

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL**



**ANÁLISIS DE LOSAS UTILIZANDO EL MÉTODO  
DE LOS ELEMENTOS FINITOS**

**TESIS**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE  
INGENIERO CIVIL**

**VÍCTOR POOL ROJAS YUPANQUI**

**PROMOCIÓN 89-II**

**LIMA-PERU  
1995**

*A mi familia, por el cariño,  
confianza y apoyo constante  
que siempre me brindan.*

*A Marisol, por la ternura y  
confianza que compartimos.*

*A mis Profesores.*

*A mis compañeros y colegas.*

*A mis alumnos.*

*Agradecimiento:*

*Al Dr. Andreas Menzel.*

*Por los valiosos y oportunos  
consejos que me supo brindar.*

*Por la dedicación brindada en  
el dictado de los cursos:*

*Análisis Estructural I y III  
para el antegrado, y Elementos  
Finitos y Análisis No Lineal  
de Barras en la Escuela de  
Graduados de Nuestra  
Facultad durante su estadía en  
nuestro país (1989-1995).*

*Al CISMID, por el apoyo  
brindado en la realización del  
presente trabajo.*



# ANÁLISIS DE LOSAS UTILIZANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

## ÍNDICE

INTRODUCCIÓN .....	pág. 1
<b>CAPÍTULO 1 Teoría de losas .....</b>	<b>3</b>
1.1 Generalidades .....	3
1.2 Teoría de Kirchhoff .....	4
1.2.1 Relaciones deformación-desplazamiento .....	6
1.2.2 Relaciones constitutivas (esfuerzo-deformación).....	8
1.2.3 Equilibrio de fuerzas.....	11
1.2.4 Ecuación diferencial básica de losas .....	13
1.3 Teoría de Reissner-Mindlin .....	21
1.3.1 Relaciones deformación-desplazamiento .....	22
1.3.2 Relaciones constitutivas.....	25
1.3.3 Sistema de ecuaciones diferenciales de losas .....	28
<b>CAPÍTULO 2 El método de los Elementos Finitos en losas .....</b>	<b>30</b>
2.1 Generalidades .....	30
2.2 Formulación general del método .....	37
2.2.1 Consideraciones de convergencia.....	41
2.2.2 Elementos isoparamétricos .....	42
2.3 Elementos finitos para losas.....	44
2.3.1 Elementos triangulares para losas de Kirchhoff.....	46
2.3.2 Elementos triangulares para losas de Reissner-Mindlin...	50
<b>CAPÍTULO 3 Análisis elástico de losas .....</b>	<b>53</b>
3.1 Elementos de losa delgada DK.....	53
3.2 Descripción del elemento triangular de losa delgada DKT.....	54
3.3 Aplicación .....	68

<b>CAPÍTULO 4</b>	<b>Análisis no lineal de losas</b> .....	71
4.1	Formulación general del problema.....	71
4.2	Análisis de losas de concreto armado .....	77
4.2.1	Modelos de los materiales componentes para el análisis no lineal .....	81
4.2.2	Agrietamiento y adherencia .....	86
4.3	Modelamiento de las losas para el análisis no lineal .....	91
4.4	Aplicación .....	97
<b>CAPÍTULO 5</b>	<b>Conclusiones</b> .....	101
<b>APÉNDICE</b>	<b>Listado del Programa de Cómputo para el Análisis Elástico de Losas...</b>	103
<b>REFERENCIAS</b>	.....	114

# INTRODUCCIÓN

Las losas de concreto armado son elementos estructurales comúnmente utilizados en la práctica de la ingeniería. Sin embargo, el conocimiento del comportamiento de una losa tanto en el rango elástico lineal como en el rango no lineal es ligero. La complejidad de su formulación matemática trae como consecuencia el ahorro de energía para su desarrollo, y más bien dar paso al uso de soluciones presentadas para situaciones típicas de forma y condiciones de apoyo para losas isotrópicas.

En el pasado, situaciones especiales eran planteadas apoyándose en la solución de la ecuación diferencial de la losa, vía métodos numéricos como es el caso de las diferencias finitas. En la actualidad, el método de los elementos finitos, que implementado en programas de cómputo, permite plantear la solución de losas con diferentes condiciones de apoyo, forma y carga.

El análisis elástico de losas se aprovecha en la determinación de deflexiones, así como niveles de esfuerzos en las secciones para la determinación del refuerzo necesario. Se emplea un elemento denominado DKT; en el cual se aplican las hipótesis de Kirchhoff en puntos discretos de una losa basada en la teoría de Reissner-Mindlin. El propósito es conseguir un elemento compatible y de bajo costo de cálculo computacional para la determinación de la matriz de rigidez. Una ventaja adicional es el evitar el bloqueo que presentan los elementos bajo la teoría de Reissner-Mindlin frente a casos de losas delgadas.

Se introducen nociones sobre análisis no lineal, dando énfasis a los casos de no linealidad del material en estructuras de concreto armado. El empleo de este tipo de análisis trae como ventaja, la determinación del nivel de máxima carga a aplicar, así como el desarrollo en progreso de la formación de grietas en el concreto y fluencia en los aceros de refuerzo.

Para el análisis elástico lineal, se proporciona en el Apéndice el listado, en lenguaje BASIC, un simple programa de análisis de losas por elementos finitos utilizando el elemento DKT. Para el análisis no lineal, el uso del programa proporcionado en la referencia [10] es presentado.

Finalmente, es de interés en el presente trabajo de tesis, presentar la formulación del análisis estructural de losa, con el objeto de brindar al posible lector un panorama completo sobre el tema tratado.

# CAPÍTULO 1

## TEORÍA DE LOSAS

### 1.1 GENERALIDADES

La determinación de los esfuerzos y deformaciones en losas sometidas a cargas perpendiculares a su plano, es planteada según diversas teorías. Así, la teoría más clásica para el caso de *losas delgadas* es la Teoría de Kirchhoff. Por otro lado, se tienen teorías más elaboradas como la Teoría de Reissner-Mindlin para el caso de losas de gran espesor o denominadas también *losas gruesas*.

La diferencia entre estas teorías radica, en esencia, en las simplificaciones que tienen en consideración para reducir un problema tridimensional a otro problema de un orden menor de dimensión.

En el presente trabajo de tesis se ha considerado necesario presentar estas dos teorías con el fin de tener un mayor entendimiento en la aplicación de las mismas para solución del problema de losas utilizando el método de los elementos finitos.

## 1.2 TEORÍA DE KIRCHHOFF

Para la losa libre de carga mostrada en la Figura 1.1(a), el plano  $x$ - $y$  coincide con su plano medio. Cuando se aplica una carga en dirección perpendicular a su plano, la losa se deforma, Figura 1.1(b); las componentes del desplazamiento de un punto según el sistema de referencia  $xyz$  están representadas por  $u$ ,  $v$  y  $w$ , respectivamente. Sin embargo, para un punto  $A(x_n, y_n)$  del plano medio, se considera que éste sólo se desplaza con una deflexión  $w$  en la dirección  $z$ .

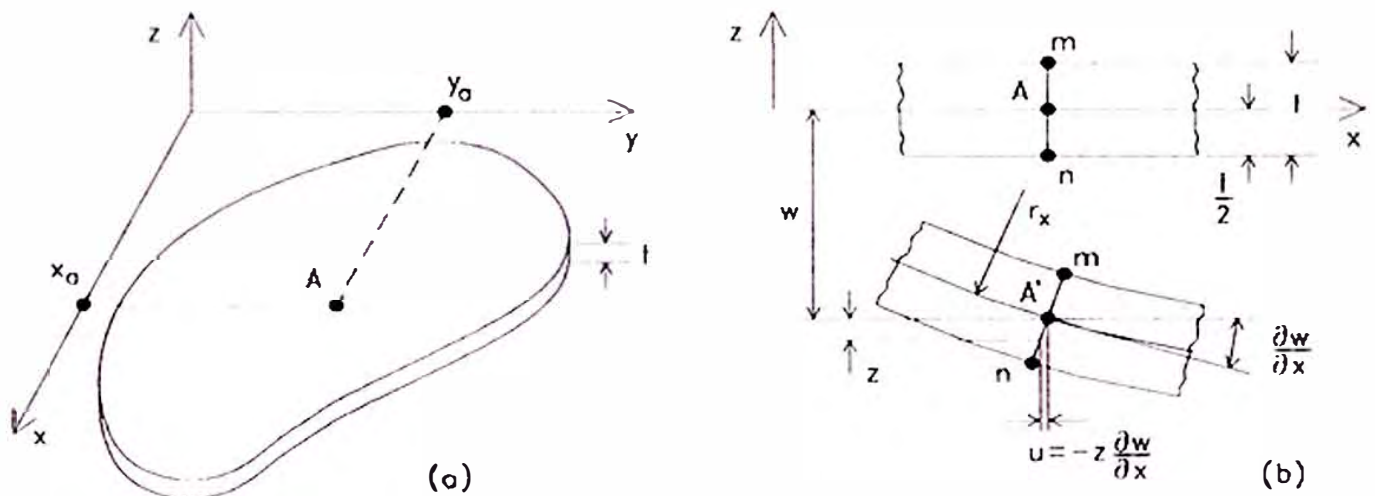


Figura 1.1 Losas. (a) Sistema de referencia. (b) Deformación

Las suposiciones fundamentales de la teoría de Kirchhoff o también llamada teoría de pequeñas deflexiones o teoría clásica para losas isotrópicas, homogéneas, elásticas, están basadas en la geometría de deformaciones. Las suposiciones antes mencionadas son las siguientes[22]:

- 1) La deflexión del plano medio es pequeña, comparada con el espesor de la losa. La pendiente de la superficie deformada es, además, muy pequeña y el cuadrado de la pendiente es una cantidad no significativa en comparación con la unidad.
- 2) El plano medio no se deforma cuando se flexiona la losa.
- 3) Los esfuerzos normales al plano medio,  $\sigma_x$ , son pequeños en comparación con los otros componentes de esfuerzos y se pueden despreciar. De esta forma, se asume la existencia del estado plano de esfuerzos.
- 4) Las secciones planas inicialmente normales a su superficie media, permanecen planas y normales a la superficie del plano medio después de la flexión. Esto indica que las deformaciones de corte verticales  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  se desprecian. La deflexión de la losa está entonces, asociada principalmente con las deformaciones flexionantes. De esto se deduce que la deformación normal  $\epsilon_x$  resultante de la carga transversal se puede omitir.

Estas suposiciones son conocidas como hipótesis de Kirchhoff, y son análogas con las suposiciones asociadas a la teoría de flexión de vigas. De acuerdo a estas suposiciones, el problema tridimensional de la losa se reduce a un problema de sólo dos dimensiones.

Por otro lado, cuando las deflexiones no son pequeñas, la flexión de la losa está acompañada de deformaciones del plano medio, con lo cual, las suposiciones 1) y 2) no son aplicables. En losas gruesas, los esfuerzos cortantes son importantes, por tanto, las suposiciones 3) y 4) no son aplicables.

De acuerdo a las hipótesis de Kirchhoff, se puede escribir la ecuación para las deflexiones de una losa sometida a cargas transversales, para lo cual se necesita plantear las siguientes tres relaciones:

- Deformación-desplazamiento
- Constitutivas (esfuerzo-deformación)
- Equilibrio de fuerzas

### 1.2.1 RELACIONES DEFORMACIÓN-DESPLAZAMIENTO

De las relaciones deformación-desplazamiento para un punto[22]:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}
 \end{aligned}
 \tag{Ec. (1.1)}$$

y considerando la hipótesis 3) de Kirchhoff para la teoría clásica de losas:

$$\varepsilon_z = 0, \quad \gamma_{xz} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0
 \tag{Ec. (1.2)}$$

Se pueden obtener las siguientes relaciones



para  $\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$  se obtiene  $w = w(x,y)$  Ec. (1.3)

para  $\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$   $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}$

$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_0(x,y)$  Ec. (1.4)

para  $\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$   $\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y}$

$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x,y)$  Ec. (1.5)

Pero,  $u_0(x,y)$  y  $v_0(x,y)$  representan los desplazamientos del plano medio de la losa, por tanto  $u_0 = v_0 = 0$ , según la hipótesis 2) de la teoría clásica de losas. Con lo cual:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$
Ec. (1.6)

introduciendo en las Ecs. (1.1) las deducciones expresadas en (1.2) y (1.6), éstas se simplifican como sigue:

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$
Ec. (1.7)

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

## 1.2.2 RELACIONES CONSTITUTIVAS (ESFUERZO-DEFORMACIÓN)

De la teoría de la elasticidad, para un material ortotrópico, se definen las siguientes relaciones esfuerzo-deformación (en representación matricial):

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (1.8a)}$$

donde  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  son los módulos de Young en las direcciones principales 1, 2 y 3;  $G_{12}$ ,  $G_{13}$  y  $G_{23}$  son los módulos de corte. De forma abreviada, la Ec. (1.8a) se presenta como:

$$\varepsilon = C \sigma \quad \text{Ec. (1.8b)}$$

Por el teorema de reciprocidad:

$$\begin{aligned} \nu_{12} E_2 &= \nu_{21} E_1 \\ \nu_{13} E_3 &= \nu_{31} E_1 \\ \nu_{23} E_3 &= \nu_{32} E_2 \end{aligned} \quad \text{Ec. (1.9)}$$

Para un material isotrópico,  $E_1 = E_2 = E_3 = E$ ;  $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = \nu$ ;  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = G$ .

Con lo cual, la matriz denominada  $\mathbf{C}$  se transforma en:

$$\mathbf{C} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{array} \right] \quad \text{Ec. (1.10)}$$

Cumpléndose en un material isotrópico:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{Ec. (1.11)}$$

Por lo cual:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{E} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{array} \right] \quad \text{Ec. (1.12)}$$

Por otro lado, de acuerdo a las hipótesis de Kirchhoff, se tiene el estado plano de esfuerzos para las losas, donde:

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0 \quad \text{Ec. (1.13)}$$

con lo que se obtiene, introduciendo las Ecs. (1.12) y (1.13) en (1.8a):

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (1.14)}$$

Luego, calculando los esfuerzos en función de las deformaciones, se obtiene:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad \text{Ec. (1.15)}$$

## 1.2.3 EQUILIBRIO DE FUERZAS

Considerando un elemento losa  $dx dy$  sometido a una carga uniformemente distribuida  $p$  por unidad de área.

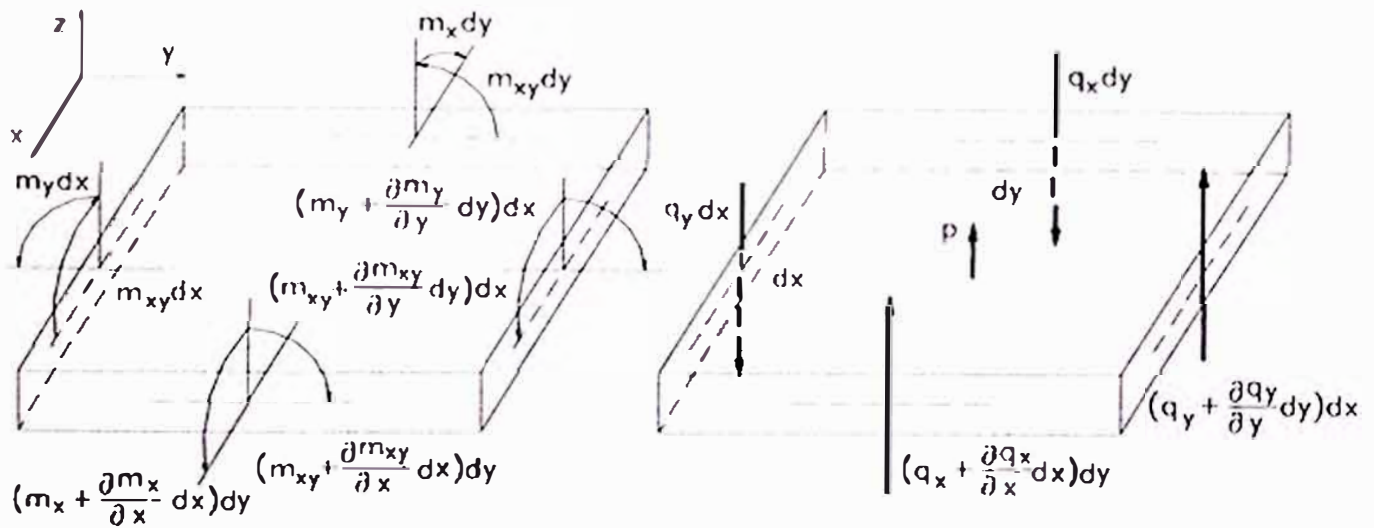


Figura 1.2 Esfuerzos en un elemento diferencial de losa

Por equilibrio de fuerzas en la dirección  $z$ , se tiene:

$$dy \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) + dx \left( q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) + p dx dy = q_x dy + q_y dx$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p = 0 \quad \text{Ec. (1.16)}$$

Por equilibrio de momentos alrededor del eje  $x$ , se tiene:

$$\left( m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} dx \right) dy + \left( m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y} dy \right) dx =$$

$$q_y dx \frac{dy}{2} + \left( q_y dx + \frac{\partial q_y}{\partial y} dx dy \right) \frac{dy}{2} + m_{xy} dy + m_y dx$$

Ec. (1.17)

simplificando la expresión, se obtiene:

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} - q_y = 0$$

Ec. (1.18)

De forma similar, se toma momentos con respecto al eje y, con lo que se obtiene:

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial m_x}{\partial x} - q_x = 0$$

Ec. (1.19)

operando las Ecs. (1.18) y (1.19) para luego introducirlas en la Ec. (1.16)

$$q_x = \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial m_x}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial q_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2}$$

Ec. (1.20)

$$q_y = \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial q_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2}$$

Ec. (1.21)

Entonces, la ecuación diferencial de equilibrio para losas esta dada por

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + p = 0 \quad \text{Ec. (1.22)}$$

que en representación, matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_{xy} \\ m_y \end{bmatrix} = -p \quad \text{Ec. (1.23)}$$

## 1.2.4 ECUACIÓN DIFERENCIAL BÁSICA DE LOSAS

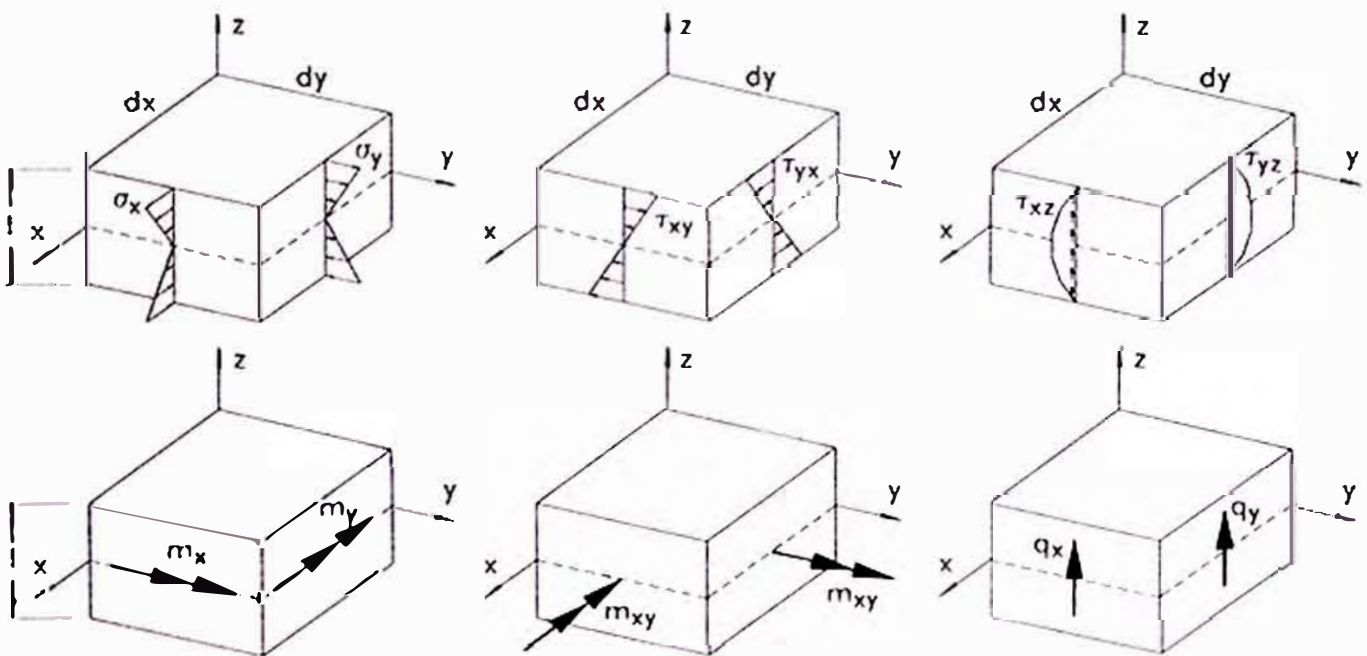
De las tres relaciones planteadas dadas en las Ecs. (1.7), (1.15) y (1.23), introduciendo las Ecs. (1.7) en (1.15) se obtienen las relaciones esfuerzo-desplazamiento:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{E z}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{E z}{1 - \nu^2} \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \gamma_{xy} &= -\frac{E z}{1 + \nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad \text{Ec. (1.24)}$$

o también:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2}(\kappa_x + \nu\kappa_y) \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2}(\nu\kappa_x + \kappa_y) \\ \gamma_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu}\kappa_{xy}\end{aligned}\quad \text{Ec. (1.25)}$$

denominándose  $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$  y  $\kappa_{xy}$ , como curvaturas o razón de cambio del ángulo de la pendiente a lo largo del elemento.



**Figura 1.3** Distribución de esfuerzos en losas

Para la determinación de los esfuerzos resultantes en una losa, se requiere integrar los esfuerzos diferenciales. Así, similar a una viga, una losa plana soporta cargas transversales por acción flexionante. La Figura 1.3 muestra los esfuerzos que actúan en las secciones transversales a los ejes  $x$  e  $y$  de una losa cuyo material es homogéneo y elástico lineal. Los esfuerzos normales  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  varían linealmente con respecto a  $z$  y están asocia-



dos con los momentos flectores  $m_x$  y  $m_y$ . Los esfuerzos de corte  $\tau_{xy}$  también varían linealmente con respecto a  $z$  y están asociados con el momento torsional  $m_{xy}$ . El esfuerzo normal  $\sigma_z$  es pequeño en comparación con  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$ . Los esfuerzos transversales de corte  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  varían cuadráticamente con respecto a  $z$ .

Así, para la determinación del esfuerzo resultante flexionante alrededor del eje  $y$ , se tiene:

$$\int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x dy) z dz = dy \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz = dy m_x$$

$$m_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz \quad \text{Ec. (1.26)}$$

donde  $m_x$  es el momento resultante flexionante por unidad de longitud.

Ecuaciones similares se pueden plantear para los demás esfuerzos resultantes, así se tiene:

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad \text{Ec. (1.27)}$$

y

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} dz \quad \text{Ec. (1.28)}$$

integrando las relaciones obtenidas anteriormente, esfuerzo-desplazamiento:

integrando las relaciones obtenidas anteriormente, esfuerzo-desplazamiento:

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} -\frac{Ez}{1-\nu^2}(\kappa_x + \nu\kappa_y) \\ -\frac{Ez}{1-\nu^2}(\nu\kappa_x + \kappa_y) \\ -\frac{Ez}{1+\nu}\kappa_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad \text{Ec. (1.29)}$$

para integrar, se extrae del integrando el factor independiente de  $z$ :

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{E}{1-\nu^2}(\kappa_x + \nu\kappa_y) \\ -\frac{E}{1-\nu^2}(\nu\kappa_x + \kappa_y) \\ -\frac{E}{1+\nu}\kappa_{xy} \end{bmatrix} \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \kappa_x + \nu\kappa_y \\ \nu\kappa_x + \kappa_y \\ (1-\nu)\kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{Ec.(1.30)}$$

definiéndose  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ , como la rigidez flexionante de una losa. Finalmente:

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = -D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial xy} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (1.31)}$$

La Ecuación diferencial básica de losas puede ser obtenida entonces, introduciendo la Ec. (1.31) en la Ec. (1.23):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x y} \end{bmatrix} = \frac{P}{D} \quad \text{Ec. (1.32)}$$

operando se obtiene:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{P}{D} \quad \text{Ec. (1.33)}$$

Denominándose a  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  operador de Laplace.

Finalmente, La ecuación diferencial de equilibrio, la cual debe ser satisfecha en la losa es la mostrada en la Ec. (1.33). La distribución de esfuerzos en una losa debe también acomodarse a las condiciones de equilibrio con respecto a fuerzas o desplazamientos prescritos en las condiciones de borde.

Para una losa, la solución de la ecuación diferencial requiere que dos condiciones de borde deben ser satisfechas en cada extremo. Se puede formular una variedad de condiciones de borde comunes, en este caso considerando las condiciones de borde aplicables a lo largo del borde  $x = a$  en el caso de una losa rectangular:

Para un *borde empotrado*, ambos la deflexión y la pendiente deben restringirse, esto es

$$w = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{Ec. (1.34)}$$

Para un *borde simplemente apoyado* o también denominado borde de Navier, la deflexión y el momento flector, ambos deben ser nulos.

$$w = 0 \quad m_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{Ec. (1.35a)}$$

De la primera ecuación en (1.35a) se deduce que  $\partial w / \partial y = 0$  y  $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$ , por tanto introduciendo esta condición en la segunda ecuación de (1.35a), las condiciones pueden simplificarse como sigue

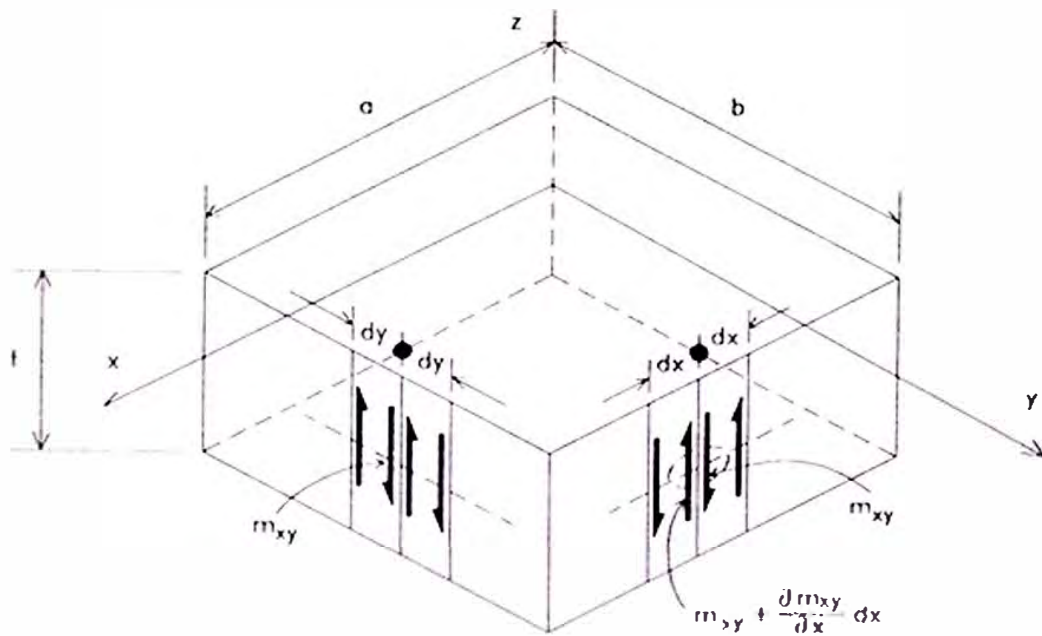
$$w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{Ec. (1.35b)}$$

Para un *borde libre*, los momentos flexionante y torsor, y el esfuerzo cortante vertical son nulos.

$$m_x = 0 \quad m_{xy} = 0 \quad q_x = 0 \quad \text{Ec. (1.36a)}$$

Sin embargo, una representación equivalente debe ser utilizada para que la condición del momento torsor y el esfuerzo cortante sean juntas, así

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{Ec. (1.36b)}$$



**Figura 1.4 Esfuerzos en los bordes libres de las losas**

Esta expresión se deduce, para el caso de una losa rectangular como se muestra en la Fig. 1.4, considerando dos elementos sucesivos de longitud  $dx$  en el extremo  $y = b$ ; en el elemento de la derecha actúa un momento torsor de  $m_{yx} dx$ ; mientras que en el elemento de la izquierda actúa un momento torsor de  $[m_{yx} + (\partial m_{yx} / \partial x) dx] dx$ . Como se aprecia en la Figura 1.4, los momentos son reemplazados con pares de fuerzas estáticamente equivalentes. Esto es, en una región infinitesimal del borde mostrado según la línea punteada, se muestra la fuerza  $m_{yx}$  dirigida hacia arriba y la fuerza  $m_{yx} + (\partial m_{yx} / \partial x) dx$  dirigida hacia abajo. La suma algebraica de estas dos fuerzas debe ser añadido a la fuerza cortante  $q_y$  para producir una fuerza cortante efectiva por unidad de longitud para un extremo paralelo al eje  $y$ ,  $q_y^*$ , donde

$$q_y^* = q_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right] \quad \text{Ec. (1.37)}$$

La expresión mostrada en Ec. (1.37) es debida a Kirchhoff: Una distribución de  $m_{xy}$  a lo largo de un borde es estáticamente equivalente a una distribución de fuerzas cortantes verticales.

En adición a las fuerzas previamente descritas, se presentan unas fuerzas concentradas  $f_c$  producidas en las esquinas. Así, para el caso de una losa rectangular simplemente apoyada con carga uniforme, se tiene, considerando  $m_{xy} = m_{yx}$ ,

$$f_c = 2 M_{xy} = -2 D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{Ec. (1.38)}$$

### 1.3 TEORÍA DE REISSNER-MINDLIN

La teoría de losas de Kirchhoff previamente estudiada tiene una utilización restringida a losas delgadas (espesor/ancho  $\leq 0.10$ ), además de presentar numerosas dificultades para satisfacer las condiciones de continuidad. Una formulación alternativa a la solución del problema de losas esta planteada según la teoría de Reissner-Mindlin. Dicha teoría es válida para losas de pequeño y gran espesor y permite obviar las dificultades presentadas en la teoría de Kirchhoff.

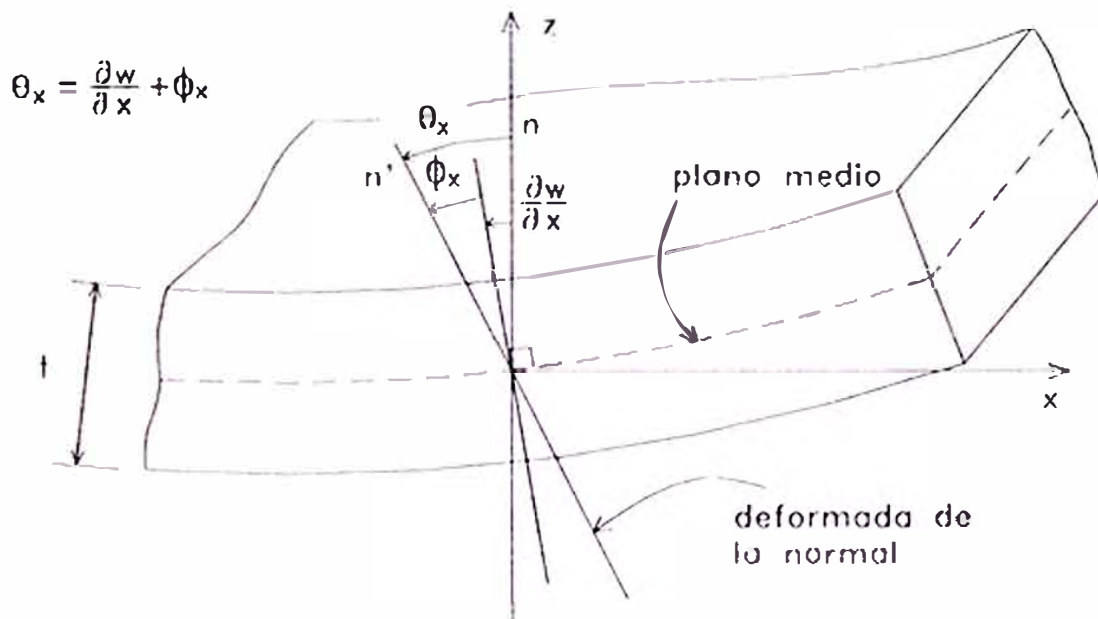


Figura 1.5 Deformación de una losa según la Teoría de Reissner-Mindlin

La teoría de Reissner-Mindlin se basa sencillamente en hacer menos restrictiva la hipótesis de ortogonalidad de la normal, lo que introduce el efecto de la deformación por cortante transversal, permitiendo el análisis de losas gruesas. Así, esta teoría mantiene las

tres primeras hipótesis de la teoría de Kirchhoff presentadas en el punto 1.2. Por el contrario, la cuarta hipótesis sobre la ortogonalidad de la normal es planteada como sigue:

- 4) Las secciones planas inicialmente normales a su superficie media, permanecen planas sin que éstas tengan que ser necesariamente ortogonales a la superficie del plano medio cuando ocurre la flexión.

Según esto, las relaciones básicas para la formulación del problema de losa se ven afectadas.

### 1.3.1 RELACIONES DEFORMACIÓN-DESPLAZAMIENTO

De las hipótesis 1) y 2) de la teoría de losas y de la hipótesis 4) planteada previamente, se deduce:

$$\begin{aligned}u(x,y,z) &= -z \theta_x(x,y) \\v(x,y,z) &= -z \theta_y(x,y) \\w(x,y,z) &= w(x,y)\end{aligned}\tag{Ec. (1.39)}$$

donde  $\theta_x$  y  $\theta_y$  son los ángulos que definen el giro de la normal. Puede comprobarse que las expresiones anteriormente planteadas coinciden con lo expresado en las Ecs. (1.14) para la teoría de Kirchhoff. Así, el vector de movimientos se define de igual forma como:



$$\mathbf{u} = [w, \theta_x, \theta_y]^T \quad \text{Ec. (1.40)}$$

De la hipótesis 4) sobre el giro de la normal se tiene (ver Figura 1.5)

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \quad \text{Ec. (1.41)}$$

e igualmente para el plano y-z

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \quad \text{Ec. (1.42)}$$

Es decir, los giros de la normal en un punto se componen de dos términos: Los primeros,

$\frac{\partial w}{\partial x}$  y  $\frac{\partial w}{\partial y}$ , son debidos al cambio de pendiente del plano medio. Los segundos,  $\phi_x$  y  $\phi_y$ ,

se deben al giro adicional de la normal al no permanecer necesariamente ortogonal a la deformada del plano medio.

Las Ecs. (1.41) y (1.42) muestran claramente que los giros de la normal  $\theta_x$  y  $\theta_y$  no pueden obtenerse únicamente en función de la pendiente del plano medio, como ocurría en la teoría de Kirchhoff. Esto permite considerar dichos giros como variables independientes, siendo ésta la diferencia sustancial entre ambas teorías.

Asimismo, hay que destacar que la hipótesis 4) establece que las normales al plano medio se mantienen rectas después del giro, lo que implica, que la distribución de esfuerzos  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  es constante sobre el espesor. En realidad, esto no es más que una aproximación, pues, de hecho, las normales inicialmente planas se distorsionan durante la

deformación, siendo dicha distorsión más importante cuanto mayor es el espesor de la losa. así, pues, los giros  $\theta_x$  y  $\theta_y$  deben interpretarse como “valores medios” de la deformada “real” de la normal.

Para obtener las relaciones deformación-desplazamiento, partimos de la definición general de las deformaciones en tres dimensiones. Sustituyendo en dicha ecuación las expresiones planteadas en la Ec. (1.39):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = -\phi_x$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = -\phi_y \quad \text{Ec. (1.43)}$$

Se aprecia en (1.43) que la hipótesis de no ortogonalidad de la normal se traduce en que las deformaciones transversales  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  no son nulas, siendo precisamente su valor (absoluto) el de los giros  $\phi_x$  y  $\phi_y$ , respectivamente, que adquieren así un significado físico. Asimismo, se aprecia que dichas deformaciones (por consiguiente, los respectivos esfuerzos) son independientes de la coordenada  $z$ .

### 1.3.2 RELACIONES CONSTITUTIVAS

Debido a la hipótesis 2) el esfuerzo normal  $\sigma_z$  es nulo, se define el vector de esfuerzos *no nulos* por

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_f \\ \sigma_c \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. (1.44)}$$

donde  $\sigma_f$  y  $\sigma_c$  representan los vectores de esfuerzos debidos a efectos de flexión y cortante transversal, respectivamente.

Se puede definir de las Ecs. (1.43), por analogía el vector de deformaciones asociado al de esfuerzos de la Ec. (1.44)

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\ -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_f \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. (1.45)}$$

De lo anteriormente indicado, las relaciones esfuerzo-deformación son

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_f \\ \sigma_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_f & 0 \\ 0 & C'_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_f \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} = C\varepsilon \quad \text{Ec. (1.46)}$$

siendo  $C_f$  y  $C'_c$  las matrices constitutivas de flexión y cortante, respectivamente, que para elasticidad ortotrópica se definen como

$$C_f = \frac{1}{1 - \nu_{yx}\nu_{xy}} \begin{bmatrix} E_x & \nu_{yx}E_y & 0 \\ \nu_{xy}E_x & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{yx}\nu_{xy})G_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (1.47)}$$

$$C'_c = \begin{bmatrix} G_{xz} & 0 \\ 0 & G_{yz} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (1.48)}$$

Para un material isotrópico

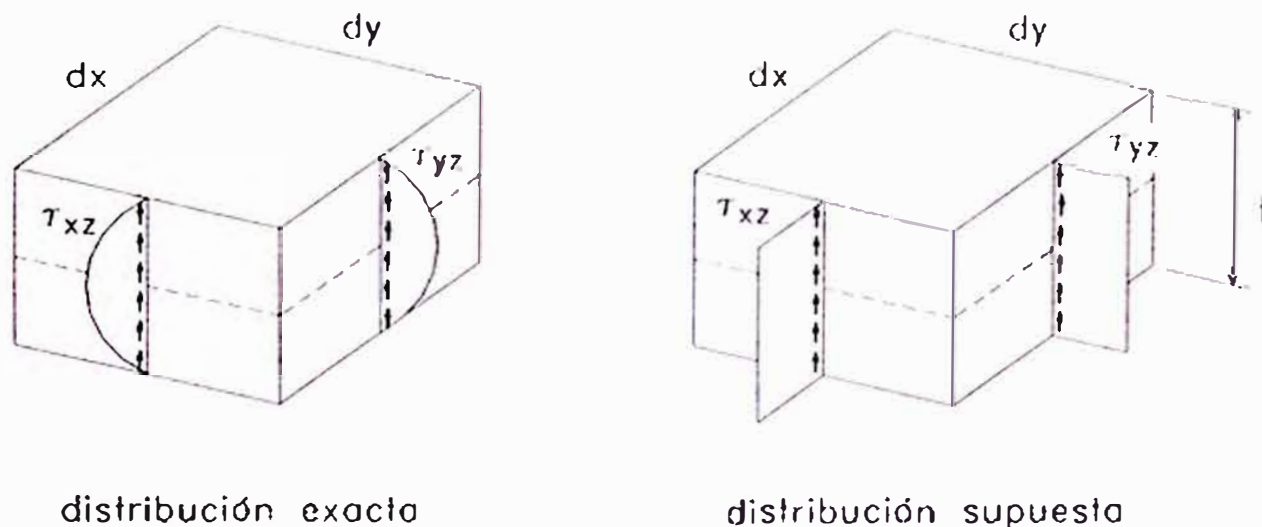
$$E_x = E_y = E, \quad \nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu$$

$$G_{xy} = G_{yx} = G_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \text{Ec. (1.49)}$$

Se observa que la matriz  $C_f$  coincide con la utilizada en la teoría de losas de Kirchhoff.

Debido al campo de desplazamientos supuesto, la distribución de deformaciones es lineal

para  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$  en  $z$  (Ec. (1.45)) y, por consiguiente, a través de la Ec. (1.46) también lo es la de los correspondientes esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$ . De otro lado, la distribución de deformaciones es constante a lo largo del espesor y lo mismo sucede con los correspondientes esfuerzos  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$ .



**Figura 1.6** Distribución de los esfuerzos cortantes transversales  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$

No obstante, es conocido que de acuerdo con la teoría de la elasticidad, la distribución “exacta” de los esfuerzos cortantes transversales  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  no es constante a través del espesor. Generalmente dicha distribución tiene forma polinómica con valores nulos en los planos superior e inferior de la losa. Para superar este problema se afecta a los esfuerzos tangenciales transversales de un coeficiente de manera que el trabajo de deformación de las mismas coincida con el realizado por los esfuerzos transversales “exactos”. Así, pues, el vector  $\sigma_x$  de (1.46) se escribe como

$$\sigma_c = \begin{bmatrix} \alpha_1 G_{xz} & 0 \\ 0 & \alpha_2 G_{yz} \end{bmatrix} \varepsilon_c = C_c \varepsilon_c \quad \text{Ec. (1.50)}$$

siendo  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  los coeficientes de distorsión transversal, generalmente considerados como 5/6 en caso de losas de espesor constante y material homogéneo.

### 1.3.3 SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE LOSAS

Similar al caso de losas de Kirchhoff, se puede plantear las ecuaciones para los esfuerzos resultantes. Usando las Ecs. (1.27) y (1.28) en las que se introduce la Ec. (1.46), se obtiene:

$$\hat{\sigma}_f = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \\ -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \\ -\frac{Ez}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{bmatrix} z dz \quad \text{Ec. (1.51)}$$

y

$$\hat{\sigma}_c = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \alpha \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) \\ \alpha \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) \end{bmatrix} dz \quad \text{Ec. (1.52)}$$

o de forma resumida [19]:

$$\hat{\sigma} = \left\{ \begin{array}{c} \hat{\sigma}_f \\ \hat{\sigma}_c \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{c|c} \hat{C}_f & 0 \\ \hline 0 & \hat{C}_c \end{array} \right] = \left\{ \begin{array}{c} \hat{\varepsilon}_f \\ \hat{\varepsilon}_c \end{array} \right\} \quad \text{Ec. (1.53)}$$

donde

$$\hat{C}_f = \frac{t^3}{12} C_f \quad \text{y} \quad \hat{C}_c = t C_c \quad \text{Ec. (1.54)}$$

y

$$\varepsilon_f = z \hat{\varepsilon}_f \quad \text{y} \quad \varepsilon_c = \hat{\varepsilon}_c \quad \text{Ec. (1.55)}$$

Introduciendo convenientemente las Ec. (1.51) y (1.53) en las Ecs. (1.16), (1.17) y (1.18) se obtienen las ecuaciones diferenciales que gobiernan las losas bajo la Teoría de Reissner-Mindlin [10] :

$$\nabla^2 w - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = - \frac{p}{D_c}$$

$$D_f \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} \right) - D_c \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) = 0 \quad \text{Ec. (1.56)}$$

$$D_f \left( \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} \right) - D_c \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) = 0$$

siendo,  $D_f = D$  (ver Ec. (1.30)) y  $D_c = \alpha \frac{E t}{2(1+\nu)}$ .

# CAPÍTULO 2

## EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EN LOSAS

### 2.1 GENERALIDADES

*El desarrollo del método de los Elementos Finitos como una herramienta de análisis fue iniciada esencialmente con el advenimiento de las computadoras electrónicas digitales[3]. El método inicialmente se desarrolló basado en la física para el cálculo de problemas de la mecánica estructural; sin embargo, la generalidad de los elementos finitos se inició posteriormente al presentarse la formulación variacional del método.*

Los tres principios variacionales ampliamente utilizados son de *la energía potencial total, la energía complementaria y el principio variacional de Reissner*. El principio de la energía potencial total es utilizado como el fundamento de modelos de elementos finitos basados en el campo de desplazamientos. La formulación dual al principio de la energía potencial es el principio de la energía complementaria, en el cual, el campo de variables es de esfuerzos en lugar de desplazamientos. El uso del principio de la energía complementaria resulta en modelos de elementos finitos basados en el campo de esfuerzos.

Un principio variacional más general es el de Reissner, en el cual, el campo de las variables es de ambos tipos, desplazamientos y esfuerzos. De la aplicación de este principio resultan elementos con variables nodales de desplazamientos y esfuerzos, denominados *elementos mixtos*.



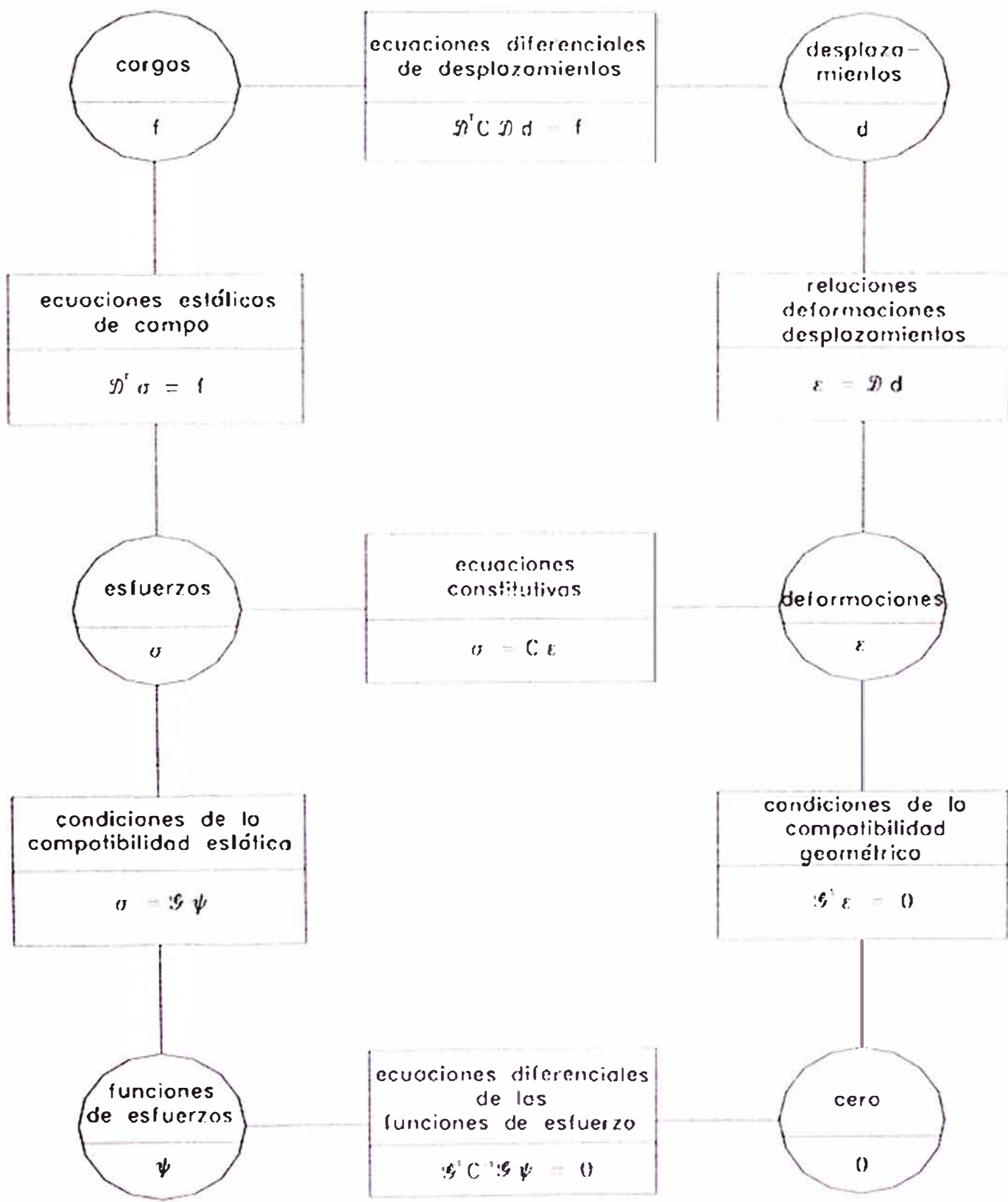


Figura 2.1 Esquema de las ecuaciones diferenciales de la estática[13]

Los tres principios variacionales indicados pueden ser usados para derivar formulaciones adicionales con la finalidad de mejorar la precisión y eficiencia en la discretización de los elementos. Formulaciones *híbridas* son obtenidas si en adición al campo de variables, que puede ser de desplazamientos o esfuerzos, que deben cumplir en el elemento la compatibilidad o el equilibrio respectivamente; por introducción de otras variables, esfuerzos o desplazamientos son introducidas para cumplir el equilibrio o la compatibilidad en el borde, respectivamente (ver Fig. 2.2).

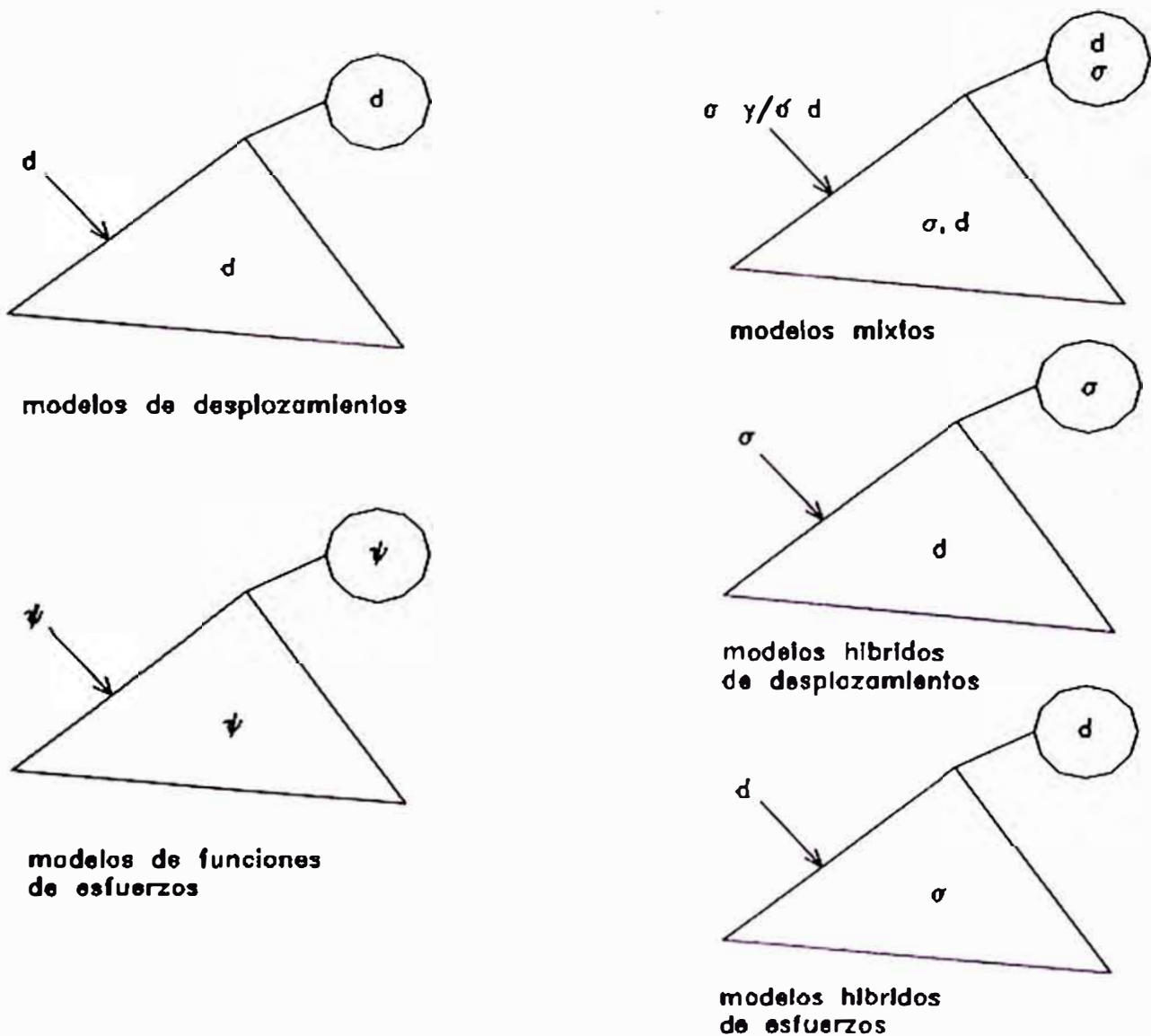


Figura 2.2 Modelos más importantes de elementos finitos[13]

La formulación utilizada ampliamente en la solución de problemas prácticos, es la del método de los elementos finitos basado en *el campo de desplazamientos*. La mayor cantidad de programas de análisis de propósito general han sido escritos usando esta formulación, debido a su eficiente formulación, aplicabilidad general, estabilidad numérica y simplicidad. Sin embargo, en la actualidad, otras formulaciones como las basadas en modelos *mixtos e híbridos* vienen siendo utilizadas.

Una descripción *sencilla* del método basado en el campo de desplazamientos[23] se da a continuación:

1. El continuo elástico se divide, mediante líneas o superficies imaginarias, en un número de *elementos finitos*.
2. Se supone que los elementos están conectados entre sí mediante un número discreto de puntos, denominados *nudos*, situados en sus contornos. Los desplazamientos de estos nudos serán las incógnitas fundamentales del problema.
3. Se toma un conjunto de funciones que delinan de manera única el campo de desplazamientos dentro de cada elemento finito en función de los desplazamientos nodales de dicho elemento.
4. Estas funciones de desplazamientos definirán entonces de manera única el estado de deformación dentro del elemento en función de los desplazamientos nodales. Estas deformaciones, junto con las deformaciones iniciales y las *relaciones constitutivas* (esfuerzo-deformación) del material, definirán el estado de esfuerzos en todo el elemento y, por consiguiente, también en sus contornos.

5. Se determina un sistema de fuerzas concentradas en los nudos, tal que equilibre los esfuerzos en el contorno y cualesquiera cargas repartidas, resultando así una relación entre fuerzas y desplazamientos.
6. Se establece el equilibrio en cada nudo, en el cual, cada componente de fuerza concentrada de cada elemento que concurre al nudo aportará términos en la ecuación de equilibrio correspondiente. A este procedimiento se denomina *ensamblaje* de las ecuaciones de equilibrio.
7. Se introduce al sistema de ecuaciones las condiciones de contorno para luego resolver el sistema de ecuaciones generado.
8. Finalmente, encontradas las incógnitas, se sustituyen los desplazamientos nodales encontrados en las expresiones de deformación y esfuerzos; las mismas que están basadas en las funciones de desplazamiento anteriormente indicadas.

De otro lado, la principal ventaja del método de los elementos finitos respecto a otras técnicas de análisis es su gran *generalidad*. Bajo este método, utilizando muchos elementos, se puede aproximar cualquier continuo con las más complejas condiciones de borde y carga que se pueda presentar.

En la práctica, sin embargo, surgen obvias limitaciones ingenieriles, en las cuales el costo del análisis se torna importante. Además, debido al incremento de elementos, se requiere preparar una gran data, así como una gran cantidad de resultados a interpretar.

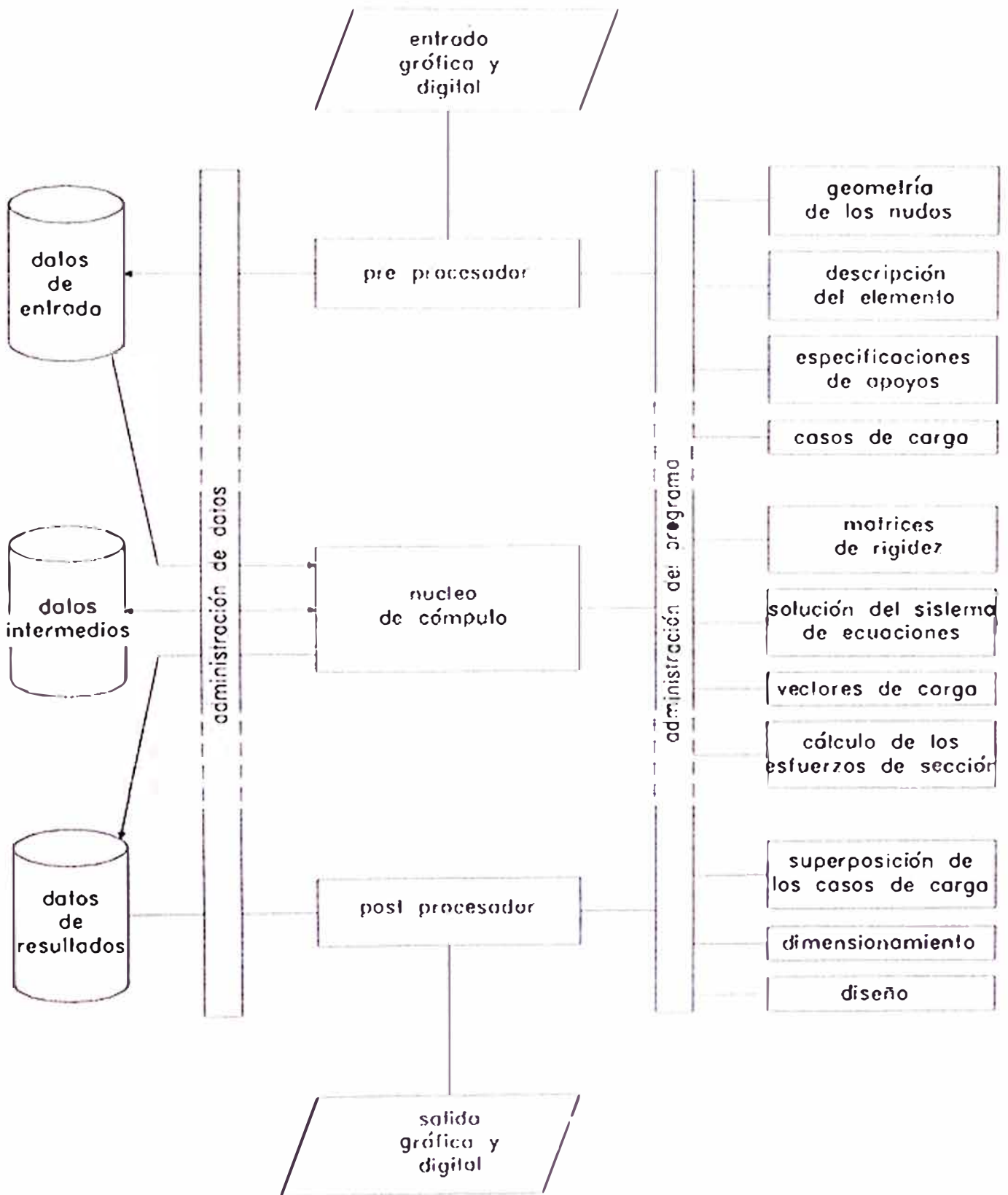


Figura 2.3 Organización de un programa de cómputo[13]

Estas limitaciones se vienen superando en los últimos años apoyados en técnicas gráficas de ingreso de datos e interpretación de resultados.

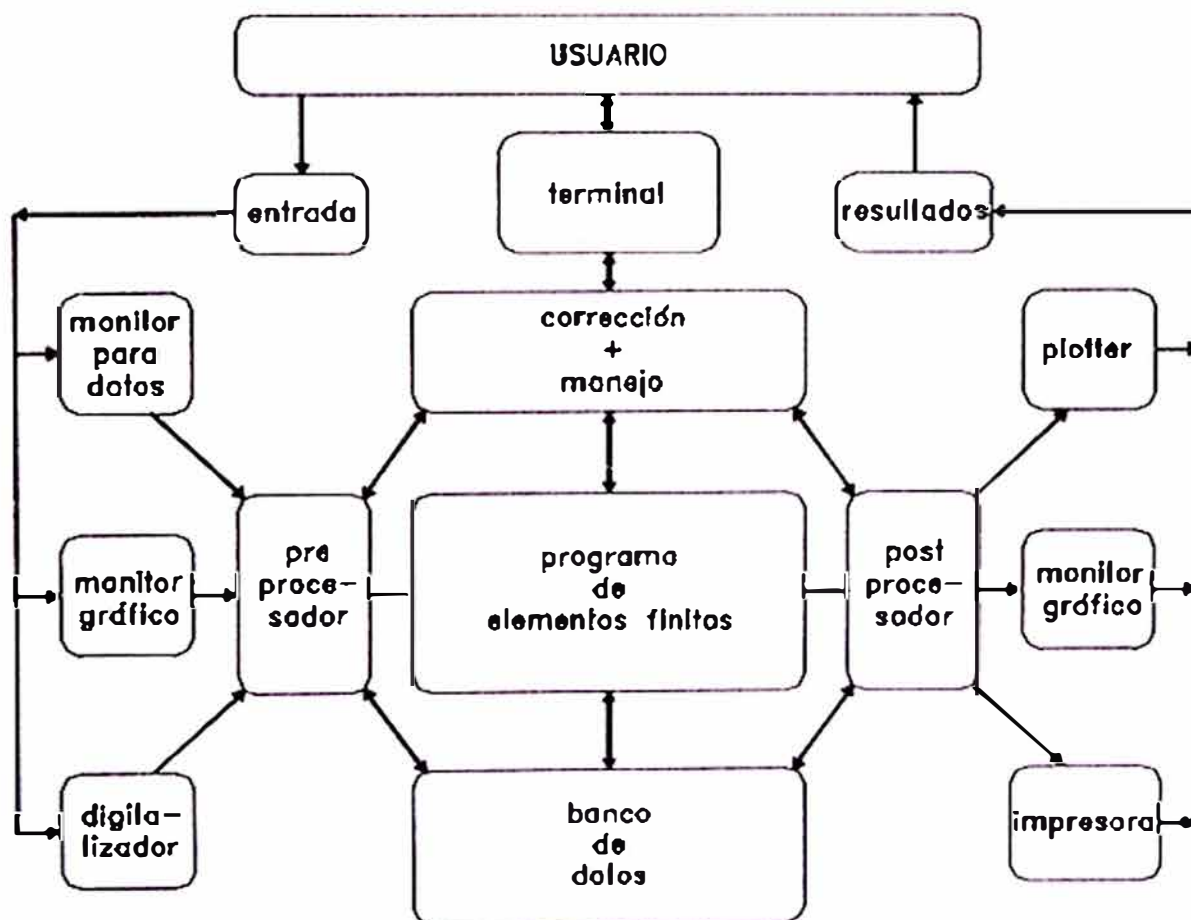


Figura 2.4 Medios para la manejo electrónico de datos[13]

## 2.2 FORMULACIÓN GENERAL DEL MÉTODO

La formulación del método de los elementos finitos, en el caso de problemas estáticos se hace, generalmente, en base a la determinación del mínimo de la energía potencial total.

Así, la expresión general de la energía potencial total esta dada por[15]

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{(V)} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{(V)} \mathbf{U}^T \mathbf{F}_B dV - \int_{(S)} \tilde{\mathbf{U}}^T \mathbf{F}_S dS - \sum_{(i)} \mathbf{U}_i^T \mathbf{F}_i \quad \text{Ec. (2.1)}$$

donde

- $\boldsymbol{\varepsilon}$  vector de deformaciones
- $\boldsymbol{\sigma}$  vector de esfuerzos
- $\mathbf{F}_B$  cargas de volumen
- $\mathbf{F}_S$  cargas en el contorno
- $\mathbf{F}_i$  cargas discretas en los nudos
- $\mathbf{U}$  vector de los desplazamientos en el dominio
- $\tilde{\mathbf{U}}$  desplazamientos en el contorno
- $\mathbf{U}_i$  desplazamientos nodales en el nudo  $i$

Utilizando una función de aproximación para los desplazamientos en el elemento, se tiene

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \mathbf{H}(x, y, z) \mathbf{d}_e \quad \text{Ec. (2.2)}$$

donde

- $\mathbf{d}_e$  desplazamientos nodales del elemento

**H** funciones de aproximación para los desplazamientos que corresponden a los desplazamientos nodales como parámetros libres; denominadas *funciones de forma*.

Para la deducción de **H**, se plantea una expresión general de aproximación para los desplazamientos en el elemento

$$U(x, y, z) = N(x, y, z) \mathbf{a} \quad \text{Ec. (2.3)}$$

donde

**a** parámetros generalizados,  $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots ]$

**N** funciones de aproximación,  $\mathbf{N} = [f_1(x, y, z) \ f_2(x, y, z) \ \dots ]$

introduciendo las coordenadas nodales en (2.3)

$$\mathbf{d}_e = \begin{bmatrix} U_i \\ \dots \\ U_j \\ \dots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(x_i, y_i, z_i) \\ \dots \\ N(x_j, y_j, z_j) \\ \dots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{A} \mathbf{a} \quad \text{Ec. (2.4)}$$

despejando **a** se tiene,  $\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{d}_e$ ; que introduciéndolo en la expresión (2.3), e igualando (2.2) y (2.3) se tiene

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{A}^{-1} \quad \text{Ec. (2.5)}$$



Las deformaciones elásticas  $\varepsilon$  expresadas por los desplazamientos se formula según

$$\varepsilon(x, y, z) = \mathcal{D} U(x, y, z) - \varepsilon_0(x, y, z) \quad \text{Ec. (2.6)}$$

donde

$\mathcal{D}$       operador diferencial

$\varepsilon_0$      deformaciones iniciales

Introduciendo (2.2) en la Ec. (2.6) se tiene

$$\varepsilon = \mathcal{D} \mathbf{H} \mathbf{d}_e - \varepsilon_0 = \mathbf{B} \mathbf{d}_e - \varepsilon_0 \quad \text{Ec. (2.7)}$$

Las relaciones entre esfuerzos y deformaciones se plantean según

$$\sigma(x, y, z) = \mathbf{C}(x, y, z) \varepsilon(x, y, z) \quad \text{Ec. (2.8)}$$

Introduciendo la Ec. (2.7) en (2.8)

$$\sigma = \mathbf{C} (\mathbf{B} \mathbf{d}_e - \varepsilon_0) \quad \text{Ec. (2.9)}$$

Por tanto, la energía potencial total para el rango elástico esta dada por la expresión

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_{(V)} (\mathbf{d}_e^T \mathbf{B}^T - \varepsilon_0^T) \mathbf{C} (\mathbf{B} \mathbf{d}_e - \varepsilon_0) dV \\ & - \int_{(V)} \mathbf{d}_e^T \mathbf{H}^T p dV - \int_{(S)} \mathbf{d}_e^T \tilde{\mathbf{H}}^T q dS - \sum_{(i)} \mathbf{d}_e^T \mathbf{H}_i^T \mathbf{f}_i \end{aligned} \quad \text{Ec. (2.10)}$$

la condición para el mínimo del potencial total es

$$\frac{\partial \Pi}{\partial d} = 0 \quad \text{Ec. (2.11)}$$

donde  $d$  son los desplazamientos nodales del sistema

Para un elemento, se tiene

$$\frac{\partial \Pi}{\partial d_e} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{K}_e d_e = f_e \quad \text{Ec. (2.12)}$$

donde

$$\mathbf{K}_e = \int_{(V)} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad \text{matriz de rigidez del elemento}$$

$$f_e = f_0 + f_p + f_q + f_k \quad \text{vector de fuerzas en el elemento}$$

$$f_0 = \int_{(V)} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \varepsilon_0 dV \quad \text{vector de fuerzas por deformaciones iniciales}$$

$$f_p = \int_{(V)} \mathbf{H}^T p dV \quad \text{vector de fuerzas por cargas de volumen}$$

$$f_q = \int_{(S)} \tilde{\mathbf{H}}^T q dS \quad \text{vector de fuerzas por cargas en el contorno}$$

$$f_k = \sum_{(i)} \mathbf{H}_i^T f_i \quad \text{vector de fuerzas por cargas nodales concentradas}$$

Finalmente, de las condiciones de equilibrio del conjunto, se tiene:

$$\mathbf{K} d = f \quad \text{Ec. (2.13)}$$

donde

$K = \sum K_e$ , se denomina matriz de rigidez del conjunto,

$d = \sum d_e$ , son los desplazamientos nodales incógnitas, y

$f = \sum f_e$ , es el vector de cargas nodales del conjunto.

## 2.2.1 CONSIDERACIONES DE CONVERGENCIA

La solución exacta de la idealización mecánica para un problema físico, en muchos casos prácticos, no es posible obtenerla. La utilización de métodos como de los elementos finitos nos conlleva a una respuesta aproximada de la idealización mecánica. Sin embargo, es importante garantizar la convergencia de la solución cuando se decide modelar utilizando una cantidad creciente de elementos.

Para garantizar la convergencia de la solución, los elementos deben cumplir ciertos requerimientos básicos. Así, si un elemento es *completo* y *compatible*, o llamado también *conforme*, se consigue una mejora en los resultados del análisis cada vez que se incrementa el número de elementos, lográndose la *convergencia monótona* de la solución. Sin embargo, si los elementos son sólo completos y no compatible, los resultados del análisis pueden aún converger a la solución "exacta", pero en general la convergencia es *no monótona*.

Un elemento es *completo* si sus funciones de aproximación para los desplazamientos son capaces de representar los movimientos de cuerpo rígido y los estados de deformación constante. Los movimientos de cuerpo rígido son modos de desplazamiento

que el elemento debe ser capaz de desarrollar sin que sea necesario algún esfuerzo en éste. La necesidad de los estados de deformación constante puede ser entendida para representar variaciones complejas de deformación en la estructura a través de valores constantes de deformación en elementos de tamaño muy pequeño.

El concepto de *compatibilidad* significa que dentro y en los bordes de los elementos, los desplazamientos deben ser continuos. En el caso de losas, los desplazamientos transversales  $w$  y los giros  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_n$  y  $\theta_z$  deben cumplir este requerimiento.

## 2.2.2 ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS

El cálculo de las matrices de la Ec. (2.12) es una etapa importante en el análisis de elementos finitos. El uso de la Ec. (2.3) representa la formulación de elementos con parámetros generalizados que obliga a determinar las funciones de aproximación para los desplazamientos según la Ec. (2.5). Sin embargo, para el cálculo práctico, el uso de elementos isoparamétricos es el camino más efectivo.

La idea de la formulación isoparamétrica es relacionar directamente los desplazamientos de cualquier punto con los desplazamientos de los nudos del elemento a través de *funciones de interpolación* (llamadas también *funciones de forma*). La formulación isoparamétrica se basa en expresar coordenadas y desplazamientos del elemento en forma de interpolaciones usando un sistema de coordenadas naturales para el elemento; así, considerando un elemento genérico tridimensional, por ejemplo, las ecuaciones de interpolación para las coordenadas está dada por

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{i=1}^n h_i x_i \\
 y &= \sum_{i=1}^n h_i y_i \\
 z &= \sum_{i=1}^n h_i z_i
 \end{aligned}
 \tag{Ec. (2.14)}$$

De la misma forma, los desplazamientos del elemento son expresados mediante ecuaciones de interpolación idénticas a las utilizadas en las coordenadas

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{i=1}^n h_i u_i \\
 v &= \sum_{i=1}^n h_i v_i \\
 w &= \sum_{i=1}^n h_i w_i
 \end{aligned}
 \tag{Ec. (2.15)}$$

Para evaluar la matriz de rigidez de un elemento, es necesario calcular la matriz de transformación deformación-desplazamiento. Las deformaciones del elemento se obtienen en términos de las derivadas de los desplazamientos en coordenadas locales. Debido a que los desplazamientos del elemento están dados en coordenadas naturales según la Ec. (2.15), es necesario relacionar las derivadas de  $x$ ,  $y$  y  $z$  con las derivadas de  $\xi$ ,  $\eta$  y  $\zeta$ , según

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}
 \tag{Ec. (2.16)}$$

Se denomina operador jacobiano  $J$ , en la Ec. (2.16), a la matriz que relaciona las derivadas en coordenadas naturales con las derivadas en coordenadas locales. Para evaluar el jacobiano, se utilizan las expresiones definidas en la Ec. (2.14).

## 2.3 ELEMENTOS FINITOS PARA LOSAS

En la teoría de losas se presentan dos diferentes casos límites a considerar: la losa de Kirchhoff y la losa de Reissner-Mindlin.

El modelo para la losa de Kirchhoff se basa en una ecuación diferencial elíptica de cuarto orden dada en la Ec. (1.33). En muchos casos ésta es tratada usando elementos no-conformes, métodos mixtos o elementos conformes de 21 incógnitas cinemáticas con polinomios de interpolación de quinto grado.

El modelo para la losa de Reissner-Mindlin es obtenida basada en hipótesis menos restrictivas. Desde que ésta es modelada por una ecuación diferencial parcial de segundo orden, formalmente este modelo de losa puede ser tratado mediante elementos conformes  $H^1$ . Por consiguiente, aparentemente, su tratamiento numérico es mucho más sencillo al compararlo con el de losa de Kirchhoff.

Para las losas, una representación general[6][14] del funcional de energía viene dada por

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_e \quad \text{Ec. (2.17)}$$

siendo

$$\Pi_i(w, \theta) = \frac{1}{2} \int_{(A)} \theta_{,\alpha} |_{\beta} K^{\alpha\beta\gamma\delta} \theta_{,\gamma} |_{\delta} dA + \frac{1}{2} \int_{(A)} (w_{,\alpha} - \theta_{,\alpha}) C^{\alpha\beta} (w_{,\beta} - \theta_{,\beta}) dA$$

$$\Pi_e(w, \theta) = - \int_{(A)} w q dA - \int_{(L)} w p dL - \int_{(L)} \theta_{,\alpha} m^{\alpha} dL$$

donde  $w$  y  $\theta$  son las funciones incógnita. La solución al problema es encontrar funciones  $w$  y  $\theta$  que hagan estacionario a  $\Pi$  con respecto a pequeñas variaciones  $\delta w$  y  $\delta \theta$ . Así, se tiene que debe cumplirse

$$\delta \Pi = 0 \quad \text{Ec. (2.18)}$$

Cuando se usa el modelo para losa de Reissner-Mindlin, el problema variacional es directamente resuelto con las variables  $w$  y  $\theta$  como se indica en la Ec. (2.17), siendo un problema elíptico  $H^1$ .

Pero, en el caso de la teoría de Kirchhoff, el modelo para losa está basada en la hipótesis

$$\theta_{,\alpha} = w_{,\alpha} \quad \text{Ec. (2.19)}$$

cuando el espesor de la losa  $t \rightarrow 0$ , siendo  $\gamma_{,\alpha} = 0$ . Ver Ecs. (1.39) y (1.40). De la Ec. (2.19) se entiende que ésta es una igualdad en  $H^1$ .

Por lo cual, introduciendo esta hipótesis en la Ec. (2.17) se tiene

$$\Pi(w) = \frac{1}{2} \int_{(A)} w_{,\alpha} |_{\beta} K^{\alpha\beta\gamma\delta} w_{,\gamma} |_{\delta} dA - \int_{(A)} w q dA - \int_{(L)} w p dL - \int_{(L)} w_{,\alpha} m^{\alpha} dL \quad \text{Ec. (2.20)}$$

Como se aprecia, la incógnita  $\theta$  ha sido eliminada; cabe notar que se ha obtenido según la Ec. (2.20) un problema elíptico  $H^2$ , como se indicó previamente. Por consiguiente, se ha llegado a un problema variacional que tiene un grado mayor de dificultad respecto al modelo para losa de Reissner-Mindlin. Esto es cierto, sin embargo, sólo dentro de un punto de vista formal.

### 2.3.1 ELEMENTOS TRIANGULARES PARA LOSAS DE KIRCHHOFF

La forma intuitiva más sencilla de satisfacer los requisitos de continuidad para la flecha es, tomar la flecha y sus dos derivadas cartesianas (giros) como variables nodales. Por tanto, se tiene, en general tres variables por nudo  $w$ ,  $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i$  y  $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i$ , es así que el número total de variables de un elemento de  $n$  nudos será  $3n$ . Este número determina el número de términos del polinomio que aproxima  $w$  dentro de cada elemento.

Debido a su simplicidad geométrica los elementos de losa triangulares son, en principio, de gran interés para el análisis de losas de formas irregulares. Sin embargo, como ocurre en elementos rectangulares, se encuentran las mismas dificultades para garantizar su conformidad.

El problema fundamental de encontrar funciones de forma para el seneillo triángulo de tres nudos es que se dispone de nueve variables nodales mientras que el polinomio completo de tercer grado contiene diez términos. Así, surge el dilema de tener que prescindir de un término de dicho polinomio de manera más o menos arbitraria. Esto ha dado



lugar a una gran variedad de elementos triangulares no conformes, la mayoría de ellos poco eficientes y no utilizables con fines prácticos.

Un elemento bastante popular es el triangular de tres nudos y nueve grados de libertad desarrollado inicialmente por Bazeley et al. y posteriormente mejorado por Cheung, King y Zienkiewicz. Dicho elemento se basa en una aproximación de la flecha por un polinomio incompleto de tercer grado dado en coordenadas de área

$$w = \mathbf{N} \mathbf{a}_e \quad \text{Ec. (2.21)}$$

donde

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad \mathbf{N}_3] \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_e = \begin{Bmatrix} a_e^1 \\ a_e^2 \\ a_e^3 \end{Bmatrix} \quad \text{donde} \quad a_e^i = \left[ w_i \quad \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_i \quad \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \right]^T$$

siendo

$$\mathbf{N}_i^T = \begin{Bmatrix} L_i + L_i^2 L_j + L_i^2 L_k - L_i L_j^2 - L_i L_k^2 \\ c_k (L_i^2 L_j + L) - c_j (L_k L_i^2 + L) \\ b_k (L_i^2 L_j + L) - b_j (L_k L_i^2 + L) \end{Bmatrix}, \quad b_j = y_j - y_k \quad \text{y} \quad c_i = x_k - x_j$$

definiendo  $L = \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3$ ; los valores para  $i, j$  y  $k$  se obtienen por permutación cíclica de

los subíndices  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ .

$L_1, L_2$  y  $L_3$  se denominan coordenadas de área (Ver Figura 2.5) y son definidas para un punto P como

$$L_1 = \frac{\text{Area } P23}{\text{Area } 123}, \quad L_2 = \frac{\text{Area } P31}{\text{Area } 123} \quad \text{y} \quad L_3 = \frac{\text{Area } P12}{\text{Area } 123} \quad \text{Ec. (2.22)}$$

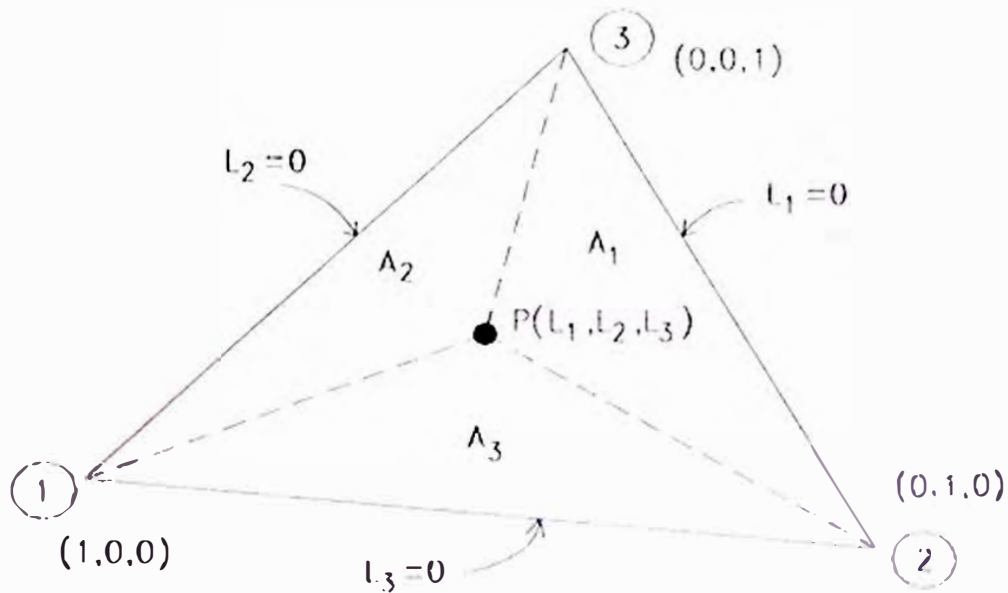


Figura 2.5 Coordenadas de área para un punto P

Para satisfacer los requisitos de conformidad en elementos triangulares, se aplican técnicas que imponen las curvaturas como parámetros nodales adicionales. Así, Bell y Iron[15] propusieron un elemento triangular de 21 grados de libertad, en el cual la aproximación de los desplazamientos del elemento están basados en funciones de forma que contienen todos los términos de un polinomio completo de quinto grado:

$$w(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^4 & x^3y & \dots \\ \dots & x^2y^2 & xy^3 & y^4 & x^5 & x^4y & x^3y^2 & x^2y^3 & xy^4 & x^5 & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{21} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (2.23)}$$

planteándose cada nudo de esquina con cinco grados de libertad, así:

$$w_i, \frac{\partial w_i}{\partial x}, \frac{\partial w_i}{\partial y}, \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y}, \text{ siendo } i = 1, 2 \text{ y } 3 \quad \text{Ec. (2.24)}$$

y tres nudos laterales 4, 5, y 6; a los que se les asigna como variable la derivada normal

$\frac{\partial w}{\partial n}$  los mismos que varían según un polinomio de cuarto grado a lo largo de los lados.

Obteniéndose las relaciones entre los parámetros  $a$  y los desplazamientos nodales del elemento.

$$d_e = \begin{bmatrix} U_1 \\ \text{---} \\ U_2 \\ \text{---} \\ U_3 \\ \text{---} \\ w_{4,n4} \\ \text{---} \\ w_{5,n5} \\ \text{---} \\ w_{6,n6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \text{---} \\ A_2 \\ \text{---} \\ A_3 \\ \text{---} \\ a_4^T \\ \text{---} \\ a_5^T \\ \text{---} \\ a_6^T \end{bmatrix} a = A a \quad \text{Ec. (2.25)}$$

siendo  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  submatrices de orden (6x21) las mismas que utilizan la función de aproximación de  $w(x,y)$ , las dos primeras derivadas de  $w(x,y)$  y las tres segundas derivadas de  $w(x,y)$ . Los vectores  $a_4^T$ ,  $a_5^T$  y  $a_6^T$  son las derivadas de  $w(x,y)$  en la dirección normal de los lados 1-2, 2-3 y 3-1 respectivamente según la expresión

$$\frac{\partial w}{\partial n} = -\frac{\partial w}{\partial x} \text{sen} \bar{\beta} + \frac{\partial w}{\partial y} \text{cos} \bar{\beta} \quad \text{Ec. (2.26)}$$

donde

$$\bar{\beta} = \tan^{-1} \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k} \quad \text{Ec. (2.27)}$$

siendo  $i = 2, 3$  y  $1$ , y  $k = 1, 2$  y  $3$  para los nudos 4, 5 y 6 respectivamente. Considerando además que si  $x_i - x_k = 0$ , entonces  $\bar{\beta} = -\pi/2$ .

### 2.3.2 ELEMENTOS TRIANGULARES PARA LOSAS DE REISSNER-MINDLIN

Los elementos de Reissner-Mindlin consideran las deformaciones por flexión y cortante transversal; de acuerdo a esto, pueden ser empleados para analizar losas gruesas así como losas delgadas.

$$U = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} N_i w_i \\ N_i \theta_{xi} \\ N_i \theta_{yi} \end{Bmatrix} = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n] \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = N a^{(e)} \quad \text{Ec. (2.28)}$$

siendo

$$N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad a_i = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}$$

Sin embargo, en el caso de losas delgadas, los resultados obtenidos son menos exactos comparados con los resultados obtenidos usando elementos de Kirchhoff, los mismos que no consideran deformaciones de cortante transversal.

Este defecto puede observarse en el caso de una losa sometida a cargas nodales; en la cual, la ecuación matricial de equilibrio para toda la losa puede mostrarse como sigue

$$(K_f + K_c) d = f \quad \text{Ec. (2.29)}$$

donde

$$K_f = \int_A B_f^T \hat{C}_f B_f dA \quad \text{Ec. (2.30)}$$

$$K_c = \int_A B_c^T \hat{C}_c B_c dA \quad \text{Ec. (2.31)}$$

estando  $\hat{C}_f$  y  $\hat{C}_c$  definidos en las Ecs. (1.52), (1.45) y (1.48).

De (2.29) extrayendo factores comunes  $\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  y  $Gt$  de  $K_f$  y  $K_c$  respectivamente, se

tiene

$$\left( \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \bar{K}_f + Gt \bar{K}_c \right) d = f \quad \text{Ec. (2.32)}$$

De otro lado, la solución "exacta" de Kirchhoff para losas delgadas es inversamente proporcional a  $\frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}$ . Por tanto, dividiendo Ec. (2.32) por este coeficiente se tiene

$$(\bar{K}_f + \alpha \bar{K}_c) d = \frac{12(1-\nu^2)}{E t^3} f \quad \text{Ec. (2.33)}$$

donde

$$\alpha = \frac{12(1-\nu^2) G}{E t^2}$$

El segundo miembro de la Ec. (2.33) es de orden de magnitud de la solución exacta de losas delgadas. En dicha ecuación, para  $t \rightarrow 0$ ,  $\alpha \rightarrow \infty$ . Por consiguiente, al hacer la losa más delgada, los términos de cortante van progresivamente dominando la solución, de forma que la contribución de  $K_f$  puede despreciarse. De esta manera, se obtiene una solución infinitamente más rígida que la correspondiente a la teoría de losas delgadas y la única forma de obtener una solución diferente de la trivial  $d = 0$  es que la matriz  $K_c$  sea singular. Métodos de integración reducida proporcionan la singularidad necesaria, sin embargo, en cada caso hay que estudiar la malla de elementos finitos para garantizar la condición de singularidad.

Además de la integración reducida, existen otros procedimientos para evitar este defecto. Uno de estos es el denominado *técnica de deformaciones de cortante transversal impuestas* [19].

# CAPÍTULO 3

## ANÁLISIS ELÁSTICO DE LOSAS

### 3.1 ELEMENTOS DE LOSA DELGADA DK

Una técnica para desarrollar elementos de losa de Kirchhoff conformes es introduciendo ciertas modificaciones en los elementos de losa de Reissner-Mindlin de manera que satisfagan de forma discreta sobre el elemento las condiciones de Kirchhoff. De ahí el nombre de elementos DK (Discretos de Kirchhoff).

La idea de los elementos de losa DK es original de Wempner et al., quienes la utilizaron como un método de evitar los requisitos de continuidad  $C_1$  de los elementos de losa de Kirchhoff. Las condiciones de la losa delgada ( $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ) se imponen en puntos discretos de elementos de clase  $C_0$  formulados en base a la teoría de losas de Reissner-Mindlin. Pese a su cierta antigüedad, este método sólo se ha popularizado recientemente, en parte como resultado del éxito del elemento de lámina "semi-loof" de Irons, considerado como un elemento DK, y también gracias a una reinterpretación del método por su analogía con las deformaciones de cortante impuestas. Así, mientras en esta última técnica se impone una determinada variación de las deformaciones de cortante sobre el elemento, en los elementos DK dicha variación conduce a que dichas deformaciones sean efectivamente nulas sobre el elemento.

En los últimos años se han propuesto varios elementos de losa DK. En particular, se prestará atención al elemento triangular de tres nudos por su gran versatilidad para el análisis de losas.

### 3.2 DESCRIPCIÓN DEL ELEMENTO DKT TRIANGULAR DE LOSA DELGADA

Dicho elemento fue desarrollado inicialmente por Striklin et al. y subsecuentemente modificado por Dhatt. Más recientemente, Batoz et al. han analizado con detalle el comportamiento de este elemento que en la práctica se conoce con el nombre de *elemento DKT*.

El punto de partida es un elemento triangular de lado recto con seis nudos (tres en las esquinas y tres en los puntos medios de los lados) de 15 grados de libertad como se muestra en la figura

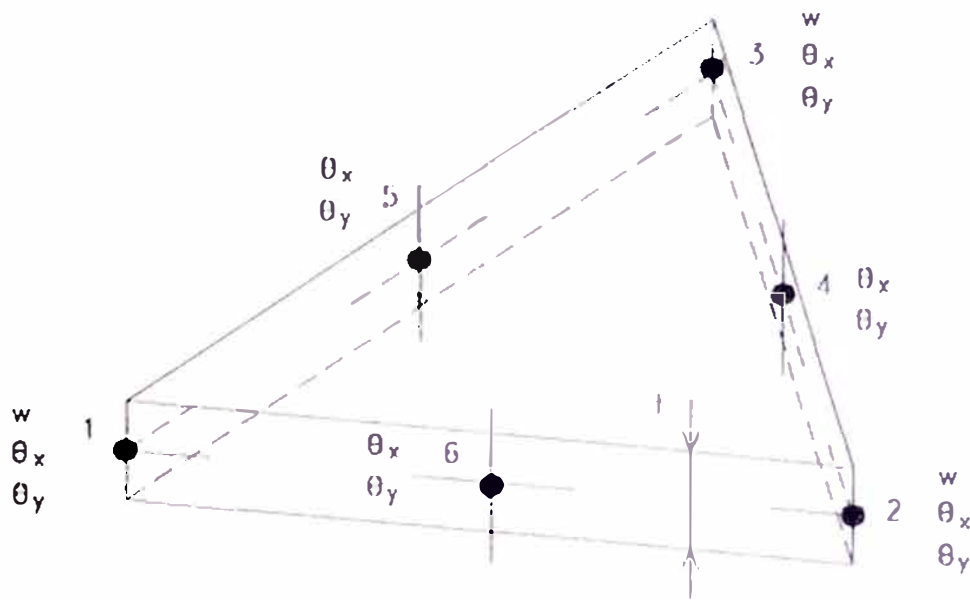


Figura 3.1 Elemento de Reissner-Mindlin de 15 grados de libertad

Este elemento es planteado según la teoría de Reissner-Mindlin pues presenta al desplazamiento transversal  $w$  y las rotaciones  $\theta_x$  y  $\theta_y$  como variables independientes en cada nudo. Las condiciones a las que está sometido este elemento son:



1) Los giros  $\theta_x$  y  $\theta_y$  varían cuadráticamente sobre el elemento según la expresión de interpolación que vincula las rotaciones  $\theta_x$  y  $\theta_y$  de cada nudo; es decir:

$$\theta_x = \sum_{i=1}^6 N_i \theta_{x_i}, \quad \theta_y = \sum_{i=1}^6 N_i \theta_{y_i} \quad \text{Ec. (3.1)}$$

donde  $N_i$  son las clásicas funciones de forma del elemento triangular de seis nudos de clase  $C_0$ :

$$\begin{aligned} N_1 &= (2L_1 - 1)L_1 & N_2 &= (2L_2 - 1)L_2 & N_3 &= (2L_3 - 1)L_3 \\ N_4 &= 4L_2L_3 & N_5 &= 4L_1L_3 & N_6 &= 4L_1L_2 \end{aligned} \quad \text{Ec. (3.2)}$$

2) La variación de la flecha a lo largo de los lados se asume cúbica; así, se puede determinar, por ejemplo, para el lado 2-3, la rotación  $\frac{\partial w}{\partial s}$  en el nudo 4 según la dirección  $s$

tangente al lado [14]:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_4 = -\frac{3}{2l_{23}}w_2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_2 + \frac{3}{2l_{23}}w_3 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_3 \quad \text{Ec. (3.3)}$$

ecuaciones similares se pueden obtener para los otros dos lados, siendo  $l_{ij}$  la longitud del lado  $ij$  que contiene el nudo intermedio  $k$ .

Esta condición equivale a que la flecha  $w$  varíe de forma cúbica sobre todo el elemento.

Cuando los valores nodales de  $\frac{\partial w}{\partial s}$  son remplazados por los valores nodales de

$\frac{\partial w}{\partial x}$  y  $\frac{\partial w}{\partial y}$  a través de transformación de coordenadas, hay un total de 9 grados de libertad en estas tres ecuaciones. De acuerdo a esto, y según las Ec. (3.1) en la cual se requieren de 12 grados de libertad, resultan en total 21 grados de libertad para la descripción de este elemento.

Sin embargo, con el elemento DKT se busca un elemento de 9 grados de libertad los cuales deben ser grados de libertad en los nudos de esquina, según se muestra en la figura. Esto es posible, si los 12 grados de libertad  $\theta_{x_i}$  y  $\theta_{y_i}$  para los nudos de 1 a 6 son expresados en términos de  $w_i$ ,  $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i$  y  $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i$  de sólo los nudos de las esquinas.

Esto se consigue utilizando las consideraciones que se proponen a continuación:

Esto se consigue utilizando las consideraciones que se proponen a continuación:

1) Las condiciones de deformación transversal nula de acuerdo a la teoría de Kirchhoff

se imponen en:

a) Los nudos de esquina

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_i - \theta_{x_i} \\ \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_i - \theta_{y_i} \end{array} \right\} = 0; \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{Ec. (3.4a)}$$

b) Los nudos laterales

$$\left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)_k - \theta_{s_k} = 0; \quad i = 4, 5, 6 \quad \text{Ec. (3.4b)}$$

siendo  $s$  la dirección del lado que contiene al nudo  $k$ .

2) Se impone una variación lineal del giro normal  $\theta_n$  (ver Fig. 3.3) a lo largo de los lados,

$$\theta_{nk} = \frac{1}{2} (\theta_{ni} + \theta_{nj}) \quad \text{Ec. (3.5)}$$

donde  $k = 4, 5$  y  $6$  denota el nudo intermedio de los lados  $ij = 23, 31$  y  $12$  respectivamente.

3) Para el cálculo de la matriz de rigidez del elemento, sólo se considera la contribución de la rigidez flexionante; es decir  $\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}_f^{(e)}$ .

De las condiciones anteriores se establece que:

a) Las Ecs. (3.4) proporcionan la relación entre las flechas y los giros,

b) Como la flecha varía de forma cúbica sobre los lados,  $\frac{\partial v}{\partial s}$  varía cuadráticamente y

también lo hace el giro tangencial  $\theta_t$ . Así, pues, como  $\frac{\partial v}{\partial s}$  coincide con  $\theta_t$  en tres

puntos de cada lado, se satisface la hipótesis de Kirchhoff ( $\gamma = \frac{\partial v}{\partial s} - \theta_t = 0$ ) a lo

largo de todo el contorno del elemento. Puede comprobarse que esto justifica la ex-

clusión de la energía de deformación por cortante en el cálculo de la matriz de rigidez,

con lo que el elemento se comporta efectivamente como un elemento de losa delgada

de Kirchhoff.

c) Se deduce de (3.1)-(3.5) que  $w$ ,  $\frac{\partial w}{\partial s}$ ,  $\theta_x$  y  $\theta_y$  están expresadas por funciones continuas a lo largo de los lados, obteniéndose un elemento compatible.

Utilizando las consideraciones generales representadas por las Ecs. (3.1)-(3.5) se pueden determinar los giros en los nudos laterales y obtener las siguientes funciones de interpolación para los giros sobre el elemento

$$\begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{x1} \cdot N_{x2} \cdot N_{x3} \cdot N_{x4} \cdot N_{x5} \cdot N_{x6} \cdot N_{x7} \cdot N_{x8} \cdot N_{x9} \\ N_{y1} \cdot N_{y2} \cdot N_{y3} \cdot N_{y4} \cdot N_{y5} \cdot N_{y6} \cdot N_{y7} \cdot N_{y8} \cdot N_{y9} \end{bmatrix} \mathbf{a}^{(e)} \quad \text{Ec. (3.6)}$$

siendo

$$\mathbf{a}^{(e)} = \left\{ w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, w_3, \theta_{x3}, \theta_{y3} \right\}^T, \quad \text{Ec. (3.7)}$$

el vector de desplazamientos nodales final.

Las funciones de forma  $N_{xj}$  y  $N_{yj}$  están dadas por

$N_{x1} = 1.5 (a_6 N_6 - a_5 N_5)$	$N_{x2} = b_5 N_5 + b_6 N_6$	$N_{x3} = N_1 - c_5 N_5 - c_6 N_6$
$N_{x4} = 1.5 (a_4 N_4 - a_6 N_6)$	$N_{x5} = b_6 N_6 - b_4 N_4$	$N_{x6} = N_2 - c_4 N_4 - c_6 N_6$
$N_{x7} = 1.5 (a_5 N_5 - a_4 N_4)$	$N_{x8} = b_5 N_4 - b_4 N_5$	$N_{x9} = N_3 - c_4 N_4 - c_5 N_5$
$N_{y1} = 1.5 (d_6 N_6 - d_5 N_5)$	$N_{y2} = -N_1 + e_5 N_5 + e_6 N_6$	$N_{y3} = -N_{x2}$
$N_{y4} = 1.5 (d_4 N_4 - d_6 N_6)$	$N_{y5} = -N_2 + e_4 N_4 + e_6 N_6$	$N_{y6} = -N_{x5}$
$N_{y7} = 1.5 (d_5 N_5 - d_4 N_4)$	$N_{y8} = -N_3 + e_4 N_4 + e_5 N_5$	$N_{y9} = -N_{x8}$

donde:

$$\begin{aligned}
 a_k &= -\frac{x_{ij}}{l_{ij}^2} & b_k &= \frac{3}{4l_{ij}^2} x_{ij} y_{ij} & c_k &= \left( \frac{1}{4} x_{ij}^2 - \frac{1}{2} y_{ij}^2 \right) / l_{ij}^2 \\
 d_k &= -\frac{y_{ij}}{l_{ij}^2} & l_k &= \left( \frac{1}{4} y_{ij}^2 - \frac{1}{2} x_{ij}^2 \right) / l_{ij}^2 & e_{ij}^2 &= \left( x_{ij}^2 + y_{ij}^2 \right)
 \end{aligned}$$

definiéndose  $x_{ij} = x_i - x_j$ ,  $y_{ij} = y_i - y_j$ , donde  $k = 4, 5, 6$  para los lados  $ij = 23, 31, 12$ .

siendo  $N_i$  las funciones de forma del elemento triangular de 6 nudos de clase  $C_0$  dadas en la Ec. (3.2).

A partir de (3.6) puede obtenerse la matriz de rigidez  $\mathbf{K}_f^{(e)}$  dada por (2.30) ya que en  $B_f$  sólo intervienen las primeras derivadas de los giros  $\theta_x$  y  $\theta_y$  (curvaturas). Así:

$$\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_x}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_y}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_y}{\partial y} & -\frac{\partial N_x}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (3.8)}$$

Una vez obtenidas las incógnitas nodales se calculan los momentos flectores en el elemento según

$$\hat{\sigma}_f = \hat{\mathbf{D}}_f \mathbf{B}_f \mathbf{a}^{(e)} \quad \text{Ec. (3.9)}$$

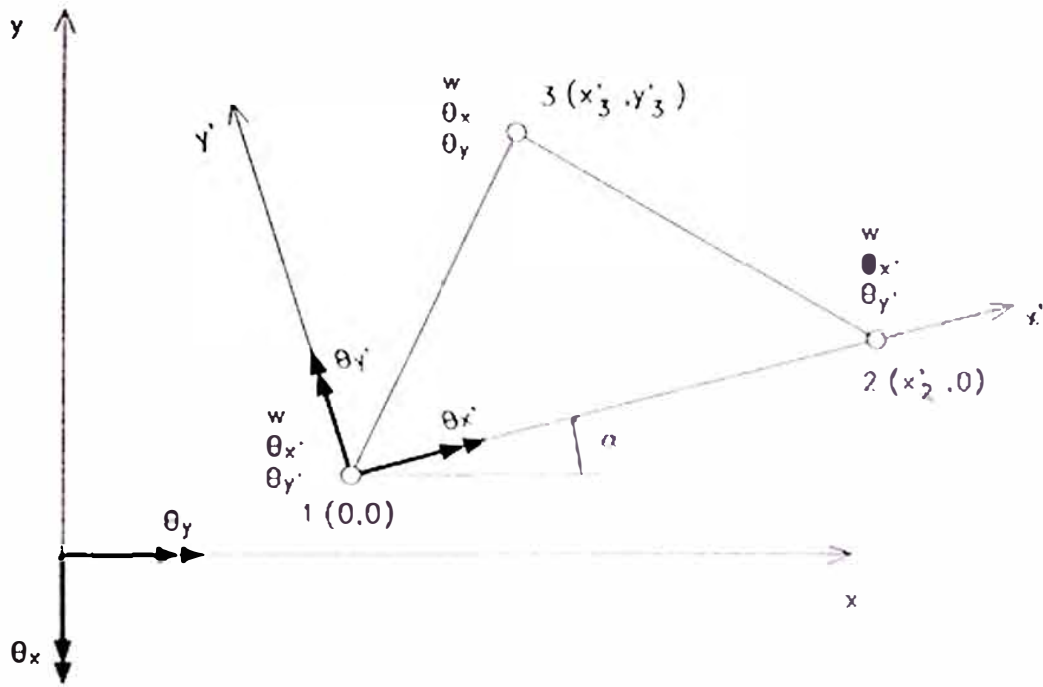


Figura 3.2 Elemento DKT triangular - 9 grados de libertad

Batoz[4][5] ha obtenido una forma explicita de la matriz de rigidez del elemento DKT. Considerando el sistema de ejes locales  $x'-y'$  de la Fig. 3.2 en la cual el eje  $x'$  coincide con el lado definido por los nudos 1-2, se tiene

$$B = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y'_3 \frac{\partial H_x}{\partial \xi} \\ -x'_3 \frac{\partial H_y}{\partial \xi} + x'_2 \frac{\partial H_y}{\partial \eta} \\ -x'_3 \frac{\partial H_x}{\partial \xi} + x'_2 \frac{\partial H_x}{\partial \eta} + y'_3 \frac{\partial H_y}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (3.10)}$$

donde  $A = \frac{1}{2} x'_2 y'_3$  es el área del elemento.  $H_x(\xi, \eta)$  y  $H_y(\xi, \eta)$  son las funciones de interpolación en coordenadas naturales  $\xi$  y  $\eta$  (Ver Fig. 3.3) de las rotaciones  $\beta_x$  y  $\beta_y$  de la

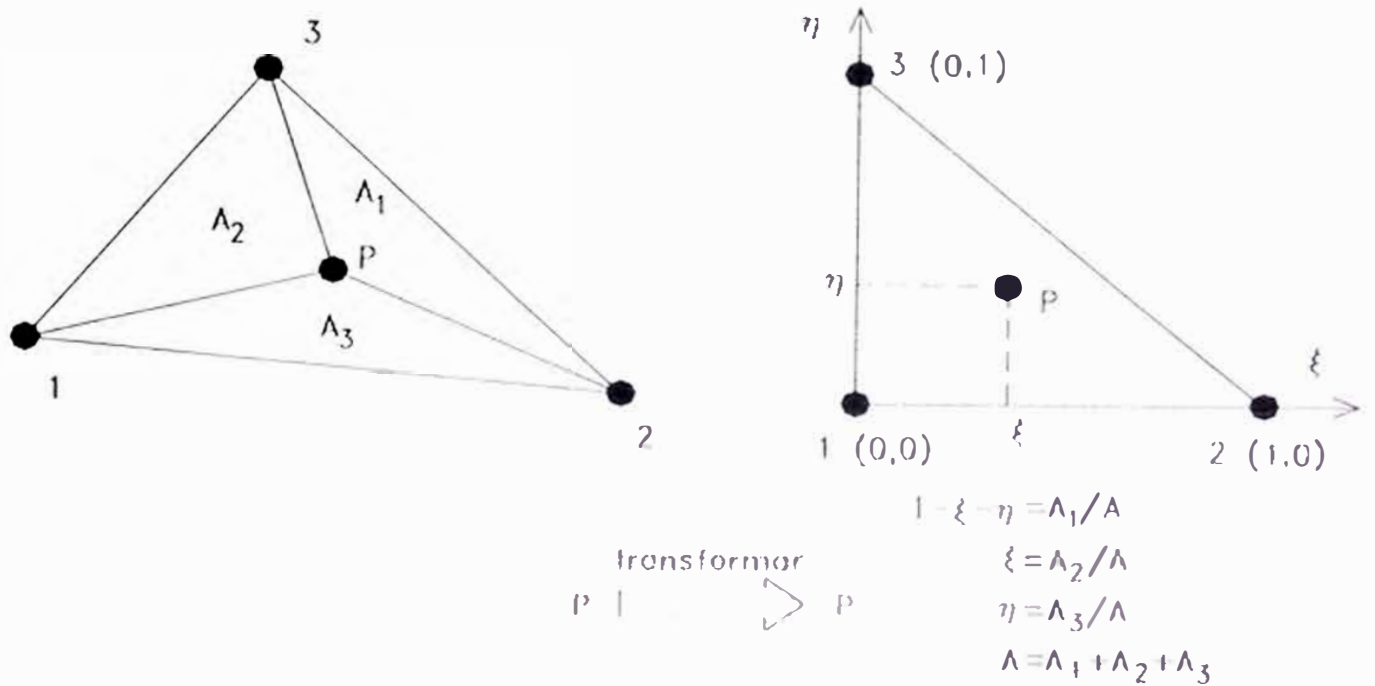


Figura 3.3 Sistema de coordenadas naturales  $\xi$  y  $\eta$

normal en los planos  $x$ - $z$  e  $y$ - $z$ , respectivamente, dada en términos de las 9 variables nodales del elemento:

$$U^{(e)} = \left\{ w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \right\}^T \quad \text{Ec. (3.11)}$$

donde  $\theta_x$  y  $\theta_y$  son las rotaciones alrededor de los ejes locales  $x'$  e  $y'$ , y  $w$  es el desplazamiento a lo largo de  $z$  normal al plano  $x'$ - $y'$ . Las derivadas parciales respecto a  $\xi$  y  $\eta$  de las funciones de interpolación están dadas por

$$\frac{\partial H_x}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} p_6(1-2\xi) + \eta(p_5 - p_6) \\ q_6(1-2\xi) - \eta(q_5 + q_6) \\ -4 + 6(\xi + \eta) + r_6(1-2\xi) - \eta(r_5 + r_6) \\ -p_6(1-2\xi) + \eta(p_4 + p_6) \\ q_6(1-2\xi) - \eta(q_6 - q_4) \\ -2 + 6\xi + r_6(1-2\xi) - \eta(r_4 - r_6) \\ -\eta(p_4 + p_5) \\ \eta(q_4 - q_5) \\ -\eta(r_5 - r_4) \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (3.12)}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} t_6(1-2\xi) + \eta(t_5 - t_6) \\ 1 + r_6(1-2\xi) - \eta(r_5 + r_6) \\ -q_6(1-2\xi) + \eta(q_5 + q_6) \\ -t_6(1-2\xi) + \eta(t_4 + t_6) \\ -1 + r_6(1-2\xi) + \eta(r_4 - r_6) \\ q_6(1-2\xi) - \eta(q_4 - q_6) \\ -\eta(t_4 + t_5) \\ \eta(r_4 - r_5) \\ -\eta(q_4 - q_5) \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (3.13)}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial \eta} = \begin{bmatrix} -p_5(1-2\eta) - \xi(p_6 - p_5) \\ q_5(1-2\eta) - \xi(q_5 + q_6) \\ -4 + 6(\xi + \eta) + r_5(1-2\eta) - \xi(r_5 + r_6) \\ \xi(p_4 + p_6) \\ \xi(q_4 - q_6) \\ -\xi(r_6 - r_4) \\ p_5(1-2\eta) - \xi(p_4 + p_5) \\ q_5(1-2\eta) + \xi(q_4 - q_5) \\ -2 + 6\eta + r_5(1-2\eta) + \xi(r_4 - r_5) \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (3.14)}$$



$$\frac{\partial H_v}{\partial \eta} = \begin{bmatrix} -t_5(1-2\eta) - \xi(t_6 - t_5) \\ 1 + r_5(1-2\eta) - \xi(r_5 + r_6) \\ -q_5(1-2\eta) + \xi(q_5 + q_6) \\ \xi(t_4 + t_6) \\ \xi(r_4 - r_6) \\ -\xi(q_4 - q_6) \\ t_5(1-2\eta) - \xi(t_4 + t_5) \\ -1 + r_5(1-2\eta) + \xi(r_4 - r_5) \\ -q_5(1-2\eta) - \xi(q_4 - q_5) \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (3.15)}$$

donde

$$p_k = -6x_{ij} / l_{ij}^2, \quad t_k = -6y_{ij} / l_{ij}^2$$

$$q_k = 3x_{ij}y_{ij} / l_{ij}^2, \quad r_k = 3y_{ij}^2 / l_{ij}^2$$

$k = 4, 5$  y  $6$  para  $ij = 23, 31$  y  $12$ , respectivamente.

La matriz  $B$  puede ser descompuesta en un producto de dos matrices  $L$  y  $\alpha$  de orden  $3 \times 9$  y  $9 \times 9$ , respectivamente, donde  $\alpha$  es independiente de  $\xi$  y  $\eta$ ; de modo que:

$$B = \frac{1}{2A} L \alpha \quad \text{Ec. (3.16)}$$

con

$$L = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{bmatrix}, \quad \text{siendo } \mathbf{0}^T = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad I^T = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\xi \\ -\xi\eta \end{Bmatrix}$$

Las componentes de la matriz  $\alpha$  están dadas en la Tabla 3.1 de la pag. 64 (con  $x$  correspondiente al lado 1-2).

Tabla 3.1 Matriz  $\alpha$  de orden  $9 \times 9$

$y_3 p_5$	0	$-4 y_3$	$-y_3 p_6$	0	$-2 y_3$	0	0	0
$-y_3 p_6$	0	$2 y_3$	$y_3 p_6$	0	$4 y_3$	0	0	0
$y_3 p_5$	$-y_3 q_5$	$y_3 (2 - r_5)$	$y_3 p_4$	$y_3 q_4$	$y_3 (r_4 - 2)$	$-y_3 (p_4 + p_5)$	$y_3 (q_4 - q_5)$	$y_3 (r_4 - r_5)$
$-x_2 t_5$	$x_{23} - x_2 r_5$	$-x_2 q_5$	0	$x_3$	0	$x_2 t_5$	$x_2 (r_5 - 1)$	$-x_2 q_5$
0	$x_{23}$	0	$x_2 t_4$	$x_3 + x_2 r_4$	$-x_2 q_4$	$-x_2 t_4$	$x_2 (r_4 - 1)$	$-x_2 q_4$
$x_{23} t_5$	$x_{23} (1 - r_5)$	$x_{23} q_5$	$-x_3 t_4$	$x_3 (1 - r_4)$	$x_3 q_4$	$-x_{23} t_5 + x_3 t_4$	$-x_{23} r_5 - x_3 r_4 - x_2$	$x_3 q_4 + x_{23} q_5$
$-x_3 p_6 - x_2 p_5$	$-x_2 q_5 + y_3$	$-4 x_{23} + x_2 r_5$	$-x_3 p_6$	$-y_3$	$2 x_3$	$x_2 p_5$	$x_2 q_5$	$(r_5 - 2) x_2$
$-x_{23} p_6$	$y_3$	$2 x_{23}$	$x_{23} p_6 + x_2 p_4$	$-y_3 + x_2 q_4$	$-4 x_3 + x_2 r_4$	$-x_2 p_4$	$x_2 q_4$	$(r_4 - 2) x_2$
$x_{23} p_5 + y_3 t_5$	$-x_{23} q_5$	$(2 - r_5) x_{23}$	$-x_3 p_4 + y_3 t_4$	$(r_4 - 1) y_3$	$(2 - r_4) x_3$	$-x_{23} p_5 + x_3 p_4$	$-x_{23} q_5 - x_3 q_4$	$-x_{23} r_5 - x_3 r_4 +$
	$+ (1 - r_5) y_3$	$+ y_3 q_5$		$-x_3 q_4$	$-y_3 q_4$	$-(t_4 + t_5) y_3$	$+ (r_4 - r_5) y_3$	$4 x_2 + (q_5 - q_4) y_3$

Así, introduciendo la Ec. (3.16) y usando  $dx dy = 2A d\xi d\eta$  se obtiene una expresión de *forma explícita* para la matriz de rigidez

$$\mathbf{K}_f^{(e)} = \frac{1}{2A} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{C}^* \boldsymbol{\alpha} \quad \text{Ec. (3.17)}$$

siendo

$$\mathbf{C}^* = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \mathbf{L}^T \mathbf{C}_f \mathbf{L} d\xi d\eta \quad \text{Ec. (3.18)}$$

La forma explícita radica en la integración exacta de los términos involucrados en la Ec. (3.18) según

$$\int_0^1 \int_0^{1-\eta} \xi^m \eta^n d\xi d\eta = \frac{m! n!}{(m+n+2)!} \quad \text{Ec. (3.19)}$$

Con lo que  $\mathbf{C}^*$  queda definida como

$$\mathbf{C}^* = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} E_1 R & E_2 R & 0 \\ E_2 R & E_3 R & 0 \\ 0 & 0 & E_4 R \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (3.20)}$$

donde

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (3.21)}$$

$$\text{y } E_1 = E_3 = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}, E_2 = \nu E_1 \text{ y } E_4 = \frac{E_1(1-\nu)}{2} \text{ para un material isotrópico.}$$

Definidas las matrices  $C^*$  y  $\alpha$ , según la Ec. (3.20) y Tabla 3.1, respectivamente; se puede calcular directamente el valor de  $K_f^{(e)}$  según (3.17). Sin embargo, la naturaleza particular de  $C^*$  puede ser aprovechada para reducir el número de operaciones involucradas en  $\alpha^T C^* \alpha$ . Así, si se considera a la matriz  $\alpha$  de forma particionada según

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (3.22)}$$

se puede definir  $Q = \alpha^T C^*$ , entonces

$$Q = \frac{1}{24} \left[ \begin{array}{c|c|c} (E_1\alpha_{11}^T + E_2\alpha_{21}^T)R & (E_2\alpha_{11}^T + E_3\alpha_{21}^T)R & E_4\alpha_{31}^T R \\ (E_1\alpha_{12}^T + E_2\alpha_{22}^T)R & (E_2\alpha_{12}^T + E_3\alpha_{22}^T)R & E_4\alpha_{32}^T R \\ (E_1\alpha_{13}^T + E_2\alpha_{23}^T)R & (E_2\alpha_{13}^T + E_3\alpha_{23}^T)R & E_4\alpha_{33}^T R \end{array} \right] \quad \text{Ec. (3.23)}$$

por lo que

$$K_f^{(e)} = \frac{1}{24} Q \alpha \quad \text{Ec. (3.24)}$$

La matriz de rigidez en el sistema cartesiano global se obtiene por la clásica expresión del cambio de ejes

$$K_{ij}^{(e)} = T^T \bar{K}_{ij}^{(e)} T \quad \text{Ec. (3.25)}$$

donde  $T$  es la matriz de transformación[8] dada por

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (3.26)}$$

siendo  $\alpha$  el ángulo que forma el eje  $x'$  del sistema local con el eje  $x$  del sistema global.

Finalmente, los momentos flectores se obtienen en cualquier punto del elemento por

$$\hat{\sigma}_f = \frac{1}{2A} \hat{D}_f L \alpha U^{(e)} \quad \text{Ec. (3.27)}$$

### 3.3 APLICACIÓN

Haciendo uso de la presentación hecha sobre el elemento DKT triangular de losa delgada en el Capítulo 3, se ha preparado un sencillo programa de computadora, el mismo que es presentado en el Apéndice adjunto.

La determinación de la matriz de rigidez (en coordenadas locales, Ec. (3.17)) está desarrollada en la subrutina `RigiElem`, los valores de la matrix  $\alpha$  son calculados en la subrutina `Alpha`.

Un test inicial es presentado en la Figura 3.4; se aprecia el defecto que tienen los elementos de la Teoría de Reissner-Mindlin para el caso de losas delgadas. Por el contrario, el elemento DKT supera este problema.

Cabe hacer notar que, en el caso de los elementos DKT, por la integración de forma explícita planteada (Ec. 3.19) y por el sistema de ejes locales utilizados  $x'y'$ , la convergencia es dependiente de la posición del elemento respecto al sistema local. En la Figura 3.4, se muestra los resultados según la posición que ofreció mejores resultados

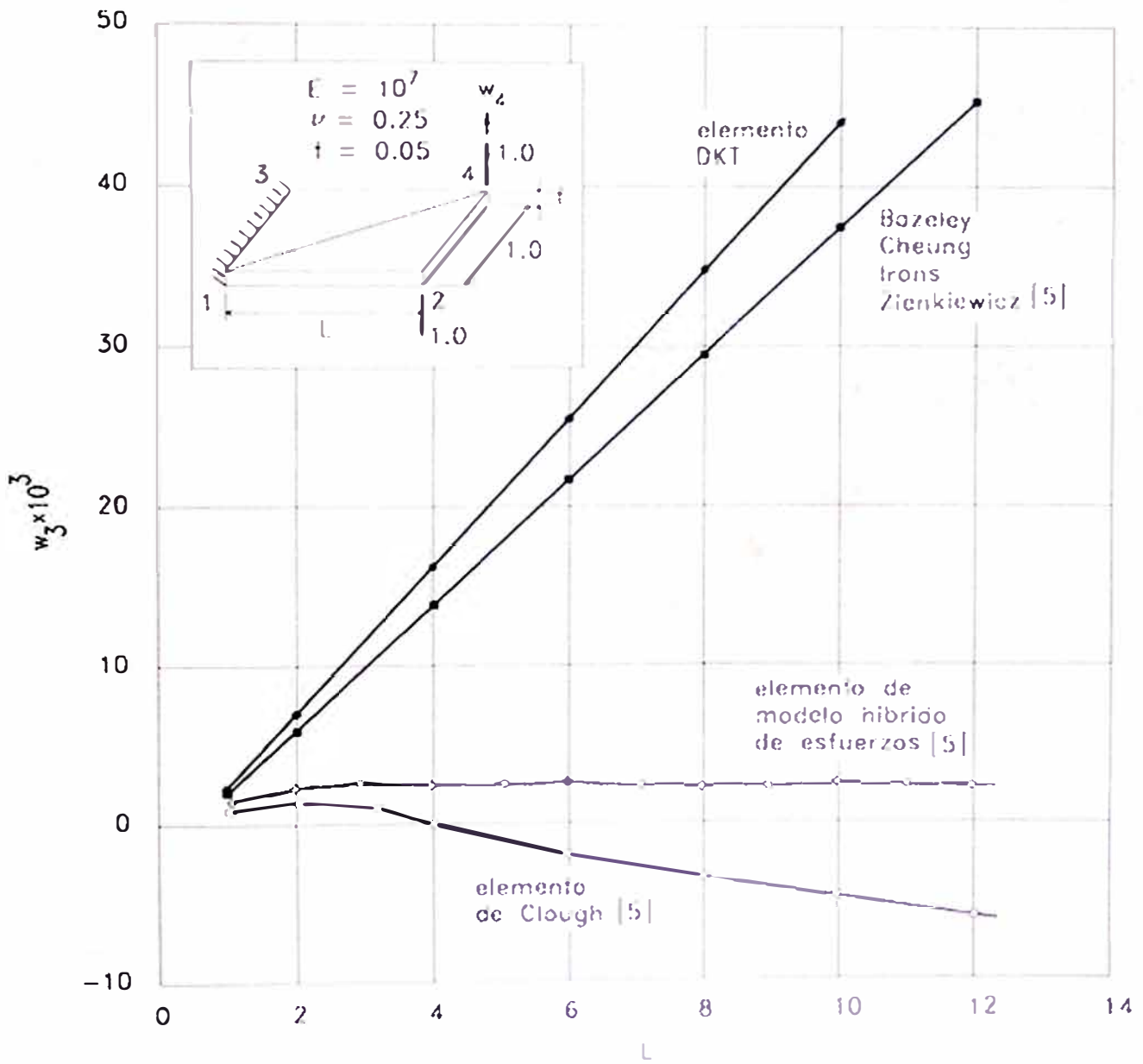


Figura 3.4 Losa en voladizo bajo carga diferencial -  $w_3$  vs  $L$

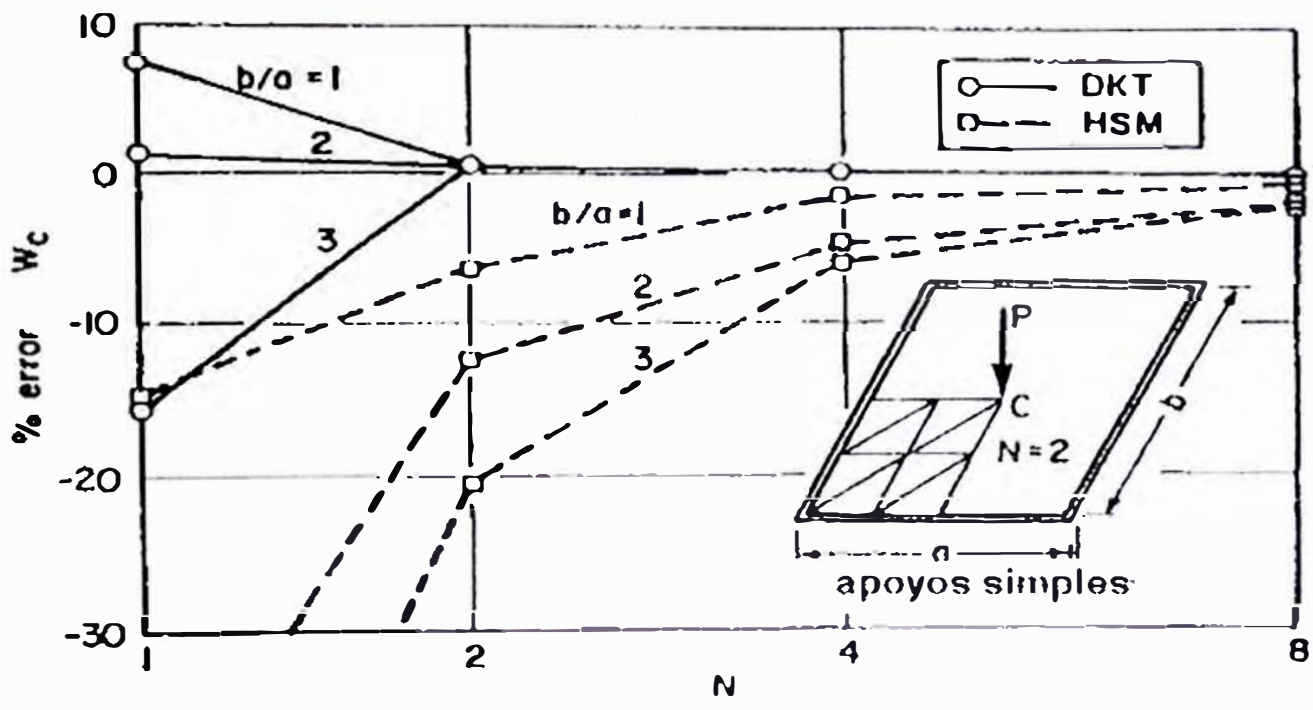


Figura 3.5 Resultados comparativos con elementos HSM [5]



# CAPÍTULO 4

## ANÁLISIS NO LINEAL DE LOSAS

### 4.1 FORMULACIÓN GENERAL DEL PROBLEMA

Generalmente, para propósitos de diseño, la determinación de esfuerzos en sistemas estructurales se realiza basado en ecuaciones diferenciales lineales (gobierna el funcional cuadrático clásico). Esto implica que las relaciones deformación desplazamiento y las relaciones constitutivas (esfuerzo deformación) son lineales.

Sin embargo, existen diversas situaciones en las cuales, las mencionadas relaciones deformación-desplazamiento ya no pueden ser consideradas lineales. Casos típicos son los efectos  $P-\Delta$ , los cuales implican considerar momentos de segundo orden debido al significativo desplazamiento lateral ( $\Delta$ ) producido en pórticos sujetos a cargas laterales y la presencia de significativa carga axial ( $P$ ) transmitida a las columnas. Otro ejemplo demostrativo es la armadura de von Mises. Estos problemas son denominados de *no linealidad geométrica*.

Se denominan problemas de *no linealidad física* cuando las relaciones constitutivas no pueden ser consideradas lineales. Estas consideraciones son mucho más claras de entender, pues, según la filosofía de diseño, en el caso de materiales como el acero y concreto, los estados límites considerados son de fluencia, fractura, agrietamiento, etc. Como ejemplo se pueden mencionar, la formación de rótulas plásticas en vigas y la determinación de espectros de respuesta de modelos masa-resorte considerando al resorte capaz de representar la no linealidad del material.

En el presente trabajo de tesis, se presta interés a problemas vinculados con la *no linealidad física*, también conocida como de *no linealidad del material*. Esta clase de problemas se presentan con mayor frecuencia respecto a la *no linealidad geométrica*, pues, el ingeniero pretende utilizar al máximo la capacidad de los materiales, por consiguiente, incursionar en el rango no lineal de las relaciones que vinculan sus propiedades físicas.

Como se afirmó, existen muchos problemas en los cuales la linealidad no es preservada y es interesante extender los procesos numéricos al campo no lineal. En este contexto, un conjunto de situaciones de la mecánica de sólidos (plasticidad, agrietamiento, aplastamiento, etc.) supera las suposiciones de la elasticidad lineal.

Esta situaciones se pueden tratar sin necesidad de reformular el problema desde el principio (esto es, sin reescribir los postulados variacionales fundamentales). Si se puede lograr una solución al problema de forma lineal, a través de algún proceso iterativo cualquiera, donde, en el estado final, se ajusten las constantes del material, de tal modo que, las nuevas leyes constitutivas sean satisfechas, entonces, se habrá obtenido la solución del problema no lineal.

Es preciso, sin embargo, mencionar que mientras en los problemas lineales la solución es siempre única, ya no ocurre lo mismo en muchas situaciones no lineales. Así, si se obtiene *una solución*, puede ser que ésa no sea necesariamente *la solución* buscada. Una correcta interpretación física de la naturaleza del problema y la utilización de métodos incrementales, son esenciales para obtener resultados que sean significativos.

Un diagrama de flujo simple para el análisis no lineal vía elementos finitos se muestra en la Figura 4.1. El primer paso en el análisis consiste en formar la matriz de rigidez de la estructura basado en las matrices de rigidez de los elementos. En este paso

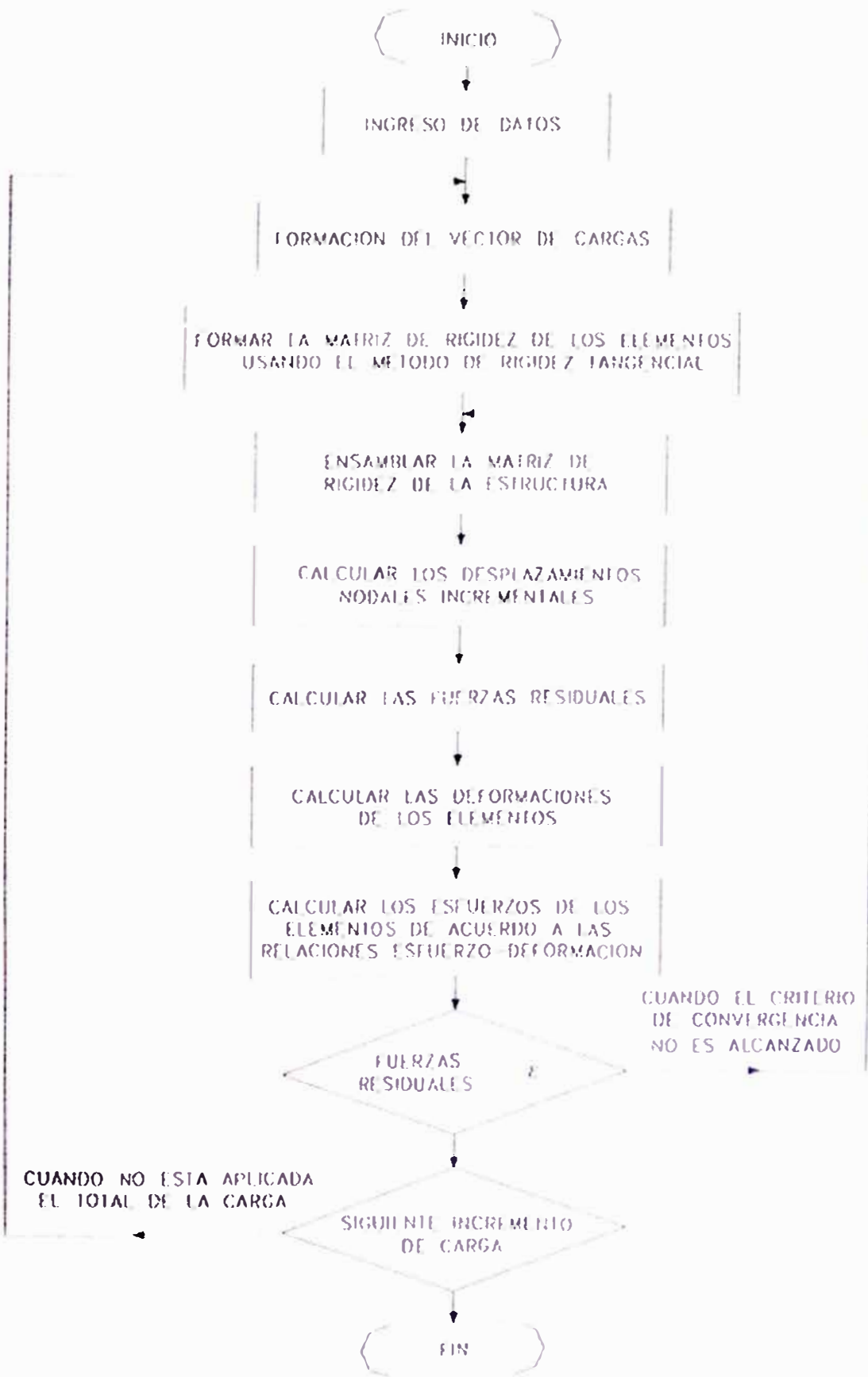
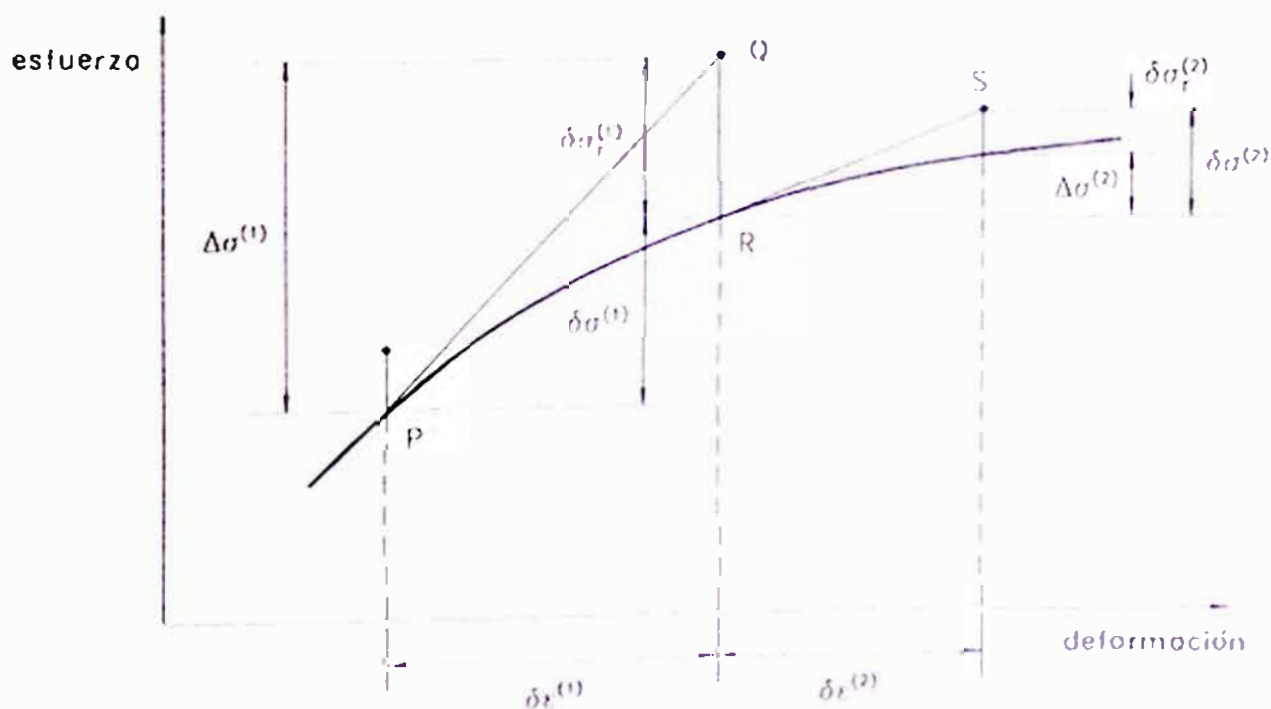


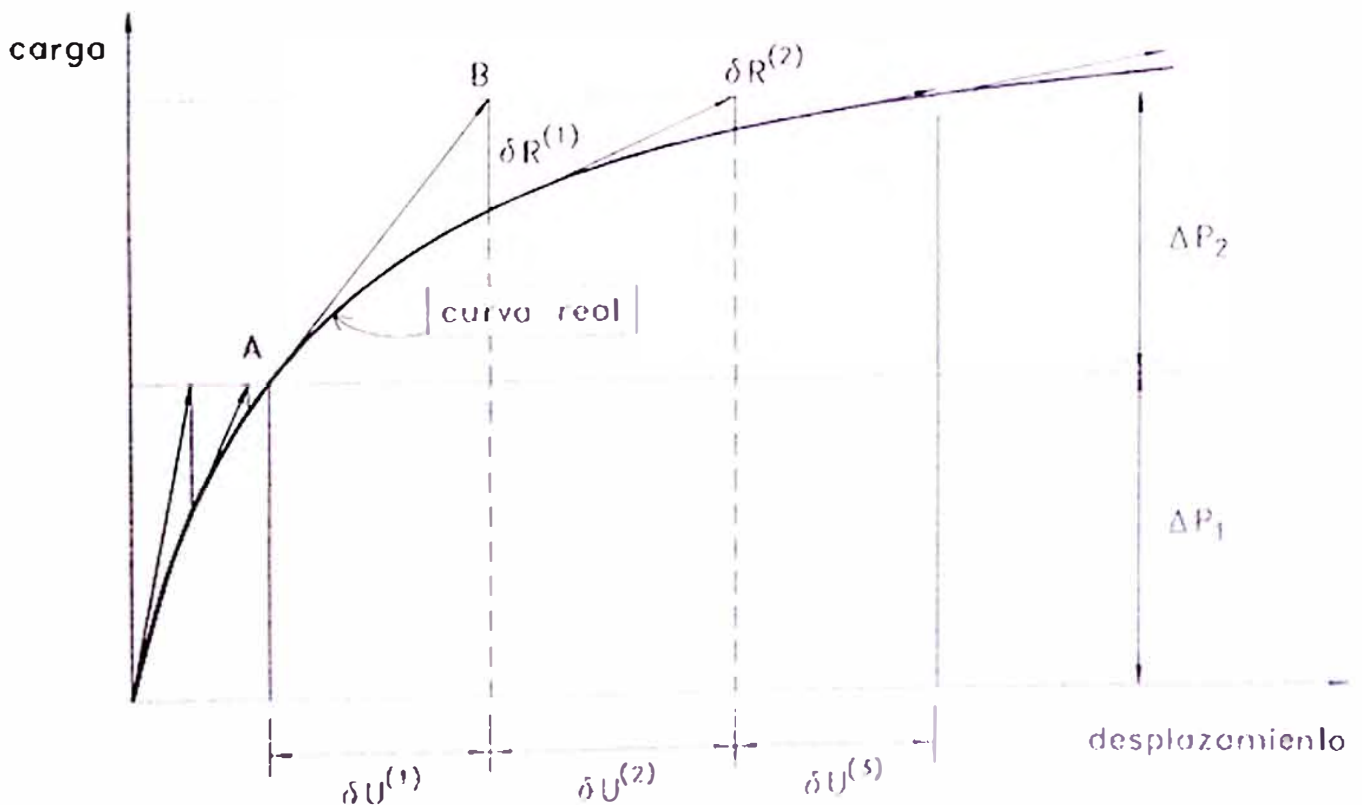
Figura 4.1 Diagrama de Flujo para un análisis no lineal via elementos finitos[21]

de aplicación de la carga, (ver Figuras 4.2 y 4.3) la matriz de rigidez está basada en las propiedades iniciales del material. La estructura es analizada bajo numerosos incrementos de carga ( $\Delta P_1, \Delta P_2, \dots$ ) que podrían ser, cualquier tipo de carga nodal o distribuida, o desplazamientos impuestos en los nudos. Para cada incremento de carga, la solución es lograda a través de varias iteraciones hasta conseguir la convergencia bajo algún criterio específico. La estructura es asumida bajo un comportamiento lineal en una iteración (línea  $\overline{AB}$ ). Siguiendo cada iteración, la matriz de rigidez de la estructura es reconstruida usando las propiedades de rigidez tangencial del material (línea  $\overline{PQ}$ ) y las fuerzas en la estructura son corregidas para reflejar el comportamiento no lineal de los materiales modelados. En el caso de desplazamientos nodales impuestos, es necesario variar las condiciones de borde durante la secuencia de carga.



**Figura 4.2** Iteración de Carga desbalanceada - nivel de Ecs. constitutivas

Siguiendo la solución de las ecuaciones nodales de equilibrio, los desplazamientos nodales son utilizados para obtener las deformaciones en cada elemento. Las deformaciones son evaluadas en cada punto de integración de los elementos para ser utilizadas en la determinación de los cambios aparentes en los esfuerzos. Estos cambios son corregidos para reflejar su comportamiento no lineal. La diferencia entre los esfuerzos aparentes ( $\delta\sigma^{(1)}, \delta\sigma^{(2)}, \dots$ ) y esfuerzos corregidos ( $\Delta\sigma^{(1)}, \Delta\sigma^{(2)}, \dots$ ) se denominan esfuerzos residuales ( $\delta\sigma_r^{(1)}, \delta\sigma_r^{(2)}, \dots$ ) los cuales son utilizados para calcular las fuerzas nodales residuales. En cada iteración, el estado de cada punto de integración es actualizado, los esfuerzos son corregidos, y una nueva matriz de rigidez tangencial es calculada (línea  $\overline{RS}$ ). Las matrices de los elementos y de la estructura son reconstruidas, y las cargas residuales son aplicadas hasta que la solución en los pasos de carga logre converger.



**Figura 4.3 Iteración de Carga desbalanceada - nivel de la estructura**

El criterio de las fuerzas residuales es usado para establecer la convergencia de los resultados en un incremento de carga. Las fuerzas residuales en cada nudo es la diferencia entre el nivel de esfuerzo real alcanzado y nivel total de carga aplicada externamente.

La *norma* para la evaluación global del criterio de fuerzas residuales es la suma de los cuadrados de las fuerzas residuales nodales (*FRN*) sobre la suma de los cuadrados de la carga nodal aplicada (*CNA*). La magnitud de este valor es usado como el parámetro de convergencia. Este criterio se puede expresar simbólicamente como sigue:

$$\frac{f(FRN^{(n)})}{f(CNA)} \leq \epsilon \text{ (error tolerable)} \quad \text{Ec. (4.1)}$$

donde

$$f(a) = \left( \sum_i a_i^2 \right)^{1/2}$$

## 4.2 ANÁLISIS DE LOSAS DE CONCRETO ARMADO

Así como en las vigas, además de métodos de análisis en base a la teoría elástica; en las losas, se plantean métodos basados en la teoría del análisis al límite[20]. Dichos métodos son empleados para determinar esfuerzos en las losas y en los sistemas de apoyo o la capacidad de carga. Alternativamente, estos métodos pueden ser utilizados para determinar la distribución de momentos y esfuerzos cortantes que permitan el diseño de las secciones concreto armado.

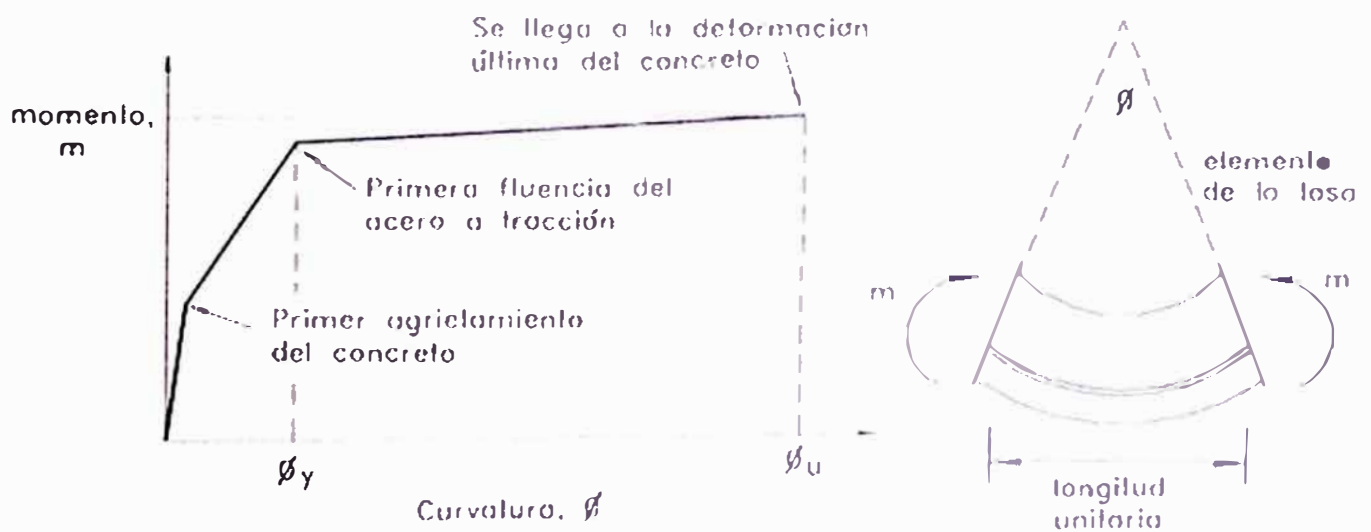


Figura 4.4 Relación momento-curvatura de un elemento de concreto armado

El análisis al límite admite que, debido a la plasticidad, pueda ocurrir la redistribución de momentos y cortantes a partir de la distribución dada por la teoría elástica, antes de que se alcance la carga máxima. Esta nueva distribución de los momentos tiene lugar debido a que, para secciones típicas de concreto armado, habrá poco cambio en el momento con la curvatura una vez que el acero a tracción haya alcanzado la resistencia de

fluencia. Así, cuando las secciones con mayores esfuerzos de una losa alcanzan el momento de fluencia, tiende a mantener una capacidad de momento cercana a la resistencia a flexión al incrementarse la curvatura (ver Figura 4.4), mientras que la fluencia del esfuerzo de la losa se extiende a otras secciones de la losa con un aumento adicional de carga. El análisis al límite calcula la carga máxima de la losa y la distribución de momentos y cortantes, suponiendo que las secciones de la losa son lo suficientemente dúctiles para permitir que tenga lugar la nueva distribución de los momentos flexionantes.

El método de la teoría de la línea de fluencia, propuesto por Johansen en 1943, se basa en la formación de un mecanismo de colapso para el sistema de losa bajo carga máxima de modo que:

1. Los momentos en las articulaciones plásticas no sean mayores que los momentos máximos de resistencia de las secciones.
2. El mecanismo de colapso sea compatible con las condiciones de borde.

Un mecanismo de colapso se compone de secciones de la losa separadas por líneas de articulación plástica y la carga máxima se calcula basándose en el mecanismo de colapso postulado. Sin embargo, no se revisan las partes de la losa entre las líneas de articulación plástica para estar seguros de que los momentos en dichos lugares no exceden los momentos máximos de resistencia. Si se postula un mecanismo de colapso incorrecto, se excederán los momentos máximos de resistencia entre las articulaciones plásticas. Por lo tanto, para un sistema de losa dado, el mecanismo de colapso que dé la carga máxima más baja, será el correcto (ver Figura 4.5).



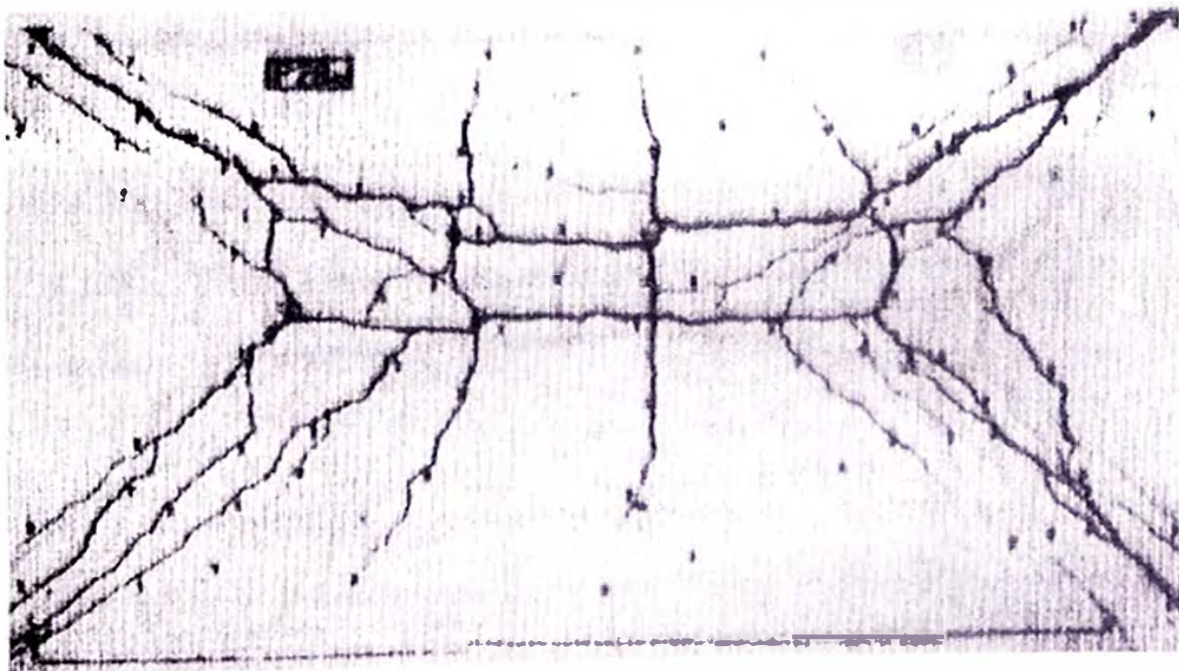
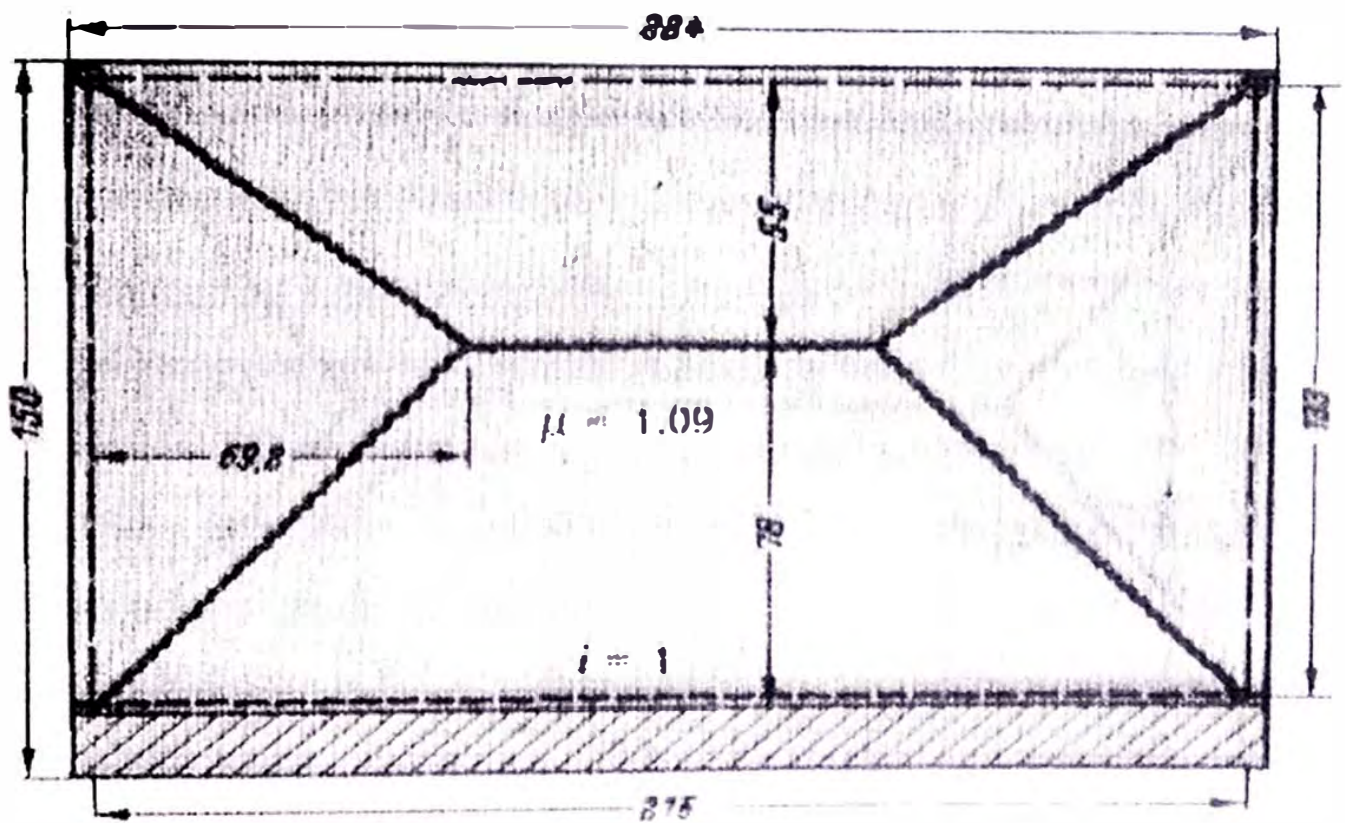


FIGURA 4.5 Losa uniformemente cargada y simplemente apoyada en todos sus bordes. (a) Patrón teórico de las líneas de fluencia. (b) Patrón real de agrietamiento - superficie inferior ( $w_u \text{ prueba} / w_u \text{ teórico} = 1.03$ ). [20]

Sin embargo, para admitir la validez de las suposiciones en las que está basado el método de la línea de fluencia, se recomienda realizar pruebas de laboratorio. Es así que para ciertos casos de sistemas de losa han sido determinados los mecanismos de colapso de modo tal que no se tiene incertidumbre al respecto.

De otro lado, si se necesita conocer los momentos de flexión y torsión, fuerzas cortantes y las deflexiones de los sistemas de losas con dimensiones dadas, el contenido de acero y las propiedades de los materiales, en cualquier etapa de carga, desde cero hasta la carga última, la determinación analítica utilizando las condiciones del equilibrio estático y la compatibilidad geométrica se torna difícil. Esto se debe a que las relaciones momento deformación de la losa son relaciones no lineales en el caso de niveles altos de esfuerzos y es generalmente necesario seguir un procedimiento paso a paso con la carga que aumente de incremento en incremento.

El método de los elementos finitos es en este sentido el procedimiento apropiado para dicho análisis. A valores bajos de carga, los elementos de losa no están agrietados y las acciones y deformaciones se pueden calcular a partir de la teoría elástica, usando la rigidez a la flexión de los elementos no agrietados de la losa. Se calculan los elementos de la losa en cada incremento para determinar si ha tenido lugar algún agrietamiento en el concreto. Cuando se alcance el momento de agrietamiento se vuelve a calcular la rigidez a la flexión del elemento sobre la base del valor de la sección agrietada y se vuelven a calcular las acciones y deformaciones de la losa. Se repite este procedimiento con el mismo valor de la carga hasta que estén correctos todos los valores de la rigidez a la flexión. Para incrementos mayores de carga, cuando los esfuerzos en uno o más elementos comienzan a entrar en el rango inelástico, se reducen las rigideces a la flexión de estos elementos al punto particular correspondiente dado por la relación momento

deformación del elemento. Esto requiere repetir el cálculo al nivel de carga, hasta que esté correcta la rigidez a la flexión de cada elemento. Finalmente, con los incrementos adicionales de carga, se alcanza la resistencia de uno o más elementos y si éstos son suficientemente dúctiles, se desarrollará la plasticidad en todo el sistema de las losas con cargas adicionales. Se llegará a la carga máxima cuando tengan lugar las deflexiones sin aumento adicional en la carga y, por consiguiente, cuando no sea posible soportar más carga.

Resulta evidente entender que para realizar el análisis total, determinando el comportamiento completo de un sistema de losas para todos los niveles o valores de carga es prolongado y sólo se puede emprender con éxito con la ayuda de una computadora que tenga gran capacidad de almacenamiento y velocidad de proceso.

#### **4.2.1 MODELOS DE LOS MATERIALES COMPONENTES PARA EL ANÁLISIS NO LINEAL**

Como se indicó en la sección 4.1, para el caso de no linealidad del material, las relaciones constitutivas se plantean bajo relaciones no lineales esfuerzo-deformación. Así, las relaciones constitutivas de los materiales componentes para el concreto armado son presentados en esta sección.  $f_t^*$  y  $f_c^*$  representan los esfuerzos uniaxiales de agrietamiento y aplastamiento para el concreto, respectivamente.  $f_y$  representa el esfuerzo de fluencia para el refuerzo (Ver Figura 4.6).

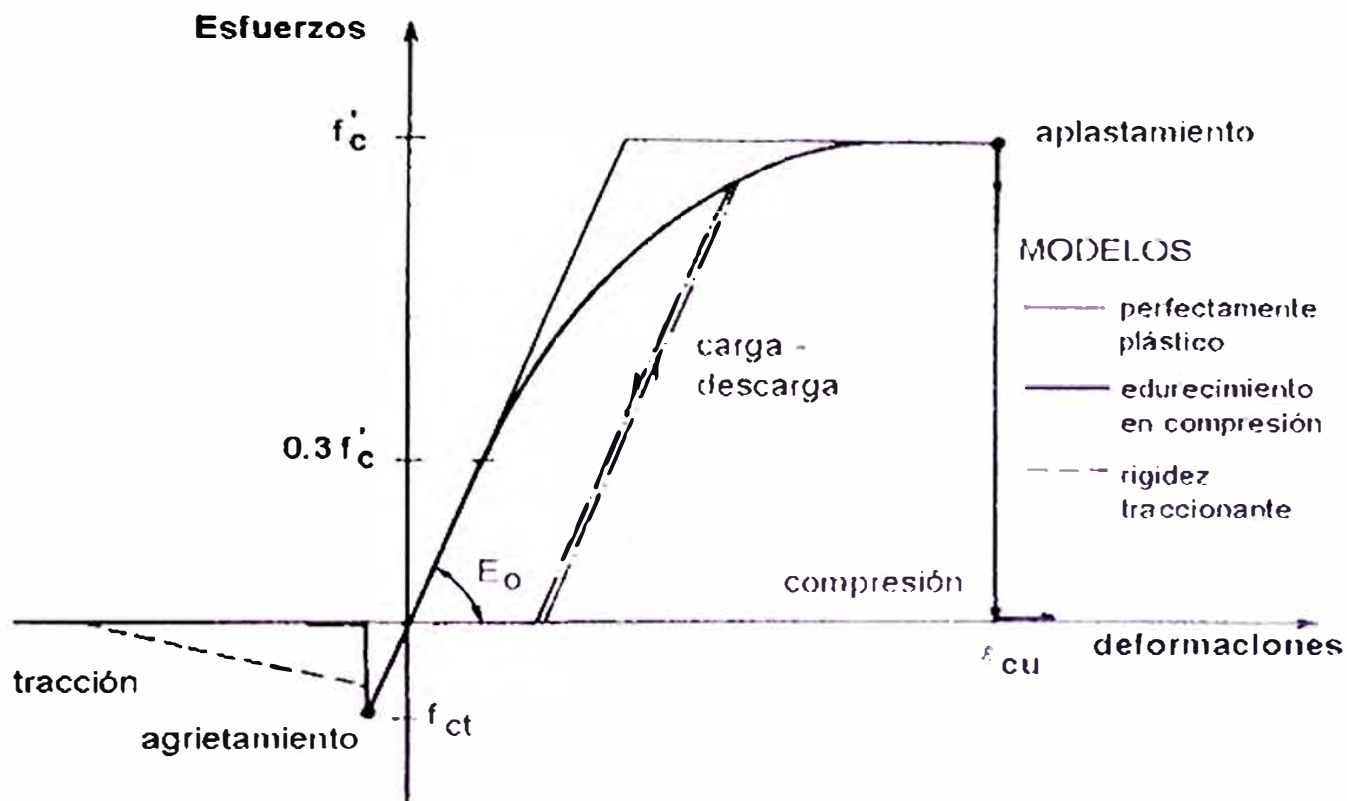


Figura 4.6 Modelos constitutivos unidimensionales para el concreto

Para predecir la capacidad última de una estructura de concreto armado, las propiedades de sus materiales constituyentes deben ser determinadas. Bajo un estado de esfuerzos biaxial, el concreto exhibe diferentes características de rigidez, resistencia y ductilidad que las comparadas al estado uniaxial. Kupfer, et al (1969, 1973) basados en resultados experimentales, determinaron expresiones matemáticas que representan las relaciones esfuerzo-deformación para los estados biaxiales de esfuerzos y la envolvente de resistencia biaxial en términos de los esfuerzos principales (ver Figuras 4.7 y 4.8).

Las ecuaciones que relacionan el cambio de deformación según el cambio de esfuerzos, para un incremento lineal en un material ortotrópico puede ser escrita según



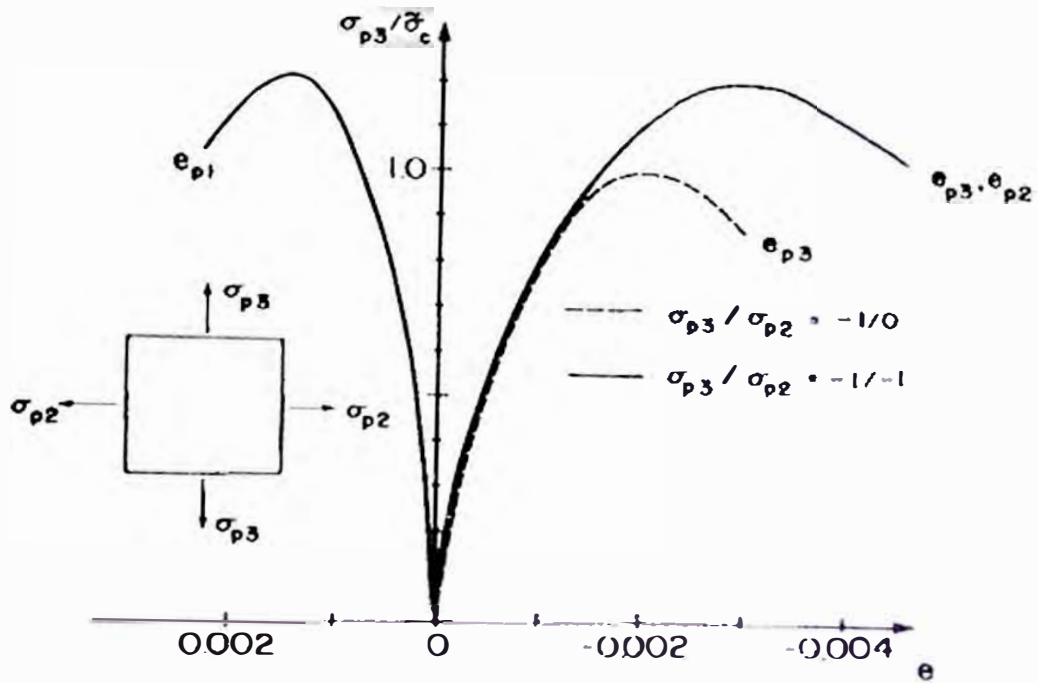


Figura 4.7 Relaciones esfuerzo-deformación del concreto para estados biaxiales de esfuerzos

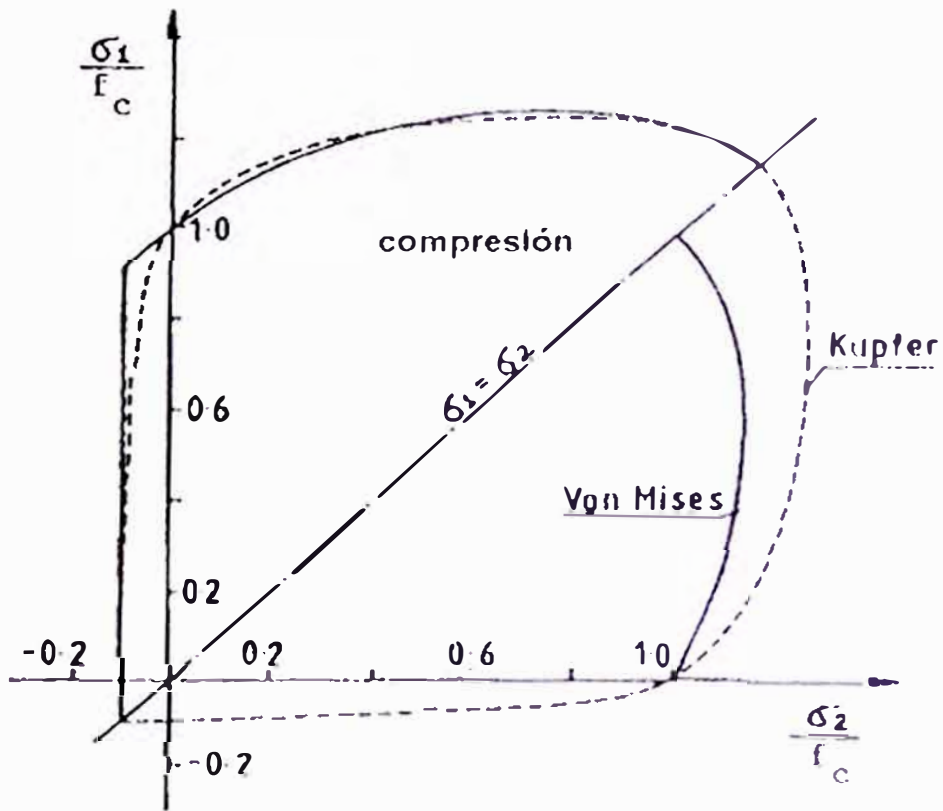


Figura 4.8 Envolvente de resistencia biaxial en términos de los esfuerzos principales

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_1 &= \frac{d\sigma_1}{E_1} - \nu_2 \frac{d\sigma_2}{E_2} \\
 d\varepsilon_2 &= -\nu_1 \frac{d\sigma_1}{E_1} + \frac{d\sigma_2}{E_2} \\
 d\gamma_{12} &= \frac{d\tau_{12}}{G_{12}}
 \end{aligned}
 \tag{Ec. (4.2)}$$

donde  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $\nu_1$  y  $\nu_2$  representan las propiedades del material dependientes del nivel de esfuerzos.

Resolviendo estas ecuaciones para cambios de esfuerzos en términos de cambios de deformaciones, se tiene

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_1 \nu_2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_2 E_1 & 0 \\ \nu_1 E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}(1 - \nu_1 \nu_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{bmatrix}
 \tag{Ec. (4.3)}$$

Por consideraciones energéticas,  $\nu_1 E_2 = \nu_2 E_1$ , y para lograr una simplificación en las ecuaciones si  $\nu^2 = \nu_1 \nu_2$ , se tiene

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu \sqrt{E_1 E_2} & 0 \\ & E_2 & 0 \\ -\text{sim} & & (1 - \nu^2)G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{bmatrix}
 \tag{Ec. (4.4)}$$

Para el desarrollo del modelo de elementos finitos de un elemento de concreto armado, tres representaciones alternativas pueden ser empleadas: discreta, embebida y distribuida.

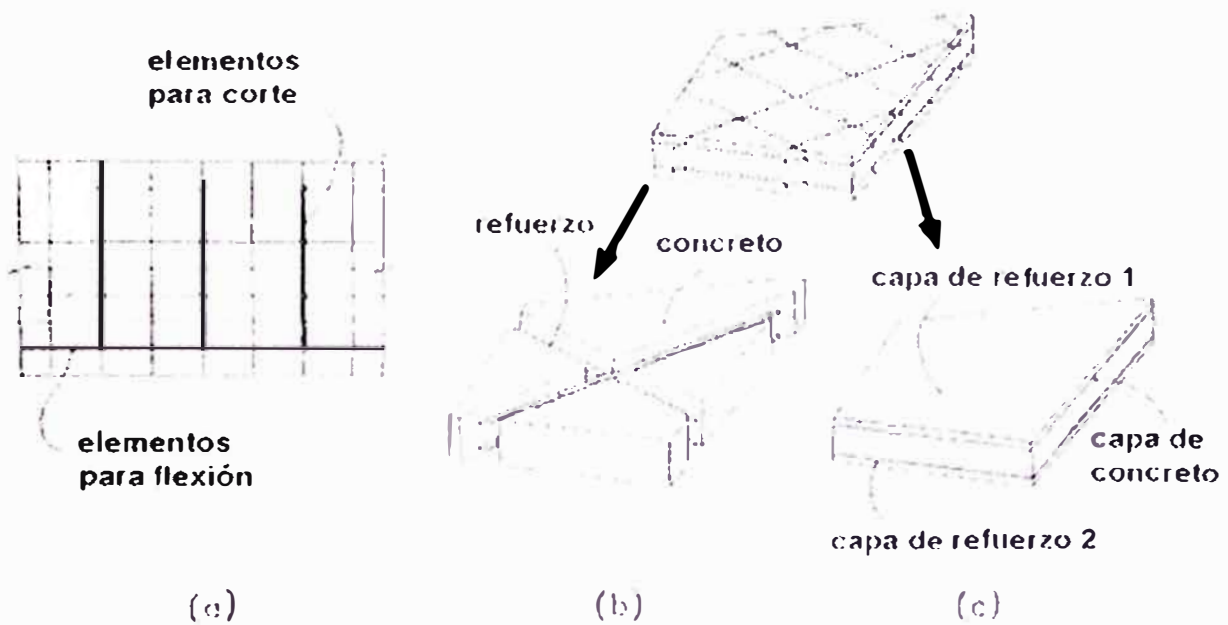


Figura 4.9 Modelos. (a) discreta, (b) embebida y (c) distribuida.

Para la representación distribuida, el refuerzo es asumido como distribuido sobre los elementos de concreto, con un particular ángulo  $\theta$  de orientación. En este caso, relaciones constitutivas compuestas son utilizadas asumiendo una perfecta adherencia entre en concreto y el refuerzo. Así, el refuerzo es tratado como un material uniaxial y la matriz constitutiva del material compuesto es obtenida adicionando la matriz constitutiva del refuerzo, Ec. (4.5), a la del concreto.

$$C_{ref} = \rho_{ref} \begin{bmatrix} E_{ref} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (4.5)}$$

## 4.2.2 AGRIETAMIENTO Y ADHERENCIA

El agrietamiento es una consideración importante que se debe tener en cuenta en el comportamiento de estructuras de concreto armado. En este sentido, modelar la formación de grietas juega un papel decisivo en el comportamiento de los modelos analíticos que representan estas estructuras.

El agrietamiento ocurre cuando la resistencia a la tracción en el concreto es excedida, esto es,  $f_t'$ . Cuando el esfuerzo principal en el concreto excede la resistencia a la tracción, una grieta es formada perpendicularmente a la dirección del esfuerzo principal, ver Figura 4.10(a). El agrietamiento es modelado reduciendo el valor del módulo de elasticidad  $E$ , repentinamente a cero a lo largo de la dirección del esfuerzo principal. Otros modelos empleados reducen el valor de  $E$ , gradualmente a cero. Esto es mostrado en la Figura 4.10(b). Esta última opción es empleada para mejorar la convergencia de la solución.

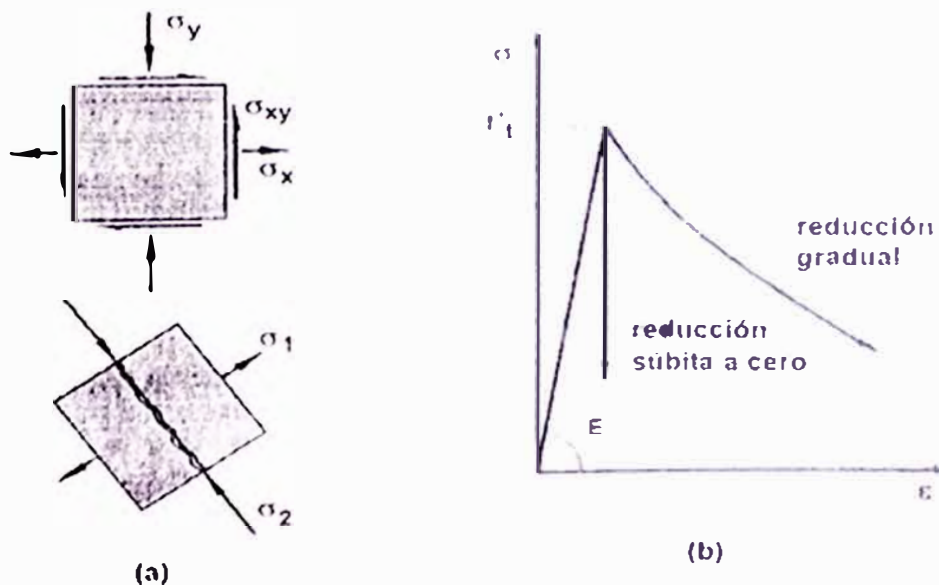


Figura 4.10 Agrietamiento. (a) formación de grietas (b) modelos.



Diferentes modelos han sido desarrollados para representar el agrietamiento para un análisis con elementos finitos. Un modelo particular para representar el agrietamiento es seleccionado dentro de varias posibilidades dependiendo del propósito del estudio y de la naturaleza de la información que se requiere obtener. Así, si se espera obtener el comportamiento de sistemas estructurales a partir de curvas carga-desplazamiento, sin importar obtener un realístico patrón de agrietamiento y los esfuerzos locales, una representación difusa de las grietas es probablemente la mejor elección. Por otro lado, si se requiere obtener un comportamiento local en detalle de lo que ocurre en el sistema estructural, el uso de modelos discretos de grietas es utilizado principalmente. En casos especiales, modelos de mecanismos de fractura es la herramienta apropiada.

El *modelo de agrietamiento discreto* fue el primero en ser empleado en el concreto armado para incluir el efecto del agrietamiento. Las grietas son modeladas bajo la separación de nudos, según se muestra en la Figura 4.11(a).

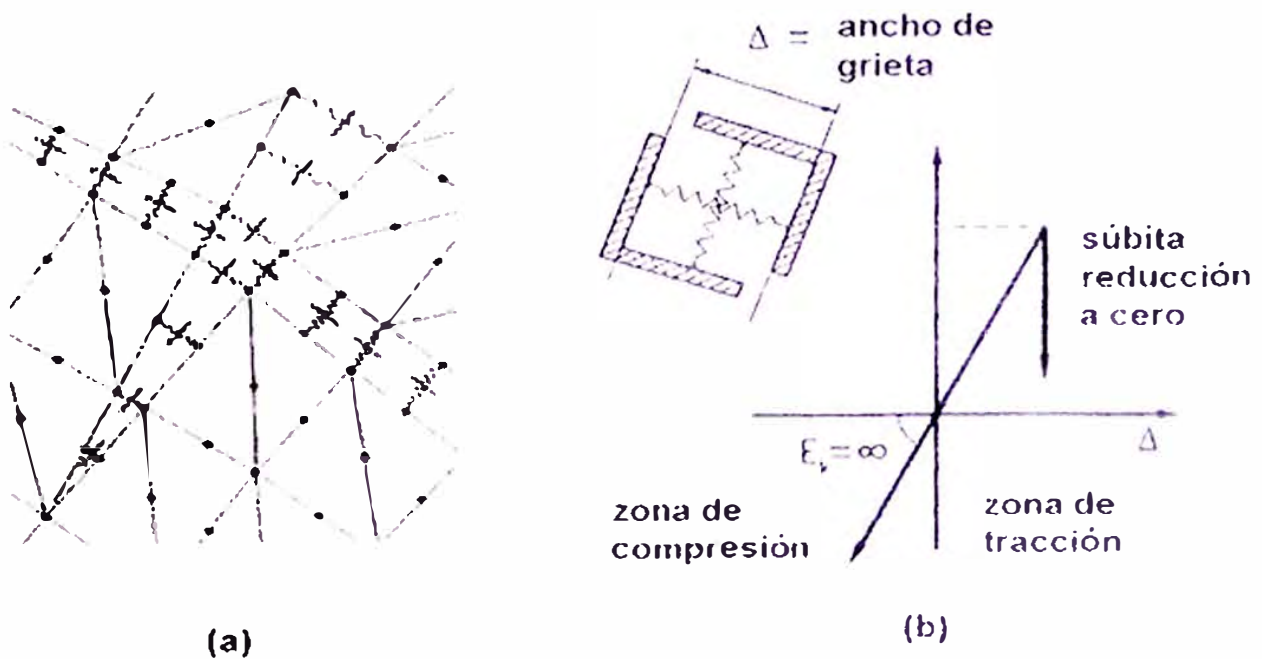


Figura 4.11 Modelo discreto de formación de grietas en el concreto

La ubicación discreta de las grietas esta basada en una predefinición del patrón de agrietamiento en el modelo de elementos finitos. Sin embargo, es posible generar la ubicación de las grietas. En este caso, el agrietamiento está basado en el esfuerzo promedio de los elementos adyacentes. Cuando el esfuerzo promedio excede la resistencia a la tracción (tomada como módulo de ruptura,  $f_t = 0.85 f_c'$ ), los elementos son desconectados de su nudo común. El modelo matemático se muestra en la figura 4.11(b). El agrietamiento es modelado por la reducción repentina del valor de  $E_c$  a cero cuando se alcanza la resistencia de agrietamiento. En la zona de compresión en comportamiento es considerado permanentemente lineal.

En el *modelo de agrietamiento difuso*, se asume que el agrietamiento en el concreto es continuo. A diferencia del modelo de agrietamiento discreto, este modelo representa un número infinito de fisuras paralelas que atraviesan al elemento de concreto agrietado. Según la Figura 4.12, se asume que las fisuras paralelas se encuentran en planos perpendiculares a la dirección del máximo esfuerzo principal. Después que ocurre el agrietamiento, se asume que el concreto agrietado asume propiedades ortotrópicas, con uno de los ejes principales del material orientado a lo largo de la dirección de agrietamiento.

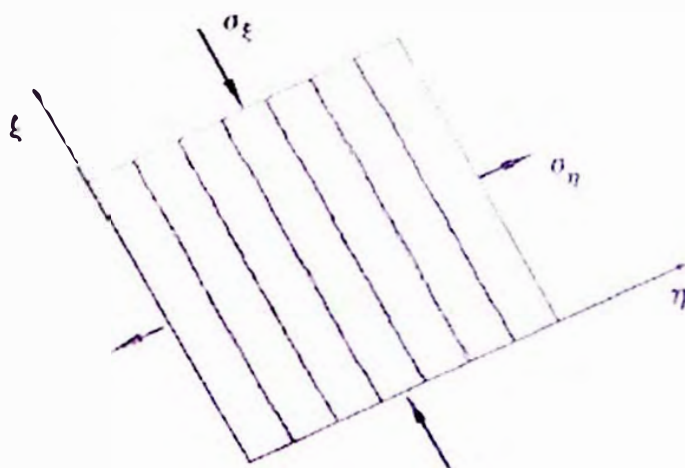


Figura 4.12 Modelo difuso de formación de grietas

Antes del agrietamiento, se asume que el concreto no agrietado está formado por un material isotrópico, elástico lineal, cuyas relaciones constitutivas están dadas por

$$\sigma = C \varepsilon \quad \text{Ec. (4.6)}$$

Cuando se introduce propiedades ortotrópicas para representar el agrietamiento, unas nuevas relaciones constitutivas incrementales deben ser consideradas. Esto se consigue modificando la matriz tangencial del material,  $C$ . Entonces, las relaciones incrementales de esfuerzo-deformación son

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_{\eta} \\ d\sigma_{\xi} \\ d\tau_{\eta\xi} \end{Bmatrix} = C_t \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{\eta} \\ d\varepsilon_{\xi} \\ d\gamma_{\eta\xi} \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. (4.7)}$$

donde

$$C_t = \begin{bmatrix} E^* & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (4.8)}$$

siendo  $\eta$  la dirección perpendicular a los planos de agrietamiento. El valor de  $E^*$  es considerado frecuentemente igual a cero. Sin embargo, cuando existen problemas de convergencia, esta dificultad se resuelve bajo una reducción gradual de  $E^*$ .

En el caso de una representación discreta del refuerzo como se indicó en 4.2.1, la idealización de la adherencia entre el refuerzo y en concreto de la vecindad puede ser considerada. Para esta consideración, elementos de enlace (*link element*) son utilizados para modelar este fenómeno. Estos elementos consisten de dos resortes ortogonales los cuales transmiten fuerzas normales ( $F_H$ ) y de corte ( $F_V$ ). Las relaciones constitutivas para este elemento relacionan estas fuerzas con los desplazamientos nodales.

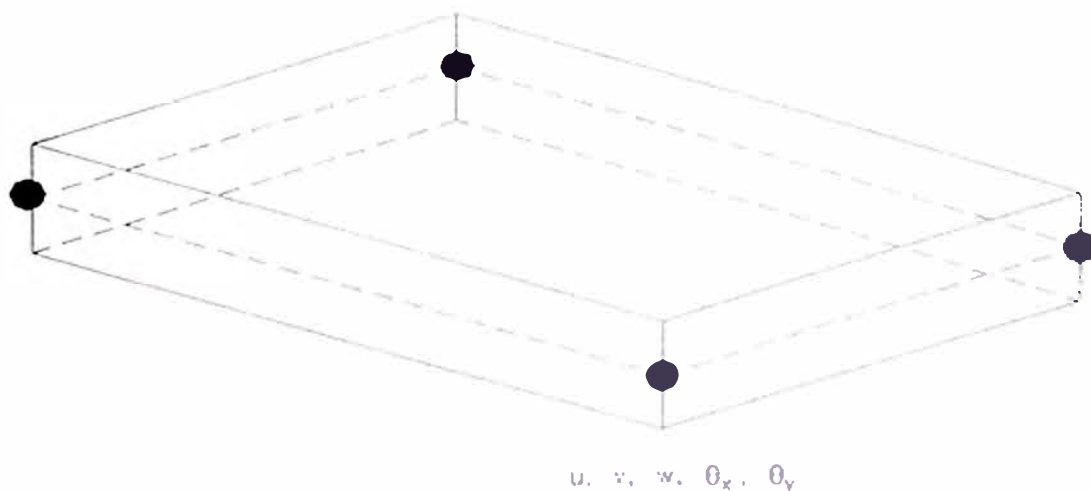
$$\begin{Bmatrix} F_H \\ F_V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_H & 0 \\ 0 & k_V \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_H \\ d_V \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. (4.9)}$$

El valor de  $k_H$  representa la rigidez al corte y que puede ser obtenido de las relaciones deslizamiento - esfuerzo de adherencia. El valor  $k_V$  está relacionado con la acción de dowel; a este parámetro se le puede asignar un valor arbitrario muy pequeño con el objeto de no considerar este efecto.

## 4.3 MODELAMIENTO DE LAS LOSAS PARA EL ANÁLISIS NO LINEAL

La aplicación de los elementos finitos es considerado como la vía apropiada para el análisis no lineal en losas de concreto armado. No linealidades, tanto de los materiales constituyentes como de la geometría son considerados en los modelo numérico. El principal objetivo del desarrollo de modelos numéricos es el de predecir las características de deformación y carga límite de dichas estructuras. Sin embargo, el comportamiento complejo del concreto armado lleva siempre a una simplificación en el desarrollo de dichos modelos.

En lo concerniente a los modelos numéricos, muchos estudios han sido realizados con el afán de lograr este objetivo [7][9][12].



**Figura 4.13** Elemento de Reisner-Mindlin de cinco grados de libertad por nudo

En la Universidad de Illinois [1], elementos de 4 nudos tipo losa de Reissner-Mindlin son utilizados para formar capas de concreto. Como se muestra en la Figura

4.13, cada nudo ubicado en el plano medio del elemento contiene cinco grados de libertad. El desplazamiento  $w$  y las dos rotaciones independientes,  $\theta_x$  y  $\theta_y$ , son utilizadas para definir las rigideces flexionante y de corte transversal de acuerdo a la teoría de Reissner-Mindlin. Los grados de libertad  $u$  y  $v$  son requeridos para prescribir la rigidez de membrana del elemento.

Bajo cargas laterales, la rigidez de membrana de cada capa de concreto es activada debido a la ubicación excéntrica con respecto al eje neutro. Entonces, un fenómeno de acoplamiento existe entre la extensión en el plano de cada capa y la flexión transversal del elemento. Una consideración de rigidez de membrana de las capas bajo cargas laterales es, entonces, necesaria para simular el efecto de acoplamiento antes mencionado. Sin embargo, para cada capa, la teoría de pequeñas deflexiones es asumida, y los modos de membrana y flexión dentro de cada capa son desacopladas. Más aún, en el modelo del material, se asume que los esfuerzos transversales de corte no afectan al comportamiento biaxial del concreto en el plano de la losa. Por tanto, las matrices de rigidez del elemento para las porciones de membrana, flexión y corte son calculadas independientemente para luego ser ensambladas.

Una técnica de integración reducida selectiva de  $2 \times 2$  puntos de Gauss es utilizada para evaluar la rigidez flexionante del elemento, mientras que un esquema de integración reducida de un punto es utilizada para la rigidez de corte transversal.

Las barras de refuerzo son modeladas como capas de membrana equivalente con propiedades uniaxiales orientadas en la dirección del refuerzo. En cada nivel de reforzamiento, el área de sección transversal de la capa de membrana empleada es igual al área total de la sección transversal del refuerzo.

Múltiples capas de elementos de Reissner-Mindlin de cinco grados de libertad por nudo y elementos de dos grados de libertad por nudo son utilizados para simular capas de concreto y acero, respectivamente. En una pila de elementos, los nudos de las esquinas comparten las mismas coordenadas  $x$  e  $y$ . El desplazamiento transversal,  $w$ , es asumido el mismo para todas las capas. Para impedir el movimiento relativo entre capas, el desplazamiento horizontal de las capas a lo largo de sus caras comunes debe de ser el mismo. Este requerimiento es satisfecho introduciendo dos ecuaciones de compulsión en cada nudo de la pila. Aplicar estas condiciones entre una capa de concreto y otra de acero implica una condición de perfecta adherencia.

En la Universidad de Swansen[9], un completo estudio sobre el modelamiento de losas y cáscaras de concreto armado ha sido realizado; no linealidades de geométricas y del material fueron consideradas en el modelo numérico las cuales concuerdan con las características de deformación y predicciones de carga última.

Para la discretización estructural, elementos tipo cáscara cuadráticos degenerados fueron empleados para la representación tipo capa a través del espesor. Elementos serendipitos de 8 nudos fueron utilizados. Las matrices de rigidez son determinadas mediante la integración numérica utilizando una integración selectiva y reducida. Las características del concreto son especificadas para cada capa y el refuerzo de acero es representado como una capa esparejada de espesor equivalente con propiedades de resistencia y rigidez uniaxiales.

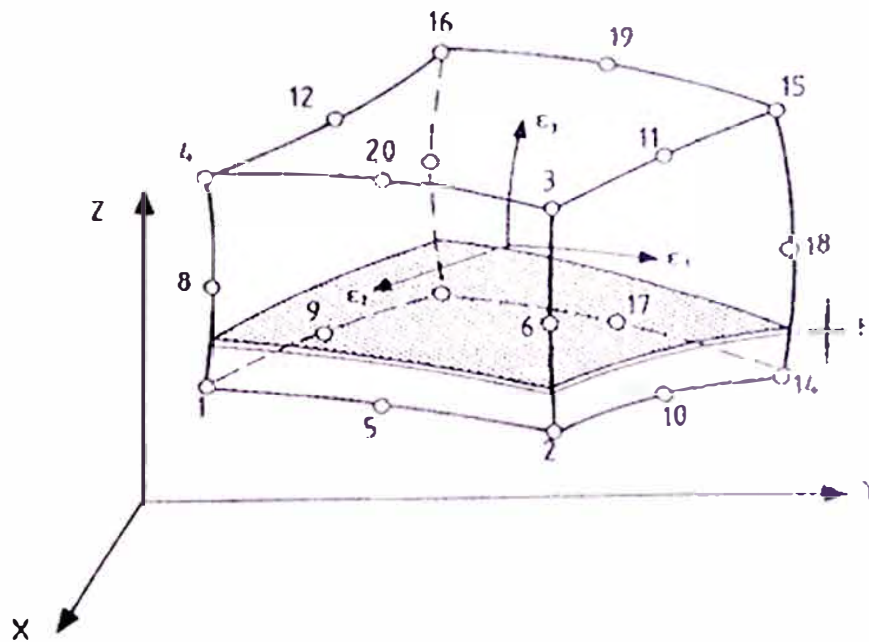
Un modelo tridimensional[7] de elementos finitos ha sido desarrollado para analizar estructuras de concreto armado de tipo losa y cáscara (ver Figura 4.14). Un elemento



isoparamétrico de 20 nudos es utilizado, así como el uso de 15 puntos para la integración numérica. La matriz de rigidez del concreto sólido es determinado por la expresión:

$$K_c = \int_V B^T D_c B |J| dV \quad \text{Ec. (4.10)}$$

en la cual,  $B$  es la matriz de relación deformación-desplazamiento y  $|J|$  es el determinante de la matriz jacobiana.



**Figura 4.14** Elemento tridimensional de concreto con capa de refuerzo

Una perfecta adherencia es asumida entre el concreto y el acero de refuerzo. Esta simplificación de compatibilidad de desplazamientos y deformaciones entre el acero y el concreto permite que el refuerzo sea tratado como una parte integral del elemento tridimensional. Según esto, la rigidez del refuerzo es añadida a la del concreto obteniendo una rigidez global del elemento, esto es



$$K = K_c + K_s \quad \text{Ec. (4.11)}$$

donde

$$K_s = \int_{(\Omega)} B^T L^T D_s L B t d\Omega$$

siendo  $t$  el espesor equivalente de la membrana de acero y  $L$  es una matriz de transformación de las coordenadas locales a las coordenadas globales de referencia.

En el Institut für Massivbau, TH Darmstadt (Univ. Técnica de Darmstadt, Instituto de Construcción en Concreto Armado), en Alemania [12], se estudió la influencia del esfuerzo cortante lateral en el comportamiento de losas de concreto armado. Un elemento losa de múltiples capas fue utilizado considerando rotaciones independientes en cada capa para modelar la distribución no lineal de la deformación cortante a través del espesor de la losa.

Un elemento de cáscara isoparamétrico curvilíneo es utilizado. Los parámetros nodales son los desplazamientos  $u$ ,  $v$  y  $w$  a lo largo de las coordenadas globales  $x$ ,  $y$  y  $z$  con  $z$  normal al plano medio y dos rotaciones  $\alpha$  y  $\beta$  alrededor de los ejes  $y$  y  $x$ , respectivamente.

El elemento capa está formado por el ensamblaje de elementos losa con las mismas cargas nodales en las direcciones  $x$  e  $y$ , sin embargo, cada una de ellas con diferente distancia  $b$  medida desde el plano de referencia. Cada uno de los elementos puede tener diferentes propiedades de material y espesor  $h$ .

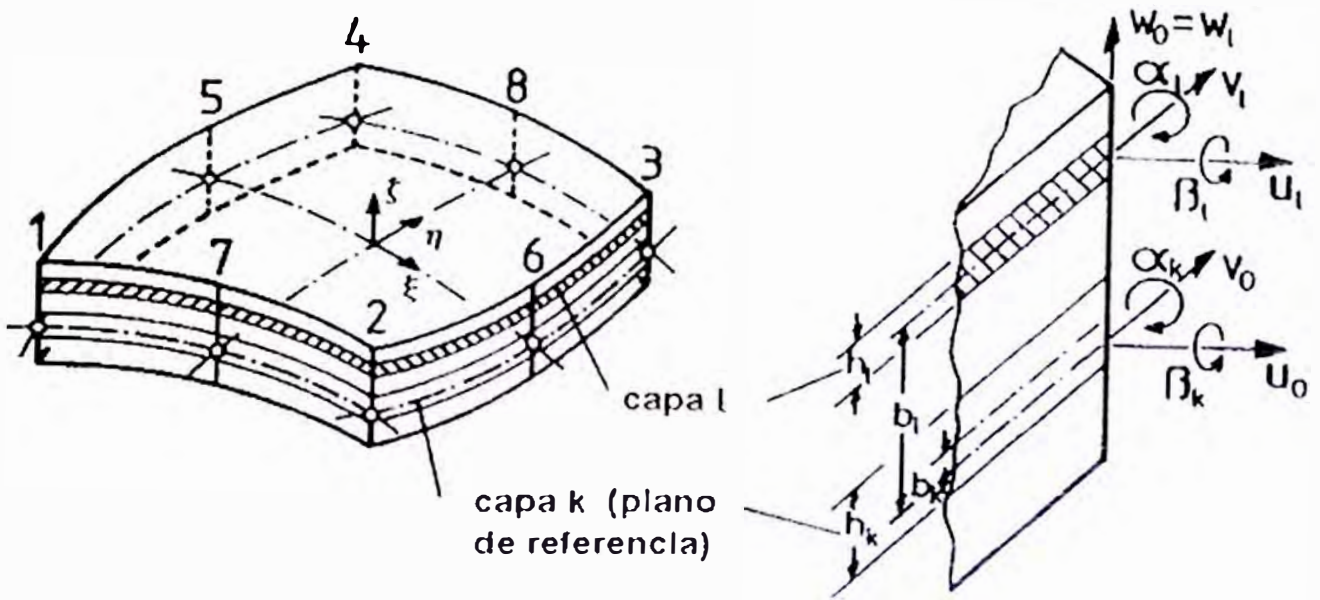


Figura 4.15 Elemento capa

Las deformaciones del elemento capa son descritas por los desplazamientos  $u_0$ ,  $v_0$  y  $w_0$  del plano de referencia y dos rotaciones normales  $\alpha$  y  $\beta$  de cada capa constituyente. Las rotaciones normales varían de capa a capa, y son independientes del desplazamiento lateral. El desplazamiento transversal  $w$  es asumido el mismo para todas las capas. Por consideraciones de continuidad de los desplazamientos en el plano paralelo al plano neutro, las deformaciones de una capa  $l$  son obtenidas en función a las deformaciones del plano de referencia, esto es:

$$\begin{aligned}
 u_l &= u_0 \pm \left(\frac{1}{2}h_k \pm h_k\right)\alpha_k \pm \sum_{i=k+1}^{l-1} h_i \alpha_i \pm \frac{1}{2}h_l \alpha_l \\
 v_l &= v_0 \pm \left(\frac{1}{2}h_k \pm h_k\right)\beta_k \pm \sum_{i=k+1}^{l-1} h_i \beta_i \pm \frac{1}{2}h_l \beta_l \\
 w_l &= w_0
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

## 4.4 APLICACIÓN

Para el análisis no lineal de una losa, se ha utilizado el programa de cómputo PLASF presentado en la Referencia[10]. El programa utiliza un elemento de capas de cáscaras de 9 nudos (5 g.l por nudo) de deformación asumida propuesto originalmente por Figueiras; en la parte de flexión utiliza un elemento de Reissner Mindlin; teniendo en consideración la eliminación del defecto en este tipo de elementos para losas delgadas con la teoría de la cáscara curva degenerada.

El programa utiliza una formulación elasto plástica bajo el criterio de fluencia de Huber-Mises:

$$F(\sigma, k) = f(\sigma) - Y(k)$$

considerando el esfuerzo normal transversal  $\sigma_3$  negligible.

El programa permite para el proceso de solución no lineal, elegir entre diferentes métodos para el recálculo de la matriz de rigidez.

1. Método de la rigidez inicial
2. Método de la rigidez tangencial
3. Recálculo de la matriz de rigidez en la primera iteración de cada incremento de carga
4. Recálculo de la matriz de rigidez en la segunda iteración de cada incremento de carga o cuando ocurre la descarga en un punto de integración (plasticidad).

Elegir uno de estos procesos simple que signifique mayor recálculo de la matriz de rigidez, trae como consecuencia un mayor tiempo de cómputo.

Se ha elegido para la aplicación una losa ensayada por Duddeck[9]. La losa es cuadrada apoyada en sus esquinas sometida a una carga concentrada en el centro de la misma. (ver Figura 4.16)

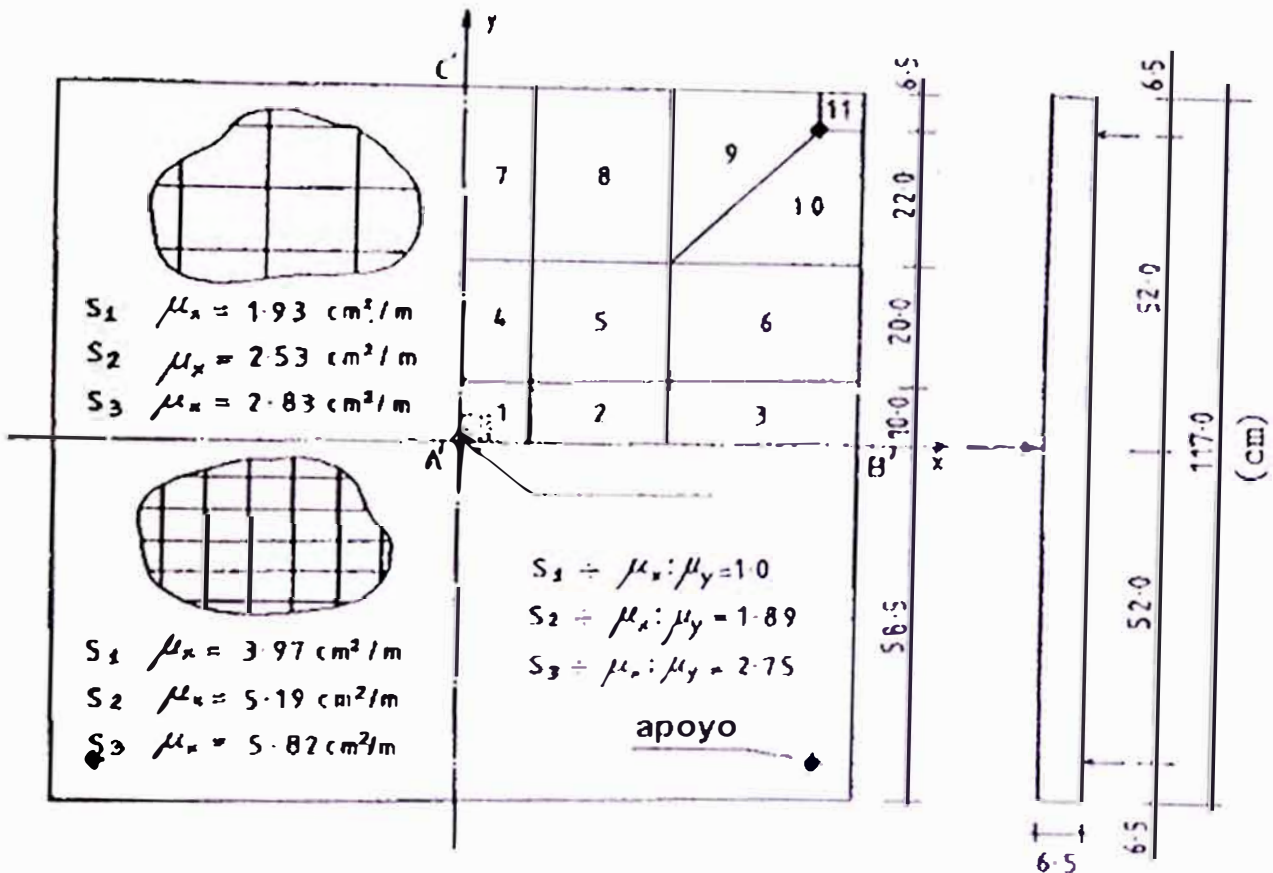


Figura 4.16 Losa cargado en el centro con apoyo en sus esquinas: geometría, refuerzo y modelo de elementos finitos

Las propiedades de los materiales están indicados en la siguiente tabla

Propiedades de los materiales (cm; kN)	
concreto	acero
$E_c = 1640.0$	$E_s = 20100.0$
$\nu = 0.0$	esfuerzo de fluencia, $f_y = 60.0$
esfuerzo último de compresión, $f_c = 4.30$	$E_s = 700.0$
esfuerzo último de tracción, $f_t = 0.30$	esfuerzo último, $f_y = 70.0$

Parte del archivo de datos es proporcionado. El análisis se llevó a cabo en una computadora personal de micro procesador 486 (66 Mhz). Fueron necesarios 10 minutos

para obtener los resultados; se presenta en la Figura 4.16 la curva carga aplicada deflexión del punto central.

**LOSA CUADRADA CON CARGA PUNTUAL.**

169	36	4	9	7	3	15	1	10	0	
1	1	2	3	4	4	4	4	5	6	7
	1	2	3	16	29	28	27	14	15	
2	1	2	3	4	4	4	4	5	6	7
	3	4	5	18	31	30	29	16	17	
3	1	2	3	4	4	4	4	5	6	7
	5	6	7	20	33	32	31	18	19	
4	1	2	3	4	4	4	4	5	6	7
	7	8	9	22	35	34	33	20	21	
5	1	2	3	4	4	4	4	5	6	7
	9	10	11	24	37	36	35	22	23	

identificación de los elementos de 9 nudos.

.....	1	0.00	0.00	32.50
		0.00	0.00	-32.50
	2	130.00	0.00	32.50
		130.00	0.00	-32.50
	3	260.00	0.00	32.50
		260.00	0.00	-32.50
	4	346.67	0.00	32.50
		346.67	0.00	-32.50

coordenadas de los nudos, cada nudo por capa.

***	1	11100	condiciones de borde:
	13	11100	apoyos en las esquinas
	157	11100	
	169	11100	

1	1.6E+04	0.2	0.2708	1.00E+00	0.0	43.0	0.0
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0	0.0	0.0				
2	2.1E+05	0.3	0.0122	1.00E+00	0.0	670.0	400.0
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0	0.0	0.0				
3	1.6E+04	0.2	0.2246	1.00E+00	0.0	43.0	0.0
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0	0.0	0.0				
4	1.6E+04	0.2	0.2462	1.00E+00	0.0	43.0	0.0
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0	0.0	0.0				
5	1.6E+04	0.2	0.2276	1.00E+00	0.0	43.0	0.0
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0	0.0	0.0				

Propiedades de los materiales, modelo elasto plástico.

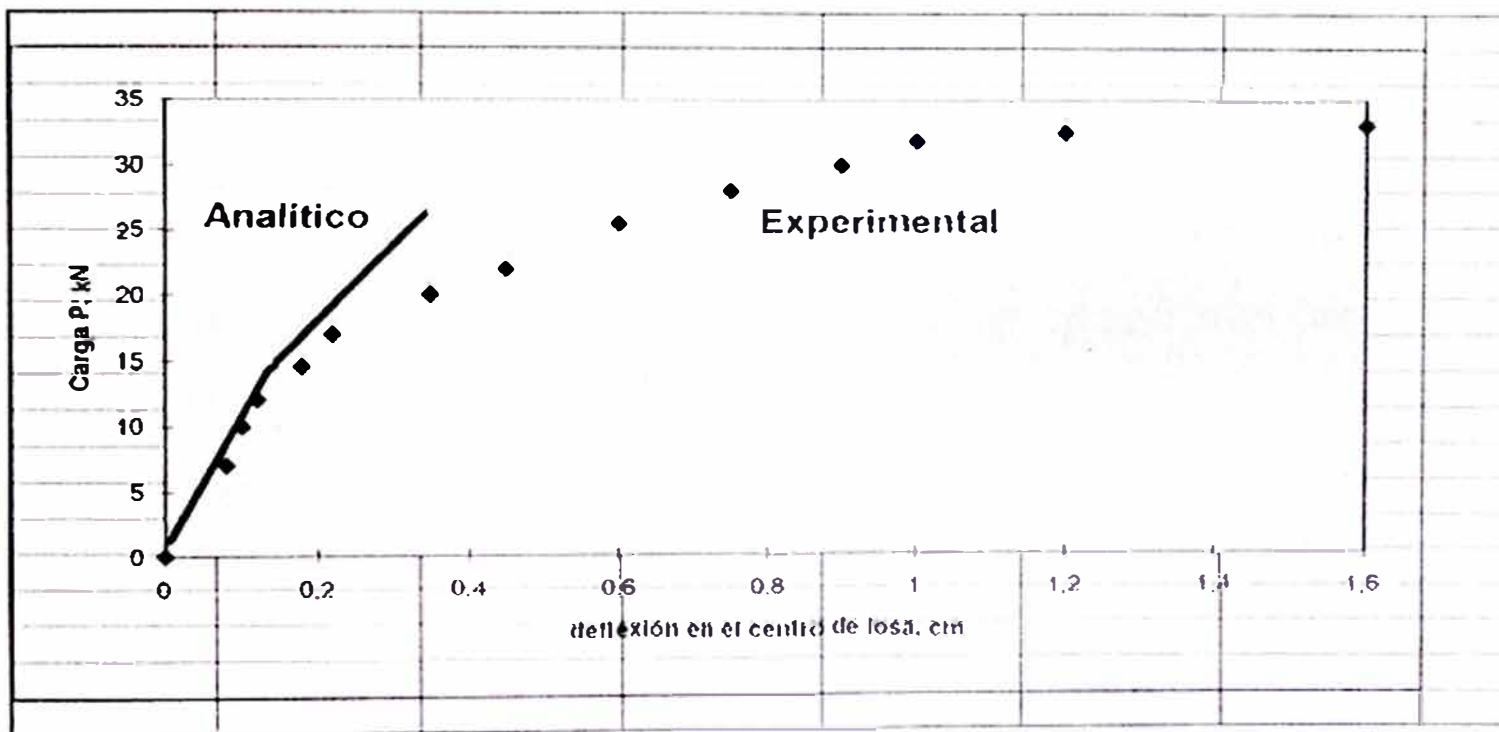


Figura 4.17 Curva Carga aplicada - desplazamiento al centro de la losa

## CAPÍTULO 5

# CONCLUSIONES

Se ha presentado la formulación de las losas según las teorías de Kirchhoff y de Reissner Mindlin; en el caso de la Teoría de Kirchhoff (de uso frecuente) para el análisis por el método de los elementos finitos, cumplir las consideraciones de convergencia obliga a utilizar elementos con funciones de aproximación polinómicas de grado 5. Esto conduce a una demanda grande de tiempo de cálculo.

Con elementos de Reissner-Mindlin, debido a la separación de las incógnitas nodales en funciones de aproximación independientes, se reduce la cantidad de cálculo. Sin embargo, la aplicación de estos elementos en losas delgadas, trae como consecuencia una sobre estimación de la rigidez (contribución de la rigidez de cortante).

Aprovechando la simplificación en las funciones de aproximación para el caso de elementos de Reissner-Mindlin, y haciendo cumplir todas las hipótesis de la Teoría de Kirchhoff se desarrollan elementos denominados DKT, en los cuales la determinación de la matriz de rigidez es explícita cumpliendo con las condiciones de convergencia. El uso de estos elementos permiten la elaboración de programas de cómputo sencillos y eficientes en tiempo de cálculo grandemente apreciado en el análisis no lineal.



El análisis no lineal de losas de concreto armado se ha realizado utilizando un programa de cómputo que modela de forma no completa las características no lineales del concreto. Sin embargo, el tiempo relativo para el análisis es aceptable, pues, modelar las propiedades concreto en compresión y tracción demanda un gran requerimiento de recursos de cómputo.

Los resultados del análisis no lineal deben ser comparados con resultados experimentales en la etapa de calibración de las leyes constitutivas y los criterios de falla empleados

Debe considerarse los estudios analíticos en paralelo con los experimentales para predecir las cargas a aplicar y el comportamiento de la estructura a ensayar; y reducir los costos de ensayos de laboratorio realizando interpolaciones entre resultados experimentales vía determinación analítica.



# APÉNDICE

## Listado del Programa de Cómputo para el Análisis Elástico de Losas

' Tesis para optar el Título Profesional de Ingeniero Civil  
' Universidad Nacional de Ingeniería  
' Víctor P. Rojas Y. Diciembre de 1995

' Programa de Análisis Estructural de Losas

' Método : Elementos Finitos  
' Formulación : Teoría de Kirchhoff con aplicación Discreta  
' Elemento : DKT triangular de 9 G.L.

\$STACK 2048

%NUDOS=100

%ELEM=200

%BANDA=50

dim X(1:%NUDOS), Y(1:%NUDOS), conec(1:%ELEM, 1:3), D(1:3, 1:3)

dim GL(1:%NUDOS\*3), STIF(1:%ELEM, 1:9, 1:9)

dim RIGI(1:%NUDOS\*3, 1:%BANDA), LOAD(1:3\*%NUDOS)

call DatosLosa(ni, nj)

call BoundCond(ni, nj)

for i=1 to ne

ii=conec(i, 1)

ij=conec(i, 2)

ik=conec(i, 3)

call RigiElem(i, X(ii), X(ij), X(ik), Y(ii), Y(ij), Y(ik), E, t, pnu)

next i

call SysStiff(nt, 3\*(ni+2))

call SysForces

call Solve(3\*nt, 3\*(ni+2))

END

```

' .....
SUB DatosLosa(ni,nj)
' Subrutina de ingreso de datos; genera la información básica
' nt      número total de nudos
' X(nt)   abscisas de los nudos
' Y(nt)   ordenadas de los nudos
' ve      número total de elementos
' conec(ne,3) conectividad
' E       módulo de Elasticidad
' nu      coeficiente de Poisson
' t       espesor de la losa

Local  Lx,Ly,dLx,dLy
Shared nt,ne,X(),Y(),conec(),E,nu,t,D()

print "PROGRAMA DE ANALISIS DE LOSAS"
print
print "Ingreso de datos:"
print
print "Dimensiones de la losa"
input "Ingrese longitud paralela al eje x"; Lx
input "Ingrese longitud paralela al eje y"; Ly
print
print "Discretización de la losa para el análisis"
input "Número de particiones paralelas al eje x"; ni
input "Número de particiones paralelas al eje y"; nj
print

nt=(ni+1)*(nj+1) ' número total de nudos

' Determinación de coordenadas de los nudos

dLx=Lx/ni
dLy=Ly/nj

dx=0.0 ' generación de las abscisas de todos los nudos
kk=1
for m=1 to ni+1
  k=kk
  for l=1 to nj+1
    X(k)=dx
    k=k+ni+1
  next l
  dx=dx+dLx
  kk=kk+1
next m

dy=0.0 ' generación de las ordenadas de todos los nudos
kk=1
for m=1 to nj+1
  k=kk
  for l=1 to ni+1
    Y(k)=dy
    k=k+1
  next l
  dy=dy+dLy
  kk=kk+ni+1
next m

```

```
ne=2*ni*nj ' Número total de elementos
```

```
' Conectividad de los elementos
```

```
i=0
```

```
for l=1 to nj
```

```
  k1=1*ni+1-ni
```

```
  k2=k1+ni+1
```

```
  for m=1 to ni
```

```
    i=i+1
```

```
    conec(i,1)=k1
```

```
    conec(i,2)=k1+1
```

```
    conec(i,3)=k2+1 'con +1 adicional
```

```
    i=i+1
```

```
    conec(i,3)=k1 ' (1) sin +1
```

```
    conec(i,1)=k2+1 ' (2)
```

```
    conec(i,2)=k2 ' (3)
```

```
    k1=k1+1
```

```
    k2=k2+1
```

```
  next m
```

```
next l
```

```
' Propiedades del material
```

```
Print "Propiedades del material "
```

```
Input "Módulo de Elasticidad ";E
```

```
Input "Coeficiente de Poisson ";nu
```

```
Input "Espesor de la losa ";L
```

```
END SUB
```

```
.....  
SUB BoundCond(ni,nj)
```

```
' Condiciones de borde para la losa
```

```
' 11 línea inferior
```

```
' 12 línea superior
```

```
' 13 línea izquierda
```

```
' 14 línea derecha
```

```
Local L(), nud(), pas(), tot(), nudo, paso, tota
```

```
Shared nt, GL()
```

```
dim L(1:4), nud(1:4), pas(1:4), tot(1:4)
```

```
for i=1 to 3*nt
```

```
  GL(i)=0
```

```
next i
```

```
' Línea L1
```

```
nud(1)=1
```

```
pas(1)=1
```

```
tot(1)=ni+1
```

```
' Línea L2
```

```
nud(2)=nj*(ni+1)+1
```

```

pas(2)=1
tot(2)=ni+1

' Línea L3
nud(3)=1
pas(3)=ni+1
tot(3)=nj+1

' Línea L4
nud(4)=ni+1
pas(4)=ni+1
tot(4)=nj+1

print
print "Condición de borde para la losa "
print "0 = libre, 1 = simple, 2= empotrado, 3 = especial"
print " L1   línea inferior "
print " L2   línea superior "
print " L3   línea izquierda"
print " L4   línea derecha  "

for i=1 to 4
  print "tipo de borde para L";i;
  input " ";L(i)
next i

' Borde Li

for i=1 to 4
  nudo=nud ( i )
  paso=pas(i)
  tota=tot(i)
  select case L(i)
    case 0
      ' Ningún efecto, todas las incógnitas son consideradas
    case 1
      k=3*nudo-2
      for j=1 to 3
        toGB(k)=1
        k=k+3*paso
      next j
    case 2
      k=3*nudo
      for j=1 to 3
        toGB(k-2)=1
        GL(k-1)=1
        GL(k)=1
        k=k+3*paso
      next j
    case 3
      ' No habilitado
  end
select next
i

END SUB

```

```

' .....
SUB SysForces
' Sólo fuerzas nodales

local  nc,nudo,carga
shared LOAD(),nt

for i=1 to 3*nt
  LOAD(i)=0.0
next i

print
print "Fuerzas aplicadas a la losa (sólo carga nodal vertical)"
print
input "Ingrese el número de nudos cargados ";nc
for i=1 to nc
  input "Nudo ";nudo
  input "Carga ";carga
  k=3*nudo-2
  LOAD(k)=carga
next i

END SUB

```

```

' .....
SUB RigiElem(elem,xx1,xx2,xx3,yy1,yy2,yy3,E,t,pnu)
' x1,x2,x3,y1,y2,y3 son las coordenadas x ey del triángulo
' STIF(9,9) Es la matriz de rigidez.

Local ALPHA(),R(),DL(),SS(),T()
Shared STIF()

dim
ALPHA(1:9,1:9),R(1:3,1:3),DL(1:9,1:9),SS(1:9,1:9),T(1:9,1:9)

E1=E*t*t*t/(12*(1-pnu*pnu))
E3=E1
E2=pnu*E1
E4=E1*(1-pnu)/2

for i=1 to 9
  for j=1 to 9
    T(i,j)=0.0
  next j
next i
for i=1 to 9
  T(i,i)=1.0
next i

x1=0
y1=0
if(xx2>xx1) then
  x2=xx2-xx1
else
  x2=xx1-xx2
  T(1,1)=-1.0

```

```

T(2,2)=-1.0
T(4,4)=-1.0
T(5,5)=-1.0
T(7,7)=-1.0
T(8,8)=-1.0
end if
y2=0
x3=x2
if (yy3>yy2) then
  y3=yy3-yy2
else
  y3=yy2-yy3
end if

λ=0.5*x2*y3

x12=x1-x2
x23=x2-x3
x31=x3-x1

y12=y1-y2
y23=y2-y3
y31=y3-y1

1112=x12*x12+y12*y12
1123=x23*x23+y23*y23
1131=x31*x31+y31*y31

p4=-6*x23/1123
t4=-6*y23/1123
q5=3*x3*y3/1131

p5=-6*x3/1131
t5=-6*y3/1131
r4=3*y23*y23/1123

p6=-6*x12/1112
q4=3*x23*y23/1123
r5=3*y31*y31/1131

KK=48*λ

for i=1 to 3
  for j=1 to 3
    if (i=j) then R(i,i)=2/KK
    if (i<>j) then R(i,j)=1/KK
  next j
next i

ALPHA(1,1)=y3*p6
ALPHA(1,2)=0
ALPHA(1,3)=-4*y3
ALPHA(1,4)=-y3*p6
ALPHA(1,5)=0
ALPHA(1,6)=-2*y3
ALPHA(1,7)=0
ALPHA(1,8)=0
ALPHA(1,9)=0

```

$\Lambda_{LRHA}(2, 1) = -y^3 \cdot p^6$   
 $\Lambda_{LRHA}(2, 2) = 0$   
 $\Lambda_{LRHA}(2, 3) = 2 \cdot y^3$   
 $\Lambda_{LRHA}(2, 4) = y^3 \cdot p^6$   
 $\Lambda_{LRHA}(2, 5) = 0$   
 $\Lambda_{LRHA}(2, 6) = 4 \cdot y^3$   
 $\Lambda_{LRHA}(2, 7) = 0$   
 $\Lambda_{LRHA}(2, 8) = 0$   
 $\Lambda_{LRHA}(2, 9) = 0$

$\Lambda_{LRHA}(3, 1) = y^3 \cdot p^5$   
 $\Lambda_{LRHA}(3, 2) = -y^3 \cdot q^5$   
 $\Lambda_{LRHA}(3, 3) = y^3 \cdot (2 - r^5)$   
 $\Lambda_{LRHA}(3, 4) = y^3 \cdot p^4$   
 $\Lambda_{LRHA}(3, 5) = y^3 \cdot q^4$   
 $\Lambda_{LRHA}(3, 6) = y^3 \cdot (r^4 - 2)$   
 $\Lambda_{LRHA}(3, 7) = -y^3 \cdot (p^4 + p^5)$   
 $\Lambda_{LRHA}(3, 8) = y^3 \cdot (q^4 - q^5)$   
 $\Lambda_{LRHA}(3, 9) = y^3 \cdot (r^4 - r^5)$

$\Lambda_{LRHA}(4, 1) = -x^2 \cdot t^5$   
 $\Lambda_{LRHA}(4, 2) = x^2 \cdot 3 + x^2 \cdot r^5$   
 $\Lambda_{LRHA}(4, 3) = -x^2 \cdot q^5$   
 $\Lambda_{LRHA}(4, 4) = 0$   
 $\Lambda_{LRHA}(4, 5) = x^3$   
 $\Lambda_{LRHA}(4, 6) = 0$   
 $\Lambda_{LRHA}(4, 7) = x^2 \cdot t^5$   
 $\Lambda_{LRHA}(4, 8) = x^2 \cdot (r^5 - 1)$   
 $\Lambda_{LRHA}(4, 9) = -x^2 \cdot q^5$

$\Lambda_{LRHA}(5, 1) = 0$   
 $\Lambda_{LRHA}(5, 2) = x^2 \cdot 3$   
 $\Lambda_{LRHA}(5, 3) = 0$   
 $\Lambda_{LRHA}(5, 4) = -x^2 \cdot t^4$   
 $\Lambda_{LRHA}(5, 5) = x^3 + x^2 \cdot r^4$   
 $\Lambda_{LRHA}(5, 6) = -x^2 \cdot q^4$   
 $\Lambda_{LRHA}(5, 7) = -x^2 \cdot t^4$   
 $\Lambda_{LRHA}(5, 8) = x^2 \cdot (r^4 - 1)$   
 $\Lambda_{LRHA}(5, 9) = -x^2 \cdot q^4$

$\Lambda_{LRHA}(6, 1) = x^2 \cdot 3 \cdot t^5$   
 $\Lambda_{LRHA}(6, 2) = x^2 \cdot 3 \cdot (1 - r^5)$   
 $\Lambda_{LRHA}(6, 3) = x^2 \cdot 3 \cdot q^5$   
 $\Lambda_{LRHA}(6, 4) = -x^3 \cdot t^4$   
 $\Lambda_{LRHA}(6, 5) = x^3 \cdot (1 - r^4)$   
 $\Lambda_{LRHA}(6, 6) = x^3 \cdot q^4$   
 $\Lambda_{LRHA}(6, 7) = -x^2 \cdot 3 \cdot t^5 + x^3 \cdot t^4$   
 $\Lambda_{LRHA}(6, 8) = -x^2 \cdot 3 \cdot r^5 - x^3 \cdot r^4 + x^2$   
 $\Lambda_{LRHA}(6, 9) = x^3 \cdot q^4 + x^2 \cdot 3 \cdot q^5$

$\Lambda_{LRHA}(7, 1) = -x^3 \cdot p^6 + x^2 \cdot p^5$   
 $\Lambda_{LRHA}(7, 2) = x^2 \cdot q^5 + y^3$   
 $\Lambda_{LRHA}(7, 3) = -4 \cdot x^2 \cdot 3 + x^2 \cdot r^5$   
 $\Lambda_{LRHA}(7, 4) = x^3 \cdot p^6$   
 $\Lambda_{LRHA}(7, 5) = -y^3$   
 $\Lambda_{LRHA}(7, 6) = 2 \cdot x^3$   
 $\Lambda_{LRHA}(7, 7) = x^2 \cdot p^5$

```

ALPHA(7,8)=x2*q5
ALPHA(7,9)=(r5-2)*x2

ALPHA(8,1)=-x23*p6
ALPHA(8,2)=y3
ALPHA(8,3)=2*x23
ALPHA(8,4)=x23*p6+x2*p4
ALPHA(8,5)=-y3+x2*q4
ALPHA(8,6)=-4*x3+x2*r4
ALPHA(8,7)=-x2*p4
ALPHA(8,8)=x2*q4
ALPHA(8,9)=(r4-2)*x2

ALPHA(9,1)=x23*p5+y3*t5
ALPHA(9,2)=-x23*q5+(1-r5)*y3
ALPHA(9,3)=(2-r5)*x23+y3*q5
ALPHA(9,4)=-x3*p4+y3*t4
ALPHA(9,5)=(r4-1)*y3-x3*q4
ALPHA(9,6)=(2-r4)*x3-y3*q4
ALPHA(9,7)=-x23*p5+x3*p4-(t4+t5)*y3
ALPHA(9,8)=-x23*q5-x3*q4+(r4-r5)*y3
ALPHA(9,9)=-x23*r5-x3*r4+4*x2+(q5-q4)*y3

for i=1 to 3
  for j=1 to 3
    DL(i,j)=0.0
  next j
next i

for i=1 to 3
  for j=1 to 3
    DL(i,j)=E1*R(i,j)
  next j
next i

for i=1 to 3
  for j=1 to 3
    DL(i,j+3)=E2*R(i,j)
  next j
next i

for i=1 to 3
  for j=1 to 3
    DL(i+3,j)=E2*R(i,j)
  next j
next i

for i=1 to 3
  for j=1 to 3
    DL(i+3,j+3)=E3*R(i,j)
  next j
next i

for i=1 to 3
  for j=1 to 3
    DL(i+6,j+6)=E4*R(i,j)
  next j
next i

```



```

for i=1 to 9
for j=1 to 9
  SS(i,j)=0.0
  for k=1 to 9
    SS(i,j)=SS(i,j)+ALPHA(k,i)*DL(k,j)
  next k
next j
next i

```

```

for i=1 to 9
for j=1 to 9
  DL(i,j)=0.0
  for k=1 to 9
    DL(i,j)=DL(i,j)+SS(i,k)*ALPHA(k,j)
  next k
next j
next i

```

```

for i=1 to 9
for j=1 to 9
  SS(i,j)=0.0
  for k=1 to 9
    SS(i,j)=SS(i,j)+T(k,i)*DL(k,j)
  next k
next j
next i

```

```

for i=1 to 9
for j=1 to 9
  STIF(elem,i,j)=0.0
  for k=1 to 9
    STIF(elem,i,j)=STIF(elem,i,j)+SS(i,k)*T(k,j)
  next k
next j
next i

```

END SUB

```

! .....
SUB SysStiff(n,sb)
' Ensamblaje de la matriz de rigidez de la losa

```

```

Local L,nudob,nudoj
Shared RIGI(),conec(),nc,STIF(),GL()

```

```

for i=1 to 3*n
  for j=1 to sb
    RIGI(i,j)=0.0
  next j
next i

```

```

for i=1 to nc
  for j=1 to 3
    nudob=conec(i,j)
    j1=3*(j-1)

```

```

for k=1 to 3
  nudoj=conec(i,k)
  j2=3*(k-1)
  L=nudoj*nudob
  if (L>=0) then
    columna=L+1
    ii=3*(nudob-1)
    jj=3*(columna-1)
    for k1=1 to 3
      f1=ii+k1
      f2=jj+k1
      for k2=1 to 3
        c1=jj+k2-k1+1
        c2=j2+k2
        if ((GL(f1)=0) AND (GL(f1+c1-1)=0)) then
          RIGI(f1,c1)=RIGI(f1,c1)+STIF(j,f2,c2)
        end if
      next k2
    next k1
  end if
next k
next j

```

next i

END SUB

```

' .....
SUB Solve(n, sb)
' RIGI(n, sb) matriz simétrica con ancho de semi-banda, se
' almacena sólo la triangular superior.
' LOAD(n) vector de los coeficientes de la parte derecha
' del sistema.
' n, sb total de incógnitas y ancho de semi-banda.

```

```

Shared RIGI(), LOAD(), GL()
Local suma

```

```

' Eliminación gaussiana

```

```

for j=1 to n-1
  if (abs(RIGI(j,1)) < 0.0001) then
    if (GL(j) = 0) then
      print "Error en incógnita";j;"...@!+z!$%&!"
      stop
    end if
  else
    ii=j+1
    for i=2 to sb
      if (abs(RIGI(j,i)) > 0.00001) then
        alpha=RIGI(j,i)/RIGI(j,1)
        kk=1
        jj=j+i-1

```

```

        for k=i to sb
            if (abs(RIGI(j,k)) > 0.00001) then
                RIGI(jj,kk)=RIGI(jj,kk)-alpha*RIGI(j,k)
            end if
            kk=kk+1
        next k
        LOAD(ii)=LOAD(ii)-alpha*LOAD(j)
    end if
    ii=ii+1
next i
end if
next j

```

' Determinación de las incógnitas cinemáticas

```

for i=n to 1 step -1
    if (GL(i) = 0) then
        if (abs(RIGI(i,1)) > 0.0001) then
            suma=0.0
            for j=2 to sb
                if (abs(RIGI(i,j)) > 0.0001) then
                    suma=suma+RIGI(i,j)*LOAD(i+j-1)
                end if
            next j
            LOAD(i)=(LOAD(i)-suma)/RIGI(i,1)
        end if
    end if
next i

```

END SUB

# REFERENCIAS

- [1] Barzegar-Jamshidi, F. y Schnobrich, W. (1986); *Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete under short term Monotonic Loading*; Structural Research Series No. 530, University of Illinois. (136 pgs.)
- [2] Bathe, Klaus-Jürgen; Wilson, Edward L. y Iding, Robert H. (1974); *NONSAP, A structural analysis program for static and dynamic response of nonlinear systems*; Report No. UCSESM 74-3, Structural Engineering Laboratory, University of California.
- [3] Bathe, Klaus-Jürgen y Wilson, Edward L. (1976); *Numerical Methods in finite element analysis*; Prentice-Hall, Inc.; New Jersey. (528 pgs.)
- [4] Batoz, Jean-Louis, Bathe, Klaus-Jürgen y Ho, Lee-Wing (1980); *A study of three-node triangular plate bending elements*; International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 15. (pgs. 1771-1812)
- [5] Batoz, Jean-Louis (1982); *An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending element*; International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 18. (pgs. 1077-1082)
- [6] Braess, D. (1991); *Kirchhoff- and Mindlin-Reissner Plates: Combinations from the Viewpoint of Finite Elements*; Nonlinear Computational Mechanics - State of the Art; Editado por P. Wriggers y W. Wagner; Springer-Verlag Berlin, Heidelberg. (pgs 1-10)
- [7] Cervera, M. y Hinton, E. (1986); *Nonlinear analysis of reinforced concrete plates and shells using a three dimensional model*; Computational modelling of reinforced concrete structures; Edited by Hinton, E. and Owen, R.; Pineridge Press; University College of Swansen, U.K. (pgs. 327-370)
- [8] Cook, R.; Malkus, D. y Plesha, M. (1989); *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*; Ediciones John Wiley & Sons, tercera edición; University of Wisconsin-Madison.
- [9] Figueiras, J. A. (1986); *Practical approach for modelling the nonlinear response of RC shells*; Computational modelling of reinforced concrete structures; Edited by Hinton, E. and Owen, R.; Pineridge Press; University College of Swansen, U.K. (pgs. 217-253)
- [10] Huang, Hou-Cheng (1989); *Static and dynamic analyses of plates and shells: theory, software and applications*; Springer-Verlag; Londres (194 pgs.)

- [11] Jeyachandrabose, C. y Kirkhope, J. (1985); *An alternative explicit formulation for the DKT plate-bending element*; International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 18. (pgs. 1289-1293)
- [12] Klein, D. G. (1986); *A finite element model for reinforced concrete slabs with consideration of transverse shear deformation*; Computational modelling of reinforced concrete structures; Edited by Hinton, E. and Owen, R.; Pineridge Press; University College of Swansen, U.K. (pgs. 189-216)
- [13] Meißner, U. y Menzel, A. (1989); *Die Methode der Finiten Elemente*; Editorial Springer; Berlin. (286 pgs.)
- [14] Meissner, U. (1990); *FE-Anwendungen bei Flächentragwerken*; Curso P16, lección N° 6; Numerische Methoden u. Datenverarbeitung im Konstruktiven Ingenieurbau; Universidad de Hannover. (54 pgs.)
- [15] Menzel, A. (1989, 1992); *Análisis Estructural III*; apuntes de clases; Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ingeniería Civil; Lima-Perú.
- [16] Menzel, A. (1990); *Elementos Finitos*; apuntes de clases; Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ingeniería Civil, Sección de Graduados; Lima-Perú.
- [17] Menzel, A. (1991); *Análisis no lineal de barras*; apuntes de clases; Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ingeniería Civil, Sección de Graduados; Lima-Perú.
- [18] Noguchi, H. y Schnobrich, W. C. (1993); *Finite Element Analysis of Reinforced Concrete in Japan and US: Introduction and Overview*; Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures II - Proceedings of the International Workshop, New York, June 2-5, 1991; American Society of Civil Engineers; Edited by J. Isenberg; New York. (pags. 1-35)
- [19] Oñate, Eugenio (1992); *Cálculo de estructuras por el método de Elementos Finitos: análisis estático lineal*; Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería; Barcelona. (838 pgs.)
- [20] Park, R. y Gamble, W. L. (1994); *Losas de concreto reforzado*; Ed. Limusa; México. (686 pgs.)
- [21] Rojas, Victor P. (1994); *An analytical study of behavior of confined masonry structures under lateral loads*; Report presented at Department of Architecture, Faculty of Engineering, Chiba University; Japan. (36 pgs.)
- [22] Ugral, A. C. (1981); *Stresses in plates and shells*; McGraw Hill, Inc.; New York. (317 pgs.)
- [23] Zienkiewicz, O. C. (1980); *El método de los elementos finitos*; Editorial Reverté; España. (903 pgs.)