

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
SECCION DE POSGRADO**



**ESTUDIO DE UNA BANCADA DE PLANCHA SOLDADA
PARA UN TORNO HORIZONTAL DE DESBASTE (THD),
MEDIANTE EL METODO DE LOS ELEMENTOS
FINITOS (FEM).**

Tesis para optar el grado de :

MAGISTER EN CIENCIAS
MENCION : INGENIERIA MECANICA
ESPECIALIDAD : DISEÑO DE MAQUINAS.

Presentada por

LUIS ORLANDO COTAQUISPE ZEVALLOS

LIMA - PERU

1998

ESTUDIO DE UNA BANCADA DE PLANCHA SOLDADA PARA UN TORNO HORIZONTAL DE DESBASTE (THD), MEDIANTE EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (FEM).

INDICE DETALLADO

Introducción	1
Análisis de los antecedentes	4
El método de los elementos finitos aplicados al Cálculo por Resistencia	7
Análisis modal para las formas constructivas de la bancada	29
Análisis estático de la bancada por FEM	43
Análisis dinámico de la bancada por FEM	57
Análisis de resultados y conclusiones	68
Bibliografía	86
Anexos	87

0. Introducción

El presente trabajo tiene por finalidad realizar el estudio de una bancada de plancha soldada para un torno horizontal de desbaste (THD), mediante el método de los elementos finitos (FEM); teniendo en cuenta los antecedentes e hipótesis trabajados en otro proyecto hace 10 años por Cotaquispe [1]; en donde:

- Se tenía un diseño estructural de plancha soldada, calculado según diversos autores, Blodgett [2], Koenigsberger -Tlusty [3], Tobias [4], Acherkan [5], los cuales analizaban los diferentes modelos de bancada sometidos a un estado de deformaciones.
- El THD tenía 12 velocidades de trabajo, mecaniza diámetros desde $\varnothing 80$ hasta $\varnothing 300$ en operación de desbaste.
- El análisis de esfuerzos y deformaciones se basaban en la hipótesis de carga puntual, apoyos puntuales, elementos de rigidez ideal, materiales ideales y sometidos a carga estática.
- Para el análisis dinámico se apoyó en pruebas sobre prototipos, realizadas por autores como O. Blodgett y Koenigsberger sobre la bancada para un tipo de nervadura paralela (//), la cual fue calculada y aprobada; para que finalmente esa geometría se cambiara de paralela (//) a diagonales de 90° (^^^), con lo cual la bancada tendría una rigidez adecuada bajo carga dinámica.

El presente trabajo realiza el diseño de la bancada con una mejor aproximación a la realidad porque utiliza en primer lugar un análisis modal y el FEM, logrando con ello un análisis más cercana a la realidad y sin tener que construir un prototipo para ensayos y posteriores modificaciones.

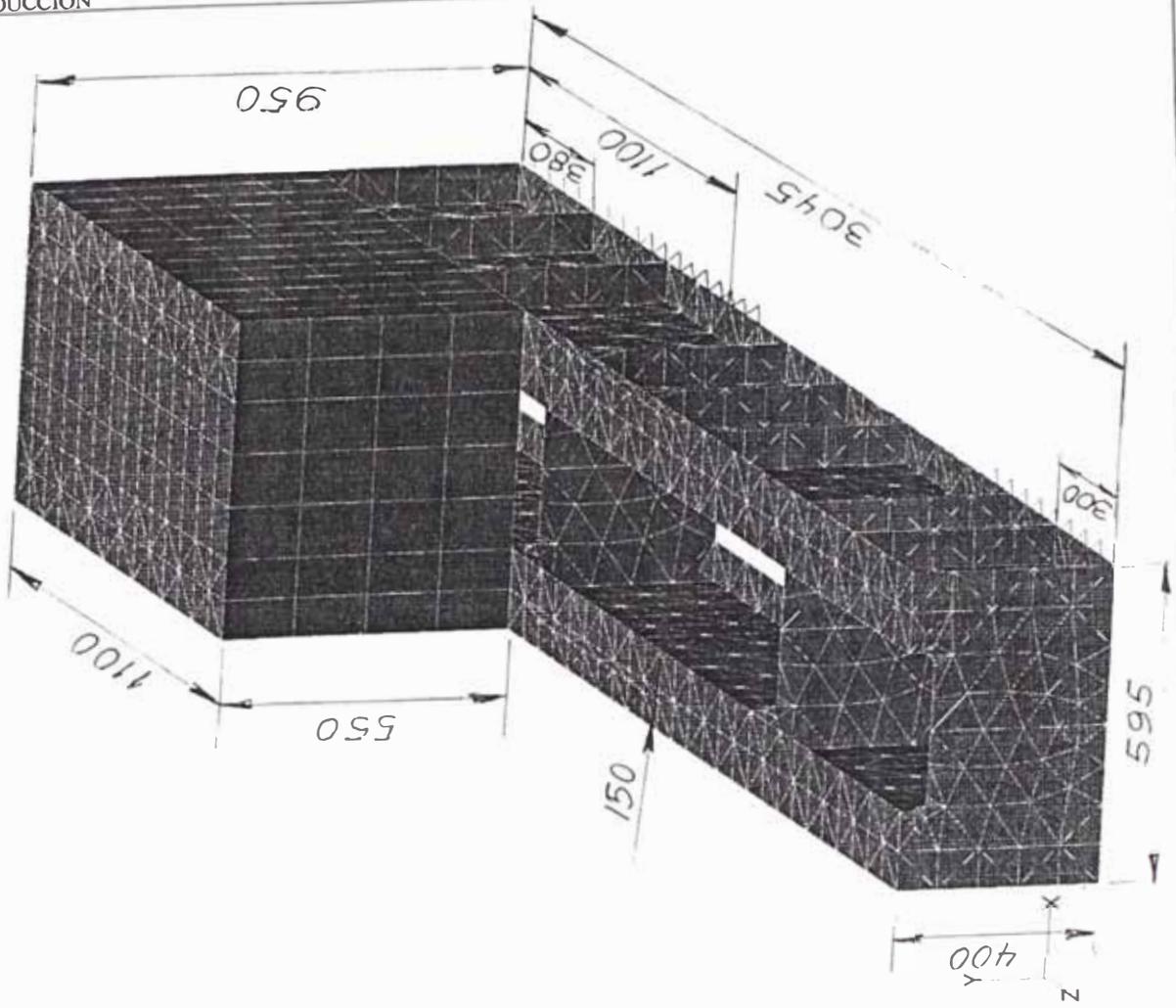
Sobre la forma de la bancada se presentan modelos básicos para ir entendiendo el comportamiento es por eso que se comienza con un cajón sin nervios y restringido en los apoyos de la base mayor y menor. Luego se le añade el cabezal fijo (bloque), quedando listo para recibir los nervios y cartelas externas.

Sobre la ubicación de los nervios se han planteado 2 tipos clásicos, paralelos (//) y diagonales (^^^) los cuales tiene una forma especial para conectarse a las alas de las guías (ver fig. 0.1 y 0.2)

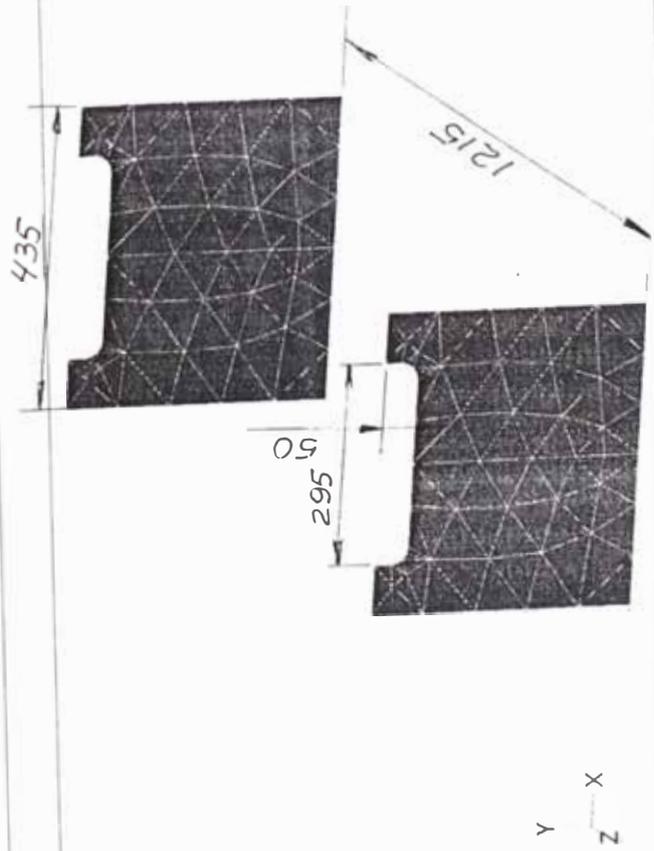
Conforme se ha visto, los comportamientos de los modelos 3 (ver pag. 2) y 4 (ver pag. 3) son los que interesan para nuestro análisis. Por las características de trabajo del torno horizontal de desbaste (THD) se tiene que los diámetros de los tochos y su largo hará que se use o no el cabezal móvil, además las características mecánicas de los materiales (dúctil, frágil) nos señalan que hay un rango de velocidades para mecanizado óptimo; lo cual haría que la frecuencia de trabajo pueda estar cerca de las frecuencias naturales de la estructura originando daños en el comportamiento de la máquina.

0.INTRODUCCIÓN

BANCADA ACARTELADA PERPENDICULARMENTE CON CABEZAL FIJO



MODELO 3



BANCADA CON CARTELAS DIAGONALES Y CABEZAL FIJO

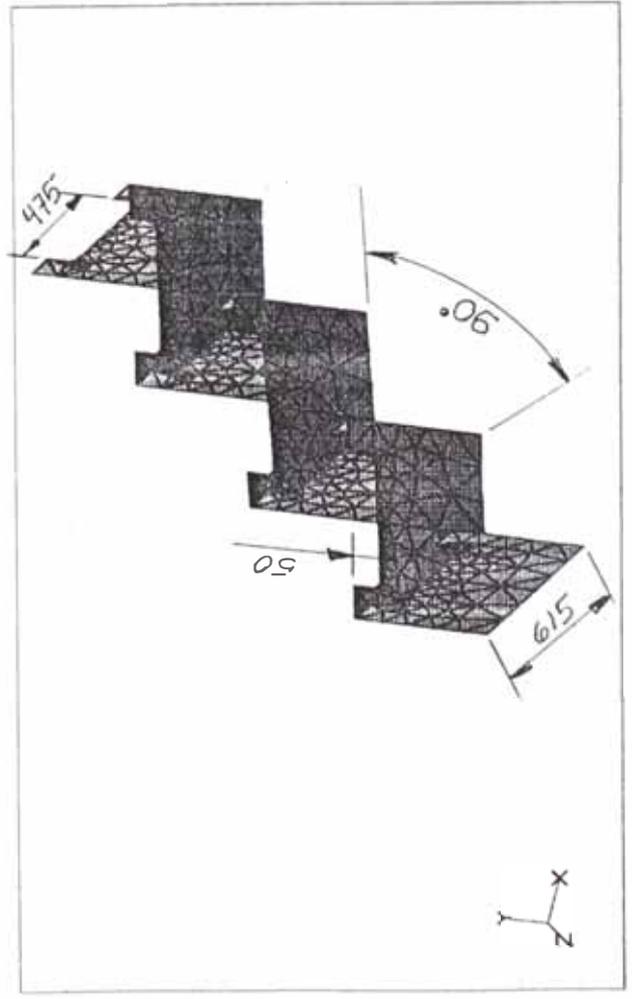
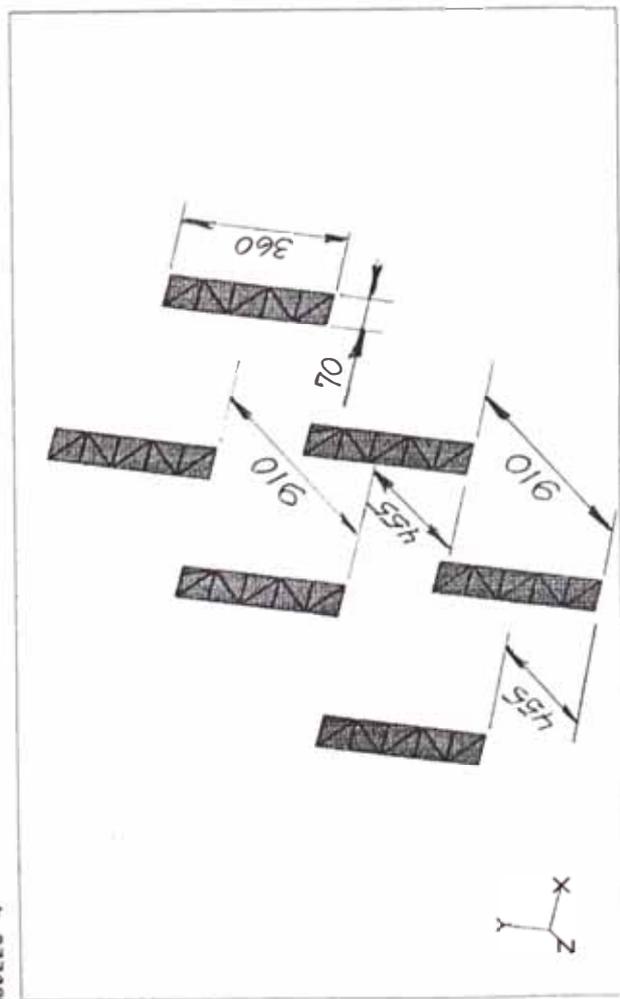
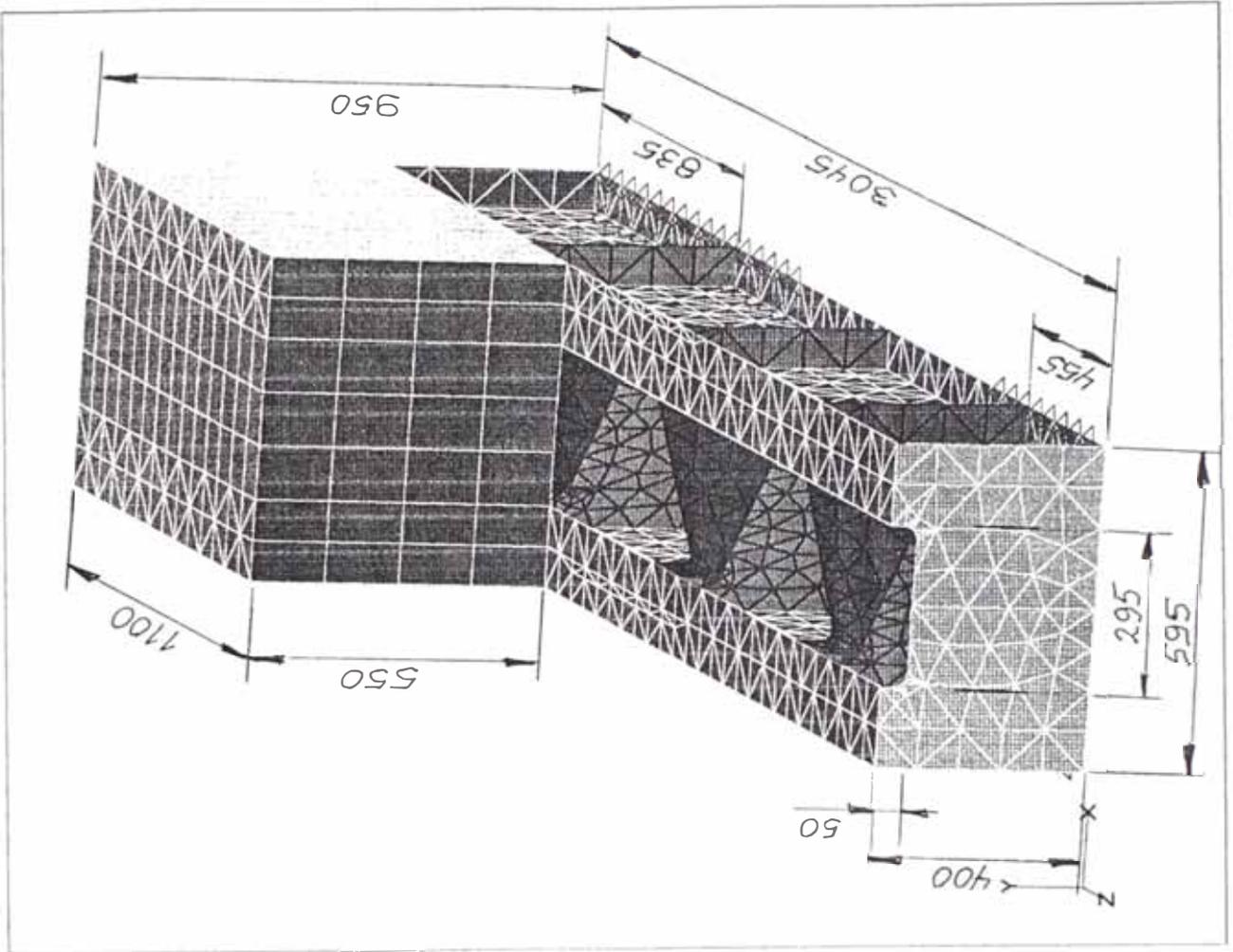


Fig. 0.2

1. Análisis de los antecedentes

Ante la necesidad de diseñar una Máquina - Herramienta especial (desbaste), la cual implica fabricación unitaria, se decidió por la solución en construcción soldada como la más adecuada por sus formas constructivas; además se hicieron una serie de análisis para las cargas de trabajo y su relación con dichas formas.

Es indudable que en el diseño prima la forma constructiva tipo celda (cajón) por su alta rigidez ante las solicitaciones estáticas y dinámicas en una Máquina - Herramienta ; pero por su trabajo especial la bancada resulta siendo la parte crítica del diseño, porque tiene que ser una construcción abierta para evacuar la viruta y el refrigerante; siendo entonces motivo de análisis, el lograr darle una forma constructiva adecuada tal que se garanticen las tolerancias de mecanizado del torno [1]

Los análisis que se hacen sobre el cálculo estructural para la forma constructiva típica de la bancada están planteadas por los autores O. Blodgett [2] y Koenigsberger - Tlustý [3] , los cuales basan sus cálculos en la rigidez bajo carga estática y plantean la deformación torsional experimental bajo carga dinámica sobre prototipos; los cuales han servido para obtener fórmulas y tablas prácticas de fácil aplicación.

Además se han considerado las cargas y apoyos puntuales en este modelo de cálculo para simplificar los diagramas de momentos; por lo tanto se tiene un análisis sencillo y conservador.

Finalmente en base a estos antecedentes se determinaron las siguientes características del torno horizontal de desbaste (THD), ver fig. 1.1.

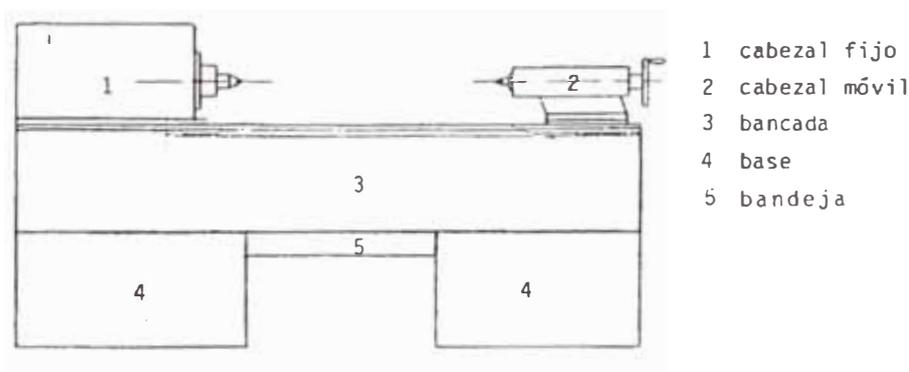


Figura 1.1

y los datos técnicos serían los siguientes:

- distancia entre puntas	1000 mm
- diámetro máximo de volteo sobre el carro transversal	300 mm
- diámetro mínimo de volteo sobre el carro transversal	80 mm
- número de velocidades de husillos	12
- número de avances	12
- profundidad máxima de corte	12 mm
- grado de precisión	± 0.238 mm
- herramientas de corte	plaquitas de carburo
- material más duro a mecanizar (tochos)	SAE 4340 (acero 34 Cr Ni Mo 6)

Por estos motivos la bancada es la parte que deseamos analizar, la cual presenta 3 zonas de análisis (ver fig. 1.2)

- I : zona del cabezal fijo
- II : zona de los carros auxiliares
- III: zona del cabezal móvil

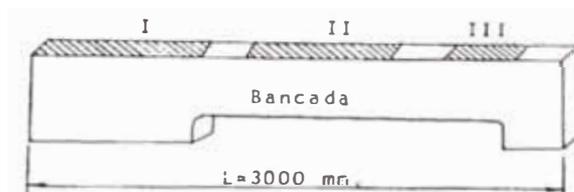


Figura 1.2

La zona de los carros auxiliares resulta ser crítica puesto que ahí se realiza el mecanizado, razón por la cual es ahí donde se plantea la construcción con nervios paralelos (ver fig. 1.3,a) o con nervios diagonales (ver fig. 1.3,b)

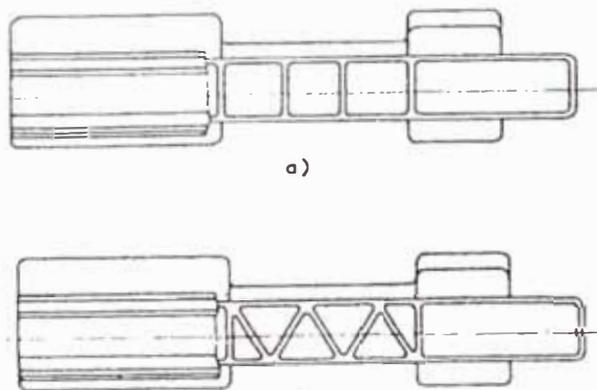


Figura 1.3

El mecanizado (torneado) se realiza entre los diámetros límites los cuales originan cargas sobre las guías. [guía izquierda (\wedge) y guía derecha (-)] (ver fig. 1.4). Ahí se muestra el mecanizado de un tocho y las fuerzas que se producen por el arranque del material, así mismo se presentan las reacciones sobre la guía izquierda (A, B) y sobre la guía derecha (C).

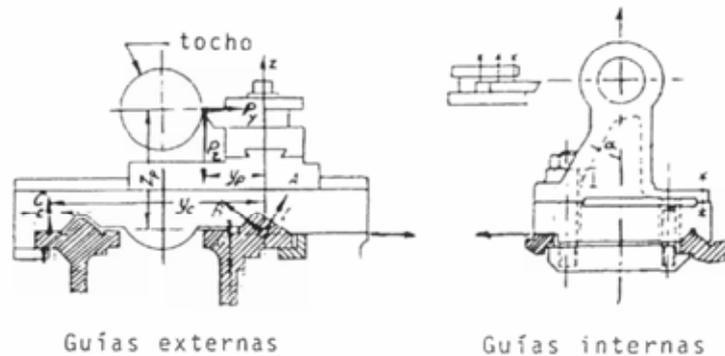


Figura 1.4

Estas cargas sobre las guías son absorbidas por la bancada de planchas soldadas para un análisis bajo carga estática y otro bajo carga dinámica basada en ensayos de prototipos.

El objetivo del presente trabajo es realizar el diseño de la bancada del THD, aplicando un modelo más ajustado a la realidad, para lo cual se aplicarán las matemáticas avanzadas, técnicas de análisis numérico y metodología de diseño; logrando definir mejor las formas constructivas de la estructura bajo la carga estática y dinámica.

Este diseño se basa en la aplicación del método del Análisis Modal como procedimiento teórico para evaluar el comportamiento dinámico de la estructura de la bancada, la cual se encuentra en planos realizados hace más de 10 años. [1]

En base a esta información gráfica se construirá un modelo mecánico (modelización) el cual será analizado por el Método de los Elementos Finitos (FEM) para determinar su comportamiento ante carga estática (rigidez, deformación, esfuerzo) y ante carga dinámica (modos de vibración, frecuencias críticas, deformación).

Es indudable que este modo de análisis aproxima mejor la realidad y posibilita un mejor estudio de la bancada, lo que servirá como fundamento para obtener mejoras en las formas constructivas para un diseño adecuado.

Las metas del diseño para la Bancada se pueden presentar en los siguientes pasos:

- Distribución uniforme de las tensiones en las esquinas de la forma (enlaces, redondeos),
- Mínimo peso de las partes móviles,
- Mínimo costo,
- Máxima rigidez,
- Frecuencia propia óptima.

2. El Método de los Elementos Finitos aplicados al Cálculo por Resistencia

El Método de los Elementos Finitos (FEM) es un método que nos ayuda a resolver problemas complicados de medios continuos (elementos), apoyándose en una técnica especial para obtener soluciones numéricas aproximadas a las ecuaciones de cálculo que representan el comportamiento físico de los sistemas (estructuras y componentes mecánicos) sujetos a influencia externa (esfuerzos-deformación, vibración, transferencia de calor, etc.).

En particular, para el caso del torno horizontal de desbaste (THD) se ha tratado de aprovechar esta herramienta para confrontar resultados y optimizar el modelo.

El FEM en general plantea un medio para modelar el problema que se desea analizar como la unión de elementos finitos.

El Software MSC/NAS 2.1 para Windows es un programa de elementos finitos para determinar esfuerzos, vibraciones y análisis de transferencia de calor de estructuras y componentes mecánicos [7].

Las etapas fundamentales en el cálculo por FEM son las siguientes :

- Pre-Proceso
- Proceso
- Post-Proceso

En donde cada etapa tiene las siguientes funciones:

Pre-Proceso: aquí se realiza la identificación del modelo, se define la geometría, se asignan propiedades y se señalan las condiciones de contorno. (bordes, restricciones, carga).

En síntesis, aquí el diseñador ejecuta la parte más importante del análisis ya que además deberá verificar que los nodos de los elementos estén bien definidos (es decir que sean los mismos para los elementos colindantes).

A esto último se le denomina consistenciar el modelo

Proceso: en este campo el programa MSC/NASTRAN tiene un programa solucionador (Solver), independiente que se encarga de resolver las ecuaciones y matrices que caracterizan el comportamiento del modelo en estudio. Esto requiere de un tiempo de ejecución el cual estará muy ligado a la complejidad del modelo y a la forma que se ha idealizado.

El programa guarda todos los resultados en una base de datos (data).

Post-Proceso : Esta función realiza la presentación de los resultados, en donde además el programa presenta alternativas de presentación (tipos de pantalla, tipos de gráfico, tipos de colores, tipos de tablas, visualización, animación, etc.)

El diseñador analiza los resultados y los puede guardar en archivos de salida (out puts. $\emptyset\emptyset\emptyset$. XDB) ; en caso de alguna duda o cambio el diseñador regresa al pre proceso para revisar las condiciones globales del modelo (idealización, geometría, propiedades y restricciones) y así volver a repetir otra vez todo el proceso.

2.1. Detalle sobre la idealización del THD con el programa MSC/NASTRAN (para complementar, ver anexo A)

A pesar que el programa MSC/NASTRAN para Windows tiene una interfase gráfica para importar geometría CAD (Computer Aided Design) en el presente estudio se ha usado el manejador de dibujo del programa MSC/NASTRAN, el cual nos presenta en una caja de herramientas (tool box) las diferentes opciones para construcciones geométricas. (puntos, curvas, superficies, contornos, volúmenes).

Finalmente para modelar por elementos finitos se necesita discretizar (subdividir) en una serie de elementos que están conectados por los nodos. Las propiedades de los materiales y de los elementos son especificados para representar las propiedades físicas del modelo.

Las condiciones de límites y la aplicación de cargas son definidas a continuación para representar las operaciones relacionadas en el diseño.

Como el analista a veces necesita realizar cambios (remodelar) el procedimiento parcial o total a seguir estaría en los siguientes pasos :

- Cambiar el tipo de Elementos Finitos de triangular (3 nodos, 6 nodos) a rectangular (4 nodos, 8 nodos) según se trabaje en 2D ó 3D.
- Cambiar el número de nodos en las zonas críticas del modelo para afinar el análisis.

Estos dos primeros pasos a veces están limitados por la capacidad del paquete comercial que se esté usando.

- Cambios en las propiedades del material
- Cambios en la forma (geometría)
- Cambios en las restricciones
- Cambios en la aplicación y tipo de carga

Una vez que se ha terminado de remodelar en esta fase de Pre-Proceso, el programa MSC/NAS vuelve a realizar el análisis para estas nuevas condiciones guardando estos nuevos resultados en otros nuevos archivos ; los cuales estarán a disposición de la operación del Post-Proceso según las necesidades del diseñador.

A continuación algunas breves precisiones.

Nodos:

Son usados para conectar elementos y son generados cuando el modelo es enmallado. Este enmallado puede ser manual o automático, se prefiere este último por su criterio de optimización en la distribución del enmallado en base a la geometría del modelo.

El enmallado puede ser bidimensional como en el caso de la bancada (placa delgada) o tridimensional, como por ejemplo el modelo de un carburador de un automóvil.

Los nodos definen los grados de libertad, cada nodo tiene en general 6 grados de libertad. (X, Y, Z traslación, X, Y, Z rotación). Estas componentes independientes de movimiento se llaman “*grados de libertad*” (GDL).

Tipos de elementos y propiedades:

Poder simular la realidad depende del cambio de propiedades y de los tipos de elementos. Los tipos se clasifican en:

- Elementos 3D, que tiene un volumen y se conectan por unos nodos no planares, se usan cuando el estado de esfuerzo varía en las tres dimensiones.
- Elemento 2D, que tienen un área que se pueden conectar por un equipo de nodos planos (o no planos); se usan cuando el estado de esfuerzos varía en dos dimensiones y es constante en la tercera dimensión. Los elementos comunes son las membranas y las placas delgadas, en donde un espesor es explícitamente especificado.
- Elementos 1D, los que tiene una longitud la cual se conecta a dos nodos; estas solo trabajan a carga axial (barra) o a flexión (vigas)
- Elementos escalares; son los asociados con uno o en todo caso dos nodos, los elementos escalares incluyen concentradores de rigidez y masa.

Propiedades de los materiales:

El material o los materiales del modelo tienen propiedades como módulo de elasticidad, módulo de Poisson, masa, densidad. Estas propiedades de los materiales son dependientes del tipo de material y el programa MSC/NASTRAN contiene los arreglos necesarios para definir cualquier material.

Cargas aplicadas :

Son definidas por la operación a la cual el modelo está sujeto. Por carga se entiende fuerza nodal y momentos, presiones, cargas como las fuerzas gravitacionales y desplazamientos impuestos.

Restricciones

Aquí las condiciones de contorno son especificadas por cada grado de libertad de cada nodo fundamental. Cada GDL puede ser especificado independientemente, ofreciendo completa generalidad en describir las condiciones de contorno. Las restricciones son especificadas en la salida del sistema de coordenadas.

Resumen :

Los pasos para crear un modelo son

- + Crear o importar geometrías
- + Especificar material y propiedades de los elementos
- + Enmallar la geometría con nodos y elementos
- + Aplicar las cargas y restricciones

Entonces el modelo ha sido creado y está listo para el análisis.

2.2. Análisis básico del programa MSC/NASTRAN

En el presente trabajo se ha usado un programa solución (Solver) para los casos del análisis estático lineal., análisis modal normal y análisis (respuesta) dinámico.

2.2.1. Análisis estático lineal

Representa el tipo más sencillo de análisis en donde el término lineal intenta que el cálculo responda (desplazamiento o esfuerzo) linealmente lo relacionado con la aplicación de la fuerza. El término estático presenta que las fuerzas no varían con el tiempo o que la variación de tiempo es insignificante y puede por ello ser ignorado sin complicaciones.

Las fuerzas y sus efectos son manejados en el sistema internacional (SI) de unidades y a menudo son definidas usando la máxima expectativa de carga pero aplicando un factor de seguridad elevado.

La ecuación del análisis estático es:

$$[K] \{u\} = p$$

donde K es la matriz de rigidez del sistema, la cual es generada automáticamente por el programa MSC/NASTRAN basado en la geometría y propiedades, p es el vector de fuerzas aplicadas (especificadas por el tipo de trabajo) y $\{u\}$ es el vector de desplazamientos que el programa calcula.

Una vez que son calculados los desplazamientos el programa usa esta información para calcular la fuerza en los elementos, los esfuerzos, fuerzas de reacción y tensiones.

Las fuerzas aplicadas pueden ser usadas independientemente o combinadas con otras; pueden ser aplicadas en múltiples casos en la cual cada uno representa una carga en particular según las condición de contorno.

Finalmente el modelo es guardado en un File. mod.; luego se tiene listo para el análisis, el cual demora según la complejidad del modelo. Una vez completado el análisis los resultados están listos para ser procesados.

En este procesamiento (post proceso) el programa nos da algunas alternativas como

- Modificar la pantalla; aquí se pueden congelar restricciones, entidades (dibujos) y etiquetas de los elementos (#s), así como seleccionar etiquetas, entidades y color; aquí también se puede seleccionar restricciones (si fuera necesario)
- Enmarcar los contornos del esfuerzo ; con la opción View-Select se muestra el modelo sometido a esfuerzos y su barra de valores a color.
- Enmarcar el elemento deformado ;
- Animar la deformación ; en el plano o en el espacio.
- Enmarcar el contorno de la deformación ; con la opción View-Select se muestra el modelo sometido a deformaciones y su barra de valores a color.

2.2.2. Análisis Modal Normal

Denominado así en el programa de MSC/NAS para explicar la evaluación de las frecuencias naturales y las formas de los modos de un elemento o estructura.

Las frecuencias naturales son las frecuencias a las cuales una estructura puede tender a vibrar si está sometida a una excitación.

Las formas que adopta la estructura para una frecuencia natural específica se llama modo.

El Análisis modal normal forma la base para un completo entendimiento de las características dinámicas de una estructura.

Este análisis es realizado por algunas razones entre las cuales se detallan.

- Fijando la interacción dinámica entre un componente y su estructura soporte, si la frecuencia natural de la estructura soporte esta cerca de alguna frecuencia de operación del componente ; entonces puede estar significando la amplitud dinámica de las cargas.
- Fijando los efectos del diseño, se pueden cambiar las características dinámicas.
- Usando los modos como una respuesta lógica del análisis.
- Usando la frecuencia natural como una guía para seleccionar el tiempo adecuado o el nivel de frecuencia a transmitir y la respuesta del análisis de frecuencias respectivamente.
- Fijando los grados de relación entre los datos de la prueba modal y los resultados analíticos.

Sintetizando debido a que la justificación se verá en el próximo capítulo, se tiene que el programa resuelve en este análisis un autoproblema general con un amortiguamiento nulo de la siguiente manera :

$$[K - \lambda_i M]\{\phi_i\} = 0$$

donde K es la matriz de rigidez del sistema, M es la matriz de masa del sistema (generada automáticamente por MSC/NASTRAN para windows, basada en la geometría y propiedades), y λ_i y ϕ_i serán calculadas.

Además λ_i son los valores propios de la forma de los modos y ϕ_i , son los vectores propios de las formas de los modos.

Los valores propios son relacionados con la frecuencia natural como

$$f_i = \sqrt{\frac{\lambda_i}{2\pi}}$$

2.2.3. Análisis dinámico

La opción de respuesta dinámica consiste en la siguiente capacidad

- Frecuencia de respuesta, el cual calcula el estado estable de respuesta para una excitación sinusoidal.
- Respuesta transitoria, la cual calcula la respuesta en general para una variación del tiempo de excitación.

En síntesis la frecuencia responde al cálculo del análisis estructural para un estado estable de respuesta, para una excitación oscilatoria. (máquina rotatoria)

La frecuencia de respuesta al análisis de excitación es definida explícitamente en la frecuencia dominante.

La carga oscilatoria es de naturaleza sinusoidal y para simplificar se señala que esta carga esta definida si se tiene una amplitud y una frecuencia específica.

La oscilación del estado estable ocurre con alguna frecuencia cuando se esta cargando el sistema. La respuesta puede ser desviada en un tiempo debido a los saltos en el sistema.

La desviación en respuesta es llamada una fase de desviación ; porque el pico de carga y el pico de respuesta no ocurren a lo largo de algún tiempo. Estos resultados importantes incluyen desplazamientos, velocidades y aceleraciones.

Finalmente los cálculos obtenidos son números complejos, definidos en magnitud y ángulo (con respecto a la fuerza aplicada) o con una componente real y una imaginaria. (ver fig. 2.1)

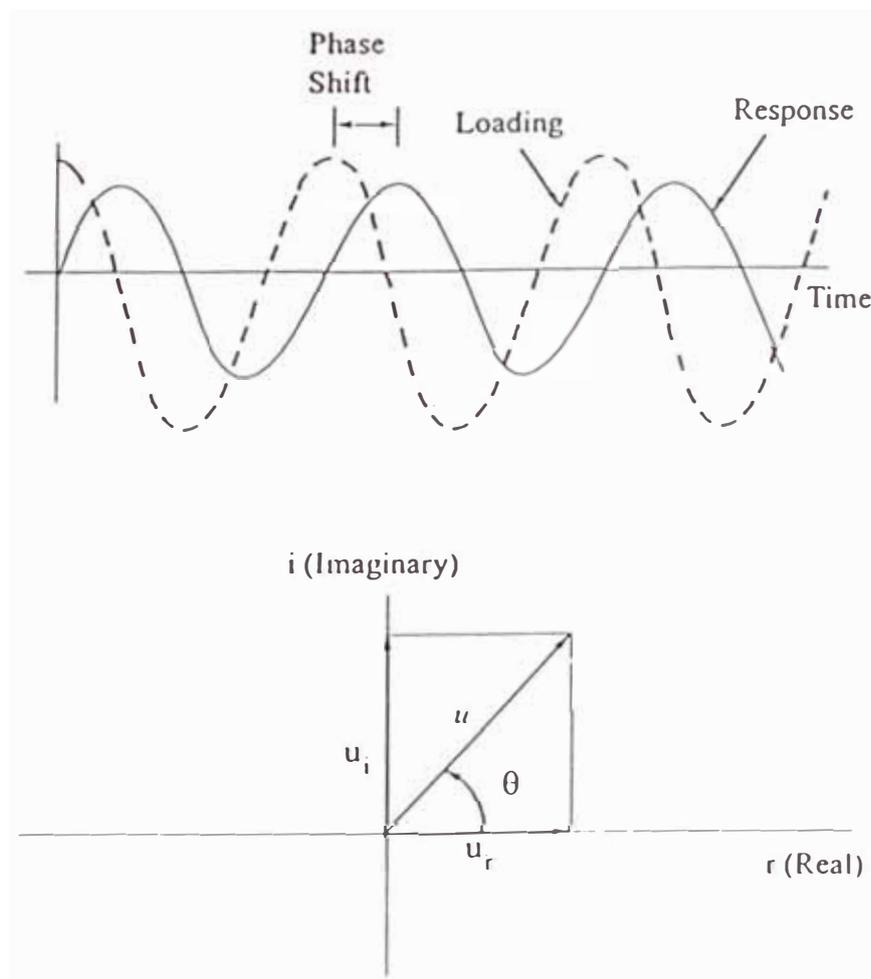


Figura 2.1

donde :

$$u = \text{magnitud} = \sqrt{u_r^2 + u_i^2}$$

$$\theta = \text{angulo de fase} = \tan^{-1}\left(\frac{u_i}{u_r}\right)$$

$$u_r = \text{componente real} = u \cos \theta$$

$$u_i = \text{componente imaginario} = u \sin \theta$$

Aquí se pueden usar dos métodos numéricos diferentes para obtener la frecuencia de respuesta en el análisis ; los cuales son

1. Método directo, el cual resuelve las ecuaciones acopladas del movimiento en términos de frecuencias de esfuerzos.
2. Método de análisis modal, utilizado para los diferentes modos de la estructura ; el cual se reduce y desacopla las ecuaciones del movimiento para su resolución. Aquí la solución para una frecuencia particular de esfuerzos es obtenida a través de la suma de los modos individuales de respuesta.

El uso de cada método depende del problema en general y la descripción detallada del método usado en nuestro caso se observa en el capítulo siguiente.

2.3. Detalles breves sobre las teorías de cálculo aplicadas al THD por el programa MSC/NASTRAN.

Una vez que el torno Horizontal de Desbaste ha sido modelizado (se le han dado propiedades y se ha discretizado) en base de un conjunto de placas delgadas de acero, cuyas propiedades de elasticidad harán que reaccione ante la aplicación de cualquier carga externa, el programa ejecuta el proceso de cálculo tomando en cuenta los conceptos de la teoría de elasticidad ; los cuales son

2.3.1. Teoría de Elasticidad bidimensional

- Campo de desplazamiento.

Las características de carga de una estructura en estado de tensión o deformación plana, permiten establecer de que todas las secciones perpendiculares al eje z se deforman en su plano y de manera igual. Luego basta conocer el comportamiento de cualquier sección contenida en el plano x-y. (ver fig. 2.2)

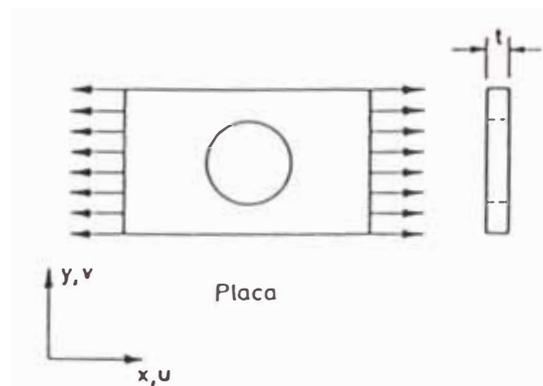


Figura 2.2

Finalmente el campo de desplazamiento estará perfectamente definido si se conocen los desplazamientos en las direcciones x e y de todos sus puntos; entonces el vector de los desplazamientos de un punto se define como :

$$\{U(x, y)\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (2,1)$$

donde $u_{x,y}$ y $v_{x,y}$ son los desplazamientos del punto en direcciones de los ejes x e y respectivamente.

- Campo de deformaciones.

Del campo de desplazamientos (2,1) se pueden deducir similarmente las deformaciones haciendo uso de la teoría general de la elasticidad, así se tiene:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{yz} = 0\end{aligned}\tag{2,2}$$

Acerca de la deformación longitudinal ε_z hay que señalar que en el caso de deformación plana se asume la hipótesis de que es nula. Por otro lado en el estado de tensión plana dicha deformación no es nula porque aquí se supone que la tensión σ_z es nula.

Finalmente en ninguno de los dos análisis debe considerarse la deformación ε_z , ya que no interviene en las ecuaciones del trabajo de deformación al ser el producto σ_z, ε_z nulo.

Entonces el vector de deformaciones significativos de un punto se define para tensión y deformación plana como:

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T\tag{2,3}$$

- Campo de tensiones.

Se deduce de la ecuación (2,2) que las tensiones tangenciales τ_{xz} y τ_{yz} son nulas. Además por lo explicado anteriormente para la deformación ε_z , la tensión σ_z no trabaja y el vector de tensiones significativos es

$$\{\sigma\} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T\tag{2,4}$$

- Relación tensión-deformación

La relación entre tensiones y deformaciones se deduce de la ecuación constitutiva de la Elasticidad Tridimensional, pero con las hipótesis simplificadas ($\sigma_z = 0$; para tensión plana, $\varepsilon_z = 0$ para deformación plana y $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ en ambos casos).

Después de realizar las operaciones correspondientes puede encontrarse la siguiente relación matricial entre tensiones y deformaciones

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\} \quad (2,5)$$

aquí en la ecuación (2,5) [D] es la matriz de constantes elásticas (o matriz constitutiva)

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (2,6)$$

Del teorema de Maxwell - Betti se deduce que [D] es siempre simétrica ; y $d_{12} = d_{21}$.

Para elasticidad isotrópica se tiene :

Tensión plana

$$d_{11} = d_{22} = \frac{E}{(1-\nu^2)}$$

$$d_{12} = d_{21} = \nu d_{11}$$

$$d_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

Deformación

$$d_{11} = d_{22} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$d_{12} = d_{21} = d_{11} \cdot \frac{\nu}{(1-\nu)} \quad (2,7)$$

$$d_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

Siendo E el módulo de elasticidad y ν el módulo de Poisson.

- Expresión del Principio de los Trabajos Virtuales

La expresión integral de equilibrio en problemas de elasticidad bidimensional puede obtenerse haciendo uso del Principio de los Trabajos Virtuales (PTV). Es así que teniendo en cuenta las tensiones y deformaciones que contribuyen al trabajo virtual de la estructura, la expresión del PTV puede expresarse como:

$$\iint_A (\delta \varepsilon_x \cdot \sigma_x + \delta \varepsilon_y \cdot \sigma_y + \delta \gamma_{xy} \cdot \tau_{xy}) t \, dA = \iint_A (\delta u \cdot b_x + \delta v \cdot b_y) t \, dA + \oint_L (\delta u \cdot t_x + \delta v \cdot t_y) t \, ds + \sum_i (\delta u_i \cdot U_i + \delta v_i \cdot V_i) \quad (2,8)$$

El segundo miembro de la ecuación (2,8) representa el trabajo de las fuerzas repartidas por unidad de volumen b_x, b_y ; de las fuerzas repartidas sobre el contorno t_x, t_y ; y de las fuerzas puntuales U_i, V_i sobre los desplazamientos virtuales $\delta u, \delta v$ y $\delta u_i, \delta v_i$.

El primer miembro representa el trabajo interno que las tensiones $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ realizan sobre las deformaciones virtuales $\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y$ y $\delta \gamma_{xy}$. Finalmente A y L son el área y el contorno de la sección transversal del sólido y t su espesor. En problemas de tensión plana t coincide con el espesor real, mientras que en problemas de deformación plana es usual asignar a t un valor unitario.

La ecuación (2.8) se puede reescribir en forma matricial como :

$$\iint_A \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} t \, dA = \iint_A \{\delta u\}^T \{b\} t \, dA + \oint_L \{\delta u\}^T \{t\} t \, ds + \{\delta u_i\}^T \{q_i\} \quad (2,9)$$

Luego de (2,2) y (2,5) se deduce que en las integrales de PTV sólo intervienen las primeras derivadas en los desplazamientos, lo que exige continuidad de clase C_0 a la aproximación de elementos finitos. Este es un requisito que se mantiene para todos los problemas en los que se usa la teoría de elasticidad.

2.3.2. Placas delgadas. Teoría de Kirchhoff

En este acápite se describe brevemente el análisis de “elementos laminares delgados” de forma plana. La teoría de placas se usa en simplificaciones de la elasticidad tridimensional y en esencia las distintas teorías de placas se diferencian en las hipótesis acerca del giro de las normales al plano medio (ver fig. 2.3)

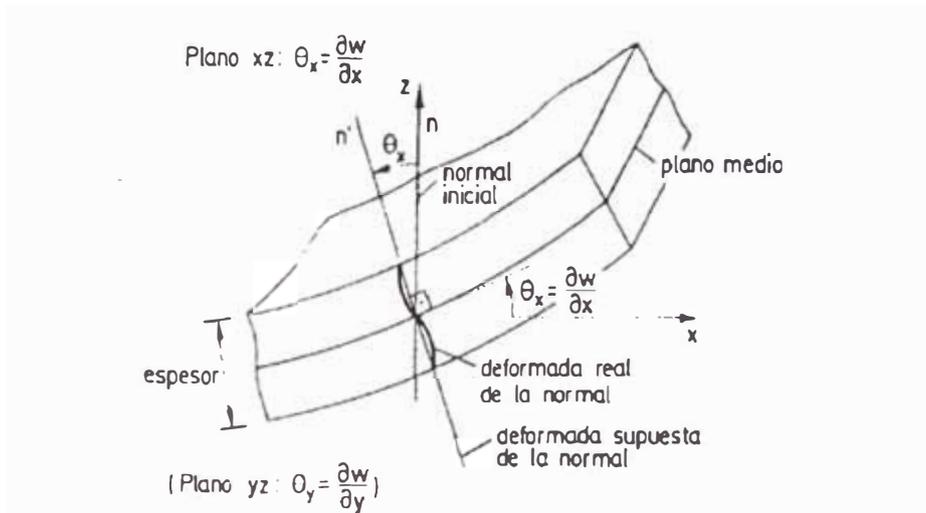


Figura 2.3: Deformación del plano medio de una placa delgada y giro de la normal

El programa que maneja la formulación de Elementos Finitos (NASTRAN) considera para su análisis; a la teoría clásica de placas delgadas de "Kirchhoff", la que tiene las siguientes hipótesis:

Las normales se mantienen rectas y ortogonales a la deformada de dicho plano. Todo esto porque los elementos de Kirchhoff a pesar de ser algo limitados (comparado con el elemento placa de Reissner-Hindlin) son en la práctica los más adecuados para el análisis de placas delgadas por su facilidad en la aplicación.

Hipótesis fundamentales (ver fig. 2.4)

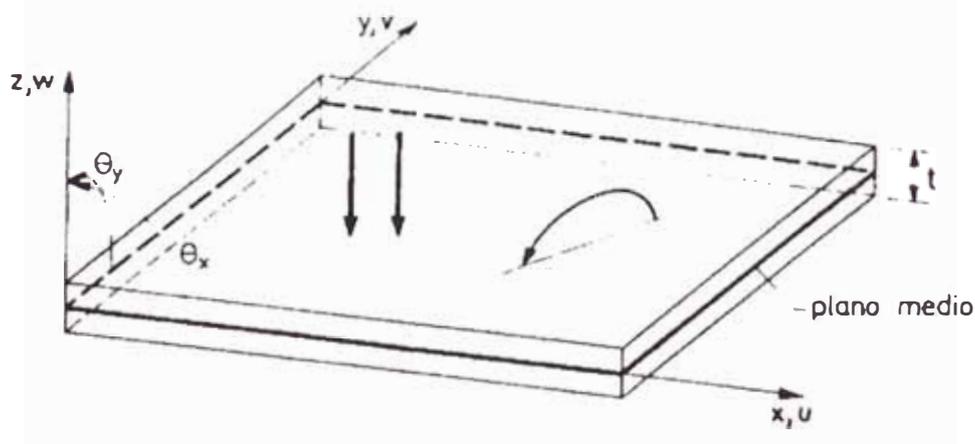


Figura 2.4: Definición geométrica de una placa y convenio de signos para desplazamientos y giros

Las hipótesis sobre las que se basa la teoría de placas de Kirchhoff son:

- 1.- Los puntos del plano medio $u = v = 0$, sólo se mueven verticalmente.
- 2.- Todos los puntos contenidos en una normal al plano medio tienen el mismo desplazamiento vertical.
- 3.- La tensión normal σ_z es despreciable.
- 4.- Los puntos sobre rectas normales al plano medio antes de la deformación permanecen sobre rectas también ortogonales a la deformada del plano medio después de la deformación.

Las hipótesis 1, 2 y 4 permiten definir el campo de desplazamiento a través del desplazamiento artificial del plano medio de la placa.

La hipótesis 3 afecta la relación tensión - deformación en lo referente al trabajo de deformación $\sigma_z \cdot \varepsilon_z = 0$; no tomando en cuenta así la deformación ε_z en el análisis inicial.

2.3.3. El Método de los Elementos Finitos

Introducción:

Los elementos y las estructuras de máquinas son medios continuos, los cuales están gobernados por una serie de estados de campo $P(x,y,z,t)$ para el modelo de la figura 2.5.

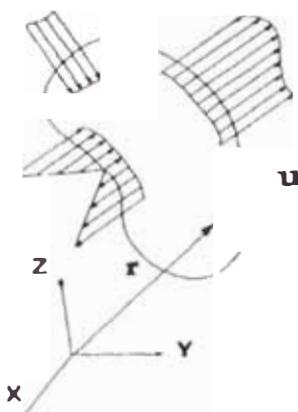


Figura 2.5

El medio se caracteriza por:

- desplazamientos: u, v, w
- deformaciones : ε
- esfuerzos : σ y τ

Entonces el Método de los Elementos Finitos divide el medio continuo en una serie de elementos finitos de geometrías específicas (ej. triángulos, cuadrados,.....) y se comienza a calcular para cada elemento su estado de esfuerzo y deformación, (con la matriz de rigidez, matriz de masa, etc.) para finalmente integrar todo como una suma total.

Estos elementos tienen en sus vértices los denominados nodos (puntos de articulación entre elementos) los cuales definen la frontera, las preguntas básicas son: ¿qué comportamiento tengo en el interior si conozco lo que pasa en el nodo?, ¿qué pasa en la frontera?

Problemas de borde son tratados por el método de los elementos finitos, buscando funciones dentro del elemento que interpolen el comportamiento estructural de dichos elementos. Cuanto mejor elección se haga sobre estas “funciones”, entonces la aproximación del modelo al comportamiento real del sistema será mejor.

Consientes de que se maneja una teoría de elasticidad aplicada (no teórica) a elementos lineales, es que se debe simplificar la complejidad propia de cualquier problema real durante el proceso de modelización.

Como resultado de la simplificación (idealización) se puede presentar un estado final de deformación (múltiples desplazamientos por una cantidad finita de “condiciones” que definen el estado de deformación en forma adecuada). Estas condiciones reciben el nombre de grados de libertad (GDL).

En algunos casos los GDL se obtiene por la propia configuración del sistema (sistema discreto) el cual se resuelve con ecuaciones diferenciales ordinarias, pero cuando se está ante un medio o un sistema continuo, es imposible que su estado deformado quede definido por un número finito de GDL. En la práctica se estila trabajar con soluciones aproximadas de la siguiente manera; a un problema planteado en un medio continuo real se le discretiza (idealiza) logrando un número de GDL finito, con los cuales se representará el comportamiento físico del sistema, esta forma de trabajar nos lleva a describir el comportamiento del continuo mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, que serán luego resueltos en forma numérica.

2.4. Formulación de la rigidez básica

Los programas de Elementos Finitos en uso comercial, presentan una nomenclatura especial (ver tabla 2.1) para la formulación fundamental y expresan el sistema de ecuaciones en términos de un vector de desplazamiento variables u_i ; cuyos componentes señalan las magnitudes del estado de distribución de desplazamientos entre los elementos.

Términos Genéricos	Representación
desplazamiento	$\{u\}$
Deformación	$\{\varepsilon\}$
Esfuerzo	$\{\sigma\}$
Carga	$\{p\}$
Carga límite	$\{t\}$
Definición de deformación	$\{\varepsilon\} = [L].\{u\}$
Relación de Composición	$\{\sigma\} = [D].\{\varepsilon\}$
Energía potencial	$\frac{1}{2}\{\sigma\}^T.\{\varepsilon\}$
Equilibrio	$\sum_j \sigma_{ij,j} = -P_i$
Campo de inercia	$\{P^i\} = -\rho\{u,_{tt}\}$

Tabla 2.1

Generalmente, pero no necesariamente, los componentes de $\{u_i\}$, corresponden a los componentes de desplazamiento para una serie discreta de puntos.

La forma general de la matriz del sistema de ecuaciones es:

$$[K_{..}]\{u\} = \{P\} \quad (2,10)$$

donde $[K_{ii}]$ se denomina matriz de rigidez, que tiene elementos constantes y $\{P_i\}$, el vector de carga, al cual se le incluyen todas las fuerzas; excepto aquellas para elasticidad lineal. Entonces $\{P_i\}$ puede en general, incluir términos no lineales y dependientes del tiempo. Para un análisis de estática lineal $\{P_i\}$ es un vector de constantes.

El sistema de ecuaciones es obtenido por la suma de los aportes de los elementos individuales:

$$[K_{..}] = \sum_e [K_{..}^e] \quad (2,11)$$

$$\{P\} = \sum_e \{P^e\} + \{P^d\} \quad (2,12)$$

El vector de carga contiene una parte asociada con los elementos $\sum_e \{P_i^e\}$ y una parte asociada con las variables de desplazamiento $\{P_i^d\}$.

La fig. 2.6 muestra un elemento básico (3 lados)

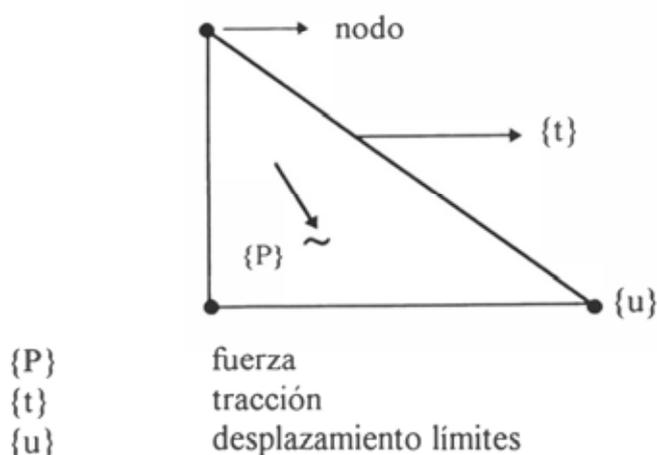


Figura 2.6

Este elemento asocia los lados mediante los puntos discretos llamados nodos.

Se puede necesitar también relacionar las deformaciones $\{\varepsilon\}$ dentro del elemento y el desplazamiento límite $\{u_i\}$ con:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u_i\} \quad (2,13)$$

donde la matriz $[B]$, llamada matriz de deformación-desplazamiento es derivada de interpolar las funciones de posición para el desplazamiento

$$\{u\} = [N]\{u_i\} \quad (2,14)$$

La forma de calcular la matriz de rigidez $[K_{ii}^e]$ y la aplicación asociada del vector de cargas $\{P_i^e\}$ es mediante el método del trabajo virtual, el cual asume la existencia de un desplazamiento virtual pequeño $\{\delta u\}$, (el cual mantiene la compatibilidad geométrica de los elementos) y una deformación virtual pequeña $\{\delta \varepsilon\}$, luego por el incremento del trabajo virtual cuando se aplican las fuerzas exteriores se tiene: δW_o . Esto incrementa la energía potencial interna δW_s entonces como el sistema está en equilibrio se debe cumplir:

$$\delta W_s = \delta W_o \quad (2,15)$$

obteniendo para (2,13) y (2,14) las siguientes expresiones;

$$\{\delta \varepsilon\} = [B]\{\delta u_i\} \quad (2,16)$$

$$\{\delta u\} = [N]\{\delta u_i\} \quad (2,17)$$

donde $[N]$ es la matriz de las funciones de interpolación de desplazamientos, y de la parte homogénea del cálculo se tiene una relación básica:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (2,18)$$

siendo $[D]$ la matriz de elasticidad.

En resumen el cálculo de los elementos de la matriz de rigidez incluye 3 pasos.

- 1.- **Determinar** la matriz deformación-desplazamiento $[B]$.
- 2.- **Formar** el triple de producto de matrices: $[B]^T[D][B]$.
- 3.- **Integrar** sobre el volumen los elementos $[K_{ii}^e] = \int_{V_e} [B]^T[D][B] dv$.

Los cuales son trabajados por los programas de cálculo, The MacNeal - Schwendler Corporation [6].

Finalmente el determinar $[B]$ es lo más importante en el diseño de elementos finitos; para lo cual se consideran algunos caminos para su evaluación. Es decir que $[B]$ puede ser calculado de asumir una distribución de desplazamiento usando la definición de deformación

$$\{\varepsilon\} = [L]\{u\} = [L] \cdot [N]\{u_i\} \quad (2,19)$$

donde, $[B] = [L] \cdot [N]$; siendo $[L]$ un operador diferencial ó $[B]$ puede ser consecuencia de asumir una relación entre

$$\{\sigma\} \text{ y } \{P\} \quad ; \quad \{P_i\} = \int_{V_e} [B]^T \{\sigma\} dv \quad (2,20)$$

2.5 Discretización:

La Discretización de un sistema continuo se observa en la figura 2.7.

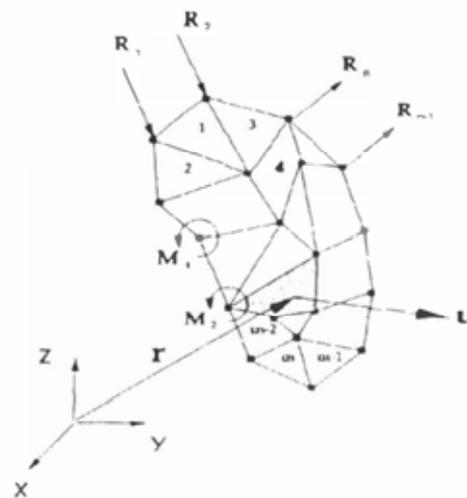


Figura 2.7

Si el elemento diferencial “ dm ” estuviera sobre el nodo, tendría la influencia de los subdominios adyacentes.

Luego el comportamiento del elemento diferencial descrito por: $\{u\} = N^i \cdot \{U\}$ (corresponde al subdominio), además:

- Cada celda corresponde a un elemento finito
- Cuando mejor se elige la función de forma, más cerca se estará del comportamiento real.
- Se deben establecer criterios de continuidad entre los elementos (deformación igual; pendiente común) con todo esto se consideraría a cada elemento finito como elemento discreto.

En lo referente al esfuerzo y deformación, el FEM la trata de la siguiente forma:

$$\{\varepsilon\} = B^t \{U\} \quad (2,21)$$

Siendo $B^t = [L][N^t]$ (2,22)

para N^t funciones de forma

se tenía por la ecuación (2,18)

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\}$$

donde la matriz característica del material es $[D]$

entonces: $\{\sigma\} = [D] \cdot B^t \{U\}$. (2,23)

Ahora analizando el principio de los trabajo virtuales, se tiene una expresión de equilibrio energético [8], [9] :

$$\Pi = W - U \quad (2,24)$$

- Π : potencial energético
- W : trabajo externo
- U : trabajo interno

De dicha expresión se toma un variacional (δ), siendo la variación del potencial energético igual a cero;

$$\delta \Pi = \delta W - \delta U = 0 \quad (2,25)$$

$$\delta \Pi = \sum_{i=1}^n \delta \Pi_i = 0 \quad (2,26)$$

cuyo potencial energético

$$\delta \Pi_i = \int_{V^i} \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} \cdot dV - \int_{V^i} \{\delta U\}^T \cdot \{F\} dV - \oint_{S^i} \{\delta U\}^T \{F_s\} ds \quad (2,27)$$

el último término solo para elementos que están en contacto con la superficie "S".

F_B [representa a las fuerzas gravitacionales, inerciales y disipativas]

Por otro lado; $\{\varepsilon\} = B^t \cdot \{U\}$ (2,28)

$$\Rightarrow \{\delta \epsilon\} = \mathbf{B}^T \{\delta \mathbf{U}\} \quad (2,29)$$

entonces $\{\sigma\} = [\mathbf{D}]\mathbf{B}\{\mathbf{U}\} \quad (2,30)$

reemplazando:

$$\delta \Pi = \{\delta \mathbf{U}\}^T \left[\left(\int_V [\mathbf{B}^T]^T \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{B}^T] dv \right) \cdot \{\mathbf{U}\} - \int_V [\tilde{\mathbf{N}}^T]^T \cdot \{\mathbf{F}_B\} dv - \int_{S'} [\mathbf{N}^T]^T \cdot \{\mathbf{F}_S\} dS \right] \quad (2,31)$$

Ahora juntando todas las partes :

$$\delta \Pi = \sum \delta \Pi_i = \{\delta \mathbf{U}\}^T \cdot \sum_{\neq 0} [] = 0 \quad (2,32)$$

obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales que representan el equilibrio del sistema

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{U}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{U}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{p_{(t)}\} \quad (2,33)$$

donde K es la matriz de la rigidez global; la cual modela el comportamiento del continuo discretizado

$$[\mathbf{K}] = \sum \int_V [\mathbf{B}^T]^T \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{B}^T] dv \quad (2,34)$$

Se define el vector de fuerzas másicas f_B ;

$$\{f_B\} = \sum \int_V [\tilde{\mathbf{N}}^T]^T \cdot \{\mathbf{F}_B\} dv \quad (2,35)$$

y el vector de fuerzas equivalentes f_S

$$\{f_S\} = \sum \int_{S'} [\mathbf{N}^T]^T \cdot \{\mathbf{F}_S\} dS \quad (2,36)$$

Si se considera el caso de $\delta \mathbf{U} \neq 0$ (no trivial)

entonces:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{f_B\} + \{f_S\} \quad (2,37)$$

luego se puede separar los aportes del efecto inercial y disipativo en las fuerzas másicas:

$$\{F_B\} = -\rho [N^i] \{\ddot{U}\} - C [N^i] \{\dot{U}\} + \{f_B\} \quad (\text{fuerza de gravitación}) \quad (2,38)$$

donde:

ρ es la densidad
 C es el coeficiente disipativo
 $[\ddot{U}]$ vector que agrupa las aceleraciones nodales
 $[\dot{U}]$ vector que agrupa las velocidades nodales

luego tomando: $[N^i] = [\tilde{N}^i]$ (2,39)

Se tiene:

$$[K]\{U\} = \sum \left[\underbrace{-\int_{v^i} [N^i]^T \rho [N^i] \{\ddot{U}\} dv}_{-[M]\{\ddot{U}\}} - \underbrace{\int [C][N^i]^T [N^i] \{\dot{U}\} dv}_{-[C]\{\dot{U}\}} + \underbrace{\int [N^i]^T \{f_B\} \cdot dv + \{p_s\}}_P \right] \quad (2,40)$$

entonces:

$$\begin{array}{ccc} [M]\{\ddot{U}\} & + & [C]\{\dot{U}\} & + & [K]\{U\} & = & \{P\} & \text{representa la ecuación del equilibrio (ver} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & \text{ecuación 2,33)} \\ \text{Energía} & & \text{Energía} & & \text{Energía} & & & \\ \text{Cinética} & & \text{disipativa} & & \text{Potencial} & & & \end{array}$$

Con todo este soporte, se prepara el trabajo para realizar el Análisis Modal teórico (sobre un modelo) con la ayuda de la computadora y con el Método de Elementos Finitos.

3. Análisis Modal para las formas constructivas de la bancada

El análisis modal es una técnica de diseño que se apoya en la determinación de las frecuencias y modos naturales de vibración del elemento en estudio.

El modo vibratorio representa la escala por medio de la cual se distribuye la amplitud de la vibración a todo el sólido.

En general es suficiente analizar los modos asociados con frecuencias comprendidas en un determinado rango; además las frecuencias y los nodos naturales depende de la inercia, rigidez y amortiguamiento del componente.

Los modos pueden ser reales o complejos;

- *Reales*: si todos los puntos analizados vibran en fase es decir, que alcanzan su máximo desplazamiento al mismo tiempo.
- *Complejos*: si los puntos presentan un desfase entre ellos.

Esto se debe al tipo de amortiguamiento que puede ser:

- nulo
- viscoso proporcional
- estructural
- viscoso no proporcional

Determinar las frecuencias naturales del conjunto estructural es fundamental para el diseño, porque así se logrará un buen comportamiento dinámico ya que las velocidades de servicio deberán estar alejadas de las frecuencias naturales. (ver figura 3.1)

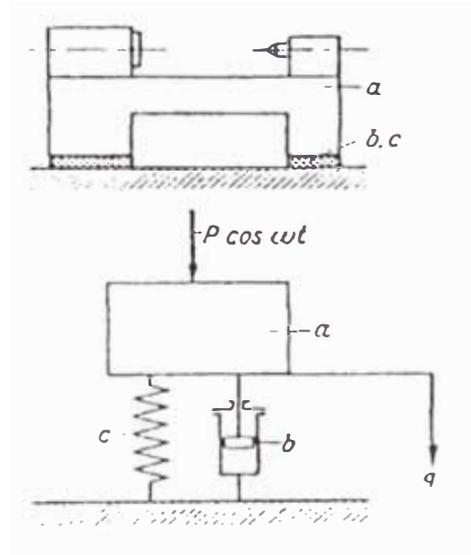


Figura 3.1

Finalmente el análisis modal es la técnica que logra determinar adecuadamente el diseño dinámico del elemento; porque para aumentar una frecuencia natural bastará rigidizar los nervios logrando disminuir la deformación del modo.

Entonces realizando lo señalado anteriormente con los distintos modos y frecuencias se puede llegar a un diseño dinámico adecuado.

En el presente trabajo el análisis modal se aplica con la ayuda del computador en base a planos de la bancada realizados anteriormente [1] para determinar frecuencias y modos naturales por el método de los elementos finitos que resolverá un problema algebraico de valores y vectores propios.

Para esto se considera que la bancada es una construcción de plancha soldada (no es una estructura típica) la cual tiene amortiguamiento que puede ser despreciable. El fundamento teórico de la aplicación del método del Análisis Modal se basa en la relación existente entre la matriz de transferencia y las frecuencias y modos naturales de vibración.

El caso que se aplica a la bancada en estudio es para amortiguamiento nulo, el cual presenta la siguiente ecuación de equilibrio dinámico para un sistema de n GDL [9].

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = p(t) \quad (3.1)$$

Se tiene la existencia de desplazamientos armónicos cuando las fuerzas perturbadoras son armónicas entonces:

$$\{p(t)\} = \{P\}e^{i\omega t} \quad (3,2)$$

$$\{x(t)\} = \{X\}e^{i\omega t} \quad (3,3)$$

derivo(3,3) y sustituyo en (3,1)

$$(-\omega^2[M] + [K])\{X\} = \{P\} \quad (3,4)$$

luego se calcula la solución en función de los movimientos armónicos posibles con excitación nula, que son los modos naturales de vibración dados por:

$$(-\omega^2[M] + [K])\{X\} = \{\emptyset\} \quad (3,5)$$

$\{\emptyset\} \rightarrow$ vector nulo

este es un problema de valores y vectores propios generalizados.

Sean: $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$ dichos valores propios y $\{x^1\}, \{x^2\}, \dots, \{x^n\}$ los vectores propios asociados y que coinciden respectivamente con las frecuencias y modos naturales de asociación:

$$-\omega_r^2[M]\{X^r\} + [K]\{X^r\} = \{\emptyset\} \quad (3,6)$$

Del análisis de vibraciones de un sistema con n GDL se demuestra que los modos de vibración son ortogonales respecto de las matrices $[K]$ y $[M]$ luego se verifica.

$$\{X^s\}^T [M] \{X^r\} = m_r \delta_{rs} \Rightarrow S = 1, 2, \dots, n \quad (3,7)$$

$$\{X^s\}^T [K] \{X^r\} = k_r \delta_{rs} \Rightarrow S = 1, 2, \dots, n \quad (3,8)$$

δ_{rs} , este es el símbolo de Kroneker que tiene un significado

$$\delta_{rs} = \begin{cases} 1 & r=s \\ \emptyset & r \neq s \end{cases}$$

donde m_r y k_r son denominados inercia modal y rigidez modal.

Multiplicando la expresión (3,6) por $\{X^r\}^T$ se tiene:

$$-\omega_r^2 m_r + k_r = 0 \quad (3,9)$$

$$\text{despejando, } \omega_r^2 = \frac{k_r}{m_r} \quad (3,10)$$

que es la frecuencia natural correspondiente al modo $\{X^r\}$, aquí los vectores propios X^r forman un sistema de n vectores linealmente independientes que pueden formar un sistema de coordenadas.

Para determinar la expresión del vector desconocido $\{X\}$ se asume que es:

$$\{X\} = \sum_{r=1}^n \gamma_r \{X^r\} \quad (3,11)$$

Sustituyendo en la ecuación (3,4), multiplicando antes por $\{X^r\}^T$ y considerando la ortogonalidad (3,7) y (3,8) se obtiene:

$$(-\omega^2 m_r + k_r) \gamma_r = \{X^r\}^T \cdot \{P\} \quad (3,12)$$

despejando γ_r :

$$\gamma_r = \frac{\{X^r\}^T \{P\}}{-\omega^2 m_r + k_r} \quad (3,13)$$

y sustituyendo (3,13) en (3,11)

$$\{X\} = \sum_{r=1}^n \frac{\{X^r\}^T \{P\}}{-\omega^2 m_r + k_r} \cdot \{X^r\}$$

ó

$$\{X\} = \sum_{r=1}^n \frac{\{X^r\}^T \{P\}}{k_r \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)} \cdot \{X^r\} \quad (3,14)$$

aquí se establece que cuando la frecuencia de excitación ω coincide con la frecuencia natural ω_r , la amplitud de la respuesta según el correspondiente modo natural tiende a ∞ ; siempre y cuando la fuerza $\{P\}$ tenga proyección en alguno de los modos correspondientes a ω_r , y actúe durante un tiempo adecuado para analizar la amplitud.

Finalmente sólo se presenta el resultado para calcular la matriz de transferencia que relaciona las amplitudes $\{X\}$ y $\{P\}$ para una determinada frecuencia de excitación ω .

$$\{X\} = [H_{(\omega)}] \{P\} \quad (3,15)$$

se supone fuerza de excitación unidad en el grado de libertad S exclusivamente, entonces:

$$\{P\}^T = \{0,0,0,0,0,\dots,S,\dots,0\} \quad (3,16)$$

luego la respuesta según el GDL q es el elemento $H_{qs(\omega)}$ de la matriz de transferencia. Sustituyendo el vector $\{P\}$ dado en (3,16) en la expresión (3,14) se obtendrá la columna s de la matriz de transferencia.

$$\{H_s\} = \sum_{r=1}^n \frac{\{X_s\}^r \{X^r\}}{k_r \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)} \quad (3,17)$$

Y la matriz de la transferencia completa viene como :

$$[H_{(\omega)}] = \sum_{r=1}^n \frac{\{X^r\} \{X^r\}^T}{k_r \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)} \quad (3,18)$$

en donde se expresa la matriz de transferencia en función de los modos y frecuencias naturales para el caso en que no exista amortiguamiento. El problema inverso, es decir, **determinar** las frecuencias y modos naturales a partir del conocimiento de la función de transferencia forman la base del análisis modal experimental.

Finalizando la parte teórica del análisis modal es importante señalar que los vectores propios $\{X^r\}$ son reales (amortiguamiento nulo), ya que el sistema es lineal y la matriz de rigidez es simétrica, de modo análogo se tiene la simetría de la matriz de masas; luego los valores propios y los vectores propios son todos ellos reales.

En el caso de la bancada sus datos de inercia, rigidez y amortiguamiento, influyen en la **determinación** de dichas frecuencias y modos. Luego el diseño adecuado de la bancada exigirá un análisis estático y dinámico, para lo cual se deberá modelar la forma constructiva continua y luego discretizarla; estudiando su comportamiento a través de sus modos vibratorios.

Estos primeros modos vibratorios nos señalarán el comportamiento de la bancada para deformación total. (basados en la superposición lineal de los primeros modos).

Del resultado se tendrán los lugares de máximo esfuerzo-deformación que deberán rigidizarse con cartelas.

La forma de modelar la bancada ha sido el comenzar por las formas más simples,; es así que se prepara el;

Modelo 1 (ver fig. 3.2 y 3.3), que consiste en un cajón estructural de planchas soldadas con la restricción de las bases de apoyo del modelo.

Después de aplicar la vibración libre por el programa FEM el modelo presenta los modos de vibración con sus respectivas frecuencias naturales y su máxima deformación, pero solo cualitativa.

Este Análisis Modal se repite para los modelos restantes ; considerando sólo los tres primeros modos en todos los casos, en el presente trabajo sólo se presentará el análisis del primer modo en las figuras señaladas.

Modelo 2 (ver fig. 3.4 y 3.5), al cajón estructural se le coloca el cabezal fijo y se observa el efecto rigidizador del cabezal fijo.

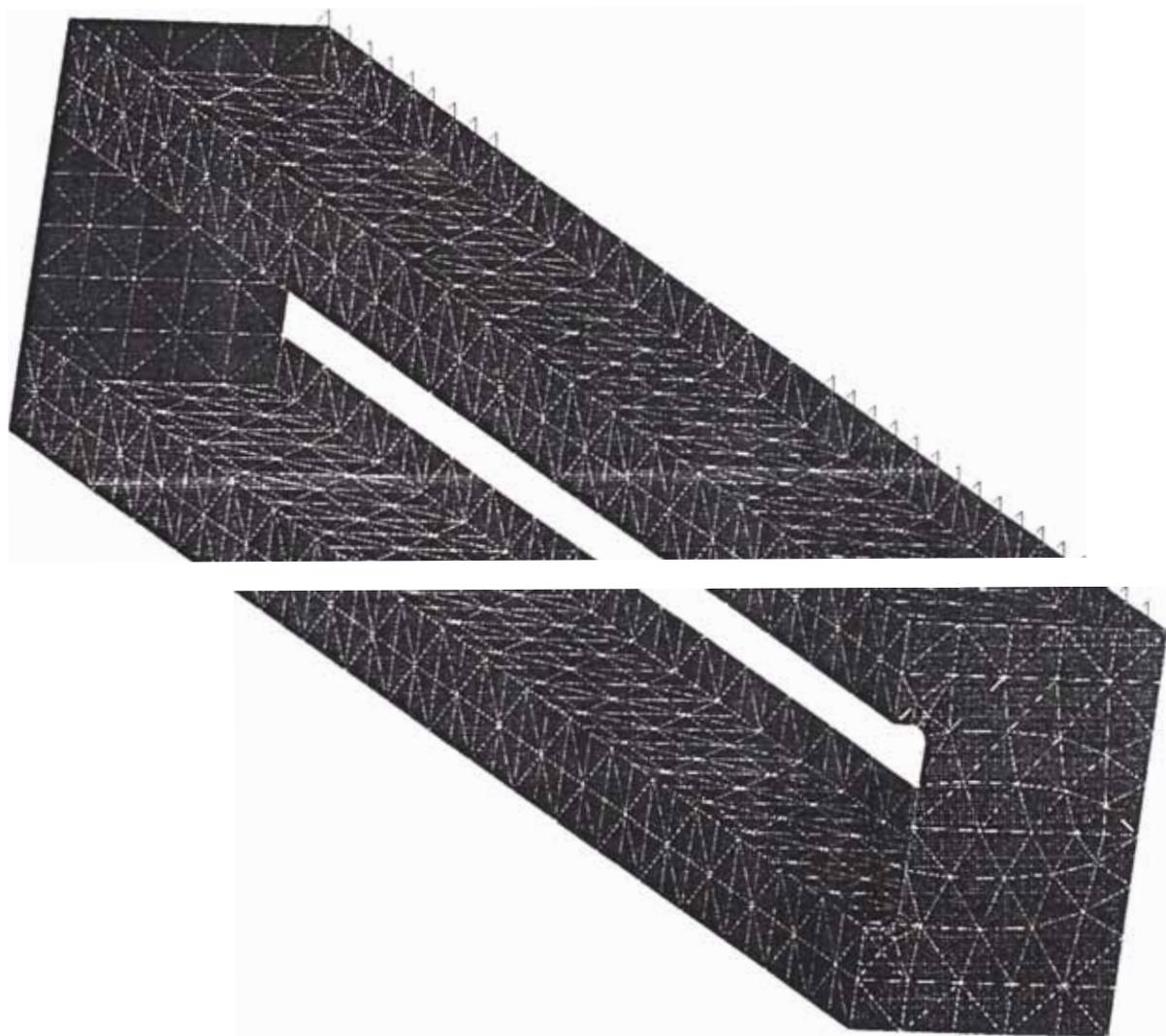
Modelo 3 (ver fig. 3.6 y 3.7), al modelo anterior se le han colocado cartelas perpendiculares a las guías o denominadas cartelas paralelas y además se le han colocado cartelas externas con la finalidad de rigidizar las guías exteriormente. Notamos que con estos cambios la rigidez ha mejorado, es decir aumenta la frecuencia natural ($f = 5,94$ Hz)

Modelo 4 (ver fig. 3.8 y 3.9), al modelo 2 se le han colocado cartelas diagonales (90° entre cartelas) y se observa que la rigidez y la frecuencia natural es algo mejor a la del modelo 3, ya que se tiene una frecuencia natural de 8,5 Hz.

Un comentario sobre el análisis modal; es que nos señala los modos influyentes sobre los que se recomienda acartelar. Observando nuevamente; en el modelo 3 se han colocado las cartelas en los lugares críticos presentados por el análisis modal, pero en el modelo 4 la nervadura diagonal se le ha colocado por formas constructivas. A pesar de este último detalle, es pertinente señalar que en este análisis el modelo 4 tiene mejor respuesta que el modelo 3.

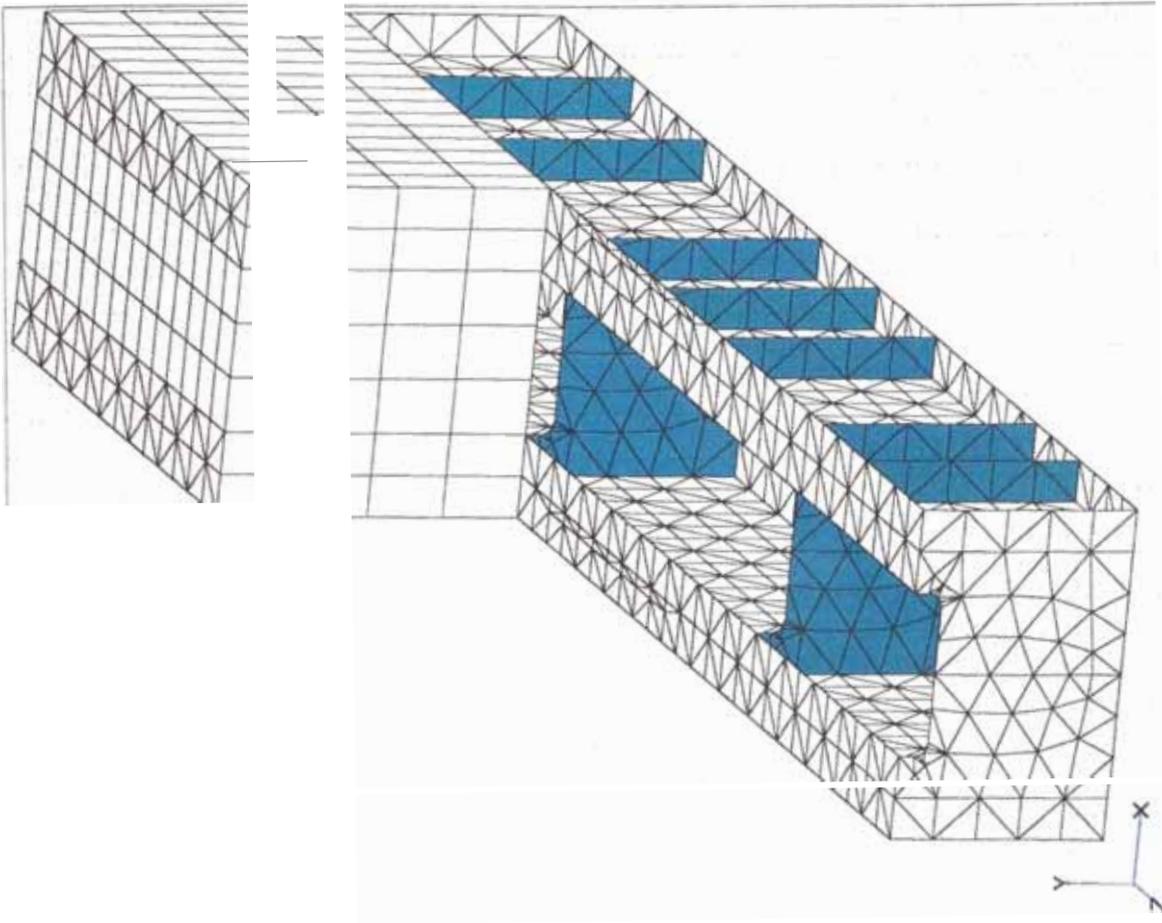
BANCADA SIN CARTELAS

MODELO 1

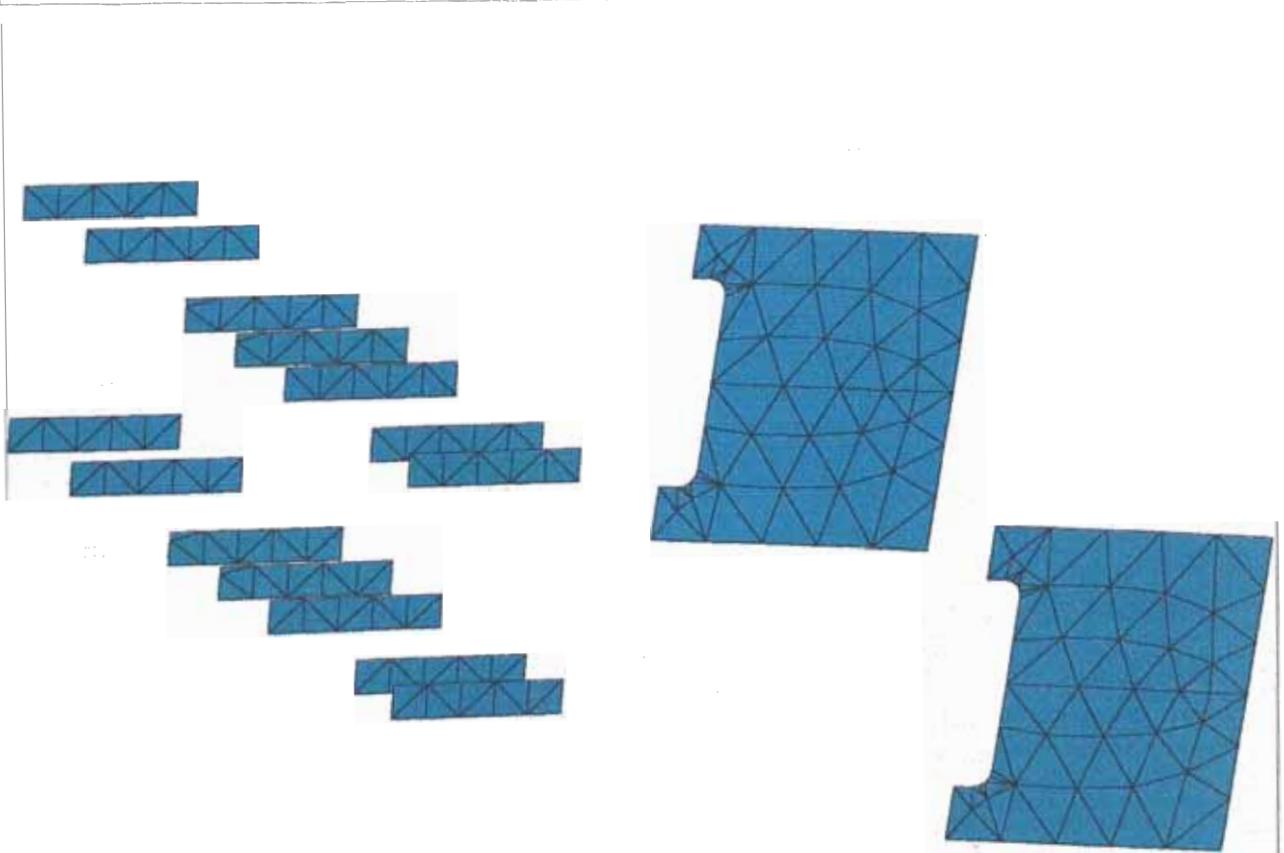


Fi . 3.2

BANCADA CON CARTELAS PERPENDICULARES CABEZAL FIJO



A DELO 3



Fi . 3.6

BANCADA ACARTELADA PERPENDICULARMENTE CON CABEZAL F.I.JO

MODELO 3 - PRIMER MOD0

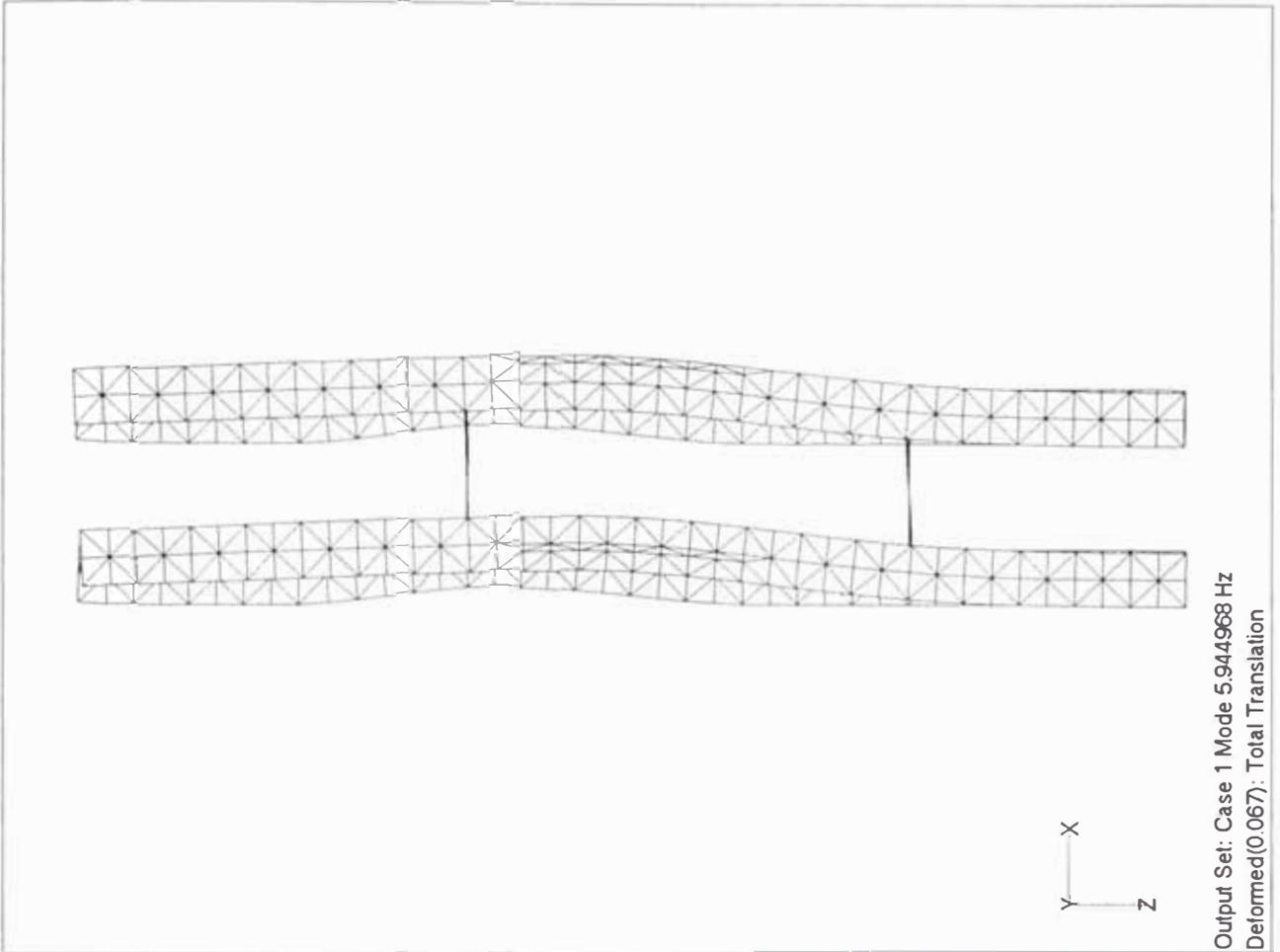
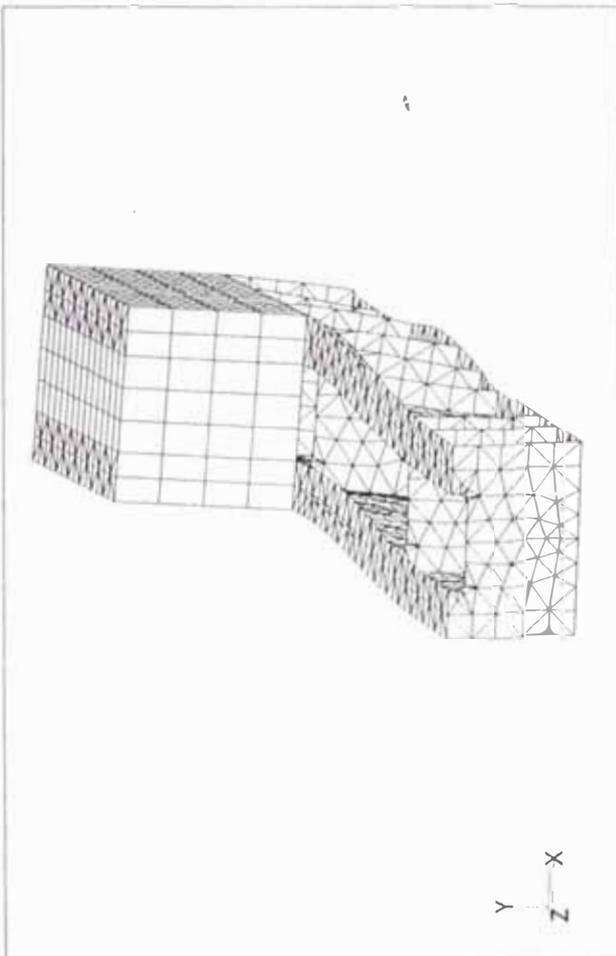
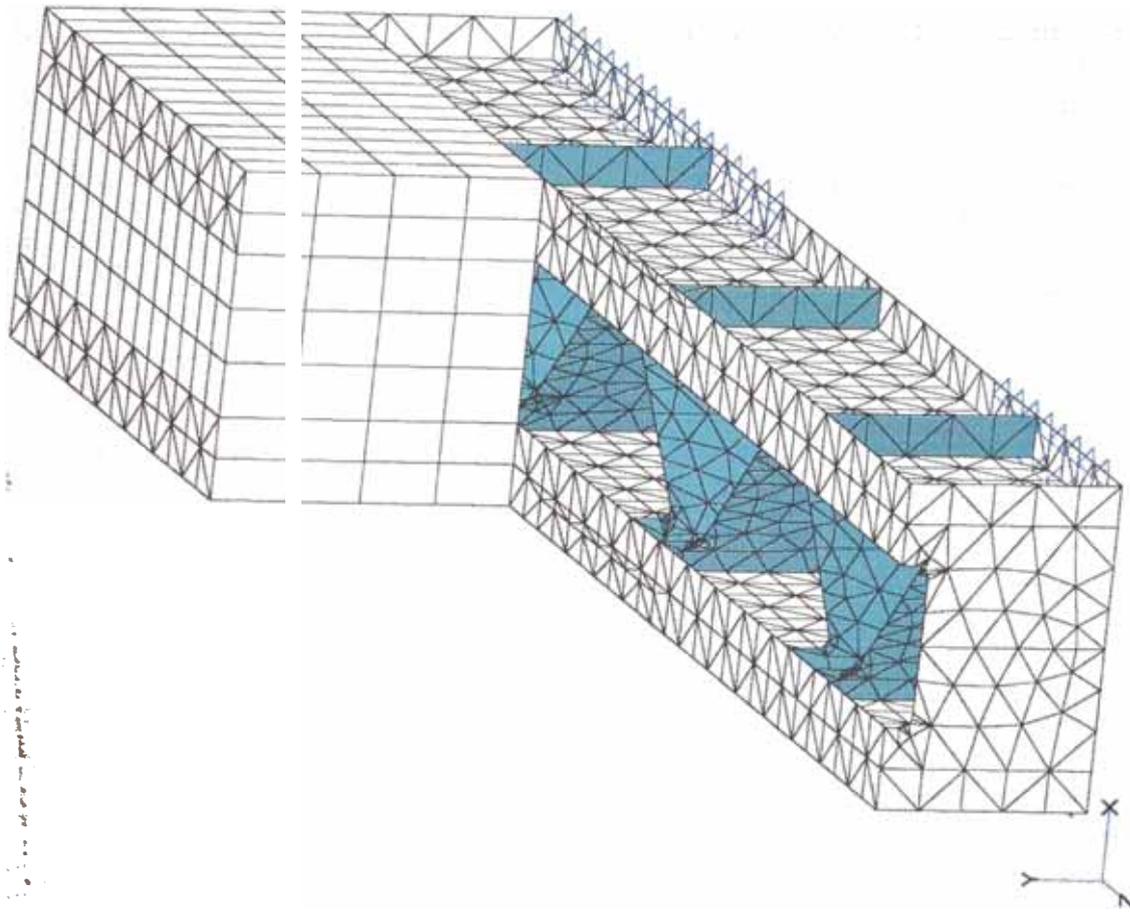
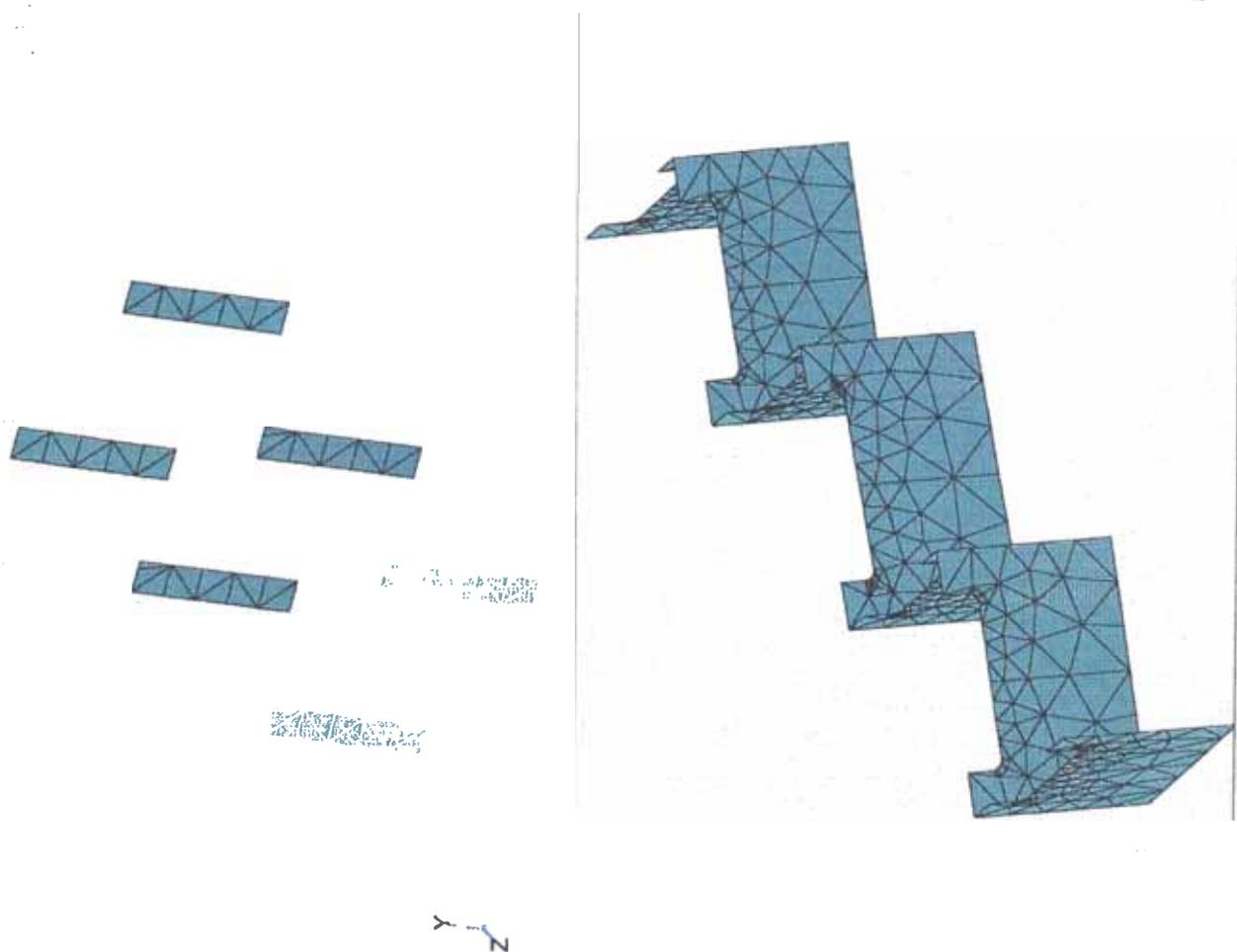


Fig. 3.7

BANCADA CON CARTELAS DIAGONALES CABEZAL FIJO



MODELO 4



Fi . 3 8

4. Análisis estático de las bancadas por FEM

La bancada del torno debe ser longitudinalmente rígida, generalmente las solicitaciones a la que está sometida son asimétricas ; produciéndose un momento torsor debido a los diferentes esfuerzos flectores que actúan en la parte anterior y posterior del alma de la misma. De esta forma se produce una deformación respecto a su eje de simetría.

La sección de la bancada debe ofrecer una rigidez elevada. Las secciones transversales abiertas parcial y totalmente, disminuyen el momento de inercia ; sin embargo, se usan para la bancada de los tornos porque facilitan la evacuación de la viruta y del medio refrigerante.

En general la bancada y todas las demás partes del torno deben construirse suficientemente rígidas, para que las variaciones de forma, que se origina bajo el efecto de las fuerzas dinámicas y estáticas, así como de los movimientos, no excedan los límites admisibles. Las deformaciones se manifiestan en virtud de cargas y flexiones, o también a consecuencia de vibraciones.

La bancada especial hecha de plancha soldada deberá ser sometida a un recocido para bajar tensiones residuales después de la soldadura. Para la bancada es necesario determinar la rigidez estática, la cual se define bajo la acción de la fuerza F y con la deformación h ,

mediante el coeficiente de rigidez $k = \frac{F}{h} (N / mm)$. (también las frecuencias naturales

son parámetros que determinan la rigidez, $\omega = \sqrt{k/M}$)

Las solicitaciones a tracción o compresión puras aparecerán rara vez; por lo general, la bancada esta sometida a un conjunto de solicitaciones.

Cuando el THD esté funcionando se encontrará una deformación estática total de la máquina, la cual se compone de las deformaciones parciales, (entre herramienta y pieza, entre husillo y cabezal fijo, entre porta herramienta y carros auxiliares, entre carros auxiliares y bancada entre bancada y bases, finalmente entre bancada y cabezal móvil); luego la deformación total de la máquina no depende únicamente de la rigidez de la bancada, sino también de la rigidez estática de cada una de sus partes componentes y de las uniones entre las partes. En general, es la suma de todas las deformaciones; donde la bancada absorbe cerca del 60% de ella, porque tiene una forma especial, finalmente la determinación de las deformaciones de las otras partes sólo es posible en casos excepcionales según los métodos tradicionales (datos experimentales medidos por ensayos sobre prototipos); ver tabla 4.1 [3].

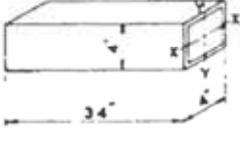
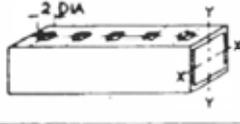
TYPE OF STRUCTURAL ELEMENT	TORSION		BENDING ABOUT X-X		BENDING ABOUT Y-Y	
	STIFFNESS 10^6 LB IN/RAD	STIFFNESS - TO -WEIGHT RATIO 10^4 LB IN/RAD/LB	STIFFNESS 10^4 LB/IN	STIFFNESS - TO -WEIGHT RATIO 10^4 LB/IN/LB	STIFFNESS 10^4 LB/IN	STIFFNESS - TO -WEIGHT RATIO 10^4 LB/IN/LB
	2.9	10.2	0.2	0.7	0.2	0.7
	2.2	8.1	0.14	0.53	0.18	0.67
	0.75	2.7	0.065	0.23	0.14	0.48

Tabla 4.1

En la actualidad con la ayuda del Análisis Modal y del Método de los Elementos Finitos es posible construir un modelo, aplicar el análisis modal y ensayarlo (carga estática o carga dinámica) una vez discretizado. Estos resultados se confrontan con la información técnica obtenida por los ensayos sobre prototipos, para comprobar si la bancada cumple o no con los datos técnicos. Ver tabla 4.2.

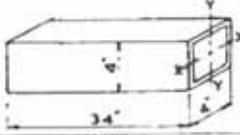
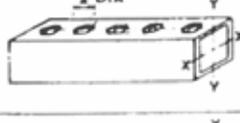
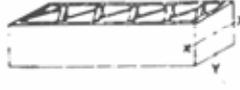
TYPE OF STRUCTURAL ELEMENT	TORSION		BENDING ABOUT X-X		BENDING ABOUT Y-Y	
	FIRST NATURAL FREQUENCY C/S	DAMPING RATIO $\times 10^{-3}$	FIRST NATURAL FREQUENCY C/S	DAMPING RATIO $\times 10^{-3}$	FIRST NATURAL FREQUENCY C/S	DAMPING RATIO $\times 10^{-3}$
	220	19	620	115	620	11.5
	200	14	600	8.3	590	7.7
	135	14	510	4.5	530	3.6

Tabla 4.2

Para el análisis estático influye la información del diámetro, por esta razón es que se hace el análisis de deformación (x, y, total) para los dos casos extremos, así como el análisis de esfuerzos equivalente (según la Teoría de la Máxima Energía de la Distorsión ; Von Misses) para los mismos diámetros. El estado de cargas sobre la bancada para los dos tipos de nervadura se muestran en las figuras N° 4.1 y N° 4.2 (ver pag. 47 y 48).

a) Bancada de nervios paralelos

Caso Ø 80 (Ver fig. 4.3 y N°4.4). Según el tipo de trabajo, el caso también es cuando el tocho está en voladizo; en donde presenta una deflexión máxima de 44 μm en la zona de la guía izquierda (alero externo ver fig. 4.3) lo cual va acompañado de un acortamiento del nervio corto exterior, es indudable que esta es la zona crítica por el tipo de trabajo, aún así esta deflexión es menor que la admisible de 576 μm [10] y el esfuerzo equivalente en esta zona es de 8,87 N/mm^2 el cual está muy por debajo del esfuerzo de fluencia (σ_F) del material ($\sigma_F = 240 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, acero de construcción St-37), (Ver fig. 4.4).

Caso Ø 300 (Ver fig. N°4.5 y N°4.6). Por su funcionamiento, el caso crítico es cuando el tocho está en voladizo, presentando una deflexión máxima de 33 μm cerca a la zona descrita anteriormente (ver caso Ø 80) pero en una zona de mayor cobertura (ver fig. 4.5). El esfuerzo también se desarrolla sobre la zona, pero esta vez su mayor actuación no está sobre el ala de la estructura I, sino sobre el alero y a todo lo largo de la sección transversal con un valor de 7,1 N/mm^2 bastante menor que el σ_F del material (ver fig. 4.6).

b) Bancada de nervios diagonales

Caso Ø 80 (Ver fig. N°4.7 y N°4.8). Para características de trabajo similares a la anterior se tiene una deflexión máxima de 39 μm en la zona de la guía izquierda (alero externo ver fig. 4.7), además ahí no hay nervio diagonal por la forma constructiva y el nervio más cercano a la zona se alarga cerca de 25 μm .

El esfuerzo sobre la zona es de 3,5 N/mm^2 en el alero y de 6,5 N/mm^2 en el alma de la estructura I de la bancada (ver fig. 4.8).

Todos los valores actuantes son menores que los valores admisibles del material para rigidez estática.

Caso Ø 300 (ver fig. N°4.9 y N°4.10) Ante las características de trabajo similares se tiene una deformación total máxima de 37 μm en la misma zona de guía izquierda (alero externo. ver fig. N°4.9) el nervio diagonal más cercano a la zona deforma 22 μm

El esfuerzo equivalente en la zona acumulada (alero externo, ver fig. N°4.10) es de $3,5 \text{ N/mm}^2$ y el valor máximo se encuentra en el alma de la estructura I de la bancada, siendo de $6,6 \text{ N/mm}^2$; todos estos valores son menores que los admisibles del material para la rigidez estática.

Para finalizar, el análisis de la carga estática da como resultado que; mecanizar a $\varnothing 80$ es más crítico que a $\varnothing 300$, porque las fuerzas de corte sobre tochos delgados producen mayores momentos sobre las guías, lo cual exige mayores inercias resistivas de las secciones críticas en la zona de carros. Por otro lado comparando la forma constructiva de los nervios (paralelo y diagonal) se obtiene que la bancada de nervios diagonal tiene una forma constructiva más compleja que la bancada de nervios paralelos. (diseño de uniones soldadas)

Una observación de los resultados nos indica que ambos modelos cumplen con la sollicitación estática, además este ensayo nos presenta los resultados del esfuerzo; lo cual señala que el diseño de la bancada será por deformación y no por resistencia.

BANCADA ACARTELADA PERPENDICULARMENTE CON CABEZAL FIJO

MODELO 4 - SISTEMA DE CARGAS Y RESTRICCIONES

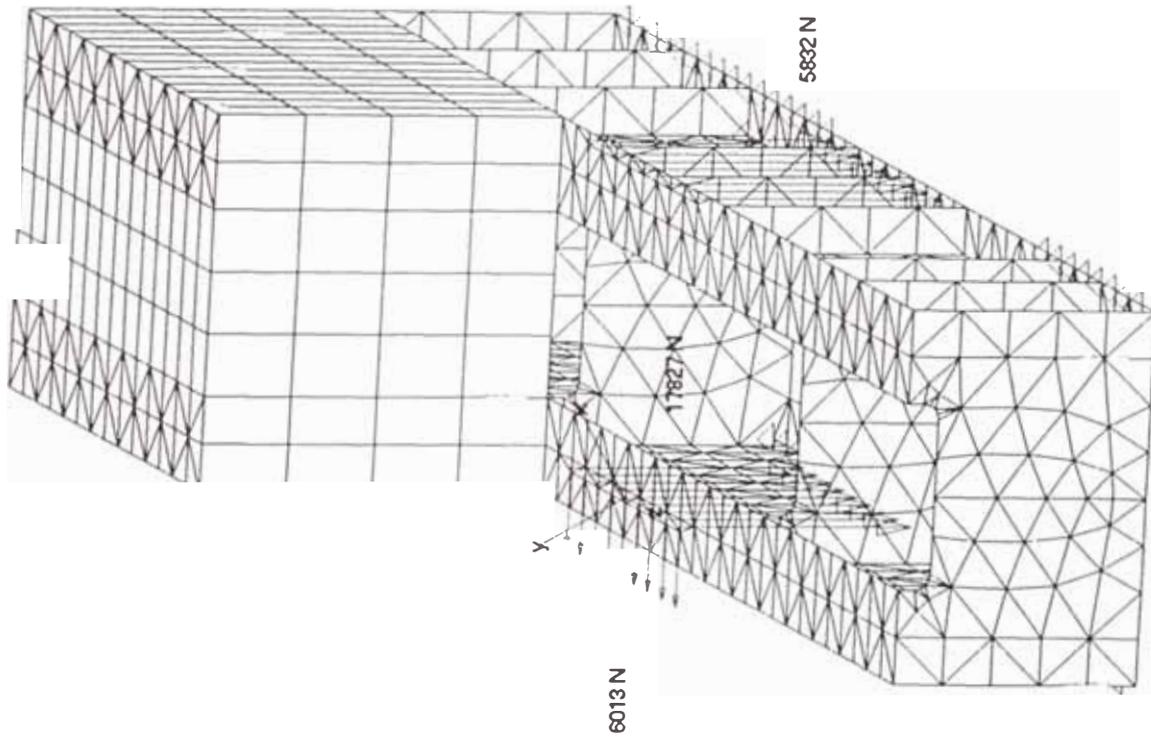
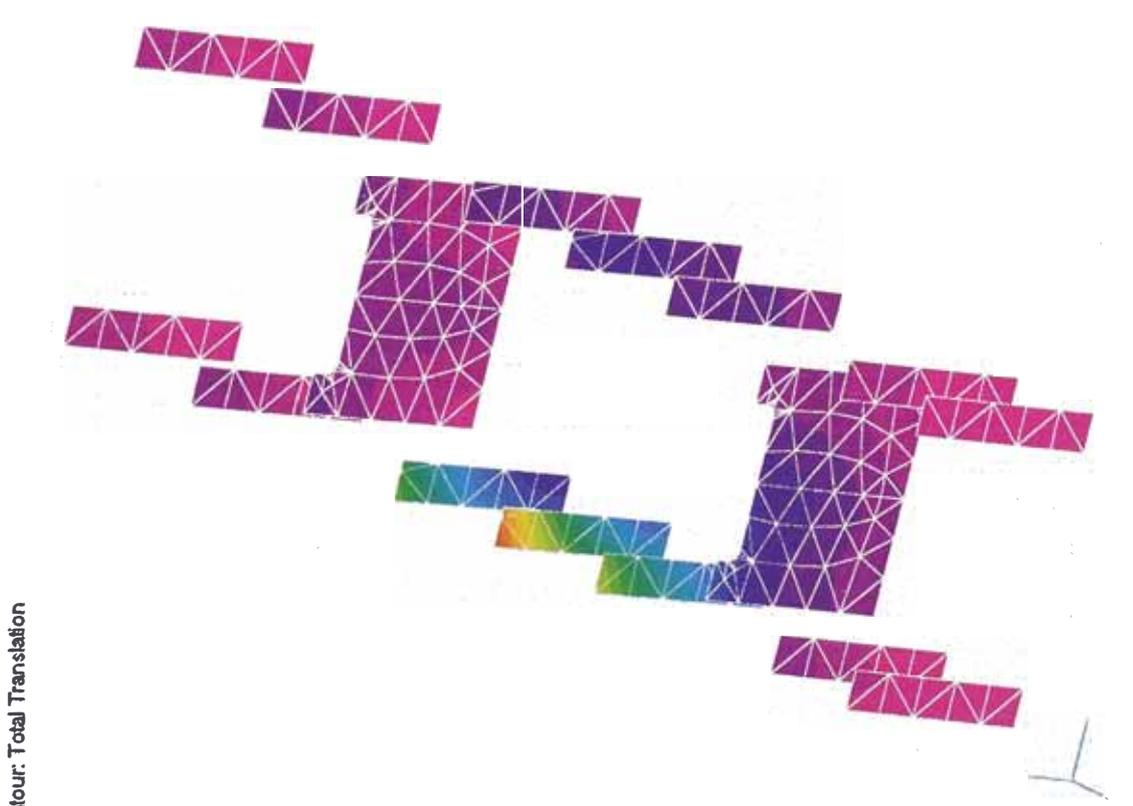


Fig. 4.1

MODELO 3 - CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS TOTALES

Output Set: CASO ESTÁTICO 80mm Dia.

Contour: Total Translation



CASO 80mm Dia.

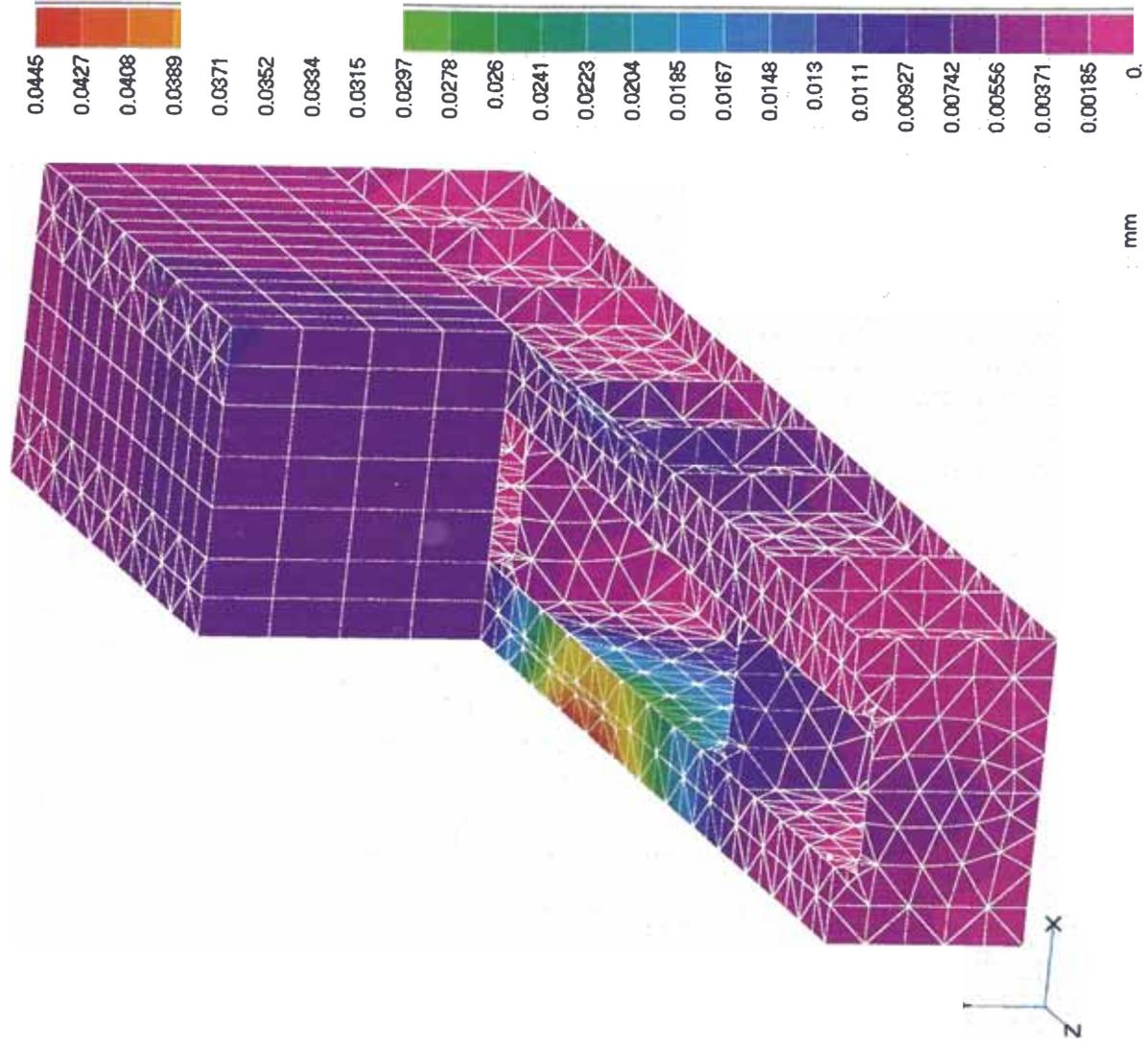
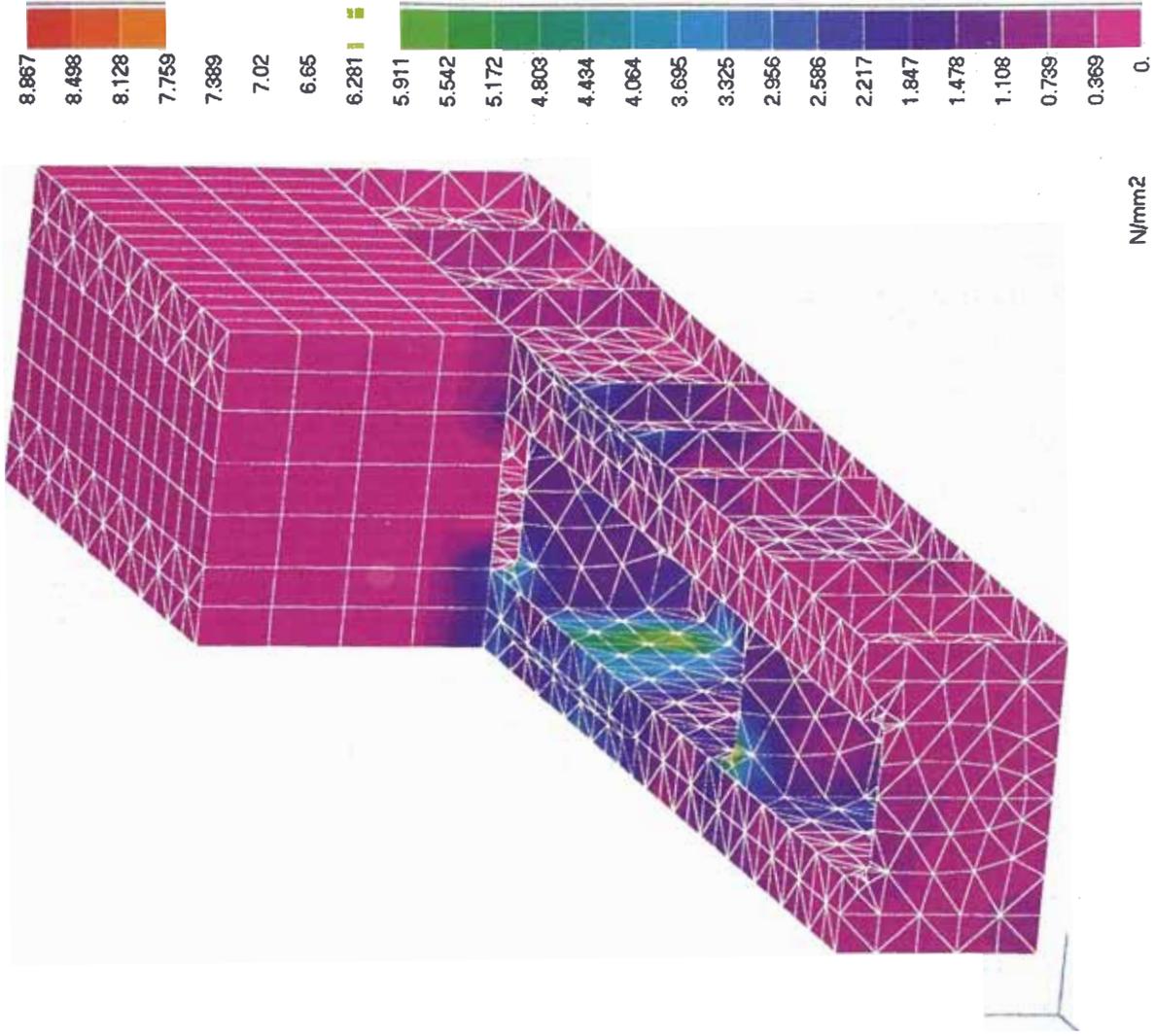


Fig. 4.3

CASO 80mm Dia.



MODELO 3 - ESFUERZO EQUIVALENTE DE VON MISES

Output Set: CASO ESTATICO 80mm Dia.
Contour: Plate Bot VonMises Stress

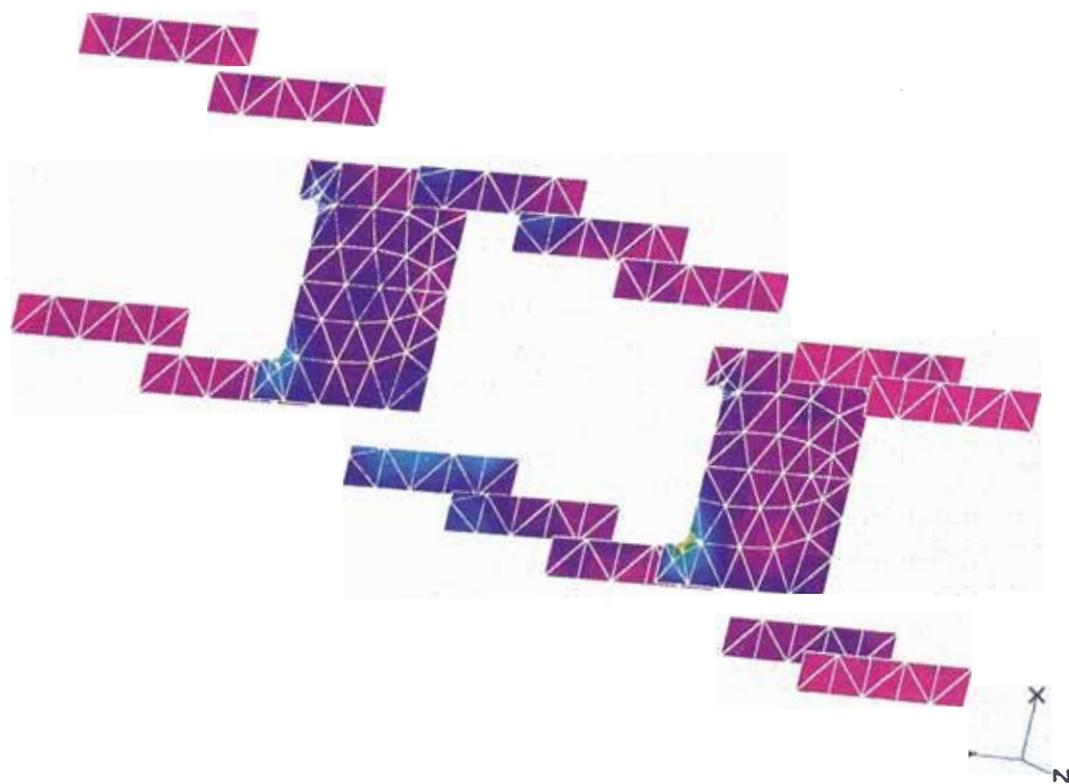
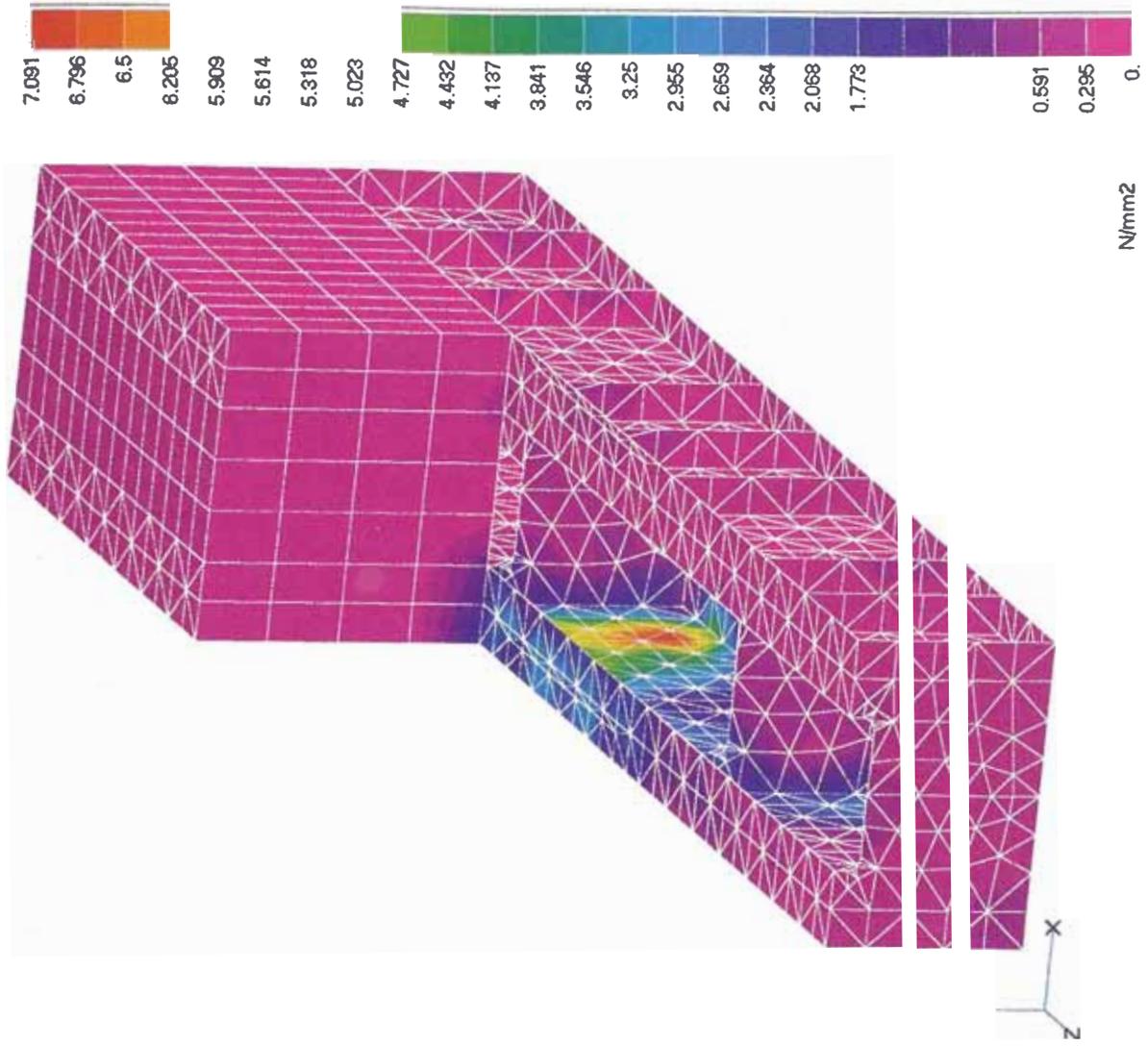


Fig. 4.4

CASO 300mm Dia.



MODELO 3 - ESFUERZO EQUIVALENTE DE VON MISES

Output Sat: CASO ESTÁTICO 300mm Dia.
Contour: Plate Bot VonMises Stress

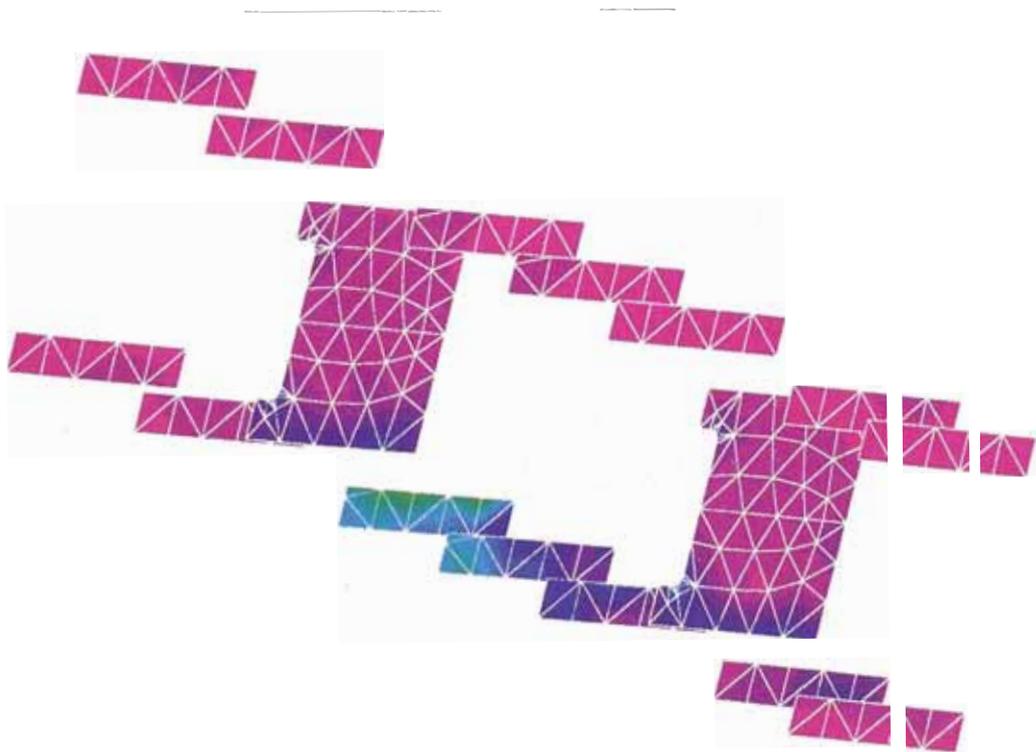


Fig. 4.6

MODELO 4 - CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS TOTALES

Output Set: CASO ESTÁTICO 80mm Dia.

Contour: Total Translation

CASO 80mm Dia.

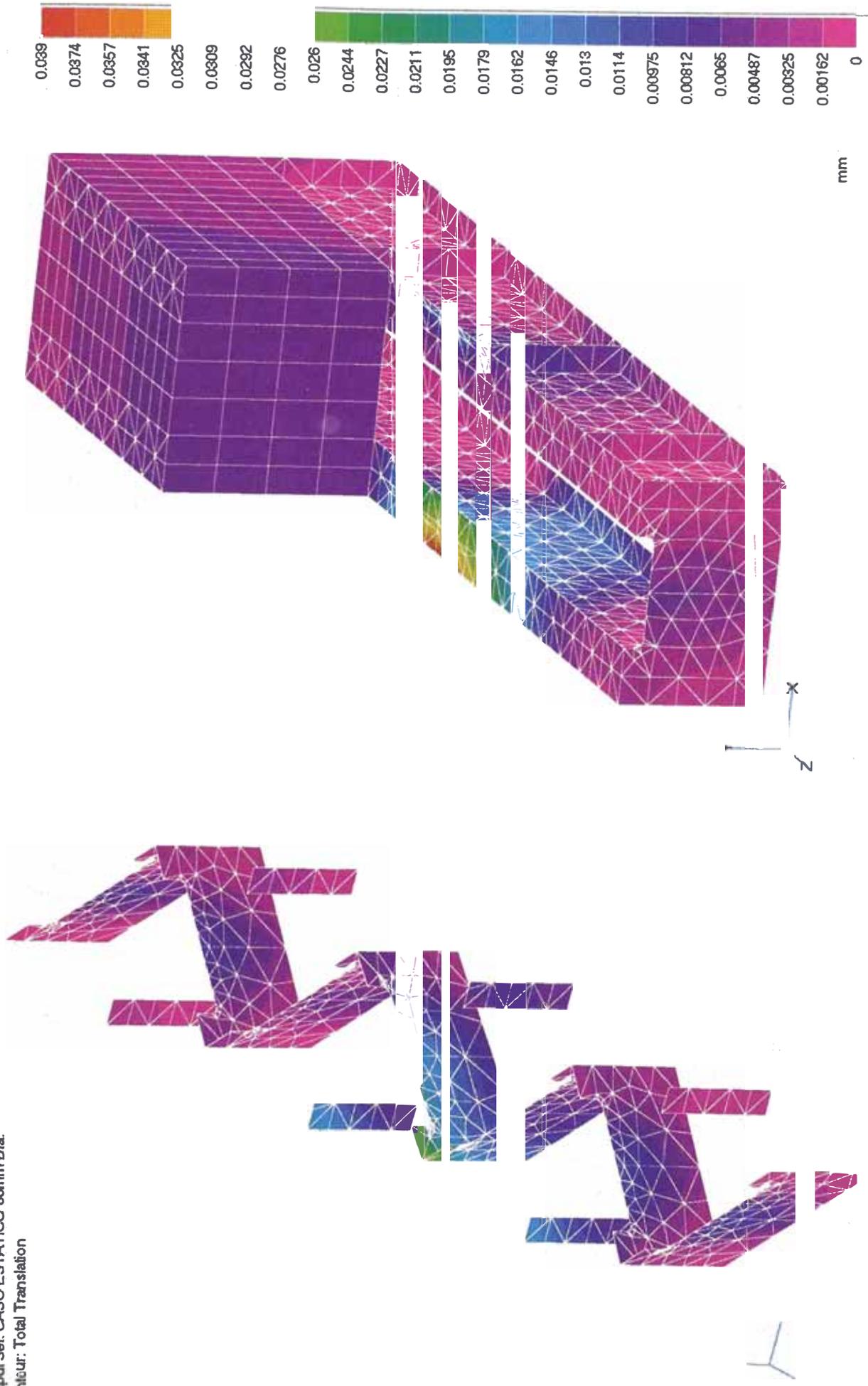
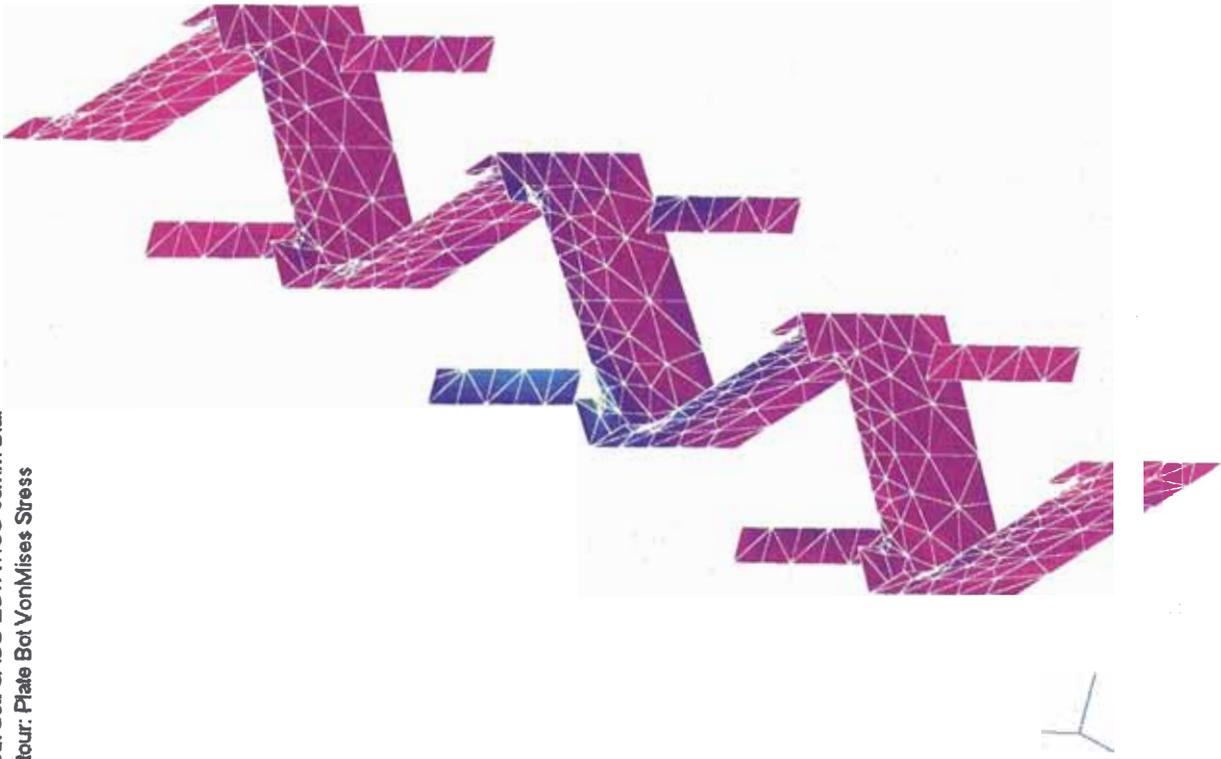


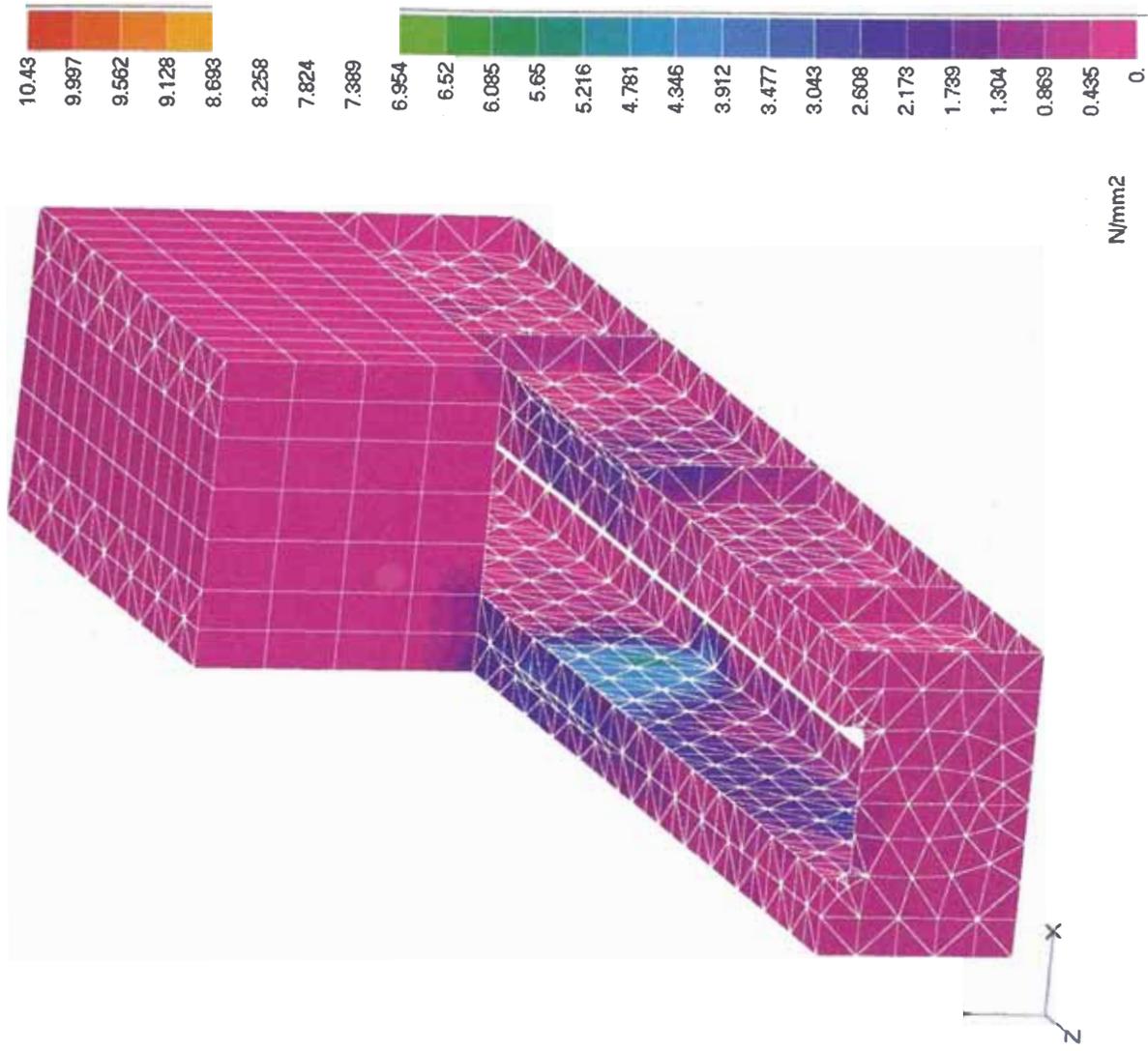
Fig. 4.7

MODELO 4 - ESFUERZOS EQUIVALENTES DE VON MISES

Output Set: CASO ESTÁTICO 80mm Dia.
Contour: Plate Bot VonMises Stress



CASO 80mm Dia.



N/mm²

Fig. 4.8

MODELO 4 - CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS TOTALES

Output Set: CASO ESTATICO 300mm Dia.

ur: Total Translation

CASO 300mm Dia.

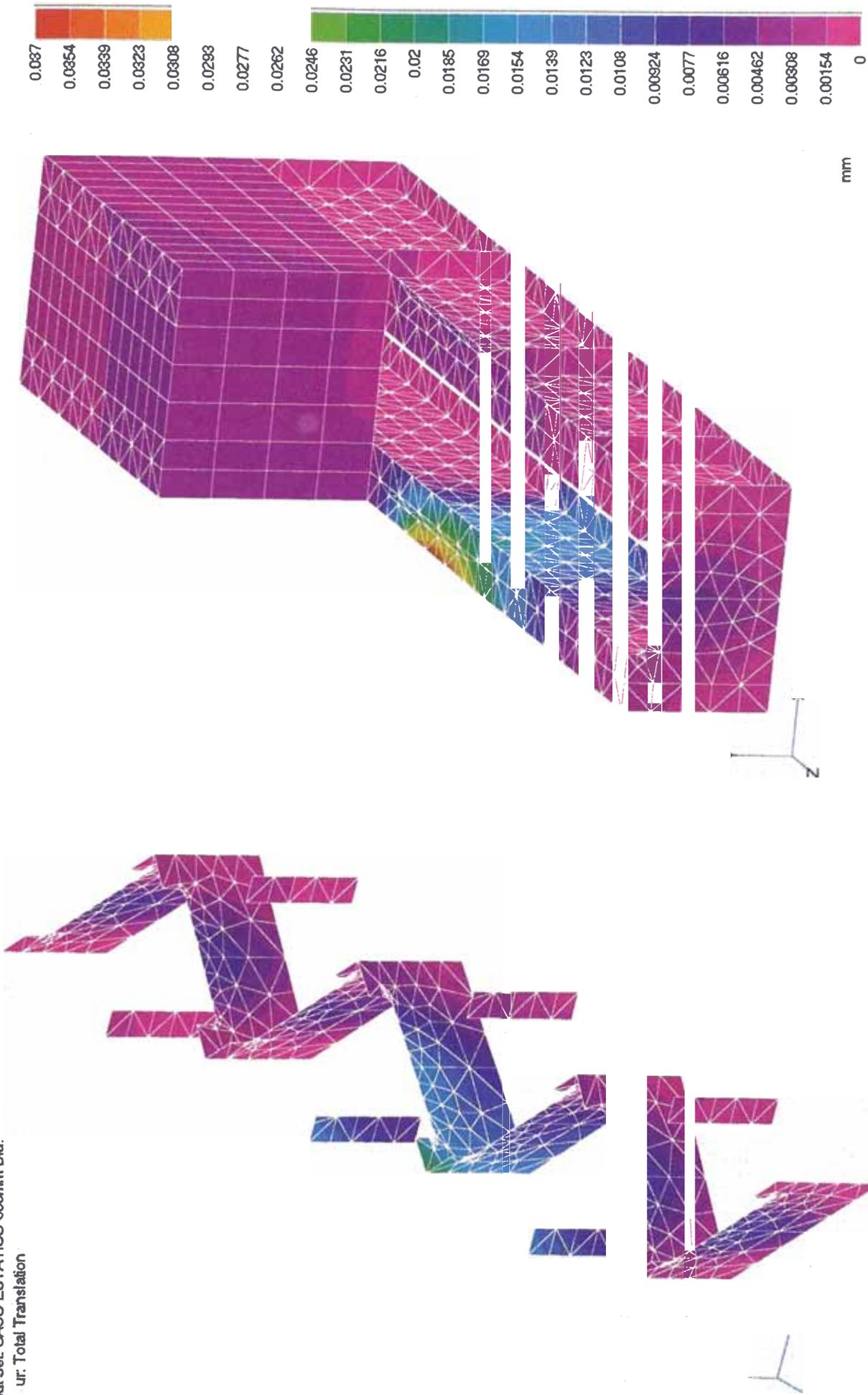


Fig. 4.9

MODELO 4 - ESFUERZOS EQUIVALENTES DE VON MISES

Output Set: CASO ESTÁTICO 300mm Dia.

Contour: Plate Bot VonMises Stress

CASO 300mm Dia.

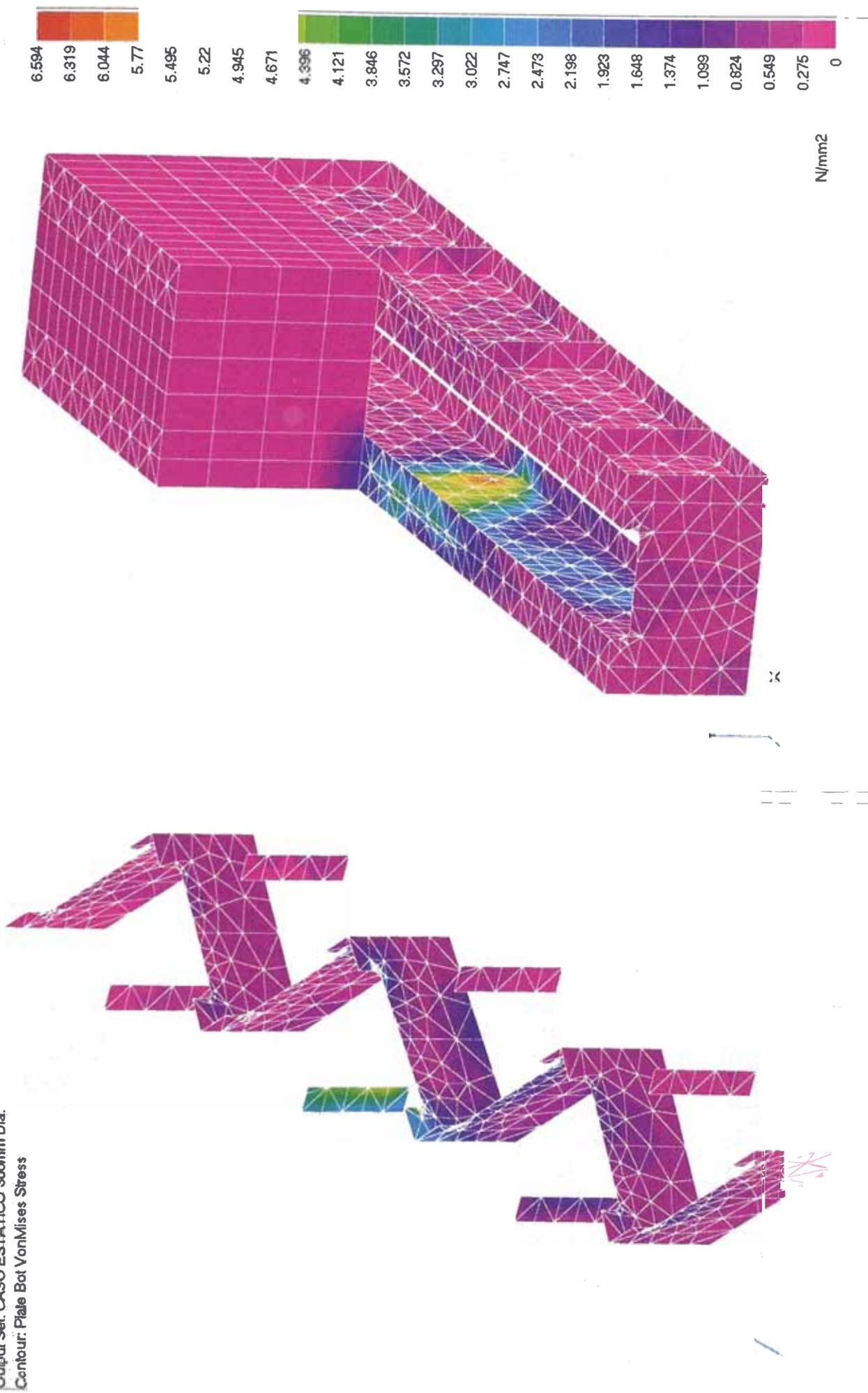


Fig. 4.10

5. Análisis dinámico de las bancadas por FEM

La teoría convencional del corte de metales estudia el proceso de mecanizado en régimen permanente, (sin vibraciones) pero la teoría de retemblado estudia el corte de los metales bajo régimen no permanente. (con vibraciones).

La diferencia entre los procesos de mecanizado se ve en la fig. 5.1.

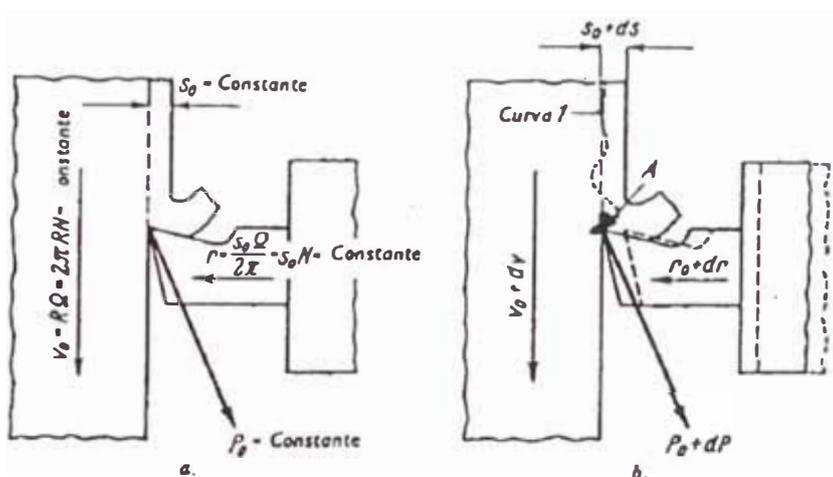


Figura 5.1

El efecto del proceso de corte sobre la estabilidad de la bancada del THD, no se ha considerado. Es evidente que el comportamiento dinámico de la bancada es importante, ya que el proceso de corte se mantendrá libre de perturbaciones si por ejemplo; la rigidez de la herramienta, la pieza y el accionamiento; son infinitamente grandes.

El elemento dinámico de la fuerza de corte dP actúa sobre el bastidor de la máquina haciéndole vibrar; esto provoca un cambio en la posición relativa de la arista de corte, lo que a su vez modifica dP .

La mayoría de las investigaciones [4] muestran que bajo condiciones de retemblado es probablemente uno de los siguientes sistemas vibratorios es el que realiza vibraciones autoinducidas:

- eje principal - pieza o eje principal - pieza - cabezal móvil.
- pieza
- herramienta

Sin embargo puede suceder que bajo condiciones de retemblado se excite la bancada en uno de sus modos de vibración (ver fig. 5.2).

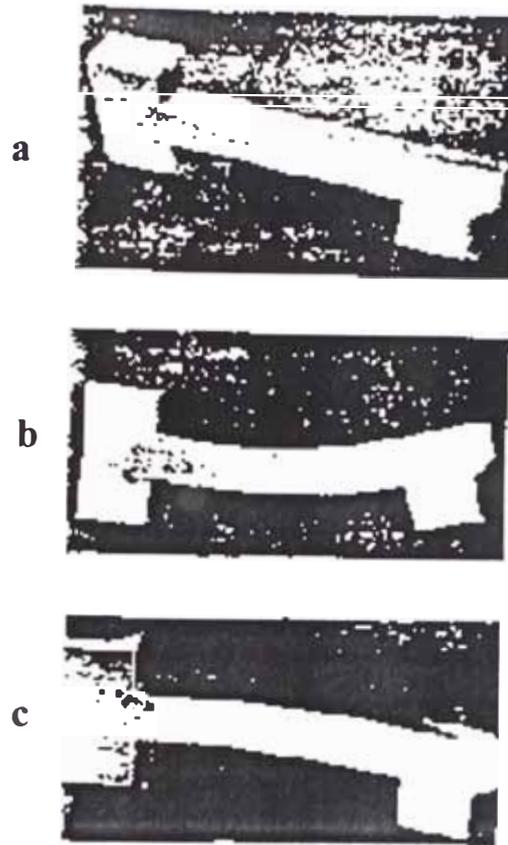


Figura 5.2

Tres modos de vibración de una bancada de torno (según Eisele y Sadowy [4]) :

- a**, primera vibración de torsión a $f_0 = 60 \text{ Hz}$;
- b**, primera vibración de flexión vertical a $f_0 = 90 \text{ Hz}$;
- c**, primera vibración de flexión horizontal a $f_0 = 150 \text{ Hz}$.

En los tornos el modo inferior de vibración es una vibración de balanceo de la bancada sobre la base, coincidiendo el eje de rotación con el eje longitudinal de la máquina.

La frecuencia natural de esta vibración depende, evidentemente, de la distribución de la masa de la bancada y de la rigidez de las bases, pero puede suponerse que es más o menos de la misma magnitud para máquinas diferentes.

El amortiguamiento de este modo es pequeño, pero, no obstante esto es muy difícil que se autoinduzca durante el retemblado.

Es indudable que se necesitarán de bases teóricas para una investigación experimental sistemática de la teoría elemental del retemblado en el proceso de torneado.

La rigidez dinámica; y con ella, la relación de vibración de una máquina, tiene mucha importancia entre otros factores, la amortiguación C . La capacidad de amortiguación de un material depende del coeficiente de elasticidad k , de las masas de las piezas en vibración, y sobre todo, de su construcción y formas de trabajar.

La rigidez dinámica es tanto mayor cuanto menor es la amplitud de vibración en el caso de resonancia, y cuando mayor es el producto del coeficiente de elasticidad por la amortiguación. Para determinar la relación de vibración total de una máquina, no se puede tener en cuenta, como en el caso de rigidez estática, el comportamiento de cada una de las partes de la máquina, sino que es necesario estudiar el efecto que se produce sobre la máquina completa.

El material más favorable para las maquinas herramientas es la fundición gris, debido a su superior capacidad de amortiguamiento frente al acero estructural. Estas ventajas son tan numerosas ; (menor desgaste, menor vibración, fabricación en serie, bajo costo), que las bancadas de las máquinas herramientas se construyen en forma de estructuras soldadas únicamente en casos especiales.(por ejemplo fabricación unitaria)

El análisis del comportamiento dinámico de los diseños estructurales continuos discretizados con " n " grados de libertad nodal se ha realizado mediante la superposición de modos, (cambio de base vectorial) y definir una hipótesis de amortiguamiento (o de disipación de energía) de la estructura discretizada en elementos finitos.

Con todo esto se desacoplan las ecuaciones de movimiento y se puede resolver analíticamente.

Otro método para encontrar la respuesta es el de la integración directa, los cuales no hacen transformación de las ecuaciones diferenciales de equilibrio dinámico nodal para resolverlas; que se basan en métodos DF (diferencias finitas).

Es importante señalar las dificultades que existen para obtener los coeficientes de la matriz de amortiguamiento $[C_E]$; los cuales son determinados experimentalmente (ver fig.5.3).

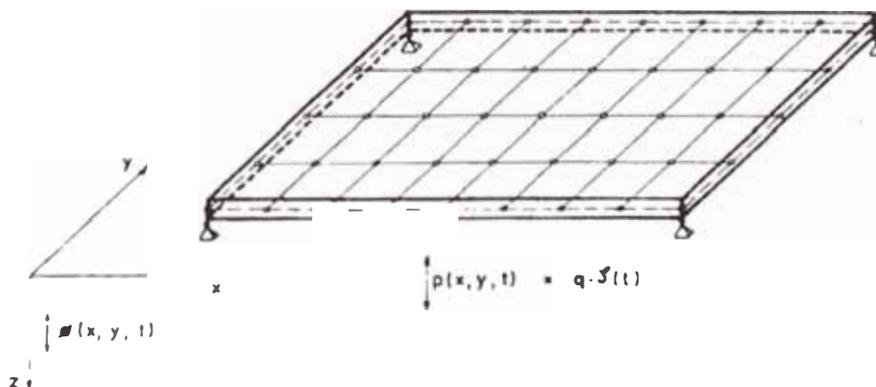


Figura 5.3

sin embargo el problema se puede resolver, introduciendo hipótesis aproximadas de amortiguamiento proporcional; sin afectar para nada la exactitud que se necesita generalmente en la obtención de la respuesta dinámica de las estructuras.

La hipótesis que maneja el programa Nastran 2.1, es la del amortiguamiento proporcional (Rayleigh) que supone que las relaciones de amortiguamiento ξ_i pueden ser conocidas experimentalmente mediante las adecuadas excitaciones modales [11]. Obtener la matriz de amortiguamiento es difícil por su carácter experimental suponiendo un amortiguamiento de Rayleigh proporcional:

$$[C_E] = \alpha_R [M_E] + \beta_R [K_E] \quad (5,1)$$

y en donde α_R y β_R son los coeficientes de Rayleigh. Con dicha matriz $[C_E]$ las condiciones de ortogonalidad se mantienen vigentes.

Estos coeficientes se pueden determinar si se conoce dos relaciones de amortiguamiento ξ_1 y ξ_2 reales que correspondan a dos frecuencias diferentes de vibración ω_1 y ω_2 . Conociendo α_R y β_R se pueden hallar las relaciones de amortiguamiento ξ para cualquier valor de ω ; y su expresión es:

$$\xi = \frac{\alpha_R}{2\omega} + \frac{\beta_R \omega}{2} \quad (5,2)$$

En la fig. 5.4. se presenta el amortiguamiento proporcional de Rayleigh como la suma de los proporcionales de masa y rigidez.

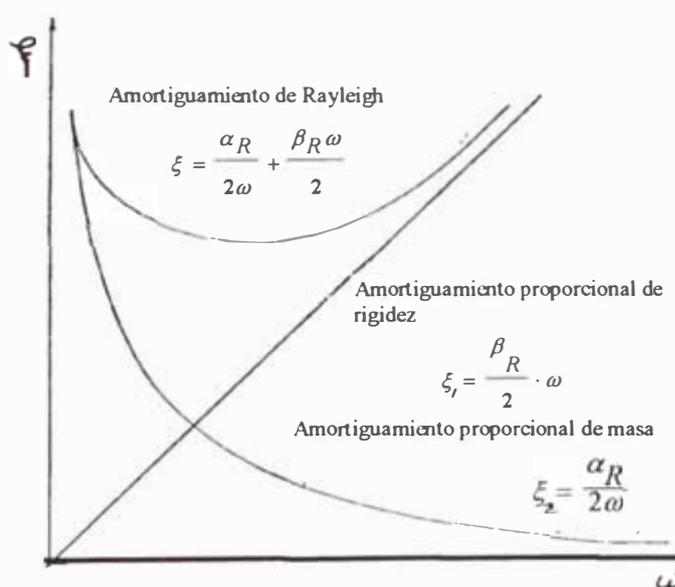


Figura 5.4

En la tabla 5.1, se presenta como referencia, los valores de la proporción de amortiguamiento crítico aceptados por la USNRC (United States Regulatory Commission) para el diseño de estructuras,[11].

— Elementos de acero soldado	0,02 a 0,04
— Elementos de acero atornillado o remachado	0,04 a 0,07
— Elementos de hormigón pretensado	0,02 a 0,05
— Elementos de hormigón armado	0,04 a 0,07
— Elementos de fábrica o de ladrillo	0,15 a 0,40

Tabla 5.1. Proporción de amortiguamiento crítico para distintos elementos estructurales

Para obtener la forma adecuada, es importante revisar el diseño de construcciones soldadas; para máquinas herramientas se recomienda el sistema de construcción en celdas con sus refuerzos adecuados, logrando con ello satisfacer las exigencias deseadas para la deformación de la máquina a pesar de su poco peso. Con el sistema constructivo abierto, en el que se disponen aberturas en las paredes de la estructura; se debilitan la resistencia estática y la resistencia a las vibraciones.

El conocimiento de esto es de mucho interés en la construcción de la bancada cuando están solicitados principalmente a torsión.

Para el análisis dinámico se ha seguido la siguiente metodología sobre el modelo 3 (2 nervios paralelos especiales) y modelo 4 (nervios diagonales especiales).

- 1) El mecanizado de $\varnothing 80$ y $\varnothing 300$; para definir el \varnothing crítico.
- 2) La frecuencia de trabajo $n_t < n_k \times 0,8$ y $n_t > n_k \times 1,2$ (para evitar resonancia) durante un tiempo en donde se logre estabilizar la respuesta del ensayo, siendo n_k la frecuencia crítica del sistema.
- 3) Determinación de la deformación máxima en la guía y en el nervio, durante el mecanizado.

Luego se obtienen los primeros ensayos para las cinco frecuencias más bajas, que representan 5 velocidades de trabajo de THD que se muestran en la tabla 5.2 .

Nº velocidades reales del tor no horizontal de desbaste	min^{-1}	Nº velocidades reales del tor no horizontal de desbaste	min^{-1}
n_1	34	n_7	134
n_2	40	n_8	157
n_3	54	n_9	212
n_4	67	n_{10}	262
n_5	79	n_{11}	308
n_6	106	n_{12}	416

Tabla 5.2

La idea inicial ha sido observar el progreso de las deformaciones para un mecanizado sobre los diámetros límites de los tochos y también para las diversas velocidades, siendo la velocidad $n_{12} = 416 \text{ min}^{-1}$ la más alta del THD.

El ensayo se realizo para la frecuencia $f_{12} = 34,85 \text{ Hz}$, la cual hizo que el modelo 3 necesitara llegar a mostrar 82 modos de vibración ; en el presente ensayo se han tomado sólo 33 modos de vibración que resultaron los de mayor influencia (proyección, frecuencia, tiempo)sobre las guías y nervios, por el método de superposición de modos se obtuvo lo siguiente :

Modelo 3

Para $\varnothing 80 \text{ mm}$. (fig. N° 5,5)

Nodo crítico # 497 (zona de carros, guía izquierda en el borde), después de hacer un barrido de 1562 nodos en un tiempo de 0,02 seg.

El nodo # 497 presenta un desplazamiento total de $21 \mu\text{m}$ durante un tiempo muy corto, para luego estabilizarse en un tiempo de 0,66 seg con un desplazamiento total de $6 \mu\text{m}$.

Para $\varnothing 300 \text{ mm}$ (fig. N° 5,6)

Nodo crítico # 513 (zona de carros, guía izquierda en el borde), condiciones idénticas de barrido.

El nodo # 513 presenta un desplazamiento total de $28 \mu\text{m}$ durante un tiempo muy corto, para luego estabilizarse en un tiempo de 0,66 seg con un desplazamiento total de $8 \mu\text{m}$.

Modelo 4

Para el modelo 4, la frecuencia $f_{12} = 34,85 \text{ Hz}$ hizo que el modelo mostrara 128 modos de vibración, pero para el ensayo se han tomado sólo 72 modos que resultaron los de mayor influencia (proyección, frecuencia, tiempo) sobre las guías y nervios ; por el método de superposición de modos se obtuvo lo siguiente

Para $\varnothing 80 \text{ mm}$ (fig. N° 5,7)

Nodo crítico # 102 (zona de carros, guía izquierda en el borde), después de hacer un barrido de 1825 nodos en un tiempo de 0,02 seg.

El nodo # 102 presenta un desplazamiento total de $11 \mu\text{m}$ durante un tiempo muy corto, para luego estabilizarse en un tiempo de 0,42 seg con un desplazamiento total de $5 \mu\text{m}$.

Para $\varnothing 300 \text{ mm}$ (fig. N° 5,8)

Nodo crítico # 1236 (zona de carros, guía izquierda en el borde), condiciones idénticas de barrido.

El nodo # 1236 presenta un desplazamiento total de $21 \mu\text{m}$ durante un tiempo muy corto, para luego estabilizarse en un tiempo de 0,5 seg con un desplazamiento total de $10 \mu\text{m}$.

De todo esto se concluye que los modelos 3 y 4 cumplen con las deformaciones admisibles para el análisis dinámico, más adelante se hará un análisis de resultados.

FRECUENCIA DE TRABAJO 34.85 HZ 80mm Dia

ANÁLISIS DINÁMICO

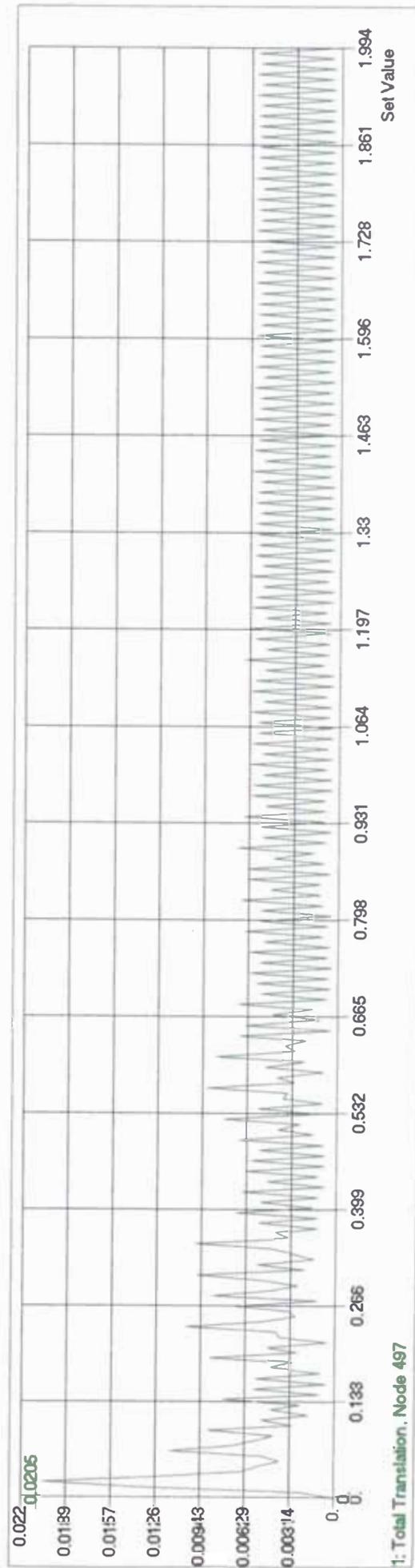
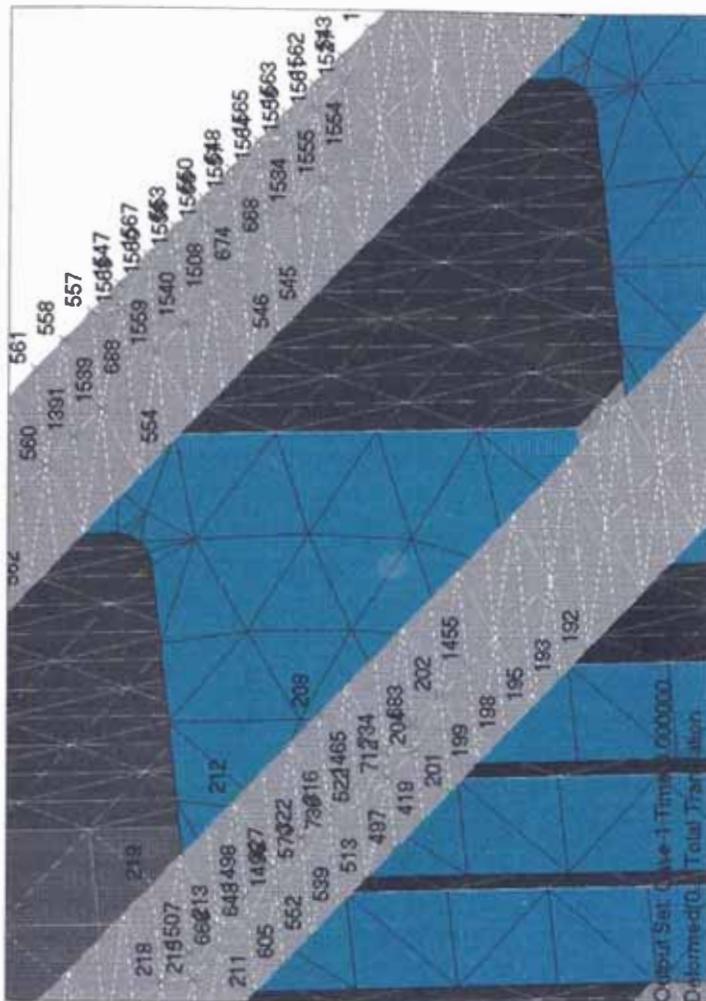
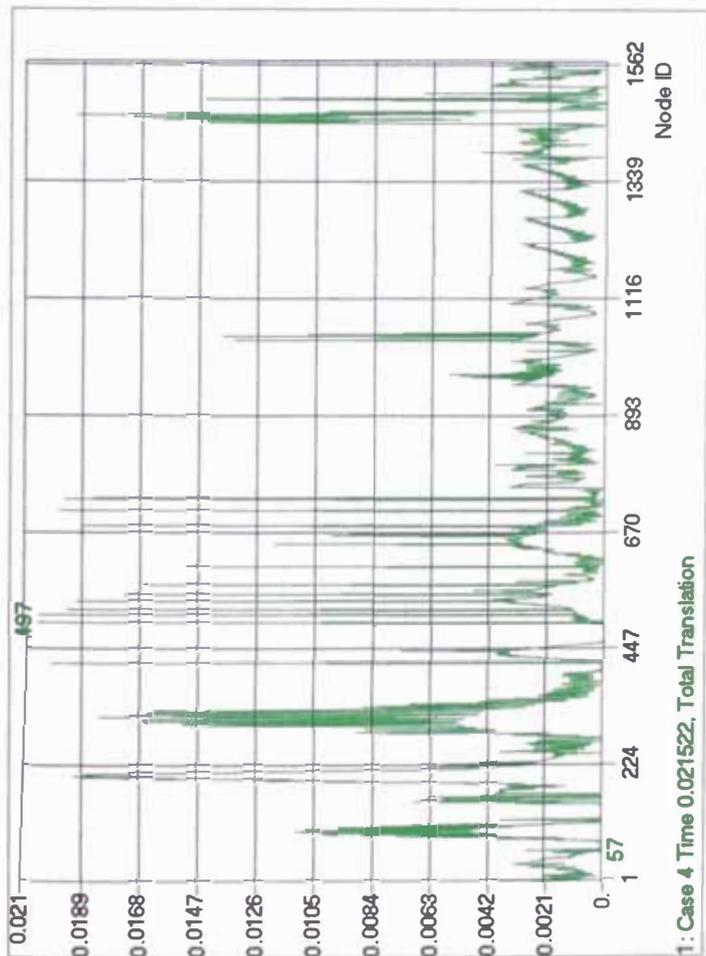


Fig. 5.5

FRECUENCIA DE TRABAJO 34.85 HZ 300mm Dia

ANÁLISIS DINÁMICO

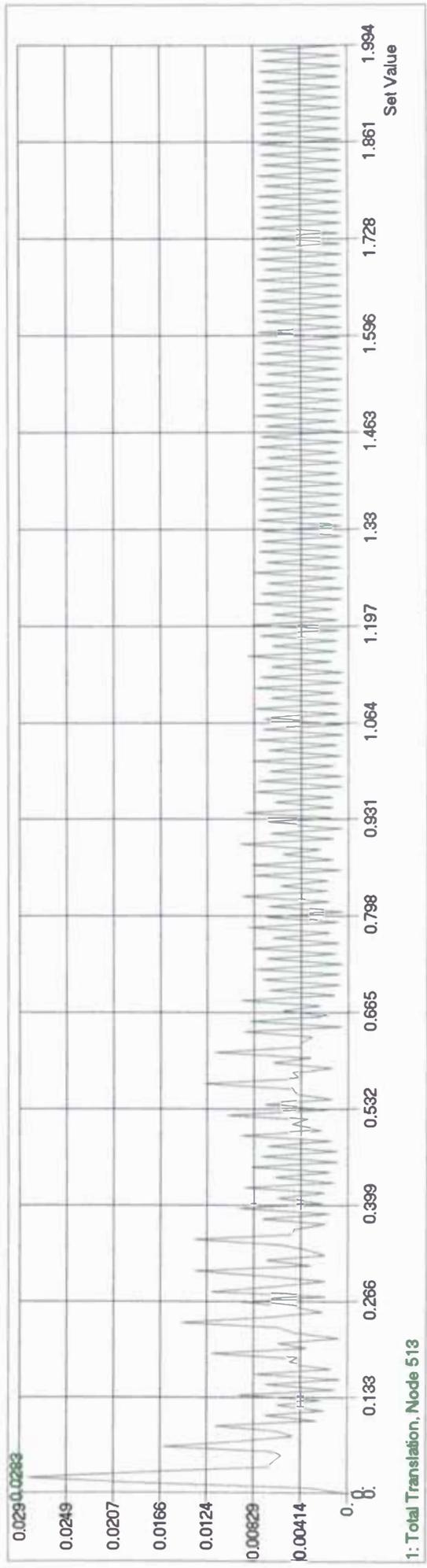
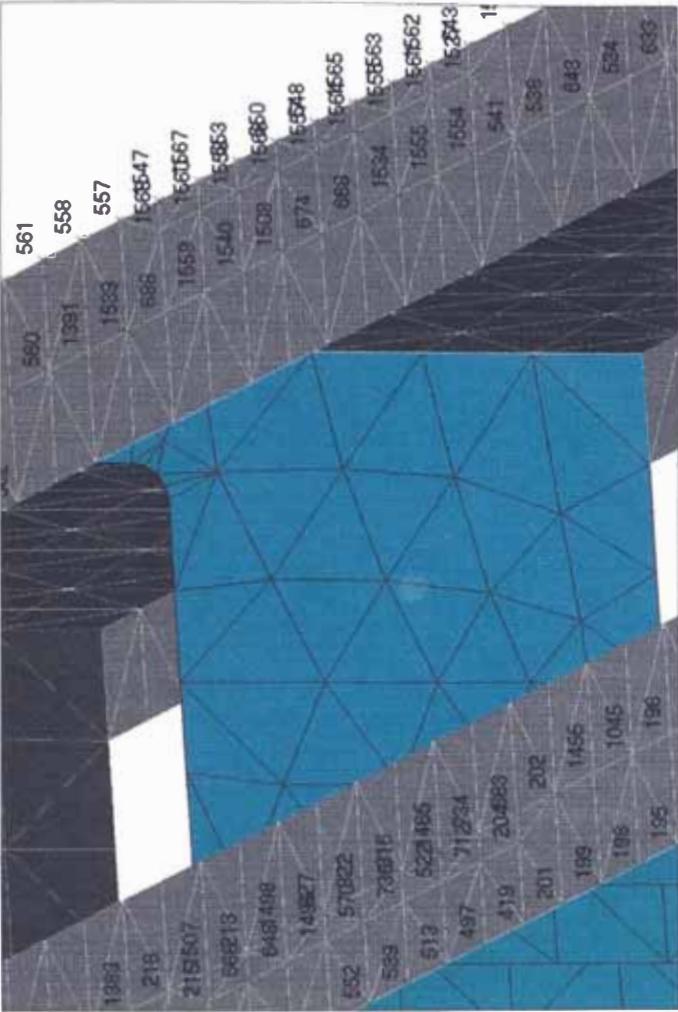
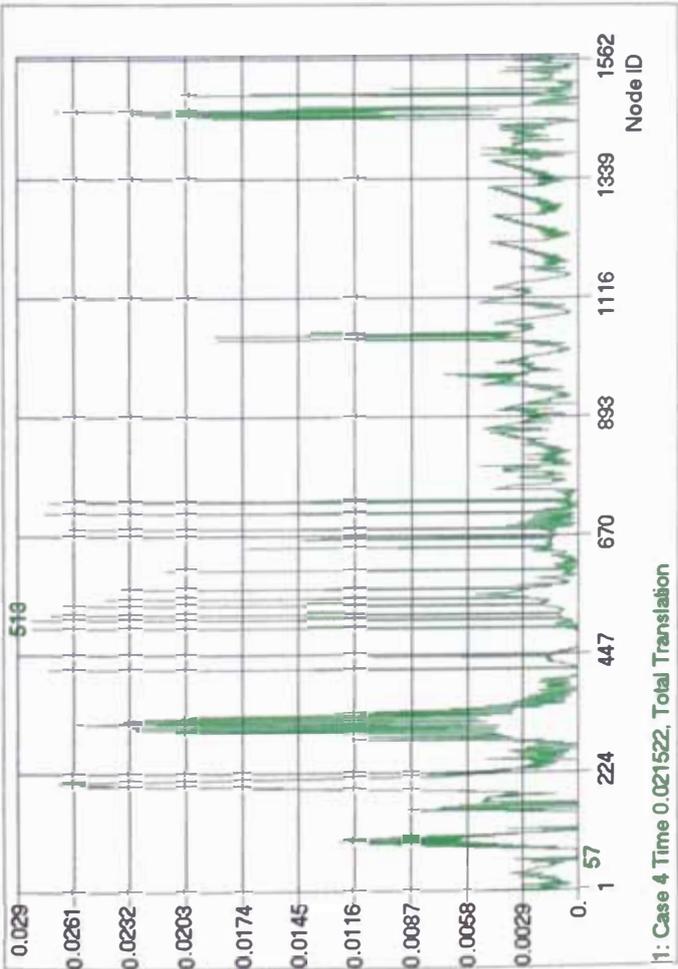


Fig. 5.6

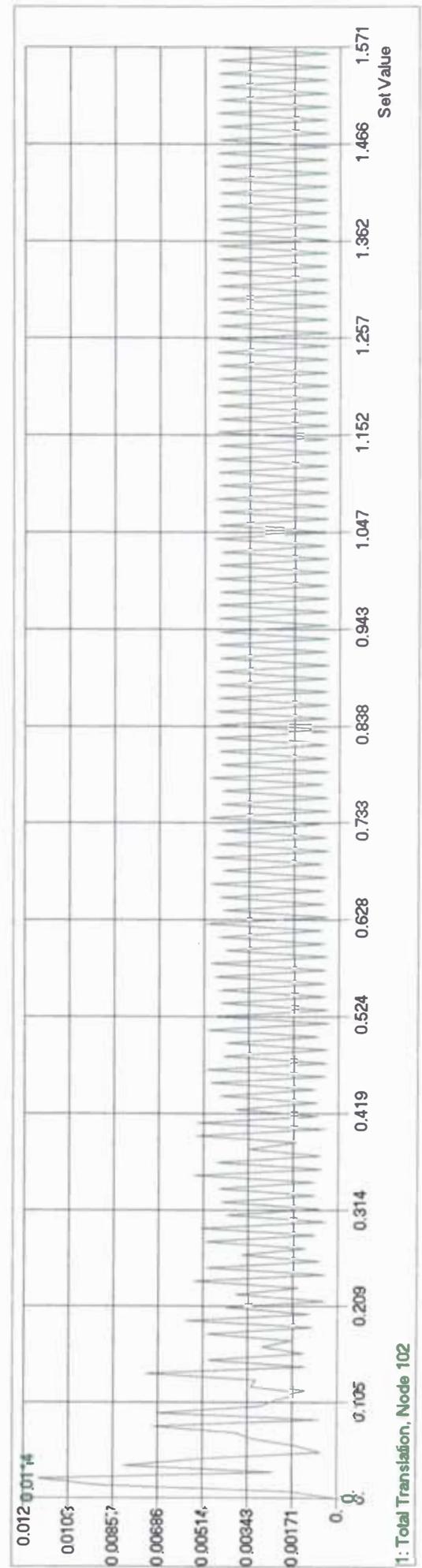
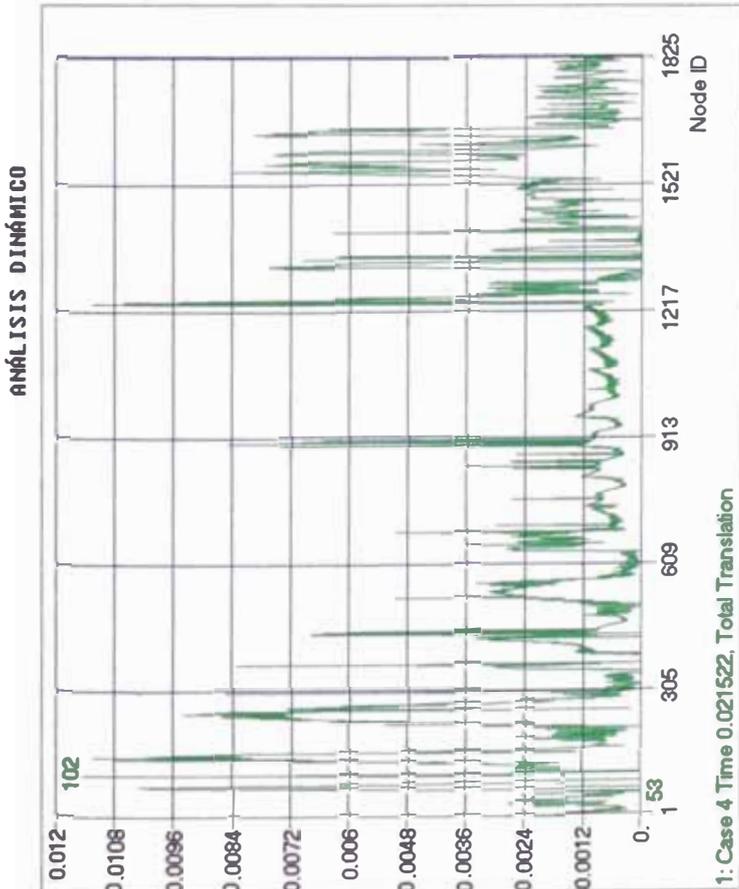
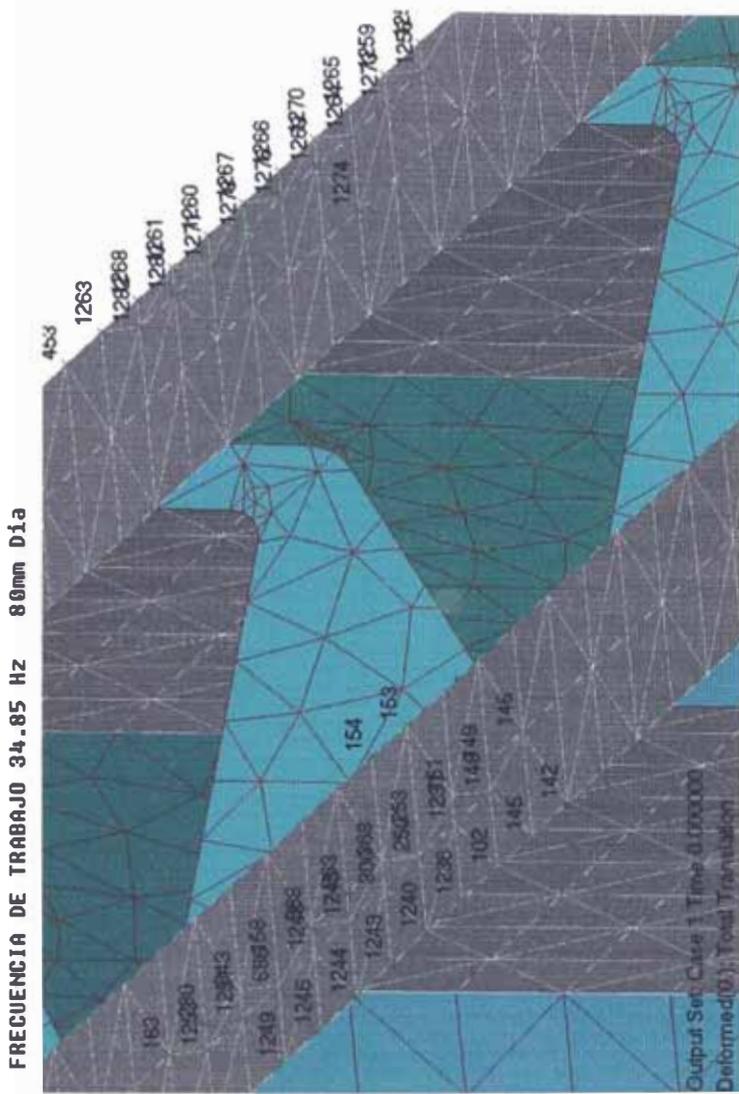


Fig. 5.7

FRECUENCIA DE TRABAJO 34.95 HZ 300mm Día

ANÁLISIS DINÁMICO

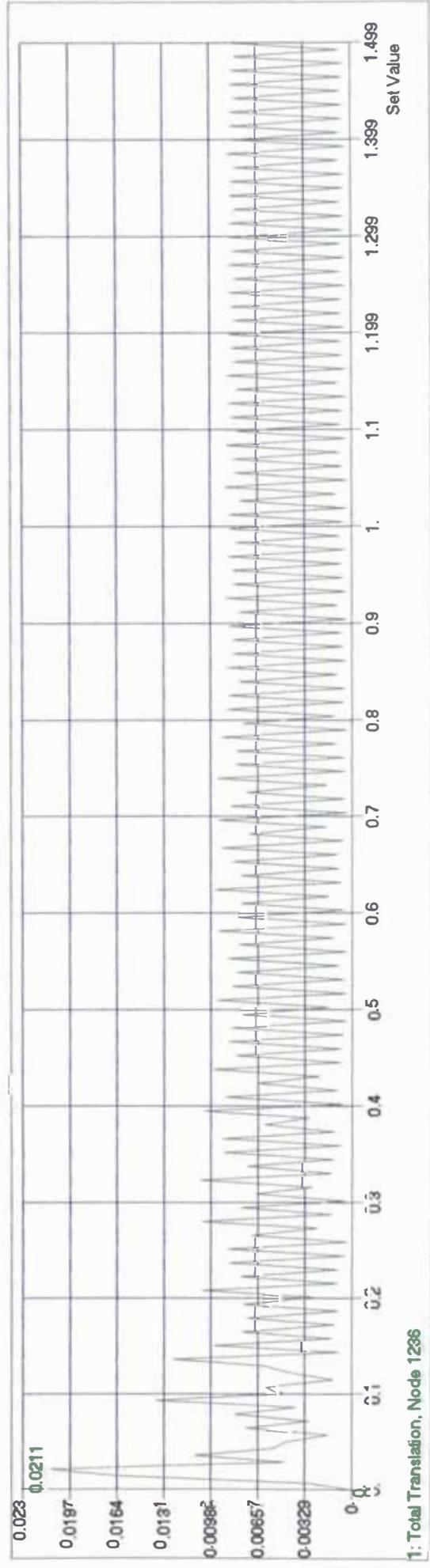
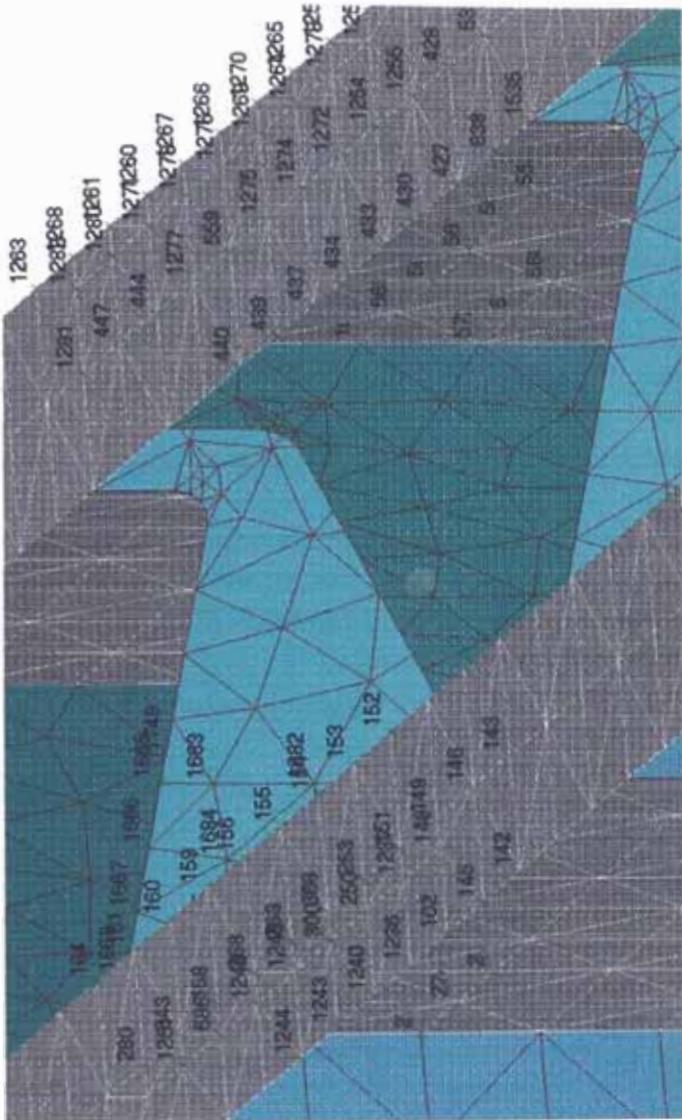
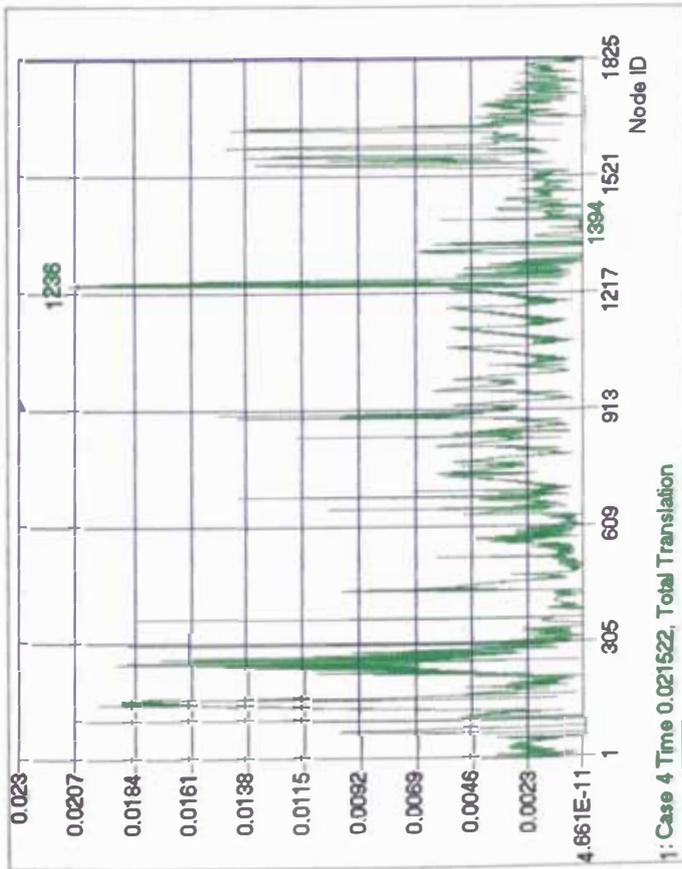


Fig. 5.8

6. Análisis de Resultados y Conclusiones

• Para comenzar a explicar los objetivos alcanzados, es importante señalar cual ha sido la metodología de las pruebas hechas en el presente trabajo; para lo cual se presentan algunos gráficos para carga dinámica de los modelos 3 y 4. Estas pruebas se realizan para las frecuencias más bajas, las cuales han servido de apoyo y guía inicial para el análisis ($f_1 = 2,82$ Hz ; $f_2 = 3.49$ Hz, $f_3 = 4,11$ Hz y $f_4 = 5,54$ Hz), {Ver anexo B}. La idea general es observar como responden los modelos a la sollicitación dinámica.

• Luego se determino el amortiguamiento para las frecuencias más altas, con la finalidad de tener mayor información para escoger la frecuencia de ensayo de los modelos.

El programa MSC/Nastran 2,1 considera en su cálculo un amortiguamiento $\xi = 0.03$; que esta entre 0,02.....0,04 (según USNRC.[11]) para construcción de estructuras mediante planchas soldadas.

Además se sabe que

$$\xi = \frac{\alpha_R}{2\omega} + \frac{\beta_R \omega}{2}$$

donde

$$\alpha_R = 0,12$$

$$\beta_R = 0.003$$

los cuales son valores probados de la teoría de materiales para una placa continua de n grados de libertad nodal, ensayada para los primeros modos de vibración.

Entonces para la tabla No. 5.2 se evalúan las mayores velocidades de trabajo(x 0,8 como margen de seguridad) en función de ξ y se obtienen :

$$n_9 \Rightarrow f_9 = 17,60 \text{ Hz} \rightarrow \xi = 0,030$$

$$n_{10} \Rightarrow f_{10} = 21,95 \text{ Hz} \rightarrow \xi = 0,036$$

$$n_{11} \Rightarrow f_{11} = 25,80 \text{ Hz} \rightarrow \xi = 0,041$$

$$n_{12} \Rightarrow f_{12} = 34,85 \text{ Hz} \rightarrow \xi = 0,054$$

De aquí se observa que para n_{12} , el amortiguamiento $\xi = 0.054$ está fuera de recomendación, razón por la cual se analiza la bancada para esta velocidad.

- Los resultados de los ensayos bajo carga estática y dinámica para los modelos 3 y 4 presentan las mayores deformaciones en la guía izquierda (zona de carros, ala exterior), bajo condiciones de torneado crítico (en voladizo y $\varnothing 80$ mm.)

La confrontación de estos resultados con los obtenidos mediante los métodos tradicionales de cálculo se da en la tabla 6.1

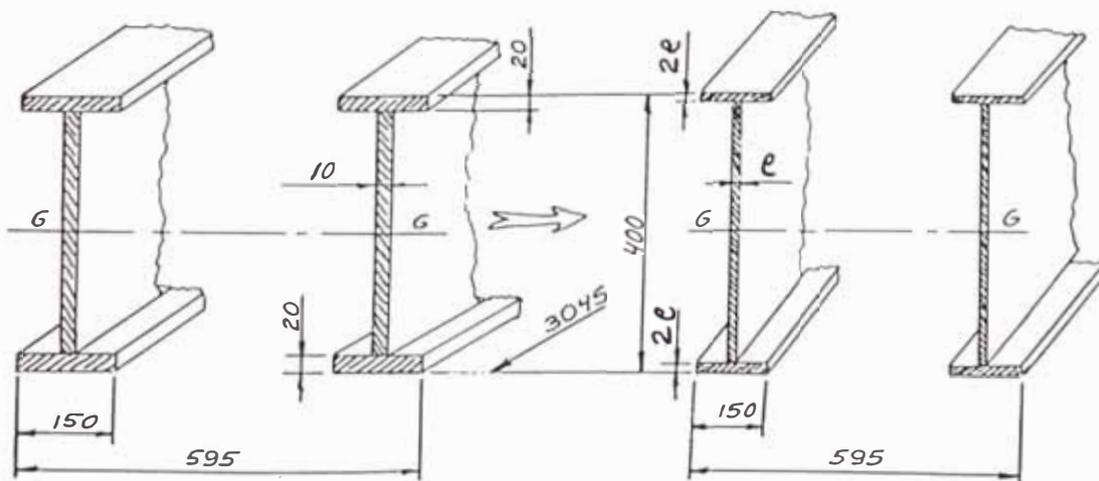
	Cálculo por método tradicional	Cálculo FEM		Comentario
	Modelo 3 y 4	Modelo 3 Peso 5370 N	Modelo 4 Peso 6000 N	
Máquinas-Herramientas para desbaste (Welbourn/Smith) [10] Bancada +Cuchilla	$\pm 238 \mu m$ $\Rightarrow f_{max} = 576 \mu m$	$\Rightarrow f_{max} = 44.5 \mu m$	$\Rightarrow f_{max} = 39 \mu m$	
Bancada de plancha soldada (O. Blodgett) [2] Carga estática	$\Rightarrow f_{max} = 300 \mu m$	$\Rightarrow f_{max} = 44.5 \mu m$	$\Rightarrow f_{max} = 39 \mu m$	sobredimensionado 6 veces
Bancada de plancha soldada [3] (Koenigsberger/Trusty) Carga dinámica	$\Rightarrow f_{max} = 190 \mu m$	$\Rightarrow f_{max} = 8 \mu m$ $\Rightarrow f_{tot} = 52.5 \mu m$	$\Rightarrow f_{max} = 10 \mu m$ $\Rightarrow f_{tot} = 49 \mu m$	sobredimensionado 4 veces

Tabla 6.1

Es importante señalar que todo estudio de Máquinas - Herramientas se hace bajo el análisis de los esfuerzos y deformaciones, por efecto de la carga de trabajo o de las vibraciones por el mecanizado; para finalmente comprobar su rigidez.

De estos resultados se tiene la posibilidad de optimizar la sección resistiva de los modelos ; pero ya que ambos cumplen con la sollicitación admisible se escogerá por ahora el modelo 3 en el presente estudio por su menor peso y por su forma constructiva más sencilla.

Entonces se optimiza teóricamente el modelo 3, cuyo esquema es el siguiente:



En donde se tiene: [2]

$$I = K_1 \frac{P_T L^2}{E \left(\frac{\Delta}{L} \right)}$$

$\frac{\Delta}{L} \rightarrow$ rigidez de la estructura

$I \rightarrow$ inercia resistiva de la bancada

$P_T \rightarrow$ carga actuante

$L \rightarrow$ long. bancada

$K_1 \rightarrow$ factor forma [2]

si:

$I \ll 6$ veces el sobredimensionamiento

se tendrá:

$\frac{\Delta}{L} \gg 6$ veces

entonces se aproximará:

$$\frac{\Delta}{L} \approx f_{\max TABLA}$$

Del esquema del modelo 3 se tiene: $I_{GG} = 3,8 * 10^8 \text{ mm}^4$

$$I_{GG\%} = 1,9 * 10^8 \text{ mm}^4 / 6$$

$$\Rightarrow I_{NEC} = 3,166 * 10^7 \text{ mm}^4 \text{ (ver comentario de la tabla anterior)}$$

Luego manteniendo las medidas exteriores se reduce el sistema a hallar valores de "e" que cumplan con la inercia necesaria I_{NEC} (ver esquema en la pag. 69).

Modelo 5 Espesor Plancha (mm)	I (mm ⁴)	$I_{NEC} = 3,166 \times 10^7 \text{ (mm}^4\text{)}$
1	1.47×10^7	X
2	2.94×10^7	X
3	4.42×10^7	✓
5	7.36×10^7	✓

Tabla 6.2

En la tabla 6.2 se observa que el modelo 5 para una plancha de espesor 3 mm recién cumple con la inercia necesaria (I_{NEC}), pero esto basado sólo en la teoría.

Por forma constructiva [2] una plancha de espesor 3 mm es más difícil de soldar que una plancha de espesor de 5 mm; pero ambos cumplen teóricamente y el ahorro de peso puede expresarse de la siguiente manera en la tabla 6.3.

Modelo 5 Espesor Plancha (mm)	Peso (N)	% Ahorro en peso	Valor Referencial aproximado(US\$) (\$6 Kg plancha trabajada)
3	1835	70	1100
5	3000	50	1800
10 (modelo 3)	6000	100	3600

Tabla 6.3

El modelo 3 con la plancha de 3 mm representa un ahorro en peso del 70% y para plancha de 5 mm representa un ahorro un peso del 50% ; respecto del modelo 3 con plancha de 10 mm, aunque esto es un aspecto económico muy general.

Pero además el reducir el peso en forma arbitraria podría tener problemas con las velocidades de trabajo ante la frecuencia natural del sistema, por lo tanto se hace necesario un análisis por FEM al modelo5 para un espesor de plancha de 5 mm.

La relación espesor de plancha en función de la desviación admisible da como resultado la información que presenta la figura 6.1 (ver pag. 72); así mismo, ahí se ha graficado también el espesor de plancha en función de las inercias I (mm⁴).

Lo que se observa es que los desplazamientos totales están dentro de las desviaciones admisibles ($f_{adm.} = 300 \mu m$) para carga estática; pero la posibilidad de construcción nos señala que lo más adecuado para esta bancada de plancha soldada es asumir un espesor de plancha de 5 mm. Luego el modelo5 es una bancada reforzada de nervios paralelos y con un espesor de plancha de 5 mm ; la cual ha sido ensayada bajo carga estática y carga dinámica (ver fig. 6,2 y fig. 6.3) y cuyos resultados se presentan en la tabla 6.4

	Cálculo por método tradicional	Cálculo FEM Modelo 3	Cálculo FEM Modelo 5	Comentario 1	Comentario 2
	Modelo 3	Peso 5370 N	Peso 3000 N		
Máquinas-Herr. para desbaste (Welbourn/Smith) Bancada +Cuchilla	$\Rightarrow f_{max} = 576 \mu m$	$\Rightarrow f_{max} = 44.5 \mu m$	$\Rightarrow f_{max} = 68.2 \mu m$		
Bancada de plancha soldada (O. Blodgett) Carga estática	$\Rightarrow f_{max} = 300 \mu m$	$\Rightarrow f_{max} = 44.5 \mu m$	$\Rightarrow f_{max} = 68.2 \mu m$	Aumento del 53% en la desviación ; pero esta es menor que la admisible	sobredimensionado 4 veces
Bancada de plancha soldada (Koenigsberger/Thlusty) Carga dinámica	$\Rightarrow f_{max} = 190 \mu m$	$\Rightarrow f_{max} = 8 \mu m$	$\Rightarrow f_{max} = 30 \mu m$ $\Rightarrow f_{tot} = 98.2 \mu m$	Aumento 275% en la desviación ; pero esta es menor que la admisible	sobredimensionado 2 veces

Tabla 6.4

Análisis Estático - Bancada de cartelas perpendiculares

$n := 1..6$

Espesor de Plancha (mm)

Desplazamientos (μm)

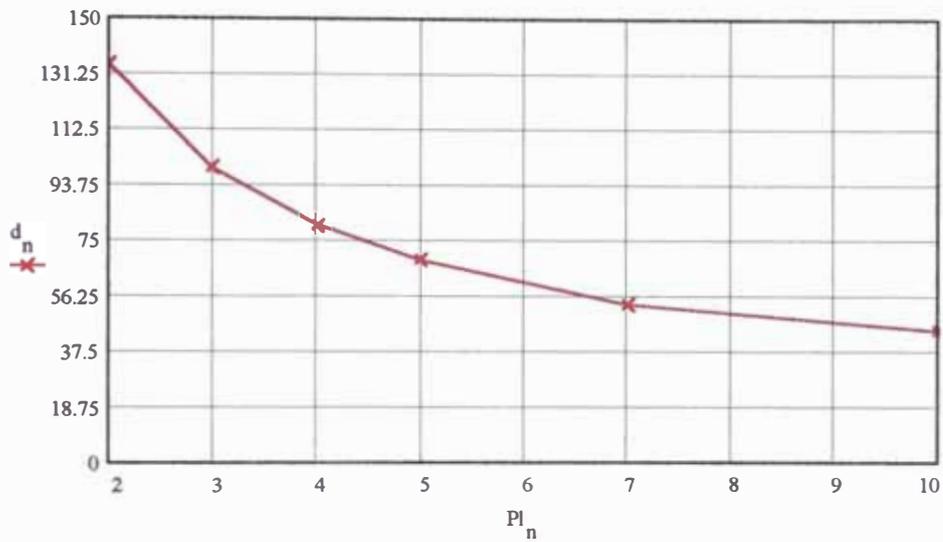
Inercia (mm^4)

$Pl_n :=$

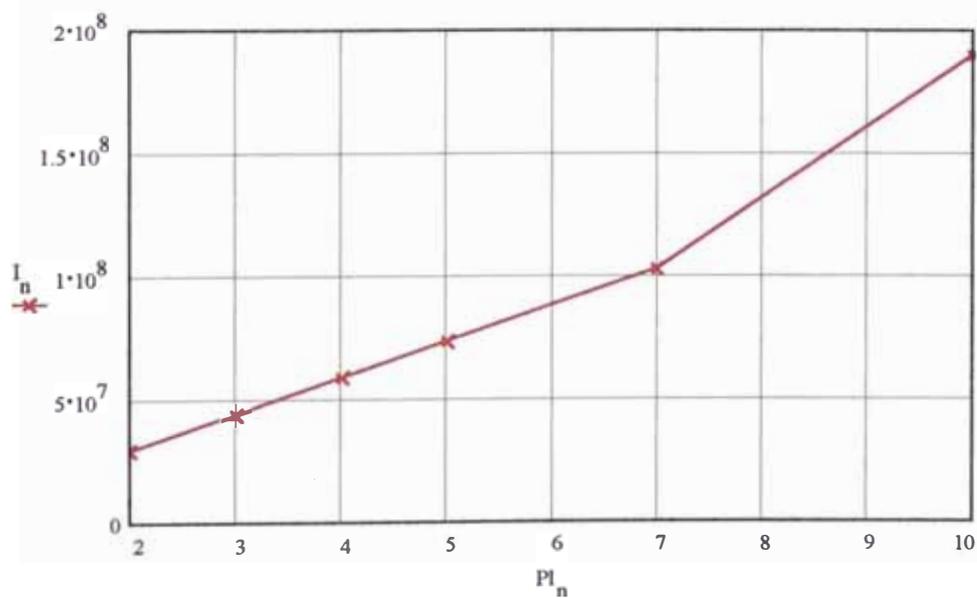
$d_n :=$

$I_n :=$

2	134.4	$2.94 \cdot 10^7$
3	99.3	$4.42 \cdot 10^7$
4	80.4	$5.89 \cdot 10^7$
5	68.2	$7.36 \cdot 10^7$
7	53.2	$1.03 \cdot 10^8$
10	44.5	$1.9 \cdot 10^8$



Gráfica Esesor de Plancha vs. Desplazamientos



Gráfica Esesor de Plancha vs. Inercias

Fig. 6.1

MODELO 5- CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS TOTALES

Output Set: Caso 80mm Dia. Pl\5\10mm
Contour: Total Translation

CASO 80mm Dia. PLANCHA 5mm.

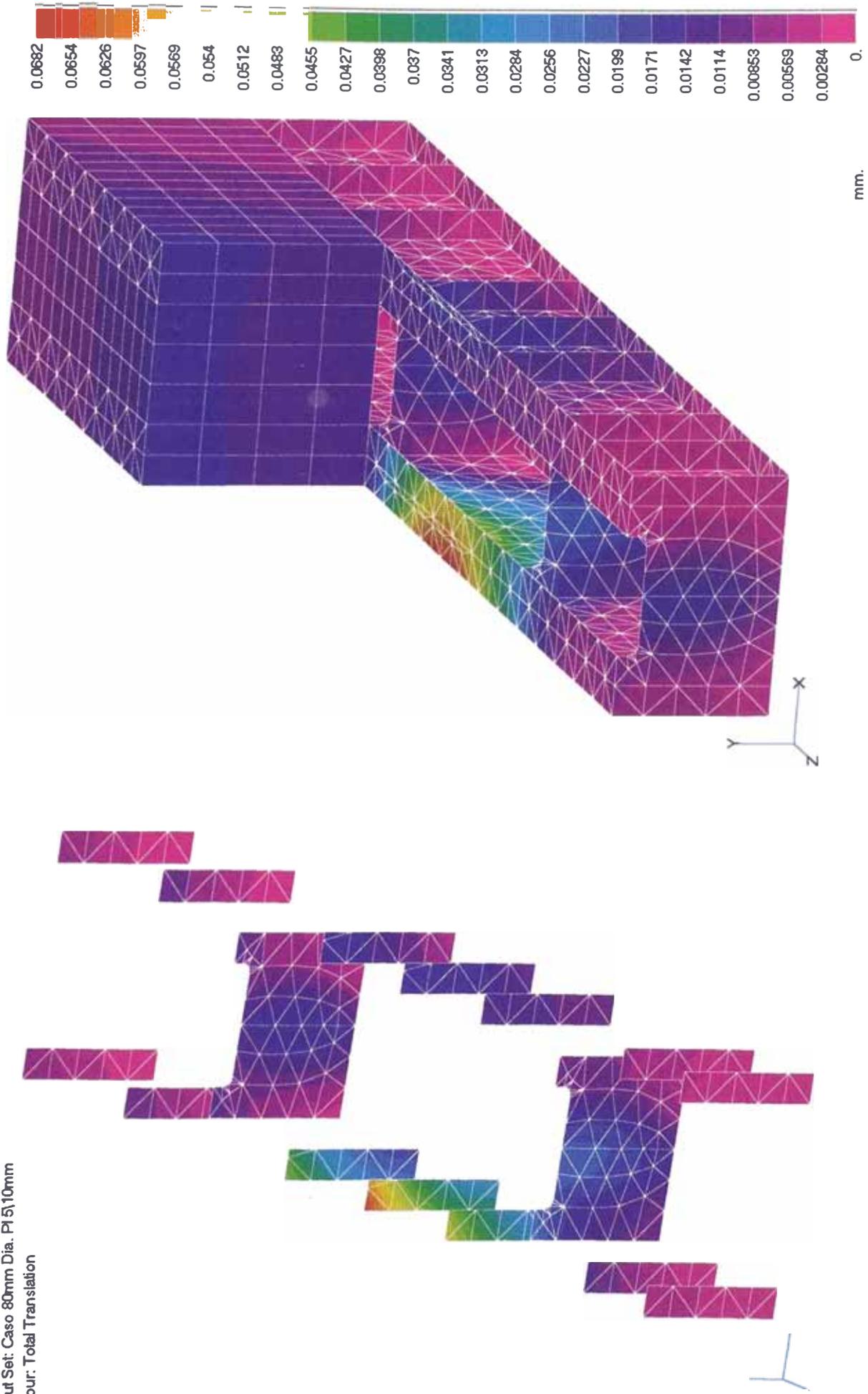


Fig. 6.2

ANÁLISIS DINÁMICO

FRECUENCIA DE TRABAJO 34.85 HZ. 80 mm Dia. PLANCHCHA 5 mm

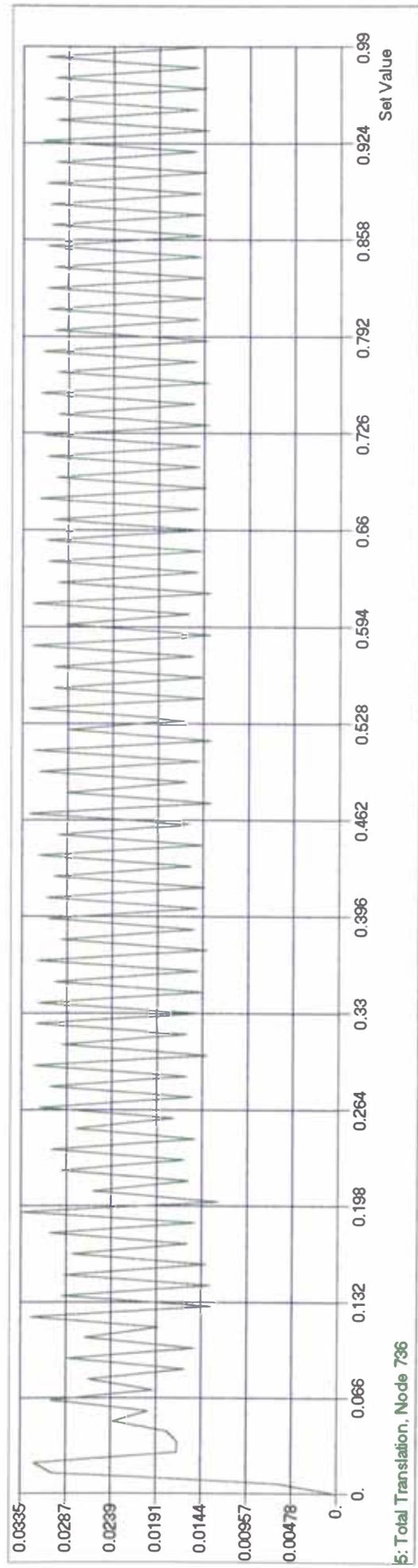
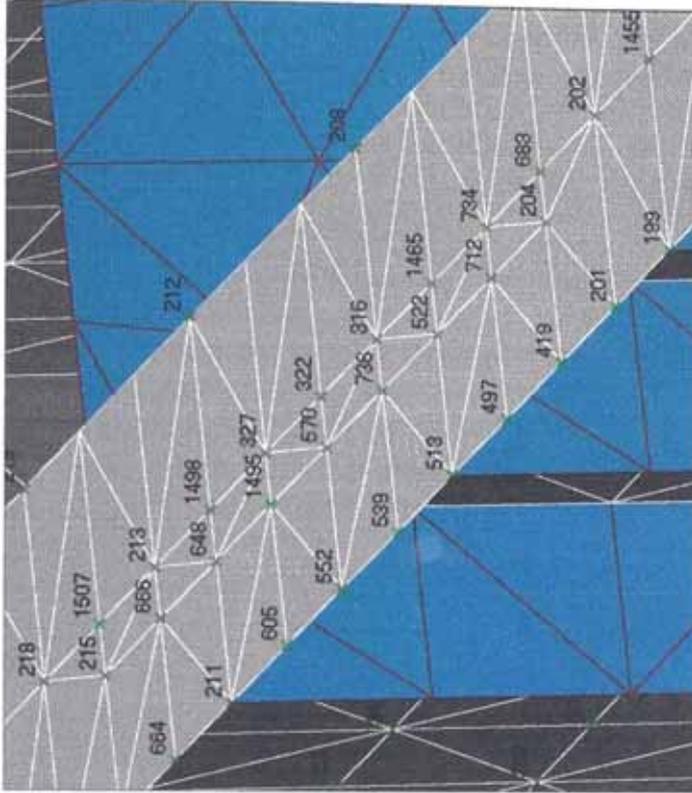
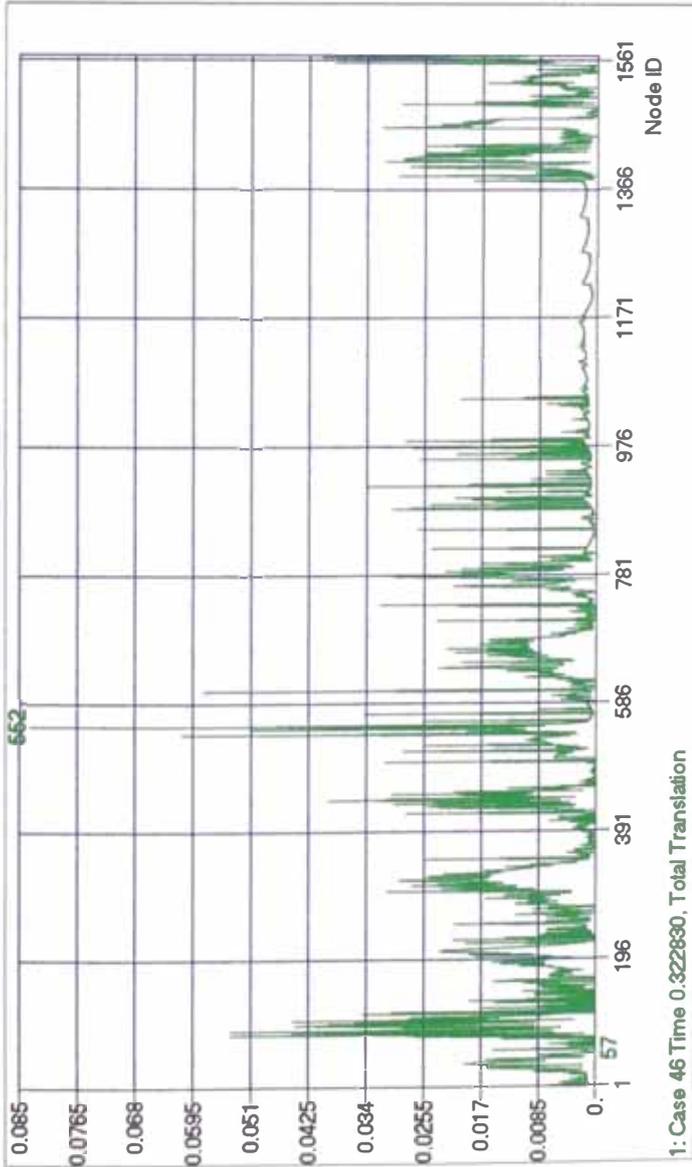


Fig. 6.3

De este análisis se tiene que el modelo 5 pesa 44% menos que el modelo 3 y cumple con la desviación admisible; ya que en el análisis estático el sobredimensionamiento bajo a 4 veces y en el análisis dinámico el sobredimensionamiento bajo a 2 veces.

Pero el modelo 3 tiene una frecuencia crítica de 6 Hz; según el análisis modal realizado en el capítulo 3 (ver pag. 40), lo cual está indicando una frecuencia muy baja respecto de las frecuencias de trabajo (desde 3.56 Hz hasta 43.56 Hz). Entonces los modelos 3 y 5 sólo cumplirían con algunas metas del diseño (mínimo costo, mínimo peso de partes móviles y distribución uniforme de las tensiones), luego hay la necesidad de rediseñar el modelo para cumplir con las metas de rigidez adecuada y buen amortiguamiento.

Este nuevo **modelo 6** de bancada (ver fig. 6.4) debe garantizar una alta rigidez, una frecuencia propia óptima y un óptimo amortiguamiento. En las consideraciones iniciales del estudio se habían considerado los apoyos de las bases del tipo empotrado con una influencia a todo lo largo de dichas bases. En este estudio final para la condición de borde, se considera la elasticidad de las placas y del tornillo; así como su zona de influencia lo que garantiza un resultado cercano a la realidad.

Respecto a la forma constructiva del modelo 6 se han hecho los siguientes cambios:

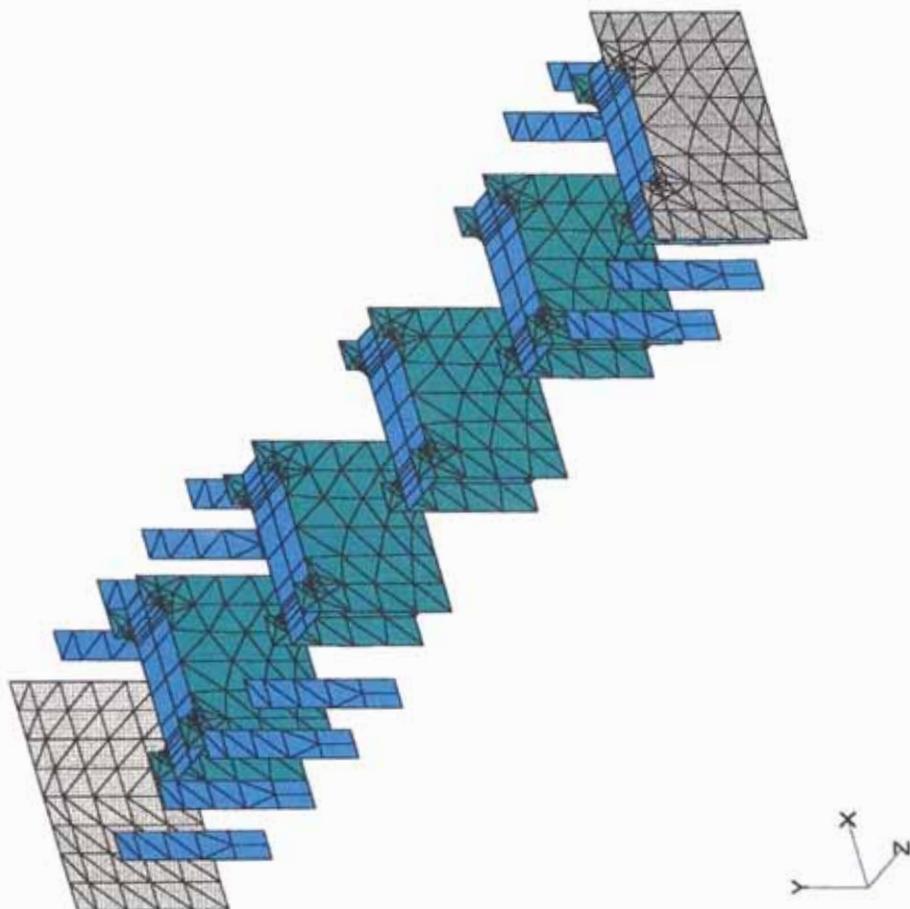
- de 2 nervios paralelos se paso a 4 nervios paralelos
- la forma de los nervios como placas simples se reemplazo por la forma de cajón
- el espesor de la plancha en los nervios cajón y la bancada pasó de 5mm, a 10mm, a 15mm, hasta 20mm.
- se conectaron los nervios paralelos con planchas de 20mm en forma transversal.
- el peso de este modelo es de 8952.5 N

Finalmente a este modelo se le aplica el análisis modal después de cada cambio, lo cual varia la frecuencia del primer modo hasta llegar a 10.19 Hz. El problema sigue siendo la frecuencia natural dentro del campo de las frecuencias de trabajo, lo cual nos señala que aún no se han cumplido con las dos últimas metas del diseño (máxima rigidez, frecuencia propia óptima).

- Continuando con la modelación por forma constructiva se presenta el **modelo 7** de bancada (ver fig. 6.5), el cual presenta una disminución de masa en la zona de carros y a su vez rigidiza en dos planos (dos nervios de forma especial longitudinales y nervadura interior transversal), con la finalidad de aumentar la frecuencia del primer modo.

Las condiciones de borde se mantienen para este modelo que pesa 9794.25 N; entonces se le aplica el análisis modal llegando la frecuencia del primer modo hasta 10.5 Hz; pero la frecuencia del primer modo solo subió un 5 %, lo cual no es solución.

BANCADA ACARTELADA CON CAJONES



MODELO

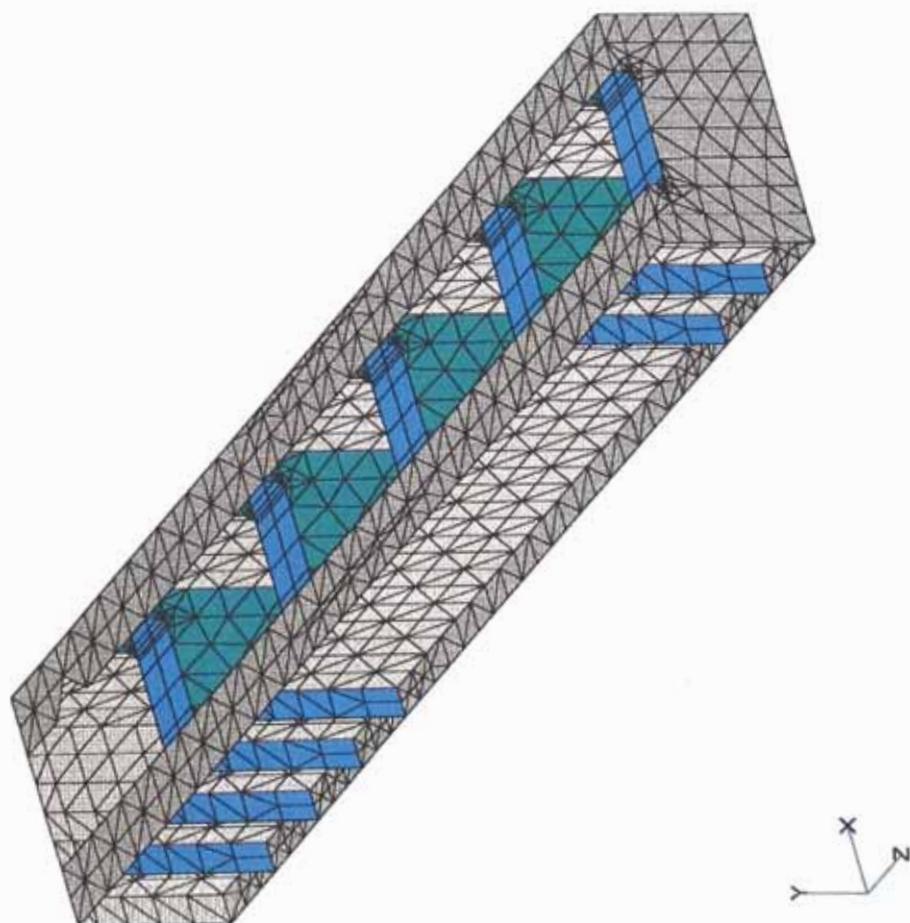


Fig. 6.4

MADELO 6 - PRIMER MODO

BANCADA ACARTE DA CON C ONES

Output Set: Case 2 Mode 10.191824 Hz
Deformed(0.119): Total Translation

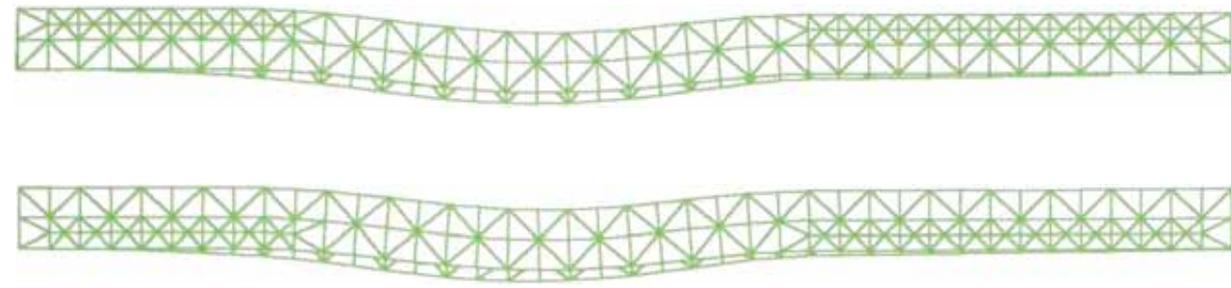
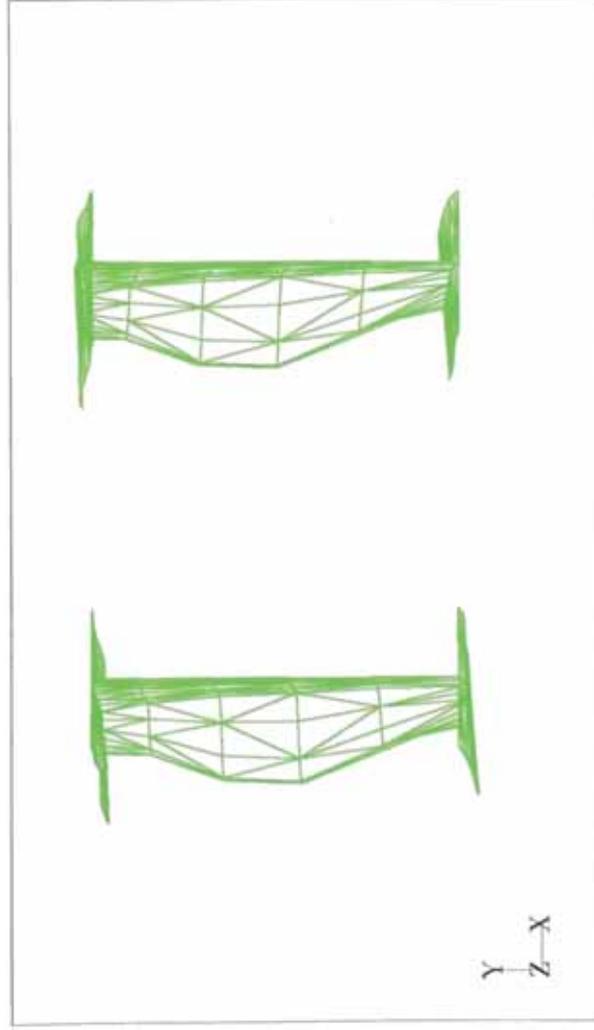
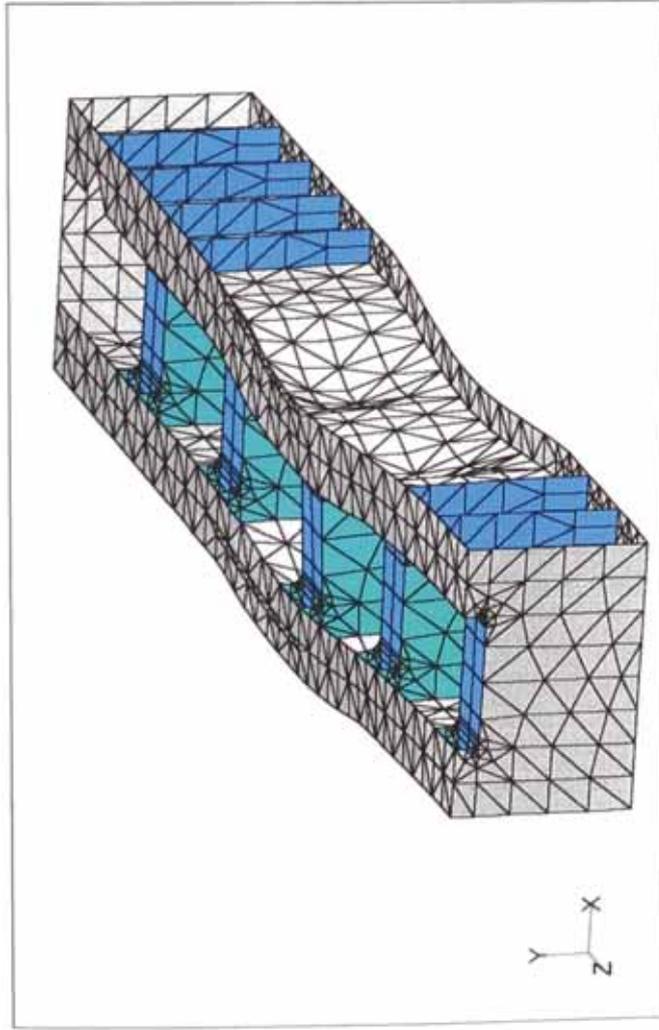
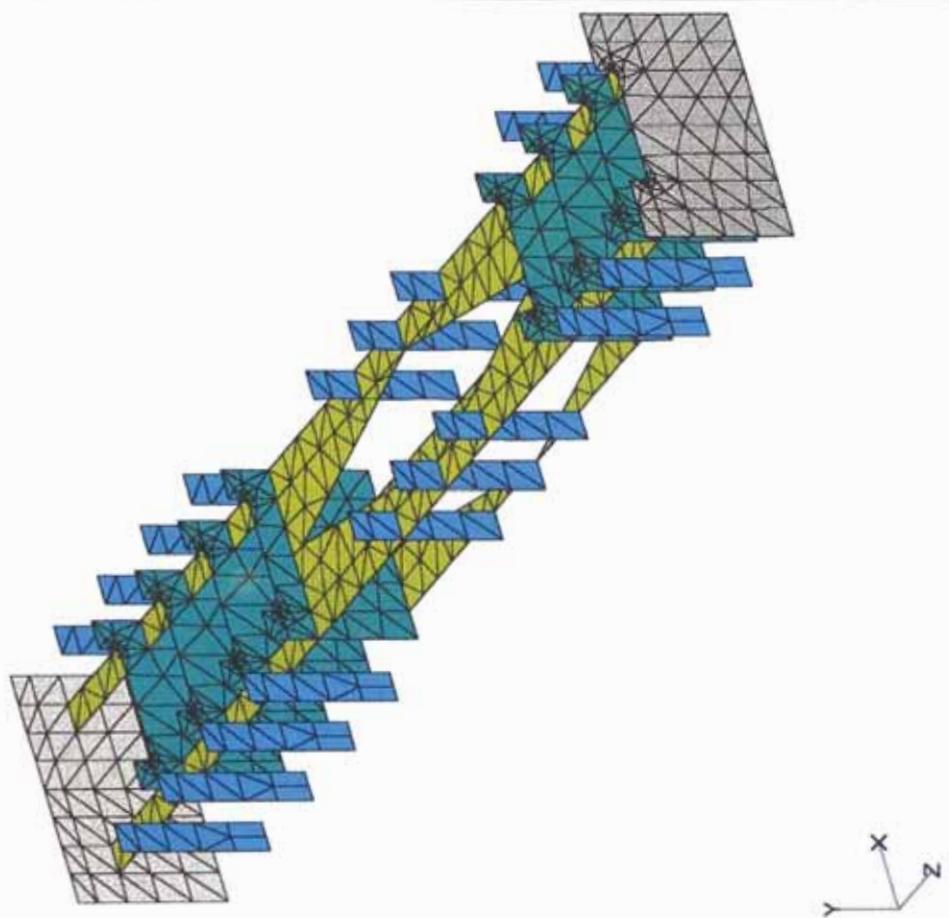


Fig. 4a

BANCADA ACARTELADA EN PLANOS



MODELO

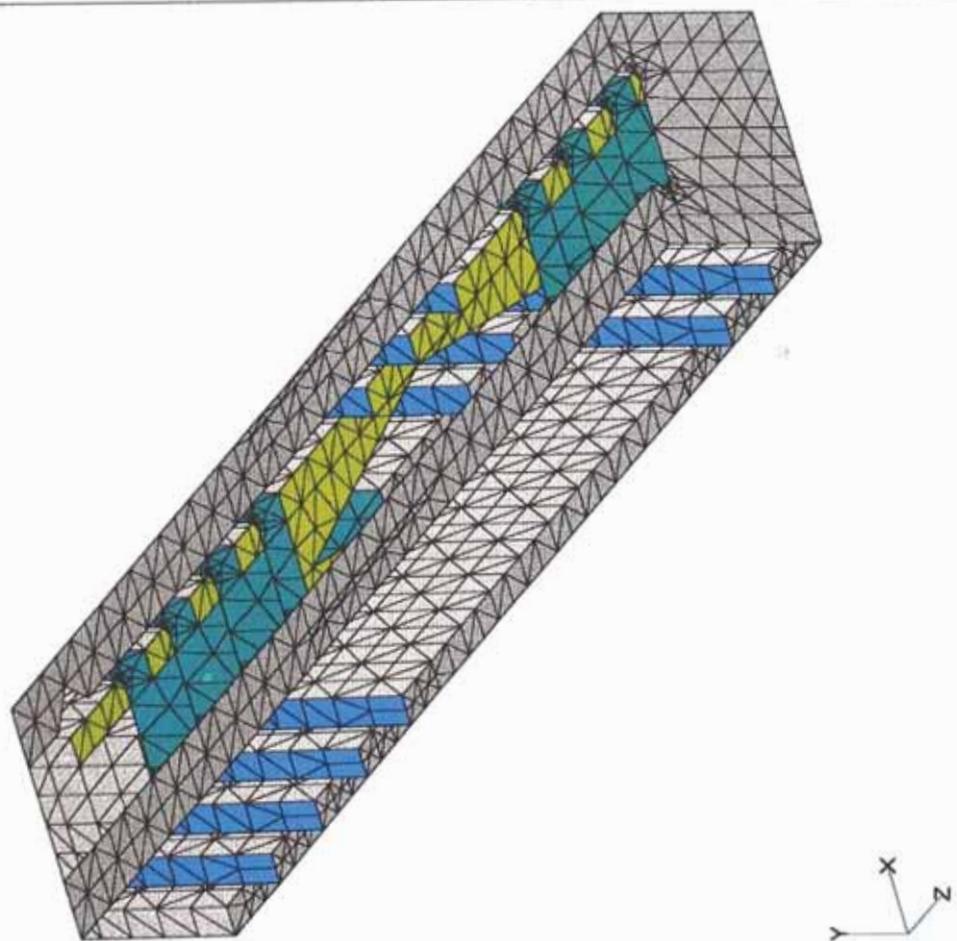
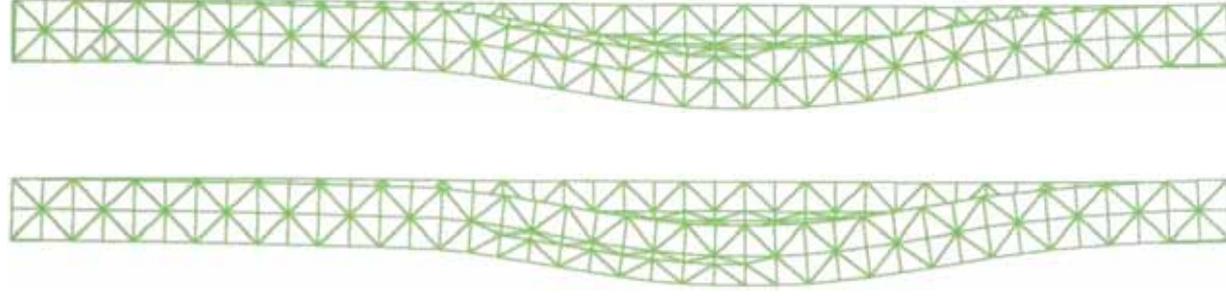
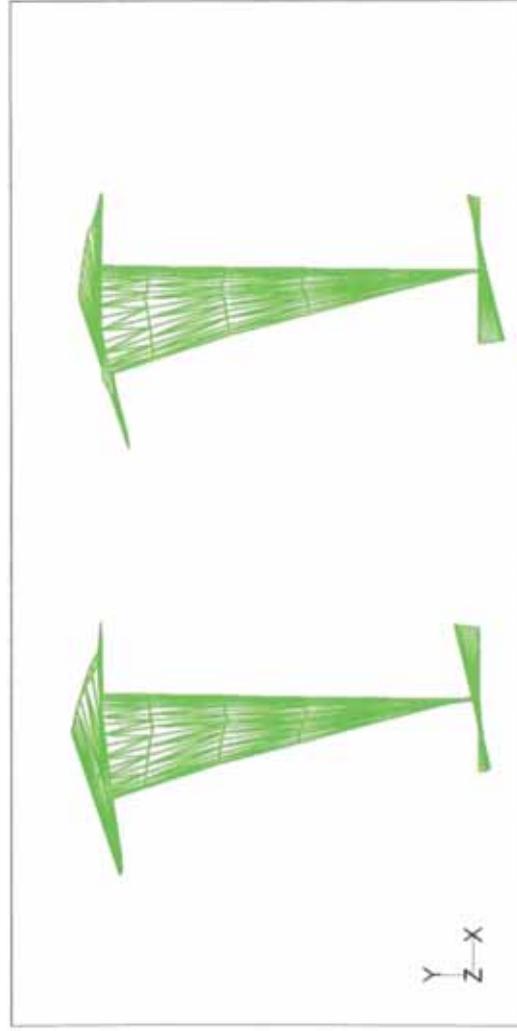
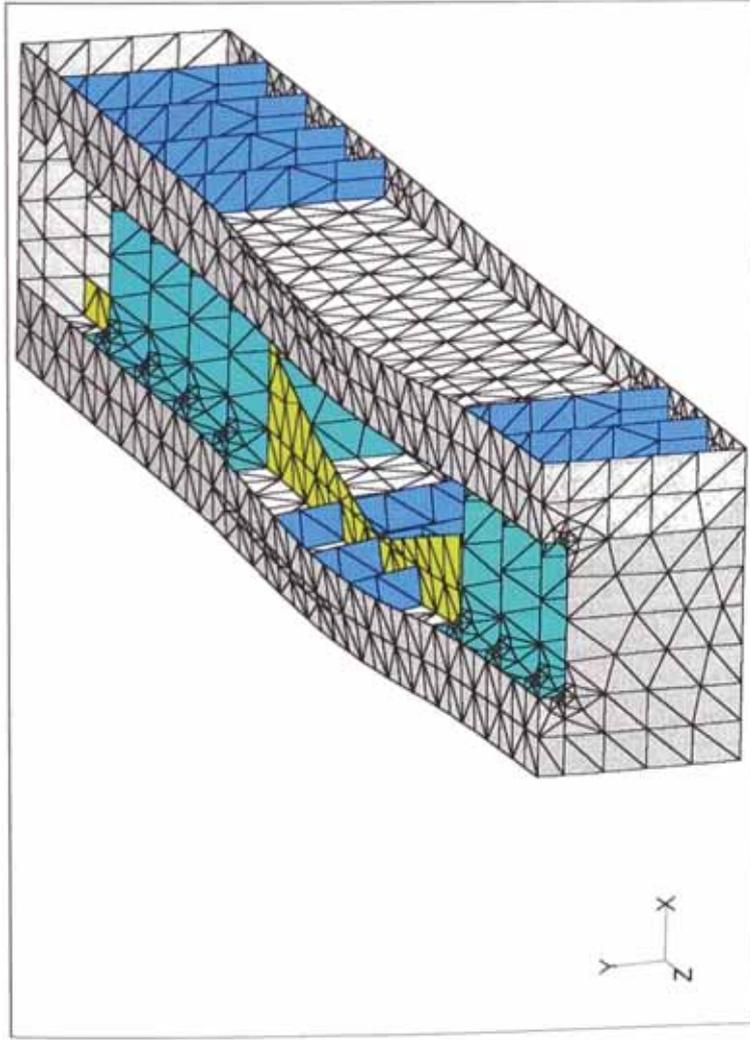


Fig. 6.5

MADELO 7 - PRIMER MODO

BANCADA ACARTELADA EN PLANOS

Output Set: Case 1 Mode 10.504157 H
Deformed(0.117): Total Translation



Fi . 6 5

Es indudable que por lo realizado, la frecuencia natural de la bancada en estudio estará casi siempre cerca de los 10 Hz; observando los resultados se tiene:

- Modelo 3 $\Rightarrow f_{N3} = 7.6$ Hz. (modelo mejorado)
- Modelo 4 $\Rightarrow f_{N4} = 8.5$ Hz.
- Modelo 5 $\Rightarrow f_{N5} = 5.5$ Hz.
- Modelo 6 $\Rightarrow f_{N6} = 10.19$ Hz.
- Modelo 7 $\Rightarrow f_{N7} = 10.50$ Hz.

Luego se hace necesario replantear la solución desde el punto de vista de la gama de velocidades de trabajo del antecedente (ver tabla 5.2 de la pag. 62), en base de las siguientes recomendaciones:

- En un diseño de maquinas – herramientas todas las velocidades de trabajo deberán estar en el campo subcrítico o en el campo hipercrítico. [3]
- Las frecuencias de trabajo (velocidades) deberán estar alejadas de la frecuencia natural del sistema y en particular de la bancada en un 100 %. [4]
- Según las recomendaciones para las velocidades de trabajo en maquinas – herramientas DIN 804 [12], se prefiere la serie R20/2.

De todas estas recomendaciones se necesita redefinir la velocidad de trabajo más baja del THD, para lo cual se tiene que $\omega_1 = 200 \text{ min}^{-1}$ (20.94 Hz).

Las otras velocidades de trabajo se presentan en la tabla 6.5.

	$\omega_{(\text{min}^{-1})}$	$f(\text{Hz})$
1	200	20,94
2	224	23,46
3	250	26,18
4	280	29,32
5	315	32,99
6	355	37,18
7	400	41,89
8	450	47,12
9	500	52,36
10	560	58,64
11	630	65,97
12	710	74,35

Tabla 6.5

Finalmente es importante señalar que los modelos 6 y 7 han sido ensayados para carga estática y dinámica, para la situación más desfavorable de mecanizado y para la nueva velocidad crítica, luego los resultados se presentan en las figuras 6.6, 6.7, 6.8, 6.9, 6.10 y 6.11; siendo estos adecuados para un proceso de desbaste.

- Es importante señalar que las metas del diseño de la bancada propuestas en el presente estudio se han cumplido en lo referente a distribución uniforme de tensiones, mínimo peso de las partes móviles y mínimo costo; pero para definir lo referente a máxima rigidez, frecuencia propia óptima y óptimo amortiguamiento se ha tenido que modificar las velocidades de trabajo. Esta decisión se tomo luego de varias modelaciones por formas constructivas, que incluyeron los cambios en las condiciones de borde y que dieron como resultado que la bancada del THD tenía una frecuencia natural cercana a 10 Hz; lo que definió al modelo 7 como el mas adecuado.

- Un resultado que también es importante señalar, esta referido a la influencia de las formas constructivas del nuevo modelo ante la posibilidad de que aparezcan deformaciones debido al proceso de construcción por soldadura, tema delicado que no ha formado parte de los objetivos del presente trabajo; pero que si ha sido tomado en cuenta al momento de decidir por la forma del modelo más sencillo de fabricar. [16]

Si la fusión de los electrodos se realiza cerca de los 1800°C y su gradiente de temperatura es de 700°C a un centímetro de distancia de la unión se puede deducir que para el modelo 4 la nervadura diagonal traerá problemas de deformación térmica, esta será otra de las razones por la que se prefiere la nervadura principal paralela (modelos 3, 5, 6 y 7) en el presente estudio, tomando las siguientes precauciones: secuencia de soldeo, precalentamiento de la zona y enfriamiento lento inducido. [17]

- Finalmente es pertinente señalar que en el presente estudio se han analizado preferentemente los esfuerzos y las deformaciones por acción de la carga, (estática o dinámica) pero no ha sido el objetivo del trabajo el analizar las deformaciones debido al proceso de fabricación de la bancada, ya que dicho proceso cuando se realice dejará sobre su forma final una serie de esfuerzos residuales; los cuales pueden ser aliviados en alguna medida con un proceso térmico de recocido, (alivio de tensiones) pero finalmente presentarán deformaciones permanentes que influirán en las deformaciones finales de la bancada (el valorar esta fuente de error podría dar lugar a otro estudio complementario).

- Otro problema colateral de este estudio es el referente al aislamiento del THD. En el presente trabajo se hace un análisis global de toda la máquina – herramienta, debido a la importancia de la problemática de la cimentación de máquinas en general; pero como no forma parte del presente estudio es que su desarrollo, resultados y comentarios se presentan en el anexo C.

- En la actualidad ya no es posible diseñar por los métodos tradicionales, (criterios estáticos, experiencias previas, y correcciones a ensayos costosos) por el contrario un adecuado diseño dinámico y un análisis modal es lo que se plantea en el presente estudio; en donde se analizaron el modelo 3 y 4, luego se optimizó el modelo 3 de la bancada; lo que dio como resultado final el modelo 7.

Todo este trabajo se basó en primer lugar en un software y equipo adecuado, asistente técnico, tesista responsable del estudio y orientación de los asesores. En segundo lugar se trabajó con método técnico-experimental denominado el Método del Análisis Modal que sirvió para pulsar y mejorar el comportamiento dinámico de los modelos de la bancada. Este método se utilizó en la etapa inicial y final del diseño con la ayuda del computador; para corregir definitivamente el comportamiento dinámico de la bancada en lo referente a rigidizar mediante los nervios (cartelas especiales) las zonas que tuvieran los modos de vibración más críticos. (mayores deformaciones).

Finalmente la aplicación del Análisis Modal con la ayuda del computador sobre la bancada inicial que existe en los planos, se basó en la aplicación del Método de los Elementos Finitos el cual resuelve un problema algebraico de valores y vectores propios.

Es importante señalar que un análisis comparativo aproximado entre el costo de fabricar un modelo y ensayarlo convenientemente (cargas estáticas y dinámicas) y el costo de crear un modelo y hacerle un análisis modal y ensayarlo a carga estática y carga dinámica en base a un programa comercial (NASTRAN 2.1) con ayuda del computador; está dando como resultado lo siguiente:

I. Actividad (U\$.)	Modelo 3	Modelo 4 y 5	Modelo 6 y 7	Total
Fabricación	5,370	9,000	19,000	33,370
Equipos simulador de carga	1,500			1,500
Equipo de control	500			500
Equipo de medición	500			500
Personal de apoyo	700	500	500	1,700
Costo Total (U\$.)	8,570	9,500	19,500	37,570

II. Actividad (U\$.)	Modelo 3	Modelo 4 y 5	Modelo 6 y 7	Total
Equipo de computación	6,000			6,000
Software adecuado profesional (∞ nodos) NASTRAN 3.1	18,000 (6c)			18,000
Asistente técnico (modelización y ensayo)	1,000	600	600	2,200
Costo Total (U\$.)	25,000	600	600	26,200

Se observa que la diferencia en valor es de U\$.11,370.= en contra de la I actividad; además hay que señalar que los modelos 3, 4, 5, 6 y 7 se guardan en archivos y el programa profesional queda libre para seguir modelando y produciendo estudios académicos de investigación así como de servicio y apoyo al sector industrial del país, luego su rentabilidad está descontada.

Sobre la actividad (I) menos rentable, señalaremos que sus modelos se guardarán en almacenes los que representa el gasto adicional, así como se tendrán que pintar periódicamente para prevenir el ataque del medio. (corrosión)

Es decir que la inversión no recuperable, fue de \$33,370 por esta razón se concluye que es importante que los grupos de estudio; sobre el Método de los Elementos Finitos de las universidades del país cuenten con un soporte tecnológico adecuado.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Cotaquispe, L. DISEÑO DE UN TORNO HORIZONTAL PARADESBASTE CON 1000 MM ENTRE PUNTAS Y DIÁMETRO DE VOLTEO DE 300 MM ; EDIT. PUC, LIMA 1987.
- [2] Blodgett, O. DESIGN OF WELDMENTS, THE LINCOLN ELECTRIC Co., OHÍO, USA 1965.
- [3] Koenigsberger, F. ; Tlusty, J. MACHINE TOOL STRUCTURES, EDIT, PERGAMÓN, OXFORD 1970.
- [4] Tobias, S. VIBRACIONES EN MÁQUINAS HERRAMIENTAS, EDIT. URMO, BILBAO 1961.
- [5] Acherkan, N. MACHINES TOOL DESIGN, T.3, EDIT. MIR, MOSCÚ 1969.
- [6] MacNeal, Richard H. FINITE ELEMENTS : THEIR DESING AND PERFORMANCE, EDIT. MARCEL DEKKER, INC, COLUMBUS, OHÍO 1993.
- [7] MacNeal, Richard H SOFTWARE Msc. NASTRAN 2.1, OHIO 1997
- [8] Oñate, E. CÁLCULO DE ESTRUCTURAS POR EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS, EDIT. C ,BARCELONA 1996.
- [9] Zienkiewicz, O. ; Taylor, R. EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS, EDIT C , BARCELONA 1994.
- [10] Welbourn, D. ; Smith, J. FUNDAMENTOS DE LA DINÁMICA DE LAS MÁQUINAS HE NTAS, EDIT. MARCOMBO, BARCELONA 1969.
- [11] Fornons, J. EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EN LA INGENIERÍA DE ESTRUCTURAS, EDIT. MARCOMBO, BARCELONA 1982.
- [12] AL DE NORMAS DIN, PARA LA TÉCNICA MECÁNICA, BERLIN 1976.
- [13] DEN HARTOG, J.P. MECHANICAL VIBRATIONS, MCGRAW-HILL, NEW YORK 1987.
- [14] DUBBEL. AL DEL CONSTRUCTOR DE MÁQUINAS, EDITORIAL LABOR SA. BARCELONA 1975.
- [15] DECKER, K. AL DEL INGENIERO. EDITORIAL URMO SA.; BILBAO 1982.
- [16] ROGNITZ H. ESTUDIO DE LAS FORMAS CONSTRUCTIVAS PARA LA FABRICACIÓN DE MÁQUINAS Y APÁRATOS, EDIT. LABOR SA., BARCELONA 1966.
- [17] SCHIMPKE, P., HORN H. TRATADO GENERAL DE SOLDADURA. TOMO III, EDIT. G GILLI SA.; BARCELONA 1979.