

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS



TESIS

**“ EL MOVIMIENTO BROWNIANO CON CONDICIONES DE
FRONTERA COMO UN PROBLEMA DE MARTINGALA ”**

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO
EN CIENCIAS EN MATEMÁTICA APLICADA

ELABORADA POR:

HERBERTH GUSTAVO PÁUCAR ROMERO

ASESOR:

DR. GONZALO PANIZO GARCÍA

LIMA-PERÚ

2018

Índice general

Resumen	VI
Resumen	VIII
1. Introducción.	1
2. Convergencia débil y espacios cadlag.	4
2.1. Convergencia débil en espacios métricos.	5
2.2. El espacio $D[0,1]$	7
2.3. El espacio $D[0, \infty[$	14
3. Procesos de Markov.	18
3.1. Procesos de Markov.	19
3.2. Procesos de Feller.	21
3.3. Generadores infinitesimales.	23
4. Procesos de Difusión.	27
5. Problema de Martingala y de Submartingala.	31
5.1. Problema de Martingala.	32
5.2. Problema de Submartingala.	34
5.3. Del Problema de Submartingala al de Martingala.	36
6. Movimiento Browniano.	40
6.1. Construcción heurística del Movimiento Browniano.	41
6.2. Construcción formal.	42
6.3. Propiedades básicas.	44
6.4. Propiedades simple y fuerte de Markov.	46
6.5. Generadores infinitesimales.	50
7. Condiciones para verificar el problema de submartingala.	52

8. El Movimiento Browniano con reflexión como límite débil.	59
8.1. Construcción de Caminos Aleatorios con Reflexión.	59
8.2. Propiedades de los Caminos Aleatorios con Reflexión construidos.	61
8.3. Otra aproximación al Movimiento Browniano con Reflexión.	66
9. Conclusiones.	69
Índice de símbolos	70
Bibliografía	72
Apéndice.	73
Apéndice A.	73
Apéndice B.	74

*Dedicado a
mi familia.*

Agradecimientos.

Agradezco a mis padres, padrinos, hermanos y demás parientes por el apoyo que me brindaron.

También doy las gracias a los profesores del IMCA por el conocimiento adquirido, en especial a mi asesor el Dr. Gonzalo Panizo.

Resumen.

El presente trabajo aborda el problema de la construcción del Movimiento Browniano con reflexión en el intervalo $[0, 1]$ partiendo de caminos aleatorios con reflexión reescalados en tiempo y espacio. Para ello se usa la teoría de los espacios cadlag, Procesos de Markov, Procesos de Difusión y los Problemas de Martingala y Submartingala de Stroock y Varadhan. Se demuestra que los caminos aleatorios verifican las condiciones de dos teoremas fundamentales que implican su convergencia débil a un proceso que satisface el Problema de Submartingala. Finalmente se prueba que dicho proceso también verifica el Problema de Martingala y es una Difusión.

Abstract.

The present work addresses the question of the construction of the Reflected Brownian Motion in $[0, 1]$, beginning of rescaled reflected random walks. This is done using the cad-lag's theory, Markov Processes, Diffusion Processes, the Martingale and Submartingale Problems of Stroock and Varadhan. It is shown that the random walks verify the conditions of two important theorems that imply their weak convergence to process that verifies the submartingale problem. Finally it's shown that this process verifies the martingale problem, and is a diffusion.

Capítulo 1

Introducción.

El Movimiento Browniano es uno de los procesos estocásticos más conocidos en el ámbito científico y técnico, debido a sus múltiples aplicaciones. La idea básica de lo que es un Movimiento Browniano es intuitiva: Un proceso errático y continuo. Sin embargo su fundamentación o construcción matemática rigurosa requirió herramientas, algunas bastante abstractas, de la teoría de probabilidades y fue desarrollada por varios matemáticos entre los que se encuentran Wiener, Levy y otros.

Usando el Movimiento Browniano como paradigma pronto surgieron interrogantes, algunas de las cuales involucraban el comportamiento en el borde de subconjuntos de espacios métricos. Una pregunta era si puede construirse un proceso que en el interior de una región acotada no vacía se comporte como un movimiento Browniano usual pero que al llegar al borde retorne inmediatamente al interior. El planteamiento usado para la construcción del movimiento Browniano no puede aplicarse, pues en aquel se parte de una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas para aplicar el teorema central del límite. Fue entonces que se crearon diversos métodos que ayudaron con el problema planteado, uno de los cuales fue el del método de la forma de Dirichlet (ver [8]). En la presente tesis se usa otro método, la teoría creada por Varadhan y Stroock en la década del 70, llamada Problema de Martingala y Submartingala.

El objetivo del presente trabajo es mostrar que partiendo de una familia de caminos aleatorios (en $[0, 1]$) con reflexión se puede construir un proceso estocástico continuo que resuelve el problema de submartingala. Luego evidenciar que dicho proceso resuelve también el problema de martingala y finalizar con la demostración de que en dicho intervalo el proceso es una difusión con coeficientes de difusión y arrastre iguales a los de un movimiento Browniano con reflexión.

La monografía se organizó iniciando con la teoría matemática necesaria extraída de libros y artículos especializados, ordenados de manera que cada capítulo sea comprensible leyendo los capítulos previos, además de tratar de homogenizar las múltiples notaciones y conceptos. En el capítulo final se presenta el trabajo hecho luego de asimilar la teoría previa y usarla para el objetivo.

En el capítulo 2 se desarrolla una breve teoría, basada en [3], de convergencia débil así como del espacio cad-lag. En Teoría de Probabilidades el concepto de convergencia de probabilidades más usado es el de convergencia débil debido a que es suficientemente amplio y a que muchas propiedades se demuestran o enuncian bien en términos de dicha definición. Es necesario un espacio métrico, con su respectivo σ -álgebra boreliano, que soporte las probabilidades con las que se trabaje y para ello se usa el espacio de las funciones cad-lag junto con la métrica de Skorohod debido a que es suficientemente general y posee propiedades topológicas y funcionales adecuadas.

En el capítulo 3, teniendo como base [7], se expone de forma general qué es un Proceso de Markov y como se deduce la propiedad simple de Markov de la definición. Después se definen los procesos de Feller, un caso especial de procesos de Markov, se introduce la noción de semigrupos de procesos de Markov y se prueba la propiedad fuerte de markov. Finalmente se define qué es el generador infinitesimal de un proceso de Feller y sus propiedades.

En el cuarto capítulo, en base a [9] y [11], se definen los Procesos de Difusión desde un punto de vista analítico y se muestra cómo se asocia a un operador diferencial. También se introducen la forward equation y la backward equation.

En el siguiente capítulo, haciendo uso de [1] y [4], se escriben las definiciones de Problema de Martingala y Submartingala como técnicas para estudiar los procesos difusivos, y se muestra cómo se dedujo la idea de dichos problemas a partir del método de ecuaciones diferenciales parciales. Se muestran condiciones que garantizan que dichos problemas estén bien planteados. Finalmente se muestra que bajo ciertas restricciones, o añadiendo términos adicionales, el problema de submartingala implica el de martingala.

En el sexto capítulo, utilizando [6], se inicia con la definición de un Movimiento Browniano en \mathbb{R}^d y se presentan las construcciones de dicho proceso, el primero heurístico y el segundo formal, pero ambos basados en versiones del teorema central del límite. Luego se enuncian algunas propiedades básicas del movimiento Browniano y se prueban las propiedades simple y fuerte de Markov a partir de la definición inicial. Al final se demuestra que el proceso tiene como generador infinitesimal al operador laplaciano con un dominio

adecuado y se enuncia el Movimiento Browniano con Reflexión a partir de dicho operador pero con otro dominio.

En el séptimo capítulo , tomando como base [4], se definen cadenas de Markov en tiempo discreto y a partir de ellas se construyen funciones que imitan a los coeficientes de un proceso de difusión. Se enuncian y prueban proposiciones planteadas en [4] que muestran bajo qué condiciones se cumple el problema de submartingala.

En el capítulo ocho se muestra que puede construirse una sucesión de procesos que converjen a un proceso que tiene características de un movimiento Browniano con reflexión.

Capítulo 2

Convergencia débil y espacios cadlag.

En esta sección se repasan conceptos y proposiciones acerca de la teoría de convergencia débil, así como del espacio de las funciones continuas a derecha y con límite por la izquierda.

Dados un espacio topológico Ω junto a su σ -álgebra boreliano $\Gamma = \sigma(\mathcal{B}(\Omega))$ y la familia de probabilidades $(P_n)_{n \geq 1}$, se necesita alguna definición de convergencia de probabilidades que permita, a partir de probabilidades conocidas, construir o probar la existencia de otras probabilidades más complejas y útiles. La primera opción es definir una convergencia, denotado como $P_n \rightarrow P$, si se cumple que $P_n(A) \rightarrow P(A)$, $\forall A \in \Gamma$. Pero esta definición es demasiado restrictiva para la mayoría de probabilidades, por lo cual es necesario relajar las condiciones a cumplir, lo que lleva a definir la Convergencia Débil de probabilidades.

Sea $(\bar{\Omega}, \bar{\Gamma}, Q)$ un espacio de probabilidad abstracto y un proceso estocástico

$$\begin{aligned} Z_t: (\bar{\Omega}, \bar{\Gamma}, Q) &\rightarrow \mathfrak{R} \\ \bar{\omega} &\mapsto Z_t(\bar{\omega}) \end{aligned}$$

con $t \geq 0$. Una forma equivalente de denotar lo anterior es mediante

$$\begin{aligned} Z: (\bar{\Omega}, \bar{\Gamma}, Q) &\rightarrow \mathfrak{R}^{[0, \infty[} \\ \bar{\omega} &\mapsto Z(\bar{\omega}). \end{aligned}$$

Debido a que usualmente los procesos estocásticos describen el comportamiento de magnitudes que son continuas en el tiempo, en la expresión anterior se suele reemplazar $\mathfrak{R}^{[0, \infty[}$ por el espacio de las funciones reales continuas:

$$\begin{aligned} Z: (\bar{\Omega}, \bar{\Gamma}, Q) &\rightarrow C([0, \infty[) \\ \bar{\omega} &\mapsto Z(\bar{\omega}). \end{aligned}$$

Lo anterior se generaliza si se usa un espacio de funciones que contenga a $C([0, \infty[)$ y que posea propiedades útiles como la existencia de límites laterales, que es de mucha ayuda para estudiar la convergencia débil.

2.1. Convergencia débil en espacios métricos.

Sea Ω un espacio métrico y Γ su σ -álgebra boreliano. A continuación se muestra la definición de convergencia débil de probabilidades mencionada al principio :

Definición 2.1.0.1. Dado un espacio medible (Ω, Γ) , una sucesión de probabilidades (P_n) converge débilmente a la probabilidad P , que se denota como $P_n \Rightarrow P$, si para toda función f continua y acotada se cumple $P_n f \rightarrow P f$.

Observación. La noción de convergencia está relacionado con el de topología, por ello es instructivo definir una topología en $\mathcal{P}(\Omega)$ cuya definición de convergencia sea equivalente al de convergencia débil. Para todo $n \geq 1, \epsilon > 0$ y $f_i \in C^b(\Omega)$ sea

$$V_{(\mu, f_1, \dots, f_n, \epsilon)} := \{ \nu \in \mathcal{P}(\Omega) : | \int f_i d\mu - \int f_i d\nu | < \epsilon \quad \forall i = 1, \dots, n \}.$$

Entonces $\{V_{(\mu, f_1, \dots, f_n, \epsilon)} : n \geq 1, \mu \in \mathcal{P}(\Omega), f_i \in C^b(\Omega), \epsilon > 0\}$ es base para una topología en $\mathcal{P}(\Omega)$, llamada τ_w , en donde la convergencia es equivalente a la convergencia débil ([10]p.12).

Los conjuntos compactos poseen muchas propiedades, por ello es muy útil si la probabilidad de un boreliano se puede determinar usándolos:

Definición 2.1.0.2. Una probabilidad P en (Ω, Γ) se llama rígida si para todo $\epsilon > 0$ existe un compacto K tal que $P K > 1 - \epsilon$.

Si Ω es completo y separable entonces toda probabilidad P en (Ω, Γ) es rígida.

En muchas ocasiones probar la convergencia débil con la definición es poco conveniente, afortunadamente hay una colección de proposiciones equivalentes a dicha definición, a menudo más fáciles de probar:

Teorema 2.1.0.1. (*Teorema de Portmanteau*). Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $P_n \Rightarrow P$.
2. $P_n f \rightarrow P f$ para toda función f uniformemente continua y acotada.

3. $\limsup_n P_n F \leq PF$ para todo cerrado F .
4. $\liminf_n P_n G \geq PG$ para todo abierto G .
5. $P_n A \rightarrow PA$ para todo conjunto A P -continuo.

Demostración. 1. 1 implica 2: Evidente de la definición.

2. 2 implica 3: Sea la función $f(x) = (1 - \frac{\rho(x, F)}{\epsilon})^+$ acotada y uniformemente continua. Debido a

$$\mathbb{1}_F \leq f = (1 - \frac{\rho(x, F)}{\epsilon})^+ \leq \mathbb{1}_{F^\epsilon}$$

se obtiene que $\limsup_n P_n F \leq \limsup P_n f = Pf \leq PF^\epsilon$ y con $\epsilon \downarrow 0$ obtenemos lo requerido.

3. 3 implica 4: Evidente tomando complementos.
4. 4 implica 5: Se prueba debido a $PA^- \geq \limsup P_n A^- \geq \limsup P_n A \geq \liminf A \geq \liminf P_n A^\circ \geq PA^\circ$.
5. 5 implica 1: Sin pérdida de generalidad sea $0 < f < 1$. Como $Pf = \int_0^1 P(f > t)dt$, $P_n f = \int_0^1 P_n(f > t)dt$, por continuidad $\partial(f > t) \subset (f = t)$ por lo cual $(f > t)$ es P -continuo excepto para un número contable de t , por lo tanto $P_n f = \int_0^1 P_n(f > t)dt \rightarrow \int_0^1 P(f > t)dt = Pf$.

□

Existen otros teoremas que permiten decir si hay convergencia débil a partir de analizar la convergencia sobre ciertas familias de conjuntos.

Proposición 2.1.0.2. *Supongamos que se tiene una colección de conjuntos $A_P \subset \Gamma$ que cumple:*

1. A_P es un π -sistema,
2. Todo abierto en Ω es unión contable de conjuntos en A_P .

Entonces

$$P_n(A) \rightarrow P(A) \forall A \in A_P \text{ implica } P_n \Rightarrow P.$$

Demostración. Ver [3]p.17.

□

La siguiente es una proposición muy útil, llamada teorema de la aplicación, que permite trasladar la convergencia débil a otros espacios

Proposición 2.1.0.3. Sea (Ω') un espacio métrico con su respectivo σ -álgebra boreliano Γ' y $h \in \Gamma/\Gamma'$ con conjunto de discontinuidades D_h . Si $P_n \Rightarrow P$ y $PD_h = 0$ entonces $P_n h^{-1} \Rightarrow Ph^{-1}$.

Demostración. Para $F \subset \Omega'$ arbitrario se cumple que si $x \in (h^{-1}F)^- \rightarrow \exists \{x_n\}_{\mathbb{N}} \subset h^{-1}F$ tal que $x_n \rightarrow x$. Si $x \in D_h^c \rightarrow h(x) \in F^-$ y por ello $D_h^c \cap (h^{-1}F)^- \subset h^{-1}(F^-)$.

Ahora sea F cerrado en Ω' , por $\limsup P_n(h^{-1}F) \leq \limsup P_n(h^{-1}F)^- \leq P(h^{-1}F)^- = P(D_h^c \cap (h^{-1}F)^-) \leq P(h^{-1}(F))$ se cumple el ítem 3 del teorema de Portmanteau. \square

Definición 2.1.0.3. Una colección Π de probabilidades en (Ω, Γ) se llama relativamente(o condicionalmente) compacta si cada sucesión en Π tiene una subsucesión que converge débilmente a una probabilidad en (Ω, Γ) .

Observación. La definición anterior se puede trasladar al espacio topológico τ_w definido al principio, e incluso se puede adaptar usando la metrización de dicho espacio con la métrica de Prohorov.

Definición 2.1.0.4. Una colección Π de probabilidades en (Ω, Γ) se denomina rígida si para todo $\epsilon > 0$ existe un compacto K de modo que $PK > 1 - \epsilon$ para todo P en Π .

El teorema siguiente muestra una interesante equivalencia, si el espacio Ω cumple ciertos requisitos, entre las definiciones previas:

Teorema 2.1.0.4. (*Teorema de Prohorov*). Sea Π una colección de probabilidades en (Ω, Γ) .

1. Si Π es rígida entonces es relativamente compacta.
2. Suponiendo Ω separable y completo, si Π es relativamente compacta entonces es rígida.

Demostración. La demostración es extensa. Ver [3]p.59-63. \square

2.2. El espacio $D[0,1]$.

El espacio $D[0,1]$ será el primero en estudiar por ser el más simple. Dado $0 < T < \infty$, las definiciones y proposiciones mostradas en $D[0,1]$ se extienden fácilmente a $D[0,T]$.

Definición 2.2.0.1. Sea $D = D[0,1]$ el espacio de las funciones reales x con dominio en $[0,1]$, continuas a la derecha y con límite a la izquierda, es decir:

1. Para todo $x \in D$ y $t \in [0,1[$ existe $x(t+) = \lim_{s \downarrow t} x(s)$ y $x(t) = x(t+)$.

2. Para todo $x \in D$ y $t \in]0, 1]$ existe $x(t-) = \lim_{s \uparrow t} x(s)$.

Con el fin de empezar a describir el espacio D se define

$$\omega_x(T) = \omega(x, T) := \sup_{s, t \in T} \{|x_t - x_s| \mid x \in D, T \subseteq [0, 1]\}.$$

Lema 2.2.0.1. *Para todo $x \in D$ y todo $\epsilon > 0$ existen números $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_v = 1$ tal que*

$$\omega_x[t_{i-1}, t_i[< \epsilon \quad \forall i = 1, 2, \dots, v. \quad (2.1)$$

Demostración. Sea

$$t^\circ = \sup\{t \in [0, 1] : [0, t[\text{ puede ser particionado de manera que cumple 2.1}\}.$$

Como $x(0) = x(0^+)$, se tiene que $t^\circ > 0$. Además debido a que $x(t^\circ -)$ existe, $[0, t^\circ[$ también puede ser descompuesto. Finalmente t° no puede ser menor a 1 por lo anterior y por que $x(t^\circ) = x(t^\circ +)$. \square

Entre las implicaciones más importantes del lema precedente se encuentran:

- Dado cualquier $\epsilon > 0$ existen a lo más un número finito de puntos t donde $|x(t) - x(t^-)| > \epsilon$ y por lo tanto existe a lo más un número contable de discontinuidades.
- x es acotado $\|x\|_\infty < \infty$.
- x puede ser uniformemente aproximado por funciones simples, constantes sobre intervalos, de manera que es medible.

Es necesario dotar a $D[0, 1]$ de una métrica para poder usar la subsección precedente. Para tal fin, sea el conjunto:

$$\Lambda := \{\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \text{ estrictamente creciente, continua y sobreyectiva}\}.$$

Definición 2.2.0.2. Se define la distancia de Skorohod entre dos elementos x e y de D como: $d(x, y) := \inf\{\epsilon > 0 : \exists \lambda \in \Lambda\}$ tal que:

1. $\sup_t |\lambda(t) - t| = \sup_t |t - \lambda^{-1}(t)| < \epsilon$
2. $\sup_t |y(\lambda(t)) - x(t)| = \sup_t |y(t) - x(\lambda^{-1}(t))| < \epsilon$

o equivalentemente, con $I \in \Lambda$ la función identidad:

$$d(x, y) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \|\lambda - I\| \vee \|x - y \circ \lambda\|.$$

Para probar que en realidad d es una métrica, nótese que para cualquier par $x, y \in D$ $d(x, y) < \infty$ pues basta tomar $\lambda = I$ y la primera implicación del lema 2.2.0.1. Es evidente que $d(x, y) \geq 0$ y si $d(x, y) = 0$ entonces para todo t se cumple ya sea $x(t) = y(t)$ o $x(t) = y(t^-)$ lo que implica que $x = y$. Si $\lambda \in \Lambda$ entonces $\lambda^{-1} \in \Lambda$, por lo tanto $d(x, y) = d(y, x)$. La desigualdad triangular sigue del hecho de que si λ_1 y λ_2 pertenecen a Λ también lo estará su composición $\lambda_1 \lambda_2$, junto a $\|\lambda_1 \lambda_2 - I\| \leq \|\lambda_1 - I\| + \|\lambda_1 - I\|$ y $\|x - z \circ \lambda_1 \circ \lambda_2\| \leq \|x - y \circ \lambda_2\| + \|y - z \circ \lambda_1\|$.

Con la siguiente definición:

Definición 2.2.0.3. Una δ -separación de $[0, 1]$ es una partición $\{t_i\}_{0 \leq i \leq v}$ de $[0, 1]$ tal que $\min_{1 \leq i \leq v} (t_i - t_{i-1}) > \delta$.

se construye un módulo de continuidad para estudiar la propiedad de compacidad o compacidad relativa de subconjuntos de D :

Definición 2.2.0.4.

$$\omega'_x(\delta) = \omega'(x, \delta) = \inf_{\{t_i\}} \max_{1 \leq i \leq v} \omega_x[t_{i-1}, t_i[$$

con el ínfimo tomado sobre todas las δ -separaciones.

Observación. El lema 2.2.0.1 muestra que si x es un elemento de D entonces $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega'_x(\delta) = 0$

Ejemplo 2.2.1. $D[0, 1]$ no es completo con la métrica d : Sean las funciones $x_n = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2^n}[}$ y λ_n definida de manera que $\lambda_n(\frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2^{n+1}}$ y es lineal en $[0, \frac{1}{2^n}[$, $[\frac{1}{2^n}, 1]$, se obtiene

$$\|x_{n+1} \circ \lambda_n - x_n\| = 0 \text{ y } \|\lambda_n - I\| = \frac{1}{2^{n+1}},$$

por lo que $d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$, lo que implica que $\{x_n\}$ es Cauchy. Como $x_n(t) \rightarrow 0$ para $t > 0$, pero $d(x_n, 0) = 1 \forall n \geq 1$, $\{x_n\}$ no puede converger.

También se define otra distancia en D , topológicamente equivalente a la distancia de Skorohod pero que con algunas propiedades adicionales:

Definición 2.2.0.5. Si λ es una función no decreciente definida en $[0, 1]$ tal que $\lambda(0) = 0$ y $\lambda(1) = 1$, se define

$$\|\lambda\|^\circ = \sup_{s < t} \left| \log \left[\frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right] \right|$$

y con ello

$$d^\circ(x, y) = \inf_{\lambda \in \Lambda} (\|\lambda\|^\circ \vee \|x - y \circ \lambda\|).$$

Para comparar esta nueva distancia con la distancia de Skorohod se pueden usar los lemas:

Lema 2.2.0.2. *Dados $(x_n), x \in D$, si $d^\circ(x_n, x) \rightarrow 0$ entonces $d(x_n, x) \rightarrow 0$.*

Demostración. Debido a que $|u - 1| \leq e^{|\log u|} - 1$ $u > 0$, se tiene

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |\lambda(t) - t| = \sup_{0 < t \leq 1} t \left| \frac{\lambda(t) - \lambda(0)}{t - 0} - 1 \right| \leq e^{\|\lambda\|^\circ} - 1$$

o lo que es lo mismo $\|\lambda - I\| \leq e^{\|\lambda\|^\circ} - 1$.

Usando lo anterior y la conocida desigualdad $u - 1 \leq e^u$, $\forall u$ se obtiene:

$$d(x, y) \leq e^{d^\circ(x, y)} - 1,$$

que demuestra el lema. □

Lo recíproco se prueba en el siguiente lema:

Lema 2.2.0.3. *Si $d(x, y) < \delta^2$ y $\delta \leq \frac{1}{2}$ entonces $d^\circ(x, y) \leq 4\delta + \omega'_x(\delta)$.*

Demostración. Sean $\epsilon < \delta$ y $\{t_i\}$ una δ -separación que satisface $\omega_x[t_{i-1}, t_i] < \omega'_x(\delta) + \epsilon$ para todo i . Se puede escoger un $\mu \in \Lambda$ de tal manera que:

$$\sup_t |x(t) - y(\mu(t))| = \sup_t |x(\mu^{-1}(t)) - y(t)| < \delta^2$$

y

$$\sup_t |\mu(t) - t| < \delta^2.$$

A partir del μ anterior se define una función $\lambda \in \Lambda$ que coincide con μ en cada t_i de la δ -separación y es lineal en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

Como $\mu^{-1}(\lambda(t_i)) = t_i$ $\forall i$ y es creciente, t y $\mu^{-1}(\lambda(t))$ pertenecen al mismo intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} |x(t) - y(\lambda(t))| &\leq |x(t) - x(\mu^{-1}(\lambda(t)))| \\ &\quad + |x(\mu^{-1}(\lambda(t))) - y(\lambda(t))| \\ &< \omega'_x(\delta) + \epsilon + \delta^2 \\ &< 4\delta + \omega'_x(\delta). \end{aligned}$$

Falta probar que $\|\lambda\| \leq 4\delta$, que puede obtenerse de la siguiente observación:

$$|(\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1})) - (t_i - t_{i-1})| < 2\delta^2 < 2\delta(t_i - t_{i-1}) \tag{2.2}$$

esto se extiende facilmente para puntos s, t en un mismo subintervalo $[t_{i-1}, t_i[$. Para el caso s, t arbitrarios se tiene:

$$|(\lambda(t) - \lambda(s)) - (t - s)| \leq |(\lambda(t_i) - \lambda(s)) - (t_i - s)| \\ + |(\lambda(t) - \lambda(t_i)) - (t - t_i)|$$

que implica

$$\log(1 - 2\delta) \leq \log\left(\frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s}\right) \leq \log(1 + 2\delta).$$

Finalmente de la desigualdad $|\log(1 \mp u)| \leq 2|u|$ para $|u| \leq \frac{1}{2}$ se concluye que $\|\lambda\|^\circ \leq 4\delta$. \square

De los lemas previo se concluye:

Proposición 2.2.0.4. *Las métricas d y d° son topológicamente equivalentes.*

El teorema anterior implica que toda propiedad topológica es compartida por ambas métricas.

Teorema 2.2.0.5. *El espacio D es separable con d y d° y completo con d° .*

Demostración. Para probar la separabilidad de ambas métricas basta probar la de d .

Sea B_k la colección de funciones que tienen valor racional constante en cada intervalo $[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}[$, $1 \leq i \leq k$ así como un valor racional en 1. Entonces $B = \bigcup_{k \geq 1} B_k$ es contable.

Dados x y ϵ se puede elegir k de manera que $\frac{1}{k} < \epsilon$ y $\omega'_x(\frac{1}{k}) < \epsilon$. Aplicando el lema 3([3]p.127) con $\sigma = \{\frac{i}{k}\}$ se tiene $d(x, A_\sigma x) < \epsilon$. Claramente $d(A_\sigma x, y) < \epsilon$ para algún $y \in B_k$ y por ello $d(x, y) < 2\epsilon$.

La demostración de la completitud de d° es más extensa. Ver [3]p.128-129. \square

Existe un teorema en D similar al de Arzela-Ascoli en C , para demostrarlo se define: Dados $A \subseteq D$ y $\epsilon > 0$, una ϵ -red de A es un conjunto contable de puntos $(x_k) \subseteq D$ tal que para todo $x \in A$ existe un $x_k \in (x_k)$ que cumple $d(x, x_k) < \epsilon$.

Teorema 2.2.0.6. *Un subconjunto A de D es relativamente compacto en la topología de Skorohod si y solo si*

$$\sup_{x \in A} \|x\| < \infty \quad , \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x \in A} \omega'_x(\delta) = 0.$$

Demostración. Sea $\alpha = \sup_{x \in A} \|x\|$. Dado ϵ se escoge una ϵ -red finita en $[-\alpha, \alpha]$ y un $\delta < \epsilon$ tal que $\omega'_x(\delta) < \epsilon$ para todo $x \in A$. Aplicando el lema 3 ([3]p.127) para cualquier $\sigma = \{s_i\}$ satisfaciendo $\max_i (s_i - s_{i-1}) < \delta$ se tiene que $x \in A$ implica $d(x, A_\sigma x) < \epsilon$. Sea $B \subseteq D$ finito tal que en cada intervalo $[s_{i-1}, s_i[$ toma un valor constante perteneciente a H y además $y(1) \in H$. Debido a que B contiene a un y que cumpla $d(A_\sigma(x), y) < \epsilon$, entonces es una 2ϵ -red finita de A . Así A es totalmente acotado con respecto a d .

Falta probar que también es totalmente acotado con respecto a d° pues es respecto a esa métrica que D es completo. Dado otro ϵ , se elige un δ de manera que $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$ y $4\delta + \omega'_x(\delta) < \epsilon$ para todo $x \in A$. De lo obtenido en el párrafo anterior se deduce que existe un conjunto finito B' que es un δ^2 -conjunto de A en el sentido de d . Pero por el lema 2.2.0.3, se obtiene que B' es una ϵ -red de A en el sentido de d° .

La dirección recíproca se prueba del hecho de que si A^- es compacto entonces es d -acotado y por ello $\sup_{x \in A} \|x\| < \infty$. Por el lema 2.2.0.1 $\omega'(x, \delta) \rightarrow 0$ cuando $\delta \rightarrow 0$. Como $\omega'(\cdot, \delta)$ es semicontinuo por arriba (Lema 4 [3]p.130.) la convergencia anterior es uniforme en subconjuntos compactos de D . \square

Con el teorema previo se demuestra el siguiente, muy importante para probar rigidez:

Teorema 2.2.0.7. *La sucesión $\{P_n\}$ es rígida si y solo si se cumplen:*

1.

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \limsup_n P_n(x : \|x\| \geq a) = 0,$$

2.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_n P_n(x : \omega'_x(\delta) \geq \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0.$$

Demostración. Ver [3]p.139. \square

El estudio de las proyecciones finito dimensionales de procesos en D puede dar algunas propiedades de convergencia de dichos procesos, es por ello que se inicia su estudio. Dado $T \subseteq [0, 1]$ se denota como $p[X_t; t \in T]$ a la colección de conjuntos $\{X_{t_1, \dots, t_k}^{-1}(H) \quad \forall k \in \mathbb{N}, H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), t_i \in T\}$.

Observación. $p[X_t; t \in T]$ es un π -sistema.

Teorema 2.2.0.8. *Se cumple:*

1. *Las proyecciones X_0 y X_1 son continuas. Para $t \in]0, 1[$ X_t es continua en x si y solo si x es continua en t .*

2. Cada $X_t \in \mathcal{B}(D)/\mathcal{B}(\mathfrak{R})$ y $\forall k \in \mathbb{N}$, $t_i \in [0, 1]$ se cumple que $X_{t_1, \dots, t_k} \in \mathcal{B}(D)/\mathcal{B}(\mathfrak{R}^k)$.
3. Si T contiene a 1 y es denso en $[0, 1]$ entonces $\sigma(X_t : t \in T) = \mathcal{B}(D)$ y $p[X_t : t \in T]$ es una clase separadora.

Demostración. 1. Como las funciones $\delta \in \Lambda$ cumplen $\lambda(0) = 0$ y $\lambda(1) = 1$ se obtiene la continuidad de X_0 y X_1 .

Debido a la desigualdad

$$|x_n(t) - x(t)| \leq |x_n(t) - x(\lambda_n(t))| + |x(\lambda_n(t)) - x(t)|$$

se observa que si $x_n \rightarrow x$ y t es punto de continuidad de x entonces X_t es continua. Para la otra implicación supóngase que x es discontinua en t . Sea λ_n un elemento de Λ que lleva t en $t - \frac{1}{n}$ y es lineal en los segmentos $[0, t]$, $[t, 1]$. Se definen las funciones x_n como $x_n(s) = x(\lambda_n(s))$ que convergen a x en la topología de Skorohod pero $x_n(t)$ no converge a $x(t)$.

2. Dado $t < 1$ sea

$$h_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} x(s) ds.$$

Si $x_n \rightarrow x$ en la topología de Skorohod entonces $x_n(s) \rightarrow x(s)$ para todos los puntos de continuidad s de x , es decir para todos los puntos de un conjunto de medida 1.

Como para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que para $n \geq N$ se tiene $d(x_n, 0) < \epsilon + d(x, 0)$, los x_n son uniformemente acotados. Luego haciendo uso del teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$\lim_n h_\epsilon(x_n) = h_\epsilon(x)$$

por lo cual la función h_ϵ es continua respecto a la topología de Skorohod. Por continuidad a la derecha se tiene

$$\lim_m h_{\frac{1}{m}}(x) = X_t(x) = x(t).$$

3. Ver [3]p.134-135.

□

La convergencia débil de las proyecciones finito dimensionales suele ser más fácil de probar, pero por si sola no basta para asegurar la convergencia de un proceso:

Ejemplo 2.2.2. Sean las funciones

$$z_n(t) = nt\mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}(t) + (2 - nt)\mathbb{1}_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}(t), \quad n \geq 1$$

que son continuas y por lo tanto están en D . A partir de ellas se definen las siguientes probabilidades en D

$$P_n = \delta_{z_n}$$

junto a $P = \delta_0$. Para cualquier $k \geq 0$, sea la colección finita $0 \leq t_1 < \dots < t_k$. Se escoge n suficientemente grande de manera que $\frac{2}{n}$ sea menor que el más pequeño de los t_i diferente de cero. Entonces $P_n X_{t_1, \dots, t_k}^{-1} = P X_{t_1, \dots, t_k}^{-1}$ para todo $H \in \mathcal{B}(\mathfrak{R}^k)$, pero $P_n \not\Rightarrow P$ pues $z_n \not\rightarrow 0$ en la topología de Skorohod.

Más si se adicionan condiciones, la convergencia de las distribuciones finito dimensionales pueden dar la convergencia de procesos, como se muestra a continuación.

Dado $(D, \mathcal{B}(D), P)$ se define T_P como el conjunto de puntos $t \in [0, 1]$ tales que X_t es continuo excepto en un conjunto de medida nula, es decir $T_P := \{t \in [0, 1] : P(x : x \text{ es continuo en } t) = 1\}$.

Observación. T_P contiene a 0 y 1 y su complemento (en $[0, 1]$) es a lo más contable, por ello T_P es denso en $[0, 1]$.

Teorema 2.2.0.9. Si $\{P_n\}$ es rígida y $P_n X_{t_1, \dots, t_k}^{-1} \Rightarrow P X_{t_1, \dots, t_k}^{-1}$ para cualquier colección finita de $t_i \in T_P$, entonces $P_n \Rightarrow P$.

Demostración. Por el corolario del teorema 5.1 ([3]p.59) basta probar que si una subsucesión $\{P_{k_n}\}$ converge débilmente a alguna probabilidad Q , entonces Q debe coincidir con P . Con esa idea sea $P_{k_n} \Rightarrow Q$. Si $t_1, \dots, t_l \in T_P$ entonces por la hipótesis se tiene que $P_{k_n} X_{t_1, \dots, t_l}^{-1} \Rightarrow P X_{t_1, \dots, t_l}^{-1}$. Si $t_1, \dots, t_l \in T_Q$ entonces $P_{k_n} X_{t_1, \dots, t_l}^{-1} \Rightarrow Q X_{t_1, \dots, t_l}^{-1}$ por la proposición 2.1.0.3. Por lo tanto si $t_1, \dots, t_l \in T_P \cap T_Q$ se tiene $P X_{t_1, \dots, t_l}^{-1} = Q X_{t_1, \dots, t_l}^{-1}$. Como $T_P \cap T_Q$ es denso en $[0, 1]$ y contiene a 0 y 1, se aplica el teorema anterior y se obtiene lo pedido. \square

2.3. El espacio $D[0, \infty[$.

Para todo $t > 0$ si se considera el espacio $D_t = D[0, t] := \{\text{funciones cadlag con dominio } [0, t]\}$ es evidente que todas las definiciones dadas en $D[0, 1]$ se pueden adaptar (como $\|\cdot\|_t, \Lambda_t, \|\cdot\|_t^\circ, d_t, d_t^\circ$) así como los teoremas. Se podría pensar en definir una convergencia $x_n \rightarrow x$ en $D[0, \infty[= D_\infty$ pidiendo que $d_t^\circ(x_n, x) \rightarrow 0$ para todo t positivo (con x_n y x restringidos a $[0, t]$), pero el siguiente ejemplo muestra una incongruencia: Sean las funciones

$$x_n = \mathbb{1}_{[0, 1 - \frac{1}{n}[}$$

$$x = \mathbb{1}_{[0,1[}.$$

En D_∞ uno desearía que x_n converja a x , pero $d_1^\circ(x_n, x) = 1$, $\forall n$. El problema es que x es discontinua en 1, por tal razón es necesario restringirse a los puntos de continuidad de x y definir cuidadosamente una métrica en D_∞ .

Definición 2.3.0.1. Definiendo previamente las funciones reales, con $m \geq 1$

$$g_m(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq m-1; \\ m-t & \text{si } m-1 \leq t \leq m; \\ 0 & \text{si } t \geq m. \end{cases}$$

tal que para cualquier $x \in D_\infty$ obtenemos $x^m \in D_\infty$ definido como $x^m(t) = g_m(t)x(t)$ $t \geq 0$ con los cuales definimos una métrica en D_∞ :

$$d_\infty^\circ(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} (1 \wedge d_m^\circ(x^m, y^m)).$$

Teorema 2.3.0.1. *Existe convergencia $\lim_n d_\infty^\circ(x_n, x) = 0$ en D_∞ si y solo si $\lim_n d_t^\circ(x_n, x) = 0$ para todo punto de continuidad t de x .*

Demostración. Si $d_\infty^\circ(x_n, x) \rightarrow 0$ entonces $d_m^\circ(x_n^m, x^m) = 0$ para todo m . Dado un punto de continuidad t de x , se escoge un entero m tal que $t < m-1$. Por el lema 1 ([3]p.167) y como y y y^m coinciden en $[0, t]$ para todo $y \in D_\infty$ se tiene $d_t^\circ(x_n, x) = d_t^\circ(x_n^m, x^m) \rightarrow 0$. Para probar la otra implicación se eligen puntos de continuidad t_m de x , de manera que $t_m \uparrow \infty$. Se eligen elementos $\lambda_n^m \in \Lambda_{t_m}$ de manera que

$$\epsilon_n^m = \|\lambda_n^m - I\|_{t_m} \vee \|x_n \circ \lambda_n^m - x\|_{t_m} \rightarrow_n 0$$

para cada m .

Se escogen enteros m_n que converjan al infinito y además que cumplan $\epsilon_n^{m_n} < \frac{1}{m_n}$, y con ellos se definen $\lambda_n \in \Lambda_\infty$ mediante

$$\lambda_n(t) = \begin{cases} \lambda_n^{m_n}(t), & \text{si } t \leq t_{m_n}; \\ t, & \text{si } t_{m_n} \leq t. \end{cases}$$

Entonces $|\lambda_n(t) - t| \leq \frac{1}{m_n}$ para todo t , y si $c < t_{m_n}$, por lo cual

$$\|x_n \circ \lambda_n - x\|_c = \|x_n \circ \lambda_n^{m_n} - x\|_c \leq \frac{1}{m_n} \rightarrow_n 0.$$

Por lo tanto del teorema 16.1 ([3]p.168.) se concluye que $d_\infty^\circ(x_n, x) \rightarrow 0$.

□

Sea $x \in D_\infty$, de define la función ψ_m de D_∞ en D_m como la restricción de x al dominio $[0, m]$. Debido a la igualdad $d_m^\circ(\psi_m x_n, \psi_m x) = d_m^\circ(x_n^m, x^m)$ se ve que ψ_m es continua.

En el espacio producto $\Pi = D_1 \times D_2 \times D_3 \times \dots$ la métrica $\rho(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} (1 \wedge d_m^\circ(\alpha_m, \beta_m))$ define la topología producto.

Se define $\psi : D_\infty \rightarrow \Pi$ como $\psi x = (\psi_1 x, \psi_2 x, \dots)$.

Observación. Debido a que $d_\infty^\circ(x, y) = \rho(\psi x, \psi y) : \psi$ es una isometría.

Lema 2.3.0.2. *La imagen de ψ es cerrada en Π .*

Demostración. Ver [3]p.170. □

En las siguientes proposiciones se muestra que las propiedades de separabilidad, completitud, rigidez de probabilidades y convergencia débil en D_∞ pueden ser verificadas si se comprueban para $D_m \quad \forall m \geq 1$ con ayuda de las funciones ψ_m . Las definiciones son omitidas por ser similares a las de la subsección anterior.

Teorema 2.3.0.3. *El espacio D_∞ es completo y separable.*

Demostración. Ver [3]p.170. □

Definiendo un módulo de continuidad apropiado

$$\omega'_m(x, \delta) = \inf_{\{t_i\}} \max_{1 \leq i \leq v} \omega(x[t_{i-1}, t_i[)$$

con el ínfimo tomado sobre todas las particiones $\{t_i\}_{0 \leq i \leq v}$ tal que $t_i - t_{i-1} > \delta$ para $1 \leq i < v$.

Teorema 2.3.0.4. *Un conjunto $A \subseteq D_\infty$ es relativamente compacto si y solo si para todo m , $\psi_m A$ es relativamente compacto en D_m .*

Demostración. Ver [3]p.171. □

Teorema 2.3.0.5. *Un conjunto $A \subseteq D_\infty$ es relativamente compacto si y solo si se cumplen las siguientes condiciones para todo $m \geq 1$*

- $\sup_{x \in A} \|x\|_m < \infty$,
- $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x \in A} \omega'_m(x, \delta) = 0$.

Demostración. Ver [3]p.171-172. □

Como en el capítulo previo se define, para $T \subseteq [0, \infty[$ $p[X_t : t \in T] = \{X_{t_1, \dots, t_k}(B) : \forall k \geq 1, t_i \in T, B \in \mathcal{B}(\mathfrak{R}^k)\}$.

Teorema 2.3.0.6. *Se verifica:*

1. La proyección X_0 es continua. Para $t > 0$, X_t es continua en x si y solo si x es continua en t .
2. Cada $X_t \in \mathcal{B}(D_\infty)/\mathcal{B}(\mathfrak{R})$ y $\forall k \in \mathbb{N}$, $t_i \in [0, 1]$ se cumple que $X_{t_1, \dots, t_k} \in \mathcal{B}(D_\infty)/\mathcal{B}(\mathfrak{R}^k)$.
3. Si T es denso en $[0, \infty[$ entonces $\sigma(X_t : t \in T) = \mathcal{B}(D_{\text{inf}})$ y $p[X_t : t \in T]$ es una clase separadora.

Demostración. Ver [3]p.173. □

Sean P_n y P probabilidades en $(D_\infty, \mathcal{D}_\infty)$.

El lema siguiente muestra que hay convergencia débil (en D_∞) si se prueba la convergencia débil en cada espacio D_m usando las funciones ψ_m .

Lema 2.3.0.7. *Una condición suficiente y necesaria para que $P_n \Rightarrow P$ (en D_∞) es que $P_n \psi_m^{-1} \Rightarrow P \psi_m^{-1}$ (en D_m) para todo $m \geq 1$.*

Demostración. Ver [3]p.173-174. □

Para finalizar la sección se enuncia un teorema que garantiza la rigidez de P_n examinando dos condiciones en cada espacio D_m , $m \geq 1$.

Teorema 2.3.0.8. *La sucesión P_n es rígida si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones*

- $\forall m$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \limsup_n P_n(x : \|x\|_m \geq a) = 0,$$

- $\forall m, \forall \epsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_n P_n(x : \omega'_m(x, \delta)) = 0.$$

Demostración. Ver [3]p.175-176. □

Capítulo 3

Procesos de Markov.

Entre los procesos estocásticos hay algunos que tienen una peculiaridad: No tienen memoria. Esto quiere decir que el futuro de dichos procesos a partir de un tiempo t no depende de lo que sucedió antes de t . Los procesos descritos son llamados Procesos de Markov.

Los procesos de Markov más sencillos son los de tiempo discreto y espacio de estados contable (también llamados cadenas de Markov). Sean (Ω, Γ, P) un espacio de probabilidad y un proceso $(Z_n)_{n \geq 1}$ con espacio de estados $I = \{i_n\}_{n \geq 1}$. Para describir dicho proceso se requiere de una matriz $(p_{ij})_{i,j \in I}$ cuyas entradas pertenecientes a cualquier fila sean todas no negativas y sumen 1, a la que se denomina matriz de transición

$$p_{i,j} \geq 0 \quad \forall i, j \in I \quad \text{y} \quad \sum_{j \in I} p_{ij} = 1 \quad \forall i.$$

Las entradas p_{ij} cuantifican la intensidad o facilidad con la cual la cadena que está en el estado i en un tiempo t salta al estado j en el tiempo $t + 1$. La forma en que la matriz $(p_{i,j})$ controla el comportamiento de la cadena es la siguiente :

$$P(Z_{n+1} = i_{n+1} | Z_n = i_n, \dots, Z_1 = i_1) = p_{i_n, i_{n+1}}.$$

Posteriormente se suelen estudiar las cadenas de Markov en tiempo continuo y espacio de estados contable. Para ello se parte de una matriz $Q = (q_{i,j})$ que cumple

$$q_{i,j} \geq 0 \quad \text{si } i \neq j \quad \text{y} \quad q_{ii} + \sum_{j \neq i} q_{ij} = 0 \quad \forall i.$$

Después se define la función matricial

$$P(t) = e^{tQ}$$

que puede ser vista como la única solución de cualquiera de las ecuaciones diferenciales siguientes

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt}(t) &= P(t)Q. \\ \frac{dP}{dt}(t) &= QP(t).\end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores son similares a las que se verán en la proposición 3.3.0.1, lo que hace notar que papel jugarán los generadores y las funciones de transición en la subsección 3.3.

$P(t)$ controla el proceso mediante la ecuación

$$P(Z_{t_{n+1}} = i_{n+1} | Z_{t_n} = i_n, \dots, Z_{t_1} = i_1) = p_{i_n, i_{n+1}}(t_{n+1} - t_n).$$

El caso más general, con tiempo y espacio de estados continuos se desarrolla a partir de la siguiente subsección.

3.1. Procesos de Markov.

En primer lugar se busca definir una función que juegue el papel de la aplicación $P(t)$ de las cadenas de Markov.

Definición 3.1.0.1. Dado $(\mathfrak{R}, \mathcal{B}(\mathfrak{R}))$, una transición de probabilidad N en \mathfrak{R} es una función de $\mathfrak{R} \times \mathcal{B}(\mathfrak{R})$ en $\mathfrak{R}^+ \cup \{\infty\}$ tal que:

1. Para todo $x \in \mathfrak{R}$ la función $N(x, \cdot) : \mathcal{B}(\mathfrak{R}) \rightarrow \mathfrak{R}^+ \cup \{\infty\}$ es una probabilidad en $\mathcal{B}(\mathfrak{R})$,
2. Para todo $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{R})$ la función $N(\cdot, A) : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^+ \cup \{\infty\}$ es $\mathcal{B}(\mathfrak{R})$ -medible.

Definición 3.1.0.2. Dado $f \in \mathcal{B}(\mathfrak{R})_+$, si N es una transición de probabilidad, definimos Nf en \mathfrak{R} como $Nf(x) = \int_{\mathfrak{R}} N(x, dy)f(y)$.

Observación. $Nf \in \mathcal{B}(\mathfrak{R})_+$.

Definición 3.1.0.3. Una función de transición $f.t$ en $(\mathfrak{R}, \mathcal{B}(\mathfrak{R}))$ es una familia $P_{s,t}$ $0 \leq s < t$ de transiciones de probabilidad en $(\mathfrak{R}, \mathcal{B}(\mathfrak{R}))$ tal que $\forall s < t < v$:

$$\int P_{s,t}(x, dy)P_{t,v}(y, A) = P_{s,v}(x, A) \quad \forall x \in \mathfrak{R}, \forall A \in \mathcal{B}(\mathfrak{R}).$$

La igualdad anterior es conocida como la ecuación de *Chapman – Kolmogorov*. Si la f.t $P_{s,t}$ depende solo de $t - s$ se denomina homogénea, en cuyo caso escribimos P_{t-s} en lugar de $P_{s,t}$ y la ecuación de Chapman-Kolmogorov sería

$$\int P_s(x, dy)P_t(y, A) = P_{s+t}(x, A).$$

Definición 3.1.0.4. Sea $(\Omega, \Gamma, (\Gamma_t)_{t \geq 0}, P)$ un espacio de probabilidad filtrado, un proceso adaptado X es Markov con respecto a $(\Gamma)_t$ con f.t $P_{s,t}$ si para todo $f \in \mathcal{B}(\mathfrak{R})_+$ y $s < t$

$$E(f(X_t)|\Gamma_s) = P_{s,t}f(X_s) \quad P - c.c.$$

Observación. Un proceso X es Markov si cumple:

$$E[Y \circ \theta_t | \Gamma_t] = E_{X_t}(Y) \quad \forall Y \in \Gamma.$$

Para ello basta definir la transición de probabilidad

$$P_s(x, A) = P_x(X_s \in A).$$

La medida de probabilidad PX_0^{-1} es llamada la distribución inicial de X . El proceso es homogéneo si la f.t es homogénea, en cuyo caso la ecuación de arriba se escribe

$$E(f(X_t)|\Gamma_s) = P_{t-s}f(X_s). \quad (3.1)$$

Observación. Si X es Markov respecto a $(\Gamma_t)_{t \geq 0}$ lo será también respecto a $(\Gamma_t^0)_{t \geq 0}$.

Proposición 3.1.0.1. *Un proceso X es un proceso de Markov con respecto a $(\Gamma_t^0)_{t \geq 0}$ con función de transición P_t y distribución inicial ν si y solo si para todo $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$ y $f_i \in \mathcal{B}_+(\mathfrak{R})$ se tiene:*

$$E\left[\prod_{i=0}^k f_i(X_{t_i})\right] = \int_{\mathfrak{R}} \nu dx_0 f_0(x_0) \int_{\mathfrak{R}} P_{t_1}(x_0, dx_1) f_1(x_1) \dots \int_{\mathfrak{R}} P_{t_k - t_{k-1}}(x_{k-1}, dx_k) f_k(x_k). \quad (3.2)$$

Demostración. Ver [7]p.76. □

Proposición 3.1.0.2. *(Propiedad Markoviana) Si Z es Γ_∞^0 -medible y positiva (o acotada), entonces para todo $t > 0$ y medida inicial ν :*

$$E_\nu[Z \circ \theta_t | \Gamma_t^0] = E_{X_t}(Z) \quad P_\nu - c.c.$$

Demostración. Primero se prueba para $Y = \prod_{i=0}^k f_i(X_{t_i})$ con $f_i \in \mathcal{B}(\mathfrak{R})_+$, $0 \leq t_i \leq t$ y $Z = \prod_{j=1}^n g_j(X_{r_j})$ con $f_i \in \mathcal{B}(\mathfrak{R})_+$:

$$\begin{aligned}
E\left[\prod_{i=0}^k f_i(X_{t_i}) \prod_{j=1}^n g_j(X_{r_j+t})\right] &= \int_{\mathfrak{R}} \nu dx_0 f_0(x_0) \int_{\mathfrak{R}} P_{t_1}(x_0, dx_1) f_1(x_1) \dots \\
&\dots \int_{\mathfrak{R}} P_{t_k-t_{k-1}}(x_{k-1}, dx_k) f_k(x_k) \dots \\
&\dots \int_{\mathfrak{R}} P_{r_1}(x_k, dx_{k+1}) g_1(x_{k+1}) \dots \\
&\dots \int_{\mathfrak{R}} P_{r_n-r_{n-1}}(x_{n+k-1}, dx_{n+k}) g_n(x_{n+k}) \\
&= \int_{\mathfrak{R}} \nu dx_0 f_0(x_0) \int_{\mathfrak{R}} P_{t_1}(x_0, dx_1) f_1(x_1) \dots \\
&\dots \int_{\mathfrak{R}} P_{t_k-t_{k-1}}(x_{k-1}, dx_k) f_k(x_k) E_{x_k} \left[\prod_{j=1}^n g_j(X_{r_j}) \right] \\
&= E\left[\prod_{i=0}^k f_i(X_{t_i}) E_{X_t} \left[\prod_{j=1}^n g_j(X_{r_j}) \right]\right].
\end{aligned}$$

Lo anterior se extiende utilizando el lema de Dynkin, y aproximaciones con funciones simples. \square

3.2. Procesos de Feller.

Luego de demostrar la proposición 3.1.0.2 una pregunta natural es si se tendría una expresión similar para un tiempo de parada. Hay un ejemplo, que se muestra al final de la subsección, que prueba que no todo proceso de Markov cumple lo pedido. Por ello se requieren más condiciones, para lo cual se hace la siguiente definición.

Definición 3.2.0.1. Un semigrupo de Feller en $C_0(E)$ es una familia de operadores lineales positivos $(T_t)_{t \geq 0}$ en $C_0(E)$ tal que:

1. $T_0 = Id$ y $\|T_t\| \leq 1$ para todo t .
2. $T_{s+t} = T_t \circ T_s$ para todo t y s .
3. $\lim_{t \downarrow 0} \|T_t f - f\| = 0$ para todo $f \in C_0(E)$.

Proposición 3.2.0.1. A cada semigrupo de Feller en $(T_t)_{t \geq 0}$ podemos asociar una única $f.t$ homogénea $(P_t)_{t \geq 0}$ tal que

$$T_t f(x) = P_t f(x)$$

para todo $f \in C_0(E)$ y $x \in E$.

Demostración. Para cualquier $x \in \mathfrak{X}$ se define la aplicación $f \mapsto T_t f(x)$ en C_0 , que es una forma lineal lineal positiva. Por el Teorema de Riesz se tiene una medida $P_t(x, \cdot)$ en $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$ tal que:

$$T_t f(x) = \int P_t(x, dy) f(y) \quad \forall f \in C_0. \quad (3.3)$$

La aplicación $x \mapsto \int P_t(x, dy) f(y)$ pertenece a C_0 y por ello a $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$. Haciendo uso del teorema de clase monótona se cumple que $x \mapsto P_t(x, A) \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}) \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$.

Se acaba de verificar que $P_t(\cdot, \cdot)$ es una transición de probabilidad. Haciendo uso del item 2 de la definición de semigrupos de Feller se prueba la ecuación de Chapman-Kolmogorov. Con ello se demuestra que $P_t(\cdot, \cdot)$ es una función de transición. \square

A la *f.t* anterior se la denominará *f.t* de Feller.

Definición 3.2.0.2. A un Proceso de Markov con una *f.t* de Feller se le llamará proceso de Feller.

Proposición 3.2.0.2. (*Propiedad Fuerte de Markov*) Si Z es una variable aleatoria Γ_∞ -medible y positiva (o acotada) y T es un tiempo de parada, entonces para cualquier probabilidad ν :

$$E_\nu[Z \circ \theta_T | \Gamma_T] = E_{X_T}(Z) \quad P_\nu - c.c.$$

Demostración. En primer lugar se demuestra para el caso en que T toma valores en un subconjunto contable D :

$$E_\nu[Z \circ \theta_T | \Gamma_T] = \sum_{q \in D} \mathbb{1}_{T=q} E_\nu[Z \circ \theta_q | \Gamma_q] = \sum_{q \in D} \mathbb{1}_{T=q} E_{X_q}(Z) = E_{X_T}(Z).$$

Para el caso general definimos una sucesión de tiempos de parada a partir de T :

$$T_n = \frac{\lfloor 2^n T \rfloor + 1}{2^n}$$

y se observa que cada uno toma valores en un conjunto contable y a la vez $T_n \downarrow T$. Para funciones $f_i \in C_0^+ \quad i \in \{0, 1, \dots, k\}$ y tiempos $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ se define

$$g(x) = \int P_{t_1}(x, dx_1) f_1(x_1) \dots \int P_{t_k - t_{k-1}}(x_{k-1}, dx_k) f_k(x_k).$$

Como X es Feller entonces $g \in C_0^+$ y por lo hallado al principio:

$$E_\nu\left[\prod_i f_i(X_{t_i}) \circ \theta_{T_n} | \Gamma_{T_n}\right] = g(X_{T_n}).$$

Usando el corolario II.2.9 de [7] se llega a:

$$E_\nu\left[\prod_i f_i(X_{t_i}) \circ \theta_T | \Gamma_T\right] = g(X_T) = E_{X_t}\left(\prod_i f_i(X_{t_i})\right).$$

Finalmente se usa el la extensión usual usando funciones simples. \square

El siguiente ejemplo muestra que no todo proceso de Markov cumple la propiedad fuerte de Markov

Ejemplo 3.2.1. Sean W la medida de Wiener en el espacio $(C([0, \infty[, \mathfrak{R}), \Gamma)$ y la función f de \mathfrak{R} en \mathfrak{R}^2 definida como

$$f(x) = \begin{cases} (x, 0) , & \text{si } x \leq 0; \\ (\sin(x), 1 - \cos(x)) & , \text{ si } 0 < x \leq 2\pi; \\ (x - 2\pi, 0) & , \text{ si } x > 2\pi. \end{cases}$$

Se observa que f es continua e inversible en todo punto excepto el origen $(0, 0)$.

Se define el proceso Z como $Z_t = f(X_t + \pi)$ y debido a que (X_t) es un proceso de Markov, se tiene

$$W(Z_{t+h} \in B | Z_t) = W(Z_{t+h} \in B | \Gamma_t^Z)$$

por lo cual Z es un proceso de Markov.

La variable aleatoria $\tau = \inf\{t \geq 0 : Z_t = (0, 0)\}$ es un tiempo de parada en la filtración generada por Z debido a que $\{\tau > r\} = \cup_{n \geq 1} \cap_{s \in [0, r] \cap \mathbb{Q}} \{|Z_s| > \frac{1}{n}\}$.

Las expresiones que deben ser iguales para verificar la propiedad fuerte de Markov son las siguientes

$$E_{Z_\tau} Z_h = E_{(0,0)} Z_h,$$

$$E(Z_h \circ \theta_\tau | \Gamma_\tau^Z) = E(Z_{\tau+h} | \Gamma_\tau^Z),$$

pero en el caso de Z , el origen puede ser alcanzado ya sea acercándose por el semieje negativo de las abscisas o terminando la circunferencia de radio 1 y centro $(0, 1)$, por lo que el futuro luego de alcanzar el punto $(0, 0)$ no puede ser determinado. Por ello las ecuaciones anteriores no son iguales y no se cumple la propiedad fuerte de Markov (ver [12]p.626).

3.3. Generadores infinitesimales.

Entre los múltiples fenómenos naturales que pueden ser descritos por procesos de Markov hay un ejemplo interesante: El de una pequeña partícula que flota en la superficie de un líquido que se desplaza con velocidad \vec{v} constante. El movimiento de la partícula es

adecuadamente descrito por las funciones de transición pero también puede ser descrito, al menos en lapsos muy cortos, en parte por \vec{v} en la forma de campo de velocidades y en parte por las interacciones con las moléculas del líquido. De la observación anterior partiendo de (P_t) se define un operador que muestra la forma en que el proceso se mueve punto a punto.

Definición 3.3.0.1. Sea X un proceso de Feller con f.t (P_t) , decimos que $f \in C_0(E)$ pertenece al dominio \mathcal{D}_A del generador infinitesimal de X si

$$Af = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(P_t f - f)$$

existe y pertenece a $C_0(E)$. El operador $A : \mathcal{D}_A \rightarrow C_0(E)$ así definido es llamado el generador infinitesimal del proceso X .

Debido a que X es un proceso de Markov y de la definición anterior obtenemos la expresión para $f \in \mathcal{D}_A$:

$$E(f(X_{t+h}) - f(X_t) | \Gamma_t) = hAf(X_t) + o(h)$$

que muestra como A describe el movimiento del proceso en tiempos infinitesimales.

En la introducción de la presente sección se mostraron dos ecuaciones diferenciales para cadenas de Markov. El siguiente teorema tiene expresiones similares en el ítem 2, que reciben el nombre de backward y forward equation. El origen de dichos nombres es más evidente cuando $(P_{s,t})$ es no homogénea (ver la sección 4) en donde se obtienen al derivar respecto a s (pasado) y t (futuro), respectivamente.

Proposición 3.3.0.1. Si $f \in \mathcal{D}_A$ entonces:

1. $P_t f \in \mathcal{D}_A \forall t \geq 0$.
2. $\frac{d}{dt} P_t f = AP_t f = P_t Af$.
3. $P_t f - f = \int_0^t AP_s f = \int_0^t P_s Af$.

Demostración. Fijando t , por la propiedad de semigrupo y a que $g_s \rightarrow g$ implica $P_t g_s \rightarrow P_t g$:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{P_s(P_t f) - P_t f}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} P_t \frac{[(P_s f) - f]}{s} = P_t Af$$

lo que demuestra el primer ítem, así también que $AP_t f = P_t Af$ y que la aplicación $t \mapsto P_t$ tiene derivada por la derecha igual a $P_t Af$.

Debido a que la función $t \mapsto \int_0^t P_s A f ds$ es diferenciable y su derivada es $P_t A f$ y al hecho de que si dos funciones tienen iguales derivadas por la derecha difieren en una constante:

$$P_t f = \int_0^t P_s A f ds + g$$

lo que prueba la segunda parte de la proposición.

Para concluir si se toma $t = 0$ se obtiene que $g = f$, lo cual termina la demostración. \square

Proposición 3.3.0.2. *El espacio \mathcal{D}_A es denso en C_0 y A es un operador cerrado.*

Demostración. Se definen en C_0 los operadores $A_h f = \frac{P_h f - f}{h}$ y $B_s f = \frac{1}{s} \int_0^s P_t f dt$ que son acotados y cumplen:

$$A_h B_s = A_s B_h = B_s A_h = B_h A_s$$

Además $\forall s > 0$ y $f \in C_0$ y debido a $\lim_{s \rightarrow 0} B_s f = f$

$$\lim_{h \rightarrow 0} A_h B_s f = \lim_{h \rightarrow 0} A_s (B_h f) = A_s f$$

Por lo cual $B_s f \in \mathcal{D}_A$ y $f \in \overline{\mathcal{D}_A}$.

Sea ahora f_n una sucesión en \mathcal{D}_A que converge a $f \in C_0$ y supone que $A f_n \rightarrow g$

$$B_s g = \lim_n B_s A f_n = \lim_n B_s (\lim_h A_h f_n) = \lim_n \lim_h A_s (B_h f_n) = \lim_n A_s f_n = A_s f$$

Lo anterior prueba que $f \in \mathcal{D}_A$ y $A f = \lim_n A_s f = g$, por lo tanto A es un operador cerrado. \square

Antes de ver la siguiente proposición se define "la resolvente de orden p del semigrupo P_t como la aplicación $f \mapsto U_p f$ de C_0 en si mismo, tal que $U_p f(x) = \int_0^\infty e^{-pt} P_t f(x) dt$.

Proposición 3.3.0.3. *Para todo $p > 0$ la aplicación $f \mapsto pf - Af$ de \mathcal{D}_A en C_0 es biyectiva y su inversa es U_p .*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{D}_A$, por la proposición 3.3.0.1 se tiene:

$$U_p(pf - Af) = \int_0^\infty e^{-pt} P_t(pf - Af) dt = f$$

Para el recíproco sea $g \in C_0$, usando la proposición 3.3.0.1:

$$\lim_{h \rightarrow 0} A_h U_p g = \lim_{h \rightarrow 0} U_p A_h g = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-pt} P_t \left(\frac{P_h g - g}{h} \right) dt = p U_p g - g.$$

\square

La siguiente proposición fue probablemente una de las motivaciones que llevaron a formular el Problema de Martingala (ver sección 5). Lo que muestra es que si se tiene un proceso de Feller se puede construir para toda $f \in \mathcal{D}_A$ una martingala M_t^f que involucre al proceso y a su generador.

Proposición 3.3.0.4. *Si $f \in \mathcal{D}_A$ entonces el proceso*

$$M_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Af(X_s)ds$$

es un (Γ_t°, P_ν) -martingala para toda ν .

Demostración. Como f y Af son acotados, M_t^f es integrable para todo t . Además

$$E_\nu(M_t^f | \Gamma_s^\circ) = M_s^f + E_\nu(f(X_t) - f(X_s) - \int_s^t Af(X_u)du).$$

Usando la propiedad markoviana, la esperanza condicional en la izquierda de la ecuación anterior es igual a

$$E_{X_s}(f(X_{t-s}) - f(X_0) - \int_0^{t-s} Af(X_u)du).$$

Para todo $y \in \mathfrak{R}$, debido a la proposición 3.3.0.1 se cumple

$$E_y(f(X_{t-s}) - f(X_0) - \int_0^{t-s} Af(X_u)du) = P_{t-s}f(y) - f(y) - \int_s^t P_u Af(y)du = 0$$

lo que demuestra la proposición. □

De lo anterior la pregunta inmediata sería si es posible asegurar que (X_t) es un proceso de Markov si se cumple que M_t^f es una martingala para todo $f \in \mathcal{D}_A$, cuestión tratada en la sección 5.

Capítulo 4

Procesos de Difusión.

La idea base con la que inician las varias formulaciones de Procesos de Difusión es la de describir un proceso con dos componentes: Una componente global debido a un campo exterior y una componente que actua en forma de pequeñas fluctuaciones locales.

Definición 4.0.0.1. Un proceso de Markov $(X_t)_{t \geq 0}$ con transición de probabilidad $P(s, x, t, dy)$ es llamado un Proceso de Difusión si las siguientes condiciones son satisfechas:

1. (Continuidad) Para todo x y $\epsilon > 0$:

$$\int_{|x-y|>\epsilon} P(s, x, t, dy) = o(t-s)$$

uniformemente en $0 \leq s \leq t$.

2. (Definición de coeficiente de arrastre) Existe una función $b(s, x)$ tal que para todo x y $\epsilon > 0$

$$\int_{|x-y|\leq\epsilon} (y-x)P(s, x, t, dy) = b(s, x)(t-s) + o(t-s)$$

uniformemente en $0 \leq s \leq t$.

3. (Definición de coeficiente de difusión) Existe una función $a(s, x)$ tal que para todo x y $\epsilon > 0$

$$\int_{|x-y|\leq\epsilon} (y-x)^2 P(s, x, t, dy) = a(s, x)(t-s) + o(t-s)$$

uniformemente en $0 \leq s \leq t$.

En la definición de los coeficientes a y b se trunca la integral debido a que no se sabe si al considerar puntos muy alejados dichos coeficientes serán finitos, mas si se asume que existe $\delta > 0$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int |x-y|^{2+\delta} P(s, x, s+h, dy) = 0 \quad (4.1)$$

entonces se puede quitar la restricción de integrar solo en $|x - y| \leq \epsilon$. Esto es cierto por la desigualdad:

$$\int_{|y-x|>\epsilon} |y-x|^k P(s, x, s+h, dy) \leq \frac{1}{\epsilon^{2+\delta-k}} \int |y-x|^{2+\delta} P(s, x, s+h, dy) \quad k = 0, 1, 2.$$

Asumiendo 4.1 se pueden hallar, a partir de la definición, expresiones explícitas para los coeficientes de difusión y arrastre:

$$\lim_{t \rightarrow s} E\left(\frac{X_t - X_s}{t - s} \mid X_s = x\right) = b(s, x).$$

$$\lim_{t \rightarrow s} E\left(\frac{|X_t - X_s|^2}{t - s} \mid X_s = x\right) = a(s, x).$$

y el generador del proceso de difusión:

$$\begin{aligned} L_s f(x) &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int (f(y) - f(x)) P(s, x, s+h, dy) \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int [(y-x)f'(x) \\ &\quad + (y-x)^2 \frac{f''(x)}{2} + o(y-x)] P(s, x, s+h, dy). \end{aligned}$$

Si se considera $f \in C_0^\infty(\mathfrak{R})$ lo anterior se simplifica a

$$L_s f(x) = b(s, x) f'(x) + \frac{1}{2} a(s, x) f''(x). \quad (4.2)$$

Usando la ecuación de Chapman-Kolmogorov se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int P(s, x, t, dy) f(y) &= \lim_{h \downarrow 0} \int \frac{[P(s, x, t+h, dy) - P(s, x, t, dy)] f(y)}{h} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{[\int P(s, x, t, dz) P(t, z, t+h, dy) - P(s, x, t, dy)] f(y)}{h} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{\int P(s, x, t, dz) \int P(t, z, t+h, dy) f(y) - \int P(s, x, t, dz) f(z)}{h} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \int P(s, x, t, dz) \frac{\int P(t, z, t+h, dy) (f(y) - f(z))}{h} \\ &= \int P(s, x, t, dy) L_t f(y). \end{aligned}$$

De donde se obtiene la expresión conocida como "forward equation" debido a que usa la variable t (futuro):

$$\frac{\partial}{\partial t} P(s, x, t, y) - L_t^* P(s, x, t, y) = 0 \quad 0 \leq s < t, \quad (4.3)$$

$$\lim_{t \downarrow s} P(s, x, t, y) = \delta_x(y). \quad (4.4)$$

De manera similar

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \int P(s, x, t, dy) f(y) &= - \lim_{h \downarrow 0} \frac{\int [P(s-h, x, t, dy) - \int P(s, x, t, dy)] f(y)}{h} \\ &= - \lim_{h \downarrow 0} \frac{\int [(\int P(s-h, x, s, dz) P(s, z, t, dy)) - P(s, x, t, dy)] f(y)}{h} \\ &= - \lim_{h \downarrow 0} \frac{\int P(s-h, x, s, dz) [\int P(s, z, t, dy) f(y) - \int P(s, x, t, dy) f(y)]}{h} \\ &= - \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int P(s-h, x, t, dy) [\int (P(s, y, t, dy) - P(s, x, t, dy)) f(y)] \\ &= -L_s \int P(s, x, t, dy) f(y). \end{aligned}$$

De donde se halla la "backward equation", que involucra el pasado (tiempo s)

$$\frac{\partial}{\partial s} P(s, x, t, y) + L_s P(s, x, t, y) = 0 \quad 0 \leq s < t, \quad (4.5)$$

$$\lim_{s \uparrow t} P(s, x, t, y) = \delta_x(y). \quad (4.6)$$

Debido a que el operador L_t^* resulta complicado de usar, se prefiere trabajar con la Backward equation.

Las siguientes proposiciones resumen lo hallado: Si existe la densidad $p(s, x, t, y)$ de la función de transición:

$$P(t, x, A) = \int_A p(t, x, y) dy$$

la forward equation se puede expresar como :

Teorema 4.0.0.1. (*Forward Kolmogorov*) *Asumiendo se cumplen las condiciones de la definición 4.0.0.1, entonces la función de transición resuelve la ecuación*

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial b(t, y)p}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a(t, y)p}{\partial y^2} &= 0, \\ \lim_{t \downarrow s} p(s, x, t, y) &= \delta_x(y). \end{aligned}$$

Demostración. De la ecuación (4.3) y del hecho que la adjunta formal del operador L_t , por definición es igual a

$$L_t^* u = (-1)^2 \frac{d^2(a(t, y)u)}{dy^2} + (-1)^1 \frac{d(b(t, y)u)}{dy} = \frac{d^2(a(t, y)u)}{dy^2} - \frac{d(b(t, y)u)}{dy}.$$

También se puede consultar [11]p.57. □

Teorema 4.0.0.2. (*Backward Kolmogorov*) Sea $f \in C_b(\mathfrak{R})$ y asumiendo que:

$$u(s, x) := \int f(y)P_{t-s}(x, dy) \in C_b^2(\mathfrak{R}) \text{ (respecto a } x)$$

Asumiendo además que las funciones $a(.,.)$ y $b(.,.)$ son continuas. Entonces $u(.,.) \in C^{1,2}(\mathfrak{R}_0^+ \times \mathfrak{R})$ y resuelve el "problema del valor final"

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial s} &= a(s, x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}b(s, x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \lim_{s \uparrow t} u(s, x) &= f(x). \end{aligned}$$

Demostración. De la ecuación (4.5). También se puede consultar [11]p.54-56. □

Capítulo 5

Problema de Martingala y de Submartingala.

Entre los métodos para construir una difusión, hay dos bastante conocidos: el método de aproximación diferencial y el método de Ito con ecuaciones integrales estocásticas. En el primer caso se inicia con el estudio de un ejemplo paradigmático de transiciones de probabilidad:

$$P(s, x, t, A) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi(t-s))^d}} \int_A e^{-\frac{1}{2} \frac{|y-x|^2}{(t-s)}} dy$$

$0 \leq s \leq t$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Dado $\phi \in C_b(\mathbb{R}^d)$ y fijando $t > 0$, se define :

$$f(s, x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi(t-s))^d}} \int e^{-\frac{1}{2} \frac{|y-x|^2}{(t-s)}} \phi(y) dy, \quad s < t.$$

Con algo de cálculo se comprueba que f resuelve la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{2} \Delta f &= 0, \quad s < t, \\ \lim_{s \uparrow t} f(s, \cdot) &= \phi(\cdot). \end{aligned}$$

De lo anterior surge la interrogante de si dado un operador con ciertas características es posible construir un proceso de Markov asociado. La respuesta es afirmativa y se muestra en el siguiente teorema:

Teorema 5.0.0.1. Sean $a : [0, \infty[\times \mathbb{R}^d \rightarrow S_d$ y $b : [0, \infty[\times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ funciones continuas acotada y con derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ continuas y acotadas. Sea

$$L_t = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(t, \cdot) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(t, \cdot) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Entonces existe una única función de transición $P_t(\cdot, \cdot)$ tal que $P_t(x, B)$ es $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -medible para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

También se cumple:

$$\int_{\mathbb{R}^d} P(s, x, t, dy) f(t, y) - f(s, x) = \int_s^t du \int_{\mathbb{R}^d} (L_u + \frac{\partial}{\partial u}) f(u, y) P(s, x, u, dy) \quad (5.1)$$

para todo $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$ y $f \in C_b^{1,2}([0, \infty[\times \mathbb{R}^d)$.

Mas aun, para todo $(s, x) \in [0, \infty[\times \mathbb{R}^d$ existe una única probabilidad $P_{s,x}$ tal que

- $P_{s,x}(X_0 = x) = 1$,
- $P_{s,x}(X_{t_2} \in A | \Gamma_{t_1}) = P(t_1, X_{t_1}, t_2, A)$ $P_{s,x} - cc \quad \forall 0 \leq s \leq t_1 < t_2 \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$\forall t_1 < t_2 \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Demostración. La prueba es extensa (ver [1]p.79) e inicia a partir de los dos lemas siguientes. □

Lema 5.0.0.2. Sea el operador L_t como en el teorema anterior. Si se asume que $\forall t > 0$ y $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ existe $f \in C^{1,2}([0, t[\times \mathbb{R}^d) \cap C_b([0, t] \times \mathbb{R}^d)$ tal que $f(t, \cdot) = \phi(\cdot)$ y $\frac{\partial f}{\partial s} + L_s f = 0$, $s < t$, entonces dicho f es único.

Lema 5.0.0.3. Sea el operador L_t como en el teorema previo. Existe una única transición de probabilidad $P(s, x, t, \cdot)$ tal que

$$f(s, x) = \int P(s, x, t, dy) \phi(y).$$

5.1. Problema de Martingala.

El teorema precedente muestra que bajo ciertas condiciones impuestas al generador se puede construir un proceso de Markov. Partiendo de los resultados obtenidos, si Ω es el espacio $C([0, \infty[, \mathbb{R}^d)$, $(\Gamma_t)_{t \geq 0}$ la filtración canónica, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, se considera un proceso homogéneo y se reescribe 5.1 como:

$$\int_{\mathbb{R}^d} P_t(X_{t_1}, dy) f(y) - f(X_{t_1}) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} P_u(X_{t_1}, dy) Lf(y) du$$

y además se combina con la propiedad Markoviana obtenida al final del teorema 5.0.0.1, se obtiene :

$$E_x[f(X_{t_1+t})|\Gamma_{t_1}] - f(X_{t_1}) = \int_0^t E_x[(Lf)(X_{t_1+u})|\Gamma_{t_1}]du$$

$$E_x[f(X_{t_1+t})|\Gamma_{t_1}] - f(X_{t_1}) = E_x\left[\int_0^t Lf(X_{u+t_1})du|\Gamma_{t_1}\right]$$

$$E_x[f(X_{t_1+t})|\Gamma_{t_1}] - f(X_{t_1}) = E_x\left[\int_{t_1}^{t+t_1} Lf(X_u)du|\Gamma_{t_1}\right]$$

o lo que es lo mismo:

$$f(X_t) - \int_0^t Lf(X_u)du \quad (5.2)$$

es una P_x -martingala para toda $f \in C_0^\infty(\mathfrak{R}^d)$.

Luego de lo visto la pregunta inmediata es si $P_x(X_0 = x) = 1$ y 5.2 bastan para asegurar la existencia y unicidad de un proceso de Markov P_x , para responder dicha interrogante se define el Problema de Martingala:

Definición 5.1.0.1. Dadas las funciones medibles y acotadas $a : [0, \infty[\times \mathfrak{R}^d \rightarrow S_d$ y $b : [0, \infty[\times \mathfrak{R}^d \rightarrow \mathfrak{R}^d$ y

$$L_t = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Dado $x \in \mathfrak{R}^d$, una solución al Problema de Martingala para L_t (o para a y b) es una probabilidad P_x en (Ω, Γ) que satisface

(a) $P_x(X_0 = x) = 1,$

(b) $f(X_t) - \int_0^t L_s f(X_s) ds$ es una P_x -martingala para todo $f \in C_0^\infty(\mathfrak{R}^d)$.

Si el problema de martingala tiene solución y es única, se dice que esta bien propuesto. En el lema siguiente se muestra que si las funciones a y b son adecuadamente restringidas, el problema de martingala tiene solución única.

Lema 5.1.0.1. Sean $c : [0, \infty[\rightarrow S_d$ y $b : [0, \infty[\rightarrow \mathfrak{R}^d$ funciones medibles acotadas y

$$L_t = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d c(t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b(t) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Entonces el problema de martingala para L_t está bien propuesto. Además si $\{P_x, x \in \mathfrak{R}^d\}$ denota la familia de soluciones determinada por L_t entonces $x \mapsto P_x(A)$ es medible para todo $A \in \Gamma$.

Demostración. Ver [1]p.140. □

Se sabe que todo proceso de Markov y en especial los procesos difusivos satisfacen el problema de martingala; a continuación se verá el recíproco, es decir que una solución del problema de martingala es un proceso de Markov:

Teorema 5.1.0.2. *Sean $a : [0, \infty[\times \mathbb{R}^d \rightarrow S_d$ y $b : [0, \infty[\times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ funciones medibles acotadas para las cuales el problema de martingala está bien propuesto, y se asume que la correspondiente familia de soluciones $\{P_x\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ es medible (i.e $x \rightarrow P_x(A)$ es medible $\forall A \in \Gamma$). Entonces $\{P_x\}$ es Markov fuerte en el sentido de que si τ es un tiempo de parada finito se tiene:*

$$\delta_\omega \otimes_{\tau(\omega)} P_{\tau(\omega), X_{\tau(\omega)}(\omega)} \text{ es un d.p.c.r de } P_x | \Gamma_\tau. \quad (5.3)$$

Demostración. Por el teorema 6.2.1([1]p.145.) se conoce que si $\{P_\omega\}$ es un dcpr de $P_{s,x}$, entonces

$$\delta_{X_{\tau(\omega)}(\omega)} \otimes_{\tau(\omega)} P_\omega = P_{\tau(\omega), X_{\tau(\omega)}(\omega)}$$

$\forall \omega \in N^C$ con $N \in \Gamma_\tau$ y $P_{s,x}(N) = 0$. Por ello

$$P_\omega = \delta_\omega \otimes_{\tau(\omega)} (\delta_{X_{\tau(\omega)}(\omega)} \otimes_{\tau(\omega)} P_\omega) = \delta_\omega \otimes_{\tau(\omega)} P_{\tau(\omega), X_{\tau(\omega)}(\omega)} \quad \forall \omega \notin N.$$

□

5.2. Problema de Submartingala.

En ocasiones es más fácil probar un problema más general, que se enuncia a continuación, de manera que si se adiciona un término implica el Problema de Martingala. Sea $\Omega = C([0, \infty[, \mathbb{R}^d)$, la filtración canónica y G un subconjunto abierto no vacío de \mathbb{R}^d al que asociamos una función $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ de manera que

1. $\phi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$,
2. $G = \{x \in \mathbb{R}^d : \phi(x) > 0\}$ y $\partial G = \{x \in \mathbb{R}^d : \phi(x) = 0\}$,
3. $|\nabla \phi(x)| \geq 1$ en ∂G .

Sean también las funciones

- (a) $a : [0, \infty[\times G \rightarrow S_d^+$ continua y acotada,
- (b) $b : [0, \infty[\times G \rightarrow \mathbb{R}^d$ medible y acotada,

(c) $\gamma : [0, \infty[\times \partial G \rightarrow \mathfrak{R}^d$ continua, acotada y satisface $\langle \gamma(t, x), \nabla \phi(x) \rangle \geq \beta > 0$ en todo su dominio,

(d) $\rho : [0, \infty[\times \partial G \rightarrow [0, \infty[$ continua y acotada.

Definimos los operadores

$$L_u = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(u, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(u, x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

y

$$J_u = \sum_i^d \gamma_i(u, x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Definición 5.2.0.1. Se dice que una probabilidad P en (Ω, Γ) resuelve el problema de submartingala en G para los coeficientes a, b, γ y ρ si :

1. $P(X_t \in \overline{G}) = 1$ para $t \geq 0$,
2. $M_f(t) = f(t, X_t) - \int_0^t [\mathbb{1}_G(f_u + L_u f)(u, X_u)] du$ es una P -submartingala para cualquier $f \in C_0^{1,2}([0, \infty[\times \mathfrak{R}^d)$ que satisface $\rho f_t + J_t f \geq 0$ en $[0, \infty[\times \partial G$.

Lema 5.2.0.1. Sea P la solución del problema de submartingala , si $f \in C_0^{1,2}([0, \infty[\times \mathfrak{R}^d)$, entonces

$$M_f(t) = f(t, X_t) - \int_0^t [\mathbb{1}_G(f_u + L_u f)(u, X_u)] du \quad (5.4)$$

es una P -martingala local en G .

Demostración. Ver [4]p.159. □

Si los coeficientes a y b , así como las funciones γ y ρ tienen propiedades como continuidad, acotamiento y otras, se puede asegurar la existencia y unicidad de soluciones del problema de martingala:

Proposición 5.2.0.2. Sean G y ϕ como en el inicio de la subsección y además se cumple que

1. $a : [0, \infty[\times \overline{G} \rightarrow S_d^+$ es continua y acotada,
2. $b : [0, \infty[\times \partial G \rightarrow \mathfrak{R}^d$ es medible y acotada,
3. $\gamma : [0, \infty[\times \partial G \rightarrow \mathfrak{R}^d$ es continua, acotada y $\langle \gamma, \nabla \phi \rangle \geq \beta > 0$,

4. $\rho : [0, \infty[\times \partial G \rightarrow [0, \infty[$ continua y acotada.

Entonces para todo $x_0 \in \overline{G}$ existe una solución P al problema de submartingala para a, b, γ y ρ que inicia en x_0 .

Demostración. Ver [4]p.181. □

Proposición 5.2.0.3. Si las funciones a, b, γ y ρ son independientes del tiempo, tienen dominio \overline{G} y cumplen:

- (a) $a(x)$ es continua, simétrica y positiva definida en cada punto de \overline{G} ,
- (b) $b(x)$ es medible y acotada,
- (c) γ localmente Lipschitz y acotada en ∂G , y además satisface $\langle \gamma(x), \nabla \phi(x) \rangle \geq \beta > 0$ en ∂G ,
- (d) $\rho(x)$ es acotada, continua y no negativa en ∂G .

Entonces la solución al problema de submartingala es única para todo punto de partida x .

Demostración. Ver [4]p.195-196. □

Observación. En las dos proposiciones previas se modifican los dominios de las funciones respecto a como aparecen en la definición del problema de submartingala. Por ejemplo en 5.2.0.2 solo se pide que la función b esté definida en el borde ∂G pero se pide que a lo esté en la clausura \overline{G} . Dichos cambios pueden aclararse si se considera que las funciones a, b, γ y ρ tienen dominio $[0, \infty[\times \overline{G}$, satisfacen lo pedido en el problema de submartingala en el subconjunto adecuado del dominio así como propiedades adicionales en otros subconjuntos del dominio.

5.3. Del Problema de Submartingala al de Martingala.

Por el teorema de descomposición de Doob-Meyer si P resuelve el problema de submartingala y $f \in C_b^{1,2}([0, \infty[\times \mathfrak{R}^d)$, existe una función $\xi_f : [0, \infty[\times \Omega \rightarrow [0, \infty[$ integrable, no decreciente, no anticipante y continua tal que $\xi_f(0) = 0$ y $X_f(t) - \xi_f(t)$ es una P -martingala.

Dado $f \in C_b^{1,2}([0, \infty[\times \mathfrak{R}^d)$ puede encontrarse un α suficientemente grande tal que $\overline{f}_u + J_u \overline{f} \geq 0$ en $[0, \infty[\times \partial G$ donde $\overline{f} = f + \alpha \phi$ debido a

$$\overline{f}_u + J_u \overline{f} = f_u + J_u f + \alpha \langle \gamma, \phi \rangle \geq f_u + J_u f + \alpha \beta$$

y a que γ y las derivadas parciales de f son acotadas.

Observación. Lo mismo sucede si se elige $\bar{f} = \alpha\phi - f$.

Observación. Debido a que $\phi \in C_b^2(\mathfrak{R}^d)$, puede entenderse como elemento de $C_b^{1,2}([0, \infty[\times \mathfrak{R}^d)$ y como $\langle \gamma, \nabla \phi \rangle \geq 0$, entonces existe ξ_ϕ continua, no decreciente, no anticipante e integrable.

Por ello se puede elegir un $\xi_{\bar{f}}$ para \bar{f} . Si se define $\xi_f = \xi_{\bar{f}} - \alpha\xi_\phi$ se observa que dicha ξ_f es una función continua, no anticipante de variación acotada tal que $\xi_f(0) = 0, E(|\xi_f(t)|) < \infty$ y $X_f(t) - \xi_f(t)$ es una P -martingala.

Lo visto lleva a considerar a $C_b^{1,2}([0, \infty[\times \mathfrak{R}^d)$ como subconjunto de una clase de funciones F , definida con las condiciones:

- $f \in C_b([0, \infty[\times \mathfrak{R}^d) \cap C_b^{1,1}([0, \infty[\times \partial G)$,
- existe una función $Kf \in B([0, \infty[\times G)$ tal que

$$X_f(t) = f(t, X_t) - \int_0^t Kf(u, X_u) du$$

es una P -martingala local en G ,

- existe una función continua, no anticipante $\xi_f : [0, \infty[\times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que
 - $\xi_f(0) = 0, \xi_f(t)$ es de variación acotada local y $E[|\xi_f(t)|] < \infty$ para $t \geq 0$,
 - $X_f(t) - \xi_f(t)$ es una P -martingala,
- si $g \in C_b^{1,2}([0, \infty[\times \mathfrak{R}^d)$ entonces $\bar{f} = f + g$ satisface las condiciones anteriores, y si $\rho\bar{f}_t + J_t\bar{f} \geq 0$ en $[0, \infty[\times \partial G$ entonces $\xi_{\bar{f}}(t)$ puede ser elegido no decreciente.

Teorema 5.3.0.1. *Sea P la solución del problema de submartingala. Existe una única función $\xi_0 : [0, \infty[\times \Omega \rightarrow [0, \infty[$ continua, no decreciente y no anticipante tal que $\xi_0(0) = 0$, $E(\xi_0(t)) < \infty$,*

$$\xi_0(t) = \int_0^t \mathbb{1}_{\partial G}(X_u) d\xi_0(u) \quad (5.5)$$

y

$$f(t, X_t) - \int_0^t [\mathbb{1}_G(Kf)(u, X_u)] du - \int_0^t (\rho f_u + J_u f)(u, X_u) d\xi_0(u) \quad (5.6)$$

es una P -martingala para todo $f \in F$. En particular si $f \in C_b^{1,2}([0, \infty[\times \mathfrak{R}^d)$ y $\rho f_u + J_u f \geq 0$ en $[0, \infty[\times \partial G$ entonces

$$f(t, X_t) - \int_0^t [\mathbb{1}_G(f_u + L_u f)(u, X_u)] du - \int_0^t (\rho f_u + J_u f)(u, X_u) d\xi_0(u). \quad (5.7)$$

es una P -martingala.

Observación. $\xi_f(t) = \int_0^t (\rho f_u + J_u f)(u, X_u) d\xi_0(u)$

Demostración. En primer lugar sea $\bar{f} = \alpha\phi - f$, entonces para α suficientemente grande

$$\rho\bar{f}_t + J_t\bar{f} \geq 0 \text{ en } [0, \infty[\times \partial G$$

y por ello $\alpha d\xi_\phi(t) \geq d\xi_f(t) \geq -\alpha d\xi_\phi(t)$, lo que implica que $d\xi_f(t)$ es absolutamente continua respecto a $d\xi_\phi(t)$. Sea $\frac{d\xi_f(t)}{d\xi_\phi(t)} = \alpha(t)$.

Dado $s \in]0, \infty[$ y $x \in \partial G$, sea

$$\beta = \frac{(\rho f_s + J_s f)(s, x)}{\langle \gamma(s, x), \nabla \phi(x) \rangle}.$$

Si $\epsilon > 0$, se elige $s \in]a, b[\subseteq]0, \infty[$ y un abierto U que contiene a x de manera que

$$(\beta - \epsilon)\langle \gamma, \nabla \phi \rangle \leq \rho f_u + J_u f \leq (\beta + \epsilon)\langle \gamma, \nabla \phi \rangle$$

en $]a, b[\times U$. Por ello

$$(\beta - \epsilon) \int_{a'}^{b'} \mathbb{1}_{U'}(X_u) d\xi_\phi(u) \leq \int_{a'}^{b'} \mathbb{1}_{U'}(X_u) \alpha(u) d\xi_\phi(u) \leq (\beta + \epsilon) \int_{a'}^{b'} \mathbb{1}_{U'}(X_u) d\xi_\phi(u)$$

para $]a', b'[\subseteq]a, b[$ y $U' \subseteq U$. Por lo tanto

$$(\beta - \epsilon)\mathbb{1}_U(X_u) \leq \mathbb{1}_U(X_u)\alpha(u) \leq (\beta + \epsilon)\mathbb{1}_U(X_u).$$

Se sigue que

$$\alpha(u) = \frac{\rho f_u + J_u f}{\langle \gamma, \nabla \phi \rangle}.$$

Se define

$$\xi_0(t) = \int_0^t \frac{1}{\langle \gamma, \nabla \phi \rangle} d\xi_\phi(u)$$

que verifica las propiedades deseadas.

Sea ξ otra función con las propiedades requeridas, entonces

$$\int_0^t \langle \gamma, \nabla \phi \rangle d\xi_0(u) = \xi_\phi(t) = \int_0^t \langle \gamma, \nabla \phi \rangle d\xi(u)$$

por lo que $\xi_0(t) = \xi(t)$. □

Otro teorema que permite estudiar, añadiendo una expresión extra, el problema de submartingala como uno de martingala es el siguiente:

Teorema 5.3.0.2. *La probabilidad P resuelve el problema de submartingala para a, b, γ y ρ si y solo si existe una función continua, no decreciente y no anticipante $\xi_0 : [0, \infty[\times \Omega \rightarrow [0, \infty[$ que cumple:*

1. $\xi_0(0) = 0$, $E(e^{\lambda \xi_0(t)}) < \infty \quad \forall \lambda \geq 0$, $t \geq 0$,
2. $\xi_0(t) = \int_0^t \mathbb{1}_{\partial G}(X_u) d\xi_0(u) \quad \forall t \geq 0$,
3. $X_{f,\theta}(t) = \exp[\langle \theta, X_t \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t \mathbb{1}_G \langle \theta, a \theta \rangle du - \int_0^t \mathbb{1}_G \langle \theta, b \rangle du - \int_0^t \langle \theta, \gamma \rangle d\xi_0(u)]$
 $\exp \lambda [\int_0^t \mathbb{1}_{\partial G} X_u du - \int_0^t \rho d\xi_0(u)]$

es una P -martingala.

Demostración. Ver [4]p.166. □

Otra manera de verificar el problema de martingala es usar la distribución condicional de probabilidad regular $dcrp$:

Proposición 5.3.0.3. *Si P resuelve el problema de submartingala y si τ es un tiempo de parada, entonces existe un N en Γ_τ tal que $P(N)=0$ y para todo $\omega \notin N$ el $dcrp$ P_ω de P dado Γ_τ es nuevamente una solución y $P_\omega(X_{\tau(\omega)} = X_{(\tau(\omega), \omega)}) = 1$. Además si $\tau'(\omega) = \inf\{t > \tau(\omega); X_t \in \partial G\}$ entonces para todo $\omega \notin N$ $P_\omega = Q_{\tau(\omega), X_{(\tau(\omega), \omega)}(\omega)}$ en $\Gamma_{\tau'(\omega)}^{\tau(\omega)}$, donde $Q_{t,x}$ resuelve el problema de martingala para a y b partiendo de x al tiempo t .*

Demostración. Del teorema anterior. Ver [4]p.166. □

Capítulo 6

Movimiento Browniano.

En la naturaleza como en otros ambientes se ha observado sistemas en los que algunas magnitudes (como la posición de una partícula, concentración de una sustancia, etc) dependientes del tiempo, se comportan de maneras similares:

1. Aparente cambio errático pero continuo en el tiempo,
2. El cambio entre dos tiempos $s < t$ es independiente de lo sucedido hasta s ,
3. El cambio entre $s < t$ es una función con distribución gaussiana dependiente de $t - s$.

Para describir tales sistemas se construyó por el año 1900 un modelo matemático preliminar basado en la Teoría de Probabilidades, que captaba todas sus características y las enunciaba formalmente. A continuación se muestra la definición actual:

Definición 6.0.0.1. Sea (Ω, Γ, P) un espacio de probabilidad, un d -dimensional Movimiento Browniano en (Ω, Γ, P) es un proceso estocástico $(B_t)_{t \geq 0}$, \mathfrak{R}^d - evaluado que cumple:

1. $P(B_0 = 0) = 1$.
2. Las variables aleatorias $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \forall n \in \mathbb{N} \forall t_i \geq 0$ son independientes (incrementos independientes).

3. Para $t > 0$, $s \geq 0$ y $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{R}^d)$ se tiene $P(B_{t+s} - B_s \in A) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_A e^{-\frac{|x|^2}{2t}} dx$ (es decir $B_{t+s} - B_s \sim N(0, tI)$).

4. $t \geq 0 \rightarrow B_t(\omega)$ es continuo P-c.c.

Solo hacía falta probar que existía un proceso en un espacio adecuado que cumpliera las condiciones impuestas, esto fue resuelto gracias a las construcciones de Wiener, Levy y otros. En el presente trabajo se mostrará una construcción basada en el teorema de Donsker.

6.1. Construcción heurística del Movimiento Browniano.

Imaginemos una partícula flotando en la superficie de un líquido en reposo y aislado de fuerzas externas, entonces la partícula en cuestión manifestará un movimiento errático debido a las múltiples colisiones con las moléculas del líquido. Para construir un modelo simplificado de lo anterior podemos pensar en una partícula en la recta real que cambia su posición en tiempos múltiplos de una cantidad Δt y si está en el sitio x salta a $x + \Delta x$ y $x - \Delta x$ con igual probabilidad. En el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$ se obtiene la fluctuación aleatoria continua del Movimiento Browniano.

Designemos por $\xi(t)$ la posición de la partícula al tiempo t y supongamos que al tiempo 0 la partícula se encuentra en $x = 0$. Durante la fluctuación discreta hasta el tiempo t se realizan $n = \frac{t}{\Delta t}$ pasos. Designamos por S_n los pasos en dirección positiva por lo que el desplazamiento en esa dirección será $S_n \Delta x$ y el desplazamiento neto $\xi(t) = (2S_n - n)\Delta x$. Claramente el modelo muestra que $\xi(s)$ y $\xi(t + s) - \xi(s)$ son independientes, siendo la distribución del incremento $\xi(t + s) - \xi(s)$ igual a la de $\xi(t)$, por lo tanto:

$$Var(\xi(t + s)) = Var(\xi(s)) + Var(\xi(t + s) - \xi(s)) = Var(\xi(s)) + Var(\xi(t)).$$

Se observa que la varianza depende "linealmente" como función de t , por lo que:

$$Var(\xi(t)) = \sigma^2 t \quad 0 \leq t < \infty$$

donde σ^2 es una constante llamada coeficiente de difusión. De otro lado, recordando que $t = n\Delta t$, también se tiene:

$$\begin{aligned} Var(\xi(t)) &= \sum_{i=1}^n Var(\xi(t_i) - \xi(t_{i-1})) \\ &= n(\Delta x)^2 = \frac{t}{\Delta t} (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

con $t_0 = 0, t_n = t, t_i - t_{i-1} = \Delta t \forall i$.

Por ello obtenemos la relación:

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \sigma^2.$$

Introducimos la magnitud $S_n^* = \frac{1}{\sqrt{n}}(2S_n - n)$ de tal manera que:

$$\xi(t) = S_n^* \sqrt{n} \Delta x = S_n^* \sqrt{t} \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta t}} = S_n^* \sigma \sqrt{t}.$$

Utilizando el Teorema de De Moivre-Laplace se obtiene que la distribución de $\xi(t)$ en el límite $\Delta t \rightarrow 0$ (dado por cierto que en el caso límite los incrementos siguen siendo independientes y sus distribuciones solo dependen de la diferencia de los tiempos) es dada por:

$$P(x_1 \leq \frac{\xi(t)}{\sigma \sqrt{t}} \leq x_2) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P(x_1 \leq S_n^* \leq x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

La fórmula anterior además da la distribución de los desplazamientos, ya que vimos que la distribución de $\xi(t+s) - \xi(s)$ es la misma que la de $\xi(t)$:

$$P(x_1 \leq \frac{\xi(t+s) - \xi(s)}{\sigma \sqrt{t}} \leq x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Se observa que la magnitud $\xi(t)$ verifica que los incrementos son independientes y tienen distribución normal.

6.2. Construcción formal.

Sean ξ_1, ξ_2, \dots variables aleatorias iid, centradas y con varianza 1, $S_n = \sum_{i=0}^n \xi_i$ y $X^n : \Omega \rightarrow D$ definido como

$$X_t^n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]}(\omega).$$

Teorema 6.2.0.1. *La función aleatoria definida arriba converge débilmente a un proceso llamado Proceso de Wiener*

$$X^n \Rightarrow W.$$

Demostración. Debido al teorema central de Lindeberg (Teo4.12[2]) y a que $\frac{[nt]}{n} \rightarrow_n t$ se obtiene

$$X_t^n \Rightarrow \sqrt{t} N$$

con N teniendo la distribución normal estándar. Por la independencia de X_s^n y $X_t^n - X_s^n$ para $t > s$ y *ej,3,2[3]* se sigue

$$(X_s^n, X_t^n - X_s^n) \Rightarrow_n (N_1, N_2)$$

teniendo N_1 y N_2 distribuciones normales centradas con varianzas s y $t - s$ respectivamente y siendo independientes entre si. Usando el teorema de aplicación se obtiene

$$(X_s^n, X_t^n) \Rightarrow_n (N_1, N_1 + N_2)$$

que se puede generalizar fácilmente a

$$(X_{t_1}^n, X_{t_2}^n, \dots, X_{t_k}^n) \Rightarrow_n (N_1, N_1 + N_2, N_1 + N_2 + \dots + N_k).$$

De lo anterior se ve que las distribuciones finito dimensionales convergen débilmente a vectores aleatorios con componentes normales. Denominando como W_t al límite débil de $(X_t^n)_n$ se observa que $W_t \sim N(0, t)$ y tiene incrementos independientes.

Se cumple que

$$W_1 - W_{1-\delta} \Rightarrow 0 \text{ cuando } \delta \rightarrow 0$$

debido a que si A es un intervalo abierto $]a, b[$, $a > 0$, podemos asegurar:

$$\begin{aligned} (W_1 - W_{1-\delta})^{-1}(A) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2\delta}} du \\ &\leq \frac{b-a}{\sqrt{2\pi\delta}} e^{-\frac{a^2}{2\delta}} \end{aligned}$$

que tiende a cero cuando $\delta \rightarrow 0$. Lo anterior se generaliza fácilmente para intervalos arbitrarios en general .

Por independencia, para $t_1 \leq t \leq t_2$

$$E[|X_t^n - X_{t_1}^n|^2 | X_{t_2}^n - X_t^n|^2] = \left[\frac{1}{n} E \sum_{i,j=[nt_1]+1}^{[nt]} \xi_i \xi_j \right] \left[\frac{1}{n} E \sum_{i,j=[nt]+1}^{[nt_2]} \xi_i \xi_j \right] =$$

$$\frac{1}{n^2} ([nt] - [nt_1])([nt_2] - [nt]) \leq \left(\frac{[nt_2] - [nt_1]}{n} \right)^2.$$

Si $t_2 - t_1 \geq \frac{1}{n}$ el lado derecho de la desigualdad sería a lo más $4(t_2 - t_1)^2$ y si $t_2 - t_1 < \frac{1}{n}$ entonces t y t_1 o t y t_2 están en un intervalo del tipo $] \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} [$ con lo cual el lado izquierdo sería 0.

Con esto se han probado las tres condiciones del lema 9.0.0.3 y por ello

$$X^n \Rightarrow W$$

donde W es denominado Proceso de Wiener, y cumple con ser un movimiento Browniano. \square

6.3. Propiedades básicas.

En la subsección anterior se probó que podía construirse un movimiento Browniano en el espacio $D([0, T], \mathfrak{R})$, de forma similar se construye uno en el espacio $C([0, \infty[, \mathfrak{R}^d)$. En lo que sigue de la sección $\Omega = C([0, \infty[, \mathfrak{R}^d)$ y $\Gamma_t = \sigma(X_s, s \leq t)$. Se inicia el estudio del movimiento Browniano con la noción de Proceso continuo Gaussiano:

Definición 6.3.0.1. Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in \mathfrak{R}_0^+}$ definido en (Ω, Γ, P) y \mathfrak{R}^d - evaluado es un Proceso Centrado Gaussiano si para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathfrak{R}$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathfrak{R}^d$, $\sum_{i=1}^n \langle \lambda_i, X_{t_i} \rangle$ es una variable gaussiana real y centrada. Además la función matricial $(d \times d)$ con dominio en $(\mathfrak{R}_0^+)^2$, $\Psi(u, v) = E(X_u X_v^T) = (E(X_u^i X_v^j)_{0 \leq i, j \leq d})$ es la función covarianza del proceso.

Observación. $\Psi(u, v) = \Psi^T(v, u)$.

Lema 6.3.0.1. Sea $(X_t)_{\mathfrak{R}_0^+}$ un proceso centrado Gaussiano con función covarianza Ψ . La función $\Psi(\cdot, \cdot)$ determina completamente las distribuciones finito-dimensionales $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in \mathfrak{R}_0^+$.

Proposición 6.3.0.2. Sea B_t $t \geq 0$ un proceso definido en (Ω, Γ, P) con valores en \mathfrak{R}^d y con trayectorias continuas P -cc, entonces:

B_t es un Movimiento Browniano si y solo si es un Proceso Gaussiano centrado con función covarianza $\Psi(u, v) = (u \wedge v)I_{d \times d}$.

Demostración. Para la implicación de ida, dados $n \geq 1$, $0 \leq t_1 < \dots < t_n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathfrak{R}^d$, por la definición del movimiento Browniano se tiene

$$A := \sum_{i=1}^n \langle \lambda_i, B_{t_i} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \lambda_i, \sum_{j=1}^i B_{t_j} - B_{t_{j-1}} \rangle = \sum_{j=1}^n \langle (\sum_{i=j}^n \lambda_i), B_{t_j} - B_{t_{j-1}} \rangle.$$

Como las variables $B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$ son independientes entre si y tienen distribución $N(0, (t_j - t_{j-1})I_{d \times d})$, entonces A es una variable Gaussiana real centrada.

Luego para $0 \leq s \leq t$ se tiene

$$\Psi(s, t) = E(B_s^T B_t) = E(B_s^T B_s) + E(B_s^T (B_t - B_s)) = sI_{d \times d} = (s \wedge t)I_{d \times d}.$$

Para la implicación recíproca sean $n \geq 1$, $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ junto a las variables aleatorias Y_i , $i \leq n$ en un espacio de probabilidad auxiliar, de manera que son independientes entre si y $Y_j \sim N(0, (t_j - t_{j-1})I_{d \times d})$, $i \leq n$. Se define

$$X_j = \sum_{k=1}^j Y_k.$$

Por el argumento al inicio de la demostración se tiene que X_j , $1 \leq j \leq n$ es un proceso Gaussiano centrado, y para $1 \leq i \leq j \leq n$:

$$\begin{aligned}\Psi(i, j) &:= E(X_i^T X_j) = E(X_i^T X_i) + E(X_i^T (X_j - X_i)) \\ &= E\left(\left(\sum_1^i Y_k\right)^T \left(\sum_1^i Y_k\right)\right) = \sum_{k=1}^i E(Y_k^T Y_k) = t_i I_{d \times d}.\end{aligned}$$

También se verifica que $\Psi(i, j) = (t_i \wedge t_j) I_{d \times d}$ para $1 \leq i, j \leq n$. Por el lema 6.3.0.1 se observa que (X_1, \dots, X_n) tiene la misma distribución que $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$. Por ello $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ tiene la misma distribución que $(X_1, X_2 - X_1, \dots, X_n - X_{n-1}) = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$, lo que implica la segunda y tercera condición en la definición del movimiento Browniano. La cuarta condición se cumple por hipótesis y la primera debido a que $E(B_0^T B_0) = 0$. \square

Algunas propiedades:

Invarianza por escalamiento. Si B_t es un Movimiento Browniano \mathfrak{R}^d - evaluado y $\lambda > 0$, entonces $\lambda B_{\frac{t}{\lambda^2}}$ también lo es debido a que si definimos el proceso

$$B_t^\lambda := \lambda B_{\frac{t}{\lambda^2}} \quad (6.1)$$

es evidente que es un proceso gaussiano centrado continuo con función de covarianza:

$$E[(B_s^\lambda)^T B_t^\lambda] = \lambda^2 E[B_{\frac{s}{\lambda^2}}^T B_{\frac{t}{\lambda^2}}] = \lambda^2 \left(\frac{s}{\lambda^2} \wedge \frac{t}{\lambda^2}\right) I_{d \times d} = (s \wedge t) I_{d \times d}.$$

Invarianza por inversión del tiempo. Si B_t es un Movimiento Browniano \mathfrak{R}^d - evaluado y se define $\beta_s = 0$, $\beta_s = s B_{\frac{1}{s}}$ $s > 0$, entonces β_s $s \geq 0$ es también un Movimiento Browniano. Para esto primero se demuestra que el proceso

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_t := t B_{\frac{1}{t}} \quad t > 0 \quad (6.2)$$

es un proceso gaussiano centrado con matriz de covarianza $E[\beta_s^T \beta_t] = (s \wedge t) I_{d \times d}$. Lo que queda es mostrar la continuidad de los caminos para $t = 0$. Para tal fin primero se observa que los procesos $(B_t)_{t \geq 0}$ y $(\beta_t)_{t \geq 0}$ tiene la misma distribución \mathcal{P} en $(C(\mathfrak{R}^+, \mathfrak{R}^d), \sigma(X_u : u > 0))$ (Las distribuciones finito dimensionales coinciden y se aplica Dynkin). También

$$\{\lim_{u \rightarrow 0} X_u = 0\} = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{u \in \mathbb{Q} \cap]0, \frac{1}{m}[} \{|X_u| \leq 0\} \in \sigma(X_u : u > 0).$$

Con lo cual:

$$P(\lim_{u \rightarrow 0} \beta_u = 0) = \mathcal{P}(\lim_{u \rightarrow 0} X_u = 0) = P(\lim_{u \rightarrow 0} B_u = 0) = 1.$$

6.4. Propiedades simple y fuerte de Markov.

En esta subsección se estudia al movimiento Browniano como un proceso continuo de Markov. Sea la función $g_x : C(\mathfrak{R}_0^+, \mathfrak{R}^d) \rightarrow C(\mathfrak{R}_0^+, \mathfrak{R}^d)$ definido como $g_x(\omega(\cdot)) = \omega(\cdot) + x$ y $W_x = W g_x^{-1}$.

Teorema 6.4.0.1. (*Propiedad simple de Markov*) Si $Y \in b\Gamma$, $s \geq 0$ y $x \in \mathfrak{R}^d$ entonces

$$E_x[Y \circ \theta_s | \Gamma_s^+] = E_{X_s}[Y] \quad W_x - c.c$$

Bajo W_x , $(B_{s+u} - B_s)_{u \geq 0}$ es un Movimiento Browniano independiente de Γ_s^+ .

Demostración. **[Paso 1]** En primer lugar se prueba que si $Y \in b\Gamma$ entonces la función $y \rightarrow E_y Y$ pertenece a $b\mathcal{B}(\mathfrak{R}^d)$.

Para tal fin se parte del caso más simple $Y = \mathbb{1}_{X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} \in A_2, \dots, X_{t_n} \in A_n}$ con $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ y $A_i \in \mathcal{B}(\mathfrak{R}^d)$ con lo cual:

$$E_y(\mathbb{1}_{X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} \in A_2, \dots, X_{t_n} \in A_n}) = E_0(\mathbb{1}_{X_{t_1+y} \in A_1, X_{t_2+y} \in A_2, \dots, X_{t_n+y} \in A_n}).$$

Por el lema de Dynkin se puede generalizar para funciones $Y = 1_A$ con $A \in \Gamma$, luego para funciones simples y finalmente para $Y \in b\Gamma$ en general.

[Paso 2] Sean $0 = u_0 < u_1 < \dots < u_n = s$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$ y f, g medibles y acotados, entonces

$$\begin{aligned} E_x[f(X_{u_0}, X_{u_1}, \dots, X_{u_n})g(X_{t_0+s}, X_{t_1+s}, \dots, X_{t_k+s})] &= \\ &= \int_{(\mathfrak{R}^d)^{n+k}} f(x, x_1, \dots, x_n)g(x_n, \dots, x_{n+k}) \prod_{i=1}^n ((2\pi(u_i - u_{i-1}))^{-\frac{d}{2}}) \times \\ &\quad \prod_{j=1}^k ((2\pi(t_j - t_{j-1}))^{-\frac{d}{2}}) e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - x_{i-1}|^2}{u_i - u_{i-1}} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \frac{|x_j - x_{j-1}|^2}{t_j - t_{j-1}}} \\ &= \int_{(\mathfrak{R}^d)^n} f(x, x_1, \dots, x_n) E_{x_n}(g(X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_k})) \prod_{i=1}^n ((2\pi(u_i - u_{i-1}))^{-\frac{d}{2}}) \times \\ &\quad e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - x_{i-1}|^2}{u_i - u_{i-1}}} \\ &= E_x[f(X_{u_0}, X_{u_1}, \dots, X_{u_n}) E_{X_s}(g(X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_k}))]. \end{aligned}$$

Por el lema de Dynkin se puede generalizar lo anterior para $A \in \Gamma_s$

$$E_x[\mathbb{1}_A g(X_{t_0+s}, X_{t_1+s}, \dots, X_{t_k+s})] = E_x[\mathbb{1}_A E_{X_s}(g(X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_k}))]. \quad (6.3)$$

[Paso 3] Si se escoge g continua y acotada, la función $y \mapsto E_y(g(X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_k}))$ con $y \in \mathfrak{R}^d$ es acotada y continua por el teorema de convergencia dominada.

Dado $\epsilon > 0$, si se reemplaza s por $s + \epsilon$ en 6.3 y $A \in \Gamma_s^+ \subseteq \Gamma_{s+\epsilon}$ y posteriormente se hace $\epsilon \downarrow 0$ entonces por el teorema de convergencia dominada se verifica 6.3 para $A \in \Gamma_s^+$. Por aproximación se prueba que 6.3 se verifica para funciones $g = \mathbb{1}_{x_0 \in K_0, \dots, x_k \in K_k}$ con K_i cerrados en \mathfrak{R}^d . Debido al lema de Dynkin se obtiene para $Y = \mathbb{1}_B$, $B \in \Gamma$

$$E_x(\mathbb{1}_B Y \circ \theta_s) = E_x(\mathbb{1}_B E_{X_s}(Y))$$

que se generaliza para funciones simples y $Y \in b\Gamma$ en general. \square

Por lo tanto el movimiento Browniano en un proceso de Markov.

Corolario. (*Ley 0-1 de Blumenthal*) Para todo $x \in \mathfrak{R}^d$ y $A \in \Gamma_0^+$ se tiene

$$W_x(A) \in \{0, 1\}. \quad (6.4)$$

Demostración. Como $A \in \Gamma_0^+$:

$$E_x(\mathbb{1}_A | \Gamma_0^+) = \mathbb{1}_A.$$

Debido a que $\mathbb{1}_A \circ \theta_0 = \mathbb{1}_A$ y a $W_x(X_0 = x) = 1$

$$E_x(\mathbb{1}_A | \Gamma_0^+) = E_{X_0}(E_x(\mathbb{1}_A)) = W_x(A) \quad W_x - c.c.$$

\square

Ejemplo 6.4.1. En el caso $d = 1$ se define $H_+ := \inf\{s > 0 : X_s > 0\}$ y se verifica que $W - c.c H_+ = 0$:

$$\{H_+ = 0\} = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{r \in [0, \frac{1}{n}] \cap \mathbb{Q}} \{X_r > 0\} \in \Gamma_0^+$$

y para $t > 0$

$$W(H_+ \leq t) \geq W(X_t > 0) = \frac{1}{2}.$$

Si $t \downarrow 0$ se tiene

$$W(H_+ = 0) \geq \frac{1}{2}.$$

Por el corolario anterior se concluye que $W(H_+ = 0) = 1$.

De manera similar a lo hecho para procesos de Feller, se asociará al movimiento Browniano un semigrupo de transición, que lo describe completamente:

Definición 6.4.0.1. Definimos el Semigrupo de Transición Browniano $(R_t)_{t \geq 0}$ como:

$$R_t f(x) = E_x f(X_t) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-\frac{|y-x|^2}{2t}} dy$$

con $x \in \mathbb{R}^d$ y $f \in b\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Proposición 6.4.0.2. Sea $(B_t)_{t \geq 0}$ un proceso estocástico \mathbb{R}^d -evaluado definido en (Ω, Γ, P) con trayectorias continuas P -c.c y sea $G_t = \sigma(B_s, s \leq t)$, entonces $(B_t, t \geq 0)$ es un Movimiento Browniano si y solo si $B_0 = 0$ P -c.c y $E[f(B_{t+s})|G_s] = R_t f(B_s)$ P -c.c para todo $f \in b\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ y $t, s \geq 0$.

Teorema 6.4.0.3. (Propiedad fuerte de Markov) Sea T un $(\Gamma_t^+)_{t \geq 0}$ -tiempo de parada, $Y \in b\Gamma$, $x \in \mathbb{R}^d$, entonces.

$$E_x[Y \circ \theta_T | \Gamma_T^+] = E_{X_T}(Y)$$

en $\{T < \infty\}$ W_x -c.c.

Demostración. Paso 1 En primer lugar se prueba que

$$\theta_T : (\{T < \infty\}, \Gamma \cap \{T < \infty\}) \rightarrow (C, \Gamma)$$

es medible. Para ello es suficiente probar que para todo $s \geq 0$ la función

$$X_s \circ \theta_T : (\{T < \infty\}, \Gamma \cap \{T < \infty\}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)).$$

es medible, lo cual se obtiene de:

$$X_s \circ \theta_T(\omega) = X_{s+T(\omega)}(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \geq 1} X_{s+\frac{k}{n}}(\omega) \mathbb{1}_{\frac{k-1}{n} \leq T(\omega) < \frac{k}{n}}.$$

Paso 2 Se necesita probar que la variable

$$X_T : (\{T < \infty\}, \Gamma_T^+ \cap \{T < \infty\}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$$

es medible. Esto es cierto debido a que el proceso $X(t, \omega)$ es continuo a derecha en t y por ello progresivamente medible.

Paso 3 Si se asume que T toma valores en un subconjunto contable de $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Se denota con $\{a_n\}$ a dicho conjunto excluyendo el infinito. Entonces para $A \in \Gamma_T^+ \cap \{T < \infty\}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{0_k}$ y $f \in b\mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^{k+1})$:

$$E_x[f(X_{t_0}, \dots, X_{t_k}) \circ \theta_T \mathbb{1}_A] = E_x[f(X_{T+t_0}, \dots, X_{T+t_k}) \mathbb{1}_A] =$$

$$\sum_n E_x[f(X_{a_n+t_0}, \dots, X_{a_n+t_k}) \mathbb{1}_{A \cap \{T=a_n\}}].$$

Por la propiedad simple de Markov lo anterior es igual a

$$\sum_n E_x[E_{X_{a_n}}(f(X_{t_0}, \dots, X_{t_k})) \mathbb{1}_{A \cap \{T=a_n\}}] = E_x[E_{X_T}(f(X_{t_0}, \dots, X_{t_k})) \mathbb{1}_A].$$

Despues usando el lema de Dynkin y aproximación por funciones simples se concluye que para $Y \in b\Gamma$

$$E_x(Y \circ \theta_T \mathbb{1}_A) = E_x(E_{X_T}(Y) \mathbb{1}_A).$$

Paso 4 Para un tiempo de parada en general T se define la sucesión variables

$$T_n = \sum_{k \geq 1} \frac{k+1}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq T < \frac{k+1}{2^n}\}}.$$

Claramente las variables anteriores cumplen $T_n \geq T$ y $T_n \downarrow T$, y debido a que para $k, n \geq 0$

$$\{T_n \leq \frac{k+1}{2^n}\} = \{T < \frac{k+1}{2^n}\} \in \Gamma_{\frac{k+1}{2^n}}^+$$

asi como para $t \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$

$$\{T_n \leq t\} = \{T_n \leq \frac{k}{2^n}\} \in \Gamma_{\frac{k}{2^n}}^+ \subseteq \Gamma_t^+$$

son también (Γ_t^+) - tiempos de parada.

Como $T \leq T_n$ se tiene $\Gamma_T^+ \subseteq \Gamma_{T_n}^+$, también es claro que $\{T < \infty\} = \{T_n < \infty\}$, y por ello dado $A \in \Gamma_T^+ \cap \{T < \infty\}$ entonces $A \in \Gamma_{T_n}^+ \cap \{T_n < \infty\}$. Como T_n toma valores en un conjunto contable, para toda $f \in b\Gamma$:

$$E_x(Y \circ \theta_{T_n} \mathbb{1}_A) = E_x(E_{X_{T_n}}(Y) \mathbb{1}_A)$$

Sea f una función continua y acotada con dominio $(\mathfrak{R}^d)^{k+1}$, entonces $\forall n \geq 0$

$$E_x[f(X_{T_n+t_0}, \dots, X_{T_n+t_k}) \mathbb{1}_A] = E_x[E_{X_{T_n}}(f(X_{t_0}, \dots, X_{t_k})) \mathbb{1}_A].$$

En la prueba de la propiedad simple de Markov se mostró que la función $y \mapsto E_y(f(X_{t_0}, \dots, X_{t_k}))$ es acotada y continua, por ello haciendo $n \rightarrow \infty$

$$E_x[f(X_{T+t_0}, \dots, X_{T+t_k}) \mathbb{1}_A] = E_x[E_{X_T}(f(X_{t_0}, \dots, X_{t_k})) \mathbb{1}_A].$$

Mediante aproximaciones se prueba que lo anterior tambien se cumple para funciones del tipo $f(x_0, \dots, x_k) = \prod_{i=0}^k \mathbb{1}_{x_i \in K_i}$ con K_i cerrados en \mathfrak{R}^d . Por el Lema de Dynkin y aproximación por funciones simples se extiende

$$E_x(Y \circ \theta_{T_n} \mathbb{1}_A) = E_x(E_{X_{T_n}}(Y) \mathbb{1}_A)$$

para todo $Y \in b\Gamma$ y $A \in \Gamma_T^+ \cap \{T < \infty\}$. □

Entre las aplicaciones de la propiedad fuerte de Markov se encuentra el siguiente corolario:

Corolario. (*El principio de reflexión*). Sea $d = 1, a > 0$ y $t \leq a$, entonces se cumplen:

$$W(X_t \leq b, \sup_{s \leq t} X_s \geq a) = W(X_t \geq 2a - b) \text{ para } t > 0.$$

$$W(\sup_{s \leq t} X_s \geq a) = 2W(X_t \geq a).$$

Demostración. Para la primera igualdad, sea la variable aleatoria $H_a = \inf\{s \geq 0 : X_s = a\}$, que es un (Γ_t^+) tiempo de parada.

$$\begin{aligned} W(X_t \leq b, \sup_{s \leq t} X_s \geq a) &= W(H_a \leq t, X_t \leq b) \\ &= W(\{\omega : H_a(\omega) \leq t, X_{(t-H_a(\omega))^+}(\theta_{H_a(\omega)}(\omega)) \leq b\}). \end{aligned}$$

Aplicando el lema de [6]p.39. para $T = H_a$ y $h(\omega_1, \omega_2) = \mathbb{1}_{X_{(t-H_a(\omega_2))^+}(\omega_1) \leq b}$ que es $\Gamma \otimes \Gamma_{H_a}^+$ -medible se tiene

$$\begin{aligned} W(H_a \leq t, X_t \leq b) &= E(H_a \leq t, W'_{X_{H_a}}(X'_{(t-H_a)^+} \leq b)) \\ &= E(H_a \leq t, W'_{X_{H_a}}(X'_{(t-H_a)^+} \geq 2a - b)) \\ &= E(H_a \leq t, X_t \geq 2a - b) = W(X_t \geq 2a - b). \end{aligned}$$

Para la segunda igualdad

$$\begin{aligned} W(\sup_{s \leq t} X_s \geq a) &= W(H_a \leq t) \\ &= W(H_a \leq t, X_t \geq a) + W(H_a \leq t, X_t \leq a) \\ &= W(X_t \geq a) + W(H_a \leq t, X_t \leq a) \\ &= W(X_t \geq a) + W(X_t \geq a) = 2W(X_t \geq a). \end{aligned}$$

□

6.5. Generadores infinitesimales.

Proposición 6.5.0.1. *Para el Movimiento Browniano unidimensional el espacio \mathcal{D}_A coincide con $C_0^2(E)$ y*

$$Af = \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dx^2}.$$

Demostración. Por la proposición 3.3.0.3 se sabe que $\mathcal{D}_A = U_p(C_0)$ y para todo $p > 0$ se cumple $AU_p f = pU_p f - f$.

Si $f \in C_0$ entonces $U_p f \in C_0^2$ y $pU_p f - f = \frac{1}{2}(U_p f)''$. □

Proposición 6.5.0.2. Para $d \geq 2$ el generador infinitesimal del Movimiento Browniano es igual a $\frac{1}{2}\Delta$ con dominio C_0^2 .

Demostración. Para $f \in C_0$ se puede expresar

$$P_t f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|z|^2}{2t}} f(x + z\sqrt{t}) dz.$$

Si $f \in C_0^2$, por la expansión de Taylor se tiene

$$P_t f(x) = f(x) + \frac{1}{2}t\Delta f(x) + \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \frac{t}{2} J(t, x)$$

donde

$$J(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|z|^2}{2t}} \left[\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\theta) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right] z_i z_j dz$$

con θ un punto del segmento $[x, x + z\sqrt{t}]$.

Sea $F(x, z, t) = \max_{i,j} \left| \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\theta) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right|$ entonces para todo $r > 0$:

$$|J(t, x)| \leq \int_{|z| \leq r} F(x, z, t) e^{-\frac{|z|^2}{2t}} \sum_{i,j=1}^d |z_i| |z_j| dz + \tag{6.5}$$

$$2 \int_{|z| > r} \max \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right| e^{-\frac{|z|^2}{2t}} \sum_{i,j=1}^d |z_i| |z_j| dz.$$

Como las segundas derivadas son uniformemente continuas cuando hacemos tender t a 0 se observa

$$\limsup_{t \downarrow 0} \sup_{\mathbb{R}^d} F(x, z, t) = 0$$

por lo cual el primer término a la derecha de la desigualdad 6.5 converge a 0.

Para el segundo término se puede elegir un r suficientemente grande de manera que también converja a 0.

Por lo anterior

$$\lim_{t \downarrow 0} \left| \frac{P_t f - f}{t} - \frac{1}{2} \Delta f \right| = 0.$$

□

Capítulo 7

Condiciones para verificar el problema de submartingala.

Sea G una región de \mathfrak{R}^d con borde ∂G y clausura \overline{G} al que se asocia una función $\phi : \mathfrak{R}^d \rightarrow \mathfrak{R}$ en $C_b^2(\mathfrak{R}^d)$ tal que

$$\begin{aligned} G &= \{x : \phi(x) > 0\}, \\ \partial G &= \{x : \phi(x) = 0\}, \\ \|\nabla\phi(x)\| &\geq 1 \text{ en } \partial G. \end{aligned}$$

Para cada $h > 0$ damos un proceso de Markov con espacio de estados \overline{G} cuyos saltos se dan en tiempos múltiplos de h y con transiciones de probabilidad $\Pi_j^h(x, dy)$ en el tiempo jh .

Sea P_x^h la probabilidad, en el espacio $D([0, T], \overline{G})$, asociada a la cadena de markov que inicia en $x \in \overline{G}$. El proceso P_x^h es definido por las relaciones:

1. $P_x^h(X_0 = x) = 1$,
2. $P_x^h(X_t = X_{jh} \text{ para } jh \leq t < (j+1)h) = 1$,
3. $P_x^h(X_{(j+1)h} \in A | \Gamma_{jh}) = \Pi_j^h(X_{jh}, A)$.

Con base en los coeficientes de difusión a , de arrastre b y de error Δ que se mostró en la sección 4, se definen los siguientes coeficientes para el proceso P_x^h :

Definición 7.0.0.1. Se definen los siguientes coeficientes

$$\begin{aligned} \Delta^h(jh, x) &= \frac{1}{h} \int \|y - x\|^{2+\alpha} \Pi_j^h(x, dy) \quad \alpha > 0. \\ a^h(jh, x) &= \frac{1}{h} \int (y - x) \otimes (y - x) \Pi_j^h(x, dy) \\ b^h(jh, x) &= \frac{1}{h} \int (y - x) \Pi_j^h(x, dy). \end{aligned}$$

Extendemos la definición anterior para cualquier tiempo $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}\Delta^h(t, x) &= \frac{1}{h} \int \|y - x\|^{2+\alpha} \Pi_j^h(x, dy) \quad \text{para } jh \leq t < (j+1)h. \\ a^h(t, x) &= \frac{1}{h} \int (y - x) \otimes (y - x) \Pi_j^h(x, dy) \quad \text{para } jh \leq t < (j+1)h. \\ b^h(jh, x) &= \frac{1}{h} \int (y - x) \Pi_j^h(x, dy) \quad \text{para } jh \leq t < (j+1)h.\end{aligned}$$

El teorema que sigue es fundamental porque demuestra que asumiendo condiciones para los coeficientes a^h, b^h y Δ^h , la colección de procesos de Markov $\{P^h\}_{h>0}$ es relativamente compacta, es decir existe un proceso que es límite débil de una subsucesión de $\{P^h\}_{h>0}$:

Teorema 7.0.0.1. *Si se verifican las condiciones:*

1. Sea $\sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{x \in \bar{G}} \Delta^h(t, x) = \Delta(h)$. Si $h \rightarrow 0$ entonces $\Delta(h) \rightarrow 0$,
2. Existen constantes $M < \infty$ y $c > 0$ tal que $\|b^h(t, x)\| > M \rightarrow \langle \nabla \phi(x), b^h(t, x) \rangle \geq c \|b^h(t, x)\|$,
3. Para todo $\delta > 0$ existe una constante $M_\delta < \infty$ tal que $\|b^h(t, x)\| > M_\delta \rightarrow \phi(x) < \delta$,
4. Existe una constante $M < \infty$ tal que $\sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{x \in \bar{G}} a^h(t, x) \leq M$.

Entonces para cualquier compacto $K \subset \bar{G}$ la colección $\{P_x^h, h > 0, x \in \bar{G}\}$ es relativamente compacta. Además cualquier límite débil está concentrado en $C([0, T], \bar{G}) \subset D([0, T], \bar{G})$.

Demostración. Para esta demostración se usan algunas lemas previos que introducen definiciones y propiedades, que se mencionan brevemente en la presente demostración. Para una mejor comprensión se puede ver [4]p.198-200.

Se define

$$Y_{kh} = X_{kh} - \sum_{l=0}^{k-1} hb^h(lh, X_{lh}),$$

que resulta ser una martingala:

$$\begin{aligned}E[X_{(k+1)h} - X_{kh} - hb^h(kh, X_{kh}) | \Gamma_{kh}] &= \\ \int y \Pi_k^h(X_{kh}, dy) - X_{kh} - \int (y - X_{kh}) \Pi_k^h(X_{kh}, dy) &= 0.\end{aligned}$$

Por ello

$$E^{P_z^h} [\|Y_{kh} - Y_{rh}\|^2 | \Gamma_{rh}] = \sum_{l=r}^k E^{P_z^h} [\|Y_{(l+1)h} - Y_{lh}\|^2 | \Gamma_{rh}] \leq$$

$$\sum_{l=r}^k E^{P_z^{P^h}} [\|X_{(l+1)h} - X_{lh}\|^2 | \Gamma_{rh}] \leq (k-r)Mh.$$

Por lo cual

$$E^{P_z^{P^h}} [\|Y_{kh} - Y_{rh}\| | \Gamma_{rh}] \leq [M(k-r)]^{\frac{1}{2}}.$$

De lo anterior y el lema 6.1([4]) se obtiene

$$E^{P_z^{P^h}} [\|X_{kh} - X_{rh}\| | \Gamma_{rh}] \leq [M(k-r)h]^{\frac{1}{2}} + E^{P_z^{P^h}} [h \sum_{l=r}^{k-1} \|b^h(lh, X_{lh})\| | \Gamma_{rh}] \leq$$

$$[M(k-r)h]^{\frac{1}{2}} + [A(k-r)h] + AE^{P_z^{P^h}} [\phi(X_{kh}) - \phi(X_{rh}) | \Gamma_{rh}].$$

Con lema 6.2([4]) se hace la estimación

$$E^{P_z^{P^h}} (\phi(X_{kh}) | \Gamma_{rh}) \leq [E^{P_z^{P^h}} (\phi^2(X_{kh}) | \Gamma_{rh})]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$[\phi^2(X_{rh}) + M_\delta(k-r)h + \delta C]^{\frac{1}{2}} \leq \phi(X_{rh}) + M_\delta^{\frac{1}{2}}((k-r)h)^{\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2}}.$$

En consecuencia para cualquier $\delta > 0$ existe una constante C_δ tal que

$$E^{P_z^{P^h}} [\|X_{kh} - X_{rh}\| | \Gamma_{rh}] \leq \delta + C_\delta((k-r)h)^{\frac{1}{2}}.$$

Según el teorema 7.5 del apéndice([4]), el resultado anterior implica la compacidad relativa en $D([0, T], \overline{G})$.

Finalmente, debido a

$$\begin{aligned} P_z^{P^h} \left[\sup_{0 \leq jh \leq T} |X_{(j+1)h} - X_{jh}| \geq \epsilon \right] &\leq \left(\lfloor \frac{T}{h} \rfloor + 1 \right) \max_{0 \leq jh \leq T} P_z^{P^h} (|X_{(j+1)h} - X_{jh}| \geq \epsilon) \\ &\leq \left(\lfloor \frac{T}{h} \rfloor + 1 \right) \max_{0 \leq jh \leq T} \frac{1}{\epsilon^{2+\rho}} \int |X_{(j+1)h} - X_{jh}|^{2+\rho} dP \\ &= \left(\lfloor \frac{T}{h} \rfloor + 1 \right) \max_{0 \leq jh \leq T} \frac{1}{\epsilon^{2+\rho}} E \left[\int \Pi_j^h(X_{jh}, dr) |y - X_{jh}|^{2+\rho} \right] \\ &= \frac{1}{\epsilon^{2+\rho}} \left(\lfloor \frac{T}{h} \rfloor + 1 \right) h E[\Delta^h(jh, X_{jh})] \\ &\leq h \frac{1}{\epsilon^{2+\rho}} \left(\lfloor \frac{T}{h} \rfloor + 1 \right) \Delta(h). \end{aligned}$$

que tiende a 0 cuando $h \rightarrow 0$, lo prueba que cualquier límite débil está concentrado en $C([0, T], \overline{G})$. \square

Proposición 7.0.0.2. Sea $f \in C_b^{1,2}([0, T] \times \overline{G})$. Si se define

$$F_j^h(x) = \int [f((j+1)h, y) - f(jh, x)] \Pi_j^h(x, dy) - hf_t(jh, x) - h \langle b^h(jh, x), \nabla f(jh, x) \rangle - \frac{1}{2} h \text{Tr}[a^h(jh, x) D^2 f(jh, x)] \quad (7.1)$$

entonces se cumple que para $K \subseteq \subseteq G$

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \sup_{z \in K} E^{P_z^h} \left[\sum_{0 \leq jh \leq T} |F_j^h(X_{jh})| \right] = 0. \quad (7.2)$$

Demostración. Ver [4]p.201. En dicha prueba es evidente que si se parte de cadenas de Markov homogéneas (Π independiente de j) no es necesario trabajar con funciones en $C_b^{1,2}([0, T] \times \overline{G})$, basta con $f \in C_b^2(\overline{G})$. \square

En la sección 5 se mostraron dos proposiciones, 5.2.0.2 y 5.2.0.3, que probaban que con algunas condiciones en los coeficientes a, b, γ y ρ se podía asegurar la existencia y unicidad de soluciones del problema de submartingala. Pero el problema que se trabaja en la sección 8 no satisface los requisitos de dichas proposiciones, principalmente en el borde ∂G . Es por ello que se necesita un teorema más potente que los anteriores pero a la vez más complejo que asegure la solución del problema:

Proposición 7.0.0.3. Si se cumplen las condiciones

1. $a^h \rightarrow a$ y $b^h \rightarrow b$ uniformemente en compactos de $[0, T] \times G$, con a y b coeficientes continuos de difusión y arrastre ,
2. Existen una función continua acotada $\rho(t, x) \geq 0$ y una función vectorial continua $\gamma(t, x)$ en $[0, T] \times \partial G$ tal que $\langle \gamma(t, y), \nabla \phi(y) \rangle = 1$. Sean $J_0 = \{(t, y) : \rho(t, y) = 0\}$, $J_1 = \{(t, y) : \rho(t, y) > 0\}$, ρ y γ están relacionadas con a^h y b^h de la forma:
 - 2.1. Dado $(t, y) \in J_1$ y $\epsilon > 0$ existen $h_0, \delta_0 > 0$ tal que si $|x - y| < \delta_0$, $|s - t| < \delta_0$, $h < h_0$ y $\langle \nabla \phi(x), a^h(s, x) \nabla \phi(x) \rangle < \delta_0 \rightarrow \|a^h(s, x)\| < \epsilon$ y $\|b^h(s, x) - \frac{\gamma(t, y)}{\rho(t, y)}\| < \epsilon$,
 - 2.2. Dado $(t, y) \in J_1$ existen $\delta_0 > 0$ $M_0 < \infty$ tal que si $|x - y| < \delta_0$, $|s - t| < \delta_0 \rightarrow \|b^h(s, x)\| \leq M_0 \forall h$,
 - 2.3. Dados $(t, y) \in J_0$ y $M < \infty$ existen $h_0, \delta_0 > 0$ tal que si $|x - y| < \delta_0$, $|s - t| < \delta_0$, $h < h_0$ y $\langle \nabla \phi(x), a^h(s, x) \nabla \phi(x) \rangle < \delta_0 \rightarrow \|b^h(s, x)\| \geq M$,
 - 2.4. Dados $(t, y) \in J_0$ y $\epsilon > 0$ existen $h_0, \delta_0 > 0$ y $N_0 < \infty$ de tal manera que si $|x - y| < \delta_0$, $|s - t| < \delta_0$, $h < h_0$ y $\|b^h(s, x)\| > N_0 \rightarrow \left\| \frac{b^h(s, x)}{\langle b^h(s, x), \nabla \phi(x) \rangle} - \gamma(t, y) \right\| < \epsilon$

y si además $h_n \rightarrow 0$, $x_n \rightarrow x$ y $P_{x_n}^{h_n} \Rightarrow P$. Entonces P tiene las siguientes propiedades

1. $P(X_0 = x) = 1$

2. Para toda función f en $C_0^{1,2}([0, T] \times \bar{G})$ con $\rho \frac{\partial f}{\partial t} + \langle \gamma, \nabla f \rangle \geq 0$ en $[0, T] \times \partial G$, la expresión $f(t, X_t) - \int_0^t (f_s + L_s f)(s, X_s) \mathbb{1}_G(X_s) ds$ es una submartingala, donde $L_s f = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Demostración. La prueba de esta proposición requiere varios lemas previos que involucran definiciones y propiedades, que en la presente demostración se expondrán brevemente. La proposición anterior es usada en la demostración de la presente en el lema 6.4[4]p.205. Allí se muestra que para procesos de Markov homogéneos se puede restringir el conjunto de funciones a $C_b^2(\bar{G})$.

Previamente, dado $f \in C_0^{1,2}([0, T] \times \bar{G})$, se definen las funciones

$$k_n(s, x) = f_t(s, x) + \frac{1}{2} Tr(a_n(s, x) D^2 f(s, x)) + \langle b_n(s, x), \nabla f(s, x) \rangle,$$

$$k(s, x) = f_t(s, x) + \frac{1}{2} Tr(a(s, x) D^2 f(s, x)) + \langle b(s, x), \nabla f(s, x) \rangle.$$

. Además si Φ es una función acotada, continua y no negativa en $D([0, T], \bar{G})$ se definen las medidas Q_n y Q como

$$dQ_n = \Phi dP_n,$$

$$dQ = \Phi dP.$$

Con lo anterior, se definen:

$$Y(t) = \int_0^t (f_s + L_s f)(s, X_s) \mathbb{1}_G(X_s) ds = \int_0^t k(s, X_s) \mathbb{1}_G(X_s) ds,$$

$$Y_n(t) = h_n \sum_{0 \leq j h_n < t} k_n(j h_n, X_{j h_n}),$$

y

$$Z_n(t) = \sum_{0 \leq j h_n < t} \int [f((j+1)h_n, y) - f(jh_n, X_{jh_n})] \Pi_j^{h_n}(X_{jh_n}, dy).$$

Respecto a $(\Gamma_{kh_n})_{k \geq 0}$ y P_n ,

$$f(kh_n, X_{kh_n}) - Z_n(kh_n)$$

es una martingala:

$$\begin{aligned}
& E \left[f((k+1)h_n, X_{(k+1)h_n}) - f(kh_n, X_{kh_n}) - \left\{ \int (f((k+1)h_n, y) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - f(kh_n, X_{kh_n})) \Pi_k^{h_n}(X_{kh_n}, dy) \right\} | \Gamma_{kh_n} \right] \\
&= E[f((k+1)h_n, X_{(k+1)h_n}) | \Gamma_{kh_n}] \\
& \quad - E \left[\int \Pi_k^{h_n}(X_{kh_n}, dy) f((k+1)h_n, X_{kh_n}) | \Gamma_{kh_n} \right] \\
&= E[f((k+1)h_n, X_{(k+1)h_n}) | \Gamma_{kh_n}] \\
& \quad - E[f((k+1)h_n, X_{(k+1)h_n}) | \Gamma_{kh_n}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Se elije un t_0 tal que $0 \leq t_0 < T$. Sea Φ una función no negativa, continua y acotada en $D([0, T], \overline{G})$ que es Γ_{t_0} medible. Sea t un elemento arbitrario de $]t_0, T]$. Existen sucesiones $(r_n), (q_n)$ tales que $r_n h_n \rightarrow t_0$ por la derecha y $q_n h_n \rightarrow t$. De lo visto previamente se obtiene

$$\int [f(r_n h_n, X_{r_n h_n}) - Z_n(r_n h_n) - f(q_n h_n, X_{q_n h_n}) + Z_n(q_n h_n)] \Phi dP_n = 0$$

para todo n .

Por la proposición 7.0.0.2 se sabe que

$$E^{P_n} \sup_{0 \leq t \leq T} |Z_n(t) - Y_n(t)| \rightarrow 0 \text{ cuando } n. \rightarrow \infty$$

También se cumple

$$\begin{aligned}
f(r_n h_n, X_{r_n h_n}) &\rightarrow f(t_0, X_{t_0}) \text{ y} \\
f(q_n h_n, X_{q_n h_n}) &\rightarrow f(t, X_t).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
E^P [\{f(t, X_t) - f(t_0, X_{t_0})\} \Phi] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int [Z_n(t) - Z_n(t_0)] \Phi dP_n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int [Z_n(t) - Z_n(t_0)] dQ_n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \int_{\overline{G}} k_n(s, x) d\mu_n(s, x) \\
&\geq \int_{t_0}^t \int_G k(s, x) d\mu(s, x) \\
&= E^Q \left[\int_{t_0}^t (f_s + L_s f)(s, X_s) \mathbb{1}_G(X_s) ds \right] \\
&= E^P \left[\Phi \int_{t_0}^t (f_s + L_s f)(s, X_s) \mathbb{1}_G(X_s) ds \right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$E^P[f(t, X_t) - f(t_0, X_{t_0}) - \int_{t_0}^t (f_s + L_s f)(s, X_s) \mathbb{1}_G(X_s) ds] \geq 0.$$

□

Observación. Lo importante de las funciones γ y ρ es su cociente $\frac{\gamma}{\rho}$ debido a que una de las condiciones que las relaciona es

$$\rho \frac{\partial f}{\partial t} + \langle \gamma, \nabla f \rangle \geq 0,$$

que guarda semejanza con la ecuación de convección-difusión:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\Delta f - \langle \vec{v}, \nabla f \rangle$$

con D el coeficiente de difusividad y \vec{v} el campo de velocidades. Por ello $\frac{\gamma}{\rho}$ actúa como un campo de velocidades en la frontera.

Capítulo 8

El Movimiento Browniano con reflexión como límite débil.

8.1. Construcción de Caminos Aleatorios con Reflexión.

Sea un camino aleatorio η^n con transiciones en tiempos enteros y espacio de estados $\{0, 1, \dots, n\}$, definido de manera que si el camino está en un estado i del subespacio $\{1, 2, \dots, n-1\}$ entonces podrá saltar a los estados $i-1$ e $i+1$ con probabilidad $\frac{1}{2}$ en ambos casos, si está en el estado 0 podrá saltar al estado 1 con probabilidad 1 y si se encuentra en n saltará al estado $n-1$ también con probabilidad 1. A partir de este camino aleatorio se construye un proceso

$$X^n : (\Omega, \Gamma, Q) \rightarrow D([0, T], \{0, 1, 2, \dots, n\}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (8.1)$$

mediante la relación

$$X_t^n = \eta_k^n \text{ si } k \leq t < k+1, \quad \forall k \geq 0,$$

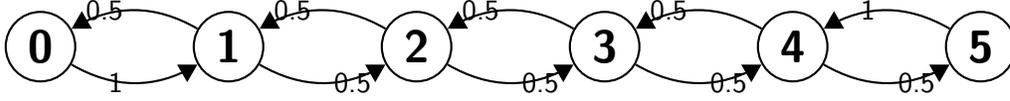
con distribuciones

$$P^n = Q(X^n)^{-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (8.2)$$

Otra forma de expresar el proceso es

$$X_t^n : (\Omega, \Gamma, Q) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}. \quad (8.3)$$

Para comprender mejor lo anterior se hace la siguiente representación gráfica de las transiciones del proceso X^5 :



En general, la matriz de transición de un proceso X^n es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y su generador actua en $f : \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow \mathfrak{R}$ como:

$$(L_n f)(j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(f(j+1) - f(j)) + \frac{1}{2}(f(j-1) - f(j)) & \text{si } j \in \{1, 2, \dots, n-1\}; \\ f(1) - f(0) & \text{si } j = 0; \\ f(n-1) - f(n) & \text{si } j = n. \end{cases}$$

Haciendo el reescalamiento del proceso anterior obtenemos

$$Y_t^n = \frac{X_t^n}{n}$$

con espacio de estados $E_n = \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$.

Si además se reescala el tiempo en el factor n^2 se tendrá el proceso

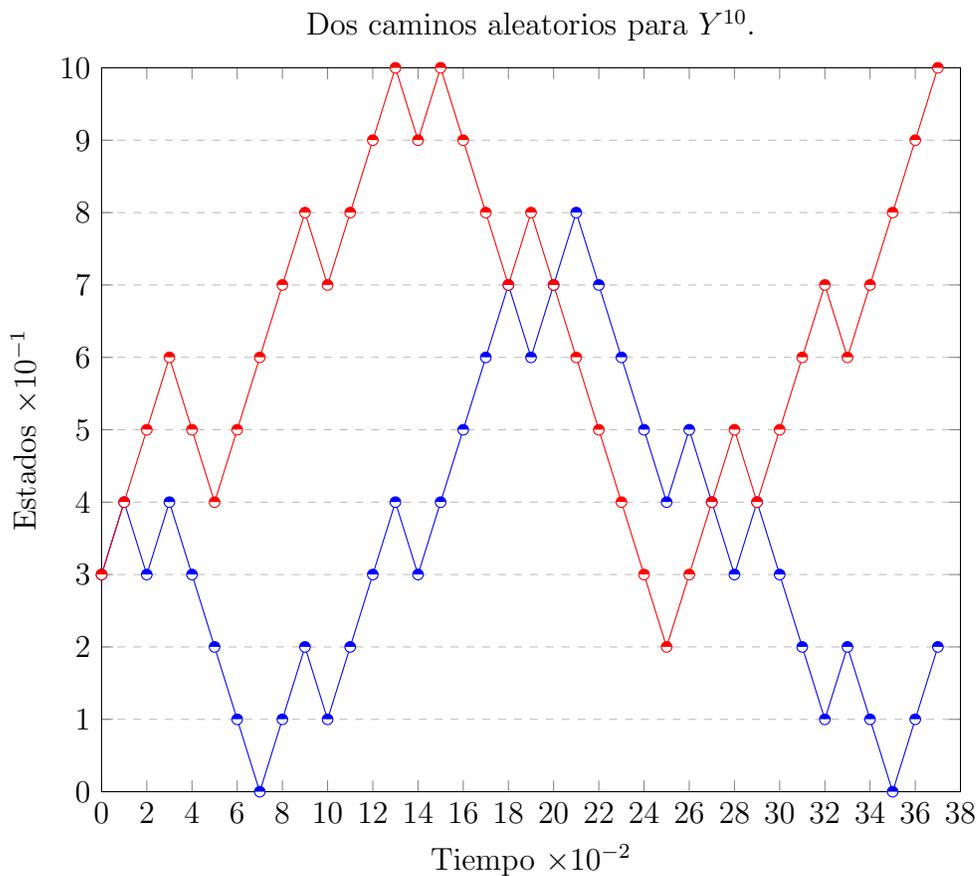
$$Y_{tn^2}^n \tag{8.4}$$

cuyo generador aplicado a funciones $g : \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\} \rightarrow \mathfrak{R}$ es

$$(\mathcal{L}_n g)(x) = \begin{cases} n^2[\frac{1}{2}(g(x + \frac{1}{n}) - g(x)) + \frac{1}{2}(g(x - \frac{1}{n}) - g(x))] & \text{si } x \in \{\frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\}; \\ n^2[g(\frac{1}{n}) - g(0)] & \text{si } x = 0; \\ n^2[g(1 - \frac{1}{n}) - g(1)] & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

De la colección de procesos $(Y^n)_{n \geq 0}$ seleccionamos la subcolección $(Y^{2^n})_{n \geq 0}$ debido a que nos permite construir una sucesión de procesos con espacios de estados crecientes y encajados

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \dots$$



8.2. Propiedades de los Caminos Aleatorios con Reflexión construidos.

Con base en el capítulo anterior, dado $G =]0, 1[$, $\partial G = \{0, 1\}$ se verifica que la función

$$\begin{aligned} \phi: [0, 1] &\rightarrow \mathfrak{R} \\ x &\mapsto x(1-x) \end{aligned}$$

determina bien la región $[0, 1]$, en el sentido de que cumple:

$$]0, 1[= \phi^{-1}(]0, \infty[),$$

$$\{0, 1\} = \phi^{-1}(\{0\}),$$

$$|\phi'(0)| = |\phi'(1)| = 1.$$

Debido a que para el proceso Y^{2^n} el espacio fue reescalado en el factor 2^n , se debe reescalar el tiempo en el factor $\frac{1}{h_n} = 2^{2n}$ y se define la función de transición como:

$$\Pi_j^{h_n}(x, x + \frac{1}{2^n}) = \Pi_j^{h_n}(x, x - \frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2} \text{ si } x \in \{\frac{1}{2^n}, \dots, \frac{2^n - 1}{2^n}\},$$

$$\Pi_j^{h_n}(0, \frac{1}{2^n}) = 1,$$

$$\Pi_j^{h_n}(1, \frac{2^n - 1}{2^n}) = 1.$$

Luego se hallan los coeficientes de arrastre y difusión de los procesos en tiempo discreto (Definición 7.0.0.1):

$$\Delta^{h_n}(hj, x) = 2^{2n}[(\frac{1}{2^n})^{2+\alpha}(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2^n})^{2+\alpha}(\frac{1}{2})] = \frac{1}{2^{\alpha n}} \text{ si } x \in \{\frac{1}{2^n}, \dots, \frac{2^n - 1}{2^n}\},$$

$$\Delta^{h_n}(hj, 1) = \Delta^h(hj, 0) = 2^{2n}[(\frac{1}{2^n})^{2+\alpha}(1)] = \frac{1}{2^{\alpha n}}.$$

$$a^{h_n}(jh, x) = 2^{2n}[(\frac{1}{2^n})^2 \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2^n})^2 \frac{1}{2}] = 1 \text{ si } x \in \{\frac{1}{2^n}, \dots, \frac{2^n - 1}{2^n}\},$$

$$a^{h_n}(jh, 0) = a^h(jh, 1) = 2^{2n}[(\frac{1}{2^n})^2(1)] = 1.$$

$$b^{h_n}(jh, x) = 2^{2n}[(\frac{1}{2^n})(\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2^n})(\frac{1}{2})] = 0 \text{ si } x \in \{\frac{1}{2^n}, \dots, \frac{2^n - 1}{2^n}\},$$

$$b^{h_n}(jh, 0) = 2^{2n}[(\frac{1}{2^n})(1)] = 2^n,$$

$$b^{h_n}(jh, 1) = 2^{2n}[(-\frac{1}{2^n})(1)] = -2^n.$$

Resumiendo los resultados obtenidos:

$$\Delta^{h_n}(hj, x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\alpha n}} & \text{si } x \in \{\frac{1}{2^n}, \dots, \frac{2^n - 1}{2^n}\}; \\ \frac{1}{2^{\alpha n}} & \text{si } x = 0; \\ \frac{1}{2^{\alpha n}} & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

$$a^{h_n}(jh, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{\frac{1}{2^n}, \dots, \frac{2^n-1}{2^n}\}; \\ 1 & \text{si } x = 0; \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

$$b^{h_n}(jh, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \{\frac{1}{2^n}, \dots, \frac{2^n-1}{2^n}\}; \\ 2^n & \text{si } x = 0; \\ -2^n & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

De ahora en adelante se simplificará la notación escribiendo $a^n(.,.)$ en lugar de $a^{h_n}(.,.)$ y de igual manera para b^{h_n} y Δ^{h_n} .

Se verifica que los coeficientes anteriores satisfacen las condiciones del Teorema 7.0.0.1:

1. $\Delta(n) = \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{x \in [0,1]} \Delta^n(t, x) = \frac{1}{2^{\alpha n}}$ por lo tanto $\Delta(n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$,
2. Sean $c = M = 1$ tal que si $\|b^n(t, x)\| > 1$ (entonces $x \in \{0, 1\}$) y por ello para $x = 0$ tenemos $(1)(2^n) \geq (1)(2^n)$ y para $x = 1$ $(-1)(-2^n) \geq (1)(2^n)$,
3. Para cualquier δ elijamos $M_\delta = 1$ de manera que si $\|b^n(t, x)\| > 1$ entonces $x \in \{0, 1\}$ y $\phi(x) = 0 < \delta$,
4. Eligiendo $M = 1$ obtenemos $\sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{x \in [0,1]} a^n(t, x) \leq 1$.

Por lo tanto la colección de procesos $(Y^{2^n})_{n \geq 0}$ es relativamente compacta en $D([0, T], [0, 1])$ y cualquiera de sus límites débiles está concentrado en $C([0, T], [0, 1])$, es decir $\exists(k_n) \subseteq \mathbb{N}$ y $Y : (\Omega, \Gamma, Q) \rightarrow D([0, T], [0, 1])$ tal que

$$Y^{2^{k_n}} \Rightarrow Y$$

con la distribución $P = QY^{-1}$ concentrada en $C([0, T], [0, 1])$.

A continuación comprobamos que los coeficientes cumplen las condiciones de la Proposición 7.0.0.3:

1. Como $a^n = 1$ y $b^n = 0$ en $]0, 1[$ la primera condición se cumple,
2. Sean $\rho = 0$ y $\gamma(t, 0) = 1, \gamma(t, 1) = -1$ funciones en $[0, T] \times \{0, 1\}$ que cumplen la igualdad $\langle \gamma(t, y), \nabla \phi(y) \rangle = 1$. Los conjuntos J_0 y J_1 serían respectivamente $[0, T] \times \{0, 1\}$ y \emptyset
 - 2.1. Se cumple pues $J_1 = \emptyset$,
 - 2.2. Se cumple pues $J_1 = \emptyset$,

2.3. Se sabe que $(\phi'(x))^2 = (1 - 2x)^2$, si elegimos $\delta_0 \leq \frac{1}{100}$ entonces los x para los que $|y - x| < \delta_0$ y $\langle \nabla \phi(x), a^h(s, x) \nabla \phi(x) \rangle < \delta_0$ deben estar a una distancia menor a $\frac{1}{100}$ de los bordes y pertenecer a $] \frac{9}{20}, \frac{11}{20} [$, cosa que no se cumple. Por lo tanto por defecto se verifica el item,

2.4. Si $N_0 = 1$ con lo que $x \in \{0, 1\}$ y por ello $\| \frac{b^h(s, x)}{\langle b^h(s, x), \nabla \phi(x) \rangle} - \gamma(t, y) \| = 0$ cumpliéndose la condición.

Por lo tanto para todo f en $C_0^{1,2}([0, T] \times [0, 1])$ con $\frac{\partial f}{\partial x}(t, 0) \geq 0$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(t, 1) \leq 0$, $t \geq 0$, la expresión

$$f(t, X_t) - \int_0^t (f_s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2})(s, X_s) \mathbb{1}_{]0, 1[}(X_s) ds \quad (8.5)$$

es una P -submartingala.

Como P está concentrada en $C([0, T], [0, 1])$ la expresión (8.5) es una submartingala para $f \in C_0^{1,2}([0, T] \times \mathfrak{R})$. Además una función $f \in C_0^{1,2}([0, \infty[\times \mathfrak{R})$ restringida al dominio $[0, T] \times \mathfrak{R}$ pertenece a $C_0^{1,2}([0, T] \times \mathfrak{R})$, por lo que para $t \in [0, T]$ (8.5) es una submartingala para $f \in C_0^{1,2}([0, \infty[\times \mathfrak{R})$, y por ello P resuelve el problema de submartingala.

Observación. En la observación final de la sección anterior se evidenció el papel cumplido por el cociente $\frac{\gamma}{\rho}$. En el presente trabajo se eligió $\rho = 0$ y $\gamma(0) = 1$, $\gamma(1) = -1$, hecho que puede ser interpretado asegurando que el campo de velocidades en 0 es $+\infty$ y en 1 es $-\infty$, lo que explicaría el hecho de que en los bordes el proceso es reflejado inmediatamente. Si $\frac{\gamma}{\rho}$ fuera finito cabría la posibilidad que el proceso se quedara pegado un lapso en la frontera. Por ello, como los caminos o trayectorias son continuos, tocarán la frontera en tiempos aislados y por lo tanto una cantidad contable de veces en un tiempo finito t .

Debido al teorema 5.3.0.1 se puede hallar una función ξ_0 que solo aumenta cuando el proceso toca el borde $\{0, 1\}$, de manera que

$$f(t, X_t) - \int_0^t [\mathbb{1}_{]0, 1[}(f_u + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2})(u, X_u)] du - \int_0^t J_u f(u, X_u) d\xi_0(u)$$

es una P -martingala para $f \in C_0^{1,2}([0, \infty[\times \mathfrak{R})$.

Observación. Nótese que ya no se requieren ni $\frac{\partial f}{\partial x}(t, 0) \geq 0$ ni $\frac{\partial f}{\partial x}(t, 1) \leq 0$, $t \geq 0$. Ver la subsección 5.3.

Fijando un $\omega \in C([0, \infty[\times [0, 1])$, como ξ_0 es continua, no decreciente y solo puede aumentar en un conjunto contable de tiempos aislados (ver Observaciones precedentes), $\xi_0(\cdot, \omega)$ es constante. Por ello, con f bajo las mismas condiciones que arriba se llega a:

$$f(t, X_t) - \int_0^t [(f_u + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2})(u, X_u)] du$$

es una P -martingala.

Hasta esta parte se ha usado la versión general expuesta en [4], que trabaja con cadenas de Markov homogéneas o inhomogéneas. Debido a que las cadenas de Markov construidas al inicio de la sección eran homogéneas, las proposiciones y definiciones se pueden adaptar de manera que el proceso límite también sea homogéneo. Desde ahora se asumirán procesos de Markov homogéneos, con lo cual la expresión anterior se simplifica a:

$$f(X_t) - \int_0^t [(\frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2})(X_u)] du$$

es una P -martingala para $f \in C_0^2(\mathfrak{R})$. Por lo tanto P es un proceso de Markov.

Para comprobar que es una difusión se inicia notando que los caminos del proceso son continuos, así como:

con $f(x) = x$

$$E_P[X_t - X_s | \Gamma_s] = 0$$

y con $f(x) = x^2$

$$E_P[(X_t - X_s)^2 | \Gamma_s] = (t - s).$$

El generador del proceso de difusión P se puede hallar usando el hecho que si existe dicho operador, entonces describe el proceso en tiempos infinitesimales. Dado $f \in C_0^2(\mathfrak{R})$:

$$E_P[f(X_{t+h}) - f(X_t) | \Gamma_t] = E_P[\int_t^{t+h} \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(X_r) dr | \Gamma_t],$$

por lo que

$$|E_P[\int_t^{t+h} \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(X_r) dr | \Gamma_t] - h \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(X_t)| \leq E_P[\int_t^{t+h} |\frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(X_r) - \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(X_t)| dr | \Gamma_t].$$

Fijando un $\omega \in C([0, \infty[, [0, 1])$ se tiene que la ecuación anterior es del orden $o(h)$, por lo que el generador es $\frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}$ con dominio por determinar.

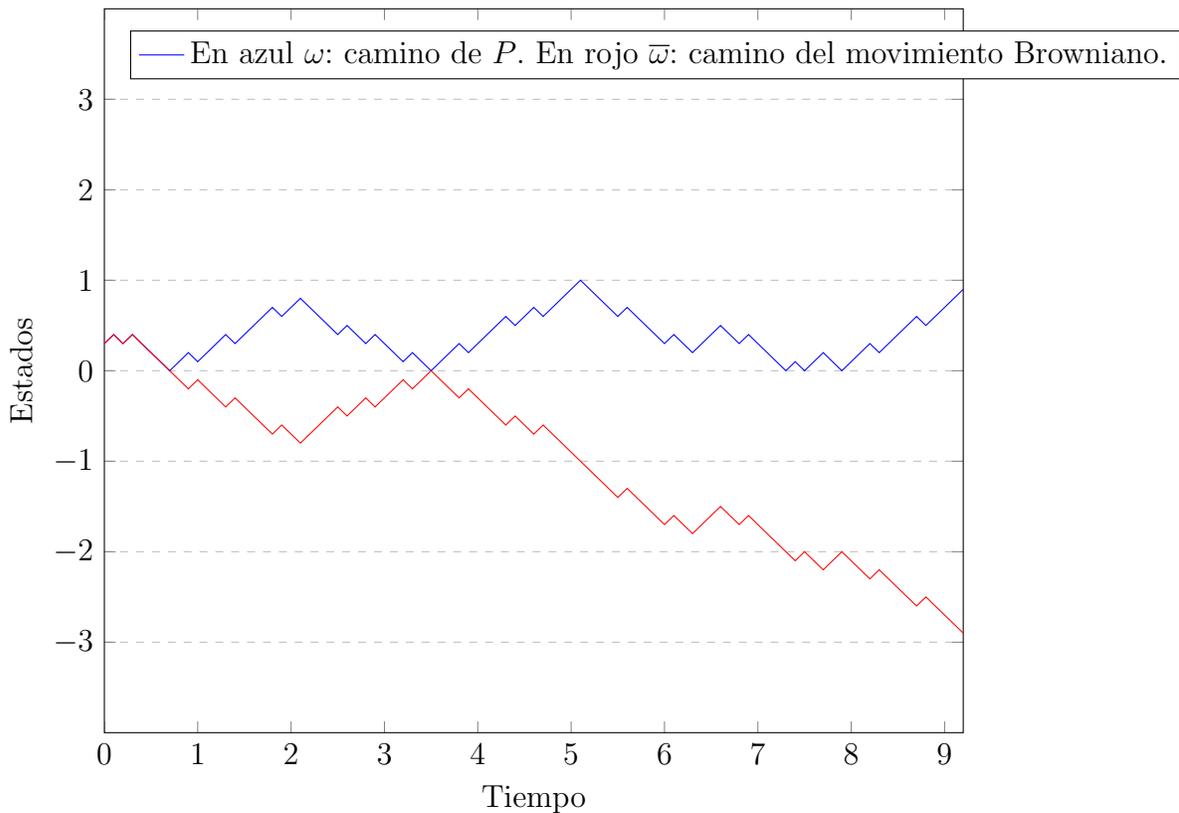
Basándose en que el generador de un Proceso de Markov determina la evolución de sus caminos, se puede afirmar que los caminos del proceso P serán similares a los de un movimiento Browniano, con la restricción de que serán reflejados en el borde. Por tal razón se denominará al proceso P el movimiento Browniano con reflexión.

8.3. Otra aproximación al Movimiento Browniano con Reflexión.

Debido a que se busca que el proceso límite Y sea el movimiento Browniano con reflexión, cuyo generador se obtuvo en la subsección previa pero no su dominio, en la presente subsección se sigue un camino distinto, hallando primero el dominio que debe tener dicho generador y con apoyo del movimiento Browniano se busca que el proceso con reflexión satisfaga una variante del problema de martingala.

Se construye el movimiento Browniano con reflexión camino a camino partiendo del movimiento Browniano en \mathfrak{R} , para tal fin sea $\bar{\omega}$ un camino de este último proceso al que cuando llega al borde $\{0, 1\}$ se refleja inmediatamente al interior, obteniendose el camino ω . El siguiente gráfico ilustra tal construcción:

Caminos del proceso P y el movimiento Browniano.



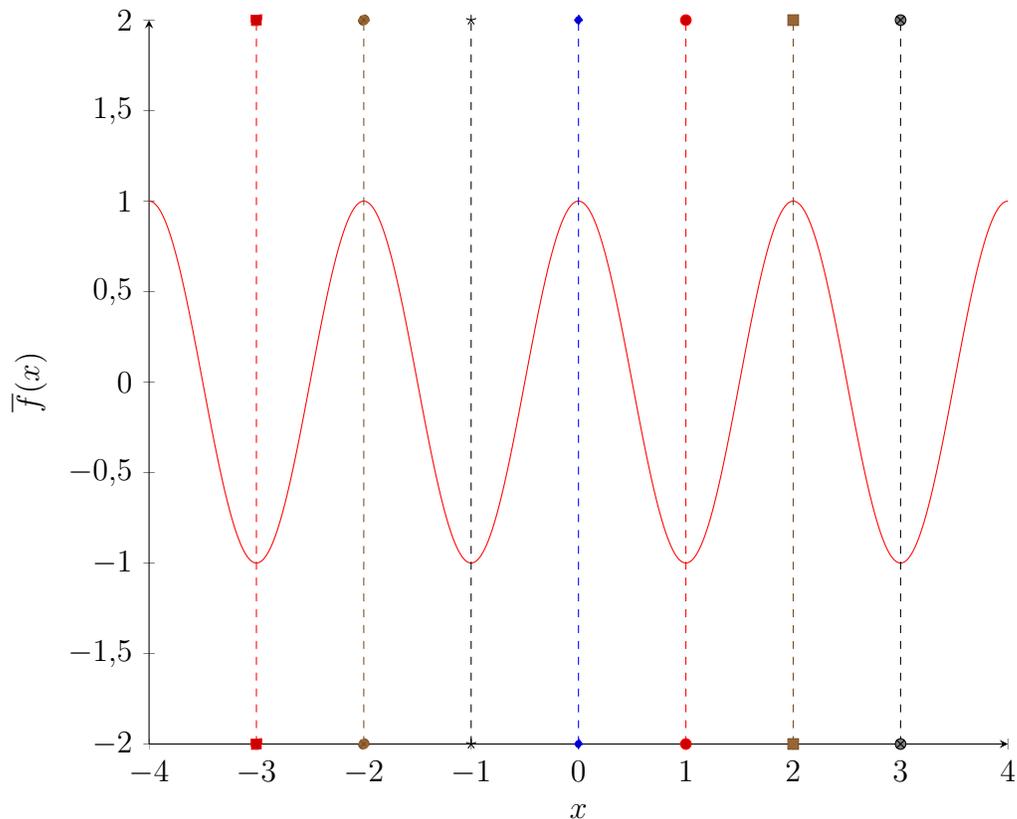
Dada una función $f \in C^2[0, 1]$ se puede construir una función $\bar{f} \in C_0^2(\mathfrak{R})$ mediante sucesivas reflexiones. Se define

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x-n) & \text{si } x \in [n, n+1] \text{ con } n \text{ par y } n \in \{-4, \dots, 4\}; \\ f(-x+n+1) & \text{si } x \in [n, n+1] \text{ con } n \text{ impar y } n \in \{-5, \dots, 3\}; \\ e^{-(x\pm 5)^2} f(x-n) & \text{si } x \in [n, n+1] \text{ con } n \text{ par, + si } n < -4 \text{ y - si } n > 4; \\ e^{-(x\pm 5)^2} f(-x+n+1) & \text{si } x \in [n, n+1] \text{ con } n \text{ impar, + si } n < -5 \text{ y - si } n > 3. \end{cases}$$

Un ejemplo muy sencillo se muestra partiendo de la función

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{R} \\ x \mapsto \cos(\pi x),$$

El siguiente gráfico muestra lo realizado



De forma similar a lo hecho en [14]p.125-126, sean $(T_t^r)_{t \geq 0}$ y \mathcal{L}_N el semigrupo y generador del movimiento Browniano con reflexión construido, entonces

$$(T_t^r f)(x) = E_x f(X_t \circ T) = E_x \bar{f}(X_t),$$

con T la aplicación que lleva, mediante reflexiones, caminos del Movimiento Browniano usual a caminos del Movimiento Browniano con reflexión.

Por lo tanto f pertenece a \mathcal{L}_N si y solo si $\bar{f} \in C_0^2(\mathfrak{R})$.

La forma en que fue definida \bar{f} no implica problema alguno en $\mathfrak{R} - \mathbb{Z}$ pero para que verifique lo pedido en $x \in \mathbb{Z}$ se requiere el siguiente análisis:

$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{\bar{f}(h) - \bar{f}(0)}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(-h) - f(0)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} -\frac{f(h) - f(0)}{h} = -f'(0).$$

Por lo cual es indispensable que $f'(0) = 0$ y $f'(1) = 0$. Para la segunda derivada en 0 se tiene

$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{\bar{f}'(h) - \bar{f}'(0)}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \frac{-f'(-h)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f'(h)}{h} = f''(0).$$

Por ello no son necesarias restricciones para la segunda derivada. Como consecuencia se tiene que $\mathcal{L}_N = \{u \in C^2[0, 1] : u'(0) = u'(1) = 0\}$. Es importante notar que para hallar el dominio de \mathcal{L}_N lo determinante fue que \bar{f} debe ser de clase C^2 mientras que el hecho de que se anule en el infinito no fue trascendental.

Capítulo 9

Conclusiones.

A partir del trabajo realizado la primera conclusión es que el proceso Y construido en el capítulo 8 resuelve el problema de submartingala en el intervalo $[0, 1]$ así como el problema de martingala, por lo que puede ser estudiado como un proceso de Markov.

La segunda conclusión es que el proceso se comporta en el intervalo $[0, 1]$ como una difusión, con un coeficiente de arrastre nulo y un coeficiente de difusión 1. De esta manera se puede entender dicho proceso como una difusión en el sentido más amplio.

Una tercera conclusión es que el proceso se comporta como un movimiento Browniano con reflexión en el sentido de que tiene asociado el coeficiente difusivo 1, tiene generador $\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}$ con dominio $\mathcal{L}_N = \{u \in C^2[0, 1] : u'(0) = u'(1) = 0\}$ y los caminos luego de alcanzar el borde $\{0, 1\}$ son reflejados. Localmente en el intervalo $]0, 1[$ el proceso tiene un comportamiento similar al de un Movimiento Browniano.

Índice de símbolos

Símbolo	Significado
c.c	casi ciertamente
$a \wedge b$	mínimo de a y b
$a \vee b$	máximo de a y b
$K \subseteq\subseteq G$	K es un subconjunto compacto de G
\mathfrak{R}_0	Reales positivos
\mathfrak{R}_0^+	Reales no negativos
$D^2 f$	matriz Hessiana de f (es decir $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})_{i,j}$)
f.t	función de transición
C	espacio de las funciones continuas de $[0, 1]$ en \mathfrak{R}
D	espacio de las funciones cad-lag de $[0, 1]$ en \mathfrak{R}
$\mathcal{B}(E)$	σ -álgebra boreliano de un espacio topológico E
$Y \in \Gamma$	Y es una función real Γ -medible
f_y	derivada parcial respecto a y
Pf	$= \int f dP$
f^+	$= f \vee 0$
X_t	función coordenada
$\Gamma(o \Gamma_\infty)$	$= \sigma(X_t, t \geq 0)$
Γ_t^0	$\sigma(X_s, t \geq s \geq 0)$
Γ^u	$\sigma(X_s, u \leq s)$
Γ_t^u	$\sigma(X_s, u \leq s \leq t)$
Γ_t^+	$\bigcap_{\epsilon > 0} \Gamma_{t+\epsilon}^0$
Γ^Z	filtración generada por el proceso Z
$b\Gamma$	funciones Γ -medibles y acotadas
(Γ_t^0)	filtración canónica asociada a X_t
$C_0(E)$	funciones reales continuas con dominio en E y con soporte compacto
$C_b^2(E)$	funciones reales que junto a sus primeras y segundas derivadas parciales son continuas y acotadas

$C_0^{1,2}([0, \infty[\times \mathfrak{R}^d)$	funciones reales f tales que junto a f_t y f_{x_i} $1 \leq i \leq d$ son continuas y se anulan en el infinito
S_n	matrices $n \times n$ simétricas no negativas
S_n^+	matrices $n \times n$ simétricas positivas
θ_s	$\theta_s : C(\mathfrak{R}_0^+, \mathfrak{R}^d) \rightarrow C(\mathfrak{R}_0^+, \mathfrak{R}^d)$ tal que $\theta_s(\omega(\cdot)) = \omega(s + \cdot)$
W	medida de Wiener en $C(\mathfrak{R}_0^+, \mathfrak{R}^d)$ (o en $D([0, T], \mathfrak{R})$ según sea el caso)
W_x	$= Wh^{-1}$ con h una aplicación de $C(\mathfrak{R}_0^+, \mathfrak{R}^d)$ en si mismo y $h(\omega(\cdot)) = \omega(\cdot) + x$
E_x	esperanza respecto a la medida W_x
L^*	adjunta formal del operador lineal L
\Rightarrow	convergencia débil
\otimes	producto de Kronecker
A°	interior de A
A^-	clausura de A
A^ϵ	$= \{x : d(x, A) < \epsilon\}$
$dcrp$	distribución condicional regular de probabilidad
$P(\Omega)$	conjunto de probabilidades en un espacio métrico Ω

Bibliografía

- [1] D. W. Stroock, S. R. S. Varadhan. *Multidimensional Difusion Processes*. Springer,1979.
- [2] O. Kallenberg. *Foundations of modern probability*. Springer, 1997.
- [3] P.Billingsley. *Convergence of Probability measures*. John Wiley & Sons, Inc, 1999.
- [4] D. W. Stroock, S. R. S. Varadhan. *Diffusion Processes with boundary conditions*. Communications on pure and applied mathematics, XXIV 147-225, 1971.
- [5] Y.A.Rozanov. *Introduction to Random Processes*. Springer Verlag, 1987.
- [6] A.S.Sznitman. *Papers of Brownian Motion and Stochastic Calculus(ETH)*. spring 2010.
- [7] D.Revuz, M.Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer Verlag, 1991.
- [8] K.Burdzy, Z.Q.Chen. *Discrete Approximation to Reflected Brownian Motion*. The Annals of Probability, Vol 36, N 2, 2008.
- [9] L.C.G.Rogers, D.Williams. *Diffusions, Markov Processes and Martingales*. John Wiley & Sons, 1994.
- [10] H.Heyer. *Structural Aspects in the Theory of Probability*. World Scientific Publishing Co., 2004.
- [11] G.A.Pavliotis. *Applied Stochastic Processes*. Imperial College London Press, 2009.
- [12] B.Fristed, L.Gray. *A modern approach to probability theory* . Springer, 1997.
- [13] P.Billinsley. *Probability and measure*. John Wiley & sons, 1995.
- [14] T.M.Liggett. *Continuous Time Markov Process*. American Mathematical Society, 2010.

Apéndice.

Apéndice A.

Existe otro teorema que asegura compacidad relativa pero que involucra un segundo módulo de continuidad en D , que se define a continuación:

$$\omega_x''(\delta) = \omega''(x, \delta) := \sup_{t_1 \leq t \leq t_2, t_2 - t_1 \leq \delta} [|x(t) - x(t_1)| \wedge |x(t) - x(t_2)|].$$

Observación. $\omega_x''(\delta) \leq \omega_x'(\delta)$, en general no se cumple la desigualdad recíproca.

Teorema 9.0.0.1. *Para que un conjunto $A \subseteq D$ tenga una clausura compacta en la topología de Skorohod es necesario y suficiente que :*

$$\begin{aligned} \sup_{x \in A} \|x\| &< \infty, \\ \limsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x \in A} \omega_x''(\delta) &= 0, \\ \limsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x \in A} |x(\delta) - x(0)| &= 0, \\ \limsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x \in A} |x(1^-) - x(1 - \delta)| &= 0. \end{aligned}$$

Demostración. Ver [3]p.132-133. □

Bajo condiciones diferentes se tienen los siguientes teoremas similares 2.2.0.9:

Teorema 9.0.0.2. *Supóngase que $P_n X_{t_1, \dots, t_k}^{-1} \Rightarrow P X_{t_1, \dots, t_k}^{-1}$ para cualquier colección finita de $t_i \in T_P$. Además supóngase que $\forall \epsilon > 0$:*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} P(x : |x(1) - x(1 - \delta)| \geq \epsilon) = 0$$

y que $\forall \epsilon, \eta > 0 \exists \delta \in]0, 1[$ y n_0 tal que

$$P_n(x : \omega_x''(\delta) \geq \epsilon) \leq \eta$$

para todo $n \geq n_0$. Entonces $P_n \Rightarrow P$.

Demostración. Ver [3]p.141. □

Si P es la distribución de una variable X , T_P también se denota como T_X .

Lema 9.0.0.3. *Si se supone que*

$$(X_{t_1}^n, \dots, X_{t_k}^n) \Rightarrow (X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \text{ para puntos en } T_X$$

$$X_1 - X_{1-\delta} \Rightarrow 0 \text{ cuando } \delta \rightarrow 0$$

y que para $r \leq s \leq t$, $n \geq 1$ y $\lambda > 0$

$$P(|X_s^n - X_r^n| \wedge |X_t^n - X_s^n| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^{4\beta}} (F(t) - F(r))^{2\alpha}$$

donde $\alpha > \frac{1}{2}$, $\beta \geq 0$ y F es una función continua y no decreciente en $[0, 1]$. Entonces

$$X^n \Rightarrow X.$$

El último requerimiento puede ser reemplazado por otro más fácil de cumplir:

$$E(|X_s^n - X_r^n|^{2\beta} |X_t^n - X_s^n|^{2\beta}) \leq (F(t) - F(r))^{2\alpha}.$$

Demostración. Ver p.142 [3]. □

Apéndice B.

Para comenzar se define una variable aleatoria que generaliza el concepto de tiempo:

Definición 9.0.0.1. Sea $(\Omega, \Gamma, (\Gamma_t)_{t \geq 0}, P)$ un espacio de probabilidad filtrado, una variable aleatoria $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ es un Γ_t - tiempo de parada si para todo $t \geq 0$ $\{T \leq t\} \in \Gamma_t$.

Además se define el σ -álgebra del pasado de T como:

$$\Gamma_T = \{A \in \Gamma : A \cap \{T \leq t\} \in \Gamma_t \forall t \geq 0\}.$$

Ejemplo 9.0.1. *Tiempo de ingreso a un conjunto cerrado:*

Sean el espacio canónico (C, Γ) y $A \subseteq \mathfrak{R}^d$ un conjunto cerrado. El tiempo de ingreso del proceso X en A se define como

$$H_A = \inf\{s \geq 0, X_s \in A\}$$

Entonces H_A es un (Γ_t) -tiempo de parada: Fijando $\omega \in C$, el conjunto $\{s \geq 0 : X_s(\omega) \in A\}$ es un subconjunto cerrado que contiene a $H_A(\omega)$ si es finito. Por ello para $t \geq 0$

$$H_A(\omega) > t \Leftrightarrow \forall s \in [0, t], d(X_s(\omega), A) > 0 \Leftrightarrow \inf_{[0, t]} d(X_s(\omega), A) > 0.$$

Por lo tanto

$$\{H_A > t\} = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{s \in \mathbb{Q} \cap [0, t]} \{d(X_s(\omega), A) > \frac{1}{n}\} \in \Gamma_t.$$

Algunas propiedades de los tiempos de parada se muestran a continuación.

Proposición 9.0.0.4. *Sea el espacio medible filtrado $(\Omega, \Gamma, (\Gamma_t)_{t \geq 0})$, T y S tiempos de parada, entonces*

1. T es Γ_T -medible.
2. $T \wedge S$ y $T \vee S$ son tiempos de parada.
3. Si $S \leq T$ entonces $\Gamma_S \subseteq \Gamma_T$.
4. $\{S < T\}$ y $\{S \leq T\}$ pertenecen a $\Gamma_S \cap \Gamma_T$.

Demostración. Ver [6]p.37.

□