UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

EL LEMA DE KY FAN Y SUS APLICACIONES

por

Yboon Victoria García Ramos

Tesís para Optar el
Título Profesional de:
Licenciado en Matemática

Prof. Dr. Wilfredo Sosa Sandoval
Asesor

Lima, Noviembre de 2001.

RESUMEN

En este trabajo estudiaremos el Lema de Ky Fan, el cual da condiciones suficientes para que una cierta familia F de conjuntos cerrados en un espacio vectorial topolgico X de dimension arbitraria, tenga un punto común, y veremos como es que esta herramienta es utilizada en diferentes areas de la matemática para resolver cuestiones de existencia, tales como:

- Existencia de Puntos fijos para funciones monovaluadas y multivaluadas.
- Soluciones para problemas Variacionales.
- Soluciones de Problemas de equilibrio.
- Soluciones para E.D.P.

Contenido

Introducción

En 1961 Ky Fan ([1]) demostró la existencia de un punto común en una familia de conjuntos $\{C(x)\}_{x\in D}$ donde

1. D es un subconjunto arbitrario de un espacio vectorial topológico de Hausdorff;

2. para cada $x \in D$, $C(x)$ es cerrado y no vacío;

3. para cada familia finita $\{x_1, \cdots x_n\} \subset D$ se tiene que $\text{conv}\{x_1, x_2, \ldots x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} C(x_i)$;

4. existe $x \in D$, tal que $C(x)$ es compacto.

Este resultado de Ky Fan, es conocido en la literatura como el **Lema de Ky Fan**, el cual fue publicado en Math Annalen 142, como una generalización del clásico teorema de Knaster-Kuratowsky-Mazurkiewicz (KKM), el cual establece que si S es un simplex, S_v la cara en cualquier subconjunto v de vértices, F_i un conjunto cerrado asociado con un vértice i, y $F_v = \bigcup_{i\in v} F_i$ y $S_v \subseteq F_v$ para todo v, entonces $\bigcap_i F_i \neq \emptyset$ [16]; El objetivo de este trabajo de tesis, es presentar el Lema de Ky Fan como una herramienta útil para

a) garantizar la existencia de solución en problemas de desigualdad variacional [2], [3];

b) extender resultados de puntos fijos;

c) garantizar la existencia de solución en problemas de equilibrio [4], [5];

d) dar algunos resultados en Análisis funcional.

En el primer capítulo damos algunas definiciones y resultados básicos de álgebra lineal, topología y análisis funcional que serán necesarios para el desarrollo de la teoría subsiguiente. El segundo capítulo es una introducción a la teoría de convexidad generalizada. En éste damos una caracterización de las funciones diferenciables con cierto tipo de convexidad por medio de sus gradientes. En el tercer capítulo introducimos los conceptos de multifunción y multifunción KKM. Esta última es una herramienta indispensable para las aplicaciones. En el cuarto capítulo establecemos el Lema de Ky Fan, así como algunas de sus extensiones. Finalmente, en el último capítulo, mostramos las aplicaciones del Lema de Ky Fan y su importancia en las áreas ya antes mencionadas.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Espacios Vectoriales

Un **espacio vectorial real** es un conjunto $\mathcal{X}$, en el que se han definido dos operaciones: una interna $+ : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ llamada **adición**, la cual a cada par $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ le asocia un elemento de $\mathcal{X}$ denotado por $x + y$, de tal forma que se satisface

(i) $x + y = y + x$ para todo $x, y \in \mathcal{X}$;

(ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$ para todo $x, y, z \in \mathcal{X}$;

(iii) existe un único elemento denotado con 0 tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in \mathcal{X}$; y

(iv) a cada elemento $x \in \mathcal{X}$ le corresponde un único elemento $-x \in \mathcal{X}$ tal que $x + (-x) = 0$.

La otra operación externa $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, la cual es llamada **multiplicación escalar**, a cada par $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X}$ le asocia un elemento de $\mathcal{X}$ denotado por $\lambda \cdot x$ (o simplemente λx), y se satisface

(i) $1x = x$ para todo $x \in \mathcal{X}$;

(ii) $\alpha(\beta x) = \beta(\alpha x)$ para todo α, $\beta \in \mathbb{R}$ y todo $x \in \mathcal{X}$.

Estas operaciones están relacionadas por las siguientes leyes distributivas:

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \quad y \quad (\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x,$$

para cualesquiera $x, y \in \mathcal{X}$ y $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.
Una **transformación lineal** de un espacio vectorial $\mathcal{X}$ en un espacio vectorial $\mathcal{Y}$ es una aplicación $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ que satisface

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

para todo α, $\beta \in \mathbb{R}$ y para todo x, $y \in \mathcal{X}$. En el caso particular en que $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$, T será llamada **funcional lineal**.
El conjunto

$$\mathcal{X}' = \{T : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \,/\, T \text{ es funcional lineal}\}$$

provisto de las operaciones:

$$+ : \mathcal{X}' \times \mathcal{X}' \to \mathcal{X}', \quad (T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$$

y

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{X}' \to \mathcal{X}', \quad (\alpha T)(x) = \alpha T(x)$$

es un espacio vectorial, llamado el **espacio vectorial dual (algebraico)** de $\mathcal{X}$.

Dados $x, y \in X$ en un espacio vectorial X, definimos

$$[x, y] = \{tx + (1-t)y \,/\, t \in [0, 1]\}.$$

1.2 Espacios Topológicos

Sea $\mathcal{X}$ un conjunto cualquiera. Una **topología** en $\mathcal{X}$ es una colección τ de subconjuntos de $\mathcal{X}$, llamados **conjuntos abiertos** de la topología, los cuales satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $\emptyset \in \tau, \mathcal{X} \in \tau$;

(ii) Si $A_1, \ldots, A_n \in \tau$, entonces $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$;

(iii) Si $\{A_j\}_{j \in J} \subseteq \tau$, entonces $\displaystyle\bigcup_{j \in J} A_j \in \tau$.

El par $(\mathcal{X}, \tau)$ es llamado **espacio topológico**; en lo que sigue sólo denotaremos por $\mathcal{X}$ al espacio topológico, supuesto que tengamos una topología fijada.
Un subconjunto F de $\mathcal{X}$ es llamado **cerrado** con respecto a τ si su complemento $F^c = \mathcal{X} \setminus F \in \tau$. La clausura A de A es la intersección de todos los subconjuntos cerrados que contienen A. Un punto $x \in \mathcal{X}$ se dice que es **punto de acumulación** con respecto a τ de un conjunto $C \subseteq \mathcal{X}$, si dado $U \in \tau$ tal que $x \in U$, se tiene que $U \cap (C \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Sea $A \subseteq \mathcal{X}$; llamaremos **clausura** de A con respecto a τ, denotado por A al conjunto formado por A unido con todos sus puntos de acumulación. A es cerrado si y sólo si $A = A$.
Una **base** para la topología de un espacio topológico es una colección $\beta \subseteq \tau$ de subconjuntos tales que los conjuntos abiertos son las uniones de elementos de β. Dados los espacios topológicos (X, τ_1) e (Y, τ_2) diremos que el mapeo $f : X \to Y$ es **continuo** con respecto a τ_1 y τ_2, si y sólo si

$$f^{-1}(V) = \{x \in \mathcal{X} \,/\, f(x) \in V\} \in \tau_1, \text{ para todo } V \in \tau_2.$$

Una topología τ_1 es más **fina** que la topología τ_2 si $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Sea $\{\mathcal{X}_i\}_{j\in I}$ una familia de espacios topológicos. El **producto de Tychonoff** de los $\mathcal{X}_i$ es el conjunto $\prod_{i\in I} \mathcal{X}_i$, con una base para la topología tomada como la colección de todos los productos $\prod_{i\in I} U_i$ donde U_i es abierto en $\mathcal{X}_i$ y $U_i = \mathcal{X}_i$ para todo i excepto por un número finito de índices.
Un espacio topológico $\mathcal{X}$ es **compacto** con respecto a τ si dada $\mathcal{F} \subseteq \tau$ tal que $F \subseteq \bigcup_{V\in\mathcal{F}} V$ existe un subconjunto finito $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq \mathcal{F}$ tal que $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. Un subconjunto F del espacio topológico $\mathcal{X}$ es compacto si representado como subespacio topológico de $\mathcal{X}$ es compacto.

Teorema 1.1 (Tychonoff) El producto topológico de cualquier familia de espacios compactos es compacto.

1.3 Vecindades

Dado un punto $x \in \mathcal{X}$ [un subconjunto $A \subseteq \mathcal{X}$] el conjunto U es una **vecindad de** x [**vecindad de** A] si existe un subconjunto abierto V tal que $x \in V \subseteq U$ $[A \subseteq V \subseteq U]$. Un espacio $\mathcal{X}$ es **Hausdorff** si dados $x, y \in \mathcal{X}$, $x \neq y$, existen vecindades $U \ni x$, $V \ni y$ tales que $U \cap V = \emptyset$.
Un espacio $\mathcal{X}$ es **regular** si dados $x \in \mathcal{X}$, $F \subseteq \mathcal{X}$ cerrado con $x \notin F$, existen vecindades $U \ni x$, $V \supseteq F$ con $U \cap V = \emptyset$.

1.4 Espacios Vectoriales Topológicos

Sea $(\mathcal{X}, +, \cdot)$ un espacio vectorial real provisto de una topología τ; diremos que (X, τ) es un **espacio vectorial topológico** (con siglas t.v.s.[1]) si las operaciones $+ : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ y $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \to X$ son continuas en las respectivas topologías producto.

En espacios vectoriales topológicos se satisface la siguiente

Proposición 1.2 Sea $\mathcal{X}$ un t.v.s. real; entonces $\mathcal{X}$ es Hausdorff si y sólo si $\mathcal{X}$ es regular.

Definición 1.1 Sea $(\mathcal{X}, \tau)$ un t.v.s. $D \subseteq \mathcal{X}$; $f : D \to \mathbb{R}$ es llamada **semicontinua inferiormente** (s.c.i.) con respecto a τ en D si los conjuntos

$$S_\lambda(f) = \{x \in D : f(x) \leq \lambda\}$$

son cerrados en D para todo $\lambda \in \mathbb{R}$; ó equivalentemente, si los conjuntos $\{x \in D : f(x) > \lambda\}$ son abiertos en D para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

[1] Por sus siglas en inglés, *topological vector space*

f es llamada **semicontinua superiormente** (s.c.s.) con respecto a $\tau \in D$ si $-f$ es s.c.i. con respecto a τ en D.
Definimos también los subconjuntos

$$S_\lambda(f) = \{x \in D : f(x) < \lambda\}$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposición 1.3 Sea $\mathcal{X}$ un t.v.s. y $f : X \to \mathbb{R}$, entonces f es continua si y sólo si f es s.c.i. y s.c.s.

En lo que sigue denotaremos simplemente por $\mathcal{X}$ al espacio topológico $(\mathcal{X}, \tau)$.
Denotamos por $\mathcal{X}^*$ al espacio dual (topológico) de $\mathcal{X}$, i.e.

$$\mathcal{X}^* = \{T : \mathcal{X} \to \mathbb{R};\ T \text{ lineal y continua}\}$$

y $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{X}^* \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ al producto de dualidad,

$$\langle x^*, x\rangle = x^*(x) \text{ para todo } x^* \in \mathcal{X}^* \text{ y } x \in \mathcal{X}.$$

Definición 1.2 Sea un t.v.s., una función $p : X \to \mathbb{R}$ es llamada seminorma si satisface

(i) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, para todo $x \in \mathcal{X}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$;

(ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Definición 1.3 (Espacio localmente convexo) Un t.v.s. $\mathcal{X}$ es llamado **espacio localmente convexo**, si para toda vecindad V de 0, existe una vecindad U del 0 convexa tal que $U \subseteq V$.

Teorema 1.4 (Weierstrass) Sea $\mathcal{X}$ un t.v.s., $K \subset \mathcal{X}$ compacto, $f : K \to \mathbb{R}$. Si f es s.c.i. entonces f alcanza su mínimo en K.

1.5 Espacios Métricos

Un **espacio métrico** es un conjunto $\mathcal{X}$ en el que está definida una función **distancia** (o **métrica**) $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, la cual satisface:

1) $d(x, y) \geq 0$, para todo $x, y \in \mathcal{X}$.

2) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

3) $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $x, y \in \mathcal{X}$.

4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in \mathcal{X}$.

La propiedad (iv) se denomina **desigualdad triangular**.
Denotamos entonces $(\mathcal{X}, d)$ ó simplemente $\mathcal{X}$.
Si $x \in \mathcal{X}$ y $r > 0$, la **bola abierta [cerrada] centrada en** x **y de radio** r es el conjunto

$$B_r(x) = \{y \in \mathcal{X}/d(x,y) < r\} \qquad [B_r(x) = \{y \in \mathcal{X}/d(x,y) \leq r\}].$$

Si $\mathcal{X}$ es un espacio métrico y τ es la colección de todos los conjuntos de $\mathcal{X}$ que son uniones arbitrarias de bolas abiertas, entonces τ es una topología en $\mathcal{X}$.
En un espacio métrico $\mathcal{X}$, una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in \mathcal{X}$ si

$$\text{dado } \varepsilon > 0, \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq n_0 \text{ implica } d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Diremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ es una sucesión de Cauchy si

$$\text{dado } \varepsilon > 0, \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } m, n \geq n_0 \text{ implican } d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Un espacio métrico $\mathcal{X}$ se dice que es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Sean $(\mathcal{X}, d_1)$ y $(\mathcal{Y}, d_2)$ dos espacios métricos, una función $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ se dice que es una **isometría** si para todo $x, y \in \mathcal{X}$ se satisface

$$d_1(x,y) = d_2(f(x), f(y)).$$

1.6 Espacios Normados

Definición 1.4 Sea $\mathcal{X}$ un espacio vectorial real; diremos que $\mathcal{X}$ es un **espacio vectorial normado** ó simplemente un **espacio normado** si existe una función $\|\cdot\| : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, llamada **norma**, tal que

(i) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{X}$;

(ii) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$;

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ para todo $x \in \mathcal{X}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in \mathcal{X}$.

Tomando $d(x,y) = \|x - y\|$, tenemos que $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ es una métrica en $\mathcal{X}$; así todo espacio normado es un espacio métrico.
Un **espacio de Banach** es un espacio normado que es completo con la métrica definida por su norma.

Dados $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espacios normados, la norma de $T : X \to Y$, una transformación lineal, se define por

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in \mathcal{X} \text{ y } \|x\| = 1\}. \tag{1.1}$$

En caso que $\|T\| < \infty$, diremos que T es una transformación lineal **acotada**; una caracterización de las transformaciones lineales acotadas en la siguiente

Proposición 1.5 Dados $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espacios normados, para una transformación lineal $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, son equivalentes:

(i) T es acotada,

(ii) T es continua,

(iii) T es continua en un punto de $\mathcal{X}$.

Prueba. [(i)$\Longrightarrow$(ii)]. Para $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, $x_1 \neq x_2$, haciendo $y = \dfrac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|}$, tenemos $\|y\| = 1$ y luego

$$\|T(x_1 - x_2)\| \leq \|T\|\|x_1 - x_2\|,$$

de donde claramente T es continua.
[(ii)$\Longrightarrow$(iii)] Trivialmente.
[(iii)$\Longrightarrow$(i)] Supongamos que T sea continua en $x_0 \in \mathcal{X}$. Para cada $\varepsilon > 0$, se puede hallar un $\delta > 0$ tal que

$$\|y - x_0\| < \delta \text{ implica } \|T(y) - T(x_0)\| < \varepsilon.$$

En particular, si $\varepsilon = 1$, hallamos un tal $\delta > 0$. Dado $x \in \mathcal{X}$ cualquiera con $\|x\| = 1$, $y = x_0 + \dfrac{\delta}{2}x$ cumple $\|y - x_0\| = \delta/2 < \delta$, luego

$$\frac{\delta}{2}\|T(x)\| = \|T(\delta/2\, x)\| = \|T(y - x_0)\| = \|T(y) - T(x_0)\| < 1,$$

de donde $\|T(x)\| < 2/\delta$ y por lo tanto $\|T\| < 2/\delta$. $\diamond$

Note que $\mathcal{X}^*$ es un espacio normado con la norma dada por (1.1), éste espacio es llamado **espacio dual (topológico)** de $\mathcal{X}$.
Dada $f \in \mathcal{X}^*$; denotaremos por $\varphi_f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ a la aplicación dada por

$$\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle.$$

Dado un espacio de Banach $\mathcal{X}$, en él podemos definir dos topologías. La primera, la usual (también conocida como **topología fuerte**) es inducida por la norma $\|\cdot\|$, y la segunda que es conocida como **topología débil** la cual es denotada por $\sigma(X, X^*)$. La topología débil es la topología menos fina sobre $\mathcal{X}$ que hace continuas a todas las aplicaciones φ_f definidas anteriormente para $f \in \mathcal{X}^*$. La convergencia de ésta topología está caracterizada por: (x_n) converge débilmente a x, denotado por $x_n \rightharpoonup x$ si y sólo si

$$\langle T, x_n \rangle \to \langle T, x \rangle \text{ para todo } T \in X^*.$$

Se tiene también que todo conjunto cerrado en la topología débil (**débilmente cerrado**) $\sigma(X, X^*)$ es cerrado en la topología fuerte. En efecto, sea $A \subseteq \mathcal{X}$ débilmente cerrado y consideremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \to x$; entonces tenemos que $x_n \rightharpoonup x$, de donde $x \in A$; luego A es cerrado. El recíproco no es cierto en general; basta considerar el siguiente :

Ejemplo 1.1 sea E un espacio normado. El conjunto $S = \{x \in E; \|x\| = 1\}$ no es cerrado en la topología débil (ver [9]).

Teorema 1.6 (Hahn-Banach) Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado, y sean $C, K \subseteq \mathcal{X}$ dos subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos. Si C es cerrado y K compacto, entonces existen $f \in \mathcal{X}^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) < \alpha < f(y),$$

para todo $x \in C$ y todo $y \in K$.

Para conjuntos convexos, las nociones de cerradura fuerte y débil coinciden como muestra el siguiente

Teorema 1.7 Sea $C \subseteq \mathcal{X}$ convexo y cerrado. Entonces C es débilmente cerrado si y sólo si es fuertemente cerrado.

Prueba. Sólo basta probar que si es C cerrado y convexo, entonces C es débilmente cerrado; probaremos equivalentemente que C^c es débilmente abierto. Dado $x_0 \notin C$, existe $f \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ (teorema de Hahn-Banach) tales que

$$\langle f, x_0 \rangle < \alpha < \langle f, y \rangle \text{ para todo } y \in C.$$

Sea $V = \{x \in X^* : \langle f, x \rangle < \alpha\}$, tenemos que $x_0 \in V$ y $V \cap C = \emptyset$ con V débilmente abierto, de donde C^c es débilmente abierto. $\diamondsuit$

Corolario 1.8 Sea $\varphi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ una función convexa s.c.i. (respecto a la topología fuerte). Entonces φ es s.c.i. en la topología débil. En particular, si $x_n \rightharpoonup x$, entonces

$$\varphi(x) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \varphi(x_n).$$

Prueba. Basta probar que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$A = \{x \in \mathcal{X} : \varphi(x) \leq \lambda\}$$

es débilmente cerrado, pero como A es cerrado y convexo (φ es convexa), esto es cierto por el teorema 1.7. $\diamondsuit$

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach, ya vimos que X^* es un espacio normado con la norma

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ \|x\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle|;$$

Sea $\mathcal{X}^{**}$ el dual de X^* (llamado **bidual** de X^*), dotado de la norma

$$\|\xi\| = \sup_{\substack{f \in \mathcal{X} \\ \|f\| \leq 1}} |\langle \xi, f \rangle|.$$

Considerando la inyección canónica $J : X \to X^{**}$, dada por

$$J(x) : X^* \to \mathbb{R}, \quad [J(x)](f) = \langle f, x \rangle,$$

la cual es una isometría lineal, que permite identificar $\mathcal{X}$ con un subespacio de X^{**}; de ésta manera, sobre el espacio $\mathcal{X}^*$ quedan definidas las siguientes topologías:

1) La topología fuerte (asociada a la norma de X^*).

2) La topología débil $\sigma(X^*, X^{**})$.

3) La **topología débil estrella**, que denotaremos con $\sigma(X^*, X)$, que es la topología menos fina que hace continuas a todas las .aplicaciones

$$\varphi_x : X^* \to \mathbb{R}, \quad \varphi_x(f) = \langle f, x \rangle \text{ para todo } x \in \mathcal{X}.$$

La topología débil estrella queda caracterizada por: $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ si y sólo si

$$\langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle, \text{ para todo } x \in \mathcal{X}.$$

La siguiente proposición reúne las relaciones entre estas tres topologías:

Proposición 1.9 Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{X}^*$. Se verifica

(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ si y sólo si $\langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle$, para todo $x \in \mathcal{X}$.

(ii) Si $f_n \to f$, entonces $f_n \rightharpoonup f$.

(iii) Si $f_n \rightharpoonup f$, entonces $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

(iv) Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ y $x_n \to x$, entonces $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Si $J : X \to X^{**}$ es sobreyectiva, diremos que $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach **reflexivo**; una de las principales características de los espacios reflexivos que utilizaremos es dada en el siguiente teorema:

Teorema 1.10 Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach. Entonces $\mathcal{X}$ es reflexivo si y sólo si

$$B_x = \{x \in \mathcal{X} : \|x\| \leq 1\}$$

es compacto en la topología $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$.

De aquí se tiene que dado un subconjunto K de $\mathcal{X}$, K es débilmente compacto si y sólo si es débilmente cerrado y acotado.

Capítulo 2

Convexidad y Monotonicidad Generalizadas

2.1 Cuasiconvexidad

Sea $\mathcal{X}$ un t.v.s. de Hausdorff, $K \subseteq \mathcal{X}$ convexo. Una función $f : K \to \mathbb{R}$ se dice **convexa** si

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

para todo $x, y \in K$ y $\lambda \in [0,1]$. Una generalización de este concepto es el de función cuasiconvexa: $f : K \to \mathbb{R}$ es **cuasiconvexa** si

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\},$$

para todo $x, y \in K$ y $\lambda \in [0,1]$ y diremos que f es **estrictamente cuasiconvexa** si

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \max\{f(x), f(y)\},$$

para todo $x, y \in K$, $x \neq y$ y $\lambda \in [0,1]$.
Así como las funciones convexas son caracterizadas por su epígrafo, las funciones cuasiconvexas se caracterizan por sus conjuntos de nivel, en el siguiente sentido:

Proposición 2.1 Sea $f : K \to \mathbb{R}$. Son equivalentes:

(i) f es cuasiconvexa;

(ii) $S_\lambda(f)$ es convexo para todo $\lambda \in \mathbb{R}$;

(iii) $\widehat{S_\lambda(f)}$ es convexo para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prueba. [(i)$\Longrightarrow$(ii)] Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrario y $x, y \in S_\lambda(f)$; entonces se tiene que $f(x) \leq \lambda$ y $f(y) \leq \lambda$, luego para $\alpha \in [0,1]$,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \leq \lambda,$$

de donde $\alpha x + (1-\alpha)y \in S_\lambda(f)$.
[(ii)$\Longrightarrow$(i)] Sean $x, y \in K$ y $\lambda \in [0,1]$ arbitrarios, sea $\mu = \max\{f(x), f(y)\}$, entonces $x, y \in S_\mu(f)$ y desde que $S_\mu(f)$ es convexo tenemos que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)) \leq \mu = \max\{f(x), f(y)\}.$$

Luego f es cuasiconvexa.
[(i)$\Longrightarrow$(iii)] Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrario $x, y \in S_\lambda(f)$ y $\mu = \max\{f(x), f(y)\}$, entonces

$$f(\alpha x + (1-\alpha)) \leq \mu$$

para todo $\alpha \in [0,1]$; y como $\mu < \lambda$

$$f(\alpha x + (1-\alpha)) < \lambda$$

de donde $\alpha x + (1-\alpha)y \in S_\lambda(f)$, para todo $\alpha \in [0,1]$
[(iii)$\Longrightarrow$(i)] Sean $x, y \in \mathcal{X}$ y $\lambda \in [0,1]$ arbitrario, sea $\mu = \max\{f(x), f(y)\}$, entonces $x, y \in S_{\mu+\varepsilon}(f)$ para todo $\varepsilon > 0$, y por convexidad de éste nivel tenemos

$$f(\lambda x + (1-\lambda)) < \mu + \varepsilon \text{ para todo } \varepsilon > 0,$$

de donde

$$f(\lambda x + (1-\lambda)) \leq \mu = \max\{f(x), f(y)\},$$

i.e. f es cuasiconvexa. $\Diamond$

Proposición 2.2 Sea K un subconjunto convexo de un t.v.s. de Hausdorff $\mathcal{X}$, $\{f_i : K \to \mathbb{R}\}_{i\in I}$ una familia de funciones cuasiconvexas; entonces la función $f : K \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \sup_{i \in I}\{f_i(x)\},$$

si está bien definida (en particular si I es finito) es cuasiconvexa.

Prueba. Sean $x, y \in K$, $\lambda \in [0,1]$;

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \sup_{i\in I}\{f_i(\lambda x + (1-\lambda)y)\}$$

y como $f_i(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f_i(x), f_i(y)\}$ para todo $i \in I$ entonces tenemos

$$\begin{aligned} \sup_{i\in I}\{f_i(\lambda x + (1-\lambda)y)\} &\leq \sup_{i\in I}\max\{f_i(x), f_i(y)\} \\ &= \max\{\sup f_i(x), \sup f_i(y)\} = \max\{f(x), f(y)\}; \end{aligned}$$

de donde $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$, i.e. f es cuasiconvexa. $\Diamond$

2.2 Convexidad, monotonicidad y diferenciabilidad

Para más información sobre convexidad generalizada ver [7]; aquí nos restringiremos sólo a las funciones diferenciables en el sentido que daremos a continuación; su utilidad será observada luego. Recordemos que dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Una función $f : I \to \mathbb{R}$ se dice diferenciable en x_0 si y sólo si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

el cual es denotado por $f'(x_0)$. Esto es equivalente a decir que: existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + r(h)$$

para h suficientemente pequeño y de tal forma que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$.
Esta definición se extiende a espacios normados de la siguiente manera

Definición 2.1 Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado y $V \subseteq \mathcal{X}$ abierto. Una función $f : V \to \mathbb{R}$ se dice que es **diferenciable según Fréchet** en $u_0 \in V$ si y sólo si existe $u^* \in \mathcal{X}^*$ tal que

$$f(u_0 + h) = f(u_0) + \langle u^*, h \rangle + r(h),$$

para h lo suficientemente pequeño y $\lim\limits_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$.
u^* será denotado por $\nabla f(x_0)$ y es llamado **gradiente de** f **en** u_0.

Si f es diferenciable según Fréchet en todo $v \in V$, diremos simplemente que f es diferenciable. Ahora, dada $f : V \to \mathbb{R}$ diferenciable podemos definir $\nabla f : V \to X^*$ tal que a cada $x \in V$ le asocia $\nabla f(x)$.
Es un hecho conocido que dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa diferenciable, si $\nabla f(x_0) = 0$, entonces x_0 es un mínimo de f, pero en el caso en que f sea cuasiconvexa no es cierto en general; para ver esto basta considerar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$. Aquí $\nabla f(0) = 0$ mas 0 no es un mínimo de f. Esto motiva la introducción de una nueva clase de funciones llamadas pseudoconvexas.

Definición 2.2 Dado $C \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f : C \to \mathbb{R}$ se dice **pseudoconvexa** en C si

$$x, y \in C \text{ y } f(y) < f(x) \text{ implican } \langle \nabla f(x), y - x \rangle < 0;$$

y f se dice **estrictamente pseudoconvexa** en C si

$$x, y \in C,\ x \neq y \text{ y } f(y) \leq f(x) \text{ implican } \langle \nabla f(x), y - x \rangle < 0.$$

Se observa de la definición que las funciones pseudoconvexas gozan de la propiedad de que si $\nabla f(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in C$; entonces x_0 es un mínimo para f, que es precisamente la propiedad que habíamos perdido al debilitar la convexidad.
Para caracterizar a las funciones convexas, cuasiconvexas y pseudoconvexas diferenciables por la naturaleza de su gradiente, primero daremos algunas definiciones.

Definición 2.3 Dado $C \subseteq \mathcal{X}$ convexo y $T : C \to \mathcal{X}^*$, T es llamado

1) **monótono** si

$$x_1, x_2 \in C \text{ implica } \langle T(x_2) - T(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq 0.$$

2) **cíclicamente monótono** si

$$\{x_1, \ldots x_n, x_{n+1}\} \subseteq C \text{ con } x_1 = x_{n+1}, \text{ implica } \sum_{i=1} \langle T(x_i), x_{i+1} - x_i \rangle \leq 0;$$

3) **pseudomonótono** si

$$x_1, x_2 \in C, \langle T(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq 0 \text{ implica } \langle T(x_2), x_2 - x_1 \rangle \geq 0,$$

ó equivalentemente

$$\langle T(x_2), x_2 - x_1 \rangle < 0 \text{ implica } \langle T(x_1), x_2 - x_1 \rangle < 0;$$

4) **estrictamente pseudomonótono** si

$$x_1, x_2 \in C,\ x_1 \neq x_2,\ \langle T(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq 0 \text{ implica } \langle T(x_2), x_2 - x_1 \rangle > 0;$$

5) **cuasimonótono** si

$$x_1, x_2 \in C,\ \langle T(x_1), x_2 - x_1 \rangle > 0 \text{ implica } \langle T(x_2), x_2 - x_1 \rangle \geq 0.$$

Observación 2.1 Se verifican las siguientes implicaciones:

$$\text{cíclicamente monótono} \implies \text{monótono} \implies \text{pseudomonótono} \implies \text{cuasimonótono}.$$

Que cíclicamente monótono implique monótono y pseudomonóto implique cuasimonótono es directo de la definición, sólo veamos que monótono implica pseudomonótono. Si T es monótono, entonces

$$\begin{aligned} &\langle T(x_2) - T(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq 0, \\ &\langle T(x_2), x_2 - x_1 \rangle - \langle T(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq 0; \end{aligned}$$

de donde si $\langle T(x_2), x_2 - x_1 \rangle < 0$, entonces $\langle T(x_1), x_2 - x_1 \rangle < 0$.

Teorema 2.3 Sea $C \subseteq \mathcal{X}$, abierto convexo y $f \quad C \to \mathbb{R}$ una función diferenciable; entonces tenemos:

1) f es convexa si y sólo si ∇f es monótono, mas aún ∇f es cíclicamente mónotono.

2) f es cuasiconvexa si y sólo si ∇f es cuasimonótono.

3) f es pseudoconvexa si y sólo si ∇f es pseudomonótono.

4) f es estrictamente pseudoconvexa si y sólo si ∇f es estrictamente pseudomonótono.

Prueba. Dados $x, y \in C$, definimos $\psi_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{R}$ mediante

(2.1)
$$\psi_{x,y}(\lambda) = f(\lambda x + (1-\lambda)y).$$

Se observa fácilmente que $\psi_{x,y}$ es diferenciable con

$$\psi'_{x,y}(\lambda) = \langle \nabla f(\lambda x + (1-\lambda)y), x - y\rangle.$$

1) Sea f convexa. Dados $x, y \in C$, $\lambda \in [0,1]$, por hipótesis

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)y).$$

Esto último se puede escribir como

$$\frac{f(y + \lambda(x-y)) - f(y)}{\lambda} \leq f(x) - f(y),$$

para $\lambda > 0$. Haciendo $\lambda \to 0$, obtenemos

(2.2)
$$\langle \nabla f(y), x - y\rangle \leq f(x) - f(y).$$

Además, si intercambiamos los papeles de x y y en la última expresión, tenemos

$$\langle \nabla f(x), y - x\rangle \leq f(y) - f(x);$$

ahora sumando las dos últimas expresiones,

$$\langle \nabla f(y) - f(x), x - y\rangle \leq 0,$$

de donde ∇f es monótono. Para ver que ∇f es cíclicamente monótono aplicamos repetidas veces (2.2).
Supongamos que ∇f es monótono. Dados $x, y \in C$, $0 < \lambda < 1$. Para $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, desde que $\psi_{x,y}$ es diferenciable en $[0,1]$, por el teorema del valor medio para funciones a valores reales, existe $0 < \lambda_0 < \lambda$ tal que

$$\psi_{x,y}(\lambda) - \psi_{x,y}(0) = \psi'_{x,y}(\lambda_0)\lambda,$$

reemplazando y poniendo $z_0 = \lambda_0 x + (1-\lambda_0)y$, tenemos

(2.3)
$$f(z) - f(y) = \langle \nabla f(z_0), x - y\rangle\lambda.$$

Análogamente, existe λ_1, $\lambda < \lambda_1 < 1$, $z_1 = \lambda_1 x + (1-\lambda_1)y$ tal que

(2.4)
$$f(x) - f(z) = \langle \nabla f(z_1), x - y\rangle(1-\lambda).$$

De (2.3) y (2.4), multiplicando respectivamente por $(1-\lambda)$ y $-\lambda$ y sumando obtenemos

$$f(z)-(1-\lambda)f(y)-\lambda f(x)=\lambda(1-\lambda)\langle\nabla f(z_0)-\nabla f(z_1),x-y\rangle. \tag{2.5}$$

Ahora multiplicando (2.5) por $\lambda_0-\lambda_1$,

$$(\lambda_0-\lambda_1)[f(z)-(1-\lambda)f(y)-\lambda f(x)]=\lambda(1-\lambda)\langle\nabla f(z_0)-\nabla f(z_1),z_0-z_1\rangle\geq 0.$$

Como $\lambda_0-\lambda_1<0$, tenemos

$$f(z)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),$$

y desde que $z=\lambda x+(1-\lambda)y$, concluimos que f es convexa.

2) Sean $x,y\in C$ tal que $\langle\nabla f(x),y-x\rangle>0$; $\lambda\in[0,1]$. De

$$\begin{aligned}
f(\lambda x+(1-\lambda)y) &= f(x+(1-\lambda)(y-x))\\
&= f(x)+(1-\lambda)\langle\nabla f(x),y-x\rangle+r((1-\lambda)(y-x)),
\end{aligned}$$

si $f(y)<f(x)$, tenemos por la cuasiconvexidad de f, que

$$f(x)\geq f(x)+(1-\lambda)\langle\nabla f(x),y-x\rangle+r((1-\lambda)(y-x)),$$

luego

$$0\geq(1-\lambda)\langle\nabla f(x),y-x\rangle+r((1-\lambda)(y-x))$$

pata todo $0<\lambda<1$, y

$$0\geq\langle\nabla f(x),y-x\rangle+\frac{r((1-\lambda)(y-x))}{(1-\lambda)};$$

tomando límite cuando $\lambda\to 1$, nos da

$$0\geq\langle\nabla f(x),y-x\rangle,$$

lo cual es imposible; y por tanto $f(x)\leq f(y)$, luego

$$\begin{aligned}
f(y) &> f(\lambda x+(1-\lambda)y)=f(y+\lambda(x-y))\\
&= f(y)+\lambda\langle\nabla f(y),x-y\rangle+r(\lambda(x-y))
\end{aligned}$$

para todo $0<\lambda<1$, de donde

$$0\geq\lambda\langle\nabla f(x),x-y\rangle+r(\lambda(x-y)),$$

esto es

$$0\geq\langle\nabla f(x),x-y\rangle+\frac{r(\lambda(x-y))}{\lambda};$$

Por lo tanto, ∇f es pseudomonótono.

Supongamos que ∇f es pseudomonótono. Si f no es pseudoconvexa, entonces existen $x, y \in C$ con

$$f(y) < f(x) \;\text{ y }\; \langle \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0.$$

Sea $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, entonces

$$\langle \nabla f(x), z - x \rangle \geq 0,$$

para todo $z \in [y, x]$. Esto implica que

$$\langle \nabla f(z), z - x \rangle \geq 0, \;\text{ para todo } z \in [y, x]$$

y entonces

$$\langle \nabla f(z), y - x \rangle \geq 0;$$

luego la función $\psi_{x,y}$ definida anteriormente es decreciente, de donde

$$f(x) = \psi_{x,y}(1) \leq \psi_{x,y}(0) = f(y),$$

lo cual es una contradicción.

4) La prueba es completamente análoga a (iii).

Capítulo 3

Multifunciones

3.1 Definiciones básicas

Definición 3.1 Sean X e Y dos conjuntos. Una **multifunción** F de X en Y, denotada por $F : X \rightrightarrows Y$, es una función $F : X \to 2^Y$ que a cada $x \in X$ le asocia de manera única un subconjunto $F(x) \subset Y$. Una multifunción es caracterizada por su **gráfico** $\mathrm{Graf}(F) \subset X \times Y$ definido por

$$\mathrm{Graf}(F) = \{(x, y) \in X \times Y \,/\, y \in F(x)\}.$$

$F(x)$ es la **imagen** o **valor** de F en el punto x.
En adelante asumiremos que $F(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in X$.
La **imagen de** F es la unión de los valores de $F(x)$, donde x recorre X:

$$\mathrm{Im}(F) = \bigcup_{x \in X} F(x).$$

Hay dos maneras de definir la imagen inversa de un conjunto M mediante una multifunción F:

$$\begin{aligned} F^{-1}(M) &= \{x \,/\, F(x) \cap M \neq \emptyset\} \quad &\textbf{(imagen inversa)} \\ F^{+1}(M) &= \{x \,/\, F(x) \cap M \subset M\} \quad &\textbf{(core)} \end{aligned}$$

Ellas coinciden de manera natural cuando F es mono-valuada.

Dada una multifunción $F : X \rightrightarrows Y$, definimos su **inversa** $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ mediante

$$F^{-1}(y) = \{x \in X : \ y \in F(x)\};$$

esto es,

$$\mathrm{Graf}(F^{-1}) = \{(y, x) \in Y \times X : \ (x, y) \in \mathrm{Graf}(F)\}.$$

La **composición** $H \circ G : X \rightrightarrows Z$ de dos multifunciones $H : Y \rightrightarrows Z$ y $G : X \rightrightarrows Y$ en x es definida por

$$(H \circ G)(x) = \bigcup_{y \in G(x)} H(y).$$

Para $F : X \rightrightarrows Y$, definimos $F^* : Y \rightrightarrows X$ mediante

$$F^*(y) = \{x \in X \,/\, y \notin F(x)\} = X \setminus F^{-1}(y).$$

Sean X, Y espacios métricos.

Definición 3.2 Una multifunción $F : X \rightrightarrows Y$ es llamada **semicontinua superiormente** (abreviado s.c.s.) en $x \in \mathrm{Dom}(F)$ si y sólo si

$$\text{para toda vecindad } U \text{ de } F(x), \text{ existe } \eta > 0 \,/\, \forall x' \in B_\eta(x) : F(x') \subset U$$

y decimos que F es **s.c.s.** si lo es en todo punto de X.

Definición 3.3 Una multifunción $F : X \rightrightarrows Y$ es llamada **semicontinua inferiormente** (abreviado s.c.i.) en $x \in X$ si y sólo si

$$\text{para todo } y \in F(x) \text{ y toda sucesión } (x_n) \subset X, x_n \to x; \text{ existe } y_n \in F(x_n) \,/\, y_n \to y.$$

Y decimos que F es **s.c.i.** si lo es en todo punto $x \in X$.

Proposición 3.1 $F : X \rightrightarrows Y$ es semicontinua superiormente en X si y sólo si para todo abierto $U \subset Y$ el conjunto $F^{+1}(U)$ es abierto en X.

Definición 3.4 Sean X, Y espacios vectoriales topológicos y K un subconjunto convexo no vacío de X. Diremos que la multifunción $F : K \rightrightarrows Y$ es **hemicontinua superiormente** en K, si para cualesquiera $x, y \in K$, la restricción $F|_{[x,y]} : [x, y] \rightrightarrows Y$ es semicontinua superiormente en $[x, y]$. Diremos que $F : X \rightrightarrows X^*$ es **débilmente hemicontinua superiormente** en K si consideramos en X^* la topología débil estrella.

Utilizaremos además el mapeo $F : X \rightrightarrows Y$ dado por

$$F(x) = F(x).$$

3.2 Mapeos KKM

Definición 3.5 Sea un $\mathcal{X}$ un t.v.s, $D \subseteq \mathcal{X}$ no vacío. $G : D \rightrightarrows \mathcal{X}$ es llamada **multifunción (ó mapeo) KKM** si $\mathrm{conv}\{x_1, x_2, \ldots x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} G(x_i)$ para cualquier subconjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots x_n\} \subseteq D$.

Una condición suficiente para que una multifunción $G : D \rightrightarrows \mathcal{X}$ sea KKM es dada en el siguiente teorema:

Teorema 3.2 Sea $\mathcal{X}$ un t.v.s. y $K \subseteq \mathcal{X}$ convexo. Si $F : K \rightrightarrows K$ satisface

(i) $x \in F(x)$ para cada $x \in K$;

(ii) $F^*(y)$ es convexo para cada $y \in K$;

entonces F es KKM.

Prueba. Sea $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq K$ e $\overline{y} \in \text{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$; tenemos que mostrar que

$$\overline{y} \in \bigcup_{i=1}^{n} F(x_i).$$

Como $\overline{y} \in F(\overline{y})$, tenemos que $\overline{y} \notin F^*(\overline{y})$ y por lo tanto $\text{conv}\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq F^*(\overline{y})$. Desde que $F^*(\overline{y})$ es convexo, al menos un punto $x_i \notin F^*(\overline{y})$, esto implica que $\overline{y} \in F(x_i)$; que era lo que queríamos probar. □

Ejemplo 3.1 Sea $\mathcal{X}$ un t.v.s. de Hausdorff, $K \subseteq \mathcal{X}$ convexo no vacío, $f : K \times K \to \mathbb{R}$, entonces si $f(x, \cdot)$ es cuasiconvexa para cada $x \in K$; y $f(x, x) \geq 0$ para todo $x \in K$, la multifunción $F : K \rightrightarrows K$ dada por

$$F(y) = \{x \in K \;/\; f(x, y) \geq 0\}$$

es KKM.

En efecto; evidentemente $x \in F(x)$ para cada $x \in K$; además

$$F^*(y) = \{x \in K \;/\; f(y, x) < 0\} = S_0(\widehat{f(y, \cdot)})$$

es un conjunto convexo para todo $y \in K$; luego por el teorema 3.2 F es KKM.

En particular, si tenemos $f : K \to \mathbb{R}$ cuasiconvexa, entonces la multifunción $F : K \rightrightarrows K$ dada por

$$F(y) = \{x \in K \;/\; f(x) \geq f(y)\}$$

es KKM. Para esto basta tomar $g(x, y) = f(y) - f(x)$; se satisface que $g(x, \cdot)$ es cuasiconvexa.

3.3 Monotonicidad de multifunciones

Una generalización de los conceptos de monotonicidad generalizada para multifunciones es la siguiente:

Definición 3.6 Sea X un espacio de Banach reflexivo, K un subconjunto no vacío convexo y cerrado, $T : K \rightrightarrows X^{**}$ es

(i) **monótono** si

$$\langle x^* - y^*, x - y\rangle \geq 0, \quad \text{para todo } x^* \in T(x), y^* \in T(y).$$

(ii) **cíclicamente monótono** si para cualquier ciclo $x_1, \ldots x_n, x_{n+1} \subseteq K$ $(x_{n+1} = x_1)$ y cualesquiera $x_i^* \in T(x_i)$, se tiene que

$$\sum_{i=1} \langle x_i^*, x_{i+1} - x_i\rangle \leq 0.$$

(iii) **cuasimonótono** si para todo $x, y \in X$ y $x^* \in T(x), y^* \in T(y)$ se verifica que

$$\langle x^*, y - x\rangle > 0 \text{ implica } \langle y^*, y - x\rangle \geq 0.$$

(iv) **propiamente cuasimonótono** si para todo $\{x_1, \cdots, x_n\} \subseteq K$ y todo $z \in \text{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$, existe $1 \leq i \leq n$ tal que

$$\langle x^*, y - x_i\rangle \leq 0 \text{ para todo } x^* \in T(x_i).$$

(v) **pseudomonótona** si para todo $x, y \in X$ y $x^* \in T(x), y^* \in T(y)$ se verifica que

$$\langle x^*, y - x\rangle \geq 0 \text{ implica } \langle y^*, y - x\rangle \geq 0;$$

lo cual es equivalente a que si existe $y^* \in T(y)$ tal que

$$\langle y^*, y - x\rangle < 0, \text{ entonces } \langle x^*, y - x\rangle < 0, \text{ para todo } x^* \in T(x).$$

Observación 3.1 Un operador cuasimonótono pseudomonótono es propiamente cuasimonótono.

En efecto: Sea $T : K \rightrightarrows X^*$ pseudomonótono y supongamos que no sea propiamente cuasimonótono; entonces existe $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq K$, existe $z \in \text{conv}\{x_1, \cdots, x_n\}$, $z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ (con $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$) y

$$\langle x_i^*, z - x_i\rangle > 0$$

para algún $x_i^* \in T(x_i)$. Pero esto implica, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, que

$$\langle z^*, z - x_i\rangle > 0,$$

para todo $z^* \in T(z)$, de donde

$$0 = \sum_{i=1} \alpha_i \langle z^*, z - x_i\rangle > 0,$$

lo cual constituye una contradicción. Por consiguiente T es propiamente cuasimonótono. $\diamondsuit$

Proposición 3.3 Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función semicontinua inferiormente y $\partial f : X \rightrightarrows \mathcal{X}^*$ el subdiferencial de f, entonces

(i) Si f es convexa, entonces ∂f es monótono; más aún es cíclicamente monótono.

Prueba.

(i) Sabemos que

$$\partial f(x) = \{x^* \in X \,/\, f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x\rangle, \text{ para todo } y \in X\}.$$

Dados $x, y \in X$, sean x^* e y^* en $\partial f(x)$ y $\partial f(y)$ respectivamente,

$$\begin{array}{lcl} f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x\rangle & \text{implica} & \langle x^*, y - x\rangle \geq f(x) - f(y), \\ f(x) \geq f(y) + \langle y^*, y - x\rangle & \text{implica} & -\langle y^*, y - x\rangle \geq f(y) - f(x); \end{array}$$

de donde tenemos

$$\langle x^* - y^*, y - x\rangle \geq 0 \text{ y por tanto } \langle x^* - y^*, x - y\rangle \leq 0. \quad \square$$

(ii) Sea $x^* \in T(x)$ tal que $\langle x^*, y - x\rangle \geq 0$, entonces

$$f(y) \geq f(x) - \langle x^*, y - x\rangle. \Diamond$$

Definición 3.7 (Transferencia de valores cerrados) Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico, $K \subseteq \mathcal{X}$. Se dice que la multifunción $F : K \rightrightarrows \mathcal{X}$ **transfiere valores cerrados**, si dados $x, y \in K$ con $x \notin F(y)$, entonces existe $y' \in K$ tal que $x \notin F(y')$.

Capítulo 4

El Lema de Ky Fan

4.1 Un primer resultado

Teorema 4.1 (Lema de Ky Fan) Sea $\mathcal{X}$ un t.v.s. de Hausdorff, $D \subseteq \mathcal{X}$ no vacío y $G : D \rightrightarrows \mathcal{X}$ una multifunción tal que:

i) $G(x)$ es cerrado para cada $x \in D$.

ii) $G : D \rightrightarrows \mathcal{X}$ es KKM.

iii) Al menos uno de los $G(x)$ es compacto.

Entonces

$$\bigcap_{x \in D} G(x) \neq \emptyset.$$

Prueba. Desde que existe al menos un $x_0 \in D$ con $G(x_0)$ compacto, $\bigcap\limits_{x \in D} G(x) = \emptyset$ implicaría que $G(x_0) \subseteq \bigcup\limits_{x \in D} G(x)^c$, de donde tendríamos que existe $\{x_1 \cdots x_m\} \subseteq D$ con $G(x_0) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} G(x_i)^c$ y de aquí $\bigcap\limits_{i=0}^{m} G(x_i) = \emptyset$. Luego es suficiente probar que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G(x_i) \neq \emptyset$, para todo subconjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq D$, escogido arbitrariamente. Para esto consideremos $S_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, el conjunto de vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$ y definamos el mapeo $\Phi : Conv(S) \to \mathcal{X}$, dado por $\phi(t_1, t_2, \ldots t_n) = \sum\limits_{i=1} t_i x_i$, el cual claramente es continuo.

Sean ahora $F(i) = \Phi^{-1}(G(x_i))$ los cuales son subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$ por ser preimágenes de conjuntos cerrados por medio de un mapeo continuo; y de la condición (ii) tenemos que para cada $\{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots.. \leq i_k = n\}$ el $(k-1)$-simplex $e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k}$ está contenido en $\bigcup\limits_{j=1}^{k} F(i_j)$, de donde por el teorema de KKM,

$$\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{n} F(x_i) = \Phi^{-1}(\bigcap_{i=1}^{n} G(x_i)),$$

y por lo tanto $\bigcap_{x\in D} G(x) \neq \emptyset$. $\diamond$

De este teorema se obtiene directamente el siguiente

Corolario 4.2 Sea E un t.v.s. $\mathcal{X}$ un subconjunto arbitrario de E y $G : \mathcal{X} \rightrightarrows E$ una multifunción KKM , supongamos que existe $F : \mathcal{X} \rightrightarrows E$ tal que $G(x) \subseteq F(x)$, para cada $x \in \mathcal{X}$ y para el cual $\bigcap_{x\in\mathcal{X}} F(x) = \bigcap_{x\in\mathcal{X}} G(x)$; si existe alguna topología en la cual cada $F(x)$ es compacto, entonces

$$\bigcap_{x\in\mathcal{X}} G(x) \neq \emptyset.$$

Ejemplo 4.1 Sea $D = \{x_1 = (1,1), x_2 = (2,-2), x_3 = (1,-2)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ y $G : D \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ definida por

$$\begin{aligned} G(x_1) &= \{(1,1)\}; \\ G(x_2) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x - 4\}; \\ G(x_3) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -(y+1) \geq (x-1)^2\}. \end{aligned}$$

Se observa fácilmente que los $G(x_i)$ son cerrados, pero $\bigcap_{x\in D} G(x) = \phi$. La condición que falla es que $\mathrm{conv}\{x_1, x_2\} \nsubseteq G(x_1) \cap G(x_2)$.

4.2 Extensiones del lema de Ky Fan

Una de las primeras extensiones de este teorema es debido al propio Ky Fan y es dada por el siguiente teorema:

Teorema 4.3 Sea D un subconjunto de un t.v.s. de Hausdorff $\mathcal{X}$ y $G : D \rightrightarrows \mathcal{X}$ una multifunción tal que:

i) $G(x)$ es cerrado para cada $x \in D$.

ii) $G : D \rightrightarrows \mathcal{X}$ es KKM.

iii) Existe un subconjunto $X_0 \subseteq D$ tal que $\bigcap_{x\in X_0} G(x)$ es compacto y X_0 está contenido en un subconjunto compacto y convexo de $\mathcal{X}$.

Entonces

$$\bigcap_{x\in D} G(x) \neq \emptyset.$$

$\max\{\lambda x_i \,/\, i = 1, 2, ..., n\} + \max\{(1-\lambda)y_i \,/\, i = 1, 2, ..., n\} =$

$\lambda \max\{x_i \,/\, i = 1, 2, ..., n\} + (1-\lambda)\max\{y_i \,/\, i = 1, 2, ..., n\} =$

$\lambda f(x_1, x_2, ..., x_n) + (1-\lambda) f(y_1, y_2, ..., y_n) \Longrightarrow f$ es convexa.

Sea

$$I(x) = \{i \,/\, f_i(x) = f(x)\}$$

los índices en los cuales el máximo definido como f es obtenido.

Calcularemos $f'(x; v)$.

$f'(x; v) = \lim\limits_{t \downarrow 0} \dfrac{\max\limits_i\{x_i + tv_i\} - \max\limits_i\{x_i\}}{t}$

aplicando el Teorema de L'hospital respecto de t, se tiene

$\Longrightarrow f'(x; v) = \lim\limits_{t\downarrow 0} \max\limits_{i \in I(x)} \{v_i\} = \max\limits_{i \in I(x)} v_i,$

además como f es Lipschitz y convexa

$\Longrightarrow$ por la Proposición 1.5.5 $f^{\circ}(x; v) = f'(x; v)$.

$\Longrightarrow \partial f(x) = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^n \,/\, \max\limits_{i \in I(x)} v_i \geq \langle \zeta, v \rangle \;\; \forall v \in \mathbb{R}^n \right\}.$

Veamos la ley de formación del $\partial f(x)$.

Si $n = 1$ tenemos:

$\max\limits_{i \in I(x)} v_i = v^* \geq \langle \zeta, v \rangle \;\; \forall v \in \mathbb{R} \Longrightarrow v^* \geq \langle \zeta, v^* \rangle \Longrightarrow \zeta = 1.$

Si $n = 2$ tenemos:

$\max\limits_{i \in I(x)} v_i \geq \langle \zeta, v \rangle = \sum\limits_{i=1}^{2} \zeta_i v_i$ donde $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, $v = (v_1, v_2)$

Si $i = 1, 2 \in I(x)$.

Supongamos que $v_1 \geq v_2$ y $\zeta_1 \geq 0$

$\Longrightarrow \max\limits_{i \in I(x)} v_i = v_1 \geq \zeta_1 v_1 + \zeta_2 v_2 \geq \zeta_1 v_2 + \zeta_2 v_2 = (\zeta_1 + \zeta_2) v_2$

$\Longrightarrow v_1 \geq (\zeta_1 + \zeta_2) v_2$. Y $v_1 \geq v_2$

$\Longrightarrow$ tenemos dos casos:

- Si $v_2 \geq (\zeta_1 + \zeta_2) v_2 \;\; \forall v_2 \Longrightarrow \zeta_1 + \zeta_2 = 1$

- Si $(\zeta_1 + \zeta_2) v_2 \geq v_2 \;\; \forall v_2 \Longrightarrow \zeta_1 + \zeta_2 = 1$

$\Longrightarrow \zeta_1 + \zeta_2 = 1.$

Continuamos con $v_1 \geq v_2$

$\Longrightarrow \max\limits_{i \in I(x)} v_i = v_1 \geq \zeta_1 v_1 + \zeta_2 v_2 = \zeta_1 v_1 + v_2 - \zeta_1 v_2 \Longrightarrow v_1 - v_2 \geq \zeta_1 (v_1 - v_2) \Longrightarrow 1 \geq \zeta_1,$

Prueba. Como se observa de la hipótesis, la multifunción $\overline{F}$ satisface las hipótesis del teorema 4.3, luego sólo será necesario mostrar que

$$\bigcap_{x\in D} F(x) \supseteq \bigcap_{x\in D} F(x),$$

pues la otra inclusión se satisface trivialmente.
Ahora, por reducción al absurdo, supongamos que existe $y \in \bigcap_{x\in D} F(x)$ y $x \notin \bigcap_{x\in D} F(x)$, entonces $x \notin F(x_0)$ para algún $x_0' \in D$ tal que $x \notin F(x_0')$, lo cual es absurdo, de donde concluimos que $\bigcap_{x\in D} F(x) = \bigcap_{x\in D} F(x)$ y por lo tanto

$$\bigcap_{x\in D} F(x) \neq \emptyset. \quad \diamond$$

El siguiente ejemplo muestra que las condiciones de éste teorema son más débiles que la condición del teorema 4.3.

Ejemplo 4.2 Sea $Y = [0,1]$, $\mathcal{X} = Y \cap \mathbb{Q}$. Claramente $\mathcal{X}$ no es convexo ni compacto; tomemos $F : X \rightrightarrows Y$ como

$$F(x) = [x,1] \cap \mathbb{Q}.$$

Entonces $F(x)$ no es cerrado excepto para $x = 1$, además F es KKM, de donde no podemos utilizar el teorema 4.3, sin embargo F satisface las hipótesis del teorema anterior.

(i) F transfiere valores cerrados: Sean $x \in \mathcal{X}$, $y \in Y$ con $y \notin F(x)$; tomando $x' = 1$, tenemos que $y \notin F(x')$.

(ii) La multifunción $\overline{F} : X \rightrightarrows Y$ es KKM pues como

$$F(x) = [x,1], \text{ si } \{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq \mathcal{X} \text{ y } z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \text{ con } \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,$$

tomando $x_j = \min_{1\leq i\leq n} \{x_i\}$, tenemos que $x_j \leq x_i$, luego $\alpha_i x_j \leq \alpha_i x_i$ y por tanto

$$x_j \leq z, \quad \text{i.e. } z \in F(x_j).$$

Por lo tanto $z \in \bigcup_{i=1}^{n} F(x_i)$.

(iii) Se satisface desde que Y es compacto.

Capítulo 5

Aplicaciones

5.1 Puntos Fijos

Lema 5.1 Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado, K un subconjunto convexo compacto no vacío de $\mathcal{X}$ y $f : K \to \mathcal{X}$ continuo, entonces existe al menos un $y_0 \in K$ tal que

$$\|y_0 - f(y_0)\| = \inf_{x \in K} \|x - f(y_0)\|.$$

Prueba. Definamos $G : K \rightrightarrows \mathcal{X}$ mediante

$$G(x) = \{y \in K \,/\, \|y - f(y)\| \leq \|x - f(y)\|\},$$

entonces G satisface

(i) $x \in G(x)$ para todo $x \in K$.

(ii) Desde que f es continua, $G(x)$ es cerrado por tanto compacto desde que K lo es.

(iii) G es KKM. En efecto,

$$G^*(y) = \{x \in K \,/\, \|y - f(y)\| > \|x - f(y)\|\} = B_{\|y-f(y)\|}(f(y)) \cap K$$

es un conjunto convexo para cada $y \in K$; por el teorema 3.2, G es KKM.

Ahora, por el lema de Ky Fan, tenemos que $\bigcap_{x \in K} G(x) \neq \emptyset$, es decir, existe $y_0 \in K$ tal que

$$\|y_0 - f(y_0)\| \leq \|x - f(y_0)\| \text{ para todo } x \in K. \ \Diamond$$

Teorema 5.2 Sea $\mathcal{X}$ espacio normado, K un subconjunto convexo compacto no vacío de $\mathcal{X}$ y $F : K \to \mathcal{X}$ un mapeo continuo tal que para cada $c \in K$ con $c \neq F(c)$, el segmento $[c, F(c)]$ contiene al menos dos puntos de K. Entonces F tiene al menos un punto fijo.

Prueba. Del lema anterior tenemos que existe $y_0 \in K$ tal que

$$\|y_0 - f(y_0)\| = \inf_{x\in K} \|x - f(y_0)\|.$$

Probaremos que y_0 es un punto fijo.
Por el absurdo, supongamos que x_0 no es un punto fijo, entonces por hipótesis, el segmento $[y_0, f(y_0)]$ debe contener otro punto x, distinto de y_0, $x = ty_0 + (1-t)f(y_0)$, $0 < t < 1$, de donde

$$\|y_0 - f(y_0)\| \leq \|ty_0 + (1-t)f(y_0) - f(y_0)\| = t\|y_0 - f(y_0)\| < \|y_0 - f(y_0)\|,$$

es decir

$$\|y_0 - f(y_0)\| < \|y_0 - f(y_0)\|,$$

lo cual es una contradicción, de donde $y_0 = f(y_0)$. $\diamondsuit$

Teorema 5.3 (Schauder-Tychonoff) Sea $\mathcal{X}$ un espacio localmente convexo, K un subconjunto convexo compacto no vacío de $\mathcal{X}$. Entonces cada función continua $f : K \to K$ tiene un punto fijo.

Prueba Sea $\{p_i\}_{i\in I}$ la familia de todas las seminormas continuas en E. Para cada $i \in I$, consideremos el conjunto

$$A_i = \{y \in K \,/\, p_i(y - f(y)) = 0\}.$$

Un punto $y_0 \in K$ es un punto fijo de f si y sólo si $y_0 \in \bigcap_{i\in I} A_i$, y como K es compacto, sólo necesitamos probar que

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_n} \neq \emptyset$$

para cualquier subconjunto finito $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$.
Para esto, dado $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq K$ arbitrarios definamos $G : K \rightrightarrows \mathcal{X}$ por

$$G(x) = \{y \in K \,/\, \sum_{j=1}^{n} p_{i_j}(y - f(y)) \leq \sum_{j=1}^{n} p_{i_j}(x - f(y))\}.$$

Como las p_i son continuas y K es compacto, sólo basta ver que G es KKM. Supongamos que existe $\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq K$ y $z \in \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_m\}$ tal que $z \notin \bigcup_{i=1}^{m} G(x_i)$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} p_{i_j}(x_i - f(z)) < \sum_{j=1}^{n} p_{i_j}(z - f(z))$$

y como

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} p_{i_j}(z - f(z)) &< \sum_{j=1}^{n} p_{i_j}\Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i - f(z)\Big) \leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left[\sum_{j=1}^{n} p_{i_j}(x_i - f(z))\right] \\
&< \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left[\sum_{j=1}^{n} p_{i_j}(z - f(z))\right] = \sum_{j=1}^{n} p_{i_j}(z - f(z)),
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

Por lo tanto G es KKM, luego $\bigcap_{i=1} G(x_i) \neq \emptyset$ y por tanto existe $\overline{x} \in K$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n} p_{i_j}(\overline{x} - f(\overline{x})) \leq \sum_{j=1}^{n} p_{i_j}(x - f(\overline{x})$$

para todo $x \in K$. Ahora si $\overline{x} \neq f(\overline{x})$, tomando $y = t\overline{x} + (1-t)f(\overline{x})$, $0 < t < 0$ se tiene que

$$\sum_{j=1}^{n} p_{i_j}(\overline{x} - f(\overline{x})) \leq \sum_{j=1}^{n} p_{i_j}(t\overline{x} + (1-t)f(\overline{x}) - f(\overline{x})) \leq t\sum_{j=1}^{n} p_{i_j}(\overline{x} - f(\overline{x}))$$

es decir

$$\sum_{j=1}^{n} p_{i_j}(\overline{x} - f(\overline{x})) < \sum_{j=1}^{n} p_{i_j}(\overline{x} - f(\overline{x}))$$

lo que es una contradicción, de donde $\overline{x} = f(\overline{x})$. $\diamondsuit$

Como un corolario inmediato, obtenemos uno de los resultados básicos del análisis funcional:

Teorema 5.4 (Markoff-Kakutani) Sea $\mathcal{X}$ un espacio localmente convexo, K un subconjunto convexo compacto no vacío de $\mathcal{X}$ y $\mathcal{F}$ una familia conmutativa de mapeos afines continuos de K en sí mismo. Entonces $\mathcal{F}$ tiene un punto fijo común.

Prueba. Denotaremos por $\mathrm{Fix}(f)$ al conjunto de puntos fijos de f. Del teorema anterior tenemos que $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$ para toda $f \in \mathcal{F}$, y desde que las funciones en $\mathcal{F}$ son afines, $\mathrm{Fix}(f)$ es en particular compacto.

Como debemos probar que $\bigcap_{f\in\mathcal{F}} \mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$, de la observación en la prueba del teorema anterior, será suficiente probar que cada intersección finita

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Fix}(f_i) = \mathrm{Fix}(f_1, \ldots, f_n),$$

para $f_i \in \mathcal{F}$ es no vacía.

Procedamos por inducción sobre el número n de f_i's.

(i) $n = 1$, $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$ para cada $f \in \mathcal{F}$.

(ii) Supongamos que $\mathrm{Fix}[f_1, \ldots, f_n] \neq \emptyset$, para cualquier subconjunto finito $\{f_1, \ldots, f_n\} \subseteq \mathcal{F}$. Dado cualquier subconjunto $\{f_1, \ldots, f_{n+1}\} \subseteq \mathcal{F}$, desde que $\mathcal{F}$ es conmutativa, notemos que

$$f_{n+1}[\mathrm{Fix}(f_1, \ldots, f_n)] \subseteq \mathrm{Fix}(f_1, \ldots, f_n).$$

Sea $x \in \mathrm{Fix}(f_1, \ldots, f_n)$, entonces $f_i(f_{n+1}(x)) = f_{n+1}(f_i(x)) = f_{n+1}(x)$ para cada $1 \leq i \leq n$, i.e. $f_{n+1}(x) \in \mathrm{Fix}(f_1, \ldots, f_n)$. Desde que $\mathrm{Fix}(f_1, \ldots, f_n)$ es un subconjunto no vacío, convexo y cerrado, del teorema anterior tenemos que $\mathrm{Fix}(f_1,\ldots,f_{n+1})\neq\emptyset$, considerando la restricción f_{n+1} a $\mathrm{Fix}(f_1,\ldots,f_n)$, i.e.

$$f_{n+1}:\mathrm{Fix}(f_1,\ldots,f_n)\to\mathrm{Fix}(f_1,\ldots,f_n),$$

lo cual completa la inducción.

Así concluimos que $\bigcap_{f\in\mathcal{F}}\mathrm{Fix}(f)\neq\emptyset$. $\Diamond$

Presentamos ahora un resultado concerniente al problema de coincidencia, una generalización natural del problema de punto fijo:

Teorema 5.5 (Coincidencia) Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dos t.v.s Hausdorff, $K\subseteq\mathcal{X}$ y $C\subseteq\mathcal{Y}$ subconjuntos compactos convexos en los t.v.s $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ respectivamente. Sean $F,G:K\to C$ dos multifunciones tales que:

i) $F(x)$ es abierto y $G(x)$ es un conjunto convexo no vacío para cada $x\in K$;

ii) $G^{-1}(y)$ es abierto y $F^{-1}(y)$ es convexo y no vacío para cada $y\in C$.

Entonces existe un $x_0\in K$ tal que $F(x_0)\cap G(x_0)\neq\emptyset$.

Prueba. Sea $Z=K\times C$ y definamos $H:Z\rightrightarrows X\times Y$ mediante

$$H(x,y)=Z\setminus[G^{-1}(y)\times F(x)],$$

entonces cada $H(x,y)$ es no vacío, cerrado en Z y por lo tanto compacto.
Veamos que

$$Z=\bigcup_{(x,y)\in Z}G^{-1}(y)\times F(x);$$

en efecto, si $(x_0,y_0)\in Z$, escogemos $(x,y)\in F^{-1}(y_0)\times G(x_0)$, de donde $(x_0,y_0)\in G^{-1}(y)\times F(x)$. De aquí

$$\bigcap_{z\in Z}H(z)=\bigcap_{(x,y)\in Z}[G^{-1}(y)\times F(x)]^c=\emptyset,$$

de donde H no puede ser KKM (de otro modo, contradiríamos el lema de Ky Fan). Por lo tanto existe $\{z_1,\ldots,z_n\}\subseteq Z$ y $z=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i z_i$, $0\leq\alpha_i\leq 1$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ con $z\notin\bigcup_{i=1}^{n}H(z_i)$; ahora como Z es convexo entonces $z\in Z$, de donde $z\in Z\setminus\bigcup_{i=1}^{n}H(z_i)=\bigcap_{i=1}^{n}G^{-1}(y_i)\times F(x_i)$. Escribiendo $z=(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j,\sum_{j=1}^{n}\alpha_j y_j)$ (donde $z_i=(x_i,y_i)$) tenemos que $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j\in G^{-1}(y_i)$ y $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j y_j\in F(x_i)$ para todo $1\leq i\leq n$; de aquí tenemos que $y_i\in G(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j)$, lo cual implica

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \in G(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j)$ y análogamente $x_i \in F^{-1}(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j)$ implica $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in F^{-1}(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j)$ lo cual equivale a $\sum_{j=1}^{n} \alpha_i y_j \in F(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i)$.
Haciendo $x_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$, $y_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j$, tenemos $y_0 \in F(x_0) \cap G(x_0)$. Por lo tanto $F(x_0) \cap G(x_0) \neq \emptyset$, que era lo que queríamos probar. $\diamondsuit$

A partir de los resultados se obtienen los siguientes corolarios:

Teorema 5.6 Sea $\mathcal{X}$ un un t.v.s. de Hausdorff, K un subconjunto convexo compacto, no vacio de $\mathcal{X}$ y $F : K \rightrightarrows K$ una multifunción tal que:

i) $F^{-1}(y)$ es abierto para cada $y \in K$;

ii) $F(x)$ es convexo y no vacío para cada $x \in K$.

Entonces existe $x_0 \in K$ tal que $x_0 \in F(x_0)$.

Prueba. Si $F^{-1}(y) = K$ para algún y en K, entonces $y \in F(y)$ y el teorema está probado. Si en cambio $F^{-1}(y) \subsetneqq K$ para todo $y \in K$.
Como cada $F^{-1}(y)$ es abierto, entonces cada $F^*(y)$ es no vacío y cerrado en K y por lo tanto compacto.
Veamos que $K = \bigcup_{y \in K} F^{-1}(y)$: En efecto, sea $x \in K$; escojamos $y_0 \in F(x)$, luego $x \in F^{-1}(y_0)$. Así

$$\bigcap_{y \in K} F^*(y) = K \setminus \bigcup_{y \in K} F^{-1}(y) = \emptyset,$$

luego F^* no puede ser KKM. Por tanto, existe $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq K$ y $z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ tal que $z \notin \bigcup_{i=1}^{n} F^*(x_i)$, lo que equivale a decir que $z \notin \bigcup_{i=1}^{n} K \setminus F^{-1}(x_i)$, i.e. $z \in F^{-1}(x_i)$ para todo $1 \leq i \leq n$. Entonces $x_i \in F(z)$ para todo $1 \leq i \leq n$ y como $F(x)$ es convexo para todo $x \in K$, entonces $z \in F(z)$. $\diamondsuit$

Corolario 5.7 Sea $\mathcal{X}$ un un t.v.s. de Hausdorff, K subconjunto convexo compacto no vacio de $\mathcal{X}$, V una vecindad abierta simétrica del cero y $f : K \to K$ un mapeo continuo tal que $f(K) \subseteq K + V$. Entonces existe $x_0 \in K$ tal que $f(x_0) \in x_0 + V$.

Prueba. Definamos $F : K \rightrightarrows K$ por

$$F(x) = \{y \in K \;/\; f(x) - y \in V\};$$

entonces

(i) Claramente $F(x)$ es convexo y no vacío, pues V es convexo y $f(K) \subseteq K + V$.

(ii) Veamos que

$$\begin{aligned} F^{-1}(y) &= \{x \,/\, y \in F(x)\} = \{x \,/\, f(x) - y \in V\} \\ &= \{x \,/\, f(x) \in V + y\} = f^{-1}(y + V) \end{aligned}$$

es abierto, desde que V es un subconjunto abierto simétrico, vecindad de 0.

De donde por el teorema anterior, existe $x_0 \in F(x_0)$, lo cual equivale a decir que $f(x_0) \in x_0 + V$. $\diamondsuit$

Corolario 5.8 (Lassonde) Sea $\mathcal{X}$ un un t.v.s. de Hausdorff, C subconjunto convexo no vacío de $\mathcal{X}$, $f : C \to C$ un mapeo compacto y V una vecindad abierta convexa simétrica del cero. Entonces f tiene un V-punto fijo, es decir existe $x_0 \in C$ tal que $f(x_0) \in x_0 + V$.

Prueba. Para cada $x \in C$, $x + V$ es abierto y dado que $f(C)$ es compacto y

$$f(C) \subseteq C \subseteq \bigcup_{x \in C} [x + V],$$

existe $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq C$ tal que

$$f(C) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} [(x_i + V) \cap C].$$

Sea $K = \text{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$, tenemos que $f(K) \subseteq K + V$ y desde que K es compacto, del corolario anterior tenemos que existe $x_0 \in K$ tal que

$$f(x_0) \in x_0 + V. \ \diamondsuit$$

Corolario 5.9 Sea C un subconjunto convexo compacto no vacío del t.v.s. $\mathcal{X}$, y $F : C \to C$ un mapeo compacto. Entonces F tiene un punto fijo.

Corolario 5.10 Sean C y K subconjuntos convexos compactos no vacíos del t.v.s. $\mathcal{X}$, $F : C \to E$ un mapeo continuo tal que $F(C) \subseteq C + K$. Entonces existe $x_0 \in C$ tal que $F(x_0) \in x_0 + K$.

5.2 Un teorema de Minimax

Teorema 5.11 (Principio de Minimax) Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dos t.v.s. de Hausdorff, $K \subseteq \mathcal{X}$ y $C \subseteq \mathcal{Y}$ subconjuntos no vacíos, compactos y convexos en los t.v.s $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ respectivamente. si $f : K \times C \to \mathbb{R}$ satisface las siguientes condiciones:

(i) $f(x, \cdot)$ es semicontinua inferior y cuasiconvexa para cada $x \in K$,

(ii) $f(\cdot, y)$ es semicontinua superior y cuasiconcava para cada $y \in C$.

Entonces

$$\max_{x\in K}\min_{y\in C} f(x,y) = \min_{y\in C}\max_{x\in K} f(x,y).$$

Prueba. Como $f(\cdot,y)$ es s.c.s., del teorema 1.4 tenemos que existe $\max\limits_{x\in K} f(x,y)$ para cada $y\in C$ y además es una función s.c.i., de donde $\min\limits_{y\in C}\max\limits_{x\in K} f(x,y)$ existe; análogamente $\max\limits_{x\in K}\min\limits_{y\in C} f(x,y)$ existe. Desde que $f(x,y)\leq \max\limits_{x\in K} f(x,y)$, tenemos $\min\limits_{y\in C} f(x,y) \leq \min\limits_{y\in C}\max\limits_{x\in K} f(x,y)$, de donde

$$\max_{x\in K}\min_{y\in C} f(x,y) \leq \min_{y\in C}\max_{x\in K} f(x,y);$$

veamos que la desigualdad estricta no puede darse. Procediendo por contradicción, supongamos que existe $r\in\mathbb{R}$ tal que

$$\max_{x\in K}\min_{y\in C} f(x,y) < r < \min_{y\in C}\max_{x\in K} f(x,y).$$

Definamos $F,G : K \rightrightarrows C$ mediante las reglas de correspondencia

$$F(x) = \{y \,/\, f(x,y) > r\} \quad \text{y} \quad G(x) = \{y \,/\, f(x,y) < r\}.$$

Ahora veamos que se satisfacen las hipótesis del teorema 5.5:

(i) $F(x)$ es abierto desde que $f(x,\cdot)$ es s.c.i. y $G(x)$ es convexo desde que $f(x,\cdot)$ es cuasiconvexa y es no vacío pues $\max\limits_{x\in K}\min\limits_{y\in C} f(x,y) < r$, y como $F^{-1}(y) = \{x \,/\, f(x,y) > r\}$ y $G^{-1}(y) = \{x \,/\, f(x,y) < r\}$, tenemos análogamente que $F^{-1}(y)$ es no vacío, convexo y que $G^{-1}(y)$ es abierto, de donde existe $x_0\in K$ e $y_0\in C$ tales que

$$y_0 \in F(x_0)\cap G(x_0),$$

i.e. se satisface simultáneamente $f(x_0,y_0) > r$ y $f(x_0,y_0) < r$, lo cual es una contradicción, de donde se cumple

$$\max_{x\in K}\min_{y\in C} f(x,y) = \min_{y\in C}\max_{x\in X} f(x,y). \quad \diamond$$

5.3 Desigualdades Variacionales Escalares

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach real y K un subconjunto no vacío, convexo y cerrado de $\mathcal{X}$. Dada una correspondencia $T : K \rightrightarrows X^*$ con valores no vacíos, el **Problema de Desigualdad Variacional** (denotado **VIP**[1]) **escalar** es

$$\begin{array}{ll} \text{VIP}: & \text{Hallar } x_0\in K \text{ tal que} \\ & \text{para todo } x\in K, \text{ existe } x^*\in T(x_0) : \langle x^*, x - x_0\rangle \geq 0. \end{array}$$

Este problema está estrechamente relacionado con el problema de hallar $x_0\in K$ tal que

$$\text{para todo } x\in K, x^*\in T(x) : \ \langle x^*, x - x_0\rangle \geq 0;$$

[1] Por sus siglas en inglés, *Variational Inequality Problem*

el cual es llamado **Problema Dual de Desigualdad Variacional** (DVIP[2]) y esta relación se da en la siguiente

Proposición 5.12 Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach y $K \subseteq \mathcal{X}$ un subconjunto no vacío, convexo y cerrado. Dada $T : K \rightrightarrows X^*$ con valores no vacíos y hemicontinua superiormente, entonces toda solución de DVIP es solución de VIP.

Prueba. Sea x_0 una solución de DVIP, i.e. para todo $x \in K$, $x^* \in T(x)$ se tiene $\langle x^*, x - x_0 \rangle \geq 0$. Mostraremos que para todo $x \in K$, existe $x^* \in T(x_0)$ tal que $\langle x^*, x - x_0 \rangle \geq 0$. Supongamos que no sea cierto, entonces existe $y \in K$ tal que, para todo $x^* \in T(x_0)$: $\langle x^*, y - x_0 \rangle < 0$.
Sea

$$V = \{x^* \in X^* \,/\, \langle x^*, y - x_0 \rangle < 0\} = \varphi^{-1}_{y-x_0}(-\infty, 0)$$

una vecindad débil de $T(x_0)$. Como T es hemicontinua superiormente,

existe $\eta > 0$ tal que, para todo z con $\|z - x_0\| < \eta$ y $z \in [x, y]$, se tiene $T(z) \subseteq V$;

para $\lambda \in (0, 1)$ suficientemente pequeño tal que $z = \lambda x_0 + (1 - \lambda)y$ satisface $\|z - x_0\| < \eta$, tenemos $T(z) \subseteq V$, i.e.

$$z^* \in T(z) \;\text{ implica }\; \langle z^*, y - x_0 \rangle < 0; \tag{5.1}$$

y como

$$\begin{aligned}
\langle z^*, z - x_0 \rangle &= \langle z^*, \langle x_0 + (1 - \lambda)y - x_0 \rangle \\
&= \langle z^*, (1 - \lambda)(y - x_0) \rangle \\
&= (1 - \lambda)\langle z^*, y - x_0 \rangle < 0,
\end{aligned}$$

de (5.1), i.e. $\langle z^*, z - x_0 \rangle < 0$, lo cual constituye una contradicción. Por lo tanto x_0 es solución de VIP. $\diamondsuit$

Uno de los resultados más generales acerca de la existencia de soluciones de DVIP fue dado en [6] para operadores propiamente cuasimonótonos; el resultado se establece en el siguiente

Teorema 5.13 Sea $T : K \rightrightarrows X^*$ un operador propiamente cuasimonótono con valores no vacíos. Si alguna de las siguientes condiciones se verifican:

(i) K es débilmente compacto;

(ii) existe un subconjunto débilmente compacto W de K y $x_0 \in W$ tal que

para todo $x \in K \setminus W$, existe $x_0^* \in T(x_0)$ tal que $\langle x_0^*, x_0 - x \rangle < 0$;

[2] *Dual Variational Inequality Problem*

entonces el DVIP tiene solución. En consecuencia, si T es semicontinua superiormente, entonces el VIP tiene solución.

Prueba. Definamos $G : K \rightrightarrows K$ por la regla

$$G(x) = \{y \in K \,/\, \langle x^*, x - y\rangle \geq 0, \text{ para todo } x^* \in T(x)\}.$$

Probaremos que $\bigcap_{x\in K} G(x) \neq \emptyset$.

a) $G(x)$ es no vacío, cerrado y convexo, para todo $x \in K$.

En efecto, $x \in G(x)$, para todo $x \in K$. Sea ahora $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq G(x)$ tal que $y_k \to y$, entonces

$$\langle x^*, x - y_k\rangle \geq 0,$$

para cada $x^* \in T(x)$, implica

$$\langle x^*, x - y\rangle \geq 0,$$

pues $\langle x^*, \cdot\rangle$ es continua. Luego $y \in G(x)$.

b) G es un mapeo KKM: Dado un subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq K$, escogido arbitrariamente y $z \in \text{conv}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$; por hipótesis T es propiamente cuasimonótono, luego existe $1 \leq i \leq n$ tal que

$$\langle x^*, y - x_i\rangle \leq 0, \text{ para todo } x^* \in T(x_i),$$

i.e.

$$\langle x^*, x_i - y\rangle \leq 0, \text{ para todo } x^* \in T(x_i),$$

de donde $z \in G(x_i)$; luego G es KKM.

Ahora si (i) se satisface, i.e. si K es débilmente compacto, tendríamos que $G(x)$ es débilmente compacto y no vacío para todo $x \in K$; desde que G es KKM, por el lema de Ky Fan tenemos

$$\bigcap_{x\in K} G(x) \neq \emptyset,$$

i.e. existe $x_0 \in K$ tal que

$$\text{para todo } x \in K, x^* \in T(x), \ \langle x^*, x - x_0\rangle \geq 0.$$

Si (ii) se satisface, veamos que $G(x_0)$ es débilmente compacto ,para esto mostramos que $G(x_0) \subseteq W$; sea $y \in K \setminus W$, entonces existe $x_0^* \in T(x_0)$ tal que

$$\langle x_0^*, x_0 - x\rangle < 0,$$

de donde $y \in G(x_0)$. Luego, nuevamente tenemos que las hipótesis del teorema 4.3 se satisfacen. Por lo tanto, DVIP tiene solución. $\Diamond$

Por lo visto en el capítulo 3, el teorema anterior se verifica en particular para multifunciones mónotonas, pseudomónotonas. Tenemos el siguiente corolario para funciones monovaluadas.

Corolario 5.14 (Browder) Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach, $K \subseteq \mathcal{X}$ convexo cerrado con $0 \in K$, $T : K \to \mathcal{X}^*$ un mapeo tal que

(i) T es monótono;

(ii) T es hemicontinuo;

(iii) $\frac{\langle T(x), x\rangle}{\|x\|} \to +\infty$ cuando $\|x\| \to +\infty$;

entonces para cada $y^* \in \mathcal{X}^*$, existe $\overline{x} \in K$ tal que

$$\langle T(\overline{x}) - y^*, x - \overline{x}\rangle \geq 0 \text{ para todo } x \in K.$$

Prueba. Sea $y^* \in X^*$ fijo. Definiendo $T' : K \to X^*$, $T'(x) = T(x) - y^*$; probaremos que existe $\overline{x} \in K$ tal que

$$\langle T'(\overline{x}), x - \overline{x}\rangle \geq 0,$$

lo que demuestra el teorema.
Consideremos $\mathcal{X}_0 = \{x \,/\, \langle T(x), x\rangle \leq 0\}$, entonces $\mathcal{X}_0$ es acotado; además si $\langle T(0), x\rangle > 0$ para algún x, entonces

$$\langle T(x), x\rangle > 0,$$

luego $x \notin \mathcal{X}_0$.
De ésta manera, se satisfacen las hipótesis del teorema anterior y de la última observación; por lo tanto, para cada $y^* \in \mathcal{X}^*$, existe $\overline{x} \in K$ tal que

$$\langle T(\overline{x}) - y^*, x - \overline{x}\rangle \geq 0 \text{ para todo } x \in K. \diamondsuit$$

En particular, si $K = X$ tenemos que $T(\overline{x}) = y^*$, es decir T es sobreyectiva.

Observación 5.1 La proposición 5.12 se verifica si T es débilmente semicontinua inferiormente en x_0, es decir Dado x_0 solución de DVIP, si T es semicontinua inferiormente en x_0, entonces x_0 es solución de VIP.

Prueba. Procedemos por reducción al absurdo: Supongamos que existe $y \in K$ tal que

$$\text{para todo } x^* \in T(x_0) : \langle x^*, y - x_0\rangle < 0.$$

Sea $z_n = \lambda_n y + (1 - \lambda_n)x_0$ con $\lambda_n = 1/n$, una sucesión tal que $z_n \to x^0$. Entonces dado $x* \in T(x_0)$, existe una sucesión $z_n^* \in F(z_n)$ tal que $z_n \xrightarrow{*} x^*$ y como x_0 es solución de DVIP, tenemos

$$\langle z_n^*, \lambda_n y + (1 - \lambda_n)x_0 - x_0\rangle = \langle z_n^*, z_n - x_0\rangle \geq 0,$$

de donde $\lambda_n\langle z_n^*, y - x_0\rangle \geq 0$, luego

$$\langle z_n^*, y - x_0\rangle \geq 0,$$

y de $z_n^* \xrightarrow{*} x^*$ tenemos

$$\langle x^*, y - x_0 \rangle \geq 0,$$

una contradicción. Por tanto x_0 es solución de VIP. $\diamondsuit$

5.4 El Problema de equilibrio

Sea $\mathcal{X}$ un espacio vectorial topológico Hausdorff, $K \subseteq \mathcal{X}$ un subconjunto convexo, cerrado, no vacío y $\phi : K \times K \to \mathbb{R}$ una función tal que $\phi(x, x) \geq 0$ para todo $x \in K$. El problema de equilibrio (denotado EP) consiste en:

$$\text{EP}: \quad \text{Hallar } \overline{x} \in K \text{ tal que } : \phi(\overline{x}, y) \geq 0, \text{ para todo } y \in K.$$

como muestra rcf-sosa, éste problema contempla muchos otros, por ejemplo

1) **Problema de minimización**: Dada $f : K \to \mathbb{R}$, el problema de minimización (MP) consiste en

$$\text{MP}: \quad \text{Hallar } x_0 \in K \text{ tal que } f(x_0) \leq f(x), \text{ para todo } x \in K.$$

Definiendo $\phi : K \times K \to \mathbb{R}$ por $\phi(x, y) = f(y) - f(x)$, tenemos que $\overline{x}$ es solución de MP si y sólo si $\overline{x}$ es solución de EP.
En efecto, si $\overline{x} \in K$ es solución de EP, i.e. $\phi(\overline{x}, y) \geq 0$ para todo $y \in K$, por la definición de ϕ,

$$f(y) - f(\overline{x}) \geq 0 \text{ y luego } f(y) \geq f(\overline{x}), \text{ para todo } y \in K;$$

esto es $\overline{x}$ soluciona MP.
Recíprocamente, si $x_0 \in K$ es tal que $f(x_0) \leq f(y)$, para todo $y \in K$ entonces

$$\phi(x_0, y) = f(y) - f(x_0) \geq 0, \text{ para todo } y \in K.$$

2) **Problema de desigualdad variacional**: Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach real. Dada la multifunción $T : K \rightrightarrows \mathcal{X}^*$; ya habíamos visto que el problema de desigualdad variacional, VIP consiste en

$$\begin{array}{ll} \text{VIP}: & \text{Hallar } \overline{x} \in K \text{ tal que} \\ & \text{para todo } y \in K, \text{ existe } x^* = x^*(y) \in T(\overline{x}) : \langle x^*, y - x \rangle \geq 0. \end{array}$$

Entonces si definimos $\phi : K \times K \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(x, y) = \max_{x^* \in T(x)} \langle x^*, y - x \rangle,$$

tenemos que $\overline{x}$ es solución de VIP si y sólo si $\overline{x}$ es solución de EP.
En efecto: Si existe $\overline{x} \in K$ tal que $\phi(\overline{x}, y) \geq 0$, para todo $y \in K$, de la definición de ϕ, para

$y \in K$ debe existir $x^* = x^*(y) \in T(\overline{x})$ tal que $\langle x^*, y - \overline{x}\rangle \geq 0$, i.e. $\overline{x}$ es solución de VIP; igualmente si $\overline{x}$ soluciona VIP, entonces para cada $y \in K$,

$$\max_{x^* \in T(\overline{x})} \langle x^*, y - \overline{x}\rangle = \phi(\overline{x}, y) \geq 0.$$

El primer resultado de existencia de solución de éste problema es el siguiente teorema debido a Ky Fan:

Teorema 5.15 Sea $\mathcal{X}$ un t.v.s de Hausdorff, $K \subseteq \mathcal{X}$ subconjunto convexo, compacto no vacío, $f : K \times K \to \mathbb{R}$ que satisface

(i) $f(x, x) = 0$, para todo $x \in K$;

(ii) Para cada $y \in K$, $f(\cdot, y) : K \to \mathbb{R}$ es s.c.s.;

(iii) Para cada $x \in K$, $f(x, \cdot) : K \to \mathbb{R}$ es cuasiconvexa;

entonces existe un punto $\overline{x} \in K$ tal que

$$f(\overline{x}, y) \geq 0, \text{ para todo } y \in K.$$

Prueba. Consideremos la multifunción $F : K \rightrightarrows K$ dada por

$$F(y) = \{x \in K \,/\, f(x, y) \geq 0\},$$

entonces tenemos

1) $F(y) \neq \emptyset$ para todo $y \in K$, pues $y \in F(y)$.

2) $F(y)$ es cerrado para todo $y \in K$. En efecto, dado $y \in K$, consideremos $g : K \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = -f(x, y)$; g es s.c.i. y por tanto, el conjunto

$$S_0(g) = \{x \in K \,/\, g(x) \leq 0\} = F(y)$$

es cerrado.

3) F es KKM desde que $f(x, \cdot)$ es cuasiconvexa, por el ejemplo 3.1.

4) Como K es compacto, entonces $F(y)$ es compacto, para todo $y \in K$; de donde por el lema de Ky Fan tenemos que existe $\overline{x} \in \bigcap_{y \in K} F(y)$; i.e. existe $\overline{x} \in K$ tal que $f(\overline{x}, y) \geq 0$ para todo $y \in K$. $\diamondsuit$

Si, en el teorema anterior no consideramos que K sea compacto y agregamos la siguiente condición de coercitividad:

- Existe $C \subseteq K$ subconjunto compacto, tal que para todo $y \in K \setminus C$, existe $x \in C$ con $f(x,y) < 0$;

entonces el teorema se sigue verificando.
En efecto, dado que (i), (ii) y (iii) del teorema anterior se siguen satisfaciendo, sólo probaremos que $\bigcap_{y \in C} F(y)$ es compacto y esto se sigue del hecho que si $y \in C$, $F(y) \subseteq C$; luego por el teorema 4.3 tenemos que existe $\overline{x} \in K$ tal que $f(\overline{x}, y) \geq 0$, para todo $y \in K$.

A continuación damos una generalización de este teorema aparecida en [4], para esto daremos antes una pequeña introducción.

Sabemos que dada una función $f : K \to \mathbb{R}$ cuasiconvexa, para cualquier subconjunto finito $\{x_1, \cdots x_n\}$ de K y $z \in \text{conv}\{x_1, \cdots x_n\}$ se tiene:

$$f(z) \leq \max_{1 \leq i \leq n} f(x_i)$$

lo cual es equivalente a

$$0 \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{f(x_i) - f(z)\}.$$

Introduciendo una nueva función $\phi : K \times K \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x,y) = f(y) - f(x)$, tenemos que ϕ satisface

$$0 \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{\phi(z, x_i)\}.$$

Esto nos motiva a introducir la siguiente definición dada en [4]:

Definición 5.1 (Cuasiconvexidad diagonal) Sea X un espacio vectorial topológico de Hausdorff, $K \subseteq X$ convexo, diremos que $\phi : K \times K \to \mathbb{R}$ es cuasiconvexa diagonal (abreviado q.c.d.) si dado cualquier subconjunto finito $\{x_1, \cdots x_n\} \subseteq K$ y $z \in \text{conv}\{x_1, \cdots x_n\}$, se satisface

$$0 \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{\phi(z, x_i)\}$$

Proposición 5.16 Sea X un espacio vectorial topológico de Hausdorff, $K \subseteq X$ convexo, son equivalentes:

1) $\phi : K \times K \to \mathbb{R}$ es cuasiconvexa diagonal;

2) La multifunción $F : K \rightrightarrows K$ dada por $F(y) = \{x \in K / \phi(x,y) \geq 0\}$ es KKM.

Prueba. Sea $\{x_1, \cdots x_n\} \subseteq K$ arbitrario y $z \in \text{conv}\{x_1, \cdots x_n\}$.
Si ϕ es q.c.d. tenemos que

$$0 \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{\phi(z, x_i)\}$$

luego para algún $i_0 \in \{x_1, \cdots x_n\}$ se debe satisfacer $\phi(z, x_{i_0}) \geq 0$ de donde $z \in F(x_0)$, entonces F es KKM. De otro lado si F es KKM, $z \in F(x_i)$ para algún $i_0 \in \{x_1, \cdots x_n\}$, de donde se tiene $0 \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{\phi(z, x_i)\}$, luego ϕ es cuasiconvexa diagonal. $\diamondsuit$

Definición 5.2 Diremos que $\phi : K \times K \to \mathbb{R}$ es diagonal cuasicóncava, si $\overline{\phi} : K \times K \to \mathbb{R}$ dada por

$$\overline{\phi}(x, y) = -\phi(y, x)$$

es diagonal cuasiconvexa.

Veamos que una función ϕ diagonal cuasicóncava satisface que, dados $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset K$ y $z \in \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$,

$$\min_{1 \leq i \leq n} \{\phi(x_i, z)\} \leq 0,$$

pues

$$\min_{1 \leq i \leq n} \{\phi(x_i, z)\} = \min_{1 \leq i \leq n} \{-\overline{\phi}(z, x_i)\} = - \max_{1 \leq i \leq n} \{\overline{\phi}(z, x_i)\} \leq 0.$$

El siguiente ejemplo sencillo muestra que existen funciones cuasiconvexas que no son del tipo anterior.

Ejemplo 5.1 Sea $X = \mathbb{R}$ y $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la multiplicación usual en $\mathbb{R}$, $\phi(x, y) = xy$, entonces ϕ es diagonal cuasiconvexa.

Sea $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ cualquiera y $z \in \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$: $z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ tal que $0 \leq \alpha_i \leq 1$ y $\sum_{i=1} \alpha_i = 1$, entonces tenemos $\phi(z, x_i) = z x_i$; si tuviéramos que $\phi(z, x_i) < 0$ para todo i entonces

$$z \alpha_i x_i < 0, \qquad \text{para todo} \qquad 1 \leq i \leq n$$

lo cual implicaría

$$z^2 = \sum_{i=1} z \alpha_i x_i < 0,$$

una contradicción. Por lo tanto ϕ es diagonal cuasiconvexa.

Ejemplo 5.2 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz semidefinida positiva, entonces $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por $\phi(x, y) = x^t A y$ es diagonal cuasiconvexa.

Sea $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ arbitrario y $z \in \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$, i.e. $z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ con $0 < \alpha_i \leq 1$, $\sum_{i=1} \alpha_i = 1$. Si $\phi(z, x_i) = z^t A x_i < 0$, para todo $1 \leq i \leq n$ entonces $\alpha_i z^t A x_i < 0$, y luego

$$z^t A z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z^t A x_i < 0,$$

lo cual es absurdo pues A es semidefinida positiva. Por tanto

$$\max_{1 \leq i \leq n} \{\phi(x_i, z)\} \geq 0.$$

Como se puede notar en los ejemplos previos, $\phi(x,\cdot)$ era cuasiconvexa para todo $x \in K$, además $\phi(x,x) \geq 0$. Esto se cumple en general, es decir dada $\phi : K \times K \to \mathbb{R}$ tal que

1) para todo $x \in K$, $\phi(x,\cdot)$ es cuasiconvexa;

2) para todo $x \in K$ $\phi(x,x) \geq 0$;

se tiene que ϕ es diagonal cuasiconvexa.

Proposición 5.17 Si $\phi_i : K \times K \to \mathbb{R}$ es diagonal cuasicóncava para todo $1 \leq i \leq n$, entonces $\phi : K \times K \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x,y)) = \max_{1\leq i\leq n} \phi_i(x,y)$$

es diagonal quasicóncava.

En efecto, sea $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq K$ y $z = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i x_j$ una combinación convexa; entonces

$$\min_{1\leq j\leq m} \{\phi(z,x_j)\} = \min_{1\leq j\leq m} \max_{1\leq i\leq n} \phi_i(z,x_j)\} = \min_{1\leq j\leq m} \phi_{i_j}(z,x_j) \leq 0 \qquad (1 \leq i_j \leq n),$$

pues cada ϕ_i es diagonal cuasicóncava.

Teorema 5.18 Sea X un t.v.s. Hausdorff $K \subseteq X$ convexo no vacío, $\phi : K \times K \to \mathbb{R}$ una función tal que:

(i) ϕ es diagonal cuasiconvexa.

(ii) Dados $x, y \in K$ tales que $\phi(x,y) < 0$, existe $y^* \in K$ y una vecindad V de x tal que

$$\phi(z,y) < 0, \text{ para todo } z \in V.$$

(iii) Existe un subconjunto $C \subseteq K$ no vacío tal que para cada $x \in K \setminus C$, existe $y \in C$ con $\phi(y,x) < 0$ y C está contenido en un subconjunto compacto de K.

Entonces existe un punto $\overline{x} \in K$ tal que

$$\phi(\overline{x},y) \geq 0, \text{ para todo } y \in K.$$

Antes de dar la prueba del teorema, observemos que la condición (ii) se satisface trivialmente si $\phi(\cdot,y)$ es semicontinua superiormente; esta condición es un tipo de transferencia de la semicontinuidad superior en el nivel cero.
La condición (iii) es una condición de coercitividad, la cual no es necesaria si K es compacto; lo que es lo mismo se satisface trivialmente por vacuidad tomando $C = K$.

Prueba del teorema. Como ya vimos anteriormente, si ϕ es diagonal cuasiconvexa, entonces la multifunción $F : K \rightrightarrows K$ definida por

$$F(y) = \{x \in K \,/\, \phi(x,y) \geq 0\}$$

es KKM. Veamos que F satisface las otras hipótesis del teorema 4.6:

- F transfiere valores cerrados: Sean $x, y \in K$ tales que $x \notin F(y)$, entonces $\phi(x,y) < 0$; de (ii) tenemos que existe $y' \in K$ y una vecindad V de x, tal que

$$\phi(z, y') < 0, \text{ para todo } z \in V,$$

esto nos dice que $V \cap F(y') = \emptyset$, luego $x \notin \overline{F(y')}$, i.e. F transfiere valores cerrados.

- (iii) es precisamente la condición (3) del teorema 4.6, tomando $C = X_0$, esto nos dice que si $x \in K \setminus C$, existe $y \in C$ tal que $x \notin F(y) \subseteq \overline{F(y)}$. $\diamondsuit$

Una forma equivalente de éste teorema, que es más utilizada en economía es la siguiente:

Teorema 5.19 Sea $\mathcal{X}$ un t.v.s. de Hausdorff, $K \subseteq \mathcal{X}$ convexo no vacío, $\phi : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función tal que:

(i) ϕ es diagonal cuasicóncava.

(ii) Dados $x, y \in K$ tales que $\phi(x,y) > 0$, entonces existe $x' \in K$ y una vecindad V de y tal que

$$\phi(x', z) > 0, \text{ para todo } z \in V.$$

(iii) Existe un subconjunto no vacío $C \subseteq K$ tal que para cada $y \in K \setminus C$, existe $x \in C$ con $\phi(x,y) > 0$ y C está contenido en un subconjunto compacto de K.

Entonces existe $\overline{y} \in K$ tal que

$$\phi(x, \overline{y}) \leq 0, \text{ para todo } x \in K.$$

Como vimos en la motivación para definir el concepto de diagonal cuasiconvexa, si $f : K \to \mathbb{R}$ es cuasiconvexa, entonces $\phi : K \times K \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x,y) = f(y) - f(x)$, es diagonal cuasiconvexa, esto se puede extender más en el siguiente sentido: Sea $f : K \to \mathbb{R}$ cuasiconvexa y $g : K \to \mathbb{R}$ una función cualquiera con $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in K$ entonces $\phi : K \times K \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(x,y) = f(y) - g(x)$$

es diagonal cuasiconvexa. En efecto: Sea $\{x_1, \cdots, x_n\} \subseteq K$ cualquiera y $z \in \operatorname{conv}\{x_1, \cdots, x_n\}$, entonces

$$\begin{aligned}
\max_{1 \leq i \leq n} \{\phi(z, x_i)\} & \quad \max_{1 \leq i \leq n} \{f(x_i) - g(z)\} \\
&= \max_{1 \leq i \leq n} \{f(x_i)\} - g(z) \\
&> f(z) - g(z);
\end{aligned}$$

de donde $\max\limits_{1 \leq i \leq n} \{\phi(z, x_i)\} \geq 0$.

Corolario 5.20 Sea $\mathcal{X}$ un t.v.s. de Hausdorff, $K \subseteq \mathcal{X}$ un cono y $f : K \to \mathcal{X}^*$ un mapeo tal que la función $\phi : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(p, q) = \langle p - q, f(q) \rangle$$

satisface las condiciones (ii) y (iii) del teorema anterior, luego existe $\overline{q} \in K$ tal que

$$f(\overline{q}) \in K^* \text{ y } \langle \overline{q}, f(\overline{q}) \rangle = 0.$$

Prueba. Como ϕ es lineal en p, ϕ es diagonal cuasiconcava, luego por hipótesis, existe $\overline{q} \in K$ tal que

$$\langle p - \overline{q}, f(\overline{q}) \rangle \leq 0, \text{ para todo } p \in K.$$

En particular tomando $p_1 = 1/2\overline{q} \in K$ y $p_2 = 2\overline{q} \in K$, tenemos:

$$0 \leq \langle \overline{q}, f(\overline{q}) \rangle \leq 0,$$

de donde $\langle \overline{q}, f(\overline{q}) \rangle = 0$. $\diamondsuit$

5.5 El Problema de Equilibrio de Nash

Teorema 5.21 (Teorema de intersección de Ky Fan, 1966) Dado un producto cartesiano $\mathcal{X} = \prod_{j=1}^{n} \mathcal{X}_i$ de espacios topológicos, sea $\mathcal{X}^i = \prod_{j \neq i} \mathcal{X}_j$ y sean $p_i : \mathcal{X} \to \mathcal{X}_i$ y $p^i : X \to X^i$ las proyecciones; escribimos $p_i(x) = x_i$ y $p^i(x) = x^i$. Dados $x, y \in \mathcal{X}$ sea

$$(y_i, x^i) = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Sean $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$ conjuntos compactos convexos y no vacíos en espacios vectoriales topológicos y sean $A_1, \ldots, A_n$ n subconjuntos de $\mathcal{X} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i$ tales que

(i) para cada $x \in \mathcal{X}$ y cada $1 \leq i \leq n$, $A_i(x) = \{y \in \mathcal{X} \,/\, (y_i, x^i) \in A_i\}$ es convexo y no vacío,

(ii) para cada $y \in \mathcal{X}$ y cada $1 \leq i \leq n$, $A^i(y) = \{x \in \mathcal{X} \,/\, (y_i, x^i) \in A_i\}$ es abierto;

entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$.

Prueba. Definimos $G : X \rightrightarrows X$ mediante

$$G(y) = \mathcal{X} \setminus \bigcap_{i=1} A^i(y).$$

Observemos que $G(y)$ es cerrado para todo $y \in \mathcal{X}$ y por lo tanto compacto (observe que X el compacto); además si $G(y) = \emptyset$ para algún y, entonces $X = \bigcap_{i=1}^{n} A^i(y)$, de donde $y \in \bigcap_{i=1}^{n} A^i(y)$ entonces, de la definición de $A_i(y)$, $y \in A_i$ para $1 \leq i \leq n$ y luego $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$.

Supongamos entonces que $G(y) \neq \emptyset$ para todo $y \in \mathcal{X}$ y probemos que G no es KKM; para esto veamos que

$$\mathcal{X} = \bigcup_{y \in \mathcal{X}} \left(\bigcap_{i=1}^{n} A^i(y) \right).$$

Sea $x \in \mathcal{X}$ y escogemos $z^i \in A_i(x)$, entonces $(z_i^i, x^i) \in A_i$, $1 \leq i \leq n$; ahora tomando $z = (z_1^1, z_2^2, \ldots, z_n^n)$ tenemos que $x \in A^i(z)$, para $1 \leq i \leq n$ de donde $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A^i(z)$, que era lo que queríamos probar.

Por lo tanto existe $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathcal{X}$ y $z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ tal que $z = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \notin \bigcup_{k=1}^{n} G(x_k)$. Luego $z \notin G(x_k)$, para todo $1 \leq i \leq n$; lo cual implica que $z \notin \mathcal{X} \setminus \bigcap_{i=1}^{n} A^i(x_k)$, lo cual equivale a decir que $z \in \sum_{i=1}^{n} A^i(x_k)$, para todo $1 \leq i \leq n$. Como $x_k \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i(z)$ para todo k, entonces $z = \sum_{i=1}^{n} A_i(z)$ y por lo tanto

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset.$$

Teorema 5.22 Sean $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$ conjuntos compactos, convexos no vacíos cada uno en un t.v.s.; $\mathcal{X} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i$. Sean $f_1, \ldots, f_n : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ tales que para cada $1 \leq i \leq n$, la función $x_i \mapsto f_i(x_i, y^i)$ es cuasicóncava en $\mathcal{X}_i$. Entonces existe $\hat{y} \in \mathcal{X}$ tal que

$$f_i(\hat{y}) = \max_{x_i \in \mathcal{X}_i} f_i(x_i, \hat{y}).$$

Prueba. Definamos $\phi_i : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ mediante

$$\phi_i(x, y) = f_i(x_i, y^i) - f_i(y_i, y^i), \quad 1 \leq i \leq n;$$

veamos que ϕ_i es diagonal quasicóncava para cada $1 < i < n$. Sean $\{^1z, ^2z, \ldots, ^mz\} \subset \mathcal{X}$ y $z \in \operatorname{conv}\{^1z, ^2z, \ldots, ^mz\}$, entonces

$$\begin{aligned}
\min_{1 \leq k \leq m} \phi(^kz, z) &= \min_{1 \leq k \leq m} \{f_i(^kz_i, z^i) - f_i(z_i, z^i)\} \\
&= \min_{1 \leq k \leq m} \{f_i(^kz_i, z^i)\} - f_i(z_i, z^i) \\
&< f_i(z_i, z^i) - f_i(z_i, z^i) = 0;
\end{aligned}$$

luego $\min_{1\leq k\leq m} \phi_i({}^k z, z) \leq 0$, i.e. ϕ es diagonal quasicóncava. Definiendo $\phi : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(x, y) = \max_{1\leq i\leq n} \phi_i(x, y),$$

de la proposición 5.17 tenemos que ϕ es diagonal quasicóncava; además de la continuidad de f, tenemos que $\phi(x, \cdot)$ es s.c.i. y la compacidad de $\mathcal{X}$, tenemos por 5.19, que existe $\tilde{y} \in \mathcal{X}$ tal que

$$\phi(x, \tilde{y}) \leq 0 \text{ para todo } x \in \mathcal{X},$$

de donde

$$\max_{1\leq i\leq n} \{f_i(x_i, y^i) - f_i(\tilde{y})\} \leq 0,$$

y por lo tanto

$$f_i(x_i, y^i) \leq f_i(\tilde{y}) \text{ para todo } x_i \in \mathcal{X}_i,$$

lo que queríamos probar. $\diamondsuit$

El último teorema puede ser demostrado utilizando el teorema de intersección de Ky Fan; los interesados pueden remitirse a [8].

Bibliografía

[1] Ky Fan, A Generalization of Tychonoff's Fixed Point Theorem, Math Annalen 142, pp. 305-319, 1961.

[2] George Minty, Monotone (Nonlinear) Operator in Hilbert Space, Duke Math. J. 29, pp. 341-346, 1962.

[3] Felix. E. Browder, Nonlinear monotone operators and convex sets in Banach Spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 71, pp. 780-785, 1965.

[4] Gudqiang Tian, Generalizations of the FKKM theorem and the Ky Fan Minimaz Inequality, Journal of Mathematical Analysis and applications 170, pp. 457-471, 1992.

[5] Wilfredo Sosa Sandoval, Iterative Algorithms for the abstract Equilibrium Problem, Teses de Doutorado, Instituto de Matematica Pura e Aplicada, Série F-124 / 2000.

[6] Nicolas Hadjisavas, N. and Schaible, Quasimonotone Variational inequalities in Banach Spaces, Journal of Optimization, Theory and Applications 90, pp. 95-111, 1996.

[7] J. P. Crouzeix, J. E. Martínez Legaz and M. Volle (editores) Generalized Convexity, Generalized Monotonicity, Kluwer Academic Publishers, 1998.

[8] J. Dugundji and Andrzej Granas, Fixed Point Theory, I, Monograf. Mat, vol. 61, PWN, Warszawa, 1982.

[9] Hain Brezis, Análisis funcional y aplicaciones, Alianza Editorial, Masson, París, 1983.

[10] James Dugundji, Topology,

[11] J. P. Crouzeix, Generalized Convexity and Generalized Monotonicity, Monografías del IMCA, número 17.

[12] Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings, Kluwer Academic Publishers, 1999.

[13] J. P. Aubin and H. Frankowska, Set-Valued Analysis, Birkhäuser, Boston, Basel, Belin, 1990.

[14] E. Blum and W. Oettli, From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, Math Student, 63 pp. 123-145, 1994.

[15] Fabián Flores Bazán, Optimización y cálculo de variaciones sin convexidad: Una introducción, Monografías del IMCA, número 15.

[16] B. Knaster, C. Kuratowsky and S. Mazurkiewicz, Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale simplexe, Fundamenta Math. 15, pp. 132-137, 1929.

[17] Ky Fan, Some properties of convex sets related to fixed point theorems, Math. Am. 266, pp. 519-537, 1984.