UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS

"ELEMENTOS DE LA DINÁMICA DE ITERACIÓN DE FUNCIONES"

PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

ELABORADO POR:

CESAR AUGUSTO VERGARAY ALBUJAR

ASESOR:

Dr. RUDY JOSE ROSAS BAZAN

LIMA – PERÚ

-2019-

” A mis padres, a mis amigos y a mi asesor, que a lo largo de este camino que llamamos vida hicieron que todo sea más divertido.”

Resumen

En este trabajo en primer lugar desarrollamos los preliminares de sistemas dinámicos tales como el concepto de órbita, período etc. En la primera sección hacemos énfasis en la función conocida como "tienda de campaña", y luego abarcamos "el caos de Li-Yorke".
Luego introducimos los conceptos preliminares para hallar la recíproca del teorema de Sharvkosky.
Después la siguiente sección está abocada principalmente a dar proposiciones y lemas para dar una prueba corta del recíproco del teorema de Sharvkosky.
A continuación, en la siguiente sección introducimos nuevos conceptos, hacemos mas proposiciones y lemas para dar una prueba del teorema de Li-Yorke, el cual es punto muy importante en nuestra tesis.
Por último tomamos algunos ejemplos, los cuales nos demuestran que las condiciones del teorema de Li-Yorke no se pueden debilitar.

Índice

Introducción... 1

Capítulo 1: Preliminares de Sistemas Dinámicos 2

1.1. La función tienda.. 4

1.2. Caos a la Li Yorque... .6

Capítulo 2: Preliminares de la recíproca del teorema de Sharkosky........... 15

Capítulo 3: Recíproca del teorema de Sharkosky.. 22

Capítulo 4: Teorema de Li-Yorke.. 28

Capítulo 5: Ejemplos... 38

Bibliografía... 41

Introducción

En este trabajo se presenta, de forma autocontenida, una disertación escrita sobre uno de los teoremas más importantes y hermosos de la dinámica unidimensional, se trata en realidad de una colección de resultados debidos al matemático ucraniano Oleksandr Mikolaiovich Sharkovsky $(1936-)$ publicados inicialmente en ruso en el año 1964, y que en la actualidad son reunidos con el nombre de Teorema de Sharkovsky.

El teorema de Sharkovsky permaneció sin conocerse fuera de la Europa Oriental hasta la segunda mitad de la década de 1970, cuando aparece publicado el artículo"Period three implies chaos"de Tien-Yien Li y James A. Yorke; en ese artículo se demuestra parcialmente un caso particular del Teorema de Sharkovsky, no obstante, se introduce, sin nombre, la noción de conjuntos scrambled, los cuales dan origen a lo que hoy se conoce con el nombre de Caos en el sentido de Li-Yorke.

Lo más llamativo de la teoría de sistemas dinámicos discretos es su novedad. Es en la segunda mitad del siglo XX (más específicamente en la década de los 60) cuando se despierta la curiosidad en la dinámica discreta, después del descubrimiento de dos de las "joyas de la corona"de esta teoría: el teorema de Sharkovsky y el caos en el sentido de Li-Yorke. Los ordenadores modernos jugaron también un importante rol, ayudando a descubrir impresionantes fenómenos matemáticos que habían estado ocultos hasta entonces. En esta primera parte del trabajo veremos mas a fondo el teorema de Sharkosky.

En la siguiente parte de la tesis veremos todo lo relacionado al teorema del caos de Li Yorke que fue publicado en 1975, con las introducciones adecuadas sobre lo que es un conjunto "scrambled", con la clara diferencia que ahora usaremos conceptos de análisis real en varias variables, para ver que este teorema no se puede extender a dimensiones superiores.

Capítulo 1

Preliminares de sistemas dinámicos

Sean $X = (X, d)$ un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Dado $f(X) \subset X$, podemos definir nuevas funciones a partir de la composición de f consigo misma. En este sentido definimos las iteradas f^n, de f inductivamente por $f^0 = Id$, donde Id es la función identidad de X, $f^1 = f$ y $f^{n+1} = f \ o \ f^n (n \geq 1)$.
Podemos ver que se cumple también lo siguiente:

- f^n es continua, pues es composición de funciones continuas
- Si $n, m \in \mathbb{N}$ entonces $f^n \ o \ f^m = f^{n+m}$ y $(f^n)^m = f^{nm}$

Definición 1.1. *Sean (X,d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Al conjunto*

$$\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots\} = \{f^n(x_0) : n \geq 0\}$$

se le llama órbita de $x_0 \in X$ bajo la función f, se denota por $O(x_0, f)$. A la sucesión $\{f^n(x_0)\}_{n \geq 0}$ se le llama trayectoria de x_0.

La trayectoria de x_0 describe las distintas posiciones que visita el punto x_0 con el paso del tiempo; es decir se inica en el punto x_0 y $f^n(x_0)$ es la posición de x_0 luego de transcurridas n unidades de tiempo. Cada $x \in X$ genera una órbita. Bajo este criterio f genera un sitema dinámico discreto. Nos interesa el comportamiento asintótico (límite) de cada una de las trayectorias del sistema.

Definición 1.2. *Sea X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función. Se dice que $x_0 \in X$:*

- *Es un punto periódico con primer período k si $f^k(x_0) = x_0$ y $f^k(x_0) \neq x_0$ para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$.*
- *Es un punto fijo de f si $f(x_0) = x_0$.*
- *Es un punto eventualmente fijo si existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que $f^{n+1}(x_0) = f^n(x_0)$ si $n > N$.*
- *Es un punto eventualmente periódico de f de período k, si existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $f^{n+k}(x_0) = f^n(x_0)$ para todo $n > N$*

Definición 1.3. *Si p es un punto periódico de período n entonces, a la órbita de p, $O = \{f^k(p) : k \in \mathbb{N}\}$ se le llama $n-$ciclo.*

Una observación fácil de ver es que si y es un punto periódico de período n entonces $f^{nk}(y) = y \;\; n \in \mathbb{Z}$

Lema 1.0.1. *Si $f^m(y) = y$ entonces el periodo de de y bajo f divide a m*

Demostración. Sea n el periodo de de y entonces existen $j, k \in \mathbb{Z}$ tal que $m = kn + j$ donde $0 \leq j \leq n-1$. Entonces

$$y = f^m(y) = f^{kn+j} = f^j(f^{kn}(y)) = f^j(f^n(y))^k = f^j(y)$$

de donde $j = 0$ pues sino contradiciría la minimalidad del período de y pues $j < n$. De aquí tenemos que $m = kn$ lo cual es lo mismo decir que, el período de y, osea n, divide a m.

$\square$

Proposición 1.1. *Sean $f : I \to I$ una función continua y $m, n \in \mathbb{N}$. Si y es un punto periódico de período m, entonces es un punto periódico de f^n con período $\frac{m}{mcd(m,n)}$*

Demostración. Sea z un punto periódico de período m bajo f y sea r el período de z para f^n. Como $(f^n(z))^r = f^{nr}(z) = z$ entonces por el lema anterior m divide a nr. Es decir que $\frac{m}{mcd(m,n)}$ divide a $\frac{n}{mcd(m,n)}r$. Sabiendo que $\frac{m}{mcd(m,n)}$ y $\frac{n}{mcd(m,n)}$ son primos relativos, entonces tenemos que $\frac{m}{mcd(m,n)}$ divide a r. Además $(f^n(z))^{\frac{m}{mcd(m,n)}} = (f^m(z))^{\frac{n}{mcd(m,n)}}$ y como $\frac{n}{mcd(m,n)} \in \mathbb{Z}$ y el período de z es m entonces tendremos que $(f^n(z))^{\frac{m}{mcd(m,n)}} = (f^m(z))^{\frac{n}{mcd(m,n)}} = z$. Y como r era el período de f^n aplicando del lema anterior tenemos que r divide $\frac{m}{mcd(m,n)}$. Es decir $r = \frac{m}{mcd(m,n)}$, lo cual significa que el período de f^n es $\frac{m}{mcd(m,n)}$. □

Proposición 1.2. *Sean $f : I \to I$ una función continua y $n, k \in \mathbb{N}$. Si y es un punto periódico def^n con período k entonces es un punto periódico de f con período $\frac{kn}{s}$ donde s divide a n y $1 = mcd(k, s)$*

Demostración. $f^{nk}(y) = (f^n(y))^k = y$, entonces el período de y bajo f divide a kn, dicho de otro modo, el período de f es $\frac{kn}{s}$ para algun $s \in \mathbb{N}$. Nosotros sabemos por la proposición anterior que el período de f^n es el período de f dividido entre el $mcd(Per(f), n)$. Dicho de otro modo $k = \frac{\frac{kn}{s}}{mcd(\frac{kn}{s},n)}$ de donde $mcd(\frac{kn}{s}, n) = \frac{n}{s}$. Pero recordando que

$$fracns = mcd(\frac{kn}{s}, n) = mcd(k\frac{n}{s}, \frac{n}{s}s) = \frac{n}{s}mcd(k, s)$$

de donde tenemos que $mcd(k, s) = 1$. Entonces como $\frac{kn}{s} \in \mathbb{N}$ y $mcd(k, s) = 1$ entonces se debe dar que $\frac{n}{s} \in \mathbb{N}$ es decir que n divide a s. □

1.1. La función tienda

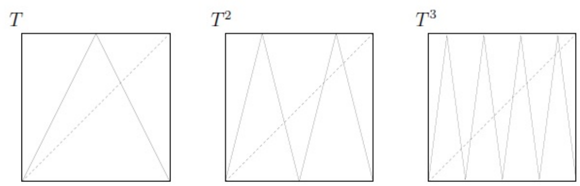
Definición 1.4. *A la función $T : [0, 1] \to [0, 1]$ definida por:*

$$T(x) = 1- \mid 1 - 2x \mid, x \in [0, 1]$$

, se llama función tienda.

Proposición 1.3. *La función tienda tiene un número fijo de puntos periódicos para cada período*

Demostración. Hay dos maneras de demostrar esto, la primera forma es solamente gráfica y la segunda es algebraica.
Para la primera manera consideremos la función tienda $T(x) = 1- \mid 1-2x \mid$, entonces iterandola dos veces y graficando tendremos que



Por medio de un análisis gráfico podemos ver que T^n tiene exactamente 2^n puntos periódicos de período n.
Para la segunda forma de demostrar, haré una pequeña afirmación que concluye de manera directa lo que deseamos. Sea E_n el cardinal de los puntos periódicos de período n. Afirmo que para hallar los puntos periódicos de período n debemos desarrollar una ecuación de grado 2^n, es decir que $Card(E_n) \leq 2^n$. Para $n = 1$ los puntos periódicos son los cuales $T_1(x) = x$ de donde $2 \mid x - \frac{1}{2} \mid = x$ de donde $3x^2 - 4x + 1 = 0$ el cual es una ecuación de grado $2 = 2^1$ de donde sus soluciones son $x = 1$ o $x = \frac{1}{3}$. Supongamos que se cumpla para n, intentaremos demostrar que se cumple para $n+1$. Sea $x \in E_{n+1}$ entonces $T_1^{n+1}(x) = x$ de donde $T_1(T_1^n(x)) = x$. De aquí $2 \mid T_1^n(x) - \frac{1}{2} \mid = x$ de donde $4(T_1^n)^2 - 4T_1^n - x + 1 = 0 ... (*)$ por hipótesis inductiva T_1^n tiene grado 2^n con lo cual la ecuación $(*)$ tiene grado 2^{n+1}. Pero nos damos cuenta que la solución de la ecuación $(*)$ cumple que $T^{n+1}(x) = x$ de donde tenemos que $Card(E_{n+1}) \leq 2^{n+1}$. De aquí se ve directamente que la cantidad de puntos periódicos de período n de T_1 es finito, es más está acotado por 2^n

□

Proposición 1.4. *El conjunto de puntos periódicos de la función tienda es denso*

Demostración. Por medio de un análisis gráfico se observa que T^n tiene un punto fijo en $[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^2}]$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots 2^n - 1\}$. Por lo tanto T tiene un punto periódico en $[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^2}]$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots 2^n - 1\}$. Sea $\epsilon > 0$ entonces por el principio arquimediano existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \epsilon$. Sea $x \in [\frac{i}{2^N}, \frac{i+1}{2^N}]$ para algun $i \in \{0, 1, \ldots, 2^N - 1\}$. En el intervalo donde pertenece x, ya fijado, sabemos que existe un punto periódico llamado p. Es tenemos que $p, x \in [\frac{i}{2^N}, \frac{i+1}{2^N}]$ donde p es un punto periódico. Entonces

$$\mid p - x \mid \leq \frac{i+1}{2^N} - \frac{i}{2^N} = \frac{1}{2^N} < \epsilon.$$

De aquí concluimos que $Per(T)$ es denso en $[0, 1]$. □

1.2. Caos a la Li Yorke

A continuación presentamos la definición de conjunto scrambled introducida en el artículo ”Period three implies chaos”de Li y Yorke, concepto que ha dado origen a lo que actualmente se conoce con el nombre de Caos en el sentido Li-Yorke, el cual es objeto de una intensa investigación en dinámica topológica.

Definición 1.5. *Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Un par de puntos x, y se dice:*

- *Distal si*
$$\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0.$$
- *Asintótico si*
$$\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$
- *Li-Yorke si no es distal ni asintótico, esto es,*
$$0 = \liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) < \limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)).$$

Definición 1.6. *Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que $x \in X$ es:*

- *asintóticamente periódico si existe un punto periódico p tal que*

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(p)) = 0$$

- *aproximadamente periódico si para cada $\epsilon > 0$, existe un punto periódico p y un entero positivo N tal que*

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(p)) < \epsilon \text{ para todo } n > N.$$

Es claro que cualquier punto asintóticamente periódico es aproximandamente periódico, ya que en este caso toomamos siempre el mismo punto periódico p que nos da la definición de asintóticamente periódico, y tomamos la definición de límite.

Definición 1.7. *Sea $f : X \to X$ una función continua. Un subconjunto S de X, con al menos dos elementos, se dice conjunto scrambled si, y solo si, no contiene puntos asintóticamente periódicos y para cada par de puntos $x, y \in S$, con $x \neq y$ el par (x, y) es un par de Li-Yorke, esto es, para cada $x, y \in S$ con $x \neq y$,*

$$\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0$$

y

$$\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$

Para cada $x \in S$ y cada punto periódico $p \in X$,

$$\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(p)) > 0.$$

Definición 1.8. *Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es caótica en el sentido Li-Yorke si existe un conjunto $S \subset X$ scrambled no numerable.*

Observación: La definición de conjunto *scrambled* puede variar según los autores. En particular algunos omiten la última propiedad de nuestra definición de conjunto *scrambled*. Sin embargo esto no induce diferencias en el caos en el sentido de Li-Yorke pues si S es un conjunto tal que cada par de puntos distintos $x, y \in S$, el par (x, y) es un par de Li-Yorke, entonces es posible encontrar un conjunto *scrambled* removiendo a lo más un punto de S. Esto es una consecuencia directa del siguiente lema.

Lema 1.2.1. *Sean (X, d) un espacio métrico, $f : X \to X$ una función continua y $S \subset X$. Supongamos que para todo par de puntos distintos $x, y \in S$ se tiene que*

$$\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0$$
$$\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$

Entonces S contiene a lo más un punto aproximadamente periódico

Demostración. Para demostrar esto lo haremos por contradicción. Supongamos que existan dos puntos x_1, x_2 distintos en S que son aproximadamente periódicos. Como son dos puntos distintos de S entonces por dato se cumple que $\delta = \limsup_{n\to\infty} d(f^n(x_1), f^n(x_2)) > 0$. Tomemos $0 < \epsilon < \frac{\delta}{5}$, entonces como x_1, x_2 son puntos aproximadamente periódicos por definición se cumple que existen puntos periódicos p_1, p_2 y enteros positivos N_1, N_2 tal que para todo $n \geq N_i$ se verifica que $d(f^n(x_i), f^n(p_i)) < \epsilon$ para $i = 1, 2$. Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$ tendremos que

$$\text{para } n \geq N \Rightarrow d(f^n(x_i), f^n(p_i)) < \epsilon.$$

Como p_1, p_2 son puntos periódicos, sean k_1, k_2 sus períodos respectivamente y sea $k = mcm(k_1, k_2)$. Como $f^n(x_i) \in B_\epsilon(f^n(p_i))$ para todo $n \geq N$, donde $B_\epsilon(f^n(p_i)) = \{y \in X : d(f^n(p_i), y) < \epsilon\}$(esto se cumple en nuestro caso ya que la distancia entre estos dos puntos es menor que ϵ por la afirmaciones anteriores hechas). Entonces

$$f^n(x_i) \in \bigcup_{j'=0}^{\infty} B_\epsilon(f^{j'}(p_i)) \text{ para } n \geq N.$$

Pero nosotros sabemos que por el algoritmo de Euclides,$j' = kl + j$ donde $0 \leq j \leq k-1$ entonces $f^{j'}(p_i) = f^{kl+j}(p_i) = f^j(f^{kl}(p_i)) = f^j(f^k(p_i))^l = f^j(p_i)$. Donde la última igualdad se da, pues k divide a k_1, k_2 y como estos son los períodos de p_i, es decir $f^k(p_i) = p_i$. Esta última observación nos dice que $B_\epsilon(f^{j'}(p_i)) = B_\epsilon(f^j(p_i))$ con $0 \leq j \leq k-1$ con lo cual podemos decir que

$$f^n(x_i) \in \bigcup_{j=0}^{k-1} B_\epsilon(f^j(p_i)) \text{ para } n \geq N.$$

Lo cual también nos dice que

$$\bigcup_{n \geq N} f^n(x_i) \subset \bigcup_{j=0}^{k-1} B_\epsilon(f^j(p_i))$$

Consideremos el conjunto

$$K = \bigcup_{i=1,2} (\bigcup_{m=0}^{N-1} \{f^m(x_i)\} \cup \bigcup_{j=0}^{k-1} \overline{B_\epsilon(f^j(p_i))}).$$

K es cerrado pues es unión finita de conjuntos cerrados, y como $K \subset X$ y X es compacto, entonces K es compacto. Sabemos que

$$O(p_i, f) = \{x_i, f(x_i), \ldots, f^{k_i-1}(x_i)\} \subset \bigcup_{j=0}^{k-1} \{f^j(p_i)\} \subset K$$

pues p_i tiene período $k_i \leq k$. Además sabemos que

$$O(x_i, f) = \{x_i, f(x_i), \ldots f^{N-1}(x_i), f^N(x_i), f^{N+1}(x_i), \ldots\}$$

$$= \bigcup_{m=0}^{N-1} f^m(x_i) \cup \bigcup_{m=N}^{\infty} (f^m(x_i)) = \bigcup_{m=0}^{N-1} f^m(x_i) \cup \bigcup_{m \geq N} (f^m(x_i)).$$

Pero sabemos que

$$\bigcup_{m \geq N} (f^m(x_i)) \subset \bigcup_{j=0}^{k-1} B_\epsilon(f^j(p_i)) \subset \bigcup_{j=0}^{k-1} \overline{B_\epsilon(f^j(p_i))}.$$

Uniendo estos dos resultados tenemos que

$$O(x_i, f) = \bigcup_{m=0}^{N-1} f^m(x_i) \cup \bigcup_{m \geq N} (f^m(x_i)) \subset \bigcup_{m=0}^{N-1} f^m(x_i) \cup \bigcup_{j=0}^{k-1} \overline{B_\epsilon(f^j(p_i))} \subset K.$$

Es decir $O(x_i, f), O(p_i, f) \subset K$ para $i = 1, 2$. Como f es continua en X entonces f^j es continua en X para $0 \leq j \leq k-1$. En particular f^j es continua en K, como K es compacto, f^j es uniformemente continua en K. Por lo tanto existe $\eta_j > 0$ tal que si $x, y \in K$ y $d(x, y) < \eta_j$ entonces $d(f^j(x), f^j(y)) < \epsilon$ para $0 \leq j \leq k-1$. Tomando $\eta = \text{mín}\{\eta_j : j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}\}$ se tiene que si $d(x, y) < \eta \leq \eta_j$ entonces $d(f^j(x), f^j(y)) < \epsilon$ para $0 \leq j \leq k-1$
Por otra parte como $\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x_1), f^n(x_2) = 0$ entonces existe $M > N$ tal que $d(f^M(x_1), f^M(x_2) < \eta$. Entonces para todo $0 \leq j \leq k-1$ se tiene que

$$d(f^j(f^M(x_1)), f^j(f^M(x_2)) < \epsilon \text{ es decir } d(f^{M+j}(x_1), f^{M+j}(x_2)) < \epsilon.$$

Así como x_1, x_2 son puntos aproximadamente periódicos entonces $d(f^{M+j}(x_i), f^{M+j}(p_i)) < \epsilon$ para $i = 1, 2$. Entonces tendremos que

$$d(f^{M+j}(p_1), f^{M+j}(p_2)) \leq d(f^{M+j}(p_1), f^{M+j}(x_1)) + d(f^{M+j}(x_1), f^{M+j}(x_2))$$

$$+d(f^{M+j}(x_2), f^{M+j}(p_2)) < \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon.$$

Tomemos $n > M$ es decir $n - M > 0$ entonces por el algoritmo de la división tenemos que $n - M = kt + j$ con $t \in \mathbb{N}$ y $0 \leq j \leq k-1$. Así $n = M + kt + j$ entonces

$$\begin{aligned} d(f^n(p_1), f^n(p_2)) &= d(f^{M+kt+j}(p_1), f^{M+kt+j}(p_2)) \\ &= d(f^{M+j}(f^{kt}(p_1)), f^{M+j}(f^{kt}(p_2))) \\ &= d(f^{M+j}(p_1), f^{M+j}(p_2)) < 3\epsilon \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene pues k divide al período de p_1 y p_2, pues el mínimo común múltiplo de sus períodos.
Luego para todo $n > M$ se tiene que

$$d(f^n(x_1), f^n(x_2)) \leq d(f^n(x_1), f^n(p_1)) + d(f^n(p_1), f^n(p_2)) + d(f^n(p_2), f^n(x_2))$$

$$< \epsilon + 3\epsilon + \epsilon = 5\epsilon.$$

Lo cual nos quiere decir que

$$\delta = \limsup_{n\to\infty} d(f^n(x_1), f^n(x_2)) \leq 5\epsilon < \delta$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto existe a lo más un punto aproximadamente periódico.

□

Lema 1.2.2. *Sea $f : (X, d) \to (X, d)$ una función uniformemente continua. Si $(x_n)_{n\geq 0}$ y $(y_n)_{n\geq 0}$ son sucesiones en X tales que $d(x_n, y_n) \to 0$, entonces $d(f(x_n), f(y_n)) \to 0$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, como f es uniformemente continua existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in X$

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Por otro lado, como tenemos que $d(x_n, y_n) \to 0$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $d(x_n, y_n) < \delta$ pero esto implica que como f es uniformemente continua $d(f(x_n), f(y_n)) < \epsilon$ para todo $n \geq N$. De aquí se deduce por la definición que $d(f(x_n), f(y_n)) \to 0$. □

Lema 1.2.3. *Sean (X, d) un espacio métrico, $f : X \to X$ una función continua y S un conjunto scrambled de f.Si f es uniformemente continua entonces S es también un conjunto scrambled para f^n para cualquier entero $n > 0$*

Demostración. Sea S un conjunto *scrambled* entonces por definición sabemos que para todo $x, y \in S$ distintos tenemos que

$$\limsup_{m\to\infty} d(f^m(x), f^m(y)) > 0, \text{ y}$$

$$\liminf_{m\to\infty} d(f^m(x), f^m(y)) = 0.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Como f es uniformemente continua como la composición de funciones uniformemente continua es uniformemente continua entonces f^j es uniformemente continua, para todo $0 \leq j \leq n-1$. Entonces dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que paratodo $x, y \in X$ se cumple que

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f^j, f^j(y)) < \epsilon.$$

Como $\liminf_{m\to\infty} d(f^m(x), f^m(y)) = 0$ entonces existe una subsucesión que la llamaremos m_l tal que

$$\lim_{l\to\infty} d(f^{m_l}(x), f^{m_l}(y)) = 0.$$

Por el algoritmo de Euclides se tiene que para todo $l \in \mathbb{N}$ tal que $m_l \geq n$ se tiene que $m_l = p_l n + r_l$ donde $0 \leq r_l \leq n-1$. Dado que para todo l tal que $m_l \geq n$, $r_l \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Como el conjunto de indices l es infinito (ya que hay l esta indexado a los números naturales) entonces existirá al menos algún $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ que se repita infinitamente. Es decir $r_l = r$ para infinitos l, por tanto, existe una subsucesión $(l_j)_{j\geq 0}$ tal que $r_{l_j} = r$ para todo $j \geq 0$. Como $\lim_{l\to\infty} d(f^{m_l}(x), f^{m_l}(y)) = 0$ y como $(m_{l_j})_{j\geq 0}$ es una subsucesión de de m_l entonces se cumplirá tambien que $\lim_{j\to\infty} d(f^{m_{l_j}}(x), f^{m_{l_j}}(y)) = 0$. Y como $m_{l_j} = p_{l_j} n + r_{l_j} = p_{l_j} n + r$ entonces tendremos que $\lim_{l\to\infty} d(f^{p_{l_j} n+r}(x), f^{p_{l_j} n+r}(y)) = 0$. Por el lema anterior, como f^{n-r} es uniformemente continua tenemos que

$$\lim_{l\to\infty} d(f^{n-r}(f^{p_{l_j} n+r}(x)), f^{n-r}(f^{p_{l_j} n+r}(y))) = 0$$

de donde tenemos que

$$\lim_{l\to\infty} d(f^{p_{l_j} n+n}(x), f^{p_{l_j} n+n}(y)) = 0 \text{ es decir } \lim_{l\to\infty} d(f^{n(p_{l_j}+1)}(x), f^{n(p_{l_j}+1)}(y)) = 0.$$

Llamando $k = pl_j + 1$ tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} d(f^{kn}(x), f^{kn}(y)) = 0.$$

Así tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} d((f^n)^k(x), (f^n)^k(y)) = 0.$$

Por otro lado, existe $(k_l)_{l\geq 0}$ tal que $\lim_{l\to\infty} d(f^{k_l}(x), f^{k_l}(y)) = \alpha > 0$. Supongamos que no existe esa subsucesión es decir para toda subsucesión se cumple que

$$\lim_{l\to\infty} d(f^{k_l}(x), f^{k_l}(y)) = 0$$

es decir

$$\lim_{k\to\infty} d(f^{kn}(x), f^{kn}(y)) = 0.$$

Por el algoritmo de la división se tiene que para todo l tal que $k_l \geq n$ existen $q_l, r_l^{'} \in \mathbb{N}$ tal que $k_l = q_l n + r_l^{'}$ con $0 \leq r_l^{'} \leq n-1$. Así

$$f^{k_l}(x) = f^{q_l n + r_l^{'}}(x) = f^{r_l^{'}}(f^{q_l n}(x)).$$

Dado l tal que $k_l \geq n$ con $r_l^{'} \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, como el conjunto de indices de l es infinito entonces tiene que cumplirse que, existe un $r^{'} \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tal que $r_l^{'} = r^{'}$ para infinitos l. Por lo tanto, existe una subsucesion $(l_j)_{j\geq 0}$ tal que $r_{l_j}^{'} = r^{'}$ para todo $j \geq 0$. Entonces en el algoritmo de la división tendremos que

$$k_{l_j} = q_{l_j} n + r_{l_j}^{'} = q_{l_j} n + r^{'} \text{ para todo } j \geq 0$$

Sabemos que $d(f^{ql_j}(x), f^{ql_j}(y)) \to 0$ cuando $j \to \infty$. Como $f^{r^{'}}$ es uniformemente continua entonces

$$d(f^{r^{'}}(f^{ql_j}(x)), f^{r^{'}}(f^{ql_j}(y))) \to 0$$

es decir

$$d(f^{ql_j + r^{'}}(x), f^{ql_j + r^{'}}(y)) \to 0$$

$$\text{por lo tanto } d(f^{k_{l_j}}(x), f^{k_{l_j}}(y)) \to 0$$

lo cual es una contradicción ya que $x, y \in S$ y S es un conjunto *scrambled* para f. Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} d(f^{kn}(x), f^{kn}(y))$ o es mayor que 0 o no existe, pero el primer caso es imposible ya que sino

$$0 = \liminf_{n\to\infty} d(f^{kn}(x), f^{kn}(y)) = \lim_{n\to\infty} d(f^{kn}(x), f^{kn}(y)) > 0.$$

Por lo tanto el límite no existe es decir

$$\limsup_{n\to\infty} d(f^{kn}(x), f^{kn}(y)) > \liminf_{n\to\infty} d(f^{kn}(x), f^{kn}(y)) = 0.$$

Por lo tanto S es un conjunto *scrambled* para f^n

□

Proposición 1.5. *Sean (X, d) un espacio métrico compacto, $f : X \to X$ una función continua y $n \in \mathbb{N}$ entonces f es caótica en el sentido Li-Yorke si, y solo si, f^n lo es*

Demostración. Supongamos que f es caótica en el sentido de Li-Yorke entonces existe un conjunto $S \subset X$ *scrambled* no numerable, como X es compacto y f es continua en X, entonces f es uniformemente continua en X. Por el lema anterior tenemos que S es también un conjunto *scrambled* para f^n, entonces f^n es caótica en el sentido de Li-Yorke.
Reciprocamente, si f^n es caótica en el sentido Li-Yorke, existe un conjunto S tal que para todo $x, y \in S$ distintos

$$\liminf_{n\to\infty} d(f^{kn}(x), f^{kn}(y)) = 0 \text{ y}$$

$$\limsup_{n\to\infty} d(f^{kn}(x), f^{kn}(y)) > 0.$$

Por propiedades de $\liminf$ y $\limsup$ tenemos que

$$0 \leq \liminf_{k\to\infty} d(f^{k}(x), f^{k}(y)) \leq \liminf_{k\to\infty} d(f^{kn}(x), f^{kn}(y)) = 0$$

de donde tenemos que

$$\liminf_{k\to\infty} d(f^{k}(x), f^{k}(y)) = 0.$$

Además tenemos que

$$\limsup_{k\to\infty} d(f^{k}(x), f^{k}(y)) \geq \liminf_{k\to\infty} d(f^{kn}(x), f^{kn}(y)) > 0$$

de donde

$$\limsup_{k\to\infty} d(f^{k}(x), f^{k}(y)) > 0.$$

De aquí obtenemos que f es caótica en el sentido Li-Yorke. □

Capítulo 2

Preliminares de la recíproca del teorema de Sharkosky

Definición 2.1. *Considere el mapeo continuo $f : I \to I$, decimos que $J \subset I$ cubre a $K \subset I$ (bajo f) si $K \subset f(J)$ y lo denotamos por $J \to K$. Si J cubre exactamente a K lo denotamos por $J \rightarrowtail K$. Un intervalo cuyos extremos están en un ciclo O de f es llamado O-intervalo. Si contiene solo dos puntos de O entonces diremos que es un O-intervalo básico, y que estos puntos son adyacentes.*

Lema 2.0.1. *Si J,K son intervalos, K es cerrado y $J \to K$ entonces existe un intervalo cerrado $L \subset J$ tal que $f(L) = K$*

Demostración. Sea $K = [c, d]$ sabemos que $[c, d] \subset f(J)$ entonces definimos el siguiente conjunto

$$C = \{w \in J : f(w) \in \{c, d\}\} = (f^{-1}(\{c\}) \cup f^{-1}(\{d\})) \cap J.$$

Sabemos que $C \neq \phi$, tomamos $\alpha = \text{ínf}\, C$, como $\alpha \in \overline{C}$ y C es un conjunto cerrado (ya que f es continua) entonces $\alpha \in C$ de donde $f(\alpha) \in \{c, d\}$ ahora definimos

$$D = \{w \in J/f(w) = d, w \geq \alpha\}.$$

Observamos que $D \neq \phi$ ya que si $f(\alpha) = d$ no tenemos nada que probar. Si $f(\alpha) = c$; como sabemos que existe un $y \in J$ tal que $f(y) = d$, de donde $y \in C$ entonces $y \geq \text{ínf}\, C = \alpha$ de donde $y \in D$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $f(\alpha) = c$. Tomo $\beta = \text{ínf}\, D$, como D es un conjunto cerrado entonces $\beta \in D$, de donde $f(\beta) = d$. Definimos $L = [\alpha, \beta]$ y afirmo que $f(L) = K = [c, d]$.
Sea $y \in [c, d]$, como $f(\alpha) = c$ y $f(\beta) = d$ por el teorema de valor intermedio existe $x \in [\alpha, \beta] = L$ tal que $f(x) = y$ entonces $K \subset f(L)$.
Sea $y = f(x)$ con $x \in < \alpha, \beta >$, si $y > d$, $f(\alpha) = c$, $f(x) > d$ entonces por el teorema de valor intermedio existe $x' \in [\alpha, x]$ tal que $f(x') = d$ pero $x' \leq x < \beta$ de donde $x' \in D(\rightarrow\leftarrow)$ ya que β es el mínimo elemento de D.
Si $y < c$ hacemos la prueba análoga y llegaremos a una contradicción de donde $f(< \alpha, \beta >) \subset [c, d]$ y sabiendo que $f(\alpha) = c$, $f(\beta) = d$ entonces $f([\alpha, \beta]) \subset [c, d]$ □

Lema 2.0.2. *Si $f : J \rightarrow J$ entonces f tiene un punto fijo $x \in J$.*

Demostración. Sea $J = [a, b]$ como $J \rightarrow J$ entonces $J \subset f(J)$ de donde como $a \in J$ entonces $a \in f(J)$, de aquí se tiene que existe $c \in J$ tal que $f(c) = a$, análogamente existe $d \in J$ tal que $f(d) = b$.
Definimos $g(x) = f(x) - x$, de aquí $g(c) = f(c) - c = a - c \leq 0$, analogamente $g(d) = f(d) - d = b - d \geq 0$ entonces tenemos que

$$g(c) \leq 0 \leq g(d)$$

de donde por el teorema de valor intermedio existe $e \in J$ tal que $g(e) = 0$, lo cual es equivalente a decir que $f(e) = e$, de donde se concluye lo pedido. □

Lema 2.0.3. *Si $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \ldots \rightarrow I_n$ entonces $\displaystyle\bigcap_{i=0}^{n} f^{-i}(I_i)$ contiene un intervalo Δ_n tal que $f^n(\Delta_n) = I_n$*

Demostración. Tenemos que $I_0 \rightarrow I_1$ lo cual es equivalente a decir que $I_1 \subset f(I_0)$ entonces existe $\Delta_1 \subset I_0$ tal que $f(\Delta_1) = I_1$. Como $I_1 \rightarrow I_2$ entonces $I_2 \subset f(I_1)$ entonces existe $\delta_2 \subset I_1$ tal que $f(\delta_2) = I_2$. Como $\delta_2 \subset I_1 = f(\Delta_1)$ entonces por definicion $\Delta_1 \rightarrow \delta_2$ entonces existe $\Delta_2 \subset \Delta_1$

tal que $f(\Delta_2) = \delta_2$ entonces $f^2(\Delta_2) = I_2$. Nuevamente repetimos el mismo procedimiento, como $I_2 \to I_3$ lo que es lo mismo decir que $I_3 \subset f(I_2)$ entonces existe $\delta_3 \subset I_2 = f^2(\Delta_2)$ tal que $f(\delta_3) = I_3$. Además sabemos que $\Delta_2 \to^{f^2} \delta_3$ entonces existe $\Delta_3 \subset \Delta_2$ tal que $f^2(\Delta_3) = \delta_3$ de lo cual se ve que $f^3(\Delta_3) = I_3$.
Así siguiendo inductivamente tendremos un Δ_n tal que $f^n(\Delta_n) = I_n$ y además dado un $0 \leq i \leq n$ tenemos que

$$\Delta_n \subset \Delta_i \Rightarrow f^i(\Delta_n) \subset f^i(\Delta_i) = I_i \Rightarrow f^i(\Delta_n) \subset I_i.$$

De donde tenemos que

$$\Delta_n \subset f^{-i}(I_i); \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

De aquí concluimos que $\Delta_n \subset \bigcap_{i=0}^{n} f^{-i}(I_i)$ de donde lo cual demuestra el lema.

□

El siguiente resultado es llamado lema del itinerario, el cual nos dices que si tenemos un lazo de longitud n que comienza y termina en el mismo intervalo entonces existe un punto en ese intervalo tal que se cumple dos cosas, primero la órbita de ese punto recorre el lazo en orden y segundo ese punto tiene período n:

Lema 2.0.4. *Si*

$I_0 \to I_1 \to I_2 \to \ldots \to I_{n-1} \to I_0$ *(esto es llamado un lazo o un n-lazo de intervalos)*

entonces existe x *tal que* $f^n(x) = x$ *y además* $f^i(x) \in I_i$ *para* $0 \leq i \leq n-1$

Demostración. Aplicando el lema anterior tenemos que $\Delta_n \subset I_0$, $f^n(\Delta_n) = I_0$ y además que $\Delta_n \subset \bigcap_{i=0}^{n} f^{-i}(I_i)$ de donde $f^i(\Delta_n) \subset I_i \;\; \forall i$. Además como $\Delta_n \subset I_0 = f^n(\Delta_n)$ entonces $\Delta_n \to \Delta_n$ entonces existe $x \in \Delta_n$ tal que $f^n(x) = x$ y por la propia construcción tenemos que $f^i(x) \in I_i$

□

Los resultados de la dinámica unidimensional que conforman lo que en la actualidad se conoce con el nombre de teorema de Sharkosvky involucran una función continua del intervalo en si mismo, y un orden en los enteros positivos llamado el orden de Sharskovsky el cual esta dado por:

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd ... \rhd 2 \times 3 \rhd 2 \times 5 \rhd ... \rhd 2^2 \times 3 \rhd 2^2 \times 5 \rhd ... \rhd 2^3 \rhd 2^2 \rhd 2^1 \rhd 2^0 = 1.$$

Dado que todo número entero positivo puede ser escrito de manera única en la forma $2^m(2n+1)$ para algunos enteros $m, n \geq 0$, el orden definido anteriormente es un orden total. Además se escribe $m \rhd l$ o $l \lhd m$, si m está a la izquierda de l y este orden tambien puede ser definido formalmente por:

$$2^a(2b+1) \rhd 2^\alpha(2\beta+1) \text{ si y solo si}$$

$$a < \alpha \text{ y } 0 < b, \beta \text{ o}$$

$$a = \alpha \text{ y } 0 < b < \beta \text{ o}$$

$$a > \alpha \text{ y } 0 = b = \beta$$

La lista comienza con los números impares mayores que 1 ordenados de forma creciente. Luego se repite la secuencia con cada impar multiplicado por 2, después la secuencia inicial es multiplicada por 2^2, después por 2^3 y asi sucesivamente. Al final se colocan las potencias de 2 en orden decreciente.

Definición 2.2. *Una cola del orden de Sharkovsky es un conjunto* $\Gamma \subset \mathbb{N}$ *tal que* $s \rhd t$ *para todo* $s \notin \Gamma$.

Hay tres tipos de colas: $\{m\} \cup \{l \in \mathbb{N} : l \lhd m\}$ para algún $m \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{..., 2^4, 2^3, 2^2, 2, 1\}$ de todas las potencias de 2 y ϕ.
Ya habíamos definido anteriormente $I \to J$ mediante una función f, si $J \subset f(I)$, ahora complementaremos la anterior definición

Definición 2.3. *Decimos que* I *cubre exactamaente a* J *y lo denotaremos por* $I \rightarrowtail J$ *si* $J = f(I)$.

Definición 2.4. *Un intervalo cuyos extremos están en un ciclo O es llamado $O-$intervalo. Si contiene solo dos puntos de O diremos que es un $O-$intervalo básico, y que estos dos puntos son adyacentes.*

Sólo mencionaremos el teorema de Sharkovski, pero demostraremos su recíproca.

Teorema 2.0.1. *Si m es un período para f y $m \rhd l$, entonces l también es un período para f*

Haremos el caso particular cuando $l = 3$ es decir todos los $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \lhd 3$, pero por el orden de Sharkovski esto quiere decir que m puede ser cualquier número natural.

Lema 2.0.5. *Suponga que $f : [0,1] \to [0,1]$ tiene un punto periódico de período tres. Entonces f posee puntos de todos los períodos.*

Demostración. Supongamos que $\{x_1 < x_2 < x_3\}$ sea la órbita de ese punto periódico, tomamos $I_1 = [x_1, x_2]$ y $I_2 = [x_2, x_3]$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $f(x_2) = x_3$ entonces $f^2(x_2) = x_1, f(x_3) = x_1$ entonces
$I_2 = [x_2, x_3] \to I_1 = [x_1, x_2]$ ya que $f(x_2) = x_3, f(x_3) = x_1$ de donde se obtiene que $I_1 \subset f(I_2)$. Además $[x_2, x_3] = I_2 \to I_2 = [x_2, x_3]$ ya que $f(x_2) = x_3$ y $f(x_3) = x_1$ de donde se obtiene que $I_2 \subset f(I_2)$, $I_1 = [x_1, x_2] \to I_2 = [x_2, x_3]$ ya que $f(x_1) = x_2$ y $f(x_2) = x_3$. De aquí obtenemos que $I_2 \subset f(I_1)$ (si $f(x_2) = x_1$ llamamos a I_1 como I_2 y viceversa y obtendremos la misma conclusión), haciendo su diagrama de Markov obtenemos que

$$I_1 \leftrightarrows \circlearrowright I_2 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

entonces se tiene

$$I_1 \to I_2 \to I_2 \to \ldots \to I_2 \to I_1$$

(para n-1 ocurrencias de I_2),supongamos que $n > 3$, luego por el corolario existe

$$x \in I_1 \text{ y } f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x) \in I_2$$

Caso 1: Supongamos que $x \notin \{x_1, x_2, x_3\}$, sabemos que para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ tenemos que $f^i(x) \in I_2$. Si para alguno de estos "$i's$" tuvieramos que $f^i(x) \in$

$\{x_2, x_3\}$ entonces $f^j(x) \in \{x_1, x_2, x_3\}$ $\forall j \geq i$ entonces $f^n(x) \in \{x_1, x_2, x_3\}$ entonces $f^n(x) \neq x (\rightarrow\leftarrow)$

$$\therefore \forall i = 1, 2, \ldots, n-1 \text{ tenemos } f^i(x) \in I_2 \diagdown \{x_2, x_3\}$$

$$\Rightarrow f^i(x) \notin I_1 \Rightarrow f^i(x) \neq x; \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n-1$$

pues $f^i(x) \notin I_1$ y $x \in I_1$ de donde se deduce que x tiene periodo n.
Caso 2: $x \in \{x_1, x_2, x_3\}$ entonces $x = x_1$ o $x = x_2$ ya que $x \in I_1$ y x tiene periodo tres. Como $f^n(x) = x$ deducimos que n es multiplo de 3, es decir $n = 3k, k \in \mathbb{N}$ (en particular $n \geq 6$ ya que $n \neq 3$)
Caso 2.1: $x = x_1 \Rightarrow f(x) = x_2, f^2(x) = x_3, f^3(x) = x_1 \notin I_2 (\rightarrow\leftarrow)$.
Caso 2.2: $x = x_2 \Rightarrow f(x) = x_3, f^2(x) = x_1 \notin I_2 (\rightarrow\leftarrow)$

$$\therefore \text{ Existen puntos de periodo } n, \ \forall n > 3.$$

Por lo tanto el caso 2 no se puede dar, con lo que nos quedamos con el caso 1.
Existe punto de periodo $n = 3$ por hipótesis, además existen puntos periódicos de periodo $n = 1$ ya que $I_2 \rightarrow I_2$ y aplicando el lema anterior encontraremos que f tiene punto fijo y de período $n = 2$ ya que $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_1$ mediante f. De donde $I_1 \rightarrow I_1$ mediante f^2, de aquí aplicando el corolario anterior tenemos que

$$\exists x \in I_1 \text{ tal que } f^2(x) = x; \quad f(x) \in I_2.$$

Si $f(x) = x$ y como $f(x) \in I_2$ y $x \in I_1$ tenemos que $x \in I_1 \cap I_2 = \{x_2\}$, de donde se tiene que $x = x_2$ pero esto no puede ser ya que x_2 tiene período tres. Por lo tanto

$$\exists x \in I_1; f^2(x) = x \text{ y } f(x) \neq x.$$

Esto implica que x tiene período 2, por lo tanto de todo ,lo hecho anteriormente podemos deducir que existe punto de cualquier período. $\square$

Lema 2.0.6. *Sean $f : J \rightarrow J$ una función continua y $I_1, I_2, ...$ una sucesión de intervalos compactos con $I_n \subset J$ e $I_{n+1} \subset f(I_n)$ para todo $n \geq 0$. Entonces* *existe una sucesión de intervalos compactos* $\{Q_n\}$ *tal que* $Q_{n+1} \subset Q_n \subset I_0$ *y* $f^n(Q_n) = I_n$ *para todo* $n \geq 0$*. Además para cualquier* $x \in Q = \cap Q_n$ *se tiene* $f^n(x) \in I_n$ *para todo* $n \geq 0$

Demostración. La demostración la realizaremos por inducción.
Definamos $Q_0 = I_0$. Entonces $f^0(Q_0) = I_0$.
Primero veamos que se cumple para $k = 1$, sabemos por hipótesis que $I_0 \subset J$, e $I_1 \subset f(I_0)$, entonces por un lema anterior existe $Q_1 \subset I_0 = Q_0$ tal que $f(Q_1) = I_1$.
Supongamos ahora que el lema se cumpla para $k \leq n-1$, esto es, que existe Q_{n-1} tal que $f^{n-1}(Q_{n-1}) = I_{n-1}$ $(Q_{n-1} \subset Q_{n-2} \subset ... \subset I_0)$. Veamos que se cumple para $k = n$. Como $f^{n-1}(Q_{n-1}) = I_{n-1}$ entonces por hipótesis sabemos que $I_n \subset f(I_{n-1}) = f^n(Q_{n-1})$. Aplicando un lema anterior a $g = f^n$ en Q_{n-1}, se tiene que existe $Q_n \subset Q_{n-1}$ tal que $f^n(Q_n) = I_n$ y

$$Q_n \subset Q_{n-1} \subset ... \subset Q_1 \subset Q_0 = I_0$$

.
Ahora sea $x \in Q = \cap_{n=0}^{\infty} Q_n$, entonces $x \in Q_n$ para todo $n \geq 0$, y dado que $f^n(Q_n) = I_n$ para todo $n \geq 0$. Entonces $f^n(x) \in I_n$ para todo $n \geq 0$ $\square$

Capítulo 3

Recíproca del teorema de Sharkosky

El resultado principal de este articulo es demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3.0.1. *Cada cola del orden de Sharkovsky es el conjunto de períodos para una función continua de un intervalo en sí mismo.*

Para demostrar que cada cola del orden de Sharkovsky es el conjunto de períodos para una función continua de un intervalo en sí mismo consideraremos la familia de funciones truncadas dada por
$T_h : [0,1] \to [0,1]$, definidas para cada $x \in [0,1]$ por:

$$x \mapsto \text{mín}(h, 1-2 \mid x-\frac{1}{2} \mid), \text{ para } 0 \leq h \leq 1.$$

Algo que se ve claramente es que, como $h \geq 0$ y $x \in [0,1]$ entonces $1-2 \mid x-\frac{1}{2} \mid \geq 0$, es decir $T_h(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [0,1] \ \ \forall x \in [0,1]$.
Para hacer el gráfico de la función T_h supongamos que
$\text{mín}(h, 1-2 \mid x-\frac{1}{2} \mid) = h$ esto quiere decir que $h \leq 1-2 \mid x-\frac{1}{2} \mid$. Esto implica que $2 \mid x-\frac{1}{2} \mid \leq 1-h$ entonces elevando al cuadrado a ambos mienbros tenemos que $4(x-\frac{1}{2})^2 \leq (1-h)^2$ de donde
$0 \leq (1-h)^2-(2x-1)^2$. De aquí vemos que

$$0 \leq (1-h-(2x-1))(1-h+(2x-1))$$

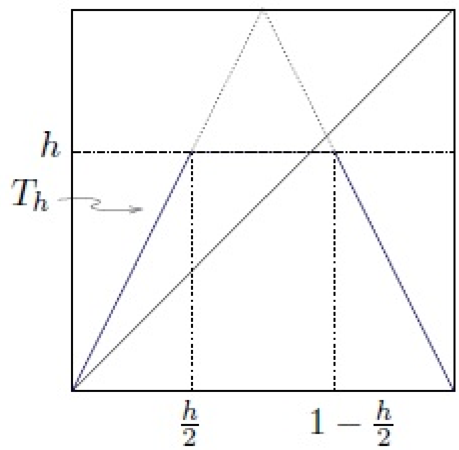


Figura 3.1:

por consecuencia tendremos que $0 \leq (2-h-2x)(2x-h)$ entonces $(2x+h-2)(2x-h) \leq 0$ de donde si $2x-h=0$ o $2-h-2x=0$. De aquí concluimos que $x=\frac{h}{2}$ o $1-\frac{h}{2}=x$ entonces $x \in [\frac{h}{2}, 1-\frac{h}{2}]$. Es decir si x esta en ese intervalo hallado su mínimo será h, caso contrario su mínimo será la función $1-2 \mid x-\frac{1}{2}$. Reescribiremos la función h como $T_hx) =$

$$\begin{cases} 1-2 \mid x-\frac{1}{2} \mid, & \text{si } x \in [0, \frac{h}{2} > \cup < 1-\frac{h}{2}, 1] \\ h, & \text{si } x \in [\frac{h}{2}, 1-\frac{h}{2}] \end{cases}$$

Visto de esta manera, la función T_h es más fácil de graficar, y la gráfica es la siguiente figura 1: Presentaremos algunas propiedades con respecto a la familia de funciones T_h:

- $T_0(T_0(x)) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$, además T_0 sólo tiene un punto periódico, mientras que la función T_1 tiene puntos periódicos de todos los períodos.

  Demostración. Sabemos por definición que
  $T_0(x) = \text{mín}(0, 1-2 \mid x-\frac{1}{2} \mid) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$, ahora si hacemos

$T_0(T_0(x)) = T_0(0) = 0$. De aquí si decimos que T_0^2 tiene un punto fijo x, entonces $T_0^2(x) = x$ pero por lo anterior tendremos que $0 = T_0^2(x) = x$, de donde el único punto fijo de T_0^2 es el 0.
Para la segunda afirmación, primero veamos que $T_1(x) = \text{mín}(1, 1-2 \mid x - \frac{1}{2} \mid) = 1 - 2 \mid x - \frac{1}{2} \mid$.
Ahora sabemos que $\{\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\}$ es una órbita periódica de período 3, ya que

$$f(\frac{1}{7}) = \frac{2}{7}; f(\frac{2}{7}) = \frac{4}{7}; f(\frac{4}{7}) = \frac{1}{7}.$$

Por el teorema de Sharkosky concluimos que como existe un punto de período 3, entonces existen puntos periódicos para cualquier período.
□

- T_1 tiene un número finito de puntos periódicos para cada período

  Demostración. Para demostrar esto, haré una pequeña afirmación que concluye de manera directa lo que deseamos. Sea E_n el cardinal de los puntos periódicos de período n. Afirmo que para hallar los puntos periódicos de período n debemos desarrollar una ecuación de grado 2^n, es decir que $Card(E_n) \leq 2^n$. Para $n = 1$ los puntos periódicos son los cuales $T_1(x) = x$ de donde $2 \mid x - \frac{1}{2} \mid = x$ de donde $3x^2 - 4x + 1 = 0$ el cual es una ecuación de grado $2 = 2^1$ de donde sus soluciones son $x = 1$ o $x = \frac{1}{3}$. Supongamos que se cumpla para n, intentaremos demostrar que se cumple para $n+1$. Sea $x \in E_{n+1}$ entonces $T_1^{n+1}(x) = x$ de donde $T_1(T_1^n(x)) = x$. De aquí $2 \mid T_1^n(x) - \frac{1}{2} \mid = x$ de donde $4(T_1^n)^2 - 4T_1^n - x + 1 = 0 ...(*)$ por hipótesis inductiva T_1^n tiene grado 2^n con lo cual la ecuación $(*)$ tiene grado 2^{n+1}. Pero nos damos cuenta que la solución de la ecuación $(*)$ cumple que $T^{n+1}(x) = x$ de donde tenemos que $Card(E_{n+1}) \leq 2^{n+1}$. De aquí se ve directamente que la cantidad de puntos periódicos de período n de T_1 es finito, es más está acotado por 2^n □

- Si $h \leq k$, cualquier ciclo $O \subset [0, h)$ de T_h es un ciclo para T_k, y cualquier ciclo $O \subset [0, h]$ de T_k es un ciclo para T_h.

Demostración. Sabemos que

$$T_h(x) = \begin{cases} 1 - 2 \mid x - \frac{1}{2} \mid, & \text{si } x \in [0, \frac{h}{2}] \cup [1 - \frac{h}{2}, 1] \\ h, & \text{si } x \in [\frac{h}{2}, 1 - \frac{h}{2}] \end{cases}$$

y

$$T_k(x) = \begin{cases} 1 - 2 \mid x - \frac{1}{2} \mid, & \text{si } x \in [0, \frac{k}{2}] \cup [1 - \frac{k}{2}, 1] \\ k, & \text{si } x \in [\frac{k}{2}, 1 - \frac{k}{2}] \end{cases}$$

De aquí se ve que como $0 \leq h \leq k \leq 1$ entonces

$$T_h(x) = T_k(x) \Leftrightarrow x \in [0, \frac{h}{2}] \cup [1 - \frac{h}{2}, 1].$$

Además como sabemos la función es constante cuando
$x \in < \frac{h}{2}, 1 - \frac{h}{2} >$ ya que $T_h(x) = h \;\; x \in [\frac{h}{2}, 1 - \frac{h}{2}]$. Por lo tanto tiene a lo más un punto periódico en ese intervalo.
Reciprocamente sea $0 \leq h \leq k \leq 1$ dado que $T_1(K_h) = (h, 1]$ se tiene que para cualquier ciclo $O \subset [0, h)$ de T_h, $O \subset J_h$ y en consecuencia O también es un ciclo para T_k. Por otro lado, dado un ciclo $O \subset [0, h]$ se tiene que $O \subset J_h$ y en consecuencia O también es un ciclo para T_h. □

Ahora definamos $h(m) := \text{mín}\{\text{máx}\, O : \;\; O \text{ es un } m - \text{ciclo de } T_1\}$

- T_h tiene un $m-$ciclo $O \subset [0, h)$ si, y solo si, $h(l) < h$

Demostración. Si T_h tiene un $l-$ciclo $O \subset [0, h)$ y como $h \leq 1$ entonces por (c) debe cumplirse que O es un $l-$ciclo para T_1. Además es fácil ver que $\text{máx}\, O < h$, de aquí por la definición de $h(l)$ (que dice que es el mínimo de los máximos de O) tendremos que $h(l) \leq \text{máx}\, O < h$ de donde $h(l) < h$.
Para hacer el recíproco si $h(l) < h$ entonces

$$\text{mín}\{\text{máx}\, O : \;\; O \text{ es un } l - \text{ciclo de } T_1\} < h$$

de aquí tenemos que existe un $l-$ciclo O de T_1 tal que $\text{máx}\, O < h$ es decir (teniendo en cuenta que todos los elementos de O son mayores o iguales que 0) $O \subset [0,h)$. Es decir $O \subset [0,h]$ es un $l-$ciclo para T_1 y como $h \leq 1$ entonces por la parte (c) entonces O es un $l-$ciclo para T_h. $\square$

- La órbita de $h(m)$ es un $m-$ciclo para $T_{h(m)}$, y todos los otros ciclos para $T_{h(m)}$ estan contenidos en $[0,h)$.

  Demostración. Sabemos por definición que
  $h(m) := \min\{\max O : \quad O \text{ es un } m - \text{ciclo de } T_1\}$. Eso significa que existe un $m-$ciclo O de T_1 tal que $h(m)$ es su mayor elemento, y si tenemos otro $m-$ciclo de T_1 llamado O^* tal que su máximo es x^* entonces $h(m) \leq x^*$. Como $h(m)$ es el máximo elemento del $m-$ciclo de T_1 O entonces $O \subset [0,h(m)]$. En particular la órbita de $h(m)$ está incluida en $[0,h(m)]$, además la órbita de $h(m)$ es el $m-$ciclo O. Sabiendo que $h(m) \leq 1$ y aplicando (c) tenemos que la órbita de $h(m)$, es decir O, es un $m-$ciclo para $T_{h(m)}$. Además cualquier otro ciclo para $T_{h(m)}$ es disjunto de la órbita de $h(m)$ y por lo tanto esta contenido en $[0,h)$. $\square$

- Si $m \neq l$ entonces $h(m) \neq h(l)$ ya que son ciclos de distintas longitudes

- $l \lhd m$ si y solo si $h(l) < h(m)$

  Demostración. Del quinto item, y directo del teorema de Sharkoski se tiene que $T_{h(m)}$ es un $l-$ciclo contenido en $[0,h(m))$ para todo $l \lhd m$ así por el cuarto item tenemos que $h(l) < h(m)$.
  Recíprocamente, supongamos que $h(l) < h(m)$ y que $m \lhd l$ o $m = l$, entonces por lo anterior se tiene que $h(m) \leq h(l)$ lo cual es una contradicción ya que
  $$h(l) < h(m) \leq h(l).$$
  Como el orden es total entonces $m \ntrianglelefteq l$ entonces $m \rhd l$ es decir $l \lhd m$. $\square$

Note que para cada $m \in \mathbb{N}$, $T_{h(m)}$ tiene un $l-$ciclo para todo $l \lhd m$. Por otro lado, si O es un $l-$ciclo de $T_{h(m)}$, con $l \neq m$, entonces $O \subset [0,h)$. Así,

$h(l) < h(m)$, y en consecuencia $l \lhd m$. Luego, el conjunto de períodos de $T_{h(m)}$ es una cola del orden de Sharkovski dada por m para todo $l \lhd m$.
El conjunto de las potencias de 2 es la otra cola del orden de Sharkoski (junto con ϕ el cual el cual es el conjunto de períodos de la transformación $x \mapsto x+1$ en $\mathbb{R}$).
Por otra parte, por el último item se tiene que la sucesión $h(2^n)_{n\geq 0}$ es creciente. Sea $h(2^\infty) = \sup\limits_{k\to\infty} h(2^k)$. Dado que $h(2^\infty) > h(2^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $T_{h(2^\infty)}$ tiene un 2^k-ciclo para todo $k \in \mathbb{N}$. Supongamos ahora que $T_{h(2^\infty)}$ tiene un $m-$ciclo tal que m no es potencia de 2. Por el directo del teorema de Sharkovski $T_{h(2^\infty)}$ también tiene un $2m-$ciclo. como el $m-$ciclo y el $2m-$ciclo son disjuntos, pues tienen diferente longitud, al menos uno de ellos está contenido en $[0, h(2^\infty))$. Dado que $2^k \lhd 2m \lhd m$ para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces por el ultimo item tenemos que

$$h(2^\infty) \leq h(2m) \leq h(m),$$

lo que contradice el cuarto item. Por lo tanto los únicos períodos de $T_{h(2^\infty)}$ son potencias de 2.

Capítulo 4

Teorema de Li-Yorke

En este capítulo presentaremos un teorema que permite, a partir de la simple observación de una órbita en particular determinar no solo la existencia de órbitas periódicas de todos los períodos sino además la presencia de órbitas de comportamiento errático que no se acumulan en ninguna órbita periódica. Este teorema se debe a Li-Yorke y se presenta a continuación:

Teorema 1. *Sea J un intervalo compacto y $f : J \to J$ una función continua. Si existe un punto $a \in J$ para el cual los puntos $b = f(a), c = f^2(a)$ y $d = f^3(a)$ satisfacen $d \leq a < b < c$ (o $d \geq a > b > c$). Entonces*

1. *Para cada $k \in \mathbb{N}$ hay un púnto periódico en J con período k*

2. *f es caótica en el sentido Li-Yorke*

Observación: Notese que si tenemos un punto periódico de período 3, entonces la hipotesis del teorema se satisface y por tanto f es caótica en el sentido Li-Yorke.
Por el teorema de Sharkovski si una función tiene algún punto periódico, de período 3 entonces tiene puntos periódicos de cualquier período. Sin embargo, según el teorema de Li-Yorke, esto nos proporciona mas información. Dice que la existencia de un punto periódico de período 3 no solo implica la existencia de puntos con todos los períodos. Sino además la existencia de un conjunto $S \subset J$ *scrambled*. Este conjunto cumple que para cada par

de puntos distintos $x, y \in S$, la distancia entre las iteraciones $\{f^n(x)\}_{n\geq 0}$ y $\{f^n(y)\}_{n\geq 0}$ tienen la propiedad que cuando n tiende al infinito el límite inferior es igual a 0, mientras el límite superior es positivo.
Sabemos que si el límite inferior es 0 significa que existe una infinidad de $n's$ tal que $\{f^n(x)\}$ y $\{f^n(y)\}$ están tan cercanos como se quiera. Y también que si el límite superior es positivo, quiere decir que, existe infinidad de $n's$ tal que la distancia entre $\{f^n(x)\}$ y $\{f^n(y)\}$ es positiva. Dicho de otra manera, bajo iteraciones de f diferentes puntos de S hay veces están cercacnos, hay veces están lejanos, y ninguno de estos es periódico.

Demostración. Supongamos que $d \leq a < b < c$; el caso $d \geq a > b > c$ es similar. Sean $K = [a, b]$, $L = [b, c]$ y k un entero positivo. Para $k > 1$, sea $\{I_n\}$ la sucesión de intervalos dada por: $I_n = L$ para $n = 0, 1, \ldots, k-2$ e $I_{k-1} = K$. Definamos periódicamente $I_{n+k} = I_k$ para $n \geq 0$. Si $k = 1$ entonces $I_n = L$, para todo $n \geq 0$.
Es claro que K y L son compactos, pues son cerrados y acotados. Además es claro ver que $K = [a, b] \subset [d, c] = [f(c), f(b)]$ y $L = [b, c] \subset [d, c] = [f(c), f(b)]$, es decir $K, L \subset [f(c), f(b)] \subset f(L)$ en particular $L \to L$. Y $L = [b, c] = [f(a), f(b)] \subset f([a, b]) = f(K)$ entonces $K \to L$. Si $n \in \{0, 1, \ldots k-2\}$ entonces como $n + 1 \leq k - 1$ tenemos que $I_n = L \to L = I_{n+1}$. Ahora si $n = k-1$ entonces sabemos que $K = I_{k-1} \to I_k = I_0 = L$. Es decir $I_n \to I_{n+1}$ para todo $n \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Como los intervalos I_n son periódicos de período k tenemos que

$$I_n \to I_{n+1} \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

De lo anterior se tiene que la sucesión I_n satisface la hipótesis del lema 2,0,9, por lo tanto, existe una sucesión de intervalos compactos $\{Q_n\}$ tal que $Q_{n+1} \subset Q_n \subset I_0$ y $f^n(Q_n) = I_0$ para todo $n \geq 0$. En consecuencia $f^k(Q_k) = I_k = I_0 \supset Q_k$. Entonces por el lema 2,0,5 donde $f^k = g$ se cumple que $Q_k \to Q_k$ mediante la función g, entonces existe un punto fijo $p_k \in Q_k$. Además p_k no puede tener período menor que k para f, ya que supongamos que el período de p_k para f es $m < k$. Si $m = k - 1$,

$$f^{k-1}(p_k) = p_k \in Q_k \subset I_0 = L.$$

Como $Q_k \subset Q_{k-1}$ entonces $p_k \in Q_{k-1}$ entonces

$$f^{k-1}(p_k) \in f^{k-1}(Q_{k-1}) = I_{k-1} = K.$$

Es decir $f^{k-1}(p_k) \in K \cap L = [a, b] \cap [b, c] = \{b\}$, entonces $f^{k-1}(p_k) = b$. Entonces $f^{k+1}(p_k) = f^2(f^{k-1}(p_k)) = f^2(b) = d \notin L$ y esto es una contradicción pues sabemos que $f^{k+1}(p_k) = f(p_k)$ como $p_k \in Q_k \subset Q_1$ entonces

$$f(p_k) \subset f(Q_1) = I_1 = L.$$

Así que p_k no puede tener período $k - 1$.
Si $m < k - 1$ y sea $O(p_k) = \{p_k, f(p_k), \ldots, f^{m-1}(p_k)\}$; y dado que $f^{k-1}(p_k) \in O(p_k)$, existe $0 < l < m$ tal que $f^{k-1}(p_k) = f^l(p_k)$. Así como $p_k \in Q_k \subset Q_l$ tenemos que

$$f^{k-1}(p_k) = f^l(p_k) \in f^l(Q_l) = I_l = L$$

donde $I_l = L$ pues $l \leq k-2$. De otro lado $p_k \in Q_k \subset Q_{k-1}$ entonces $p_k \in Q_{k-1}$. De donde $f^{k-1}(p_k) \in f^{k-1}(Q_{k-1}) = I_{k-1} = K$ entonces $f^{k-1}(p_k) \in L \cap K = [b, c] \cap [a, b] = \{b\}$ por lo tanto $f^{k-1}(p_k) = b$. De la misma forma que el anterior caso $f^{k+1}(p_k) = f^2(f^{k-1}(p_k)) = f^2(b) = d \notin L$. Lo cual es una contradicción pues como $p_k \in Q_k \subset Q_1$ entonces $p_k \in Q_1$. De aquí $f(p_k) \in f(Q_1) = I_1 = L$ donde claramente se ve esto. Por lo tanto p_k no puede tener período m, con $m < k - 1$, juntando ambos casos tenemos que el período de p_k tiene que ser k.
Sea Υ el conjunto de sucesiones de intervalos compactos $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$, siendo que:

$$M_n = K \text{ o } M_n \subset L \text{ y } M_n \to M_{n+1}.$$

Además si

$$M_n = K, \text{ entonces } n \text{ es el cuadrado de un entero}$$

donde $K = [a, b]$ y $L = [b, c]$.
Una pequeña observación es que si $M_n = K$ entonces n es cuadrado perfecto,

Sea Υ el conjunto de sucesiones de intervalos compactos $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$, siendo que:

$$M_n = K \text{ o } M_n \subset L \text{ y } M_n \to M_{n+1}.$$

Además si

$$M_n = K, \text{ entonces } n \text{ es el cuadrado de un entero}$$

donde $K = [a, b]$ y $L = [b, c]$.
Una pequeña observación es que si $M_n = K$ entonces n es cuadrado perfecto, como $n+1, n+2$ no son cuadrados perfectos entonces $M_{n+1}, M_{n+2} \subset L$.
Para cada $M \in \Upsilon$, sea $P(M, n)$ el número de $i's$ en $\{1, 2, \ldots n\}$ para el cual $M_i = K$.
En lo siguiente $[| \ r \ |]$ denota la parte entera de r; eso es, $[| \ r \ |]$ es el mayor entero menor que r.
Consideremos una sucesión $M^{\frac{3}{4}} \in \Upsilon$ tal que

$$P(M^{\frac{3}{4}}, m) = [| \ \frac{3}{4} n \ |] \text{ si } n^2 \leq m < (n+1)^2$$

dicho de una otra manera

$$P(M^{\frac{3}{4}}, m) = [| \ \frac{3}{4} [| \ \sqrt{m} \ |] \ |]$$

de esta forma podemos crear la sucesión

$$P(M^{\frac{3}{4}}, m) = [| \ \frac{3}{4} [| \ \sqrt{m} \ |] \ |] = 0 \text{ si } m \in \{1, 2, 3\}$$

$$P(M^{\frac{3}{4}}, m) = [| \ \frac{3}{4} [| \ \sqrt{m} \ |] \ |] = 1 \text{ si } m \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$P(M^{\frac{3}{4}}, m) = [| \ \frac{3}{4} [| \ \sqrt{m} \ |] \ |] = 2 \text{ si } m \in \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

$$P(M^{\frac{3}{4}}, m) = [| \ \frac{3}{4} [| \ \sqrt{m} \ |] \ |] = 3 \text{ si } m \in \{16, \ldots, 24, 25, \ldots, 35\}$$

así podemos crear la sucesión $M^{\frac{3}{4}}$ la cual es

$$M^{\frac{3}{4}} = L, L, L, K, L, L, L, L, K, L, L, L, L, L, L, K, \ldots$$

$\square$

Notemos que

$$P(M^{\frac{3}{4}},(4n)^2) = [|\ \frac{3}{4}[|\ \sqrt{(4n)^2}\ |]\ |] = [|\ \frac{3}{4}(4n)\ |] = 3n;$$

$$P(M^{\frac{3}{4}},(4n+1)^2) = [|\ \frac{3}{4}[|\ \sqrt{(4n+1)^2}\ |]\ |] = [|\ \frac{3}{4}(4n+1)\ |] = 3n;$$

$$P(M^{\frac{3}{4}},(4n+2)^2) = [|\ \frac{3}{4}[|\ \sqrt{(4n+2)^2}\ |]\ |] = [|\ \frac{3}{4}(4n+2)\ |] = 3n+1;$$

$$P(M^{\frac{3}{4}},(4n+3)^2) = [|\ \frac{3}{4}[|\ \sqrt{(4n+3)^2}\ |]\ |] = [|\ \frac{3}{4}(4n+3)\ |] = 3n+2$$

sabemos que si $M_d^{\frac{3}{4}} = K$ entonces d es un cuadrado perfecto de aquí y con lo anterior tenemos que

$$M^{\frac{3}{4}}_{(4n+r)^2} = K \text{ si } n \geq 1 \text{ y } r \in \{0,2,3\}.$$

Para cada $r \in \left(\frac{3}{4},1\right)$ consideremos una sucesión $M^r = \{M_n^r\}_{n=1}^{\infty}$ de Υ tal que $P(M^r,m) = [|\ rn\ |]$ si $n^2 \leq m < (n+1)^2$.
Sabemos que $rn-1 < [|\ rn\ |] \leq rn$, tenemos que $\frac{rn-1}{n} \leq \frac{[|rn|]}{n} < \frac{rn}{n}$ y como $\lim_{n\to\infty} \dfrac{rn-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{rn}{n} = r$ entonces por el teorema del sandwish tendremos que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{[|\ rn\ |]}{n} = r$.
Ahora sabemos que $P(M^r,n^2) = [|\ r\sqrt{(n^2)}\ |] = [|\ rn\ |] = P(M^r,m)$ entonces tendremos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(M^r,n^2)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{P(M^r,m)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{[|\ rn\ |]}{n} = r.$$

Sea $\Upsilon_0 = \{M^r : r \in \left(\frac{3}{4},1\right)\} \subset \Upsilon$. Entonces Υ_0 es no numerable ya que si $r_1 \neq r_2$, supongamos que $M^{r_1} = M^{r_2}$ entonces $P(M^{r_1},m) = P(M^{r_2},m)$ de aquí dividimos entre n y tomamos límite tendremos que $r_1 = r_2$ de donde tenemos una contradicción, por lo tanto si $r_1 \neq r_2$ entonces $M^{r_1} \neq M^{r_2}$. De aquí vemos que $r \to M^r$ es inyectiva.
Por un lema demostrado anteriormente, para cada $M^r = \{M_n^r\}_{n=1}^{\infty} \in \Upsilon_0$ existe un punto x_r con $f^n(x_r) \in M_n^r$ para todo n. Sea $S = \{x_r : r \in (\frac{3}{4},1)\}$.
Para $x \in S$, sea $P(x,n)$ el número de i's en $\{1,2,\ldots,n\}$ para los cuales $f^i(x) \in K$.

Proposición 4.1. *Dado $x_r \in S$, $f^k(x_r) \neq b$ para todo k.*

Demostración. Sea $x_r \in S$, supongamos que existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x_r) = b$.
Separemos el problema en dos casos el primer caso es si $d \neq a$ como $f^k(x_r) = b$ entonces $f^{k+2}(x_r) = f^2(f^k(x_r)) = f^2(b) = d$. Como sabemos
$f^{k+2}(x_r) = d \in M^r_{k+2}$ pero nosotros sabemos que $M^r_{k+2} \subset L$ o $M^r_{k+2} = K$ en ambos casos se cumple que $M^r_{k+2} \subset K \cup L$. Uniendo ambos hechos tenemos que

$$f^{k+2}(x_r) = d \in M^r_{k+2} \subset K \cup L = [a, b] \cup [b, c] = [a, c]$$

esto implica que $a \leq d \leq c$ pero como por hipótesis inicial $d \leq a$ tendremos que $d = a(\rightarrow\leftarrow)$.
Segundo caso $d = a$ entonces tendremos que $f^3(a) = a$ y como $f(a) = b \neq a$ deducimos que a tiene período 3. Además como $f^k(x_r) = b$ entonces $x_r \in O(b) = \{a, b, c\}$. Deducimos de lo anterior que $f^{k+2}(x_r) = d$. Ahora tomamos l tal que $(l+1)^2 - l^2 > 3$. Entonces $M^r_k = L$ para $l^2 < k < (l+1)^2$. Como sabemos $f^k(x_r) = b$ por lo dicho anteriormente tenemos que $M^r_k = M^r_{k+1} = M^r_{k+2} = L$. Sabemos que $f^{k+2}(x_r) \in M^r_{k+2}$ entonces $d \in L$ lo cual es una contradicción por lo tanto la proposición está demostrada. $\square$

Dado que $P(x_r, n)$ cuenta el número de i's tal que $f^i(x_r) \in K$ y como $f^n(x_r) \in M^r_n$ para todo n, entonces contar el número de i's tal que
$f^i(x_r) \in K$ es equivalente a contar el número de veces que $M^r_n = K$, pues nunca ocurre que $f^i(x_r) \in K \cap L = \{b\}$ lo cual no puede suceder por la proposición anterior. De aquí $P(x_r, n) = P(M^r, n)$ para todo n y así como caso particular tendriamos que $P(x_r, n^2) = P(M^r, n^2)$ de aqui dividmos entre n y tomando límite concluimos que

$$\rho(x_r) = \lim_{n\to\infty} \frac{P(x_r, n^2)}{n} = \lim_{n\to} \frac{P(M^r, n^2)}{n} = r \text{ para todo } r \in (\frac{3}{4}, 1).$$

Ahora veamos que S es no numerable. Sean $r_1, r_2 \in (\frac{3}{4}, 1)$ con $r_1 \neq r_2$. Entonces $\rho(x_{r_1}) \neq \rho(x_{r_2})$ entonces existe $k \geq 1$ tal que $P(x_{r_1}, k^2) \neq P(x_{r_2}, k^2)$ (ya que caso contrario $P(x_{r_1}, k^2) = P(x_{r_2}, k^2)$ y de aquí $\frac{P(x_{r_1},k^2)}{k} = \frac{P(x_{r_2},k^2)}{k}$ y tomando límite cuando $k \to \infty$ tendremos que $r_1 = r_2$ lo cual es una contradicción). Así existe $1 \leq m \leq k^2$ tal que $f^m(x_{r_1}) \in K$ y $f^m(x_{r_2}) \notin K$, o $f^m(x_{r_1}) \notin K$ y $f^m(x_{r_2}) \in K$. En consecuencia es claro ver que $x_{r_1} \neq x_{r_2}$. Luego $r \to x_r$ es inyectiva y por lo tanto S es no numerable.

Proposición 4.2. *Si $x_{r_1}, x_{r_2} \in S$ con $r_1 \neq r_2$, entonces existen infinitos n's tales que $f^n(x_{r_1}) \in K$ y $f^n(x_{r_2}) \in L$ o viceversa*

Demostración. Supongamos que solo hay una cantidad finitas de n's tal que $f^n(x_{r_1}) \in K$ y $f^n(x_{r_2}) \in L$ o viceversa. Luego para todo $n > k$ se tiene que $f^n(x_{r_1})$ y $f^n(x_{r_2})$ están ambos en L o en K. Así,

$$P(x_{r_1}, k) - P(x_{r_2}, k) = P(x_{r_1}, n) - P(x_{r_2}, n) = P(x_{r_1}, n^2) - P(x_{r_2}, n^2), \text{ para todo } n \geq k.$$

Por lo tanto,

$$r_1 - r_2 = \rho(x_{r_1}) - \rho(x_{r_2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{P(x_{r_1}, n^2) - P(x_{r_2}, n^2)}{n} = 0$$

lo cual es una contradicción pues $r_1 \neq r_2$.

$\square$

Como $f^2(b) = d \leq a$ y f^2 es continua, entonces dado $\epsilon = \frac{b-d}{2} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\mid f^2(x) - f^2(b) \mid < \frac{b-d}{2}$, si $\mid x - b \mid < 2\delta$. Así

$$f^2(x) - f^2(b) \leq \mid f^2(x) - f^2(b) \mid < \frac{b-d}{2}$$

de donde obtenemos que

$$f^2(x) < f^2(b) + \frac{b-d}{2} = d + \frac{b-d}{2} = \frac{b+d}{2}, \text{ para todo } x \in [b-\delta, b] \subset K.$$

Si $x \in S$ y $f^n(x) \in K$, entonces n debe ser un cuadrado perfecto, por lo tanto $n+1$ y $n+2$ no lo son, de donde $M_{n+1} = M_{n+2} = L$ entonces $f^{n+1}(x), f^{n+2}(x) \in L$. Por tanto afirmo que $f^n(x) < b - \delta$ caso contrario si $f^n(x) \geq b - \delta$ entonces aplicando la observación a la función f^n tendremos que

$$f^{n+2}(x) = f^2(f^n(x)) < \frac{b+d}{2} < b$$

de aquí tenemos que $f^{n+2}(x) \notin L$, lo cual es una contradicción.
Probemos que S no tiene puntos periódicos.
Supongamos que existe $p \in S$ periódico de período k. Sin importar que tan grande sea k es posible elegir l de tal modo que $(l+1)^2 - l^2 \geq 2k$. En consecuencia los iterados de p permanecen en L un número mayor que k veces, y dado que p es periódico, debe ocurrir que todos aquellos permanecen en L; por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(x,n^2)}{n} = 0$$

y como $P(x,n^2) = P(M^r,n^2)$ entonces tendremos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(x,n^2)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{P(M^r,n^2)}{n} = 0 = r$$

para la sucesión M^r que generó este p, lo cual es una contradicción ya que $r \in (\frac{3}{4}, 1)$. Luego concluimos que S no tiene puntos periódicos.
Ahora consideremos $b^1 = \max\{x \in [b,c] : f(x) = c\}$ y $c^1 = \min\{x \in [b^1,c] : f(x) = b\}$.
Así es fácil ver que $[b^1,c^1] \subset [b,c]$, como $f(b^1) = c$ y $f(c^1) = b$ entonces tendremos que $[b,c] \subset f([b^1,c^1])$. Ahora supongamos que existe un $z \in f([b^1,c^1])$ y $z \notin [b,c]$. Si $z > c$, como $z \in f([b^1,c^1])$ entonces existe un $z' \in [b^1,c^1]$ tal que $z = f(z') > c > b = f(c^1)$ entonces como f es continua por el teorema de valor medio tendremos que existe $w \in [z',c^1]$ tal que $f(w) = c$. Vemos que $[z',c^1] \subset [b,c]$ entonces $w \in [b,c]$ y además $w \geq z' > b^1$. Esto es una contradicción a la maximalidad de b^1 pues b^1 es el mayor elemento de $[b,c]$ tal que $f(b^1) = c$ pero vemos que w cumple las mismas características que b^1 y $w > b^1$.
Ahora si existe un $z \in f([b^1,c^1])$ tal que $z < b$ entonces existe un $z' \in [b^1,c^1]$ tal que

$$z = f(z') < b = f(c^1) < f(b^1) = c$$

es claro que $z' \neq c^1$. Por el teorema de valor intermedio existe un $w \in [b^1,z']$ tal que $f(w) = b$. Sabemos que $[b^1,z'] \subset [b^1,c]$ y además $z' \leq w \leq b^1 < c^1$ entonces $z' < c^1$ lo cual es una contradicción pues contradice la minimalidad de c^1. Por lo tanto $f([b^1,c^1]) \geq b$ y $f([b^1,c^1]) \leq c$ es decir $f([b^1,c^1]) \subset [b,c]$.

De ambas inclusiones tenemos que $f([b^1, c^1]) = [b, c]$.
Ahora voy a demostrar que $f((b^1, c^1)) = (b, c)$. Supongamos que exista un $z \in (b, c)$ tal que $f(z) = b$ o $f(z) = c$, si $f(z) = b$ entonces tendremos que

$$z \in (b^1, c^1) \subset [b^1, c] \text{ esto significa que } z \in [b^1, c] \text{ y } f(z) = b$$

lo cual es una contradicción ya que $z < c^1$ y c^1 es el menor numero con la caracteristica que $x \in [b^1, c]$ y $f(x) = b$
Si $f(z) = c$ con $z \in (b^1, c^1) \subset [b, c]$ de donde $f(z) = c$ y $z \in [b, c]$ lo cual es una contradicción ya que b^1 es el mayor elemento tal que $f(x) = c$ y $x \in [b, c]$ con esto terminamos de demostrar lo que queremos.
Definamos por inducción

$b^{n+1} = \max\{x \in [b^n, c^n] : f(x) = c^n\}$ y $c^{n+1} = \min\{x \in [b^{n+1}, c^n] : f(x) = b^n\}$
Así, $[b^n, c^n] \supset [b^{n+1}, c^{n+1}]$, $f([b^{n+1}, c^{n+1}]) = [b^n, c^n]$, $f(b^{n+1}) = c^n$, $f(c^{n+1}) = b^n$ y $f(x) \in (b^n, c^n)$ para todo $x \in (b^{n+1}, c^{n+1})$.
Sea $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} [b^n, c^n]$,por el teorema de los intervalos encajados se concluye que $A \neq$. Sean $b^* = \inf A$ y $c^* = \sup A$. Como $\{b^n\}$ es una sucesión monótona creciente entonces $b^n \to b^*$ y como $\{c^n\}$ es una sucesión monótona decreciente, $c^n \to c^*$. Por la continuidad de f tendremos que

$$f(b^*) = f(\lim_{n\to\infty} b^{n+1}) = \lim_{n\to\infty} c^n = c^*.$$

Análogamente se prueba que $f(c^*) = b^*$.
Ahora probaremos que $\lim_{n\to\infty} \mid f^n(x) - f^n(y) \mid = 0$ escogeremos de una manera mas específica la elección de las sucesiones M^r. Además de los anteriores requerimientos sobre $M \in \Upsilon$, supondremos que si $M_k = K$ para $k = n^2$ y $(n+1)^2$, entonces $M_k = [b^{2n-(2j-1)}, b^*]$ para $k = n^2 + (2j-1)$, $M_k = [c^*, c^{2n-2j}]$ para $k = n^2 + 2j$ donde $j = 0, 1, \ldots, n$.
Para los demás k's que no son cuadrados de enteros, se supondrá que $M_k = L$.
Del hecho que $\rho(x)$ es el limite de la fracción de n's para los cuales $f^{n^2}(x) \in K$, se sigue que para cualquier $r^*, r \in (\frac{3}{4}, 1)$ existen una infinidad de n's tales que $M_k^r = M_k^{r^*}$ para $k = n^2$ y $(n+1)^2$.

Sean $x_r, x_{r^*} \in S$. Ya que $b_n \to b^*, c^n \to c^*$ cuando $n \to \infty$, para cualquier $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$| b^n - b^* | < \frac{\epsilon}{2} \text{ y } | c^n - c^* | < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para todo } n > N.$$

Entonces para cualquier n con $n > N$ y $M_k^r = M_k^{r^*} = K$ para $k = n^2$ y $(n+1)^2$, se tiene

$$f^{n^2+1}(x_r) \in M_k^r = [b^{2n-1}, b^*], \text{ con } k = n^2 + 1.$$

Así que $f^{n^2+1}(x_r)$ y $f^{n^2+1}(x_{r^*})$ pertenecen a $[b^{2n-1}, b^*]$. Por lo tanto

$$| f^{n^2+1}(x_r) - f^{n^2+1}(x_{r^*}) | < \epsilon$$

. Ya que hay una infinidad de n's con esa propiedad entonces decimos que

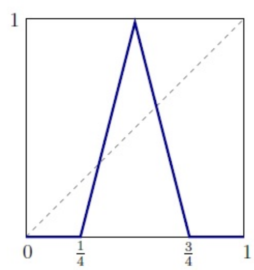
$$\liminf_{n\to\infty} | f^n(x_r) - f^n(x_{r^*}) | = 0.$$

Capítulo 5

Ejemplos

Ejemplo 1

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x < 0{,}25; \\ 4x - 1, & \text{si } 0{,}25 \leq x < 0{,}50; \\ -4x + 3, & \text{si } 0{,}50 \leq x < 0{,}75; \\ 0, & \text{si } 0{,}75 \leq x \leq 1. \end{cases}$$



Como f es continua y $O(\frac{23}{65}) = \{\frac{23}{65}, \frac{27}{65}, \frac{43}{65}\}$ es una órbita de período 3, f satisfface las hipótesis del Teorema de Li-Yorke, por tanto es caótica en I. Mostraremos que f tiene un conjunto scrambled $S \subset I$ de medida cero.
Primero veamos que:

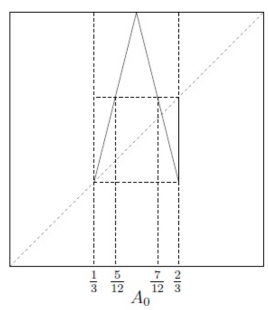
- $0, \frac{1}{3}$ y $\frac{3}{5}$ son puntos fijos.

- Si $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \cup [\frac{3}{4}, 1]$, entonces $f(x) = 0$, y por tanto x es eventualmente fijo.

- Si $x \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$, entonces $f(x) = 4x - 1 < x$ y así, si $f^n(x) \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces la sucesión $\{f^n(x)\}_{n \geq 0}$ es decreciente y acotada inferiormente por lo tanto converge a un punto fijo. Pero en $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$ no hay puntos fijos, luego existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) \leq \frac{1}{4}$. Por lo tanto, x es eventualmente fijo.

- Si $x \in (\frac{2}{3}, \frac{3}{4})$, $f(x) = -4x + 3 \in (0, \frac{1}{3})$ y por tanto x es eventualmente fijo

De lo anterior se sigue que todo punto en $\left[0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right]$ es eventualmente fijo, es más, para todo $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right]$, existe $n \geq 1$ tal que $f^n(x) = 0$. Además, f en $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ es como la figura siguiente



De aquí se deduce que que todo punto $x \in A_0 = (\frac{5}{12}, \frac{7}{12})$ es eventualmente fijo a 0 pues si $x \in A_0$ entonces $f(x) \in \left(\frac{2}{3}, 1\right]$.
De hecho los puntos $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ que no son eventualmente fijos a 0 son aquellos puntos cuya órbita está incluida en $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Sea Λ tl conjunto, notemos que

$$\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}([\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]).$$

Claramente $f(\Lambda) \subset \Lambda$. Veremos que Λ es un conjunto de medida cero.
Como el conjunto de puntos eventualmente fijos, $S_0 \subset \Lambda$, tiene medida cero, entonces el conjunto scrambled $S \subset I$ que se obtiene como resultado del

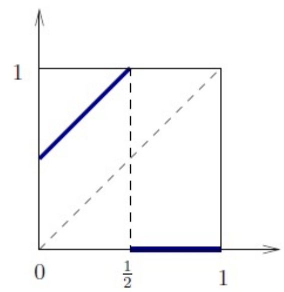
teorema de Li-Yorke tiene medida cero, pues $S \subset S_0$.

Ejemplo 2

Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 0, & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Nos damos cuenta que $O(0, f) = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ es una órbita de período 3. Por lo



anterior podríamos pensar que f es caótica en el sentido Li-Yorke. Pero notemos que cada órbita es eventualmente periódica de período 3. Por ejemplo si $x = \frac{1}{3}$ entonces $f(x) = \frac{5}{6}, f^2(x) = 0$. Por tanto no satisface las condiciones de la definición, es decir f no es caótica. Esto se debe a que f es discontinua en el punto $\frac{1}{2}$.

Por lo visto en este ejemplo, en el teorema de Li-Yorke no se puede debilitar la condición de continuidad.

Ejemplo 3

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de $\mathbb{R}^2$ de $\frac{2\phi}{3}$ alrededor del origen, es decir, $f(r, \theta) = (r, \theta + \frac{2\phi}{3})$, f tiene una órbita de período 3 pero no es caótica en el sentido Li-Yorke pues todos sus puntos, excepto el origen son puntos periódicos de período 3. Por lo tanto el teorema de Li-Yorke no se puede extender a dimensiones mayores que 1.

Bibliografía

[Bar95] Robert G. Bartle, *The elements of integration and Lebesgue measure*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995, Containing a corrected reprint of the 1966 original [ıt The elements of integration, Wiley, New York; MR0200398 (34 #293)], A Wiley-Interscience Publication. MR 1312157 (95k:28001)

[BH11] Keith Burns and Boris Hasselblatt, *The Sharkovsky theorem: a natural direct proof*, Amer. Math. Monthly **118** (2011), no. 3, 229–244. MR 2800333 (2012f:37088)

[Bra90] Robert L. Brabenec, *Introduction to real analysis*, The Prindle, Weber & Schmidt Series in Advanced Mathematics, PWS-KENT Publishing Co., Boston, MA, 1990. MR 1119068 (92d:26001)

[BS02] Michael Brin and Garrett Stuck, *Introduction to dynamical systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. MR 1963683 (2003m:37001)

[dMB79] Alciléa A. H. de Mello and Mário Barone, Jr., *Equaç oes diferenciais. Uma introduç ao aos sistemas dinâmicos*, Universidade de S ao Paulo, Instituto de Matemática e Estatística, S ao Paulo, 1979. MR 544842 (82a:58001)

[Du07] Bau-Sen Du, *A simple proof of Sharkovsky's theorem revisited*, Amer. Math. Monthly **114** (2007), no. 2, 152–155. MR 2290366 (2007j:37063)