UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS

APLICACIONES LINEALES Y CONT AS p-FACTORABLES

TESIS

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

PRESENTADO POR:

BIBIANO MARTÍN CERNA MAGUIÑA

LIMA – PERÚ
2004

Aplicaciones Lineales y Continuas p-Factorables

Autor:
Bibiano Martín Cerna Maguiña

Asesor:
Dr. Julio Alcántara Bode

Lima Perú
2004

Índice General

Introducción

El principal objetivo de este trabajo es estudiar el espacio $\mathcal{L}_{p-fat}(X, Y)$ de las aplicaciones lineales y continuas p-factorables entre espacios de Banach.

En el Capítulo 1 introducimos notaciones y algunos resultados conocidos que son importantes para el desarrollo de los siguientes capítulos.

En este trabajo atravez de la Definición 2.1 dada en el Capítulo 2, mostramos que el espacio $\mathcal{L}_{p-fat}(X, Y)$ es un ideal de Banach, luego focalizamos nuestra atención sobre los operadores 2-factorables cuya teoría es muy elegante y fácilmente accesible.

Además la Definición 4.15 dada en el Capítulo 4 sobre el espacio $\mathcal{L}_{p-fat}(X, Y)$, nos define este espacio como un ideal maximal a travez de los operadores (r, p, q)-nucleares los cuales son ideales de operadores s-normados.

Finalmente usando la teoría de los ultaproductos dado en el Capítulo 3, mostramos que ambas definiciones son equivalentes.

Capítulo 1

Preliminares Generales

$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ denotan respectivamente los conjuntos de los números naturales, reales y complejos.

$$\mathcal{L}(X,Y) := \{T : X \longrightarrow Y/\ T \text{ es lineal y continuo}\},$$

donde X e Y son espacios de Banach. La norma sobre este espacio es:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y.$$

En el caso $Y = \mathbb{K}$, temos $\mathcal{L}(X,\mathbb{K}) = X^*$, llamado el dual topológico de X.

Definición 1.1. Un espacio de Banach real E se dice que es un retículo de Banach con un orden $\leq$ (transitivo, reflexivo y antisimétrico) que satisface:

(1) $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$ para todo $z \in E$ y $\lambda x < \lambda y$ para todo $\lambda \geq 0$.

(2) El Mínimo $x \wedge y$ existe para todo $x, y \in E$.

(3) $|x| \leq |y|$ implica que $\|x\| \leq \|y\|$ (donde $|x| := x \vee (-x)$), $x \vee (-x) := max\{x-, x\}$

Definición 1.2. Un retículo de Banach complejo E es un espacio de Banach complejo que tiene un subespacio lineal real E_0 tal que:

(1) $E_0 \oplus iE_0 = E$, la única descomposición de x es escrito como $x = Re(x) + Im(x)$ y E_0 es llamado la parte real de E.

(2) $|z| := \sup\{|Re(e^{it}z)| : 0 \leq t \leq 2\pi\}$ existe en E_0 para todo $z \in E$.

(3) E_0 tiene un orden tal que (con la norma inducida) E_0 es un real retículo de Banach.

(4) $|z_1| \leq |z_2|$ implica $\|z_1\| \leq \|z_2\|$ para todo z_1, $z_2 \in E$.

Observación 1.1. Los ejemplos más comunes de retículos de Banach son L_p y $C(K)$. Un (real o complejo) retículo de Banach es llamado un L_p-espacio abstracto, si para todo $x, y \in E$, con $x, y \geq 0$ y $x \wedge y = 0$ la relación:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^p &= \|x\|^p + \|y\|^p, && (\text{si } 1 \leq p < \infty) \\ \|x+y\| &= \max\{\|x\|, \|y\|\}, && (\text{si } p = \infty) \end{aligned}$$

ocurre. Un retículo de Banach es un L_p-espacio abstracto, si y sólo si su parte real lo es.

Teorema 1.1. ***Desigualdad de Grothendieck's:*** *Existe una constante universal K_G tal que, dado cualquier espacio de Hilbert H, cualquier $n \in \mathbb{N}$, cualquier matriz escalar $(a_{ij})_{n\times n}$ y cualesquiera vectores $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ en B_H, tenemos:*

$$|\sum_{i,j} a_{ij}(x_i|y_j)| \leq K_G \max\{|\sum_{ij} a_{ij}s_i t_j| : |s_i| \leq 1, |t_j| \leq 1\}.$$

Demostración. Ver [1] 1.14 Grothendieck's Inequality. □

Teorema 1.2. ***Teorema del Gráfico Cerrado:*** *Si X y Y son espacios de Banach y $T : X \quad Y$ es un operador lineal con gráfico cerrado, entonces T es continuo.*

Teorema 1.3. *Sea X un espacio vectorial normado. Entonces para $x \in X$, existe $f \in X^*$ tal que $f(x) = \|x\|\|f\|$.*

Definición 1.3. La colección $\mathcal{B}$ de conjuntos de Borel es la menor σ-álgebra que contiene todos los conjuntos abiertos.

Definición 1.4. Sea K un conjunto compacto de Hausdorff. Entoncecs la σ-álgebra boreliana $\mathcal{B}(K)$ es generada por la colección $\mathcal{L}(K)$ de todos los subconjuntos abiertos.

Definición 1.5. Una medida boreliana de Probabilidad es una medida definida sobre $\mathcal{B}(K)$ tal que $\mu(K) = 1$. Además μ es regular si:

$$\mu(B) = \inf\{\mu(G) : B \subseteq G, G \in \mathcal{L}(K)\},$$

para cualquier $B \in \mathcal{B}(K)$.

Definición 1.6. Un operador $S \in \mathcal{L}(E, F)$ es llamado débil compacto si la bola unitaria U_E es aplicada dentro de un subconjuto $S(U_E)$ que es relativamente compacto en la topología débil de F'.

Proposición 1.1. *Un operador $S \in \mathcal{L}(E, F)$ es compacto débil si y sólo si el rango de S'' está contenido en la imágen canónica de F.*

Observación 1.2. Por el presente resultado cualquier operador débilmente compacto $S \in \mathcal{L}(E, F)$ define un operador $S^\pi \in \mathcal{L}(E'', F)$, si S'' es considerado como una aplicación de E'' dentro de F. Entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "S"] \arrow[d, "K_E"'] & F \arrow[d, "K_F"] \\
E'' \arrow[r, "S''"'] \arrow[ur, "S^\pi"] & F''
\end{tikzcd}$$

Teorema 1.4. *Para cualquier medida μ existe una medida ν tal que los espacios $L_1(\mu)$ y $L_1(\nu)$ son isomorfos y tal que la aplicación $f \mapsto \int f d\nu$ es un isomorfismo isométrico de $L_\infty(\nu)$ sobre $(L_1(\nu))^*$.*

Demostración. Ver [3] 10.6 Página 196. □

Teorema 1.5. *Cualquier espacio de Banach es isométricamente isomorfo a un cociente de un espacio $L_1(\mu)$.*

Teorema 1.6. *Sea H uun espacio de Hilbert, entonces para un conjunto apropiado I, ℓ_2^I es isométricamente isomorfo a H.*

Lema 1.1. *Sea $(\sigma_i) \in \ell_1$. Entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $(\rho_i) \in C_0$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^{-1}|\sigma_i| \leq (1+\varepsilon)\sum_{i=1}^{\infty} |\sigma_i|$ y $1 \geq \rho 1 \geq \rho_2 > ... \geq 0$.*

Demostración. Ver Lema 8.6.4 de [2] □

Definición 1.7. Un espacio E posee la propiedad de aproximación si para cualquier subconjunto compacto K y cualquier $\varepsilon > 0$, existe un operador $L \in \mathcal{F}(E,E)$ tal que:

$$\|x - Lx\| \leq \varepsilon, \quad \text{donde} \quad x \in K.$$

Proposición 1.2. *Si E' ó F tienen la propiedad de aproximación entonces $\pounds(E,F) = \mathcal{R}(E,F)$. En este caso $\mathcal{R}(E,F)$ es el espacio de todas las aplicaciones lineales continuas compactas, y $\pounds(E,F)$ el espacio de las aplicaciones lineales continuas aproximables.*

Demostración. Ver [2] 10.1 Aproximation Property. □

Definición 1.8. Un espacio de Banach tiene la propiedad de aproximación métrica si para cualquier subconjunto compacto K y cualquier $\varepsilon > 0$, existe un operador $L \in \mathcal{F}(E,E)$ tal que $\|L\| \leq 1$ y

$$\|x - Lx\| \leq \varepsilon, \quad \text{cuando} \quad x \in K.$$

Aquí $\mathcal{F}(E,E)$ representa el espacio de las aplicaciones lineales continuas de rango finito.

Teorema 1.7. *Sea (Ω, μ) cualquier espacio de medida y sea $1 \leq p < \infty$. Entonces $L_p(\Omega, \mu)$ tiene la propiedad de aproximación métrica.*

Demostración. Ver [2] Teorema 1. □

Lema 1.2. *Sea K un espacio de Hausdorff compacto. Entonces $C(K)$ tiene la propiedad de aproximación métrica.*

Definición 1.9. Si Ω es cualquier conjunto, definimos la función característica del conjunto Ω por I_Ω con regla de correspondencia:

$$I_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \in \Omega \\ 0, & \text{si} \quad x \notin \Omega. \end{cases}$$

Operadores p-sumables

Definición 1.10. Sea $1 \leq p < \infty$, y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal entre espacios de Banach. Decímos que T es p-sumable, si existe una constante $c \geq 0$ tal que sin importar $m \in \mathbb{N}$ y para cualesquier $x_1, ..., x_n$ en X tenemos:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|Tx_i\|^p \Bigg)^{1/p} \leq c \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^{m} | < x^*, x_i > |^p \right)^{1/p} : x^* \in B_{X^*} \right\}$$

Corolario 1.1. *Un operador $T : X \longrightarrow Y$ es 2-sumable si y sólo si existe una medida regular de probabilidad μ sobre K y una aplicación $\tilde{T} \in \mathcal{L}(L_2(\mu), Y)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "i_X"'] & Y \\ C(K) \arrow[r, "j_2"'] & L_2(\mu) \arrow[u, "\tilde{T}"'] \end{tikzcd}$$

Demostración. Ver [1] Corolario 2.16. □

Filtros y Ultrafiltros

Definición 1.11. Un filtro sobre un conjunto S es una colección de subconjuntos no vacios de S con la propiedad:

(a) Si F_1, $F_2 \in \mathcal{F}$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

(b) Si $F \in \mathcal{F}$ y $F \subset F'$, entonces $F' \in \mathcal{F}$.

Observación 1.3.

1. Una subcolección $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{F}$ es un filtro base para $\mathcal{F}$ si cada elemento de $\mathcal{F}$ contiene algún elemento de $\mathcal{F}_0$.
2. Una colección $\mathcal{C}$ no vacía de subconjuntos de S es un filtro base para algún filtro sobre S si C_1, $C_2 \in \mathcal{C}$, entonces $C_3 \subset C_1 \cap C_2$ para algún $C_3 \in \mathcal{C}$.
3. Si $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son filtros sobre X, decimos que $\mathcal{F}_1$ es mas fino que $\mathcal{F}_2$ si $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2$.

Ejemplo 1.1. *Sea X cualquier conjunto, $A \subset X$. Entonces*

$$\{F \subset X : A \subset F\}$$

es un filtro sobre X, con la particualridad que el filtro base consiste de un solo conjunto.

Ejemplo 1.2. *Sea X cualquier espacio topológico $A \subset X$. Entonces $\{U \subset X/A \subset int\, U\}$ es un filtro sobre X. En particular el conjunto $\mathcal{U}_x$ de vecindades de $x \in X$ es un filtro sobre X.*

Definición 1.12. Un filtro $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X se dice que converge a x ($\mathcal{F} \longrightarrow x$) si y sólo si $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{F}$.

Definición 1.13. Un filtro $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro si y sólo si $\mathcal{F}$ es un filtro maximal.

Teorema 1.8. *Un filtro $\mathcal{F}$ sobre X es un ultrafiltro si y sólo si para cada $E \subset X$, $E \in \mathcal{F}$ o $X - E \in \mathcal{F}$.*

Teorema 1.9. *Cualquier filtro $\mathcal{F}$ esta contenido en algún ultrafiltro.*

Observación 1.4.

(i) Un espacio topológico Ω es compacto si y sólo si cualquier ultrafiltro sobre Ω converge a algún punto en Ω.

(ii) Si $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ es una aplicación entre conjuntos y si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre Ω, entonces $f(\mathcal{U})$ es un ultrafiltro sobre Ω'. Aquí es común escribir $f(\mathcal{U})$ para el filtro sobre Ω' que es generado por todos los conjuntos $f(U)$ con $U \in \mathcal{U}$.

(iii) Sea I cualquier conjunto y f una aplicación acotada sobre I a valores escalares, entonces no importa como escogemos un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre I, el filtro $f(\mathcal{U})$ converge. Entonces el límite será denotado por:

$$\lim_{\mathcal{U}} f(i).$$

Capítulo 2

Operadores Lineales p-factorables

Definición 2.1. Sea $1 \leq p \leq \infty$, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es llamada p-factorable si existe un espacio de medida (Ω, Σ, μ) y operadores $a \in \mathcal{L}(L_p(\mu), Y^{**})$ y $b \in \mathcal{L}(X, L_p(\mu))$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "b"'] & Y \arrow[r, hook, "K_Y"] & Y^{**} \\
& L_p(\mu) \arrow[ur, "a"'] &
\end{tikzcd}$$

La colección de todos los operadores lineales p-factorables de X a Y será denotado por $\mathcal{L}_{p-fat}(X, Y)$.

(I) $\mathcal{L}_{p-fat}(X, Y)$ es un espacio vectorial:

Para demostrar esta afirmación tome $T_k \in \mathcal{L}_{p-fat}(X, Y)$, entonces existen $(\Omega_k, \Sigma_k, \mu_k)$ espacios de medida y operadores $b_k \in \mathcal{L}(X, L_p(\mu_k))$, $a_k \in \mathcal{L}(L_p(\mu_k), Y^{**})$ tal que $K_Y \circ T_Y = a_k \circ b_k$, para $k = 1, 2$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Tome $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ e $\Sigma = \{S \subset \Omega : S \cap \Omega_n \in \Sigma_n, n = 1, 2\}$, es claro que Σ es una σ-álgebra de conjuntos.
Definamos:

$$\begin{array}{rcll}
\mu : \Sigma & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ & \text{por} \quad \mu(S) = \mu_1(S \cap \Omega_1) + \mu_2(S \cap \Omega_2), \\
b : X & \longrightarrow & L_p(\mu) & \text{por} \quad b(x) = b_1(x) I_{\Omega_1} + b_2(x) I_{\Omega_2} \quad \text{y} \\
a : L_p(\mu) & \longrightarrow & Y^{**} & \text{por} \quad a(f) = a_1(f|_{\Omega_1}) + a_2(f|_{\Omega_2}).
\end{array}$$

Para $1 \leq p < \infty$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\|b_1(x)I_{\Omega_1} + b_2(x)I_{\Omega_2}\|_{L_p(\mu)} &= \left(\int_\Omega |b_1(x)I_{\Omega_1} + b_2(x)I_{\Omega_2}|^p d\mu\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_\Omega (|b_1(x)|^p I_{\Omega_1} + |b_2(x)|^p I_{\Omega_2}) d\mu\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_{\Omega_1} |b_1(x)|^p d\mu + \int_{\Omega_2} |b_2(x)|^p d\mu\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_{\Omega_1} |b_1(x)|^p d\mu_1 + \int_{\Omega_2} |b_2(x)|^p d\mu_2\right)^{1/p} \\
&= (\|b_1(x)\|^p_{L_p(\mu_1)} + \|b_2(x)\|^p_{L_p(\mu_2)}) < \infty.
\end{aligned}$$

Cuando $p = \infty$ se hace de manera semejante. Por lo tanto b está bien definido.
Para el operador a temos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\|a(f)\|_{Y^{**}} &= \|a_1(f|_{\Omega_1}) + a_2(f|_{\Omega_2})\|_{Y^{**}} \\
&\leq \|a_1\|\|f|_{\Omega_1}\|_{L_p(\mu_1)} + \|a_2\|\|f|_{\Omega_2}\|_{L_p(\mu_2)}.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Como $\|f|_{\Omega_k}\|_{L_p(\mu)} = \|f|_{\Omega_k}\|_{L_p(\mu_k)}$ para $k = 1, 2$, tenemos en (2.1) lo siguiente:

$$\|a(f)\|_{Y^{**}} \leq \|a_1\|\|f|_{\Omega_1}\|_{L_p(\mu)} + \|a_2\|\|f|_{\Omega_2}\|_{L_p(\mu)}. \tag{2.2}$$

Además de eso $f = f.I_{\Omega_1} + f.I_{\Omega_2}$ de esta relación tenemos:

$$\|f\|^p_{L_p(\mu)} = \|f|_{\Omega_1}\|^p_{L_p(\mu)} + \|f|_{\Omega_2}\|^p_{L_p(\mu)}$$

i.e

$$\|f|_{\Omega_k}\|_{L_p(\mu)} \leq \|f\|_{L_p(\mu)} \quad \text{para} \quad k = 1, 2.$$

Luego (2.2) queda $\|a(f)\|_{Y^{**}} \leq (\|a_1\| + \|a_2\|)\|f\|_{L_p(\mu)}$. Por lo tanto a está bien definido.
Para $p = \infty$ se hace de modo semejante.
Estonces tenemos: $(a \circ b)(x) = (a_1 \circ b_1)(x) + (a_2 \circ b_2)(x), \forall x \in X$, así:

$$a \circ b = K_Y \circ T_1 + K_Y \circ T_2 = K_Y \circ (T_1 + T_2).$$

Por lo tanto: $T_1 + T_2 \in \mathcal{L}_{p-fat}(X, Y)$.

(II) $\gamma_p(\Phi) := \inf \|b\|\|a\|$,

donde el ínfimo es tomado sobre todas las factoraciones posibles de Φ, es una norma sobre $\mathcal{L}_{p-fat}(X, Y)$.
Veamos que γ_p así definido es una norma.

(i) Es trivial la verificación de que el producto de un escalar por un elemento de $\mathcal{L}_{p-fat}(X,Y)$ pertenece a ese espacio.

(ii) $\gamma_p(T)=0$, implica $\inf\|a\|\|b\|=0$.
Dado $\varepsilon>0$, existe un espacio de medida (Ω,Σ,μ) y operadores $a\in\mathcal{L}(L_p(\mu),Y^{**})$, $b\in\mathcal{L}(X,L_p(\mu))$ tal que $\|a\|\|b\|<\varepsilon$, o sea $\|a\circ b\|<\varepsilon$, esto es $\|T\|<\varepsilon$, $\forall\varepsilon>0$, lo cual implica $T=0$. Es claro que $\gamma_p(0)=0$.

(iii) Sean $T_1,T_2\in\mathcal{L}_{p-fat}(X,Y)$. Dado $\varepsilon>0$ existen espacios de medida $(\Omega_i,\Sigma_i,\mu_i)$ y operadores $a_i\in\mathcal{L}(L_p(\mu_i),Y^{**})$, $b_i\in\mathcal{L}(X,L_p(\mu_i))$ satisfaciendo $K_Y\circ T_i=a_i\circ b_i$, $i=1,2$, tal que $\|a_i\|<\gamma_p(T_i)+\varepsilon/2$ y $\|b_i\|=1$.

De la parte (I) tenemos $a\circ b=a_1\circ b_1+a_2\circ b_2=K_Y\circ T_1+K_Y\circ T_2$ con $\|a\|\leq\|a_1\|+\|a_2\|$, también escogemos $\nu=\frac{\mu}{(\|a_1\|+\|a_2\|)^{1/p}}$, para obtener $\|b\|\leq 1$. Luego se sigue que:

$$\gamma_p(T_1+T_2)\leq\|a\circ b\|\leq\|a_1\|+\|a_2\|<\gamma_p(T_1)+\gamma_p(T_2)+\varepsilon/4,\quad\forall\varepsilon>0.$$

Así: $\gamma_p(T_1+T_2)\leq\gamma_p(T_1)+\gamma_p(T_2)$.
Para $p=\infty$, ver el caso (I_3).
Por lo tanto de (I) y (II) tenemos que $\mathcal{L}_{p-fat}(X,Y)$ es un espacio normado.

Teorema 2.1. *Para $1\leq p\leq\infty$, $[\mathcal{L}_{p-fat}(X,Y),\gamma_p]$ es un ideal de Banach.*

Demostración.

(I_1) Veamos que $T(x)=<x^*,x>y\in\mathcal{L}_{p-fat}(X,Y)$ para cualquier $x^*\in X^*$ e $y\in Y$.
Tome $(\Omega,\Sigma,\mu)=(B_{X^*},\Sigma,\delta_{x_0^*})$ donde Σ es la σ-álgebra de los borelianos contenido en $P(B_{X^*})$ con B_{X^*} ω^*-compacto y $\delta_{x_0^*}\in C(B_{X^*})^*$ es un funcional lineal continuo con norma 1, y así define una medida regular de probabilidad sobre la σ-álgebra de los borelianos de B_{X^*}, donde:

$$\delta_{x_0^*}:C(B_{X^*})\longrightarrow\mathbb{K},\quad\delta_{x_0^*}(f)=f(x_0^*)$$

y además para $1\leq p<\infty$, definamos a de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}a:L_p(\mu)&\longrightarrow Y\\ f&\longmapsto\left(\int_{B_{X^*}}fd\delta_{x_0^*}\right)y.\end{aligned}$$

Es claro que a está bien definido pues $g = 1 \in L_q(\mu)$ para $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Del mismo modo definamos b como sigue:

$$\begin{aligned} b : X &\longrightarrow L_p(\mu) \\ x &\longmapsto f_x, \end{aligned}$$

siendo:

$$\begin{aligned} f_x : B_{X^*} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x^* &\longmapsto < x^*, x > . \end{aligned}$$

Entonces b es claramente lineal y esta bien definido, pues:

$$\left(\int_{B_{X^*}} |f_x(x^*)|^p d\delta_{x_0^*(x^*)} \right)^{1/p} \leq \|x\| (\delta_{x_0^*}(B_{X^*}))^{1/p} = \|x\| < \infty.$$

Así:

$$\begin{aligned} (a \circ b)(x) = a(b(x)) = a(f_x) &= \left(\int_{B_{X^*}} f_x(x^*) d\delta_{x_0^*} \right) y \\ &= y \left(\int_{B_{X^*}} < x^*, x > d\delta_{x_0^*} \right) \\ &= T(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Luego $a \circ b = T$, así $T \in \mathcal{L}_{p-fat}(X, Y)$.
Además de esto:

$$\begin{aligned} \|a\| &= \sup_{\|f\|_{L_p(\mu)} \leq 1} \|af\|_Y = \|y\| \sup_{\|f\|_{L_p(\mu)} \leq 1} \left| \int_{B_{X^*}} f d\delta_{x_0^*} \right| \\ &\leq \|y\| \sup_{\|f\|_{L_p(\mu)} \leq 1} \int_{B_{X^*}} |f| d\delta_{x_0^*} \\ &\leq \|y\| \sup_{\|f\|_{L_p(\mu)} \leq 1} \left(\int_{B_{X^*}} |f|^p d\delta_{x_0^*} \right)^{1/p} . \left(\int_{B_{X^*}} |1|^q d\delta_{x_0^*} \right)^{1/q} \\ &\leq \|y\|, \end{aligned}$$

luego: $\|a\| \leq \|y\|$.
También:

$$\|b\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|b(x)\|_{L_p(\mu)} = \sup_{\|x\| = 1} \|f_x\|_{L_p(\mu)}. \tag{2.3}$$

Cálculo de:

$$\begin{aligned}
\|f_x\|_{L_p(\mu)} &= \left(\int_{B_{X^*}} |f_x(x^*)|^p d\delta_{x_0^*}(x^*)\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_{B_{X^*}} | < x^*, x > |^p d\delta_{x_0^*}(x^*)\right)^{1/p} \\
&= | < x^*, x > |.
\end{aligned}$$

Así en (2.3) tenemos: $\|b\| = \|x^*\|$. Por lo tanto de la relación $T = a \circ b$ se sigue que:

$$\gamma_p(T) \leq \|a\|\|b\| \leq \|y\|\|x^*\|. \tag{2.4}$$

Además de esto para cualquier factoración de $T = a \circ b$ tenemos: $\|T\| \leq \|a\|\|b\|$ lo cual implica: $\|T\| \leq \gamma_p(T)$.
Así mismo:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \| < x^*, x > y\|_Y = \|y\| \sup_{\|x\|\leq 1} | < x^*, x > | = \|y\|\|x^*\|,$$

de esta última relación y de (2.4) concluimos que $\gamma_p(T) = \|y\|\|x^*\|$.

Para un mejor entendimiento de (I_1), damos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.1. *Sea K un Espacio de Hausdorff compacto, y sea Y cualquier Espacio de Banach. Tome $(y_n) \subset Y$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < \infty$.*
Definamos $T : C(K) \longrightarrow Y$ por $T(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(f) y_k$ donde $\varphi_j : C(K) \longrightarrow \mathbb{K}$ es definido por $\varphi_j(f) = \int_K f d\varphi_j$ y $\varphi_j(K) = 1$, para $j \in \mathbb{N}$. Luego es claro que $||\varphi_j|| \leq 1$. Así mismo es fácil ver que T es lineal y continuo.
Tomemos $\Omega = H$, y sea Σ la σ-algebra generada por la colección de todos los subconjuntos abiertos de K, y μ es una medida de Borel sobre Σ tal que $\mu(K) = 1$ y $\mu(f) = \int_K f(w) d\mu(w)$, luego el espacio de medida sería (K, Σ, μ).
Sea $A : C(K) \quad L_p(K, \mu)$ definido por $A(f) = f$ y $B : L_p(K, \mu) \quad Y$ definido por $B(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_j(f) y_j$, donde $\tilde{\varphi}_j : L_p(K, \mu) \quad \mathbb{K}$ es definido por $\tilde{\varphi}_j(f) = \int_K f d\mu$, es evidente que $||\tilde{\varphi}_j|| \leq 1$.
Es claro que B es lineal y continuo, pues $\|B(f)\|_Y \leq \|f\|_{L_p(K,\mu)} \sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\|$.
Similarmente A es lineal y continuo, pues

$$\|A(f)\|_{L_p(K,u)} \leq \|f\|_{C(K)}.$$

Si $f : K \longrightarrow \mathbb{K}$ es continuo, entonces $\tilde{\varphi}_k(f) = \varphi_k(f)$.
Luego $(B \circ A)(f) = B(A(f)) = B(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_k(f)y_k = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(f)y_k$, así $(B \circ A)(f) = T(f)$, i.e., $B \circ A = T$, en consecuencia $T \in L_{p-fact}(C(K), Y)$, donde $1 \leq p < \infty$.

Observación 2.1. Las funcionales lineales y continunas $\varphi_j : C(K) \longrightarrow \mathbb{K}$ pueden ser por ejemplo definidas por $\varphi_j(f) = f(t_j)$, donde $t_j \in K$.

(I_2) La Propiedad de Ideal:
Si $V \in \mathcal{L}(E_0, E), T \in \mathcal{L}_{p-fat}(E, G), U \in \mathcal{L}(G, G_0)$, entonces $UTV \in \mathcal{L}_{p-fat}(E_0, G_0)$.
Y además $\gamma_p(UTV) \leq \|U\|\gamma_p(T)\|V\|$.
Demostración: El gráfico siguiente es importante en nuestra demostración:

$$\begin{tikzcd}
E_0 \arrow[r, "V"] \arrow[dr, "b \circ V"'] & E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "b"] & G \arrow[r, "U"] \arrow[d, "K_G"] & G_0 \arrow[r, hook, "K_{G_0}"] & G_0^{**} \\
& L_p(\mu) \arrow[r, "a"] & G^{**} \arrow[urr, "U^{**}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Por el hecho que $T \in \mathcal{L}_{p-fat}(E, G)$, tenemos que existe un espacio de medida (Ω, Σ, μ) y operadores $b \in \mathcal{L}(E; L_p(\mu))$, $a \in \mathcal{L}(L_p(\mu), G^{**})$ tal que:

$$K_G \circ T = a \circ b. \tag{2.5}$$

Sea $V_0 = b \circ V$, claramente $V_0 \in \mathcal{L}(E_0, L_p(\mu))$.
Como:

$$U^{**} \circ K_G = K_{G_0} \circ U. \tag{2.6}$$

Entonces $U^{**} \circ K_G \circ T = K_{G_0} \circ U \circ T$, de (2.5) y (2.6) tenemos:

$$U^{**} \circ a \circ b = K_{G_0} \circ U \circ T.$$

Luego tenemos:

$$U^{**} \circ a \circ b \circ V = K_{G_0} \circ U \circ T \circ V. \tag{2.7}$$

Sea $a_0 = U^{**} \circ a$, entonces (2.7) queda de la siguiente manera:

$$a_0 \circ V_0 = K_{G_0} \circ U \circ T \circ V.$$

Por lo tanto $U \circ T \circ V \in \mathcal{L}_{p-fat}(E_0, G_0)$, y además de esto tenemos:

$$\begin{aligned}
\gamma_p(U \circ T \circ V) \leq \|a_0\|\|V_0\| &\leq \|U\|\|a\|\|b\|\|V\|, \quad \text{de esto se sigue} \\
\gamma_p(U \circ T \circ V) &\leq \|U\|\|V\|\gamma_p(T).
\end{aligned}$$

(I$_3$) $[\mathcal{L}_{p-fat}(X,Y), \gamma_p\ ]$ es un espacio de Banach.

Demostración: Sea (T_n) una sucesión en $\mathcal{L}_{p-fat}(X,Y)$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_p(T_n) < \infty$. Luego $\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\| < \infty$, pues $\|T_n\| \leq \gamma_p(T_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Siendo $\mathcal{L}(X,Y)$ un espacio de Banach tenemos que $T = \sum_{n=1}^{\infty} T_n$, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Dado $\varepsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ encontramos espacios de medida $(\Omega_n, \Sigma_n, \mu_n)$ y operadores $a_n \in \mathcal{L}(L_p(\mu_n), Y^{**})$, $b_n \in \mathcal{L}(X, L_p(\mu_n))$, tal que $K_Y \circ T_n = b_n \circ a_n$ y $\|a_n\| \leq \gamma_p(T_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$, $\|b_n\| = 1$, para $n = 1, 2, ...$

Sin perdida de generalidad vamos a suponer $\Omega_n \cap \Omega_m =$, si $m \neq n$. Tomemos: $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, $\Sigma = \{S \subset \Omega : S \cap \Omega_n \in \Sigma_n, \forall n \in \mathbb{N}\}$.

Sea:

$$\mu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

definido por:

$$\mu(S) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m(S \cap \Omega_m) \frac{\|a_m\|}{\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|}.$$

Si $S_j \in \Sigma_j$, con $j \in \mathbb{N}$, entonces $\mu(S_j) = \mu_j(S_j) \frac{\|a_j\|}{\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|}$.

Definamos:

$$a : L_p(\mu) \longrightarrow Y^{**} \quad \text{por} \quad a(f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f|_{\Omega_n}),$$

$$b : X \longrightarrow L_p(\mu) \quad \text{por} \quad b(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) I_{\Omega_n}.$$

Tenemos que a y b están bien definidos. Para $1 \leq p < \infty$ tenemos:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) I_{\Omega_n} \right\|_{L_p(\mu)} &= \left(\int_{\Omega} |\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) I_{\Omega_n}|^p d\mu \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} |b_n(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Como $\mu(S_j) = \mu_j(S_j)\frac{\|a_j\|}{\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|}$, $S_j \in \Sigma_j$, (2.8) queda como:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) I_{\Omega_n}\right\|_{L_p(\mu)} &= \frac{1}{(\sum_{m=1}^{\infty}\|a_m\|)^{1/p}}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|\int_{\Omega_n}|b_n(x)|^p d\mu_n\right)^{1/p} \\
&= \frac{1}{(\sum_{m=1}^{\infty}\|a_m\|)^{1/p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|\|b_n(x)\|^p_{L_p(\mu_n)}\right)^{1/p} \\
&\leq \frac{\|x\|}{(\sum_{m=1}^{\infty}\|a_m\|)^{1/p}}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|\right)^{1/p} \\
&= \|x\|.
\end{aligned}$$

Así:

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) I_{\Omega_n}\right\|_{L_p(\mu)} \leq \|x\|,$$

luego b está bien definido y es claro que $\|b\| \leq 1$.
Similarmente para a tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f|_{\Omega_n})\right\|_{Y^{**}} &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|\|f|_{\Omega_n}\|_{L_p(\mu_n)} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|\left(\int_{\Omega_n}|f|_{\Omega_n}|^p d\mu_n\right)^{1/p}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

De la siguiente relación:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega}|f|_{\Omega_n}|^p d\mu\right)^{1/p} &= \frac{\|a_n\|^{1/p}}{(\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|)^{1/p}}\left(\int_{\Omega_n}|f|_{\Omega_n}|^p d\mu_n\right)^{1/p} \\
\|f|_{\Omega_n}\|_{L_p(\mu)} &= \frac{\|a_n\|^{1/p}}{(\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|)^{1/p}}.\|f|_{\Omega_n}\|_{L_p(\mu_n)},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

de (2.9) y (2.10) tenemos:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f|_{\Omega_n})\right\|_{Y^{**}} &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|\left[\|a_n\|^{-1/p}\|f|_{\Omega_n}\|_{L_p(\mu)}\right]\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|^{1/p^*}\|f|_{\Omega_n}\|_{L_p(\mu)}\right).
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Holder tenemos:

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f|_{\Omega_n})\right\|_{Y^{**}} &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|\right)^{1/p^*}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|f|_{\Omega_n}\|^p_{L_p(\mu_n)}\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|\right)^{1/p} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|\|f\|_{L_p(\mu)}.\end{aligned}$$

Luego a está bien definido y $\|a\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|$.
Para el caso $p = \infty$tenemos lo siguiente:
Como $\|b_n\| = 1$, tenemos que $\|b_n(x)\|_{L_\infty(\mu_n)} \leq 1$, para todo $\|x\| = 1$. Por lo tanto existe $A_n \subset \Omega_n$ tal que $\mu_n(A_n) = 0$ y $|b_n(x)(t)| \leq 1$, para todo $t \in \Omega_n - A_n$, con $\|x\| = 1$. Sea $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, donde $\mu_n(A_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.
Luego es claro que $\mu(A) = 0$. Tome $t \in \Omega - A$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t \in \Omega_{n_0} - A_{n_0}$. Así tenemos:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)(t)I_{\Omega_n}(t)\right| = |b_{n_0}(x)(t)| \leq 1,$$

para todo $t \in \Omega - A$ e $\|x\| = 1$.
Luego:

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)I_{\Omega_n}\right\|_{L_\infty(\mu)} \leq 1,$$

para todo $\|x\| = 1$. Por lo tanto $\|b(x)\|_{L_\infty(\mu)} \leq 1$, para todo $\|x\| = 1$, i.e $\|b\| \leq 1$.
También tenemos que:

$$\|a(f)\|_{Y^{**}} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|,$$

para todo $f \in L_\infty(\mu)$ con $\|f\|_{L_\infty(\mu)} = 1$.
En cualquier caso:

$$\|a\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_p(T_n) + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Así: $\|a\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_p(T_n)$.
Es fácil ver que $K_Y \circ T = a \circ b$, lo cual implíca que $T \in \mathcal{L}_{p-fat}(X, Y)$.

Como $\gamma_p(T - \sum_{k \leq n} T_k) = \gamma_p(\sum_{k>n} T_k) \leq \sum_{k>n} \gamma_p(T_k)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_p(T_n) < \infty$, por lo tanto:

$$\lim_{n \to \infty} \gamma_p(T - \sum_{k \leq n} T_k) = 0.$$

Así (T_n) converge a T en la norma γ_p, lo cual nos muestra que $[\mathcal{L}_{p-fat}(X,Y), \gamma_p]$ es un espacio de Banach.

Observación 2.2. En (I_1) para $p = \infty$ es solo tomar en cuenta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C(B_{X^*}) \arrow[d, "j_\infty"'] & X \arrow[l, "i_X"'] \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"] & \mathbb{K} \\
L_\infty(\mu) \arrow[urr, dashed, "\hat{b}"] \arrow[r, "i_p"] & L_p(\mu) \arrow[ur, "b"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $a = j_p \circ i_X$ y $u = b \circ a$, es decir ya sabemos que tal factoración es posible para $1 \leq p < \infty$. Entonces basta tomar $b = b \circ i_p$ y $\hat{a} = j_\infty \circ i_X$. Luego:

$$b \circ \hat{a} = b \circ i_p \circ j_\infty \circ i_X = b \circ j_p \circ i_X = b \circ a = u.$$

Así u se factora atravez de $L_\infty(\mu)$.

Proposición 2.1. *Sea* $1 \leq p \leq \infty$ *y* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. *Entonces para* $T : X \longrightarrow Y$, *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*i*) $T \in \mathcal{L}_{p-fat}(X,Y)$,

(*ii*) $T^* \in \mathcal{L}_{p^*-fat}(Y^*, X^*)$,

(*iii*) $T^{**} \in \mathcal{L}_{p-fat}(X^{**}, Y^{**})$,

(*iv*) $K_Y \circ T \in \mathcal{L}_{p-fat}(X, Y^{**})$.
En este caso $\gamma_{p^*}(T^*) = \gamma_p(T) = \gamma_p(T^{**}) = \gamma_p(K_Y \circ T)$.

Demostración. (i)$\Rightarrow$(ii): Sea $T \in \mathcal{L}_{p-fat}(X,Y)$, entonces existe un espacio de medida (Ω,Σ,μ) e operadores $a \in \mathcal{L}(L_p(\mu),Y^{**})$ y $b \in \mathcal{L}(X,L_p(\mu))$ tal que $K_Y \circ T = a \circ b$, entonces.

$$T^* \circ K_Y^* = b^* \circ a^* \tag{2.11}$$

Como:

$$K_Y^* \circ K_{Y^*} = id_{Y^*}. \tag{2.12}$$

De la relación (2.11) y (2.12) tenemos:

$$T^* = b^* \circ a^* \circ K_{Y^*}.$$

Así $\tilde{a} = a^* \circ K_{Y^*} \in \mathcal{L}(Y^*, L_{p^*}(\mu))$ y $b = K_{X^*} \circ b^* \in \mathcal{L}(L_{p^*}(\mu), X^{***})$ por lo tanto $K_{X^*} \circ T^* = b \circ \tilde{a}$, con lo cual $T^* \in \mathcal{L}_{p^*-fat}(Y^*,X^*)$. Y además $\gamma_{p^*}(T^*) \leq \|a^* \circ K_{Y^*}\| \|K_{X^*} \circ b^*\| \leq \|a\|\|b\|$.
Así tenemos:

$$\gamma_{p^*}(T^*) \leq \gamma_p(T) \tag{2.13}$$

(ii)$\Rightarrow$(iii): Sea $T^* \in \mathcal{L}_{p^*-fat}(Y^*,X^*)$, entonces existe un espacio de medida (Ω,Σ,μ) y operadores $a \in \mathcal{L}(Y^*, L_{p^*}(\mu))$, $b \in \mathcal{L}(L_{p^*}(\mu), X^{***})$, tal que:

$$K_{X^*} \circ T^* = b \circ a \quad \text{de esta relación tenemos:}$$

$$T^{**} \circ K_{X^*}^* = a^* \circ b^*,$$

haciendo lo mismo que en (i)$\Rightarrow$(ii), tenemos $T^{**} \in \mathcal{L}_{p-fat}(X^{**},Y^{**})$ y además de esto

$$\gamma_p(T^{**}) \leq \gamma_{p^*}(T^*). \tag{2.14}$$

(iii)$\Rightarrow$(iv): Sea $T^{**} \in \mathcal{L}_{p-fat}(X^{**},Y^{**})$, entoncs existe un espacio de medida (Ω,Σ,μ) y operadores $b \in \mathcal{L}(X^{**}, L_p(\mu))$ y $a \in \mathcal{L}(L_p(\mu), Y^{****})$ tal que:

$$a \circ b = K_{Y^{**}} \circ T^{**}. \tag{2.15}$$

Luego:

$$\begin{aligned}(K_Y \circ T)(x)(y^*) &= K_{T(x)}(y^*) =< y^*, T(x) >= \\ &= (y^* \circ T)(x) = T^*(y^*)(x) \qquad \text{y} \qquad (2.16)\\ (T^{**} \circ K_X)(x)(y^*) &= (K_x \circ T^*)(y^*) =< x, T^*(y^*) >= \\ &=< Tx, y^* >= (y^* \circ T)(x) = T^*(y^*)(x), \qquad (2.17)\end{aligned}$$

de (2.16) y (2.17) tenemos:

$$K_Y \circ T = T^{**} \circ K_X. \tag{2.18}$$

Así de (2.15) y (2.18) tenemos:

$$K_{Y^{**}} \circ K_Y \circ T = K_{Y^{**}} \circ T^{**} \circ K_X = a \circ b \circ K_X,$$

lo cual implíca que $K_Y \circ T \in \mathcal{L}_{p-fat}(X, Y^{**})$. Además: $\gamma_p(K_Y \circ T) \leq \|a\|\|b\|$, de aquí se sigue:

$$\gamma_p(K_Y \circ T) \leq \gamma_p(T^{**}). \tag{2.19}$$

(iv)$\Rightarrow$(i): Sea $K_Y \circ T \in \mathcal{L}_{p-fat}(X, Y^{**})$, entonces existe un espacio de medida (Ω, Σ, μ) y operadores $a \in \mathcal{L}(L_p(\mu), Y^{****})$, $b \in \mathcal{L}(X, L_p(\mu))$ tal que:

$$a \circ b = K_{Y^{**}} \circ K_Y \circ T, \tag{2.20}$$

como:

$$K^*_{Y^*} \circ K_{Y^{**}} = id_{Y^{**}}. \tag{2.21}$$

De la relación (2.20) y (2.21) tenemos $K^*_{Y^*} \circ a \circ b = K_Y \circ T$. Así tenemos lo siguiente:

$$\gamma_p(T) \leq \|K^*_{Y^*} \circ a\|\|b\| \leq \|a\|\|b\|.$$

Por lo tanto:

$$\gamma_p(T) \leq \gamma_p(K_Y \circ T). \tag{2.22}$$

De las relaciones (2.13), (2.14), (2.19) y (2.22) tenemos:

$$\gamma_p(T) \leq \gamma_p(K_Y \circ T) \leq \gamma_p(T^{**}) \leq \gamma_{p^*}(T^*) \leq \gamma_p(T), \quad \text{si} \quad 1 < p < \infty.$$

Para $p = 1$, ó $p = \infty$ es usar el hecho de que $L_1^{**}(\mu)$ es isométricamente isomorfo a $L_1(\nu)$, para alguna medida apropiada ν.

$\square$

Proposición 2.2. *Cualquier operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ pertenece a $\mathcal{L}_{2-fat}(X, Y)$ si y sólo si se tiene una factoración $T : X \xrightarrow{a} H \xrightarrow{b} Y$, donde H es una espacio de Hilbert. En este caso $\gamma_2(T) = \inf \|a\|\|b\|$, donde el infimo es tomado sobre todas las factoraciones posibles.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $T \in \mathcal{L}_{2-fat}(X, Y)$, luego tenemos el siguiente gráfico:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "T"] \arrow[ddr, "b"'] \arrow[ddrrr, dashed, "b_0 = P \circ b"] & & Y \arrow[rr, hook, "K_Y"] & & Y^{**} \\
& & & & \\
& L_2(\mu) \arrow[rr, dashed, "P"'] \arrow[uurrr, dashed, "a"'] & & H_0 \arrow[uul, "a_0"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $H_0 = \{Kera\}^{\perp} \cap \{h \in L_2(\mu) : a(h) \in K_Y(Y)\}$.
Del gráfico tenemos lo siguiente:

(i) H_0 es un subespacio cerrado de $L_2(\mu)$.

(ii) Existe una proyección ortogonal $P : L_2(\mu) \longrightarrow H_0$ con $\|P\| = 1$.

(iii) Sea $a_0 : H_0 \qquad Y$ tal que $K_Y \circ a = a|_{H_0}$, i.e $(K_Y \circ a_0)(h_0) = a(h_0)$, $\forall\, h_0 \in H_0$, solo precisamos verificar que a_0 está bien definida.

Para $h_0 \neq 0$, $h_0 \in H_0$ tenemos $(K_Y \circ a_0)(h_0) = a(h_0)$, por la definición de H_0 y $h_0 \in H_0$, tenemos que existe $y \in Y$ tal que $a(h_0) = K_Y(y)$ de aquí obtenemos $K_Y(a_0(h_0)) = K_Y(y)$, siendo K_Y inyector tenemos $a_0(h_0) = y$. Luego la imágen de a_0 esta contenida en Y.
También a_0 es lineal, pues para h_1, $h_2 \in H_0$ tenemos:

$$(K_Y \circ a_0)(h_1 + h_2) = a(h_1 + h_2) = a(h_1) + a(h_2) = K_Y(a_0(h_1)) + K_Y(a_0(h_2)),$$

i.e: $K_Y \circ a_0(h_1 + h_2) = K_Y(a_0(h_1) + a_0(h_2))$.
Nuevamente por la inyectividad de K_Y tenemos $a_0(h_1 + h_2) = a_0(h_1) + a_0(h_2)$. También para cualquier $k \in \mathbb{K}$ y $h_0 \in H_0$, $a_0(k(h_0)) = ka_0(h_0)$.
Veamos la continuidad de a_0.
De $K_Y \circ a_0 = a|_{H_0}$ tenemos $\|K_Y \circ a_0\| \leq \|a|_{H_0}\| \leq \|a\|$, i.e $\|a_0\| \leq \|a\|$.
Sabemos que $(K_Y \circ T)(x) = (a \circ b)(x)$, $\forall\, x \in X$, si $b(x) \in H_0$ tenemos $K_Y(T(x)) = a(b(x)) = K_Y(y)$, algún $y \in Y$, de ahí obtenemos $T(x) = y$. También de la relación $K_Y \circ a_0 = a|_{H_0}$ tenemos lo siguiente, como $b(x) \in H_0$ tenemos:

$$(K_Y \circ a_0)(b(x)) = a(b(x)) = K_Y(y) = K_Y(T(x)),$$

lo cual implica:

$$(a_0 \circ b)(x) = T(x), \forall\, b(x) \in H_0. \tag{2.23}$$

Luego en particular, para $(P \circ b)(x) \in H_0$ para todo $x \in X$, tenemos en (2.23) lo siguiente $a_0 \circ P \circ b = T$, i.e $a_0 \circ b_0 = T$.
$\Leftarrow$) Es solo notar que $H = \ell_2^I$, donde I es un conjunto apropiado.
De la (i) y (ii) implicación no es difícil mostrar que:

$$\gamma_2(T) = \inf \|a\|\|b\|,$$

donde el infimo es tomado sobre todas las factoraciones posibles de T.

$\square$

Proposición 2.3. *Sean E, X, Y, Y_0 espacios de Banach, sea $q \in \mathcal{L}(E, X)$ la aplicación cociente y sea $j \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$ una inmersión isométrica.*
Un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es 2-factorable si y sólo si $j \circ T \circ q : E \qquad Y_0$ lo es, en este caso:

$$\gamma_2(T) = \gamma_2(j \circ T \circ q).$$

Demostración. $\Rightarrow$) Si $T \in \mathcal{L}_{2-fat}(X,Y)$, entonces por la Propiedad de Ideal tenemos $j \circ T \circ q \in \mathcal{L}_{2-fat}(E, Y_0)$, y además $\gamma_2(j \circ T \circ q) \leq \gamma_2(T)$.

$\Leftarrow$) $j \circ T \circ q : E \longrightarrow Y$, se factora a travez de un espacio de Hilbert, i.e:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "b"'] \arrow[drr, dashed, "c=P\circ b"] & X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, dashed, "b_0"] & Y \arrow[r, hook, "j"] & Y_0 \\
& H \arrow[r, dashed, "P"'] \arrow[urr, dashed, "a"] & H_0 \arrow[u, dashed, "a_0"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $H_0 = \{\ker a\}^{\perp} \cap \{h \in H : ah \in j(Y)\}$.

(i) H_0 es un subespacio cerrado de H.

(ii) $ja_0 = a|_{H_0}$ implica que $\|a_0\| \leq \|a\|$, ya se mostro en la Proposición 2.2 que a_0 está bien definida.

(iii) P es una proyección ortogonal con $\|P\| \leq 1$.

(iv) a_0 es inyector. Sea h_1, $h_2 \in H_0$ tal que $a_0(h_1) = a_0(h_2)$, de ahí $j(a_0(h_1)) = j(a_0(h_2))$ i.e $a(h_1) = a(h_2)$ entonces $a(h_1 - h_2) = 0$.
Por tanto $h_1 - h_2 \in \ker a$ y $h_1 - h_2 \in \{\ker a\}^{\perp}$, lo cual implica que $h_1 = h_2$ pues $\ker a \cap \{\ker a\}^{\perp} = \{0\}$.

Sea $C = P \circ b$, lo cual implica $\|C\| = \|P \circ b\| \leq \|P\|\|b\| = \|b\|$. Luego $T \circ q$ se factoriza atravez de un espacio de Hilbert, i.e

$$T \circ q : E \xrightarrow{\ C\ } H_0 \xrightarrow{\ a_0\ } Y \tag{2.24}$$

Para justificar (2.24) usamos el mismo argumento ya efectuado i.e si $b(x) \in H_0$, tenemos $(j \circ T \circ q)(x) = a(b(x)) = j(y)$, para algún $y \in Y$. Luego obtenemos $(T \circ q)(x) = y$.
Además de esto, $a(b(x)) = (j \circ a_0)(b(x)) = j(a_0(b(x))) = j(y)$, entonces tenemos $a_0(b(x)) = (T \circ q)(x)$, $\forall\, b(x) \in H_0$. En particular para $(P \circ b)(x) \forall x \in E$ tenemos $(a_0 \circ P \circ b)(x) = (T \circ q)(x)$, lo cual implica que $a_0 \circ P \circ b = T \circ q$, i.e $a_0 \circ C = T \circ q$.
La inyectividad de a_0 implica la existencia de $b_0 \in \mathcal{L}(X, H_0)$ tal que:

$$b_0 \circ q = C, \tag{2.25}$$

$$H_0 \xrightarrow{a_0} Rank(a_0) \xrightarrow{\hat{b}} H_0$$

Definamos $\hat{b}(x) = h$, $x = a_0(h)$, $h \in H_0$, es claro que $\hat{b}$ está bien definido y es lineal, además de esto:

$$\hat{b} \circ a_0 = id_{H_0}. \tag{2.26}$$

También:

$$Rank(a_0) \xrightarrow{\hat{b}} H_0 \xrightarrow{a_0} Rank(a_0)$$

da:

$$a_0 \circ \hat{b} = id_{Rank(a_0)}. \tag{2.27}$$

Las relaciones (2.26) y (2.27) fueron posible por el hecho de ser a_0 inyector.
Sabemos que $a_0 \circ C = T \circ q$. Tome $b_0 = \hat{b} \circ T : X \longrightarrow H_0$. Luego $\hat{b} \circ a_0 \circ C = \hat{b} \circ T \circ q$, de ahí obtenemos $id \circ C = b_0 \circ q$, por lo tanto (2.25) esta justificada. De la relación $b_0 = \hat{b} \circ T$ tenemos $a_0 \circ b_0 = a_0 \circ b \circ T = T$.
Veamos ahora que b_0 es continuo.
Siendo T y a_0 continuas, por el Teorema del Gráfico Cerrado, tenemos que b_0 es continuo.
Así $b_0 \in \mathcal{L}(X, H_0)$, lo cual implica que $T \in \mathcal{L}_{2-fat}(X, Y)$.
Además tenemos que $\|q\| \leq 1$,

$$\|C\| = \|P \circ b\| \leq \|b\|. \tag{2.28a}$$

$$\|C\| = \|b_0 \circ q\| \leq \|b_0\|. \tag{2.28b}$$

$$\|C\| = \|b_0 \circ q\| \geq \|b_0(q(x))\|, \quad \forall \|x\|_E \leq 1. \tag{2.28c}$$

Como $\|q(x)\|_X \leq \|x\|_E \leq 1$, tenemos $\|C\| \geq \|b_0(q(x))\|$ y siendo q sobreyectivo tenemos:

$$\|C\| \geq \sup_{\|q(x)\|_X \leq 1} \|b_0(q(x))\| = \|b_0\|.$$

De ahí obtenemos:

$$\|C\| \geq \|b_0\| \tag{2.29}$$

Por lo tanto de (2.29) y (2.28b) tenemos $\|C\| = \|b_0\|$.
Así $\gamma_2(T) \leq \|a_0\|\|b_0\| \leq \|C\|\|a\| \leq \|b\|\|a\|$.
Como iniciamos con una factoración arbitraria de $j \circ T \circ q$ obtenemos $\gamma_2(T) \leq \gamma_2(j \circ T \circ q)$.
□

Teorema 2.2. *Las siguientes afirmaciones para $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ son equivalentes:*

(*i*) $T \in \mathcal{L}_{2-fat}(X, Y)$.

(*ii*) *Existe una constante* $c \geq 0$ *tal que:*

$$\left|\sum_{i,j} a_{ij} < y_i^*, Tx_j >\right| \leq c \sup\left\{\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} s_i t_j\right| : (s_i), (t_j) \in B_{\ell_\infty^n}\right\}$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$, *cualquier matriz* $(a_{ij})_{n\times n}$ *y cualesquier vector* $x_1, ..., x_n \in B_X$ *y* $y_1^*, ..., y_n^* \in B_{Y^*}$.

Caso que (i) y (ii) ocurra, podemos tomar $c = K_G.\gamma_2(T)$, *donde* K_G *es la constante de Grothendieck's.*

Demostración. (i)$\Rightarrow$(ii): Supongase que:

$$T : X \xrightarrow{w} H \xrightarrow{v} Y$$

sea una típica factoración atravez de un espacio de Hilbert H. Sea $n \in \mathbb{N}$ y tome cualquier matriz escalar $(a_{ij})_{n\times n}$ y vectores $x_1, ..., x_n \in B_X$ y $y_1^*, ..., y_n^* \in B_{Y^*}$. Aplicando la desigualdad de Grothendieck's tenemos:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i,j}^{n} a_{ij} < y_i^*, Tx_j >\right| &= \left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} < v^* y_i^*, wx_j >\right| \\
&\leq K_G \sup_{i\leq n} \|v^* y_i^*\| \sup_{j\leq n} \|wx_j\| \sup\left\{\left|\sum_{i,j}^{n} a_{ij} s_i t_j\right| : (s_i), (t_j) \in B_{\ell_\infty^n}\right\} \\
&\leq K_G \|v\| \|w\| \sup\left\{\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} s_i t_j\right| : (s_i), (t_j) \in B_{\ell_\infty^n}\right\},
\end{aligned}$$

el resultado es (ii) con $C = K_G \gamma_2(T)$.

(ii)$\Rightarrow$(i): Como cualquier espacio de Banach es un cociente de un ℓ_1^I-espacio, la Proposición 2.3 reduce el caso cuando $X = \ell_1^I$.
Mostraremos que nuestro operador $T : \ell_1^I :\quad Y$ es en realidad 1-sumable, luego el Corolario 1.1 completará la demostración.
Sea $x_1, ..., x_n \in \ell_1^I$ elementos fijados con $w_1(x_i) = 1$. Debemos probar que $\sum_{i=1}^{n} \|Tx_i\| \leq c$ donde c es la constante de la condición (ii). Dado $\varepsilon > 0$, existe un entero N y vectores $y_1, ..., y_n \in \ell_1^N$ tales que $\sum_i \|x_i - y_i\| \leq \varepsilon(\|T\| + 1)^{-1}$. Podemos asumir que $n = N$.

Escribiendo $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$, para cada $1 \leq i \leq n$. Entonces para cualquier $s, t \in B_{\ell_\infty^n}$ nuestra hipótesis sobre $x_1, ..., x_n$ da la estimativa:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i,j} a_{ij} s_i t_j \right| &\leq \sum_i \left| \sum_j a_{ij} t_j \right| = \sum_i | < y_i, t > | \\
&\leq \sum_i | < x_i, t > | + \sum_i | < y_i - x_i, t > | \leq 1 + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ahora escogemos $y_1^*, ..., y_n^* \in B_{Y^*}$ tal que:

$$\sum_i \|Ty_i\| = \sum_i < y_i^*, Ty_i > = \sum_{i,j} a_{ij} < y_i^*, Te_j >,$$

y usamos la condición (ii) para obtener:

$$\begin{aligned}
\sum_j \|Tx_j\| &= \sum_j \|T(x_j - y_j) + T(y_j)\| \leq \varepsilon + \sum_j \|Ty_j\| \\
&\leq \varepsilon + \sum_{i,j} a_{ij} < y_i^*, Te_j > \\
&< \varepsilon + c(1 + \varepsilon).
\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Ultraproductos

Dada una fammilia $(X_i)_{i\in I}$ de espacios de Banach, sea:

$$\ell_\infty(X_i; I) = \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i : (\|x_i\|)_{i\in I} \quad \text{es acotado}\}.$$

La norma sobre este espacio de Banach es dado por:

$$\|(x_i)_{i\in I}\|_\infty := \sup_{i\in I} \|x_i\|.$$

Ahora escogemos un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre I, y seleccionamos $(x_i)_{i\in I} \in \ell_\infty(X_i; I)$. La aplicación limitada $I \longrightarrow \mathbb{R} : i \longmapsto \|x_i\|$ asegura que $\lim_{\mathcal{U}} \|x_i\|$ existe en $\mathbb{R}$.
Es claro que:

$$N_{\mathcal{U}} := \{(x_i)_{i\in I} \in \ell_\infty(X_i; I) : \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| = 0\},$$

es un subespacio lineal cerrado de $\ell_\infty(X_i; I)$ y así podemos crear el espacio de Banach $\ell_\infty(X_i; I)/N_{\mathcal{U}}$ equipado con la usual norma cociente.
Este espacio cociente es el ultraproducto de la familia $(X_i)_{i\in I}$ con respecto al ultrafiltro $\mathcal{U}$.
Usualmente denotamos por:

$$\left(\prod_{i\in I} X_i\right)_{\mathcal{U}} \quad \text{o} \quad \left(\prod X_i\right)_{\mathcal{U}}.$$

Los elementos de $(\prod_{i\in I} X_i)_{\mathcal{U}}$ que es generado por $(x_i)_{i\in I} \in \ell_\infty(X_i; I)$ será escrito

$$(x_i)_{\mathcal{U}}$$

y su norma es dada por

$$\|(x_i)_{\mathcal{U}}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\|.$$

Si $X_i = X$ para cada $i \in I$, escribiremos

$$X^{\mathcal{U}}$$

en lugar de $(\prod_{i \in I} X_i)_{\mathcal{U}}$ y nos referiremos a $X^{\mathcal{U}}$ como el ultraproducto de X con respecto al ultafiltro $\mathcal{U}$.
La estrecha interacción entre espacios de Banach y sus operadores, nos obliga a introducir la idea de la teoría de ultraproductos de operadores. Supóngase que son dadas dos familias de espacios de Banach $(X_i)_{i \in I}$ y $(Y_i)_{i \in I}$. Si para cada $i \in I$, tenemos un operador $v_i \in \mathcal{L}(X_i, Y_i)$, y si $C := \sup_{i \in I} \|v_i\|$ es finito entonces podemos construir un operador lineal acotado de

$$\ell_\infty(X_i, I) \longrightarrow \ell_\infty(Y_i, I) : (x_i)_{i \in I} \longmapsto (v_i x_i)_{i \in I}$$

de norma C. Ahora si $\mathcal{U}$ es cualquier ultrafiltro sobre I y si $\lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| = 0$ entonces claramente $\lim_{\mathcal{U}} \|v_i x_i\| = 0$. Consecuentemente:

$$v : (\prod_{i \in I} X_i)_{\mathcal{U}} \longrightarrow (\prod_{i \in I} Y_i)_{\mathcal{U}} : (x_i)_{\mathcal{U}} \longmapsto (v_i x_i)_{\mathcal{U}}$$

es bien definido, y es un operador lineal acotado de norma almenos C.
Por otro lado nuestras hipótesis nos asegura la existencia de $(v_i)_{\mathcal{U}}$ en $(\prod_{i \in I} \mathcal{L}(X_I, Y_i))_{\mathcal{U}}$.

Proposición 3.1. *La correspondencia $(v_i)_{\mathcal{U}} \longmapsto v$ da una inmersión lineal isométrica de $(\prod_{i \in I} \mathcal{L}(X_i, Y_i))_{\mathcal{U}}$ dentro de $\mathcal{L}((\prod_{i \in I}(X_i))_{\mathcal{U}}, (\prod_{i \in I} Y_i)_{\mathcal{U}})$.*

Demostración. Sea $T : (\prod_{i \in I} \mathcal{L}(X_i, Y_i))_{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathcal{L}((\prod_{i \in I} X_i)_{\mathcal{U}}, (\prod_{i \in I} Y_i)_{\mathcal{U}})$, definido por $T((v_i)_{\mathcal{U}}) = v$, es claro que T está bien definido y es lineal. Además:

$$\|T((v_i)_{\mathcal{U}})\| = \|v\| \tag{3.1}$$

Luego:

$$\|v\| = \sup_{\|(x_i)_{\mathcal{U}}\|=1} \|v((x_i)_{\mathcal{U}})\| = \sup_{\|(x_i)_{\mathcal{U}}\|=1} \|(v_i x_i)_{\mathcal{U}}\| \leq \|(v_i)_{\mathcal{U}}\|. \tag{3.2}$$

Además:

$$
\begin{aligned}
\|v\| \geq & \|v((x_i)_{\mathcal{U}})\|, \quad \text{con} \quad \|(x_i)_{\mathcal{U}}\| = 1, \\
\|v\| \geq & \|(v_i x_i)_{\mathcal{U}}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|v_i x_i\| > \lim_{\mathcal{U}} (1 - \varepsilon_i)\|v_i\|, \quad \text{con} \quad \|x_i\| = 1, \\
\|v\| > & (1 - \lim_{\mathcal{U}} \varepsilon_i)\|(v_i)_{\mathcal{U}}\|, \quad \text{donde} \quad 0 < \varepsilon_i < 1, \quad \lim_{\mathcal{U}} \varepsilon_i = \varepsilon, \\
& \quad \text{existe pues los } \varepsilon_i \text{ estan acotados.} \\
\|v\| > & (1 - \varepsilon)\|(v_i)_{\mathcal{U}}\|, \forall\, \varepsilon > 0, \quad \text{para} \quad \varepsilon \to 0 \quad \text{tenemos:}
\end{aligned}
$$

$$\|v\| \geq \|(v_i)_{\mathcal{U}}\| \tag{3.3}$$

de (3.2) y (3.3) tenemos $\|T((v_i)_{\mathcal{U}})\| = \|(v_i)_{\mathcal{U}}\|$.

□

Lema 3.1. *Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre I y $\mathbb{K}$ es el campo escalar, entonces $\mathbb{K}^{\mathcal{U}}$ es isométricamente isomorfo a $\mathbb{K}$.*

Demostración. Por definición $\mathbb{K}^{\mathcal{U}} = \ell_\infty^I / N_{\mathcal{U}}$, donde $N_{\mathcal{U}} = \{(\varepsilon_i)_{i\in I} : \lim_{\mathcal{U}} \varepsilon_i = 0\}$ es el núcleo de la aplicación lineal acotada $\ell_\infty^I \longrightarrow \mathbb{K} : (\varepsilon_i) \longmapsto \lim_{\mathcal{U}} \varepsilon_i$ es en realidad isométrico, asi $\mathbb{K}^{\mathcal{U}}$ es de dimensión uno. Para ver el isomorfismo $\mathbb{K}^{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{K} : (\varepsilon_i)_{\mathcal{U}} \longmapsto \lim_{\mathcal{U}} \varepsilon_i$ es suficiente ver que si $(\varepsilon_i) = 1$ para todo $i \in I$, entonces $\|(\varepsilon_i)_{\mathcal{U}}\| = 1$.

Corolario 3.1. *Si $(X_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios de Banach y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre I, entonces $(\prod X_i^*)_{\mathcal{U}}$ está inmerso isométricamente dentro de $(\prod X_i)_{\mathcal{U}}^*$.*

Demostración. De la Proposición 3.1 basta tomar $Y_i = \mathbb{K}$, $\forall\, i \in I$ y usando el Lema 3.1 tenemos lo pedido.
Además de acuerdo a la Proposición 3.1 podemos escribir:

$$< (x_i^*)_{\mathcal{U}}, (x_i)_{\mathcal{U}} >= \lim_{\mathcal{U}} < x_i^*, x_i >,$$

para todo $(x_i^*)_{\mathcal{U}}$ en $(\prod X_i^*)$ y $(x_i)_{\mathcal{U}}$ en $(\prod X_i)_{\mathcal{U}}$.

□

Teorema 3.1. *Cualquier espacio de Banach X es isométricamente isomorfo a un subespacio de un ultraproducto de sus subespacios finito dimensionales.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}_X = \{E \subset X : E$ es de dimensión finita$\}$, este conjunto es ordenado por inclusión. Consideremos un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre $\mathcal{F}_X$ que refina el correspondiente filtro ordenado y mostraremos que X es isométricamente isomorfo a un subespacio de $(\prod_{E\in\mathcal{F}_X} E)_{\mathcal{U}}$.
Dado $x \in X$ y $E \in \mathcal{F}_X$, ,creamos un elemento x_E de E colocando $x_E := x$ si $x \in E$ y $x_E := 0$ en otro caso.
Como $\|x_E\| \leq \|x\|$, $\forall\, E \in \mathcal{F}_X$,

$$J_X : X \longrightarrow (\prod_{E\in\mathcal{F}_X} E)_{\mathcal{U}} : x \longmapsto (x_E)_{\mathcal{U}},$$

es una aplicación bien definida, claramente es lineal y es isométrico, pues para cada $x \in X$, x_E es eventualmente igual a x.
Algunos espacios importantes de Banach son estables bajo la formación de Ultraproductos. Son de particular interes los retículos de Banach.

□

Proposición 3.2. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de retículos de Banach. Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre I, entonces $(\prod_{i\in I} X_i)_{\mathcal{U}}$ tiene una estructura natural de retículos de Banach.*

Demostración. Dados (x_i) y (y_i) en $\ell_\infty(X_i; I)$, definimos:

$$(x_i)_{\mathcal{U}} \leq (y_i)_{\mathcal{U}},$$

cuando existe un elemento $(z_i) \in \ell_\infty(X; I)$ con $\lim_{\mathcal{U}} \|z_i\| = 0$ tal que $x_i + z_i \leq y_i$ para cada $i \in I$. Se verifica que se ha definido un parcial orden bajo el cual $(\prod_i X_i)_{\mathcal{U}}$ llega a ser un retículo de Banach.
Además para cualquier (x_i), $(y_i) \in \ell_\infty(X_i; I)$, $(x_i)_{\mathcal{U}} \vee (y_i)_{\mathcal{U}} = (x_i \vee y_i)_{\mathcal{U}}$, $(x_i)_{\mathcal{U}} \wedge (y_i)_{\mathcal{U}} = (x_i \wedge y_i)_{\mathcal{U}}$, y $|(x_i)_{\mathcal{U}}| = (|x_i|)_{\mathcal{U}}$.

□

Teorema 3.2. (*a*) *Sea $1 \leq p < \infty$. Ultraproductos de $L_p(\mu)$-espacios son isométricamente isomorfos (como un retículo de Banach) a un $L_p(\mu)$-espacio.*

(*b*) *Ultraproductos de $C(K)$ espacios, son isométricamente isomorfos (como un retículo de Banach) a $C(K)$ espacios.*

Demostración. (a) Recordemos que para $1 \leq p < \infty$, un retículo de Banach es isométricamente isomorfo (como un retículo de Banach) a un $L_p(\mu)$ espacio si y sólo si $\|x+y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$

para cualquier $x, y \in X$ satisfaciendo $x \wedge y = 0$. Consecuentemente, si $X_i = L_p(\mu_i)$, $i \in I$, si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre I, y si $(x_i)_{\mathcal{U}}$, $(y_i)_{\mathcal{U}}$ en $(\prod_{i \in I} X_i)_{\mathcal{U}}$ satisface $(x_i) \wedge (y_i) = (x_i \wedge y_i) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \|(x_i)_{\mathcal{U}} + (y_i)_{\mathcal{U}}\|^p &= \lim_{\mathcal{U}} \|x_i - (x_i \wedge y_i) + y_i - (x_i \wedge y_i)\|^p \\ &= \lim_{\mathcal{U}} \|x_i - (x_i \wedge y_i)\|^p + \lim_{\mathcal{U}} \|y_i - (x_i \wedge y_i)\|^p \\ &= \|(x_i)_{\mathcal{U}}\|^p + \|(y_i)_{\mathcal{U}}\|^p, \end{aligned}$$

y nuestra conclusión queda probada.
(b) Recordemos que un retículo de Banach X con orden unitario es isométricamente isomorfo (como un retículo de Banach) a un $C(K)$-espacio si y sólo si $\|x \vee y\| = \|x\| \vee \|y\|$ para cualquier $x \geq 0$, $y \geq 0$ en X. También se verifica que un ultraproducto de retículos de Banach con orden unitario también tiene orden unitario; y repetimos el proceso hecho en (a).

Teorema 3.3. *El bidual de cualquier espacio de Banach X es isométricamente isomorfo a un cociente de sus espacios cocientes de X de dimensión finita.*

Demostración. La colección C_X de todos los subespacios cerrados finitos codimencionales de X es un conjunto direccionado bajo la inclusión inversa. Esto nos permite considerar un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre C_X refinando el correspondiente filtro orden. Como $\mathcal{F}_{X^*}$ es justamente $\{Z^\perp : Z \in C_X\}$ y $Z_1^\perp \subset Z_2^\perp$ precisamente cuando $Z_2 \subset Z_1$ el Teorema 3.1 nos da una inmersión isométrica:

$$J_{X^*} : X^* \longrightarrow (\prod_{Z \in C_X} Z^\perp)_{\mathcal{U}}.$$

Por el Corolario 3.1 cada elemento $(X_Z^*)_{\mathcal{U}}$ de $(\prod_{Z \in C_X} Z^\perp)_{\mathcal{U}} = (\prod_{Z \in C_X} (X/Z)^*)_{\mathcal{U}}$ puede ser considerado como mienbro de $(\prod_{Z \in C_X} X/Z)_{\mathcal{U}}^*$ i.e $< (x_z^*)_{\mathcal{U}}, (x_z)_{\mathcal{U}} >= \lim_{\mathcal{U}} < x_z^*, x_z >$ la norma satisface $\|(x_z^*)_{\mathcal{U}}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_z^*\|$. Consecuentemente podemos ver J_{X^*} como una inmersión isométrica de X^* $(\prod_{z \in C_X} X/Z)_{\mathcal{U}}^*$.
Tomando adjuntos hallamos que $(J_{X^*})^*$ induce una aplicación:

$$Q_X : (\prod_{z \in C_X} X/Z) \longrightarrow X^{**}.$$

La prueba se completa al mostrar que Q_X es sobreyector. Fijemos $x^{**} \in X^{**}$. Entonces necesitamos hallar $(x_z)_{\mathcal{U}} \in (\prod_{z \in C_X} X/Z)_{\mathcal{U}}$ tal que $Q_X((x_z)_{\mathcal{U}}) = x^{**}$. La suryectividad de

la aplicación $(J_{X^*})^*$ asegura la existencia de algún $w \in (\prod_{z\in C_X} Z^\perp)^*_{\mathcal{U}}$ con $(J_{X^*})^*(w) = x^{**}$. Procedemos a nuestra meta construyendo, para cada $Z_0 \in C_X$, un operador apropiado $v^\perp_{z_0} : Z_0^\perp \longrightarrow (\prod_{Z\in C_X} Z^\perp)_{\mathcal{U}}$ y entonces definimos $x_{z_0} := wv_{z_0}$. Como X/Z_0 es de dimensión finita $x_{z_0} \in (Z_0^\perp)^* = (X/Z_0)^{**} = X/Z_0$.
Los operadores v_{z_0} deben ser construidos apropiadamente con la definición de J_{X^*} dado en el Teorema 3.1. Donde:

$$v_{z_0}(x^*) := \begin{cases} (x_z^*)_{\mathcal{U}} & , \quad \text{si} \quad x_z^* = x, \quad \text{si} \quad Z_0 \supset Z \\ 0 & , \quad \text{si} \quad x_z^* \neq x. \end{cases}$$

Esto garantiza que $Q_X((x_z)_{\mathcal{U}}) = x^{**}$.

□

Observación 3.1. Consideremos el conjunto $P := \mathcal{F}_X \times C_Y$ direccionado por el orden natural del producto filtro, y sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre P que refina el correspondiente orden filtro. Entonces podemos construir una inmerción isométrica $J_X : X \longrightarrow (\prod_{(E,Z)\in P} E)_{\mathcal{U}}$ y una natural aplicación cociente $Q_Y : (\prod_{(E,Z)\in P} Y/Z)_{\mathcal{U}} \longrightarrow Y^{**}$. También dado $u \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $(E,Z) \in P$, podemos mirar la familiar aplicación $u_{E,Z} \in \mathcal{L}(E, Y/Z)$ dado por $u_{E,Z} := q_z u i_E$, donde $i_E : E \longrightarrow X$ es la inmerción natural y donde $q_z : Y \longrightarrow Y/Z$ es la natural aplicación cociente. Es claro que $\|u_{E,Z}\| \leq \|u\|$ para todo $(E,Z) \in P$, el ultraproducto:

$$(u_{E,Z})_{\mathcal{U}} : (\prod_P E)_{\mathcal{U}} \longrightarrow (\prod_P Y/Z)_{\mathcal{P}}$$

es bien definido.

Teorema 3.4. *Con las notaciones dados en la Observación 3.1 tenemos:*

$$K_Y u = Q_Y (u_{E,Z})_{\mathcal{U}} J_X,$$

para cada $u \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Demostración. Escogemos $x \in X$ y $y^* \in Y^*$. Entonces $(x, y^*) \in E \times Z^\perp$ para todo $(E,Z) \in P$. Por la Observación 3.1 tenemos:

$$\begin{aligned} < ux, y^* > &= \lim_{\mathcal{U}} < u_{E,Z}x, y^* > = < (u_{E,Z})_{\mathcal{U}} J_X x, J_{Y^{**}} y^* > \\ &= < (Q_Y (u_{E,Z})_{\mathcal{U}} J_X)(x), y^* >, \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos lo deseado.

□

Capítulo 4

Ideal de Operadores sobre espacios de Banach

En este capítulo comenzamos con la fundamental definición de un ideal de operadores. Este concepto es una natural generalización de la conocida teoría de anillos.

Introducimos algunos ideales de operadores especiales que jugarón un rol importante en el histórico desarrollo del análisis funcional.

Definición 4.1. Un Operador Ideal $\mathcal{A}$ es una subclase de $\mathcal{L}$ tal que las componentes:

$$\mathcal{A}(E,F) := \mathcal{A} \cap \mathcal{L}(E,F)$$

satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $I_{\mathbb{K}} \in \mathcal{A}$, donde $\mathbb{K}$ denota los espacios de Banach de una dimensión.

(ii) Si $S_1, S_2 \in \mathcal{A}(E,F)$ entonces $S_1 + S_2 \in \mathcal{A}(E,F)$.

(iii) Si $T \in \mathcal{L}(E_0, E)$, $S \in \mathcal{A}(E,F)$ y $R \in \mathcal{L}(F,F_0)$, entonces $RST \in \mathcal{L}(E_0,F_0)$.

Proposición 4.1. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de operadores. Entonces todas las componentes son espacios lineales.*

Demostración. Por (ii), resta mostrar que si $S \in \mathcal{A}(E,F)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ implica $\lambda S \in \mathcal{A}(E,F)$. Esto se sigue de $\lambda S = (\lambda I_F)SI_E$ y (iii).

□

Ejemplo 4.1. ***Operadores Finitos:*** *La clase de todos los operadores finitos es denotado por $\mathcal{F}$.*

Teorema 4.1. *$\mathcal{F}$ es el menor Ideal de Operadores.*

Demostración. Sea $a_0 \in E'$ y $y_0 \in F$. Entonces:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "a_0 \otimes y_0"] \arrow[d, "a_0\otimes 1"'] & F \\ \mathbb{K} \arrow[r, "I_{\mathbb{K}}"'] & \mathbb{K} \arrow[u, "1\otimes y_0"'] \end{tikzcd}$$

Consecuentemente $a_0 \otimes y_0$ está contenido en cualquier ideal de operadores $\mathcal{A}$. Desde que $S \in \mathcal{F}(E,F)$ puede ser escrito en la forma:

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes y_i$$

tenemos que $S \in \mathcal{A}(E,F)$. Esto prueba que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$. La verificación de las ideales propiedades las omitimos.

□

Definición 4.2. Operadores Aproximables: Un operador $S \in \mathcal{L}(E,F)$ es llamado aproximable, si existen $S_1, ..., S_n \in \mathcal{F}(E,F)$ con $\lim_{n\to\infty} \|S - S_n\| = 0$.
La clase de todos los operadores aproximables es denotado por $\mathfrak{L}$.

Teorema 4.2. *$\mathfrak{L}$ es un ideal de operadores.*

Demostración. Al usar la Definición 4.1 vemos que (i) y (ii) son evidentes. Sea $S \in \mathfrak{L}(E,F)$, entonces existe $(S_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|S_n - S\| = 0$. Luego para $T \in \mathcal{L}(E_0,E)$, $R \in \mathcal{L}(F,F_0)$ tenemos:

$$\|RST - RS_nT\| = \|R(S - S_n)T\| \leq \|R\|\|S - S_n\|\|T\|,$$

cuando $n \to \infty$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} \|RST - RS_nT\| = 0$, así tenemos que (iii) es verdadera.

□

Definición 4.3. Operadores Compactos: Un operador $S \in \mathcal{L}(E, F)$ es llamado compacto si la bola unitaria U_E es aplicada dentro de un subconjunto $S(U_E)$ que es relativamente compacta en la norma topológica.
La clase de todos los operadores compactos es denotadopor $\mathcal{R}$.

Teorema 4.3. *$\mathcal{R}$ es un ideal de operadores.*

Demostración. La condición (i) en la Definición 4.1 es evidente.
(ii): Si $S_1, S_2 \in \mathcal{R}(E, F)$ entonces $\overline{S_1(U_E) + S_2(U_E)} \subset \overline{S_1(U_E)} + S_2(U_E)$ lo cual muestra que $S_1 + S_2 \in \mathcal{R}(E, F)$.
(iii): Si $S \in \mathcal{R}(E, F)$, $T \in \mathcal{L}(E_0, E)$ y $A \in \mathcal{L}(F, F_0)$, entonces para la bola unitaria cerrada tenemos:

(a) $(AS)(U_E) \subseteq A(S(U_E))$ siendo S compacto, tenemos que $S(U_E)$ es compacto, además A es continua, lo cual implica que $A(S(U_E))$ es compacto. Luego $(AS)(U_E)$ es un conjunto cerrado dentro de un compacto, lo cual implica que AS es compacto.

(b) Similarmente se prueba que $S \circ T$ es compacto.

de (a) y (b) tenemos lo pedido.

4.1 Cocientes de Ideales de Operadores

Definición 4.4. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ ideales de operadores. Un operador $S \in \mathcal{L}(E, F)$ pertenece al cociente izquierdo $\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{B}$ si $YS \in \mathcal{B}(E, F_0)$ para todo $Y \in \mathcal{A}(F, F_0)$, donde F_0 es un espacio arbitrario de Banach.
El cociente derecho $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}^{-1}$ es definido de modo análogo.

Teorema 4.4. *$\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{B}$ y $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}^{-1}$ son ideales de operadores.*

Demostración. Es inmediato.

Definición 4.5. Sea $\mathcal{A}$ un ideal de operadores. Un operador $T \in \mathcal{L}(E,F)$ pertenece a $\mathcal{A}^{\max} := \mathfrak{L}^{-1} \circ \mathcal{A} \circ \mathfrak{L}^{-1}$ se $UTV \in \mathcal{A}(X,F_0)$ para todo $U \in \mathfrak{L}(X,E)$, $V \in \mathfrak{L}(F,F_0)$.

Teorema 4.5. *$\mathcal{A}^{\max}$ es un ideal de operadores.*

Demostración. Es inmediato.

Definición 4.6. Un ideal de operadores $\mathcal{A}$ es maximal si $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\max}$.

4.2 Ideales de Operadores Quasi-Normados

Definición 4.7. Sea $\mathcal{A}$ un ideal de operadores. Una aplicación A de $\mathcal{A}$ dentro de $\mathbb{R}^+$ es llamado quasi-normado si las siguientes condiciones son satisfechas:

(I_1) $A(I_{\mathbb{K}}) = 1$, donde $\mathbb{K}$ denota los espacios de Banach de una dimensión.

(I_2) Existe una constante $k \geq 1$ tal que:

$$A(S_1 + S_2) \leq k[A(S_1) + A(S_2)], \quad \text{para} \quad S_1, S_2 \in \mathcal{A}(E,F).$$

(I_3) Si $T \in \mathcal{L}(E_0,E)$, $S \in \mathcal{A}(E,F)$ y $R \in \mathcal{L}(F,F_0)$, entonces:

$$A(RST) \leq \|R\| A(S) \|T\|.$$

Definición 4.8. Un ideal de operadores quasi-normado $[\mathcal{A}, A]$ es un ideal de operadores $\mathcal{A}$ con una quasi-norma A, tal que todos los espacios lineales topológicos Hausdorff $\mathcal{A}(E,F)$ son completos.

Proposición 4.2. *Sea $[\mathcal{A}, A]$ un ideal de operadores quasi-normado. Entonces $\|S\| \leq A(S)$ para todo $S \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Dado $S \in \mathcal{A}(E,F)$. Sea $x \in U_E$ y $b \in U_F$, entonces $< Sx, b > I_{\mathbb{K}} = (b \otimes 1) \circ S \circ (1 \otimes x)$, lo cual implica:

$$A(< Sx, b > I_{\mathbb{K}}) = A((b \otimes 1) \circ S \circ (1 \otimes x)) \leq \|b \otimes 1\| A(S) \|1 \otimes x\| \leq \|x\| A(S)$$

$$\begin{aligned} |< Sx, b >| &\leq \|x\| A(S) \quad \Rightarrow \quad \sup_{\|b\|_{F'}=1} |< Sx, b >| \leq \|x\| A(S) \quad \Rightarrow \\ \|Sx\| &\leq \|x\| A(S) \quad \Rightarrow \quad \|S\| \leq A(S), \quad \text{para todo} \quad S \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

□

Proposición 4.3. *Sea $[\mathcal{A}, A]$ un operador ideal quasi-normado. Entoces $A(a_0 \otimes y_0) = \|a_0\| \|y_0\|$, para todo $a_0 \in E'$ y $y_0 \in F$.*

Demostración. Es inmediato.

Definición 4.9. Seja $[\mathcal{A}, A]$ e $[\mathcal{B}, B]$ ideales de operadores. Para cualquier $T \in \mathcal{L}(E,F)$ con $T \in \mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{B}$ definimos:

$$A^{-1} \circ B(T) = \sup\{B(UT) : U \in \mathcal{A}(F, F_0), A(U) \leq 1\}.$$

Aquí F_0 es cualquier espacio de Banach.

Observación 4.1. La relación $[\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{B}, A^{-1} \circ B]$ frecuentemente será escrito como $[\mathcal{A}, A]^{-1} \circ [\mathcal{B}, B]$.

Teorema 4.6. $[\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{B}, A^{-1} \circ B]$ *es un ideal de operadores quasi-normados.*

Demostración. Primero veamos la existencia de $A^{-1} \circ B$. Por tanto supongamos que el supremo no es finito para algún $T \in \mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{B}(E,F)$. Entonces podemos hallar $T_n \in \mathcal{A}(F, F_n)$ tal que $A(T_n) \leq (2k)^{-n}$ y $B(T_n T) \geq n$, para $n = 1, 2, ..., k \geq 1$.
Para $F_0 := (\oplus F_n)_2$ tenemos:

$$E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{T_n} F_n \xrightarrow{J_n} (\oplus F_n)_2 \xrightarrow{Q_n} F_n$$

$A(\sum_{n+h}^{k} J_nT_n) = A(\sum_{i=n}^{k-h} J_{h+i}T_{h+i}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} k^i A(T_{h+i}) \leq (2k)^{-h} \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = (2k)^{-h} \leq 1$.
La suma parcial $\sum_{n=1}^{k} J_nY_n$ forma una A-secuencia de Cauchy.
Luego $\hat{T} := \sum_{n=1}^{\infty} J_nT_n$ pertenece a $\mathcal{A}$, así $n \leq B(T_nT) = B(Q_n\hat{T}T) \leq B(\hat{T}T)$, lo cual es una contradicción.
En este caso $J_k(x_k) := (\varepsilon_{ik}x_k)$ para $x_k \in E_k$, donde ε_{ik} es el símbolo de Kronecker. Y $Q_k(x_i) := x_k$ para $(x_i) \in \ell_2(F_n) = (\oplus F_n)_2$. Finalmente se verifica la Propiedad Ideal.

□

Definición 4.10. Sea $[\mathcal{A}, A]$ e $[\mathcal{B}, B]$ ideales de operadores, para cualquier $T \in \mathcal{L}(E, F)$ con $T \in \mathcal{A} \circ \mathcal{B}^{-1}$, definimos:

$$A \circ B^{-1}(T) := \sup\{A(TU) : U \in \mathcal{B}(X, E), B(U) \leq 1\}.$$

Aquí X es cualquier espacio de Banach.

Observación 4.2. La relación $[\mathcal{A} \circ \mathcal{B}^{-1}, A \circ B^{-1}]$ frecuentemente será escrito por $[\mathcal{A}, A] \circ [\mathcal{B}^{-1}, B^{-1}]$.

Teorema 4.7. *$[\mathcal{A} \circ \mathcal{B}^{-1}, A \circ B^{-1}]$ es un ideal de operadores quasi-normado.*

Demostración. Similar al Teorema 4.6.

□

Definición 4.11. Sea $[\mathcal{A}, A]$ un ideal de operadores quasi-normado. Entonces:

$$[\mathcal{A}^{\max}, A^{\max}] := [\mathcal{L}, \|\cdot\|]^{-1} \circ [\mathcal{A}, A] \circ [\mathcal{L}, \|\cdot\|]^{-1},$$

es llamdo el *hull maximal* de $[\mathcal{A}, A]$.

4.3 Ideales de Operadores p-normados

Definición 4.12. Una quasi-norma A sobre el ideal de operadores $\mathcal{A}$ es una p-norma $(0 < p \leq 1)$ si:

$$A(S_1 + S_2)^p \leq A(S_1)^p + A(S_2)^p \quad \text{para} \quad S_1, S_2 \in \mathcal{A}(E, F).$$

Si $p = 1$, entonces A es simplement llamado una norma.

Observación 4.3. La constante $k := 2^{\frac{1}{p}-1}$ puede ser usado para satisfacer la condición (I_2).

Observación 4.4. Cualquier p-norma A es continua sobre su topología.

A continuación formulamos un criterio importante que será usado posteriormente.

Teorema 4.8. *Sea $\mathcal{A}$ una subclase $\mathcal{L}$ con una función A a valores en $\mathbb{R}^+$ tal que las siguientes condiciones son satisfechas* ($0 < p \leq 1$)*:*

(a) $I_{\mathbb{K}} \in \mathcal{A}$ *y* $A(I_{\mathbb{K}}) = 1$.

(b) *Siguese de* $S_1, S_2, ... \in \mathcal{A}(E, F)$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} A(S_n)^p < \infty$ *tal que* $S := \sum_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathcal{A}(E, F)$ *y* $A(S)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} A(S_n)^p$.

(c) $T \in \mathcal{L}(E_0, E)$, $S \in \mathcal{A}(E, F)$ *y* $R \in \mathcal{L}(E, F_0)$ *implica* $RST \in \mathcal{A}(E_0, F_0)$ *y* $A(RST) \leq \|R\|A(S)\|T\|$.

Entonces $[\mathcal{A}, A]$ *es un ideal p-normado.*

Demostración. Es inmediato.

□

Teorema 4.9. $[\mathcal{A}^{\max}, A^{\max}]$ *es un ideal de operadores quasi-normado.*

Demostración. Esto sigue de los Teoremas 4.6 y 4.7.

□

Teorema 4.10. *Sea* $[\mathcal{A}, A]$ *un ideal de operadores p-normado. Entonces* $S \in \mathcal{L}(E, F)$ *pertenece a* $\mathcal{A}^{\max}$ *si y sólo si existe una constante* $\sigma \geq 0$ *tal que:*

$$A(BSX) \leq \sigma \|B\| \|X\| \quad \textit{para todo} \quad X \in \mathcal{F}(E_0, F) \quad \textit{y} \quad B \in \mathcal{F}(F, F_0),$$

donde E_0 *y* F_0 *son espacios arbitrarios de Banach.*
En este caso:

$$A^{\max}(S) := \inf \sigma.$$

Demostración. Si $S \in \mathcal{A}^{\max}(E,F)$, entoces $A^{\max}(S) := \sup A(BSX)$ donde el supremo es tomado sobre $X \in \mathcal{L}(E_0, E)$ y $B \in \mathcal{L}(F, F_0)$ tal que $\|X\| \leq 1$ y $\|B\| \leq 1$. Por lo tanto:

$$A(BSX) \leq A^{\max}(S)\|B\|\|X\| \quad \text{para todo} \quad X \in \mathcal{F}(E_0, E) \quad \text{y} \quad B \in \mathcal{F}(F, F_0).$$

Inversamente, sea $S \in \mathcal{L}(E,F)$ satisfaze la condición dada. Si $X \in \mathcal{L}(E_0, E)$ y $B \in \mathcal{L}(F, F_0)$, entonces existen $X_n \in \mathcal{F}(E_0, E)$ y $B_n \in \mathcal{F}(F, F_0)$ con $X = \|\cdot\| - \lim_n X_n$ y $B = \|\cdot\| - \lim_n B_n$. Así tenemos:

$$\begin{aligned} A(B_nSX_n - B_mSX_m)^p &\leq A((B_n - B_m)SX_n)^p + A(B_mS(X_n - X_m))^p \\ &\leq \sigma^p[\|B_n - B_m\|^p\|X_n\|^p + \|B_m\|^p\|X_n - X_m\|^p] \end{aligned}$$

donde (B_nSX_n) es una A-secuencia de Cauchy. Como $BSX = \|\cdot\| - \lim_{n\to\infty} B_nSX_n$ es el único posible límite, tenemos que $BSX \in \mathcal{A}(E_0, F_0)$. Además:

$$A(BSX) = \lim_n A(B_nSX_n) \leq \sigma\|B_n\|\|X_n\| = \sigma\|B\|\|X\|.$$

Por lo tanto $S \in \mathcal{L}^{\max}(E,F)$ y $A^{\max}(S) \leq \sigma$.

4.4 Operadores (r,p,q)-Nucleares

Definición 4.13. Sea $0 < r \leq \infty$, $1 \leq p, q \leq \infty$ y $1 + \frac{1}{r} \geq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Un operador $S \in \mathcal{L}(E,F)$ es llamado (r,p,q) nuclear si:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i a_i \otimes y_i.$$

Con $(\sigma_i) \in \ell_r$, $(a_i) \in W_{q'}(E')$ y $(y_i) \in W_{p'}(F)$. En el caso que $r = \infty$ $(\sigma_i) \in C_0$.
Colocando:

$$N_{(r,p,q)}(S) := \inf \ell_r(\sigma_i) W_{q'}(a_i) W_{p'}(y_i),$$

donde el infimo es tomado sobre todas las representaciones (r,p,q) nucleares descritas arriba.
La clase de todos los operadores (r,p,q) nucleares será denotado por $\mathcal{N}_{(r,p,q)}$.

Observación 4.5. La serie $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i a_i \otimes y_i$ converge en la norma topológica de $\mathcal{L}(E,F)$. Por lo tanto el operador S es aproximable.

Teorema 4.11. *Sea* $\frac{1}{s} := \frac{1}{r} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}$, *entonces* $[\mathcal{N}_{(r,p,q)}, N_{(r,p,q)}]$ *es un ideal de operadores* s*-normado.*

Demostración. Usamos el Teorema 4.8:
(A) De la relación $I_{\mathbb{K}} = 1 \otimes 1$ tenemos que $I_{\mathbb{K}} \in \mathcal{N}_{(r,p,q)}$ y $N_{(r,p,q)}(I_{\mathbb{K}}) \leq 1$. Además sea $I_{\mathbb{K}} = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \alpha_i \otimes n_i$, cualquier representación (r,p,q) nuclear. Entonces:

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \alpha_i n_i, \quad \text{consecuentemente} \\
1 &\leq \ell_1(\sigma_i \alpha_i n_i) \leq \ell_s(\sigma_i \alpha_i n_i) \quad \text{pues} \quad 0 < s \leq 1 \\
\ell_s(\sigma_i \alpha_i n_i) &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\sigma_i|^s |\alpha_i|^s |n_i|^s \right)^{1/s}, \quad \text{aplicando la desigualdad de Holder tenemos} \\
1 &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\sigma_i|^{s\frac{r}{s}} \right)^{1/r} \left(\sum_{i=1}^{\infty} [|\alpha_i|^{(\frac{r}{s})'} |n_i|^{(\frac{r}{s})'}]^s \right)^{\frac{1}{(\frac{r}{s})'} \frac{1}{s}}, \quad \text{sea} \quad \left(\frac{r}{s}\right)' s = \beta \\
1 &\leq \ell_r(\sigma_i) \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^\beta |n_i|^\beta \right)^{1/\beta},
\end{aligned}
$$

aplicando nuevamente la desigualdad de Holder a esta expresión tenemos:

$$
\begin{aligned}
1 &\leq \ell_r(\sigma_i) \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^{\beta \frac{q'}{\beta}} \right)^{\frac{\beta}{q'} \frac{1}{\beta}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |n_i|^{\beta (\frac{q'}{\beta})'} \right)^{\frac{1}{(\frac{q'}{\beta})'} \frac{1}{\beta}} \\
1 &\leq \ell_r(\sigma_i) w_{q'}(\alpha_i) w_{p'}(n_i), \quad \text{pues} \quad p' = \beta \left(\frac{q'}{\beta} \right)'
\end{aligned}
$$

de las relaciones $\beta = \left(\frac{r}{s}\right)' s$ y $p' = \beta \left(\frac{q'}{\beta}\right)'$ obtenemos $\frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}$.
(B) Sean $S_1, S_2, \ldots \in \mathcal{N}_{(r,p,q)}(E,F)$ y $\sum_1^{\infty} N_{(r,p,q)}(S_n)^s < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, escogemos representaciones (r,p,q) nucleares:

$$
S_n = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{ni} a_{ni} \otimes y_{ni}
$$

tal que, para cualquier n fijo:

$$
\ell_r(\sigma_{ni}) w_{q'}(a_{ni}) w_{p'}(y_{ni}) \leq (1 + \varepsilon) N_{(r,p,q)}(S_n),
$$

claramente podemos suponer que:

$$\begin{aligned}
\ell_r(\sigma_{ni}) &\leq [(1+\varepsilon)N_{(r,p,q)}(S_n)]^{s/r}, \\
w_{q'}(a_{ni}) &\leq [(1+\varepsilon)N_{(r,p,q)}(S_n)]^{s/q'}, \\
w_{p'}(y_{ni}) &\leq [(1+\varepsilon)N_{(r,p,q)}(S_n)]^{s/p'}.
\end{aligned}$$

Considerando (σ_{ni}), (a_{ni}) y (y_{ni}), como secuencias dobles tenemos:

$$\begin{aligned}
\ell_r(\sigma_{ni}) &\leq [(1+\varepsilon)^s \sum_i^{\infty} N_{(r,p,q)}(S_n)^s]^{1/r}, \\
w_{q'}(a_{ni}) &\leq [(1+\varepsilon)^s \sum_i^{\infty} N_{(r,p,q)}(S_n)^s]^{1/q'}, \\
w_{p'}(y_{ni}) &\leq [(1+\varepsilon)^s \sum_i^{\infty} N_{(r,p,q)}(S_n)^s]^{1/p'}.
\end{aligned}$$

Consecuentemente:

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{ni} a_{ni} \otimes y_{ni}$$

es un operador (r, p, q) nuclear con:

$$N_{(r,p,q)}(S)^s \leq (1+\varepsilon)^s \sum_{n=1}^{\infty} (S_n)^s.$$

El caso $r = \infty$ requiere algunas modificaciones. Tenemos que asegurar que la secuencia doble (σ_{ni}) tiende a cero. Para este propósito usamos el Lema 1.1 , escogemos una secuencia $(\rho_n) \in C_0$ con $0 < \rho_n \leq 1$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^{-s} N_{(\infty,p,q)}(S_n)^s \leq (1+\varepsilon)^s \sum_{n=1}^{\infty} N_{(\infty,p,q)}(S_n)^s.$$

Entonces existen representaciones (∞, p, q) nucleares:

$$S_n = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{ni} a_{ni} \otimes y_{ni}$$

tal que, para cualquier n fijo:

$$\begin{aligned} \ell_\infty(\sigma_{ni}) &\leq \rho_n, \\ w_{q'}(a_{ni}) &\leq [\rho_n^{-1}(1+\varepsilon)N_{(\infty,p,q)}(S_n)]^{s/q'}, \\ w_{p'}(y_{ni}) &\leq [\rho_n^{-1}(1+\varepsilon)N_{(\infty,p,q)}(S_n)]^{s/p'}. \end{aligned}$$

Ahora para la doble secuencia tenemos:

$$\begin{aligned} \ell_\infty(\sigma_{ni}) &\leq 1, \\ w_{q'}(a_{ni}) &\leq [(1+\varepsilon)^s \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^{-s} N_{(\infty,p,q)}(S_n)^s]^{1/q'}, \\ w_{p'}(y_{ni}) &\leq [(1+\varepsilon)^s \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^{-s} N_{(\infty,p,q)}(S_n)^s]^{1/p'}. \end{aligned}$$

Consecuentemente:

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{ni} a_{ni} \otimes y_{ni}$$

es un operador (∞, p, q) nuclear con:

$$N_{(\infty,p,q)}(S)^s \leq (1+\varepsilon)^{2s} \sum_{1}^{\infty} N_{(\infty,p,q)}(S_n)^s.$$

(C) Sea $S \in \mathcal{N}_{(r,p,q)}(E,F)$ y $\varepsilon > 0$. Considere una representación (r,p,q) nuclear:

$$S = \sum_{1}^{\infty} \sigma_i a_i \otimes y_i,$$

tal que:

$$\ell_r(\sigma_i) w_{q'}(a_i) w_{p'}(y_i) \leq (1+\varepsilon) N_{(r,p,q)}(S).$$

Si $T \in \mathcal{L}(E_0, E)$ y $R \in \mathcal{L}(F, F_0)$, entonces:

$$RST = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i T' a_i \otimes R y_i$$

y

$$\ell_r(\sigma_i) w_{q'}(T' a_i) w_{p'}(R y_i) \leq (1+\varepsilon) \|R\| N_{(r,p,q)}(S) \|T\|.$$

Así $RST \in \mathcal{N}_{(r,p,q)}(E,F)$ y $N_{(r,p,q)}(RST) \leq \|R\| N_{(r,p,q)}(S) \|T\|$.

□

A continuación caracterizamos los operadores (r,p,q) nucleares por la propiedad de factoración.

Teorema 4.12. *Un operador $S \in \mathcal{L}(E,F)$ es (r,p,q) nuclear si y sólo si existe un diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{S} & F \\ {\scriptstyle A}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle Y} \\ \ell_{q'} & \xrightarrow[S_0]{} & \ell_p \end{array}$$

tal que $S_0 \in \mathcal{L}(\ell'_q, \ell_p)$ es un operador diagonal de la forma $S_0((\varepsilon_i)_{i=1}^{\infty}) = (\sigma_i \varepsilon_i)_{i=1}^{\infty}$ con $(\sigma_i) \in \ell_r$ si $0 < r < \infty$ y $(\sigma_i) \in C_0$ si $r = \infty$. Además, $A \in \mathcal{L}(E, \ell_{q'})$ y $Y \in \mathcal{L}(\ell_p, F)$. En este caso:

$$N_{(r,p,q)}(S) = \inf \|Y\| \ell_r(\sigma_i) \|A\|$$

donde el infimo es tomado sobre todas las factoraciones posibles.

Demostración. Dado $S \in \mathcal{N}_{(r,p,q)}(E,F)$, y $\varepsilon > 0$, existe una representación (r,p,q) nuclear

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i a_i \otimes y_i,$$

tal que:

$$(1+\varepsilon) N_{r,p,q}(S) \geq \ell_r(\sigma_i) w_{q'}(a_i) w_{p'}(y_i). \tag{4.1}$$

Definamos $Y \in \mathcal{L}(\ell_p, F)$ por $Y((\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j y_j$ es claro que es lineal, veamos la continuidad:

$$\begin{aligned} < \varphi, Y(\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty} > &= \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j < \varphi, y_j >, \quad \varphi \in B_{F'} \\ | < \varphi, Y(\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty} > | &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |\varepsilon_j| | < \varphi, y_j > | \leq (\sum_{j=1}^{\infty} |\varepsilon_j|^p)^{1/p} (\sum_{j=1}^{\infty} | < \varphi, y_j > |^{p'})^{1/p'} \\ \sup_{\|\varphi\|=1} | < \varphi, Y(\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty} > | &\leq w_{p'}(y_j) \|(\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_p}, \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1, \\ \|Y(\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty}\|_{F'} &\leq w_{p'}(y_j) \|(\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_p}, \end{aligned}$$

el cual muestra que Y es continuo y bién definido.
Similarmente definimos $S_0 \in \mathcal{L}(\ell'_q, \ell_p)$ por:

$$S_0((\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty}) = (\sigma_j \varepsilon_j)_{j=1}^{\infty},$$

es claro que S_0 es lineal, veamos la continuidad:

$$\begin{aligned} \|S_0(\varepsilon_i)_{i=1}^{\infty}\|_{\ell_p} &= (\sum_{i=1}^{\infty} |\sigma_i \varepsilon_i|^p)^{1/p} \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |\sigma_i|^{p\frac{r}{p}})^{\frac{1}{\frac{r}{p}}\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i|^{p(\frac{r}{p})'})^{\frac{1}{(\frac{r}{p})'}\frac{1}{p}} \\ &\leq \ell_r(\sigma_i)\|(\varepsilon_i)_{i=1}^{\infty}\|_{\ell_{q'}}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Para justificar (4.2) solo precisamos mostrar que $q' \leq p(\frac{r}{p})'$

$$\frac{1}{(\frac{r}{p})} + \frac{1}{(\frac{r}{p})'} = 1 \quad \Rightarrow \quad p(\frac{r}{p})' = \frac{p}{1 - \frac{p}{r}} = \frac{1}{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}. \tag{4.3}$$

Además:

$$1 + \frac{1}{r} \geq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{q'} \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{r}. \tag{4.4}$$

De (4.3) y (4.4) tenemos lo pedido.
Finalmente definamos $A \in \mathcal{L}(E, F)$ por:

$$A(x) = (< a_i, x >)_{i=1}^{\infty},$$

es claro que A es lineal, veamos la continuidad:

$$\|A(x)\|_{\ell_{q'}} = (\sum_{i=1}^{\infty} | < a_i, x > |^{q'})^{1/q'} \leq \sup_{\|x\|=1} (\sum_{i=1}^{\infty} | < a_i, x > |^{q'})^{1/q'} = w_{q'}(a_i)\|x\|.$$

Además es fácil ver que $Y \circ S_0 \circ A = S$. Todo esto fue hecho para $1 \leq p < \infty$, el caso $p = \infty$ se hace similarmente.
Para demostrar lo recíproco solo precisamos demostrar que S_0 es un operador (r, p, q) nuclear, para esto basta notar que:

$$S_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \Pi_j \otimes e_j,$$

donde $\Pi_j((\varepsilon_m)_{m=1}^{\infty}) = \varepsilon_j$ y $e_j = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ es el vector con 1 en la componente j-ésima y demostrar que:

(i) $(\sigma_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_r$,

(ii) $(\Pi_j)_{j=1}^{\infty} \in W_{q'}(E')$, donde $E' = \ell_q$,

(iii) $(e_j)_{j=1}^{\infty} \in W_{p'}(F)$, donde $F = \ell_p$.

(i) y (iii) son evidentes, veamos (ii):

$$W_{q'}(\Pi_j) = \sup_{\substack{\|a\| \leq 1, \\ a \in (\mathcal{L}(\ell_{q'}, \mathbb{K}))' = \ell_{q'}}} (\sum_{j=1}^{\infty} | < \Pi_j, a > |^{q'})^{1/q'} \leq (\sum_{j=1}^{\infty} \|\Pi_j\|^{q'})^{1/q'} \tag{4.5}$$

$$\|\Pi_j\| = \sup_{\|(\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_{q'}} = 1} |\Pi_j(\varepsilon_m)_{m=1}^{\infty}| = \sup_{\|(\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_{q'}} = 1} |\varepsilon_j|.$$

Por la definición de $\|\Pi_j\|$, tenemos, para $\delta > 0$:

$$(1 + \delta)|\varepsilon_j| > \|\Pi_j\| \tag{4.6}$$

de (4.5) y (4.6) tenemos:

$$W_{q'}(\Pi_j) < 1 + \delta, \quad \forall \delta > 0,$$

lo cual implica que $W_{q'}(\Pi_j) \leq 1$.
Por la Propiedad Ideal tenemos que:

$$\begin{aligned} N_{(r,p,q)}(Y \circ S_0 \circ A) &\leq \|Y\| N_{(r,p,q)}(S_0) \|A\| \\ N_{(r,p,q)}(S) &\leq \|Y\| N_{(r,p,q)}(S_0) \|A\| \leq \|Y\| \ell_r(\sigma_j) W_{q'}(\Pi_j) W_{p'}(e_i) \|A\| \\ N_{(r,p,q)}(S) &\leq \|Y\| \ell_r(\sigma_j) \|A\| \end{aligned} \tag{4.7}$$

de (4.1) y (4.7) concluimos que:

$$N_{(r,p,q)}(S) \equiv \inf \|Y\| \|A\| \ell_r(\sigma_j)$$

donde el infimo es tomado sobre todos las factorizaciones posibles de S.

Observación 4.6. Para el caso $p = \infty$, se hace de manera semejante.

4.5 Operadores p-compactos

Definición 4.14. Sea $1 \leq p \leq \infty$. Un operador $S \in \mathcal{L}(E, F)$ es llamado p-compacto, si pertenece al ideal normado

$$[\mathcal{R}_p, \mathcal{K}_p] := [\mathcal{N}_{(\infty,p,p')}, N_{(\infty,p,p')}].$$

Además $\mathcal{K}_p^o(S) := N_{(\infty,p,p')}(S)$ para todo operador finito.

Observación 4.7. Para cualquier operador $S \in \mathcal{F}(E, F)$,

$$N^o_{(r,p,q)}(S) := \inf \ell_r(\sigma_i) W_{q'}(a_i) W_{p'}(y_i),$$

donde el infimo es tomado sobre todas las representaciones finitas:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i a_i \otimes y_i.$$

Usando el mismo proceso hecho en el Teorema 4.11 se demuestra que $N^o_{(r,p,q)}$ es una s-norma sobre $\mathcal{F}$.

Teorema 4.13. *Un operador $S \in \mathcal{L}(E, F)$ es p-compacto si y sólo si existe un diagrama commutativo:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "S"] \arrow[dr, "A"'] & & F \\ & \ell_p \arrow[ur, "Y"'] & \end{tikzcd}$$

tal que $A \in \mathcal{R}(E, \ell_p)$ y $Y \in \mathcal{R}(\ell_p, F)$.
En este caso:

$$\mathcal{K}_p(S) = \inf \|Y\| \|A\|,$$

donde el infimo es tomado sobre todas las factoraciones posibles de S.

Demostración. Si S es p-compacto entonces dado $\varepsilon > 0$, por el Teorema 4.12 existe una factoración:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\tilde{A}"'] & F \\ \ell_p \arrow[r, "D"'] & \ell_p \arrow[u, "Y"'] \end{tikzcd}$$

tal que:

$$\|Y\|\ell_\infty(\sigma_i)\|A\| < (1+\varepsilon)N_{(\infty,p,p)}(S) \tag{4.8}$$

Además como $(\sigma_i) \in C_0$ tenemos que $\ell_\infty(\sigma_i) = \|D\|$. Siendo $\tilde{A}, Y$ y D aproximables, tenemos que $A = D \circ A$ y Y son compactos. Finalmente en (4.8) tenemos:

$$\|Y\|\|A\| < (1+\varepsilon)N_{(\infty,p,p)}(S) \tag{4.9}$$

Para la otra implicación, dado que ℓ_p tiene la propiedad de aproximación (ver Teorema 1.7) tenemos que $A \in \mathcal{L}(E, \ell_p)$ y $Y \in \mathcal{L}(\ell_p, F)$ son aproximables.
Siendo Y compacto, tenemos que Y es de la forma:

$$Y(e_j) = \sigma_j f_j,$$

donde $e_j = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$, con 1 en la j-ésima componente y $\lim_{j\to\infty} \sigma_j = 0$.
Logo Y se representa como:

$$Y = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \Pi_j \otimes f_j,$$

el cual es (∞, p, p) nuclear (ver Teorema 4.12).
Luego por la Propiedad Ideal tenemos que S es p-compacto.
Por lo tanto S es (∞, p, p) nuclear y

$$N_{(\infty,p,p)}(S) \leq \|A\|\|Y\| \tag{4.10}$$

Así de (4.9) y (4.10) tenemos:

$$\mathcal{K}_p(S) \equiv \inf \|A\|\|Y\|.$$

□

Lema 4.1. *Sea K un espacio de Hausdorff compacto. Entonces, dado $f_1, ..., f_n \in C(K)$ y $\varepsilon > 0$, existe $L \in \mathcal{F}(C(K), C(K))$ tal que $N_\infty^o(L) \leq 1$ y $\|f_i - Lf_i\| \leq \varepsilon$, para todo $i = 1, ..., n$.*

Demostración. Cubrimos K por subconjuntos abiertos $G_1, ..., G_m$ tal que $|f_i(s) - f_i(t)| \leq \varepsilon$ para $s, t \in G_K$.
Entonces existen $h_1, ..., h_m \in C(K)$ satisfaciendo las siguientes propiedades (partición de la unidad):

$$h_k(t) \geq 0, \quad \forall\, t \in K \tag{4.11}$$

$$h_k(t) = 0, \quad \forall\, t \notin G_K \tag{4.12}$$

$$\sum_{k=1}^{m} h_k(t) = 1, \quad \forall\, t \in K \tag{4.13}$$

Además, fijando $t_1 \in G_1, ..., t_m \in G_m$ y denotando las correspondientes medidas de Dirac por $\delta_1, ..., \delta_n$. Tenemos:

$$L := \sum_{k=1} \delta_k \otimes h_k,$$

es el operador deseado. Claramente $w_\infty(\delta_k) = 1$. Además de $|\lambda_k| \leq 1$ se concluye $\| \sum_{k=1}^m \lambda_k h_k\|_\infty \leq 1$. Por lo tanto $w_1(h_k) \leq 1$. Así tenemos $N_\infty^o(L) \leq 1$. Por otro lado:

$$\|f_i - Lf_i\|_\infty \leq \sup\{\sum_{k=1}^m |f_i(t) - f_i(t_k)| h_k(t) : t \in K\} \leq \varepsilon.$$

□

Lema 4.2. *Si $S \in \mathcal{F}(E, C(K))$, entonces $N_\infty^o(S) = \|S\|$.*

Demostración. Tome una representación finita:

$$S = \sum_{i=1}^n a_i \otimes f_i,$$

tal que $\sum_{i=1}^n \|a_i\| \leq \|S\|$. Por el Lema 4.1 existe $L \in \mathcal{F}(C(K), C(K))$ con $N_\infty^o(L) \leq 1$ y $\|f_i - Lf_i\|_\infty \leq \varepsilon$, para $i = 1, ..., n$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} N_\infty^o(S) &\leq N_\infty^o(LS) + N_\infty^o(S - LS) \\ &\leq N_\infty^o(L)\|S\| + \sum_{i=1} \|a_i\|\|f_i - Lf_i\| < (1+\varepsilon)\|S\|. \end{aligned}$$

Esto prueba que $N_\infty^o(S) \leq \|S\|$. La desigualdad inversa es inmediato.

□

Lema 4.3. *Sea (Ω, μ) un espacio de medida y sea $1 \leq p < \infty$. Entonces dado $f_1, ..., f_n \in L_p(\Omega, \mu)$ y $\varepsilon > 0$, existe $L \in \mathcal{F}(L_p(\Omega, \mu), L_p(\Omega, \mu))$ tal que $\mathcal{K}_p^o(L) \leq 1$ y $\|f_i - Lf_i\|_p \leq \varepsilon$ para $i = 1, ..., n$.*

Demostración. Escogemos funciones simples $f_1^o, ..., f_n^o \in L_p(\Omega, \mu)$ con $\|f_i - f_i^o\|_p \leq \varepsilon/2$. Entonces podemos hallar conjuntos disjuntos $\Omega_1, ..., \Omega_m$ los cuales son μ-medibles, tal que $f_i^o = \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} h_k$, donde $h_1, ..., h_m$ son las funciones características correspondientes. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $0 < \mu(\Omega_k) < \infty$. Definamos las funciones

$u_1, ..., u_m \in L_p(\Omega, \mu)$ y $v_1, ..., v_m \in L_{p'}(\Omega, \mu)$ por $u_k := \mu(\Omega_k)^{-1/p} h_k$ y $v_k := \mu(\Omega_k)^{-1/p'} h_k$, respectivamente. Entonces:

$$L := \sum_{k=1}^{m} v_k \otimes u_k,$$

es el operador requerido. Se sigue de $\sum_{k=1}^{m} |\lambda_k|^p \leq 1$ que:

$$\| \sum_{k=1}^{m} \lambda_k u_k \|_p^p = \sum_{k=1}^{m} |\lambda_k|^p \mu(\Omega_k)^{-1} |h_k|_p^p \leq 1.$$

Por lo tanto $w_{p'}(u_k) \leq 1$. Análogamente $w_p(v_k) \leq 1$. Consecuentemente $\mathcal{K}_p^o(L) \leq 1$. Por otro lado $Lh_k = h_k$ implica $Lf_i^o = f_i^o$ y por lo tanto tenemos:

$$\|f_i - Lf_i\|_p \leq \|f_i - Lf_i^o\|_p + \|Lf_i^o + Lf_i\|_p < \varepsilon.$$

□

Teorema 4.14. *Si $S \in \mathcal{F}(E, L_p(\Omega, \mu))$, entonces $\mathcal{K}_p^o(S) = \|S\|$.*

Demostración. Tomemos una representación finita de S:

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes f_i,$$

tal que $\sum_{i=1}^{n} \|a_i\| \leq \|S\|$. Por el Lema 4.3, i.e para $1 \leq p < \infty$, para $\frac{\varepsilon}{n} > 0$, existe $L \in \mathcal{F}(L_p(\Omega, \mu), L_p(\Omega, \mu))$ tal que:

$$\mathcal{K}_p^o(L) \leq 1 \quad \text{y} \quad \|f_i - Lf_i\|_p \leq \frac{\varepsilon}{n}, \quad i = 1, ..., n.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_p^o(S) &= \mathcal{K}_p^o(LS + S - LS) \leq \|S\| \mathcal{K}_p^o(L) + \mathcal{K}_p^o(S - LS) \\ &\leq (1 + \varepsilon)\|S\|. \end{aligned}$$

En el caso $p = \infty$, es solo usar el Lema 1.1 e imitar lo anterior.

□

4.6 Operadores p-factorables

Definición 4.15. Sea $1 \leq p \leq \infty$. Un operador $S \in \mathcal{L}(E,F)$ es llamado p-factorable si él pertenece al ideal normado:

$$[\mathcal{L}_p, L_p] := [\mathcal{R}_p, \mathcal{K}_p]^{\max}.$$

Ahora establecemos el mayor resultado:

Teorema 4.15. *Sea $1 \leq p < \infty$. Un operador $S \in \mathcal{L}(E,F)$ es p-factorable si y sólo si existe un diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "K_F S"] \arrow[dr, "A"'] & & F'' \\ & L_p(\Omega,\mu) \arrow[ur, "Y"'] & \end{tikzcd}$$

tal que $A \in \mathcal{L}(E, L_p(\Omega,\mu))$ y $Y \in \mathcal{L}(L_p(\Omega,\mu), F'')$. Aquí (Ω,μ) es un espacio de medida conveniente.
En este caso:

$$L_p(S) := \inf \|A\|\|Y\|,$$

donde el infimo es tomado sobre todas las factoraciones posibles.

Demostración. Sea $S \in \mathcal{L}_{p-fat}(E,F)$, por el Teorema 3.4 el operador $K_F S$ puede ser escrito como un ultraproducto $Q(S_i)_\mu J$, donde $S_i = Q_N^F S J_M^E$ con $i := (M,N)$, $M \in \mathcal{F}_X$, $N \in C_Y$. De acuerdo al Teorema 4.12 existe una factorización:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "S_i"] \arrow[dr, "A_i"'] & & F/N \\ & \ell_p \arrow[ur, "Y_i"'] & \end{tikzcd}$$

tal que $\|A_i\| \leq 1$ y $\|Y_i\| \leq (1+\varepsilon)K_p(S_i)$, i.e $\|A\|\|Y\| \leq (1+\varepsilon)L_p(S)$, ver Teorema 4.10. Por el Teorema 3.2 el ultraproducto $(\ell_p)_\mu$ puede ser representado como un espacio $L_p(\Omega,\mu)$ de Banach. Por lo tanto $K_F S$ factorase atravez de $L_p(\Omega,\mu)$.
Inversamente, supongamos que $K_F S$ admite la factorización descrita. Entonces por la Observación 1.2 y el Teorema 4.14 tenemos:

$$\mathcal{K}_p^o(BSX) = \mathcal{K}_p^o(B^{\Pi} K_F SX) = \mathcal{K}_p^o(B^{\Pi} Y AX) \leq \|B^{\Pi} Y\|\|\mathcal{K}_p^o(AX)\| \leq \|B\|\|Y\|\|A\|\|X\|,$$

para todo $X \in \mathcal{F}(E_0, E)$ y $B \in \mathcal{F}(F, F_0)$.
Consecuentemente:

$$S \in \mathcal{L}_{p-fat}(E, F) \quad \text{y} \quad L_p(S) \leq \|Y\|\|A\|.$$

□

Teorema 4.16. *Un operador $S \in \mathcal{L}(E, F)$ es ∞-factorable si y sólo si una de las siguientes afirmaciones ocurren:*

(1) *Existe un espacio de Hausdorff K compacto, operadores $A \in \mathcal{L}(E, C(K))$ y $Y \in \mathcal{L}(C(K), F'')$ tal que*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "K_F S"] \arrow[dr, "A"'] & & F'' \\ & C(K) \arrow[ur, "Y"'] & \end{tikzcd}$$

En este caso:

$$L_\infty(S) = \inf \|Y\|\|A\|,$$

donde el infimo es tomado sobre todas las factoraciones posibles.

(2) *Existe un espacio de medida (Ω, μ), operadores $A \in \mathcal{L}(E, L_\infty(\Omega, \mu))$ y $Y \in \mathcal{L}(L_\infty(\Omega, \mu), F'')$ tal que*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "K_F S"] \arrow[dr, "A"'] & & F'' \\ & L_\infty(\Omega, \mu) \arrow[ur, "Y"'] & \end{tikzcd}$$

En este caso:

$$L_\infty(S) = \inf \|Y\|\|A\|.$$

Demostración. El criterio (1) puede ser verificado con la misma técnica anterior usada en el Teorema 4.15. Por lo tanto solo mostramos la equivalencia de (1) y (2).
Si $K_F S$ admite la factoración (1) entonces:

$$(K_{F'})'Y''K_{C(K)}A = (K_{F'})'YA = K_F S.$$

Por lo tanto $K_F S$ factorase atravez de $C(K)''$. Pero sabemos que podemos identificar $C(K)'$ con algún $L_1(\Omega, \mu)$. Por lo tanto $C(K)''$ y $L_\infty(\Omega, \mu)$ coinciden. Luego la factorización (2) es posible.

La implicación inversa es evidente desde que cualquier espacio de Banach $L_\infty(\Omega, \mu)$ puede ser representado como algún $C(K)$.

$\square$

Capítulo 5

Conclusiones

(A) La teoría de los operadores p-factorables forman parte de la teoría de Ideales de Operadores, el cual es una rama del Análisis Funcional, produciendo resultados y problemas de sumo interes.

(B) La Definición 2.1 dada en el Capítulo 2 es equivalente a la Definición 4.15 dada en el Capítulo 4.

(C) Cuando precisamos demostrar via la Definición 2.1 que el espacio $\mathcal{L}_{p-fat}(X,Y)$ es Banach con la norma $\gamma_p(\Phi) := \inf \|a\|\|b\|$, observamos la estrecha relación entre la teoría de la medida y el Análisis Funcional.

(D) La teoría de los Ultraproductos es bastante útil para mostrar la afirmación hecha en (B). Además de esto, esta teoría es interesante pues nos permite reconstruir un operador $S \in L(E,F)$ desde sus partes elementales.

(E) Para obtener la Definición 4.15 dada en el Capítulo 4 precisamos trabajar con la teoría de los operadores (r,p,q)-nucleares, los cuales son ideales de Operadores Quasi-Normados. Así mismo vemos que los operadores aproximables y operadores de rango finito son de interés para la obtención de algunos teoremas que nos permitirán demostrar que los operadores p-factorables son ideales maximales.

(F) Durante el desarrollo de la teoría de los operadores p-factorables, observamos que existen otros ideales de operadores, que están relacionados entre sí. Importantes ejemplos, son los opeadores compactos, nucleares y absolutamente sumantes.

(G) Cuando un operador se factoriza a travez de un espacio de Hilbert, observamos que esta teoría es elegante y bastante accesible.

Capítulo 6

Bibliografía

[1] Joe Diestel, Hans Jarchow, Andrew Tonge. *Absolutely Summing Operators.* North-Holland, 1994.

[2] Albretch Pietsch. *Operators Ideals*, North-Holland Publishing Company, 1980.

[3] S. Banach. *Theory of Linear Operations*, North-Holland,1987.

[4] h. l. royden. *real analysis*, the macmillan

[5] Andreas Defant, Klaus Flout. *Tensor Norms and Operators Ideals*, North-Holland, 1993.