea $x \in I\!R : x \geq 2$ un número arbitrario, y como antes sea $\sigma = Re(s) > 1$. Entonces para cada número p primo tal que $p \leq x$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p^s}\right)^k$ converge absolutamente por 2.1.17. Ademas, $\left|\frac{1}{p^s}\right| = \frac{1}{p^\sigma} \leq \frac{1}{2} < 1$, y por series geometricas $\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p^s}\right)^k$, de donde se obtiene que

$$\prod_{p\leq x}(1-p^{-s})^{-1} = \prod_{p\leq x}(1+p^{-s}+p^{-2s}+p^{-3s}+\cdots)$$

pero como

$$\prod_{p\leq x}(1+p^{-s}+p^{-2s}+p^{-3s}+\cdots)=\underbrace{\sum_{n\leq x}n^{-s}}_{\sum_{n=1}^{n\leq x}n^{-s}}+R(s;x)$$

siendo $R(s;x)=\sum_{n>x}' n^{-s}$. $\sum_{n>x}' n^{-s}$, representa la suma que se extiende sobre todos los números $n>x$ y los números n estan compuestos unicamente de primos no mayores que x. Obviamente

$$\frac{1}{n^s}=\frac{1}{e^{s\log n}}=\frac{1}{e^{(\sigma+it)\log n}}=\frac{1}{e^{\sigma\log n}\left|e^{it\log n}\right|}=\frac{1}{n^\sigma}$$

$$\begin{aligned}
\text{teniendose que } |R(s;x)|=\left|\sum_{n>x}' n^{-s}\right| &\leq \sum_{n>x}' |n^{-s}|\\
|R(s;x)| &\leq \sum_{n>x}' \frac{1}{n^\sigma}\leq\sum_{n>x}\frac{1}{n^\sigma}\\
&\leq \sum_{n>x}\frac{1}{n^\sigma}\leq\frac{1}{x^\sigma}+\int_x^\infty\frac{du}{u^\sigma}\\
&\leq x^{-\sigma}+\frac{x^{1-\sigma}}{\sigma-1}
\end{aligned}$$

ahora como $x\geq 2,\ \sigma>1\Longrightarrow\sigma-1<\sigma\Longrightarrow x^{\sigma-1}\leq x^\sigma\Longrightarrow x^{-\sigma}\leq x^{1-\sigma}$, y asi

$$\begin{aligned}
|R(s;x)| &\leq x^{-\sigma}+\frac{x^{1-\sigma}}{\sigma-1}\leq x^{1-\sigma}+\frac{x^{1-\sigma}}{\sigma-1}\\
|R(s;x)| &\leq \frac{\sigma}{\sigma-1}x^{1-\sigma},\quad \text{donde } \sigma>1\\
\lim_{x\to\infty}|R(s;x)| &\leq \frac{\sigma}{\sigma-1}\lim_{x\to\infty}x^{1-\sigma}=\frac{\sigma}{\sigma-1}0=0
\end{aligned}$$

y asi tenemos que $\lim_{x\to\infty}|R(s;x)|=0$, concluyendose que $\forall s\in\mathbb{C}: Re(s)>1$: $\prod_{p\ primos}(1-p^{-s})^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=\zeta(s)$ ■

Proposición 2.1.19

$$\forall s\in\mathbb{C}: \sigma=Re(s)>1 : |\zeta(s)|>\frac{\sigma-1}{\sigma}>0$$

Prueba

Ya vimos en 2.1.14 que $\zeta(s)$ no tiene ningun polo en $\sigma > 1$, y asi

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \prod_p (1-p^{-s})^{-1}, \text{ esto por 2.1.18} \\
\forall\sigma > 1 : \zeta(s)^{-1} &= \prod_p (1-p^{-s}) \\
\forall\sigma > 1 : |\zeta(s)|^{-1} = |\zeta(s)^{-1}| &= |\prod_p (1-p^{-s})| = \prod_p |1-p^{-s}|
\end{aligned}$$

pero como: $|1-p^{-s}| \leq 1 + |p^{-s}| \Longrightarrow |\zeta(s)|^{-1} \leq \prod_p (1+|p^{-s}|)$. Pero

$$\begin{aligned}
p^{-s} &= e^{-s\log p} = e^{-(\sigma+it)\log p} = e^{-\sigma\log p}e^{-it\log p} \\
|p^{-s}| &= e^{-\sigma\log p}|e^{-it\log p}| = e^{-\sigma\log p} = p^{-\sigma}
\end{aligned}$$

y asi

$$\begin{aligned}
|\zeta(s)|^{-1} &\leq \prod_p (1+|p^{-s}|) = \prod_p (1+p^{-\sigma}) < \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} \\
|\zeta(s)|^{-1} &< \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} \leq 1 + \int_1^{\infty} u^{-\sigma} du = \frac{\sigma}{\sigma-1} \\
|\zeta(s)|^{-1} &< \frac{\sigma}{\sigma-1}
\end{aligned}$$

pero $|\zeta(s)|^{-1} < \dfrac{\sigma}{\sigma-1} \Longrightarrow |\zeta(s)| > \dfrac{\sigma-1}{\sigma}$ ∎

Proposición 2.1.20

$$\forall s \in \mathbb{C}: \ \sigma > 1 : \ \zeta(s) = s\int_1^{\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}}dx$$

Prueba

Sabemos que $\forall n \in \mathbb{Z} : \ [n] - [n-1] = 1$. Entonces $\forall\sigma > 1$ se satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]-[n-1]}{n^s} \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{[n]-[n-1]}{n^s}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{k\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{k}\frac{[n]}{n^s}-\sum_{n=1}^{k}\frac{[n-1]}{n^s}\right] \\
&= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k-1}[n]\left[\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right]+\lim_{k\to\infty}\frac{[k]}{k^s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}[n]\left[\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}[n]s\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^{s+1}}
\end{aligned}
$$

y finalmente $\zeta(s)=s\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{[x]dx}{x^{s+1}}$ ■

Proposición 2.1.21

$$\forall s\in\mathbb{C}:\ \sigma>1:\ -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=s\int_1^{\infty}\frac{\psi(x)}{x^{s+1}}dx$$

Prueba

Entonces $\forall\sigma>1$ se satisface

$$
\begin{aligned}
-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n)-\psi(n-1)}{n^s} \\
&= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{\psi(n)-\psi(n-1)}{n^s} \\
&= \lim_{k\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{k}\frac{\psi(n)}{n^s}-\sum_{n=1}^{k}\frac{\psi(n-1)}{n^s}\right] \\
&= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k-1}\psi(n)\left[\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right]+\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k)}{k^s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)\left[\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)s\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^{s+1}}
\end{aligned}
$$

y finalmente $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=s\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{\psi(x)dx}{x^{s+1}}$ ■

2.2 Continuación de $\zeta(s)$ en Re(s)> 0

Proposición 2.2.22 (Formula de Sumación de Euler) *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función que tiene una derivada continua en el intervalo $[a,b]$, entonces*

$$\sum_{a<x\leq b} f(x) = \int_a^b f(x)dx + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) - \int_a^b \rho(x)f'(x)dx$$

y donde $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$

Proposición 2.2.23 $\forall s \in \mathbb{C}$: $Re(s) > 0 : \int_N^\infty \rho(u)u^{-s-1}du$ *es una función analitica.*

Proposición 2.2.24 *Si* $Re(S) > 0$, *entonces*

$$\forall N \in \mathbb{N} : \zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} n^{-s} + \frac{1}{s-1}N^{1-s} - \frac{1}{2}N^{-s} + s\int_N^\infty \rho(u)u^{-s-1}du$$

donde $\rho(u) = \frac{1}{2} - \{u\}$

Prueba

Sea $M \in \mathbb{N}$ un número arbitrario pero fijo. Ahora

$$\forall N \in \mathbb{N} : M > N, \quad R \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{N+0.5<n\leq M+0.5} n^{-s}$$

tambien, $\forall n \in [N+0.5, M+0.5], s \in \mathbb{C}$: $Re(s) > 1 : f(n) \stackrel{\text{def}}{=} n^{-s}$, obviamente esta función esta bien definida, es continua y ademas es analitica y regular para todo $s \in \mathbb{C}$: $Re(s) > 1 \Longrightarrow f'(n) = -sn^{-s-1}$. Aplicando 2.2.22 tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{N+0.5<n\leq M+0.5} n^{-s} &= \int_{N+0.5}^{M+0.5} n^{-s}dn + \rho(M+0.5)f(M+0.5) \\
&- \rho(N+0.5)f(N+0.5) - \int_{N+0.5}^{M+0.5} \rho(u)\left(-su^{-s-1}\right)du \\
&= \int_{N+0.5}^{M+0.5} n^{-s}dn + (M+0.5)^{-s}\rho(M+0.5) \\
&- (N+0.5)^{-s}\rho(N+0.5) + s\int \rho(u)u^{-s-1}du
\end{aligned}$$

Ahora $\rho(M+0.5)=\frac{1}{2}-\{M+0.5\}=\frac{1}{2}-0.5=0$ pues $M\in I\!N$ y tambien $\rho(N+0.5)=0$ pues $N\in I\!N$. Tambien para simplificar notemos que

$$\int_{N+0.5}^{M+0.5}u^{-s}du=\int_{N}^{M+0.5}u^{-s}du-\int_{N}^{N+0.5}u^{-s}du$$

$$\int_{N+0.5}^{M+0.5}\rho(u)u^{-s-1}du=\int_{N}^{M+0.5}\rho(u)u^{-s-1}du-\int_{N}^{N+0.5}\rho(u)u^{-s-1}du$$

de donde

$$\begin{aligned}
R &= \int_{N+0.5}^{M+0.5}u^{-s}du+s\int_{N+0.5}^{M+0.5}\rho(u)u^{-s-1}du,\ \text{con } Re(s)>1\\
R &= \int_{N}^{M+0.5}u^{-s-1}du-\int_{N}^{N+0.5}u^{-s-1}du+s\int_{N}^{M+0.5}\rho(u)u^{-s-1}du\\
&- s\int_{N}^{N+0.5}\rho(u)u^{-s-1}du
\end{aligned}$$

Ahora $\rho(u)=\frac{1}{2}-\{u\}$. Pero sabemos que $\forall x\in I\!R:\{x\}=|x|-[|x|]$. Entonces $\forall u\in[N,N+0.5]:\{u\}=u-[u]$, pues como $u\in I\!N:|u|=u$. Tambien $\forall u\in[N,N+0.5]:[u]=N$. Por lo tanto

$$\forall u\in[N,N+0.5]:\rho(u)=\frac{1}{2}-u+N$$

de donde

$$\begin{aligned}
R &= \int_{N}^{M+0.5}u^{-s}du-\int_{N}^{N+0.5}u^{-s}du+s\int_{N}^{M+0.5}\rho(u)u^{-s-1}du\\
&- s\int_{N}^{N+0.5}\left(\frac{1}{2}+N-u\right)u^{-s-1}du\\
&= \int_{N}^{M+0.5}u^{-s}du-\int_{N}^{N+0.5}u^{-s}du+s\int_{N}^{M+0.5}\rho(u)u^{-s-1}du\\
&- s\int_{N}^{N+0.5}\left(\frac{1}{2}+N\right)u^{-s-1}du+s\int_{N}^{N+0.5}uu^{-s-1}du\\
&= \int_{N}^{M+0.5}u^{-s}du-\int_{N}^{N+0.5}u^{-s}du+s\int_{N}^{M+0.5}\rho(u)u^{-s-1}du\\
&- s(\frac{1}{2}+N)\int_{N}^{N+0.5}u^{-s-1}du+s\int_{N}^{N+0.5}u^{-s}du\\
&= \int_{N}^{M+0.5}u^{-s}du+(s-1)\int_{N}^{N+0.5}u^{-s}du-s(\frac{1}{2}+N)\int_{N}^{N+0.5}u^{-s-1}du
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad s\int_{N}^{M+0.5} \rho(u)u^{-s-1}du \\
R &= \left.\frac{u^{-s+1}}{-s+1}\right|_{n}^{M+0.5} + (s-1)\left.\frac{u^{-s+1}}{-s+1}\right|_{N}^{N+0.5} - s(\frac{1}{2}+N)\left.\frac{u^{-s}}{-s}\right|_{N}^{N+0.5} \\
&+ \quad s\int_{N}^{M+0.5} \rho(u)u^{-s-1}du \\
R &= \frac{(M+0.5)^{1-s}}{1-s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} - u^{1-s}\Big|_{N}^{N+0.5} + (\frac{1}{2}+N)u^{-s}\Big|_{N}^{N+0.5} \\
&+ \quad s\int_{N}^{M+0.5} \rho(u)u^{-s-1}du \\
&= \frac{(M+0.5)^{1-s}}{1-s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} - (N+0.5)^{1-s} + N^{1-s} \\
&+ \quad (\frac{1}{2}+N)(N+0.5)^{-s} - (\frac{1}{2}+N)N^{-s} + s\int_{N}^{M+0.5} \rho(u)u^{-s-1}du \\
&= \frac{(M+0.5)^{1-s}}{1-s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} - (N+0.5)^{1-s} + N^{1-s} + (N+0.5)^{1-s} \\
&- \quad (\frac{1}{2}+N)N^{-s} + s\int_{N}^{M+0.5} \rho(u)u^{-s-1}du \\
R &= \frac{(M+0.5)^{1-s}}{1-s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} + N^{1-s} - (\frac{1}{2}+N)N^{-s} \\
&+ \quad s\int_{N}^{M+0.5} \rho(u)u^{-s-1}du \\
&= \frac{(M+0.5)^{1-s}}{1-s} + N^{-s}\left[N - \frac{N}{1-s} - (\frac{1}{2}+N)\right] \\
&+ \quad s\int_{N}^{M+0.5} \rho(u)u^{-s-1}du \\
&= \frac{(M+0.5)^{1-s}}{1-s} + N^{-s}\left[\frac{-N}{1-s} - \frac{1}{2}\right] + s\int_{N}^{M+0.5} \rho(u)u^{-s-1}du \\
&= \frac{(M+0.5)^{1-s}}{1-s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}N^{-s} + s\int_{N}^{M+0.5} \rho(u)u^{-s-1}du
\end{aligned}
$$

Y asi, que cuando $M \in \mathbb{N}$ es arbitrario pero fijo, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{N+0.5<n\leq M+0.5} n^{-s} &= \frac{(M+0.5)^{1-s}}{1-s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}N^{-s} \\
&+ \quad s\int_{N}^{M+0.5} \rho(u)u^{-s-1}du
\end{aligned}
$$

y esta relación es $(\forall N \in \mathbb{N} : N < M) \wedge (\forall s \in \mathbb{C}\text{: } Re(s) > 1)$. Tambien es obvio que

$$\begin{aligned}
\lim_{M\to\infty} \sum_{N+0.5<n\leq M+0.5} n^{-s} &= \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-s} \\
\lim_{M\to\infty} \frac{(M+0.5)^{1-s}}{1-s} &= 0 \\
\lim_{M\to\infty} \int_{N}^{M+0.5} \rho(u)u^{-s-1}du &= \int_{N}^{\infty} \rho(u)u^{-s-1}
\end{aligned}$$

y asi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N+1}^{\infty} &= \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}N^{-s} + s\int_{N}^{\infty} \rho(u)u^{-s-1}du \\
\underbrace{\sum_{n=1}^{N} n^{-s} + \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-s}}_{\zeta(s)} &= \sum_{n=1}^{N} n^{-s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}N^{-s} \\
&+ s\int_{N}^{\infty} \rho(u)u^{-s-1}du
\end{aligned}$$

y esta relación es valida $(\forall N \in \mathbb{N}) \wedge (\forall s \in \mathbb{C}\text{: } Re(s) > 1)$.

Finalmente por 2.2.23 afirmamos que $\zeta(s)$ es analitica en $Re(s) > 0$ ■

Proposición 2.2.25 *La función $\zeta(s)$ es regular en el semiplano $Re(s) > 0$ excepto en el punto $s = 1$, donde existe un polo simple con residuo 1.*

Prueba

Haciendo $N = 1$ en 2.2.24 tenemos:

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{1} n^{-s} + \frac{1}{s-1}(1)^{1-s} - \frac{1}{2}(1)^{-s} + s\int_{1}^{\infty} \rho(u)u^{-s-1}du \\
&= (1)^{-s} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}(1)^{-s} + s\int_{1}^{\infty} \rho(u)u^{-s-1}du \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{s-1} + s\int_{1}^{\infty} \rho(u)u^{-s-1}du \\
\zeta(s) &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + s\int_{1}^{\infty} \rho(u)u^{-s-1}du
\end{aligned}$$

y como 2.2.24 afirma que $\zeta(s)$ es analitica en el semiplano $Re(s) > 0$, entonces

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + s\int_1^\infty \rho(u)u^{-s-1}du$$

es analitica para $Re(s) > 0$, excepto para el punto $s = 1$, donde existe un polo simple.

Ahora sabemos que si una función $f(z)$ tiene un polo simple en $z = a$ entonces su residuo en este polo es $\lim_{z\to a}\{(z-a)f(z)\}$. De donde

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = \lim_{s\to 1}\left\{1 + \frac{s-1}{2} + s(s-1)\int_1^\infty \rho(u)u^{-s-1}du\right\} = 1$$ ■

Proposición 2.2.26

$$\forall s \in \mathbb{C}:\ \sigma \geq 1:\ \zeta(s) - \frac{s}{s-1} \text{ } \textit{es analitica y regular}$$

Prueba

Por 2.1.20 se tiene que $\forall\sigma > 1$: $\zeta(s) - \dfrac{s}{s-1} = s\displaystyle\int_1^\infty \frac{[u]-u}{u^{s+1}}du$. Y esta integral converge para $\sigma > 0$ y por lo tanto tambien para $\sigma > \frac{1}{2}$, y así $\left|\dfrac{[u]-u}{u^{s+1}}\right| < \dfrac{1}{u^{1.5}}$, de donde $\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{[u]-u}{u^{s+1}}\right| du \leq \int_1^\infty \frac{du}{u^{1.5}}$, lo que significa que la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{[u]-u}{u^{s+1}}du$ es analitica y regular. ■

Proposición 2.2.27

$$\forall s \in \mathbb{C}:\ \sigma \geq 1:\ \frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \frac{1}{s-1} \text{ } \textit{es analitica y regular}$$

Prueba

2.3 Continuación de $\zeta(s)$ a todo el plano

Proposición 2.3.28 (Suma de Poisson)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-y\pi n^2} = \sqrt{x}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-x\pi n^2},\ y = \frac{1}{x},\ y > 0$$

Proposición 2.3.29

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\pi n^2} = O\left(e^{-\pi x}\right),\ x \to \infty$$

Prueba

Es facilver que $\sum_{n=1}^{k} e^{-x\pi n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\pi n} = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-x\pi})^n$. Pero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\pi x})^n$ tiene la forma de una serie geometrica y está convergerá siempre que $e^{-\pi x} < 1 = e^0 \Longrightarrow -\pi x < 0 \Longrightarrow x > 0$.

$\forall x > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\pi x})^n$, converge y ademas $0 < e^{-\pi x} < 1$.

$$\forall x > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\pi x})^n = \frac{e^{-\pi x}}{1 - e^{-\pi x}}$$

Entonces

$$\forall x > 0 : \sum_{n=1}^{k} e^{-x\pi n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\pi n} = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-x\pi})^n = \frac{e^{-\pi x}}{1 - e^{-\pi x}}$$

Ahora si, $x > \frac{1}{\pi} \Rightarrow \pi x > 1 \Rightarrow -\pi x < -1 \Rightarrow e^{-\pi x} < e^{-1} < 0.38 \Rightarrow -e^{-\pi x} > -0.38 \Rightarrow 1 - e^{-\pi x} > 1 - 0.38$, de donde $\forall x > \frac{1}{\pi} : \frac{1}{1 - e^{-\pi x}} < \frac{1}{1 - 0.38}$. Y asi $\forall x > \frac{1}{\pi} : \frac{e^{-\pi x}}{1 - e^{-\pi x}} < \left(\frac{1}{1 - 0.38}\right) e^{-\pi x} < 1.62 e^{-\pi x}$

$$\begin{aligned}
\forall x > \frac{1}{\pi} \quad &: \sum_{n=1}^{k} e^{-x\pi n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\pi n} = \frac{e^{-\pi x}}{1 - e^{-\pi x}} < 1.62 e^{-\pi x} \\
&: \sum_{n=1}^{k} e^{-x\pi n^2} < 1.62 e^{-\pi x} \\
&: \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} e^{-x\pi n^2} \leq 1.62 e^{-\pi x} \\
&: \sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\pi n^2} \leq 1.62 e^{-\pi x}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\pi n^2} = \mathrm{O}\left(e^{-\pi x}\right), \; x \to \infty$ ■

Proposición 2.3.30

$$\forall s \in \mathbb{C} : \int_1^{\infty} \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{\frac{-s}{2}-\frac{1}{2}}\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\pi n^2}\right) dx$$

define una función analitica y regular en todo el plano.

Proposición 2.3.31 $\forall s \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ *se satisface:*

$$\pi^{\frac{-s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{\frac{-s}{2}} - \frac{1}{2} \right) \omega(x)dx$$

donde $\omega(x) = O(e^{-\pi x}),\ x \to \infty$. *Y asi se tiene una continuación analitica de* $\zeta(s)$ *a todo el plano complejo.*

Prueba

La representación de Euler para la función Gama es

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{C}: Re(s) > 0 \quad : \quad \Gamma(s) &= \int_0^\infty y^{s-1}e^{-y}dy \\ : \quad \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_0^\infty y^{\frac{s}{2}-1}e^{-y}dy \end{aligned}$$

Haciendo el cambio $y = \pi n^2 x$, entonces para $Re(s) > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_0^\infty (\pi n^2 x)^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x}(\pi n^2 dx) \\ &= \int_0^\infty \pi^{\frac{s}{2}-1} n^{s-2} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x} \pi n^2 dx \\ &= \pi^{\frac{s}{2}} n^s \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x} dx \\ \pi^{\frac{-s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\frac{1}{n^s} &= \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x} dx \\ \pi^{\frac{-s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\underbrace{\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}}_{\zeta(s)} &= \sum_{n=1}^\infty \left(\int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x} dx \right) \\ \pi^{\frac{-s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \sum_{n=1}^\infty \left(\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x} dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x} dx \right) \\ &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x} \right) dx \quad + \\ &+ \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x} \right) dx \end{aligned}$$

Ahora trabajemos solamente con la primera integral del lado derecho la ultima identidad. Antes es facil ver que se cumple la siguiente identidad $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-x\pi n^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\pi n^2}$. Y asi

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\pi n^2}\right) dx &= \int_0^1 \frac{1}{2} x^{\frac{s}{2}-1}\left[\left(2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\pi n^2}+1\right)-1\right] dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} x^{\frac{s}{2}-1}\left(2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\pi n^2}+1\right) dx \\
&- \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} x^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-x\pi n^2}\right) dx \\
&- \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} x^{\frac{s}{2}-1} x^{\frac{-1}{2}}\left(\sqrt{x}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-x\pi n^2}\right) dx \\
&- \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} dx
\end{aligned}
$$

Ahora por 2.3.28 tenemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\pi n^2}\right) dx &= \int_0^1 \frac{1}{2} x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-y\pi n^2}\right) dx \\
&- \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} dx
\end{aligned}
$$

donde $y = \frac{1}{x}$, $x > 0 \Longrightarrow dx = \frac{-dy}{y^2}$, y ahora trataremos de reducir la primera integral del lado derecho de esta ultima desigualdad. Esto es,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{2} x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-y\pi n^2}\right) dx &= \int_{\infty}^1 \frac{1}{2} y^{-\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-y\pi n^2}\right)\left(\frac{-dy}{y^2}\right) \\
&= \int_1^{\infty} \frac{1}{2} y^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-y\pi n^2}\right) dy
\end{aligned}
$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{1}{2} x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-x\pi n^2} \right) dx$$

esto, por que la variable de integración es muda, teniendose entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\pi n^2} \right) dx &= \int_1^{\infty} \frac{1}{2} x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-x\pi n^2} \right) dx \\
&- \frac{1}{2} \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} dx
\end{aligned}$$

y como $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-x\pi n^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\pi n^2}$, entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\pi n^2} \right) dx &= \int_1^{\infty} \frac{1}{2} x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\pi n^2} \right) dx \\
&- \frac{1}{2} \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} dx \\
&= \int_1^{\infty} \frac{1}{2} x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} dx \\
&+ \int_1^{\infty} \frac{1}{2} x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\pi n^2} \right) dx \\
&- \frac{1}{2} \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} dx \\
&= \int_1^{\infty} \frac{1}{2} x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} dx \\
&+ \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\pi n^2} \right) dx \\
&- \frac{1}{2} \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} dx \\
&= \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\pi n^2} \right) dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} dx \\
&- \frac{1}{2} \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} dx
\end{aligned}$$

de donde $\forall s \in \mathbb{C}$: $Re(s) > 0$ se tiene,

$$\begin{aligned}
\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) &= \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-x\pi n^2}\right)dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-x\pi n^2}\right)dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}dx - \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}dx \\
&= \int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)\omega(x)dx + \frac{1}{2}\int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}dx \\
&- \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}dx \\
&= \int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)\omega(x)dx + \frac{1}{s(s-1)}
\end{aligned}$$

donde $\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\pi n^2}$, pero por 2.3.29 $\omega(x) = O(e^{-\pi x})$, $x \to \infty$. Pero por 2.3.30 podemos afirmar que

$$\frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)\omega(x)dx$$

es una función regular $\forall s \in \mathbb{C}$, excepto para para los dos polos simples en $s = 0$ y $s = 1$. Por lo tanto la ecuación

$$\pi^{\frac{-s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{\frac{-s}{2}-\frac{1}{2}}\right)\omega(x)dx$$

define una continuación de $\zeta(s)$ a todo el plano complejo ■

Teorema 2.1 (Ecuación Funcional para $\zeta(s)$)

$$\forall s \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\} : \pi^{\frac{-s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{-\left(\frac{1-s}{2}\right)}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s)$$

Prueba

Basta solo observar que la ecuación 2.3.31 permanece invariable si reemplazamos s por $1-s$, esto es

$$\pi^{-\frac{1}{2}(1-s)}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)\omega(x)dx$$

de donde concluimos a partir de esta ecuación y 2.3.31

$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\} : \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\left(\frac{1-s}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

y esta ecuación es conocida como la ecuación funcional para $\zeta(s)$. ■

Definición 2

$$\forall s \in \mathbb{C}: \xi(s) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

Proposición 2.3.32 *$\xi(s)$ es una función entera, y ademas $\xi(s) = \xi(1-s)$.*

Prueba

Solo tendriamos que ver la función $f(s) = s(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$ es entera.

Las posibles singularidades de la función f son aquellas de la función $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ y la funcion $\zeta(s)$. Ahora bien $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ tiene polos simples en los puntos $s = -2m$ con $m = 0, 1, 2, 3, \cdots$, los cuales se cancelan con los zeros triviales de la funcion Zeta (los cuales son simples), cuando $m = 1, 2, \cdots$; mientras que cuando $m = 0$ la singularidad se cancela con el cero de la función $h(s) = s$ ($s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ esta acotada). Por otro lado $(s-1)\zeta(s)$ esta acotada en $s = 1$. Luego $f(s)$ no tiene ninguna singularidad en el plano complejo. ■

2.4 La Hipotesis de Riemann en forma grafica

Figura 2: La hipotesis de Riemann en forma grafica

Capítulo 3

El Teorema de los Números Primos

Aqui demostraremos el Teorema de Hadamard-la Vallée Poussin. (Teorema de los números primos)

Proposición 3.0.33

$$\forall v \in I\!R \setminus \{0\} : \ \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{vti}dt = \frac{\sin^2 v}{v^2}$$

Prueba

$\forall v \in I\!R \setminus \{0\}$, se satisface

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{vti}dt &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)[\cos(vt)+i\sin(vt)]dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\underbrace{\underbrace{\left(1-\frac{|t|}{2}\right)}_{funcion\ par}\underbrace{\cos(vt)}_{funcion\ par}}_{funcion\ par}dt \\
&\quad \underbrace{+\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\underbrace{\underbrace{\left(1-\frac{|t|}{2}\right)}_{funcion\ par}\underbrace{\sin(vt)}_{funcion\ impar}}_{funcion\ impar}dt}_{0}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{|t|}{2}\right) \cos(vt) dt$$
$$= \int_0^2 \left(1 - \frac{t}{2}\right) \cos(vt) dt = \frac{1 - \cos(2v)}{2v^2}$$

y asi $\frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{|t|}{2}\right) e^{vti} dt = \frac{1 - \cos(2v)}{2v^2} = \frac{\sin^2 v}{v^2}$ ■

Definición 3

$$\forall u \in I\!R: \ H(u) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-u}\psi(e^u)$$

Proposición 3.0.34

$$\textit{Si } y_2 \geq y_1 \textit{ entonces } H(y_2) \geq H(y_1) e^{y_1 - y_2}$$

Prueba Se deduce a partir de C.0.50. En efecto

$$\begin{aligned} \text{como } y_2 \geq y_1 \ &\Rightarrow \ e^{y_2} \geq e^{y_1} \Rightarrow \psi(e^{y_2}) \geq \psi(e^{y_1}) \\ &\Rightarrow \ \underbrace{e^{-y_2}\psi(e^{y_2})}_{H(y_2)} \geq e^{-y_2} \underbrace{\psi(e^{y_1}) e^{-y_1}}_{H(y_1)} e^{y_1} \end{aligned}$$

y finalmente $H(y_2) \geq H(y_1) e^{y_1 - y_2}$ ■

Definición 4

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv$$

Proposición 3.0.35

(a) $\forall (y, \lambda) \in I\!R \times (I\!R^+ \setminus \{0\})$ *tenemos que*

$$K(y, \lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda y} H\left(y - \frac{v}{\lambda}\right) \frac{\sin^2 v}{v^2} dv$$

converge.

(b) *Para* $\lambda > 0$ *se tiene que* $\exists \lim_{y \to \infty} K(y, \lambda)$, *y ademas*

$$\lim_{y \to \infty} K(y, \lambda) = P$$

Prueba

(a) Para $\sigma > 1$ y por 2.1.21 se tiene que

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{s}\frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= \int_0^\infty \psi(e^u)e^{-su}du \\
&= \int_0^\infty e^{-u}\psi(e^u)e^u e^{-us}du \\
&= \int_0^\infty H(u)e^{-u(s-1)}du \\
\text{usando } \int_0^\infty e^{-u(s-1)}du &= \frac{1}{s-1} \text{ tendriamos} \\
-\frac{1}{s}\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \int_0^\infty e^{-u(s-1)}du &= \int_0^\infty (H(u)-1)\,e^{-u(s-1)}du \\
\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{s}{s-1}\right)\frac{1}{s} &= \int_0^\infty (H(u)-1)\,e^{-u(s-1)}du
\end{aligned}
$$

ahora usando esta ultima relación y $\forall\lambda > 0$, $\forall y \in I\!R$, $\forall\varepsilon > 0$, se tiene que

$$
\frac{\lambda}{2}\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{\lambda yti}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\varepsilon+\lambda ti) - \frac{1+\varepsilon+\lambda ti}{\varepsilon+\lambda ti}\right)\frac{dt}{1+\varepsilon+\lambda ti} =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\lambda}{2}\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{\lambda yti}\left(\int_0^\infty (H(u)-1)\,e^{-u(1+\varepsilon+\lambda ti-1)}du\right)dt \\
&= \frac{\lambda}{2}\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{\lambda yti}\left(\int_0^\infty (H(u)-1)\,e^{-u(\varepsilon+\lambda ti)}du\right)dt \\
&= \frac{\lambda}{2}\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{\lambda yti}\left(\int_0^\infty (H(u)-1)\,e^{-u\varepsilon}e^{-\lambda uti}du\right)dt \\
&= \frac{\lambda}{2}\int_{-2}^{2}\int_0^\infty (H(u)-1)\,e^{-\varepsilon u}e^{-\lambda uti}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{\lambda yti}du\,dt
\end{aligned}
$$

y por el Teorema de Fubini:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\lambda}{2}\int_{-2}^{2}\int_0^\infty (H(u)-1)\,e^{-\varepsilon u}e^{-\lambda uti}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{\lambda yti}dt\,du \\
&= \frac{\lambda}{2}\int_0^\infty (H(u)-1)\,e^{-\varepsilon u}du\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{\lambda(y-u)ti}dt \\
&= \lambda\int_0^\infty (H(u)-1)\,e^{-\varepsilon u}du\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{\lambda(y-u)ti}dt
\end{aligned}
$$

Ahora haciendo el cambio de variable $u = y - \frac{v}{\lambda}$, tenemos

$$
\begin{aligned}
&= \lambda \int_{\lambda y}^{-\infty} \left(H(y - \frac{v}{\lambda}) - 1\right) e^{-\epsilon(y-\frac{v}{\lambda})} \left(\frac{-dv}{\lambda}\right) \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{|t|}{2}\right) e^{\lambda(\frac{v}{\lambda})ti} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\lambda y} \left(H(y - \frac{v}{\lambda}) - 1\right) e^{-\epsilon(y-\frac{v}{\lambda})} dv \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{|t|}{2}\right) e^{vti} dt
\end{aligned}
$$

y por 3.0.33 tenemos que

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\lambda y} \left(H(y - \frac{v}{\lambda}) - 1\right) e^{-\epsilon(y-\frac{v}{\lambda})} dv \left(\frac{\sin^2 v}{v^2}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\lambda y} \left(H(y - \frac{v}{\lambda}) - 1\right) e^{-\epsilon(y-\frac{v}{\lambda})} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv \\
&= \int_{-\infty}^{\lambda y} \left(H(y - \frac{v}{\lambda}) e^{-\epsilon(y-\frac{v}{\lambda})} \frac{\sin^2 v}{v^2} - e^{-\epsilon(y-\frac{v}{\lambda})} \frac{\sin^2 v}{v^2} \right) dv
\end{aligned}
$$

pero como

$$
\int_{-\infty}^{\lambda y} e^{-\epsilon(y-\frac{v}{\lambda})} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv = e^{-\epsilon y} \int_{-\infty}^{\lambda y} e^{\frac{\epsilon v}{\lambda}} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv
$$

si hacemos $v = w$, y lo reemplazamos en el lado derecho de la anterior relación tendriamos que

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\lambda y} e^{-\epsilon(y-\frac{v}{\lambda})} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv &= e^{-\epsilon y} \int_{-\lambda y}^{\infty} e^{\frac{\epsilon w}{\lambda}} \frac{\sin^2 w}{w^2} dw \\
&= e^{-\epsilon y} \int_{-\lambda y}^{\infty} e^{\frac{\epsilon v}{\lambda}} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv
\end{aligned}
$$

ya que, $\left|\exp(-\varepsilon v/\lambda) \frac{\sin^2 v}{v^2}\right| \leq \frac{\exp(-\varepsilon v/\lambda)}{v^2}$

y como, $\lim\limits_{v \to \infty} v^2 \exp(-\varepsilon v/\lambda) = 0$, entonces

$$
\begin{aligned}
\forall v \geq v_0 &: \exp(-\varepsilon v/\lambda) < \frac{1}{v^2} \\
\forall v \geq v_0 &: \frac{\exp(-\varepsilon v/\lambda)}{v^2} < \frac{1}{v^4}
\end{aligned}
$$

y asi

$$
\int_{-\lambda y}^{\infty} \left| e^{-\frac{\epsilon v}{\lambda}} \frac{\sin^2 v}{v^2} \right| dv \leq \int_{-\lambda y}^{v_0} e^{-\frac{\epsilon v}{\lambda}} \frac{dv}{v^2} + \int_{v_0}^{\infty} e^{-\frac{\epsilon v}{\lambda}} \frac{dv}{v^2}
$$

$$\leq \underbrace{\int_{-\lambda y}^{v_0} e^{-\frac{\varepsilon v}{\lambda}} \frac{dv}{v^2}}_{converge} + \underbrace{\int_{v_0}^{\infty} \frac{dv}{v^4}}_{converge}$$

y por lo tanto hemos probado que $\displaystyle\int_{-\lambda y}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon v}{\lambda}} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv$

converge absoluta y uniformemente siempre que $\frac{\varepsilon}{\lambda} > 0$. Y por lo tanto tenemos que

$$\frac{\lambda}{2} \int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{|t|}{2}\right) e^{\lambda y t i} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(1 + \varepsilon + \lambda t i) - \frac{1 + \varepsilon + \lambda t i}{\varepsilon + \lambda t i}\right) \frac{dt}{1 + \varepsilon + \lambda t i} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\lambda y} \left(H(y - \frac{v}{\lambda}) e^{-\varepsilon(y - \frac{v}{\lambda})} \frac{\sin^2 v}{v^2} - e^{-\varepsilon(y - \frac{v}{\lambda})} \frac{\sin^2 v}{v^2}\right) dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\lambda y} H(y - \frac{v}{\lambda}) e^{-\varepsilon(y - \frac{v}{\lambda})} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv - \int_{-\infty}^{\lambda y} e^{-\varepsilon(y - \frac{v}{\lambda})} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv$$

Ahora haciendo que $\varepsilon \to 0$ y por el Teorema de la Convergencia Monotona es cierto que el lado izquierdo de esta ultima relación satisface

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda}{2} \int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{|t|}{2}\right) e^{\lambda y t i} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(1 + \varepsilon + \lambda t i) - \frac{1 + \varepsilon + \lambda t i}{\varepsilon + \lambda t i}\right) \frac{dt}{1 + \varepsilon + \lambda t i} =$$

$$\frac{\lambda}{2} \int_{-2}^{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(1 - \frac{|t|}{2}\right) e^{\lambda y t i} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(1 + \varepsilon + \lambda t i) - \frac{1 + \varepsilon + \lambda t i}{\varepsilon + \lambda t i}\right) \frac{dt}{1 + \varepsilon + \lambda t i} =$$

y usando 2.2.27 afirmamos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{\zeta'}{\zeta}(1 + \varepsilon + \lambda t i) - \frac{1 + \varepsilon + \lambda t i}{\varepsilon + \lambda t i} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(1 + \lambda t i) - \frac{1 + \lambda t i}{\lambda t i}$$

y asi tenemos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda}{2} \int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{|t|}{2}\right) e^{\lambda y t i} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(1 + \varepsilon + \lambda t i) - \frac{1 + \varepsilon + \lambda t i}{\varepsilon + \lambda t i}\right) \frac{dt}{1 + \varepsilon + \lambda t i} =$$

$$\frac{\lambda}{2} \int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{|t|}{2}\right) e^{\lambda y t i} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(1 + \lambda t i) - \frac{1 + \lambda t i}{\lambda t i}\right) \frac{dt}{1 + \lambda t i}$$

Ahora haciendo que $\varepsilon \to 0$ y por el Teorema de la Convergencia Monotona es cierto que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\lambda y} H(y-\frac{v}{\lambda})e^{-\epsilon(y-\frac{v}{\lambda})}\frac{\sin^2 v}{v^2}dv - \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\lambda y} e^{-\epsilon(y-\frac{v}{\lambda})}\frac{\sin^2 v}{v^2}dv =$$

$$\int_{-\infty}^{\lambda y}\lim_{\epsilon\to 0} H(y-\frac{v}{\lambda})e^{-\epsilon(y-\frac{v}{\lambda})}\frac{\sin^2 v}{v^2}dv - \int_{-\infty}^{\lambda y}\lim_{\epsilon\to 0} e^{-\epsilon(y-\frac{v}{\lambda})}\frac{\sin^2 v}{v^2}dv =$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\lambda y} H(y-\frac{v}{\lambda})\frac{\sin^2 v}{v^2}dv}_{K(y,\lambda)} - \int_{-\infty}^{\lambda y}\frac{\sin^2 v}{v^2}dv$$

y despues de despejar $K(y,\lambda)$ se tiene finalmente:

$$K(y,\lambda) = \frac{\lambda}{2}\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{\lambda yti}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\lambda ti) - \frac{1+\lambda ti}{\lambda ti}\right)\frac{dt}{1+\lambda ti} + \int_{-\infty}^{\lambda y}\frac{\sin^2 v}{v^2}dv$$

■

(b) Se ve que el termino

$$\frac{\lambda}{2}\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|t|}{2}\right)e^{\lambda yti}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\lambda ti) - \frac{1+\lambda ti}{\lambda ti}\right)\frac{dt}{1+\lambda ti}$$

es una constante de Fourier de alguna función continua que va a cero, siempre que $y \longrightarrow \infty$.

Y finalmente $\lim_{y\to\infty} K(y,\lambda) = \lim_{y\to\infty}\int_{-\infty}^{\lambda y}\frac{\sin^2 v}{v^2}dv$ ■

Teorema 3.2 (Hadamard-la Vallée Poussin)

$$\lim_{y\to\infty} H(y) = 1$$

y por lo tanto, deducimos que

$$\psi(x) \sim x$$

Prueba

La idea central de la demostración es ver que
$H(y)$ satisface la definición de $\lim_{y\to\infty} H(y) = 1$.

Tambien si $\varepsilon > 0$ es un número arbitrario, es posible elegir un $\lambda = P_1(\lambda) > 0$ que satisfaga simultaneamente (tener en mente que $P = \pi$):

$$\frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)e^{\frac{2}{\sqrt{\lambda}}}P}{\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}}\frac{\sin^2 v}{v^2}dv} < 1+\varepsilon \quad ; \quad 1-\varepsilon < \left(1-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{4}{P\sqrt{\lambda}}\right)e^{\frac{-2}{\sqrt{\lambda}}} \qquad (**)$$

- Aquí veremos que para el $\varepsilon > 0$ dado $\exists N_1(\varepsilon) \in I\!R$ tal que $\forall y > N_1 : \; H(y) < 1+\varepsilon$.

  Para esto, por 3.0.35 parte(b): $\forall\lambda > 0, \forall z \in I\!R : \lim\limits_{z\to\infty} K(z,\lambda) = P$; haciendo el cambio $y = z - \frac{1}{\sqrt{z}}$ afirmamos $\lim\limits_{y\to\infty} K\left(y + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \lambda\right) = P$.

  y por la definición de $K(y,\lambda)$ dada en 3.0.35 parte(a), esto equivale a

$$\lim_{y\to\infty}\int_{-\infty}^{\lambda\left(y+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)} H\left(y+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}-\frac{v}{\lambda}\right)\frac{\sin^2 v}{v^2} = P$$

  y por definición del anterior limite

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_1(\varepsilon)/\forall y > N_1(\varepsilon) : \int_{-\infty}^{\lambda\left(y+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)} H\left(y+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}-\frac{v}{\lambda}\right)\frac{\sin^2 v}{v^2}dv < P+\varepsilon$$

  por otro lado, $H\left(y+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}-\frac{v}{\lambda}\right)\frac{\sin^2 v}{v^2} \geq 0$ por la definición 3 (pag. 34); tambien $\langle -\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}\rangle \subset \langle -\infty, \lambda y + \sqrt{\lambda}\rangle$, luego

$$\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} H\left(y+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}-\frac{v}{\lambda}\right)\frac{\sin^2 v}{v^2}dv < \int_{-\infty}^{\lambda y+\sqrt{\lambda}} H\left(y+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}-\frac{v}{\lambda}\right)\frac{\sin^2 v}{v^2}dv < P+\varepsilon$$

  como $P > 2 \Rightarrow \frac{P}{2} > 1 \Rightarrow \frac{P\varepsilon}{2} > \varepsilon \Rightarrow P\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) > P+\varepsilon$

$$P\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) > \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} H\left(y+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}-\frac{v}{\lambda}\right)\frac{\sin^2 v}{v^2}dv \qquad (++)$$

  No es dificil ver que $\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} H\left(y+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}-\frac{v}{\lambda}\right)\frac{\sin^2 v}{v^2}dv \geq \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} H(y)e^{\frac{-2}{\sqrt{\lambda}}}\frac{\sin^2 v}{v^2}dv$
  y reemplazando esta desigualdad en (++) se tiene

$$\begin{aligned}
P\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) &> \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} H\left(y+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}-\frac{v}{\lambda}\right)\frac{\sin^2 v}{v^2}dv \geq \int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} H(y)e^{\frac{-2}{\sqrt{\lambda}}}\frac{\sin^2 v}{v^2}dv \\
&> H(y)e^{\frac{-2}{\sqrt{\lambda}}}\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}}\frac{\sin^2 v}{v^2}dv \\
H(y) &< \frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)e^{\frac{2}{\sqrt{\lambda}}}P}{\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}}\frac{\sin^2 v}{v^2}dv}
\end{aligned}$$

  y por (**) $H(y) < 1+\varepsilon, \forall y > N_1(\varepsilon)$

- Aquí veremos que para el $\varepsilon > 0$ dado $\exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ tal que $\forall y > N_2 :\ 1 - \varepsilon < H(y)$.

  Analogamente.

■

Teorema 3.3

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log(x)}{\psi(x)} = 1$$

Prueba

Para $x > e$ hacemos $\omega = \frac{x}{\log^2 x}$ teniendose

$$1 = \frac{1}{\psi(x)} \sum_{p \leq x} \log p \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \leq \frac{\pi(x) \log x}{\psi(x)} \leq \frac{\pi(\omega) \log x + \sum_{\omega < p \leq x} \frac{\log p}{\log \omega} \log x}{\psi(x)}$$

$$\leq \frac{\omega \log x}{\psi(x)} + \frac{\log x}{\log \omega} \to 1$$

■

Capítulo 4

Beurling y la Hipotesis de Riemann

Aqui enunciaremos la hipotesis de Riemann como un problema de Analisis Funcional. Y en este capitulo siempre ρ significa la parte fraccionaria.

Proposición 4.0.36

$$\forall \theta, x \in \langle 0,1], \forall q \in I\!R: \ \rho^q\left(\frac{\theta}{x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\theta}{x}-n\right)^q \chi_{\langle\frac{\theta}{n+1},\frac{\theta}{n}]}(x) + \left(\frac{\theta}{x}\right)^q \chi_{\langle\theta,1]}(x)$$

Prueba

Como $\theta, x \in \langle 0,1]$: $\dfrac{\theta}{x} \in I\!R^+ \setminus \{0\}$, i.e $\dfrac{\theta}{x} \in \langle 0,1\rangle \cup [1,+\infty\rangle$

1. Si $\dfrac{\theta}{x} \in \langle 0,1\rangle \Longrightarrow \theta < x$. Pero como $x \leq 1 \Longrightarrow \theta < x \leq 1 \Longrightarrow \rho\left(\dfrac{\theta}{x}\right) = \dfrac{\theta}{x}$, siempre que $\theta < x \leq 1$. $\therefore$ $\rho^q\left(\dfrac{\theta}{x}\right) = \left(\dfrac{\theta}{x}\right)^q \chi_{\langle\theta,1]}(x)$, $\forall q \in I\!R$

2. Si $\dfrac{\theta}{x} \geq 1 \Longrightarrow \exists n \in I\!N$: $n \leq \dfrac{\theta}{x} < n+1 \Longleftrightarrow \dfrac{\theta}{n+1} < x \leq \dfrac{\theta}{n} \Longrightarrow \rho(\dfrac{\theta}{x}) = \left(\dfrac{\theta}{x}-n\right)$, siempre que $\dfrac{\theta}{n+1} < x \leq \dfrac{\theta}{n}$

$$\therefore \quad \rho^q\left(\frac{\theta}{x}\right) = \left(\frac{\theta}{x}-n\right)^q \chi_{\langle\frac{\theta}{n+1},\frac{\theta}{n}]}(x), \quad \forall q \in I\!R$$

Este resultado se obtuvo para un valor fijo de $\frac{\theta}{x} \geq 1$, de donde nuestro n es fijo.

De donde para un $\frac{\theta}{x} \geq 1$ arbitrario se tendría que:

$$\rho^q\left(\frac{\theta}{x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\theta}{x} - n\right)^q \chi_{\langle \frac{\theta}{n+1}, \frac{\theta}{n}]}(x)$$

Ahora como $\frac{\theta}{x} \in I\!R^+ \setminus \{0\}$ y por (1) y (2), $\forall n \in I\!N$: $\langle \theta, 1] \cap \langle \frac{\theta}{n+1}, \frac{\theta}{n}] = \emptyset$, entonces:

$\rho^q\left(\frac{\theta}{x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\theta}{x} - n\right)^q \chi_{\langle \frac{\theta}{n+1}, \frac{\theta}{n}]}(x) + \left(\frac{\theta}{x}\right)^q \chi_{\langle \theta,1]}(x)$ ■

Proposición 4.0.37

$$\forall\ \sigma > 0: \quad \int_0^1 \rho(\frac{\theta}{x})x^{s-1}dx = \frac{\theta}{s-1} - \frac{\theta^s\zeta(s)}{s}$$

Prueba

Es claro que $\rho\left(\frac{\theta}{x}\right) = \rho\left(\frac{\theta}{x}\right)\chi_{\langle 0,1]}(x)$, y por 4.0.36 tenemos que:

$\rho(\frac{\theta}{x})\chi_{\langle 0,1]}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\theta}{x} - n\right)\chi_{\langle \frac{\theta}{n+1}, \frac{\theta}{n}]}(x) + \frac{\theta}{x}\chi_{\langle \theta,1]}(x)$, de donde

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\theta}{x}\right)\chi_{\langle 0,1]}(x)f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\theta}{x} - n\right)\chi_{\langle \frac{\theta}{n+1}, \frac{\theta}{n}]}(x)f(x) + \frac{\theta}{x}\chi_{\langle \theta,1]}(x)f(x) \\
\int \chi_{\langle 0,1]}(x)\rho\left(\frac{\theta}{x}\right)f(x)dx &= \sum_{n=1}^{\infty}\int \chi_{\langle \frac{\theta}{n+1}, \frac{\theta}{n}]}(x)\left(\frac{\theta}{x} - n\right)f(x)dx \\
&+ \int \chi_{\langle \theta,1]}(x)\frac{\theta}{x}f(x)dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right)f(x)dx &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}}\left(\frac{\theta}{x} - n\right)f(x)dx + \int_\theta^1 \frac{\theta}{x}f(x)dx \\
&= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}}\left(\frac{\theta}{x} - n\right)f(x)dx + \int_\theta^1 \frac{\theta}{x}f(x)dx \\
&= \lim_{k\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{k}\left(\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}}\frac{\theta}{x}f(x)dx - n\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}}f(x)dx\right)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + \int_\theta^1 \frac{\theta}{x} f(x)dx \\
= & \lim_{k\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{k}\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} \frac{\theta}{x} f(x)dx - \sum_{n=1}^{k} n\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} f(x)dx\right] \\
& + \int_\theta^1 \frac{\theta}{x} f(x)dx \\
= & \lim_{k\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{k}\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} \frac{\theta}{x} f(x)dx\right] + \int_\theta^1 \frac{\theta}{x} f(x)dx \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} n\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} f(x)dx \\
= & \lim_{k\to\infty}\left[\int_{\frac{\theta}{k+1}}^{\frac{\theta}{k}} \frac{\theta}{x} f(x)dx + \int_{\frac{\theta}{k}}^{\frac{\theta}{k-1}} \frac{\theta}{x} f(x)dx\right. \\
& + \int_{\frac{\theta}{k-1}}^{\frac{\theta}{k-2}} \frac{\theta}{x} f(x)dx + \cdots + \int_{\frac{\theta}{3}}^{\frac{\theta}{2}} \frac{\theta}{x} f(x)dx \\
& \left. + \int_{\frac{\theta}{2}}^{\theta} \frac{\theta}{x} f(x)dx\right] + \int_\theta^1 \frac{\theta}{x} f(x)dx - \sum_{n=1}^{\infty} n\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} f(x)dx \\
= & \lim_{k\to\infty}\int_{\frac{\theta}{k+1}}^{\theta} \frac{\theta}{x} f(x)dx + \int_\theta^1 \frac{\theta}{x} f(x)dx - \sum_{n=1}^{\infty} n\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} f(x)dx \\
= & \int_0^{\theta} \frac{\theta}{x} f(x)dx + \int_\theta^1 \frac{\theta}{x} f(x)dx - \sum_{n=1}^{\infty} n\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} f(x)dx \\
= & \int_0^{1} \frac{\theta}{x} f(x)dx - \sum_{n=1}^{\infty} n\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} f(x)dx
\end{aligned}
$$

y asi,

$$\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) f(x)dx = \theta\int_0^1 \frac{f(x)}{x}dx - \sum_{n=1}^{\infty} n\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} f(x)dx$$

ahora haciendo $f(x) = x^{s-1}$, con $\sigma > 1$, tendriamos:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) x^{s-1}dx &= \theta\int_0^1 x^{s-2}dx - \sum_{n=1}^{\infty} n\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} x^{s-1}dx \\
&= \frac{\theta}{s-1}x^{s-1}\Big|_0^1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{s}x^{s}\Big|_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\theta}{s-1} - \frac{\theta^s}{s}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^{s-1}} - \frac{n}{(n+1)^s}\right]$$

$$= \frac{\theta}{s-1} - \frac{\theta^s}{s}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^{s-1}} - \frac{1}{(n+1)^{s-1}} + \frac{1}{(n+1)^s}\right]$$

$$= \frac{\theta}{s-1} - \frac{\theta^s}{s}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s-1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{s-1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^s}\right\}$$

y asi,

$$\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) x^{s-1}dx = \frac{\theta}{s-1} - \frac{\theta^s}{s}\left\{\zeta(s-1) - \zeta(s-1) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right\} \text{, con } \sigma > 1$$

Ahora $s = 1$ es una singularidad removible de $\frac{\theta}{s-1} - \frac{\theta^s}{s}\zeta(s)$, y usando la continuación analitica para $\zeta(s)$ probamos nuestra proposición ■

Teorema 4.4 (Beurling)

Sea $\rho(x) = x - [x]$, $\forall x \in I\!R$. $\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \{f : f(x) = \sum_{k=1}^{N}\alpha_k\, \rho\left(\frac{\theta_k}{x}\right); \sum_{k=1}^{N}\alpha_k\theta_k = 0, 0 < \theta_k \leq 1, \alpha_k \in \mathbb{C}, 1 \leq k \leq N, N \in I\!N\}$. *Entonces*

$$\overline{\mathcal{M}} = L^p(0,1), 1 \leq p \leq \infty \iff \zeta(s) \neq 0, \forall \sigma > \frac{1}{p}$$

Prueba Dada en [2].

Teorema 4.5

Sea $A_\rho : L^2(0,1) \longmapsto L^2(0,1)$, *un operador integral tal que*

$$[A_\rho f](\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) f(x)dx$$

Entonces:

i) *la* **Hipotesis de Rieman** *se cumple si y solo si* A_ρ *es inyectivo.*

ii) *la* **Hipotesis de Rieman** *se cumple si y solo si* $h \notin Ran\ A_\rho$, *donde* $h(x) = x$.

Prueba

i)

($\Longrightarrow$)

Si $\ker A_\rho \neq \{0\} \Rightarrow \exists g \in L^2(0,1) \setminus \{0\} : [A_\rho g](\theta) = 0$. Pero esto equivale a

$$\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) g(x)dx = 0$$

Ahora $\forall f \in \mathcal{M}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle g, f\rangle &= \int_0^1 \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \rho\left(\frac{\theta_k}{x}\right)}_{f(x)} g(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \int_0^1 \rho\left(\frac{\theta_k}{x}\right) g(x)dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces $g \perp \mathcal{M}$

de aquí se deduce que $\mathcal{M}$ no es denso en $L^2(0,1)$

Por el Teorema 4.4 afirmamos que $\forall \sigma > \frac{1}{2} : \zeta(s) = 0$, pero esto contradice a la Hipotesis de Riemann.

($\Longleftarrow$)

Si la Hipotesis de Riemann no se cumple, entonces $\exists r \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(r) > -\frac{1}{2} : \zeta(r+1) = 0$. Ahora teniendo en mente esto y usando 4.0.37 tenemos que $\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) r x^r dx = \theta$; y tomando partes imaginarias allí obtenemos

$$\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) \mathrm{Im}(r x^r) dx = 0$$

pero esto nos dice que $\ker A_\rho \neq \{0\}$, pero esto contradice el hecho de que $\ker A_\rho = \{0\}$

ii)

($\Longrightarrow$)

Si $h \in \mathrm{Ran} A_\rho$ entonces,

$$\exists g \in L^2(0,1) \setminus \{0\} : \int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) g(x)dx = \theta$$

Ahora $\forall f \in \mathcal{M}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle g, f\rangle &= \int_0^1 \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \rho\left(\frac{\theta_k}{x}\right)}_{f(x)} g(x)dx \\
&= \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \underbrace{\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta_k}{x}\right) g(x)dx}_{\theta_k} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \theta_k \\
&= 0
\end{aligned}$$

entonces $$g \perp \mathcal{M}$$
de aquí se deduce que $\mathcal{M}$ no es denso en $L^2(0,1)$.

Por el Teorema 4.4 afirmamos que $\forall \sigma > \frac{1}{2} : \zeta(s) = 0$, pero esto contradice a la Hipotesis de Riemann.

$(\Longleftarrow)$ La prueba la haremos por el absurdo.

Si la Hipotesis de Riemann no se cumple, entonces $\exists r \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(r) > -\frac{1}{2} : \zeta(r+1) = 0$. Ahora teniendo esto en mente y usando 4.0.37 tenemos que $\displaystyle\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) r x^r dx = \theta$; lo que significa que $h \in \mathrm{Ran}(\ker A_\rho)$, pero esto contradice el hecho de que $h \notin \mathrm{Ran} A_\rho$.

■

Proposición 4.0.38

$$\int_0^1 \int_0^1 \rho^2\left(\frac{\theta}{x}\right) d\theta dx = \frac{1}{2}[\log(2\pi) - \gamma] - \frac{1}{3}$$

donde γ es la constante de Euler.

Prueba

Haciendo $q = 2$ en 4.0.36, y $r \in \mathbb{R}$ un valor fijo, es claro que

$$\int_0^1 \rho^2\left(\frac{\theta}{x}\right) x^r dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} \left(\frac{\theta}{x} - n\right)^2 x^r dx + \int_\theta^1 \left(\frac{\theta}{x}\right)^2 x^r dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} \left(\frac{\theta}{x} - n\right)^2 x^r dx + \theta^2 \int_\theta^1 x^{r-2} dx$$

y como $\int_\theta^1 x^{r-2}dx = \begin{cases} \frac{1}{r-1} - \frac{\theta^{r-1}}{r-1} & r \neq 1 \\ -\log\theta & r = 1 \end{cases}$
y por integración por partes tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} \left(\frac{\theta}{x} - n\right)^2 x^r dx &= \overbrace{\left(\frac{\theta}{x} - n\right)^2}^{u} \overbrace{\frac{x^{r+1}}{r+1}}^{v} \Bigg|_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} + \int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} \frac{x^{r+1}}{r+1} \left(\frac{\theta}{x} - n\right) \frac{2\theta}{x^2} dx \\
&= -\frac{1}{r+1}\left(\frac{\theta}{n+1}\right)^{r+1} + \frac{2\theta}{r+1} \int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} \left(\frac{\theta}{x} - n\right) x^{r-1} dx
\end{aligned}$$

asimismo por un argumento de integración por partes

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} \left(\frac{\theta}{x} - n\right) x^{r-1} dx &= \overbrace{\left(\frac{\theta}{x} - n\right)}^{u} \overbrace{\frac{x^r}{r}}^{v} \Bigg|_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} + \int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} \frac{x^r}{r} \frac{\theta}{x^2} dx \\
&= -\frac{1}{r}\left(\frac{\theta}{n+1}\right)^r + \frac{\theta}{r} \int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} x^{r-2} dx \\
&= -\frac{1}{r}\left(\frac{\theta}{n+1}\right)^r + \frac{\theta}{r} \frac{x^{r-1}}{r-1} \Bigg|_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} \\
&= -\frac{1}{r}\left(\frac{\theta}{n+1}\right)^r + \frac{\theta^r}{r(r-1)} \left[\frac{1}{n^{r-1}} - \frac{1}{(n+1)^{r-1}}\right]
\end{aligned}$$

de donde podemos deducir que

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} \left(\frac{\theta}{x} - n\right)^2 x^r dx &= -\frac{\theta^{r+1}}{r+1} \left[\frac{1}{(n+1)^{r+1}} + \frac{2}{r} \frac{1}{(n+1)^r}\right] \\
&\quad + \frac{2\theta^{r+1}}{(r-1)r(r+1)} \left[\frac{1}{n^{r-1}} - \frac{1}{(n+1)^{r-1}}\right]
\end{aligned}$$

y todo esto es tan solo para poder afirmar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{\theta}{n+1}}^{\frac{\theta}{n}} \left(\frac{\theta}{x} - n\right)^2 x^r dx = -\frac{\theta^{r+1}}{r+1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n+1)^{r+1}} + \frac{2}{r(n+1)^r}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{2\theta^{r+1}}{(r-1)r(r+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^{r-1}} - \frac{1}{(n+1)^{r-1}} \right] \\
&= -\frac{\theta^{r+1}}{r+1} \left[\zeta(r+1) - 1 + \frac{2}{r}\zeta(r) - \frac{2}{r} \right] \\
&+ \frac{2\theta^{r+1}}{(r-1)r(r+1)} \\
&= -\frac{\theta^{r+1}}{r+1} \left[\zeta(r+1) + \frac{2}{r}\zeta(r) \right] + \frac{\theta^{r+1}}{r+1} \left(1 + \frac{2}{r} \right) \\
&+ \frac{2\theta^{r+1}}{(r-1)r(r+1)} \\
&= -\frac{\theta^{r+1}}{r+1} \left[\zeta(r+1) + \frac{2}{r}\zeta(r) \right] \\
&+ \frac{\theta^{r+1}}{r+1} \left[1 + \frac{2}{r} + \frac{2}{r(r-1)} \right] \\
&= -\frac{\theta^{r+1}}{r+1} \left[\zeta(r+1) + \frac{2}{r}\zeta(r) \right] + \frac{\theta^{r+1}}{r-1}
\end{aligned}
$$

y por lo tanto, $\forall r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \rho^2 \left(\frac{\theta}{x} \right) x^r dx &= -\frac{\theta^{r+1}}{r+1} \left[\zeta(r+1) + \frac{2}{r}\zeta(r) \right] + \frac{\theta^{r+1}}{r-1} \\
&+ \frac{\theta^2}{r-1} - \frac{\theta^{r+1}}{r-1} \\
&= -\frac{\theta^{r+1}}{r+1} \left[\zeta(r+1) + \frac{2}{r}\zeta(r) \right] + \frac{\theta^2}{r-1}
\end{aligned}
$$

Haciendo que $r \longrightarrow 0$ en esta ultima expresión, obtenemos: $\int_0^1 \rho^2 \left(\frac{\theta}{x} \right) dx = -\theta \lim_{r \to 0} \left[\zeta(r+1) + \frac{2}{r}\zeta(r) \right] - \theta^2$, y vemos que debemos expresar en otra forma equivalente la expresión involucrada dentro del limite. Para esto, como $\zeta(r)$ es un función analitica en $r = 0$, entonces es posible expresarla como una serie de potencias alrededor de 0, i.e. $\zeta(r) = \zeta(0) + \zeta'(0)r + O(r^2)$. Por otro lado tambien sabemos que para r suficientemente cercano a cero $\zeta(1+r) = \frac{1}{r} + \gamma + O(r)$. Y asi,

$$
\begin{aligned}
\zeta(r+1) + \frac{2}{r}\zeta(r) &= \frac{1}{r} + \gamma + O(r) + \frac{2\zeta(0)}{r} + 2\zeta'(0) + O(r) \\
&= \frac{1 + 2\zeta(0)}{r} + [\gamma + 2\zeta'(0)] + O(r)
\end{aligned}
$$

y por lo tanto

$$\int_0^1 \rho^2\left(\frac{\theta}{x}\right)dx = -\theta\lim_{r\to 0}\left[\frac{1+2\zeta(0)}{r}+[\gamma+2\zeta'(0)]+O(r)\right]-\theta^2 \qquad (*)$$

Ahora orientaremos nuestros esfuerzos para calcular $\zeta(0)$ y $\zeta'(0)$.

- Calculo de $\zeta(0)$

  Sabemos que para s suficientemente cercano a cero, tenemos las siguientes expansiones
  $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)=\frac{\pi s}{2}+O(s^3)$, $\zeta(1-s)=-\frac{1}{s}+\gamma+O(s)$.
  y las reemplazamos ambas en $\pi\zeta(s)=(2\pi)^s\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$, i.e. en el Teorema 2.1 (ver pag. 30) de donde se tiene que

$$\begin{aligned}
\pi\zeta(s) &= (2\pi)^s\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)\\
&= (2\pi)^s\left(\frac{\pi s}{2}+O(s^3)\right)\Gamma(1-s)\left(-\frac{1}{s}+\gamma+O(s)\right)\\
\lim_{s\to 0}\pi\zeta(s) &= \lim_{s\to 0}\left\{(2\pi)^s\left(\frac{\pi s}{2}+O(s^3)\right)\Gamma(1-s)\left(-\frac{1}{s}+\gamma+O(s)\right)\right\}\\
\pi\zeta(0) &= \Gamma(1)\lim_{s\to 0}\left\{\left(\frac{\pi s}{2}+O(s^3)\right)\left(-\frac{1}{s}+\gamma+O(s)\right)\right\}\\
&= \lim_{s\to 0}\left(-\frac{\pi}{2}+O(s)\right)=-\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\zeta(0)=-\frac{1}{2}$$

- Calculo de $\zeta'(0)$

  Ahora derivando termino a termino la ecuación funcional para la función zeta, obtenemos

$$\begin{aligned}
\pi\zeta'(s) &= (2\pi)^s\left\{\log(2\pi)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)\right.\\
&\quad - \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma'(1-s)\zeta(1-s)\\
&\quad \left. + \Gamma(1-s)\frac{d}{ds}\left[\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s)\right]\right\}\\
\pi\underbrace{\lim_{s\to 0}\zeta'(s)}_{\zeta'(0)} &= [\log(2\pi)\Gamma(1)-\Gamma'(1)]\lim_{s\to 0}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s)
\end{aligned}$$

$$+ \Gamma(1)\lim_{s\to 0}\left[\frac{d}{ds}\left(\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s)\right)\right]$$

ya que $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma'(1) = -\gamma$; y para s suficientemente cercano a cero, tenemos las siguientes expansiones
$\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) = \frac{\pi s}{2} + O(s^3)$, $\zeta(1-s) = -\frac{1}{s} + \gamma + O(s)$.
Y asi

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s) &= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\gamma s + O(s^2) \\
\frac{d}{ds}\left[\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s)\right] &= \frac{\pi}{2}\gamma + O(s)
\end{aligned}$$

deduciendose que

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s) &= -\frac{\pi}{2} \\
\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left[\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s)\right] &= \frac{\pi}{2}\gamma
\end{aligned}$$

y por lo tanto, al reemplazar estos valores obtenemos
$\pi\zeta'(0) = [\log(2\pi) + \gamma]\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi\gamma}{2} = -\frac{\pi}{2}\log(2\pi)$

$$\zeta'(0) = -\frac{\log(2\pi)}{2}$$

y reemplazando estos valores en (*) se tiene que $\int_0^1 \rho^2\left(\frac{\theta}{x}\right)dx = [\log(2\pi) - \gamma]\theta - \theta^2$.

Integrando sobre θ y aplicando el Teorema de Fubini, finalmente

$$\int_0^1\int_0^1 \rho^2\left(\frac{\theta}{x}\right)d\theta dx = \int_0^1\int_0^1 \rho^2\left(\frac{\theta}{x}\right)dx d\theta = \frac{1}{2}[\log(2\pi) - \gamma] - \frac{1}{3} \qquad \blacksquare$$

El siguiente teorema nos determina la clase de operadores compactos a la cual pertenece A_ρ.

Teorema 4.6

A_ρ es un operador Hilbert-Schmidt.

Prueba

Ya que $0 \leq \rho\left(\dfrac{\theta}{x}\right) \leq 1$, y ademas por 4.0.38 y por [5] concluimos que A_ρ es Hilbert-Schmidt. ■

Bibliografía

[1] Julio Alcantara-Bode. An integral equation formulation of the riemann hypothesis. *Topologie und Nichtkommutative Geometrie*, 41, July 1991.

[2] Arne Beurling. A closure problem related to the riemann zeta-function. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 41:312–314, 1955.

[3] D. Hilbert. Problèmes futures des mathématiques. *2nd Congr. Int. Math.*, page 85, 1902.

[4] J. van der Lune H.J. te Riele and D.T. Winter. On the zeros of the riemann zeta-function in the critical strip. *Math. of Computation*, 46:667–681, 1986.

[5] A. C. Zaanen. *Linear Analysis.* North Holland, 1st edition, 1964.