UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Facultad de Ciencias

TESIS

EQUILIBRIO DE NASH EN JUEGOS ESTRATÉGICOS DISCONTINUOS

PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE

Licenciado en Matemática

Elaborado por

Diego Javier Cornejo Koc

Asesora

Dra. Yboon Victoria Garcia Ramos

LIMA - PERÚ

2019

Dedicado a mis padres,
quienes gracias a su ejemplo,
esfuerzo y palabras de aliento
han sido guía para poder llegar
a este punto de mi carrera

Agradecimientos

En primer lugar quiero expresar mi profundo agradecimiento a la Dra. Yboon Garcia Ramos por haber dirigido y motivado el presente trabajo. Al Dr. Jack Arce, por haber intervenido en mi formación y mostrarme el cariño hacia las matemáticas. A mis compañeros Bruno G. y Harold R., con quienes compartí experiencias académicas inolvidables. Finalmente, a cada docente que me inspiró a mejorar durante mi formación.

Resumen

El objetivo del presente trabajo es demostrar el *Teorema de Reny* (1999), el cual brinda condiciones necesarias para garantizar la existencia de equilibrios de Nash en estrategias puras, y también establecer criterios para garantizar las condiciones de dicho teorema sobre la extensión mixta de un juego estratégico. La importancia de este resultado radica en la permisividad de ampliar el estudio a ciertos juegos discontinuos, y también deducir algunos resultados clásicos, tales como el Teorema de Glicksberg (1952), Mertens (1986) y Robson (1994).

Comenzamos introduciendo los conceptos de *payoff security*, *recíprocamente semicontinuidad superior (rscs)* y *better-reply security (brs)*, y mostramos una relación entre ellas. Luego probamos el *Teorema de Reny*, el cual establece que todo juego compacto, cuasicóncavo y brs posee equilibrio de Nash en estrategias puras.

En la segunda parte analizamos juegos estratégicos con cierto tipo de simetría, la cual permitirá debilitar las condiciones del juego y garantizar la existencia de equilibrios simétricos.

En la parte final enfocamos nuestro análisis sobre la extensión mixta de un juego estratégico compacto y Hausdorff. Introducimos el concepto de *uniformemente payoff security*, el cual es condición necesaria para asegurar que la extensión mixta

resulte *payoff secure*. Luego mostramos los teoremas clásicos mencionados y concluimos nuestro trabajo con el análisis del juego *"Votación sobre el impuesto a la renta" (Carbonell-Nicolau)*, y mostramos la existencia de un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Índice general

Introducción

A menudo es natural modelar ciertos problemas como si se tratasen de un juego, más específicamente, tal situación puede ser vista como una interacción entre una cantidad finita de jugadores donde cada uno posee un conjunto del que tomarán sus decisiones, la cual producirá cierto grado de satisfacción (utilidad) dependiendo de la elección del resto.

Formalmente, un juego estratégico G está conformado por una cantidad finita N de jugadores, donde cada uno posee un conjunto de estrategias X_i y una función de utilidad $u_i : \prod_{i=1}^{N} X_i \to \mathbb{R}$.

A la situación en la que a ningún jugador le convenga cambiar de estrategia si el resto mantiene la elección tomada la llamaremos *equilibrio de Nash*, es decir, un equilibrio es un perfil de estrategias $a = (a_1, \ldots, a_N) \in \prod_{i=1}^{N} X_i$ tal que para cada jugador i se tiene

$$u_i(a) \geq u_i(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_N)$$

para todo $x \in X_i$.

Debido a que es sencillo mostrar situaciones (juegos) en los que no hay equilibrio, el concepto de equilibrio de Nash se extiende a uno más general conocido como *equilibrio de Nash en estrategias mixtas*. Fue John F. Nash (1951) quien introdujo esta nueva noción de equilibrio, y mostró que si los conjuntos de estrategias son finitos, tal equilibrio existe. La demostración esencialmente se basa en aplicar el teorema de punto fijo de Brouwer.

Con el tiempo este resultado pudo generalizarse al caso de juegos continuos con conjuntos de estrategias compactas en algún espacio euclidiano. Dado que este resultado mas fuerte utilizaba también un teorema de punto fijo (Kakutani), fué I. L. Glicksberg quién pudo extender el análisis al caso en el que las estrategias no necesariamente pertenezcan a espacios euclidianos, básicamente generalizando este teorema de punto fijo.

En el presente trabajo mostramos un resultado aún más general (Reny-1999), el cual sólo requerirá que el espacio ambiente sea un espacio vectorial topológico.

Capítulo 1

Equilibrio en estrategias puras

Muchas situaciones reales pueden ser modeladas mediante un juego en el que el espacio de estrategias es infinito. Dichos juegos pueden contar con funciones de utilidad discontinuas, así que ciertos resultados clásicos como Glicksberg (1952) o Debreu (1952) no pueden ser utilizados. En este capítulo introducimos nuevas nociones, tales como *payoff security*, *recíprocamente semi-continuidad superior* y *better-reply security*, que nos permitirán extender las condiciones acerca de las funciones de utilidad, incluyendo casos en los que estas sean continuas o discontinuas.

Los conceptos previos y propiedades referentes a topología, espacios vectoriales topológicos y medida son desarrollados a detalle en el apéndice.

1.1. Definición y propiedades

Sea N el número de jugadores. Cada jugador i tiene asociado un subconjunto no vacío y compacto X_i de un espacio vectorial topológico (no necesariamente Hausdorff o localmente convexo) y una *función de utilidad* acotada $u_i : X \to \mathbb{R}$, donde $X = \prod_{i=1}^{N} X_i$ es dotado con la topología producto. Bajo estas condiciones el juego estratégico $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$ es llamado *compacto*.

El *vector de funciones de utilidad* es la función $u : X \to \mathbb{R}^N$ definida por $u(x) = \big(u_1(x), \ldots, u_N(x)\big)$, y $\Gamma = \{(x, u(x)) : x \in X\} \subseteq X \times \mathbb{R}^N$ denota el gráfico de dicha aplicación.
Debido a que las funciones de utilidad u_i son acotadas, $\overline{\Gamma} \subseteq X \times \overline{B}(0, r)$ para algún $r > 0$. Por tanto, $\overline{\Gamma}$ es compacto.
Dado $x \in X$, denotemos $x_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N) \in X_{-i}$, donde $X_{-i} = \prod_{j \neq i}^N X_j$.
Si X_i es convexo y para cada $x_{-i} \in X_{-i}$ la función $u_i(\cdot\,, x_{-i})$ es cuasicóncava sobre X_i, diremos que el juego $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$ es *cuasicóncavo.*

Definición 1.1. Decimos que el jugador i *asegura la utilidad* $\alpha \in \mathbb{R}$ *en* $x \in X$ si existe $d_i \in X_i$ y una vecindad abierta $V \subseteq X_{-i}$ de x_{-i} tal que

$$\inf_{x'_{-i} \in V} u_i(d_i, x'_{-i}) \geq \alpha$$

En caso de que la desigualdad anterior sea estricta, diremos que el jugador i *asegura una utilidad estrictamente mayor* que α en x.

Así, cierta utilidad puede ser asegurada por i en x si dicho jugador posee una estrategia que garantiza al menos tal utilidad, incluso si el resto de jugadores se desvían ligeramente de x.

Para cada jugador $i \in \{1, \ldots, N\}$, $x_{-i} \in X_{-i}$ y $d_i \in X_i$ definimos

$$\underline{u}_i(d_i, x_{-i}) = \sup_{V \in V_{x_{-i}}} \inf_{x'_{-i} \in V} u_i(d_i, x'_{-i})$$

donde $V_{x_{-i}}$ denota el conjunto de vecindades abiertas de x_{-i} en X_{-i}.

Nótese que $\underline{u}_i$ define una función real ya que u_i es acotada, y que $\underline{u}_i(d_i, x_{-i})$ representa el máximo valor que el jugador i puede asegurar en x si elige la estrategia d_i.

Proposición 1.1. *El jugador i puede asegurar una utilidad estrictamente mayor que $\alpha \in \mathbb{R}$ en $x \in X$ si, y sólo si,* $\sup_{d_i \in X_i} \underline{u}_i(d_i, x_{-i}) > \alpha$.

Prueba. Se sigue de la definición.

□

Proposición 1.2. *Para cada $d_i \in X_i$ se tiene que la función $\underline{u}_i(d_i, \cdot\,)$ es semi-continua inferiormente.*

Prueba. Dado $V \subseteq X_{-i}$ abierto, definimos la aplicación $f_V : X_{-i} \to \overline{\mathbb{R}}$ mediante

$$f_V(x_{-i}) = \begin{cases} \inf\limits_{x'_{-i} \in V} u_i(d_i, x'_{-i}) & ,\ x_{-i} \in V \\ -\infty & ,\ x_{-i} \notin V \end{cases}$$

Es claro que f_V es semi-continua inferiormente. Luego,

$$\underline{u}_i(d_i, x_{-i}) = \sup_{V \in V_{x_{-i}}} \inf_{x'_{-i} \in V} u_i(d_i, x'_{-i}) = \sup_{V \in V_{x_{-i}}} f_V(x_{-i})$$

también es semi-continua inferiormente.[1] □

1.2. Better-Reply Security

Definición 1.2. Un juego es llamado *better-reply secure* ***(brs)*** si para cada $(x, v) \in \overline{\Gamma}$ tal que x no es equilibrio de Nash, existe i y $d_i \in X_i$ tal que $\underline{u}_i(d_i, x_{-i}) > v_i$.

Así, un juego es brs si para cada $(x, v) \in \overline{\Gamma}$ tal que x no es equilibrio de Nash, existe un jugador i que asegura una utilidad estrictamente mayor que v_i.

[1] Si $\{f_\alpha\}$ es una familia de funciones semi-continuas inferiormente, entonces $\sup_\alpha f_\alpha$ es semi-continua inferiormente.

Observación. *Todo juego continuo es brs.*

El vector de funciones de utilidad u es continuo, y como $\mathbb{R}^N$ es Hausdorff se tiene que Γ es cerrado[2]. Sea $(x^*, v^*) \in \Gamma$ tal que x^* no es equilibrio de Nash, entonces existe i y $d_i \in X_i$ tal que $u_i(d_i, x^*_{-i}) > u_i(x^*) = v^*_i$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $u_i(d_i, x^*_{-i}) > v^*_i + \varepsilon$. Por continuidad de u_i se tiene que existe $V \in V_{x^*_{-i}}$ tal que $u_i(d_i, x'_{-i}) > v^*_i + \varepsilon$ para todo $x'_{-i} \in V$. Luego,

$$\inf_{x'_{-i} \in V} u_i(d_i, x'_{-i}) \geq v^*_i + \varepsilon > v^*_i$$

Lema 1.2.1. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ semi-continua inferiormente , $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \to x$ y $(v_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \to v$ nets convergentes en X y $\mathbb{R}$ respectivamente. Si $f(x_\lambda) \leq v_\lambda$, entonces $f(x) \leq v$.*

Prueba. Supongamos que $f(x) > v$. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > v + \varepsilon$. Por la semi-continuidad de f, el conjunto $V = \{a \in X : f(a) > v + \varepsilon\}$ es una vecindad abierta de x. Debido a que $x_\lambda \to x$, existe λ_0 tal que $x_\lambda \in V$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Así, $f(x_\lambda) > v + \varepsilon$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$.
Ahora, como $v_\lambda \to v$, existe λ'_0 tal que $v_\lambda \in (v - \varepsilon, v + \varepsilon)$ para todo $\lambda \geq \lambda'_0$.
Finalmente, escogiendo $\lambda \geq \lambda_0$ y $\lambda \geq \lambda'_0$ se tiene que

$$v_\lambda \geq f(x_\lambda) > v + \varepsilon > v_\lambda$$

lo cual es absurdo. □

Como consecuencia del lema anterior se tiene que si f es semi-continua superiormente y $f(x_\lambda) \geq v_\lambda$, entonces $f(x) \geq v$.

Proposición 1.3. *Si $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$ es brs, entonces el conjunto formado por equilibrios de Nash en estrategias puras es cerrado.*

[2]Si $f : X \to Y$ es contínua y Y es Hausdorff, entonces $Gr(f)$ es cerrado en $X \times Y$.

Prueba. Si x^* es equilibrio de Nash, $\underline{u}_i(x_i, x^*_{-i}) \leq u_i(x_i, x^*_{-i}) \leq u_i(x^*)$ para todo $x_i \in X_i$, por tanto, $\sup_{x_i \in X_i} \underline{u}_i(x_i, x^*_{-i}) \leq u_i(x^*)$.

Como el juego es brs, si $(x^*, v^*) \in \overline{\Gamma}$ y $\sup_{x_i \in X_i} \underline{u}_i(x_i, x^*_{-i}) \leq v^*_i$ para todo i, entonces x^* es equilibrio de Nash.

Así, el conjunto formado por equilibrios de Nash está dado por el conjunto

$$E(G) = \{x^* \in X : \sup_{x_i \in X_i} \underline{u}_i(x_i, x^*_{-i}) \leq v^*_i \text{ para todo } i,\ (x^*, v^*) \in \overline{\Gamma}\}$$

Sea $x^* \in \overline{E(G)}$, entonces existe una net (x^λ) en $E(G)$ tal que $x^\lambda \to x^*$.
Como $x^\lambda \in E(G)$, existe $v^\lambda \in \mathbb{R}^N$ tal que $(x^\lambda, v^\lambda) \in \overline{\Gamma}$, y

$$\sup_{x_i \in X_i} \underline{u}_i(x_i, x^\lambda_{-i}) \leq v^\lambda_i \text{ para todo } i$$

Supongamos que $\overline{\Gamma} \subseteq X \times \overline{B}(0, r)$ para algún r, entonces existe una subnet $(v^{\lambda_\gamma}) \to v^* \in \overline{B}(0, r)$.
Dado i y $x_i \in X_i$ se tiene $\underline{u}_i(x_i, x^{\lambda_\gamma}_{-i}) \leq v^{\lambda_\gamma}_i$. Por la semi-continuidad inferior de $\underline{u}_i(x_i, \cdot)$ y el Lema 1.2.1 tenemos

$$\underline{u}_i(x_i, x^*_{-i}) \leq v^*_i$$

Por tanto,

$$\sup_{x_i \in X_i} \underline{u}_i(x_i, x^*_{-i}) \leq v^*_i \text{ para todo } i$$

Además, debido a que $(x^{\lambda_\gamma}, v^{\lambda_\gamma}) \in \overline{\Gamma}$ y $(x^{\lambda_\gamma}, v^{\lambda_\gamma}) \to (x^*, v^*)$ se tiene que $(x^*, u^*) \in \overline{\overline{\Gamma}} = \overline{\Gamma}$. Así, $x^* \in E(G)$. □

Proposición 1.4. *Si $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$ es brs, entonces el límite de una sucesión de ε-equilibrios es equilibrio de Nash.*

Prueba. Para todo n, sea x^n un ε_n-equilibrio tal que $x^n \to x^*$ y $\varepsilon_n \to 0$. Dado i y $x_i \in X_i$,

$$\underline{u}_i(x_i, x_{-i}^n) \leq u_i(x_i, x_{-i}^n) \leq u_i(x^n) + \varepsilon_n$$

Debido a que u_i es acotada, podemos suponer que $v_i^* = \lim u_i(x^n)$. Por la semi-continuidad inferior de $\underline{u}_i(x_i, \cdot)$ y el Lema 1.2.1 se tiene que

$$\underline{u}_i(x_i, x_{-i}^*) \leq v_i^*$$

Luego, $\sup_{x_i \in X_i} \underline{u}_i(x_i, x_{-i}^*) \leq v_i^*$ con $(x^*, v^*) \in \overline{\Gamma}$. Por tanto, $x^* \in E(G)$[3].

□

Ahora indagaremos dos nuevos conceptos, que conjuntamente implican la propiedad de brs.

1.3. Payoff Security

Definición 1.3. Un juego $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$ es llamado *payoff secure* si para cada $x \in X$ y cada $\varepsilon > 0$, todo jugador i puede asegurar una utilidad $u_i(x) - \varepsilon$ en x.

Así, un juego es *payoff secure* si para cada estrategia $x \in X$, cada jugador posee una estrategia que prácticamente garantiza la utilidad que recibe en x, incluso si el resto de jugadores se desvían ligeramente de x.

Observación. *Si cada función de utilidad es semi-continua inferiormente en las estrategias puras del resto de jugadores, entonces el juego es payoff secure.*

[3] En espacios métricos, este resultado implica que el conjunto de equilibrios de Nash es cerrado, desde que uno puede escoger $\varepsilon_n = 1/n$. Sin embargo, en espacios topológicos esta implicancia no necesariamente ocurre debido a que el comportamiento de secuencias no es suficiente para establecer la cerradura de un conjunto.

Dado $x \in X$, la semi-continuidad inferior de $u_i(x_i, \cdot)$ implica que el conjunto $\{a_{-i} \in X_{-i} : u_i(x_i, a_{-i}) > u_i(x) - \varepsilon\}$ es una vecindad abierta de x_{-i}. Consecuentemente el juego es *payoff secure.*

En particular, todo juego continuo es *payoff secure.*

1.4. Recíprocamente Semi-continuidad Superior

Definición 1.4. Un juego $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$ es llamado *recíprocamente semicontinua superior* (rscs) si para cada $(x, v) \in \overline{\Gamma}$ con $u(x) \leq v$ se tiene que $u(x) = v$.

Esto equivale a decir que si $(x, v) \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$, entonces para algún jugador i se tiene $u_i(x) > v_i$.

Así, para verificar si un juego es rscs basta analizar los puntos del conjunto $\overline{\Gamma} \setminus \Gamma$, cuyas proyecciones sobre X forman parte del conjunto de puntos de discontinuidad del vector de funciones de utilidad u.

Proposición 1.5. *Si $\sum_{i=1}^N u_i$ es semi-continua superiormente, entonces el juego es rscs.*

Prueba. Sea $(x^*, v^*) \in \overline{\Gamma}$ tal que $u(x^*) \leq v^*$, entonces existe una net $(x^\lambda, v^\lambda) \in \Gamma$ tal que $(x^\lambda, v^\lambda) \to (x^*, v^*)$. Así, $\sum_{i=1}^N u_i(x^\lambda) = \sum_{i=1}^N v_i^\lambda$.
Por la semi-continuidad inferior de $\sum_{i=1}^N u_i$ y el Lema 1.2.1 se tiene que

$$\sum_{i=1}^N u_i(x^*) \geq \sum_{i=1}^N v_i^*$$

Además, por hipótesis se tiene que $u_i(x^*) \leq v_i^*$ para todo i. Luego, $u_i(x^*) = v_i^*$ para cada i.

$\square$

En particular, todo juego continuo es rscs.

Veamos que estas dos nuevas definiciones conjuntamente implican la propiedad de ser brs.

Proposición 1.6. *Si* $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$ *es rscs y payoff secure, entonces* G *es brs.*

Prueba. Sea $(x, v) \in \overline{\Gamma}$ tal que x no es equilibrio de Nash. Como G es rscs, $u_i(x) > v_i$ para algún i o $u_i(x) = v_i$ para todo i. En este último caso, como x no es equilibrio de Nash, existe i y $d_i \in X_i$ tal que $u_i(d_i, x_{-i}) > u_i(x) = v_i$. En cualquier caso se tiene que existe i y $d_i \in X_i$ tal que

$$u_i(d_i, x_{-i}) > v_i$$

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $u_i(d_i, x_{-i}) > v_i + \varepsilon$. Como G es *payoff secure*, el jugador i asegura una utilidad $u_i(d_i, x_{-i}) - \varepsilon$ en (d_i, x_{-i}). Por tanto, existe $x_i^* \in X_i$ y $V \in V_{x_{-i}}$ tal que

$$\inf_{x'_{-i} \in V} u_i(x_i^*, x'_{-i}) \geq u_i(d_i, x_{-i}) - \varepsilon$$

Luego,

$$\inf_{x'_{-i} \in V} u_i(x_i^*, x'_{-i}) > v_i$$

$\square$

1.5. Teorema de Reny

Consideremos la función $\underline{u} : X \times X \to \mathbb{R}^N$ definida por

$$\underline{u}(x, y) = (\underline{u}_1(x_1, y_{-1}), \ldots, \underline{u}_N(x_N, y_{-N}))$$

Para cada $x \in X$ asociamos el conjunto $E(x) = \{(y, v) \in \overline{\Gamma} : \underline{u}(x, y) \leq v\}$.

Lema 1.5.1. *El conjunto $E(x)$ es cerrado.*

Prueba. Sea $(y,v) \in \overline{E(x)} \subseteq \overline{\overline{\Gamma}} = \overline{\Gamma}$, entonces existe una net (y^λ, v^λ) en $E(x)$ tal que $(y^\lambda, v^\lambda) \to (y,v)$, de donde $\underline{u}(x, y^\lambda) \leq v^\lambda$ para todo λ.
Así, dado i se tiene $\underline{u}_i(x_i, y^\lambda_{-i}) \leq v^\lambda_i$ para todo λ, $(y^\lambda_{-i}) \to y_{-i}$ y $v^\lambda_i \to v_i$. Debido a la semi-continuidad de $\underline{u}_i(x_i, \cdot)$ y el Lema 1.2.1 se tiene que

$$\underline{u}_i(x_i, y_{-i}) \leq v_i \quad \text{para todo } i$$

Por tanto $\underline{u}(x,y) \leq v$, es decir, $(y,v) \in E(x)$. $\square$

Lema 1.5.2. *Sea Y un espacio métrico compacto y $f : Y \to \mathbb{R}$ una aplicación semi-continua inferiormente tal que $f(y^0) > \alpha$, entonces existe una función continua $\tilde{h} : Y \to \mathbb{R}$ y una vecindad U de y^0 tal que :*

i) $\tilde{h}(y) \leq f(y)$, *para todo* $y \in Y$.

ii) $\tilde{h}(y) > \alpha$, *para todo* $y \in U$.

Prueba. Sea $\alpha' \in (\alpha, f(y^0))$. Como f es semicontinua inferiormente, el conjunto $\{y \in Y : f(y) > \alpha'\}$ es una vecindad abierta de y^0, de donde existe $r > 0$ tal que $f(y) > \alpha'$ para todo $y \in B(y^0, r)$.

Definimos $h : \overline{B}(y^0, \frac{r}{2}) \cup B(y^0, r)^c \to \mathbb{R}$ mediante

$$h(y) = \begin{cases} \alpha' & , \text{si } y \in \overline{B}(y^0, \frac{r}{2}) \\ \min\limits_{y' \in Y} f(y') & , \text{si } y \in B(y^0, r)^c \end{cases}$$

Por el Teorema de Extensión de Tietze[4], existe $\tilde{h} : Y \to \mathbb{R}$ contínua que extiende a h.

[4]**Extensión de Tietze**: Sea X un espacio topológico normal y $A \subseteq X$ un subespacio cerrado. Si $f \in C(A, [a,b])$, entonces existe $F \in C(X, [a,b])$ tal que $F_{|A} = f$.

Si $y \in B(y^0, r)$, entonces $f(y) > \alpha'$. Luego, $\tilde{h}(y) \leq \text{máx}\{\alpha', \text{mín}_{y' \in Y} f(y')\} \leq f(y)$.

Si $y \in B(y^0, r)^c$, entonces $\tilde{h}(y) = h(y) = \text{mín}_{y' \in Y} f(y') \leq f(y)$.

Así, $\tilde{h}(y) \leq f(y)$, para todo $y \in Y$. Finalmente, haciendo $U = B(y^0, \frac{r}{2})$ se tiene $\tilde{h}(y) = h(y) = \alpha' > \alpha$ para todo $y \in U$. $\square$

Lema 1.5.3. *Sea Y un espacio métrico compacto y $f : Y \to \mathbb{R}$ una aplicación semi-continua inferiormente. Entonces existe una secuencia de funciones continuas $f_n : Y \to \mathbb{R}$ tal que para cada $y \in Y$:*

i) $f_n(y) \leq f(y)$ *para todo* n.

ii) $\forall (y_n)$ *en* Y *con* $(y_n) \to y$ *:* $\liminf f_n(y_n) \geq f(y)$.

Prueba. Sea $F = \{g \in C(Y) : g(y) \leq f(y), \forall y \in Y\}$, con $C(Y)$ dotado con la métrica del máximo. Como Y es compacto, el conjunto $C(Y)$ es separable, de donde F es separable.
Sea $\{g_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq F$ denso en F.
Definimos $f_n = \max\limits_{1 \leq k \leq n} g_k \in C(Y)$, de donde para cada $y \in Y$

$$f_n(y) \leq f(y)$$

Dado $y^0 \in Y$, sea $(y_n) \to y^0$. Supongamos que $\liminf f_n(y_n) < f(y^0)$, entonces existe una subsucesión $f_{n_k}(y_{n_k}) \to \liminf f_n(y_n) = \alpha$, con α finito pues $f_n \geq g_1$ y g_1 es acotada.

Así tenemos $\alpha + \varepsilon < f(y^0)$ para algún $\varepsilon > 0$. Por el Lema 1.5.2, existe $h \in C(Y)$ y una vecindad U de y^0 tal que

1. $h(y) \leq f(y)$, para todo $y \in Y$.

2. $h(y) > \alpha + \varepsilon$, para todo $y \in U$.

Como el conjunto $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso, existe k tal que $||h - g_k|| < \varepsilon/2$.

Dado $n_r \geq k$ con $y_{n_r} \in U$ tenemos

$$f_{n_r}(y_{n_r}) \geq g_k(y_{n_r}) \geq h(y_{n_r}) - \varepsilon/2 > \alpha + \varepsilon - \varepsilon/2 = \alpha + \varepsilon/2$$

Haciendo $r \to \infty$ se tiene $\alpha \geq \alpha + \varepsilon/2$, lo cual es absurdo. $\square$

Teorema 1.5.4 (Reny). *Si* $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$ *es compacto, cuasicóncavo y brs, entonces existe equilibrio de Nash.*

Demostración. Sea $F = \{x^1, \ldots, x^m\} \subseteq X$ y consideremos los conjuntos

$$X_i^0 = \{x_i^1, \ldots, x_i^m\} \subseteq X_i \text{ para cada } i = 1, \ldots, N$$

La topología relativa sobre $Co(X_i^0) \subseteq Span(X_i^0)$ inducida por la métrica Euclidiana sobre $Span(X_i^0)$ es mas fina que la topología inducida por el espacio vectorial topológico[5]. Denotemos por $\xrightarrow{d}$ a la convergencia con la métrica producto en $\prod_{i=1}^N Co(X_i^0)$.

Dado $d_i \in X_i$, debido a que $\underline{u}_i(d_i, \cdot) : \prod_{j \neq i} X_j \to \mathbb{R}$ es semi-continua inferiormente con la topología inicial, también lo será su restricción al espacio $\prod_{j \neq i} Co(X_j^0)$ con dicha topología relativa, y por tanto, también será semi-continua inferiormente con la topología inducida por la métrica.

Como cada $Co(X_j^0)$ es compacto con la métrica Euclidiana, el Lema 1.5.3 implica que existe una secuencia de funciones continuas

$$u_i^n(d_i, \cdot) : \prod_{j \neq i} Co(X_j^0) \to \mathbb{R}$$

[5]**Teorema de Tychonoff** (ver apéndice).

tales que para todo $x_{-i} \in \prod_{j \neq i} Co(X_j^0)$:

1. $u_i^n(d_i, x_{-i}) \leq \underline{u}_i(d_i, x_{-i})$ para todo n.

2. $\forall (x_{-i}^n) \to x_{-i} : \liminf u_i^n(d_i, x_{-i}^n) \geq \underline{u}_i(d_i, x_{-i})$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, construimos el juego G^n de N jugadores, espacios de estrategia $A_i = \Delta(X_i^0)$ (conjunto de medidas de probabilidad sobre X_i^0) y funciones de utilidad $v_i^n : \prod_{j=1}^N A_j \to \mathbb{R}$ definidas por

$$v_i^n(\mu) = \int_{X_i^0} u_i^n(\cdot\, , \overline{x}_{-i}) d\mu_i = \sum_{j=1}^m u_i^n(x_i^j, \overline{x}_{-i}) \mu_i(x_i^j)$$

donde $\overline{x}_j = \displaystyle\int_{X_j^0} id_{X_j^0}\ d\mu_j = \sum_{k=1}^m x_j^k \mu_j(x_j^k) \in Co(X_j^0)$ para $j = 1, \ldots, N$.

Por simplicidad, denotemos por $\mu_j(x_j^k) = \mu_j^k$.

Como cada v_i^n es contínua sobre $\prod_{j=1}^N A_j$ en la métrica Euclidiana, cada A_i es compacto y convexo, y el juego G^n es cuasicóncavo, entonces G^n posee equilibrio de Nash[6], digamos $\mu^n \in \prod_{j=1}^N A_j$.

Dado $x_i^j \in X_i^0$, sea $\mu_i = \delta_{x_i^j} \in A_i$. Debido a que μ^n es equilibrio de Nash se tiene

$$u_i^n(x_i^j, \overline{x}_{-i}^n) = v_i^n(\delta_{x_i^j}, \mu_{-i}^n) \leq v_i^n(\mu^n) \tag{1.1}$$

Sea $I = \{j \in \{1, \ldots, m\} : \mu_i^n(x_i^j) > 0\}$, entonces

$$v_i^n(\mu^n) = \sum_{j \in I} u_i^n(x_i^j, \overline{x}_{-i}^n) \mu_i^n(x_i^j) \leq \max_{j \in I} u_i^n(x_i^j, \overline{x}_{-i}^n) \tag{1.2}$$

[6]Resultado estándar sobre juegos continuos (Fudenberg y Tirole (1991), Teorema 1.2).

De las desigualdades 1.1 y 1.2 tenemos

$$v_i^n(\mu^n) = \max_{j\in I} u_i^n(x_i^j, \overline{x}_{-i}^n) \tag{1.3}$$

Si $u_i^n(x_i^r, \overline{x}_{-i}^n) \neq u_i^n(x_i^k, \overline{x}_{-i}^n)$ para algunos $r, k \in I$, entonces

$$v_i^n(\mu^n) = \sum_{j\in I} u_i^n(x_i^j, \overline{x}_{-i}^n)\mu_i^n(x_i^j) < \max_{j\in I} u_i^n(x_i^j, \overline{x}_{-i}^n)$$

lo que contradice la ecuación 1.3.

Así,

$$v_i^n(\mu^n) = u_i^n(x_i^j, \overline{x}_{-i}^n) \text{ para todo } j \in I \tag{1.4}$$

Por la condición 1. de las secuencias u_i^n y la ecuación 1.4 tenemos

$$v_i^n(\mu^n) \leq \underline{u}_i(x_i^j, \overline{x}_{-i}^n) \leq u_i(x_i^j, \overline{x}_{-i}^n)$$

para todo $j \in I$.

Del hecho que la función $u_i(\cdot, \overline{x}_{-i}^n)$ es cuasicóncava,

$$v_i^n(\mu^n) \leq u_i\left(\sum_{j\in I} x_i^j \mu_i^n(x_i^j), \overline{x}_{-i}^n\right) = u_i(\overline{x}^n) \tag{1.5}$$

Por tanto, de las desigualdades 1.1 y 1.5 se tiene

$$u_i^n(x_i^j, \overline{x}_{-i}^n) \leq u_i(\overline{x}^n) \text{ para todo } x_i^j \in X_i^0 \tag{1.6}$$

Como $(\overline{x}^n)$ pertenece al espacio métrico compacto $\prod_{j=1}^N Co(X_j^0)$, existe una subsecuencia $\overline{x}^{n_k} \xrightarrow{d} \overline{x} \in \prod_{j=1}^N Co(X_j^0)$, en consecuencia, $\overline{x}^{n_k} \to \overline{x}$ en la topología inicial.

Debido a que el vector de funciones de utilidad u es acotado, $u(\overline{x}^{n_k})$ posee una subsuceción convergente. Sin pérdida de generalidad supongamos que $u(\overline{x}^{n_k}) \to \overline{u}$.

Por la condición 2. de las secuencias u_i^n y la ecuación 1.6 tenemos

$$u_i(x_i^j, \overline{x}_{-i}) \leq \liminf u_i^{n_k}(x_i^j, \overline{x}_{-i}^{n_k}) \leq \lim u_i(\overline{x}^{n_k}) = \overline{u}_i$$

para todo $i = 1, \dots, N$ y para todo $x_i^j \in X_i^0$.

Luego, dado $j \in \{1, \dots, m\}$ se tiene

$$\underline{u}(x^j, \overline{x}) = \big(u_1(x_1^j, \overline{x}_{-1}), u_2(x_2^j, \overline{x}_{-2}), \dots, u_i(x_N^j, \overline{x}_{-N})\big) \leq (\overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_N)$$

Además, nótese que $(\overline{x}^{n_k}, u(\overline{x}^{n_k})) \in \Gamma$ con $\big(\overline{x}^{n_k}, u(\overline{x}^{n_k})\big) \to (\overline{x}, \overline{u}) \in \overline{\Gamma}$, de donde $(\overline{x}, \overline{u}) \in E(x^j)$. Por tanto, $(\overline{x}, \overline{u}) \in \bigcap_{j=1}^m E(x^j)$.

Como el conjunto $\overline{\Gamma}$ es compacto y la familia de subconjuntos cerrados $\{E(x)\}_{x \in X}$ posee la propiedad de intersección finita, se tiene que

$$\bigcap_{x \in X} E(x) \neq \emptyset$$

Sea $(y, v) \in \bigcap_{x \in X} E(x) \subseteq \overline{\Gamma}$, entonces para cualquier $x \in X$ se tiene

$$\underline{u}_i(x_i, y_{-i}) \leq v_i \quad \text{para todo } i = 1, \dots, N$$

de donde

$$\sup_{x_i \in X_i} \underline{u}_i(x_i, y_{-i}) \leq v_i \quad \text{para todo } i = 1, \dots, N$$

Así, $y \in E(G)$. □

Corolario 1.5.4.1. *Si $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$ es compacto, cuasicóncavo, rscs y payoff secure, entonces existe equilibrio de Nash.*

Ejemplo 1. Consideremos el juego de dos jugadores que no es de suma cero, con $X_i = [0, 1]$ y $u_i : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$u_i(x_i, x_{-i}) = \begin{cases} l_i(x_i) & , \text{ si } x_i < x_{-i} \\ \phi_i(x_i) & , \text{ si } x_i = x_{-i} \\ m_i(x_{-i}) & , \text{ si } x_i > x_{-i} \end{cases}$$

donde $l_i, m_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$ son continuas y l_i es no decreciente.

Si para cada $x \in X$ se tiene que $\phi_i(x) \in \mathrm{Co}(\{l_i(x), m_i(x)\})$, entonces el juego es compacto, cuasicóncavo y payoff secure, pero no necesariamente rscs.[7]

En efecto.

a. El juego es claramente compacto, pues $X_1 = X_2 = [0,1]$ y las funciones de utilidad u_i son acotadas debido a la continuidad de l_i y m_i.

b. Dado $x_{-i} \in [0,1]$, sean $a_i < b_i$ en $[0,1]$, $\lambda \in (0,1)$ y $c_i = \lambda a_i + (1-\lambda)b_i$.

   - Si $c_i < x_{-i}$, entonces $u_i(c_i, x_{-i}) = l_i(c_i) \geq l_i(a_i) = u_i(a_i, x_{-i})$
   - Si $c_i > x_{-i}$, entonces $u_i(c_i, x_{-i}) = m_i(x_{-i}) = u_i(b_i, x_{-i})$
   - Si $c_i = x_{-i}$, entonces

   $$u_i(c_i, x_{-i}) = \phi_i(c_i) = \gamma l_i(c_i) + (1-\gamma)m_i(c_i) \geq \gamma \underbrace{l_i(a_i)}_{u_i(a_i,x_{-i})} + (1-\gamma)\underbrace{m_i(x_{-i})}_{u_i(b_i,x_{-i})}$$

   En cualquier caso, $u_i(c_i, x_{-i}) \geq \text{mín}\{u_i(a_i, x_{-i}), u_i(b_i, x_{-i})\}$.
   Por tanto, el juego es cuasicóncavo.

c. Dado $x = (x_i, x_{-i}) \in [0,1]^2$ y $\varepsilon > 0$:

   - Si $x_i < x_{-i} : u_i(x) - \varepsilon < u_i(x) = l_i(x_i) = u_i(x_i, a), \forall a > x_i$.
   - Si $x_i > x_{-i} : u_i(x) - \varepsilon < u_i(x) = m_i(x_{-i})$. Por continuidad de m_i, existe $\delta > 0$ tal que $x_i > x_{-i} + \delta$ y $u_i(x) - \varepsilon < m_i(a) = u_i(x_i, a)$, para todo $a \in (x_{-i} - \delta, x_{-i} + \delta) \cap [0,1]$.
   - Si $x_i = x_{-i} = \overline{x} : u_i(x) = \phi_i(\overline{x}) = \lambda l_i(\overline{x}) + (1-\lambda)m_i(\overline{x}) \leq \text{máx}\{l_i(x_i), m_i(x_i)\}\}$
     Sea $\alpha^* = u_i(x) - \varepsilon = \phi_i(\overline{x}) - \varepsilon$.

     i) Si $\alpha^* < m_i(\overline{x})$: por continuidad de m_i, existe U vecindad abierta de $\overline{x}$ tal que $\alpha^* < m_i(x)$, $\forall x \in U$.

[7]Contrariamente a lo que afirma Reny(1999), este juego no es rscs. A. Bagh y A. Jofre (2006) hacen referencia a este juego.

En caso de que $\overline{x} < 1$, podemos suponer que $1 \notin U$, entonces $u_i(1, x) = m_i(x) > \alpha^*, \forall x \in U$.

Por otro lado, si $\overline{x} = 1$,

$$u_i(1, x) = \begin{cases} \phi_i(x) = \phi_i(\overline{x}) & , \quad x = 1 \\ m_i(x) & , \quad x < 1 \end{cases}$$

Por tanto, $u_i(1, x) > \alpha^*, \forall x \in U$.

ii) Si $\alpha^* < l_i(\overline{x})$: por continuidad de l_i, existe U vecindad abierta de $\overline{x}$ tal que $\alpha^* < l_i(x)$ $, \forall x \in U$.

En caso de que $\overline{x} > 0$, escojamos $\tilde{x} < \overline{x}$ con $\tilde{x} \in U$ y consideremos la vecindad abierta $V = U \cap (\tilde{x}, 1]$ de $\overline{x}$. Así, $u_i(\tilde{x}, x) = l_i(\tilde{x}) > \alpha^*$ $, \forall x \in V$.

Por otro lado, si $\overline{x} = 0$,

$$u_i(0, x) = \begin{cases} \phi_i(x) = \phi_i(\overline{x}) & , \quad x = 0 \\ l_i(0) = l_i(\overline{x}) & , \quad 0 < x \end{cases}$$

Por tanto, $u_i(0, x) > \alpha^*, \forall x \in U$.

En cualquier caso se tiene que el jugador i asegura la utilidad $\alpha^* = u_i(x) - \varepsilon$. Luego, el juego es payoff secure.

d. Consideremos las funciones de utilidad

$$u_i(x_i, x_{-i}) = \begin{cases} 2 & , \ x_i < x_{-i} \\ \phi(x_i) & , \ x_i = x_{-i} \\ -2 & , \ x_i > x_{-i} \end{cases}$$

donde

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x < 1/2 \\ 0 & , \quad 1/2 \leq x \end{cases}$$

Sean $x^n = (\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n})$, $x^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $\alpha^* = (1, 1)$.

Como $u(x^n) = (u_1(x^n), u_2(x^n)) = (1, 1)$, entonces $(x^n, u(x^n)) \to (x^*, \alpha^*) \in \overline{\Gamma}$. Sin embargo, $u_i(x^*) = 0 < 1 = \alpha_i^*$ para $i = 1, 2$. Por tanto, el juego no es rscs.

Ejemplo 2. Consideremos el juego entre dos oponentes con $X_1 = X_2 = [0, 1]$, y funciones de utilidad

$$u_i(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 + x_1 + x_2 & , \ x_1 x_2 > 0 \\ 0 & , \ \text{caso contrario} \end{cases}$$

Como $u_i(\cdot, x_{-i})$ es semi-continua inferiormente para todo x_{-i}, el juego es payoff secure. Consideremos $x^n = (1/n, 1/n)$, $\alpha^n = (1 + 2/n, 1 + 2/n)$, $x^* = (0, 0)$ y $\alpha = (1, 1)$. Es claro que $u(x^n) = \alpha^n$ y $u(x^*) \neq \alpha$, por tanto $(x^*, \alpha^*) \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$.
Sin embargo $u(x^*) = (0, 0) < \alpha^*$, de donde el juego no es r.s.c.s. Afortunadamente no es difícil mostrar que el juego es brs, más aún, x^* es equilibrio de Nash.

Capítulo 2

Equilibrio simétrico en estrategias puras

En este capítulo veremos que cuando un juego posee cierto tipo de simetría, las condiciones requeridas por el Teorema de Reny pueden ser debilitadas. Más aún, estas condiciones aseguran la existencia de equilibrios simétricos.

Supongamos que $X_1 = X_2 = \ldots = X_N$, y denotemos $X = X_i$ a diferencia de la notación usada en el capítulo anterior.

Definición 2.1. Decimos que el juego $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$ es *cuasi-simétrico* si

$$u_1(x, y, y, \ldots, y) = u_2(y, x, y, \ldots, y) = \ldots = u_N(y, \ldots, y, x)$$

para todo $x, y \in X$.

Dado un juego cuasi-simétrico $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$, definimos la función *utilidad diagonal* $v : X \to \mathbb{R}$, cuya gráfica es denotada por $T \subset X \times \mathbb{R}$, y está definida por

$$v(x) = u_1(x, \ldots, x) = \ldots = u_N(x, \ldots, x)$$

Definición 2.2. Decimos que el jugador i puede *asegurar la utilidad* $\alpha \in \mathbb{R}$ *a lo largo de la diagonal* en $(x, \ldots, x) \in X^N$ si existe $\overline{x} \in X$ y una vecindad abierta U de x tal que

$$\inf_{x' \in U} u_i(x', \ldots, \overline{x}, \ldots, x') \geq \alpha$$

En caso la desigualdad sea estrica, decimos que i asegura una utilidad *estrictamente mayor* que α a lo largo de la diagonal en $(x, \ldots, x)$.

Dado $x, y \in X$, definimos

$$\underline{u}_1(x, y) = \sup_{V \in V_y} \inf_{y' \in V} u_1(x, y', \ldots, y')$$

donde V_y denota el conjunto de vecindades abiertas de y.

Nótese que $\underline{u}_1$ define una función real pues u_1 es acotada, y que $\underline{u}_1(x, y)$ representa el máximo valor que el jugador 1 puede asegurar a lo largo de la diagonal en $(y, \ldots, y)$ si elige la estarategia x.

Así tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.1. *El jugador* 1 *puede asegurar una utilidad estrictamente mayor que* $\alpha \in \mathbb{R}$ *a lo largo de la diagonal en* $(y, \ldots, y)$ *si, y solo si* $\sup_{x \in X} \underline{u}_1(x, y) > \alpha$.

Prueba. Se sigue de la definición. $\square$

De manera similar que en el capítulo anterior, la función $\underline{u}_1(x, \cdot) : X \to \mathbb{R}$ es semi-continua inferiormente.

Definición 2.3. Un juego $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$ es llamado *diagonalmente cuasicóncavo* si X es convexo, y para todo jugador i, todo subconjunto $\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq X$ finito y todo $\overline{x} \in Co(\{x_1, \ldots, x_m\})$ se tiene

$$u_i(\overline{x}, \ldots, \overline{x}) \geq \min_{1 \leq k \leq m} u_i(\overline{x}, \ldots, x_i, \ldots, \overline{x})$$

Es claro que todo juego cuasicóncavo es diagonalmente cuasicóncavo.

Definición 2.4. El juego $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$ es llamado *diagonalmente better-reply secure* (dbrs) si para todo $(x, \alpha) \in \overline{T}$ tal que $(x, \dots, x)$ no es equilibrio de Nash, existe un jugador i que asegura una utilidad estrictamente mayor que α a lo largo de la diagonal en $(x, \dots, x)$.

Al igual que en el caso de juegos brs, busquemos condiciones más débiles que impliquen que el juego sea dbrs.

Definición 2.5. El juego $G = (X_i, u_i)$ es llamado *cuasi-diagonalmente payoff secure* si para cada $x, y \in X$ y cada $\varepsilon > 0$, cada jugador i puede asegurar la utilidad $u_i(x, \dots, y, \dots, x) - \varepsilon$ a lo largo de la diagonal en $(x, \dots, x)$.

Proposición 2.2. *Si $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$ es cuasi-simétrico, cuasi-diagonalmente payoff secure y la función utilidad diagonal v es semi-continua superiormente, entonces G es dbrs.*

Prueba. Sea $(x^*, \alpha^*) \in \overline{T}$ tal que $(x^*, \dots, x^*)$ no es equilibrio de Nash, entonces existe una net $(x_\lambda, \alpha_\lambda)$ en T que converge a (x^*, α^*). Así, $v(x_\lambda) = \alpha_\lambda$, y por la semicontinuidad de v tenemos $v(x^*) \geq \alpha^*$. Como $(x^*, \dots, x^*)$ no es equilibrio de Nash, existe $\overline{x} \in X$ tal que $u_1(\overline{x}, x^*, \dots, x^*) > u_1(x^*, \dots, x^*)$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $u_1(\overline{x}, x^*, \dots, x^*) - \varepsilon > u_1(x^*, \dots, x^*)$. Como G es cuasi-diagonalmente payoff secure, el jugador 1 asegura la utilidad $u_1(\overline{x}, x^*, \dots, x^*) - \varepsilon$ a lo largo de la diagonal en $(x^*, \dots, x^*)$. Por tanto, el jugador 1 asegura una utilidad estrictamente mayor que α^* a lo largo de la diagonal en $(x^*, \dots, x^*)$. $\square$

Para ver que estas condiciones son más débiles que las requeridas en el Teorema de Reny, veamos la siguiente proposición.

Proposición 2.3. *Si el juego G es cuasi-simétrico y rscs, entonces la función utilidad diagonal v es semi-continua superiormente.*

Prueba. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, vamos mostrar que el conjunto $A = \{x \in X : \alpha \leq v(x)\}$ es cerrado. Sea $x \in \overline{A}$, entonces existe una net (x_λ) en A tal que $x_\lambda \to x$. Podemos suponer que $v(x_\lambda) \to \beta$ pues v es acotada. Como $\alpha \leq v(x_\lambda)$ para todo λ, entonces $\alpha \leq \beta$. Denotando $x^\lambda = (x_\lambda, \ldots, x_\lambda), x^* = (x, \ldots, x)$ y $\gamma = (\beta, \ldots, \beta)$ tenemos que $(x^\lambda, u(x^\lambda)) \to (x^*, \gamma) \in \overline{\Gamma}$.
Si $x \notin A$, entonces $v(x) < \alpha \leq \beta$, y por tanto, $u(x^*) \neq \gamma$. Como G es rscs, existe i tal que $u_i(x^*) > \gamma_i$. Luego, $v(x) > \beta \geq \alpha > v(x)$, lo cual es absurdo. Por tanto, $x \in A$. □

Lema 2.0.1. *Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones tales que f es semi-continua inferiormente y g es semi-continua superiormente. Si (x_λ) es una net en X tal que $x_\lambda \to x$ y $f(x_\lambda) \leq g(x_\lambda)$ para todo λ, entonces $f(x) \leq g(x)$.*

Prueba. Supongamos que $f(x) > g(x)$. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) > \alpha > g(x)$. Por las semicontinuidades de f y g se tiene que el conjunto

$$V = \{a \in X : f(a) > \alpha\} \cap \{a \in X : g(a) < \alpha\}$$

es una vecindad abierta de x. Así, existe λ_0 tal que $x_\lambda \in V$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Luego, $f(x_\lambda) \leq g(x_\lambda) < \alpha < f(x_\lambda)$ para $\lambda \geq \lambda_0$, lo cual es absurdo.

□

Consideremos la función $\overline{u}_1 : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\overline{u}_1(y) = \inf_{V \in V_y} \sup_{y' \in V} v(y') = \inf_{V \in V_y} \sup_{y' \in V} u_1(y', \ldots, y')$$

Se prueba, de forma similar que para la función $\underline{u}_1(x, \cdot)$, que $\overline{u}_1$ es semicontinua superiormente.

Dado $x \in X$, definimos el conjunto

$$E(x) = \{y \in X : \underline{u}_1(x, y) \leq \overline{u}_1(y)\}$$

Lema 2.0.2. *El conjunto $E(x)$ es cerrado*

Demostración. Sea $y \in \overline{E(x)}$, entonces existe una net (y_λ) en $E(x)$ tal que $y_\lambda \to y$. Por las semicontinuidades de $\underline{u}_1(x, \cdot)$ y $\overline{u}_1(\cdot)$, el Lema 2.0.1 implica que $\underline{u}_1(x, y) \leq \overline{u}_1(y)$. Por tanto, $y \in E(x)$. $\square$

Teorema 2.0.3. *Si $G = (X_i, u_i)$ es cuasi-simétrico, compacto, diagonalmente cuasicóncavo y dbrs, entonces existe equilibrio de Nash simétrico.*

Demostración. Al igual que en la prueba del Teorema de Reny, si mostramos que $\bigcap_{x \in X} E(x) \neq \emptyset$, entonces existe $x^* \in X$ tal que $\sup_{x \in X} \underline{u}_1(x, x^*) \leq \overline{u}_1(x^*)$, y como $(x^*, \overline{u}_1(x^*)) \in \overline{T}$, la proposición 2.1 y la condición de dbrs implican que $(x^*, \ldots, x^*)$ es equilibrio de Nash.

Como X es compacto y $\{E(x)\}$ es una familia de conjuntos cerrados, veamos que tal familia posee la propiedad de la intersección finita.

Sean $x_1, \ldots, x_n \in X$. Por el teorema KKM[1] basta probar que

$$\text{Co}(\{x^1, \ldots, x^n\}) \subseteq E(x^1) \cup \ldots \cup E(x^n)$$

Supongamos que existe $\overline{x} \in \text{Co}(\{x^1, \ldots, x^n\})$ tal que $\overline{x} \notin E(x^1) \cup \ldots \cup E(x^n)$, entonces $\underline{u}_1(x^k, \overline{x}) > \overline{u}_1(\overline{x})$ para cada $k = 1, \ldots, n$. Luego,

$$u_1(x^k, \overline{x}, \ldots, \overline{x}) \geq \underline{u}_1(x^k, \overline{x}) > \overline{u}_1(\overline{x}) \geq v(\overline{x}) = u_1(\overline{x}, \ldots, \overline{x})$$

lo que contradice el hecho que G es diagonalmente cuasicóncavo. $\square$

[1] Ver apéndice.

Capítulo 3

Estrategias mixtas

Como vimos en los capítulos anteriores, una condición necesaria para analizar si el juego posee equilibrios es que los espacios de estrategias sean convexos, y una forma de solucionar este problema es introduciendo el concepto de *estrategia mixta*. Con esto nos referimos a que cada jugador puede aleatorizar sobre las estrategias en su espacio de estrategias.

3.1. Definición y propiedades

En esta capítulo asumimos que los espacios ambiente son simplemente espacios topológicos *Hausdorff*. En este caso, $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$ es llamado *compacto Hausdorff* si cada X_i es compacto.

Tomemos en cuenta lo siguiente:

i) Cada conjunto X_i tiene asociado el σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_i$, y $\mathcal{A} = \otimes_{i=1}^N \mathcal{B}_i$ denota el σ-álgebra producto sobre $X = \prod_{i=1}^N X_i$.

ii) Todas las funciones de utilidad $u_i : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ son medibles.

Denotemos por $M_i = M(X_i)$ al conjunto de medidas regulares de probabilidad (de Borel) sobre X_i, y sea $M = \prod_{i=1}^{N} M_i$.

Dado un *perfil de estrategias mixtas* $\mu = (\mu_i)_{i=1}^{N} \in M$, identificamos μ con la medida producto $\otimes_{i=1}^{N}\mu_i$, por tanto, podemos considerar M contenido en el conjunto de medidas regulares de probabilidad sobre X.

Como las funciones de utilidad son acotadas, existe $\displaystyle\int_X u_i d\mu$ para cada $i = 1, \ldots, N$ y cada $\mu \in M$.[1]
Definimos $U_i(\mu) := \displaystyle\int_X u_i d\mu$ para cada $i = 1, \ldots, N$ y cada $\mu \in M$.

El juego estratégico

$$\overline{G} = \left(M_i, U_i\right)_{i=1}^{N}$$

es llamado ***extensión mixta*** de G.

En lo que sigue escribiremos u_i en lugar de U_i, distinguiendose cuando se trate de extrategias puras o mixtas.

Como cada conjunto M_i es compacto con la topología débil*[2], la extensión mixta $\overline{G} = (M_i, u_i)_{i=1}^{N}$ resulta un juego estratégico compacto. Un hecho importante de tratar con la extensión mixta es que este juego compacto siempre es cuasicóncavo, independientemente de si el juego inicial lo es.

Como consecuencia inmediata del Teorema de Reny tenemos:

[1] El recíproco también es cierto, es decir, si estas integrales existen para cada i y cada $\mu \in M$, entonces las funciones de utilidad son acotadas: *Haller-1997*.

[2] Ver apéndice.

Corolario 3.1.0.1. *Sea $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$ un juego compacto Hausdorff. Si $\overline{G}$ es brs entonces $\overline{G}$ posee equilibrio de Nash, es decir, G posee equilibrio de Nash en estrategias mixtas.*

Prueba. Se sigue del hecho que $\overline{G}$ es un juego cuasicóncavo. $\square$

Teorema 3.1.1 (Dowker)**.** *Sea Y compacto Hausdorff. Supongamos que $g, f : Y \to \mathbb{R}$ son funciones tales que $f < g$ con f semi-continua superior y g semi-continua inferior. Entonces existe $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ continua tal que $f < \varphi < g$.*

Demostración. Para cada racional r definimos

$$U_r = \{y \in Y : f(y) < r\} \cap \{y \in Y : r < g(y)\}$$

Debido a las semicontinuidades de f y g se tiene que cada U_r es abierto.
Dado $y \in Y$, existe r_y racional tal que $f(y) < r_y < g(y)$, y por tanto $y \in U_{r_y}$. Así, la familia $\{U_r\}$ es un cubrimiento abierto de Y.
Sea $\{h_{r_i}\}_{i=1}^n$ la partición de la unidad subordinada del subcubrimiento $\{U_{r_i}\}_{i=1}^n$.
Definimos la función $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ mediante $\varphi(y) = \sum_{i=1}^n r_i h_{r_i}(y)$.
Como $\sum h_{r_i} = 1$, es claro que $Y = \bigcup \operatorname{supp}(h_{r_i})$. Dado $y \in Y$, consideramos el conjunto no vacío $A_y \subset \{1, \ldots, n\}$ de todos los índices con $y \in \operatorname{supp}(h_{r_i}) \subset U_{r_i}$ para $i \in A_y$. Entonces

$$f(y) = f(y) \sum_{i \in A_y} h_{r_i}(y) < \sum_{i \in A_y} r_i h_{r_i}(y) = \varphi(y) < \sum_{i \in A_y} g(y) h_{r_i}(y) = g(y)$$

$\square$

El siguiente resultado nos permite mostrar que la extensión mixta hereda la propiedad de ser rscs en ciertos casos.

Lema 3.1.2. *Si X es compacto Hausdorff y $f : X \to \mathbb{R}$ es semi-continua superior, entonces $F : M \to \mathbb{R}$ definida por $F(\mu) = \displaystyle\int_X f d\mu$ es semi-continua superior, donde M denota el conjunto de medidas regulares de probabilidad sobre X.*

Prueba. Supongamos que para cada $\mu \in M$, existe una secuencia $\{f_n\}$ contenida en el conjunto $C_f = \{g \in C(X) : g \geq f\}$ tal que

$$\int_X f d\mu = \lim \int_X f_n d\mu$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe f_n tal que $\displaystyle\int_X f_n d\mu < \int_X f d\mu + \varepsilon$. Además, para cualquier $g \in C_f$ se tiene $\displaystyle\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.
Luego,

$$F(\mu) = \int_X f d\mu = \inf_{g \in C_f} \int_X g d\mu$$

y, por tanto, F es semi-continua superiormente al ser el ínfimo de una familia de funciones continuas.

Sea $\mu \in M$. Por la semi-continuidad de f se tiene que también es medible. Dado n, por el Teorema de Lusin[3], existe $X_n \subseteq X$ compacto tal que $\mu(X \setminus X_n) < 1/n$ y $f_{|X_n}$ continua. Así, $\mu(X_n) > 1 - 1/n$.

Nótese que f posee máximo desde que X es compacto y f es semi-continua superiormente.
Supongamos que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in X$, con $x_0 \in X$.

Para cada n definimos $g_n : X \to \mathbb{R}$ mediante

$$g_n(x) = \begin{cases} f(x) + 1/n & , \ x \in \bigcup_{i=1}^n X_i \\ 1 + f(x_0) & , \ \text{caso contrario} \end{cases}$$

Es claro que $g_n(x) > g_{n+1}(x)$ para todo $x \in \bigcup_{i=1}^n X_i$, y si $x \in X_{n+1} - \bigcup_{i=1}^n X_i$, entonces $g_n(x) = 1 + f(x_0) > f(x) + 1/(n+1) = g_{n+1}(x)$. Luego, $g_n \geq g_{n+1} > f$ para todo n, y $\lim g_n(x) = f(x)$ para todo $x \in \bigcup_{i=1}^\infty X_i$.

[3] Ver apéndice.

Como $1 - 1/n < \mu(X_n) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i) \leq 1$, se tiene que $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i) = 1$ y, por tanto, $g_n \to f$ a.e. De las desigualdades

$$0 \leq 1 + f(x_0) - g_1 \leq \ldots \leq 1 + f(x_0) - g_n \leq \ldots < 1 + f(x_0) - f$$

el Teorema de Convergencia Monótona implica que

$$\int_X f d\mu = \lim \int_X g_n d\mu \tag{3.1}$$

Como cada g_n es semi-continua inferiormente y f es semi-continua superiormente, por el Teorema de Dowker se tiene que existe $f_n \in C(X)$ tal que $g_n > f_n > f$. Así,

$$\int_X g_n d\mu > \int_X f_n d\mu > \int_X f d\mu$$

y por la ecuación 3.1 se concluye que

$$\int_X f d\mu = \lim \int_X f_n d\mu$$

□

Consecuentemente, si $g : X \to \mathbb{R}$ es semi-continua inferiormente, entonces $G : M \to \mathbb{R}$ definida por $G(\mu) = \displaystyle\int_X g d\mu$ es semi-continua inferiormente.

Corolario 3.1.2.1. *Si la función de utilidad u_i es semi-continua superiormente (resp. inferiormente) sobre el espacio de estrategias puras, entonces la función u_i es semi-continua superiormente (resp. inferiormente) sobre el espacio de estrategias mixtas.*

Prueba. Se sigue del lema anterior, pues $u_i(\mu) = \displaystyle\int_X u_i d\mu$ □

En particular, si $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} u_i(x)$ es semi-continua superiormente, entonces $\overline{G}$ es rscs.

El siguiente ejemplo considera el modelo de equilibrio general de intercambio puro.

Ejemplo 3. Hay n consumidores, cada uno de los cuales puede consumir m bienes. Cada consumidor i es caracterizado por una función de utilidad $u_i : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}_+$, la cual es continua, estrictamente creciente y cuasicóncava, y un vector de dotación estrictamente positivo $e_i \in \mathbb{R}^m_+$.

Un *equilibrio competitivo* es un par $(p^*, x^*) \in \mathbb{R}^m_+ \times (\mathbb{R}^m_+)^n$ tal que

a) x_i^* es solución de

$$\begin{aligned} \max_{x_i \in \mathbb{R}^m_+} \quad & u_i(x_i) \\ \text{s.a} \quad & p^* \cdot x_i \leq p^* \cdot e_i \end{aligned}$$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{i=1}^{n} e_i = e$

La existencia de un equilibrio competitivo será establecido vía la existencia de equilibrios de Nash de un juego cuyos participantes son un subastador (jugador 0) y los n consumidores.

Sea $G = (X_i, w_i)_{i=0}^n$ el juego estratégico de $n+1$ jugadores, donde

$$X_0 = \{p \in \mathbb{R}^m_+ : \sum_{j=1}^{m} p_j = 1\}$$

$$X_i = \{x_i \in \mathbb{R}^m_+ : x_i \leq e + \mathbf{1}\} \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

$$w_0(p, x_1, \ldots, x_n) = p \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - e_i)$$

Para $1 \leq i \leq n$:

$$w_i(p, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} u_i(x_i) & , \text{ si } p \cdot x_i \leq p \cdot e_i \\ -1 & , \text{ caso contrario} \end{cases}$$

Denotemos $X = \prod_{i=1}^n X_i$ y $X_{-i} = \displaystyle\prod_{j \geq 1, j \neq i} X_j$

Veamos que si $(p^*, x^*) \in X_0 \times X$ es equilibrio de Nash, entonces tal par es equilibrio competitivo.

Sea $1 \leq i \leq n$, entonces $w_i(p^*, x_i, x_{-i}^*) \leq w_i(p^*, x^*)$ para todo $x_i \in X_i$. Como $0 \in X_i$,

$$0 \leq u_i(0) = w_i(p^*, 0, x_{-i}^*) \leq w_i(p^*, x^*)$$

de donde $p^* \cdot x_i^* \leq p^* \cdot e_i$ y $w_i(p^*, x^*) = u_i(x_i^*)$.

Si $x_i \in X_i$ cumple $p^* \cdot x_i \leq p^* \cdot e_i$, entonces

$$u_i(x_i) = w_i(p^*, x_i, x_{-i}^*) \leq w_i(p^*, x^*) = u_i(x_i^*)$$

Además, $p^* \cdot x_i^* = p^* \cdot e_i$ desde que cada función u_i es estrictamente creciente, pues caso contrario el punto x_i^* no sería solución del problema de maximización.

Como

$$w_0(p, x^*) \leq w_0(p^*, x^*) = p^* \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i^* - e_i) = 0$$

para todo $p \in X_0$, entonces $[\sum_{i=1}^{n}(x_i^* - e_i)]_j \leq 0$ para todo $j = 1, \ldots, m$. Por tanto, $\sum_{i=1}^{n}(x_i^* - e_i) = 0$.

Ahora veamos que G posee equilibrio de Nash.

a) Es claro que cada X_i es compacto y cada función w_i es acotada, por tanto G es compacto.

b) Dado $x \in \prod_{i=1}^{n} X_i$, $p_1, p_2 \in X_0$ y $\lambda \in [0, 1]$:

$$w_0(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2, x) = \lambda w_0(p_1, x) + (1-\lambda)w_0(p_2, x) \geq \text{mín}\{w_0(p_1, x), w_0(p_2, x)\}$$

Dado $p \in X_0$ y $x_{-i} \in \prod_{j \neq i} X_i$, $x_i, \overline{x}_i \in X_i$ y $\lambda \in [0, 1]$, sea $z_i = \lambda x_i + (1-\lambda)\overline{x}_i$. Si $w_i(p, x_i, x_{-i})$ o $w_i(p, \overline{x}_i, x_{-i})$ es -1, es claro que

$$w_i(p, z_i, x_{-i}) \geq -1 = \text{mín}\{w_i(p, x_i, x_{-i}), w_i(p, \overline{x}_i, x_{-i})\}$$

Supongamos que $w_i(p, x_i, x_{-i}) = u_i(x_i)$ y $w_i(p, \overline{x}_i, x_{-i}) = u_i(\overline{x}_i)$, entonces $p \cdot x_i \leq p \cdot e_i$ y $p \cdot \overline{x}_i \leq p \cdot e_i$, de donde $p \cdot z_i \leq p \cdot e_i$. Por la cuasiconcavidad de u_i tenemos

$$w_i(p, z_i, x_{-i}) = u_i(z_i) \geq \text{mín}\{u_i(x_i), u_i(\overline{x}_i)\}$$

Por tanto, G es cuasicóncavo.

c) Como w_0 es continua, entonces w_0 es s.c.s.

Dado $1 \leq i \leq n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, sea $\mathcal{A} = \{(p,x) \in X_0 \times X : w_i(p,x) < \alpha\}$.

Sea $(p,x) \in \mathcal{A}$.

- Si $p{\cdot}x_i > p{\cdot}e_i$, entonces $w_i(p,x) = -1$. Como la función $(q, x_i') \mapsto q \cdot (x_i' - e_i)$ es continua, existen vecindades abiertas $U_0 \subset X_0, U_i \subset X_i$ de p y x_i respectivamente tales que $q \cdot x_i' > q \cdot e_i \ \forall (q, x_i') \in U_0 \times U_i$.

  Es claro que $\prod_{j=0}^{n} U_j$ es una vecindad abierta de (p,x), donde $U_j = X_j$ para $j \neq i, 0$. Si $(q,x') \in \prod U_j$, se tiene que $q{\cdot}x_i' > q{\cdot}e_i$ y por tanto $w_0(q,x') = -1$. Luego, $\prod U_j \subset \mathcal{A}$.

- Si $p{\cdot}x_i \leq p{\cdot}e_i$, entonces$w_i(p,x) = u_i(x_i) < \alpha$. Por la continuidad de u_i, existe U_i vecindad abierta de x_i tal que $u_i(x_i') < \alpha \ \forall x_i' \in U$. Sea $U_j = X_j$ para $j \neq i$, entonces $\prod U_j$ es una vecindad abierta de (p,x). Dado $(q,x') \in \prod U_j$,

$$w_0(q,x') = \begin{cases} u_i(x_i') & , \text{ si } q \cdot x_i' \leq q \cdot e_i \\ -1 & , \text{ caso contrario} \end{cases}$$

  En cualquier caso, $w_0(q,x') < \alpha$, y por tanto $\prod U_j \subseteq \mathcal{A}$.

  Luego, w_i es s.c.s.

Así, el juego G es rscs.

d) Sean $(p,x) \in X_0 \times X$ y $\varepsilon > 0$. Como w_0 es continua, entonces $w_0(p,\cdot)$ es continua, y por tanto semi-continua inferiormente. Así, el subastador asegura una utilidad $w_0(p,x) - \varepsilon$ en (p,x). Dado $1 \leq i \leq n$:

- Si $p \cdot x_i > p \cdot e_i$, entonces $w_i(p,x) - \varepsilon = -1 - \varepsilon < w_i(q, x_i, x_{-i}') \ \ \forall (q, x_{-i}') \in X_0 \times X_{-i}$.

- Si $p \cdot x_i \leq p \cdot e_i$, entonces $w_i(p,x) = u_i(x_i)$. Por continuidad de u_i, existe U_i vecindad abierta de x_i tal que $u_i(x_i) - \varepsilon < u_i(x_i') \ \forall x_i' \in U_i$.

En caso de que $p \cdot x_i < p \cdot e_i$, existe una vecindad abierta U_0 de p tal que $q \cdot x_i < q \cdot e_i$ para todo $q \in U_0$. Luego $w_i(q, x_i, x'_{-i}) = u_i(x_i)$ para todo $(q, x'_{-i}) \in U_0 \times X_{-i}$.

Supongamos que $p \cdot x_i = p \cdot e_i > 0$, entonces existe $\overline{x}_i \in U_i$ tal que $p \cdot x_i > p \cdot \overline{x}_i$. Luego, existe U_0 vecindad de p tal que $q \cdot e_i > q \cdot \overline{x}_i$ para todo $q \in U_0$. Por tanto,

$$w_i(q, \overline{x}_i, x'_{-i}) = u_i(\overline{x}_i) > u_i(x_i) - \epsilon$$

Así, el juego es *payoff secure.*

El siguiente ejemplo muestra que la extensión mixta de un juego *payoff secure* o brs no necesariamente preserva esta propiedad.

Ejemplo 4. Consideremos el juego G entre dos jugadores, con $X_1 = X_2 = [0, 1]$ y $u_1, u_2 : X \to \mathbb{R}$ definidas

$$u_1(x_1, x_2) = \begin{cases} -1 & , \text{ si } x_1 < x_2 < x_1 + \frac{1}{2} \\ 0 & , \text{ si } x_1 = x_2 \text{ o } x_2 = x_1 + \frac{1}{2} \\ 1 & , \text{ caso contrario} \end{cases}$$

y $u_2(x_1, x_2) = -u_1(x_1, x_2)$.

Veamos que G es *payoff secure.*

a) Jugador 1 : si $u_1(x_1, x_2) = -1$, es claro que el jugador 2 puede desviarse en la vecindad $(x_1, x_1 + \frac{1}{2})$ de x_2. Si $u_1(x_1, x_2) = 1$, como el conjunto en el que esto sucede es abierto, el jugador 2 puede desviarse en una vecindad de tal forma que $u_1(x_1, x'_2) = 1$. Supongamos que $u_1(x_1, x_2) = 0$.

Si $x_1 = x_2$, entonces $u_1(1, x'_2) \geq 0$ para todo x'_2.

Si $x_2 = x_1 + \frac{1}{2}$,

- en caso de que $x_1 = 0$, $u_1(1, x'_2) = 1$ para todo x'_2.

- en caso de que $x_1 > 0$, $x_2 = x_1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$, y por tanto si $x_2' \in (\frac{1}{2}, 1]$ tenemos que $u_1(0, x_2') \geq 0$.

En cualquier caso, existe $\overline{x}_1$ y una vecindad abierta U de x_2 tal que $u_1(\overline{x}_1, x_2') \geq 0$ para todo $x_2' \in U$.

b) Jugador 2 : como $u_2(x_1, x_2) = -u_1(x_1, x_2)$, basta considerar el caso en que $u_2(x_1, x_2) = u_1(x_1, x_2) = 0$.

- Si $0 \leq x_1 \leq \frac{3}{4}$, hacemos $\overline{x}_2 = x_1 + \frac{1}{4}$ y por tanto si $x_1' \in (x_1 - \frac{1}{8}, x_1 + \frac{1}{8}) \cap [0, 1]$ tenemos que $u_1(x_1', \overline{x}_2) = -1$.
- Si $x_1 > \frac{3}{4}$, sea $U \subset (\frac{3}{4}, 1]$ vecindad abierta de x_1, entonces para $x_1' \in U$ se tiene

$$u_1(x_1', 1) = \begin{cases} -1 & , \text{ si } x_1' < 1 \\ 0 & , \text{ si } x_1' = 1 \end{cases}$$

En cualquier caso, existe $\overline{x}_2$ y una vecindad abierta U de x_2 tal que $-u_2(x_1', \overline{x}_2) = u_1(x_1', \overline{x}_2) \leq 0$.

Por tanto el juego es *payoff secure*.

Ahora veamos que la extensión $\overline{G}$ del juego no es *payoff secure*.
Sea $\mu = (\delta_0, \frac{1}{3}\delta_{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}\delta_1) \in M(X_1) \times M(X_2)$ y $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$, entonces

$$u_1(\mu) = \frac{1}{3}u_1(0, \frac{1}{2}) + \frac{2}{3}u_1(0, 1) = \frac{2}{3}$$

Consideremos la secuencia $\mu_2^k = \frac{1}{3}\delta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}} + \frac{2}{3}\delta_1 \in M(X_2)$. Como $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}) \to \frac{1}{2}$, se sigue que $\delta_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}} \xrightarrow{w^*} \delta_{\frac{1}{2}}$, de donde $\mu_2^k \xrightarrow{w^*} \mu_2$.

Dado $\nu \in M(X_1)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
u_1(\nu,\mu_2^k) = & \int_{X_2} u_1(\nu,y)d\mu_2^k(y) \\
= & \frac{1}{3}u_1(\nu,\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2k}) \ + \ \frac{2}{3}u_1(\nu,1) \\
= & \frac{1}{3}\int_{X_1} u_1(x,\frac{1}{2}-\frac{1}{2k})d\nu \ + \ \frac{2}{3}\int_{X_1} u_1(x,1)d\nu \\
= & \frac{1}{3}\left(\int_{[0,\frac{1}{2}-\frac{1}{2k})} u_1(x,\frac{1}{2}-\frac{1}{2k})d\nu \ + \ \int_{[\frac{1}{2}-\frac{1}{2k},1]} u_1(x,\frac{1}{2}-\frac{1}{2k})d\nu\right) \\
& + \frac{2}{3}\left(\int_{[0,\frac{1}{2})} u_1(x,1)d\nu \ + \ \int_{[\frac{1}{2},1]} u_1(x,1)d\nu\right) \\
= & \frac{1}{3}\left(-\nu\left([0,\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2k})\right)+\nu\left((\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2k},1]\right)\ \right) \\
& + \frac{2}{3}\left(\ \nu\left([0,\tfrac{1}{2})\right)-\nu\left((\tfrac{1}{2},1)\right)\ \right)
\end{aligned}$$

Si $A_k = [0,\frac{1}{2}-\frac{1}{2k})$ y $B_k = (\frac{1}{2}-\frac{1}{2k},1]$, es claro que $A_k \subset A_{k+1}$ y $B_k \supset B_{k+1}$ para todo k.

Luego,

$$\begin{aligned}
\lim u_1(\nu,\mu_2^k) = & \frac{1}{3}\left(-\nu\left(\cup A_k\right)+\nu\left(\cap B_k\right)\ \right) \ + \ \frac{2}{3}\left(\ \nu\left([0,\tfrac{1}{2})\right)-\nu\left((\tfrac{1}{2},1)\right)\ \right) \\
= & \frac{1}{3}\left(-\nu\left([0,\tfrac{1}{2})\right)+\nu\left([\tfrac{1}{2},1]\right)\ \right) \ + \ \frac{2}{3}\left(\ \nu\left([0,\tfrac{1}{2})\right)-\nu\left((\tfrac{1}{2},1)\right)\ \right) \\
= & \frac{1}{3}\nu\left([0,\tfrac{1}{2})\right) \ - \ \frac{1}{3}\nu\left((\tfrac{1}{2},1)\right) \ + \ \frac{1}{3}\nu\left(\{\tfrac{1}{2},1\}\right) \\
\leq & \frac{1}{3} < \ u_1(\mu)-\varepsilon
\end{aligned}$$

Así, $u_1(\nu, \mu_2^k) < u_1(\mu) - \varepsilon$ para todo k suficientemente grande.
Sea U vecindad abierta de μ_2 en $M(X_2)$. Como $\mu_2^k \xrightarrow{w^*} \mu_2$, se tiene que $u_1(\nu, \mu_2^k) < u_1(\mu) - \varepsilon$ con $\mu_2^k \in U$ y k suficientemente grande . Por tanto, el jugador 1 no asegura una utilidad $u_1(\mu) - \varepsilon$ en μ.
Así, la extensión mixta no es *payoff secure*. De hecho, este es un ejemplo en el que el juego no posee equilibrio de Nash en estrategias mixtas[4], por tanto, la extensión del juego brs no es brs.

3.2. Uniformemente payoff secure

El ejemplo anterior muestra la necesidad de requerir una condición mas fuerte que solamente *payoff secure* para garantizar que la extensión mixta también lo sea. Es así que Paulo Kingler Monteiro y Frank H. Page Jr. (2007) introducen el concepto de *uniformemente payoff secure.*

Definición 3.1. Decimos que un juego $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$ es *uniformemente payoff secure* si para cada jugador i, $x_i \in X_i$ y $\varepsilon > 0$, existe $\overline{x}_i \in X_i$ tal que para todo $y_{-i} \in X_{-i}$ existe una vecindad V de y_{-i} tal que

$$u_i(\overline{x}_i, y'_{-i}) > u_i(x_i, y_{-i}) - \varepsilon \quad \forall y'_{-i} \in V$$

Es claro que si G es *uniformemente payoff secure*, entonces también es *payoff secure.*

Proposición 3.1. *Si G es un juego tal que $u_i(x_i, \cdot)$ es semi-continua inferiormente para cada x_i y cada i, entonces G es uniformemente payoff secure.*

Prueba. Dado i, $x_i \in X_i$ y $\varepsilon > 0$, hacemos simplemente $\overline{x}_i = x_i$. Dado $y_{-i} \in X_{-i}$, la semi-continuidad inferior de $u_i(x_i, \cdot)$ nos da una vecindad V de y_{-i} tal que $u_i(x_i, y'_{-i}) > u_i(x_i, y_{-i}) - \varepsilon$ para todo $y'_{-i} \in V$. □

[4]Sion M., Wolfe P.(1957).

El siguiente teorema muestra que esta nueva condición garantiza que la extensión mixta sea payoff secure.

Teorema 3.2.1. *Sea $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$ un juego compacto. Si G es uniformemente payoff secure, entonces $\overline{G}$ es payoff secure.*

Demostración. Sea i, $m \in M$ y $\varepsilon > 0$. Supongamos que $u_i(x_i, m_{-i}) < u_i(m)$ para todo $x_i \in X_i$, entonces

$$\int_{X_i} u_i(x_i, m_{-i}) dm_i(x_i) < \int_{X_i} u_i(m) dm_i(x_i) = u_i(m)$$

Es decir,

$$u_i(m) = \int_{X_{-i}} \left[\int_{X_i} u_i(x_i, x_{-i}) dm_i(x_i) \right] dm_{-i}(x_{-i}) < u_i(m)$$

lo cual es absurdo. Luego, existe $\tilde{x}_i \in X_i$ tal que $u_i(\tilde{x}_i, m_{-i}) \geq u_i(m)$. Desde que G es uniformemente payoff secure, existe $\overline{x}_i \in X_i$ tal que para cada $y_{-i} \in X_{-i}$ existe una vecindad abierta V de y_{-i} tal que

$$u_i(\overline{x}_i, y'_{-i}) > u_i(\tilde{x}_i, y_{-i}) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall y'_{-i} \in V$$

Así,

$$\underline{u}_i(\overline{x}_i, y_{-i}) \geq \inf_{y'_{-i} \in V} u_i(\overline{x}_i, y'_{-i}) \geq u_i(\tilde{x}_i, y_{-i}) - \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $y_{-i} \in X_{-i}$. Por tanto,

$$\underline{u}_i(\overline{x}_i, m_{-i}) \geq u_i(\tilde{x}_i, m_{-i}) - \frac{\varepsilon}{2}$$

Como la función $\underline{u}_i(\overline{x}_i, \cdot)$ es semi-continua inferiormente sobre X_{-i} se tiene que $\underline{u}_i(\overline{x}_i, \cdot)$ es semi-continua inferiormente sobre M_{-i}. Luego, existe una vecindad abierta U de m_{-i} en M_{-i} tal que

$$\underline{u}_i(\overline{x}_i, m'_{-i}) > \underline{u}_i(\overline{x}_i, m_{-i}) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m'_{-i} \in U$$

Finalmente

$$u_i(\overline{x}_i, m'_{-i}) \geq \underline{u}_i(\overline{x}_i, m'_{-i}) > \underline{u}_i(\overline{x}_i, m_{-i}) - \frac{\varepsilon}{2} \geq u_i(\tilde{x}_i, m_{-i}) - \varepsilon \geq u_i(m) - \varepsilon$$

para todo $m'_{-i} \in U$. $\square$

Ejemplo 5 (**Subasta todos-pagan**). Existen N postores compitiendo por un objeto cuyo valor conocido es igual a 1. El mejor postor gana el objeto y el resto paga lo ofrecido. En caso haya más de un mejor postor, el premio es repartido en partes iguales. Así, si la puja es dada por el vector $b = (b_1, \ldots, b_N) \in [0, 1]^N$, entonces la oferta del mejor o los mejores postores es $b^* = \max_{1 \leq k \leq N} b_k$.
Denotemos por $H = \{i : b_i = b^*\}$ al conjunto de los mejores postores. La función payoff de cada jugador i está dada por

$$u_i(b) = \begin{cases} \frac{1}{|H|} - b_i & , \text{ si } b_i = b^* \\ -b_i & , \text{ si } b_i < b^* \end{cases}$$

Veamos que este juego es uniformemente payoff secure. Dado $i = 1, \ldots, N$, $b_i \in [0, 1]$ y $\varepsilon > 0$, analicemos los siguientes tres casos:

i) $b_i = 0$. Consideremos $\overline{b}_i = \min\{\varepsilon, 1\}$. Dado $b_{-i} \neq 0$ se tiene que $u_i(b) = 0$ y $u_i(\overline{b}_i, b'_{-i}) \geq -\overline{b}_i \geq -\varepsilon = u_i(b) - \varepsilon$ para todo b'_{-i}. Por otro lado, dado $b_{-i} = 0$ tenemos que $u_i(b) = 1/N$ y $u_i(\overline{b}_i, b'_{-i}) = 1 - \overline{b}_i \geq 1 - \varepsilon \geq u_i(b) - \varepsilon$ para todo $b'_{-i} \in [0, \varepsilon)$.

ii) $0 < b_i < 1$. Consideremos $\overline{b}_i = b_i + \min\{\varepsilon, 1 - b_i\}$. Sea $b_{-i} \in [0, 1]^{N-1}$. Si $b_i = b^*$ consideramos $V = \{b'_{-i} : \max_{j \neq i} b'_j < \overline{b}_i\}$ y tenemos que $u_i(b) = 1/|H| - b_i$ y $u_i(\overline{b}_i, b'_{-i}) = 1 - \overline{b}_i \geq 1/|H| - b_i - \varepsilon = u_i(b) - \varepsilon$ para todo $b'_{-i} \in V$.
Por otro lado, si $b_i < b^*$ consideramos $V = \{b'_{-i} : \max_{j \neq i} b'_j > b_i\}$ y tenemos que $u_i(b) = -b_i$ y $u_i(\overline{b}_i, b'_{-i}) \geq -\overline{b}_i \geq -b_i - \varepsilon = u_i(b) - \varepsilon$ para todo $b'_{-i} \in V$.

iii) $b_i = 1$. Consideramos $\overline{b}_i = 0$. Dado b_{-i} tenemos que $u_i(b) = 1/|H| - 1 < 0$ y $u_i(\overline{b}_i, b'_{-i}) \geq \overline{b}_i = 0$ para todo b'_{-i}.

Así, el juego es *uniformemente payoff secure.*

Notemos que $\sum_{i=1}^{N} u_i(b) = 1 - \sum_{i=1}^{N} b_i$ es continua, por tanto, la extensión mixta es rscs. Luego, el juego posee equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

3.3. Resultados clásicos

En esta sección veremos algunos resultados bastante conocidos que se deducen de forma inmediata del Corolario 3.1.0.1.

Glicksberg (1952)

Todo juego compacto Hausdorff con funciones de utilidad continuas posee equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

En efecto. Como cada u_i es continua sobre X, la función de utilidad u_i es continuas sobre $M = \prod_{i=1}^{N} M_i$ pues se expresa como una composición de funciones continuas.[5]

$$\begin{array}{ccccc} \prod_{i=1}^{N} M_i & \to & M(X) & \to & \mathbb{R} \\ (\mu_i) & \mapsto & \otimes\mu_i & \mapsto & \int_X u_i d(\otimes\mu_i) \end{array}$$

Por lo tanto, la extensión mixta $\overline{G}$ es brs. □

Mertens(1986)

Todo juego métrico compacto de suma cero entre dos adversarios tal que $u_1(\cdot, y)$ es semi-continua superiormente y $u_1(x, \cdot)$ es semi-continua inferiormente, entonces existe equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

En efecto. Como cada u_i es semi-continua inferiormente en el espacio de estrategias de su oponente, el juego es *uniformemente payoff secure.* Luego, $\overline{G}$ es brs. □

[5]También podemos utilizar el Lema 3.1.2 para concluir la misma afirmación.

Robson(1994)

Todo juego métrico compacto tal que cada función de utilidad es semi-continua superiormente, y continua en las estrategias del resto de jugadores posee equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

En efecto. Como cada u_i es semi-continua superiormente, $\sum u_i$ es semi-continua superiormente sobre X, por tanto, $\sum u_i$ también lo es sobre el espacio $M = \prod M_i$. Así, la extensión mixta $\overline{G}$ es rscs. Además, la continuidad de cada $u_i(x_i, \cdot)$ implica que el juego es *uniformemente payoff secure*, de donde la extensión mixta será *payoff secure*. Finalmente, el Corolario 3.1.0.1 implica que G posee equilibrio de Nash en estrategias mixtas. $\square$

3.4. Votación sobre el impuesto a la renta

Consideremos una economía dotada con una cantidad continua de individuos. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones de distribución $F : [0,1] \to [0,1]$ con $F(0) = 0$ y $F(1) = 1$. Los ingresos de los constituyentes de la población se distribuyen en $[0,1]$ de acuerdo con un elemento F de $\mathcal{F}$. Formalmente, un elemento F de $\mathcal{F}$ es llamado *distribución de ingresos.*

Analicemos dos subconjuntos importantes de $\mathcal{F}$. Sea $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$ el subconjunto de funciones estríctamente crecientes y continuas. Para capturar la idea heurística de que "el número de gente rica en la sociedad es estríctamente menor que la cantidad de gente pobre", trabajemos con las funciones $F \in \mathcal{F}$ tales que el ingreso medio es estríctamente menor que el ingreso promedio, es decir,

$$m_F := F^{-1}(\frac{1}{2}) < \int_0^1 x dF(x) =: \mu_F$$

Denotemos este tipo de funciones por $\mathcal{F}^{+}$.

Una función continua $t : [0,1] \to [0,1]$ es llamada *función de impuesto* si satisface:

i) $0 \leq t(x) \leq x$, para todo x.

ii) $x \mapsto t(x)$ y $x \mapsto x - t(x)$ son funciones crecientes sobre $[0,1]$.

Denotemos por $\mathcal{T} \subset C([0,1])$ al conjunto de todas las funciones de impuesto.

En lo que sigue, asumiremos que $F \in \mathcal{F}^{*} \cap \mathcal{F}^{+}$, y que las políticas fiscales están diseñadas para recaudar al menos una cantidad exógena r, con $0 < r < \mu_F$.

Decimos que $t \in \mathcal{T}$ es *admisible* si cumple con el requisito de ingresos asociado, es decir, $r \leq \displaystyle\int_0^1 t dF(x)$. Denotemos por $\mathcal{T}_{(F,r)} \subset \mathcal{T}$ al conjunto de todas las funciones de impuesto admisibles.

Pasemos a investigar el juego de votación básico. Este juego es uno de los modelos más simples posibles de competencia política que se lleva a cabo en términos de impuestos sobre la renta.

Consideremos dos partidos políticos que compiten por un cargo. Cada partido opta por defender una política sobre los impuestos en $\mathcal{F}_{(F,r)}$ que se hará efectiva en caso de que esta parte obtenga el apoyo de la mayoría. Los ciudadanos evalúan las propuestas de forma egoísta, es decir, un individuo con ingresos x considera la función tributaria t más deseable que la función de impuestos τ si $t(x) < \tau(x)$. Si los partidos 1 y 2 proponen las políticas de impuestos t y τ, respectivamente, la proporción de la población de individuos que prefieren estrictamente t sobre τ se determina como

$$w(t,\tau) = P_F\{t < \tau\} = \int_{[t<\tau]} dF$$

Consideremos las funciones $u_i : \mathcal{T}^2_{(F,r)} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$u_i(t,\tau) = \begin{cases} w(t,\tau) - w(\tau,t) & , \quad i=1 \\ w(\tau,t) - w(t,\tau) & , \quad i=2 \end{cases}$$

Formalmente tenemos el juego estratégico simétrico de suma cero $\mathcal{G}_{(F,r)} = (\mathcal{T}_{(F,r)}, u_i)_{i=1}^2$, donde las funciones de utilidad representan la diferencia entre las acciones de votos obtenidos por los candidatos.

Lema 3.4.1. *Las aplicaciones $(t,\tau) \mapsto w(t,\tau)$ y $(t,\tau) \mapsto w(\tau,t)$ son semi-continuas inferiormente sobre $\mathcal{T}^2_{(F,r)}$.*

Prueba. Sea (t_n, τ_n) una secuencia en $\mathcal{T}_{(F,r)}$ tal que $t_n \to t$ y $\tau_n \to \tau$. Por el Lema de Fatou[6],

$$\liminf w(t_n,\tau_n) = \liminf \int_0^1 \mathbf{1}_{\{t_n<\tau_n\}} dF \geq \int_0^1 \liminf \mathbf{1}_{\{t_n<\tau_n\}} dF$$

Como $\liminf \mathbf{1}_{\{t_n<\tau_n\}} \geq \mathbf{1}_{\{\lim t_n < \lim \tau_n\}}$, entonces

$$\liminf w(t_n,\tau_n) \geq \int_0^1 \mathbf{1}_{\{t<\tau\}} dF = w(t,\tau)$$

Luego, w es semi-continua inferiormente sobre $\mathcal{T}^2_{(F,r)}$. La otra afirmación se prueba de forma similar.

□

Lema 3.4.2. *El conjunto $\mathcal{T}_{(F,r)} \subset C([0,1])$ es compacto.*

Prueba. Sea (t_n) una secuencia en $\mathcal{T}_{(F,r)}$ tal que $||t_n - t||_\infty \to 0$. Por la convergencia uniforme tenemos

$$\int_0^1 t dF = \int_0^1 \lim t_n dF = \lim \int_0^1 t_n dF \geq r$$

[6]**Lema de Fatou:** Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y $f_n : X \to [0,\infty)$ una secuencia de funciones integrables con $\liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu < \infty$. Entonces $\liminf_{n\to\infty} f_n$ es integrable y se tiene que $\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu$.

Por tanto, $t \in \mathcal{T}_{(F,r)}$ y $\mathcal{T}_{(F,r)}$ es cerrado.

Es claro que $\mathcal{T}_{(F,r)}$ es acotado. Veamos que también es equicontinuo.

Sea $t \in \mathcal{T}_{(F,r)}$. Dado $0 \leq y \leq x \leq 1$, por la condición ii) de la función de impuesto, $x - t(x) \geq y - t(y)$, de donde $x - y \geq t(x) - t(y) \geq 0$. Por tanto, $|t(x) - t(y)| \leq |x - y|$ para todo $x, y \in [0, 1]$. Luego, dado $x \in [0, 1]$ y $\varepsilon > 0$ se tiene que $|t(x) - t(y)| < \varepsilon$ siempre que $|x - y| < \varepsilon$. Así, $\mathcal{T}_{(F,r)}$ es equicontinuo.

Finalmente, el Teorema de Arzelá-Ascoli implica que $\mathcal{T}_{(F,r)}$ es compacto. $\square$

Así, el juego $\mathcal{G}_{(F,r)} = (\mathcal{T}_{(F,r)}, u_i)_{i=1}^2$ es compacto, y el Lema 3.4.1 muestra que la extensión mixta está bien definida pues las funciones de utilidad son medibles.

Lema 3.4.3. *Dado $\varepsilon > 0$ y $\tau \in \mathcal{T}_{(F,r)}$ con $\int_0^1 \tau dF = r$, existe $\tau^* \in \mathcal{T}_{(F,r)}$ con la siguiente propiedad: para cada $t \in \mathcal{T}_{(F,r)}$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$w(\tau^*, f) - w(f, \tau^*) > w(\tau, t) - w(t, \tau)$$

para todo $f \in N_\delta(t)$.

Prueba. Sean $\varepsilon > 0$ y $\tau \in \mathcal{T}_{(F,r)}$ con $\int_0^1 \tau dF = r$. Definamos

$$x^* = \inf\{x \in [0, 1] : \tau(y) - \tau(x) = y - x \ , \ \forall y \in [x, 1]\}$$

Desde que $r < \mu_F$, no podemos tener $x^* = 0$, así que $0 < x^* \leq 1$.

Supongamos que $0 < x^* < 1$. Para $\varepsilon > 0$ con $[x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon] \subseteq [0, 1]$, sean

$$\underline{t}_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & , \ 0 \leq x \leq x^* - \varepsilon - \tau(x^* - \varepsilon) \\ \tau(x^* + \varepsilon) & , \ x^* - \varepsilon + \tau(x^* + \varepsilon) - \tau(x^* - \varepsilon) < x \leq 1 \\ \tau(x^* - \varepsilon) - (x^* - \varepsilon) + x & , \ \text{caso contrario} \end{cases}$$

y $\bar{t}_\varepsilon = \max\{\tau, \underline{t}_\varepsilon\}$. Así, existe $\varepsilon^\circ > 0$ tal que $\int_0^1 \underline{t}_\varepsilon dF < r < \int_0^1 \bar{t}_\varepsilon dF$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon^\circ$. Se sigue que, para cada $0 < \varepsilon < \varepsilon^\circ$, existe $0 < \alpha_\varepsilon < 1$ tal que $\int_0^1 \left(\alpha_\varepsilon \bar{t}_\varepsilon + (1 - \alpha_\varepsilon)\underline{t}_\varepsilon\right) dF = r$.

Definimos, para cada $0 < \varepsilon < \varepsilon^\circ$, las funciones de impuesto admisibles

$$t_\varepsilon = \begin{cases} \alpha_\varepsilon \bar{t}_\varepsilon + (1 - \alpha_\varepsilon)\underline{t}_\varepsilon & , \ 0 < x^* < 1 \\ \beta_\varepsilon \bar{t}_\varepsilon + (1 - \beta_\varepsilon)\underline{t}_\varepsilon & , \ x^* = 1 \end{cases}$$

Existe una secuencia (ε_n) de números reales positivos que converge a 0 tal que $t_{\varepsilon_n} < \tau$ sobre $\{\tau > 0\} \setminus [x^* - \varepsilon_n, x^* + \varepsilon_n]$ para todo n. Así, podemos escoger $\varepsilon^* > 0$ suficientemente pequeño para asegurar que

$$\varepsilon^* < \text{mín}\{x^*, 1 - x^*, \varepsilon/12\}$$

y

$$t_{\varepsilon^*} < \tau \text{ sobre } \{\tau > 0\} \setminus [x^* - \varepsilon^*, x^* + \varepsilon^*]$$

Denotemos $\tau^* = \tau_{\varepsilon^*}$. Dado $t \in \mathcal{T}(F, r)$. Fijemos η tal que

$$\varepsilon^* < \eta < \text{mín}\{x^*, 1 - x^*, \varepsilon/12\}$$

Definamos $s_0 = \sup \tau^{-1}(0)$ y

$$\delta = \begin{cases} \underset{x \in [s_0+\eta, x^*-\eta] \cup [x^*+\eta, 1]}{\text{mín}} |\tau(x) - \tau^*(x)| & , \quad s_0 + \eta < x^* - \eta \\ \underset{x \in [x^*+\eta, 1]}{\text{mín}} |\tau(x) - \tau^*(x)| & , \quad \text{caso contrario} \end{cases}$$

Tomemos $f \in N_\delta(t)$ arbitrario. Sean $S = [s_0, s_0 + \eta] \cup [x^* - \eta, x^* + \eta]$ y $S^c = [0, 1] \setminus S$ el complemento de S en $[0, 1]$. Entonces,

$$\begin{aligned} w(\tau, t) - w(t, \tau) &= 2w(\tau, t) + P_F\{\tau = t\} - 1 \\ &= 2[P_F(\{\tau < t\} \cap S) + P_F(\{\tau < t\} \cap S^c)] + \\ &\quad\; P_F(\{\tau = t\} \cap S) + P_F(\{\tau = t\} \cap S^c) - 1 \end{aligned}$$

Debido a que

$$2P_F(\{\tau < t\} \cap S) + P_F(\{\tau = t\} \cap S) \leq 3P_F(S) \leq 3(3\eta) < 9\varepsilon/12 < \varepsilon$$

tenemos

$$w(\tau, t) - w(t, \tau) < \varepsilon + 2P_F(\{\tau < t\} \cap S^c) + P_F(\{\tau = t\} \cap S^c) - 1$$

Por una simple descomposición se tiene

$$\begin{aligned}
w(\tau,t)-w(t,\tau) &< \varepsilon+2[P_F(\{\tau^*<\tau<t\}\cap S^c)+P_F(\{\tau^*\geq\tau<t\}\cap S^c)] \\
&\quad + P_F(\{\tau^*<\tau=t\}\cap S^c)+P_F(\{\tau^*\geq\tau=t\}\cap S^c)-1 \\
&= \varepsilon+2\big[P_F(\{f\leq\tau^*<\tau<t\}\cap S^c)+P_F(\{f>\tau^*<\tau<t\}\cap S^c) \\
&\qquad + P_F(\{f\leq\tau^*\geq\tau<t\}\cap S^c)+P_F(\{f>\tau^*\geq\tau<t\}\cap S^c)\big] \\
&\quad + P_F(\{f\leq\tau^*<\tau=t\}\cap S^c)+P_F(\{f>\tau^*<\tau=t\}\cap S^c) \\
&\quad + P_F(\{f\leq\tau^*\geq\tau=t\}\cap S^c)+P_F(\{f>\tau^*\geq\tau=t\}\cap S^c)-1
\end{aligned}$$

Por tanto, si

$$P_F(\{f\leq\tau^*<\tau<t\}\cap S^c)=0 \tag{3.2}$$

$$P_F(\{f\leq\tau^*<\tau=t\}\cap S^c)=0 \tag{3.3}$$

$$P_F(\{f\leq\tau^*\geq\tau\leq t\}\cap S^c)\leq P_F(\{f=\tau^*\}) \tag{3.4}$$

entonces

$$\begin{aligned}
w(\tau,t)-w(t,\tau) &< \varepsilon+2w(\tau^*,f)+P_F(\{\tau^*=f\})-1 \\
&= w(\tau^*,f)w(f,\tau^*)-1
\end{aligned}$$

Así, la prueba estará concluida para el caso $0<x^*<1$ si probamos las ecuaciones (3.2)-(3.4).

Debido a que $\tau=0$ sobre $[0,s_0]$ se tiene

$$P_F(\{f\leq\tau^*<\tau<t\}\cap[0,s_0])=0$$

Por otro lado, como $f\in N_\delta(t)$,

$$||f-t||<\delta\leq||\tau-t||$$

sobre $[s_0+\eta,1]\cap S^c$.

Como $S^c\subseteq[0,s_0]\cup[s_0+\eta,1]$, $\{f\leq\tau^*<\tau<t\}\cap[s_0+\eta,1]=\emptyset$ y

$\{f \leq \tau^* < \tau = t\} \cap [0, s_0] = \emptyset$, es sencillo ver que tenemos las dos primeras ecuaciones.

Para ver que se cumple la última ecuación, notemos que

$$([s_0, 1] \cap S^c) \cap [x^* - \varepsilon^*, x^* + \varepsilon^*] = \emptyset$$

y $\tau^* < \tau$ sobre $\{\tau > 0\} \setminus [x^* - \varepsilon^*, x^* + \varepsilon^*]$. Luego,

$$\begin{aligned}
P_F(\{f \leq \tau^* \geq \tau \leq t\} \cap S^c) &\leq P_F(\{f \leq \tau^* \geq \tau\} \cap S^c) \\
&\leq P_F(\{f \leq \tau^* \geq \tau\} \cap S^c \cap [0, s_0]) + \\
&\quad\; P_F(\{f \leq \tau^* \geq \tau\} \cap S^c \cap [s_0, 1]) \\
&= P_F(\{f \leq \tau^* = \tau = 0\} \cap S^c \cap [0, s_0]) \\
&\leq P_F(\{f = \tau^*\})
\end{aligned}$$

pues por la construcción de τ^*, $\tau = \tau^*$ sobre $[0, s_0]$.

Finalmente, para el caso $x^* = 1$ se procede de forma similar redefiniendo $\underline{t}_\varepsilon$ mediante

$$\underline{t}_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x \leq 1 - \varepsilon - \tau(1-\varepsilon) \\ \tau(1-\varepsilon) - (1-\varepsilon) + x & , \quad 1 - \varepsilon - \tau(1-\varepsilon) < x \leq 1 \end{cases}$$

□

Proposición 3.2. *El juego $\mathcal{G}_{(F,r)} = (\mathcal{T}_{(F,r)}, u_i)_{i=1}^2$ es uniformemente payoff secure.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $\tau \in \mathcal{T}_{(F,r)}$.

Si $\int_0^1 \tau dF = r$, el Lema 3.4.3 implica que existe $\tau^* \in \mathcal{T}_{(F,r)}$ tal que para cada $t \in \mathcal{T}_{(F,r)}$, existe $\delta > 0$ con $u_1(\tau^*, f) > u_1(\tau, t)$ y $u_2(f, \tau^*) > u_2(t, \tau)$ para todo $f \in N_\delta(t)$.

Supongamos que $\int_0^1 \tau dF > r$, y definamos $a = r / \int_0^1 \tau dF$. Es claro que $a\tau \in \mathcal{T}_{(F,r)}$ y $\int_0^1 (a\tau) dF = r$. Luego, el Lema 3.4.3 implica que existe $\tau^* \in \mathcal{T}_{(F,r)}$ tal que para cada

$t \in \mathcal{T}_{(F,r)}$, existe $\delta > 0$ con $u_1(\tau^*, f) > u_1(a\tau, t)$ y $u_2(f, \tau^*) > u_2(t, a\tau)$ para todo $f \in N_\delta(t)$.

Nótese que

$$w(a\tau, t) = \int_0^1 \mathbf{1}_{\{a\tau<t\}} dF \geq \int_0^1 \mathbf{1}_{\{\tau<t\}} dF = w(\tau, t)$$

y

$$w(t, a\tau) = \int_0^1 \mathbf{1}_{\{t<a\tau\}} dF \leq \int_0^1 \mathbf{1}_{\{t<\tau\}} dF = w(t, \tau)$$

desde que $a < 1$. Por tanto,

$$u_1(a\tau, t) = w(a\tau, t) - w(t, a\tau) \geq w(\tau, t) - w(t, \tau) = u_1(\tau, t)$$

y

$$u_2(t, a\tau) = u_1(a\tau, t) \geq u_1(\tau, t) = u_2(t, \tau)$$

Así, el juego $\mathcal{G}_{(F,r)} = (\mathcal{T}_{(F,r)}, u_i)_{i=1}^2$ es *uniformemente payoff secure.* □

Corolario 3.4.3.1. *La extensión mixta del juego $\mathcal{G}_{(F,r)} = (\mathcal{T}_{(F,r)}, u_i)_{i=1}^2$ es payoff secure*

Teorema 3.4.4. *El juego $\mathcal{G}_{(F,r)} = (\mathcal{T}_{(F,r)}, u_i)_{i=1}^2$ posee equilibrio de Nash en estrategias mixtas*

Demostración. El juego $\mathcal{G}_{(F,r)}$ es de suma cero, de donde la extensión mixta resulta rscs. Además, el Corolario 3.4.3.1 indica que dicho juego también es *payoff secure*, por tanto, $\mathcal{G}_{(F,r)}$ es brs. Finalmente, el Corolario 3.1.0.1 implica que $\mathcal{G}_{(F,r)}$ posee equilibrio de Nash en estrategias mixtas. □

Conclusiones

Las nociones discutidas a lo largo de los dos primeros capítulos permiten abarcar una amplia gama de juegos que incluyen los casos continuos y algunos discontinuos. Aunque en la mayoría de aplicaciones existentes el ambiente es un espacio métrico, el teorema de Reny sigue siendo aplicable puesto que podemos ver el espacio encajado dentro de un espacio vectorial topológico, de hecho, dentro de un espacio de Banach. Las condiciones de este teorema son bastante débiles debido a que la extensión de un juego siempre tendremos la propiedad de cuasiconcavidad. Así, si verificamos que la extensión mixta de un juego es brs entonces podemos asegurar la existencia de equilibrios de Nash en estrategias mixtas. Además, adicionando la condición de cuasi-simetría pudimos probar la existencia de equilibrios simétricos. Nuestro aporte consiste en la generalización de ciertas condiciones sobre un juego compacto, no necesariamente métrico, para garantizar que la extensión mixta resulte brs. Sin embargo, estos resultados son netamente existenciales pues la prueba del teorema de Reny se basa en aproximar equilibrios de Nash, garantizados por la existencia de un teorema de punto fijo, de juegos reducidos. Finalmente, en el análisis del juego *Votación sobre el impuesto a la renta* pudimos demostrar la existencia de equilibrios de Nash en estrategias mixtas usando el teorema de Reny, de hecho, demostramos que dicho juego es *payoff secure* y rscs.

Apéndice A

Topología

A.1. Nets

Consideremos el espacio $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ de todas las funciones complejas sobre $\mathbb{R}$ dotado con la topología producto, y el subespacio de funciones continuas $C(\mathbb{R})$. Sabemos que si $\{f_n\} \subseteq C(\mathbb{R})$ y $f_n \to f$ puntualmente, entonces f es Borel medible, así que el conjunto formado por los límites de secuencias convergentes de $C(\mathbb{R})$ es un subconjunto propio de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. Sin embargo, $C(\mathbb{R})$ es denso en $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ pues para cada $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, los conjuntos de la forma

$$\{g \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} : |g(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon, \forall j = 1, \ldots, n\}$$

constituyen una base de vecindades de f, y cada uno de ellos contiene funciones continuas.

Como vemos, la convergencia de secuencias no toma el mismo rol principal en espacios topológicos como lo hace en espacios métricos. Sin embargo, podemos dar una generalización de la noción de secuencias que funciona bien en espacios topológicos.

Definición A.1. Un conjunto Λ es un *conjunto direccionado* si existe una relación

$\leq$ sobre Λ que satisface:

i) $\lambda \leq \lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$

ii) si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3$, entonces $\lambda_1 \leq \lambda_3$

iii) si $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ entonces existe algún $\lambda_3 \in \Lambda$ con $\lambda_1 \leq \lambda_3, \lambda_2 \leq \lambda_3$

Definición A.2. Una *net* en un conjunto X es una función $P : \Lambda \to X$, donde Λ es algún conjunto direccionado. El punto $P(\lambda)$ es usualmente denotado por x_λ, y nosotros a menudo haremos referencia a “la net $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$” o simplemente “la net (x_λ)” si no hay lugar a confusión.

Una *subnet* de una net $P : \Lambda \to X$ es la composición $P \circ \varphi$, donde $\varphi : M \to \Lambda$ es una función creciente cofinal del conjunto direccionado M hacia Λ. Esto es,

i) $\mu_1 \leq \mu_2$ implica $\varphi(\mu_1) \leq \varphi(\mu_2)$ (φ es *creciente*)

ii) para cada $\lambda \in \Lambda$, existe $\mu \in M$ tal que $\lambda \leq \varphi(\mu)$ (φ es *cofinal* en Λ)

Para $\mu \in M$, el punto $P \circ \varphi(\mu)$ es a menudo denotado por x_{λ_μ}, y nosotros haremos referencia a “la subnet (x_{λ_μ}) de (x_λ)”.

Ejemplo 6. El conjunto $\mathbb{N}$ es un conjunto direccionado con el orden usual. Así, toda secuencia (x_n) es una net y toda subsecuencia es una subnet; sin embargo, no toda subnet de (x_n) es una subsecuencia.

Definición A.3. Sea (x_λ) una net en X. Decimos que (x_λ) *converge* a $x \in X$, y lo denotamos por $x_\lambda \to x$, si para cada vecindad U de x, existe algún $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\lambda \geq \lambda_0$ implica $x_\lambda \in U$.
Decimos que x es un *punto límite* de la net (x_λ) si para cada vecindad U de x y cada $\lambda_0 \in \Lambda$, existe $\lambda \geq \lambda_0$ tal que $x_\lambda \in U$.

Ejemplo 7. Sea X un espacio topológico, $x \in X$ y Λ una base de vecindades de x. La relación de orden $U_1 \leq U_2 \Leftrightarrow U_2 \subset U_1$ direcciona al conjunto Λ pues dicha relación es reflexiva y transitiva, y además, si U_1, U_2 son vecindades de x, entonces $U = U_1 \cap U_2$ es una vecindad de x que satisface $U_1 \leq U$ y $U_2 \leq U$.
Para cada $U \in \Lambda$ tomemos $x_U \in U$, entonces tenemos la net (x_U) en X. Mas aún, $x_U \to x$ pues si V es una vecindad de x, existe $U_0 \subset V$ para algún $U_0 \in \Lambda$, de donde $U \geq U_0$ implica $U \subset U_0$, y por tanto $x_U \in U \subset V$.

Ejemplo 8. Si $x_\lambda \to x$, cada subnet de (x_λ) converge a x.
Sea (x_{λ_μ}) una subnet de (x_λ). Dado U vecindad abierta de x, existe λ_0 tal que $\lambda \geq \lambda_0$ implica $x_\lambda \in U$. Para λ_0, existe μ_0 tal que $\lambda_{\mu_0} \geq \lambda_0$. Si $\mu \geq \mu_0$, entonces $\lambda_u \geq \lambda_{\mu_0}$, y por tanto $x_{\lambda_\mu} \in U$.

Teorema A.1.1. *Una net tiene a y como punto límite si, y solo si existe una subnet que converge a y.*

Demostración. Sea y punto límite de la net (x_λ). Definimos el conjunto

$$M = \{(\lambda, U) : \lambda \in \Lambda, U \text{ vecindad de } y, x_\lambda \in U\}$$

y lo direccionamos mediante $(\lambda_1, U_1) \leq (\lambda_2, U_2) \Leftrightarrow \lambda_1 \leq \lambda_2, U_1 \leq U_2$. Así tenemos la subnet $(x_{\lambda_{(\lambda', U)}}) = (x_{\lambda'})$. Dado U vecindad de y y $\lambda \in \Lambda$, existe $\lambda_0 \geq \lambda$ tal que $x_{\lambda_0} \in U$, de donde $(\lambda_0, U) \in M$. Si $(\lambda', V) \geq (\lambda_0, U)$, entonces $\lambda' \geq \lambda_0$, $V \subset U$ con $x_{\lambda'} \in V$. Luego, $x_{\lambda'} = x_{\lambda_{(\lambda', V)}} \in U$.
Recíprocamente, sea (x_{λ_μ}) una subnet de (x_λ) que converge a y. Dado U vecindad de y, existe μ_1 tal que $\mu \geq \mu_1$ implica $x_{\lambda_\mu} \in U$. Si $\lambda \in \Lambda$, existe μ_2 tal que $\lambda_{\mu_2} \geq \lambda$. Luego, escogiendo μ con $\mu \geq \mu_1$, $\mu \geq \mu_2$ se tiene que $\lambda_\mu \geq \lambda_{\mu_2}$, y por tanto $\lambda_\mu \geq \lambda$ con $x_{\lambda_\mu} \in U$. $\square$

Ahora mostraremos que el concepto de nets representa el enfoque correcto de convergencia en espacios topológicos.

Teorema A.1.2. *Si $E \subset X$, entonces $x \in \overline{E}$ si, y solo si existe una net (x_λ) en E tal que $x_\lambda \to x$.*

Demostración. Si $x \in \overline{E}$, cada vecindad U de x intersecta al conjunto E en algún punto x_U. Entonces (x_U) es una net en E que converge a x.
Recíprocamente, sea (x_λ) una net en E tal que $x_\lambda \to x$. Dado U vecindad de x, existe $x_\lambda \in U$, y por tanto $E \cap U \neq \emptyset$. □

Teorema A.1.3. *Sea $f : X \to Y$. Entonces f es continua en $x_0 \in X$ si, y solo si siempre que $x_\lambda \to x$ en X, entonces $f(x_\lambda) \to f(x_0)$.*

Demostración. Sea (x_λ) una net en X tal que $x_\lambda \to x_0$. Dado V vecindad de $f(x_0)$, por continuidad de f en x_0, existe U vecindad de x_0 tal que $f(U) \subset V$. Así, existe λ_0 tal que $\lambda \geq \lambda_0$ implica $x_\lambda \in U$. Luego, $f(x_\lambda) \in V$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$.
Recíprocamente, supongamos que f no es continua en x_0. Entonces existe V vecindad de $f(x_0)$ tal que para cada vecindad U de x_0, existe algún $x_U \in U$ tal que $f(x_U) \notin V$. Así tenemos la net (x_U) en X tal que $x_U \to x$ y $f(x_U) \nrightarrow f(x_0)$. □

Teorema A.1.4. *Una net (x_λ) en $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ converge a x si, y solo si para cada $\alpha \in A$, $\pi_\alpha(x_\lambda) \to \pi(x)$ en X_α.*

Demostración. Si $x_\lambda \to x$ en $\prod X_\alpha$, entonces por la continuidad de π_α se tiene que $\pi_\alpha(x_\lambda) \to \pi(x)$ en X_α.
Recíprocamente, supongamos que $\pi_\alpha(x_\lambda) \to \pi_\alpha(x)$ para cada α. Dada la vecindad $\pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$ de x se tiene que $\pi_{\alpha_i}(x) \in U_{\alpha_i}$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Así, existe λ_i tal que $\lambda \geq \lambda_i$ implica $\pi_{\alpha_i}(x_\lambda) \in U_{\alpha_i}$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Finalmente, escogiendo $\lambda_0 \geq \lambda_i$ para cada i se tiene que $\lambda \geq \lambda_0$ implica $\pi_{\alpha_i}(x_\lambda) \in U_{\alpha_i}$ para todo i, y por tanto $x_\lambda \in \pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$ para $\lambda \geq \lambda_0$. □

Este resultado nos dice que en el espacio X^A, dotado con la topología producto, una net f_α converge a f si, y solo si $f_\alpha(a) \to f(a)$ para cada $a \in A$. Esto es, la convergencia de funciones en X^A con la topología producto es equivalente a la convergencia puntual.

Una de las diferencias más notables entre nets y secuencias es que en el caso de nets la convergencia no es única, salvo que el espacio sea Hausdorff.

Teorema A.1.5. *El espacio topológico X es Hausdorff si, y solo si cada net en X converge a lo más a un punto.*

Demostración. Supongamos que (x_λ) es una net en X que converge a x e y, con $x \neq y$. Como X es Hausdorff, existen vecindades disjuntas U y V de x e y respectivamente. Así, existen λ_1, λ_2 tales que $\lambda \geq \lambda_1$ implica $x_\lambda \in U$ y $\lambda \geq \lambda_2$ implica $x_\lambda \in V$. Luego, escogiendo $\lambda \geq \lambda_1$,$\lambda \geq \lambda_2$ se tiene que $x_\lambda \in U \cap V$, lo cual es absurdo.
Recíprocamente, supongamos que X no es Hausdorff. Luego, existen $x \neq y$ en X tales que para cada par de vecindades U y V de x e y respectivamente, existe $x_{U,V} \in U \cap V$. Así tenemos la net $(x_{U,V})$ que converge a x e y. $\square$

A.2. Filtros

Definición A.4. Un *filtro* $\mathcal{F}$ sobre un conjunto X es una colección no vacía de subconjuntos no vacíos de X tal que:

i) si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$,

ii) si $F \in \mathcal{F}$ y $F \subset F'$, entonces $F' \in \mathcal{F}$.

Notemos que la noción de filtro es dado sobre un conjunto que no necesita tener ningún tipo de estructura.

Definición A.5. Un *filtro base* B sobre un conjunto X es una colección no vacía de subconjuntos no vacíos de X tal que la intersección de cualquier par de elementos de B contiene un elemento de B.

Dado un filtro base B, podemos obtener un filtro (propio) $\mathcal{F}$ al incluir todos los subconjuntos de X que contienen a algún elemento de B. Dicho filtro es llamado *filtro generado* por el filtro base B. Más aún, dicha familia es el menor filtro que contiene a B.

Ejemplo 9. Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Si $\mathcal{N}_x$ denota el conjunto de vecindades de x, entonces $\mathcal{N}_x$ es un filtro sobre el espacio X.

Definición A.6. Sea $\mathcal{F}$ un filtro en el espacio topológico X. Decimos que $\mathcal{F}$ converge a $x \in X$, y lo denotamos por $\mathcal{F} \to x$, si $\mathcal{F}$ es más fino que el filtro de vecindades de x, es decir, $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{F}$.
Decimos que $x \in X$ es *punto límite* del filtro $\mathcal{F}$ si $x \in \bigcap \{\overline{A} : A \in \mathcal{F}\}$.

Teorema A.2.1. *El filtro $\mathcal{F}$ tiene a x como punto límite si, y solo si existe un filtro $\mathcal{G}$ mas fino que $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{G} \to x$.*

Demostración. Supongamos que x es punto límite del filtro $\mathcal{F}$. Es claro que el conjunto $\mathcal{G} = \{K \cap W : W \in \mathcal{N}_x, \exists A \in \mathcal{F} \text{ con } A \subset K\}$ es un filtro mas fino que $\mathcal{F}$ que converge a x.
Recíprocamente, sea $\mathcal{G}$ un filtro mas fino que $\mathcal{F}$ que converge a x. Dado $A \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ y $U \in \mathcal{N}_x \subset \mathcal{G}$ se tiene que $A \cap U \in \mathcal{G}$, es decir, $A \cap U \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in \overline{A}$ para todo $A \in \mathcal{F}$. □

Teorema A.2.2. *Si $E \subseteq X$, entonces $x \in \overline{E}$ si, y solo si existe un filtro $\mathcal{F}$ tal que $E \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \to x$.*

Demostración. Si $x \in \overline{E}$, entonces $\mathcal{B} = \{U \cap E : U \in N_x\}$ es un filtro base para un filtro $\mathcal{F}$. Es claro que $\mathcal{F} \to x$.
Recíprocamente, si $E \in \mathcal{F} \to x$, entonces x es punto límite de $\mathcal{F}$. Luego, $x \in \overline{E}$. □

A.3. Compacidad

Teorema A.3.1. *Si X es un espacio topológico, son equivalentes:*

a. X es compacto.

b. Cada net en X tiene un punto límite.

c. Cada net en X tiene una subnet convergente.

Demostración. $(b) \Leftrightarrow (c)$ se reduce al teorema A.1.1.
(a) $\Rightarrow$ (b) Sea X compacto y $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una net en X. Dado $\alpha \in A$ consideramos el conjunto $E_\alpha = \{x_\beta : \beta \geq \alpha\}$. Es claro que la familia $\{E_\alpha\}$ posee la propiedad de la intersección finita, y por la compacidad de X tenemos $\cap \overline{E}_\alpha \neq \emptyset$, digamos $x \in \cap \overline{E}_\alpha$. Es claro que x es punto límite de la net (x_α).
(b) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que X no es compacto, entonces existe un cubrimiento $\{U_\beta\}_{\beta \in B}$ de X que no posee subcubrimiento finito. Sea $\mathcal{A}$ la colección de subconjuntos finitos de B direccionado por la inclusión, y para cada $A \in \mathcal{A}$ escogemos x_A (fijo) en $(\cup_{\beta \in A} U_\beta)^c \neq \emptyset$. Así formamos una net $(x_A)_{A \in \mathcal{A}}$ en X. Dado $x \in X$, existe $\beta \in B$ tal que $x \in U_\beta$. Si $A \geq \{\beta\}$, entonces $x_A \in (U_\beta)^c$. Luego, x no es punto límite de la net (x_A). $\square$

A.4. Partición de la unidad

Un espacio topológico es llamado *localmente compacto* si cada punto posee una vecindad compacta.

Lema A.4.1. *Sea X localmente compacto Hausdorff, K compacto y U abierto con $K \subset U \subset X$. Entonces existe un abierto V tal que $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$, con $\overline{V}$ compacto.*

Teorema A.4.2 (Lema de Urysohn para espacios localmente compactos)**.** *Sea X localmente compacto Hausdorff. Si $K, F \subseteq X$ son subconjuntos disjuntos, con K compacto y F cerrado, entonces existe $f \in C(X, [0,1])$ tal que $f_{|K} = 1$ y $f_{|F} = 0$.*

Definición A.7. Sea X un espacio topológico y $E \subseteq X$. Una *partición de la unidad* sobre E es una colección $\{h_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de funciones en $C(X, [0,1])$ tales que

1. cada $x \in X$ posee una vecindad sobre la que solo una cantidad finita de funciones h_α son no nulas.

2. cada $x \in E$ cumple $\sum_{\alpha \in A} h_\alpha(x) = 1$.

Decimos que la partición de la unidad $\{h_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sobre E es *subordinada* al cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de E si para cada $\alpha \in A$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\operatorname{supp}(h_\alpha) \subseteq U$, donde

$$\operatorname{supp}(h_\alpha) = \overline{\{x \in X : h_\alpha(x) \neq 0\}}$$

Teorema A.4.3. *Sea X localmente compacto Hausdorff, $K \subseteq X$ compacto y $\{U_j\}_{j=1}^n$ un cubrimiento abierto de K. Entonces existe una partición de la unidad sobre K subordinada al cubrimiento $\{U_j\}_{j=1}^n$ que consiste de funciones con soporte compacto.*

Demostración. Por el lema A.4.1, cada $x \in K$ posee una vecindad compacta N_x tal que $N_x \subseteq U_j$ para algún j. Desde que $\{\operatorname{int}(N_x)\}_{x \in K}$ es un cubrimiento abierto de K, existen $x_1, \ldots, x_m \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^m \operatorname{int}(N_{x_j})$. Sea F_j la unión de los conjuntos N_{x_i} que son subconjuntos de U_j. Como cada F_j es compacto, por el lema A.4.1 y el lema de Urysohn, existen $g_1, \ldots, g_n \in C(X, [0,1])$ con $g_j = 1$ sobre F_j y $\operatorname{supp}(g_j) \subset U_j$ compacto. Desde que $\cup_{j=1}^n F_j$ cubre K, tenemos que $\sum_{j=1}^m g_j \geq 1$ sobre K. Nuevamente, por el lema A.4.1 y el lema de Urysohn, existe $f \in C(X, [0,1])$ con $f = 1$ sobre K y $\operatorname{supp}(f) \subset \{x : \sum_{j=1}^n g_j(x) > 0\}$. Sea $g_{n+1} = 1 - f$, así que $\sum_{j=1}^{n+1} g_j > 0$ en X. Para cada $j = 1, \ldots, n$ definimos $h_j = g_j / \sum_{j=1}^{n+1} g_j$. Entonces $\operatorname{supp}(h_j) = \operatorname{supp}(g_j) \subset U_j$ y $\sum_{j=1}^n h_j = 1$ sobre K. $\square$

A.5. Topología débil y débil*

A.5.1. Convergencia débil

Dado el espacio vectorial normado X, el espacio X^* de funcionales lineales acotadas sobre X es llamado *espacio dual*. La topología generada por X^* es llamada ***topología debil*** sobre X y denotada por τ_w, y la convergencia con respecto a esta topología es conocida como ***convergencia debil***.
Dado $x_0 \in X, f_1, \ldots, f_n \in X^*$ y $\varepsilon > 0$, denotemos

$$V(x_0, f_1, \ldots, f_n, \varepsilon) = \{x \in X : |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon, \ \forall i = 1, \ldots, n\}$$

Es claro que dichos conjuntos forman una base para la topología débil τ_w. Además, nótese que $V(x_0, f_1, \ldots, f_n, \varepsilon) = \cap_{i=1}^{n} f^{-1}(B(f_i(x_0), \varepsilon))$, y como cada f_i es contínua en la topología τ generada por la norma, $V(x_0, f_1, \ldots, f_n, \varepsilon) \in \tau$, y por tanto $\tau_w \subseteq \tau$.

Proposición A.1. *Sea (x_λ) una net en X.*

$$x_\lambda \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow f(x_\lambda) \to f(x) \text{ para todo } f \in X^*$$

En efecto. Si $f \in X^*$, entonces f es continua. Luego, es claro que $f(x_\lambda) \to f(x)$.
Recíprocamente, sea $U \in \tau_w$ tal que $x \in U$, entonces existe $V(x_0, f_1, \ldots, f_n, \varepsilon) \subseteq U$ tal que $x \in V(x_0, f_1, \ldots, f_n, \epsilon)$. Luego, $f_i(x) \in B(f_i(x_0), \varepsilon)$ para todo i. Por hipótesis, para cada i existe λ_i tal que $f_i(x_\lambda) \in B(f_i(x_0), \varepsilon)$, para todo $\lambda \geq \lambda_i$.
Tomando $\lambda_0 \geq \lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$, se tiene que, para cada i, $f_i(x_\lambda) \in B(f_i(x_0), \varepsilon)$, $\forall \lambda \geq \lambda_0$. Por tanto, $x_\lambda \in V(x_0, f_1, \ldots, f_n, \varepsilon)$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. □

Proposición A.2. *El espacio topológico (X, τ_w) es Hausdorff.*

En efecto. Si $x_0 \neq y_0$, entonces $x_0 - y_0 \neq 0$. Luego, existe $f \in X^*$ tal que $f(x_0 - y_0) \neq 0$, es decir, $f(x_0) \neq f(y_0)$. Sea $0 < \delta < |f(x_0) - f(y_0)|$.
Veamos que los conjuntos $V(x_0, f, \delta/2)$ y $V(y_0, f, \delta/2)$ son disjuntos.

Si $x \in V(x_0, f, \delta/2) \cap V(y_0, f, \delta/2)$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \delta/2$ y $|f(x) - f(y_0)| < \delta/2$. Luego,

$$|f(x_0) - f(y_0)| \leq |f(x_0) - f(x)| + |f(x) - f(y_0)| < \delta$$

lo cual es absurdo. $\square$

A.5.2. Convergencia débil*

Como vimos, la topología débil sobre X^* es la topología generada por X^{**}. Cada $x \in X$ induce la funcional lineal acotada $J_x : X^* \to \mathbb{R}$ definida por $J_x(\phi) = \phi(x)$, por tanto, podemos considerar $X \subseteq X^{**}$.
La topología sobre X^* generada por X es llamada ***topología débil**** sobre X^* y denotada por τ_{w^*}, y la convergencia con respecto a esta topología es conocida como ***convergencia débil****.
Dado $f_0 \in X^*, x_1, \dots, x_n \in X$ y $\varepsilon > 0$, los conjuntos

$$V(f_0, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) = \left\{\phi \in X^* : |\phi(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon,\ \forall i = 1, \dots, n\right\}$$

conforman una base para la topología débil* τ_{w^*}. Además, nótese que

$$V(f_0, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} J_{x_i}^{-1}(B(f_0(x_i), \varepsilon))$$

y $\tau_{w^*} \subsetneq \tau_w \subsetneq \tau_{||\cdot||}$.

Proposición A.3. *Sea (f_λ) una net en X^*.*

$$f_\lambda \xrightarrow{w^*} f \Leftrightarrow f_\lambda(x) \to f(x) \text{ para todo } x \in X$$

En efecto. Si $f_\lambda \xrightarrow{w^*} f$, por continuidad de cada J_x se tiene $J_x(f_\lambda) \to J_x(f)$, es decir, $f_\lambda(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$.
Recíprocamente, sea $U \in \tau_{w^*}$ tal que $f \in U$, entonces existe $V(f_0, x_1, \dots, x_n, \varepsilon)$ tal

que $f \in V(f_0, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) \subseteq U$, por tanto, $f(x_i) \in B(f_0(x_i), \varepsilon)$.
Luego, existe λ_i tal que $f_\lambda(x_i) \in B(f_0(x_i), \varepsilon)$ para todo $\lambda \geq \lambda_i$. Escogiendo $\lambda_0 \geq \lambda_i$ para todo i, $f_\lambda(x_i) \in B(f_0(x_i), \varepsilon)$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$.
Así, $f_\lambda \in V(f_0, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) \subseteq U$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$, es decir, $f_\lambda \xrightarrow{w^*} f$. $\square$

Proposición A.4. *El espacio topológico* (X^*, τ_{w^*}) *es Hausdorff.*

En efecto. Sean $f \neq g$ en X^*, entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$.
Sea $0 < \delta < |f(x) - g(x)|$. Si $f_0 \in V(f, x, \delta/2) \cap V(g, x, \delta/2)$, entonces $|f_0(x) - f(x)| < \delta/2$ y $|f_0(x) - g(x)| < \delta/2$. Luego,

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f_0(x)| + |f_0(x) - g(x)| < \delta$$

lo cual es absurdo. $\square$

Teorema A.5.1 (Banach-Alaoglu). *Si* X *es un espacio vectorial normado, la bola unitaria cerrada* $B^* = \{f \in X^* : ||f|| \leq 1\}$ *es un conjunto compacto en la topología débil*.*

Apéndice B

Medida

Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un álgebra, una función $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ es llamada *premedida* sobre $\mathcal{A}$ si

i) $\mu_0(\emptyset) = 0$

ii) si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una secuencia de conjuntos disjuntos en $\mathcal{A}$ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, entonces $\mu_0(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$.

Teorema B.0.1 (Extensión de Caratheodory-Hahn)**.** *Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un álgebra y μ_0 una premedida sobre $\mathcal{A}$. Existe una medida μ sobre $\sigma(\mathcal{A})$ cuya restricción sobre $\mathcal{A}$ es μ_0. Además, si μ_0 es σ-finito, entonces la extensión de μ_0 a una medida sobre $\sigma(\mathcal{A})$ es única.*

B.1. Medida Producto

Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espacios de medida. Dado el conjunto de rectángulos $\mathcal{R} = \{A \times B : A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{N}\}$, la colección $\mathcal{A}$ de uniones finitas disjuntas de rectángulos forma un álgebra. Supongamos que $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i \in \mathcal{A}$ también se expresa como una unión disjunta contable de rectángulos $C_j \times D_j$.

Dado $(x,y) \in X \times Y$:

$$\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(x)\chi_{B_i}(y) = \chi_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i}(x,y) = \chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \times D_j}(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{C_j \times D_j}(x,y)$$

Así, integrando respecto a x tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\chi_{B_i}(y) &= \int_X \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(x)\chi_{B_i}(y)d\mu(x) = \int_X \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{C_j}(x)\chi_{D_j}(y)d\mu(x) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(C_j)\chi_{D_j}(y)\end{aligned}$$

e integrando respecto a y

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\nu(B_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(C_j)\nu(D_j)$$

Luego, la aplicación $\pi : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ definida por

$$\pi\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i\big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\nu(B_i)$$

es una premedida. Por el Teorema de Extensión de Caratheodory-Hahn podemos extender π a una medida definida sobre $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ llamada *medida producto* y denotada por $\mu \otimes \nu$.

Así tenemos un nuevo espacio de medida $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \otimes \nu)$ llamado *espacio de medida producto.*

Supongamos que μ y ν son σ-finitos, entonces $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ y $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ con $\mu(A_i) < \infty$ y $\nu(B_i) < \infty$. Luego, $X \times Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_i \times B_j$ con $\pi(A_i \times B_j) < \infty$. Por tanto, π es σ-finito y la extensión $\mu \otimes \nu$ es la única medida definida sobre $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ que cumple

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \times \nu(B)$$

para todo rectángulo $A \times B$.

Observación. *Del mismo modo podemos definir la medida producto para un número finito de medidas. Sean $(X_j, \mathcal{M}_j, \mu_j)$ espacios de medida para $j = 1, \dots, n$. Dado el conjunto de rectángulos $\mathcal{R} = \{\prod_{i=1}^n A_i : A_i \in \mathcal{M}_i\}$, la colección $\mathcal{A}$ de uniones finitas disjuntas de rectángulos forma un álgebra. Luego, existe una medida definida sobre $\sigma(\mathcal{R}) = \otimes_{i=1}^n \mathcal{M}_i$ y denotada por $\otimes_{i=1}^n \mu_i$ tal que para todo rectángulo $\prod_{i=1}^n A_i$ se tiene*

$$\otimes_{i=1}^n \mu_i(\prod_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n \mu_i(A_i)$$

Más aún, si cada μ_j es σ-finito, entonces $\otimes_{i=1}^n \mu_i$ es la única medida definida sobre $\otimes_{i=1}^n \mathcal{M}_i$ que satisface la igualdad anterior para todo rectángulo.

Dado $x \in X, y \in Y$ y $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, las secciones $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$ y $E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$ son medibles. De forma similar, dado $f : X \times Y \to [0, \infty]$ medible, las secciones f_x y f_y definidas por $f_x(y) = f^y(x) = f(x, y)$ son medibles.

Teorema B.1.1 (Principio de Cavalieri). *Supongamos que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ son espacios de medida σ-finitos. Si $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, entonces las funciones $x \mapsto \nu(E_x)$ y $y \mapsto \mu(E^y)$ son medibles sobre X e Y respectivamente, y*

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y)$$

Teorema B.1.2 (Teorema de Fubini-Tonelli). *Supongamos que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ son espacios de medida σ-finitos.*

1. *Si $f : X \times Y \to [0, \infty]$ es medible, entonces las funciones $g(x) = \int f_x d\nu$ y $h(y) = \int f^y d\mu$ son medibles y*

$$\int_{X \times Y} f d\mu \otimes \nu = \int_X \left[\int_Y f_x(y) d\nu(y) \right] d\mu(x) = \int_Y \left[\int_X f^y(x) d\mu(x) \right] d\nu(y)$$

2. *Si $f : X \times Y \to [-\infty, \infty]$ es integrable respecto a $\mu \otimes \nu$, entonces f_x es integrable para casi todo $x \in X$ con respecto a ν y f^y es integrable para casi todo*

$y \in Y$ con respecto a μ. Además, las funciones $g(x) = \int f_x d\nu$ y $h(y) = \int f^y d\mu$ definidas casi para todo punto son integrables respeco a μ y ν respectivamente, y

$$\int_{X\times Y} f d\mu \otimes \nu = \int \left[\int f_x(y) d\nu(y) \right] d\mu(x) = \int \left[\int f^y(x) d\mu(x) \right] d\nu(y)$$

Observación. *La hipótesis de σ-finito, medibilidad o integrabilidad de f es necesaria en cada caso.*

B.2. Teorema de Representación de Riesz

Sea X un espacio topológico Hausdorff. Denotemos por $\mathcal{B}_X$ al σ-álgebra de Borel sobre X (σ-álgebra generado por los subconjuntos abiertos de X).
Una *medida de Borel sobre* X es una medida cuyo dominio es $\mathcal{B}_X$. Supongamos que $\mathcal{A}$ es un σ-álgebra sobre X tal que $\mathcal{B}_X \subseteq \mathcal{A}$.

Definición B.1. Una medida positiva μ sobre $\mathcal{A}$ es llamada *regular* si

1. cada compacto $K \subseteq X$ satisface $\mu(K) < \infty$.

2. (*regular exterior*) cada $A \in \mathcal{A}$ satisface

$$\mu(A) = \text{ínf}\{\mu(U) : A \subseteq U,\ U \text{ abierto}\}$$

3. (*regular interior*) cada abierto $U \subseteq X$ satisface

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq U,\ K \text{ compacto}\}$$

Una *medida regular de Borel sobre* X es una medida regular sobre $\mathcal{B}_X$.

Proposición B.1. *Sea X un espacio Hausdorff, $\mathcal{A}$ un σ-álgebra sobre X que incluye a $\mathcal{B}(X)$ y μ una medida regular sobre $\mathcal{A}$. Si $A \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) < \infty$ entonces*

$$\mu(A) = \sup\left\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ compacto}\right\}$$

Teorema B.2.1 (Lusin)**.** *Sea X un espacio Hausdorff localmente compacto, $\mathcal{A}$ un σ-álgebra sobre X que incluye a $\mathcal{B}(X)$, μ una medida regular sobre $\mathcal{A}$ y $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ una función medible. Si $A \in \mathcal{A}$ y satisface $\mu(A) < \infty$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto compacto $K \subseteq A$ tal que $\mu(A - K) < \varepsilon$ y $f_{|K}$ es continua.*

Sea X un espacio localmente compacto y Hausdorff. Denotemos por $C_c(X)$ al conjunto de funciones continuas con soporte compacto. Decimos que $f \in C(X)$ se *anula en el infinito* si para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ es compacto, y denotamos

$$C_0(X) = \{f \in C(X) : f \text{ se anula en el infinito}\}$$

Proposición B.2. *Sea X localmente compacto Hausdorff. Entonces $C_c(X)$ es denso en $C_0(X)$.*

Lo primero que debemos notar es que cada $f \in C_c(X)$ es integrable respecto a a cualquier medida regular sobre X, pues f es acotada y la medida regular es finita sobre conjuntos compactos. Por tanto, si μ es una medida regular de Borel,

$$\begin{array}{rccc} I_\mu : & C_c(X) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \int_X f d\mu \end{array}$$

define una funcional lineal sobre $C_c(X)$.

Con esto en mente surgen dos interrogantes. ¿Pueden distintas medidas regulares de

Borel inducir la misma funcional? ¿Qué funcionales surgen de esta manera? Ambas preguntas serán resueltas con el Teorema de representación de Riesz.

Una funcional lineal I sobre $C_c(X)$ es llamada *positiva* si para cada función no negativa $f \in C_c(X)$ se tiene $I(f) \geq 0$.
Por ejemplo, si μ es una medida regular de Borel sobre X, la funcional I_μ es positiva.

Sea X localmente compacto Hausdorff y $U \subseteq X$ abierto. Si $f \in C_c(X)$, denotamos por $f \prec U$ si $0 \leq f \leq \chi_U$ y $\text{supp}(f) \subseteq U$.

Lema B.2.2. *Sea X localmente compacto Hausdorff, μ medida regular de Borel sobre X y $U \subseteq X$ abierto. Entonces*

$$\mu(U) = \sup\Big\{ \int_X f d\mu : f \in C_c(X), f \prec U \Big\}$$

Teorema B.2.3 (Representación de Riesz)**.** *Sea X localmente compacto Hausdorff, y sea I una funcional lineal positiva sobre $C_c(X)$. Entonces existe una única medida regular de Borel μ sobre X tal que*

$$I(f) = \int_X f d\mu, \text{ para todo } f \in C_c(X)$$

B.3. Medida con signo

Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible. Una *medida con signo* sobre $(X, \mathcal{M})$ es una función $\mu : \mathcal{M} \to [-\infty, \infty]$ que satisface :

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. μ asume a lo más uno de los valores $\pm\infty$

3. si $\{E_n\}$ es una secuencia de conjuntos disjuntos en $\mathcal{M}$, entonces $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$, donde esta suma converge absolutamente si $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) < \infty$.

Definición B.2. Si μ es una medida con signo sobre $(X, \mathcal{M})$, un conjunto $E \in \mathcal{M}$ es llamado *positivo* (resp. *negativo*, *nulo*) para μ si $\mu(F) \geq 0$ (resp. $\mu(F) \leq 0$, $\mu(F) = 0$) para todo $F \in \mathcal{M}$ tal que $F \subseteq E$.

Teorema B.3.1 (Teorema de descomposición de Hahn)**.** *Si μ es una medida con signo sobre $(X, \mathcal{M})$, entonces existe un conjunto positivo P y un conjunto negativo N para μ tal que $X = P \cup N$ y $P \cap N = \emptyset$.*

Decimos que dos medidas con signo μ y ν sobre $(X, \mathcal{M})$ son *mutuamente singulares* si existen $E, F \in \mathcal{M}$ tales que $E \cap F = \emptyset, E \cup F = X$, E es nulo para μ y F es nulo para ν. Denotamos esta relación mediante $\mu \perp \nu$.

Teorema B.3.2 (Teorema de descomposición de Jordan)**.** *Si μ es una medida con signo sobre $(X, \mathcal{M})$, existen μ^+ y μ^- medidas positivas únicas sobre $(X, \mathcal{M})$ tales que $\mu = \mu^+ - \mu^-$ y $\mu^+ \perp \mu^-$.*

Si μ es una medida con signo sobre $(X, \mathcal{M})$, definimos la *variación total* de μ como la medida $|\mu|$ definida por

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^-$$

Observación. *Si $X = P \cup N$ es una descomposición de Hahn para la medida con signo μ, $f = \chi_P - \chi_N$ y $\nu = |\mu|$:*

$$\int_E f d\nu = \mu(E)$$

Definimos el conjunto de funciones integrables $L^1(\mu) = L^1(\mu^+) \cap L^1(\mu^-)$, donde para cada $f \in L^1(\mu)$

$$\int f d\mu = \int f d\mu^+ - \int f d\mu^-$$

Sea X localmente compacto Hausdorff. Denotemos por $M_r(X)$ al conjunto de medidas con signo finitas que pueden ser escritas como la diferencia de dos medidas positivas regulares de Borel. Podemos dotar al espacio $M_r(X)$ con la norma

$$||\mu|| = |\mu|(X)$$

Teorema B.3.3. *Sea X localmente compacto Hausdorff. La aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & M_r(X) & \to & C_c(X)^* \\ & \mu & \mapsto & I_\mu \end{array}$$

es un isomorfismo isométrico.

B.4. Convergencia débil* sobre $M(X)$

Denotemos por $M(X) = \{\mu \in M_r(X) : \mu(X) = 1, \mu \geq 0\}$ al conjunto de medidas regulares de probabilidad sobre el conjunto compacto Hausdorff X. Como $C_c(X) = C(X)$, tenemos que $M_r(X)$ es isomorfo e isométrico a $C(X)^*$. Por el teorema de Alaoglu, la bola unitaria cerrada

$$B^* = \{I \in C(X)^* : ||I|| \leq 1\}$$

es compacta con la topología débil*. Dado $\mu \in M(X)$ se tiene que $\varphi(\mu) = I_\mu \in B^*$, de donde $\varphi\big(M(X)\big) \subseteq B^*$. Veamos que $\varphi\big(M(X)\big)$ es débilmente* cerrado.
Sea $\varphi(\mu_\lambda)$ una net en $\varphi\big(M(X)\big)$ que converge débilmente* a $\varphi(\mu)$. Considerando $f \equiv 1 \in C(X)$ tenemos que $1 = \mu_\lambda(X) = I_{\mu_\lambda}(f) \xrightarrow{w^*} I_\mu(f) = \mu(X)$, de donde $\mu(X) = 1$. Además, $g \in C(X)$ no negativo implica $0 \leq I_{\mu_\lambda}(g)$, y tomando límite se tiene $0 \leq I_\mu(g)$; por tanto, I_μ es positivo, es decir, μ es positivo. Luego, $\varphi(\mu) \in \varphi\big(M(X)\big)$, de donde $\varphi\big(M(X)\big)$ es débilmente* cerrado.
Así, $\varphi\big(M(X)\big) = \{\varphi(\mu) = I_\mu : \mu \in M(X)\}$ es débilmente* compacto.

Recordemos que $M_r(X)$ y $C(X)^*$ al ser isomorfos e isométricos podemos considerarlos indistintos. Por tanto, podemos decir que $M(X)$ es débilmente* compacto. Luego, la net (μ_λ) en $M(X)$ converge débilmente* a $\mu \in M(X)$ si, y solo si $\int_X f d\mu_\lambda \to \int_X f d\mu$ para todo $f \in C(X)$.[1]

B.4.1. Propiedades de $M(X)$

Sea X un espacio compacto Hausdorff y $f \in C(X)$. Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} I_f: & M(X) & \to & \mathbb{R} \\ & \mu & \mapsto & \int_X f d\mu \end{array}$$

Si (μ_λ) es una net en $M(X)$ que converge débilmente* a $\mu \in M(X)$, entonces $\int_X g d\mu_\lambda \to \int_X g d\mu$ para todo $g \in C(X)$. En particular, $\int_X f d\mu_\lambda \to \int_X f d\mu$, es decir, $I_f(\mu_\lambda) \to I_f(\mu)$. Luego, I_f es continua si $M(X)$ es dotado con la topología débil*.

Proposición B.3. *Sean X e Y dos espacios Hausdorff compactos. La aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \psi: & M(X) \times M(Y) & \to & M(X \times Y) \\ & (\mu, \nu) & \mapsto & \mu \otimes \nu \end{array}$$

es continua, donde $M(X)$ y $M(Y)$ están dotados con la topología débil y $M(X) \times M(Y)$ con la topología producto.*

Prueba. Sea $(\mu_\lambda, \nu_\lambda)$ una net en $M(X) \times M(Y)$ que converge a (μ, ν). Dado $f \in C(X \times Y)$ y $\varepsilon > 0$, por el Teorema de Stone-Weierstrass[2] existen $g_1, \ldots, g_n \in C(X)$

[1] De hecho, podríamos considerar la topología $\tau^* = \{\varphi^{-1}(A) : A \in \tau_{w^*}\}$ sobre $M_r(X)$, de donde se tiene que $\varphi : (M_r(X), \tau^*) \to (C(X)^*, \tau_{w^*})$ es un homeomorfismo. Por tanto, $M(X)$ es compacto en la topología τ^*. Así, la net (μ_λ) en $M(X)$ converge a $\mu \in M(X)$ en τ^* si, y solo si $I_{\mu_\lambda} \xrightarrow{w^*} I_\mu$, es decir, $\int_X f d\mu_\lambda \to \int_X f d\mu, \forall f \in C(X)$.

[2] **Stone Weierstrass**: Si X es compacto Hausdorff y $\mathcal{A}$ es un subálgebra de $C(X, \mathbb{R})$ que contiene una función constante no nula y nunca se anula, entonces $\mathcal{A}$ es denso en $C(X, \mathbb{R})$.

y $h_1, \ldots, h_n \in C(Y)$ tales que

$$||f - F|| < \varepsilon$$

donde $F = \sum_{i=1}^{n} g_i h_i \in C(X \times Y)$. Ahora,

$$\begin{aligned}
\int_{X\times Y} F d(\mu_\lambda \otimes \nu_\lambda) &= \int_{X\times Y} \sum_{i=1}^{n} g_i h_i d(\mu_\lambda \otimes \nu_\lambda) &=& \sum_{i=1}^{n} \int_{X\times Y} g_i h_i d(\mu_\lambda \otimes \nu_\lambda) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_X g_i d\mu_\lambda \int_Y h_i \nu_\lambda &\to& \sum_{i=1}^{n} \int_X g_i d\mu \int_Y h_i \nu \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{X\times Y} g_i h_i d(\mu \otimes \nu) &=& \int_{X\times Y} F d(\mu \otimes \nu)
\end{aligned}$$

Por tanto, existe λ_0 tal que $\left| \int_{X\times Y} F d(\mu_\lambda \otimes \nu_\lambda) - \int_{X\times Y} F d(\mu \otimes \nu) \right| < \varepsilon$, para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Así,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{X\times Y} f d(\mu_\lambda \otimes \nu_\lambda) - \int_{X\times Y} f d(\mu \otimes \nu) \right| \leq & \left| \int_{X\times Y} f d(\mu_\lambda \otimes \nu_\lambda) - \int_{X\times Y} F d(\mu_\lambda \otimes \nu_\lambda) \right| \\
+ & \left| \int_{X\times Y} F d(\mu_\lambda \otimes \nu_\lambda) - \int_{X\times Y} F d(\mu \otimes \nu) \right| \\
+ & \left| \int_{X\times Y} F d(\mu \otimes \nu) - \int_{X\times Y} f d(\mu \otimes \nu) \right| \\
< & \ \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon
\end{aligned}$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Luego,

$$\int_{X\times Y} f d(\mu_\lambda \otimes \nu_\lambda) \to \int_{X\times Y} f d(\mu \otimes \nu)$$

para todo $f \in C(X \times Y)$, es decir, $\psi(\mu_\lambda, \nu_\lambda) = \mu_\lambda \otimes \nu_\lambda \to \mu \otimes \nu = \psi(\mu, \nu)$. $\square$

Apéndice C

Espacios Vectoriales Topológicos

C.1. Definición y propiedades

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ está dotado con la topología Euclidiana.

Definición C.1. El espacio vectorial X es llamado *espacio vectorial topológico* (e.v.t) si es provisto de una topología τ que hace continuas a las aplicaciones

$$\begin{array}{rccc} + : & V \times X & \to & X \\ & (x, y) & \mapsto & x + y \qquad\qquad \text{(suma)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times X & \to & X \\ & (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x \quad \text{(multiplicación por escalar)} \end{array}$$

Definición C.2. Sean X e Y dos e.v.t sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.
Decimos que X e Y son *topológicamente isomorfos* si existe un isomorfismo $X \to Y$ que a la vez es un homeomorfismo.

Proposición C.1. *Sea X un e.v.t sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces:*

1. Para todo $x_0 \in X$ el mapeo $f : X \to X$ dado por $f(x) = x + x_0$ es un homeomorfismo.

2. Para todo $\lambda \neq 0$ el mapeo $g : X \to X$ dado por $g(x) = \lambda x$ es un isomorfismo topológico.

Corolario C.1.0.1. *El filtro $\mathcal{N}_x$ de vecindades de x en un e.v.t X coincide con la familia de conjuntos $O + x$ para todo $O \in \mathcal{N}_0$, donde $\mathcal{N}_0$ es el filtro de vecindades del origen.*

Proposición C.2. *Para todo $v \in V$, la aplicación $\varphi_v : \mathbb{K} \to V$ dada por $\varphi_v(\lambda) = \lambda v$ es continua.*

En efecto. La aplicación $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K} \times V$ definida por $f(\lambda) = (\lambda, v)$ es claramente contínua por definición de la topología producto.
Como la multiplicación por escalar es continua, φ_v se expresa como una composición de funciones continuas. □

Definición C.3. Sea U un subconjunto del espacio vectorial X.

1. U es *absorbente* si $\forall x \in X$, $\exists \rho > 0$ tal que $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| \leq \rho$ se tiene $\lambda x \in U$.

2. U es *balanceado* si $\forall x \in U$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| \leq 1$ se tiene $\lambda x \in U$.

Nótese que si un conjunto U es balanceado, entonces $U = -U$.

Teorema C.1.1. *Un filtro $\mathcal{F}$ de un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$ es el filtro de vecindades del origen con respecto a alguna topología compatible con la estructura vectorial de X si, y solo si*

1. $0 \in U$ para todo $U \in \mathcal{F}$.

2. $\forall U \in \mathcal{F}$, $\exists V \in \mathcal{F}$ tal que $V + V \subseteq U$.

3. $\forall U \in \mathcal{F}, \forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ *se tiene* $\lambda U \in \mathcal{F}$.

4. $\forall U \in \mathcal{F}$, U *es absorbente.*

5. $\forall U \in \mathcal{F}, \exists V \in \mathcal{F}$ *balanceada tal que* $V \subseteq U$.

Proposición C.3. *Un* X *e.v.t es Hausdorff si, y solo si* $\forall x \neq 0, \exists U \in \mathcal{N}_0$ *tal que* $x \notin U$.

Prueba. ($\Leftarrow$) Sean $x \neq y$ en X, entonces $x - y \neq 0$. Por hipótesis, existe $U \in \mathcal{N}_0$ tal que $x - y \notin U$. Por las condiciones 2. y 5. del teorema C.1.1 se tiene que existe un conjunto balanceado $V \in \mathcal{N}_0$ tal que $V + V \subseteq U$. Si $z \in (x + V) \cap (y + V)$ entonces $z = x + a = y + b$, con $a, b \in V$ y, por tanto, $x - y = b - a \in V - V = V + V \subseteq U$, lo cual es absurdo. Luego, $x + V$ y $y + V$ son vecindades abiertas disjuntas de x e y respectivamente.
($\Rightarrow$) Se sigue del hecho que X es Hausdorff. □

Esta proposición nos dice que un e.v.t X es $(T2)$ si, y solo si es $(T1)$.

Proposición C.4. *Sea* X *un e.v.t. Entonces:*

1. *Todo subespacio es un e.v.t.*

2. *Si* H *es un subespacio de* X*, entonces* $\overline{H}$ *también es e.v.t.*

Prueba.

1. Se sigue del hecho que la inclusión es continua.

2. Sean $x_0, y_0 \in \overline{H}$. Dado $U \in \mathcal{N}_0$, por el teorema C.1.1 existe $V \in \mathcal{N}_0$ tal que $V + V \subset U$. Como $V + x_0$ y $V + y_0$ son vecindades de x_0 y y_0 respectivamente, existen $x, y \in H$ tales que $x \in V + x_0$ y $y \in V + y_0$.
   Luego, $x + y \in (V + x_0) + (V + y_0) \subset U + (x_0 + y_0)$, con $x + y \in H$.
   De manera similar se prueba que $\lambda x_0 \in \overline{H}$.

□

C.2. Completitud para e.v.t

Definición C.4. Una secuencia $S = \{x_n\}$ en el e.v.t X es llamado *secuencia de Cauchy* si

$$\forall U \in \mathcal{N}_0, \exists N \in \mathbb{N} : x_n - x_m \in U,\ \forall n, m \geq N$$

Nótese que esta definición coincide con la definición usual en espacios métricos si la métrica es invariante por traslaciones[1].

En efecto. (x_n) es secuencia de Cauchy en (X, d) si, y solo si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon,\ \forall n, m \geq N$, es decir, $d(x_n - x_m, 0) \in B_0(\varepsilon),\ \forall n, m \geq N$.

Usando la subsecuencia $S_N = \{x_n : n \geq N\}$ podemos reescribir la definición anterior de la siguiente manera:

$$\forall U \in \mathcal{N}_0, \exists N \in \mathbb{N} : S_N - S_N \subseteq U$$

Definición C.5. Un filtro $\mathcal{F}$ sobre un subconjunto A de un e.v.t X es llamado *filtro de Cauchy* si

$$\forall U \in \mathcal{N}_0, \exists M \in \mathcal{F} : M - M \subseteq U$$

Proposición C.5. *Sea X un e.v.t. Entonces:*

a) Dado $x \in X$, el filtro de vecindades $\mathcal{N}_x$ es filtro de Cauchy.

b) Un filtro mas fino que un filtro de Cauchy también es un filtro de Cauchy.

c) Todo filtro convergente es un filtro de Cauchy.

Demostración. a) Sea $\mathcal{N}_x$ el filtro de vecindades de x y $U \in \mathcal{N}_0$. Por el teorema C.1.1 existe $V \in \mathcal{N}_0$ tal que $V - V \subset U$. Luego, $V + x \in \mathcal{N}_x$ y $(V + x) - (V + x) \subset U$.

[1] Si el e.v.t es metrizable, entonces ambas definiciones son equivalentes: *Teorema de Birkhoff-Kakutani*

b) Sean $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ filtros sobre X tales que $\mathcal{F}$ es filtro de Cauchy y $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. Dado $U \in \mathcal{N}_0$, existe $V \in \mathcal{F}$ tal que $V - V \subset U$. Luego, $\mathcal{F}'$ también es filtro de Cauchy.

c) Supongamos que el filtro $\mathcal{F}$ converge a x, entonces $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{F}$. Por a) se tiene que $\mathcal{N}_x$ es filtro de Cauchy, y por b) que $\mathcal{F}$ también es filtro de Cauchy.

□

Definición C.6. Un subconjunto A de un e.v.t X es llamado *completo* si cada filtro de Cauchy sobre A converge a algún punto $x \in A$.

Proposición C.6. *Sea X un e.v.t. Entonces:*

a) Si X es Hausdorff, cualquier subconjunto completo es cerrado.

b) Si X es completo, cualquier subconjunto cerrado es completo.

Prueba. a) Sea A un subconjunto completo del e.v.t Hausdorff X. Dado $x \in \overline{A}$ existe un filtro $\mathcal{F}$ en X tal que $A \in \mathcal{F}$ y converge a x, por tanto $\mathcal{F}$ es filtro de Cauchy. Consideremos el filtro $\mathcal{F}_A = \{U \in \mathcal{F} : U \subset A\}$ sobre A. Dado $V \in \mathcal{N}_0$, existe $U \in \mathcal{F}$ tal que $U - U \subset V$. Como $A \in \mathcal{F}$, $U' = A \cap U \in \mathcal{F}$ y $U' - U' \subset U - U \subset V$, por tanto $\mathcal{F}_A$ es filtro de Cauchy. Por hipótesis, $\mathcal{F}_A$ converge a algún $y \in A$. Como el espacio X es Hausdorff, $x = y$. Luego, $x \in A$.

b) Sea A un subconjunto cerrado del e.v.t X y $\mathcal{F}_A$ un filtro de Cauchy sobre A. Consideremos el filtro $\mathcal{F} = \{F \subset X : B \subset F \text{ para algún } B \in \mathcal{F}_A\}$. Como $\mathcal{F}_A \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ es filtro de Cauchy. Por hipótesis, existe $x \in X$ tal que $\mathcal{F}$ converge a x. Luego, $x \in \overline{A} = A$. Nótese que como $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{F}$ y $A \in \mathcal{F}$, entonces $U \cap A \in \mathcal{F}$ para todo $U \in \mathcal{N}_x$. Así, existe $B \in \mathcal{F}_A$ tal que $B \subset U \cap A \subset A$, por tanto $U \cap A \in \mathcal{F}_A$ para todo $U \in \mathcal{N}_x$, es decir, $\mathcal{F}_A$ converge a $x \in A$.

□

C.3. Operadores lineales

Sean X y E espacios vectoriales topológicos.

Teorema C.3.1. *Un operador lineal $T : X \to E$ es continuo si lo es en $x = 0$.*

Demostración. Sea $x \in X$ y V una vecindad abierta de $T(x)$, entonces $V - T(x)$ es una vecindad abierta de 0. Por hipótesis, existe una vecindad abierta U de 0 tal que $T(U) \subseteq V - T(x)$. Por linealidad de T se sigue que $T(U + x) \subseteq V$. □

Definición C.7. Decimos que una vecindad $V \in \mathcal{N}_0$ *absorbe al conjunto* $A \subseteq X$ si existe $t > 0$ tal que $A \subseteq tV$.
Un subconjunto $A \subseteq X$ es *acotado* si cada vecindad de 0 lo absorbe.

Teorema C.3.2. *Supongamos que el operador lineal $T : X \to E$ es acotado en alguna vecindad de 0, entonces T es continua.*

Demostración. Sea $V \in \mathcal{N}_0$ en X tal que $T(V) \subseteq E$ es acotado. Dado $U \in \mathcal{N}_0$ en E, existe $t > 0$ tal que $T(V) \subseteq tU$, de donde $T(\frac{1}{t}V) \subseteq U$. □

Lema C.3.3. *Sea V un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{K}$ y sea $L : V \to \mathbb{K}$ una funcional lineal con $L \neq 0$. Son equivalentes:*

a) L es contínua.

b) $\ker(L)$ es cerrado.

c) $\ker(L)$ no es denso.

d) L es acotado en alguna vecindad del 0.

En efecto. *a)* $\Rightarrow$ *b)* Como L es continua y $\{0\}$ es cerrado, $\ker(L) = L^{-1}(0)$ es cerrado.
b) $\Rightarrow$ *c)* Como $L \neq 0$, $\ker(L)^c \neq \emptyset$ es abierto. Luego, el conjunto $\ker(L)$ no es denso.
c) $\Rightarrow$ *d)* Supongamos que $\ker(L)$ no es denso, entonces existe un conjunto abierto

no vacío U tal que $\ker(L) \cap U = \emptyset$. Tomando $x \in U$ y haciendo $V = U - x$ tenemos que $V \in \mathcal{N}_0$. Por el teorema C.1.1, existe $W \in \mathcal{N}_0$ balanceada tal que $W \subseteq V$. Así $\ker(L) \cap (W + x) = \emptyset$, y por tanto $-f(x) \notin f(W)$. Al ser $f(W) \subseteq \mathbb{K}$ un conjunto balanceado, se tiene que $f(W)$ es acotado.
d) $\Rightarrow$ *a)* Es un caso particular del teorema anterior. □

C.4. Dimensión Finita

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.
Recordemos que si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es una base de V, entonces V es isomorfo a $\mathbb{K}^n$ vía

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{K}^n & \to & V \\ & (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & \mapsto & \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \end{array}$$

Si damos una estructura de espacio vectorial topológico a V y consideramos $\mathbb{K}$ dotado con la topología Euclidiana, es natural preguntarnos si tal isomorfismo preserva la estructura de espacio vectorial topológico.

Teorema C.4.1. *Sea V un espacio vectorial topológico Hausdorff finito dimensional sobre $\mathbb{K}$. Entonces:*

i) V es topológicamente isomorfo a $\mathbb{K}^n$, donde $n = dim(V)$.

ii) Cada funcional lineal sobre V es continua.

iii) Cada aplicación lineal de V sobre un espacio vectorial topológico Y es continua.

Demostración. Consideremos la base $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de V y el isomorfismo
$\varphi : \mathbb{K}^n \to V$ dado al inicio de la sección.

1. φ es un continua.

Si $n = 1$, por la proposición C.2 se tiene que $\varphi = \varphi_{x_1}$ es continua.

Si $n > 1$,

$\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \varphi_{x_1}(\lambda_1) + \ldots + \varphi_{x_n}(\lambda_n) = [\varphi_{x_1} \circ \pi_1 + \ldots + \varphi_{x_n} \circ \pi_n](\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Así, φ es continua desde que la suma es continua.

2. φ es abierta y *ii*) ocurre.

   Si dim(V)= 1, entonces $\varphi^{-1} : V \to \mathbb{R}$ está dada por $\varphi^{-1}(\lambda x_1) = \lambda$. Luego, φ^{-1} es continua pues $\ker(\varphi^{-1}) = \{0\}$ con V Hausdorff. Por tanto φ es abierta. Además, si L es una funcional no nula, entonces existe $x \neq 0$ tal que $L(x) \neq 0$. Como $\dim(V) = 1$, $\{x\}$ es base de V. Dado $y \in V$, $y = \lambda x$ y

$$L(y) = L(\lambda x) = \lambda L(x) = L(x)\varphi^{-1}(y)$$

   Así, L es continua y *ii*) ocurre.

   Supongamos que *i*) y *ii*) ocurren para $n \leq d - 1$.

   Primero veamos que *ii*) ocurre si $n = d$. Sea L una funcional no nula sobre V. Como $L \neq 0$, existe $x \in V$ tal que $L(x) \neq 0$. Notemos que para cualquier $y \in V$, el vector $y - \frac{L(y)}{L(x)}x \in \ker(L)$. Así, en el espacio cociente $V/\ker(L)$ se tiene que $[y] = [\frac{L(y)}{L(x)}x] = \frac{L(y)}{L(x)}[x]$ y por tanto $\{[x]\}$ es base de $V/\ker(L)$. Como $\dim(V/\ker(L)) = \dim(V) - \dim\ker(L)$, se tiene que $\dim\ker(L) = d - 1$. Por hipótesis tenemos que $\ker(L)$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{K}^{d-1}$. Esto implica que $\ker(L)$ es un subespacio completo de X. Como $\ker(L)$ es un e.v.t Hausdorff, por el lema C.3.3 se tiene que L es continua pues $\ker(L)$ es cerrado. Luego, por inducción se tiene que *ii*) ocurre.

   Ahora veamos que *i*) ocurre. La aplicación

$$\begin{array}{cccc} \varphi^{-1}: & V & \to & \mathbb{K}^n \\ & x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i & \mapsto & (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \end{array}$$

puede ser reescrita por $\varphi^{-1}(x) = (L_1(x), \ldots, L_n(x))$, donde para cada j el funcional $L_j : V \to \mathbb{R}$ está definida por $L_j(x) = \lambda_j$. Como cada L_j es continua, se sigue que φ^{-1} es continua y por tanto $i)$ ocurre.

3. $iii)$ ocurre.

   Sea $f : V \to Y$ una aplicación lineal, entonces para cada $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in V$ se tiene $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$. Así, podemos reescribir f mediante

   $$f(x) = (\sum_{i=1}^{n} \varphi_{f(x_i)} \circ \pi_i)_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} = (\sum_{i=1}^{n} \varphi_{f(x_i)} \circ \pi_i)_{(\varphi^{-1}(x))} = (\sum_{i=1}^{n} \varphi_{f(x_i)} \circ \pi_i \circ \varphi^{-1})_{(x)}$$

   Luego, como cada término es continuo, la aplicación f es continua.

□

Corolario C.4.1.1 (Teorema de Tychonoff)**.** *La única topología que hace a $\mathbb{K}^n$ un e.v.t Hausdorff es la topología Euclideana. Equivalentemente, un e.v.t finito dimensional admite una única topología que lo convierte en un espacio Hausdorff.*

Prueba. Sea X un e.v.t finito dimensional Hausdorff con la topología τ. Sea τ' otra topología X que convierte a X en un e.v.t. Por el teorema anterior, la identidad $i : (X, \tau) \to (X, \tau')$ es continua, y por tanto $\tau' \subseteq \tau$. Así, la topología Euclidiana sobre X es más fina que cualquier otra topología que convierte a X en un e.v.t. □

C.5. Teorema KKM

El Lema de Sperner ofrece una prueba clásica y constructiva del Lema KKM. Sin embargo, ya que estamos entorno al área de Teoría de Juegos, ofreceremos una prueba alterna mediante la existencia de equilibrios de Nash en juegos compactos continuos.

Lema C.5.1 (KKM)**.** *Sea $S = Co(\{e_1, \dots, e_n\}) \subset \mathbb{R}^n$ el $(n-1)$-simplex estándar. Si $\{G_i\}_{i=1}^n$ es una colección finita de conjuntos tales que*

i) Cada $G_i \subseteq S$ es cerrado.

ii) Para cada subconjunto $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ se tiene

$$Co(\{e_j : j \in J\}) \subseteq \bigcup_{j \in J} G_j$$

Entonces $\bigcap_{i=1}^n G_i \neq \emptyset$.

Prueba. Consideremos $X_1 = X_2 = S$ y las funciones $u_1, u_2 : S \times S \to \mathbb{R}$ definidas por $u_1(x, y) = -||x - y||$ y $u_2(x, y) = \sum_{i=1}^n y_i d(x, G_i)$.
Así, el juego estratégico compacto y continuo posee equilibrio de Nash (x^*, y^*).

$$0 \geq -||x^* - y^*|| = u_1(x^*, y^*) \geq u_1(y^*, y^*) = -||y^* - y^*|| = 0$$

$$\max_i d(x^*, G_i) \geq \sum_{i=1}^n y_i^* d(x^*, G_i) = u_2(x^*, y^*) \geq u_2(x^*, e_k) = d(x^*, G_k)$$

Luego, $x^* = y^*$ y $u_2(x^*, y^*) = \max_i d(x^*, G_i)$. Dado $I = \{i : x_i^* > 0\}$ tenemos

$$u_2(x^*, y^*) = \sum_{i \in I} y_i^* d(x^*, G_i) = \max_i d(x^*, G_i)$$

de donde $\max_i d(x^*, G_i) = d(x^*, G_j)$ para todo $j = 1, \dots, n$.
Adicionalmente, como $x^* \in Co(\{e_j : j \in I\}) \subseteq \cup_{j \in I} G_j$ se tiene que $x^* \in G_{j_0}$. Por tanto, $x^* \in \overline{G}_j$ para todo j. Finalmente, como cada G_j es cerrado se tiene que $x^* \in \cap_{i=1}^n G_i$. □

Teorema C.5.2 (KKM)**.** *Sea X un subconjunto arbitrario de un e.v.t Y. Cada $x \in X$ tiene asociado un conjunto cerrado $F(x) \subseteq Y$ tal que*

i) Para cada conjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ se tiene

$$Co(\{x_1, \dots, x_n\}) \subseteq \bigcup_{i=1}^n F(x_i)$$

ii) Al menos algún $F(x)$ es compacto.

Entonces $\bigcap_{x\in X} F(x) \neq \emptyset$.

Demostración. Como $\bigcap_{x\in X} F(x)$ es un subconjunto de algún conjunto compacto, basta ver que tal familia de conjuntos cerrados posee la propiedad de la intersección finita. Dado $\{x_1, \ldots x_n\} \subset X$, consideremos el $(n-1)$-simplex $S = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ y definamos la aplicación continua $\varphi : S \to Y$ mediante

$$\varphi\big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

Consideremos los conjuntos cerrados $G_i = \varphi^{-1}(F(x_i))$, $i = 1, \ldots, n$. Por i), para cualquier conjunto de índices $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ tenemos

$$\mathrm{Co}\big(\{x_{i_j} : 1 \leq j \leq k\}\big) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} F(x_{i_j})$$

Luego, el $(k-1)$-simplex $D = \mathrm{Co}\big(\{e_{i_j} : 1 \leq j \leq k\}\big)$ es un subconjunto de $\bigcup_{j=1}^{k} G_{i_j}$. Por el lema KKM tenemos que $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \neq \emptyset$, y por tanto $\bigcap_{i=1}^{n} F(x_i) \neq \emptyset$. □

Bibliografía

Carbonell-Nicolau, O. and Ok, E. A. (2007). Voting over income taxation. *Journal of Economic Theory*, 134(1):249–286.

Carmona, G. (2005). On the existence of equilibria in discontinuous games: three counterexamples. *International Journal of Game Theory*, 33(2):181–187.

Cohn, D. L. (2013). *Measure theory*. Springer.

Dugundji, J. (1970). Topology (5th edn).

Folland, G. B. (2013). *Real analysis: modern techniques and their applications*. John Wiley & Sons.

Fudenberg, D. and Tirole, J. (1991). Game theory, 1991. *Cambridge, Massachusetts*, 393(12):80.

Monteiro, P. K. and Page Jr, F. H. (2005). Uniform payoff security and nash equilibrium in metric games.

Reny, P. J. (1999). On the existence of pure and mixed strategy nash equilibria in discontinuous games. *Econometrica*, 67(5):1029–1056.

Sion, M. and Wolfe, P. (1957). On a game without a value. *Contributions to the theory of games*, 3:299–306.

Yu, J., Wang, N.-F., and Yang, Z. (2016). Equivalence results between nash equilibrium theorem and some fixed point theorems. *Fixed Point Theory and Applications*, 2016(1):69.