UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA INDUSTRIAL

"Aplicación de la Simulación a un Sistema Inventario-Producción"

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE INGENIERO

ANDRES BORASINO S.

GABRIEL NABIELSKY D.

PROMOCION 1967

LIMA - PERU

1968

INDICE

APENDICES

APENDICE 1 Generación de funciones de probabilidad.

APENDICE 2 Listado de los Programas de Computadora.

APENDICE 3 Resultados

BIBLIOGRAFIA

INTRODUCCION

El presente trabajo tiene como finalidad demostrar que las técnicas de simulación permiten estudiar sistemas complejos en los cuales las variables que los caracterizan están interrelacionadas de tal manera que resulta muy difícil plantear y resolver un modelo matemático que lo represente.

Anteriormente este tipo de sistemas sólo podía ser estudiado mediante experimentación directa, con las desventajas del alto costo de los experimentos y del tiempo consumido antes de obtener los resultados de los mismos. Por lo cual no siempre era factible realizarlos. La aplicación de computadoras electrónicas y técnicas de simulación salva estas dificultades, haciendo posible diseñar un modelo de simulación que opere de la misma manera que el sistema real, en el cual es posible experimentar a bajo costo y obtener los resultados con rapidez.

Desde este punto de vista la Simulación da a la Ingeniería Industrial una técnica de experimentación que puede compararse con los laboratorios de prueba de otras ramas de la Ingeniería, los túneles de viento en Ingeniería aeronáutica, los laboratorios de resistencia de materiales en Ingeniería Civil, etc. , mediante los cuales pueden probarse sin necesidad de aplicarlos todos los diseños propuestos.

El presente trabajo se divide en dos partes principales, la primera es el estudio de los fundamentos teóricos de la Simulación, sus bases matemáticas, sus ventajas, desventajas y sus principales aplicaciones.

La segunda parte es la aplicación de esta técnica a un sistema de Producción Inventario con el fín de determinar: el mejor método de pronosticar las demandas futuras y los niveles iniciales de inventario que permitan al menor costo, cumplir con las políticas de trabajo del sistema en estudio.

CAPITULO II

LA SIMULACION

La simulación es una técnica de la Investigación de Operaciones, la cual estudia el comportamiento real de un modelo mediante Técnicas Numéricas.

Se entiende como Modelo, a una representación de un sistema que se utiliza para predecir el comportamiento del mismo al cambiar las variables que lo caracterizan. Se pueden considerar 3 tipos de Modelos: Icónico, Análogo y Simbólico.

MODELO ICONICO:

Es aquel que se parece a lo que se quiere representar, ejemplo fotografías, esculturas.

MODELO ANALOGICO:

Es aquel que emplea un conjunto de propiedades para representar a otro. Los gráficos, diagramas de flujo, son modelos analógicos, así mismo, lo es la Computadora Analógica, en la cual se utiliza las propiedades de los Circuitos Eléctricos para resolver ecuaciones diferenciales, que a su vez representan un sistema real.

MODELO SIMBOLICO:

Es aquel que emplea símbolos para representar las relaciones entre las distintas variables de un sistema. Ejemplo, las ecuaciones matemáticas de cualquier tipo.

Soluciones de un modelo dado:

El modelo planteado, por si sólo no resuelve ningún problema, es necesario operar con él para poder analizar la influencia de las distintas variables en el sistema y poder así resolver el problema planteado.

La manera de trabajar para llegar a la solución del programa depende del tipo de modelo que se haya formulado.
Los procedimientos para resolver el problema son de tres tipos, analíticos, numéricos y de simulación.

PROCEDIMIENTO NUMERICO:
Consiste en reemplazar los símbolos, por valores numéricos y encontrar, que conjunto de valores numéricos son la mejor solución al problema planteado.
PROCEDIMIENTO ANALITICO:

Consiste en encontrar mediante análisis matemático las relaciones de las variables incógnitas del problema.
PROCEDIMIENTO DE SIMULACION:
Cuando el modelo contiene variables de tipo probabilístico puede ser muy difícil el encontrar la solución por las técnicas anteriormente mencionadas, las técnicas de simulación puede ser la manera más apropiada de resolver el problema.

DEFINICIONES DE SIMULACION:

X simula a Y es cierto, si y sólo si (a) X y Y son sistemas formales (b) Y es el sistema real y X es una aproximación al sistema real (c). Las reglas de validez de X están libres de error " Churman.
"La simulación de un ortanismo es la operación de un modelo ó simulador, el cual es la representación del organismo. El modelo se puede manipular en formas que serían imposibles, muy caras ó poco prácticas de realizar con el sistema real. La operación del modelo puede ser estudiada y de este estudio deducir las propiedades acerca del comportamiento real del sistema" Shabik

"Simulación es una técnica numérica para llevar a cabo experimentos en los que intervienen cierto tipo de modelos que describen el comportamiento de un sistema real" Naylor.

"Un modelo de simulación es un medio de representar el funcionamiento de un sistema real-administrativo, económico ó físico". Stevenson & Kellogg.

La Simulación y la Investigación de Operaciones:

La Investigación de Operaciones, es una manera de estudiar la operación ó fundamento de sistemas complicados que incluye hombres y máquinas. La I. O es un método científico de atacar problemas complicados en base a el trabajo de un equipo de especialistas.

Como modelo científico la Investigación de Operaciones utiliza cuatro pasos del método científico.

Estos pasos son:

1) Observación del sistema real.
2) Formular una hipótesis o modelo matemático del sistema.
3) Predecir el funcionamiento del sistema en base a la hipótesis o modelos planteados.
4) Efectuar experimentos que prueben la validez de la hipótesis. Muchas veces es muy difícil llevar a cabo uno de estos pasos en el:

1ro. En ciertos casos es imposible ó muy costoso estudiar el sistema real, por ejemplo no se puede estudiar las ventas futuras de un producto ni el comportamiento en vuelo de un cohete o avión que se está diseñando, ó cual es el efecto de colocar una nueva gasolinera en un grifo.

2do. Hay sistemas muy complicados para los que es imposible ó muy difícil de diseñar un modelo matemático, como ejemplo podemos citar los sistemas económicos y los problemas de colas con múltiples canales de entrada.

3ro. Aunque en muchos casos sea posible obtener un modelo matemático del sistema este puede no tener solución ó esta puede ser muy complicada de obtener.

4to. Los experimentos que prueben la validez de la hipótesis pueden ser muy costosos de realizar sobre un sistema real (es el mismo caso del 1ro.) aunque los fines sean completamente distintos.

En cada uno de estos casos, la Simulación es la técnica que permite superar las dificultades anteriormente mencionadas y llegar a una solución del problema. Sin embargo es necesario llamar la atención sobre el uso de la simulación pués aunque la simulación se presta para la solución de cualquier tipo de problema, para muchos problemas hay otras técnicas de Investigación de Operaciones que dan mejores resultados.

Además la simulación no nos proporciona automáticamente la respuesta al problema, es necesario probar varias alternativas y seleccionar la mejor, en todo caso la simulación no proporciona más que una buena aproximación a la realidad.

LOS MODELOS DE SIMULACION

Los modelos de simulación se pueden clasificar en 4 grupos de acuerdo a: las características de sus variables probabilísticas ó constantes a su grado de variación en el tiempo. Estos seran:

ESTATICO: Son aquellos modelos en que no se toma en cuenta la variable tiempo, es decir estos no cambian en función del tiempo.

DINAMICOS: Son aquellos modelos en que se toma en cuenta la variable tiempo y su situación ó los valores de la variable. Son distintos a cada valor del tiempo.

DETERMINISTICOS: Son aquellas en que todas las variables tienen relaciones exactas entre sí, ninguna puede tomar valores al azar.

ESTOCASTICOS: Son aquellos en los cuales por lo menos una de las variables es una función de probabilidad.

En nuestro caso los modelos que estudiaremos serán estocásticos y dinámicos de preferencia, aunque también mencionaremos como ejemplo una simulación para resolver un modelo determinístico.

CARACTERISTICAS DE LOS MODELOS: En cualquiera de los tipos de modelos citados anteriormente se pueden encontrar las siguientes características, componentes, variables, parametros y relaciones funcionales.

COMPONENTES : Son las partes de que se encuentra formado el sistema en estudio, como por ejemplo se puede considerar en una planta industrial los siguientes componentes: hombres, máquinas, edificios, almacenes etc.

VARIABLES: Son las relaciones entre los componentes, pueden ser a su vez de tres tipos:

a) VARIABLES EXOGENAS: ó exteriores al sistema, como ejemplo en el caso de la fábrica mencionada serían las condiciones económicas, los pedidos o compras de los clien - tes etc, a su vez estas se pueden considerar como controlables (se puede traer más clientes con propaganda). No controlables (el precio del dolar no lo puede controlar, los impuestos etc.)

b) VARIABLES DE ESTADO: Son las que definen el sistema ó uno de sus componentes antes de un período de tiempo, después de un período de tiempo ó durante un período de tiempo ; estas son funciones no sólo de variables exógenas, sino también de resultados en los períodos anteriores . Como varia - bles de estado en nuestra planta se podría considerar, el número de horas trabajadas al día, la cantidad de productos en almacén, la cantidad de dinero que se posee, etc.

c) VARIABLES ENDOGENAS: Son las variables, resultado de la operación del modelo, como ejemplo se pueden considerar el costo de producción, la cantidad producida etc.

Es necesario aclarar que la clasificación de una variable en una de estas categorías depende exclusivamente del modelo formulado, no de la variable en sí.

PARAMETROS: Como parámetros se consideran a todas las va - riables que tienen valor fijo y que no cambian para el modelo, como ejemplo se puede considerar el número de máquinas, la capacidad del almacén, etc.

RELACIONES FUNCIONALES: Son la descripción de las relacio - nes entre las variables del sistema. Como ejemplo:

Producción = Número de máquinas X tiempo trabajado. Es una relación funcional del sistema, otra relación sería:

Stock (C1) = Stock (2) + Produc - Ventas.

VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE LA SIMULACION

Como toda técnica la simulación tiene ventajas y desventajas en su utilización y es necesario conocerlas para así poder aprove - char y utilizarla apropiadamente.

VENTAJAS DE LA SIMULACION :

1) Se hace posible estudiar y experimentar con sistemas complicados, como firmas, industrias, economías.
2) La observación detallada de un sistema llama a un mayor conocimiento del mismo y actúa como catalizador de las ideas.
3) Puede ser utilizada como instrumento pedagógico, para enseñar a estudiantes ó al mismo personal de la firma.
4) La simulación puede servir para estudiar sistemas nuevos de los que se tiene poca información.
5) Se puede experimentar con las decisiones antes de llevarlas a la práctica.
6) En ciertos procesos estocásticos la secuencia de los eventos puede ser muy importante, la simulación es la única manera de obtener información sobre los mismos.
7) Se puede llevar a cabo para unificar las soluciones analíticas a problemas determinísticos.
8) La simulación permite estudiar sistemas dinámicos.
9) Es más fácil explicar y entender que otras técnicas de Investigación de Operaciones.

DESVENTAJAS

1) Desconocimiento de las limitaciones de la técnica, por parte de los que la utilizan.
2) Toda construcción de un modelo de simulación se basa en una serie de asumciones por parte de los que lo construyen, la

calidad del mismo y consecuentemente de los resultados es función directa de la exactitud y corrección de estas asumciones

3) La obtención de la data para llevar a cabo la simulación es muchas veces difícil y no se le da la debida importancia. El buen funcionamiento del modelo depende de la calidad de la data alimentada.
4) Para aquellos que han resuelto ya otros problemas por simulación, es muy fácil que sean orientados a la técnica ,que cada problema es distinto y requiere de distinto procedimiento de solución.
5) Es necesario llamar la atención de que la simulación no genera ideas, sólo permite la evaluación de las mismas. Las ideas son producto de la mente humana.

EJEMPLO DE SIMULACION:

Una estación de servicio tiene llegadas Aleatorias, según la siguiente frecuencia empírica.

Llegadas por minutos	Frecuencia de llegadas	Frecuencia acumulada
1	20	20
2	45	65
3	17	82
4	18	100
5 ó más	0	100
	100	100

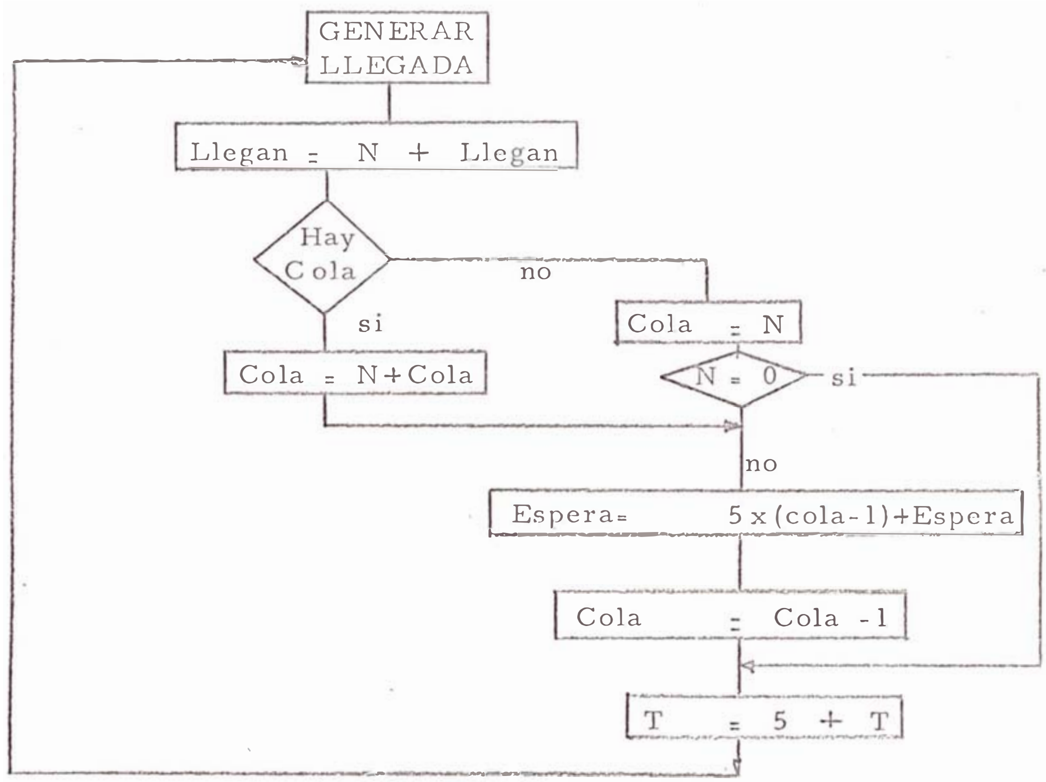
El tiempo de servicio es de 5 minutos - Encontrar cuál es el tiempo promedio de espera.
Se simula las llagadas mediante una tabla de números Random de la siguiente manera: Si el número Random es,

00	--	20	llegan	0	unidades
21	--	65	"	1	"
66	--	82	"	2	"
83	--	99	"	3	"

Ejemplo:

# RANDOM	SE CONSIDERA QUE LLEGAN UNIDADES
00	0
75	2
96	3
15	0
10	0
13	0
77	2
25	1
10	0
21	1
29	1
59	1

Y se trabaja de la
siguiente manera



De este modo se obtiene el tiempo de espera

Donde el promedio estará dado por

$$t_p = \text{espera/ llegada}$$

CAPITULO II

Los aspectos teóricos en que se basa la simulación se pueden dividir en tres partes fundamentales y que son desarrolladas en este capítulo mediante el principio de ir de lo General a lo Particular.

Los puntos a tratar son:

1) Método de Montecarlo
2) Generación de Números Random
3) Generación de Funciones Estocásticas

II) Método de Montecarlo:

El Método de Montecarlo consiste en la resolución de varios problemas del Cálculo Matemático por medio de la construcción de algún proceso random para cada problema, con los paráme - tros del proceso igual a las cantidades requeridas en el proble - ma. Por ejemplo: la cantidad requerida "y" puede ser la ex - pectación matemática $E\gamma$ de cierta variable random.

El método Monte Carlo para determinar el valor aproximado de la cantidad "y" consiste en el muestreo de N de los valores de la variable en una serie de pruebas independientes: γ_1, γ_2, γ_3 .... y el cálculo de su media aritmética.

$$\bar{\gamma} \quad \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots\ldots + \gamma_N}{N}$$

FUNDAMENTOS TEORICOS DE LA SIMULACION

I) Conceptos Fundamentales:

Con el advenimiento de las modernas computadoras electrónicas se han podido desarrollar nuevas técnicas de investigación, basadas en nuevos principios.
Por medio de la experimentación en computadoras, modelos de sistemas físicos complejos son estudiados rápidamente, en una forma bastante simple y económica.
Un aspecto importante del uso de las computadoras es la posibilidad de simular un proceso random.
El concepto de simular ó simulación puede ser explicado como una técnica en la cual se trata de crear un modelo que se comporte en igual forma que la situación real, para someterlo a experimentos.
Un proceso random puede ser definido como una variable que representa a una función real, el cuál está definido en un espacio y cuya probabilidad de ocurrencia es la misma que la de la función real.
Estas técnicas que nos permiten simular un proceso random son conocidas como el Método de Montecarlo (o Muestreo Estocástico, o Muestreo Random).
El Método de Montecarlo se aplica para diferentes tipos de simulación, que varía desde la simulación de un sistema físico (ej:La simulación de un túnel de viento, problemas de Macroeconomía y Microeconomía) a la investigación de problemas matemáticos (Sistema de ecuaciones lineales, resolución de integrales múltiples, ecuaciones diferenciales de orden n).

De acuerdo a la ley de los grandes numeros,

$$\bar{\gamma} = E\gamma = Y$$

La probabilidad que $\bar{\gamma} = E\gamma$ esté cerca de la unidad aumenta para un número suficientemente grande de N.

Históricamente el primer ejemplo de un cálculo realizado por el método Monte Carlo fue hecho por Buffon en su ya conocido problema del lanzamiento de la aguja, que fue descrito en 1777 en su tratado "Ensayo de Aritmética".

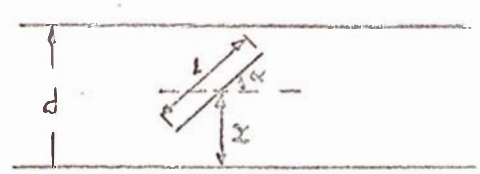
Este problema dió un método inesperado para evaluar la cantidad (es decir la proporción del diámetro del círculo a su circunferencia).

El método es el que sigue:

En una superficie plana colocar un sistema de lineas paralelas a una distancia "d" una de otra.

Se supone que una aguja de longitud "l" es lanzada en el plano, de tal modo que su posición en el plano es random.

Es natural asumir que el ángulo α, el ángulo de inclinación de la aguja en el sistema de lineas paralelas se distribuya uniformemente entre los valores de $-\frac{1}{2}\pi \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$ y la posición del centro de la aguja, entre dos lineas adyacentes se distribuya uniformemente en el intervalo $0 \leq x \leq d$ (ver figura 1)

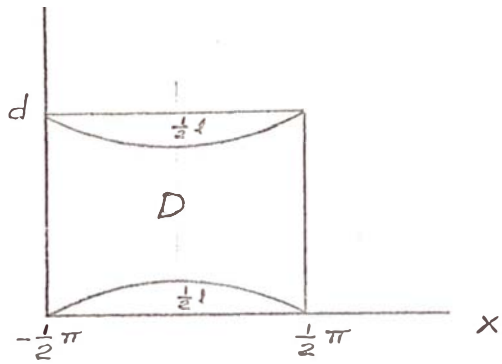


La condición para que la aguja no intersecte cualquiera de las lineas es cumplida por la resolución simultánea de las dos desigualdades

$$0 < x - \frac{1}{2} l \cos\alpha$$

$$d > x + \frac{1}{2} l \cos\alpha$$

Desde que x y están distribuidos uniformemente la probabilidad "p" que las dos desigualdades sean satisfechas juntas, es proporcional a la región D que está representada en la fig. 2.



En forma más precisa:

$$P = \frac{1}{\pi d} \iint_D dx \, d\alpha$$

Si asumimos que el largo de la aguja $l < d$ como se muestra en la figura 2, la integral puede ser resuelta:

$$P = \frac{1}{\pi d} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} d\alpha \, (d - l\cos\alpha) = 1 - \frac{2l}{\pi d}$$

Así, la probabilidad que la aguja intersecte una de las lineas es:

$$1 - p = 2l/\pi d$$

En el caso que $2l = d$, es decir la distancia entre las lineas sea el doble del largo de la aguja, la probabilidad que ésta intercepte una de las lineas es igual a $1/\pi$. Ahora si dejamos caer N veces la aguja sobre el plano reglado y K de estas veces la aguja intercepta una de las líneas. Bajo la ley de los grandes números:

$$K/N \approx 1/\pi$$

El valor que se obtuvo experimentalmente de π fue de 3.1596.

Otro problema que también ya es clásico y que nos ilustra el uso del Método de Monte Carlo es el problema llamado "El paseo Errático" (Random Walk) y que trata del camino recorrido por un borracho, donde cada uno de los pasos que el borracho dá se considera

que tiene la misma probabilidad de ir en cualquier dirección. Así supongamos que el borracho se haya reclinado sobre un poste en el medio de una plaza. Se decide a caminar, pero sin ninguna dirección en particular. Mientras lo observamos, vemos que camina unos pasos en una dirección, luego otros pasos en otra dirección, es decir camina en forma imprevisible, o en una forma random. El problema consiste en determinar que tan lejos se ha apartado el borracho del poste después de haber realizado "n" de estos pasos zigzagueantes en su camino.
Dicho de otro modo cuál sería la distancia más probable que el borracho recorra después de "n" pasos.
En la práctica este problema sería muy difícil de resolver debido a la cantidad de borrachos que habría que observar, pero como sabemos que el borracho se mueve al random, con una tabla de Números Random podremos simular su camino y de esa manera aproximarnos a la situación real.
Por medio de un número grande de simulaciones estaremos en condiciones de decir cuál será la distancia más probable que el borracho recorra después de "n" pasos. Una forma de simular el problema es el siguiente:

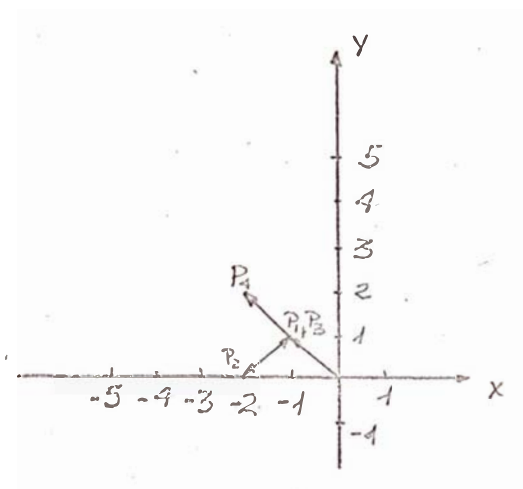
1) Se toma el poste como el orígen del sistema de coordenadas con ejes X e Y.
2) De una tabla de Números Random escoger números de 2 dígitos, donde el primero representa una unidad de X, si el dígito es par ó cero la unidad tomada es positiva, si el dígito es impar la unidad tomada es negativa.
   El segundo dígito representa la unidad tomada sobre el eje Y con las mismas consideraciones para el signo.
3) (xn, yn) representa las coordenadas de la posición del borracho en la fase N.

4) La distancia recorrida será igual a: $d^2 = Xn^2 + Yn^2$ en la fase N.

En este caso simularemos cuatro pasos (n = 4) del borracho que estarán planteadas en la figura 3 y representados en la tabla I. Tomando cuatro números de la tabla random: 36, 35, 68, 96.

Tabla 1

Fase N	1er. Dígito	2° Dígito	Coordenada (Xn, Yn)
1	3	6	(-1, 1)
2	3	5	(-2, 0)
3	6	8	(-1, 1)
4	9	0	(-2, 2)



En este ejemplo uno estima que la distancia recorrida después de cuatro pasos es de 2.82 unidades del poste calculado de la siguiente manera:

$$d4^2 = x4^2 + y4^2$$
$$d4^2 = (-2)^2 + (2)^2$$
$$d4^2 = 8$$
$$d4^2 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2.82 \text{ unid.}$$

Este procedimiento puede ser repetido para diferentes números random, teniendo así diferentes estimados de la distancia más probable.

Tomando las medias aritméticas de las distancias estimadas del borracho al poste, se llegará a un valor cada vez más aproximado del valor real a medida que aumentamos el número de muestras.

Después de estos dos ejemplos podemos llegar a una definición más moderna en la que se dice que el Método de Monte Carlo es una técnica de la simulación para problemas que tienen una base Estocástica ó Probabilística.

El uso de la técnica de simulación por el Método de Monte Carlo nos crea dos tipos de problemas.

Primero, son los problemas que envuelven cualquier tipo de proceso estocático.

Como son la demanda del consumidor, tiempo que demora el abastecerse un pedido, o la inversión total en la economía de un sistema.

Los ejemplos anteriores son ejemplos de variables económicas que pueden ser considerados estocásticos por naturaleza.

Para ellas se ha desarrollado el Método de Monte Carlo que simula funciones probabilísticas conocidas así como cualquier función probabilística empírica.

Al Método de Monte Carlo que resuelve estos tipos de modelos se le conoce como "Probabilístico-Estocástico", porque la resolución del modelo genera diferentes resultados para una misma condición.

Segundo son aquellos problemas matemáticos determinísticos que no se pueden resolver fácilmente ó muchas veces no se pueden resolver por métodos determinísticos. Sin embargo se puede llegar a soluciones aproximadas simulando procesos random ó estocásticos cuyos momentos, funciones densidad, o funciones de distribuciones acumuladas satisfagan los requerimientos matemáticos del problema.

La solución de ecuaciones diferenciales de grado N ($N > 2$), integrales múltiples, etc., son problemas que se resuelven más rápidamente por simulación que si se usasen métodos de análisis numerico.

A este tipo de problemas se le conoce como "Probabilístico - Determinístico" ya que la solución que se obtiene es única aunque aproximada para una condición.

Error del Método de Monte Carlo.

Ya que se ha dicho que algunas soluciones son aproximadas es muy importante saber cual es la exactitud que se puede esperar al utilizar este método en la resolución de problemas.

Tomemos un evento A que ha sido simulado y que tiene una probabilidad "p" de que ocurra.

Si tomamos una variable γ_i que tenga el valor de uno si el evento ocurre en la prueba i, pero tiene un valor de cero si el evento no ocurre.

El número total de pruebas en que el evento A ocurre es:

$$L = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i$$

donde N es el número de pruebas, y cada prueba es independiente una de otro.

La frecuencia de ocurrencia del evento A es L/N, que es una variable random que tiene la expectación matemática:

$$E(L/N) = 1/N\,E(L) = 1/N \sum_{i=1}^{N} E\gamma_i = Np/N = p$$

donde $\quad E\gamma_i = 0(1 - p) + 1.p = p$

y una varianza:

$$V(L/N) = 1/N^2(V(L)) = 1/N^2 \sum_{i=1}^{N} V\gamma_i = Np(1-p)/N^2 = p(1-P)/N$$

donde

$$V\gamma_i = E\gamma_i^2 - (E\gamma_i)^2 = (0)^2(1-p) + (1)^2.p - p^2$$
$$= p - p^2 = p(1-p)$$

De acuerdo a la ley de los grande números (Teorema de Chebyschev) la frecuencia de ocurrencia del evento A (que es L/N) es aproximadamente igual a la probabilidad p.

En términos más precisos para cada $E > 0$ y $\delta > 0$ existe un número N de pruebas, que con una probabilidad mayor que 1 - E (donde $E = \frac{1}{K}$), la frecuencia de ocurrencia del evento A difiera de la probabilidad p de la ocurrencia de este evento sea menor que δ (donde $\delta = \sqrt{\frac{p(1-p)}{EN}}$:

$$P\left(\left|\frac{L}{N} - p\right| < \delta\right) > 1 - E$$

Como p es el valor requerido y L/N es el valor aproximado obtenido por el Método de Monte Carlo la diferencia (L/N)-p es el error del método de Monte Carlo.

Por lo que se ha dicho el errror sólo podrá ser evaluado esta - dísticamente con un grado de certeza $1 - \delta$.
(Por lo general este grado de certeza que se toma es igual a 0.99 ó 0.997).
Se puede deducir del teorema de Chebyschev de que el error del Método de Monte Carlo está en función del número N de pruebas.

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad x \quad \frac{P(1-p)}{E}$$

Es decir

$$\delta \simeq \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Se puede demostrar que también cumple para una distribución normal. El teorema de Chebyschev dice que en una distribución probabilística de media aritmética igual a μ y variancia σ^2, la probabilidad de obtener un valor que se desvíe de la media aritmética por más de K desviaciones standard es menor de $1/K^2$

$$P\left(|x-\mu| > K\sigma\right) < \frac{1}{K^2}$$

Para una distribución binomial se tiene que:

$$P\left(\left|\frac{x}{n} - n\right| > K\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) < \frac{1}{K^2}$$

$$P\left(\left|\frac{x}{n} - n\right| < K\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) > 1 - \frac{1}{K^2}$$

De donde es evidente que la reducción del error δ en la solu - ción del problema, obtenido por el método de Monte Carlo, está asociado con un aumento en el número N de pruebas, lo que redunda en un aumento en el tiempo de computaciones.
Por ejemplo el aumento en 10 veces de la exactitud requiere de un aumento en 100 veces el tiempo requerido en la solución del problema.
Es por eso que el Método de Monte Carlo no dá soluciones de mucha exactitud, el error es del orden de 0.01 a 0.001 en el valor

máximo, a no ser que se utilice alguna técnica especial para mejorar el resultado.

Como regla el método de Monte Carlo debe ser usado para problemas que no requieran demasiada exactitud.

III. - Generación de Números Random

El grado de éxito que se obtenga de una simulación ó de la aplicación del Método de Monte Carlo en computadoras depende de dos factores principalmente:

- La calidad de la fuente generadora de números Random.
- El uso de un algoritmo de cómputo adecuado.

El escoger un método para generar números random es de primera importancia, ya que la solución de cualquier problema depende de la buena elección del método de generación.
Antes de pasar a discutir los distintos tipos de generación y su concepto es bueno definir la terminología:

- Llamamos variable random a aquella variable que está asociada con la función real y que tiene la misma probabilidad de suceso que la función real.
- El valor particular que puede tomar la variable random se le denomina valor random.
- Se usarán mayúsculas para denominar las variables random y minúsculas para definir los valores random.

Así por ejemplo F (x), es la función de distribución acumulada de una variable random X, donde X es la probabilidad de que sea menor ó igual que x, un valor random específico.
En una forma similar f (x) representa el valor de una función densidad de probabilidad de la variable random X cuando X = x.
Una forma de clasificar las variables random es de acuerdo a su función densidad de probabilidad.

En este capítulo sólo nos interesa el aspecto de las variables random que tienen una función densidad de probabilidad uniforme.

La función de distribución acumulada para una distribución uniforme standarizada puede ser definida de la siguiente manera:

$$F(x) = \begin{cases} 0, X \leq 0 \\ X, 0 < X < 1 \\ 1, X \geq 1 \end{cases}$$

donde x es el valor específico uniforme random.

Estos valores random deben por lo menor aparentar ser sacados al random de una población uniformemente distribuída. El término aparentar significa que estos valores deben cumplir ciertas pruebas estadísticas que demuestren su capacidad de ser random. Este aspecto es discutido más adelante.

Cuatro son las alternativas que se tienen para generar una secuencia de números random:

a) Métodos Manuales.
b) Tablas .
c) Métodos de generación por computadoras analógicas.
d) Métodos de generación por computadoras digitales.

Los métodos manuales son los más sencillos pero a la vez los más imprácticos debido a la lentitud del método. Este método es muy práctico para una demostración ya que es impresionante mostrar una generación de números random por medio de ruletas, dados o tiros de monedas al aire.

Otra desventaja de este método es su completa incapacidad de repetir la secuencia.

Una forma de solucionar el problema de la necesidad de repetir secuencias es el uso de tablas, que son reproducidas por uno de los métodos anteriores, pero que tiene el inconveniente de la lentitud en su uso. El caso en que se necesiten más números que el que se tienen en la tabla y el que se tenga que repetir los mismos números es otra desventaja para otra simulación. Las computadoras analógicas son usadas en la generación de números random, ya que los métodos de computación analógica dependen de un proceso físico random, tal como el comportamiento de la corriente eléctrica. Aunque este método genera más rápidamente, los números random que los métodos manuales conserva el mismo inconveniente, que es la no reproductividad de la secuencia de números random.

Para la generación de números random por medio de las computadoras digitales se ha hecho una división de las maneras como éstos realizan la generación:

- Provisión externa.
- Generación interna por algún procedimiento físico random.
- Generación interna por alguna relación repetitiva.

a) Provisión externa : En este método sólo tiene una alternativa, que es la de colocar en cintas magnéticas tablas de números random que sirvan de datos de entrada.

Tienen el inconveniente de que la entrada a toda computadora es simpre el elemento que más tiempo toma en la operación de la misma.

b) Generación interna por algún procedimiento físico random: Este segundo método nos permite generar números random verdadero por medio del acoplamiento a la computadora de alguna fuente generadora de procesos random tal como la emisión radioactiva

ó el ruido de alguna válcula en un circuito electrónico.
Pero tiene el inconveniente en su no reproductividad de la secuencia, lo cual no nos permite chequear los cálculos matemáticos. Otro inconveniente es que la fuente generadora pueda salirse de control, por lo que es necesario estar constatando constantemente números limitándonos la capacidad de la memoria del computador.

c) Generación interna por medio de una relación repetitiva: Este tercer método es lo que se conoce como generación de números "Pseudorandoms" por la continua transformación de un grupo de números arbitrariamente escogidos pero cuyos dígitos pasan un cierto número de pruebas que los estadísticos consideran son necesarios para cumplir la condición random . Este método elimina el problema de la falta de reproductividad de los otros métodos y también cumple la condición de que sea posible la generación con unas cuantas sentencias aritméticas.

La oposición a este método radica en que este tipo de generación de números es lo opuesto a la definición de un proceso random.

Pero mientras la secuencia cumpla las pruebas estadísticas estas objeciones son puramente filosóficas.

Históricamente el primer método de generación de distribuciones uniformes de números pseudorandoms en una computadora, fue el método de middle square que básicamente es la extracción de los dígitos del medio de un producto. Este método fue propuesto por Von Neumann en 1951 y es el que sigue:

Se escoge un número arbitrario α_0 para empezar la relación donde α_0 es un número par de 2K dígitos.

Este número α_0 es elevado al cuadrado produciendo un número α_0^2 de 4k dígitos. El número α_1, es tomado a partir del centro 2k (desde el $K+1$ hasta $3K$ inclusive) de α_0^2. Siendo este número el nuevo α_1. Se repite el proceso. Como este tipo de relación se le encontró muy difícil de analizar, muy lento y con una secuencia de números random poca satisfactoria ya que la distribución obtenida de este modo no era uniforme. Se probaron otras técnicas como la de escoger arbitrariamente dos números α_0 y $_1$, se forma el producto $\alpha_0 \alpha_1$, se escogen los números del medio α_2 y se generan el producto $\alpha_1 \alpha_2$, obteniendo α_3, etc. Este método es una variante del método de Von Neumann y se acerca más a una distribución uniforme, pero que de todas maneras no cumple adecuadamente todas las pruebas estadísticas; debido a esto también fue desechado.

Actualmente está muy en boga el método congruente para la generación de números random, que fue desarrollado por Lehmer y del cuál nos ocuparemos en detalle por considerar que actualmente es el más satisfactorio.

Antes de entrar a discutir el método congruente vamos a enunciar un número de reglas con la cuál se puede decidir si un método para generar números random es aceptable:

1) Debe ser uniformemente distribuído.
2) Debe ser estadísticamente independiente.
3) Reproductible.
4) No se repita para cualquier longitud.
5) Debe generarse a altas velocidades.
6) Usar el mínimo de cantidad de memoria.

Método Congruente para la generación de Números Pseudorandoms:

Los métodos congruentes para generar números random son completamente determinísticos, porque el proceso aritmético envuelto en los cálculos únicamente determina un término en la secuencia de los números, siendo posible conocer y calcular con anticipación el valor exacto del número y en una secuencia de números (n_1, n_2 ....n:.............) antes que la secuencia sea generada.
Aunque estos procesos no son procesos random, pasan ciertas pruebas estadísticas que justifican su uso; como el estar distribuídos uniformemente y el de ser estadisticamente independiente.
Las reglas (3) y (6) también son satisfechas completamente por los métodos congruentes ya que estos métodos son completamente reproducibles y ocupan poca memoria del computador.
Las reglas (4) y (5) son los únicos requerimientos que para ser cumplidos dependen del método empleado. Estos se discuten a continuación:
Los métodos congruentes se basan en una relación congruente fundamental que se puede enunciar así:

"Dos enteros "a" y "b" son congruentes modulo m si su diferencia es un múltiplo entero de m. Esta relación congruente se expresa por la notación $a \equiv b$ (módulo m) y que se lee como "a" es congruente con "b" módulo "m"; y que significa que:

- (a-b) es divisible por m.
  a y b al ser divididos por m dejan el mismo residuo.

Ejemplo:

$$2327 \equiv 27 \quad (\text{Mod } 10^2)$$

$$\frac{2327 - 27}{10^2} = 230$$

$$\frac{2327}{10^2} = 23 \; \frac{27}{10^2}$$

$$\frac{27}{10^2} = \frac{27}{10^2}$$

Y que puede ser expresado por la siguiente fórmula:

$$n_{i+1} \equiv an_i + c \pmod{m} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Si expandimos la ecuación 1 tendremos que:

$$n_1 = a\,n_o + c \pmod{m}$$

$$n_2 = a\,n_1 + c = a^2 n_o + (a+1)\cdot c \cdot (\text{mod } m)$$

$$n_3 = a^3 n_o + (a^2 + a + 1)\, c = a^3 n_o + c\,\frac{(a^3 + 1)}{(a-1)} \text{ mod } m$$

donde se obtiene que para cualquier valor de i:

$$n_i = a^i n_o + c\,\frac{(a^i + 1)}{(a-1)} \pmod{m} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Es decir que para un valor inicial n_o, una constante multiplicadora a y una constante c de suma la ecuación 2 nos dá la relación congruente con módulo m para cualquier valor i en una secuencia $(N_1, N_2 \ldots\ldots\ldots\ldots N_i \ldots\ldots\ldots\ldots)$.

Por medio de la definición del método congruente se demuestra que el valor $N_i < m$, para todos los valores de N_i. De los enteros formados por la secuencia (N_i) se puede formar números en el intervalo (0,1) por medio de la secuencia $(r_i) = (n_i/m)$.

Ahora podemos entrar a contestar la pregunta si existe un valor positivo de i, $i = h$, tal que $n_h = n_o$ donde "h" es el periodo de la secuencia (n_i).

Nuestro interés radica en el problema de que si $n_i = n_o$ para un valor de $i = h$ entonces n_{h+1} n_1, $n_{h+2} = n_2$, etc.
De tal modo que nuestra secuencia de números pseudorandoms se repite después de un período igual a h.
Existen teoremas para demostrar que este siempre existe y que su valor máximo depende de m.
Lo que significa que es imposible obtener secuencias no repetidas por el método congruente. Pero que en la práctica se puede lograr un período de secuencia lo bastante alto escogiendo un módulo grande.
Tres métodos congruentes han sido desarrollados para generar números random, mediante el uso de distintas versiones de la fórmula 1. Estos métodos son el método congruente aditivo, el método congruente multiplicativo, el método congruente combinado.
El objeto de cada método es generar secuencias con el máximo periodo y en la menor cantidad de tiempo.

El Método Congruente Aditivo: Asume K valores iniciales random donde K es un número positivo y entero, computando la siguiente relación congruente:

$$n_{i+1} \equiv n_i + n_{i-k} \pmod{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Las propiedades estadísticas mejoran a medida que K aumenta. Es el único método que genera períodos más grandes que m.

ha sido programada en computadoras que usan el sistema binario mediante la siguiente fórmula:

$$n_j = (n_{j-1} + n_{j-k}) \pmod{2^b}$$

Donde b es el número de bits que lleva cada palabra en el computador. Con esta función es necesario proveer K números random.

El período de esta función es igual a $P_k \cdot 2^{b-1}$ donde P_k depende de K y de b.

Pruebas estadísticas demuestran que el menor valor de K que debe ser utilizado es K = 16.

Usando este valor el período generado es igual a 255×2^{34} para un valor de b = 35.

El Método Congruente Multiplicativo:

Computa una secuencia n_i de números positivos todos menores que m y que siguen la siguiente relación congruente:

$$n_{i+1} \equiv a n_i \pmod{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Este método es un caso especial de la fórmula 1 donde c = 0.

Este método se comporta en forma aceptable estadísticamente y tiene la ventaja que escogiendo un valor de a y N_o adecuado se asegura períodos largos en la secuencia.

La mayoría de las versiones de este método que trabajan en computadoras tienen un módulo $m = p^e$ donde "p" representa el sistema que trabaja el computador (digital o binario) y "e" representa la longitud o el largo de la palabra (word).

El símbolo "e" será reemplazado por "b" (binario) ó "d" (digital).

Las razones del uso de m = son:

1.- La reducción del módulo "m" por medio del uso de los "e" dígitos de más bajo orden.

2.- La facilidad de conversión al intervalo unitario;corriendo el punto decimal o binario a la izquierda del numero.

Debido a que este método se usa en ambas computadoras estudiaremos para qué valores de "a" y "n_o" se puede asegurar el máximo periodo.

Computadoras Binarias:

Para las computadoras binarias escogeremos $m = 2^b$ donde "b" es el número de dígitos binarios o bits en una longitud de palabra (word).

El periodo que se obtiene para "b" es igual a $h = 2^{b-2}$

Por definición "a" debe ser relativamente primo de "m". es decir que si "a" es relativamente primo de "$m = 2^b$" este debe ser impar.

Se ha demostrado que los valores de "a" que cumplen esta condición son los que satisfacen esta relación congruente :

$$a \equiv \pm 3 \cdot (\text{mod } 8)$$

Que puede ser expresada también como:

$$a = 8t \pm 3$$

para cualquier valor positivo y entero de t.

Para minimizar la correlación de primer orden entre los números pseudorandoms debemos usar la fórmula de Greenberger que dice que si "a" se aproxima a $m^{1/2}$ se minimiza la correlación. En este caso

$$a \approx 2^{b/2}$$

Para seleccionar n_o seguimos la misma definición que hemos seguido para escoger "a" y que dice que n_o debe ser relativamente primo de m, por lo tanto debería ser un número entero positivo e impar.

Este procedimiento de generación de números pseudorandoms puede ser resumido de la siguiente manera:

1.- Escoger cualquier valor entero, positivo e impar como valor inicial de n_o .
2.- Escoger un entero $a = 8t \pm 3$, donde t es cualquier valor positivo. El valor de "a" debe aproximarse a " $2^{b/2}$ para satisfacer la condición de correlación.
3.- Calcular $a \cdot n_o$ en punto fijo, lo que nos da un producto de 2 b dígitos. Desechamos los b dígitos de alto orden, siendo los dígitos de más bajo orden el valor de n_1
4.- Calculamos $r_1 = n_1/2^b$ para obtener una distribución uniforme.
5.- Cada siguiente número n_{i+1} se obtiene del producto an_i .

Computadoras digitales

Para las computadoras digitales escogemos $m = 10^d$ donde d es el número de cifras decimales en una palabra. El valor h del período es de $h = 5 \times 10^{d-2}$ para $d > 3$.
Los valores de "a" que satisfacen la condición que dice que "a" debe ser relativamente primo de "m" son:

$$a \equiv \pm(3,11,13,19,21,27,24,37,53,59,61,67,69,77,83,91) \pmod{200}$$

Consecuentemente se puede expresar:

$$a = 200\,t \pm P$$

donde "t" es cualquier entero positivo y "p" es uno de los 16 números de la ecuación anterior.
Por la misma definición n_o debe ser relativamente primo a 10^d, lo que implica que cualquier número impar no divisible por cinco cumplirá esta condición, y puede ser escogido como valor inicial.

Este procedimiento de generación de números pseudorandoms puede ser resumido de la siguiente manera:

1.- Escoger cualquier número impar entero positivo no divisible por cinco como valor incial n_o
2.- Escoger un entero $a = 200\,t \pm p$ como constante multiplicativa, donde t es cualquier entero positivo y p es cualquiera de los siguientes valores: 3, 11, 19, 21, 27, 29, 37, 53, 59, 61, 67, 69, 77, 83, 91.
Un valor a aproximado a $10^{\frac{d}{2}}$ satisfacerá la condición

de correlación (si $d = 10$, $a = 100,000 \pm 3$ es un buen valor).

3.- Calcular an_o usando variables de punto fijo. Este producto consiste de 2 d digitos, de los cuales los d digitos de alto orden son desechados, siendo los de bajo orden el nuevo valor n_1 .

4.- El punto decimal deberá ser corrido d digitos a la izquierda para convertir el número random, (que es un entero) en una distribución uniforme en el intervalo unitario ($r_1 = n_1/10^d$)

5.- Cada siguiente número de la secuencia n_{i+1} es obtenido del producto an_i.

Método congruente combinado:

Son números que se obtienen por medio de la relación descrita en la fórmula 1 en su forma original con valores de "a" y "c" mayores que cero. Este método se puede decir que es una técnica reciente que ofrece muy pequeñas ventajas, tales como un incremento pequeño en la velocidad del cómputo y el de eliminar la periodicidad de los últimos dígitos.

Aunque estadísticamente el método se comporta bién, hay algunos casos en que este método no puede ser usado.

El período cubre todo el conjunto de "m" números diferentes, siendo "m" el módulo.

Las condiciones que deben cumplir a y c para obtener el máximo período son:

c debe ser relativamente primo con m.

$a \equiv 1 \pmod{p}$ donde "p" es un factor primo de "m"

así $a \equiv 1 \pmod{4}$ si 4 es el factor primo de "m", m es expresado como $m = 2^b$ para computadoras binarias y $m = 10^d$ para computadoras digitales.

Pruebas Estadísticas para Números Pseudorandoms:

Las propiedades estadísticas de los numeros pseudorandoms generados por alguno de los métodos anteriores, deberán coincidir con las propiedades estadísticas de los números generados por un elemento que seleccione números con una probabilidad idealizada en un intervalo unitario (0, 1), independientemente y con todos los números igualmente parecidos.
Claramente los números pseudorandoms no son random por naturaleza, pero mientras cumplan las pruebas estadísticas que determina un proceso random podrán ser tratados y tomados como random.
Entre las pruebas estadísticas más importantes tenemos:

a) La prueba de Frecuencia

Esta prueba es usada para comprobar la uniformidad de la secuencia de M conjuntos consecutivos de N números pseudorandoms.
Para cada conjunto de números pseudorandoms se divide el intervalo unitario (0, 1) en x subintervalos iguales.
El valor esperado de los números random que hay en cada subintervalo es

El estadístico que prueba si los números son uniformes es X^2, ya que la distribución que siguen los números en cada subintervalo es aproximadamente la distribución chi - cuadrado con x-1 grados de libertad.

b) Prueba de Serie

Esta prueba es usada para hallar el grado de randomización que existe entre dos números sucesivos en una secuencia

Esta prueba es usada generalmente para pares de números que son tomados como las coordenadas de un punto en un cuadrado unitario que está dividido en x^2 celdas.

Igualmente se puede hacer la misma prueba para tres números sucesivos que son representados como puntos en un cubo unitario.

La prueba también está basada en la prueba del chi-cuadrado.

c) Prueba de Discontinuidad:

Esta prueba nos sirve para hallar el grado de randomización de los dígitos en una secuencia de números.

Para cualquier dígito "d", estamos interesados en la longitud de la discontinuidad que es producido por los dígitos diferentes de "d" entre dos digitos dados.

Dos "d" consecutivos nos dará un tamaño de discontinuidad K -0. En una secuencia de números random "verdaderos" la probabilidad de obtener una discontinuidad de longitud K es:

$$P(K) = (0.9)^K . (0.1)$$

Un ajuste con una distribución chi-chuadrado nos sirve para comparar el valor esperado contra los valores obtenidos en las muestras.

d) La Prueba Poker:

Esta prueba es una prueba especial de frecuencias para las combinaciones resultantes de cinco o más digitos en un número random.

La cuenta de los pares, dos pares, trios, full-house, etc. son probados contra los valores esperados de estas ocurrencias.

Estas son unas cuantas pruebas estadísticas que a modo de ilustración se han mencionado para comprobar que una secuencia de números pseudorandoms se comportan como random.
La selección de las pruebas apropiados dependerá de la función generadora de números random, así como la aplicación que se le quiere dar.
Hay pruebas experimentales que demuestran que el método congruente multiplicativo y el método congruente combinado pasan todas las pruebas generales, pero que a medida que se va produciendo una sofisticación en las pruebas ya no existe una correspondencia perfecta. Por lo tanto se deberá tener cuidado en su uso.

IV.- Generación de Distribuciones de Probabilidad:

Como hemos expresado con anterioridad una simulación estocástica envuelve el reemplazo de una distribución de la población por su distribución teórica; es decir un universo que es descrito por alguna distribución probabilística (por ejm., la distribución normal) y después es muestreada por medio de esta distribución teórica con algún tipo de generador de números random. Muchas veces no es posible encontrar una distribución teórica que se ajuste a un proceso estocástico en particular ó aparte de este proceso.

En estos casos se puede hacer uso de distribuciones empíricas si es que se tiene suficiente información, pero es aconsejable tratar primero de encontrar una distribución probabilística standard, que se ajuste al proceso.

La finalidad de incluir esta sección en el capítulo de la teoría de simulación es la de dar a conocer una serie de técnicas que permitan generar en una computadora valores random, para algunas de las distribuciones de probabilidad más conocidas, así como para distribuciones empíricas que se puedan usar cuando se resuelve algún proceso estocástico.

Al resolver problemas estocásticos dos tipos de distribución son usados:

- continuo
- discreta

Usando la misma terminología que se definió en la sección de generación de números random, si F (x) es una función de distribución acumulada continua para todos los valores de x, es posible diferenciar esta función:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Donde la derivada $f(x)$ es conocida como la función de densidad de probabilidad. La función de distribución acumulada puede ser expresada matemáticamente como:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

donde f(x) está definido entre los valores $0 < F(x) < 1$ representa la función densidad de probabilidad de la variable random X cuando X = t.

La generación de los valores random distribuidos uniformemente (vistos en la sección anterior) juegan un papel importante en la generación de valores random que son sacadas de distribuciones probabilísticos.

Así llamaremos a los valores random uniformes " r " cuando $0 < r < 1$ y $F(r) - r$.

Existen tres métodos básicos para la generación de valores de distribuciones probabilísticas:

- Método de transformación inversa
- Método de rechazo
- Método de combinación

Método de Transformación Inversa:

Si deseamos generar valores random que se distribuyan según una función de probabilidad cuya densidad de probabilidad es f(x). (Ver figura 4). Como f(x) está definido en el rango 0 a 1, podemos generar números random uniformemente distribuidos y decir que $f(x) = r$.

Para cada valor de r sólo existe un valor de x.

Es decir que para un valor r, tal como r_o, que hemos generado es posible hallar un valor de x,

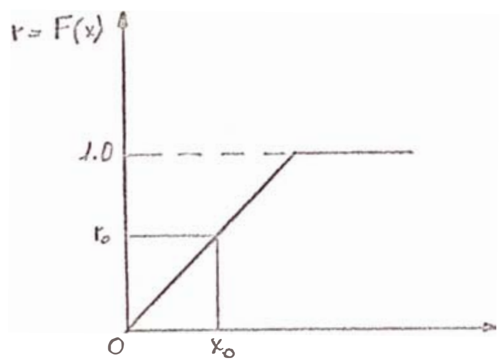


Fig. 4

en este caso x_o, que corresponde a r_o por medio de la función inversa de F,

$$x_o = F^{-1}(r_o)$$

donde $F^{-1}(r)$ es la transformación inversa de r en el intervalo unitario para cualquier valor de x.

Se puede resumir el método matemáticamente diciendo que si generamos números random distribuidos uniformemente y que correspondan a una F (x) dada

$$r = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

entonces:

$$P(X \leq x) = F(x) = P[r \leq F(x)] = P[F^{-1}(r) \leq x]$$

consecuentemente $F^{-1}(r)$ es una variable que tiene $f(x)$ como su función densidad de probabilidad.

Así por ejemplo: Se tiene una función densidad de probabilidad $f(x) = 2x$, $0 < x < 1$, se desean generar valores random de x.

$$r = F(x) = \int_0^{x} 2t \cdot dt \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$r = x^2$$

tomando la transformada inversa $F^{-1}(r)$ para x, se obtiene:

$$x = F^{-1}(r) = \sqrt{r} \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1$$

Así, los valores de x que tiene como función densidad $f(x) = 2x$ puede ser generada tomando la raíz cuadrada de los números random.

Desgraciadamente no siempre es posible obtener la transformación inversa $F^{-1}(r)$. En estos casos habrá que aproximarse por métodos numéricos para hallar F^{-1} ó usar uno de los siguientes métodos:

Método de Rechazo:

Si f(x) es una función cerrada y "x" tiene valores finitos y continuos, tales $a < x < b$, el método de rechazo puede ser usado.

La aplicación de esta técnica puede ser enunciada en los siguientes pasos:

1.- Normalizar el rango de $f(x)$ por medio de un factor escalar "c" tal que:

$$c\, f(x) \leqslant 1 \qquad a < x < b$$

2.- Definir x como una función lineal de r

$$x = a + (b-a)\, r$$

3.- Generar pares de números random (r_1, r_2)

4.- Cada vez que se cumple la condición

$$r_2 \leqslant c \cdot f(a + (b-a)\, r_1)$$

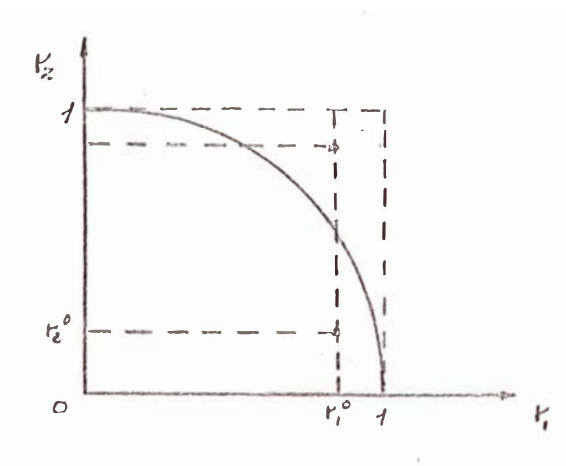
aceptar el par de números y usar $x = a + (b-a)r_1$ como el valor random generado.

La técnica en que se basa este método es que la probabilidad de que " r " sea menor o igual a $c.f(x)$ es,

$$P(r \leq c.f(x)) \qquad c.f(x)$$

De donde si x es escogido al random en el intervalo (a, b) de acuerdo con la ecuación lineal $x = a + (b-a)r$ y después rechazado para $r > c.f(x)$ la función densidad de probabilidad del valor aceptado de x será exactamente f(x).
Se ha demostrado que el número esperado de pruebas antes de obtener un par de números adecuados es igual a 1/c.
Esto implica que el método puede ser ineficiente para ciertas distribuciones de probabilidad.

Ejemplo: Usando el método de rechazo, calcular el área del primer cuadrante generado por un círculo de radio unitario con ejes coordenados r_1 y r_2 (ver fig. 5).



La integración numérica de este problema mediante el uso del Método de Monte Carlo nos muestra su uso en problemas del tipo probabilístico determinístico .

Cualquier par de números random (r_1, r_2) representa un punto dentro del cuadrado unitario mostrado en la fig. 5, y los puntos que satisfacen la ecuación $r_1^2 + r_2^2 = 1$ dentro del círculo.

Hagamos $g(r_1) = \sqrt{1 - r_2^2}$. Si $g(r_1^o) \geq r_2^o$ para los números generados (r_1^o , r_2^o), entonces (r_1^o , r_2^o) es un punto random debajo de la curva. Pero si $g(r_1^o) \leq r_2^o$ entonces (r_1^o , r_2^o) está encima de la curva.

Contando el número de puntos que son aceptados y dividiéndolos entre el cuadrado al área del círculo.

Esta proporción se acerca a $\pi/4$ a medida que se incrementan el par de números random.

El mismo método se usa para la solución de integrales múltiples que tienen funciones con más de una variable independiente.

Método de Combinación

Otro método de generar variables estocásticas en computadoras es el método de composición ó método de las mezclas.

En este método f (x) es expresado como una mezcla de probabilidad de funciones densidad g_n (x) seleccionadas correctamente.

Matemáticamente se expresa como :

$$d(x) = \sum_{1}^{M} g_n(x) \cdot p_n$$

La selección de $g_n(x)$ dependerá de consideraciones tales como "mejor ajuste " y el minimizar $\sum T_n \cdot p_n$ donde T_n es el tiempo esperado de computación para generar los valores de gn(x) y pn es la probabilidad ó el porcentaje de uso de la función.

Una vez conocidos los tres métodos de generación de funciones estocásticas es posible generar cualquier valor random que siga una distribución cualquiera.

En el apéndice #1 tenemos descrita las funciones de distribución probabilísticas más conocidas con su programación en la computadora en lenguaje FORTRAN- II. Igualmente describe la función generadora de números uniformes random, que es usada para la generación de las funciones estocásticas.

CAPITULO III

CAPITULO III

REALIZACION DE LA SIMULACION

Una vez que hemos decidido que la simulación es la técnica más adecuada para solucionar un problema procedemos a llevarla a cabo, los pasos a seguir son:

1) Formular el problema.
2) Recoger la data.
3) Formulación del modelo matemático.
4) Estimación de los Parámetros y de las características de operación.
5) Evaluación del modelo y de los estimados.
6) Formulación de un diagrama de flujo que represente la operación del sistema (Modelo de simulación)
7) Diseñar los experimentos a simular,
8) Llevar a cabo la simulación.
9) Analizar la data.
10) Conclusiones.

Lógicamente no todos estos pasos son obligatorios, ni tampoco es necesario seguir la secuencia en que están dados.
A continuación analizaremos los problemas que se presentan al llevar a cabo esto.

1.- FORMULACION DEL PROBLEMA

Todo estudio de Investigación de Operaciones debe iniciarse definiendo y detallando claramente cual es el problema a resolver, ya que no se obtiene ningún beneficio del llevar a cabo una simulación por hacerla simplemente. La formulación de un problema, es quizás el paso más difícil en su solución y está continuamente sujeta a cambios mientras se analiza.

En todo problema los objetivos serán: 1) Contestar preguntas, 2) Probar hipótesis, 3) Estimar los efectos de los posibles cambios, ó por lo menos uno ó dos de ellos.

Será necesario que nuestras preguntas hipótesis ó efectos a estimas estén 1) completamente definidos y claramente especificados 2) conocer con que exactitud o precisión queremos de los resultados 3) que se tenga un criterio para medir los resultados.

Los pasos a seguir en la formulación del problema serán por tanto:

1) Definir cual es el objetivo del estudio.
2) Definir la precisión que se desea de los resultados
3) Definir un criterio de evaluación ó medida para estos.

2.- RECOLECCION Y PROCESAMIENTO DE LA DATA

Aunque para la correcta formulación de un problema, es necesario contar con datos sobre el mismo este paso lo consideramos como #2, por cuanto una vez formulado el problema será necesario reprocesar y revisar la data de manera de acomodarla a las nuevas necesidades. Este paso es muy importante ya que de la calidad de la data utilizada depende la calidad de los resultados que se obtengan.

3.- FORMULACION DEL MODELO MATEMATICO

Los pasos a seguir en la formulación del modelo matemático será:

a) Especificación de los componentes.
b) Especificación de las variables y parámetros
c) Especificación de las relaciones funcionales

Los problemas principales que se presentan en este paso son:

a) Que variables son determinantes en el problema y cuales no tienen importancia en el mismo, con el fin de trabajar con el mínimo de variables.

b) Cuan complejo debe ser el modelo construído a fin de que sea a la vez operable y lo más representativo del modelo real.

c) Cuál es el tiempo real, ya que si este tiempo excesivo en realidad no se habría conseguido ningún beneficio del modelo.

4.- ESTIMACION DE LOS PARAMETROS Y DE LAS CARACTERISTICAS DE OPERACION

En este paso utilizando la data y el modelo matemático, se estimará los parámetros y características de operación.

5.- EVALUACION DEL MODELO

Consiste en probar este con el fin de determinar si:

1) Hemos incluído variables sin importancia en el programa.
2) Hemos excluído variables importantes
3) Hay errores en las relaciones funcionales.
4) Han sido los parámetros estimados correctamente.
5) Tienen estos parámetros validez estadística.
6) Funciona el modelo construído.

FORMA DE LLEVAR A CABO LA SIMULACION

Una vez que hemos diseñado los experimentos à simular, será necesario llevar a cabo la misma, esto se puede realizar ya sea en forma manual o mediante computadoras electrónicas, dentro de las computadoras electrónicas contamos a su vez con las siguientes posibilidades:

a) Computadora digital.
b) Computadora Analógica.
c) Computadora Hibrida ó sea una digital y una analógica que trabajan en conjunto. Sobre esto último no agregaremos más ya que actualmente no está a disposición en nuestro país.

SIMULACION MANUAL

Es aquella que se lleva a cabo sin utilizar equipo electrónico, este tipo de simulación es impracticable, pues consume mucho tiempo. Pero es necesario siempre que se lleva a cabo la simulación con equipo electrónico, pues se utiliza para probar el correcto funcionamiento del modelo de simulación.

LA SIMULACION MEDIANTE COMPUTADORA DIGITAL

La Computadora Digital es la herramienta que permite llevar a cabo la simulación con rapidez, precisión y a un costo reducido, por tanto analizaremos los problemas que se presentan al utilizarla en simulación.

Estos problemas son:

a) Como llevar cuenta de la variable tiempo.
b) Los lenguajes para la programación.

En el caso (a) tenemos dos posibilidades, hacer que los incrementos de tiempo sean fijos ó hacer que los incrementos de tiempo sean variables, estas posibilidades originan distintos problemas de programación.

Los lenguajes de Programación : hay una serie de lenguajes, hechos especialmente para problemas de simulación y que permiten ahorrar tiempo al llevar ésta a cabo, cada uno de los lenguajes presenta sus ventajas y desventajas y son aplicables, ya sea genéricamente a los dos sistemas de incrementar el tiempo como el FORTRAN, ALGOL etc. ó especificamente a uno de ellos como SIMPAC, DYNAMO, SIMSCRIPT, GASP, etc.

PROGRAMACION EN BASE A:

INCREMENTOS FIJOS DE TIEMPO:

La programación en base a incrementos fijos de tiempo, consiste en simular un reloj en la computadora, avanzar este un período fijo de tiempo y tomar en cuenta los eventos que suceden en este período y procesar estos a través del modelo.

Esta programación es conveniente cuando los eventos suceden en una forma regular en el sistema. En el estudio de sistemas cuyos eventos significativos no son bien conocidos. O en la fase inicial del estudio de ciertos sistemas. La eficiencia de este sistema aumenta en relación al número de variables de Estado del Sistema.

Este tipo de programación presenta el inconveniente, de que es necesario procesar el sistema, suceda o no un evento en el mismo.

A continuación daremos un modelo de programación en base a este sistema. (El sistema desarrollado en el primer capítulo, es de este tipo).

Consideremos el caso de una estación de servicio a la cual llegan

los clientes según una distribución de probabilidad conocida, si ésta está desocupada atiende al cliente por orden de llegada, el orden de atención es variable y sigue una distribución de probabilidad conocida.
Se desea averiguar cuál es el tiempo promedio de espera de los clientes.

Las variables exógenas del sistema serán:

TLL : Intervalo de tiempo entre llegadas de clientes
T S : Tiempo que demora el servicio al cliente.

Los Parámetros del sistema serán:

P T L L: Tiempo promedio entre llegadas.
V T L L: Variancia del tiempo entre llegadas.
P T S : Tiempo promedio de servicio .
V T S : Variancia del tiempo de servicio.

Las variables de Estado del Sistema seran:

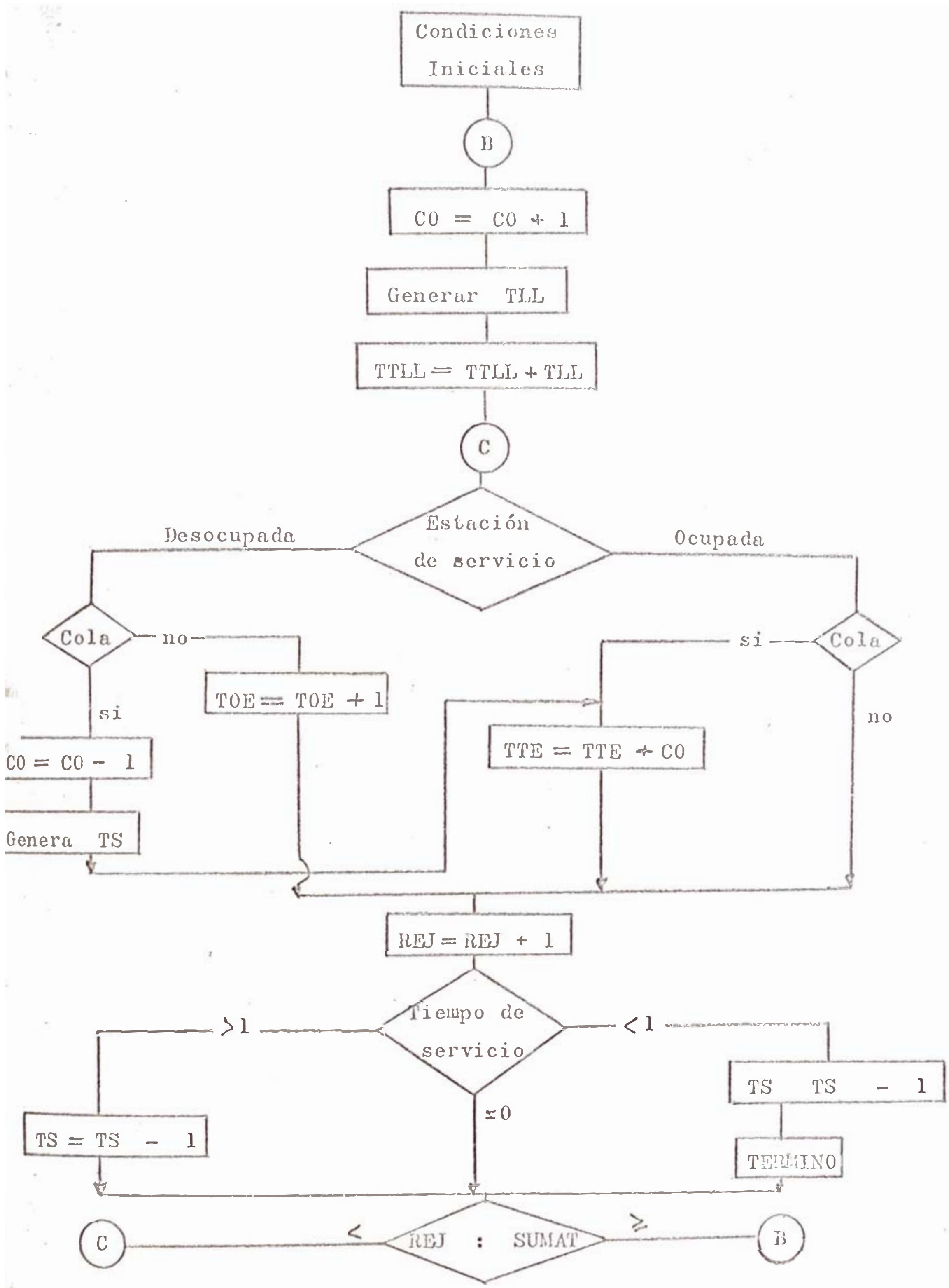
T E : Tiempo espera de un cliente.
T T E : Tiempo total de espera de los clientes.
C O : Número de clientes en la cola
T T L L: Tiempo total transcurrido a la llegada del cliente.
T O E : Tiempo ocioso de la estación.
R E J : Tiempo del reloj simulado.
T O : Tiempo ocupado de la estación.

Las variables endógenas del Sistema seran:

T E P : Tiempo promedio de espera.
T O E P: Tiempo promedio que la estación no trabaja.

DIAGRAMA DE FLUJO

Incremento Fijo del Tiempo



La característica de operación será:

F (T L L) : Función de probabilidad del intervalo de tiempo.
F (T S) : Función de probabilidad entre llegadas.

Las identidades del Sistema seran:

T E P : T T E/ n (númerode clientes que llegan)

APLICACION DEL MODELO

El modelo funciona de la siguiente manera:

a) Al iniciar nuestro problema se da valor cero a las siguientes variables: REJ, COLA, TTE, TOE, TTE.
b) Se genera un tiempo de llegada TLL entre el cliente M y el (M + 1)
c) Se aumenta 1 a la cola para indicar que llegó un cliente.
d) Se computa el tiempo total de llegadas TTLL.
e) Se chequea si la estación de servicio está ocupada o nó.
f) Si la estación de servicio está desocupada se hace la cola a (M-1). Si hay clientes esperando, si es así se atiente al primer cliente de la cola de acuerdo a un tiempo de servicio generado en el bloque #9, se agrega una unidad de tiempo de espera por cada cliente en la cola, (11) si en cambio no hay clientes en la cola se agrega una unidad de tiempo al tiempo desocupado de la estación (7)
g) Si la estación de servicio está ocupada se chequea si hay cola si hay se agrega una unidad de tiempo de espera por cada cliente que hace cola (11) . Si no hay clientes en la cola se

agrega 1 unidad de tiempo al reloj (12).

h) Se chequea el estado de la estación de servicio mediante el valor del tiempo de servicio, si este es mayor que la unidad de tiempo, hay un cliente en la estación, se resta 1 unidad de tiempo al tiempo de servicio y se prosigue a (17), , si este es cero, no hay cliente en la estación, se prosigue a (17), si es igual a uno se ha completado un servicio, se descarga, la estación y se prosigue en (17).

En el bloque 17 comparamos el tiempo de reloj, con el tiempo total de llegadas, si son iguales ha llegado un nuevo cliente se regresa al bloque (2), si el tiempo de relojes es menor significa que no ha llegado ningún cliente y regresamos a (5).

Al completar la simulación podemos obtener información referente a: el tiempo promedio de espera, tiempo improductivo de la estación, tiempo promedio que un cliente permanece en el sistema, longitud máxima de la cola, en fin toda la información referente al sistema.

PROGRAMACION EN BASE A:

INCREMENTOS VARIABLES DE TIEMPO:

En este tipo de programación, el tiempo se trata como una variable continua, en vez de considerarlo como variable discreta (Caso del incremento fijo de tiempo). Además no es necesario el reloj simulado del caso anterior, todas las variables, parámetros, actividades, características de operación son las mismas del modelo de tiempo fijo, este tipo de programación es útil cuando los eventos sucedcn de forma irregular. El tiempo es avanzado para producir el siguiente evento donde no es necesario operar el modelo sino cada vez que se produce un evento. Presenta la ventaja de que la unidad de tiempo utilizado como base, no afecta la velocidad de procesamiento y que se ahorra tiempo de computador cuando el sistema permanece estático, por largos períodos de tiempo de reloj.

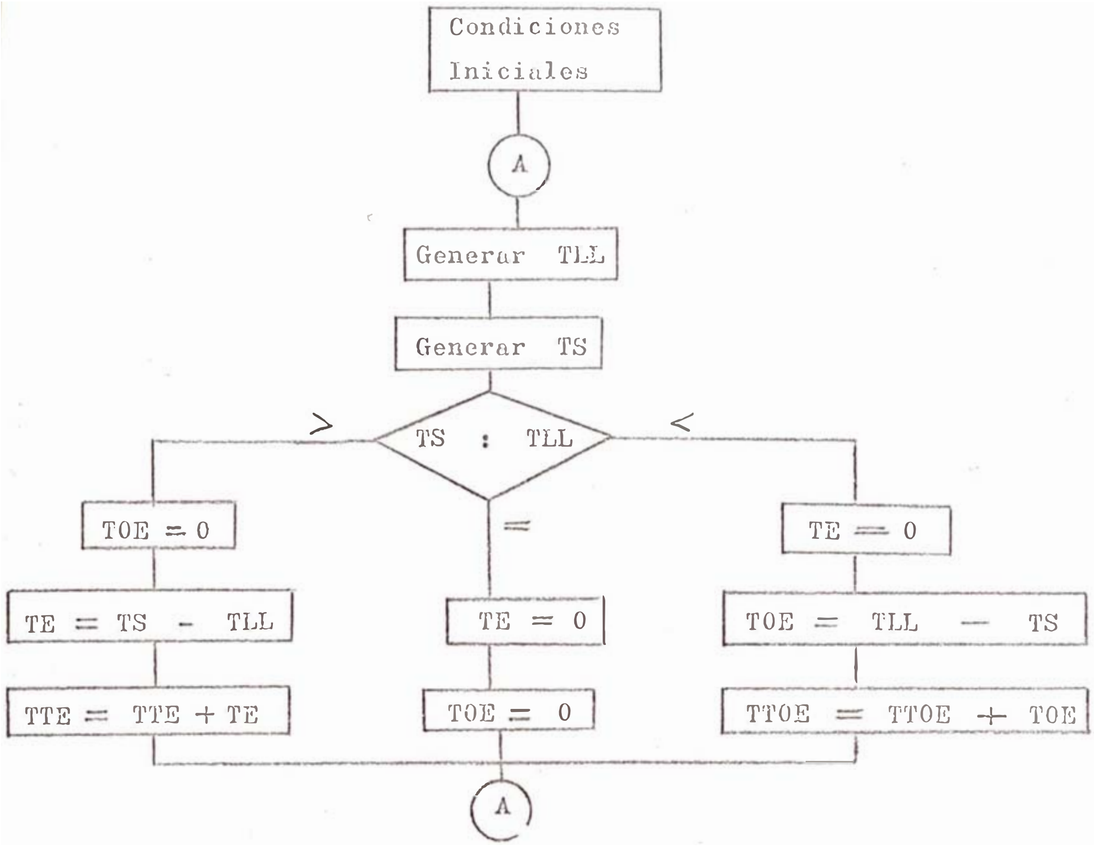
Este tipo de programación es más eficiente conforme aumenta la duración promedio de los eventos.

Como ejemplo desarrollaremos el mismo problema del caso anterior.

Las variables, parámetros, etc. como se mencionó anteriormente son los mismos del caso anterior excepto la variable REJ o reloj, que en este caso no es necesario y la variable CO que se reemplaza por la TE.

DIAGRAMA DE FLUJO

Incremento variable de tiempo



EXPLICACION DEL MODELO

El modelo programado en base a incrementos variables de tiempo funciona de la siguiente manera:

a) Se da valor de cero a : TTE, TOE, TTE, COLA.
b) Se genera un tiempo de llegada.
c) Se resta el tiempo de espera al tiempo de llegada, a continuación se genera un tiempo de servicio, si este es mayor que el tiempo de llegada, el cliente esperara en tiempo TE = TS- TLL. Se acumula en (8).
d) Si el tiempo de servicio es igual al tiempo de llegada, el cliente entrará defrente al servicio y no ocurrirá ni esperar , ni la estación estará improductiva.
e) Si el tiempo de servicio es menor que el tiempo de llegada, la espera será cero, pero la estación estará improductiva un tiempo TOE = TLL - TS y este se acumula en (13).

   A continuación se repite este procedimiento hasta donde sea necesario, para tener una muestra válida ó sea que los resultados se obtengan con la precisión deseada.

LENGUAJES DE SIMULACION:

Una vez que contamos con el diagrama de flujo, que describe el sistema es necesario preparar un programa de Computadora para poder procesar este, ahora analizaremos el problema de escribir este programa para llevar a cabo la simulación.
La primera manera en que podemos resolver este problema, es utilizando uno de los varios lenguajes genéricos con que cuenta ya sea FORTRAN, ALGOL, COBOL, etc, que además son los que tienen mayor flexibilidad en (a), el diseño y formulación del modelo matemático del sistema que se estudia (b) el tipo de formato y distribución de

los resultados (c) en los tipos de experimentos que se lleven a cabo. La principal dificultad de utilizar un lenguaje general estriba en el control de la secuencia de los eventos independientes que ocurren. Rápidamente el programa se complica con las dificultades de programación cuya solución no es de interés y que además pueden dar lugar a errores que son difíciles de detectar por efectos que producen.
Para facilidar la programación y resolver este problema es que se han diseñado una serie de lenguajes específicos para simular los distintos tipos de modelos y sistemas mencionados.

Los siguientes: GPSS 11, SIMSCRIPT, GASP, SIMPAC, DYNAMO, SIMULATE. Son algunos de los lenguajes de simulación.

Estos lenguajes han sido diseñados en base a los siguientes objetivos:

1) Permitir una estructura generalizada para diseñar modelos de simulación.
2) Permitir realizar con rapidez el programa de computadoras para el modelo.
3) Permitir que sea fácil adaptar el programa si se cambia el modelo.
4) Contar con flexibilidad en los formatos de salida.

Estos programas difieren grandemente entre si en el grado de adaptabilidad a distintos modelos o sistemas y en el grado en que proporcionan procedimientos automáticos de simulación, funciones etc.
La principal desventaja de estos lenguajes, es que en su mayoría han sido diseñados para ser utilizados en las computadoras grandes del tipo de la IBM 7090 siendo el GASP, el único disponible para la computadora IBM 1620, que cuente con compilador de FORTRAN IV.

CAPITULO IV

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

INTRODUCCION

En la fabricación de productos industriales para el consumo se presentan problemas principales:

a) Los productos se fabrican a partir de ciertas materias primas de las cuales se necesita un flujo continuo hacia el sistema de producción a fin de que éste opere eficientemente. Debido a que estas no llegan en forma continua a la planta, será necesario tener un stock de las mismas en almacén.

b) El equipo utilizado en la producción está sujeto a detenciones por mantenimiento o por fallas en sus elementos componentes, esto disminuye el tiempo disponible para producir.

c) El personal que interviene en los procesos por multiples razones (tedio, fatiga, etc.) no trabaja a su máxima capacidad , esto influye en la eficiencia del equipo.

d) La demanda de los consumidores no es constante y la producción no es instantánea, para satisfacer la demanda, será necesario contar con un stock de los productos acabados.

El análisis de estos problemas es muy complejo por la gran interrelación que existe entre ellos y la única manera de estudiarlos es tratándolos en conjunto.

La técnica más apropiada para este tipo de análisis es la Simulación.

FINALIDAD DEL ESTUDIO

La finalidad del presente estudio es determinar la mejor manera de operar una planta industrial en la que se presentan los problemas anteriormente citados los cuales tratados en conjunto determinan un sistema PRODUCCION-INVENTARIO.

En este sistema se trata de encontrar:

1) Un método de pronosticar la demanda de los clientes.
2) Los niveles de Inventario de productos acabados que permiten satisfacer la demanda a un mínimo de costo.
3) Los stocks de materia prima que permiten la eficiente operación del sistema de producción.

El criterio para evaluar los resultados del estudio será el análisis de los costos totales en un año de operación.

POLITICAS QUE RIGEN EL FUNCIONAMIENTO DEL SISTEMA

Toda empresa industrial se crea para cumplir ciertos objetivos fijados por sus accionistas, directores, etc. y funciona como una unidad dentro del marco Económico General. Esto crea la necesidad de determinar un conjunto de reglas que definan la forma de operar el sistema. A este conjunto de reglas se les denomina políticas de la compañía. Las políticas pueden estar definidas por escrito, en forma verbal y por las reacciones de respuesta a ciertas situaciones.

En nuestro problema específico tenemos definidas las siguientes políticas:

La política de venta: será la de satisfacer las demandas de los clientes.

Políticas de compras: Las compras de materia prima se hacen en base al criterio de lote económico deducido en la sección Inventarios.

No se puede emitir una orden de compra hasta no haber recibido la cantida pedida por la orden anterior.

Se emitirá orden de compra cada vez que el nivel de inventario sea menor que el nivel fijado por el punto de reorden. Si la cantidad económica a pedir es menor que el punto de reorden, la orden de compra se emitirá por cantidad igual al punto de reorden.

Políticas de Producción: La producción se hará por lotes, el número de lotes a producir será deducido en base al criterio de número óptimo de lotes con las restricciones fijadas en la sección Inventarios.

La cantidad a producir será igual al pronóstico de ventas del mes siguiente.

No se podrá pasar a producir otro producto hasta no haber finalizado la producción del anterior.

Los productos se producirán en el siguiente orden: Primero el producto uno, segundo el producto dos, etc. en el departamento A; y en el departamento C primero el producto 5, segundo el producto 4, tercero el producto 3, etc.

Política financiera:

El capital de trabajo máximo anual disponible es de S/. 24'000.000.

CARACTERISTICAS DEL SISTEMA

Las características del sistema fueron proporcionadas por el Ing° García.

EL SISTEMA DE PRODUCCION

El Sistema de Producción está compuesto por 3 departamentos en los que se realizan 3 procesos distintos; estos departamentos se denominan A, B, C y los procesos que se llevan a cabo en cada uno de ellos son A, B, C., respectivamente.

Para mayor claridad se incluye el diagrama del proceso al final del capítulo.

LOS PRODUCTOS

En el sistema en estudio se producen 5 productos que difieren entre si en mayor o menor grado, cada uno de los productos se identifica por un número (1, 2, 3, 4, 5,)

LA MATERIA PRIMA

En la producción intervienen 5 materias primas (1, 2, 3, 4, 5)

El gráfico que se presenta a continuación muestra las relaciones entre los productos fabricados y las materi as primas

CUADRO A

M.P. / P.	1	2	3	4	5
1	X				X
2		X		X	
3			X	X	
4		X		X	
5			X	X	

X Significa que la materia prima es utilizada en la fabricación del producto

CUADRO B

Capacidades máximas de producción por productos y departamentos *

Dpto. \ P.	1	2	3	4	5
A	20	30	30	--	—
B	6	---	-—	- - -	---
C	—	35	35	35	35

* En miles de Unidades por día.

CUADRO C *

Costo de Montaje por departamento y por producto * *

Dpto. \ P.	1	2	3	4	5
A	2	2.5	2.5	—	—
B	—	—	—	—	—
C	—	2.5	2.5	1.5	1.5

* En miles de soles

* * El tiempo de montaje es de 1 día en todos los departamentos y para todos los productos.

CUADRO D

Costo de Inventario por producto acabado

Producto	C1*	C2	C3 *
1	0.025	2,000	2.00
2	0.020	5,000	0.40
3	0.020	5,000	1.40
4	0.020	1,500	0.20
5	0.020	1,500	0.90

* Costo en S/. por día por unidad.

CUADRO E

Costos de Inventario de Materia Prima.

Producto	C1	C2	C3
1	0.021	6,000	0.80
2	0.016	5,100	0.50
3	0.015	5,500	0.85
4	0.006	1,000	0.15
5	0.008	1,000	1.15

C1.- Costo de tener el inventario.

C2.- Costo de montaje ó Emisión de Orden.

C3.- Costo de escasez.

CUADRO F

Duración promedio de fallas y tiempo productivo entre fallas.

DPTO.	A*	B*	C*
Falla	0.20	0.166	0.10
Tiempo Productivo	4	5	6.66

* La eficiencia promedio de los departamentos es de 70%, tiempo promedio en días. Esta eficiencia sigue una distribución Gamma.

CUADRO G

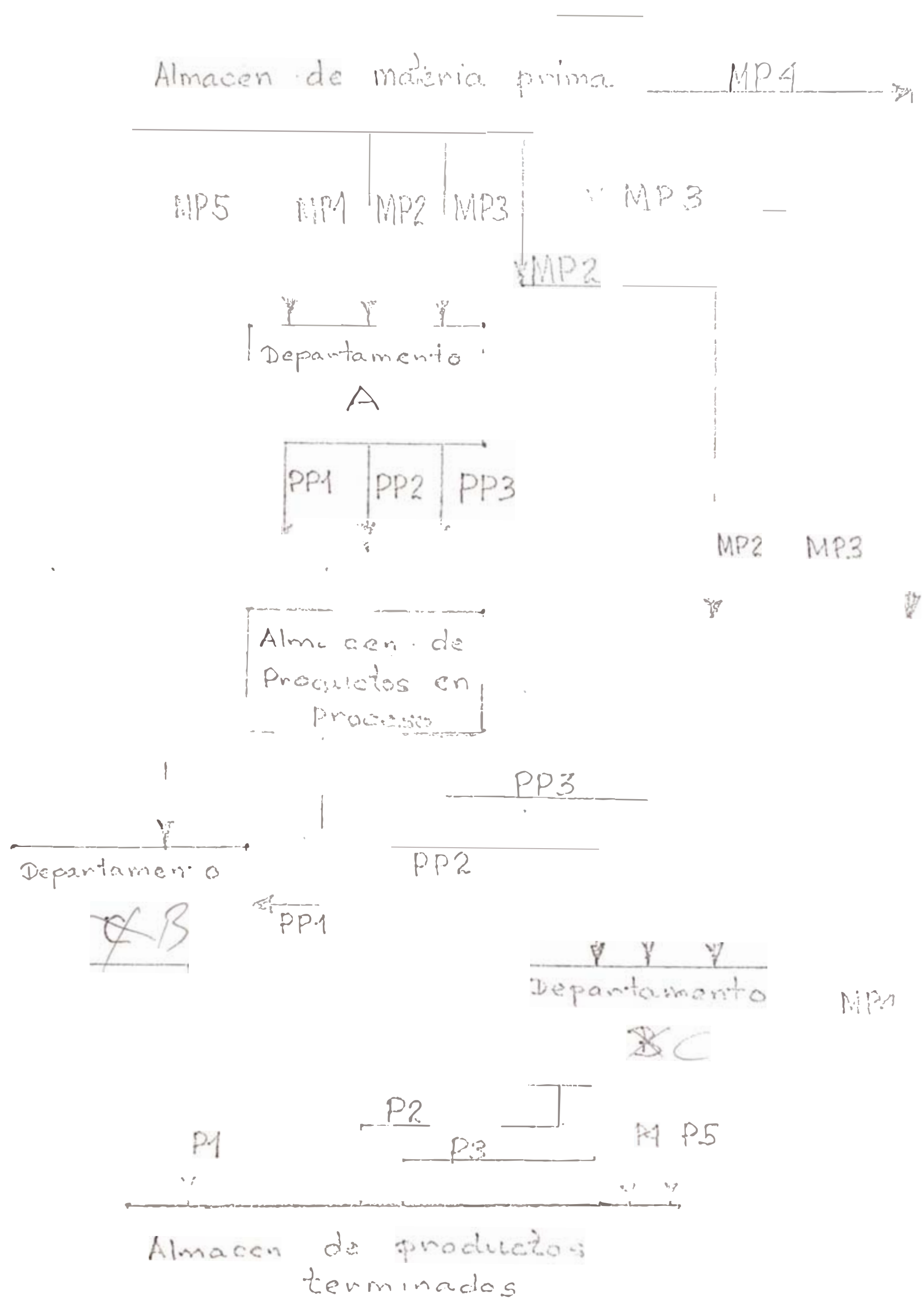
Consumo promedio mensual de productos acabados

PRODUCTO	CONSUMO EN UNIDADES
1	80,000
2	90,000
3	170,000
4	50,000
5	120,000

CUADRO H

Consumo Promedio mensual de materia prima y tiempo promedio de entrega.

MATERIA PRIMA	CONSUMO EN UNIDADES	DIAS DE ENTREGA
1	80,000	5.3
2	140,000	3.0
3	290,000	2.0
4	430,000	1.8
5	80,000	2.3



M.P = materia prima
PP = producto en proceso
P - producto terminado

FORMULACION DEL MODELO MATEMATICO

DEMANDA

A fin de poder simular mediante Computadoras un sistema de Producción- Inventario, es necesario disponer de datos sobre la demanda de los productos que se fabrican.
Esto puede lograrse de dos maneras:

a) En base a los datos de demandas pasadas, encontrar una función matemática que represente las demandas de los productos
b) Cargar directamente datos de demanda de tiempos pasados; esta alternativa presenta el inconveniente que la entrada de datos es generalmente la parte más lenta en el proceso de operación de una computadora digital.

Por tanto utilizaremos en beneficio de la vellocidad el 1er. sistema .
La función utilizada para generar las demandas es:

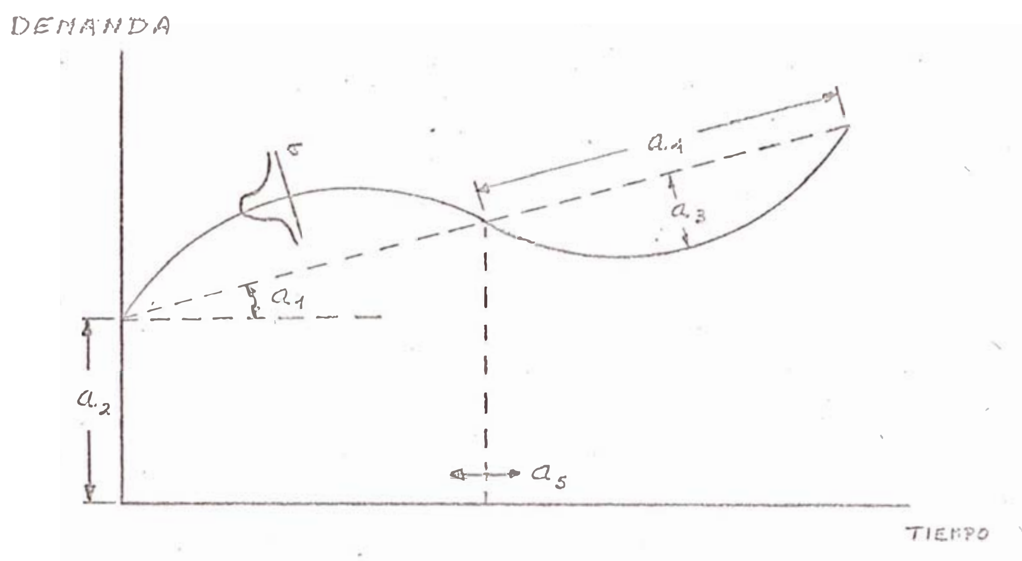
$$\text{Demanda} = a_1 T + a_2 + a_3 \cdot (\text{seno } T/_{a_4} + a_5)$$

O sea la adición de una recta de tendencias a una función seno que representará las variaciones estacionales donde,

T: Tiempo de Simulación en días.
a_1 Aumento de la demanda por día (tendencia)
a_2: Número de unidades promedio que se vende
a_3: Amplitud de la variación de las ventas estacionales.
a_4: Número de estaciones anuales.
a_5 Determinará el día donde se alcanza el punto máximo de la variación estacional.

La demanda así obtenida se multiplicará por un número Random normalizado a fin de obtener las variaciones aleatorias de la demanda cuya varianza estará dada por σ^2.

Gráficamente la curva de Demanda será:



PRONOSTICO

La cantidad de productos que vende una empresa no es constante a través del tiempo sino que varía continuamente debido a muchos factores (Estación del año, tendencia, economía, propaganda, azar, etc.). Para llevar a cabo un programa de planeamiento de producción es necesario determinar la cantidad a producir de cada uno de los productos que se fabrican, esto se consigue estimando con anterioridad el nivel futuro de las ventas.
Las características de un buen método de pronóstico son:

a) Debe ser posible obtenerlo con rapidez.
b) Debe ser de bajo costo.
c) Debe ser fácil de calcular.
d) Debe ser posible introducir nueva información sobre las ventas en curso.

Los métodos de predicción de ventas se clasifican en:

a) Empíricos: se hacen en base a estimados eurísticos y a la experiencia pasada, los errores de predicción son generalmente muy grandes.
b) Por Correlación : Se hacen en base a otras variables que muestre alto grado de correlación con la variable estudiada.
c) Por Tendencia: En base a la extrapolación de las curvas de tendencia de las ventas pasadas.
d) Por Promedios: En base al valor promedio de las ventas pasadas.
e) Métodos en los cuales se corrigen los errores de los pronósticos pasados.
f) Métodos mixtos: En los que se toma en consideración en

forma ponderada los resultados obtenidos mediante otros métodos. Son los más exactos pero los más laboriosos y costosos.

El método utilizado en nuestro estudio es un método mixto hecho en base a promedios ponderados y corrección de errores de pronóstico el cual se denomina: "PREDICCION POR MEDIA MOVIL CON PESOS ESPECIFICOS EXPONENCIALES CON RELACION ESTACIONAL Y EFECTO DE TENDENCIA". El cual consiste en extrapolar las series de ventas temporales dando a cada dato distinto peso según su relación con la variable de tiempo y corrigiendo el pronóstico tomando en cuenta los errores anteriores.
Este método no da información sobre el porque de las variaciones de las ventas ya que es puramente matemático no utilizando para la predicción informaciones sobre: mercados, variables económicas propaganda, cambios de precio, etc., se considera que estos factores influirán en las ventas produciendo errores en el pronóstico los que serán corregidos por el mismo, de manera que influirán indirectamente en los pronósticos futuros.
Con la predicción exponencial la estimación de la componente permanente se cambia a medida en que se dispone de nueva información sobre las ventas siendo el cambio proporcional al más reciente error observado es decir

$$S_t \qquad S_{t-1} + w(S_t - S_{t-1})$$

donde S_t representa las ventas reales del período "t" y "w" es un número entre cero y uno que fija la corrección de los errores y que debe determinarse de alguna manera.

También tendremos que :

$$\tilde{S}_{t-1} = w \cdot \tilde{S}_{t-1} + (1-w)\, \tilde{S}_{t-2}$$

$$S_t = w \cdot \tilde{S}_t + w(1-w)\, \tilde{S}_{t-1} + (1-w)^2\, \tilde{S}_{t-2}$$

$\tilde{S}_t$ = pronostico para el periodo t

y de manera general

$$\tilde{S}_t = w \sum_{n=0}^{m} (1-w)^n S_{t-n} + (1-w)^{n+1} S_{t-(m+1)}$$

si M es muy grande (1 - w) será despreciable y:

$$\tilde{S}_t = \sum_{n=0}^{\infty} (1-w)^n S_{t-n}$$

Si los cambios en la componentes permanentes son pequeños en relación a las variaciones aleatorias "W" será pequeño y se tomará en cuenta mayor número de valores pasados, en cambio si es cierto todo lo contrario "W" deberá tener valores cercanos a la unidad.

Al considerar que las ventas están sometidas a variaciones estacionales es necesario modificar la fórmula anterior.

Esta modificación puede hacerse de dos maneras, si la variación estacional es independiente del nivel de ventas anterior el efecto estacional será aditivo. En cambio como es más frecuente la amplitud del nivel de ventas es función de las ventas anteriores el efecto estacional será multiplicativo y la predicción será:

$$S_{t+1} = \tilde{S}_t \left(F_{t\ L+1}\right)$$

donde F_L es el efecto estacional y F_{t-L+1} el efecto estacional de periodos anteriores.

La fórmula a utilizar sera:

$$\tilde{S}_t = w\left(\frac{S_t}{F_{t-L}}\right) + (1-w)\,(S_{t-1} + A_{t-1}) + (1-w)^2\,(S_{t-2} + A_{t-2})\ldots$$

Donde At es la tendencia de las ventas

El procedimiento para la obtención del pronóstico será:

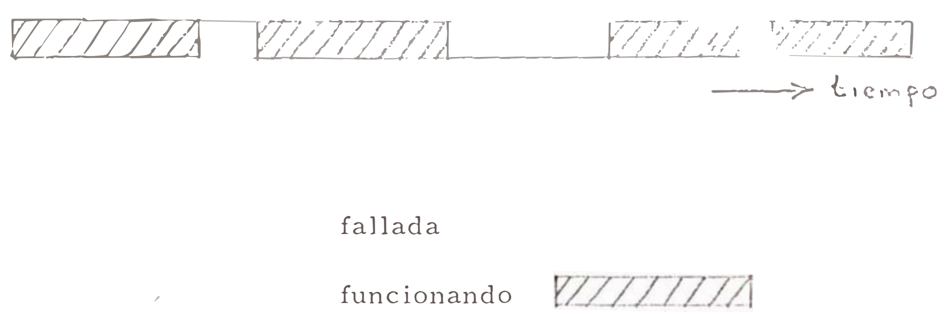
1) Considerar F_t como una función que expresa el efecto de la variación estacional. Ala que se llamará "SERIE BASE" "SB"
2) Calcular el valor de S_t/SB que corresponde a S_t/F_{t-L+1} donde S_t correponde a la demanda del periodo anterior y SB al valor de F_{t-L} valor que llamaremos "RELACION DE TENDENCIA" "RT"
3) Calcular la relación promedio del pronóstico $RP = WRT + (1-w)RP_{t-1}$ o sea el ajuste exponencial
4) Calcular el error de tendencia o Tendencia aparente
   $$TA = RP - RP_{t-1}$$
5) Hallar el ajuste exponencial de la tendencia aparente
   $TT = wTA + (1-w)\,TA_{t-1}$ o sea el ajuste exponencial de los errores de tendencia.
6) Calcular el coeficiente de relación del pronóstico que será
   $$ER = RP + [(1-w)/w]\,TT$$
7) Calcular el valor del pronóstico para el próximo período

Pronóstico = Serie Base. Coeficiente de Relación

FALLAS DEL EQUIPO

En todo equipo de uso industrial se producen detenciones por fallas en sus elementos componentes ó debido a mantenimiento, como consecuencia de esto se observa una disminución en el rendimiento del equipo ya que no se podrá trabajar continuamente.
Al realizar la Simulación de un sistema de producción será necesario tomar en cuenta esto, ya sea dentro del factor eficiencia del equipo ó en forma separada, como un factor de falla.
Para poder representar las fallas se ha considerado que el funcionamiento del equipo es una recta discontinua, la parte continua representa al equipo funcionando y las discontinuas a que este se encuentra en reparación ó mantenimiento.
El tiempo de funcionamiento de un equipo industrial es representado por una función Exponencial, con una media "U"; así mismo la duración de la falla o del mantenimiento será función Exponencial con media "U1"

Gráficamente:



Se operará de la siguiente manera:

1) Al iniciar la Simulación se considerará a la máquina funcionando
2) Se generará mediante la función Gama la duración del funcionamiento, "T" días.

3) Luego de transcurrido el tiempo "T" se supondrá que la máquina está detenido por falla y la duración de esta falla se generará por la función Gama sea "T"$_1$

4) Una vez transcurrido el tiempo "T"$_1$, se considerará que la máquina está funcionando y se regresará a "2" repitiéndose el mismo procedimiento.

INVENTARIOS

Un sistema de Inventarios es aquel en el cual son significativos tres tipos de costos :

a) El costo de tener el inventario

b) El costo de escasez

c) El costo de reaprovisionamiento

En el que por lo menos dos de ellos están sujetos a algún tipo de control.

EL CONTROL DE INVENTARIOS

El control de inventarios es uno de los problemas mas comple - jos y de más repercuciones de la actividad industrial.

Es el punto donde convergen todos los demás aspectos del nego- cio, de la solución que se dé a este problema depende la posi ción final de la empresa ya que afecta directamente la estruc - tura financiera, los costos de producción, y la posición competi- tiva.

Básicamente el problema es el de coordinar las ventas con la producción, dos actividades distintas de la empresa cada una de las cuales tiene distintos objetivos.

LOS OBJETIVOS DEL CONTROL DE INVENTARIOS

A) Mantener un mínimo de inversión en inventarios que permita a su vez dar un buen servicio al cliente y que esté de acuerdo con la posición financiera de la empresa.

B) Asegurar una provisión adecuada de materiales para mantener el ritmo de producción que satisfaga las demandas de los clien- tes.

C) Prevenir la pérdida ó desperdicio de los productos almacenados.

D) Asegurar que las existencias físicas en inventario coincidan con las cantidades que figuran en los libros de la empresa.

POLITICAS DE INVENTARIO

Dentro del problema de inventarios se pueden considerar dos tipos de políticas : Genéricas y Específicas

Políticas genéricas de inventarios:

Son aquellas que determinan el criterio básico para tratar el problema de inventarios.
Entre las políticas genéricas mencionaremos:

a) Minimizar el costo de los inventarios.
b) Maximizar la velocidad de rotación del capital invertido en inventarios.
c) Satisfacer totalmente la demanda.
d) Minimizar el capital invertido en inventarios.
e) Cualquier combinación de las políticas puras que se desee mencionar.

Políticas específicas de inventarios:

Son aquellas que determinan la manera de reaprovisionar el inventario: cuanto y cuando ordenar.
Según esto tendremos las siguientes posibilidades:

a) Ordenar las cantidades necesarias cada "t" periodos de tiempo
b) Ordenar las cantidades necesarias cada vez que el inventario llegue a un nivel dado "s".

c) La cantidad a adquirirse será una cantidad fija "Q".

d) La cantidad a adquirirse será la necesaria para que el inventario alcance un nivel dado "S".

La política de reaprovisionamiento será una combinación de estas que puede ser (a, c), (a, d), (b, c), (b, d).
Cualquiera política de inventario será una combinación de una política genérica con una específica.

DESARROLLO DE LA POLITICA DE REAPROVISIONAMIENTO
Para llevar a cabo una política de reaprovisionamiento es necesario determinar:

a) Un método adecuado de determinar la demanda futura.

b) El tiempo que transcurrirá antes de que se pueda disponer del producto pedido.

c) La base para decidir cuanto ordenar en base a los factores de costo del inventario.

d) La base para decidir cuando ordenar en base al tiempo de entrega del producto, ya la demanda esperada durante ese tiempo.

LOS COSTOS DE INVENTARIOS
Como ya hemos mencionado los sistemas de inventarios son aquellos en los que se presentan: costos de tener el inventario, costo de escasez, costo de reaprovisionamiento ó de emisión de ordenes. Ahora presentaremos en detalle que costos implica cada uno de estos.

A) COSTO DE TENER EL INVENTARIO

Dentro de este consideramos:

1) Costos comerciales: Intereses del capital invertido, Seguros, Impuestos.

2) Costos de almacenaje: Costo del espacio utilizado, costo

		de manejo de materiales.
3)	Costo de los riesgos:	Obsolecencia, deterioro, cambio de precios (baja), disminución de la demanda.
4)	Costos de oportunidad:	Las posibilidades de utilizar el dinero invertido en otras inversiones, aumentar la capacidad de la planta, etc.

B) COSTOS DE EMISION DE ORDENES:

Estos costos se originan de dos situaciones diferentes, al emitir órdenes de producción, al emitir órdenes de compra.

En el primer caso los costos serán por:

1) Gastos para preparar la producción
2) Pérdida de capacidad de producción por efecto del cambio de montaje.

En el segundo caso los costos serán de:

1) Costo de emisión de la órden de compra
2) Gastos de transporte, y de manejo de materiales.

C) <u>COSTOS DE ESCASEZ</u>

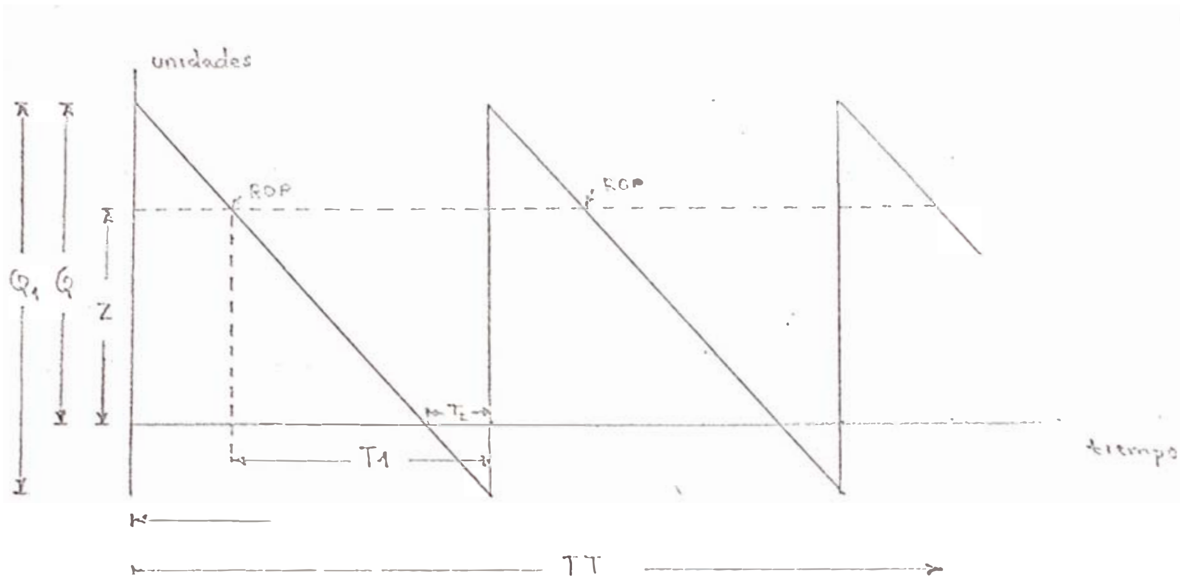
Como costos de escasez se considerará:

1) Pérdidas de ganancias no realizadas, no absorsión de los costos fijos, poder competitivo, futuras compras del cliente.
2) Costos de producción y entrega aceleradas.

Además de estos costos que son los más importantes en un sistema de inventarios hay otros como: costos de personal, costos de control, etc.

OBTENCION DE LA FORMULA DE LOTE ECONOMICO

Supondremos que el nivel del inventario varía como se muestra en el gráfico:



T	:	Período de tiempo entre emisión de órdenes
Q	:	Nivel máximo del Inventario
Z	:	Nivel en el cual se emite nueva orden de compra
T_1	:	Tiempo de entrega de la cantidad ordenada
ac	:	Consumo promedio durante un período de tiempo "T"
e	:	Cantidad de demanda no satisfecha

El nivel promedio del Inventario será:

$$I_P = Q/2 - E/2$$

El costo del Inventario Promedio será:

$$C_t = (Q/2 * C_1 * T + E/2 * C_2 T_2 + C_3)\ D/Q$$

Por relaciones geométricas

$$T_1 = (Q/Q_1)\ T$$

$$T_2 = \frac{(Q_1 - Q)}{Q_1}\ T$$

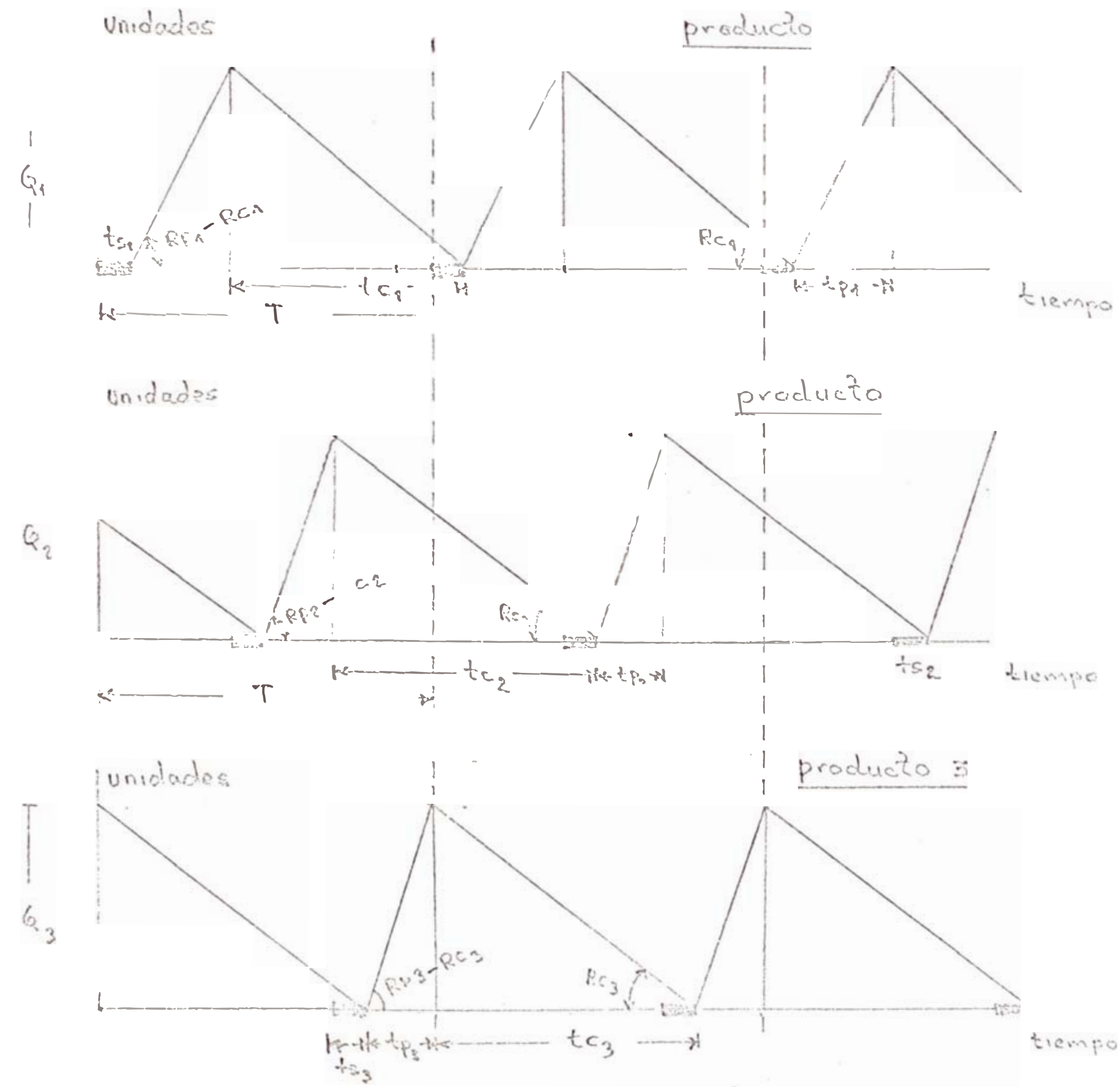
Reemplazando estos valores en la ecuación del Costo Total y derivando con respecto a Q_1 para obtener el mínimo de la función de costo, se obtiene la siguiente fórmula, que da el tamaño del lote de costo mínimo, considerando:

C_1 : Costo del tener inventario
C_2 . Costo de escasez
C_3 : Costo de emisión de orden

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2\ D\ C_3}{C_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_1 \qquad C_2}{C_2}}$$

OBTENCION DE LA FORMULA DEL NUMERO OPTIMO DE LOTES DE PRODUCCION

Cuando se fabrica en la misma línea de producción, diversos artículos, la fórmula de lote económico dará los costos mínimos pero no la óptima utilización del equipo, ya que esto es generalmente más importante que minimizar los costos de inventario, será necesario utilizar otro criterio en la determinación de la cantidad a producir. Este criterio es el "del Número Optimo de Lotes".



Para el producto i

Qt : Cantidad máxima en Inventario

tc : Tiempo de Consumo

Rc : Consumo Promedio diario

T : Tiempo del período de Planeamiento.

T : $\sum ts_i + \sum tpi$

La demanda total será:

Di : demanda total

ts : tiempo de montaje

tc : tiempo de consumo

N : número de lotes fabricados en el período t

Di : $\left[Rc \ (ts + tp + tc) \right] N$

Rp : Producción Promedio

D_i : $(Rc.ts \quad Rc(Q_i/Rp-Rc) \quad Q_i) \quad N$

Qi : $\dfrac{Di \ (Rp - Rc) - ts \ (Rp - Rc) \ RcN}{NR_p}$

El costo del inventario para el producto i será:

$$Ct_i = \frac{Qi}{2} X \ C_{1i} + C_{2i} \ N$$

Donde C_{1i} = costo de tener el inventario

C_{2i} = costo de montaje

El costo total del inventario será

$$CT = \sum_{i=1}^{n} CT_i$$

Reemplazando los CT_i por sus valores y Q_i por su valor obtendremos:

$$CT = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \frac{Di \cdot (Rp_i \; Rc_1) \cdot C_{1i}}{Rp_i} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{tsi\,(Rpi - Rc_i)Cli}{Rp_i}$$

$$+ N \sum_{i=1}^{n}$$

Si hacemos: $\frac{Rci}{Rpi} = \lambda i$

y derivamos el costo total con respecto a N para encontrar el mínimo de la función costo

$$N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} Di \quad C_{1i} \, (1 - \lambda i)}{2 \sum_{i=1}^{n} C_{2i}}}$$

Donde N debe ser su aproximado al número entero más cercano. Debido a que en esta fórmula de número óptimo de lotes no está considerada la disminución de la producción por efecto de los cambios de montaje, es necesario añadir una restricción más, la cual está dada por

$$T \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{Di}{Rpi} + N \sum t\,si$$

$$N = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{Di}{Rpi}}{\sum t_{si}}$$

FORMULA PARA LA DETERMINACION DEL PUNTO DE REORDEN CON DEMANDAS Y TIEMPOS DE ENTREGA PROBABILISTICOS

Determinísticamente el punto de reorden (ROP) está fijado por la siguiente relación matemática:

ROP : Dp X ALT donde

$\overline{Dp}$: demanda promedio

$\overline{ALT}$: tiempo de entrega

cuando $\overline{Dp}$ y $\overline{ALT}$ son variables probabilísticas el ROP será otra variable de probabilidad cuyo valor estará determinado por el producto de las funciones de probabilidad de la demanda y del tiempo de entrega. Si estas funciones de probabilidad son inde - pendiente y queremos un nivel de confianza Cp en el ROP tendre- mos:

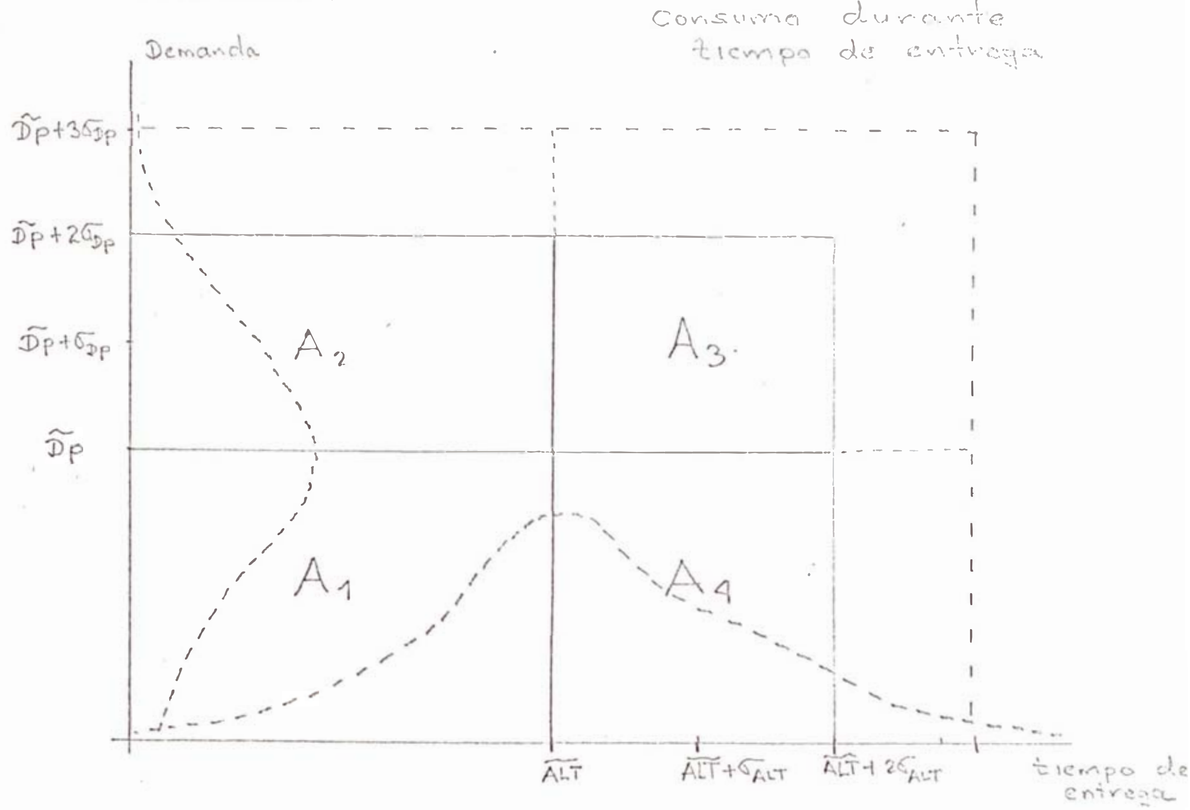
$$ROP = \overline{Dp} \times \overline{ALT} + \overline{Dp} \cdot B\, \sigma_{ALT} + \overline{ALT} \cdot \gamma \cdot \sigma_{Dp} + B\, \sigma_{ALT} \cdot \sigma_{Dp}$$

donde

γ y B = número de desviaciones Standard que determinan un nivel de confianza δ en la función de probabilidad respectiva

$$Cp = 1 - \left[(1 - \delta_1)^{ALT} \cdot (1 - \delta_2)\right]$$

Gráficamente:



Esta fórmula puede simplificarse si se considera $A_2 + A_4 = KA_3$ donde K es un número que determina el riesgo de agotar el stock.

La fórmula utilizada será:

$$ROP = \overline{Dp} \times \overline{ALT} + K.\ \sigma AD\ \cdot.\ \sigma ALT$$

donde:

$A_1 = \overline{Dp} \times \overline{ALT}$

$A_2 = \gamma\, \sigma\, Dp.\, \overline{ALT}$

$A_3 = \gamma.B\, .\, \overline{Dp}.\sigma\, \overline{ALT}$

$A_4 = B\, \sigma\, \overline{ALT}.\ \widetilde{Dp}$

PROGRAMACION

La programación del modelo de simulación para el sistema inventario producción se hizo en lenguaje de programación Fortran ya que no se contó con ningún programa específico para simulación.

La variable tiempo en este modelo ha sido definida como una variable de tiempo fijo debido a que está proporciona más información del sistema.

La unidad de tiempo que se usa es el día.

Se considera que un mes tiene 25 días y un año tiene 300 días útiles.

El modelo se ha dividido en tres partes para facilitar la programación y aprovechar al máximo la memoria del computador.

Estas son:

- Funciones
- Sub-rutinas
- Programa -principal

Como funciones tenemos todas las rutinas que sirven para calcular funciones de probabilidad, además de la rutina especial para generar números random.

Para mayor información de estas funciones referirse al apéndice 1.

Las funciones usadas son:

- Generador de números Random (RNDF)
- Función Normal (XNORM)
- Función Poisson (PSSON)
- Función Gamma (GAMMA)

Debido a que un modelo del tipo inventario-producción es sumamente extenso, con el artificio de las subrutinas fue posible la división del modelo a tal punto que la estructura del proceso de fabricación fue separado en sus aspectos fundamentales:

- demanda
- pronóstico de ventas
- inventario de materias primas
- inventario de productos acabados
- emisión de órdenes de producción
- generación de fallas mecánicas y de tiempo de servicio

A cada una de estas le corresponde una subrutina que son respectivamente:

- Subroutine Demand
- Subroutine Pronos
- Subroutine Matpr
- Subroutine Invent
- Subroutine Invent
- Subroutine Falla

La estructura de cada subrutina está explicada mediante un diagrama de flujo y su listado del programa se encuentra en el apéndice 2.

Como programa principal tenemos lo que se podría llamar el proceso de producción. En este programa se agrupa en un sentido ordenado y según el flujo que sigue la producción, todas las subrutinas y funciones.

La explicación de este programa se encuentra en su diagrama de flujo y el listado del programa en el apéndice 2.

DIAGRAMA DE FLUJO

Subrutina demanda

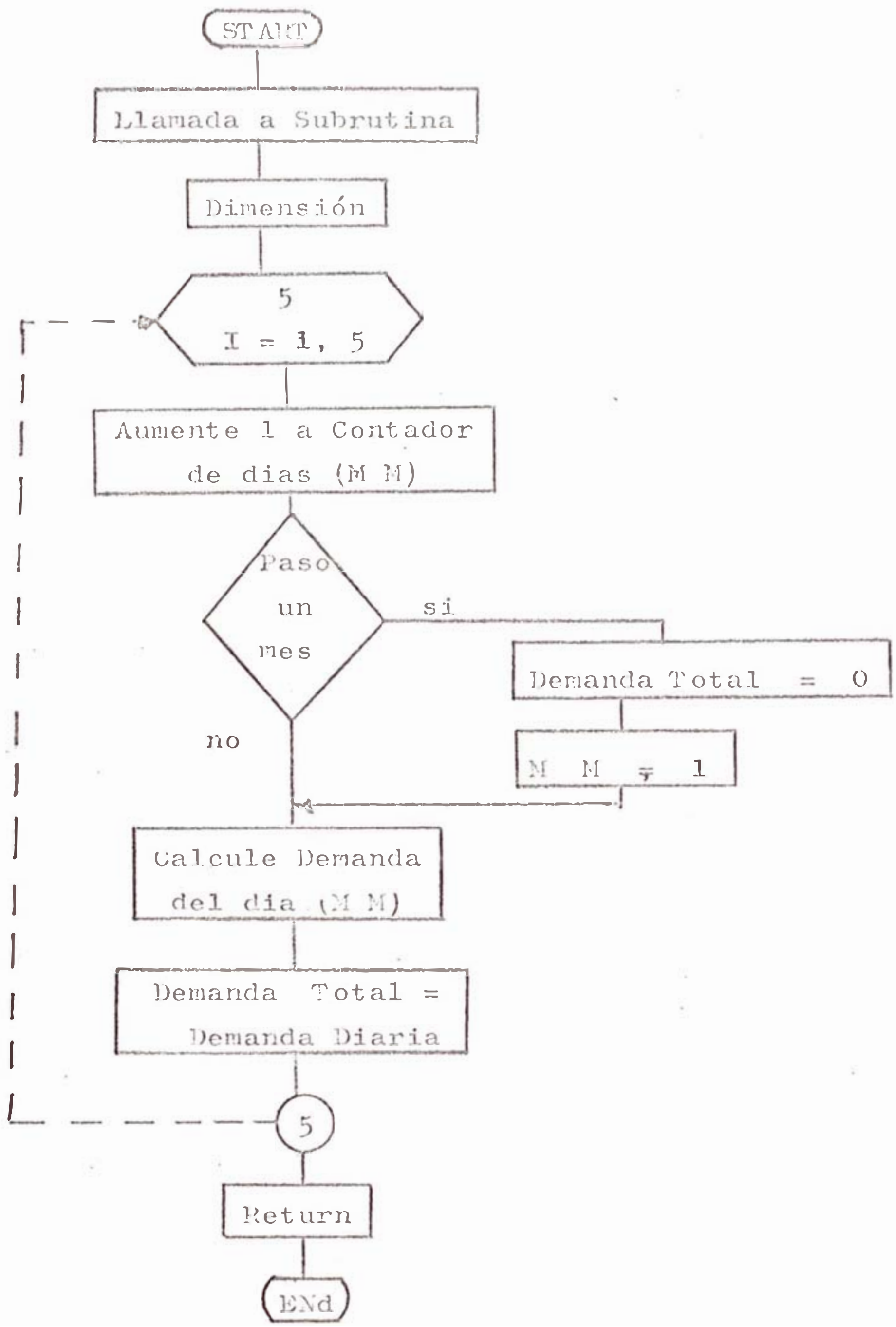


DIAGRAMA DE FLUJO

Subrutina Pronóstico

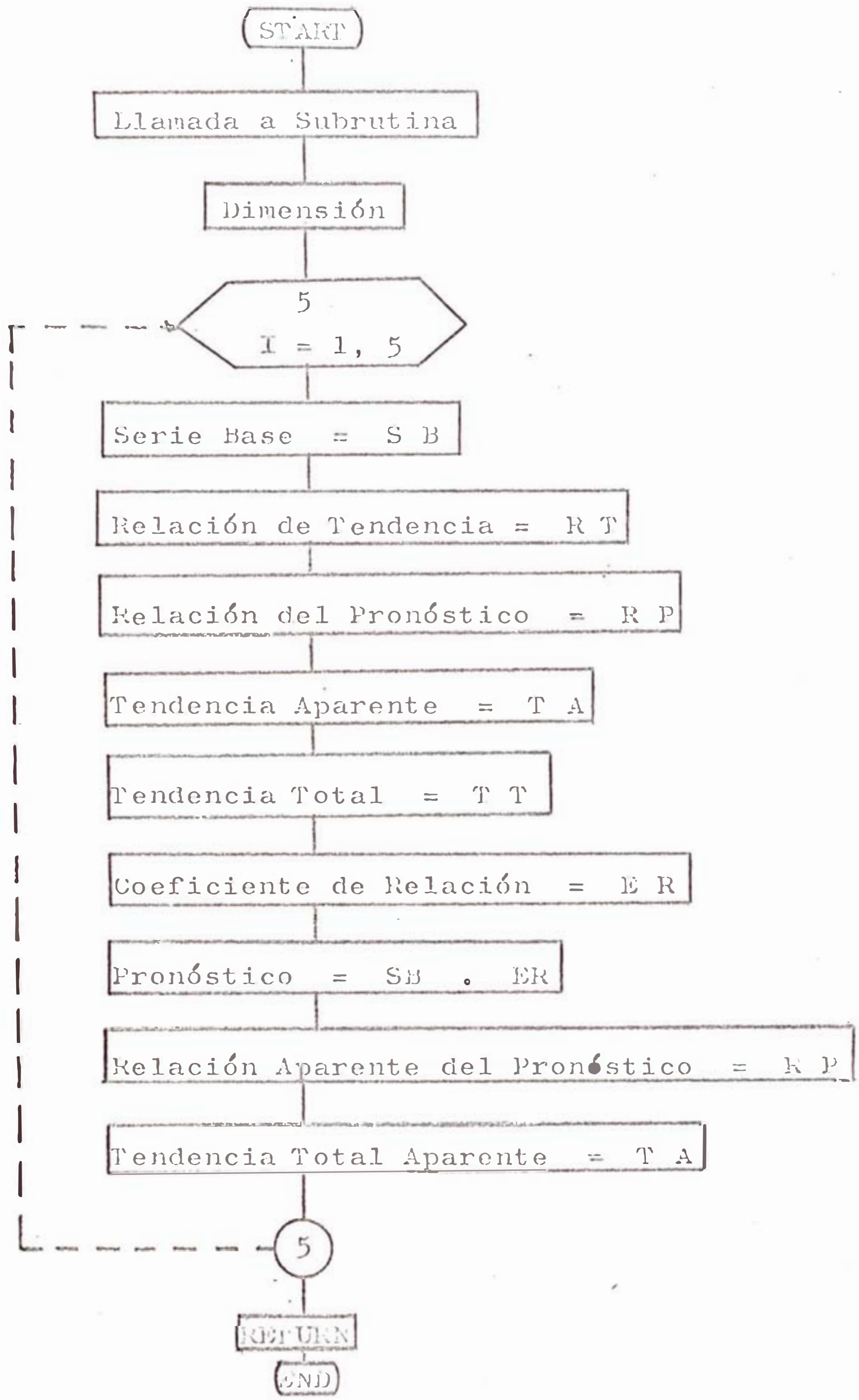


DIAGRAMA DE FLUJO

Subrutina Inventario

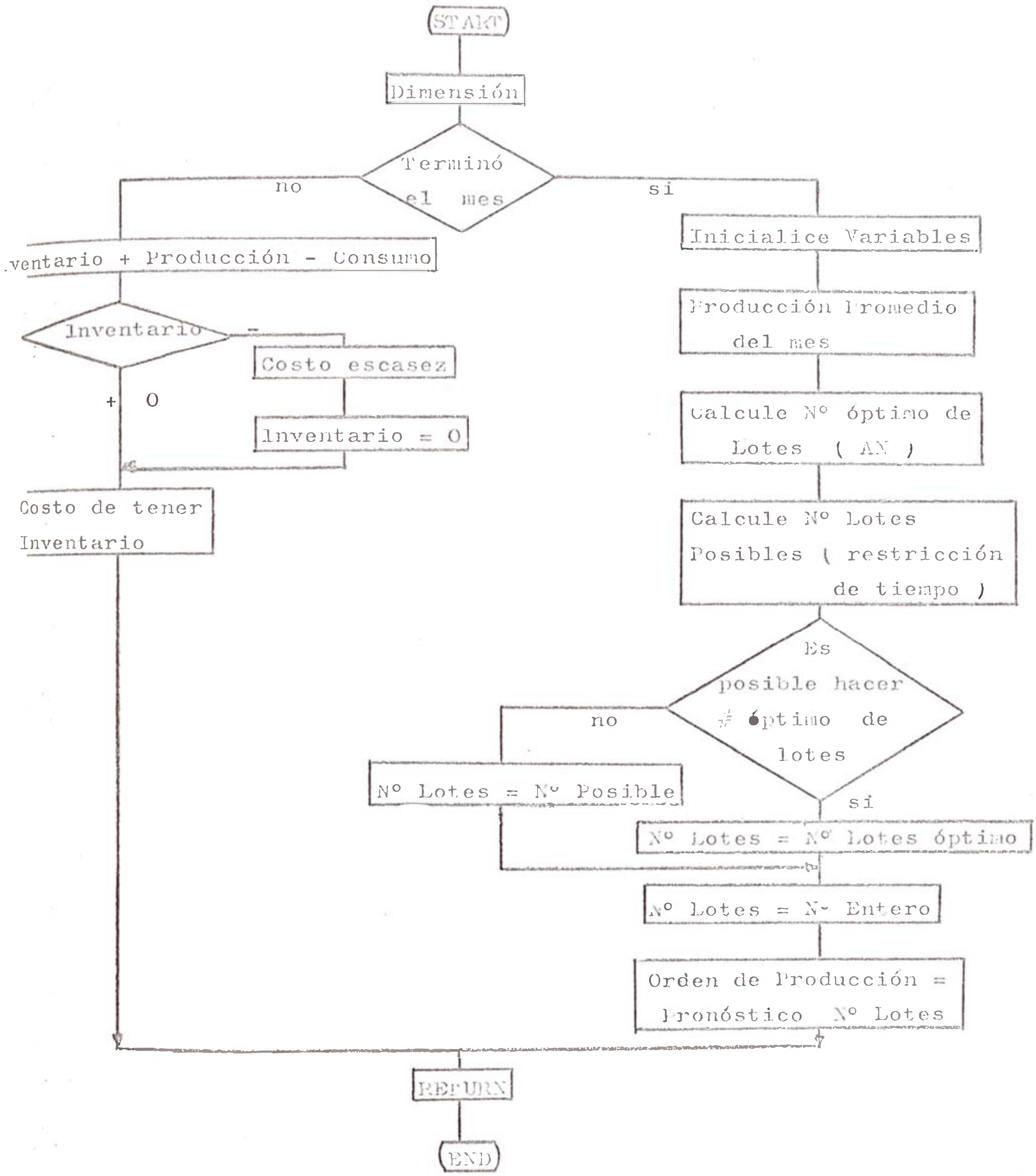


DIAGRAMA DE FLUJO

Subrutina Falla

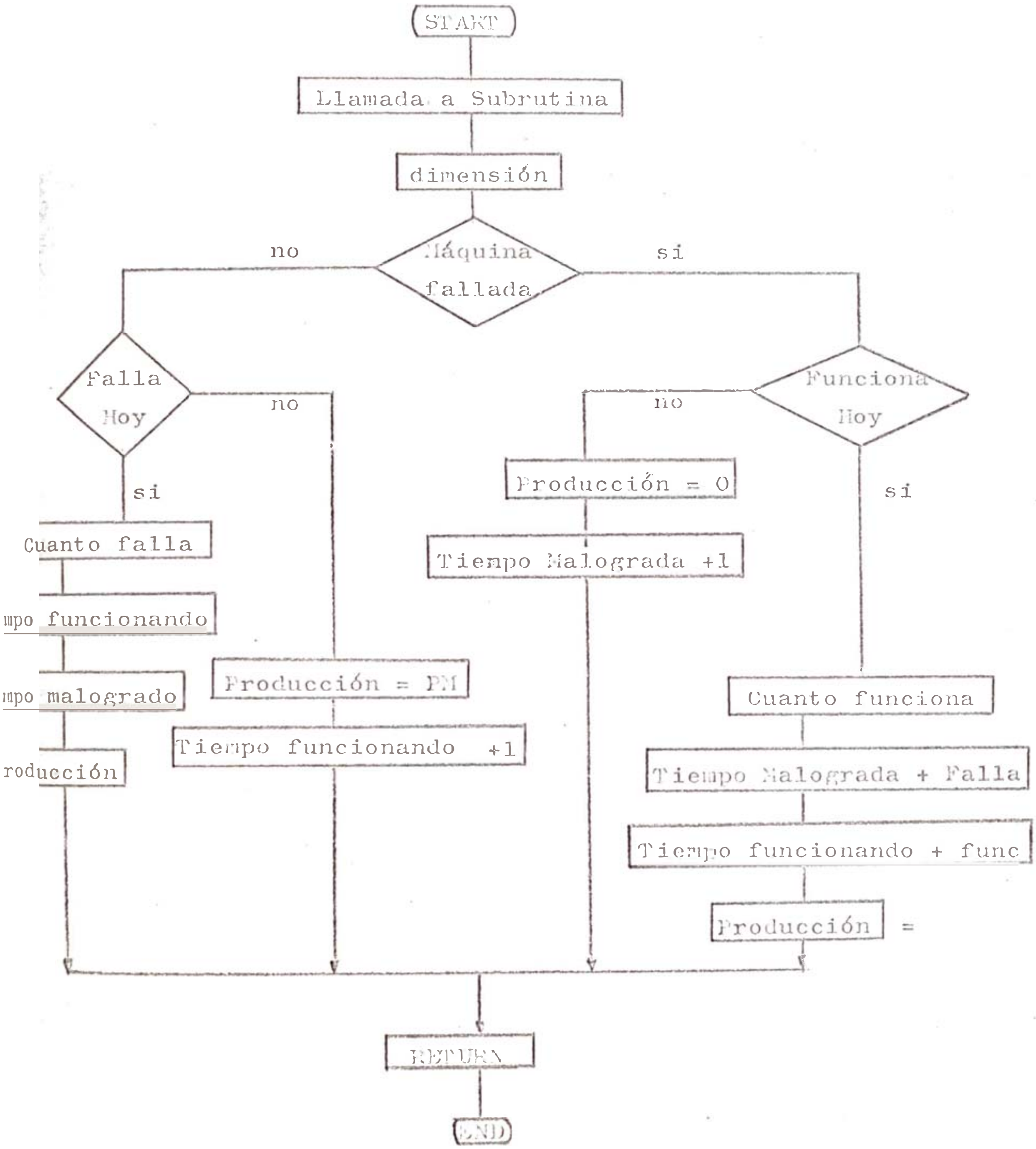
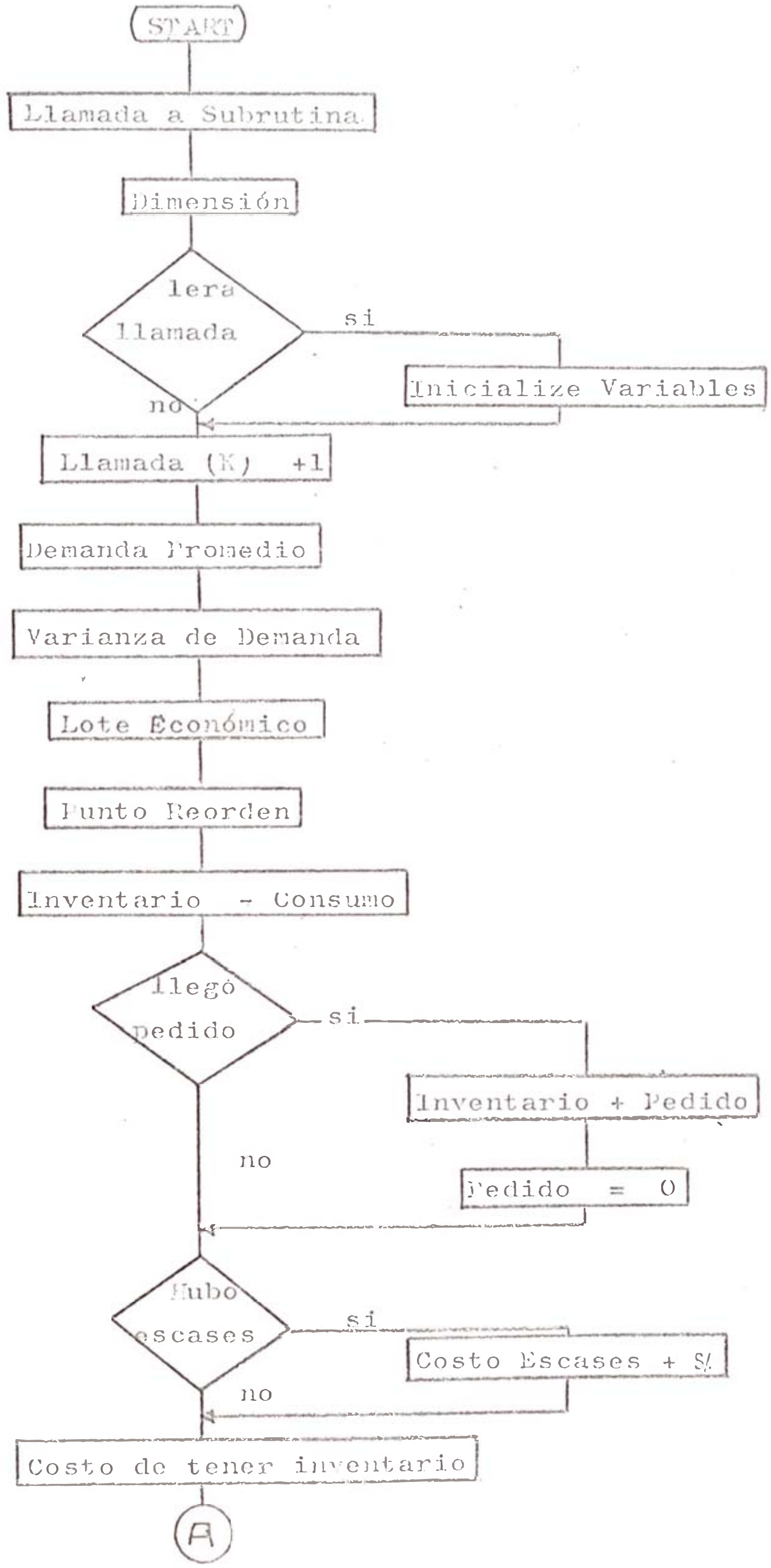


DIAGRAMA DE FLUJO

Subrutina Materia Prima



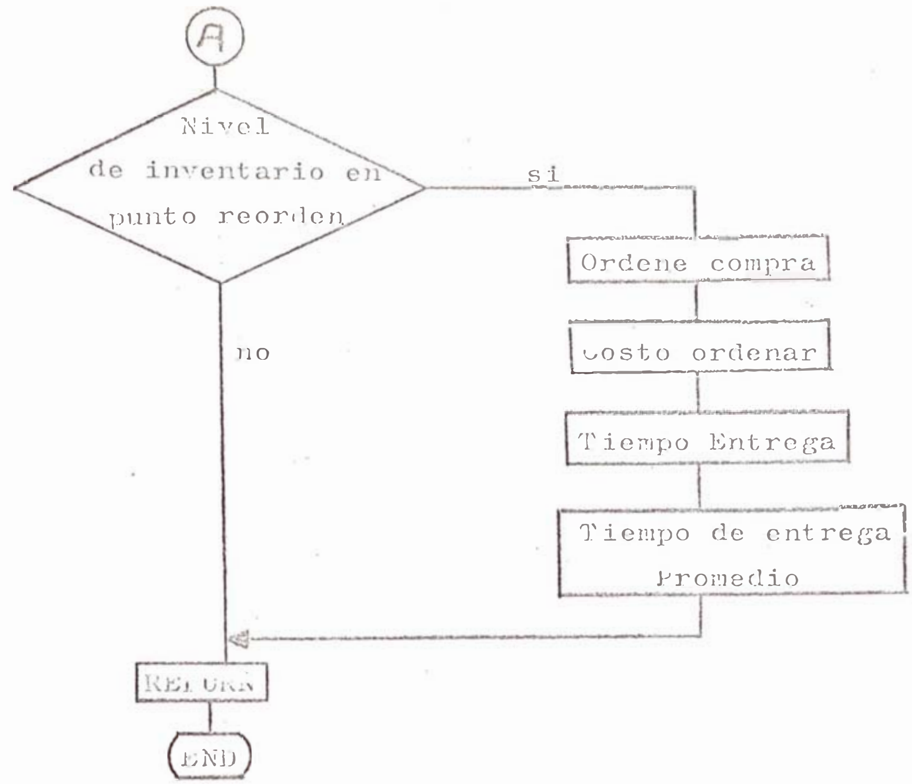
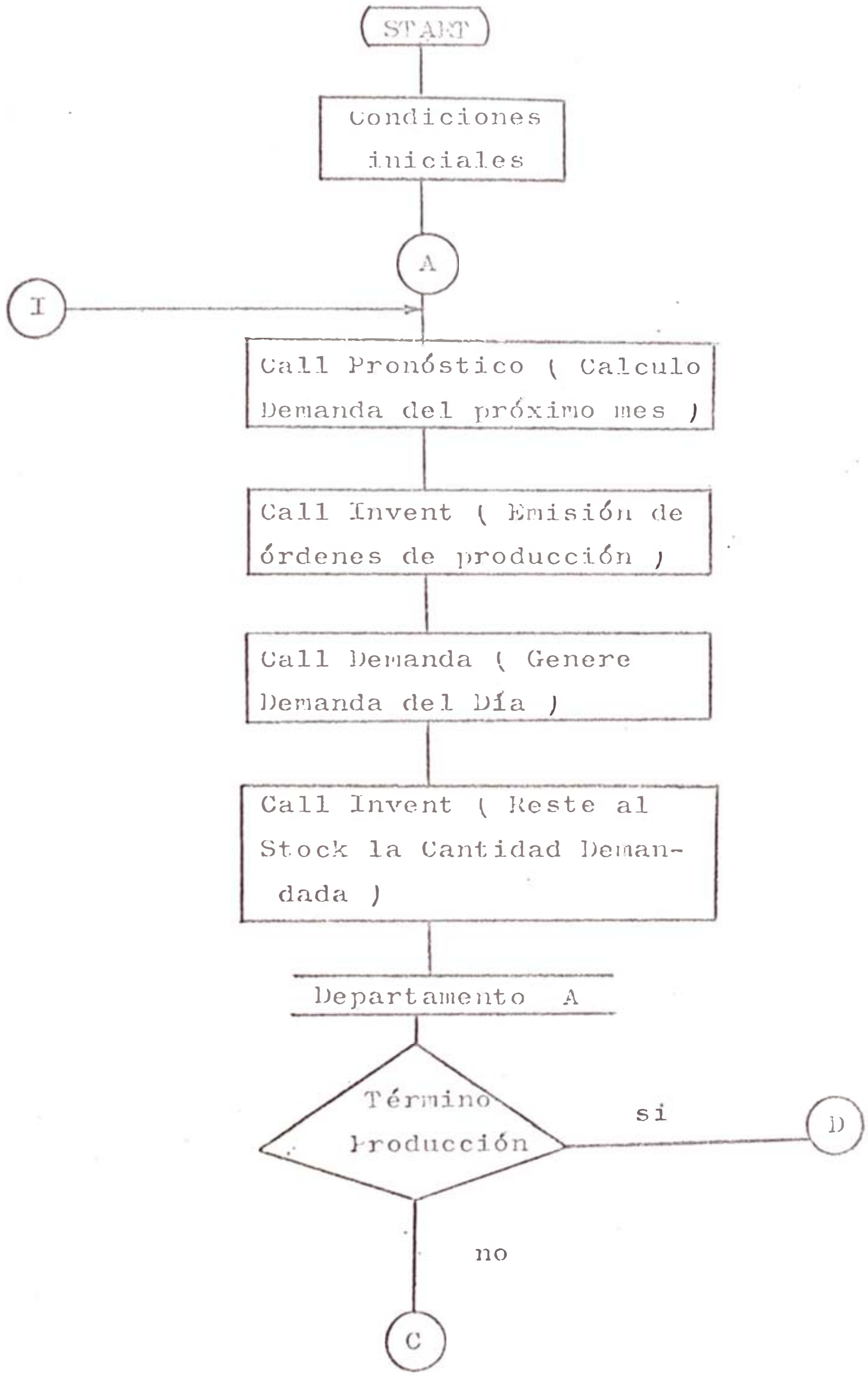
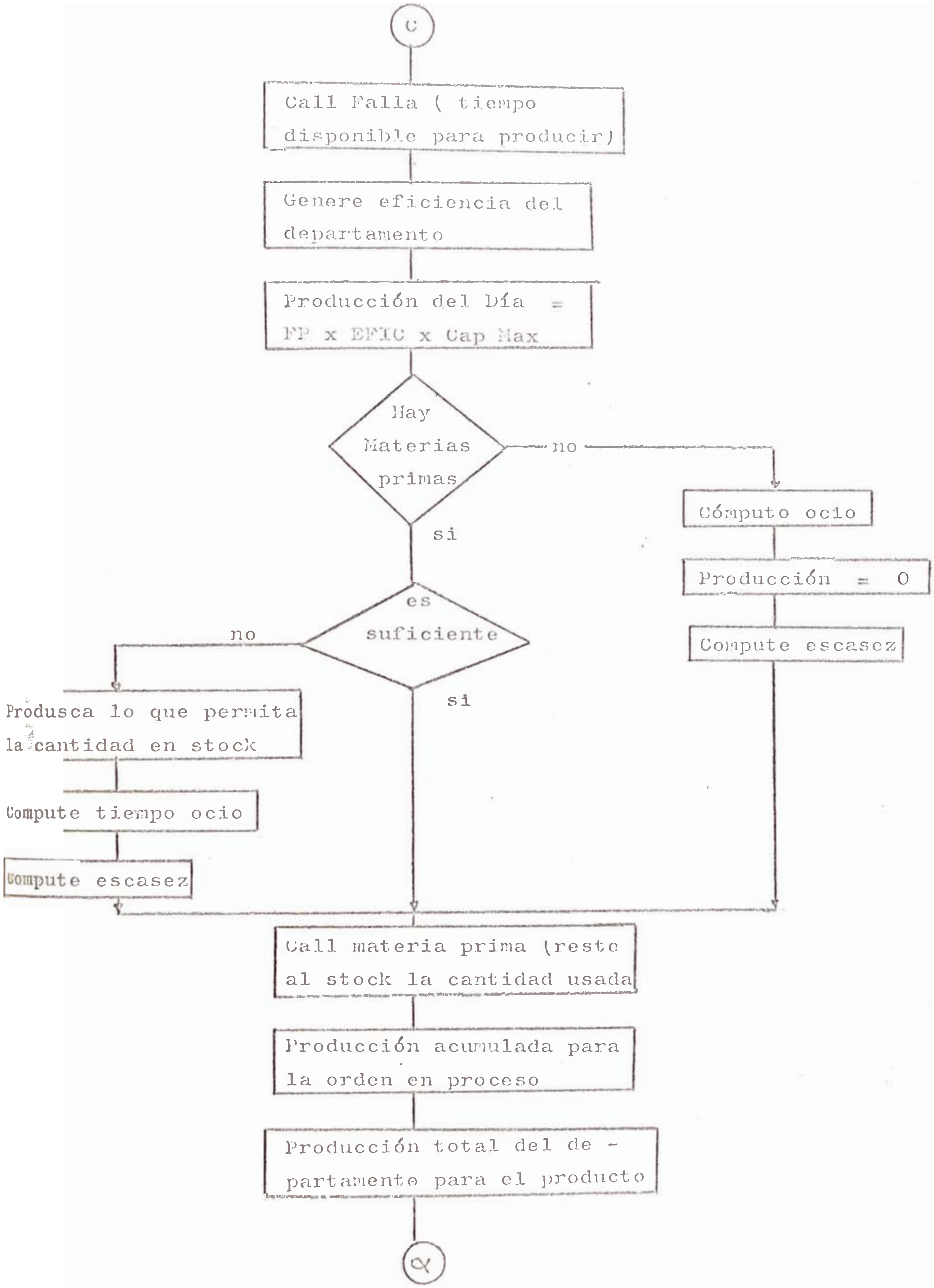

A
Nivel de inventario en punto reorden
si
no
Ordene compra
Costo ordenar
Tiempo Entrega
Tiempo de entrega Promedio
RETURN
END

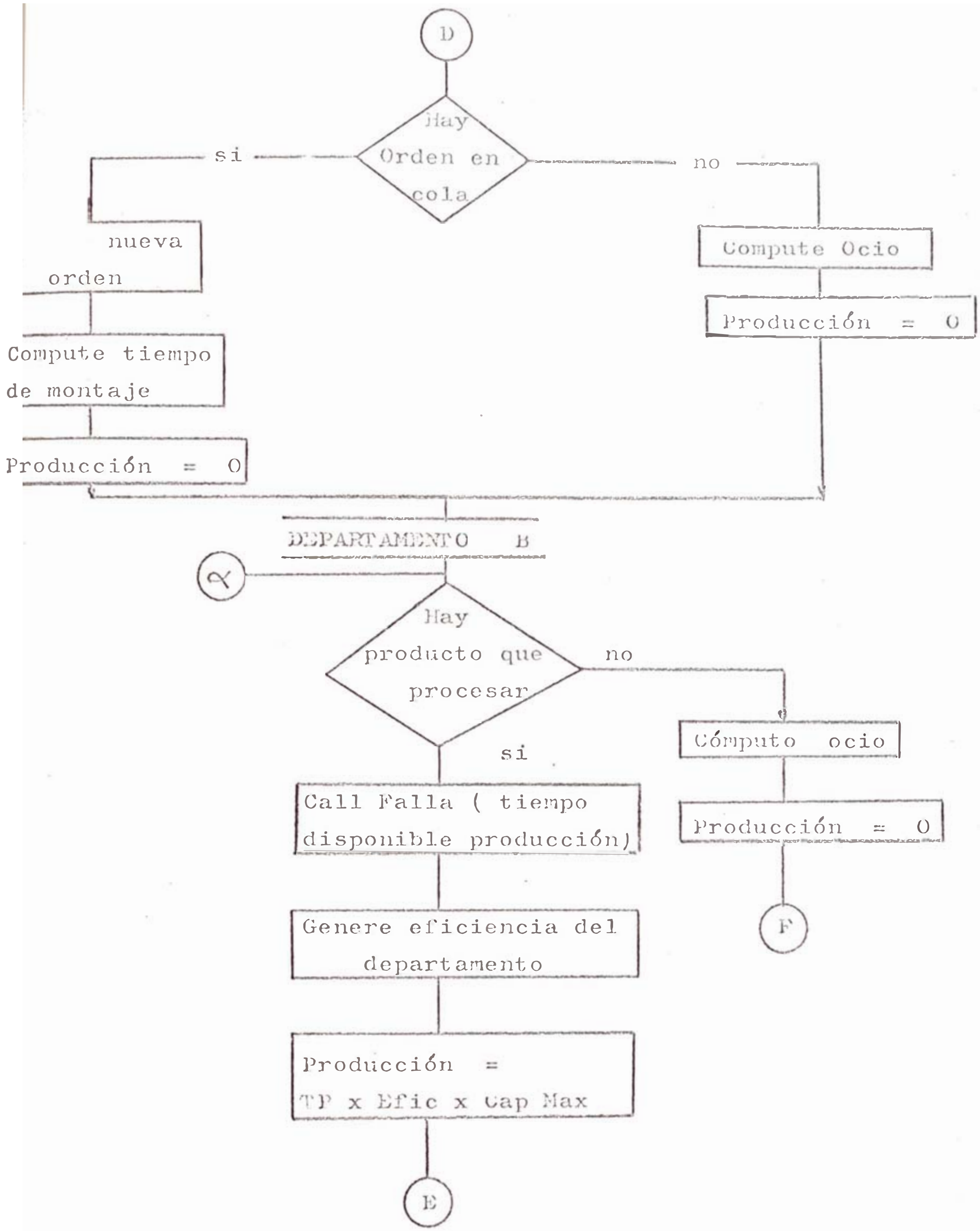
DIAGRAMA DE FLUJO

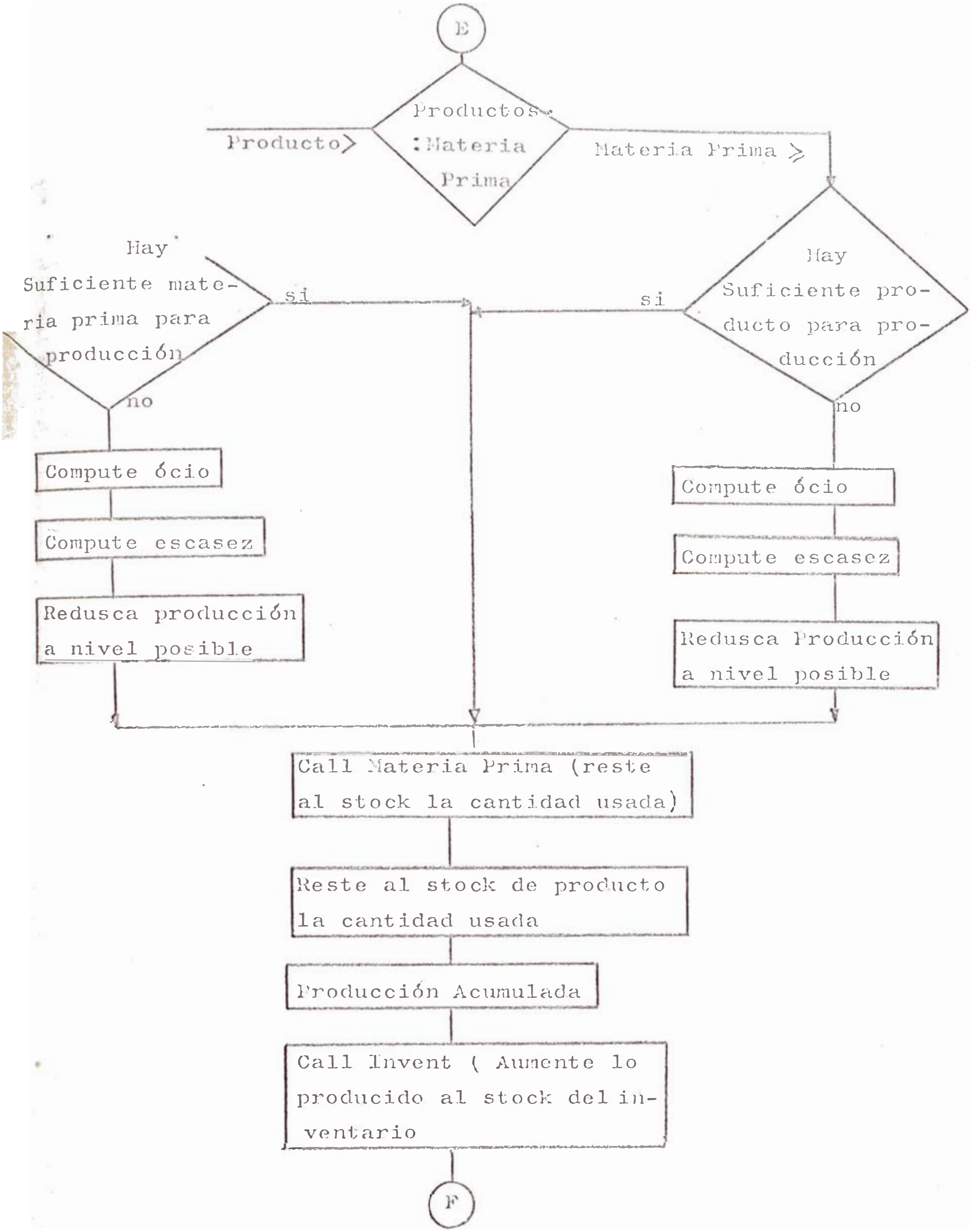
Sistema de Producción

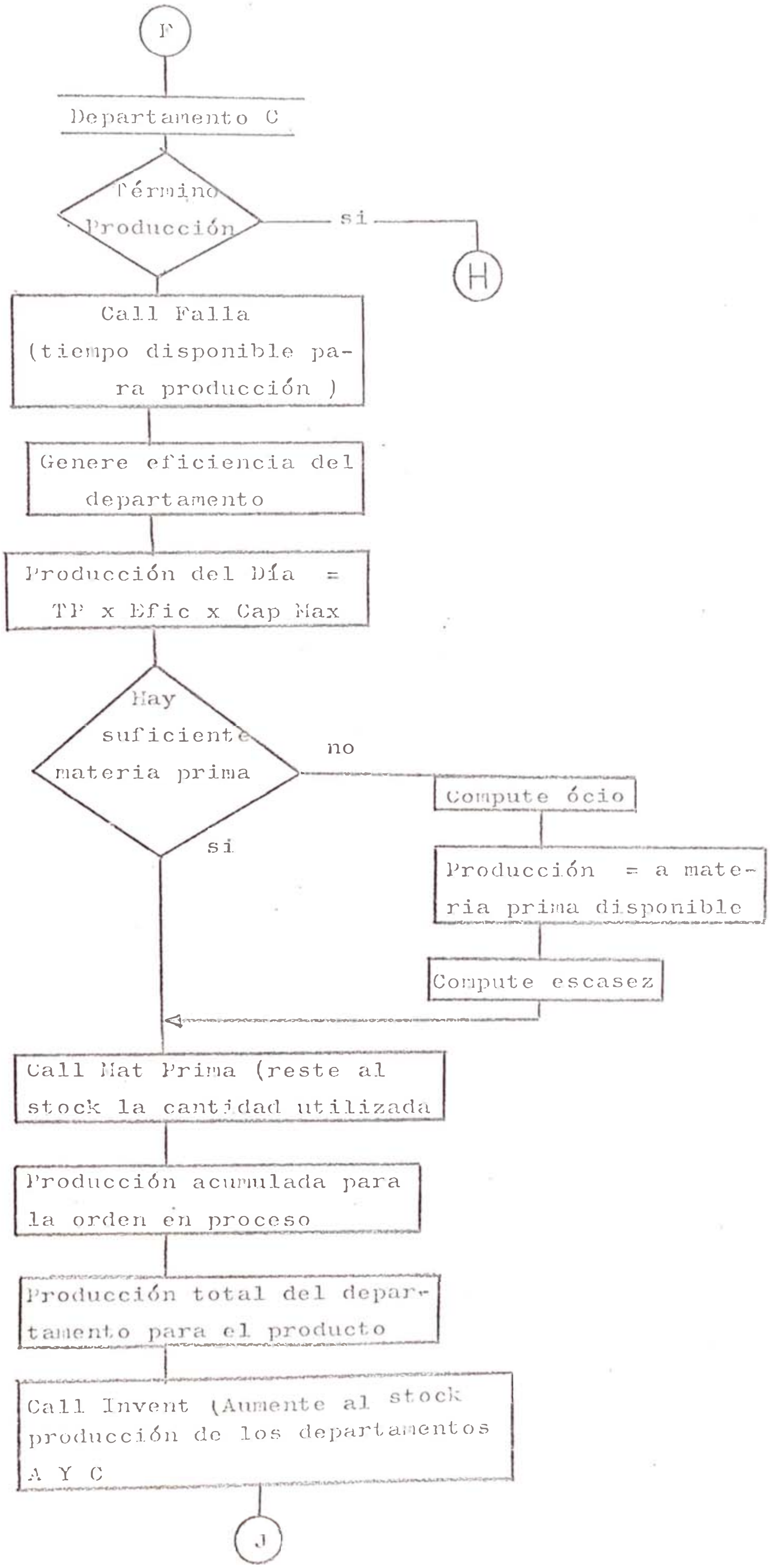
ama Principal

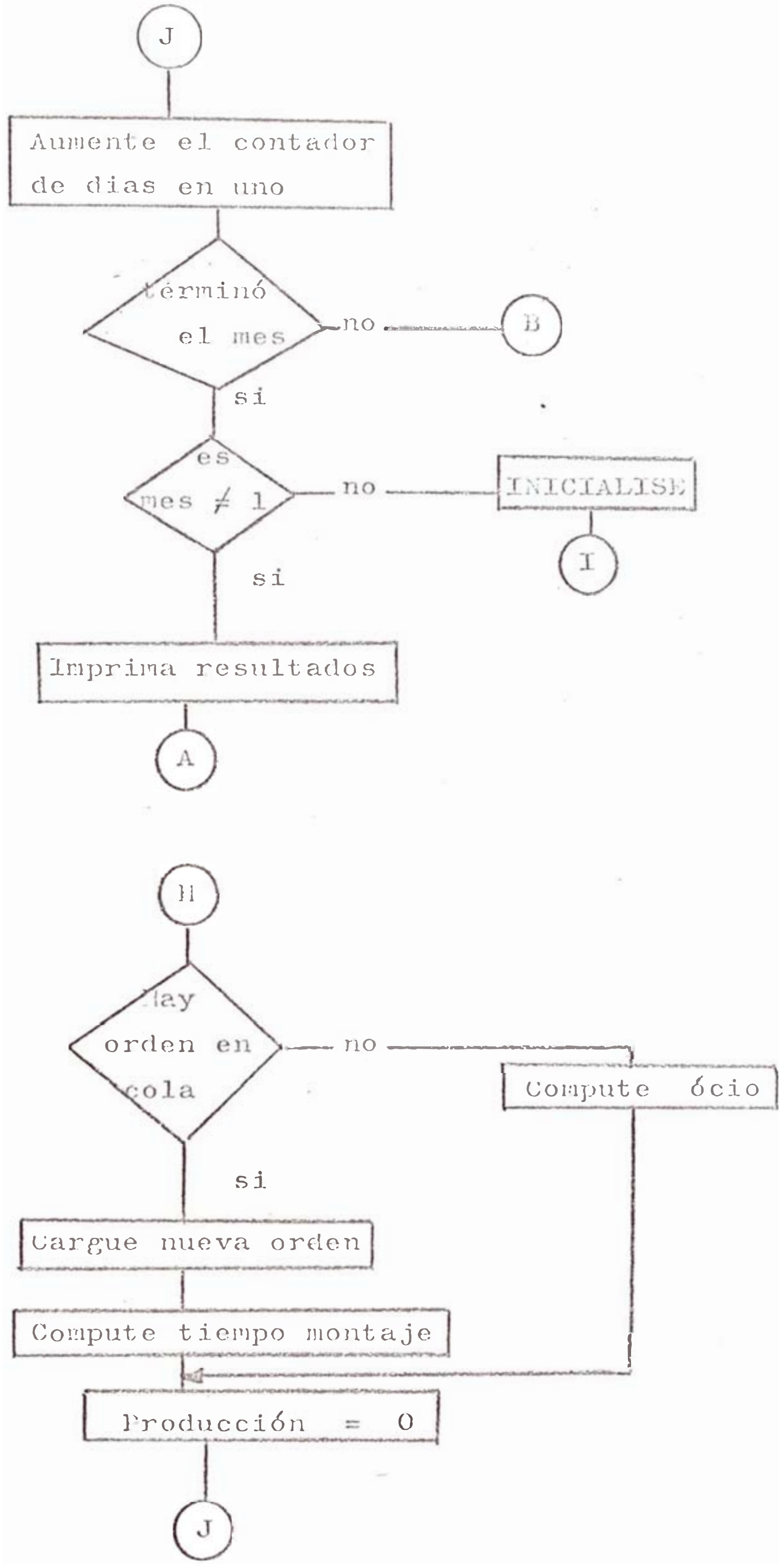



C
Call Falla (tiempo disponible para producir)
Genere eficiencia del departamento
Producción del Día = FP x EFIC x Cap Max
Hay Materias primas
no
si
Cómputo ocio
Producción = 0
Compute escasez
es suficiente
no
si
Produsca lo que permita la cantidad en stock
Compute tiempo ocio
Compute escasez
Call materia prima (reste al stock la cantidad usada
Producción acumulada para la orden en proceso
Producción total del de - partamento para el producto
α


D
Hay Orden en cola
si
no
nueva orden
Compute tiempo de montaje
Producción = 0
Compute Ocio
Producción = 0
DEPARTAMENTO B
Hay producto que procesar
no
si
Call Falla (tiempo disponible producción)
Genere eficiencia del departamento
Producción =
TP x Efic x Cap Max
Cómputo ocio
Producción = 0
F
E


E
Productos : Materia Prima
Producto >
Materia Prima ≥
Hay Suficiente materia prima para producción
si
no
Hay Suficiente producto para producción
si
no
Compute ócio
Compute escasez
Redusca producción a nivel posible
Compute ócio
Compute escasez
Redusca Producción a nivel posible
Call Materia Prima (reste al stock la cantidad usada)
Reste al stock de producto la cantidad usada
Producción Acumulada
Call Invent (Aumente lo producido al stock del inventario
F


F
Departamento C
Término Producción
si
H
Call Falla (tiempo disponible para producción)
Genere eficiencia del departamento
Producción del Día = TP x Efic x Cap Max
Hay suficiente materia prima
no
Compute ócio
Producción = a materia prima disponible
Compute escasez
si
Call Mat Prima (reste al stock la cantidad utilizada
Producción acumulada para la orden en proceso
Producción total del departamento para el producto
Call Invent (Aumente al stock producción de los departamentos A Y C
J


J
Aumente el contador de dias en uno
términó el mes
no
B
si
es mes ≠ 1
no
INICIALISE
I
si
Imprima resultados
A
H
Hay orden en cola
no
Compute ócio
si
Cargue nueva orden
Compute tiempo montaje
Producción = 0
J

EJECUCION DE LA SIMULACION

Con el fin de determinar el mejor método de operar el sistema se han llevado a cabo 3 experiencias en cada una de las cuales se cambió el valor inicial para alguno de los datos.

Los datos utilizados en la primera Simulación fueron proporcionados por el Ing° Iván García.

Al estudiar los resultados de la 1era. Simulación se observó que el pronóstico no se ajustaba a la curva de la demanda por tanto para la segunda Simulación se varió el "W" de 0.15 a 0.30 para todos los Productos.

Los resultados de esta prueba fueron mejores que los de la anterior pero no totalmente satisfactorios. Se observó que el ajuste del Pronóstico no era del todo correcto y que las materias primas escaseaban retrasando la producción. Se realizó una nueva prueba variando el "w" de 0.30 a 0.35 y los niveles de Inventarios como se muestra en el cuadro siguiente. Además en cada una de las experiencias se varió el número random inicial.

Productos Simulaciones	1	2	3	4	5
1era. y 2da.	30,000	30,000	50,000	35,000	25,000
3ra.	30,000	30,000	125,000	50,000	45,000

Materias Primas Simulación	1	2	3	4	5
1era. y 2da.	43,000	75,000	175,000	80,000	21,000
3ra.	95,000	110,000	175,000	130,000	55,000

El principal problema con que se tropezó en la ejecución de la Simulación fue el del excesivo tiempo que tomaba el simular cada una de las experiencias; este tiempo era de dos horas 15 minutos por Simulación , ya que la computadora que se utilizó fue la IBM 1620, la cual es lenta para esta clase de trabajos , ésta es la razón por la cual sólo se ha podido realizar tres experimentos aunque en realidad se necesitaría realizar muchos más para que los resultados obtenidos puedan considerarse completamente correctos.

El análisis de los resultados obtenidos en cada una de las simulaciones será lo que nos permita determinar cual de los métodos de operación es más conveniente para el sistema.

El análisis se hace en base a gráficos ya que estos muestran de manera clara y directa la influencia que tienen los valores de cada una de las variables utilizadas en el resultado final.

Se ha graficado las interrelaciones entre las siguientes variables

a) Demanda - y - Pronósticos mes a mes para cada uno de los productos.
b) Los Costos acumulados mes a mes para: Costo de tener el inventario, costos de escasez de los productos acabados.
c) Costos acumulados mes a mes para: Costo de tener el inventario, costos de escasez de las materias primas.
d) Demandas acumuladas-vrs- Producción Acumulada mes a mes
e) Gráfico de los tiempos ociosos acumulados mes a mes.

Además de los gráficos mencionados, se utilizan los siguientes cuadros:

a) Nivel promedio del Inventario por día para cada uno de los productos y de las simulaciones
b) Nivel promedio del inventario de materias primas para cada una de ellas en cada una de las simulaciones.

c) Escaseses promedio por día de cada uno de los productos en cada una de las simulaciones

d) Escaseses promedio al día de cada una de las materias primas en cada una de las simulaciones

e) Niveles mensuales promedio para las demandas;Producción: Pronóstico.

f) Costos totales por año para el inventario de Productos acabados y de materias primas y el costo total de los inventarios por año.

El análisis de los resultados se hace: primero de manera individual para cada uno de los gráficos y cuadros y en segundo lugar el análisis conjunto de los resultados.

ANALISIS DE LOS GRAFICOS DE DEMANDA Y PRONOSTICO MES A MES

Producto # 1

Para este producto el mes de menor consumo es el 8vo. Los pronósticos de la 1ra. simulación son muy altos y para la 2da. y 3era. simulación el ajuste es mejor pero no satisfactorio.

Producto # 2

En este producto las variaciones aleatorias de las ventas son marcadas siendo el mes de menor consumo el 10°. Los pronósticos de la 1era. simulación son muy altos, el mejor pronóstico es el de la 3era. simulación el que se hixo con "w" = 0.35

Producto # 3

Este es el producto de mayor variación estacional, el mes de mayores ventas fue el 10 mientras que el de menores ventas fue el 5, nuevamente los pronósticos de la 1era. simulación son muy altos y los mejores pronósticos son los de la 3era. simulación.

Producto #4

Este es otro producto con grandes variaciones aleatorias. El mes de ventas más alto es el 5to. y el de menores ventas el 10mo. Los pronósticos de la 1era. simulación son altos, siendo los mejores los de la 3era. simulación

Producto # 5

En este producto las menores ventas son en el mes 2do. y las más altas en el mes 8vo. siendo el mejor pronóstico el de la 3era. simulación.

ANALISIS DE LOS COSTOS DE INVENTARIO DE LOS PRODUCTOS ACABADOS

Producto # 1

Los costos de tener el Inventario son constantemente más altos en la 1era. simulación pero ésta no tiene costos de escasez. La 3era. simulación da hasta el 11vo. mes costos más altos que la 2da. pero finalmente es la de menor costo asimismo los costos de escasez son mínimos para la 3era. simulación y relativamente altos en la 2da.

Producto # 2

Para este producto los costos de tener inventario están clara - mente diferenciados siendo la 1era. simulación la más costosa y la 3era. la de menores costos, los costos de escasez no tienen importancia en ningún caso.

Producto # 3

Los costos de la 3era. simulación son los más altos hasta el 9no. mes donde cambian de pendiente resultando finalmente más altos los de la 1er. simulación, los de menores costos los da la 2da. simulación. Los costos de escasez son altos en la 3era. simulación y la de menores costos de escasez es la 1era.

Producto # 4

Todas las Simulaciones dan costos totales semejantes, asimismo los costos de escasez son mínimos . La simulación de menores costos de inventario y escasez es la 3era.

Producto # 5

Los costos de tener inventario son continuamente más altos en la 1era. simulación con la ventaja que da poca escasea y ésta exclusivamente en el 2do mes. Las simulaciones 2da. y 3era. tienen costos de inventario semejantes pero la 3ra. tiene menores costos de escasez.

ANALISIS DE LOS COSTOS DE INVENTARIO Y DE ESCASEZ PARA LAS MATERIAS PRIMAS

Materia Prima # 1

Los costos de tener el inventario son semejantes hasta el 9no. mes en las simulaciones 1era. y 3era. y finalmente la 3era. tiene más bajo costo. La 2da. simulación es la de menor costo de inventario, pero da lugar a escasez la cual se presenta exclusivamente en el 2do. mes.

Materia Prima # 2

Para esta materia prima los costos más altos los dá la 3era. simulación y los más bajos la 2da. La mayor escasez la dá también la 3era. simulación.

Materia Prima # 3

Esta materia prima es la que presenta los mayores costos de escasez, la 3era. simulación es la que tiene los costos más altos de escasez, en lo que respecta a los costos de tener el inventario la 2da. simulación tiene los costos más altos y la 1era. los más bajos.

Materia Prima # 4

Los costos de inventario de esta materia prima son bajos, dando las 3 simulaciones aproximadamente los mismos costos.

Materia Prima # 5

Es la que da los menores costos no siendo estos de importancia en relación a los anteriores y todas las simulaciones dan los mismos costos.

ANALISIS DE LAS PRODUCCIONES ACUMULADAS MES A MES EN RELACION A LAS VENTAS

Producto # 1

Las tres simulaciones dan mayores producciones que las ventas, la que menor diferencia dá es la segunda simulación.

Producto # 2

Para este producto las simulaciones 2 y 3 son las que más se acercan a la curva de las ventas. La 1era. simulación se separa de manera considerable de la curva de las ventas.

Producto #3

La simulación 3 da un total de producción menor que las ventas. La 1 y la 2da. dan totales mayores que las ventas, siendo la 2da. la que mejor se ajusta.

Producto # 4

Las tres simulaciones dan totales de producción elevados con relación a las ventas.

Producto # 5

La 3era. simulación es la que da el mejor ajuste, la 2da. está debajo de la Curva de Ventas hasta el 11avo. mes y la 1era. dá un total final muy alto.

ANALISIS DE LOS TIEMPOS OCIOSOS ACUMULADOS

Departamento A

Los tiempos ociosos más altos ocurren en la 2da. cimulación y los mas bajos en la 1era.

Departamento B

La 3era. simulación es la que da mayores ocios y la 1era. los menores, estos ocios aparecen debido a que el departamento tiene mayor capacidad de producción que la demanda.

Departamento C

La 3era. simulación dá los ocios más altos y la 1era. los más bajos. Estos ocios se deben exclusivamente a escaséz de materias primas.

CUADRO DE LA VENTA- PRODUCCION-PRONOSTICO

PROMEDIO MENSUAL

SIMULACION 1

Productos	Ventas	Producción	Pronóstico
1	81,529	93.836	87,963
2	90,159	110,549	98,574
3	170,142	179,079	175,195
4	51,583	67,646	59,815
5	123,886	138,731	132,091

SIMULACION 2

Productos	Ventas	Producción	Pronóstico
1	81,529	90,167	82,054
2	90,159	93,945	92,109
3	170,142	176,892	170,462
4	51,583	68,175	53,925
5	123,886	127,976	127,504

SIMULACION 3

Productos	Ventas	Producción	Pronóstico
1	81,529	89,259	81,516
2	90,159	92,898	91,540
3	170,142	157,535	169,804
4	51,583	65,456	53,368
5	123,886	131,376	126,530

CUADRO DE NIVELES PROMEDIO DE INVENTARIO Y COSTO DE ESCASEZ PROMEDIO DIARIO

INVENTARIO PROMEDIO

Producto	Simulación 1	Simulación 2	Simulación 3
	110,321	90,208	87,991
2	142,794	91,862	59,063
3	158,457	75,781	124,484
	129,641	113,694	111,531
5	95,615	69,092	62,159

COSTO DE ESCASEZ PROMEDIO

Producto	Simulación 1	Simulación 2	Simulación 3
1	0	72.3	3.25
2	9.1	126.7	65.0
3	42.1	105,3	166
4	48.6	73.4	2.0
5	80.5	391.1	210.5

NIVELES PROMEDIO DE INVENTARIO DE MATERIAS PRIMAS Y COSTO DE ESCASEZ PROMEDIO DIARIO

INVENTARIO PROMEDIO

Materia Prima	Simulación 1	Simulación 2	Simulación 3
1	159,581	125,778	143,116
2	169,912	132,820	182,072
3	114,722	16[illegible],813	123,906
4	85,817	94,864	86,665
5	27,764	26,171	26,667

COSTO DE ESCASEZ PROMEDIO

Materia Prima	Simulación 1	Simulación 2	Simulación 3
1	0	197.3	0
2	156	329	310
3	730	424.3	1116
4	1017	1046	767
5	26.9	69.9	35.8

COSTOS TOTALES ANUALES DE INVENTARIOS PARA CADA UNA DE LAS SIMULACIONES

Inventario	Simulación 1	Simulación 2	Simulación 3
Productos	4'210,157	3'177,052	3'128,366
Materia Prima	3'233,720	3'070,535	3'320,560
TOTAL	7'443,877	6'247,587	6'448,926

ANALISIS GENERAL DE LOS RESULTADOS

Hasta el momento sólo hemos tratado el aspecto particular de la simulación, analizando cada una de las variables individualmente. Este análisis no dá una visión general del problema total, ni explica las interrelaciones entre las distintas variables del Sistema.

Analizando el efecto producido al cambiar uno ó varios datos iniciales podremos estudiar la influencia de estos valores en el funcionamiento del sistema.

Simulación 1

Analizando los resultados se observó que:

El pronóstico no ajustaba la curva de la demanda y por lo general se mantuvo superior a ella, esto trajo como consecuencia una sobreproducción que incidió en el aumento de los inventarios y por consiguiente en los costos de estos.

Ya que las corridas de producción fueron mas largas, se contó con más tiempo para el reaprovisionamiento de materias primas y por lo tanto las escaseces fueron bajas a excepción de la materia prima # 4. Como consecuencia de esto se puede observar que los tiempos de ocio en todos los departamentos son menores que en cualquier otra simulación y se deben a escaceses de materia prima en los departamentos A y C y a producción terminada en el B.

Simulación 2

De los resultados obtenidos en la simulación 1 se ve la necesidad de obtener mejores pronósticos. Para conseguir esto se modificó el "w" de todos los pronósticos de 0.15 a 0.30, lo cual significa que se está dando mayor ponderación a las demandas recientes.

No se varió los niveles iniciales de inventarios pues se consideró que al disminuír la producción necesitaba menor cantidad de materias primas.

Al estudiar los resultados de la segunda simulación se observa que efectivamente el pronóstico es mucho mejor pero no totalmente satisfactorio. Se puede observar un desplazamiento de la Curva de Pronóstico.

Este mejor pronóstico hace que las cantidades producidas se ajusten mejor a la curva de Demandas el cual da como resultado, menores niveles de inventario de productos acabados.

Esto a su vez determina órdenes de producción mas reducidas y por consiguiente corridas más cortas.

Al ser las corridas de producción más cortas, los tiempos disponibles para reaprovisionar el inventario son menores originando escaseces de materias primas las que a su vez retrasan la producción no permitiendo cumplir con la demanda de los clientes.

La escasez de materia prima impide el normal desenvolvimiento de la producción aumentando el tiempo ocioso de los departamentos y disminuyendo la eficiencia de estos entre 5 y 10%.

Simulación 3

De los resultados obtenidos en la Simulación 2 se concluye que los niveles iniciales de Inventario de materia prima no son suficientes para la operación normal del sistema de producción y que es necesario aumentar estos.

El ajuste del Pronóstico a la demanda mejora siendo el total de Demandas Pronosticadas igual a la demanda total pero la curva de pronóstico sigue desplazada con respecto a la demanda

Los niveles de inventario fueron aumentados tomando en consideración las escaseces producidas en la simulación anterior. (Ver en la Pag. 85 en la Parte "Ejecución de la Simulación)

Analizando los resultados observamos que:

Pese al aumento de los niveles de inventario se continúa produciéndose escasez de materia prima. Esta escasez comparada con la producida en la Simulación 2 es menor. En el mes de inicialización la escasez de materias primas 2 y 5 retrazan la producción, por tanto es necesario elevar el nivel inicial de éstas.

Continuamente aparecen escaseces de materia prima en la Simulación # 3, las cuales son causadas por la fórmula de Nivel de Reaprovisionamiento cuyo coeficiente de riesgo es alto.

Con respecto al tiempo ocioso de los Departamentos podemos decir que: en el Departamento A los tiempo ociosos son debidos a escaseces de Materia Prima en los meses iniciales y a producción terminada a partir del 8vo. mes. En el Departamento B se combinan los efectos de escasez de Materia Prima con producción terminada pues este Departamento tiene gran capacidad de producción.

En el Departamento C, todos los ocios producidos son por falta de materia prima disminuyendo el tiempo disponible para trabajar en 8% no pudiendo terminar las órdenes emitidas y sufriendo al término del año un retraso de un mes en la producción.

El análisis de los costos de inventarios de materia prima da como resultado que la simulación 2 es la mejor , por existir una diferencia de casi S/. 250,000 con la simulación 3.

Para los costos de inventario de productos acabados, la simulación 3 es mejor, con una diferencia de S/.50,000 sobre la simulación 2

Analizando los costos totales en conjunto, mientras la simulación 1

da un costo total de S/. 7'443,877, las simulaciones 2 y 3 dan un costo de S/. 6'247,000 y S/. 6'449,000 respectivamente.
La simulación 2 dá como resultado un ahorro de S/. 1'196,290 con respecto a la simulación 1 que considera el estado actual de la planta.
Siendo la diferencia de los costos totales de la simulación 2 y 3 sólo de 3% es más conveniente adoptar los resultados de la simulación 3 por ajustarse mejor a la política de la compañiá. Específicamente la política de ventas ya que la simulación 3 produce menores costos de escaséz lo cual significa que la demanda está siendo mejor seguida.

CONCLUSIONES

De la sección análisis de resultados se puede comprobar lo fácil que es lograr cualquier tipo de información del modelo una vez que éste ha sido planteado y programado.

El esfuerzo requerido en la formulación del modelo, recolección de información y todos los pasos subsiguientes, se ven compensados una vez que se demuestra que el modelo funciona.

Para nuestro caso específico en el sistema inventario producción existen dos formas de resolver el problema.

- Introducir diferentes medidas ó decisiones para probar el funcionamiento de la planta, dejando que el sistema responda por si solo.

- Formular un modelo que se aproxime lo suficiente a la situación real, para experimentar sobre él.

De hecho se puede anotar las ventajas que resultan de aplicar el segundo método:

- Obtener información de cualquier parte del sistema cuando ésta es probada con alguna nueva medida o política.
- Bajo costo de operación, ya que una vez que el modelo está funcionando, el único costo que se incurre es en el costo de computación.
- Rapidez con que se obtiene la información sobre el sistema. Un año de operación real del sistema puede simularse en pocos minutos.

El probar las diferentes decisiones sobre el sistema, antes de llevarla a la práctica.

Es así como mediante la simulación del sistema hemos podido bajar nuestros costos de operación en más de S/. 1'000,000 jugando solamente con dos variables que son muy importantes pero que no son los únicos del sistema.

Específicamente el pronóstico de ventas y los niveles iniciales de inventarios tanto de Materia Prima como de productos acabados.

Se ha hecho poca incidencia en otros factores como eficiencia del equipo, fallas del mismo, capacidad de máquinas, etc. porque un sistema que logra un balance perfecto entre su pronóstico de ventas y sus stocks de Materia Prima obtiene un máximo aprovechamiento de la planta, permitiendo luego un estudio más sencillo sobre las demás variables.

El tiempo que toma cada simulación no permite un gran número de simulaciones debido a la lentitud de operación de la computadora.

Era deseable repetir cada simulación un número de veces para llegar a un estimado más cercado a la realidad, pero por la razón mencionada anteriormente sólo se pudieron efectuar tres simulaciones. Estas tres pruebas nos permite tener una visión clara del sistema y del tipo de decisiones que deben ser probadas.

Las deficiencias que actualmente se encuentra después del análisis de las tres simulaciones son:

El pronóstico no se ajusta satisfactoriamente con la demanda. Esto obliga a seguir probando diferentes valores de "w" hasta llegar a un valor óptimo.

BIBLIOGRAFIA

CHURCHMAN; W. C.; ACKOFF, L.; ARNOF, L.;
"Introduction to Operations Research"
John Wiley, New York, 1964.

DUNCAN , J. A.; "Quality Control and Industrial Statistics";
Irwin, Illinois, 1959 .

EILON; "Production Control and Planning.

HADLEY, G. WITHIN, T. M.; "Analisis of Inventory Systems";
Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1963.

HANSSMAN, F.; "OPERATION RESEARCH IN PRODUCTION
AND INVENTORY CONTROL" ;John Wiley, New York, 1962.

HOLT, C. C.; MODIGLIANI, F.; MUTH, J.F. SIMON, H. A.;
"Planning Production Inventories and Work Force"; Prentice
Hall, Englewoods Cliffs, 1960.

- MAYNARD, H. B.; "Industrial Engineering Handbook"; Mc-Graw
Hill, New York, 1963.

- NADOR, E.,; "Inventory Systems" John Wiley, New York, 1966.

- NAYLOR, T.H.; BALINTFY, J. L. BURDICK, D.S.; KONG CHU;
"Computer Simulation Techniques"; John Wiley, New York, 1966.

- SCHREIDER, A.; "The Monte Carlo Method", Oxford, Pergammonn,
1966.

- SASIENI, M.; YASPAN, A.; FRIEDMAN, L. "Operations Research
Methods and Problems", John Wiley, New York, 1964.