

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS



TESIS  
“ESTUDIO E IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO DE HESTON Y  
SU EXTENSIÓN  
AL INCORPORAR CORRELACIÓN ESTOCÁSTICA”

PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE  
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

ELABORADO POR:  
JULIO CÉSAR SOSA ALVA

ASESOR:  
Mg. FIDEL JARA HUANCA

LIMA-PERÚ  
2019

*“Tu tiempo es limitado, así que no lo desperdicias viviendo la vida de alguien más”.*

*-Steve Jobs*

*“No temas fallar. No es fallar, sino apuntar muy bajo el error. Con grandes aspiraciones, es glorioso incluso fallar”.*

*“El saber no es suficiente, debemos aplicarlo. El querer no es suficiente, debemos hacer”.*

*“Si crees que algo es imposible, tú lo harás imposible”.*

*-Bruce Lee*

*“Cuando las leyes de la matemática se refieren a la realidad, no son ciertas; cuando son ciertas, no se refieren a la realidad”.*

*“El mundo no está en peligro por las malas personas sino por aquellas que permiten la maldad”.*

*-Albert Einstein*

*"La matemática es el alfabeto con que Dios escribió el mundo."*

*-Galileo Galilei*

*“No hay rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real”.*

*-Nikolai Ivanovich Lobachevski*

*“El fracaso es la oportunidad de empezar de nuevo con más inteligencia”.*

*-Henry Ford*

*“Nadie encuentra su camino sin haberse perdido varias veces”.*

***A Dios.***

*Por haberme permitido llegar hasta este punto y haberme dado salud para lograr mis objetivos, además de su infinita bondad y amor.*

***A mi madre y a mi hermana.***

*Por creer en mí, por su amor y darme ejemplo digno de superación.*

***A Xiomara y a Sophia.***

*Por ser mi motor e inspiración en cada paso que doy.*

***A mi abuelita Adela y abuelito Pantaleón.***

*Por su cariño, sus palabras y enseñanzas. Y por darme la madre, las tías y tíos que tanto estimo.*

# Agradecimientos

A Dios, por acompañarme siempre, darme la fuerza necesaria para seguir adelante y no desmayar ante las vicisitudes que se presentaron tanto en la elaboración de esta tesis como a lo largo de mi vida.

A mi madre, Bilma Alva Vargas, mi primera maestra y pilar muy importante de mi vida, a quién le debo lo que soy, por todo lo inculcado y por su gran apoyo a lo largo de mi vida.

A mi asesor, Fidel Jara, por su apoyo constante y acertadas indicaciones para la elaboración, la posterior revisión y corrección de las múltiples versiones del presente texto.

Al Centro de Alto Rendimiento Computacional de la Amazonía Peruana del Instituto de Investigaciones de la Amazonía Peruana, que me facilitó el uso de la supercomputadora Manati, en la cual se ejecutaron los experimentos computacionales de este trabajo de tesis.

A la Universidad Nacional de Ingeniería por haberme permitido formarme en ella, así como a mis maestros y compañeros por todos los conocimientos y momentos compartidos.

Finalmente agradecer a todas aquellas personas que de algún modo se han visto involucradas en la elaboración de esta tesis.

# Resumen

El desplome del mercado de valores de octubre de 1987 fue un evento que sacudió a los mercados financieros de todo el mundo e impactó en los modelos matemáticos dedicados a preciar opciones. La presencia de sonrisas y sesgos en la superficie de volatilidad implícita que resultó a partir de dicho desplome puso en tela de juicio la capacidad del modelo de Black-Scholes para proporcionar precios adecuados en un nuevo régimen de sesgos de volatilidad, y sirvió para resaltar los supuestos restrictivos que subyacen en dicho modelo. Uno de estos es que los retornos continuamente compuestos de las acciones se distribuyen normalmente con una volatilidad constante, pero los Log-retornos muestran asimetría y curtosis (colas gruesas) que la normalidad no puede explicar, y diversos estudios muestran que la volatilidad no es constante en el tiempo.

Un enfoque de extensión al modelo de Black-Scholes es permitir que la volatilidad varíe en el tiempo impulsada por su propio proceso estocástico (Modelos de volatilidad estocástica). El modelo de Heston, modela a la volatilidad como un proceso Ornstein Uhlenbeck (OU); además dicho proceso está correlacionado (correlación constante) con el proceso de precios. La popularidad del modelo de Heston se debe a que el precio de la Call europea, está disponible en forma cerrada, hasta una integral que debe evaluarse numéricamente. Una razón por la cual el modelo de Heston es tan importante es que es el primero en explotar funciones características en la fijación de precios de opciones, al reconocer que la densidad de precios al vencimiento ( $S_T$ ) no necesita ser conocida, solo su función característica. Esta línea de razonamiento crucial fue el inicio de un nuevo enfoque para la preciación de opciones, conocido como precios por funciones características (Ver [6, Zhu]). Si bien el modelo de Heston no fue el primer modelo de volatilidad estocástica que se introdujo, se ha convertido en el más importante y ahora sirve como punto de referencia con el que se comparan otros modelos de volatilidad estocástica.

En el presente trabajo se estudia e implementa en Python, además del modelo de Heston (clásico), una novedosa extensión al modelo propuesta en [40, Teng, Ehrhardt, and Günther]. La novedad yace en que la correlación es variable en el tiempo, impulsada por su propio proceso estocástico (Ornstein-Uhlenbeck).

En síntesis, los objetivos de este trabajo son:

1. Primero, hacer un estudio detallado del Modelo clásico de Heston y sus esquemas de simulación.

2. Dar una exposición detallada del modelo de Heston extendido al incorporar correlación estocástica propuesta en [40].
3. Verificación numérica de la calidad de los esquemas estudiados utilizando el lenguaje de programación Python.

# Índice de figuras

2.1. $\xi$ induce una medida de probabilidad sobre $\mathbb{R}$ . . . . .	19
2.2. Bosquejo de la construcción para la partición, para $n = 2$ y $n + 1 = 3$ . . . . .	25
2.3. Simulación de un camino muestral de un Movimiento Browniano . . . . .	27
2.4. Simulación del Movimiento Browniano Geométrico . . . . .	35
2.5. Ganancia neta de titular por la compra de una Opción Europea . . . . .	43
2.6. Cálculo del valor presente de un precio . . . . .	45
2.7. Situación del cálculo de $\hat{v}_{t_4}(N)$ , para $N = 3$ y $N^* = 5$ . . . . .	46
2.8. El precio Black-Scholes de una Opción Call Europea con $\sigma = 0,3$ , $r = 0,05$ y $K = 100$ . . . . .	49
2.9. Violación del supuesto de Distribución Gaussiana en los Log-Retornos . . . . .	52
2.10. Evidencia del efecto clustering en Log-retornos de SPX . . . . .	53
2.11. Evidencias de Volatilidad no constante . . . . .	54
3.1. Corte de rama: Función raíz cuadrada y Logarítmica . . . . .	78
3.2. Comportamiento de los Integrandos para las dos Especificaciones . . . . .	80
3.3. Tiempo de madurez umbral para el ejemplo visto en la figura 3.2 . . . . .	81
3.4. Efecto de la correlación $\rho$ en la distribución de $x_T$ . . . . .	82
3.5. Efecto de $\rho$ , positiva (izquierda) y negativa (derecha) en la distribución de $x_T$ . . . . .	83
3.6. Efecto de la Volatilidad del Proceso de Varianza $\sigma$ , sobre la densidad de $\ln(S_T)$ . . . . .	84
3.7. Efecto de $\rho$ sobre el Precio Call Heston relativo al Precio Call BS . . . . .	87
3.8. Efecto de $\sigma$ sobre el Precio Call Heston relativo al Precio Call BS . . . . .	91
3.9. <b>Efecto de <math>v_0</math> sobre la Volatilidad Implícita</b> . . . . .	92
3.10. <b>Efecto de <math>\theta</math> sobre la Volatilidad Implícita</b> . . . . .	92
3.11. <b>Efecto de <math>\kappa</math> sobre la Volatilidad Implícita</b> . . . . .	93
3.12. <b>Efecto de <math>\rho</math> sobre la Volatilidad Implícita</b> . . . . .	94
3.13. <b>Efecto de <math>\sigma</math> sobre la Volatilidad Implícita</b> . . . . .	94
4.1. Distribución acumulada de $v_{t+dt}$ condicionada a $v_t$ ( $v_t$ valor pequeño) . . . . .	109
4.2. Distribución acumulada de $v_{t+dt}$ condicionada a $v_t$ ( $v_t$ valor pequeño) . . . . .	110
4.3. Distribución acumulada de $v_{t+dt}$ condicionada a $v_t$ ( $v_t$ valor grande) . . . . .	111

4.4. Distribución acumulada de $v_{t+dt}$ condicionada a $v_t$ ( $v_t$ valor grande) . . . . .	112
5.1. Simulación de una trayectoria del esquema HB . . . . .	130
6.1. Comportamiento de $\epsilon$ en función al número de pasos de tiempo ( $T/dt$ ) . . . . .	147
6.2. Comportamiento de $\epsilon$ en función al número de pasos de tiempo ( $T/dt$ ) . . . . .	148
6.3. Comparación de volatilidades implícitas al variar cada parámetro del proceso de correlación estocástica. . . . .	150



# Índice de cuadros

2.1. Reglas del producto de derivación . . . . .	30
3.1. Comparación de Precios bajo $\rho = 0.5$ . . . . .	85
3.2. Comparación de Precios bajo $\rho = -0.5$ . . . . .	86
3.3. Comparación de Precios bajo $\sigma = 0.1$ . . . . .	89
3.4. Comparación de Precios bajo $\sigma = 0.2$ . . . . .	90
6.1. Casos de prueba para los experimentos numéricos . . . . .	140
6.2. Comparación Numérica de los errores en el caso I, usando los diferentes esquemas; los números en paréntesis son las desviaciones estándar. . . . .	143
6.3. Comparación Numérica de los errores en el caso II, usando los diferentes esquemas; los números en paréntesis son las desviaciones estándar. . . . .	144
6.4. Comparación Numérica de los errores en el caso III, usando los diferentes esquemas; los números en paréntesis son las desviaciones estándar. . . . .	145
6.5. Comparación Numérica de los errores en el caso IV, usando los diferentes esquemas; los números en paréntesis son las desviaciones estándar. . . . .	146

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>3</b>
<b>Resumen</b>	<b>4</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>6</b>
<b>Índice de cuadros</b>	<b>8</b>
<b>Índice general</b>	<b>9</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>12</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>14</b>
2.0.1. Solución de la Ecuación de Riccati . . . . .	14
2.1. Distribución Chi-Cuadrado No central: $\chi^2(\nu; \alpha)$ . . . . .	15
2.1.1. Deducción de la distribución . . . . .	15
2.2. Elementos de Medida y Probabilidad . . . . .	17
2.3. Elementos de Cálculo Estocástico . . . . .	26
2.4. Estimación Monte Carlo . . . . .	40
2.4.1. Método de la transformada inversa . . . . .	41
2.5. Teoría financiera . . . . .	41
2.5.1. Opciones financieras . . . . .	41
2.5.2. Retornos . . . . .	43
2.5.3. Volatilidad . . . . .	45
2.6. El modelo de Black-Scholes-Merton . . . . .	47
2.6.1. Ecuación Diferencial Parcial Black-Scholes-Merton . . . . .	48
2.6.2. Fórmula de Black-Scholes para el precio de una Opción Call . . . . .	49
2.7. Limitaciones del Modelo Black-Scholes-Merton . . . . .	49
2.7.1. Deficiencias de la Distribución Normal o Gaussiana . . . . .	50
2.7.2. Efecto clustering y apalancamiento . . . . .	52
2.7.3. Sonrisa de volatilidad . . . . .	53

<b>3. El Modelo de Heston</b>	<b>56</b>
3.1. Descripción del Modelo de Heston	56
3.1.1. Propiedades del Proceso de Varianza	58
3.1.2. Procesos bajo la medida de Riesgo Neutro $\mathbb{Q}$	61
3.1.3. Procesos bajo la medida de Riesgo Neutro $\mathbb{Q}$ (Otra Forma)	61
3.1.4. Forma del Precio Call Heston (Como Black-Scholes)	64
3.1.5. Deducción de la EDP Heston	66
3.1.6. Obteniendo las EDPs para $P_1$ y $P_2$	70
3.1.7. Obtención de las funciones Características de Heston	71
3.1.8. Resolución de las Ecuaciones Diferenciales de Heston	74
3.2. Problemas de Integración en la forma original de Heston	76
3.2.1. Deficiencias Numéricas	77
3.2.2. La "Pequeña Trampa" de Albrecher	78
3.3. Efectos de los parámetros de Heston	80
3.3.1. Efecto de la correlación $\rho$ en la distribución de $x_T = \ln(S_T)$	81
3.3.2. Efecto de la Volatilidad de la Varianza $\sigma$ en la distribución de $x_T = \ln(S_T)$	82
3.3.3. Comparación entre los precios de Heston y Black-Scholes	83
3.3.4. Efecto de los parámetros de Heston sobre la Volatilidad Implícita	91
<b>4. Simulación en el modelo de Heston</b>	<b>95</b>
4.1. Configuración General	95
4.2. Esquema de Euler	97
4.2.1. Esquema de Euler para la varianza	98
4.2.2. Esquema de Euler para el precio de la acción	99
4.3. Esquema de Milstein	99
4.3.1. Esquema de Milstein para la Varianza	101
4.3.2. Esquema de Milstein para el Precio de la acción	102
4.4. Esquema Exponencial-Cuadrático (QE)	102
4.4.1. Esquema de discretización para el Proceso de Varianza $v$	102
4.4.2. Calculando $a$ y $b$	103
4.4.3. Calculando $p$ y $\beta$	106
4.4.4. Regla de conmutación	107
4.4.5. Resumen del Algoritmo QE	107
4.4.6. Esquema de discretización para el proceso de Log-precio	113
4.4.7. Corrección de martingala (Esquema QEM)	115
4.4.8. Consideraciones de Convergencia : Consistencia Débil	118

<b>5. Correlación Estocástica en el Modelo de Heston</b>	<b>124</b>
5.1. Descripción del modelo . . . . .	125
5.2. Simulación del Modelo . . . . .	126
5.2.1. Discretización para el proceso de Varianza $\{v_t\}$ . . . . .	126
5.2.2. Discretización para el Proceso de Correlación $\{\rho_t\}$ . . . . .	126
5.2.3. Discretización para el proceso de Log-precio $x_t$ . . . . .	127
5.2.3.1. El esquema Híbrido (esquema HB) . . . . .	128
5.2.4. Análisis de Convergencia . . . . .	130
5.3. Esquema HB con corrección de Martingala (esquema HBM) . . . . .	136
<b>6. Resultados Numéricos</b>	<b>139</b>
6.1. Una comparación de los métodos numéricos estudiados . . . . .	140
6.2. El efecto de incorporar correlación estocástica sobre la Volatilidad Implícita . . .	149
6.3. Error cuadrático medio en los métodos numéricos estudiados (trabajo futuro) . .	149
<b>7. Conclusiones y futuros trabajos</b>	<b>152</b>
<b>A. Construcción de la Integral de Itô</b>	<b>153</b>
<b>B. Derivación de la ecuación diferencial de Black-Scholes-Merton</b>	<b>158</b>
B.1. Derivación de la fórmula de Black-Scholes-Merton mediante el teorema de Girsanov	164
B.1.1. Proceso de Precios bajo la medida de Riesgo Neutro . . . . .	164
B.1.2. Cambio de numeraire . . . . .	166
B.1.3. La fórmula de Black-Scholes-Merton (contexto del teorema de Girsanov) .	167
B.2. Cálculo de los procesos bajo la medida de riesgo neutro . . . . .	169
B.3. Escribiendo $f_1$ en función de $f_2$ . . . . .	169
<b>Bibliografía</b>	<b>173</b>

# Capítulo 1

## Introducción

En el presente trabajo se realiza el estudio e implementación del modelo clásico de Heston y su respectiva extensión, considerando correlación estocástica entre el proceso de precios del activo subyacente y el proceso de volatilidad. Se presenta y discuten esquemas de discretización para dichos modelos, principalmente, los esquemas QE y QEM propuestos en [3, Andersen] para el modelo clásico de Heston [19, Heston] y los esquemas HB y HBM propuestos en [40, Teng, Ehrhardt y Günther] para la extensión considerando correlación estocástica (proceso Ornstein Uhlenbeck).

En el capítulo 2 se detallan los principales resultados sobre teoría de probabilidad, teoría financiera y estadística requeridos para los capítulos posteriores, también se presenta brevemente el modelo popular de Black-Scholes, resaltando sus limitaciones que motivan a abandonar algunas suposiciones de su modelo y optar por el modelo de Heston. En el capítulo 3 se detalla y fundamenta de la mejor manera posible aspectos teóricos del modelo de Heston [19, Heston], presentando una derivación de su EDP, sus funciones características y el precio de una Opción Call Europea, además se trata algunos de los problemas (numéricos) relacionados con el modelo, como las discontinuidades del integrando [3, Andersen], que a través del tiempo se han ido solucionando. En el capítulo 4, se presentan esquemas de discretización estándar clásicos aplicados al modelo clásico de Heston (Euler y Milstein) y se estudia un esquema de discretización diseñado específicamente para el modelo clásico de Heston, el esquema QE y su corrección martingala (QEM), además se aborda su respectivo análisis de convergencia débil. En el capítulo 5, se estudia la extensión del modelo clásico de Heston, imponiendo correlación estocástica propuesto en [40, Teng, Ehrhardt y Günther] y se discuten sus esquemas de discretización, principalmente, el esquema HB y su corrección martingala (HBM), también se da una demostración a detalle para el respectivo análisis de convergencia débil, explotando su relación con el concepto de consistencia débil. Luego, mediante ejemplos, se hace una comparación con los esquemas vistos anteriormente y se verifica numéricamente, mediante el uso del lenguaje Python, la calidad del esquema. Finalmente, en el capítulo 7, se presentan las conclusiones del trabajo de tesis y se proponen futuros trabajos. Cabe resaltar que los experimentos computacionales fueron desarrollados en el Centro

de Alto Rendimiento Computacional de la Amazonía Peruana del Instituto de Investigaciones de la Amazonía Peruana. Mayor información en: <http://iiap.org.pe/manati>.

## Capítulo 2

# Preliminares

### 2.0.1. Solución de la Ecuación de Riccati

Una de las ecuaciones diferenciales de Heston, es una ecuación de Riccati, por lo cual, es necesario ver cómo se obtiene su solución, para ello seguimos [5, Zwillinger, pág 288].

La ecuación de Riccati para  $y(t)$  con coeficientes  $a(t)$ ,  $b(t)$  y  $c(t)$  se define como

$$\frac{dy(t)}{dt} = a(t) [y(t)]^2 + b(t)y(t) + c(t). \quad (2.1)$$

Realizamos el cambio de variable de  $y(t)$  a  $w(t)$ , haciendo

$$y(t) = -\frac{w'(t)}{w(t)} \frac{1}{a(t)},$$

al reemplazar en la ecuación (2.1)

$$\left[ \left( \frac{w''(t)w'(t) - w'(t)w'(t)}{w(t)^2} \right) \frac{1}{a(t)} - \frac{w'(t)}{w(t)} \frac{a'(t)}{a(t)^2} \right] = a(t) \left[ -\frac{w'(t)}{w(t)} \frac{1}{a(t)} \right]^2 + b(t) \left[ -\frac{w'(t)}{w(t)} \frac{1}{a(t)} \right] + c(t),$$

que al operar y simplificar se obtiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden para  $w(t)$

$$w'' - \left[ \frac{a'(t)}{a(t)} + b(t) \right] w' + a(t)c(t)w = 0, \quad (2.2)$$

haciendo  $m = -\left[ \frac{a'(t)}{a(t)} + b(t) \right]$ , y  $n = a(t)c(t)$ , la EDO (2.2) puede ser escrito como  $w'' + mw' + nw = 0$ , que se puede resolver mediante el método de coeficientes indeterminados, para ello consideramos la ecuación auxiliar asociada  $D^2 + mD + n = 0$ , que tiene dos soluciones  $\alpha$  y  $\beta$  dadas por

$$\alpha = \frac{-m + \sqrt{m^2 - 4n}}{2}, \quad \beta = \frac{-m - \sqrt{m^2 - 4n}}{2}.$$

La solución para la EDO de segundo orden (2.2) es

$$w(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes. La solución a la ecuación de Riccati es por lo tanto

$$y(t) = -\frac{C_1 \alpha e^{\alpha t} + C_2 \beta e^{\beta t}}{C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}} \frac{1}{a(t)}. \quad (2.3)$$

## 2.1. Distribución Chi-Cuadrado No central: $\chi^2(\nu; \alpha)$

La distribución  $\chi^2(\nu; \alpha)$  es de suma importancia en este trabajo de tesis, ya que tiene que ver con la distribución del proceso de varianza en el modelo de Heston y por ende también con algunos esquemas de discretización de dicho proceso. Por ello, a continuación presentamos su deducción, definición y algunas propiedades, que sirven para posteriores demostraciones.

### 2.1.1. Deducción de la distribución

Detallamos la deducción presentada en [33, Hogg, pág 458]. Sea  $X_1, X_2, \dots, X_\nu$  variables aleatorias normales independientes, tal que  $X_j \sim N(\mu_j, \sigma^2)$ ,  $j = 1, \dots, \nu$ , y sea

$$Y := \sum_{j=1}^{\nu} \left( \frac{X_j^2}{\sigma^2} \right).$$

Si tenemos  $\mu_j = 0$ ,  $\forall j = 1, \dots, \nu$ , entonces  $Y \sim \chi^2(\nu)$ , es decir,  $Y$  sigue una distribución Chi-cuadrada (central) con  $\nu$  grados de libertad. Ahora veamos la distribución de  $Y$ , cuando cada  $\mu_j$  es no nulo. Para ello, se considera la función generadora de momentos de  $Y$ , y teniendo en cuenta la independencia de las  $X_j$ , se tiene

$$m_Y(t) = E \left[ \exp \left( t \sum_{j=1}^{\nu} \left( \frac{X_j^2}{\sigma^2} \right) \right) \right] = \prod_{j=1}^{\nu} E \left[ \exp \left( t \left( \frac{X_j^2}{\sigma^2} \right) \right) \right]. \quad (2.4)$$

Ahora, como se conoce la función densidad de  $X_j$ ,

$$E \left[ \exp \left( t \left( \frac{X_j^2}{\sigma^2} \right) \right) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ \frac{tx_j^2}{\sigma^2} - \frac{(x_j - \mu_j)^2}{2\sigma^2} \right] dx_j, \quad (2.5)$$

notemos de

$$\begin{aligned} \frac{tx_j^2}{\sigma^2} - \frac{(x_j - \mu_j)^2}{2\sigma^2} &= \frac{(2t-1) \left[ x_j^2 + 2 \left( \frac{\mu_j}{2t-1} \right) x_j + \left( \frac{\mu_j}{2t-1} \right)^2 \right] - \frac{\mu_j^2}{2t-1} - \mu_j^2}{2\sigma^2} \\ &= \frac{(2t-1)}{2\sigma^2} \left[ x_j + \left( \frac{\mu_j}{2t-1} \right) \right]^2 - \frac{t\mu_j^2}{\sigma^2(2t-1)}, \end{aligned}$$



si  $2t - 1 \geq 0$ , la integral en (2.5) resulta ser no convergente, pues el integrando explotaría (no acotado). por ello se considera  $t < \frac{1}{2}$ , con lo cual

$$E \left[ \exp \left( t \left( \frac{X_j^2}{\sigma^2} \right) \right) \right] = \exp \left[ \frac{t\mu_j^2}{\sigma^2(1-2t)} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(1-2t)}{2\sigma^2} \left( x_j - \left( \frac{\mu_j}{1-2t} \right) \right)^2 \right] dx_j,$$

al multiplicar y dividir por  $\sqrt{1-2t}$ ,

$$E \left[ \exp \left( t \left( \frac{X_j^2}{\sigma^2} \right) \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \exp \left[ \frac{t\mu_j^2}{\sigma^2(1-2t)} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1-2t}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(1-2t)}{2\sigma^2} \left( x_j - \left( \frac{\mu_j}{1-2t} \right) \right)^2 \right] dx_j,$$

se forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left( \frac{\sigma}{\sqrt{1-2t}} \right) \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(1-2t)}{2\sigma^2} \left( x_j - \left( \frac{\mu_j}{1-2t} \right) \right)^2 \right] dx_j = 1,$$

pues es la distribución acumulada de una variable aleatoria Normal, de media  $\frac{\mu_j}{1-2t}$  y varianza  $\frac{\sigma^2}{1-2t}$ . Así

$$E \left[ \exp \left( t \left( \frac{X_j^2}{\sigma^2} \right) \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \exp \left[ \frac{t\mu_j^2}{\sigma^2(1-2t)} \right],$$

con lo que en (2.4),

$$m_Y(t) = \prod_{j=1}^{\nu} \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \exp \left[ \frac{t\mu_j^2}{\sigma^2(1-2t)} \right] = \frac{1}{(1-2t)^{\frac{\nu}{2}}} \exp \left[ \frac{t\alpha}{(1-2t)} \right], \quad (2.6)$$

donde  $\alpha = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\mu_j^2}{\sigma^2}$  y  $t < \frac{1}{2}$ .

La siguiente definición se puede encontrar en [37, Tanizak, pág 118].

**Definición 1.** La distribución Chi-Cuadrado no central con  $\nu$  grados de libertad y parámetro de no centralidad  $\alpha$ , denotado por  $\chi^2(\nu; \alpha)$ , tiene como función densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x+\alpha)}}{2^{\frac{\nu}{2}}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{\nu}{2}+j-1} \alpha^j}{\Gamma(\frac{\nu}{2}+j) 2^{2j} j!}, & \text{para } 0 < x < \infty, \\ 0, & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (2.7)$$

para  $\alpha \geq 0$ , donde  $\nu$  es un entero positivo.  $\alpha$  es llamado **parámetro de no centralidad**.

*Observación 2.* Es importante remarcar que:

1. La distribución Chi-cuadrado no central con parámetro de no centralidad  $\alpha = 0$  es equivalente a la distribución Chi-cuadrado (central).
2. Aunque  $\nu$  era un número entero en la deducción presentada (subsección 2.1.1), la distribución definida por (2.7) es una distribución bien definida para cualquier positivo  $\nu$  ([30,

Johnson, pág 436]).

**Proposición 3.** *La Media y la Varianza de  $Y \sim \chi^2(\nu, \alpha)$ , vienen dados por*

$$E[Y] = \nu + \alpha \quad y \quad Var[Y] = 2(\nu + 2\alpha)$$

*Demostración.* Nos apoyaremos en la expresión (2.6) y en el hecho que

$$E[X^k] = \left. \frac{d^k m_X(t)}{dt^k} \right|_{t=0}. \quad (2.8)$$

Para ello, al derivar

$$\frac{dm_Y(t)}{dt} = \frac{e^{\frac{\alpha t}{1-2t}} (1-2t)^{-\frac{\nu}{2}-1} (\alpha + \nu(1-2t))}{1-2t}, \quad (2.9)$$

luego en (2.8)

$$E[Y] = \nu + \alpha. \quad (2.10)$$

Ahora, usemos (2.8), para  $k = 2$ , derivamos la expresión (2.9),

$$\frac{d^2 m_Y(t)}{dt^2} = (1-2t)^{-\frac{\nu}{2}-4} e^{\frac{\alpha t}{1-2t}} (\nu^2(1-2t)^2 + 2\nu(1-2t)(\alpha + 1 - 2t) + \alpha(\alpha + 4(1-2t))),$$

con lo que

$$E[Y^2] = \nu^2 + 2\nu(\alpha + 1) + \alpha(\alpha + 4), \quad (2.11)$$

reemplazando (2.10) y (2.11) en la propiedad, y al simplificar

$$Var[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 2(\nu + 2\alpha).$$

□

## 2.2. Elementos de Medida y Probabilidad

A continuación, presentamos definiciones y propiedades de Teoría de Probabilidad que son herramientas matemáticas, que se utilizan a lo largo de este trabajo.

**Definición 4.** Dado  $\Omega$  un conjunto no vacío. Un  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  sobre  $\Omega$  es una familia de subconjuntos de  $\Omega$  tal que

1. El conjunto vacío,  $\phi$  pertenece a  $\mathcal{F}$ ;
2. Si  $A$  pertenece a  $\mathcal{F}$ , entonces el complemento de  $A$ ,  $A^c = \Omega \setminus A$ , también pertenece a  $\mathcal{F}$ ;
3. Si  $A_1, A_2, \dots$  es una sucesión de conjuntos contenidos en  $\mathcal{F}$ , entonces su unión  $A_1 \cup A_2 \cup \dots$  también pertenece a  $\mathcal{F}$ .

El  $\sigma$ -álgebra es la estructura matemática que modela información. Intuitivamente, representa la información que nos será revelada después de la realización del resultado aleatorio, pues contiene todos los eventos que podemos verificar si ocurrieron o no, después de que se realiza el experimento aleatorio.

**Ejemplo 5.** La familia de conjuntos de Borel,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , es un  $\sigma$ -álgebra sobre  $\mathbb{R}$ . Es necesario tener en cuenta que  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  es el  $\sigma$ -álgebra más pequeño que contiene todos los intervalos de  $\mathbb{R}$ .

**Definición 6.** Sea  $\mathcal{F}$  un  $\sigma$ -álgebra sobre  $\Omega$ . Una *medida de probabilidad*  $\mathbb{P}$  es una función

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

tal que

1.  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ;
2. Si  $A_1, A_2, \dots$  es una sucesión de conjuntos disjuntos 2 a 2 (es decir,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ ) pertenecientes a  $\mathcal{F}$ , entonces

$$\mathbb{P}\left(\underbrace{A_1 \cup A_2 \cup \dots}_{\in \mathcal{F}}\right) = \underbrace{\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots}_{\in [0,1]}$$

*Observación 7.* A la tripletea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  se le llama *espacio de probabilidad*.

*Observación 8.*  $\mathbb{P}$  sólo asigna medida de probabilidad a elementos de  $\mathcal{F}$ .

**Definición 9.** (*Evento casi-seguro*) Se dice que un evento  $A$  ocurre *casi seguramente* (*c.s.*), siempre que  $\mathbb{P}(A) = 1$ .

**Definición 10.** (*Función medible*) Dado  $\mathcal{F}$ , un  $\sigma$ -álgebra sobre  $\Omega$ , entonces una función  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada  $\mathcal{F}$ -medible si, para cualquier conjunto de Borel  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , se tiene que el conjunto

$$\{w \in \Omega \mid \xi(w) \in B\} = \{\xi \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Si  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  es un espacio de probabilidad entonces tal función  $\xi$  es llamada *variable aleatoria*.

*Observación 11.* Es necesario remarcar en la definición 10 la notación corta que se suele usar es  $\{\xi \in B\}$ , para referirse al conjunto imagen inversa  $\xi^{-1}(B) = \{w \in \Omega \mid \xi(w) \in B\}$ .

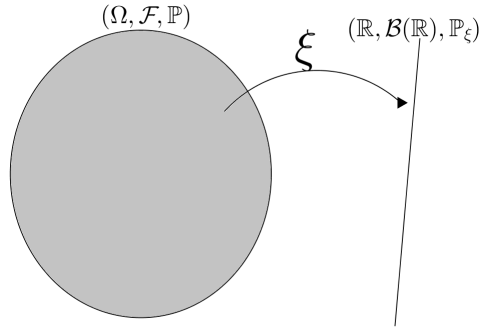
**Definición 12.** El  $\sigma$ -álgebra generado por la variable aleatoria  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\sigma(\xi)$  consiste de todos los conjuntos de la forma  $\{\xi \in B\}$ , donde  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  es un conjunto de Borel en  $\mathbb{R}$ .

**Definición 13.** (*Función de distribución*) Cada variable aleatoria  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , da origen a una medida de probabilidad sobre  $\mathbb{R}$ , dada por

$$\mathbb{P}_\xi(B) = \mathbb{P}\{\xi \in B\},$$

definida sobre el  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Esto lo ilustramos en la figura 2.1. Así, se define la función de distribución de  $\xi$ ,  $F_\xi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , como  $F_\xi(x) = \mathbb{P}\{\xi \in ]-\infty, x]\} = \mathbb{P}\{\xi \leq x\}$ .

Figura 2.1:  $\xi$  induce una medida de probabilidad sobre  $\mathbb{R}$ .



Fuente: Elaboración propia

La siguiente proposición resalta propiedades necesarias y suficientes para que una función sea función de distribución.

**Proposición 14.** *La función de distribución  $F_\xi$  es no decreciente, continua por la derecha, y*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_\xi(x) = 1.$$

*Demostración.* Ver [45, Brzezniak, pág 12] para una demostración. □

**Definición 15.** (*Esperanza*) Una variable aleatoria  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que es **integrable** si

$$\int_{\Omega} |\xi| d\mathbb{P} < \infty.$$

Entonces

$$E[\xi] = \int_{\Omega} \xi d\mathbb{P}$$

existe y es llamada la **esperanza** de  $\xi$ .

**Definición 16.** (*Varianza*) Una variable aleatoria  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que es **cuadrado integrable** si

$$\int_{\Omega} |\xi|^2 d\mathbb{P} < \infty.$$

Entonces la **varianza** de  $\xi$  puede ser definido por

$$\text{var}(\xi) = \int_{\Omega} (\xi - E(\xi))^2 d\mathbb{P}.$$

**Definición 17.** (*Esperanza condicional*) Sea  $\xi$  una variable aleatoria integrable sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , y sea  $\mathcal{G}$  un  $\sigma$ -álgebra contenido en  $\mathcal{F}$ . Entonces la *esperanza condicional de  $\xi$  dado  $\mathcal{G}$*  es definida como la variable aleatoria  $E[\xi|\mathcal{G}]$  tal que

1.  $E[\xi|\mathcal{G}]$  es  $\mathcal{G}$ -medible;
2. Para cualquier  $A \in \mathcal{G}$ ,

$$\int_A E[\xi|\mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_A \xi d\mathbb{P}.$$

*Observación 18.* La noción de esperanza condicional con respecto a un  $\sigma$ -álgebra se extiende a condicionar con respecto a una variable aleatoria  $\eta$ , como

$$E[\xi|\eta] = E[\xi|\sigma(\eta)],$$

donde  $\sigma(\eta)$  es el  $\sigma$ -álgebra generado por  $\eta$ .

En la siguiente proposición veremos propiedades que son muy empleadas en este trabajo. En la proposición 19 se considera  $a$  y  $b$  números reales arbitrarios;  $\xi, \eta$  variables aleatorias integrables sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y  $\mathcal{G}, \mathcal{H}$  son  $\sigma$ -álgebras sobre  $\Omega$  que están contenidas en  $\mathcal{F}$ .

**Proposición 19.** *La esperanza condicional cumple las siguientes propiedades:*

1.  $E[a\xi + b\eta|\mathcal{G}] = aE[\xi|\mathcal{G}] + bE[\eta|\mathcal{G}]$ ;
2.  $E[E[\xi|\mathcal{G}]] = E[\xi]$ ;
3.  $E[\xi\eta|\mathcal{G}] = \xi E[\eta|\mathcal{G}]$ , si  $\xi$  es  $\mathcal{G}$ -medible y  $\xi\eta$  es integrable;
4.  $E[\xi|\mathcal{G}] = E[\xi]$ , si  $\xi$  es independiente de  $\mathcal{G}$ ;
5.  $E[E[\xi|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[\xi|\mathcal{H}]$ , si  $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ ;

*Observación 20.* En la proposición 19 se debe tener en cuenta que las igualdades se dan  $\mathbb{P}$ -c.s (ver definición 9).

La siguiente definición y sus propiedades las podemos encontrar en [8, Fristedt, Gray pág 453].

**Definición 21.** (*Varianza condicional*) Sea  $X$  una variable aleatoria, definida sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , sea  $\mathcal{G}$  un  $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{F}$ , y se tiene que  $E[X|\mathcal{G}]$  es finito. La varianza condicional de  $X$  dado  $\mathcal{G}$ , está definido por

$$\text{Var}[X|\mathcal{G}] = E\left[(X - E[X|\mathcal{G}])^2|\mathcal{G}\right].$$

**Proposición 22.** *La varianza condicional cumple las siguientes propiedades:*

1.  $\text{Var}[X|\mathcal{G}] = E[X^2|\mathcal{G}] - (E[X|\mathcal{G}])^2$
2.  $\text{Var}[X] = E[\text{Var}[X|\mathcal{G}]] - \text{Var}(E[X|\mathcal{G}])$

3.  $\text{Var}[YX|\mathcal{G}] = Y^2 \text{Var}[aX|\mathcal{G}]$ ,  $Y$  es  $\mathcal{G}$ -medible.

4.  $\text{Var}[XY] = \text{Var}[X] \cdot \text{Var}[Y] + \text{Var}[X] \cdot (E[X])^2 + \text{Var}[Y] \cdot (E[Y])^2$ , si  $X$  e  $Y$  son independientes.

*Demostración.* Ver [8, Fristedt, Gray pág 454] para una demostración de las propiedades 1 y 2. La propiedad 3 es directa de aplicar la propiedad 1 y la propiedad 3 de la Proposición 19. Para la propiedad 4, por independencia, notemos que

$$\begin{aligned} \text{Var}[XY] &= E[X^2] \cdot E[Y^2] - (E[X] \cdot E[Y])^2 \\ &= \underbrace{E[X^2] \cdot E[Y^2] - E[X^2] \cdot (E[Y])^2}_{E[X^2] \cdot \text{Var}[Y]} + \underbrace{E[X^2] \cdot (E[Y])^2 - (E[X] \cdot E[Y])^2}_{\text{Var}[X] \cdot (E[Y])^2} \\ &= \underbrace{E[X^2] \cdot \text{Var}[Y] - (E[X])^2 \cdot \text{Var}[Y]}_{\text{Var}[X] \cdot \text{Var}[Y]} + (E[X])^2 \cdot \text{Var}[Y] + \text{Var}[X] \cdot (E[Y])^2. \end{aligned}$$

□

*Observación 23.* En la proposición 22 se debe tener en cuenta que las igualdades se dan  $\mathbb{P}$ -c.s (ver definición 9).

**Definición 24.** (*Proceso estocástico*) Un *proceso estocástico* es una familia de variables aleatorias  $\xi(t)$  parametrizadas por  $t \in T$ , donde  $T \subset \mathbb{R}$ . Cuando  $T = \{1, 2, \dots\}$ , se dice que  $\xi(t)$  es un proceso estocástico en *tiempo discreto* (es decir, una sucesión de variables aleatorias). Cuando  $T$  es un intervalo en  $\mathbb{R}$  (generalmente  $T = [0, \infty)$ ), se dice que  $\xi(t)$  es un proceso estocástico en *tiempo continuo*.

Si fijamos  $w \in \Omega$ , la función en  $T$

$$t \mapsto \xi(t, w)$$

es llamada *camino muestral* de  $\xi(t)$ .

*Observación 25.* Un proceso estocástico es evaluado en  $\Omega \times T$ , si se fija la variable temporal  $t$ , se tiene la variable aleatoria  $\omega \mapsto \xi(t, \omega)$ .

*Observación 26.* (Notación) A lo largo de esta tesis usaremos

$$\xi = \{\xi_t : t \in T\} = \{\xi(t) : t \in T\} = \{\xi\}_{t \in T},$$

para denotar un proceso estocástico.

**Definición 27.** (*Filtración*) Una familia  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$  de  $\sigma$ -álgebras sobre  $\Omega$  parametrizada por  $t \in T$ , donde  $T \subset \mathbb{R}$ , es llamada *filtración*, si

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$$

para cualquier  $s, t \in T$  tal que  $s < t$ . Una filtración se puede ver como una "sucesión creciente" de  $\sigma$ -álgebras sobre  $\Omega$  contenidas en  $\mathcal{F}$ .

*Observación 28.* Esta estructura nos sirve para reflejar el hecho de que a medida que pasa el tiempo ( $s < t$ ), la información disponible puede permanecer o aumentar, pero no perderse.

**Definición 29.** (*Martingala, Submartingala y Supermartingala*) Un proceso estocástico  $\xi(t)$  parametrizado por  $t \in T$  es una *Martingala* (Submartingala, Supermartingala) con respecto a una filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ , si

1.  $\xi(t)$  es integrable para cada  $t \in T$ ;
2.  $\xi(t)$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible para  $t \in T$ ;
3.  $\xi(s) = E[\xi(t)|\mathcal{F}_s]$  (respectivamente,  $\leq$  o  $\geq$ ) para cada  $s, t \in T$  tal que  $s \leq t$ .

*Observación 30. (Proceso adaptado)* La condición 2 de la definición 29 es equivalente a decir que  $\xi(t)$  es un proceso *adaptado a la filtración*  $\mathcal{F}_t$ .

*Observación 31.* Si tomamos esperanza a la condición 3, tenemos que las esperanzas forman una sucesión (continua) creciente, decreciente o constante, según se trate de una submartingala, supermartingala o martingala, respectivamente.

**Definición 32.** (*Medidas Equivalentes*) Dados  $\Omega$  un conjunto no vacío y  $\mathcal{F}$  un  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$ . A dos medidas de probabilidad  $\mathbb{P}$  y  $\tilde{\mathbb{P}}$  sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$  se les dice equivalentes, si se cumple que

$$A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mathbb{P}}(A) = 0.$$

Intuitivamente, podemos decir que  $\mathbb{P}$  y  $\tilde{\mathbb{P}}$  coinciden en cuanto a los escenarios que son posibles e imposibles, aunque difieran de cuan probable son los escenarios posibles.

**Definición 33.** (*Derivada de Radon-Nikodým*) Sean  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad,  $\tilde{\mathbb{P}}$  otra medida de probabilidad sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$  que es equivalente a  $\mathbb{P}$ , y  $Z$  una variable aleatoria positiva casi seguramente que relaciona a  $\mathbb{P}$  y  $\tilde{\mathbb{P}}$  vía

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z d\mathbb{P}, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Entonces  $Z$  es llamada *la derivada de Radon-Nikodým* de  $\tilde{\mathbb{P}}$  con respecto a  $\mathbb{P}$ , y se denota por

$$Z = \frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}.$$

Se presenta el siguiente teorema, donde detallamos el teorema 1.6.1 de [35, Shreve, pág 33].

**Teorema 34.** *Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad y sea  $Z$  una variable aleatoria no negativa casi seguramente con  $E[Z] = 1$ . Para  $A \in \mathcal{F}$ , se define*

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z d\mathbb{P}. \tag{2.12}$$

entonces  $\tilde{\mathbb{P}}$  es una medida de probabilidad. Además, si  $X$  es una variable aleatoria no negativa, entonces

$$E^{\tilde{\mathbb{P}}}[X] = E^{\mathbb{P}}[XZ]. \quad (2.13)$$

Si  $Z$  es positiva casi seguramente, también tenemos

$$E^{\mathbb{P}}[Y] = E^{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\frac{Y}{Z}\right] \quad (2.14)$$

para cada variable aleatoria  $Y$  no negativa.

*Demostración.* Siguiendo la definición 6, primero verifiquemos que  $\tilde{\mathbb{P}}(\Omega) = 1$ , para ello de la definición de  $\tilde{\mathbb{P}}$  (expresión (2.12))

$$\tilde{\mathbb{P}}(\Omega) = \int_{\Omega} Z d\mathbb{P} = E[Z] = 1$$

donde la segunda igualdad es debido a la definición 15. Para verificar la condición 2 de la definición 6, consideremos  $A_1, A_2, \dots$  una sucesión de conjuntos disjuntos 2 a 2, pertenecientes a  $\mathcal{F}$ , y definamos para  $n = 1, 2, \dots$

$$B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k.$$

Como  $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$  tenemos que

$$1_{B_1} \leq 1_{B_2} \leq 1_{B_3} \leq \dots$$

y  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1_{B_n} = 1_{B_\infty}$ , podemos usar el teorema de convergencia monótona,

$$\tilde{\mathbb{P}}(B_\infty) = \int_{\Omega} 1_{B_\infty} Z d\mathbb{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} 1_{B_n} Z d\mathbb{P}. \quad (2.15)$$

Por otro lado, si  $w \in A_i$ , para algún  $i \in \{1, \dots, n\}$ , se tiene que

$$1_{B_n} = 1 \wedge 1_{A_i} = 1 \Rightarrow 1_{B_n}(w) = \sum_{k=1}^n 1_{A_k}(w),$$

análogamente si  $w \notin A_i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , se tiene que

$$1_{B_n} = 0 \wedge 1_{A_i} = 0, \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow 1_{B_n}(w) = \sum_{k=1}^n 1_{A_k}(w),$$

así vemos que  $1_{B_n} = \sum_{k=1}^n 1_{A_k}$ . Luego

$$\int_{\Omega} 1_{B_n} Z d\mathbb{P} = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} 1_{A_k} Z d\mathbb{P} = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} Z d\mathbb{P} = \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbb{P}}(A_k).$$



Con lo cual en la expresión (2.15) tenemos que

$$\tilde{\mathbb{P}}(B_\infty) = \tilde{\mathbb{P}}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mathbb{P}}(A_k)$$

y con ello  $\tilde{\mathbb{P}}$ , es una medida de probabilidad.

Ahora, supongamos que  $X$  es una variable aleatoria no negativa. Procederemos a demostrar la expresión (2.13) usando la "técnica estándar".

- Para  $X = 1_A$ , función indicadora de un subconjunto de Borel de  $\mathbb{R}$ , tenemos

$$E^{\tilde{\mathbb{P}}}[X] = E^{\tilde{\mathbb{P}}}[1_A] = \tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_{\Omega} 1_A Z d\mathbb{P} = E^{\mathbb{P}}[1_A Z] = E^{\mathbb{P}}[XZ]. \quad (2.16)$$

- Para  $X = \sum_{k=1}^n \alpha_k 1_{A_k}$ , función simple no negativa (Suma finita de funciones indicadoras, donde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  son constantes no negativas y  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son subconjuntos de Borel de  $\mathbb{R}$ ).

$$E^{\tilde{\mathbb{P}}}[X] = E^{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\sum_{k=1}^n \alpha_k 1_{A_k}\right] = \sum_{k=1}^n \alpha_k E^{\tilde{\mathbb{P}}}[1_{A_k}],$$

al utilizar el resultado de la expresión (2.16), tenemos

$$E^{\tilde{\mathbb{P}}}[X] = \sum_{k=1}^n \alpha_k E^{\mathbb{P}}[1_{A_k} Z] = E^{\mathbb{P}}\left[\sum_{k=1}^n \alpha_k 1_{A_k} Z\right] = E^{\mathbb{P}}[XZ]. \quad (2.17)$$

- Para  $X$  función Borel-medible no negativa. Para cada  $n$  entero positivo, definamos los conjuntos

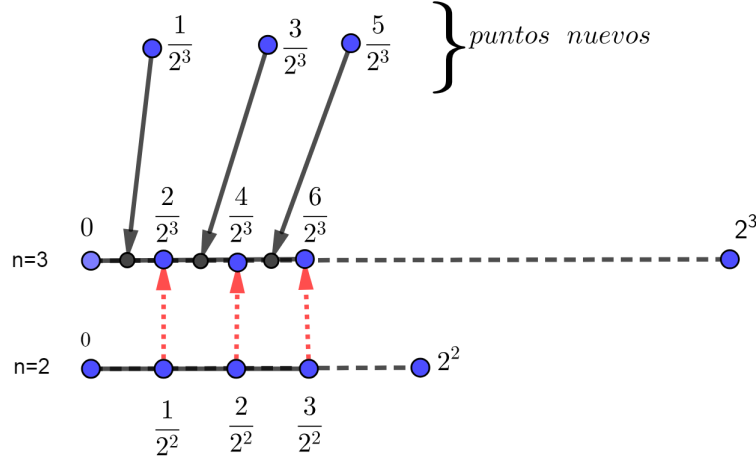
$$A_{k,n} = \left\{ w \in \Omega; \frac{k}{2^n} \leq X(w) < \frac{k+1}{2^n} \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, 4^n - 1. \quad (2.18)$$

Para cada  $n$  fijo, los conjuntos  $B_{0,n}, B_{1,n}, \dots, B_{4^n-1,n}$ , corresponden a una partición de  $[0, 2^n[$ , con

$$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{2}{2^n} < \dots < \frac{4^n}{2^n} = 2^n. \quad (2.19)$$

En el siguiente entero  $n+1$ , la partición de  $[0, 2^{n+1}[$ , tendrá todos los  $n$  puntos de la partición (ver los puntos dados en la expresión (2.19)) y los puntos nuevos serán los puntos medios de los puntos dados en la expresión (2.19), como se muestra en la figura 2.2.

Figura 2.2: Bosquejo de la construcción para la partición, para  $n = 2$  y  $n + 1 = 3$



Fuente: Elaboración propia

Debido a este hecho, no es difícil ver que la sucesión de funciones simples no negativas

$$f_n(w) = \sum_{k=0}^{4^n-1} \frac{k}{2^n} 1_{B_{k,n}}(w),$$

cumple con  $0 \leq f_1 \leq \dots \leq X$ , ya que  $f_{n+1}$  tiene más sumandos (no negativos) que  $f_n$ . Por otro lado, veamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = X$ , para ello, note que  $X$  se puede escribir como

$$X(w) = \sum_{k=0}^{4^n-1} X \cdot 1_{B_{k,n}}(w), \text{ para } n \text{ suficientemente grande.}$$

Luego, debido a la expresión (2.18), tenemos

$$0 \leq X(w) - f_n(w) < \frac{1}{2^n},$$

con lo cual, si hacemos  $n \rightarrow \infty$ , se tiene que  $f_n \rightarrow X$ . Ahora, usando el Teorema de convergencia Monótona, tenemos

$$E^{\tilde{\mathbb{P}}}[X] = E^{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} E^{\tilde{\mathbb{P}}}[f_n],$$

y por lo demostrado en (2.17)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E^{\tilde{\mathbb{P}}}[f_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} E^{\mathbb{P}}[f_n Z] = E^{\mathbb{P}}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n Z\right] = E^{\mathbb{P}}[X Z].$$

Para demostrar (2.14), como  $Z > 0$  casi seguramente,  $\frac{Y}{Z}$  está bien definido y así podemos reemplazar en la expresión (2.13), para  $X = \frac{Y}{Z}$ , tenemos

$$E^{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\frac{Y}{Z}\right] = E^{\mathbb{P}}\left[\frac{Y}{Z}Z\right] = E^{\mathbb{P}}[Y].$$

□

*Observación 35.* Bajo las condiciones del teorema 34, incluyendo la condición de  $Z > 0$  c.s,  $\mathbb{P}$  y  $\tilde{\mathbb{P}}$  son equivalentes. En efecto,

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Sea  $A \in \mathcal{F}$ , con  $\mathbb{P}(A) = 0$ . Notemos que

$$1_A Z(w) = \begin{cases} 0, & w \notin A \\ Z(w), & w \in A \end{cases}$$

es decir,

$$A^c \subset \{w \in \Omega : 1_A Z(w) = 0\} \Rightarrow \{w \in \Omega : 1_A Z(w) = 0\}^c \subset A,$$

y con esto

$$0 \leq \mathbb{P}(\{w \in \Omega : 1_A Z(w) = 0\}^c) \leq \mathbb{P}(A) = 0,$$

por lo que  $\mathbb{P}(\{w \in \Omega : 1_A Z(w) = 0\}) = 1$ . Entonces, la variable aleatoria  $1_A Z = 0$   $\mathbb{P}$ -c.s. Ahora,

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z d\mathbb{P} = \int_{\Omega} 1_A Z d\mathbb{P} = 0.$$

( $\Leftarrow$ ) Sea  $B \in \mathcal{F}$ , con  $\tilde{\mathbb{P}}(B) = 0$ . Entonces,  $\frac{1}{Z}1_B = 0$   $\tilde{\mathbb{P}}$ -c.s, así

$$E^{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\frac{1}{Z}1_B\right] = 0.$$

Y la expresión (2.14) implica que  $\mathbb{P}(B) = E^{\mathbb{P}}[1_B] = 0$ . □

### 2.3. Elementos de Cálculo Estocástico

A lo largo de esta tesis suponemos que existe un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  donde  $\Omega$  es el espacio muestral,  $\mathcal{F}$  el  $\sigma$ -álgebra generada por el proceso estocástico  $W = \{W_t : t \in \mathbb{R}\}$  y  $\mathbb{P}$  la medida de probabilidad,  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ . Usamos el movimiento Browniano Estándar  $W_t$  en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  como nuestro importante motor estocástico para modelar la aleatoriedad en el mercado financiero.

Enseguida, definimos la herramienta que nos ayuda a modelar la dinámica aleatoria. Esta definición la podemos encontrar en [45, Brzezniak, pág. 155].

**Definición 36.** (*Movimiento Browniano*)

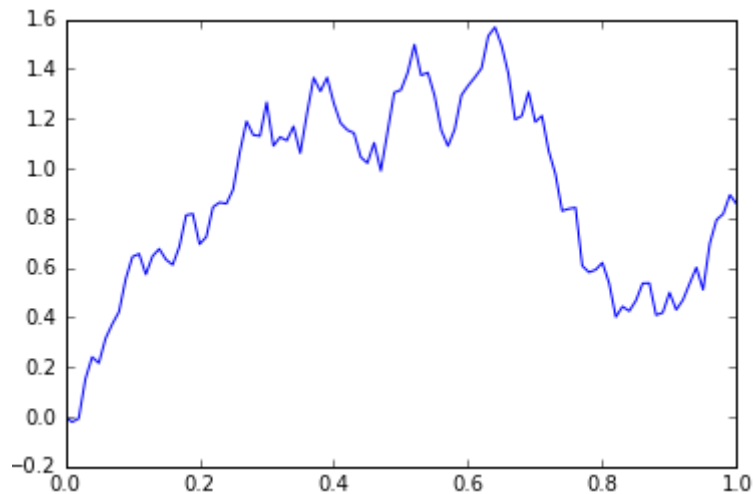
Un proceso estocástico  $W = \{W_t : t \geq 0\}$ , es un Movimiento Browniano si cumple las siguientes condiciones:

1.  $W_0 = 0$  c.s.
2. Los caminos muestrales  $t \mapsto W_t$  son continuos c.s.
3.  $W_t$  tiene incrementos estacionarios e independientes.
4. Los incrementos  $W_t - W_s$  tienen distribución Normal con media 0 y varianza  $t - s$ , para cualquier  $0 \leq s < t$ .

Teniendo en cuenta la parte 3 y 4 de la definición 36, es posible simular caminos muestrales de un Movimiento Browniano, por ejemplo eligiendo tamaños de paso 1/100, haciendo uso del programa *R*, construimos la figura 2.3.

Una de las características que es importante destacar de este proceso y que es perceptible en la figura 2.3, es que el Movimiento Browniano no es diferenciable en ningún punto ([45, Brzezniak, pág.174]).

Figura 2.3: Simulación de un camino muestral de un Movimiento Browniano



Fuente: Elaboración propia

La siguiente definición la podemos encontrar en [31, Korn, Kroisandt, pág 112].

**Definición 37.** (*Movimiento Browniano  $n$ -dimensional*) Un movimiento Browniano  $n$ -dimensional es el proceso con valores en  $\mathbb{R}^n$

$$W(t) = (W_1(t), \dots, W_n(t)),$$

donde las componentes  $W_i$ , son movimientos Brownianos unidimensionales e **independientes** entre sí.

La siguiente observación es de gran utilidad para algunas demostraciones y para fines de simulación. Nos permite construir movimientos Brownianos asociados con una correlación específica.

*Observación 38. (Descomposición de Cholesky)* Consideremos el movimiento Browniano bidimensional  $W(t) = (W_1(t), W_2(t))$ . A partir de  $W(t)$ , se puede construir  $\widetilde{W}(t) = (\widetilde{W}_1(t), \widetilde{W}_2(t))$ , proceso estocástico, de tal manera que  $\text{Corr}(\widetilde{W}_1(t), \widetilde{W}_2(t)) = \rho$ . Esto se logra al definir

$$\widetilde{W}_1(t) = W_1(t),$$

$$\widetilde{W}_2(t) = \rho W_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W_2(t).$$

En efecto, puesto que  $\widetilde{W}_2(t)$  es construida como la suma de dos variables aleatorias Normales e independientes,  $\widetilde{W}_2(t)$  también se distribuye Normalmente. Como  $W_1(t)$  y  $W_2(t)$  son movimientos Brownianos Estándar,  $E[W_1(t)] = E[W_2(t)] = 0$ , así

$$E[\widetilde{W}_2(t)] = \rho E[W_1(t)] + \sqrt{1 - \rho^2} E[W_2(t)] = 0,$$

y

$$\text{Var}[\widetilde{W}_2(t)] = \rho^2 \text{Var}[W_1(t)] + (1 - \rho^2) \text{Var}[W_2(t)] = 1.$$

Además,

$$\begin{aligned} \text{Corr}(\widetilde{W}_1(t), \widetilde{W}_2(t)) &= E[\widetilde{W}_1(t) \cdot \widetilde{W}_2(t)] - E[\widetilde{W}_1(t)] E[\widetilde{W}_2(t)], \\ \text{Corr}(\widetilde{W}_1(t), \widetilde{W}_2(t)) &= E[\rho W_1(t) \cdot W_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W_1(t) \cdot W_2(t)], \\ &= \rho E[W_1(t)^2] + \sqrt{1 - \rho^2} E[W_1(t) \cdot W_2(t)], \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que  $W_1(t)$  y  $W_2(t)$  son independientes,

$$E[W_1(t) \cdot W_2(t)] = E[W_1(t)] E[W_2(t)] = 0,$$

con lo cual,

$$\text{Corr}(\widetilde{W}_1(t), \widetilde{W}_2(t)) = \rho E[W_1(t)^2] = \rho.$$

Mientras que la ecuación diferencial ordinaria determinística, consiste en una solución única, en muchos casos, por ejemplo, en economía financiera esto no se cumple, ya que los modelos suelen ser aleatorios, por lo que se agrega un término de ruido a la ecuación diferencial, de ahí el nombre de *ecuación diferencial estocástica* denotada por *EDE*. La mayoría de los modelos utilizados para simular instrumentos financieros se pueden describir mediante estos modelos no deterministas. Para definir una EDE, necesitamos la noción de integral estocástica de Itô (ver apéndice A).

La siguiente definición puede ser encontrada en [45, Brzezniak, pág194].

**Definición 39.** (Proceso Itô 1-dimensional)

Un proceso estocástico  $X_t$ ,  $t \geq 0$  es llamado un proceso de Itô, si tiene caminos continuos y puede ser representado como

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s, s) ds + \int_0^t \sigma(X_s, s) dW_s \quad (2.20)$$

que se suele denotar en modo diferencial (EDE) como

$$dX_t = \mu(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) dW_t$$

de modo que las siguientes condiciones se cumplen casi seguramente (c.s)

$$\mathbb{P} \left[ \int_0^t \sigma^2(X_s, s) ds < \infty, \forall t \geq 0 \right] = 1,$$

$$\mathbb{P} \left[ \int_0^t |\mu(X_s, s)| ds < \infty, \forall t \geq 0 \right] = 1.$$

La EDE (2.20) se compone de dos términos, el primer término  $\mu dt$  se define como el término de drift y el segundo término  $\sigma dW_t$ , que especifica la parte aleatoria (el ruido) del proceso, denominada parte de difusión. Para la existencia y unicidad de la solución de la EDE (2.20) necesitamos que las siguientes condiciones en  $\mu$  y  $\sigma$  se cumplan.

**Teorema 40.** (teorema de Existencia y Unicidad para ecuaciones diferenciales estocásticas)

Sea  $T > 0$  y sean  $\mu(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\sigma(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  funciones medibles que satisfacen

$$|\mu(x, t)| + |\sigma(x, t)| \leq C(1 + |x|); \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T] \quad (2.21)$$

para alguna constante  $C$ , (donde  $|\sigma|^2 = \sum |\sigma_{ij}|^2$ ) y tal que

$$|\mu(x, t) - \mu(y, t)| + |\sigma(x, t) - \sigma(y, t)| \leq D|x - y|; \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T] \quad (2.22)$$

para alguna constante  $D$ . Y sea  $Z$  una variable aleatoria que es independiente del  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_t$ , donde  $\mathcal{F}_t$  es la filtración generada por  $W = \{W_t : t \in [0, \infty)\}$  y tal que

$$E [|Z|^2] < \infty.$$

Entonces la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \mu(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad X_0 = Z \quad (2.23)$$

tiene una única solución  $X_t$  con la propiedad que

$$X_t \text{ es adaptado a la filtración } \mathcal{F}_t^Z \text{ generado por } Z \text{ y } W = \{W_s : s \leq t\} \quad (2.24)$$

y

$$E \left[ \int_0^T |X_t|^2 dt \right] < \infty. \quad (2.25)$$

*Demostración.* Ver [1, Oksendal, pág 69] para una demostración.  $\square$

*Observación 41.* La condición (2.21) asegura que la solución  $X_t$  de (2.23) no explote, es decir, que  $|X_t|$  no tienda a  $\infty$  en un tiempo finito. Mientras que la condición (2.22) garantiza que la ecuación (2.23) tenga una única solución. Aquí unicidad significa que si  $X_1(t, w)$  y  $X_2(t, w)$  son dos procesos  $t$ -continuos que satisfacen (2.23), (2.24) y (2.25) entonces

$$\mathbb{P}(\{w \in \Omega : X_1(t, w) = X_2(t, w), \forall t \leq T\}) = 1. \quad (2.26)$$

A continuación presentamos la fórmula básica del cálculo estocástico, que es muy usado en este trabajo de tesis.

**Teorema 42.** (*Fórmula unidimensional de Itô*) Sea  $X_t$  un proceso de Itô dado por

$$dX_t = udt + v dW_t.$$

Sea  $g(t, x) \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$  (es decir,  $g$  es 2 veces continuamente diferenciable sobre  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ ). Entonces

$$Y_t = g(t, X_t)$$

es también un proceso de Itô, y

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \cdot (dX_t)^2,$$

donde  $(dX_t)^2 = (dX_t) \cdot (dX_t)$  es calculado de acuerdo al cuadro 2.1. Obteniéndose así

$$dY_t = \left[ \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) + u \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) + \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \right] dt + v \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) dW_t.$$

Cuadro 2.1: Reglas del producto de derivación

$\cdot$	$dt$	$dW_t$
$dt$	0	0
$dW_t$	0	$dt$

**Teorema 43.** (Fórmula Multidimensional de Itô)

Sea

$$dX(t) = udt + v dW(t)$$

donde

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nm} \end{bmatrix}, \quad dW(t) = \begin{bmatrix} W_1(t) \\ \vdots \\ W_m(t) \end{bmatrix}.$$

Además  $W(t, w)$  es un movimiento Browniano  $m$ -dimensional. Sea

$g(t, x) = (g_1(t, x), \dots, g_p(t, x))$  un mapeo de clase  $C^2$  desde  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^p$ . Entonces el proceso

$$Y(t, w) = g(t, X(t))$$

es otro proceso de Itô, cuyo componente  $k$ -ésimo,  $Y_k$ , está dado por (teniendo en cuenta el cuadro 2.1)

$$dY_k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, X)dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, X)dX_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X)dX_i dX_j.$$

El siguiente teorema nos brinda condiciones que nos permite reconocer cuando una martingala es un movimiento Browniano.

**Teorema 44.** (Caracterización de Levy del Movimiento Browniano)

Si un proceso estocástico  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  definido sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  con filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ , satisface las siguientes condiciones:

1.  $P(M_0 = 0) = 1$
2.  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  es una martingala con respecto a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  bajo  $\mathbb{P}$ .
3. La variación cuadrática  $[M_t, M_t] = t$ ,  $\mathbb{P}$ -cs.

Entonces

$$\{M_t\}_{t \geq 0} \text{ es un Movimiento Browniano.}$$

*Demostración.* De las hipótesis del teorema 44 en la definición 36, falta demostrar las siguientes afirmaciones:

**Afirmación 1:** Los incrementos de  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  tienen distribución Gaussiana

Para ello, analizaremos la función característica de los incrementos  $E[e^{i\lambda(M_t - M_s)}]$ . Pero antes veamos que  $g(t, M_t) = e^{i\lambda M_t + \frac{1}{2}\lambda^2 t}$ , es una martingala. En efecto, aplicando el lema de Itô



(Teorema 42)

$$dg(t, M_t) = \frac{1}{2}\lambda^2 g(t, M_t)dt + i\lambda g(t, M_t)dM_t - \frac{1}{2}\lambda^2 d[M_t, M_t]$$

y la hipótesis 3, tenemos  $d[M_t, M_t] = dt$ , con lo que

$$dg(t, M_t) = \frac{1}{2}\lambda^2 g(t, M_t)dt + i\lambda g(t, M_t)dM_t - \frac{1}{2}\lambda^2 dt = i\lambda g(t, M_t)dM_t,$$

por lo tanto,  $g(t, M_t) = e^{i\lambda M_t + \frac{1}{2}\lambda^2 t}$ , es una martingala.

Ahora, de la Afirmación 1, por la parte 3 de la definición 29, para  $s < t$ ,

$$E \left[ e^{i\lambda M_t + \frac{1}{2}\lambda^2 t} \middle| \mathcal{F}_s \right] = e^{i\lambda M_s + \frac{1}{2}\lambda^2 s}, \quad (2.27)$$

Pero

$$E \left[ e^{i\lambda M_t + \frac{1}{2}\lambda^2 t} \middle| \mathcal{F}_s \right] = e^{\frac{1}{2}\lambda^2 t} E \left[ e^{i\lambda M_t} \middle| \mathcal{F}_s \right]$$

reemplazando en (2.27), se tiene

$$E \left[ e^{i\lambda(M_t - M_s)} \middle| \mathcal{F}_s \right] = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)},$$

de la propiedad 2 de la proposición 19,

$$E \left[ e^{i\lambda(M_t - M_s)} \right] = E \left[ E \left[ e^{i\lambda(M_t - M_s)} \middle| \mathcal{F}_s \right] \right] = E \left[ e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)} \right] = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)},$$

que es la función característica correspondiente a una distribución Normal, es decir,

$$M_t - M_s \sim N(0, t - s).$$

**Afirmación 2:** Los incrementos de  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  son independientes.

Para ello, analizaremos la función característica,  $E \left[ e^{i\lambda(M_t - M_s)} \right]$ . De la expresión (2.27), es fácil ver que, para  $s < t$ ,

$$E \left[ e^{i\lambda M_t} \middle| \mathcal{F}_s \right] = e^{i\lambda M_s} \cdot e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)}, \quad (2.28)$$

y si consideramos,  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$ . Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} & i\lambda_1 M_{t_1} + i\lambda_2(M_{t_2} - M_{t_1}) + \dots + i\lambda_n(M_{t_n} - M_{t_{n-1}}) \\ &= i(\lambda_1 - \lambda_2)M_{t_1} + i(\lambda_2 - \lambda_3)M_{t_2} + \dots + i(\lambda_{n-1} - \lambda_n)M_{t_{n-1}} + i\lambda_n M_{t_n}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Luego, de (2.29), tenemos

$$\begin{aligned} & E \left[ e^{i\lambda_1 M_{t_1} + i\lambda_2(M_{t_2} - M_{t_1}) + \dots + i\lambda_n(M_{t_n} - M_{t_{n-1}})} \right] \\ &= E \left[ e^{i(\lambda_1 - \lambda_2)M_{t_1} + i(\lambda_2 - \lambda_3)M_{t_2} + \dots + i(\lambda_{n-1} - \lambda_n)M_{t_{n-1}} + i\lambda_n M_{t_n}} \right], \end{aligned}$$

aplicando la propiedad 2 de la proposición 19,

$$= E \left[ E \left[ e^{i(\lambda_1 - \lambda_2)M_{t_1} + i(\lambda_2 - \lambda_3)M_{t_2} + \dots + i(\lambda_{n-1} - \lambda_n)M_{t_{n-1}} + i\lambda_n M_{t_n}} \middle| \mathcal{F}_{t_{n-1}} \right] \right],$$

como  $i(\lambda_1 - \lambda_2)M_{t_1} + i(\lambda_2 - \lambda_3)M_{t_2} + \dots + i(\lambda_{n-1} - \lambda_n)M_{t_{n-1}}$  es  $\mathcal{F}_{t_{n-1}}$ -medible, de la propiedad 3 de la proposición 19

$$= E \left[ E \left[ e^{i\lambda_1 M_{t_1} + i\lambda_2(M_{t_2} - M_{t_1}) + \dots + i\lambda_2(M_{t_n} - M_{t_{n-1}})} \right] E \left[ e^{i\lambda_n M_{t_n}} \middle| \mathcal{F}_{t_{n-1}} \right] \right],$$

teniendo en cuenta (2.28),

$$= E \left[ e^{i\lambda_1 M_{t_1} + i\lambda_2(M_{t_2} - M_{t_1}) + \dots + i\lambda_2(M_{t_n} - M_{t_{n-1}})} \right] e^{i\lambda_n M_{t_n}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\lambda_n^2(t_n - t_{n-1})}$$

$$= E \left[ e^{i(\lambda_1 - \lambda_2)M_{t_1} + i(\lambda_2 - \lambda_3)M_{t_2} + \dots + i\lambda_{n-1}M_{t_{n-1}}} \right] \cdot e^{-\frac{1}{2}\lambda_n^2(t_n - t_{n-1})},$$

haciendo esto  $(n - 1)$  veces, tenemos

$$E \left[ e^{i\lambda_1 M_{t_1} + i\lambda_2(M_{t_2} - M_{t_1}) + \dots + i\lambda_2(M_{t_n} - M_{t_{n-1}})} \right] = e^{-\frac{1}{2}\lambda_1^2 t_1} \cdot e^{-\frac{1}{2}\lambda_2^2(t_2 - t_1)} \dots e^{-\frac{1}{2}\lambda_n^2(t_n - t_{n-1})},$$

con lo que

$$M_{t_1}, M_{t_2} - M_{t_1}, \dots, M_{t_n} - M_{t_{n-1}} \text{ son independientes.}$$

□

Una manera de modelar el proceso de precios es mediante un movimiento Browniano Geométrico, a modo de ejemplo de aplicación de los teoremas vistos, presentamos la siguiente proposición.

**Proposición 45.** *Dada la EDE (Movimiento Browniano Geométrico):*

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t \tag{2.30}$$

con condición inicial en el tiempo  $s$ ,  $X_s$  tiene una única solución dada por

$$X_t = X_s \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - s) + \sigma W_{t-s} \right\}.$$

*Demostración.*

Para la existencia y unicidad de la solución, aplicaremos el Teorema 40, para ello veamos que

(2.30) satisface la condición (2.21)

$$|\mu x| + |\sigma x| = (|\mu| + |\sigma|) |x| \leq (|\mu| + |\sigma|) (1 + |x|),$$

donde podemos tomar  $C = |\mu| + |\sigma|$ , que es constante. De manera similar

$$|\mu x - \mu y| + |\sigma x - \sigma y| = (|\mu| + |\sigma|) |x - y| \leq D|x - y|,$$

donde al tomar  $D = |\mu| + |\sigma|$ , se satisface la condición (2.22).

Para la solución explícita, definamos

$$X_t = f(W_{t-s}, t)$$

donde

$$f(x, t) = c \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - s) + \sigma x \right\},$$

así tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial t} = c \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - s) + \sigma x \right\} \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) = f \cdot \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = c \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - s) + \sigma x \right\} \sigma = f \cdot \sigma,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - s) + \sigma x \right\} \sigma^2 = f \cdot \sigma^2,$$

y aplicando el lema de Itô (teorema 42), donde

$$dW_t = 0dt + 1dW_t,$$

así

$$df = \left[ f \cdot \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + 0(f \cdot \sigma) + \frac{1}{2} 1^2 (f \cdot \sigma^2) \right] dt + 1(f \cdot \sigma) dW_t,$$

con lo cual,

$$df = \mu \cdot f dt + \sigma f dW_t.$$

Además,

$$X_s = f(W_{s-s}, 0) = f(0, 0) = c \Rightarrow c = X_s$$

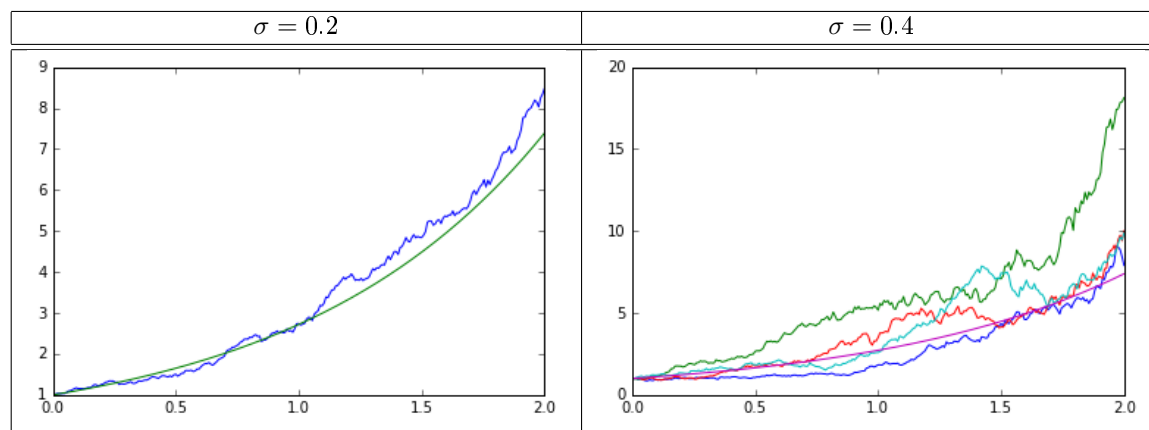
con lo cual

$$X_t = X_s \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - s) + \sigma W_{t-s} \right\}$$

satisface la EDE con la condición inicial. □

*Observación 46.* No es difícil notar en la Proposición 45, que  $\ln(X_t)$  condicionado a  $\ln(X_s)$ , tiene distribución Normal con media  $\ln(X_s) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - s)$  y varianza  $\sigma^2$ .

Figura 2.4: Simulación del Movimiento Browniano Geométrico



Fuente: Elaboración Propia

En la figura 2.4 se tiene una simulación (usando Python) de un camino muestral del Movimiento Browniano Geométrico, con  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0.2$  y  $X(0) = 1$ . La línea suave es la gráfica de la función valor esperado  $E[X_t] = 1 \cdot e^{\mu t}$ . Para valores pequeños de  $\sigma$ , la trayectoria (al menos inicialmente) se mantiene bastante cerca de la función de valor esperado, mientras que un valor grande de  $\sigma$  da lugar a grandes desviaciones aleatorias. Esto se puede ver claramente cuando comparamos la trayectoria simulada en el lado izquierdo con las cuatro trayectorias simuladas en el lado derecho de la figura 2.4, donde tenemos  $\sigma = 0.4$ .

En seguida presentamos la versión II del teorema de Girsanov, que puede ser encontrada en [1, Oksendal, pág 164]:

**Teorema 47.** (Teorema de Girsanov, versión II)

Sea  $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ , un proceso de Itô de la forma

$$dY(t) = \beta(t, w)dt + \theta(t, w)dW(t); t \leq T$$

donde  $W(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\beta(t, w) \in \mathbb{R}^n$  y  $\theta(t, w) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Supongamos que existe un proceso  $u(t, w) \in W_H^m$  y  $\alpha(t, w) \in W_H^n$  tal que

$$\theta(t, w)u(t, w) = \beta(t, w) - \alpha(t, w) \tag{2.31}$$

consideremos

$$M_t = \exp \left( - \int_0^t u(s, w) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t u^2(s, w) ds \right); t \leq T$$

y

$$dQ(w) = M_T(w) dP(w) \quad \text{sobre } \mathcal{F}_T.$$

Asumiendo que  $M_t$  es una Martingala (con respecto a  $\mathcal{F}_T^{(n)}$  y  $P$ ). Entonces  $Q$  es una medida de probabilidad sobre  $\mathcal{F}_T^{(n)}$ , el proceso

$$\widehat{W}(t) := \int_0^t u(s, w) ds + W(t); t \leq T \quad (2.32)$$

es un movimiento Browniano con respecto a  $Q$  y en términos de  $\widehat{W}(t)$  el proceso  $Y(t)$  tiene la representación integral estocástica

$$dY(t) = \alpha(t, w) dt + \theta(t, w) d\widehat{W}(t).$$

*Observación 48.* La condición de Novikov es suficiente para garantizar que  $M_t$  es una martingala, esto es:

$$E \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T u^2(s, w) ds \right) \right] < \infty.$$

Además  $u$  en finanzas como premio al riesgo (de mercado), o precio de mercado del riesgo (del subyacente). En inglés «*market price of risk*».

*Demostración.* Se detalla la demostración presentada en [20, Shreve, pág 213]. Es claro, de la definición de  $\widehat{W}_t$  que,

$$\widehat{W}_0 = W_0 = 0,$$

y que  $\widehat{W}$  posee caminos continuos, al igual que  $W$ . Además se tiene para cada tiempo  $t$ ,

$$[\widehat{W}, \widehat{W}](t) = [W, W](t) = t,$$

pues

$$d\widehat{W}(t) \cdot d\widehat{W}(t) = (dW(t) + u(t)dt)^2 = dW(t) \cdot dW(t) = dt.$$

Así, según el Teorema 44, queda por demostrar que, bajo  $Q$ ,  $\widehat{W}$  es una martingala. Para ello, nos valemos de las siguientes afirmaciones.

**Afirmación 1:**  $M_t$  bajo  $P$ , es una martingala.

En efecto, considerando

$$dX(t) = -\frac{1}{2}u^2(t)dt - u(t)dW(t)$$

y

$$g(t, x) = e^x \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = e^x \quad y \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = e^x,$$

aplicando el Lema de Itô (teorema 42)

$$M_t = g(t, X_t) = \exp\{X_t\} \Rightarrow dM_t = 0 \cdot dt + e^{X_t} \left(-\frac{1}{2}u^2 dt - u dW(t)\right) + \frac{1}{2}e^{X_t}(u^2)dt,$$

así tenemos

$$dM_t = -M_t \cdot u \cdot dW_t, \tag{2.33}$$

integrando a ambos lados, vemos que

$$M(t) = M(0) - \int_0^t u(s)M(s)dW(s).$$

Como las integrales de Itô son martingalas,  $M(t)$  es una martingala.

**Afirmación 2:**  $\widehat{W}(t) \cdot M(t)$  bajo  $P$ , es una martingala.

En efecto, con ayuda del cuadro 2.1 y (2.33), calculemos

$$\begin{aligned} d\left(\widehat{W}(t) \cdot M(t)\right) &= \widehat{W}(t) \cdot dM(t) + d\widehat{W}(t) \cdot M(t) + d\widehat{W}(t) \cdot dM(t) \\ &= -M_t \cdot u \cdot \widehat{W}(t) \cdot dW(t) + (dW(t) + u(t)dt) \cdot M(t) \\ &\quad + (dW(t) + u(t)dt) \cdot (-M_t \cdot u \cdot dW_t) \end{aligned}$$

Así,

$$d\left(\widehat{W}(t) \cdot M(t)\right) = \left(-u \cdot \widehat{W}(t) + 1\right) M_t dW_t, \tag{2.34}$$

y como en la expresión (2.34) no existe el término  $dt$ , el proceso  $\widehat{W}(t) \cdot M(t)$  es una martingala bajo  $\mathbb{P}$ .

**Afirmación 3:** Sean  $0 \leq s \leq t \leq T$  fijos. Y sea  $Y$  una variable aleatoria  $\mathcal{F}(t)$ -medible. Entonces

$$E^Q \left[ Y \middle| \mathcal{F}(s) \right] = \frac{1}{M(s)} E^P \left[ Y \cdot M(t) \middle| \mathcal{F}(s) \right].$$

En efecto, como  $\frac{1}{M(s)}$  y  $E^Q \left[ Y \cdot M(t) \middle| \mathcal{F}(s) \right]$  son  $\mathcal{F}(s)$ -medibles, se tiene que

$\frac{1}{M(s)}$  y  $E^P \left[ Y \cdot M(t) \middle| \mathcal{F}(s) \right]$  son  $\mathcal{F}(s)$ -medibles  $\Rightarrow \frac{1}{M(s)} E^P \left[ Y \cdot M(t) \middle| \mathcal{F}(s) \right]$  es  $\mathcal{F}(s)$ -medible.

Veamos ahora que, para todo  $A \in \mathcal{F}(s)$

$$\int_A \frac{1}{M(s)} E^P \left[ Y \cdot M(t) \middle| \mathcal{F}(s) \right] dQ = \int_A Y dP,$$

esto es cierto, pues  $Y$  es  $\mathcal{F}(t)$ -medible, en particular  $Y$  es  $\mathcal{F}(s)$ -medible y aplicando la propiedad 3 de la proposición (19)

$$\int_A \frac{1}{M(s)} E^P \left[ Y \cdot M(t) \middle| \mathcal{F}(s) \right] dQ = \int_A \frac{1}{M(s)} Y \cdot E^P \left[ M(t) \middle| \mathcal{F}(s) \right] dQ$$

teniendo en cuenta la afirmación 1,

$$\int_A \frac{1}{M(s)} Y \cdot E^P \left[ M(t) \middle| \mathcal{F}(s) \right] dQ = \int_A \frac{1}{M(s)} Y \cdot M(s) dQ,$$

con lo cual

$$\int_A \frac{1}{M(s)} E^P \left[ Y \cdot M(t) \middle| \mathcal{F}(s) \right] dQ = \int_A Y dQ.$$

Por último, veamos que  $\widehat{W}$  es una martingala, bajo  $Q$ .

Sean  $0 \leq s \leq t \leq T$  fijos. de la afirmación 3, se tiene

$$E^Q \left[ \widehat{W}(t) \middle| \mathcal{F}(s) \right] = \frac{1}{M(s)} E^P \left[ \widehat{W}(t) \cdot M(t) \middle| \mathcal{F}(s) \right],$$

y con la afirmación 2, se tiene

$$E^Q \left[ \widehat{W}(t) \middle| \mathcal{F}(s) \right] = \frac{1}{M(s)} \widehat{W}(s) \cdot M(s) = \widehat{W}(s),$$

con lo cual se completa la demostración.  $\square$

Es de suma importancia para nuestros propósitos, poder relacionar un operador diferencial parcial de segundo orden  $\mathcal{A}$ , con una difusión Itô  $X_t$ . La conexión básica entre  $\mathcal{A}$  y  $X_t$  es que  $\mathcal{A}$  es el generador del proceso  $X_t$ .

**Definición 49.** (*Generador infinitesimal*) Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  una difusión Itô en  $\mathbb{R}^n$ . El generador infinitesimal  $\mathcal{A}$  de  $X_t$  es definido por

$$\mathcal{A}f(x) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{E^x [f(X_t)] - f(x)}{t}; \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

El conjunto de funciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que el limite existe en  $x$ , es denotado por  $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}(x)$ ,

mientras  $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$  denota el conjunto de funciones para el cual el límite existe para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

*Observación 50.* Por la fórmula de Taylor,

$$E^x [f(X_t)] \approx f(x) + t\mathcal{A}f(x), \text{ para } t \geq 0, \text{ suficientemente pequeño.}$$

Así, se puede observar que el generador describe el movimiento del proceso en un intervalo de tiempo infinitesimal.

*Observación 51.* Se demuestra en [32, Schilling, pág 94] que,

$$\frac{d}{dt} E^x [f(X_t)] = \mathcal{A}E^x [f(X_t)],$$

lo que permite ver, al generador infinitesimal como la derivada del mapeo  $t \mapsto E^x [f(X_t)]$ .

La siguiente proposición ([1, Oksendal, pág123]) nos permite establecer una relación entre  $\mathcal{A}$  y los coeficientes  $\mu$  y  $\sigma$  dados en la EDE (2.20).

**Proposición 52.** (*Generador infinitesimal de una difusión Itô*) Sea  $X_t$  una difusión Itô

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t.$$

Si  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$  entonces

$$(\mathcal{A}f)(x) = \sum_i b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma\sigma^T)_{i,j}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

*Demostración.* Ver [1, Oksendal, pág123] para una demostración. □

El siguiente teorema establece una relación entre la ecuación diferencial parcial que satisface el precio de un derivado (financiero) y la fórmula depreciación bajo una medida martingala equivalente. Específicamente, si el precio de un producto derivado satisface una ecuación diferencial parcial de segundo orden con una condición de frontera, entonces el precio de dicho derivado puede representarse como el valor esperado de la condición de frontera bajo una medida de probabilidad equivalente ([29, Hilber, pág 49]).

**Teorema 53.** Sea  $V \in C^{1,2}(J \times \mathbb{R}) \cap C^0(\bar{J} \times \mathbb{R})$  con derivadas en  $x$  una solución de

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{A}V - qV = 0 \quad \text{en } J \times \mathbb{R}, \quad V(T, x) = g(x) \quad \text{en } \mathbb{R},$$

donde  $\mathcal{A}$  es el generador infinitesimal de  $X$ . Entonces,  $V(t, x)$  puede ser representado como

$$V(t, x) = E \left[ e^{-\int_t^T q(X_s)ds} g(X_T) \mid X_t = x \right].$$

*Demostración.* Ver [29, Hilber, pág 49] para una demostración. □



## 2.4. Estimación Monte Carlo

Es de nuestro interés estimar  $\mu_X = E^{\mathbb{Q}}[X]$ , para ello usaremos simulación Monte Carlo de  $N$  experimentos (simulaciones), donde se tiene como estimador a la media muestral, está dada por,

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i, \quad (2.35)$$

donde  $X_i$  es el valor individual obtenido en el  $i$ -ésimo experimento.

Dado que una simulación Monte Carlo involucra generar números pseudoaleatorios, obtenemos resultados diferentes cada vez que realicemos algún análisis probabilístico. Es decir, cada vez que ejecutemos una simulación de Monte Carlo, obtendremos resultados ligeramente diferentes para la expresión (2.35). En el siguiente análisis, veremos que la variabilidad en nuestros resultados (es decir, cuánto varía la estimación de la media, de simulación Monte Carlo a simulación Monte Carlo) depende del número de simulaciones ( $N$ ) en cada simulación Monte Carlo.

Veamos que el estimador dado por (2.35), es insesgado. Para ello,

$$\begin{aligned} E[\bar{X} - \mu_X] &= E[\bar{X}] - \mu_X \\ &= E\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i\right] - \mu_X \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[X_i] - \mu_X, \end{aligned}$$

como los  $X_i$ , forman una muestra aleatoria (cuando se usa el método Monte Carlo), se tiene  $E[X_i] = \mu_X$ , con lo cual

$$E[\bar{X} - \mu_X] = 0.$$

Este resultado muestra que, en promedio, el error al usar  $\bar{X}$  para estimar  $\mu_X$  es cero. Por lo cual a  $\bar{X}$  se le suele llamar un estimador *insesgado*.

Ahora cuantificaremos la variabilidad del error de estimación. Como  $\mu_X$ , es constante, se tiene

$$\begin{aligned} \text{var}(\bar{X} - \mu_X) &= \underbrace{\text{var}(\bar{X})}_{\sigma_{\bar{X}}^2} \\ &= \text{var}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i\right) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \underbrace{\text{var}(X_i)}_{\sigma_X^2}, \end{aligned}$$

la última igualdad es debido a que en el método Monte Carlo, los  $X_i$  son independientes e idénticamente distribuidos, con lo cual

$$\text{var}(\bar{X} - \mu_X) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{N^2} N \sigma_X^2 = \frac{\sigma_X^2}{N}. \quad (2.36)$$

*Observación 54.* A la cantidad  $\sigma_{\bar{X}}$ , se le conoce como *error estándar del estimador*. Así, de la expresión (2.36), notamos que el error estándar decrece con  $\sqrt{N}$ . Por ejemplo, para disminuir la variabilidad en la estimación en un factor de 10 se debe aumentar 100 veces el número de simulaciones Monte Carlo.

*Observación 55.* Desafortunadamente, en la práctica, no podemos calcular  $\sigma_{\bar{X}}$ , pues depende de  $\sigma_X$  y comúnmente no se conoce. Por lo tanto, se suele utilizar una estimación de  $\sigma_X^2$ , en particular, una estimación insesgada es

$$s_X^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2.$$

### 2.4.1. Método de la transformada inversa

A continuación presentamos el método de la transformada inversa, herramienta que nos servirá para algunos esquemas de discretización, y que es útil cuando se puede calcular fácilmente la función de distribución acumulada inversa  $F_X^{-1}$ , es decir, tiene una forma cerrada, para más detalles, se puede consultar en la sección 2.3 de [37, Tanizaki, pág 122].

**Teorema 56.** (*Método de la transformada inversa*) Sea  $X$  una variable aleatoria que tiene una función de distribución acumulada  $F_X$ .

$$\text{Cuando } U \sim U(0, 1), \text{ se tiene } X = F_X^{-1}(U).$$

*Demostración.* La prueba es obtenida del hecho que

$$\mathbb{P}(F_X^{-1}(U) < x) = \mathbb{P}(U < F_X(x)) = F_X(x) = \mathbb{P}(X < x).$$

□

El Teorema 56, nos ayuda a generar números aleatorios con distribución  $F_X$ , cuando se conoce  $F_X^{-1}$ . Si se conoce  $F_X$  pero no se conoce explícitamente  $F_X^{-1}$ , lo que se puede aplicar es un método iterativo (ver [37, Tanizaki, pág 122]).

## 2.5. Teoría financiera

### 2.5.1. Opciones financieras

En esta subsección definiremos el instrumento financiero que preciamos (la opción Call europea), para una mejor comprensión desarrollamos las siguientes definiciones. Hay dos tipos de opciones.

- **Opción Call** (Opción de Compra): le otorga al titular, el derecho (pero no la obligación) a comprar el activo subyacente en una fecha determinada (fecha de vencimiento) por un precio determinado (Strike).
- **Opción put** (Opción de Venta): le otorga al titular el derecho (pero no la obligación) a vender el activo subyacente en una fecha determinada (fecha de vencimiento) por un precio determinado (Strike).

El precio pactado en el contrato se conoce como *precio de ejercicio* o *Strike*, la fecha en el contrato se conoce como la fecha de vencimiento o madurez.

Las **opciones Americanas** se pueden ejercer en cualquier momento hasta la fecha de vencimiento, mientras que las **opciones Europeas** solo se pueden ejercer en la fecha de vencimiento. Las opciones europeas son generalmente más fáciles de analizar que las opciones americanas, y algunas de las propiedades de una opción americana se deducen, con frecuencia, de las de su contraparte europea.

*Observación 57.* Se debe enfatizar que una opción le da al titular el derecho de hacer algo. El titular no está obligado a ejercer este derecho. Esto es lo que distingue a las opciones de los futuros, donde el titular está obligado a comprar o vender el activo subyacente.

*Observación 58.* Si bien no cuesta nada adquirir un contrato futuro, hay un costo para adquirir una opción (Prima). El mayor intercambio en el mundo para la negociación de opciones sobre acciones es el Chicago Board Options Exchange (CBOE).

A continuación definimos dos tipos de opciones europeas. Aunque en este trabajo sólo nos centraremos en la opción de compra europea. Pero que debido a la relación (2.40) de Paridad (Put-Call Parity) se puede fácilmente llevar a la opción de venta europea.

**Definición 59.** (Opción europea call)

Una opción de compra europea es un contrato que llegada la fecha de vencimiento  $T$ , le otorga a su titular el derecho, pero no la obligación, de comprar una unidad de un activo subyacente a un precio de ejercicio  $K$  predeterminado. Si  $S_T$  denota el precio del activo subyacente en el tiempo de vencimiento  $T$  (precio de mercado), entonces el valor de este contrato al vencimiento (su pago), está dado por,

$$\max(S_T - K, 0) = \begin{cases} S_T - K, & \text{si } S_T > K, \\ 0, & \text{si } S_T \leq K. \end{cases}$$

Como se observa, si llegada la madurez del contrato, se observa que  $S_T > K$ , entonces el titular ejercerá su derecho, y comprará un activo subyacente al precio  $K$ , para venderlo inmediatamente al precio de mercado igual a  $S_T$ , obteniendo así un pago del contrato de  $S_T - K$ . En caso se observe que  $S_T \leq K$ , el titular no ejercerá su derecho por lo que el pago del contrato será de 0.

**Definición 60.** (Opción europea Put)

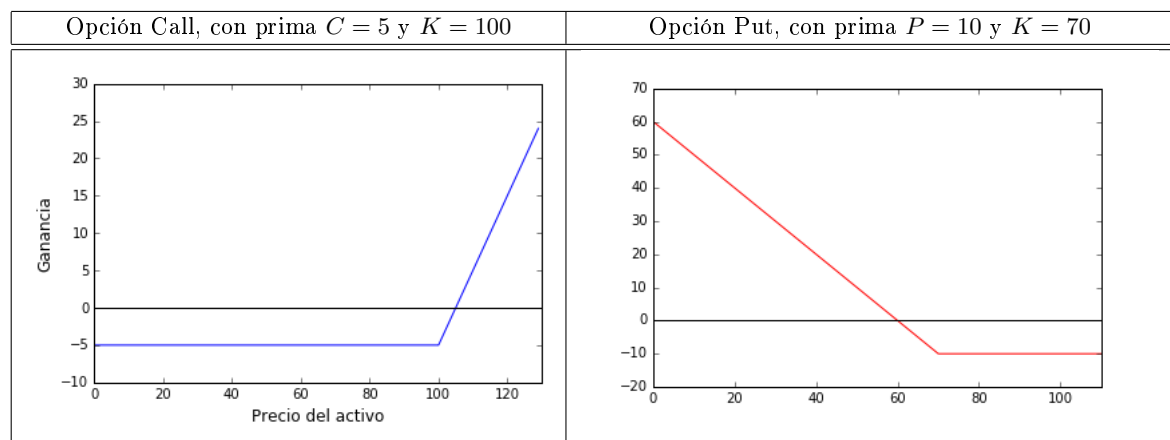
Una opción de venta europea es un contrato que llegada la fecha de vencimiento  $T$ , le otorga a su titular el derecho, pero no la obligación, de vender una unidad de un activo subyacente a un precio de ejercicio  $K$  predeterminado. Si  $S_T$  denota el precio del activo subyacente en el tiempo de vencimiento  $T$ , entonces el valor de este contrato al vencimiento, su pago, está dado por,

$$\max(S_T - K, 0) = \begin{cases} K - S_T, & \text{si } S_T < K, \\ 0, & \text{si } S_T \geq K. \end{cases}$$

Como se observa, si llegada la madurez del contrato, se observa que  $S_T < K$ , entonces el titular comprará inmediatamente una unidad de activo subyacente al precio de mercado igual a  $S_T$ , y ejercerá su derecho, vendiéndolo al precio  $K$ , obteniendo así un pago del contrato de  $K - S_T$ . En caso se observe que  $S_T \geq K$ , el titular no buscará ejercer su derecho por lo que el pago del contrato será de 0.

En la figura 2.5, se observa la ganancia neta que obtiene el titular de una opción de compra (lado izquierdo) y el titular de una opción de venta (lado derecho) en función al precio del activo subyacente. notemos que si la opción no se ejerce, el titular sólo pierde la prima invertida en la compra de la opción.

Figura 2.5: Ganancia neta de titular por la compra de una Opción Europea



Fuente : Elaboración Propia

### 2.5.2. Retornos

La mayoría de los estudios financieros involucran retornos, en lugar de precios de activos. En [22, Campbell, Lo, MacKinlay] se dan dos razones principales para usar los Retornos. Primero, para los inversionistas promedio, los Retornos de un activo es un resumen completo, sin escala, de la oportunidad de inversión. Segundo, las series de retornos son más fáciles de manejar que

las series de precios porque las primeras tienen propiedades estadísticas más atractivas. Hay, sin embargo, varias definiciones de un Retorno del activo que las presentamos a continuación.

**Definición 61.** *Retorno (Retorno simple de un periodo)* Sea  $S_t$  el precio de un activo en el tiempo  $t$ . El Retorno de un activo por un período de la fecha  $t - 1$  hasta la fecha  $t$  resultaría en un Retorno simple:

$$r_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}, \quad \text{además, se define el Retorno Simple Bruto como: } 1 + r_t$$

**Definición 62.** *(Retorno compuesto continuamente)* El logaritmo natural del Retorno Simple Bruto de un activo se denomina Retorno compuesto continuo o Log-retorno:

$$R_t = \ln(1 + r_t) = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \ln S_t - \ln S_{t-1},$$

*Observación 63.* Muchas veces se prefiere usar los Log-retornos en lugar de los Retornos, pues como se afirma en [42, R.Tsay, pág 5], las propiedades estadísticas de los primeros son más manejables.

*Observación 64.* Cabe resaltar que cuando  $r_t$  es suficientemente pequeño (cerca de cero), se tiene que  $R_t \approx r_t$ , esto es por el hecho que

$$\ln(1 + x) \approx x, \quad \text{para } x \text{ cercano a cero.}$$

Las siguientes definiciones nos ayudan a entender el cálculo de traer a valor presente un determinado precio.

**Definición 65.** *(Interés compuesto)* Si se deposita un capital  $C_I$ , durante un intervalo de tiempo  $\Delta t$  (en años) y a una tasa de interés anual  $r$  capitalizable  $m$  veces al año (por ejemplo, si es capitalizable bimestralmente,  $m = 6$ ). El capital final es:

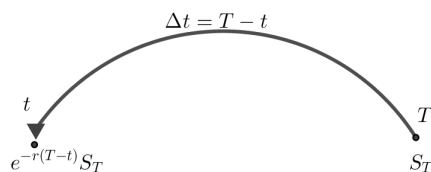
$$C_F = C_I \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \times \Delta t}. \quad (2.37)$$

**Definición 66.** *(Interés compuesto continuamente)* Es un interés compuesto donde la capitalización se hace en intervalo de tiempo infinitesimal, es decir, en la expresión (2.37) se hace  $m \rightarrow \infty$ , así el capital final es:

$$C_F = \lim_{m \rightarrow +\infty} C_I \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \times \Delta t} \Rightarrow C_F = C_I e^{r \times \Delta t}.$$

*Observación 67.* *(Cálculo del valor presente de un precio)* Para traer un precio en el instante  $T$ ,  $S_T$  (que ha estado sujeto a un interés compuesto continuamente de tasa  $r$ ) a valor presente (instante  $t$ ), basta con multiplicarlo por  $e^{-rt}$ . Esto se ilustra en la figura 2.6.

Figura 2.6: Cálculo del valor presente de un precio



Fuente : Elaboración Propia

### 2.5.3. Volatilidad

La volatilidad de un activo es una medida de la incertidumbre sobre los rendimientos proporcionados por dicho activo. Las acciones suelen tener una volatilidad entre el 15 % y el 60 % [16, Gatheral]. Se suelen utilizar dos enfoques básicos para su estimación, la volatilidad implícita y la volatilidad histórica.

**Definición 68.** (*Volatilidad implícita*) Sea  $C_t(K, T)$  el precio de mercado de una opción de compra europea estándar (en el momento  $t \in [0, T)$ ) con precio de ejercicio  $K > 0$  y fecha de vencimiento  $T$ . La volatilidad implícita (Black-Scholes)  $\sigma_t(K, T)$  se define como el valor del parámetro de volatilidad que iguala el precio de mercado de la opción con el precio dado por la fórmula de Black-Scholes, es decir:

$$C_t(K, T) = C_{BS}(t, S_t, K, T, r, \sigma_t(K, T)). \quad (2.38)$$

Las discusiones que involucran volatilidades implícitas comúnmente también incorporan otras dos nociones de volatilidad con significados muy diferentes: *volatilidad instantánea* y *volatilidad realizada* (también llamada *histórica*). Mientras que la volatilidad implícita se deduce del precio de mercado de una opción, los conceptos de volatilidad instantánea y volatilidad realizada se basan en el proceso de precios de las acciones subyacentes. El término volatilidad instantánea o real se refiere precisamente a la volatilidad que aparece en la EDE que describe la evolución del activo subyacente ( $\sigma$  en (2.20)). En general, éste término no se puede observar directamente.

Los datos históricos también se pueden usar para estimar el parámetro de volatilidad, que luego se puede usar para calcular los valores de las opciones teóricas. El enfoque más natural utiliza una estimación de la desviación estándar basada en los retornos de stock compuestos expost (Basado en resultados reales en lugar de pronósticos) de forma continua medidos durante un período de muestra específico en el pasado. Esta estimación suele denominarse volatilidad realizada o histórica.

**Definición 69.** (*Volatilidad realizada*) Supongamos que podemos observar el proceso del precio de la acción  $S$  bajo la medida física  $\mathbb{P}$  en  $N^* + 1$  puntos equidistantes en el tiempo hasta,  $t_0, t_1, \dots, t_{N^*}$ , donde  $\Delta t$  denota la longitud del intervalo de muestreo, es decir,  $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ ,  $n = 1, \dots, N^*$ . El precio de las acciones en el momento  $t_n$  se denota por  $S_{t_n}$ . Luego, la volatilidad

realizada (o volatilidad histórica)  $\hat{v}_{t_n}(N)$  de las acciones en el momento actual  $t_n$  para los últimos  $N$  periodos,  $N \leq n \leq N^*$ , se define como la desviación estándar muestral anualizada de los retornos de las acciones continuamente compuestos  $R_{t_n} = \ln\left(\frac{S_{t_n}}{S_{t_{n-1}}}\right)$ :

$$\hat{v}_{t_n}(N) = \sqrt{\frac{1}{\Delta t(N-1)} \sum_{i=1}^N (R_{t_{n-i+1}} - \bar{R}_{t_n}(N))^2}, \quad (2.39)$$

donde  $\bar{R}_{t_n}(N)$  es la media muestral de  $N$ -periodo en el tiempo  $t_n$ :

$$\bar{R}_{t_n}(N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_{t_{n-i+1}}.$$

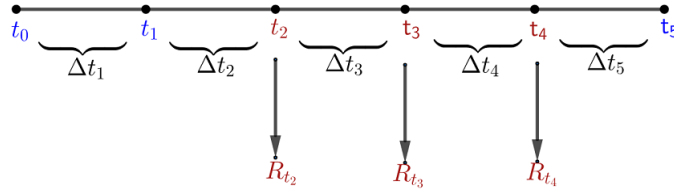
**Ejemplo 70.** Consideremos, por ejemplo,  $N = 3$  y  $N^* = 5$ , de la definición 69, se observa que sólo podemos hablar de  $\hat{v}_{t_3}(N)$ ,  $\hat{v}_{t_4}(N)$ , y  $\hat{v}_{t_5}(N)$ . Si deseamos calcular  $\hat{v}_{t_4}(N)$ , se presenta la situación mostrada en la figura 2.7, con lo cual

$$\hat{v}_{t_4}(3) = \sqrt{\frac{1}{\Delta t(2)} \sum_{i=1}^3 (R_{t_{4-i+1}} - \bar{R}_{t_4}(3))^2},$$

donde

$$\bar{R}_{t_4}(3) = \frac{R_{t_2} + R_{t_3} + R_{t_4}}{3}$$

Figura 2.7: Situación del cálculo de  $\hat{v}_{t_4}(N)$ , para  $N = 3$  y  $N^* = 5$



Fuente: Elaboración propia

*Observación 71.* Bajo los supuestos del modelo de Black-Scholes, la volatilidad realizada (y la media muestral) es independiente de  $n$ , es decir,

$$\hat{v}_{t_n}(N) = \hat{v}, \forall n : N \leq n \leq N^*.$$

Estadísticamente,  $\hat{v}$  es un estimador consistente del parámetro de volatilidad constante  $v$ . Puede demostrarse que su error estándar es aproximadamente  $\frac{\hat{v}}{\sqrt{2N}}$ .

*Observación 72. (Terminología)* Supongamos que la fecha actual es  $t_0$ . Luego, la volatilidad implícita  $\sigma_t(K, T)$  en el momento  $t$  se denomina más precisamente la *volatilidad implícita spot*,

si  $t = t_0$ , la *volatilidad implícita pasada o histórica*, si  $t < t_0$ , y la *volatilidad implícita futura*, si  $t > t_0$ . La misma terminología se aplica a todos los demás tipos de volatilidad utilizados en todo el proceso, a excepción de la volatilidad realizada (o histórica), que, por definición, está relacionada con el pasado.

*Observación 73.* En ausencia de arbitraje y fricciones del mercado, la volatilidad implícita de una opción de venta europea y una opción de compra europea con el mismo precio de ejercicio y la misma fecha de vencimiento debe coincidir (si las acciones subyacentes no pagan dividendos). Para ver esto, supongamos que, para un valor particular de  $v$ ,  $C_{BS}(t, S_t, K, T, r, v)$  y  $P_{BS}(t, S_t, K, T, r, v)$  son los valores de las opciones de compra y venta europeas (Black-Scholes) en el tiempo  $t$ , con precio de ejercicio  $K$  y fecha de vencimiento  $T$ . Debido a que la paridad put-call es satisfecha por el modelo Black-Scholes, tenemos

$$C_{BS}(t, S_t, K, T, r, v) - P_{BS}(t, S_t, K, T, r, v) = S_t - Ke^{-r(T-t)}. \quad (2.40)$$

Como la paridad put-call también se cumple para los precios de mercado:

$$C_t(K, T) - P_t(K, T) = S_t - Ke^{-r(T-t)}, \quad (2.41)$$

al restar de (2.40) la expresión (2.41)

$$C_{BS}(t, S_t, K, T, r, v) - C_t(K, T) = P_{BS}(t, S_t, K, T, r, v) - P_t(K, T).$$

Ahora si reemplazamos  $v = \sigma_t(K, T)$ , y teniendo en cuenta la expresión (2.38), tenemos

$$P_t(K, T) = P_{BS}(t, S_t, K, T, r, \sigma_t(K, T)).$$

Este argumento muestra que, en el caso de una opción europea estándar, no debería importar si uno usa un precio de compra o un precio de venta para invertir la volatilidad implícita.

## 2.6. El modelo de Black-Scholes-Merton

En esta sección se pretende dar una exposición (ver detalles en el apéndice B) del popular modelo de Black-Scholes-Merton, que bajo ciertos supuestos calcula el precio (la prima) de una Opción Call Europea. Mientras que Black y Scholes utilizaron el Modelo de Preciación de Activos de Capital (CAPM) para determinar la relación entre el retorno requerido del mercado sobre la opción y el retorno requerido sobre la acción. Esto no fue fácil porque la relación depende tanto del precio de las acciones como del tiempo; el enfoque de Merton (diferente al de Black y Scholes) implica establecer un portafolio sin riesgo que consiste en la opción y la acción subyacente, luego argumentar que el retorno del portafolio en un período de tiempo corto debe ser el retorno libre de riesgo. El enfoque de Merton fue más general que el de Black y Scholes porque no se basó en



los supuestos del modelo de apreciación de activos de capital.

### 2.6.1. Ecuación Diferencial Parcial Black-Scholes-Merton

#### Suposiciones del Modelo

Los supuestos que se utiliza para deducir la ecuación diferencial de Black-Scholes-Merton son los siguientes:

1. El precio de las acciones sigue el proceso

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (2.42)$$

(2.42) con  $\sigma$  y  $\mu$  constantes.

2. Se permite la venta en corto de valores con uso completo de los ingresos.
3. No hay costos de transacción ni impuestos. Todos los valores son perfectamente divisibles.
4. No existen dividendos durante la vida del derivado.
5. No hay oportunidades de arbitraje sin riesgo.
6. El comercio de seguros es continuo.
7. La tasa de interés libre de riesgo,  $r$ , es constante y la misma para todas las fechas de vencimiento.

La ecuación diferencial de Black-Scholes-Merton es:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf. \quad (2.43)$$

La ecuación (2.43) tiene muchas soluciones, que corresponden a todos los diferentes derivados que pueden definirse siendo  $S_t$  la variable subyacente. El derivado particular que se obtiene cuando se resuelve la ecuación depende de las *condiciones de contorno* que se utilizan. Estos especifican los valores del derivado en los límites de valores posibles de  $S_t$  y  $t$ . En el caso de una opción de compra europea, la condición de contorno clave es

$$f = \text{máx}(S - K, 0) \quad \text{cuando } t = T$$

*Observación 74.* Cualquier función  $f(S_t, t)$  que sea una solución de la ecuación diferencial (2.43) es el precio teórico de un derivado que podría comercializarse. Si existiera un derivado con ese precio, no crearía ninguna oportunidad de arbitraje. Inversamente, si una función  $f(S_t, t)$  no satisface la ecuación diferencial (2.43), no puede ser el precio de un derivado sin crear oportunidades de arbitraje.

### 2.6.2. Fórmula de Black-Scholes para el precio de una Opción Call

A continuación se presenta la fórmula para calcular el precio de una Opción Call europea

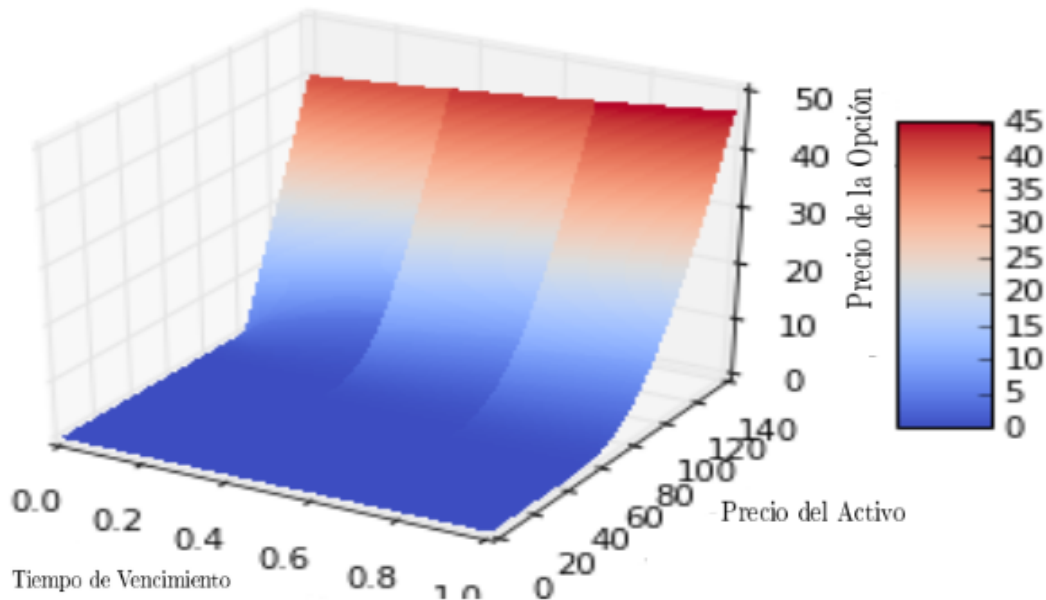
$$c_t = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (2.44)$$

donde

$$d_1 := \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad \text{y} \quad d_2 := \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

La figura 2.8 muestra cómo el precio de Black-Scholes cambia cuando el precio de ejercicio  $K$ , la volatilidad  $\sigma$ , y la tasa de interés  $r$  se mantienen constante, mientras que el tiempo hasta el vencimiento  $T$  y el precio de las acciones  $S$  varían. Se puede observar que el precio de la opción aumenta a medida que el precio de las acciones y el tiempo hasta el vencimiento aumentan.

Figura 2.8: El precio Black-Scholes de una Opción Call Europea con  $\sigma = 0,3$ ,  $r = 0,05$  y  $K = 100$



Fuente : Elaboración Propia

## 2.7. Limitaciones del Modelo Black-Scholes-Merton

El modelo de Black-Scholes ha establecido una base tan importante en ingeniería financiera en los últimos 30 años y ha sido realmente reconocido tanto por el mundo académico como por los profesionales, pero también es bien conocido y aceptado que este modelo no es tan preciso para capturar las características en los mercados de valores en realidad.

Existen varios inconvenientes importantes del modelo de Black-Scholes, principalmente porque las suposiciones idealizadas rara vez se cumplen en el mundo real. En primer lugar, la suposición de una distribución Normal de los Log-retornos está siendo criticada desde 1963 por Mandelbrot [28, Mandelbrot]. Los factores combinados de eventos extremos, colas gruesas, pico alto y efectos de agrupamiento de volatilidad hacen que el supuesto de distribución gaussiana no sea el más apropiado. En segundo lugar, la sonrisa de volatilidad es una evidencia de violación del supuesto de volatilidad constante. Los inconvenientes mencionados se tratarán con mayor detalle en las siguientes subsecciones.

### 2.7.1. Deficiencias de la Distribución Normal o Gaussiana

Los economistas creían que los precios en los mercados especulativos, tal como el mercado de valores, se comportan de manera muy similar a caminatas aleatorias, los que se basan en dos supuestos:

1. los cambios de precios son variables aleatorias independientes, y
2. los cambios se ajustan a alguna distribución de probabilidad

En [28, Mandelbrot, 371-418] se desafió esta larga creencia de que los cambios de precios en un mercado especulativo son aproximadamente gaussianos.

A continuación se presenta algunas características de la distribución Normal. En el estudio de las series cronológicas financieras, es un concepto para describir la distribución de retorno real, donde los datos o la variable se convierten en grupos alrededor de la media. Para una distribución gaussiana, los dos parámetros fundamentales son la media  $\mu$  y la varianza  $\sigma^2$ . Entonces su función de densidad de probabilidad está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Algunas propiedades notables de la distribución gaussiana son las siguientes:

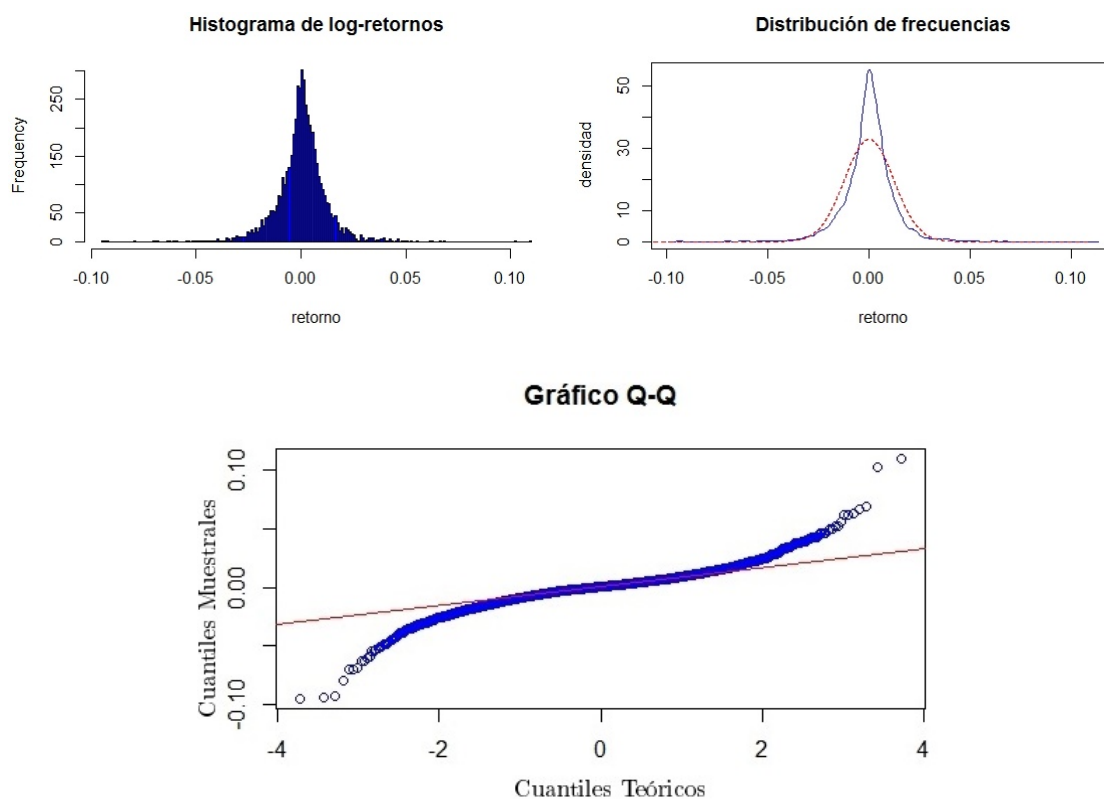
1. Simetría alrededor de su media  $\mu$ .
2. Tanto la Moda como la mediana son iguales a la media  $\mu$ ,
3. los puntos de inflexión (puntos donde la curva cambia de concavidad) de la curva se producen a una desviación estándar de la media, es decir, en  $\mu - \sigma$  y  $\mu + \sigma$ ,
4. la Curtosis (medida que describe el pico de una distribución) es igual a 3.

Desafortunadamente, estas propiedades no son adecuadas para capturar la probabilidad de eventos extremos en el mercado. Por ejemplo, el desplome del mercado de valores en Octubre de 1987. Siguiendo el paradigma estándar, los retornos del mercado de valores se distribuyen lognormalmente con una volatilidad anualizada del 20% (como ya se mencionó en la subsección 2.5.3, por

lo general se cree que está entre el 15% y el 60%). El 19 de octubre de 1987, el precio de los futuros de S&P 500 a dos meses cayó un 29%. Bajo el supuesto lognormal y según el cálculo de la función de densidad de probabilidad, la probabilidad de este evento es  $10^{-160}$ , lo cual es prácticamente imposible. En la historia del mercado de valores, este no es el único evento con poca probabilidad que haya ocurrido realmente.

Además de la dificultad de lidiar con eventos históricos extremos, la investigación empírica ha demostrado que las distribuciones de retorno reales en el mercado de valores tienen colas más gruesas y un pico más alto que la distribución Normal. En la figura 2.9 (superior), la distribución de frecuencias de los Log-retornos diarios de SPX y se compara con la distribución Normal (curva punteada de color rojo). La distribución de los Log-retorno de SPX es altamente puntiaguda y de cola gruesa en comparación con la distribución Normal. La gráfica Q-Q en la figura 2.9(inferior) muestra cuán extremas son las colas de la distribución empírica de los retornos en relación con la distribución Normal. Esta gráfica sería una línea recta (coincidiría con la línea roja), si la distribución empírica fuera Normal. Las colas gruesas y el alto central alto son características de la mezcla de distribuciones con diferentes varianzas. Esto nos motiva a modelar la varianza como una variable aleatoria.

Figura 2.9: Violación del supuesto de Distribución Gaussiana en los Log-Retornos



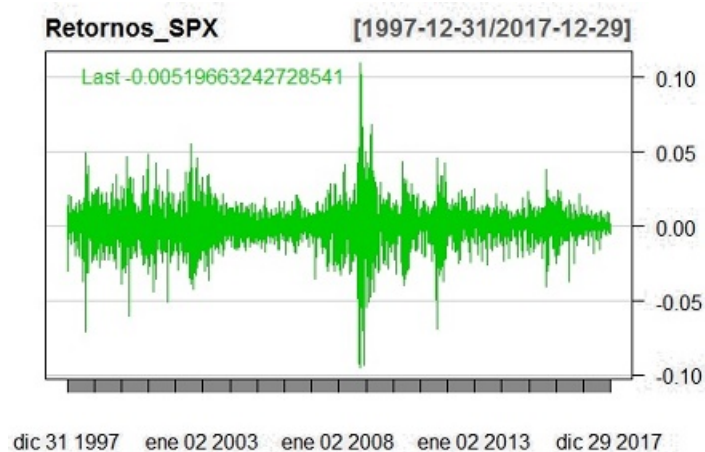
Fuente: Elaboración propia

### 2.7.2. Efecto clustering y apalancamiento

Otro inconveniente es el denominado agrupamiento de volatilidad. Esto significa que los movimientos grandes en el mercado son seguidos por movimientos grandes, mientras que los movimientos pequeños son seguidos por movimientos pequeños, una característica que obviamente no puede ser capturada por un modelo que asume una volatilidad constante. Se puede observar esta tendencia en la Figura 2.10, donde trazamos los Log-retornos de SPX en un período de 20 años. Esto implica que, en realidad, la volatilidad de los Log-retornos se autocorrelaciona. En el modelo, esto es una consecuencia de la reversión media de la volatilidad. Esta fuerte correlación negativa entre los precios actuales de las acciones y sus volatilidades futuras, llamada efecto de apalancamiento, fue notada por primera vez por Black [9, Black] en 1976, quien también menciona: “Se cree durante mucho tiempo que los retornos de las acciones están relacionados con los cambios de volatilidad. Cuando las acciones suben, la volatilidad parece bajar; y cuando las acciones bajan, las volatilidades parecen subir”. Esto también podría explicarse desde la intuición. Cuando el retorno del capital se vuelva negativo, las reacciones de los inversores serán más

volátiles, por lo que la volatilidad aumentará. Por el contrario, cuando el retorno sea positivo, los inversionistas ganarán más confianza en el mercado especulativo; por lo tanto la volatilidad en el futuro cercano disminuiría. Por lo tanto, esto también es una implicación de que el supuesto de volatilidad constante está muy lejos de la realidad.

Figura 2.10: Evidencia del efecto clustering en Log-retornos de SPX



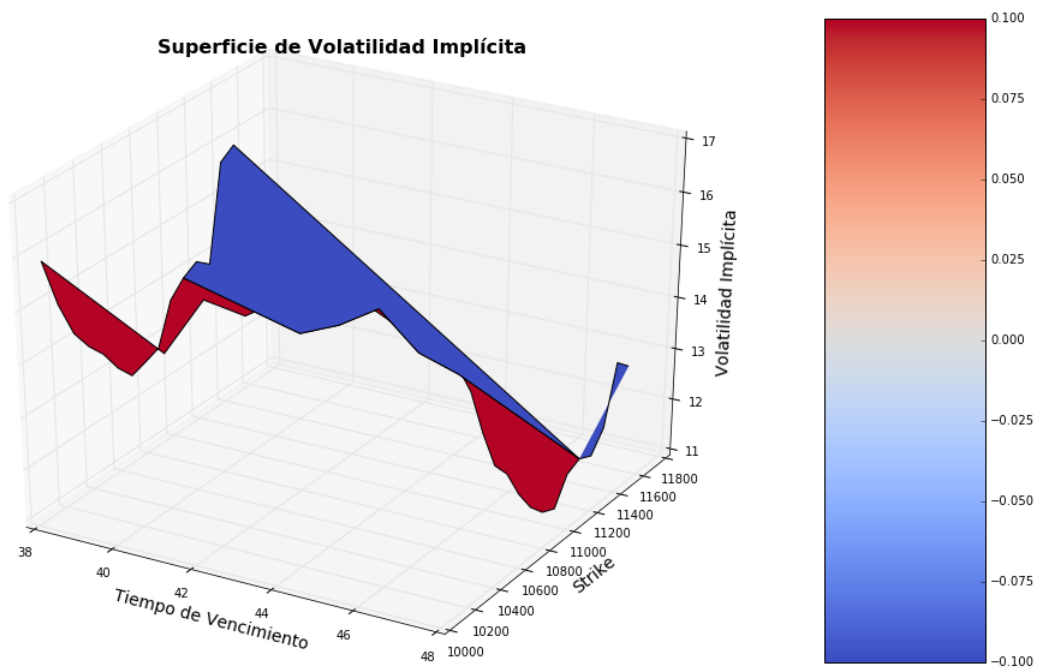
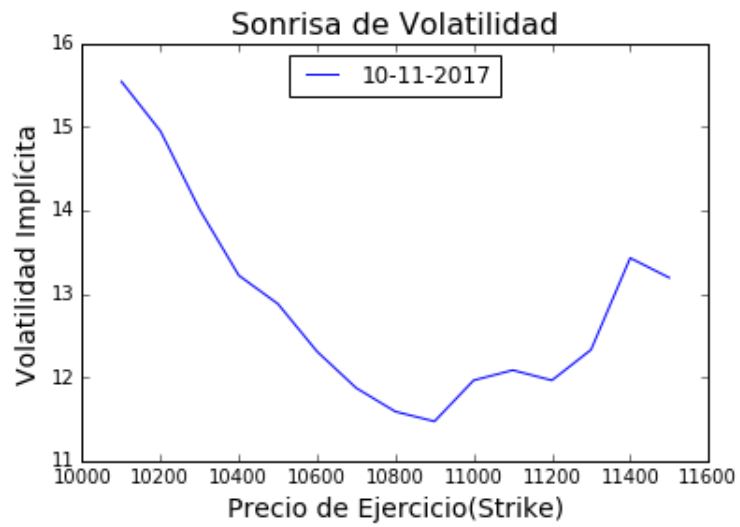
Fuente: Elaboración propia

### 2.7.3. Sonrisa de volatilidad

Recordemos de la definición 68, la volatilidad implícita es la volatilidad de los activos subyacentes que, cuando se sustituye en la fórmula de Black-Scholes, da un precio teórico igual al precio de mercado. Si el supuesto de volatilidad constante en el modelo de Black-Scholes se cumpliera en el mercado, la volatilidad implícita del subyacente con diferentes vencimientos y Strikes debería ser el mismo. En otras palabras, al utilizar el modelo de precios de opciones de Black-Scholes, para opciones con la misma fecha de vencimiento, se espera que la volatilidad implícita sea la misma independientemente del valor del precio de ejercicio.

Como se ve en la figura 2.11, la llamada *sonrisa de volatilidad*, que contradice la realidad del mercado. La forma característica de la curva (figura superior) indica que las volatilidades implícitas para las opciones de OTM (Out-the-money) son generalmente más altas que las de las opciones de ATM (At-the-money). En la figura 2.11, para las opciones Call Europeas Nifty50 (datos de mercado), se calculó las volatilidades implícitas. En [21, Jackwerth,Rubinstein] y muchos otros artículos se han estudiado el fenómeno de la sonrisa de volatilidad para las opciones de capital. La Figura 2.11 (inferior) muestra cómo la volatilidad implícita cambia para tiempos de vencimientos diferentes. Esto se ha observado más ampliamente después de la caída del mercado de valores en octubre de 1987, debido a que la superficie de volatilidad rara vez se mantuvo plana después.

Figura 2.11: Evidencias de Volatilidad no constante



Fuente: Elaboración propia

Pero a pesar de estas limitaciones de supuestos idealistas, que claramente no son adecuados para el mercado real, el modelo Black-Scholes todavía se usa ampliamente. La razón principal es simplemente su fácil capacidad de análisis, que resulta en fórmulas simples para la mayoría

de los problemas de precios. También es bastante preciso para las opciones vanilla de ATM, pero se debe tener cuidado al usar los precios de Black-Scholes para opciones OTM profundas u opciones exóticas; en estos casos, los precios de mercado pueden mostrar grandes desviaciones de los precios teóricos de Black-Scholes.

Todos los factores mencionados anteriormente están en contra del supuesto de una distribución gaussiana y señalan la necesidad de pasar del supuesto de volatilidad constante a la volatilidad estocástica.



## Capítulo 3

# El Modelo de Heston

Como se menciona en [15, Vainberg, pág 137]: “Algunos autores concluyen que la mejoría más importante sobre el modelo de Black-Scholes se logra introduciendo volatilidad estocástica en los modelos de precios de opciones. Una vez hecho esto, la introducción de saltos y tasas de interés estocásticas sólo conduce a reducciones marginales en los errores de preciación de opciones”. Teniendo en cuenta ello, en este trabajo de tesis nos centramos en uno de los modelos más populares de volatilidad estocástica, el modelo de Heston, en el que a comparación del modelo de Black-Scholes (volatilidad constante), se considera que la volatilidad sigue un proceso estocástico, lo que permite una correlación arbitraria (pero constante) entre la volatilidad y el precio del activo subyacente.

En este capítulo se brinda una exposición al detalle del modelo de Heston. Primero se da una descripción del modelo, luego se brinda una deducción para llegar a la EDP Heston ([19, Heston]). Para esta capítulo seguimos de cerca el artículo [19, Heston], así como [14, Fabrice].

### 3.1. Descripción del Modelo de Heston

El modelo asume un proceso de difusión para el precio de la acción que es idéntico al asumido en el modelo de Black-Scholes, excepto que se permite que la volatilidad varíe estocásticamente en el tiempo (por lo que el proceso de Precio ya no es un movimiento Browniano Geométrico). Por lo tanto, este modelo viene a ser una generalización del modelo de Black-Scholes para la volatilidad variable en el tiempo.

Se asume que los precios del activo subyacente en el tiempo  $t$ , siguen la difusión

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1,t}, \quad (3.1)$$

donde  $\mu$  es el parámetro de drift, y  $W_{1,t}$  es un movimiento Browniano. y que la volatilidad  $\sqrt{\nu_t}$ , sigue un proceso Ornstein-Uhlenbeck (OU), es decir,

$$d\sqrt{\nu_t} = -\beta\sqrt{\nu_t}dt + \delta dW_{2,t}, \quad (3.2)$$

donde  $W_{2,t}$  es un movimiento Browniano que tiene correlación  $\rho$  con  $W_{1,t}$ . El parámetro  $\rho$  comúnmente es interpretado como el efecto apalancamiento (*leverage effect*). Además,

$$E^{\mathbb{P}} [dW_{1,t}dW_{2,t}] = \rho dt.$$

*Observación 75.* Para simplificar la implementación del modelo, se aplica el lema de Itô (teorema 42), para obtener el proceso de varianza  $\nu_t$ . Para ello se considera

$$g(t, x) = x^2 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2,$$

donde  $X_t = \sqrt{\nu_t}$ , y con lo cual

$$d\nu_t = (\delta^2 - 2\beta\nu_t) dt + 2\delta\sqrt{\nu_t}dW_{2,t}, \quad (3.3)$$

si se hace

$$\kappa = 2\beta, \quad \theta = \frac{\delta^2}{2\beta}, \quad \text{y} \quad \sigma = 2\delta, \quad (3.4)$$

la expresión (3.3) puede escribirse como un proceso de Cox, Ingersoll y Ross :

$$d\nu_t = \kappa[\theta - \nu_t]dt + \sigma\sqrt{\nu_t}dW_{2,t} \quad (3.5)$$

donde los parámetros del modelo son:

- $\theta > 0$       La media de largo plazo de la varianza;
- $\kappa > 0$       Velocidad de reversión a la media;
- $\sigma > 0$       La Volatilidad de la Varianza;
- $\nu_0 > 0$       Nivel de Varianza inicial;
- $\rho \in [-1, 1]$       La correlación entre los movimientos Brownianos  $W_1$  y  $W_2$ . Es una medida de los co-movimientos entre  $S_t$  y  $\nu_t$ .

*Observación 76.* Note que en este modelo se asume una dependencia lineal entre  $S_t$  y  $\nu_t$ .

*Observación 77.* En la ecuación (3.5) del modelo, el término estocástico  $\sigma\sqrt{\nu_t}dW_{2,t}$  tiene una desviación estándar proporcional a la raíz cuadrada de la varianza actual. Esto implica que a medida que aumenta la varianza, aumenta su desviación estándar (de la varianza  $\nu_t$ ) y a medida que cae y se aproxime a cero, el término estocástico también se aproxima a cero.

### 3.1.1. Propiedades del Proceso de Varianza

Con el fin de deducir la distribución que sigue  $v_t$  condicionada a  $v_s$ , se presenta la siguiente afirmación.

*Afirmación 78.* La variable aleatoria  $\sqrt{v_t}$ , condicionada a  $\sqrt{v_s}$  (para  $t > s$ ) sigue una distribución Normal con

$$\begin{aligned} E \left[ \sqrt{v_t} \middle| \sqrt{v_s} = \sqrt{v_s} \right] &= e^{-\beta(t-s)} \sqrt{v_s} \text{ y} \\ \text{Var} \left[ \sqrt{v_t} \middle| \sqrt{v_s} = \sqrt{v_s} \right] &= \frac{\delta^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta(t-s)}), \end{aligned}$$

equivalentemente con los cambios de (3.4),

$$\begin{aligned} E \left[ \sqrt{v_t} \middle| \sqrt{v_s} = \sqrt{v_s} \right] &= e^{-\frac{\kappa}{2}(t-s)} \sqrt{v_s} \text{ y} \\ \text{Var} \left[ \sqrt{v_t} \middle| \sqrt{v_s} = \sqrt{v_s} \right] &= \theta (1 - e^{-\kappa(t-s)}), \end{aligned}$$

*Demostración.* De la ecuación (3.2),

$$d\sqrt{v_t} = -\beta\sqrt{v_t}dt + \delta dW_{2,t},$$

considerando

$$X_t = \sqrt{v_t}, \tag{3.6}$$

si aplicamos el lema de Itô (teorema 42) a

$$Y_t = g(t, X_t) = e^{\beta t} X_t,$$

se tiene

$$\begin{aligned} d(X_t e^{\beta t}) &= \beta X_t e^{\beta t} dt + e^{\beta t} dX_t \\ &= \beta X_t e^{\beta t} dt + e^{\beta t} (-\beta X_t dt + \delta dW_{2,t}) \\ &= \delta e^{\beta t} dW_{2,t} \end{aligned}$$

integrando desde  $s$  hasta  $t$ , tenemos

$$X_t e^{\beta t} - X_s e^{\beta s} = \int_s^t \delta e^{\beta u} dW_{2,u} \Rightarrow X_t = X_s e^{-\beta(t-s)} + \delta \int_s^t e^{-\beta(t-u)} dW_{2,u}. \tag{3.7}$$

Notemos de (3.7), que  $X_t$  es una suma de un término determinista ( $X_s$  es conocido en el instante  $s$ ) y una integral de una función determinista con respecto a un movimiento Browniano de incrementos normalmente distribuidos. Así, es fácil ver que la distribución de  $X_t$  es Normal. Además

$$\begin{aligned} E \left[ X_t \middle| X_s = x_s \right] &= E \left[ X_s e^{-\beta(t-s)} + \delta \int_s^t e^{-\beta(t-u)} dW_{2,u} \middle| X_s = x_s \right] \\ &= e^{-\beta(t-s)} \underbrace{E \left[ X_s \middle| X_s = x_s \right]}_{=x_s} + \delta \underbrace{E \left[ \int_s^t e^{-\beta(t-u)} dW_{2,u} \right]}_{=0} \end{aligned}$$

Así,

$$E \left[ X_t \mid X_s = x_s \right] = e^{-\beta(t-s)} x_s,$$

también, de la definición de varianza

$$\text{Var} \left[ X_t \mid X_s = x_s \right] = E \left[ \left( X_t - E \left[ X_t \mid X_s = x_s \right] \right)^2 \mid X_s = x_s \right] = E \left[ \left( \delta \int_s^t e^{-\beta(t-u)} dW_{2,u} \right)^2 \mid X_s = x_s \right],$$

y usando la isometría de Itô (proposición 105),

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \delta \int_s^t e^{-\beta(t-u)} dW_{2,u} \right)^2 \mid X_s = x_s \right] &= \delta^2 E \left[ \int_s^t e^{-2\beta(t-u)} du \right] \\ \Rightarrow \text{Var} \left[ X_t \mid X_s = x_s \right] &= \frac{\delta^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta(t-s)}). \end{aligned}$$

□

A continuación se presenta una proposición que es una versión de [12, Cox, pág 392], que es de gran utilidad para la simulación del modelo y cuya demostración está inspirado en [11, Cairns, pág 68].

**Proposición 79.** *La variable aleatoria  $v_t$ , condicionada a  $v_s$  (para  $t > s$ ) sigue una distribución Chi-cuadrada no central con*

$$\begin{aligned} 1 &: \text{Grado de libertad y} \\ \frac{v_s e^{-\kappa(t-s)}}{\theta(1 - e^{-\kappa(t-s)})} &: \text{Parámetro de no centralidad.} \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} m &= E \left[ v_t \mid v_s \right] = \theta + (v_s - \theta) e^{-\kappa(t-s)}, \\ s^2 &= \text{Var} \left[ v_t \mid v_s \right] = \frac{v_s \sigma^2 e^{-\kappa(t-s)}}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(t-s)}) + \frac{\theta \sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa(t-s)})^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

*Demostración.* De la afirmación 78, como  $X_t = \sqrt{v_t}$  sigue una distribución Normal, de la deducción presentada en la subsección 2.1.1, tenemos

$$Y_t := \frac{X_t^2}{\theta(1 - e^{-\kappa(t-s)})} \sim \chi^2(1, \alpha),$$

donde

$$\alpha = \frac{v_s e^{-\kappa(t-s)}}{\theta(1 - e^{-\kappa(t-s)})}, \quad (3.9)$$

y apoyándonos en la proposición 3,

$$E \left[ Y_t \mid v_s \right] = E \left[ \frac{X_t^2}{\theta(1 - e^{-\kappa(t-s)})} \mid v_s \right] = 1 + \alpha \Rightarrow E \left[ X_t^2 \mid v_s \right] = (1 + \alpha) \theta (1 - e^{-\kappa(t-s)}),$$

con lo cual, al reemplazar (3.9) y operar

$$E[X_t^2|v_s] = E[v_t|v_s] = \theta + (v_s - \theta)e^{-\kappa(t-s)}.$$

De manera similar,

$$\text{Var}[Y_t|v_s] = \text{Var}\left[\frac{X_t^2}{\theta(1 - e^{-\kappa(t-s)})}\middle|v_s\right] = 2(1 + 2\alpha),$$

luego, aplicando la propiedad 3 de la proposición 22 y reemplazando (3.9),

$$\left(\frac{1}{\theta(1 - e^{-\kappa(t-s)})}\right)^2 \text{Var}[X_t^2|v_s] = 2\left(\frac{\theta(1 - e^{-\kappa(t-s)}) + 2v_s e^{-\kappa(t-s)}}{\theta(1 - e^{-\kappa(t-s)})}\right),$$

entonces,

$$\text{Var}[X_t^2|v_s] = 2\left[\theta \cdot \theta(1 - e^{-\kappa(t-s)})^2 + 2v_s e^{-\kappa(t-s)}\theta(1 - e^{-\kappa(t-s)})\right]. \quad (3.10)$$

Ahora, de los cambios efectuados en (3.4), es fácil ver que

$$\theta = \frac{\sigma^2}{4\kappa},$$

reemplazando en (3.10),

$$\text{Var}[X_t^2|v_s] = 2\left[\left(\frac{\sigma^2}{4\kappa}\right) \cdot \theta(1 - e^{-\kappa(t-s)})^2 + 2v_s e^{-\kappa(t-s)}\left(\frac{\sigma^2}{4\kappa}\right)(1 - e^{-\kappa(t-s)})\right],$$

con lo cual,

$$\text{Var}[v_t|v_s] = \left(\frac{\sigma^2}{2\kappa}\right) \cdot \theta(1 - e^{-\kappa(t-s)})^2 + v_s e^{-\kappa(t-s)}\left(\frac{\sigma^2}{\kappa}\right)(1 - e^{-\kappa(t-s)}).$$

□

*Observación 80.* Podemos ver que el efecto de la velocidad de reversión a la media  $\kappa$  sobre los momentos es intuitivo. Cuando  $\kappa \rightarrow \infty$  la media  $m$  tiende a la tasa de reversión media  $\theta$  y la varianza  $s^2$  tiende a cero. Cuando  $\kappa \rightarrow 0$ , la media  $m$  tiende al valor de la varianza actual,  $v_s$ , y la varianza  $s^2$  tiende a  $\sigma^2 v_t(t-s)$ .

Si los parámetros cumplen la condición de Feller ( $2\kappa\theta > \sigma^2$ ), entonces el drift es suficientemente grande para garantizar que el proceso de varianza sea positivo y no llegue a cero.

### 3.1.2. Procesos bajo la medida de Riesgo Neutro $\mathbb{Q}$

Los precios y la varianza siguen los procesos descritos en las expresiones (3.1) y (3.3) respectivamente, pero es importante mencionar que lo siguen bajo la medida  $\mathbb{P}$ , que es la llamada *medida física*. Para propósitos de valorización, se necesita el proceso  $(S_t, v_t)$  bajo la medida de riesgo neutro  $\mathbb{Q}$ . Una forma de conseguirlo es modificando cada EDE separadamente, aplicando el teorema de Girsanov (Teorema 47).

### 3.1.3. Procesos bajo la medida de Riesgo Neutro $\mathbb{Q}$ (Otra Forma)

Veamos detalladamente la deducción de los procesos neutrales al riesgo. Para poder aplicar el teorema de Girsanov Multidimensional (Teorema 47), considerando un movimiento Browniano bidimensional  $B_t = (B_{1,t}, B_{2,t})$ , (ver definición 37) con ayuda de la observación 38

$$\begin{aligned} dW_{1,t} &= \rho dB_{1,t} + \sqrt{1 - \rho^2} dB_{2,t} \\ dW_{2,t} &= dB_{1,t}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

el sistema formado por las ecuaciones (3.1) y (3.5) se puede escribir, como

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t \left( \rho dB_{1,t} + \sqrt{1 - \rho^2} dB_{2,t} \right) \\ dv_t &= \kappa[\theta - v_t] dt + \sigma \sqrt{v_t} dB_{1,t} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Matricialmente, tenemos

$$\begin{bmatrix} dS_t \\ dv_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu S_t \\ \kappa[\theta - v_t] \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sqrt{v_t} S_t \rho & \sqrt{v_t} S_t \sqrt{1 - \rho^2} \\ \sigma \sqrt{v_t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dB_{1,t} \\ dB_{2,t} \end{bmatrix},$$

con lo que la ecuación (2.31) toma la forma

$$\begin{bmatrix} \sqrt{v_t} S_t \rho & \sqrt{v_t} S_t \sqrt{1 - \rho^2} \\ \sigma \sqrt{v_t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,t} \\ u_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu S_t \\ \kappa[\theta - v_t] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r S_t \\ \kappa[\theta - v_t] - \lambda(S_t, v_t, t) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

de donde, obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma \sqrt{v_t} u_{1,t} &= \kappa[\theta - v_t] - \kappa[\theta - v_t] + \lambda(S_t, v_t, t), \\ \sqrt{v_t} S_t \rho u_{1,t} + \sqrt{v_t} S_t \sqrt{1 - \rho^2} u_{2,t} &= (\mu - r) S_t \end{aligned}$$

como se explicó en la subsección 3.1.2, consideramos  $\lambda(S_t, v_t, t) = \lambda v_t$ , con lo que

$$\begin{aligned} u_{1,t} &= \frac{\lambda v_t}{\sigma \sqrt{v_t}} = \frac{\lambda}{\sigma} \sqrt{v_t}, \\ \rho u_{1,t} + \sqrt{1 - \rho^2} u_{2,t} &= \frac{(\mu - r)}{\sqrt{v_t}}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

lo que implica que

$$u_{2,t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \left( \frac{(\mu - r)}{\sqrt{v_t}} - \frac{\lambda \rho}{\sigma} \sqrt{v_t} \right),$$

luego teniendo en cuenta la expresión (2.32), se tiene

$$d\widehat{B}_t = \begin{bmatrix} d\widehat{B}_{1,t} \\ d\widehat{B}_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dB_{1,t} + u_{1,t} dt \\ dB_{2,t} + u_{2,t} dt \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

y si consideramos

$$d\widehat{W}_t = \begin{bmatrix} d\widehat{W}_{1,t} \\ d\widehat{W}_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho d\widehat{B}_{1,t} + \sqrt{1 - \rho^2} d\widehat{B}_{2,t} \\ d\widehat{B}_{1,t} \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

no es difícil notar que  $\text{Corr}(\widehat{W}_{1,t}, \widehat{W}_{2,t}) = \rho$ . Al reemplazar en (3.12)

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t \left( \rho(d\widehat{B}_{1,t} - u_{1,t} dt) + \sqrt{1 - \rho^2}(d\widehat{B}_{2,t} - u_{2,t} dt) \right) \\ &= \left( \mu - \sqrt{v_t} \left( \frac{\lambda}{\sigma} \sqrt{v_t} \right) \rho - \sqrt{1 - \rho^2} u_{2,t} \sqrt{v_t} \right) S_t dt + \sqrt{v_t} S_t \left( \rho d\widehat{B}_{1,t} + \sqrt{1 - \rho^2} d\widehat{B}_{2,t} \right) \\ &= r S_t dt + \sqrt{v_t} S_t d\widehat{W}_{1,t} \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned} dv_t &= \kappa[\theta - v_t] dt + \sigma \sqrt{v_t} (d\widehat{B}_{1,t} - u_{1,t} dt) \\ &= \left( \kappa[\theta - v_t] - \sigma \sqrt{v_t} \left( \frac{\lambda}{\sigma} \sqrt{v_t} \right) \right) dt + \sigma \sqrt{v_t} d\widehat{B}_{1,t} \\ &= \left( \kappa[\theta - v_t] - \lambda v_t \right) dt + \sigma \sqrt{v_t} d\widehat{W}_{2,t} \end{aligned}$$

al hacer  $\kappa^* = \kappa + \lambda$  y  $\theta^* = \frac{\kappa \theta}{\kappa + \lambda}$ , se obtiene

$$dv_t = \kappa^* [\theta^* - v_t] dt + \sigma \sqrt{v_t} d\widehat{W}_{2,t}.$$

Por último, de (3.15) en la expresión (3.16)

$$\begin{aligned} d\widehat{W}_{1,t} &= \rho (dB_{1,t} + u_{1,t} dt) + \sqrt{1 - \rho^2} (dB_{2,t} + u_{2,t} dt) \\ &= \left( \rho dB_{1,t} + \sqrt{1 - \rho^2} dB_{2,t} \right) + \left( \rho u_{1,t} + \sqrt{1 - \rho^2} u_{2,t} \right) dt \end{aligned}$$

teniendo en cuenta (3.11) y (3.14), se consigue

$$d\widehat{W}_{1,t} = dW_{1,t} + \frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}} dt.$$

Por otro lado de (3.11) , (3.15) y (3.16), tenemos

$$d\widehat{W}_{2,t} = dB_{1,t} + u_{1,t}dt = dW_{2,t} + \frac{\lambda}{\sigma}\sqrt{v_t}dt.$$

Llegando así a la deducción presentada en [19, Heston].

En resumen, el sistema de riesgo neutro que sigue el modelo de Heston, viene dado por,

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_tdt + \sqrt{v_t}S_t d\widehat{W}_{1,t} \\ dv_t &= \kappa^* [\theta^* - v_t] dt + \sigma\sqrt{v_t}d\widehat{W}_{2,t}, \end{aligned}$$

donde  $E^{\mathbb{Q}} [d\widehat{W}_{1,t}d\widehat{W}_{2,t}] = \rho dt$ .  $\mathbb{Q}$  es la medida de riesgo neutro. A lo largo de este trabajo de tesis, consideraremos  $\lambda = 0$ , por lo cual  $\kappa^* = \kappa$  y  $\theta^* = \theta$ .

*Observación 81.* Cabe resaltar que para muchos autores es más conveniente expresar el proceso de precios en términos de su logaritmo en lugar del precio en sí. Por ello se considera

$$g(t, x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Así aplicando el Lema de Itô (Teorema 42), el proceso Log-precio, bajo la medida física  $\mathbb{P}$

$$\begin{aligned} d \ln S_t &= \frac{1}{S_t} (\mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1,t}) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{S_t^2} \right) (v_t S_t^2) dt. \\ &\Rightarrow d \ln S_t = \left( \mu - \frac{1}{2} v_t \right) dt + \sqrt{v_t} dW_{1,t}. \end{aligned}$$

Análogamente, bajo la medida de riesgo neutro  $\mathbb{Q}$ , será

$$\begin{aligned} d \ln S_t &= \frac{1}{S_t} (r S_t dt + \sqrt{v_t} S_t d\widehat{W}_{1,t}) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{S_t^2} \right) (v_t S_t^2) dt. \\ &\Rightarrow d \ln S_t = \left( r - \frac{1}{2} v_t \right) dt + \sqrt{v_t} d\widehat{W}_{1,t}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

*Observación 82.* Si denotamos por  $\widetilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ , los precios descontados . Notemos que

$$d\widetilde{S}_t = d(e^{-rt} S_t) = -r \underbrace{e^{-rt} S_t}_{\widetilde{S}_t} dt + e^{-rt} dS_t = -r\widetilde{S}_t dt + e^{-rt} dS_t,$$

y con la expresión (B.35), se tiene

$$d\widetilde{S}_t = -r\widetilde{S}_t dt + r\widetilde{S}_t dt + \sqrt{v_t}\widetilde{S}_t d\widehat{W}_{1,t} \Leftrightarrow d\widetilde{S}_t = \sqrt{v_t}\widetilde{S}_t d\widehat{W}_{1,t}.$$

Es decir, el proceso de precios descontados  $\widetilde{S}_t$ , bajo la medida  $\mathbb{Q}$ , es una martingala.



### 3.1.4. Forma del Precio Call Heston (Como Black-Scholes)

En [19, Heston] por analogía con la fórmula de Black-Scholes, expresión (2.44), se asume que el precio de una Call Europea Heston es de la forma

$$S_t P_1 - K e^{-r(T-t)} P_2, \quad (3.18)$$

donde  $P_1$  y  $P_2$  representan la probabilidad de que la opción Call expire ITM (In-the-money), condicional al valor  $S_t = e^{x_t}$  de la acción y al valor  $v_t$  de la volatilidad en el tiempo  $t$ .

$$P_j = \text{Prob}(x_T > \ln(K) | x_t = \ln(S_t), v_t),$$

para  $j = 1, 2$ . Como se verá, estas probabilidades son obtenidas bajo medidas de probabilidad diferentes. A continuación se detalla la deducción de (3.18) apoyándonos en [7, Bakshi, Gurdip, Madan] y [14, Fabrice].

El precio de una opción Call Europea al tiempo  $t$  de una acción que no paga dividendos con precio  $S_t$ , cuando el Strike es  $K$  y el tiempo hasta el vencimiento es  $\tau = T - t$ , es el valor esperado (condicionado) del payoff descontado bajo la medida de riesgo neutro  $\mathbb{Q}$  (Ver Corolario 13.1.3 de [23, Junghenn, pág 164]). Por facilidad de notación, en lo que sigue de ésta subsección, se da por sobreentendido el condicionamiento sobre  $S_t = s$  y  $v_t = v$ .

$$\begin{aligned} C(s, v, t) &= e^{-r\tau} \underbrace{E^{\mathbb{Q}} [(S_T - K)^+]}_{\text{función de } s \text{ y } v} \\ &= e^{-r\tau} E^{\mathbb{Q}} [(S_T - K) 1_{\{S_T > K\}}] \\ &= e^{-r\tau} E^{\mathbb{Q}} [S_T 1_{\{S_T > K\}}] - K e^{-r\tau} E^{\mathbb{Q}} [1_{\{S_T > K\}}]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

No es difícil notar que

$$E^{\mathbb{Q}} [1_{\{S_T > K\}}] = \mathbb{Q}(S_T > K) = \mathbb{Q}(\ln S_T > \ln K).$$

Denotando

$$P_2 = \mathbb{Q}(\ln S_T > \ln K). \quad (3.20)$$

Por otro lado, para el término  $e^{-r\tau} E^{\mathbb{Q}} [S_T 1_{\{S_T > K\}}]$  se realiza un cambio de la medida  $\mathbb{Q}$  a otra medida  $\mathbb{Q}^s$ . Para ello teniendo en cuenta que si

$$\wedge = \frac{S_T}{E^{\mathbb{Q}}[S_T]} \Rightarrow E^{\mathbb{Q}}[\wedge] = E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_T}{\underbrace{E^{\mathbb{Q}}[S_T]}_{\text{función de } s \text{ y } v}}\right] = \frac{E^{\mathbb{Q}}[S_T]}{E^{\mathbb{Q}}[S_T]} = 1$$

definiremos la derivada de Radon Nykodym (ver teorema 34) como:

$$\frac{d\mathbb{Q}^s}{d\mathbb{Q}} = \wedge = \frac{S_T}{E^{\mathbb{Q}}[S_T]}$$

y recordando que  $\mathbb{Q}$  es la medida bajo la cual, los precios actualizados (a partir del tiempo  $t$ , hasta el tiempo  $T$ ) son una martingala, se tiene que  $E^{\mathbb{Q}}[S_T] = S_t e^{r(T-t)}$  y considerando  $B_t = e^{rt}$ , tenemos que

$$\frac{E^{\mathbb{Q}}[S_T]}{S_T} = \frac{e^{r(T-t)}}{S_T/S_t} = \frac{B_T/B_t}{S_T/S_t} = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Q}^S}. \quad (3.21)$$

Como  $S_T$  es una variable aleatoria estrictamente positiva, casi seguramente, entonces la variable aleatoria  $\wedge$  también lo es. Ahora, para la variable aleatoria no negativa  $Y = \wedge 1_{\{S_T > K\}}$  (ver la expresión (2.14) del teorema 34), tenemos que

$$E^{\mathbb{Q}}[Y] = E^{\mathbb{Q}^S} \left[ \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Q}^S} Y \right],$$

pero

$$E^{\mathbb{Q}^S} \left[ \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Q}^S} Y \right] = E^{\mathbb{Q}^S} \left[ \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Q}^S} \wedge 1_{\{S_T > K\}} \right] = E^{\mathbb{Q}^S} \left[ \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Q}^S} \frac{d\mathbb{Q}^S}{d\mathbb{Q}} 1_{\{S_T > K\}} \right] = E^{\mathbb{Q}^S} [1_{\{S_T > K\}}]$$

entonces

$$\begin{aligned} e^{-r(T-t)} E^{\mathbb{Q}} [S_T 1_{\{S_T > K\}}] &= E^{\mathbb{Q}} \left[ S_T \underbrace{e^{-r(T-t)}}_{B_t/B_T} 1_{\{S_T > K\}} \right] = S_t E^{\mathbb{Q}} \left[ \underbrace{\frac{S_T/S_t}{B_T/B_t}}_{=\wedge} 1_{\{S_T > K\}} \right] \\ &= S_t E^{\mathbb{Q}} [Y] = S_t E^{\mathbb{Q}^S} [1_{\{S_T > K\}}], \end{aligned}$$

con lo que

$$e^{-r(T-t)} E^{\mathbb{Q}} [S_T 1_{\{S_T > K\}}] = S_t \mathbb{Q}^S (S_T > K) = S_t \mathbb{Q}^S (\ln S_T > \ln K),$$

denotando,

$$P_1 = \mathbb{Q}^S (\ln S_T > \ln K). \quad (3.22)$$

De las expresiones (3.20) y (3.22) en (3.19), podemos escribir,

$$C(K) = S_t P_1 - K e^{-r\tau} P_2. \quad (3.23)$$

*Observación 83.* Note del hecho que,

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Q}^S} = \frac{B_T/B_t}{S_T/S_t}$$

y del teorema 11.17 de [25, Klebaner, pág 310], lo que se realiza es un cambio de medida, de  $\mathbb{Q}$ , que usa al bono  $B_t$  como numeraire, a  $\mathbb{Q}^S$ , que usa al precio de la acción  $S_t$  como numeraire.

*Observación 84.* Cuando se conocen las funciones características  $f_j(\phi; x, v)$ , cada probabilidad in-the-money  $P_j$  puede ser hallada a partir de la función característica mediante el *teorema de*

inversión presentado y demostrado en [17, Gil-Pelaez], como

$$P_j = P(\ln S_T > \ln K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \underbrace{\operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi \ln(K)} f_j(\phi; x, v)}{i\phi} \right]}_{:=\mathcal{I}_j} d\phi. \quad (3.24)$$

Al vencimiento, las probabilidades están sujetas a la condición terminal

$$P_j = 1_{\{x_T > \ln K\}} = \begin{cases} 1, & x_T > \ln K \\ 0, & x_T \leq \ln K \end{cases} \quad (3.25)$$

donde 1 es la función indicadora. La ecuación (3.25) simplemente establece que, cuando  $S_T > K$  al vencimiento, la probabilidad de que la opción Call esté in-the-money es la unidad.

Por lo visto en (3.23) requerimos calcular  $P_1$  y  $P_2$ . El cálculo de dichas probabilidades, lo realizaremos por medio de la integración numérica de sus funciones características (siguiendo la observación 84). Para ello, deducimos las EDPs que deben satisfacer  $P_1$  y  $P_2$ , las cuales demostramos que también deben ser satisfechas por las funciones características y obtenemos explícitamente las funciones características al suponer una forma lineal logarítmica de las mismas.

### 3.1.5. Dedución de la EDP Heston

En esta subsección, se da una deducción de la EDP para el modelo de Heston. Esta deducción es un caso especial de una EDP para modelos de volatilidad estocástica general, descrito en [16, Gatheral]. El argumento usado, es similar al argumento de cobertura que usa un solo derivado para deducir la EDP de Black-Scholes. En el modelo de Black-Scholes, se forma un portafolio con las acciones subyacentes, más un único derivado que se utiliza para cubrir las acciones y luego se hace que el portafolio sea libre de riesgo (ver apéndice B para los detalles). En el modelo de Heston, se necesita un derivado adicional en el portafolio para cubrir la volatilidad. Por lo tanto, se forma un portafolio que consiste en una opción  $V = V(S, v, t)$ ,  $\Delta$  unidades de la acción, y  $\varphi$  unidades de otra opción  $U(S, v, t)$  para cubrir la volatilidad. Así, el valor del portafolio es,

$$\Pi_t = V_t + \Delta S_t + \varphi U_t.$$

Suponiendo que el portafolio es autofinanciado, el cambio en el valor del portafolio es

$$d\Pi_t = dV_t + \Delta dS_t + \varphi dU_t. \quad (3.26)$$

donde

$$d\Pi_t = \Pi_{t+dt} - \Pi_t, \quad dV_t = V_{t+dt} - V_t, \quad dS_t = S_{t+dt} - S_t, \quad dU_t = U_{t+dt} - U_t.$$

Aplicamos el lema de Itô para obtener los procesos para  $U$  y  $V$ , lo que nos permite encontrar el proceso para  $\Pi$ . Encontraremos los valores de  $\Delta$  y  $\varphi$  que hacen que el portafolio sea libre de riesgo, y utilizaremos el resultado para deducir la EDP de Heston.

Para formar el portafolio de cobertura, primero se aplica el lema de Itô al valor del primer derivado,  $V(S, v, t)$ . Aplicamos el lema de Itô bidimensional (teorema 43)

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial v} dv + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt \\ &\quad + \frac{1}{2} v \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} dt + \sigma \rho v S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} dt. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Hemos utilizado el cuadro 2.1 para ver que  $(dS)^2 = vS^2(dW_1)^2 = vS^2 dt$ , que  $(dv)^2 = \sigma^2 v dt$ , y que  $dS dv = \sigma \rho v S dt$ . Aplicando el lema de Itô bidimensional (teorema 43) al segundo derivado,  $U(S, v, t)$ , resulta una expresión idéntica a (3.27), pero en términos de  $U$ . Sustituyendo estas 2 expresiones en (3.26), el cambio en el valor del portafolio que se obtiene es,

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= dV_t + \Delta dS_t + \varphi dU_t \\ &= \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \sigma \rho v S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} v \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right] dt \\ &\quad + \varphi \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \sigma \rho v S \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} v \sigma^2 \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right] dt \\ &\quad + \left[ \frac{\partial V}{\partial S} + \varphi \frac{\partial U}{\partial S} + \Delta \right] dS + \left[ \frac{\partial V}{\partial v} + \varphi \frac{\partial U}{\partial v} \right] dv. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Para que se cubra el portafolio frente a movimientos tanto en el precio de la acción como en la volatilidad, los dos últimos términos en la ecuación (3.28) deben ser cero (libre de riesgo). Esto implica que los parámetros de cobertura deben ser,

$$\varphi = -\frac{\frac{\partial V}{\partial v}}{\frac{\partial U}{\partial v}}, \quad \Delta = -\varphi \frac{\partial U}{\partial S} - \frac{\partial V}{\partial S}.$$

Sustituyendo estos valores de  $\varphi$  y  $\Delta$  en (3.28) resulta,

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \sigma \rho v S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} v \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right] dt \\ &\quad + \varphi \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \sigma \rho v S \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} v \sigma^2 \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right] dt. \end{aligned} \quad (3.29)$$

La condición de que el portafolio gane la tasa libre de riesgo,  $r$  ( ver definición 66), implica que el cambio en el valor del portafolio es  $d\Pi_t = r\Pi_t dt$ . La expresión (3.26) queda

$$d\Pi_t = r(V_t + \Delta S_t + \varphi U_t) dt. \quad (3.30)$$

Ahora, igualando la ecuación (3.30) con (3.29), sustituyendo  $\varphi$  y  $\Delta$ , cancelando  $dt$  y ordenando se llega a

$$\begin{aligned} & \frac{\left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \sigma\rho vS \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2}v\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right] - rV + rS \frac{\partial V}{\partial S}}{\frac{\partial V}{\partial v}} \\ &= \frac{\left[ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \sigma\rho vS \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2}v\sigma^2 \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right] - rU + rS \frac{\partial U}{\partial S}}{\frac{\partial U}{\partial v}}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

El lado izquierdo de la ecuación (3.31) es una función de  $V(S, v, t)$  solamente, y el lado derecho es una función de  $U(S, v, t)$  solamente. Esto implica que ambos lados se pueden escribir como una función  $f(S, v, t)$ . Siguiendo el artículo [19, Heston], se especifica esta función como

$$f(S, v, t) = -\kappa(\theta - v) + \lambda(S, v, t) \quad (3.32)$$

donde  $\lambda(S, v, t)$  es el precio de riesgo de volatilidad. Una aplicación del modelo de consumo de [10, Breeden], brinda un precio de riesgo de volatilidad que es una función lineal de la volatilidad, de modo que  $\lambda(S, v, t) = \lambda v$ , donde  $\lambda$  es una constante. Sustituyendo  $f(S, v, t)$  en el lado izquierdo de la ecuación (3.31)

$$-\kappa(\theta - v) + \lambda(S, v, t) = \frac{\left[ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \sigma\rho vS \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2}v\sigma^2 \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right] - rU + rS \frac{\partial U}{\partial S}}{\frac{\partial U}{\partial v}},$$

operando obtenemos la EDP de Heston, expresado en términos del precio  $S$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \sigma\rho vS \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2}v\sigma^2 \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} - rU + rS \frac{\partial U}{\partial S} \\ & + [-\kappa(\theta - v) + \lambda(S, v, t)] \frac{\partial U}{\partial v} = 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

La ecuación (3.33) es la ecuación (6) de [19, Heston].

Las siguientes condiciones de frontera en la EDP de la ecuación (3.33), son válidas para una opción Call europea con vencimiento  $T$  y Strike  $K$ . Al vencimiento, la opción Call vale su valor intrínseco

$$U(S, v, T) = \text{máx}(0, S - K).$$

Cuando el precio de la acción es cero, la Call no tiene valor. A medida que aumenta el precio de las acciones,  $\frac{\partial U}{\partial S}$  se acerca a uno, y cuando la volatilidad aumenta, el precio de la Call tiende al precio del activo subyacente. Esto implica las siguientes tres condiciones de contorno

$$U(0, v, t) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial S}(\infty, v, t) = 1, \quad U(S, \infty, t) = S.$$

Podemos definir el log del precio,  $x = \ln S$  y expresar la EDP en términos de  $(x, v, t)$  en lugar

de  $(S, v, t)$ . Esto conduce a una forma más simple de EDP en la que el precio de la acción  $S$  no aparece. Esta simplificación requiere las siguientes derivadas, que pueden deducirse por la regla de la cadena

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial S} = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{1}{S} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial x} \frac{1}{S}.$$

usando la regla del producto,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{1}{S} \right) = -\frac{\partial U}{\partial x} \frac{1}{S^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial x} \frac{1}{S} = -\frac{\partial U}{\partial x} \frac{1}{S^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{1}{S^2},$$

Sustituyendo estas expresiones en la EDP de Heston (3.33). Todos los términos  $S$  se cancelan, y se obtiene la EDP de Heston en términos del Log-precio  $x = \ln S$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left( r - \frac{1}{2} v \right) \frac{\partial U}{\partial x} + \sigma \rho v \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial x} + \frac{1}{2} v \sigma^2 \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} - rU + [\kappa(\theta - v) - \lambda v] \frac{\partial U}{\partial v} = 0, \quad (3.34)$$

donde hemos sustituido  $\lambda(S, v, t) = \lambda v$ . El enfoque moderno para obtener la EDP (3.34), es mediante la aplicación del teorema de Feynman-Kac (teorema 53).

Notemos que la EDP (3.33) puede escribirse

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{A}U - rU = 0$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= rS \frac{\partial}{\partial S} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} \\ &+ [\kappa(\theta - v) - \lambda(S, v, t)] \frac{\partial}{\partial v} + \sigma \rho v S \frac{\partial^2}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} v \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} \end{aligned} \quad (3.35)$$

es el generador (infinitesimal) del modelo de Heston. La primera línea en la ecuación (3.35) es el generador del modelo de Black-Scholes, con  $v = \sqrt{\sigma_{BS}^2}$ , donde  $\sigma_{BS}$  es la volatilidad de Black-Scholes. La segunda línea de (3.35) es debido a la volatilidad estocástica.

Reemplazando  $x = x_t = \ln S_t$  en la ecuación (3.23), se tiene el precio de una opción Call Europea,

$$C(K) = e^x P_1 - K e^{-r\tau} P_2. \quad (3.36)$$

que expresa  $C(K)$  en términos de las probabilidades in-the-money  $P_1 = \mathbb{Q}^S(S_T > K)$  y  $P_2 = \mathbb{Q}(S_T > K)$ . Dado que el precio de la opción Call europea satisface la EDP (3.34), podemos encontrar las derivadas requeridas de la ecuación (3.36), sustituirlos por la EDP y expresar la EDP en términos de  $P_1$  y  $P_2$ .

Al derivar  $C(K)$  con respecto a  $t$ , se obtiene

$$\frac{\partial C}{\partial t} = e^x \frac{\partial P_1}{\partial t} - K e^{-r\tau} \left[ r P_2 + \frac{\partial P_2}{\partial t} \right]. \quad (3.37)$$

si se deriva  $C(K)$  con respecto a  $x$ ,

$$\frac{\partial C}{\partial x} = e^x \left[ P_1 + \frac{\partial P_1}{\partial x} \right] - Ke^{-r\tau} \frac{\partial P_2}{\partial x}. \quad (3.38)$$

si se deriva  $\frac{\partial C}{\partial x}$  con respecto a  $x$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} &= e^x P_1 + 2e^x \frac{\partial P_1}{\partial x} + e^x \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - Ke^{-r\tau} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} \\ &= e^x \left[ P_1 + 2 \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \right] - Ke^{-r\tau} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

derivando con respecto a  $v$  y  $v^2$

$$\frac{\partial C}{\partial v} = e^x \frac{\partial P_1}{\partial v} - Ke^{-r\tau} \frac{\partial P_2}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 C}{\partial v^2} = e^x \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} - Ke^{-r\tau} \frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2}. \quad (3.40)$$

derivando  $\frac{\partial C}{\partial v}$  con respecto a  $x$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial v} = e^x \left[ \frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial v} \right] - Ke^{-r\tau} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial v}. \quad (3.41)$$

Como se mencionó anteriormente, dado que la Call Europea  $C(K)$  es un derivado financiero, cumple con la EDP de Heston, ecuación (3.34), que escribimos aquí en términos de  $C(K)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left( r - \frac{1}{2}v \right) \frac{\partial C}{\partial x} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial v} \\ + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 C}{\partial v^2} - rC + [\kappa(\theta - v) - \lambda v] \frac{\partial C}{\partial v} = 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

### 3.1.6. Obteniendo las EDPs para $P_1$ y $P_2$

Para obtener la EDP Heston para  $P_1$  y  $P_2$ , [19, Heston] se apoya en el hecho que la EDP (3.42) es válido para cualquier característica contractual de la Call, en particular, para cualquier precio de ejercicio  $K \geq 0$ , para cualquier valor de  $S \geq 0$ , y para cualquier valor  $r \geq 0$  de la tasa libre de riesgo. Si se considera  $K = 0$  y  $S = 1$  en el precio de la Call en la ecuación (3.23) se tiene una Opción cuyo precio es simplemente  $P_1$ . Esta Opción también cumple la EDP (3.42). De forma similar, si se considera  $S = 0$ ,  $K = 1$  y  $r = 0$  en (3.23) se tiene una opción cuyo precio es  $-P_2$ . Como  $-P_2$  cumple la EDP, no es difícil ver que también lo hace  $P_2$ .

En las ecuaciones desde (3.37) a (3.41), consideramos  $K = 1$ ,  $r = 0$  y  $S = 0$  ( $e^x = 0$ ), y reemplazamos los términos en la EDP (3.42), obteniendo así,

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{1}{2}v \left[ P_1 + 2 \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \right] + \left( r - \frac{1}{2}v \right) \left[ P_1 + \frac{\partial P_1}{\partial x} \right] + \rho\sigma v \left[ \frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial v} \right]$$

$$+ \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} - rP_1 + [\kappa(\theta - v) - \lambda v] \frac{\partial P_1}{\partial v} = 0, \quad (3.43)$$

simplificando, la expresión (3.43) tenemos que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \left(r + \frac{1}{2}v\right) \frac{\partial P_1}{\partial x} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial v} \\ + [\rho\sigma v + \kappa(\theta - v) - \lambda v] \frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} = 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

De manera similar, en las ecuaciones desde (3.37) a (3.41), consideramos  $K = 1$ ,  $r = 0$  y  $S = 0$  ( $e^x = 0$ ), y reemplazamos los términos en la EDP (3.42), obteniendo así,

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}v\right) \frac{\partial P_2}{\partial x} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial v} + [\kappa(\theta - v) - \lambda v] \frac{\partial P_2}{\partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2} = 0. \quad (3.45)$$

Para comodidad en la notación, hacemos

$$\begin{aligned} u_1 = \frac{1}{2}; \quad u_2 = -\frac{1}{2}; \quad a = \kappa\theta; \\ b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma; \quad b_2 = \kappa + \lambda. \end{aligned}$$

Así, las ecuaciones (3.44) y (3.45) se pueden escribir en una sola expresión, para  $j = 1, 2$

$$\frac{\partial P_j}{\partial t} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 P_j}{\partial v^2} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 P_j}{\partial x \partial v} + (r + u_j v) \frac{\partial P_j}{\partial x} + [a - b_j v] \frac{\partial P_j}{\partial v} = 0. \quad (3.46)$$

La ecuación (3.46) es la ecuación (12) de [19, Heston].

### 3.1.7. Obtención de las funciones Características de Heston

Para obtener las funciones características, en esta subsección demostraremos que ellas satisfacen la EDP 3.46. Para ello, en primer lugar, observemos que,

$$f(x, v, t) = E [g(x(T), v(T)) | x(t) = x, v(t) = v], \quad (3.47)$$

es una martingala. Lo cual es sencillo, por la propiedad de Esperanzas iteradas (propiedad 2 de la proposición 19),

$$E[f(x, v, t)] = E [E [g(x(T), v(T)) | x(t) = x, v(t) = v]] = E [g(x(T), v(T))],$$

así para  $s \in [t, T]$

$$E[f(x, v, s)] = E [g(x(T), v(T))].$$

Ahora, recordemos que

$$P_1 = E^{\mathbb{Q}_1} [1_{\{S_T > K\}} | S_t = S, v_t = v] \quad \text{y} \quad P_2 = E^{\mathbb{Q}_2} [1_{\{S_T > K\}} | S_t = S, v_t = v],$$



donde

$$\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}^S \quad \text{y} \quad \mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q},$$

luego, si en (3.47) elegimos

$$g(x(T), v(T)) = 1_{\{x_T > \ln K\}},$$

y como  $P_j$ , satisface la EDP (3.46), con el fin de aplicar el teorema de Feynman Kac (el recíproco del teorema 53), consideramos

$$\mathcal{A} = (r + u_j v) \frac{\partial}{\partial x} + [a - b_j v] \frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \rho \sigma v \frac{\partial^2}{\partial x \partial v},$$

entonces (3.46), se puede escribir como

$$\frac{\partial P_j}{\partial t} + \mathcal{A}P_j - 0 \cdot P_j = 0,$$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r + u_j \\ a - b_j v \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_1 \\ dB_2 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} v & \rho \sigma v \\ \rho \sigma v & \sigma^2 v \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} (e_{11})^2 + (e_{12})^2 &= v \\ (e_{11})(e_{21}) + (e_{12})(e_{22}) &= \rho \sigma v \\ (e_{21})^2 + (e_{22})^2 &= \sigma^2 v \end{aligned}$$

si hacemos  $e_{22} = 0$ , tenemos que

$$e_{11} = \rho \sqrt{v}; \quad e_{12} = \sqrt{v} \cdot \sqrt{1 - \rho^2}; \quad e_{21} = \sigma \sqrt{v},$$

así, tenemos que  $x$  y  $v$  satisfacen

$$\begin{aligned} dx_t &= (r + u_j v) dt + \sqrt{v_t} d\widehat{W}_{1,t}, \\ dv_t &= (a - b_j v) dt + \sigma \sqrt{v_t} d\widehat{W}_{2,t}, \end{aligned} \tag{3.48}$$

que vienen a ser la relación (14) de [19, Heston].

Ahora estamos en condiciones de demostrar la siguiente afirmación.

*Afirmación 85.* Las funciones características  $f_j$  satisfacen la EDP de (3.46).

*Demostración.* Si elegimos en (3.47),

$$g(x(T), v(T)) = \exp(ix_T \phi)$$

resulta la definición de función Característica

$$f_j(\phi; x, v) = E^{\mathbb{Q}_j} [\exp(ix_T \phi) | x_t = x, v_t = v] = f(x, v, t),$$

aplicando el lema de Itô (teorema 43) a  $f$ , teniendo en cuenta (3.48), se tiene

$$df = \left( \frac{\partial f_j}{\partial t} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 f_j}{\partial v^2} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 f_j}{\partial x \partial v} + (r + u_j v) \frac{\partial f_j}{\partial x} + [a - b_j v] \frac{\partial f_j}{\partial v} \right) dt + (r + u_j v) \frac{\partial f_j}{\partial x} d\widehat{W}_{1,t} + (a - b_j v) \frac{\partial f_j}{\partial v} d\widehat{W}_{2,t}, \quad (3.49)$$

y como  $f_j$  es una  $\mathbb{Q}_j$ -martingala (demostrado al inicio de ésta subsección).

$$E^{\mathbb{Q}_j}[df] = 0. \quad (3.50)$$

Al reemplazar (3.49) en (3.50), se obtiene

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 f_j}{\partial v^2} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 f_j}{\partial x \partial v} + (r + u_j v) \frac{\partial f_j}{\partial x} + [a - b_j v] \frac{\partial f_j}{\partial v} = 0. \quad (3.51)$$

□

Seguimos [19, Heston], donde se postula que las funciones características para el Log-precio al vencimiento de la acción,  $x_T = \ln S_T$ , tienen forma lineal logarítmica

$$f_j(\phi; x, v) = \exp(C_j(\tau, \phi) + D_j(\tau, \phi)v_t + i\phi x_t)$$

donde  $i = \sqrt{-1}$  es la unidad imaginaria,  $C_j$  y  $D_j$  son los coeficientes y  $\tau = T - t$  es el tiempo de madurez.

Por lo tanto, la EDP para la función característica, a partir de (3.51) es,

$$-\frac{\partial f_j}{\partial \tau} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 f_j}{\partial v^2} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 f_j}{\partial x \partial v} + (r + u_j v) \frac{\partial f_j}{\partial x} + [a - b_j v] \frac{\partial f_j}{\partial v} = 0. \quad (3.52)$$

note que como  $\tau = T - t$ , se tiene que  $\frac{\partial f_j}{\partial t} = \frac{\partial f_j}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t}$ , con lo cual  $\frac{\partial f_j}{\partial t} = -\frac{\partial f_j}{\partial \tau}$ .

Ahora, hallamos las derivadas requeridas para (3.52)

$$\frac{\partial f_j}{\partial \tau} = \left( \frac{\partial C_j}{\partial \tau} + \frac{\partial D_j}{\partial \tau} v \right) f_j, \quad \frac{\partial f_j}{\partial x} = i\phi f_j, \quad \frac{\partial f_j}{\partial v} = D_j f_j,$$

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} = -\phi^2 f_j, \quad \frac{\partial^2 f_j}{\partial v^2} = D_j^2 f_j, \quad \frac{\partial^2 f_j}{\partial v \partial x} = i\phi D_j f_j,$$

sustituyendo estas derivadas en (3.52) y simplificando  $f_j$  obtenemos

$$-\left( \frac{\partial C_j}{\partial \tau} + \frac{\partial D_j}{\partial \tau} v \right) + \rho\sigma v i\phi D_j - \frac{1}{2}v\phi^2 + \frac{1}{2}v\sigma^2 D_j^2 + (r + u_j v)i\phi + (a - b_j v)D_j = 0,$$

o equivalentemente

$$v \left( -\frac{\partial D_j}{\partial \tau} + \rho \sigma i \phi D_j - \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 D_j^2 + u_j i \phi - b_j D_j \right) - \frac{\partial C_j}{\partial \tau} + r i \phi + a D_j = 0.$$

esto da las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial D_j}{\partial \tau} = \rho \sigma i \phi D_j - \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 D_j^2 + u_j i \phi - b_j D_j \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial C_j}{\partial \tau} = r i \phi + a D_j. \quad (3.54)$$

Estas son las ecuaciones (A7) de [19, Heston]. La ecuación en (3.53) es una ecuación de Riccati en  $D_j$ , mientras que (3.54) es una ecuación diferencial ordinaria para  $C_j$  que puede resolverse usando integración directa una vez que se conozca  $D_j$ . La resolución de estas ecuaciones requiere dos condiciones iniciales. Recuerde que la función característica es

$$f_j(\phi; x, v) = E [e^{i\phi x_T}] = \exp(C_j(\tau, \phi) + D_j(\tau, \phi)v_t + i\phi x_t). \quad (3.55)$$

Al vencimiento ( $\tau = 0$ ), se conoce el valor de  $x_T = \ln S_T$ , por lo que la esperanza en (3.55) desaparecerá y, en consecuencia, el lado derecho se reducirá a  $\exp(i\phi x_T)$ . Esto implica que las condiciones iniciales en la madurez son  $D_j(0, \phi) = 0$  y  $C_j(0, \phi) = 0$ .

### 3.1.8. Resolución de las Ecuaciones Diferenciales de Heston

Empezamos resolviendo la ecuación de Riccati (3.53), que se puede escribir como

$$\frac{\partial D_j}{\partial \tau} = R D_j^2 - Q_j D_j + P_j$$

donde  $R = \frac{1}{2} \sigma^2$ ,  $Q_j = b_j - \rho \sigma i \phi$ ,  $P_j = u_j i \phi - \frac{1}{2} \phi^2$ .

Siguiendo lo visto en la subsección 2.0.1, tenemos que la EDO, que se forma siguiendo (2.2), es

$$w'' + Q_j w' + P_j R w = 0,$$

cuya solución es, según la relación (2.3),

$$D_j = -\frac{C_1 \alpha_j e^{\alpha_j \tau} + C_2 \beta_j e^{\beta_j \tau}}{C_1 e^{\alpha_j \tau} + C_2 e^{\beta_j \tau}} \frac{2}{\sigma^2}, \quad (3.56)$$

donde

$$\alpha_j = \frac{-Q_j + \sqrt{Q_j^2 - 4P_j R}}{2}; \quad \beta_j = \frac{-Q_j - \sqrt{Q_j^2 - 4P_j R}}{2},$$

haciendo

$$d_j := \alpha_j - \beta_j = \sqrt{Q_j^2 - 4P_jR} = \sqrt{(b_j - \rho\sigma i\phi)^2 - \sigma^2(2u_j i\phi - \phi^2)}, \quad (3.57)$$

además

$$\alpha_j = \frac{-Q_j + d_j}{2}; \quad \beta_j = \frac{-Q_j - d_j}{2}, \quad (3.58)$$

de la condición inicial,  $D_j(\tau, \phi) = 0$ . reemplazando  $\tau = 0$ , en (3.56), tenemos que

$$C_1 = -\frac{\beta_j}{\alpha_j}C_2,$$

luego

$$D_j = -\frac{-C_2\beta_j e^{\alpha_j\tau} + C_2\beta_j e^{\beta_j\tau}}{-\frac{\beta_j}{\alpha_j}C_2 e^{\alpha_j\tau} + C_2 e^{\beta_j\tau}} \frac{2}{\sigma^2},$$

simplificando

$$D_j = -\frac{2\beta}{\sigma^2} \left( \frac{-e^{\alpha_j\tau} + e^{\beta_j\tau}}{-\frac{\beta}{\alpha}e^{\alpha_j\tau} + e^{\beta_j\tau}} \right) = -\frac{2\beta}{\sigma^2} \left( \frac{-e^{(\alpha_j - \beta_j)\tau} + 1}{-\frac{\beta}{\alpha}e^{(\alpha_j - \beta_j)\tau} + 1} \right),$$

haciendo  $g_j = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{b_j - \rho\sigma i\phi - d_j}$ , teniendo en cuenta (3.57) y (3.58), tenemos

$$D_j(\tau, \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2} \left( \frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right). \quad (3.59)$$

Para resolver la EDP (3.54), se reemplaza (3.59), obteniéndose

$$\frac{\partial C_j}{\partial \tau} = ri\phi + a \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2} \left( \frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right),$$

por integración directa,

$$C_j = \int_0^\tau ri\phi dy + a \left( \frac{Q_j + d_j}{\sigma^2} \right) \int_0^\tau \left( \frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right) dy + K_1,$$

donde  $K_1$  es una constante. Para resolver la segunda integral, hacemos  $x = e^{d_j y}$ , entonces  $dx = d_j e^{d_j y} dy$ , con lo cual

$$C_j = ri\phi\tau + \frac{a}{d_j} \left( \frac{Q_j + d_j}{\sigma^2} \right) \int_1^{e^{d_j\tau}} \left( \frac{1 - x}{1 - g_j x} \right) \frac{1}{x} dx + K_1, \quad (3.60)$$

note que podemos aplicar fracciones parciales

$$\begin{aligned} \int_1^{e^{d_j\tau}} \left( \frac{1 - x}{1 - g_j x} \right) \frac{1}{x} dx &= \int_1^{e^{d_j\tau}} \left( \frac{1}{x} - \frac{1 - g_j}{1 - g_j x} \right) dx \\ &= \ln x + \frac{1 - g_j}{g_j} \ln(1 - g_j x) \Big|_{x=1}^{x=e^{d_j\tau}} \end{aligned}$$

$$= \left[ d_j \tau + \frac{1 - g_j}{g_j} \ln \left( \frac{1 - g_j e^{d_j \tau}}{1 - g_j} \right) \right].$$

sustituyendo en (3.60), y reemplazando  $d_j$ ,  $Q_j$ , y  $g_j$ , se tiene

$$C_j(\tau, \phi) = ri\phi\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left[ (b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)\tau - 2 \ln \left( \frac{1 - g_j e^{d_j \tau}}{1 - g_j} \right) \right] + K_1,$$

imponiendo condición inicial,  $\tau = 0$ , se tiene que  $C_j(\tau, \phi) = K_1 = 0$ , y haciendo  $a = \kappa\theta$ ,

$$C_j(\tau, \phi) = ri\phi\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left[ (b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)\tau - 2 \ln \left( \frac{1 - g_j e^{d_j \tau}}{1 - g_j} \right) \right]. \quad (3.61)$$

Notemos que, se ha usado la condición inicial  $C_j(0, \phi) = 0$ , que da  $K_1 = 0$ . Así tenemos la expresión original dada en [19, Heston].

Para resumir, con las expresiones (3.59) y (3.61) en (3.55), obtenemos las funciones características  $f_j$ .

*Observación 86.* En [7, Bakshi, Madan], se muestra que el precio de la opción Call europea en el modelo de Heston se puede expresar en términos de una única función característica. Aunque escapa del objetivo de esta tesis profundizar en ello, tiene sentido pensar que solo debe existir una única función característica, ya que solo hay un precio de activo subyacente en el modelo. Básicamente en [7, Bakshi, Madan] se demuestra que (ver el apéndice B.3)

$$f_1(\phi) = \frac{f_2(\phi - i)}{f_2(-i)}.$$

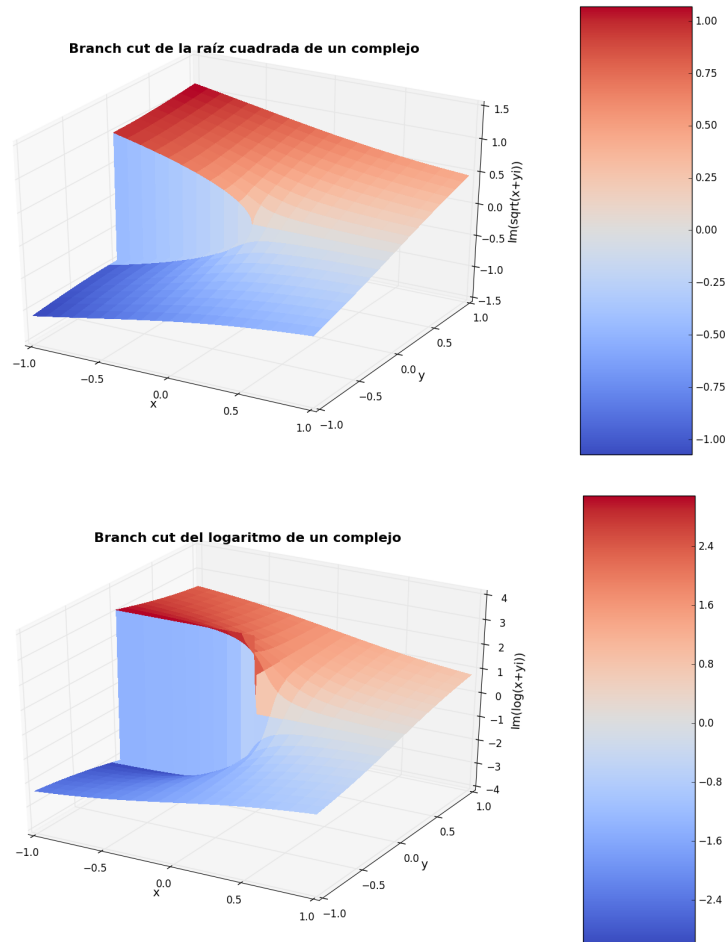
### 3.2. Problemas de Integración en la forma original de Heston

Como las funciones características están definidas y operan en el plano complejo, abarcan algunos problemas numéricos debido a la "ramificación". Para el modelo de Heston, se tiene dos especificaciones para la función característica, ya que son las soluciones a una ecuación de Riccati. La primera, es la original presentada en [19, Heston] y la segunda es presentada en [16, Gatheral]. Para la especificación original, en [2, Albrecher], se muestra que para casi cualquier elección de parámetros, se producirán inestabilidades para vencimientos lo suficientemente grandes y se establece, bajo una restricción de parámetros adicional, la existencia de una madurez de "umbral" a partir de la cual las operaciones complejas tienen un mal comportamiento. Mientras que para la segunda especificación, se demuestra que la estabilidad está garantizada en el espacio de parámetros sin restricciones. En esta sección, presentamos brevemente los resultados teóricos con algunos ejemplos.

### 3.2.1. Deficiencias Numéricas

El origen de las dos representaciones para la función característica de Heston radica en el hecho de que la raíz compleja  $d_j$  (definido en (3.57)) tiene dos valores posibles y el segundo valor es exactamente menos el primer valor. La función  $z^2$  asigna cada número complejo  $z$  a un número bien definido  $z^2$ . Sin embargo, su función inversa,  $\sqrt{z}$  mapea, por ejemplo, el valor  $-9$  a  $3i$  y  $-3i$ . Si bien se puede elegir un único valor principal para tales funciones (en este caso, la raíz cuadrada principal  $3i$ ), las opciones pueden no ser continuas en todo el plano complejo. Más bien, ocurren líneas de discontinuidad. Un corte de rama (Branch cut) es una curva en el plano complejo a través del cual una función es discontinua. Sus extremos pueden ser abiertos, cerrados o medio abiertos. La mayoría de los paquetes de software devuelve la raíz cuadrada principal de un número. No solo la función de raíz cuadrada tiene cortes de rama, sino muchas otras funciones, como la función logarítmica (ver figura 3.1). Es precisamente el corte de rama de esta función logarítmica lo que ocasiona problemas en el modelo de Heston. Para tratar estos problemas numéricos, haremos uso de la "pequeña trampa" de Albrecher, que se presenta a continuación.

Figura 3.1: Corte de rama: Función raíz cuadrada y Logarítmica



### 3.2.2. La "Pequeña Trampa" de Albrecher

En [2, Albrecher] se explica que en la literatura académica sobre el modelo de Heston se incorporan dos formulaciones diferentes de la función característica de Heston. La primera es la formulación original presentada en [19, Heston], mientras que la segunda tiene una forma poco diferente que se puede encontrar en [16, Gatheral]. En [2, Albrecher] se demuestra que dichas formulaciones son equivalentes, pero que la segunda brinda una función característica que se comporta mucho mejor y es más adecuada para la integración numérica. Para la primera especificación, muestra que para casi cualquier elección de parámetros, se producirán inestabilidades para vencimientos lo suficientemente grandes. Además establece, bajo una restricción de parámetros adicional, la existencia de una madurez de "umbral" a partir de la cual las operaciones complejas tienen un mal comportamiento. Mientras que para la segunda especificación de la fun-

ción característica, demuestra que la estabilidad está garantizada en el espacio de parámetros sin restricciones.

La primera especificación, es la formulación original de la función característica de Heston y es la que acabamos de presentar en la sección 3.1 . Para deducir la segunda formulación, primero notemos de (3.59) que,

$$D_j(\tau, \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2} \left( \frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right) \left( \frac{e^{-d_j\tau}}{e^{-d_j\tau}} \right) = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2} \left( \frac{e^{-d_j\tau} - 1}{e^{-d_j\tau} - g_j} \right)$$

y que al factorizar  $g_j$  del denominador, lo podemos escribir como

$$D_j(\tau, \phi) = \frac{1}{g_j} \left( \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2} \right) \left( \frac{e^{-d_j\tau} - 1}{\frac{1}{g_j} e^{-d_j\tau} - 1} \right),$$

ahora, haciendo

$$c_j := \frac{1}{g_j} = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi - d_j}{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}, \quad (3.62)$$

tenemos que,

$$D_j(\tau, \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi - d_j}{\sigma^2} \left( \frac{1 - e^{-d_j\tau}}{1 - c_j e^{-d_j\tau}} \right).$$

Ahora, con (3.62) en la solución de  $C_j$  (expresión (3.61)), como

$$\begin{aligned} d_j\tau - 2 \ln \left( \frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j} \right) &= d_j\tau - 2 \ln \left[ e^{d_j\tau} \left( \frac{e^{-d_j\tau} - g_j}{1 - g_j} \right) \right] \\ &= d_j\tau - 2d_j\tau - 2 \ln \left( \frac{e^{-d_j\tau} - g_j}{1 - g_j} \right) \\ &= -d_j\tau - 2 \ln \left( \frac{e^{-d_j\tau} - g_j}{1 - g_j} \right) \\ &= -d_j\tau - 2 \ln \left[ \left( \frac{-g_j}{-g_j} \right) \left( \frac{1 - \frac{e^{-d_j\tau}}{g_j}}{1 - \frac{1}{g_j}} \right) \right] \\ &= -d_j\tau - 2 \ln \left( \frac{1 - c_j e^{-d_j\tau}}{1 - c_j} \right), \end{aligned}$$

se tiene que,

$$C_j(\tau, \phi) = r i \phi \tau + \frac{a}{\sigma^2} \left[ (b_j - \rho\sigma i\phi - d_j)\tau - 2 \ln \left( \frac{1 - c_j e^{-d_j\tau}}{1 - c_j} \right) \right].$$

Aunque las dos especificaciones son equivalentes, la segunda formulación causa menos problemas numéricos en la implementación del modelo. Esto se ilustra en [2, Albrecher, Fig 5] que la reproducimos en la figura 3.2, utilizando los mismos valores para los parámetros, es decir,  $\kappa = 1.5768$ ,  $\sigma = 0.5711$ ,  $\rho = -0.5711$ ,  $\theta = 0.0398$ ,  $v_0 = 0.0175$ ,  $r = 0.025$  y  $\tau = 10$ .

Las siguientes dos proposiciones y sus respectivas demostraciones se pueden encontrar en [2, Albrecher, Prop 1 y 2].

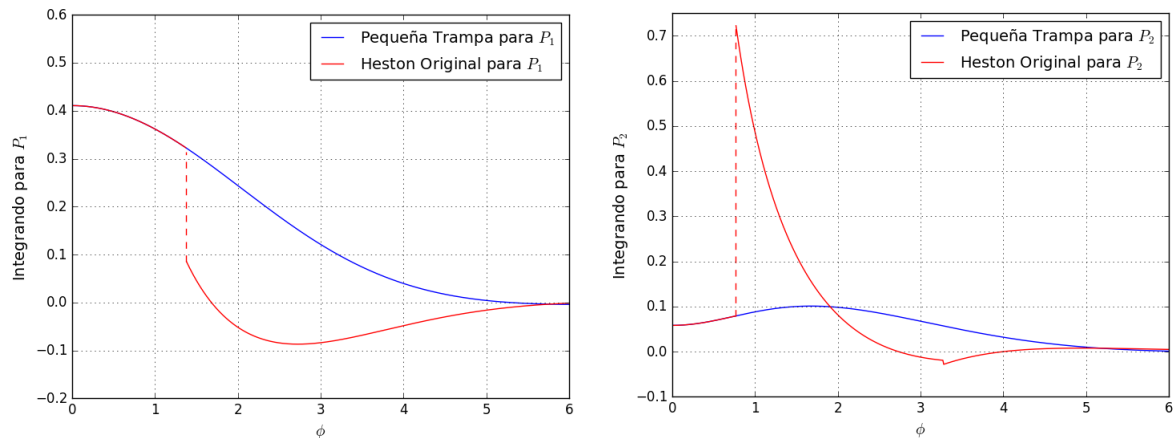


**Proposición 87.** Siempre que los parámetros del modelo de Heston sean tales que

$$\text{Im}(d_j) \neq 0 \text{ y } 2\kappa\theta \neq \sigma^2 n,$$

donde  $n \in \mathbb{N}$ . Si se utiliza la primera especificación, con el valor principal de la raíz cuadrada  $d_j$  conduce a inestabilidades numéricas para un tiempo de madurez suficientemente grande.

Figura 3.2: Comportamiento de los Integrandos para las dos Especificaciones



Fuente : Elaboración Propia

**Proposición 88.** Sea  $\rho < 0$  y  $\sigma^2(2\alpha + 1) + 2\rho\sigma(\kappa - \rho\sigma(\alpha + 1)) < 0$ . Si se utiliza la primera especificación, con el valor principal de la raíz cuadrada  $d_j$  conduce a inestabilidades numéricas para una madurez mayor a

$$t^* = \frac{2\sqrt{1 - \rho^2} \left( \pi - \arctan \left( \frac{-\rho}{\sqrt{1 + \rho^2}} \right) \right)}{-2\rho(\kappa - \rho\sigma(\alpha + 1)) - \sigma(2\alpha + 1)}.$$

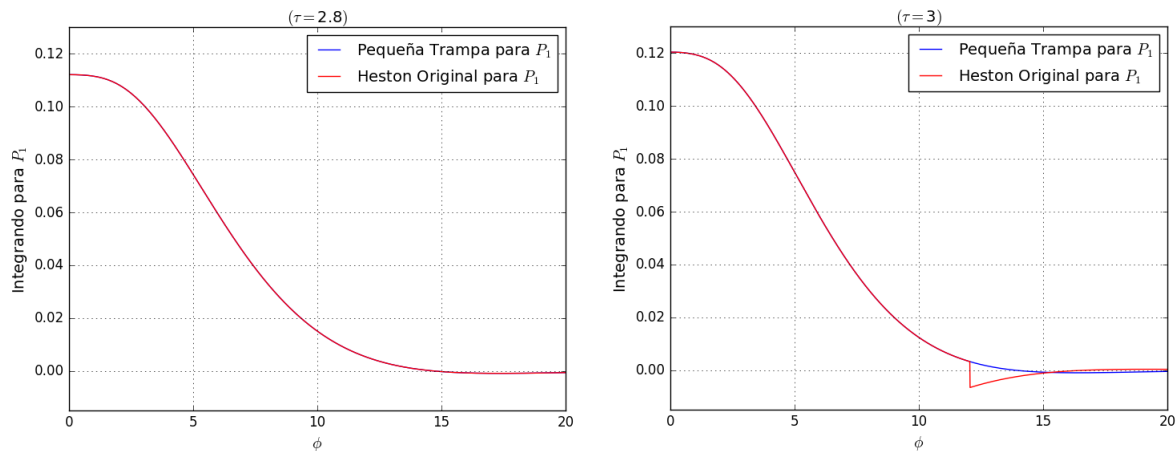
*Observación 89.* Note que los supuestos de la Proposición 88 se cumplen para la configuración de parámetros de la Figura 3.2 y, de hecho,  $t^* \approx 2.8$ , de acuerdo con la figura 3.3.

Por lo estudiado, en las implementaciones que realizamos, utilizamos la segunda especificación (abandonamos la original).

### 3.3. Efectos de los parámetros de Heston

El objetivo de esta sección es conocer cómo influyen los parámetros de Heston. Esto ayuda no sólo a conocer mejor el modelo, sino también al ajuste y calibración del mismo. Bajo el modelo de Heston, la distribución del Log-Precio de las acciones al vencimiento,  $\ln(S_T)$ , puede mostrar sesgo y exceso de curtosis, dependiendo de la configuración de los parámetros. Primero

Figura 3.3: Tiempo de madurez umbral para el ejemplo visto en la figura 3.2



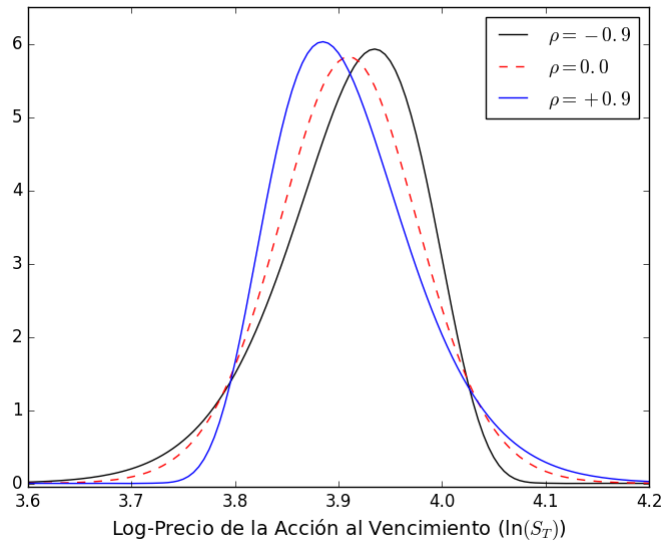
Fuente : Elaboración Propia

analizamos el efecto de la correlación  $\rho$  y la volatilidad de la varianza  $\sigma$  en la distribución de  $\ln(S_T)$ .

### 3.3.1. Efecto de la correlación $\rho$ en la distribución de $x_T = \ln(S_T)$

El parámetro de correlación  $\rho$  controla la asimetría de la densidad de  $\ln S_T$  y del Retorno compuesto continuamente  $\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$  sobre  $[0, T]$ . Cuando  $\rho > 0$ , las densidades de probabilidad serán sesgadas positivamente (sesgo de cola derecha), y cuando  $\rho < 0$ , las densidades serán sesgadas negativamente (sesgo de cola izquierda). La densidad de  $\ln S_T$  se puede obtener utilizando la expresión (B.42) (invirtiendo su función característica  $f_2(\phi)$ ) y aplicando un esquema de integración numérica. Así, obtenemos la figura 3.4, utilizando como valores para los parámetros:  $S_0 = 50$ ,  $T = 0.5$ ,  $r = 0$ ,  $x_0 = \ln(S_0)$ ,  $\kappa = 2$ ,  $\theta = 0.025$ ,  $\sigma = 0.225$ ,  $v_0 = 0.01$ ,  $\lambda = 0$ . y se halla la densidad de  $\ln(S_T)$  para distintos valores de  $\rho$ .

Figura 3.4: Efecto de la correlación  $\rho$  en la distribución de  $x_T$ .



Fuente : Elaboración Propia

Cabe resaltar que la figura 3.4 indica la relación entre correlación y sesgo, y es similar a la figura 1 de [19, Heston] y la figura 2.4 de [14, Fabrice]. De la figura 3.4 es fácil notar, por ejemplo, que

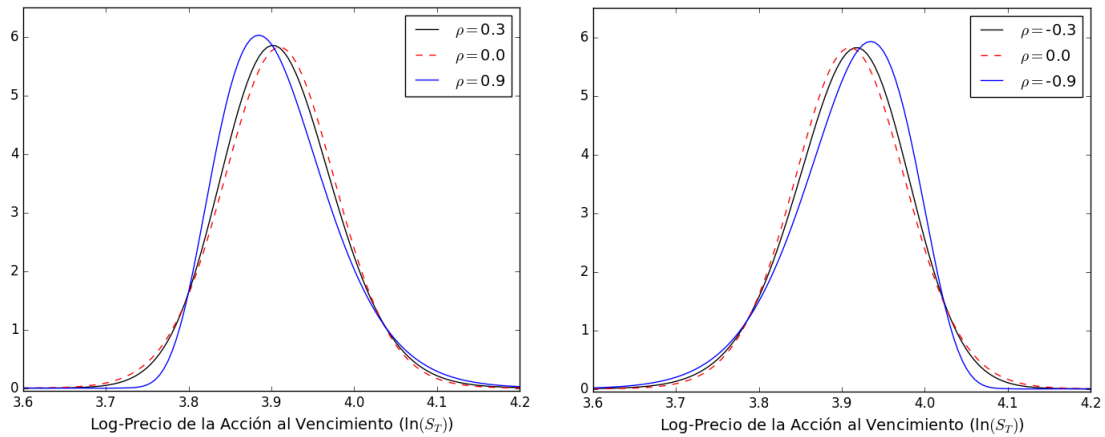
$$P_{\rho=-0.9}(x_T > 4.1) < P_{\rho=0}(x_T > 4.1) < P_{\rho=0.9}(x_T > 4.1)$$

lo cual, nos dice que  $\rho > 0$  positivo aumenta la probabilidad de obtener valores extremos positivos de  $x_T(S_T)$ , esto se traduce en que la probabilidad de tener opciones Call ITM aumenta. Se puede hacer un análisis similar para el caso en que  $\rho < 0$ . Para aclarar mejor la idea véase la figura 3.5.

### 3.3.2. Efecto de la Volatilidad de la Varianza $\sigma$ en la distribución de $x_T = \ln(S_T)$

El parámetro de volatilidad de varianza  $\sigma$  controla la Curtosis. Cuando  $\sigma$  es alto, el proceso de varianza está muy disperso, por lo que esperamos que la distribución de los Retornos tenga una curtosis más alta y colas más gruesas que cuando  $\sigma$  es pequeña (ver figura 3.6 derecha), es decir, hay una mayor concentración de valores de la variable  $\ln(S_T)$  tanto muy cerca de la media de la distribución, como muy lejos de ella (colas), y existe una relativamente menor frecuencia de valores intermedios. Esto se observa en la figura 3.6, usando los mismos valores de parámetros que para la figura 3.5, a excepción del  $\rho = 0$  y para  $\sigma \approx 0$ ,  $\sigma = 0.15$  y  $\sigma = 0.45$ . Como se observa en la figura 3.6, si  $\sigma \approx 0$ , la volatilidad se vuelve determinística y por lo tanto los Log-Retornos

Figura 3.5: Efecto de  $\rho$ , positiva (izquierda) y negativa (derecha) en la distribución de  $x_T$ .



Fuente : Elaboración Propia

se distribuirán aproximadamente Normal. Al incrementar  $\sigma$ , la Curtosis también se incrementa. La figura 3.6 izquierda, es similar a la figura 3 de [19, Heston] y a la figura 2.5 de [14, Fabrice].

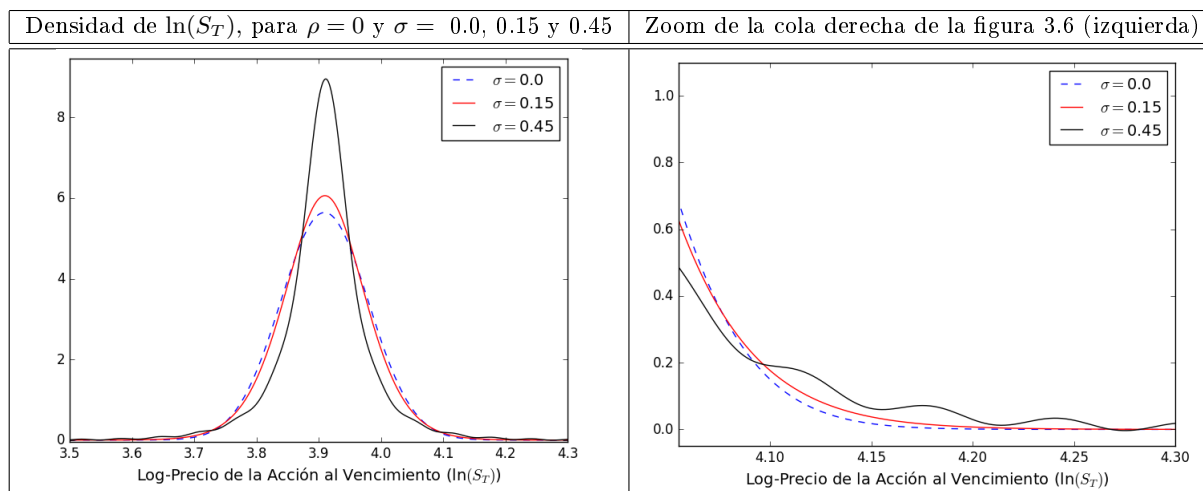
En seguida, hacemos una comparación entre el precio de una opción Call europea hallado con el modelo Black-Scholes-Merton (volatilidad constante) y el modelo de Heston (volatilidad estocástica). Además también veremos cómo influye  $\rho$  y  $\sigma$  en dicha comparación.

### 3.3.3. Comparación entre los precios de Heston y Black-Scholes

En esta subsección se pone en evidencia, que una correlación negativa da como resultado que las Calls ITM profundas (Calls cuyo valor de  $(S_0 - K)$  es significativo, para algunos autores mayor al 10% de  $S_0$ ) tengan un precio más alto en el modelo de Heston que en el modelo de Black-Scholes.

Los resultados vistos en las figuras 3.4 y 3.6 sugieren que, debido al sesgo en los Retornos producidos por el modelo de Heston, los precios de las opciones generadas por el modelo de Heston deben diferir de los generados por el modelo de Black-Scholes. Analizaremos el efecto del parámetro de correlación  $\rho$  y la volatilidad del proceso de varianza  $\sigma$  sobre los precios de las Calls. Cuando  $\rho > 0$ , la distribución de  $\ln S_T$  es sesgada positivamente, por lo que se asigna más peso a la cola derecha de la distribución. Las Calls fuera del dinero (Calls OTM), es decir  $S_0 < K$ , tienen un precio de ejercicio que se encuentra en la cola derecha. Esto implica que, cuando  $\rho > 0$ , las Calls OTM profundas producidas por el modelo Heston deberían ser más caras que las producidas por el modelo Black-Scholes. Las Calls dentro del dinero (ITM), es decir  $S_0 > K$ , tienen un precio de ejercicio que se encuentra en la cola izquierda de la distribución de  $\ln S_T$ . Dado que se asigna menos peso a la cola izquierda, las Calls ITM profundas del modelo Heston deberían tener menos costo que las producidas por el modelo Black-Scholes. De manera

Figura 3.6: Efecto de la Volatilidad del Proceso de Varianza  $\sigma$ , sobre la densidad de  $\ln(S_T)$ .



Fuente : Elaboración Propia

similar, cuando  $\rho < 0$ , la distribución de  $\ln S_T$  está sesgada negativamente y sucede lo contrario: Se asigna más peso a la cola izquierda y menos peso a la cola derecha. Esto implica que las Calls ITM profundas del modelo Heston deberían ser más caras que las producidas por el modelo Black-Scholes, y las Calls OTM profundas deberían ser menos costosas. En los cuadros 3.1 y 3.2 se muestran los resultados obtenidos.

En la figura 3.7 se grafica los resultados de los cuadros 3.1 y 3.2, ésta reproduce la figura 2 de [19, Heston], en la que se traza la diferencia entre los precios de las Calls de ambos modelos (precio de Heston menos precio de Black-Scholes), ya que el precio al contado varía de \$70 a \$140. Utilizamos los valores de parámetros, correspondientes a los de la Tabla 1 de [19, Heston].

Sin embargo, para que las comparaciones de precios de Heston y Black-Scholes sean válidas, las volatilidades de Black-Scholes deben coincidir con la de los precios de Heston. Esto se puede hacer definiendo la volatilidad de Black-Scholes  $\sigma_{BS}$  en términos de la desviación estándar de la distribución de los retornos  $\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$ . Los momentos de los retornos se pueden obtener a partir de los momentos de  $x_T = \ln S_T$ , por diferenciación de la función característica  $f_2(\varphi)$

$$E[x_T^n] = i^{-n} \left[ \frac{d^n}{d\phi^n} f_2(\phi) \right]_{\phi=0}.$$

Los resultados de la aproximación sugieren que, cuando  $\rho = -0.5$ , usamos  $\sigma_{BS} = \sqrt{2} \times 0.0710$  para generar los precios de Black-Scholes, y cuando  $\rho = +0.5$ , usamos  $\sigma_{BS} = \sqrt{2} \times 0.0704$ . La parte izquierda de la Figura 3.7 corresponde a precios bajos de la Acción y Calls OTM, y la parte derecha a precios altos de acciones y Calls ITM. Claramente, cuando la correlación es positiva, las Calls Heston OTM son más caras que las Calls Black-Scholes OTM, debido al grosor en la

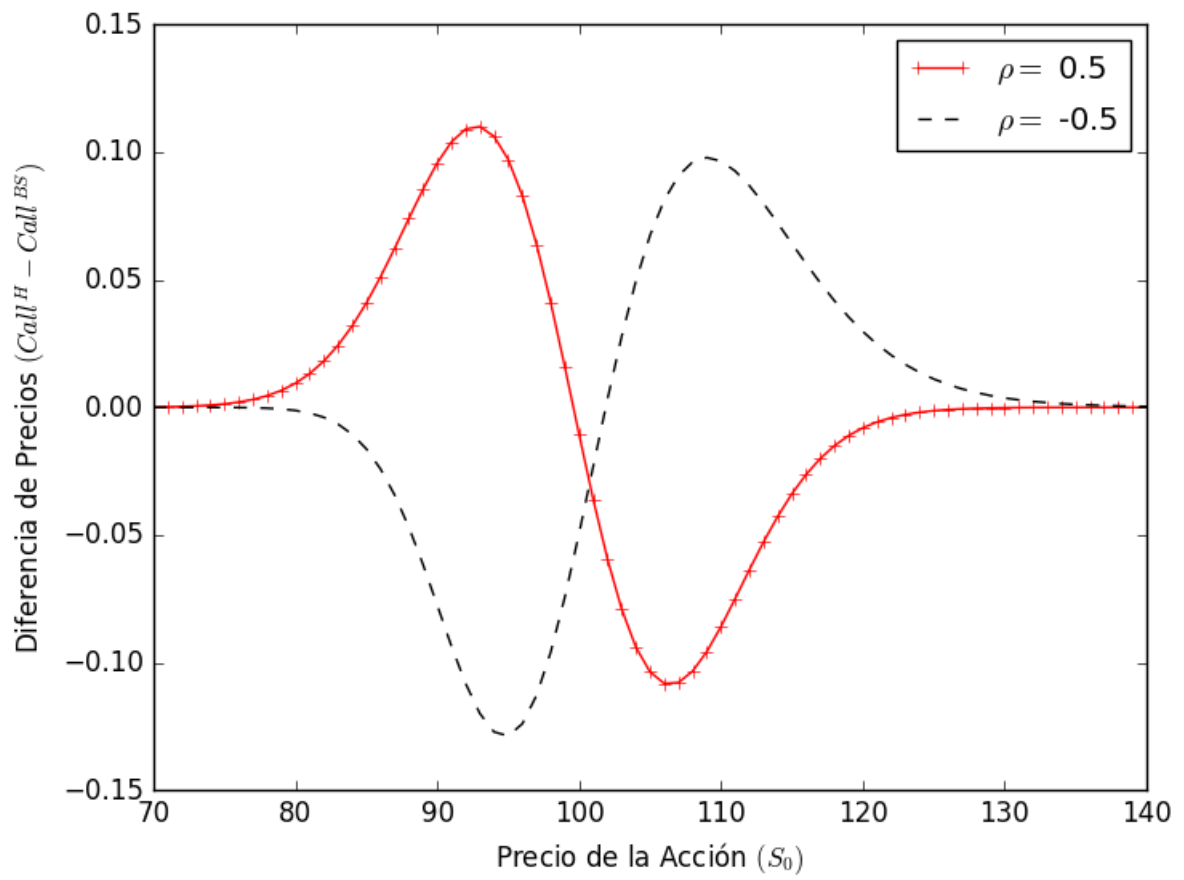
Cuadro 3.1: Comparación de Precios bajo  $\rho = 0.5$ 

$S_0$	Call <sup>H</sup>	Call <sup>BS</sup>	Call <sup>H</sup> - Call <sup>BS</sup>		$S_0$	Call <sup>H</sup>	Call <sup>BS</sup>	Call <sup>H</sup> - Call <sup>BS</sup>	
70	1.32E-04	2.19E-07	1.32E-04		103	4.52E+00	4.60E+00	-7.90E-02	
71	2.16E-04	6.45E-07	2.15E-04		104	5.20E+00	5.30E+00	-9.39E-02	
72	3.47E-04	1.81E-06	3.45E-04		105	5.94E+00	6.04E+00	-1.04E-01	
73	5.54E-04	4.80E-06	5.49E-04		106	6.72E+00	6.83E+00	-1.08E-01	
74	8.77E-04	1.22E-05	8.65E-04		107	7.54E+00	7.65E+00	-1.08E-01	
75	1.37E-03	2.95E-05	1.34E-03		108	8.40E+00	8.51E+00	-1.03E-01	
76	2.11E-03	6.82E-05	2.05E-03		109	9.30E+00	9.39E+00	-9.57E-02	
77	3.22E-03	1.51E-04	3.07E-03	O	110	1.02E+01	1.03E+01	-8.59E-02	I
78	4.87E-03	3.22E-04	4.54E-03	U	111	1.12E+01	1.12E+01	-7.49E-02	N
79	7.26E-03	6.60E-04	6.60E-03	T	112	1.21E+01	1.22E+01	-6.36E-02	
80	1.07E-02	1.30E-03	9.42E-03		113	1.31E+01	1.31E+01	-5.27E-02	
81	1.57E-02	2.47E-03	1.32E-02		114	1.40E+01	1.41E+01	-4.27E-02	T
82	2.26E-02	4.54E-03	1.81E-02	T	115	1.50E+01	1.51E+01	-3.39E-02	H
83	3.23E-02	8.06E-03	2.43E-02	H	116	1.60E+01	1.60E+01	-2.63E-02	E
84	4.57E-02	1.39E-02	3.19E-02	E	117	1.70E+01	1.70E+01	-2.01E-02	
85	6.40E-02	2.31E-02	4.08E-02		118	1.80E+01	1.80E+01	-1.50E-02	
86	8.86E-02	3.75E-02	5.11E-02		119	1.90E+01	1.90E+01	-1.11E-02	M
87	1.21E-01	5.90E-02	6.23E-02	M	120	2.00E+01	2.00E+01	-8.03E-03	O
88	1.64E-01	9.05E-02	7.40E-02	O	121	2.10E+01	2.10E+01	-5.74E-03	N
89	2.21E-01	1.35E-01	8.54E-02	N	122	2.20E+01	2.20E+01	-4.04E-03	E
90	2.93E-01	1.97E-01	9.58E-02	E	123	2.30E+01	2.30E+01	-2.81E-03	Y
91	3.85E-01	2.81E-01	1.04E-01	Y	124	2.40E+01	2.40E+01	-1.93E-03	
92	5.00E-01	3.91E-01	1.09E-01		125	2.50E+01	2.50E+01	-1.31E-03	
93	6.43E-01	5.33E-01	1.10E-01		126	2.60E+01	2.60E+01	-8.81E-04	
94	8.18E-01	7.12E-01	1.06E-01		127	2.70E+01	2.70E+01	-5.86E-04	
95	1.03E+00	9.33E-01	9.71E-02		128	2.80E+01	2.80E+01	-3.87E-04	
96	1.28E+00	1.20E+00	8.29E-02		129	2.90E+01	2.90E+01	-2.52E-04	
97	1.58E+00	1.52E+00	6.39E-02		130	3.00E+01	3.00E+01	-1.62E-04	
98	1.93E+00	1.89E+00	4.10E-02		131	3.10E+01	3.10E+01	-1.03E-04	
99	2.34E+00	2.32E+00	1.57E-02		132	3.20E+01	3.20E+01	-6.45E-05	
100	2.80E+00	2.81E+00	-1.06E-02	ATM	133	3.30E+01	3.30E+01	-4.01E-05	
101	3.31E+00	3.35E+00	-3.62E-02		134	3.40E+01	3.40E+01	-2.52E-05	
102	3.89E+00	3.95E+00	-5.94E-02		135	3.50E+01	3.50E+01	-1.64E-05	

Cuadro 3.2: Comparación de Precios bajo  $\rho = -0.5$

$S_0$	Call <sup>H</sup>	Call <sup>BS</sup>	Call <sup>H</sup> - Call <sup>BS</sup>		$S_0$	Call <sup>H</sup>	Call <sup>BS</sup>	Call <sup>H</sup> - Call <sup>BS</sup>	
70	3.38E-07	2.84E-07	5.44E-08		103	4.65E+00	4.62E+00	2.78E-02	
71	1.10E-06	8.21E-07	2.74E-07		104	5.37E+00	5.32E+00	4.95E-02	
72	1.33E-07	2.26E-06	-2.13E-06		105	6.13E+00	6.06E+00	6.74E-02	
73	-7.11E-07	5.91E-06	-6.62E-06		106	6.93E+00	6.85E+00	8.12E-02	
74	5.36E-07	1.48E-05	-1.42E-05		107	7.76E+00	7.67E+00	9.07E-02	
75	3.51E-06	3.52E-05	-3.17E-05		108	8.62E+00	8.52E+00	9.61E-02	
76	7.76E-06	8.04E-05	-7.26E-05		109	9.50E+00	9.40E+00	9.79E-02	
77	1.71E-05	1.76E-04	-1.59E-04	O	110	1.04E+01	1.03E+01	9.65E-02	I
78	4.19E-05	3.70E-04	-3.28E-04	U	111	1.13E+01	1.12E+01	9.26E-02	N
79	1.02E-04	7.49E-04	-6.48E-04	T	112	1.23E+01	1.22E+01	8.68E-02	
80	2.34E-04	1.46E-03	-1.23E-03		113	1.32E+01	1.31E+01	7.99E-02	
81	5.15E-04	2.75E-03	-2.23E-03		114	1.42E+01	1.41E+01	7.22E-02	T
82	1.10E-03	5.00E-03	-3.90E-03	T	115	1.51E+01	1.51E+01	6.42E-02	H
83	2.26E-03	8.80E-03	-6.54E-03	H	116	1.61E+01	1.61E+01	5.63E-02	E
84	4.48E-03	1.50E-02	-1.05E-02	E	117	1.71E+01	1.70E+01	4.88E-02	
85	8.57E-03	2.48E-02	-1.63E-02		118	1.81E+01	1.80E+01	4.17E-02	
86	1.58E-02	3.99E-02	-2.41E-02		119	1.91E+01	1.90E+01	3.54E-02	M
87	2.81E-02	6.25E-02	-3.44E-02	M	120	2.00E+01	2.00E+01	2.97E-02	O
88	4.82E-02	9.52E-02	-4.70E-02	O	121	2.10E+01	2.10E+01	2.47E-02	N
89	7.98E-02	1.41E-01	-6.16E-02	N	122	2.20E+01	2.20E+01	2.04E-02	E
90	1.28E-01	2.05E-01	-7.75E-02	E	123	2.30E+01	2.30E+01	1.68E-02	Y
91	1.97E-01	2.91E-01	-9.35E-02	Y	124	2.40E+01	2.40E+01	1.37E-02	
92	2.95E-01	4.03E-01	-1.08E-01		125	2.50E+01	2.50E+01	1.11E-02	
93	4.28E-01	5.47E-01	-1.20E-01		126	2.60E+01	2.60E+01	8.97E-03	
94	6.02E-01	7.29E-01	-1.27E-01		127	2.70E+01	2.70E+01	7.21E-03	
95	8.24E-01	9.52E-01	-1.29E-01		128	2.80E+01	2.80E+01	5.77E-03	
96	1.10E+00	1.22E+00	-1.24E-01		129	2.90E+01	2.90E+01	4.61E-03	
97	1.43E+00	1.54E+00	-1.13E-01		130	3.00E+01	3.00E+01	3.67E-03	
98	1.82E+00	1.92E+00	-9.58E-02		131	3.10E+01	3.10E+01	2.92E-03	
99	2.27E+00	2.35E+00	-7.42E-02		132	3.20E+01	3.20E+01	2.31E-03	
100	2.78E+00	2.83E+00	-4.93E-02	ATM	133	3.30E+01	3.30E+01	1.83E-03	
101	3.35E+00	3.38E+00	-2.30E-02		134	3.40E+01	3.40E+01	1.45E-03	
102	3.98E+00	3.97E+00	3.25E-03		135	3.50E+01	3.50E+01	1.14E-03	

Figura 3.7: Efecto de  $\rho$  sobre el Precio Call Heston relativo al Precio Call BS



Fuente : Elaboración Propia



cola derecha de la distribución de  $\ln(S_T)$  generada por el modelo Heston. Cuando la correlación es negativa, la diferencia es positiva en la región de Call ITM. Las Calls de Heston ITM son más caras que las Calls de Black-Scholes ITM, debido al grosor en la cola izquierda de la distribución de  $\ln(S_T)$  generada por el modelo de Heston. Argumentos similares se pueden hacer para las diferencias negativas.

El efecto de aumentar  $\sigma$  es aumentar la curtosis. Esto tiene sentido, ya que una alta volatilidad de la variación aumentará el rango de los valores finales de los precios de las acciones. Esto se ilustra en la Figura 3.8, que compara la diferencia entre los precios de las Calls Heston y Black-Scholes con  $\rho = 0$  y cuando  $\sigma = 0.1$  y  $\sigma = 0.2$ .

Indica que los precios de Heston son más altos que los precios de Black-Scholes en las regiones de ITM y OTM, pero más bajos en la región de dinero. Estas dos observaciones son consistentes con colas más gruesas de la distribución de  $\ln S_T$  generada por el modelo de Heston. No es sorprendente que la diferencia sea más pronunciada cuando  $\sigma$  es mayor. La figura 3.8 es similar a la figura 4 de [19, Heston]. Otra característica del modelo de Heston es que las volatilidades implícitas extraídas de los precios de opciones generadas por el modelo, exhiben una sonrisa o sesgo. La forma de dicho sesgo es conducido por la configuración de parámetros, como lo explicamos a continuación.

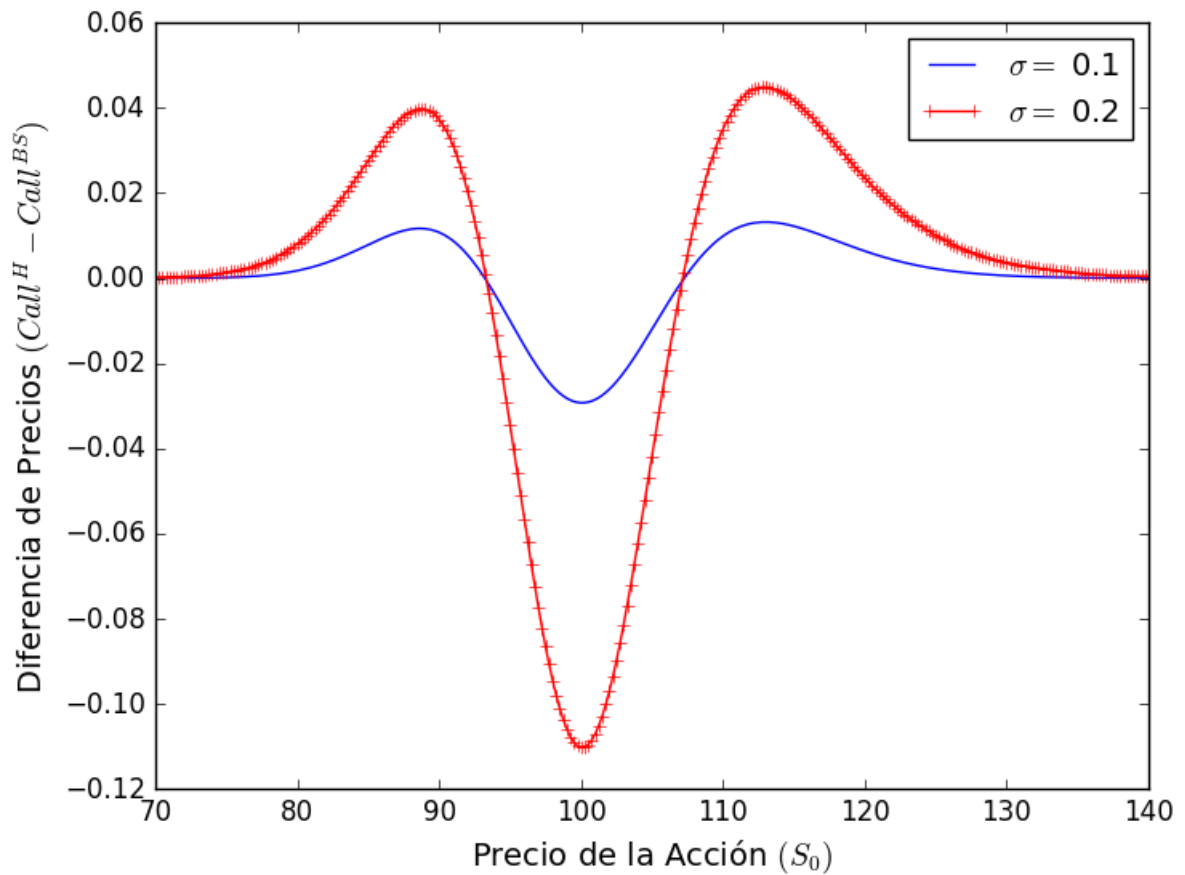
Cuadro 3.3: Comparación de Precios bajo  $\sigma = 0.1$

$S_0$	Call <sup>H</sup>	Call <sup>BS</sup>	Call <sup>H</sup> - Call <sup>BS</sup>		$S_0$	Call <sup>H</sup>	Call <sup>BS</sup>	Call <sup>H</sup> - Call <sup>BS</sup>	
70	8.87E-06	2.49E-07	8.62E-06		103	4.59E+00	4.61E+00	-2.22E-02	
71	1.73E-05	7.29E-07	1.65E-05		104	5.29E+00	5.31E+00	-1.74E-02	
72	3.27E-05	2.02E-06	3.07E-05		105	6.04E+00	6.05E+00	-1.20E-02	
73	6.13E-05	5.33E-06	5.60E-05		106	6.83E+00	6.84E+00	-6.49E-03	
74	1.13E-04	1.34E-05	1.00E-04		107	7.66E+00	7.66E+00	-1.30E-03	
75	2.06E-04	3.22E-05	1.74E-04		108	8.52E+00	8.52E+00	3.27E-03	
76	3.68E-04	7.41E-05	2.94E-04		109	9.41E+00	9.40E+00	7.03E-03	
77	6.45E-04	1.63E-04	4.82E-04	O	110	1.03E+01	1.03E+01	9.87E-03	I
78	1.11E-03	3.46E-04	7.68E-04	U	111	1.12E+01	1.12E+01	1.18E-02	N
79	1.89E-03	7.03E-04	1.19E-03	T	112	1.22E+01	1.22E+01	1.29E-02	
80	3.15E-03	1.38E-03	1.78E-03		113	1.31E+01	1.31E+01	1.32E-02	
81	5.18E-03	2.61E-03	2.57E-03		114	1.41E+01	1.41E+01	1.29E-02	T
82	8.36E-03	4.77E-03	3.59E-03	T	115	1.51E+01	1.51E+01	1.22E-02	H
83	1.33E-02	8.43E-03	4.85E-03	H	116	1.61E+01	1.60E+01	1.12E-02	E
84	2.07E-02	1.44E-02	6.30E-03	E	117	1.70E+01	1.70E+01	1.00E-02	
85	3.18E-02	2.40E-02	7.86E-03		118	1.80E+01	1.80E+01	8.80E-03	
86	4.81E-02	3.87E-02	9.39E-03		119	1.90E+01	1.90E+01	7.55E-03	M
87	7.14E-02	6.07E-02	1.07E-02	M	120	2.00E+01	2.00E+01	6.37E-03	O
88	1.04E-01	9.28E-02	1.15E-02	O	121	2.10E+01	2.10E+01	5.30E-03	N
89	1.50E-01	1.38E-01	1.16E-02	N	122	2.20E+01	2.20E+01	4.34E-03	E
90	2.12E-01	2.01E-01	1.08E-02	E	123	2.30E+01	2.30E+01	3.51E-03	Y
91	2.94E-01	2.86E-01	8.74E-03	Y	124	2.40E+01	2.40E+01	2.81E-03	
92	4.02E-01	3.97E-01	5.50E-03		125	2.50E+01	2.50E+01	2.22E-03	
93	5.41E-01	5.40E-01	1.11E-03		126	2.60E+01	2.60E+01	1.74E-03	
94	7.16E-01	7.20E-01	-4.18E-03		127	2.70E+01	2.70E+01	1.35E-03	
95	9.33E-01	9.43E-01	-1.00E-02		128	2.80E+01	2.80E+01	1.04E-03	
96	1.20E+00	1.21E+00	-1.58E-02		129	2.90E+01	2.90E+01	7.95E-04	
97	1.51E+00	1.53E+00	-2.12E-02		130	3.00E+01	3.00E+01	6.04E-04	
98	1.88E+00	1.91E+00	-2.54E-02		131	3.10E+01	3.10E+01	4.56E-04	
99	2.31E+00	2.33E+00	-2.82E-02		132	3.20E+01	3.20E+01	3.42E-04	
100	2.79E+00	2.82E+00	-2.93E-02	ATM	133	3.30E+01	3.30E+01	2.56E-04	
101	3.33E+00	3.36E+00	-2.85E-02		134	3.40E+01	3.40E+01	1.90E-04	
102	3.93E+00	3.96E+00	-2.61E-02		135	3.50E+01	3.50E+01	1.41E-04	

Cuadro 3.4: Comparación de Precios bajo  $\sigma = 0.2$ 

$S_0$	Call <sup>H</sup>	Call <sup>BS</sup>	Call <sup>H</sup> – Call <sup>BS</sup>		$S_0$	Call <sup>H</sup>	Call <sup>BS</sup>	Call <sup>H</sup> – Call <sup>BS</sup>	
70	2.07E-04	2.49E-07	2.07E-04		103	4.53E+00	4.61E+00	-8.14E-02	
71	3.31E-04	7.29E-07	3.30E-04		104	5.25E+00	5.31E+00	-6.24E-02	
72	4.13E-04	2.02E-06	4.11E-04		105	6.01E+00	6.05E+00	-4.18E-02	
73	5.80E-04	5.33E-06	5.75E-04		106	6.82E+00	6.84E+00	-2.15E-02	
74	9.44E-04	1.34E-05	9.31E-04		107	7.66E+00	7.66E+00	-2.86E-03	
75	1.48E-03	3.22E-05	1.45E-03		108	8.53E+00	8.52E+00	1.31E-02	
76	2.15E-03	7.41E-05	2.07E-03		109	9.42E+00	9.40E+00	2.57E-02	
77	3.06E-03	1.63E-04	2.90E-03	O	110	1.03E+01	1.03E+01	3.50E-02	I
78	4.45E-03	3.46E-04	4.11E-03	U	111	1.13E+01	1.12E+01	4.10E-02	N
79	6.52E-03	7.03E-04	5.82E-03	T	112	1.22E+01	1.22E+01	4.41E-02	
80	9.42E-03	1.38E-03	8.04E-03		113	1.32E+01	1.31E+01	4.49E-02	
81	1.34E-02	2.61E-03	1.08E-02		114	1.41E+01	1.41E+01	4.40E-02	T
82	1.89E-02	4.77E-03	1.41E-02	T	115	1.51E+01	1.51E+01	4.17E-02	H
83	2.66E-02	8.43E-03	1.81E-02	H	116	1.61E+01	1.60E+01	3.86E-02	E
84	3.72E-02	1.44E-02	2.27E-02	E	117	1.71E+01	1.70E+01	3.50E-02	
85	5.16E-02	2.40E-02	2.77E-02		118	1.81E+01	1.80E+01	3.12E-02	
86	7.11E-02	3.87E-02	3.24E-02		119	1.90E+01	1.90E+01	2.73E-02	M
87	9.72E-02	6.07E-02	3.64E-02	M	120	2.00E+01	2.00E+01	2.35E-02	O
88	1.32E-01	9.28E-02	3.91E-02	O	121	2.10E+01	2.10E+01	2.01E-02	N
89	1.78E-01	1.38E-01	3.97E-02	N	122	2.20E+01	2.20E+01	1.71E-02	E
90	2.38E-01	2.01E-01	3.73E-02	E	123	2.30E+01	2.30E+01	1.44E-02	Y
91	3.17E-01	2.86E-01	3.10E-02	Y	124	2.40E+01	2.40E+01	1.21E-02	
92	4.17E-01	3.97E-01	2.04E-02		125	2.50E+01	2.50E+01	1.01E-02	
93	5.46E-01	5.40E-01	5.49E-03		126	2.60E+01	2.60E+01	8.28E-03	
94	7.07E-01	7.20E-01	-1.32E-02		127	2.70E+01	2.70E+01	6.76E-03	
95	9.08E-01	9.43E-01	-3.45E-02		128	2.80E+01	2.80E+01	5.49E-03	
96	1.16E+00	1.21E+00	-5.66E-02		129	2.90E+01	2.90E+01	4.47E-03	
97	1.45E+00	1.53E+00	-7.74E-02		130	3.00E+01	3.00E+01	3.67E-03	
98	1.81E+00	1.91E+00	-9.45E-02		131	3.10E+01	3.10E+01	3.04E-03	
99	2.23E+00	2.33E+00	-1.06E-01		132	3.20E+01	3.20E+01	2.52E-03	
100	2.71E+00	2.82E+00	-1.10E-01	ATM	133	3.30E+01	3.30E+01	2.07E-03	
101	3.26E+00	3.36E+00	-1.07E-01		134	3.40E+01	3.40E+01	1.66E-03	
102	3.86E+00	3.96E+00	-9.70E-02		135	3.50E+01	3.50E+01	1.30E-03	

Figura 3.8: Efecto de  $\sigma$  sobre el Precio Call Heston relativo al Precio Call BS



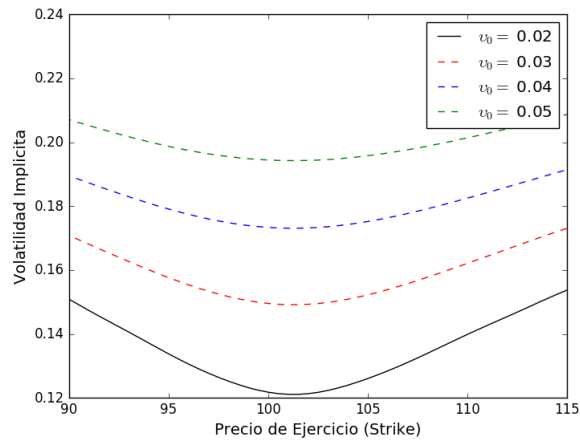
Fuente : Elaboración Propia

### 3.3.4. Efecto de los parámetros de Heston sobre la Volatilidad Implícita

#### Efecto de la Varianza inicial $v_0$ sobre la Volatilidad Implícita

El cambio de  $v_0$  permite el ajuste en la altura de la curva de sonrisa. Al aumentar el nivel de volatilidad inicial  $v_0$ , la sonrisa de volatilidad implícita se mueve hacia arriba, como lo ilustramos en la figura 3.9.

Figura 3.9: Efecto de  $v_0$  sobre la Volatilidad Implícita

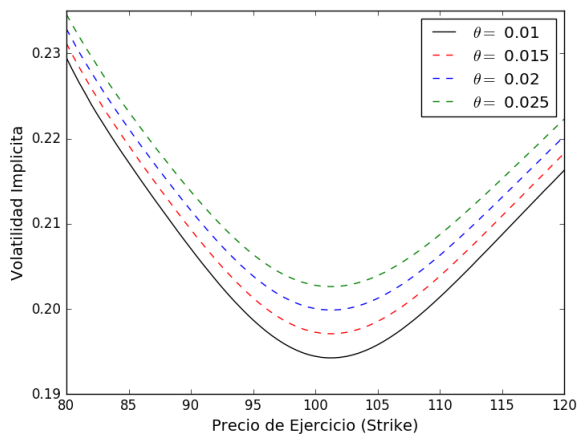


Fuente : Elaboración Propia

### Efecto de la Varianza a Largo Plazo ( $\theta$ ) sobre la Volatilidad Implícita

De hecho,  $\theta$  y  $v_0$  tienen una influencia similar sobre la sonrisa de volatilidad implícita. En la figura 3.10 se muestra el efecto de cambiar la varianza a largo plazo.

Figura 3.10: Efecto de  $\theta$  sobre la Volatilidad Implícita



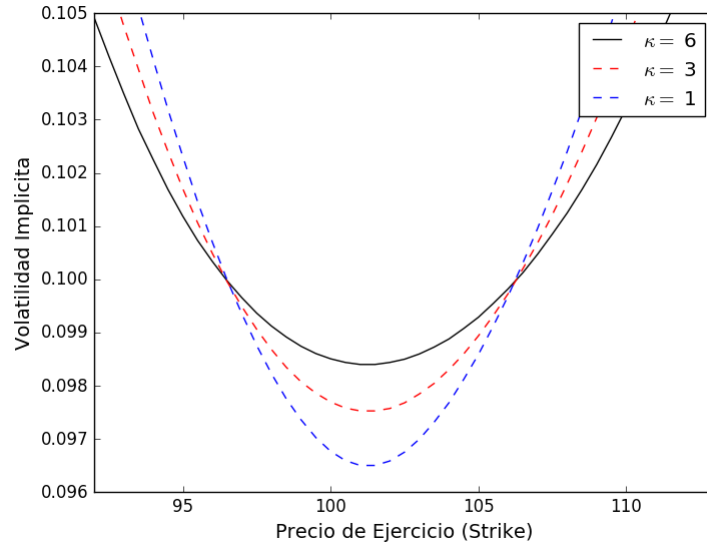
Fuente : Elaboración Propia

### Efecto de la Velocidad de reversión a la media ( $\kappa$ ) sobre la Volatilidad Implícita

El parámetro de reversión media,  $\kappa$ , lo podemos interpretar como el grado de "agrupamiento de volatilidad". En el mercado, se puede observar la agrupación de volatilidad, es decir, es probable que las grandes variaciones de precios sean seguidas por grandes variaciones de precios, mientras que los movimientos pequeños tienen más probabilidades de ser seguidos por movimien-

tos pequeños. Como se puede observar en la figura 3.11, el parámetro de reversión media controla la curvatura de la sonrisa, un aumento del parámetro de reversión media aplana la sonrisa de volatilidad implícita.

Figura 3.11: **Efecto de  $\kappa$  sobre la Volatilidad Implícita**

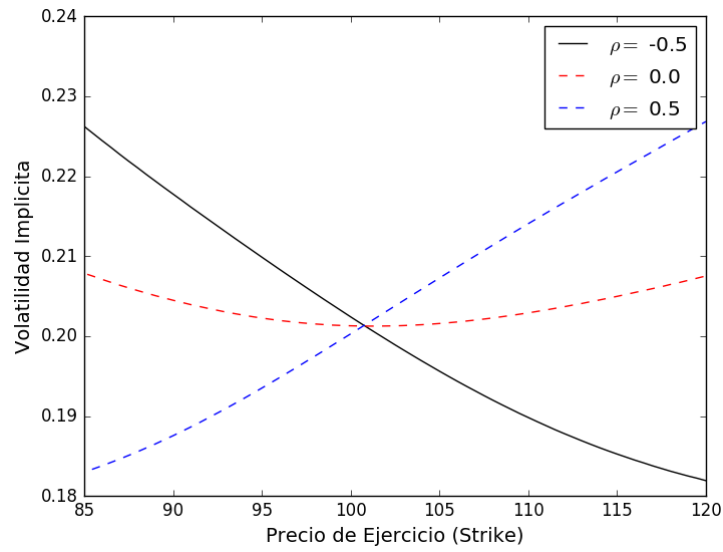


Fuente : Elaboración Propia

### **Efecto de la Correlación ( $\rho$ ) sobre la Volatilidad Implícita**

La correlación, que puede interpretarse como la correlación entre los Log-Retornos y la volatilidad del activo, como se mencionó, afecta la pesadez de las colas, es decir, afecta la asimetría de la distribución. El parámetro de correlación  $\rho$  determina la dirección de sesgo, con  $\rho > 0$  correspondiente a una pendiente positiva, y  $\rho < 0$  correspondiente a una pendiente negativa. Esto se puede observar en la figura 3.12, que la construimos utilizando la configuración de parámetros, dada por,  $S = 100$ ,  $r = 0.05$ ,  $\tau = 0.25$ ,  $\kappa = 2$ ,  $\theta = 0.01$ ,  $\lambda = 0$ , y  $v_0 = 0.01$ , sobre el rango de Strike de 85 a 120.

Figura 3.12: Efecto de  $\rho$  sobre la Volatilidad Implícita

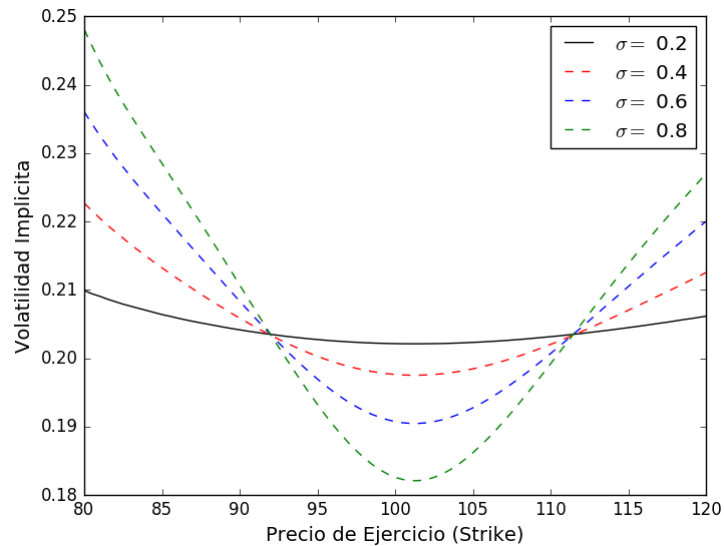


Fuente : Elaboración Propia

### Efecto de la Volatilidad de la Varianza ( $\sigma$ ) sobre la Volatilidad Implícita

El aumento de los valores de la volatilidad de la varianza  $\sigma$  aumenta la curvatura de la sonrisa. Esto se puede observar en la Figura 3.13, que usa la misma configuración de parámetros pero con  $\rho = 0$ .

Figura 3.13: Efecto de  $\sigma$  sobre la Volatilidad Implícita



Fuente : Elaboración Propia

## Capítulo 4

# Simulación en el modelo de Heston

Lo tratado en el capítulo 3, para los precios de las opciones Call bajo el modelo de Heston ha sido analítico, en el sentido de que el precio de la opción se expresa en forma cerrada e involucra una o más integrales complejas que deben evaluarse numéricamente. Otro enfoque es usar la simulación, que se describe en este capítulo; la simulación Monte Carlo, en el contexto del modelo de Heston, se refiere a un conjunto de técnicas para generar series temporales artificiales del precio de las acciones  $S_t$  y la varianza  $v_t$  a lo largo del tiempo, a partir de las cuales se pueden obtener los precios de las opciones. Aquí, primero se presentan los esquemas estándar de Euler y Milstein, siguiendo [16, Gatheral], [14, Fabrice] y [24, Kahl, Jäckel]. La ventaja de estos esquemas es que son fáciles de implementar, y sus propiedades de convergencia son bien conocidas. Luego, se estudian esquemas que están específicamente diseñados para el modelo de Heston, los esquemas QE y QEM siguiendo [3, Andersen]. Una de las principales cualidades del diseño de éstos esquemas, es que evitan las varianzas negativas que a veces se pueden generar en los esquemas estándar. Para finalizar hacemos un estudio de la consistencia débil del esquema.

### 4.1. Configuración General

Recordemos que el precio de las acciones y su varianza son impulsados por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs)

$$\begin{aligned}dS_t &= rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1,t} \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_{2,t}\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde  $E[dW_{1,t}dW_{2,t}] = \rho dt$ . Note que los procesos en la ecuación (4.1) son escritos bajo la medida de riesgo neutro  $\mathbb{Q}$  y están especificados en tiempo continuo. La simulación, sin embargo, se realiza en pasos de tiempo discretos. Por lo tanto, el primer paso en un esquema de simulación suele ser aproximar un proceso de tiempo continuo mediante un proceso de tiempo discreto, esta tarea es conocida como discretización. Los procesos que modelan el precio de las acciones y su



volatilidad pueden escribirse en forma general, como

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t \quad (4.2)$$

donde  $W_t$  es un movimiento Browniano. Simulamos  $X_t$  en el intervalo de tiempo  $[0, \tau]$ , que suponemos que se divide en  $M$  puntos como  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_M = \tau$ , donde los incrementos de tiempo están igualmente espaciados con ancho  $dt$ . Incrementos de tiempo igualmente espaciados hace que la notación sea más sencilla, pues nos permite escribir  $t_i - t_{i-1}$  como simplemente  $dt$  para todo  $i = 2, \dots, M$ . Todos los resultados que se obtienen con incrementos igualmente espaciados se pueden generalizar para un espaciamiento desigual (irregular). Integrar  $dX_t$  de  $t$  a  $t + dt$  produce

$$X_{t+dt} = X_t + \int_t^{t+dt} \mu(X_s, s)ds + \int_t^{t+dt} \sigma(X_s, s)dW_s. \quad (4.3)$$

La ecuación (4.3) es el punto de partida para la discretización. La idea es que en el tiempo  $t$  se conozca el valor de  $X_t$ , y deseamos obtener el siguiente valor  $X_{t+dt}$  en el tiempo  $t + dt$ . Para obtener el precio de una opción europea utilizando la simulación en el modelo Heston, se simula primero el proceso bivariado  $(S_t, v_t)$  generando  $N$  caminos muestrales desde  $t = 0$  hasta  $t = \tau$ . A continuación, se captura el último precio de cotización de cada camino muestral de precio de acciones,  $S_{t_M}$  y obtenemos el pago de la opción europea al vencimiento, tomamos el promedio sobre todos los caminos muestrales obtenidos del precio de acciones y lo traemos a valor presente. Por lo tanto, el precio de la Call  $C(K)$ , es

$$C(K) = e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max\left(0, S_{t_M}^{(i)} - K\right) \quad (4.4)$$

donde  $S_{t_M}^{(i)}$  es el precio final de la acción generado por el  $i$ -ésimo camino muestral del precio de la acción,  $i = 1, \dots, N$ . Para esto debemos tener estimaciones de los parámetros  $\kappa$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$ ,  $v_0$  y  $\rho$ . Hay dos problemas que surgen al simular el proceso bivariado  $(S_t, v_t)$ . El primero es la velocidad baja de convergencia. El segundo problema (más grave) es que, debido a que  $v_t$  sigue un proceso de CIR, muchos esquemas de simulación, incluidos los esquemas de Euler y Milstein, generarán valores negativos para  $v_t$ , incluso si se cumple la condición de Feller ( $2\kappa\theta > \sigma^2$ ). Esto se debe a que la condición de Feller es válida para procesos de tiempo continuo, pero la simulación se realiza en tiempo discreto y sirve solo como una aproximación a los procesos de tiempo continuo. Hay al menos dos formas de tratar las varianzas negativas:

- En el método de *truncamiento completo*, un valor negativo para  $v_t$  es reemplazado por cero. Por lo tanto,  $v_t$  se reemplaza por  $v_t^+ = \max(0, v_t)$  en todas partes de la discretización.
- En el método de *reflexión*, un valor negativo para  $v_t$  se refleja con  $-v_t$ . Por lo tanto,  $v_t$  es reemplazado por  $|v_t|$  en todas partes de la discretización.

La desventaja del esquema de truncamiento completo es que crea varianzas de valor nulo, lo que

no es realista porque los precios de las acciones nunca muestran varianza cero. La desventaja del esquema de reflexión es que refleja una varianza negativamente grande a una varianza positivamente grande. Por lo tanto, transforma las realizaciones de baja volatilidad en alta volatilidad. Otra forma de tratar con los valores negativos simulados de  $v_t$  es idear esquemas de simulación para  $v_t$  que no produzcan valores negativos (por ejemplo, esquemas QE y QEM). Otra forma es simular  $\ln v_t$  o  $\sqrt{v_t}$ , y luego exponenciar o elevar al cuadrado el resultado.

Para el precio de las acciones, se puede simular  $S_t$  en sí, pero como se menciona en [14, Fabrice, pág 179] un mejor enfoque es simular el Log-precio  $x_t = \ln S_t$ , y luego exponenciarlo.

Todos los esquemas de simulación para el modelo de Heston contienen los pasos básicos similares. En primer lugar, se generan dos variables aleatorias Normales estándar independientes, que luego se vuelven dependientes al aplicar la descomposición de Cholesky (Observación 38). Estos se multiplican por  $\sqrt{dt}$  para que sean, aproximadamente, incrementos de movimientos Brownianos. En segundo lugar, obtenemos el valor actualizado  $v_{t+dt}$ . En tercer lugar, obtenemos el valor actualizado  $S_{t+dt}$  (o  $x_{t+dt}$ ).

En resumen, tenemos:

**Paso 1:** Inicializamos  $S_t$  al precio spot (o  $x_t = \ln S_t$ ) e inicializamos  $v_t$ , el parámetro de varianza actual.

**Paso 2:** Generamos dos variables aleatorias de distribución Normal estándar e independientes  $Z_1$  y  $Z_2$ , y hacemos  $Z_V = Z_1$  y  $Z_S = \rho Z_V + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2$ . Aproximamos el movimiento browniano por  $dW_{1,t} = \sqrt{dt} Z_S$  y  $dW_{2,t} = \sqrt{dt} Z_V$ .

**Paso 3:** Obtenemos el valor de  $v_{t+dt}$ .

**Paso 4:** Dado  $v_{t+dt}$ , obtenemos el valor de  $x_{t+dt}$ , luego exponenciamos, para hallar  $S_{t+dt}$  y regresamos al paso 2.

*Observación 90.* Tenga en cuenta que  $Z_V$  y  $Z_S$  están contruidos de modo que  $E[Z_V] = E[Z_S] = 0$ , y para que  $E[Z_V \cdot Z_S] = \rho E[Z_1^2] + \sqrt{1 - \rho^2} E[Z_1 Z_2] = \rho$ , según se requiera.

A continuación, describimos los esquemas de discretización, Euler y Milstein para  $(S_t, v_t)$ . Se supone que la malla de tiempo se discretiza usando incrementos de tiempo que están igualmente espaciados con tamaño  $dt$ .

## 4.2. Esquema de Euler

La forma más sencilla de discretizar el proceso en la ecuación (4.3) es usar la discretización de Euler. Esto es equivalente a aproximar las integrales usando la regla del punto izquierdo, es decir, la primera integral se aproxima como el producto del integrando en el tiempo  $t$  y el dominio de integración  $dt$ , esto es,

$$\int_t^{t+dt} \mu(X_s, s) ds \approx \mu(X_t, t) \int_t^{t+dt} ds = \mu(X_t, t) dt.$$

Se hace uso de la regla del punto izquierdo, ya que en el tiempo  $t$  se conoce el valor  $\mu(X_t, t)$ . La regla del punto derecho requeriría que  $\mu(X_{t+dt}, t + dt)$  sea conocido en el tiempo  $t$ . La segunda integral es aproximada como

$$\begin{aligned} \int_t^{t+dt} \sigma(X_s, s) dW_s &\approx \sigma(X_t, t) \int_t^{t+dt} dW_s \\ &= \sigma(X_t, t) (W_{t+dt} - W_t) \\ &\stackrel{d}{=} \sigma(X_t, t) \sqrt{dt} Z, \end{aligned}$$

donde la última igualdad, representa la igualdad en distribución (ya que  $W_{t+dt} - W_t$  y  $\sqrt{dt}Z$  son idénticos en distribución, con  $Z$  variable Normal estándar). Por lo tanto, la discretización de Euler en la ecuación (4.3) es

$$X_{t+dt} = X_t + \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)\sqrt{dt}Z. \quad (4.5)$$

A continuación se ilustra la discretización de Euler en el contexto del modelo de Heston.

#### 4.2.1. Esquema de Euler para la varianza

La EDE para la varianza en la expresión (4.1), escrita en su forma integral es

$$v_{t+dt} = v_t + \int_t^{t+dt} \kappa(\theta - v_s) ds + \int_t^{t+dt} \sigma\sqrt{v_s} dW_s$$

y al utilizar la expresión (4.5), tenemos

$$v_{t+dt} = v_t + \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}\sqrt{dt}Z_v. \quad (4.6)$$

No es difícil ver que la probabilidad de generar un valor negativo para  $v_{t+dt}$  es

$$P(v_{t+dt} < 0) = \Phi\left(\frac{-(1 - \kappa dt)v_t - \kappa\theta dt}{\sigma\sqrt{v_t}\sqrt{dt}}\right)$$

donde  $\Phi(x)$  denota la función de distribución acumulada Normal estándar, evaluada en  $x$ . Por lo tanto, cuando se aplica la discretización de Euler a la varianza, también se debe aplicar el método de truncamiento completo o el método de reflexión para tratar cualquier valor negativo que se genere en la simulación.

### 4.2.2. Esquema de Euler para el precio de la acción

Hay dos enfoques para simular el precio de las acciones. Se puede simular  $S_t$  directamente, al escribir la primera expresión de (4.1) en su forma integral

$$S_{t+dt} = S_t + \int_t^{t+dt} rS_s ds + \int_t^{t+dt} \sqrt{v_s} S_s dW_s$$

y utilizando la expresión (4.5)

$$S_{t+dt} = S_t + rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t \sqrt{dt} Z_S. \quad (4.7)$$

o se puede simular  $\ln S_t$  y luego exponenciar. Para ello, se aplica el lema de Itô (teorema 42) a la primera ecuación en la expresión de (4.1). Por lo tanto,  $\ln S_t$  sigue la EDE (ver (3.17) para detalles)

$$d \ln S_t = \left( r - \frac{1}{2} v_t \right) dt + \sqrt{v_t} dW_{1,t},$$

o en forma integral

$$\ln S_{t+dt} = \ln S_t + \int_t^{t+dt} \left( r - \frac{1}{2} v_s \right) ds + \int_t^{t+dt} \sqrt{v_s} dW_{1,s}.$$

La discretización de Euler para el proceso  $\ln S_t$  es, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \ln S_{t+dt} &\approx \ln S_t + \left( r - \frac{1}{2} v_t \right) dt + \sqrt{v_t} (W_{1,t+dt} - W_{1,t}) \\ &= \ln S_t + \left( r - \frac{1}{2} v_t \right) dt + \sqrt{v_t} \sqrt{dt} Z_S. \end{aligned} \quad (4.8)$$

La discretización de Euler de  $S_t$  se obtiene por exponenciación de la ecuación (4.8)

$$S_{t+dt} = S_t e^{\left( r - \frac{1}{2} v_t \right) dt + \sqrt{v_t} \sqrt{dt} Z_S}. \quad (4.9)$$

Para implementar la simulación de Euler comenzamos con los valores iniciales  $S_t$  (o  $x_t = \ln S_t$ ) para el precio de las acciones y  $v_t$  para la varianza. Una vez obtenido los valores  $(S_t, v_t)$ , se obtiene  $v_{t+dt}$  con ayuda de la ecuación (4.6) y se calcula  $S_{t+dt}$  apoyándonos en (4.9).

### 4.3. Esquema de Milstein

Para el modelo de Heston, los coeficientes en la ecuación (4.2) solo dependen de  $X_t$ , y no dependen de  $t$  directamente. Por lo tanto, se puede suponer que el precio de las acciones y la varianza son manejados por la EDE de la forma,

$$dX_t = \underbrace{\mu(X_t)}_{:=\mu_t} dt + \underbrace{\sigma(X_t)}_{:=\sigma_t} dW_t,$$

en forma integral,

$$X_{t+dt} = X_t + \int_t^{t+dt} \mu_s ds + \int_t^{t+dt} \sigma_s dW_s. \quad (4.10)$$

La idea detrás del método de Milstein es que la precisión de la discretización se puede aumentar expandiendo los coeficientes  $\mu_t = \mu(X_t)$  y  $\sigma_t = \sigma(X_t)$  a través del lema de Itô. Esto es razonable pues los coeficientes también son funciones de  $X_t$ . De hecho, se puede aplicar el lema de Itô (teorema 42) a las funciones  $\mu_t$  y  $\sigma_t$  como se haría para cualquier función diferenciable de  $X_t$ . Por el lema de Itô, entonces, los coeficientes cumplen las EDEs

$$\begin{aligned} d\mu_t &= \left( \mu'_t \mu_t + \frac{1}{2} \mu''_t \sigma_t^2 \right) dt + (\mu'_t \sigma_t) dW_t \\ d\sigma_t &= \left( \sigma'_t \mu_t + \frac{1}{2} \sigma''_t \sigma_t^2 \right) dt + (\sigma'_t \sigma_t) dW_t \end{aligned}$$

donde la prima se refiere a la diferenciación con respecto a  $X_t$  y se tiene en cuenta que las derivadas con respecto a  $t$  son cero porque en el modelo de Heston  $\mu_t$  y  $\sigma_t$  no tienen dependencia directa de  $t$ . La forma integral de los coeficientes en el tiempo  $s$  (con  $t < s < t + dt$ ) es

$$\begin{aligned} \mu_s &= \mu_t + \int_t^s \left( \mu'_m \mu_m + \frac{1}{2} \mu''_m \sigma_m^2 \right) dm + \int_t^s (\mu'_m \sigma_m) dW_m \\ \sigma_s &= \sigma_t + \int_t^s \left( \sigma'_m \mu_m + \frac{1}{2} \sigma''_m \sigma_m^2 \right) dm + \int_t^s (\sigma'_m \sigma_m) dW_m. \end{aligned}$$

Al sustituir por  $\mu_s$  y  $\sigma_s$  dentro de las integrales de la ecuación (4.10) se tiene

$$\begin{aligned} X_{t+dt} &= X_t + \int_t^{t+dt} \left[ \mu_t + \int_t^s (\mu'_m \mu_m + \frac{1}{2} \mu''_m \sigma_m^2) dm + \int_t^s (\mu'_m \sigma_m) dW_m \right] ds \\ &\quad + \int_t^{t+dt} \left[ \sigma_t + \int_t^s (\sigma'_m \mu_m + \frac{1}{2} \sigma''_m \sigma_m^2) dm + \int_t^s (\sigma'_m \sigma_m) dW_m \right] dW_s, \end{aligned} \quad (4.11)$$

Los diferenciales superiores a la orden uno son  $dsdm = \mathcal{O}(dt^2)$  y  $dsdW_m = \mathcal{O}(dt^{\frac{3}{2}})$ , y se ignoran. El término que involucra a  $dW_m dW_s$  se conserva porque es  $\mathcal{O}(dt)$ , de orden uno. Esto implica que (4.11) queda reducido a

$$X_{t+dt} = X_t + \mu_t \int_t^{t+dt} ds + \sigma_t \int_t^{t+dt} dW_s + \int_t^{t+dt} \int_t^s (\sigma'_m \sigma_m) dW_m dW_s. \quad (4.12)$$

Al aplicar la discretización de Euler al último término de (4.12), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_t^{t+dt} \int_t^s (\sigma'_m \sigma_m) dW_m dW_s &\approx \sigma'_t \sigma_t \int_t^{t+dt} \int_t^s dW_m dW_s \\ &= \sigma'_t \sigma_t \int_t^{t+dt} (W_s - W_t) dW_s \\ &= \sigma'_t \sigma_t \left( \int_t^{t+dt} W_s dW_s - W_t W_{t+dt} + W_t^2 \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Para resolver la integral restante en (4.13), se define  $dY_t = W_t dW_t$ . Usando el lema de Itô (teorema 42), es fácil mostrar que  $Y_t = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t$ . En efecto,  $\frac{\partial Y}{\partial t} = -\frac{1}{2}$ ,  $\frac{\partial Y}{\partial W} = W$  y  $\frac{\partial^2 Y}{\partial W^2} = 1$ ,

de modo que

$$dY_t = \left( -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \right) dt + (W_t \times 1) dW_t = W_t dW_t,$$

por lo que,

$$\int_t^{t+dt} W_s dW_s = Y_{t+dt} - Y_t = \frac{1}{2} W_{t+dt}^2 - \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} dt. \quad (4.14)$$

Al sustituir (4.14) en (4.13),

$$\begin{aligned} \int_t^{t+dt} \int_t^s (\sigma'_m \sigma_m) dW_m dW_s &\approx \frac{1}{2} \sigma'_t \sigma_t [W_{t+dt}^2 - W_t^2 - dt - 2W_t W_{t+dt} + 2W_t^2] \\ &= \frac{1}{2} \sigma'_t \sigma_t [(W_{t+dt} - W_t)^2 - dt] \\ &= \frac{1}{2} \sigma'_t \sigma_t [(\Delta W_t)^2 - dt] \end{aligned} \quad (4.15)$$

donde  $\Delta W_t = W_{t+dt} - W_t$ , es igual en distribución a  $\sqrt{dt}Z$ , con  $Z$  de distribución Normal estándar. De (4.15) en (4.12), se tiene la forma general de discretización de Milstein,

$$X_{t+dt} = \underbrace{X_t + \mu_t dt + \sigma_t \sqrt{dt} Z}_{\text{Discretización Euler}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sigma'_t \sigma_t [Z^2 - 1] dt}_{\text{Término adicional}}. \quad (4.16)$$

Por lo tanto, la discretización de Milstein de  $X_t$  es idéntica a la discretización de Euler en (4.5), salvo por el término adicional  $\frac{1}{2} \sigma'_t \sigma_t [Z^2 - 1] dt$  en la expresión (4.16). Dicho término adicional mejora la precisión de la discretización de Milstein sobre la discretización de Euler.

### 4.3.1. Esquema de Milstein para la Varianza

De la segunda ecuación del sistema (4.1), se tiene  $\mu(v_t) = \kappa(\theta - v_t)$  y  $\sigma(v_t) = \sigma\sqrt{v_t}$ , que al reemplazar en la expresión (4.16), se tiene

$$\begin{aligned} v_{t+dt} &= v_t + \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}\sqrt{dt}Z_v + \frac{1}{4}\sigma^2 [Z_v^2 - 1] dt \\ &= \underbrace{\sqrt{v_t}^2 + 2 \left( \frac{1}{2} \sigma\sqrt{v_t}\sqrt{dt}Z_v \right) + \frac{1}{4}\sigma^2 Z_v^2 + \kappa(\theta - v_t)dt - \frac{1}{4}\sigma^2 dt}_{\text{}} \\ &= \left( \sqrt{v_t} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{dt}Z_v \right)^2 + \kappa(\theta - v_t)dt - \frac{1}{4}\sigma^2 dt. \end{aligned} \quad (4.17)$$

La ecuación (4.17) es la ecuación (2.18) de [16, Gatheral]. Aunque la discretización de Milstein para el proceso de varianza produce muchos menos valores negativos para la varianza que el esquema de discretización de Euler, también se debe aplicar el método de truncamiento completo o el esquema de reflexión a la expresión (4.17).

### 4.3.2. Esquema de Milstein para el Precio de la acción

Para el proceso Log-precio, se tiene en cuenta la ecuación (3.17),

$$d \ln S_t = \left( r - \frac{1}{2} v_t \right) dt + \sqrt{v_t} dW_{1,t},$$

con lo que  $\mu(\ln S_t) = r - \frac{1}{2} v_t$  y  $\sigma(\ln S_t) = \sqrt{v_t}$ , teniendo que  $\mu'_t = \sigma'_t = 0$ . Como  $v_t$  se conoce en el momento  $t$ , se puede tratar como una constante en los coeficientes. Luego, al aplicar (4.16), se tiene

$$\ln S_{t+dt} = \ln S_t + \left( r - \frac{1}{2} v_t \right) dt + \sqrt{v_t} \sqrt{dt} Z_S, \quad (4.18)$$

que es idéntico a la expresión (4.8). Por lo tanto, la discretización de Milstein de  $\ln S_t$  en el modelo de Heston no produce una aproximación más precisa que la discretización de Euler. El precio de la acción se obtiene por exponenciación de (4.18), es decir,

$$S_{t+dt} = S_t e^{(r - \frac{1}{2} v_t) dt + \sqrt{v_t} \sqrt{dt} Z_S}. \quad (4.19)$$

Dados los valores simulados  $(S_t, v_t)$ , se obtiene  $v_{t+dt}$  de la ecuación (4.17), y a partir de (4.19) se obtiene  $S_{t+dt}$ .

## 4.4. Esquema Exponencial-Cuadrático (QE)

### 4.4.1. Esquema de discretización para el Proceso de Varianza $v$

Recordemos que en la proposición 3 se vio que el valor de  $v_{t+dt}$  condicional a  $v_t$  sigue una distribución chi-cuadrado no central. En [3, Andersen] se sugiere el muestreo a partir de una aproximación a dicha distribución, dependiendo de si el parámetro de no centralidad,  $2c_{t+dt} v_t e^{-\kappa dt}$ , es grande o pequeño. Dado que el parámetro de no centralidad es proporcional a  $v_t$ , valores grandes o pequeños del parámetro corresponden a valores grandes o pequeños de  $v_t$ . El algoritmo cambia entre dos aproximaciones diferentes a la distribución chi-cuadrado no central; la elección de la aproximación depende de la magnitud de  $v_t$ . El razonamiento es como sigue:

**Para valores moderados o altos de  $v_t$ ,** una variable aleatoria Chi-cuadrada no central se puede aproximar mediante una función de potencia cuadrática

$$\hat{v}_{t+dt} = a (b + Z^v)^2 \quad (4.20)$$

donde  $Z^v$  es una variable normal estándar, mientras que  $a$  y  $b$  se determinan mediante la técnica de coincidencia de momentos (moment-matching), usando la media  $m$  y la varianza  $s^2$  del proceso CIR presentado en la proposición 79.

**Para valores pequeños de  $v_t$ ,** la densidad del chi-cuadrado no central puede ser aproximada por un promedio ponderado de un término que involucra la función delta de Dirac  $\delta$  y otro término

que involucra a  $e^{-\beta x}$ , esto es,

$$Pr(\hat{v}_{t+dt} \in [x, x + dx]) \approx (p\delta(0) + \beta(1-p)e^{-\beta x}) dx, \quad x \geq 0, \quad (4.21)$$

donde  $p$  y  $\beta$  también se determinan por la técnica de coincidencia de momento (moment-matching). Como se explica en [3, Andersen, pág 13], si  $\beta \geq 0$  y  $0 \leq p \leq 1$ , entonces (4.21) constituye una función de densidad bien definida. Con el fin de obtener la función de distribución acumulada, se integra (4.21), como sigue

$$\Psi(x) = Pr(\hat{v}_{t+dt} \leq x) = p + \beta(1-p) \int_0^x e^{-\beta s} ds, \quad x \geq 0,$$

con lo que

$$\Psi(x) = p + (1-p)(1 - e^{-\beta x}), \quad x \geq 0,$$

es fácil notar que  $\Psi$  es invertible, además

$$u = p + (1-p)(1 - e^{-\beta x}) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{1-p}{1-u} \right),$$

siempre y cuando

$$\ln \left( \frac{1-p}{1-u} \right) \geq 0,$$

es decir,  $p \leq u$  y el logaritmo está bien definido pues  $u \in \text{ran}(\Psi) = [0, 1]$ . Por ello, se tiene

$$\Psi^{-1}(u) = \begin{cases} 0, & 0 \leq u \leq p, \\ \frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{1-p}{1-u} \right), & p \leq u \leq 1. \end{cases} \quad (4.22)$$

Por el método de la *transformada inversa* (ver teorema 56), se obtiene, el esquema de muestreo simple para valores pequeños de  $v_t$

$$\hat{v}_{t+dt} = \Psi^{-1}(U_v) \quad (4.23)$$

donde  $U_v$  es un número aleatorio de distribución uniforme en  $[0, 1]$ .

En resumen, las ecuaciones (4.20) y (4.23) juntas definen el esquema de discretización Exponencial-Cuadrático (QE). Dichas ecuaciones, muestran que el esquema QE garantiza que solo se generarán valores no negativos de  $\hat{v}_{t+dt}$ . Lo que resta es la determinación de las constantes  $a$ ,  $b$ ,  $p$ ,  $\beta$  y una regla para ver cuándo cambiar de (4.20) a (4.23).

#### 4.4.2. Calculando $a$ y $b$

Para calcular  $a$  y  $b$  hacemos uso de la técnica de coincidencia de momentos (moment-matching). Para ello veamos la siguiente afirmación:



*Afirmación 91.* Si  $\hat{v}_{t+dt}$  es definido como en la expresión (4.20), entonces

$$E[\hat{v}_{t+dt}] = a(b^2 + 1) \quad \text{y} \quad \text{Var}[\hat{v}_{t+dt}] = 2a^2(2b^2 + 1).$$

*Demostración.* De la expresión (4.20) se tiene que

$$\hat{v}_{t+dt} = a[b^2 + (Z^v)^2 + 2bZ^v] \Rightarrow E[\hat{v}_{t+dt}] = a[b^2 + E[(Z^v)^2] + 2bE[Z^v]]$$

y como  $(Z^v)^2$  es una variable aleatoria que sigue una distribución Chi-cuadrada con 1 grado de libertad, se tiene  $E[(Z^v)^2] = 1$ , con lo que

$$E[\hat{v}_{t+dt}] = a(b^2 + 1).$$

Con el fin de calcular la varianza, primero hallamos

$$(\hat{v}_{t+dt})^2 = a^2[b^4 + (Z^v)^4 + 6b^2(Z^v)^2 + 4b^3(Z^v) + 4b(Z^v)^3]. \quad (4.24)$$

Para hallar los momentos, recordemos la función generadora de momentos para una variable aleatoria Normal

$$\begin{aligned} m_{Z^v}(t) = e^{\frac{t^2}{2}} &\Rightarrow E[(Z^v)^3] = m_{Z^v}^{(3)}(t)\Big|_{t=0} = te^{\frac{t^2}{2}}(t^2 + 3)\Big|_{t=0} = 0, \\ &\Rightarrow E[(Z^v)^4] = m_{Z^v}^{(4)}(t)\Big|_{t=0} = e^{\frac{t^2}{2}}(t^4 + 6t^2 + 3)\Big|_{t=0} = 3, \end{aligned}$$

y en (4.24), obtenemos

$$\begin{aligned} E[(\hat{v}_{t+dt})^2] &= a^2\{b^4 + E[(Z^v)^4] + 6b^2E[(Z^v)^2] + 4b^3E[Z^v] + 4bE[(Z^v)^3]\} \\ &\Rightarrow E[(\hat{v}_{t+dt})^2] = a^2\{b^4 + 3 + 6b^2\} \end{aligned}$$

Luego,

$$\text{Var}[\hat{v}_{t+dt}] = E[(\hat{v}_{t+dt})^2] - (E[\hat{v}_{t+dt}])^2 = a^2\{b^4 + 3 + 6b^2\} - \{a(b^2 + 1)\}^2,$$

obteniendo así,

$$\text{Var}[\hat{v}_{t+dt}] = 2a^2(2b^2 + 1).$$

□

Recordemos de la proposición 79, que

$$\begin{aligned} m &:= E[v_{t+dt}|v_t] = \theta + (v_t - \theta)e^{-kdt} \\ s^2 &:= \text{Var}[v_{t+dt}|v_t] = \frac{v_t\sigma^2 e^{-kdt}}{\kappa}(1 - e^{-kdt}) + \frac{\theta\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-kdt})^2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

La técnica de coincidencia de momentos consiste en igualar los momentos,

$$m = a(b^2 + 1) \quad \text{y} \quad s^2 = 2a^2(2b^2 + 1),$$

luego, si la primera expresión la elevamos al cuadrado y dividimos se obtiene

$$\frac{m^2}{s^2} = \frac{(b^2 + 1)^2}{2(2b^2 + 1)},$$

denotando

$$\psi := \frac{s^2}{m^2}, \tag{4.26}$$

se tiene

$$0 = b^4 + 2(1 - 2\psi^{-1})b^2 + (1 - 2\psi^{-1}), \tag{4.27}$$

una ecuación de segundo orden en  $b^2$ , con discriminante

$$\text{Discr} = [2(1 - 2\psi^{-1})]^2 - 4(1)(1 - 2\psi^{-1}) = 8\psi^{-1}(2\psi^{-1} - 1),$$

para que (4.27) tenga soluciones reales, se debe tener:

$$\text{Discr} \geq 0 \Rightarrow \psi^{-1} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \psi \leq 2. \tag{4.28}$$

Así, se tiene

$$b^2 = \frac{2(2\psi^{-1} - 1) \pm \sqrt{8\psi^{-1}(2\psi^{-1} - 1)}}{2},$$

donde se descarta una de ellas al notar que,

$$\frac{2(2\psi^{-1} - 1) - \sqrt{8\psi^{-1}(2\psi^{-1} - 1)}}{2} = \sqrt{(2\psi^{-1} - 1)(2\psi^{-1} - 1)} - \sqrt{(2\psi^{-1} - 0)(2\psi^{-1} - 1)} < 0.$$

Por lo que, la solución es

$$b^2 = (2\psi^{-1} - 1) + \sqrt{2\psi^{-1}(2\psi^{-1} - 1)} = \frac{2}{\psi} - 1 + \sqrt{\frac{2}{\psi} \left( \frac{2}{\psi} - 1 \right)},$$

Así, se tiene que,

$$b = \left( \frac{2}{\psi} - 1 + \sqrt{\frac{2}{\psi} \left( \frac{2}{\psi} - 1 \right)} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.29}$$

y además,

$$a = \frac{m}{b^2 + 1}. \tag{4.30}$$

### 4.4.3. Calculando $p$ y $\beta$

Para calcular  $p$  y  $\beta$  se hace uso de la técnica de coincidencia de momentos (moment-matching). Para ello veamos la siguiente afirmación:

*Afirmación 92.* si  $\hat{v}_{t+\Delta t}$  satisface (4.23), entonces

$$E[\hat{v}_{t+dt}] = \frac{1-p}{\beta}; \quad \text{y} \quad \text{Var}[\hat{v}_{t+dt}] = \frac{1-p^2}{\beta^2} .$$

*Demostración.* Lo demostraremos por integración directa de (4.21),

$$E[\hat{v}_{t+dt}] = \int_0^\infty x (p\delta(0) + \beta(1-p)e^{-\beta x}) dx = 0 + \beta(1-p) \int_0^\infty x e^{-\beta x} dx = \beta(1-p) \frac{1}{\beta^2} = \frac{(1-p)}{\beta} .$$

También,

$$E[(\hat{v}_{t+dt})^2] = \int_0^\infty x^2 (p\delta(0) + \beta(1-p)e^{-\beta x}) dx = 0 + \beta(1-p) \frac{2}{\beta^3} = \frac{2(1-p)}{\beta^2} ,$$

luego,

$$\text{Var}[\hat{v}_{t+dt}] = E[(\hat{v}_{t+dt})^2] - (E[\hat{v}_{t+dt}])^2 = \frac{2(1-p)}{\beta^2} - \frac{(1-p)^2}{\beta^2} = \frac{(1-p)(1+p)}{\beta^2} .$$

□

Ahora, aplicando la técnica de coincidencia de momentos, formamos el sistema,

$$m = \frac{1-p}{\beta} \quad \text{y} \quad s^2 = \frac{(1-p)(1+p)}{\beta^2} ,$$

para resolver el sistema, la primera expresión la elevamos al cuadrado y dividimos obteniéndose

$$\psi = \frac{s^2}{m^2} = \frac{1-p^2}{(1-p)^2} \Rightarrow (1+\psi)p^2 - 2\psi p + \psi - 1 = 0 ,$$

la ecuación cuadrática tiene como soluciones a

$$p = 1 \quad \text{y} \quad p = \frac{\psi - 1}{\psi + 1} ,$$

si  $p = 1$ ,  $m = s^2 = 0$  y  $\beta$  podría tomar cualquier valor. por lo cual en [3, Andersen, pág 15], sólo se considera

$$p = \frac{\psi - 1}{\psi + 1} \in [0, 1), \tag{4.31}$$

luego, es fácil ver que

$$\beta = \frac{1-p}{m} . \tag{4.32}$$

Note también que, para que  $p \geq 0$ , se debe tener,

$$p = \frac{\psi - 1}{\psi + 1} \geq 0 \Leftrightarrow \psi \geq 1. \quad (4.33)$$

#### 4.4.4. Regla de conmutación

Al usar (4.26),

$$\psi = \frac{s^2}{m^2},$$

se ha demostrado que en el esquema de muestreo Cuadrático (4.20), solo pueden coincidir los momentos para  $\psi \leq 2$  (ver (4.28)). Mientras que, en el esquema exponencial (4.23) solo pueden coincidir los momentos para  $\psi \geq 1$  (ver (4.33)). Afortunadamente como se explica en [3, Andersen, pág 15], estos dominios de aplicabilidad se superponen, de modo que al menos uno de los dos esquemas siempre se puede utilizar.

Un procedimiento natural es introducir un nivel crítico  $\psi_c \in [1, 2]$ , y usar (4.20) si  $\psi \leq \psi_c$  y (4.23) en caso contrario. Como se explica en [3, Andersen, pág 15] la elección exacta para  $\psi_c$  parece tener efectos relativamente pequeños en la calidad del esquema de simulación general, así que siguiendo dicho artículo, utilizamos  $\psi_c = 1.5$  en nuestras pruebas numéricas.

Para ilustrar la calidad de las aproximaciones a la distribución real de  $v$ , se considera dos casos diferentes, uno a cada lado de la regla de conmutación para  $\psi$ . Los resultados del primer caso se pueden observar en las figuras 4.1 y 4.2 (la figura superior de 4.1 es similar a la figura 4 de [3, Andersen, pág 16]). En las figuras 4.3 y 4.4, se muestran los resultados para el segundo caso. En las figuras, se compara la aproximación a la distribución acumulada de  $v_{t+dt}$ , utilizando los diferentes esquemas que hemos estudiado hasta ahora. En ellas es fácil notar, la buena aproximación del esquema QE por encima de los demás esquemas.

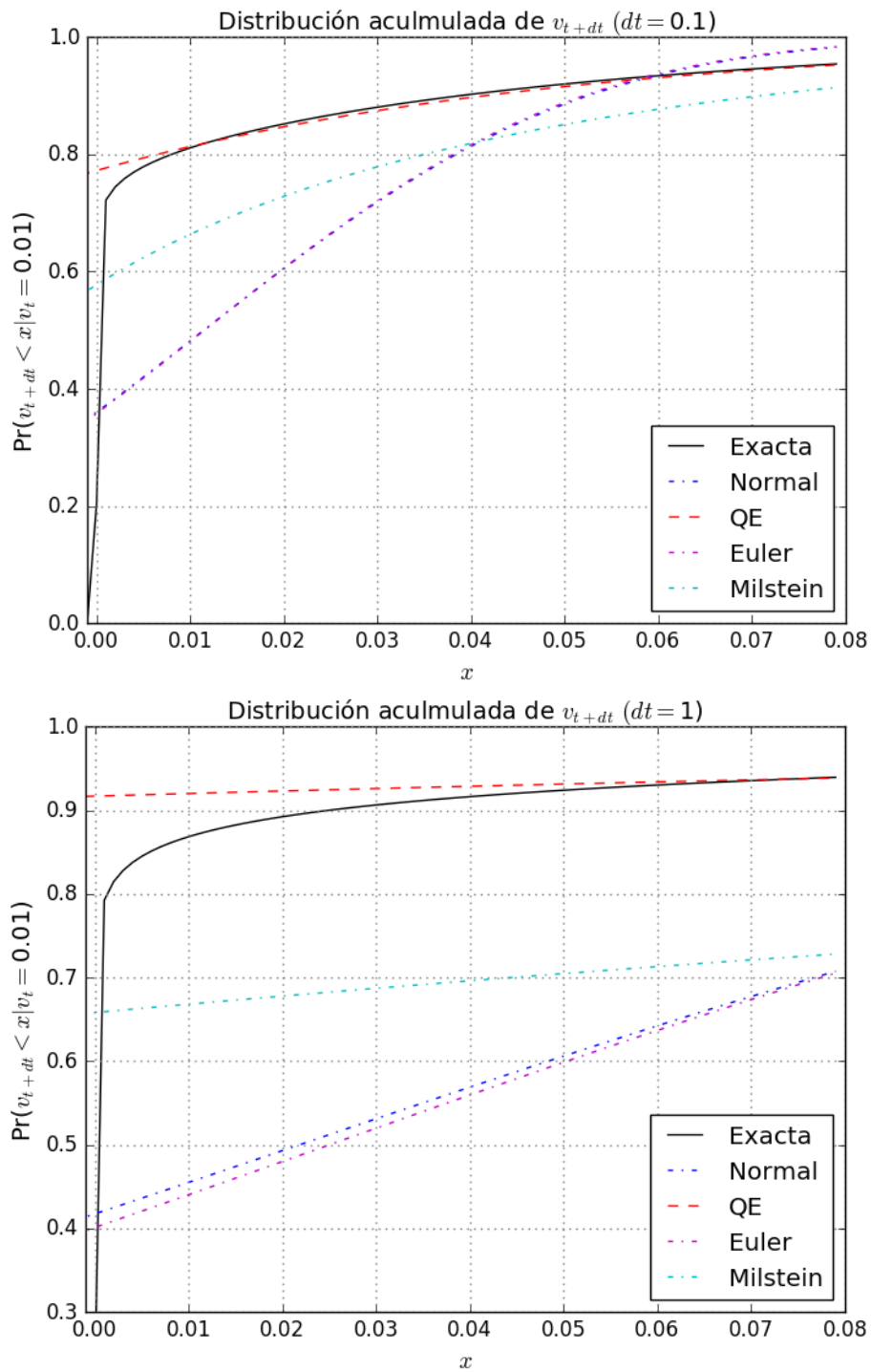
#### 4.4.5. Resumen del Algoritmo QE

Asumiendo que se ha seleccionado el nivel  $\psi_c \in [1, 2]$ . Entonces:

1. Dado  $v_t$ , usando las ecuaciones de (4.25), calcular  $m$  y  $s^2$ .
2. Hacer  $\psi = \frac{s^2}{m^2}$ .
3. Generar un número aleatorio de distribución Uniforme  $U_v \in [0, 1]$ .
4. Si  $\psi \leq \psi_c$  :
  - a) Calcular  $b$  y luego  $a$ , a partir de las ecuaciones (4.29) y (4.30)
  - b) Halle  $Z^v = \Phi^{-1}(U_v)$ .
  - c) Haciendo uso de (4.20), calcule  $v_{t+dt}$ .
5. Si caso contrario, se tiene  $\psi_c \leq \psi$  :

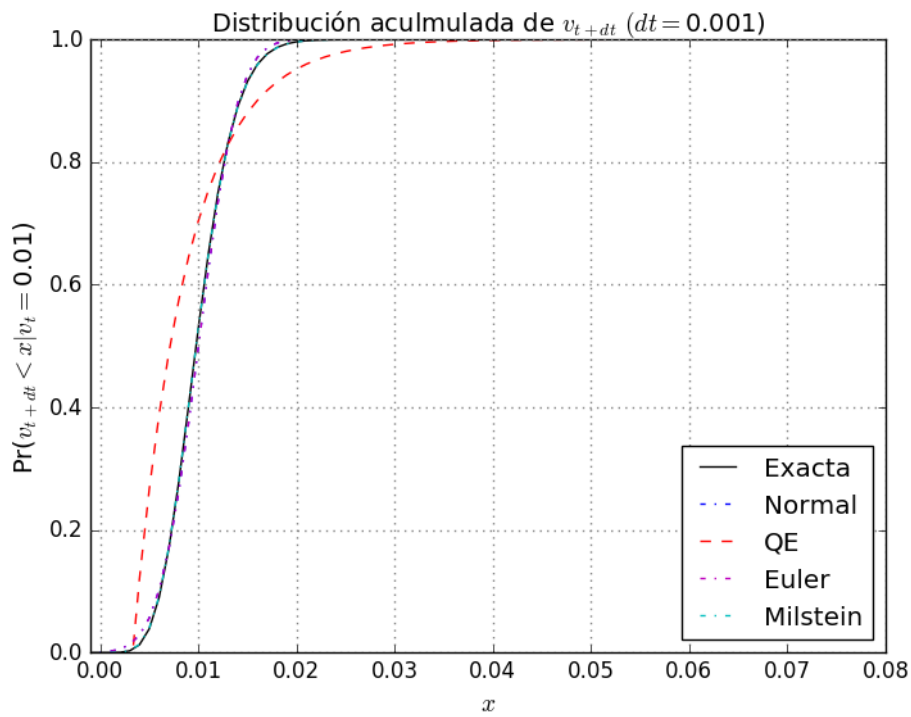
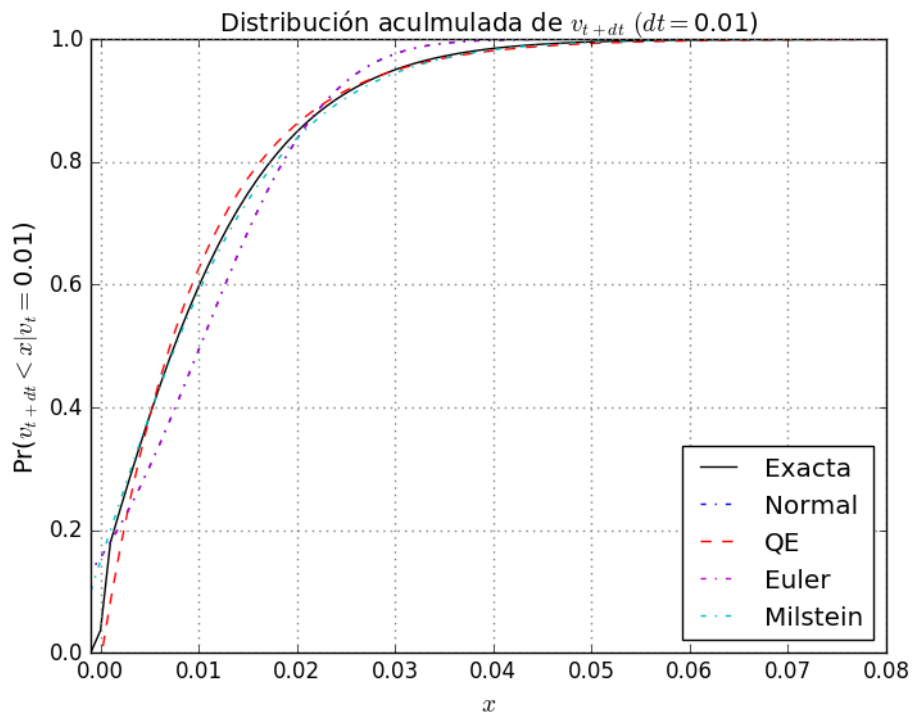
- a) Calcular  $p$  y luego  $\beta$ , a partir de las ecuaciones (4.31) y (4.32).
- b) Haciendo uso de (4.22) y (4.23), calcule  $v_{t+dt}$ .

Figura 4.1: Distribución acumulada de  $v_{t+dt}$  condicionada a  $v_t$  ( $v_t$  valor pequeño)



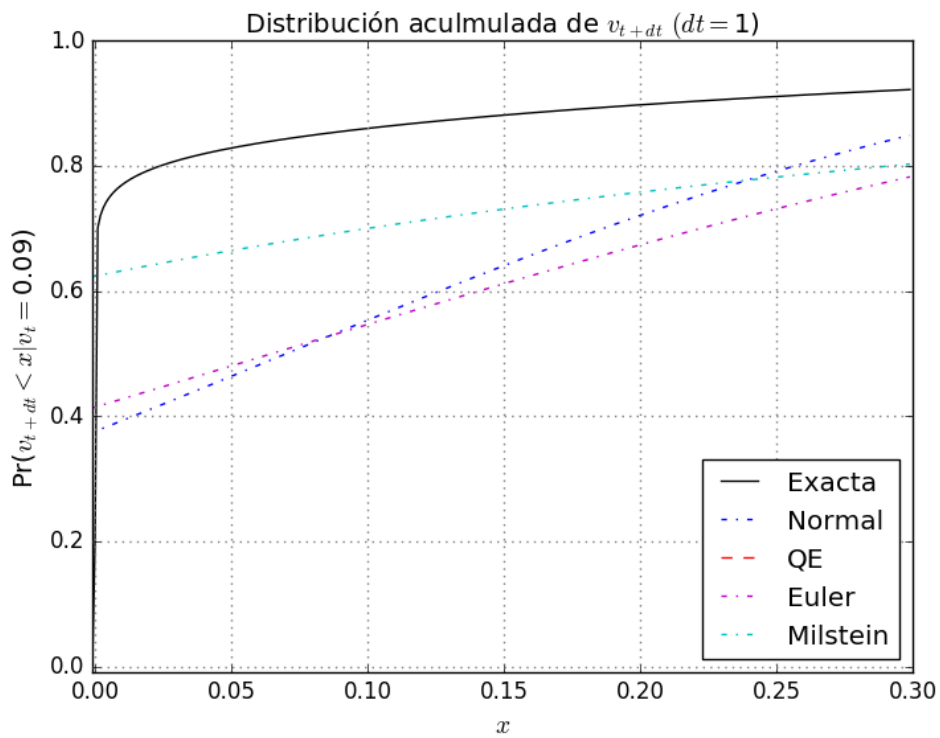
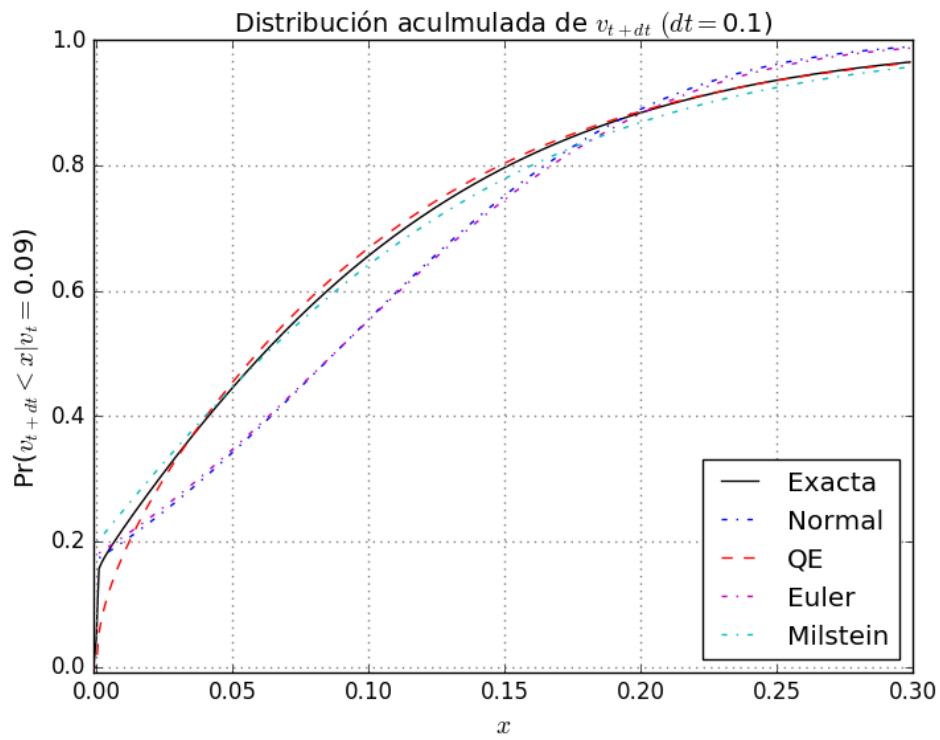
Fuente : Elaboración Propia

Figura 4.2: Distribución acumulada de  $v_{t+dt}$  condicionada a  $v_t$  ( $v_t$  valor pequeño)



Fuente : Elaboración Propia

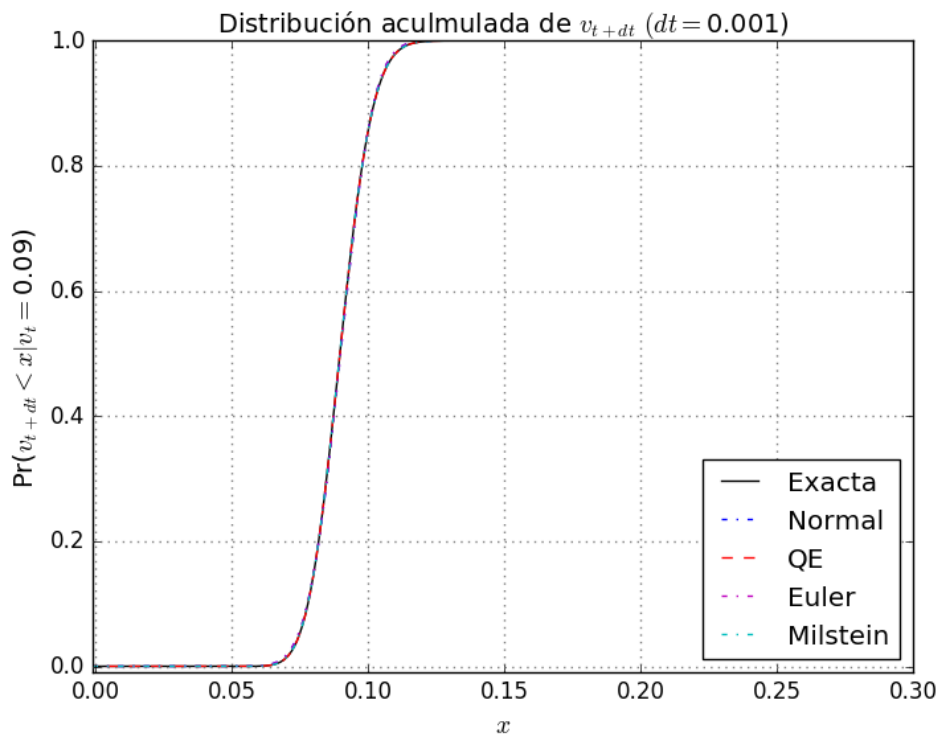
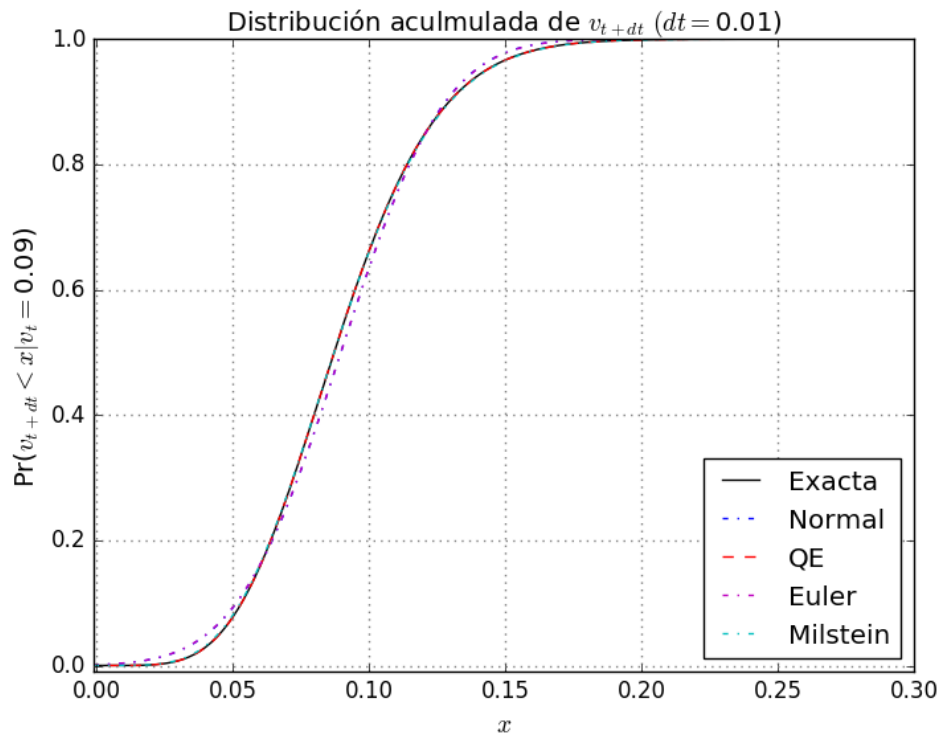
Figura 4.3: Distribución acumulada de  $v_{t+dt}$  condicionada a  $v_t$  ( $v_t$  valor grande)



Fuente : Elaboración Propia



Figura 4.4: Distribución acumulada de  $v_{t+dt}$  condicionada a  $v_t$  ( $v_t$  valor grande)



Fuente : Elaboración Propia

#### 4.4.6. Esquema de discretización para el proceso de Log-precio

Comenzamos nuestra discusión sobre la discretización del proceso  $X$  considerando un esquema que no funciona bien. Sin embargo, la razón para el fracaso de este esquema es bastante esclarecedora y nos guiará hacia un mejor esquema (QE).

En [3, Andersen, pág 17] se explica, que si usamos una discretización de Euler, de la forma

$$\ln S_{t+dt} = \ln S_t - \frac{1}{2}v_t dt + \sqrt{v_t} Z_S \sqrt{dt}, \quad (4.34)$$

se genera lo que denomina “fuga de correlación” pues como lo verifica (mediante cálculo simbólico) en [3, Andersen, pág 32] la verdadera correlación entre  $\ln S_{t+dt}$  y  $v_{t+dt}$  (condicionado a  $\ln S_t$  y  $v_t$ ) es siempre cercana a  $\rho$ , incluso para valores grandes de  $dt$  y cuando  $v_t$  es cercano al origen. Mientras que la fuerte relación no lineal entre  $v_{t+dt}$  y  $Z^v$  dada por (4.20), implica que la correlación efectiva entre  $\ln S_{t+dt}$  y  $v_{t+dt}$  sea más cercano a cero, que a  $\rho$ .

Además, se explica que si se ignorara el problema de “fuga de correlación” y se usa (4.34), a niveles prácticos de  $dt$ , se experimentaría una fuerte tendencia a que la simulación Monte Carlo genere una correlación efectiva demasiado débil (cercana a 0) y, en consecuencia, caminos de  $S$  con colas de mala distribución. En términos de precios de opciones de compra, esto se manifestaría en una pobre capacidad general para establecer precios de opciones con Strikes lejos del precio actual de la acción,  $S_t$ .

Lo que se propone en [3, Andersen, pág 18] es un esquema de discretización para  $\ln S_{t+dt}$  utilizando la descomposición de Cholesky (reemplazando los movimientos Brownianos correlacionados  $W_{1,t}$  y  $W_{2,t}$  del sistema de Heston (4.1), por los Movimientos Brownianos independientes  $B_{1,t}$  y  $B_{2,t}$ ) resolviendo el problema de la “fuga de correlación” provocada por la discretización de Euler.

Recordemos la descomposición de Cholesky (observación (38))

$$\begin{aligned} \widehat{W}_2(t) &= B_2(t), \\ \widehat{W}_1(t) &= \rho B_2(t) + \sqrt{1 - \rho^2} B_1(t), \end{aligned} \quad (4.35)$$

donde  $B_1$  y  $B_2$  son movimientos Brownianos independientes. De la segunda ecuación del sistema (4.1)

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dB_{2,t},$$

con lo que, la forma integral del proceso  $v_t$  es,

$$v_{t+dt} = v_t + \kappa\theta dt - \kappa \int_t^{t+dt} v_s ds + \sigma \int_t^{t+dt} \sqrt{v_s} dB_{2,s},$$

despejando la integral de Itô,

$$\int_t^{t+dt} \sqrt{v_s} dB_{2,s} = \frac{1}{\sigma} \left( v_{t+dt} - v_t - \kappa\theta dt + \kappa \int_t^{t+dt} v_s ds \right). \quad (4.36)$$

De la expresión (3.17), es fácil ver que la forma integral del proceso  $\ln(S_t)$

$$\ln(S_{t+dt}) = \ln(S_t) + rdt - \frac{1}{2} \int_t^{t+dt} v_s ds + \int_t^{t+dt} \sqrt{v_s} d\widehat{W}_{1,s},$$

teniendo en cuenta (4.35), la forma integral del proceso  $\ln(S_t)$  queda

$$\ln(S_{t+dt}) = \ln(S_t) + rdt - \frac{1}{2} \int_t^{t+dt} v_s ds + \rho \int_t^{t+dt} \sqrt{v_s} dB_{2,s} + \sqrt{1-\rho^2} \int_t^{t+dt} \sqrt{v_s} dB_{1,s},$$

reemplazando la expresión (4.36),

$$\begin{aligned} \ln(S_{t+dt}) = & \ln(S_t) + rdt - \frac{1}{2} \int_t^{t+dt} v_s ds + \rho \frac{1}{\sigma} \left( v_{t+dt} - v_t - \kappa \theta dt + \kappa \int_t^{t+dt} v_s ds \right) \\ & + \sqrt{1-\rho^2} \int_t^{t+dt} \sqrt{v_s} dB_{1,s}, \end{aligned}$$

equivalentemente

$$\begin{aligned} \ln(S_{t+dt}) = & \ln(S_t) + rdt + \frac{\rho}{\sigma} (v_{t+dt} - v_t - \kappa \theta dt) + \left( \frac{\rho \kappa}{\sigma} - \frac{1}{2} \right) \int_t^{t+dt} v_s ds \\ & + \sqrt{1-\rho^2} \int_t^{t+dt} \sqrt{v_s} dB_{1,s}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

La primera integral de (4.37), se aproxima mediante

$$\int_t^{t+dt} v_s ds \approx [\gamma_1 v_t + \gamma_2 v_{t+dt}] dt, \quad (4.38)$$

para  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  constantes a establecer (de manera arbitraria). Hay múltiples maneras de establecer dichas constantes, si se elige  $\gamma_1 = 1$  y  $\gamma_2 = 0$ , se tendrá un esquema tipo Euler, mientras que si se elige  $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$ , se tendrá una discretización central.

Por otro lado, notemos que, como  $B_1$  es independiente de  $B_2$ , también lo es de  $v$ , entonces la integral

$$\int_t^{t+dt} \sqrt{v_s} dB_{1,s}$$

condicionado a  $v_t$  y  $\int_t^{t+dt} v_s ds$ , sigue una distribución Normal, con media cero y varianza

$$E \left[ \left( \int_t^{t+dt} \sqrt{v_s} dB_{1,s} \right)^2 \right] = E \left[ \int_t^{t+dt} v_s ds \right] = \int_t^{t+dt} v_s ds.$$

Por lo tanto, la segunda integral de (4.37), se aproxima, siguiendo la discretización (4.38), de manera natural

$$\int_t^{t+dt} \sqrt{v_s} dB_{1,s} \approx \sqrt{dt} \sqrt{\gamma_1 v_t + \gamma_2 v_{t+dt}} Z,$$

donde  $Z$  es una variable aleatoria Normal.

*Observación 93.* Cabe resaltar que,

$$\sqrt{dt}\sqrt{\gamma_1 v_t + \gamma_2 v_{t+dt}}Z \sim N(0, dt[\gamma_1 v_t + \gamma_2 v_{t+dt}])$$

Así, se tiene

$$\ln(S_{t+dt}) = \ln(S_t) + rdt + \frac{\rho}{\sigma}(v_{t+dt} - v_t - \kappa\theta dt) + \left(\frac{\rho\kappa}{\sigma} - \frac{1}{2}\right)[\gamma_1 v_t + \gamma_2 v_{t+dt}]dt + \sqrt{1 - \rho^2}\sqrt{dt}\sqrt{\gamma_1 v_t + \gamma_2 v_{t+dt}}Z.$$

Haciendo

$$K_0 = -\frac{\kappa\rho\theta}{\sigma}dt, \quad K_1 = \left(\frac{\rho\kappa}{\sigma} - \frac{1}{2}\right)\gamma_1 dt - \frac{\rho}{\sigma}, \quad K_2 = \left(\frac{\rho\kappa}{\sigma} - \frac{1}{2}\right)\gamma_2 dt + \frac{\rho}{\sigma}$$

$$K_3 = (1 - \rho^2)\gamma_1 dt, \quad K_4 = (1 - \rho^2)\gamma_2 dt,$$

se tiene

$$\ln(S_{t+dt}) = \ln(S_t) + rdt + K_0 + K_1 v_t + K_2 v_{t+dt} + \sqrt{K_3 v_t + K_4 v_{t+dt}} \cdot Z. \quad (4.39)$$

donde  $Z$  es una variable aleatoria Normal independiente de  $v$ .

Para valores dados de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , el esquema de discretización para  $\ln(S)$ . Se debe combinar con un esquema de simulación para  $v$ , de la siguiente manera:

1. Dado  $v_t$ , usando los pasos descritos en la subsección 4.4.5 generar  $v_{t+dt}$ .
2. Generar un número aleatorio de distribución uniforme  $U$ , independiente de todos los números aleatorios usados en el paso anterior.
3. Establecer  $Z = \Phi^{-1}(U)$ .
4. Teniendo  $\ln(S_t)$ ,  $v_t$  y el valor de  $v_{t+dt}$  calculado en el paso 1, usar (4.39) para calcular  $\ln(S_{t+dt})$ .

#### 4.4.7. Corrección de martingala (Esquema QEM)

Como se demuestra en la proposición 3.1 de [4, Andersen,Piterbarg], el proceso de precios descontados (para el caso  $r = 0$ )  $S_t$ , puede no tener momentos de orden superior finito, pero siempre será una martingala (proposición 2.5 de [4, Andersen,Piterbarg]). Así tenemos,

$$E[S_{t+dt}|S_t] = S_t < \infty.$$

Lamentablemente, de (4.39),

$$\widehat{S}_{t+dt} \cdot \exp(-r(dt)) = \widehat{S}_t \cdot \exp(K_0 + K_1 \widehat{v}_t) \cdot \exp\left(K_2 \widehat{v}_{t+dt} + \sqrt{K_3 \widehat{v}_t + K_4 \widehat{v}_{t+dt}} \cdot Z\right),$$

el proceso de precios descontados, no es una Martingala.

**Proposición 94.** Sean  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  definidos en (4.39). Si se define

$$M := E \left[ e^{A\hat{v}_{t+dt}} \mid \hat{v}_t \right] > 0, \quad A = K_2 + \frac{1}{2}K_4 = \frac{\rho}{\sigma}(1 + \kappa\gamma_2(dt)) - \frac{1}{2}\gamma_2(dt)\rho^2.$$

Si  $M < \infty$ , Entonces  $E \left[ \hat{S}_{t+dt} \mid \hat{S}_t \right] < \infty$ . Asumiendo que  $M$  es finito, al poner

$$K_0^* := -\ln(M) - \left( K_1 + \frac{1}{2}K_3 \right) \hat{v}_t.$$

y

$$\ln \left( \hat{S}_{t+dt} \right) = \ln(\hat{S}_t) + rdt + K_0^* + K_1\hat{v}_t + K_2\hat{v}_{t+dt} + \sqrt{K_3\hat{v}_t + K_4\hat{v}_{t+dt}} \cdot Z,$$

donde  $Z$  es una variable aleatoria Normal estándar. En este caso, el proceso de precios descontados (aproximado) es una Martingala, es decir,

$$E \left[ \hat{S}_{t+dt} \cdot \exp(-r(dt)) \mid \hat{S}_t, \hat{v}_t \right] = \hat{S}_t.$$

*Demostración.* Note que, por definición,  $K_0^*$  es  $\hat{v}_t$ -medible. Además, del enunciado, se tiene

$$\hat{S}_{t+dt} \cdot \exp(-r(dt)) = \hat{S}_t \cdot \exp(K_0^* + K_1\hat{v}_t) \cdot \exp \left( K_2\hat{v}_{t+dt} + \sqrt{K_3\hat{v}_t + K_4\hat{v}_{t+dt}} \cdot Z \right)$$

como la información hasta  $v_t$  está contenida en la información hasta  $v_{t+dt}$ , de la propiedad 5 en la proposición 19, se tiene

$$\begin{aligned} E \left[ \hat{S}_{t+dt} \cdot \exp(-r(dt)) \mid \hat{S}_t, \hat{v}_t \right] &= E \left[ E \left[ \hat{S}_{t+dt} \cdot \exp(-r(dt)) \mid \hat{S}_t, \hat{v}_{t+dt} \right] \mid \hat{S}_t, \hat{v}_t \right] \\ &= E \left[ \hat{S}_t \cdot \exp(K_0^* + K_1\hat{v}_t) \cdot \exp(K_2\hat{v}_{t+dt}) \cdot \right. \\ &\quad \left. E \left[ \exp \left( \sqrt{K_3\hat{v}_t + K_4\hat{v}_{t+dt}} \cdot Z \right) \mid \hat{S}_t, \hat{v}_{t+dt} \right] \mid \hat{S}_t, \hat{v}_t \right] \\ &= \hat{S}_t \cdot \exp(K_0^* + K_1\hat{v}_t) \cdot E \left[ \exp(K_2\hat{v}_{t+dt}) \cdot \right. \\ &\quad \left. E \left[ \exp \left( \sqrt{K_3\hat{v}_t + K_4\hat{v}_{t+dt}} \cdot Z \right) \mid \hat{S}_t, \hat{v}_{t+dt} \right] \mid \hat{S}_t, \hat{v}_t \right]. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la función generadora de momentos de una variable aleatoria Normal, tenemos que,

$$E \left[ \exp \left( \sqrt{K_3\hat{v}_t + K_4\hat{v}_{t+dt}} \cdot Z \right) \mid \hat{S}_t, \hat{v}_{t+dt} \right] = \exp \left( \frac{K_3\hat{v}_t + K_4\hat{v}_{t+dt}}{2} \right),$$

con lo que,

$$E \left[ \hat{S}_{t+dt} \cdot \exp(-r(dt)) \mid \hat{S}_t, \hat{v}_t \right] = \hat{S}_t \cdot \exp(K_0^* + K_1\hat{v}_t) \cdot E \left[ \exp \left( \frac{1}{2}K_3\hat{v}_t \right) \cdot \exp \left( K_2\hat{v}_{t+dt} + \frac{K_4\hat{v}_{t+dt}}{2} \right) \mid \hat{S}_t, \hat{v}_t \right],$$

aplicando "sacando lo conocido", la propiedad 3 en la proposición 19,

$$E \left[ \widehat{S}_{t+dt} \cdot \exp(-r(dt)) \mid \widehat{S}_t, \widehat{v}_t \right] = \widehat{S}_t \cdot \exp(K_0^* + \left( K_1 + \frac{1}{2} K_3 \right) \widehat{v}_t) \cdot E \left[ \exp(A\widehat{v}_{t+dt}) \mid \widehat{S}_t, \widehat{v}_t \right],$$

equivalentemente,

$$E \left[ \widehat{S}_{t+dt} \cdot \exp(-r(dt)) \mid \widehat{S}_t, \widehat{v}_t \right] = \widehat{S}_t \cdot \exp(K_0^* + \left( K_1 + \frac{1}{2} K_3 \right) \widehat{v}_t) \cdot M.$$

Por último, no es difícil notar de la definición de  $K_0^*$ , que

$$\exp(K_0^* + \left( K_1 + \frac{1}{2} K_3 \right) \widehat{v}_t) \cdot M = 1.$$

□

Para resumir, el esquema QEM en la proposición 94 implica la sustitución de  $K_0^*$  por  $K_0$  en el esquema básico (4.39). Como se indica en la proposición 94, para que esto sea posible, y de hecho para que (4.39) tenga sentido en primer lugar, requerimos que  $M$  sea finito. Suponiendo que  $\gamma_2 \geq 0$  (que siempre sería el caso en la práctica), y  $\widehat{v}_{t+dt} \geq 0$  (que es siempre el caso de estos esquemas), se puede verificar que  $A \leq 0$  para  $\rho \leq 0$ , que a su vez muestra que

$$\rho \leq 0 \Rightarrow M < \infty.$$

Esta es una consecuencia obvia del hecho de que  $\exp(A\widehat{v}_{t+dt})$  se limita aquí al intervalo  $[0, 1]$ . En aplicaciones prácticas, prácticamente siempre se tiene que  $\rho \leq 0$ , en cuyo caso (4.39) es seguro de usar. Las correlaciones positivas pueden ocurrir, por supuesto, en cuyo caso tendremos que examinar el esquema de discretización para  $v_t$  con más detalle. Procedemos a hacerlo a continuación.

**Proposición 95.** *Sea el esquema QE que se caracteriza por las constantes  $a, b, \beta$  y  $p$  calculadas a partir de las relaciones (4.30), (4.29), (4.32) y (4.31). Sea  $\psi = \frac{s^2}{m^2}$ , con  $m$  y  $s$  dados en la proposición 79. Además, sea  $\psi_c \in [1, 2]$ . Si  $\psi \leq \psi_c$ , entonces*

$$E \left[ e^{A\widehat{v}_{t+dt}} \mid \widehat{v}_t \right] = \frac{\exp\left(\frac{Ab^2a}{1-2Aa}\right)}{\sqrt{1-2Aa}},$$

donde  $A$  debe satisfacer

$$A < \frac{1}{2a}.$$

Si, por otro lado,  $\psi > \psi_c$ , entonces

$$E \left[ e^{A\widehat{v}_{t+dt}} \mid \widehat{v}_t \right] = p + \frac{\beta(1-p)}{\beta-A},$$

siempre que

$$A < \beta.$$

*Demostración.* Para el caso en que  $\psi \leq \psi_c$ , se tiene la expresión (4.20), apoyándonos en la deducción de la distribución Chi-cuadrada no central (ver subsección 2.1.1) notemos que, si hacemos  $X := \sqrt{ab} + \sqrt{a}Z^v$ , entonces  $X \sim N(\sqrt{ab}, a)$  y así

$$\left(\frac{X^2}{a}\right) \sim \chi_{(1, b^2)},$$

luego, teniendo en cuenta la función generadora de momentos (expresión (2.6))

$$E \left[ e^{B \left(\frac{X^2}{a}\right)} \right] = \frac{\exp\left(\frac{Bb^2}{1-2B}\right)}{\sqrt{1-2B}}, \quad B < \frac{1}{2},$$

considerando  $B = aA$ , se tiene

$$E [e^{A\hat{v}_{t+dt}} | \hat{v}_t] = \frac{\exp\left(\frac{Ab^2a}{1-2Aa}\right)}{\sqrt{1-2Aa}}, \quad A < \frac{1}{2a}.$$

Para el caso en que  $\psi_c < \psi$ , entonces (4.21)

$$E [e^{A\hat{v}_{t+dt}} | \hat{v}_t] = p + \beta(1-p) \int_0^\infty e^{(A-\beta)s} ds,$$

donde la integral

$$\int_0^\infty e^{(A-\beta)s} ds = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{e^{(A-\beta)w}}{A-\beta} - \frac{1}{A-\beta} = \frac{1}{\beta-A},$$

existe, sólo si  $A - \beta < 0$ . Y así,

$$E [e^{A\hat{v}_{t+dt}} | \hat{v}_t] = p + \frac{\beta(1-p)}{\beta-A}.$$

□

Como se menciona en [3, Andersen], para la simulación del modelo de Heston (puro), el esquema de QE debe ser la opción por defecto (predeterminada) debido a su simplicidad y buen rendimiento. el esquema QEM es opcional.

A continuación, analizamos algunos aspectos de convergencia del esquema QE.

#### 4.4.8. Consideraciones de Convergencia : Consistencia Débil

En la sección 9.7 de [26, Kloeden, pág 326], se presentan las definiciones de convergencia y consistencia débil, que seguimos en esta tesis. Como se explica en [3, Andersen, pág 22] un análisis formal de las propiedades de convergencia fuerte [26, Kloeden, pág 323] del esquema QE

es muy difícil y complicado. Por ello nos centramos en un concepto más sencillo de verificar, el de *Consistencia Débil*. En el teorema 9.7.4 de [26, Kloeden, pág 328] se muestra el fuerte vínculo que hay entre consistencia débil y convergencia débil.

De manera sencilla, si

$$Y_{t_{n+1}} = Y_{t_n} + a(Y_{t_n})\Delta t_n + b(Y_{t_n})\Delta W_n,$$

es la discretización del proceso que se quiere aproximar mediante el esquema de discretización  $\widehat{Y}_{t_{n+1}}$ . Para que dicho esquema de discretización sea consistente débilmente, basta tener lo siguiente:

1. La media del incremento de la aproximación converge a la media del incremento del proceso de Ito real, es decir,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} E \left[ \frac{\widehat{Y}_{t_{n+1}} - \widehat{Y}_{t_n}}{\Delta t} \right] = a(\widehat{Y}_{t_n}).$$

2. La varianza del incremento de la aproximación converge a la varianza del incremento del proceso de Ito real, es decir,

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \text{Var} \left[ \frac{\widehat{Y}_{t+dt} - \widehat{Y}_t}{\sqrt{\Delta t}} \right] = b^2(\widehat{Y}_t).$$

A continuación demostramos que el esquema QE es consistente débilmente, para ello, brindamos una generalización y demostración al detalle de la proposición 10 de [3, Andersen, pág 23].

**Proposición 96.** *Asumiendo que  $\gamma_1 + \gamma_2$  se aproxima a 1, cuando  $dt \rightarrow 0$ . El esquema QE es consistente Débilmente. Esto es, condicionado a  $\widehat{S}_t$  y  $\widehat{v}_t$ , se tiene*

$$\lim_{dt \rightarrow 0} E \left[ \frac{\ln \widehat{S}_{t+dt} - \ln \widehat{S}_t}{dt} \right] = r - \frac{1}{2} \widehat{v}_t, \quad \lim_{dt \rightarrow 0} \text{Var} \left[ \frac{\ln \widehat{S}_{t+dt} - \ln \widehat{S}_t}{\sqrt{dt}} \right] = \widehat{v}_t, \quad (4.40)$$

$$\lim_{dt \rightarrow 0} E \left[ \frac{\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{v}_t}{dt} \right] = \kappa(\theta - \widehat{v}_t), \quad \lim_{dt \rightarrow 0} \text{Var} \left[ \frac{\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{v}_t}{\sqrt{dt}} \right] = \sigma^2 \widehat{v}_t, \quad (4.41)$$

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \text{Cov} \left[ \frac{\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{v}_t}{\sqrt{dt}}, \frac{\ln \widehat{S}_{t+dt} - \ln \widehat{S}_t}{\sqrt{dt}} \right] = \rho \sigma \widehat{v}_t. \quad (4.42)$$

*Demostración.* (*Daremos por sobreentendido el condicionamiento sobre  $\widehat{S}_t$  y  $\widehat{v}_t$ .*)

**Demostración de las relaciones dadas en (4.41):**

Notemos que,

$$E \left[ \frac{\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{v}_t}{dt} \right] = \frac{E[\widehat{v}_{t+dt}] - \widehat{v}_t}{dt}. \quad (4.43)$$



Como el esquema QE se basa en coincidencia exacta de los dos primeros momentos condicionales de  $\widehat{v}_{t+dt}$ , y con la proposición 79,

$$E[\widehat{v}_{t+dt}] = m = \theta + (\widehat{v}_t - \theta)e^{-\kappa(t+dt-t)} = \theta + (\widehat{v}_t - \theta)e^{-\kappa dt},$$

reemplazando en (4.43),

$$E\left[\frac{\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{v}_t}{dt}\right] = \frac{\theta + (\widehat{v}_t - \theta)e^{-\kappa dt} - \widehat{v}_t}{dt},$$

luego, note que

$$\lim_{dt \rightarrow 0} E[\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{v}_t] = \lim_{dt \rightarrow 0} (\theta + (\widehat{v}_t - \theta)e^{-\kappa dt} - \widehat{v}_t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{dt \rightarrow 0} dt = 0, \quad (4.44)$$

por lo que aplicamos L'Hospital, así

$$\lim_{dt \rightarrow 0} E\left[\frac{\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{v}_t}{dt}\right] = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{(\widehat{v}_t - \theta)(-\kappa)e^{-\kappa dt}}{1} = \kappa(\theta - \widehat{v}_t).$$

De manera análoga, para la segunda relación de (4.41), notemos que,

$$\text{Var}\left[\frac{\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{v}_t}{\sqrt{dt}}\right] = \frac{\text{Var}[\widehat{v}_{t+dt}]}{dt}, \quad (4.45)$$

como el esquema QE se basa en coincidencia exacta de los dos primeros momentos condicionales de  $\widehat{v}_{t+dt}$ , y con la proposición 79,

$$\text{Var}[\widehat{v}_{t+dt}] = s^2 = \frac{\widehat{v}_t \sigma^2 e^{-\kappa dt}}{\kappa} (1 - e^{-\kappa dt}) + \frac{\theta \sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa dt})^2,$$

luego, notemos que,

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \left( \frac{\widehat{v}_t \sigma^2 e^{-\kappa dt}}{\kappa} (1 - e^{-\kappa dt}) + \frac{\theta \sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa dt})^2 \right) = 0, \quad \text{pues,} \quad \lim_{dt \rightarrow 0} e^{-\kappa dt} = 1,$$

entonces aplicamos L'Hospital en (4.45), así

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \text{Var}\left[\frac{\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{v}_t}{\sqrt{dt}}\right] = \lim_{dt \rightarrow 0} \left( \frac{-\widehat{v}_t \sigma^2 e^{-\kappa dt} (1 - e^{-\kappa dt}) + \widehat{v}_t \sigma^2 e^{-2\kappa dt} + \theta \sigma^2 (1 - e^{-\kappa dt})(e^{-\kappa dt})}{1} \right),$$

con lo cual

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \text{Var}\left[\frac{\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{v}_t}{\sqrt{dt}}\right] = \sigma^2 \widehat{v}_t.$$

**Demostración de las relaciones dadas en (4.40):**

Note que

$$E \left[ \frac{\ln \widehat{S}_{t+dt} - \ln \widehat{S}_t}{dt} \right] = \frac{E \left[ \ln \widehat{S}_{t+dt} \right] - \ln \widehat{S}_t}{dt},$$

al tomar esperanza condicionada a la relación (4.39), se tiene

$$E \left[ \ln \widehat{S}_{t+dt} \right] = \ln \widehat{S}_t + rdt + K_0 + K_1 \widehat{v}_t + K_2 E [\widehat{v}_{t+dt}] + E \left[ \sqrt{K_3 \widehat{v}_t + K_4 \widehat{v}_{t+dt}} \cdot Z \right], \quad (4.46)$$

como  $Z$  es independiente de  $\widehat{v}$ ,

$$E \left[ \sqrt{K_3 \widehat{v}_t + K_4 \widehat{v}_{t+dt}} \cdot Z \right] = E \left[ \sqrt{K_3 \widehat{v}_t + K_4 \widehat{v}_{t+dt}} \right] \cdot E[Z] = 0,$$

ahora,

$$E \left[ \ln \widehat{S}_{t+dt} \right] - \ln \widehat{S}_t = rdt + K_0 + K_1 \widehat{v}_t + K_2 E [\widehat{v}_{t+dt}], \quad (4.47)$$

entonces,

$$\frac{E \left[ \ln \widehat{S}_{t+dt} \right] - \ln \widehat{S}_t}{dt} = r - \frac{\rho \kappa \theta}{\sigma} + \frac{[\gamma_1 dt \left( \frac{\kappa \rho}{\sigma} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\rho}{\sigma}] \widehat{v}_t + [\gamma_2 dt \left( \frac{\kappa \rho}{\sigma} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\rho}{\sigma}] E [\widehat{v}_{t+dt}]}{dt},$$

según hipótesis,  $\gamma_1$  se aproxima a  $(1 - \gamma_2)$ , con lo que,

$$\begin{aligned} \frac{E[\ln \widehat{S}_{t+dt}] - \ln \widehat{S}_t}{dt} &= r - \frac{\rho \kappa \theta}{\sigma} + \left[ \left( \frac{\kappa \rho}{\sigma} - \frac{1}{2} \right) dt - \left( \gamma_2 \left( \frac{\kappa \rho}{\sigma} - \frac{1}{2} \right) dt + \frac{\rho}{\sigma} \right) \right] \frac{\widehat{v}_t}{dt} \\ &\quad + \left[ \gamma_2 dt \left( \frac{\kappa \rho}{\sigma} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\rho}{\sigma} \right] E \left[ \frac{\widehat{v}_{t+dt}}{dt} \right], \\ &= r - \frac{\rho \kappa \theta}{\sigma} + \left( \frac{\kappa \rho}{\sigma} - \frac{1}{2} \right) \widehat{v}_t + \left( \gamma_2 \left( \frac{\kappa \rho}{\sigma} - \frac{1}{2} \right) dt + \frac{\rho}{\sigma} \right) E \left[ \frac{\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{v}_t}{dt} \right], \end{aligned}$$

al tener en cuenta la primera relación de (4.41),

$$\lim_{dt \rightarrow 0} E \left[ \frac{\ln \widehat{S}_{t+dt} - \ln \widehat{S}_t}{dt} \right] = r - \frac{\rho \kappa \theta}{\sigma} + \left( \frac{\kappa \rho}{\sigma} - \frac{1}{2} \right) \widehat{v}_t + \left( 0 + \frac{\rho}{\sigma} \right) [\kappa(\theta - \widehat{v}_t)] = r - \frac{1}{2} \widehat{v}_t.$$

Para la segunda relación de (4.40), note que

$$\text{Var} \left[ \frac{\ln \widehat{S}_{t+dt} - \ln \widehat{S}_t}{\sqrt{dt}} \right] = \frac{\text{Var} \left[ \ln \widehat{S}_{t+dt} \right]}{dt}, \quad (4.48)$$

al tomar varianza (condicionada) a la relación (4.39), se tiene

$$\text{Var} \left[ \ln \widehat{S}_{t+dt} \right] = 0 + 0 + 0 + 0 + (K_2)^2 \text{Var} [\widehat{v}_{t+dt}] + \text{Var} \left[ \sqrt{K_3 \widehat{v}_t + K_4 \widehat{v}_{t+dt}} \cdot Z \right], \quad (4.49)$$

veamos que,

$$\text{Var} \left[ \sqrt{K_3 \widehat{v}_t + K_4 \widehat{v}_{t+dt}} \cdot Z \right] = E \left[ (K_3 \widehat{v}_t + K_4 \widehat{v}_{t+dt}) \cdot Z^2 \right] - E \left[ \sqrt{K_3 \widehat{v}_t + K_4 \widehat{v}_{t+dt}} \cdot Z \right]^2,$$

como  $Z \sim N(0, 1)$ ,  $E[Z^2] = 1$  y es independiente de  $\hat{v}$ , tenemos que,

$$\text{Var} \left[ \sqrt{K_3 \hat{v}_t + K_4 \hat{v}_{t+dt}} \cdot Z \right] = E[(K_3 \hat{v}_t + K_4 \hat{v}_{t+dt})] \cdot E[Z^2] - E \left[ \sqrt{K_3 \hat{v}_t + K_4 \hat{v}_{t+dt}} \right] \cdot E[Z],$$

entonces,

$$\text{Var} \left[ \sqrt{K_3 \hat{v}_t + K_4 \hat{v}_{t+dt}} \cdot Z \right] = E[(K_3 \hat{v}_t + K_4 \hat{v}_{t+dt})] = K_3 \hat{v}_t + K_4 E[\hat{v}_{t+dt}],$$

al reemplazar en (4.49)

$$\text{Var} \left[ \ln \hat{S}_{t+dt} \right] = (K_2)^2 \text{Var}[\hat{v}_{t+dt}] + K_3 \hat{v}_t + K_4 E[\hat{v}_{t+dt}],$$

y en (4.48), reemplazando  $K_3$  y  $K_4$ , (dados en (4.39))

$$\text{Var} \left[ \frac{\ln \hat{S}_{t+dt} - \ln \hat{S}_t}{\sqrt{dt}} \right] = (K_2)^2 \frac{\text{Var}[\hat{v}_{t+dt}]}{dt} + (1 - \rho^2) \gamma_1 \hat{v}_t + (1 - \rho^2) \gamma_2 E[\hat{v}_{t+dt}],$$

según hipótesis,  $\gamma_1$  se aproxima a  $(1 - \gamma_2)$ , con lo que,

$$\text{Var} \left[ \frac{\ln \hat{S}_{t+dt} - \ln \hat{S}_t}{\sqrt{dt}} \right] = (K_2)^2 \frac{\text{Var}[\hat{v}_{t+dt}]}{dt} + (1 - \rho^2) \hat{v}_t + (1 - \rho^2) \gamma_2 E[\hat{v}_{t+dt} - \hat{v}_t],$$

ahora, de la definición de  $K_2$  (dado en (4.39)),

$$\lim_{dt \rightarrow 0} [K_2]^2 = \left[ \lim_{dt \rightarrow 0} \left( \left( \frac{\rho \kappa}{\sigma} - \frac{1}{2} \right) \gamma_2 dt + \frac{\rho}{\sigma} \right) \right]^2 = \left( \frac{\rho}{\sigma} \right)^2,$$

luego, de (4.44), (4.45) y la segunda relación de (4.41), tenemos que,

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \text{Var} \left[ \frac{\ln \hat{S}_{t+dt} - \ln \hat{S}_t}{\sqrt{dt}} \right] = \left( \frac{\rho}{\sigma} \right)^2 \sigma^2 \hat{v}_t + (1 - \rho^2) \hat{v}_t = \hat{v}_t.$$

#### **Demostración de la relación dada en (4.42):**

Primero, veamos que, de las propiedades de la Covarianza (condicionada),

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left[ \frac{\hat{v}_{t+dt} - \hat{v}_t}{\sqrt{dt}}, \frac{\ln \hat{S}_{t+dt} - \ln \hat{S}_t}{\sqrt{dt}} \right] &= \frac{1}{dt} \text{Cov} \left[ \hat{v}_{t+dt}, \ln \hat{S}_{t+dt} \right] \\ &= \frac{1}{dt} E \left[ (\hat{v}_{t+dt} - E[\hat{v}_{t+dt}]) \left( \ln \hat{S}_{t+dt} - E[\ln \hat{S}_{t+dt}] \right) \right] \end{aligned} \quad (4.50)$$

De la relación (4.39) y (4.47), tenemos

$$\ln \hat{S}_{t+dt} = \ln \hat{S}_t + rdt + K_0 + K_1 \hat{v}_t + K_2 \hat{v}_{t+dt} + \sqrt{K_3 \hat{v}_t + K_4 \hat{v}_{t+dt}} \cdot Z,$$

$$E \left[ \ln \hat{S}_{t+dt} \right] = \ln \hat{S}_t + rdt + K_0 + K_1 \hat{v}_t + K_2 E[\hat{v}_{t+dt}],$$

entonces,

$$\ln \widehat{S}_{t+dt} - E \left[ \ln \widehat{S}_{t+dt} \right] = K_2 (\widehat{v}_{t+dt} - E [\widehat{v}_{t+dt}]) + \sqrt{K_3 \widehat{v}_t + K_4 \widehat{v}_{t+dt}} \cdot Z,$$

entonces,

$$\begin{aligned} E \left[ (\widehat{v}_{t+dt} - E [\widehat{v}_{t+dt}]) \left( \ln \widehat{S}_{t+dt} - E \left[ \ln \widehat{S}_{t+dt} \right] \right) \right] &= E \left[ (\widehat{v}_{t+dt} - E [\widehat{v}_{t+dt}]) \left( K_2 (\widehat{v}_{t+dt} - E [\widehat{v}_{t+dt}]) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{K_3 \widehat{v}_t + K_4 \widehat{v}_{t+dt}} \cdot Z \right) \right], \\ &= E \left[ (\widehat{v}_{t+dt} - E [\widehat{v}_{t+dt}]) (K_2 (\widehat{v}_{t+dt} - E [\widehat{v}_{t+dt}])) \right] \\ &\quad + E \left[ (\widehat{v}_{t+dt} - E [\widehat{v}_{t+dt}]) \left( \sqrt{K_3 \widehat{v}_t + K_4 \widehat{v}_{t+dt}} \cdot Z \right) \right], \end{aligned}$$

como  $Z \sim N(0, 1)$ , y es independiente de  $\widehat{v}$ ,

$$\begin{aligned} E \left[ (\widehat{v}_{t+dt} - E [\widehat{v}_{t+dt}]) \left( \sqrt{K_3 \widehat{v}_t + K_4 \widehat{v}_{t+dt}} \cdot Z \right) \right] &= E \left[ (\widehat{v}_{t+dt} - E [\widehat{v}_{t+dt}]) \left( \sqrt{K_3 \widehat{v}_t + K_4 \widehat{v}_{t+dt}} \right) \right] \cdot E[Z], \\ &= E \left[ (\widehat{v}_{t+dt} - E [\widehat{v}_{t+dt}]) \left( \sqrt{K_3 \widehat{v}_t + K_4 \widehat{v}_{t+dt}} \right) \right] \cdot 0, \\ &= 0, \end{aligned}$$

con lo que,

$$E \left[ (\widehat{v}_{t+dt} - E [\widehat{v}_{t+dt}]) \left( \ln \widehat{S}_{t+dt} - E \left[ \ln \widehat{S}_{t+dt} \right] \right) \right] = K_2 \cdot E \left[ (\widehat{v}_{t+dt} - E [\widehat{v}_{t+dt}]) (\widehat{v}_{t+dt} - E [\widehat{v}_{t+dt}]) \right]$$

al reemplazar en (4.50),

$$\text{Cov} \left[ \frac{\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{v}_t}{\sqrt{dt}}, \frac{\ln \widehat{S}_{t+dt} - \ln \widehat{S}_t}{\sqrt{dt}} \right] = \frac{K_2}{dt} \cdot \text{Var} [\widehat{v}_{t+dt}].$$

Finalmente, con la definición de  $K_2$  (dado en (4.39))

$$\text{Cov} \left[ \frac{\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{v}_t}{\sqrt{dt}}, \frac{\ln \widehat{S}_{t+dt} - \ln \widehat{S}_t}{\sqrt{dt}} \right] = \left[ \left( \frac{\rho \kappa}{\sigma} - \frac{1}{2} \right) \gamma_2 dt + \frac{\rho}{\sigma} \right] \cdot \frac{\text{Var} [\widehat{v}_{t+dt}]}{dt},$$

teniendo en cuenta (4.45) y la segunda relación de (4.41), se tiene

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \text{Cov} \left[ \frac{\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{v}_t}{\sqrt{dt}}, \frac{\ln \widehat{S}_{t+dt} - \ln \widehat{S}_t}{\sqrt{dt}} \right] = \left[ \frac{\rho}{\sigma} \right] \sigma^2 \widehat{v}_t = \rho \sigma \widehat{v}_t.$$

□

## Capítulo 5

# Correlación Estocástica en el Modelo de Heston

En este capítulo se estudia una extensión del modelo clásico de Heston (estudiado en el capítulo 3) en el que el supuesto de correlación constante entre  $\{S_t\}$  y  $\{v_t\}$  es abandonado y se supone una correlación que varía estocásticamente. También se muestran algunos resultados numéricos. Para el desarrollo de este capítulo seguimos muy de cerca el artículo [40, Teng]. Discutimos algoritmos eficientes para el modelo extendido de Heston incorporando correlaciones estocásticas. Nuestros experimentos numéricos realizados con Python, corroboran que los algoritmos propuestos pueden proporcionar resultados eficientes altamente precisos para el Heston extendido al incluir correlaciones estocásticas. También corroboramos numéricamente el efecto de las correlaciones estocásticas en la volatilidad implícita, encontramos que el rendimiento del modelo de Heston se puede mejorar mediante la inclusión de correlación estocástica.

### Motivación

Teniendo en cuenta la Observación 76 y como se menciona en [13, Ehrhardt, pág 85], el mercado financiero da cuenta de que a menudo existe una dependencia no lineal entre los Retornos. Específicamente, una correlación constante significa que los dos procesos de retorno son conjuntamente estacionarios, lo que generalmente no es cierto en el mundo real. Por lo tanto, la correlación es difícilmente una constante fija, es decir, la correlación constante puede no ser una medida apropiada de co-dependencia. Ya existen algunos trabajos que muestran que la correlación no debe ser constante e incluso cambia en un pequeño intervalo de tiempo como la volatilidad, ver, por ejemplo, [34, Schöbel]. Los resultados presentados en [13, Ehrhardt, cap. 6], muestran que el riesgo de correlación causado por el uso de un modelo de correlación incorrecto (constante) no se debe descuidar.

Los modelos de correlación estocástica se han vuelto cada vez más importantes en los mercados

financieros. En realidad, el factor principal que afecta el sesgo de volatilidad implícita es la correlación. Sin embargo, en el modelo de Heston puro (Capítulo 3), y también en la mayoría de sus extensiones, solo se utiliza un coeficiente de correlación constante. Se ha mostrado en [13, Ehrhardt, cap. 6] y [38, Teng] que la calibración a los datos del mercado se puede mejorar al permitir un modelo de correlación local dependiente del tiempo.

Por último, recordamos lo mencionado en [44, Wilmott, pág 186]:

"Las correlaciones son aún más inestables que las volatilidades".

## 5.1. Descripción del modelo

En esta sección describimos la extensión del modelo de Heston mediante la incorporación de un proceso de correlación estocástica. Recordemos el modelo de volatilidad estocástica de Heston bajo la medida de riesgo neutro, que viene conducido por las EDEs (3.17) y (B.37), y considerando  $x_t = \ln(S_t)$ , tenemos,

$$\begin{aligned} dx_t &= \left(r - \frac{1}{2}v_t\right) dt + \sqrt{v_t}d\widehat{W}_{1,t}, \\ dv_t &= \kappa[\theta - v_t] dt + \sigma\sqrt{v_t}d\widehat{W}_{2,t}. \end{aligned}$$

Ahora, adoptaremos la notación  $d\widehat{W}_{1,t} = d\widehat{W}_{x,t}$  y  $d\widehat{W}_{2,t} = d\widehat{W}_{v,t}$ . Incorporamos un proceso de Correlación estocástica (adaptado) de la forma,

$$d\rho_t = \tilde{a}(t, \rho_t)dt + \tilde{b}(t, \rho_t)dW_{\rho,t}, \quad (5.1)$$

donde  $\tilde{a}(t, \rho_t)$  y  $\tilde{b}(t, \rho_t)$  son funciones dadas dependiendo del proceso de correlación elegido,  $W_{\rho,t}$  es un Movimiento Browniano estándar con respecto a la medida física  $\mathbb{P}$ . Al incluir el precio de riesgo de correlación de mercado, el proceso de correlación (5.1) se puede reescribir como

$$d\rho_t = (\tilde{a}(t, \rho_t) - \lambda(S_t, v_t, \rho_t, t)) dt + \tilde{b}(t, \rho_t)d\widehat{W}_{\rho,t},$$

que está bajo la medida de riesgo neutro, donde  $\lambda(S_t, v_t, \rho_t, t)$  representa el precio del riesgo de correlación y se puede asumir que es  $\lambda\rho_t$ , con  $\lambda$  constante. Para simplificar la notación, pongamos

$$\begin{aligned} a(t, \rho_t) &= \tilde{a}(t, \rho_t) - \lambda(S_t, v_t, \rho_t, t) \\ b(t, \rho_t) &= \tilde{b}(t, \rho_t). \end{aligned}$$

Para incorporar una correlación estocástica entre el proceso Log-precio y la varianza estocástica, se extiende el modelo de Heston, al sistema de EDEs,

$$\begin{aligned}
dv_t &= \kappa [\theta - v_t] dt + \sigma \sqrt{v_t} d\widehat{W}_{v,t}, \\
d\rho_t &= \underbrace{(\tilde{a}(t, \rho_t) - \lambda(S_t, v_t, \rho_t, t))}_{a(t, \rho_t)} dt + \underbrace{\tilde{b}(t, \rho_t)}_{b(t, \rho_t)} d\widehat{W}_{\rho,t}, \\
dx_t &= (r - \frac{1}{2}v_t) dt + \sqrt{v_t} d\widehat{W}_{x,t},
\end{aligned} \tag{5.2}$$

con

$$d\widehat{W}_x d\widehat{W}_v = \rho_t dt, \quad d\widehat{W}_x d\widehat{W}_\rho = \rho^{x\rho} dt, \quad d\widehat{W}_v d\widehat{W}_\rho = \rho^{v\rho} dt,$$

donde  $\rho_t$  está dado por la segunda ecuación de (5.2), y  $\rho^{x\rho}$  así como  $\rho^{v\rho}$  se asumen que son dos correlaciones constantes.

## 5.2. Simulación del Modelo

Ahora discutimos cómo simular los caminos muestrales para el sistema (5.2) y así poder calcular el precio de las opciones europeas en el modelo extendido de Heston aplicando la simulación Monte Carlo. Es necesario generar caminos aleatorios del triplete  $(v_t, \rho_t, x_t)$  para todo  $t \in \mathcal{T} := \{t_i\}_{i=1}^N$ . En otras palabras, para un incremento de tiempo arbitrario  $dt$ , se debe generar una muestra aleatoria de  $(v_{t+dt}, \rho_{t+dt}, x_{t+dt})$  para  $(v_t, \rho_t, x_t)$  dado. Luego teniendo  $(v_{t+dt}, \rho_{t+dt}, x_{t+dt})$ , se genera  $(v_{t+2dt}, \rho_{t+2dt}, x_{t+2dt})$  y así sucesivamente hasta llegar a obtener una muestra aleatoria de  $(v_{t_N}, \rho_{t_N}, x_{t_N})$ .

### 5.2.1. Discretización para el proceso de Varianza $\{v_t\}$

Para discretizar el proceso de varianza  $v_t$ , se emplea exactamente el esquema Exponencial-Cuadrático (QE) descrito en la sección 4.4.

### 5.2.2. Discretización para el Proceso de Correlación $\{\rho_t\}$

Para modelar la correlación estocástica se pueden usar varios procesos estocásticos, por ejemplo, el proceso de Jacobi acotado que se puede encontrar en [27, Ma, Jun] y en [43, Emmerich]. En el primero se propone un proceso Jacobi modificado para evaluar la prima de riesgo de la correlación estocástica, y se establece una ecuación diferencial parcial para preciar el riesgo de correlación para el capital extranjero. En el segundo se muestra un ejemplo de los mercados financieros donde la estocasticidad de la correlación es una fuente fundamental de riesgo. Otro tipo de proceso que se puede usar es el de correlación estocástica producido por transformación que se puede encontrar en [41, Teng, Emmerich] y en [39, Teng, Ehrhardt, Günthe]). Sin embargo, para un análisis más manejable, en la segunda ecuación del sistema (5.2) optamos por elegir otro proceso de reversión a la media que exhibe una estructura más simple que los mencionados, en este caso, el proceso Ornstein-Uhlenbeck (OU), es decir,

$$d\rho_t = \kappa_\rho (\mu_\rho - \rho_t) dt + \sigma_\rho d\widehat{W}_{\rho,t}, \quad (5.3)$$

donde hemos considerado  $a(t, \rho_t) = \kappa_\rho (\mu_\rho - \rho_t)$  y  $b(t, \rho_t) = \sigma_\rho$ . La solución exacta de (5.3) es

$$\rho_{t+dt} = \rho_t e^{-\kappa_\rho dt} + \mu_\rho (1 - e^{-\kappa_\rho dt}) + \sigma_\rho \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_\rho dt}}{2\kappa_\rho}} Z^\rho, \quad (5.4)$$

donde  $Z^\rho$  es una variable aleatoria Normal estándar. Sin embargo, el principal inconveniente de utilizar el proceso OU para la correlación estocástica es que el proceso no está acotado. Esto quiere decir que las correlaciones generadas pueden caer fuera del intervalo de correlación  $[-1, 1]$ , especialmente con un valor pequeño de  $\kappa_\rho$  y un valor grande de  $\sigma_\rho$ . Además, como se indica en [38, Teng, Ehrhardt, Günther] que

$$P(\rho_t < 1) = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\kappa_\rho}(1-\mu_\rho)}{\sigma_\rho} \rightarrow \infty, \quad (5.5)$$

y

$$P(\rho_t > -1) = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\kappa_\rho}(-1-\mu_\rho)}{\sigma_\rho} \rightarrow -\infty. \quad (5.6)$$

Esto no significa que necesariamente  $\sigma_\rho$  tiende a 0. En efecto, si se limita el valor medio  $\mu_\rho$  tal que pertenezca a  $(-1, 1)$ , de (5.5) y (5.6) se puede concluir que

$$\frac{\sqrt{\kappa_\rho}}{\sigma_\rho} \rightarrow \infty \Rightarrow P(-1 < \rho_t < 1) = 1$$

En la práctica, podría seleccionarse una constante positiva  $C$  de tal manera que la condición

$$\frac{\sqrt{\kappa_\rho}}{\sigma_\rho} \geq C$$

ya sea suficiente para asegurar que las correlaciones generadas permanezcan en  $(-1, 1)$ , si la correlación inicial  $\rho_0$  y la media a largo plazo  $\mu_\rho$  no son cercanos de  $-1$  o  $1$ .

A continuación estudiaremos cómo discretizar el proceso  $\{x_t\}$ .

### 5.2.3. Discretización para el proceso de Log-precio $x_t$

La tercera ecuación del sistema (5.2), según lo indicado por [3, Andersen], una discretización directa de la tercera ecuación de (5.2) puede llevar al problema de la “correlación de fugas”: supongamos que usamos directamente un esquema de Euler:

$$\hat{x}_{t+dt} = \hat{x}_t + (r - \frac{1}{2}\hat{\nu}_t)dt + \sqrt{\hat{\nu}_t}Z_x\sqrt{dt}.$$

Se sabe que la verdadera correlación entre  $\hat{x}_{t+dt}$  y  $\hat{\nu}_{t+dt}$  es siempre cercana a  $\rho_t$  dada por la segunda relación de (5.2). Sin embargo,  $\hat{\nu}_{t+dt}$  y  $Z_\nu$  en (4.20) tienen una fuerte relación no



lineal, lo que implicará que la correlación efectiva entre  $\hat{x}_{t+dt}$  y  $\hat{v}_{t+dt}$  será más cercana a cero que  $\rho_t$  para los casos donde la probabilidad  $P(\beta + Z_v < 0)$  es distinto de cero. Para abordar este problema de “correlación de fugas”, reformulamos el sistema de ecuación diferencial estocástica (5.2), de la manera siguiente: primero, vemos que el sistema (5.2), tiene una familia de matriz de correlaciones, dada por,

$$\mathcal{C}_t = \begin{bmatrix} 1 & \rho^{v\rho} & \rho_t \\ \rho^{v\rho} & 1 & \rho^{\rho x} \\ \rho_t & \rho^{x\rho} & 1 \end{bmatrix}, t \geq 0.$$

Denotemos por  $\rho_1 := \rho^{v\rho} = \rho^{\rho v}$  y  $\rho_2 := \rho^{x\rho} = \rho^{\rho x}$ . Se realiza una descomposición de Cholesky,  $\mathcal{C}_t = \mathcal{L}_t \mathcal{L}_t^T$ , donde  $\mathcal{L}_t$  es una familia de matrices triangulares inferiores dadas por

$$\mathcal{L}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \rho_1 & \sqrt{1 - \rho_1^2} & 0 \\ \rho_t & \rho^{x\rho} & \sqrt{1 - \rho_t^2 - \left(\frac{\rho_2 - \rho_1 \rho_t}{\sqrt{1 - \rho_1^2}}\right)^2} \end{bmatrix}, t \geq 0,$$

que se usa para reformular el sistema (5.2) con respecto a los movimientos Brownianos independientes  $W_t^v$ ,  $W_t^\rho$  y  $W_t^x$  como:

$$\begin{aligned} dv_t &= \kappa [\theta - v_t] dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^v, \\ d\rho_t &= a(t, \rho_t) dt + \rho_1 b(t, \rho_t) dW_t^v + \sqrt{1 - \rho_1^2} b(t, \rho_t) dW_t^\rho, \\ dx_t &= \left(r - \frac{1}{2}v_t\right) dt + \rho_t \sqrt{v_t} dW_t^v + \frac{\rho_2 - \rho_1 \rho_t}{\sqrt{1 - \rho_1^2}} \sqrt{v_t} dW_t^\rho \\ &\quad + \sqrt{1 - \rho_t^2 - \left(\frac{\rho_2 - \rho_1 \rho_t}{\sqrt{1 - \rho_1^2}}\right)^2} \sqrt{v_t} dW_t^x \end{aligned}$$

Como el objetivo principal es conseguir una correlación estocástica entre el proceso  $x_t$  y el proceso  $v_t$ , para simplificar el modelo, se asume que  $\rho_1 = 0$ , y así el sistema de EDEs se convierte en

$$\begin{aligned} dv_t &= \kappa [\theta - v_t] dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^v, \\ d\rho_t &= a(t, \rho_t) dt + b(t, \rho_t) dW_t^\rho, \\ dx_t &= \left(r - \frac{1}{2}v_t\right) dt + \rho_t \sqrt{v_t} dW_t^v + \rho_2 \sqrt{v_t} dW_t^\rho + \sqrt{1 - \rho_t^2 - \rho_2^2} \sqrt{v_t} dW_t^x \end{aligned} \tag{5.7}$$

Ahora, se verá el procedimiento para discretizar la tercera ecuación del sistema (5.7).

### 5.2.3.1. El esquema Híbrido (esquema HB)

Se presenta una nueva forma de discretizar la tercera ecuación del sistema (5.7) presentada en [40, Teng,Ehrhardt,Günther], donde se utilizan varias técnicas de aproximación diferentes. Por ello se le llama el esquema híbrido. Tomamos el proceso de OU como ejemplo debido a su

capacidad de análisis y comenzamos con la forma integral de la tercera ecuación del sistema (5.7)

$$x_{t+\Delta} = x_t + rdt - \frac{1}{2} \int_t^{t+dt} v_u du + \int_t^{t+dt} \rho_u \sqrt{v_u} dW_u^v + \rho_2 \int_t^{t+dt} \sqrt{v_u} dW_u^\rho + \int_t^{t+dt} \sqrt{1 - \rho_u^2 - \rho_2^2} \sqrt{v_u} dW_u^x, \quad (5.8)$$

donde  $\rho_t$  sigue un proceso OU. Para la segunda integral de (5.8), donde el integrando no es independiente del movimiento Browniano  $W_u^v$ , se considera el producto de Itô

$$\begin{aligned} d\rho_t v_t &= \rho_t dv_t + v_t d\rho_t = \rho_t (\kappa [\theta - v_t] dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^v) + v_t (\kappa_\rho (\mu_\rho - \rho_t) dt + \sigma_\rho dW_t^\rho) \\ &= [\rho_t \kappa (\theta - v_t) + v_t \kappa_\rho (\mu_\rho - \rho_t)] dt + \rho_t \sigma \sqrt{v_t} dW_t^v + v_t \sigma_\rho dW_t^\rho, \end{aligned}$$

donde se ha asumido que  $v_t$  y  $\rho_t$  son independientes entre sí, lo que corresponde a  $\rho_1 = 0$ . Este producto implica que

$$\int_t^{t+dt} \rho_u \sqrt{v_u} dW_u^v = \frac{\rho_{t+dt} v_{t+dt}}{\sigma} - \frac{\rho_t v_t}{\sigma} - \frac{\sigma_\rho}{\sigma} \int_t^{t+dt} v_u dW_u^\rho - \int_t^{t+dt} \frac{\kappa \theta \rho_u + \kappa_\rho \mu_\rho v_u - (\kappa_v + \kappa_\rho) \rho_u v_u}{\sigma} du, \quad (5.9)$$

reemplazando (5.9) en (5.8),

$$\begin{aligned} x_{t+dt} &= x_t + rdt - \frac{1}{2} \int_t^{t+dt} v_u du + \frac{\rho_{t+dt} v_{t+dt}}{\sigma} - \frac{\rho_t v_t}{\sigma} \\ &\quad - \int_t^{t+dt} \frac{\kappa \theta \rho_u + \kappa_\rho \mu_\rho v_u - (\kappa_v + \kappa_\rho) \rho_u v_u}{\sigma} du + \int_t^{t+dt} \rho_2 \sqrt{v_u} dW_u^\rho \\ &\quad - \int_t^{t+dt} \frac{\sigma_\rho}{\sigma} v_u dW_u^\rho + \int_t^{t+dt} \sqrt{1 - \rho_u^2 - \rho_2^2} \sqrt{v_u} dW_u^x. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Para las dos primeras integrales de la expresión (5.10), simplemente usamos la aproximación

$$dt(\gamma_1 v_t + \gamma_2 v_{t+dt}), \quad (5.11)$$

y

$$dt\left(\gamma_1 \frac{\kappa \theta \rho_t + \kappa_\rho \mu_\rho v_t - (\kappa + \kappa_\rho) \rho_t v_t}{\sigma} + \gamma_2 \frac{\kappa \theta \rho_{t+dt} + \kappa_\rho \mu_\rho v_{t+dt} - (\kappa + \kappa_\rho) \rho_{t+dt} v_{t+dt}}{\sigma}\right), \quad (5.12)$$

donde  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son constantes dadas, por ejemplo,  $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$  para una discretización central.

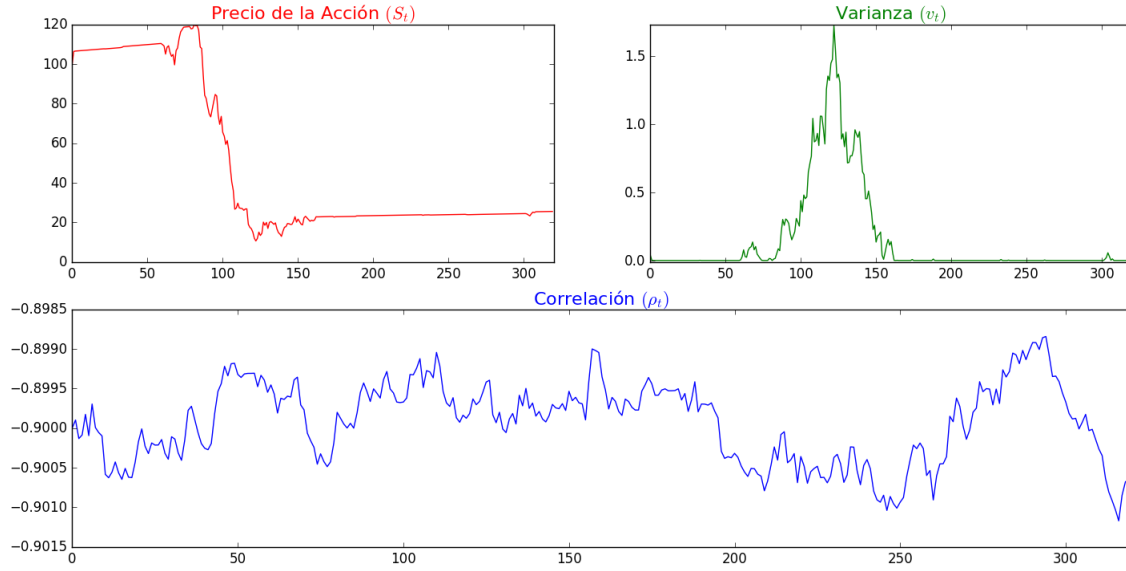
En las integrales de Itô de la expresión (5.10), el integrando es independiente del correspondiente movimiento Browniano. Así, dichas integrales son aproximadas por,

$$\int_t^{t+dt} \left( \rho_2 \sqrt{v_u} - \frac{\sigma_\rho}{\sigma} v_u \right) dW_u^\rho \approx \sqrt{dt} \sqrt{\gamma_1 \left( \rho_2 \sqrt{v_t} - \frac{\sigma_\rho}{\sigma} v_t \right)^2 + \gamma_2 \left( \rho_2 \sqrt{v_{t+dt}} - \frac{\sigma_\rho}{\sigma} v_{t+dt} \right)^2} Z^\rho,$$

y

$$\int_t^{t+dt} \sqrt{1 - \rho_u^2 - \rho_2^2} \sqrt{v_u} dW_u^x \approx \sqrt{dt} \sqrt{\gamma_1 v_t (1 - \rho_t^2 - \rho_2^2) + \gamma_2 v_{t+dt} (1 - \rho_{t+dt}^2 - \rho_2^2)} Z^x,$$

Figura 5.1: Simulación de una trayectoria del esquema HB



Fuente : Elaboración Propia

donde  $Z^\rho$  y  $Z^x$  son variables aleatorias Normal estándar independientes. Así, en (5.10), tenemos

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{t+dt} = & \hat{x}_t + rdt + K_1\hat{v}_t + K_2\hat{v}_{t+dt} + K_3\hat{\rho}_t\hat{v}_t + K_4\hat{\rho}_{t+dt}\hat{v}_{t+dt} + K_5\hat{\rho}_t + K_6\hat{\rho}_{t+dt} \\
 & + \sqrt{K_v^1\hat{v}_t + K_v^2\hat{v}_t^{3/2} + K_v^3\hat{v}_t^2 + K_v^4\hat{v}_{t+dt} + K_v^5\hat{v}_{t+dt}^{3/2} + K_v^6\hat{v}_{t+dt}^2} Z^\rho \\
 & + \sqrt{K_\rho^1\hat{v}_t + K_\rho^2\hat{v}_t\hat{\rho}_t^2 + K_\rho^3\hat{v}_{t+dt} + K_\rho^4\hat{v}_{t+dt}\hat{\rho}_{t+dt}^2} Z^x,
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= -(dt)\gamma_1 \left( \frac{\kappa_\rho \mu_\rho}{\sigma} + \frac{1}{2} \right), & K_v^1 &= (dt)\gamma_1(\rho_2)^2, & K_\rho^1 &= (dt)\gamma_1(1 - \rho_2^2), \\
 K_2 &= -(dt)\gamma_2 \left( \frac{\kappa_\rho \mu_\rho}{\sigma} + \frac{1}{2} \right), & K_v^2 &= -\frac{2(dt)\gamma_1\rho_2\sigma_\rho}{\sigma}, & K_\rho^2 &= -(dt)\gamma_1, \\
 K_3 &= \frac{1}{\sigma} ((dt)\gamma_1(\kappa + \kappa_\rho) - 1), & K_v^3 &= \frac{(dt)\gamma_1\sigma_\rho^2}{\sigma^2}, & K_\rho^3 &= (dt)\gamma_2(1 - \rho_2^2), \\
 K_4 &= \frac{1}{\sigma} ((dt)\gamma_2(\kappa + \kappa_\rho) + 1), & K_v^4 &= (dt)\gamma_2(\rho_2)^2, & K_\rho^4 &= (dt)\gamma_2, \\
 K_5 &= -\frac{(dt)\gamma_1\kappa\mu}{\sigma}, & K_v^5 &= -\frac{2(dt)\gamma_2\rho_2\sigma_\rho}{\sigma}, \\
 K_6 &= -\frac{(dt)\gamma_2\kappa\mu}{\sigma}, & K_v^6 &= \frac{(dt)\gamma_2\sigma_\rho^2}{\sigma^2}.
 \end{aligned}$$

La figura 5.1 nos muestra el comportamiento de un camino simulado del sistema (5.2) usando el esquema HB.

#### 5.2.4. Análisis de Convergencia

A continuación presentamos la proposición 3 de [40, Teng, pág 8], y brindamos una demostración al detalle. Note también que en el artículo, hay un error de tipeo, en la segunda relación

(46) de [40, Teng, pág 8]. Cabe resaltar que Long teng, uno de los autores de dicho artículo, nos confirmó que se trata de un error de tipeo.

**Proposición 97.** *Asumiendo que  $\gamma_1 + \gamma_2$  se aproxima a 1, cuando  $dt \rightarrow 0$ . El esquema HB es consistente Débilmente. Esto es, condicionado a  $\widehat{S}_t, \widehat{v}_t$  y  $\widehat{\rho}_t$ , se tiene*

$$\lim_{dt \rightarrow 0} E \left[ \frac{\ln \widehat{S}_{t+dt} - \ln \widehat{S}_t}{dt} \right] = r - \frac{1}{2} \widehat{v}_t, \quad \lim_{dt \rightarrow 0} Var \left[ \frac{\ln \widehat{S}_{t+dt} - \ln \widehat{S}_t}{\sqrt{dt}} \right] = \widehat{v}_t + 2 \left( \frac{\sigma_\rho^2}{\sigma^2} \widehat{v}_t^2 - \rho_2 \frac{\sigma_\rho}{\sigma} \widehat{v}_t^{\frac{3}{2}} \right), \quad (5.14)$$

$$\lim_{dt \rightarrow 0} E \left[ \frac{\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{v}_t}{dt} \right] = \kappa(\theta - \widehat{v}_t), \quad \lim_{dt \rightarrow 0} Var \left[ \frac{\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{v}_t}{\sqrt{dt}} \right] = \sigma^2 \widehat{v}_t, \quad (5.15)$$

$$\lim_{dt \rightarrow 0} E \left[ \frac{\widehat{\rho}_{t+dt} - \widehat{\rho}_t}{dt} \right] = \kappa_\rho(\theta_\rho - \widehat{\rho}_t), \quad \lim_{dt \rightarrow 0} Var \left[ \frac{\widehat{\rho}_{t+dt} - \widehat{\rho}_t}{\sqrt{dt}} \right] = \sigma_\rho^2, \quad (5.16)$$

$$\lim_{dt \rightarrow 0} Cov \left[ \frac{\ln \widehat{S}_{t+dt} - \ln \widehat{S}_t}{\sqrt{dt}}, \frac{\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{v}_t}{\sqrt{dt}} \right] = \widehat{\rho}_t \sigma \widehat{v}_t, \quad \lim_{dt \rightarrow 0} Cov \left[ \frac{\ln \widehat{S}_{t+dt} - \ln \widehat{S}_t}{\sqrt{dt}}, \frac{\widehat{\rho}_{t+dt} - \widehat{\rho}_t}{\sqrt{dt}} \right] = \rho_2 \sigma_\rho \sqrt{\widehat{v}_t}. \quad (5.17)$$

*Demostración.* (**Daremos por sobreentendido el condicionamiento sobre  $\widehat{S}_t, \widehat{v}_t$  y  $\widehat{\rho}_t$ .**)

**Demostración de las relaciones dadas en (5.15):**

Debido al esquema QE utilizado para discretizar  $\{v_t\}$ , tenemos la relación (4.41) en la proposición 96, así, obtenemos (5.15).

**Demostración de las relaciones dadas en (5.16):**

Para la primera relación, notemos que,

$$E \left[ \frac{\widehat{\rho}_{t+dt} - \widehat{\rho}_t}{dt} \right] = \frac{E[\widehat{\rho}_{t+dt}] - \widehat{\rho}_t}{dt}, \quad (5.18)$$

de (5.4),

$$\widehat{\rho}_{t+dt} = \widehat{\rho}_t e^{-\kappa_\rho dt} + \theta_\rho (1 - e^{-\kappa_\rho dt}) + \sigma_\rho \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_\rho dt}}{2\kappa_\rho}} Z^\rho,$$

al tomar esperanza (condicionada), se tiene

$$E[\widehat{\rho}_{t+dt}] = \widehat{\rho}_t e^{-\kappa_\rho dt} + \theta_\rho (1 - e^{-\kappa_\rho dt}) + 0, \quad (5.19)$$

así en (5.18),

$$E \left[ \frac{\widehat{\rho}_{t+dt} - \widehat{\rho}_t}{dt} \right] = \frac{\widehat{\rho}_t (e^{-\kappa_\rho dt} - 1) + \theta_\rho (1 - e^{-\kappa_\rho dt})}{dt},$$

aplicando L'Hospital,

$$\lim_{dt \rightarrow 0} E \left[ \frac{\widehat{\rho}_{t+dt} - \widehat{\rho}_t}{dt} \right] = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\widehat{\rho}_t(-\kappa_\rho e^{-\kappa_\rho dt}) + \theta_\rho(\kappa_\rho e^{-\kappa_\rho dt})}{1}.$$

De manera similar, para la segunda relación, notemos que

$$\text{Var} \left[ \frac{\widehat{\rho}_{t+dt} - \widehat{\rho}_t}{\sqrt{dt}} \right] = \frac{\text{Var}[\widehat{\rho}_{t+dt}]}{dt},$$

al tomar varianza (condicionada) en (5.4),

$$\text{Var}[\widehat{\rho}_{t+dt}] = 0 + 0 + \sigma_\rho^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa_\rho dt}}{2\kappa_\rho} \right),$$

luego, aplicando L'Hospital,

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \text{Var} \left[ \frac{\widehat{\rho}_{t+dt} - \widehat{\rho}_t}{\sqrt{dt}} \right] = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\sigma_\rho^2 (2\kappa_\rho e^{-2\kappa_\rho dt})}{2\kappa_\rho} = \sigma_\rho^2.$$

#### **Demostración de las relaciones dadas en (5.14):**

Para la segunda relación, notemos que,

$$\text{Var} \left[ \frac{\ln \widehat{S}_{t+dt} - \ln \widehat{S}_t}{\sqrt{dt}} \right] = \frac{\text{Var}[\ln \widehat{S}_{t+dt}]}{dt},$$

al tomar varianza (condicionada) en la relación (5.13),

$$\begin{aligned} \text{Var}[\ln \widehat{S}_{t+dt}] &= 0 + 0 + 0 + (K_2)^2 \text{Var}[\widehat{v}_{t+dt}] + 0 + (K_4)^2 \text{Var}[\widehat{\rho}_{t+dt} \widehat{v}_{t+dt}] + 0 + (K_6)^2 \text{Var}[\widehat{\rho}_{t+dt}] \\ &+ \text{Var} \left[ \sqrt{K_v^1 \widehat{v}_t + K_v^2 \widehat{v}_t^{3/2} + K_v^3 \widehat{v}_t^2 + K_v^4 \widehat{v}_{t+dt} + K_v^5 \widehat{v}_{t+dt}^{3/2} + K_v^6 \widehat{v}_{t+dt}^2} Z^\rho \right] \\ &+ \text{Var} \left[ \sqrt{K_\rho^1 \widehat{v}_t + K_\rho^2 \widehat{v}_t \widehat{\rho}_t^2 + K_\rho^3 \widehat{v}_{t+dt} + K_\rho^4 \widehat{v}_{t+dt} \widehat{\rho}_{t+dt}^2} Z^x \right], \end{aligned} \tag{5.20}$$

si hacemos  $M := K_v^1 \widehat{v}_t + K_v^2 \widehat{v}_t^{3/2} + K_v^3 \widehat{v}_t^2 + K_v^4 \widehat{v}_{t+dt} + K_v^5 \widehat{v}_{t+dt}^{3/2} + K_v^6 \widehat{v}_{t+dt}^2$ , como  $Z^\rho$  es independiente de  $\widehat{v}$ , se tiene que  $Z^\rho$  es independiente de  $M$ , y de,

$$\text{Var}[\sqrt{M} Z^\rho] = E[M (Z^\rho)^2] - \left( E[\sqrt{M} Z^\rho] \right)^2,$$

es fácil ver que,

$$\text{Var}[\sqrt{M} Z^\rho] = E[M] E[(Z^\rho)^2] - \left( E[\sqrt{M}] E[Z^\rho] \right)^2 = E[M] - 0 = E[M],$$

donde

$$E[M] = K_v^1 \hat{v}_t + K_v^2 \hat{v}_t^{3/2} + K_v^3 \hat{v}_t^2 + K_v^4 E[\hat{v}_{t+dt}] + K_v^5 E[\hat{v}_{t+dt}^{3/2}] + K_v^6 E[\hat{v}_{t+dt}^2].$$

Análogamente,  $\text{Var} \left[ \sqrt{K_\rho^1 \hat{v}_t + K_\rho^2 \hat{v}_t \hat{\rho}_t^2 + K_\rho^3 \hat{v}_{t+dt} + K_\rho^4 \hat{v}_{t+dt} \hat{\rho}_{t+dt}^2} Z^x \right]$ , es igual a

$$K_\rho^1 \hat{v}_t + K_\rho^2 \hat{v}_t \hat{\rho}_t^2 + K_\rho^3 E[\hat{v}_{t+dt}] + K_\rho^4 E[\hat{v}_{t+dt} \hat{\rho}_{t+dt}^2],$$

ahora, notemos de (3.8), que cuando  $dt \rightarrow 0$ ,

$$E[\hat{v}_{t+dt}] \rightarrow \hat{v}_t, \quad (5.21)$$

análogamente (de la continuidad),

$$E[\hat{v}_{t+dt}^{3/2}] \rightarrow \hat{v}_t^{3/2}; \quad E[\hat{v}_{t+dt}^2] \rightarrow \hat{v}_t^2 \quad \text{y} \quad E[\hat{v}_{t+dt} \hat{\rho}_{t+dt}^2] \rightarrow \hat{v}_t \hat{\rho}_t^2,$$

con lo cual,

$$\begin{aligned} \text{Var}[\ln \hat{S}_{t+dt}] &= (K_2)^2 \text{Var}[\hat{v}_{t+dt}] + (K_4)^2 \text{Var}[\hat{\rho}_{t+dt} \hat{v}_{t+dt}] + (K_6)^2 \text{Var}[\hat{\rho}_{t+dt}] \\ &\quad + (K_v^1 + K_v^4) \hat{v}_t + (K_v^2 + K_v^5) \hat{v}_t^{3/2} + (K_v^3 + K_v^6) \hat{v}_t^2 \\ &\quad + (K_\rho^1 + K_\rho^3) \hat{v}_t + (K_\rho^2 + K_\rho^4) \hat{v}_t \hat{\rho}_t^2. \end{aligned}$$

También en la demostración de la relación (5.15) y (5.16), se ve que cuando  $dt \rightarrow 0$ ,

$$\frac{\text{Var}[\hat{v}_{t+dt}]}{dt} \rightarrow \sigma^2 \hat{v}_t, \quad \frac{\text{Var}[\hat{\rho}_{t+dt}]}{dt} \rightarrow \sigma_\rho^2, \quad (5.22)$$

así, cuando  $dt \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\text{Var}[\ln \hat{S}_{t+dt}]}{dt} &\rightarrow 0 (\sigma^2 \hat{v}_t) + \frac{(K_4)^2 \text{Var}[\hat{\rho}_{t+dt} \hat{v}_{t+dt}]}{dt} + 0 (\sigma_\rho^2) \\ &\quad + \frac{(K_v^1 + K_v^4 + K_\rho^3 + K_v^4) \hat{v}_t + (K_v^2 + K_v^5) \hat{v}_t^{3/2}}{dt} \\ &\quad + \frac{(K_v^3 + K_v^6) \hat{v}_t^2 + (K_\rho^2 + K_\rho^4) \hat{v}_t \hat{\rho}_t^2}{dt}, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta la definición,

$$\begin{aligned} \frac{K_v^1 + K_v^4 + K_\rho^3 + K_v^4}{dt} &= \gamma_1 + \gamma_2; & \frac{K_v^2 + K_v^5}{dt} &= -\frac{2\rho_2 \sigma_\rho}{\sigma} (\gamma_1 + \gamma_2); \\ \frac{K_v^3 + K_v^6}{dt} &= \frac{\sigma^2}{\sigma^2} (\gamma_1 + \gamma_2); & \frac{K_\rho^2 + K_\rho^4}{dt} &= -(\gamma_1 + \gamma_2), \end{aligned}$$

por hipótesis  $\gamma_1 + \gamma_2$ , se aproxima a 1, cuando  $dt \rightarrow 0$ . Así,

$$\frac{\text{Var}[\ln \hat{S}_{t+dt}]}{dt} \rightarrow \frac{(K_4)^2 \text{Var}[\hat{\rho}_{t+dt} \hat{v}_{t+dt}]}{dt} + \hat{v}_t - \frac{2\rho_2 \sigma_\rho}{\sigma} \hat{v}_t^{3/2} + \frac{\sigma_\rho^2}{\sigma^2} \hat{v}_t^2 - \hat{v}_t \hat{\rho}_t^2, \quad (5.23)$$

de la propiedad 4 de la proposición 22:

$$\frac{\text{Var} [\hat{\rho}_{t+dt} \hat{v}_{t+dt}]}{dt} = \text{Var} [\hat{\rho}_{t+dt}] \left( \frac{\text{Var} [\hat{v}_{t+dt}]}{dt} \right) + \left( \frac{\text{Var} [\hat{\rho}_{t+dt}]}{dt} \right) (E [\hat{v}_{t+dt}])^2 + \left( \frac{\text{Var} [\hat{v}_{t+dt}]}{dt} \right) (E [\hat{\rho}_{t+dt}])^2,$$

haciendo  $dt \rightarrow 0$ , usando (5.22), (5.21) y (5.19),

$$\frac{\text{Var} [\hat{\rho}_{t+dt} \hat{v}_{t+dt}]}{dt} \rightarrow (0)(\sigma^2 \hat{v}_t) + \sigma_\rho^2 \hat{v}_t^2 + (\sigma^2 \hat{v}_t) \hat{\rho}_t^2, (K_4)^2 \rightarrow \frac{1}{\sigma^2},$$

reemplazando en (5.23),

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\text{Var} [\ln \hat{S}_{t+dt}]}{dt} = \frac{1}{\sigma^2} (\sigma_\rho^2 \hat{v}_t^2 + (\sigma^2 \hat{v}_t) \hat{\rho}_t^2) + \hat{v}_t - \frac{2\rho_2 \sigma_\rho}{\sigma} \hat{v}_t^{3/2} + \frac{\sigma_\rho^2}{\sigma^2} \hat{v}_t^2 - \hat{v}_t \hat{\rho}_t^2,$$

es decir,

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\text{Var} [\ln \hat{S}_{t+dt}]}{dt} = \hat{v}_t + 2 \left( \frac{\sigma_\rho^2}{\sigma^2} \hat{v}_t^2 - \rho_2 \frac{\sigma_\rho}{\sigma} \hat{v}_t^{3/2} \right).$$

Para la primera relación, recordando la expresión (5.10) al tomar esperanza (condicionada),

$$\begin{aligned} E [x_{t+dt}] = & x_t + r dt - \frac{1}{2} \int_t^{t+dt} E [v_u] du + \frac{E[\rho_{t+dt} v_{t+dt}]}{\sigma} - \frac{\rho_t v_t}{\sigma} \\ & - E \left[ \int_t^{t+dt} \frac{\kappa \theta \rho_u + \kappa_\rho \mu_\rho v_u - (\kappa_v + \kappa_\rho) \rho_u v_u}{\sigma} du \right] + 0 + 0 + 0, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta (5.12),

$$\begin{aligned} \frac{E[\hat{x}_{t+dt} - \hat{x}_t]}{dt} = & r - \frac{1}{2} \frac{\int_t^{t+dt} E[\hat{v}_u] du}{dt} + \frac{1}{\sigma} \frac{E[\hat{\rho}_{t+dt} \hat{v}_{t+dt}]}{dt} - \frac{1}{\sigma} \frac{\hat{\rho}_t \hat{v}_t}{dt} \\ & - \left[ \gamma_1 \frac{\kappa \theta \hat{\rho}_t + \kappa_\rho \mu_\rho \hat{v}_t - (\kappa + \kappa_\rho) \hat{\rho}_t \hat{v}_t}{\sigma} + \gamma_2 \frac{\kappa \theta E[\hat{\rho}_{t+dt}] + \kappa_\rho \mu_\rho E[\hat{v}_{t+dt}] - (\kappa + \kappa_\rho) E[\hat{\rho}_{t+dt} \hat{v}_{t+dt}]}{\sigma} \right], \end{aligned} \quad (5.24)$$

notemos que,

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \int_t^{t+dt} E[\hat{v}_u] du = 0,$$

entonces, aplicando L'Hospital, usando el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que,

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\int_t^{t+dt} E[\hat{v}_u] du}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{E[\hat{v}_{t+dt}]}{1} = \hat{v}_t. \quad (5.25)$$

Por otro lado, como  $\hat{\rho}$  y  $\hat{v}$  son independientes,

$$\lim_{dt \rightarrow 0} E[\hat{\rho}_{t+dt} \hat{v}_{t+dt}] = \lim_{dt \rightarrow 0} E[\hat{\rho}_{t+dt}] E[\hat{v}_{t+dt}] = \hat{\rho}_t \hat{v}_t.$$

Además, para el límite de la segunda línea de (5.24),

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \left[ \gamma_1 \frac{\kappa \theta \hat{\rho}_t + \kappa_\rho \mu_\rho \hat{v}_t - (\kappa + \kappa_\rho) \hat{\rho}_t \hat{v}_t}{\sigma} + \gamma_2 \frac{\kappa \theta E[\hat{\rho}_{t+dt}] + \kappa_\rho \mu_\rho E[\hat{v}_{t+dt}] - (\kappa + \kappa_\rho) E[\hat{\rho}_{t+dt} \hat{v}_{t+dt}]}{\sigma} \right],$$

por hipótesis  $\gamma_1 + \gamma_2 \rightarrow 1$ , cuando  $dt \rightarrow 0$ , es igual a

$$\frac{\kappa\theta\widehat{\rho}_t + \kappa_\rho\mu_\rho\widehat{v}_t - (\kappa + \kappa_\rho)\widehat{\rho}_t\widehat{v}_t}{\sigma}. \quad (5.26)$$

Reemplazando (5.25) y (5.26), al tomar límite en (5.24), se tiene que,

$$\begin{aligned} \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{E[\widehat{x}_{t+dt} - \widehat{x}_t]}{dt} &= r - \frac{1}{2}\widehat{v}_t + \frac{1}{\sigma} \left( \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{E[\widehat{\rho}_{t+dt}\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{\rho}_t\widehat{v}_t]}{dt} \right) \\ &\quad - \left( \frac{\kappa\theta\widehat{\rho}_t + \kappa_\rho\mu_\rho\widehat{v}_t - (\kappa + \kappa_\rho)\widehat{\rho}_t\widehat{v}_t}{\sigma} \right), \end{aligned} \quad (5.27)$$

veamos que,

$$\begin{aligned} E[\widehat{\rho}_{t+dt}\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{\rho}_t\widehat{v}_t] &= E[\widehat{\rho}_{t+dt}\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{\rho}_t\widehat{v}_{t+dt} + \widehat{\rho}_t\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{\rho}_t\widehat{v}_t], \\ &= \widehat{v}_t E[\widehat{\rho}_{t+dt} - \widehat{\rho}_t] + \widehat{\rho}_t E[\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{v}_t], \end{aligned}$$

así,

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{E[\widehat{\rho}_{t+dt}\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{\rho}_t\widehat{v}_t]}{dt} = \widehat{v}_t \left( \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{E[\widehat{\rho}_{t+dt} - \widehat{\rho}_t]}{dt} \right) + \widehat{\rho}_t \left( \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{E[\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{v}_t]}{dt} \right),$$

de las primeras relaciones en (5.15) y (5.16),

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{E[\widehat{\rho}_{t+dt}\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{\rho}_t\widehat{v}_t]}{dt} = \widehat{v}_t (\kappa_\rho(\theta_\rho - \widehat{\rho}_t)) + \widehat{\rho}_t (\kappa(\theta - \widehat{v}_t)),$$

al reemplazar en (5.27),

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{E[\widehat{x}_{t+dt} - \widehat{x}_t]}{dt} = r - \frac{1}{2}\widehat{v}_t.$$

### **Demostración de las relaciones dadas en (5.17):**

sabemos por propiedad de covarianza (condicionada) que

$$\text{Cov} \left[ \frac{\widehat{x}_{t+dt} - \widehat{x}_t}{\sqrt{dt}}, \frac{\widehat{v}_{t+dt} - \widehat{v}_t}{\sqrt{dt}} \right] = \frac{\text{Cov}[\widehat{x}_{t+dt} - \widehat{x}_t, \widehat{v}_{t+dt} - \widehat{v}_t]}{dt} = \frac{\text{Cov}[\widehat{x}_{t+dt} - \widehat{x}_t, \widehat{v}_{t+dt}]}{dt}. \quad (5.28)$$

De la expresión (5.13),

$$\begin{aligned} \widehat{x}_{t+dt} - \widehat{x}_t &= rdt + K_1\widehat{v}_t + K_2\widehat{v}_{t+dt} + K_3\widehat{\rho}_t\widehat{v}_t + K_4\widehat{\rho}_{t+dt}\widehat{v}_{t+dt} + K_5\widehat{\rho}_t + K_6\widehat{\rho}_{t+dt} \\ &\quad + \sqrt{K_v^1\widehat{v}_t + K_v^2\widehat{v}_t^{3/2} + K_v^3\widehat{v}_t^2 + K_v^4\widehat{v}_{t+dt} + K_v^5\widehat{v}_{t+dt}^{3/2} + K_v^6\widehat{v}_{t+dt}^2} Z^\rho \\ &\quad + \sqrt{K_\rho^1\widehat{v}_t + K_\rho^2\widehat{v}_t\widehat{\rho}_t^2 + K_\rho^3\widehat{v}_{t+dt} + K_\rho^4\widehat{v}_{t+dt}\widehat{\rho}_{t+dt}^2} Z^x, \end{aligned}$$

como  $Z^\rho$  es independiente de  $M$  y  $\widehat{v}$ , tenemos que,

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\sqrt{M}Z^\rho, \widehat{v}_{t+dt}] &= E[\sqrt{M}Z^\rho\widehat{v}_{t+dt}] - E[\sqrt{M}Z^\rho] E[\widehat{v}_{t+dt}] \\ &= E[\sqrt{M}\widehat{v}_{t+dt}] E[Z^\rho] - E[\sqrt{M}] E[\widehat{v}_{t+dt}] E[Z^\rho] \\ &= 0, \end{aligned}$$



análogamente,

$$\text{Cov} \left[ \sqrt{K_\rho^1 \hat{v}_t + K_\rho^2 \hat{v}_t \hat{\rho}_t^2 + K_\rho^3 \hat{v}_{t+dt} + K_\rho^4 \hat{v}_{t+dt} \hat{\rho}_{t+dt}^2} Z^x, \hat{v}_{t+dt} \right] = 0.$$

Teniendo en cuenta que al condicionar,  $\hat{x}_t$ ,  $\hat{v}_t$  y  $\hat{\rho}_t$ , son constantes conocidas,

$$\text{Cov} [\hat{x}_{t+dt} - \hat{x}_t, \hat{v}_{t+dt}] = 0 + 0 + K_2 \text{Var} [\hat{v}_{t+dt}] + 0 + K_4 \text{Cov} [\hat{\rho}_{t+dt} \hat{v}_{t+dt}, \hat{v}_{t+dt}] + 0 + K_6 \text{Cov} [\hat{\rho}_{t+dt}, \hat{v}_{t+dt}],$$

como hemos asumido que  $\hat{v}$  y  $\hat{\rho}$  son independientes,

$$\text{Cov} [\hat{x}_{t+dt} - \hat{x}_t, \hat{v}_{t+dt}] = K_2 \text{Var} [\hat{v}_{t+dt}] + K_4 \text{Cov} [\hat{\rho}_{t+dt} \hat{v}_{t+dt}, \hat{v}_{t+dt}], \quad (5.29)$$

veamos que,

$$\begin{aligned} \text{Cov} [\hat{\rho}_{t+dt} \hat{v}_{t+dt}, \hat{v}_{t+dt}] &= E \left[ (\hat{v}_{t+dt})^2 \hat{\rho}_{t+dt} \right] - (E [\hat{v}_{t+dt}])^2 E [\hat{\rho}_{t+dt}] \\ &= E \left[ (\hat{v}_{t+dt})^2 \right] E [\hat{\rho}_{t+dt}] - (E [\hat{v}_{t+dt}])^2 E [\hat{\rho}_{t+dt}] \\ &= \text{Var} [\hat{v}_{t+dt}] E [\hat{\rho}_{t+dt}]. \end{aligned}$$

reemplazando en (5.29), y en (5.28),

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \text{Cov} \left[ \frac{\hat{x}_{t+dt} - \hat{x}_t}{\sqrt{dt}}, \frac{\hat{v}_{t+dt} - \hat{v}_t}{\sqrt{dt}} \right] = \left( \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\text{Var} [\hat{v}_{t+dt}]}{dt} \right) \cdot \lim_{dt \rightarrow 0} (K_2 + K_4 \cdot E [\hat{\rho}_{t+dt}]),$$

con lo cual, usando (5.15),

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \text{Cov} \left[ \frac{\hat{x}_{t+dt} - \hat{x}_t}{\sqrt{dt}}, \frac{\hat{v}_{t+dt} - \hat{v}_t}{\sqrt{dt}} \right] = (\sigma^2 \hat{v}_t) \left( 0 + \frac{1}{\sigma} \cdot \hat{\rho}_t \right) = \sigma \hat{v}_t \hat{\rho}_t.$$

□

A continuación, presentamos el esquema HBM (para el Heston extendido), que viene a ser el análogo al esquema QEM (para el Heston puro). El esquema HBM básicamente "fuerza" a que el proceso discretizado de precios actualizados resultante del esquema HB, sea una martingala.

### 5.3. Esquema HB con corrección de Martingala (esquema HBM)

Como se mencionó en la subsección 4.4.7, el proceso de precios actualizados es una martingala; sin embargo, el proceso de precios (actualizados) en (5.13) no es una martingala. Para tratar esto,

un camino es reducir el tamaño  $dt$ ; y el otro es, emplear la "corrección de martingala" visto en la subsección 4.4.7. Desarrolla a continuación este último.

Del esquema (5.13), se tiene

$$\begin{aligned}\widehat{S}_{t+dt} &= \widehat{S}_t \exp(rdt + K_1\hat{v}_t + K_3\hat{\rho}_t\hat{v}_t + K_5\hat{\rho}_t) \cdot \exp(K_2\hat{v}_{t+dt} + K_4\hat{\rho}_{t+dt}\hat{v}_{t+dt} + K_6\hat{\rho}_{t+dt}) \\ &\exp\left(\sqrt{K_v^1\hat{v}_t + K_v^2\hat{v}_t^{3/2} + K_v^3\hat{v}_t^2 + K_v^4\hat{v}_{t+dt} + K_v^5\hat{v}_{t+dt}^{3/2} + K_v^6\hat{v}_{t+dt}^2} Z^\rho\right) \\ &\exp\left(\sqrt{K_\rho^1\hat{v}_t + K_\rho^2\hat{v}_t\hat{\rho}_t^2 + K_\rho^3\hat{v}_{t+dt} + K_\rho^4\hat{v}_{t+dt}\hat{\rho}_{t+dt}^2} Z^x\right).\end{aligned}$$

Asumiendo que  $\hat{\rho}_{t+dt}$  es conocido, entonces, por la propiedad 5 de la proposición 19

$$E\left[\widehat{S}_{t+dt} \cdot \exp(-r \cdot dt) \mid \widehat{S}_t, \hat{\rho}_{t+dt}\right] = E\left[E\left[\widehat{S}_{t+dt} \cdot \exp(-r \cdot dt) \mid \widehat{S}_t, \hat{v}_{t+dt}, \hat{\rho}_{t+dt}\right] \mid \widehat{S}_t, \hat{\rho}_{t+dt}\right], \quad (5.30)$$

Recordando la función generadora de momentos de una Normal,

$$\begin{aligned}E\left[\widehat{S}_{t+dt} \cdot \exp(-r \cdot dt) \mid \widehat{S}_t, \hat{v}_{t+dt}, \hat{\rho}_{t+dt}\right] &= \widehat{S}_t \exp(K_1\hat{v}_t + K_3\hat{\rho}_t\hat{v}_t + K_5\hat{\rho}_t) \cdot \exp(K_2\hat{v}_{t+dt} + K_4\hat{\rho}_{t+dt}\hat{v}_{t+dt} + K_6\hat{\rho}_{t+dt}) \\ &\exp\left(\frac{K_v^1\hat{v}_t + K_v^2\hat{v}_t^{3/2} + K_v^3\hat{v}_t^2 + K_v^4\hat{v}_{t+dt} + K_v^5\hat{v}_{t+dt}^{3/2} + K_v^6\hat{v}_{t+dt}^2}{2}\right) \\ &\exp\left(\frac{K_\rho^1\hat{v}_t + K_\rho^2\hat{v}_t\hat{\rho}_t^2 + K_\rho^3\hat{v}_{t+dt} + K_\rho^4\hat{v}_{t+dt}\hat{\rho}_{t+dt}^2}{2}\right),\end{aligned}$$

al reemplazar en (5.30),

$$\begin{aligned}E\left[\widehat{S}_{t+dt} \cdot \exp(-r \cdot dt) \mid \widehat{S}_t, \hat{\rho}_{t+dt}\right] &= \widehat{S}_t \exp\left(K_1\hat{v}_t + \frac{K_v^1\hat{v}_t}{2} + \frac{K_\rho^1\hat{v}_t}{2} + \frac{K_v^2\hat{v}_t^{3/2}}{2} + \frac{K_v^3\hat{v}_t^2}{2} + K_5\hat{\rho}_t + K_6\hat{\rho}_{t+dt}\right. \\ &\left.+ K_3\hat{\rho}_t\hat{v}_t + \frac{K_\rho^2\hat{v}_t\hat{\rho}_t^2}{2}\right) \cdot E\left[\exp\left(K_2\hat{v}_{t+dt} + K_4\hat{\rho}_{t+dt}\hat{v}_{t+dt} + \frac{K_v^4\hat{v}_{t+dt}}{2}\right.\right. \\ &\left.\left.+ \frac{K_\rho^3\hat{v}_{t+dt} + K_\rho^4\hat{v}_{t+dt}\hat{\rho}_{t+dt}^2}{2}\right) \cdot \underbrace{\exp\left(\frac{K_v^5\hat{v}_{t+dt}^{3/2} + K_v^6\hat{v}_{t+dt}^2}{2}\right)}_{:=M} \mid \widehat{S}_t, \hat{\rho}_{t+dt}\right],\end{aligned} \quad (5.31)$$

como se menciona en [40, Teng, pág 9], debido a que ambos exponentes de  $\hat{v}_{t+dt}$  son mayores a 1, la parte subrayada puede ser ignorada para obtener una corrección de martingala aproximada. Por lo que (5.31) se puede escribir como

$$E\left[\widehat{S}_{t+dt} \cdot \exp(-r \cdot dt) \mid \widehat{S}_t, \hat{\rho}_{t+dt}\right] \approx \widehat{S}_t \exp(N) \cdot \underbrace{E\left[\exp(A\hat{v}_{t+dt}) \mid \widehat{S}_t, \hat{\rho}_{t+dt}\right]}_{:=M} \quad (5.32)$$

donde

$$\begin{aligned}N &:= \left(K_1 + \frac{K_v^1}{2} + \frac{K_\rho^1}{2}\right)\hat{v}_t + \frac{K_v^2\hat{v}_t^{3/2}}{2} + \frac{K_v^3\hat{v}_t^2}{2} + K_5\hat{\rho}_t + K_6\hat{\rho}_{t+dt} + K_3\hat{\rho}_t\hat{v}_t + \frac{K_\rho^2\hat{v}_t\hat{\rho}_t^2}{2}, \\ A &:= K_2 + K_4\hat{\rho}_{t+dt} + \frac{K_v^4 + K_\rho^3 + K_\rho^4\hat{\rho}_{t+dt}^2}{2}.\end{aligned} \quad (5.33)$$

Asumiendo en (5.32) que  $M$  es finito, se tiene que  $E\left[\widehat{S}_{t+dt} \cdot \exp(-r \cdot dt) \mid \widehat{S}_t, \hat{\rho}_{t+dt}\right]$  es finito

también. Para forzar la martingala, es necesario que,

$$\exp(K_0 + N)M = 1,$$

con lo cual,  $K_0 = -\ln M - N$ . Y obteniendo así

$$\begin{aligned} \widehat{S}_{t+dt} &= \widehat{S}_t \exp(rdt + K_0 + K_1 \widehat{v}_t + K_3 \widehat{\rho}_t \widehat{v}_t + K_5 \widehat{\rho}_t) \cdot \exp(K_2 \widehat{v}_{t+dt} + K_4 \widehat{\rho}_{t+dt} \widehat{v}_{t+dt} + K_6 \widehat{\rho}_{t+dt}) \\ &\times \exp\left(\sqrt{K_v^1 \widehat{v}_t + K_v^2 \widehat{v}_t^{3/2} + K_v^3 \widehat{v}_t^2 + K_v^4 \widehat{v}_{t+dt} + K_v^5 \widehat{v}_{t+dt}^{3/2} + K_v^6 \widehat{v}_{t+dt}^2} Z^v\right) \\ &\times \exp\left(\sqrt{K_\rho^1 \widehat{v}_t + K_\rho^2 \widehat{v}_t \widehat{\rho}_t^2 + K_\rho^3 \widehat{v}_{t+dt} + K_\rho^4 \widehat{v}_{t+dt} \widehat{\rho}_{t+dt}^2} Z^\rho\right). \end{aligned} \tag{5.34}$$

Como se observa en (5.34) el desafío de usar el esquema HBM es calcular  $K_0$ , que en realidad es una variable aleatoria condicionada a  $\widehat{S}_t$  y  $\widehat{\rho}_{t+dt}$ . Debido a que  $v_t$  y  $\rho_t$  son independientes, podemos adoptar directamente el enfoque visto al final de la subsección 4.4.7 para calcular  $K_0$

$$K_0 = \begin{cases} -\frac{Ab^2a}{1-2Aa} + \frac{1}{2} \ln(1-2Aa) - N, & \psi \leq \psi_c, \\ -\ln\left(p + \frac{\beta(1-p)}{\beta-A}\right) - N, & \psi > \psi_c, \end{cases}$$

donde  $a$ ,  $b$ ,  $\psi$ ,  $p$ ,  $\beta$  son definidos por las relaciones (4.30), (4.29), (4.26), (4.31), (4.32) y  $N$  y  $A$  son definidos en (5.33).

## Capítulo 6

# Resultados Numéricos

En este capítulo, realizamos la implementación y comparación de los esquemas vistos en éste trabajo de tesis. Cabe resaltar que los experimentos computacionales fueron desarrollados en el Centro de Alto Rendimiento Computacional de la Amazonía Peruana del Instituto de Investigaciones de la Amazonía Peruana. Mayor información en: <http://iiap.org.pe/manati>.

Considerando  $r = 0$ , en (3.19), es de nuestro interés estimar

$$C = E^{\mathbb{Q}} [(S_T - K)^+]. \quad (6.1)$$

Usando un esquema de discretización, aproximamos  $S_T$  por medio de  $\widehat{S}_T$ . Así podemos aproximarnos a  $C$ , por medio de

$$\widehat{C} = E^{\mathbb{Q}} [(\widehat{S}_T - K)^+]. \quad (6.2)$$

Así definimos el error del esquema de discretización, por

$$\epsilon := \widehat{C} - C. \quad (6.3)$$

Para calcular  $C$ , usaremos la expresión (3.23) junto con integración numérica de (3.24). Para estimar  $\widehat{C}$ , usaremos estimación Monte Carlo. Es decir, para un esquema de discretización para  $\widehat{S}$ , realizamos  $N$  simulaciones independientes,  $\widehat{S}_{T,1}, \widehat{S}_{T,2}, \dots, \widehat{S}_{T,N}$ , usando una partición regular del tiempo de tamaño fijo  $dt$ ; y entonces

$$\widehat{C} \approx \widehat{C}_N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \underbrace{(\widehat{S}_{T,i} - K)^+}_{:=\widehat{C}_{N,i}}. \quad (6.4)$$

Notemos que el estimador  $\widehat{C}_N$ , es una variable aleatoria con

$$\begin{aligned} E[\widehat{C}_N] &= E \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\widehat{S}_{T,i} - K)^+ \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E \left[ \underbrace{(\widehat{S}_{T,i} - K)^+}_{=\widehat{C}} \right]. \\ &= \widehat{C}, \end{aligned}$$

y desviación estándar (“error Monte Carlo”) de orden  $N^{-1/2}$  (ver observación 54). Así, al usar  $N$  suficientemente grande, podemos mantener la desviación estándar pequeña y obtener una mayor precisión al estimar  $\widehat{C}$ . Notemos de la expresión (6.2) que  $\widehat{C}$  depende de  $\widehat{S}_T$ , que a su vez, depende de la discretización del tiempo que se elija, es decir de  $dt$ . Por lo tanto, en (6.3), se tiene que  $\epsilon(dt)$ , por lo que veremos el comportamiento de  $\epsilon$  (en función de  $dt$ ) para cada uno de los esquemas vistos en esta tesis. Para todos los experimentos numéricos, consideramos  $S_0 = 100$ ,  $r = 0$  y tres valores para el Strike  $K = [70, 100, 140]$ .

## 6.1. Una comparación de los métodos numéricos estudiados

En esta sección, probamos experimentalmente, los esquemas de discretización descritos en los capítulos 4 y 5 para el proceso de  $S_T$ . El proceso OU es un proceso de reversión a la media, es decir, mientras que iniciemos el proceso de correlación estocástica para que pueda alcanzar rápidamente su valor medio  $\theta_\rho$ , el precio de la opción calculado en el modelo Heston extendido al incorporar correlación estocástica, debería ser el mismo que el precio de Heston original con la correlación constante  $\rho = \mu_\rho$ . Utilizamos la colección de parámetros dados en [40, Teng,Ehrhardt,Günther] y que colocamos en el cuadro 6.1.

Cuadro 6.1: Casos de prueba para los experimentos numéricos

	Caso I	Caso II	Caso III	Caso IV
$v_0$	0.04	0.04	0.09	0.04
$\kappa$	0.5	0.3	1	2.6
$\theta$	0.04	0.04	0.09	0.04
$\sigma$	1	0.9	1	0.2
$\rho$	-0.9	-0.5	-0.3	-0.6
$T$	10	15	5	10

Vemos que los parámetros de los casos *I*, *II*, *III* no cumplen la condición de Feller, mientras que los parámetros del caso *IV*, si están bajo la condición de Feller. Con el fin que el precio que se calcule con el modelo Heston extendido coincida con el precio de Heston original, como se

mencionó anteriormente, se elige  $\kappa_\rho = 2$ ,  $\sigma_\rho = 10^{-3}$  y  $\mu_\rho = \rho_0 = \rho$ . También  $\rho_2 = 0$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$  en (5.11) y usamos  $N = 5 \times 10^6$ , para el método Monte Carlo (ecuación (6.4)) e informamos las estimativas para

$$\epsilon_N := C - \widehat{C}_N,$$

los errores para diferentes pasos de tiempo y para los 4 casos en los Cuadros 6.2-6.5 variando el valor del tamaño del paso del tiempo,  $dt$ , desde 1 año hasta 1/32 año.

Para la elaboración de los cuadros 6.2-6.5, se implementó en el lenguaje Python 3.5 los esquemas de discretización estudiados en los capítulos 4 y 5, y se realizó la ejecución de dichos programas en la supercomputadora Manatí. Para hallar cada celda de dichos cuadros, se utilizó 45 núcleos del Manatí, en la que en cada núcleo se encomendó la tarea de simular 2 precios (independientes)  $\widehat{C}_N$ , con  $N = 5 \times 10^6$ , con ello hallamos 90 errores ( $\epsilon$ ), que finalmente los promediamos y hallamos la desviación estándar muestral (de los 90 errores) que los colocamos entre paréntesis en dicha celda. Con ello, por ejemplo, para el caso *I*, con  $K = 70$ ,  $dt = 1$ , usando el esquema HB, diremos que la muestra de los 90 errores tiene aproximadamente una media de -0.287 y una desviación estándar de 0.022. Para una mejor visualización del comportamiento de  $\epsilon$  en los diferentes esquemas, podemos observar las figuras 6.1 y 6.2, donde se ilustran los resultados mostrados en los cuadros 6.2-6.5. Es importante mencionar que el tiempo de ejecución de los esquemas Euler y Milstein fueron sustancialmente mayor en comparación con los demás esquemas.

En el caso *I*, cuyos resultados presentamos en el cuadro 6.2 y la primera columna de la figura 6.1, observamos que el esquema HB es ligeramente superior al esquema QE, y éste superior al esquema HBM, quien a su vez es superior al esquema EM. También es fácil notar que para los esquemas Euler y Milstein, la velocidad de convergencia es demasiado baja en comparación a los esquemas restantes. Para este caso se sugeriría utilizar los esquemas *HB* o *QE*. Notemos que el agregar la corrección martingala (HBM) no reduce de manera significativa el error de discretización para este caso, por lo que no valdría la pena complicar la implementación al usar este esquema.

En el caso *II*,

- Para las opciones ITM, notamos que el error del esquema HB es ligeramente menor que el esquema QE, que a su vez es ligeramente menor que el del esquema HBM. Es importante notar también que el error del esquema EM es sustancialmente más alto al del esquema HBM.
- Para las opciones ATM, aunque para  $dt = 1$ , el esquema EM muestra error más bajo, notamos que su velocidad de convergencia es baja, comparada a los esquemas HB, QE y HBM, cuyos errores se disipan a una velocidad mayor. El esquema HB, muestra el error más bajo.
- Para las opciones OTM, para  $dt$  "grandes" notamos que el error del esquema HBM es ligeramente menor que el esquema QE, que a su vez es ligeramente menor que el del

esquema HB, además, el error del esquema EM es sustancialmente más alto al del esquema HB. Para  $dt$  "pequeños" observamos que el error del esquema HB es ligeramente menor que el esquema QE, que a su vez es ligeramente menor que el del esquema HBM, además, el error del esquema EM es sustancialmente más alto al del esquema HBM.

En el caso *III*,

- Para las opciones ITM, notamos que el comportamiento del error del esquema HB es muy similar al del esquema QE, que a su vez es ligeramente menor que el del esquema HBM. Es importante notar también que, para  $dt$  "pequeños", el error del esquema HBM es más bajo que los otros esquemas. El error del esquema EM es sustancialmente más alto al de los demás.
- Para las opciones ATM, notamos que el error del esquema EM es sustancialmente más bajo que el del esquema QE, que a su vez es ligeramente menor que el del esquema HB. Es importante notar también que el error del esquema HBM es ligeramente más alto que el del esquema HB.
- Para las opciones OTM, observamos que el error del esquema EM es sustancialmente más bajo que el del esquema HBM, que a su vez es ligeramente más bajo que el del esquema HB. También notamos que el error del esquema QE es ligeramente más alto que el del esquema HB.

En el caso *IV*, observamos que los errores de los esquemas se disipan rápidamente. Notemos que los esquemas Euler y Milstein, sólo muestran un buen comportamiento para este caso.

En resumen, para un esquema de discretización para el modelo de Heston, se sugeriría utilizar por defecto, el esquema HB o QE. Además si comparamos los esquemas HB, HBM y EM corroboramos que para discretizar el modelo de Heston extendido al incorporar correlación estocástica, se debe sugerir el esquema HB o HBM, esto también si tomamos en cuenta el tiempo de ejecución.

Cuadro 6.2: Comparación Numérica de los errores en el caso I, usando los diferentes esquemas; los números en paréntesis son las desviaciones estándar.

$dt$	Euler	Milstein	QE	QEM	EM	HB	HBM
$K = 70$							
1	-10.237(0.059)	-14.533(0.184)	-0.289(0.024)	-1.147(0.024)	0.961(0.05)	-0.287(0.022)	0.363(0.022)
1/2	-10.347(0.066)	-14.149(0.094)	0.081(0.018)	-1.87(0.025)	0.6(0.033)	0.08(0.02)	0.255(0.022)
1/4	-9.9(0.063)	-13.222(0.081)	0.117(0.022)	-2.302(0.023)	0.367(0.031)	0.115(0.022)	0.149(0.024)
1/8	-9.255(0.053)	-12.175(0.071)	0.073(0.023)	-2.552(0.023)	0.223(0.029)	0.071(0.02)	0.075(0.023)
1/16	-8.576(0.054)	-11.181(0.062)	0.034(0.02)	-2.683(0.022)	0.075(0.746)	0.035(0.021)	0.035(0.022)
1/32	-7.943(0.043)	-10.256(0.06)	0.02(0.02)	-2.736(0.023)	0.072(0.02)	0.016(0.023)	0.012(0.022)
$K = 100$							
1	-17.078(0.056)	-23.671(0.161)	-0.077(0.012)	-0.834(0.013)	-1.355(0.04)	-0.08(0.012)	0.627(0.013)
1/2	-17.06(0.047)	-22.821(0.098)	0.078(0.011)	-1.737(0.012)	-0.882(0.025)	0.081(0.014)	0.28(0.013)
1/4	-16.301(0.049)	-21.307(0.074)	0.141(0.011)	-2.111(0.014)	-0.531(0.019)	0.141(0.014)	0.187(0.014)
1/8	-15.292(0.045)	-19.703(0.056)	0.102(0.012)	-2.34(0.015)	-0.283(0.019)	0.102(0.013)	0.111(0.014)
1/16	-14.246(0.039)	-18.177(0.052)	0.059(0.014)	-2.477(0.013)	-0.133(0.016)	0.058(0.015)	0.057(0.013)
1/32	-13.257(0.035)	-16.784(0.046)	0.026(0.014)	-2.547(0.012)	-0.054(0.015)	0.028(0.014)	0.026(0.014)
$K = 140$							
1	-15.531(0.046)	-25.648(0.173)	0.14(0.002)	0.095(0.002)	-4.721(0.034)	0.139(0.002)	0.139(0.002)
1/2	-15.048(0.038)	-23.128(0.075)	0.062(0.002)	-0.046(0.003)	-3.667(0.022)	0.062(0.003)	0.063(0.002)
1/4	-13.91(0.033)	-20.511(0.052)	0.025(0.002)	-0.136(0.003)	-2.415(0.013)	0.025(0.002)	0.025(0.003)
1/8	-12.595(0.025)	-18.179(0.048)	0.011(0.003)	-0.178(0.003)	-1.435(0.008)	0.011(0.003)	0.011(0.003)
1/16	-11.288(0.027)	-16.156(0.036)	0.006(0.002)	-0.196(0.003)	-0.795(0.006)	0.006(0.003)	0.005(0.002)
1/32	-10.101(0.021)	-14.388(0.033)	0.003(0.002)	-0.206(0.003)	-0.417(0.004)	0.003(0.003)	0.003(0.003)



Cuadro 6.3: Comparación Numérica de los errores en el caso II, usando los diferentes esquemas; los números en paréntesis son las desviaciones estándar.

$dt$	Euler	Milstein	QE	QEM	EM	HB	HBM
$K = 70$							
1	-15.691(0.184)	-22.463(0.38)	0.165(0.053)	-0.91(0.055)	0.644(0.086)	0.163(0.041)	0.235(0.051)
1/2	-15.463(0.127)	-21.587(0.319)	0.113(0.045)	-1.219(0.055)	0.386(0.066)	0.097(0.053)	0.132(0.048)
1/4	-14.705(0.122)	-20.164(0.187)	0.076(0.062)	-1.36(0.062)	0.235(0.049)	0.083(0.052)	0.076(0.047)
1/8	-13.856(0.125)	-18.779(0.259)	0.043(0.049)	-1.448(0.048)	0.137(0.056)	0.047(0.05)	0.052(0.051)
1/16	-12.981(0.108)	-17.383(0.192)	0.037(0.051)	-1.508(0.051)	0.086(0.053)	0.031(0.047)	0.028(0.051)
1/32	-12.124(0.121)	-16.149(0.141)	0.006(0.052)	-1.53(0.048)	0.049(0.049)	0.018(0.055)	0.017(0.051)
$K = 100$							
1	-23.624(0.149)	-32.885(0.325)	1.027(0.041)	0.132(0.044)	-0.775(0.071)	1.028(0.051)	1.085(0.057)
1/2	-23.246(0.147)	-31.502(0.219)	0.438(0.044)	-0.684(0.051)	-0.551(0.069)	0.434(0.052)	0.449(0.047)
1/4	-22.227(0.114)	-29.622(0.184)	0.171(0.045)	-1.013(0.044)	-0.374(0.055)	0.167(0.04)	0.167(0.044)
1/8	-20.992(0.116)	-	0.077(0.047)	-1.146(0.047)	-0.226(0.046)	0.085(0.044)	0.069(0.047)
1/16	-19.737(0.108)	-	0.028(0.048)	-1.204(0.044)	-0.121(0.047)	0.039(0.046)	0.039(0.042)
1/32	-18.576(0.104)	-	0.021(0.049)	-1.242(0.057)	-0.067(0.048)	0.013(0.044)	0.026(0.042)
$K = 140$							
1	-23.486(0.124)	-35.062(0.363)	0.671(0.038)	0.477(0.038)	-2.632(0.08)	0.67(0.042)	0.64(0.041)
1/2	-22.868(0.118)	-33.012(0.207)	0.224(0.037)	-0.036(0.033)	-1.987(0.052)	0.226(0.038)	0.21(0.043)
1/4	-21.616(0.137)	-30.526(0.19)	0.078(0.042)	-0.226(0.041)	-1.268(0.052)	0.083(0.044)	0.071(0.052)
1/8	-20.166(0.112)	-28.065(0.142)	0.043(0.038)	-0.287(0.041)	-0.746(0.046)	0.047(0.036)	0.039(0.047)
1/16	-18.716(0.124)	-25.825(0.127)	0.024(0.075)	-0.308(0.04)	-0.427(0.04)	0.017(0.037)	0.022(0.035)
1/32	-17.382(0.095)	-23.785(0.117)	0.009(0.044)	-0.323(0.038)	-0.231(0.045)	0.009(0.045)	0.013(0.041)

Cuadro 6.4: Comparación Numérica de los errores en el caso III, usando los diferentes esquemas; los números en paréntesis son las desviaciones estándar.

$dt$	Euler	Milstein	QE	QEM	EM	HB	HBM
$K = 70$							
1	-3.517(0.09)	-3.207(0.103)	1.336(0.05)	1.085(0.055)	1.686(0.054)	1.329(0.057)	1.471(0.05)
1/2	-4.374(0.088)	-3.619(0.088)	0.652(0.051)	0.098(0.062)	0.872(0.059)	0.672(0.049)	0.702(0.061)
1/4	-4.204(0.07)	-3.196(0.082)	0.353(0.053)	-0.377(0.05)	0.447(0.062)	0.357(0.058)	0.359(0.057)
1/8	-3.72(0.068)	-2.719(0.08)	0.187(0.059)	-0.621(0.062)	0.245(0.065)	0.176(0.061)	0.184(0.063)
1/16	-3.172(0.076)	-2.295(0.064)	0.086(0.06)	-0.744(0.064)	0.125(0.065)	0.099(0.056)	0.097(0.062)
1/32	-2.684(0.073)	-	0.049(0.062)	-0.807(0.066)	0.07(0.058)	0.048(0.067)	0.047(0.057)
$K = 100$							
1	-5.926(0.07)	-5.096(0.109)	2.695(0.046)	2.487(0.048)	1.719(0.049)	2.7(0.045)	2.786(0.047)
1/2	-6.998(0.083)	-5.786(0.088)	1.303(0.046)	0.817(0.048)	0.771(0.054)	1.288(0.056)	1.325(0.048)
1/4	-6.66(0.069)	-5.141(0.074)	0.612(0.057)	-0.002(0.047)	0.314(0.056)	0.613(0.049)	0.611(0.052)
1/8	-5.919(0.069)	-4.387(0.067)	0.276(0.057)	-0.365(0.047)	0.126(0.056)	0.289(0.052)	0.293(0.058)
1/16	-5.097(0.065)	-3.747(0.06)	0.147(0.052)	-0.543(0.048)	0.06(0.064)	0.154(0.05)	0.146(0.053)
1/32	-4.332(0.071)	-3.219(0.058)	0.062(0.048)	-0.633(0.051)	0.031(0.051)	0.076(0.054)	0.074(0.057)
$K = 140$							
1	-6.227(0.053)	-6.334(0.163)	2.513(0.037)	2.407(0.041)	0.795(0.051)	2.511(0.041)	2.47(0.039)
1/2	-7.162(0.058)	-6.438(0.07)	1.216(0.042)	1.025(0.046)	0.033(0.048)	1.213(0.041)	1.207(0.042)
1/4	-6.73(0.061)	-5.424(0.066)	0.557(0.04)	0.305(0.042)	-0.13(0.045)	0.565(0.041)	0.558(0.041)
1/8	-5.888(0.069)	-4.465(0.057)	0.262(0.041)	-0.03(0.041)	-0.13(0.046)	0.255(0.041)	0.269(0.042)
1/16	-4.998(0.057)	-3.711(0.059)	0.133(0.046)	-0.177(0.049)	-0.084(0.047)	0.129(0.039)	0.127(0.044)
1/32	-4.202(0.055)	-3.137(0.051)	0.057(0.048)	-0.262(0.05)	-0.045(0.041)	0.058(0.05)	0.061(0.048)

Cuadro 6.5: Comparación Numérica de los errores en el caso IV, usando los diferentes esquemas; los números en paréntesis son las desviaciones estándar.

$dt$	Euler	Milstein	QE	QEM	EM	HB	HBM
$K = 70$							
1	-0.803(0.061)	-0.947(0.068)	-2.889(0.061)	1.044(0.062)	0.83(0.056)	-2.873(0.055)	0.798(0.058)
1/2	0.157(0.055)	0.254(0.056)	-0.682(0.061)	0.25(0.053)	0.42(0.058)	-0.69(0.061)	0.513(0.057)
1/4	0.156(0.062)	0.206(0.06)	-0.085(0.063)	-0.259(0.067)	0.211(0.062)	-0.082(0.06)	0.262(0.06)
1/8	0.103(0.068)	-	0.035(0.055)	-0.531(0.061)	0.113(0.053)	0.03(0.054)	0.127(0.056)
1/16	0.041(0.059)	0.047(0.059)	0.037(0.061)	-0.671(0.059)	0.05(0.063)	0.037(0.063)	0.052(0.057)
1/32	0.011(0.062)	-	0.019(0.061)	-0.74(0.063)	0.021(0.059)	0.022(0.054)	0.034(0.049)
$K = 100$							
1	-1.451(0.06)	-1.593(0.057)	-2.451(0.055)	1.433(0.042)	1.277(0.049)	-2.437(0.048)	1.182(0.045)
1/2	0.193(0.051)	0.35(0.043)	-0.481(0.05)	0.465(0.045)	0.614(0.043)	-0.498(0.058)	0.702(0.053)
1/4	0.228(0.05)	0.302(0.05)	0.017(0.052)	-0.131(0.052)	0.298(0.048)	0.008(0.053)	0.361(0.055)
1/8	0.145(0.05)	0.155(0.051)	0.079(0.047)	-0.468(0.056)	0.14(0.048)	0.084(0.054)	0.178(0.057)
1/16	-	0.067(0.054)	0.058(0.048)	-0.635(0.051)	0.068(0.055)	0.055(0.049)	0.083(0.046)
1/32	-	0.036(0.053)	0.025(0.05)	-0.715(0.049)	0.043(0.046)	0.032(0.053)	0.034(0.052)
$K = 140$							
1	-1.866(0.046)	-1.995(0.051)	-1.712(0.04)	1.457(0.042)	1.348(0.036)	-1.711(0.036)	1.254(0.038)
1/2	0.154(0.037)	0.333(0.037)	-0.266(0.043)	0.524(0.036)	0.641(0.03)	-0.267(0.038)	0.735(0.036)
1/4	0.22(0.041)	0.31(0.034)	0.062(0.044)	-0.043(0.038)	0.296(0.038)	0.066(0.037)	0.378(0.041)
1/8	0.143(0.04)	0.146(0.035)	0.086(0.041)	-0.358(0.041)	0.154(0.04)	0.092(0.038)	0.18(0.041)
1/16	0.078(0.041)	0.076(0.039)	0.056(0.041)	-0.511(0.041)	0.073(0.037)	0.063(0.04)	0.083(0.039)
1/32	0.044(0.033)	0.035(0.035)	0.04(0.038)	-0.59(0.041)	0.032(0.039)	0.034(0.044)	0.041(0.037)

Figura 6.1: Comportamiento de  $\epsilon$  en función al número de pasos de tiempo ( $T/dt$ )

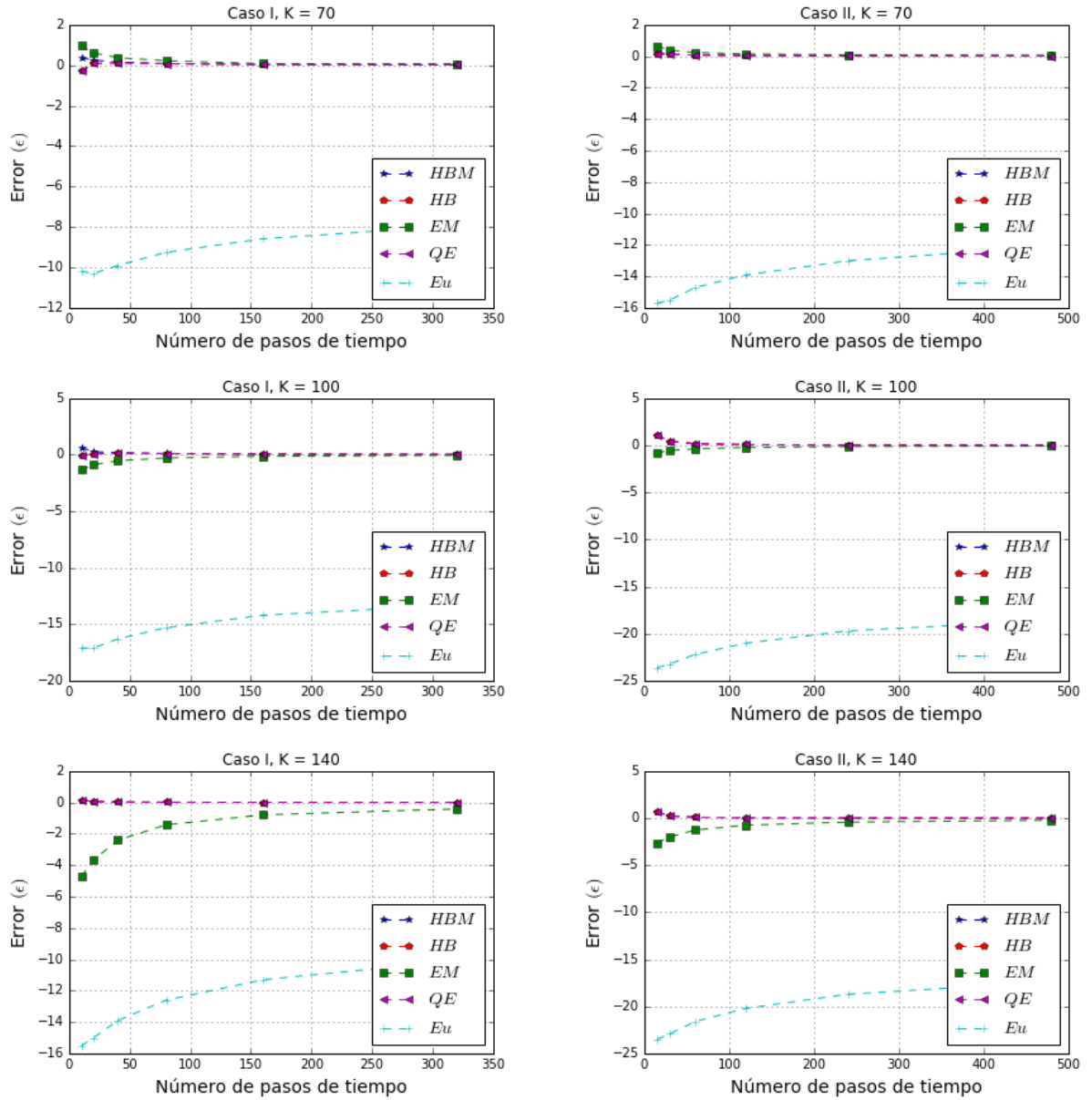
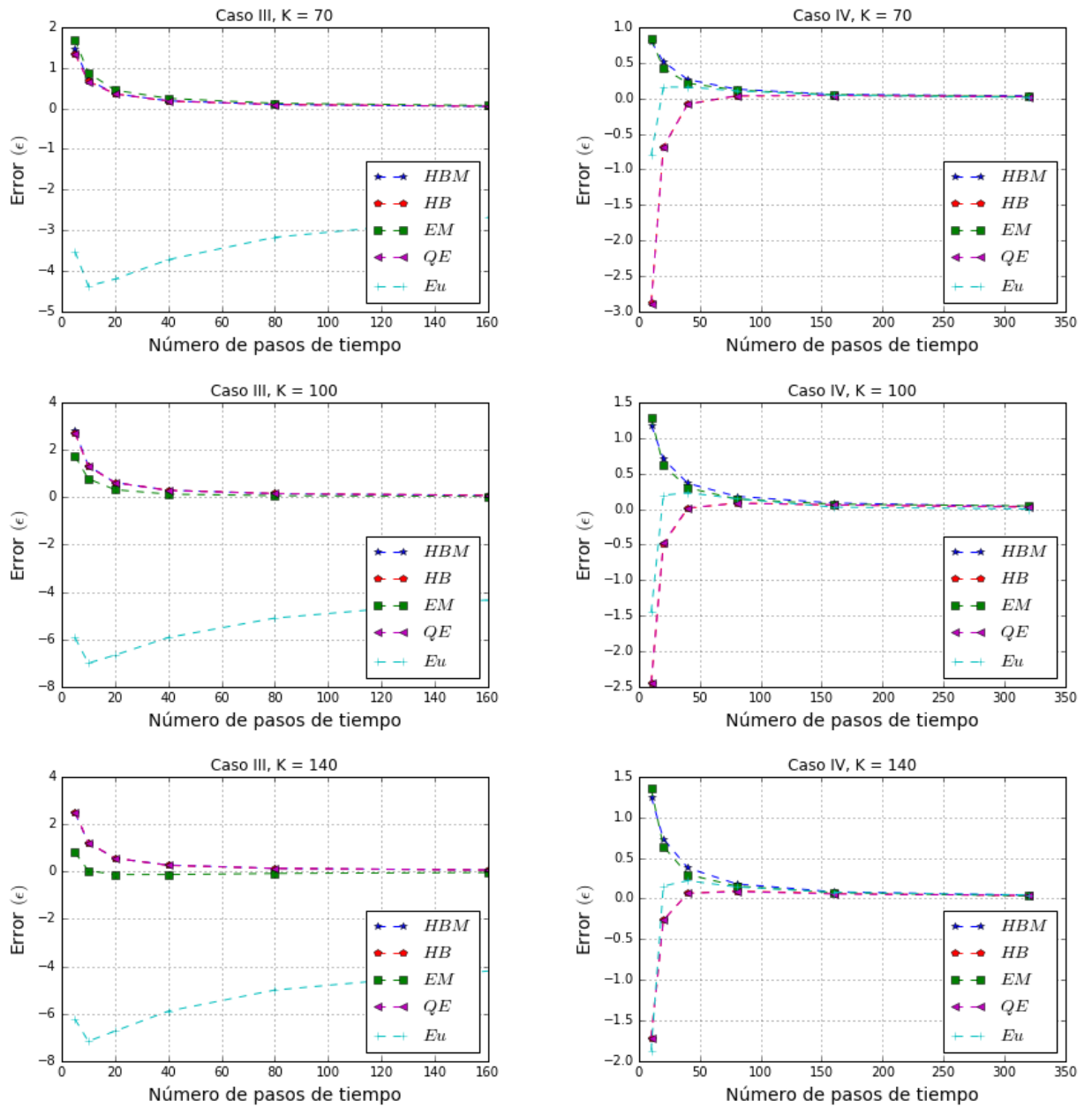


Figura 6.2: Comportamiento de  $\epsilon$  en función al número de pasos de tiempo ( $T/dt$ )



## 6.2. El efecto de incorporar correlación estocástica sobre la Volatilidad Implícita

En esta sección, analizamos el efecto de incorporar la correlación estocástica en las volatilidades implícitas. Para hacer esto, mostramos cómo los valores de los parámetros del proceso de correlación conducen las volatilidades implícitas.

Mostramos en la figura 6.3 los cambios de las volatilidades implícitas al variar cada parámetro del proceso de correlación estocástica. Para este experimento, se utilizó el esquema de HB. Consideramos una opción call con  $S_0 = 120$ ,  $T = 0.5$  años y los Strikes desde 114 a 126 en incrementos de 1,  $r = 1\%$ . Para el proceso de varianza, consideramos  $v_0 = 0.03$ ,  $\theta = 0.04$ ,  $\kappa = 2.1$ ,  $\sigma = 0.4$ , y, para el proceso de correlación,  $\kappa_\rho = 3.5$ ,  $\sigma_\rho = 0.1$ ,  $\mu_\rho = -0.6$  y  $\rho_0 = -0.4$  excepto el parámetro que esté variando. Finalmente,  $\rho_2 = 0.1$  y usamos  $N = 2 \times 10^6$  para la simulación Monte Carlo.

En la figura 6.3, podemos notar que los parámetros del proceso de correlación pueden controlar la sonrisa de las volatilidad implícita. En comparación con el uso de un parámetro de correlación constante, incluir la correlación estocástica proporciona más flexibilidad y, por lo tanto, puede mejorar la calibración a los datos del mercado real.

## 6.3. Error cuadrático medio en los métodos numéricos estudiados (trabajo futuro)

En las estimaciones realizadas nos encontramos con dos errores separados,

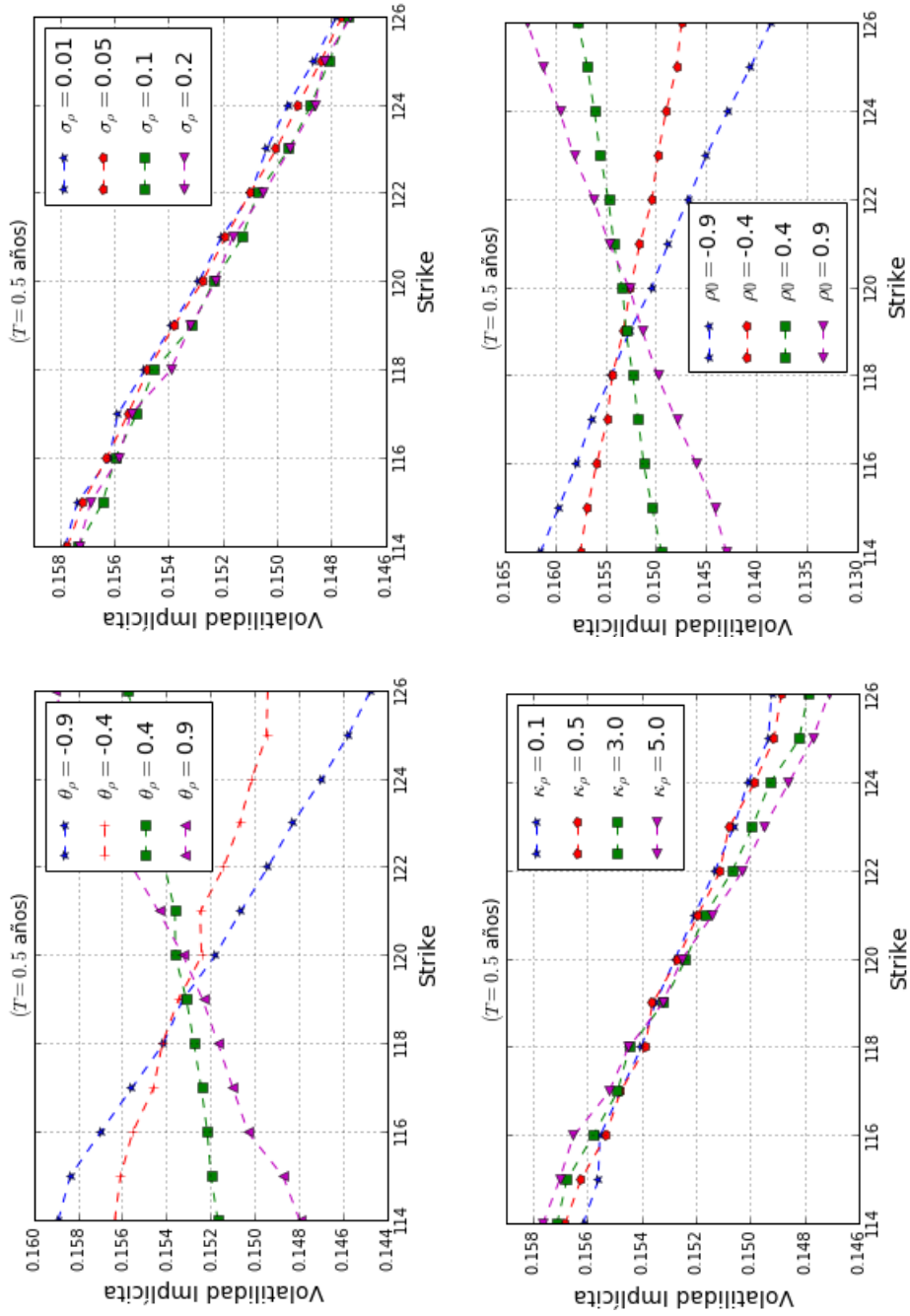
$$C - \widehat{C}_N = \underbrace{C - \widehat{C}}_{\text{error de discretización}} + \underbrace{\widehat{C} - \widehat{C}_N}_{\text{error Monte Carlo}}$$

Primero, hay un error debido a la discretización temporal del proceso estocástico, pues como se explica en [18, Glasserman, pág 13], la distribución conjunta de los valores del precio de las acciones a lo largo de una trayectoria simulada utilizando los esquemas de discretización no será exactamente la que implica la dinámica del modelo de Heston. Esto es cuantificado con la expresión (6.3).

En segundo lugar, todas las estimaciones Monte Carlo están asociadas con un error estándar (ver sección 2.4). Un estimador basado en una muestra finita puede diferir adicionalmente del parámetro debido a la aleatoriedad en la muestra. Por ello, resulta conveniente definir

$$\text{Var}(\widehat{C}_N) = \sigma_{\widehat{C}_N}^2 = \frac{s_{\widehat{C}}^2}{N},$$

Figura 6.3: Comparación de volatilidades implícitas al variar cada parámetro del proceso de correlación estocástica.



donde,

$$s_{\hat{C}}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\hat{C}_{N,i} - \hat{C}_N)^2.$$

Desafortunadamente, de estas dos propiedades, uno enfrenta un dilema: aumentar  $N$ , el número de caminos simulados (para minimizar la varianza), que requiere más tiempo de ejecución, al igual que disminuir el tamaño del paso de tiempo (para minimizar  $\epsilon$ ). En cada esquema de discretización que hemos estudiado, el estimador relevante es un promedio de simulaciones independientes; cada simulación está sesgada, pero el sesgo se puede hacer arbitrariamente pequeño a costa de aumentar el costo computacional por camino simulado. Dado un costo computacional fijo, nos enfrentamos a una compensación en la asignación de tal costo. Gastar más esfuerzo por simulación reduce  $\epsilon$  (disminuir  $dt$ ), pero ello conlleva a disminuir el número de simulaciones  $N$ , por lo tanto, tiende a aumentar la varianza del estimador. Necesitamos una medida del desempeño del estimador que equilibre  $\epsilon$  y la varianza  $\text{var}(\hat{C}_N)$ . Una medida estándar es el error cuadrático medio,

$$\begin{aligned} MSE(\hat{C}_N) &= E \left[ (\hat{C}_N - C)^2 \right] \\ &= E \left[ (\hat{C}_N - E[\hat{C}_N] + E[\hat{C}_N] - C)^2 \right] \\ &= E \left[ (\hat{C}_N - E[\hat{C}_N])^2 + (E[\hat{C}_N] - C)^2 + 2(\hat{C}_N - E[\hat{C}_N])(E[\hat{C}_N] - C) \right] \\ &= E \left[ \underbrace{(\hat{C}_N - E[\hat{C}_N])^2}_{\approx \sigma_{\hat{C}_N}^2} + \underbrace{(E[\hat{C}_N] - C)^2}_{\approx \epsilon_N^2} + 2(E[\hat{C}_N] - C) \underbrace{(E[\hat{C}_N] - E[\hat{C}_N])}_{=0} \right] \\ &\Rightarrow MSE(\hat{C}_N) \approx \epsilon_N^2 + \sigma_{\hat{C}_N}^2. \end{aligned}$$

Si bien el cálculo exacto del error cuadrático medio generalmente no es práctico, a menudo es posible comparar estimadores a través de su MSE asintótico. Por ello, para las pruebas de precisión, inspirándonos en [36], definimos la raíz del error cuadrático medio, como

$$RMS = \sqrt{\epsilon_N^2 + \sigma_{\hat{C}_N}^2}.$$

Como trabajo futuro queda comparar la precisión de los esquemas, tomando los mismos parámetros usados en el cuadro 6.1. El RMS sirve como una buena medida de la precisión de los esquemas de discretización [36, Sun].



## Capítulo 7

# Conclusiones y futuros trabajos

En este trabajo de tesis se estudió a detalle principalmente el modelo clásico de Heston y una extensión que le permite incorporar correlación estocástica (que sigue un proceso Ornstein-Uhlenbeck) y se realizó las implementaciones de los mismos, elaborando código de lenguaje de programación Python. También se proporcionan algunos resultados numéricos en los cuales se demuestra que los esquemas numéricos dados en el capítulo 5 pueden funcionar tan bien para el modelo de Heston extendido (al incluir correlaciones estocásticas) como el esquema QE presentado en el capítulo 4 funciona para el modelo clásico de Heston. Además, se puede dar cuenta del beneficio de incorporar correlación estocástica, al investigar el efecto de las correlación estocástica sobre la volatilidad implícita. Debido al mayor número de parámetros del modelo a través del proceso de correlación, el Heston extendido incorporando correlación estocástica puede proporcionar un mejor ajuste de sesgos o sonrisas en la volatilidad implícita, requerido en el mercado, de lo que el modelo clásico de Heston.

Para investigaciones futuras, está el considerar otro proceso de correlación diferente al OU, por ejemplo, el proceso acotado de Jacobi ([27, Ma, Jun], [43, Emmerich]) o el tipo de proceso de correlación estocástica producido por transformación ([41, Teng,Emmerich], [39, Teng,Ehrhardt,Günthe]).

Si bien es cierto, en este trabajo se comparó y estudió los esquemas de discretización en base a  $\epsilon(dt)$ , es importante e interesante también hacerlo mediante el RMS.

Así mismo, resultaría conveniente estudiar maneras de acelerar los procesos iterativos.

## Apéndice A

# Construcción de la Integral de Itô

Para la construcción de la integral estocástica seguimos una construcción parecida a la Integral de Riemann. Primero, definimos la integral para una clase de procesos constantes por tramos ( $\mathcal{M}_{paso}^2$ ), llamados *procesos de paso aleatorio*. De ahí se extiende dicha definición (mediante aproximación) para una clase más grande de procesos ( $\mathcal{M}^2$ ). Al espacio vectorial  $\mathcal{M}^2$  la dotamos de una norma, definida para todo  $f \in \mathcal{M}^2$ , dada por,

$$\|f(t)\|_{\mathcal{M}^2} = \sqrt{E \left[ \int_0^\infty |f(t)|^2 dt \right]},$$

obteniendo así un espacio vectorial normado, teniendo a  $\mathcal{M}_{paso}^2$  como un subespacio vectorial normado.

Es preciso mencionar al menos dos grandes diferencias entre la integral de Riemann y la integral de Itô. Una de ellas es el tipo de convergencia. En la integral de Riemann la convergencia se da en  $\mathbb{R}$ , mientras que en la integral de Itô la aproximación se da por sucesiones de variables aleatorias que convergen en  $L^2$  (Espacio de variables aleatorias cuadrado integrables con norma definida por  $\|\eta\|_{L^2} = \sqrt{E[\eta^2]}$ ). La otra diferencia es que las sumas aproximantes de la integral de una función  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  que son de la forma

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(s_j)(t_{j+1} - t_j),$$

donde  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  y  $s_j$  es **cualquier punto** de  $[t_j, t_{j+1}]$  para cada  $j$ . Es decir valor de la integral de Riemann no depende de la elección de los puntos  $s_j \in [t_j, t_{j+1}]$ . En la integral de Itô las sumas aproximantes tienen la forma

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(s_j) (W(t_{j+1}) - W(t_j)),$$

pero el valor del límite de tales sumas aproximantes **si dependen de la elección del punto**  $s_j \in [t_j, t_{j+1}]$ . Pues bien lo que se hace es exigir que las aproximaciones de los integrandos consistan únicamente de procesos adaptados a la filtración subyacente  $\mathcal{F}_t$ . Con esto se debe tomar  $s_j = t_j$  para cada  $j$ . En sentido intuitivo, esto nos dice que el valor de la aproximación en  $t$  sólo puede depender de lo que ha sucedido hasta el tiempo  $t$ , y no de algún evento futuro.

**Definición 98.** (*Proceso de Paso Aleatorio*)  $f(t)$ ,  $t \geq 0$  es un proceso de paso aleatorio si existen una sucesión finita de números  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  y variables aleatorias cuadrado integrables  $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}$  tal que

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j 1_{[t_j, t_{j+1})}(t), \quad (\text{A.1})$$

donde  $\eta_j$  es  $\mathcal{F}_{t_j}$ -medible para  $j = 0, 1, \dots, n-1$ . El conjunto de procesos de paso aleatorio lo denotaremos por  $\mathcal{M}_{paso}^2$ .

*Observación 99.* La condición de que  $\eta_j$  es  $\mathcal{F}_{t_j}$ -medible para  $j = 0, 1, \dots, n-1$  asegura que el proceso  $f(t)$  es adaptado a la filtración  $\mathcal{F}_t$ . Mientras que la condición de que las  $\eta_j$  sean cuadrado integrables asegura que  $f(t)$  sea cuadrado integrable para cada  $t$ . No es difícil de ver pero si importante tener en cuenta que  $\mathcal{M}_{paso}^2$  es un espacio vectorial.

**Definición 100.** La integral estocástica de un proceso de paso aleatorio,  $f \in \mathcal{M}_{paso}^2$  de la forma (A.1), es definido por

$$I(f) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j (W(t_{j+1}) - W(t_j)). \quad (\text{A.2})$$

*Observación 101.* La integral estocástica de un proceso de paso aleatorio  $I : \mathcal{M}_{paso}^2 \rightarrow L^2$ . Tal como se pone de manifiesto en la siguiente proposición.

**Proposición 102.** Para cualquier proceso de paso aleatorio  $f \in \mathcal{M}_{paso}^2$  la integral estocástica  $I(f)$  es una variable cuadrado integrable, es decir  $I(f) \in L^2$ , tal que

$$\|I(f)\|_{L^2} = \|f(t)\|_{\mathcal{M}_{paso}^2},$$

es decir,

$$E [ |I(f)|^2 ] = E \left[ \int_0^\infty |f(t)|^2 dt \right].$$

La integral estocástica  $I(f)$  ha sido definida para cualquier  $f \in \mathcal{M}_{paso}^2$ . La siguiente etapa es extender  $I$ , vía aproximación, a una clase más grande de procesos que definiremos a continuación

**Definición 103.** Denotaremos por  $\mathcal{M}^2$  a la clase de procesos estocásticos  $f(t)$ ,  $t \geq 0$  tal que

$$\|f(t)\|_{\mathcal{M}^2}^2 = E \left[ \int_0^\infty |f(t)|^2 dt \right] < \infty$$

y existe una sucesión  $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{M}_{paso}^2$  de procesos de paso aleatorio tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(t) - f_n(t)\|_{\mathcal{M}^2}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \int_0^\infty |f(t) - f_n(t)|^2 dt \right] = 0. \quad (\text{A.3})$$

En este caso, se dice que la sucesión de procesos de paso aleatorio  $f_1, f_2, \dots$  aproxima a  $f$  en  $\mathcal{M}^2$ .

**Definición 104.**  $I(f) \in L^2$  es la integral estocástica de Itô (de 0 a  $\infty$ ) de  $f \in \mathcal{M}^2$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|I(f) - I(f_n)\|_{L^2}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} E [ |I(f) - I(f_n)|^2 ] = 0$$

para cualquier sucesión  $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{M}_{paso}^2$  de procesos de paso aleatorio que aproxima a  $f$  en  $\mathcal{M}^2$ , es decir, tal que se cumple (A.3). Se debe escribir

$$\int_0^\infty f(t) dW(t)$$

en vez de  $I(f)$ .

**Proposición 105.** Para cualquier  $f \in \mathcal{M}^2$  la integral estocástica  $I(f)$  es una variable cuadrado integrable, es decir  $I(f) \in L^2$  existe, es única (como un elemento de  $L^2$ , es decir, dentro de la igualdad c.s) y satisface

$$\|I(f)\|_{L^2} = \|f(t)\|_{\mathcal{M}^2},$$

es decir,

$$E [ |I(f)|^2 ] = E \left[ \int_0^\infty |f(t)|^2 dt \right]. \quad (\text{A.4})$$

*Observación 106.* A la propiedad (A.4) se le conoce como la propiedad de *Isometría de Itô*.

Notemos que ha sido definido la integral de Itô desde 0 a  $\infty$ , ahora se definirá la integral estocástica para intervalo de la forma  $[0, T]$ .

**Definición 107.** Para cualquier  $T > 0$  se denotará por  $\mathcal{M}_T^2$  el espacio de todos los procesos estocásticos  $f(t)$ ,  $t \geq 0$  tal que

$$1_{[0, T]} f \in \mathcal{M}^2.$$

La integral estocástica de Itô (desde 0 a  $T$ ) de  $f \in \mathcal{M}_T^2$  es definida por

$$I_T(f) = I(1_{[0, T]} f). \quad (\text{A.5})$$

pero escribiremos

$$\int_0^T f(t) dW(t)$$

en lugar de  $I_T(f)$ .

**Proposición 108.** Cada proceso de paso aleatorio  $f \in \mathcal{M}_{paso}^2$  pertenece a  $\mathcal{M}_t^2$  para cualquier  $t > 0$  y

$$I_t(f) = \int_0^t f(s) dW(s)$$

es una martingala,

*Demostración.* Sea  $f \in \mathcal{M}_{paso}^2$ , entonces es fácil ver que  $1_{[0,t]}f \in \mathcal{M}_{paso}^2 \subset \mathcal{M}^2$  para cualquier  $t > 0$ . Lo que implica que  $f \in \mathcal{M}_t^2$  para cualquier  $t > 0$ .

Ahora veamos que  $I_t(f)$  es una martingala con respecto a la filtración  $\mathcal{F}_t$ .

Sea  $0 \leq s < t$  y supongamos que  $f \in \mathcal{M}_{paso}^2$  puede ser escrita de la forma (A.1), donde

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = s < t_{k+1} < \dots < t_m = t < t_{m+1} < \dots < t_n.$$

Tal partición  $t_0, \dots, t_n$  siempre se puede conseguir añadiendo los puntos  $s$  y  $t$  si es necesario. Entonces

$$1_{[0,t]}f = \sum_{j=0}^{m-1} \eta_j 1_{[t_j, t_{j+1}]}$$

y

$$I_t(f) = I(1_{[0,t]}f) = \sum_{j=0}^{m-1} \eta_j (W(t_{j+1}) - W(t_j)),$$

que es adaptado a  $\mathcal{F}_t$  y cuadrado integrable, y por tanto integrable. Además

$$E [I_t(f) | \mathcal{F}_s] = E [I(1_{[0,t]}f) | \mathcal{F}_s] = \sum_{j=0}^{m-1} E [\eta_j (W(t_{j+1}) - W(t_j)) | \mathcal{F}_s].$$

Para  $j < k$ , entonces  $\eta_j$  y  $W(t_{j+1}) - W(t_j)$  son  $\mathcal{F}_s$ -medible y

$$E [\eta_j (W(t_{j+1}) - W(t_j)) | \mathcal{F}_s] = \eta_j (W(t_{j+1}) - W(t_j)).$$

Para  $j \geq k$ , entonces  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_{t_j}$  y por la propiedad 5 y 3 de la proposición 19

$$\begin{aligned} E [\eta_j (W(t_{j+1}) - W(t_j)) | \mathcal{F}_s] &= E [E [\eta_j (W(t_{j+1}) - W(t_j)) | \mathcal{F}_{t_j}] | \mathcal{F}_s] \\ &= E [\eta_j E [(W(t_{j+1}) - W(t_j)) | \mathcal{F}_{t_j}] | \mathcal{F}_s] \end{aligned}$$

Ahora teniendo en cuenta la definición 36,  $W(t_{j+1}) - W(t_j)$  es independiente de  $\mathcal{F}_{t_j}$  y por la

propiedad 3 y 1 de la proposición 19

$$\begin{aligned} E \left[ \eta_j E \left[ (W(t_{j+1}) - W(t_j)) \middle| \mathcal{F}_{t_j} \right] \middle| \mathcal{F}_s \right] &= E \left[ \eta_j E [W(t_{j+1}) - W(t_j)] \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= E \left[ \eta_j \middle| \mathcal{F}_s \right] E [(W(t_{j+1}) - W(t_j))] \\ &= 0, \end{aligned}$$

así tenemos que

$$E \left[ I_t(f) \middle| \mathcal{F}_s \right] = \sum_{j=0}^{k-1} \eta_j (W(t_{j+1}) - W(t_j)) = I(1_{[0,s]}f) = I_s(f).$$

□

## Apéndice B

# Derivación de la ecuación diferencial de Black-Scholes-Merton

En primer lugar, presentamos propiedades que son de utilidad para la deducción del Precio de una opción Call europea, mediante la fórmula de Black Scholes.

**Lema 109.** Sea  $Y = \ln(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$  entonces

$$E[X] = e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)} \quad \text{equivalentemente} \quad \ln(E[X]) = \mu + \frac{\sigma^2}{2}$$

y

$$\text{Var}[X] = e^{(2\mu + \sigma^2)} [e^{\sigma^2} - 1].$$

Además

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

*Demostración.* La función de densidad de probabilidad para  $Y$  es

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Como la función  $\ln$  es creciente se tiene

$$\begin{aligned} Y \leq y &\Leftrightarrow \ln(X) \leq \ln(x) \\ &\Leftrightarrow X \leq x \end{aligned}$$

con lo cual

$$P(X \leq x) = \int_0^x f_X(m) dm = \int_0^y f_Y(m) dm \quad (\text{B.1})$$

derivando la expresión (B.1) con respecto a  $x$ , y aplicando el teorema fundamental del cálculo,

tenemos

$$f_X(x) = f_Y(y) \frac{dy}{dx}$$

por lo que

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Ahora

$$E[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 f_X(x) dx$$

como  $X = e^Y$ , se tiene  $x = e^y$ , además  $e^y dy = dx$ , entonces

$$\begin{aligned} E[X^n] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ny} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma e^y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} e^y dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ny} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left(\frac{y^2-2(\mu+\sigma^2 n)y+\mu^2}{2\sigma^2}\right)} dy \\ &= e^{\left(n\mu+\frac{n^2\sigma^2}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(\mu+\sigma^2 n)}{\sigma}\right)^2} dy \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

donde la integral de la expresión (B.2) es 1, pues corresponde a la probabilidad total acumulada de una distribución Normal de media  $\mu + \sigma^2 n$  y varianza  $\sigma^2$ . Con lo que

$$E[X^n] = e^{\left(n\mu+\frac{n^2\sigma^2}{2}\right)}$$

Ahora

$$E[X] = e^{\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)} \quad \text{y} \quad E[X^2] = e^{\left(2\mu+2\sigma^2\right)}$$

Teniendo en cuenta que

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = e^{\left(2\mu+2\sigma^2\right)} \left[ e^{\sigma^2} - 1 \right]$$

□

**Proposición 110.** Si  $X$  se distribuye lognormalmente y la desviación estándar de  $\ln(X)$  es  $w$ , entonces

$$E[\text{máx}(X - K, 0)] = E[X]N(d_1) - KN(d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{E[X]}{K}\right) + \frac{w^2}{2}}{w}$$



$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{E[X]}{K}\right) - \frac{w^2}{2}}{w}$$

*Demostración.* Se tiene

$$E[\text{máx}(X - K, 0)] = \int_{-\infty}^K 0 \cdot f_X(x)dx + \int_K^{\infty} (x - K) \cdot f_X(x)dx = \int_K^{\infty} (x - K)f_X(x)dx \quad (\text{B.3})$$

Del lema 109 se tiene

$$E[\ln(X)] = \ln(E[X]) - \frac{w^2}{2} \quad (\text{B.4})$$

Estandarizamos la variable  $\ln(X)$ , para ello definamos

$$M := \frac{\ln(X) - E[\ln(X)]}{w}$$

donde

$$f_M(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m^2}{2}} \quad (\text{B.5})$$

Como la función  $\ln$  es creciente se tiene

$$\begin{aligned} X \leq x &\Leftrightarrow \ln(X) \leq \ln(x) \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln(X) - E[\ln(X)]}{w} \leq \frac{\ln(x) - E[\ln(X)]}{w} \\ &\Leftrightarrow M \leq m \end{aligned}$$

con lo cual

$$P(X \leq x) = \int_0^x f_X(s)ds = \int_0^m f_M(s)ds \quad (\text{B.6})$$

derivando la expresión (B.6) con respecto a  $x$ , y aplicando el teorema fundamental del cálculo, tenemos

$$f_X(x) = f_M(m) \frac{dm}{dx}$$

por lo que al reemplazar en (B.3), se tiene

$$\begin{aligned} E[\text{máx}(X - K, 0)] &= \int_K^{\infty} (x - K)f_X(x)dx = \int_{\frac{\ln(K) - E[\ln(X)]}{w}}^{\infty} (e^{Mw + E[\ln(X)]} - K)f_M(m)dm \\ E[\text{máx}(X - K, 0)] &= \int_{\frac{\ln(K) - E[\ln(X)]}{w}}^{\infty} e^{Mw + E[\ln(X)]} f_M(m)dm - K \int_{\frac{\ln(K) - E[\ln(X)]}{w}}^{\infty} f_M(m)dm \quad (\text{B.7}) \end{aligned}$$

Ahora teniendo en cuenta (B.5) veamos que

$$e^{Mw + E[\ln(X)]} f_M(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m^2 + 2Mw + 2E[\ln(X)]}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m-w)^2 + 2E[\ln(X)] + w^2}{2}} \\
&= e^{\frac{2E[\ln(X)] + w^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m-w)^2}{2}} \\
&= e^{\frac{2E[\ln(X)] + w^2}{2}} f_M(m-w)
\end{aligned}$$

con lo cual en la ecuación (B.7), se tiene

$$E[\max(X-K, 0)] = e^{\frac{2E[\ln(X)] + w^2}{2}} \int_{\frac{\ln(K) - E[\ln(X)]}{w}}^{\infty} f_M(m-w) dm - K \int_{\frac{\ln(K) - E[\ln(X)]}{w}}^{\infty} f_M(m) dm \quad (\text{B.8})$$

Ahora notemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\ln(K) - E[\ln(X)]}{w}}^{\infty} f_M(m-w) dm &= \int_{-\infty}^{\infty} f_M(m-w) dm - \int_{-\infty}^{\frac{\ln(K) - E[\ln(X)]}{w}} f_M(m-w) dm \\
&= 1 - N\left(\frac{\ln(K) - E[\ln(X)]}{w} - w\right) = N\left(-\left[\frac{\ln(K) - E[\ln(X)]}{w} - w\right]\right)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la expresión (B.4), se obtiene

$$N\left(-\left[\frac{\ln(K) - E[\ln(X)]}{w} - w\right]\right) = N\left(\frac{\ln(E[X]) - \frac{w^2}{2} - \ln(K)}{w} + w\right)$$

y por propiedad de logaritmos, se tiene

$$\int_{\frac{\ln(K) - E[\ln(X)]}{w}}^{\infty} f_M(m-w) dm = N\left(\frac{\ln\left(\frac{E[X]}{K}\right) + \frac{w^2}{2}}{w}\right) = N(d_1) \quad (\text{B.9})$$

Análogamente

$$\int_{\frac{\ln(K) - E[\ln(X)]}{w}}^{\infty} f_M(m) dm = 1 - N\left(\frac{\ln(K) - E[\ln(X)]}{w}\right) = N\left(\frac{\ln\left(\frac{E[X]}{K}\right) - \frac{w^2}{2}}{w}\right) = N(d_2). \quad (\text{B.10})$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la expresión (B.4)

$$e^{\frac{2E[\ln(X)] + w^2}{2}} = e^{\frac{2\ln(E[X]) - w^2 + w^2}{2}} = E[X] \quad (\text{B.11})$$

Reemplazando las relaciones (B.9), (B.10) y (B.11) en (B.8), se obtiene

$$E[\max(X-K, 0)] = E[X] \cdot N(d_1) - KN(d_2).$$

□

A continuación presentamos la deducción de la EDP de Black-Scholes, esta deducción se hace para un derivado financiero en general, ya que un derivado financiero particular depende de las condiciones de frontera que se utilizan al resolver la EDP.

Es habitual decir que la parte compradora del contrato toma una posición larga y la vendedora toma una posición corta. Se considera el precio de un derivado en un tiempo general  $t$  (no en el tiempo cero), por lo que si  $T$  es la fecha de vencimiento, el tiempo de vencimiento (tiempo de vida de la Opción) es  $T - t$ . Suponemos que el proceso del precio de la acción sigue la EDE (2.42), es decir,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (\text{B.12})$$

Supongamos que  $f$  es el precio de un derivado de  $S_t$  (o en particular, de una opción Call europea). La variable  $f$  debe ser alguna función de  $S$  y  $t$ . Por lo tanto del lema de Itô (teorema 42), se tiene que,

$$df_t = \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S_t dW_t. \quad (\text{B.13})$$

Las versiones discretas de las ecuaciones (B.12) y (B.13) son

$$\Delta S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \Delta W_t \quad (\text{B.14})$$

y

$$\Delta f_t = \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S_t \Delta W_t \quad (\text{B.15})$$

donde  $\Delta f_t$  y  $\Delta S_t$  son los cambios en  $f$  y  $S$  en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Notemos que  $\Delta W_t$  de la ecuación (B.14) es el mismo que de la ecuación (B.15). De ello se deduce que un portafolio consistente de acciones y del derivado se puede construir de manera que se elimine el riesgo (el movimiento Browniano). Veamos, si consideramos de modo general

$$\begin{aligned} w_1 &: \text{derivado} \\ w_2 &: \text{acciones} \end{aligned}$$

Denotando  $\Pi_t$  al valor del portafolio en el tiempo  $t$ . Tenemos

$$\Pi_t = w_1 f_t + w_2 S_t,$$

luego, el cambio  $\Delta \Pi_t$  en el valor del portafolio, en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , viene dado por

$$\Delta \Pi_t = w_1 \Delta f_t + w_2 \Delta S_t. \quad (\text{B.16})$$

Sustituyendo las ecuaciones (B.14) y (B.15) en la ecuación (B.16) se obtiene

$$\begin{aligned}\Delta\Pi_t &= w_1 \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \Delta t + w_1 \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S_t \Delta W_t + w_2 \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \Delta W_t \\ &= \left( w_1 \frac{\partial f}{\partial S} \mu S_t + w_1 \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} w_1 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 + w_2 \mu S_t \right) \Delta t + \left( w_1 \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S_t + w_2 \sigma S_t \right) \Delta W_t.\end{aligned}$$

Para eliminar la incertidumbre (el riesgo), debemos elegir  $w_1$  y  $w_2$  tal que

$$w_1 \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S + w_2 \sigma S = 0 \quad \text{Equivalentemente} \quad w_1 \frac{\partial f}{\partial S} + w_2 = 0.$$

Hay infinitas formas de elegirlos, por ejemplo,  $w_1 = -1$  y  $w_2 = \frac{\partial f}{\partial S}$ , con lo cual tenemos el portafolio

$$\begin{aligned}-1 &: \text{ derivado} \\ + \frac{\partial f}{\partial S} &: \text{ acciones,}\end{aligned}$$

es decir, el titular de este portafolio asume una posición corta con un derivado y una posición larga con una cantidad  $\frac{\partial f}{\partial S}$  de acciones. Entonces, el valor del portafolio es

$$\Pi_t = -f_t + \frac{\partial f}{\partial S} S_t. \quad (\text{B.17})$$

El cambio  $\Delta\Pi_t$  en el valor del portafolio, en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , está dado por

$$\Delta\Pi_t = -\Delta f_t + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S_t, \quad (\text{B.18})$$

sustituyendo las ecuaciones (B.14) y (B.15) en la ecuación (B.18), obtenemos

$$\Delta\Pi_t = \left( -\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \Delta t. \quad (\text{B.19})$$

Debido a que esta ecuación no involucra a  $\Delta W_t$ , el portafolio está libre de riesgo durante el tiempo  $\Delta t$ . Los supuestos enumerados al inicio de la subsección 2.6.1 implican que el portafolio debe obtener, instantáneamente, la misma tasa de retorno que otros valores libres de riesgo a corto plazo. Si ganara más que este retorno, los arbitrajistas podrían obtener una ganancia sin riesgo prestando dinero para comprar el portafolio (con el retorno al pagar la deuda les quedaría una ganancia); si ganara menos, podrían obtener un beneficio sin riesgo tomando una posición corta con el portafolio y comprando valores libres de riesgo. Así, tenemos que

$$\Delta\Pi_t = r\Pi_t \Delta t, \quad (\text{B.20})$$

donde  $r$  es la tasa libre de riesgo. Sustituyendo las ecuaciones (B.17) y (B.19) en la expresión

(B.20), obtenemos

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \Delta t = r \left( f_t - \frac{\partial f}{\partial S} S_t \right) \Delta t,$$

y así

$$\frac{\partial f}{\partial t} + r S_t \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r f_t. \quad (\text{B.21})$$

La ecuación (B.21) es la ecuación diferencial de Black-Scholes-Merton. Tiene muchas soluciones, que corresponden a todos los diferentes derivados que pueden definirse siendo  $S_t$  la variable subyacente. El derivado particular que se obtiene cuando se resuelve la ecuación depende de las *condiciones de frontera* que se utilizan. Estos especifican los valores del derivado en los límites de valores posibles de  $S_t$  y  $t$ . En el caso de una opción Call europea, la condición de frontera clave es

$$f = \text{máx}(S - K, 0) \quad \text{cuando } t = T.$$

Un punto que debe enfatizarse sobre el portafolio utilizado en la derivación de la ecuación (B.21) es que no está permanentemente libre de riesgo. Está sin riesgo solo por un periodo infinitamente corto de tiempo. Como  $S_t$  y  $t$  cambian,  $\partial f / \partial S$  también cambia. Para mantener el portafolio sin riesgo, por lo tanto, es necesario cambiar con frecuencia las proporciones relativas del derivado y las acciones en el portafolio (es una estrategia dinámica).

## B.1. Derivación de la fórmula de Black-Scholes-Merton mediante el teorema de Girsanov

En esta sección, obtenemos la fórmula de Black-Scholes-Merton para la valorización de una Opción Call europea (2.44), para ello hacemos uso de un procedimiento que se apoya en el teorema de Girsanov, mediante el cual el precio de una opción sobre una acción, expresado en términos de un numeraire, se transforma en una martingala bajo una nueva medida de probabilidad equivalente (de riesgo neutro)  $\mathbb{Q}$ , definida sobre el espacio muestral original  $\Omega$ . Luego, bajo esta nueva medida de probabilidad, se calcula el precio de la opción como el valor esperado, condicionada a la información presente, del valor intrínseco del contrato.

### B.1.1. Proceso de Precios bajo la medida de Riesgo Neutro

El teorema de Girsanov construye explícitamente una medida de probabilidad equivalente, definida sobre el espacio original, lo que permite transformar un movimiento Browniano Geométrico con tendencia igual al retorno medio esperado del activo ( $\mu$ ) en un movimiento Browniano Geométrico, de riesgo neutro, con tendencia igual a la tasa de interés libre de riesgo ( $r$ ).

Sea  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento Browniano definido sobre un espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ .

Se supone que el precio del activo subyacente, una acción, sigue un movimiento geométrico Brow-

niano :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (\text{B.22})$$

donde  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\sigma > 0$  son, respectivamente, el retorno medio esperado y la volatilidad instantánea del título de capital. Ahora bien, aplicando el teorema (47) a la ecuación (B.22) para  $\alpha(t, w) = rS_t$ , tenemos,

$$\sigma S_t u(t, w) = \mu S_t - rS_t,$$

con lo que el precio de mercado del riesgo es

$$u(t, w) = \frac{\mu - r}{\sigma},$$

Además

$$\begin{aligned} M_t &= \exp \left\{ - \int_0^t \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 ds \right\} \\ &= \exp \left\{ - \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right) W_t - \frac{1}{2} \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 t \right\} \end{aligned}$$

y como

$$E \left[ \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 ds \right\} \right] = E \left[ \exp \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 T \right\} \right] = \exp \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 T \right\} < \infty,$$

se satisface la condición de Novikov, con lo que aseguramos que  $\{M_t\}$  es una martingala. Si hacemos

$$d\mathbb{Q}(w) = M_T(w) d\mathbb{P}(w), \quad (\text{B.23})$$

entonces  $\mathbb{Q}$  es una medida de probabilidad y el proceso

$$\widehat{W}(t) := \int_0^t \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right) ds + W(t) = \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right) t + W(t)$$

es un movimiento Browniano estándar con respecto a  $\mathbb{Q}$  y en términos de  $\widehat{W}(t)$  la expresión (B.22), se escribe

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\widehat{W}(t). \quad (\text{B.24})$$

Así el término de tendencia (drift) del proceso representado en (B.24) se ha modificado sin que se altere la varianza. Esto, intuitivamente, quiere decir que si dos agentes tienen diferentes expectativas sobre el retorno promedio del activo subyacente, ellos están dispuestos a omitirlas en sus decisiones de inversión siempre y cuando la volatilidad del activo subyacente se mantenga constante.

### B.1.2. Cambio de numeraire

Considere un depósito bancario de  $B_t$  unidades monetarias, al tiempo  $t$ , que paga una tasa de interés constante y libre de riesgo  $r$ . El retorno del depósito durante el instante  $dt$  está representado por la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$dB_t = rB_t dt. \quad (\text{B.25})$$

Si se supone que la inversión inicial es de una unidad monetaria,  $B_0 = 1$ , entonces la solución de la ecuación (B.25) es

$$B_t = e^{rt}. \quad (\text{B.26})$$

La expresión (B.26) es llamada la cuenta del mercado de dinero. Se define ahora el proceso  $\tilde{S}_t$

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t} = B_t^{-1} S_t = e^{-rt} S_t, \quad (\text{B.27})$$

donde  $S_t$  es el proceso de precios de la acción, es decir, satisface (B.22). La relación (B.27) expresa simplemente un cambio en la forma de medir una variable con respecto de una cantidad positiva en una inversión libre de riesgo. Claramente, al inicio  $\tilde{S}_0 = S_0$ . En este caso, aplicando derivada de un producto, se cumple que

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= e^{-rt} dS_t - re^{-rt} S_t dt \\ &= e^{-rt} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) - re^{-rt} S_t dt \\ &= e^{-rt} ((\mu - r) S_t dt + \sigma S_t dW_t) \\ &= e^{-rt} S_t \sigma \left( \frac{\mu - r}{\sigma} S_t dt + dW_t \right) \\ &= \sigma \tilde{S}_t d\widehat{W}_t \end{aligned}$$

Así

$$\frac{d\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t} = \sigma d\widehat{W}_t. \quad (\text{B.28})$$

La ecuación (B.28) puede ser escrita en forma equivalente como:

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 + \sigma \int_0^t \tilde{S}_m d\widehat{W}_m.$$

Por lo tanto, el proceso de precios descontados  $\tilde{S}_t$  es una  $\mathbb{Q}$ -martingala.

En resumen, el precio de la acción subyacente, expresado en términos del numeraire  $B_t$ , es una martingala bajo la medida  $\mathbb{Q}$ .

### B.1.3. La fórmula de Black-Scholes-Metron (contexto del teorema de Girsanov)

Aquí obtenemos la fórmula de valuación teórica del precio de una opción en un mundo de riesgo neutro. Sea  $c_t = c(S_t, t)$  el precio de una Opción Call europea y sea

$$\tilde{c}_t = \tilde{c}(S_t, t) = \frac{c(S_t, t)}{B_t}, \quad (\text{B.29})$$

el proceso de precios descontados de  $c_t$ , entonces

$$d\tilde{c}_t = e^{-rt}dc_t - re^{-rt}c_tdt, \quad (\text{B.30})$$

al aplicar el Lema de Itô (Teorema 42) a  $c_t$ , se tiene

$$dc_t = \left( \frac{\partial c}{\partial S} \mu S_t + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S} \sigma S_t dW_t \quad (\text{B.31})$$

Al reemplazar (B.31) en (B.30), se obtiene

$$\begin{aligned} d\tilde{c}_t &= e^{-rt} \left[ \left( \frac{\partial c}{\partial S} \mu S_t + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S} \sigma S_t dW_t \right] - re^{-rt} c_t dt \\ &= e^{-rt} \left[ \left( \frac{\partial c}{\partial S} \mu S_t + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 - rc_t \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S} \sigma S_t dW_t \right] \\ &= e^{-rt} \left[ \left( \frac{\partial c}{\partial S} \mu S_t + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 - rc_t \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S} \sigma S_t \left( d\widehat{W}_t - \left( \frac{\mu-r}{\sigma} \right) dt \right) \right] \\ &= e^{-rt} \left[ \left( \frac{\partial c}{\partial S} r S_t + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 - rc_t \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S} \sigma S_t d\widehat{W}_t \right]. \end{aligned}$$

Con lo que

$$d\tilde{c}_t = e^{-rt} \left[ \left( \frac{\partial c}{\partial S} r S_t + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 - rc_t \right) dt \right] + \frac{\partial c}{\partial S} \sigma \tilde{S}_t d\widehat{W}_t, \quad (\text{B.32})$$

la expresión (B.32) es una martingala. Pues de la expresión (2.43),

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S} r S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 - rc = 0$$

junto con la condición

$$c(S_t, T) = \max(S_t - K, 0).$$



Así, se tiene que,

$$d\tilde{c}_t = \frac{\partial c}{\partial S} \sigma \tilde{S}_t d\widehat{W}_t,$$

y con ello  $\tilde{c}_t$  es una martingala en  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{Q})$ , por lo tanto, si  $0 \leq s \leq t \leq T$ ,

$$E^{\mathbb{Q}}[\tilde{c}_t | \mathcal{F}_s] = \tilde{c}_s. \quad (\text{B.33})$$

Por lo tanto, el precio de la opción Call en el tiempo  $t$ , se puede obtener de (B.33) del modo siguiente

$$\tilde{c}_t = E^{\mathbb{Q}}[\tilde{c}_T | \mathcal{F}_t] \Rightarrow c_t = e^{-r(T-t)} E^{\mathbb{Q}}[c_T | \mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} E^{\mathbb{Q}}[\text{máx}(S_T - K, 0) | \mathcal{F}_t].$$

Ahora como  $S_t$  sigue también un movimiento Geométrico Browniano con respecto a  $\mathbb{Q}$ , es decir,

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\widehat{W}(t),$$

luego, de la observación 46,

$$\ln S_T \sim N\left(\ln S_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right)$$

y del lema 109, la función de densidad de  $S_T | S_t$  está dada por

$$f_{S_T | S_t}(s | S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma s} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(s) - [\ln(S_t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)]}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\right\},$$

entonces

$$c_t = e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} (S_T - K) d\mathbb{Q}$$

y siguiendo el mismo argumento usado en la demostración de la proposición 110, tenemos que,

$$c_t = e^{-r(T-t)} \{E^{\mathbb{Q}}[S_T] N(d_1) - KN(d_2)\}, \quad (\text{B.34})$$

pero  $\tilde{S}_t$  es una  $\mathbb{Q}$ -martingala

$$\tilde{S}_t = E^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_T] \Rightarrow S_t = e^{-r(T-t)} E^{\mathbb{Q}}[S_T],$$

reemplazando en (B.34) obtenemos,

$$c_t = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2).$$

## B.2. Cálculo de los procesos bajo la medida de riesgo neutro

Usando el Teorema 47, para  $\beta(t, w) = \mu S_t$ ,  $\theta(t, w) = \sqrt{v_t} S_t$ , y  $\alpha(t, w) = r S_t$ , tenemos

$$u(t, w) = \frac{\mu S_t - r S_t}{\sqrt{v_t} S_t} = \frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}}$$

y también

$$dS_t = r S_t dt + \sqrt{v_t} S_t d\widehat{W}_{1,t} \quad (\text{B.35})$$

con

$$\widehat{W}_{1,t} = \int_0^t \frac{\mu - r}{\sqrt{v_s}} ds + W_{1,t}.$$

Para obtener el proceso de Varianza bajo la medida de riesgo neutro  $\mathbb{Q}$ , se introduce una función  $\lambda(S_t, v_t, t)$  en el drift de la ecuación (3.5), así del teorema 47, para  $\beta(t, w) = \kappa[\theta - \nu_t]$ ,  $\theta(t, w) = \sigma\sqrt{v_t}$ , y  $\alpha(t, w) = \kappa[\theta - \nu_t] - \lambda(S_t, v_t, t)$ , tenemos

$$d\nu_t = [\kappa[\theta - \nu_t] - \lambda(S_t, v_t, t)] dt + \sigma\sqrt{v_t} d\widehat{W}_{2,t}, \quad (\text{B.36})$$

con

$$\widehat{W}_{2,t} = W_{2,t} + \int_0^t \frac{\lambda(S_s, v_s, t)}{\sigma\sqrt{v_s}} ds.$$

Como se explica en [19, Heston], siguiendo el modelo de consumo de Breeden, la función de premio al riesgo de volatilidad,  $\lambda(S_t, v_t, t)$ , es proporcional a la varianza, así se considera  $\lambda(S_t, v_t, t) = \lambda v_t$ , donde  $\lambda$  es una constante. Así en la expresión (B.36), al hacer  $\kappa^* = \kappa + \lambda$  y  $\theta^* = \frac{\kappa\theta}{\kappa + \lambda}$ , la versión de la ecuación de la varianza bajo  $\mathbb{Q}$ , es

$$dv_t = \kappa^* [\theta^* - \nu_t] dt + \sigma\sqrt{v_t} d\widehat{W}_{2,t}. \quad (\text{B.37})$$

## B.3. Escribiendo $f_1$ en función de $f_2$ .

Siguiendo a [7, Bakshi, Madan], mostramos que el precio de la opción Call europea en el modelo de Heston puede ser expresado en términos de una **única** función característica. Para ello, recordemos que

$$P_j = P(\ln S_T > \ln K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi \ln(K)} f_j(\phi; x, v)}{i\phi} \right] d\phi, \quad (\text{B.38})$$

lo cual nos dice que el modelo de Heston tiene asociadas dos funciones características  $f_1$  y  $f_2$ , esto es debido a que  $P_1$  y  $P_2$  son halladas bajo diferentes medidas. Por otro lado, también es razonable pensar que solo debe existir una única función característica, ya que solo hay un precio de activo subyacente en el modelo. De hecho, algunos autores escriben las probabilidades

$P_1$  y  $P_2$  en términos de una única función característica  $f(\phi) = f(\phi; x, v)$ , como

$$P_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi \ln(K)} f(\phi - i)}{i\phi f(-i)} \right] d\phi \quad (\text{B.39})$$

y

$$P_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi \ln(K)} f(\phi)}{i\phi} \right] d\phi, \quad (\text{B.40})$$

lo que sugiere que  $f_2(\phi) = f(\phi)$  y  $f_1(\phi) = f(\phi - i)/f(-i)$ .

*Observación 111.* Recordando, que  $P_1$  se obtiene mediante un cambio de numeraire, tenemos de la expresión (3.21),

$$\frac{d\mathbb{Q}^S}{d\mathbb{Q}} = \frac{S_T/S_t}{B_T/B_t} = \frac{e^{xT}}{E^{\mathbb{Q}}[e^{xT}]}. \quad (\text{B.41})$$

De la segunda igualdad, podemos escribir  $S_t e^{r(T-t)} = E^{\mathbb{Q}}[S_T]$ , lo que nos dice que bajo la medida de riesgo neutro  $\mathbb{Q}$ , el precio de la acción crece a una tasa libre de riesgo  $r$ . También tenemos,

$$d\mathbb{Q}^S = \frac{e^{xT}}{E^{\mathbb{Q}}[e^{xT}]} d\mathbb{Q},$$

lo cual nos dice que  $q$  induce una función de densidad  $q^S$ , a través de la derivada de Radon-Nikodym como

$$q^S(x) = \frac{e^x}{E^{\mathbb{Q}}[e^{xT}]} q(x).$$

En efecto, basta ver de la definición que  $q^S(x) \geq 0$ , para todo  $x$ . Además,

$$\int_{-\infty}^{\infty} q^S(x) dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^x q(x) dx}{E^{\mathbb{Q}}[e^{xT}]} = \frac{E^{\mathbb{Q}}[e^{xT}]}{E^{\mathbb{Q}}[e^{xT}]} = 1.$$

Con lo que demostramos que  $q^S$  es una función de densidad.

Ahora, mostramos que las expresiones para  $P_j$  en las ecuaciones (B.39) y (B.40) son idénticas a (B.38). Primero, notemos que  $P_2$  en la Ecuación (B.40) es idéntica a (B.38) con  $j = 2$ , pero  $P_1$  no es idéntica a (B.38) con  $j = 1$ . La “verdadera” función característica es en realidad  $f_2$ , ya que está asociada con la medida de probabilidad  $\mathbb{Q}$  que hace a  $W_{1,t}$  y a  $W_{2,t}$ , en las ecuaciones diferenciales estocásticas de riesgo neutral (EDE) para  $S_t$  y  $v_t$ , movimientos Brownianos y para la cual el bono  $B_t$  sirve como numeraire. Por lo tanto, en el precio de la opción Call europea

$$C(K) = S_t P_1 - e^{-r\tau} K P_2$$

podemos usar  $q(x)$ , la función de densidad de probabilidad para  $\ln S_T$ , para obtener

$$P_2 = \mathbb{Q}(x_T > \ln K) = \int_{\ln K}^{\infty} q(x) dx,$$

donde  $x_T = \ln S_T$ .

Para evaluar  $P_2$ , expresamos la función de distribución acumulativa  $\mathbb{Q}(x_T \leq x)$  en términos de la función característica  $f(\phi)$  como

$$\mathbb{Q}(x_T \leq x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\phi x} f(\phi)}{i\phi} d\phi.$$

La densidad  $q(x)$  la obtenemos al derivar con respecto a  $x$

$$q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\phi x} f(\phi) d\phi,$$

sabemos que la parte real de la función característica  $f(\phi)$  es par, y la parte imaginaria es impar. Esto implica que, cuando integramos en toda la recta real, la parte imaginaria de  $e^{-i\phi x} f(\phi)$  se cancelará, lo que debe suceder de todos modos, ya que  $q(x)$  es real. Por lo tanto, podemos simplemente integrar sobre la parte real, y dado que la parte real es par, la integral sobre  $(-\infty, \infty)$  será igual al doble de la integral sobre  $(0, \infty)$ . Esto implica que la densidad la podemos escribir como

$$q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} [e^{-i\phi x} f(\phi)] d\phi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} [e^{-i\phi x} f(\phi)] d\phi \quad (\text{B.42})$$

y que  $\mathbb{Q}(x_T < x)$  puede ser escrito a partir de la expresión como

$$\mathbb{Q}(x_T \leq x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi x} f(\phi)}{i\phi} \right] d\phi.$$

La probabilidad in-the-money  $P_2$  es el complemento de  $\mathbb{Q}(x_T \leq x)$ , evaluado en  $\ln(K)$

$$P_2 = 1 - \mathbb{Q}(x_T \leq \ln K) = \mathbb{Q}(x_T > \ln K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi \ln K} f(\phi)}{i\phi} \right] d\phi,$$

que es idéntica a la expresión (B.40). Teniendo en cuenta la observación 111, y que  $E^{\mathbb{Q}}[e^{x_T}]$  es una constante, tenemos que la función característica  $f_1$  es,

$$E^{\mathbb{Q}^S} [e^{i\phi x_T}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\phi x} q^S(x) dx = \frac{1}{E^{\mathbb{Q}}[e^{x_T}]} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\phi x} e^x q(x) dx. \quad (\text{B.43})$$

Por otro lado, como la función característica para  $x_T$  es  $f(\phi) = E^{\mathbb{Q}}[e^{i\phi x_T}]$ , entonces

$$E^{\mathbb{Q}}[e^{x_T}] = f(-i) = S_t e^{r(T-t)}. \quad (\text{B.44})$$

Finalmente, la integral en (B.43)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\phi-i)x} q(x) dx = \underbrace{E^{\mathbb{Q}}[e^{i(\phi-i)x_T}]}_{f(\phi-i)}. \quad (\text{B.45})$$

De (B.44) y (B.45) en (B.43), tenemos

$$f_1 = E^{\mathbb{Q}^S} [e^{i\phi x_T}] = \frac{f(\phi - i)}{f(-i)} = \frac{f(\phi - i)}{S_t e^{r(T-t)}}, \quad (\text{B.46})$$

equivalentemente, sustituyendo  $f(\phi)$ ,

$$f_1(\phi) = \frac{f_2(\phi - i)}{f_2(-i)}.$$

Finalmente, aplicando el teorema de inversión a la función característica  $f_1$ , obtenemos

$$P_1 = \mathbb{Q}^S(x_T > \ln K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi \ln K} f(\phi - i)}{i\phi f(-i)} \right] d\phi.$$

# Bibliografía

- [1] *Oksendal Stochastic differential equations*. Springer, 6ed edition, 2003. 30, 35, 39
- [2] Hansjörg Albrecher, Philipp Mayer, Wim Schoutens, and Jurgen Tistaert. The little heston trap. 2006. 76, 78, 79
- [3] Leif BG Andersen. Efficient simulation of the heston stochastic volatility model. 2007. 12, 95, 102, 103, 106, 107, 113, 118, 119, 127
- [4] Leif BG Andersen and Vladimir V Piterbarg. Moment explosions in stochastic volatility models. *Finance and Stochastics*, 11(1):29–50, 2007. 115
- [5] Daniel Zwillinger (Auth.). *Handbook of Differential Equations*. Elsevier Inc, Saunders College Publishing/Harcourt Brace, 1st edition edition, 1989. 14
- [6] Jianwei Zhu (auth.). *Applications of Fourier Transform to Smile Modeling: Theory and Implementation*. Springer Finance. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2 edition, 2010. 4
- [7] Gurdip Bakshi and Dilip Madan. Spanning and derivative-security valuation. *Journal of financial economics*, 55(2):205–238, 2000. 64, 76, 169
- [8] Lawrence Gray (auth.) Bert Fristedt. *A Modern Approach to Probability Theory*. Probability and its Applications. Birkhäuser Boston, 1997. 20, 21
- [9] Fischer Black. Studies of stock price volatility changes. 1976. 52
- [10] Douglas T. Breeden. An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities. *Journal of Financial Economics*, 7:0–296, 1979. 68
- [11] Andrew JG Cairns. *Interest rate models: an introduction*. Princeton University Press, 2018. 59
- [12] JC Cox, JE Ingersoll Jr, and SA Ross. A theory of the term structure of interest rates. *econometrica* 53 385–407. *Mathematical Reviews (MathSciNet): MR785475 Digital Object Identifier: doi*, 10:1911242, 1985. 59

- [13] Michael; Ter Maten E. Jan W Ehrhardt, Matthias; GÄEnther. *Novel methods in computational finance*. Springer, 2017. 124, 125
- [14] Steven L. Heston Fabrice D. Rouah. *The Heston Model and its Extensions in Matlab and C*. Wiley finance series, 2013. 56, 64, 82, 83, 95, 97
- [15] Gregory Vainberg Fabrice Douglas Rouah. *Option Pricing Models and Volatility Using Excel-VBA*. Wiley Finance. Wiley, 2007. 56
- [16] Jim Gatheral. *The volatility surface: a practitioner's guide*, volume 357. John Wiley & Sons, 2011. 45, 66, 76, 78, 95, 101
- [17] J. Gil-Pelaez. Note on the inversion theorem. *Biometrika*, 38:481–482, 1951. 66
- [18] Paul Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*. Applications of mathematics, 53. Springer, 2004. 149
- [19] S. L. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6, 1993. 12, 56, 63, 64, 68, 70, 71, 72, 73, 74, 76, 78, 82, 83, 84, 88, 169
- [20] Steven E. Shreve (auth.) Ioannis Karatzas. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Graduate Texts in Mathematics 113. Springer-Verlag New York, 2 edition, 1998. 36
- [21] Jens Carsten Jackwerth and Mark Rubinstein. Recovering probability distributions from option prices. *The Journal of Finance*, 51(5):1611–1631, 1996. 53
- [22] A. Craig MacKinlay Andrew Y. Lo John Y. Campbell, Andrew W. Lo. *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press, 1996. 43
- [23] Hugo D. Junghenn. *Option Valuation : A First Course in Financial Mathematics*. Chapman and Hall/CRC Financial Mathematics Series. CRC Press, 2011. 64
- [24] Christian Kahl and Peter Jäckel. Fast strong approximation monte carlo schemes for stochastic volatility models. *Quantitative Finance*, 6(6):513–536, 2006. 95
- [25] Fima C. Klebaner. *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. 2 edition edition, 2005. 65
- [26] Peter E Kloeden and Eckhard Platen. *Numerical solution of stochastic differential equations*, volume 23. Springer Science & Business Media, 2013. 118, 119
- [27] Jun Ma. Pricing foreign equity options with stochastic correlation and volatility. *Annals of Economics & Finance*, 10(2), 2009. 126, 152
- [28] Benoit B Mandelbrot. The variation of certain speculative prices. In *Fractals and scaling in finance*, pages 371–418. Springer, 1997. 50

- [29] Christoph Schwab Christoph Winter Norbert Hilber, Oleg Reichmann. *Computational Methods for Quantitative Finance: Finite Element Methods for Derivative Pricing*. Springer Finance. Springer, 2013 edition, 2013. 39
- [30] N. Balakrishnan Norman L. Johnson, Samuel Kotz. *Continuous univariate distributions*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley-Interscience, 2 edition, 1995. 17
- [31] Gerald Kroisandt Ralf Korn, Elke Korn. *Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. CRC Press, 2010. 27
- [32] Bjorn Bottcher Rene L. Schilling, Lothar Partzsch. *Brownian Motion: An Introduction to Stochastic Process*. Walter de Gruyter & Co, 1st edition, 2012. 39
- [33] Allen Craig Robert V. Hogg. *Introduction to Mathematical Statistics*. Prentice Hall, 5th edition, 1994. 15
- [34] Rainer Schöbel and Jianwei Zhu. Stochastic volatility with an ornstein–uhlenbeck process: an extension. *Review of Finance*, 3(1):23–46, 1999. 124
- [35] Steven E. Shreve. *Stochastic calculus for finance II Continuous time models*. Springer Finance. Springer, 1st ed. 2004. corr. 2nd printing edition, 2004. 22
- [36] YF Sun, GY Zhang, and SQ Li. An effective simulation of heston model: Combining quadratic exponential and exact simulation schemes. In *2015 International Conference on Artificial Intelligence and Industrial Engineering*. Atlantis Press, 2015. 151
- [37] Hisashi Tanizaki. *Computational methods in statistics and econometrics*. CRC Press, 2004. 16, 41
- [38] Long Teng, Matthias Ehrhardt, and Michael Günther. The dynamic correlation model and its application to the heston model. In *Innovations in Derivatives Markets*, pages 437–449. Springer, 2016. 125, 127
- [39] Long Teng, Matthias Ehrhardt, and Michael Günther. Modelling stochastic correlation. *Journal of Mathematics in Industry*, 6(1):2, 2016. 126, 152
- [40] Long Teng, Matthias Ehrhardt, and Michael Günther. Numerical simulation of the heston model under stochastic correlation. *Int. J. Financial Stud*, 6:3, 2018. 4, 5, 12, 124, 128, 130, 131, 137, 140
- [41] Long Teng, Cathrin Van Emmerich, Matthias Ehrhardt, and Michael Günther. A versatile approach for stochastic correlation using hyperbolic functions. *International Journal of Computer Mathematics*, 93(3):524–539, 2016. 126, 152
- [42] Ruey S. Tsay. *Analysis of Financial Time Series (Wiley Series in Probability and Statistics - Applied Probability and Statistics Section Series)*. John Wiley and Sons, 2010. 44



- [43] Cathrin Van Emmerich. Modelling correlation as a stochastic process. *preprint*, 6(03), 2006. 126, 152
- [44] Paul Wilmott. *Paul Wilmott on Quantitative Finance*. John Wiley & Sons Inc, 2006. 125
- [45] Tomasz Zastawniak Zdzislaw Brzezniak. *Basic Stochastic Processes*. Springer, corrected edition, 2000. 19, 26, 27, 29