

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRONICA



**Diseño e Implementación de un Sistema de
Control No Lineal Multivariable por Modo
Deslizante Aplicado a un Robot Manipulador
Esférico de dos Grados de Libertad**

TESIS

Para optar el Grado de Maestro en Ciencias

Mención: Automática e Instrumentación

PRESENTADO POR:

Edgardo Fabián Espinoza Malqui

LIMA - PERU

2005

Tabla de Contenido

Lista de Figuras	1
Lista de Tablas	5
Capítulo 1	
Introducción	6
1.1 Formulación del Problema	7
1.2 Perspectiva Histórica . . .	7
1.3 Objetivos	8
1.4 Organización de la tesis	9
Capítulo 2	
Modelado de la Planta	10
2.1 Introducción	10
2.2 Descripción del Sistema	10
2.3 El Modelo Dinámico . . .	13
2.3.1 El Procedimiento Denavit-Hartenberg .	13
2.3.2 El Algoritmo de Lagrange-Euler	16
2.4 Aplicación y Programación del Modelo	18
2.4.1 Lista de variables	18
2.4.2 Cálculos	18
2.4.3 Programación del Algoritmo Lagrange-Euler	22
2.4.4 El Modelo de los Actuadores .	23
2.4.5 Modelo en el Espacio Estado	26
Capítulo 3	
Control por Modo Deslizante	29
3.1 Ecuaciones Diferenciales Discontinuas	30
3.2 Control Fundamental por Modo Deslizante	33
3.3 Estabilidad de Ecuaciones Diferenciales con Discontinuidades .	34
3.4 Control por Modo Deslizante Multivariable .	36
3.5 Implementación de la Ley de Control	39
3.6 Ley de Control con Saturación [6], [7], [12]	42
Capítulo 4	
Implementación en Tiempo Real	44
4.1 Implementación del Hardware	45

4.1.1	El Actuador	45
4.1.2	El Sensor	50
4.1.3	La Interfaz Lab-PC+	51
4.2	Software de Control	52
4.2.1	Diagrama flujo	53
4.2.2	Programa Principal XX.CPP	53
4.2.3	Funciones Propias del Programa XX.CPP	54
4.2.4	La Función Principal Main	54
Capítulo 5		
Simulación del Sistema		57
5.1	Caso 1: Simulación con Función Signo	57
5.1.1	Respuesta a una Trayectoria Constante	58
5.1.2	Respuesta a una Trayectoria Senoidal .	63
5.2	Caso 2: Simulación con Función Saturación . .	66
5.2.1	Respuesta a una Trayectoria Constante	68
5.2.2	Respuesta a una Trayectoria Senoidal .	70
5.3	Caso 3: Simulaciones con Variación de Parámetros en el Sistema	75
5.3.1	Respuesta a una Trayectoria Constante con Variación de los Parámetros en el Primer Grado de Libertad	76
5.3.2	Respuesta a una Trayectoria Constante con Variación de los Parámetros en el Segundo grado	77
5.3.3	Respuesta a una Trayectoria Senoidal con Variación de los Parámetros en el Primer Grado	80
5.3.4	Respuesta a una Trayectoria Senoidal con Variación de los Parámetros en el Segundo Grado	83
Capítulo 6		
Resultados Experimentales		89
6.1	Experimento 1: Control con la Función Signo aplicado a una Trayectoria Constante	89
6.2	Experimento 2: Control con la Función Signo aplicado a una Trayectoria Senoidal	92
6.3	Experimento 3: Control con Función Saturación aplicado a una Trayectoria Constante	95
6.4	Experimento 4: Control con Función Saturación aplicado a una Trayectoria Senoidal	97
Capítulo 7		
Conclusiones		101
7.1	Conclusiones	101
7.2	Recomendaciones para Trabajos Futuros	102
Apéndice A		
Identificación de Parámetros		103
A.1	Modelo del Servomotor DC	103

A.2	Implementación	106
A.3	Aplicación	107
A.3.1	Datos de Fabricante	107
A.3.2	Simulación en Tiempo Real	107
A.3.3	Cálculos	108
A.4	Coefficiente de Fricción Viscosa del Brazo	110
Apéndice B		
	Programas en MATLAB	115
B.1	Listado de Programas en MATLAB	115
B.2	Programa del Cálculo de la Ecuación Dinámica del Manipulador	115
B.3	Programa con la Función Signo con Trayectoria Constante . . .	119
B.4	Programa con la Función Signo con Trayectoria Senoidal	125
B.5	Programa con la Función Saturación con Trayectoria Constante	131
B.6	Programa con la Función Saturación con Trayectoria Senoidal	137
Apéndice C		
	Programas en C++	144
C.1	Listado de Programas en C++	144
C.2	Programa para Identificación de Parámetros del Servomotor DC	144
C.3	Programa con la Función Saturación con Trayectoria Constante	149
C.4	Programa con la Función Saturación con Trayectoria Senoidal	156
Bibliografía		164

Lista de Figuras

2.1	Esquema del Robot Manipulador Esférico de 2DOF	11
2.2	Esquema con las medidas del Manipulador	11
2.3	Sistemas de referencias del Manipulador	12
2.4	Momento de inercia del disco respecto al sistema de referencia 1 (S_1).	21
2.5	Momento de inercia del prisma respecto al sistema de referencia 1 (S_1)	21
2.6	Servomotor DC1 de la base del Manipulador	23
2.7	Servomotor DC2 del brazo del Manipulador	25
3.1	Construcción esquemática de Filippov	31
3.2	Condición de deslizamiento	32
3.3	Imperfección de la ley de control por modo deslizante	43
4.1	Esquema de Implementación del sistema.	44
4.2	Planta SRM de 2DOF real . . .	46
4.3	Implementación del sistema real	46
4.4	Circuito generador de PWM.	47
4.5	Circuito amplificador de potencia de PWM.	49
4.6	Esquema del circuito de disparo y conmutación.	50
4.7	Estructura del codificador óptico rotatorio.	51
4.8	Sensado de posición	52
4.9	Diagrama de flujo del algoritmo de control. .	56
5.1	Trayectoria constante: salidas controladas para la base y el brazo.	61
5.2	Trayectoria constante: señales de control para los servomotores de la base y el brazo.	62
5.3	Trayectoria constante: velocidad para los servomotores de la base y el brazo.	63
5.4	Trayectoria constante: superficie deslizante para los servomotores de la base y el brazo	64

5.5	Trayectoria senoidal: salidas controladas para la base y el brazo. . . .	65
5.6	Trayectoria senoidal: señales de control para los servomotores de la base y el brazo.	66
5.7	Trayectoria senoidal: velocidad para los servomotores de la base y el brazo.	67
5.8	Trayectoria senoidal: superficie deslizante para los servomotores de la base y el brazo	67
5.9	Trayectoria constante: salidas controladas para la base y el brazo.	69
5.10	Trayectoria constante: señales de control para los servomotores de la base y el brazo.	70
5.11	Trayectoria constante: velocidad para los servomotores de la base y el brazo.	71
5.12	Trayectoria constante: superficie deslizante para los servomotores de la base y el brazo	71
5.13	Trayectoria senoidal: salidas controladas para la base y el brazo.	73
5.14	Trayectoria senoidal: señales de control para los servomotores de la base y el brazo.	74
5.15	Trayectoria senoidal: velocidad para los servomotores de la base y el brazo.	74
5.16	Trayectoria senoidal: superficie deslizante para los servomotores de la base y el brazo	75
5.17	Trayectoria constante con parámetros cambiados en el primer grado de libertad: salidas controladas para la base y el brazo.	77
5.18	Trayectoria constante con parámetros cambiados en el primer grado de libertad: señales de control para los servomotores de la base y el brazo.	78
5.19	Trayectoria constante con parámetros cambiados en el primer grado de libertad: velocidad para los servomotores de la base y el brazo. . .	78
5.20	Trayectoria constante con parámetros cambiados en el primer grado de libertad: superficie deslizante para los servomotores de la base y el brazo	79
5.21	Trayectoria constante con parámetros cambiados en el segundo grado de libertad: salidas controladas para la base y el brazo.	0

5.22	Trayectoria constante con parámetros cambiados en el segundo grado de libertad: señales de control para los servomotores de la base y el brazo.	81
5.23	Trayectoria constante con parámetros cambiados en el segundo grado de libertad: velocidad para los servomotores de la base y el brazo.	81
5.24	Trayectoria constante con parámetros cambiados en el segundo grado de libertad: superficie deslizante para los servomotores de la base y el brazo	82
5.25	Trayectoria senoidal con parámetros cambiados en el primer grado de libertad: salidas controladas para la base y el brazo.	83
5.26	Trayectoria senoidal con parámetros cambiados en el primer grado de libertad: señales de control para los servomotores de la base y el brazo.	84
5.27	Trayectoria senoidal con parámetros cambiados en el primer grado de libertad: velocidad para los servomotores de la base y el brazo.	84
5.28	Trayectoria senoidal con parámetros cambiados en el primer grado de libertad: superficie deslizante para los servomotores de la base y el brazo.	85
5.29	Trayectoria senoidal con parámetros cambiados en el segundo grado de libertad: salidas controladas para la base y el brazo.	86
5.30	Trayectoria senoidal con parámetros cambiados en el segundo grado de libertad: señales de control para los servomotores de la base y el brazo.	87
5.31	Trayectoria senoidal con parámetros cambiados en el segundo grado de libertad: velocidad para los servomotores de la base y el brazo.	87
5.32	Trayectoria senoidal con parámetros cambiados en el segundo grado de libertad: superficie deslizante para los servomotores de la base y el brazo.	88
6.1	Trayectoria Constante Experimental: salidas controladas para la base y el brazo.	90
6.2	Trayectoria Constante Experimental: señal de control para el servomotor de la base y el brazo.	91
6.3	Trayectoria Constante Experimental: velocidad del servomotor de la base y el brazo.	92

6.4	Trayectoria Senoidal Experimental: salidas controladas para la base y el brazo.	93
6.5	Trayectoria Senoidal Experimental: señal de control para el servomotor de la base y el brazo.	94
6.6	Trayectoria Senoidal Experimental: velocidad del servomotor de la base y el brazo.	94
6.7	Trayectoria Constante Experimental: salidas controladas para la base y el brazo.	96
6.	Trayectoria Constante Experimental: señal de control para el servomotor de la base y el brazo.	96
6.9	Trayectoria Constante Experimental: velocidad del servomotor de la base y el brazo.	97
6.10	Trayectoria Senoidal Experimental: salidas controladas para la base y el brazo.	98
6.11	Trayectoria Senoidal Experimental: señal de control para el servomotor de la base y el brazo.	99
6.12	Trayectoria Senoidal Experimental: velocidad del servomotor de la base y el brazo.	100
A.1	Circuito Eléctrico del Servomotor DC	104
A.2	Curva de velocidad	105
A.3	Implementación para la obtención de datos experimentales del servomotor DC	106
A.4	Gráfico para identificación de parámetros del servomotor DC en vacío.	109
A.5	Gráfico para identificación de parámetros del servomotor DC1 de la base.	109
A.6	Gráfico para identificación de parámetros del servomotor DC2 del brazo.	110
A.7	Modelo del servomotor DC.	112
A.8	Simulación del modelo simplificado.	113
A.9	Respuesta tensión de entrada versus velocidad.	113
A.10	Experimento de la compensación de la fricción no lineal.	114

Lista de Tablas

2.1	Valores de las Variables	19
2.2	Valores de los Parámetros $D - H$	20
3.1	Vectores de estado del sistema	37
4.1	Conmutación de los MOSFET's.	48
A.1	Parámetros del Sistema a simular	111

Capítulo 1

Introducción

La automatización en las empresas industriales se han desarrollado mediante el **control tradicional**, solucionando problemas del control monovariable así como (caudal, presión, nivel, temperatura, etc). Sin embargo en sistemas más complejos con especificaciones exigentes, los controladores tradicionales no son los adecuados; por lo que se recurre a estructuras de **control moderno**, implementados sobre la base de sistemas de control por computadora.

Las técnicas del control moderno son usados en sistemas multivariables, caracterizados por presentar un comportamiento dinámico y no lineal; los cuales en los últimos años han alcanzado un alto nivel de aceptación industrial.

En la presente tesis el problema a resolver es diseñar e implementar un sistema de control por modo deslizante multivariable, para controlar posiciones y trayectorias arbitrarias de los brazos en un robot manipulador esférico de dos grados de libertad. El sistema de control debe ser capaz de hacer que las variables controladas (brazos) sigan en forma asintótica las trayectorias de referencia con mínimo sobreimpulso, mínimo tiempo de estabilización y error en estado estable nulo.

El control por modo deslizante multivariable, es un método que utiliza una superficie deslizante S , lo cual garantiza la convergencia de la ley de control del sistema en un campo finito. Cuando se emplea el control por modo deslizante a los servomotores DC, se presenta la ley de control de naturaleza discontinua. Para un sistema mecánico la aplicación de la ley de control puede traer consigo el fenómeno "chattering", que se manifiesta en una oscilación sostenida de la señal de control, la cual puede ser dañar el funcionamiento del sistema de control.

El fenómeno "chattering", se produce en el límite de la superficie S y se debe a los cambios de alta frecuencia que muy bien puede excitar la dinámica del modelo e imponer el desgaste indebido en el actuador. Por lo tanto, la ley de control no sería aceptable, si no se resolviera este problema. Se ha propuesto una modificación para esta dificultad, implementando la función de **saturación** en la ley de control

que soluciona este inconveniente.

En esta tesis, se escoge el control por modo deslizante por ser una técnica robusta que cuida la dinámica del sistema no lineal, la robustez contra incertidumbres paramétricas y dinámicas no modeladas, asegurando los límites de errores de trayectoria-seguimiento y errores de fuerza-regulación en presencia de incertidumbres limitadas.

1.1 Formulación del Problema

Los manipuladores pueden ser construídos y modelados con muchos cuerpos rígidos conectados en serie por articulaciones rotativas y conducidas cada una de ellas por actuadores eléctricos, que son servomotores DC.

El robot manipulador esférico de dos grados de libertad está compuesto por un servomotor DC con encoder óptico y una base de aluminio (disco y prisma) para el primer grado de libertad; otro servomotor DC también con encoder óptico y una varilla rígida de aluminio que cumple la función de un brazo para el segundo grado de libertad.

Los propósitos de esta tesis son: el control simultáneo del movimiento rotacional de la base acoplada al eje del motor en posición vertical y el movimiento rotacional del brazo acoplado al eje del otro motor. Para este trabajo de tesis se ha diseñado un controlador no lineal multivariable (MIMO) de 2 entradas y 2 salidas basado en el método de control por modo deslizante, de tal manera que el manipulador siga trayectorias de referencia arbitrarias empleando fuerzas de control adecuada.

1.2 Perspectiva Histórica

De hecho, el Control de Modo Deslizante es un tipo particular de Control de Estructura Variable que tuvo su aparición en la década de los años 60 en la URSS, con Emiliano Utkin. Desde ese momento se han utilizado los conceptos de sistemas de control de estructura variable cuyo origen fué el control basado en relés. Este control por conmutación puede trabajar a altas frecuencias y es adecuado para el control de plantas no lineales, siendo su desempeño altamente robusto.

Los manipuladores robóticos presentan un sistema complejo de articulaciones que interactúan con una dinámica no lineal. A medida que la velocidad de los manipuladores se incrementa la cantidad de interacciones entre sus articulaciones se complican el problema de control. Las estrategias de control son limitadas a técnicas convencionales y confiables de un funcionamiento a baja velocidad donde la interacción de la dinámica es mínima y el modelo puede ser eficazmente linealizado y desacoplado. Sin embargo, las aplicaciones futuras involucran velocidades altas de funcionamiento donde solo un acercamiento es inefectivo. Para mejorar la eficiencia y rango de operación del manipulador, se debe de considerar métodos de control más sofisticados. Uno de estos métodos es el control de modo deslizante.

El control por modo deslizante satisface los requerimientos para controlar el robot manipulador cónico de dos grados de libertad por las siguientes razones:

- a. Primero, el control por modo deslizante no requiere un conocimiento exacto del sistema, esto es favorable ya que los manipuladores robóticos son sistemas complejos hacen que imposible un cálculo exacto de la dinámica del mismo.
- b. Segundo, usando el control por modo deslizante se consigue un sistema insensible a las perturbaciones, esto es importante en situaciones en las que el manipulador continuamente carga y descarga objetos y también minimiza los efectos de la fricción viscosa y de Coulumb.

1.3 Objetivos

Los objetivos de este trabajo de tesis es:

- a. Construcción del robot manipulador esférico de 2 grados de libertad.
- b. Realizar el modelo dinámico del robot manipulador esférico de 2 grados de libertad.
- c. Diseñar el algoritmo de control no lineal multivariable con el método de control por modo deslizante para controlar la posición y seguimiento a una trayectoria dada.

- d. Elaborar la configuración del sistema de control para su implementación en tiempo real.

1.4 Organización de la tesis

La tesis está organizada como sigue:

En el Capítulo 2, se presenta el modelamiento del robot manipulador de 2DOF realizado por el método de Lagrange-Euler y el cálculo de la ecuación dinámica se ha determinado usando matemática simbólica del software MATLAB.

En el Capítulo 3, se explica el diseño del controlador para el sistema no lineal. Se utiliza la estructura de la dinámica del manipulador el segundo método de Lyapunov para establecer una superficie deslizante en la intersección de las superficies de conmutación de una manera directa. Para evitar el fenómeno "chattering" la ley de control se modifica, donde se reemplaza la función signo $\text{sgn}(\mathbf{S})$ por la función saturación $\text{sat}(\mathbf{S})$.

En el Capítulo 4, se describe los equipos que se han utilizado en las pruebas experimentales. Los esquemas de los circuitos: generador PWM, amplificador de potencia y decodificador de cuadratura. Así mismo el diagrama de flujo para el software de control.

En el Capítulo 5, se ilustran los resultados obtenidos de las simulaciones hechas en MATLAB, para trayectorias constantes y trayectorias senoidales.

En el Capítulo 6, se presenta los resultados obtenidos de los experimentos referidos a trayectorias constantes y senoidales realizadas en pruebas experimentales, usando para ello la Tarjeta de Adquisición de Datos Lab-PC+.

En el Capítulo 7 se presenta las conclusiones y recomendaciones encontradas a lo largo del desarrollo teórico y práctico de esta tesis.

Por último se presentan los apéndices. En el apéndice A se presenta la identificación de parámetros de los servomotores DC; en el apéndice B se presenta el listado de programas en MATLAB y en el apéndice C se presenta el listado de programas en Borland C++.

Capítulo 2

Modelado de la Planta

2.1 Introducción

Para aplicar la método de control por modo deslizante, es necesario realizar el modelado de la planta o proceso; consiste en determinar la descripción matemática del robot manipulador esférico. Tal modelado describe la dinámica del proceso y tiene por objetivo conocer la relación entre el movimiento del robot y las fuerzas implicadas en el mismo. Para determinar las ecuaciones del modelo usaremos el algoritmo de Lagrange-Euler [1], [2], [8], [13].

2.2 Descripción del Sistema

El Robot Manipulador Esférico de 2 Grados de Libertad que en adelante lo llamaremos SRM (Spherical Robot Manipulator) de 2DOF es mostrado en la figura 2.1, en la figura 2.2 se muestra una vista del esquema anterior con las medidas del robot y en la figura 2.3 se muestra los sistemas de referencias usados. A continuación se describe los dos grados de libertad usados en el proceso.

- a. **Primer Grado de Libertad:** compuesto por un servomotor DC1 de 24 VDC con encoder óptico, y una base conformado por un disco y un prisma de aluminio; de tal manera que en la parte inferior del **disco** de radio R y altura h_d , va acoplado con una bocina de bronce dicho servomotor en posición vertical y sobre la parte superior del disco irá un prisma de sección cuadrada a , y de altura b , a su vez en la parte superior de dicho prisma va el otro servomotor en posición horizontal que corresponde al segundo grado de libertad.
- b. **Segundo Grado de Libertad:** compuesto por un servomotor DC2 de 24 VDC con encoder óptico, y una varilla rígida de aluminio, de tal manera que en el eje de dicho servomotor, en posición horizontal, va acoplado con una bocina de bronce dicha varilla de longitud L_2 que cumple la función de un brazo.

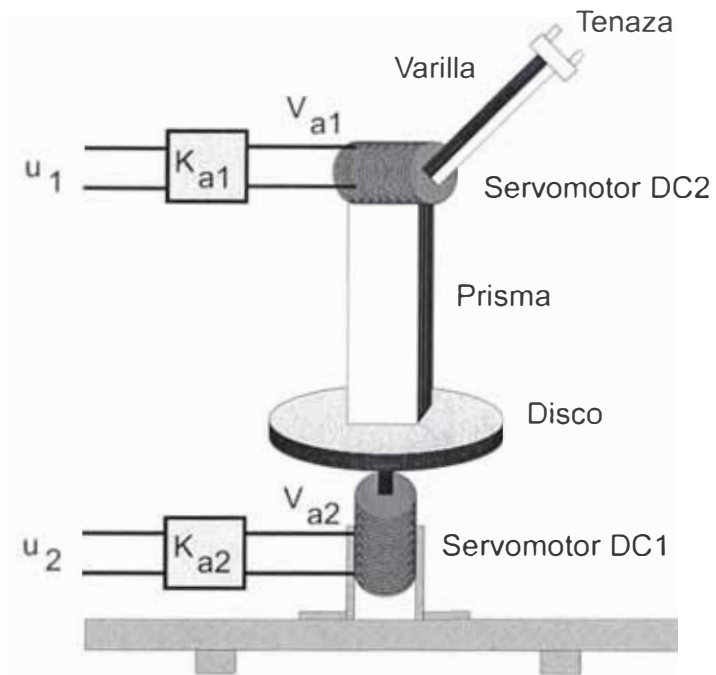


Figura 2.1: Esquema del Robot Manipulador Esférico de 2DOF

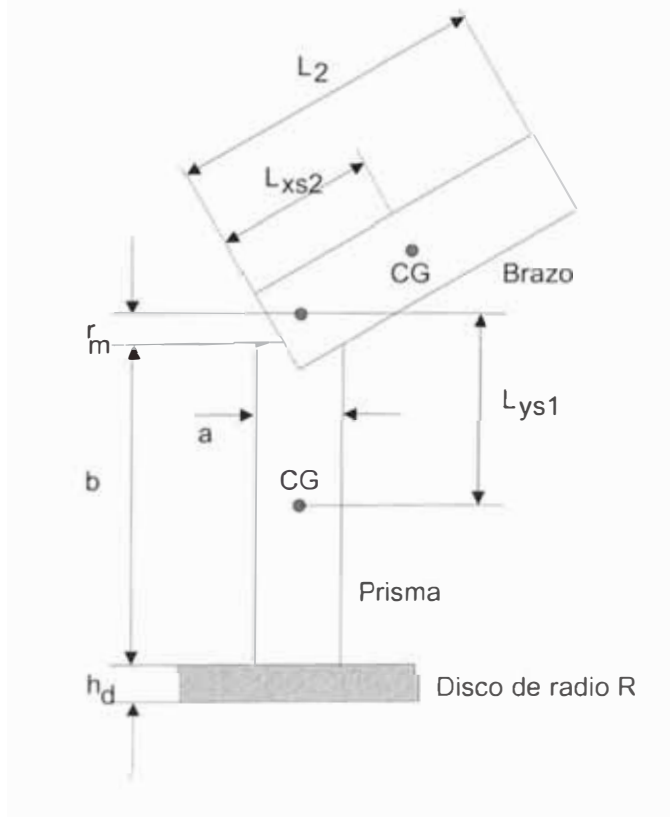
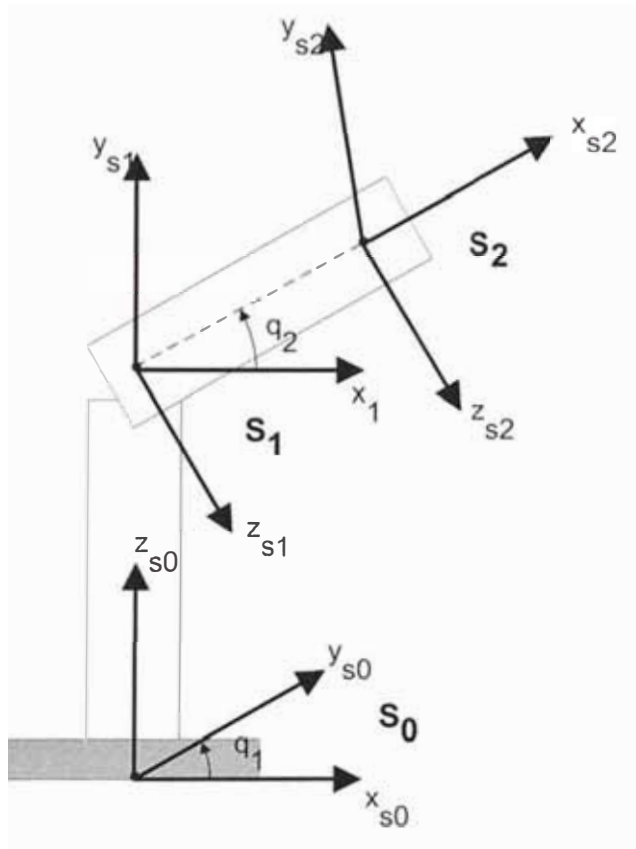


Figura 2.2: Esquema con las medidas del Manipulador



S_0 : Sistema de referencia base (eje del servomotor DC1)

S_1 : Sistema de referencia 1 (eje del servomotor DC2)

S_2 : Sistema de referencia 2

q_1 y q_2 : Ángulos de posición

Figura 2.3: Sistemas de referencias del Manipulador

2.3 El Modelo Dinámico

El método de Lagrangre-Euler para el modelado de manipuladores robóticos emplea la fórmula Lagraniana conjuntamente con la representación de Denavit-Hartenberg (D-H). Un completo estudio de dicho procedimiento puede ser encontrado en [1], [2], [8], [13].

2.3.1 El Procedimiento Denavit-Hartenberg

Un manipulador robótico consiste de una secuencia de cuerpos rígidos (los eslabones) articulados por juntas rotacionales o prismáticas. Cada par de articulación-eslabón representa un grado de libertad (DOF). Un sistema de coordenadas ortonormales $(x_{s_i}, y_{s_i}, z_{s_i})$ puede ser establecido usando la regla de la mano derecha para cada articulación i , donde $i = 1, \dots, n$. Así un manipulador con n DOF posee n pares de articulaciones. El último sistema de coordenadas $(x_{s_n}, y_{s_n}, z_{s_n})$ constituye el sistema de coordenadas del efector final, el cual es usualmente articulado al último eslabón. El manipulador es unido a una base de referencia 0. El sistema de coordenada base es definido como $(x_{s_0}, y_{s_0}, z_{s_0})$. Las coordenadas de la base son también las coordenadas inerciales del manipulador. El sistema de coordenadas base aumentado es definido como: $(x_{s_0}, y_{s_0}, z_{s_0}, 0)$. El procedimiento D-H origina una matriz de transformación homogénea que representa el sistema inercial del manipulador. Para describir tal matriz, requerimos establecer el sistema de coordenadas $(x_{s_i}, y_{s_i}, z_{s_i})$ del manipulador en $s_i = 0, \dots, n$, para determinar los parámetros de las articulaciones y eslabones con el fin de desarrollar la matriz de transferencia homogénea.

2.3.1.1 Estableciendo el Sistema de Coordenadas D-H

Para establecer el sistema de coordenadas D-H $(x_{s_i}, y_{s_i}, z_{s_i})$, $s_i = 0 \dots n$, se usa las siguientes reglas:

1. El sistema de coordenadas base $(x_{s_0}, y_{s_0}, z_{s_0})$ se determina usando la regla de la mano derecha. El eje z_{s_0} se escoge libremente y está localizado a lo largo del eje del movimiento del primer eslabón.
2. El eje $z_{s_{i-1}}$ es alineado con el eje del movimiento (giratorio o prismático) de la i -ésima articulación.

3. El origen del sistema de coordenadas s_i -ésima está en la intersección del eje z_{s_i} y $z_{s_{i-1}}$ o en la intersección de la normal común entre los ejes de dos articulaciones consecutivas z_{s_i} y $z_{s_{i-1}}$ y el eje z_{s_i} .
4. El eje x_{s_i} es perpendicular al eje $z_{s_{i-1}}$.
5. Aplicar la regla de la mano derecha en la articulación i -ésima para determinar y_{s_i} .
6. Generalmente, la articulación n -ésima es una articulación giratoria. El sistema de coordenadas $(x_{s_n}, y_{s_n}, z_{s_n})$, puede estar en cualquier parte del efector final con tal de que el eje z_{s_n} esté a lo largo de la dirección del eje $z_{s_{i-1}}$ y apuntando hacia afuera del manipulador. El eje x_{s_n} es perpendicular a ambos ejes: z_{s_n} y $z_{s_{n-1}}$.

2.3.1.2 Parámetros D-H

Los cuatro parámetros geométricos del manipulador (θ_i , d_i , a_i , y α_i), se asocian con cada par articulación-eslabón y son requeridos para describir una articulación giratoria o prismática. Después de establecer el sistema de coordenadas del manipulador tales parámetros pueden ser determinados de la siguiente manera:

1. θ_i , es el ángulo de rotación del eje $\mathbf{x}_{s_{i-1}}$ con el eje \mathbf{x}_{s_i} en el plano del eje $\mathbf{z}_{s_{i-1}}$. Este es variable si la articulación es giratoria.
2. d_i , es la distancia del origen del sistema de coordenadas $s_{(i-1)}$ -ésima a lo largo del eje $\mathbf{z}_{s_{i-1}}$, hasta la intersección del eje $\mathbf{z}_{s_{i-1}}$ con el eje \mathbf{x}_{s_i} . Esta distancia d_i es variable si la articulación i es prismática.
3. a_i , es la distancia a lo largo del eje \mathbf{x}_{s_i} , que va desde la intersección del eje $\mathbf{z}_{s_{i-1}}$ con el eje \mathbf{x}_{s_i} hasta el origen del sistema de coordenadas s_i -ésima en el caso de articulaciones giratorias.
4. α_i , es el ángulo de separación entre los ejes $\mathbf{z}_{s_{i-1}}$ y \mathbf{z}_{s_i} medido en un plano perpendicular al eje \mathbf{x}_{s_i} , utilizando la regla de la mano derecha.

2.3.1.3 Matriz de Transformación Homogénea D-H

La matriz de transformación homogénea D-H caracteriza cada sistema de coordenadas del par articulación-eslabón con respecto al sistema de coordenadas previo. Por consiguiente un punto r_s , del sistema de coordenadas s_i -ésimo se

puede ser expresado como $(r_{s_{i-1}})$ en el sistema de coordenadas $s_{(i-1)}$ -ésimo ejecutando sucesivamente las siguientes operaciones:

1. $T(z_s, \theta_i)$: rotación de un ángulo θ_i alrededor del eje $z_{s_{i-1}}$, para alinear el eje $x_{s_{i-1}}$ con el eje x_{s_i} .
2. $T(z_s, d_i)$: traslación a lo largo del eje $z_{s_{i-1}}$ de una distancia d_i , hasta hacer coincidir el eje $z_{s_{i-1}}$ con el eje x_{s_i} .
3. $T(x_s, \bar{a}_i)$: traslación a lo largo del eje x_{s_i} de una distancia a_i , que va desde la intersección del eje $z_{s_{i-1}}$ y el eje x_{s_i} al origen del sistema de coordenadas s_i -ésimo.
4. $T(x_s, \alpha_i)$: rotación de un ángulo α_i , del eje $z_{s_{i-1}}$ con el eje z_{s_i} alrededor del eje x_{s_i} .

El producto de estas cuatro operaciones básicas produce la matriz de transformación homogénea A_i^{i-1} , del eslabón i con respecto al eslabón $i - 1$ o articulación i con respecto a la articulación $(i - 1)$. Por lo tanto:

$$A_i^{i-1} = T(z, \theta_i)T(0, 0, \bar{d}_i)T(\bar{a}_i, 0, 0)T(x, \alpha_i) =$$

$$\begin{bmatrix} c(\theta_i) & -s(\theta_i) & 0 & 0 \\ s(\theta_i) & c(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \bar{d}_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \bar{a}_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c(\alpha_i) & -s(\alpha_i) & 0 \\ 0 & s(\alpha_i) & c(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c(\theta_i) & -c(\alpha_i)s(\theta_i) & s(\alpha_i)s(\theta_i) & \bar{a}_i c(\theta_i) \\ s(\theta_i) & c(\alpha_i)c(\theta_i) & -s(\alpha_i)c(\theta_i) & \bar{a}_i s(\theta_i) \\ 0 & s(\alpha_i) & c(\alpha_i) & \bar{d}_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

donde c y s , son las funciones \cos y \sin respectivamente. La siguiente matriz de transformación homogénea:

$$T_i^0 = \prod_{j=1}^i A_j^{j-1} = A_1^0 A_2^1 \dots A_i^{i-1} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

determina la localización del sistema de coordenada (s_i) -ésimo con respecto al sistema de coordenada base.

2.3.2 El Algoritmo de Lagrange-Euler

El procedimiento de Lagrange-Euler requiere ejecutar los siguientes pasos:

1. Asignar a cada par articulación-eslabón del manipulador un sistema de coordenadas D-H.
2. Obtener las matrices de transformación homogénea A_i^{i-1} para $i = 1, \dots, n$.
3. Obtener las matrices U_{ij} que es el efecto del movimiento de la articulación j en todos los puntos del eslabón i :

$$U_{ij} = \frac{\partial A_i^0}{\partial q_j} = \begin{cases} A_{j-1}^0 Q_j A_i^{j-1} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases} \quad (2.3)$$

donde A_{j-1}^0 relaciona al sistema de coordenadas $(j-1)$ -ésimo con el sistema de coordenadas base, y Q_j toma los siguientes valores:

$$Q_j = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{si la articulación es giratoria}$$

$$Q_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{si la articulación es prismática}$$

4. Los efectos de interacción entre las articulaciones son expresadas por las siguientes matrices U_{ijk} :

$$U_{ijk} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial A_i^0}{\partial q_j} \right) \begin{cases} A_{j-1}^0 Q_j A_{k-1}^{j-1} Q_k A_i^{k-1} & \text{si } i \geq k \geq j \\ A_{k-1}^0 Q_k A_{j-1}^{k-1} Q_j A_i^{j-1} & \text{si } i \geq j \geq k \\ 0 & \text{si } k > i \text{ o } j > i \end{cases} \quad (2.4)$$

5. Obtener el tensor de inercia J_i del eslabón i -ésimo mediante:

$$J_i = \begin{bmatrix} \frac{-I_{xx_{s_i}} + I_{yy_{s_i}} + I_{zz_{s_i}}}{2} & -I_{x_{s_i}y_{s_i}} & -I_{x_{s_i}z_{s_i}} & m_i \bar{x}_{s_i} \\ -I_{x_{s_i}y_{s_i}} & \frac{I_{xx_{s_i}} - I_{yy_{s_i}} + I_{zz_{s_i}}}{2} & -I_{y_{s_i}z_{s_i}} & m_i \bar{y}_{s_i} \\ -I_{x_{s_i}z_{s_i}} & -I_{y_{s_i}z_{s_i}} & \frac{I_{xx_{s_i}} + I_{yy_{s_i}} - I_{zz_{s_i}}}{2} & m_i \bar{z}_{s_i} \\ m_i \bar{x}_{s_i} & m_i \bar{y}_{s_i} & m_i \bar{z}_{s_i} & m_i \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

donde: $(x_{s_i}, y_{s_i}, \bar{z}_{s_i})$ es el centro de gravedad (CG) del eslabón i con respecto al sistema de coordenadas s_i -ésimo, $I_{xx_{s_i}}, I_{yy_{s_i}}, I_{zz_{s_i}}$ son los momentos inercia con respecto al sistema de coordenadas $(x_{s_i}, y_{s_i}, z_{s_i})$, m_i es la masa del cuerpo i , $x_{s_i}, y_{s_i}, \bar{z}_{s_i}$ son las distancias del CG del cuerpo i al sistema de coordenadas $(x_{s_i}, y_{s_i}, z_{s_i})$, e $I_{x_s y_s}, I_{y_s z_s}, I_{x_s z_s}$ son los productos correspondientes del momento de inercia.

6. Obtener la matriz H de inercia simétrica de dimensión $n \times n$, la cual está relacionada con la aceleración y cuyos elementos se expresan como:

$$\mathbf{H}_{ik} = \sum_{j=\max(i,k)}^n \text{Tr}(U_{jk} J_j U_{ji}^T) \quad i, k = 1, 2 \dots n \quad (2.6)$$

donde, Tr es la traza y n es el número de grados de libertad.

7. Obtener los términos h_{ikm} definidos por:

$$h_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^n \text{Tr}(U_{jkm} J_j U_{ji}^T) \quad i, k, m = 1, 2 \dots n \quad (2.7)$$

8. Obtener el vector no lineal fuerza centrífuga y Coriolis de orden $n \times 1$ cuyos elementos C_i son dados por:

$$\mathbf{C}_i = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n h_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m \quad (2.8)$$

9. Obtener el vector no lineal de fuerza de gravedad d de orden $n \times 1$ cuyos elementos son:

$$\mathbf{d}_i = \sum_{j=1}^n (-m_j g U_{ji} r_{s_j}^j) \quad i = 1, 2 \dots n \quad (2.9)$$

donde, $g = [g_{x_{s_0}} \ g_{y_{s_0}} \ g_{z_{s_0}} \ 0]$ es el vector gravedad fila expresado en el sistema de coordenadas base y $r_{s_j}^j = [x_{s_j} \ y_{s_j} \ \bar{z}_{s_j} \ 1]^T$ (el elemento 1 es un factor de escala) es el vector centro de masa del eslabón j y expresado en el sistema de coordenadas s_j -ésimo.

Finalmente la ecuación dinámica del manipulador, con el modelo L-E toma la forma:

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{H}_{ik} \ddot{q}_i + \mathbf{C}_i + d_i \quad (2.10)$$

donde, T_i es el vector de fuerzas y torques aplicado a cada coordenada generalizada q_i .

2.4 Aplicación y Programación del Modelo

2.4.1 Lista de variables

Todas las variables que intervienen en el sistema se describen en la tabla 2.1, con sus respectivos valores que se han obtenido y se explican en el apéndice A (Identificación de Parámetros). En dicha tabla se usan las siguientes abreviaciones: M.I. (Momento de Inercia), C.F.V. (Coeficiente de fricción viscosa) y F.E.M. (Fuerza electromotriz).

2.4.2 Cálculos

Para el cálculo de la ecuación dinámica del manipulador se aplica el algoritmo de Lagrange-Euler. A continuación se presenta los siguientes cálculos que usaremos para la programación de dicho modelo con matemática simbólica de MATLAB 6.0 [16].

2.4.2.1 Cálculo de los Parámetros D-H

Primeramente se fijan los sistemas de referencia en las articulaciones como se muestra en la figura 2.3, posteriormente se determina los parámetros D-H (DENAVID-HARTENBERG) [1], [2], [8], [13], que se muestran en la Tabla 2.2.

2.4.2.2 Cálculo de las Matrices de Transformación Homogénea

Reemplazando los valores de la tabla 2.2 en la ecuación (2.1), obtenemos las matrices de transformación homogénea A_1^0 y A_2^1 :

A_1^0 : posición y orientación del sistema de referencia 1 (S_1) de la base con respecto al sistema de referencia base (S_0):

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & 0 & \text{sen}(q_1) & 0 \\ \text{sen}(q_1) & 0 & -\cos(q_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b + h_d + r_m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A_2^1 : posición y orientación del sistema de referencia 2 (S_2) del brazo con respecto al sistema de referencia 1 (S_1):

Tabla 2.1: Valores de las Variables

Símbolo	Descripción	Valor
m_d	Masa del disco	0.55 kg
m_p	Masa del prisma	1.00 kg
m_2	Masa del brazo	0.1 kg
h_d	Altura del disco	0.01 m
R	Radio del disco	0.07 m
b	Altura del prisma	0.20 m
a	Ancho, largo de sección del prisma	0.044 m
L_2	Longitud del brazo	0.2 m
$L_{x_{s_2}}$	Longitud del eje de S_1 al CG brazo	0.10 m
$L_{c_{s_2}}$	Longitud del eje de S_2 al CG brazo	$(L_2 - L_{x_{s_2}})$ m
I_1	Momento de inercia del sólido (disco más prisma)	0.0016 kgm^2
I_2	Momento de inercia del brazo	0.0013 kgm^2
J_{m1} y J_{m2}	M.I. servomotor DC1 y DC2	0.00059 kgm^2
B_{m1} y B_{m2}	C.F.V. servomotor DC1 y DC2	0.0001415 Nms/rad
J_{eq1}	M.I. equivalente del servom. DC1 de la base	0.2177 kgm^2
B_{eq1}	C.F.V. equivalente del servom. DC1 de la base	0.054 Nms/rad
J_{eq2}	M.I. equivalente del servom. DC2 del brazo	0.3954 kgm^2
B_{eq2}	C.F.V. equivalente del servom. DC2 del brazo	0.0589 Nms/rad
n_1 y n_2	Reducción servomotor DC1 y DC2	18.5
R_{a1}	Resistencia armadura servomotor DC1	3.50 Ohmios
R_{a2}	Resistencia armadura servomotor DC2	3.50 Ohmios
L_{a1}	Inductancia armadura servomotor DC1	Despreciable
L_{a2}	Inductancia armadura servomotor DC2	Despreciable
V_{b1} y V_{b2}	F.E.M. servomotor DC1 y DC2	21.56 V
V_{a1} y V_{a2}	Voltage armadura servomotor DC1 y DC2	24 V
I_{a1}	Corriente armadura servomotor DC1	0.7 A
I_{a2}	Corriente armadura servomotor DC2	0.7 A
K_{A1} y K_{A2}	Constante ganancia driver 1 y 2	2.17
K_{m1} y K_{m2}	Constante torque servomotor DC1 y DC2	0.04364 $N - m/A$
K_{b1} y K_{b2}	Constante fem servomotor DC1 y DC2	0.04364 $V/rad/s$
u_1	Señal de control servomotor DC1	(En simulación) V
u_2	Señal de control servomotor DC2	(En simulación) V
g	Aceleración de la gravedad	9.81 m/seg^2
r_m	Dist. del extremo superior del prisma al eje DC2	0.03 m
C_c	Coficiente de fricción de Coulomb	0.001488 Kgm^2/seg

$$A_2^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\text{sen}(q_2) & 0 & L_2 \cos(q_2) \\ \text{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & L_2 \text{sen}(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tabla 2.2: Valores de los Parámetros $D - H$

Juntura	θ_i	d_i	\bar{a}_i	α_i
1	q_1	$b + h_d + r_m$	0	90°
2	q_2	0	L_2	0°

A_2^0 : posición y orientación del sistema de referencia 2 (S_2) del brazo con respecto al sistema de referencia base (S_0):

$$A_2^0 = A_1^0 A_2^1$$

A_2^0 es determinado mediante matemática simbólica en el apéndice B.

2.4.2.3 Cálculo del momento de inercia del disco [3], [10]

El momento de inercia del disco respecto al sistema de referencia 1 (S_1) x_{s_1} , y_{s_1} , z_{s_1} , (ver figura 2.4), está dado por:

$$\begin{aligned} I_{x_{s_1d}} &= 0 \\ I_{y_{s_1d}} &= \frac{m_d R^2}{2} \\ I_{z_{s_1d}} &= 0 \end{aligned}$$

y los productos de los momentos de inercia son:

$$I_{x_{s_1d}y_{s_1d}} = I_{x_{s_1d}z_{s_1d}} = I_{y_{s_1d}z_{s_1d}} = 0$$

2.4.2.4 Cálculo del momento de inercia del prisma [3], [10]

El momento de inercia del prisma respecto al sistema de referencia 1 (S_1) x_{s_1} , y_{s_1} , z_{s_1} , (ver figura 2.5), está dado por:

$$\begin{aligned} I_{x_{s_1p}} &= 0 \\ I_{y_{s_1p}} &= \frac{m_p a^2}{6} \\ I_{z_{s_1p}} &= 0 \end{aligned}$$

y los productos de los momentos de inercia son:

$$I_{x_{s_1p}y_{s_1p}} = I_{x_{s_1p}z_{s_1p}} = I_{y_{s_1p}z_{s_1p}} = 0$$

2.4.2.5 Cálculo del momento de inercia de la base (disco más prisma)

El momento de inercia de la base es la suma de los momentos de inercia del disco más el prisma, y está dado por:

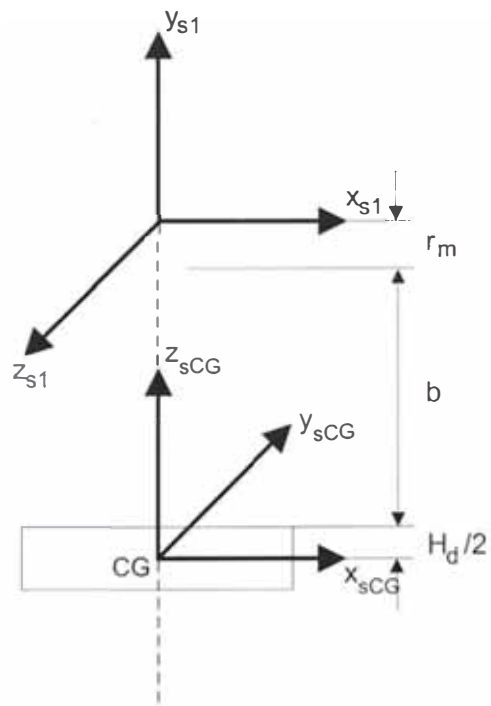


Figura 2.4: Momento de inercia del disco respecto al sistema de referencia 1 (S_1).

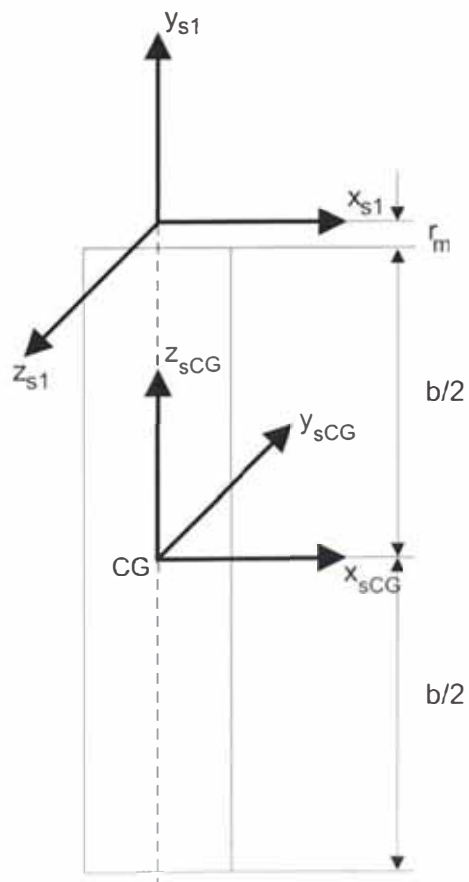


Figura 2.5: Momento de inercia del prisma respecto al sistema de referencia 1 (S_1).

$$\begin{aligned}
I_{x_1} &= 0 \\
I_{y_1} &= \frac{m_p a^2}{6} + \frac{m_d R^2}{2} \\
I_{z_1} &= 0
\end{aligned}$$

2.4.2.6 Cálculo de la matriz de pseudoinercia de la base J_1

De la ecuación (2.5) se obtiene la matriz de pseudoinercia de la base J_1 :

$$J_1 = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_1 & 0 & -m_1 L_{y_{s_1}} \\ 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & -m_1 L_{y_{s_1}} & 0 & m_1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

donde:

m_1 : $m_d + m_p + m_{servodc1} + m_{accesorios}$

$L_{y_{s_1}}$: long. del eje de referencia 1 (S_1) al C.G. de la base

$$I_1 = \frac{I_{y_{s_1}}}{2}$$

2.4.2.7 Cálculo de la matriz de pseudoinercia del brazo J_2

El momento de inercia del brazo I_2 , se obtiene de [3], [10]:

$$I_{x_{s_2}} = 0$$

$$I_2 = I_{y_{s_2}} = I_{z_{s_2}} = m_2 L_2^2 / 3$$

reemplazando estos valores en la ecuación (2.5), obtenemos la matriz de pseudoinercia del brazo J_2 :

$$J_2 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 & -m_2 L_{x_{s_2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_2 L_{x_{s_2}} & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

donde:

m_2 : $m_{brazo} + m_{objeto}$

$L_{x_{s_2}}$: long. del eje de referencia 1 (S_1) al C.G. del brazo

2.4.3 Programación del Algoritmo Lagrange-Euler

El programa de cálculo de la ecuación dinámica del robot manipulador esférico de dos grados de libertad (2 DOF) se determina aplicando Matemática Simbóli-

ca de MATLAB 6.0 [16] y se presenta en el apéndice B. La ecuación dinámica obtenida para los dos grados de libertad son:

$$\text{para el primer grado de libertad: } T_1 = H_{11}\ddot{q}_1 + C_1 \quad (2.13)$$

$$\text{para el segundo grado de libertad: } T_2 = H_{22}\ddot{q}_2 + C_2 + d_2 \quad (2.14)$$

que son los elementos de T_i , dado en la ecuación (2.10).

2.4.4 El Modelo de los Actuadores

2.4.4.1 Modelado del Actuador No. 1 de la Base del Manipulador

En la figura 2.6, se muestra el servomotor DC1, correspondiente a la base. El voltage de entrada $K_{A1}u_1$ aplicado a la armadura está dado por:

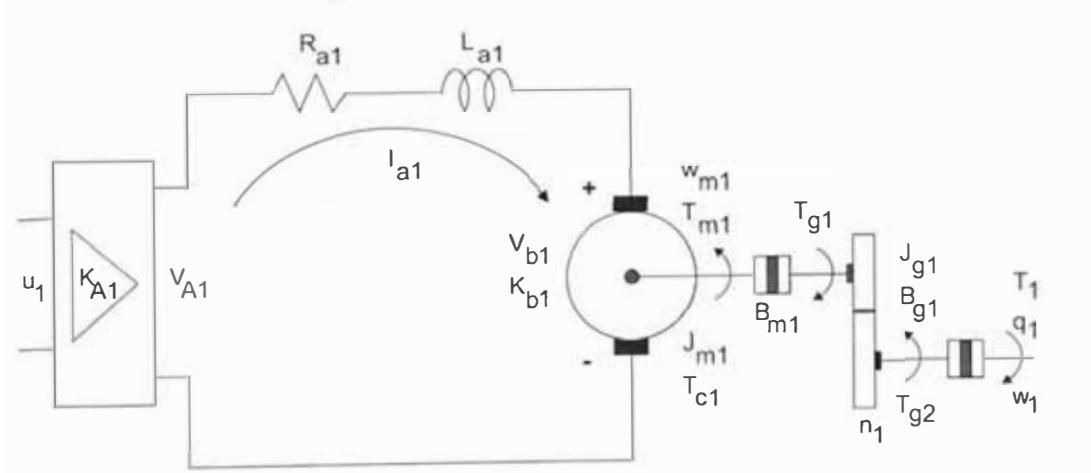


Figura 2.6: Servomotor DC1 de la base del Manipulador

$$V_{A1} = K_{A1}u_1 = L_{a1}I_{a1} + R_{a1}I_{a1} + V_{b1} \quad (2.15)$$

la fuerza electromotriz del servomotor DC es:

$$V_{b1} = K_{b1}w_{m1} = K_{b1}n_1\dot{q}_1 \quad (2.16)$$

en el cual n_1 es la relación de piñones. El torque T_{m1} del servomotor está dado por:

$$T_{m1} = K_{m1}I_{a1} = J_{m1}n_1\ddot{q}_1 + B_{m1}n_1\dot{q}_1 + T_{g1} \quad (2.17)$$

por lo tanto la ecuación del torque T_{g2} requerido por el actuador para la base tiene la forma de:

$$T_{g2} = n_1T_{g1} = J_{g1}\ddot{q}_1 + B_{g1}\dot{q}_1 + T_1 + n_1T_{C1} \quad (2.18)$$

donde T_1 es el torque de la carga y T_{C1} es el torque de fricción de Coulomb. La (2.18) en (2.17) queda:

$$n_1 K_{m1} I_{a1} = J_{eq1} \ddot{q}_1 + B_{eq1} \dot{q}_1 + T_1 + n_1 T_{C1} \quad (2.19)$$

donde:

$$J_{eq1} = n_1^2 J_{m1} + J_{g1}$$

$$B_{eq1} = n_1^2 B_{m1} + B_{g1}$$

$$T_1 = H_{11} \ddot{q}_1 + C_1$$

$$H_{11} = a_1 + a_2 \cos^2(q_2)$$

$$C_1 = -a_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(2q_2)$$

$$a_1 = 2I_1$$

$$a_2 = I_2 + 2m_2 L_2 L_{c2} - m_2 L_2^2$$

despreciando la inductancia de armadura o sea $L_{a1} = 0$, obtenemos de (2.15) y (2.16)

$$K_{A1} u_1 = R_{a1} I_{a1} + K_{b1} n_1 \dot{q}_1 \quad (2.20)$$

despejando I_{a1} en (2.19) y reemplazando en (2.20), obtenemos la ley de control para la primera entrada:

$$u_1 = R_{T1} (J_{eq1} \ddot{q}_1 + B_{eq1} \dot{q}_1 + T_1) + N_{T1} \dot{q}_1 + n_1 R_{T1} T_{C1} \quad (2.21)$$

donde:

$$R_{T1} = \frac{R_{a1}}{n_1 K_{m1} K_{A1}}$$

$$N_{T1} = \frac{n_1 K_{b1}}{K_{A1}}$$

$$T_{C1} = C_c \text{sign}(\dot{q}_1)$$

2.4.4.2 Modelado del Actuador No. 2 del Brazo del Manipulador

En la figura 2.7, se muestra el servomotor DC2 correspondiente al brazo. En la misma figura se muestra el circuito eléctrico del servomotor DC2, controlado también por la armadura. Dicho servomotor se encuentra ubicado en la parte superior del prisma. Para obtener la ley de control para la segunda entrada se procede de la misma manera que para el primer servomotor, obteniendo de esta manera:

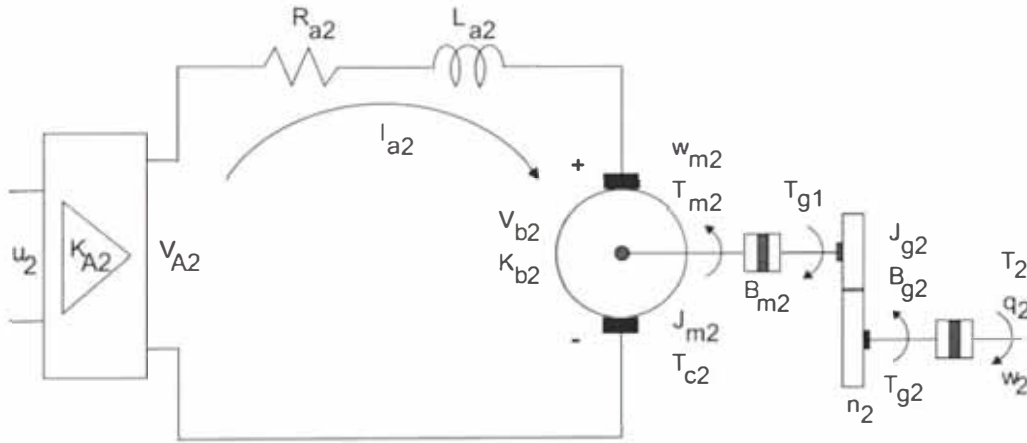


Figura 2.7: Servomotor DC2 del brazo del Manipulador

$$u_2 = R_{T2}(J_{eq2}\ddot{q}_2 + B_{eq2}\dot{q}_2 + T_2) + N_{T2}\dot{q}_2 + n_2 R_{T2} T_{C2} \quad (2.22)$$

donde:

$$T_{C2} = C_c \text{sign}(\dot{q}_2)$$

$$J_{eq2} = n_2^2 J_{m2} + J_{g2}$$

$$B_{eq2} = n_2^2 B_{m2} + B_{g2}$$

$$R_{T2} = \frac{R_{a2}}{n_2 K_{m2} K_{A2}}$$

$$N_{T2} = \frac{n_2 K_{b1}}{K_{A2}}$$

$$T_2 = H_{22}\dot{q}_2 + C_2 + d_2$$

$$H_{22} = a_2$$

$$C_2 = a_2 \dot{q}_1^2 \sin(q_2) \cos(q_2)$$

$$d_2 = a_3 \cos(q_2)$$

$$a_2 = I_2 + 2m_2 L_2 L_{c2} - m_2 L_2^2$$

$$a_3 = m_2 g L_{c2}$$

2.4.5 Modelo en el Espacio Estado

La ecuación dinámica del manipulador obtenida en las ecuaciones (2.13) y (2.14), se representa en el espacio de estados mediante la siguiente asignación de variables:

$$x_1 = q_1 \quad (2.23)$$

$$x_2 = q_2 \quad (2.24)$$

$$x_3 = \dot{q}_1 \quad (2.25)$$

$$x_4 = \dot{q}_2 \quad (2.26)$$

donde:

x_1 = posición angular de la base

x_2 = posición angular del brazo

x_3 = velocidad angular de la base

x_4 = velocidad angular del brazo

La ecuación no lineal para sistemas multivariables es:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (2.27)$$

su representación en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \\ f_4(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ G_{31} & 0 \\ 0 & G_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

reemplazando las ecuaciones (2.23) y (2.25) en la ecuación (2.21), obtenemos u_1 en variables de estado:

$$u_1 = R_{T1}(J_{eq1}\dot{x}_3 + B_{eq1}x_3 + T_1) + N_{T1}x_3 + C_c n_1 R_{T1} \text{sign}(x_3) \quad (2.29)$$

así mismo, reemplazando las ecuaciones (2.24) y (2.26) en la ecuación (2.22), obtenemos u_2 en variables de estado:

$$u_2 = R_{T2}(J_{eq2}\dot{x}_4 + B_{eq2}x_4 + T_2) + N_{T2}x_4 + C_c n_2 R_{T2} \text{sign}(x_4) \quad (2.30)$$

la ecuación dinámica del manipulador obtenida en las ecuaciones (2.13) y (2.14), también la representamos en variables de estado:

$$T_1 = H_{11}\dot{x}_3 + C_1 \quad (2.31)$$

$$T_2 = H_{22}\dot{x}_4 + C_2 + d_2 \quad (2.32)$$

posteriormente, reemplazamos la ecuación (2.31) en (2.29), obtenemos la primera entrada u_1 :

$$u_1 = R_{T1}(J_{eq1}\dot{x}_3 + B_{eq1}x_3 + H_{11}\dot{x}_3 + C_1) + N_{T1}x_3 + C_c n_1 R_{T1} \text{sign}(x_3) \quad (2.33)$$

finalmente, reemplazamos la ecuación (2.32) en (2.30), obtenemos la segunda entrada u_2 :

$$u_2 = R_{T2}(J_{eq2}\dot{x}_4 + B_{eq2}x_4 + H_{22}\dot{x}_4 + C_2 + d_2) + N_{T2}x_4 + C_c n_2 R_{T2} \text{sign}(x_4) \quad (2.34)$$

así mismo de (2.33) obtenemos:

$$\dot{x}_3 = \frac{u_1 - R_{T1}B_{eq1}x_3 - N_{T1}x_3 - R_{T1}C_1 - C_c n_1 R_{T1} \text{sign}(x_3)}{R_{T1}(J_{eq1} + H_{11})} \quad (2.35)$$

y de (2.34) obtenemos:

$$\dot{x}_4 = \frac{u_2 - R_{T2}B_{eq2}x_4 - N_{T2}x_4 - R_{T2}(C_2 + d_2) - C_c n_2 R_{T2} \text{sign}(x_4)}{R_{T2}(J_{eq2} + H_{22})} \quad (2.36)$$

finalmente reemplazando las ecuaciones (2.25), (2.26), (2.35) y (2.36), en la ecuación (2.28)

$$f_1(x) = x_3$$

$$f_2(x) = x_4$$

$$f_3(x) = \frac{-(R_{T1}B_{eq1} + N_{T1})x_3 - R_{T1}C_1 - C_c n_1 R_{T1} \text{sign}(x_3)}{R_{T1}(J_{eq1} + H_{11})}$$

$$f_4(x) = \frac{-(R_{T2}B_{eq2} + N_{T2})x_4 - R_{T2}(C_2 + d_2) - C_c n_2 R_{T2} \text{sign}(x_4)}{R_{T2}(J_{eq2} + H_{22})}$$

$$G_{31} = \frac{1}{R_{T1}(J_{eq1} + H_{11})}$$

$$G_{42} = \frac{1}{R_{T2}(J_{eq2} + H_{22})}$$

Como el proceso tiene dos salidas se tiene:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Capítulo 3

Control por Modo Deslizante

Este capítulo trata del uso del método llamado control por modo deslizante para el proceso no lineal del SRM de 2DOF. La teoría que se presenta en esta sección corresponde al estudio de los manipuladores robóticos. En el control por modo deslizante, la descripción del proceso puede ser imprecisa, es decir, el modelo dinámico puede presentar incertidumbres en los parámetros de su estructura o puede no considerar el modelado no dinámico de cierto comportamiento.

El control por modo deslizante es un tipo particular de los sistemas de control de estructura variable que se caracteriza por presentar una ley de control de realimentación y una regla de decisión [12], [20]. Esta regla de decisión, es una función de conmutación, tiene como entrada una medida del sistema actual y produce una salida particular de realimentación en un instante de tiempo. El resultado de este sistema de estructura variable que puede considerarse como una combinación de subsistemas donde cada subsistema tiene una estructura de control.

Una de las ventajas de introducir una complejidad adicional al sistema es la habilidad de combinar las propiedades útiles de cada uno de las estructuras compuestas del sistema. En el control por modo deslizante, se diseña y construye un estado del sistema para quedar dentro de una vecindad de la función de conmutación. Hay dos ventajas principales para este diseño. Primero, la dinámica del sistema puede tolerar un cambio particular de la función de conmutación. Segundo, la respuesta en lazo cerrado es totalmente insensible a una clase particular de incertidumbre. La propiedad de invarianza la hace una candidata apropiada para aplicar metodología del control robusto. Por estas razones el control por modo deslizante se hace atractivo para un diseño del controlador.

El acercamiento al diseño del control por modo deslizante consiste en dos componentes. Primero involucra el control de una función de conmutación para que el movimiento deslizante que satisfaga las especificaciones del diseño. Segundo se preocupa por la selección de una ley de control que hará la función de

conmutación atractivo al estado del sistema. Note que esta ley del control no es necesariamente discontinuo [17].

3.1 Ecuaciones Diferenciales Discontinuas

Considere la ecuación del diferencial.

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (3.1)$$

donde $x \in R^n$ y $f(t, x)$ es una función definida en un dominio E del espacio de fase (t, x) . Se asumirá que para cualquier subconjunto $D \subset E$ existe siempre una función siempre finita $A(t)$ tal que.

$$\|f(t, x)\| < A(t) \quad (3.2)$$

se cumple para cualquier función en D [9].

Definición [15]

Una función de vector $x(t)$, definida en el intervalo $[t_1, t_2]$ es la solución de (3.2) en el sentido de Filipov, si es absolutamente continua para todo $t \in [t_1, t_2]$.

$$\frac{dx}{dt} \in K(f(t, x)) \quad (3.3)$$

donde:

$$K(f(t, x)) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu N = 0} \text{conv} f(t, B(x, \delta) - N) \quad (3.4)$$

donde *conv* denota la función convexa, $B(x, \delta)$ es la función bola de radio δ , x , y μ son la medida de Lebesgue. La notación \bigcap denota la intersección sobre todos los conjuntos de medida cero. Note que la definición anterior, para un $\delta > 0$ arbitrario, el vector dx/dt pertenece a una función convexa que contiene todos los valores de $f(t, x)$ los rangos de x están en casi todos la vecindad δ del punto $x(t)$ (es decir la vecindad entera excepto para los conjuntos de medida cero). La solución en una superficie discontinua donde $f(x, t)$ es discontinuo, es estudiada en detalle por Filippov [9]. S es una superficie discontinua que separa el espacio en las regiones G^+ y G^- . Suponemos que S es regular, para que pueda ser cortada por una función discontinua $S(x)$, es decir:

$$S = \{x : s(x) = 0\}$$

tal que $f(t, x)$ está limitada por las funciones $f^-(t, x)$ y $f^+(t, x)$ que existen cuando se aproximan desde G^- hasta G^+ respectivamente.

Sea $f_o^-(f_o^+)$ la proyección normal de $f^-(f^+)$, donde la superficie S se dirige hacia G^+ . Entonces es absolutamente continua si $x(t) \in S$ satisfacen.

$$f_o^-(t, x(t)) \geq 0, \quad f_o^+(t, x(t)) \leq 0 \quad \text{y} \quad f_o^- - f_o^+ > 0$$

es decir las trayectorias van hacia la superficie S , por tanto la solución (3.1) estará de acuerdo con la definición previa si y solo si:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha(t)f^+(t, x(t)) + (1 - \alpha(t))f^-(t, x(t)) \quad (3.5)$$

donde $\alpha(t)$ es un escalar en $0 < \alpha(t) < 1$ es tal que el vector.

$$f_o \equiv \alpha(t)f^+(t, x(t)) + (1 - \alpha(t))f^-(t, x(t))$$

El vector f_o es tangente a la superficie S , tal como se muestra en la figura 3.1. y

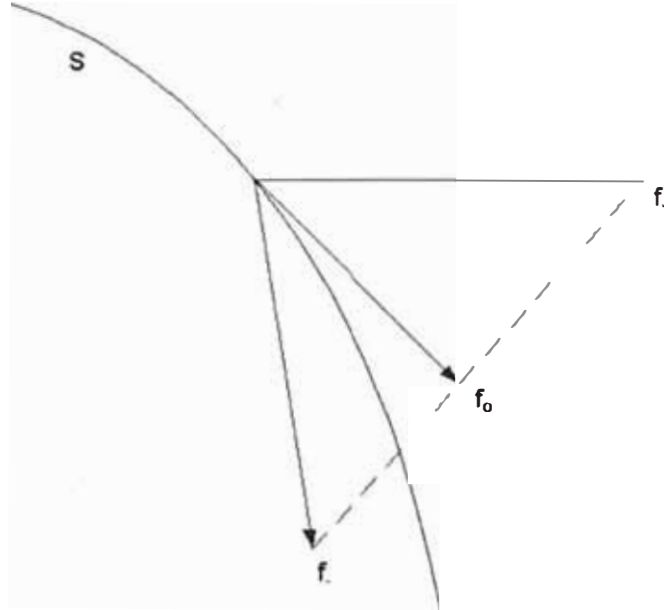


Figura 3.1: Construcción esquemática de Filippov

el escalar α puede expresarse como:

$$\alpha(t) = \frac{\partial f_o^-(t, x(t))}{\partial f_o^-(t, x(t)) - f_o^+(t, x(t))}$$

Note que f_o^+ está dado por $f_o^+(t, x) = \nabla_s f^+(t, x)$, y similarmente para f_o^- , así mismo el término del lado derecho de (3.5) es el ortogonal a ∇s ; lo cual obliga a la solución quedarse en la superficie S . Entonces vemos que los valores en la vecindad de S , dados por (3.5), son la solución dinámica de la superficie deslizante S . Las condiciones $f_o^-(t, x(t)) \geq 0$ y $f_o^+(t, x(t)) \leq 0$, es equivalente a la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dt} S^2(x(t)) \leq -\eta |S| \quad (3.6)$$

donde η es estrictamente positiva [9]. Esencialmente (3.6) el estado de la "distancia" elevada al cuadrado de la superficie, decrece a lo largo de todas las trayectorias del sistema. La figura 3.2 muestra que las trayectorias convergen hacia la superficie $S(t)$. si integramos (3.6) entre $t = 0$ y $t = t_o$, donde t_o es el

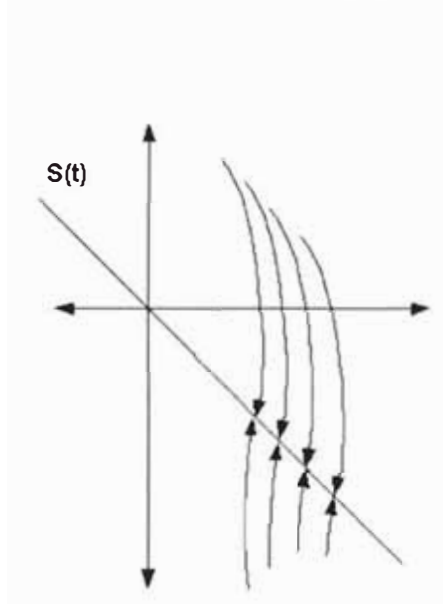


Figura 3.2: Condición de deslizamiento

tiempo que alcanza la superficie deslizante S , entonces:

$$0 - S(t = 0) = S(t = t_o) - S(t = 0) \leq -\eta(t_o - 0)$$

esto implica que:

$$t_o \leq \frac{S(t = 0)}{\eta}$$

así obtendríamos un resultado similar si (3.6) empieza con $S(t = 0) < 0$.

3.2 Control Fundamental por Modo Deslizante

Considere el sistema de control de la forma [6], [7], [12]:

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in R^n, \quad u \in R^m \quad (3.7)$$

tal que el sistema mostrado por (3.7) es de estructura variable si el control u es continuo por partes y sus puntos de discontinuidad componen una colección discreta de superficies discontinuas en el espacio estado. En particular para cada coordenada del vector de control u asociamos un conjunto de funciones continuas con valores reales estimadas mediante:

$$\{u_i^+(t, x), u_i^-(t, x), S_i(x)\} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

tal que el control u es:

$$u_i(t, x) = \begin{cases} u_i^+(t, x) & \text{para } S_i(x) > 0 \\ u_i^-(t, x) & \text{para } S_i(x) < 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.8)$$

El conjunto de superficies $S_i = \{x : S_i(x) = 0\}$ son superficies smooth llamadas *superficies discontinuas*. La intersección de un número arbitrario de funciones S_i las llamaremos *superficies deslizantes* siempre que sean asintóticamente estables con respecto a la dinámica (si atrae todos los movimientos que originan en una vecindad tubular).

El modo deslizante conduce a un movimiento de superficies deslizantes, cuya finalidad es evaluar el vector de la función $S : R^n \rightarrow R^m$ cuya n-ésima coordenada es $S_i(x)$ es referida usualmente como función de conmutación. La función de conmutación puede ser realizada dependiente del tiempo, es decir, $S(t, x)$, en tal caso las superficies de discontinuidad es vista como conmutación en el plano fase (t, x) . Con este hecho nos permite suponer que la salida del sistema (3.7) es de la forma $y(t) = h(x(t))$ y el problema principal es encontrar una ley de control que haga que la salida a seguir sea una señal deseada $y_d(t)$. Según lo anterior, el problema de la síntesis involucra dos pasos.

Primero, la selección de una función de conmutación S cuyos ceros comprenden una superficie con restricciones en la dinámica que conduce a un error $y(t) - y_d(t)$ asintóticamente a cero.

Segundo, el diseño de un control de conmutación (corresponde a buscar S) que haga que estos lugares sean puntos de una superficie deslizante. En tal caso

donde las entradas son lineales, es decir:

$$\dot{x} = f(t, x) + B(t, x)u \quad (3.9)$$

el problema de determinar el movimiento deslizante se simplifica grandemente [5]. Supongamos que para un tiempo t_o , $x(t_o)$ se situa en la intersección de una superficie switching (es decir, $s(x(t_o)) = 0$) y que esta intersección es en una superficie de deslizamiento, entonces si $G(x)$ es el gradiente de $S(x)$, se obtiene:

$$S = Gf + GBu = 0$$

y suponiendo que GB es no singular, podemos resolver para la ley de control:

$$u_{eq} \cong -(GB)^{-1}Gf \quad (3.10)$$

donde u_{eq} es el control equivalente. Sustituyendo u_{eq} en (3.9) tenemos:

$$\dot{x} = f - B(GB)^{-1}Gf \quad (3.11)$$

La ecuación (3.11) describe la dinámica de la superficie de deslizamiento. Utkin [5] se refiere a este proceso como el método de control equivalente. El problema de seleccionar el control realimentado involucra un método jerárquico de diseño que normalmente se usa cuando cambian las superficies y a su vez están asociadas con el control de la trayectoria del sistema a ser controlado por modo deslizante en cada superficie. El segundo método de Lyapunov aplicado a las ecuaciones diferenciales con discontinuidades en el semiplano derecho es utilizada para establecer estabilidad asintótica, la cual nos referimos a continuación.

3.3 Estabilidad de Ecuaciones Diferenciales con Discontinuidades

Considerando una función con valores reales $g(x)$ definida para cualquier conjunto E y $x \in E$. El límite superior de $g(x)$ es el punto x , denotado por $M_x\{g(x)\}$, y se define:

$$M_x\{g(x)\} = \inf_{\mu N=0} \lim_{x_n \rightarrow x} \{g(x_n)\} \quad (3.12)$$

la solución de (3.1) admite lo siguiente [9].

Lema 3.1 *Lema de Filippov*

La función de vector $x(t)$ es completamente continuo y es solución de (3.1) en el sentido de Filippov, si sólo sí para todo t y para cada vector ν se cumple:

$$\frac{dx}{dt} \nu \leq M_x \{f(t, x) \nu\} \quad (3.13)$$

Considere ahora la función $V(t, x)$ continua y diferenciable de valores reales. Si $x(t)$ es la solución de (3.1), si $V(t, x(t))$ es una función absolutamente continua para t , entonces es derivable y existe para casi todo t y es igual a la siguiente ecuación:

$$\frac{dV}{dt} \nu = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \nabla_x V \quad (3.14)$$

El siguiente Lema emplea las técnicas de Filippov [9], son esenciales para las consideraciones de estabilidad.

Lema 3.2 Considere la ecuación (3.1) definida en el dominio de E . Sea $V(t, x)$ una función continua y diferenciable de valor real y $w(t, x)$ una función continua tal que:

$$\frac{\partial}{\partial t} V(t, x) + f(t, x) \nabla_x V(t, x) < w(t, x) \quad (3.15)$$

Para todo E , entonces si $x(t)$ es solución de (3.1) para todo t se cumple:

$$\frac{dV}{dt} \nabla_x V \leq w(t, x(t)) \quad (3.16)$$

Prueba

Sea:

$$h(t, y) = f(t, y) \nabla_x V(t, x(t))$$

Por el lema 3.1, se cumple para todo t , lo siguiente:

$$\frac{dx}{dt} \nabla_x V \leq M_x \{h(t, x)\} \quad (3.17)$$

La continuidad de $\nabla_x V$ implica para t , lo siguiente:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + M_x \{h(t, x)\} = \frac{\partial V}{\partial t} + M_x \{f(t, x) \nabla_x V(t, x)\} < w(t, x) \quad (3.1)$$

Una propiedad deseada para el diseño de control por modo deslizante es que las trayectorias del sistema controlado alcancen la superficie de deslizamiento en un tiempo finito. El teorema de estabilidad cuyo método prueba las incorporaciones de este fenómeno.

Teorema 3.1 *Suponga que el dominio E es positivo e invariante en el tiempo respecto a la dinámica de (3.1). Sea $g : E \rightarrow R^m$ y $V : R \times R^m \rightarrow R$ una función continua y diferenciable, tal que:*

$$m_1 \|y\|^2 \leq V(t, y) \leq m_2 \|y\|^2 \quad (3.19)$$

donde m_1 y m_2 son constantes positivas: Sea E_o , denotado por el conjunto $E_o = \{(t, x) : g(t, x) = 0\}$ y se define $\Phi : E \rightarrow R$ para $\Phi(t, x) = V(t, g(t, x))$. Entonces para algún $k > 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, x) + f(t, x) \nabla_x \Phi(t, x) \leq -k g(t, x) \quad (3.20)$$

Se sostiene que para todo E la solución de $x(t)$ de (3.1) alcanza un conjunto E_o fijo en un tiempo finito.

Prueba

Por el lema 3.2, nosotros obtenemos para casi todo t .

$$\frac{d\Phi}{dt} \leq -k \|g(t, x(t))\|$$

y por (3.19) se tiene:

$$\frac{d\Phi}{dt} \leq -k \left(\frac{\Phi}{m_2} \right)^{1/2} \quad (3.21)$$

Para todo t , vemos que $\Phi(t, x(t))$ y de $g(t, x(t))$, en (3.19), se vuelve cero después de un tiempo finito.

3.4 Control por Modo Deslizante Multivariable

Consideremos la dinámica del sistema SRM de 2DOF. Podemos formular de manera una ecuación descrita por:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = -M^{-1} (P \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + Q) + M^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

sea el vector de estado $x = [q_1 \quad q_2]^T$. Podemos modificar la ecuación dinámica (3.22) por la siguiente ecuación de estado:

$$\ddot{x} = -M^{-1} (P\dot{x} + Q) + M^{-1} u \quad (3.23)$$

La tabla 3.1 muestra las matrices y los vectores de la dinámica del sistema descrito en (3.22).

Tabla 3.1: Vectores de estado del sistema

q_1	Posición angular de la base
q_2	Posición angular del brazo
$M(q_i)$	Matriz de inercia definida positiva
$P(q_i, \dot{q}_i)$	Matriz que representa la fuerza de Coriolis
$Q(q_i)$	Matriz de fuerza gravitacional
(u_1, u_2)	Vector de fuerza aplicadas al sistema

Asumimos que los vectores de posición y velocidad deseadas, son funciones continuamente diferenciables en el tiempo, la meta es que el sistema tenga que seguir la posición y velocidad actual de estos valores en tiempo real, luego escogemos la superficie de conmutación siguiente:

$$S_i(t, x) = S_i(t, x, \dot{x}) = (\dot{x} - \dot{x}_d) + C_{t_i}(x - x_d) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.24)$$

donde $C_{t_i} > 0$ es una constante y x_d, \dot{x}_d , son la posición y velocidad deseadas respectivamente. Sea x, \dot{x} una trayectoria de (3.23). Los vectores de error son definidos usualmente, como:

$$\tilde{x} = x - x_d \quad \tilde{\dot{x}} = \dot{x} - \dot{x}_d$$

Si se logra desarrollar un control que convergen todas las trayectorias que se originan en la intersección de estas superficies para permanecer allí, entonces para algún tiempo t_o , $S_i(t_o) = 0$, $i=1,2,3, \dots, n$ tendremos:

$$\tilde{\dot{x}} = -C_{t_i}\tilde{x} \quad \text{para } t \geq t_o$$

los errores de posición y velocidad convergen exponencialmente a cero.

Sea la ley de control u [6], [7], [12], [18], [19]:

$$u = u_o - U \operatorname{sgn}(S) \quad (3.25)$$

donde el i -ésimo elemento del vector u_o es:

$$u_{o,i} = \frac{1}{2}(u_i^+ + u_i^-)$$

la constante U es:

$$U = \operatorname{diag}[\frac{1}{2}(u_i^- - u_i^+)]$$

y la función signo ($sgn(\cdot)$) podemos definirla como el vector:

$$sgn(S) = [sgn(S_1) \quad sgn(S_2) \quad \dots \quad sgn(S_n)]^T$$

diferenciando la superficie S descrita en la ecuación (3.24) a lo largo de la trayectoria:

$$\dot{S} = (\ddot{x} - \ddot{x}_d) + C_t(\dot{x} - \dot{x}_d) \quad (3.26)$$

reemplazando (3.23) en (3.26)

$$\dot{S} = -M^{-1}(P\dot{x} + Q) + M^{-1}u - \ddot{x}_d + C_t\dot{\tilde{x}} \quad (3.27)$$

agrupando (3.27):

$$\dot{S} = M^{-1}[-P\dot{x} - Q + u - M\ddot{x}_d + MC_t\dot{\tilde{x}}] \quad (3.28)$$

donde:

$$u_{eq} = -MC_t\dot{\tilde{x}} + P\dot{x} + Q + M\ddot{x}_d \quad (3.29)$$

minimizando:

$$\dot{S} = M^{-1}[u - u_{eq}] \quad (3.30)$$

reemplazando (3.25) en (3.30) se obtiene:

$$\dot{S} = M^{-1}[u_o - Usgn(S) - u_{eq}] \quad (3.31)$$

Sea $V(t, x)$ una función candidata de Lyapunov dado por:

$$V(t, x) = \frac{1}{2}S^TMS \quad (3.32)$$

derivando (3.32):

$$\dot{V}(t, x) = S^T M \dot{S} + \frac{1}{2}S^T \dot{M} S \quad (3.33)$$

reemplazando (3.31) en (3.33):

$$\dot{V} = S^T(u_o - Usgn(S) - u_{eq}) + \frac{1}{2}S^T \dot{M} S \quad (3.34)$$

La matriz M , siendo una función del vector de posición q_i , continuamente diferenciable. Koditschek estableció la identidad dada en (3.35) para dos eslabones $[q_k, q_i]$, en nuestro caso del SRM de 2DOF consideraremos sólo el eslabón referido a q_k :

$$P = \frac{1}{2}\left(\frac{dM}{dt} - J\right) \quad (3.35)$$

donde J es una matriz anti-simétrica sesgada dada por:

$$J_{ik} = -\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial M_{kj}}{\partial q_i} \right)$$

utilizando (3.35) en (3.34):

$$\dot{V} = S^T(u_o - U \operatorname{sgn}(S) + PS - u_{eq}) + \frac{1}{2} S^T JS \quad (3.36)$$

Note que ($S^T JS = 0$), y para $\epsilon > 0$ una constante arbitraria, seleccionamos los controles u_i^- y $-u_i^+$ que satisfacen:

$$|(u_o + PS - u_{eq})_i| \leq \frac{1}{2}(u_i^- - u_i^+) - \epsilon \quad (3.37)$$

se obtiene:

$$\dot{V} \leq -\epsilon \sum_{j=1}^n |S_j| \quad (3.38)$$

Por consiguiente, como puede verse de (3.38) el control debe seleccionarse para satisfacer:

$$u_i^+ + \epsilon \leq (u_{eq} - PS)_i \leq u_i^- - \epsilon \quad (3.39)$$

Esto nos permite mostrar que u_i^+ y u_i^- son limitados. Se asume que q_{1d} y q_{2d} son uniformemente limitados para satisfacer (3.39) con igualdad. Se nota que V es monótona decreciente y M es definida positiva y uniforme limitada de por algún múltiple de la matriz identidad. Entonces \tilde{x} permanecen limitados inferiormente, son gobernados por la dinámica lineal $\dot{\tilde{x}} + c\tilde{x} = S$, a su vez asegura los límites de $(u_{eq} - PS)_i$. La estabilidad asintótica en la intersección de las superficies de conmutación, así como la propiedad de cada trayectoria alcanzará a las superficies deslizantes en un tiempo finito.

En el resumen se ha mostrado un esquema de control por modo deslizante para el SRM de 2DOF que asegura la existencia de una superficie deslizante en la intersección de las superficies de conmutación.

3.5 Implementación de la Ley de Control

Las condiciones u_i^+ y u_i^- aseguran convergencia de todas las trayectorias a la intersección de las superficies de conmutación puede expresarse en una forma más conveniente:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^+ = (\hat{u}_{eq} - \hat{P}S)_i + \bar{u}_i^+ \\ u_i^- = (\hat{u}_{eq} - \hat{P}S)_i + \bar{u}_i^- \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.40)$$

donde \hat{u}_{eq} es el estimado de u_{eq} y \hat{P} es el estimado de P . Con esta propiedad de control, nosotros debemos escoger u_i^+ y u_i^- según:

$$\bar{u}_i^+ + \epsilon \leq (\hat{u}_{eq} - \hat{P}S)_i \leq \bar{u}_i^- - \epsilon \quad i = 1, 2, \dots, n$$

que satisface (3.39):

Si escogemos K_i de modo que:

$$K_i \geq |(\hat{u}_{eq} - \hat{P}S)_i| + \epsilon$$

entonces con $\bar{u}_i^- = K_i$ y $\bar{u}_i^+ = -K_i$ las desigualdades anteriores están satisfechas y además se obtiene:

$$u_{oi} = \frac{1}{2}(u_i^+ + u_i^-) = \hat{u}_{eq} - \hat{P}S)_i \quad (3.41)$$

y:

$$U = \text{diag}[K_i]$$

de esta forma, se busca u_i^+ y u_i^- . En síntesis, el control consiste en una estimación continua de $u_{eq} - PS$ y un término discontinuo que tienda a poner a cero la estimación de $u_{eq} - PS$.

Si consideramos el diseño del controlador para el SRM de 2DOF cuyo modelo es:

$$M_{ij}(q_i)\ddot{q}_i + P_{ij}(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + Q_i(q_i) = u_i \quad (3.42)$$

Con (2.21) y (2.22) formamos las matrices M , P , y Q donde:

$$M(q) = \begin{bmatrix} R_{T1}(J_{eq1} + a_1 + a_2 \cos^2(q_2)) & 0 \\ 0 & R_{T2}(J_{eq2} + a_2) \end{bmatrix}$$

$$P(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} R_{T1}B_{eq1} + N_{T1} \pm C_c n_1 R_{T1} & -R_{T1}a_2 \text{sen}(2q_2)\dot{q}_1 \\ R_{T2}a_2 \text{sen}(q_2)\cos(q_2)\dot{q}_1 & R_{T2}B_{eq2} + N_{T2} \pm C_c n_2 R_{T2} \end{bmatrix}$$

$$Q(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ R_{T2}a_3 \cos(q_2) \end{bmatrix}$$

Una apreciación bastante común es que el término gravitatorio dado por la matriz Q puede ser calculada en tiempo real. Por consiguiente, bajo este criterio, se escoge nuestra estimación de $u_{eq} - PS$, si se reemplaza las ecuaciones (3.24) y (3.29)

$$u_{eq} - PS = -MC_i \dot{\tilde{x}} + P\dot{x} + Q + M\ddot{x}_d - P\dot{\tilde{x}} - PC_i \tilde{x}$$

al término $P\dot{x}$ de la expresión, podemos expresar como $P\tilde{x} + P\dot{x}_d$, luego:

$$u_{eq} - PS = -MC_t\tilde{x} + P\dot{x}_d + Q + M\ddot{x}_d - PC_t\tilde{x}$$

en el estado estacionario el error de convergencia es cero, entonces se considera a $\dot{\tilde{x}}$ y \tilde{x} iguales a cero. Para una referencia constante, la estimación de $u_{eq} - PS$ será igual a la matriz de gravedad Q .

Se selecciona K_i para satisfacer:

$$K_i \geq |(\hat{u}_{eq} - \hat{PS})_i| + \epsilon = |(-MC_t\tilde{x}_d + PxM\ddot{x}_d - \hat{PS})| + \epsilon$$

las entradas de una matriz M pueden limitarse de la siguiente forma:

$$|M_{11}| \leq R_{T1}J_{eq1} + R_{T1}(a_1 + a_2) \equiv \bar{M}_{11}$$

$$M_{12} = M_{21} = 0$$

$$|M_{22}| \leq R_{T2}(J_{eq2} + a_2) \equiv \bar{M}_{22}$$

similarmente, asumiendo \dot{q} de límite uniforme, podemos limitar las entradas de P :

$$|P_{11}| \leq R_{T1}B_{eq1} + N_{T1} \pm C_c n_1 R_{T1} \equiv \bar{P}_{11}$$

$$|P_{12}| \leq R_{T1}a_2|\dot{q}_2 \text{sen}(2q_2)| - P_{12}$$

$$|P_{21}| < R_{T2}a_2|\dot{q}_1 \text{sen}(q_2)\text{cos}(q_2)| \equiv P_{21}$$

$$|P_{22}| \leq R_{T2}B_{eq2} + N_{T2} \pm C_c n_2 R_{T2} \equiv \bar{P}_{22}$$

así una opción razonable para K_i es:

$$K_i = \sum_{j=1} (M_{ij}|\ddot{x}_{d_j} - c_j\dot{\tilde{x}}_j| + P_{ij}|\dot{x}_j - S_j|) + \epsilon_i \quad (3.43)$$

donde:

$$K_1 = \bar{M}_{11}|\ddot{x}_{d_1} - c_1\dot{\tilde{x}}_1| + \bar{P}_{11}|\dot{x}_1 - S_1| + \bar{M}_{12}|\ddot{x}_{d_2} - c_2\dot{\tilde{x}}_2| + \bar{P}_{12}|\dot{x}_2 - S_2| + \epsilon_1 \quad (3.44)$$

y

$$K_2 = \bar{M}_{21}|\ddot{x}_{d_1} - c_1\dot{\tilde{x}}_1| + \bar{P}_{21}|\dot{x}_1 - S_1| + \bar{M}_{22}|\ddot{x}_{d_2} - c_2\dot{\tilde{x}}_2| + \bar{P}_{22}|\dot{x}_2 - S_2| + \epsilon_2 \quad (3.45)$$

La ley de control por modo deslizante es dado por:

$$u = Q(q) - K \text{sgn}(S) \quad (3.46)$$

donde, $sgn(\cdot)$ es la función signo que se define:

$$sgn(S) = \begin{cases} +1 & \text{si } S > 0 \\ -1 & \text{si } S < 0 \end{cases}$$

La ecuación general de control con la función signo es:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_1 sgn(S_1) \\ K_2 sgn(S_2) \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

3.6 Ley de Control con Saturación [6], [7], [12]

La ley de control puede ser modificada para evitar el fenómeno del "chattering" que se muestra en la figura 3.3. La modificación se hace reemplazando la función $sgn(S)$ descrita en (3.46) por la función de saturación $sat(S/\Phi)$, donde el término Φ es el ancho de la banda de la zona de saturación dentro de la superficie de deslizamiento, dentro del cual la relación de la ley de control u y la superficie de deslizamiento S es lineal. La ley de control en donde se incluye la saturación es dada por:

$$u = Q(q) - K sat(S/\Phi) \quad (3.48)$$

donde $sat(\cdot)$ es la función saturación que se define:

$$sat(S/\Phi) = \begin{cases} S/\Phi & \text{si } |S/\Phi| \leq 1 \\ sgn(S/\Phi) & \text{otro caso} \end{cases}$$

La ecuación general de control con saturación es:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_1 sat(S_1/\Phi) \\ K_2 sat(S_2/\Phi) \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

La modificación apropiada de la ley de control por modo deslizante puede moderar la actividad de control, por ejemplo el empleo de la función saturación en una región de superficie de deslizamiento en lugar de la clásica ley de control que incluye el término $sgn(S)$ de la ecuación (3.45). La función $sat(S/\Phi)$ ha sido requerida en la implementación del proceso desarrollado en el laboratorio.

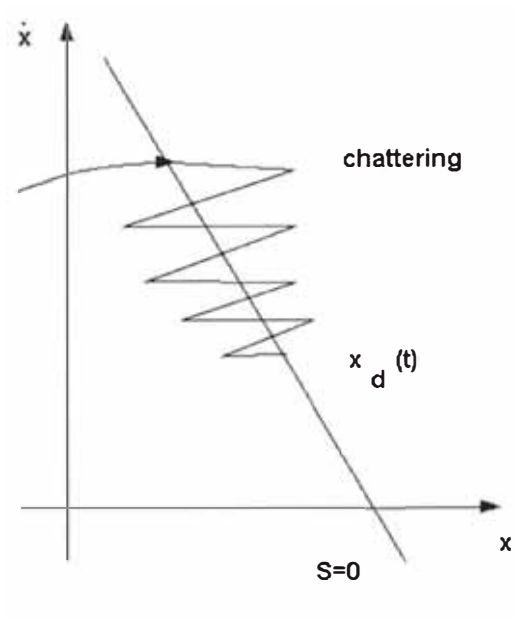


Figura 3.3: Imperfección de la ley de control por modo deslizante

Capítulo 4

Implementación en Tiempo Real

La implementación del sistema SRM de 2DOF se muestra en la figura 4.1, y comprende la implementación del hardware y del software.

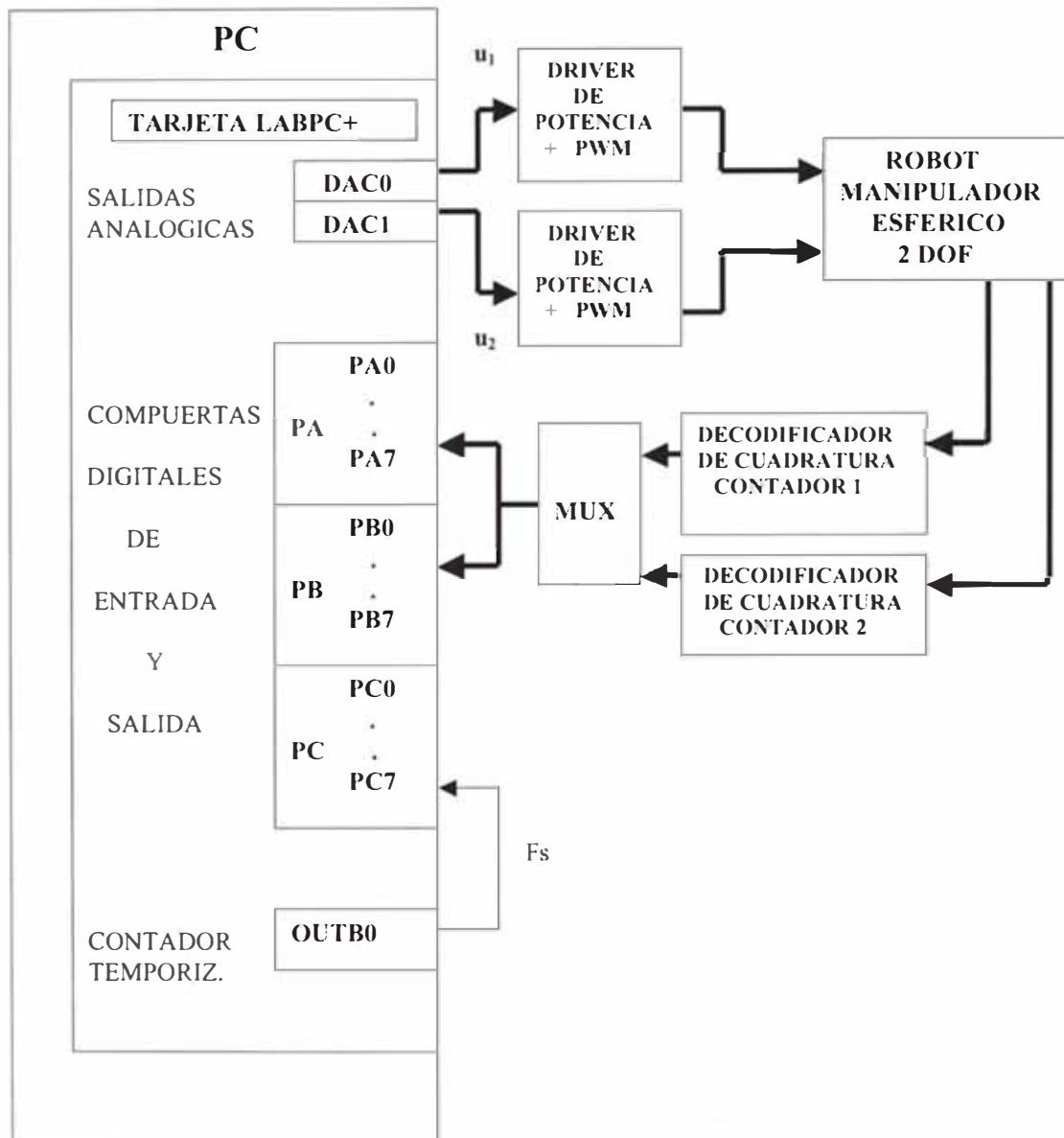


Figura 4.1: Esquema de Implementación del sistema.

4.1 Implementación del Hardware

La implementación de los componentes físicos usados en el sistema de control son: los actuadores que está formado por dos servomotores DC (modelos iguales) con encoder óptico incremental de 1850 cuentas por vuelta con salida a dos canales en cuadratura, luego por tarjetas similares, como son el generador de PWM que modula las señales de control para que luego sean desfasadas en 90° y el amplificador de potencia que es el encargado de amplificar las señales que provienen del generador de PWM y cuya salida genera el control de inversión del giro del servomotor. La tarjeta de adquisición de datos Lab-PC+ es la encargada de manejar los datos de entrada/salida del sistema. El sensado tiene el decodificador de cuadratura que se encarga de leer los datos del encoder óptico para emitir salidas UP/DOWN al circuito contador, que a su vez tiene una salida de 16 bits que son entradas digitales a la tarjeta Lab-PC+ y una computadora personal con microprocesador Pentium de 100 MHz.

El SRM de 2DOF real se muestra en la figura 4.2. La implementación del sistema real se muestra en la figura 4.3. Este sistema ha sido implementado en el laboratorio de proyectos de la Sección de Postgrado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica de la Universidad Nacional de Ingeniería.

4.1.1 El Actuador

El actuador está conformado por dos servomotores DC de campo magnético permanente y escobillas conmutadas para el control del SMR de 2DOF, dos generadores de PWM y dos amplificadores de potencia como se muestra en la figura 4.1. Como el servomotor no responde inmediatamente a una tensión de entrada, le toma un tiempo para alcanzar la máxima velocidad, es necesario usar un sistema que permita variar la velocidad entre un valor mínimo y un valor máximo, de modo que permita dar un cambio seguro en el sentido de rotación del servomotor DC. Este sistema está constituido por un generador PWM y el circuito amplificador de potencia. El generador PWM que se muestra en la figura 4.4, tiene un integrado LM3524 que genera una modulación por ancho de pulso a una frecuencia de 15.4KHz (puede variar), esta señal es amplificada por un amplificador de potencia que se muestra en la figura 4.5, que alimenta al servomotor, al que entrega una tensión de alimentación al servomotor de $\pm 24V$ voltios.

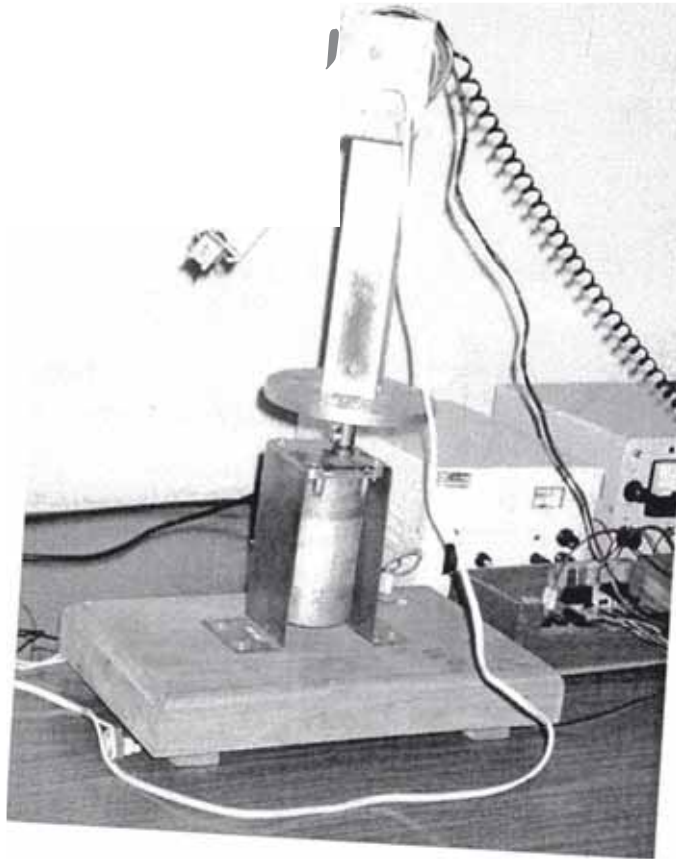


Figura 4.2: Planta RM de 2DOF real

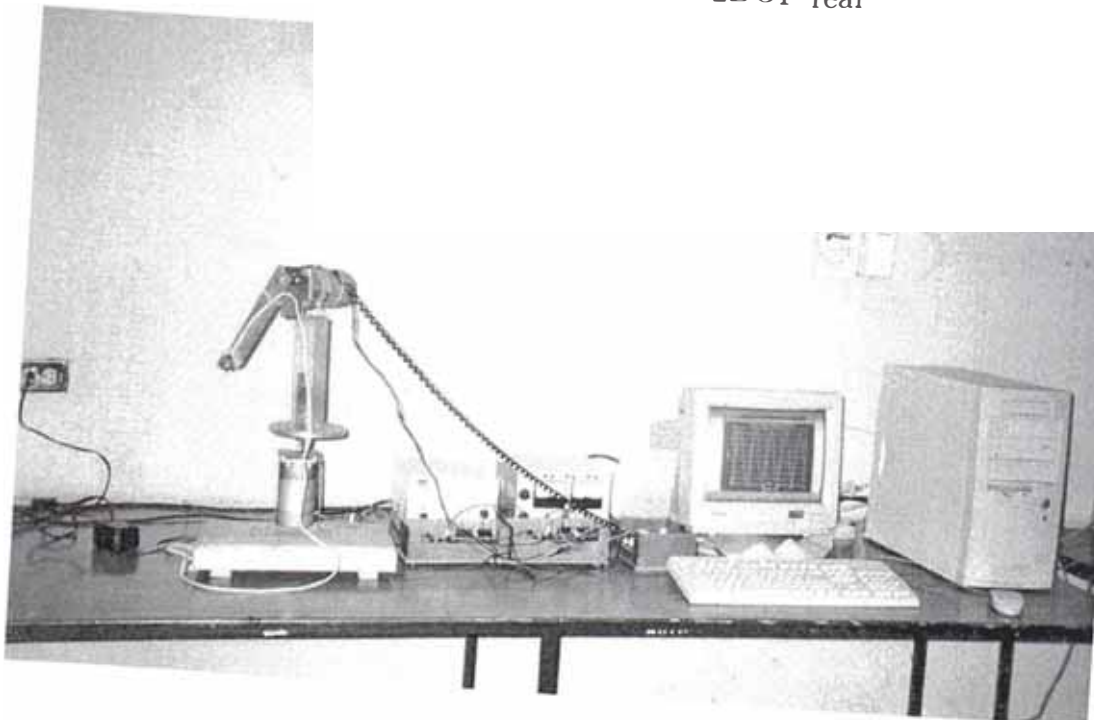


Figura 4.3: Implementación del sistema real

Los circuitos osciladores 74123 realizan la función de sincronización para la generación del tren de pulsos en cuadratura, cuyas salidas son las señales PWM que serán entradas al circuito amplificador. El circuito amplificador de potencia de la figura 4.5. muestra al sistema de disparo conformado por el transistor amplificador PN2222 y el transistor pre amplificador PN2907 que están acoplados por emisor común y que trabajan en la zona de corte y saturación. En la figura 4.5 se muestra también dos pares de conmutadores $A_{1,4}$ y $A_{2,3}$ conformado por los MOSFETS IRFZ34 cuyo esquema simplificado se muestra en la figura 4.6., el funcionamiento de este amplificador se basa en la lógica de control para activar al circuito de disparo, es decir, cuando el sistema de disparo cierra al conmutador $A_{1,4}$ y se abre $A_{2,3}$, el sentido de la corriente es la línea con puntos induciendo de esta forma una tensión $+V_{cc}$ en el servomotor. Luego si el sistema de disparo abre al conmutador $A_{1,4}$ y cierra $A_{2,3}$, el sentido de la corriente es la línea continua, induciendo así una tensión $-V_{cc}$ en el servomotor. Por lo tanto el servomotor ve en sus bornes una onda de voltaje cuadrada, variando entre $\pm V_{cc}$ y la corriente que puede absorber dependerá de los conmutadores. En uso del doble inversor es para el retardo (desfasaje) de los anchos de pulso de los PWMs.

En resumen, de lo anterior, podemos decir que el objetivo del sistema de disparo es realizar la conmutación de cada par $A_{1,4}$ y $A_{2,3}$, de tal forma que se eviten cortocircuitos durante el tiempo de conmutación de $A_{1,4}$ y $A_{2,3}$. El circuito amplificador de potencia de la figura 4.5, tiene un circuito basado en compuertas lógicas de tecnología TTL (Transistor Transistor Logic) que conforman los circuitos integrados 7404, 7486, 7408 y dos resistencias de 500Ω . Este circuito gobierna los disparos de los MOSFET's de manera que las señales PW I que ingresan al circuito amplificador de potencia que tengan igual amplitud estarán siempre en nivel bajo (OFF), como se muestra en la tabla 4.1.

Tabla 4.1: Conmutación de los MOSFET's.

PWM_1	PWM_2	A_1	A_2	A_3	A_4
0	0	OFF	OFF	OFF	OFF
0	1	ON	OFF	OFF	ON
1	0	OFF	ON	ON	OFF
1	1	OFF	OFF	OFF	OFF

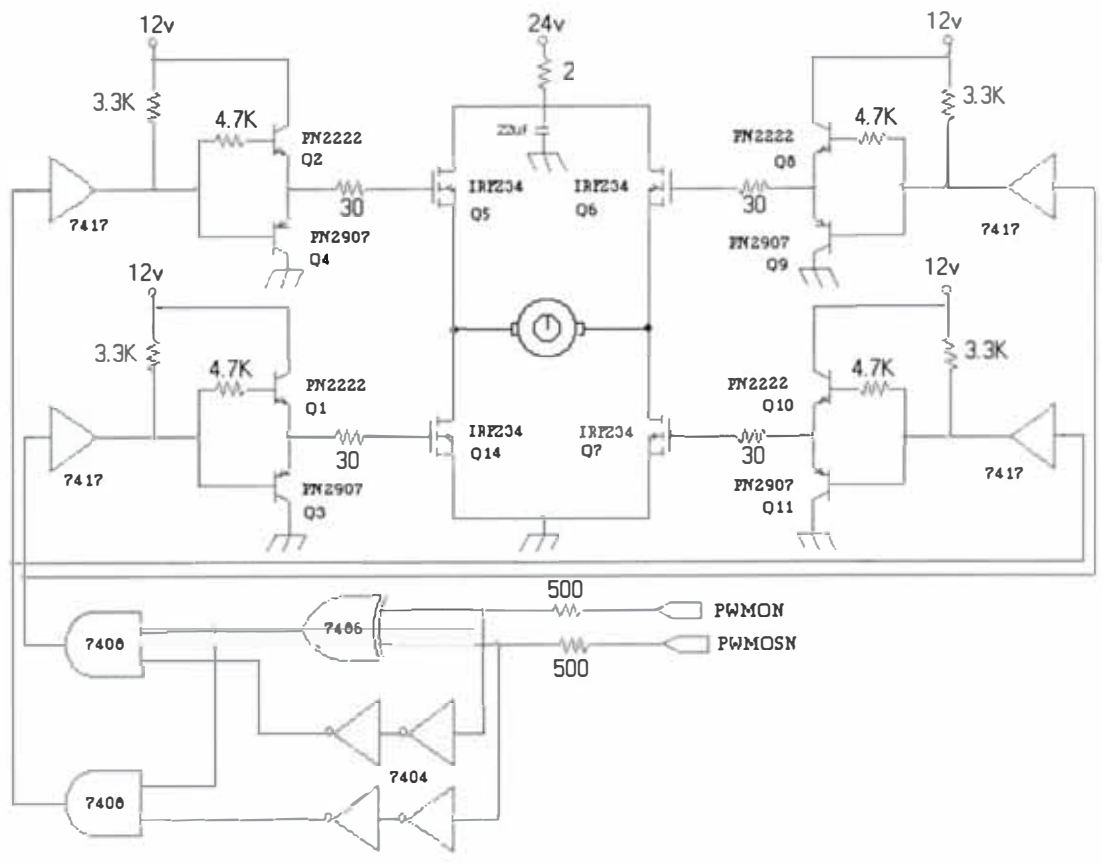


Figura 4.5: Circuito amplificador de potencia de PWM.

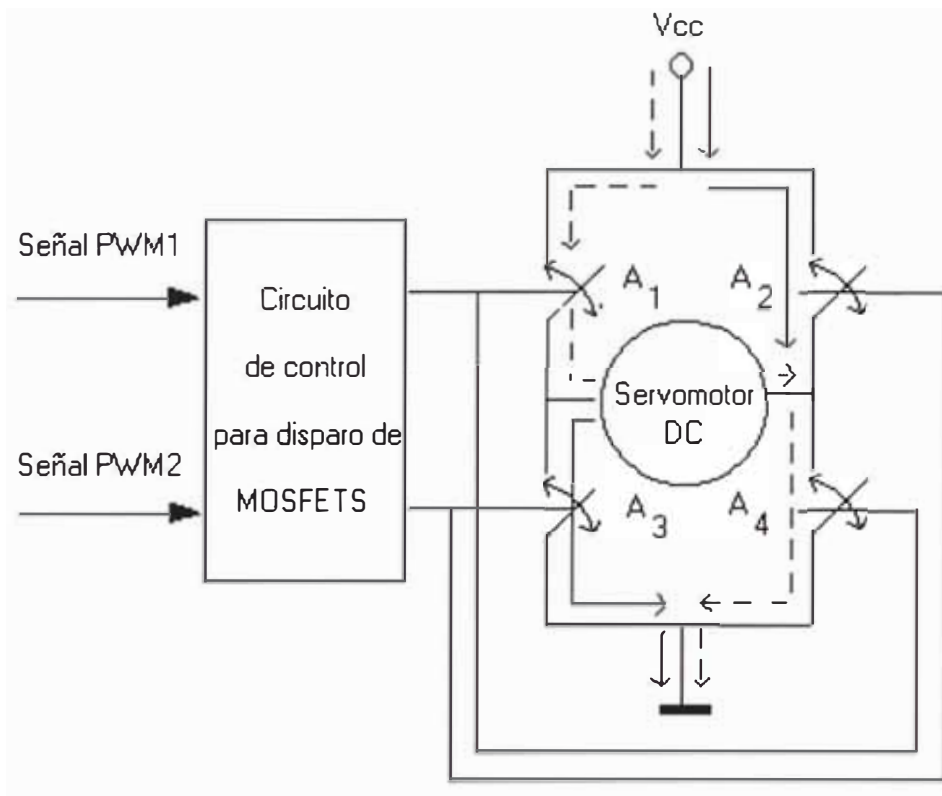


Figura 4.6: Esquema del circuito de disparo y conmutación.

4.1.2 El Sensor

El sensor de posición está conformado por un codificador óptico rotatorio (interno al servomotor), un decodificador de cuadratura y un contador UP/DOWN. El codificador óptico rotatorio de la figura 4.7, está conformado por:

- Una fuente de luz que puede ser un LED infrarrojo o láser. Es el que genera un haz de luz perpendicular al disco.
- Un disco ranurado acoplado al eje del servomotor y ubicado entre la fuente de luz y el detector.
- Un detector de luz, usualmente es un transistor óptico. Es el que genera un pulso de corriente que será la entrada a un contador de pulsos.
- Un conformador de pulsos que convierte la señal sinusoidal proveniente de la salida del detector en señal de onda cuadrada.

El codificador usado en esta implementación, incluye dos pistas de marcas o ranuras en cuadratura (canales A y B), cada una asociada a una fuente de luz y un fotodetector independientes. Los canales A y B producen dos ondas

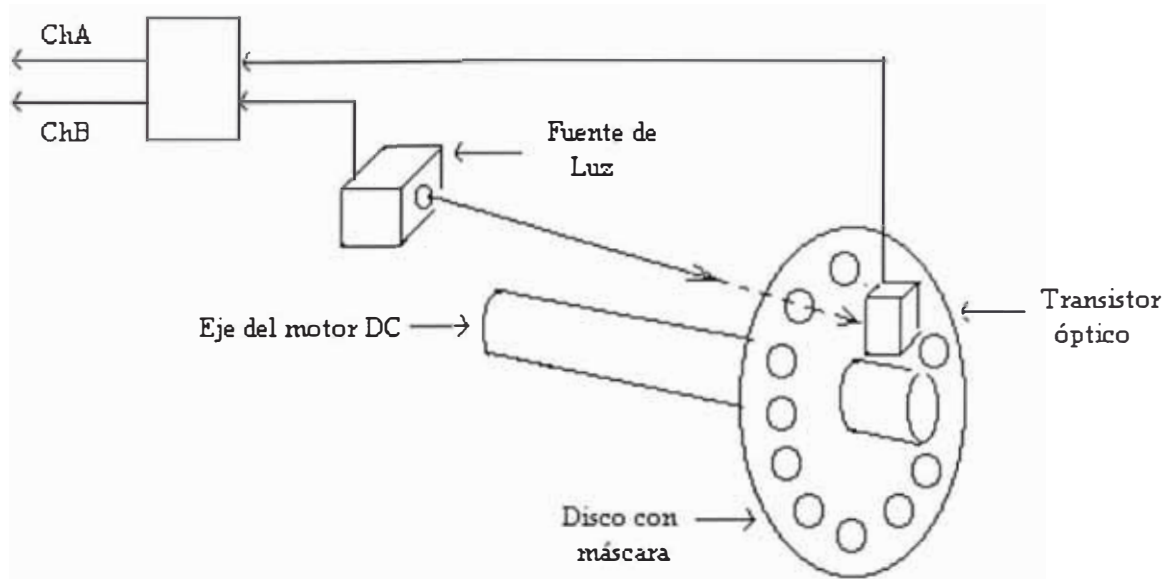


Figura 4.7: Estructura del codificador óptico rotatorio.

cuadradas desfasadas en $\pm 90^\circ$ respecto al primero, de acuerdo al sentido de giro del disco. Este desfasaje se utiliza para determinar la dirección del movimiento. Por ejemplo, si el canal B adelanta al canal A, el eje está girando en el sentido antihorario y viceversa. El codificador usado tiene una resolución de 100 ppr (pulsos por revolución). La figura 4.8, muestra el sensor de posición conformado por el decodificador de cuadratura LS7083, que activará la cuenta ascendente o descendente del contador UP/DOWN de 16 bits, dependiendo del sentido de giro del servomotor, captado por el desfasaje entre los trenes de pulsos de los canales A y B. El contador UP/DOWN lo conforman cuatro contadores 74HC193 de 4 bits conectados en cascada; dos de ellos conforman el bus de datos A de 8 bits que se dirige hacia la tarjeta Lab-PC+; mientras que los dos contadores restantes conforman el bus B, de modo tal que para cada medición de posición tendremos una salida de 16 bits que se almacena en un registro.

4.1.3 La Interfaz Lab-PC+

La tarjeta de adquisición de datos Lab-PC+ que se muestra en la figura 4.1, es la interfaz empleada para el envío de la señal de control y para la adquisición de datos con el amplificador y los sensores se realizan en la forma siguiente:

1. Dos salidas análogas (DAC0 y DAC1), estas señales de control envían por

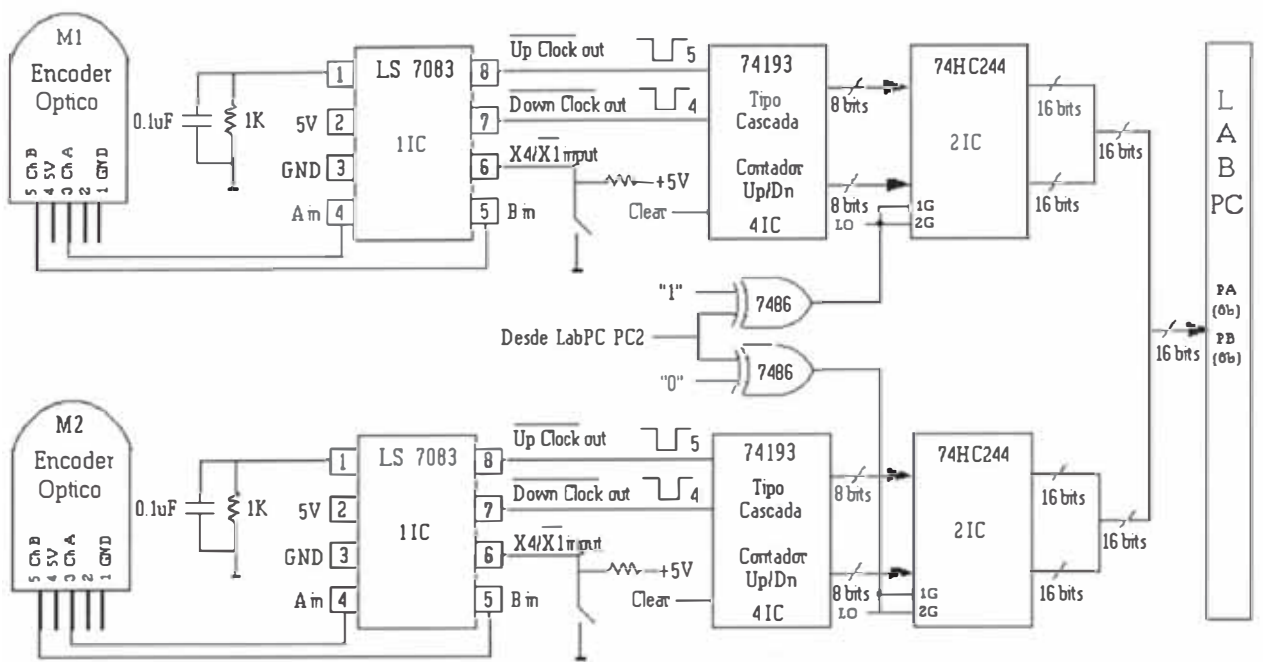


Figura 4.8: Sensado de posición

los terminales del LM3524 (generador PWM) con una resolución de 12 bits para generar la señal analógica.

2. Dos puertos digitales de entrada (PA y PB) de 8 bits cada uno. Estos puertos reciben los datos provenientes del contador UP/DOWN.
3. El terminal OUTB0 que se utiliza como salida de una señal de reloj para el funcionamiento del sistema de control.
4. El terminal PC0 (bit 0 del puerto C) que se utiliza como entrada de la señal de reloj proveniente del OUTB0.

La señal de reloj OUTB0 se genera a partir de una base de tiempos de 2 MHz que activa la salida del contador/temporizador 8253. Los puertos de entrada/salida proviene del PPI (Interface Paralela Programable) 8255.

4.2 Software de Control

Se ha usado una PC con procesador Pentium de 100MHz. El software se desarrollo en lenguaje C++, el cual consiste en un programa de control no lineal multivariable por modo deslizante. La simulaciones han sido realizadas en MATLAB y luego se han traducido al lenguaje C++.

4.2.1 Diagrama flujo

El diagrama de flujo se muestra en la figura 4.9. y describe los siguientes pasos:

1. Inicialización de la tarjeta de adquisición de datos Lab-PC+ [4] y de las variables utilizadas en el programa.
2. Se detecta el flanco de subida del reloj (clock) y se lee el primer dato de la posición inicial, inicializa el algoritmo.
3. Se comprueba que la variable k sea menor que el número de puntos n . La variable n junto con la frecuencia de muestreo determinan el tiempo de duración del experimento.
4. Se detecta un flanco de subida del reloj, se inicia un período para la adquisición de datos y control. Se lee la posición y y se aplica restricciones, luego se calcula la velocidad.
5. Se calcula la señal de control u , se compensa las tensiones de las fricciones estáticas y de Coulomb (V_F), se aplican restricciones en la señal de control, luego se envía la señal de control $u = u + V_F + offset$ por el DAC0 y DAC1 a los generadores de PWM.
6. Se actualizan las variables y se repite el lazo de control hasta que k alcance a N_m (Número de muestras).

4.2.2 Programa Principal XX.CPP

El programa XX.CPP realiza las siguientes declaraciones y funciones:

1. Declaración de los archivos de cabecera : librería de funciones, etc. Así mismo se declara el archivo "func_pen.CPP", en el cual se emplea la librería de funciones del NIDAQ (National Instruments Data Acquisition) para configurar el hardware empleado, utilizando las siguientes funciones: ConfigurarHardware, EnviarVoltaje1, EnviarVoltaje2, LeerPosición, NivelClock, ResetContadores. De la misma manera se declara el archivo "func_pen.H", el cual nos permite facilitar el manejo de la tarjeta de adquisición de datos Lab-PC+, utilizando para ello las mismas funciones anteriores.
2. Declaración de las constantes globales.
3. Declaración de los parámetros de la planta.

4. Declaración de las funciones propias del programa:
Mide_Salidas, *Aplica_Control1* y *Aplica_Control2*.
6. Declaración de las variables globales.
7. Definición de la función principal main.

4.2.3 Funciones Propias del Programa XX.CPP

Las funciones propias del sistema de control son:

1. *Mide_Salidas*: Especifica las señales de referencia consideradas. Luego mide la posición actual del servomotor DC1 (base) y la posición actual del servomotor DC2 (brazo). Posteriormente calcula las velocidades en función de las posiciones de cada servomotor.
2. *Aplica_Control1* y *Aplica_Control2*: Compensa las fricciones estática y de Coulomb para cada servomotor (V_{F1} y V_{F2}) y aplica las restricciones a las señales de entrada u_1 y u_2 . Luego envía los voltajes por medio de las funciones: `EnviarVoltaje1($u_1+V_{F1}+ofst1$)` y `EnviarVoltaje2($u_2+V_{F2}+ofst2$)`.
3. Crea archivo de datos XX.DAT, para hacer tablas y gráficos.

4.2.4 La Función Principal Main

En la función principal tenemos:

1. Declaración de las variables locales.
2. Asegurar la memoria que nos permita almacenar los datos para las variables a usarse para:
la primera entrada: p_1 (referencia), y_1 (posición), w_1 (velocidad angular), u_1 (señal de control), y para
la segunda entrada: p_2 (referencia), y_2 (posición), w_2 (velocidad angular), u_2 (señal de control).
3. Ejecutar el lazo de control del programa desde $k = 0$ hasta $k = N_m$ (N_m : máximo número de muestras). Así mismo se define la función *Mide_Salidas* en cada flanco de subida del reloj.
4. Luego se genera las señales de control u_1 y u_2 y se envía a las salidas del DAC0 y DAC1 las tensiones ordenadas por la función *Aplica_Control1* y *Aplica_Control2*.

5. Posteriormente se incrementan k y T y se visualizan en la pantalla los valores instantáneos de t , p_1 , y_1 , w_1 , u_1 , p_2 , y_2 , w_2 , u_2 , y se actualiza el pulso del reloj siempre que $k \leq N_m$.
6. Al finalizar el tiempo de ejecución, envíar los voltajes de `offset1` y `offset2` necesarios para que los servomotores se encuentren en posición de reposo.

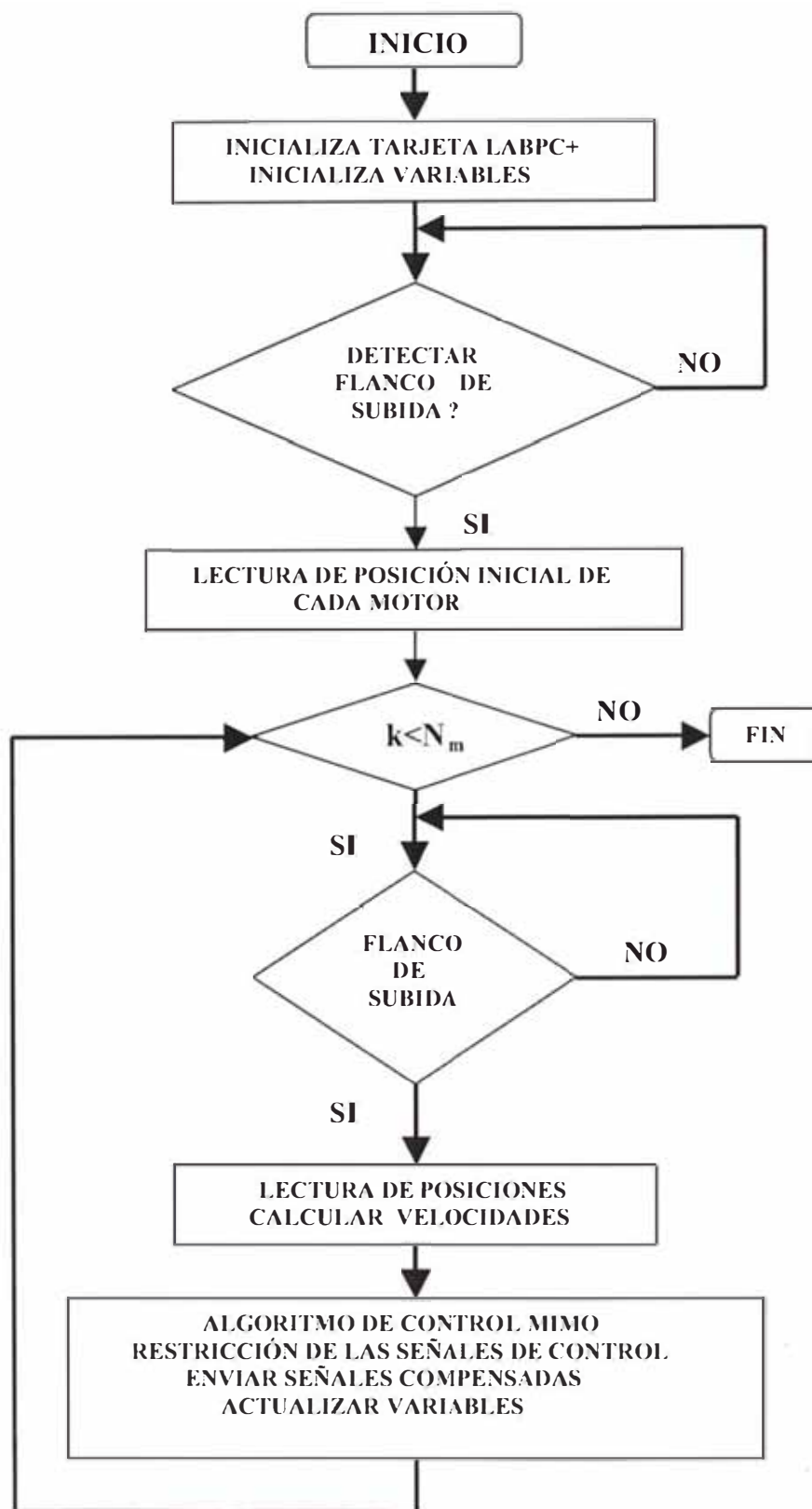


Figura 4.9: Diagrama de flujo del algoritmo de control.

Capítulo 5

Simulación del Sistema

En esta sección se muestran las simulaciones del sistema de control no lineal multivariable de dos entradas y dos salidas, por modo deslizante para el SRM de 2DOF.

Para obtener las simulaciones respectivas se ha tenido en cuenta:

1. El modelo en el espacio-estado, visto en la subsección 2.4.5.
2. El diseño del controlador no lineal multivariable por modo deslizante visto en las secciones 3.4, 3.5 y 3.6.

Basado en los conceptos anteriores se han ejecutado las simulaciones utilizando el programa MATLAB [14], [16]. El desarrollo de las simulaciones se ha dividido para dos casos: para el primer caso se presenta las simulaciones [17] considerando la función signo $\text{sgn}(S)$ para el control de trayectoria de constante. Para el segundo caso se presenta la simulaciones considerando la función saturación [17] $\text{sat}(S/\Phi)$ para control de trayectoria constante y para control de trayectoria senoidal.

5.1 Caso 1: Simulación con Función Signo

Los resultados de las simulaciones de esta sección, son expuestas de acuerdo a la ecuación (3.47). Con fines educacionales incluimos la función $\text{sgn}(S)$ para realizar tales simulaciones, estos resultados serán comparados con las simulaciones expuestas en la ecuación (3.49) que incluye en su ley de control la función saturación $\text{sat}(S/\Phi)$. Tal comparación se realiza con el fin de observar el fenómeno "chattering" que se manifiesta en una oscilación sostenida de la señal de control, la cuál es dañina para el funcionamiento del sistema. La simulación de la figura 5.2 (señales de control para los servomotores DC1 y DC2) muestra el llamado fenómeno "chattering" y en la figura 5.6 (señales de control para los servomotores DC1 y DC2) vemos que el efecto oscilante queda atenuado. El programa de

simulación se ha desarrollado en código MATLAB [16] y se muestra en el apéndice B.

5.1.1 Respuesta a una Trayectoria Constante

Para esta simulación se ha asumido una trayectoria constante con los siguientes datos:

- Condiciones iniciales:
 - $x_1 = 0$, (base)
 - $x_2 = 0$, (brazo)
- Trayectorias deseadas:
 - $x_{d_1} = \pi/2$, posición angular de la base
 - $x_{d_2} = 2\pi/3$, posición angular del brazo
- Parámetros de sintonización para alcanzar la superficie deslizante:
 - $c_1 = 3$ y $e_1 = 0.01$, (base)
 - $c_2 = 3$ y $e_2 = 0.06$, (brazo)
- Tiempo de muestreo:
 - $T = 100\text{seg}$

5.1.1.1 Diseño del Controlador No Lineal Multivariable

Para diseñar el controlador no lineal MIMO, la señal de control debe ser de la forma [11], [12], [17]:

$$u_i = M_{ij}(q_i)\ddot{q}_i + P_{ij}(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + Q_i(q_i) \quad (5.1)$$

El controlador con la función signo debe ser de la forma:

$$u_i = u_{eq_i} - K_i \text{sgn}(s_i) \quad (5.2)$$

$$u_{eq_i} = Q_i \quad (5.3)$$

$$K_i = M_{M_{ij}}|\ddot{x}_{d_i} - c_i\dot{\tilde{x}}_i| + P_{P_{ij}}|\dot{x}_i - s_i| + \epsilon_i \quad (5.4)$$

$$\tilde{x}_i = x_i - x_{d_i} \quad (5.5)$$

$$s_i = (\dot{x}_i - \dot{x}_{d_i}) + c_i(x_i - x_{d_i}) \quad (5.6)$$

donde:

x_d : trayectorias deseadas para las entradas

\tilde{x}_i : error en las salidas

c_i y ϵ_i : parámetros de sintonía para las entradas

$M_{M_{ij}}$: matriz de las constantes que se forma de la matriz de inercia M_{ij} pero sin las variables de estado

$P_{P_{ij}}$: matriz que se forma de la matriz de Coriolis P_{ij} pero con valor absoluto a las variables de estado

s_i : superficie deslizante para las entradas

Con las ecuaciones (5.2), (5.3), (5.4), (5.5), (5.6) se forma el controlador no lineal MIMO para:

• Ley de control para la primera entrada:

$$u_1 = u_{eq1} - K_1 \text{sgn}(s_1)$$

$$u_{eq1} = Q_1 = 0$$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{d1}$$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_3$$

$$x_1 = y_1$$

$$\dot{x}_{d1} = \ddot{x}_{d1} = 0$$

$$\tilde{x}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_{d1} = x_3$$

$$s_1 = (\dot{x}_1 - \dot{x}_{d1}) + c_1(x_1 - x_{d1}) = x_3 + c_1(y_1 - x_{d1})$$

$$K_1 = M_{M11}|\ddot{x}_{d1} - c_1\dot{\tilde{x}}_1| + P_{P11}|\dot{x}_1 - s_1| + P_{P12}|\dot{x}_2 - s_2| + \epsilon_1$$

$$K_1 = M_{M11}|-c_1x_3| + P_{P11}|x_3 - s_1| + P_{P12}|x_4 - s_2| + \epsilon_1$$

• Ley de control para la segunda entrada:

$$u_2 = u_{eq2} - K_2 \text{sgn}(s_2)$$

$$u_{eq2} = Q_2 = d_2$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_{d2}$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_4$$

$$x_2 = y_2$$

$$\dot{x}_{d2} = \ddot{x}_{d2} = 0$$

$$\tilde{x}_2 = \dot{x}_2 - \dot{x}_{d2} = x_4$$

$$s_2 = (\dot{x}_2 - \dot{x}_{d2}) + c_2(x_2 - x_{d2}) = x_4 + c_2(y_2 - x_{d2})$$

$$K_2 = M_{M22}|\ddot{x}_{d2} - c_2\dot{\tilde{x}}_2| + P_{P21}|\dot{x}_1 - s_1| + P_{P22}|\dot{x}_2 - s_2| + \epsilon_2$$

$$K_2 = M_{M22}|-c_2x_4| + P_{P21}|x_3 - s_1| + P_{P22}|x_4 - s_2| + \epsilon_2$$

donde:

$$M_{M_{11}} = R_{T1}(J_{eq1} + H_{11})$$

$$M_{M_{12}} = M_{M_{21}} = 0$$

$$M_{M_{22}} = R_{T2}(J_{eq2} + H_{22})$$

$$P_{P_{11}} = R_{T1}B_{eq1} + N_{T1} \pm C_c n_1 R_{T1}$$

$$P_{P_{12}} = -R_{T1}a_2|\dot{q}_1 \text{sen}(2q_2)| = R_{T1}a_2|x_3 \text{sen}(2x_2)|$$

$$P_{P_{21}} = R_{T2}a_2|\dot{q}_1 \text{sen}(q_2)\text{cos}(q_2)| = R_{T2}a_2|x_3 \text{sen}(x_2)\text{cos}(x_2)|$$

$$P_{P_{22}} = R_{T2}B_{eq2} + N_{T2} \pm C_c n_2 R_{T2}$$

$$J_{eq1} = n_1^2 J_{m1} + J_{g1}$$

$$B_{eq1} = n_1^2 B_{m1} + B_{g1}$$

$$J_{eq2} = n_2^2 J_{m2} + J_{g2}$$

$$B_{eq2} = n_2^2 B_{m2} + B_{g2}$$

$$R_{T1} = \frac{R_{a1}}{n_1 K_{m1} K_{A1}}$$

$$R_{T2} = \frac{R_{a2}}{n_2 K_{m2} K_{A2}}$$

$$N_{T1} = \frac{n_1 K_{b1}}{K_{A1}}$$

$$N_{T2} = \frac{n_2 K_{b2}}{K_{A2}}$$

$$H_{11} = a_1 + a_2 \text{cos}^2(x_2)$$

$$H_{22} = a_2$$

$$d_2 = a_3 \text{cos}(x_2)$$

a_1 , a_2 , y a_3 : parámetros que dependen de la masa y la inercia del proceso

$$a_1 = 2I_1$$

$$a_2 = I_2 + 2m_2 L_2 L_{c2} - m_2 L_2^2$$

$$a_3 = m_2 g L_{c2}$$

C_c : constante de fricción de Coulomb

H_{11} , H_{22} : componentes de la matriz de inercia

d_2 : componente del vector fuerza de gravedad

I_1 : inercia de la base (prisma y disco)

I_2 : inercia del brazo

5.1.1.2 Programación del Algoritmo de Control No Lineal Multivariable

Para la programación del algoritmo de control se ha usado MATLAB [11], [12], [16], [17], teniendo como dato las condiciones iniciales indicadas anteriormente y las ecuaciones para la ley de control de la primera y segunda entrada. Dicho programa se muestra en el apéndice B.

5.1.1.3 Simulaciones

Las simulaciones respectivas son mostradas en las figuras 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4.

En la figura 5.1 se muestra las salidas controladas para la posición angular de la base para una referencia de 90° y posición angular del brazo para una referencia de 120° , el tiempo de establecimiento para la base es de 2.5 seg. y para el brazo el tiempo de establecimiento es de 2.0 seg.

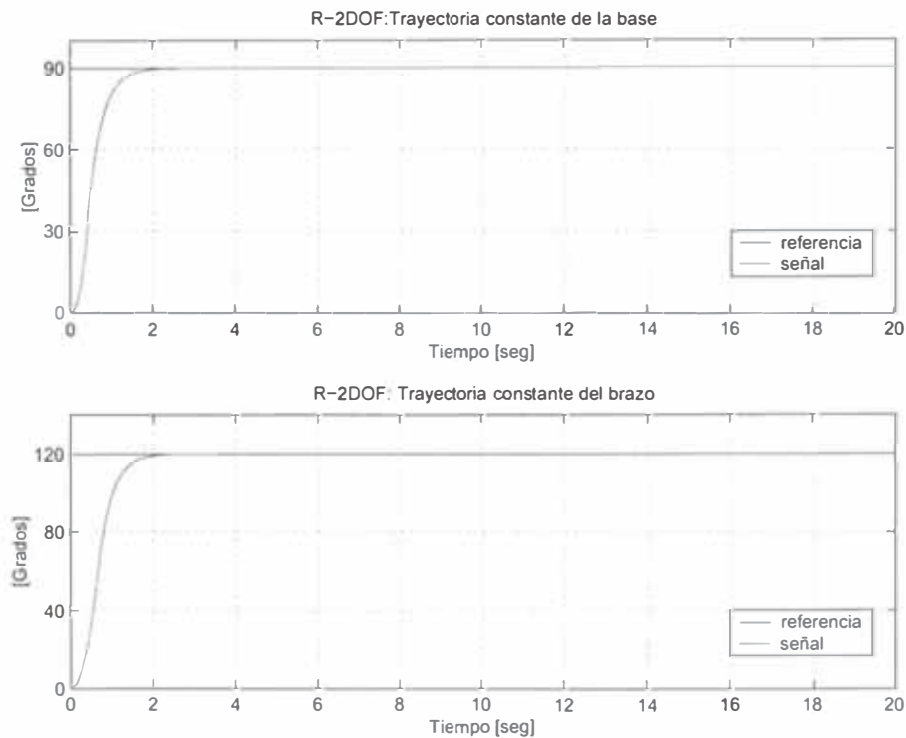


Figura 5.1: Trayectoria constante: salidas controladas para la base y el brazo.

En la figura 5.2 se muestran las señales de control para el servomotor de la base y para el servomotor del brazo. La señal del servomotor de la base varía de +5 voltios a -5 voltios por 0.5 seg., posteriormente dicha señal varía en forma

oscilatoria y abrupta hasta los 2.2 seg. y a partir de ahí la señal va a cero que es donde el proceso ha sido controlado. La señal del servomotor del brazo varía sin presentar oscilaciones de +5 voltios a -5 voltios por 1 seg., posteriormente dicha señal varía en forma oscilatoria y abrupta hasta los 4 seg. y a partir de ahí el proceso ha sido controlado pero la señal varía de +0.15 voltios a -0.15 voltios continuando en forma oscilatoria y permanente debido a que el servomotor ejerce fuerza de control.

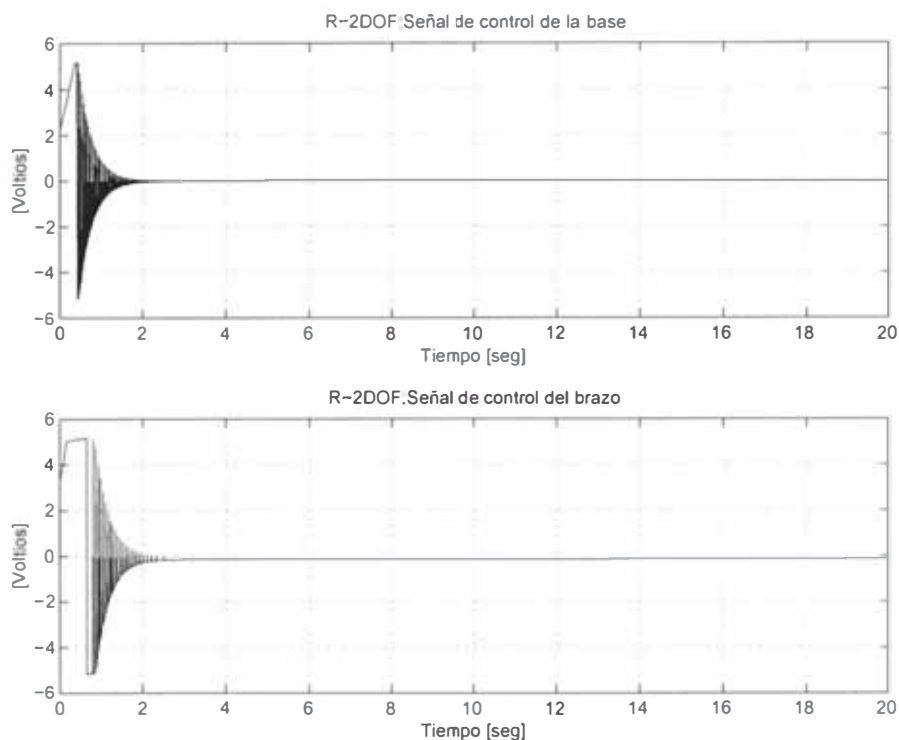


Figura 5.2: Trayectoria constante: señales de control para los servomotores de la base y el brazo.

En la figura 5.3 se muestra la respuesta del sistema para la velocidad angular del servomotor de la base y del servomotor del brazo. Para el servomotor de la base se aprecia que en el arranque se incrementa presentando una oscilación mínima para luego aproximarse a cero a los 2.1 seg. Para el servomotor del brazo también en el arranque se incrementa presentando una oscilación muy mínima para luego aproximarse a cero a los 3.5 seg. Esto significa que cuando dichas velocidades se aproximan a cero, el proceso ha sido controlado.

En la figura 5.4 se muestra las superficies deslizantes del servomotor de la base y del servomotor del brazo. Se puede apreciar que la trayectoria alcanza la superficie deslizante en 1.5 seg. y 3 seg. respectivamente. Esta gráfica representa

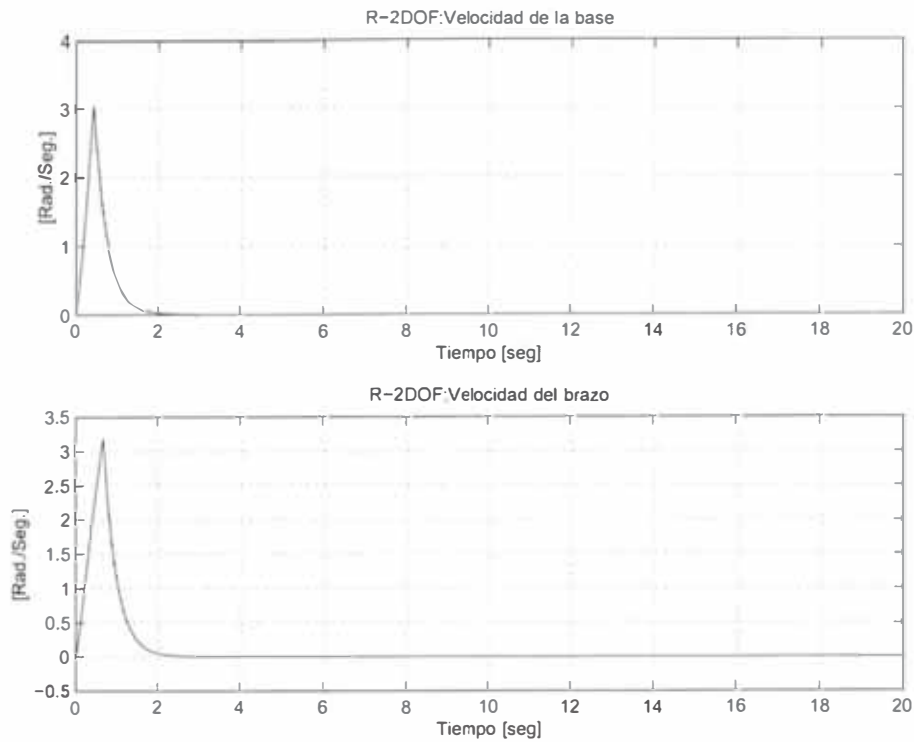


Figura 5.3: Trayectoria constante: velocidad para los servomotores de la base y el brazo.

el tiempo en que demora el sistema de control en alcanzar la superficie deslizante.

5.1.2 Respuesta a una Trayectoria Senoidal

Para esta simulación se ha asumido una trayectoria senoidal con los siguientes datos:

- Condiciones iniciales:
 - $x_1 = 0$, (base)
 - $x_2 = 0$, (brazo)
- Trayectorias deseadas:
 - $x_{d1} = \pi/2 \sin(2\pi kT/21)$, trayectoria senoidal de la base
 - $x_{d2} = 2\pi/3 \sin(2\pi kT/21)$, trayectoria senoidal del brazo
- Parámetros de sintonización para alcanzar la superficie deslizante:
 - $c_1 = 3.0$ y $e_1 = 0.01$, (base)
 - $c_2 = 3.0$ y $e_2 = 0.06$, (brazo)
- Tiempo de muestreo:
 - $T = 100\text{seg}$

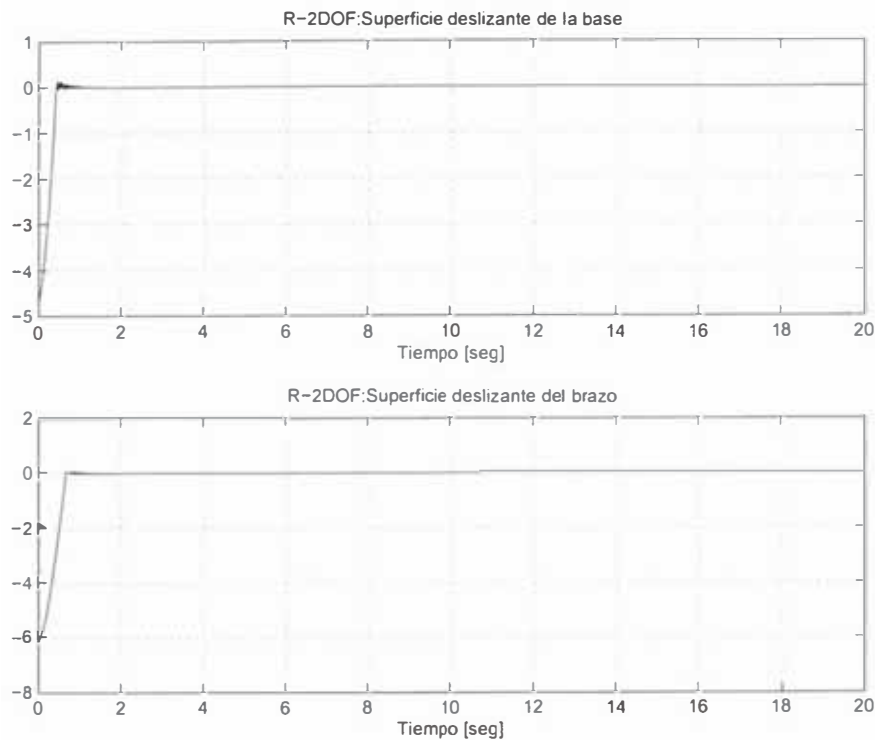


Figura 5.4: Trayectoria constante: superficie deslizante para los servomotores de la base y el brazo

5.1.2.1 Diseño del Controlador No Lineal Multivariable

Para este caso se toman las mismas ecuaciones que se usan para la función signo para una trayectoria constante. Así mismo se toma la ecuación para la primera entrada y segunda entrada.

5.1.2.2 Programación del Algoritmo de Control No Lineal Multivariable

Para la programación del algoritmo de control se ha usado MATLAB [11], [12], [16], [17], teniendo como dato las condiciones iniciales y las ecuaciones indicadas anteriormente. Dicho programa se muestra en el apéndice B.

5.1.2.3 Simulaciones

Las simulaciones respectivas son mostradas en las figuras 5.5, 5.6, 5.7 y 5.

En la figura 5.5 se muestra las salidas controladas para la trayectoria angular de la base para una referencia de 90° y trayectoria angular del brazo para una

referencia de 120° , realizando un seguimiento a la señal deseada. Las señales se han fijado para un período de 11 Hz. Las amplitudes de las señales senoidales indican el movimiento de la base y del brazo, el tiempo de establecimiento para la base es de 2 seg. y para el brazo el tiempo de establecimiento es de 2 seg., para después seguir a la trayectoria deseada.

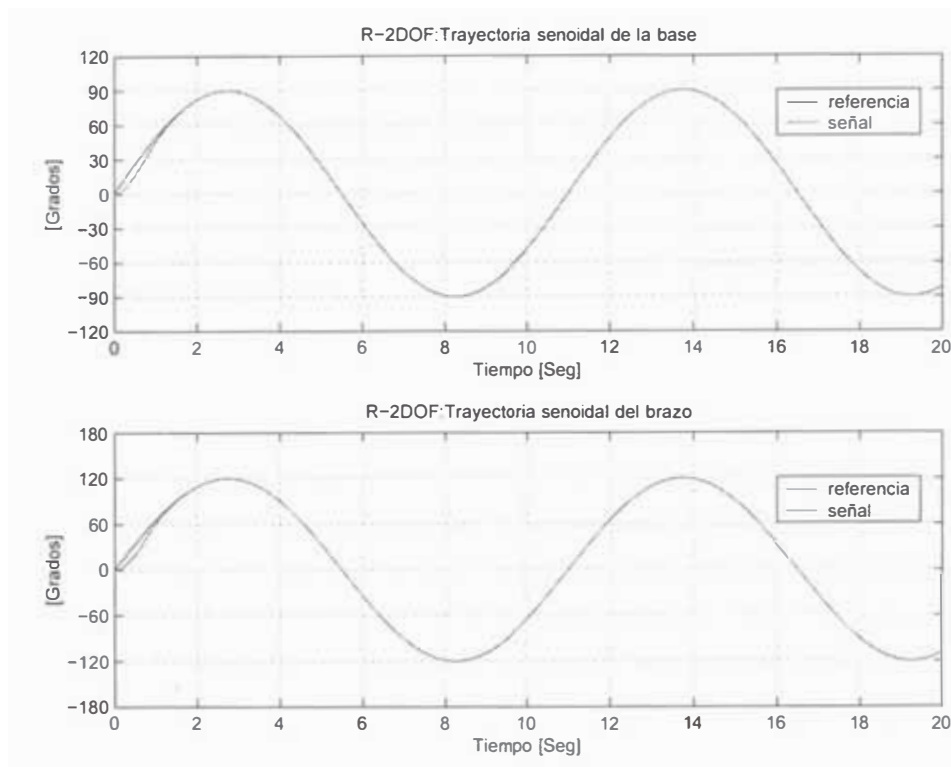


Figura 5.5: Trayectoria senoidal: salidas controladas para la base y el brazo.

En la figura 5.6 se muestran las señales de control para el servomotor de la base y para el servomotor del brazo. La señal del servomotor de la base varía de +1 voltios a -1 voltios por 0.8 seg., posteriormente dicha señal varía en forma oscilatoria por el fenómeno de chattering hasta el final de la simulación. La señal del servomotor del brazo varía también de +2.4 voltios a -2.4 voltios por 0.8 seg., posteriormente dicha señal varía en forma oscilatoria y permanente debido al fenómeno de chattering hasta el final. Las señales presentan de esta forma debido a que los servomotores están ejerciendo fuerza de control.

En la figura 5.7 se muestra la respuesta del sistema para la velocidad angular del servomotor de la base y del servomotor del brazo. Para ambos casos en el inicio hay un incremento de velocidad hasta los 1.25 rad/seg en la base y 1.65 rad/seg en el brazo, debido al arranque de los servomotores, posteriormente a

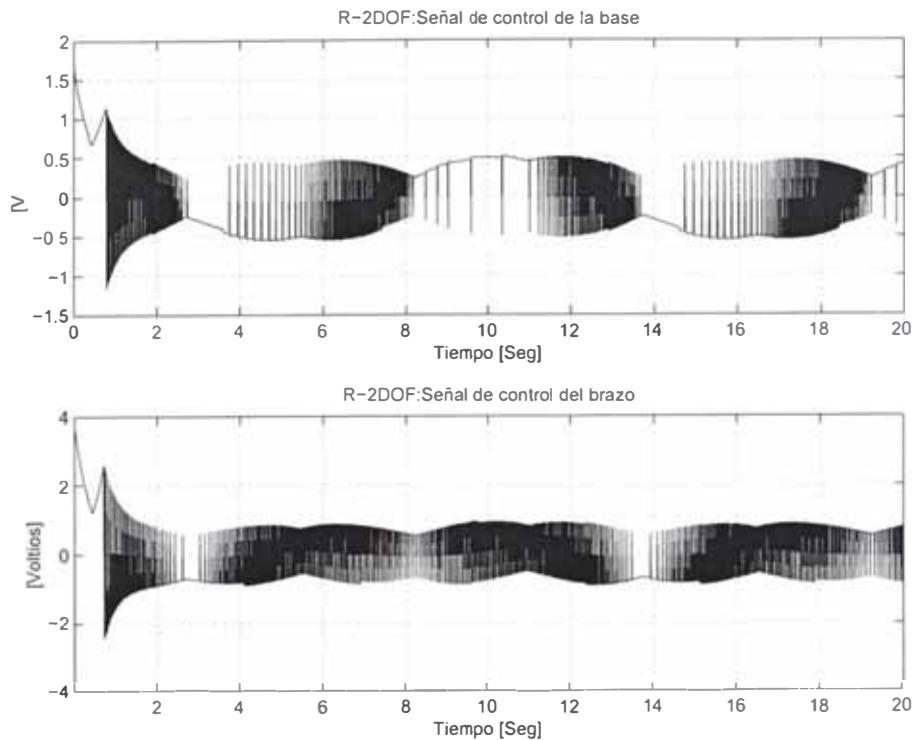


Figura 5.6: Trayectoria senoidal: señales de control para los servomotores de la base y el brazo.

partir de los 2.75 seg sigue una trayectoria senoidal donde el proceso ha sido controlado, pero aparece un diente de sierra de amplitud 0.02 rad/seg durante el control.

En la figura 5.8 se muestra las superficies deslizantes del servomotor de la base y del brazo. Se puede apreciar que la trayectoria alcanza la superficie deslizante a los 0.8 seg para la base y a los 0.72 seg para el brazo. Esta gráfica representa el tiempo en que demora el sistema de control en alcanzar la superficie deslizante y se puede notar que las superficies llegan a cero en un tiempo mínimo. Se puede observar también el fenómeno de chattering.

5.2 Caso 2: Simulación con Función Saturación

Los resultados de las simulaciones de esta sección, son expuestas de acuerdo a la ecuación (3.49), en ella la ley de control ha sido modificada para evitar el fenómeno "chattering" reemplazando la $sgn(S)$ por la función $sat(S/\Phi)$. El programa de simulación se ha desarrollado en código MATLAB [16] y se muestra en el apéndice B.

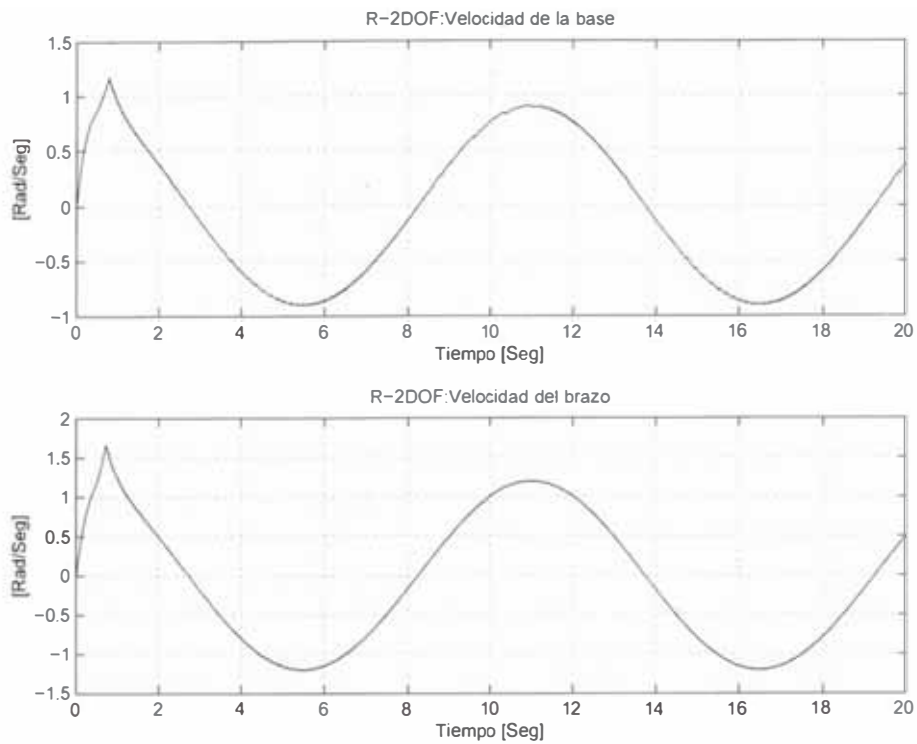


Figura 5.7: Trayectoria senoidal: velocidad para los servomotores de la base y el brazo.

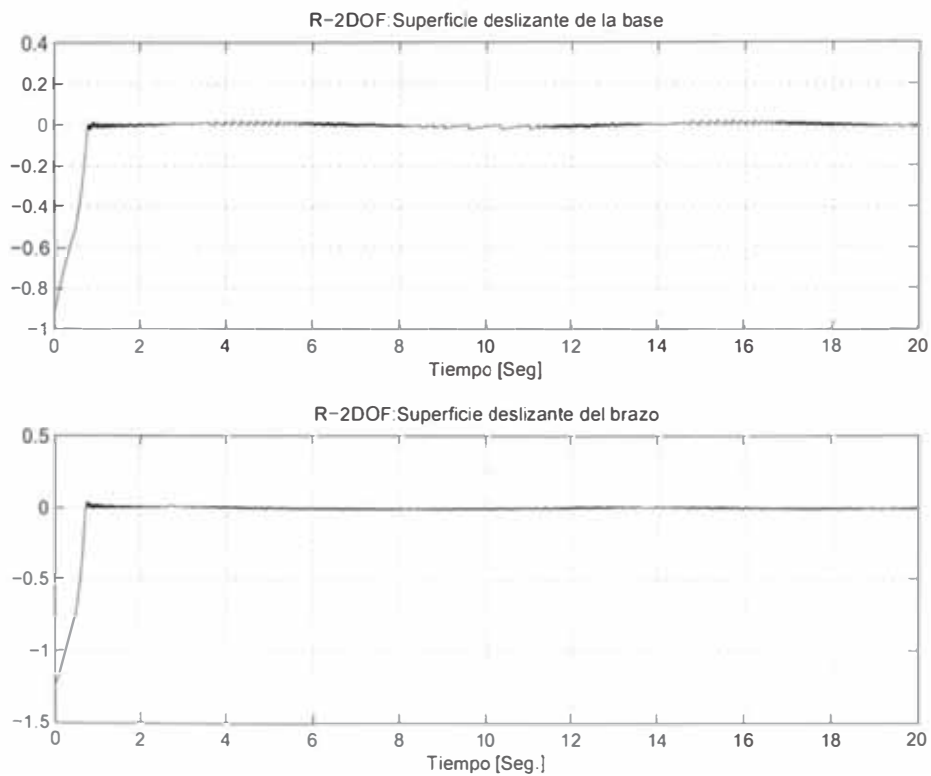


Figura 5.8: Trayectoria senoidal: superficie deslizante para los servomotores de la base y el brazo

5.2.1 Respuesta a una Trayectoria Constante

Para esta simulación se ha asumido una trayectoria constante con los siguientes datos:

- Condiciones iniciales:
 $x_1 = 0$, (base)
 $x_2 = 0$, (brazo)
- Trayectorias deseadas:
 $x_{d1} = \pi/2$, posición angular de la base
 $x_{d2} = 2\pi/3$, posición angular del brazo
- Parámetros de sintonización para alcanzar la superficie deslizante:
 $c_1 = 5.0$ y $e_1 = 0.8$, (base)
 $c_2 = 3.5$ y $e_2 = 0.6$, (brazo)
 $\phi = 0.1$
- Tiempo de muestreo:
 $T = 100\text{seg}$

5.2.1.1 Diseño del Controlador No Lineal Multivariable

Para este caso se toma las mismas ecuaciones (5.3), (5.4), (5.5), (5.6), que se usan para la función signo para una trayectoria constante, excepto que dentro de los parámetros de sintonía se incluye el ancho de banda de la zona de saturación ϕ . El controlador no lineal MIMO es:

- Ley de control para la primera entrada:

$$u_1 = -K_1 \text{sat}(s_1/\phi) \quad (5.7)$$

- Ley de control para la segunda entrada:

$$u_2 = d_2 - K_2 \text{sat}(s_2/\phi) \quad (5.8)$$

5.2.1.2 Programación del Algoritmo de Control No Lineal Multivariable

Para la programación del algoritmo de control se ha usado MATLAB [11], [16], [17], teniendo como dato las condiciones iniciales indicadas anteriormente

y las ecuaciones para la ley de control de la primera y segunda entrada. Dicho programa se muestra en el apéndice B.

5.2.1.3 Simulaciones

Las simulaciones respectivas son mostradas en las figuras 5.9, 5.10, 5.11 y 5.12.

En la figura 5.9 se muestra las salidas controladas para la posición angular de la base para una referencia de 90° y posición angular del brazo para una referencia de 120° , el tiempo de establecimiento para la base es de 1.6 seg. y para el brazo el tiempo de establecimiento es de 2.0 seg.

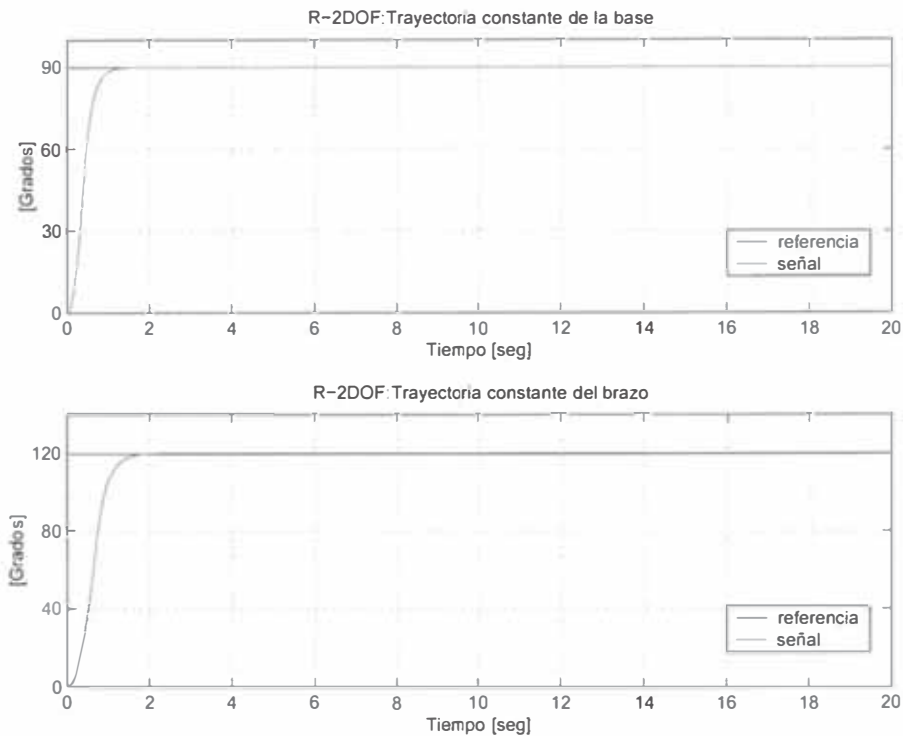


Figura 5.9: Trayectoria constante: salidas controladas para la base y el brazo.

En la figura 5.10 se muestran las señales de control para el servomotor de la base y para el servomotor del brazo. La señal del servomotor de la base varía de +5 voltios a -5 voltios por 1.5 seg. y a partir de ahí la señal va a cero que es donde el proceso ha sido controlado. La señal del servomotor del brazo varía también de +5 voltios a -5 voltios por 2 seg. y a partir de ahí la señal va a -0.15 voltios en forma continua que es donde el proceso ha sido controlado.

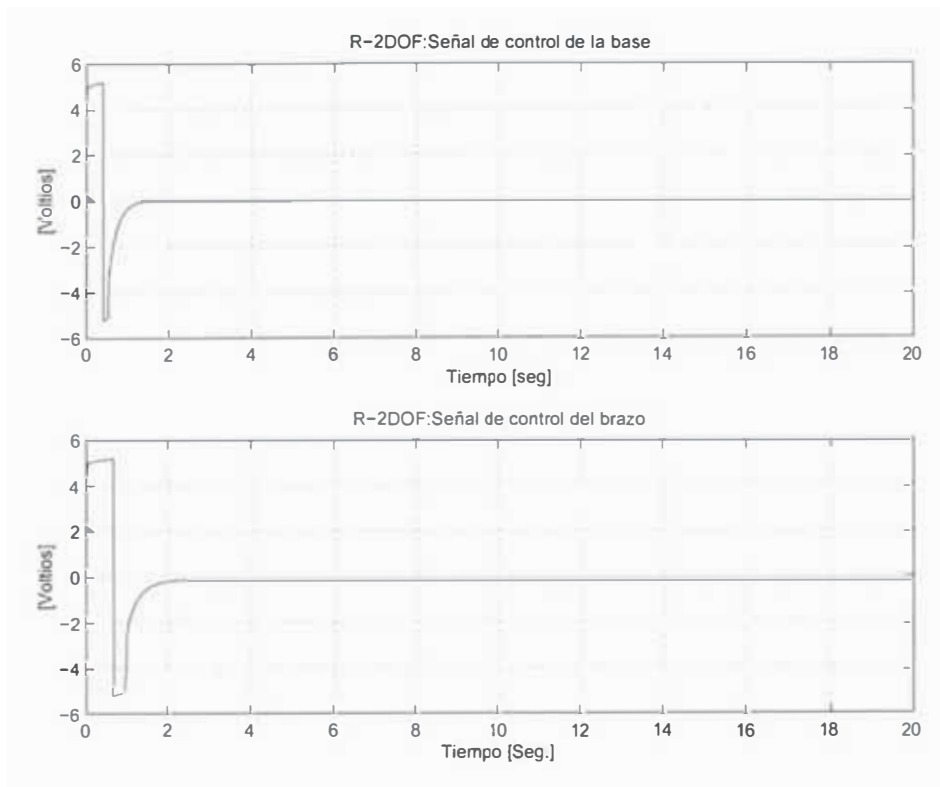


Figura 5.10: Trayectoria constante: señales de control para los servomotores de la base y el brazo.

En la figura 5.11 se muestra la respuesta del sistema para la velocidad angular del servomotor de la base y del servomotor del brazo. Para el servomotor de la base se aprecia que en el arranque se incrementa presentando una oscilación mínima para luego aproximarse a cero a los 1.8 seg. Para el servomotor del brazo también en el arranque se incrementa presentando una oscilación mínima para luego aproximarse a cero a los 2.5 seg. Esto significa que cuando dichas velocidades se aproximan a cero, el proceso ha sido controlado.

En la figura 5.12 se muestra las superficies deslizantes del servomotor de la base y del servomotor del brazo. Se puede apreciar que la trayectoria alcanza la superficie deslizante a los 1.6 seg. y 2 seg., respectivamente. Esta gráfica representa el tiempo en que demora el sistema de control en alcanzar la superficie deslizante.

5.2.2 Respuesta a una Trayectoria Senoidal

Para esta simulación se ha asumido una trayectoria senoidal con los siguientes datos:

- Condiciones iniciales:

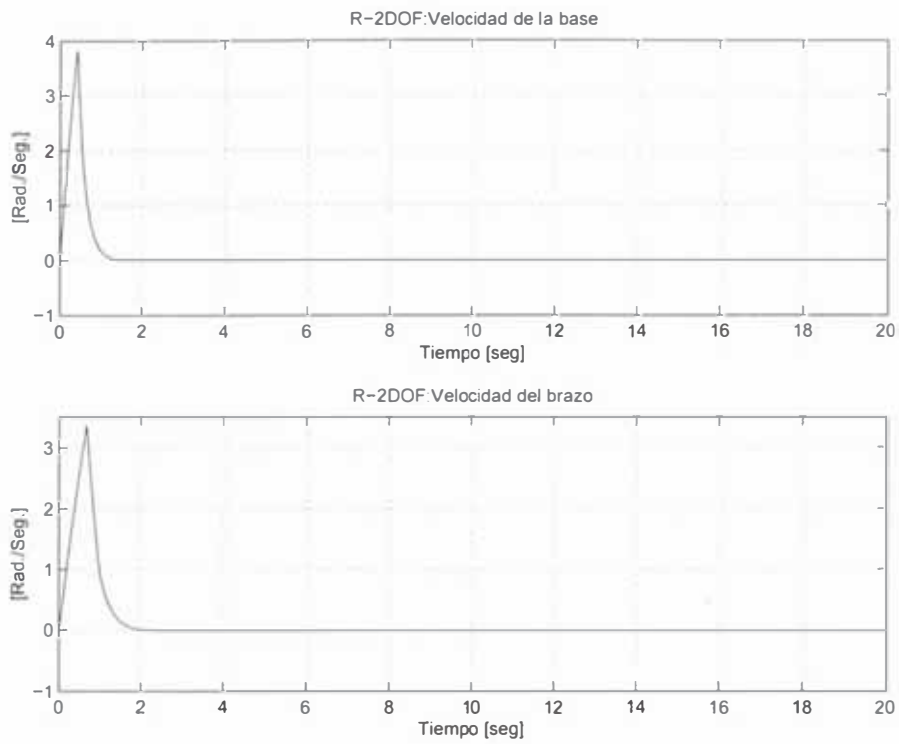


Figura 5.11: Trayectoria constante: velocidad para los servomotores de la base y el brazo.

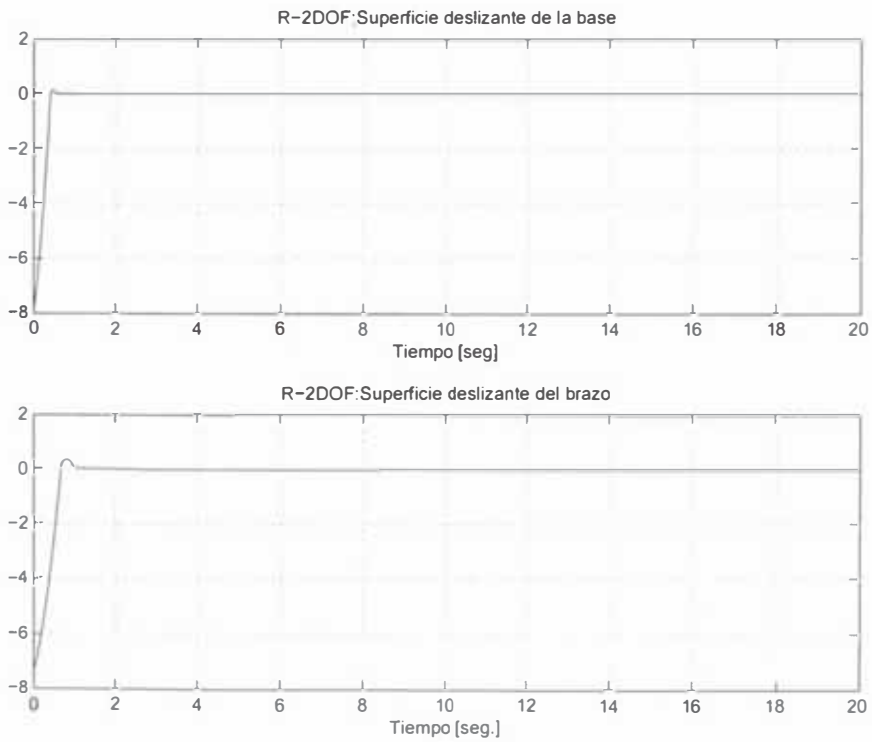


Figura 5.12: Trayectoria constante: superficie deslizante para los servomotores de la base y el brazo

$$x_1 = 0, \text{ (base)}$$

$$x_2 = 0, \text{ (brazo)}$$

- Trayectorias deseadas:

$$x_{d1} = \pi/2\cos(2\pi kT/21), \text{ trayectoria senoidal de la base}$$

$$x_{d2} = 2\pi/3\cos(2\pi kT/21), \text{ trayectoria senoidal del brazo}$$

- Parámetros de sintonización para alcanzar la superficie deslizante:

$$c_1 = 5.0 \text{ y } e_1 = 0.8, \text{ (base)}$$

$$c_2 = 3.5 \text{ y } e_2 = 0.6, \text{ (brazo)}$$

$$\phi = 0.1$$

- Tiempo de muestreo:

$$T = 100\text{seg}$$

5.2.1.1 Diseño del Controlador No Lineal Multivariable

Para este caso se toman las mismas ecuaciones (5.3), (5.4), (5.5), (5.6) que se usan para la función signo para una trayectoria constante. Así mismo se toma la ecuación (5.7) para la primera entrada y la ecuación (5.8) para la segunda entrada.

5.2.1.2 Programación del Algoritmo de Control No Lineal Multivariable

Para la programación del algoritmo de control se ha usado MATLAB [11], [16], [17], teniendo como dato las condiciones iniciales indicadas anteriormente y las ecuaciones (5.7) y (5.8). Dicho programa se muestra en el apéndice B.

5.2.1.3 Simulaciones

Las simulaciones respectivas son mostradas en las figuras 5.13, 5.14, 5.15 y 5.16.

En la figura 5.13 se muestra las salidas controladas para la trayectoria angular de la base para una referencia de 90° y trayectoria angular del brazo para una referencia de 120° , realizando un seguimiento a la señal deseada. Las señales se han fijado para un período de 21 Hz. Las amplitudes de las señales senooidales indican el movimiento de la base y del brazo, el tiempo de establecimiento para

la base es de 1.2 seg. y para el brazo el tiempo de establecimiento es de 2.5 seg., para después seguir a la trayectoria deseada.

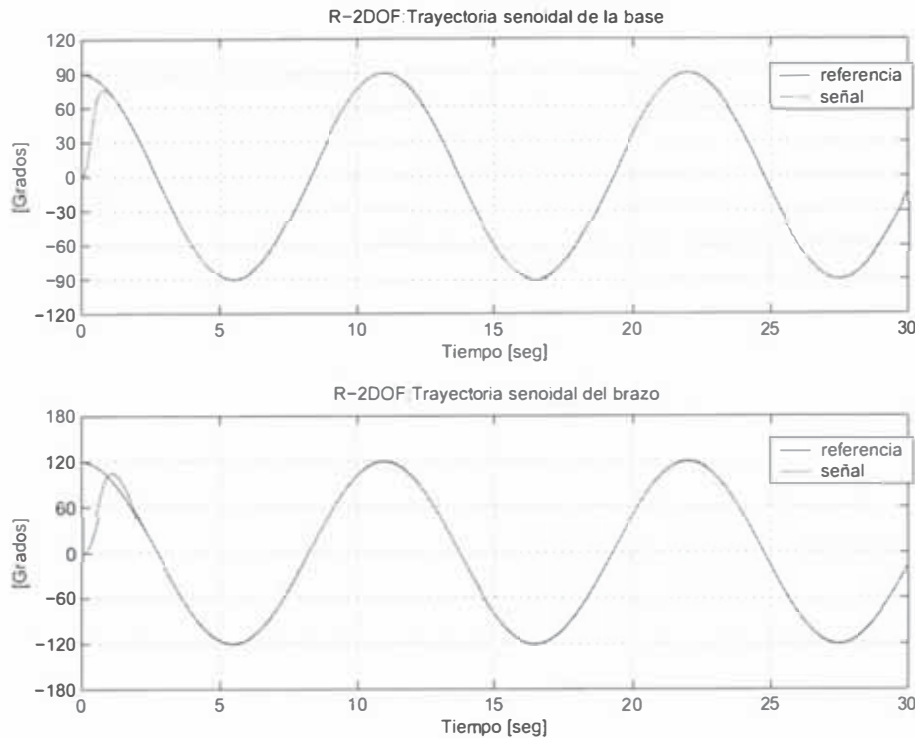


Figura 5.13: Trayectoria senoidal: salidas controladas para la base y el brazo.

En la figura 5.14 se muestran las señales de control para el servomotor de la base y para el servomotor del brazo. La señal del servomotor de la base varía de +5 voltios a -5 voltios por 2 seg. y a partir de ahí la señal sigue una trayectoria continua; donde el proceso ha sido controlado. La señal del servomotor del brazo varía también de +5 voltios a -5 voltios por 1.7 seg., y a partir de ahí la señal sigue una trayectoria en forma continua; donde el proceso ha sido controlado. Las señales presentan esta forma debido a que los servomotores están ejerciendo fuerza de control.

En la figura 5.15 se muestra la respuesta del sistema para la velocidad angular del servomotor de la base y del servomotor del brazo. Para ambos casos en el inicio hay un incremento de velocidad hasta los 3 rad/seg, debido al arranque de los servomotores, posteriormente a partir de los 2.6 seg sigue una trayectoria senoidal donde el proceso ha sido controlado.

En la figura 5.16 se muestra las superficies deslizantes del servomotor de la base y del brazo. Se puede apreciar que la trayectoria alcanza la superficie deslizante

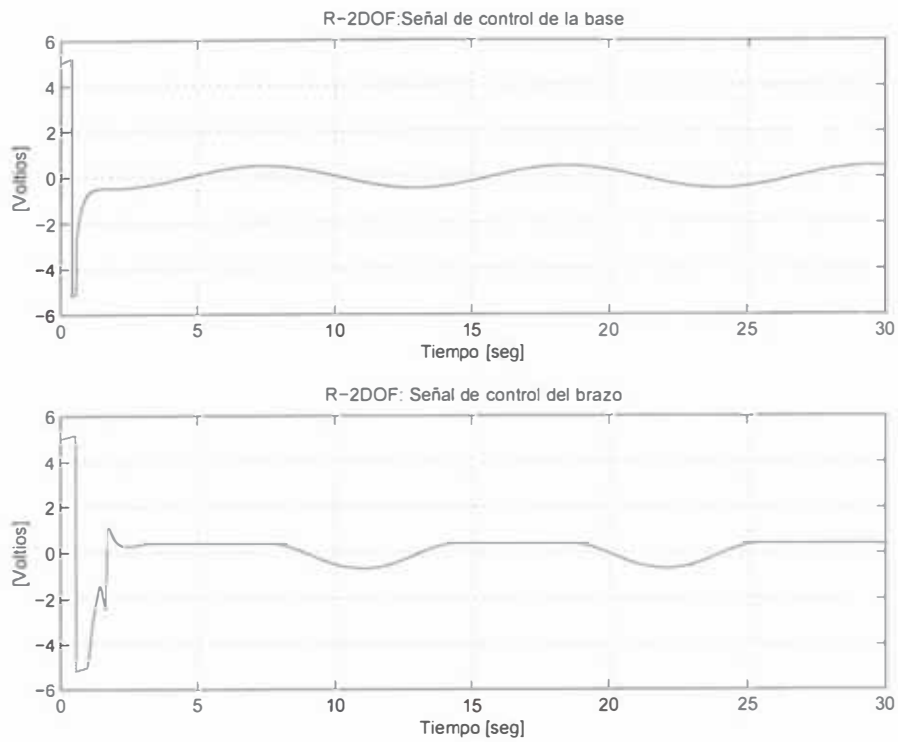


Figura 5.14: Trayectoria senoidal: señales de control para los servomotores de la base y el brazo.

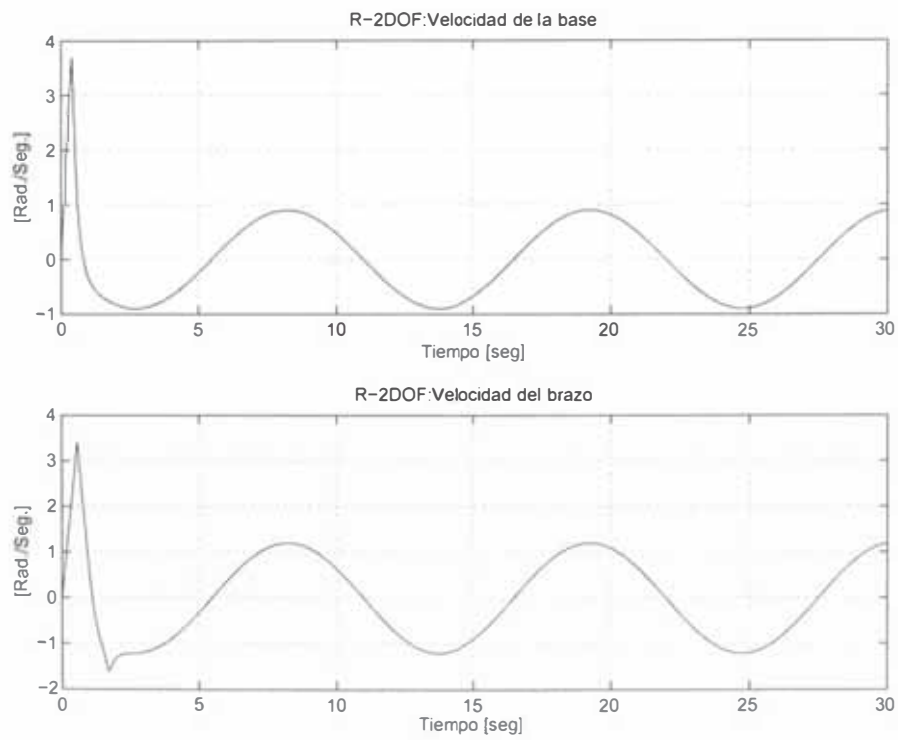


Figura 5.15: Trayectoria senoidal: velocidad para los servomotores de la base y el brazo.

a los 0.58 seg para la base y a los 1.7 seg para el brazo. Esta gráfica representa el tiempo en que demora el sistema de control en alcanzar la superficie deslizante y se puede notar que las superficies llegan a cero en un tiempo mínimo. En la siguiente sección se realiza algunas simulaciones que muestra el comportamiento del control ante variaciones de parámetros del sistema; con el objetivo de demostrar que el control de modo deslizante es robusto.

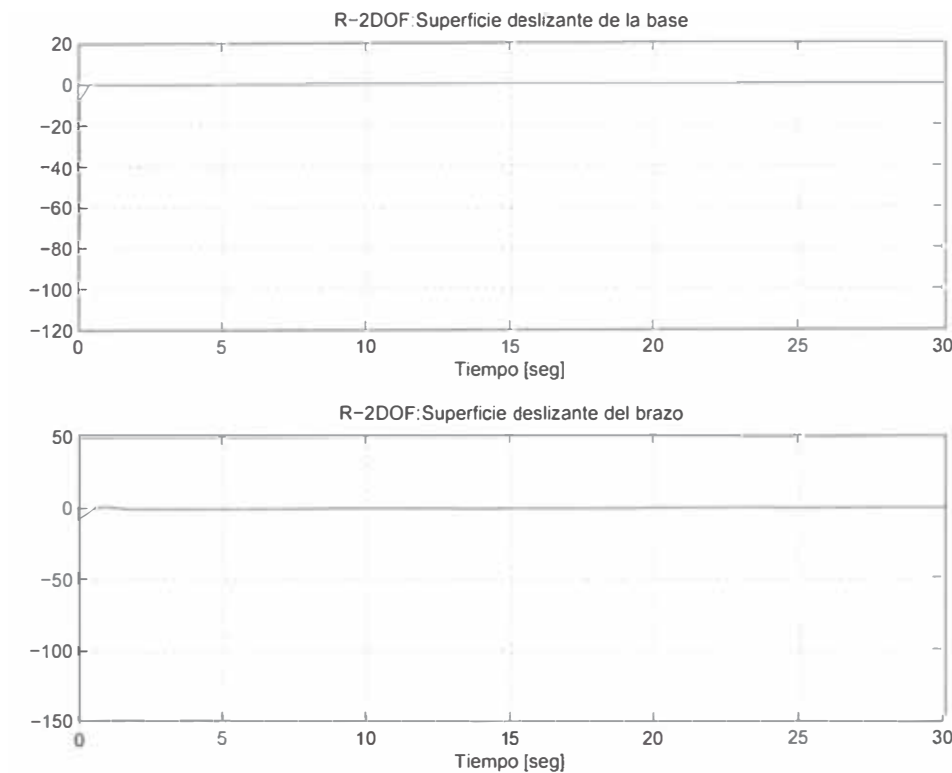


Figura 5.16: Trayectoria senoidal: superficie deslizante para los servomotores de la base y el brazo

5.3 Caso 3: Simulaciones con Variación de Parámetros en el Sistema

Los resultados de las simulaciones de esta sección, son expuestas de acuerdo a la ecuación (3.49), en ella la ley de control ha sido modificada para evitar el fenómeno "chattering" reemplazando la $sgn(S)$ por la función $sat(S/\Phi)$.

5.3.1 Respuesta a una Trayectoria Constante con Variación de los Parámetros en el Primer Grado de Libertad

Para esta simulación se ha asumido una trayectoria constante con los siguientes datos:

- Condiciones iniciales:

$$x_1 = 0, \text{ (base)}$$

$$x_2 = 0, \text{ (brazo)}$$

- Trayectorias deseadas:

$$x_{d_1} = \pi/2, \text{ posición angular de la base}$$

$$x_{d_2} = 2\pi/3, \text{ posición angular del brazo}$$

- Parámetros de sintonización para alcanzar la superficie deslizante:

$$c_1 = 5.0 \text{ y } e_1 = 0.8, \text{ (base)}$$

$$c_2 = 3.5 \text{ y } e_2 = 0.6, \text{ (brazo)}$$

$$phi = 0.1$$

- Tiempo de muestreo:

$$T = 100\text{seg}$$

- Parámetros reales en el primer grado:

$$h = 0.01 \text{ y } R = 0.07, \text{ (Altura y radio del sólido-disco)}$$

$$m_{dt} = 0.55, \text{ (masa total del disco)}$$

$$b = 0.21, \text{ (altura - prisma)}$$

$$a = 0.0445, \text{ (ancho y largo de la sección del prisma)}$$

- Parámetros cambiados en el primer grado:

$$h = 0.05 \text{ y } R = 0.09, \text{ (Altura y radio del sólido-disco)}$$

$$m_{dt} = 0.8, \text{ (masa total del disco)}$$

$$b = 0.5, \text{ (altura - prisma)}$$

$$a = 0.5, \text{ (ancho y largo de la sección del prisma)}$$

5.3.1.1 Simulaciones

En dicha simulación se observa que el controlador no lineal multivariable por modo deslizante controla las señales de salidas (posiciones) correctamente a una variación de parámetros del sistema, sin la necesidad de cambiar los parámetros de sintonización para alcanzar la superficie deslizante. Estos resultados de la simulación son mostrados en las figuras 5.17, 5.18, 5.19 y 5.20.

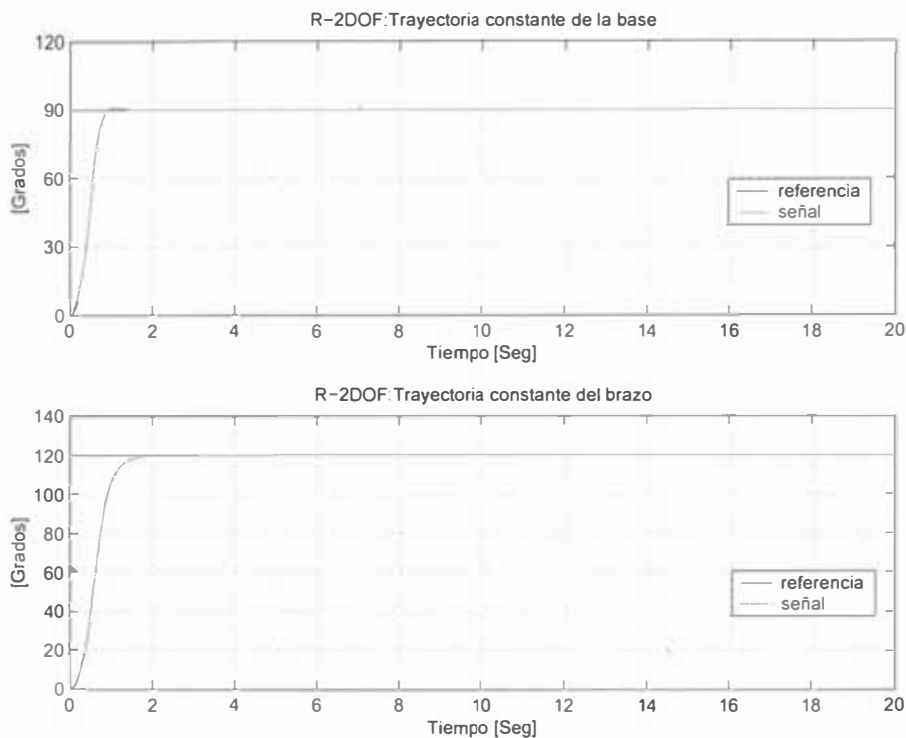


Figura 5.17: Trayectoria constante con parámetros cambiados en el primer grado de libertad: salidas controladas para la base y el brazo.

5.3.2 Respuesta a una Trayectoria Constante con Variación de los Parámetros en el Segundo grado

Para esta simulación se ha asumido una trayectoria constante con los siguientes datos:

- Condiciones iniciales:
 - $x_1 = 0$, (base)
 - $x_2 = 0$, (brazo)
- Trayectorias deseadas:
 - $x_{d1} = \pi/2$, posición angular de la base

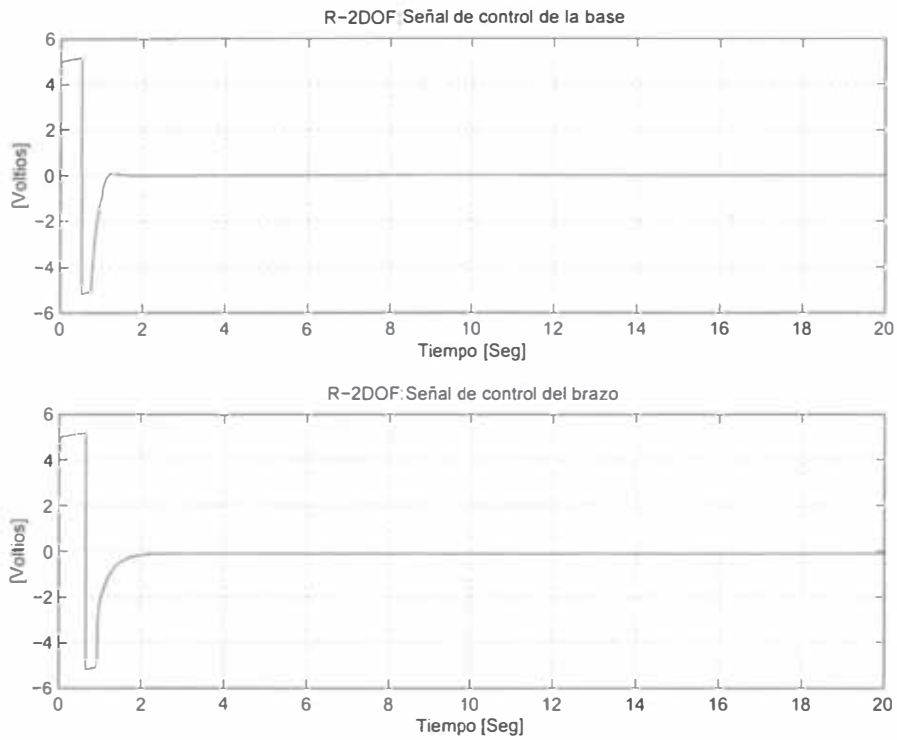


Figura 5.18: Trayectoria constante con parámetros cambiados en el primer grado de libertad: señales de control para los servomotores de la base y el brazo.

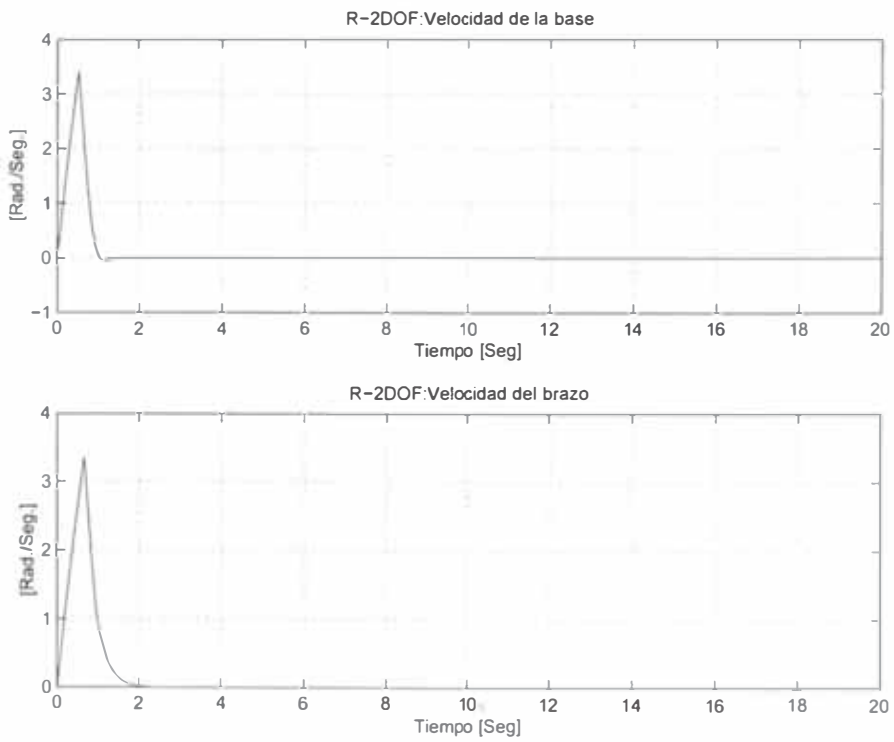


Figura 5.19: Trayectoria constante con parámetros cambiados en el primer grado de libertad: velocidad para los servomotores de la base y el brazo.

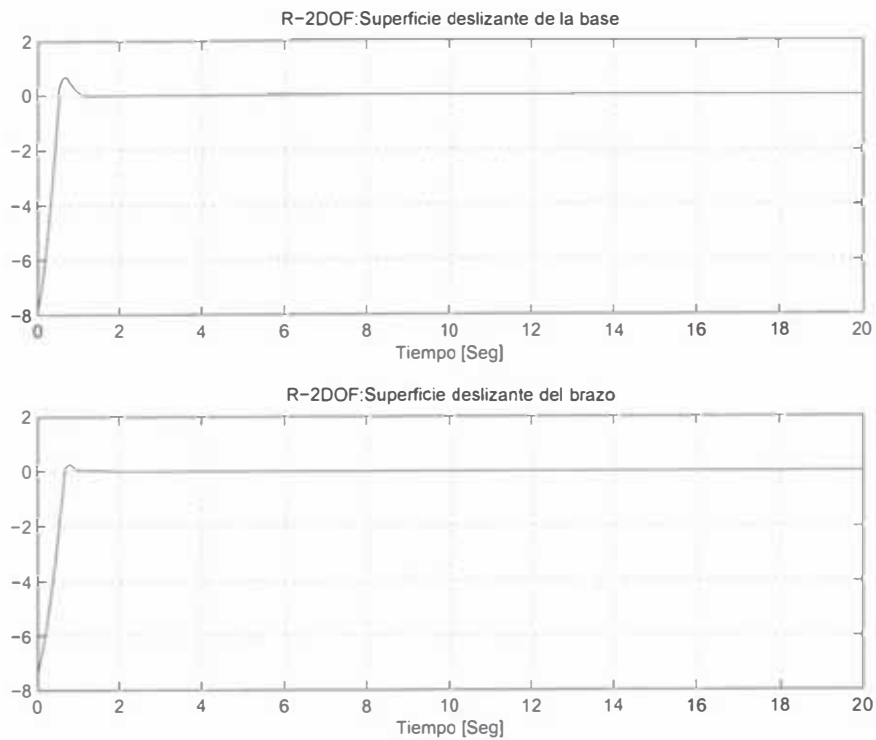


Figura 5.20: Trayectoria constante con parámetros cambiados en el primer grado de libertad: superficie deslizante para los servomotores de la base y el brazo

$x_{d2} = 2\pi/3$, posición angular del brazo

- Parámetros de sintonización para alcanzar la superficie deslizante:

$c_1 = 5.0$ y $e_1 = 0.8$, (base)

$c_2 = 3.5$ y $e_2 = 0.6$, (brazo)

$\phi_i = 0.1$

- Tiempo de muestreo:

$T = 100\text{seg}$

- Parámetros reales en el segundo grado:

$m_2 = 0.1$, (masa de la varilla)

$m_o = 0.025$, (masa del objeto)

- Parámetros cambiados en el segundo grado:

$m_2 = 0.15$, (masa de la varilla)

$m_o = 0.03$, (masa del objeto)

5.3.2.1 Simulaciones

En dicha simulación se observa que el controlador no lineal multivariable por modo deslizante controla las señales de salidas (posiciones) correctamente a una variación de parámetros del sistema, sin la necesidad de cambiar los parámetros de sintonización para alcanzar la superficie deslizante. Estos resultados de la simulación son mostrados en las figuras 5.21, 5.22, 5.23 y 5.24.

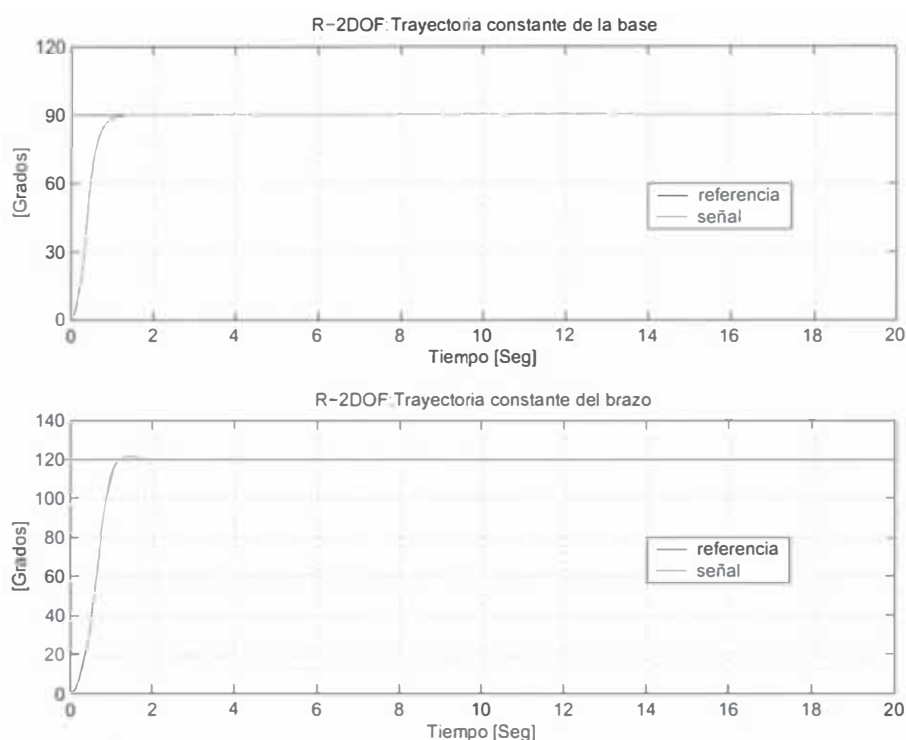


Figura 5.21: Trayectoria constante con parámetros cambiados en el segundo grado de libertad: salidas controladas para la base y el brazo.

5.3.3 Respuesta a una Trayectoria Senoidal con Variación de los Parámetros en el Primer Grado

Para esta simulación se ha asumido una trayectoria senoidal con los siguientes datos:

- Condiciones iniciales:

$$x_1 = 0, \text{ (base)}$$

$$x_2 = 0, \text{ (brazo)}$$

- Trayectorias deseadas:

$$x_{d1} = \pi/2 \cos(2\pi kT/21), \text{ trayectoria senoidal de la base}$$

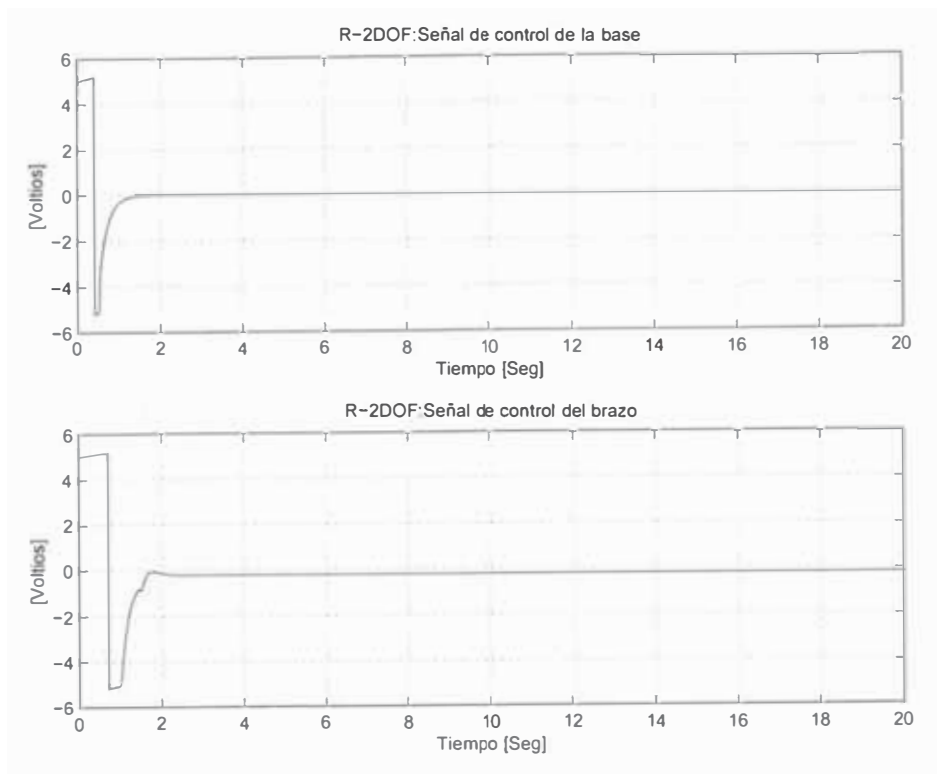


Figura 5.22: Trayectoria constante con parámetros cambiados en el segundo grado de libertad: señales de control para los servomotores de la base y el brazo.

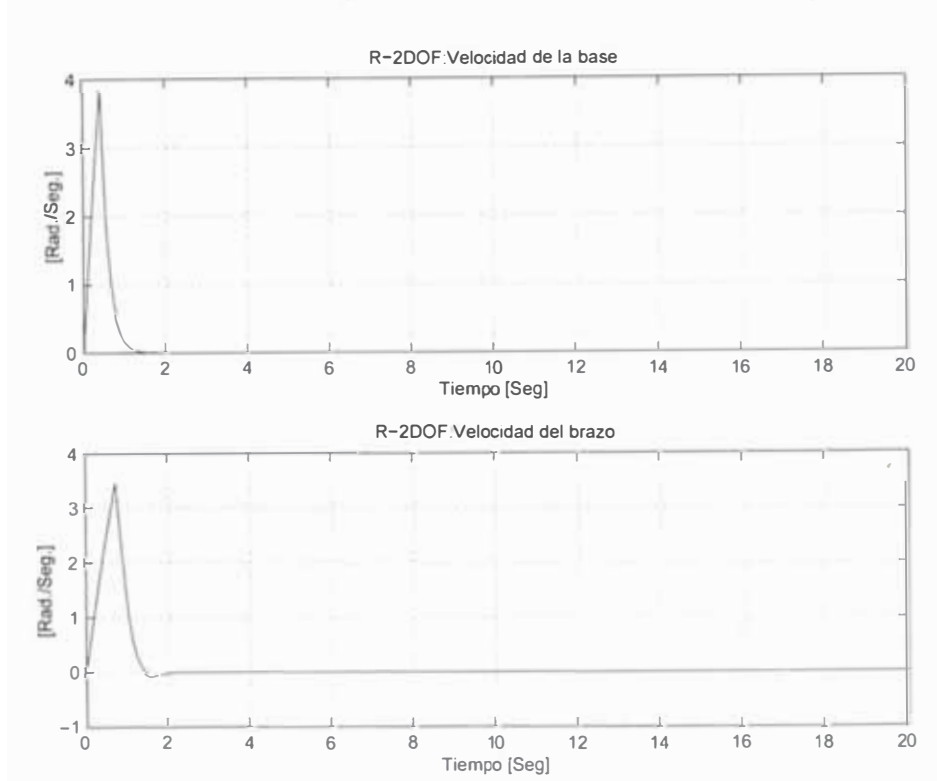


Figura 5.23: Trayectoria constante con parámetros cambiados en el segundo grado de libertad: velocidad para los servomotores de la base y el brazo.

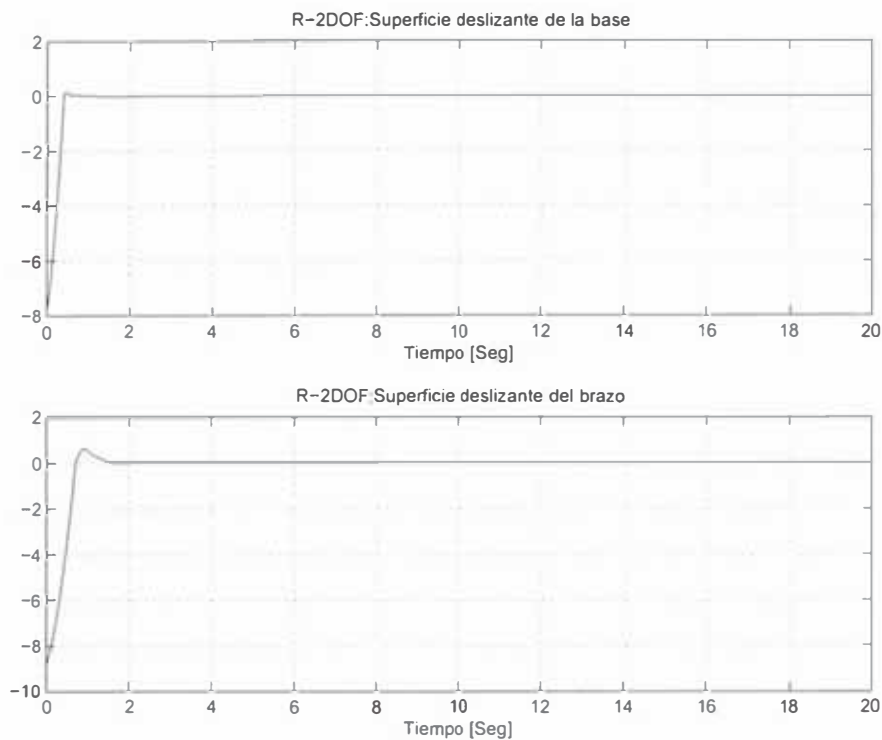


Figura 5.24: Trayectoria constante con parámetros cambiados en el segundo grado de libertad: superficie deslizante para los servomotores de la base y el brazo

$$x_{d2} = 2\pi/3\cos(2\pi kT/21), \text{ trayectoria senoidal del brazo}$$

- Parámetros de sintonización para alcanzar la superficie deslizante:

$$c_1 = 5.0 \text{ y } e_1 = 0.8, \text{ (base)}$$

$$c_2 = 3.5 \text{ y } e_2 = 0.6, \text{ (brazo)}$$

$$\phi_i = 0.1$$

- Tiempo de muestreo:

$$T = 100\text{seg}$$

- Parámetros reales en el primer grado:

$$h = 0.01 \text{ y } R = 0.07, \text{ (Altura y radio del sólido-disco)}$$

$$m_d t = 0.55, \text{ (masa total del disco)}$$

$$b = 0.21, \text{ (altura - prisma)}$$

$$a = 0.0445, \text{ (ancho y largo de la sección del prisma)}$$

- Parámetros cambiados en el primer grado:

$$h = 0.05 \text{ y } R = 0.09, \text{ (Altura y radio del sólido-disco)}$$

$$m_d t = 0.8, \text{ (masa total del disco)}$$

$$b = 0.5, \text{ (altura - prisma)}$$

$$a = 0.5, \text{ (ancho y largo de la sección del prisma)}$$

5.3.3.1 Simulaciones

En dicha simulación se observa las señales de salidas (trayectorias senoidales) correctamente a una variación de parámetros del sistema, sin la necesidad de cambiar los parámetros de sintonización. Estos resultados de la simulación son mostrados en las figuras 5.25 5.26, 5.27 y 5.28.

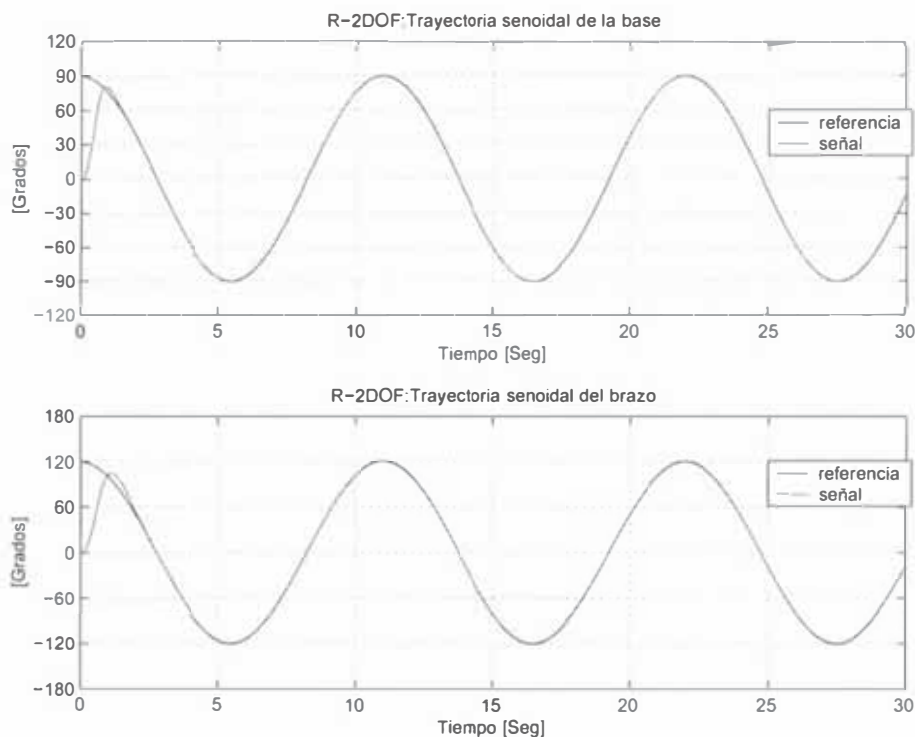


Figura 5.25: Trayectoria senoidal con parámetros cambiados en el primer grado de libertad: salidas controladas para la base y el brazo.

5.3.4 Respuesta a una Trayectoria Senoidal con Variación de los Parámetros en el Segundo Grado

Para esta simulación se ha asumido una trayectoria senoidal con los siguientes datos:

- Condiciones iniciales:

$$x_1 = 0, \text{ (base)}$$

$$x_2 = 0, \text{ (brazo)}$$

- Trayectorias deseadas:

$$x_{d1} = \pi/2 \cos(2\pi kT/21), \text{ trayectoria senoidal de la base}$$

$$x_{d2} = 2\pi/3 \cos(2\pi kT/21), \text{ trayectoria senoidal del brazo}$$

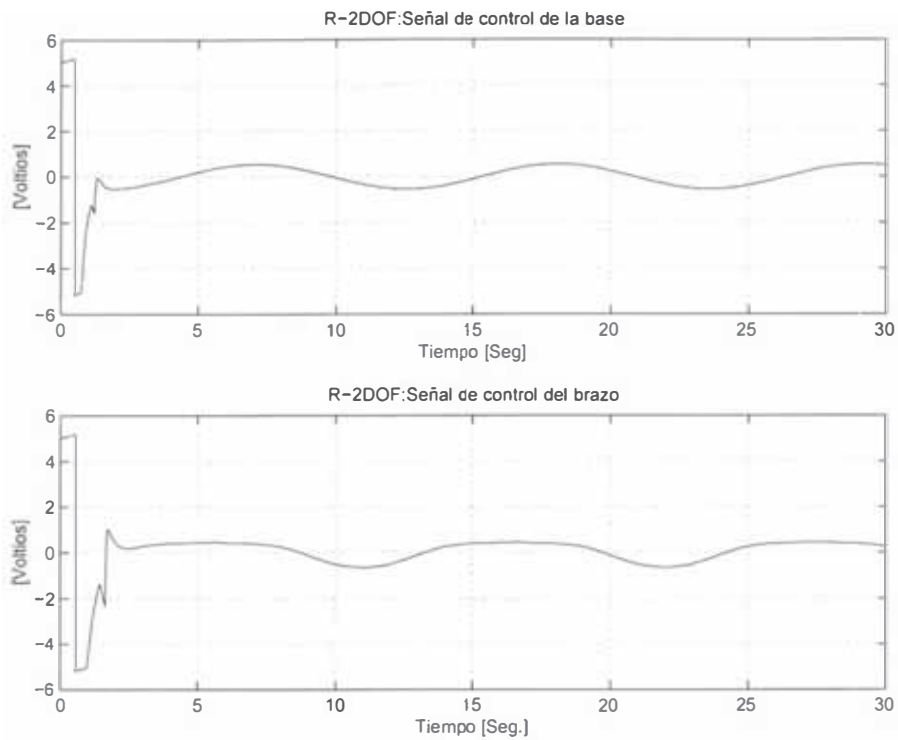


Figura 5.26: Trayectoria senoidal con parámetros cambiados en el primer grado de libertad: señales de control para los servomotores de la base y el brazo.

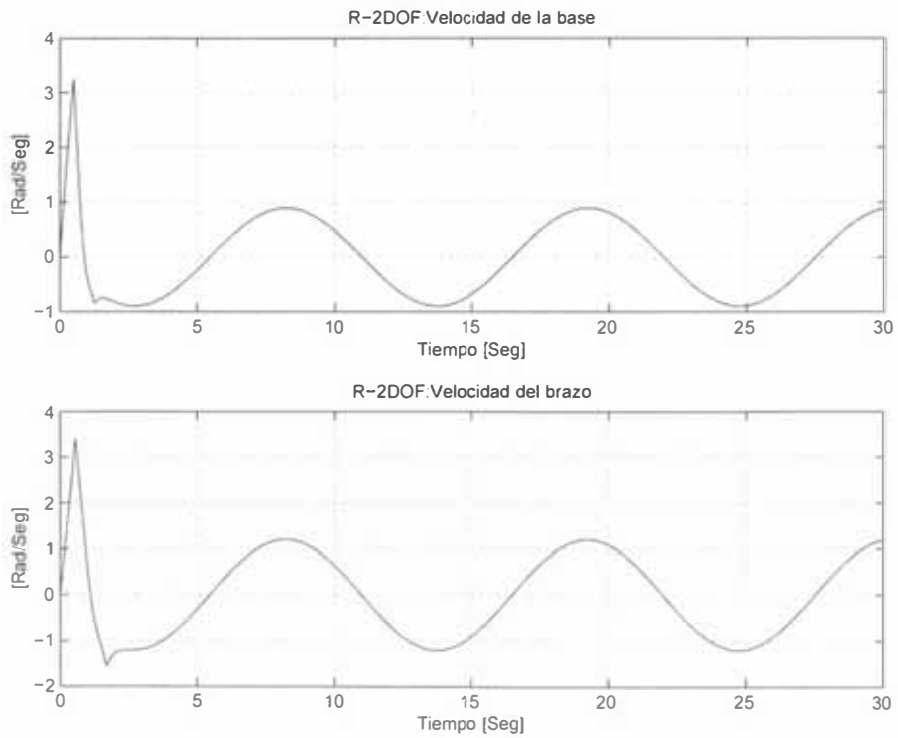


Figura 5.27: Trayectoria senoidal con parámetros cambiados en el primer grado de libertad: velocidad para los servomotores de la base y el brazo.

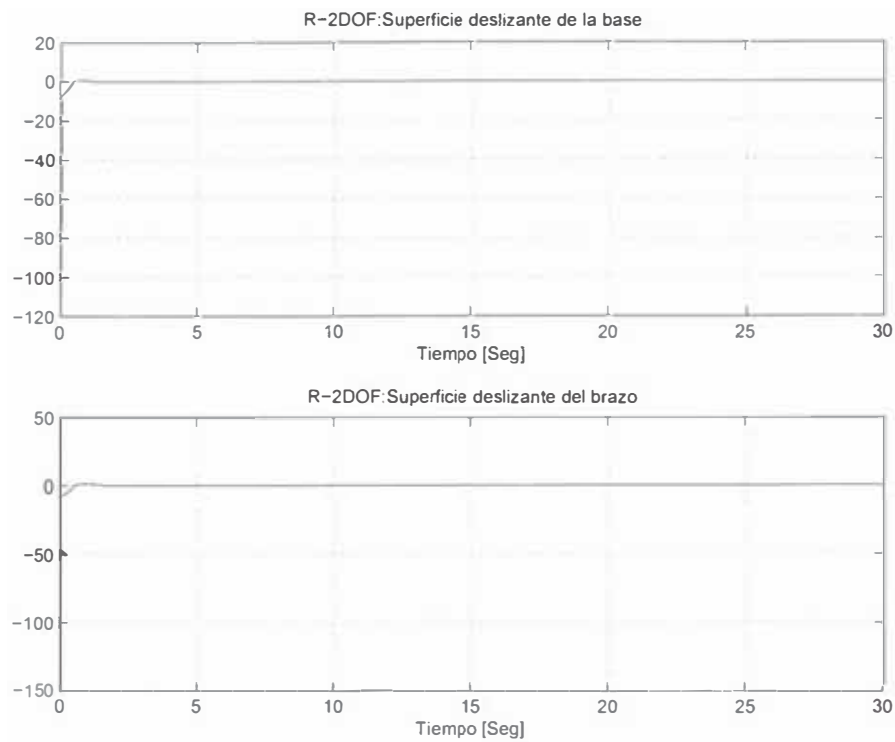


Figura 5.28: Trayectoria senoidal con parámetros cambiados en el primer grado de libertad: superficie deslizante para los servomotores de la base y el brazo.

- Parámetros de sintonización para alcanzar la superficie deslizante:
 - $c_1 = 5.0$ y $e_1 = 0.8$, (base)
 - $c_2 = 3.5$ y $e_2 = 0.6$, (brazo)
 - $phi = 0.1$
- Tiempo de muestreo:
 - $T = 100seg$
- Parámetros reales en el segundo grado:
 - $m_2 = 0.1$, (masa de la varilla)
 - $m_o = 0.025$, (masa del objeto)
- Parámetros cambiados en el segundo grado:
 - $m_2 = 0.15$, (masa de la varilla)
 - $m_o = 0.03$, (masa del objeto)

5.3.3.2 Simulaciones

En dicha simulación se observa las señales de salidas (trayectorias senoidales) correctamente a una variación de parámetros del sistema, sin la necesidad de cambiar los parámetros de sintonización. Estos resultados de la simulación son mostrados en las figuras 5.29, 5.30, 5.31 y 5.32.

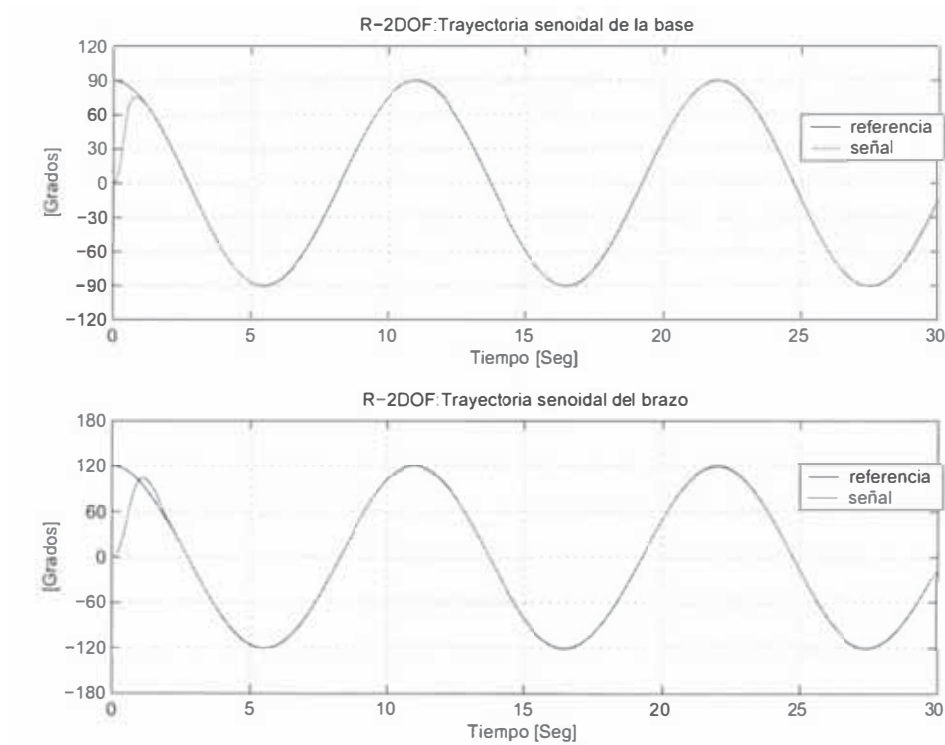


Figura 5.29: Trayectoria senoidal con parámetros cambiados en el segundo grado de libertad: salidas controladas para la base y el brazo.

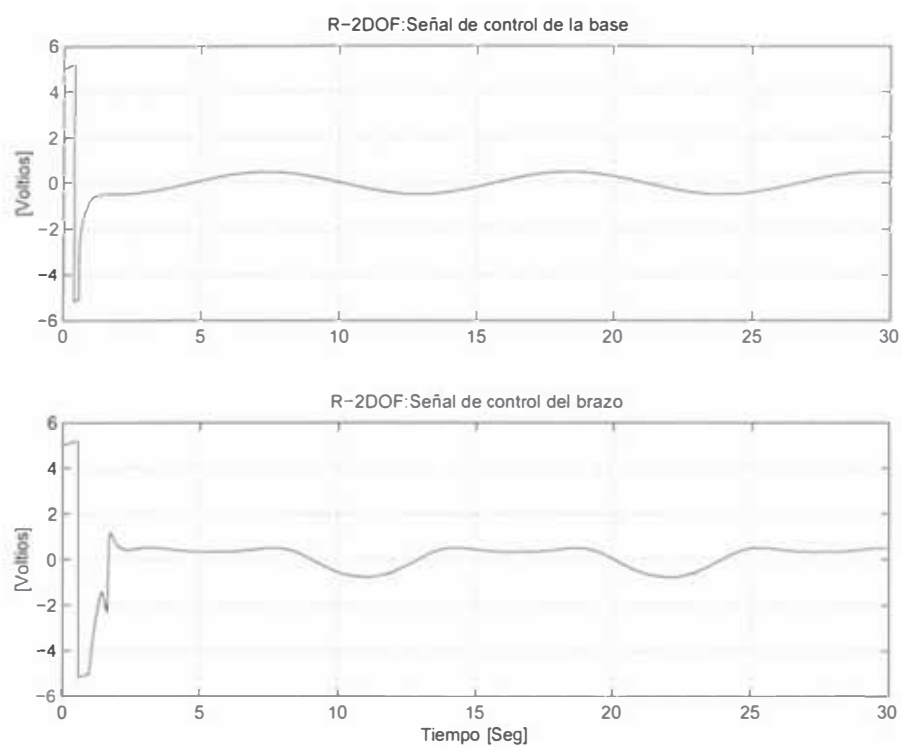


Figura 5.30: Trayectoria senoidal con parámetros cambiados en el segundo grado de libertad: señales de control para los servomotores de la base y el brazo.

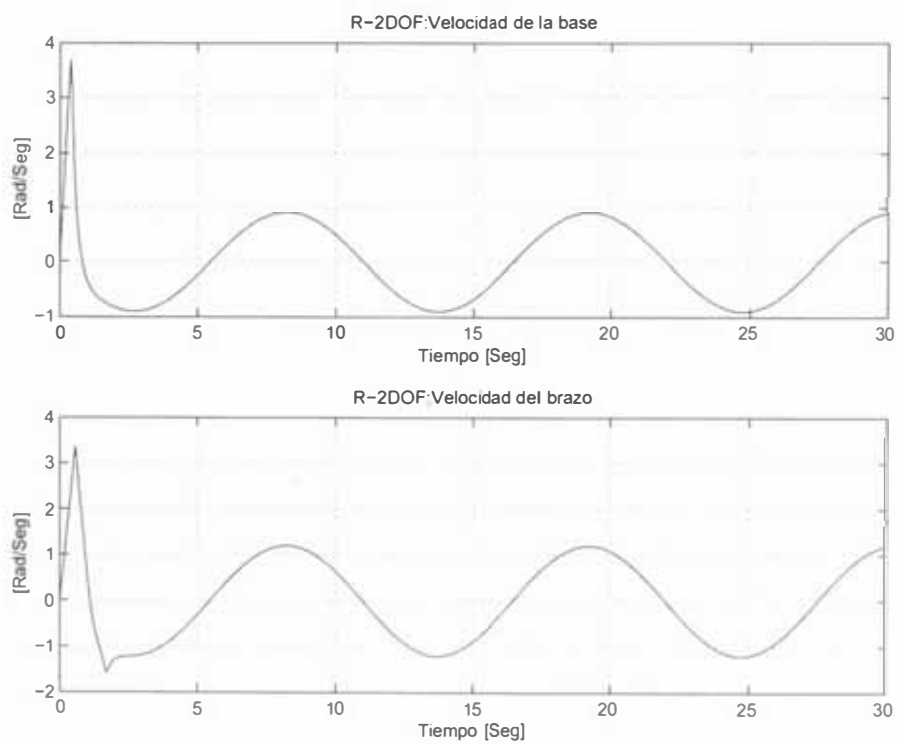


Figura 5.31: Trayectoria senoidal con parámetros cambiados en el segundo grado de libertad: velocidad para los servomotores de la base y el brazo.

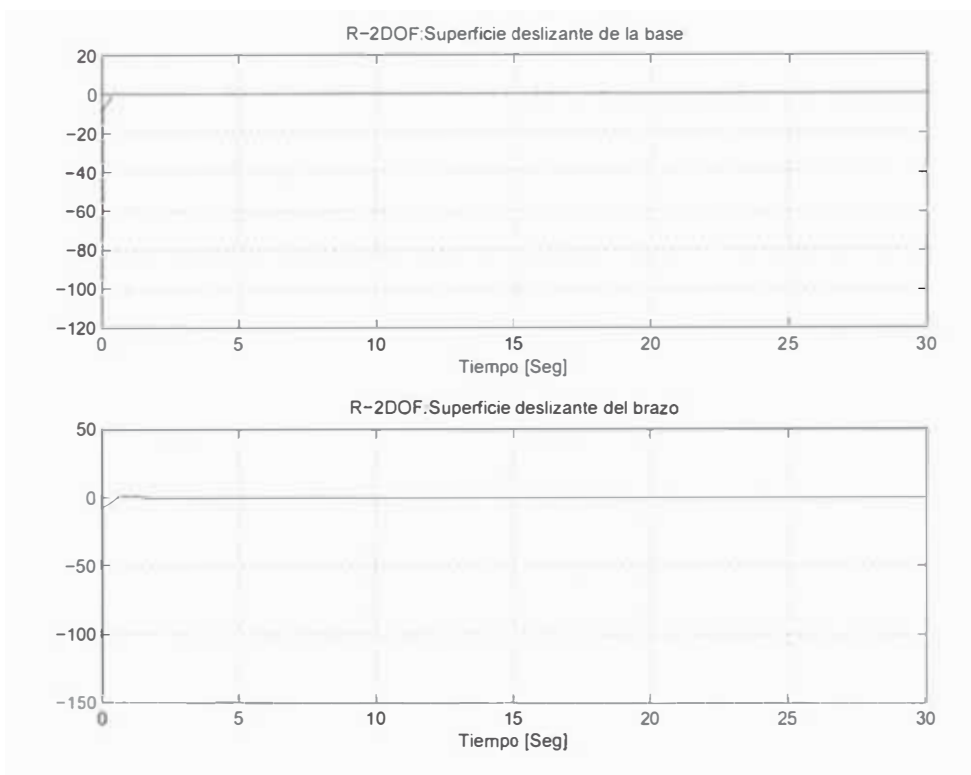


Figura 5.32: Trayectoria senoidal con parámetros cambiados en el segundo grado de libertad: superficie deslizante para los servomotores de la base y el brazo.

Capítulo 6

Resultados Experimentales

En esta sección se presentan y discuten los resultados en **tiempo real** para el sistema de control no lineal MIMO por modo deslizante de dos entradas y dos salidas. Dichos experimentos consideran trayectorias deseadas constantes y senoidales.

Los resultados se han obtenido empleando control por modo deslizante con las funciones signo $sgn(S)$ y saturación $sat(S/\Phi)$. Con la finalidad de observar que el fenómeno del chattering se eliminó. Se han dividido para dos experimentos uno para control de trayectoria constante y otro para el control de trayectoria senoidal.

El programa usado en **tiempo real** es el Borland C++. El controlador no lineal multivariable por modo deslizante empleado para la programación de trayectoria constante es el obtenido en la subsección 5.2.1, y para trayectoria senoidal es el obtenido en la subsección 5.2.2.

Los datos experimentales obtenidos del programa en C++ para ambas trayectorias, como **posición**, **senal de control** y **velocidad** para los dos grados de libertad, son ploteados en MATLAB para luego obtener los gráficos respectivos del sistema de control por modo deslizante en tiempo real y compararlos con los obtenidos en las simulaciones del capítulo 5.

6.1 Experimento 1: Control con la Función Signo aplicado a una Trayectoria Constante

Para este experimento se han usados trayectorias constantes con los siguientes datos:

- Condiciones iniciales:

$$x_1 = 0, \text{ (base)}$$

$$x_2 = 0, \text{ (brazo)}$$

- Trayectorias deseadas:
 $x_{d1} = \pi/2$, (posición angular de la base)
 $x_{d2} = 2\pi/3$, posición angular del brazo
- Parámetros de sintonización para alcanzar la superficie deslizante:
 $c_1 = 3.5$ y $e_1 = 0.6$, (base)
 $c_2 = 3.5$ y $e_2 = 0.6$, (brazo)
- Tiempo de muestreo: $T = 100$ seg.

Los resultados obtenidos para este experimento se muestran en las figuras 6.1, 6.2 y 6.3.

En la figura 6.1 se muestra las salidas controladas para la posición angular de la base y posición angular del brazo, el tiempo de establecimiento es de 6 seg. para la base y 7 seg. para el brazo. Se observa que en ambos casos la trayectoria desde el inicio hasta llegar al tiempo de establecimiento presenta oscilaciones. En el control del brazo se presenta oscilaciones propia del chattering.

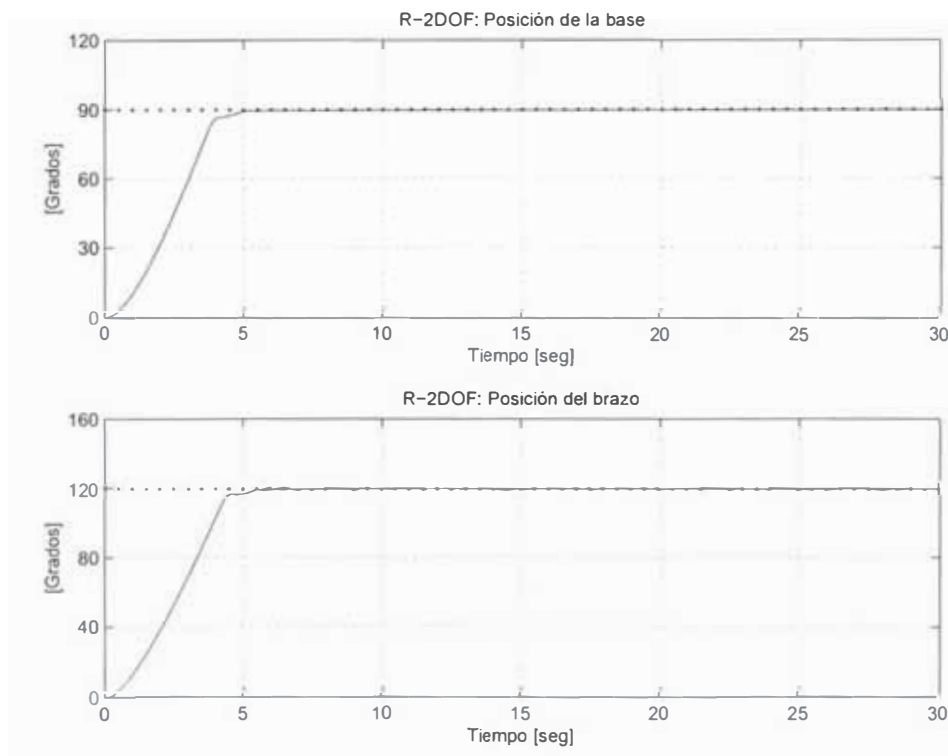


Figura 6.1: Trayectoria Constante Experimental: salidas controladas para la base y el brazo.

En la figura 6.2 se muestra las señales de control para los dos servomotores. La señal de control para el servomotor de la base varía de +3 a -1.6 voltios,

presentando oscilación durante todo el período experimental. Para el servomotor del brazo la señal varía de +3 a -2.6 voltios presentando oscilación durante el período experimental. El proceso ha sido controlado con presencia del chattering con una oscilación de amplitud 1 voltio.

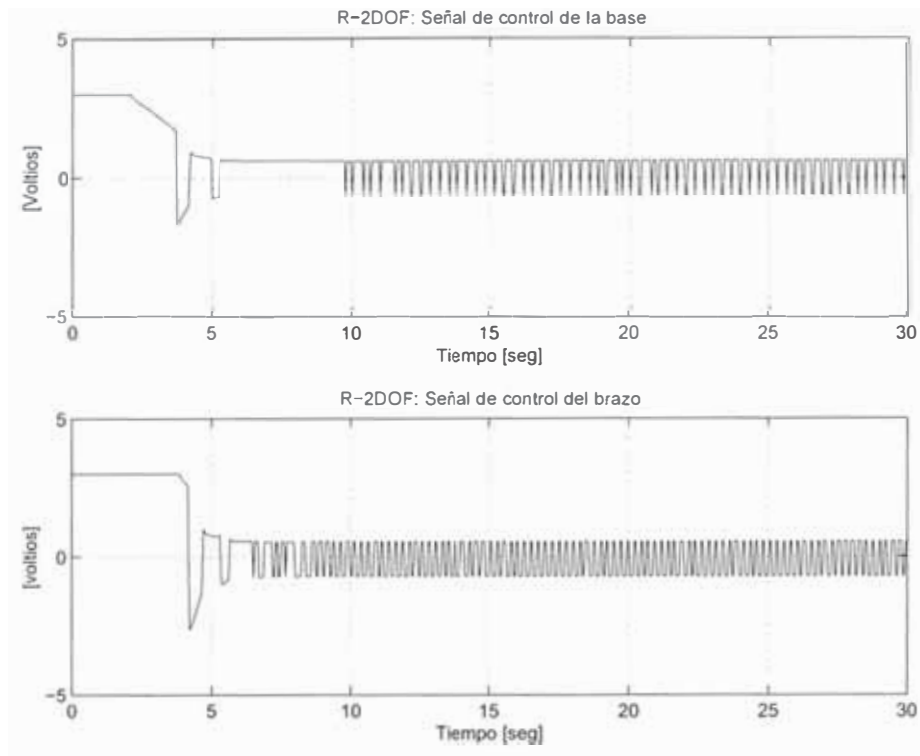


Figura 6.2: Trayectoria Constante Experimental: señal de control para el servomotor de la base y el brazo.

En la figura 6.3 se muestra la respuesta al sistema para la velocidad angular del servomotor de la base y el brazo. En el gráfico se aprecia que en el arranque la velocidad en ambos se incrementa, para luego llegar a converger a cero a los 6.5 seg para la base y a los 6 seg para el brazo. Para ambos casos, la velocidad angular desde el inicio hasta converger a cero presenta oscilaciones con una amplitud de 0.02 rad/seg. Durante el período de control se presenta el fenómeno de chattering que perjudica la vida útil de los servomotores.

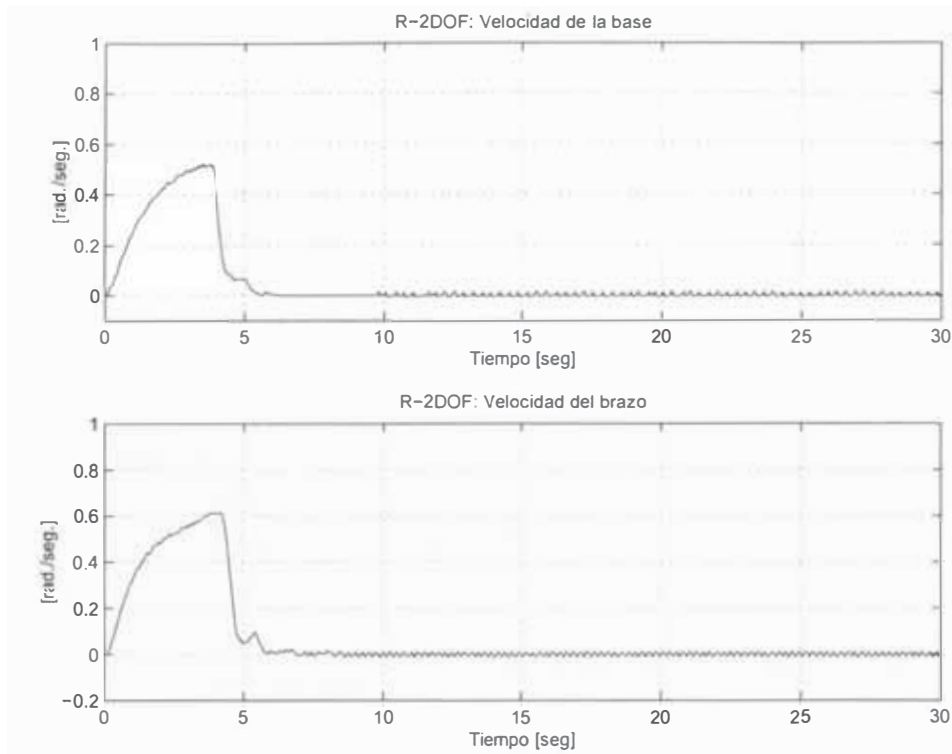


Figura 6.3: Trayectoria Constante Experimental: velocidad del servomotor de la base y el brazo.

6.2 Experimento 2: Control con la Función Sigmo aplicado a una Trayectoria Senoidal

Para este experimento se han usado las trayectorias senoidales con los siguientes datos:

- Condiciones iniciales:
 - $x_1 = 0$, (base)
 - $x_2 = 0$, (brazo)
- Trayectorias deseadas:
 - $xd_1 = \pi/2 \sin(2\pi kT/21)$, trayectoria senoidal de la base
 - $xd_2 = 2\pi/3 \sin(2\pi kT/21)$, trayectoria senoidal del brazo
- Parámetros de sintonización para alcanzar la superficie deslizante:
 - $c_1 = 3.5$ y $e_1 = 0.6$, (base)
 - $c_2 = 3.5$ y $e_2 = 0.6$, (brazo)
- Tiempo de muestreo: $T = 100$ seg.

Los resultados obtenidos para este experimento se muestran en las figuras 6.4, 6.5 y 6.6.

En la figura 6.4 se muestra las salidas controladas para la trayectoria senoidal de la base y del brazo, y que a partir de los 5 seg. para ambos casos sigue a la referencia. Se observa que en la trayectoria de la base y el brazo no existe sobreimpulso. Las señales se han fijado a una frecuencia de $1/21$ Hz de ciclo senoidal y con amplitudes de $\pi/2$ rad y $2\pi/3$ rad, que indican el movimiento angular de la base y el brazo.

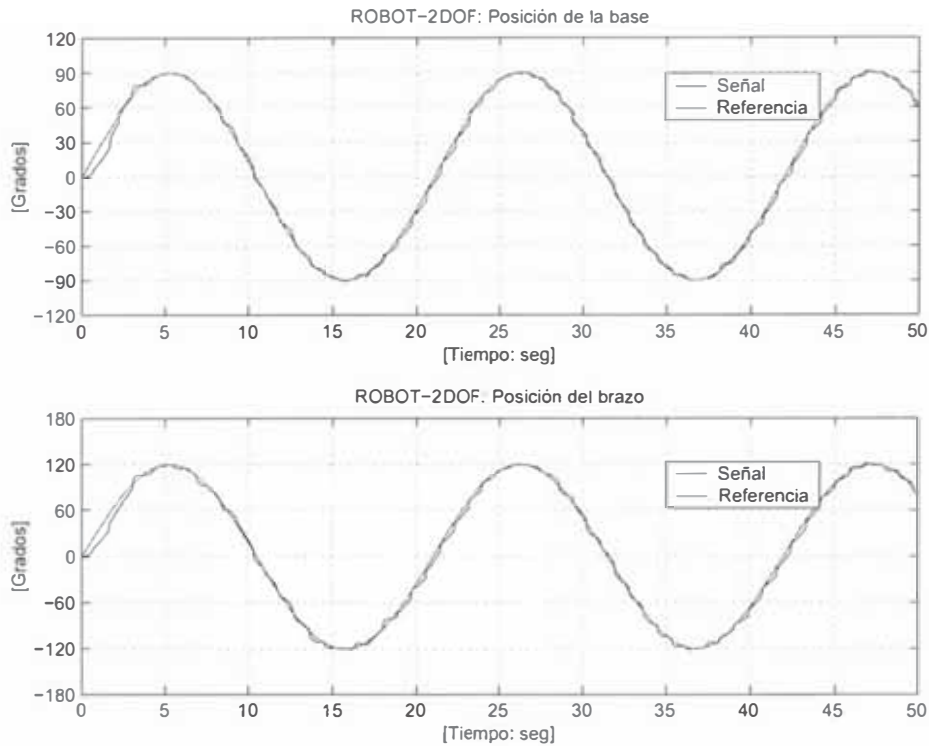


Figura 6.4: Trayectoria Senoidal Experimental: salidas controladas para la base y el brazo.

En la figura 6.5 se muestran las señales de control para el servomotor de la base y el servomotor del brazo. La señal de control para ambos presenta oscilaciones hasta el final del tiempo del experimento siguiendo una aproximación a la trayectoria senoidal. La oscilación que presentan ambas señales es debido al fenómeno de chattering, con una amplitud de 3 voltios para el primer grado y 6 voltios para el segundo grado.

En la figura 6.6 se muestra la respuesta al sistema para la velocidad angular del servomotor de la base y el brazo. En el gráfico se aprecia que en el arranque la velocidad en ambos casos no es senoidal presentando ciertas oscilaciones, después de 6 seg. para ambos casos siguen a la trayectoria senoidal de la referencia con oscilaciones, debido al fenómeno de chattering.

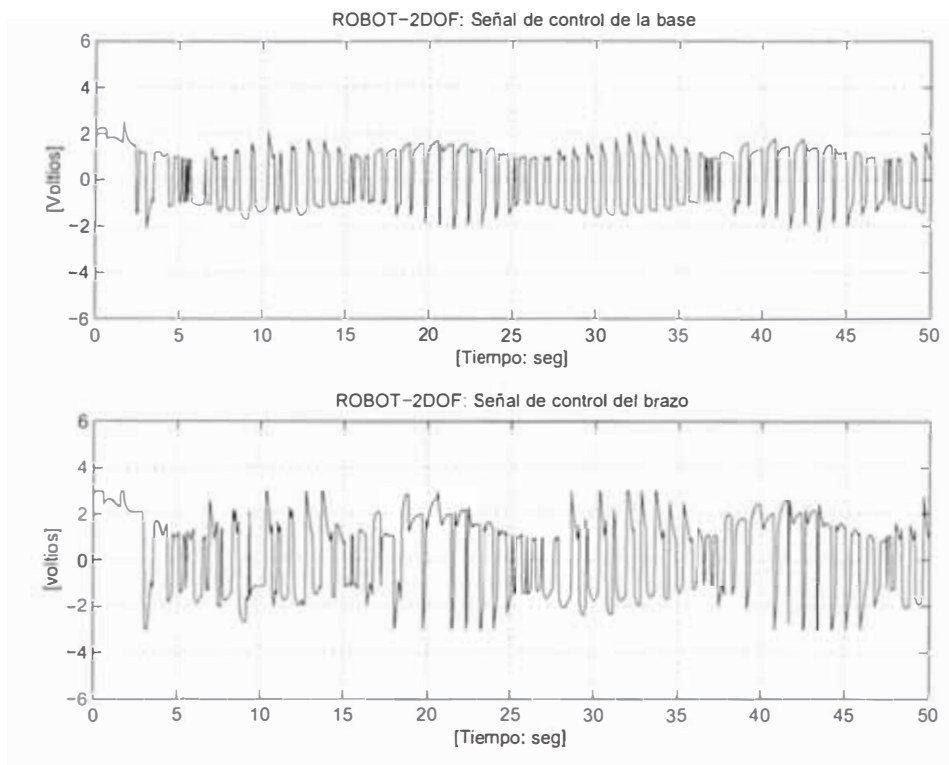


Figura 6.5: Trayectoria Senoidal Experimental: señal de control para el servomotor de la base y el brazo.

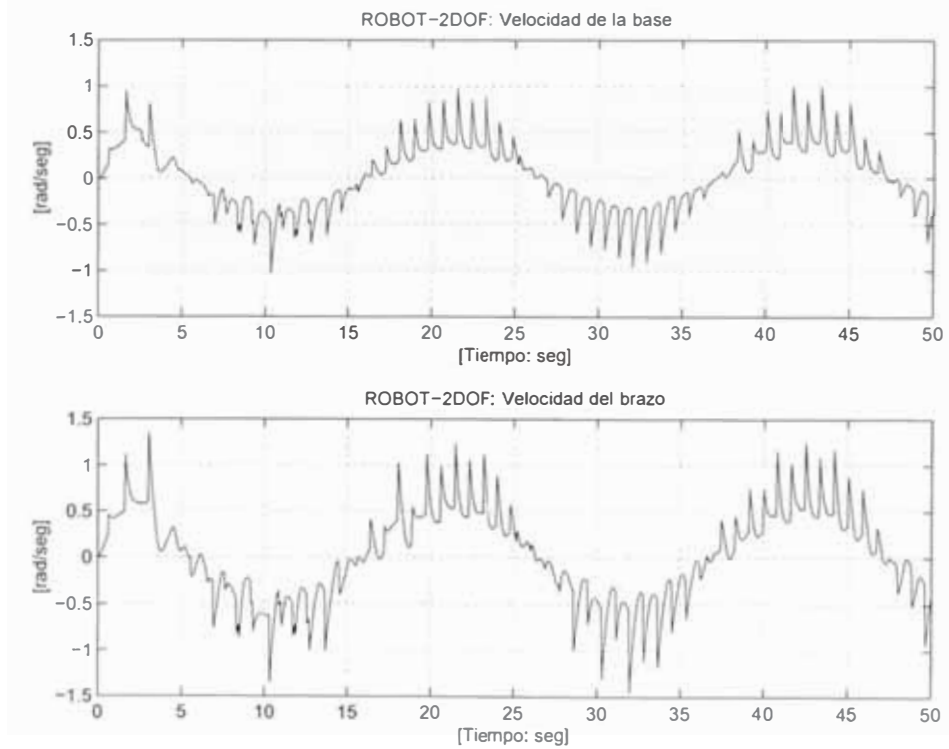


Figura 6.6: Trayectoria Senoidal Experimental: velocidad del servomotor de la base y el brazo.

6.3 Experimento 3: Control con Función Saturación aplicado a una Trayectoria Constante

Para este experimento se ha usado una trayectoria constante con los siguientes datos:

- Condiciones iniciales:
 $x_1 = 0$, (base)
 $x_2 = 0$, (brazo)
- Trayectorias deseadas:
 $x_{d1} = \pi/2$, (posición angular de la base)
 $x_{d2} = 2\pi/3$, posición angular del brazo
- Parámetros de sintonización para alcanzar la superficie deslizante:
 $c_1 = 5$ y $e_1 = 0.5$, (base)
 $c_2 = 5$ y $e_2 = 0.5$, (brazo)
 $\phi = 0.1$
- Tiempo de muestreo: $T = 100$ seg.

Los resultados obtenidos para este experimento se muestran en las figura 6.7, 6.8 y 6.9.

En la figura 6.7 se muestra las salidas controladas para la posición angular de la base y posición angular del brazo, el tiempo de establecimiento es de 5 seg. para la base y 6.5 seg. para el brazo. Se observa que en la trayectoria de la base y del brazo no existe sobreimpulso. Se puede observar que en ambos casos la trayectoria desde el inicio hasta llegar al tiempo de establecimiento presenta muy pocas oscilaciones.

En la figura 6.8 se muestra las señales de control para los dos servomotores. La señal de control para el servomotor de la base varía de +3 a -1 voltios, presentando muy poca oscilación por 6.5 seg., para luego converger aproximadamente a cero, que es donde el proceso ha sido controlado. Para el servomotor del brazo la señal varía de +3 a -3 voltios presentando muy poca oscilación por 7 seg., para luego converger a 0.12 voltios, que es donde el proceso ha sido controlado.

En la figura 6.9 se muestra la respuesta al sistema para la velocidad angular del servomotor de la base y el brazo. En el gráfico se aprecia que en el arranque la velocidad en ambos se incrementa. para luego llegar a converger a cero a los

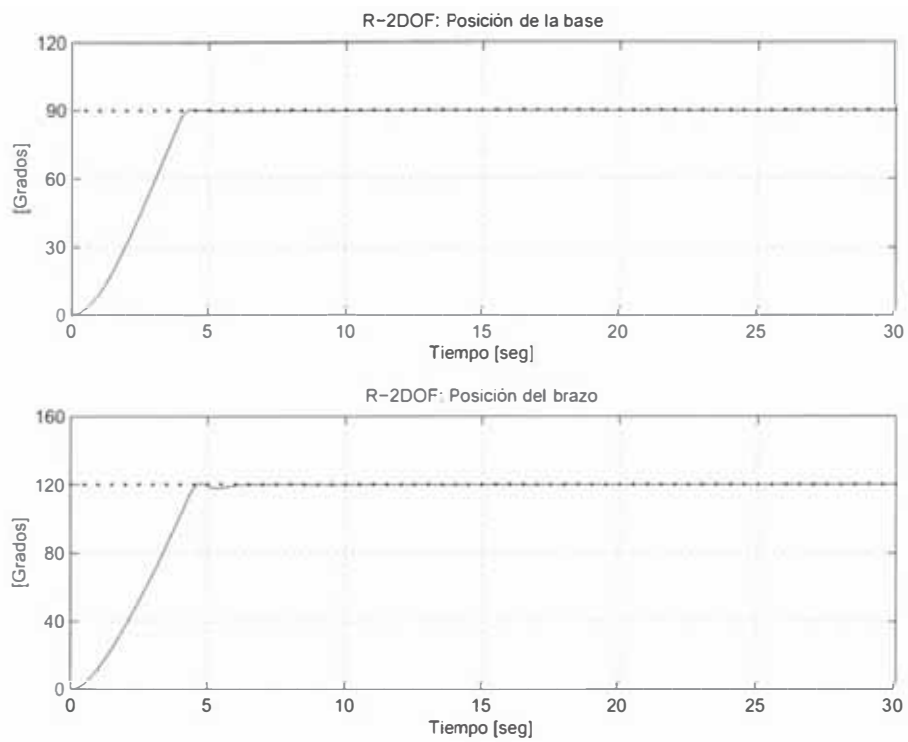


Figura 6.7: Trayectoria Constante Experimental: salidas controladas para la base y el brazo.

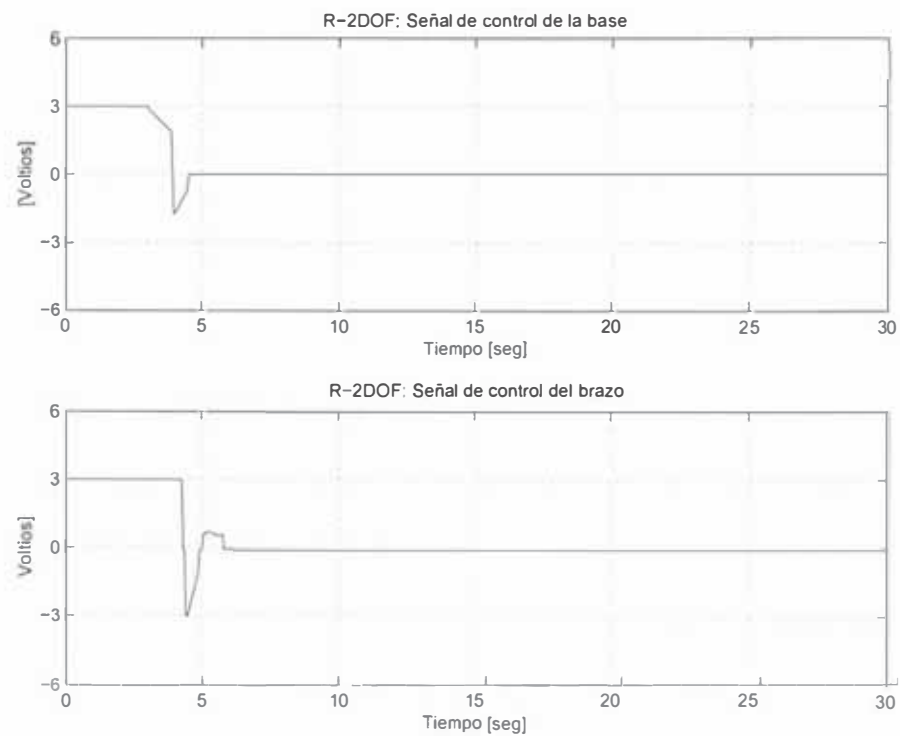


Figura 6. : Trayectoria Constante Experimental: señal de control para el servomotor de la base y el brazo.

6.5 seg para la base y a los 7 seg para el brazo. Para ambos casos, la velocidad angular desde el inicio hasta converger a cero presenta oscilaciones.

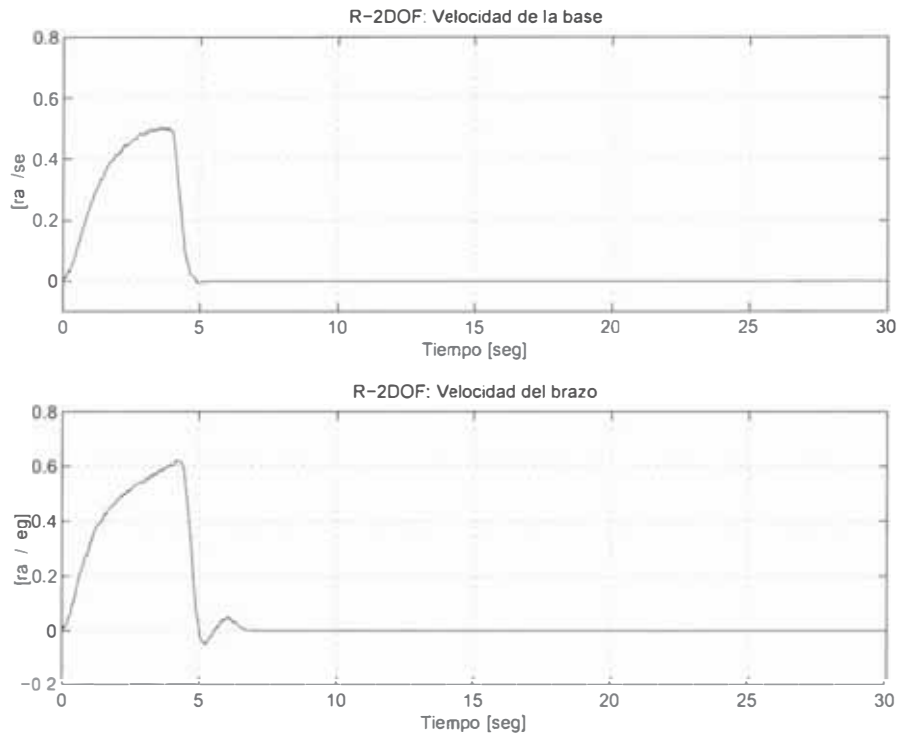


Figura 6.9: Trayectoria Constante Experimental: velocidad del servomotor de la base y el brazo.

6.4 Experimento 4: Control con Función Saturación aplicado a una Trayectoria Senoidal

Para este experimento se ha usado una trayectoria senoidal con los siguientes datos:

- Condiciones iniciales:

$$x_1 = 0, \text{ (base)}$$

$$x_2 = 0, \text{ (brazo)}$$

- Trayectorias deseadas:

$$x_{d1} = \pi/2 \cos(2\pi kT/21), \text{ trayectoria senoidal de la base}$$

$$x_{d2} = 2\pi/3 \cos(2\pi kT/21), \text{ trayectoria senoidal del brazo}$$

- Parámetros de sintonización para alcanzar la superficie deslizante:

$$c_1 = 5 \text{ y } e_1 = 0. \text{ , (base)}$$

$$c_2 = 3.5 \text{ y } e_2 = 0.5, \text{ (brazo)}$$

$$\phi = 0.1$$

- Tiempo de muestreo: $T = 100 \text{ seg.}$

Los resultados obtenidos para este experimento se muestran en las figuras 6.10, 6.11 y 6.12.

En la figura 6.10 se muestra las salidas controladas para la trayectoria senoidal de la base y del brazo, y que a partir de los 5 seg. para ambos casos sigue a la referencia. Se observa que en la trayectoria de la base y el brazo no existe sobreimpulso. Las señales se han fijado a una frecuencia de $1/21 \text{ Hz}$ de ciclo senoidal y con amplitudes de $\pi/2 \text{ rad}$ y $\pi/2 \text{ rad}$, que indican el movimiento angular de la base y el brazo.

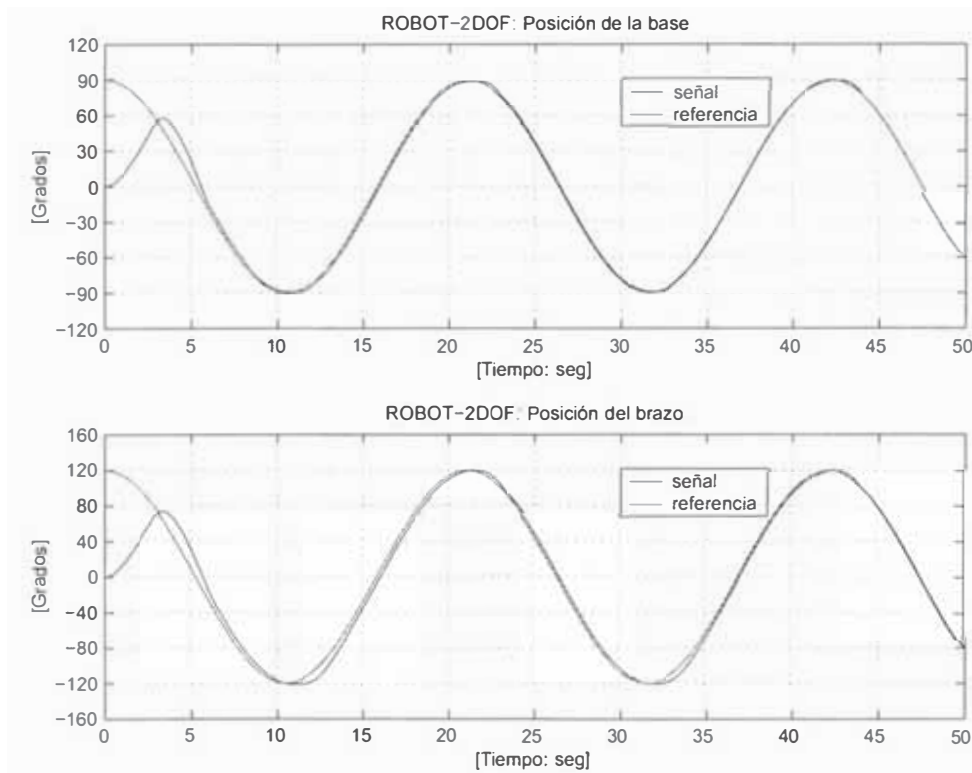


Figura 6.10: Trayectoria Senoidal Experimental: salidas controladas para la base y el brazo.

En la figura 6.11 se muestran las señales de control para el servomotor de la base y el servomotor del brazo. La señal de control para ambos llega hasta 3 voltios por un instante de tiempo (4 seg.), posteriormente presenta oscilaciones hasta el final del tiempo del experimento siguiendo una aproximación a la

trayectoria senoidal. La oscilación que presentan ambas señales es debido al gran esfuerzo que realizan los servomotores para que el sistema sea controlado.

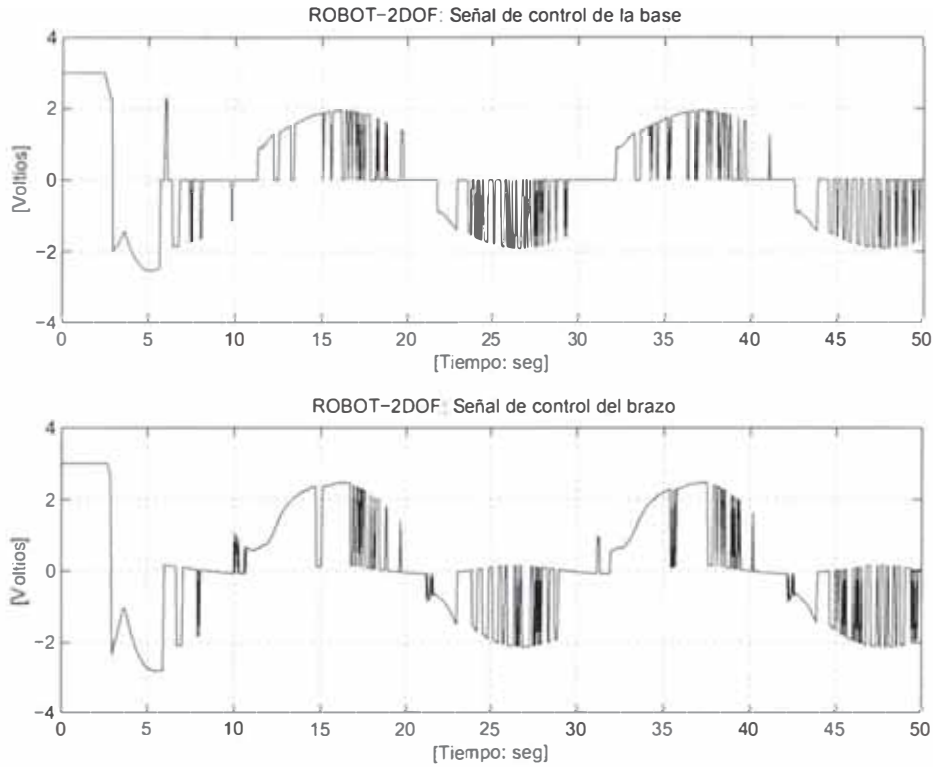


Figura 6.11: Trayectoria Senoidal Experimental: señal de control para el servomotor de la base y el brazo.

En la figura 6.12 se muestra la respuesta al sistema para la velocidad angular del servomotor de la base y el brazo. En el gráfico se aprecia que en el arranque la velocidad en ambos casos no es senoidal presentando ciertas oscilaciones, después de 6 seg. para ambos casos siguen a la trayectoria senoidal de la referencia con pequeñas oscilaciones, debido a que los servomotores están ejerciendo fuerza de control.

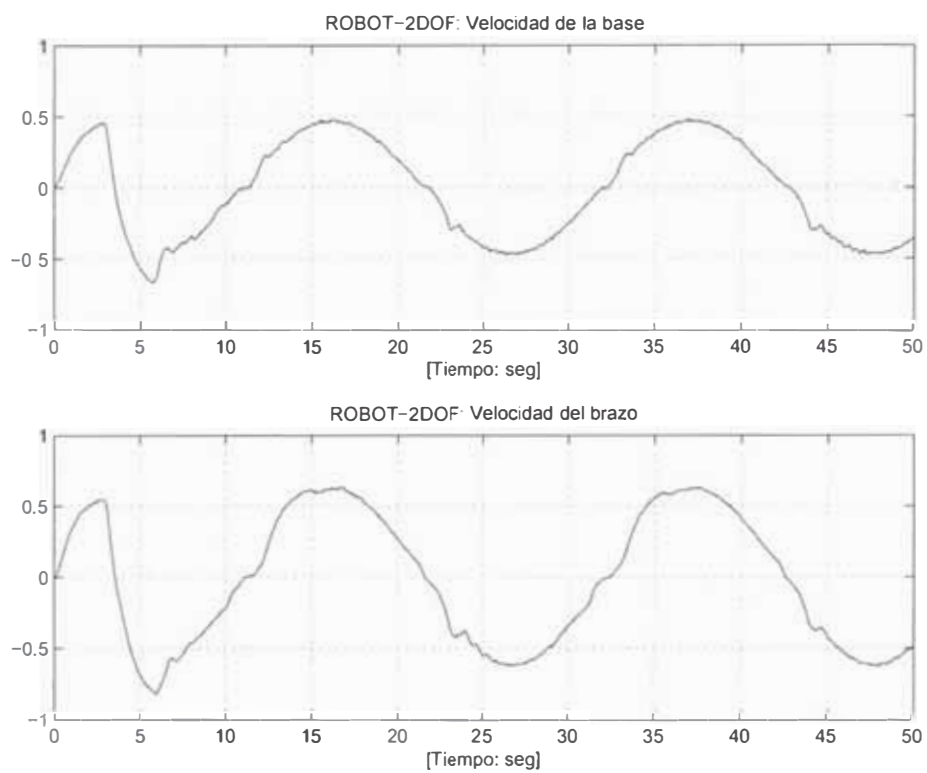


Figura 6.12: Trayectoria Senoidal Experimental: velocidad del servomotor de la base y el brazo.

Capítulo 7

Conclusiones

En este capítulo se presenta un resumen de las conclusiones derivadas de este trabajo, así como también algunas recomendaciones para investigaciones futuras.

7.1 Conclusiones

1. El robot manipulador esférico ha sido construido con material de aluminio, para la fabricación de la base y el brazo. Así mismo se ha tenido en cuenta el buen diseño para la fabricación de las bocinas de acoplamiento entre los ejes de salidas de los servomotores y la base y el brazo, de tal manera que se pueda evitar posibles desajustes que puedan ocasionar errores en los resultados experimentales. El proceso construido se encuentra disponible en la SPGSE-FIEE para futuros experimentos.
2. El proceso del robot manipulador esférico ha sido construido con el propósito de implementar los experimentos en tiempo real relacionados con el sistema de control por modo deslizante, así como también se puede usar para otras técnicas de control.
3. Para el diseño del sistema de control fue necesario determinar el modelo dinámico del proceso, ya que la técnica de control no lineal empleada lo requiere. Los resultados experimentales determinados en tiempo real fueron satisfactorios según consta en los gráficos obtenidos en el capítulo 6. Tales resultados experimentales han demostrado que el sistema de control no lineal diseñado, es apto para el seguimiento de trayectorias arbitrarias de la base y del brazo del robot manipulador esférico.
4. El problema planteado fue el que las posiciones de la base y del brazo sigan trayectorias arbitrarias usando control por modo deslizante. Las simulaciones realizadas en el capítulo 5 han demostrado que el modelo obtenido en el

capítulo 2 es válido y cumple con las exigencias de un modelo no lineal multivariable con propósitos de control. Del mismo modo, tales simulaciones también han demostrado que el sistema de control no lineal multivariable empleando dicha técnica de control, cumple las condiciones de diseño impuestas previamente: seguimiento de las salidas controladas con respecto a señales arbitrarias de referencia con mínimo sobreimpulso, mínimo tiempo de estabilización y error en estado estable nulo.

7.2 Recomendaciones para Trabajos Futuros

Partiendo de los resultados obtenidos en este trabajo, se recomienda lo siguiente:

1. Para un diseño más completo, es necesario agregar al sistema construido un eslabón más y un efector final (por ejemplo una pinza rotórica), de tal manera que se tenga un robot de 3 grados de libertad por controlar. El efector final puede contar dos servomotores para giro y apertura o cierre de la pinza, los cuales pueden ser monitoreados a lazo abierto. De esta manera, los diseños de los sistemas de control correspondientes, podrían ya ser orientados a aplicaciones industriales.
2. También se requiere investigar el control para robots móviles.
3. El sistema implementado y construido puede ser usado para futuros trabajos de tesis en las áreas de control no lineal e inteligencia artificial.

Bibliografía

- [1] A. Barricentos, L. Peñín, C. Balaguer R. Aracil. *Fundamentos de Robótica*. McGraw Hill, 1997.
- [2] F. Torres, J. Pomares, P. Gil S. Puente R. Aracil. *Robot y Sistemas Sensoriales*. Prentice Hall, 2002.
- [3] Ferdinand P. Berr, E. Russell Johnston. *Dinámica*. McGraw Hill, 1996.
- [4] Instruments, National. *Lab-PC+ User Manual*. National Instruments Corporation, 1994.
- [5] Isidori, Alberto. *NonLinear Control Systems (Second Edition)*. Springer-Verlag Berlín, 1989.
- [6] Jiandong, Wang. “Sliding Mode Control” *EE60 Nonlinear Control System Course Project*, 1–19 (apr 2002).
- [7] Julio, Braslavsky H. “Sistemas No Lineales.” 2000.
- [8] K. S. Fu, R. C. González, C.S.G. Lee. *Robótica, Control, Detección, Visión, Inteligencia*. McGraw Hill, 1990.
- [9] Khalil, Hassan K. *NonLinear Systems*. Prentice Hall, 1996.
- [10] M., J. Díaz. *Mecánica Racional Estática*. Editorial Universo, 1993.
- [11] Maravi, Ronald. *Diseño e implementación de un Sistema de Control No Lineal Multivariable por Realimentación de Estado aplicado a un Robot Manipulador Esférico de 2 Grados de Libertad*. MS thesis, Universidad Nacional de Ingeniería, may 2004.

- [12] M.F. Mendes, W. Karaus, E.R. de Pieri. “Variable structure position control of an industrial robotic manipulator.” 2002.
- [13] Moshen, Shahinpoor. *A Robot Engineering Textbook*. Harper-Row Publisher, 1987.
- [14] Nakamura, Shoichiro. *Análisis Numérico y Visualización Gráfica*. Prentice Hall, 1997.
- [15] Paden, Brade E. and Shankar S. Sastry. “A calculus for Computing Filippovs Differential Inclusion with Aplication to the Variable Structure Control of Robot Manipulator,” *IEEE Transactions on circuits and Systems*, 34(1):73–87 (January 1987).
- [16] Part Enander, Eva and Anders Sjoberg. *The Matlab 5 Handbook*. Addison Wesley, 1999.
- [17] Rodriguez, Ricardo. *Diseño e implementación de un Sistema de Control No Lineal Multivariable por Modo Deslizante aplicado a un Manipulador Robótico Traslacional de 2 Grados de Libertad*. MS thesis, Universidad Nacional de Ingeniería, august 2003.
- [18] Rojas, Arturo. *Applied MIMO NonLinear Control Real Time Implementations*. En construcción, 2002.
- [19] Slotine, Jean-Jacques E. *Applied NonLinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [20] V.I., Utkin. “Variable structure systems with sliding modes,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(2):212–222 (April 1977).