

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA**



**ANÁLISIS, DISEÑO Y SIMULACIÓN DE UN SISTEMA  
DE CONTROL LÍDER-SEGUIDOR DE ROBOTS  
MÓVILES SUBACTUADOS**

**TESIS**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:**

**INGENIERO MECATRÓNICO**

**ELABORADO POR:**

**JOSÉ ALFREDO DURAND CÁRDENAS**

**ASESOR:**

**M.Sc. RICARDO RODRÍGUEZ BUSTINZA**

**LIMA-PERÚ**

**2020**

A mis padres y hermana, por su apoyo y constante motivación.

# CONTENIDO

<b>Índice de figuras</b>	<b>vi</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>ix</b>
<b>Abreviaturas</b>	<b>x</b>
<b>PRÓLOGO</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo 1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>3</b>
1.1. Estado del arte de los robots móviles .....	3
1.1.1. Robots móviles con miembros articulados .....	5
1.1.2. Robots móviles con ruedas.....	11
1.1.3. Robots móviles subactuados y completamente actuados .....	16
1.2. Estado del arte de los sistemas de control de formación líder-seguidor .....	16
1.3. Motivación y justificación .....	19
1.4. Contribuciones de la Tesis.....	20
1.5. Objetivo de la Tesis .....	20
1.5.1. Objetivo General .....	20
1.5.2. Objetivos específicos .....	20
1.6 Hipótesis .....	21
<b>CAPÍTULO 2.</b>	
<b>MARCO TEÓRICO</b>	<b>22</b>
2.1. Modelo matemático de un robot móvil subactuado .....	22
2.1.1. Sistemas de referencia .....	22
2.1.2. Restricciones cinemáticas .....	24
2.1.3. Cinemática del robot móvil .....	25
2.1.4. Dinámica del robot móvil .....	26
2.1.5. Fuerzas de control .....	28
2.1.6. Ecuaciones de movimiento .....	28
2.2. Instrumentación en el robot móvil .....	30
2.2.1. Sensores y actuadores .....	30

2.2.1.1. Sensores de posición y distancia .....	30
2.2.1.2. Motores DC .....	31
2.2.2. Tarjeta de desarrollo Arduino UNO .....	32
2.2.3. La tarjeta electrónica MD25 .....	33
2.2.4. Parámetros del robot móvil .....	34

### **CAPÍTULO 3.**

#### **CÁLCULOS Y/O APLICACIONES Y OBTENCIÓN DE RESULTADOS 42**

3.1. Control de Trayectoria para el robot líder de la formación .....	42
3.1.1. Diseño del controlador de velocidad para el motor DC .....	42
3.1.1.1. Selección del tiempo de muestreo .....	42
3.1.1.2. Diseño y sintonización del controlador de velocidad .....	43
3.1.2. Diseño del controlador para el seguimiento de trayectoria .....	47
3.1.2.1. Control No Lineal basado en el modelo cinem. del robot ....	48
3.1.2.2. Control No Lineal basado en la estabilidad de Lyapunov ...	51
3.1.3. Casos de estudio.....	54
3.2. Sistema de control para una formación de robots móviles .....	63
3.2.1. El controlador ' $\mathbf{l} - \boldsymbol{\alpha}$ ' .....	64
3.2.1.1. Estudio y Diseño .....	64
3.2.1.2. Análisis de Estabilidad y Controlabilidad .....	66
3.2.2. El controlador ' $\mathbf{l} - \mathbf{l}'$ .....	69
3.2.2.1. Estudio y Diseño .....	69
3.2.2.2. Análisis de Estabilidad y Controlabilidad .....	70
3.2.3. Evasión de obstáculos .....	71
3.2.3.1. Planteamiento del Problema .....	71
3.2.3.2. Diseño del controlador .....	74
3.2.4. Formación de varios robots móviles .....	77
3.3. Estimador para la formación de 2 robots móviles .....	78
3.3.1. Control de realimentación adaptivo .....	78
3.3.2. Diseño del estimador basado en Inmersión e Invarianza .....	79
3.3.3. Diagrama de bloques para el sistema de control de formación .....	80

<b>CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONTRASTACIÓN DE HIPÓTESIS</b>	<b>82</b>
4.1. Casos de estudio .....	82
4.1.1. Respuesta del controlador ' $\mathbf{l} - \boldsymbol{\alpha}'$ .....	82
4.1.2. Respuesta del controlador ' $\mathbf{l} - \mathbf{l}'$ .....	90
4.2. Inclusión de un observador no lineal .....	94
4.3. Escenario con obstáculos .....	97
4.4. Variación de la formación en el tiempo .....	101
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>111</b>
<b>TRABAJO FUTURO</b>	<b>113</b>
<b>Referencias Bibliográficas</b>	<b>114</b>
<b>APÉNDICE</b>	<b>117</b>
Apéndice A. Diagramas de bloques para el control de formación .....	118
A.1 Seguimiento de trayectoria del robot líder en la formación .....	118
A.2. Estrategia de control ' $\mathbf{l} - \boldsymbol{\alpha}'$ para 2 (dos) robots en formación .....	119
A.3. Estrategia de control ' $\mathbf{l} - \mathbf{l}'$ para 3 (tres) robots en formación .....	120
A.4. Sistema observado .....	121
A.5. Entorno con obstáculos .....	122
Apéndice B. Obtención de parámetros del controlador no lineal .....	123
Apéndice C. Hoja de Datos de los motores EMG30 .....	127

## ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 1.1	Modelo funcional de un robot .....	3
Fig. 1.2	Diferentes configuraciones de robots con miembros articulados .....	6
Fig. 1.3	El robot Rabert Hopper, y su circuito neumático .....	7
Fig. 1.4	Desarrollo histórico de los robots bípedos .....	9
Fig. 1.5	El robot AIBO, y el robot Wildcat .....	9
Fig. 1.6	Robot humanoide ATLAS .....	10
Fig. 1.7	Plataforma del hexápodo <i>Lauron II</i> .....	11
Fig. 1.8	Plataforma de motocicleta programable con Arduino .....	14
Fig. 1.9	El robot <i>SmartEase PC104</i> .....	14
Fig. 1.10	Los robots <i>Neptune, Tribolo, Denning MRV-2</i> .....	14
Fig. 1.11	El robot <i>Hyperion</i> , y la plataforma del robot <i>Uranus</i> .....	15
Fig. 1.12	El robot móvil <i>Khepera</i> , y el robot <i>Nomad XR 400</i> .....	15
Fig. 1.13	Plataforma del robot <i>Terregator</i> .....	15
Fig. 1.14	Representación gráfica de un robot móvil subactuado .....	17
Fig. 1.15	Notación para el control ángulo-distancia ' $l - \alpha'$ , y el controlador ' $l - l'$ .....	19
Fig. 2.1	Sistemas de referencia asociados a un robot móvil subactuado .....	22
Fig. 2.2	Restricción de movimiento de rodadura pura .....	24
Fig. 2.3	Velocidad lineal $v$ y velocidad angular $w$ del robot .....	26
Fig. 2.4	Sensor MPU6050 .....	30
Fig. 2.5	Sensor de distancia SHARP GP2Y0A21 .....	31
Fig. 2.6	Motor DC EMG30 .....	32
Fig. 2.7	Plataforma de desarrollo Arduino UNO .....	33
Fig. 2.8	Distribución de conectores en la tarjeta electrónica MD25 .....	34
Fig. 2.9	Esquema de conexión con Arduino UNO mediante I <sup>2</sup> C .....	34
Fig. 2.10	Motor DC acoplado a rueda: $\phi = 100\text{mm}$ .....	35
Fig. 2.11	Momento de inercia de la rueda a través del eje Y y el eje Z .....	36
Fig. 2.12	Momento de inercia del motor alrededor del eje Y .....	36
Fig. 2.13	Momento de inercia del soporte de motor alrededor del eje Y .....	37
Fig. 2.14	Distancias para el cálculo del momento de inercia .....	38
Fig. 2.15	Robot móvil y sus componentes .....	39
Fig. 2.16	Distancias para el cálculo de momentos de inercia del robot .....	40
Fig. 3.1	Diagrama de bloques para el sistema de control de velocidad del motor DC en lazo cerrado .....	44
Fig. 3.2	Respuesta del sistema en lazo cerrado .....	46
Fig. 3.3	Diagrama de bloques para el sistema de control de velocidad del motor DC en lazo cerrado, con acción anti-windup .....	47
Fig. 3.4	Respuesta del sistema en lazo cerrado, con acción anti-windup .....	48
Fig. 3.5	Ubicación de referencia, y ubicación actual del robot móvil .....	51
Fig. 3.6	Robot móvil siguiendo una trayectoria lineal por tramos .....	55
Fig. 3.7	Orientación del robot siguiendo la trayectoria lineal por tramos .....	56
Fig. 3.8	Robot siguiendo una trayectoria parabólica .....	57
Fig. 3.9	Orientación del robot móvil .....	57

Fig. 3.10	Robot móvil siguiendo una trayectoria circular .....	59
Fig. 3.11	Orientación del robot móvil .....	59
Fig. 3.12	Robot móvil siguiendo una trayectoria descrita por una lemniscata ...	60
Fig. 3.13	Orientación de referencia y del robot móvil .....	61
Fig. 3.14	Trayectoria deseada y del robot móvil .....	62
Fig. 3.15	Orientación de referencia y del robot móvil .....	63
Fig. 3.16	Ubicación de referencia $\eta_{2r}$ y ubicación actual $\eta_{2c}$ del robot seguidor en una formación .....	64
Fig. 3.17	La estrategia de control ' $l - \alpha'$ .....	65
Fig. 3.18	La estrategia de control ' $l - l'$ .....	70
Fig. 3.19	Evasión de un obstáculo por parte de un robot seguidor .....	72
Fig. 3.20	Diagrama de bloques de un sistema de formación de 2 robots, con las variables estimadas del robot seguidor .....	81
Fig. 4.1	Trayectoria de 2 robots en formación en una trayectoria lineal por tramos .....	83
Fig. 4.2	Orientación en el tiempo de los 2 robots .....	84
Fig. 4.3	Variables controladas de distancia $l_{12}$ y ángulo $\alpha_{12}$ .....	85
Fig. 4.4	Velocidades lineales de los robots .....	86
Fig. 4.5	Voltaje sobre los motores de los robots .....	86
Fig. 4.6	Trayectoria de 2 robots en formación en una trayectoria descrita por una lemniscata .....	87
Fig. 4.7	Orientación en el tiempo de los 2 robots .....	88
Fig. 4.8	Variables controladas de distancia $l_{12}$ y ángulo $\alpha_{12}$ .....	88
Fig. 4.9	Velocidades lineales de los robots .....	89
Fig. 4.10	Voltaje sobre los motores de los robots .....	89
Fig. 4.11	Trayectoria de 3 robots en formación en una trayectoria circular .....	90
Fig. 4.12	Orientación en el tiempo de los 3 robots .....	91
Fig. 4.13	Variables controladas de distancia $l_{12}$ y ángulo $\alpha_{12}$ .....	92
Fig. 4.14	Variables controladas de distancias $l_{13}$ y $l_{23}$ .....	92
Fig. 4.15	Velocidades lineales de los robots .....	93
Fig. 4.16	Voltaje sobre los motores de los robots .....	93
Fig. 4.17	Trayectoria de 2 robots en formación en una trayectoria lineal por tramos, con las variables estimadas del seguidor .....	95
Fig. 4.18	Orientación en el tiempo de los robots .....	95
Fig. 4.19	Variables controladas y estimadas de distancia $l_{12}$ y $\alpha_{12}$ .....	96
Fig. 4.20	Velocidades estimadas del robot líder y robot seguidor .....	97
Fig. 4.21	Trayectoria de 2 robots en formación en una trayectoria parabólica, frente a un obstáculo .....	98
Fig. 4.22	Orientación en el tiempo de los 2 robots .....	99
Fig. 4.23	Variables controladas de distancia $l_{12}$ y ángulo $\alpha_{12}$ .....	99
Fig. 4.24	Velocidades lineales de los robots .....	100
Fig. 4.25	Voltaje sobre los motores de los robots .....	100
Fig. 4.26	Orientación en el tiempo de 6 (seis) robots en formación .....	103
Fig. 4.27	Comportamiento de 6 robots en formación variable en el tiempo ...	104
Fig. 4.28	Variables controladas de distancia $l_{12}$ y ángulo $\alpha_{12}$ .....	105
Fig. 4.29	Variables controladas de distancias $l_{13}$ y $l_{23}$ .....	106

Fig. 4.30	VARIABLES CONTROLADAS DE DISTANCIA $l_{24}$ Y ÁNGULO $\alpha_{24}$ .....	106
Fig. 4.31	VARIABLES CONTROLADAS DE DISTANCIAS $l_{35}$ Y $l_{45}$ .....	107
Fig. 4.32	VARIABLES CONTROLADAS DE DISTANCIAS $l_{36}$ Y $l_{56}$ .....	107
Fig. 4.33	VELOCIDADES LINEALES DE LOS ROBOTS .....	108
Fig. 4.34	VOLTAJE SOBRE LOS MOTORES DE LOS ROBOTS 1, 2 Y 3 DE LA FORMACIÓN ....	109
Fig. 4.35	VOLTAJE SOBRE LOS MOTORES DE LOS ROBOTS 4, 5 Y 6 DE LA FORMACIÓN ....	110



## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.1	Robots vs Humanos: partes funcionales .....	4
Tabla 1.2	Mecanismos de movimiento .....	5
Tabla 1.3	Desarrollo de los robots bípedos .....	7
Tabla 1.4	Configuración de ruedas para robots móviles .....	12
Tabla 2.1	Parámetros del motor DC EMG30 .....	32
Tabla 2.2	Parámetros del robot móvil .....	41
Tabla 3.1	Estrategia de diseño para el control de formación de 6 robots Móviles .....	77
Tabla 4.1	Parámetros de distancia $l_{ij}$ y ángulo $\alpha_{ij}$ deseados durante la formación variante el tiempo .....	102
Tabla 4.2	Parámetros de los controladores durante la formación variante el tiempo .....	102

## ABREVIATURAS

- GDL** : Grados de libertad  
**LSB** : Bit menos significativo  
**Dps** : grado por segundo  
**CM** : Centro de massa  
**CG** : Centro de gravedad  
**SRI** : Sistema de Referencia Inercial  
**IMU** : Unidad de medida inercial

## PRÓLOGO

El presente trabajo tiene por objetivo analizar y mostrar los resultados de un sistema de control aplicado a un sistema formado por dos o más robots móviles, con un patrón de formación establecido. El algoritmo de control para la obtención en el tiempo de esta configuración geométrica ha sido, y continúa siendo estudiada por varios investigadores, debido a sus diversas aplicaciones. Por ejemplo, un conjunto de robots móviles es empleado en vigilancia, ya que de esta forma se abarca una mayor área de reconocimiento de actividades. Por otro lado, en oceanografía, un sistema formado por varios robots marítimos permite realizar el monitoreo de presión y temperatura en diferentes puntos de un determinado espacio de agua. En la ingeniería de protección contra incendio, al usar varios robots a la vez debidamente equipados, se consigue apaciguar un incendio por diversos frentes y en menor tiempo.

En ese sentido, cuando se trabaja con un sistema conformado por varios robots, es importante establecer un eficaz algoritmo de control. Para ello, se requiere conocer las características que presenta dicho sistema y las herramientas de software y hardware a utilizar. Esta información es detallada en el presente documento de tesis, y su estructura es como sigue:

El capítulo 1 presenta el estado del arte de los robots móviles. En particular, se describen las características de los robots subactuados, aquellos cuyo número de actuadores es menor a la cantidad de grados de libertad que posee. Conociendo ello, se hace una revisión de los sistemas de control aplicado a un sistema conformado por varios agentes (robots), y, específicamente, se aborda el estudio de los sistemas de control líder-seguidor.

En el capítulo 2 se obtuvo el modelo matemático de un robot móvil subactuado. Con el fin de describir su movimiento en el tiempo, se definen los sistemas de referencia que son usados en el análisis, y se obtienen las ecuaciones cinemáticas y dinámicas. Así también, se determina la ecuación del movimiento del robot móvil.

El hardware usado en el robot móvil también es presentado. Se mencionan los sensores y actuadores necesarios para la validación del diseño del controlador líder-seguidor, así como las características físicas del robot. En vista de que motores EMG30 serán usados para este caso, se mencionan las funcionalidades de la tarjeta electrónica MD25 como driver para los motores. Adicionalmente, se obtienen los parámetros de momentos de inercia por medio de software de ingeniería.

En la primera sección del capítulo 3 se desarrolla el algoritmo de seguimiento de trayectoria para un robot. Se diseña un controlador por realimentación de estados y un controlador no lineal, a fin de comparar resultados en cuanto a estabilidad del sistema y seguimiento de trayectorias curvas y rectilíneas. El control de velocidad de los motores del robot es sintonizado mediante un PID.

El capítulo 3 presenta también el controlador de formación líder-seguidor en sus dos (02) enfoques: Un control basado en la distancia y ángulo de separación entre el robot líder de la formación y el robot seguidor ( $l - \alpha'$ ), y un control basado en la distancia de separación entre un robot seguidor y 2 robots líderes ( $l - l'$ ). Se estudia el caso de un entorno con obstáculos, y se hace un análisis de controlabilidad y estabilidad del sistema. Asimismo, se extiende el diseño del sistema de control para 6 robots que deben seguir una trayectoria determinada con un patrón de formación variante en el tiempo.

En el caso que la distancia y ángulo de separación entre el robot líder y el robot seguidor no puedan medirse, corresponde que sean estimados. En ese sentido, en la tercera sección del capítulo 3, se analiza el comportamiento del robot seguidor bajo este caso, y se determinan los estados estimados en el sistema de control de formación líder-seguidor:  $(\hat{l}_{12}, \hat{\alpha}_{12})$

Los resultados obtenidos con los controladores diseñados para diferentes casos de estudio se muestran en el capítulo 4, en el cual también se analiza el desempeño de dichos controladores y se verifica el cumplimiento de la ley de control líder-seguidor.

De acuerdo a lo mencionado en párrafos anteriores, el tema de investigación se encuentra relacionado al análisis y diseño de controladores para sistemas no lineales. En ese sentido, su contribución recae en el área de control no lineal, permitiendo conocer técnicas con las cuales se logre establecer una coordinación o cooperación entre 2 o más agentes (robots) para un objetivo en particular, en este caso, un patrón de formación deseado.

Finalmente, el presente trabajo no hubiese sido posible sin los valiosos aportes alcanzados por mi asesor de tesis, el Profesor Ricardo Rodríguez Bustinza; y tampoco sin la siempre reconfortante confianza y motivación de mi madre a lo largo de mi vida.

# CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

## 1.1. ESTADO DEL ARTE DE LOS ROBOTS MÓVILES

Los robots están rápidamente evolucionando, desde sus principios en fábricas en 1961, a máquinas cada vez más complejas capaces de realizar tareas desafiantes en nuestro entorno diario. Es así que hay robots capaces de soldar, pintar, mover objetos o realizar cortes a gran velocidad y con alta precisión. Un ejemplo de ello es la notable reducción del tiempo en el proceso de ensamblaje de un auto. Estos sistemas robóticos poseen un conjunto de partes funcionales similares a la de un ser humano [3], tal y como se muestra en la Figura 1.1.

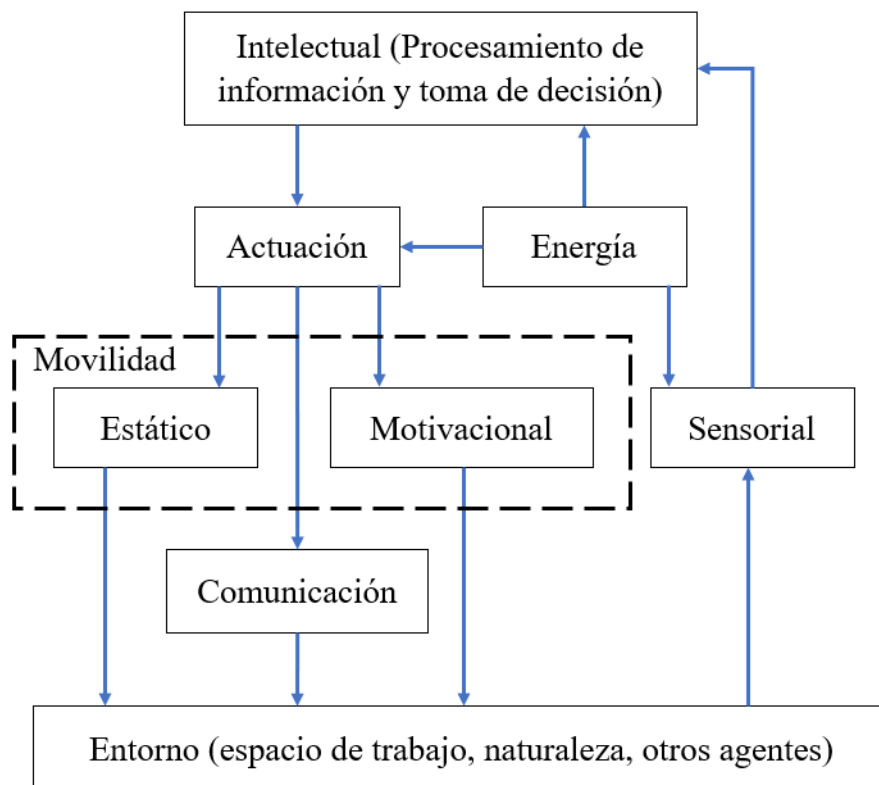


Figura 1.1 – Modelo funcional de un robot. (Fuente: Chen, 2009)

En razón a lo mencionado en el párrafo anterior, y debido a las diversas configuraciones, funciones, aplicaciones y autonomía que pueda tener un robot, no hay una definición única, pero puede decirse que es “Un manipulador multifuncional, reprogramable, diseñado para mover materiales, herramientas, o dispositivos especializados a través de varios movimientos programados para el desempeño de una variedad de tareas”. Conforme a lo mostrado en la Figura 1.1, las partes funcionales del robot constituyen un sistema en lazo cerrado.

Aunque dichas partes funcionales entre robots y seres humanos sean las mismas, existe una correspondencia entre cada una de ellas, como se puede ver en la Tabla 1.1.

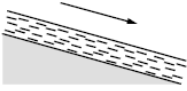
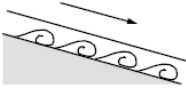
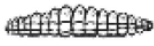


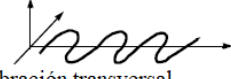

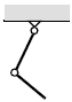

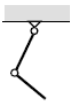


**Tabla 1.1.** Robots vs humanos: partes funcionales (Fuente: Chen, 2009)

<b>Parte funcional</b>	<b>Personas</b>	<b>Robot</b>
Intelectual	Cerebro	Microprocesador (hardware & software)
Elemento estructural	Esqueleto	Fuselaje (robots aéreos) Casco (vehículos submarinos) Chasis (robots terrestres)
Movilidad	Extremidades	Ruedas, propulsores, pinzas.
Actuación	Músculos	Actuadores hidráulicos, eléctricos, neumáticos, piezoeléctricos; músculos artificiales.
Percepción (sensorial)	Ojos, oídos, piel	Cámaras, sensores ópticos, luz infrarroja, sonar.
Comunicación	Diálogos y gestos	Data, imágenes, videos, sonidos
Energía	Alimento	Fuente de alimentación, almacén de energía

Como resultado, un robot constituye un conjunto complejo de bloques fundamentales, cada uno de los cuales debe escogerse de acuerdo a las características del entorno donde va a permanecer.

En el caso de un robot móvil, aquel que necesita mecanismos de movimiento que le permitan desplazarse sin límites a través de su entorno, un aspecto importante es la elección de dichos mecanismos, dependiendo si el robot está programado para caminar, saltar, correr, deslizarse, nadar, volar, y/o rodar, acciones inspiradas en su contraparte biológica, como se aprecia en la Tabla 1.2.

**Tabla 1.2.** Mecanismos de movimiento (Fuente: Siegwart & Nourbakhsh, 2004)

Tipo de movimiento	Resistencia al movimiento	Cinemática del movimiento
Flujo en un canal 	Fuerzas hidrodinámicas	Remolinos 
Arrastre 	Fuerzas de fricción	Vibración longitudinal 
Deslizamiento 	Fuerzas de fricción	Vibración transversal 
Correr 	Pérdida de energía cinética	Movimiento oscilatorio de un péndulo multienlace 
Saltar 	Pérdida de energía cinética	Movimiento oscilatorio de un péndulo multienlace 
Caminar 	Fuerzas gravitacionales	Rodadura de un polígono 

Sin embargo, a pesar que no es tan ajeno a los sistemas biológicos, la rueda como mecanismo es una excepción, puesto que es una invención del hombre. Inclusive, éste ha sido el más popular debido a resultados eficientes y a su implementación mecánica relativamente menos complicada [28].

Teniendo en cuenta ello, los robots móviles por lo general se desplazan mediante el uso de un número de miembros articulados, o por medio de ruedas.

### 1.1.1. Robots móviles con miembros articulados

Los robots móviles de este tipo presentan una determinada cantidad de puntos de contacto con la superficie (ver Fig. 1.2). Se adaptan y maniobran adecuadamente en terreno complicado. Además, son capaces de cruzar un agujero (o una discontinuidad en la superficie), siempre que su alcance sea mayor al diámetro de tal agujero.

Por otro lado, las principales desventajas del movimiento en este tipo de robots incluyen la energía y la complejidad mecánica. Los miembros deben ser capaces de sostener una parte del peso total del robot, y, además, con el fin de moverse en diferentes direcciones, los miembros articulados deben poseer un número suficiente de grados de libertad, algo que, por lo general, es complicado de conseguir.

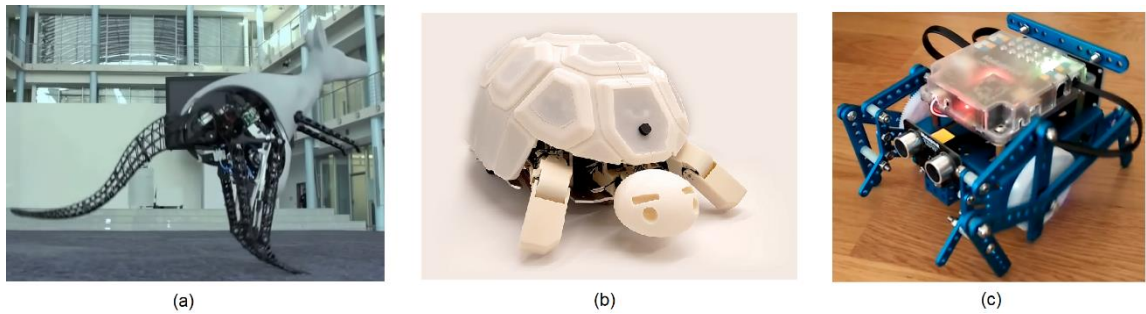


Figura 1.2 – Diferentes configuraciones de robots con miembros articulados. (a) Mamíferos, (b) Reptiles, (c) Insectos

En la actualidad existen diferentes configuraciones de robots con miembros articulados. Dependiendo de las características del entorno y la aplicación que traiga consigo el diseño y la implementación del robot, éste deberá poseer dos, cuatro, seis o más miembros articulados.

Sin embargo, cabe resaltar que la mínima cantidad de miembros articulados que puede tener un robot es igual a uno. Este es el caso del modelo llamado *Raibert Hopper* [35] (Figura 1.3), que posee como actuador una bomba hidráulica, la cual debe estar conectada al robot en todo momento. Los saltos ocasionados por cada accionamiento de la bomba hacen que el robot alcance su estabilidad.

A pesar que su configuración no permite que sea usado en varias aplicaciones, las razones por las que se desarrolló este robot fueron las siguientes: [23]

1. Es más simple estudiar el balance de un sistema que posee una sola pata, porque se elimina la difícil tarea de acoplar el comportamiento de varias patas a la vez.
2. El diseño propio del sistema orienta a enfocarse en el balance, porque un sistema con una sola pata no tiene otra forma de mantenerse de pie.
3. El comportamiento y control del robot con una sola pata podría ser usado como punto de partida para el estudio de robots con mayor cantidad de patas.
4. Un sistema con una sola pata posee el mínimo equipamiento. Un menor equipamiento implica menos tiempo en su construcción, menos tiempo de inactividad debido a fallas mecánicas, y una operación más confiable.

En cuanto a los *robots bípedos*, éstos han sido investigados desde los años 60. En 1968, Smo-Sher, quien trabajaba en General Motors en los Estados Unidos, desarrolló un robot bípedo caminante llamado *Rig* [34]. Posteriormente, desde 1968 a 1969, el científico yugoslavo Vukobratovic propuso una importante teoría respecto a los criterios de estabilidad en los robots bípedos, y desde entonces, se inició la investigación en varios países del mundo de estos tipos de robots, los cuales, debido a su configuración, pueden caminar, correr, saltar, subir y bajar escaleras, e incluso, dar volteretas (Figura 1.6, pág. 10). De hecho, compañías como SONY y HONDA han realizado impresionantes avances durante los últimos 25 años.



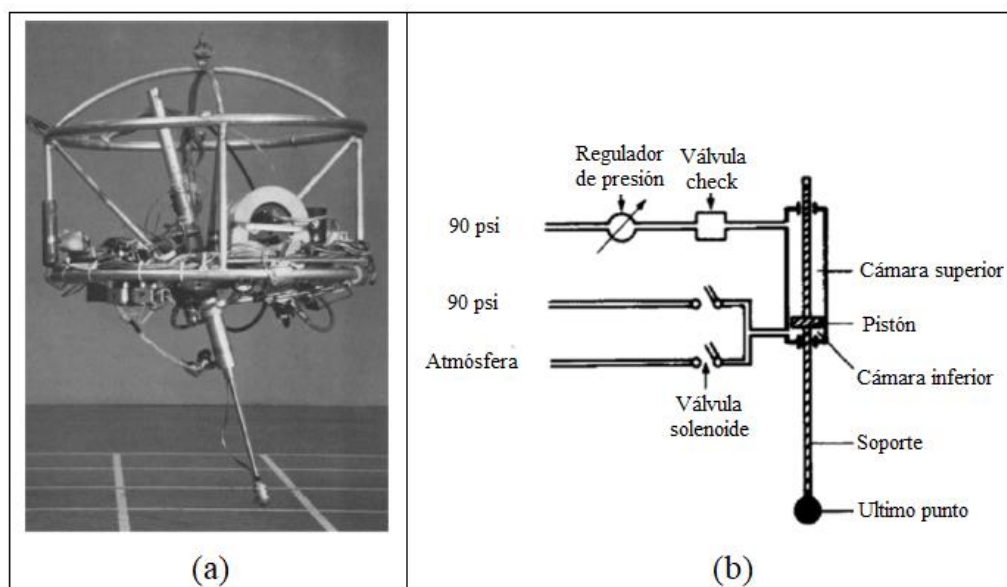


Figura 1.3 – (a) Raibert Hopper y (b) el circuito neumático de su único miembro de soporte. Uno de los robots más famosos de su tipo (*MIT'S Leg Lab, 1983*)

El curso de desarrollo principal de los robots bípedos es mostrado en la Figura 1.4 (Pág. 9) y en la Tabla 1.3:

**Tabla 1.3.** Desarrollo de los robots bípedos (Fuente: Yang, Xiong et al., 2017)

Año	Científico / Institución	Logros
1968	R. Smo-Sher, Estados Unidos	Rig
1969	M. Vukobratovic, Yugoslavia	Criterios de estabilidad ZMP <sup>1</sup>
1969	Kato Ichiro, Japón	WAP-1
1970	Witt, Reino Unido	Robot tipo "Witt"
1984	Kato Ichiro, Japón	WL-10RD
1986	Honda, Japón	E0
1988	Universidad Nacional de Tecnología de Defensa, China	KDW-I
1989	Mogeer, Estados Unidos	Caminata dinámica pasiva
1990	Y.F. Zheng et al., Estados Unidos	Redes neuronales, SD-1
1993	Honda, Japón	P-1
1997	Honda, Japón	P-3
1997	J.E. Pratt y G.A. Pratt, USA	Control de modelo virtual

<sup>1</sup> ZMP: De las siglas en inglés, Zero Moment Point.

**Tabla 1.3.** *continuación*

<b>Año</b>	<b>Científico / Institución</b>	<b>Logros</b>
1999	MIT, USA	COG
2000	Honda, Japón	ASIMO
2000	Sony, Japón	SDR-3X
2002	Beijing Institute of Technology, China	BHR
2004	Corea del Sur	HUBO
2004	Consortio RobotCub, Italia	Icub
2005	University of Florida, USA	Rabbit
2005	MIT, America	Domo
2007	Aldebaran Robotics, Francia	NAO
2008	University of Tehran, Iran	Surena I
2009	Technical University of Munich, Alemania	LOLA
2009	Aldebaran Robotics, Francia	Romeo
2010	AIST, Japón	HRP-4C
2012	NRL, USA	SAFFiR
2013	Institute of Robotics and Mechatronics, Alemania	TORO
2013	Boston Dynamics, USA	PETMAN
2015	University of Tehran, Iran	Surena III
2016	Boston Dynamics, USA	Atlas

A la fecha, la investigación y el desarrollo de los robots bípedos están principalmente enfocados en Japón, Estados Unidos, Francia, China y Corea del Sur. Sin embargo, el enfoque de investigación es distinto en cada país. Los robots japoneses son desarrollados con la idea de simular los movimientos del ser humano. Europa, por otro lado, desarrolla estos sistemas con interés en la medicina; mientras que Estados Unidos busca que tengan aplicaciones militares. [34]

Con respecto a los robots de 4 patas, el proceso de diseño e implementación es también desafiante, puesto que para que el robot se mantenga estable, su centro de gravedad debe ir cambiando en cada paso que realice. Algunos de estos robots sirven como equipos para la investigación en la interacción hombre-robot. Las personas, por ejemplo, pueden tratar al robot AIBO (Fig. 1.5a, Pág. 9) como una mascota y pueden desarrollar una relación emocional similar a la que ocurre entre un perro y una persona [28].

Por otro lado, también se han desarrollado robots de 4 patas más robustos y elaborados, como es el caso del robot Wildcat (Figura 1.5b, Pág. 9), el que puede alcanzar los 30 km/h.

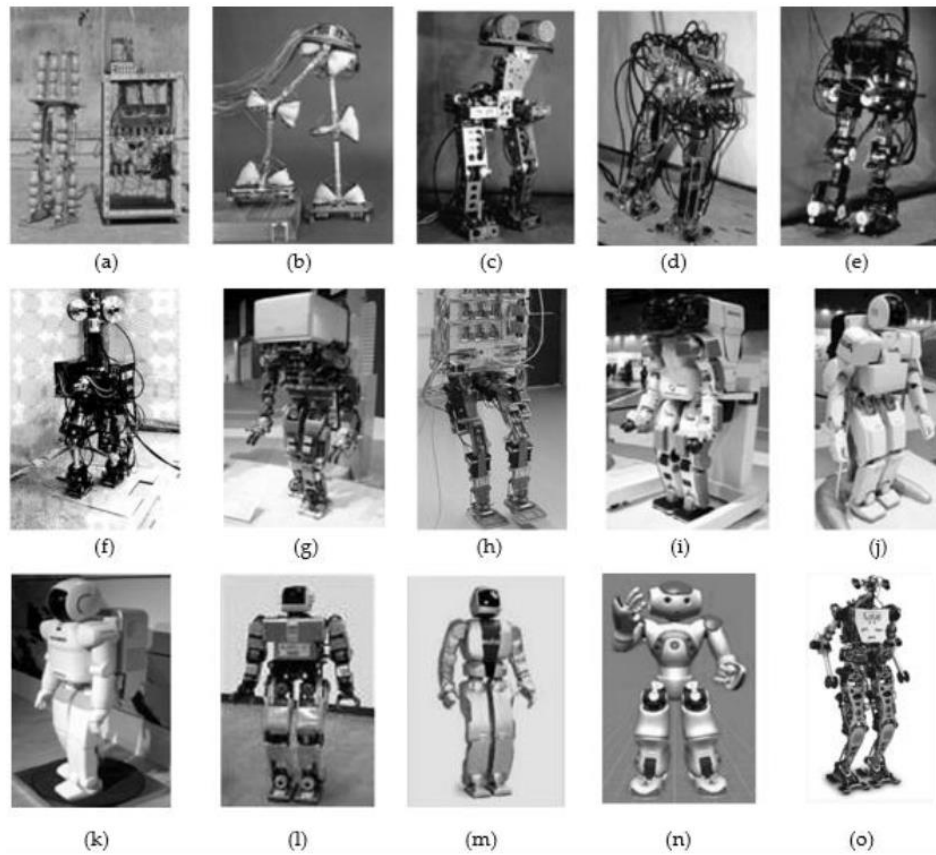


Figura 1.4 – Desarrollo histórico de los robots bípedos. (a) WAP-1; (b) WAP-3; (c) WL-5; (d) WL-9DR; (e) WL-10RD; (f) WL-12; (g) Honda P-1; (h) BIP2000; (i) Honda P-2; (j) Honda P-3; (k) ASIMO; (l) KHR-2; (m) HUBO; (n) NAO; (o) LOLA (Fuente: Yang, Xiong et al., 2017)

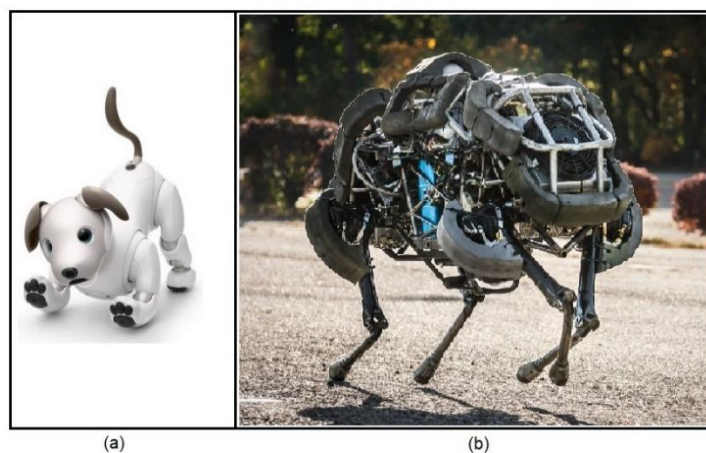
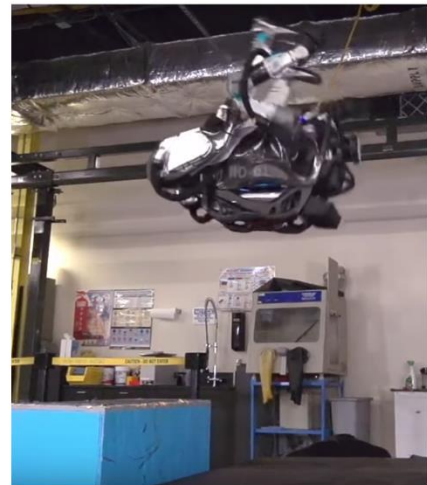


Figura 1.5 – (a) Robot *AIBO*, desarrollado por SONY. (b) Robot *Wildcat*, fabricado por Boston Dynamics.



(a)



(b)



(c)

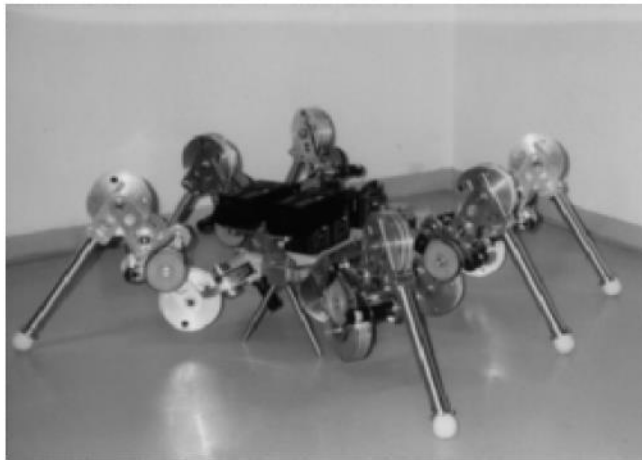


(d)

Figura 1.6 – Voltereta realizada por el robot humanoide Atlas. Secuencia de giro: a-b-c-d. (Boston Dynamics, 2017)

La robótica móvil también cuenta con robots cuyas configuraciones presentan 6 patas (hexápodo), y son muy populares debido a su estabilidad estática mientras se desplaza, por lo que la complejidad en el control se ve reducida (Figura 1.7, pág. 11). Sin embargo, no todas las patas del robot son usadas para la estabilidad. Otras patas pueden encontrarse libres con el fin de que el robot alcance una nueva ubicación como parte de su trayectoria, o en todo caso, para cuando se requiera manipular una determinada carga.

Estos robots son inspirados en el movimiento de insectos, y frecuentemente cada una de las patas de dichos robots posee entre 2 a 6 grados de libertad (GDL). Algunos de los aspectos más importantes para el diseño de estos robots son: la estructura mecánica, arquitectura de la pata, tamaños máximos, actuadores y mecanismos de manejo, arquitectura de control, alimentación, capacidad de evasión de obstáculos, etc.



Especificaciones:

Velocidad máxima	: 0.5 m/s
Peso	: 6 Kg.
Altura	: 0.3 m.
Longitud	: 0.7 m.
GDL en total	: 6 x 3
Consumo de potencia	: 10W.

Figura 1.7 –Lauron II, plataforma de un hexápodo desarrollado en la Universidad de Karlsruhe, Alemania. (Fuente: Siegwart & Nourbakhsh, 2004)

Una revisión del estado del arte de los robots hexápodos muestra que el diseño de cada uno de ellos es único, puesto que pueden desarrollarse en distintas configuraciones, y cada solución tiene sus propios criterios. Por ejemplo, existen sistemas robóticos que no sólo tienen patas como mecanismo para su desplazamiento, sino que cuentan también con ruedas. Esta configuración de robots móviles se presenta en la siguiente sección.


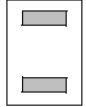
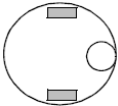
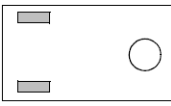
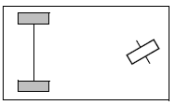
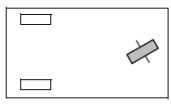
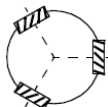

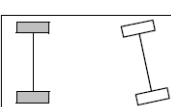
### 1.1.2. Robots móviles con ruedas

Como se expuso en la sección anterior, es una tarea bastante usual el diseñar un sistema artificial que replique el movimiento de alguna especie animal (Fig. 1.2, Pág 6). Sin embargo, a pesar de que las ruedas no constituyen una parte del reino animal, los vehículos con ruedas son conocidos por permitir un movimiento sobre la superficie con un uso eficiente de energía. No se sabe exactamente cuándo se inventó la rueda, pero las primeras fueron usadas en Mesopotamia aproximadamente en el año 4000 AC., y desde ahí, se expandieron a todo el mundo. [20]

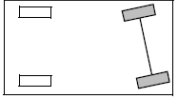
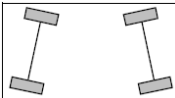
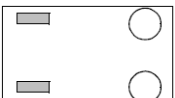
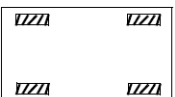

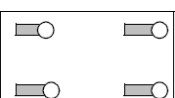
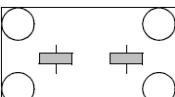
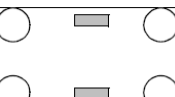
Cuando se usan ruedas en el diseño de un robot, el problema de investigación no es usualmente el balance, ya que estos tipos de robots se diseñan con el fin de que todas las ruedas tengan contacto con la superficie en todo momento. El problema en estos sistemas se plantea en base a la tracción, estabilidad, maniobrabilidad y control, teniendo en cuenta que puede haber hasta cuatro (4) tipos de ruedas [28, Pág. 30].

El hecho de seleccionar cierto tipo de ruedas, sin embargo, conlleva a tener en cuenta el arreglo de las mismas en un robot. Un resumen de dichos arreglos se muestra en la Tabla 1.4. (pp. 12-13)

**Tabla 1.4.** Configuración de ruedas para robots móviles (Fuente: Siegwart & Nourbakhsh, 2004)

Nro. ruedas	Configuración	Descripción	Ejemplos
2		1 rueda direccional delantera, y 1 rueda de tracción posterior.	Bicicleta, motocicleta
		Mecanismo diferencial de 2 ruedas, con su centro de masa (CM) bajo el eje.	Robot personal Cye
3		Mecanismo diferencial de 2 ruedas, centrado, con un 3er punto de contacto.	Nomad Scout, smartRob EPFL
		2 ruedas independientes, y 1 rueda omnidireccional libre.	Robot Pygmalion
		2 ruedas de tracción conectadas, 1 rueda direccional	TinyPremarker
		2 ruedas libres, y 1 rueda direccional de tracción.	Neptune, Hero-1
		3 ruedas esféricas motorizadas en configuración triangular. Es posible movimiento omnidireccional.	Palm Pilot Robot kit, Tribolo <sup>(3)</sup>
		3 ruedas motorizadas y direccionales síncronamente; orientación no controlable.	“Synchro drive” Denning MRV-2, Georgia Institute of Technology, I-Robot B24, Nomad 200.
4		2 ruedas motorizadas en la parte posterior, 2 ruedas direccionales al frente; dirección debe ser diferente para las 2 ruedas, a fin de evitar derrape.	Auto con tracción posterior

**Tabla 1.4.** *continuación*

Nro. ruedas	Configuración	Descripción	Ejemplos
4		2 ruedas motorizadas y direccionales al frente, 2 ruedas libres posteriores; dirección debe ser diferente para las 2 ruedas a fin de evitar derrape.	Auto con tracción delantera
		4 ruedas motorizadas y direccionales.	Tracción de 4 llantas, Hyperion (CMU)
		2 ruedas de tracción en la parte delantera/posterior, y 2 ruedas omnidireccionales.	Charlie (DMT-EPFL)
		4 ruedas omnidireccionales	Uranus (Carnegie Mellon)
		Mecanismo diferencial de 2 ruedas con 2 puntos de contacto adicionales.	EPFL Khepera, Hyperbot Chip
		4 ruedas motorizadas y direccionales de tipo giratoria.	Nomad XR 4000
6		2 ruedas motorizadas y direccionales alineadas en el centro, 1 rueda omnidireccional a cada extremo.	First
		2 ruedas de tracción (diferencial) en el centro, 1 rueda omnidireccional a cada extremo.	Terregator (Carnegie Mellon University)

Estas plataformas de desarrollo se muestran en las Figuras 1.8, 1.9 y 1.10 (pág. 14), y en las Figuras 1.11, 1.12 y 1.13 (pág. 15)

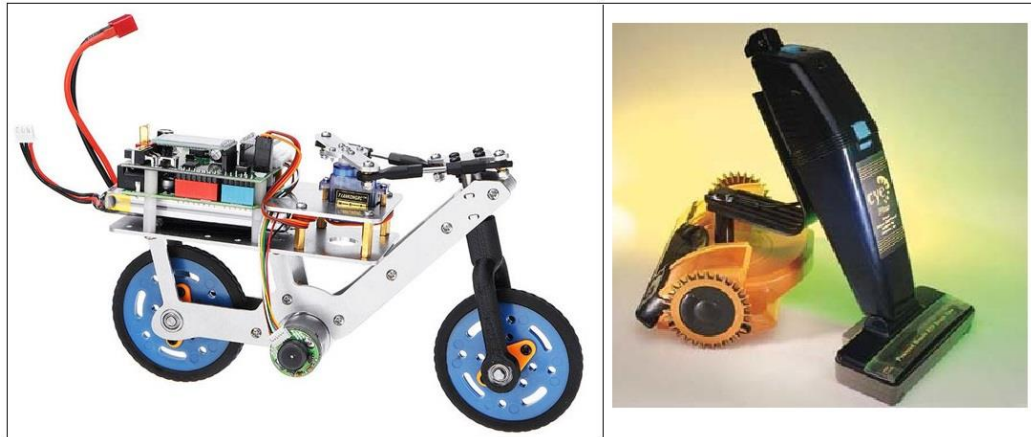


Figura 1.8 –Moto programable con Arduino (izquierda). Robot Cye (derecha), generalmente para aplicaciones en interiores.

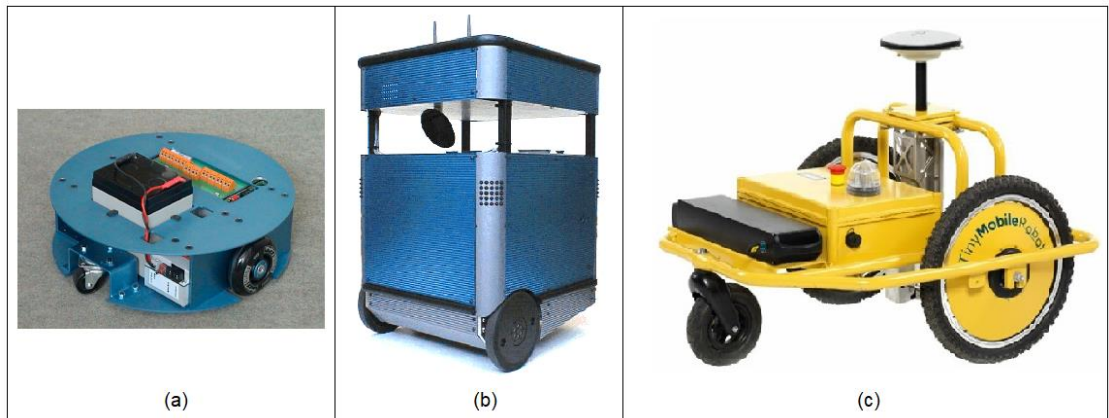


Figura 1.9 –(a) Plataforma del robot SmartEase PC104 (Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne) [25] (b) Robot Pygmalion [29]. (c) WJ Robotic PreMarker

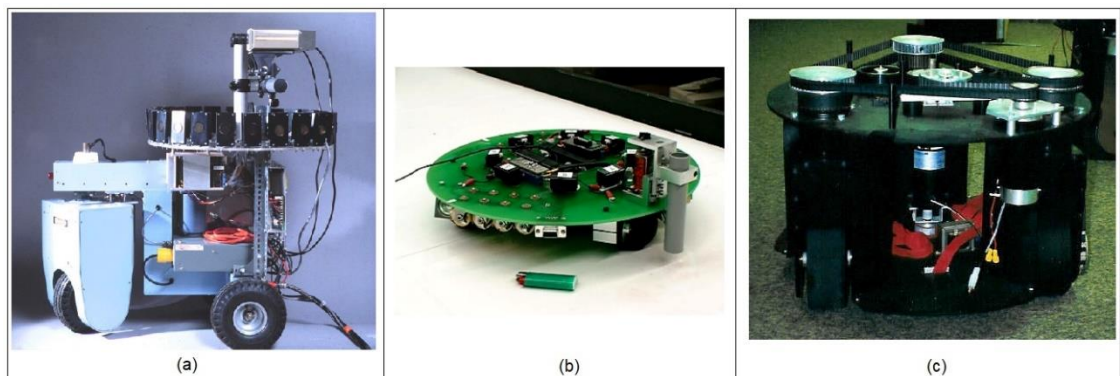


Figura 1.10. (a) Robot móvil Neptune [2]. (b) Robot Tribolo [4] (c) Robot Denning MRV-2 [5]



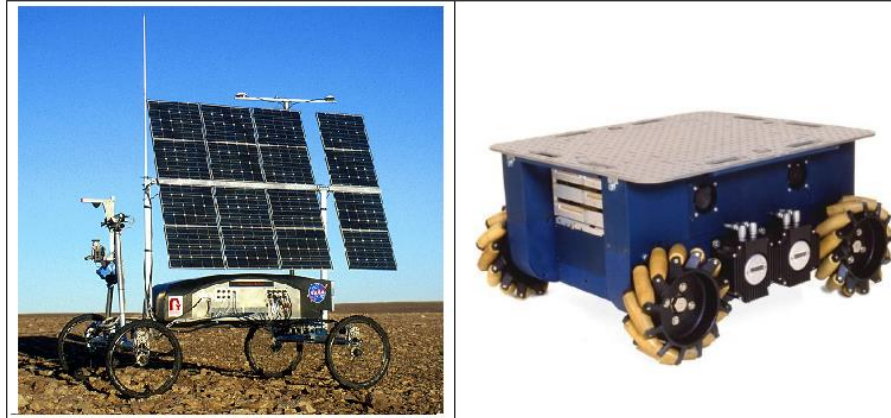


Figura 1.11. (Izquierda) Robot *Hyperion* (Carnegie Mellon University) [1].  
(Derecha) Plataforma del Robot *Uranus* [19]

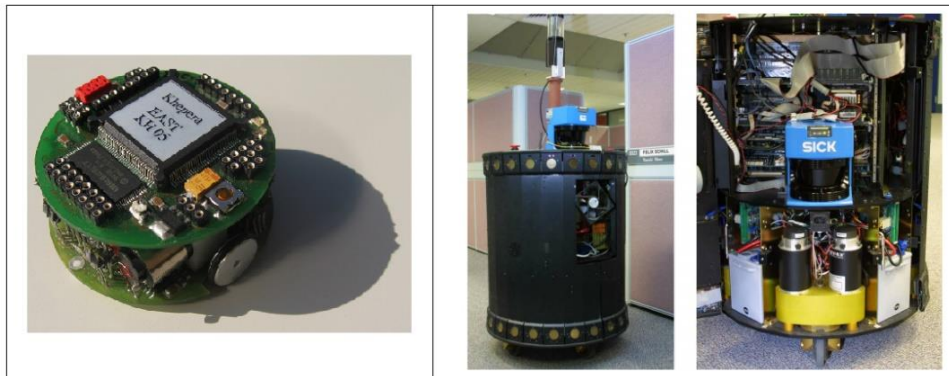


Figura 1.12. (Izquierda) Robot móvil *Khepera*. (b) Modelo de robot *Nomad XR 400* [26]



Figura 1.13. Plataforma del robot *Terregator*

En resumen, existen diferentes configuraciones de robots móviles con ruedas. En el presente trabajo, la plataforma de desarrollo corresponde a uno de 2 ruedas independientes de tracción, y una rueda direccional, por lo que se trata de un sistema no holonómico. Las características de este tipo de sistema se describen en las siguientes secciones.

### 1.1.3. Robots móviles subactuados y completamente actuados

La dinámica de los sistemas mecánicos, por lo general, es de segundo orden. Los estados de dichos sistemas se determinan por un vector de posición  $\mathbf{q}$ , un vector de velocidades  $\dot{\mathbf{q}}$ , y (posiblemente) el tiempo. En ese sentido, la forma general de un sistema dinámico controlable de segundo orden tiene la siguiente expresión:

$$\ddot{\mathbf{q}} = f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, t), \quad (1.1)$$

Donde  $\mathbf{u}$  es la entrada de control. Sin embargo, la dinámica de un gran número de robots puede expresarse de la siguiente forma: [32, Capítulo 1]

$$\ddot{\mathbf{q}} = f_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + f_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\mathbf{u} \quad (1.2)$$

Teniendo en cuenta las expresiones señaladas, un sistema de control descrito por la ecuación 1.2 es totalmente actuado si es capaz de ejercer una aceleración instantánea en cualquier dirección determinada en el vector de estados  $\mathbf{q}$ , lo que matemáticamente significa que:

$$\text{rank}[f_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)] = \dim[\mathbf{q}] \quad (1.3)$$

Por otro lado, si el sistema descrito por la ecuación (1.1) no puede ejercer una aceleración instantánea en cualquier dirección, entonces se dice que es subactuado.

En otras palabras, puede decirse que un sistema subactuado es aquel en el que la entrada de control no puede acelerar el estado del robot en cualquier dirección. Por tanto, los sistemas subactuados no pueden ser accionados para seguir cualquier trayectoria. Un ejemplo de este robot se muestra en la Figura 1.14 (Pág. 17).

## 1.2. ESTADO DEL ARTE DE LOS SISTEMAS DE CONTROL DE FORMACIÓN LÍDER-SEGUIDOR

El control de formación puede definirse como la coordinación de un grupo de robots para establecer y mantener una formación con una forma determinada. Sin embargo, su análisis se puede dividir en 4 sub problemas: generación del patrón de formación, reconfiguración y selección de la formación, seguimiento de trayectoria para la formación, y asignación de roles en la formación.

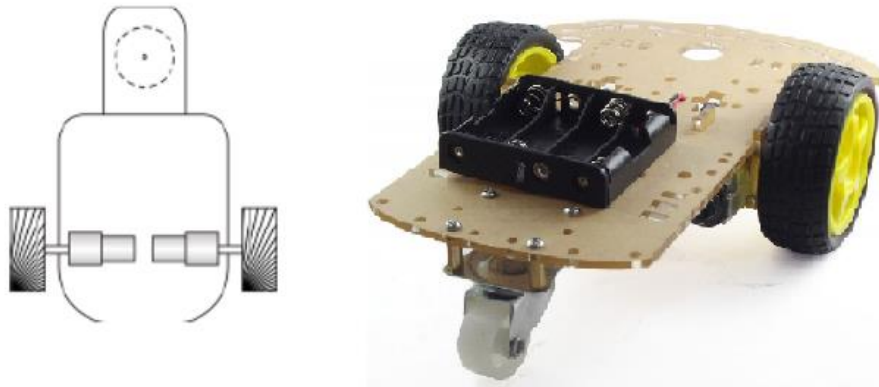


Figura 1.14. Representación gráfica de un robot móvil subactuado

A fin de dar solución a estos problemas, se deben tener en cuenta 3 componentes: la arquitectura del sistema, el modelo del robot móvil que constituye la formación, y las estrategias de control para lograr dicha formación [17, Sección 1].

### 1.2.1. En cuanto a la arquitectura del sistema

La arquitectura provee la infraestructura sobre la cual se implementa el control de formación. Además, define las capacidades y limitaciones propias del sistema.

- Por ejemplo, si la formación está constituida por robots que cuentan con el mismo hardware y software, entonces no existe algún robot crítico para el alcanzar el objetivo de la formación. Esto es, no hay algún robot que requiera un análisis diferenciado y más elaborado. Por tanto, se dice que el sistema es *Homogéneo*.
- Al tener 2 o más robots en la formación, se necesita contar también con una buena *comunicación* entre ellos. Para ello, se distinguen el rango, la topología, y el ancho de banda de dicha comunicación. El rango permitido es la máxima distancia entre 2 agentes dentro de la formación. La topología se refiere a que los robots pueden no ser capaces de comunicarse con cualquier otro robot, a pesar de su cercanía [8, Sección 2]. Y el ancho de banda indica la cantidad de data que se puede transmitir en un periodo de tiempo.
- Asimismo, el sistema puede ser *Centralizado* o *Descentralizado*. El primer caso es aquel en el que se cuenta con un solo controlador que procesa toda la información requerida para alcanzar los objetivos de control, lo que permite alcanzar un mejor desempeño y óptimas decisiones tanto para los robots como para la formación, aunque demanda gran cantidad de información y carga computacional. En cambio, si se tiene un sistema descentralizado, cada robot en la formación tiene su propio controlador, lo que resulta en una autonomía, y mayor robustez y flexibilidad en la información.

### 1.2.2. En cuanto al modelo del robot móvil

Trabajos de investigación previos tienen como sistema de análisis robots totalmente actuados o subactuados, los cuales pueden ser controlados mediante un modelo cinemático o dinámico.

En el presente trabajo, se plasmarán los resultados de control de formación de robots móviles subactuados, considerando la cinemática y dinámica de cada uno de ellos y la ubicación de los sistemas de referencia como se muestra en la figura 1.14. Esto trae consigo un análisis de controlabilidad para la formación muy particular, el cual se desarrolla en el capítulo 3.

### 1.2.3. En cuanto a las estrategias del control de formación

La bibliografía, por lo general, presenta 3 (tres) estrategias para el control de formación: el método basado en comportamiento, el enfoque de una estructura virtual, y el algoritmo líder-seguidor [17, sección 4]. Cada estrategia posee ventajas y desventajas, sin embargo, las que se detallan en el presente tema de investigación corresponden a la tercera estrategia.

El enfoque líder-seguidor considera robots líderes y robots seguidores dentro de una formación. La principal ventaja es que el análisis se reduce a trabajar con un problema de seguimiento de trayectoria, donde el robot líder busca alcanzar un determinado objetivo, mientras que los robots seguidores siguen las coordenadas transformadas del robot líder con ciertas distancias de separación predefinidas. Por otro lado, la desventaja es que no existe una realimentación hacia el robot líder por parte de los seguidores, esto significa que el movimiento del robot líder es independiente de aquel realizado por los robots seguidores.

La estrategia puede tratarse de 2 maneras, a través de un control  $l - \alpha'$ , o a través de un control  $l - l'$ . El primero se refiere a una formación de robots constituida por un robot líder y uno seguidor, en la cual este último permanece a una distancia de separación deseada  $l_{12}^d$  y un ángulo deseado  $\alpha_{12}^d$ . El segundo enfoque constituye una formación de 3 robots, uno de los cuales “sigue” a los otros dos, manteniéndose a una distancia de separación deseada respecto a cada uno de ellos:  $l_{13}^d$  y  $l_{23}^d$ , como se ve en la Figura 1.15 (Pág. 19).

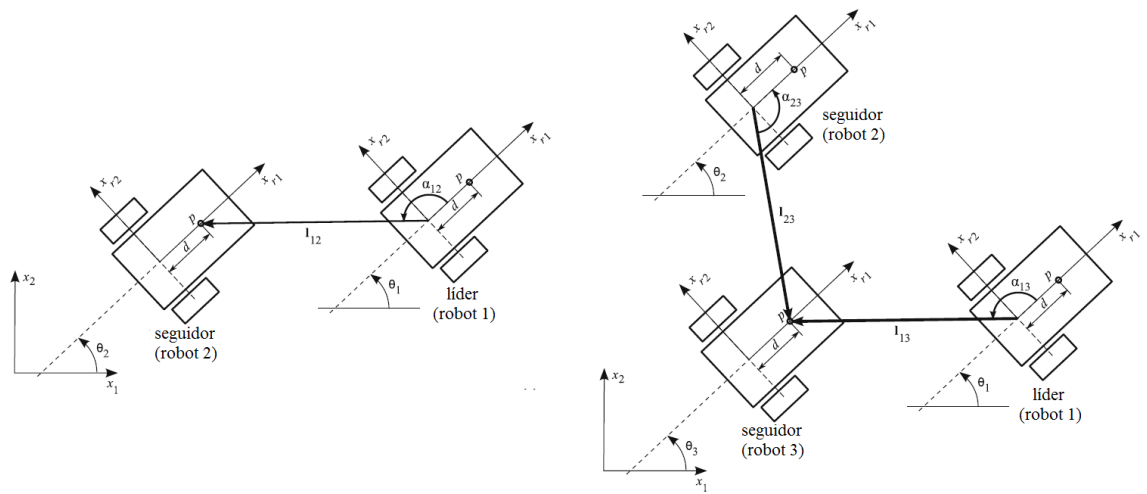


Figura 1.15 – Notación para el control ángulo-distancia ' $l - \alpha$ ' (izquierda) y el controlador ' $l - l'$ ' (derecha). (Fahimi, 2009)

### 1.3. MOTIVACIÓN Y JUSTIFICACIÓN

Como se ha detallado en la sección anterior, el problema de control de formación requiere analizar muchas variables: el modelo del robot, la cantidad de actuadores, los sensores con los que cada robot contará, la determinación del robot líder en la formación, la distancia y ángulos de separación entre uno y otro robot, entre otras consideraciones. Debido a estas razones, su análisis es bastante riguroso, y el lograr el objetivo de control, como el seguimiento de trayectoria para la formación, la evasión de obstáculos, o el mismo hecho que varios robots permanezcan con un determinado patrón en el tiempo, permite tener en cuenta varios aspectos y definiciones del Control no lineal. Esta particularidad, es una de las razones y motivaciones por las que se realiza el presente trabajo de investigación.

Asimismo, el estudio del problema de control de formación es importante por las diversas aplicaciones que trae consigo en diferentes áreas. El correcto diseño del sistema de control, el adecuado hardware, y una eficiente recepción y transmisión de datos, permitirán realizar las siguientes actividades:

- Transporte de medicamentos o comida.
- Limpieza automática de amplios espacios.
- Soporte al cliente.
- Prevención de incendios y tala de árboles.
- Recojo selectivo de frutos en un área de cultivo.
- Transporte de objetos pesados y de grandes dimensiones.
- Inspección de gas o tuberías, lo que corresponde a ambientes peligrosos.
- Limpieza de tanques de combustible.
- Exploración espacial.
- Vehículos de vigilancia y monitoreo.

- Construcción de mapas en territorios desconocidos.
- Búsqueda y misiones de rescate.
- Ayuda a las personas en estudios de comportamiento social y biológico.

#### 1.4. CONTRIBUCIÓN DE LA TESIS

La primera contribución de la tesis es presentar los resultados del control de formación, considerando no sólo un modelo cinemático para el robot, como es trabajado de acuerdo a la mayoría de la bibliografía; sino, obteniendo un modelo dinámico que incluya sus parámetros de masa e inercia, así como también el modelado de los motores o actuadores.

Una segunda contribución al presente trabajo de investigación está relacionado al diseño del observador de estados para el robot móvil. En el capítulo 3, en su sección 3, se analizó el problema de control de formación sin conocer la velocidad lineal del robot líder, y para ello, utilizando el enfoque de estimación basado en inmersión e invarianza [27], se estima dicha velocidad y las variables de estado de la formación. En este caso, dichas variables estarían referidas a los valores estimados de separación entre un robot líder y un robot seguidor:  $(\hat{l}_{12}, \hat{\alpha}_{12})$ , o, como trabajo futuro, entre un robot líder y 2 robots seguidores,  $(\hat{l}_{13}, \hat{l}_{23})$ .

#### 1.5. OBJETIVO DE LA TESIS

##### 1.5.1. Objetivo General

Diseñar y analizar el desempeño de un sistema de control de formación líder-seguidor para un grupo de robots móviles subactuados, mediante el uso de técnicas de control no lineal.

##### 1.5.2. Objetivos Específicos

- Obtener los parámetros y el modelo matemático de un robot móvil subactuado.
- Diseñar un controlador de velocidad para los motores DC, como actuadores del robot móvil.
- Diseñar un sistema de control de trayectoria para el robot líder en la formación de robots móviles.
- Diseñar un sistema de control de formación descentralizado, de manera que se pueda desarrollar independientemente un controlador por cada robot móvil en la formación.
- Diseñar funciones de control con las cuales se pueda diseñar un algoritmo para la evasión de obstáculos, mientras se establece la formación entre 2 (dos) robots móviles.
- Diseñar y analizar el comportamiento de un estimador de estados de las variables de distancia  $l_{12}$  y ángulo  $\alpha_{12}$  entre el robot líder y el seguidor de una formación.
- Validar el diseño de los controladores propuestos.

## 1.6. HIPÓTESIS

### 1.6.1. Hipótesis General

Las técnicas de control no lineal  $'l - \alpha'$  y  $'l - l'$  son robustas y garantizan una buena respuesta del sistema, mediante el uso del criterio de estabilidad de Lyapunov.

### 1.6.2. Hipótesis específicas

- El robot móvil materia de análisis del trabajo de investigación, presenta características de simetría, lo que facilita la obtención de su modelo matemático.
- El control PID permite garantizar un buen control de velocidad para el motor DC
- El algoritmo de control de trayectoria permite seguir tramos rectilíneos y curvilíneos con muy buena aproximación.
- Las técnicas de control no lineal  $'l - \alpha'$  y  $'l - l'$  se desarrollan sobre cada robot en la formación, lo que determina un sistema de control descentralizado, con el cual el procesamiento de la información es dividido entre los agentes de la formación.
- Las funciones potenciales garantizan el control de formación líder-seguidor en un entorno con obstáculos.
- El método de inmersión e invarianza permite estimar en buena forma las variables de estado de distancia y ángulo entre un robot líder y seguidor en una formación.

## CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En el presente capítulo se explica el procedimiento para obtener el modelo matemático del robot móvil, teniendo en cuenta que para ello se requiere definir los sistemas de referencia para el robot móvil, y analizar las fuerzas que actúan sobre él. Asimismo, se detalla el Hardware necesario y se obtiene los parámetros del robot móvil.

### 2.1. MODELO MATEMÁTICO DE UN ROBOT MÓVIL SUBACTUADO

#### 2.1.1. Sistemas de Referencia

Se pueden definir dos (2) sistemas de coordenadas, de acuerdo a la Figura 2.1

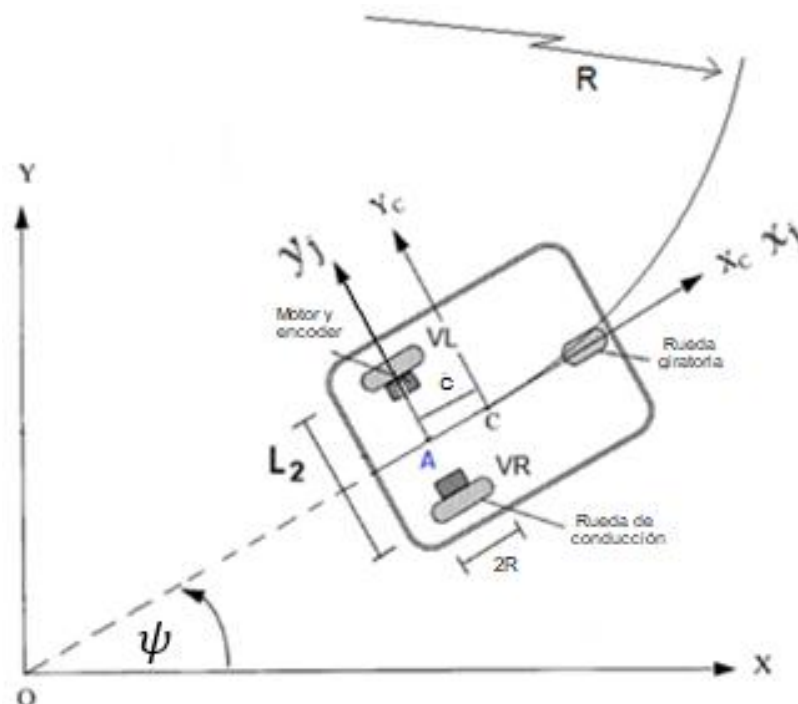


Figura 2.1 – Sistemas de referencia asociados a un robot móvil subactuado.

Donde:

$R$  : Radio de curvatura de la trayectoria que sigue el robot móvil

$\psi$  : Orientación del robot móvil

$L_2$  : Ancho del robot móvil



- $(X, Y)$  : Sistema de coordenadas global  
 $(X_c, Y_c)$  : Sistema de coordenadas con origen en el centro de masa del robot.  
 $(X_j, Y_j)$  : Sistema de coordenadas móvil.  
 $R$  : Radio de la rueda del robot  
 $A$  : Origen del sistema de coordenadas móvil  
 $C$  : Centro de masa del robot  
 $c$  : Distancia entre el sistema de coordenadas móvil y el centro de masa del robot

a) Sistema de coordenadas global:

Este sistema es representado por un eje de coordenadas que se encuentra fijo en los alrededores, o fijo al plano en el cual el robot móvil se desplaza. Es denotado como  $\{X, Y\}$

b) Sistema de coordenadas del robot (móvil):

Este sistema es representado por un eje de coordenadas local, el cual se encuentra adherido al robot móvil, y, por tanto, se mueve con él. Su centro está ubicado en el punto medio de la distancia que separa las 2 ruedas posteriores del robot móvil, y es denotado como  $\{x_j, y_j\}$

Los ejes de coordenadas se muestran en la Figura 2.1, en la cual se aprecia que la posición del centro de masa  $C$  del robot se encuentra en su eje de simetría, y a una distancia  $c$  del origen  $A$ .

La relación entre ambos sistemas de coordenadas está dada por la siguiente relación:

$$X^I = R_{(\psi)} X_r = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X_r \quad (2.1)$$

Donde:

- $X^I = [x \quad y \quad \psi]^T$  : coordenadas en el sistema de referencia inercial  
 $X_r = [x^r \quad y^r \quad \psi^r]^T$  : coordenadas en el sistema de referencia del robot móvil.  
 $\psi$  : ángulo de rotación entre sistemas de coordenadas  
 $R_{(\psi)}$  : matriz de rotación ortogonal

### 2.1.2. Restricciones cinemáticas

Teniendo en cuenta las variables de la sección anterior, la posición  $\eta$  del robot móvil está completamente definida por el siguiente vector:

$$\eta = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \psi \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Sin embargo, es de tener en cuenta que el movimiento del robot está caracterizado por ecuaciones de restricción no holonómicas<sup>1</sup>, las que son obtenidas a partir de las siguientes dos (02) consideraciones en el movimiento de dicho robot:

a) Movimiento sin deslizamiento lateral:

El robot no puede moverse lateralmente, lo que quiere decir que la velocidad del punto A (figura 2.1) es igual a cero a lo largo de su eje lateral:

$$\dot{y}^r = 0$$

Usando la matriz de rotación  $R_{(\psi)}$ , se tiene la velocidad en el sistema inercial:

$$-\dot{x} \sin(\psi) + \dot{y} \cos(\psi) = 0 \quad (2.3)$$

b) Movimiento de rodadura pura:

Esta restricción representa el hecho que cada rueda tiene un único punto de contacto  $\mathbf{P}$  con la superficie, como se muestra en la Figura 2.2. El robot móvil no se desliza a lo largo de su eje longitudinal, ni patina a lo largo de su eje transversal.

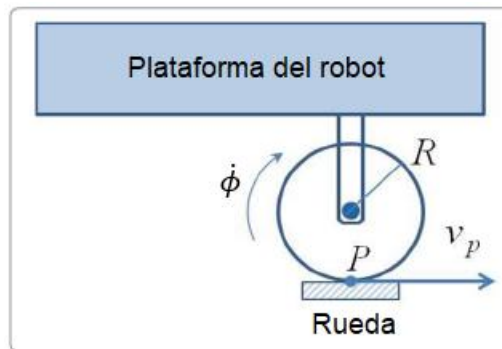


Figura 2.2 – Restricción de movimiento de rodadura pura

<sup>1</sup>: Restricción no holonómica: Restricciones que restringen las velocidades de las partículas del sistema, mas no sus posiciones [15].

Las velocidades de los puntos de contacto en cada rueda en el eje de coordenadas móvil se relacionan con las velocidades de las ruedas según la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} v_{pD} \\ v_{pI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\dot{\phi}_D \\ R\dot{\phi}_I \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

De manera que las restricciones de rodadura pueden plantearse según [14]:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{pD} \cos(\psi) + \dot{y}_{pD} \sin(\psi) &= R\dot{\phi}_D \\ \dot{x}_{pI} \cos(\psi) + \dot{y}_{pI} \sin(\psi) &= R\dot{\phi}_I \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Donde en el sistema de referencia inercial, estas velocidades pueden ser calculadas en función de las velocidades del punto **A** (Fig. 2.1, Pág. 22):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{pD} &= \dot{x} + L_2\dot{\psi} \cos(\psi), & \dot{y}_{pD} &= \dot{y} + L_2\dot{\psi} \sin(\psi) \\ \dot{x}_{pI} &= \dot{x} - L_2\dot{\psi} \cos(\psi), & \dot{y}_{pI} &= \dot{y} - L_2\dot{\psi} \sin(\psi) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Por tanto, a partir de las ecuaciones 2.3 y 2.5, las restricciones pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\psi) & \sin(\psi) & \frac{L_2}{2} & -R & 0 \\ \cos(\psi) & \sin(\psi) & -\frac{L_2}{2} & 0 & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi}_D \\ \dot{\phi}_I \end{bmatrix} = W_{(q)}\dot{q} = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (2.7)$$

Donde  $W_{(q)}$  es la matriz de restricciones, y  $\dot{q}$  es la derivada del vector de coordenadas generalizadas del robot.

### 2.1.3. Cinemática del Robot Móvil

El modelo cinemático del robot busca representar sus velocidades en función de las velocidades de cada una de las ruedas. Para un mayor detalle, se muestra la Fig. 2.3 (Pág. 26), con la cual es posible verificar que se pueden obtener las velocidades del robot móvil en términos de su velocidad lineal y angular. En el sistema de coordenadas inicial, se tiene:

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\eta} = J_{(\psi)}\mathbf{v} \quad (2.8)$$

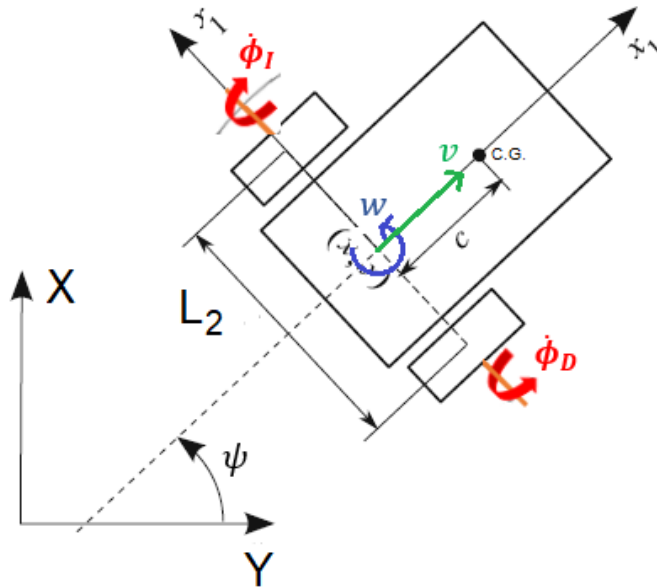


Figura 2.3 – Velocidad lineal  $v$  y velocidad angular  $w$  del robot

Sin embargo, las velocidades  $v$  y  $w$  cumplen las siguientes relaciones:

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{v_D + v_I}{2} = \frac{R\dot{\phi}_D + R\dot{\phi}_I}{2} \\ w &= \frac{v_D - v_I}{L_2} = \frac{R\dot{\phi}_D - R\dot{\phi}_I}{L_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Por tanto, el modelo cinemático del robot es determinado por la siguiente ecuación:

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} \frac{R}{2} \cos(\psi) & \frac{R}{2} \cos(\psi) \\ \frac{R}{2} \sin(\psi) & \frac{R}{2} \sin(\psi) \\ \frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_D \\ \dot{\phi}_I \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

#### 2.1.4. Dinámica del Robot Móvil

Para obtener el modelo dinámico del robot, se usará el enfoque del Lagrange, el cual requiere que, en primer lugar, se determine la energía cinética  $T$  y la energía potencial  $U$  del sistema. Esta última, sin embargo, es nula, debido a que el robot se desplaza sobre una superficie ( $U = 0$ )

La energía cinética del robot es la suma de la energía cinética de la plataforma del robot sin ruedas ( $T_c$ ), más la energía cinética de las ruedas y motores ( $T_w = T_{wD} + T_{wI}$ ).

Matemáticamente, se tiene que:

$$T_c = \frac{1}{2}m_c v_c^2 + \frac{1}{2}I_c \dot{\psi}^2 \quad (2.11)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{wD} &= \frac{1}{2}m_w v_{wD}^2 + \frac{1}{2}I_m \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}I_w \dot{\phi}_D^2 \\ T_{wL} &= \frac{1}{2}m_w v_{wD}^2 + \frac{1}{2}I_m \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}I_w \dot{\phi}_L^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Donde,  $m_c$  es la masa del robot sin considerar las ruedas ni los motores,  $m_w$  es la masa de cada rueda,  $I_c$  es el momento de inercia del robot alrededor del eje vertical que pasa por su centro de masa,  $I_w$  es el momento de inercia de cada rueda con su motor alrededor del eje de la rueda, e  $I_m$  es el momento de inercia de cada rueda con su motor alrededor del diámetro de la rueda.

Asimismo, las velocidades  $v_{wD}$ ,  $v_{wL}$  y  $v_c$  pueden expresarse en función de las coordenadas generalizadas  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{\psi}$  a partir de la geometría propia del robot; de manera que la energía cinética del sistema queda definida por la siguiente expresión:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x} + \dot{y}) + m_c c(\dot{y} \cos \psi + \dot{x} \sin \psi)\dot{\psi} + \frac{1}{2}I_w(\dot{\phi}_R^2 + \dot{\phi}_L^2) + \frac{1}{2}I\dot{\psi}^2 \quad (2.13)$$

Donde la masa del robot móvil, y la inercia equivalente total, están dadas por las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{aligned} m &= m_c + 2m_w \\ I &= I_c + m_c c^2 + 2m_w \left(\frac{L_2}{2}\right)^2 + 2I_m \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Con la finalidad de obtener el modelo dinámico del robot, se utiliza la ecuación de Lagrange [14]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau_{ext} - W^T \lambda \quad (2.15)$$

Donde:

$\tau_{ext}$ : Vector de fuerzas externas generalizadas.

$\lambda$ : Vector de multiplicadores de Lagrange asociado a las restricciones en el movimiento del robot

Al reemplazar términos en la ecuación 2.15, se obtiene el siguiente resultado:

$$M_{(q)}\ddot{q} + V_{(q,\dot{q})}\dot{q} + F_{(q)} + G_{(q)} + \tau_d = B_{(q)}\tau - W^T \lambda \quad (2.16)$$

Donde:

$$M_{(q)} = \begin{bmatrix} m & 0 & -m_c c \sin(\psi) & 0 & 0 \\ 0 & m & m_c c \cos(\psi) & 0 & 0 \\ -m_c c \sin(\psi) & m_c c \cos(\psi) & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_w \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$V_{(q,\dot{q})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_c c \cos(\psi) \dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_c c \sin(\psi) \dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{(q)} = I_{5 \times 5}, \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$M_{(q)}$  : Matriz de inercia, simétrica definida positiva

$V_{(q,\dot{q})}$  : Matriz centrípeta y de Coriolis.

$F_{(\dot{q})}$  : Matriz de fricción con la superficie.

$G_{(q)}$  : Vector gravitacional

$\tau_d$  : Torques de perturbaciones desconocidas, pero acotadas.

$B_{(q)}$  : Matriz de entrada

$\tau$  : Vector de entrada

$W^T \lambda$  : Matriz asociada a las restricciones cinemáticas

### 2.1.5. Fuerzas de control

Las fuerzas de control son generadas por los motores del robot móvil, los cuales corresponden a los torques generados por el motor derecho  $\tau_D$ , y el motor izquierdo  $\tau_I$ . En consecuencia, en el modelo dinámico del robot de la ecuación 2.16, la matriz y vector de entrada estarían dados por las siguientes expresiones:

$$B_{(q)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_D \\ \tau_I \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

### 2.1.6. Ecuaciones de movimiento

Para propósitos de un mejor control y simulación, resulta más conveniente transformar el sistema de la ecuación (2.16). Para ello, se busca eliminar el término  $W^T \lambda$ , puesto que los multiplicadores de Lagrange son desconocidos; y, además, se define el vector  $\beta$  como sigue:

$$\beta = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_D \\ \dot{\phi}_I \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

A partir de la ecuación (2.10), se define la matriz  $S_{(q)}$ :

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \frac{R}{2} \cos(\psi) & \frac{R}{2} \cos(\psi) \\ \frac{R}{2} \sin(\psi) & \frac{R}{2} \sin(\psi) \\ \frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_D \\ \dot{\phi}_I \end{bmatrix} = S_{(q)} \boldsymbol{\beta} \quad (2.21)$$

Derivando con respecto al tiempo:

$$\ddot{q} = \dot{S}_{(q)} \boldsymbol{\beta} + S_{(q)} \boldsymbol{\beta}_{2 \times 1} \quad (2.22)$$

Al reemplazar en la ecuación (2.16) la expresión para  $\ddot{q}$ , multiplicar por  $S^T$  por la izquierda, y luego de verificar que  $S_{(q)}^T W^T \lambda = \mathbf{0}_{2 \times 1}$ , se tiene:

$$S^T M_{(q)} \dot{S}_{(q)} \boldsymbol{\beta} + S^T M_{(q)} S_{(q)} \dot{\boldsymbol{\beta}} + S^T V_{(q,\dot{q})} S_{(q)} \boldsymbol{\beta} = S^T B_{(q)} \boldsymbol{\tau} - S^T W^T \lambda \quad (2.23)$$

Reordenando términos:

$$\bar{M}_{(q)} \dot{\boldsymbol{\beta}} + \bar{V}_{(q,\dot{q})} \boldsymbol{\beta} = \bar{B}_{(q)} \boldsymbol{\tau} \quad (2.24)$$

Donde:

$$\bar{M}_{(q)} = S^T M_{(q)} S_{(q)} = \begin{bmatrix} I_w + \frac{R^2}{L_2^2} \left( \frac{mL_2^2}{4} + I \right) & \frac{R^2}{L_2^2} \left( \frac{mL_2^2}{4} - I \right) \\ \frac{R^2}{L_2^2} \left( \frac{mL_2^2}{4} - I \right) & I_w + \frac{R^2}{L_2^2} \left( \frac{mL_2^2}{4} + I \right) \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

$$\bar{V}_{(q,\dot{q})} = S^T M_{(q)} \dot{S}_{(q)} + S^T V_{(q,\dot{q})} S_{(q)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{m_c c R^2 \dot{\psi}}{L_2} \\ -\frac{m_c c R^2 \dot{\psi}}{L_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_{(q)} = S^T B_{(q)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Sin embargo, la ecuación de movimiento (2.24) puede también ser representada por la velocidad lineal y angular del robot. Para ello, se define la matriz  $P$  a partir de la expresión siguiente:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{2} & \frac{R}{2} \\ \frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_D \\ \dot{\phi}_I \end{bmatrix} = P^{-1} \boldsymbol{\beta} \quad (2.27)$$

Con lo que se tiene:

$$\boldsymbol{\beta} = P \boldsymbol{v} \quad (2.28)$$

Y al derivar con respecto al tiempo:

$$\dot{\beta} = \dot{P}\nu + P\dot{\nu} \quad (2.29)$$

Al reemplazar el valor de  $\dot{\beta}$  en la ecuación 2.24, multiplicar por  $P^T$  por la izquierda, y luego de reordenar términos, se tiene la ecuación de movimiento del robot móvil:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m + \frac{2I_w}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{L_2^2}{2R^2} I_w + I \end{bmatrix}}_{M_r} \dot{\nu} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -m_c c \dot{\psi} \\ m_c c \dot{\psi} & 0 \end{bmatrix}}_{V_r} \nu = \frac{1}{R} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{L_2}{2} & -\frac{L_2}{2} \end{bmatrix}}_{B_r} \tau \quad (2.30)$$

## 2.2. INSTRUMENTACIÓN EN EL ROBOT MÓVIL

### 2.2.1. Sensores y actuadores

#### 2.2.1.1. Sensores de posición y distancia

Constituyen la instrumentación necesaria para la medición de las variables de salida en el sistema total. En el caso del control de formación, se requiere tener conocimiento sobre su posición en un sistema de referencia inercial, o en muchos otros casos, de acuerdo a la bibliografía, conocer su posición relativa con respecto a su robot vecino dentro de la formación.

En ese sentido, por lo general es importante contar con una unidad de medida inercial (IMU, por sus siglas en inglés), como la que se muestra en la Figura 2.4.



Figura 2.4 – Sensor MPU6050

Este dispositivo es usado para realizar pruebas de medición, debido a que ya existen librerías con las cuales trabajar, y también porque integra 2 funcionalidades en un solo módulo, acelerómetro y giroscopio.



Entre las principales características del sensor, se pueden mencionar las siguientes:

- Voltaje de operación: 3V/3.3V 5V DC
- IMU de 6 GDL, que contiene un giroscopio de 3 ejes para medir velocidades angulares, y un acelerómetro de 3 ejes para medir aceleraciones
- Rango del acelerómetro: 2g/4g/8g/16g
- Rango del giroscopio: 250°/s, 500°/s, 1000°/s, 2000°/s.
- Sensibilidad del giroscopio igual a 131 LSB/dps
- Comunicación a través de una interfaz I<sup>2</sup>C.
- Conversor AD de 16 bits.

Por otro lado, con la finalidad de evitar los obstáculos en su entorno, el robot móvil puede ser implementado con el sensor IR (infrarrojo) de distancia SHARP GP2Y0A21 como el mostrado en la Figura 2.5, cuyo alcance de detección de objetos se encuentra en el rango de 10 a 80cm, intervalo con el cual se realizaron las simulaciones mostradas en el capítulo 4.

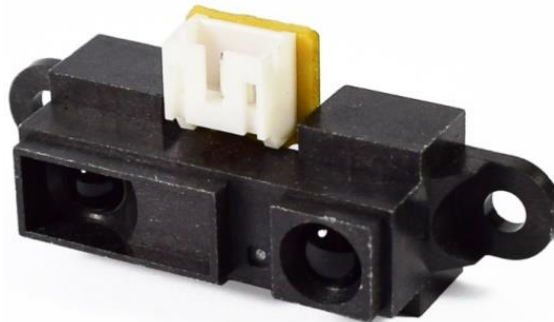


Figura 2.5 – Sensor de distancia SHARP GP2Y0A21

Las principales características de este sensor son:

- Salida: Voltaje analógico
- Consumo de corriente: 30mA
- Voltaje de operación: 4.5V a 5.5V DC
- Conector JST PH de 3 pines

#### 2.2.1.2. Motores DC

Son los equipos con los que cuenta el robot móvil para lograr su desplazamiento (y/o rotación) a través de su entorno. Para el caso de la presente tesis, los actuadores del robot móvil son 2 motores EMG30, los cuales fueron escogidos como instrumento de trabajo debido a los encoders que llevan incorporados, y a la tarjeta MD25 como driver de accionamiento de fácil conexión.

El motor EMG30, como el mostrado en la Figura 2.6, requiere de 12 V. para su funcionamiento, y puede ser controlado mediante comunicación serial o I<sup>2</sup>C. Considerando la segunda alternativa, la conexión con la instrumentación se explica con mayor detalle en la sección 2.2.3.



Figura 2.6 – Motor EMG30

Los parámetros del motor DC se obtuvieron a partir de las pruebas experimentales detalladas en [12]. Los resultados se muestran en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1

Símbolo	Descripción	Valor	Unidades
$K_t$	Constante de torque de motor	0.509	Nm/A
$K_e$	Constante de fuerza electromotriz	0.509	V/rad/s
$J$	Momento de inercia equivalente	0.00377	Kg.m <sup>2</sup>
$L_a$	Inductancia de armadura	3.4	mH
$b$	Fricción viscosa equivalente	0.000931	Nm/rad/s
$R_a$	Resistencia de armadura	7.101	$\Omega$
$V_{m\acute{a}x}$	Voltaje máximo	12	V

### 2.2.2. Tarjeta de desarrollo Arduino UNO

Es la plataforma de desarrollo de proyectos de código abierto más utilizada, basada en el microcontrolador ATmega328. Esta tarjeta cuenta con pines para entradas y salidas digitales y analógicas, y permite expandirse mediante el uso de otras tarjetas o circuitos. La plataforma se muestra en la Figura 2.7 (Pág. 33), y entre sus principales especificaciones técnicas, se pueden mencionar las siguientes:

- Voltaje de operación: 5V.
- Voltaje de alimentación: 6-20V. (12V. recomendado)
- Pines digitales I/O: 14 (6 salidas tipo PWM)
- Entradas analógicas: 6
- Corriente DC por pin I/O: 20mA.
- Corriente DC para pin de 3.3V.: 50mA.
- Velocidad de reloj: 16MHz



Figura 2.7 – Plataforma de desarrollo Arduino UNO

### 2.2.3. La tarjeta electrónica MD25

Es una tarjeta que está formada por un doble puente H para poder controlar dos (02) motores DC EMG30. Sus principales características son las siguientes:

- Alimentación de 12V, aunque internamente posee un regulador de 5V.
- Puede suministrar hasta 3A para cada motor.
- Dispone tanto de conexión serial como I<sup>2</sup>C
- Opción de lectura de corriente para cada motor
- La lectura de los encoders de los motores son de tipo cuadratura, de manera que se puede tener información sobre el desplazamiento que se ha realizado y el sentido de giro de cada motor.

Como se aprecia en las Fig. 2.8 y 2.9 (ambas en la Pág. 34), los conectores de los motores tienen seis pines:

- 2 salidas de motor que le ofrecen la tensión necesaria.
- +Vcc y GND del sensor Hall para alimentar el encoder.
- Sensor Hall A, que devuelve la información del sensor A.
- Sensor Hall B, que devuelve la información del sensor B.

Asimismo, los conectores para la interfaz I<sup>2</sup>C y *Serial* son los siguientes:

- +Vcc: Ofrece 5V y una corriente máxima de 300mA.
- SDA/Rx: Línea de datos en I<sup>2</sup>C y recepción en serial.
- SCK/Tx: Línea de reloj en I<sup>2</sup>C y transmisión en serial.
- GND: Tierra común entre los dispositivos comunicados.

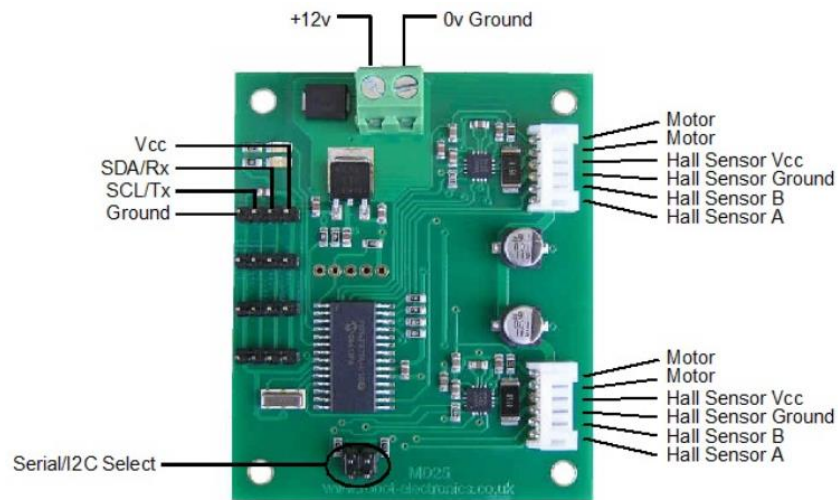


Figura 2.8 – Distribución de conectores en la tarjeta MD25

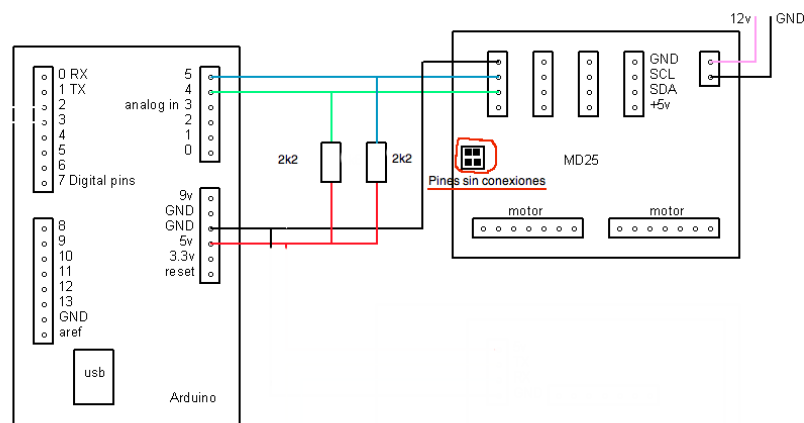


Fig. 2.9 – Esquema de conexión con Arduino UNO, mediante I<sup>2</sup>C

#### 2.2.4. Parámetros del robot móvil

Los parámetros del robot móvil corresponden a aquellos que se muestran en la ecuación de movimiento (2.30).

##### a) Con respecto al parámetro $m$ : masa total del robot

Como fue especificado en la sección anterior, el valor de la masa  $m$  es igual a la suma de la masa de la plataforma del robot, incluyendo la tarjeta MD25 ( $m_c$ ), y la masa de cada rueda con su respectivo motor DC ( $m_w$ )

De acuerdo a lo señalado por el fabricante, la plataforma de desarrollo Arduino UNO tiene una masa aproximada de 31.8g., mientras que la tarjeta MD25 es de 24g. En ese sentido, teniendo en cuenta instrumentación adicional con la

que cuenta la plataforma del robot, se puede decir que el valor del parámetro  $m_c$  resulta aproximadamente igual a 250g.

De manera similar, el fabricante también menciona los valores de masa para los actuadores, como se muestra en la Figura 2.10.



Fig. 2.10 – Motor DC acoplado a rueda  $\phi$ : 100mm.

Por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} m &= m_c + 2m_w = 250g. + 2(370g.) \\ m &= 990g. \end{aligned} \quad (2.31)$$

b) Con respecto al parámetro  $I_w$ :

Este valor representa el momento de inercia de la rueda acoplada al motor DC, a través del eje de la rueda, el cual se denotará como el eje Y. Por tanto, de acuerdo a la Figura 2.10, se tiene que:

$$I_w = I_{(rueda+motor+soporte)_y} = I_{rueda_y} + I_{motor_y} + I_{soporte_y} \quad (2.32)$$

- A partir de la figura 2.11 (Pág. 36),  $I_{rueda_y} = 217\,633,15 \text{ g}\cdot\text{mm}^2$
- Por otro lado, teniendo en cuenta las dimensiones del motor DC señaladas en el Apéndice B, se obtuvo el valor del momento de inercia del motor alrededor del eje Y a partir de SolidWorks, dando como resultado:  $I_{motor_y} = 18717,99 \text{ g}\cdot\text{mm}^2$ , tal como se muestra en la Figura 2.12 (Pág. 36)

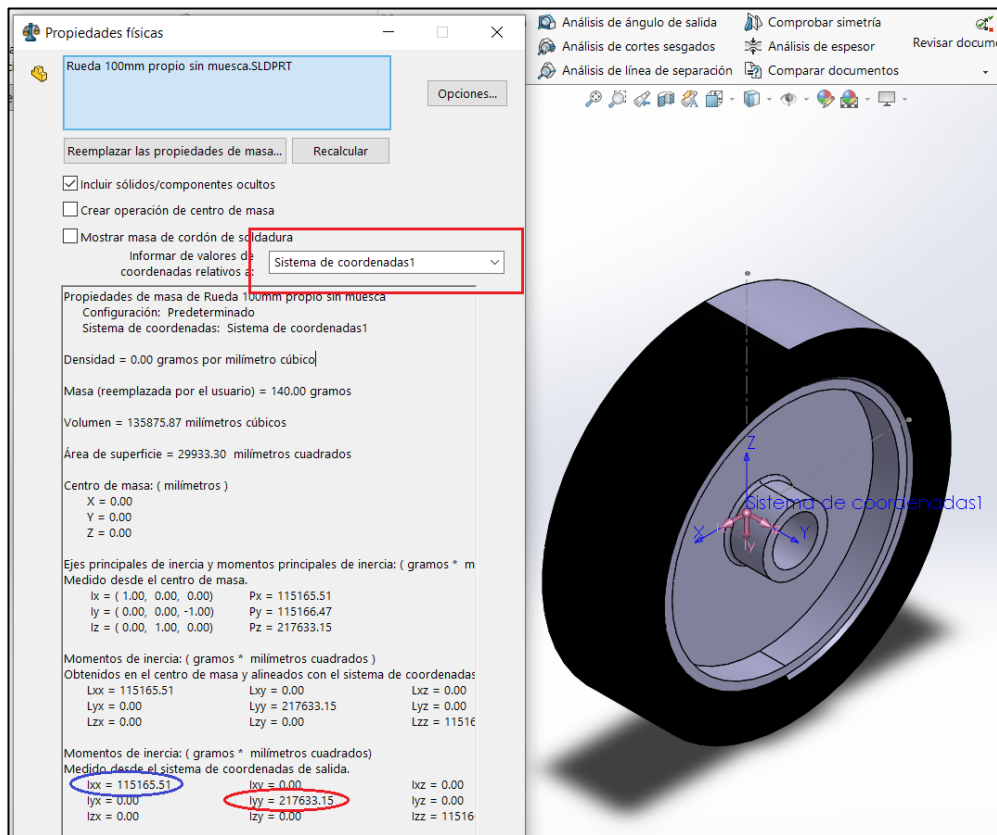


Fig. 2.11 – Momento de inercia de la rueda a través del eje Y y el eje Z

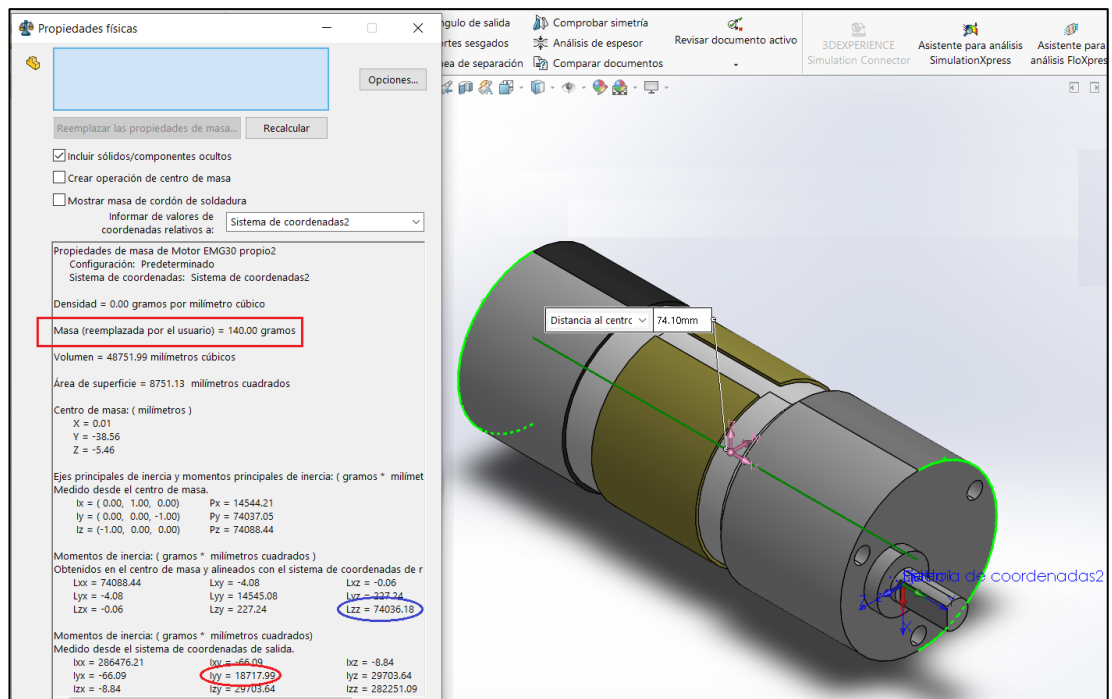


Fig. 2.12 – Momento de inercia del motor alrededor del eje Y (Sist. Coord. 2)

- De manera similar al procedimiento anterior, como se aprecia en la Figura 2.13, el valor del momento de inercia  $I_{soporte_y} = 81\ 600,24\ \text{g}\cdot\text{mm}^2$

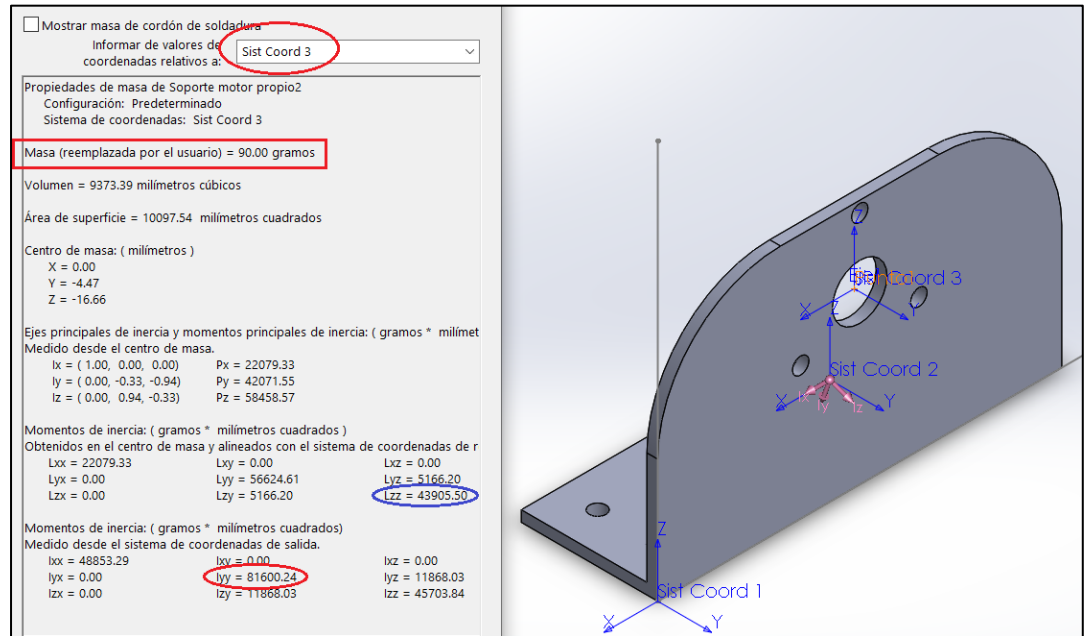


Fig. 2.13 – Momento de inercia del soporte alrededor del eje Y (Sist. Coord. 3)

Por tanto, la suma de los tres (03) valores anteriores es igual al momento de inercia  $I_w$ :

$$I_w = 217633,15\ \text{g}\cdot\text{mm}^2 + 18717,99\ \text{g}\cdot\text{mm}^2 + 81600,24\ \text{g}\cdot\text{mm}^2$$

$$I_w = 317\ 951,38\ \text{g}\cdot\text{mm}^2 \quad (2.33)$$

c) Con respecto al parámetro  $I$ :

De acuerdo a la ecuación (2.14), para obtener el valor de  $I$ , se debe conocer el momento de inercia  $I_c$ , la distancia  $c$ , el ancho del robot  $L_2$ , y el momento de inercia  $I_m$ . Este último valor es calculado respecto al diámetro de la rueda, el cual es definido como eje Z (Figura 2.14, Pág. 38)

- El momento de inercia  $I_m$ :

De manera similar al procedimiento planteado en el ítem b), se tiene que:

$$I_m = I_{(rueda+motor+soporte)_z} = I_{rueda_z} + I_{motor_z} + I_{soporte_z} \quad (2.34)$$

- A partir de la Figura 2.11,  $I_{rueda_z} = 115\ 165,51\ \text{g}\cdot\text{mm}^2$  (2.35)

- A fin de obtener el momento de inercia del motor, se usa el Teorema de Steiner:

$$I_{motor_z} = I_{motor_{CM//ejeZ}} + m_{motor}(d_{CM_{motor} \rightarrow ejeZ})^2$$

De la figura 2.12 (Pág. 36), se conoce el valor del momento de inercia del motor en su centro de masa (CM) y paralelo al eje Z. Mientras que, a partir de la Figura 2.14, la distancia entre el CM del motor y el eje Z de la rueda es 66.56 mm, aproximadamente.

Por lo tanto:

$$I_{motor_z} = 74\,036,18 \text{ g.mm}^2 + 140\text{g.} (38.56 \text{ mm.} + 2 \text{ mm.} + 26 \text{ mm.})^2$$

$$I_{motor_z} = 675\,772,084 \text{ g.mm}^2 \quad (2.36)$$

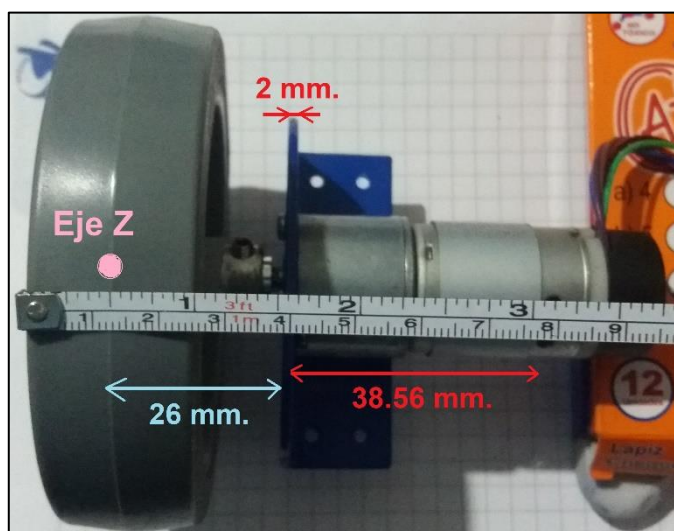


Fig. 2.14 – Distancias para el cálculo de momentos de inercia

- De manera similar al punto anterior, el momento de inercia del soporte en su CM es conocido a partir de la Figura 2.13 (43 905,50 g.mm<sup>2</sup>). Luego, por el Teorema de Steiner:

$$I_{soporte_z} = I_{soporte_{CM//ejeZ}} + m_{soporte} (d_{CM_{soporte} \rightarrow ejeZ})^2$$

$$I_{soporte_z} = 43\,905.50 \text{ g.mm}^2 + 90\text{g.}(26 \text{ mm.})^2$$

$$I_{soporte_z} = 104\,745,5 \text{ g.mm}^2 \quad (2.37)$$

En consecuencia, al sumar los 3 valores obtenidos mediante las ecuaciones (2.35), (2.36) y (2.37), y al reemplazarlas en la expresión (2.34), se tiene:

$$I_m = 115\,165,51 \text{ g.mm}^2 + 675\,772,084 \text{ g.mm}^2 + 104\,745,5 \text{ g.mm}^2$$



Por lo tanto:

$$I_m = 895\,683,094 \text{ g} \cdot \text{mm}^2 \quad (2.38)$$

- El momento de inercia  $I_c$ :

Este parámetro corresponde al momento de inercia del robot, pero sin considerar el acople motor-soporte-rueda.

Como se aprecia en las Figuras 2.15 y 2.16 (Pág. 40), el valor de  $I_c$  corresponde a la suma de cuatro (04) valores de momento de inercia: de la plataforma superior ( $I_1$ ), de la plataforma inferior ( $I_2$ ), de la tarjeta MD25 ( $I_3$ ), y del Arduino UNO ( $I_4$ ); todos ellos, con respecto al CM del robot móvil, el cual se encuentra a 10 cm. con respecto a la parte posterior del robot, y sobre el eje de simetría.

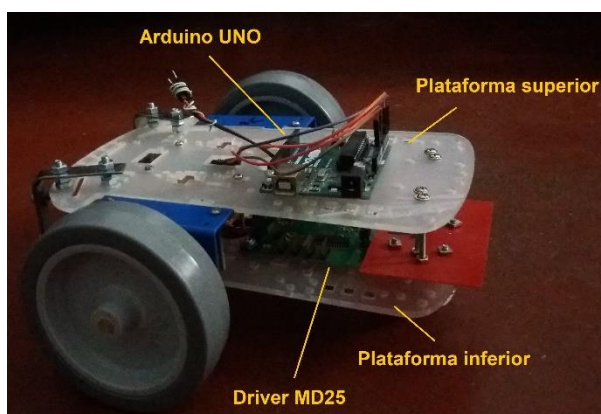


Fig. 2.15 – Robot móvil y sus componentes

- Para el momento de inercia  $I_1$ , se considera la plataforma superior como una plancha de acrílico de forma rectangular (11.2cm x 22cm.), con un espesor de 3mm. Usando el Teorema de Steiner:

$$I_1 = I_{1CM.plat.} + m_1(0.01)^2$$

$$I_1 = \frac{m_1}{12}(0.112^2 + 0.22^2) + m_1(0.01^2)$$

Teniendo en cuenta que la densidad del acrílico es  $1.18 \text{ g/cm}^3$ , la masa de la plataforma  $m_1 \cong 87.22 \text{ g}$ . Por tanto:  $I_1 = 4.5168 \times 10^{-4} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$

- Siendo la plataforma inferior, de las mismas características que la plataforma superior, entonces:  $I_2 = 4.5168 \times 10^{-4} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$

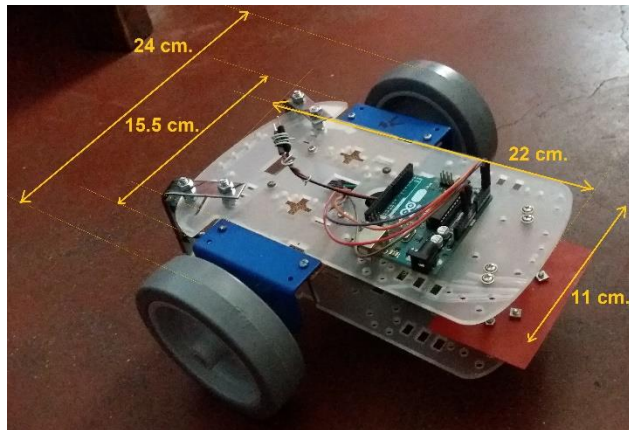


Fig. 2.16 – Distancias para el cálculo de momentos de inercia del robot

- El driver MD25 se encuentra en la plataforma inferior del robot, y su CM se encuentra a 15cm. de la parte posterior del robot, de forma que se plantea la siguiente ecuación:

$$I_3 = I_{3CM.MD25} + m_{MD25}(0.05)^2$$

El driver de potencia, de acuerdo al fabricante, tiene dimensiones de 71cm x 60cm, y su masa es 24g. Así:

$$I_3 = \frac{m_{MD25}}{12} (0.071^2 + 0.06^2) + 0.04(0.05^2)$$

$$I_3 = 1.288 \times 10^{-4} \text{ Kg.m}^2$$

- El CM del Arduino UNO se encuentra aproximadamente a 4.8cm. del CM del robot, su masa es aproximadamente 32g, y sus dimensiones: 68cm. x 53 cm. En ese sentido:

$$I_4 = \frac{m_{ARDUINO}}{12} (0.053^2 + 0.068^2) + m_{ARDUINO}(0.048^2)$$

$$I_4 = 1.1198 \times 10^{-4} \text{ Kg.m}^2$$

Con la suma de los momentos de inercia  $I_1, I_2, I_3$  e  $I_4$  calculados, se obtiene:

$$I_c = 0,00114 \text{ Kg.m}^2 \quad (2.39)$$

Luego de reemplazar los valores obtenidos en (2.31), (2.33), (2.38) y (2.39) en la ecuación (2.14), el momento de inercia equivalente total es:

$$I = I_c + m_c c^2 + 2m_w \left(\frac{L_2}{2}\right)^2 + 2I_m$$

$$I = 0.00114 + 0.25(0.017^2) + 2(0.37) \left(\frac{0.24}{2}\right)^2 + 2(0.000895)$$

$$I = 0.0137 \text{ Kg. m}^2 \quad (2.40)$$

En resumen, los parámetros del robot móvil se detallan en la Tabla 2.2

Tabla 2.2 – Parámetros del robot móvil

<b>Símbolo</b>	<b>Descripción</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidades</b>
$m$	Masa del robot móvil	0.99	Kg.
$m_c$	Masa del robot sin considerar acople motor-soporte-rueda	0.25	Kg.
$m_w$	Masa de cada rueda con su respectivo soporte y motor	0.37	Kg.
$L_1$	Largo del robot	0.23	m.
$L_2$	Ancho del robot	0.24	m.
$c$	Distancia del origen del sistema de coordenadas móvil, al CM del robot	0.017	m.
$R$	Radio de la rueda del robot	0.05	m.
$I_c$	Momento de inercia del robot alrededor del eje vertical que pasa por su CM	0.00114	Kg.m <sup>2</sup>
$I_w$	Momento de inercia de cada rueda con su motor, alrededor del eje de la rueda.	0.000318	Kg.m <sup>2</sup>
$I_m$	Momento de inercia de cada rueda con su motor, alrededor del diámetro de la rueda.	0.000895	Kg.m <sup>2</sup>
$I$	Momento de inercia equivalente total	0.0137	Kg.m <sup>2</sup>

## **CAPÍTULO 3.**

# **CÁLCULOS Y/O APLICACIONES Y OBTENCIÓN DE RESULTADOS**

El presente capítulo abarca el estudio y uso de técnicas de control con la finalidad de lograr que un robot móvil pueda seguir una determinada trayectoria. Posteriormente, y con la finalidad de establecer una formación entre varios robots, se trabajó con 2 (dos) estrategias de control no lineal y se comparó el desempeño de ambas mediante casos de estudio.

En estos procedimientos, y con el objetivo de incluir la dinámica de los motores DC en el sistema total, se diseñó un control PI para la regulación de las velocidades de dichos motores. Se calculó también el tiempo de muestreo para el sistema.

### **3.1. CONTROL DE TRAYECTORIA PARA EL ROBOT LÍDER DE LA FORMACIÓN**

#### **3.1.1. Diseño del controlador de velocidad para el motor DC**

##### 3.1.1.1. Selección del tiempo de muestreo

Para determinar el periodo de muestreo, se analizó la función de transferencia en lazo abierto (FTLA) del sistema. En este caso, el sistema correspondió al motor DC, cuya entrada  $u_{(t)}$  es el voltaje, y la salida, es la velocidad angular de su eje  $\dot{\theta}_{(t)}$ .

Como es conocido, el modelo matemático de un motor DC consta de una parte eléctrica y una mecánica, y resulta ser igual a uno de segundo orden. Es así que, teniendo en cuenta los parámetros del motor, la FTLA del sistema resulta:

$$G_{LA(s)} = G_{(s)} = \frac{K_t}{JL_a s^2 + (bL_a + JR_a)s + bR_a + K_t K_e} = \frac{B_{(s)}}{A_{(s)}} \quad (3.1)$$

Luego de reemplazar los valores presentados en el capítulo anterior, se tiene:

$$G_{(s)} = \frac{s\theta_{(s)}}{V_{(s)}} = \frac{39709,78}{(s + 2078,81)(s + 9.97)} \quad (3.2)$$

Se observa que esta función de transferencia tiene 2 polos, de los cuales el dominante es el que se encuentra más cerca al eje imaginario.

Otra manera de expresar la ecuación anterior es la siguiente:

$$G_{(s)} = \frac{s\theta_{(s)}}{V_{(s)}} = \frac{1,91}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (3.3)$$

Donde  $\tau_1$  y  $\tau_2$  representan las constantes de tiempo del sistema, siendo el valor de  $\tau_1 = 4,81 \times 10^{-4}$  seg. y  $\tau_2 = 0,1$  seg.

Luego, se escoge el valor del tiempo de muestreo ( $T$ ) como 1/10 de la constante de tiempo dominante del sistema (Smith & Corripio, Capítulo 15).

$$T = \frac{1}{10}(0,1) \cong 10 \text{ ms.} \quad (3.4)$$

Adicionalmente, considerando que la respuesta del motor debe ser más rápida que la respuesta propia del robot móvil para seguir una trayectoria, se escoge un tiempo de muestreo menor. Por lo tanto:

$$T = 1 \text{ ms.} \quad (3.5)$$

### 3.1.1.2. Diseño y sintonización del controlador de velocidad

Para el diseño de un control PID ( $C_{(s)}$ ), se cierra el lazo de control en el sistema anterior, como se muestra en la Figura 3.1. (Pág. 44)

Para este caso, se escogió el controlador PID de la forma ISA [33, Capítulo 1], por lo que su ecuación es expresada de la siguiente forma:

$$C_{(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (3.6)$$

De esta forma, la función de transferencia en lazo cerrado  $G_{LC(s)}$  es:

$$G_{LC(s)} = \frac{C_{(s)}G_{(s)}}{1 + C_{(s)}G_{(s)}} \quad (3.7)$$

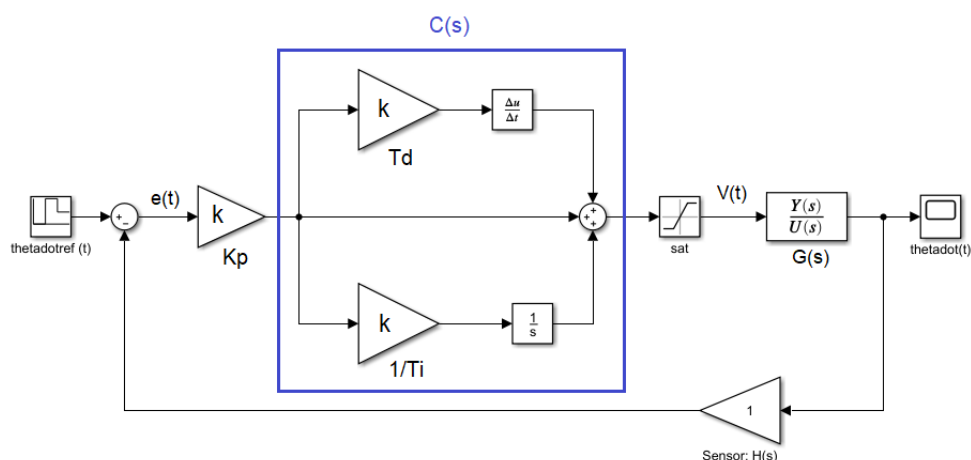


Figura 3.1 – Diagrama de bloques para el sistema en lazo cerrado

Donde:

$k_p$  : Constante de proporcionalidad

$T_d$  : Constante de tiempo derivativo

$T_i$  : Constante de tiempo integral

$G(s)$  : Función de transferencia del motor DC

$H(s)$  : Función de transferencia del sensor

Por otro lado, la ecuación característica está dada por la siguiente expresión:

$$JL_a T_i s^3 + (bL_a + R_a J + K_p T_d K_t) T_i s^2 + (bR_a + K_t K_e + K_p K_t) T_i s + K_p K_t = 0 \quad (3.8)$$

Por otro lado, dado que  $G_{LC}(s)$  es un sistema de tercer orden, su ecuación característica posee 3 (tres) polos y tiene la siguiente forma:

$$(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3) = 0 \quad (3.9)$$

Multiplicando por el término  $JL_a T_i$ , y reordenando términos:

$$JL_a T_i s^3 - ((p_1 + p_2 + p_3) JL_a) T_i s^2 + ((p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_1 p_3) JL_a) T_i s - p_1 p_2 p_3 JL_a T_i = 0 \quad (3.10)$$

En esta ecuación se considera que 2 (dos) polos son complejos conjugados y los dominantes del sistema, mientras que el tercero es un valor negativo y muy alejado del eje imaginario. Este criterio se escoge con la finalidad de que el sistema en lazo cerrado también se comporte como uno de segundo orden, por la mayor facilidad con que puede trabajarse.

En ese sentido:

$$p_1 + p_2 = -2\zeta w_n, \quad p_1 p_2 = w_n^2 \quad (3.11)$$

Donde  $\zeta$  y  $w_n$  es el factor de amortiguamiento y la frecuencia natural del sistema, respectivamente, del sistema en lazo cerrado.

Como paso siguiente, para obtener los parámetros del controlador PID, se igualaron las expresiones (3.8) y (3.10). En particular, al igualar los coeficientes que acompañan a los términos lineales, se tiene el siguiente resultado:

$$(w_n^2 - p_3(2\zeta w_n))JL_a = bR_a + K_t K_e + K_p K_t \quad (3.12)$$

Reemplazando términos:

$$K_p = \frac{(w_n^2 - p_3(2\zeta w_n))(1,28 \times 10^{-5}) - 0,2657}{2} \quad (3.13)$$

Como se desea que el sistema se comporte como uno de segundo orden, se obtienen los valores de  $w_n$  y  $\zeta$  de acuerdo a criterios de diseño para estos tipos de sistemas. Por tanto, al proponer que la respuesta del sistema en lazo cerrado logre estabilizarse luego de unos 35ms., se usa la siguiente ecuación:

$$t_s = \frac{4}{\zeta w_n} \quad (3.14)$$

Como se busca que la respuesta del sistema sea subamortiguada, se escoge un factor de amortiguamiento  $\zeta = 0.788 < 1$ , con lo que:  $w_n = 145 \frac{rad}{s}$ .

Adicionalmente, y como se mencionó en líneas anteriores, el tercer polo es negativo y muy alejado del eje imaginario, por lo que se considera  $p_3 = -700$ .

Finalmente, al reemplazar los valores propuestos en la ecuación 3.4, se obtiene el valor de la constante proporcional de controlador:

$$K_p = 4 \quad (3.15)$$

Para obtener los valores de  $T_i$  y  $T_d$ , se igualan los coeficientes que acompañan a los términos independientes y cuadráticos de las ecuaciones (3.8) y (3.10). Es así que:

$$T_d = \frac{(2\zeta w_n - p_3)JL_a - bL_a - R_a J}{K_p K_t} = 0.0019 \quad (i)$$

$$T_i = \frac{-K_p K_t}{w_n^2 p_3 J L_a} = 0,0108 \quad (ii)$$

A partir de las ecuaciones (i) y (ii), con la finalidad de que el sistema se vuelva más rápido, y anular el error en estado estacionario, se propusieron los siguientes valores:

$$T_i = 0.05, \quad T_d = 0 \quad (3.16)$$

La sintonización del controlador  $C_{(s)}$ , para diferentes velocidades angulares de referencia, mostró el resultado en lazo cerrado de la Figura 3.2, en la cual se aprecia que no se logra un buen resultado. De manera más notoria, cuando se desea alcanzar una alta velocidad, la respuesta demora en estabilizarse. Este efecto es conocido como el *integrador windup*, situación en la que ocurre un cambio considerable en la entrada de referencia  $r_{(t)}$  y el término integral del controlador acumula un error considerable durante dicho cambio, de manera que aparece un sobreimpulso y continúa en aumento el error hasta que se anule eventualmente con los valores del error en la dirección opuesta.

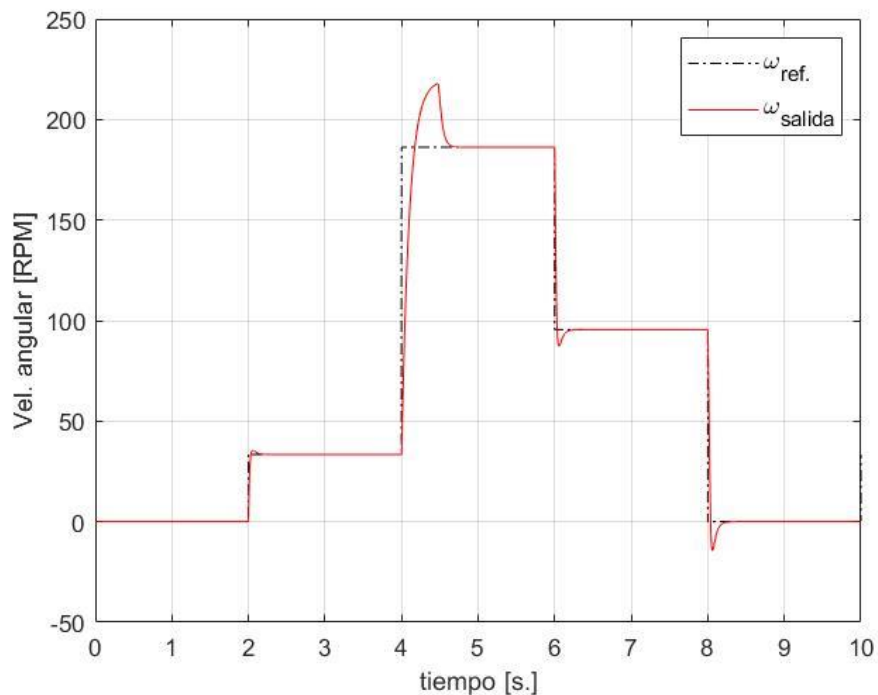


Figura 3.2 – Respuesta del sistema en lazo cerrado

Una forma de resolver esta situación es compensando este incremento con una ganancia integral sobre la diferencia entre la señal de control saturada y la no saturada, como se aprecia en la Fig. 3.3 (Pág. 47), donde:



- $k_p$  : Constante de proporcionalidad  
 $T_d$  : Constante de tiempo derivativo  
 $T_i$  : Constante de tiempo integral  
 $G(s)$  : Función de transferencia del motor DC  
 $H(s)$  : Función de transferencia del sensor  
 $k$  : Ganancia antiwindup

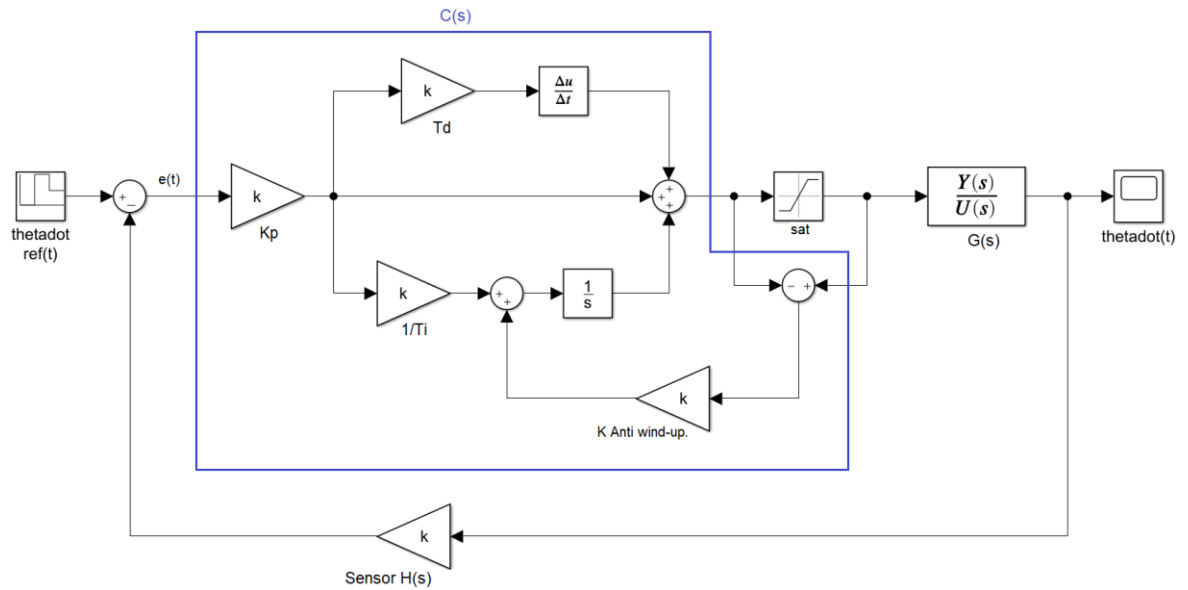


Figura 3.3 – Diagrama de bloques para el sistema en lazo cerrado, con acción anti windup.

Considerando el valor de la ganancia anti wind-up igual al de la ganancia integral, se obtuvo un mejor resultado en el control. Como se puede notar en la Fig. 3.4 (Pág. 48), se establecieron velocidades de referencia de hasta 180 RPM ( $w_{MAX} = 200RPM$ ). En el caso de cambios bruscos de velocidad, el efecto de anti windup logra que el control PID se desempeñe de manera adecuada. Sin embargo, es importante precisar que, para el presente trabajo de investigación, estos cambios de velocidad no serán experimentados por el robot líder, sólo podrá suceder en el caso de los robots seguidores, justamente para lograr mantener la formación deseada en el tiempo.

### 3.1.2. Diseño del controlador para el seguimiento de trayectoria

Con la finalidad de que el robot móvil siga una determinada trayectoria, se diseñaron 2 (dos) tipos de control no lineal. Uno basado en el modelo cinemático del robot, y el segundo, teniendo en cuenta el criterio de estabilidad de Lyapunov.

### 3.1.2.1. Control No Lineal basado en el modelo cinemático del robot

Las ecuaciones cinemáticas del robot fueron definidas mediante la expresión (2.8), a partir de la cual se puede considerar que las entradas de control son las velocidades  $[v, w]^T$ . Siendo así, y asumiendo que la trayectoria deseada de un robot, en el sistema inercial, resulta de tomar la abscisa  $x_1$  y ordenada  $x_2$  del origen del sistema de coordenadas móvil del robot [10], se tiene que:

$$\left. \begin{aligned} x_1^d &= x_{1(t)}^d \Rightarrow \dot{x}_1^d = \dot{x}_{1(t)}^d \\ x_2^d &= x_{2(t)}^d \Rightarrow \dot{x}_2^d = \dot{x}_{2(t)}^d \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

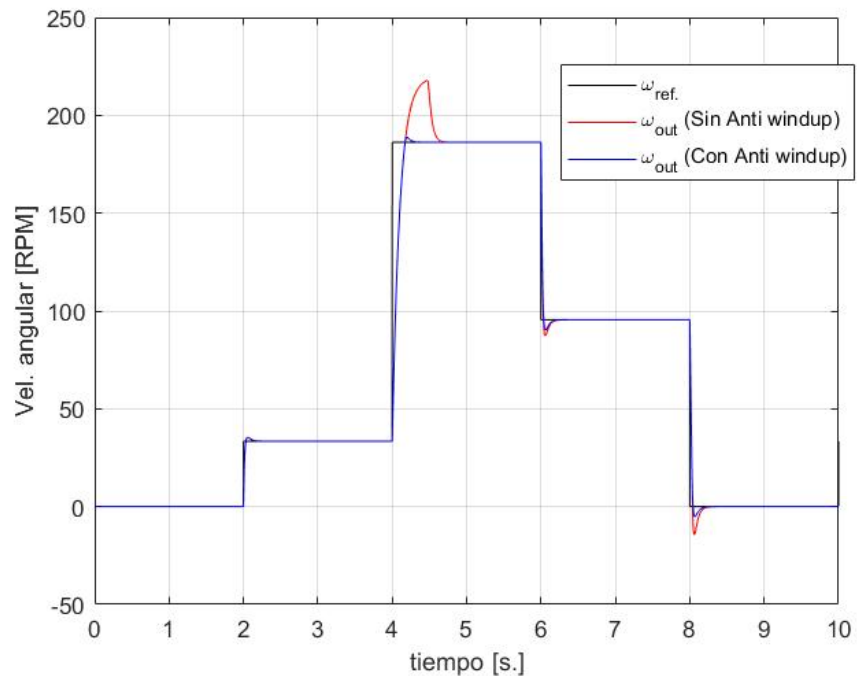


Figura 3.4 – Respuesta del sistema en lazo cerrado, con acción anti windup

A partir de estas expresiones y de la ecuación de restricción (2.3), el ángulo deseado con el que debe desplazarse el robot, para seguir una determinada trayectoria, es:

$$\psi^d = \text{atan} \left( \frac{\dot{x}_2^d}{\dot{x}_1^d} \right) \quad (3.18)$$

De esta forma, se definen las siguientes variables:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= \tan(\psi) \\ z_3 &= x_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Con estas expresiones, se obtiene una nueva expresión para las ecuaciones cinemáticas que deben ser controladas (Fahimi,2009):

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1 &= u_1 \\ \dot{z}_2 &= u_2 \\ \dot{z}_3 &= z_2 u_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Donde las entradas de control se redefinen como:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= v \cos(\psi) \\ u_2 &= w(1 + \tan^2(\psi)) \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

La trayectoria deseada para las nuevas variables resulta sustituyendo (3.18) en (3.19):

$$\left. \begin{aligned} z_{1(t)}^d &= x_{1(t)}^d \\ z_{2(t)}^d &= \frac{\dot{x}_{2(t)}^d}{\dot{x}_{1(t)}^d} \\ z_{3(t)}^d &= x_{2(t)}^d \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta las ecuaciones cinemáticas (2.8), las entradas de control  $[u_1, u_2]^T$  pueden ser expresadas en función de las variables deseadas de posición, velocidad, y aceleración:

$$\left. \begin{aligned} u_1^d &= \dot{z}_1^d = \dot{x}_{1(t)}^d \\ u_2^d &= \dot{z}_2^d = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}_{2(t)}^d}{\dot{x}_{1(t)}^d} \right) = \frac{\ddot{x}_{2(t)}^d \dot{x}_{1(t)}^d - \dot{x}_{2(t)}^d \ddot{x}_{1(t)}^d}{(\dot{x}_{1(t)}^d)^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

En referencia a lo anterior, el objetivo de control se traduce en lograr que las ecuaciones cinemáticas (3.20) sigan la trayectoria definida por (3.22), por lo que se define las siguientes ecuaciones del error:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tilde{z}}_1 &= \tilde{u}_1 \\ \dot{\tilde{z}}_2 &= \tilde{u}_2 \\ \dot{\tilde{z}}_3 &= \tilde{u}_1 \tilde{z}_2 + u_1^d \tilde{z}_2 + \tilde{u}_1 z_2^d \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Donde:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{z}_k &= z_k - z_k^d, \quad k = 1,2,3 \\ \tilde{u}_1 &= u_1 - u_1^d, \quad k = 1,2 \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Reescribiendo en forma matricial:

$$\dot{\tilde{Z}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{z}}_1 \\ \dot{\tilde{z}}_2 \\ \dot{\tilde{z}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_1 \tilde{z}_2 + u_1^d \tilde{z}_2 + \tilde{u}_1 z_2^d \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Linealizando alrededor de  $\tilde{Z} = [0 \ 0 \ 0]^T$  y  $[\tilde{u}_1 \ \tilde{u}_2]^T = [0 \ 0]^T$ , se tiene:

$$\dot{\tilde{z}} = A\tilde{z} + B\tilde{u} \quad (3.27)$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_1^d & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z_2^d & 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Para este sistema resultante, se asume la siguiente ley de control por realimentación de estados variante en el tiempo [10]:

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & -\frac{k_3}{u_1^d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \tilde{z}_3 \end{bmatrix} = -K\tilde{z} \quad (3.29)$$

Donde  $u_1^d$  es la velocidad lineal deseada del robot.

Esta ley de control es mediante la asignación de polos, puesto que, al analizar el sistema en lazo cerrado, se tiene:

$$\dot{\tilde{z}} = (A - BK)\tilde{z} \quad (3.30)$$

La matriz de estados tiene la siguiente forma:

$$A - BK = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & \frac{k_3}{u_1^d} \\ k_1 z_2^d & u_1^d & 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

La ecuación característica:  $\det(sI - A) = 0$ , es como sigue:

$$(s - k_1)[s(s - k_2) - k_3] = 0 \quad (3.32)$$

Siendo los polos resultantes de la ecuación, los siguientes:

$$s_1 = k_1, \quad s_{23} = k_2 \pm \frac{\sqrt{k_2^2 + 4k_3}}{2} \quad (3.33)$$

Donde:

$$k_1 = -\lambda_1, \quad k_2 = -2\lambda_2, \quad k_3 = -(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)$$

De esta manera, los polos resultantes son 2 valores complejos conjugados, y 1 (un) valor real negativo, mostrando que el sistema es asintóticamente estable:

$$s_1 = -\lambda_1, \quad s_{23} = -\lambda_2 + j\lambda_3 \quad (3.34)$$

Finalmente, para obtener las variables de control iniciales  $[v, w]^T$ , de la ecuación (3.21) y de las ecuaciones cinemáticas de error, se tiene:

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_1}{\cos(\phi)} \\ \frac{u_2}{1 + \tan^2(\psi)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{u}_1 + u_1^d}{\cos(\psi)} \\ \frac{\tilde{u}_2 + u_2^d}{1 + \tan^2(\psi)} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

### 3.1.2.2. Control No Lineal basado en la estabilidad de Lyapunov

Para este enfoque, de acuerdo a [16], se definen dos (02) posturas o ubicaciones para el robot móvil durante su movimiento: *la ubicación de referencia*  $\eta_r = [x_r, y_r, \psi_r]$ , y *la ubicación actual*:  $\eta_c: [x_c, y_c, \psi_c]$ .

La primera postura es la ubicación deseada del robot cuando se encuentra siguiendo una trayectoria; mientras que la segunda, es referida a la ubicación real del robot en el momento de análisis. Este detalle se muestra en la Fig. 3.5:

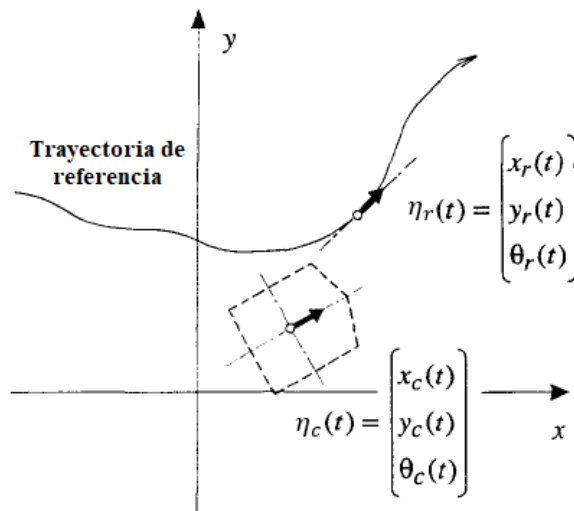


Figura 3.5 – Ubicación de referencia y ubicación actual del robot móvil.

La diferencia de ubicaciones se representa mediante la siguiente matriz de transformación  $T_{(\psi)}$ :

$$\eta_e = T_{(\psi_c)}(\eta_r - \eta_c) \quad (3.36)$$

Donde:

$$\eta_e = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \psi_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_c) & \sin(\psi_c) & 0 \\ -\sin(\psi_c) & \cos(\psi_c) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\eta_r - \eta_c) \quad (3.37)$$

Este error es el resultado de la transformación de  $\eta_r$  en un sistema de coordenadas local con origen en el punto C, y el eje de las abscisas rotado un ángulo  $\psi_c$ .

En este problema de seguimiento de trayectoria, se desea encontrar las leyes de control para  $[v, w]^T$ , de manera que el robot siga la ubicación de referencia, con posición  $\eta_r = [x_r, y_r, \psi_r]^T$  y entradas  $v_r$  y  $w_r$ , y así lograr que el error en la ubicación  $\eta_e$  converja a 0.

A partir de la ecuación (3.37), la dinámica del error tiene la siguiente expresión (ver Kanayama *et al.* 1990):

$$\dot{\eta}_e = \begin{bmatrix} wy_e - v + v_r \cos(\psi_e) \\ -x_e w + v_r \sin(\psi_e) \\ w_r - w \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Esta expresión puede representarse de la siguiente forma:

$$\dot{\eta}_e = \begin{bmatrix} 0 & w & 0 \\ -w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ w_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\psi_e) & 0 \\ \sin(\psi_e) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ w_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

De las ecuaciones cinemáticas 2.8 del robot móvil:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\psi}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_r \cos(\psi) \\ v_r \sin(\psi) \\ w_r \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Donde, de manera similar a la ecuación (3.18):

$$\dot{\psi}_r = \tan^{-1} \left( \frac{\dot{y}_r}{\dot{x}_r} \right) = \frac{\ddot{y}_r \dot{x}_r - \dot{y}_r \ddot{x}_r}{\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2} \quad (3.41)$$

De esta forma, las velocidades de referencia quedan definidas por:

$$v_r = \begin{bmatrix} v_r \\ w_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \cos(\psi) \\ \dot{\psi}_r \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

En este punto, se propone la siguiente ley de control:

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_r \cos(\psi_e) + k_x x_e \\ w_r + v_r k_y y_e + v_r k_\psi \sin(\psi_e) \end{bmatrix}; \quad k_x, k_y, k_\psi > 0, \quad (3.43)$$

Con la cual  $\eta_e = [0, 0, 0]^T$  es un punto de equilibrio, si la velocidad de referencia  $v_r > 0$ . (Kanayama *et al.* 1990)

Con la finalidad de probar y garantizar la estabilidad del sistema con la ley de control (3.43), se obtuvo en primer lugar el punto de equilibrio del sistema, para lo cual se plantea la siguiente ecuación:

$$\dot{X}_e = [0 \ 0 \ 0]^T \quad (3.44)$$

Esto es:

$$\begin{bmatrix} w y_e - v + v_r \cos(\psi_e) \\ -x_e w + v_r \sin(\psi_e) \\ w_r - w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Teniendo en cuenta la ecuación anterior, se puede decir que  $X_e = [0 \ 0 \ 0]^T$  es un punto de equilibrio, ya que al reemplazar  $X_e$  en la expresión anterior, se obtiene que las velocidades de referencia son iguales a las velocidades del robot:

$$\begin{bmatrix} -v + v_r \\ 0 \\ w_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_r \\ w_r \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

A continuación, con la finalidad de determinar la estabilidad del punto de equilibrio obtenido, y de acuerdo a [16], se define la siguiente función escalar:

$$V_{(X_e)} = \frac{1}{2}(x_e^2 + y_e^2) + \frac{1 - \cos(\psi_e)}{k_y}, \quad k_y > 0 \quad (3.47)$$

i. Se verifica que:

$$V = 0, \text{ sólo cuando: } V_{(X_e=[0 \ 0 \ 0]^T)}$$

ii. Asimismo,  $V$  es definida positiva, puesto que:

$$\frac{1}{2}(x_e^2 + y_e^2) \geq 0 \quad \wedge \quad 0 < \frac{1 - \cos(\psi_e)}{k_y} < \frac{2}{k_y} \\ \Rightarrow V > 0, \forall X_e \neq [0 \ 0 \ 0]^T$$

iii. Mientras que,  $\dot{V}$  es definida negativa<sup>1</sup>, ya que:

$$\dot{V} = x_e \dot{x}_e + y_e \dot{y}_e + \frac{1}{k_y} \sin(\psi_e) \dot{\psi}_e \quad (3.48)$$

Donde luego de reemplazar los valores de  $\dot{x}_e, \dot{y}_e, \dot{\psi}_e$  a partir de la ecuación (3.38), se tiene:

$$\dot{V} = (-v + v_r \cos(\psi_e))x_e + (-w + w_r + v_r y_e k_y) \frac{\sin(\psi_e)}{k_y} \quad (3.49)$$

Al reemplazar los valores de  $v$  y  $w$  propuestos en la ecuación (3.43), se obtiene la siguiente expresión:

$$\dot{V} = -k_x x_e^2 - v_r \frac{k_\psi}{k_y} \sin(\psi_e)^2 \quad (3.50)$$

Y siendo  $v_r > 0$ , se tiene:

$$\dot{V} < 0, \forall X_e \neq [0 \ 0 \ 0]^T \quad (3.51)$$

En consecuencia, de los puntos i, ii y iii, la expresión propuesta para  $V$  es una función de Lyapunov, y por tanto, el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable (Ogata, 1998. 3ra Edición – Teorema 13-1), lo que se interpreta como el hecho de que las velocidades  $[v, w]^T$  alcanzarán las velocidades de referencia  $[v_r, w_r]^T$

### 3.1.3. Casos de estudio

En esta sección, se presentan los resultados obtenidos para diferentes trayectorias que el robot móvil debe seguir. Para todos los casos a continuación, se tiene en cuenta que  $x$  es la abscisa y  $y$  es la ordenada del robot, respecto de un S.R.I; mientras que  $\eta_o$  es su posición inicial.

#### a) Trayectoria lineal por tramos

Se encuentra definida por:

$$y = f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 3\frac{1}{3} \\ 3\frac{1}{3}, & 3\frac{1}{3} < x < 6\frac{2}{3} \\ 10 - x, & 6\frac{2}{3} < x < 10 \\ 0, & x > 10 \end{cases}, \eta_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

<sup>1</sup>: Se dice que una función escalar  $V(x)$  es definida positiva en una región  $\Omega$  (que incluye el origen del espacio de estados) si  $V(x) > 0$  para todos los estados  $x$  diferentes de cero en la región  $\Omega$  y  $V(0) = 0$ .

Por otro lado, se dice que una función escalar  $V(x)$  es definida negativa si  $-V(x)$  es definida positiva.



Además, se debe cumplir que:

$$v^d = \frac{\sqrt{2} m}{2 s}, \text{ para el primer y tercer tramo}$$

$$v^d = 0,5 \frac{m}{s}, \text{ para el segundo y último tramo}$$

La trayectoria anterior es parametrizada en el tiempo, y queda definida por las expresiones para  $x^d$  y  $y^d$ :

$$\begin{bmatrix} x^d \\ y^d \end{bmatrix} = \begin{cases} [0,5t; 0,5t]^T, & 0 \leq t \leq 6\frac{2}{3} \\ \left[0,5t; 3\frac{1}{3}\right]^T, & 6\frac{2}{3} \leq t < 13\frac{1}{3} \\ \left[0,5t; 3\frac{1}{3} - 0,5\left(t - 13\frac{1}{3}\right)\right]^T, & 13\frac{1}{3} < t \leq 20 \\ [0,5t; 0]^T, & t > 20 \end{cases} \quad (3.53)$$

Usando la ley de control expuesta en la sección 3.1.2.1, se obtuvieron los resultados mostrados en la Fig. 3.6 y en la Fig. 3.7 (Pág. 56):

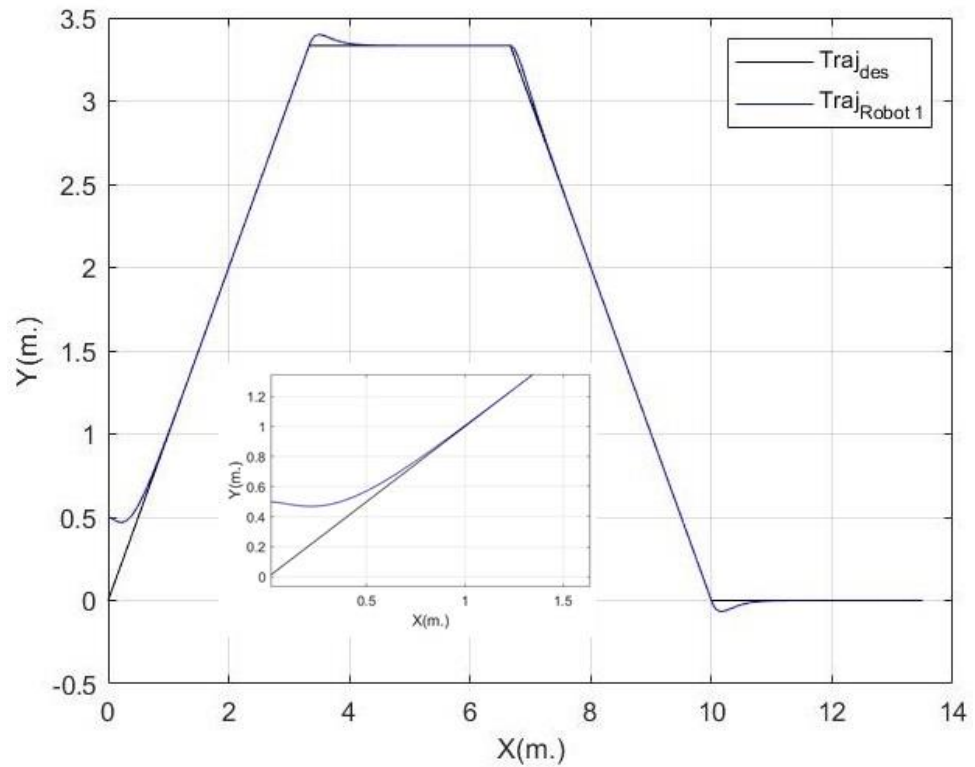


Figura 3.6 – Robot móvil siguiendo una trayectoria lineal por tramos

Como se aprecia, la ley de control explicada en la sección anterior se desempeña de manera adecuada. El robot móvil sigue la trayectoria deseada, y cuando hay un cambio de rumbo, la dirección se corrige rápidamente con un sobreimpulso pequeño. Los polos escogidos son:  $s_1 = -3, s_{23} = -6 \pm j0,5$

Cuando se inicia el movimiento, el robot trata de acercarse a la trayectoria deseada; por ello su orientación disminuye hasta  $-12^\circ$ , para luego alcanzar  $50^\circ$ .

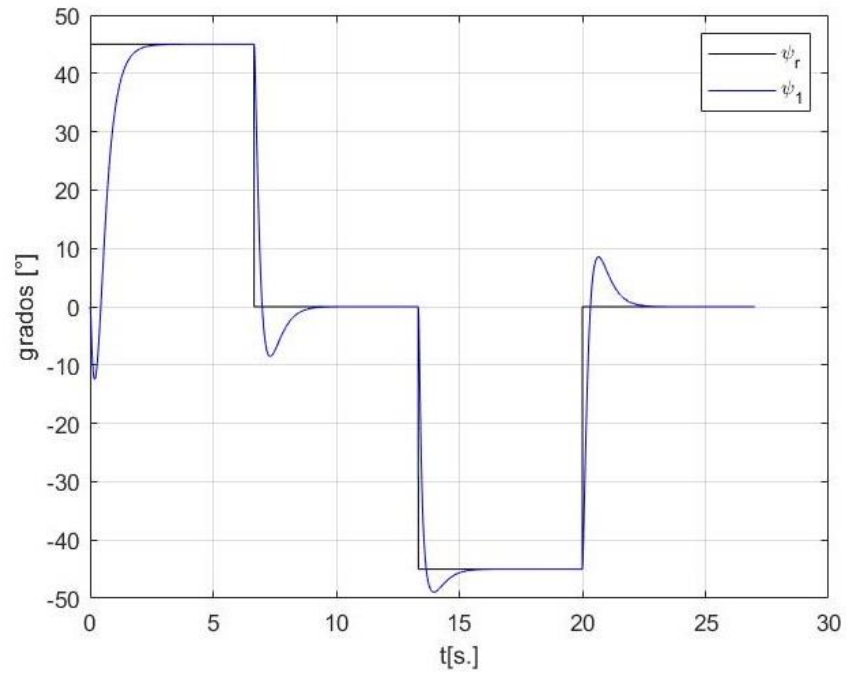


Figura 3.7 – Orientación del robot móvil siguiendo la trayectoria lineal, por tramos.

b) Trayectoria parabólica:

La trayectoria es definida por la siguiente expresión:

$$y(x) = ax^2 + bx + c, \quad \eta_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0048 \\ 0,4454 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Considerando una velocidad lineal deseada  $v^d = 0.5$  m/s., se tiene que:

$$\begin{bmatrix} x^d \\ y^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5t \\ -0,0012t^2 + 0,2227t \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Los resultados se muestran en las Fig. 3.8 y 3.9 (ambas en Pág. 57)

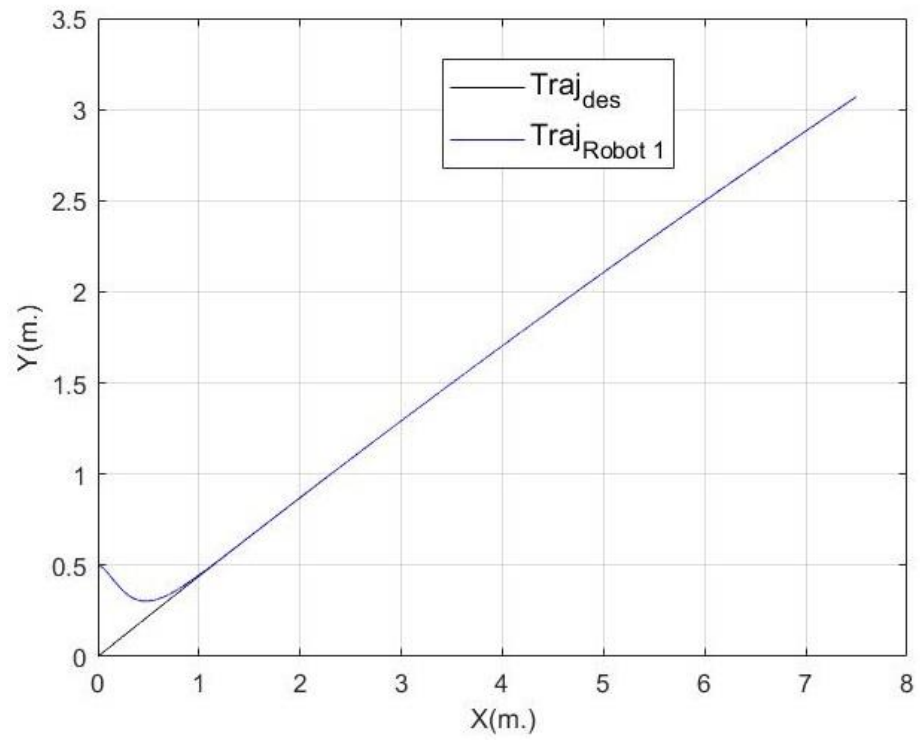


Figura 3.8 – Robot siguiendo una trayectoria parabólica

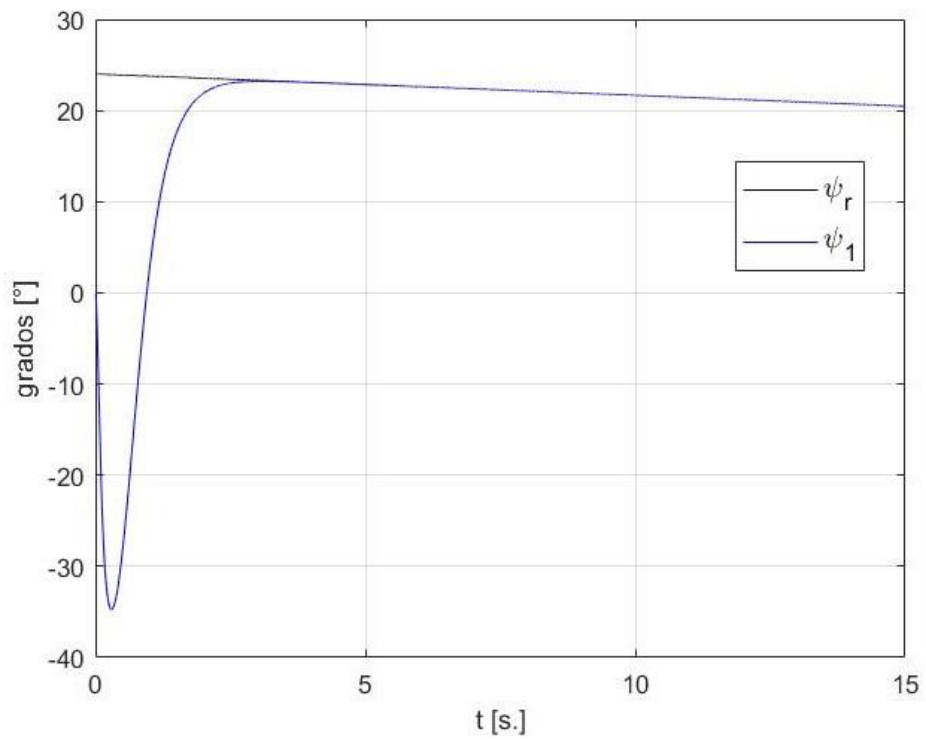


Figura 3.9 – Orientación del robot móvil

Los polos del sistema son:

$$s_1 = -3, \quad s_{23} = -6 + j0,5 \quad (3.56)$$

De la misma forma que el caso anterior, el controlador basado en el modelo cinemático del robot se desempeña de manera adecuada, dado que sigue la trayectoria parabólica deseada, y la orientación de referencia también es alcanzada.

c) Trayectoria circular:

Considerando una velocidad angular deseada:  $w^d = 0.1$  rad/s., se define la trayectoria:

$$\begin{bmatrix} x^d \\ y^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cos(0,1t) \\ 3\sin(0,1t) \end{bmatrix}, \quad \eta_o = \begin{bmatrix} 1,5 \\ -0,5 \\ 65^\circ \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Para este caso se utilizó el controlador de la ecuación (3.43), el cual está basado en la estabilidad de Lyapunov, y cuyos parámetros se consideraron iguales a:

$$k_x = 1,5; \quad k_y = 1,5; \quad k_\psi = 3$$

El criterio de elección de estos parámetros fue a partir del análisis de la expresión para la ley de control, representada por la ecuación (3.43). Se consideró una ponderación mayor sobre la constante de proporcionalidad relacionada a la orientación del robot, en comparación con las constantes asociadas a la posición del robot en el sistema de coordenadas. En este sentido, se obtuvieron los resultados de la Figuras 3.10 y 3.11 (ambas en Pág. 59).

Como se observa en ambas gráficas, desde el inicio del análisis, el robot se desplaza de manera que intenta seguir la trayectoria deseada hasta que, luego de estar lo suficientemente cerca, cambia su rumbo con la finalidad de coincidir tanto en posición y orientación. Este objetivo se logra aproximadamente luego de 15 segundos de iniciado el movimiento del robot.

d) Trayectoria Lemniscata:

La trayectoria deseada está definida como sigue:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), \quad \eta_o = [6,5 \quad -0,5 \quad 45^\circ]^T \quad (3.58)$$

Donde:  $a = 6, w = \frac{0,5}{6}$ ;

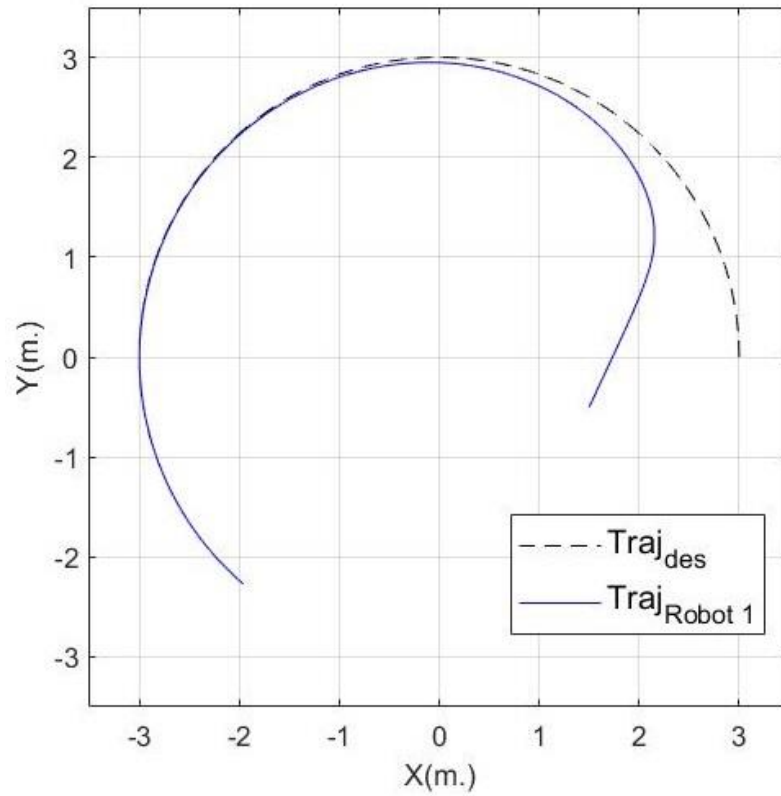


Figura 3.10 – Robot móvil siguiendo una trayectoria circular

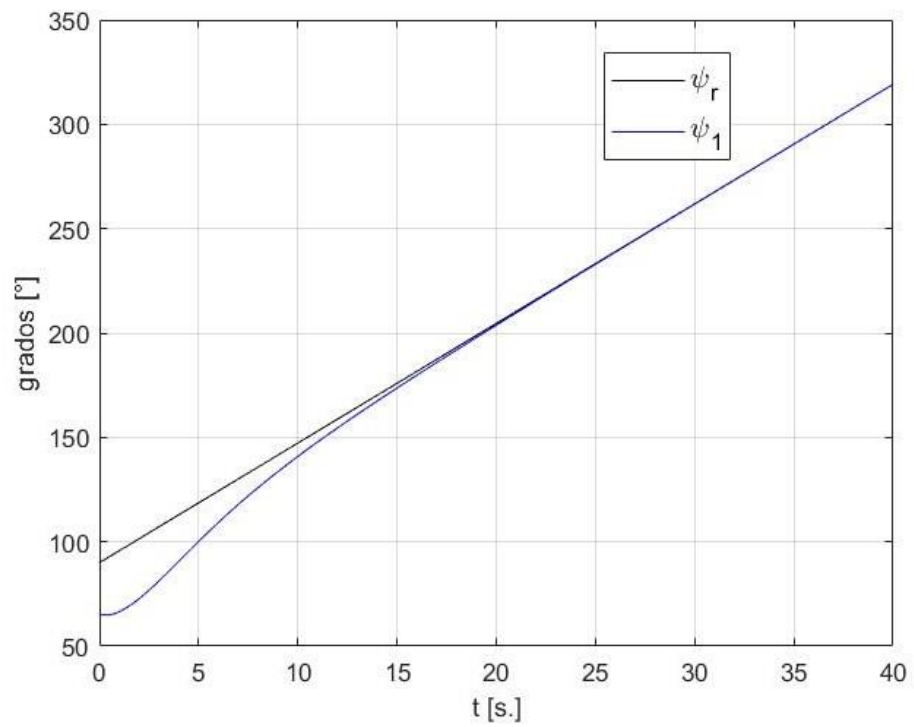


Figura 3.11 – Orientación del robot móvil

En función del tiempo, la trayectoria de la lemniscata queda definida por la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} x^d \\ y^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6\sqrt{2} \cos(\omega t)}{1 + \sin(\omega t)^2} \\ \frac{6\sqrt{2} \cos(\omega t) \sin(\omega t)}{1 + \sin(\omega t)^2} \end{bmatrix}, \quad \omega = \frac{0.5 \text{ rad}}{6 \text{ s}} \quad (3.59)$$

Se escogieron los siguientes parámetros para el controlador no lineal:

$$k_x = 1,2; \quad k_y = 0,05; \quad k_\psi = 1,98$$

En este caso, se hizo una ponderación mayor en las constantes de proporcionalidad de la posición en el eje X y la orientación  $\psi$ , con respecto a la posición en el eje Y; porque el desplazamiento horizontal que realiza el robot móvil durante su movimiento (16 m.) es mayor que su desplazamiento vertical (6 m.). Como se aprecia en las Fig. 3.12 y 3.13 (Pág. 61), el controlador permite obtener una buena respuesta para el seguimiento de trayectoria.

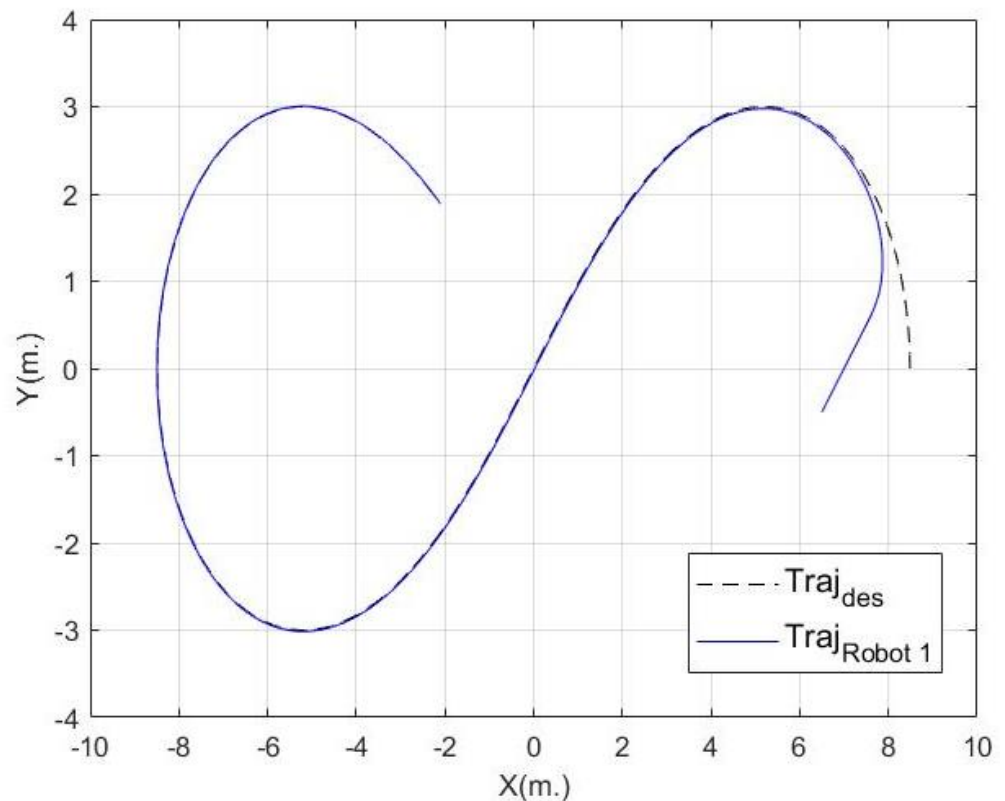


Figura 3.12 – Trayectoria seguida por el robot

Desde el inicio del análisis, el robot busca seguir la trayectoria deseada. Luego de aproximadamente 5 segundos, se logra el objetivo. Más aún, a pesar del cambio de rumbo constante y particular de la lemniscata, el controlador permite que el sistema no se vea perturbado.

Es importante precisar que, en adición al procedimiento de diseño del controlador no lineal, se realizó un algoritmo para representar el correcto ángulo de referencia  $\psi_r$ , puesto que este valor es obtenido a partir de la función  $atan2$ .

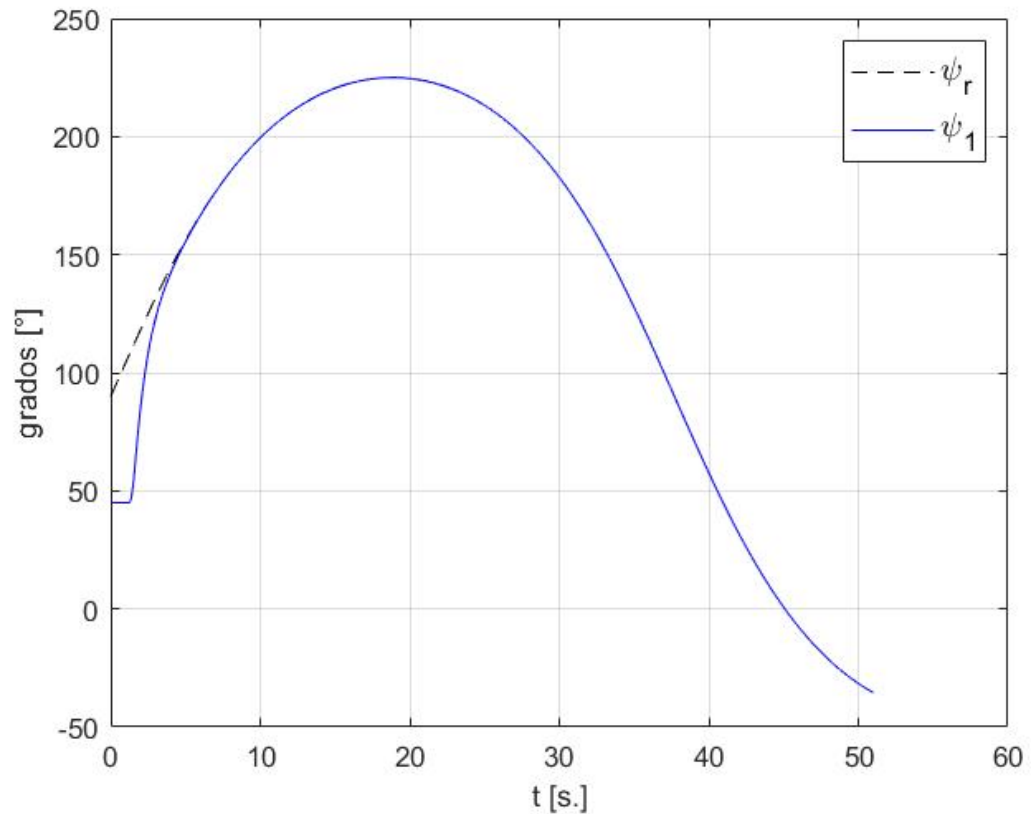


Figura 3.13 – Orientación de referencia y del robot móvil.

e) Trayectoria senoidal:

Se encuentra definida por:

$$y = 4 \sin(x), \quad \eta_o = [0 \quad 1 \quad 0]^T \quad (3.60)$$

Siendo el tiempo de análisis igual a 50s., y la velocidad deseada  $v^d=0.5$  m/s., se tiene:

$$\begin{bmatrix} x^d \\ y^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5t \\ 4 \sin(0,5\omega t) + 2 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Los parámetros escogidos para el controlador son:

$$k_x = 1; \quad k_y = 1; \quad k_\psi = 1,3$$

En este caso, la ponderación en las constantes de proporcionalidad del controlador es mayor para la orientación en comparación con las posiciones del robot en los ejes X y Y, porque se prioriza el efecto del robot en seguir la trayectoria curvilínea con el ángulo deseado. Los resultados mostrados en las Fig. 3.14 y 3.15 (Pág. 63), dan cuenta del buen desempeño del controlador no lineal.

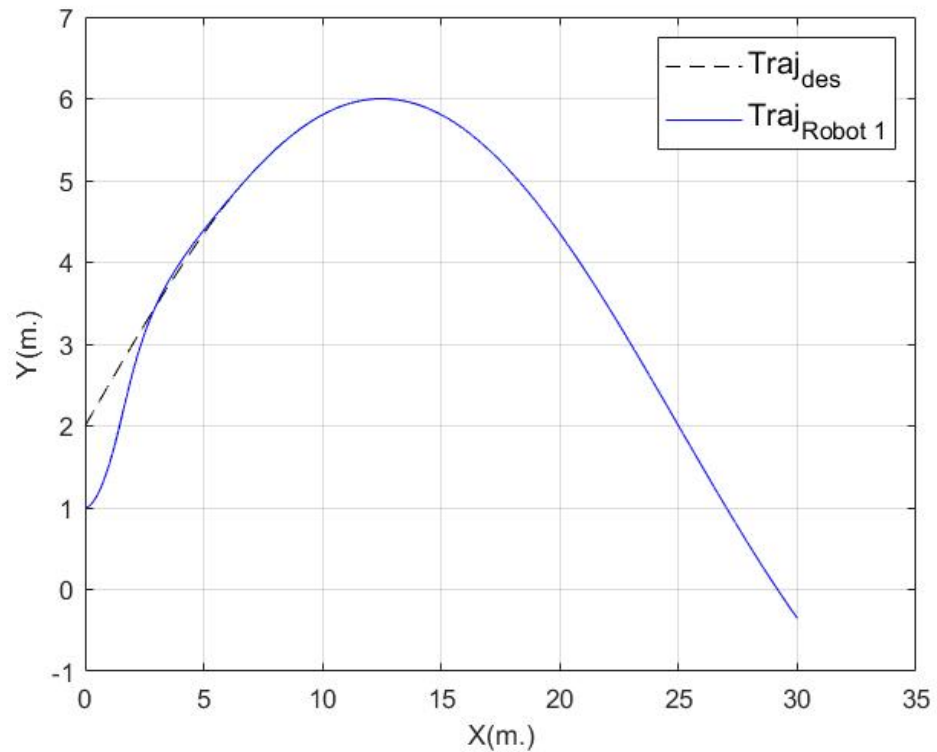


Figura 3.14 – Trayectoria deseada y del robot

Se aprecia, de la misma forma, que la estabilidad en la orientación se logra aproximadamente luego de 15 segundos de iniciado el movimiento del robot móvil; mientras que la estabilidad en la posición se alcanza luego de 5 segundos de iniciado el análisis.



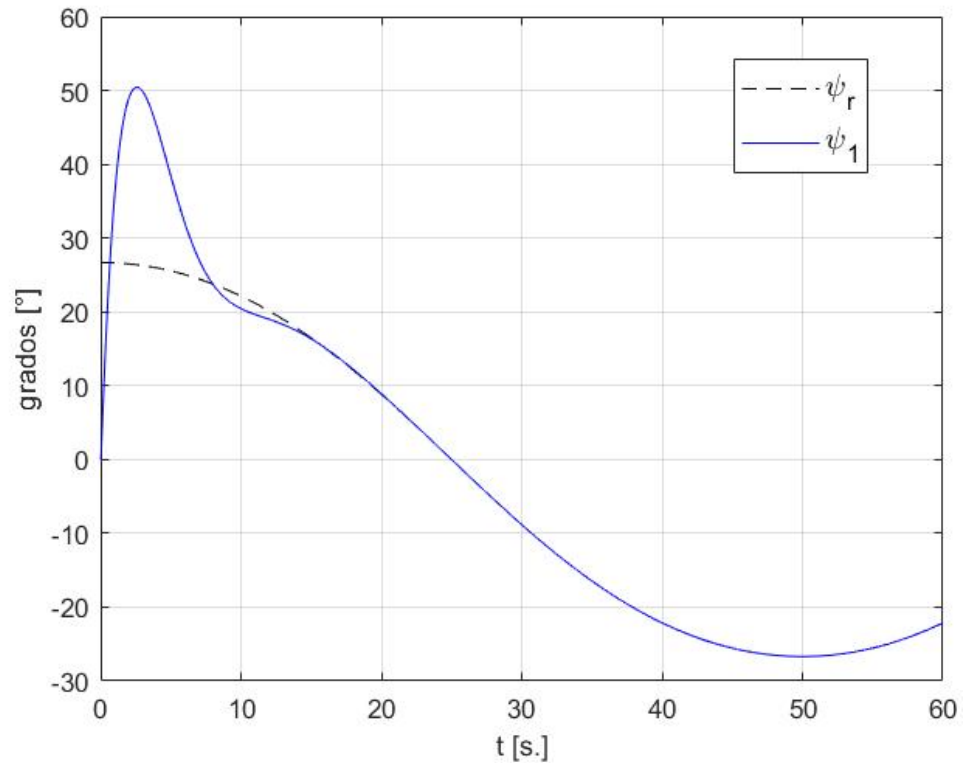


Figura 3.15 – Orientación de referencia y del robot móvil

### 3.2. SISTEMA DE CONTROL PARA UNA FORMACIÓN DE ROBOTS MÓVILES

En esta sección se detalla esencialmente el procedimiento de diseño del controlador que permita al sistema conformado por varios robots móviles, alcanzar un patrón de formación deseado. Para ello, se analizan dos (02) situaciones.

El primer enfoque de control consiste en establecer un algoritmo que permite a un robot seguidor mantenerse a una distancia y ángulo deseado respecto al robot líder de la formación. De acuerdo a revisión de la bibliografía, se trata del Control ' $l - \alpha$ '; mientras que la segunda estrategia señala que, para el control adecuado, un robot seguidor debe lograr situarse a una distancia pre establecida  $d_1$  respecto a un robot líder, así como también a una segunda distancia pre establecida  $d_2$  respecto a un segundo robot líder en la formación.

Ambos controladores, así como la extensión al control de formación para varios robots móviles, se detallan en las secciones 3.2.1 y 3.2.2.

### 3.2.1. El controlador 'l - $\alpha$ '

#### 3.2.1.1. Estudio y Diseño

En este enfoque, y de manera similar al capítulo anterior, se definen dos (02) posiciones o ubicaciones para los robots en la formación. *La ubicación de referencia para el robot seguidor*  $\eta_{2r} = [x_{2r}, y_{2r}, \psi_{2r}]$ , y *la ubicación actual del robot seguidor*:  $\eta_{2c} = [x_2, y_2, \psi_2]$ .

A partir de la Fig. 3.16, se puede obtener el error en estas ubicaciones, el cual puede ser expresado en el sistema de coordenadas móvil del robot seguidor, mediante la siguiente ecuación:

$$\eta_e = T_{(\psi_2)}(\eta_{2r} - \eta_{2c}) = T_{(\psi_2)} \left( \begin{bmatrix} x_{2r} \\ y_{2r} \\ \psi_{2r} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \right) \quad (3.62)$$

Por otro lado, de la geometría, se tiene:

$$\eta_e = \begin{bmatrix} \cos(\psi_2) & \sin(\psi_2) & 0 \\ -\sin(\psi_2) & \cos(\psi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} x_1 + l_{12}^d \cos(\psi_1 + \alpha_{12}^d) - d \cos(\psi_2) \\ y_1 + l_{12}^d \sin(\psi_1 + \alpha_{12}^d) - d \sin(\psi_2) \\ \psi_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 + l_{12} \cos(\psi_1 + \alpha_{12}) - d \cos(\psi_2) \\ y_1 + l_{12} \sin(\psi_1 + \alpha_{12}) - d \sin(\psi_2) \\ \psi_2 \end{bmatrix} \right)$$

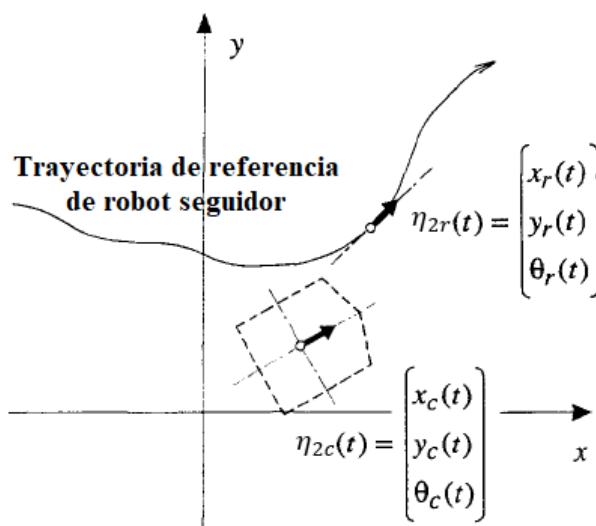


Figura 3.16 – Ubicación de referencia  $\eta_{2r}$  y actual  $\eta_{2c}$  del robot seguidor en la formación

El error en la ubicación queda determinado de la siguiente forma:

$$\eta_e = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \psi_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{12}^d \cos(\alpha_{12}^d + \psi_e) - l_{12} \cos(\alpha_{12} + \psi_e) \\ l_{12}^d \sin(\alpha_{12}^d + \psi_e) - l_{12} \sin(\alpha_{12} + \psi_e) \\ \psi_1 - \psi_2 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Por otro lado, y a partir de la geometría presentada de la Fig. 3.17, las ecuaciones cinemáticas del robot seguidor 2 están dadas por las siguientes expresiones [6]:

$$\left. \begin{aligned} \dot{l}_{12} &= v_2 \cos(\gamma_1) - v_1 \cos(\alpha_{12}) + dw_2 \sin(\gamma_1) \\ l_{12} \dot{\alpha}_{12} &= v_1 \sin(\alpha_{12}) - v_2 \sin(\gamma_1) + dw_2 \cos(\gamma_1) - w_1 l_{12} \end{aligned} \right\} \quad (3.65)$$

Donde:  $\gamma_1 = \psi_1 + \alpha_{12} - \psi_2$ , y  $\mathbf{p}$  es el punto de control en el robot seguidor, ubicado a una distancia  $\mathbf{d}$  del origen de su sistema de coordenadas móvil.

A partir de las ecuaciones (3.64) y (3.65), se obtiene la dinámica del error:

$$\dot{\eta}_e = \begin{bmatrix} w_2 y_e - v_2 + v_1 \cos(\psi_e) - w_1 l_{12}^d \sin(\alpha_{12}^d + \psi_e) \\ -x_e w_2 + v_1 \sin(\psi_e) - dw_2 + w_1 l_{12}^d \cos(\alpha_{12}^d + \psi_e) \\ w_1 - w_2 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

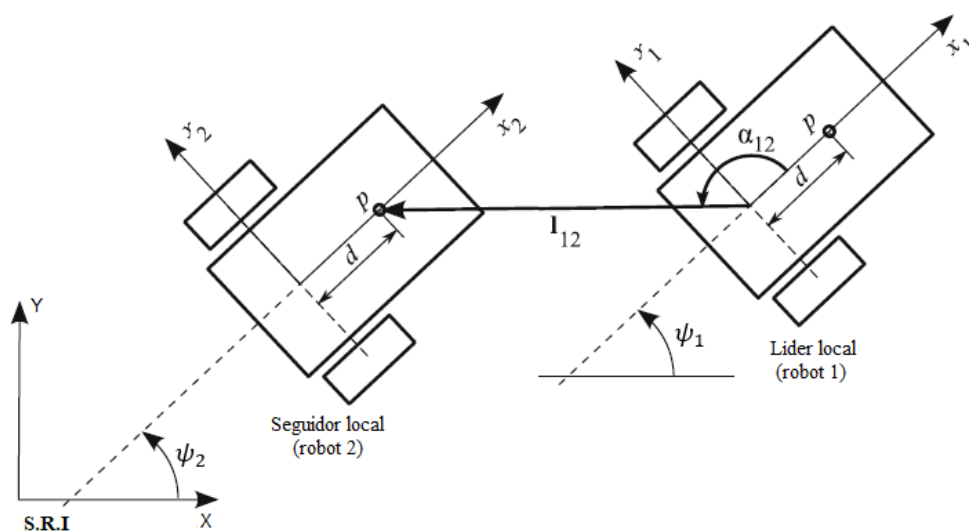


Figura 3.17 – La estrategia de control  $l - \alpha'$ . (Fahimi, 2009)

En este problema de control de formación, se desea encontrar las leyes de control para  $[v_2, w_2]^T$ , de manera que el robot seguidor siga la ubicación de referencia  $\eta_{2r} = [x_{2r}, y_{2r}, \psi_{2r}]^T$ , y así lograr que el error en la ubicación  $\eta_e$  converja a 0.

En este punto, se hace uso de la siguiente ley de control ([7], Pág. 16):

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \cos(\psi_e) + k_x x_e \\ w_1 + (v_1 + k_v)k_y y_e + (v_1 + k_v)k_\psi \sin(\psi_e) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_v \\ f_w \end{bmatrix}; \quad (3.67)$$

Donde:

$$k_x, k_y, k_\psi, k_v > 0$$

$$\begin{bmatrix} f_v \\ f_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w_1 l_{12}^d \sin(\alpha_{12}^d + \psi_e) \\ -\frac{|y_e|(w_1(d + l_{12}^d) + (v_1 + k_v)k_\psi d + k_v)}{\frac{1}{k_y} + |y_e|d} \end{bmatrix}$$

Comparando esta ley de control con el controlador de trayectoria de la ecuación (3.43) diseñado para 1 sólo robot (Kanayama, *et al.* 1990; Fierro, *et al.* 1995), se aprecia que ambos son similares, con excepción de los términos resaltados en la ecuación (3.67), los cuales aseguran estabilidad para la formación de dos (02) robots mediante sólo un análisis cinemático.

### 3.2.1.2. Análisis de Estabilidad y Controlabilidad

Con la finalidad de probar y garantizar la estabilidad del sistema con la ley de control (3.67), se obtuvo en primer lugar su punto de equilibrio; el cual se determina mediante la siguiente ecuación:

$$\dot{X}_e = [0 \ 0 \ 0]^T = \dot{\eta}_e$$

Esto es:

$$\begin{bmatrix} w_2 y_e - v_2 + v_1 \cos(\psi_e) - w_1 l_{12}^d \sin(\alpha_{12}^d + \psi_e) \\ -x_e w_2 + v_1 \sin(\psi_e) - d w_2 + w_1 l_{12}^d \cos(\alpha_{12}^d + \psi_e) \\ w_1 - w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Teniendo en cuenta que la velocidad del robot líder  $v_1 > 0$ , se puede decir que  $X_e = [0 \ 0 \ 0]^T$  es un punto de equilibrio; ya que, al reemplazar este valor en la expresión anterior, se obtiene que las velocidades lineales de los robots líder y seguidor  $v_1$  y  $v_2$  son iguales, mientras que las velocidades angulares  $w_1$  y  $w_2$  son iguales a cero.

De esta manera:

$$\begin{bmatrix} -v_2 + v_1 - w_1 l_{12}^d \sin(\alpha_{12}^d) \\ -dw_2 + w_1 l_{12}^d \cos(\alpha_{12}^d) \\ w_1 - w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = v_2 \\ w_1 = w_2 = 0 \end{cases}$$

A continuación, a fin de determinar la estabilidad del punto de equilibrio obtenido, y de acuerdo a [16], se hace uso de la función escalar definida en la sección 3.1.2:

$$V = \frac{1}{2}(x_e^2 + y_e^2) + \frac{1 - \cos(\psi_e)}{k_y}, \quad k_y > 0 \quad (3.69)$$

- i. Se verifica que:  $V = 0$ , sólo cuando:  $V_{(x_e=[0 \ 0 \ 0]^T)}$
- ii. Asimismo:  $V > 0$ , para todo  $X_e \neq [0 \ 0 \ 0]^T$  ( $V$  es definida positiva)
- iii. Mientras que  $\dot{V}$  es definida negativa, ya que:

$$\dot{V} = x_e \dot{x}_e + y_e \dot{y}_e + \frac{1}{k_y} \sin(\psi_e) \dot{\psi}_e$$

Donde luego de reemplazar los valores de  $\dot{x}_e, \dot{y}_e, \dot{\psi}_e$  a partir de la ecuación (3.66), se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & (-v_2 + v_1 \cos(\psi_e) - w_1 l_{12}^d \sin(\alpha_{12}^d + \psi_e))x_e \\ & + (v_1 \sin(\psi_e) + w_1 l_{12}^d \cos(\alpha_{12}^d + \psi_e))y_e + \frac{\sin(\psi_e)}{k_y} w_1 \\ & - \left( dy_e + \frac{\sin(\psi_e)}{k_y} \right) w_2 \end{aligned} \quad (3.70)$$

Al reemplazar los valores de  $v_2$  y  $w_2$  propuestos en la ecuación (3.67), se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -k_x x_e^2 - d(v_1 + k_v)k_y y_e^2 - (v_1 + k_v) \frac{k_\psi}{k_y} \sin(\psi_e)^2 \\ & - y_e (w_1 d + (v_1 + k_v)k_\psi d \sin(\psi_e)) \\ & - w_1 l_{12}^d \cos(\alpha_{12}^d + \psi_e) + k_v \sin(\psi_e) \\ & - f_w \left( \frac{\sin(\psi_e)}{k_y} + dy_e \right) \end{aligned} \quad (3.71)$$

Teniendo en cuenta las condiciones de desigualdad para las expresiones trigonométricas, la expresión para la función escalar queda determinada por:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -k_x x_e^2 - d(v_1 + k_v)k_y y_e^2 - (v_1 + k_v) \frac{k_\psi}{k_y} \sin(\psi_e)^2 \\ & + |y_e| (w_1 d + (v_1 + k_v)k_\psi d + w_1 l_{12}^d + k_v) \\ & + f_w \left( \frac{1}{k_y} + d|y_e| \right) \end{aligned} \quad (3.72)$$

Al reemplazar el valor de  $f_w$ :

$$\dot{V} \leq -k_x x_e^2 - d(v_1 + k_v)k_y y_e^2 - (v_1 + k_v) \frac{k_\psi}{k_y} \sin(\psi_e)^2 \quad (3.73)$$

Como los parámetros del controlador  $k_x, k_y, k_\psi$  y la velocidad del robot líder  $v_1$  son valores positivos:

$$\Rightarrow \dot{V} < 0, \quad \forall X \neq [0 \ 0 \ 0]^T$$

Por lo tanto, de los puntos i, ii y iii, la expresión propuesta para  $V$  es una función de Lyapunov; y el estado  $X_e = [0 \ 0 \ 0]^T$  es punto de equilibrio asintóticamente estable (Ogata, 1998 3ra Edición - Teorema 13-1), lo que se interpreta como el hecho que las velocidades del robot seguidor  $[v_2, w_2]^T$  alcanzarán las velocidades de referencia  $[v_{2r}, w_{2r}]^T$ , siendo éstas últimas las que permiten alcanzar los valores de distancia  $l_{12}^d$  y ángulo  $\alpha_{12}^d$  deseados entre el robot líder y el robot seguidor en la formación.

Por otro lado, para analizar la controlabilidad del sistema, se reescribe la ecuación (3.65) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{l}_{12} \\ \dot{\alpha}_{12} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -v_1 \cos(\alpha_{12}) \\ \frac{1}{l_{12}} (v_1 \sin(\alpha_{12}) - w_1 l_{12}) \end{bmatrix}}_{f_{l\alpha}} \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\gamma_{12}) & d \sin(\gamma_{12}) \\ -\frac{\sin(\gamma_{12})}{l_{12}} & \frac{d \cos(\gamma_{12})}{l_{12}} \end{bmatrix}}_{B_{l\alpha}} \mathbf{v}_2 \end{aligned} \quad (3.74)$$

A partir de esta expresión, para garantizar la controlabilidad del sistema, la matriz  $B_{l\alpha}$  debe ser invertible. En otras palabras, debe existir su determinante, por lo que:  $de t(B_{l\alpha}) = \frac{d}{l_{12}} \neq 0$

### 3.2.2. El controlador 'l - l'

#### 3.2.2.1. Estudio y Diseño

En la Fig. 3.18 (Pág. 70) se muestra un sistema de 3 robots móviles. El robot 3 es el seguidor, y los otros dos en la formación son los líderes 1 y 2. El vehículo seguidor se encuentra separado a una distancia  $l_{13}$  respecto al líder 1, y a una distancia  $l_{23}$  respecto al líder 2; ambas distancias asociadas con el punto de control del robot 3 ( $p_3$ ) y los orígenes de los sistemas de coordenadas móviles de los otros 2 robots.

El problema puede plantearse como sigue. Durante la formación, se desea que el robot 3 mantenga siempre las distancias relativas deseadas  $l_{13}^d$  y  $l_{23}^d$  respecto a los robots líderes 1 y 2. Con el objetivo de lograrlo, se debe diseñar una ley de control para las velocidades  $v_3$  y  $w_3$  sobre el robot seguidor.

A partir de la geometría en la Fig. 3.18, y de manera similar al procedimiento considerado en la sección anterior, las ecuaciones cinemáticas del robot seguidor 3 están dadas por las siguientes expresiones [6]:

$$\left. \begin{aligned} \dot{l}_{13} &= v_3 \cos(\gamma_{13}) - v_1 \cos(\alpha_{13}) + dw_3 \sin(\gamma_{13}) \\ \dot{l}_{23} &= v_3 \cos(\gamma_{23}) - v_2 \cos(\alpha_{23}) + dw_3 \sin(\gamma_{23}) \end{aligned} \right\} \quad (3.75)$$

Donde:  $\gamma_{13} = \psi_1 + \alpha_{13} - \psi_3$ ,  $\gamma_{23} = \psi_2 + \alpha_{23} - \psi_3$

Expresando (3.75) en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{l}_{13} \\ \dot{l}_{23} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\cos(\alpha_{13}) & 0 \\ 0 & -\cos(\alpha_{23}) \end{bmatrix}}_{f_u} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\gamma_{13}) & d\sin(\gamma_{13}) \\ \cos(\gamma_{23}) & d\sin(\gamma_{23}) \end{bmatrix}}_{B_u} \mathbf{v}_3 \quad (3.76)$$

Sea  $z = [l_{13}, l_{23}]^T$ , se definen las siguientes ecuaciones de error:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix}}_{\tilde{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{13} \\ l_{23} \end{bmatrix}}_z - \underbrace{\begin{bmatrix} l_{13}^d \\ l_{23}^d \end{bmatrix}}_{z^d} \quad (3.77)$$

Asimismo, se asume una dinámica del error estable de primer orden [2]:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tilde{z}}_1 + k_1 \tilde{z}_1 &= 0 \\ \dot{\tilde{z}}_2 + k_2 \tilde{z}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{\tilde{z}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}}_{K_u} \tilde{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

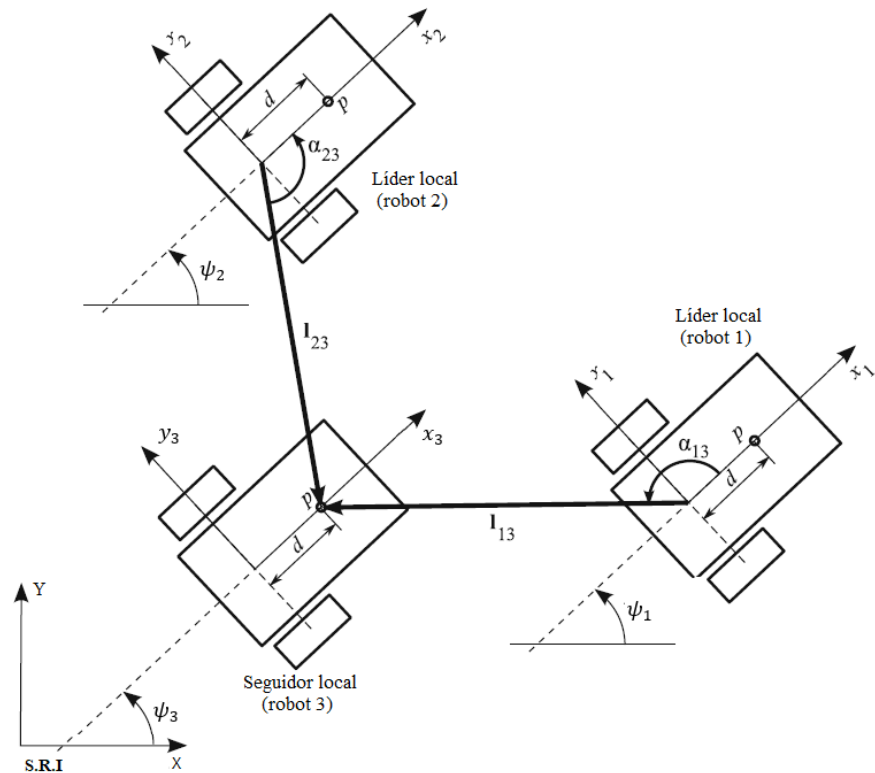


Figura 3.18 – La estrategia de control ' $l - l'$ '. (Fahimi, 2009)

Resolviendo para  $\mathbf{Z}$  en la ecuación (3.78):

$$\dot{\mathbf{Z}} = \dot{\mathbf{Z}}^d - K_U \tilde{\mathbf{Z}} \quad (3.79)$$

Sustituyendo (3.79) en la ecuación (3.76), y resolviendo para la entrada de control  $v_3$ , se tiene:

$$\mathbf{v}_3 = B_U^{-1} (\dot{\mathbf{Z}}^d - K_U \tilde{\mathbf{Z}} - f_U [v_1 \ v_2]^T) \quad (3.80)$$

### 3.2.2.2. Análisis de Estabilidad y Controlabilidad

Para garantizar la estabilidad del sistema, se debe tener en cuenta que los parámetros del controlador  $k_1 > 0$  y  $k_2 > 0$ , de manera que el sistema de la ecuación (3.78) tenga autovalores negativos, y así garantizar la convergencia de las variables  $l_{13}$  y  $l_{23}$  a sus respectivos valores deseados.

Por otro lado, y a partir de la ecuación (3.80), para garantizar la controlabilidad del sistema, la matriz  $B_U$  debe ser invertible. Esto es:

$$\det(B_U) = d \sin(\gamma_3 - \gamma_2) \neq 0 \quad (3.81)$$



A partir de esta condición, se resalta la importancia de la ubicación del punto de control  $P$  en cada robot móvil. Como la distancia  $d$  no puede ser cero, se deduce que el punto de control no puede ser igual al origen del sistema de coordenadas móvil.

Sin embargo, el valor de  $\sin(\gamma_3 - \gamma_2)$  tampoco debe ser cero. Esta condición a evitar, sucede cuando los orígenes de los sistemas de coordenadas de los robots 1 y 2 y el punto de control del robot seguidor 3 son colineales.

### 3.2.3. Evasión de Obstáculos

#### 3.2.3.1. Planteamiento del Problema

Con la finalidad de tener una perspectiva clara del problema de evasión de obstáculos, se considera la configuración mostrada en la Fig. 3.19 (Pág. 72). El objetivo en este problema de control es lograr que el robot seguidor 2 mantenga una distancia  $s_d$  respecto de todos los obstáculos, pero eventualmente se debe mantener el patrón de formación deseado entre el robot líder 1 y el robot seguidor 2.

Cuando el robot 2 detecta el lado más cercano del obstáculo a un ángulo  $\psi_s$  y una distancia  $s$  (relativa al seguidor 2) tal que  $s < s_d$ , las distancia y ángulo desados  $l_{12(t)}^d$  y  $\alpha_{12(t)}^d$  se modifican de manera que el seguidor es empujado lejos de dicho obstáculo, de acuerdo a funciones potencial repulsivas [7].

Las expresiones que describen las funciones potenciales son las siguientes:

$$\begin{cases} l_{12(t)}^d = l_{12}^d - \frac{1}{2}k_l \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s_d}\right)^2 \text{sgn}(\alpha_{12}^d \psi_s) \\ \alpha_{12(t)}^d = \alpha_{12}^d + \frac{1}{2}k_{\alpha_{12}} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s_d}\right)^2 \text{sgn}(\alpha_{12}^d) \text{sgn}(\alpha_{12}^d \psi_s) \end{cases} \quad (3.82)$$

Los parámetros de la figura 3.19 son los siguientes:

$h$ : distancia desde el centro del sistema de coordenadas móvil del robot seguidor 2, hacia el centro geométrico del robot (C).

$P$ : punto de control

$s$ : distancia del centro del robot seguidor 2 al centro del obstáculo

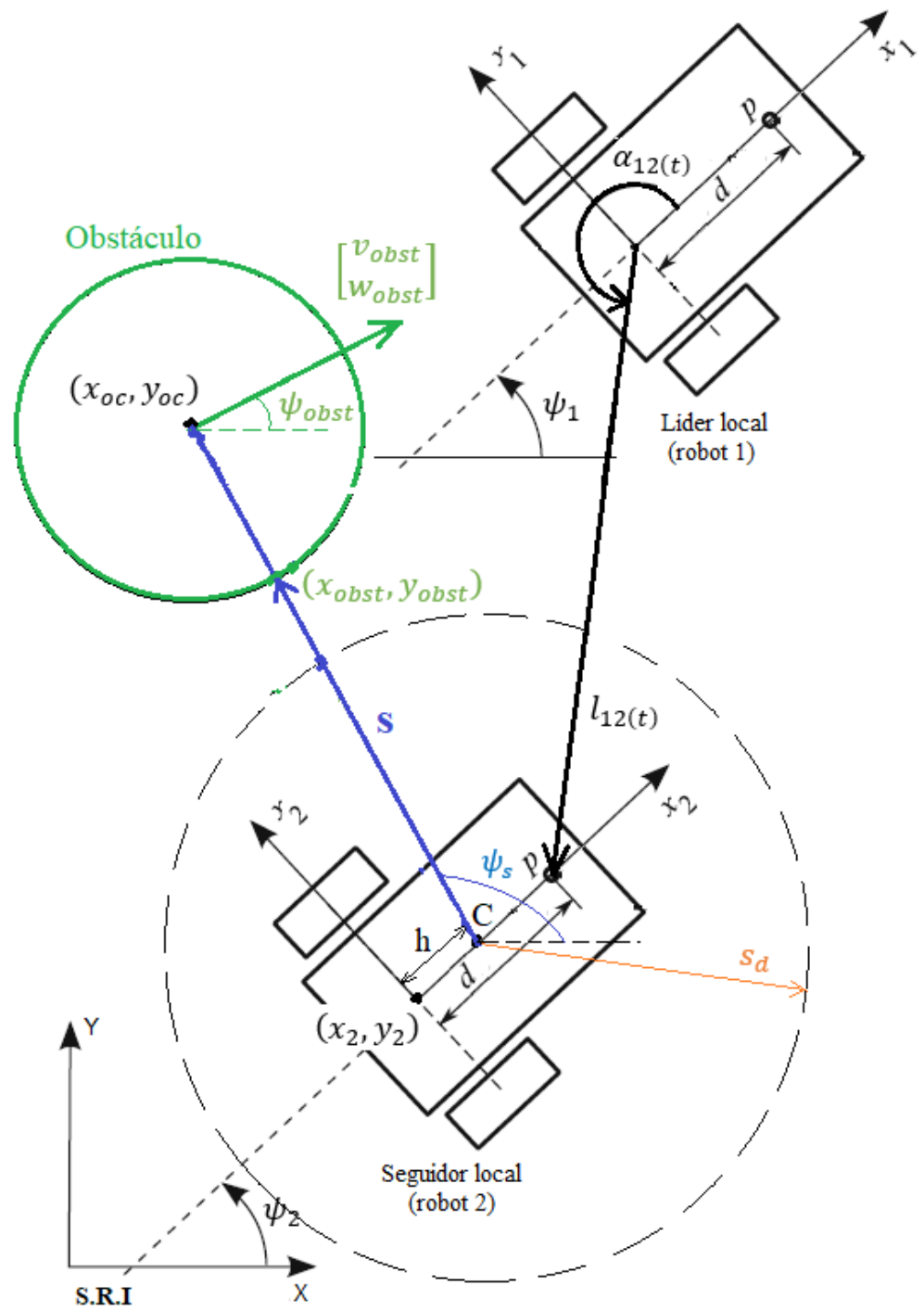


Figura 3.19 – Evasión de obstáculo por un robot seguidor

De la figura 3.19, la distancia medida  $s$  y el ángulo  $\psi_s$  pueden ser escritos en términos de la componente  $x$ , y la componente  $y$  según:

$$\begin{cases} s^2 = s_x^2 + s_y^2 \\ \psi_s = \text{atan}\left(\frac{s_y}{s_x}\right) \end{cases} \quad (3.83)$$

Asimismo, para el análisis correspondiente, se asume que el obstáculo se comporta de acuerdo el siguiente modelo cinemático:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{obst} \\ \dot{y}_{obst} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{obst} \cos(\psi_{obst}) \\ v_{obst} \sin(\psi_{obst}) \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

Derivando la 1ra expresión mostrada en la ecuación (3.83), se tiene:

$$\begin{cases} 2s\dot{s} = 2s_x\dot{s}_x + 2s_y\dot{s}_y \\ \Rightarrow \dot{s} = \frac{s_x}{s}\dot{s}_x + \frac{s_y}{s}\dot{s}_y \end{cases} \quad (3.85)$$

Adicionalmente, de la figura 3.19, se puede notar que:

$$\dot{s}_x = \dot{x}_{2C} - \dot{x}_{obst}, \dot{s}_y = \dot{y}_{obst} - \dot{y}_{2C} \quad (3.86)$$

de manera que:

$$\begin{aligned} \dot{s} = \cos(\psi_s) & \left( -v_{obst} \cos(\psi_{obst}) + v_2 \cos(\psi_2) - w_2 h \sin(\psi_2) \right) \\ & + \sin(\psi_s) \left( v_{obst} \sin(\psi_{obst}) - v_2 \sin(\psi_2) \right. \\ & \left. - w_2 h \cos(\psi_2) \right) \end{aligned} \quad (3.87)$$

Reacomodando términos:

$$\begin{aligned} \dot{s} = v_2 \cos(\psi_2 + \psi_s) - h w_2 \sin(\psi_2 + \psi_s) \\ - v_{obst} \cos(\psi_{obst} + \psi_s) \end{aligned} \quad (3.88)$$

De la misma forma, luego de derivar la 2da expresión de la ecuación (3.83):

$$\tan(\psi_s) = \frac{s_y}{s_x} \Rightarrow \psi_s = \text{atan}\left(\frac{s_y}{s_x}\right) \Rightarrow \dot{\psi}_s = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{s_y}{s_x}\right)}{1 + \left(\frac{s_y}{s_x}\right)^2} \quad (3.89)$$

Al reemplazar términos:

$$\Rightarrow s\dot{\psi}_s = \frac{\dot{s}_y s_x - s_y \dot{s}_x}{s} = (\dot{y}_{obst} - \dot{y}_{2C}) \cos(\psi_s) - \sin(\psi_s) (\dot{x}_{2C} - \dot{x}_{obst})$$

Despejando  $s\dot{\psi}_s$ :

$$\dot{\psi}_s = \frac{1}{s} (-v_2 \sin(\psi_2 + \psi_s) - hw_2 \cos(\psi_2 + \psi_s) + v_{obst} \sin(\psi_{obst} + \psi_s)) \quad (3.90)$$

Sin embargo, dado que la velocidad  $v_{obst}$  y orientación  $\psi_{obst}$  del obstáculo no son conocidas por el robot seguidor, los valores de  $\dot{s}$  y  $\dot{\psi}_s$  deben estimarse. Un criterio seguido para dicho fin es mediante ecuación en diferencias hacia atrás (Dierks, 2007):

$$\left. \begin{aligned} \hat{s} &= s_{(t)} - s_{(t-\Delta t)} \\ \hat{\psi}_s &= \psi_{s(t)} - \psi_{s(t-\Delta t)} \end{aligned} \right\} \quad (3.91)$$

### 3.2.3.2. Diseño del controlador

Para determinar propiamente el diseño del controlador, en primer lugar, se establece la posición de error:

$$\eta_e = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \psi_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{12}^d \cos(\alpha_{12}^d + \psi_e) - l_{12} \cos(\alpha_{12} + \psi_e) \\ l_{12}^d \sin(\alpha_{12}^d + \psi_e) - l_{12} \sin(\alpha_{12} + \psi_e) \\ \psi_1 - \psi_2 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Teniendo en cuenta las expresiones de la ecuación (3.65), se comprueba que:

$$\left. \begin{aligned} l_{12} \dot{\alpha}_{12} \sin(\gamma_{12}) - \dot{l}_{12} \cos(\gamma_{12}) &= -v_2 + v_1 \cos(\psi_e) - w_1 \sin(\gamma_{12}) l_{12} \\ l_{12} \dot{\alpha}_{12} \cos(\gamma_{12}) + \dot{l}_{12} \sin(\gamma_{12}) &= dw_2 - v_1 \sin(\psi_e) - w_1 l_{12} \cos(\gamma_{12}) \end{aligned} \right\} \quad (3.93)$$

Con el resultado anterior, la dinámica del error tiene la siguiente expresión:

$$\dot{\eta}_e = \begin{bmatrix} \dot{x}_e + w_2 y_e - v_2 + v_1 \cos(\psi_e) - w_1 l_{12}^d \sin(\alpha_{12}^d + \psi_e) \\ \dot{y}_e - x_e w_2 + v_1 \sin(\psi_e) - dw_2 + w_1 l_{12}^d \cos(\alpha_{12}^d + \psi_e) \\ w_1 - w_2 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

Donde:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{l}_{12}^d \cos(\alpha_{12}^d + \psi_e) - \dot{\alpha}_{12}^d l_{12}^d \sin(\alpha_{12}^d + \psi_e) \\ \dot{l}_{12}^d \sin(\alpha_{12}^d + \psi_e) + \dot{\alpha}_{12}^d l_{12}^d \cos(\alpha_{12}^d + \psi_e) \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

Realizando una comparación de la ecuación (3.94) con la dinámica del error entre el robot líder y seguidor sin presencia de obstáculos (ecuación 3.66), se puede notar que ambas son idénticas, con excepción de los términos resaltados como resultado de los valores de distancia y ángulo de separación variantes en el tiempo.

De manera similar al caso mostrado en la sección 3.2.1, donde se presentó el algoritmo de control  $l - \alpha'$ , se propone la siguiente ley de control para el robot seguidor (Dierks, 2007):

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \cos(\psi_e) + k_x x_e - w_1 l_{12}^d \sin(\alpha_{12}^d + \psi_e) \\ w_1 l_{12}^d \cos(\alpha_{12}^d + \psi_e) + k_y y_e + v_1 \sin(\psi_e) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_e \\ \dot{\hat{y}}_e \\ \dot{\hat{d}} \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

Donde:

$$a) \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_e \\ \dot{\hat{y}}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_L \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s_d} \right) \frac{1}{s^2} \dot{s} \cos(\alpha_{12(t)}^d + \psi_e) - \left( -\text{sgn}(\alpha_{12}^d) k_\psi \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s_d} \right) \frac{1}{s^2} \dot{s} \right) l_{12(t)}^d \sin(\alpha_{12(t)}^d + \psi_e) \\ k_L \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s_d} \right) \frac{1}{s^2} \dot{s} \sin(\alpha_{12(t)}^d + \psi_e) + \left( -\text{sgn}(\alpha_{12}^d) k_\psi \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s_d} \right) \frac{1}{s^2} \dot{s} \right) l_{12(t)} \cos(\alpha_{12(t)}^d + \psi_e) \end{bmatrix};$$

$$b) k_L, k_\psi, k_x, k_y, k_\psi, k_v > 0;$$

$$c) X_e = [0 \ 0 \ 0]^T \text{ es estable en el sentido de Lyapunov ([7, Teorema 5])}$$

Con la finalidad de probar dicha estabilidad, se define la siguiente función escalar:

$$V = \frac{1}{2} (x_e^2 + y_e^2) \quad (3.97)$$

i. Se verifica que:

$$V = 0, \text{ sólo cuando: } V_{(x_e=[0 \ 0 \ 0]^T)}$$

ii. Asimismo:

$$V > 0, \text{ para todo } X_e \neq [0 \ 0 \ 0]^T$$

iii. Mientras que:

$$\dot{V} = x_e \dot{x}_e + y_e \dot{y}_e \quad (3.98)$$

Reemplazando los valores de  $\dot{x}_e, \dot{y}_e, \dot{\psi}_e$  a partir de la ecuación (3.94), se tiene la expresión para  $\dot{V}$ :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & x_e(\dot{\hat{x}}_e - w_1 l_{12}^d(t) \sin(\alpha_{12}^d(t) + \psi_e) - v_2 + v_1 \cos(\psi_e) + w_2 y_e) \\ & + y_e(\dot{\hat{y}}_e + w_1 l_{12}^d(t) \cos(\alpha_{12}^d(t) + \psi_e) - dw_2 + v_1 \sin(\psi_e) \\ & - w_2 x_e) \end{aligned} \quad (3.99)$$

Al reemplazar los valores de  $v_2$  y  $w_2$  propuestos en la ecuación (3.96), se obtiene la siguiente expresión:

$$\dot{V} = -k_x x_e^2 - k_y y_e^2 + x_e \underbrace{(\dot{\hat{x}}_e - \dot{\hat{x}}_e)}_{\dot{\hat{x}}_e} - y_e \underbrace{(\dot{\hat{y}}_e - \dot{\hat{y}}_e)}_{\dot{\hat{y}}_e} \quad (3.100)$$

- Por un lado, asumiendo  $k_x = \min(k_x, k_y)$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} -k_x x_e^2 - k_y y_e^2 &= -(k_x x_e^2 + k_y y_e^2) = -k_x \left( x_e^2 + \underbrace{\frac{k_y}{k_x}}_{>1} y_e^2 \right) \\ &\leq -k_x (x_e^2 + y_e^2) \end{aligned}$$

- Mientras que:

$$\begin{aligned} x_e \dot{\hat{x}}_e - y_e \dot{\hat{y}}_e &= \left( \frac{x_e}{\frac{\sqrt{x_e^2 + y_e^2}}{\sin(\alpha)}} \dot{\hat{x}}_e - \frac{y_e}{\frac{\sqrt{x_e^2 + y_e^2}}{\cos(\alpha)}} \dot{\hat{y}}_e \right) \sqrt{x_e^2 + y_e^2} \\ &= \left( \sqrt{\dot{\hat{x}}_e^2 + \dot{\hat{y}}_e^2} \right) \sin(\alpha - \phi) \sqrt{x_e^2 + y_e^2}, \quad \phi = \text{atan} \left( \frac{\dot{\hat{y}}_e}{\dot{\hat{x}}_e} \right) \end{aligned}$$

Siendo que la expresión senoidal es menor o igual que la unidad:

$$x_e \dot{\hat{x}}_e - y_e \dot{\hat{y}}_e \leq \left( \sqrt{\dot{\hat{x}}_e^2 + \dot{\hat{y}}_e^2} \right) \sqrt{x_e^2 + y_e^2} \leq \left( \sqrt{|\dot{\hat{x}}_e|^2 + |\dot{\hat{y}}_e|^2} \right) \sqrt{x_e^2 + y_e^2}$$

Ahora bien, dado que  $|\dot{\hat{x}}_e| > 0, |\dot{\hat{y}}_e| > 0$ :

$$x_e \dot{\hat{x}}_e - y_e \dot{\hat{y}}_e \leq \left( \sqrt{(|\dot{\hat{x}}_e| + |\dot{\hat{y}}_e|)^2} \right) \sqrt{x_e^2 + y_e^2} = (|\dot{\hat{x}}_e| + |\dot{\hat{y}}_e|) \sqrt{x_e^2 + y_e^2}$$

A partir de la desigualdad triangular:

$$x_e \dot{\hat{x}}_e - y_e \dot{\hat{y}}_e \leq \underbrace{(|\dot{\hat{x}}_e| + |\dot{\hat{y}}_e|)}_{\epsilon} \underbrace{(\sqrt{x_e^2 + y_e^2})}_{\|[x_e, y_e]^T\|}$$

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores, la ecuación (3.100) es tal que:

$$\dot{V} \leq -\bar{k}(x_e^2 + y_e^2) + \epsilon \|[x_e, y_e]^T\|$$

Finalmente, completando cuadrados:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\bar{k} \left( \|[x_e, y_e]^T\|^2 - \frac{2\epsilon \|[x_e, y_e]^T\|}{2\bar{k}} + \left( \frac{\|[x_e, y_e]^T\|}{2\bar{k}} \right)^2 \right) + \bar{k} \left( \frac{\epsilon}{2\bar{k}} \right)^2 \\ \dot{V} &\leq -\bar{k} \left( \|[x_e, y_e]^T\| - \frac{\epsilon}{2\bar{k}} \right)^2 + \frac{\epsilon^2}{4\bar{k}} \end{aligned} \quad (3.101)$$

La derivada de la función escalar  $\dot{V}$  es negativa a medida que se incrementa el valor de  $\bar{k}$ . Por tanto, de los puntos i, ii y iii, la expresión propuesta para  $V$  es una función de Lyapunov; esto es, dado que:  $X_e = [0 \ 0 \ 0]^T$  es punto de equilibrio del sistema, entonces, existe la función de Lyapunov  $V$  para dicho punto, de forma tal que el sistema (3.94) es estable.

### 3.2.4. Formación de varios robots móviles

Para el caso en que se desea una configuración de más de 3 robots móviles, la estrategia consiste en determinar en la formación quiénes van a ser agentes líderes y quiénes los seguidores. Una vez identificados, se establecen los parámetros de distancia y ángulo deseados, así como los parámetros de los controladores. En resumen, puede seguirse el criterio mostrado en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1. Estrategia de diseño para el control de formación de 6 (seis) robots

Robot móvil	Estrategia	Sigue a
1	—	Una trayectoria predefinida
2	' $l - \alpha'$	Robot líder 1
3	' $l - l'$	Robots líderes 1 y 2
4	' $l - \alpha'$	Robot 2
5	' $l - l'$	Robots 3 y 4
6	' $l - l'$	Robots 3 y 5

### 3.3. ESTIMADOR PARA LA FORMACIÓN DE 2 (DOS) ROBOTS MÓVILES

En la presente sección se considera el problema de control de formación de dos (2) robots móviles sin contar con una medición directa de la velocidad lineal del robot líder. La idea principal es resolver el problema estimando esta velocidad, y a la vez, manteniendo los parámetros de distancia y ángulo de separación predefinidos.

En muchas referencias se asume que los estados como la posición, velocidad y orientación se encuentran disponibles para los controladores. Sin embargo, cuando algunos no pueden ser medidos directamente, o la calidad en la medición es pobre, tales variables deben ser estimadas a través de observadores adecuados [24]. Este problema ha sido resuelto usando realimentación adaptiva, y también mediante la estrategia basada en inmersión e invarianza [27].

El controlador adaptivo es diseñado como una ley de actualización de parámetros, y luego, con la finalidad de obtener señales de control suaves y atenuar el chattering, se plantea un algoritmo de modo deslizante de segundo orden para el robot seguidor en la formación ([21,22]). Bajo estos métodos, el seguidor es manipulado para alcanzar y mantener la formación deseada en el sentido de que el robot puede seguir al líder a una distancia y ángulo predefinido  $(l_{12}^d, \alpha_{12}^d)$ , sin conocer su velocidad lineal, y sólo usando información local entre ambos robots.

En resumen, el problema de control de formación en este capítulo es analizado sin tener conocimiento de la velocidad lineal del robot líder. Para ello, se estima dicha velocidad usando la estrategia basada en inmersión e invarianza, y luego se diseña el controlador  $'l - \alpha'$ , de acuerdo a los alcances mostrados en la sección anterior.

#### 3.3.1. Control de realimentación Adaptivo

En esta sección se usa el método de control de realimentación dinámica explicado en [27]. La velocidad lineal del robot líder  $v_1$  es considerada constante y no puede ser medida directamente, por lo que es estimada en primer lugar.

El sistema de la ecuación (3.65) representa el comportamiento dinámico de 1 robot líder y 1 robot seguidor, y puede escribirse también de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{l}_{12} \\ \dot{\alpha}_{12} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\cos(\alpha_{12}) & 0 \\ 0 & \frac{\sin(\alpha_{12})}{l_{12}} \end{bmatrix}}_{\Phi(l_{12}, \alpha_{12})} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_1 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -w_1 \end{bmatrix}}_{f_a} \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\gamma_1) & d\sin(\gamma_1) \\ -\frac{\sin(\gamma_1)}{l_{12}} & d\cos(\gamma_1) \end{bmatrix}}_{B_{l\alpha}} \begin{bmatrix} v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.102)$$

Donde:  $\det(B_{l\alpha}) \neq 0$  para que  $B_{l\alpha}$  exista (sección 3.2.1.2)



El estimador para la velocidad lineal no medida del robot líder, es dada según [27]:

$$\dot{\hat{v}}_1 = \kappa \tilde{Z}^T \Phi \quad (3.103)$$

Donde:  $\kappa$  es la ganancia de adaptación, y  $\tilde{Z} = [l_{12} - l_{12}^d, \alpha_{12} - \alpha_{12}^d]^T$ , de acuerdo a la definición en la ecuación (3.77)

Teniendo en cuenta que el robot líder se desplaza a una velocidad constante, la dinámica del error de estimación de esta variable:  $\tilde{v}_1 = \hat{v}_1 - v_1$ , se expresa de la siguiente forma:

$$\dot{\tilde{v}}_1 = \dot{\hat{v}}_1 - \dot{v}_1 = \dot{\hat{v}}_1 - 0 = \kappa \tilde{Z}^T \Phi \quad (3.104)$$

El error en el seguimiento converge a cero si la ley de control sobre el robot seguidor está dada por:

$$v_2 = B_{l\alpha}^{-1}(-k\tilde{Z} - f_a - \hat{v}_1\Phi), \quad k: cte. > 0 \quad (3.105)$$

Asimismo, se garantiza que el error en la orientación  $\psi_e$  es acotado bajo ciertas condiciones (Shen, *et al.* 2014. Teorema 1).

### 3.3.2. Diseño del estimador basado en inmersión e invarianza

Se tiene en cuenta la expresión (3.102). El objetivo es derivar un estimador para las velocidades y presentar un estimador asintótico  $\hat{Z}$  para  $Z = [l_{12}, \alpha_{12}]^T$ . En ese sentido, se define el error en la observación como sigue:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{l}_{12} - l_{12} \\ \hat{\alpha}_{12} - \alpha_{12} \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

Teniendo en cuenta lo anteriormente detallado, se construye el siguiente observador (Shen *et al.* 2014):

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{l}}_{12} \\ \dot{\hat{\alpha}}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\alpha_{12}) & 0 \\ 0 & \frac{\sin(\alpha_{12})}{l_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\vartheta}_1 \\ \hat{\vartheta}_2 \end{bmatrix} + f_a + B_{l\alpha} \begin{bmatrix} v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

Donde se definen los valores de  $z_1$  y  $z_2$  de la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{\hat{\vartheta}_1 - \vartheta_1}{r_1} = \frac{\hat{v}_1 - v_1}{r_1} \\ z_2 &= \frac{\hat{\vartheta}_2 - \vartheta_2}{r_2} = \frac{\hat{v}_2 - v_2}{r_2} \end{aligned} \right\} \quad (3.108)$$

Las variables  $r_1$  y  $r_2$  son factores de escalamiento, mientras que  $k_1$  y  $k_2$  son ganancias.

De acuerdo a la metodología de la inmersión e invarianza, la dinámica de las expresiones en la ecuación (3.108) puede representarse de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \left( - \begin{bmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & \Phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1(l_{12}, \hat{\alpha}_{12}) & 0 \\ 0 & \Phi_2(l_{12}, \alpha_{12}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{r}_1 & 0 \\ r_1 & 0 \\ 0 & \dot{r}_2 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

Mientras que la dinámica del error resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & \Phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

De esta forma, se escogen los valores de  $r_1$  y  $r_2$ , así como las ganancias  $\{k_1, k_2\}$  en la ecuación anterior, de acuerdo a las expresiones dadas por (3.111) y (3.112)

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 |\delta_{12}|^2 & 0 \\ 0 & c_2 |\delta_{21}|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2^2 & 0 \\ 0 & e_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{a_1} & \epsilon c_2 |\delta_{21}|^2 \\ \epsilon c_1 |\delta_{12}|^2 & \lambda_{a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1^2 \\ r_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

Donde:

$$\delta_{12} = \frac{\cos(\alpha_{12} + e_2) - \cos(\alpha_{12})}{e_2}, \quad \delta_{21} = \frac{\sin(\alpha_{12})}{l_{12}(l_{12} + e_1)}, \quad c_i \geq \frac{n}{2} \kappa_i, \lambda_{a_i} > 0, \epsilon > 0$$

Considerando las expresiones para  $k_1$  y  $k_2$ , mostradas en la ecuación anterior, el sistema compuesto por las ecuaciones (3.109), (3.110) y (3.111) tiene un punto de equilibrio acotado y globalmente estable definido por  $\Omega = \{(z, r, e) | z = e = 0\}$  ([27], Lema 1)

Por tanto, de esta forma se garantiza que el sistema observado es estable en el sentido que los valores estimados  $[\hat{l}_{12}, \hat{\alpha}_{12}]^T$  alcanzan las variables de estado  $[l_{12}, \alpha_{12}]$  en el tiempo.

### 3.3.3. Diagrama de bloques para el Sistema de Control de Formación

Con la finalidad de contar con una perspectiva clara de las variables estimadas en el proceso de formación entre 2 robots móviles, se cuenta con la Fig. 3.20 (Pág. 81)

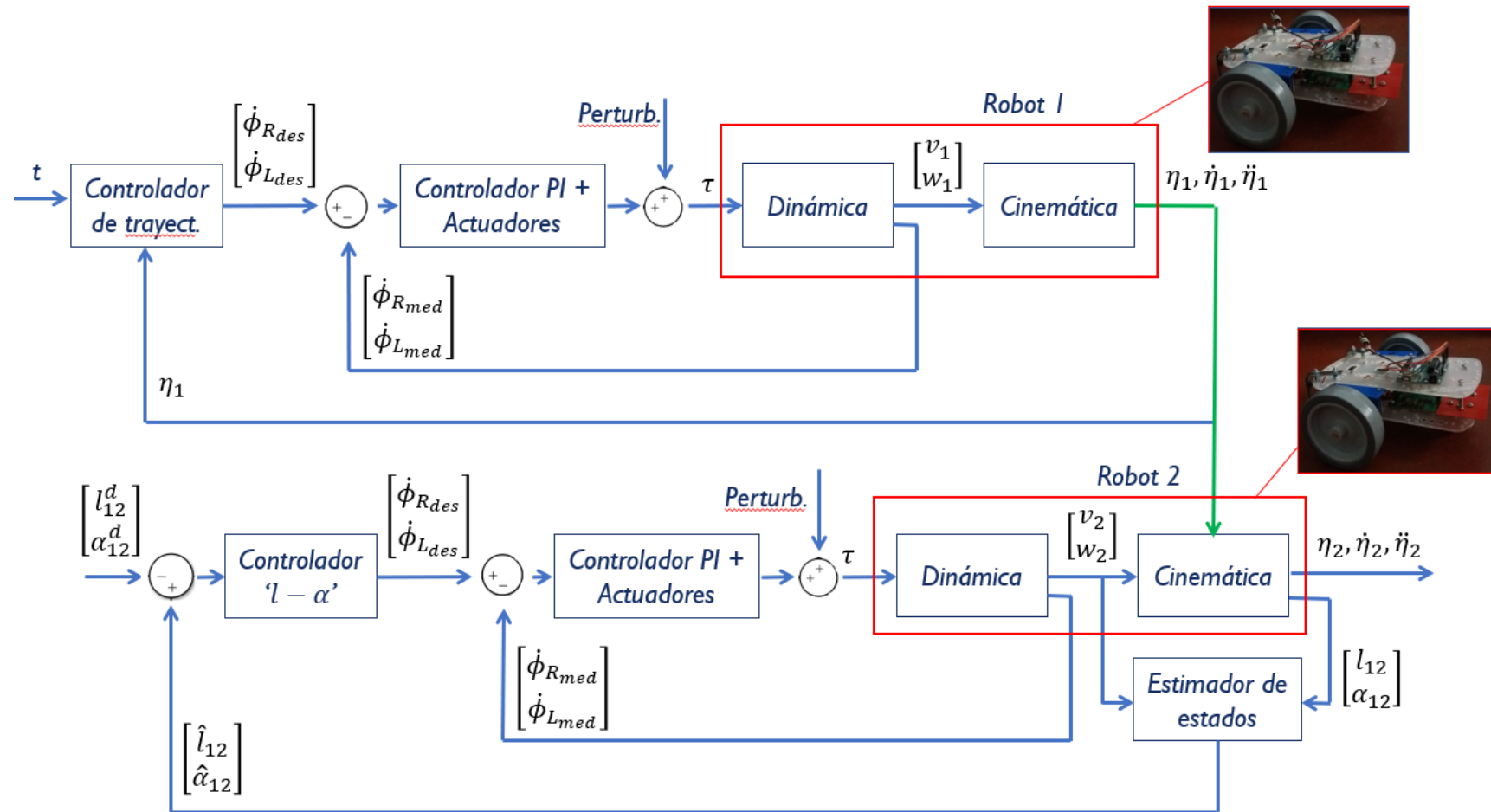


Figura 3.20 – Diagrama de bloques del sistema observado

## CAPÍTULO 4

# ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONTRASTACIÓN DE HIPÓTESIS

En el presente capítulo se muestran los resultados obtenidos luego de diseñar dos controladores para el seguimiento de trayectoria por parte de un robot móvil subactuado. Asimismo, se verifica el desempeño de las estrategias de control ' $l - \alpha'$  y ' $l - l'$ ', expuestas en el capítulo 3, para el control de formación entre varios robots en un entorno sin y con obstáculos. El diseño de un observador no lineal también ha sido tomado en cuenta.

En los casos siguientes se ha considerado que todos los robots en la formación (agentes) tienen las mismas características, y los mismos parámetros físicos de acuerdo a la Tabla 2.2 (Pág. 41), con los cuales es posible verificar la hipótesis planteada.

### 4.1. CASOS DE ESTUDIO

#### 4.1.1. Respuesta del controlador ' $l - \alpha'$

##### a) Trayectoria lineal por tramos:

Los parámetros y condiciones iniciales para el robot líder están determinados de acuerdo a lo señalado en la sección 3.1.3 a); mientras que, las condiciones iniciales para el robot seguidor son:

$$\eta_{2o} = [-0,8 \quad 1,1 \quad 0]^T, v_{2o} = [0 \quad 0]^T$$

Con la finalidad de obtener los valores óptimos para el controlador, se hizo uso del análisis desarrollado en el Apéndice B.

En el estudio de los sistemas de 2do. orden, un buen criterio de diseño es utilizar un valor de  $\zeta = 0.707$ , sin embargo, en el presente caso, el robot líder no se mueve a lo largo del eje horizontal, ni bajo otras condiciones adicionales, como lo señalado en el Apéndice B, por lo que se considera un factor de amortiguamiento más pequeño, de manera que permita tener una respuesta más adecuada para las diferentes trayectorias lineales que el robot líder realice durante su movimiento. (Fig. 4.1, Pág. 83). En ese sentido, se propuso el valor de  $\zeta = 0.3684$ .

Así mismo, considerando un tiempo de establecimiento  $t_s = 5 \text{ seg}$ , se utiliza la siguiente expresión para los sistemas de 2do. orden en el cálculo de la frecuencia natural del sistema:

$$t_s = 5 = \frac{4}{\zeta w_n} \Rightarrow w_n = \frac{4}{5(0.3684)} \cong 2.17 \quad (4.1)$$

De los valores obtenidos para  $\zeta$  y  $w_n$ , y con una constante de velocidad  $k_v = 1$ , los parámetros escogidos para el controlador no lineal son:

$$k_x = 7, k_y = 20, k_\psi = 0,01$$

En cuanto a los parámetros para la formación deseada entre el robot líder y el robot seguidor, se determina que:

$$l_{12}^d = 0,4; \quad \alpha_{12}^d = 140^\circ$$

Siendo el tiempo de análisis de 27 segundos, el resultado se muestra en las Fig. 4.1 y 4.2 (Pág. 84)

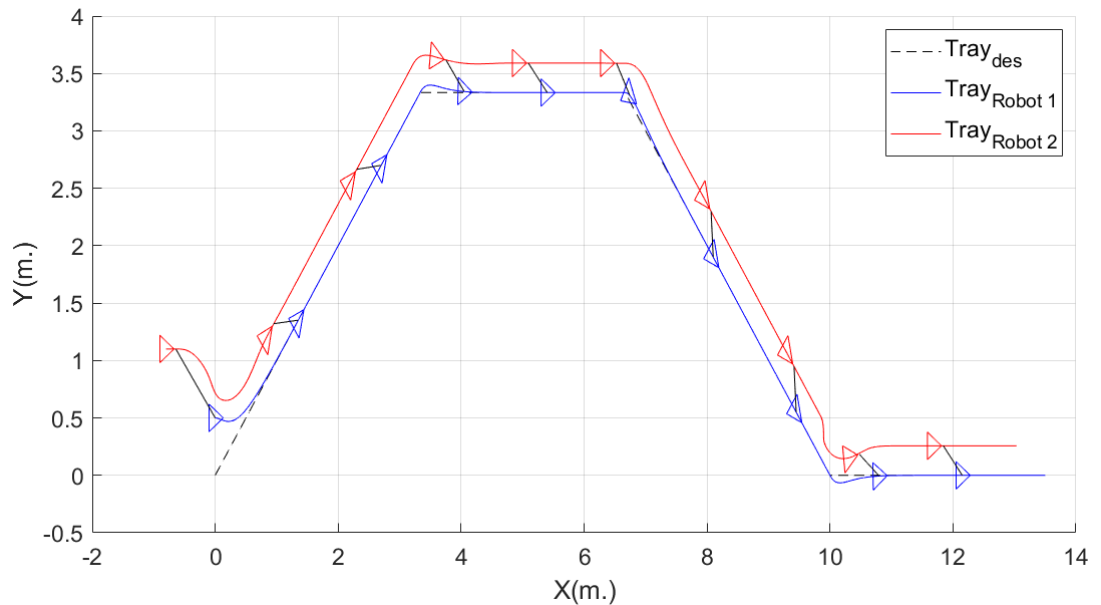


Figura 4.1 – Trayectorias del robot líder (azul) y robot seguidor (rojo) (Para cada 2.7 seg.)

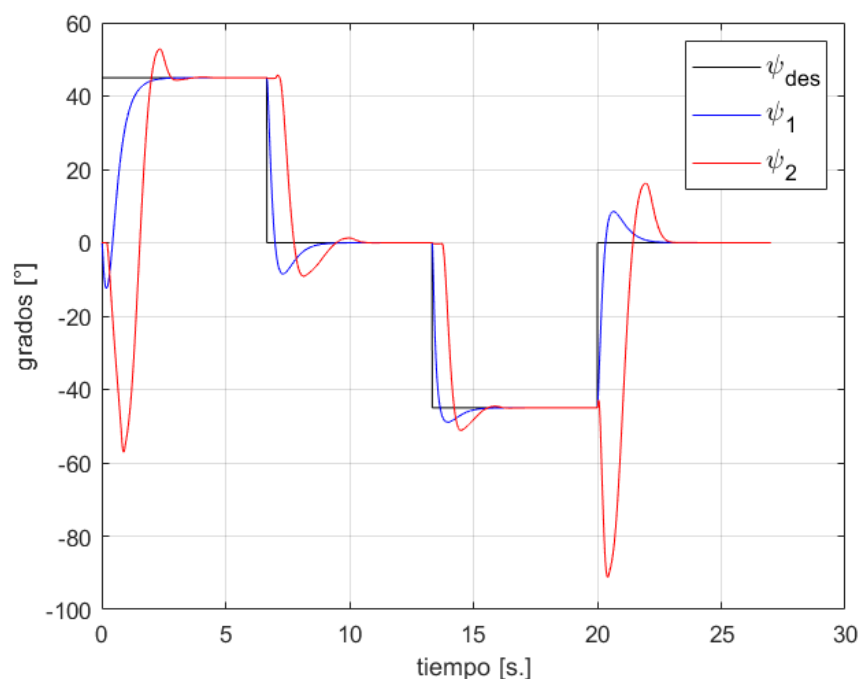


Figura 4.2 – Orientación del robot líder y seguidor

Como se aprecia en las figuras 4.1 (Pág. 82) y 4.2, desde el inicio del análisis, el robot seguidor intenta acercarse al robot líder. Luego incluso de pasar por cambios de orientación, la formación intenta no distorsionarse. En términos de los parámetros de formación, como se ve en la figura 4.3 (Pág. 85), cada vez que el robot líder cambia de orientación, los valores de distancia  $l_{12}$  y ángulo  $\alpha_{12}$  se actualizan y buscan alcanzar los valores deseados.

A pesar de presentarse sobre impulsos, el robot seguidor trata, de igual forma, de ir a la misma velocidad lineal del robot líder para lograr el patrón de formación deseado. (Figura 4.4, Pág. 86). Asimismo, en los cambios de orientación, el robot seguidor demanda de mayor energía para mantener la formación, y por ello se presentan intervalos de tiempo en los que se alcanza el voltaje máximo. (Figura 4.5, Pág. 86)

Sin embargo, se aprecia en la Fig. 4.5, que en el tercer cambio de orientación del robot durante su trayectoria ( $t \cong 20 \text{ seg.}$ ), se generan mayores sobre impulsos en el robot seguidor con respecto a los estados anteriores de cambio de rumbo. Esto ocurre debido a que el cambio de orientación en este instante es de diferente signo que el ocurrido en los 2 estados anteriores ( $t = 6,6 \text{ seg.}$ ,  $t = 13,3 \text{ seg.}$ ), lo que se interpreta como el hecho de que el controlador en este estado debe hacer que el robot seguidor reduzca su velocidad hasta lograr el patrón de formación deseado con el robot líder, a diferencia de la acción en los estados anteriores, donde el controlador busca que el robot seguidor alcance al robot líder, aumentando, en estos casos, su velocidad.

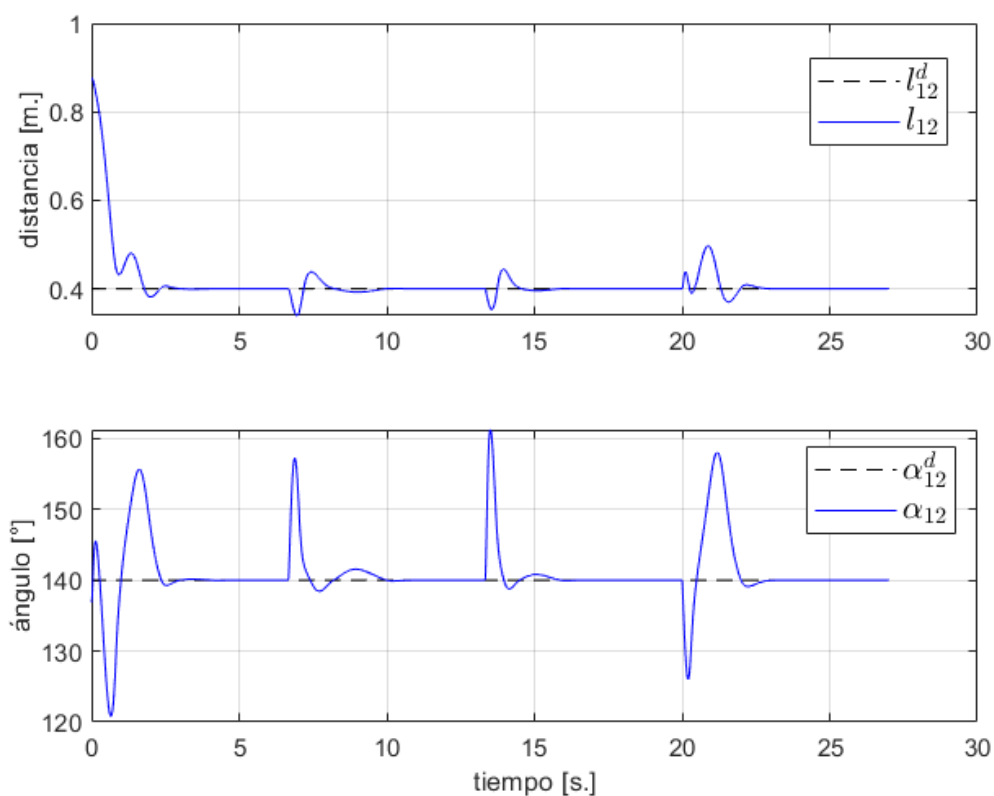


Figura 4.3 – Variables controladas de distancia y ángulo para la formación entre el robot líder y seguidor

En los resultados obtenidos (Fig. 4.1 – Fig. 4.5), se puede apreciar que la estabilidad se alcanza en un tiempo menor a los 5 segundos, el cual fue el valor propuesto en el procedimiento para la obtención de los parámetros del controlador no lineal; de manera que puede concluirse que el controlador no lineal diseñado presenta un buen desempeño.

b) Trayectoria: Lemniscata

Los parámetros y condiciones iniciales para el robot líder están determinados de acuerdo a lo señalado en la sección 3.1.3 d); mientras que, las condiciones iniciales para el robot seguidor son:

$$\eta_{2o} = \begin{bmatrix} 5,523 \\ -0,3958 \\ 40^\circ \end{bmatrix}, v_{2o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

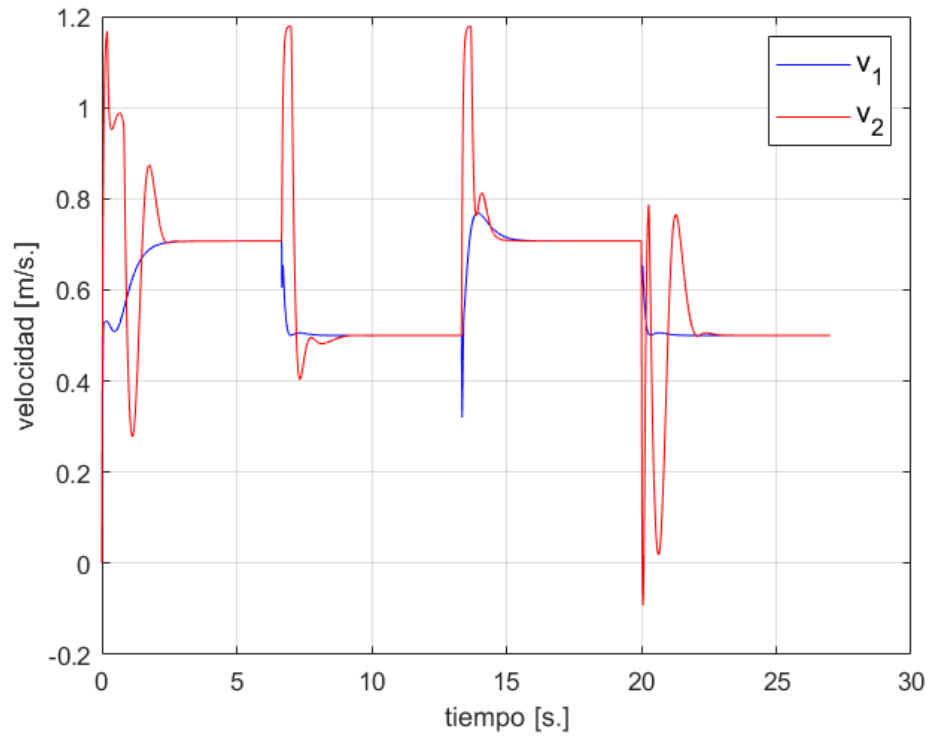


Figura 4.4 – Velocidades lineales del robot líder (azul) y robot seguidor (rojo)

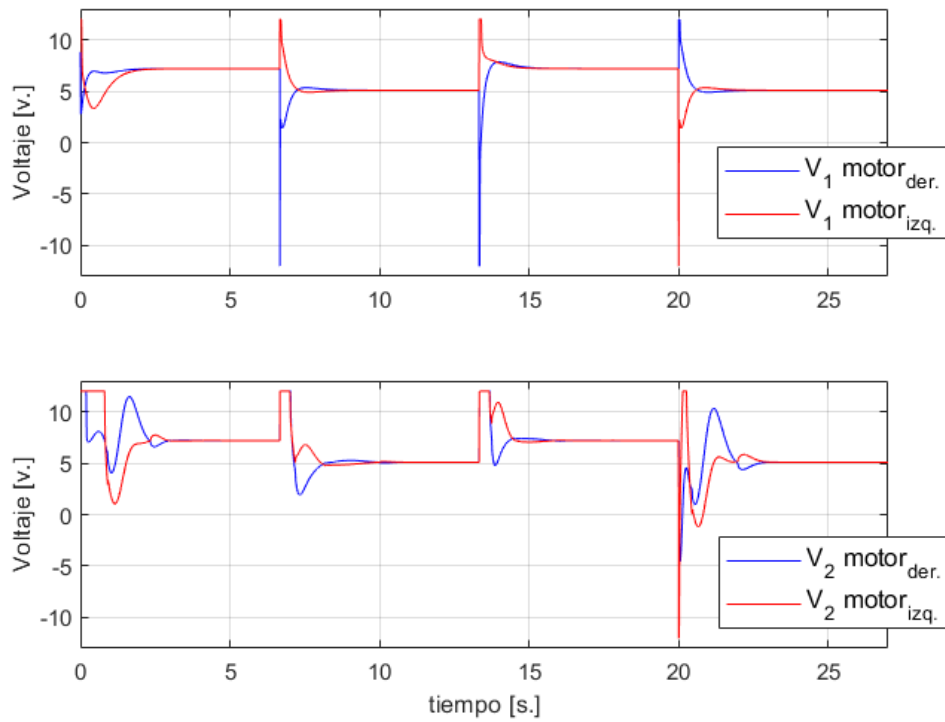


Figura 4.5 – Voltaje aplicado en los motores del robot líder (1) y seguidor (2)



En cuanto a la selección de parámetros del controlador no lineal, y siendo que en este caso se usa la estrategia de control ' $l - \alpha'$ ' al igual que el caso anterior, se consideraron los mismos parámetros:

$$k_x = 7, k_y = 20, k_\psi = 0,01, k_v = 1$$

La formación deseada entre el robot líder y el robot seguidor, está determinada por los siguientes valores:

$$l_{12}^d = 0,5; \quad \alpha_{12}^d = 110^\circ$$

El tiempo de análisis fue de 51 segundos.

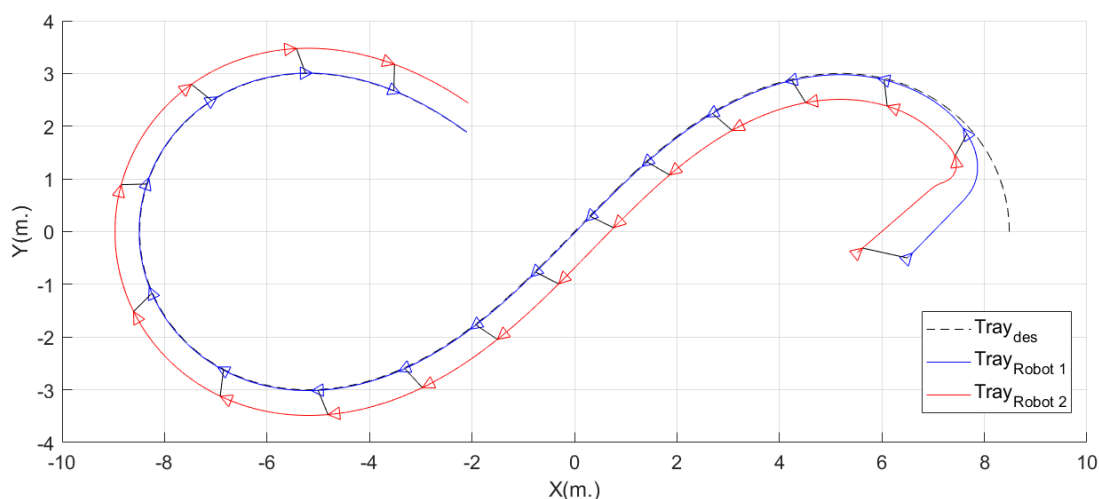


Figura 4.6 – Trayectorias del robot líder (azul) y robot seguidor (rojo) (Para cada 3 segundos)

A partir de las Figura 4.6, se aprecia que el controlador diseñado responde de manera adecuada. El robot seguidor se acerca al robot líder desde el inicio, y durante el tiempo de análisis se mantiene la formación, la cual se alcanza aproximadamente a los 5 segundos (Fig. 4.7, Pág. 88). Las velocidades lineales de los robots no son constantes porque se está siguiendo una trayectoria curva (Fig. 4.9, Pág. 89); y el voltaje alcanzado por los robots varía entre 6 a 7 V., luego de los 10s., aproximadamente (Fig. 4.10, Pág. 89).

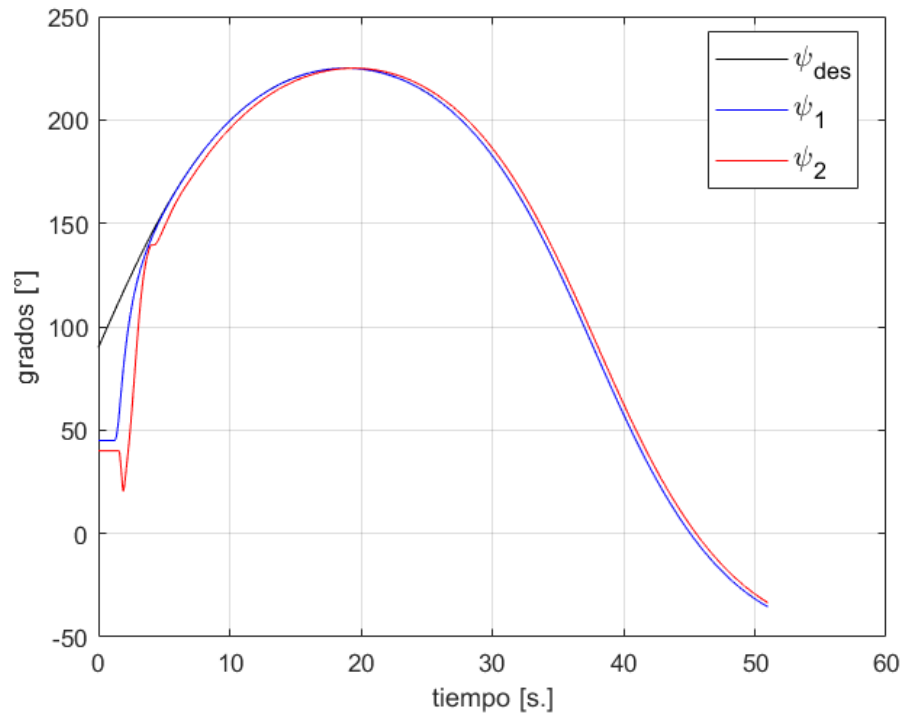


Figura 4.7 – Orientación del robot líder y seguidor

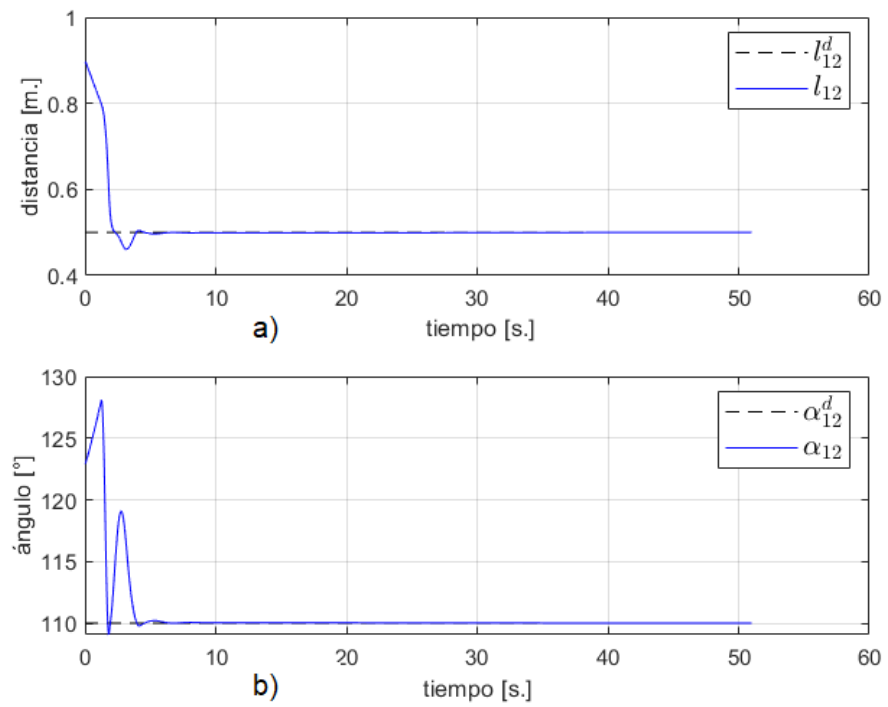


Figura 4.8 – Variables controladas de distancia (a) y ángulo (b) para la formación entre el robot líder y seguidor

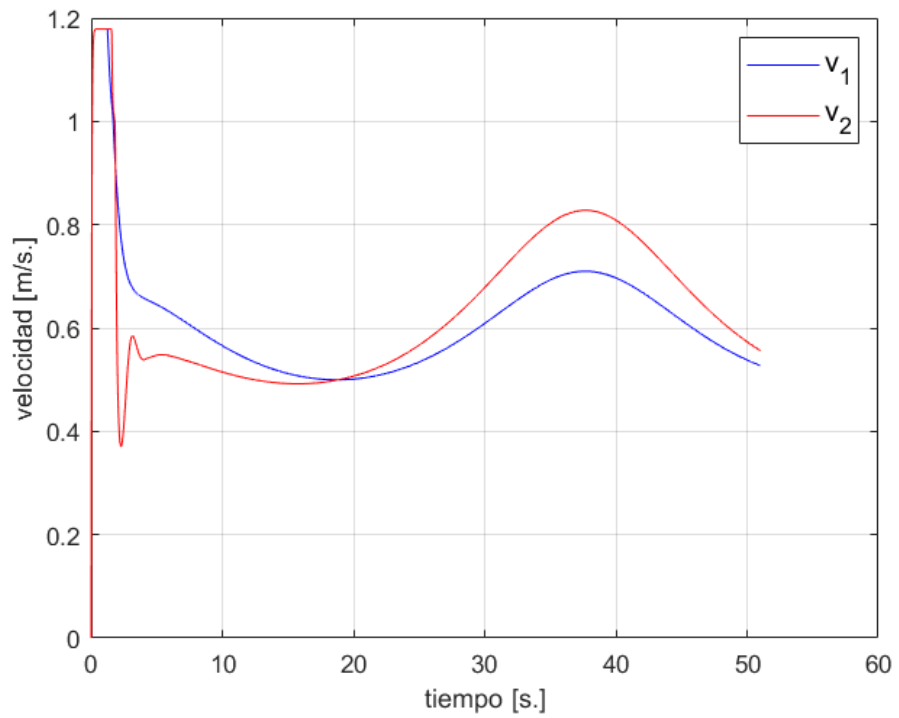


Figura 4.9 – Velocidades lineales del robot líder (azul) y robot seguidor (rojo)

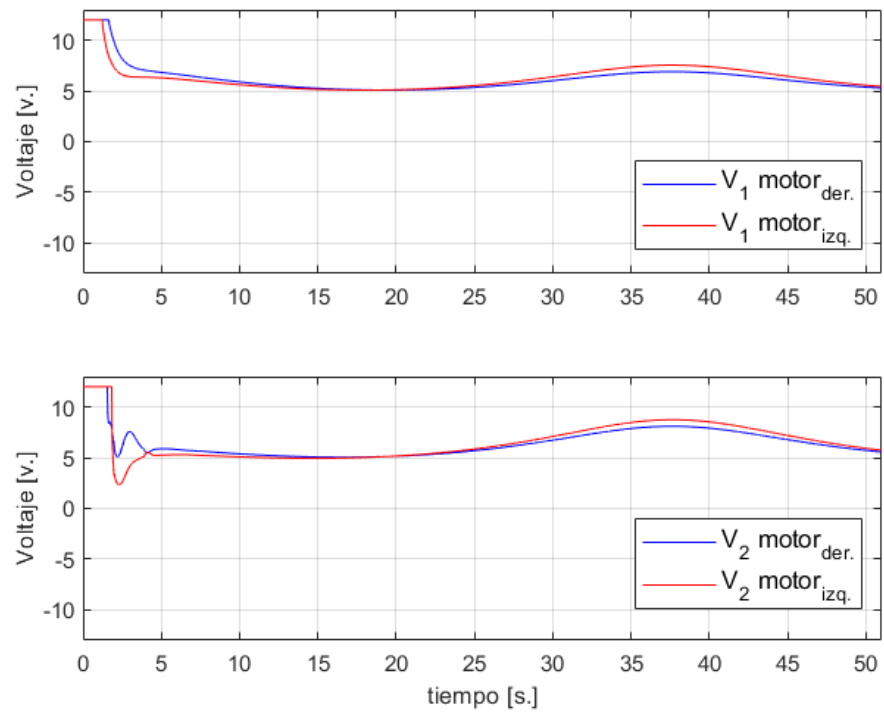


Figura 4.10 – Voltaje aplicado en los motores del robot líder ( $V_1$ ) y seguidor ( $V_2$ ).

#### 4.1.2. Respuesta del controlador 'l - l'

##### Trayectoria circular:

Los parámetros y condiciones iniciales para el robot líder 1 están determinados de acuerdo a lo señalado en la sección 3.1.3 c); mientras que las condiciones iniciales para el robot líder 2 y el robot seguidor 3, son las siguientes:

$$\eta_{2o} = \begin{bmatrix} 0,5535 \\ -0,5746 \\ 35^\circ \end{bmatrix}, v_{2o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \eta_{3o} = \begin{bmatrix} 1,3526 \\ -1,3024 \\ 100^\circ \end{bmatrix}, v_{3o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En cuanto al controlador no lineal para el robot líder 2, se escogieron los mismos parámetros que en la sección anterior:  $k_x = 7, k_y = 20, k_\psi = 0,02, k_v = 1$

Los parámetros para el controlador del robot seguidor 3 son:  $k_{13} = 1, k_{23} = 1$ ; de manera que los errores entre las distancias  $\{l_{13}, l_{23}\}$  y sus respectivos valores deseados  $\{l_{13}^d, l_{23}^d\}$ , disminuirán al 36.79% de su valor por cada segundo de análisis, según la ecuación 3.38. El resultado se muestra en las Figuras 4.11 y 4.12 (Pág. 91)

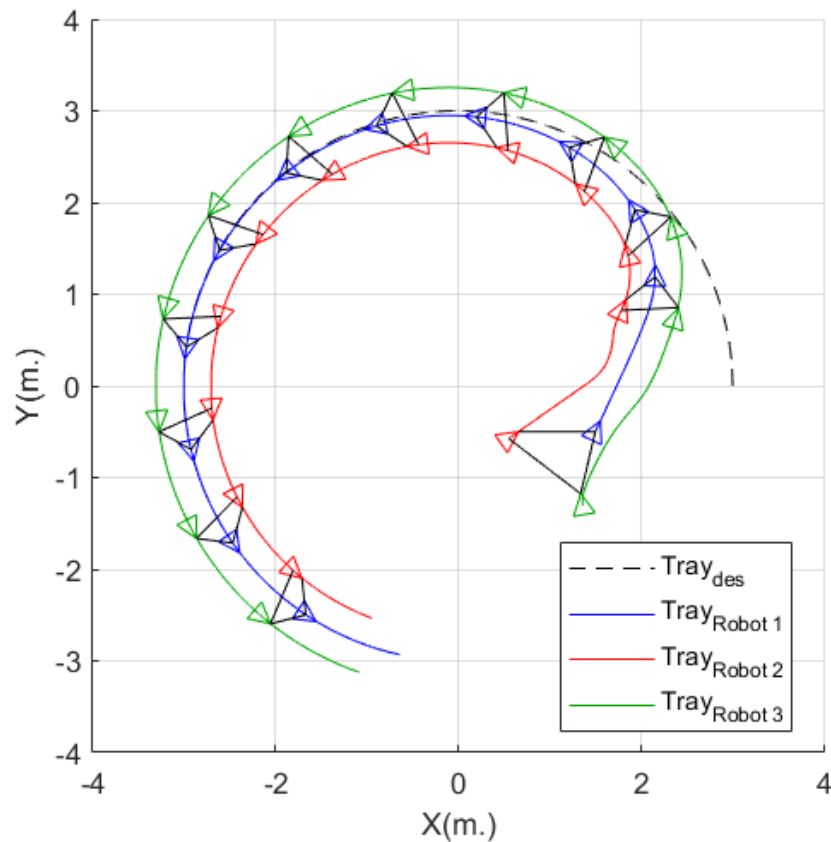


Figura 4.11 – Trayectorias de los robots líder (azul y rojo) y el robot seguidor (verde) (Muestra para cada 3,75 seg.)

El patrón de formación deseado es establecido por los siguientes valores de distancia y ángulo:

$$\begin{aligned} l_{12}^d &= 0,4 \text{ m.}; & \alpha_{12}^d &= 130^\circ \\ l_{13}^d &= 0,4 \text{ m.}; & l_{23}^d &= 0,6334 \text{ m.} \end{aligned}$$

El tiempo de análisis fue de 45 segundos.

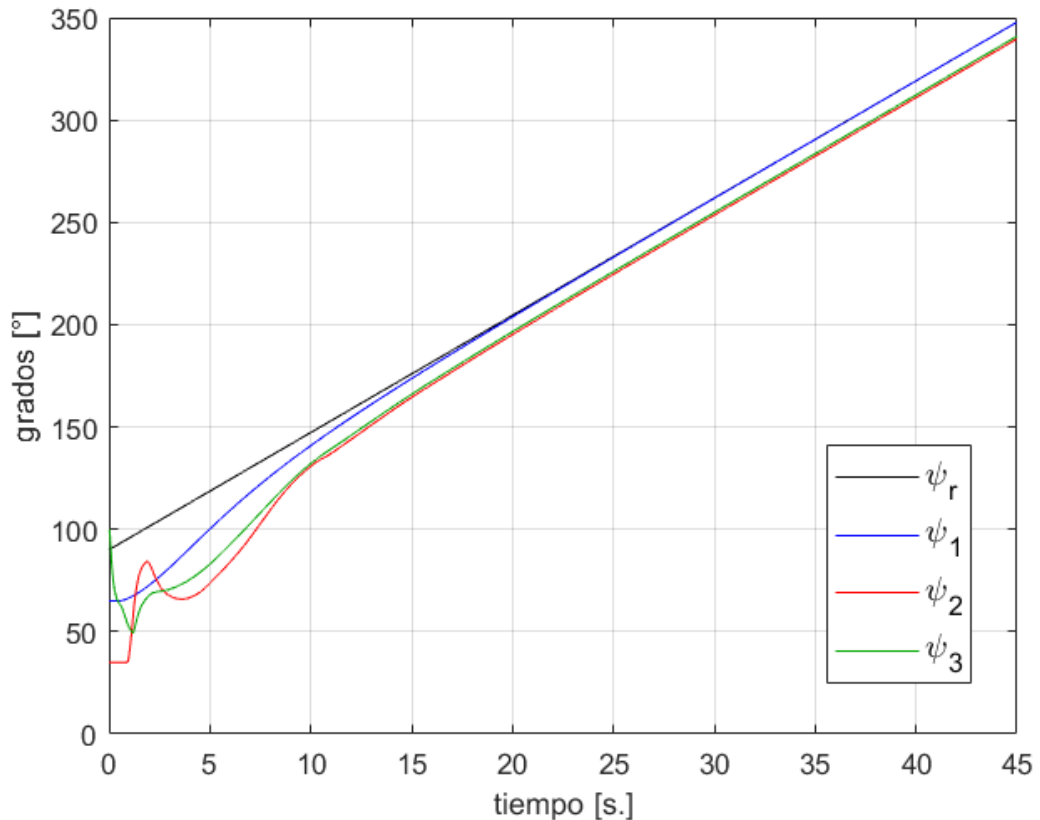


Figura 4.12 – Orientación de los robots líder y robot seguidor

De acuerdo a las Fig. 4.11 y 4.12, el robot seguidor 3 (mostrado en verde) logra mantenerse a una distancia de separación determinada tanto del robot líder 1 como del robot líder 2. De esta manera, se valida el diseño de los controladores ' $l - \alpha'$ ' y ' $l - l'$ '. Cuando se alcanza la formación deseada, la orientación de los robots 2 y 3 no es exactamente la del robot líder 1, debido a los parámetros de formación deseados.

El patrón de formación deseado entre los robots 1 y 2, se alcanza aproximadamente a los 10 segundos; mientras que la separación deseada entre los robots 1 y 3, así como entre los robots 2 y 3, ocurre luego de 6 segundos de iniciado el análisis, aproximadamente. (Fig. 4.13 y 4.14, Pág. 92). Así mismo, las velocidades y voltajes se estabilizan aproximadamente a los 15 segundos (Fig. 4.15 y 4.16, Pág 93).

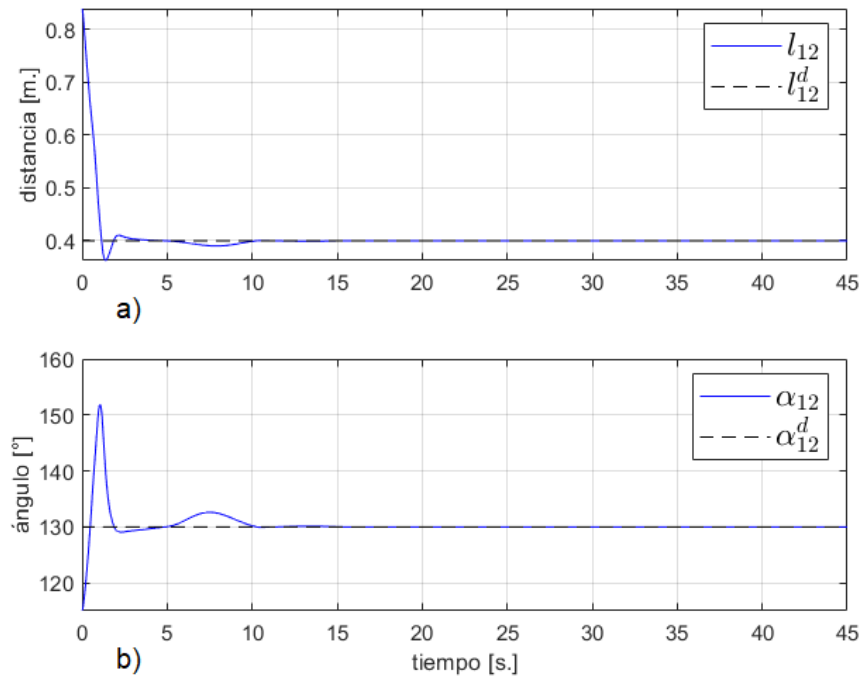


Figura 4.13 – Variables controladas de distancia (a) y ángulo (b) de separación para la formación entre los robots móviles 1 y 2

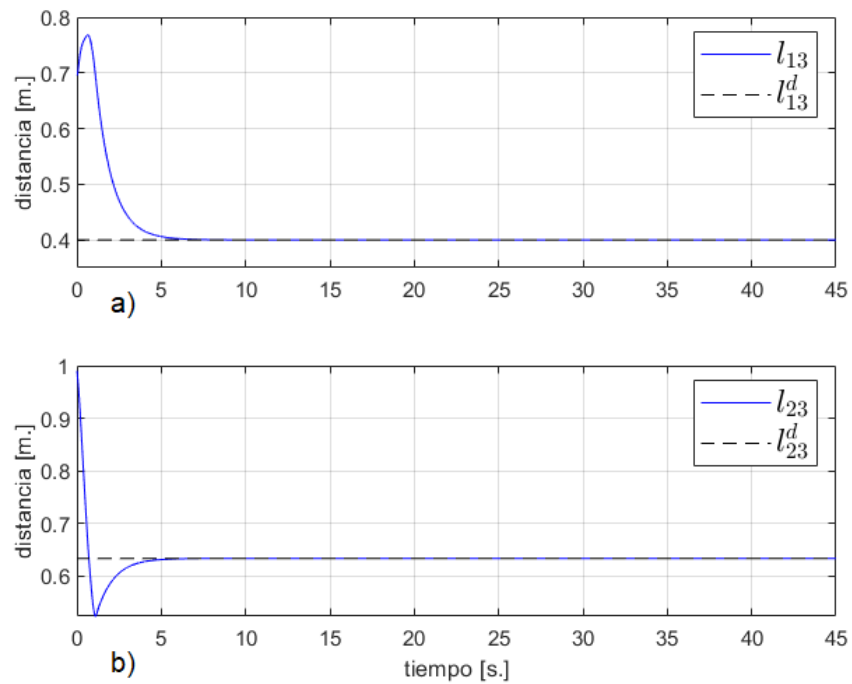


Figura 4.14 – Variables controladas de distancias de separación para la formación entre los robots 1 y 3 (a), y los robots 2 y 3 (b).

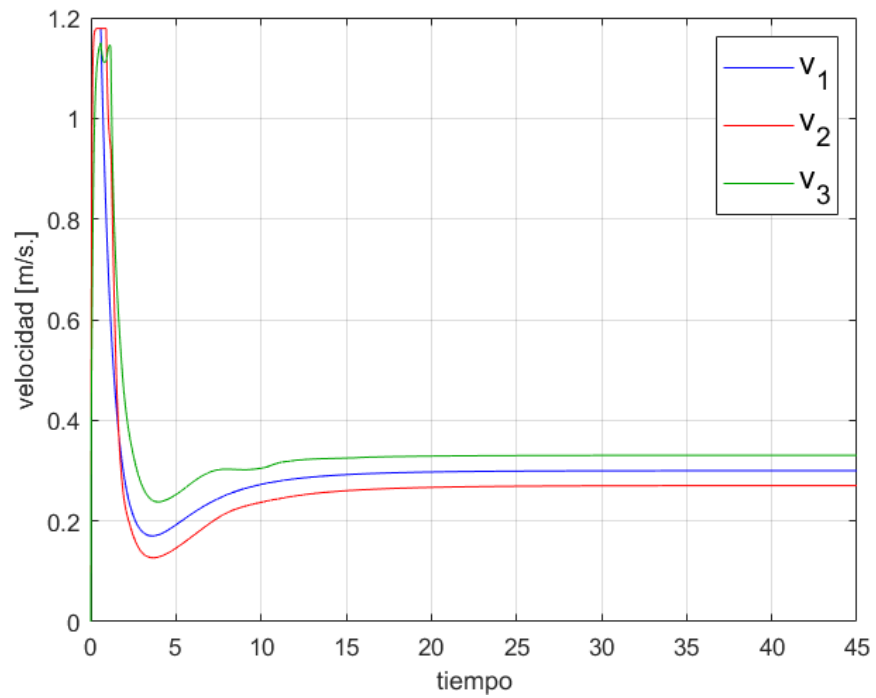


Figura 4.15 – Velocidades lineales de los robots en la formación ( $v_1, v_2, v_3$ )

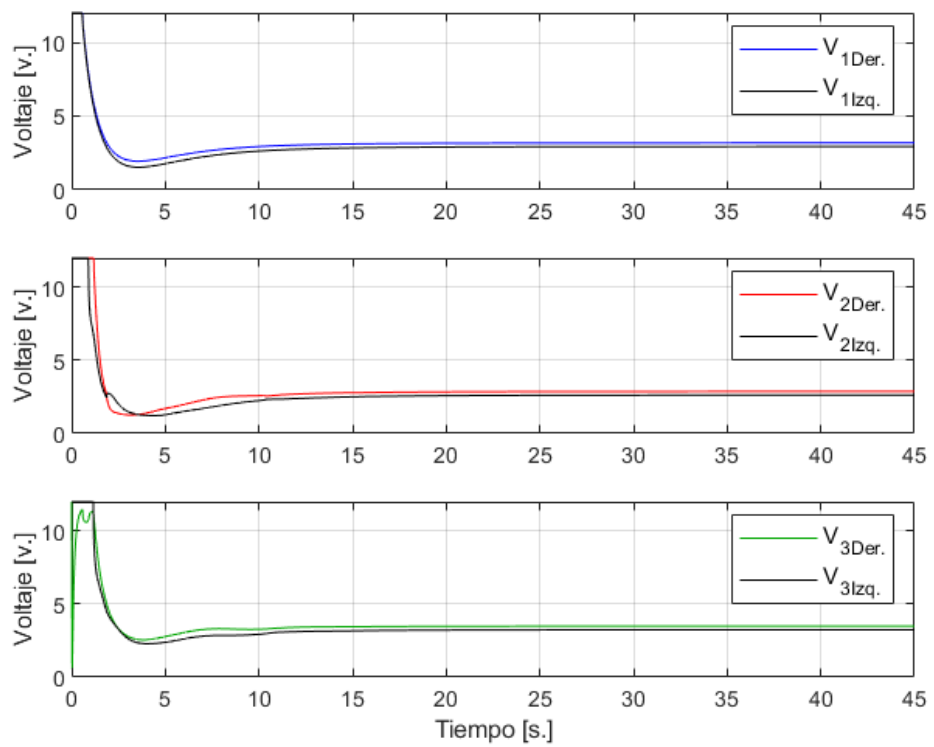


Figura 4.16 – Voltaje aplicado en los motores de los robots móviles ( $V_1, V_2, V_3$ ).

## 4.2. INCLUSIÓN DE UN OBSERVADOR NO LINEAL

### Trayectoria parabólica:

Los parámetros y condiciones iniciales para el robot líder 1 están determinados según lo indicado en la sección 3.1.3 b), a excepción de la velocidad inicial  $v_{1o} = [0.1, 0]^T$ .

Por otro lado, las condiciones iniciales para el robot seguidor 2 son las siguientes:

$$\eta_{2o} = [0,03; 1,1; 0]^T, \quad v_{2o} = [0; 0]^T, \quad [l_{12}^d, \alpha_{12}^d]^T = [0,35; 110^\circ]^T$$

Los parámetros del controlador no lineal para el robot seguidor 2 son:  $k_x = 7, k_y = 20, k_\psi = 0,01, k_v = 1$ ; mientras que los parámetros escogidos para el observador, se obtuvieron de la siguiente manera:

En principio, a partir de la definición de los factores de escalamiento  $z_1$  y  $z_2$  en la ecuación 3.108, estos no pueden ser nulos. Con la finalidad de simplificar el análisis, los valores iniciales de estos factores se hacen igual a la unidad. Esto es:  $r_o = [1 \ 1]^T$ .

De acuerdo a la ecuación 3.112, el valor de  $\epsilon$  es positivo, y siendo que acompaña a los términos  $\delta_{12}$  y  $\delta_{21}$ , entonces es un buen criterio suponer que estos valores deben ser comparables. Por tanto, siendo que estos valores expresan una tasa de cambio tanto para la variable de estado  $\alpha_{12}$  y  $l_{12}$ , se propone un valor de  $\epsilon = 0.1$ .

Así mismo, se consideran que los valores de la matriz de la ecuación 3.112, por lo que ya propuesto el valor de  $\epsilon$ , se escogen valores para  $c_1$  y  $c_2$  igual a 8. Sin embargo, asumiendo en este caso que se desea estimar la variable  $\alpha_{12}$  con cierta mayor rapidez en comparación con la variable de distancia  $l_{12}$ , se propone que  $c_1 = 8, c_2 = 10$ , a partir de los cuales se determina que  $\lambda_{a_1} = 2, \lambda_{a_2} = 3$ .

Con el mismo criterio de establecer una mayor ponderación sobre la variable de estado de ángulo  $\alpha_{12}$ , con respecto a la variable de distancia  $l_{12}$ , se escogen los siguientes valores para las constantes de proporcionalidad en la ecuación 3.109:

$$\kappa_1 = 3, \kappa_2 = 4$$

Por otro lado, las condiciones iniciales para las variables de estado son las siguientes:

$$\begin{bmatrix} \hat{l}_{120} \\ \hat{\alpha}_{120} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los resultados se muestran en las Figuras 4.17 a 4.20 (pp. 95-97)



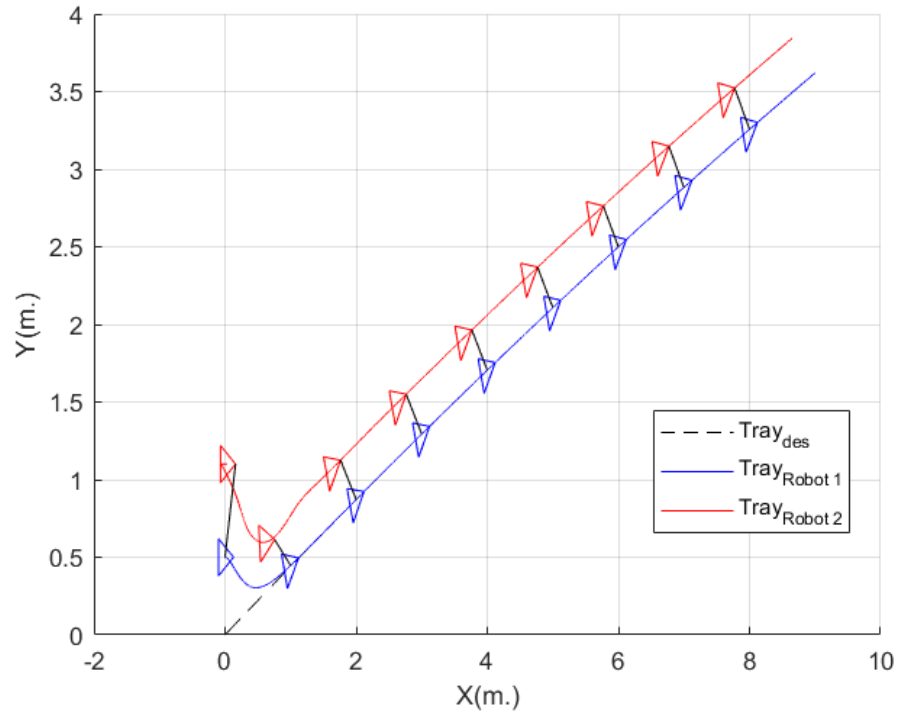


Figura 4.17 – Trayectorias de los robots líder (azul) y el robot seguidor (rojo) (Para cada 2 segundos)

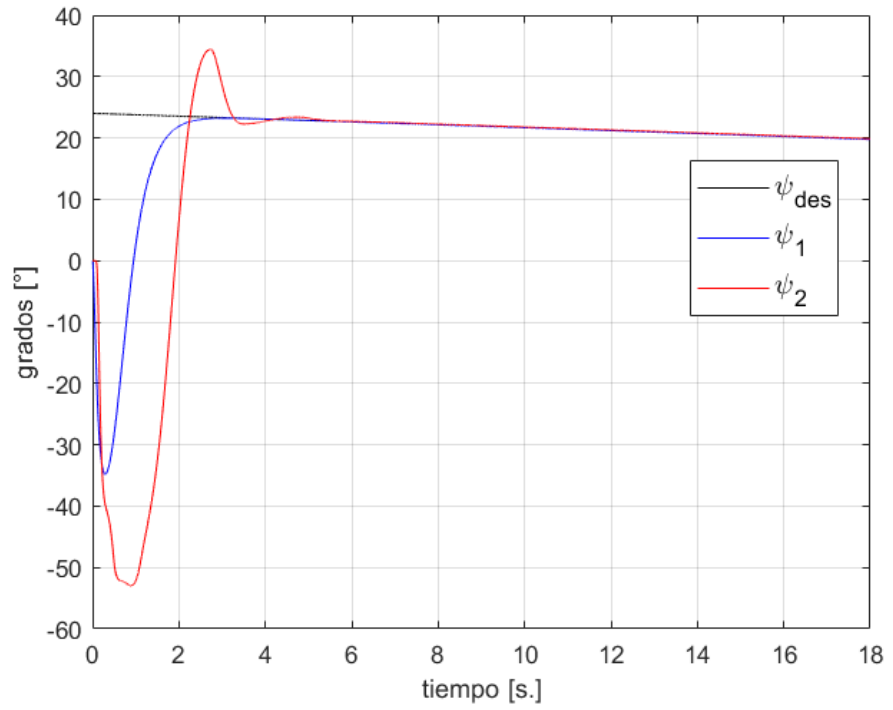


Figura 4.18 – Orientación de los robots líder y robot seguidor

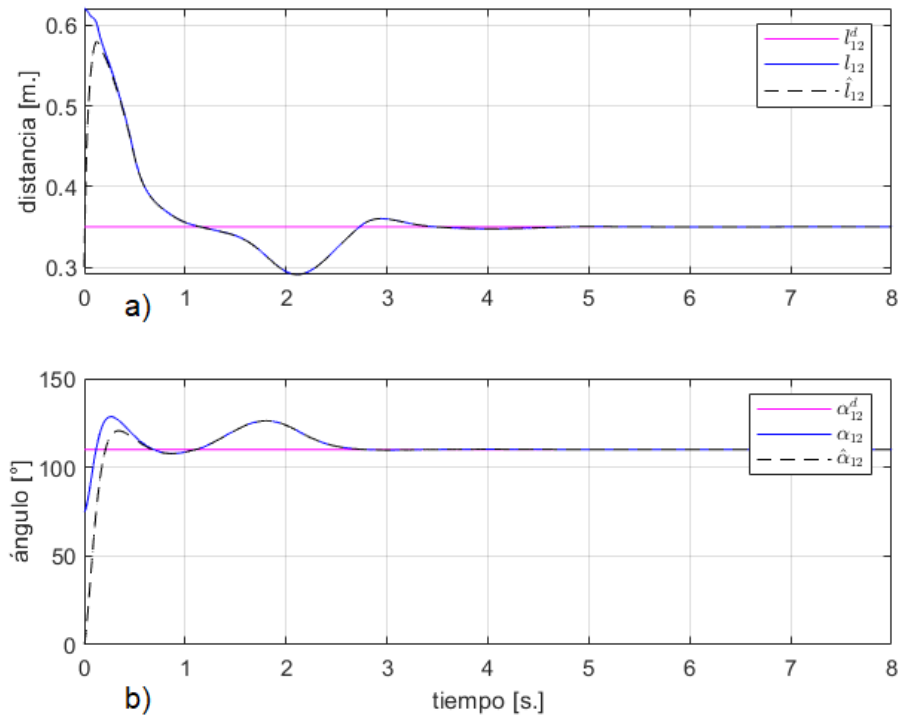


Figura 4.19 – Variables controladas y estimadas de distancia (a) y ángulo (b) de separación entre el robot líder y el robot seguidor

La figura 4.17 (Pág. 95) muestra el comportamiento de la formación líder-seguidor haciendo uso de un observador de estados, el cual estima los valores de distancia  $\hat{l}_{12}$  y ángulo de separación  $\hat{\alpha}_{12}$  entre dichos robots. A medida que inicia el análisis en el tiempo, la orientación del seguidor trata de seguir la orientación del robot líder, alcanzando la igualdad aproximadamente a los 6 segundos (Fig. 4.18, Pág. 95).

En la figura 4.19 se aprecia que el observador de estados diseñado se desempeña de manera adecuada. En un tiempo menor a 1 segundo, los valores estimados de distancia y ángulo de separación alcanzan los valores reales, y éstos a su vez, alcanzan los valores deseados a los 4 segundos. Importante notar en este punto que, a diferencia del ángulo estimado inicial, la distancia estimada inicial no se considera igual a cero porque se estaría indicando que al inicio del análisis, el robot líder y seguidor se encuentran en la misma ubicación, situación que no puede ocurrir físicamente.

Así también, de acuerdo al algoritmo de estimación presentado en el capítulo 3, al no tener conocimiento de las velocidades lineales, se verifica, de acuerdo a la Fig. 4.20 (Pág. 97), que los valores estimados alcanzan los valores reales aproximadamente a los 7 segundos de iniciado el análisis.

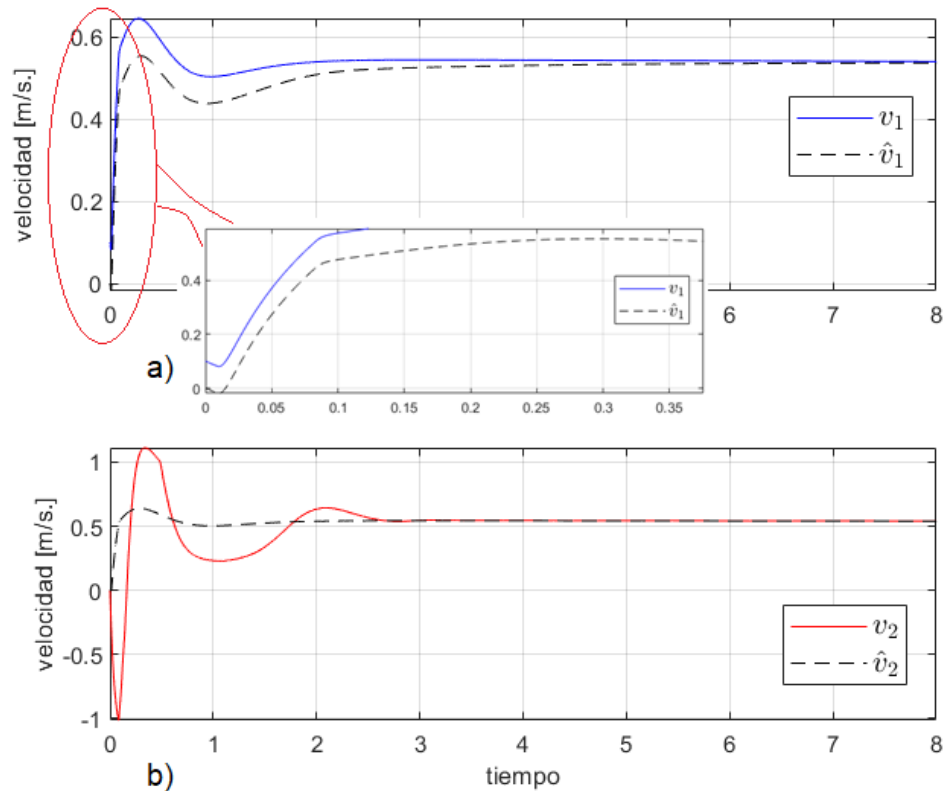


Figura 4.20 – Velocidades estimadas del robot líder (a) y del robot seguidor (b)

### 4.3. ESCENARIO CON OBSTÁCULOS

En este caso se consideró a un objeto circular como obstáculo durante el desplazamiento del robot seguidor al desear mantener un patrón de formación predefinido con el robot líder, el cual sigue una trayectoria parabólica. En adición a las consideraciones descritas para el robot líder en la sección 3.1.3 b), y para el robot seguidor en la sección 4.2, se escogieron los siguientes valores para el caso de un entorno con una circunferencia como obstáculo, ubicado en  $(x, y) = (3; 1,65)$ , y con un radio de 8 cm.

$$k_l = 0,01; \quad k_{\alpha_{12}} = 0,06$$

$$s_d = 0,3 \text{ m}; \quad s_{M\acute{A}X} = 1 \text{ m}.$$

La determinación de estos parámetros parte del análisis de las ecuaciones en la sección 3.2.3, y de la Figura 3.19.

Por un lado, y de acuerdo a la Tabla 2.2, las dimensiones del robot móvil son 24cm. x 23cm, de manera que es lógico haber seleccionado el valor de  $s_d = 30\text{cm}$ .  $> 24\text{cm}$ .

Así mismo, y considerando que el robot móvil se mueve en un entorno de 2 a 3m. es un buen criterio establecer la detección máxima de un obstáculo ubicado a 1m., por lo que  $s_{MÁX} = 1m.$

Ahora bien, siendo que la distancia de formación deseada  $l_{12}^d = 0.35$  y el ángulo de formación deseado  $\alpha_{12}^d = 110^\circ$ , correspondería que ambos términos de las ecuaciones presentadas en 3.82 tanto para  $l_{12}(t)$  y  $\alpha_{12}(t)$  sean cercanamente comparables, con la finalidad de ver el efecto del restablecimiento de la formación deseada luego de la evasión de un obstáculo por parte de un robot que sigue a otro. Por tanto, se estableció que:  $k_l = 0,01, k_{\alpha_{12}} = 0,06$

Como se aprecia en la figura siguiente, y mediante el algoritmo detallado en la sección 3.2.3, cuando el robot seguidor (en rojo) encuentra un obstáculo, éste se desvía en su trayectoria con la finalidad de evitarlo, para luego retomar la formación. Por tanto, se verifica que la función potencial descrita en el algoritmo mencionado, se desempeña de manera adecuada. Este resultado se muestra en las Fig. 4.21 a 4.25 (pp. 98 – 100).

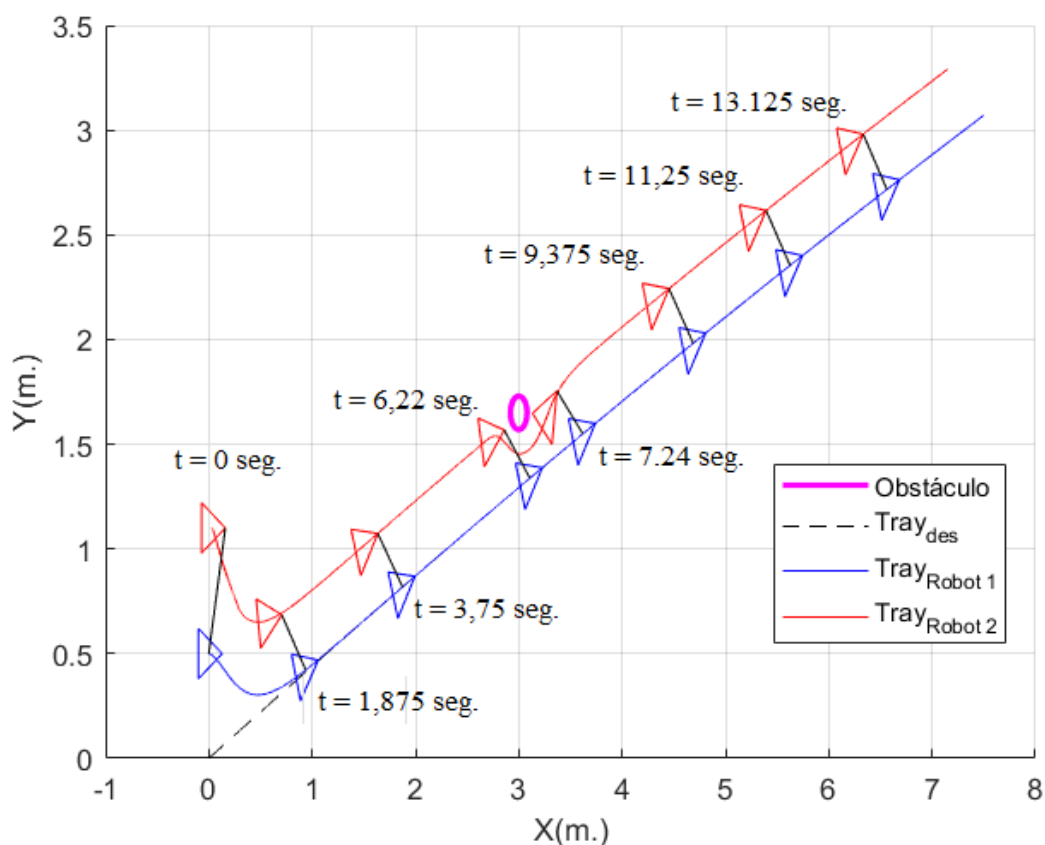


Figura 4.21 – Trayectorias de los robots líder y seguidor (rojo).

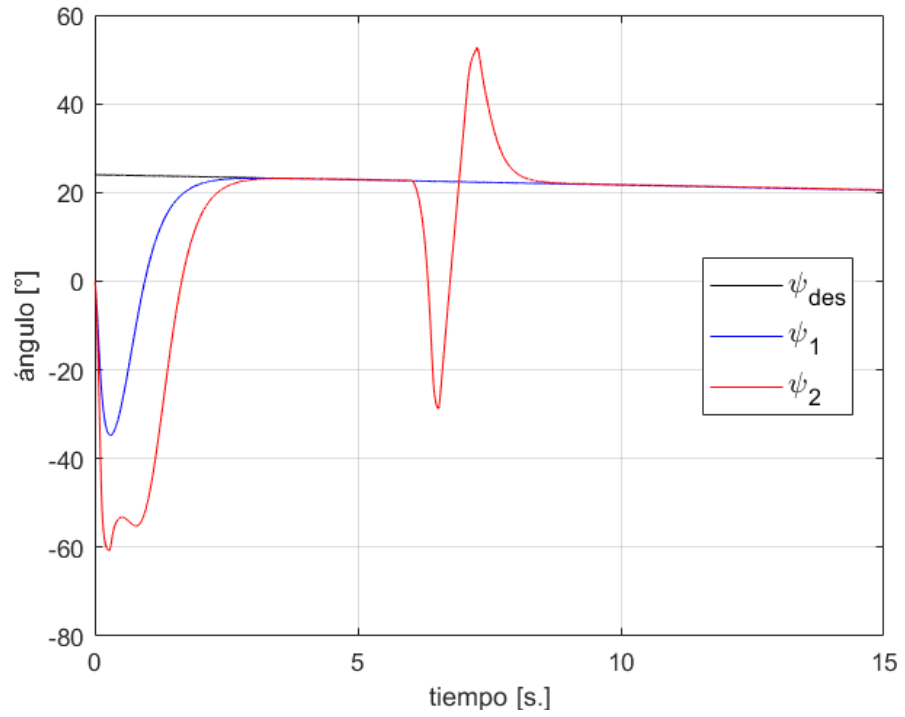


Figura 4.22 – Orientación del robot líder y del robot seguidor.

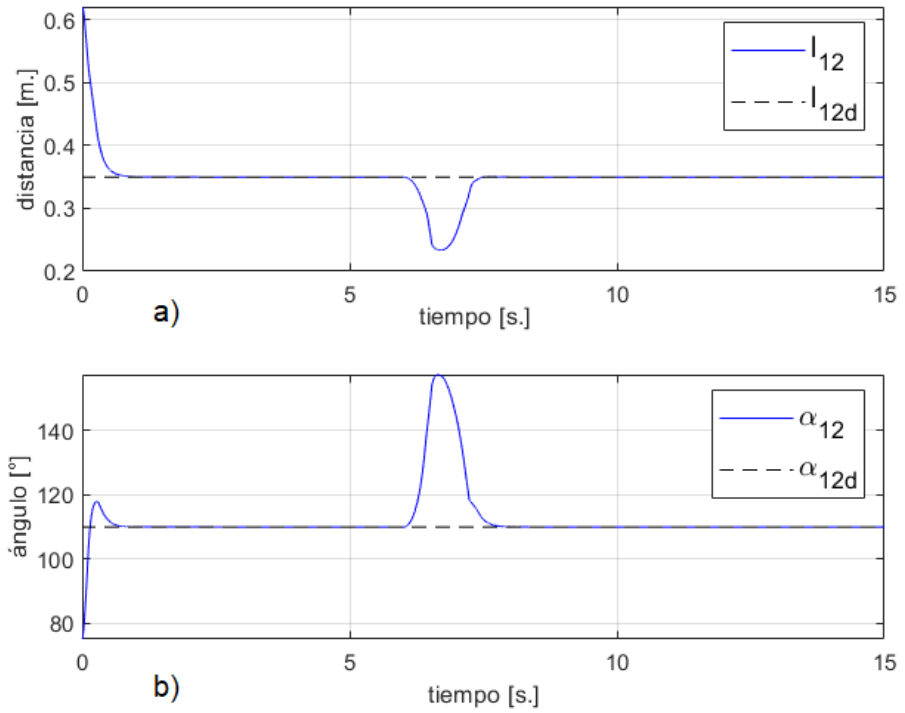


Figura 4.23 – Variables controladas de distancia (a) y ángulo (b) de separación para la formación entre el robot 1 (líder) y robot 2 (seguidor)

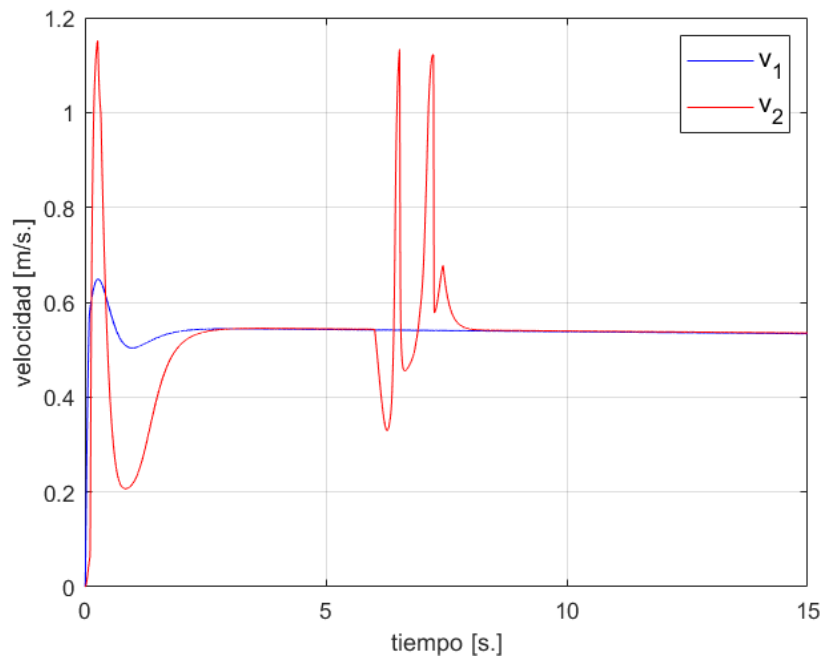


Figura 4.24 – Velocidades lineales de los robots líder (azul) y seguidor (rojo).

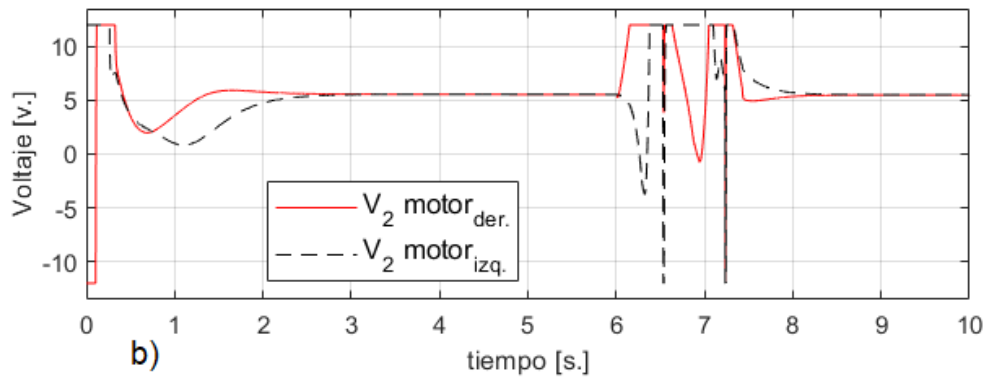
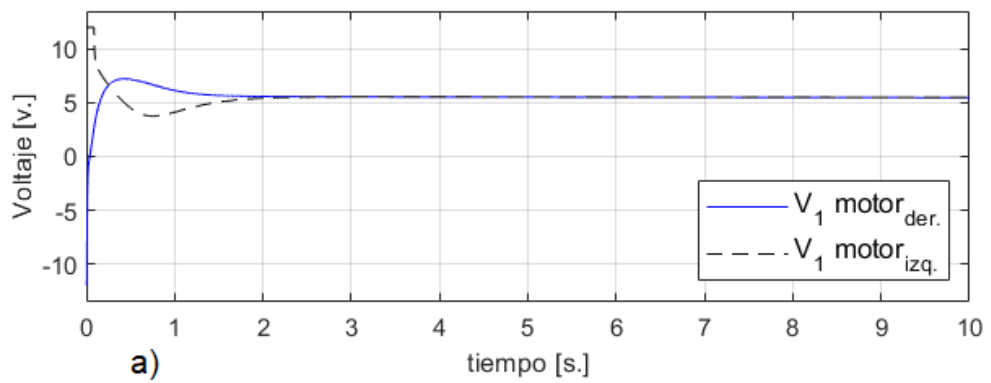


Figura 4.25 – Voltaje aplicado en los motores del robot líder (a) y seguidor (b).

Así mismo, se verifica que este desvío en la trayectoria del robot seguidor se manifiesta a través del cambio en su orientación, hecho que perturba los valores de distancia y ángulo con los cuales el robot seguidor (en rojo) mantenía un patrón de formación con el robot líder (en azul). Sin embargo, el algoritmo de función potencial permite restablecer el patrón inicialmente deseado, en un tiempo aproximado de 1 segundo (Fig. 4.22, 4.23, ambas en Pág. 99). Se verifica también que la velocidad del robot seguidor es alterada cuando hay un obstáculo por evadir (Fig. 4.24, Pág. 100).

Los motores del robot seguidor trabajan de manera conjunta. A partir de la Figura 4.25, y luego de detectar el obstáculo, los voltajes aplicados a dichos motores son de mayor valor, de manera que se genere toda la fuerza sobre ellos para cambiar la orientación del robot, y así evitar el obstáculo. Eventualmente, se alcanza por segunda vez un voltaje constante sobre cada motor.

#### 4.4. VARIACIÓN DE LA FORMACIÓN EN EL TIEMPO

En este caso, se consideró el análisis de una formación variante en el tiempo, la cual está integrada por seis (6) robots móviles que siguen la estrategia de diseño presentada en la Tabla 3.1 (Pág. 77).

Esta formación variante en el tiempo consistió en una transición entre las siguientes configuraciones:

1. Un patrón de forma triangular, cuyos lados son iguales a 2,8m.
2. Una configuración rectangular de lados 1,6m. y 0,8 m; y finalmente,
3. Una formación triangular de 2 lados iguales a 1,6m. y un tercer lado de 2.4513m.

Asimismo, se determinaron las siguientes condiciones iniciales de los robots móviles:

$$\eta_{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3,0955 \\ 0^\circ \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} l_{120} \\ \alpha_{120} \\ \psi_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3397 \\ 128,34^\circ \\ 0^\circ \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} l_{130} \\ l_{230} \\ \psi_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7242 \\ 0,6486 \\ 20^\circ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_{240} \\ \alpha_{240} \\ \psi_{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2719 \\ 163^\circ \\ 0^\circ \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} l_{350} \\ l_{450} \\ \psi_{50} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,431 \\ 0,2994 \\ 0^\circ \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} l_{360} \\ l_{560} \\ \psi_{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3454 \\ 0,3038 \\ 0^\circ \end{bmatrix}$$

Las velocidades iniciales se consideraron nulas, de manera que:

$$v_{10} = v_{20} = v_{30} = v_{40} = v_{50} = v_{60} = [0 \ 0]^T$$

Con la finalidad de obtener los 3 (tres) patrones de formación mencionados anteriormente, se establecieron los parámetros de distancia  $l_{ij}^d$  y ángulo  $\alpha_{ij}^d$  deseados, de acuerdo a la Tabla 4.1. Así mismo, teniendo en cuenta los diseños de los controladores expuestos en el capítulo 3, se hicieron las simulaciones correspondientes a fin de obtener los parámetros mostrados en la Tabla 4.2.

Tabla 4.1 – Parámetros de formación deseados

Parámetros deseados	Patrón de formación		
	1. Triángulo equilátero	2. Rectángulo	3. Triángulo isósceles
$\begin{bmatrix} l_{12}^d \\ \alpha_{12}^d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9042 \\ 144,92^\circ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,8158 \\ 78,69^\circ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7078 \\ 120,03^\circ \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} l_{13}^d \\ l_{23}^d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9042 \\ 1,0515 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,64 \\ 1,0245 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7078 \\ 1,2361 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} l_{24}^d \\ \alpha_{24}^d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9042 \\ 144,92^\circ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,64 \\ 180^\circ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7078 \\ 120,03^\circ \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} l_{35}^d \\ l_{45}^d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9042 \\ 1,0515 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,0245 \\ 0,64 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7078 \\ 1,2361 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} l_{36}^d \\ l_{56}^d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9042 \\ 1,0515 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,64 \\ 0,8158 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7078 \\ 1,2361 \end{bmatrix}$

Tabla 4.2 – Parámetros de los controladores

Parámetros del Controlador	Patrón de formación		
	1. Triángulo equilátero	2. Rectángulo	3. Triángulo isósceles
$K_1$	$[1 \ 1 \ 3]$		
$K_2 = [k_x \ k_y \ k_\psi \ k_v]$	$[1 \ 20 \ 1 \ 0,1]$	$[7 \ 20 \ 0,01 \ 1]$	$[1 \ 15 \ 1 \ 0,1]$
$K_3$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$K_4 = [k_x \ k_y \ k_\psi \ k_v]$	$[1 \ 20 \ 1 \ 0,1]$	$[7 \ 20 \ 0,01 \ 1]$	$[1 \ 15 \ 1 \ 0,1]$
$K_5$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$K_6$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



Con los parámetros y condiciones iniciales consideradas, la orientación de los robots es como la que se muestra en la Fig. 4.26, donde  $\psi_r$  es la orientación deseada o de referencia,  $\psi_1$  es la orientación que sigue el robot líder, mientras que los ángulos restantes son los que presentan los demás robots, siguiendo la estrategia mencionada en la Tabla 3.1 (Pág. 77).

Con respecto al comportamiento de la formación variante en el tiempo, éste se presenta en la Fig. 4.27 (Pág. 104), donde el robot líder 1 sigue la trayectoria senoidal descrita por:

$$\begin{cases} x(t)^d = 0,5t \\ y(t)^d = 4 \sin(wx(t)^d) + 2 \end{cases}$$

Donde:  $T = 50$  seg. ( $w = 2\pi/T$ )

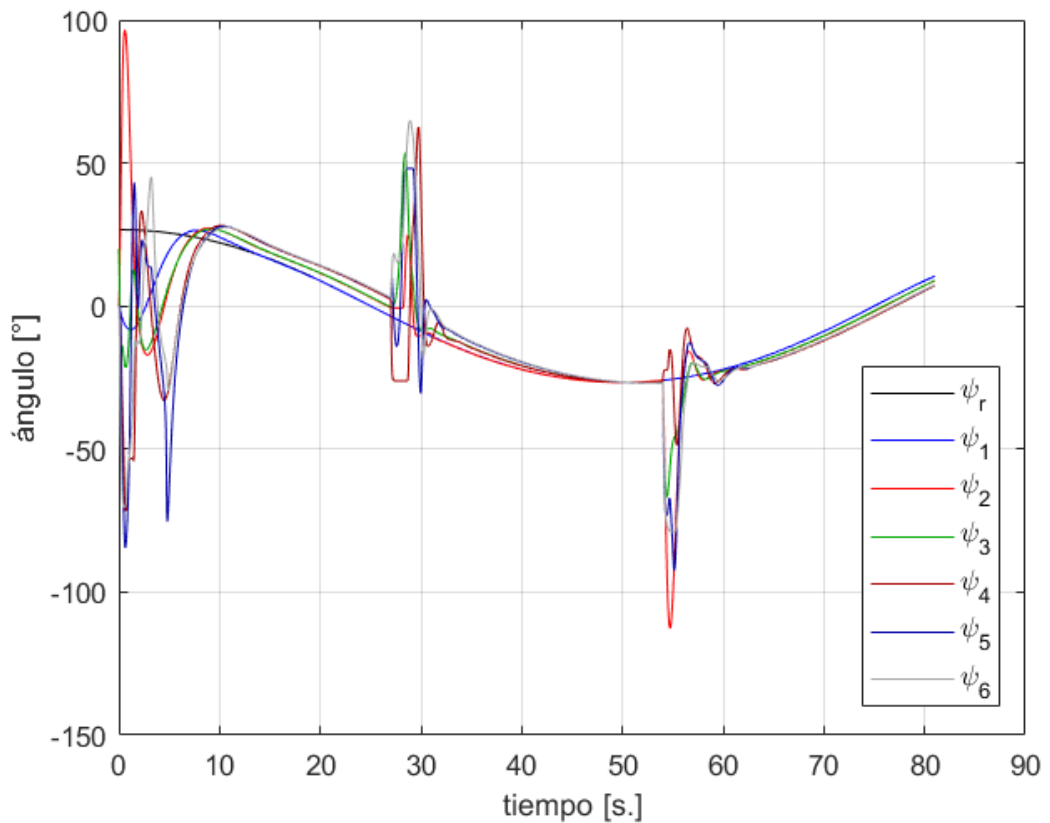


Figura 4.26 – Comportamiento de la orientación de los robots móviles en la formación

El tiempo de análisis fue de 81 segundos. En la figura siguiente se presentan 10 instantes de tiempo diferentes.

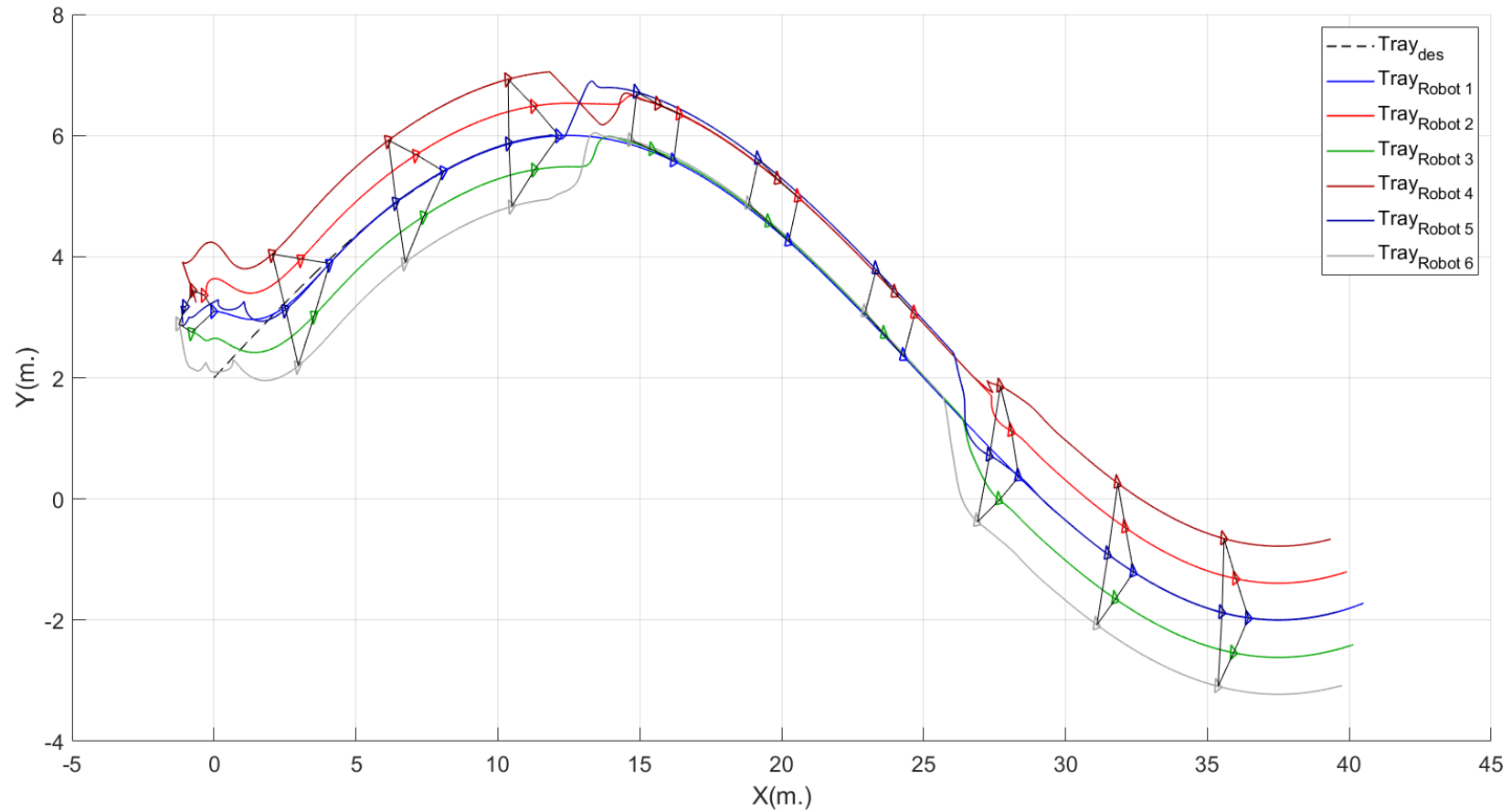


Figura 4.27 – Variación de la formación en el tiempo. Transición predefinida: triángulo equilátero – rectángulo – triángulo isósceles

Al inicio del análisis, los 6 (seis) robots buscan alcanzar la configuración triangular de lados iguales. Aproximadamente, luego de 27 segundos, se reconfiguran los parámetros deseados y de los controladores de acuerdo a las Tablas 4.1 y 4.2; de manera que los robots se desplacen formando un rectángulo. Finalmente, a los 54 segundos cambia nuevamente la configuración, y se verifica el buen desempeño de los controladores propuestos.

Dado que los robots conforman una determinada formación, esto quiere decir que deben tener la misma orientación luego de alcanzar la estabilidad. De no ser así, los robots tomarían direcciones distintas dentro de un S.R.I. El resultado esperado es el que se apreció en la Figura 4.26.

Debido a que se han determinado los robots líderes y seguidores en la formación de acuerdo a lo señalado en la sección 3.2.4, es necesario analizar el comportamiento de los parámetros de distancia  $l_{ij}(t)$  y ángulo  $\alpha_{ij}(t)$ . Los resultados se muestran en las Fig. 4.28 a 4.32 (pp. 105-107), en las cuales se puede notar que, a pesar de los pequeños sobreimpulsos, los parámetros mencionados alcanzan los valores deseados en cada uno de los 3 (tres) patrones de formación.

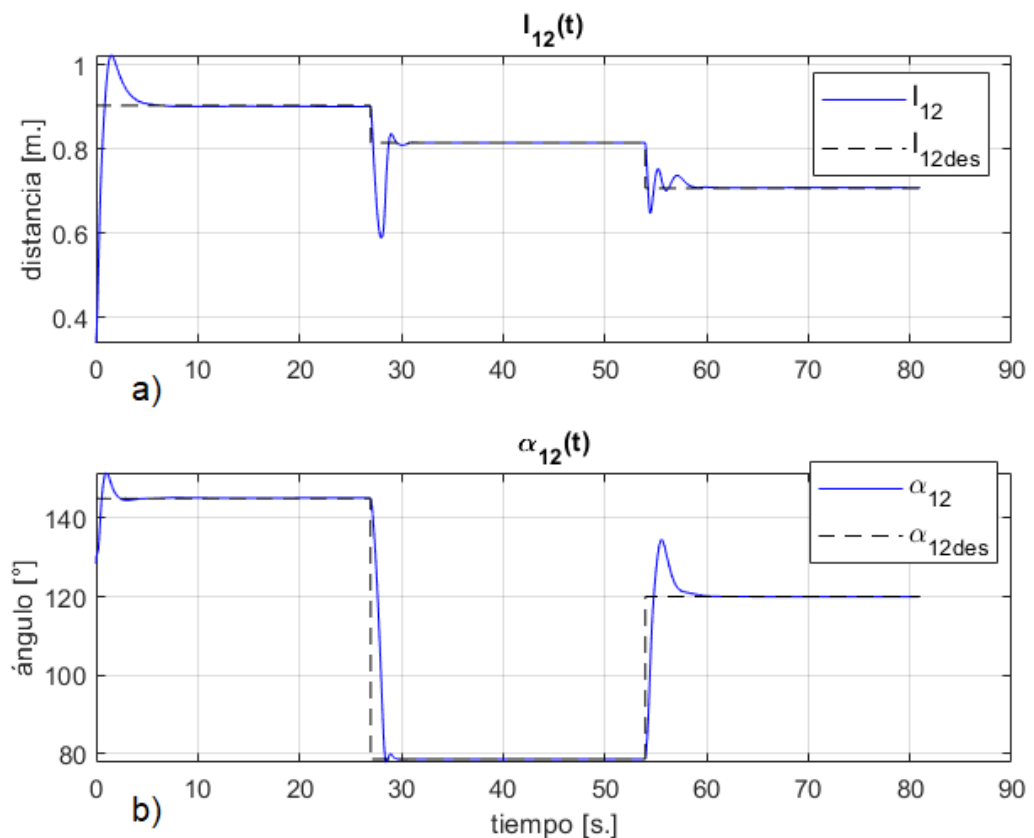


Figura 4.28 – Variables controladas de distancia  $l_{12}(t)$  (a) y ángulo  $\alpha_{12}(t)$  (b) entre el robot líder 1 y el robot seguidor 2

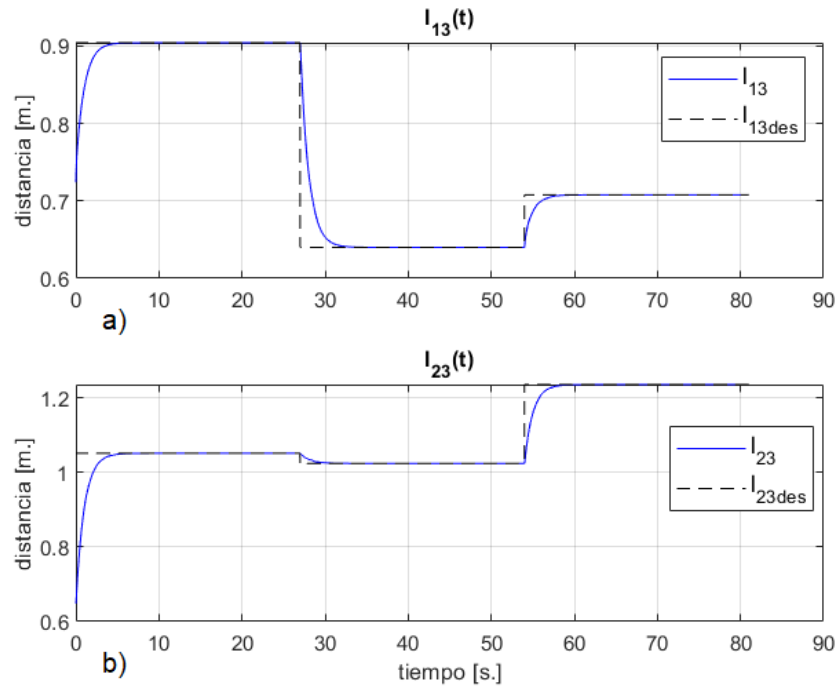


Figura 4.29 – Variables controladas de distancia de separación entre los robots 1 y 3 (a), y entre los robots 2 y 3 (b).

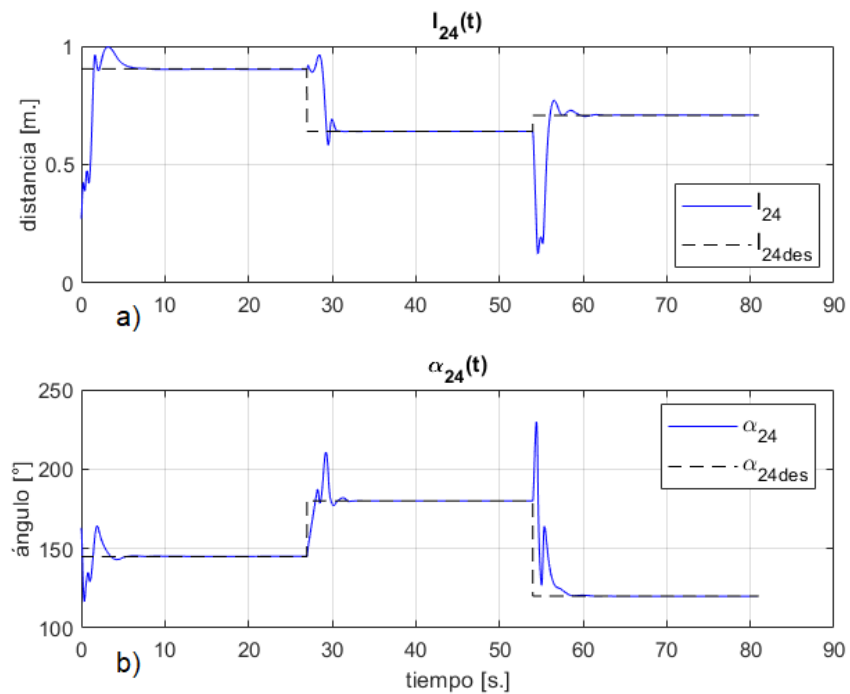


Figura 4.30 – Variables controladas de distancia  $l_{24}(t)$  (a) y ángulo  $\alpha_{24}(t)$  (b) entre el robot líder 2 y el robot seguidor 4.

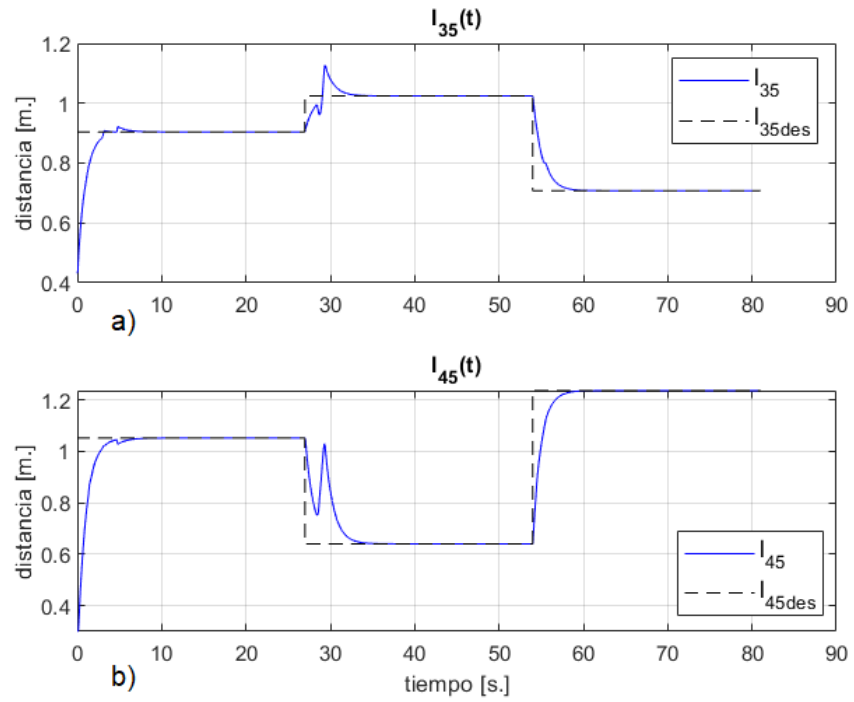


Figura 4.31 – Variables controladas de distancia de separación entre los robots 3 y 5 (a), y entre los robots 4 y 5 (b).

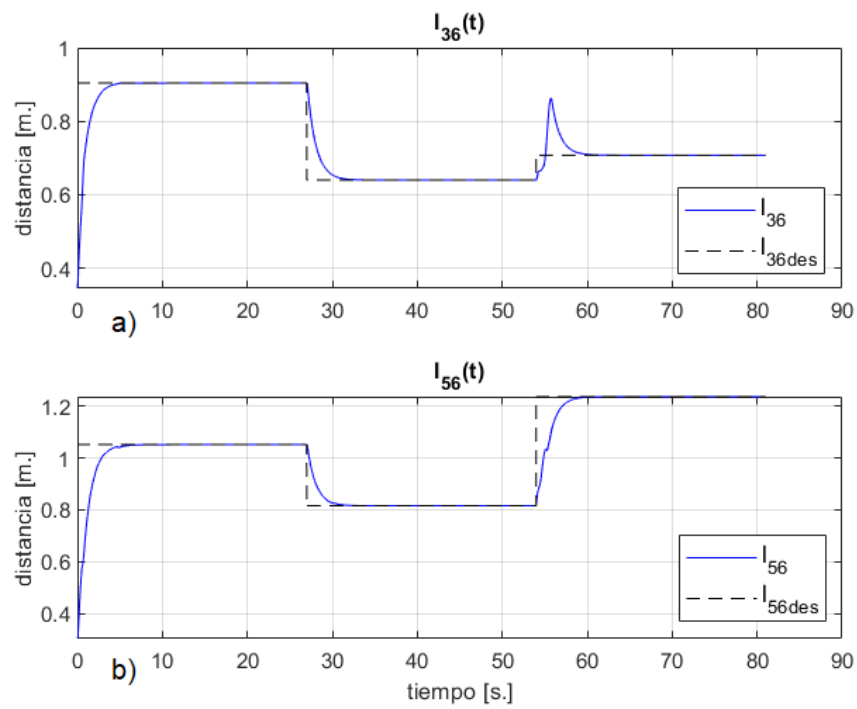


Figura 4.32 – Variables controladas de distancia de separación entre los robots 3 y 6 (a), y entre los robots 5 y 6 (b).

En la Fig. 4.33 se observa el comportamiento de las velocidades lineales de los 6 (seis) robots en la formación. Ante un cambio en la formación deseada, cada uno de los robots alcanza una velocidad constante en menos de 10 segundos, aproximadamente.

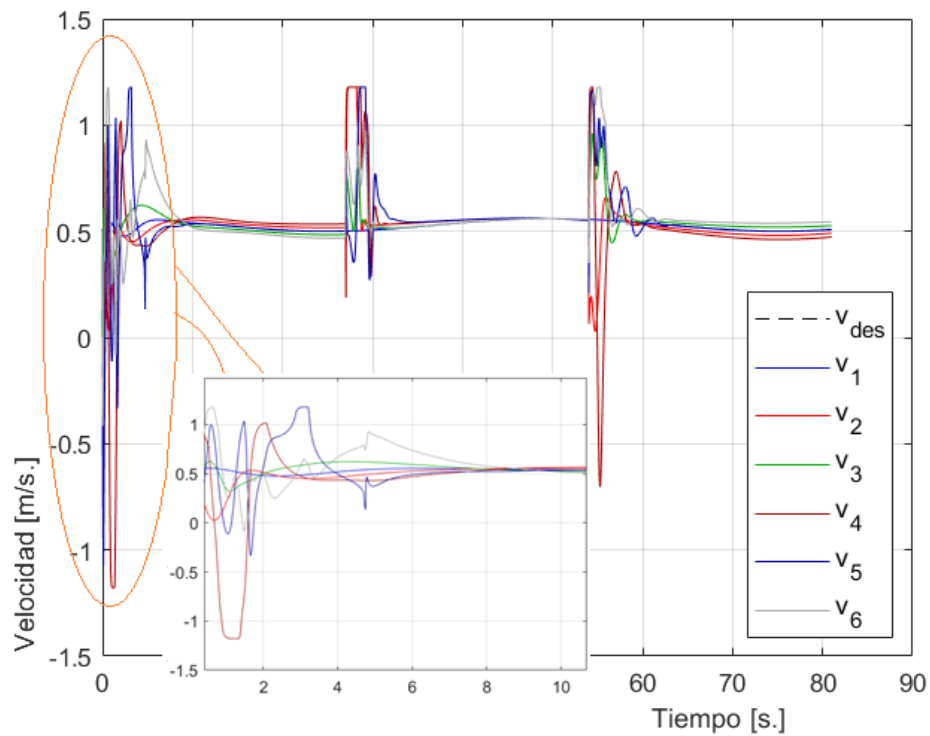


Figura 4.33 – Velocidades lineales de los robots en la formación

En cuanto al voltaje aplicado a los motores de cada robot, el comportamiento es el que se describe en las Fig. 4.34 (Pág. 109) y 4.35 (Pág. 110). Los voltajes aplicados sobre los motores del robot líder sólo alcanzan sus valores máximos al inicio del análisis, cuando debe partir del reposo para iniciar su movimiento. Por otro lado, sobre los robots seguidores 2 y 3 se alcanzan los valores máximos de voltaje al inicio del análisis y también en cada cambio de formación deseada, puesto que es necesario actuar sobre cada motor a fin de lograr un cambio de dirección en un robot.

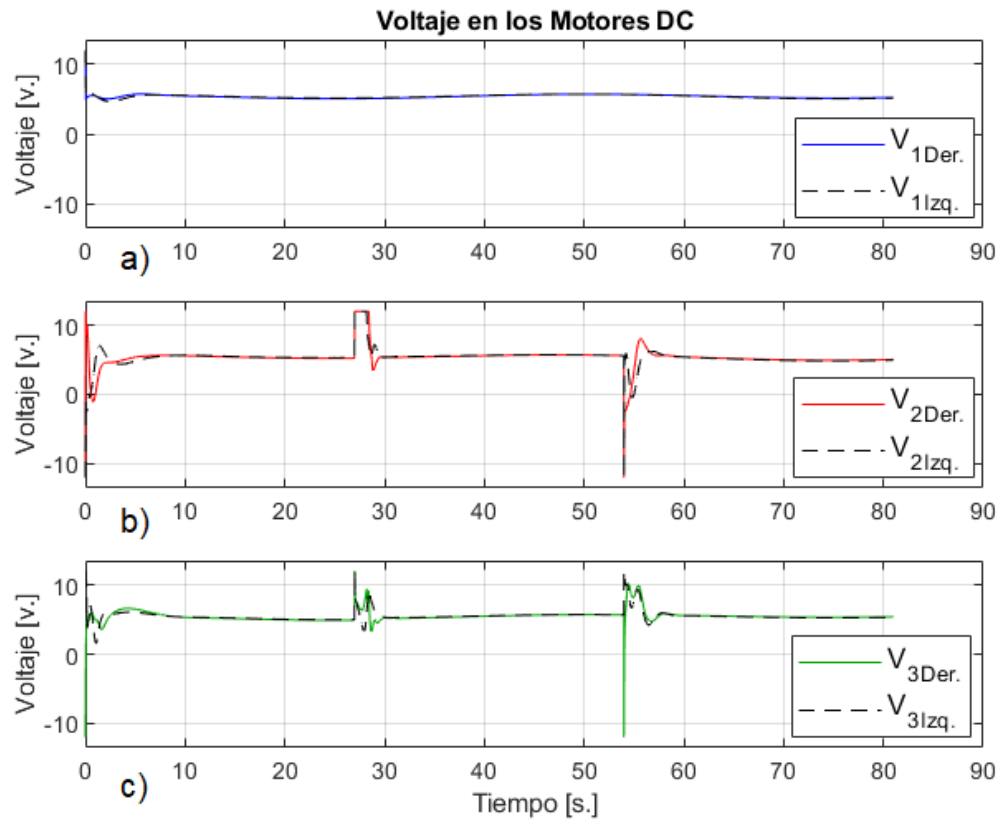


Figura 4.34 – Voltaje en los motores del robot líder (a), robot seguidor 2 (b), y robot seguidor 3 (c).

De manera similar a lo explicado anteriormente, los voltajes aplicados sobre los robots 4, 5 y 6 ocurren al inicio y luego de un cambio de formación. Sin embargo, en este caso la estabilidad se alcanza luego de un mayor tiempo, puesto que los entes líderes 2 y 3 a quienes siguen los robots 4, 5 y 6 también se encuentran sujetos a condiciones de control  $l - \alpha'$  y  $l - l'$ .

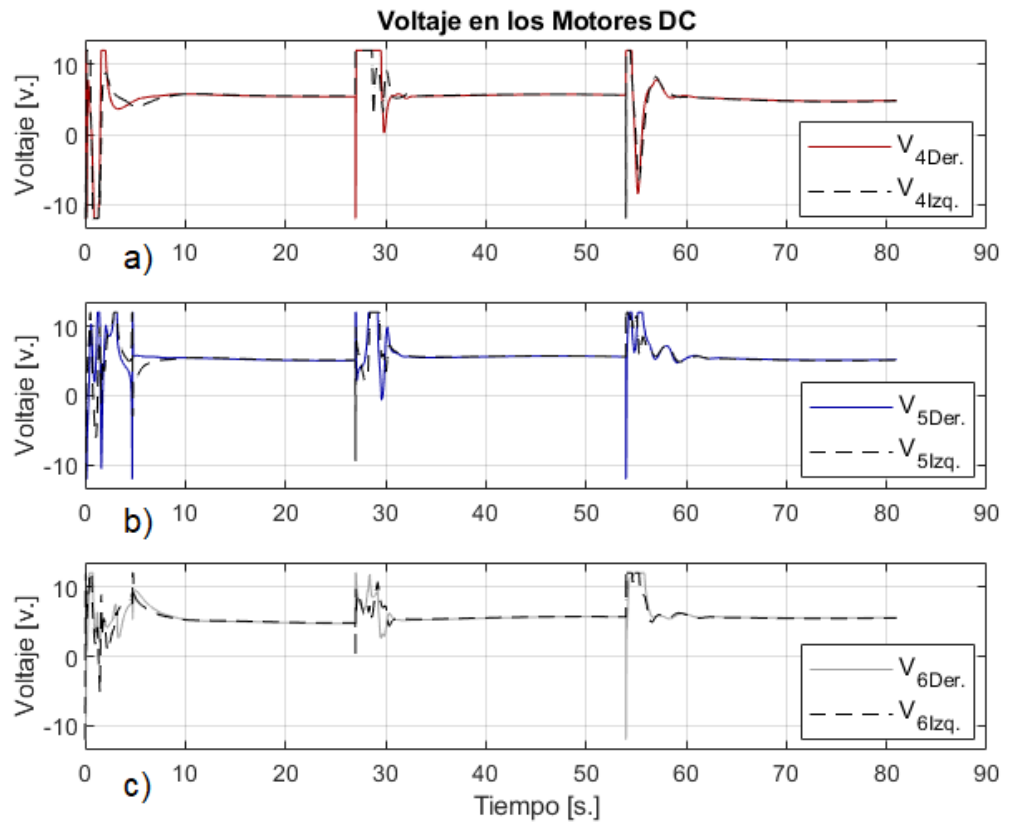


Figura 4.35 – Voltaje en los motores de los robots 4 (a), robot seguidor 5 (b), y robot seguidor 6 (c).



## CONCLUSIONES

1. Se diseñó un sistema de control de formación para 2 o más robots móviles subactuados, teniendo en cuenta las estrategias de control no lineal  $'l - \alpha'$  y  $'l - l'$ , y con las cuales se analizó la controlabilidad y estabilidad del sistema. La ubicación del punto de control  $P$  en el robot móvil determina la controlabilidad, mientras que el criterio establecido por Lyapunov, permitió garantizar la estabilidad.
2. Por medio de mediciones físicas y el software de computadora SolidWorks, se obtuvieron los parámetros del motor DC EMG30, con los cuales, posteriormente se logró establecer el modelo matemático de un robot móvil subactuado, representando así su comportamiento en un sistema de referencia inercial. En este modelo, las matrices de Inercia y de Coriolis son diagonales, como resultado de la simetría considerada para el robot.
3. Se diseñó un sistema de control de velocidad para los motores DC, usando el método de ubicación de polos y considerando el sistema en lazo cerrado como un sistema de 2do orden. Para este fin, también se determinó el tiempo de muestreo a ser considerado en el análisis del control de formación.
4. Con la finalidad de que el robot líder en la formación siga una determinada trayectoria, se diseñaron 2 tipos de control. El primero se basó en el modelo cinemático del robot, mientras que el segundo se basó en el criterio de estabilidad de Lyapunov. Ambos diseños fueron validados mediante las simulaciones realizadas para diferentes escenarios: siguiendo una trayectoria recta, parabólica, circular, senoidal y a lo largo de una lemniscata.
5. El sistema de control de formación desarrollado en la presente tesis es de tipo descentralizado. Esto quiere decir que cada robot en la formación tiene su propio controlador, lo que resulta en una mayor autonomía, robustez y flexibilidad en la información.

Por otro lado, un controlador de formación de tipo centralizado es aquel donde 1 sólo controlador procesa toda la información requerida con el fin de cumplir los objetivos de control.

6. Las funciones potenciales consideradas en el diseño del sistema de control de formación para la evasión de obstáculos resultaron adecuadas, como se evidencia

con los resultados de las simulaciones expuestas en la sección 4.3 del capítulo 4 del presente trabajo de investigación.

7. Se diseñó un estimador de estados para las variables de distancia  $\hat{l}_{12}$  y ángulo  $\hat{\alpha}_{12}$  en el control de formación entre un robot líder y un robot seguidor, mediante el método de inmersión e invarianza. Esto fue desarrollado con la finalidad de resolver dicho problema de control de formación cuando no se presenten las condiciones en las que se pueda contar con una medición directa de la velocidad del robot líder.
8. Se validó el diseño de los controladores propuestos mediante el resultado de las simulaciones presentadas en el capítulo 4, verificando, a su vez, el buen desempeño de los mismos.

## TRABAJO FUTURO

1. Los resultados de simulación permitieron identificar que cuando el robot líder sigue una trayectoria lineal por tramos, los parámetros del controlador pueden ir actualizándose mediante el diseño de un controlador adaptivo, algoritmo que puede plantearse como acción futura a desarrollar.
2. Con el fin de validar los controladores diseñados mediante la correspondiente implementación, se propone contar con el siguiente hardware para cada robot móvil:
  - Un (1) microcontrolador, en el cual se establezcan las sentencias necesarias para el control del robot. Esto dependerá si es el robot líder de la formación, el cual seguirá una determinada trayectoria; o si se trata de un robot seguidor.
  - Sensores, los cuales permitan determinar la distancia y el ángulo respecto del cual se encuentra ubicado un segundo robot móvil, o un obstáculo.
  - Dos (2) Motores DC con encoder, para tomar lectura de las velocidades con las que giran los ejes de los motores. (Para el presente proyecto de Tesis, se propuso trabajar con motores EMG30 cuya reducción es 30:1; y además una tarjeta MD25, la que actúa como driver para los motores mencionados)
  - Un (1) módulo Xbee, que ofrece un medio inalámbrico de comunicación, de manera que las posiciones y velocidades de los robots integrantes de la formación sean transmitidas y recibidas entre ellos.
  - Una (1) tarjeta Raspberry Pi, con el fin de que el robot líder posea autonomía, y se permita un procesamiento de datos más elaborado para ello.
  - Una cámara, con la cual se pueda obtener las posiciones de cada robot móvil dentro de una formación.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Carnegie Mellon University. Hyperion Robot. Disponible en la página web: <https://www.nasa.gov/centers/ames/news/releases/2003/03images/hyper/hyper.html>
- [2] Carnegie Mellon University. Neptune mobile robot. Disponible en la página web: <http://www.cs.cmu.edu/~gwp/robots/Neptune.html>
- [3] Chen, X. Chen. Y, Chase, J.G. Mobiles Robots – Past Present and Future. Department of Engineering. University of Canterbury, New Zealand – CSOIS. Utah State University, USA.
- [4] De Lucca, Alessandro. Robotics 1. Wheeled Mobile Robots. Introduction and Kinematic Modeling. Università di Roma. Disponible en página web: [https://www.dis.uniroma1.it/~deluca/rob1\\_en/16\\_MobileRobotsKinematics.pdf](https://www.dis.uniroma1.it/~deluca/rob1_en/16_MobileRobotsKinematics.pdf)
- [5] Denning Branch International. Research robots. Disponible en la página web: <http://www.southcom.com.au/~robot/products.html>
- [6] Desai, J.p., J.p. Ostrowski, and V. Kumar. “Modeling and Control of Formations of Nonholonomic Mobile Robots.” *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 17, no. 6 (2001): 905–8.
- [7] Dierks, Travis Alan. “Nonlinear control of nonholonomic mobile robot formations”. Master Thesis. University of Missouri-Rolla. 2007.
- [8] Dudek, Gregory, Michael R. M. Jenkin, Evangelos Milios, and David Wilkes. “A Taxonomy for Multi-Agent Robotics.” *Autonomous Robots* 3, no. 4 (1996).
- [9] Durand Cárdenas, José Alfredo. “Diseño y Simulación de un Sistema de Control de Formación de vehículos autónomos marítimos de baja velocidad”. Tesis de maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú. 2016.
- [10] Fahimi, F. Autonomous Robots. Modeling, Path Planning and Control. Chapter 6: Mobile Robots. 2009.

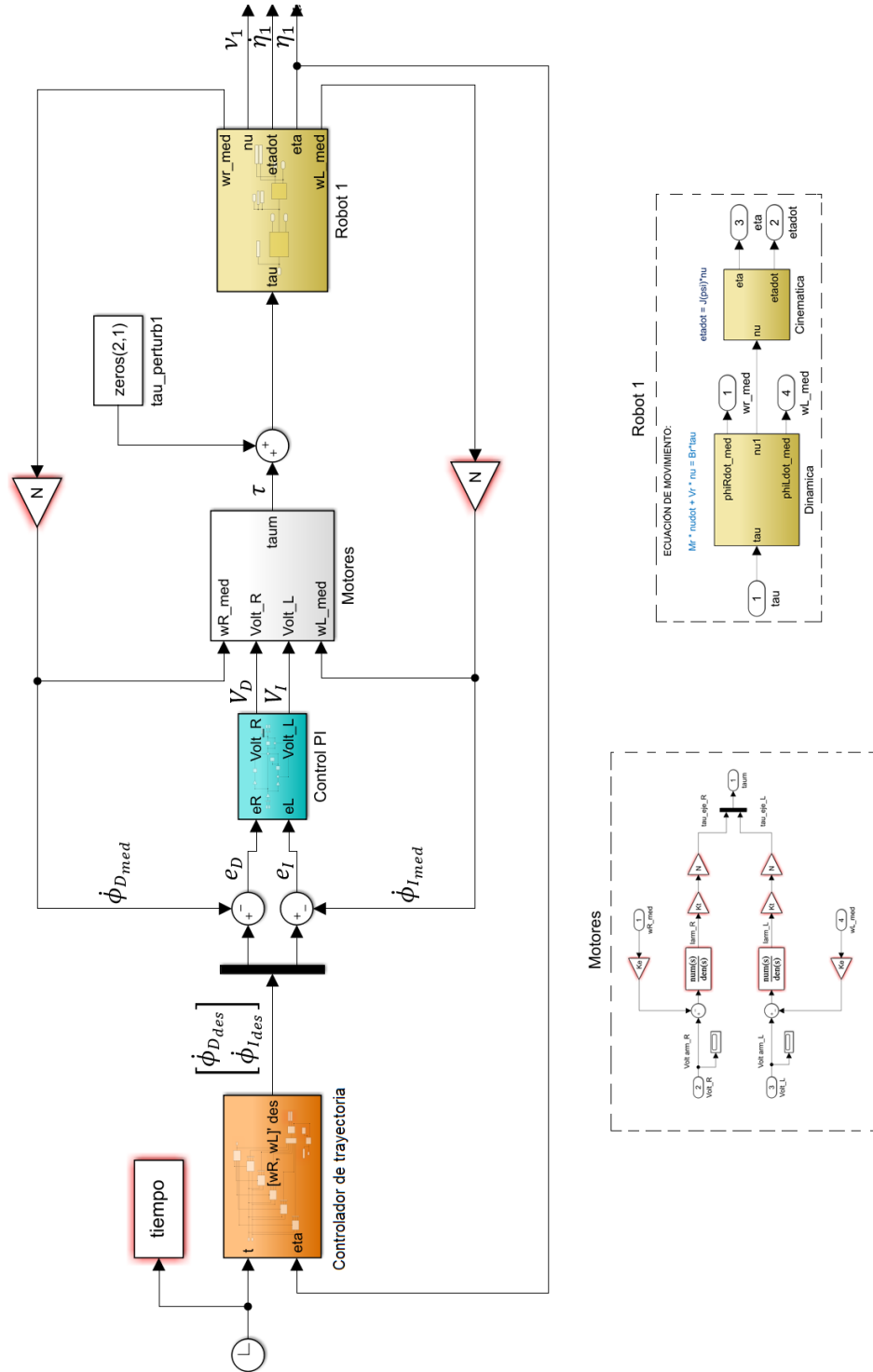
- [11] Fierro, R., and F.I. Lewis. "Control of a Nonholonomic Mobile Robot: Backstepping Kinematics into Dynamics." *Proceedings of 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control*, n.d.
- [12] Gonçalves, José, José Lima, Paulo J. Costa, and A. Paulo Moreira. "Modeling and Simulation of the EMG30 Geared Motor with Encoder Resorting to SimTwo: The Official Robot@Factory Simulator." *Advances in Sustainable and Competitive Manufacturing Systems Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 2013, 307–14.
- [13] Gordillo, F. (2009). Estabilidad de Sistemas No Lineales Basada en la Teoría de Liapunov. *Revista Iberoamericana De Automática E Informática Industrial RIAI*, 6(2), 5-16.
- [14] Hatab, Rached Dhaouadi Ahmad Abu. "Dynamic Modelling of Differential-Drive Mobile Robots Using Lagrange and Newton-Euler Methodologies: A Unified Framework." *Advances in Robotics & Automation* 02, no. 02 (2013).
- [15] Holonomic and Nonholonomic constraints. MEAM 535. Univ. of Pennsylvania.
- [16] Kanayama, Y., Y. Kimura, F. Miyazaki, and T. Noguchi. "A Stable Tracking Control Method for an Autonomous Mobile Robot." *Proceedings., IEEE International Conference on Robotics and Automation*, n.d.
- [17] Kanjanawwanishkul, Kiattisin. Formation Control of Mobile Robots: Survey. Faculty of Engineering, Mahasarakham University. Kantharawichai, Mahasarakham 44150. Thailand.
- [18] Karagiannis, Dimitrios, and Alessandro Astolfi. "Observer Design for a Class of Nonlinear Systems Using Dynamic Scaling with Application to Adaptive Control." *2008 47th IEEE Conference on Decision and Control*, 2008.
- [19] Khamis, Alaa. Lecture notes on Autonomous vehicles Design and Control. "Locomotion Systems and Kinematics". Zewail City of Science and Technology. Egipto.
- [20] Klančar, Gregor, Zdešar, Andrej. Blažič, Sašo. Škrjanc, Igor. Wheeled Mobile Robotics. From Fundamentals towards autonomous systems. 2017. Chapter 1.
- [21] Levant, A. "Robust Exact Differentiation via Sliding Mode Technique." *Automatica* 34, no. 3 (1998): 379–84.
- [22] Levant, A. "Universal Single-Input-Single-Output (SISO) Sliding-Mode Controllers with Finite-Time Convergence." *IEEE Transactions on Automatic Control* 46, no. 9 (2001): 1447–51.

- [23] MIT Leg Laboratory. 3D One-Leg Hopper (1983-1984). Disponible en la página web: <http://www.ai.mit.edu/projects/leglab/robots/robots.html>
- [24] Morbidi, Fabio, Gian Luca Mariottini, and Domenico Prattichizzo. "Observer Design via Immersion and Invariance for Vision-Based Leader-Follower Formation Control." *Automatica* 46, no. 1 (2010): 148–54.
- [25] Piguet, Yves. Mondada, Francesco. Siegwart, Roland. "Hands-on Mechatronics": Problem-Based Learning for Mechatronics. Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne.
- [26] Schill, Felix. "Distributed Temporal event mapping and fusion". Diploma Thesis. Australian National University. 2002. (p. 54)
- [27] Shen, Dongbin, Zhendong Sun, and Weijie Sun. "Leader-Follower Formation Control without Leader's Velocity Information." *Science China Information Sciences* 57, no. 9 (2014): 1–12.
- [28] Siegwart, Roland. Nourbakhsh, Illah. Introduction to Autonomous Mobile Robots. 2004.
- [29] Siegwart, Roland. Saucy, Patrick. Interacting Mobile robots on the Web. Swiss Federal Institute of Technology. Lausanne.
- [30] Smith, Carl & A. Corripio, Armando B. Principles and Practice of Automatic Process Control. Second Edition. 1997.
- [31] Tedeschi, Franco, and Giuseppe Carbone. "Design Issues for Hexapod Walking Robots." *Robotics* 3, no. 2 (2014): 181-206.
- [32] Tedrake, Russ. Underactuated Robotics: Learning, Planning, and Control for Efficient and Agile Machines. Course Notes for MIT 6.832. Massachusetts Institute of Technology.
- [33] Visioli, Antonio. Practical PID Control. 2006.
- [34] Yang, Xiong, Haotian She, Haojian Lu, Toshio Fukuda, and Yajing Shen. "State of the Art: Bipedal Robots for Lower Limb Rehabilitation." *Applied Sciences* 7, no. 11 (2017): 1182.
- [35] Zhou, Xiadong, and Shusheng Bi. "A Survey of Bio-inspired Compliant Legged Robot Designs." *Bioinspiration & Biomimetics* 7, no. 4 (2012): 041001.

## **APÉNDICE**

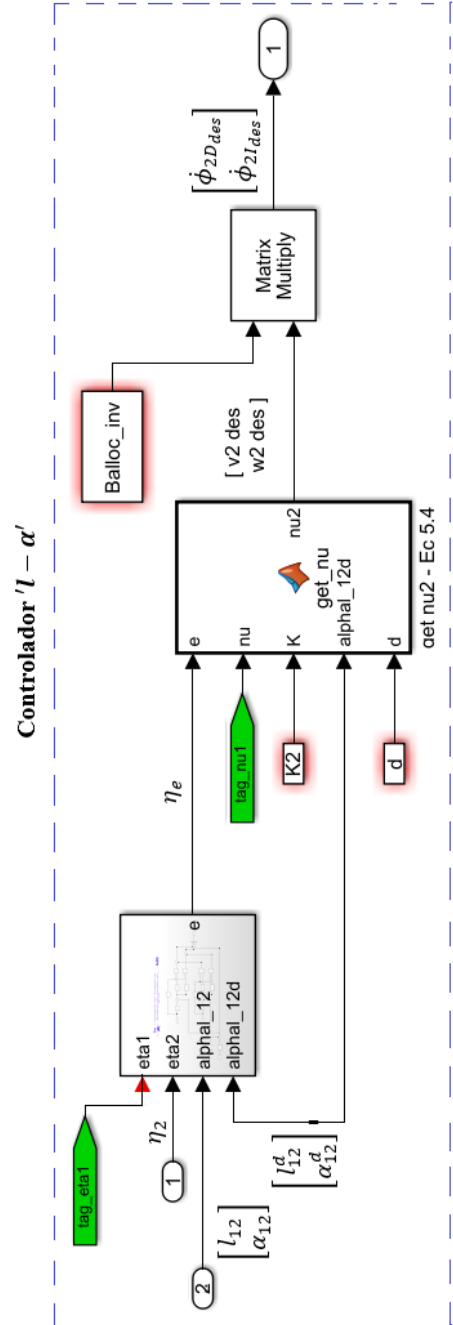
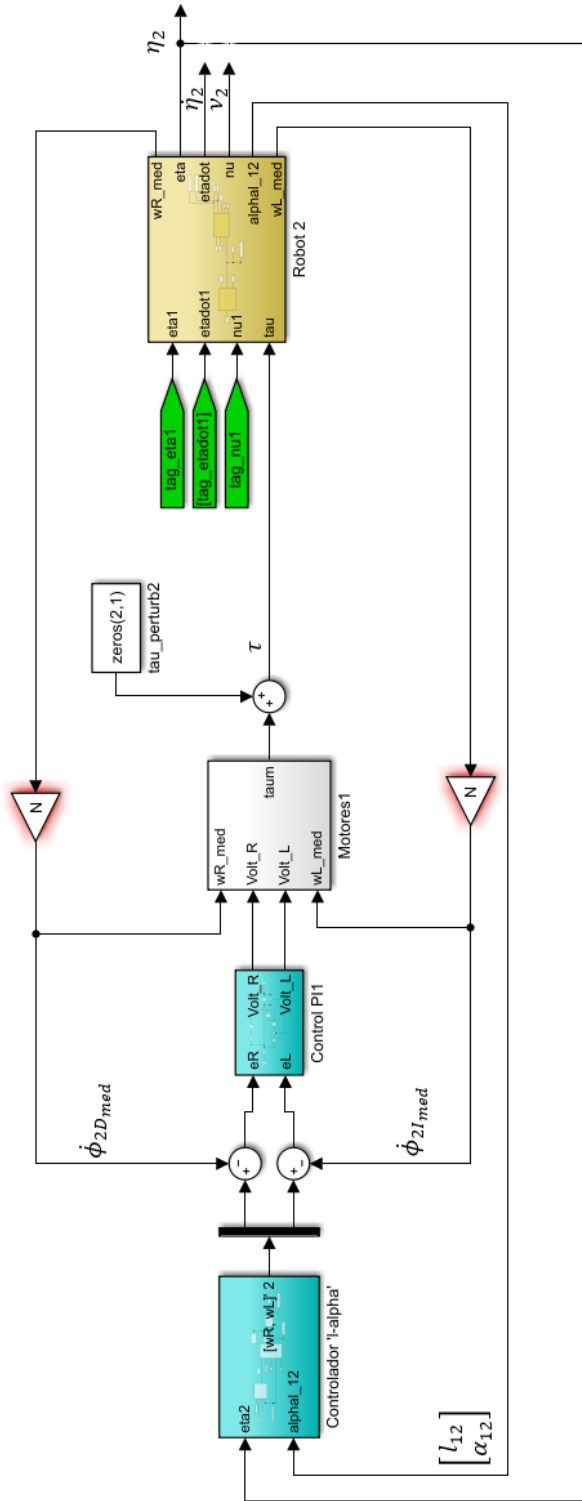
## Apéndice A. DIAGRAMAS DE BLOQUES PARA EL CONTROL DE FORMACIÓN

### A.1. Seguimiento de Trayectoria del robot líder en la formación

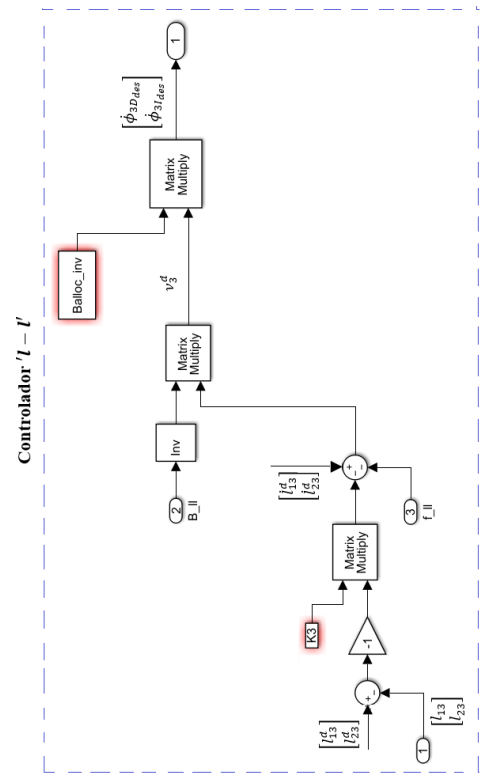
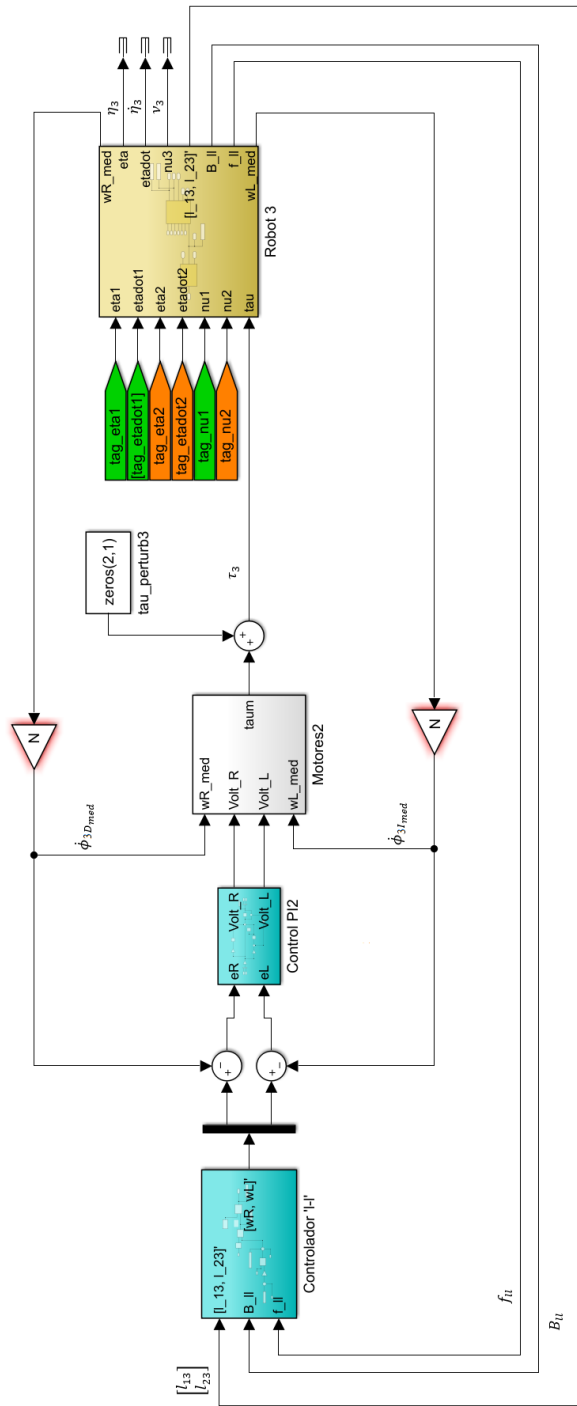




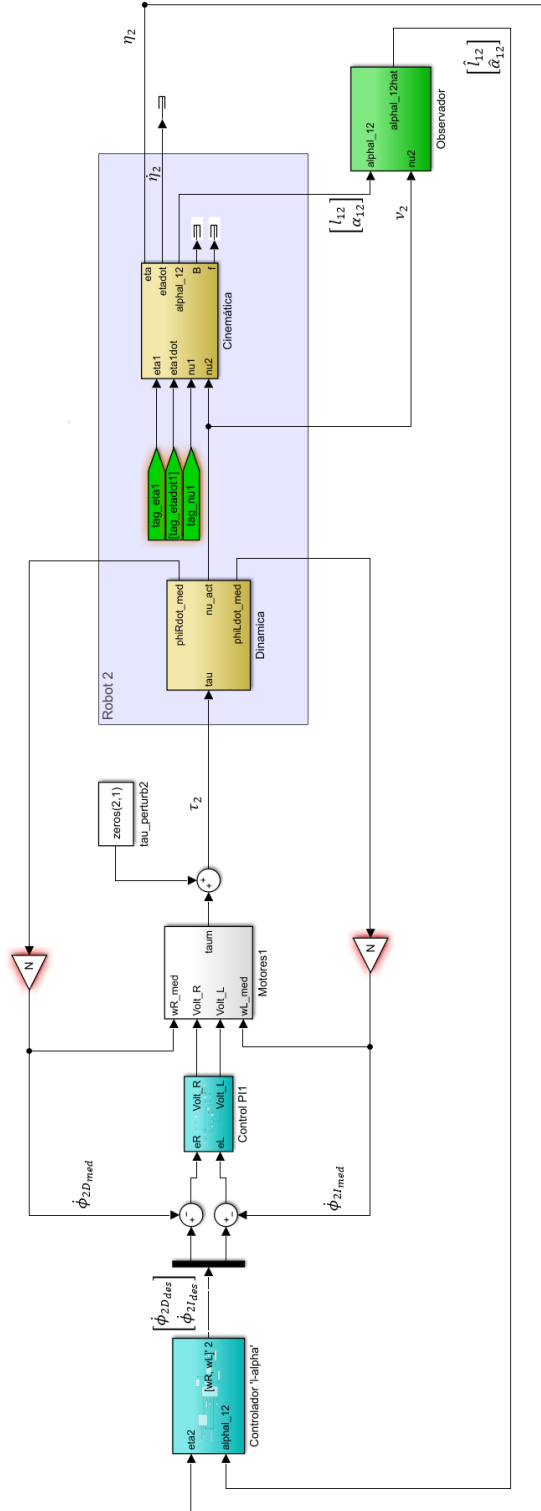
A.2. Estrategia de control  $'l - \alpha'$  para 2 (dos) robots en formación



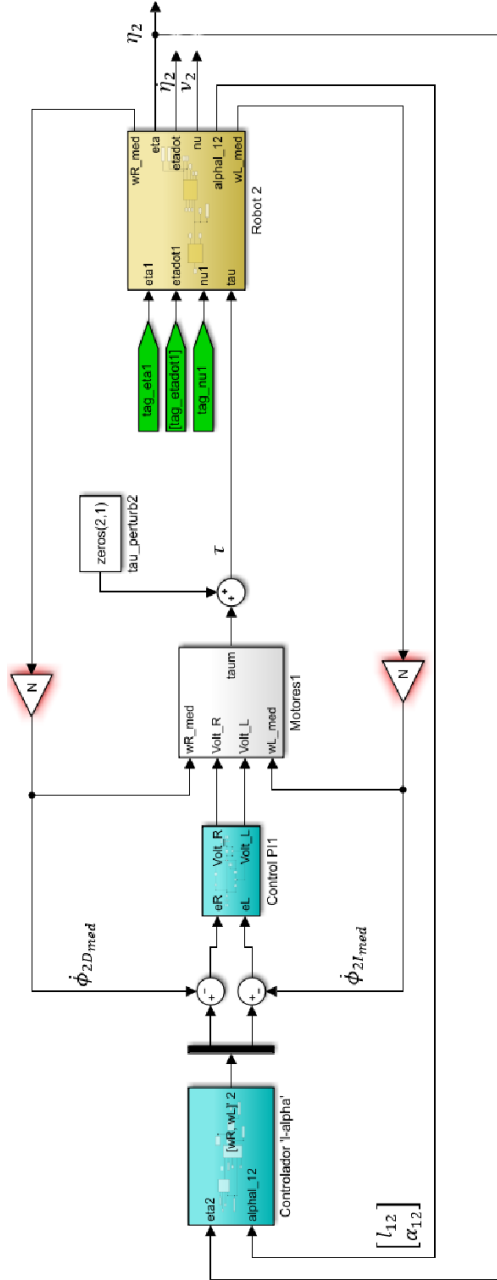
### A.3. Estrategia de control 'l - l' para 3 (tres) robots en formación



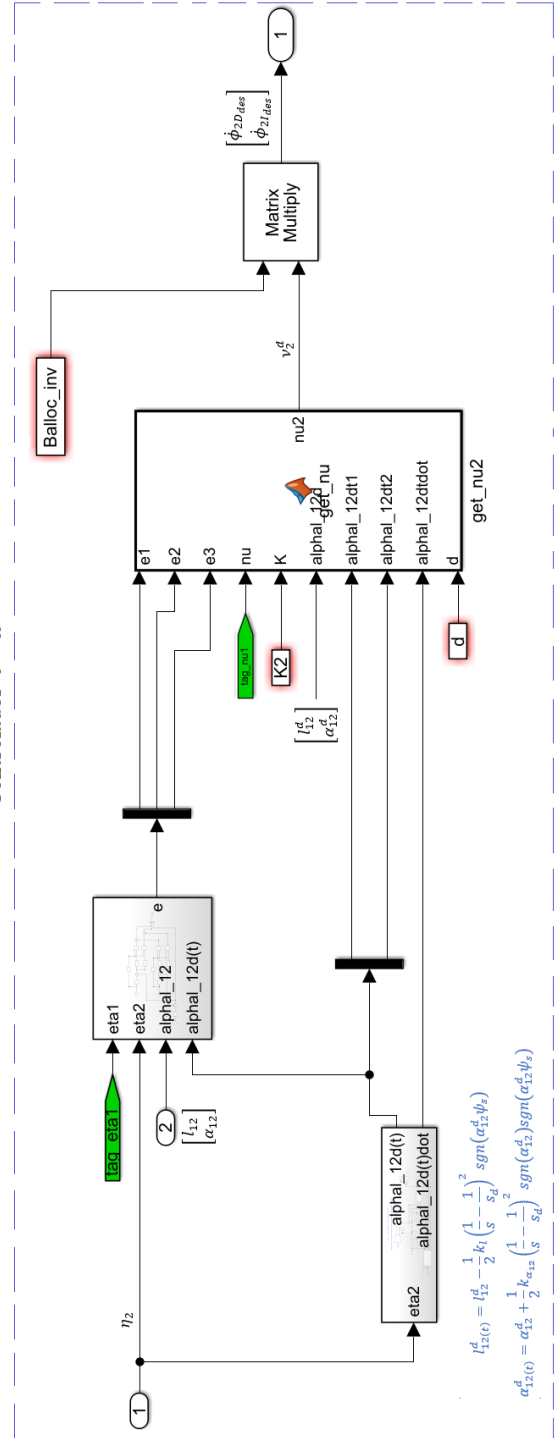
A.4. Sistema observado



### A.5. Entorno con obstáculos



Controlador 'l - alpha'



## Apéndice B. OBTENCIÓN DE PARÁMETROS DEL CONTROLADOR NO LINEAL

### B.1. En el seguimiento de trayectoria

Esta sección se basa en el procedimiento descrito en Kanayama *et al.*, 1990, en el cual, con la finalidad de simplificar el análisis, se considera el caso en el que la ubicación de referencia  $\eta_r$  del robot móvil es aquella que se desplaza a lo largo del eje X en dirección positiva, y a una velocidad constante  $V_r$ , esto es:

$$\eta_r = \begin{bmatrix} x_r(t) \\ y_r(t) \\ \psi_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_r t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_r = \begin{bmatrix} v_r(t) \\ w_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B. 1})$$

Donde además se asume que:

$$|\psi_e| \ll 1^\circ, \quad |\dot{\psi}_e| \ll \frac{1^\circ}{s}.$$

Bajo estas condiciones, teniendo en cuenta la ley de control 3.43, y luego de linealizar la ecuación 3.38 alrededor del punto  $\eta_e = [0 \ 0 \ 0]^T$ , se obtiene la expresión para la velocidad actual del robot móvil, conforme a [16]:

$$\dot{\eta}_c = \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\psi}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_r \\ 0 & -V_r k_y & -V_r k_\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c - V_r t \\ y_c \\ \psi_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B. 2})$$

Se puede notar que la variable de  $x_c$  es independiente de  $y_c$  y  $\psi_c$ , y tiene el siguiente comportamiento:

$$x_{c(t)} = V_r t + x_0 e^{-k_x t}, \quad x_0 = x_{(t=0)} \quad (\text{B. 3})$$

El desplazamiento vertical, por otro lado, está determinado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{y}_{c(t)} + 2\zeta w_n \dot{y}_{c(t)} + w_n^2 y_{c(t)} = 0 \quad (\text{B. 4})$$

Donde:

$$\zeta = \frac{k_\psi}{2\sqrt{k_y}}, \quad w_n = V_r \sqrt{k_y}$$

Y cuya solución, para el caso sub amortiguado, es:

$$y_{c(t)} = e^{at} (c_1 \sin(bt) + c_2 \cos(bt)) \quad (\text{B. 5})$$

Donde:

$$a = -\zeta w_n, \quad b = w_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Mientras que, para obtener la orientación del robot móvil en el tiempo, se despeja  $\psi_{c(t)}$  y se utiliza la expresión para  $\dot{y}_{c(t)}$ , con lo que:

$$\psi_{c(t)} = \frac{\dot{y}_{c(t)}}{V_r} = e^{at} \left( \frac{(ac_1 - bc_2)}{V_r} \sin(bt) + \frac{(ac_2 + bc_1)}{V_r} \cos(bt) \right) \quad (\text{B. 6})$$

Donde:

$$c_2 = y_{(t=0)} = y_0, \quad c_1 = \frac{\dot{y}_{(t=0)} - ay_0}{b}$$

Finalmente, el comportamiento de la posición y orientación del robot móvil, que se encuentra siguiendo una trayectoria determinada, está determinado por las ecuaciones B.3, B.5 y B.6.

## B.2. En la estrategia de control ' $l - \alpha'$ para 1 robot líder y 1 robot seguidor

En esta sección, y también con la finalidad de simplificar el análisis, se considera el movimiento del robot líder a lo largo del eje X en la dirección positiva, a una velocidad constante  $v_1 = V, w_1 = 0$ .

Reemplazando la expresión para la Ley de Control 3.67 en la expresión para la dinámica del error 3.66, se tiene:

$$\dot{\eta}_e = \begin{bmatrix} (v_1 + k_v)k_y y_e^2 + (v_1 + k_v)k_\psi \sin(\psi_e) y_e + y_e f_w - k_x x_e \\ (d + x_e)(-w_1 - (V + k_v)(k_y y_e + k_\psi \sin(\psi_e)) - f_w) + V \sin(\psi_e) \\ -(v_1 + k_v)(k_y y_e + k_\psi \sin(\psi_e)) - f_w \end{bmatrix} \quad (\text{B. 7})$$

Linealizando alrededor del punto  $\eta_e = [0 \ 0 \ 0]^T$ , con  $y_e$  aproximándose a 0 por la derecha, se obtiene el siguiente resultado:

$$\dot{\eta}_e = \underbrace{\begin{bmatrix} -k_x & 0 & 0 \\ 0 & dk_y(dk_\psi(k_v + 1) - V) & V(1 - dk_\psi) - dk_\psi k_v \\ 0 & k_y(dk_\psi(k_v + 1) - V) & -Vk_\psi - k_\psi k_v \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \psi_e \end{bmatrix} \quad (\text{B. 8})$$

Al reemplazar el valor de  $\dot{\eta}_e$  por la diferencia de velocidades entre  $\dot{\eta}_2$  y  $\dot{\eta}_1$ , resulta la siguiente ecuación:

$$\dot{\eta}_2 = \mathbb{A}(\eta_2 - \eta_1) + \dot{\eta}_1 \quad (\text{B. 9})$$

De esta forma:

$$\dot{\eta}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_x & 0 & 0 \\ 0 & m & n \\ 0 & p & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 - \underbrace{Vt}_{x_1} \\ y_2 - 0 \\ \psi_2 - 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B. 10})$$

Los valores de los coeficientes  $m, n, p$  y  $q$  son:

$$m = dk_y(dk_\psi(k_v + 1) - V), \quad n = V(1 - dk_\psi) - dk_\psi k_v$$

$$p = k_y(dk_\psi(k_v + 1) - V), \quad q = -Vk_\psi - k_\psi k_v$$

De la ecuación (B10), se observa que el movimiento en el eje horizontal X es independiente de su orientación y de su movimiento en el eje vertical Y. Este comportamiento se obtiene resolviendo la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{x}_{2(t)} = -k_x(x_2 - Vt) + V \quad (\text{B. 11})$$

Al igual que el procedimiento seguido en la sección anterior, y usando el factor integral  $u(t) = e^{\int k_x dt} = e^{k_x t}$ , se obtiene:

$$x_{2(t)} = Vt + x_{20}e^{-k_x t} \quad (\text{B. 12})$$

Mientras que las expresiones para  $y_{2(t)}$  y  $\psi_{2(t)}$ , se resuelven como un sistema de ecuaciones diferenciales. Así, con la finalidad de obtener una solución para  $y_{2(t)}$ , se deriva la expresión para  $\dot{y}_{2(t)}$ , con lo que resulta:

$$\dot{y}_{2(t)} = m\dot{y}_{2(t)} + n\dot{\psi}_{2(t)} = m(my_{2(t)} + n\psi_{2(t)}) + n(py_{2(t)} + q)$$

$$\dot{y}_{2(t)} = m\dot{y}_{2(t)} + n\dot{\psi}_{2(t)} = (m^2 + np)y_{2(t)} + (mn + nq)\psi_{2(t)}$$

Reordenando términos, se obtiene la siguiente ecuación diferencial de 2do orden:

$$\ddot{y}_{2(t)} - \underbrace{(m + q)}_{2\zeta w_n} \dot{y}_{2(t)} + \underbrace{(mq - np)}_{w_n^2} y_{2(t)} = 0 \quad (\text{B. 13})$$

Donde:

$$\zeta = \frac{|m + q|}{2\sqrt{(mq - np)}}, \quad w_n^2 = (mq - np)$$

Al escoger el caso sub amortiguado, la solución de esta ecuación tiene la siguiente forma:

$$y_{2(t)} = e^{at}(c_1 \sin(bt) + c_2 \cos(bt)) \quad (\text{B. 14})$$

Donde:

$$a = -\zeta w_n, \quad b = w_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Así también, luego de sustituir en  $\psi_{2(t)}$  tanto  $y_{2(t)}$  como  $\dot{y}_{2(t)}$ , se tiene:

$$\psi_{2(t)} = \frac{1}{n}\dot{y}_{2(t)} = \frac{1}{n}(\dot{y}_{2(t)} - my_{2(t)})$$

$$\psi_{2(t)} = e^{at} \left[ \frac{(c_1(a - m) - c_2 b)}{n} \sin(bt) + \frac{(c_2(a - m) + bc_1)}{n} \cos(bt) \right] \quad (\text{B. 15})$$

Donde:

$$y_{2(t=0)} = y_{20} = c_2$$

$$\psi_{2(t=0)} = 0 = \frac{c_2(a - m) + bc_1}{n} \Rightarrow c_1 = \frac{y_{20}(m - a)}{b}$$

Finalmente, el comportamiento de la posición y orientación del robot seguidor 2, que se encuentra siguiendo al robot móvil 1, está determinado por las ecuaciones B.12, B.14 y B.15.



## Apéndice C

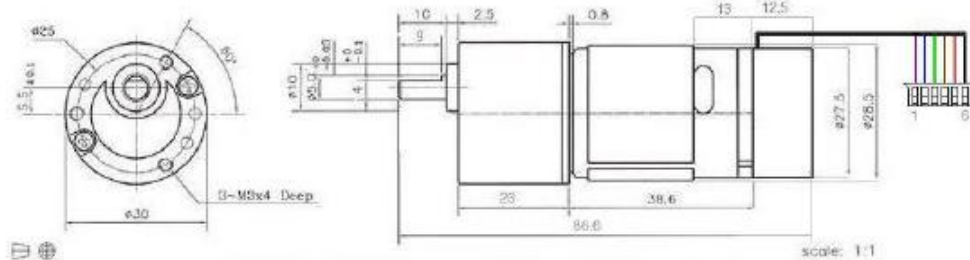
### HOJA DE DATOS DE LOS MOTORES EMG30

#### EMG30, mounting bracket and wheel specification



The EMG30 (encoder, motor, gearbox 30:1) is a 12v motor fully equipped with encoders and a 30:1 reduction gearbox. It is ideal for small or medium robotic applications, providing cost effective drive and feedback for the user. It also includes a standard noise suppression capacitor across the motor windings.

#### Measurements



#### Connector

The EMG30 is supplied with a 6 way JST connector (part no PHR-6) at the end of approx 90mm of cable as standard.

The connections are:

Wire colour	Connection
Purple (1)	Hall Sensor B Vout
Blue (2)	Hall sensor A Vout
Green (3)	Hall sensor ground
Brown (4)	Hall sensor Vcc
Red (5)	+ Motor
Black (6)	- Motor

Wire colours are from the actual cable.

The hall sensors accept voltages between 3.5v and 20v.

The outputs are open collector and require pull-ups to whatever signal level is required.

On the MD25 they are powered from 12v and pulled up to 5v for the signals.

## specification

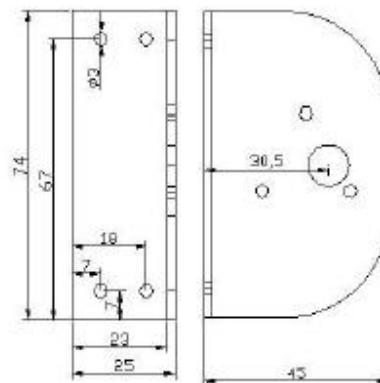
Rated voltage	12v
Rated torque	1.5kg/cm
Rated speed	170rpm
Rated current	530mA
No load speed	216
No load current	150mA
Stall current	2.5A
Rated output	4.22W
Encoder counts per output shaft turn	360

Measured Shaft Speed when used off-load with MD23 and 12v supply.

Minimum Speed	1.5rpm
Maximum Speed	200rpm

## EMG30 Mounting Bracket

Providing easy mounting of the EMG30 to the robot, the bracket is made from a 2mm thick strong aluminum and finished in blue enamel.



## Wheel 100

A 100mm diameter wheel with 5mm diameter hub for easy attachment to the EMG30, the wheel has a 26mm wide rubber tread

