

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA



TESIS:

**“DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL NO LINEAL DE POSICIÓN DE UN ROBOT
DE 2-GL BASADO EN LÓGICA DIFUSA Y DESIGUALDADES MATRICIALES
LINEALES”**

**PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON
MENCION EN AUTOMÁTICA E INSTRUMENTACIÓN**

ELABORADO POR:

ROGER JESUS COAQUIRA CASTILLO

ASESOR:

Dr. NICANOR RAUL BENITES SARAVIA

LIMA - PERU

2019

DEDICATORIA

Este trabajo va dedicado a dos personas que admiro y amo a Jesus Coaquira Talavera mi padre y Teresa Castillo Callata, mi madre.

También dedico el presente trabajo a Yesenia, mi compañera de vida y a Lucianita la niña de mis ojos, mi hija.

Finalmente dedico este trabajo a Amalia, Esperanza y Marisol mis hermanas.

AGRADECIMIENTO

Agradezco a Dios por todo lo que me ha dado, también expreso mi agradecimiento al apoyo que recibí de mis profesores y personal administrativo de la Sección de Postgrado de la FIEE-UNI, y en particular a mi asesor al Dr. Raúl Benites Saravia por las sugerencias de corrección a la presente Tesis y su gran profesionalismo, agradezco a Fondecyt-UNSAAC por el apoyo económico. Agradezco a todos los que directa o indirectamente colaboraron en el presente trabajo.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	1
CAPITULO I	
ANTECEDENTES Y DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA	
1.1 Antecedentes bibliográficos	2
1.2 Descripción de la realidad problemática	4
1.3 Formulación del problema.....	5
1.4 Justificación e importancia de la investigación.....	5
1.5 Objetivos.....	5
1.5.1 Objetivo General	5
1.5.2 Objetivos Específicos	6
1.6 Hipótesis	6
1.7 Variables e indicadores	6
1.7.1 Variable Independiente.....	6
1.7.2 Variables dependientes.....	6
1.8 Unidad de análisis.....	6
1.9 Tipo y nivel de investigación	7
1.10 Periodo de análisis.....	7
1.11 Fuentes de información e instrumentos utilizados.....	7
1.12 Técnicas de recolección y procesamiento de datos	7
CAPITULO II	
MARCO TEORICO	
2.1 Lógica Difusa.....	8
2.2 Conjuntos.....	10
2.2.1 Conjunto clásico.....	10
2.2.2 Conjunto difuso	11
2.2.3 Razonamiento Aproximado.....	13
2.2.4 Operaciones con conjuntos difusos	13
2.3 Variable lingüística.....	15
2.4 Funciones de pertenencia.....	16
2.5 Reglas difusas SI-ENTONCES.....	19
2.5.1 Propositiones difusas.....	19
2.5.2 Interpretación de las reglas difusas SI-ENTONCES	20
2.6 Modelo Difuso Takagi Sugeno.....	21
2.7 Control Difuso.....	22

2.8	Partes de un controlador Difuso	22
2.8.1	Fusificación.....	23
2.8.2	Base de conocimiento	23
2.8.3	Defusificación	23
2.9	Tipos de Controladores Difusos	25
2.10	Sistemas Difusos como Aproximador de Funciones	26
2.10.1	Aproximador de una Función Senoidal.....	26
2.11	Control H^∞	29
2.11.1	Problema de control general.....	29
2.11.2	Interpretación de H^∞	31
2.12	Teoría de Desigualdades Matriciales Lineales (LMI).....	32
2.12.1	Desigualdades Matriciales Lineales (LMI).....	34
2.12.2	Control H^∞ con LMI.....	41
CAPITULO III		
DESARROLLO DEL TRABAJO		
3.1	Modelo Dinámico del Robot de Dos Grados de Libertad	44
3.2	Modelo de los actuadores	49
3.2.1	Modelo del motor DC de la primera articulación	49
3.2.2	Modelo del motor DC de la segunda articulación	52
3.3	Modelo del robot en el Espacio de Estados	53
3.4	Sensores.....	58
3.4.1	Encoder.....	58
3.4.2	Tacómetro.....	61
3.5	Parámetros del sistema.....	61
3.6	Introducción al Control en el espacio de estados	62
3.7	Matrices de estado y de salida	63
3.8	Modelo Dinámico Difuso	64
3.9	Controlador Difuso	66
3.10	Control H^∞ por realimentación de estados	66
3.11	Señales de prueba.....	69
3.12	Sistema de Control de dos variables de entrada con tres funciones de pertenencia.....	70
3.12.1	Usando función de pertenencia triangular	70
3.12.2	Usando función de pertenencia Gaussiana.....	84
3.13	Sistema de Control de dos variables de entrada con cinco funciones de pertenencia.....	85

3.13.1 Usando función de pertenencia triangular	85
3.13.2 Usando función de pertenencia gaussiana	98
CAPITULO IV	
ANALISIS Y RESULTADOS	
4.1 Análisis.....	99
4.2 Resultados de la investigación	99
4.2.1 Función de pertenencia Triangular con nueve reglas.....	99
4.2.2 Función de pertenencia Gaussiana con nueve reglas.	104
4.2.3 Función de pertenencia Triangular con veinticinco reglas	104
4.2.4 Función de pertenencia Gaussiana con veinticinco reglas.....	104
4.2.5 Resumen de resultados	104
4.2.6 Posición cartesiana.....	105
4.3 Contrastación de la hipótesis.....	107
CONCLUSIONES.....	108
RECOMENDACIONES.....	109
BIBLIOGRAFIA.....	110
ANEXO A. Simulación del modelo dinámico del Robot	113
ANEXO B. Programa de cálculo de la matriz K.....	116

RESUMEN

En esta Tesis se analizó, formuló, diseño y simuló un sistema de Control No Lineal multivariable usando técnicas de Lógica Difusa, Desigualdades Matriciales Lineales y Control H_∞ , estas técnicas fueron probadas en un sistema de control de posición articular y posición cartesiana de un robot plano de dos grados de libertad. El objetivo es controlar todas las articulaciones simultáneamente por motores DC de imán permanente.

Se formuló y analizó la geometría del Robot también se planteó Modelo Dinámico no Lineal del Robot plano de 2GL, para describir su comportamiento físico incluyendo las ecuaciones de los motores, y los sensores de posición y velocidad que hacen posible que todas las variables de interés en el espacio de estados estén disponibles.

Para controlar la posición articular del Robot el controlador genera señales de voltaje que hacen posible el movimiento de los motores DC de imán permanente y de este modo siga la señal de referencia. La técnica de control planteada hace uso de modelos linealizados en nueve puntos de operación del Robot, para cada uno de estos puntos de operación se diseñó un controlador H_∞ usando formulaciones basadas en Desigualdades Matriciales Lineales-LMI las cuales fueron resueltas por algoritmos de optimización convexa, el diseño del controlador H_∞ considera el efecto de perturbaciones existentes. Finalmente haciendo uso de la Lógica Difusa (Takagi Sugeno) se consigue diseñar un control No Lineal Global considerando los nueve puntos de operación planteados del Robot.

Luego de diseñar el sistema de control no lineal se presenta la simulación grafica del tiempo y la posición articular utilizado el software Matlab y Simulink concluyendo que los resultados son satisfactorios.

ABSTRACT

In this Thesis, a multivariable Nonlinear Control system was analyzed, formulated, designed and simulated using Fuzzy Logic, Linear Matrix Inequalities and H_∞ Control techniques, these techniques were tested in a joint position control system and a robot's Cartesian position plane of two degrees of freedom. The objective is to control all the joints simultaneously by permanent magnet DC motors.

The geometry of the Robot was also formulated and analyzed. Nonlinear Dynamic Model of the 2GL plane robot was also proposed, to describe its physical behavior including the equations of the motors, and the position and speed sensors that make it possible for all the variables of interest in the space of states are available.

To control the joint position of the Robot, the controller generates voltage signals that make it possible to move the permanent magnet DC motors and thus follow the reference signal. The proposed control technique makes use of linearized models in nine points of operation of the Robot, for each of these operating points a H_∞ controller was designed using formulations based on Linear Matrix Inequalities-LMI which were solved by convex optimization algorithms, the controller design H_∞ considers the effect of existing disturbances. Finally making use of the Fuzzy Logic (Takagi Sugeno) is able to design a Global Nonlinear control considering the nine points of operation raised by the Robot.

After designing the non-linear control system, the graphical simulation of time and joint position used by the Matlab and Simulink software is presented concluding that the results are satisfactory.

INTRODUCCIÓN

La robótica es un área multidisciplinario de investigación en el cual se han desarrollado y se están desarrollando muchas estrategias de control con el fin de disminuir los efectos de disturbios desconocidos y efectos no lineales. Un área de investigación es la inteligencia artificial, que en los últimos años se está aplicando al control Robots y en particular en Robots Manipuladores, es así que en el presente trabajo se utiliza Lógica Difusa en combinación con la teoría de control H^∞ y el uso de Desigualdades Matriciales Lineales. El objetivo del presente trabajo es diseñar un Sistema de Control No Lineal de posición usando Lógica Difusa y Control H^∞ basado en Desigualdades Matriciales Lineales aplicado a un Robot Manipulador de 2GL. En el capítulo I se hace una revisión bibliográfica de trabajos similares, se plantea el problema, la justificación y se especifican los objetivos. En el capítulo II se desarrolla la teoría requerida para el entendimiento de Lógica Difusa, teoría de H^∞ , Desigualdades Matriciales Lineales. En el capítulo III se desarrolla la Tesis, en primera instancia se obtiene el modelo no lineal dinámico del robot de dos grados de libertad, seguidamente se linealiza en nueve puntos de operación, luego para cada uno de estos modelos se establece los controladores usando H^∞ y LMI, finalmente haciendo uso de la Lógica Difusa se desarrollan las reglas que permitirán usar los nueve modelos según sea la señal de referencia. En el capítulo IV se muestran los resultados de la investigación, finalmente se muestra las conclusiones y recomendaciones y Anexos.

CAPITULO I

ANTECEDENTES Y DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

1.1 Antecedentes bibliográficos

Los sistemas robóticos presentan una dinámica compleja con disturbios desconocidos y efectos no lineales, para obtener el modelo dinámico no lineal de este tipo de sistemas se puede utilizar la técnica de Newton-Euler (Torres, Pomares, Gil, Puente, & Aracil, 2002), el inconveniente de utilizar esta técnica es que se vuelve más complejo con el aumento de eslabones del robot. La técnica de Lagrange (Kelly & Santibañez, 2003), (Spong & Vidyasagar, 1989), (Torres, Pomares, Gil, Puente, & Aracil, 2002) permite modelar un robot de forma más sencilla aun cuando se incremente el número de eslabones del robot. En el presente trabajo se usó la técnica de Lagrange para obtener el modelo dinámico no lineal de un robot de 2GL.

Existen varios métodos para diseñar controladores tales como los métodos gráficos, métodos analíticos y método de optimización de parámetros. Los métodos gráficos son el Lugar Geométrico de las Raíces - LGR y diagramas de Bode (Ogata, 2010), dentro del método analítico se tienen a los controladores PID (Ogata, 2010). La técnica de optimización de parámetros trata de ajustar los valores del controlador usando un algoritmo. En los métodos de optimización de parámetros se puede usar la norma H_2 y H_∞ . El método H_∞ minimiza el valor de la función de transferencia entre la variable de salida del sistema y la variable de entrada de disturbio (Zhou, Doyle, & Glover, 1996), la solución del problema H_∞ se puede resolver usando la ecuación de Riccati o la inecuación de Lyapunov. El método H_∞ optimo se recomienda para diseño de controladores en robótica debido a que es un sistema que incluye perturbaciones.

La inecuación de Lyapunov se puede expresar mediante Desigualdades Matriciales Lineales, estas LMIs son convexas que permiten obtener una mejor eficiencia en la optimización de funciones. En 1892 el Ruso Aleksandr Mikhailovich Lyapunov propuso que la estabilidad de una ecuación diferencial de primer orden la cual puede ser analizada explícitamente mediante una desigualdad. Esta fue la primera Desigualdad Matricial Lineal - LMI que se escribió. En 1944 A. I. Lure y V. N. Postkov usan los métodos desarrollados

por Lyapunov para resolver problemas de ingeniería de control, sin embargo, las soluciones se podían aplicar solamente a sistemas de pequeño orden debido a que se resolvían en forma manual. En 1961 V. A. Yakubovich propone criterios gráficos para resolver LMI y da una interpretación en el dominio de la frecuencia para un problema descrito con LMI (Melo King, 2005). En la década de 1980 los computadores tienen un avance significativo en sus capacidades y se hace viable resolver problemas de control complejos mediante LMI con algoritmos de optimización convexa. Actualmente las LMI son usadas en la ingeniería de control para resolver problemas con la norma H_2 y H_∞ .

Existen varios trabajos que utilizan las LMI para resolver problemas de control H_∞ , un problema en el cual se aplicó LMI y H_∞ son las estructuras flexibles, en (Canahuire Cabello, Controle H-Infinito de Vibrações com Restrições no Esforço de Controle, 2009) se desarrolla un controlador H_∞ utilizando LMI para su diseño aplicado a una viga flexible, en (Melo King, 2005) se desarrolla un controlador lineal mixto H_2 / H_∞ usando LMI aplicado a una viga flexible empotrada en una pared, en (Cutrim Lopes, 2005) se desarrolla un controlador lineal H_2/H_∞ usando LMI con localización de polos aplicado a una viga flexible empotrada, en todos los trabajos mencionados en este párrafo solamente se desarrollaron controladores H_2 y/o H_∞ .

La lógica Difusa se ha aplicado en varios trabajos, en (Paredes, 2012) se usa la Lógica Difusa para el control de un vehículo aéreo no tripulado, en (Astocondor, 2013) se aplica la Lógica Difusa para el control de un robot, en ambos casos no se utilizan modelos de la planta en cuestión, lo cual hace que dependan en su totalidad de la lógica difusa, lo cual se realiza con una calibración mediante prueba y error, requiriendo bastante tiempo para conseguirlo.

En (Ravazzi Pires Da Silva, 2009) se combinan técnicas LMI (taza de decaimiento) y Lógica Difusa para el diseño de controladores aplicado a un sistema de suspensión vehicular, en (Peres Alves Santim, 2012) , se usa un controlador por conmutación usando LMI y Lógica Difusa para el diseño global del controlador y se aplica a un sistema Bola Balanza y a un Levitador Magnético.

1.2 Descripción de la realidad problemática

Los robots manipuladores se pueden construir y modelar considerando múltiples cuerpos rígidos conectados en serie mediante articulaciones rotativas y conducidas cada una de ellas por algún tipo de actuador que pueden ser actuadores de tipo eléctrico, neumático, hidráulico entre otros. Los sistemas robóticos presentan una dinámica compleja, con disturbios desconocidos y efectos no lineales, la presencia de mecanismos como engranajes y la estructura misma de los motores contribuyen con no linealidades que limitan el desempeño de técnicas de control lineal. El sistema físico de un robot es lineal solo en algunos tramos o en intervalos pequeños de operación. Algunas técnicas de control no lineal requieren la consideración de todos los elementos de un mecanismo en la etapa de modelamiento por lo que el modelo dinámico resultante se hace complejo y difícil de obtener.

En los últimos años la inteligencia artificial se ha desarrollado en el área de Control Automático, especialmente la Lógica Difusa, que tiene la particularidad de comportarse casi similarmente a la forma de pensar de los seres humanos. Una de las ventajas de la Logica Difusa es que puede trabajar con sistemas no lineales.

Muchos problemas de control son resueltos con herramientas de optimización, las que se pueden implementar y resolver utilizando un computador, este es el caso del uso de las Desigualdades Matriciales Lineales en la optimización de un controlador H^∞ . También es posible la presencia de perturbaciones no previstas en el modelado inicial.

Las técnicas de control no lineal son de gran interés en su estudio y aplicación frente a técnicas de control lineal basados en modelos linealizados de los sistemas físicos, las técnicas de control lineal muchas veces no permiten obtener respuestas óptimas, particularmente en aplicaciones de alto rendimiento.

Actualmente la utilización de varias técnicas de control a la vez emerge como una nueva perspectiva en el tratamiento de sistemas no lineales, así como también en el control de los mismos. Es posible combinar varias técnicas para el diseño de controladores con el fin de obtener un mejor resultado.

Se hace necesario estudiar la aplicación de técnicas de control no lineales que puedan funcionar con modelos matemáticos lineales y que también puedan lidiar con perturbaciones que no se consideran en el modelamiento.

1.3 Formulación del problema

En el presente trabajo se busca validar la posibilidad de combinar las técnicas de control por Lógica Difusa y control óptimo H^∞ utilizando Desigualdades matriciales Lineales para el diseño de un sistema de control no lineal de posición de un robot de 2GDL

1.4 Justificación e importancia de la investigación

El presente trabajo se justifica desde el punto de vista científico debido a que se muestra la aplicación de una técnica de diseño de controladores No Lineales con nuevas técnicas, para este fin se desarrolla el modelo lineal de la dinámica un Robot de dos grados de libertad en varios puntos de operación, lo relevante de esta técnica es que el modelamiento en cada punto de operación se realiza en forma lineal con esto se consigue que el proceso de modelamiento sea sencillo. El diseño de un controlador lineal H^∞ para cada punto de operación del modelo de la planta permite que este proceso sea sencillo, también en esta etapa se usa una técnica de optimización usando Desigualdades Matriciales Lineales, lo que permite que los controladores diseñados sean eficientes. Para lograr que todos los controladores lineales consigan controlar al sistema No Lineal se utiliza Lógica Difusa, esta técnica permite una implementación según la forma de razonar del ser humano, la cual es intuitiva y cómoda para un experto en el área de Robótica que esté diseñando controladores No Lineales.

La presente tesis se justifica porque se utiliza conocimientos de Inteligencia Artificial, Control Avanzado y Control No Lineal para el diseño del controlador. Se utiliza técnicas convencionales, así como modernas que son coherentes a los conocimientos impartidos en la maestría.

1.5 Objetivos

1.5.1 Objetivo General

Diseñar un Sistema de Control No Lineal de posición Usando Lógica Difusa y Control H^∞ Basado en Desigualdades Matriciales Lineales aplicado a un Robot Manipulador de 2GL.

1.5.2 Objetivos Específicos

- Desarrollar el modelo lineal dinámico de un robot manipulador de dos grados de libertad en varios puntos de operación.
- Desarrollar un controlador lineal óptimo H^∞ utilizando Desigualdades Matriciales Lineales para varios puntos de operación.
- Utilizar Lógica Difusa para diseñar un controlador No Lineal considerando modelos lineales y controladores lineales.

1.6 Hipótesis

La aplicación de controladores H^∞ Basados en Desigualdades Matriciales Lineales y el uso de Control por Lógica Difusa, permitirán un buen desempeño en el control de posición de un Robot manipulador de 2GL

1.7 Variables e indicadores

1.7.1 Variable Independiente

- Uso de técnicas de control de Lógica Difusa y control óptimo H^∞ para el diseño de controladores no lineales.

Indicadores

- Parámetros de la Lógica Difusa.
- Parámetros del controlador óptimo H^∞

1.7.2 Variables dependientes

- Precisión del control.

Indicador:

- Error absoluto entre la señal de referencia y la señal de salida del ángulo articular de la primera y segunda articulación.

1.8 Unidad de análisis

Para el análisis de resultados se ha considerado sistemas con Lógica Difusa con:

- Función de pertenencia Triangular con nueve reglas
- Función de pertenencia Gaussiana con nueve reglas
- Función de pertenencia Triangular con veinticinco reglas
- Función de pertenencia Gaussiana con veinticinco reglas

Para todos los casos, en cada punto de operación se diseñó controladores óptimos H_∞ utilizando Desigualdades matriciales lineales. Se tomo como señales de referencia señales del tipo senoidal donde se utilizó un total de 250000 muestras para cada uno de los casos anteriormente descrito.

1.9 Tipo y nivel de investigación

Investigación de tipo aplicada experimental. Es aplicada porque se pretende resolver el problema de diseñar un controlador para un robot. Es experimental porque se pretende validar la posibilidad de combinar las técnicas de control por Lógica Difusa y control óptimo H_∞ utilizando Desigualdades matriciales Lineales para el diseño de un sistema de control no lineal de posición de un robot de 2GDL El nivel es para una maestría en ciencias pues se utiliza conocimientos específicos de Lógica Difusa, Control Avanzado, Control No Lineal y modelos no lineales para resolver el problema.

1.10 Periodo de análisis

La obtención del modelo dinámico no lineal del robot, el diseño del controlador, las simulaciones se realizaron desde mayo del 2016 hasta abril del 2019

1.11 Fuentes de información e instrumentos utilizados

Las fuentes de información son artículos científicos y libros relacionados a técnicas de control H_∞ , Desigualdades matriciales Lineales, Lógica Difusa. Se utilizó la herramienta IEEE Xplore Digital Library, para la búsqueda de artículos como fuente de información.

1.12 Técnicas de recolección y procesamiento de datos

Para la recolección de datos se utilizó el software MATLAB y se crearon tablas en Excel par almacenar los datos para luego procesarlos.

CAPITULO II

MARCO TEORICO

2.1 Lógica Difusa

El concepto de Lógica Difusa, Lógica imprecisa, Lógica Borrosa o Fuzzy Logic fue desarrollado en 1965 por Lotfi A. Zadeh, un profesor de la Universidad de California en Berkeley, quien combino los conceptos de la lógica y de los conjuntos de Lukasiewicz mediante la definición de grados de pertenencia, inicialmente no fue presentada como una metodología de control, pero si como una forma de procesar información permitiendo conjuntos parciales, algo que los conjunto en matemática clásica no permite. Esta teoría no fue aplicada a sistemas de control hasta los años 70 debido a la insuficiente capacidad de las pequeñas computadoras de ese entonces.

La Lógica Difusa es un súper conjunto de la lógica convencional (booleana), la lógica difusa se desarrolló para describir el concepto de verdad parcial, valores verdaderos entre “completamente verdadero” y “completamente falso”. La Lógica Difusa es básicamente una lógica multivaluada que permite valores intermedios para definir evaluaciones convencionales como sí/no, verdadero/falso, negro/blanco, etc. Las nociones como “bien caliente” o “poco frío” pueden formularse matemáticamente y ser procesados por computadoras.

Una de las características de la Lógica Difusa es que la representación de los conocimientos en la programación de computadores se expresa de una manera cercana a la forma de pensar de los seres humanos.

Dentro de los aspectos que han ayudado a la expansión de los sistemas difusos, se puede citar la capacidad de manejar la incertidumbre (expresada en conocimiento incompleto de un evento o en altos niveles de ruido en la información), la posibilidad de incorporar heurística (experiencia humana expresada en reglas informales) (Ceccaroni & Verdaguer, 2003) y su no-linealidad implícita. Estas características permiten establecer analogías con el comportamiento de los seres humanos y de forma más general de los sistemas biológicos. A pesar de su naturaleza altamente simbólica, los sistemas difusos

tienen gran facilidad para tratar con valores numéricos, y ofrecen mecanismos para la conversión entre ambos mundos.

Como ejemplo, las decisiones de diagnóstico que un médico toma, son en general subjetivas y basadas en su experiencia. La valoración de un examen de laboratorio obedece a reglas muy exactas, pero con valores relativamente imprecisos (por ejemplo ¿a partir de qué punto una fiebre es “alta”? ¿Con una décima de grado por debajo de ese límite, la fiebre deja de ser “alta”?).

Existen bastantes trabajos de sistemas expertos aplicados a este campo, pero dos de las grandes dificultades que presentan, es la obtención y posterior conversión del conocimiento del (los) médico(s) al marco de representación escogido y los niveles de incertidumbre manejados. La explicación es que una representación difusa se encuentra mucho más cercana a la forma de expresión habitual de los médicos (forma de pensar humana), lo que facilita la adquisición y la actualización del conocimiento.

Inicialmente (años 70 y principalmente 80), los sistemas difusos fueron utilizados para implementar rápidamente conocimiento experto en procesos de difícil modelamiento matemático (por ejemplo, control de procesos, sistemas automatizados de transporte), además su alta interacción con las representaciones numéricas y su fácil conversión en sistemas de hardware/software que son bastante sencillos facilita su introducción en aplicaciones de todo tipo (cámaras de vídeo, lavadoras, etc.). En sus inicios de las aplicaciones de la Lógica Difusa a sistemas reales se mencionan, en 1978 Holmblad y Ostergaard desarrolló el primer controlador difuso para un proceso industrial, (fábrica de cemento). En 1980, Sugeno desarrolló la primera aplicación japonesa de la lógica difusa, en este caso se aplicó para el diseño del control de una planta de purificación de agua, en 1983 Sugeno, aplica la lógica difusa en robots. Una de las principales aplicaciones iniciales de lógica difusa fue en 1987 en Japón, en la ciudad de Sendai, en esta aplicación se controla el arranque y frenado suave del metro de modo tal que los pasajeros no se vean afectados consiguiéndose buenos resultados. Actualmente se usa en muchas otras ciudades. En 1989 Yamakawa demuestra un sistema difuso para balancear un péndulo invertido. En 1993 el IEEE inaugura la Sociedad de Sistemas Difusos,

En Occidente la acogida de la Lógica Difusa fue menos positiva. Tal vez tiene que ver probablemente con la cultura. En Oriente aceptan que el mundo no es blanco o negro,

verdad o mentira si no que asignan escalas en su percepción del mundo. En Occidente todo es A o B, mientras que en la Lógica Difusa todo es cosa de grados.

Ahora se buscan aplicaciones en la economía, sistema financiero, en medicina, etc. En la concesión de créditos el formulario de solicitud de préstamo va a una máquina que decide si lo concede o no. El propio programa establece los criterios según su experiencia, sabe que es muy probable que, si el solicitante tiene una posición económica estable y si sus ingresos son altos, es altamente probable que devuelva el crédito. En medicina también se usa Lógica Difusa, un ejemplo es al momento de anestesiarse un paciente, sin embargo, en este caso solamente se usa la Lógica Difusa como asistente por que la decisión final la toma el médico especialista.

Una de las preguntas que se puede hacer es ¿algún día serán las máquinas mejores que los humanos? A esta pregunta se puede decir que, en tareas imprecisas, como traducir, o resumir un texto, las máquinas tardarían muchos años en hacerlo mejor que el hombre. Los humanos tienen habilidades que aún no se entienden bien, y entenderlas bien es indispensable para enseñarlas a las máquinas (Rodríguez, 1999).

La lógica difusa se está utilizando ampliamente en el control del funcionamiento automático o semiautomático de aparatos y equipos. Los casos más conocidos son: cámaras fotográficas y vídeo cuyo método de focalización utiliza estas técnicas, otro ejemplo son los trenes o subterráneos cuyo sistema de frenos y aceleradores son accionados por mecanismos que utilizan lógica difusa y también se utiliza en lavadoras, centrales nucleares, etc.

2.2 Conjuntos

2.2.1 Conjunto clásico

Se entiende por conjunto clásico a una colección, agrupación o reunión de objetos de cualquier especie siempre que exista un criterio preciso que permita que un objeto pertenezca o no a dicha agrupación. Los objetos que “pertenecen a un conjunto” se llama elementos del conjunto. (Espinoza Ramos, 2005) Los elementos de un conjunto se pueden determinar ya sea por extensión o comprensión.

- a) Por extensión: Cuando se nombra cada uno de los elementos del conjunto.

- b) Por comprensión: Cuando se da una propiedad P, que solo lo satisfacen los elementos del conjunto.

Función de un conjunto.

Sea f una función de A en B y sea T un subconjunto de A , es decir, $A \xrightarrow{f} B$ y $T \subset A$ también se considera que $f(T) \subset B$. Entonces $f(T)$, se define como un conjunto de las imágenes de los elementos de T .

Función característica

Sea A un subconjunto cualquiera de un conjunto universal U . La función numérica real (Lipschutz, Teoría de Conjuntos y Temas Afines, 1991).

$$x_A: U \rightarrow \{1,0\}$$

Definida por

$$x_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \quad (2.1)$$

Se llama función característica de A . Donde $\{0,1\}$ se refiere solamente a dos valores.

2.2.2 Conjunto difuso

En 1965, Lotfi zadeh propuso la idea de un conjunto difuso, un conjunto difuso es único cuyos objetos pertenecen a diferentes grados, llamados grados de pertenencia. Para medir el grado pertenencia de un miembro de un conjunto difuso se le asigna un número que oscila de 0 (absolutamente falso) hasta 1 (absolutamente verdadero). Así como hay una fuerte relación entre la lógica booleana y el concepto de un conjunto, existe de forma similar una fuerte relación entre lógica difusa y la teoría de conjunto difuso.

En la Teoría de la Lógica Difusa los conjuntos no difusos son llamados conjuntos “crisp” y sus elementos o valores son llamados de igual manera valores “crisp”, y de esta manera se hace referencia a dichos conjuntos clásicos.

Función de pertenencia

Dado un conjunto universo X y un conjunto difuso \underline{A} , se define la función $\mu_{\underline{A}}(x)$, para cualquier elemento x , tal que $0 \leq \mu_{\underline{A}}(x) \leq 1$, a $\mu_{\underline{A}}(x)$ se le llama función de pertenencia. El valor de $\mu_{\underline{A}}(x)$ se llama grado de pertenencia de x . La función de pertenencia $\mu_{\underline{A}}$ de un conjunto difuso \underline{A} es una función definida por:

$$\mu_{\underline{A}}: X \rightarrow [0,1] \quad (2.2)$$

Donde $[0,1]$ es un intervalo real.

Representación de conjuntos difusos

Cuando X es un dominio finito, un conjunto difuso \underline{A} en X , un conjunto difuso se puede representar de tres formas las cuales se detallan a continuación. (Hao Ran, 2018)

Representación de Zadeh

$$\underline{A} = \sum_{x \in X} \frac{\mu_{\underline{A}}(x_i)}{x_i} \quad (2.3)$$

En la ecuación (2.3) no se entiende como fracciones o sumas, sino la relación del grado de pertenencia $\mu_{\underline{A}}(x_i)$ de x_i a \underline{A} , y la sumatoria representa el conjunto difuso global en el dominio X .

Par ordenado

$$\underline{A} = \{(x, \mu_{\underline{A}}(x)), x \in X\} \quad (2.4)$$

Así, cada elemento x de X tiene un grado de pertenencia que es completamente determinado por el conjunto de duplas de la ecuación (2.4).

Vector

$$\underline{A} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n\} \quad (2.5)$$

2.2.3 Razonamiento Aproximado

El Razonamiento es la habilidad de inferir información sobre alguna faceta desconocida de un problema a partir de la información disponible, por ejemplo, cuando un sistema falla, se intenta descubrir por qué ha fallado observando los síntomas. En tareas de ingeniería es habitual aplicar técnicas que requieren razonamiento. La teoría del razonamiento aproximado permite representar también cuantificadores lingüísticos, esto facilita representar enunciados como “la mayoría de los coches lujosos son caros”. Zadeh indicó que un cuantificador como “la mayoría” puede ser representado como un conjunto difuso sobre un universo de discurso. Los cuantificadores aproximados se usan para representar al sentido común.

2.2.4 Operaciones con conjuntos difusos

De igual modo que para los conjuntos convencionales, están definidas las operaciones de igualdad, complemento, unión, intersección e inclusión, las cuales se emplean con mucha frecuencia en conjuntos difusos.

- **Igualdad**

Dado los conjuntos difusos \underline{A} y \underline{B} definidos en el mismo universo de discurso U con sus funciones de pertenencia $\mu_{\underline{A}}(x)$ y $\mu_{\underline{B}}(x)$ respectivamente, se dice que \underline{A} y \underline{B} son iguales si y solo si

$$\mu_{\underline{A}}(x) = \mu_{\underline{B}}(x) ; \forall x \in U \quad (2.6)$$

- **Unión**

La unión de los conjuntos difusos \underline{A} y \underline{B} es un conjunto difuso en U , denotado por $\underline{A} \cup \underline{B}$, cuya función de pertenencia se define por:

$$\mu_{\underline{A} \cup \underline{B}}(x) = \max(\mu_{\underline{A}}(x), \mu_{\underline{B}}(x)) ; \forall x \in U \quad (2.7)$$

La unión de dos conjuntos difusos se ilustra en la figura 2.1. Donde los trazos más gruesos indican $\mu_{\underline{A} \cup \underline{B}}(x)$

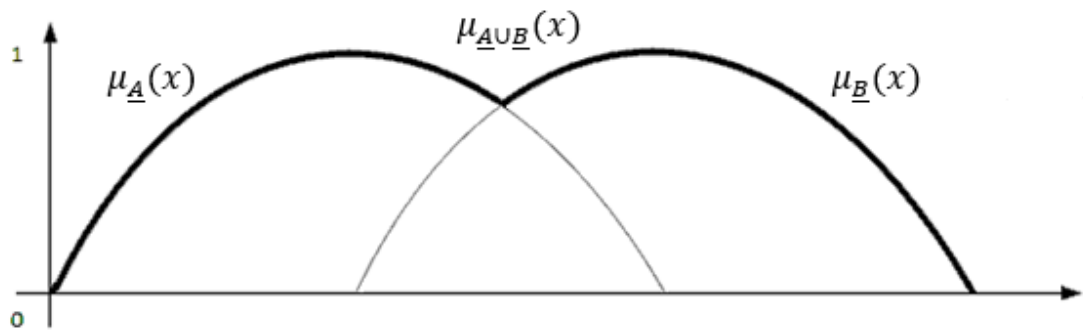


Figura 2.1: Función de pertenencia $\underline{A} \cup \underline{B}$

- **Intersección**

La intersección de los conjuntos difusos \underline{A} y \underline{B} es un conjunto difuso $\underline{A} \cap \underline{B}$ en U con la función de pertenencia definida como:

$$\mu_{\underline{A} \cap \underline{B}}(x) = \min(\mu_{\underline{A}}(x), \mu_{\underline{B}}(x)) ; \forall x \in U \quad (2.8)$$

Las primeras definiciones, conocidas como min y max, fueron formuladas por Zadeh. La intersección de dos conjuntos Difusos se muestra en la figura 2.2

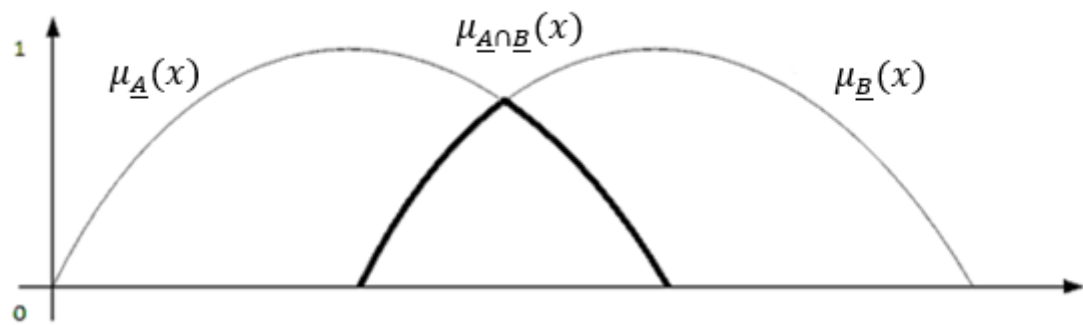


Figura 2.2: Función de pertenencia $\underline{A} \cap \underline{B}$

- **Complemento**

El complemento del conjunto Difuso \underline{A} está definido por la función de pertenencia siguiente:

$$\mu_{\overline{\underline{A}}}(x) = 1 - \mu_{\underline{A}}(x) ; \forall x \in U \quad (2.9)$$

El complemento del conjunto Difuso \underline{A} se ilustra en la figura 2.3.

- **Inclusión**

Se dice que un conjunto Difuso \underline{B} contiene a un conjunto Difuso \underline{A} , y se denota por $\underline{A} \subset \underline{B}$, si y solo si:

$$\mu_{\underline{A}}(x) \leq \mu_{\underline{B}}(x); \forall x \in U \quad (2.10)$$

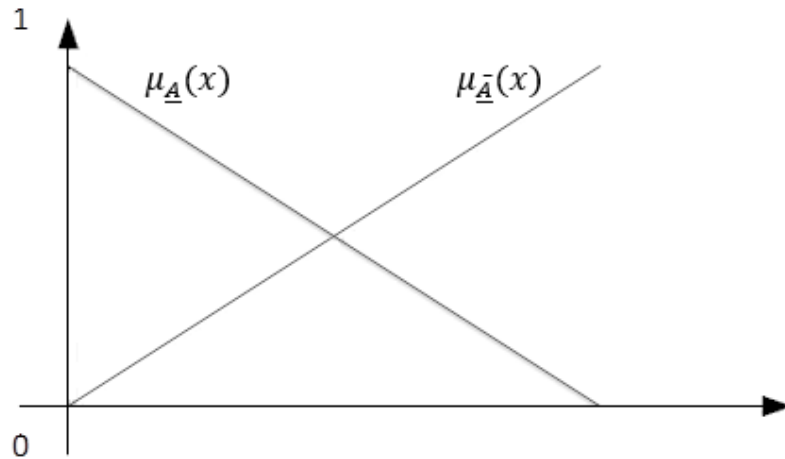


Figura 2.3: Función de pertenencia complemento

Las leyes de Morgan también se cumplen en la teoría de conjuntos difusos, esto es:

$$\begin{aligned} \overline{\underline{A} \cup \underline{B}} &= \overline{\underline{A}} \cap \overline{\underline{B}} \\ \overline{\underline{A} \cap \underline{B}} &= \overline{\underline{A}} \cup \overline{\underline{B}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.3 Variable lingüística

Si a una variable se puede asignar palabras en el lenguaje natural como sus valores, entonces se le puede denominar variable lingüística, por lo que las palabras son caracterizadas por conjuntos difusos, definidos en el universo de discurso en el que la variable es definida.

La definición de una variable lingüística está caracterizada por un quinteto $(A, T(A), U, G, M)$, en el que:

- A : es el nombre de la variable lingüística
- T(x): es el conjunto de términos que nombra a los valores x que puede tomar A
- U : universo de discurso
- G : regla sintáctica para generar los nombres de los valores de x

M : regla semántica para asociar un significado a cada valor

Si se define a la temperatura como variable lingüística A, entonces se puede definir un conjunto de términos lingüísticos como; “muy baja”, “baja”, “media”, “alta”, y “muy alta” como se muestra en la figura 2.4.

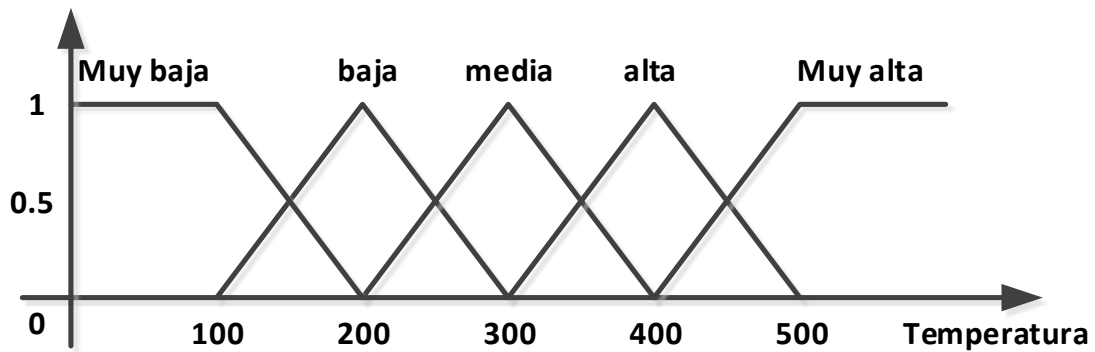


Figura 2.4: Variable lingüística temperatura

El universo de discurso para la variable temperatura es el conjunto convencional que abarca la gama completa de valores que en el caso dado puede asumir el intervalo de temperatura $U = [0^{\circ}\text{C}, 800^{\circ}\text{C}]$.

La regla sintáctica G determina el orden de las palabras de los valores lingüísticos de temperatura: como en “alta”, “muy alta”, donde “muy” es un modificador que precede al término primario “alta”.

La regla semántica M asocia cada valor lingüístico con el respectivo su significado: {“muy alta” es mayor alrededor de 500} y {“muy baja” es menor alrededor de 100}, etc.

2.4 Funciones de pertenencia

Función de pertenencia de forma triangular. Esta función está especificada por tres parámetros $\{a,b,c\}$, que determina las coordenadas de los tres ángulos, del siguiente modo:

$$\mu_T(x; a, b, c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right) \quad (2.12)$$

También se puede especificar por la siguiente ecuación:

$$\mu_{Triangulo}(x; a, b, c) = \begin{cases} 0; & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}; & a \leq x < b \\ \frac{c-x}{c-b}; & b \leq x < c \\ 0; & x > c \end{cases} \quad (2.13)$$

En la figura 2.5 se muestra la función de pertenencia triangular.

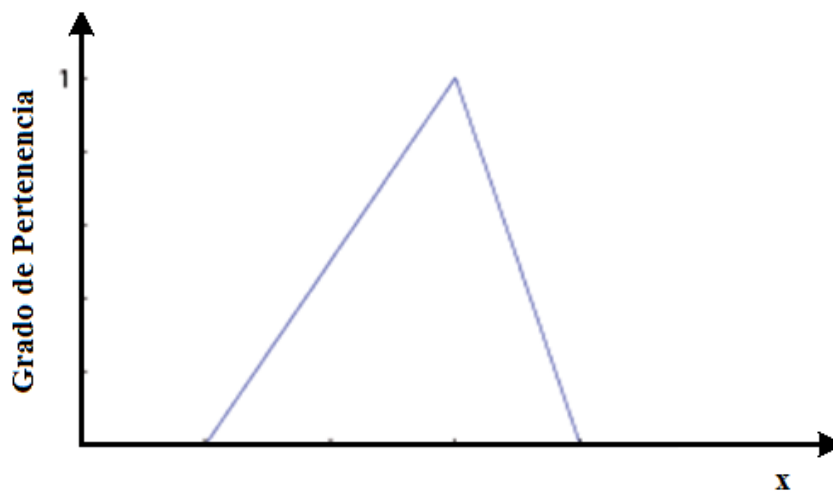


Figura 2.5: Función de Pertenencia de forma Triangular

Función de pertenencia de forma trapezoidal. Esta función esta especificada por cuatro parámetros {a, b, c, d}, del siguiente modo:

$$\mu_{Tr}(x; a, b, c, d) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right) \quad (2.14)$$

También se puede especificar por la siguiente ecuación:

$$\mu_{Trapezoidal}(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0; & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}; & a \leq x < b \\ 1; & b \leq x < c \\ \frac{d-x}{d-c}; & c \leq x < d \\ 0; & x > d \end{cases} \quad (2.15)$$

En la figura 2.6 se muestra la función de pertenencia trapezoidal.

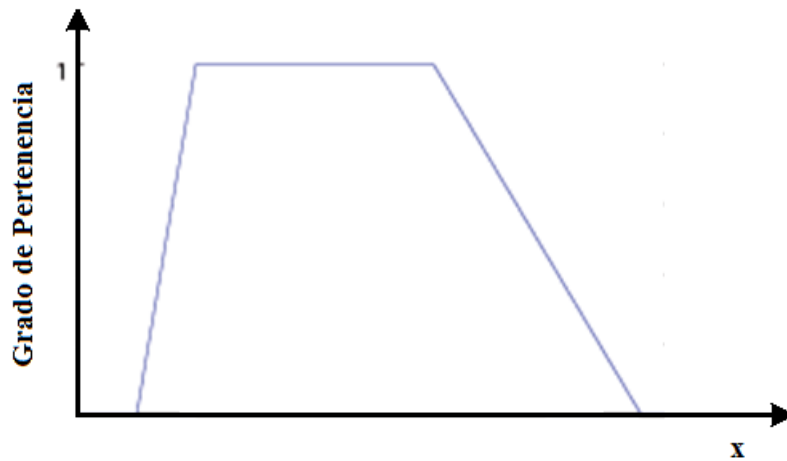


Figura 2.6: Función de Pertenencia de forma Trapezoidal

Función de pertenencia de forma Gaussiana. Esta función está especificada por dos parámetros $\{\sigma, c\}$, del siguiente modo:

$$\mu_G(x; \sigma, c) = e^{-0.5\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2} \quad (2.16)$$

Donde c es el centro de la distribución Gaussiana y σ es la desviación que tiene la distribución Gaussiana, en la figura 2.7 se muestra la función de pertenencia de la forma Gaussiana.

Función de pertenencia de forma campana generalizada. La cual está especificada por tres parámetros $\{a, b, c\}$, donde el parámetro a define el ancho de función de pertenencia, el parámetro b determina la pendiente en los puntos de cruce y el parámetro c es el centro de distribución.



Figura 2.7: Función de Pertenenca de forma Gaussiana

$$Campana(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b}} \quad (2.17)$$

En la figura 2.8 se muestra la función de pertenencia de la forma campana generalizada.

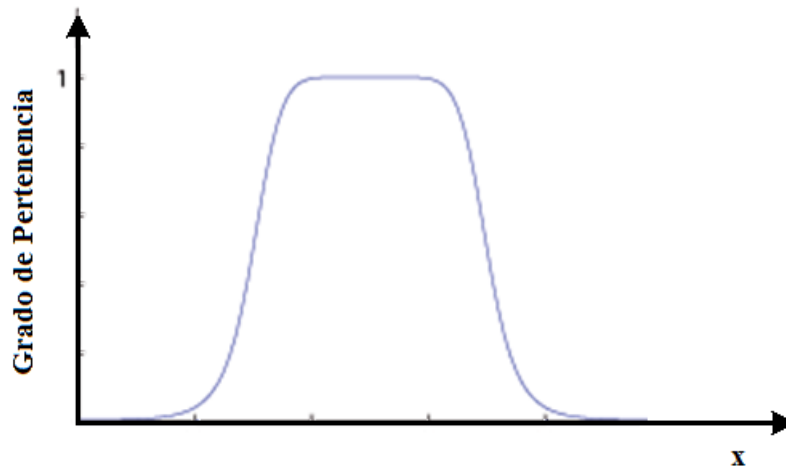
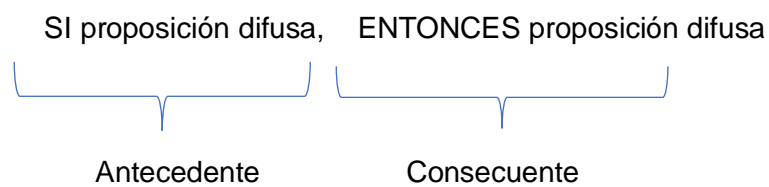


Figura 2.8: Función de Pertenencia de forma Campana Generalizada

2.5 Reglas difusas SI-ENTONCES

Las reglas difusas SI -ENTONCES es una expresión condicional que tiene la forma siguiente:



2.5.1 Proposiciones difusas

Existen dos tipos de proposiciones difusas:

- Proposiciones atómicas difusas
- Proposiciones compuestas difusas

Una proposición atómica difusa es una sentencia simple

$$x \text{ es } A \quad (2.18)$$

Donde x es una variable lingüística y A es un valor lingüístico de x . Una proposición difusa compuesta es una composición de proposiciones atómicas difusas usando los conectores “y”, “o” y “no” que representa la intersección difusa, unión difusa y complemento difuso respectivamente, algunas notaciones de proposiciones difusas son:

$$\begin{aligned} x \text{ es } S \text{ o } x \text{ es no } M \\ x \text{ es no } S \text{ y } x \text{ es } F \end{aligned} \quad (2.19)$$

2.5.2 Interpretación de las reglas difusas SI-ENTONCES

Debido a que las proposiciones difusas son interpretadas como relaciones difusas, la pregunta es cómo interpretar la operación SI-ENTONCES. En el cálculo proposicional clásico la expresión *SI p ENTONCES q* se escribe como $p \rightarrow q$ donde p y q son variables proposicionales, donde su función de verdad esta descrita en la siguiente tabla:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla 2.1: Proposición Implicativa

También se puede utilizar las siguientes equivalencias de $p \rightarrow q$

$$\bar{p} \vee q \quad (2.20)$$

$$(p \wedge q) \vee \bar{p} \quad (2.21)$$

Las reglas difusas SI-ENTONCES se pueden obtener reemplazando p y q con proposiciones difusas, se pueden interpretar las reglas difusas SI-ENTONCES reemplazando los operadores \vee , \wedge , $\bar{}$ son los operadores unión difusa, intersección difusa y el complemento difuso respectivamente. En la literatura de la Lógica Difusa existen diferentes interpretaciones de las reglas difusas SI-ENTONCES, a continuación, se dan a conocer algunas de ellas.

- **Implicación de Dienes-Rescher** Las reglas difusas SI FP_1 ENTONCES FP_2 es interpretada como una relación difusa Q_D en $U \times V$, con la función de pertenencia:

$$\mu_{Q_D}(x, y) = \max [1 - \mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)] \quad (2.22)$$

Donde x , y son variables lingüísticas definidas en el universo de discurso U y V respectivamente

- **Implicación de Zadeh** Partiendo de la ecuación (2.23), la función de pertenencia se define como:

$$\mu_{Q_Z}(x, y) = \max [\min(\mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)), 1 - \mu_{FP_1}(x)] \quad (2.23)$$

- **Implicación de Mandani** La función de pertenencia se define por:

$$\mu_{Q_{MM}}(x, y) = \min(\mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)) \quad (2.24)$$

La implicación Mandani es ampliamente utilizado en sistemas difusos y sobre todo en control difuso.

2.6 Modelo Difuso Takagi Sugeno

El modelo Difuso Takagi Sugeno (También conocido como modelo Fuzzy TSK), fue propuesto por Takagi, Sugeno y Kang, presenta una regla Difusa típica que tiene la siguiente forma:

$$\boxed{\text{Si } x \text{ es } A \text{ y } w \text{ es } B \text{ entonces } z = f(x, w)} \quad (2.25)$$

Donde A y B son conjuntos Difusos en la parte antecedente y $z = f(x, w)$ es una función booleana (Crisp) en la parte consecuente. Cuando $f(x, w)$ es un polinomio de primer orden, la inferencia Difusa resultante es llamada modelo Difuso Sugeno de primer orden. En la figura 2.9 se muestra un modelo Difuso Sugeno.

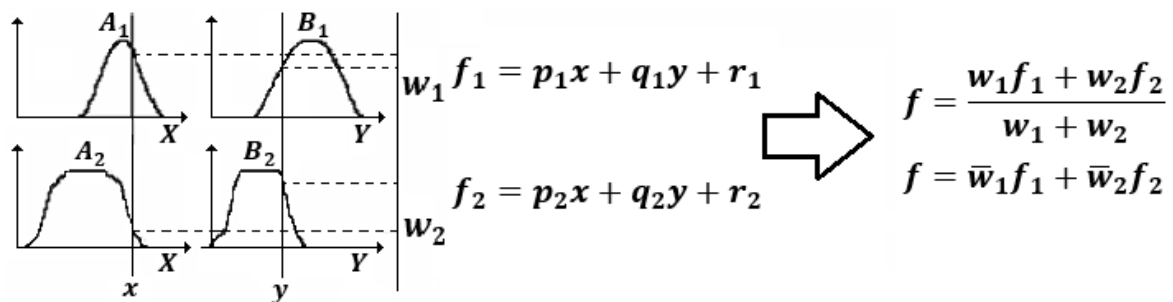


Figura 2.9: Modelo Difuso Sugeno

2.7 Control Difuso

Un sistema de control básico se muestra en la figura 2.10 El proceso (o planta) es el objeto a ser controlado, la variable de entrada es $u(t)$ y la variable de salida es $y(t)$, y la variable de referencia es $r(t)$. La teoría de control convencional proporciona numerosos métodos para la construcción de controladores para sistemas dinámicos.

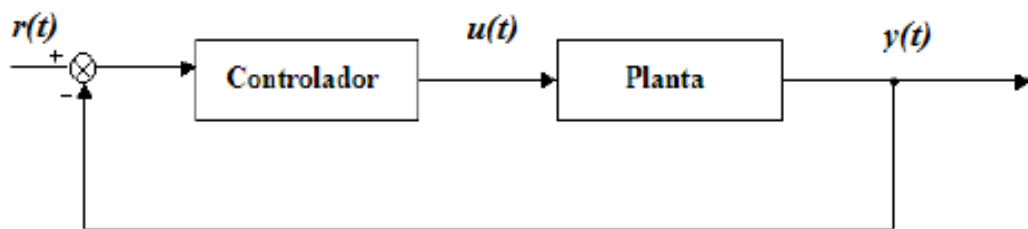


Figura 2.10 Sistema de control

En general, los controladores difusos son sistemas que emplean el conocimiento como fundamento, expresado en términos de reglas difusas y de un proceso de inferencia para resolver un problema de control dado. Los controladores difusos a diferencia de los controladores clásicos son capaces de utilizar el conocimiento obtenido de operadores humanos.

2.8 Partes de un controlador Difuso

Un controlador Difuso está compuesto básicamente por los siguientes módulos:

- Fusificación
- Base de conocimiento
- Defusificación

En la figura 2.11 se muestra la estructura de un controlador difuso.

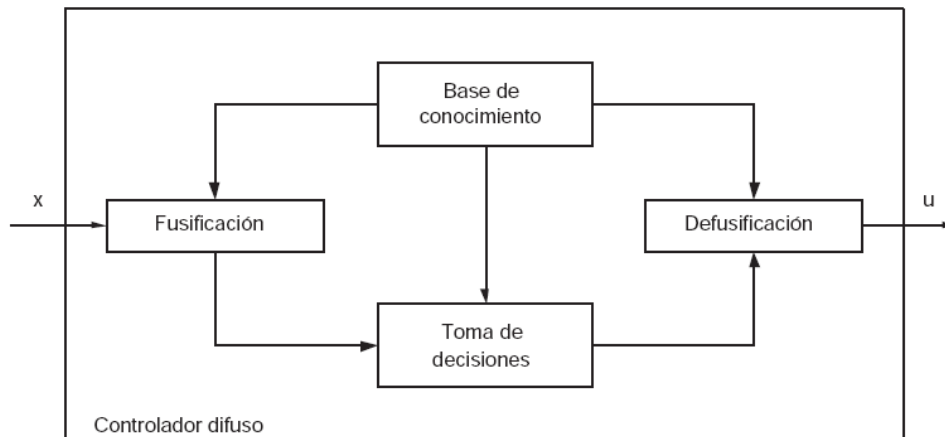


Figura 2.11: Diagrama de bloques del controlador difuso

2.8.1 Fusificación

Es el proceso de medición de las variables de entrada al regulador, eventualmente se normalizan los valores de dichas variables en una gama pre establecida (grado de pertenencia) y se convierten a valores lingüísticos que puedan ser vistos como rótulos de conjuntos Difusos.

Si bien un operador humano procesa cualitativamente el estado (respuesta) del proceso, lo cierto es que objetivamente cada variable tiene un valor (determinista) dado y tales valores son los que se ingresan al controlador de lógica difusa.

2.8.2 Base de conocimiento

En este módulo se definen las reglas que tiene que cumplir el sistema, la estructura utilizada para este caso es la siguiente:

$$\boxed{\textit{Si (variable) es (variable) Entonces}} \quad (2.26)$$

La lógica difusa representa los conocimientos de una forma cercana a la forma de pensar humana.

2.8.3 Defusificación

En este módulo también se encuentra el bloque de toma de decisiones, existen varios modelos para realizar la defusificación, tales como:

- Modelo Mandani
- Modelo Takagi-Sugeno
- Modelo Tsukamoto

Para el caso particular de esta Tesis se desarrolla el modelo Difuso Takagi Sugeno. La defusificación convierte los valores difusos de las variables de salida en valores concretos dentro del universo de discurso correspondiente. Existen diversos métodos de defusificación, a continuación, se presentan algunos:

- **Máximo.** Consiste en tomar el máximo valor del conjunto difuso.

$$y = \sup_{y \in Y} (\mu_A(y)) \quad (2.27)$$

- **Mayor de los Máximos.** Consiste en tomar el mayor valor de todos aquellos que generan el valor máximo del conjunto difuso.
- **Menor de los Máximos.** Consiste en tomar el menor valor de todos aquellos que generan el valor máximo del conjunto difuso.
- **Media de los Máximos.** Consiste en tomar la media de los valores máximos del conjunto difuso

$$y = \frac{\sum_{m=1}^M y_n \cdot \mu_{\bar{A}_{nm}}(y_n)}{\sum_{m=1}^M \mu_{\bar{A}_{nm}}(y_n)} \quad (2.28)$$

- **Centro de área o centroide.** Consiste en calcular el centroide del conjunto difuso usando la ecuación (2.29)

$$y = \frac{\int_a^b \mu(x) \cdot x}{\int_a^b \mu(x)} \quad (2.29)$$

- **Bisector de Area.** Consiste en calcular el valor que separa el área bajo la curva en dos sub áreas iguales.

En la figura 2.12 se muestra los diferentes métodos de defusificación.

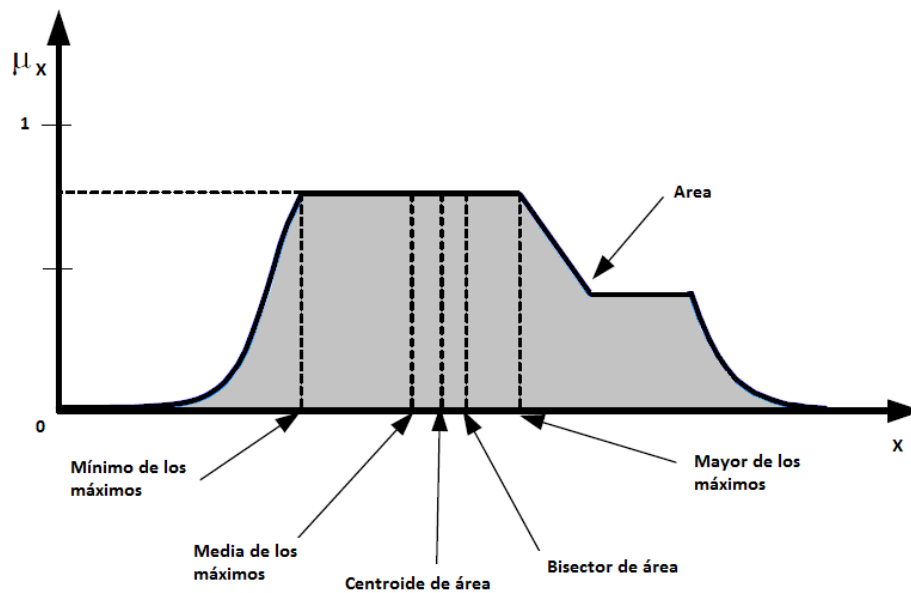


Figura 2.12: Métodos de Defusificación

2.9 Tipos de Controladores Difusos

Los controladores difusos se pueden clasificar en dos tipos:

1. Controlador tipo Mamdani.
2. Controlador tipo Takagi-Sugeno.

La principal diferencia entre estos controladores radica en la consecuencia de las reglas. Para el controlador tipo Mamdani esta consecuencia es un conjunto difuso y para el tipo Takagi-Sugeno es una función lineal de las entradas.

En este trabajo se utiliza el controlador tipo Takagi-Sugeno con función lineal constante como consecuencia de sus reglas. Donde el ciclo de operación tiene los siguientes pasos.

1. Fusificación de los datos de entrada, es decir convertirlos en conjuntos difusos.
2. Obtención de una base reglas. El controlador de Takagi-Sugeno tiene la particularidad de que las reglas que definen su funcionamiento son de la forma $IF\ x\ is\ A\ AND\ y\ is\ B\ THEN\ z = f(x, y)$
3. Obtención de la inferencia de la base de reglas, es decir, extracción de la conclusión de cada una de las reglas. Con estas reglas se realiza primero para algunos valores de entradas dadas del proceso o del sistema $x.1, \dots, x.n, \dots, x.N$, sus grados de pertenencia, son calculados y llamados antecedentes de reglas o pesos de reglas,

se obtiene el mínimo (Implicación del mínimo) de los N grados de pertenencia para la regla m .

4. Finalmente, la salida combinada de todas las reglas es la suma de los pesos normalizados de todos los pares, es decir se utiliza el proceso de defusificación.

2.10 Sistemas Difusos como Aproximador de Funciones

Un sistema difuso puede aproximar cualquier función uniformemente continua real en un dominio compacto (Cerrado y Acotado) a cualquier grado de exactitud (Kosko, 1994) . Dado un valor continuo real arbitrario evaluado en una función f sobre un conjunto compacto, es posible encontrar una relación difusa tal que el sistema difuso asociado aproxime a f (Kosko, 1994).

Esencialmente un sistema Difuso usado para aproximar funciones está compuesto por las etapas de fusificación, reglas difusas y defusificación.

Cada entrada pertenece en algún grado a cada conjunto difuso de entrada, de este modo cada entrada dispara todas las reglas difusas en algún grado, las reglas se establecen como:

$$R(m) \equiv \text{Si } x \text{ es } L_x \text{ Entonces } z \text{ es } L_z, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (2.30)$$

Donde $R(m)$ representa las reglas, M es el número de reglas *Si x es L_x es el antecedente y z es L_z es el consecuente.* Cada regla $R(m)$ puede traducirse en una relación difusa \tilde{R}_m (conjunto difuso bidimensional, llamado así porque está formado por dos conjuntos difusos).

2.10.1 Aproximador de una Función Senoidal

Para analizar un sistema difuso como aproximador, se implementa la simulación de un aproximador para la función seno, para ello se ha utilizado el programa MATLAB.

Para conseguir la aproximación se hace uso de un sistema tipo Takagi-Sugeno, con una entrada y una salida, para la etapa de defusificación se utiliza el centro de área, el cual está dado por la ecuación;

$$F = \frac{\sum_{i=1}^R y_i w_i}{\sum_{i=1}^R w_i}, \quad (2.31)$$

Donde w_i son las reglas activadas tomando en consideración los valores de la variable de entrada, las cuales se calculan mediante el operador de intersección. En el caso particular del aproximador de una onda senoidal, el cual presenta una entrada y una salida, se considera $w_i = \mu_{i1}$

El sistema difuso tiene la variable de entrada x y como salida genera la aproximación de la función seno, los datos de entrada varían desde 0 hasta 2π radianes con un intervalo de 0.01.

El primer paso para realizar el aproximador es fusificar los datos de entrada para ello se usa la función de pertenencia de Gauss. El centro y la anchura se ajustan en el rango de $[0, 2\pi]$, en la figura 2.13 se muestran las funciones de pertenencia utilizadas.

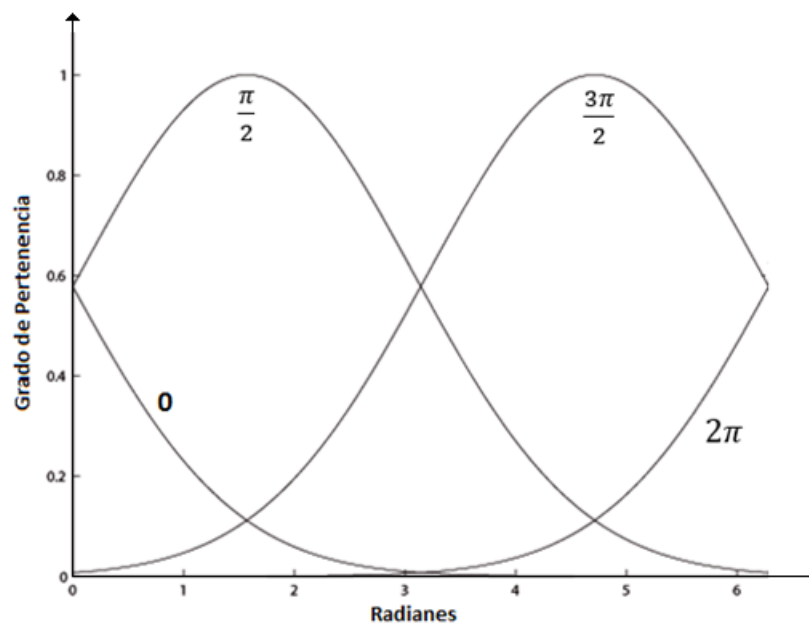


Figura 2.13: Función de pertenencia del aproximador

La base de reglas utilizadas es la siguiente:

SI x está cercana a cero ENTONCES y está cercana a cero

SI x está cercana a $\frac{\pi}{2}$ ENTONCES y está cercana a uno

SI x está cercana a $\frac{3\pi}{2}$ ENTONCES y está cercana a menos uno

SI x está cercana a 2π ENTONCES y está cercana a cero

Los parámetros del consecuente llamados también pesos se muestran en la tabla 2.2.

El proceso consiste en hacer pasar cada uno de los datos de entrada x cuyo rango está en $[0, 2\pi]$ con un intervalo de 0.01. En la figura 2.14 se muestra el resultado de la aproximación de la función senoidal comparado con la función conocida (función ideal seno).

Numero de	Consecuente
1	-1.564
2	1.569
3	-1.569
4	1.564

Tabla 2.2: Consecuentes de las Reglas

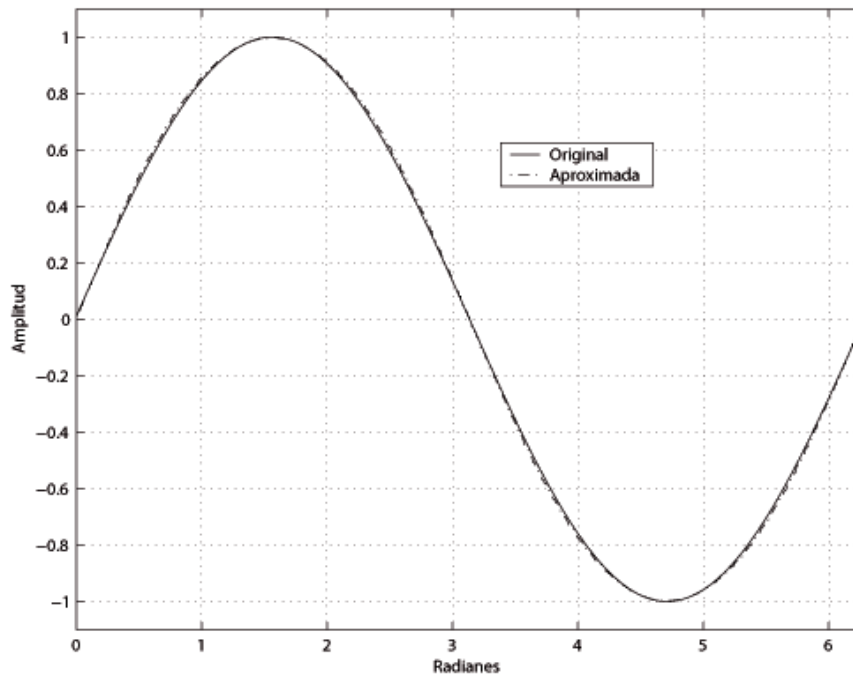


Figura 2.14: Aproximación Seno

En la figura 2.14 se muestra que la aproximación obtenida de la función senoidal presenta una buena precisión y se puede concluir que la lógica difusa es una herramienta muy útil para realizar aproximaciones de funciones no lineales.

2.11 Control H_∞

En los inicios de la década de los 80s surgió la Teoría de Control H_∞ , fue George Zames quien publicó esta Teoría en su artículo seminal (Zames, 1981) el cual combina los enfoques en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.

2.11.1 Problema de control general

El problema de diseño consiste en obtener un controlador K que permita conseguir un rechazo o atenuación considerable de la perturbación ($S \approx 0$), al menos en la zona de frecuencias de atenuación de la perturbación. Esto sucede si se minimiza la norma H_∞ de la función de transferencia de w a z . En forma general, considerando el sistema descrito mediante el diagrama de bloques se muestra en la figura 2.15:

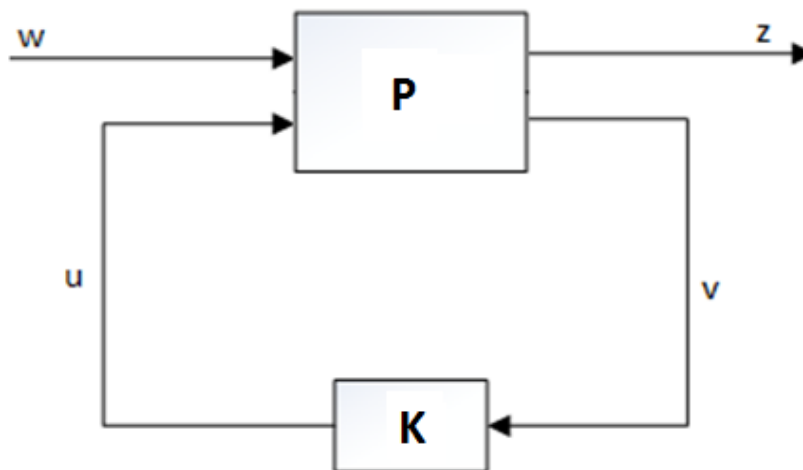


Figura 2.15: Sistema de control incluyendo las entradas exógenas

Del esquema de la figura 2.15, w representa a las entradas exógenas, z representa a las salidas, u representa la señal de control y v representa las salidas medidas, considerando el diagrama de bloques de la figura 2.15, las entradas y salidas para la planta generalizada se define como:

$$w = \begin{bmatrix} d \\ r \\ n \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$z = \begin{bmatrix} u \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ y - r \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Un diagrama de bloques equivalente de la figura 2.15 se muestra en la figura 2.16, del diagrama de bloques de la figura 2.16 se obtiene.

$$z = \begin{bmatrix} u \\ y - r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ Gu + d - r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0d + 0r + 0n + Iu \\ Id - Ir - 0n - Gu \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$v = r - y_m = r - Gu - d - n = -Id + Ir - In - Gu \quad (2.35)$$

La matriz P que representa las funciones de transferencia de $[\omega u]^T$ a $[z v]^T$ se define como:

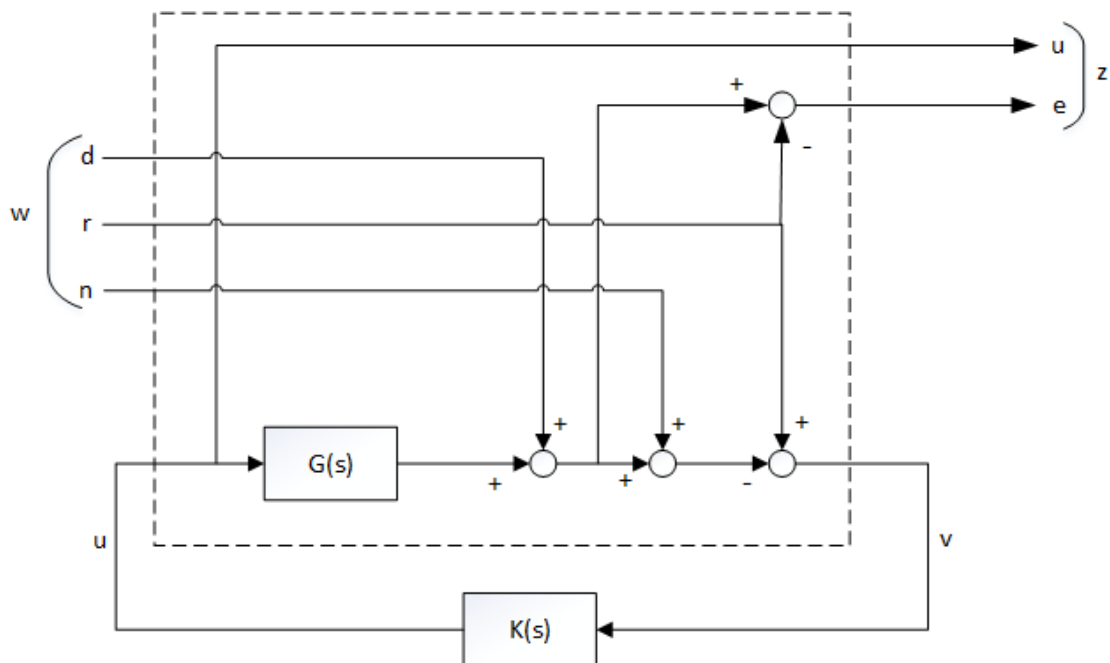


Figura 2.16: Sistema de control detallando las variables exógenas

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ I & -I & 0 & G \\ -I & I & -I & -G \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Particionando la planta generalizada P se obtiene:

$$P = \left[\begin{array}{c|c} P_{zw} & P_{zu} \\ \hline P_{vw} & P_{vu} \end{array} \right] \quad (2.37)$$

Tal que las partes sean compatibles con las señales ω, z, u y v en la configuración generalizada:

$$z = P_{zw} \omega + P_{zu} u \quad (2.38)$$

$$v = P_{vw} \omega + P_{vu} u \quad (2.39)$$

La ley de control u se expresa como:

$$u = Kv \quad (2.40)$$

Expresando el vector z en función de ω se obtiene:

$$z = [P_{zw} + P_{zu}K(I - P_{vu}K)^{-1}P_{vw}]w \quad (2.41)$$

De esta última ecuación, la función de transferencia en lazo cerrado se expresa como:

$$T_{zw} = \frac{z}{w} = [P_{zw} + P_{zu}K(I - P_{vu}K)^{-1}P_{vw}] \quad (2.42)$$

A la ecuación (2.42) se le conoce como transformación lineal fraccionaria. A partir de esta ecuación se plantea el problema normalizado que consiste en determinar el controlador K que minimice la norma H_∞ de la función de transferencia (matriz) que relaciona ω con z , bajo la restricción que K estabilice P

2.11.2 Interpretación de H_∞

El problema original considerado por George Zames consiste en determinar un compensador K que permita al sistema de control estabilizarse y minimice el valor de pico de la traza de Bode en magnitud, se define como:

$$\|s\|_\infty = \max_w |S(jw)| \quad (2.43)$$

También se puede interpretar desde el punto de vista de la función de transferencia T_{zw} , en determinar todos los controladores admisibles K tal que $\|T_{zw}\|_\infty$ sea minimizada.

En el caso que no existiese el valor pico para algunas funciones se reemplaza este por el supremo o menor de las cotas superiores, por lo que se obtiene:

$$\|S\|_\infty = \sup_w |S(jw)| \quad (2.44)$$

En general para un sistema multivariable, significa minimizar el supremo del valor singular máximo, esto se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$\|S\|_{\infty} = \sup_w \bar{\sigma}[S(jw)] \quad (2.45)$$

Se concluye que, si el valor pico de la función de sensibilidad es pequeño, entonces la magnitud de S necesariamente es pequeña para todas las frecuencias, y por tanto las perturbaciones se atenúan para todas las frecuencias. La minimización de $\|S\|_{\infty}$ es la optimización del peor caso, esto significa que es la minimización del efecto sobre la variable de salida bajo una perturbación de mayor magnitud.

El problema del Control H_{∞} consiste en minimizar el máximo valor alcanzable por la respuesta en frecuencia de T_{zw} (función de transferencia, donde ω es la variable de entrada y z la variable de salida), en este caso, se plantea un problema de optimización H_{∞} , en el que se trata de obtener el mínimo de:

$$\|T_{zw}\|_{\infty} = \sup_w \bar{\sigma}[T_{zw}(j\omega)] \quad (2.46)$$

Considerando el caso univariable en el que se tiene:

$$\|T_{zw}\|_{\infty} \leq \gamma \quad (2.47)$$

Esto equivale a que para una señal ω con $\|\omega\|_{rms} \leq 1$, el sistema genera una respuesta $z = T_{zw} \omega$ tal que $\|T_{zw} \omega\|_{rms} \leq \gamma$, donde γ es el parámetro de performance, y debe cumplir que $\gamma > 0$.

2.12 Teoría de Desigualdades Matriciales Lineales (LMI)

La historia de las Desigualdades Matriciales Lineales en el análisis de los sistemas dinámicos se remonta a 100 años atrás, la historia comienza en 1892, cuando Aleksander Mikhailovich Lyapunov publicó su artículo seminal "The General Problem of the Stability of Motion" en el cual analizó la estabilidad del equilibrio del movimiento de los sistemas mecánicos, introduciendo lo que ahora se conoce como Teoría de Lyapunov. El mostró que la ecuación diferencial.

$$\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) \quad (2.48)$$

El sistema es estable si y solo si existe una matriz definida positiva P tal que se cumpla la siguiente expresión:

$$A^T P + P A < 0 \quad (2.49)$$

El requerimiento para que se cumpla $P > 0$, $A^T P + P A < 0$, se conoce como desigualdad de Lyapunov, la cual es una forma especial de una LMI, Lyapunov también demostró que esta LMI se puede resolver explícitamente, con este fin se elige $Q = Q^T > 0$ y luego se resuelve la ecuación lineal $A^T P + P A = -Q$, para que la matriz P garantice la estabilidad del sistema la ecuación (2.49) debe ser una matriz definida positiva, en resumen la primera LMI usada para analizar la estabilidad dinámica de un sistema fue la desigualdad de Lyapunov (ecuación 2.49), la cual puede ser resuelta analíticamente.

En 1940 Luré, Postnikov y otros en la Unión Soviética aplican el método de Lyapunov a un problema de control real, donde pequeñas LMI son resueltas a mano.

En 1960 cuando Yakubovich, Popov, Kalman y otros investigan exitosamente en reducir la solución de las LMIs que surgió en el problema de Luré a un simple criterio gráfico.

A finales de los 60 se observa que la misma familia de LMIs se puede resolver, solucionando la ecuación algebraica de Riccati.

En los inicios de los 80s se reconoce que muchas LMIs pueden ser resueltas mediante un computador, usando programación convexa.

A finales de los 80s se desarrolla el algoritmo del punto interior para resolver las LMIs.

A finales de los 80s se desarrolla un método eficiente de puntos-interiores para resolver las LMIs que surgen de los sistemas y teoría de control. En 1984, N. Karmarkar introdujo un algoritmo lineal de programación para resolver programas lineales en tiempo polinomial. Especialmente todas estas actividades de investigación se centraron para

programas lineales y cuadráticos. Luego en 1988, Nesterov y Nemirovskii desarrollaron métodos de puntos-interiores que se aplican directamente a problemas convexos involucrando LMIs. Aunque hay mucho por realizarse en esta área, se han implementado diversos algoritmos de puntos-interiores para Problemas LMI se han implementado y probado en familias específicas de LMI que surgen de la teoría de control, con tendencia a ser extremadamente eficientes.

Las técnicas LMI (Linear Matrix Inequalities) han surgido como herramientas útiles de diseño en áreas que van desde la ingeniería de control hasta sistemas de identificación y diseño estructural. Tres factores hacen que las técnicas LMI sean atractivas:

- Una variedad de especificaciones y limitaciones de diseño pueden ser expresadas como LMIs.
- Existen muchos problemas con múltiples limitaciones o con carencia de soluciones analíticas objetivas en términos de ecuaciones matriciales; sin embargo, estos problemas frecuentemente son manejables dentro de la estructura LMI. Esto hace a los diseños basados en LMIs una alternativa valiosa en relación a los métodos analíticos clásicos.

2.12.1 Desigualdades Matriciales Lineales (LMI)

Una desigualdad Matricial Lineal presenta la forma

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (2.50)$$

Donde $x \in R^m$ es la variable y las matrices simétricas $F_i = F_i^T \in R^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$ dadas, el símbolo de desigualdad de la ecuación (2.50) significa que $F(x)$ es definida positiva, la ecuación (2.50) se puede expresar como:

$$F(x) = F_0 + x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \dots + x_N f_N > 0 \quad (2.51)$$

Conjunto Convexo

Un Conjunto Convexo es aquel que al unir con un segmento dos puntos cualesquiera del conjunto, el segmento queda completamente contenido en el propio conjunto. Un conjunto S en un espacio vectorial lineal se dice que es convexo si

$$x_1, x_2 \in S \Rightarrow x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in S \text{ para todo } \alpha \in (0, 1) \quad (2.52)$$

En general, el conjunto vacío es considerado convexo. Generalmente las combinaciones convexas son definidas por cualquier conjunto finito de puntos, en la figura 2.17 se muestra un ejemplo de conjunto Convexo y no Convexo.

Función Convexa

Una función $f: S \rightarrow R$ es denominada convexo sí:

1. S es convexo
2. Para todo $x_1, x_2 \in S$ y $\alpha \in (0, 1)$ se mantiene que

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad (2.53)$$

f es denominada estrictamente convexa si la desigualdad del punto 2 se cumple para $x_1 \neq x_2$

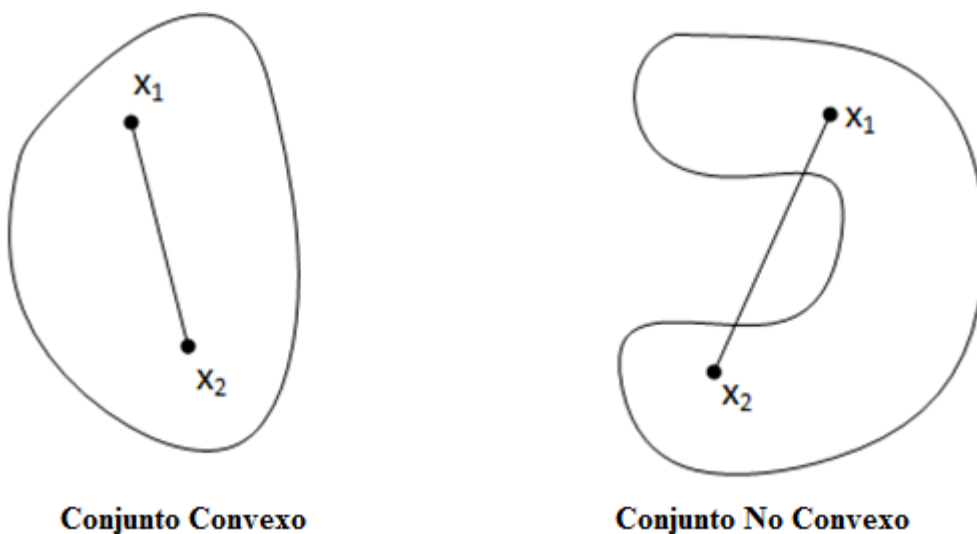


Figura 2.17: Conjunto Convexo y Conjunto No Convexo

Punto-Interior

Sea \mathbb{F} un sub conjunto del espacio \mathbb{R}^n , un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y un escalar $e > 0$, y siendo el sub espacio $\mathbb{B}_e(x_0) = \{x \mid \|x - x_0\| < e\}$, entonces:

- x_0 es llamado un punto interior de \mathbb{F} si existe un escalar $e > 0$ tal que $\mathbb{B}_e(x_0) \subset \mathbb{F}$

El interior de \mathbb{F} es la colección de todos los puntos interiores de \mathbb{F} .

Función Afín

Una función $f : S \rightarrow T$ es afín sí $f(x) = T(x) + f_0$ donde $f_0 \in T$ y $T : S \rightarrow T$ es un plano lineal.

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2) \quad (2.54)$$

Para todo $x_1, x_2 \in S$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in R$.

Formulación y Aplicaciones de las LMIs

Como se ha visto muchos problemas de optimización, en el diseño de controladores, identificación y procesamiento de señales, pueden ser formuladas usando LMIs. Esto solo toma sentido si los problemas de LMIs pueden resolverse eficazmente y de una manera fiable. Si se tiene la Desigualdad matricial lineal $F(x) > 0$, que define una restricción convexa en la variable x . La optimización del problema involucra la minimización (o maximización) de desempeño de la función: $f : s \rightarrow \mathfrak{R}$ con $s = x \mid F(x) > 0$ para que pertenezca al tipo de problemas de optimización convexa.

Suponiendo que $F, G : V \rightarrow S^{n_1}$ y $H : V \rightarrow S^{n_2}$ son funciones afines, se pueden elegir tres problemas genéricos para entender mejor las Desigualdades Matriciales Lineales.

1. **Factibilidad:** Prueba si existen o no soluciones de x tal que:

$$F(x) > 0 \quad (2.55)$$

A la condición anterior de le llama problema de factibilidad. La LMI se llama no-factible en caso de no existir solución alguna que cumpla con la ecuación (2.55).

2. **Optimización:** Consistente en la minimización de una función lineal objetiva sujeto a restricciones de tipo LMI como, por ejemplo: Minimizar $c^T x$, tal que $F(x) > 0$ es un papel importante en el diseño basado en técnicas LMI.
3. **Minimización de valores propios generalizados:** Este problema equivale a minimizar un escalar λ , en el cual se cumple que:

$$\text{Minimizar } \lambda, \text{ sujeto a: } \begin{cases} F(x) - G(x) > 0 \\ F(x) > 0 \\ H(x) > 0 \end{cases} \quad (2.56)$$

Aplicaciones de las LMIs en Control

Algunos problemas de control y especificaciones de diseño tienen formulaciones de tipo LMI obtenidas a partir de la teoría de Lyapunov que se usa tanto en el análisis como en el diseño y control mediante utilización de la norma H_∞ , estimaciones, identificación, diseño óptimo, diseño estructural, problemas matriciales. Una de las principales ventajas de la formulación de las LMIs es la habilidad de combinar varias expresiones de diseño de una manera numéricamente tratable.

Se puede hacer una gran lista de problemas de control que se pueden resolver mediante técnicas de LMI, entre las principales se puede nombrar las siguientes:

- Estabilidad de Lyapunov.
- Estabilidad Robusta de sistemas con incertidumbre lineal invariante en el tiempo (LTI).
- Estabilidad cuadrática.
- Diseño de retroalimentación de estado multi-modelo, multi-objetivo.
- Ubicación de polos.
- Sistemas dinámicos con introducción de incertidumbres.
- Control con normas H_∞ (rechazo a perturbaciones).
- Diseño de controladores robustos con ganancia fija.
- Control de sistemas estocásticos.

Complemento Schur

El complemento de Schur permite resolver sistemas de ecuaciones complejos de una forma sencilla, el cálculo de las incógnitas se puede hallar de forma independiente también el número de incógnitas es menor que el número total de incógnitas para cada ecuación cuando se expresa con el complemento Schur.

Sea una matriz A , representada en bloques como se muestra debajo.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

Los complementos de Schur son:

$$sch(A_{11}) = A_{22} - A_{21}(A_{11})^{-1}A_{12} \quad (2.58)$$

$$sch(A_{22}) = A_{11} - A_{12}(A_{22})^{-1}A_{21} \quad (2.59)$$

Ubicación de los Polos en Regiones LMI

El concepto de región LMI es útil para formular los objetivos de la ubicación de polos en términos de LMI. Las regiones LMI son subconjuntos convexos D del plano complejo caracterizado por:

$$D = \{z \in \mathbb{C} : L + sM + \bar{s}M^T < 0\} \quad (2.60)$$

D es denominada una región LMI, donde M y $L = L^T$ son matrices reales.

$$f_D = L + sM + \bar{s}M^T \quad (2.61)$$

La ecuación (2.61) es llamada función característica de la región D . Una región LMI es convexa y simétrica con respecto al eje real. Prácticamente, las regiones LMI incluyen regiones relevantes tales como sectores, discos, cónicas, franjas, etc., así como también cualquier intersección de estas.

Otra fortaleza de las regiones LMI es la disponibilidad del teorema de Lyapunov para tales regiones. Específicamente, sí $\lambda_{ij} \ 1 \leq i, j \leq m$ y $\mu_{ij} \ 1 \leq i, j \leq m$ muestran las entradas de las

matrices L y M , una matriz A tiene todos sus valores propios en D sí y solo sí existe una matriz P definida positiva tal que

$$[\lambda_{ij} P + \mu_{ij} AP + \mu_{ij} PA^T]_{1 \leq i, j \leq m} < 0 \quad (2.62)$$

A continuación, se indica algunos ejemplos de regiones LMI P útiles con su respectiva función característica f_D :

- **Región LMI Disco.** Un disco como el que se muestra en la figura 2.18 con centro en $(-q, 0)$ y radio r , un punto en el plano complejo representado por el número complejo $s = x + jy$ se encontrará dentro del disco si y solo si se cumple la siguiente desigualdad

$$(x + q)^2 + y^2 < r^2 \quad (2.63)$$

$$(s + q)(\bar{s} + q) < r^2 \quad (2.64)$$

$$-r^2 + (s + q)(\bar{s} + q) < 0 \quad (2.65)$$

Considerando que r es estrictamente positivo se puede escribir la siguiente ecuación

$$-r + (s + q)r^{-1}(\bar{s} + q) < 0 \quad (2.66)$$

Usando el complemento de Schur la ecuación (2.115) se puede expresar como:

$$\begin{bmatrix} -r & s + q \\ \bar{s} + q & -r \end{bmatrix} < 0 \quad (2.67)$$

La ecuación (2.67) describe la región LMI disco, equivalentemente la ecuación (2.67) se puede expresar como:

$$\begin{bmatrix} -r & q \\ q & -r \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \bar{s} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T < 0 \quad (2.68)$$

De la ecuación (2.61) se deduce los valores de L y M los cuales son:

$$L = \begin{bmatrix} -r & q \\ q & -r \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

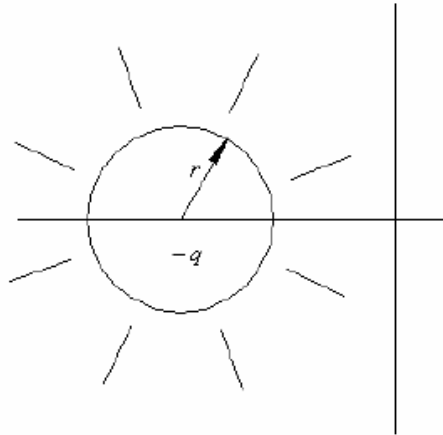


Figura 2.18: Región LMI Disco

- **Región LMI sección cónica centrada en el origen y con un ángulo interno.** La inecuación que describe la región LMI para este caso es:

$$\begin{bmatrix} (s + \bar{s})\text{sen } \theta & (s - \bar{s})\text{cos } \theta \\ (-s + \bar{s})\text{cos } \theta & (s + \bar{s})\text{sen } \theta \end{bmatrix} < 0 \quad (2.70)$$

Donde los valores de L y M son:

$$L = 0, M = \begin{bmatrix} \text{sen } \theta & \text{cos } \theta \\ -\text{cos } \theta & \text{sen } \theta \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

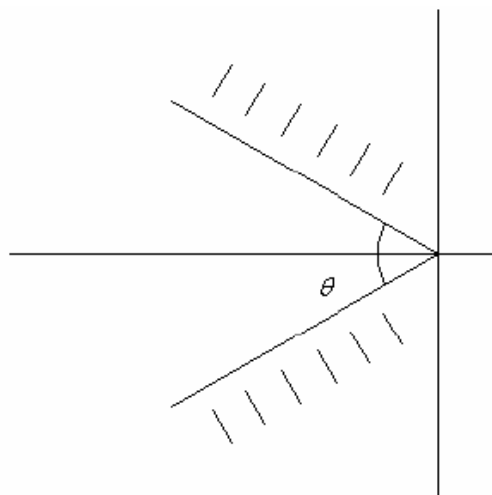


Figura 2.19: Región LMI Cónica

• **Región LMI franja vertical.** La franja está comprendida entre $-\beta < x < -\alpha < 0$, la región LMI franja se muestra en la figura 2.20. La desigualdad que describe esta región es:

$$\begin{bmatrix} 2\alpha + (s + \bar{s}) & 0 \\ 0 & -(s + \bar{s}) - 2\beta \end{bmatrix} < 0 \quad (2.72)$$

Donde los valores de L y M son:

$$L = 2 \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

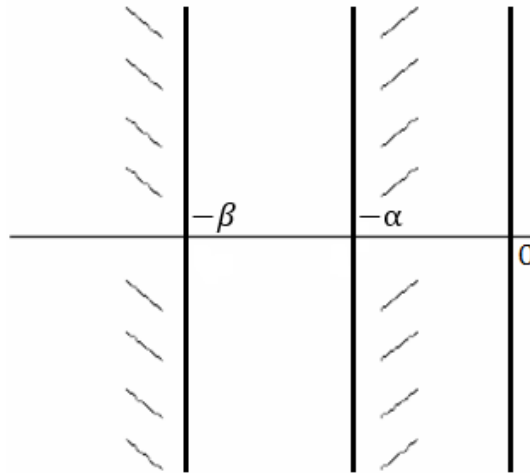


Figura 2.20: Región LMI Franja

Dada las regiones LMI D_1 y D_2 con sus funciones características f_{D_1} y f_{D_2} respectivamente, y si $D = D_1 \cap D_2$ es también una región LMI, su función característica es:

$$F_D = \text{diag}(f_{D_1}, f_{D_2}) \quad (2.74)$$

2.12.2 Control H_∞ con LMI

Sea el sistema de control lineal con una entrada de disturbios w

$$\dot{x} = Ax + B_1u + B_2w \quad (2.75)$$

$$z = Cx + D_1u + D_2w \quad (2.76)$$

Donde: $x \in R^n$ y $z \in R^n$ son los vectores de entrada y salida respectivamente.

Además, $w \in R^p$ es el vector de disturbios.

Ante un controlador por realimentación de estados de la forma $u = Kx$, el sistema resultante es:

$$\dot{x} = (A + B_1K)x + B_2w \quad (2.77)$$

$$z = (C + D_1K)x + D_2w \quad (2.78)$$

Expresando el sistema en el dominio de la Laplace

$$sX(s) = (A + B_1K)X(s) + B_2W(s) \quad (2.79)$$

$$[SI - (A + B_1K)]X(s) = B_2W(s) \quad (2.80)$$

$$X(s) = [SI - (A + B_1K)]^{-1}B_2W(s) \quad (2.81)$$

$$Z(s) = (C + D_1K)X(s) + D_2W(s) \quad (2.82)$$

$$Z(s) = (C + D_1K)[SI - (A + B_1K)]^{-1}B_2W(s) + D_2W(s) \quad (2.83)$$

Por lo tanto: $Z(s) = G_{zw}(s)W(s)$, donde:

$$G_{zw}(s) = (C + D_1K)[SI - (A + B_1K)]^{-1}B_2 + D_2 \quad (2.84)$$

El problema de control optimo consiste en encontrar una matriz K que pueda estabilizar el sistema y demás minimizar los disturbios que se amplifican por la función de transferencia $G_{zw}(s)$

$$\|G_{zw}(s)\|_{\infty} < \gamma \quad (2.85)$$

$$\gamma > 0 \quad (2.86)$$

$$(A + B_1K) \text{ (estable)}$$

El problema del control H_∞ tiene solución si y solo si existe una matriz W y otra matriz simétrica positivamente definida X , de modo que: (Duan & Yu, 2013)

$$\begin{bmatrix} (AX + B_1W)^T + (AX + B_1W) & B_2 & (CX + D_1W)^T \\ B_2^T & -\gamma I & D_2^T \\ (CX + D_1W) & D_2 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.87)$$

Cuando esas matrices son encontradas (W, X), la solución del problema es:

$$K = WX^{-1} \quad (2.88)$$

La LMI de (2.87) es equivalente a las LMI de (2.89) y (2.90) (Duan & Yu, 2013):

$$\begin{bmatrix} (AX + B_1W)^T + (AX + B_1W) & B_2 & (CX + D_1W)^T \\ B_2^T & -\gamma^2 I & D_2^T \\ (CX + D_1W) & D_2 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.89)$$

$$\begin{bmatrix} (AX + B_1W)^T + (AX + B_1W) + B_2B_2^T & (CX + D_1W)^T + B_2D_2^T \\ CX + D_1W + D_2B_2^T & -\gamma^2 I + D_2D_2^T \end{bmatrix} < 0 \quad (2.90)$$

Si se cumple que $R = \gamma^2 I - D_2D_2^T > 0$ y usando el complemento de Schur la LMI de (2.90) es equivalente a la desigualdad de la matriz cuadrática siguiente:

$$(AX + B_1W)^T + (AX + B_1W) + B_2B_2^T + ((CX + D_1W)^T + B_2D_2^T)R^{-1}(CX + D_1W + D_2B_2^T) < 0 \quad (2.91)$$

Asumiendo que $R = \gamma^2 I - D_2D_2^T > 0$ y expresando la LMI (2.90) como una ecuación tal como la ecuación (2.92), se resuelve por métodos basados en las ecuaciones de Riccati. La ecuación de Riccati (ARE) de (2.91) se expresa de la siguiente forma:

$$(AX + B_1W)^T + (AX + B_1W) + B_2B_2^T + ((CX + D_1W)^T + B_2D_2^T)R^{-1}(CX + D_1W + D_2B_2^T) = 0 \quad (2.92)$$

CAPITULO III

DESARROLLO DEL TRABAJO

3.1 Modelo Dinámico del Robot de Dos Grados de Libertad

El modelo dinámico del robot se formula aplicando la ecuación de movimiento de Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau \quad (3.1)$$

Donde τ es el torque aplicado a cada articulación, el Lagrangiano definido en términos de la energía cinética K y la energía potencial P se expresa del siguiente modo:

$$L = K - P \quad (3.2)$$

En la figura 3.1 se muestra el robot a utilizar para la aplicación.

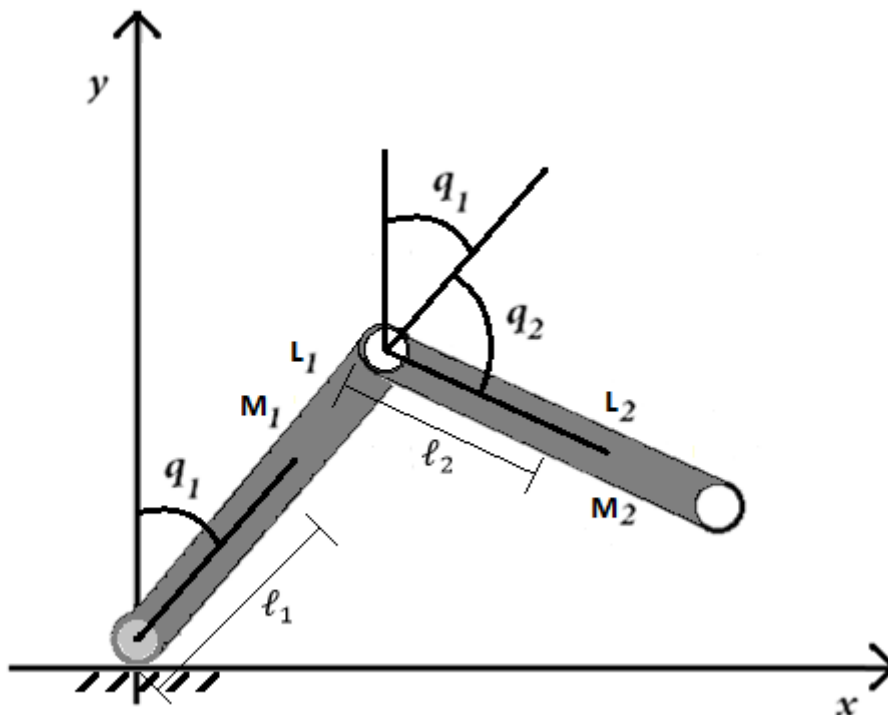


Figura 3.1: Robot de dos grados de libertad.

El significado de los parámetros del robot se muestra en la siguiente tabla:

Símbolo	Descripción
M_1	Masa del primer eslabón
M_2	Masa del segundo eslabón
L_1	Longitud del primer eslabón
L_2	Longitud del segundo eslabón
q_1	Angulo de la primera articulación
q_2	Angulo de la segunda articulación
\dot{q}_1	Velocidad angular de la primera articulación
\dot{q}_2	Velocidad angular de la segunda articulación
ℓ_1	Longitud al centro de masa del primer eslabón
ℓ_2	Longitud al centro de masa del segundo eslabón
\ddot{q}_1	Aceleración angular de la primera articulación
\ddot{q}_2	Aceleración angular de la segunda articulación
h_1	Altura del centro de masa del primer eslabón
h_2	Altura del centro de masa del segundo eslabón

Tabla 3.1: Parámetros del robot de 2GDL

Las ecuaciones de posición del centro de masa del primer eslabón son:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \ell_1 \operatorname{sen} q_1 \\ y_1 &= \ell_1 \cos q_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

De igual modo las ecuaciones de posición del segundo eslabón son:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= L_1 \operatorname{sen} q_1 + \ell_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) \\ y_2 &= L_1 \cos q_1 + \ell_2 \cos(q_1 + q_2) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Para aplicar la ecuación de movimiento de Lagrange, primero se determina las expresiones de la energía cinética y energía potencial para cada uno de los eslabones del robot. La energía cinética se define mediante la siguiente ecuación:

$$K = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} M_i v_i^2 \quad (3.5)$$

Donde v_i es la velocidad de movimiento de los eslabones del robot, la ecuación de la velocidad en función de la posición x y la posición y para cada eslabón se expresa del siguiente modo:

$$v_i^2 = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 \quad (3.6)$$

Para el caso del robot en estudio, la energía cinética total se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$K = \frac{1}{2} M_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} M_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (3.7)$$

La energía potencial para el robot se expresa del siguiente modo:

$$P = \sum_{i=1}^2 M_i g h_i(q) \quad (3.8)$$

Con las expresiones de las energías cinética y potencial definidas, se procede a determinar las expresiones:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \ell_1 \dot{q}_1 \cos q_1 \\ \dot{y}_1 &= -\ell_1 \dot{q}_1 \sin q_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_2 &= (L_1 \cos(q_1) + \ell_2 \cos(q_1 + q_2))\dot{q}_1 + \ell_2 \cos(q_1 + q_2) \dot{q}_2 \\ \dot{y}_2 &= (-L_1 \sin(q_1) - \ell_2 \sin(q_1 + q_2))\dot{q}_1 - \ell_2 \sin(q_1 + q_2) \dot{q}_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

De (3.6) y (3.9)

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = \ell_1^2 \dot{q}_1^2 \quad (3.11)$$

De (3.6) y (3.10), $v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2$

$$v_2^2 = (L_1^2 + 2L_1\ell_2 \cos(q_2) + \ell_2^2)\dot{q}_1^2 + \ell_2^2\dot{q}_2^2 + 2(L_1\ell_2 \cos(q_2) + \ell_2^2)\dot{q}_1\dot{q}_2 \quad (3.12)$$

Reemplazando las ecuaciones (3.11) y (3.12) en la ecuación (3.7), se tiene que la energía cinética total del robot es:

$$K = \frac{1}{2}(M_1\ell_1^2 + M_2L_1^2 + 2M_2L_1\ell_2 \cos(q_2) + M_2\ell_2^2)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}M_2\ell_2^2\dot{q}_2^2 + (M_2L_1\ell_2 \cos(q_2) + M_2\ell_2^2)\dot{q}_1\dot{q}_2 \quad (3.13)$$

La energía potencial total del robot se expresa como:

$$P = M_1g y_1 + M_2g y_2$$

$$P = M_1g\ell_1 \cos(q_1) + M_2gL_1 \cos(q_1) + M_2g\ell_2 \cos(q_1 + q_2) \quad (3.14)$$

Reemplazando la ecuación (3.13) y la ecuación (3.14) en la ecuación (3.2) se obtiene:

$$L = \frac{1}{2}(M_1\ell_1^2 + M_2L_1^2 + 2M_2L_1\ell_2 \cos(q_2) + M_2\ell_2^2)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}M_2\ell_2^2\dot{q}_2^2 + (M_2L_1\ell_2 \cos(q_2) + M_2\ell_2^2)\dot{q}_1\dot{q}_2 - M_1g\ell_1 \cos(q_1) - M_2gL_1 \cos(q_1) - M_2g\ell_2 \cos(q_1 + q_2) \quad (3.15)$$

Realizando operaciones, la ecuación de movimiento del robot aplicando la ecuación de Lagrange se obtiene:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (M_1\ell_1^2 + M_2L_1^2 + M_2\ell_2^2 + 2M_2L_1\ell_2 \cos(q_2))\dot{q}_1 + (M_2L_1\ell_2 \cos(q_2) + M_2\ell_2^2)\dot{q}_2 \quad (3.16)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (M_1\ell_1^2 + M_2L_1^2 + M_2\ell_2^2 + 2M_2L_1\ell_2 \cos(q_2))\ddot{q}_1 + (M_2L_1\ell_2 \cos(q_2) + M_2\ell_2^2)\ddot{q}_2 - 2M_2L_1\ell_2 \sin(q_2) \dot{q}_1\dot{q}_2 - M_2L_1\ell_2 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = M_1g\ell_1 \sin(q_1) + M_2gL_1 \sin(q_1) + M_2g\ell_2 \sin(q_1 + q_2) \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = M_2\ell_2^2 \dot{q}_2 + (M_2\ell_2L_1 \cos(q_2) + M_2\ell_2^2)\dot{q}_1 \quad (3.19)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = M_2\ell_2^2 \ddot{q}_2 + (M_2L_1\ell_2 \cos(q_2) + M_2\ell_2^2)\ddot{q}_1 - M_2L_1\ell_2 \sin(q_2) \dot{q}_1\dot{q}_2 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -M_2L_1\ell_2 \sin(q_2) \dot{q}_1^2 - M_2L_1\ell_2 \sin(q_2) \dot{q}_1\dot{q}_2 + M_2g\ell_2 \sin(q_1 + q_2) \quad (3.21)$$

Finalmente se reemplazan las ecuaciones anteriores en la ecuación (3.1) obteniéndose las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico del robot.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$$

Para el 1er. Eslabón: (3.17)-(3.18):

$$\begin{aligned} & (M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2)) \ddot{q}_1 + (M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + M_2 \ell_2^2) \ddot{q}_2 \\ & - 2M_2 L_1 \ell_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - M_2 L_1 \ell_2 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 - M_1 g \ell_1 \sin(q_1) \\ & - M_2 g L_1 \sin(q_1) - M_2 g \ell_2 \sin(q_1 + q_2) = \tau_1 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Para el 2do. Eslabón: (3.20)-(3.21):

$$\begin{aligned} & M_2 \ell_2^2 \ddot{q}_2 + (M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + M_2 \ell_2^2) \ddot{q}_1 + M_2 L_1 \ell_2 \sin(q_2) \dot{q}_1^2 - M_2 g \ell_2 \sin(q_1 + q_2) \\ & = \tau_2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Las ecuaciones (3.22) y (3.23) se pueden escribir en la forma compacta de la forma siguiente:

$$M(q) \ddot{q} + V(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \tau \quad (3.24)$$

Donde $M(q)$ es la matriz de inercias, $V(q, \dot{q})$ es la matriz de coriolis y fuerza centrífuga y $G(q)$ es el vector de gravedad, para este caso los términos $M(q)$, $V(q, \dot{q})$ y $G(q)$ se expresan como:

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) & M_2 \ell_2^2 + M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) \\ M_2 \ell_2^2 + M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) & M_2 \ell_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$V(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -2M_2 L_1 \ell_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 & -M_2 L_1 \ell_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ M_2 L_1 \ell_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} -M_1 g \ell_1 \sin(q_1) - M_2 g L_1 \sin(q_1) - M_2 g \ell_2 \sin(q_1 + q_2) \\ -M_2 g \ell_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

3.2 Modelo de los actuadores

Existen varios tipos de actuadores tales como eléctricos, neumáticos o hidráulicos, en este trabajo de Tesis se escoge un motor de corriente continua con imán permanente, estos son usados comúnmente en aplicaciones robóticas.

3.2.1 Modelo del motor DC de la primera articulación

En la figura 3.2 se muestra un motor de corriente continua de imán permanente.

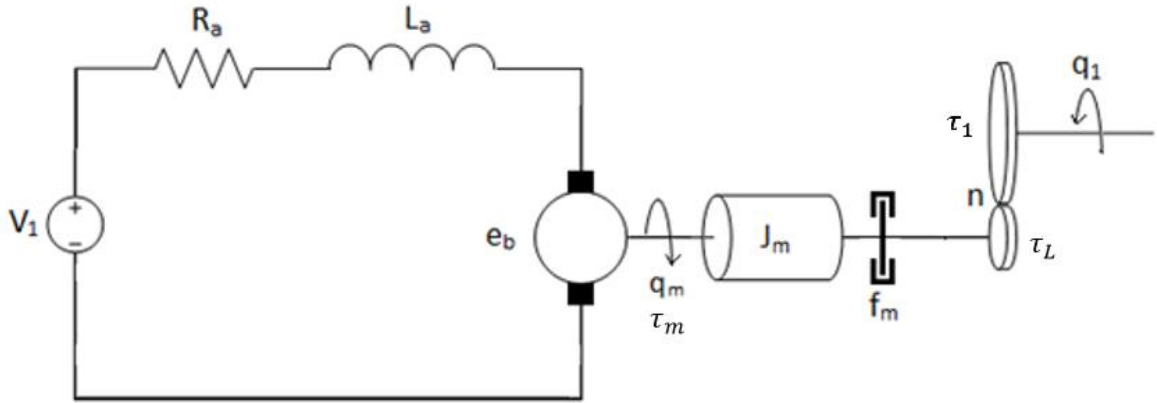


Figura 3.2: Motor de CC usado en la primera articulación

Las ecuaciones que describen a un motor de corriente continua con imán permanente son las siguientes:

$$\tau_m = K_a i_a \quad (3.28)$$

$$v_1 = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_b \quad (3.29)$$

$$e_b = K_b \frac{dq_m}{dt} \quad (3.30)$$

$$q_m = n q_1 \quad (3.31)$$

$$\tau_m = J_m \ddot{q}_m + f_m \dot{q}_m + \tau_L \quad (3.32)$$

Donde el significado de las variables y parámetros se resume en la siguiente tabla:

Símbolo	Descripción
q_1	Posición angular después de los engranajes
v_1	Voltaje de armadura
q_m	Posición angular del eje del motor
τ_m	Par en el eje del motor
τ_1	Par después del juego de engranajes
τ_L	Par de la carga
i_a	Corriente de armadura
e_b	Fuerza contra-electromotriz
R_a	Resistencia de armadura
J_m	Constante de inercia del motor
f_m	Constante de fricción del rotor
L_a	Inductancia de armadura
K_a	Constante motor-par
K_b	Constante de contrarreacción electromotriz
n	Relación de reducción de engranajes (en general $n \gg 1$)

Tabla 3.2: Variables y parámetros del Motor de CC de la primera articulación

En robótica generalmente la relación de reducción de engranajes es mucho mayor a 1, entre 20 a 200 o más. De la ecuación (3.32) y considerando que $\tau_L n = \tau_1$, se tiene:

$$\tau_m = J_m \ddot{q}_m + f_m \dot{q}_m + \frac{\tau_1}{n} \quad (3.33)$$

Donde J_m es la inercia del rotor y f_m es la fricción del rotor, derivando la ecuación (3.28) se obtiene

$$\frac{di_a}{dt} = \dot{\tau}_m / K_a \quad (3.34)$$

De las ecuaciones (3.28), (3.30) y (3.34) en la ecuación (3.29), se obtiene:

$$v_1 = \frac{R_a}{K_a} \tau_m + \frac{L_a}{K_a} \dot{\tau}_m + K_b \dot{q}_m \quad (3.35)$$

Por lo general la inductancia de armadura L_a es despreciable para los motores de corriente continua con imán permanente de baja potencia (Ogata, 2010), entonces se tiene $L_a = 0$, entonces se tiene la siguiente ecuación:

$$v_1 = \frac{R_a}{K_a} \tau_m + K_b \dot{q}_m \quad (3.36)$$

reemplazando la ecuación (3.33) en la ecuación (3.36) se obtiene

$$v_1 = \frac{R_a}{K_a} (J_m \ddot{q}_m + f_m \dot{q}_m + \frac{\tau_1}{n}) + K_b \dot{q}_m \quad (3.37)$$

De la ecuación (3.31) se tiene $q_m = nq_1$ y reemplazando en la ecuación (3.36) se obtiene

$$\frac{K_a}{nR_a} v_1 = J_m \ddot{q}_1 + f_m \dot{q}_1 + \frac{K_a K_b}{R_a} \dot{q}_1 + \frac{\tau_1}{n^2} \quad (3.38)$$

Reordenando la ecuación (3.38) se obtiene

$$\tau_1 = \frac{nK_a}{R_a} v_1 - n^2 J_m \ddot{q}_1 - n^2 f_m \dot{q}_1 - \frac{K_a K_b n^2}{R_a} \dot{q}_1 \quad (3.39)$$

Reemplazando la ecuación (3.39) en la ecuación (3.22) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{R_a}{nK_a} \left[(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + n^2 J_m) \ddot{q}_1 + [M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + \right. \\ \left. M_2 \ell_2^2] \ddot{q}_2 + \left(n^2 f_m + \frac{K_a K_b n^2}{R_a} - 2M_2 L_1 \ell_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 \right) \dot{q}_1 - M_2 L_1 \ell_2 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 - \right. \\ \left. M_1 g \ell_1 \sin(q_1) - M_2 g L_1 \sin(q_1) - M_2 g \ell_2 \sin(q_1 + q_2) \right] = v_1 \end{aligned} \quad (3.40)$$

3.2.2 Modelo del motor DC de la segunda articulación

En la figura 3.3 se muestra el motor de corriente continua de la segunda articulación.

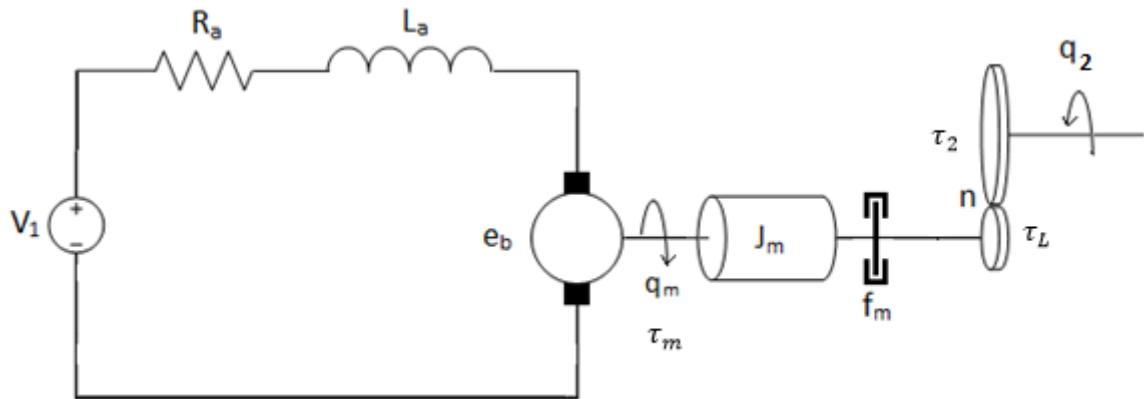


Figura 3.3: Motor de CC usado en la segunda articulación

Donde el significado de las variables y parámetros se resume en la siguiente tabla:

Símbolo	Descripción
q_2	Posición angular después de los engranajes
v_2	Voltaje de armadura
q_m	Posición angular del eje del motor
τ_m	Par en el eje del motor
τ_2	Par después del juego de engranajes
τ_L	Par de la carga
i_a	Corriente de armadura
e_b	Fuerza contra-electromotriz
R_a	Resistencia de armadura
J_m	Constante de inercia del motor
f_m	Constante de fricción del rotor
L_a	Inductancia de armadura
K_a	Constante motor-par
K_b	Constante de contrarreacción electromotriz
n	Relación de reducción de engranajes (en general $n \gg 1$)

Tabla 3.3: Variables y parámetros del Motor de CC de la segunda articulación

Procediendo de la misma forma que el modelo del motor de la primera articulación se obtiene la siguiente ecuación

$$\tau_2 = \frac{nK_a}{R_a} v_2 - n^2 J_m \ddot{q}_2 - n^2 f_m \dot{q}_2 - \frac{K_a K_b n^2}{R_a} \dot{q}_2 \quad (3.41)$$

Reemplazando la ecuación (3.41) en la ecuación (3.23) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{R_a}{nK_a} \left[(M_2 \ell_2 L_1 \cos(q_2) + M_2 \ell_2^2) \ddot{q}_1 + (M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m) \ddot{q}_2 + M_2 L_1 \ell_2 \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + \right. \\ \left. \left(n^2 f_m + \frac{K_a K_b n^2}{R_a} \right) \dot{q}_2 - M_2 g \ell_2 \sin(q_1 + q_2) \right] = v_2 \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.3 Modelo del robot en el Espacio de Estados

Las ecuaciones (3.40) y (3.42) se pueden escribir en la forma compacta de la forma siguiente:

$$M'(q) \ddot{q} + V'(q, \dot{q}) \dot{q} + G'(q) = v \quad (3.43)$$

Donde $M'(q)$, $V'(q, \dot{q})$ y $G'(q)$ se expresan como:

$$M'(q) = \begin{bmatrix} \frac{R_a}{nK_a} (M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + n^2 J_m) & \frac{R_a}{nK_a} (M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + M_2 \ell_2^2) \\ \frac{R_a}{nK_a} (M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + M_2 \ell_2^2) & \frac{R_a}{nK_a} (M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m) \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$V'(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \frac{R_a}{nK_a} \left(n^2 f_m + \frac{K_a K_b n^2}{R_a} - 2M_2 L_1 \ell_2 \sin(q_2) \right) \dot{q}_2 & -\frac{R_a}{nK_a} M_2 L_1 \ell_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ \frac{R_a}{nK_a} M_2 L_1 \ell_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 & \frac{R_a}{nK_a} \left(n^2 f_m + \frac{K_a K_b n^2}{R_a} \right) \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$G'(q) = \begin{bmatrix} \frac{R_a}{nK_a} (-(M_1 \ell_1 + M_2 L_1) g \sin(q_1) - M_2 g \ell_2 \sin(q_1 + q_2)) \\ -\frac{R_a}{nK_a} M_2 \ell_2 g \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}; \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}; \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}; \quad \ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Para expresar las ecuaciones (3.40 y (3.42) en el espacio de estados se definen las variables de estado del siguiente modo; $x_1 = q_1, x_2 = \dot{q}_1, x_3 = q_2, x_4 = \dot{q}_2$, donde q_1 y \dot{q}_1 son el ángulo y la velocidad de la primera articulación respectivamente, q_2 y \dot{q}_2 son el ángulo y la velocidad de la segunda articulación respectivamente, entonces las ecuaciones de estado se escriben del siguiente modo:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \frac{[M_2 g \ell_2 \sin(q_1 + q_2)][(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + M_2 \ell_2^2)]}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + M_2 \ell_2^2)^2} \\ &+ \frac{\sin(q_2)[(M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + M_2 \ell_2^2)M_2 L_1 \ell_2 \dot{q}_1^2 + (M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)M_2 L_1 \ell_2 (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)]}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + M_2 \ell_2^2)^2} \\ &+ \frac{[\sin(q_1)(M_1 g \ell_1 + M_2 g L_1)(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)] + [(M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + M_2 \ell_2^2)(n^2 f_m + K_a K_b n^2 / R_a) \dot{q}_2]}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + M_2 \ell_2^2)^2} \\ &- \frac{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(n^2 f_m + K_a K_b n^2 / R_a) \dot{q}_1}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + M_2 \ell_2^2)^2} \\ &+ \frac{[n K_a / R_a (M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)] v_1 - [(M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + M_2 \ell_2^2) n K_a / R_a] v_2}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + M_2 \ell_2^2)^2} \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned}
& \dot{x}_4 \\
&= \frac{M_2 g \ell_2 \sin(q_1 + q_2) [(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + M_2 \ell_2^2)]}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + M_2 \ell_2^2)^2} \\
&+ \frac{M_2 L_1 \ell_2 \sin(q_2) [-\dot{q}_1^2 (M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + n^2 J_m)]}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + M_2 \ell_2^2)^2} \\
&- \frac{M_2 L_1 \ell_2 \sin(q_2) (M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + M_2 \ell_2^2) (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + M_2 \ell_2^2)^2} \\
&+ \frac{-\sin(q_1) [M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + M_2 \ell_2^2] [M_1 g \ell_1 + M_2 g L_1] + (M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + M_2 \ell_2^2) [n^2 f_m + K_a K_b n^2 / R_a] \dot{q}_1}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + M_2 \ell_2^2)^2} \\
&- \frac{[M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + n^2 J_m] [n^2 f_m + K_a K_b n^2 / R_a] \dot{q}_2}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + M_2 \ell_2^2)^2} \\
&+ \frac{-[(M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + M_2 \ell_2^2) n K_a / R_a] v_1 + [M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + n^2 J_m] n K_a / R_a v_2}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(q_2) + M_2 \ell_2^2)^2}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Considerando las variables de estado del siguiente modo:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= q_1 \\ x_2 &= \dot{q}_1 \\ x_3 &= q_2 \\ x_4 &= \dot{q}_2 \end{aligned} \right\} \tag{3.51}$$

Las ecuaciones en el espacio de estados expresadas en función de las variables x_1, x_2, x_3 y x_4 son:

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}
& \dot{x}_2 \\
&= \frac{[M_2 g \ell_2 \sin(x_1 + x_3)] [(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)]}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)^2} \\
&+ \frac{\sin(x_3) [(M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2) M_2 L_1 \ell_2 x_2^2 + (M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m) M_2 L_1 \ell_2 (2x_2 x_4 + x_4^2)]}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)^2} \\
&+ \frac{[\sin(x_1) (M_1 g \ell_1 + M_2 g L_1) (M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)] + [(M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2) (n^2 f_m + K_a K_b n^2 / R_a) x_4]}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)^2} \\
&- \frac{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m) (n^2 f_m + K_a K_b n^2 / R_a) x_2}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)^2} \\
&+ \frac{[n K_a / R_a (M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)] v_1 - [(M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2) n K_a / R_a] v_2}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)^2}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= \frac{M_2 g \ell_2 \sin(x_1 + x_3) [(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)]}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)^2} \\ &+ \frac{M_2 L_1 \ell_2 \sin(x_3) [-x_2^2 (M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m)]}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)^2} \\ &- \frac{M_2 L_1 \ell_2 \sin(x_3) (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2) (2x_2 x_4 + x_4^2)}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)^2} \\ &+ \frac{-\sin(x_1) [M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2] [M_1 g \ell_1 + M_2 g L_1] + (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2) [n^2 f_m + K_a K_b n^2 / R_a] x_2}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)^2} \\ &- \frac{[M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m] [n^2 f_m + K_a K_b n^2 / R_a] x_4}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)^2} \\ &+ \frac{-[(M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2) n K_a / R_a] v_1 + [M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m] n K_a / R_a v_2}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)^2} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Donde $x_1 = q_1$ es la posición angular del primer eslabón del robot, $x_3 = q_2$ es la posición angular del segundo eslabón, $x_2 = \dot{q}_1$ es la velocidad angular del primer eslabón y $x_4 = \dot{q}_2$ es la velocidad angular del segundo eslabón.

El modelo matemático del robot de dos grados de libertad se expresa en el espacio de estados considerando las variables de estado asignadas, del siguiente modo.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_1(x) + g_{11}(x)v_1 + g_{12}(x)v_2 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= f_3(x) + g_{21}(x)v_1 + g_{22}(x)v_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

En la presente tesis la salida que nos interesa en la posición de los eslabones, por esta razón las ecuaciones de salida se formulan como.

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
& f_1(x) \\
&= \frac{[M_2 g \ell_2 \operatorname{sen}(x_1 + x_3)][(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)]}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)^2} \\
&+ \frac{\operatorname{sen}(x_3)[(M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)M_2 L_1 \ell_2 x_2^2 + (M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)M_2 L_1 \ell_2 (2x_2 x_4 + x_4^2)]}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)^2} \\
&+ \frac{[\operatorname{sen}(x_1)(M_1 g \ell_1 + M_2 g L_1)(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)] + [(M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)(n^2 f_m + K_a K_b n^2 / R_a)x_4]}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)^2} \\
&- \frac{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(n^2 f_m + K_a K_b n^2 / R_a)x_2}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)^2}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}
& f_2(x) \\
&= \frac{M_2 g \ell_2 \operatorname{sen}(x_1 + x_3) [(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)]}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)^2} \\
&+ \frac{M_2 L_1 \ell_2 \operatorname{sen}(x_3)[-x_2^2(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m)]}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)^2} \\
&- \frac{M_2 L_1 \ell_2 \operatorname{sen}(x_3)(M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)(2x_2 x_4 + x_4^2)}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)^2} \\
&+ \frac{-\operatorname{sen}(x_1)[M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2][M_1 g \ell_1 + M_2 g L_1] + (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)[n^2 f_m + K_a K_b n^2 / R_a]x_2}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)^2} \\
&- \frac{[M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m][n^2 f_m + K_a K_b n^2 / R_a]x_4}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)^2}
\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$g_{11}(x) = \frac{[nK_a/R_a(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)]}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)^2} \tag{3.60}$$

$$g_{12}(x) = \frac{-[(M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)nK_a/R_a]}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)^2} \tag{3.61}$$

$$g_{21}(x) = \frac{-[(M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)nK_a/R_a]}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)^2} \tag{3.62}$$

$$g_{22}(x) = \frac{[M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m]nK_a/R_a}{(M_2 \ell_2^2 + n^2 J_m)(M_1 \ell_1^2 + M_2 L_1^2 + M_2 \ell_2^2 + 2M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + n^2 J_m) - (M_2 L_1 \ell_2 \cos(x_3) + M_2 \ell_2^2)^2} \tag{3.63}$$

3.4 Sensores

Los sensores más utilizados para medir la posición de un robot son los encoders y para medir la velocidad son los tacómetros.

3.4.1 Encoder

Las ventajas que tiene un Encoder frente a otro tipo de sensores son (Fernando, 2011):

- Alta resistencia a las condiciones ambientales tales como humedad, vibraciones e impactos.
- Se puede usar en un rango amplio de temperaturas
- Capacidad de transmitir señales a grandes distancia
- Miniaturizable o tamaño apropiado para las características del servomotor.
- Alta resolución en la lectura de la posición a medir.

Los Encoder se pueden clasificar en incrementales y absolutos, los Encoders están contruidos con componentes opto electrónicos, los Encoders Incrementales están constituidos por disco el cual tiene ranuras, el número de ranuras determina las cuentas por revolución (CPR), enfrente del disco giratorio se encuentra un arreglo de diodos LED cuya luz emitida pasa a través de las ranuras del disco giratorio, esta luz es detectada por los elementos fotosensibles: En la figura 3.4 se muestra la estructura interna del Encoder HEDS 9100 de marca Avago, la cual se propone para ser implementado, la luz generada por un diodo LED pasa por las rendijas del disco, el arreglo de fotodiodos detecta o no la luz generada por el diodo LED, esta señal es enviada a una circuitería de procesamiento de señales, que a su salida se tiene las señales del canal A y del canal B desfasadas en 90°, la salida es una onda rectangular con la misma diferencia de fase.

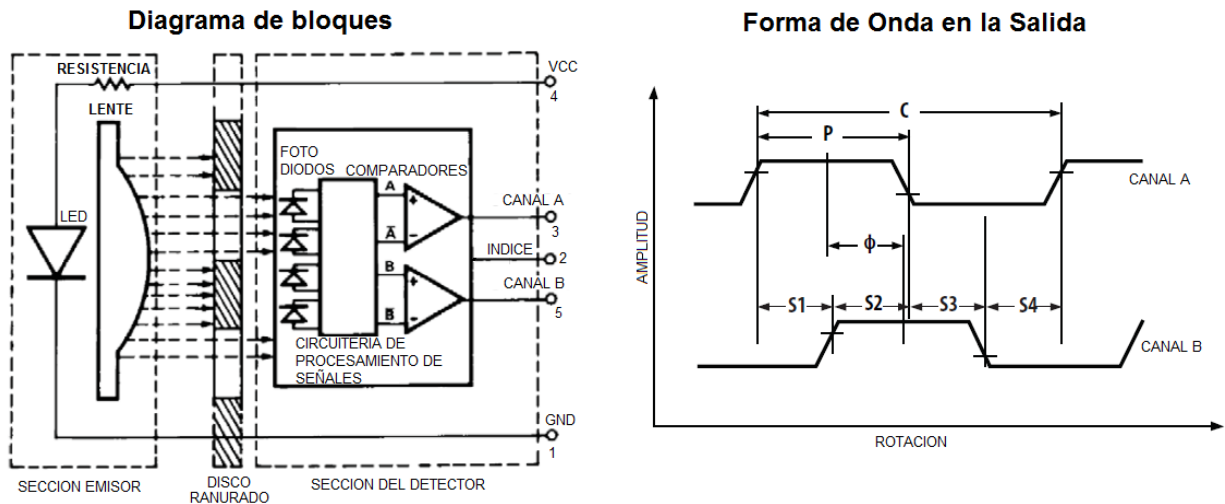


Figura 3.4: Diagrama de bloques interno y señales de un Encoder

En la figura 3.5 se muestra el Encoder HEDS 9100, se puede apreciar el disco con 500 cuentas por revolución, la ranura de índice que genera un pulso por revolución, también se aprecia los cables del canal A (pin 3), canal B (pin5), índice (pin 2), la alimentación (pin 4) y tierra (pin1).

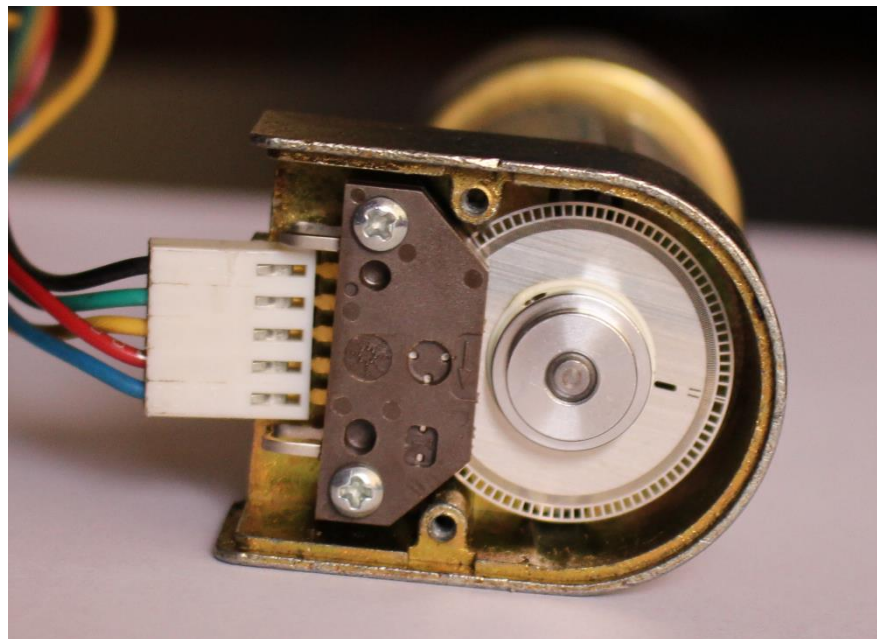


Figura 3.5: Encoder HEDS 9100

En la figura 3.6 se muestra el circuito digital que permite detectar si el motor está girando en sentido horario o anti horario, haciendo uso del circuito integrado LS7184 (pin 7).

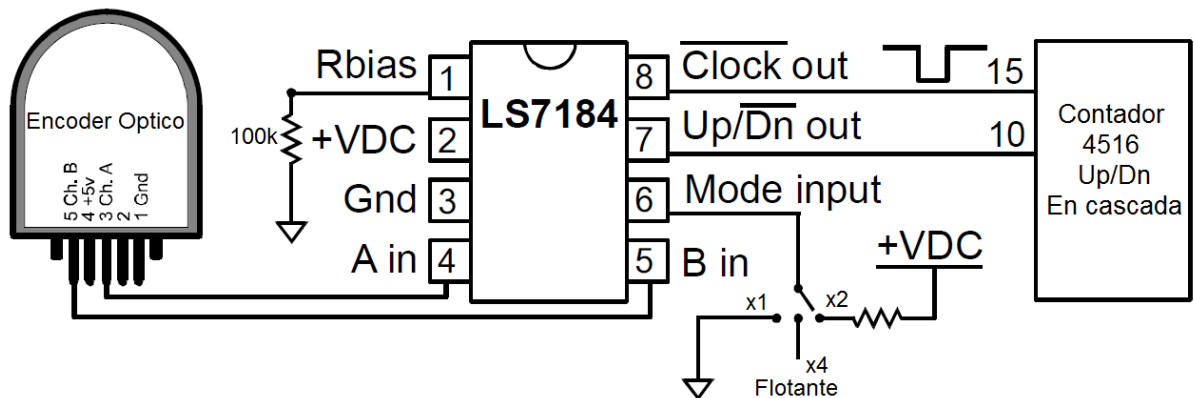


Figura 3.6: Conexión del Encoder, CI LS7184 y el CI 4516

También este circuito integrado permite cuadruplicar la precisión del sensor, tal como se muestra en el diagrama de tiempos de la figura 3.7, el pin 8 del CI LS7484 proporciona la señal de reloj que va conectado al contador ascendente/descendente 4516 de 4 bit, que puede ir conectado en cascada hasta obtener 16 bit.

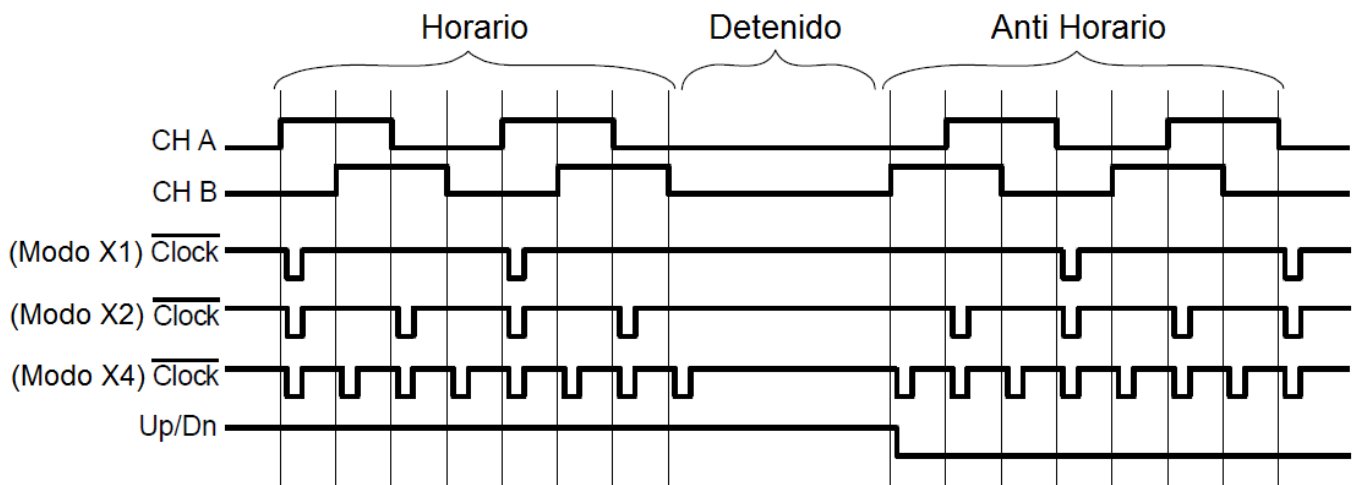


Figura 3.7: Diagrama de tiempos del CI LS7184

La ecuación matemática del Encoder para determinar la posición angular θ cuando se tiene n_r ranuras en función del valor digital n expresado en el sistema decimal se puede expresar como:

$$\theta = \frac{360^\circ}{4n_r} n \quad (3.64)$$

3.4.2 Tacómetro

Un tacómetro es un dispositivo que convierte la energía rotacional del eje motriz en energía eléctrica, proporcional a la velocidad angular, la variable del voltaje $v(t)$ del transductor proporcional a la velocidad angular $w(t)$ en el eje del motor se expresa como (Machuca Mines, 2014):

$$v(t) = K_e w(t) \quad (3.65)$$

3.5 Parámetros del sistema

Se considera los siguientes parámetros para el modelo dinámico del brazo robótico:

- $M_1=0.88$ Kg. Masa del primer eslabón
- $M_2=0.88$ Kg. Masa del segundo eslabón
- $L_1= 0.45$ m. Longitud del primer eslabón
- $L_2 =0.45$ m. Longitud del segundo eslabón
- $g = 9.81$ m/s² Gravedad

Se considera que el material de los eslabones es de aluminio, la estructura mecánica del robot de dos grados de libertad, se presenta en la figura 3.8

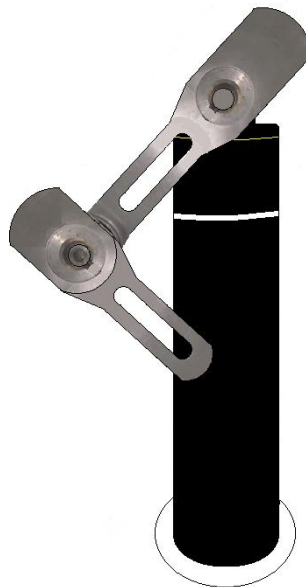


Figura 3.8: Estructura mecánica del robot planar

Para los fines de la simulación se considera las especificaciones técnicas del motor de corriente continua GM8724S029 de marca Pittman el cual se muestra en la figura 3.9, según la hoja de datos del fabricante se tiene los siguientes valores:

- $R_a = 17 \Omega$. Resistencia de armadura
- $K_a = 0.0105$. Constante de torque del motor
- $K_b = 0.0436$. Constante de fuerza contraelectromotriz
- $n = 187.7$. Relación de reducción con engranajes
- $J_m = 1.6E-6$. Inercia del rotor en $\text{kg}\cdot\text{m}^2$
- $f_m = 1.4E-6$. Coeficiente de fricción viscosa $\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$



Figura 3.9: Motor de CC Pittman GM8724S029

3.6 Introducción al Control en el espacio de estados

Los robots manipuladores tienen un amplio rango de aplicaciones, tales como manufactura de autos, soldadura, corte de piezas, exploraciones espaciales, manipulación de elementos peligrosos entre otros. Para que los robots se operen de forma eficiente, es necesario diseñar algún tipo de control, siendo los más conocidos los siguientes:

- Control de posición
- Control de velocidad
- Control de fuerza

Existen muchas estrategias para controlar las trayectorias de los robots, en los últimos años se están haciendo muchas investigaciones en el control con inteligencia artificial,

específicamente con control Difuso y Control aplicando redes neuronales, también se están combinando estas técnicas con técnicas de Control Optimo, Control Robusto, Control Predictivo, para resolver este tipo de problema de controladores es posible usar la norma H_∞ junto con Desigualdades Matriciales Lineales.

El problema se centra en el control de posición de un robot plano de dos grados de libertad, el cual se muestra en la figura 3.1, para este fin se hace uso de la Lógica Difusa, Control Optimo H_∞ y Desigualdades Matriciales Lineales, la configuración del sistema de control se muestra en la figura 3.14.

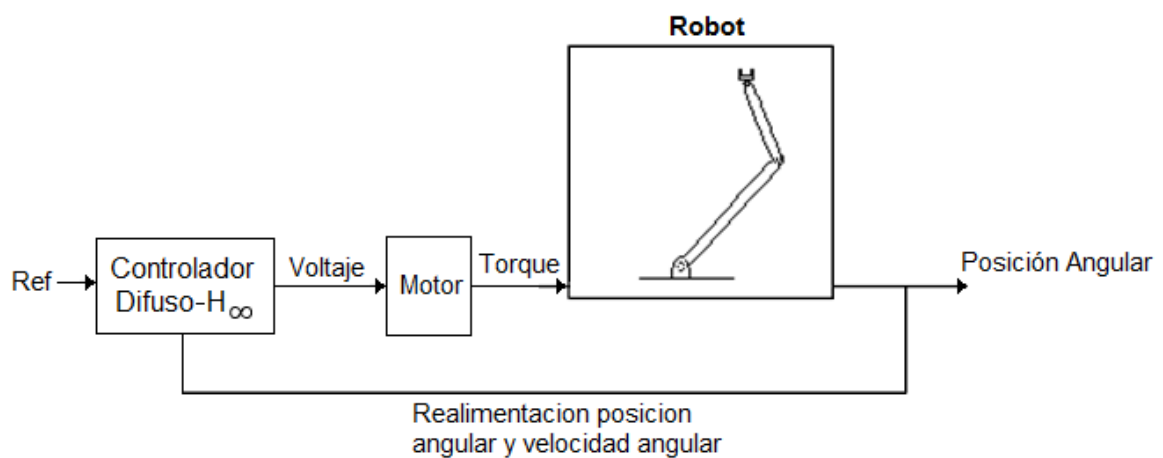


Figura 3.10: Sistema de control del Robot

3.7 Matrices de estado y de salida

Utilizándose la técnica de expansión de serie de Taylor, evaluado en una pequeña vecindad del punto de operación, los términos de orden superior en la serie de Taylor pueden ser despreciadas, así, la matriz de estado linealizada y evaluada en el punto x_0 resultante es:

$$JA = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} x = x_0 \quad (3.66)$$

La matriz de la ecuación (3.66) es la matriz Jacobiana evaluada en x_0 , de la misma forma se puede expresar la matriz de entrada linealizada y evaluada en el punto u_0 .

$$JB = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_4}{\partial u_1} & \frac{\partial f_4}{\partial u_2} \end{bmatrix} u = u_0 \quad (3.67)$$

3.8 Modelo Dinámico Difuso

Un sistema no lineal se puede representar por medio del modelo Difuso Takagi-Sugeno, para representar un sistema no lineal a través de este modelo, se forman los modelos para cada punto de operación lineal, el modelo difuso general del sistema se logra mediante la "combinación" difusa de los modelos del sistema lineal (Tanaka & Wang, 2001). La i -ésima regla del modelo difuso del sistema no lineal tiene la siguiente forma:

Sean las variables de estudio z_1, z_2, \dots, z_g con L puntos de estudio, donde se estudia los conjuntos de pertenencia de cada variable.

x es el vector de variables de estado donde $x = [z_1, \dot{z}_1, z_2, \dot{z}_2, \dots, z_g, \dot{z}_g]$

$F_{11}(z_1(t))$ es el grado de pertenencia para la variable z_1 en el punto de estudio 1

$F_{12}(z_2(t))$ es el grado de pertenencia para la variable z_2 en el punto de estudio 1

.....

$F_{1g}(z_g(t))$ es el grado de pertenencia para la variable z_g en el punto de estudio 1

$F_{21}(z_1(t))$ es el grado de pertenencia para la variable z_1 en el punto de estudio 2
 $F_{22}(z_2(t))$ es el grado de pertenencia para la variable z_2 en el punto de estudio 2

 $F_{2g}(z_g(t))$ es el grado de pertenencia para la variable z_g en el punto de estudio 2

 $F_{L1}(z_1(t))$ es el grado de pertenencia para la variable z_1 en el punto de estudio L
 $F_{L2}(z_2(t))$ es el grado de pertenencia para la variable z_2 en el punto de estudio L

 $F_{Lg}(z_g(t))$ es el grado de pertenencia para la variable z_g en el punto de estudio L

El modelo Difuso Takagi-Sugeno es una interpolación de muchos modelos lineales, donde z_i son la variable de la premisa y $F_{ij}(z_j(t))$ es el grado de pertenencia.

Se define $\mu_i(z(t))$ como la función de pertenencia para los conjuntos difusos F_{ij} .

Los resultados de los sistemas difusos se infieren de la siguiente manera: (Tanaka & Wang, 2001)

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^L \mu_i(z(t))[A_i x(t) + B_i u(t)]}{\sum_{i=1}^L \mu_i(z(t))} \quad (3.68)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^L h_i(z(t))[A_i x(t) + B_i u(t)] \quad (3.69)$$

$$y(t) = \frac{\sum_{i=1}^L \mu_i(z(t))[C_i x(t)]}{\sum_{i=1}^L \mu_i(z(t))} \quad (3.70)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^L h_i(z(t))[C_i x(t)] \quad (3.71)$$

Donde L se refiere al número de reglas del sistema difuso.

Sea g el número de variables.

$$\mu_i(z(t)) = \prod_{j=1}^g F_{ij}(z_j(t)) \quad (3.72)$$

$$h_i(z(t)) = \frac{\mu_i(z(t))}{\sum_{i=1}^L \mu_i(z(t))} \quad (3.73)$$

Se asume que $\mu_i(z(t)) \geq 0$ y $\sum_{i=1}^L \mu_i(z(t)) > 0$ para todo t , de este modo también $h_i(z(t)) \geq 0$.

3.9 Controlador Difuso

Cada regla de control es diseñada de la correspondiente regla del modelo difuso Takagi-Sugeno. El controlador difuso tiene los mismos conjuntos difusos del modelo difuso en las partes de la premisa. Se tiene el controlador el cual tiene la siguiente forma: (Tanaka & Wang, 2001)

$$\left. \begin{array}{l} \text{SI } z_1(t) \text{ Es } F_{j1} \text{ y } \dots \text{ y } z_g(t) \text{ Es } F_{jg} \\ \text{ENTONCES } u(t) = K_j[x(t) - x_r(t)] \text{ para } j = 1, 2, \dots, L \end{array} \right\} \quad (3.74)$$

El controlador difuso en su forma general está dado por:

$$u(t) = \frac{\sum_{j=1}^L \mu_j(z(t)) [K_j(x(t) - x_r(t))]}{\sum_{j=1}^L \mu_j(z(t))} \quad (3.75)$$

$$u(t) = \sum_{j=1}^L h_j(z(t)) [K_j(x(t) - x_r(t))] = - \sum_{j=1}^L h_j(z(t)) [K_j(x_r(t) - x(t))] \quad (3.76)$$

3.10 Control H_∞ por realimentación de estados

Para un sistema en el espacio de estados considerando disturbios a los que puede estar sometido, se puede expresar de la siguiente forma:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + B_1 u + B_2 w \\ y = Cx + D_1 u + D_2 v \end{array} \right\} \quad (3.77)$$

Donde:

- $x \in \mathbb{R}^n$ y $y \in \mathbb{R}^m$ son respectivamente el vector de estados y el vector de salida.
- $w \in \mathbb{R}^p$ es el vector de disturbios externos
- $v \in \mathbb{R}^p$ es el vector de ruido de medición
- $u \in \mathbb{R}^r$ es el vector de control
- A, C, D_1, D_2, B_1 y B_2 Son las matrices de coeficientes

Para el sistema de la ecuación (3.77) se diseña la ley de control por realimentación de estados

$$u = -Kx \quad (3.78)$$

Con lo que se obtienen las ecuaciones para el sistema en lazo cerrado.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - B_1K)x + B_2w \\ y &= (C - D_1K)x + D_2v \end{aligned} \quad (3.79)$$

La influencia del disturbio w en el vector de salida y se determina por:

$$y(s) = G_{yw}(s)w(s) \quad (3.80)$$

Donde

$$G_{yw} = (C + D_1K)(sI - (A + B_1K))^{-1}B_2 + D_2 \quad (3.81)$$

También se define para una matriz racional $G(s)$ que su norma H_∞ esta dado por

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_w \{\sigma_{max}(G(jw))\} \quad (3.82)$$

También la salida se puede expresar usando la siguiente ecuación.

$$y(s) = G(s)u(s) \quad (3.83)$$

Para un sistema que se describe mediante la ecuación (3.77) se puede diseñar una ley de control por realimentación de estados siempre que cumpla la siguiente condición:

$$\|G_{zw}(s)\|_{\infty} < \gamma \quad (3.84)$$

Donde γ es un escalar positivo.

El problema hasta esta fase consiste en determinar los valores de la matriz K de la ecuación (3.78), esta matriz permite controlar la posición del robot de dos grados de libertad. Haciendo uso del control H_{∞} se tiene una solución siempre que se pueda plantear mediante una ecuación de desigualdades matriciales lineales. Se define la siguiente desigualdad matricial lineal: (Duan & Yu, 2013), anexo C.

$$\begin{bmatrix} (AX + B_1W)^T + AX + B_1W & B_2 & (CX + D_1W)^T \\ B_2^T & -\gamma I & D_2^T \\ CX + D_1W & D_2 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.85)$$

Esta inecuación tiene una solución si y solo si existe una matriz W y una matriz X semidefinida positiva. Dado que se tiene un nivel de atenuación mínimo γ y la matriz X es semidefinida positiva, la matriz K se puede hallar resolviendo las siguientes inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \min \gamma \\ \text{Sujeto a : } X > 0 \\ \left[\begin{array}{ccc} (AX + B_1W)^T + AX + B_1W & B_2 & (CX + D_1W)^T \\ B_2^T & -\gamma I & D_2^T \\ CX + D_1W & D_2 & -\gamma I \end{array} \right] < 0 \end{array} \right\} \quad (3.86)$$

Después de resolver la desigualdad matricial lineal (3.85) se tiene los valores de las matrices W y X , la solución al problema estará dado por:

$$K = WX^{-1} \quad (3.87)$$

El sistema de control en el espacio de estados se muestra en la figura 3.15, en el sistema que se propone, se usan varios modelos lineales en diferentes puntos de operación.

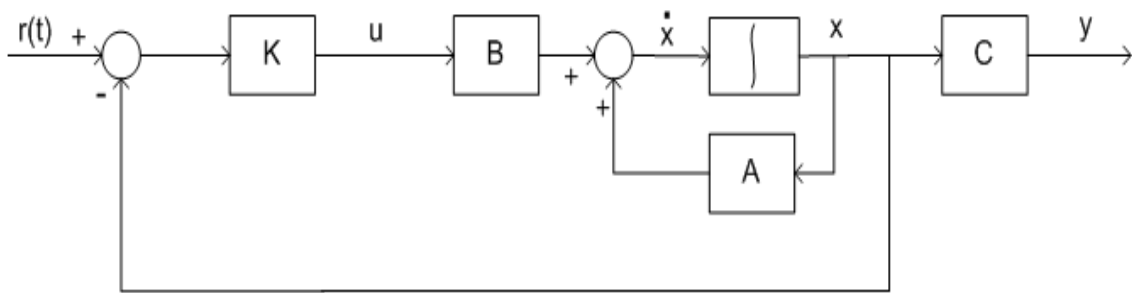


Figura 3.11: Sistema de Control en el Espacio de Estados

La ecuación (3.85) tiene la forma de una LMI y está expresada como un problema de optimización convexa, para resolver este tipo de problemas se puede usar diferentes tipos de software, para el sistema de control de este trabajo se utilizó el software MATLAB y el Toolbox LMI desarrollado en (Gahinet, Nemirovski, Laub, & Chilali, 1995). El código desarrollado se muestra en el anexo B.

3.11 Señales de prueba

Para efectos de simulación se considera las señales de prueba que se muestran en las figuras 3.12 y 3.13, estas señales representan la referencia para las variables x_1 y x_3 respectivamente.

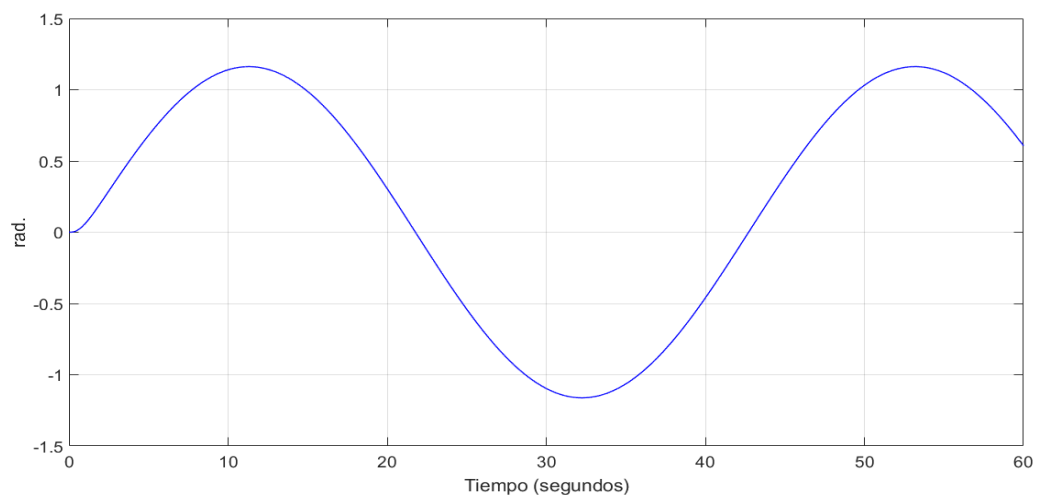


Figura 3.12: Señal de referencia para la variable x_1

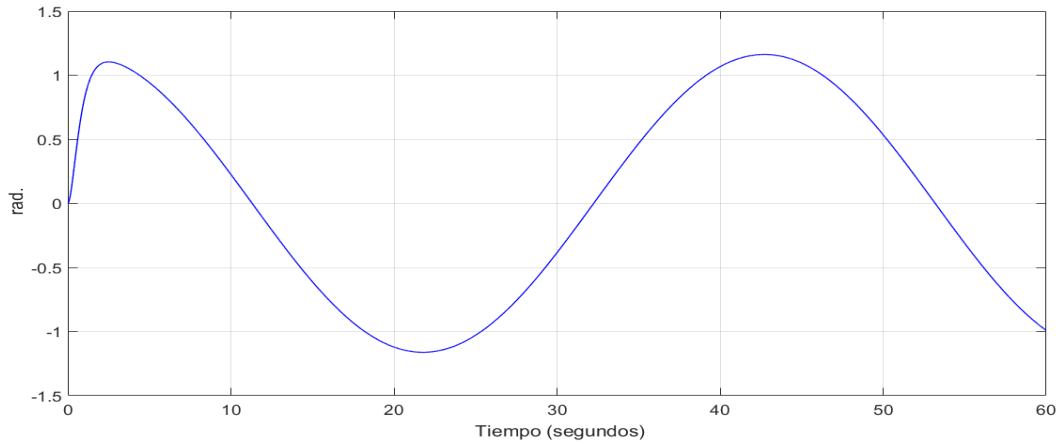


Figura 3.13: Señal de referencia para la variable x_3

3.12 Sistema de Control de dos variables de entrada con tres funciones de pertenencia.

3.12.1 Usando función de pertenencia triangular

Para el robot, se establece los límites de ángulo de las articulaciones en el rango de $[-\pi/2, \pi/2]$ para la primera y segunda articulación, también se define el número de reglas y los límites de las funciones de pertenencia tal como se muestra en la figura 3.14.

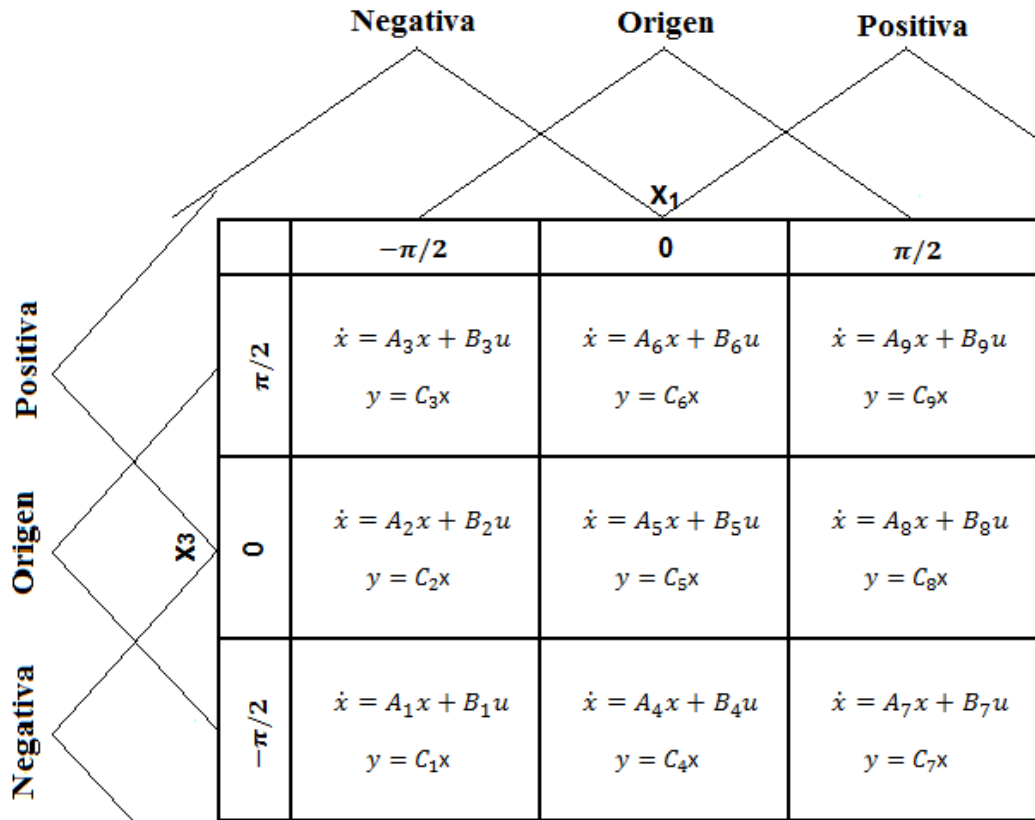


Figura 3.14: Reglas utilizadas para el control no lineal

Función de pertenencia triangular. La cual esta especificada por tres parámetros reales constantes a, b y c ; con una variable real x del siguiente modo.

$$Triangulo(x; a, b, c) = \max \left(\min \left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b} \right), 0 \right) \quad (3.88)$$

Se define la forma de las funciones de pertenencia triangular para las variables x_1 y x_3 , tal como se muestra en la figura 3.18, donde:

Conjunto Origen:

$$\begin{aligned} Triángulo_{Origen} &= Triangulo \left(x; -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2} \right); a = -\frac{\pi}{2}, b = 0, c = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ &= \max \left(\min \left(\frac{x - (-\pi/2)}{0 - (-\pi/2)}, \frac{\pi/2 - x}{\pi/2 - 0} \right), 0 \right) \\ &= \max \left(\min \left(\frac{x + \pi/2}{\pi/2}, \frac{\pi/2 - x}{\pi/2} \right), 0 \right) \end{aligned}$$

La gráfica de esta función es:

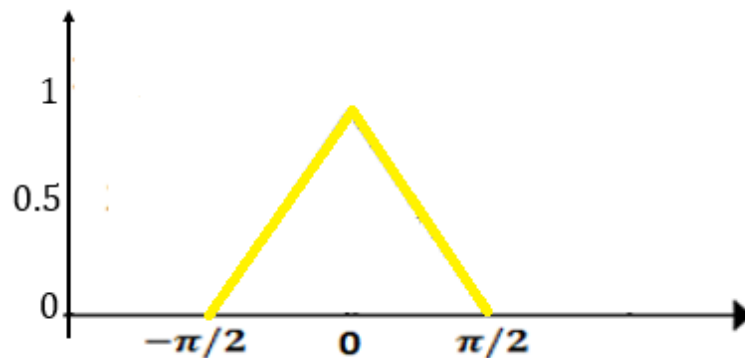


Figura 3.15: Conjunto origen

Conjunto Negativa:

$$\begin{aligned} Triangulo_{Negativa} &= Triangulo \left(x; -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0 \right); a = -\pi, b = -\pi/2, c = 0, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ &= \max \left(\min \left(\frac{x - (-\pi)}{-\pi/2 - (-\pi)}, \frac{0 - x}{0 - (-\pi/2)} \right), 0 \right) \\ &= \max \left(\min \left(\frac{x + \pi}{\pi/2}, \frac{-x}{\pi/2} \right), 0 \right) \end{aligned}$$

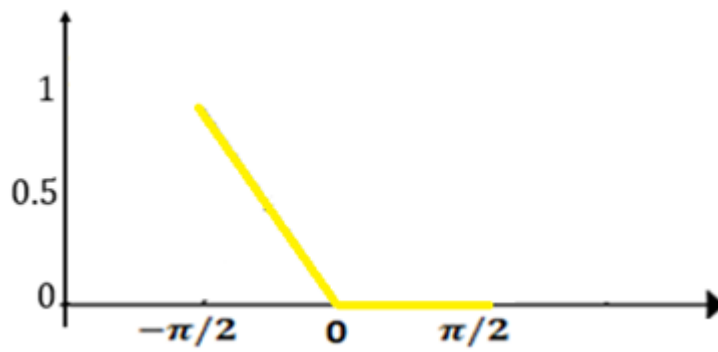


Figura 3.16: Conjunto Negativa

Conjunto Positiva

$$\begin{aligned}
 \text{Triangulo}_{\text{positiva}} &= \text{Triangulo} \left(x; -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0 \right); a = 0, b = \pi/2, c = \pi, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\
 &= \max \left(\min \left(\frac{x-0}{\pi/2-0}, \frac{\pi-x}{\pi-(\pi/2)} \right), 0 \right) \\
 &= \max \left(\min \left(\frac{x}{\pi/2}, \frac{\pi-x}{\pi/2} \right), 0 \right)
 \end{aligned}$$

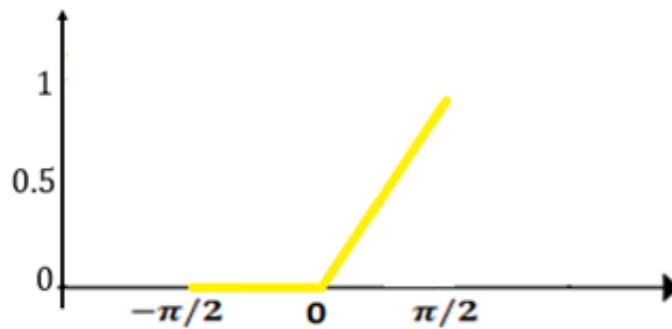


Figura 3.17: Conjunto Positiva

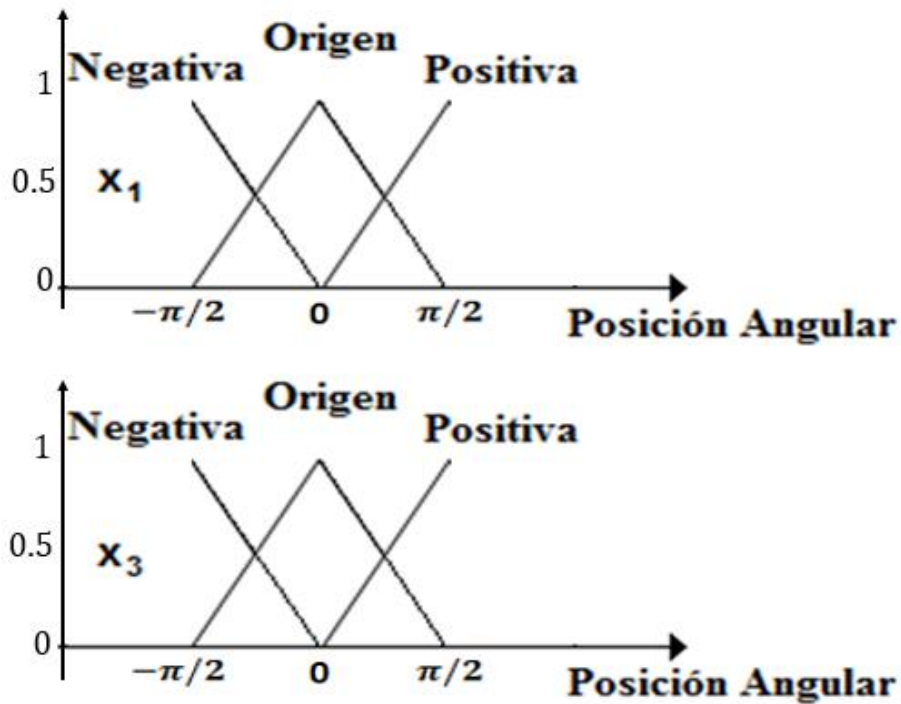


Figura 3.18: Funciones de pertenencia

El modelo dinámico Difuso usado es el modelo Difuso Takagi-Sugeno, tiene dos variables en la premisa ($g = 2$), se tiene tres conjuntos difusos para cada variable, entonces se tiene nueve reglas ($L = 9$).

En este caso se tiene 9 modelos lineales, Considerando las reglas que se muestran en el grafico 3.14 se define las reglas de la base del conocimiento del siguiente modo:

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{SI } x_1 \text{ esta por } -\pi/2 \text{ y } x_3 \text{ esta por } -\pi/2 \\
 \text{Entonces} \\
 \dot{x} = A_1 x + B_1 u \\
 y = C_1 x
 \end{array} \right\} \text{Regla 1} \quad (3.89)$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{SI } x_1 \text{ esta por } -\pi/2 \text{ y } x_3 \text{ esta por } 0 \\
 \text{Entonces} \\
 \dot{x} = A_2 x + B_2 u \\
 y = C_2 x
 \end{array} \right\} \text{Regla 2} \quad (3.90)$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{SI } x_1 \text{ esta por } -\pi/2 \text{ y } x_3 \text{ esta por } \pi/2 \\
 \text{Entonces} \\
 \dot{x} = A_3 x + B_3 u \\
 y = C_3 x
 \end{array} \right\} \text{Regla 3} \quad (3.91)$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{SI } x_1 \text{ esta por } 0 \text{ y } x_3 \text{ esta por } -\pi/2 \\
 \text{Entonces} \\
 \dot{x}=A_4x+B_4u \\
 y=C_4x
 \end{array} \right\} \text{Regla 4} \quad (3.92)$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{SI } x_1 \text{ esta por } 0 \text{ y } x_3 \text{ esta por } 0 \\
 \text{Entonces} \\
 \dot{x}=A_5x+B_5u \\
 y=C_5x
 \end{array} \right\} \text{Regla 5} \quad (3.93)$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{SI } x_1 \text{ esta por } 0 \text{ y } x_3 \text{ esta por } \pi/2 \\
 \text{Entonces} \\
 \dot{x}=A_6x+B_6u \\
 y=C_6x
 \end{array} \right\} \text{Regla 6} \quad (3.94)$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{SI } x_1 \text{ esta por } \pi/2 \text{ y } x_3 \text{ esta por } -\pi/2 \\
 \text{Entonces} \\
 \dot{x}=A_7x+B_7u \\
 y=C_7x
 \end{array} \right\} \text{Regla 7} \quad (3.95)$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{SI } x_1 \text{ esta por } \pi/2 \text{ y } x_3 \text{ esta por } 0 \\
 \text{Entonces} \\
 \dot{x}=A_8x+B_8u \\
 y=C_8x
 \end{array} \right\} \text{Regla 8} \quad (3.96)$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{SI } x_1 \text{ esta por } \pi/2 \text{ y } x_3 \text{ esta por } \pi/2 \\
 \text{Entonces} \\
 \dot{x}=A_9x+B_9u \\
 y=C_9x
 \end{array} \right\} \text{Regla 9} \quad (3.97)$$

El diagrama de bloques del modelo difuso para la planta del robot de dos grados de libertad se muestra en la figura 3.19.

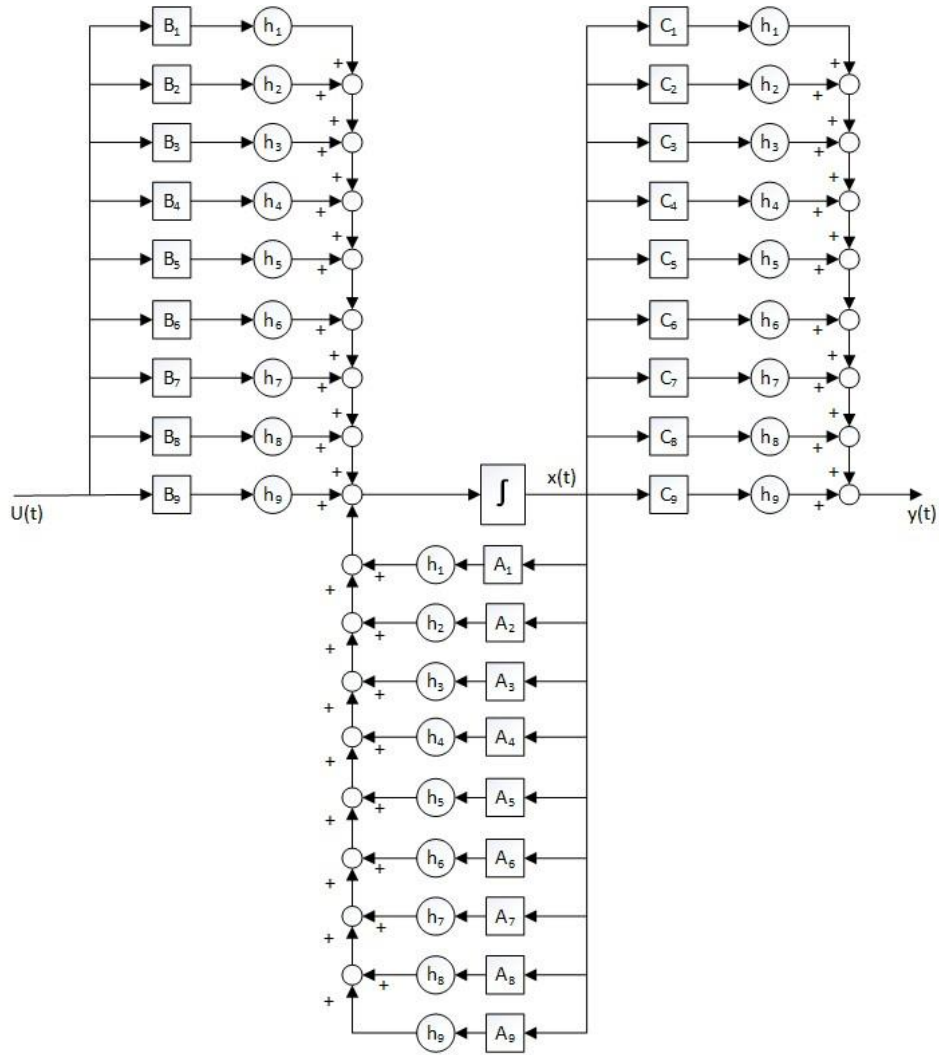


Figura 3.19: Modelo Difuso Completo

Siendo el número de reglas $L = 9$, se obtiene que:

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(z(t)) = \mu_1(z(t)) + \mu_2(z(t)) + \mu_3(z(t)) + \mu_4(z(t)) + \mu_5(z(t)) + \mu_6(z(t)) + \mu_7(z(t)) + \mu_8(z(t)) + \mu_9(z(t)) \quad (3.98)$$

Y siendo el número de variables de la premisa $g = 2$ se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^L \mu_i(z(t)) = & F_{11}(z_1(t))F_{12}(z_2(t)) + F_{21}(z_1(t))F_{22}(z_2(t)) + F_{31}(z_1(t))F_{32}(z_2(t)) \\ & + F_{41}(z_1(t))F_{42}(z_2(t)) + F_{51}(z_1(t))F_{52}(z_2(t)) + F_{61}(z_1(t))F_{62}(z_2(t)) \\ & + F_{71}(z_1(t))F_{72}(z_2(t)) + F_{81}(z_1(t))F_{82}(z_2(t)) + F_{91}(z_1(t))F_{92}(z_2(t)) \end{aligned} \quad (3.99)$$

En este caso se tiene dos variables de entrada x_1 y x_3 los cuales se encuentran dentro del rango $[-(\pi/2), (\pi/2)]$, que representan a los ángulos de la primera y segunda articulación respectivamente y considerando tres funciones de pertenencia para cada variable de entrada, se tienen nueve puntos de operación, para obtener las matrices de estado se utiliza la matriz Jacobiana definida por la ecuación (3.66) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A_1 &= JA\left(x_1 = -\frac{\pi}{2}, x_3 = -\frac{\pi}{2}\right), A_2 = JA\left(x_1 = -\frac{\pi}{2}, x_3 = 0\right), A_3 = JA\left(x_1 = -\frac{\pi}{2}, x_3 = \frac{\pi}{2}\right) \\ A_4 &= JA\left(x_1 = 0, x_3 = -\frac{\pi}{2}\right), A_5 = JA(x_1 = 0, x_3 = 0), A_6 = JA\left(x_1 = 0, x_3 = \frac{\pi}{2}\right) \\ A_7 &= JA\left(x_1 = \frac{\pi}{2}, x_3 = -\frac{\pi}{2}\right), A_8 = JA\left(x_1 = \frac{\pi}{2}, x_3 = 0\right), A_9 = JA\left(x_1 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Procediendo de la misma forma se puede expresar la matriz de salida linealizada y evaluada en el punto u_0 utilizando la ecuación (3.67). Obteniéndose las matrices de salida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} B_1 &= JB\left(x_1 = -\frac{\pi}{2}, x_3 = -\frac{\pi}{2}\right), B_2 = JB\left(x_1 = -\frac{\pi}{2}, x_3 = 0\right), B_3 = JB\left(x_1 = -\frac{\pi}{2}, x_3 = \frac{\pi}{2}\right) \\ B_4 &= JB\left(x_1 = 0, x_3 = -\frac{\pi}{2}\right), B_5 = JB(x_1 = 0, x_3 = 0), B_6 = JB\left(x_1 = 0, x_3 = \frac{\pi}{2}\right) \\ B_7 &= JB\left(x_1 = \frac{\pi}{2}, x_3 = -\frac{\pi}{2}\right), B_8 = JB\left(x_1 = \frac{\pi}{2}, x_3 = 0\right), B_9 = JB\left(x_1 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Para efectos de simulación se considera los parámetros del robot establecidos en la sección 3.5.

Las matrices del sistema linealizado en los diferentes puntos de operación se muestran a continuación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2.6625 & -3.247 & 2.9233 & 1.5334 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -17.923 & 1.5334 & -3.6562 & -10.614 \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5577 & -3.0722 & -0.0676 & 4.0686 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.0676 & 4.0686 & 0.7605 & -15.278 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3.9924 & -3.247 & -2.4556 & 1.5334 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 17.342 & 1.5334 & 3.6872 & -10.614 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 19.054 & -3.247 & 6.7008 & 1.5334 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8.3274 & 1.5334 & 0.4443 & -10.614 \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 15.981 & -3.0722 & -1.9371 & 4.0686 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.9371 & 4.0686 & 21.792 & -15.278 \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 19.054 & -3.247 & 6.7008 & 1.5334 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8.3274 & 1.5334 & 0.4443 & -10.614 \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3.9924 & -3.247 & -2.4556 & 1.5334 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 17.342 & 1.5334 & 3.6872 & -10.614 \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

$$A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5577 & -3.0722 & -0.0676 & 4.0686 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.0676 & 4.0686 & 0.7605 & -15.278 \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

$$A_9 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2.6625 & -3.247 & 2.9233 & 1.5334 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -17.923 & 1.5334 & -3.6562 & -10.614 \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

Utilizando el mismo procedimiento para las matrices de entrada, se tiene las matrices de entrada:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3772 & -0.1781 \\ 0 & 0 \\ -0.1781 & 1.2329 \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3569 & -0.4726 \\ 0 & 0 \\ -0.4726 & 1.7746 \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3772 & -0.1781 \\ 0 & 0 \\ -0.1781 & 1.2329 \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3772 & -0.1781 \\ 0 & 0 \\ -0.1781 & 1.2329 \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3569 & -0.4726 \\ 0 & 0 \\ -0.4726 & 1.7746 \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

$$B_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3772 & -0.1781 \\ 0 & 0 \\ -0.1781 & 1.2329 \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

$$B_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3772 & -0.1781 \\ 0 & 0 \\ -0.1781 & 1.2329 \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

$$B_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3569 & -0.4726 \\ 0 & 0 \\ -0.4726 & 1.7746 \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

$$B_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3772 & -0.1781 \\ 0 & 0 \\ -0.1781 & 1.2329 \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

Finalmente se realiza el mismo procedimiento para la matriz de salida.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

El diagrama de bloques del Controlador Difuso para el Robot de dos grados de libertad se muestra en la figura 3.20.

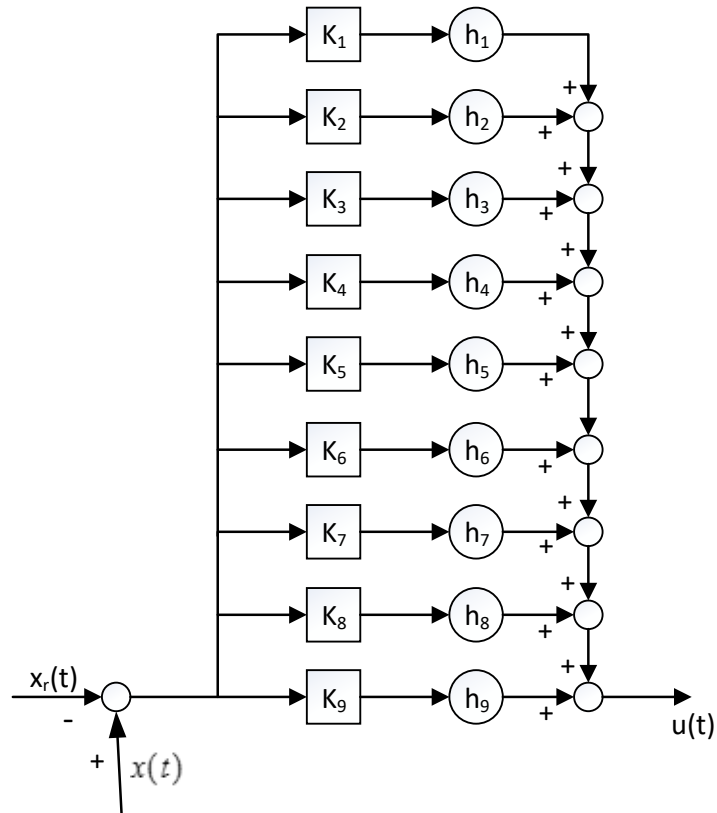


Figura 3.20: Controlador Difuso

Para cada uno de los puntos de operación se obtienen las matrices del controlador K , para este fin se utiliza Matlab, resolviendo la ecuación (3.86) para cada punto de operación se obtiene:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -1.9919 * 10^8 & -1.4335 * 10^3 & -1.8718 * 10^8 & -1.6676 * 10^3 \\ -1.2036 * 10^8 & -545.1628 & -1.1834 * 10^8 & -1.2150 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -1.7618 * 10^8 & -972.2437 & -1.6233 * 10^8 & -2.2538 * 10^3 \\ -9.7948 * 10^7 & -245.6873 & -9.4093 * 10^7 & -1.3596 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.120)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -1.9917 * 10^8 & -1.4334 * 10^3 & -1.8716 * 10^8 & -1.6675 * 10^3 \\ -1.2036 * 10^8 & -545.1215 & -1.1834 * 10^8 & -1.2150 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -1.9917 * 10^8 & -1.4334 * 10^3 & -1.8716 * 10^8 & -1.6675 * 10^3 \\ -1.2036 * 10^8 & -545.1337 & -1.1835 * 10^8 & -1.215 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} -1.7619 * 10^8 & -972.447 & -1.6234 * 10^8 & -2.2539 * 10^3 \\ -9.7944 * 10^7 & -245.76 & -9.4091 * 10^7 & -1.3596 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} -1.9917 * 10^8 & -1.4334 * 10^3 & -1.8716 * 10^8 & -1.6675 * 10^3 \\ -1.2036 * 10^8 & -545.1337 & -1.1835 * 10^8 & -1.215 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.124)$$

$$K_7 = \begin{bmatrix} -1.9917 * 10^8 & -1.4334 * 10^3 & -1.8716 * 10^8 & -1.6675 * 10^3 \\ -1.2036 * 10^8 & -545.1215 & -1.1834 * 10^8 & -1.2150 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.125)$$

$$K_8 = \begin{bmatrix} -1.7618 * 10^8 & -972.2437 & -1.6233 * 10^8 & -2.2538 * 10^3 \\ -9.7948 * 10^7 & -245.6873 & -9.4093 * 10^7 & -1.3596 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.126)$$

$$K_9 = \begin{bmatrix} -1.9919 * 10^8 & -1.4335 * 10^3 & -1.8718 * 10^8 & -1.6676 * 10^3 \\ -1.2036 * 10^8 & -545.1628 & -1.1834 * 10^8 & -1.2150 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.127)$$

En la figura 3.21 se muestra el sistema de control que incluye el modelo del robot de dos grados de libertad en nueve puntos de operación, el controlador para cada modelo y las funciones de pertenencia triangular.

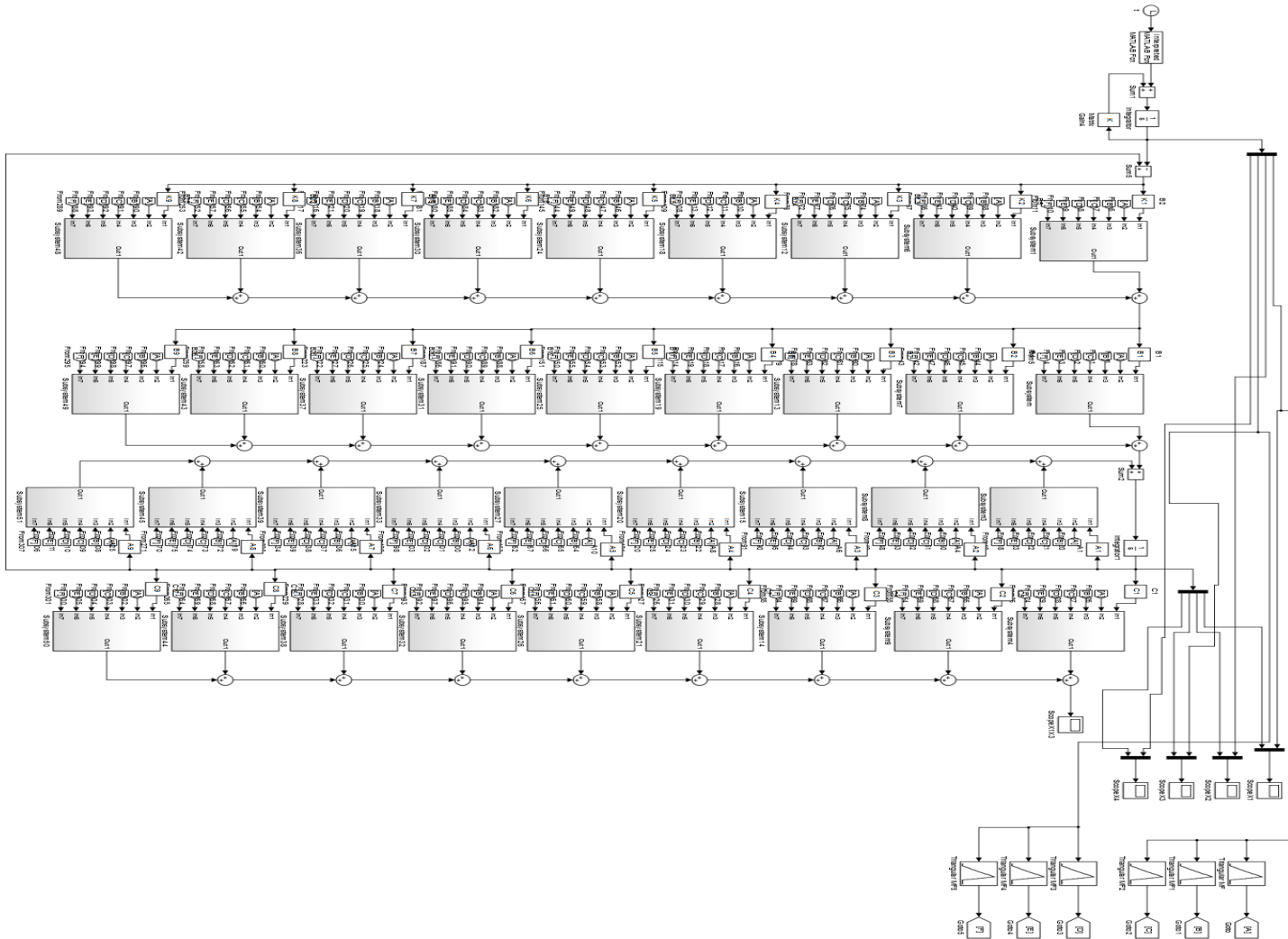


Figura 3.21: Simulación del sistema completo

Con el fin de probar el sistema frente a perturbaciones externas se considera un vector y una fuente de perturbaciones, del siguiente modo:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1u + B_2w \\ y &= Cx + D_1u \end{aligned} \right\} \quad (3.128)$$

Donde:

- $w \in \mathbb{R}^p$ es el vector de disturbios externos.

El vector de disturbios externos w se define de la siguiente forma:

$$w = \begin{bmatrix} 0.5 \text{ sen } (4t) \\ 0.5 \text{ sen } (4t) \\ 0.5 \text{ sen } (4t) \\ 0.5 \text{ sen } (4t) \end{bmatrix} \quad (3.129)$$

En la figura 3.22 se muestra el sistema de control incluido el vector de disturbios externos.

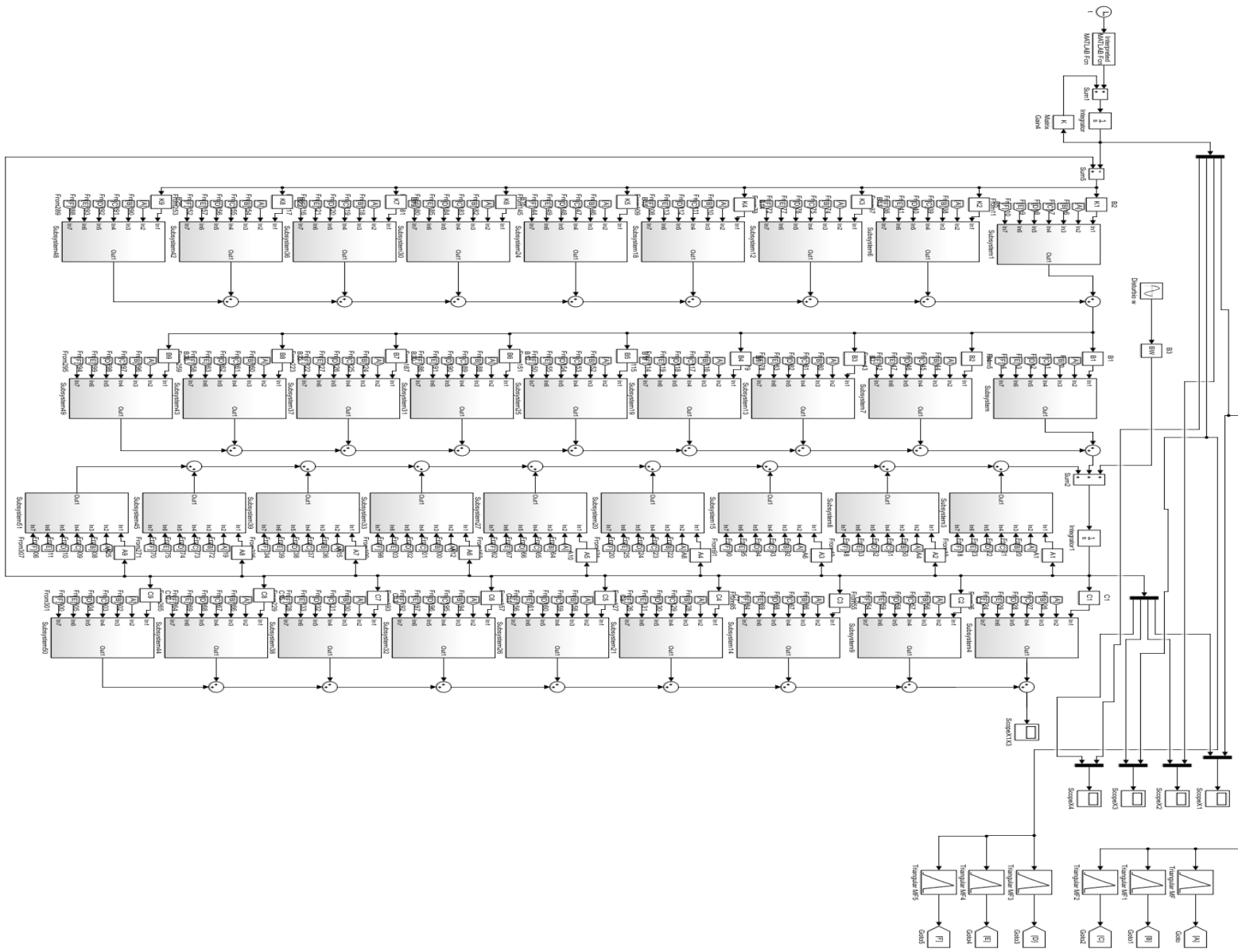


Figura 3.22: Simulación del sistema de control, incluido disturbios

3.12.2 Usando función de pertenencia Gaussiana

En esta sección se utiliza un sistema difuso con función de pertenencia Gaussiana, se establece los límites de ángulo de las articulaciones en el rango de $[-\pi/2, \pi/2]$, para la primera y segunda articulación, también se define las reglas del mismo modo que para el caso triangular.

Función de pertenencia de forma Gaussiana. Esta función está especificada por dos parámetros $\{\sigma, c\}$, del siguiente modo:

$$\mu_G(x; \sigma, c) = e^{-0.5\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2} \quad (3.130)$$

Donde c es el centro de la distribución Gaussiana y σ es la desviación que tiene la distribución Gaussiana, en la figura 3.23 se muestra la función de pertenencia de la forma Gaussiana.

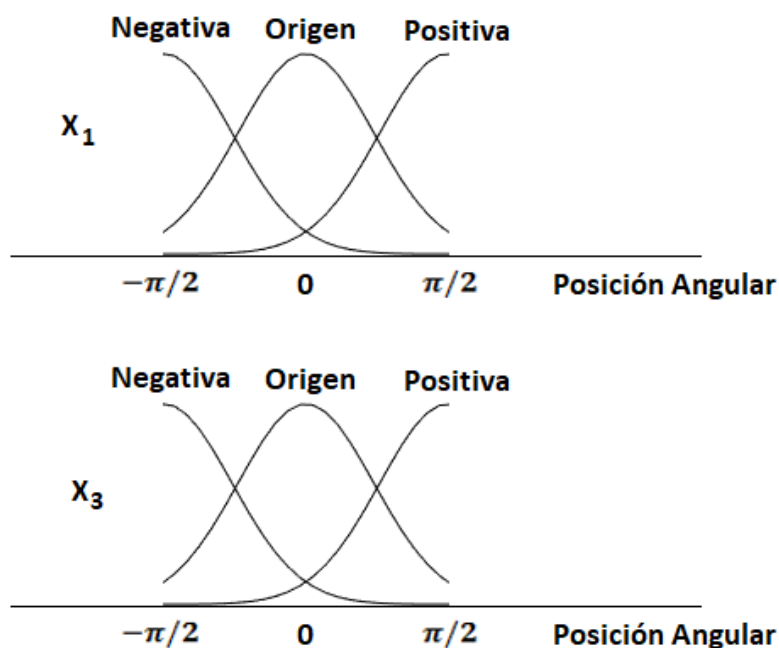


Figura 3.23: Funciones de pertenencia

El modelo dinámico Difuso, el controlador utilizado y las señales de referencia son las mismas que se utilizó en el caso de funciones de pertenencia triangular.

3.13 Sistema de Control de dos variables de entrada y con cinco funciones de pertenencia

3.13.1 Usando función de pertenencia triangular

Para el robot de dos grados de libertad, se establece los límites de ángulo de las articulaciones en el rango de $[-\pi/2, \pi/2]$ para la primera y segunda articulación, también se define el número de reglas y los límites de las funciones de pertenencia tal como se muestra en la figura 3.24.

		X_1				
		$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$
X_3	$\pi/2$	$\dot{x} = A_5x + B_5u$ $y = C_5x$	$\dot{x} = A_{10}x + B_{10}u$ $y = C_{10}x$	$\dot{x} = A_{15}x + B_{15}u$ $y = C_{15}x$	$\dot{x} = A_{20}x + B_{20}u$ $y = C_{20}x$	$\dot{x} = A_{25}x + B_{25}u$ $y = C_{25}x$
	$\pi/4$	$\dot{x} = A_4x + B_4u$ $y = C_4x$	$\dot{x} = A_9x + B_9u$ $y = C_9x$	$\dot{x} = A_{14}x + B_{14}u$ $y = C_{14}x$	$\dot{x} = A_{19}x + B_{19}u$ $y = C_{19}x$	$\dot{x} = A_{24}x + B_{24}u$ $y = C_{24}x$
	0	$\dot{x} = A_3x + B_3u$ $y = C_3x$	$\dot{x} = A_8x + B_8u$ $y = C_8x$	$\dot{x} = A_{13}x + B_{13}u$ $y = C_{13}x$	$\dot{x} = A_{18}x + B_{18}u$ $y = C_{18}x$	$\dot{x} = A_{23}x + B_{23}u$ $y = C_{23}x$
	$-\pi/4$	$\dot{x} = A_2x + B_2u$ $y = C_2x$	$\dot{x} = A_7x + B_7u$ $y = C_7x$	$\dot{x} = A_{12}x + B_{12}u$ $y = C_{12}x$	$\dot{x} = A_{17}x + B_{17}u$ $y = C_{17}x$	$\dot{x} = A_{22}x + B_{22}u$ $y = C_{22}x$
	$-\pi/2$	$\dot{x} = A_1x + B_1u$ $y = C_1x$	$\dot{x} = A_6x + B_6u$ $y = C_6x$	$\dot{x} = A_{11}x + B_{11}u$ $y = C_{11}x$	$\dot{x} = A_{16}x + B_{16}u$ $y = C_{16}x$	$\dot{x} = A_{21}x + B_{21}u$ $y = C_{21}x$

Figura 3.24: Reglas utilizadas para el control no lineal

Se define la forma de las funciones de pertenencia triangular para las variables x_1 y x_3 , tal como se muestra en la figura 3.25.

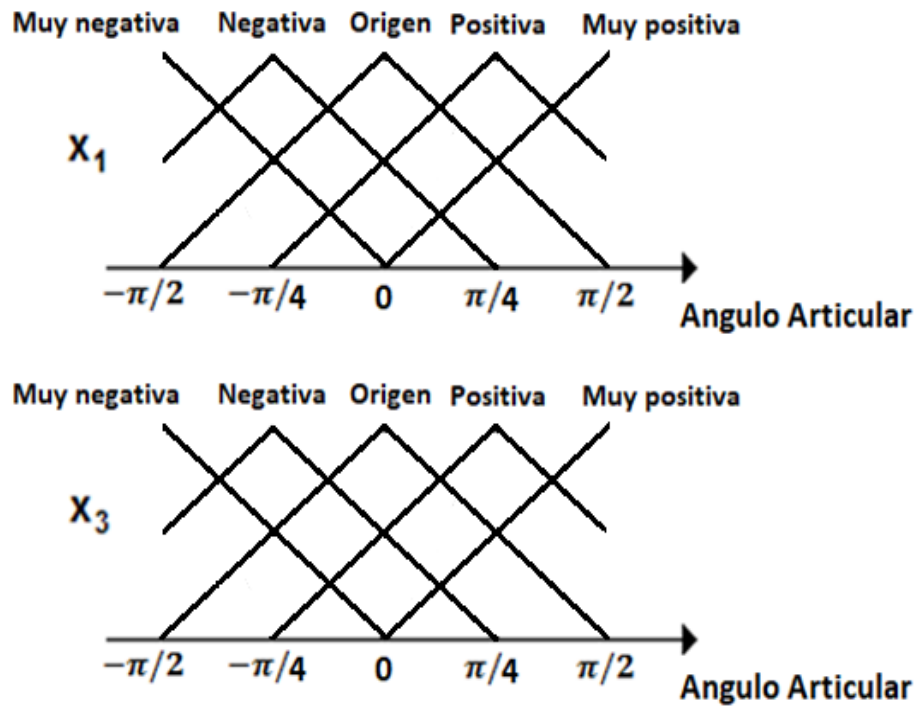


Figura 3.25: Funciones de pertenencia

El modelo dinámico Difuso usado es el modelo Difuso Takagi-Sugeno, donde se tiene dos variables en la premisa ($g = 2$) y se tiene cinco conjuntos difusos para cada variable, por lo que se tiene 25 reglas ($L = 25$), en este caso se tiene 25 modelos lineales, Considerando las reglas que se muestran en el grafico 3.24 se define las reglas de la base del conocimiento del siguiente modo:

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{SI } x_1 \text{ esta por } -\pi/2 \text{ y } x_3 \text{ esta por } -\pi/2 \\
 \text{Entonces} \\
 \dot{x} = A_1 x + B_1 u \\
 y = C_1 x
 \end{array} \right\} \text{Regla 1} \quad (3.131)$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{SI } x_1 \text{ esta por } -\pi/2 \text{ y } x_3 \text{ esta por } -\pi/4 \\
 \text{Entonces} \\
 \dot{x} = A_2 x + B_2 u \\
 y = C_2 x
 \end{array} \right\} \text{Regla 2} \quad (3.132)$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{SI } x_1 \text{ esta por } -\pi/2 \text{ y } x_3 \text{ esta por } 0 \\
 \text{Entonces} \\
 \dot{x} = A_3 x + B_3 u \\
 y = C_3 x
 \end{array} \right\} \text{Regla 3} \quad (3.133)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SI } x_1 \text{ esta por } -\pi/2 \text{ y } x_3 \text{ esta por } \pi/4 \\ \text{Entonces} \\ \dot{x}=A_4x+B_4u \\ y=C_4x \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \text{Regla 4} & (3.134) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SI } x_1 \text{ esta por } -\pi/2 \text{ y } x_3 \text{ esta por } \pi/2 \\ \text{Entonces} \\ \dot{x}=A_5x+B_5u \\ y=C_5x \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \text{Regla 5} & (3.135) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SI } x_1 \text{ esta por } -\pi/4 \text{ y } x_3 \text{ esta por } -\pi/2 \\ \text{Entonces} \\ \dot{x}=A_6x+B_6u \\ y=C_6x \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \text{Regla 6} & (3.136) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SI } x_1 \text{ esta por } -\pi/4 \text{ y } x_3 \text{ esta por } -\pi/4 \\ \text{Entonces} \\ \dot{x}=A_7x+B_7u \\ y=C_7x \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \text{Regla 7} & (3.137) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SI } x_1 \text{ esta por } -\pi/4 \text{ y } x_3 \text{ esta por } 0 \\ \text{Entonces} \\ \dot{x}=A_8x+B_8u \\ y=C_8x \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \text{Regla 8} & (3.138) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SI } x_1 \text{ esta por } -\pi/4 \text{ y } x_3 \text{ esta por } \pi/4 \\ \text{Entonces} \\ \dot{x}=A_9x+B_9u \\ y=C_9x \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \text{Regla 9} & (3.139) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SI } x_1 \text{ esta por } -\pi/4 \text{ y } x_3 \text{ esta por } \pi/2 \\ \text{Entonces} \\ \dot{x}=A_9x+B_9u \\ y=C_9x \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \text{Regla 10} & (3.140) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SI } x_1 \text{ esta por } 0 \text{ y } x_3 \text{ esta por } -\pi/2 \\ \text{Entonces} \\ \dot{x}=A_9x+B_9u \\ y=C_9x \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \text{Regla 11} & (3.141) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SI } x_1 \text{ esta por } 0 \text{ y } x_3 \text{ esta por } -\pi/4 \\ \text{Entonces} \\ \dot{x}=A_9x+B_9u \\ y=C_9x \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \text{Regla 12} & (3.142) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SI } x_1 \text{ esta por } 0 \text{ y } x_3 \text{ esta por } 0 \\ \text{Entonces} \\ \dot{x}=A_9x+B_9u \\ y=C_9x \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \text{Regla 13} & (3.143) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SI } x_1 \text{ esta por } 0 \text{ y } x_3 \text{ esta por } \pi/4 \\ \text{Entonces} \\ \dot{x}=A_9x+B_9u \\ y=C_9x \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \text{Regla 14} & (3.144) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SI } x_1 \text{ esta por } 0 \text{ y } x_3 \text{ esta por } \pi/2 \\ \text{Entonces} \\ \dot{x}=A_9x+B_9u \\ y=C_9x \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \text{Regla 15} & (3.145) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SI } x_1 \text{ esta por } \pi/4 \text{ y } x_3 \text{ esta por } -\pi/2 \\ \text{Entonces} \\ \dot{x}=A_9x+B_9u \\ y=C_9x \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \text{Regla 16} & (3.146) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SI } x_1 \text{ esta por } \pi/4 \text{ y } x_3 \text{ esta por } -\pi/4 \\ \text{Entonces} \\ \dot{x}=A_9x+B_9u \\ y=C_9x \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \text{Regla 17} & (3.147) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SI } x_1 \text{ esta por } \pi/4 \text{ y } x_3 \text{ esta por } 0 \\ \text{Entonces} \\ \dot{x}=A_9x+B_9u \\ y=C_9x \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \text{Regla 18} & (3.148) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SI } x_1 \text{ esta por } \pi/4 \text{ y } x_3 \text{ esta por } \pi/4 \\ \text{Entonces} \\ \dot{x}=A_9x+B_9u \\ y=C_9x \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \text{Regla 19} & (3.149) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SI } x_1 \text{ esta por } \pi/4 \text{ y } x_3 \text{ esta por } \pi/2 \\ \text{Entonces} \\ \dot{x} = A_9 x + B_9 u \\ y = C_9 x \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \text{Regla 20} & (3.150) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SI } x_1 \text{ esta por } \pi/2 \text{ y } x_3 \text{ esta por } -\pi/2 \\ \text{Entonces} \\ \dot{x} = A_9 x + B_9 u \\ y = C_9 x \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \text{Regla 21} & (3.151) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SI } x_1 \text{ esta por } \pi/2 \text{ y } x_3 \text{ esta por } -\pi/4 \\ \text{Entonces} \\ \dot{x} = A_9 x + B_9 u \\ y = C_9 x \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \text{Regla 22} & (3.152) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SI } x_1 \text{ esta por } \pi/2 \text{ y } x_3 \text{ esta por } 0 \\ \text{Entonces} \\ \dot{x} = A_9 x + B_9 u \\ y = C_9 x \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \text{Regla 23} & (3.153) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SI } x_1 \text{ esta por } \pi/2 \text{ y } x_3 \text{ esta por } \pi/4 \\ \text{Entonces} \\ \dot{x} = A_9 x + B_9 u \\ y = C_9 x \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \text{Regla 24} & (3.154) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SI } x_1 \text{ esta por } \pi/2 \text{ y } x_3 \text{ esta por } \pi/2 \\ \text{Entonces} \\ \dot{x} = A_9 x + B_9 u \\ y = C_9 x \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \text{Regla 25} & (3.155) \end{array}$$

Siendo el número de reglas $L = 25$, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^L \mu_i(z(t)) = & \mu_1(z(t)) + \mu_2(z(t)) + \mu_3(z(t)) + \mu_4(z(t)) + \mu_5(z(t)) + \mu_6(z(t)) + \\ & \mu_7(z(t)) + \mu_8(z(t)) + \mu_9(z(t)) + \mu_{10}(z(t)) + \mu_{11}(z(t)) + \mu_{12}(z(t)) + \mu_{13}(z(t)) + \\ & \mu_{14}(z(t)) + \mu_{15}(z(t)) + \mu_{16}(z(t)) + \mu_{17}(z(t)) + \mu_{18}(z(t)) + \mu_{19}(z(t)) + \mu_{20}(z(t)) + \\ & \mu_{21}(z(t)) + \mu_{22}(z(t)) + \mu_{23}(z(t)) + \mu_{24}(z(t)) + \mu_{25}(z(t)) \end{aligned} \quad (3.156)$$

Y siendo el número de variables de la premisa $g = 2$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^L \mu_i(z(t)) = & F_{11}(z_1(t))F_{12}(z_2(t)) + F_{21}(z_1(t))F_{22}(z_2(t)) + F_{31}(z_1(t))F_{32}(z_2(t)) \\
& + F_{41}(z_1(t))F_{42}(z_2(t)) + F_{51}(z_1(t))F_{52}(z_2(t)) + F_{61}(z_1(t))F_{62}(z_2(t)) \\
& + F_{71}(z_1(t))F_{72}(z_2(t)) + F_{81}(z_1(t))F_{82}(z_2(t)) + F_{91}(z_1(t))F_{92}(z_2(t)) \\
& + F_{101}(z_1(t))F_{102}(z_2(t)) + F_{111}(z_1(t))F_{112}(z_2(t)) \\
& + F_{121}(z_1(t))F_{122}(z_2(t)) + F_{131}(z_1(t))F_{132}(z_2(t)) \\
& + F_{141}(z_1(t))F_{142}(z_2(t)) + F_{151}(z_1(t))F_{152}(z_2(t)) \\
& + F_{161}(z_1(t))F_{162}(z_2(t)) + F_{171}(z_1(t))F_{172}(z_2(t)) \\
& + F_{181}(z_1(t))F_{182}(z_2(t)) + F_{191}(z_1(t))F_{192}(z_2(t)) \\
& + F_{201}(z_1(t))F_{202}(z_2(t)) + F_{211}(z_1(t))F_{212}(z_2(t)) \\
& + F_{221}(z_1(t))F_{222}(z_2(t)) + F_{231}(z_1(t))F_{232}(z_2(t)) \\
& + F_{241}(z_1(t))F_{242}(z_2(t)) + F_{251}(z_1(t))F_{252}(z_2(t))
\end{aligned} \tag{3.157}$$

Para efectos de simulación se considera los parámetros de la sección 3.5. La siguiente fase es la linealización del modelo del robot de 2GDL en cada punto de operación planteado en las ecuaciones (3.131) - (3.155), en este caso se utiliza la Jacobiana.

Las matrices del sistema linealizado en los diferentes puntos de operación se muestran a continuación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2.6625 & -3.247 & 2.9233 & 1.5334 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -17.923 & 1.5334 & -3.6562 & -10.614 \end{bmatrix} \tag{3.158}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.8659 & -2.9789 & 2.4815 & 3.1747 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -14.0360 & 3.1747 & -5.0915 & -13.273 \end{bmatrix} \tag{3.159}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5577 & -3.0722 & -0.0676 & 4.0686 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.0676 & 4.0686 & 0.7605 & -15.278 \end{bmatrix} \tag{3.160}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3280 & -2.9789 & -2.3213 & 3.1747 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 13.712 & 3.1747 & 5.8581 & -13.273 \end{bmatrix} \tag{3.161}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3.9924 & -3.247 & -2.4556 & 1.5334 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 17.342 & 1.5334 & 3.6872 & -10.614 \end{bmatrix} \quad (3.162)$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11.119 & -3.247 & 6.6411 & 1.5334 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -18.364 & 1.5334 & -2.2837 & -10.614 \end{bmatrix} \quad (3.163)$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12.285 & -2.9789 & 3.3212 & 3.1747 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -13.093 & 3.1747 & 3.8924 & -13.273 \end{bmatrix} \quad (3.164)$$

$$A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11.3 & -3.0722 & -1.3697 & 4.0686 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.3697 & 4.0686 & 15.41 & -15.278 \end{bmatrix} \quad (3.165)$$

$$A_9 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11.905 & -2.9789 & -0.077 & 3.1747 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6.5401 & 3.1747 & 11.64 & -13.273 \end{bmatrix} \quad (3.166)$$

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 15.828 & -3.247 & 2.8353 & 1.5334 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6.5872 & 1.5334 & 2.912 & -10.614 \end{bmatrix} \quad (3.167)$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 19.054 & -3.247 & 6.7008 & 1.5334 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8.3274 & 1.5334 & 0.4443 & -10.614 \end{bmatrix} \quad (3.168)$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 17.105 & -2.9789 & 2.294 & 3.1747 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4.6334 & 3.1747 & 10.983 & -13.273 \end{bmatrix} \quad (3.169)$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 15.981 & -3.0722 & -1.9371 & 4.0686 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.9371 & 4.0686 & 21.792 & -15.278 \end{bmatrix} \quad (3.170)$$

$$A_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 17.105 & -2.9789 & 2.294 & 3.1747 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4.6334 & 3.1747 & 10.983 & -13.273 \end{bmatrix} \quad (3.171)$$

$$A_{15} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 19.054 & -3.247 & 6.7008 & 1.5334 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8.3274 & 1.5334 & 0.4443 & -10.614 \end{bmatrix} \quad (3.172)$$

$$A_{16} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 15.828 & -3.247 & 2.8353 & 1.5334 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6.5872 & 1.5334 & 2.912 & -10.614 \end{bmatrix} \quad (3.173)$$

$$A_{17} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11.905 & -2.9789 & -0.077 & 3.1747 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6.5401 & 3.1747 & 11.64 & -13.273 \end{bmatrix} \quad (3.174)$$

$$A_{18} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11.3 & -3.0722 & -1.3697 & 4.0686 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.3697 & 4.0686 & 15.41 & -15.278 \end{bmatrix} \quad (3.175)$$

$$A_{19} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12.285 & -2.9789 & 3.3212 & 3.1747 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -13.093 & 3.1747 & 3.8924 & -13.273 \end{bmatrix} \quad (3.176)$$

$$A_{20} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11.119 & -3.247 & 6.6411 & 1.5334 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -18.364 & 1.5334 & -2.2837 & -10.614 \end{bmatrix} \quad (3.177)$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3.9924 & -3.247 & -2.4556 & 1.5334 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 17.342 & 1.5334 & 3.6872 & -10.614 \end{bmatrix} \quad (3.178)$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3280 & -2.9789 & -2.3213 & 3.1747 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 13.712 & 3.1747 & 5.8581 & -13.273 \end{bmatrix} \quad (3.179)$$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5577 & -3.0722 & -0.0676 & 4.0686 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.0676 & 4.0686 & 0.7605 & -15.278 \end{bmatrix} \quad (3.180)$$

$$A_{24} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.8659 & -2.9789 & 2.4815 & 3.1747 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -14.0360 & 3.1747 & -5.0915 & -13.273 \end{bmatrix} \quad (3.181)$$

$$A_{25} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2.6625 & -3.247 & 2.9233 & 1.5334 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -17.923 & 1.5334 & -3.6562 & -10.614 \end{bmatrix} \quad (3.182)$$

Utilizando el mismo procedimiento para las matrices de entrada se tiene:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3772 & -0.1781 \\ 0 & 0 \\ -0.1781 & 1.2329 \end{bmatrix} \quad (3.183)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.346 & -0.3688 \\ 0 & 0 \\ -0.3688 & 1.5417 \end{bmatrix} \quad (3.184)$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3569 & -0.4726 \\ 0 & 0 \\ -0.4726 & 1.7746 \end{bmatrix} \quad (3.185)$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3460 & -0.3688 \\ 0 & 0 \\ -0.3688 & 1.5417 \end{bmatrix} \quad (3.186)$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3772 & -0.1781 \\ 0 & 0 \\ -0.1781 & 1.2329 \end{bmatrix} \quad (3.187)$$

$$B_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3772 & -0.1781 \\ 0 & 0 \\ -0.1781 & 1.2329 \end{bmatrix} \quad (3.188)$$

$$B_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.346 & -0.3688 \\ 0 & 0 \\ -0.3688 & 1.5417 \end{bmatrix} \quad (3.189)$$

$$B_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3569 & -0.4726 \\ 0 & 0 \\ -0.4726 & 1.7746 \end{bmatrix} \quad (3.190)$$

$$B_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.346 & -0.3688 \\ 0 & 0 \\ -0.3688 & 1.5417 \end{bmatrix} \quad (3.191)$$

$$B_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3772 & -0.1781 \\ 0 & 0 \\ -0.1781 & 1.2329 \end{bmatrix} \quad (3.192)$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3772 & -0.1781 \\ 0 & 0 \\ -0.1781 & 1.2329 \end{bmatrix} \quad (3.193)$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3460 & -0.3688 \\ 0 & 0 \\ -0.3688 & 1.5417 \end{bmatrix} \quad (3.194)$$

$$B_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3569 & -0.4726 \\ 0 & 0 \\ -0.4726 & 1.7746 \end{bmatrix} \quad (3.195)$$

$$B_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3460 & -0.3688 \\ 0 & 0 \\ -0.3688 & 1.5417 \end{bmatrix} \quad (3.196)$$

$$B_{15} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3772 & -0.1781 \\ 0 & 0 \\ -0.1781 & 1.2329 \end{bmatrix} \quad (3.197)$$

$$B_{16} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3772 & -0.1781 \\ 0 & 0 \\ -0.1781 & 1.2329 \end{bmatrix} \quad (3.198)$$

$$B_{17} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.346 & -0.3688 \\ 0 & 0 \\ -0.3688 & 1.5417 \end{bmatrix} \quad (3.199)$$

$$B_{18} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3569 & -0.4726 \\ 0 & 0 \\ -0.4726 & 1.7746 \end{bmatrix} \quad (3.200)$$

$$B_{19} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.346 & -0.3688 \\ 0 & 0 \\ -0.3688 & 1.5417 \end{bmatrix} \quad (3.201)$$

$$B_{20} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3772 & -0.1781 \\ 0 & 0 \\ -0.1781 & 1.2329 \end{bmatrix} \quad (3.202)$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3772 & -0.1781 \\ 0 & 0 \\ -0.1781 & 1.2329 \end{bmatrix} \quad (3.203)$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3460 & -0.3688 \\ 0 & 0 \\ -0.3688 & 1.5417 \end{bmatrix} \quad (3.204)$$

$$B_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3569 & -0.4726 \\ 0 & 0 \\ -0.4726 & 1.7746 \end{bmatrix} \quad (3.205)$$

$$B_{24} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.346 & -0.3688 \\ 0 & 0 \\ -0.3688 & 1.5417 \end{bmatrix} \quad (3.206)$$

$$B_{25} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3772 & -0.1781 \\ 0 & 0 \\ -0.1781 & 1.2329 \end{bmatrix} \quad (3.207)$$

Finalmente se realiza el mismo procedimiento para la matriz de salida, obteniéndose para los nueve casos la siguiente matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.208)$$

Para cada uno de los puntos de operación se obtienen las siguientes matrices del controlador realimentado K.

$$K_1 = \begin{bmatrix} -1.9919 * 10^8 & -1.4335 * 10^3 & -1.8718 * 10^8 & -1.6676 * 10^3 \\ -1.2036 * 10^8 & -545.1628 & -1.1834 * 10^8 & -1.2150 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.209)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -1.7234 * 10^8 & -1.1439 * 10^3 & -1.5848 * 10^8 & -1.9366 * 10^3 \\ -1.0504 * 10^8 & -362.0608 & -1.0109 * 10^8 & -1.3115 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.210)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -1.7618 * 10^8 & -972.2437 & -1.6233 * 10^8 & -2.2538 * 10^3 \\ -9.7948 * 10^7 & -245.6873 & -9.4093 * 10^7 & -1.3596 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.211)$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -1.7231 * 10^8 & -1.1439 * 10^3 & -1.5845 * 10^8 & -1.9363 * 10^3 \\ -1.0503 * 10^8 & -362.0156 & -1.0108 * 10^8 & -1.3114 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.212)$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} -1.9917 * 10^8 & -1.4334 * 10^3 & -1.8716 * 10^8 & -1.6675 * 10^3 \\ -1.2036 * 10^8 & -545.1215 & -1.1834 * 10^8 & -1.2150 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.213)$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} -1.9918 * 10^8 & -1.4335 * 10^3 & -1.8717 * 10^8 & -1.6675 * 10^3 \\ -1.2036 * 10^8 & -545.1508 & -1.1834 * 10^8 & -1.2150 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.214)$$

$$K_7 = \begin{bmatrix} -1.7232 * 10^8 & -1.144 * 10^3 & -1.5847 * 10^8 & -1.9364 * 10^3 \\ -1.0503 * 10^8 & -362.0659 & -1.0109 * 10^8 & -1.3114 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.215)$$

$$K_8 = \begin{bmatrix} -1.7618 * 10^8 & -972.3858 & -1.6234 * 10^8 & -2.2539 * 10^3 \\ -9.7945 * 10^7 & -245.7380 & -9.4092 * 10^7 & -1.3596 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.216)$$

$$K_9 = \begin{bmatrix} -1.723 * 10^8 & -1.144 * 10^3 & -1.5845 * 10^8 & -1.9363 * 10^3 \\ -1.0502 * 10^8 & -362.0338 & -1.0108 * 10^8 & -1.3113 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.217)$$

$$K_{10} = \begin{bmatrix} -1.9916 * 10^8 & -1.4334 * 10^3 & -1.8715 * 10^8 & -1.6674 * 10^3 \\ -1.2036 * 10^8 & -545.1216 & -1.1835 * 10^8 & -1.2150 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.218)$$

$$K_{11} = \begin{bmatrix} -1.9917 * 10^8 & -1.4334 * 10^3 & -1.8716 * 10^8 & -1.6675 * 10^3 \\ -1.2036 * 10^8 & -545.1337 & -1.1835 * 10^8 & -1.215 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.219)$$

$$K_{12} = \begin{bmatrix} -1.7231 * 10^8 & -1.144 * 10^3 & -1.5845 * 10^8 & -1.9363 * 10^3 \\ -1.0502 * 10^8 & -362.0549 & -1.0108 * 10^8 & -1.3114 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.220)$$

$$K_{13} = \begin{bmatrix} -1.7619 * 10^8 & -972.447 & -1.6234 * 10^8 & -2.2539 * 10^3 \\ -9.7944 * 10^7 & -245.76 & -9.4091 * 10^7 & -1.3596 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.221)$$

$$K_{14} = \begin{bmatrix} -1.7231 * 10^8 & -1.144 * 10^3 & -1.5845 * 10^8 & -1.9363 * 10^3 \\ -1.0502 * 10^8 & -362.0549 & -1.0108 * 10^8 & -1.3114 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.222)$$

$$K_{15} = \begin{bmatrix} -1.9917 * 10^8 & -1.4334 * 10^3 & -1.8716 * 10^8 & -1.6675 * 10^3 \\ -1.2036 * 10^8 & -545.1337 & -1.1835 * 10^8 & -1.215 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.223)$$

$$K_{16} = \begin{bmatrix} -1.9916 * 10^8 & -1.4334 * 10^3 & -1.8715 * 10^8 & -1.6674 * 10^3 \\ -1.2036 * 10^8 & -545.1216 & -1.1835 * 10^8 & -1.2150 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.224)$$

$$K_{17} = \begin{bmatrix} -1.723 * 10^8 & -1.144 * 10^3 & -1.5845 * 10^8 & -1.9363 * 10^3 \\ -1.0502 * 10^8 & -362.0338 & -1.0108 * 10^8 & -1.3113 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.225)$$

$$K_{18} = \begin{bmatrix} -1.7618 * 10^8 & -972.3858 & -1.6234 * 10^8 & -2.2539 * 10^3 \\ -9.7945 * 10^7 & -245.7380 & -9.4092 * 10^7 & -1.3596 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.226)$$

$$K_{19} = \begin{bmatrix} -1.7232 * 10^8 & -1.144 * 10^3 & -1.5847 * 10^8 & -1.9364 * 10^3 \\ -1.0503 * 10^8 & -362.0659 & -1.0109 * 10^8 & -1.3114 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.227)$$

$$K_{20} = \begin{bmatrix} -1.9918 * 10^8 & -1.4335 * 10^3 & -1.8717 * 10^8 & -1.6675 * 10^3 \\ -1.2036 * 10^8 & -545.1508 & -1.1834 * 10^8 & -1.2150 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.228)$$

$$K_{21} = \begin{bmatrix} -1.9917 * 10^8 & -1.4334 * 10^3 & -1.8716 * 10^8 & -1.6675 * 10^3 \\ -1.2036 * 10^8 & -545.1215 & -1.1834 * 10^8 & -1.2150 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.229)$$

$$K_{22} = \begin{bmatrix} -1.7231 * 10^8 & -1.1439 * 10^3 & -1.5845 * 10^8 & -1.9363 * 10^3 \\ -1.0503 * 10^8 & -362.0156 & -1.0108 * 10^8 & -1.3114 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.230)$$

$$K_{23} = \begin{bmatrix} -1.7618 * 10^8 & -972.2437 & -1.6233 * 10^8 & -2.2538 * 10^3 \\ -9.7948 * 10^7 & -245.6873 & -9.4093 * 10^7 & -1.3596 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.231)$$

$$K_{24} = \begin{bmatrix} -1.7234 * 10^8 & -1.1439 * 10^3 & -1.5848 * 10^8 & -1.9366 * 10^3 \\ -1.0504 * 10^8 & -362.0608 & -1.0109 * 10^8 & -1.3115 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.232)$$

$$K_{25} = \begin{bmatrix} -1.9919 * 10^8 & -1.4335 * 10^3 & -1.8718 * 10^8 & -1.6676 * 10^3 \\ -1.2036 * 10^8 & -545.1628 & -1.1834 * 10^8 & -1.2150 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.233)$$

En la figura 3.26 se muestra el sistema de control que incluye el modelo del robot de dos grados de libertad linealizado en 25 puntos de operación, el controlador para cada modelo y las funciones de pertenencia triangular.

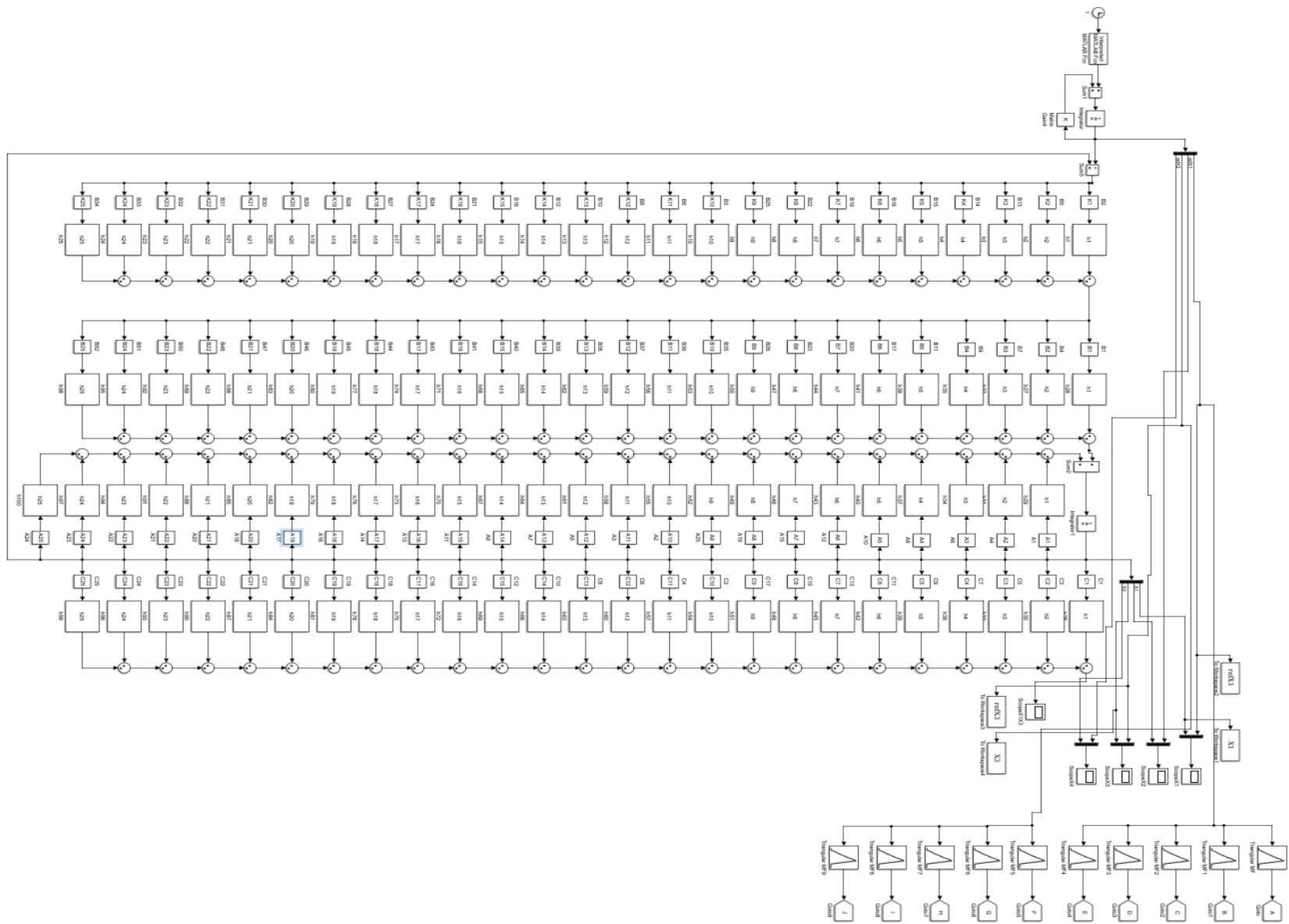


Figura 3.26: Simulación del sistema de control, con función de pertenencia triangular (25 reglas).

3.13.2 Usando función de pertenencia gaussiana

En esta sección se utiliza un sistema difuso con función de pertenencia Gaussiana, se establece los límites de ángulo de las articulaciones en el rango de $[-\pi/2, \pi/2]$, para la primera y segunda articulación, también se define las 25 reglas del mismo modo que para el caso triangular. Las funciones de pertenencia se definen utilizando la ecuación (3.130), los límites de las funciones de pertenencia son tal como se muestra en la figura 3.27.

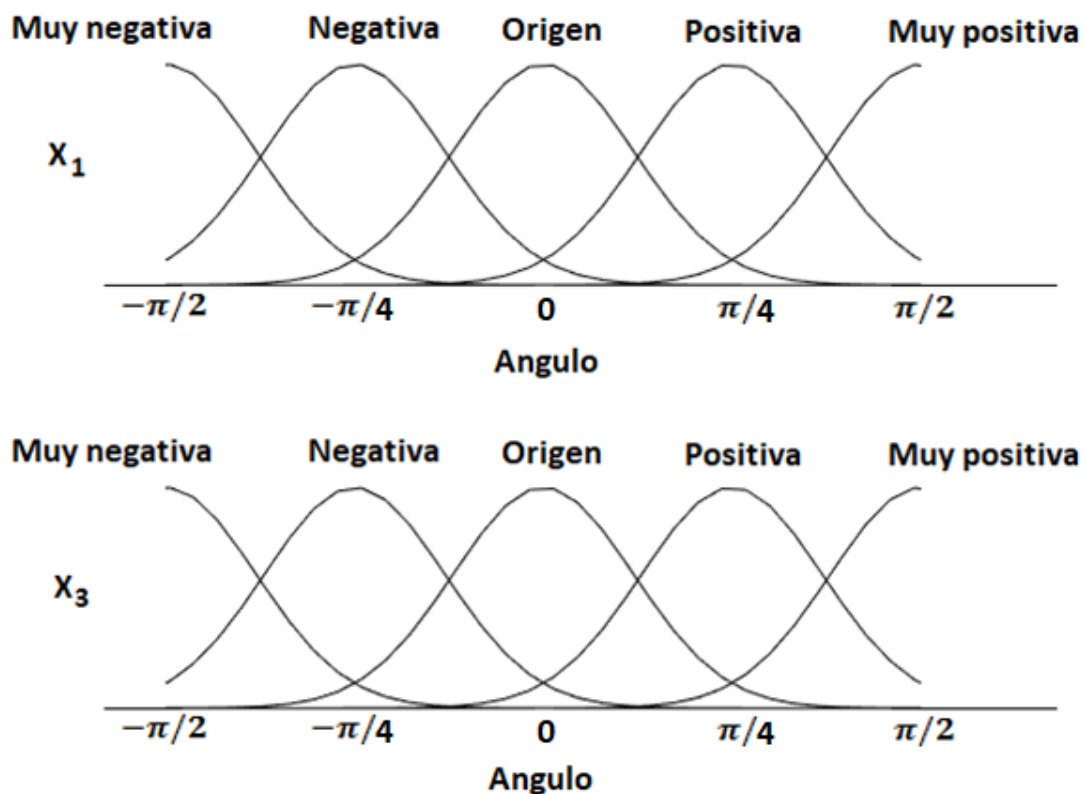


Figura 3.27: Funciones de pertenencia gaussiana

El modelo dinámico Difuso, el controlador utilizado y las señales de referencia son las mismas que se utilizó en el caso de funciones de pertenencia triangular.

CAPITULO IV

ANALISIS Y RESULTADOS

4.1 Análisis

La combinación de diferentes estrategias de control tales como Lógica Difusa y H_∞ para diseñar controladores no lineales han dado buenos resultados, también el uso de software para resolver un problema de optimización convexa con el uso de Desigualdades Matriciales Lineales a resultado una alternativa eficiente.

Para obtener el modelo linealizado de un sistema no lineal existen muchas técnicas, en este trabajo se utilizó la técnica de expansión de serie de Taylor, la cual ha dado resultados aceptables para sistemas que tengan varios puntos de operación y se puedan usar junto con la Lógica Difusa.

Para evaluar el sistema de control donde se incluye el controlador y el modelo del robot de dos grados de libertad se han realizado tres pruebas, primero se ha inyectado señales de referencia de tipo senoidal sin incluir perturbaciones, segundo se ha inyectado señales de referencia de tipo senoidal incluyendo perturbaciones, tercero se han generado señales de referencia de tal modo que se pueda dibujar un rectángulo en el plano cartesiano.

4.2 Resultados de la investigación

4.2.1 Función de pertenencia Triangular con nueve reglas

En la primera prueba se evalúa al sistema de control usando 9 reglas de inferencia de tipo triangular y sin considerar perturbaciones externas, en la figura 4.1 se muestra la variable de ángulo articular en la salida ($x_1 = q_1$) que describe la posición del primer eslabón y la señal de referencia respectiva, en el gráfico se observa que el error entre la señal de referencia y la señal de salida es pequeño y aceptable.

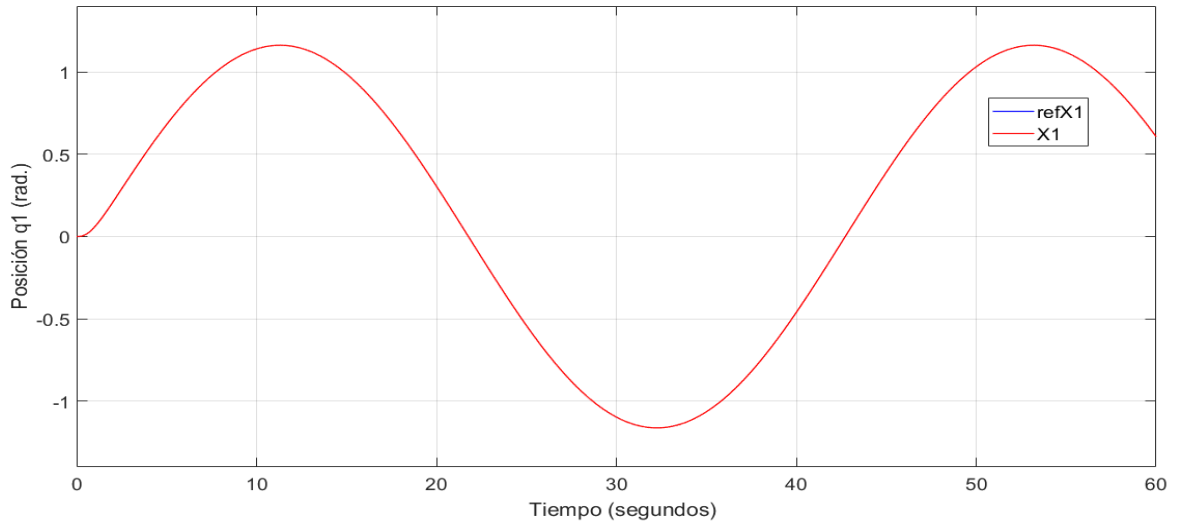


Figura 4.1: Seguimiento de la variable X_1

En la figura 4.2. se muestra la señal de error absoluto del ángulo articular de la primera articulación, se aprecia que el máximo error es menor que 1.4×10^{-5} .

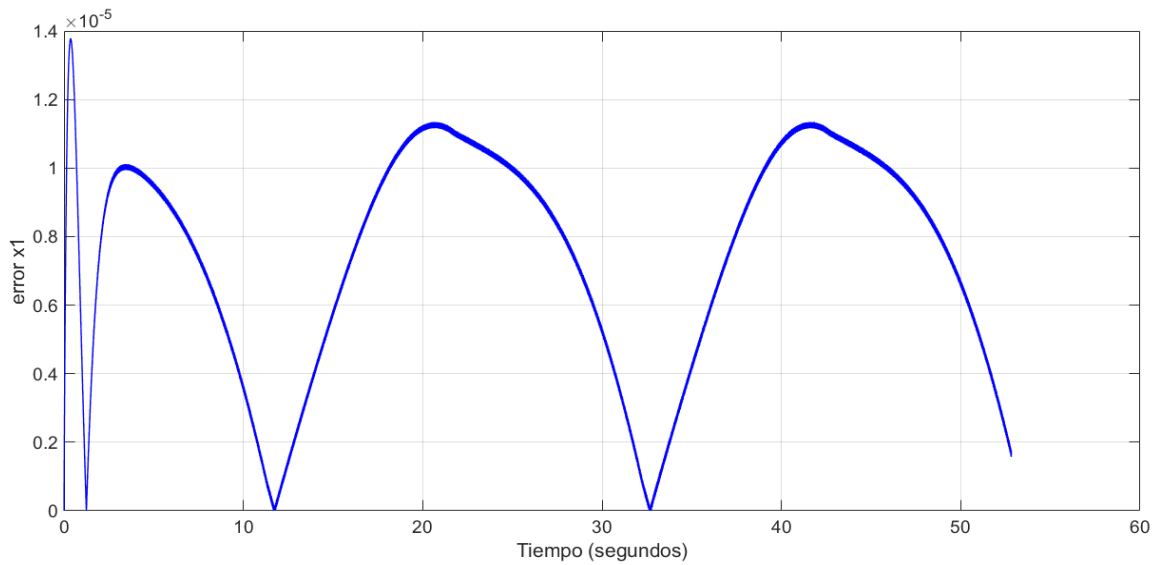


Figura 4.2: error de posición de la primera articulación.

La figura 4.3 muestra la variable $x_3 = q_2$ que es el ángulo articular de la segunda articulación y la señal de referencia respectiva, en el gráfico se observa que el error entre la señal de referencia y la señal a la salida es pequeño y aceptable.

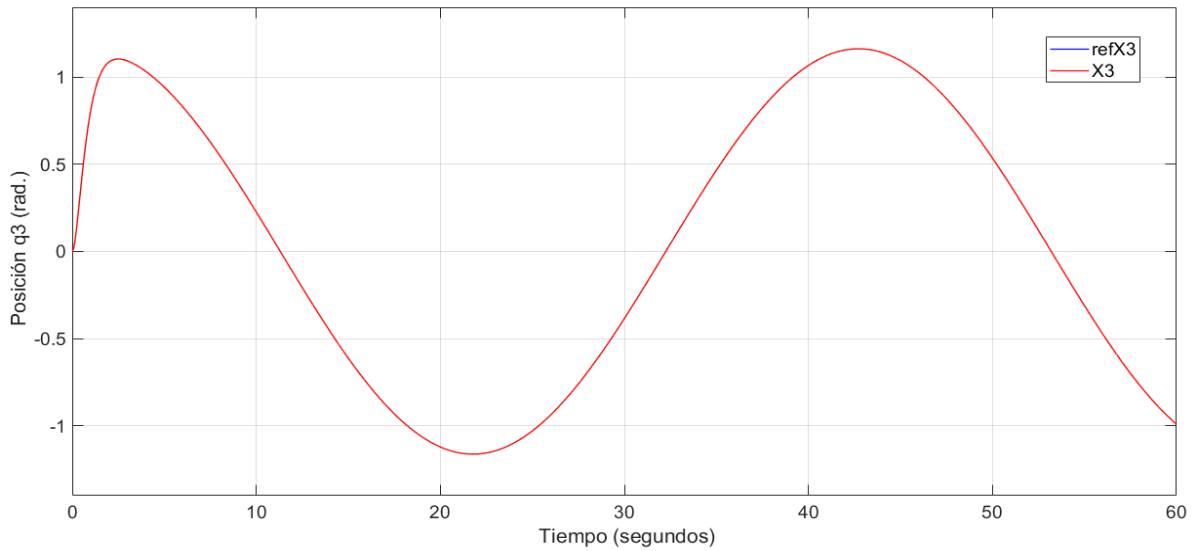


Figura 4.3: Seguimiento de la variable X_3

En la figura 4.4. se muestra la señal de error absoluto de la posición articular de la segunda articulación, se aprecia que el máximo error es menor que 3×10^{-5} .

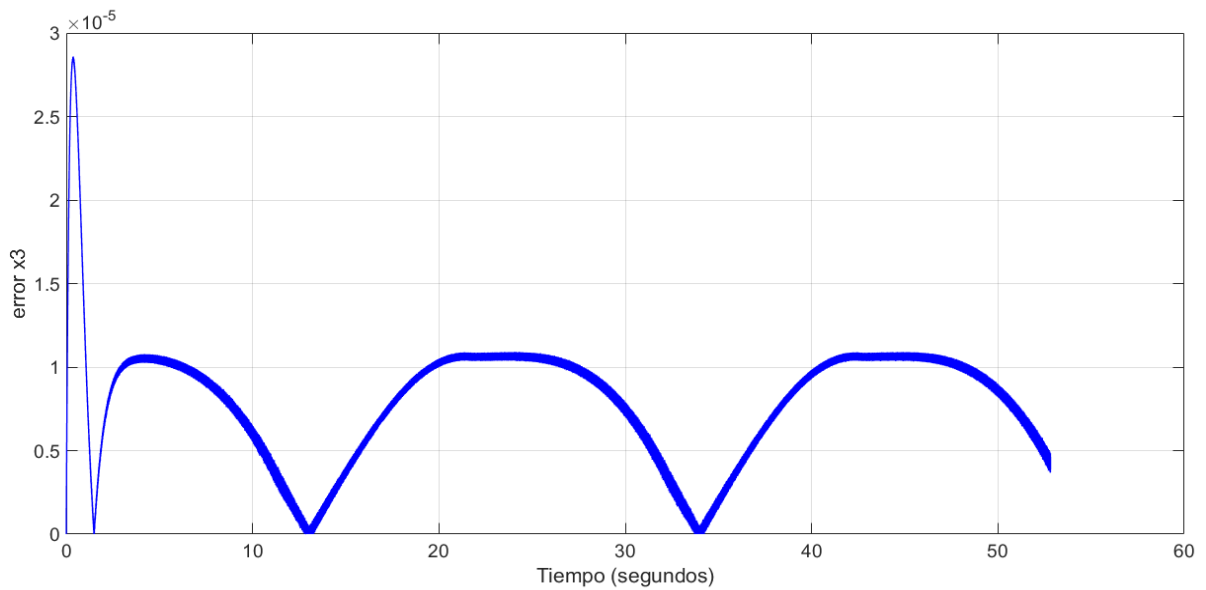


Figura 4.4: error de posición de la segunda articulación.

En la segunda prueba se inyecta perturbaciones externas al sistema de control, en la figura 4.5 muestra la variable $x_1 = q_1$ que describe el ángulo articular del primer eslabón y la señal de referencia respectiva, incluyendo el vector de perturbaciones w definido por la ecuación (3.129).

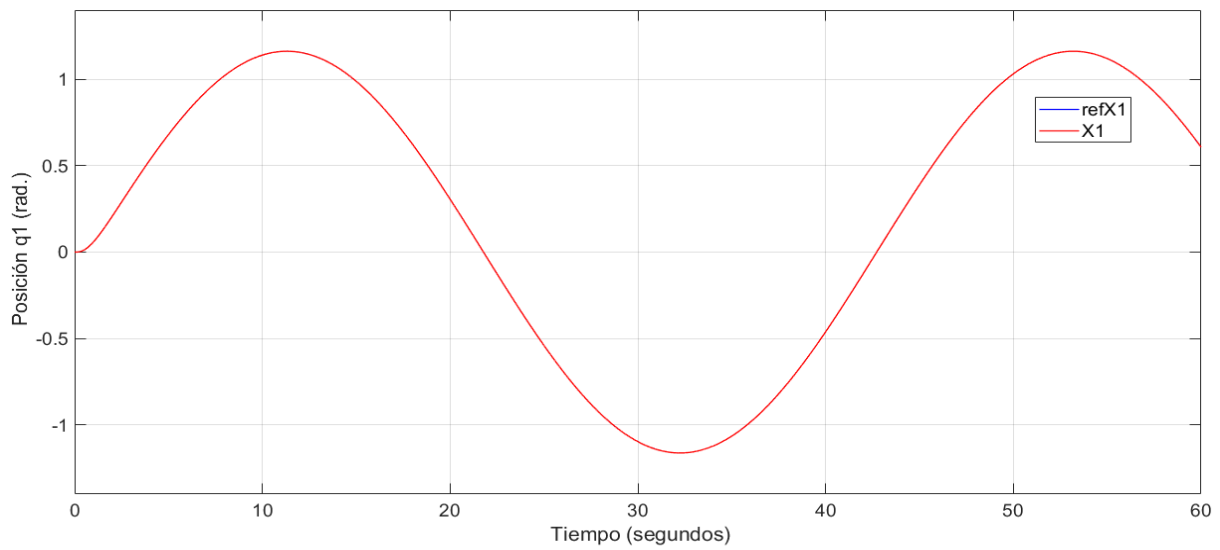


Figura 4.5: Seguimiento de la variable X_1 , con perturbación incluida.

En la figura 4.6. se muestra la señal de error absoluto del ángulo articular de la primera articulación, se aprecia que el máximo error es menor que 3×10^{-5} , del gráfico se observa que incluso con perturbaciones el error entre la señal de referencia y la señal de salida es pequeño y aceptable.

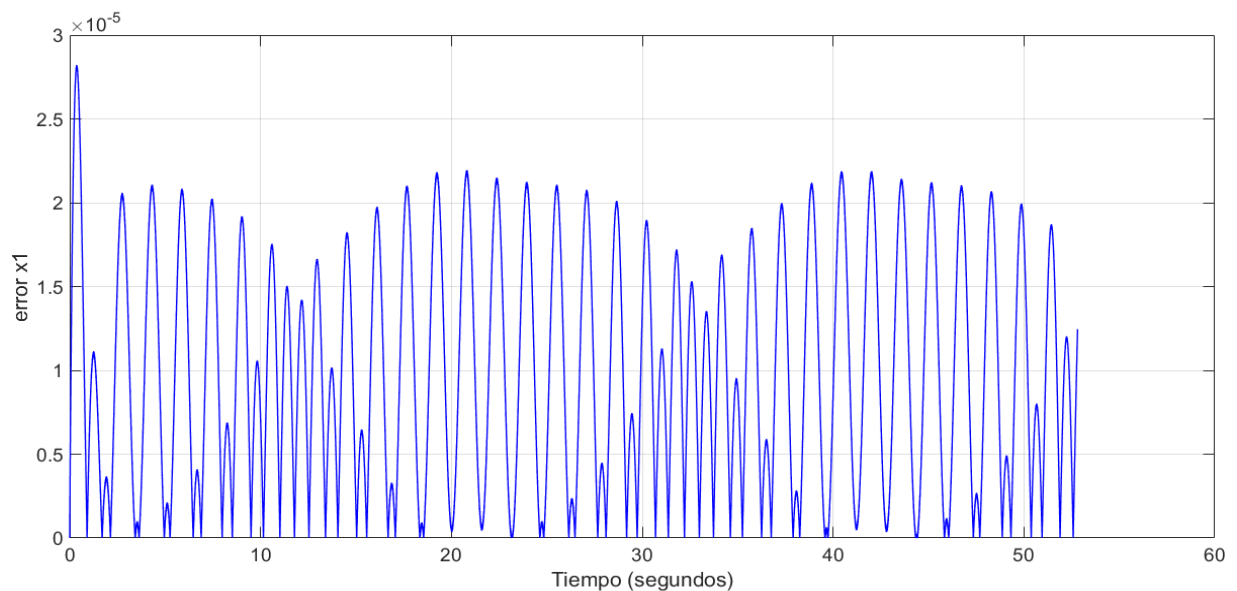


Figura 4.6: error de posición de la primera articulación, con perturbación

La figura 4.7 muestra la variable $x_3 = q_2$ que describe el ángulo articular del segundo eslabón y la señal de referencia respectiva, incluyendo el vector de perturbaciones w .

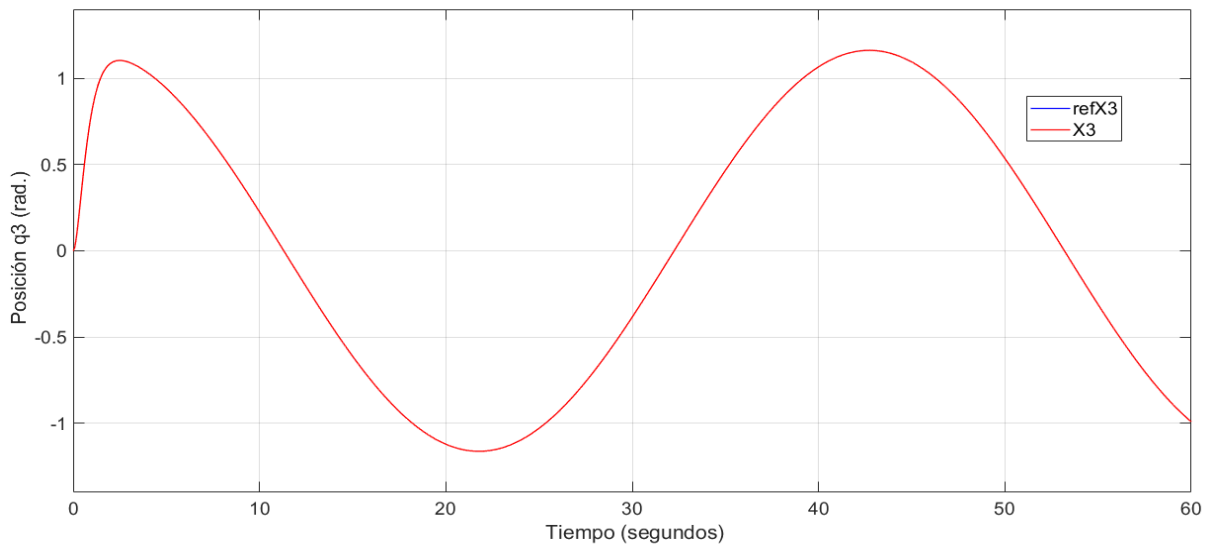


Figura 4.7: Seguimiento de la variable X_3 , con perturbación incluida.

En la figura 4.8. se muestra la señal de error absoluto del ángulo articular de la segunda articulación, se aprecia que el máximo error es menor que 4×10^{-5} , del gráfico se observa que incluso con perturbaciones el error entre la señal de referencia y la señal de salida es pequeño y aceptable.

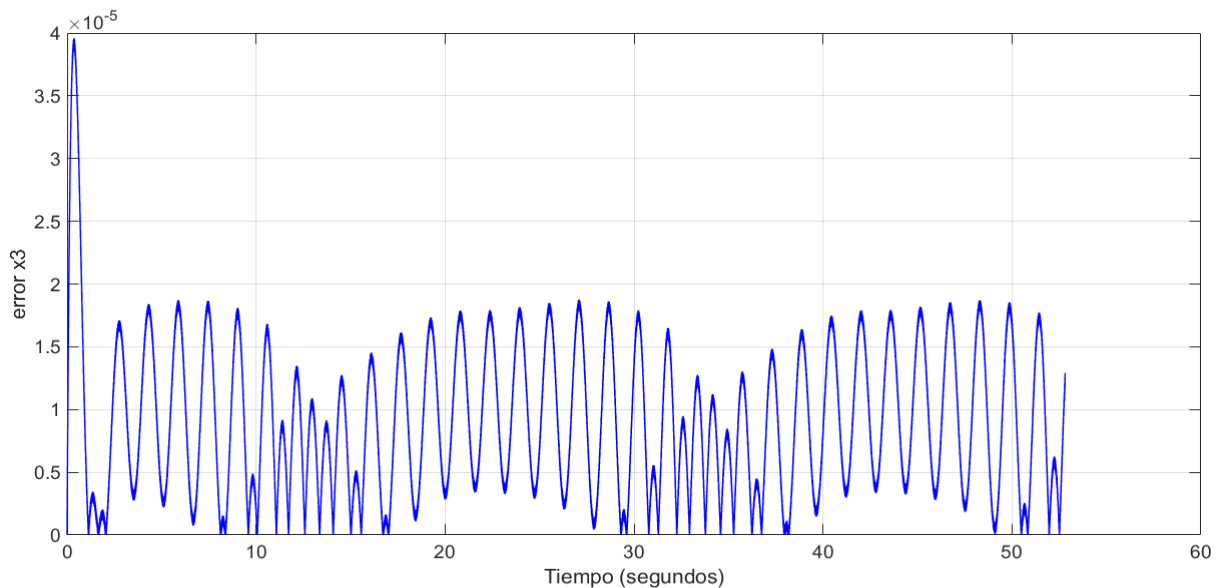


Figura 4.8: error de posición de la segunda articulación, con perturbación

4.2.2 Función de pertenencia Gaussiana con nueve reglas.

En la tercera prueba se evalúa al sistema de control usando 9 reglas de inferencia de tipo Gaussiana y sin considerar perturbaciones externas

En la cuarta prueba se inyecta perturbaciones externas al sistema de control.

4.2.3 Función de pertenencia Triangular con veinticinco reglas

Como quinta prueba se evalúa al sistema de control usando 25 reglas de inferencia de tipo triangular y sin considerar perturbaciones externas.

Como sexta prueba se inyecta perturbaciones externas al sistema de control,

4.2.4 Función de pertenencia Gaussiana con veinticinco reglas

Como séptima prueba se evalúa al sistema de control usando 25 reglas de inferencia de tipo triangular y sin considerar perturbaciones externas.

En la octava prueba se inyecta perturbaciones externas al sistema de control

4.2.5 Resumen de resultados

A continuación, se presenta un cuadro de resumen de los errores absolutos obtenidos para los diferentes casos, sin considerar perturbaciones.

	Triangulo	Gaussiana	Triangulo	Gaussiana
	9 reglas	9 reglas	25 reglas	25 reglas
error_x1(alfa)	1.9054	1.8869	1.886	1.8713
error_x3(beta)	2.0142	1.9998	1.9818	1.9738
Error_sistema(suma)	3.9196	3.8867	3.8678	3.8451

Tabla 4.1: Resumen de los errores absolutos

En la tabla 4.1 se observa que al trabajar con la función de pertenencia Gaussiana se tiene menor error que al trabajar con la función de pertenencia triangular.

También se observa que al trabajar con un mayor número de reglas y considerando un mismo tipo de función de pertenencia ya sea triangular o Gaussiana, se obtiene un menor error.

En la tabla 4.2 se presenta un resumen de los errores absolutos cuando se considera perturbaciones.

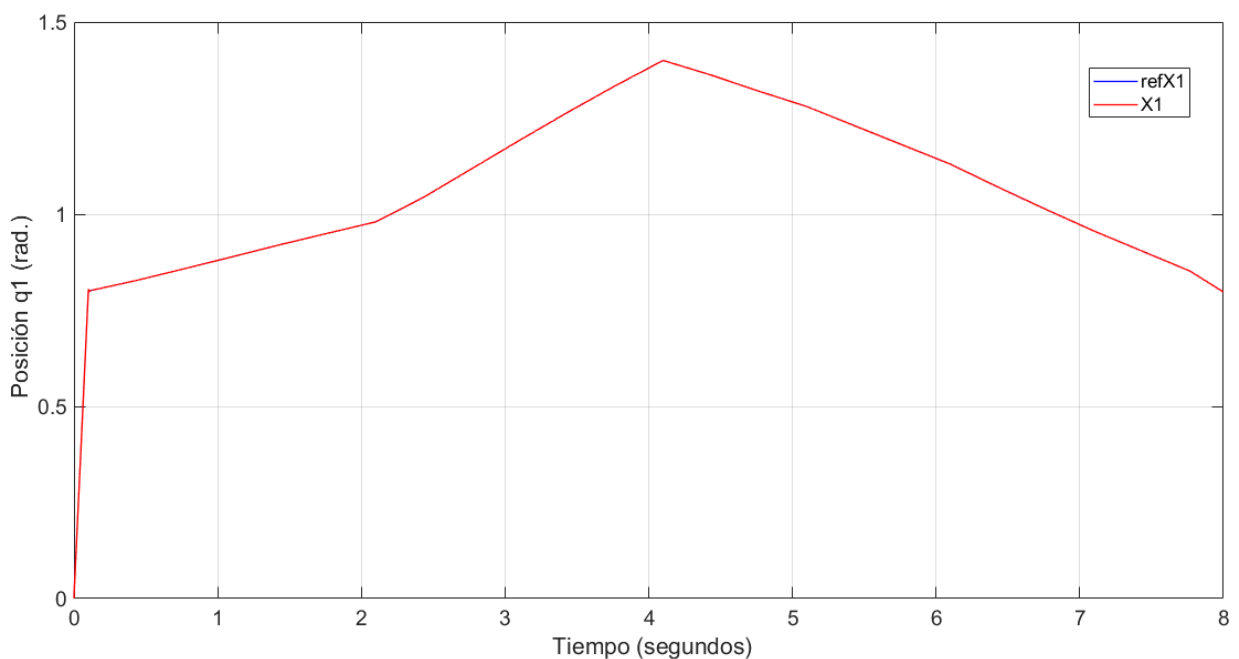
	Triangulo	Gaussiana	Triangulo	Gaussiana
	9 reglas	9 reglas	25 reglas	25 reglas
error_x1(alfa)	2.4883	2.4636	2.6359	2.6379
error_x3(beta)	2.2743	2.2528	2.352	2.3505
Error_sistema(suma)	4.7626	4.7164	4.9879	4.9884

Tabla 4.2: Resumen de los errores absolutos considerando perturbaciones

Se observa que al trabajar con un mayor número de reglas y considerando un mismo tipo de función de pertenencia ya sea triangular o Gaussiana se obtiene un mayor error.

4.2.6 Posición cartesiana

En esta prueba se desea que el robot grafique un rectángulo, con este fin se generó una señal de referencia para la primera articulación la cual se muestra en la figura 4.9., en esta figura también se muestra la señal de salida de la variable x_1 .



Fi gura 4.9: Señal de salida y referencia de q_1

En la figura 4.10. se hace una ampliación de la figura 4.9, en la figura 3.10 se aprecia como el sistema de control corrige la posición angular de salida hasta alcanzar la posición angular deseada.

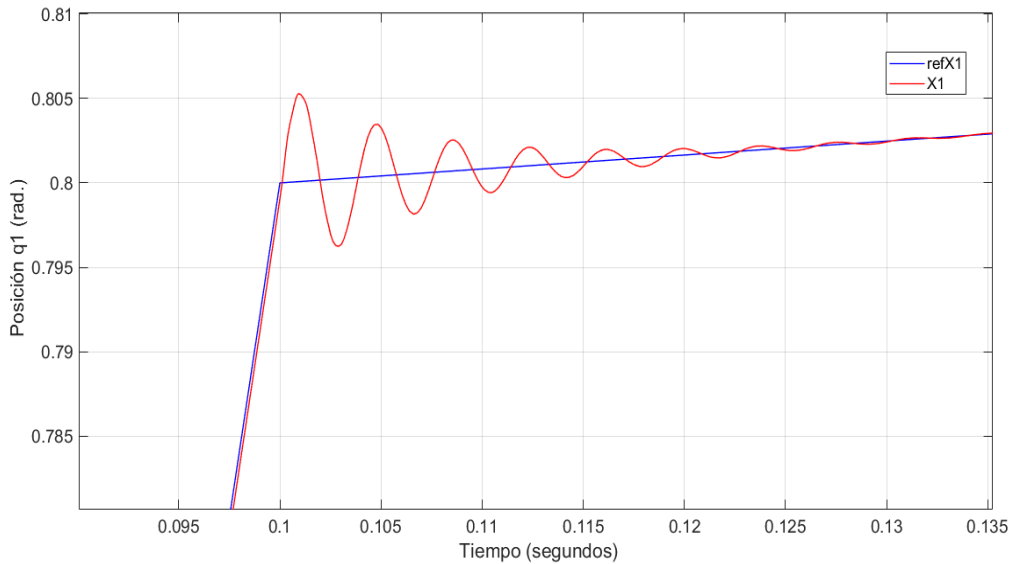


Figura 4.10: Señales de la primera articulación.

Para la segunda articulación se generó la señal que se muestra en la figura 4.11. en esta figura también se muestra la señal de salida de la variable x_3 .

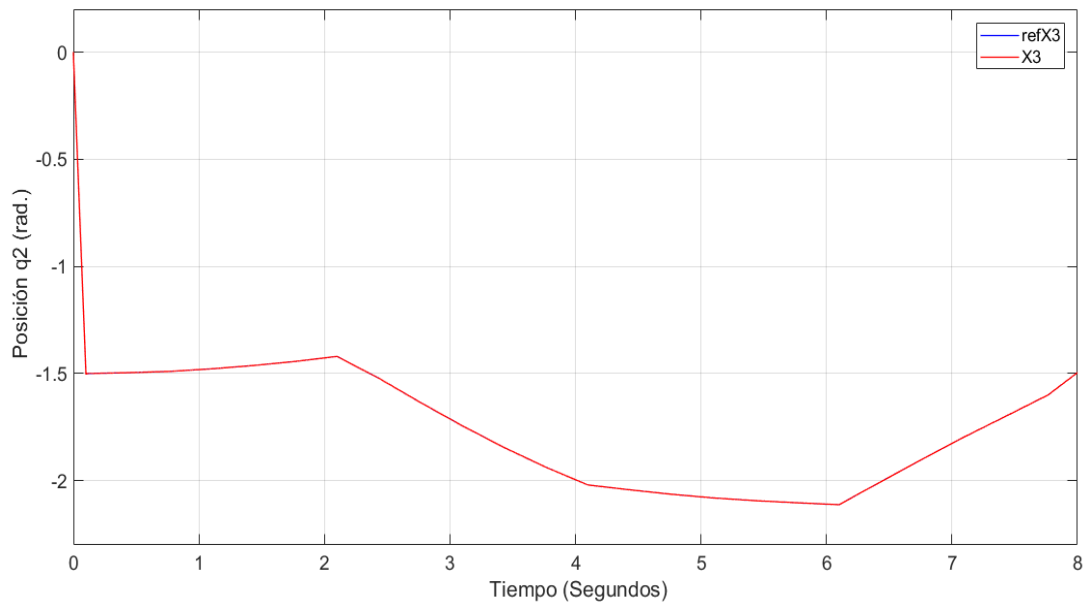


Figura 4.11: Señal de referencia para q_2

Con las señales generadas en las figuras 4.9 y 4.11 se grafica la posición cartesiana del robot, esta posición cartesiana se muestra en la figura 4.12.

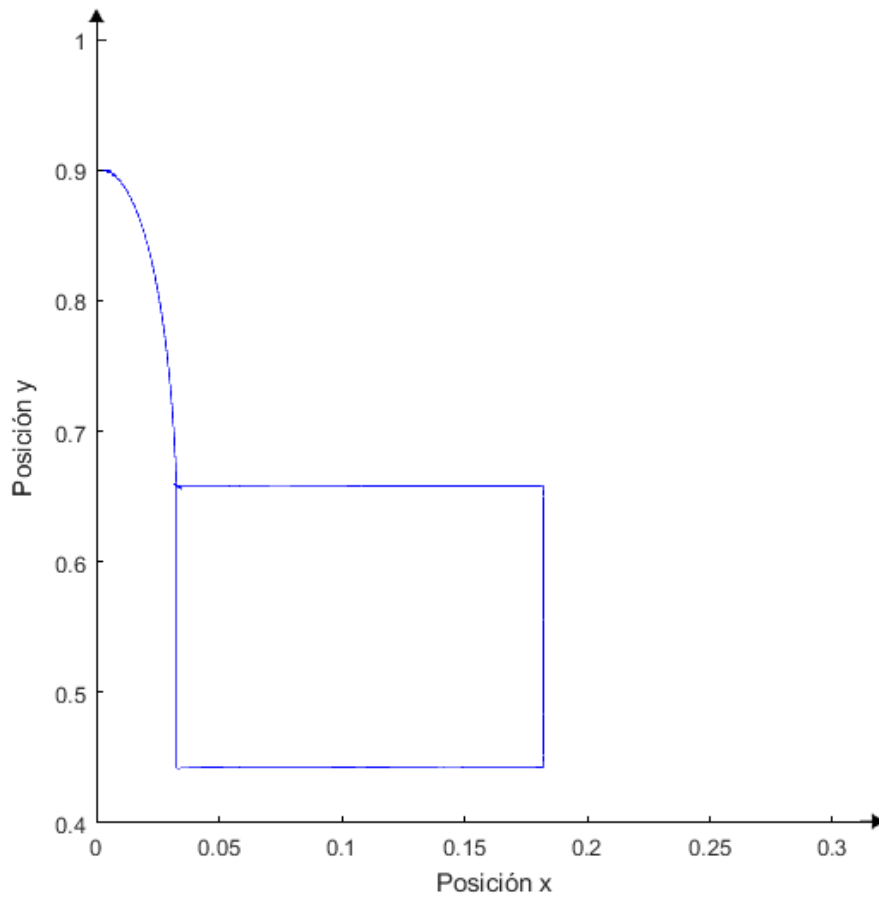


Figura 4.12: Posición cartesiana del robot de 2GDL

4.3 Contrastación de la hipótesis

De los resultados obtenidos y de la hipótesis planteada en el capítulo I que dice:

Con el uso de controladores H_∞ Basado en Desigualdades Matriciales Lineales y el uso de Lógica Difusa se logra un buen desempeño en el control de la posición de un Robot manipulador de 2GL

Se contrasta que la hipótesis es verdadera.

CONCLUSIONES

En esta tesis se diseñó un sistema de Control No Lineal de posición usando Lógica Difusa y Control H_∞ Basado en Desigualdades Matriciales Lineales aplicado a un Robot de 2GL, y en base a los resultados obtenidos mediante simulaciones en los capítulos 3 y 4 se concluye que el objetivo principal se ha alcanzado con éxito.

Se ha desarrollado el modelo no lineal dinámico de un robot manipulador de dos grados de libertad aplicando la ecuación de Lagrange y se ha obtenido en forma satisfactoria una expresión matemática que permite simular el comportamiento físico del robot.

Se ha desarrollado un controlador lineal H_∞ utilizando Desigualdades Matriciales Lineales para nueve y veinticinco puntos de operación permitiendo hallar un vector K (controlador) para cada punto de operación, el error absoluto máximo de la señal de referencia y la señal de salida para la primera articulación es del orden de 3×10^{-5} y el error absoluto máximo para la segunda articulación es del orden de 4×10^{-5} , por lo que estos controladores cumplen de forma satisfactoria con el control de cada punto de operación.

Se utilizó Lógica Difusa para diseñar un controlador No Lineal, considerando nueve y veinticinco puntos de operación, se hallaron controladores lineales para ambos casos, se generaron señales de referencia de 250000 puntos, para el caso de la función de pertenencia triangular con nueve reglas se obtuvo un error absoluto de 3.9196, para el caso de la función de pertenencia gaussiana con nueve reglas se obtuvo un error absoluto de 3.8867. Para el caso de la función de pertenencia triangular con 25 reglas se obtuvo un error absoluto de 3.8678, para el caso de la función de pertenencia gaussiana con 25 reglas se obtuvo un error absoluto de 3.8451.

De los resultados se observa que la función de pertenencia gaussiana tiene menor error que la función de pertenencia triangular, también se observa que al trabajar con un mayor número de reglas y considerando un mismo tipo de función de pertenencia se obtiene menor error

RECOMENDACIONES

Para propósitos de comparación, podría utilizarse otro tipo de combinaciones de técnicas para la obtención de controladores no lineales, tal es el caso de la combinación de Control Predictivo con Lógica Difusa, Control Robusto con Lógica Difusa, Control Adaptativo con Lógica Difusa u otras combinaciones.

Para una mayor precisión en la obtención del Modelo de la Planta se podría usar la técnica de identificación de parámetros, tal como modelos paramétricos, método de mínimos cuadrados, algoritmos genéticos, redes neuronales entre otras. El uso de estas técnicas permitiría obtener un modelo más cercano al sistema real y, por consiguiente, los resultados obtenidos al aplicar técnicas de control en el sistema real (implementado físicamente) serían más exacto.

Para la implementación del sistema de control se recomienda usar procesadores de alta velocidad (μ c, DSP o FPGA) que puedan realizar los cálculos necesarios en tiempo real. El uso de varios procesadores puede mejorar el tiempo de respuesta, una configuración puede ser utilizar un procesador por articulación que envíe señales (PWM) a los actuadores y que reciba las señales de los sensores, los procesadores deben conectarse por buses y protocolos de alta velocidad. También se debe usar el lenguaje de programación diferente al Matlab, toda vez que este software resulta ser lento debido a los cálculos que realiza y las gráficas que consumen bastantes recursos.

En los modelos linealizados utilizando el teorema de Taylor en todos los puntos de operación a excepción de uno, el factor $f(x_0)$ no es cero, se podría considerar como tema de investigación el considerar el factor $f(x_0)$ en los modelos linealizados de los diferentes puntos de operación.

BIBLIOGRAFIA

- [1]. Andrade Faria, F. (2009). *Projetos de Controladores Baseados em LMI usando Realimentacao da Derivada dos Estados*. Tesis de Doctorado Universidade Estadual Paulista.
- [2]. Astocondor, J. (2013). *Diseño y Simulación de un Sistema de Control No Lineal Multivariable por Lógica Difusa Aplicado a un Manipulador Robótico Traslacional de 2DOF*. Tesis de Maestria, Universidad Nacional de ingeniería.
- [3]. Borges Santos, R. (2008). *Controle Ativo de Vibracoes em Estruturas Flexiveis Utilizando Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)*. Tesis de Maestría Universidade Estadual Paulista.
- [4]. Boyd, S. (1984). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Siam.
- [5]. Canahuire Cabello, R. V. (2009). *Controle H-Infinito de Vibracoes com Restricoes no Esforco de Controle*. Tesis de Maestria. Universidad Estadual de Campinas.
- [6]. Canahuire Cabello, R. V. (2014). *Projeto de Controladores H-infinito de Ordem Reduzida e Compensacao de Saturacao em Estruturas Flexiveis*. Tesis de Doctorado Universidade Estadual de Campinas.
- [7]. Ceccaroni, L., & Verdaguer, X. (2003). *tmtfactory*. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/228755082_TV_finder_una_aproximacion_semantica_a_la_televison_interactiva
- [8]. Cutrim Lopes, J. (2005). *Controle H2/Hoo de Estruturas Flexíveis através de Desigualdades Matriciais Lineares com Alocacao de Pólos*. Tesis de Maestria UNICAMP.
- [9]. Da Silva, E., & Buzachero, L. F. (2011). *Resolvendo LMIs com o MATLAB: Curso de Yalmip com solvers LMILab e SeDuMi*. Curso Universidade Estadual Paulista.
- [10]. Daruichi Machado, E. R. (2003). *Modelagem e Controle de Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno*. Tesis de Maestria Universidade Estadual Paulista.
- [11]. De Sousa Leite, K. (2012). *Estudo de um Sistema de Nivel com Dois Tanques Interligados Sujeito a Perturbacoes Utilizando Desigualdades Matriciais Lineares*. Tesis de Maestria Universidade Federal Do Ceará.
- [12]. Duan, G.-R., & Yu, H.-H. (2013). *LMIs in Control Systems*. CRC Press.
- [13]. Espinoza Ramos, E. (2005). *Matemática Básica*. Lima: Servicios Gráficos J.J.
- [14]. Fernando, R. C. (2011). *Robótica Control de Robots Manipuladores*. Mexico: Alfaomega.
- [15]. Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A., & Chilali, M. (1995). *LMI Control Toolbox For Use with MATLAB*. Math Works.
- [16]. Hao Ran, L. (2018). *Fuzzy Sets Theory Preliminary*. Cham: Springer.
- [17]. Higerá Martínez, O. I., & Salamanca, J. M. (2015). Controlador Robusto LMI para un Helicoptero de Dos Grados de Libertad. *Ingeniería, Investigación y Desarrollo Colombia*, 47-57.

- [18]. Kelly, R., & Santibañez, V. (2003). *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Prentice Hall.
- [19]. Kiong Nguang, S. (2003). Hoo Fuzzy Output Feedback Systems: An LMI Approach. *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*, 331-340.
- [20]. Kosko, B. (1994). Fuzzy Systems as Universal Approximators. *IEEE Transactions on computers*, 1329-1333.
- [21]. Lipschutz, S. (1991). *Teoría de Conjuntos y Temas Afines*. Mexico: McGraw Hill.
- [22]. Lipschutz, S. (1992). *Algebra Lineal*. McGraw Hill.
- [23]. Ma, X.-J., Sun, Z.-Q., & He, Y.-Y. (1998). Analysis and Design of Fuzzy Controller and Fuzzy Observer. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 41-51.
- [24]. Machuca Mines, J. A. (2014). *Sistemas de Control Digital Multivariable No lineal Para Controlar la Trayectoria Espacial de un Robot de Seis Articulaciones*. Tesis.
- [25]. Melo King, D. (2005). *Controle H2/Hoo via Desigualdades Matriciais Lineares para Atenuacao de Vibracoes em Estruturas Flexiveis*. Tesis de Maestria Universidade Estadual de Campinas.
- [26]. Ogata, K. (2010). *Ingeniería de Control Moderna*. Madrid España: Pearson Educación.
- [27]. Paredes, F. (2012). *Vehículo Aéreo No Tripulado Basado en Control de Lógica Difusa*. Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Ingeniería.
- [28]. Peres Alves Santim, M. (2012). *Projeto e Implementacao com chaveamento de Reguladores Fuzzy Takagi-Sugeno para um Conjunto de Pontos de Operacao*. Tesis de Maestria, Universidade Estadual Paulista.
- [29]. Ravazzi Pires Da Silva, E. (2009). *Controle Robusto de Sistemas Nao-Lineares Sujeitos a Falhas Estruturais*. Tesis de Maestria, Universidad Estadual Pulista.
- [30]. Rodriguez, R. (12 de Octubre de 1999). *La Logica Difusa Es La Logica que Utilizan los Humanos*, Universidad de Buenos Aires. Buenos Aires, Argentina.
- [31]. Silvério Costa, M. (2012). *Controladores Robustos D-LQI e D-Alocacao de polos Otimizados via LMI Aplicados a um Conversor Boost Alto Ganho com Célula de Comutacao Tres Estados*. Tesis de Maestría Universidade Federal do Ceará.
- [32]. Spong, M., & Vidyasagar, M. (1989). *Robot Dynamics*. John Wiley & Sons.
- [33]. Takagi, T., & Sugeno, M. (1985). Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 116-132.
- [34]. Tanaka, K., & Wang, H. (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley & Sons.
- [35]. Taniguchi, T. O. (2001). Model Construction, Rule Reduction, and Robust Compensation for Generalized Form of Takagi-Sugeno Fuzzy Systems. *IEEE*, 525-538.
- [36]. Teixeira, M., & Zak, S. (1999). Stabilizing Controller Desing Fuzzy Models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 133-142.

- [37]. Torres, F., Pomares, J., Gil, P., Puente, S., & Aracil, R. (2002). *Robots y Sistemas Sensoriales*. Madrid España: Prentice Hall.
- [38]. Wang, H., Tanaka, K., & Griffin, M. (1996). An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14-23.
- [39]. Wang, L.-X. (1997). *A course in Fuzzy Systems and Control* . Prentice Hall.
- [40]. Xue, D., & Chen, Y. (2009). *Solving Applied Mathematical with MATLAB*. CRC Press.
- [41]. Zames, G. (1981). Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control* .
- [42]. Zhou, K., Doyle, J., & Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control* . Prentice Hall.

ANEXO A. Simulación del modelo dinámico del Robot

Para la simulación se usó el Software Matlab y Simulink a continuación se muestra el código de la función fBrazo2GDL que se usó en el bloque con el mismo nombre y también la función convertirA_XY también dentro del bloque con el mismo nombre, también se consideró el modelo de los motores para cada articulación.

```
function [qpp1,qpp2] = fBrazo2GDL(Tao1,Tao2,q1,q2,qp1,qp2)
% Modelando Dinámico de un Brazo de 2 Grados de Libertad.

M1 = 0.88;
M2 = 0.88;
L1 = 0.45;
L2 = 0.45;

g = 9.81;

Ra=17;           %Resistencia de armadura ohm
Ka=0.0105;      %Constante de torque del motor N-m/A
Kb=0.0436;      %Constante de fuerza contraelectromotriz V/rad/s
n=187.7;        %Relacion de reduccion de engranajes
Jm=1.6E-6;      %Inercia del rotor kg-m^2
fm=1.4E-6;      %Coeficiente de friccion viscosa N-m-s/rad

% - Matriz de Inercia
M11 = Ra/(n*Ka) * (M1+M2) * (L1^2) + (n^2) * Jm;
M12 = Ra/(n*Ka) * (M2*L1*L2*(cos(q1-q2)));
M21 = Ra/(n*Ka) * M2*L1*L2*(cos(q1-q2));
M22 = Ra/(n*Ka) * (M2*L2^2+n^2*Jm);
%
M = [M11 M12;M21 M22];

% - Matriz centrífuga y de coriolis
C11 = Ra/(n*Ka) * (n^2*fm+(Ka*Kb*n^2)/Ra);
C12 = -(Ra/(n*Ka)) * M2*L1*L2*sin(q1-q2) * qp2;
C21 = -(Ra/(n*Ka)) * M2*L1*L2*sin(q1-q2) * qp1;
C22 = Ra/(n*Ka) * (n^2*fm+(Ka*Kb*n^2)/Ra);
%
C = [C11 C12;C21 C22];

% - Vector de gravedad
G1 = -(M1+M2)*L1*g*(sin(q1));
G2 = -M2*L2*g*(sin(q2));
%
G = [G1;G2];

%% Despejando
Delta1 = M11*M22 - M12*M21;
Delta2 = Tao1 - C11*qp1 - C12*qp2 - G1;
Delta3 = Tao2 - C21*qp1 - C22*qp2 - G2;
%
qpp1 = (1/Delta1) * (M22*Delta2 - M12*Delta3);
qpp2 = (1/Delta1) * (-M21*Delta2 + M11*Delta3);
```

```
end
```

```
function [X1,Y1,X2,Y2] = ConvertirA_XY(q1,q2)

    l1 = 0.45;
    l2 = 0.45;
    %
    X1 = l1*sin(q1);
    Y1 = l1*cos(q1);
    %
    X2 = l1*sin(q1) + l2*sin(q1 + q2);
    Y2 = l1*cos(q1) + l2*cos(q1 + q2);
end
```

En la figura A1 se muestra el programa utilizado en el software Simulink para simular el modelo dinámico del brazo robótico.

MODELO DINAMICO DEL BRAZO ROBOTICO DE DOS GRADOS DE LIBERTAD

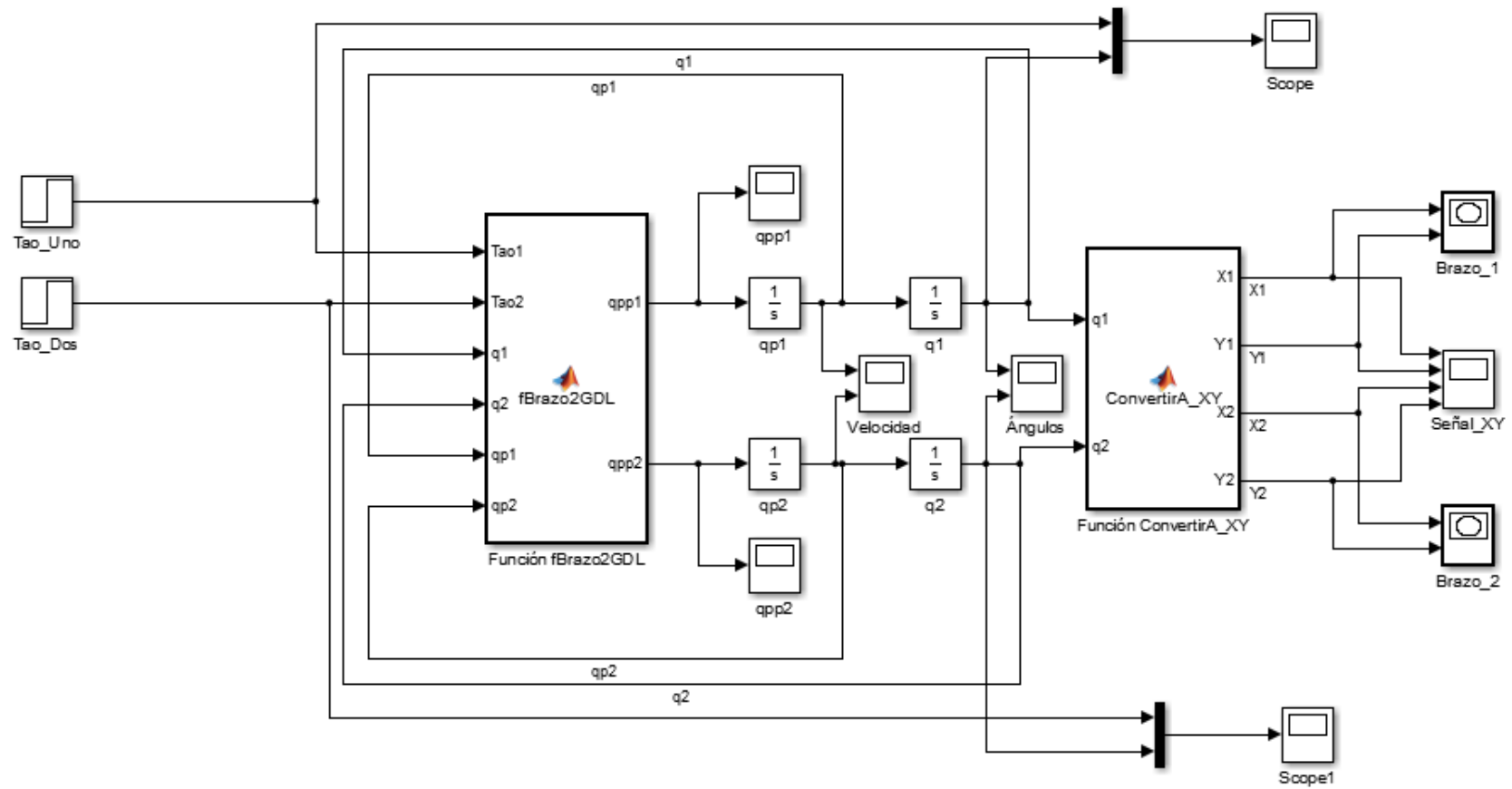


Figura A1: Programa de simulación del modelo dinámico del Brazo de dos grados de libertad

ANEXO B. Programa de cálculo de la matriz K

En este apartado se muestra el código utilizado en MATLAB usando el Toolbox LMI para resolver el problema de optimización convexa planteado en la ecuación 4.58, este código se tiene que repetir para cada uno de los puntos de operación del modelo difuso planteado.

```
% Programa para el cálculo de la matriz K

A = [0          1          0          0
      4.7411    -3.5981    -0.37092   2.7334
      0          0          0          1
      -0.65282  2.7334     0.85917   -6.3315];

B1 = [0          0
      0.41793    -0.3175
      0          0
      -0.3175    0.73543];

B2 = [ 0.1
      0.1
      0.1
      0.1
      ];

C = [1          0          0          0
      0          0          1          0];
D1 = [ 0  0
      0  0];
D2 = [0.05
      0.05];
% define el sistema LMI
setlmi ([])
% variables LMI
X = lmivar(1, [4 1]); %matriz cuadrada 4x4
W = lmivar(2, [2,4]); %matriz rectangular 2x4
rou = lmivar(1, [1 1]);
% LMI 1
lmiterm ( [-1 1 1 X],1, 1); %
% LMI 2
lmiterm ( [2 1 1 X],A,1,'s'); % bloque (1,1)
lmiterm ( [2 1 1 W],B1,1,'s'); % bloque (1,1)
lmiterm ( [2 2 1 0],B2'); % bloque (2,1)
lmiterm ( [2 3 1 X],C,1); % bloque (3,1)
lmiterm ( [2 3 1 W],D1,1); % bloque (3,1)
lmiterm ( [2 3 2 0],D2); % bloque (3,2)
lmiterm ( [2 2 2 rou],1,-1); % bloque (2,2)
lmiterm ( [2 3 3 rou],1,-1); % bloque (3,3)
lmis3=getlmi; % fin
% Resolviendo
c = mat2dec(lmis3,0,0,1);
```

```
[copt,xopt] = mincx(lmis3,c);           % resuelve el problema de
optimización                          %
X = dec2mat(lmis3,xopt,1);            % extrae la matriz X
W = dec2mat(lmis3,xopt,2);            % extrae la matriz W
K = W*inv(X);                          % cálculo de la matriz K
Autovalor_AN=eig(A-B1*K)
```