

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS



TESIS

**“INVARIANTES DE APLICACIONES ESTABLES
DE 3-VARIEDADES AL 3-ESPACIO
EUCLIDIANO”**

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE DOCTOR
EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA

ELABORADA POR:

NELSON BERROCAL HUAMANÍ

ASESOR:

Dr. JOE ALBINO PALACIOS BALDEÓN

ASESORA EXTERNA:

Dr. CATARINA MENDES DE JESUS SÁNCHEZ

LIMA - PERÚ

2019

A Dios, que con amor un día me dio una nueva vida.

A mi madre, que con gran esfuerzo me supo educar.

Agradecimientos

A Dios, por el amor y bondad infinita, conocidos desde que me dio una nueva vida y la alegría de vivir en las dificultades y bendiciones. Ahora, me da la bendición de concluir esta etapa de mi formación con este trabajo, que es consecuencia de su bondad.

A mi esposa Nery Akida Redolfo Licas y a nuestro hijo Joás Isaías Berrocal Redolfo, por darme su amor cada día.

A mamá Julia Huamaní Parihuamán, a papá Telmo Albino Berrocal Gómez y a todos mis hermanos.

Como no agradecer a todos mis compañeros y profesores del Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines (IMCA), por su guía y enseñanzas, en especial a mi asesor Joe Albino Palacios Baldeón y a mi co-asesora Catarina Mendes de Jesus Sánchez del Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, MG, Brasil.

Un especial agradecimiento a mis hermanos, en la fe de la Iglesia Cristiana Pentecostés del Perú, Movimiento Misionero Mundial. Al siervo del Señor, Ps. Teódulo Ramírez Álamo, por su guía espiritual y oraciones por este su servidor.

Al CONCYTEC por financiar el presente proyecto de tesis doctoral, mediante Fondecyt C.G. 176-2015.

Índice general

Agradecimientos	III
Lista de Figuras	VI
Resumen	VIII
Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. 3-variedades compactas y orientadas	3
1.2. Homología singular, números de Betti	7
1.3. Aplicaciones estables de 3-variedad en \mathbb{R}^3	11
2. Aplicaciones estables de S^3 en \mathbb{R}^3	18
2.1. Transiciones de codimensión 1 e Invariantes globales	18
2.1.1. Invariantes globales	23
2.2. Subdivisión de transiciones de codimensión 1	25
2.3. Relaciones entre las invariantes globales	34
3. Asas removibles de Σf	42
3.1. Asas removibles en el conjunto singular	43
3.2. Descomposición de I_G	47
4. Grafo asociado a $f \in (\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$	55
4.1. El grafo asociado a $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$	55
4.2. Propiedades del \mathcal{H} -grafo	58

4.3. Cirugía entre aplicaciones estables con \mathcal{H} -grafo	63
4.4. Construcción de aplicaciones estables	66
5. Invariantes globales para aplicaciones estables de $S^2 \times S^1$ al espacio tridimensional	70
5.1. Ramificación de transiciones de codimensión 1	70
5.2. Relaciones entre las invariantes globales	76
Referencias bibliográficas	82

Índice de figuras

1.1. Cubo con asas $H^{3,5}$	4
1.2. Identificando α y β construimos $S^2 \times S^1$	6
1.3. Ejemplos de grafos, $a)$, $b)$ bipartitos, $c)$, $d)$ no-bipartitos.	11
1.4. Ejemplos de puntos de curva cuspidal y cola de golondrina.	13
1.5. Puntos del tipo A_1^2 , A_2A_1 y A_1^3	14
1.6. Ejemplos de aplicaciones de pliegue de S^3 y del 3-toro T^3	14
1.7. \mathcal{G} -grafo asociado a aplicaciones estables de S^3 en \mathbb{R}^3	16
1.8. \mathcal{G} -grafo asociado a aplicaciones estables de $S^2 \times S^1$ en \mathbb{R}^3	17
2.1. Esquema simbólico de los conjuntos $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$, $\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ y Δ	19
2.2. Transiciones codimensión 1 uni-germenes. Imágenes retiradas de [7].	19
2.3. Algunas transiciones codimensión 1 uni-germenes. Estas imágenes fueron tomadas de Goryunov [7].	20
2.4. Ejemplos de curvas cuspidales en el conjunto de ramificación.	21
2.5. Ejemplos de dirección de una transición.	22
2.6. Ejemplos de aplicaciones estables de S^3 a \mathbb{R}^3 con $I_E \leq 3$	24
2.7. Transiciones de codimensión 1.	25
2.8. Ejemplo de transiciones L y $B_{-,g}$	26
2.9. Decomposición de las transiciones B , P y A_3^h	27
2.10. Ejemplos de transiciones $A_{3,0}^h$ y P_v	29
2.11. Ejemplo locales de las transiciones P_g , $A_{3,0}^h$, $A_{3,c}^h$ y $A_{3,2c}^h$	30
2.12. Ejemplo de transiciones $B_{+,g}$, $B_{-,g}$, B_v , P_g y P_v	32
2.13. Relación entre las transiciones $A_{3,c}^h$ y $B_{0,g}$. Donde $F_t^i = f_i$	37
2.14. Relación de transiciones e invariantes globales.	39

2.15. Ejemplo 2.20, caso $n = 3$	40
2.16. Ejemplo 2.21, caso $n = 3$	40
2.17. Algunos ejemplos de aplicación pliegue de S^3 en \mathbb{R}^3 con $I_E = 5$ y $I_G \leq 6$	41
3.1. Ejemplos de grafo asociado a aplicaciones estables.	42
3.2. Bitoro T^2 homeomorfa a S^2 con 2 asas.	43
3.3. Casos donde el camino F_t atraviesa la transición $A_2^{\sigma,+,-}$	43
3.4. Casos donde el camino F_t atraviesa la transición $A_2^{\sigma,-,-}$	44
3.5. Ejemplos de asas removibles.	45
3.6. Transición para remover asas, caso i), de la demostración de la Proposición 3.9.	46
3.7. Transición para remover asas caso ii), de la demostración de la Proposición 3.9.	46
3.8. Transición para remover asas caso iii), de la demostración de la Proposición 3.9.	46
3.9. Esquema de demostración Lema 3.8.	47
4.1. Ejemplo de \mathcal{H} -grafos de aplicaciones.	56
4.2. Ejemplos de \mathcal{H} -grafo asociado a aplicaciones estables.	56
4.3. Efecto de las transiciones L, B y P sobre el \mathcal{H} -grafo.	57
4.4. Ejemplo del efecto de las transiciones en el \mathcal{H} -grafo.	58
4.5. Cirugía horizontal entre \mathcal{H} -grafos.	64
4.6. Cirugía horizontal en $f \in \mathcal{E}(S^2 \times S^1, \mathbb{R}^3)$	64
4.7. Cirugía vertical en los \mathcal{G} y \mathcal{H} Grafos.	65
4.8. Ejemplo de cirugía vertical en el \mathcal{H} -grafo de $f \in \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$	66
4.9. \mathcal{H} -grafos básicos de aplicaciones estables de $S^3, S^2 \times S^1$ a \mathbb{R}^3	67
4.10. Esquema de demostración de la Proposición 4.20.	68
4.11. Esquema de demostración de la Proposición 4.21.	69
5.1. Descomposicion de las transiciones L y B	73
5.2. Decomposición de las transiciones P	74

Resumen

El presente trabajo, estudiamos la descomposición de las transiciones de codimensión uno, que altera el conjunto singular de una aplicación estable de 3-variedades en el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 ; en particular cuando la 3-variedad es la S^3 y \mathcal{M}_n la suma conexas de n copias de la $S^2 \times S^1$. Describimos el comportamiento topológico del conjunto singular y las singularidades en el conjunto de ramificación que involucra las curvas cuspidales y colas de golondrina usando el \mathcal{H} grafo asociado a este tipo aplicaciones estables estudiadas. También, analizamos los efectos de estas descomposiciones en los invariantes globales que introducimos, además de dar algoritmos para la construcción de aplicaciones estables con conjuntos de ramificación predeterminados.

Abstract

In the present work, we study the decomposition of codimension-one transitions, that alter the singular set the of stable maps from 3-manifolds in the three-dimensional space \mathbb{R}^3 ; in particular when the 3-manifold is the S^3 and \mathcal{M}_n the connected sum of n copies of the $S^2 \times S^1$. We describe the topological behavior of the singular set and the singularities in the branch set that involves the cuspidal curves and swallowtails tails using the \mathcal{H} graph associated with this type of stable maps studied. We also, analyze the effects of these decompositions on the global invariants that we introduce, as well as giving algorithms for the construction of stable applications with predescribed branch sets.

Introducción

El estudio de aplicaciones estables entre variedades es un tema de investigación que ha interesado a muchos matemáticos alrededor del mundo, como Whitney H. [29], Mather J. N. [17], entre otros. Siguió Éliásberg J., en su trabajo [4], presenta resultados sobre aplicaciones pliegue entre variedades de dimensiones altas. En dimensiones más específicas, tenemos que las aplicaciones estables de S^1 en \mathbb{R}^3 fueron estudiadas por Vassiliev V. A. [26]. Sigue Arnol'd V. I. [2], estudiando las aplicaciones de S^1 en \mathbb{R}^2 ; Aircadi F. en [1] continuó en esta misma línea y estudiando nuevos temas. Para aplicaciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , es Goryunov V.V. [6], quien ahondó en este tema. Ohmoto T., Aircadi F., en [21], desarrollaron su trabajo para el caso de aplicaciones de M^2 en \mathbb{R}^2 (donde M^2 es una superficie cerrada), otros autores que estudiaron y profundizaron este tema son: Mendes de Jesus C., Hacon D. y Romero Fuster M. C. en [9, 10, 11], Demoto S. en [3], y Kálmán T. [14]. Las aplicaciones de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 , fueron estudiadas por Goryunov [7] todo desde un punto de vista local. Para el caso global de aplicaciones de M^3 en \mathbb{R}^3 (M^3 es una 3-variedad) fueron estudiadas por Mendes de Jesus, R. Oset Sinha C. y Romero Fuster M. C. en [22].

En este trabajo, nos centraremos en el estudio de las aplicaciones estables de 3-variedades en \mathbb{R}^3 , más precisamente cuando la 3-variedad es S^3 , $S^2 \times S^1$ y la suma conexa finita entre ellas. Todo este estudio se hará desde un punto de vista global, describiendo el comportamiento topológico de los componentes del conjunto singular, curvas cuspidales y colas de golondrina de una aplicación estable (ver Definición 2.2), describiremos también la descomposición de las transiciones de codimensión 1, listadas por [7]. Extenderemos y formalizaremos resultados de los trabajos estudiados por Mendes de Jesus C., Oset Sinha R. y Romero Fuster M. C., en [18, 19, 22], donde introdujeron invariantes para la clasificación de estas aplicaciones, como los grafos asociados a aplicaciones estables. En [18], Mendes de Jesus C., Oset Sinha R. y Romero Fuster M. C. introdujeron estos grafos asociados a las aplicaciones estables de 3-variedades cerradas y orientadas en \mathbb{R}^3 . Una de las dificultades de los grafos asociados a aplicaciones estables es que, para dos aplicaciones que tienen dominios no homeomorfos, podemos tener que sus grafos sean idénticos. La Figura 4.1 ilustra dos aplicaciones con dominios distintos S^3 y $S^2 \times S^1$ en \mathbb{R}^3 respectivamente, donde sus grafos asociados son iguales.

Esto fue observado por los autores en [23]. Esta dificultad nos permitió redefinir los grafos introducidos en [18, 23], sumando más información, que ayuda caracterizar las 3-variedades del dominio. Los grafos con estas nuevas informaciones serán llamados de \mathcal{H} -grafos (ver Definición 4.1).

Dividiremos este trabajo en 5 capítulos: el Capítulo 1 es una recopilación breve de algunos temas básicos, para entender los resultados que siguen en los siguientes capítulos; comenzamos describiendo algunas 3-variedades, homología, números de Betti, grafos, aplicaciones estables entre variedades, aplicaciones estables de 3-variedades en \mathbb{R}^3 , sus grafos asociados y cirugías entre aplicaciones estables. El Capítulo 2 se enfoca en el estudio exclusivo de las aplicaciones estables de S^3 en \mathbb{R}^3 , en la cual introducimos los invariantes globales de este tipo de aplicaciones; subdividimos las transiciones de codimensión 1 respecto a los invariantes; finalmente, enunciamos y mostramos algunos resultados referentes a las relaciones de estos invariantes globales, obteniendo condiciones para la construcción de aplicaciones estudiadas en este capítulo. El Capítulo 3 está enfocado en la definición de un nuevo grafo asociado a las aplicaciones estables de 3-variedades en \mathbb{R}^3 , bautizado como el \mathcal{H} -grafo; este grafo es básicamente una redefinición del \mathcal{G} -grafo, asociado definido en [23]; también, estudiamos los efectos de las transiciones de codimensión 1 sobre el \mathcal{H} -grafo de las aplicaciones estables. El Capítulo 4 presenta las propiedades y resultados más relevantes del \mathcal{H} -grafo asociado a una aplicación estable de la \mathcal{M}_n en \mathbb{R}^3 . El resultado principal de este capítulo es el Teorema 5.5; también, en este capítulo, describimos las cirugías entre aplicaciones estables usando los \mathcal{H} -grafos; al final, damos un esquema de construcción de aplicaciones estables con ciertas propiedades preestablecidas. El Capítulo 5 es una generalización del Capítulo 1, en el sentido que estudiamos las aplicaciones estables de la S^3 , la suma conexa de n copias de la $S^2 \times S^1$, denotado por $(\mathcal{M}_n$ ó $n \cdot (S^2 \times S^1)$) a \mathbb{R}^3 . Además este estudio ya se realiza teniendo en cuenta los \mathcal{H} -grafos de estas aplicaciones, lo que motiva a la definición de más invariantes globales, las cuales también ramifican más las transiciones de codimensión 1 y enunciamos probamos también resultados que relacionan este tipo de invariantes, dando también demostraciones alternativas (ver Teorema 5.5) al teorema principal (Teorema 4.10) del Capítulo 3.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, presentamos algunos conceptos y resultados importantes para facilitar la lectura de los siguientes capítulos.

1.1. 3-variedades compactas y orientadas

Cubo con asas

En esta sección, damos la definición de un *cubo con asas* y describiremos algunas de sus propiedades básicas. En la siguiente sección, describiremos como un cubo con asas se combina para formar la *descomposición de Heegaard* (*Heegaard splittings*). Para más información, ver [12].

Definición 1.1. Sean B_1, \dots, B_n una colección de 3-bolas cerradas y $D_1, \dots, D_m, D'_1, \dots, D'_m$ una colección de pares de discos disjuntos en $\bigcup_{i=1}^n \partial B_i$. Para cada $0 \leq i \leq m$, sea $\phi_i : D_i \rightarrow D'_i$ un homeomorfismo. Sea H el resultado de pegar a lo largo de los homeomorfismos $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$. Cuando H es conexo lo llamaremos un *cubo con asas*.

Notación: Usaremos el símbolo $H^{n,m}$ para denotar un cubo con asas construido con n bolas y pegado a lo largo de m pares de discos.

Ejemplo 1.2. Un cubo con asas construido con 3 bolas, pegadas a lo largo de 5 pares de discos. Este cubo con asas está denotado por $H^{3,5}$, ver Figura 1.1.

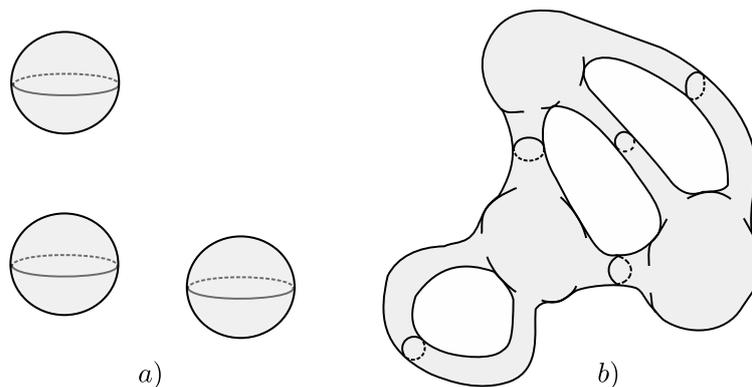


Figura 1.1: Cubo con asas $H^{3,5}$.

Observación 1.3. Para que un cubo con asas sea conexo es necesario que $m \geq n - 1$.

En la siguiente proposición, presentamos algunas propiedades interesantes de los cubos con asas.

Proposición 1.4. [12] *Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

- a) *Dado un cubo con asas $H^{n,m}$, entonces el género y la característica de Euler están dadas por $g(\partial H^{n,m}) = m - n + 1$ y $\chi(\partial H^{n,m}) = 2n - 2m$, respectivamente.*
- b) *Dos cubos con asas son homeomorfas si y solo si sus bordes tienen el mismo género.*
- c) *Un cubo con asa de la forma $H^{n,m}$, donde $n > 1$, es homeomorfa a un cubo con asas de la forma $H^{n-1,m-1}$.*
- d) *Un cubo con asas de la forma $H^{n,m}$ es homeomorfa a un cubo con asas de la forma $H^{1,m+1-n}$.*

Demostración. Solo probaremos la primera propiedad, la prueba de las otras puede ser encontrada en [12]. Dado un cubo con asas $H^{n,m}$, primero calcularemos el género de $\partial H^{n,m}$. Para conectar estas n bolas, es necesario un mínimo de $n - 1$ pares de discos, que al conectarlos es homeomorfa a una bola sólida. Se observa que:

$$g(\partial H^{n,m}) = m - (n - 1) = m - n + 1.$$

Como $\chi(\partial H^{n,m}) = 2 - 2g(\partial H^{n,m})$, reemplazando el género $g(\partial H^{n,m})$, tenemos:

$$\begin{aligned} \chi(\partial H^{n,m}) &= 2 - 2g(\partial H^{n,m}), \\ &= 2 - 2(m - n + 1), \\ &= 2n - 2m. \end{aligned}$$

Concluyendo la prueba. □

Como ya conocemos algunas propiedades de la estructura de los cubos con asas, el siguiente paso es poner estas “simples” piezas juntas y formar más variedades complicadas.

Observación 1.5. Al tomar un par de cubos con asas H_1, H_2 , del mismo género y pegarlos juntos por un homeomorfismo $\phi : \partial H_1 \rightarrow \partial H_2$.

Hay una inclusión natural de H_1 y de H_2 en la variedad $M = H_1 \cup_\phi H_2$ a lo largo de ϕ . Las imágenes de los bordes, ∂H_1 y ∂H_2 , son superficies en M que coinciden completamente. En otras palabras, hay una superficie Σ , el cual es borde de H_1 en M y de H_2 en M . Si hubiésemos comenzado con dos cubos con asas en M y una superficie a lo largo del cual sus bordes coinciden, podríamos inferir que M fue construido por pegar los cubos con asas juntos. Así, para entender las formas de que una variedad M puede ser construida por pegar cubos con asas, deberíamos examinar las maneras que un cubo con asas puede ser encajado en M tal que sus bordes coincidan.

De la Observación 1.5, obtenemos la siguiente definición de una descomposición de Heegaard.

Definición 1.6. Una *descomposición de Heegaard* para una 3-variedad M es una terna ordenada (Σ, H_1, H_2) , donde Σ es una superficie encajada en M y H_1 y H_2 , son cubos con asas encajadas en M tal que $\partial H_1 = \Sigma = \partial H_2 = H_1 \cap H_2$ y $H_1 \cup H_2 = M$. La superficie Σ es llamada una *superficie de Heegaard*. El *género de Heegaard* de M es el más pequeño género posible de la superficie de Heegaard, Σ , de una descomposición de Heegaard de M .

Teorema 1.7. [12] *Toda 3-variedad compacta, cerrada, conexa, orientada posee una descomposición de Heegaard.*

Ejemplo 1.8 (La 3-esfera). Una 3-esfera unitaria en \mathbb{R}^4 es el conjunto de todos los puntos cuya distancia del origen es una unidad. Esto es, $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ y es denotado por S^3 .

Una forma de ver una 3-esfera sin necesidad de preocuparse de \mathbb{R}^4 es usar la proyección estereográfica, el cual nos dice que podemos pensar en S^3 como la unión de \mathbb{R}^3 con un punto en el infinito.

Sea B_1 el conjunto de puntos en S^3 donde su primera coordenada es negativa o cero, esto es el conjunto de puntos por “debajo” del 3-plano definido por $x_1 = 0$. La aplicación i de la proyección estereográfica envía este conjunto a la bola unitaria en \mathbb{R}^3 , así B_1 es una 3-bola. El conjunto $B_2 \subset S^3$ consiste de puntos donde la primera coordenada

en positiva o cero es homeomorfa a B_1 , así B_2 es la segunda bola. La intersección $S^2 = B_1 \cap B_2$ es el conjunto de puntos donde la primera coordenada es precisamente B_1 y B_2 . Así, por definición, la terna (S^2, B_1, B_2) es una descomposición de Heegaard de género cero para S^3 .

Observación 1.9. A partir del Ejemplo 1.8, tenemos que el género de Heegaard de S^3 es cero.

Además, en el texto [12], se prueba que para cada entero no negativo g , existe una descomposición de Heegaard de S^3 de género g .

Ejemplo 1.10. Sea H_1, H_2 dos cubos con asas de género uno, de la definición de cubo con asas, hay dos curvas simples $\alpha \subset \partial H_1$ y $\beta \subset \partial H_2$ los cuales son bordes de discos propiamente encajados en $D_1 \subset H_1$ y $D_2 \subset H_2$, como en la Figura 1.2.

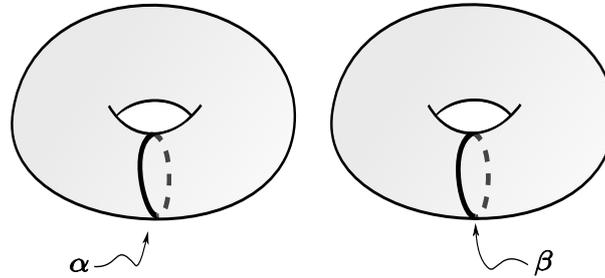


Figura 1.2: Identificando α y β construimos $S^2 \times S^1$.

Así, hay un homeomorfismo $\phi : \partial H_1 \rightarrow \partial H_2$, tal que $\phi|_{\alpha}(\alpha) = \beta$. Si pegamos a lo largo de ϕ , el resultado $M = H_1 \cup H_2$ es una 3-variedad conocida como $S^2 \times S^1$.

Ejemplo 1.11 (El 3-toro). El análogo 3-dimensional del toro 2-dimensional, $S^1 \times S^1$, es el 3-toro, $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$. Si parametrizamos S^1 como el intervalo $[0, 1]$ con los puntos finales identificados, entonces T^3 es el resultado de identificar las caras opuestas del cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Sea C el cubo y sea $\phi : C \rightarrow T^3$ es la aplicación inducida por la inclusión $[0, 1] \rightarrow S^1$. Los ocho vértices del cubo aplican a un solo vértice $v \in T^3$. Aristas paralelas en C aplican en la misma arista en T^3 así las doce aristas del cubo aplican a tres aristas en T^3 . Se prueba que T^3 tiene una descomposición de Heegaard de género 3.

Ejemplo 1.12 (La 3-variedad \mathcal{M}_n). La 3-variedad \mathcal{M}_n es la suma conexas de n copias de $S^2 \times S^1$, y tiene el género Heegaard es n , otra forma de construir \mathcal{M}_n es a partir de dos cubos con asas cuyos bordes tiene género n y identificar estos bordes por el homeomorfismo ϕ como fue construido $S^2 \times S^1$.

1.2. Homología singular, números de Betti

Las referencias utilizadas en esta subsección son [15], [20] y [27].

Definición 1.13. Un subconjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si, dados x y y en C , el segmento que va de x a y está enteramente contenido en C . Note que una intersección arbitraria de conjuntos convexos es convexo.

Definición 1.14. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es la envoltura convexa (i.e. la cerradura convexa), de A es la intersección de todos los conjuntos convexos de \mathbb{R}^n que contienen A .

Definición 1.15. Un p -simplejo s en \mathbb{R}^n es la envoltura convexa de una colección de $(p + 1)$ puntos $\{x_0, \dots, x_p\}$ en \mathbb{R}^n en la cual $x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0$ forman un conjunto línealmente independiente. Note que esto es independiente de la elección del punto x_0 . Los elementos x_0, \dots, x_p son llamados vértices de s .

Observación 1.16. Observe que un 1-simplejo es un segmento de recta, un 2-simplejo es un triángulo lleno (frontera con su interior), un 3-simplejo es un tetraedro lleno (caras con su interior) y así sucesivamente. Si a los vértices de s asignamos un orden específico, entonces s es un simplejo ordenado. Así, s es un simplejo ordenado con vértices x_0, \dots, x_p .

Denotemos por σ_p al p -simplejo de \mathbb{R}^{p+1} con vértices:

$$x_0 = (1, 0, \dots, 0), \dots, x_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, x_p = (0, \dots, 0, 1).$$

σ_p es llamado p -simplejo simplicial con orden natural. Los puntos

$$x_0 = (1, 0, \dots, 0), \dots, x_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, x_p = (0, \dots, 0, 1),$$

son llamados vértices de σ_p .

Definición 1.17. Sea X un espacio topológico. Un p -simplejo singular en X es una función continua $\phi : \sigma_p \rightarrow X$, siendo σ_p el p -simplejo simplicial.

Definición 1.18. Si ϕ es un p -simplejo singular e i es un entero con $0 \leq i \leq p$, definimos $\partial_i(\phi)$, un $(p - 1)$ -simplejo singular en X . Por:

$$\partial_i(\phi)(t_0, \dots, t_{p-1}) = \phi(t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1}),$$

tenemos que $\partial_i(\phi)$ es la i -ésima cara de ϕ .

Definición 1.19. Si X es un espacio topológico, definimos $S_n(X)$ el grupo abeliano libre cuya base es el conjunto de todos los n -simplejos singulares de X . Un elemento

de $S_n(X)$ es llamado una n -cadena singular de X si tiene la forma

$$\sum_{\phi} n_{\phi} \cdot \phi,$$

donde n_{ϕ} es un entero, igual a cero para todo, excepto para un número finito de ϕ 's. Como el i -ésimo operador ∂_i es una función del conjunto de n -complejos singulares en el conjunto de $(n-1)$ -complejos singulares, existe una única extensión a un homomorfismo

$$\partial_i : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X),$$

dado por $\partial_i(\sum_{\phi} n_{\phi} \cdot \phi) = \sum_{\phi} n_{\phi} \partial_i \phi$.

Definición 1.20. El *operador borde*, denotado ∂ , es dado por el homomorfismo

$$\partial : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X),$$

donde $\partial = \partial_0 - \partial_1 + \partial_2 - \cdots + (-1)^n \partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i$.

Proposición 1.21. [27] La composición $\partial \circ \partial$ en

$$S_n(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-2}(X)$$

es la aplicación nula.

Definición 1.22. Un elemento $c \in S_n(X)$ es un n -ciclo si $\partial(c) = 0$ (o $\partial_n(c) = 0$). Un elemento $d \in S_n(X)$ es un n -borde si existe $e \in S_{n+1}(X)$, tal que $d = \partial(e)$ (o $d = \partial_{n+1}(e)$). Puesto que ∂ es un homomorfismo, definimos

$$Z_n(X) := \ker \partial \quad y \quad B_n(X) := \text{Im } \partial.$$

Observación 1.23. La Proposición 1.21 implica que $B_n(X) \subseteq Z_n(X)$ como subgrupo.

Definición 1.24. Sea X un espacio topológico. Para cada $n \in \mathbb{N}$ el grupo cociente

$$H_n(X) := \frac{Z_n(X)}{B_n(X)},$$

es llamado de n -ésimo *grupo de homología singular de X* .

Observación 1.25. El n -ésimo grupo de homología singular de X mide el número de n -ciclos que no son $(n+1)$ -bordes. Geométricamente, los ciclos son objetos (combinaciones lineales de n -complejos) que “comienza” y “termina” en el mismo lugar. Decir que no son bordes (fronteras) es lo mismo que decir que existen “huecos” en el espacio. El número de generadores de $H_n(X)$ nos da el número de huecos n -dimensionales de X .

Para presentar algunos ejemplos de determinación de los grupos de homología singular de ciertos espacios topológicos, necesitaremos de los siguientes resultados:

Teorema 1.26. [27] Si X es conexo por caminos entonces $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Teorema 1.27. [27] Si X tiene el mismo tipo de homotopía de Y entonces $H_k(X) \cong H_k(Y)$, para todo $k \geq 0$. En particular, si X es homeomorfo a Y , entonces $H_k(X) \cong H_k(Y)$, para todo $k \geq 0$.

Veremos ahora dos herramientas poderosas para el cálculo del grupo de homología de espacios, el Teorema de *Mayer-Vietoris* y el Teorema de la *Fórmula de Künneth*.

Teorema 1.28. [25][**Mayer-Vietoris**] Sean U, V subconjuntos de un espacio topológico X , tal que $X = \text{int}(U) \cup \text{int}(V)$. Entonces, existe una secuencia exacta larga,

$$\dots \xrightarrow{\Delta_n} H_n(U \cap V) \xrightarrow{g_*^n} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{h_*^n} H_n(X) \xrightarrow{\Delta_{n-1}} H_{n-1}(U \cap V) \xrightarrow{g_*^{n-1}} \dots$$

donde, $g_*^n(x) = (j_{1*}^n(x), j_{2*}^n(x))$, $h_*^n(y, z) = i_{1*}^n(y) + i_{2*}^n(z)$ y Δ es el homomorfismo conexión, con $j_1^n : U \cap V \rightarrow U$, $j_2^n : U \cap V \rightarrow V$, $i_1^n : U \rightarrow X$ y $i_2^n : V \rightarrow X$ son las inclusiones naturales.

Teorema 1.29. [27][**Fórmula de Künneth**] Si X y Y son espacios topológicos, existe un isomorfismo natural

$$H_n(X \times Y) \cong \left(\bigoplus_{p=0}^n H_p(X) \otimes H_{n-p}(Y) \right) \oplus \left(\bigoplus_{p=0}^n \text{Tor}(H_p(X), H_{n-p-1}(Y)) \right),$$

para todo entero $n \geq 0$.

Corolario 1.30. [27] Si M y N son n -variedades orientables sin borde, entonces

$$H_n(M \times N) \cong \bigoplus_{p=0}^n H_p(M) \otimes H_{n-p}(N),$$

para todo entero $n \geq 0$.

Lema 1.31. [27] Si M es una n -variedad con borde, entonces $H_i(M) = 0$, para $i \geq n$.

Ejemplo 1.32. Se tiene el segundo grupo de homología para los siguientes espacios:

- $H_2(\{x_0\}) \cong \{0\}$, para todo $x_0 \in X$.
- $H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$.
- $H_2(S^n) \cong \{0\}$, para todo entero $n \geq 3$.

- $H_2(T^3) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
- $H_2(S^2 \times S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Definición 1.33. Dado el espacio X , definimos el r -ésimo número de Betti dado por

$$b_r(X) = \dim H_r(X),$$

para todo entero $r \geq 0$.

Ejemplo 1.34. Números de Betti de algunas 3-variedades:

S^3		T^3		$S^2 \times S^1$
$H_0 \cong \mathbb{Z}, \quad b_0 = 1$		$H_0 \cong \mathbb{Z}, \quad b_0 = 1$		$H_0 \cong \mathbb{Z}, \quad b_0 = 1$
$H_1 \cong \{0\}, \quad b_1 = 0$		$H_1 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad b_1 = 3$		$H_1 \cong \mathbb{Z}, \quad b_1 = 1$
$H_2 \cong \{0\}, \quad b_2 = 0$		$H_2 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad b_2 = 3$		$H_2 \cong \mathbb{Z}, \quad b_2 = 1$
$H_3 \cong \mathbb{Z}, \quad b_3 = 1$		$H_3 \cong \mathbb{Z}, \quad b_3 = 1$		$H_3 \cong \mathbb{Z}, \quad b_3 = 1$

$H_n \cong \{0\}$, así $b_n = 0$, para todo entero $n \geq 4$.

Teorema 1.35. [27] Dado el espacio topológico X , la característica de Euler de X está dada por

$$\chi(X) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r b_r(X).$$

Grafos

En esta subsección, introduciremos algunos conceptos de la teoría de grafos, necesarios para este trabajo, para más detalles ver [28].

Definición 1.36. Un 1-simplejo conexo es llamado *grafo*.

Una arista en un grafo \mathcal{G} , conectando dos vértices u y w , será denotada por el par $[u, w]$ o simplemente por uw cuando no hay confusión. En este caso, decimos que los vértices u y w son *adyacentes*. Las aristas de un vértice u son aquellas que se conectan a ese vértice; esto es, las aristas de \mathcal{G} del tipo uw .

Definición 1.37. Cuando u posee una única arista, u es llamado *vértice extremo*; este caso, la arista de u es llamada *arista extrema*. *Aristas adyacentes* son dos aristas con un extremo en común. Un *lazo* en un grafo \mathcal{G} es una arista de la forma uu .

Definición 1.38. Un *camino* en un grafo es una sucesión alternada de vértices (distintos) y aristas

$$v_0, [v_0, v_1], v_1, [v_1, v_2], v_2, \dots, v_{t-1}, [v_{t-1}, v_t], v_t.$$

El número natural t es llamado de *tamaño* del camino. Si $v_0 = v_t$, con $t \geq 1$, en este caso el camino será llamado *ciclo*.

Ejemplo 1.39. La Figura 1.3 ilustra cuatro ejemplos de grafos. El grafo en $a)$ no tiene ciclos, en $b)$ y $c)$ tienen un ciclo y en $d)$ tiene un lazo (ciclo con única arista).

Definición 1.40. El número de ciclos de un grafo \mathcal{G} es llamado *número de Betti* de \mathcal{G} y es denotado por $b_1(\mathcal{G})$.

Lema 1.41. [13] Sea \mathcal{G} un grafo, el número de ciclos está dado por

$$b_1(\mathcal{G}) = \mu - V + 1,$$

donde V y μ son, respectivamente, el número de vértices y aristas de \mathcal{G} .

Definición 1.42. Un *árbol* es un grafo \mathcal{G} que no posee ciclos.

Por ejemplo, el grafo ilustrado en 1.3 $a)$ es un árbol.

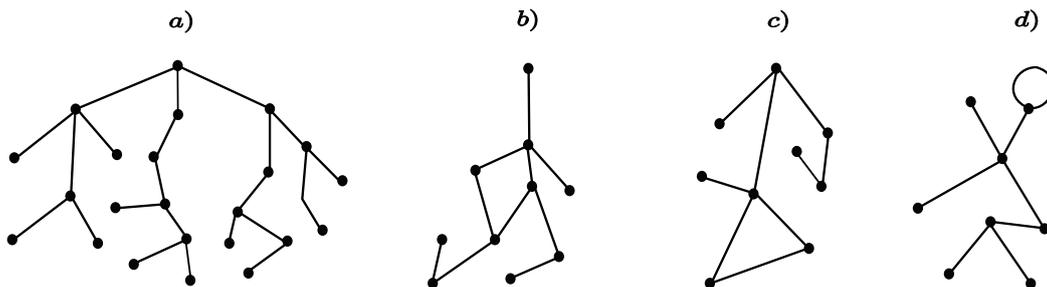


Figura 1.3: Ejemplos de grafos, $a)$, $b)$ bipartitos, $c)$, $d)$ no-bipartitos.

Definición 1.43. Un grafo \mathcal{G} es llamado *bipartito* si es posible atribuir signos \pm a cada uno de sus vértices de forma que cada arista conecte vértices de signos opuestos. Caso contrario, decimos que \mathcal{G} es *no-bipartido*.

Teorema 1.44. [29] Un grafo \mathcal{G} es bipartito si, y solamente si, todos sus ciclos tienen tamaño par. Caso contrario, si \mathcal{G} tiene un ciclo de tamaño impar, este es no-bipartito. Consecuentemente, todo árbol es un grafo bipartito.

1.3. Aplicaciones estables de 3-variedad en \mathbb{R}^3

En esta sección, presentaremos algunos conceptos de la teoría de singularidades de aplicaciones estables entre 3-variedades. Para más detalle sobre estos conceptos ver las siguientes referencias [5], [17] y [24].

Aplicaciones estables en el espacio $C^\infty(M, N)$

Sea M y N variedades diferenciables de clase C^∞ de dimensiones m y n , respectivamente. Considere $C^\infty(M; N)$ el conjunto de todas las aplicaciones de clase C^∞ de M en N . La topología C^∞ de Whitney en $C^\infty(M; N)$ es definida como sigue. Dado $\epsilon > 0$ un número real, entonces una vecindad fundamental de $f \in C^\infty(M; N)$ es el conjunto

$$\left\{ g \in C^\infty(M, N) : \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^\alpha} - \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial^\alpha} \right| < \epsilon \right\},$$

donde α recorre todas las n -uplas de números naturales $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, tal que $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, además

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_{\alpha_1} \dots \partial x_{\alpha_n}}.$$

Considere el espacio $C^\infty(M, N) = \{f : M \rightarrow N, f \in C^\infty\}$ como el conjunto de las aplicaciones suaves de M en N .

Definición 1.45. Sean f y g elementos de $C^\infty(M, N)$, entonces f es \mathcal{A} -equivalente a g si existen difeomorfismos $h : M \rightarrow M$ y $k : N \rightarrow N$, tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ h \downarrow & \searrow & \downarrow k \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

Definición 1.46. Una aplicación $f \in C^\infty(M, N)$ es *estable* si existe una vecindad abierta \mathcal{W}_f de f en $C^\infty(M, N)$ con la topología C^∞ -Whitney, tal que cada $g \in \mathcal{W}_f$ es \mathcal{A} -equivalente a f .

Definición 1.47. El conjunto de las aplicaciones estables en $C^\infty(M, N)$ es denotado por $\mathcal{E}(M, N)$. El conjunto $\Delta = C^\infty(M, N) \setminus \mathcal{E}(M, N)$, complementario del conjunto de las aplicaciones estables en $C^\infty(M, N)$, es llamado conjunto *discriminante*.

Teorema 1.48. [17] Las aplicaciones estables $f : M \rightarrow N$ forman un conjunto denso en el espacio de las aplicaciones $C^\infty(M, N)$.

Definición 1.49. Sea $f \in C^\infty(M, N)$, el *conjunto singular* de f , denotado por Σf , es el conjunto formado por los puntos de M , donde la diferencial de f no tiene rango máximo. La imagen del conjunto singular, $f(\Sigma f)$, es llamado de *conjunto de ramificación* de f y es denotado por Bf .

Definición 1.50. Un punto $r \in M \setminus \Sigma f$ es llamado de *punto regular* de f . Un punto $z \in \mathbb{R}^3$ es llamado *valor regular* de f si $f^{-1}(z)$, contiene solo puntos regulares.

En este trabajo, estamos interesados en el estudio de aplicaciones estables $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde M es una 3-variedad compacta, orientable y sin borde. Por esta razón, a partir de ahora, a menos que hagamos mención de lo contrario, vamos a considerar aplicaciones estables de este tipo.

En lo que sigue M será una 3-variedad salvo se exprese lo contrario.

Conjunto singular y conjunto ramificación

Según [5, 22], el conjunto singular Σf de una aplicación estable f consiste de superficies disjuntas encajadas en M , que serán llamadas *superficies singulares*. Cada superficie consiste de *puntos de pliegue*, curvas de *puntos cuspidales* (puntos cuya imagen es un punto de cúspide en el conjunto de ramificación $f(\Sigma f)$), donde pueden existir *puntos de cola de golondrina* aislados (ver Figura 1.4).

El conjunto de ramificación de f , denotado por $Bf = f(\Sigma f)$, consiste de un conjunto de superficies en el 3-espacio, no necesariamente disjuntos (puede tener auto-intersecciones). A seguir, tenemos las formas normales de los germines de esos puntos singulares en el conjunto Bf :

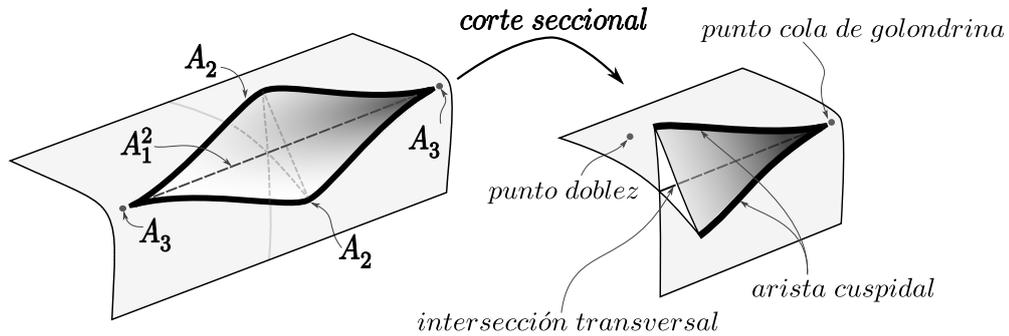


Figura 1.4: Ejemplos de puntos de curva cuspidal y cola de golondrina.

- a) A_1 : un punto de pliegue, $(x, y, z) \mapsto (x^2, y, z)$;
- b) A_2 : un punto cúspide, $(x, y, z) \mapsto (x^3 + yx, y, z)$;
- c) A_3 : un punto de cola de golondrina, $(x, y, z) \mapsto (x^4 + yx^2 + zx, y, z)$.

Por otro lado, el conjunto de ramificación $Bf = f(\Sigma f)$ de una aplicación estable f puede tener auto-intersecciones de las siguientes formas:

- i. A_1^2 : intersección transversal de dos hojas suaves,
- ii. A_2A_1 : intersección transversal de una arista cuspidal con una hoja suave,
- iii. A_1^3 : punto triple aislado obtenido por la intersección de tres hojas suaves.

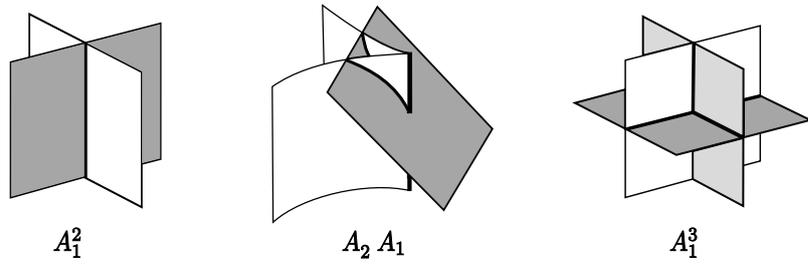


Figura 1.5: Puntos del tipo A_1^2 , A_2A_1 y A_1^3 .

Las componentes (superficies) del conjunto singular Σf , de una aplicación estable $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, separan la 3-variedad M en regiones conexas, que son las componentes del complemento $M - \Sigma f$.

Ejemplo 1.51. En la Figura 1.6, tenemos f_1, f_2 ejemplos de aplicaciones de pliegue de la 3-esfera S^3 en el espacio \mathbb{R}^3 . Las superficies que componen el conjunto singular (las superficies de pliegue) no pueden ser diseñadas en la 3-variedad. En la Figura 1.6, son mostradas las imágenes del conjunto singular que forman las superficies del conjunto de ramificación (superficies encajadas en \mathbb{R}^3). En la aplicación f_1 , tenemos como conjunto singular 3 superficies disjuntas homeomorfas a una S^2 y divide la S^3 en 4 componentes. En la aplicación f_2 , tenemos 5 superficies como conjunto singular y divide S^3 en 6 componentes.

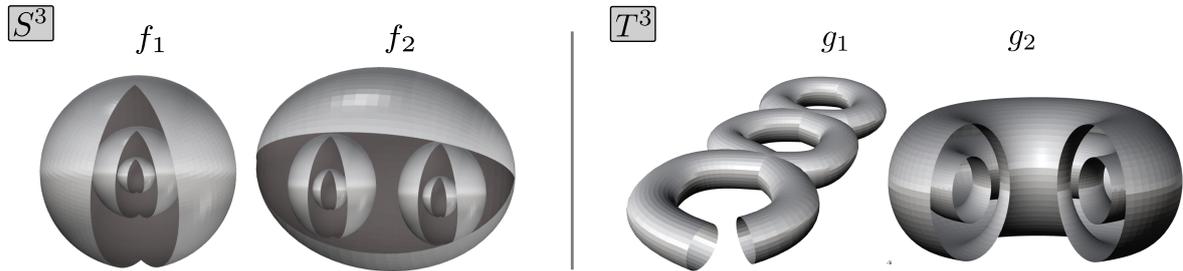


Figura 1.6: Ejemplos de aplicaciones de pliegue de S^3 y del 3-toro T^3 .

Definición 1.52. Sea S una superficie singular tal que la imagen $f(S)$ es una superficie compacta, conexa e inmersa en \mathbb{R}^3 . A esta imagen le asociamos una *dirección interior* (resp. *dirección exterior*) si la imagen de los puntos regulares en una vecindad tubular \mathcal{V} suficientemente pequeña de S en M tal que $\mathcal{V} \cap \Sigma f = S$ están en la región interior (resp. exterior) de $f(S)$. Esta dirección será representada por un segmento perpendicular al interior o exterior de $f(S)$ según sea el caso, ver Figura 2.6.

Ejemplo 1.53. Si consideramos la proyección canónica $\pi : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, entonces $\Sigma \pi = S^2$ y su imagen $\pi(\Sigma \pi) = \pi(S^2) = S^2$ es solo una 2-esfera. Como la imagen de los puntos regulares se encuentra en la región interna de S^2 , esta tiene una dirección a su interior.

Note que una superficie de Σf está siempre separando las regiones de direcciones opuestas.

Grafos de aplicaciones estables 3-variedad a \mathbb{R}^3

En [18, 23], los autores introdujeron grafos con pesos en sus vértices y aristas, asociados a aplicaciones estables de una 3-variedad a \mathbb{R}^3 y estudiaron sus propiedades como invariantes globales. A continuación presentaremos la definición de estos grafos.

Definición 1.54. Sea $\bigcup_{i=1}^m S_i \subset M$ una colección de superficies disjuntas, encajadas y orientadas en la 3-variedad cerrada. Definimos el *grafo pesado* \mathcal{G} asociado a esta colección de superficies en M como sigue: a cada superficies S_i asociamos una arista y a cada componente conexa M_j de $M - \bigcup_{i=1}^m S_i$ un vértice. Una arista es *incidente* a un vértice si la superficie correspondiente a la arista es adyacente a la 3-variedad representada por el vértice. Si una superficie es adyacente a una sola componente de $M - \bigcup_{i=1}^m S_i$, entonces esta representará un lazo en el grafo. Los pesos son asignados como sigue: dado un vértice v_j (correspondiente a la región M_j), definimos su *peso* como $c_j = b_2(M_j) - s_j + 1$; donde s_j está formado por el número de componentes conexas del borde de M_j . Intuitivamente, c_j puede verse como el número de generadores de $H_2(M_j)$, los cuales no están determinados por las superficies adyacentes a M_j . A cada arista, asociamos un *peso* dado por el género, g_i , de la superficie S_i que esta representa.

Definición 1.55. [23] Dada una aplicación $f \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$, donde M es una 3-variedad y Σf su conjunto singular, que son superficies orientadas inmersas en M . Por la Definición 1.54, tenemos un grafo pesado asociado al par $(M, \Sigma f)$; este grafo asociado será llamado *grafo asociado* a la aplicación f y será denotado por \mathcal{G}_f .

Notación: Sea \mathcal{G}_f el grafo asociado a la aplicación $f \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$, usaremos las siguientes notaciones:

V : número de vértices de \mathcal{G}_f .

P : $= \sum_{j=1}^V c_j$, peso total en los vértices de \mathcal{G}_f .

E : número total de aristas de \mathcal{G}_f .

G : $= \sum_{i=1}^E g_i$, peso total en las aristas de \mathcal{G}_f .

Más adelante estas cantidades serán definidas como invariantes (Por ejemplo E será denotado por I_E como invariante).

Notación: La 3-variedad dada por una S^3 con n asas (i.e. la suma conexas de n copias de $S^2 \times S^1$ con S^3), será denotada por \mathcal{M}_n ó $\#^n(S^2 \times S^1)$. En [23], los autores probaron el siguiente resultado para grafos de aplicaciones estables de \mathcal{M}_n en \mathbb{R}^3 .

Teorema 1.56. [23, Theorem 5.5] *Sea \mathcal{G} un grafo bipartito con pesos enteros y positivos c_j y g_i , en los vértices y en las aristas, respectivamente. Entonces, existe una aplicación*

estable $f : \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{G} = \mathcal{G}_f$ con $c_j = c_j(\mathcal{G}_f)$ y $g_i = g_i(\mathcal{G}_f)$ si y solo si

$$\sum_{j=1}^V c_j + b_1(\mathcal{G}) \leq b_2(\mathcal{M}_n) \leq \sum_{j=1}^V c_j + b_1(\mathcal{G}) + \sum_{i=1}^E g_i. \quad (1.1)$$

Corolario 1.57. Si $f \in \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$, entonces el grafo \mathcal{G}_f es un árbol con peso cero en sus vértices.

Ejemplo 1.58. En la Figura 1.7, tenemos ejemplos de \mathcal{G} -grafos de aplicaciones de S^3 en \mathbb{R}^3 , cuyas superficies presentadas son los conjuntos de ramificación de cada aplicación. Para ver una forma de construir estas aplicaciones, ver [8]. La aplicación f_1 es la proyección trivial de la 3-esfera en \mathbb{R}^3 la cual cuenta solo con una superficie singular homeomorfa a la esfera S^2 , formada solo por puntos de pliegue cuyo grafo \mathcal{G}_{f_1} tiene una sola arista con peso 0 en sus vértices y arista. La aplicación f_2 tiene dos superficies singulares homeomorfas a la esfera S^2 y una de ellas posee una curva cuspidal; por tanto, \mathcal{G}_{f_2} es un árbol con dos aristas con peso 0 en sus vértices y aristas. La aplicación f_3 tiene tres superficies singulares homeomorfas a la esfera S^2 , formada solo por puntos de pliegue; por tanto, \mathcal{G}_{f_3} es un árbol con tres aristas con peso 0 en sus vértices y aristas. La aplicación f_4 tiene cinco superficies singulares, tres de ellas homeomorfas a la esfera S^2 y dos de ellas homeomorfas al bitoro bidimensional, todas formadas solo por puntos de pliegue; por tanto, \mathcal{G}_{f_4} es un árbol con peso 0 en sus vértices, con tres aristas peso 0 y dos aristas con peso 2.

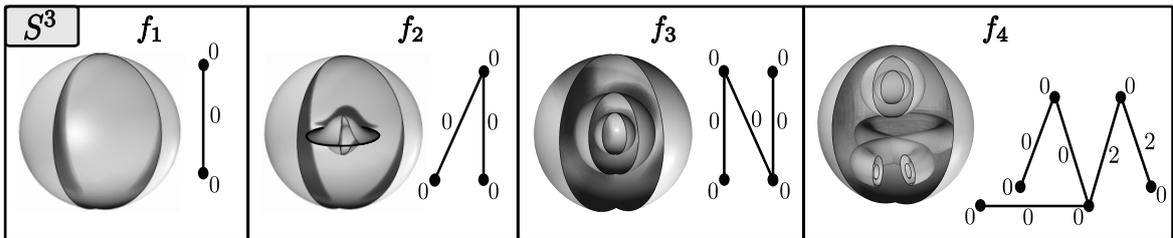


Figura 1.7: \mathcal{G} -grafo asociado a aplicaciones estables de S^3 en \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 1.59. En la Figura 1.8, tenemos ejemplos de grafos de aplicaciones de $S^2 \times S^1$ en \mathbb{R}^3 , cuyas superficies presentadas son los conjuntos de ramificación de cada aplicación. La aplicación h_1 cuenta solo con una superficie singular homeomorfa al toro bidimensional, formada solo por puntos de pliegue cuyo grafo \mathcal{G}_{h_1} tiene una sola arista con peso 0 en su vértices y 1 en su arista. La aplicación h_2 tiene dos superficies singulares homeomorfas a la esfera S^2 ; por tanto, \mathcal{G}_{h_2} es un ciclo con dos aristas con peso 0 en sus dos vértices y aristas. La aplicación h_3 tiene tres superficies singulares, dos de ellas homeomorfas a la esfera S^2 y una homeomorfa a un toro bidimensional,

formada solo por puntos de pliegue; por tanto, \mathcal{G}_{h_3} es un árbol con tres aristas con peso 0 en sus vértices y dos aristas, y con peso 1 en la tercera arista.

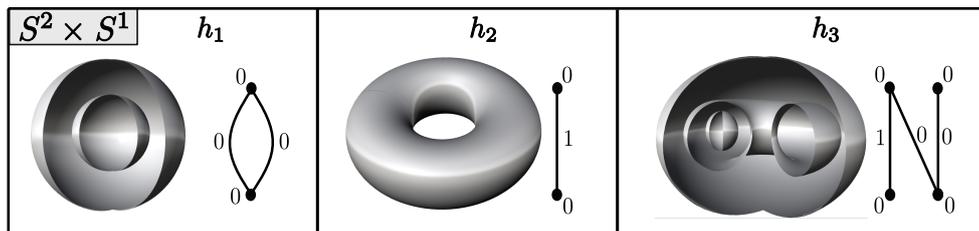


Figura 1.8: \mathcal{G} -grafo asociado a aplicaciones estables de $S^2 \times S^1$ en \mathbb{R}^3 .

Capítulo 2

Aplicaciones estables de S^3 en \mathbb{R}^3

Este capítulo está basado en los resultados obtenidos por Huamaní N. B., Mendes de Jesus C., y Palacios J. en [8], en la cual se estudia las descomposiciones de las transiciones de codimensión 1 que alteran el conjunto singular de las aplicaciones estables de S^3 a \mathbb{R}^3 . En dicho artículo se estudia el comportamiento topológico del conjunto singular y las singularidades en el conjunto de ramificación que envuelven curvas cuspidales y colas de golondrina que alteran el conjunto singular. También, estudiamos los efectos de esas descomposiciones sobre las invariantes globales, además describiremos como construir aplicaciones con un conjunto de ramificación predeterminado. Los resultados principales son el Teorema 2.13 y el Corolario 2.18.

2.1. Transiciones de codimensión 1 e Invariantes globales

Recordemos que el complemento de $\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ en $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ es el conjunto discriminante denotado por Δ . Consideremos una homotopía $F : M \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, t) \mapsto F(x, t) = F_t(x)$, entre dos aplicaciones estables $f, h : M \rightarrow \mathbb{R}^3$. A medida en que t varía en el intervalo $[a, b]$, el conjunto de ramificación de $F_a = f$ es deformado continuamente en el conjunto de ramificación de $F_b = h$. Puede suceder que para algún $t_0 \in [a, b]$, la aplicación F_{t_0} esté en el conjunto discriminante. Por ejemplo, si f y h son \mathcal{A} -equivalentes, entonces no necesariamente existe un $t_0 \in [a, b]$ tal que F_{t_0} está en el conjunto discriminante. Sin embargo, si f y h no son \mathcal{A} -equivalentes; entonces existe por lo menos un $t_0 \in [a, b]$, tal que F_{t_0} está en el conjunto discriminante Δ .

Las aplicaciones en $\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ tienen \mathcal{A}_e -codimensión 0, ver [22]. Las componentes conexas de $\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ son abiertos en el espacio de aplicaciones suaves $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$, y el

conjunto discriminante está formado por aplicaciones inestables (codimensión mayor que 0) en $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$.

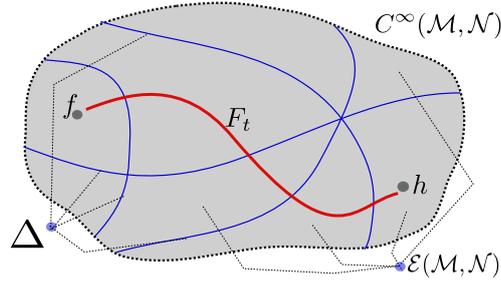


Figura 2.1: Esquema simbólico de los conjuntos $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$, $\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ y Δ .

Marar y Tari listan las transiciones de codimensión 1 en [16], esta lista también se puede encontrar en el trabajo de Goryunov [7] (ver Figura 2.3)

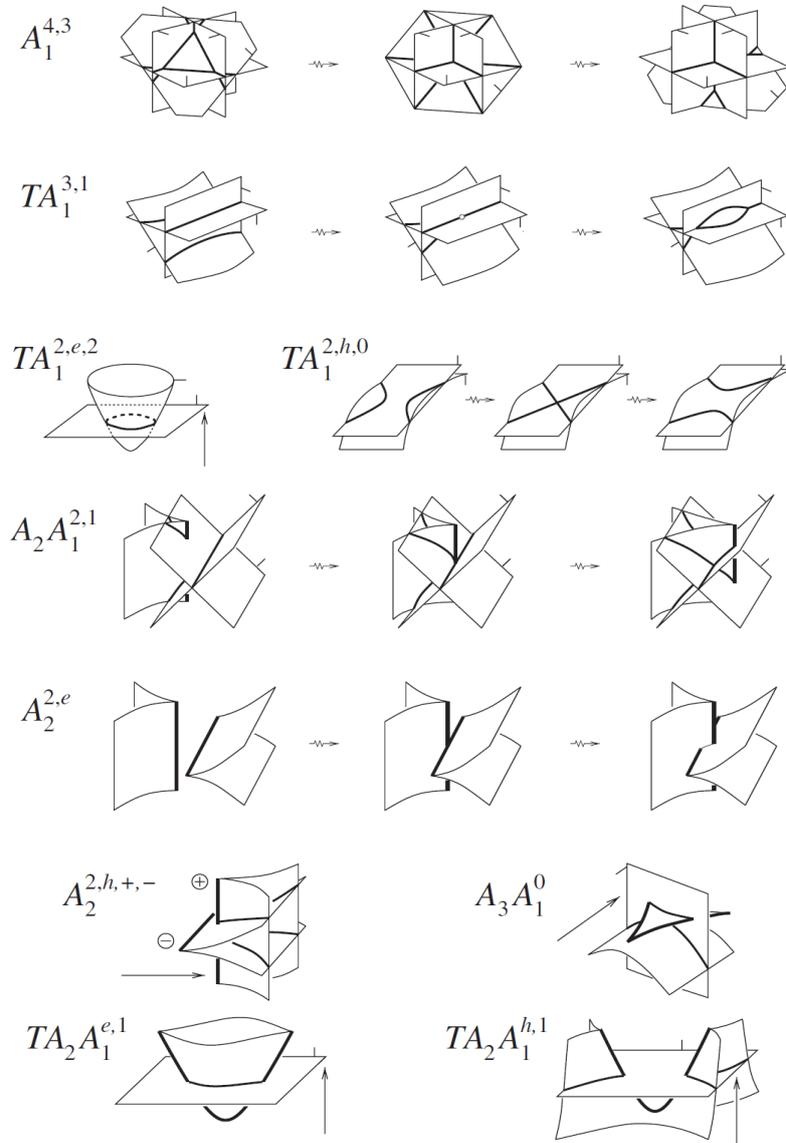


Figura 2.2: Transiciones codimensión 1 uni-germenes. Imágenes retiradas de [7].

El conjunto discriminante Δ puede ser visto como “paredes” (de dimensión infinita) formadas por las aplicaciones de codimensión 1. En las intersecciones de estas paredes, están las aplicaciones de codimensión mayores que 1. El conjunto Δ separa $\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ en componentes conexas por caminos en $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$. La Figura 2.1 ilustra una configuración simbólica de $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$, $\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ y Δ que puede ser obtenido por la intersección de un plano con el conjunto $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$.

Observación 2.1. El espacio $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ es conexo por caminos, luego existe un camino en $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ que conecta dos aplicaciones en diferentes en clases de \mathcal{A} -equivalencia, y una homotopía entre estas aplicaciones atraviesa Δ pasando solo por aplicaciones de codimensión 1.

La Figura 2.2 muestra algunas transiciones de codimensión 1 (multi-germenes) dadas en [7]. Estas transiciones no serán estudiadas en este trabajo pues no alteran o conjunto singular de una aplicación. Las transiciones que alteran el conjunto singular están en la Figura 2.3.

La Figura 2.3 muestra transiciones de codimensión 1 (uni-germenes). Las formas normales de las aplicaciones de transición dadas [7], tienen la siguientes formas normales $(x, y, z) \mapsto (h(x, y, z, \lambda), y, z)$, donde h es un polinomio y λ parámetro real. Las fórmulas locales nos dicen que las aplicaciones son estables para $\lambda \neq 0$ y no estables para $\lambda = 0$ (figuras del extremo izquierdo y derecho son estables y las figuras del centro son las no estables, dadas en la Figura 2.3). En adelante σ es el signo del eje cuspidal, y las dos sumas en la notación son los signos de los cuadrados de los coeficiente de x .

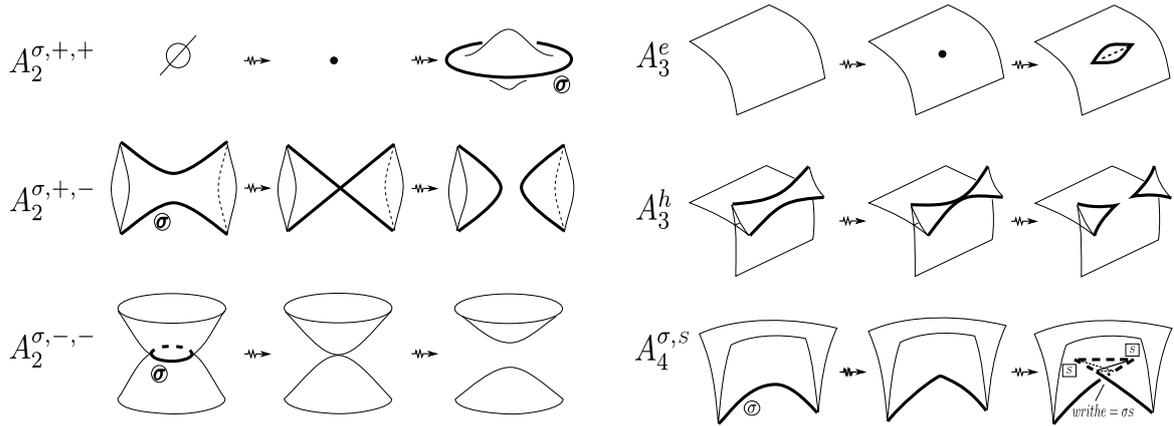


Figura 2.3: Algunas transiciones codimensión 1 uni-germenes. Estas imágenes fueron tomadas de Goryunov [7].

Definición 2.2. Una *curva cuspidal*, en el conjunto de ramificación de una aplicación estable, es una curva cerrada que consiste solo de puntos de cúspide (ver curvas η , η_1 y η_2 , en Figura 2.4, parte *i*)).

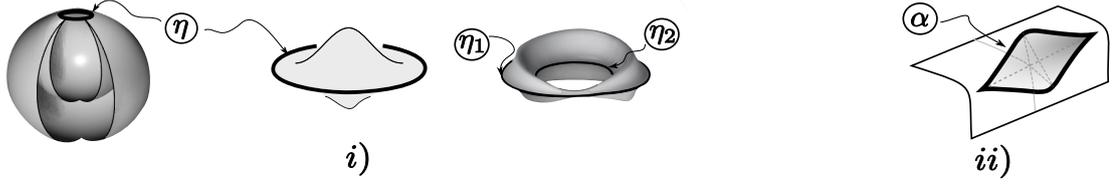


Figura 2.4: Ejemplos de curvas cuspidales en el conjunto de ramificación.

Es importante señalar que las curvas formadas por los puntos de la cúspide y puntos de cola de golondrina no se consideran como curvas cuspidales. Por ejemplo, la curva α en la Figura 2.4 parte *ii*) no es una curva cuspidal.

$A_2^{\sigma,+,+}$: $\pm(x^3 + (y^2 + z^2 - \lambda)x)$, nacimiento de un disco volador;

$A_2^{\sigma,+,-}$: $\pm(x^3 + (y^2 - z^2 + \lambda)x)$, transformación hiperbólica de un eje cuspidal;

$A_2^{\sigma,-,-}$: $\pm(x^3 - (y^2 + z^2 + \lambda)x)$, muerte de una componente compacta de un eje cuspidal;

A_3^e : Nacimiento del labio cuspidal con dos puntos de cola de golondrina;

A_3^h : Bifurcación de picos en un eje cuspidal.

En este trabajo, solo necesitaremos las siguientes 5 transiciones: $A_2^{\sigma,+,+}$, $A_2^{\sigma,+,-}$, $A_2^{\sigma,-,-}$, A_3^e , A_3^h , ilustradas en la Figura 2.3; los cuales son las transiciones que alteran el número de curvas cuspidales; también pueden alterar la topología del conjunto singular y el número de puntos de cola de golondrina. Por motivos de conveniencia, las tres primeras transiciones que alteran la topología del conjunto singular se denotarán por L , B y P , respectivamente. Veremos, con más detalle, las propiedades de las transiciones L , B , P , A_3^e , A_3^h , y subdividir cada uno de ellos, si es necesario, para distinguir las propiedades globales que pueden suceder cuando el camino que une dos aplicaciones estables atraviesa estas transiciones.

Dirección de una transición de codimensión 1

Ya que una transición de codimensión 1 se efectúa de una aplicación a otra, esta puede modificar el número de ejes cuspidales, superficies singulares, etc. Si nuestra intención es medir la variación de dichos números, entonces es necesario dar una dirección a estas transiciones. En la siguiente definición vamos a adoptar una dirección positiva o negativa para las transiciones L , B , P , A_3^e y A_3^h .

Definición 2.3. Sea f una aplicación obtenida de una aplicación ξ de M a \mathbb{R}^3 , de forma que el camino que une f y ξ pasa a través de $T \in \{L, B, P, A_3^e, A_3^h\}$, una transición de codimensión 1. Diremos que la transición T tiene dirección positiva (resp. negativa) en los siguientes casos:

1. L tiene dirección *positiva* (resp. *negativa*) si f tiene exactamente una curva cuspidal más (resp. menos) que ξ . (Ver transición $A_2^{\sigma,+}$ Figura 2.3).
2. B tiene dirección *positiva* (resp. *negativa*) si f tiene exactamente una curva cuspidal y una superficie singular más (resp. menos) que ξ ; o si f tiene una curva cuspidal menos (resp. más) que ξ y la diferencia entre el género de las superficies singulares de f y ξ es -1 (resp. 1). (Ver transición $B_{-,g}$ Figura 2.8).
3. P tiene dirección *positiva* (resp. *negativa*) si f tiene exactamente una curva cuspidal menos (resp. más) que ξ . (Ver transición P Figura 2.5).
4. A_3^e, A_3^h tiene dirección *positiva* (resp. *negativa*) si f tiene dos colas de golondrina más (resp. menos) que ξ . (Ver transición A_3^e Figura 2.5).

Ejemplo 2.4. En la Figura 2.5, tenemos que la transición A_3^e tiene dirección positiva; pues, el camino $F_t : [0, 1] \rightarrow \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$, que une $F_0 = \xi_1$ y $F_1 = f_1$, atraviesa solo la transición A_3^e ; además f_1 , tiene dos colas de golondrina más que ξ_1 . De manera similar la transición P tiene dirección negativa; pues, el camino $F_{t'} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$, que une $F_0 = \xi_2$ y $F_1 = f_2$, atraviesa solo la transición P ; además, f_2 tiene una curva cuspidal menos que ξ_2 .

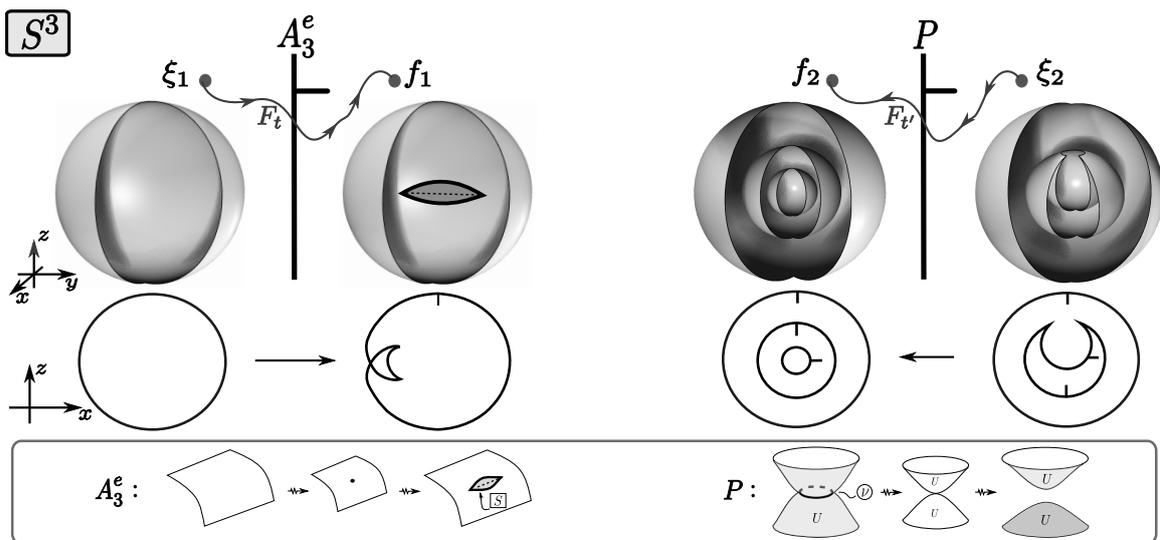


Figura 2.5: Ejemplos de dirección de una transición.

Observación 2.5. Del ejemplo anterior, si el camino F_t va de f_1 a ξ_1 (i.e., si construimos ξ_1 a partir de f_1), tenemos que la orientación de A_3^e ahora es negativo; pues, ξ_1 tiene dos colas de golondrina menos que f_1 . De esta manera, si la línea vertical debajo de las transiciones representa a la transición, la pequeña línea horizontal perpendicular a esta línea de transición, que está a la izquierda (o derecha) de esta línea de transición nos dice lo siguiente: (ver Figura 2.5)

- Si un camino inicia de un lado de la transición y la pequeña línea horizontal está en el lado opuesto de la línea de transición, y además este camino atraviesa esa transición, entonces la transición tiene dirección positiva.
- Si un camino inicia de un lado de la transición y la pequeña línea horizontal está en el mismo lado de la línea de transición, y además este camino atraviesa esa transición, entonces la transición tiene dirección negativa.

De esta forma, si vemos la Figura 2.5, para conocer la dirección de las transiciones, solo tenemos que tener en cuenta la orientación de los caminos. De igual modo, si F_t va de ξ_1 a f_1 entonces A_3^e tiene dirección positiva. Ahora si F_t va de f_1 a ξ_1 entonces A_3^e tiene dirección negativa. Así, en las figuras siguientes, se muestra el conjunto de ramificación de una aplicación estable donde haya transición entre ellas.

En esta sección, introduciremos las definiciones de algunas invariantes globales para aplicaciones estables de una 3-variedad en \mathbb{R}^3 , esto con el fin de estudiar las relaciones entre ellas cuando uno perturba la aplicación continuamente.

2.1.1. Invariantes globales

Si f es una aplicación estable de una 3-variedad compacta y orientada M a \mathbb{R}^3 , las superficies singulares en M , las curvas cuspidales, colas de golondrinas en $f(\Sigma f)$ son finitas, así $\Sigma f = \bigcup_{i=1}^m S_i$ y si g_i es el género de la superficie S_i , para cada $i = 1, \dots, m$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.6. Sea f una aplicación estable de una 3-variedad compacta y orientada a \mathbb{R}^3 . Consideraremos las siguientes *invariantes globales* de f :

- $I_E(f)$: el número total de superficies singulares en Σf ,
- $I_V(f)$: el número total de componentes regulares en $M - \Sigma f$,
- $I_C(f)$: el número de curvas cuspidales en Σf ,
- $I_G(f)$: suma de todos los géneros de las superficies en Σf , ($:= \sum_{i=1}^{I_E(f)} g_i$)
- $I_S(f)$: el número total de puntos de cola de golondrina en Σf .

A veces, escribiremos I_E en lugar de $I_E(f)$, si no surge confusión, similarmente para las otras invariantes.

Ejemplo 2.7. La Figura 2.6 ilustra algunos ejemplos del conjunto de ramificación de aplicaciones estables de S^3 a \mathbb{R}^3 con $I_E \leq 3$, donde la terna de enteros son (I_C, I_G, I_S) . Para $I_E = 1$, las aplicaciones estables tienen $I_C < 4$ y $I_S < 4$; para $I_E = 2$, las aplicaciones estables tienen $I_C < 7$ y $I_S = 0$; para $(I_E = 3)$, las aplicaciones estables tienen $I_C < 6$ y $I_S = 0$. Además, las curvas bajo el conjunto de ramificación son sus correspondientes secciones transversales.



Figura 2.6: Ejemplos de aplicaciones estables de S^3 a \mathbb{R}^3 con $I_E \leq 3$.

Observación 2.8. Hay otras invariantes que no serán analizadas en este trabajo. Por ejemplo, el número de puntos triples I_T , el número de puntos dobles cerrados I_D , la característica de Euler de un conjunto singular (resp. ramificación), ver [[22], pp. 400-404] para más detalles sobre estas invariantes. Tenemos,

$$\chi(\Sigma f) = \sum_{i=1}^{I_E} (2 - g_i) = 2I_E - 2 \sum_{i=1}^{I_E} g_i = 2I_E - 2I_G,$$

donde cada g_i es el género de la superficie singular de f correspondiente. Así, $\chi(\Sigma f)$ depende de I_E y I_G . De la fórmula de Izumiya-Marar, se tiene

$$\chi(f(\Sigma f)) = \chi(\Sigma f) + I_T + \frac{I_S}{2} = 2I_E - I_G + I_T + \frac{I_S}{2}.$$

En particular, $\chi(f(\Sigma f))$ depende de I_E , I_G , I_S y I_T ; sin embargo, este último no es considerado en la Definición 2.6.

Si $M = S^3$, entonces $I_V = I_E + 1$, el cual es consecuencia del teorema de Jordan-Brouwer; donde Σf es la unión disjunta de superficies cerradas, orientadas e inmersas en S^3 . Por tal motivo, solo consideraremos las invariantes I_E, I_C, I_G y I_S .

2.2. Subdivisión de transiciones de codimensión 1

Las transiciones de codimensión 1, con las que estamos trabajando, son L , B , P , A_3^e y A_3^h (ver Figura 2.7). Las tres primeras son las que modifican la topología, el número de componentes del conjunto singular; además, de modificar el número de ejes cuspidales. También, A_3^e y A_3^h modifican los ejes cuspidales y principalmente el número

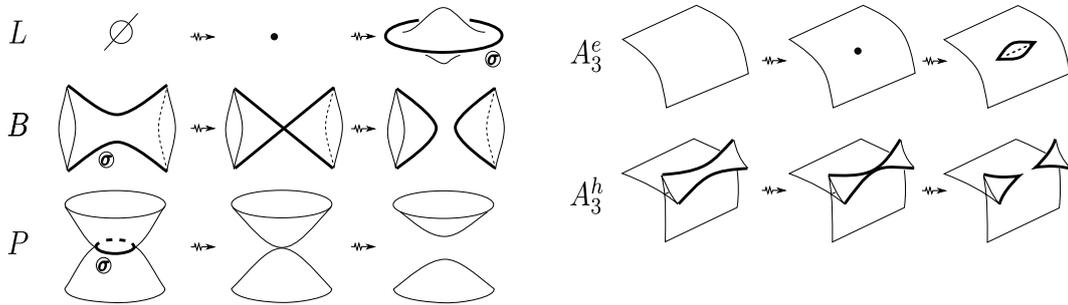


Figura 2.7: Transiciones de codimensión 1.

de colas de golondrina. En los párrafos siguientes, describiremos el comportamiento y la descomposición de las transiciones de acuerdo con la alteración del número de curvas cuspidales, cola de golondrina y superficies singulares en dirección positiva. El caso de la dirección negativa es de manera similar, solo que los valores de los incrementos en cada invariante son el negativo de los incrementos de los positivos (ver Figura 2.9).

L : Esta transición no será descompuesta. Esta crea una superficie singular homeomorfa a una esfera, incrementando una unidad el número de superficies singulares y el número de curvas cuspidales. Denotemos por Q y η la nueva superficie singular y curva cúspidal,

respectivamente (ver Figura 2.8). Así,

$$(I_E, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_C, I_G, I_S)(f') + (1, 1, 0, 0).$$

B : Esta modifica no solo el número de curvas cuspidales, también el número de superficies singulares y su género. Esta transición será descompuesta en $B_{+,g}$, $B_{0,g}$, $B_{-,g}$ y B_v . La Figura 2.9 muestra la imagen local de las transiciones en el conjunto de ramificación con respecto a la dirección positiva, donde:

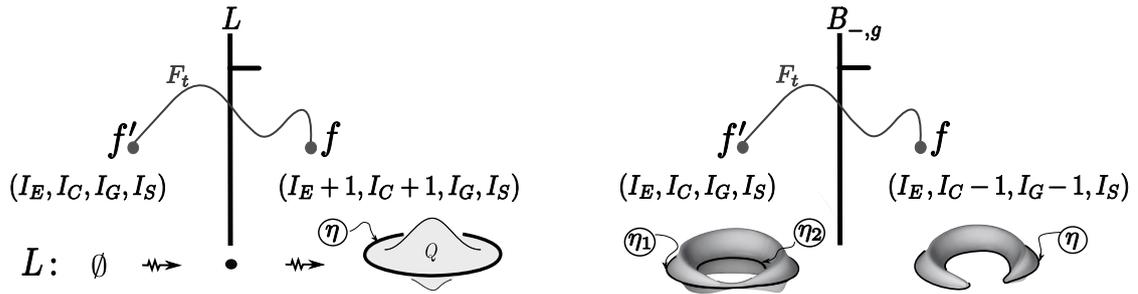


Figura 2.8: Ejemplo de transiciones L y $B_{-,g}$.

- $B_{-,g}$: Las curvas cuspidales η_1 y η_2 en la superficie W uniéndose tangencialmente en una curva cuspidal η en la superficie Z . El número de curvas cuspidales y el género de una superficie singular disminuye una unidad (ver Figura 2.8). Así,

$$(I_E, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_C, I_G, I_S)(f') + (0, -1, -1, 0).$$

- $B_{0,g}$: Dos arcos de aristas cuspidales η_1 y η_2 en la superficie W se unen una con otra tangencialmente; luego, se divide en dos nuevas aristas cuspidales β_1 y β_2 en una superficie Z . El número de géneros de una superficie singular disminuye una unidad. Así,

$$(I_E, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_C, I_G, I_S)(f') + (0, 0, -1, 0).$$

- $B_{c,g}$: Dos arcos, uno que es curva cuspidal y la otra arista cuspidal η_1 y α_2 en la superficie W , se unen una y otra tangencialmente; luego, se separa en dos aristas cuspidales β_1 y β_2 en una superficie Z . El número de géneros y curvas cuspidales disminuyen una unidad. Así,

$$(I_E, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_C, I_G, I_S)(f') + (0, -1, -1, 0).$$

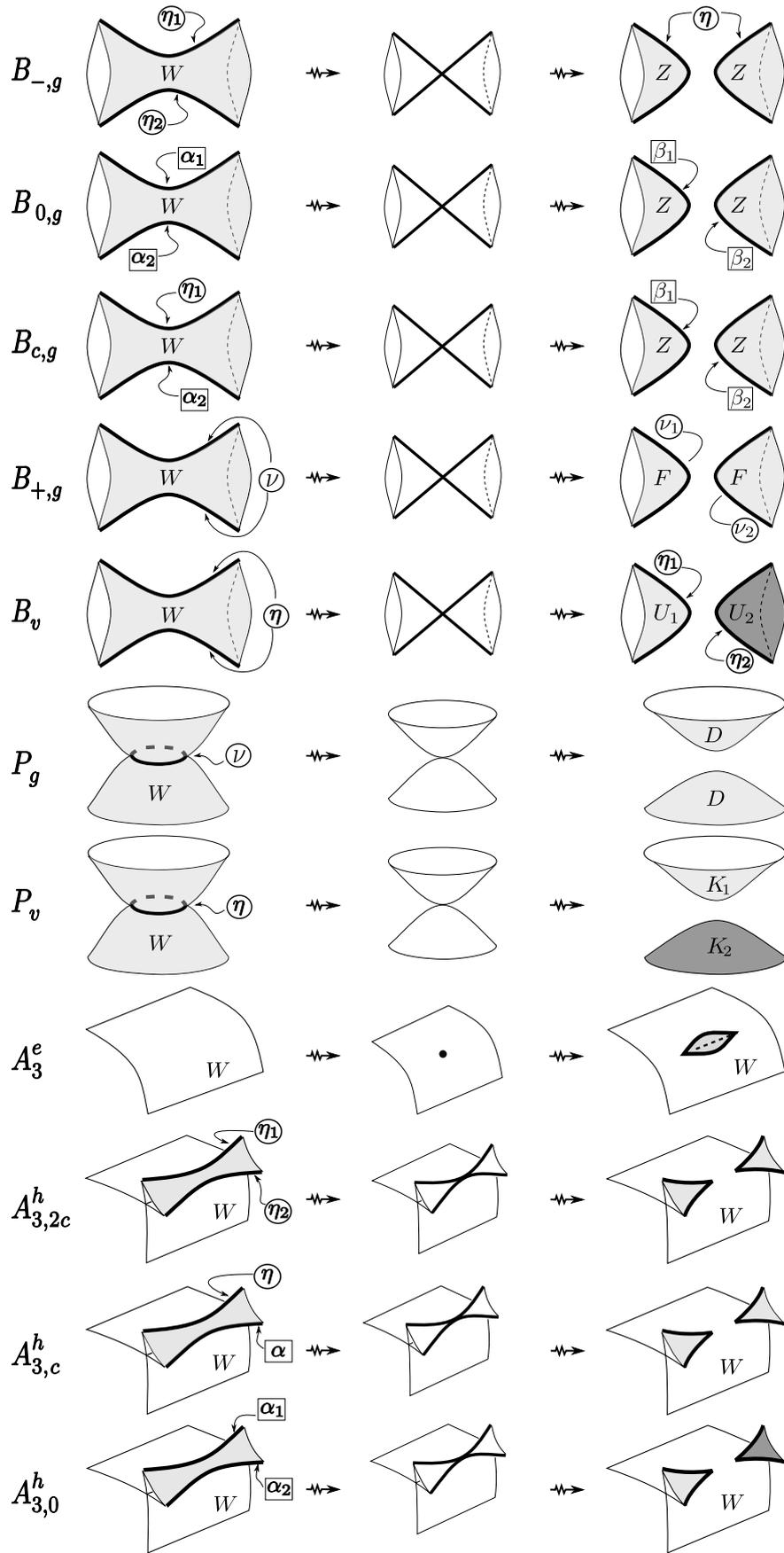


Figura 2.9: Decomposición de las transiciones B , P y A_3^h .

- $B_{+,g}$: Dos arcos de una curva cuspidal ν en la superficie W se une una y otra tangencialmente; luego, se separa en dos curvas cuspidales ν_1 y ν_2 en la superficie F . El número de curvas cuspidales se incrementa una unidad y el género de una superficie singular disminuye una unidad. Así,

$$(I_E, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_C, I_G, I_S)(f') + (0, 1, -1, 0).$$

- B_v : Dos arcos de una curva cuspidal η en la superficie W se une una y otra tangencialmente, separa en dos curvas cuspidales η_1 y ν_2 en las superficies U_1 y U_2 espectivamente. En número de superficies singulares y el número de curvas cuspidales se incrementan una unidad. Así,

$$(I_E, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_C, I_G, I_S)(f') + (1, 1, 0, 0).$$

P : Esta transición modifica el número de curvas cuspidales, superficies singulares y el género de las superficies singulares. Esta transición será subdividida en P_g y P_v . Donde:

- P_g : Esta elimina la curva cuspidal η y el género en la superficie W , obteniendo una nueva superficie singular D . Así,

$$(I_E, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_C, I_G, I_S)(f') + (0, -1, -1, 0).$$

- P_v : Esta elimina la curva cúspidal η encogiéndolo y separándolo para descomponer la superficie W en dos nuevas superficies singulares, K_1 y K_2 (ver Figura 2.10). Así,

$$(I_E, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_C, I_G, I_S)(f') + (1, -1, 0, 0).$$

A_3^e : Esta transición no será descompuesta. Esta crea dos colas de golondrina en una región de una superficie singular formada por puntos de pliegue, nace el labio cúspidal con dos nuevos puntos de golondrina. Así,

$$(I_E, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_C, I_G, I_S)(f') + (0, 0, 0, 2).$$

A_3^h : Esta transición altera el número de colas de golondrina y el número de curvas cuspidales. Esta será descompuesta en $A_{3,2c}^h$, $A_{3,c}^h$ y $A_{3,0}^h$. Donde:

- $A_{3,2c}^h$: Dos arcos de las curvas cuspidales η_1 y η_2 son unidas tangencialmente en la superficie W . El número de curvas cuspidales disminuye dos unidades, y nacen

dos nuevas colas de golondrina. Así,

$$(I_E, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_C, I_G, I_S)(f') + (0, -2, 0, 2).$$

- $A_{3,c}^h$: Un arco de una curva cúspida η y una arista cuspidal α son unidas tangencialmente en la superficie W . El número de curvas cuspidales disminuye una unidad, y nacen dos nuevas colas de golondrina. Así,

$$(I_E, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_C, I_G, I_S)(f') + (0, -1, 0, 2).$$

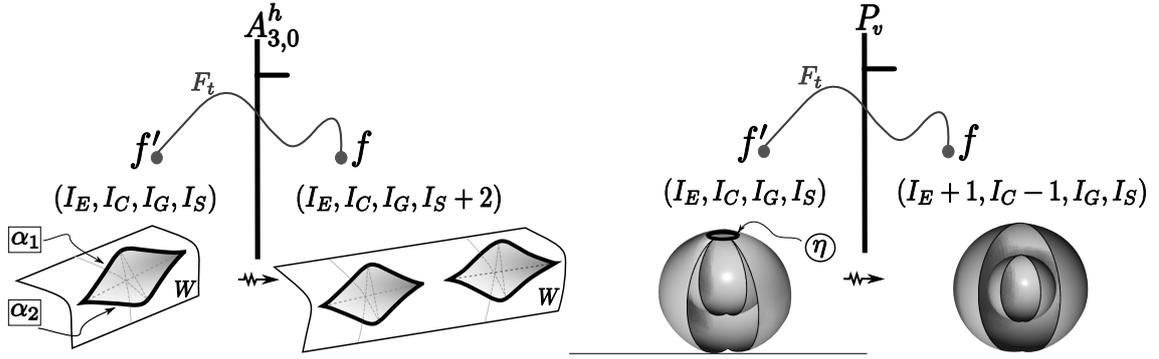


Figura 2.10: Ejemplos de transiciones $A_{3,0}^h$ y P_v .

- $A_{3,0}^h$: Dos arcos de las aristas cuspidales α_1 y α_2 son unidas tangencialmente. El número de colas de golondrina incrementan dos unidades (ver Figura 2.10). Así,

$$(I_E, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_C, I_G, I_S)(f') + (0, 0, 0, 2).$$

Una imagen local de estas transiciones se muestra en la Figura 2.9.

$T \in \mathcal{T}$	L	$B_{-,g}$	$B_{0,g}$	$B_{c,g}$	$B_{+,g}$	B_v	P_g	P_v	A_3^e	$A_{3,2c}^h$	$A_{3,c}^h$	$A_{3,0}^h$
ΔI												
ΔI_E	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
ΔI_C	1	-1	0	-1	1	1	-1	-1	0	-2	-1	0
ΔI_G	0	-1	-1	-1	-1	0	-1	0	0	0	0	0
ΔI_S	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2

Cuadro 2.1: Incrementos de las invariantes sobre las transiciones $T \in \mathcal{T}$ en dirección positiva.

Escribimos:

$$\mathcal{T} = \{L, B_{-,g}, B_{0,g}, B_{c,g}, B_{+,g}, B_v, P_g, P_v, A_3^e, A_{3,2c}^h, A_{3,c}^h, A_{3,0}^h\}. \quad (2.1)$$

Los efectos de las transiciones en dirección negativa alteran las curvas cuspidales, las superficies singulares y las colas de golondrina exactamente de la manera opuesta a lo que hacen las transiciones en dirección positivas, según sea el caso.

En la tabla 2.1, recogemos los efectos de todas las modificaciones de las invariantes I_E, I_C, I_G, I_S a través de las transiciones en \mathcal{T} . Si una aplicación f es obtenida desde una aplicación f' , a través del camino F_t , atravesando una transición T en dirección positiva, escribimos $\Delta I_E = I_E(f) - I_E(f')$ para el incremento de las superficies singulares en la transición T . Similarmente, definimos los incrementos $\Delta I_C, \Delta I_G$ y ΔI_S en la transición T . Por otro lado, f' es obtenida de f a través del camino F_{-t} , atravesando las transición T en dirección negativa. En este caso, tenemos: $\Delta I_E = I_E(f') - I_E(f)$.

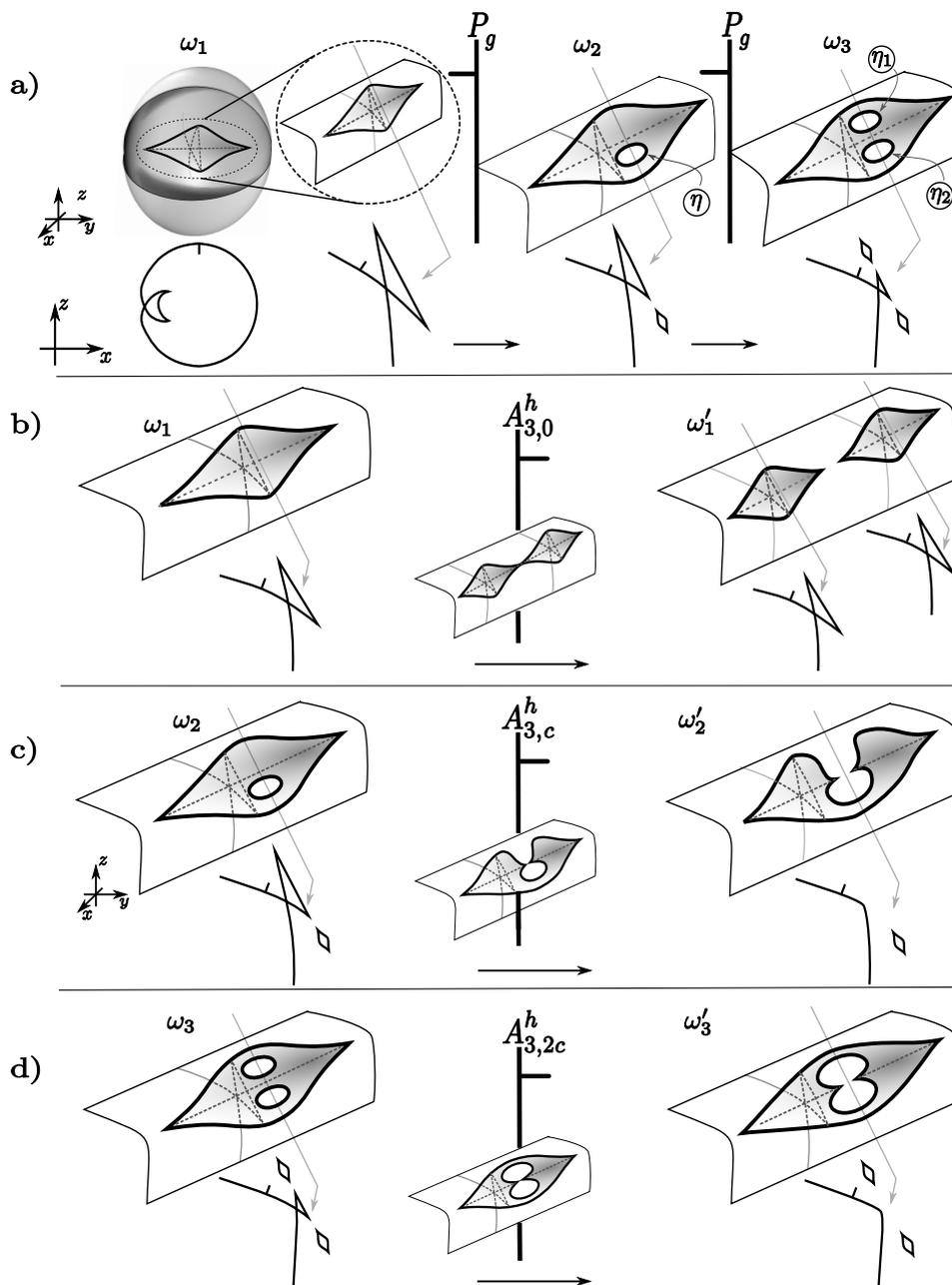


Figura 2.11: Ejemplo locales de las transiciones $P_g, A_{3,0}^h, A_{3,c}^h$ y $A_{3,2c}^h$.

Ejemplo 2.9. La Figura 2.11 ilustra los incrementos de los números de cola de golondrina I_S y curvas cuspidales I_C . Las curvas bajo de los conjuntos de ramificación ilustra cortes seccionales; estas tienen un segmento perpendicular y representa la dirección de la superficie singular. Los segmentos horizontales en los trazos verticales apuntan al sentido positivo de las transiciones. Uno tiene lo siguiente:

- a) La aplicación ω_1 es obtenida de la proyección trivial de la S^3 en \mathbb{R}^3 , tal que el camino que los liga pasa por la transición A_3^e en dirección positiva. La aplicación ω_2 es obtenida de la aplicación ω_1 , tal que el camino que va de ω_1 a ω_2 , pasa por la transición P_g en dirección negativa. Similarmente, se obtiene ω_3 de la aplicación ω_2 . Entonces: $I_C(\omega_3) = I_C(\omega_1) + 2$ y $I_S(\omega_3) = I_S(\omega_1)$.
- b) La aplicación ω'_1 es obtenida de la aplicación ω_1 , tal que el camino que los liga pasa por la transición $A_{3,0}^h$ en dirección positiva. Entonces: $I_S(\omega'_1) = I_S(\omega_1) + 2$.
- c) La aplicación ω'_2 es obtenida de la aplicación ω_2 , tal que el camino que los liga, pasa por la transición $A_{3,c}^h$ en dirección positiva. Entonces: $I_C(\omega_2) = I_C(\omega'_2) + 1$ y $I_S(\omega'_2) = I_S(\omega_2) + 2$.
- d) La aplicación ω'_3 es obtenida de la aplicación ω_3 , tal que el camino que los liga, pasa por la transición $A_{3,2c}^h$ en dirección positiva. Entonces: $I_C(\omega_3) = I_C(\omega'_3) + 2$ y $I_S(\omega'_3) = I_S(\omega_3) + 2$.

En [23, 18], los autores probaron que, si Ω es un conjunto finito con E superficies compactas, orientadas, disjuntas e inmersas en S^3 , entonces existe una aplicación estable $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $\Sigma f = \Omega$. Construir estos ejemplos no es trivial.

La Figura 2.12 ilustra ejemplos de secuencias de aplicaciones estables en que las invariantes I_E, I_C, I_G, I_S tengan un valor menor o igual a 3, asociado al par (Ω, S^3) .

La parte *i*) comienza con la aplicación f_1 , tal que $(I_E, I_C, I_G, I_S)(f_1) = (3, 0, 0, 0)$. Ahora, f_2 es obtenida de la aplicación f_1 , tal que el camino que los liga pasa por la transición P_v en dirección positiva. Así, obtenemos: $(I_E, I_C, I_G, I_S)(f_2) = (2, 1, 0, 0)$. Luego, f_3 es obtenida de la aplicación f_2 , tal que el camino que los liga pasa por la transición P_g en dirección negativa. Así, se obtiene: $(I_E, I_C, I_G, I_S)(f_3) = (2, 2, 1, 0)$. De la misma forma, construimos la parte *ii*) y *iii*) de la Figura 2.12.

La Tabla 2.2 presenta un resumen de los efectos de las transiciones $B_{\pm,g}, B_v, P_g$ y P_v en las invariantes I_E, I_C, I_G, I_S , obtenido de las aplicaciones construidas en las Figuras 2.11 y 2.12.

Proposición 2.10. Sea $\{S_i\}_{i=1}^n$ una colección de n superficies disjuntas y encajadas en S^3 sin auto-intersecciones. Haciendo $q = \sum_{i=1}^n g(S_i)$, donde $g(S_i)$ es el género de S_i .

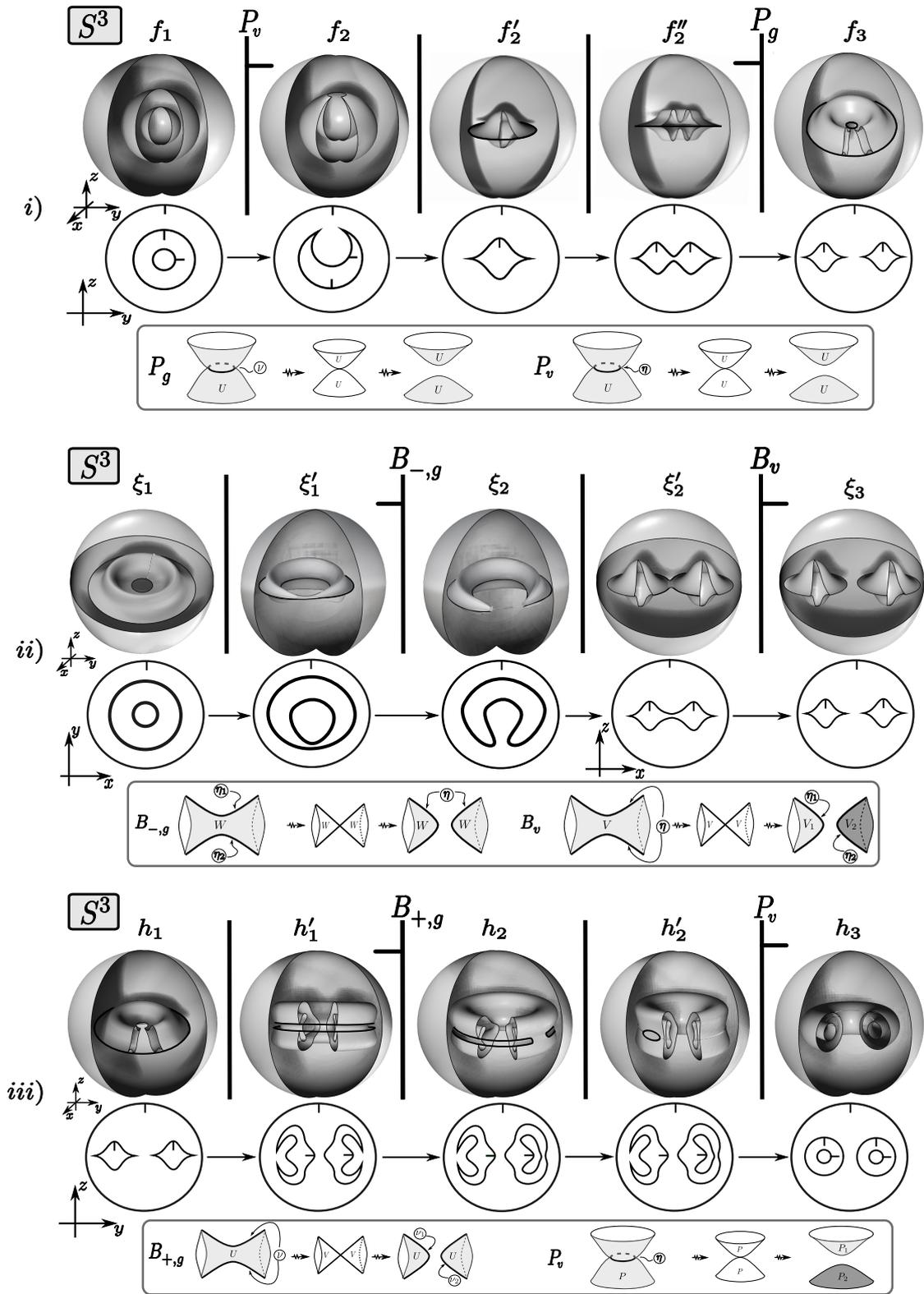
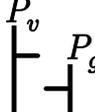
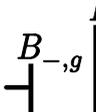
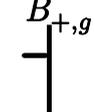
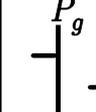
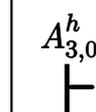
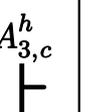
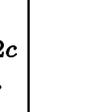


Figura 2.12: Ejemplo de transiciones $B_{+,g}$, $B_{-,g}$, B_v , P_g y P_v .

																		
$I \begin{matrix} \text{Map} \\ \text{Map} \end{matrix}$	f_1	f_2	f_3	ξ_1	ξ_2	ξ_3	h_1	h_2	h_3	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω'_1	ω_2	ω'_2	ω_3	ω'_3
I_E	3	2	2	2	2	3	2	2	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
I_C	0	1	2	2	1	0	2	1	0	0	1	2	0	0	0	0	2	0
I_G	0	0	1	1	0	0	1	2	2	0	1	2	0	0	1	1	2	2
I_S	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2	4	2	4	2	4

Cuadro 2.2: Resumen de las transiciones en las Figuras 2.11 y 2.12.

- a) Existe una aplicación estable $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\Sigma f = \bigcup_{i=1}^m S_i$, $I_C(f) = q + m - 1$, $I_G(f) = q$ y $I_S(f) = 0$.
- b) Si $m = 2n + 1$; entonces, existe una aplicación estable $f' : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $\Sigma f' = \bigcup_{i=1}^{2n+1} S_i$, $I_G(f') = q$, $I_C(f') = 0$ y $I_S(f') = 2n + 2q$.

En cada una de las aplicaciones construidas, se puede alterar I_C y I_S sin alterar I_E y I_G .

Demostración. Considere a S^3 en \mathbb{R}^4 , imagen de la inclusión de S^3 , por la aplicación $j : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Sea $\pi : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una proyección trivial, tal que $f_0 = \pi \circ j$. Entonces, $I_E(f_0) = 1$ y $I_G(f_0) = I_C(f_0) = I_S(f_0) = 0$. Probemos a), para esto construyamos la aplicación f de la aplicación f_1 como se describe en la Tabla 2.3. La aplicación f_1 es obtenida de la aplicación f_0 , tal que el camino que los une atraviesa $m - 1$ veces por la transición L en dirección positiva; de modo que $(I_E, I_C, I_G, I_S)(f_1) = (m, m - 1, 0, 0)$. Tenemos $m - 1$ nuevas superficies singulares, cada una tiene una curva cuspidal. Finalmente, f es obtenida de la aplicación f_1 , tal que el camino que los une atraviesa q veces la transición P_g en dirección negativa, a través de $m - 1$, superficies creadas por las transiciones previas. Así, tenemos $(I_E, I_C, I_G, I_S)(f) = (m, q + m - 1, 0, 0)$.

Para probar b), consideremos nuevamente f_0 como aplicación inicial en orden para construir la aplicación f' pasando por las aplicaciones f_1, f_2, f_3 y f_4 , (ver Tabla 2.4). Iniciamos la aplicación f_1 , es obtenida de la aplicación f_0 , tal que el camino que los liga pasa n veces por la transición L en dirección positiva; tal que $(I_E, I_C, I_G, I_S)(f_1) = (n + 1, n, 0, 0)$. Luego, f_2 es obtenida de la aplicación f_1 , tal que el camino que los liga pasa n veces por la transición P_g en dirección positiva; tal que $(I_E, I_C, I_G, I_S)(f_2) = (2n + 1, 0, 0, 0)$. Ahora, f_3 es obtenida de la aplicación f_2 , tal que el camino que los liga, pasa n -veces por la transición A_3^c en dirección positiva; tal que $(I_E, I_C, I_G, I_S)(f_3) = (2n + 1, 0, 0, 2n)$. Sigue que f_4 es obtenida de la aplicación f_3 , tal que el camino que los

Caso $m=3$

1)		$(m-1)$ veces L	q veces P_g
I \backslash Map	f_0	f_1	f
I_E	1	m	m
I_C	0	$m-1$	$q+m-1$
I_G	0	0	q
I_S	0	0	0

Cuadro 2.3: Resumen de la construcción de f de la parte 1) Proposición 2.10.

liga, pasa q veces por la transición P_g en dirección negativa; tal que $(I_E, I_C, I_G, I_S)(f_4) = (2n+1, 0, q, 2n)$. Finalmente, f es obtenida de la aplicación f_4 , tal que el camino que los liga pasa q veces por la transición $A_{3,c}^h$ en dirección negativa; tal que $(I_E, I_C, I_G, I_S)(f) = (2n+1, 0, q, n+2q)$. Esto completa la prueba. Finalmente, para alterar I_S (res. I_C), sin alterar I_E y I_G , basta que el camino atraviese la transición A_3^e (resp. la transición A_3^e y $A_{3,2c}^h$) en dirección positiva, tanto como uno desee. Así, completamos la prueba. \square

2)		n veces L	n veces P_g	n veces A_3^e	q veces P_g	q veces $A_{3,c}^h$
I \backslash Map	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f
I_E	1	$n+1$	$2n+1$	$2n+1$	$2n+1$	$2n+1$
I_C	0	n	0	0	0	0
I_G	0	0	0	0	q	q
I_S	0	0	0	$2n$	$2n$	$2n+2q$

Cuadro 2.4: Resumen de la construcción de f de la parte 2) Proposición 2.10.

2.3. Relaciones entre las invariantes globales

El próximo resultado (Teorema 2.13) determina los incrementos de las invariantes globales I_C, I_S, I_E y I_G en función de las descomposiciones de las transiciones locales que se tiene en el conjunto \mathcal{T} dado en (2.1).

Definición 2.11. Sea T una transición en \mathcal{T} y consideremos el camino F_t que une dos aplicaciones estables. Decimos que el *incremento local* de T es $+1$ (resp. -1) si

el camino F_t pasa a través de T en dirección positiva (resp. negativa). El *incremento global* de T es la suma de todos los incrementos locales de T . Escribimos

$$V(\mathcal{T}) = \{\ell, b_{-,g}, b_{0,g}, b_{c,g}, b_{+,g}, b_v, p_g, p_v, a_3^e, a_{3,2c}^h, a_{3,c}^h, a_{3,0}^h\},$$

para denotar al conjunto de los incrementos de las correspondientes transiciones en \mathcal{T} , a lo largo de un camino que une dos aplicaciones estables.

Lema 2.12. *Sea $f_0, f \in \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$. Entonces, el incremento de I_C, I_S, I_E y I_G , a lo largo de un camino transversal a las transiciones de codimensión 1 en \mathcal{T} , está dada por:*

$$\Delta I_E = \ell + b_v + p_v,$$

$$\Delta I_G = -b_{-,g} - b_{0,g} - b_{c,g} - b_{+,g} - p_g,$$

$$\Delta I_C = \ell - b_{-,g} - b_{c,g} + b_{+,g} + b_v - p_g - p_v - 2a_{3,2c}^h - a_{3,c}^h,$$

$$\Delta I_S = 2(a_3^e + a_{3,2c}^h + a_{3,c}^h + a_{3,0}^h).$$

Demostración. De la Tabla 2.1, ΔI_E aumenta en 1 cuando pasa por una de las transiciones L, B_v y P_v , pero no aumenta en nada si pasa por las demás transiciones. Así:

$$\Delta I_E = \ell + b_v + p_v.$$

Similarmente, de la Tabla 2.1, uno puede verificar las otras igualdades. \square

Teorema 2.13. *Si $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación estable, entonces las invariantes I_E, I_C, I_G y I_S satisfacen la siguiente igualdad:*

$$I_E(f) + I_G(f) + I_C(f) + I_S(f) = 1 + 2(\ell + b_v - b_{-,g} - b_{c,g} - p_g + a_3^e + a_{3,0}^h) + a_{3,c}^h - b_{0,g}. \quad (2.2)$$

Demostración. Considere la aplicación f_0 como en la demostración de la Proposición 2.10. Si $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación estable. Entonces f puede ser obtenida de f_0 pasando solo por transiciones de codimensión 1. Como solamente las transiciones L, B, P, A_3^e, A_3^h y sus respectivas subdivisiones alteran las invariantes I_E, I_C, I_G y I_S , tenemos:

$$\begin{aligned} I_E(f) &= I_E(f_0) + \Delta I_E = 1 + \Delta I_E, & I_G(f) &= I_G(f_0) + \Delta I_G = \Delta I_G, \\ I_C(f) &= I_C(f_0) + \Delta I_C = \Delta I_C, & I_S(f) &= I_S(f_0) + \Delta I_S = \Delta I_S. \end{aligned}$$

De estas igualdades, obtenemos:

$$I_E(f) + I_C(f) + I_G(f) + I_S(f) = 1 + \Delta I_E + \Delta I_C + \Delta I_G + \Delta I_S.$$

Y del Lema 2.12, obtenemos la igualdad (2.2). \square

Ejemplo 2.14. Sea f una aplicación estable de una 3-variedad a \mathbb{R}^3 . A continuación ilustraremos el comportamiento local de su conjunto de ramificación, donde s_1 y s_2 son dos colas de golondrina (ver Figura 2.13). Estas colas de golondrina son creadas y después eliminadas solo a través de la yuxtaposición de caminos entre los nueve caminos F_t^i , $i = 1, \dots, 9$. A continuación describiremos cada uno de estos caminos:

- i) F_t^1 inicia en ω_2 ; luego pasa por la transición $A_{3,c}^h$ en dirección positiva, llegando a f en la que se crea colas de golondrina s_1 y s_2 . Continuamos por F_t pasa por $A_{3,c}^h$ en dirección negativa, llegando a f_1 (f_2 o ω_2); eliminando así las colas de golondrina s_1 y s_2 . En este caso, se tiene $a_{3,c}^h - b_{0,g} = (1 - 1) - 0 = 0$.
- ii) F_t^2 inicia en ω_2 ; luego, pasa por la transición $A_{3,c}^h$ en dirección positiva, llegando a f , creando así las colas de golondrina s_1 y s_2 . Continuando por F_t pasa por $B_{0,g}$ en dirección positiva, llegando a f_3 . Seguimos por F_t pasando por $A_{3,0}^h$ en dirección negativa, llega a f_4 , eliminando así las colas de golondrina s_1 y s_2 . En este caso, se tiene $a_{3,c}^h - b_{0,g} = +1 - (+1) = 0$.
- iii) F_t^3 inicia en ω_2 ; luego pasa por la transición $A_{3,c}^h$ en dirección positiva, llegando a f , creando así las colas de golondrina s_1 y s_2 . Continuando por F_t esta pasa por $B_{0,g}$ en dirección negativa, llegando a f_5 . Seguimos por F_t pasando así por $A_{3,2c}^h$ en dirección negativa, llegando a f_6 , eliminando las colas de golondrina s_1 y s_2 . En este caso, se tiene $a_{3,2c}^h - b_{0,g} = +1 - (-1) = 2$.
- iv) F_t^4 inicia en f_3 ; luego pasa por la transición $B_{0,g}$ en dirección negativa, llegando a f así, se tienen las dos colas de golondrina s_1 y s_2 . Continuando por F_t este camino pasa por $B_{0,g}$ en dirección positiva, volviendo a f_3 . Seguimos por F_t pasando por $A_{3,2c}^h$ en dirección negativa, llega a f_4 , eliminando las colas de golondrina s_1 y s_2 . En este caso, se tiene $a_{3,0}^h - b_{0,g} = 0 - (-1 + 1) = 0$.
- v) F_t^5 inicia en f_3 ; luego pasa por la transición $B_{0,g}$ en dirección negativa, llegando a f así, se tienen las dos colas de golondrina s_1 y s_2 . Siguiendo por F_t pasa por $B_{0,g}$ en dirección negativa, llegando a f_5 . Luego pasando por $A_{3,2c}^h$ en dirección negativa llega a f_6 , eliminando las colas de golondrina s_1 y s_2 . En este caso, se tiene $a_{3,c}^h - b_{0,g} = 0 - (-1 - 1) = 2$.
- vi) F_t^6 inicia en f_3 ; luego pasa por la transición $B_{0,g}$ en dirección negativa, llegando a f ; así, se tienen las dos colas de golondrina s_1 y s_2 . Continuando por F_t pasa por $A_{3,c}^h$ en dirección negativa, llegando a (f_2 o ω_2), eliminando las colas de golondrina s_1 y s_2 . En este caso, se tiene $a_{3,c}^h - b_{0,g} = -1 - (-1) = 0$.

vii) F_t^7 inicia en f_5 ; luego pasa por la transición $B_{0,g}$ en dirección positiva llegando a f , así se tienen las dos colas de golondrina s_1 y s_2 . Continuando por F_t pasa por $B_{0,g}$ en dirección negativa volviendo a f_5 . Luego, pasa por $A_{3,2c}^h$ en dirección negativa llega a f_6 , eliminando las colas de golondrina s_1 y s_2 . En este caso, se tiene $a_{3,c}^h - b_{0,g} = 0 - (1 - 1) = 0$.

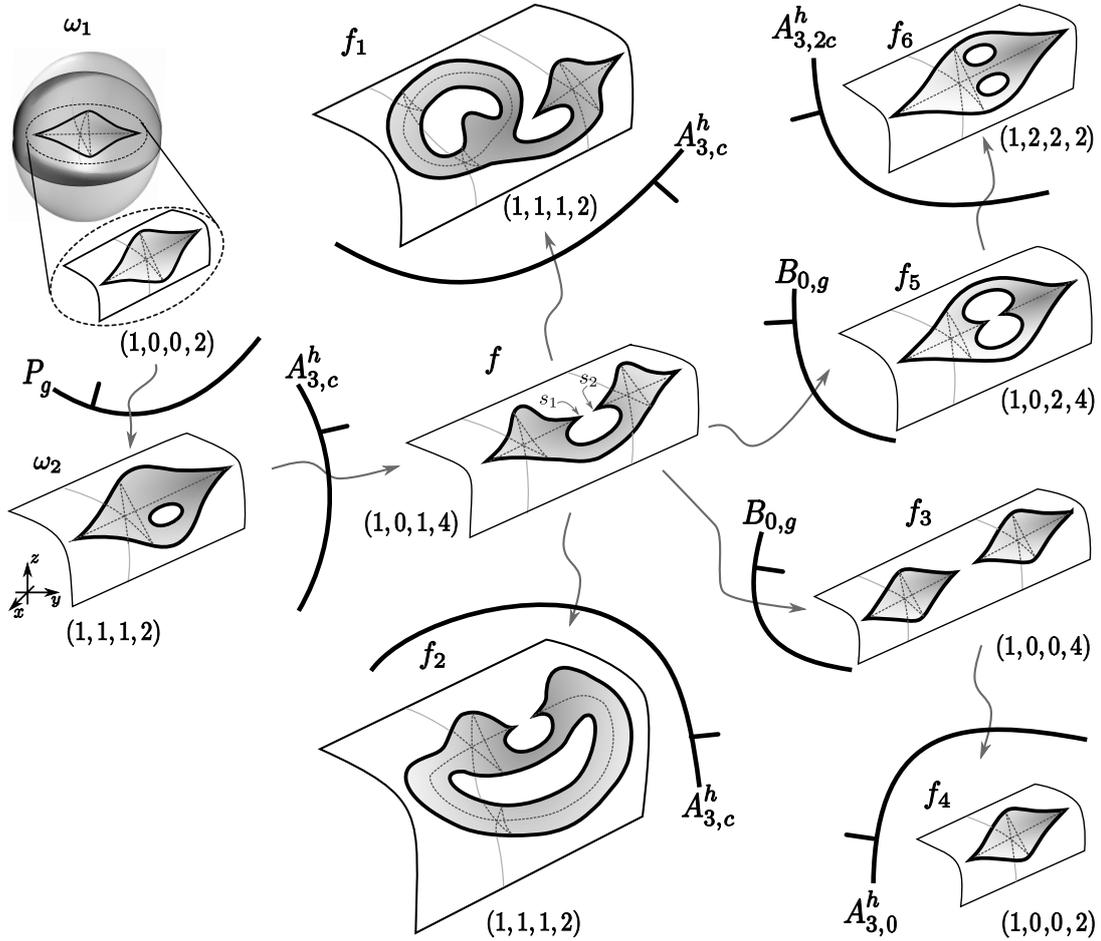


Figura 2.13: Relación entre las transiciones $A_{3,c}^h$ y $B_{0,g}$. Donde $F_t^i = f_i$.

viii) F_t^8 inicia en f_5 ; luego pasa por la transición $B_{0,g}$ en dirección positiva llegando a f , así se tienen las dos colas de golondrina s_1 y s_2 . Continuando por F_t pasa por $B_{0,g}$ en dirección positiva, llegando a f_3 . Siguiendo por F_t pasa por $A_{3,0}^h$ en dirección negativa llega a f_4 , eliminando las colas de golondrina s_1 y s_2 . En este caso, se tiene $a_{3,c}^h - b_{0,g} = 0 - (1 + 1) = -2$.

ix) F_t^9 inicia en f_5 ; luego pasa por la transición $B_{0,g}$ en dirección positiva llegando a f , así se tienen las dos colas de golondrina s_1 y s_2 . Continuando por F_t pasa por $A_{3,c}^h$ en dirección negativa, llegando a (f_2 o ω_2), eliminando las colas de golondrina s_1 y s_2 . En este caso, se tiene $a_{3,c}^h - b_{0,g} = -1 - (+1) = -2$.

Observación 2.15. En resumen, del Ejemplo 2.14 cabe destacar que, si un camino pasa por $A_{3,c}^h$ en dirección negativa y queremos eliminar las colas de golondrina, esta debe pasar por $A_{3,c}^h$ en dirección negativa o pasar primero por $B_{0,g}$ en dirección positiva (o negativa). De manera análoga, si un camino pasa por $B_{0,g}$ en dirección positiva (resp. negativa). Si queremos eliminar las colas de golondrina esta debe pasar por $B_{0,g}$ en dirección negativa (resp. positiva) o pasar por la transición $A_{3,c}^h$ en dirección negativa, ver Figura 2.13.

Proposición 2.16. *Sea f_0 la proyección canónica de S^3 a \mathbb{R}^3 , y sea $f \in \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$. Si $I_S(f) = 0$ entonces*

$$a_{3,c}^h - b_{0,g} \equiv 0 \pmod{2},$$

a lo largo de un camino que une f y f_0 .

Demostración. Si $I_S(f) = 0$, f no tiene colas de golondrina, por lo tanto f puede ser obtenido por un camino γ , compuesto por caminos entre los nueve caminos del Ejemplo 2.14. En cada caso, tenemos $a_{3,c}^h - b_{0,g} \equiv 0 \pmod{2}$. Si γ no contiene ninguno de estos nueve caminos, entonces $a_{3,c}^h - b_{0,g} = 0 - 0 \equiv 0 \pmod{2}$. \square

Ejemplo 2.17. Dadas las aplicaciones $f_0, f_4 \in \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$, descritas en la Figura 2.14. Por el Teorema 2.13, calculamos $I_E(f_4) + I_G(f_4) + I_C(f_4) + I_S(f_4)$ usando la variación de los incrementos de la transiciones entre f_0 y f se tiene:

$$\begin{aligned} I_E(f_4) + I_G(f_4) + I_C(f_4) + I_S(f_4) &= 1 + 2(\ell + b_v - b_{-,g} - b_{c,g} - p_g + a_3^e + a_{3,0}^h) + \\ &\quad + a_{3,c}^h - b_{0,g} \\ &= 1 + 2[(1) + (0) - (0) - (0) - (-1) + (0) + (0)] \\ &\quad + (0) - (0) = 5. \end{aligned}$$

Efectivamente, si calculamos directamente (ver Figura 2.14), tenemos que $I_E(f_4) = 3$, $I_G(f_4) = 2$, $I_C(f_4) = I_S(f_4) = 0$. Por tanto

$$I_E(f_4) + I_G(f_4) + I_C(f_4) + I_S(f_4) = 3 + 2 + 0 + 0 = 5.$$

Corolario 2.18. *Sea $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación estable.*

- a) *Si $I_S(f) = 0$, entonces $I_E(f) + I_G(f) + I_C(f) \equiv 1 \pmod{2}$.*
- b) *Si f es una aplicación pliegue, entonces $I_C(f) = I_S(f) = 0$ y $I_E(f) + I_G(f) \equiv 1 \pmod{2}$.*

Demostración. Si $I_S(f) = 0$, su conjunto de ramificación no tiene colas de golondrina y por la Proposición 2.16 tenemos $a_{3,c}^e - b_{0,g} \equiv 0 \pmod{2}$. Ahora, por el Teorema 2.13,

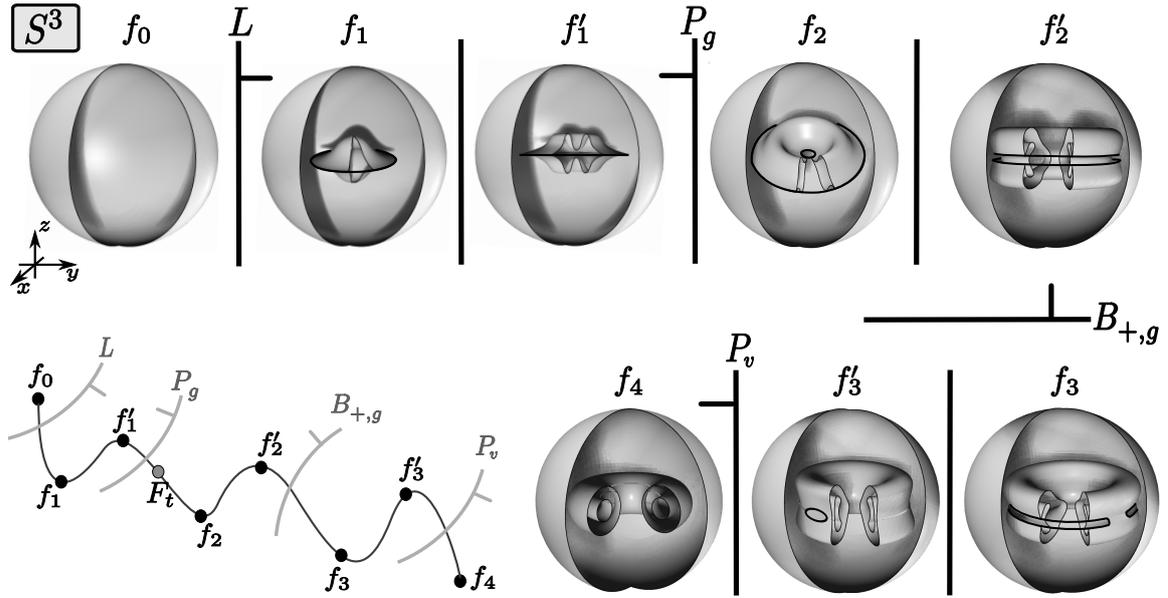


Figura 2.14: Relación de transiciones e invariantes globales.

obtenemos

$$\begin{aligned} I_E(f) + I_G(f) + I_C(f) &\equiv 1 + 2(\ell + b_v - b_{-,g} - p_g + a_3^e + a_{3,0}^h) + 0 \pmod{2}, \\ &\equiv 1 \pmod{2}. \end{aligned}$$

Esto prueba *a*). Ahora probemos *b*). Si f es una aplicación pliegue, entonces su conjunto de ramificación no tiene curvas cuspidales ni colas de golondrina; en otras palabras, $I_C(f) = I_S(f) = 0$. Reemplazando esto en la parte *a*), tenemos inmediatamente:

$$I_E(f) + I_G(f) \equiv 1 \pmod{2}.$$

□

Observación 2.19. El Corolario 2.18 *b*) implica que no existe una aplicación pliegue de S^3 en \mathbb{R}^2 tal que su conjunto singular sea un toro. Esto parece contradecir a una consecuencia del Teorema *B* de Éliásberg [4].

Sea $\{S_i\}_{i=1}^n$ una colección de n superficies suaves, compactas y orientadas inmersas en \mathbb{R}^3 , surge una pregunta natural:

¿Qué condiciones debe satisfacer la colección $\{S_i\}_{i=1}^n$ en \mathbb{R}^3 para que sea el conjunto de ramificación de una aplicación pliegue $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$?

Una de las condiciones necesarias en la colección $\{S_i\}_{i=1}^n$, es la parte *b*) del Corolario 2.18. En este caso, tenemos $I_E = n$ y $I_G = \sum_{i=1}^n g(S_i)$; por lo tanto, obtenemos la

formula:

$$n + \sum_{i=1}^n g(S_i) \equiv 1 \pmod{2}.$$

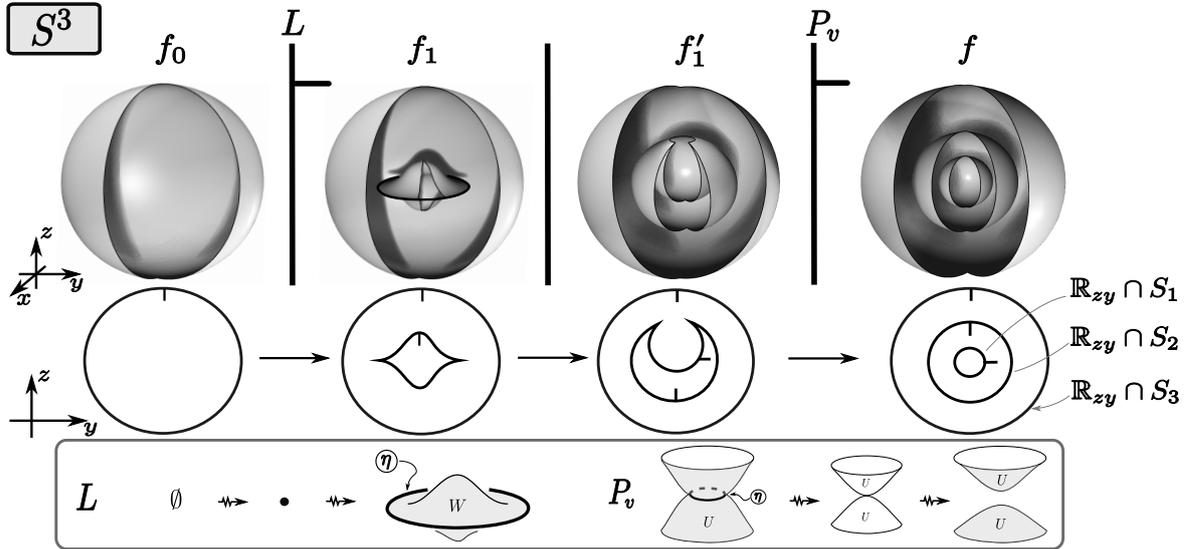


Figura 2.15: Ejemplo 2.20, caso $n = 3$.

Ejemplo 2.20. Sea $\{S_i\}_{i=1}^n$ una colección de esferas centradas en el origen de \mathbb{R}^3 con n impar, tal que el radio de cada S_i es $r_i = i$, para todo $i = 1, \dots, n$. Entonces, existe una aplicación estable $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que el conjunto de de ramificación coincide con $\{S_i\}_{i=1}^n$; esto es $f(\Sigma f) = \bigcup_{i=1}^n S_i$. En particular podemos escoger las superficies de radio menor o igual a $(n - 1)/2$ tienen dirección hacia el exterior y las superficies con radio mayor que $(n - 1)/2$ tienen dirección hacia su interior. La Figura 2.15 muestra la construcción para el caso $n = 3$.

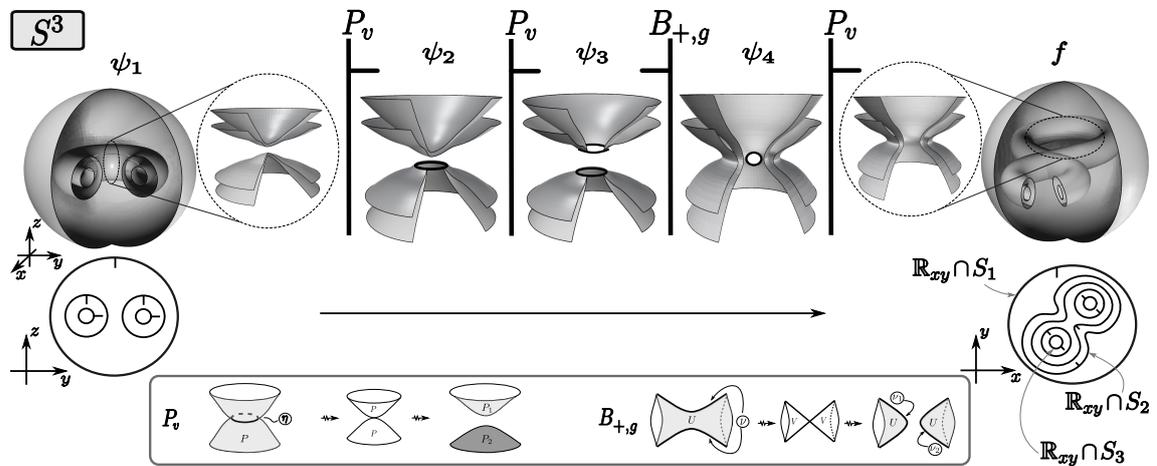


Figura 2.16: Ejemplo 2.21, caso $n = 3$.

Ejemplo 2.21. Sea $\{S_i\}_{i=1}^n$ una colección de superficies inmersas en \mathbb{R}^3 con n impar, tal que:

- a) La superficie S_1 es una esfera inmersa en \mathbb{R}^3 .
- b) Las superficies $\{S_i\}_{i=2}^n$ son disjuntas y encerradas por S_1 ; además, los pares $\{S_{2i}, S_{2i+1}\}$ son superficies homeomorfas una dentro de otra, con género $k_i \in \mathbb{Z}^+$, para todo $i = 1, \dots, (n-1)/2$.

Entonces, existe una $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que su conjunto de ramificación coincide con $\{S_i\}_{i=1}^n$; es decir, $f(\Sigma f) = \bigcup_{i=1}^n S_i$. La Figura 2.16 muestra la construcción para el caso $n = 3$ y $k_2 = 2$.

Ejemplo 2.22. En la Figura 2.17, presentamos las imágenes de algunos conjuntos de ramificación de aplicaciones pliegue de S^3 en \mathbb{R}^3 , con $I_E = 5$ y $I_G \leq 6$, que podemos construir de manera similar como las aplicaciones construidas en los Ejemplos 2.20 y 2.21.

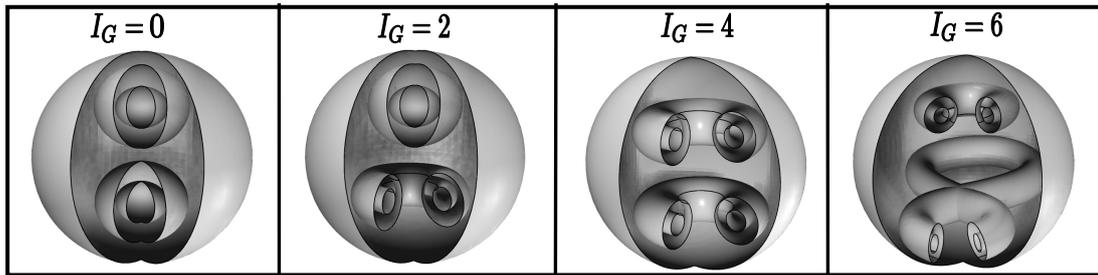


Figura 2.17: Algunos ejemplos de aplicación pliegue de S^3 en \mathbb{R}^3 con $I_E = 5$ y $I_G \leq 6$.

Capítulo 3

Asas removibles de Σf

En la Sección 1.3 del Capítulo 1, se presentó el \mathcal{G} -grafo asociado a las aplicaciones estables de \mathcal{M}_n en \mathbb{R}^3 . En este capítulo, se definirán los elementos necesarios para definir un nuevo grafo asociado a una aplicación estable, al cual llamamos \mathcal{H} -grafo, cuya definición es posible gracias a la Proposición 3.18. Este nuevo grafo nos dará más información sobre el comportamiento de las superficies singulares en la 3-variedad y su comportamiento respecto a las transiciones de codimensión 1. Además, veremos otros resultados interesantes que extienden los estudios realizados en [18, 23]. En ese sentido, el siguiente ejemplo nos muestra las deficiencias del \mathcal{G} -grafo que más adelante podremos superar.

Ejemplo 3.1. Dados $f \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ y $h \in \mathcal{E}(N, \mathbb{R}^3)$; entonces, puede suceder que $\mathcal{G}_f = \mathcal{G}_h$, siendo que $M \neq N$. La Figura 3.1 ilustra dos aplicaciones estables $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $h : S^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, asociado a un mismo grafo.

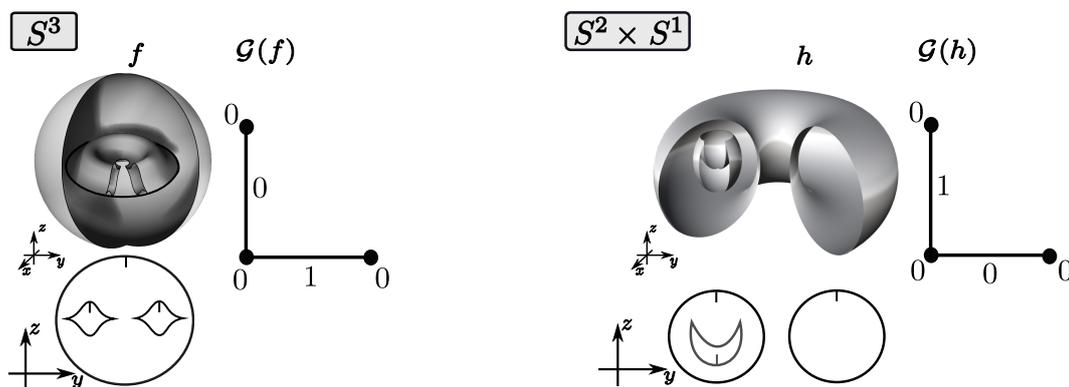


Figura 3.1: Ejemplos de grafo asociado a aplicaciones estables.

Para separar estos diferentes casos, vamos a redefinir los pesos en las aristas del grafo. Antes, veremos algunos conceptos y definiciones necesarios como las asas de aplicaciones estables.

3.1. Asas removibles en el conjunto singular

Recordemos que una superficie S cerrada y orientada, con género g , es homeomorfa a una esfera con g asas. Estas g asas son copias de $S^1 \times I$ inmersas homeomorficamente en S . Ver la Figura 3.2. Denotemos por $H_i^1, \dots, H_i^{g_i}$ las asas de S_i .

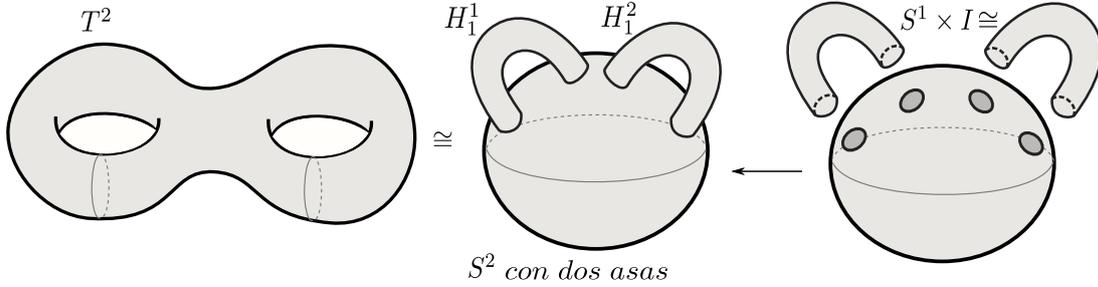


Figura 3.2: Bitoro T^2 homeomorfa a S^2 con 2 asas.

Sea $F_t : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}^3$ un camino entre dos aplicaciones estables $f, h \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ tal que $F_0 = f$ y $F_1 = h$, pasando por una única transición de codimensión 1 que altera el número de ejes cuspidales, esto sucede cuando:

- a) F_t pasa por la transición $A_2^{\sigma, +, -}$, ilustrado en la Figura 3.3.
- b) F_t pasa por la transición $A_2^{\sigma, -, -}$, ilustrado en la Figura 3.4.

El caso a) puede ser descompuesto en cuatro casos de la siguiente forma (ver Figura 3.3):

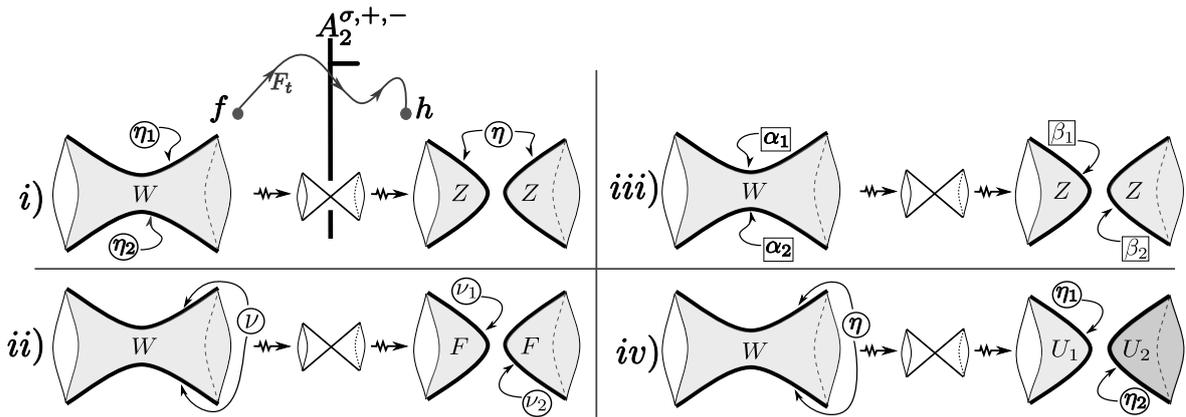


Figura 3.3: Casos donde el camino F_t atraviesa la transición $A_2^{\sigma, +, -}$.

- (i) En este caso, cuando vamos por el camino F_t , de f a h , una asa de la superficie singular $f^{-1}(W)$ es retirada; luego, obtenemos la superficie $h^{-1}(Z)$; además, se juntan las curvas cuspidales η_1 y η_2 (de W) en η (de Z).

- (ii) En este caso, cuando avanzamos por el camino F_t de f a h , una asa de la superficie singular $f^{-1}(W)$ es retirada para obtener la superficie $h^{-1}(F)$; además, la curva cuspidal ν (de W) se divide en ν_1 y ν_2 (de F).
- (iii) En este caso, cuando una va por el camino F_t de f a h , una asa de la superficie singular $f^{-1}(W)$ es retirada para obtener la superficie $h^{-1}(Z)$; además, las dos aristas cuspidales α_1 y α_2 (de W) se transforman en dos nuevas aristas cuspidales β_1 y β_2 (de Z).
- (iv) En este caso, F_t divide a la superficie $f^{-1}(W)$ en dos superficies $h^{-1}(U_1)$ y $h^{-1}(U_2)$; además de dividir el eje cuspidal η (de W) en η_1 (de U_1) y η_2 (de U_2), cuando $f^{-1}(W)$ es modificado cuando vamos de f hasta llegar a h .

El caso b) puede ser descompuesto en dos casos de la siguiente forma (ver Figura 3.4):

- (i) En este caso, cuando avanzamos por el camino F_t de f a h , la superficie singular $f^{-1}(W)$ es modificada hasta llegar a la superficie $h^{-1}(D)$; además, una asa de $f^{-1}(W)$ es retirada y el eje cuspidal ν (de W).
- (ii) En este caso, si vamos por el camino F_t , de f a h , la superficie singular $f^{-1}(W)$ se divide en dos superficies $h^{-1}(K_1)$ y $h^{-1}(K_2)$; además de retirar el eje cuspidal η (de W).

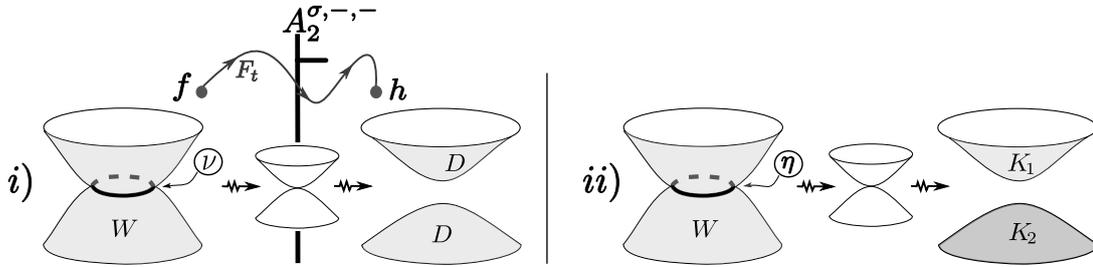


Figura 3.4: Casos donde el camino F_t atraviesa la transición $A_2^{\sigma, -, -}$.

Definición 3.2. Sea $f \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ y $H : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ un camino en $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$, tal que $H_0 = f$. Decimos que Σf tiene una *asa removable*, si existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que $H_{t_0} \in \Delta = C^\infty(M, \mathbb{R}^3)/\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ e $I_G(f)$ satisface las siguientes condiciones

$$I_G(f) = I_G(H_t), \quad \forall t \in [0, t_0) \quad \text{y} \quad I_G(f) - 1 = I_G(H_t), \quad \forall t \in (t_0, 1].$$

Observación 3.3. Notemos que todas las asas de Σf son las asas de las superficies singulares en Σf . De aquí podemos ver que una asa de Σf coincide con una asa de alguna superficie singular de f

Ejemplo 3.4. En la Figura 3.5, tenemos una aplicación $f \in \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$ con $I_G(f) = 1 > 0$, donde una asa de f tiene una asa removible. En efecto si consideramos el camino H descrito en la figura, tal que $I_G(f) = 1$, donde $H_0 = f$. Además, existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que $1 = I_G(f) = I_G(H_t), \forall t \in [1, t_0]$ y $0 = I_G(f) - 1 = I_G(H_t), \forall t \in (t_0, 1]$, donde $H_{t_0} \in \Delta$. De manera similar, la aplicación $\xi \in \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$ tiene una superficie singular que tiene su asa removible.

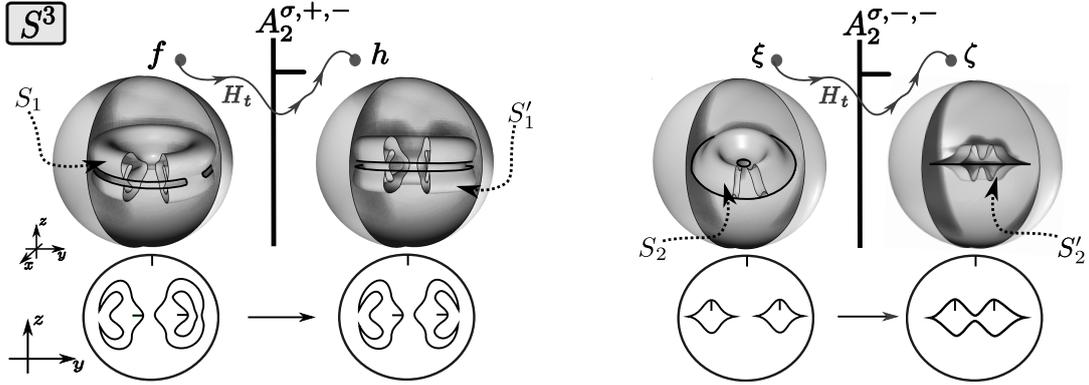


Figura 3.5: Ejemplos de asas removibles.

Definición 3.5. Dado un a aplicacion f , la suma de todos los pesos de los vértices del grafo \mathcal{G}_f es un invariante global y será denotado por $I_p(f)$.

Escribiremos solo I_P en lugar de $I_P(f)$ si no causa confusión.

Recordemos que I_G es el número total de géneros de las superficies singulares de una aplicación estable. Así la siguiente definición nos relaciona las asas de una aplicación estable, transiciones e I_G .

Definición 3.6. Sea $f \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ y $H : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ un camino con $H_0 = f$ y $H_1 = h$. Si Σf tiene una asa removible, entonces diremos que Σf tiene una asa *trivial* (resp. *pesada*) si, $I_P(f) + b_1(\mathcal{G}_f) = I_P(h) + b_1(\mathcal{G}_h)$, (resp. $I_P(f) + b_1(\mathcal{G}_f) \neq I_P(h) + b_1(\mathcal{G}_h)$).

Observación 3.7. Si tenemos $f \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ con $I_G(f) > 0$, entonces las asas de f pueden ser reducida mediante transiciones $A_2^{\sigma, +, -}$ y $A_2^{\sigma, -, -}$ transiciones que modifican las superficies singulares en una de las siguientes tres formas dadas a continuación; donde la superficie singular en que está la asa:

- a) Está formada solo por puntos de pliegue y su orientación apunta hacia su región interior y no envuelve ninguna superficie singular. (Ver aplicación ζ_1 de la Figura 3.7).
- b) Está formada por puntos de pliegue y contiene ejes cuspidales. (Ver aplicación ξ_1 de la Figura 3.6).

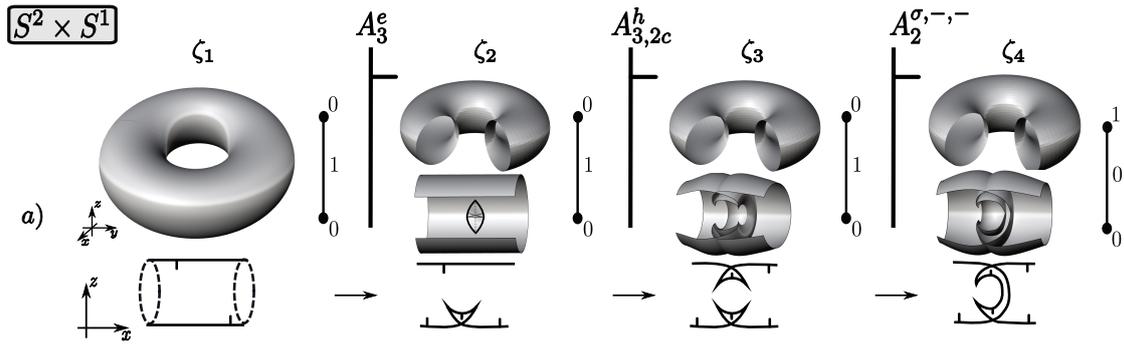


Figura 3.6: Transición para remover asas, caso *i*), de la demostración de la Proposición 3.9.

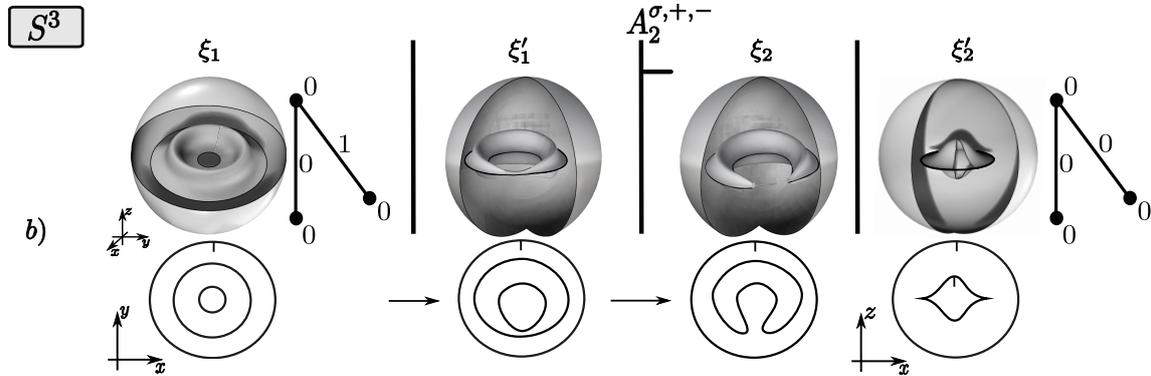


Figura 3.7: Transición para remover asas caso *ii*), de la demostración de la Proposición 3.9.

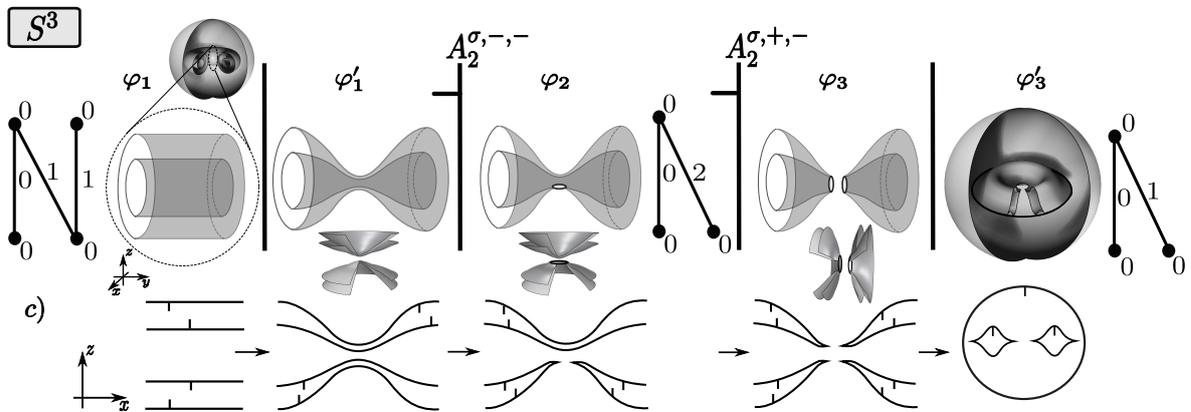


Figura 3.8: Transición para remover asas caso *iii*), de la demostración de la Proposición 3.9.

- c) Está formada por puntos de pliegue y envuelve otra superficie singular formada por puntos de pliegue cuyas orientaciones apuntan a la región regular entre estas dos superficies. (Ver aplicación φ_1 de la Figura 3.8).

3.2. Descomposición de I_G

En esta sección descompondremos en dos números el invariante I_G de una aplicación estable, esto lo aremos de forma única. Para la cual enunciaremos algunos lemas y proposiciones.

Lema 3.8. *Sea $f \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$, con $I_G(f) > 0$. Si existe $\xi \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ con $I_G(f) > I_G(\xi)$; entonces existe un camino $H : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $H_0 = f$, $H_1 = h$ y $I_G(f) = 1 + I_G(h)$.*

Demostración. Asumiendo que existe $\xi \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$, podemos construir un camino $F : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $F_0 = f$, $F_1 = \xi$; donde F atraviesa solo transiciones de codimensión 1. Como $I_G(f) > I_G(\xi)$, entonces existe $F_{t_0} \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$, tal que $I_G(f) = 1 + I_G(H_{t_0})$ para un $t_0 \in (0, 1)$. Pues, las transiciones de codimensión 1 solo modifican los géneros de las superficies singulares, ver [8]. Tomando H como la reparametrización de la restricción de $H = F|_{[0, t_0]} : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tenemos $h = H_1 = F_{t_0}$, terminamos la prueba. La Figura 3.9 muestra un esquema de esta prueba. \square

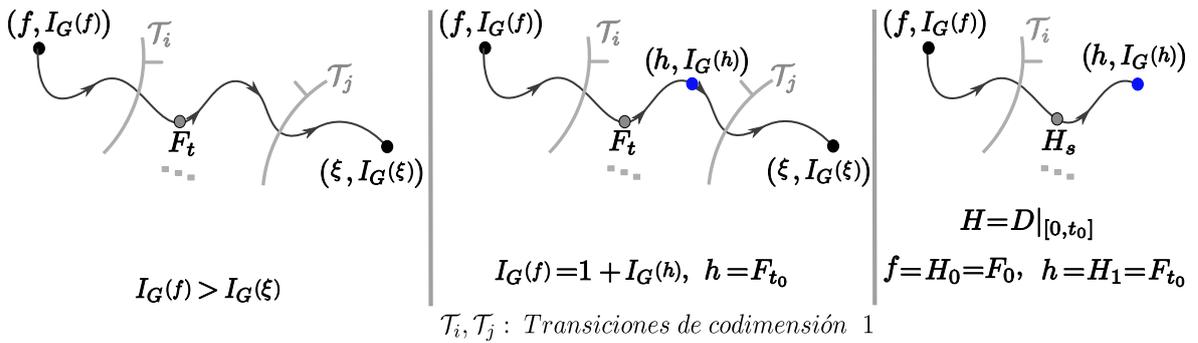


Figura 3.9: Esquema de demostración Lema 3.8.

Proposición 3.9. *Sea $f \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ con $I_G(f) > 0$. Si existe $\xi \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$, con $I_G(f) > I_G(\xi)$; entonces, las siguientes condiciones se verifican:*

- a) *Existe un camino $H : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $H_0 = f$, $H_1 = h$ y $I_G(f) = 1 + I_G(h)$.*

b) Existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que $I_G(f) = I_G(H_t)$, $\forall t \in [0, t_0)$ y $I_G(f) - 1 = I_G(H_t)$, $\forall t \in (t_0, 1]$.

Demostración. Para la parte a) la existencia del camino $H : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $H_0 = f$, $H_1 = h$ y $I_G(f) = 1 + I_G(h)$, es garantizada por Lema el 3.8.

Para probar la parte b) vamos a construir un camino H que verifique las condiciones de la parte a) de esta proposición de forma que, $I_G(f) = I_G(H_t)$, $\forall t \in [0, t_0)$ y $I_G(f) - 1 = I_G(H_t)$, $\forall t \in (t_0, 1]$ para un $t_0 \in (0, 1)$. Por la Observación 3.7, tenemos que las asas de una superficie singular de f se presentan en tres formas distintas. Para finalizar la demostración, vamos a construir h considerando en cada uno de los tres siguientes casos, conforme a la Observación 3.7:

Así, cuando las asas de las superficies en el conjunto de ramificación, esta formada por los siguientes:

- i) *Solo por puntos de pliegue.* En este caso, hacemos nacer un labio cuspidal con la transición A_3^e , formado por dos colas de golondrina y dos aristas cuspidales. Ahora, uniendo las colas de golondrina, pasando por la transición $A_{3,2c}^h$, creamos dos ejes cuspidales. Luego, para construir la aplicación h con las propiedades de la parte b) de la Proposición 3.9, pasamos por la transición $A_2^{\sigma, -, -}$, disminuyendo así una asa de la superficie considerada inicialmente. En la Figura 3.7, presentamos un ejemplo de cómo construir la aplicación h para este caso.
- ii) *Por dos ejes cuspidales y el resto por puntos de pliegue.* En este caso, contraemos una sección de la asa considerada y pasamos por la transición $A_2^{\sigma, +, -}$, la cual hace que reduzca una asa de la superficie considerada, es la superficie singular de la aplicación h buscada, que cumple las propiedades de la parte b) de la Proposición 3.9. En la Figura 3.6, presentamos un ejemplo de cómo construir la aplicación h para este caso.
- iii) *Solo por puntos de pliegue y envuelve otra superficie singular.* En este caso, tangenciamos estas dos superficies singulares, pasando por la transición $A_2^{\sigma, -, -}$, creamos una curva cuspidal uniendo las dos superficies. Luego, para construir la aplicación h con las propiedades de la parte b) de la Proposición 3.9, pasamos por la transición $A_2^{\sigma, +, -}$, disminuyendo así una asa de la superficie considerada inicialmente. En la Figura 3.8, presentamos un ejemplo de cómo construir la aplicación h para este caso.

De esta forma concluimos con la demostración. □

Corolario 3.10. Sea $f \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ tal que $I_G(f) > 0$. Para que una asa de Σf sea removible, es suficiente que exista una aplicación $\xi \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$, tal que $I_G(f) > I_G(\xi)$.

Demostración. Por la Proposición 3.9 existe un camino $H : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $H_0 = f$, $H_1 = h$ y verifica lo siguiente: Existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que $I_G(f) = I_G(H_t)$, $\forall t \in [0, t_0]$ y $I_G(f) - 1 = I_G(H_t)$, $\forall t \in (t_0, 1]$. Estas son las condiciones para que una asa de Σf sea removible. \square

Lema 3.11. *Toda asa de $f \in \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$ es removible.*

Demostración. Si $I_G(f) = 0$, no hay nada que hacer. Ahora si $I_G(f) > 0$, por el Corolario 3.10, es suficiente mostrar que existe una aplicación $\xi \in \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$ tal que $I_G(f) > I_G(\xi) = 0$. Considere a S^3 en \mathbb{R}^4 , imagen de la inclusión de S^3 por la aplicación $j : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Sea $\pi : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, una proyección canónica tal que $\xi = \pi \circ j$. Entonces $\text{Sigma}\xi = S^2$ e $I_G(\xi) = g(S^2) = 0$. \square

En adelante \mathcal{M}_n denotará la suma conexas de n copias de $S^2 \times S^1$.

Proposición 3.12. *Sea $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ tal que $I_G(f) > 0$. Entonces toda asa de Σf es removible.*

Demostración. Si $I_G(f) = 0$, no hay nada que hacer. Ahora, si $I_G(f) > 0$, para que toda asa de Σf sea removible, por el Corolario 3.10, es necesario que exista $\xi \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$, tal que $I_G(f) > I_G(\xi) = 0$. Construyamos dicha ξ . Comencemos considerando un grafo pesado y bipartito \mathcal{G} con peso cero en sus aristas y que cumpla la siguiente igualdad $b_2(\mathcal{M}_n) = \sum_{j=1}^{I_V} c_j + b_1(\mathcal{G})$. Luego, podemos notar que \mathcal{G} verifica las condiciones del Teorema 1.56. Como consecuencia, existe $\xi \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$, tal que $\mathcal{G} = \mathcal{G}_\xi$. Esto implica que \mathcal{G}_ξ también es un grafo que tiene peso cero en sus aristas. Así, podemos concluir que ξ no tiene asas, por tanto $I_G(\xi) = 0$. \square

Proposición 3.13. *Dado $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ entonces se tiene las siguientes afirmaciones:*

a) *Si f tiene una asa trivial, entonces existe $h \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ tal que*

$$I_G(f) - 1 = I_G(h) \quad \text{y} \quad I_P(f) + b_1(\mathcal{G}_f) = I_P(h) + b_1(\mathcal{G}_h).$$

b) *Si f tiene una asa pesada, entonces existe $h \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ tal que*

$$I_G(f) - 1 = I_G(h) \quad \text{y} \quad I_P(f) + b_1(\mathcal{G}_f) \neq I_P(h) + b_1(\mathcal{G}_h).$$

Demostración. Si f tiene una asa trivial (o asa pesada) entonces existe un camino $H : \mathcal{M}_n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $H_0 = f$ y para algún $t_0 \in (0, 1)$ verifica lo siguiente

$$I_G(f) = I_G(H_t), \quad \forall t \in [0, t_0] \quad \text{y} \quad I_G(f) - 1 = I_G(H_t), \quad \forall t \in (t_0, 1] \quad (3.1)$$

Definiendo $h = H_1$ de (3.1) tenemos que $I_G(f) - 1 = I_G(h)$. Esto verifica la primera igualdad del ítem *a*) y *b*) de esta proposición. La otra parte se verifica directamente de la Definición 1.55, considerando $h = H_1$. \square

Proposición 3.14. *Sea $f \in \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$, toda asa de Σf es trivial.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que existe una asa de Σf pesada. Por la Proposición 3.13, existe $h \in \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$, tal que

$$I_P(f) + b_1(\mathcal{G}_f) \neq I_P(h) + b_1(\mathcal{G}_h). \quad (3.2)$$

Aplicando el Corolario 1.57 a f y h , tenemos que: $I_P(f) = I_P(h) = 0$ y los grafos \mathcal{G}_f , \mathcal{G}_h son árboles, así:

$$b_1(\mathcal{G}_f) = b_1(\mathcal{G}_h) = I_P(f) = I_P(h) = 0. \quad (3.3)$$

Reemplazando las igualdades de (3.3) en (3.2), tenemos:

$$0 = I_P(f) + b_1(\mathcal{G}_f) \neq I_P(h) + b_1(\mathcal{G}_h) = 0.$$

Esto es un absurdo, por tanto toda asa de una aplicación $f \in \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$ es trivial. \square

Observación 3.15. (Existencia de asas que pesan) Sea $f \in (\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ y $\Sigma f = \bigcup_{i=1}^{I_E} S_i$. Por el Teorema 1.56 tenemos:

$$\sum_{j=1}^{I_V} c_j + b_1(\mathcal{G}_f) \leq b_2(\mathcal{M}_n) \leq \sum_{j=1}^{I_V} c_j + b_1(\mathcal{G}_f) + \sum_{i=1}^{I_E} g_i. \quad (3.4)$$

La igualdad se cumple si $g_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, I_E$, donde g_i es el género de la superficie S_i de Σf , lo que significa que $b_2(M) = \sum_{j=1}^{I_V} c_j + b_1(\mathcal{G}_f)$. Ahora, si $\sum_{j=1}^{I_V} c_j + b_1(\mathcal{G}_f) < b_2(M)$. Debemos verificar si existe una constante $L(f) \geq 0$ que depende de f tal que:

$$\sum_{j=1}^{I_V} c_j + b_1(\mathcal{G}_f) + L(f) = b_2(\mathcal{M}_n). \quad (3.5)$$

Por la desigualdad (3.4) tenemos:

$$b_2(M) \leq \sum_{j=1}^{I_V} c_j + b_1(\mathcal{G}) + \sum_{i=1}^{I_E} g_i(f). \quad (3.6)$$

Si reemplazamos (3.5) en (3.6), tenemos:

$$\sum_{j=1}^{I_V} c_j + b_1(\mathcal{G}_f) + L(f) \leq \sum_{j=1}^{I_V} c_j + b_1(\mathcal{G}) + \sum_{i=1}^{I_E} g_i.$$

Esta última inecuación implica que, $0 \leq L(f) \leq \sum_{i=1}^{I_E} g_i$, y si $g_i = 0$ para todo i , tenemos que $L(f) = 0$. Concluimos que, en realidad, la constante $L(f)$ depende más específicamente de los g_i . Se mostrará más adelante que estos g_i , de los cuales depende $L(f)$, son exactamente las asas pesadas de Σf y más aún se probará en el Teorema 4.9 que $L(f)$ es igual al número de todas las asas pesadas de Σf .

Considerando esta última Observación 3.15, la siguiente Proposición 3.16 muestra la *existencia* de aplicaciones con asas pesadas.

Proposición 3.16. *Sea $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$. Si $I_P(f) + b_1(\mathcal{G}_f) < b_2(\mathcal{M}_n)$, entonces Σf tiene una asa pesada.*

Demostración. Por contradicción, supongamos todas las asas de Σf son triviales. Luego, por la Proposición 3.13, existe $h \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$, tal que $I_G(h) = 0$. Además, se verifica la siguiente igualdad:

$$I_P(f) + b_1(\mathcal{G}_f) = I_P(h) + b_1(\mathcal{G}_h). \quad (3.7)$$

Como $I_G(h) = 0$ (i.e. cada superficie singular de h tiene género cero). Luego, por el Teorema 1.56, la aplicación h verifica lo siguiente:

$$b_2(\mathcal{M}_n) = I_P(h) + b_1(\mathcal{G}_h). \quad (3.8)$$

Por hipótesis, $I_P(f) + b_1(\mathcal{G}_f) < b_2(\mathcal{M}_n)$, reemplazando esto en (3.8). Tenemos:

$$I_P(f) + b_1(\mathcal{G}_f) < I_P(h) + b_1(\mathcal{G}_h) \quad (3.9)$$

De (3.7) y (3.9), tenemos una contradicción; por tanto, podemos concluir en que existe una asa de Σf pesada. \square

Puesto que la Definición 3.6 distingue dos tipos de asas removibles (las triviales y las pesadas). Además cuando $M = \mathcal{M}_n$ entonces se tiene que el número de asas removibles de una aplicación es igual al número de asas de la misma (ver Proposición 3.12). En consecuencia, todo esto nos lleva a la definir los siguientes invariantes globales.

Definición 3.17. Dado $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$, introducimos dos nuevas invariantes globales para la aplicación f , dados por:

$I_{G_t}(f)$: número total de asas triviales de Σf .

$I_{G_w}(f)$: número total de asas pesadas de Σf .

Proposición 3.18. *Dado $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$, entonces $I_G(f) = I_{G_w}(f) + I_{G_t}(f)$.*

Demostración. Dado $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$, por la Proposición 3.12 toda asa de Σf es removible y coincide con $I_G(f)$, luego por la Definición 3.6 una asa removible es trivial o pesada. Por tanto la suma de asas triviales I_{G_t} , más la suma de asas pesadas I_{G_w} coincide con $I_G(f)$. \square

Corolario 3.19. Dado $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ y $g_i(f)$ el peso de la i -ésima arista del grafo \mathcal{G}_f , entonces existen dos números enteros $w_i(f), t_i(f) \geq 0$ que dependen de la i -ésima arista, tal que

$$g_i(f) = w_i(f) + t_i(f),$$

donde $w_i(f)$ es el número de asas pesadas de Σf que están en la superficie singular S_i , y $t_i(f)$ es el número de asas triviales de f que están en la superficie singular S_i .

Demostración. Sea $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$, con $\Sigma f = \bigcup_{i=1}^{I_E} S_i$ y g_i el género de S_i , $\forall i = 1, \dots, I_E$. Luego como el número de asas de f es $I_G(f) = \sum_{i=1}^{I_E} g_i$, también $I_G(f)$ es la suma del número de asas de cada superficie singular de f . Observemos que tenemos dos casos: si el peso de la i -ésima arista del grafo \mathcal{G}_f es cero y si es distinto de cero.

1. Si el peso de la i -ésima arista del grafo \mathcal{G}_f es cero, esto es $g_i(f) = g_i = 0$, entonces si queremos escribir $g_i(f)$ como la suma de dos números enteros no negativos tal que $0 = g_i(f) = w_i(f) + t_i(f)$, en consecuencia $w_i(f) = t_i(f) = 0$. En otras palabras, puesto que la superficie S_i con género $g_i = 0$ no tiene asas, entonces f no tiene asas de ningún tipo.
2. Si el peso de la i -ésima arista del grafo \mathcal{G}_f es distinto de cero, esto es $g_i(f) = g_i > 0$ donde g_i es el género de la superficie singular S_i . Por el algoritmo descrito previamente, tenemos que las asas de esta superficie pueden dividirse en dos tipos, asas triviales o pesadas. Por tanto existen $w_i(f), t_i(f) \geq 0$ tal que

$$g_i(f) = w_i(f) + t_i(f)$$

donde $w_i(f)$ es el número de asas pesadas de Σf que están en la superficie singular S_i , y $t_i(f)$ es el número de asas triviales de f que están en la superficie singular S_i . \square

Algoritmo para la clasificación de asas con peso y asas triviales

Sea $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$, con $\Sigma f = \bigcup_{i=1}^{I_E} S_i$ y g_i el género de S_i , $\forall i = 1, \dots, I_E$. La Proposición 3.18 nos dice que $I_G(f) = I_{G_w}(f) + I_{G_t}(f)$. Como $I_G(f) = \sum_{i=1}^{I_E} g_i$, el siguiente

algoritmo nos permite relacionar de manera única, las asas removibles de Σf con las asas de las superficies singulares de f . Luego podemos clasificar las asas de una superficie singular de Σf en asas triviales y asas pesadas, ya que las asas removibles de Σf son triviales o pesadas (ver Definición 3.6). En lo que sigue, dado $\sum_{i=1}^{I_E} g_i = I_G(f) > 0$, podemos clasificar en dos tipos las asas de una superficie singular. Haremos esto con el siguiente algoritmo que consiste de 4 items del *i*) al *iv*).

i) Dado $\sum_{i=1}^{I_E} g_i = I_G(f) > 0$, por la Proposición 3.18, Σf tiene una asa removible. Luego de la Definición 3.2 existen $f_1 \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$. $H : \mathcal{M}_n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $H_0 = f$, $H_1 = f_1$ y $t_0 \in (0, 1)$, tal que verifica la siguiente condición:

$$I_G(f) = 1 + I_G(f_1), \quad I_G(f) = I_G(H_t), \quad \forall t \in [0, t_0) \quad \text{y} \quad I_G(f_1) = I_G(H_t), \quad \forall t \in (t_0, 1],$$

esta condición nos dice que para llegar de f a f_1 mediante el camino H_t , solo se elimina una asa de alguna superficie singular de f . Luego identifiquemos la asa removible de f por la asa eliminada en alguna superficie singular de f , (esto podemos hacerlo pues para que una asa de f sea removida debe existir siempre una asa de alguna superficie singular de f , tal que esta asa es eliminada). Ahora de la Definición 3.6 esta asa removible es *trivial* o es *pesada*, luego como esta asa removible puede ser identificada con una asa de alguna superficie singular de f , entonces podemos decir que la asa de esta superficie singular es *trivial* o es *pesada*.

ii) Si $\sum_{i=1}^{I_E} g_i - 1 = I_G(f) - 1 = I_G(f_1) = 0$, paramos ahí. Ahora si $\sum_{i=1}^{I_E} g_i - 1 = I_G(f) - 1 = I_G(f_1) > 0$, repitamos todo el procedimiento que hicimos en el item *i*). Así, llegamos a la conclusión que existe una asa removible de f_1 y una $f_2 \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ tal que junto con f_1 verifican las condiciones de la Definición 3.2. Además concluimos que una superficie singular f_1 tiene una asa *trivial* o es *pesada*.

iii) Procediendo al item anterior, si $\sum_{i=1}^{I_E} g_i - 2 = I_G(f) - 2 = I_G(f_1) - 1 = I_G(f_2) > 0$ repetimos el mismo procedimiento del item (*ii*) para f_2 . Luego encontramos un f_3 junto con una superficie singular de f_2 que tiene una asa *trivial* o es *pesada*. Repitiendo este mismo algoritmo encontramos una sucesión finita de aplicaciones f, f_1, f_2, \dots, f_m , donde

$$\sum_{i=1}^{I_E} g_i - m = I_G(f) - m = I_G(f_1) - (m - 1) = \dots = I_G(f_m) > 0. \quad (3.10)$$

De (3.10) tenemos que el último término de la sucesión $\{f_i\}_{i=1}^m$, es cuando $m = I_G(f)$.

iv) Del item *ii)* y *iii)* podemos observar que; para cada aplicación en $\{f_i : i = 1, \dots, I_G(f)\}$ hay una asa removible de f . Además hay una identificación 1-1 entre asas removidas de f y las asas de las superficies singulares de f . Luego de la Definición 3.6 cada una de estas asas es trivial o es pesada.

Capítulo 4

Grafo asociado a $f \in (\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$

En este capítulo, definiremos el \mathcal{H} -grafo asociado a aplicaciones $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$, estudiaremos más propiedades del \mathcal{H} -grafo de una aplicación estable, su relación con las transiciones y las cirugías entre aplicaciones. Los resultados principales son el Teorema 4.10 y la Proposición 4.21.

4.1. El grafo asociado a $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$

En esta parte, definimos el \mathcal{H} -grafo asociado a las aplicaciones estables de \mathcal{M}_n en \mathbb{R}^3 , estudiando sus propiedades y estableciendo resultados.

Definición 4.1. Dado $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ y \mathcal{G}_f el grafo asociado a f . Si sustituimos todos los pesos g_i de todas las aristas de \mathcal{G}_f , por el par de pesos (w_i, t_i) , tal que:

$$g_i = w_i + t_i,$$

donde w_i y t_i son números enteros no negativos como del Corolario 3.19. El nuevo grafo obtenido al hacer esta sustitución de los pesos en las aristas será llamado \mathcal{H} -grafo asociado a f y denotado por \mathcal{H}_f .

Ejemplo 4.2. En la parte superior de la Figura 4.1, tenemos ejemplos de \mathcal{H} -grafos de aplicaciones de $S^2 \times S^1$ y $\#^2(S^2 \times S^1)$ a \mathbb{R}^3 , cuyas superficies presentadas son los conjuntos de ramificación de cada aplicación. La aplicación ξ_1 cuenta solo con una superficie singular homeomorfa al toro bidimensional, formada solo por puntos de pliegue, cuyo \mathcal{H} -grafo \mathcal{H}_{ξ_1} tiene una sola arista con peso 0 en su vértices y $(1, 0)$ en su arista. La aplicación ℓ_1 cuenta solo con una superficie singular homeomorfa al bi-toro bidimensional, formada solo por puntos de pliegue, cuyo \mathcal{H} -grafo \mathcal{H}_{ℓ_1} tiene una

sola arista con peso 0 en su vértices y $(2, 0)$ en su arista. La aplicación ℓ_2 tiene tres superficies singulares homeomorfas a la esfera S^2 , formada solo por puntos de pliegue; por tanto, \mathcal{H}_{ℓ_2} es un grafo con dos ciclos, con peso 0 en sus vértices y peso $(0, 0)$ en las tres aristas.

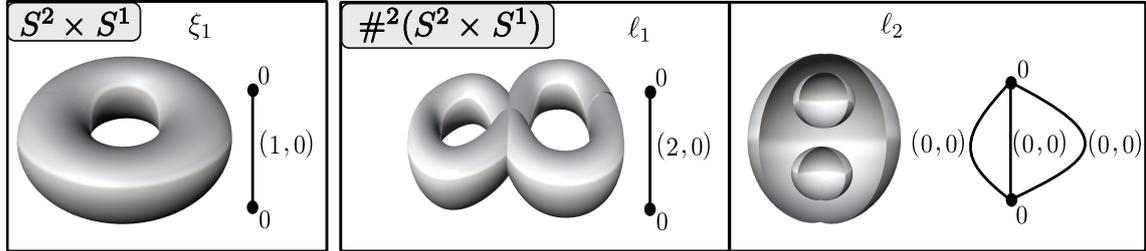


Figura 4.1: Ejemplo de \mathcal{H} -grafos de aplicaciones.

Observación 4.3. El grafo \mathcal{G}_f puede ser obtenido trivialmente del grafo \mathcal{H}_f . Además se tiene

$$b_1(\mathcal{G}_f) = b_1(\mathcal{H}_f);$$

pues, dado el grafo \mathcal{H}_f , para obtener \mathcal{G}_f solo tenemos que reemplazar los pares de pesos en las aristas de \mathcal{H}_f por la suma de las mismas, y el nuevo grafo obtenido de esta manera coincide con el grafo \mathcal{G}_f .

Ejemplo 4.4. La Figura 4.2 ilustra dos aplicaciones f y h con sus \mathcal{H} -grafos asociados \mathcal{H}_f y \mathcal{H}_h respectivamente, notemos que estos grafos son distintos; estas aplicaciones son las mismas que se presentaron en la Figura 3.1.

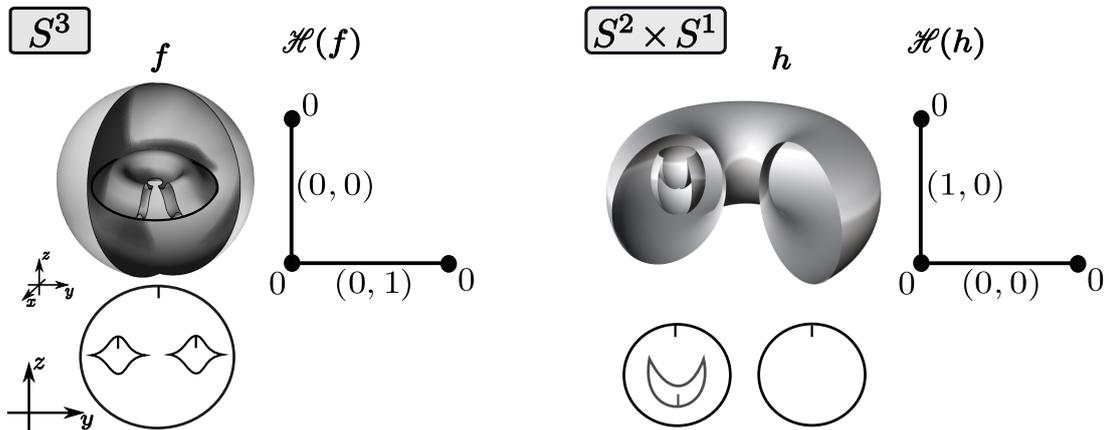


Figura 4.2: Ejemplos de \mathcal{H} -grafo asociado a aplicaciones estables.

Efecto de las transiciones de codimensión 1 sobre el \mathcal{H} -grafo

Presentamos en la Figura 4.3 los efectos de las transiciones de codimensión 1 para L , B y P en los \mathcal{H} -grafos asociados a aplicaciones estables de \mathcal{M}_n a \mathbb{R}^3 , como un paralelo a lo

presentado en la Figura 10, dado en [23], en relación al grafo asociado a las aplicaciones estables. A diferencia de los grafos pesados, podemos percibir muchas más propiedades de los superficies singulares de las aplicaciones estables; en este sentido, por ejemplo, podemos afirmar lo siguiente: *i*) Cuando una de estas transiciones modifican el peso de

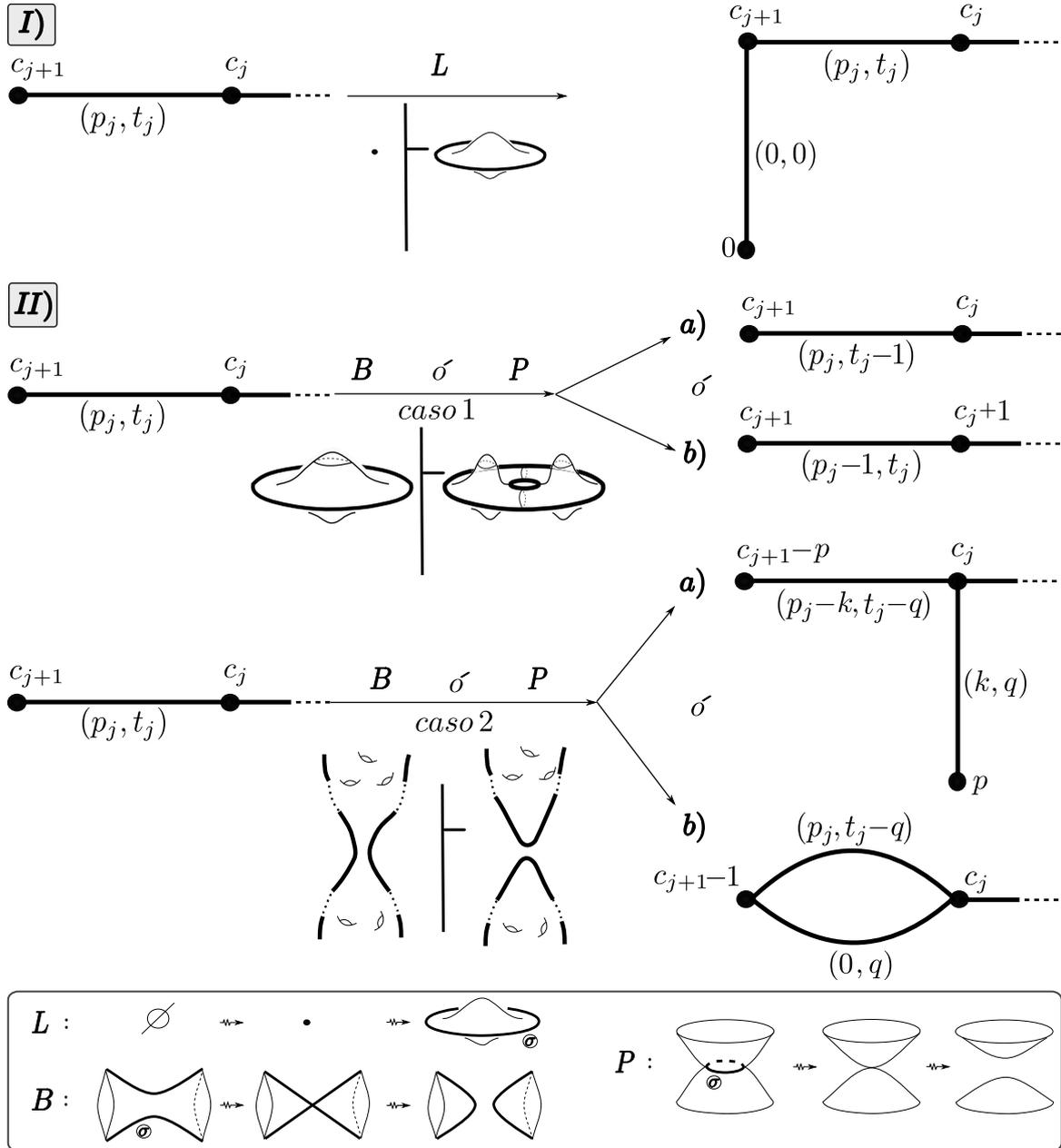


Figura 4.3: Efecto de las transiciones L , B y P sobre el \mathcal{H} -grafo.

la segunda componente de la arista del \mathcal{H} -grafo; entonces, los pesos de los vértices y el número de ciclos del \mathcal{H} -grafo no se modifican.

ii) Si una transición modifica el peso de la primera componente del peso de la arista del \mathcal{H} -grafo; entonces, también modifica el peso de los vértices del grafo (o modifica el número de ciclos de grafo) y viceversa. Es decir, si modificamos el número de ciclos

del grafo (o se modifica la suma de los pesos en los vértices), entonces se modifica el peso en la primera componente en el peso de las aristas del grafo.

Estas y más propiedades se estudiarán en el siguiente capítulo.

Ejemplo 4.5. En la Figura 4.4, tres aplicaciones de $S^2 \times S^1$ en \mathbb{R}^3 , las cuales se construyen o modifican por las transiciones de codimensión 1 como sigue. La aplicación f_2 es obtenida de f_1 , tal que el camino que los liga pasa por la transición P en dirección positiva, eliminando una superficie singular y un ciclo del grafo \mathcal{H}_{f_1} . Así obtenemos la aplicación f_2 , cuyo grafo tiene peso 1 en uno de sus vértices y no tiene ciclos. La aplicación f_3 se obtiene de la aplicación f_2 , tal que el camino que los une solo pasa por la transición L en dirección positiva, creando una nueva superficie singular homeomorfa a una esfera S^2 , lo cual crea una arista con peso 0 en el vértice creado y peso $(0, 0)$ en la arista creada, el cual se percibe al comparar \mathcal{H}_{f_2} y \mathcal{H}_{f_3} .

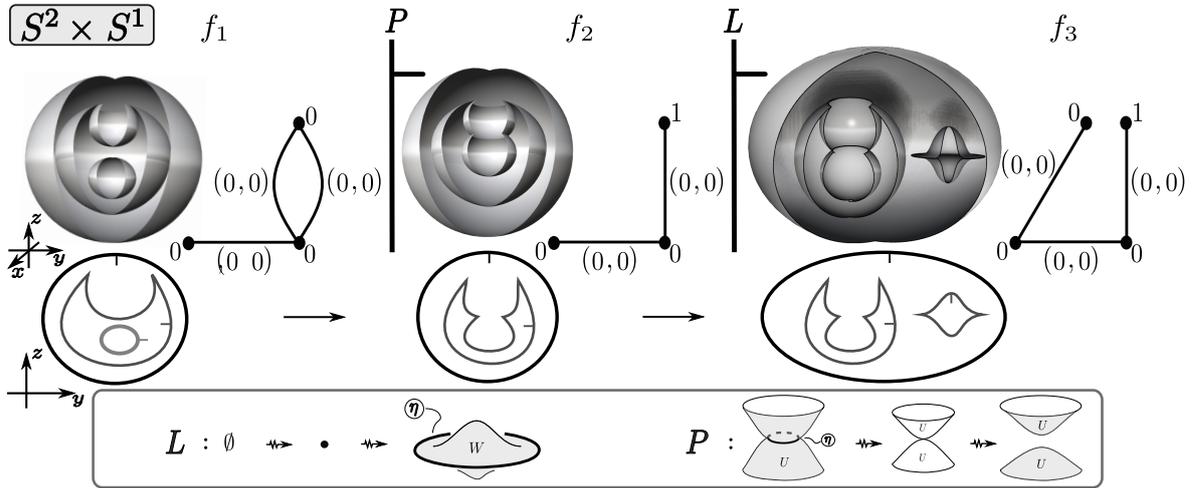


Figura 4.4: Ejemplo del efecto de las transiciones en el \mathcal{H} -grafo.

4.2. Propiedades del \mathcal{H} -grafo

Comenzamos el estudio de las propiedades de un \mathcal{H} -grafo, demostrando una proposición que generaliza la condición necesaria del Teorema 1.56. Esta proposición que mostraremos nos permitirá reemplazar la cantidad I_G de la Ecuación (1.1) por I_{G_w} . Recordando que $I_G(f)$ y $I_{G_w}(f)$ son el número de las asas de Σf y el número de las asas de Σf pesadas, respectivamente.

Proposición 4.6. Sea \mathcal{H}_f el grafo de $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$. Entonces:

$$I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) \leq b_2(\mathcal{M}_n) \leq I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) + I_{G_w}(f),$$

donde $I_P(f) = \sum_{j=1}^{I_V(f)} c_j$ suma los pesos en los vértices del grafo \mathcal{H}_f y $I_{G_w}(f) = \sum_{i=1}^{I_E(f)} w_i(f)$, respectivamente.

Demostración. Consideremos el grafo \mathcal{G}_f asociado $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$. Por el Teorema 1.56, se verifica las siguientes desigualdades

$$I_P(f) + b_1(\mathcal{G}_f) \leq b_2(\mathcal{M}_n) \leq I_P(f) + b_1(\mathcal{G}_f) + I_G(f).$$

Del Corolario 3.19, es fácil ver que $\sum_{i=1}^{I_E(f)} g_i(f) = \sum_{i=1}^{I_E(f)} w_i(f) + \sum_{i=1}^{I_E(f)} t_i(f)$. Puesto que $\sum_{i=1}^{I_E(f)} t_i(f)$ son el número de las asas triviales, por la Proposición 3.13, existe una aplicación $h \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ tal que las asas triviales de Σf son removidas y las asas pesadas de Σf no se remueven. Así, $\sum_{i=1}^{I_E(h)} t_i(h) = 0$ y $\sum_{i=1}^{I_E(h)} w_i(h) = \sum_{i=1}^{I_E(f)} w_i(f)$. Esto implica que:

$$\sum_{i=1}^{I_E(h)} g_i(h) = \sum_{i=1}^{I_E(h)} w_i(h) + \sum_{i=1}^{I_E(f)} t_i(h) = \sum_{i=1}^{I_E(f)} w_i(f) + 0 = \sum_{i=1}^{I_E(f)} w_i(f).$$

En otros términos:

$$I_G(h) = I_{G_w}(h) + I_{G_t}(h) = I_{G_w}(f) + 0 = I_{G_w}(f). \quad (4.1)$$

Además, como Σh no tiene asas triviales de Σf , por la Proposición 3.18 Σh tiene solo asas pesadas, luego por la Proposición 3.13, se verifica la siguiente igualdad:

$$I_P(f) + b_1(\mathcal{G}_f) = I_P(h) + b_1(\mathcal{G}_h). \quad (4.2)$$

Aplicando el Teorema 1.56 en h , tenemos:

$$I_P(h) + b_1(\mathcal{G}_h) \leq b_2(\mathcal{M}_n) \leq I_P(h) + b_1(\mathcal{G}_h) + I_G(h). \quad (4.3)$$

Luego, sustituyendo (4.2) y (4.1), en la Ecuación 4.3, obtenemos la desigualdad buscada:

$$I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) \leq b_2(\mathcal{M}_n) \leq I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) + I_{G_w}(f). \quad \square$$

Corolario 4.7. Sea \mathcal{H}_f el grafo de $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ y $I_{G_w}(f) = \sum_{i=1}^{I_E(f)} w_i(f) > 0$. Si una asa pesada de Σf es removida. Entonces, existe $h \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$, tal que:

$$I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) < I_P(h) + b_1(\mathcal{H}_h).$$

Demostración. Si una asa pesada de Σf es removida, entonces por Proposición 3.13, existe $h \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$, tal que:

$$I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) \neq I_P(h) + b_1(\mathcal{H}_h), \quad (4.4)$$

De (4.4) probemos la desigualdad: $I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) < I_P(h) + b_1(\mathcal{H}_h)$. Por contradicción, supongamos que se cumple:

$$I_P(h) + b_1(\mathcal{H}_h) < I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f). \quad (4.5)$$

Aplicando la Proposición 4.6 a f y a h , tenemos:

$$I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) \leq b_2(\mathcal{M}_n) \leq I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) + I_{G_w}(f), \quad (4.6)$$

$$I_P(h) + b_1(\mathcal{H}_h) \leq b_2(\mathcal{M}_n) \leq I_P(h) + b_1(\mathcal{H}_h) + (I_{G_w}(f) - 1). \quad (4.7)$$

Reemplazando (4.5) en la segunda desigualdad de (4.7), obtenemos:

$$b_2(\mathcal{M}_n) < I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) + (I_{G_w}(f) - 1).$$

Retirando k asas con peso de f , obtenemos: $b_2(\mathcal{M}_n) < I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) + (I_{G_w}(f) - k)$. Haciendo $k = I_{G_w}(f)$, se tiene:

$$b_2(\mathcal{M}_n) < I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f). \quad (4.8)$$

Por otro lado, de (4.6), tenemos $I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) \leq b_2(\mathcal{M}_n)$, reemplazando esta desigualdad en (4.8), resulta la siguiente desigualdad:

$$b_2(\mathcal{M}_n) < b_2(\mathcal{M}_n),$$

la cual es una contradicción. Por tanto tenemos que $I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) < I_P(h) + b_1(\mathcal{H}_h)$.
□

Corolario 4.8. *Sea \mathcal{H}_f el grafo de $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$. Si $I_{G_w}(f) > 0$, entonces existe un $L(f) \in \mathbb{Z}$, con $0 < L(f) \leq I_{G_w}(f)$, tal que*

$$b_2(\mathcal{M}_n) = I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) + L(f).$$

Demostración. Si $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$, entonces f verifica las condiciones de la Proposición 4.6, por tanto tenemos:

$$I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) \leq b_2(\mathcal{M}_n) \leq I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) + I_{G_w}(f). \quad (4.9)$$

Donde $I_{G_w}(f) = \sum_{i=1}^{I_E(f)} w_i(f)$ es la suma de todas las asas pesadas de las superficies singulares de Σf . De la Definición 3.6 (asa pesada) y por la Proposición 3.13, existe

$h \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ tal que Σh solo poseen asas triviales (i.e. $I_{G_w}(h) = 0$). Nuevamente, aplicando la Proposición 4.6 a h , tenemos:

$$b_2(\mathcal{M}_n) = I_P(h) + b_1(\mathcal{H}_h). \quad (4.10)$$

Del Corolario 4.7, f y h satisfacen lo siguiente:

$$I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) < I_P(h) + b_1(\mathcal{H}_h).$$

De esta desigualdad, existe un número entero $L(f) > 0$ (dependiendo de f) que satisface la siguiente igualdad:

$$I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) + L(f) = I_P(h) + b_1(\mathcal{H}_h). \quad (4.11)$$

Finalmente, reemplazando (4.11) en (4.10):

$$b_2(\mathcal{M}_n) = I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) + L(f). \quad (4.12)$$

Obteniendo así la igualdad que queríamos. Por otro lado, para mostrar que $0 < L(f) \leq \sum_{i=1}^{\mu(f)} w_i(f)$, sustituimos (4.12) en la segunda desigualdad de (4.9). Así:

$$I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) + L(f) \leq I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) + I_{G_w}(f).$$

Luego, $L(f) \leq I_{G_w}(f)$. Como $L(f) > 0$, entonces $0 < L(f) \leq I_{G_w}(f)$. \square

El teorema siguiente mejora la condición suficiente del Teorema 1.56, pues nos da una condición exacta para que la aplicación estable exista con una \mathcal{M}_n fijada.

Teorema 4.9. *Sea \mathcal{H}_f el grafo de $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$. Si $I_{G_w}(f) > 0$, entonces*

$$b_2(\mathcal{M}_n) = I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) + I_{G_w}(f),$$

donde $I_{G_w}(f) = \sum_{i=1}^{I_E(f)} w_i(f)$. Además $L(f)$ es igual al número de asas pesadas de Σf , donde $L(f)$ es el número dad en el Corolario 4.8.

Demostración. Si $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$. Entonces cumple con la hipótesis del Corolario 4.8 y satisface:

$$b_2(\mathcal{M}_n) = I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) + L(f), \quad \text{con} \quad 0 < L(f) \leq I_{G_w}(f).$$

Así solo tenemos que mostrar $L(f) = I_{G_w}(f)$. Por inducción en $I_{G_w}(f)$. Supongamos que $I_{G_w}(f) = 1$. Como $0 < L(f) \leq I_{G_w}(f)$, reemplazando $I_{G_w}(f) = 1$, tenemos $0 < L(f) \leq 1$; como $L(f) \in \mathbb{Z}^+$, se tiene $L(f) = 1$, lo que implica que $L(f) = I_{G_w}(f) = 1$.

Ahora, supongamos que se cumple para el caso $m - 1$. Esto es: si $I_{G_w}(f) = m - 1$, entonces $L(f) = I_{G_w}(f) = m - 1$. Ahora, si $I_{G_w}(f) = m$, mostremos que $L(f) = I_{G_w}(f) = m$. Por la Proposición 4.6, f se verifica la siguientes desigualdades:

$$I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) \leq b_2(\mathcal{M}_n) \leq I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) + I_{G_w}(f), \quad (4.13)$$

donde $I_{G_w}(f) = m$. Consideremos la aplicación $g \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ que puede ser obtenida de f por la remoción de una asa pesada de Σf . Por el Corolario 4.7, tenemos:

$$I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) < I_P(g) + b_1(\mathcal{H}_g). \quad (4.14)$$

Lo que implica que existe un entero $k > 0$ que satisface lo siguiente:

$$I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) + k = I_P(g) + b_1(\mathcal{H}_g). \quad (4.15)$$

Como $g \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ cumple con la hipótesis de la Proposición 4.6, tenemos que g verifica la siguientes desigualdades:

$$I_P(g) + b_1(\mathcal{H}_g) \leq b_2(\mathcal{M}_n) \leq I_P(g) + b_1(\mathcal{H}_g) + I_{G_w}(g), \quad (4.16)$$

donde $I_{G_w}(g) = I_{G_w}(f) - 1 = m - 1$ asas que tienen peso. Entonces por hipótesis de inducción como $I_{G_w}(g) = m - 1$, tenemos $L(g) = m - 1 = I_{G_w}(f) - 1$ y:

$$b_2(\mathcal{M}_n) = I_P(g) + b_1(\mathcal{H}_g) + (I_{G_w}(f) - 1). \quad (4.17)$$

Reemplazando (4.15) en (4.17), obtenemos:

$$b_2(\mathcal{M}_n) = I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) + k + (I_{G_w}(f) - 1). \quad (4.18)$$

Sustituyendo (4.18) en la segunda desigualdad de (4.13), tenemos

$$I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) + k + (\sum_{i=1}^{I_E(f)} w_i(f) - 1) \leq I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) + I_{G_w}(f).$$

Simplificando de ambos lados, tenemos $k \leq 1$, $k > 0$, de donde $k = 1$. Reemplazando $k = 1$ en (4.18), implica:

$$b_2(\mathcal{M}_n) = I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) + I_{G_w}(f). \quad (4.19)$$

Ya que f cumple la hipótesis del Corolario 4.8, tenemos:

$$b_2(\mathcal{M}_n) = I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) + L(f). \quad (4.20)$$

Finalmente, reemplazando (4.19) en (4.20), tenemos $L(f) = I_{G_w}(f)$. \square

El teorema siguiente generaliza y refina el Teorema 1.56. También, nos dice que el \mathcal{H} -grafo asociado a aplicaciones estables \mathcal{M}_n a \mathbb{R}^3 es un invariante global de \mathcal{M}_n .

Teorema 4.10. *Sea la 3-variedad \mathcal{M}_n , y sea \mathcal{H} un \mathcal{H} -grafo bipartito. Entonces, existe una aplicación estable $f : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{G} = \mathcal{H}_f$, si y solo si*

$$b_2(\mathcal{M}_n) = I_P(f) + b_1(\mathcal{H}_f) + I_{G_w}(f),$$

donde $I_P(f) = \sum_{j=1}^{I_V(f)} c_j(f)$ y $I_{G_w}(f) = \sum_{i=1}^{I_E(f)} w_i(f)$.

Demostración. La condición necesaria viene directamente del Teorema 4.9. La necesidad viene del Teorema 1.56. \square

4.3. Cirugía entre aplicaciones estables con \mathcal{H} -grafo

Introducimos dos tipos de cirugía en aplicaciones de 3-variedades en el 3-espacio y sus efectos en su grafo asociado \mathcal{H} , que denominaremos *cirugía tipo I* y *cirugía tipo II*. Estas definiciones extienden las cirugías introducidas en [24].

Cirugía horizontal entre aplicaciones

Definición 4.11. Dadas dos aplicaciones estables $f \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ y $h \in \mathcal{E}(N, \mathbb{R}^3)$, donde M y N son 3-variedades, llamaremos *cirugía horizontal* entre las aplicaciones f y h a la aplicación $f \# h : M \# N \rightarrow \mathbb{R}^3$, construida como sigue: comenzamos removiendo dos 3-bolas B_1 e B_2 en M y N , respectivamente, tales que sus intersecciones con el conjunto singular de f y h son dos discos D_1 y D_2 de puntos de pliegue (no interceptan curvas cuspidales o curvas de pliegues dobles). Después, conectamos las variedades M y N en ∂B_1 y ∂B_2 por un tubo $S^2 \times I$ (donde D_1 y D_2 son unidos por un tubo $S^1 \times I$). La proyección en \mathbb{R}^3 de este tubo no intercepta parte alguna del conjunto de ramificación. El conjunto de ramificación de la aplicación resultante es la suma conexa de los conjuntos de ramificación de f y h .

Sean \mathcal{H}_f y \mathcal{H}_h los grafos asociados a las aplicaciones f y h , respectivamente. El efecto de esta cirugía sobre \mathcal{H}_f y \mathcal{H}_h es mostrado en la Figura 4.5. La suma conexa de los conjuntos singulares (que no es nada más que la suma conexa de superficies) resulta una

superficie con género igual a la suma de las dos superficies involucradas. Si realizamos la suma conexa de las superficies S_i y S_j asociadas a la i -ésima y j -ésima aristas de \mathcal{H}_f y \mathcal{H}_h , respectivamente y si además (w_i, t_i) y (w_j, t_j) son los pesos de la i -ésima y j -ésima aristas respectivamente, entonces tenemos $g(S_i \# S_j) = g(S_i) + g(S_j)$ y

$$(w_i, t_i) \# (w_j, t_j) = (w_i + w_j, t_i + t_j).$$

Por otro lado, el peso de los vértices es sumado también; pues, si M_i y M_j son las regiones correspondientes a los dos vértices involucrados con pesos c_i, c_j , y M_k es la región resultante. Así,

$$c_k = b_2(M_k) - s_k + 1 = b_2(M_i) + b_2(M_j) - (s_i + s_j - 1) + 1 = c_i + c_j.$$

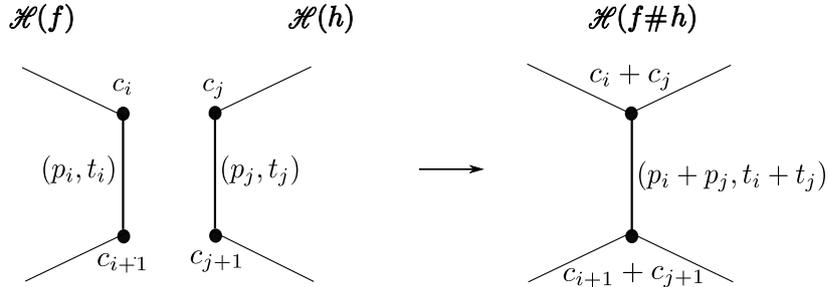


Figura 4.5: Cirugía horizontal entre \mathcal{H} -grafos.

Definición 4.12. (i) Si la cirugía tipo I es hecha entre dos aplicaciones que son provenientes de dos 3-variedades separadas M e N , es llamada *suma conexa horizontal* entre aplicaciones. (ii) Si la cirugía horizontal es hecha en la misma aplicación f , es llamada de *cirugía horizontal* en M y será denotada por $f_{\#}$.

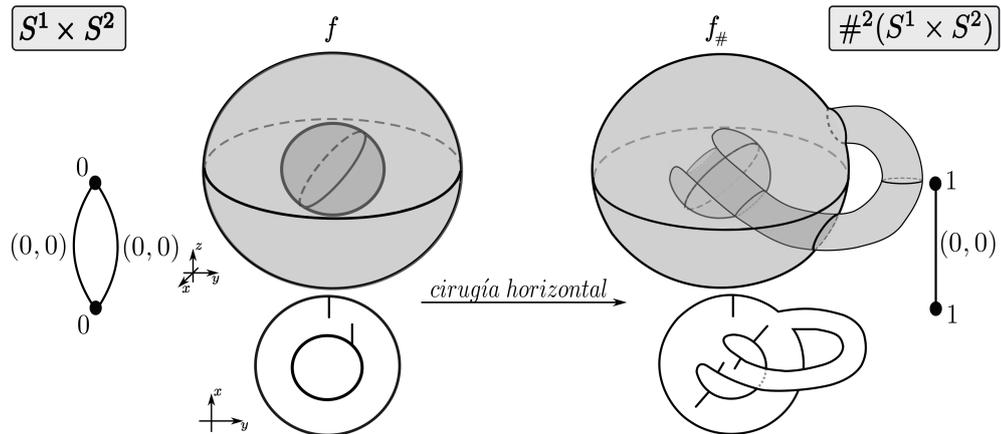


Figura 4.6: Cirugía horizontal en $f \in \mathcal{E}(S^2 \times S^1, \mathbb{R}^3)$.

Ejemplo 4.13. La Figura 4.6 es un ejemplo para la Definición 4.12 parte ii). Los pesos en el grafo de la aplicación $f_{\#}$ son calculados de la siguiente forma: Para comenzar,

tenemos que los pesos en los dos vértices son iguales, pues la aplicación $f_{\#}$ es la aplicación proyección (que $f_{\#}(S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1)$, es exactamente homeomorfo a la mitad de $S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1$). La componente de borde de la imagen de $f_{\#}$ es homeomorfa a una esfera y su segundo número de Betti es dado por $b_2(Im(f_{\#})) = 1$. Así, los pesos en los vértices son $c_1 = c_2 = b_2(Im(f_{\#})) - s_j + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$, donde $s_j = 1$, pues solo tiene una componente de borde.

Cirugía vertical en aplicaciones

Definición 4.14. Sea $f \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ una aplicación, donde M es una 3-variedad, remueva dos 3-bolas B_1 y B_2 en M en las regiones U_1 y U_2 , correspondientes a los vértices v_1 y v_2 , sin interceptar el conjunto singular Σf y tales que tengan la misma imagen en \mathbb{R}^3 . Una de las regiones preservando orientación y la otra aplicada revertiendo orientación. Después, unir los bordes $M \setminus B_1 \cup B_2$ por un tubo $S^2 \times I$, de forma que tengan una superficie S^2 como una superficie singular, que divide en dos partes iguales el tubo, cuyas imágenes coinciden cuando la aplicación es extendida sobre los mismos. Esta cirugía aumenta una esfera S^2 al conjunto singular adyacente a las dos componentes del conjunto singular de la aplicación original, de donde las dos 3-bolas fueron retiradas aumentadas con parte del tubo. En el grafo de f corresponde, a conectar una arista en los vértices v_1 y v_2 , denotaremos a la aplicación resultante de este proceso por f_v , y llamaremos *cirugía vertical* de f . Esta aplicación f_v está definida en la 3-variedad $M_v = M \# (S^2 \times S^1)$.

Las dos regiones involucradas (correspondientes a los vértices v_1 y v_2), después de la cirugía, tienen un nuevo generador de H_2 , que es la S^2 adicionado al conjunto singular. Más las componentes regulares correspondientes, tienen una nueva superficie en el borde (la misma S^2); entonces, el peso no varía. El grafo resultante puede ser visto en la Figura 4.7.

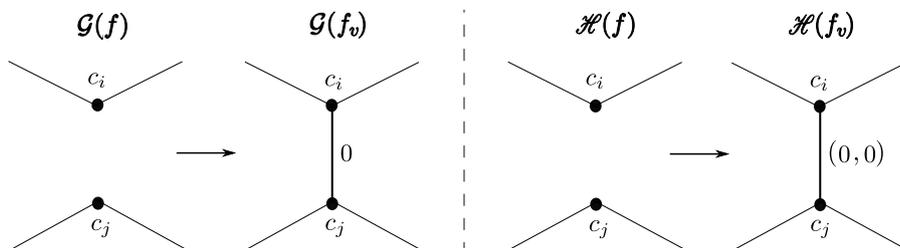


Figura 4.7: Cirugía vertical en los \mathcal{G} y \mathcal{H} Grafos.

Ejemplo 4.15. La Figura 4.8 es un ejemplo de una cirugía vertical entre aplicaciones. En este ejemplo particular, la cirugía es realizada en la misma aplicación, como podemos

visualizar la aplicación $f \in \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$, la cual se perturba convenientemente en la misma clase de \mathcal{A} -equivalencia, para luego realizar la cirugía vertical, como muestra la Figura 4.8 y se obtiene una nueva aplicación $f_v \in \mathcal{E}(S^2 \times S^1, \mathbb{R}^3)$.

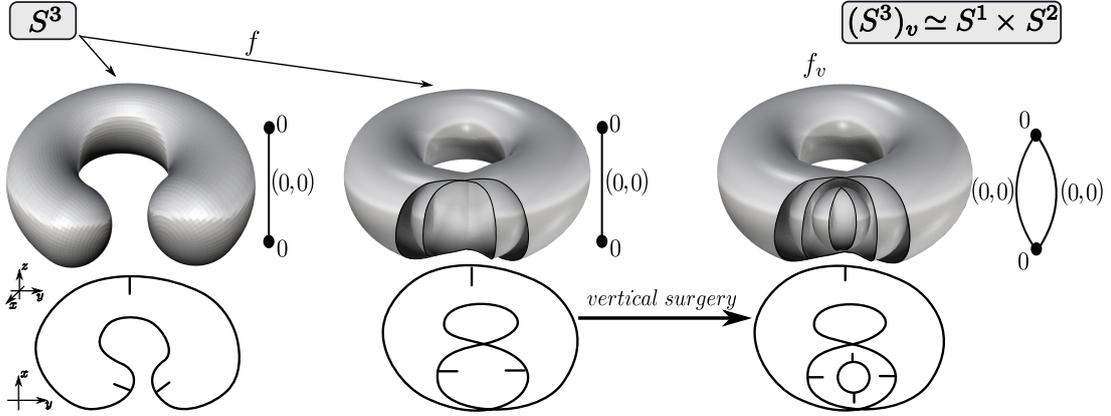


Figura 4.8: Ejemplo de cirugía vertical en el \mathcal{H} -grafo de $f \in \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$.

4.4. Construcción de aplicaciones estables

Sea $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$, para esta aplicación, existe un \mathcal{H} -grafo pesado asociado a este. El Teorema 4.10 nos da las condiciones necesarias y suficientes para que un grafo pesado sea igual al \mathcal{H} -grafo asociado de una aplicación estable. Ahora, dado un grafo pesado \mathcal{G} , en esta sección, construiremos aplicaciones concretas cuyo \mathcal{H} -grafo asociado a este es igual a \mathcal{G} .

Definición 4.16. Dado un \mathcal{H} -grafo \mathcal{G} , diremos que este grafo es *realizable* si existe una 3-variedad \mathcal{M}_n y una aplicación estable $f : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{G} = \mathcal{H}_f$.

Para construir estas aplicaciones, definamos las aplicaciones básicas y usando las cirugías entre aplicaciones estables de la sección anterior, daremos un esquema de construcción de las aplicaciones que realizan a un \mathcal{H} -grafo fijado.

Ejemplo 4.17. Sean $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$ y $h_1, h_2 \in \mathcal{E}(S^2 \times S^1, \mathbb{R}^3)$, cuyas superficies en la Figura 4.9 son sus conjuntos de ramificación, junto con sus \mathcal{H} -grafos asociados, $\mathcal{H}_{f_1}, \mathcal{H}_{f_2}, \mathcal{H}_{f_3}$ y $\mathcal{H}_{h_1}, \mathcal{H}_{h_2}$, respectivamente.

Definición 4.18. Los \mathcal{H} -grafos $\mathcal{H}_{f_1}, \mathcal{H}_{f_2}$ y \mathcal{H}_{f_3} , que están en la Figura 4.9 son llamados de \mathcal{H} -grafos básicos del espacio $\mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$.

Definición 4.19. Los \mathcal{H} -grafos \mathcal{H}_{h_1} y \mathcal{H}_{h_2} , que están en la Figura 4.9, son llamados de \mathcal{H} -grafos básicos del espacio $\mathcal{E}(S^2 \times S^1, \mathbb{R}^3)$.

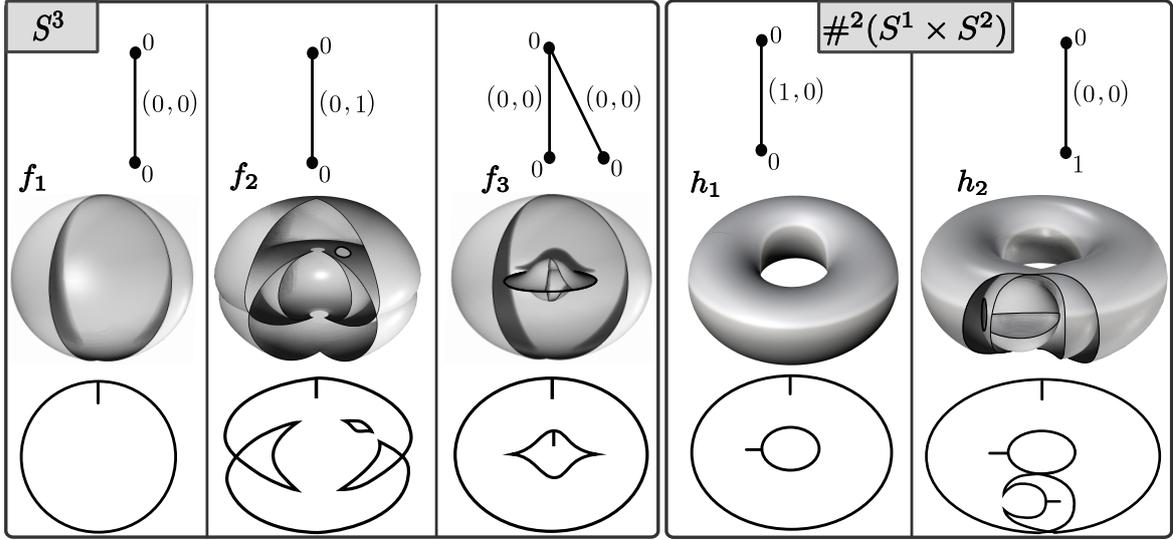


Figura 4.9: \mathcal{H} -grafos básicos de aplicaciones estables de S^3 , $S^2 \times S^1$ a \mathbb{R}^3 .

Proposición 4.20. *Dado cualquier \mathcal{H} -grafo árbol con $c_j = 0$, en todos sus vértices, y donde el peso en cada arista es $(0, z_i)$, con $z_i \in \mathbb{N}$. Entonces este \mathcal{H} -grafo es realizado por una aplicación estable $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, construido convenientemente a partir de los grafos básicos del espacio $\mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$.*

Demostración. Daremos una prueba por inducción sobre el número de aristas del \mathcal{H} -grafo árbol dado. El árbol con una sola arista, es decir $\mu = 1$, y cualquier peso $(0, z)$, con $z \in \mathbb{N}$, en esta arista, es realizable haciendo cirugía horizontal entre $z + 1$ aplicaciones, cuyo \mathcal{H} -grafo asociado es igual al de la aplicación básica f_1 del espacio $\mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$. Obtenemos así una aplicación $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que realiza al árbol con una arista y con peso $(0, z)$ en su arista. Ahora, suponiendo que todo \mathcal{H} -grafo árbol \mathcal{G}_m con $\mu = m$, aristas con pesos $(0, z_i)$, $z_i \in \mathbb{N} \forall i = 1, \dots, m$ es realizable.

Mostremos que todo \mathcal{H} -grafo árbol \mathcal{G}_{m+1} con $\mu = m + 1$ aristas y pesos $(0, z_i)$, con $z_i \in \mathbb{N} \forall i = 1, \dots, m + 1$ es realizable. Haremos esto en cinco pasos: **(1)**. Comencemos escogiendo cualquier arista final del grafo \mathcal{G}_{m+1} (conectada a un vértice con grado 1), sea esta arista la k -ésima de \mathcal{G}_{m+1} ; luego, retiramos el peso $(0, z_k)$ de la k -ésima arista final escogida; así, obtenemos un nuevo \mathcal{H} -grafo \mathcal{G}' que tiene $\mu = m$ aristas, ver Figura 4.10. **(2)** Retiramos del grafo \mathcal{G}' la arista final escogida y así obtenemos otro \mathcal{H} -grafo \mathcal{G}'' con $\mu = m - 1$ aristas. **(3)** Ahora, por hipótesis de inducción, este grafo es realizable por una aplicación $f'' : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{H}_{f''} = \mathcal{G}''$. **(4)** Haciendo cirugía horizontal entre la aplicación f'' , con la aplicación f_3 , correspondiente al grafo básico \mathcal{H}_{f_3} , obtenemos la aplicación $f' : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de forma que $\mathcal{H}_{f'} = \mathcal{G}'$. **(5)** Finalmente, haciendo cirugía horizontal entre la aplicación f' y z_k -veces con la aplicación f_2 , correspondiente al grafo básico \mathcal{H}_{f_2} , obtenemos la aplicación $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, de forma que $\mathcal{H}_f = \mathcal{G}$, ver Figura 4.10. \square

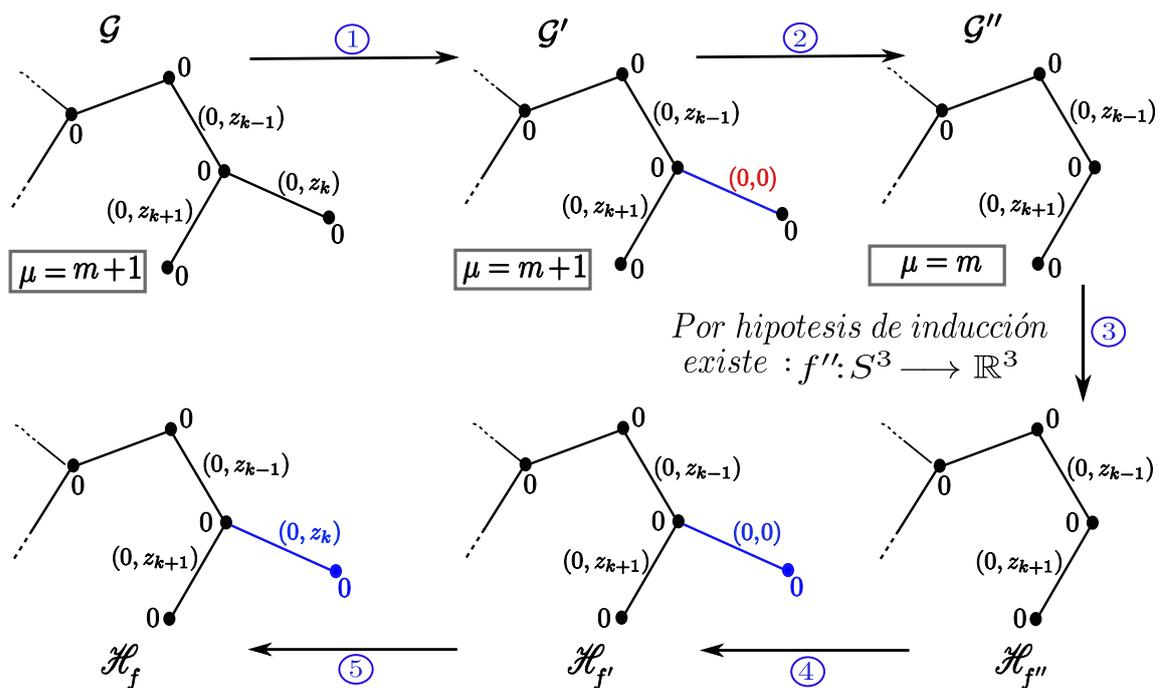


Figura 4.10: Esquema de demostración de la Proposición 4.20.

Proposición 4.21. *Dado cualquier \mathcal{H} -grafo bipartito. Entonces existe una única 3-variedad M_n , tal que este \mathcal{H} -grafo es realizado por una aplicación estable $f : M_n \rightarrow \mathbb{R}^3$, construidos convenientemente a partir de los grafos básicos del espacio $\mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$ y $\mathcal{E}(S^2 \times S^1, \mathbb{R}^3)$.*

Demostración. Mostraremos por construcción, dividiéndolo en siete pasos: **(1)** Retiramos todos los pesos de los vértices y los pesos de la primera coordenada de las aristas del \mathcal{H} -grafo \mathcal{G} , obtenemos así un nuevo grafo \mathcal{G}' , ver Figura 4.11. **(2)** Del grafo \mathcal{G}' , identificamos una arista μ_k en cada ciclo, con su respectivo peso $(0, z_k)$; retirando todos los pesos z_k de estas aristas identificadas, obtenemos el grafo \mathcal{G}'' , con peso $(0, 0)$ en todas sus aristas identificadas. **(3)** Luego del grafo \mathcal{G}'' , retiramos las aristas identificadas μ_k ; así, obtenemos el grafo \mathcal{G}''' , que es un árbol con peso zero en sus vértices y sus respectivos pesos en sus aristas. **(4)** Por el Teorema 4.20, \mathcal{G}''' puede ser realizado por una aplicación estable $f''' : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, cuyo \mathcal{H} -grafo asociado $\mathcal{H}_{f'''}$ es igual al grafo \mathcal{G}''' , ver Figura 4.11. **(5)** Ahora, haciendo cirugías verticales en la aplicación f''' , cada una entre las dos regiones correspondientes a pares de vértices incidentes a una de las aristas retiradas μ_k de \mathcal{G}'' , obtenemos una aplicación $f'' : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, cuyo \mathcal{H} -grafo asociado $\mathcal{H}_{f''}$ es igual al grafo \mathcal{G}'' . **(6)** haciendo cirugías verticales convenientemente entre f'' con un número necesario de aplicaciones tipo la aplicación f_2 , correspondiente al grafo básico \mathcal{H}_{f_1} , ilustrado en la Figura 4.9, que aumentan los pesos $(0, z_k)$ de las aristas identificadas en \mathcal{G}' , obtenemos así la aplicación $f' : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, cuyo grafo asociado $\mathcal{H}_{f'}$ es igual al grafo \mathcal{G}' . **(7)** Por último, haciendo cirugías horizontales entre

la aplicación f' con un número necesario de aplicaciones tipo a la aplicación h_1 y h_2 , ilustrado en la Figura 4.9, obtenemos una aplicación $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuyo grafo asociado \mathcal{H}_f es igual al grafo \mathcal{G} , con sus pesos originales. \square

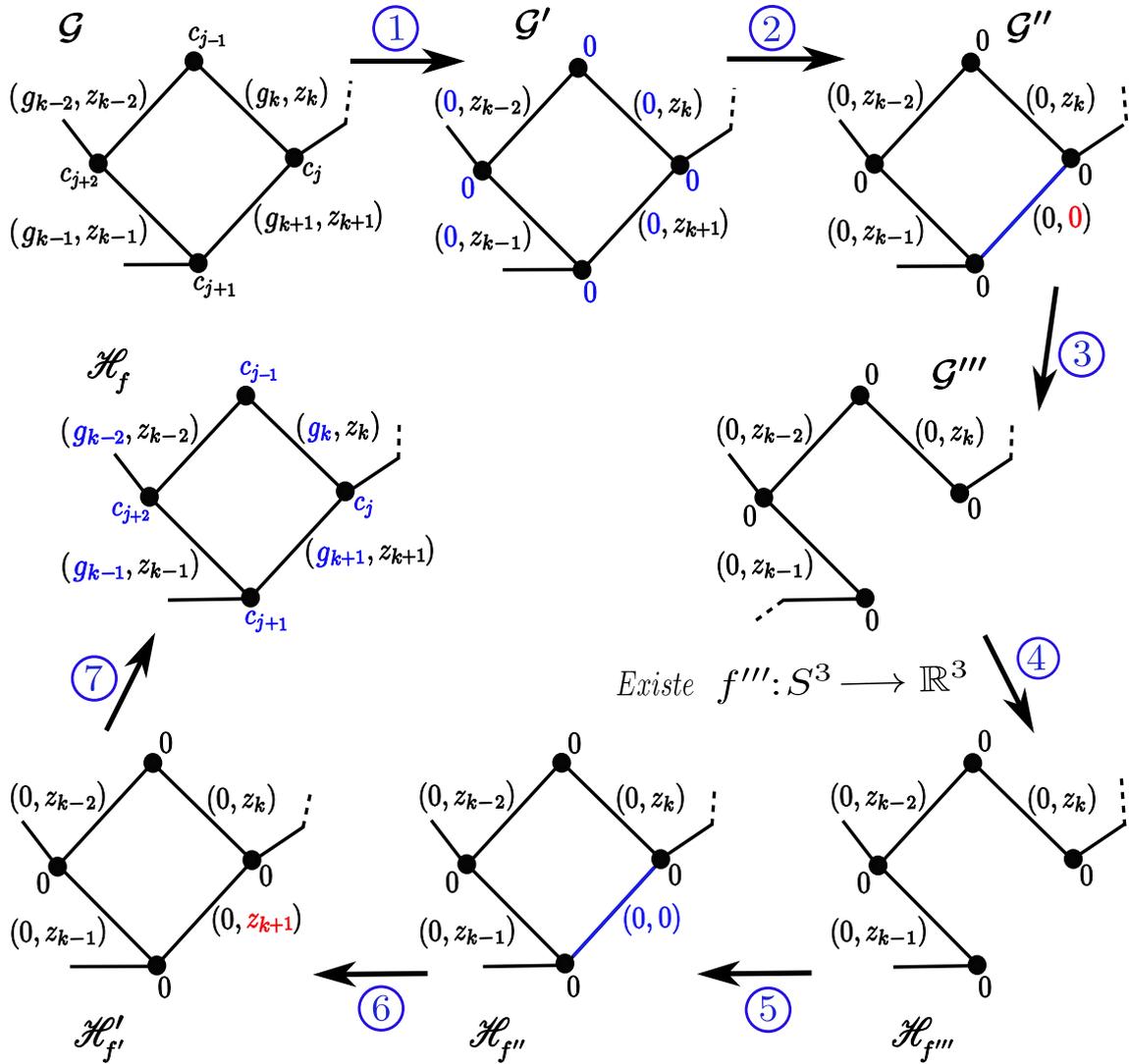


Figura 4.11: Esquema de demostración de la Proposición 4.21.

Capítulo 5

Invariantes globales para aplicaciones estables de $S^2 \times S^1$ al espacio tridimensional

En la siguiente sección, estudiamos la descomposición de las transiciones de codimensión 1, que alteran el conjunto singular, y aplicaciones básicas para la construcción de aplicaciones estables de $S^2 \times S^1$ en \mathbb{R}^3 , con conjuntos singulares predeterminados. Los resultados principales son el Teorema 5.5 y el Teorema 5.8.

5.1. Ramificación de transiciones de codimensión 1

Si f es una aplicación estable de una 3-variedad compacta y orientada M a \mathbb{R}^3 , las superficies singulares en M , las curvas cuspidales, colas de golondrinas en Bf son finitas.

En la Definición 2.6, se introdujo algunas invariantes globales de una 3-variedad compacta y orientada a \mathbb{R}^3 , y estos son: $I_E(f)$, número de superficies singulares; $I_V(f)$, número de componentes regulares; $I_C(f)$, número total de curvas cuspidales; $I_G(f)$, suma total de géneros de las superficies singulares; $I_G(f)$, suma total de géneros de las superficies singulares.

A estas invariantes, agregaremos dos invariantes globales más, las cuales se definen naturalmente tras introducir los \mathcal{H} -grafos asociados a estas aplicaciones estables, y estas las definimos a continuación.

Definición 5.1. Sea $f \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$. En número total de ciclos del grafo \mathcal{H}_f será denotado por $I_Z(f)$ y será llamada *invariante global* $I_Z(f)$ de f . Escribiremos solo I_Z en

lugar de $I_Z(f)$ si no causa confusión.

Para dar nuevas subdivisiones de las transiciones, recordemos la Definición 2.3. Sea f una aplicación obtenida de una aplicación ξ de M a \mathbb{R}^3 , de forma que el camino que une f y ξ pasa a través de $T \in \{L, B, P, A_3^e, A_3^h\}$, una transición de codimensión 1. Diremos que la transición T tiene dirección positiva (resp. negativa) en los siguientes casos:

1. L tiene dirección *positiva* (resp. *negativa*) si f tiene exactamente una curva cuspidal más (resp. menos) que ξ .
2. B tiene dirección *positiva* (resp. *negativa*) si f tiene exactamente una curva cuspidal y una superficie singular más (resp. menos) que ξ ; o si f tiene una curva cuspidal y la diferencia entre el género de las superficies singulares de f y ξ es -1 (resp. 1).
3. P tiene dirección *positiva* (resp. *negativa*) si f tiene exactamente una curva cuspidal menos (resp. más) que ξ .
4. A_3^e, A_3^h tiene dirección *positiva* (resp. *negativa*) si f tiene dos colas de golondrina más que ξ .

En los siguientes párrafos, describiremos el comportamiento y la descomposición de las transiciones de acuerdo con la alteración del número de curvas cuspidales, colas de golondrina, superficies singulares, pesos en los vértices y ciclos del grafo en dirección positiva (ver Figuras 5.1 y 5.2).

L: Esta transición no será descompuesta. Esta crea una superficie singular homeomorfa a una esfera, incrementando una unidad el número de superficies singulares y el número de curvas cuspidales. Denotemos por Q y η la nueva superficie singular y curva cúspidal, respectivamente, (ver Figura 5.1). Así:

$$(I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f') + (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0).$$

B: Esta modifica no solo el número de curvas cuspidales, más también en número de superficies singulares y su género. Esta transición será descompuesta en $B_{0,g}$, $B_{+,g}$, $B_{+,g}^w$, $B_{-,g}$ y B_v , B_v^Z . La Figura 5.1 muestra la imagen local de las transiciones en el conjunto de ramificación con respecto a la dirección positiva. Donde:

- **$B_{0,g}$** : Dos arcos de aristas cuspidales η_1 y η_2 en la superficie W se unen un con otra tangencialmente y luego se dividen en dos nuevas aristas cuspidales β_1 y β_2

en una superficie Z , el género de una superficie singular disminuye una unidad. Así:

$$(I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f') + (0, 0, 0, 0, 0, -1, 0).$$

- $B_{-,g}$: Las curvas cuspidales η_1 y η_2 en la superficie W , uniendo cada una tangencialmente en una curva cuspidal η en la superficie Z , en número de curvas cuspidales y el género de una superficie singular disminuye una unidad (ver Figura 5.1). Así:

$$(I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f') + (0, 0, 0, 0, -1, -1, 0).$$

- $B_{+,g}$: Dos arcos de una curva cuspidal ν en la superficie W se unen una y otra, tangencialmente separa en dos curvas cuspidales ν_1 y ν_2 en la superficie F , el número de curvas cuspidales incrementa una unidad y el género de una superficie singular disminuye una unidad. Así:

$$(I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f') + (0, 0, 0, 0, 1, -1, 0).$$

- $B_{+,g}^w$: Dos arcos de una curva cuspidal ν en la superficie W se unen una y otra, tangencialmente separa en dos curvas cuspidales ν_1 y ν_2 en la superficie F , el número de curvas cuspidales incrementa una unidad, el género de una superficie singular disminuye una unidad y aumentando una unidad el peso del vértice de la arista asociada a la superficie F . Así:

$$(I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f') + (0, 0, 1, 0, 1, -1, 0).$$

- B_v : Dos arcos de una curva cuspidal η en la superficie W se unen una y otra tangencialmente separa en dos curvas cuspidales η_1 y η_2 en las superficies U_1 y U_2 respectivamente; el número de superficies singulares (o el número de aristas) y el número de curvas cuspidales, ambos incrementan una unidad, simultáneamente incrementando en una unidad el número de vértices (o las componentes regulares). Así:

$$(I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f') + (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0).$$

- B_v^Z : Dos arcos de la curva cuspidal η en la superficie W se tangencia y separa en dos curvas cuspidales η_1 y η_2 en las superficies U_1 , U_2 , respectivamente, incrementando una unidad el número de curvas cuspidales, una unidad el número de superficies singulares (o el número de aristas), y una unidad el número de ciclos y disminuyendo una unidad el peso de un vértice de la arista asociada a la

superficie U_1 del grafo \mathcal{H}_f , Así:

$$(I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f') + (1, 0, -1, 1, 1, 0, 0).$$

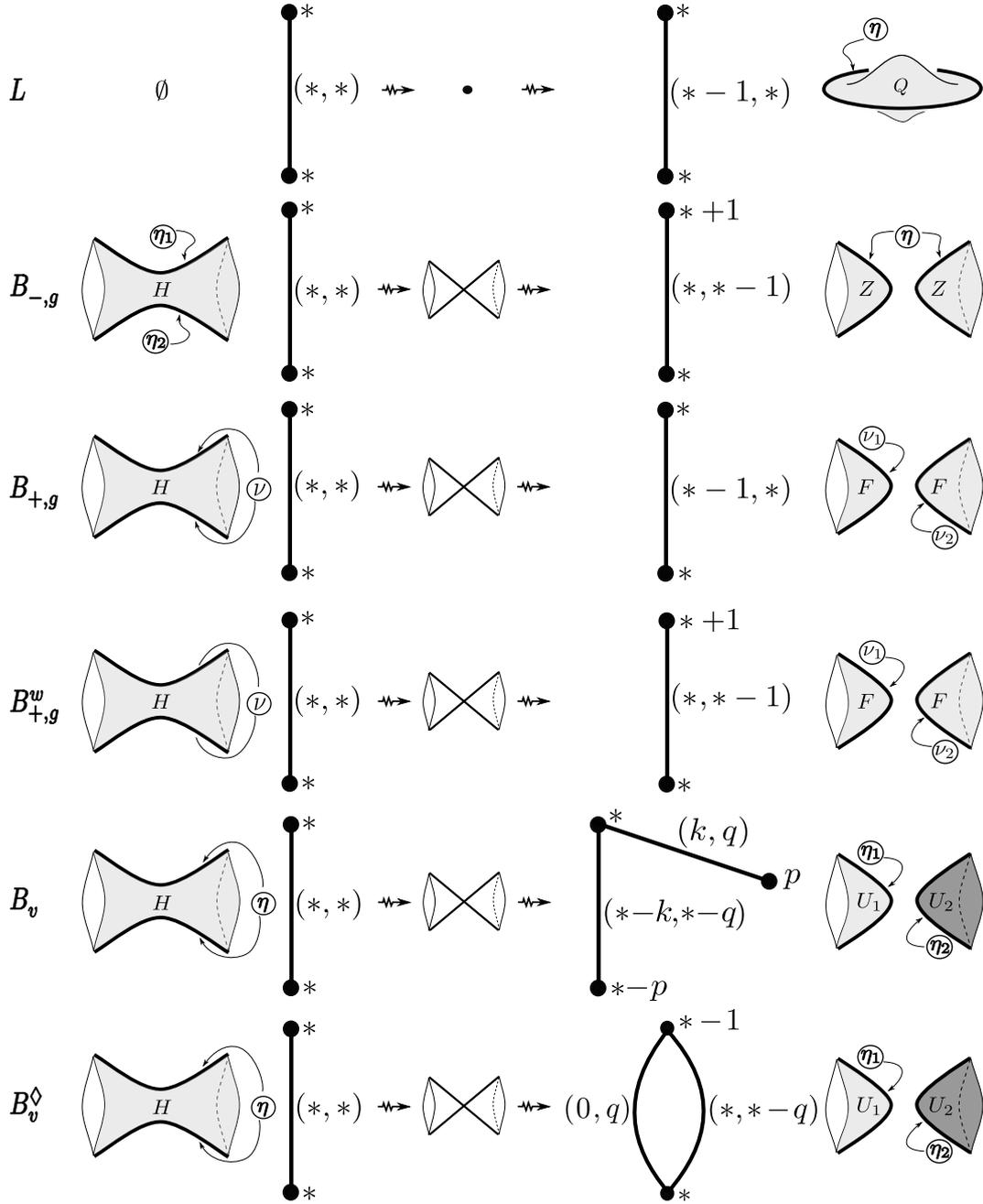


Figura 5.1: Descomposicion de las transiciones L y B .

Notemos que el valor “*” en los pesos de los vértices y de las aristas puede ser cualquier valor entero no negativo, independiente de donde se encuentre; es decir, el valor de “*” en vértices y aristas puede ser distinto, tal como en el par de pesos en las aristas.

P : transición que modifica el número de curvas cuspidales, superficies singulares, género de las superficies singulares, el peso en los vértices y el número de ciclos del \mathcal{H} -grafo. Esta transición será subdividida en P_g , P_g^w y P_v , P_v^Z . La Figura 5.2 ilustra localmente las transiciones en el conjunto de ramificación, en el sentido positivo.

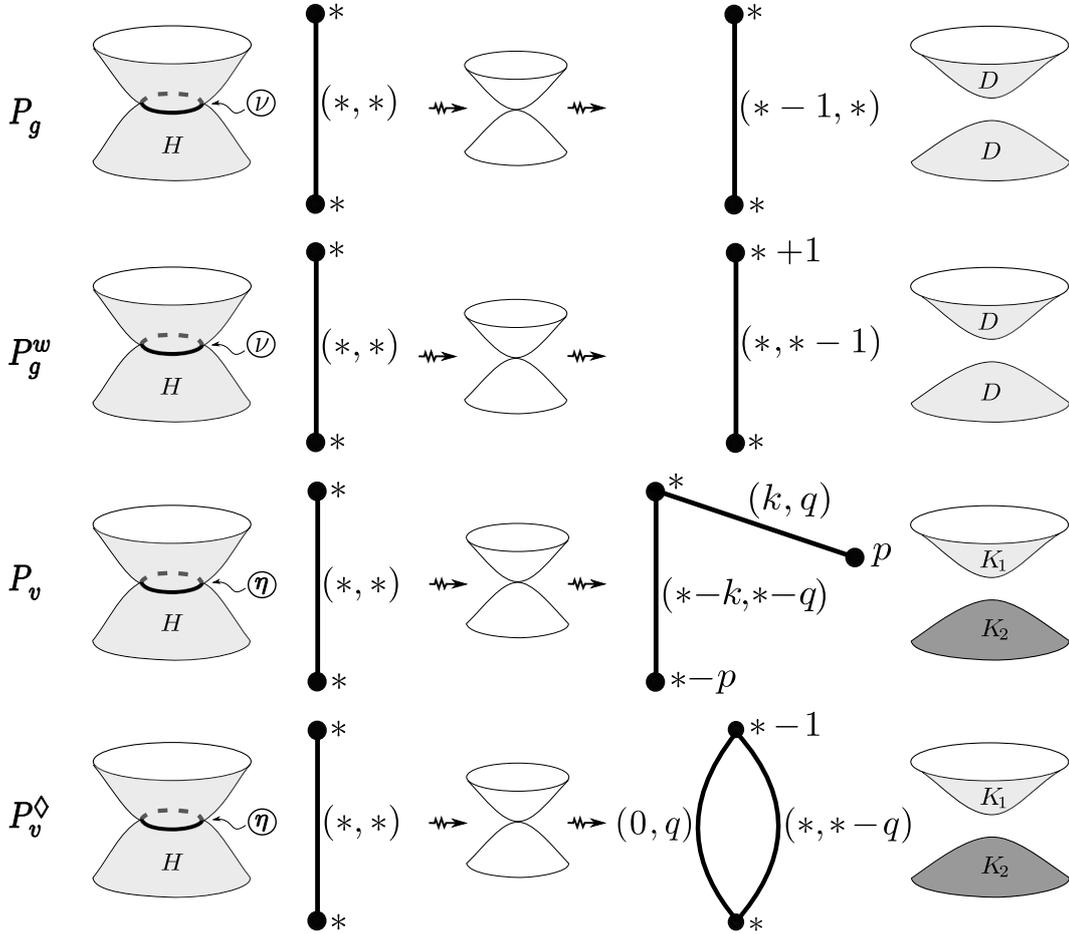


Figura 5.2: Decomposición de las transiciones P .

A continuación describiremos cada una de ellas:

- P_g : Esta elimina la curva cuspidal η y un género en la superficie W , obteniendo una nueva superficie singular D . Así:

$$(I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f') + (0, 0, 0, 0, -1, -1, 0).$$

- P_g^w : Esta elimina la curva cuspidal η y un género en la superficie W , obteniendo la nueva superficie singular D ; además, incrementa una unidad el peso en uno de los vértices de la arista asociada a la superficie D , en el \mathcal{H} -grafo. Así:

$$(I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f') + (0, 0, 1, 0, -1, -1, 0).$$

- P_v : Esta elimina la curva cuspidal η , encogiéndolo y separándolo para descomponer la superficie W en dos nuevas superficies singulares, K_1 y K_2 , incrementando una unidad el número de superficies singulares (o aristas en el \mathcal{H} -grafo de f ; además, se crea un nuevo vértice (o una nueva componente regular). Así:

$$(I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f') + (1, 1, 0, 0, -1, 0, 0).$$

- P_v^Z : Esta elimina la curva cuspidal η , encogiéndolo y separándolo para descomponer la superficie W en dos nuevas superficies singulares, K_1 y K_2 , incrementando una unidad en número de ciclos y disminuyendo una unidad en peso en uno de los vértices de la arista asociada a la superficie K_1 (o K_2) del \mathcal{H} -grafo de f . Así:

$$(I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f') + (1, 0, -1, 1, -1, 0, 0).$$

A_3^e : Esta transición no será descompuesta. Esta crea dos colas de golondrina en una región de una superficie singular formada por puntos de pliegue, nace el labio cúspidal con dos nuevos puntos de golondrina. Así:

$$(I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f') + (0, 0, 0, 0, 0, 0, 2).$$

A_3^h : Esta transición altera el número de colas de golondrina y el número de curvas cuspidales. Esta será descompuesta en $A_{3,2c}^h$, $A_{3,c}^h$ y $A_{3,0}^h$, Figura 2.9, donde:

- $A_{3,2c}^h$: Dos arcos de las curvas cuspidales η_1 y η_2 son unidas tangencialmente en la superficie W . El número de curvas cuspidales decrece dos unidades, y nacen dos nuevas colas de golondrina. Así,

$$(I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f') + (0, 0, 0, 0, -2, 0, 2).$$

- $A_{3,c}^h$: Un arco de una curva cúspidal η y una arista cuspidal α son unidos tangencialmente en la superficie W . El número de curvas cuspidales disminuye una unidad, y nacen dos nuevas colas de golondrina. Así,

$$(I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f') + (0, 0, 0, 0, -1, 0, 2).$$

- $A_{3,0}^h$: Dos arcos de las aristas cuspidales α_1 y α_2 son unidos tangencialmente. El número de colas de golondrina incrementan dos unidades (ver Figura 2.10). Así:

$$(I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f) = (I_E, I_V, I_P, I_Z, I_C, I_G, I_S)(f') + (0, 0, 0, 0, 0, 0, 2).$$

Una figura local de estas transiciones se muestra en la Figura 2.9.

Escribimos

$$\mathcal{T} = \{L, B_{-,g}, B_{0,g}, B_{+,g}, B_{+,g}^w, B_v, B_v^Z, P_g, P_g^w, P_v, P_v^Z, A_3^e, A_{3,2c}^h, A_{3,c}^h, A_{3,0}^h\} \quad (5.1)$$

Los efectos de las transiciones en dirección negativa alteran las curvas cuspidales, las superficies singulares y las colas de golondrina exactamente de la manera opuesta a lo que hacen las transiciones en dirección positivas, según sea el caso. En la tabla 5.1, recogemos los efectos de todas las modificaciones de las invariantes $I_E, I_V, I_C, I_G, I_S, I_{G_w}, I_{G_t}, I_P$ y I_Z , a través de las transiciones en \mathcal{T} . Si una aplicación f es obtenida desde una aplicación f' , a través del camino F_t atravesando una transición T en dirección positiva, escribimos $\Delta I_E = I_E(f) - I_E(f')$ para el incremento de las superficies singulares en la transición T . Similarmente, definimos los incrementos $\Delta I_C, \Delta I_G$ y ΔI_S en la transición T . Por otro lado, f' es obtenida de f a través del camino F_{-t} , atravesando las transición T en dirección negativa. En este caso, tenemos $\Delta I_E = I_E(f') - I_E(f)$.

$\Delta I \backslash T$	L	$B_{-,g}$	$B_{0,g}$	$B_{+,g}$	$B_{+,g}^w$	B_v	B_v^Z	P_g	P_g^w	P_v	P_v^Z	A_3^e	$A_{3,2c}^h$	$A_{3,c}^h$	$A_{3,0}^h$
ΔI_E	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
ΔI_V	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
ΔI_C	1	-1	0	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	0	-2	-1	0
ΔI_G	0	-1	-1	-1	-1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0
ΔI_S	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2
ΔI_{G_w}	0	-1	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
ΔI_{G_t}	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
ΔI_P	0	0	0	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	0	0	0
ΔI_Z	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0

Cuadro 5.1: Incrementos de las invariantes sobre las transiciones L, B, P, A_3^e y A_3^h .

5.2. Relaciones entre las invariantes globales

El siguiente resultado (Teorema 5.5) determina los incrementos de las invariantes globales $I_E, I_V, I_C, I_G, I_S, I_{G_w}, I_{G_t}, I_P$ y I_Z , dependiendo de la descomposición de las transiciones locales que se dan en el conjunto \mathcal{T} , dado en (5.1).

Definición 5.2. Sea T una transición en \mathcal{T} y consideremos el camino F_t uniendo dos aplicaciones estables, decimos que el *incremento local* de T es $+1$ (resp. -1) si el camino

F_t atraviesa T en dirección positiva (resp. negativa). El *incremento global* de T es la suma de todos los incrementos locales T . Así, escribimos:

$$V(\mathcal{T}) = \{\ell, b_{-,g}, b_{0,g}, b_{+,g}, b_{+,g}^w, b_v, b_v^Z, p_g, p_g^w, p_v, p_v^Z, a_3^e, a_{3,2c}^h, a_{3,c}^h, a_{3,0}^h\}.$$

Para los incrementos correspondientes de las transiciones en \mathcal{T} respecto a un camino que une dos aplicaciones estables.

Lema 5.3. *Sea $f_0, f \in \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$. Entonces, el incremento de I_E, I_C, I_G y I_S a lo largo de un camino que atraviesa las transiciones de codimensión 1 en \mathcal{T} , son dados por:*

$$\Delta I_E = \ell + b_v + b_v^Z + p_v + p_v^Z,$$

$$\Delta I_V = \ell + b_v + p_v,$$

$$\Delta I_C = \ell - b_{-,g} + b_{+,g} + b_{+,g}^w + b_v + b_v^Z - p_g - p_g^w - p_v - p_v^Z - 2a_{3,2c}^h - a_{3,c}^h,$$

$$\Delta I_G = -b_{-,g} - b_{0,g} - b_{+,g} - b_{+,g}^w - p_g - p_g^w,$$

$$\Delta I_S = 2(a_3^e + a_{3,2c}^h + a_{3,c}^h + a_{3,0}^h),$$

$$\Delta I_{G_w} = -b_{-,g} - b_{+,g} - p_g,$$

$$\Delta I_{G_t} = b_{+,g}^w - p_g^w,$$

$$\Delta I_P = b_{+,g}^w - b_v^Z + p_g^w - p_v^Z,$$

$$\Delta I_Z = b_v^Z + p_v^Z,$$

Demostración. De la tabla 5.1, ΔI_E incrementa en uno cuando esta pasa a través de una transición L, B_v, B_v^Z, P_v y P_v^Z , pero no cuando esta pasa a través de las demás transiciones. Así:

$$\Delta I_E = \ell + b_v + b_v^Z + p_v + p_v^Z.$$

Similarmente, de la tabla 5.1, podemos verificar las siguientes igualdades. \square

Proposición 5.4. *Dados una 3-variedad \mathcal{M}_n y \mathcal{H}_0 un \mathcal{H} -grafo con una sola arista, si el par de pesos en la arista son ceros, entonces existe una $f_0 \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$, tal que $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_{f_0}$. Además:*

$$b_2(\mathcal{M}_n) = I_P(f_0).$$

Demostración. Dado un grafo \mathcal{H}_0 . Por el Teorema 1.56, existe una $f_0 \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ tal que $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_{f_0}$, y

$$b_2(\mathcal{M}_n) = \sum_{j=1}^2 c_j(f_0) + b_1(\mathcal{H}_{f_0}) + w_1(f_0). \quad (5.2)$$

Ahora, como el grafo \mathcal{H}_{f_0} tiene una sola arista y el par de pesos en su única arista es cero, tenemos que $b_1(\mathcal{H}_{f_0}) = 0$ y $w_1(f_0) = 0$. Reemplazando esto en la Ecuación 5.2 y del hecho que $I_P(f_0) = \sum_{j=1}^2 c_j(f_0)$ obtenemos la siguiente igualdad:

$$b_2(\mathcal{M}_n) = I_P(f_0). \quad \square$$

Teorema 5.5. *Si $f : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación estable, entonces las invariantes I_P, I_{G_w} y I_Z satisfacen la siguiente igualdad:*

$$I_P(f) + I_{G_w}(f) + I_Z(f) = b_2(\mathcal{M}_n).$$

Demostración. Considere la aplicación f_0 como en la Proposición 5.4. Si $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$; entonces, f puede ser obtenida de f_0 pasando solo por transiciones de codimensión 1. Como solamente las transiciones L, B, P y sus respectivas subdivisiones alteran las invariantes I_P, I_{G_w} y I_Z , entonces:

$$\begin{aligned} I_P(f) &= I_P(f_0) + \Delta I_P = b_2(\mathcal{M}_n) + \Delta I_P, & I_{G_w}(f) &= I_{G_w}(f_0) + \Delta I_{G_w} = \Delta I_{G_w}, \\ I_Z(f) &= I_Z(f_0) + \Delta I_Z = \Delta I_Z. \end{aligned}$$

Sigue de estas cuatro igualdades y del Lema 5.3, que:

$$I_P(f) + I_{G_w}(f) + I_Z(f) = b_2(\mathcal{M}_n). \quad \square$$

Observación 5.6. Al comparar el Teorema 5.5 y Teorema 4.9, tenemos que estos teoremas tienen el mismo resultado, pues $I_Z(f) = b_1(\mathcal{H}_f)$. Pero como podemos ver sus demostraciones tienen enfoques y herramientas distintas.

Proposición 5.7. *Dado \mathcal{M}_n una 3-variedad, entonces existe $f_0 \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$, tal que:*

$$I_E(f_0) = 1, \quad I_V(f_0) = 2, \quad I_G(f_0) = b_2(\mathcal{M}_n), \quad I_C(f_0) = 0, \quad I_S(f_0) = 0.$$

Demostración. Por inducción en n .

Si $n = 0$, por definición tenemos $\mathcal{M}_0 = S^3$, para este caso, tomemos la aplicación f_0 , que se construyó en la demostración de la Proposición 2.10; así, tenemos que $I_E(f_0) = 1$, $I_V(f_0) = 2$, $b_2(S^3) = I_G(f_0) = I_C(f_0) = I_S(f_0) = 0$.

Si $n = 1$, por definición tenemos $\mathcal{M}_1 = S^2 \times S^1$, para este caso, tomemos a $f_0 = \ell_1$ donde ℓ_1 es la aplicación construida en la Figura 2.3; de donde tenemos que $I_E(f_0) = 1$, $I_V(f_0) = 2$, $b_2(S^2 \times S^1) = I_G(f_0) = 1$ y $I_C(f_0) = I_S(f_0) = 0$.

Ahora, supongamos que para $n - 1$ es válido, entonces existe un $f_0 \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$, tal que $I_E(f_0) = 1$, $I_V(f_0) = 2$, $I_G(f_0) = b_2(\mathcal{M}_{n-1})$, $I_C(f_0) = 0$, $I_S(f_0) = 0$.

A seguir, mostremos que, para n , también se cumple. En efecto, basta realizar cirugía horizontal entre la aplicación f_0 para el caso $n - 1$ con la aplicación ℓ del caso $n = 1$. Así, obtenemos la aplicación estable $f = f_0 \# \ell$, donde $I_E(f) = I_E(f_0 \# \ell) = 1$, $I_V(f) = I_V(f_0 \# \ell) = 2$, $I_G(f) = I_G(f_0 \# \ell) = I_G(f_0) + I_G(\ell) = b_2(\mathcal{M}_{n-1}) + b_2(\mathcal{M}_1) = (n - 1) + 1 = n$, $I_C(f) = I_C(f_0 \# \ell) = 0$, $I_S(f) = I_S(f_0 \# \ell) = 0$. De esta forma, se concluye la prueba. \square

Teorema 5.8. *Si $f: \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación estable, entonces las invariantes I_E, I_C, I_G y I_S satisfacen la siguiente igualdad:*

$$I_E(f) + 2I_V(f) + I_G(f) + I_C(f) + I_S(f) = b_2(\mathcal{M}_n) + 1 + 2[\ell - b_{-,g} + b_v + b_v^Z - p_g - p_g^w + p_v + a_3^e + a_{3,0}^h] + a_{3,c}^h - b_{0,g}. \quad (5.3)$$

Demostración. Consideremos la aplicación f_0 como en la Proposición 5.7. Dada una aplicación estable $f: \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}^3$, entonces f puede ser obtenido de f_0 construyendo un camino que inicie en f_0 y pase solo por transiciones de codimensión 1. Ya que las transiciones de codimensión 1 L, B, P, A_3^e, A_3^h y sus subdivisiones son las que alteran las invariantes I_E, I_V, I_C, I_G y I_S , tenemos:

$$\begin{aligned} I_E(f) &= I_E(f_0) + \Delta I_E = 1 + \Delta I_E, & I_G(f) &= I_G(f_0) + \Delta I_G = b_2(\mathcal{M}_n) + \Delta I_G, \\ I_V(f) &= I_V(f_0) + \Delta I_V = 2 + \Delta I_V, & I_S(f) &= I_S(f_0) + \Delta I_S = \Delta I_S, \\ I_C(f) &= I_C(f_0) + \Delta I_C = \Delta I_C. \end{aligned}$$

De estas igualdades, se tiene:

$$I_E(f) + 2I_V(f) + I_C(f) + I_G(f) + I_S(f) = 1 + b_2(\mathcal{M}_n) + \Delta I_E + \Delta I_V + \Delta I_C + \Delta I_G + \Delta I_S.$$

Del Lema 5.3, obtenemos la igualdad (5.3). \square

Corolario 5.9. *Sea $f: \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación estable.*

- Si $I_S(f) = 0$, entonces: $I_E(f) + 2I_V(f) + I_G(f) + I_C(f) \equiv (b_2(\mathcal{M}_n) + 1) \pmod{2}$.*
- Si f es una aplicación pliegue, entonces*

$$I_C(f) = I_S(f) = 0 \quad y \quad I_E(f) + 2I_V(f) + I_G(f) \equiv (b_2(\mathcal{M}_n) + 1) \pmod{2}.$$

Demostración. Si $I_S(f) = 0$, su conjunto de ramificación no tiene colas de golodrina y por el Lema 2.16, tenemos $a_{3,c}^e - b_{0,g} = 0 \pmod{2}$. Ahora, por el Teorema 5.8, obtenemos:

$$\begin{aligned} I_E(f) + 2I_V(f) + I_G(f) + I_C(f) + I_S(f) &\equiv b_2(\mathcal{M}_n) + 1 + 2[\ell - b_{-,g} + b_v + b_v^Z - p_g - p_g^w + p_v + a_3^e + a_{3,0}^h] + 0 \pmod{2} \\ &\equiv (b_2(\mathcal{M}_n) + 1) \pmod{2}. \end{aligned}$$

Esto prueba *a*). Ahora, probemos *b*). Si f es una aplicación pliegue, entonces su conjunto de ramificación no tiene curvas cuspidales ni colas de golondrina; en otras palabras, $I_C(f) = I_S(f) = 0$. Reemplazando esto en la parte *a*), tenemos inmediatamente:

$$I_E(f) + 2I_V(f) + I_G(f) \equiv (b_2(\mathcal{M}_n) + 1) \text{ mod } 2. \quad \square$$

Conclusiones y trabajos futuros

En presente trabajo de tesis presentamos invariantes globales; entre estos, los \mathcal{H} -grafos para la clasificación de aplicaciones estables, enfocando nuestro trabajo en aplicaciones cuyo dominio son S^3 y \mathcal{M}_n (suma conexa de n copias de la $S^2 \times S^1$) en \mathbb{R}^3 ; en la cual encontramos relaciones precisas entre las invariantes, los cuales nos proporcionan información para la construcción de aplicaciones con propiedades preestablecidas.

Para trabajos posteriores, podemos encontrar otras relaciones entre las invariantes globales, cuando la 3-variedad es otra distinta a la S^3 y \mathcal{M}_n . Como por ejemplo, para el *tri-toro* $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$, *lens space* (espacios lentes) $L(p, q)$, entre otras 3-variedades y la suma conexa de las mismas.

También, otro trabajo a desarrollarse son la construcción de más ejemplos de aplicaciones estables de 3-variedades en \mathbb{R}^3 , respondiendo a la pregunta: ¿Qué colección de superficies de revolución coincide con el conjunto de ramificación de alguna aplicación estable?

En el trabajo de construcción de aplicaciones estables, tenemos el problema importante de la construcción de aplicaciones pliegues o “*fold maps*” usando cirugías entre aplicaciones estables y la relación entre las invariantes globales. Además, buscar condiciones para la construcción de este tipo de aplicaciones, todo para responder la siguiente pregunta: ¿Que tipo de grafos coinciden con el \mathcal{H} -grafo de aplicaciones pliegues de 3-variedades en \mathbb{R}^3 ?

Por otro lado, puesto que todo el trabajo propuesto y realizado hasta ahora es desarrollado cuando la 3-variedad es orientable, otra propuesta de trabajo a realizarse es cuando la 3-variedad es no-orientable y cuando el espacio de llegada puede ser una 3-variedad distinta a la \mathbb{R}^3 .

Todas estas propuestas de trabajos posteriores ya tienen un desarrollo o resultado parcial, que podrían ser estudiadas en conjunto con investigadores nacionales, extranjeros y alumnos de pregrado y posgrado en los años subsiguientes.

Bibliografía

- [1] Aicardi F, Discriminants and local invariants of planar fronts, The Arnold-Gelfand math. seminoAicardirs: geometry and singularity theory, edited by V.I. Arnold etc, Birkhäuser. (1997) 1-76.
- [2] Arnold V. I, Topological invariants of plane curves and caustics, University Lecture Series 5. American Mathematical Society, Providence, RI. (1994).
- [3] Demoto S, Stable maps between 2-spheres with a connected fold curve, J. 35 (2005) no. 1 93-113.
- [4] Éliásberg J, On singularities of folding type, Math. USSR-Izv. 4 (1970) 1119–1134.
- [5] Gibson C. G, Singular Points of Smooth Mappings, Reasearch Notes in Mathematics, Pitman, London. (1978).
- [6] Goryunov V. V, Local Invariants of Mappings of Surfaces into Three-space, J. Topol. (1997).
- [7] Goryunov V. V, Local invariants of maps between 3-manifolds, J. Topol. (2013) 1–20. Doi:10.1112/jtopol/jtt015.
- [8] Huamaní N. B., Mendes de Jesus C. and Palacios J, Invariants of stable maps from the 3-sphere to the Euclidean 3-space, Bull Braz Math Soc, New Series. (2019). Doi: 10.1007/s00574-019-00133-4.
- [9] Hacon D., Mendes de Jesus C. and Romero Fuster M. C, Topological invariants of stable maps from a surface to the plane from a global viewpoint, Proceedings of the 6th workshop on real and complex singularities. Lecture notes in pure and applied mathematics, New York: Marcel Dekker 232. (2003) 227–235.
- [10] Hacon D., Mendes de Jesus C. and Romero Fuster M. C, Stable maps from surfaces to the plane with prescribed branching data, Topology Appl. 154 (2007) 166–175. Doi: 10.1016/j.topol.2006.04.005.
- [11] Hacon D., Mendes de Jesus C. and Romero Fuster M. C, Graphs of stable maps from closed orientable surfaces to the 2-sphere, J. Singularities 2. (2010) 67–80.
- [12] Johnson J, Notes on Heegaard Splittings, Yale. (s.a.).
- [13] Kinsey L. C, Topology of Surfaces, Springer-Verlag, New York. (1997).

- [14] Kálmán T, Stable maps of surfaces into the plane, *Topology Appl.* 107(3) (2000) 307–316. Doi: 10.1016/S0166-8641(99)00105-4.
- [15] LIMA E. L, *Homologia Básica, Projeto Euclides*, Impa. Rio de Janeiro. (2012).
- [16] Marar W. and Tari F., On the geometry of simple germs of co-rank 1 maps from \mathbb{R}^3 to \mathbb{R}^3 , *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 119 (3) (1996) 469-481. Doi: 10.1017/S030500410007434X.
- [17] Mather J. N, *Stability of C^∞ Mappings VI: The Nice Dimensions*, *Proc. Liverpool Singularities-Sympos, I (1969/70)*, *Lecture notes in Math*, vol. 192, Springer-Verlag, Berlin and New York. (1971) 207-253. Doi: 10.1007/BFb0066809.
- [18] Mendes de Jesus C., Oset Sinha R. and Romero Fuster M. C, Global topological invariants of stable maps from 3-manifolds to \mathbb{R}^3 , *Proc. Steklov Inst. Math.* 267 (2009) 205–216. Doi: 10.1134/S0081543809040178.
- [19] Mendes de Jesus C, *Invariantes Topológicos de Aplicações Genéricas de Superfícies Compactas Orientáveis no Plano*, Tese de Doutorado, PUC-RIO. (2001).
- [20] Novassati, H. *Topologia das Variedades Algébricas*, Impa, Rio de Janeiro. (2007).
- [21] Ohmoto T., and Aicardi F, First order local invariants of apparent contours, *Topology.* 45 (2006) 27–45. Doi:10.1016/j.top.2005.04.005.
- [22] Oset Sinha R., and Romero Fuster M. C, First-order local invariants of stable maps from 3-manifolds to \mathbb{R}^3 , *Michigan Math. J.* 61 (2012) 385–414. Doi: 10.1307/mmj/133901153.
- [23] Oset Sinha R., and Romero Fuster M. C, Graphs of stable maps from 3-manifolds to 3-space, *Mediterr. J. Math.* 10 (2013) 1107–1126. Doi:10.1007/s00009-012-0224-2.
- [24] Oset Sinha R, *Topological invariants of stable maps from 3-manifolds to three-space*, PhD Dissertation, Valencia. (2009). Pg. 69.
- [25] Sze-Tsen H, *Homology Theory*, Holden - Day San Francisco. (1966).
- [26] Vassiliev V. A, Cohomology of knot spaces, *Adv. Soviet. Math.* 21, (1990) 23–69. Doi: 10.1090/advsov/001/03
- [27] Vick J. W, *Homology Theory*, Academic Press, New York. (1973).
- [28] White A. T., and Romero Fuster M. C, *Graphs, Groups and Surfaces*, *Mathematics Studies*, Nort-Holland, 1973.
- [29] Whitney H, On singularities of mappings of Euclidean spaces. I. mappings of the plane into the plane, *Ann. of Math.* 62 (1955) 374–410. Doi: 10.1007/978146122972827.