

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS



TESIS

**SOBRE LA DENSIDAD DE ODÓMETROS EN  
SISTEMAS DINÁMICOS CON LA PROPIEDAD DE  
SOMBREAMIENTO**

PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE:  
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

ELABORADO POR:  
ROJAS AGUILAR, HAROLD IVAN

ASESOR:  
DR. VILLAVICENCIO FERNANDEZ, HELMUTH

LIMA-PERÚ

2019

*A mis padres, por su apoyo incondicional de siempre, su confianza y por inspirarme con su ejemplo.*

## **Agradecimientos:**

A mi familia por ser mi principal soporte durante mi etapa universitaria y durante el desarrollo de este trabajo.

A mi asesor Helmuth Villavicencio por su dedicación y tutela a lo largo del proyecto.

A mis amigos que me acompañaron en el tránsito de la vida universitaria, en especial a Diego y Bruno por aquellos momentos que nos ayudaron a madurar juntos como matemáticos.

A los profesores que siempre estuvieron prestos a ayudarme a mejorar, en especial al profesor Jack Arce por su apoyo en gran parte de la carrera.

A Concytec por el apoyo a la ciencia que viene realizando año tras año y que en esta ocasión apostó por mí a través del Proyecto de Investigación Básica FONDECYT-100 titulado “Un invariante dinámico para medir la complejidad del comportamiento de las órbitas y el caos en sistemas continuos”.

## Resumen

Un sistema dinámico discreto  $(X, T)$  es un odómetro si es equicontinuo y existe algún punto  $x$  regularmente recurrente para el cual  $\overline{O(x)} = X$ . Nos interesa saber si podemos encontrar odómetros contenidos en un sistema dinámico  $(X, T)$  preestablecido. Para ello es necesario conocer la distribución de los puntos regularmente recurrentes dentro de  $X$ . Cuando nuestro sistema posee la propiedad de sombreado la colección de puntos regularmente recurrentes es densa en el conjunto de puntos no errantes ([14]). Conociendo ello, en este trabajo se da la demostración de la existencia de odómetros contenidos en sistemas que poseen la propiedad de sombreado. Más aún se demuestra que la colección de puntos cuya clausura de su órbita es un odómetro es densa en el conjunto de puntos no errantes. Adicionalmente, si el sistema es transitivo se demuestra que la colección de medidas ergódicas soportadas en odómetros es densa en el conjunto de medidas invariantes. El teorema central del trabajo lo desarrollamos basándonos en el artículo titulado “Properties of invariant measures in dynamical systems with the shadowing property” de Jin y Oprocha ([15]). Desarrollamos los preliminares necesarios para la prueba de los resultados principales empezando por Teoría de la medida y proporcionamos ejemplos que ayuden a una mejor comprensión de los aspectos desarrollados a lo largo del trabajo. Finalmente como aplicación de los resultados mostramos que los odómetros del shift están determinados por las órbitas de sus puntos periódicos y estudiamos los odómetros de la Herradura de Smale.

**Palabras Claves:** Sistema dinámico discreto, shift, Herradura de Smale, odómetro, sistema transitivo, propiedad de sombreado, punto regularmente recurrente, medidas invariantes.

## Abstract

A discrete dynamical system  $(X, T)$  is a odometer if it is equicontinuous and there exists some regular recurrent point  $x$  such that  $\overline{O(x)} = X$ . We are interested to know if we can find odometers contained in a fixed dynamical system  $(X, T)$ . For this reason it is necessary to know the distribution of the regular recurrent points inside  $X$ . When our system have the shadowing property the collection of regular recurrent points is dense on the non-wandering set ([14]). Knowing this, in this work it is given the proof of the odometers existence contained in systems which have the shadowing property. Moreover it is shown that the collection of points whose orbit closure is a odometer is dense on the non-wandering set. In addition, if the system is transitive it is shown that the collection of ergodic measures supported on odometers is dense in the invariant measures set. We develop the central theorem of this work basing in the article of Jin and Oprocha, "Properties of invariant measures in dynamical systems with the shadowing property"([15]). We develop the necessary background to prove our main results starting by Measure Theory y provide examples that will help to a better understanding of the aspect developed across this work. Finally as application we show that the shift odometers are determined by the orbits of its periodic points and study the Smale Horseshoe odometers.

**Keywords:** Discrete dynamical system, shift, Smale Horseshoe, odometer, transitive system, shadowing property, regular recurrent point, invariant measure.

# Índice general

<b>Índice de figuras</b>	<b>3</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1. Teoría de la medida . . . . .	5
1.2. Una métrica sobre $M(X)$ . . . . .	14
1.3. La topología $\omega^*$ . . . . .	17
1.4. Topología dinámica . . . . .	20
1.4.1. Propiedades de recurrencia . . . . .	21
1.4.2. Propiedad de sombreadamiento . . . . .	30
1.4.3. Recurrencia por cadenas . . . . .	39
<b>2. Espacio de Medidas invariantes y ergódicas</b>	<b>43</b>
2.1. Propiedades de la medida inducida . . . . .	43
2.2. El espacio de medidas invariantes . . . . .	45
2.2.1. La medida de Haar en $S^1$ . . . . .	46
2.2.2. Medidas invariantes en sistemas no compactos . . . . .	47
2.2.3. Medidas invariantes en sistemas no continuos . . . . .	47
2.3. El espacio de Medidas Ergódicas . . . . .	51

2.3.1.	Propiedades extremales del conjunto de medidas ergódicas . . . . .	55
2.3.2.	Propiedades topológicas del espacio de Medidas Ergódicas . . . . .	58
2.4.	Conexión entre las propiedades topológicas y la medida . . . . .	64
<b>3.</b>	<b>El espacio de medidas ergódicas soportadas en Odómetros</b>	<b>75</b>
3.1.	Los odómetros de la dinámica del shift . . . . .	87
3.2.	Los odómetros de la Herradura de Smale . . . . .	88
<b>4.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>100</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>101</b>

# Índice de figuras

1.1. La aplicación $T$ . . . . .	42
2.1. La aplicación Norte-Sur . . . . .	54
3.1. El conjunto inicial $M$ . . . . .	89
3.2. Las aplicaciones que forman la Herradura de Smale . . . . .	89
3.3. La Herradura de Smale . . . . .	90
3.4. El conjunto $H^{-n}$ . . . . .	91
3.5. La aplicación $H^{-1}$ . . . . .	91
3.6. El conjunto $H^n$ . . . . .	92
3.7. Asignación de puntos por líneas verticales . . . . .	94
3.8. Asignación de puntos por líneas horizontales . . . . .	94
3.9. Asignación de puntos de la Herradura de Smale . . . . .	95
3.10. Cajas en la Herradura de Smale . . . . .	96
3.11. La órbita de $x$ . . . . .	99

# Introducción

Los estudios en la rama de Teoría Ergódica, también conocida como Dinámica Ergódica, comenzaron a inicios de la década de 1930 derivada del estudio de acciones de grupos sobre espacios. Con el tiempo, los descubrimientos en esta teoría han tenido repercusión sobre otras áreas tales como la Teoría de Números. En ese sentido uno de los tempranos resultados en Teoría Ergódica es el teorema de Weyl sobre la equidistribución de los números (para mayor detalle ver [9]). Un ejemplo más reciente es la prueba ergódica de Furstenberg (ver [10]) del célebre teorema de Szemerédi sobre progresiones aritméticas. A partir de la Teoría Ergódica se han abierto también nuevas áreas de investigación relacionadas. Por ejemplo en los últimos años viene cobrando relevancia la Optimización Ergódica (ver [17]) donde la principal interrogante es como maximizar la funcional definida sobre el conjunto de medidas invariantes  $M_T(X)$  dada por  $\phi(\mu) = \int f d\mu$  para una función continua  $f$  fijada. Aquí las medidas ergódicas juegan el papel de maximizantes de esta funcional.

Por otro lado los resultados en Teoría Ergódica han despertado un interés en las medidas invariantes a la hora de estudiar sistemas topológicos (los cuales representan las principales aplicaciones). El Teorema de recurrencia de Poincaré, el cual es considerado el primer resultado de Teoría Ergódica, implica que la restricción de una aplicación continua al soporte de una medida invariante es regionalmente recurrente. Sin embargo la principal razón por la cual la Teoría Ergódica tiene una fuerte presencia en otras áreas de Dinámica,

recae en los teoremas ergódicos, los cuales aseguran que para casi toda condición inicial la distribución de iteraciones entre varias partes del espacio satisface una cierta ley asintótica, un ejemplo de estos es el Teorema Ergódico de Birkhoff. Podemos decir luego que existe una fuerte conexión entre las propiedades dinámicas de un sistema y las propiedades de medida.

A continuación describiremos el contenido del presente trabajo. Dado un espacio métrico  $(X, d)$  y una medida de probabilidad  $\mu$  sobre los borelianos de  $X$  y una aplicación continua  $T$  de  $X$  en sí misma. Denotamos por  $M_T(X)$  al conjunto de aquellas medidas de probabilidad sobre  $X$  invariantes por  $T$ . En el capítulo 2, bajo ciertas hipótesis veremos que siempre hay al menos una medida  $T$ -invariante. Se hace un estudio del conjunto  $M_T^e(X)$  formado por aquellas medidas  $T$ -invariantes que hacen al sistema dinámico “*indivisible*”, mejor conocidas como medidas ergódicas. Es de interés conocer las propiedades del conjunto de las medidas ergódicas en el espacio de medidas invariantes. En principio,  $M_T^e$  está formado por puntos extremos del espacio de medidas invariantes, sin embargo se demuestra que  $M_T^e$  es exactamente el conjunto de puntos extremos de dicho espacio y por lo tanto el estudio de medidas  $T$ -invariantes puede ser reducido al estudio de medidas ergódicas gracias al Teorema de descomposición ergódica (ver [6]). Por otro lado, si le asignamos la topología  $\omega^*$  al conjunto de medidas invariantes se puede probar que el conjunto de medidas ergódicas es un  $G_\delta$  cuando la aplicación  $T$  es bimedible. Por otra parte, al estudiar con mayor profundidad la topología de las medidas ergódicas encontramos resultados inesperados como que para el caso del shift, este conjunto además es denso en  $M_T(X)$ (ver [16]).

En el último capítulo introduciremos el concepto de un sistema dinámico muy peculiar llamado odómetro.

Un sistema dinámico  $(X, T)$  es equicontinuo si para todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$

con la propiedad que para cualquier par de puntos  $x, y \in X$ ,  $d(x, y) < \delta$  implica que  $d(T^n x, T^n y) < \epsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Un sistema dinámico  $(X, T)$  es un odómetro si es equicontinuo y existe algún punto  $x$  regularmente recurrente para el cual  $\overline{O(x)} = X$ . Notar que con esta definición una órbita periódica es también un odómetro. Existen varias formas equivalentes de definir un odómetro (ver [7]).

Sistemas muy particulares, como el shift bilateral, poseen odómetros contenidos densamente. En este capítulo también exhibiremos un método para encontrar odómetros dentro de un sistema dinámico con ciertas propiedades. Estas propiedades son la de sombreado que nació durante el estudio en propiedades dinámicas y de medida de difeomorfismos axioma A (ver [11],[12] por Rufus Bowen), y la propiedad de recurrencia por cadenas, que es una extensión de la recurrencia topológica.

Resulta interesante pensar en alguna conexión entre la propiedad de sombreado y propiedades de medida.

En general, puede suceder que un sistema dinámico con la propiedad de sombreado no tenga puntos periódicos, sin embargo Moothathu probó en [13] que la colección de puntos uniformemente recurrentes es densa en el conjunto de puntos no errantes, y luego Moothathu y Oprocha probaron en [14] que la colección de puntos regularmente recurrentes es densa en el conjunto de puntos no errantes. Ellos también se preguntaron en [14] si existe siempre un punto cuya clausura de su órbita es un odómetro. En esta cuestión se enfoca el presente trabajo, el cual está basado en el artículo [15] de Jin y Oprocha, los que lograron dar una respuesta positiva a esta interrogante. De hecho, probaron que si un sistema tiene la propiedad de sombreado, entonces la colección de puntos cuya clausura de su órbita es un odómetro es densa en el conjunto de puntos no errantes. Si además el sistema es transitivo la colección de medidas ergódicas soportadas en odómetros es densa en el conjunto de medidas invariantes (como sucede para el caso del shift). Este último resultado, que lo enunciamos a continuación, es el más importante del presente trabajo y

se demuestra en el último capítulo.

**Teorema Principal.** *Supongamos que un sistema dinámico  $(X, T)$  es transitivo y tiene la propiedad de sombreado. Luego la colección de medidas ergódicas las cuales están soportadas sobre odómetros es densa en  $M_T(X)$ . En particular el conjunto  $M_T^e(X)$  es residual en  $M_T(X)$ .*

Finalmente demostramos que para el caso del shift bilateral, los odómetros están determinados solamente por las órbitas de sus puntos periódicos y gracias a esto, encontramos los odómetros de la Herradura de Smale.

Para un mejor entendimiento, iniciamos el presente trabajo con el desarrollo de los preliminares necesarios para abordar los principales resultados.

# Capítulo 1

## Preliminares

A continuación recordaremos las definiciones que serán utilizadas en lo sucesivo. En la primera sección tratamos de forma somera aspectos de Teoría de la Medida, para mayores detalles ver las referencias [1] y [3]. En la segunda sección se usa fuertemente el Teorema de Stone Weierstrass (ver [2]) para definir una métrica sobre el conjunto de medidas de probabilidad. En la tercera sección presentamos lo que es la topología  $\omega^*$  y mostramos la prueba de la compacidad del conjunto de medidas de probabilidad que también puede ser encontrada en el libro [4]. En la cuarta sección mostramos las definiciones y resultados en Topología Dinámica (que pueden ser vistos también en [4]) incluyendo resultados acerca de la propiedad de sombreado y recurrencia por cadenas respectivamente. Los resultados de estas dos últimas secciones pueden ser encontrados también en [18].

### 1.1. Teoría de la medida

En esta sección presentaremos las definiciones y resultados de Teoría de la medida más relevantes para los fines del presente trabajo.

**Definición 1.1.** Dado  $X$  un espacio topológico, decimos que  $\mathcal{F}$ , un subconjunto del conjunto potencia de  $X$ , es un  $\sigma$ -álgebra si se cumple lo siguiente:

1.  $X \in \mathcal{F}$ .
2. Si  $A \in \mathcal{F}$  entonces  $X \setminus A \in \mathcal{F}$ .
3. Si  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$  entonces  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{F}$ .

Si  $\mathcal{G}$  es un subconjunto cualquiera del potencia de  $X$ , definimos el  $\sigma$ -álgebra generado por  $\mathcal{G}$  como el menor  $\sigma$ -álgebra que lo contiene y será denotado por  $\sigma(\mathcal{G})$ .

Denotamos por  $\mathcal{B}(X)$  el  $\sigma$ -álgebra generado por los conjuntos abiertos de  $X$  el cual llamaremos el  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $X$  (y los conjuntos que posee serán llamados Borelianos). Cabe recordar que podemos encontrar una diversidad de subconjuntos del potencia de  $X$  que también generan  $\mathcal{B}(X)$ , entre ellos, por ejemplo, el conjunto formado por todos los cerrados de  $X$ . Denotamos por  $(X, \mathcal{F})$  para referirnos a un espacio métrico  $X$  con  $\mathcal{F}$  un  $\sigma$ -álgebra definido sobre su potencia.

Aunque las siguientes definiciones se pueden presentar para espacios de medidas generales, es decir, donde el espacio es topológico asociado con un  $\sigma$ -álgebra general, en lo sucesivo consideraremos siempre que el espacio es métrico y el  $\sigma$ -álgebra de Borel a menos que se especifique lo contrario.

**Definición 1.2.** Dado  $(X, d)$  espacio métrico. Decimos que  $\mu : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0, 1]$  es una medida de probabilidad sobre  $\mathcal{B}(X)$  si:

1.  $\mu(X) = 1$ .
2.  $\mu(A) \geq 0$  para todo  $A \in \mathcal{B}(X)$ .
3. Si  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(X)$  una colección disjunta dos a dos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i).$$

Denotamos al conjunto de medidas de probabilidad por  $M(X)$ . Nos referiremos a los conjuntos medibles  $A$  que satisfagan  $\mu(A) = 0$  como conjuntos de medida nula. Cuando una propiedad dada sea satisfecha para el complemento de un conjunto de medida nula diremos que esta propiedad es satisfecha  $\mu$ -c.t.p.

Una medida de probabilidad es continua en el sentido siguiente:

Dada una sucesión creciente  $\{A_n\}_{n \geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ , se cumple que  $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ .

Las funciones definidas entre dos espacios medibles necesitan también cierta condición de compatibilidad.

**Definición 1.3.** Sean  $(X, d)$  y  $(Y, \rho)$  dos espacios métricos. Decimos que la función  $f : X \rightarrow Y$  es medible si:

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X), \quad \forall A \in \mathcal{B}(Y).$$

Note que si  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua,  $\mathcal{B}(X)$  y  $\mathcal{B}(Y)$  son las  $\sigma$ -álgebras de Borel de  $X$  y  $Y$  respectivamente entonces  $f$  será medible ya que  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $X$  para todo  $U$  abierto en  $Y$  y de esto podemos extender la propiedad de ser medible al  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $Y$ .

Necesitamos también definir la noción de integrabilidad de funciones medibles, que guarda la noción de aproximación de la integral de Riemann solo que ahora la aproximación no se obtiene refinando el conjunto ambiente por intervalos sino por conjuntos medibles.

**Definición 1.4.** Sea  $\mu$  una medida de probabilidad sobre un espacio métrico  $(X, d)$ . Una función simple  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es una función con rango finito. En otras palabras:

$$f = \sum_{k=1}^n a_k \mathcal{X}_{A_k}.$$

donde  $\mathcal{X}_{A_k}$  es la función característica del conjunto medible  $A_k$  y los  $a_k \in \mathbb{R}$ .

La integral de  $f$  se denota por  $\int_X f d\mu$  y se define como:

$$\int_X f d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k).$$

Se puede demostrar que la integral así definida es lineal. La prueba se logra acomodando de forma adecuada los conjuntos involucrados y se puede encontrar en [1], pág 49-50.

Ahora generalizamos la noción de integral a cualquier función medible.

**Definición 1.5.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $\mu$  una medida sobre  $\mathcal{B}(X)$ . La integral de una función medible no negativa  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  se define (si existe) como  $\int_X f = \sup\{\int_X g d\mu \mid g \leq f \text{ y } g \text{ es simple}\}$ . En el caso que dicho supremo exista se dice que  $f$  es  $\mu$ -integrable.

Dado  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible, las partes positiva y negativa de  $f$  denotadas por  $f^+$  y  $f^-$  respectivamente se definen por:

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\} \quad \text{y} \quad f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}.$$

Si  $f^+$  y  $f^-$  son  $\mu$ -integrables decimos que  $f$  es  $\mu$ -integrable. Además, ya que  $|f| = f^+ + f^-$ , si se cumple que  $\int_X |f| < \infty$ , se tiene que tanto  $f^+$  como  $f^-$  son  $\mu$ -integrables y por ende  $f$  es  $\mu$ -integrable. Cuando  $|f|$  es integrable decimos que  $f \in L^1(\mu)$ .

Ahora presentamos algunos teoremas que conciernen a la convergencia en integrales. Haremos uso de estos resultados cuando hablemos de la esperanza condicional en el capítulo 2. Para ello enunciamos el siguiente teorema.

**Teorema 1.6.** (Teorema de la convergencia monótona)

Sea  $\mu$  una medida de probabilidad sobre el espacio  $(X, d)$ . Si  $\{g_n : X \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \geq 1}$  es una familia no decreciente de funciones medibles no negativas, entonces

$$\lim \int g_n d\mu = \int \lim g_n d\mu.$$

*Demostración.* Sea  $g(x) = \lim g_n(x)$  que puede admitir valores  $\infty$ . Es claro que  $g(x) = \sup g_n(x)$ , entonces dado cualquier  $a \in \mathbb{R}$  tenemos que  $g^{-1}(-\infty, a] = \bigcap_{n \geq 1} g_n^{-1}(-\infty, a]$  y ya que los conjuntos de la forma  $(-\infty, a]$  generan los borelianos en  $\mathbb{R}$  concluimos que  $g$  es medible.

Dado  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $g_n(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in X$  aún cuando  $\lim g_n(x) = \infty$ . Entonces  $\int g_n d\mu \leq \int g d\mu$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Luego  $\lim \int g_n d\mu \leq \int g d\mu$ .

Ahora veamos la desigualdad recíproca. Dado  $\lambda \in (0, 1)$  y  $f \leq \lambda g$  una función simple. Definamos los conjuntos  $X_n = \{x \in X / f(x) \leq g_n(x)\}$ . Así obtenemos una familia no decreciente de conjuntos cuya unión es todo el espacio  $X$ . Por la continuidad de la medida se tiene que  $\lim \mu(X \setminus X_n) = 0$ , entonces dado  $\delta > 0$ , existe  $N > 0$  tal que  $|\mu(X \setminus X_n)| < \delta$  para todo  $n \geq N$ . De esto se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{X_N} f d\mu &\leq \int_{X_N} g_n d\mu, \quad \text{para todo } n \geq N, \\ \int_{X_N} f d\mu + \int_{X \setminus X_N} f d\mu &\leq \int_{X_N} g_n d\mu + \int_{X \setminus X_N} f d\mu \\ &\leq \int_{X_N} g_n d\mu + \text{máx}\{f(x)/x \in X\} \cdot \delta, \\ \int_X f d\mu + \int_{X \setminus X_N} g_n d\mu &\leq \int_X g_n d\mu + \text{máx}\{f(x)/x \in X\} \cdot \delta. \end{aligned}$$

Puesto que  $g_n \geq 0$  para todo  $n \geq 1$  tenemos

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g_n d\mu + \text{máx}\{f(x)/x \in X\} \delta.$$

Haciendo  $n \rightarrow \infty$  y luego  $\delta \downarrow 0$ .

$$\int_X f d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu.$$

Luego

$$\int_X \lambda g d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu.$$

Finalmente haciendo  $\lambda \uparrow 1$  tenemos que

$$\int_X g d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu.$$

□

**Proposición 1.7.** (*Lema de Fatou*)

Sea  $\mu$  una medida de probabilidad sobre  $(X, d)$  y sea  $\{f_n : X \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$  una familia de funciones integrables no negativas tal que  $\liminf \int f_n d\mu < \infty$ . Luego la función definida por  $f(x) = \liminf f_n(x)$  es integrable y  $\int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$ .

*Demostración.* Sea  $g_n(x) = \inf_{m \geq n} \{f_m(x)\}$ , entonces la sucesión de funciones  $\{g_n\}_{n \geq 1}$  es no decreciente y  $g_n \leq f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Luego  $\int g_n d\mu \leq \int f_n d\mu$  para todo  $n$  y por lo tanto  $\int g_n d\mu \leq \inf \int f_n d\mu$ . Por el Teorema de la convergencia monótona tenemos que

$$\int f d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

□

**Teorema 1.8.** (*Teorema de la convergencia dominada*)

Sea  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión de funciones medibles sobre  $X$  tal que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

existe para todo  $x \in X$ . Si existe una función  $g \in L^1(\mu)$  tal que

$$\int f_n d\mu \leq \int g d\mu, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, x \in X,$$

entonces  $f \in L^1(\mu)$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0.$$

De esto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$ .

*Demostración.* Ya que  $|f| \leq g$  y  $f$  es medible,  $f \in L^1(\mu)$ . Como  $|f_n - f| \leq 2g$ , el lema de Fatou se puede aplicar a las funciones  $2g - |f_n - f|$  y obtenemos

$$\begin{aligned} \int 2gd\mu &\leq \liminf \int (2g - |f_n - f|)d\mu \\ &= \int 2gd\mu + \liminf \left(- \int |f_n - f|d\mu\right) \\ &= \int 2gd\mu - \limsup \int |f_n - f|d\mu. \end{aligned}$$

Ya que  $\int 2gd\mu$  es finita, podemos sustraer esto y obtener

$$\limsup \int |f_n - f|d\mu \leq 0.$$

Finalmente, como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int (f_n - f)d\mu \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f|d\mu = 0$  concluimos que

$$\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu.$$

□

Todas las medidas de probabilidad cumplen cierta condición de regularidad del siguiente tipo

**Proposición 1.9.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $\mu$  una medida de probabilidad sobre  $X$ . Luego para todo  $\epsilon > 0$  y  $A \in \mathcal{B}(X)$  existe un conjunto cerrado  $F$  y un abierto  $U$  tal que  $F \subset A \subset U$  y*

$$\mu(U \setminus F) < \epsilon.$$

*Demostración.* Sea

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B}(X) / \forall \epsilon > 0, \exists F \text{ cerrado y } U \text{ abierto tal que } F \subset A \subset U \text{ y } \mu(U \setminus F) < \epsilon\}.$$

Probaremos que este conjunto es un  $\sigma$ -álgebra.

Observe primero que  $X \in \mathcal{A}$ .

Dado  $A \in \mathcal{A}$  veamos que  $X \setminus A \in \mathcal{A}$ . Dado  $\epsilon > 0$  existe  $F$  cerrado y  $U$  abierto con  $F \subset A \subset U$  y  $\mu(U \setminus F) < \epsilon$ . Tenemos que  $X \setminus F$  es un abierto que contiene  $X \setminus A$  y  $X \setminus U$  es un cerrado contenido en  $X \setminus A$  y  $\mu((X \setminus F) \setminus (X \setminus U)) = \mu(U \setminus F) < \epsilon$ .

Luego  $X \setminus A \in \mathcal{A}$ .

Ahora, dada una colección de conjuntos  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  probaremos que  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$ . Dado  $\epsilon > 0$  existe para cada  $k \in \mathbb{N}$  un abierto  $U_k$  y un cerrado  $F_k$  con  $F_k \subset A_k \subset U_k$  tales que  $\mu(U_k \setminus F_k) < \epsilon/3^k$ .

Sea  $U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$  que es un conjunto abierto. Es claro que  $\{U \setminus F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una familia decreciente de conjuntos y  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} U \setminus F_k = U \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$ .

Luego  $\mu(U \setminus \bigcup_{k=1}^n F_k)$  converge a  $\mu(U \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k)$ , entonces existe algún  $N$  para el cual

$$\mu(U \setminus \bigcup_{k=1}^N F_k) - \mu(U \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k) < \epsilon/2$$

Observe que  $U \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k \setminus F_k$ , luego  $\mu(U \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \epsilon/3^k = \epsilon/2$ . Sea  $F = \bigcup_{k=1}^N F_k$  el cual es un conjunto cerrado. Es claro que  $F \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \subset U$  y por las dos últimas desigualdades tenemos que  $\mu(U \setminus F) < \epsilon$ .

Así  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$ . Con esto hemos probado que  $\mathcal{A}$  es un  $\sigma$ -álgebra.

Si probamos que los conjuntos cerrados pertenecen a  $\mathcal{A}$  podremos concluir que  $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$  debido a que  $\mathcal{B}(X)$  es el menor  $\sigma$ -álgebra que contiene a los conjuntos cerrados.

Sea  $F$  un conjunto cerrado de  $X$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$  definamos  $U_k = \{x \in X/d(x, F) < 1/k\}$ . La familia  $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una familia decreciente de abiertos tal que  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_k = F$ . Entonces  $\mu(U_k)$  converge a  $\mu(F)$ . Dado  $\epsilon > 0$  existe un  $N$  para el cual  $\mu(U_N) - \mu(F) < \epsilon$ . Así  $F \in \mathcal{A}$ . □

**Corolario 1.10.** *Con las hipótesis de la proposición anterior se cumple:*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F)/F \subset A, F \text{ cerrado}\} = \inf\{\mu(U)/A \subset U, U \text{ abierto}\}.$$

De este corolario deducimos que si dos medidas de probabilidad  $\mu, \nu$  coinciden en todos

los conjuntos abiertos (o cerrados) entonces deben coincidir en todo el  $\sigma$ -álgebra que estos generan, esto es, en todo  $\mathcal{B}(X)$ . Sin embargo, nos encontraremos en situaciones en las que no sea fácil mostrar que  $\mu, \nu$  coinciden en los abiertos, a cambio ellas coincidirán en una familia de conjuntos que también genera  $\mathcal{B}(X)$ . Para estas situaciones este lema queda insuficiente por lo que tendremos que hacer uso del Teorema de Caratheodory que es un resultado de extensión y unicidad de premedidas definidas sobre álgebras (ver [1], pág. 29-32).

Dado un espacio métrico  $(X, d)$  denotamos por  $C(X)$  al conjunto de funciones reales continuas en  $X$ . Recordemos que cuando  $X$  es compacto toda función continua es acotada.

Ahora presentamos una proposición que nos será útil también para demostrar una caracterización de la igualdad de dos medidas de probabilidad.

**Proposición 1.11.** *Sea  $(X, d)$  espacio métrico compacto y  $\mu, \nu$  dos medidas de probabilidad, se cumple que  $\mu = \nu$  si y solo si  $\int_X f d\mu = \int_X f d\nu$  para toda  $f \in C(X)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\mu = \nu$ , entonces  $\int_X S d\mu = \int_X S d\nu$  para toda  $S$  función simple. Toda  $f \in C(X)$  no negativa es el límite puntual de una sucesión no decreciente de funciones simples y debido a que  $f$  está acotada podemos usar el teorema 1.8 para demostrar que  $\int_X f d\mu = \int_X f d\nu$ . Para cualquier  $f \in C(X)$  usamos su parte positiva  $f^+$  y negativa  $f^-$  y concluimos el resultado.

Veamos la otra implicación.

Dado  $F \subset X$  cerrado y  $\epsilon > 0$  existe  $U$  abierto conteniendo a  $F$  tal que  $\nu(U \setminus F) < \epsilon$ .

Definamos  $f(x) = \frac{d(x, X \setminus U)}{d(x, X \setminus U) + d(x, F)}$  la cual es una función continua que toma el valor 1 en  $F$  y 0 en  $X \setminus U$ . Entonces

$$\mu(F) = \int_X \mathcal{X}_F d\mu \leq \int_X f d\mu = \nu(F) + \epsilon.$$

Como  $\epsilon$  fue tomado arbitrariamente concluimos que  $\mu(F) \leq \nu(F)$ . Por simetría podemos también demostrar que  $\nu(F) \leq \mu(F)$ . Así  $\mu(F) = \nu(F)$  y entonces  $\mu$  y  $\nu$  asignan el

mismo valor a cada conjunto cerrado. Por el corolario (1.10) concluimos que  $\mu$  y  $\nu$  son iguales.  $\square$

## 1.2. Una métrica sobre $M(X)$

En lo sucesivo  $BL(X)$  denotará el conjunto de funciones lipschitz acotadas definidas con valores reales definidas sobre  $X$ , esto es,  $f \in BL(X)$  si existe  $K > 0$  tal que  $|f(x) - f(y)| \leq Kd(x, y)$  para todo  $x, y \in X$ . De esto, cuando  $f$  es lipschitz se tiene

$$\sup_{x \neq y} \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} \right\} \leq K.$$

Desde este momento consideraremos siempre que el conjunto  $(X, d)$  es un espacio métrico compacto. Así podemos ahora dotar de una métrica al espacio  $C(X)$  que es, como lo es usualmente, la métrica del supremo denotada por  $\|\cdot\|_\infty$ . Con esta métrica podemos demostrar que  $C(X)$  es separable y por el Teorema de Stone-Weiertrass  $BL(X)$  es denso en  $C(X)$  (Ver [2], pág.54). Sin embargo, nos será más útil para nuestros fines definir una nueva norma sobre el espacio  $BL(X)$  más fina que la norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Proposición 1.12.** *La función  $\|\cdot\|_{BL}: BL(X) \rightarrow [0, \infty)$  definida como:*

$$\|f\|_{BL} = \|f\|_L + \|f\|_\infty,$$

donde  $\|f\|_L = \sup_{x \neq y} \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} \right\}$ , es una norma en  $BL(X)$ .

*Demostración.* Para ver que  $\|\cdot\|_{BL}$  es una norma en  $BL(X)$  consideramos  $f, g \in BL(X)$ . Luego usando propiedades de supremos se obtienen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_L &= \sup_{x \neq y} \left\{ \frac{|(f + g)(x) - (f + g)(y)|}{d(x, y)} \right\} \\
&\leq \sup_{x \neq y} \left\{ \frac{|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|}{d(x, y)} \right\} \\
&\leq \sup_{x \neq y} \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} \right\} + \sup_{x \neq y} \left\{ \frac{|g(x) - g(y)|}{d(x, y)} \right\} \\
&= \|f\|_L + \|g\|_L.
\end{aligned}$$

Entonces  $\|f + g\|_{BL} = \|f + g\|_L + \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_L + \|g\|_L + \|f\|_\infty + \|g\|_\infty = \|f\|_{BL} + \|g\|_{BL}$ .

Así la desigualdad triangular es satisfecha. También dado  $\lambda \in \mathbb{R}$  tenemos que

$$\|\lambda f\|_L = \sup_{x \neq y} \left\{ \frac{|\lambda f(x) - \lambda f(y)|}{d(x, y)} \right\} = |\lambda| \sup_{x \neq y} \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} \right\} = |\lambda| \|f\|_L.$$

entonces  $\|\lambda f\| = \|\lambda f\|_L + \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_L + |\lambda| \|f\|_\infty = \lambda \|f\|_{BL}$ .

Por último si  $\|f\|_L = 0$  entonces  $\|f\|_\infty = 0$  lo cual implica que  $f = 0$  y si  $f = 0$  entonces  $\frac{|\lambda f(x) - \lambda f(y)|}{d(x, y)} = 0$  para todo par  $x, y$  distintos lo cual nos asegura que  $\|f\|_{BL} = 0$ . Y con esto hemos probado que  $\|\cdot\|_{BL}$  es una norma.  $\square$

Consideremos la bola cerrada unitaria en  $BL(X)$  con la norma  $\|\cdot\|_{BL}$ , que será separable con la norma  $\|\cdot\|_\infty$  ya que  $C(X)$  lo es (ver [2], pág.54), y fijemos una familia de funciones  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  densa en este conjunto.

Definamos la función  $d_{BL} : M(X) \times M(X) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  como

$$d_{BL}(\mu, \nu) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{|\int_X f_k d\mu - \int_X f_k d\nu|}{2^k}.$$

El siguiente lema es una versión de la proposición 1.11 más fina que nos será útil para demostrar que  $d_{BL}$  es una métrica.

**Lema 1.13.** Sean  $\mu, \nu \in M(X)$ .

$$\mu = \nu \text{ si y solo si } \int_X f d\mu = \int_X f d\nu \text{ para todo } f \in BL(X).$$

*Demostración.* Si  $\mu = \nu$  es claro que  $\int_X f d\mu = \int_X f d\nu$  para todo  $f \in BL(X)$ . Veamos la otra implicación. Como se mencionó antes, debido al Teorema de Stone-Weierstrass,  $BL(X)$  es denso en  $C(X)$  entonces para una  $f \in C(X)$  y  $\epsilon > 0$  dado existe una  $g \in BL(X)$  tal que  $\|f - g\|_\infty < \epsilon/2$ . Luego

$$\left| \int_X f d\mu - \int_X g d\mu \right| < \epsilon/2$$

y

$$\left| \int_X f d\nu - \int_X g d\nu \right| < \epsilon/2.$$

Como  $\int_X g d\mu = \int_X g d\nu$  deducimos de las dos desigualdades anteriores que  $|\int_X f d\mu - \int_X f d\nu| < \epsilon$ . Haciendo  $\epsilon \downarrow 0$  obtenemos  $\int_X f d\mu = \int_X f d\nu$  y por la proposición 1.11 concluimos que  $\mu = \nu$ .  $\square$

**Proposición 1.14.** *La función  $d_{BL}$  es una métrica en  $M(X)$ .*

*Demostración.* Dadas  $\mu, \nu, \omega \in M(X)$  se tiene que

$$\begin{aligned} d_{BL}(\mu, \nu) + d_{BL}(\nu, \omega) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{|\int_X f_k d\mu - \int_X f_k d\nu|}{2^k} + \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{|\int_X f_k d\nu - \int_X f_k d\omega|}{2^k} \\ &\geq \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{|\int_X f_k d\mu - \int_X f_k d\omega|}{2^k} = d_{BL}(\mu, \omega). \end{aligned}$$

Con esto la desigualdad triangular queda probada. También es claro que  $d_{BL}(\mu, \nu) = d_{BL}(\nu, \mu)$ .

Resta probar que  $\mu = \nu$  si y solo si  $d_{BL}(\mu, \nu) = 0$ . Ver que  $\mu = \nu$  es una condición suficiente para que  $d_{BL}(\mu, \nu) = 0$  es directo por lo que solo veremos la otra implicación.

Si  $d_{BL}(\mu, \nu) = 0$  entonces  $|\int_X f_k d\mu - \int_X f_k d\nu| = 0$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . De esto  $\int_X f_k d\mu = \int_X f_k d\nu$ . Dada cualquier función lipschitz no nula y acotada  $f$ , existe una sucesión  $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  que converge a  $\frac{f}{\|f\|_{BL}}$  con la norma  $\|\cdot\|_\infty$ . Luego  $\int_X \frac{f}{\|f\|_{BL}} d\mu = \int_X \frac{f}{\|f\|_{BL}} d\nu$ , entonces  $\int_X f d\mu = \int_X f d\nu$ . Por el lema anterior,  $\mu = \nu$ .  $\square$

### 1.3. La topología $\omega^*$

El espacio  $M(X)$  tiene asociado una topología derivada del Análisis funcional gracias al Teorema de representación de Riesz (ver [3]). Esta es la llamada topología  $\omega^*$  (o débil \*).

**Definición 1.15.** La topología  $\omega^*$  de  $M(X)$  es aquella generada por los conjuntos

$$V_{(\epsilon, \mu, g_1, g_2, \dots, g_k)} = \left\{ \nu \in M(X) / \left| \int_X g_i d\mu - \int_X g_i d\nu \right| < \epsilon, g_i \in C(X), \forall i = 1, 2, \dots, k \right\},$$

donde  $\epsilon > 0$ ,  $\mu \in M(X)$  y  $g_i \in C(X)$ .

Observemos que a partir de esta definición la convergencia de una familia de medidas  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  a una medida  $\mu \in M(X)$  se da cuando

$$\int_X f d\mu_n \rightarrow \int_X f d\mu, \text{ para todo } f \in C(X).$$

Denotaremos esta convergencia por  $\mu_n \xrightarrow{\omega^*} \mu$ .

Un hecho interesante es que la topología  $\omega^*$  es metrizable, y por la misma métrica dada anteriormente.

**Proposición 1.16.** La métrica  $d_{BL}$  induce una topología equivalente a la topología  $\omega^*$ .

*Demostración.* La aplicación  $\mu \mapsto \int_X f_i d\mu$  es continua para cada  $i \in \mathbb{N}$  ya que

$$\left| \int_X f_i d\mu - \int_X f_i d\nu \right| \leq 2^i d_{BL}(\mu, \nu).$$

Veamos que la aplicación  $\mu \mapsto \int_X f d\mu$  también es continua para cualquier  $f \in C(X)$ .

Dado  $\epsilon > 0$  existe algún  $f_k$  tal que  $\|f - f_k\|_\infty < \epsilon/3$ . Como  $\mu \mapsto \int_X f_k d\mu$  es continua, existe  $\delta > 0$  tal que si  $\|\mu - \nu\|_{BL} < \delta$  entonces  $|\int_X f_k d\mu - \int_X f_k d\nu| < \epsilon/3$ . También tenemos que para cualquier  $\nu$  se cumple que

$$\begin{aligned} \left| \int_X f d\mu - \int_X f_k d\mu \right| &< \epsilon/3, \\ \left| \int_X f d\nu - \int_X f_k d\nu \right| &< \epsilon/3 \end{aligned}$$

Sumando las tres últimas desigualdades conseguimos que

$$\left| \int_X f d\mu - \int_X f d\nu \right| < \epsilon.$$

Así la aplicación  $\mu \mapsto \int_X f d\mu$  es continua. Finalmente, el conjunto  $V_{(\epsilon, \mu, f)} = \{\nu \in M(X) \mid \left| \int_X f d\mu - \int_X f d\nu \right| < \epsilon\}$  es un abierto con la métrica  $d_{BL}$ . Acabamos de probar que todo abierto de la topología  $\omega^*$  es también un abierto con la métrica  $d_{BL}$ .

Veamos ahora que  $B_{BL}(\mu, \epsilon)$  contiene un abierto de la topología  $\omega^*$ . Sea  $N$  tal que

$$\sum_{k \geq N} \frac{2\|f_k\|_\infty}{2^k} < \epsilon/2.$$

Tomemos el conjunto

$$V = V_{(\epsilon/2, \mu, f_1, \dots, f_{N-1})} = \{\nu \in M(X) \mid \left| \int_X f_i d\mu - \int_X f_i d\nu \right| < \epsilon/2, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, N-1\}.$$

Para  $\nu \in V$  tenemos

$$d_{BL}(\mu, \nu) \leq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\left| \int_X f_k d\mu - \int_X f_k d\nu \right|}{2^k} + \sum_{k \geq N} \frac{2\|f_k\|_\infty}{2^k} < \epsilon/2 + \epsilon/2 < \epsilon.$$

Así  $V \subset B_{BL}(\mu, \epsilon)$ . Con esto hemos probado que la topología  $\omega^*$  es más fina que la generada por la métrica  $d_{BL}$ . Finalmente concluimos que ambas topologías son equivalentes.  $\square$

Podemos identificar una medida de probabilidad con una funcional lineal sobre  $C(X)$  gracias al siguiente famoso teorema (también se puede ver en [1], pág. 212-215.)

**Teorema 1.17.** (Teorema de representación de Riesz)

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto y  $J : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$  una funcional lineal tal que  $J(1) = 1$  y positiva ( $J(f) \geq 0$  cuando  $f \geq 0$ ). Luego existe una única medida  $\mu \in M(X)$  tal que

$$J(\mu) = \int_X f d\mu \quad \forall f \in C(X).$$

Por lo tanto la aplicación  $\mu \mapsto J$  es una biyección entre  $M(X)$  y el espacio de funcionales normalizadas positivas sobre  $C(X)$ . Denotaremos por  $J_\mu$  a la imagen de  $\mu$  vía esta aplicación. Ahora es claro que la topología  $\omega^*$  definida anteriormente sobre  $M(X)$  es la heredada por la topología  $\omega^*$  sobre  $C(X)^*$  mediante esta aplicación biyectiva.

Para los fines del presente trabajo nos interesa conocer las propiedades del conjunto  $M(X)$ . Por lo pronto observemos que  $M(X)$  es convexo (si  $\mu, \nu \in M(X)$  entonces  $\lambda\mu + (1 - \lambda)\nu \in M(X)$  para cualquier  $\lambda \in [0, 1]$ ).

**Teorema 1.18.** *Si  $(X, d)$  es compacto entonces el espacio  $M(X)$  es compacto en la topología  $\omega^*$ .*

*Demostración.* Dada  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $M(X)$ . Recordemos que la métrica  $d_{BL}$  se definió a partir de la familia  $\{f_i\}_{i \geq 1}$  con  $\|f_i\| \leq 1$ . Luego la sucesión en  $\mathbb{R}$ ,  $\{\int_X f_1 d\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , está contenida en el intervalo  $[-1, 1]$ . Luego existe una subsucesión  $\{\int_X f_1 d\mu_{n_k^1}\}_{k \in \mathbb{N}}$  convergente.

La sucesión  $\{\int_X f_2 d\mu_{n_k^1}\}_{k \in \mathbb{N}}$  también está contenida en  $[-1, 1]$  por lo que poseerá una subsucesión  $\{\int_X f_2 d\mu_{n_k^2}\}_{k \in \mathbb{N}}$  convergente. Podemos usar el mismo razonamiento para obtener una subsucesión  $\{\int_X f_l d\mu_{n_k^l}\}_{k \in \mathbb{N}}$  convergente en  $[-1, 1]$  para todo  $l \in \mathbb{N}$ . Luego la sucesión  $\{\int_X f_l d\mu_{n_k^l}\}_{k \in \mathbb{N}}$  es tal que converge para todo  $l \in \mathbb{N}$ .

Definamos  $J(f_l) = \lim_k \int_X f_l d\mu_{n_k^l}$ .

Para cualquier  $f \in C(X)$  la sucesión  $\{J(f_{l_n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ , donde  $\{f_{l_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una subsucesión de  $\{f_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  que converge a  $f$ , es de Cauchy. Si  $\{f_{s_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es otra subsucesión que converge a  $f$  entonces  $\{f_{l_n} - f_{s_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a 0 por lo que dado  $\epsilon > 0$  existe algún  $n_0$  para el cual  $|f_{l_n} - f_{s_n}| < \epsilon$  para todo  $n > n_0$ . Entonces

$$\left| \int_X f_{l_n} d\mu_k^k - \int_X f_{s_n} d\mu_k^k \right| < \epsilon \text{ para todo } n > n_0.$$

Haciendo  $k \uparrow \infty$  tenemos que  $|J(f_{l_n}) - J(f_{s_n})| < \epsilon$ . Como  $\epsilon$  fue arbitrario obtenemos la igualdad. Ahora podemos definir  $J(f) = \lim_n J(f_{l_n})$ . Veamos también que debido a que

$\{f_{l_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $f$ , dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0$  para el cual

$$\left| \int_X f_{l_n} d\mu_k^k - \int_X f d\mu_k^k \right| < \epsilon \text{ para todo } n > n_0.$$

Haciendo  $k \uparrow \infty$  deducimos que  $\left| J(f_{l_n}) - \limsup_k \int_X f d\mu_k^k \right| < \epsilon$ , para todo  $n > n_0$ .

Haciendo  $\epsilon \downarrow 0$  tenemos que  $J(f_{l_n}) = \limsup_k \int_X f d\mu_k^k$  y observemos que lo mismo se puede realizar con el  $\liminf$  para concluir que  $\lim_k \int_X f d\mu_k^k = \lim_n J(f_{l_n}) = J(f)$ .

Observemos que  $J$  así definida es una funcional lineal normalizada positiva sobre  $C(X)$ .

Por el Teorema 1.17 existe  $\mu \in M(X)$  tal que  $J(f) = \int_X f d\mu$  para toda  $f \in C(X)$ . De esto  $\int_X f d\mu_k^k$  converge a  $\int_X f d\mu$  para toda  $f \in C(X)$ , esto es,  $\mu_k^k \xrightarrow{\omega^*} \mu$ .

Por lo tanto  $M(X)$  es compacto en la topología  $\omega^*$ . □

## 1.4. Topología dinámica

En esta sección nos enfocamos en estudiar las propiedades dinámicas de nuestro sistema  $(X, T)$ .

Consideraremos en toda esta sección que  $T : X \rightarrow X$  es un continua y  $X$  es un espacio métrico compacto a menos que en algún momento se diga lo contrario.

**Definición 1.19.** El conjunto  $O(x) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$  es llamado la órbita de  $x$  y los conjuntos  $O^+(x) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{Z}^+\}$  y  $O^-(x) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{Z}^-\}$  son llamados la órbita positiva y negativa de  $X$  respectivamente.

**Ejemplo 1.20.** Sea  $(X, d) = S^1$  con la métrica usual, definimos la aplicación  $T_\alpha(x) = \alpha x$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  la cual es una rotación en  $S^1$ . Luego  $O(x) = \{x \cdot \alpha^n / n \in \mathbb{Z}\}$  es la órbita de un punto  $x \in X$ .

**Definición 1.21.** Sea  $p \in X$ . Decimos que  $p$  es periódico de periodo  $N$  si  $N = \min\{n \in \mathbb{N} : T^n(x) = x\}$ . Decimos que  $p$  es punto fijo si es periódico de periodo 1. Denotaremos el conjunto de puntos periódicos del sistema por  $Per(T)$ .

**Ejemplo 1.22.** Sea la aplicación  $T_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$  como se definió en el ejemplo (1.20). Si  $\alpha = e^{2\pi i \cdot p/q}$  con  $(p, q) = 1$  cualquier punto  $p \in S^1$  es periódico de periodo  $q$ . Si  $\alpha = e^{2\pi \cdot r i}$  con  $r \notin \mathbb{Q}$  luego ningún punto es periódico. En efecto, pues si  $T_\alpha^n(p) = p$  para algunos  $n \in \mathbb{N}$  y  $p \in X$  entonces  $\alpha^n \cdot p = p$  y de esto  $2\pi \cdot r n = k\pi$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$  lo cual implica que  $r \in \mathbb{Q}$  (contradicción).

### 1.4.1. Propiedades de recurrencia

Ahora vamos a caracterizar los tipos de puntos que encontramos en el sistema según la naturaleza de su órbita. Veremos que la existencia de solo un punto con cierta naturaleza puede tener repercusión en todo el sistema. Aquellos puntos que en cierto sentido “siempre vuelven” después de una cantidad finita de iteraciones serán de importancia para estudiar los aspectos dinámicos. A partir de esta noción daremos la siguiente definición.

**Definición 1.23.** Un punto  $p \in X$  se dice no errante si para todo  $U \subset X$  vecindad abierta de  $p$  existe algún  $n > 0$  tal que  $T^{-n}(U) \cap U \neq \emptyset$ . El conjunto de puntos no errantes será denotado por  $\Omega(T)$ .

**Proposición 1.24.** Si  $T$  es continua se cumple:

1.  $\Omega(T)$  es cerrado.
2. Todos los puntos periódicos pertenecen a  $\Omega(T)$ .
3.  $T(\Omega(T)) \subset \Omega(T)$ , y si  $T$  es un homeomorfismo luego  $T(\Omega(T)) = \Omega(T)$ .

*Demostración.*

1. Veamos que  $X \setminus \Omega(T)$  es abierto. Dado  $x \in X \setminus \Omega(T)$ , existe  $U \subset X$  vecindad abierta de  $x$  tal que  $T^{-n}(U) \cap U = \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Luego todo  $y \in U$  es tal que  $y \in X \setminus \Omega(T)$ . De esto  $U \subset X \setminus \Omega(T)$  como requeríamos. Por lo tanto  $\Omega(T)$  es cerrado.

2. Si  $T^n x = x, n > 0$ , y  $U$  es una vecindad de  $x$ , luego  $x \in U \cap T^n(U) \neq \emptyset$ .
3. Sea  $x \in \Omega(T)$  y  $V$  una vecindad de  $T(x)$ . Luego  $T^{-1}(V)$  es una vecindad de  $x$ , entonces existe algún  $n > 0$  con  $T^{-(n+1)}V \cap T^{-1}V \neq \emptyset$ . Por lo tanto  $T^{-n}V \cap V \neq \emptyset$ , entonces  $T(x) \in \Omega(T)$ .

Si  $T$  es homeomorfismo tenemos que  $T^{-n}U \cap U = T^{-n}(U \cap T^n(U))$ , entonces  $T^{-n}U \cap U \neq \emptyset$  si y solo si  $(U \cap T^n(U) \neq \emptyset)$ . De esto  $\Omega(T) = \Omega(T^{-1})$  y ya que  $T^{-1}\Omega(T^{-1}) \subset \Omega(T^{-1})$  se sigue que  $\Omega(T) \subset T(\Omega(T))$ . Así  $\Omega(T) = T(\Omega(T))$

□

**Ejemplo 1.25.** Consideremos la aplicación rotación sobre  $S^1$ ,  $T_\alpha$  como en el ejemplo (1.20). Sabemos que si  $T_\alpha$  es una rotación racional todos los puntos son periódicos, entonces por la proposición (1.24) se tiene que  $S^1 = \Omega(T_\alpha)$  en este caso.

En el caso que  $T_\alpha$  sea la rotación irracional resulta que la órbita de todo punto es densa y por lo tanto nuevamente cada punto será no errante.

Para ver esto tomamos  $x \in S^1$ , sabemos que  $O(x)$  es infinita, entonces por la compacidad de  $S^1$  podemos encontrar una sucesión en  $O(x)$  convergente. Sea dicha sucesión  $\{T_\alpha^{n_i}(x), i \geq 0\}$ .

Sea  $U$  un arco abierto en  $S^1$  de longitud  $\epsilon > 0$ , podemos encontrar algún  $n_i$  para el cual  $d(T_\alpha^{n_i+1}(x), T_\alpha^{n_i}(x)) < \epsilon/2$ . Como  $T_\alpha$  es una isometría, entonces los arcos semiabiertos  $[T_\alpha^{n_i+r}(x), T_\alpha^{n_i+r+1}(x))$  con  $r \in \mathbb{N}$  cubren todo  $S^1$  y  $d(T_\alpha^{n_i+r}(x), T_\alpha^{n_i+r+1}(x)) < \epsilon/2$  para todo  $r \in \mathbb{N}$ . Luego existe  $r_0$  para el cual  $[T_\alpha^{n_i+r_0}(x), T_\alpha^{n_i+r_0+1}(x)) \subset U$ . Así  $T_\alpha^{n_i+r_0}(x) \in U$  y por lo tanto  $O(x)$  es denso en  $S^1$ .

Luego dado  $V$  conjunto abierto conteniendo a  $x$ , el conjunto  $V \cap O(x)$  será infinito lo cual implica que  $x$  es no errante. Finalmente, ya que  $x$  fue tomado arbitrariamente concluimos que  $\Omega(T) = S^1$ .

En lo que queda de esta subsección asumiremos que  $T$  es un homeomorfismo a menos

que se indique lo contrario. Si  $E \subset X$  denotaremos por  $\overline{E}$  a la clausura de  $E$  en  $X$ . Luego un punto  $x \in X$  tiene órbita densa si  $\overline{O(x)} = X$ . Ahora estudiaremos aquellos sistemas  $(X, T)$  que son indivisibles en cierto sentido. Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 1.26.** Decimos que el sistema  $(X, T)$  es minimal si para cada  $x \in X$  se tiene que  $\overline{O(x)} = X$ .

**Ejemplo 1.27.** Como fue mostrado en el ejemplo (1.25), la rotación irracional sobre  $S^1$  es un sistema minimal mientras la racional no.

**Proposición 1.28.** Si  $(X, T)$  es minimal entonces cualquier  $f \in C(X)$  que satisface  $f \circ T = f$ , es constante.

*Demostración.* Dado  $x \in X$  se tiene que  $f(T^k(x)) = f(x)$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Luego  $f$  es constante en  $O(x)$  y dado que  $\overline{O(x)} = X$ , por la continuidad de  $f$  concluimos que  $f$  es constante igual a  $f$ .  $\square$

Notemos que esta última afirmación puede ser demostrada pidiendo que exista un punto con órbita densa. Notemos también que esta propiedad la poseen también los sistemas ergódicos, salvo un conjunto de medida nula. En realidad los sistemas minimales, al igual que sucedía en los sistemas ergódicos, poseen la cualidad de ser indivisibles como lo indica la siguiente proposición.

**Proposición 1.29.** Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1)  $(X, T)$  es minimal.
- (2) Los únicos subconjuntos cerrados  $E \subset X$  con  $TE = E$  son  $\emptyset$  y  $X$ .
- (3) Para todo subconjunto abierto no vacío  $U \subset X$  tenemos  $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T^n(U) = X$ .

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2). Supongamos que  $(X, T)$  es minimal y sea  $E$  un subconjunto cerrado,  $E \neq \emptyset$  y tal que  $TE = E$ . Si  $x \in E$  luego  $O(x) \subset E$  y entonces  $X = \overline{O(x)} \subset E$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3) Si  $U$  es un subconjunto abierto no vacío de  $X$  luego  $E = X \setminus \bigcup_{-\infty}^{\infty} T^n U$  es cerrado y  $TE = E$ . Ya que  $E \neq \emptyset$  tenemos que  $E = X$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1). Sea  $x \in X$  y sea  $U$  un subconjunto abierto no vacío de  $X$ . Por (iii)  $x \in T^n(U)$  para algún  $n \in \mathbb{Z}$ , entonces  $T^{-n}x \in U$  y  $O(x)$  es denso en  $X$ .  $\square$

**Definición 1.30.** Decimos que un punto  $x \in X$  es un punto recurrente si existe una sucesión creciente de números naturales  $\{n_i\}_{i \geq 1}$  tal que  $\lim_{i \rightarrow \infty} T^{n_i}(x) = x$ . El conjunto de puntos recurrentes de  $T$  será denotado por  $R(T)$ .

Es claro a partir de la definición que  $Per(T) \subset R(T) \subset \Omega(T)$ . Sin embargo las inclusiones pueden ser estrictas como en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.31.** Sea  $T : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  definida por  $T(x) = 2x \pmod{1}$  y el conjunto  $[0, 1)$  con la métrica  $d(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\}$  (con esta métrica  $[0, 1)$  es compacto). Dado  $x \in [0, 1)$ , si  $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$  es su representación en base binaria, entonces

$$T(x) = 0, a_2 a_3 a_4 \dots$$

Luego cada punto  $x \in [0, 1]$  puede ser identificado con un punto de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  dado por sus decimales donde el punto  $(1, 1, 1, 1, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  está identificado con el punto  $(0, 0, 0, \dots)$  y  $T$  puede ser vista como una transformación shift a izquierda sobre este conjunto.

Vamos a construir un punto  $x = (x_0 x_1 x_2 x_3 \dots)$  recurrente no periódico.

En el primer paso ponemos  $x_0 = 1$  y hacemos  $x_1 = 0$ .

En el segundo paso duplicamos este par en las posiciones vecinas inmediatas. Así  $x_2 = 1$  y  $x_3 = 0$ . Luego hacemos  $x_4 = 0$  y  $x_5 = 0$ , esto con el fin de establecer la separación adecuada de los siguientes dígitos para evitar que el punto que formemos sea periódico.

En el tercer paso volvemos a duplicar la upla ya formada, entonces ponemos

$$x_6 \dots x_{11} = x_0 \dots x_5.$$

La separación ahora debe tener longitud  $2^2$ , es decir  $x_{12}x_{13}x_{14}x_{15} = 0000$ .

Inductivamente, sea  $x_0x_1 \dots x_{p_n}$  la cadena formada en el paso  $n$ , notemos que  $p_n$  crece más rápido que al menos  $2^{n-1}$ . En el paso  $n + 1$  duplicamos esta cadena, entonces

$$x_{p_n+1} \dots x_{2p_n+1} = x_0 \dots x_{p_n}$$

y asignamos la separación de longitud  $2^n$

$$x_{2p_n+2p_n+1} = x_0 \dots x_{2p_n+1}.$$

Así construimos el punto  $x$ .

Por reducción al absurdo, supongamos que  $x$  es periódico de periodo  $M$ . En el paso  $M$  de la construcción del punto  $x$  se forman  $2^M$  ceros al final de la cadena. Como  $2^M > 2M$  deducimos que para algún  $r > 0$  se tiene que  $T^{rM}(x) = 0$  por lo que  $T^{rM}(x) \neq x$ . Así  $x$  no es periódico.

Además  $x$  es recurrente puesto que dado  $\delta > 0$  (sin pérdida de generalidad podemos escoger  $\delta < \min\{x, 1-x\}$ ) existe algún  $N$  para el cual  $1/2^{2^N} < \delta$ , luego  $d(T^{2^N+1}x, x) < \delta$ . Así  $x$  es un punto recurrente mas no periódico.

Por otro lado el punto  $1/2 := (1, 0, 0, 0, \dots)$  es no errante mas no recurrente. Por lo tanto en este caso se tiene que

$$\text{Per}(T) \subsetneq R(T) \subsetneq \Omega(T).$$

Un punto recurrente es aquel que dado un abierto que lo contenga siempre se tendrá la certeza de que alguna de sus iteraciones volverá a dicho abierto. A continuación introducimos el concepto de puntos recurrentes que son regulares en cierto sentido. Antes de ello debemos dar la siguiente definición.

**Definición 1.32.** Un conjunto  $J \subset \mathbb{N}$  no vacío es relativamente denso si existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $J \cap [n, n + m] \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{Z}$

**Ejemplo 1.33.** Para un entero  $M$  fijo el conjunto  $J = \{M.n, n \in \mathbb{Z}\}$  es relativamente denso ya que cada intervalo en  $\mathbb{Z}$  de longitud  $M$  posee un elemento de  $J$ .

**Definición 1.34.** Decimos que  $p \in X$  es uniformemente recurrente si para todo abierto que lo contiene  $U$  el conjunto  $J = \{n \in \mathbb{Z} : T^n(p) \in U\}$  es relativamente denso

**Ejemplo 1.35.** Para el caso de la rotación racional sobre el círculo  $S^1$  sabemos que existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que todos sus puntos son periódicos con periodo  $M$ . Por lo tanto todos los elementos de  $S^1$  serán regularmente recurrentes ya que dado  $p \in S^1$  y  $U \subset S^1$  un conjunto abierto que contiene  $p$ , el conjunto  $\{n.M, n \in \mathbb{Z}\} \subset \{n \in \mathbb{Z} : T^n(p) \in U\}$ . Para el caso de la rotación irracional también es cierto que todo punto es uniformemente recurrente. Para mostrar esta última afirmación nos será de ayuda el siguiente resultado.

**Proposición 1.36.** Un punto  $p \in X$  es uniformemente recurrente si y solo si  $(\overline{O(p)}, T|_{\overline{O(p)}})$  es un sistema minimal.

*Demostración.* Supongamos que  $(\overline{O(p)}, T|_{\overline{O(p)}})$  es minimal. Dado  $U$  un conjunto abierto conteniendo  $p$  y  $x \in \overline{O(p)}$ . Como  $T|_{\overline{O(p)}}$  es minimal existe  $n(x) \in \mathbb{N}$  tal que  $T^{n(x)}(x) \in U \cap \overline{O(p)}$ . Por la continuidad de  $T$ , existe  $V(x) \subset X$  abierto que contiene  $x$  tal que  $T(V) \subset U$ . Luego tenemos

$$\overline{O(p)} = \bigcup_{x \in \overline{O(p)}} V(x) \cap \overline{O(p)}.$$

La compacidad de  $X$  nos asegura que existen  $x_1, x_2, \dots, x_k \in \overline{O(p)}$  tal que

$$\overline{O(p)} = \bigcup_{1 \leq r \leq k} V(x_r) \overline{O(p)} \subset \bigcup_{1 \leq r \leq k} V(x_r).$$

Tomamos  $m = \max\{n(x_i), 1 \leq i \leq k\}$ . Dado  $k \in \mathbb{N}$ , existe algún  $r_0 \in \{1, 2, \dots, k\}$  tal que  $T^k(p) \in V(x_{r_0})$ , entonces  $T^{k+n(r_0)}(p) \in U$ . Dado que  $k + n(r_0) \in [k, k + m] \cap \mathbb{Z}$  y  $k$  fue tomado arbitrariamente, concluimos que  $p$  es uniformemente regular.

Supongamos que  $p$  es uniformemente recurrente.

Sea  $\emptyset \neq A \subset \overline{O(p)}$  cerrado y  $T$ -invariante. Supongamos que  $\overline{O(p)} \setminus A \neq \emptyset$ .

Es claro que  $p$  tiene que estar en  $\overline{O(p)} \setminus A$  ya que en caso contrario  $\overline{O(p)} \subset A$  (por la invarianza de  $A$ ).

Tomamos  $V \subset X$  un conjunto abierto que contiene  $A$  y  $U$  un abierto que contiene  $p$  tal que  $V \cap U = \emptyset$ . Como  $p$  es uniformemente regular, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $k \in \mathbb{Z}$  existe  $s \in [k, k + m] \cap \mathbb{Z}$  con  $T^s(p) \in U$ .

Sea  $V_1 = V \cap T^{-1}(V) \cap T^{-2}(V) \cap \dots \cap T^{-m}(V)$  entonces todo punto  $x \in V_1$  cumple que  $T^l(x) \in V$ , para todo  $l \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

Se tiene además que para algún  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $T^k(p) \in V_1$  y entonces  $T^{k+l}(p) \in V$ . Se sigue que  $T^{k+l}(p) \notin U$  para todo  $1 \leq l \leq m$  lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $A = \overline{O(p)}$ .

Luego por la proposición (1.29) se sigue que  $T_{\overline{O(p)}}$  es minimal.  $\square$

Ahora debilitaremos la condición de minimalidad solo al caso en que podamos encontrar algún punto en el espacio cuya órbita sea densa. Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 1.37.** Decimos que  $(X, T)$  es un sistema transitivo si existe algún  $p \in X$  tal que  $\overline{O(p)} = X$ .

**Ejemplo 1.38.** El sistema  $T(x) = 2x \pmod{1}$  sobre  $[0, 1)$  que ya se introdujo en el ejemplo (1.31) es transitivo. En efecto, el punto identificado con

$$(1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, \dots),$$

que está formado por todas las posibles combinaciones de todas las longitudes (iniciando con longitud 1), es un punto con órbita densa en  $[0, 1)$ . Por otro lado las órbitas de los puntos periódicos no son densas en el espacio y por lo tanto el sistema no es minimal.

**Proposición 1.39.** Si  $X$  no tiene puntos aislados entonces son equivalentes:

1.  $(X, T)$  es transitivo.

2.  $\{p \in X/\overline{O(p)} = X\}$  es un  $G_\delta$  denso en  $X$ .
3. Para todo  $U, V \subset X$  abiertos no vacíos, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .
4. Para todo  $U, V \subset X$  abiertos no vacíos, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$ .

*Demostración.*

(1)  $\Rightarrow$  (4). Sea  $p \in X$  un punto tal que  $\overline{O(p)} = X$  y  $U \subset X$  un subconjunto abierto no vacío, entonces existe  $u = T^k(p) \in U$ . Dado  $V \subset X$  subconjunto abierto no vacío. Ya que  $X$  no posee puntos aislados van a existir infinitos puntos de  $O(p)$  en  $V$  y por ende  $V$  contiene algún punto de  $O(u)$ . Sea dicho punto  $T^s(u)$ , luego  $T^s(u) \in T^s(U) \cap V \neq \emptyset$ .

(4)  $\Rightarrow$  (3). Si para todo  $U, V \subset X$  abiertos no vacíos existe  $u \in V \cap T^{-n}(U)$  entonces  $T^n(u) \in U \cap T^n(V)$ .

(3)  $\Rightarrow$  (2). Ya que  $X$  es compacto entonces es separable, i.e., existe un subconjunto numerable  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  tal que  $\overline{\{x_n\}_{n \geq 0}} = X$ .

Veamos que el conjunto  $\bigcap_{m,k \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} T^{-n}(B(x_m, 1/k))$  coincide con el conjunto de puntos con órbita densa.

En efecto, si  $x \in \bigcap_{m,k \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} T^{-n}(B(x_m, 1/k))$  entonces para todo  $m, k \geq 1$ , existe  $n \geq 1$  tal que  $T^n(x) \in B(x_m, 1/k)$  lo cual implica que  $\overline{O(x)} = X$ .

Por otro lado los conjuntos  $\bigcup_{n \geq 1} T^{-n}(B(x_m, 1/k))$  son abiertos (por la continuidad de  $T$ ). Basta probar que cada uno de estos conjuntos es denso en  $X$  para concluir que

$\bigcap_{m,k \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} T^{-n}(B(x_m, 1/k))$  es denso (por el teorema de categoría de Baire).

Dado  $V \subset X$  abierto, por (3), existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $T^n(V) \cap B(x_m, 1/k) \neq \emptyset$ . Luego  $V \cap T^{-n}(B(x_m, 1/k)) \neq \emptyset$  y por ende  $\bigcup_{n \geq 1} T^{-n}(B(x_m, 1/k))$  es denso en  $X$  como requeríamos.

(2)  $\Rightarrow$  (1). Es trivial. □

**Ejemplo 1.40.** Consideremos el sistema  $T : \{1/n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \rightarrow \{1/n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$  definida como  $T\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k+1}$  y  $T(0) = 0$ . Vemos que  $\overline{O(1)} = \{1/n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$  y por ende el sistema es transitivo, sin embargo ninguna de las otras tres equivalencias de la proposición anterior son satisfechas en este ejemplo y esto debido a que el punto 1 es aislado.

Según nuestra definición, el sistema  $(\overline{O(x)}, T|_{\overline{O(x)}})$  siempre es transitivo; sin embargo cuando se impone la condición 3 de la Proposición 1.39 al sistema se puede decir algo interesante respecto al punto.

**Proposición 1.41.** Un punto  $x \in X$  es recurrente si y solo si  $(\overline{O(x)}, T|_{\overline{O(x)}})$  cumple la condición 3 de la Proposición 1.39.

*Demostración.*

Supongamos que  $x \in X$  es recurrente. Dados  $A, B \subset \overline{O(x)}$  abiertos no vacíos. Existen  $k, s \geq 0$ , podemos asumir que  $k \leq s$ , tal que  $T^k(x) \in A$  y  $T^s(x) \in B$ . Sea  $W = T^{-k}A$  el cual es abierto. Ya que  $T$  es recurrente existe  $N > 0$  tal que  $T^N x \in W$  y  $N > s$ . Luego  $T^{N+k}x \in A$  y por lo tanto  $T^{N+k}B \cap A \neq \emptyset$ . Además es claro que  $T^{s-k}A \cap B \neq \emptyset$  ya que  $T^{s-k}(T^k x) = T^s x \in B$ . Así concluimos que  $(\overline{O(x)}, T|_{\overline{O(x)}})$  es transitivo.

Supongamos que  $(\overline{O(x)}, T|_{\overline{O(x)}})$  es transitivo y  $U \cap \overline{O(x)}$  un entorno abierto de  $x$  en  $\overline{O(x)}$ . Dado  $V \cap \overline{O(x)}$  un abierto de  $\overline{O(x)}$  existe algún  $N$  para el cual

$$T^N(V \cap \overline{O(x)}) \cap (U \cap \overline{O(x)}) \neq \emptyset.$$

Se sigue que existe  $y = \lim_{k \rightarrow \infty} T^{n_k}(x) \in V \cap \overline{O(x)}$  tal que  $T^N(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} T^{n_k+N}(x) \in U \cap \overline{O(x)}$  donde  $\{n_k\}_{k \geq 0}$  es una sucesión creciente en  $\mathbb{N}$ . Luego existe  $w = T^m(x) \in U$  con  $m \neq 0$  de la forma  $m = n_{k_0} + N$ . Así hemos probado que  $x$  es recurrente.  $\square$

### 1.4.2. Propiedad de sombreadamiento

Seguiremos considerando el sistema dinámico  $(X, T)$  donde  $X$  es un espacio métrico compacto con la métrica  $d$  y  $T$  es una aplicación continua. La propiedad de sombreadamiento de un sistema se entiende como la propiedad de que dado un margen de error se puede encontrar un margen de desfase con el cual dada cualquier pseudo órbita en el sistema existe una órbita muy próxima. Las definiciones y resultados se detallan a continuación.

**Definición 1.42.** Si  $T$  es continua (homeomorfismo) un conjunto  $\{x_i\}_{i \geq 0} (i \in \mathbb{Z})$  en  $X$  es una  $\delta$ -pseudo órbita de  $T$  si se cumple:

$$d(x_i, T(x_{i-1})) < \delta \quad \forall \quad i \geq 0 (i \in \mathbb{Z}).$$

**Definición 1.43.** Si  $T$  es continua (homeomorfismo) decimos que  $(X, T)$  tiene la propiedad de sombreadamiento si dado  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$  de manera que para cualquier  $\delta$ -pseudo órbita de  $T$   $\{x_i\}_{i \geq 0} (i \in \mathbb{Z})$  existe algún punto  $z \in X$  tal que:

$$d(x_i, T^i(z)) < \epsilon, \quad \forall i \geq 0 (i \in \mathbb{Z}).$$

En este caso diremos también que  $z$   $\epsilon$ -sombrea la  $\delta$ -pseudo órbita  $\{x_i\}_{i \geq 0}$ .

Si  $T$  es un homeomorfismo la definición de propiedad de sombreadamiento es equivalente a cuando se usan pseudo órbitas indexadas por todo  $\mathbb{N} \cup \{0\}$  debido a lo siguiente:

Probaremos primero que la definición usando pseudo órbitas indexadas por  $\mathbb{N}$  implican la definición cuando estas están indexadas por  $\mathbb{Z}$ .

Supongamos que para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que toda  $\delta$ -pseudo órbita  $\{z_i\}_{i \geq 0}$  puede ser  $\epsilon/2$ -sombreada por algún punto  $z \in X$ .

Sea  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  una  $\delta$ -pseudo órbita, veremos que esta puede ser sombreada por algún punto  $x \in X$ .

Escribimos

$$z_i^n = x_{i-n}, \quad \forall i \geq 0.$$

Los conjuntos  $\{z_i^n\}$  son  $\delta$ -pseudo órbitas para todo  $n \geq 0$ . Luego para cada  $n$  existe  $z^n \in X$  que  $\epsilon/2$ -sombrea  $\{z_i^n\}$ . Afirmamos que un punto de acumulación de  $\{T^n(z^n)\}$  sombrea  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ .

Sea  $x$  un punto de acumulación de  $\{T^n(z^n)\}$ , entonces  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} T^{n_k}(z^{n_k})$  para alguna sucesión  $\{n_k\}$  en  $\mathbb{N}$ . Se sigue que

$$d(T^l(z^{n_k}), x_{l-n_k}) = d(T^l(z^{n_k}), z_l^{n_k}) < \epsilon/2 \quad \forall l \geq 0.$$

Para  $r \geq 0$  fijo tenemos que para cada  $l = n_k + r$ :

$$d(T^r(T^{n_k}(z^{n_k}), x_r)) = d(T^l(z^{n_k}), x_r) < \epsilon/2.$$

Haciendo  $k \uparrow \infty$  y debido a que  $r$  es arbitrario, concluimos que

$$d(T^r(x), x_r) \leq \epsilon/2 < \epsilon \quad r \geq 0.$$

Así  $x$   $\epsilon$ -sombrea  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ .

Para probar la recíproca basta completar las pseudo órbitas  $\{x_i\}_{i \geq 0}$  por las iteraciones “hacia atrás” de  $x_0$ , es decir, debemos considerar el conjunto  $\{z_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  con  $z_i = T^i(x_0)$  si  $i < 0$  y  $z_i = x_i$  si  $i \geq 0$ . Luego usando la hipótesis obtendremos lo requerido.

Así hemos probado que cuando  $T$  es un homeomorfismo es indistinto utilizar pseudo órbitas laterales (indexadas por  $\mathbb{N}$ ) o bilaterales (indexadas por  $\mathbb{Z}$ ) para definir la propiedad de sombreamiento.

Ahora probaremos algunos resultados sobre la propiedad de sombreamiento que nos serán útiles en lo sucesivo y nos ayudarán a entender mejor este concepto.

**Proposición 1.44.** *Si  $T$  es un homeomorfismo y tiene la propiedad de sombreamiento entonces  $T^{-1}$  también la posee.*

*Demostración.* Basta probar que si  $T$  posee la propiedad de sombreamiento entonces  $T^{-1}$  también la posee, ya que la prueba es análoga. Dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que cualquier

$\delta > 0$ —pseudo órbita  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  puede ser  $\epsilon$ —sombreada por algún punto  $x \in X$  para  $T$ .

Por la continuidad de  $T^{-1}$  existe  $\delta_1 > 0$  tal que si  $d(x, y) < \delta_1$  entonces  $d(T^{-1}x, T^{-1}y) < \delta$ .

Sea  $\{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  una  $\delta_1$ —pseudo órbita. Ya que  $d(T(y_{i-1}), y_i) < \delta_1$  se sigue que

$$d(y_{i-1}, T^{-1}(y_i)) < \delta \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Si escribimos  $x_i = y_{-i}$  podemos reescribir la última desigualdad como  $d(x_i, T(x_{i-1})) < \delta$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ . Por hipótesis tenemos que existe algún  $z \in X$  tal que  $d(T^i(z), x_i) < \epsilon$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ . Luego

$$d((T^{-1})^i z, x_{-i}) = d((T^{-1})^i z, y_i) < \epsilon \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

Así  $z$   $\epsilon$ —sombrea la pseudo órbita  $\{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  para  $T^{-1}$  que fue tomada arbitrariamente. Finalmente  $(X, T^{-1})$  posee la propiedad de sombreadamiento con lo que concluye la prueba.  $\square$

Antes de enunciar la siguiente proposición vamos a presentar el concepto de *Conjugación Topológica*. La equivalencia del comportamiento dinámico de dos sistemas es traducido en dicho concepto.

**Definición 1.45.** *Dos sistemas  $(X, T)$  y  $(Y, S)$  se dicen topológicamente conjugados si existe un homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$  tal que  $h \circ T = S \circ h$ . La transformación  $h$  se llama conjugación.*

Nótese que  $h^{-1}$  resulta ser otra conjugación entre  $(X, T)$  y  $(Y, S)$ . En ese caso se tiene que  $h^{-1} \circ S = T \circ h^{-1}$ . De esto, si  $T$  y  $S$  son homeomorfismos entonces  $(X, T^{-1})$  y  $(Y, S^{-1})$  son conjugados.

A continuación demostraremos que bajo iteraciones la propiedad de conjugación se mantiene.

**Proposición 1.46.** *Si  $(X, T)$  y  $(Y, S)$  son conjugados entonces  $(X, T^k)$  y  $(Y, S^k)$  también lo son bajo la misma conjugación para todo  $k \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* La prueba se hará por inducción.

El caso  $k = 1$  es precisamente la hipótesis de la proposición.

Supongamos que esto es cierto para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Probaremos que la conclusión es válida para  $n + 1$ .

Tenemos que  $S^n \circ h = h \circ T^n$  entonces

$$S^{n+1} \circ h = S \circ h \circ T^n = h \circ T \circ T^n = h \circ T^{n+1}.$$

□

Aunque todas las propiedades dinámicas que hemos presentado se conservan bajo conjugación, para nuestros fines solo necesitaremos demostrar la conservación de la propiedad de sombreado y de la transitividad de un sistema.

**Proposición 1.47.** *Si  $(X, T)$  y  $(Y, S)$  son topologicamente conjugados y  $(X, T)$  es transitivo entonces también lo es  $(Y, S)$ .*

*Demostración.* Sea  $h$  una conjugación entre los dos sistemas y  $x \in X$  tal que  $\overline{O(x)} = X$ .

Tomemos  $y = h(x) \in Y$  y probemos que  $\overline{O(y)} = Y$ .

Dado  $V \subset Y$  abierto, se tiene que  $h^{-1}(V)$  es un abierto en  $X$  y por ende existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $T^n(x) \in h^{-1}(V)$ . Luego  $h(T^n x) \in V$  y por lo tanto  $S^n(hx) = S^n(y) \in V$ . Así hemos probado que  $\overline{O(y)} = Y$  como requeríamos. □

**Proposición 1.48.** *Sean  $(X, T)$ ,  $(Y, G)$  sistemas dinámicos  $d$  y  $d'$  sus respectivas métricas tal que existe una conjugación  $h : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  entre ellos. Luego  $(X, T)$  posee la propiedad de sombreado si y solo si  $G$  la posee.*

*Demostración.* Probaremos que si  $T$  posee la propiedad de sombreado entonces también la posee  $G$ . Dado  $\epsilon > 0$ , por la continuidad de  $h$  existe  $\epsilon_1 > 0$  tal que si  $d(x, y) < \epsilon_1$  entonces  $d(h(x), h(y)) < \epsilon$ .

Por hipótesis existe  $\delta_1 > 0$  tal que cualquier  $\delta_1$ -pseudo órbita  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  puede ser  $\epsilon_1$ -sombreada por algún  $x \in X$  para  $T$ .

También existe  $\delta > 0$  tal que si  $d(x, y) < \delta$  entonces  $d(h^{-1}x, h^{-1}y) < \delta_1$ .

Dada una  $\delta$ -pseudo órbita  $\{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  para  $G$ , tenemos por lo anterior que

$$d(T(h^{-1}y_{i-1}), h^{-1}(y_i)) = d(h^{-1}(Gy_{i-1}), h^{-1}(y_i)) < \delta_1 \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

es decir,  $\{h^{-1}(y_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  es una  $\delta_1$ -pseudo órbita para  $T$ . Luego existe algún  $x \in X$  tal que

$$d(T^i(x), h^{-1}y_i) < \epsilon_1, \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Se sigue que  $d(h(T^i x), y_i) < \epsilon$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ . Ya que  $hT^i = G^i h$  se tiene que

$$d(G^i(h(x)), y_i) < \epsilon \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Concluimos así que  $h(x)$   $\epsilon$ -sombrea la pseudo órbita  $\{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  para  $G$ . De esto  $G$  posee la propiedad de sombreadamiento.

La prueba de la afirmación recíproca es análoga. □

**Proposición 1.49.** *Sea  $T$  continua y  $k \in \mathbb{N}$ . Entonces  $T$  posee la propiedad de sombreadamiento si y solo si  $T^k$  también la posee.*

*Demostración.* Supongamos que  $T$  posee la propiedad de sombreadamiento.

Dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que cualquier  $\delta$ -pseudo órbita  $\{x_i\}_{i \geq 0}$  de  $T$  es  $\epsilon$ -sombreada por algún punto  $z \in X$ .

Dada una  $\delta$ -pseudo órbita  $\{y_i\}_{i \geq 0}$  de  $T^k$ . Para cualquier  $i \geq 0$  existe  $m_i \in \mathbb{N}$  y  $0 \leq s_i < k$ , luego definimos el conjunto  $\{x_i\}_{i \geq 0}$  como

$$x_i = T^r(y_m).$$

Vemos que  $\{x_i\}_{i \geq 0}$  es una  $\delta$ -pseudo órbita de  $T$ .

Luego existe  $z \in X$  tal que  $d(T^i, z) < \epsilon$  para todo  $i \geq 0$ . De esto  $d(T^{km_i+s_i} z, x_{km_i+s_i}) <$

$\epsilon$  para todo  $i \geq 0$  y por ende

$$d(T^{km+s}z, x_{km+s}) < \epsilon \quad \forall \quad m \geq 0, \quad 0 \leq s < k.$$

Para  $s = 0$  se tiene

$$d(T^{km}z, x_{km}) < \epsilon, \quad \forall m \geq 0,$$

luego

$$d((T^k)^m z, y_m) < \epsilon, \quad \forall m \geq 0.$$

Así  $z$   $\epsilon$ -sombrea la pseudo órbita  $\{y_i\}_{i \geq 0}$  para  $T^k$ . De esto  $T^k$  posee la propiedad de sombreamiento.

Supongamos ahora que  $T^k$  posee la propiedad de sombreamiento.

Dado  $\epsilon > 0$  existe  $0 < \epsilon_1 < \epsilon/2$  dado por la propiedad de sombreamiento de  $T^k$  para  $\epsilon/2$ .

Por la continuidad de  $T, T^2, \dots, T^k$ , existe  $0 < \delta < \epsilon_1$  tal que

$$\text{Si } d(x, y) < \delta \quad \text{entonces } d(T^i x, T^i y) < \epsilon_1, \quad 0 \leq i \leq k.$$

Tomamos  $0 < \delta_1 < \delta$  dado por la propiedad de sombreamiento de  $T^k$  para  $\delta$ . De la misma manera existe  $0 < \delta'_1 < \delta_1$  tal que si  $d(x, y) < \delta'_1$  entonces

$$d(T^i x, T^i y) < \delta_1/k, \quad 0 \leq i \leq k.$$

Dada una  $\delta'_1$ - pseudo órbita finita  $\{x_i\}_{i=0}^k$  y  $0 \leq j \leq k$ , tomamos  $1 \leq i \leq j$  y ya que  $d(T(x_{i-1}), x_i) < \delta'_1$  se sigue que

$$d(T^{j-i+1}x_{i-1}, T^{j-i}x_i) = d(T^{j-i}(T(x_{i-1})), T^{j-i}x_i) < \delta_1/k.$$

Así

$$\sum_{1 \leq i \leq j} d(T^{j-i+1}x_{i-1}, T^{j-i}x_i) < j\delta_1/k < \delta_1.$$

Usando desigualdad triangular se sigue que

$$d(T^j x_0, x_j) < \delta_1.$$

Ahora, sea  $\{y_i\}_{i \geq 0}$  una  $\delta'_1$ -pseudo órbita de  $T$ , por lo anterior se sigue que  $\{y_{ki}\}_{i \geq 0}$  es una  $\delta_1$ -pseudo órbita de  $T^k$  y por lo tanto existe  $z \in X$  que la  $\delta$ -sombrea para  $T^k$ . Dado  $i \geq 0$  el conjunto  $\{y_{ki+j}\}_{j=0}^k$  es una  $\delta'_1$ -pseudo órbita finita para  $T$  entonces

$$d(T^j y_{ki}, y_{ki+j}) < \delta_1 < \epsilon_1 \quad 0 \leq j \leq k.$$

Como  $d(T^{ki}(z), y_{ki}) < \delta$  se sigue que

$$d(T^{ki+j} z, T^j y_{ki}) < \epsilon_1, \quad 0 \leq j \leq k.$$

Por desigualdad triangular concluimos que

$$d(T^{ki+j} z, y_{ki+j}) < 2\epsilon_1 < \epsilon, \quad 0 \leq i, 0 \leq j \leq k.$$

Por lo tanto  $z$   $\epsilon$ -sombrea la pseudo órbita  $\{y_i\}_{i \geq 0}$  que fue tomada arbitrariamente y de esto  $T^k$  posee la propiedad de sombreadamiento.

□

**Ejemplo 1.50.** Sea  $T_\lambda : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $T_\lambda z = \lambda z$  con  $\lambda \in S^1$  una rotación sobre el círculo  $S^1$  como en el Ejemplo (1.20). Como es usual, esta función se presenta en dos formas distintas, por lo que haremos el tratamiento por separado.

1. Si  $T_\lambda$  es una rotación racional, entonces existe  $N \geq 0$  tal que  $\lambda^N = 1$  (todas sus órbitas son periódicas). Luego  $T_\lambda^N = id$ . La función  $id$  solo puede poseer la propiedad de sombreadamiento cuando el espacio sobre el cual está definida solo posee puntos aislados ya que todo punto en  $S^1$  es fijo. Así la rotación racional no posee la propiedad de sombreadamiento.

2. Si  $T_\lambda$  es una rotación irracional entonces todo punto posee órbita densa.

Para todo  $\delta > 0$  y  $x \in S^1$  siempre es posible tomar una  $\delta$ -pseudo órbita periódica  $x, T_\lambda x, T_\lambda^2 x, \dots, T_\lambda^{n-1} x, x$ . Luego si  $\epsilon$  es suficientemente pequeño ( $\epsilon < \arg(\lambda)/4\pi$ ) para todo punto  $z$  con  $d(z, x) < \delta$  existirá algún  $k$  para el cual  $T^{nk}(z)$  está alejada

de  $x$  por una distancia mayor a  $\epsilon$  debido a que la familia  $\{T_\lambda^{nl}\}_{l \geq 0}$  es densa. Luego ningún punto puede sombrear esta pseudo órbita. Así la rotacional irracional tampoco posee la propiedad de sombreamiento

A continuación presentamos una inversa por derecha de la aplicación shift lateral pero en su forma algebraica.

**Ejemplo 1.51.** Sea  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  la aplicación definida por  $T(x) = x/2$  y  $[0, 1]$  dotada de la métrica usual.

Veamos que esta aplicación posee la propiedad de sombreamiento.

Dado  $\epsilon > 0$ , escojamos  $\delta = \epsilon/2$ . Sea  $\{z_i\}_{i \geq 0}$  una  $\delta$ -pseudo órbita. Notemos que para cualquier  $x, y \in [0, 1]$  se cumple que

$$d(T(x), T(y)) = \frac{1}{2}d(x, y).$$

Tomemos cualquier  $z \in [0, 1]$  tal que  $d(z_0, z) < \epsilon$  (por ejemplo el mismo  $z_0$ ).

Así

$$d(T(z), z_1) < d(T(z), T(z_0)) + d(T(z_0), z_1) < \frac{1}{2}d(z, z_0) + d(T(z_0), z_1) < \epsilon/2 + \epsilon/2 < \epsilon,$$

$$d(T^2(z), z_2) < d(T^2z, Tz_1) + d(Tz_1, z_2) < \frac{1}{2}d(Tz, z_1) + d(Tz_1, z_2) < \epsilon/2 + \epsilon/2 < \epsilon.$$

Inductivamente tenemos para cualquier  $n$

$$\begin{aligned} d(T^n(z), z_n) &< d(T^n z, Tz_{n-1}) + d(Tz_{n-1}, z_n) < \frac{1}{2}d(T^{n-1}z, z_{n-1}) + d(Tz_{n-1}, z_n) \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 < \epsilon \end{aligned}$$

Así  $z$   $\epsilon$ -sombrea la órbita  $\{z_i\}_{i \geq 0}$ .

Finalmente concluimos que  $T$  posee la propiedad de sombreamiento.

**Ejemplo 1.52.** Sea  $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  el espacio métrico compacto de dos símbolos con la métrica

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}},$$

donde  $\bar{x} = (\dots x_{-k} \dots x_{-1} x_0 x_1 \dots x_k \dots)$  y  $\bar{y} = (\dots y_{-k} \dots y_{-1} y_0 y_1 \dots y_k \dots)$ .

Definimos  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  la aplicación shift a izquierda como  $\sigma(\bar{x}) = \bar{y}$  con  $y_i = x_{i+1}$ .

Con esta métrica  $\sigma$  es un homeomorfismo.

Probaremos que esta aplicación posee la propiedad de sombreamiento.

Dado  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{2^{N-1}} < \epsilon$ . Sea  $\{\bar{x}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  una  $\frac{1}{2^N}$ -pseudo órbita.

Escribamos

$$\bar{x}_i = (\dots x_k^i \dots x_{-1}^i x_0^i x_1^i \dots x_k^i \dots).$$

Ya que  $d(\sigma(\bar{x}_i), \bar{x}_{i+1}) < \frac{1}{2^N}$  para todo  $i \geq 0$  se tiene que

$$x_j^{i+1} = x_{j+1}^i, \quad \forall i \geq 0, \quad -N \leq j \leq N.$$

Fijemos  $i \geq 0, j, r \in \mathbb{Z}$  tal que  $-N \leq j - r \leq N$  y  $r + i \geq 0$ , entonces se tiene que

$$x_{j-r}^{i+r+1} = x_{j-r+1}^{i+r}.$$

Si  $j - r + 1 \geq 0$ , usamos la última igualdad  $j - r + 1$ -veces para obtener que

$$x_0^{i+j+1} = x_{j-r+1}^{i+r}.$$

De forma análoga, si  $j - r + 1 \leq 0$  usamos la igualdad (ahora en sentido contrario) para obtener que  $x_{j-r}^{i+r+1} = x_0^{i+j+1}$ .

Luego tenemos que  $x_0^{i+j+1} = x_{j-r}^{i+r+1} = x_{j-r}^{i+j-(j-r)+1}$  siempre que  $-N \leq j - r \leq N$ . Ya que  $r + i \geq 0$  se tiene que  $i + j \geq -N$ . Haciendo  $j - r = s$  y  $j + i = l$  tenemos que

$$x_0^k = x_s^{k-s}, \quad \text{para todo } -N \leq s \leq N, \quad k \geq -N + 1. \quad (1.1)$$

Sea  $z \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  definido como

$$z_j = x_j^0, \quad j \leq N, \quad z_{N+i} = x_N^i, \quad \forall i \geq 0.$$

Así fijando  $i \geq 1$  se sigue

$$\sigma^i(z)_0 = z_i = \begin{cases} x_i^0, & 1 \leq i \leq N \\ x_N^{i-N}, & i > N \end{cases}$$

Luego de (1.1) se sigue  $\sigma^i(z)_0 = x_0^i$  para todo  $i \geq 1$ . También

$$z_{r+i} = \sigma^i(z)_r = \sigma^{i+r}(z)_0 = x_0^{i+r} = x_r^i$$

para todo  $-N \leq r \leq N$ .

Finalmente veamos que  $z \in$ -sombrea la pseudo órbita  $\{\bar{x}_i\}_{i \geq 0}$ .

Para  $i \in \mathbb{Z}$  se tiene que

$$d(\sigma^i(z), \bar{x}_i) = \sum_{-N \leq r \leq N} \frac{|z_{r+i} - x_r^i|}{2^{|r|}} + \sum_{|r| > N} \frac{|z_{r+i} - x_r^i|}{2^{|r|}}.$$

De esto

$$d(\sigma^i(\bar{x}_0), \bar{x}_i) = \sum_{|r| > N} \frac{|x_{r+i}^0 - x_r^i|}{2^{|r|}} < \frac{1}{2^{N-1}} < \epsilon.$$

Como queríamos.

Concluimos que  $\sigma$  posee la propiedad de sombreado.

### 1.4.3. Recurrencia por cadenas

Ahora presentamos el concepto de recurrencia por cadenas que generaliza todas las nociones de recurrencia vistas hasta ahora.

**Definición 1.53.** Decimos que dos puntos  $x, y \in X$  están  $\alpha$ -relacionados si existen dos  $\alpha$ -pseudo órbitas finitas  $\{u_i\}_{i=0}^k$  y  $\{v_i\}_{i=0}^l$  tales que

$$x = x_0, x_1, \dots, x_k = y \text{ y } y = z_0, z_1, \dots, z_l = x$$

con  $k, l > 1$ , y se denota  $x \overset{\alpha}{\sim} y$ .

Escribimos  $x \sim y$  si  $x \overset{\alpha}{\sim} y$  para todo  $\alpha > 0$ .

Definimos  $CR(T) = \{x \in X / x \sim x\}$ .

Notemos que la relación  $\sim$  es de equivalencia en  $CR(T)$ . Notemos también que si tenemos algún  $x \in X$  el cual está relacionado a algún  $y \in X$  mediante las pseudo órbitas

finitas  $\{u_i\}_{i=0}^k$  y  $\{v_i\}_{i=0}^l$  entonces automáticamente se tendrá que  $x, y \in CR(T)$  (las pseudo órbitas periódicas se obtienen de acoplar  $\{u_i\}_{i=0}^k$  y  $\{v_i\}_{i=0}^l$ ). Denotando por  $\tilde{x}$  el conjunto de puntos relacionados con  $x$ , de lo anterior podemos decir que  $\tilde{x} = \emptyset$  si y solo si  $x \notin CR(T)$ .

**Ejemplo 1.54.** Sea  $(X, d)$  y  $T$  como en el ejemplo 1.51. Dados cualquier par de puntos  $x, y \in X$  con  $x < y$ , para  $\alpha$  suficientemente pequeño es imposible encontrar una  $\alpha$ -pseudo órbita de  $x$  a  $y$  ya que el punto 0 es atractor. Luego  $CR(T) = \emptyset$ .

**Ejemplo 1.55.** Sea  $T$  la aplicación identidad sobre el conjunto  $X = [0, 1]$  dotado con la métrica usual. Dados cualquier par de puntos  $x, y \in [0, 1]$  con  $y > x$  y  $\alpha > 0$  escogemos el mínimo valor entero de  $y - x$ ,  $N = \lceil y - x/\alpha \rceil$ , y  $l = x - y/N < \alpha$ . Luego podemos dividir el segmento  $[x, y]$  en  $N$  subintervalos de longitud  $l$ . Si obtenemos un punto en cada subintervalo obtendremos una  $\alpha$ -pseudo órbita tanto de  $x$  a  $y$  como de  $y$  a  $x$  (ya que  $l < \alpha$ ). Así concluimos que  $x \sim y$  para todo  $x, y \in X$  y por lo tanto  $CR(T) = X$ . Adicionalmente tenemos que  $CR(T)/\sim$  es un conjunto unitario.

**Proposición 1.56.**  $CR(T) \subset X$  es cerrado.

*Demostración.* Sea  $\{x_k\}_{k \geq 0}$  una sucesión en  $CR(T)$  que converge a  $x$ . Veamos que  $x \in CR(T)$ .

Dado  $\alpha > 0$  existe  $0 < \delta < \frac{\alpha}{2}$  tal que si  $d(z, y) < \delta$  entonces  $d(Tz, Ty) < \alpha/2$ .

También existe  $k_0$  tal que  $d(x, x_{k_0}) < \delta$ . Sea  $\{z_i\}_{i \geq 0}$  una  $\frac{\alpha}{2}$ -pseudo órbita de  $T$  tal que  $x_{k_0} = z_0, z_1, \dots, z_l = x_{k_0}$ . Bastaría probar que  $x, z_1, z_2, \dots, z_{l-1}, x$  es una  $\alpha$ -pseudo órbita finita.

Como  $d(x, x_{k_0}) < \delta$  entonces  $d(Tx, T(x_{k_0})) < \alpha/2$ . Ya que  $d(z_1, T(x_{k_0})) < \alpha/2$  se sigue que

$$d(Tx, z_1) < \alpha.$$

Por otro lado, ya que  $d(T(z_{l-1}), x_{k_0}) < \alpha/2$  y  $d(x, x_{k_0}) < \delta < \alpha/2$  tenemos que

$$d(x, T(z_{l-1})) < \alpha.$$

Así  $x \in CR(T)$  y por lo tanto  $CR(T)$  es cerrado. □

**Proposición 1.57.** *Siempre se cumple que  $\Omega(T) \subset CR(T)$ .*

*Más aún, si  $T$  posee la propiedad de sombreado entonces  $\Omega(T) = CR(T)$ .*

*Demostración.* Veamos que siempre es verdad que  $\Omega(T) \subset CR(T)$ .

Dado  $x \in \Omega(T)$  y  $\alpha > 0$  por la continuidad uniforme de  $T$  existe  $\alpha' > 0$  tal que

$$d(u, w) < \alpha' \rightarrow d(T(u), T(w)) < \alpha.$$

También existe  $N > 0$  tal que  $T^N B_{\alpha'}(x) \cap B_{\alpha'}(x) \neq \emptyset$ . Tomemos  $z \in T^N B_{\alpha'}(x) \cap B_{\alpha'}(x)$  y  $y \in T(B_{\alpha'}(x))$  tal que  $T^{N-1}(y) = z$ . Por continuidad se tiene que  $d(Tx, y) < \alpha$ , entonces la colección  $x, y, Ty, T^2y, \dots, T^{N-2}y, x$  es una  $\alpha$ -pseudo órbita. De esto, como  $\alpha$  fue tomada arbitrariamente concluimos que  $x \in CR(T)$ . Así  $\Omega(T) \subset CR(T)$ .

Asumiendo ahora que  $T$  posee la propiedad de sombreado vamos a probar que  $\Omega(T) \subset CR(T)$ .

Dado  $x \in CR(T)$  y  $\alpha > 0$ , existe  $\delta > 0$  dado por la propiedad de sombreado para  $T$ . Como  $x \in CR(T)$  existe una  $\delta$  pseudo órbita finita  $\{z_i\}_{i=0}^k$  con  $z_0 = z_k = x$ . Luego existe  $z \in X$  que  $\alpha$ -sombrea la órbita finita y por ende

$$d(z, x) < \alpha \quad \text{y} \quad d(T^k(z), x) < \alpha.$$

De esto tenemos que  $T^k(B_\alpha(x)) \cap B_\alpha(x) \neq \emptyset$ . Así  $x \in \Omega(T)$ .

Por lo tanto  $CR(T) \subset \Omega(T)$ . □

**Ejemplo 1.58.** *Hagamos una modificación a nuestro ejemplo 2.17 del Polo Norte-Sur. La dinámica para los puntos que se encuentran en el hemisferio derecho  $[S, N]$  será la*

siguiente: Dado  $x \in [S, N]$  ubicamos la proyección estereográfica de este punto sobre la recta tangente en  $S$  a  $S^1$  tomando como base el punto  $N$ . Sea dicho punto  $u$ , luego tomamos el punto  $\frac{u}{2}$  como el que se encuentra a la mitad del segmento  $[S, u]$ . Definimos  $T(z)$  la proyección de  $\frac{u}{2}$  sobre  $S^1$  usando la inversa de la proyección estereográfica. La dinámica en el hemisferio izquierdo se da de forma parecida cambiando los papeles de los puntos  $S$  y  $N$  como se muestra en la Figura 1.1. Así queda definida la aplicación  $T : S^1 \rightarrow S^1$  la cual es continua.

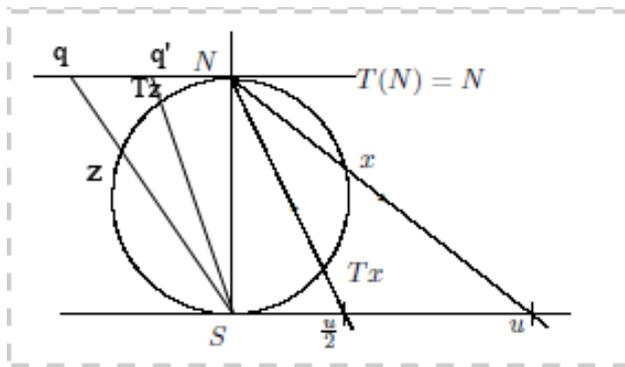


Figura 1.1: La aplicación  $T$

Los únicos puntos no errantes son  $N$  y  $S$ , que además son puntos fijos. Además todos sus puntos son recurrentes por cadenas. Veamos esto último.

Dado  $x \in S^1$ , sin pérdida de generalidad supongamos que  $x$  se encuentra en el hemisferio derecho  $[S, N]$ . Dado  $\delta > 0$  existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  para el cual  $d(T^{n_1}x, S) < \delta/2$ . Escogemos ahora un punto  $z \in [N, S]$  tal que  $d(z, S) < \delta/2$ . También existe  $n_2 \in \mathbb{N}$  para el cual  $d(T^{n_2}z, N) < \delta/2$  y  $n_3 \in \mathbb{N}$  para el cual  $d(T^{-n_3}x, N) < \delta/2$ .

Así obtenemos la  $\delta$ -pseudo órbita  $\{x, Tx, \dots, T^{n_1-1}x, z, Tz, T^{n_2-1}z, T^{-n_3}x, \dots, x\}$  y como  $\delta$  fue tomado arbitrariamente concluimos que  $x$  es recurrente por cadenas.

## Capítulo 2

# Espacio de Medidas invariantes y ergódicas

En este capítulo abordamos todo lo que concierne respecto a las medidas invariantes y ergódicas. Este tipo de medidas serán nuestro objeto de estudio a lo largo del trabajo. Se considerará en todo momento que  $(X, d)$  es un espacio métrico compacto y que la aplicación  $T : X \rightarrow X$  es continua.

### 2.1. Propiedades de la medida inducida

A partir de una función medible siempre es posible inducir una medida en el espacio de llegada a partir de una definida en el espacio de partida (proceso conocido como pushforward). A continuación detallamos dicha forma de inducción.

**Definición 2.1.** *Sea  $\mu \in M(X)$ . Podemos inducir otra medida sobre  $X$  a partir de la transformación  $T$  denotada por  $T^*(\mu)$  y dada de la siguiente manera:*

$$T^*(\mu)(A) = \mu(T^{-1}(A)), \forall A \in \mathcal{B}$$

A la medida  $T^*(\mu)$  se le denomina medida inducida por  $T$ .

**Ejemplo 2.2.** Sea  $T : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$  definida por  $T(x) = x^2$ . Sea  $\lambda$  la medida de Lebesgue sobre  $(0, 1)$ . La medida  $T^*(\lambda)$  le asigna a un intervalo  $(a, b) \subset (0, 1)$  el valor de

$$T^*(\lambda) = \lambda(T^{-1}(a, b)) = \lambda((\sqrt{a}, \sqrt{b})) = (\sqrt{b} - \sqrt{a}).$$

**Ejemplo 2.3.** Sea  $T : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  definida por  $T(x) = 2x \pmod{1}$  como en el Ejemplo (1.31). Como se vio en dicho ejemplo,  $T$  puede ser vista como una transformación shift a izquierda sobre el conjunto  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ .

Sea  $(a, b) \subset [0, 1)$  cuyas representaciones binarias son

$$a = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

y

$$b = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$$

Luego  $T^{-1}(a, b) = (0, 0a_1 a_2 a_3 \dots; 0, 0b_1 b_2 b_3 \dots) \cup (0, 1a_1 a_2 a_3 \dots; 0, 1b_1 b_2 b_3 \dots)$ . De esto

$$\lambda(T^{-1}(a, b)) = \sum_{i \geq 1} (b_i - a_i)/2^{i+1} + \sum_{i \geq 1} (b_i - a_i)/2^{i+1} = \sum_{i \geq 1} (b_i - a_i)/2^i = b - a.$$

Luego  $\lambda = T^*(\lambda)$  (Por el Teorema de extensión de Caratheodory ([3])).

Esta forma de inducir medidas a partir de otras involucra propiedades topológicas como la que mostramos en una posterior proposición. Con el fin de probar dicha proposición demostraremos un lema que también será de utilidad en cuestiones futuras.

**Lema 2.4.** Dado  $\mu \in M(X)$  tenemos que

$$\int_X f \circ T d\mu = \int f dT^*(\mu) \text{ para toda } f \in C(X)$$

*Demostración.* Dado  $A \in \mathcal{B}$  se tiene que  $\int_X \mathcal{X}_A \circ T d\mu = \mu(T^{-1}(A)) = T^*(\mu)(A) = \int_X \mathcal{X}_A dT^*(\mu)$ . De esto se sigue la igualdad de integrales para todas las funciones características. Si  $\zeta$  es simple, es decir, combinación lineal de funciones características, la igualdad se mantiene.

Si  $f \in C(X)$ , entonces  $f$  es acotada por la compacidad de  $X$ . Luego existe un  $C > 0$  tal que  $f + C$  es no negativa. Tenemos entonces que  $f + C$  puede ser aproximada puntualmente por una sucesión no decreciente de funciones simples  $\{S_n\}$ . Luego por el teorema de convergencia monótona (Teorema 1.6) se tiene que

$$\int_X (f + C) \circ T d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X S_n \circ T d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X S_n dT^*(\mu) = \int_X (f + C) dT^*(\mu).$$

Por lo tanto

$$\int_X f \circ T d\mu = \int_X f dT^*(\mu).$$

□

**Proposición 2.5.** *La aplicación*

$$\begin{aligned} T^* : M(X) &\rightarrow M(X) \\ \mu &\longmapsto T^*(\mu) \end{aligned}$$

*con  $M(X)$  dotada de la topología  $\omega^*$ , es continua.*

*Demostración.* Sea  $\{\mu_n\}$  una sucesión de medidas que converge a  $\mu$ . Luego para toda  $f \in C(X)$  se tiene que  $\int_X f d\mu_n \rightarrow \int_X f d\mu$ . Debemos ver que  $T^*(\mu_n) \xrightarrow{\omega^*} T^*(\mu)$ .

Dado  $f \in C(X)$ , como  $T$  es continua tenemos que  $\int_X f \circ T d\mu_n \rightarrow \int_X f \circ T d\mu$ .

Por el lema anterior se sigue que  $\int_X f d\mu_n \rightarrow \int_X f d\mu$  y por lo tanto  $T^*(\mu_n) \xrightarrow{\omega^*} T^*(\mu)$ . □

## 2.2. El espacio de medidas invariantes

En seguida daremos la definición de aquellas medidas en las cuales nos enfocaremos en el resto del trabajo.

**Definición 2.6.** Decimos que una medida  $\mu \in M(X)$  es  $T$ -invariante si  $\mu = T^*(\mu)$ . El conjunto de medidas  $T$ -invariantes será denotado por  $M_T(X)$ .

Notemos que la medida de Lebesgue  $\lambda$  en nuestro Ejemplo 2.3 es una medida invariante.

En el siguiente ejemplo presentamos la medida más natural que se puede definir sobre  $S^1$  y comprobamos que para el caso de una rotación, esta es invariante.

### 2.2.1. La medida de Haar en $S^1$

Sea  $S^1$  el círculo unitario en  $\mathbb{R}^2$  centrado el punto  $(0, 0)$ . Denotamos por  $[z, w]$  al arco de  $S^1$  tomado en sentido antihorario y lo llamaremos intervalo. Así dados dos puntos  $z, w \in S^1$  definimos la distancia entre estos como  $d(z, w) = \min\{l([z, w]), l([w, z])\}$  donde  $l([z, w])$  denota la longitud del intervalo  $[z, w]$ . Se puede comprobar que  $d$  efectivamente es una métrica y más aún,  $S^1$  es compacto con dicha métrica.

**Ejemplo 2.7.** Sea  $T : S^1 \rightarrow S^1$  una rotación sobre el círculo  $S^1$ , como en el Ejemplo (1.20). Dado  $[z, w]$  un intervalo cerrado tomado, le asignamos el valor  $\lambda([z, w]) = l([z, w])/2\pi$ , esto es, la longitud de dicho intervalo dividido por  $2\pi$ . Notar que la familia formada por uniones disjuntas finitas de estos intervalos forman un álgebra. A la unión infinita disjunta de intervalos  $\cup_{k \geq 1} I_k$  le asignamos el valor de  $\sum_{k \geq 1} \lambda(I_k)$ , de esto  $\lambda$  es una premedida y el Teorema de extensión Caratheodory([2]) nos asegura que podemos obtener una extensión de  $\lambda$  a  $\mathcal{B}(S^1)$ . A esta medida se le conoce como medida de Haar en  $S^1$ .

Tenemos que la medida de Haar es  $T$ -invariante ya que  $\lambda(C) = T^*(\lambda)(C)$  para cualquier intervalo (arco)  $C$  del círculo.

A continuación presentamos dos ejemplos en los cuales no se pueden encontrar medidas  $T$ -invariante.

### 2.2.2. Medidas invariantes en sistemas no compactos

**Ejemplo 2.8.** Sea  $T : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$  definida como en el Ejemplo 2.2. Por lo que se hizo anteriormente tenemos que la medida de Lebesgue  $\lambda$  no es  $T$ -invariante ya que  $(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a}) = b - a$  y la igualdad de las medidas sobre un intervalo  $(a, b)$  solo se tendría si  $\sqrt{b} + \sqrt{a} = 1$ .

Supongamos que exista una medida  $T$ -invariante  $\mu$ . Dado  $a \in (0, 1)$ , denotamos por  $A_0 = (a, 1)$  y  $A_n = (T^n(a), T^{n-1}(a)]$  para  $n \geq 1$ . Tenemos que  $T^{-1}(A_{n+1}) = A_n$  para  $n \geq 1$  entonces  $\mu(A_n) = \mu(A_{n+1})$ . Observemos también que los  $A_n$ 's son disjuntos dos a dos y que  $\cup_{n \geq 1} A_n = (0, a]$ . Esta última igualdad solo puede darse si  $\mu(A_n) = 0$  para todo  $n \geq 1$  y del cual se deduce que  $\mu(0, a] = 0$ . Como el  $a$  que se tomó fue arbitrario se concluye que  $\mu(0, 1) = 0$  lo cual es una contradicción. Luego no existe medida  $T$ -invariante sobre este sistema.

### 2.2.3. Medidas invariantes en sistemas no continuos

**Ejemplo 2.9.** Haremos una pequeña modificación al Ejemplo 2.2. Sea  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida como  $T(x) = x^2$  si  $x \in (0, 1)$  y  $T(x) = 1/2$  si  $x \in \{0, 1\}$ . Notemos que ahora el espacio es compacto pero la transformación definida no es continua. Dada  $\mu \in M_T(X)$  y dados dos puntos  $a, b \in (0, 1)$  concluimos siguiendo el procedimiento anterior que  $\mu(a, b) = 0$ . Por continuidad de la medida deducimos que  $\mu(0, 1) = 0$ , es decir,  $\mu$  está soportada sobre el conjunto  $\{0, 1\}$ . Sin embargo, esto último significa que  $\mu(\{1/2\}) = \mu(T^{-1}\{1/2\}) = \mu(\{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\}) = 1$  lo cual es una contradicción con el hecho que  $\mu$  está soportada sobre  $\{0, 1\}$ . Así hemos mostrado que en este sistema  $M_T(X) = \emptyset$

Motivados por lo anterior, en lo sucesivo consideraremos que el conjunto  $X$  es compacto y  $T$  es continua. Ahora exhibimos un resultado que garantiza la existencia de medidas  $T$ -invariantes cuando el sistema está sujeto a las condiciones mencionadas.

**Teorema 2.10.** Sea  $\{\sigma_n\}_{n \geq 0}$  en  $M(X)$ . Si formamos la sucesión  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$  tal que

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (T^*)^k(\sigma_k),$$

entonces todo punto límite de  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$  es  $T$ -invariante.

*Demostración.* Sabemos por el Teorema 1.18 que esta sucesión posee al menos un punto

límite. Sea  $\nu = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_{n_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{n_j} \sum_{k=0}^{n_j-1} (T^*)^k \sigma_k$  un punto límite de la sucesión  $\{\mu_n\}$ .

Dada  $f \in C(X)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_X f \circ T d\mu_j - \int_X f d\mu_j \right| &= \left| \int_X f \circ T d\left(\frac{1}{n_j} \sum_{k=0}^{n_j-1} ((T^*)^k \sigma_k)\right) - \int_X f d\left(\frac{1}{n_j} \sum_{k=0}^{n_j-1} ((T^*)^k \sigma_k)\right) \right| \\ &= \frac{1}{n_j} \left| \left( \sum_{k=0}^{n_j-1} \int_X f \circ T d((T^*)^k \sigma_k) - \int_X f d((T^*)^k \sigma_k) \right) \right| \\ &= \frac{1}{n_j} \left| \left( \sum_{k=0}^{n_j-1} \int_X f \circ T^{k+1} d\sigma_k - \int_X f \circ T^k d\sigma_k \right) \right| \\ &= \frac{1}{n_j} \left| \int_X f \circ T^{n_j+1} d\sigma_k - \int_X f d\sigma_k \right| \leq \frac{2\|f\|}{n_j}. \end{aligned}$$

De esto, haciendo  $j \rightarrow \infty$  tenemos

$$\int_X f \circ T d\nu = \int_X f d\nu, \text{ para toda } f \in C(X).$$

Así  $\nu \in M(X, T)$ . □

Notemos que también podemos asegurar que existe alguna medida  $T$ -invariante haciendo uso de la proposición 2.5 y el Teorema del punto fijo de Markov-Kakutani (ver [8]) sin embargo el Teorema 2.10 nos brinda una forma más explícita de cómo encontrar dichas medidas.

Ahora pasamos a demostrar las propiedades más resaltantes del espacio  $M_T(X)$ .

**Proposición 2.11.** El conjunto  $M_T(X)$  es convexo y compacto.

*Demostración.* Para ver la convexidad tomamos  $\lambda \in (0, 1)$  y  $\mu, \nu \in M_T(X)$ . Dado  $A \in \mathcal{B}$  tenemos que

$$\begin{aligned} (\lambda\mu + (1 - \lambda)\nu)(T^{-1}(A)) &= \lambda\mu(T^{-1}(A)) + (1 - \lambda)\nu(T^{-1}(A)) \\ &= \lambda\mu(A) + (1 - \lambda)\nu(A) = (\lambda\mu + (1 - \lambda)\nu)(A) \end{aligned}$$

Luego  $\lambda\mu + (1 - \lambda)\nu \in M_T(X)$ , es decir,  $M_T(X)$  es convexo.

Para ver que  $M_T(X)$  es compacto basta con probar que este es cerrado puesto que  $M(X)$  ya es compacto por el Teorema 1.18.

Dada  $\{\mu_k\}$  sucesión en  $M_T(X)$  que converge a  $\nu \in M(X)$ . Veamos que  $\nu \in M_T(X)$ .

Como  $\int_X f \circ T d\mu_k = \int_X f \mu_k$  para toda  $f \in C(X)$ , se concluye haciendo  $k \rightarrow \infty$  que  $\int_X f \circ T d\nu = \int_X f \nu$  para toda  $f \in C(X)$ . De esto  $\nu \in M_T(X)$ .  $\square$

Los siguientes resultados serán de utilidad en el siguiente capítulo a la hora de probar nuestro teorema principal.

**Lema 2.12.** Dado  $\epsilon > 0$  se cumple:

1. Para una sucesión  $(x_i)_{i=0}^\infty$  de puntos en  $X$  y dos subconjuntos  $A, B$  de  $\mathbb{N}_0$  se tiene

$$d_{BL} \left( \frac{1}{|A|} \sum_{i \in A} \delta_{x_i}, \frac{1}{|B|} \sum_{i \in B} \delta_{x_i} \right) \leq \frac{|A| + |B|}{|A| \cdot |B|} |A \Delta B| + \frac{||A| - |B||}{|A| \cdot |B|} |A \cap B|.$$

2. Para dos sucesiones  $(x_i)_{i=0}^{m-1}$  y  $(y_i)_{i=0}^{m-1}$  de puntos en  $X$ , si  $d(x_i, y_i) < \epsilon$  para  $i = 0, 1, \dots, m - 1$  se tiene

$$d_{BL} \left( \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \delta_{x_i}, \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \delta_{y_i} \right) < \epsilon.$$

3. Si  $\mu_i, \mu \in M(X)$  son tales que  $d_{BL}(\mu_i, \mu) < \epsilon$  para  $i = 1, \dots, K$ , luego para cualquier elección de  $\alpha_i \in [0, 1]$  con  $\sum_{i=1}^K \alpha_i = 1$  se verifica

$$d_{BL} \left( \sum_{i=1}^K \alpha_i \mu_i, \mu \right) < \epsilon.$$

*Demostración.*

1. La prueba para esta desigualdad pasa por agrupar adecuadamente el conjunto de índices. Así como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} d_{BL} \left( \frac{1}{|A|} \sum_{i \in A} \delta_{x_i}, \frac{1}{|B|} \sum_{i \in B} \delta_{x_i} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \int f_n d \left( \frac{1}{|A|} \sum_{i \in A} \delta_{x_i} \right) - \int f_n d \left( \frac{1}{|B|} \sum_{i \in B} \delta_{x_i} \right) \right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \frac{1}{|A|} \sum_{i \in A \cap B} f_n(x_i) + \frac{1}{|A|} \sum_{i \in A \setminus B} f_n(x_i) - \frac{1}{|B|} \sum_{i \in B \cap A} f_n(x_i) - \frac{1}{|B|} \sum_{i \in B \setminus A} f_n(x_i) \right| \end{aligned}$$

Usando desigualdad se tiene

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left[ \sum_{i \in A \cap B} |f_n(x_i)| \frac{||A| - |B||}{|A| \cdot |B|} + \sum_{i \in A \setminus B} |f_n(x_i)| \frac{1}{|A|} + \sum_{i \in B \setminus A} |f_n(x_i)| \frac{1}{|B|} \right] \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left[ \sum_{i \in A \cap B} \frac{||A| - |B||}{|A| \cdot |B|} + \sum_{i \in A \Delta B} \frac{|A| + |B|}{|A| \cdot |B|} \right] \\ &= |A \cap B| \frac{||A| - |B||}{|A| \cdot |B|} + |A \Delta B| \frac{|A| + |B|}{|A| \cdot |B|}. \end{aligned}$$

2. De la definición de  $d_{BL}$  se tiene

$$\begin{aligned} d_{BL} \left( \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \delta_{x_i}, \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \delta_{y_i} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \int f_n d \left( \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \delta_{x_i} \right) - \int f_n d \left( \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \delta_{y_i} \right) \right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f_n(x_i) - \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f_n(y_i) \right| \end{aligned}$$

De esta última expresión, por desigualdad triangular se sigue que

$$\begin{aligned} d_{BL} \left( \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \delta_{x_i}, \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \delta_{y_i} \right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} |f_n(x_i) - f_n(y_i)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} d(x_i, y_i) < \epsilon \end{aligned}$$

3. De la definición de  $d_{BL}$  y por desigualdad triangular se tiene

$$\begin{aligned}
d_{BL}\left(\sum_{i=1}^K \alpha_i \mu_i, \mu\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \int f_n d\left(\sum_{i=1}^K \alpha_i \mu_i\right) - \int f_n d\mu \right| \\
= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \sum_{i=1}^K \alpha_i \int f_n d\mu_i - \sum_{i=1}^K \alpha_i \int f_n d\mu \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \sum_{i=1}^K \alpha_i \left( \int f_n d\mu_i - \int f_n d\mu \right) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^K \alpha_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_{BL}(\mu_i, \mu) \\
&\leq \sum_{i=1}^K \alpha_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \epsilon = \epsilon
\end{aligned}$$

□

## 2.3. El espacio de Medidas Ergódicas

En esta sección nos enfocamos en estudiar aquellas medidas  $T$ -invariantes especiales que dichas de algún modo obligan al sistema a no subdividirse. Las definiciones y propiedades se detallan a continuación.

**Definición 2.13.** *Un conjunto  $A \in \mathcal{B}$  es  $T$ -invariante si  $T^{-1}(A) \subset A$ .*

Notemos que la existencia de un conjunto  $T$ -invariante no trivial  $A$  lleva consigo a que el sistema se pueda subdividir en:  $T|_A : A \rightarrow A$  y  $T|_{A^c} : A^c \rightarrow A^c$ . Aún cuando esto ocurre podremos hablar de un sistema indivisible en el sentido que nos da la definición de ergodicidad.

**Definición 2.14.** *Decimos que  $\mu \in M_T(X)$  es ergódica para  $T$  si cualquier conjunto  $A \in \mathcal{B}$ ,  $T$ -invariante, es tal que  $\mu(A) \in \{0, 1\}$ . El conjunto de medidas ergódicas para  $T$  será denotado por  $M_T^e(X)$ .*

A continuación mostramos una caracterización de las medidas ergódicas que utilizaremos en demostraciones de los resultados a futuro.

**Proposición 2.15.** *Son equivalentes:*

- 1)  $\mu$  es ergódica.
- 2) Si  $A \in \mathcal{B}$  es tal que  $\mu(A \Delta T^{-1}(A)) = 0$  entonces  $\mu(A) \in \{0, 1\}$ .
- 3) Si  $f \in C(X)$  es tal que  $f \circ T = f$  entonces  $f$  es constante  $\mu$ -c.t.p..

*Demostración.*

Supongamos que  $\mu$  es ergódica y  $A \in \mathcal{B}$  satisface  $\mu(A \Delta T^{-1}(A)) = 0$ . Sea  $A_\infty = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k=n}^{\infty} T^{-k}(A)$ . Observemos que

$$T^{-1}(A_\infty) = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k=n}^{\infty} T^{-k-1}(A) = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k=n+1}^{\infty} T^{-k}(A).$$

Luego  $A_\infty$  es un conjunto  $T$ -invariante.

Veamos que  $\mu(T^{-n}(A) \Delta A) = 0$  para todo  $n \geq 0$ . Para esto probaremos primero que dados  $D, B, C$  conjuntos cualesquiera se tiene que  $(D \Delta B) \Delta (B \Delta C) = D \Delta C$ .

$$\begin{aligned} ((\mathcal{X}_D + \mathcal{X}_B) \bmod 2 + (\mathcal{X}_B + \mathcal{X}_C) \bmod 2) \bmod 2 &= (\mathcal{X}_D + 2\mathcal{X}_B + \mathcal{X}_C) \bmod 2 \\ &= (\mathcal{X}_D + \mathcal{X}_C) \bmod 2 \end{aligned}$$

Puesto que  $x \in D \Delta C$  si y solo si  $(\mathcal{X}_D + \mathcal{X}_C)(x) \bmod 2 = 1$ , deducimos de lo anterior que  $(D \Delta B) \Delta (B \Delta C) = D \Delta C$ . De esto

$$T^{-n}(A) \Delta A = (T^{-n}(A) \Delta T^{n-1}(A)) \Delta (T^{n-1}(A) \Delta T^{n-2}(A)) \Delta \dots \Delta (T^{-1}(A) \Delta A).$$

Luego

$$\mu(T^{-n}(A) \Delta A) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^{-(k+1)}(A) \Delta T^{-k}(A)).$$

Debido a que  $\mu$  es  $T$ -invariante y a nuestra hipótesis, deducimos que

$$\mu(T^{-n}(A) \Delta A) \leq n\mu(T^{-1}(A) \Delta A) = 0$$

Dado  $x \in A\Delta A_\infty$ . Si  $x \in A \setminus A_\infty$  entonces  $x \in A$  y  $x \notin \bigcup_{k=N}^{\infty} T^{-k}(A)$  para algún  $N \geq 0$ . Luego  $x \in A$  y  $x \notin T^{-k}(A)$  para todo  $k \geq N$ , es decir,  $x \in \bigcap_{k=N}^{\infty} A\Delta T^{-k}(A)$  y por ende estará también en  $\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A\Delta T^{-k}(A)$ . Si  $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} T^{-k}(A) \setminus A$  entonces  $x \in T^{-n_j}(A)$  para una cantidad infinita de  $n_j$ 's y  $x \notin A$ . De esto  $x \in T^{-n_j} \setminus A$ , es decir,  $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A\Delta T^{-k}(A)$ . Finalmente hemos probado que  $A\Delta A_\infty \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A\Delta T^{-k}(A)$ .  
Tenemos que

$$\mu \left( \bigcup_{k=n}^{\infty} A\Delta T^{-k}(A) \right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A\Delta T^{-k}(A)) = 0,$$

entonces

$$\mu \left( \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A\Delta T^{-k}(A) \right) = 0.$$

Por lo tanto  $\mu(A\Delta A_\infty) = 0$ . Como  $A_\infty$  es  $T$ -invariante se tiene que  $\mu(A_\infty) \in \{0, 1\}$  con lo que concluimos que  $\mu(A) \in \{0, 1\}$ .

Por otro lado, supongamos que para todo  $A \in \mathcal{B}$  con  $\mu(A\Delta T^{-1}(A)) = 0$  se cumple que  $\mu(A) \in \{0, 1\}$ . Entonces es claro que si  $A$  es  $T$ -invariante se tiene que  $\mu(A) \in \{0, 1\}$ , es decir,  $\mu$  es ergódica.  $\square$

**Ejemplo 2.16.** Volveremos a modificar el Ejemplo 2.2 ahora tomando  $T(x) = x^2$  sobre todo el intervalo compacto  $[0, 1]$ . Por la Proposición 2.10 sabemos que  $M_T(X) \neq \emptyset$ . Siguiendo el procedimiento que se hizo anteriormente concluimos que  $\mu((0, 1)) = 0$ . Luego  $\mu$  está soportada en el conjunto  $\{0, 1\}$ . Observemos que  $\mu = \mu(\{0\})\delta_0 + \mu(\{1\})\delta_1$  y que  $\delta_0$  y  $\delta_1$  son medidas ergódicas. De esto

$$M_T(X) = \{\lambda\delta_0 + (1 - \lambda)\delta_1 / \lambda \in [0, 1]\}.$$

**Ejemplo 2.17.** Consideremos en  $\mathbb{R}^2$  el círculo unitario centrado en el punto  $(0, 1)$  el cual denotaremos por  $S$ . Denotemos por  $\phi$  la proyección estereográfica de  $S$  sobre el eje  $X$

que actúa proyectando un punto  $x \in S$  hacia el punto de corte entre la prologación del segmento que une el punto  $N = (0, 2)$  (el polo Norte) y  $x$  con el eje  $X$ . Sea esta proyección el punto  $(u, 0)$ . Consideramos el punto  $(u/2, 0)$  y denotamos por  $z$  al punto de corte entre  $S$  y el segmento que une el polo Norte con  $(u/2, 0)$ , esto es  $\phi^{-1}((u/2, 0))$ . Finalmente definimos  $T(x) = \phi^{-1}(\frac{1}{2}\phi(x)) = z$  si  $x \neq (0, 2)$  y  $TN = N$ . La aplicación  $T$  se representa en la Figura 2.1.

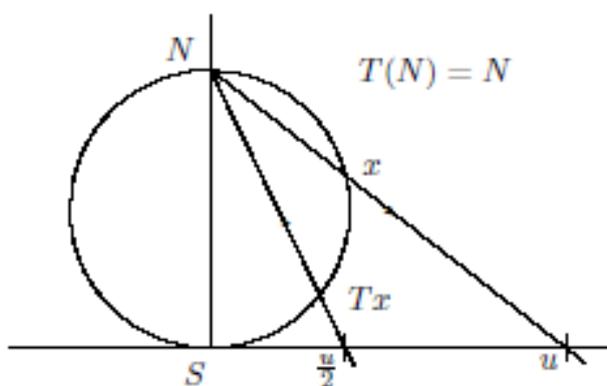


Figura 2.1: La aplicación Norte-Sur

Notar que en este caso  $T$  también es un homeomorfismo,  $S$  es compacto y que los únicos puntos periódicos de  $T$  son el polo Norte y Sur (que de hecho son puntos fijos).

Veamos como es el conjunto de medidas invariantes para esta aplicación.

Sea  $x \in S$  y  $F_0$  el arco semiabierto de  $S$  que tiene por extremos  $x$  y  $T(x)$  abierto en  $T(x)$  y cerrado en  $x$ . Sea  $F_n = T^n(F_0)$  y notemos que todos los  $F_n$  son disjuntos. Denotemos por  $U$  al arco semiabierto, cerrado en  $x$  y abierto en  $(0, 0)$  (el polo Sur). Es claro que

$$U = \bigcup_{n \geq 1} F_n,$$

y por consiguiente

$$\mu(U) = \sum_{n \geq 1} \mu(F_n).$$

Ya que  $\mu$  es  $T$ -invariante tenemos que todos los  $F_n$ 's tienen la misma medida, lo que nos permite concluir que cada uno de ellos debe tener medida nula y por lo tanto  $U$  también es

de medida nula. Por continuidad de la medida concluimos que el arco abierto de extremos polo Norte y Sur tiene medida nula, es decir,  $\mu$  está soportada sobre el conjunto  $\{0, 1\}$ . También tenemos que  $\delta_0$  y  $\delta_1$  son ergódicas y por lo anterior se concluye que

$$\mu = \mu(\{0\})\delta_0 + \mu(\{1\})\delta_1,$$

por lo tanto  $M_T(S) = \{\lambda\delta_0 + (1 - \lambda)\delta_1 / \lambda \in [0, 1]\}$ .

Sea  $V$  un espacio vectorial y  $E \subset V$  un subconjunto convexo. Decimos que  $v \in E$  es un punto extremo de  $E$  si

$$v = \lambda u + (1 - \lambda)w \text{ para algún } \lambda \in [0, 1] \text{ implica que } u = w = v.$$

En los ejemplos anteriores es claro que  $M_T^e(X)$ , el conjunto de medidas ergódicas, es el conjunto de puntos extremos de  $M_T(X)$ . Resulta que esto siempre es cierto y lo mostramos en la siguiente sección.

### 2.3.1. Propiedades extremales del conjunto de medidas ergódicas

**Definición 2.18.** Dada  $\mu \in M(X)$  y  $B \in \mathcal{B}$ . Denotamos por  $\mu_B$  a la restricción de  $\mu$  a  $B$  que está definida como

$$\mu_B(C) = \mu(B \cap C), \forall C \in \mathcal{B}.$$

Notemos que si  $\mu \in M_T(X)$  y  $B \in \mathcal{B}$  es  $T$ -invariante entonces  $\mu_B \in M_T(X)$ . En efecto, dado  $C \in \mathcal{B}$ , se tiene que

$$\mu_B(T^{-1}(C)) = \mu(T^{-1}(C) \cap B) = \mu(T^{-1}(C \cap B)) = \mu(C \cap B) = \mu_B(C).$$

De esto  $\mu_B \in M_T(X)$ .

**Teorema 2.19.**  $M_T^e(X)$  es el conjunto de puntos extremos de  $M_T(X)$ .

*Demostración.* Sea  $\mu \in M_T(X)$  un punto extremo. Veamos que  $\mu$  es una medida ergódica. La prueba se hará por reducción al absurdo. Supongamos que  $\mu$  no es ergódica, entonces existe un conjunto  $T$ -invariante  $A$  tal que  $\mu(A) \in (0, 1)$ . Con esto se tiene también que  $\mu(A^c) \in (0, 1)$ . Sean  $\mu_A$  y  $\mu_{A^c}$  las restricciones de  $\mu$  a  $A$  y  $A^c$  respectivamente.

Luego,  $\mu = \mu(A)\mu_A + \mu(A^c)\mu_{A^c}$ . La observación anterior asegura que  $\mu_A$  y  $\mu_{A^c} \in M_T(X)$  y con ello concluimos que  $\mu$  no es punto extremo de  $M_T(X)$  lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $\mu$  tiene que ser ergódica.

Por otro lado, sea  $\mu \in M_T^e(X)$ . Veamos que  $\mu$  es punto extremo de  $M_T(X)$ .

Sean  $\mu_1, \mu_2 \in M_T(X)$  y  $\lambda \in (0, 1)$  tales que  $\mu = \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2$ . Observemos que  $\mu_1 \ll \mu$  pues si  $\mu(A) = 0$  entonces  $\lambda\mu_1(A) + (1 - \lambda)\mu_2(A) = 0$  y ello obliga a que  $\mu_1(A) = 0$ . Por el teorema de Radon-Nykodin (ver [1], pág. 90 o [3], pág.123), existe  $\frac{d\mu_1}{d\mu}(x)$  no negativa tal que

$$\mu_1(B) = \int_B \frac{d\mu_1}{d\mu}(x) d\mu(x), \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

Sea  $E = \{x \in X : \frac{d\mu}{d\mu_1}(x) < 1\}$ . Como  $\mu_1 \in M_T(X)$  es cierto que

$$\int_{E \setminus T^{-1}E} \frac{d\mu_1}{d\mu} d\mu + \int_{E \cap T^{-1}E} \frac{d\mu_1}{d\mu} d\mu = \mu_1(E) = \mu_1(T^{-1}E) = \int_{T^{-1}E \setminus E} \frac{d\mu_1}{d\mu} d\mu + \int_{T^{-1}E \cap E} \frac{d\mu_1}{d\mu} d\mu.$$

De esto

$$\int_{E \setminus T^{-1}E} \frac{d\mu_1}{d\mu} d\mu = \int_{T^{-1}E \setminus E} \frac{d\mu_1}{d\mu} d\mu.$$

Observemos también que

$$\mu(E \setminus T^{-1}E) + \mu(E \cap T^{-1}E) = \mu(E) = \mu(T^{-1}E) = \mu(T^{-1}E \setminus E) + \mu(T^{-1}E \cap E),$$

entonces  $\mu(T^{-1}E \setminus E) = \mu(E \setminus T^{-1}E)$ . Por lo tanto

$$\mu(T^{-1}E \setminus E) \leq \int_{T^{-1}E \setminus E} \frac{d\mu_1}{d\mu}(x) d\mu(x) = \int_{E \setminus T^{-1}E} \frac{d\mu_1}{d\mu}(x) d\mu(x) \leq \mu(E \setminus T^{-1}E).$$

Esto nos permite deducir que

$$\int_{E \setminus T^{-1}E} \frac{d\mu_1}{d\mu}(x) d\mu(x) = \mu(E \setminus T^{-1}E) = \int_{E \setminus T^{-1}E} 1 d\mu,$$

entonces  $\int_{E \setminus T^{-1}E} (1 - \frac{d\mu_1}{d\mu}(x)) d\mu(x) = 0$ . Supongamos que  $\mu(E \setminus T^{-1}E) > 0$  y sea

$A_n = \{x \in E \setminus T^{-1}E / 1 - \frac{d\mu_1}{d\mu}(x) \geq 1/n\}$ , luego  $\mu(A_n) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Como  $1 - \frac{d\mu_1}{d\mu}(x) > 0$  sobre todo  $E \setminus T^{-1}E$ , tenemos que  $\mu(E \setminus T^{-1}E) = \mu(\bigcup_{n \geq 0} A_n) = 0$  lo cual es una contradicción.

De esto  $\mu(E \Delta T^{-1}E) = 0$  y por la Proposición (2.15) se sigue que  $\mu(E) = \{0, 1\}$ . Si  $\mu(E) = 1$  entonces  $\int_E \frac{d\mu_1}{d\mu}(x) d\mu(x) = \mu_1(X) = 1$ , luego  $\int_E (1 - \frac{d\mu_1}{d\mu})(x) d\mu(x) = 0$  y con ello  $\mu(E) = 0$  lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $\mu(E) = 0$ .

Similarmente si  $F = \{x \in X : \frac{d\mu_1}{d\mu}(x) > 1\}$  tenemos que  $\mu(F) = 0$ .

Así  $\frac{d\mu_1}{d\mu} = 1$   $\mu$ -c.t.p y se sigue que  $\mu_1 = \mu$ . Por lo tanto  $\mu$  es punto extremo de  $M_T(X)$ . □

**Teorema 2.20.** Si  $\mu, \nu \in M_T^e(X)$  son distintos entonces son singulares.

*Demostración.* Sean  $\mu, \nu \in M_T^e(X)$  con  $\mu \neq \nu$ .

Por el teorema de descomposición de Lebesgue (ver [1], pág.90 o [3], pág.123), existen  $\mu_1, \mu_2 \in M(X)$  (únicos salvo un conjunto de medida nula) y un único  $p \in [0, 1]$  tal que

$$\mu = p\mu_1 + (1 - p)\mu_2,$$

donde  $\mu_1 \ll \nu$  y  $\mu_2 \perp \nu$ .

Como  $\mu \circ T^{-1} = p\mu \circ T^{-1} + (1 - p)\mu_2 \circ T^{-1}$ ,  $\mu_1 \circ T^{-1} \ll \mu \circ T^{-1} = \mu$  y  $\mu_2 \circ T^{-1} \perp \mu \circ T^{-1} = \mu$  por la unicidad de la descomposición tenemos que  $\mu_1 \circ T^{-1} = \mu_1$  y  $\mu_2 \circ T^{-1} = \mu_2$ , es decir,  $\mu_1, \mu_2 \in M_T(X)$ . Si  $p \in (0, 1)$  tendríamos que  $\mu$  no es punto extremo contradiciendo el resultado anterior, entonces  $p \in \{0, 1\}$ .

Si  $p = 1$  entonces  $\mu \ll \nu$ . Luego podemos proceder de la forma que se hizo en 1. para concluir que  $\mu = \nu$ . Por lo tanto  $p = 0$  y entonces  $\mu \perp \nu$ . □

Se concluye a partir de los teoremas 2.19, 2.11 y el siguiente teorema que siempre existen medidas ergódicas.

**Teorema 2.21.** (*Teorema de Krein-Milman*)

Sea  $E$  un espacio vectorial topológico localmente convexo. Cualquier conjunto  $K \subset E$  convexo y compacto coincide con la clausura de la cápsula convexa de sus puntos extremos.

Una prueba del Teorema de Krein-Milman también puede encontrarse en [4].

Uno de los teoremas más importantes en Teoría Ergódica es aquel conocido como el Teorema de Birkhoff que fue probado en 1931 por G.D.Birkhoff. Aunque este se puede enunciar para medidas más generales (ver [5]) aquí solo lo haremos para medidas de probabilidad. Este teorema tendrá mayor relevancia aún cuando tratemos los aspectos dinámicos de nuestro sistema en un capítulo posterior.

**Teorema 2.22.** (*Teorema de Birkhoff*)

Sean  $\mu \in M_T(X)$  y  $f \in L^1(\mu)$ . Se verifican

(a)  $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$  converge  $\mu$ -c.t.p. a una función  $f^* \in L^1(\mu)$ .

(b)  $f^* \circ T = f^*$   $\mu$ -c.t.p..

(c)  $\int_X f d\mu = \int_X f^* d\mu$ .

### 2.3.2. Propiedades topológicas del espacio de Medidas Ergódicas

A continuación exhibimos una propiedad más profunda del conjunto de medidas ergódicas desde el punto de vista topológico. Previamente, recordemos que dado un espacio métrico  $(E, \rho)$  se dice que  $Y \subset E$  es un conjunto  $G_\delta$  si existe una familia  $\{U_n\}_{n \geq 0}$  de abiertos en  $X$  tal que  $Y = \bigcap_{n \geq 0} U_n$ . Basándonos en [16] presentamos la prueba de que el conjunto de medidas ergódicas es un  $G_\delta$  en el conjunto de invariantes. Para ello necesitaremos de unos resultados del concepto de esperanza de una función que definimos a continuación

**Definición 2.23.** Dadas  $\mu \in M_T(X)$ ,  $f \in L^1(\mu)$  y un  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}(X)$ , la esperanza de  $f$  respecto a este  $\sigma$ -álgebra es la función  $\mathcal{G}$ -medible denotada por  $E(f|\mathcal{G})$  que satisface

$$\int_A E(f|\mathcal{G})d\mu = \int_A f d\mu, \quad \text{para todo } A \in \mathcal{G}.$$

Una prueba de la existencia de la esperanza para cualquier función  $f$  pasa por un argumento del Teorema de Radon-Nykodin(ver [4], pág.337).

Notemos que  $E(f|\mathcal{G})$  es la única función (bajo la identificación de funciones medibles c.t.p.) que satisface la igualdad de la definición. Esto debido a que si  $g$  es otra función  $\mathcal{G}$ -medible satisfaciendo dicha igualdad entonces tanto el conjunto  $E(f|\mathcal{G}) > g$  como  $E(f|\mathcal{G}) < g$  son  $\mathcal{G}$ -medibles y entonces

$$\int_{E(f|\mathcal{G}) > g} f - g d\mu = 0 \quad \text{y} \quad \int_{E(f|\mathcal{G}) < g} f - g d\mu = 0.$$

De esto  $\mu(E(f|\mathcal{G}) < g) = \mu(E(f|\mathcal{G}) > g) = 0$  y por ende  $E(f|\mathcal{G}) = g$   $\mu$ -c.t.p., así la esperanza de  $f$  está bien definida.

Si  $\{f_n\}$  es una sucesión en  $L^1(\mu)$  convergiendo a  $f$  c.t.p., luego  $E(f_n|\mathcal{F})$  converge a  $E(f|\mathcal{F})$  c.t.p.. Esta sería la versión del Teorema de la convergencia dominada para la esperanza cuya prueba, muy similar a la de dicho teorema, puede ser encontrada también en [2], pág. 338-339.

A partir de la definición de conjuntos  $T$ -invariantes no es difícil probar que la familia formada por estos conjuntos es un  $\sigma$ -álgebra. Denotaremos este  $\sigma$ -álgebra por  $\mathcal{F}_T$ .

Ahora probaremos una propiedad de la esperanza que será relevante para la demostración del Teorema 2.26.

**Lema 2.24.** Sea  $f \in L^1(\mu)$  y el  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{B}(X)$ , se cumple lo siguiente que

$$E(f|\mathcal{F}_T) = E(f \circ T|\mathcal{F}_T) = E(f|\mathcal{F}_T) \circ T.$$

*Demostración.*

Dado  $A \subset X$   $T$ -invariante, por el Lema 2.4 tenemos

$$\int_X (f \cdot \chi_A) \circ T d\mu = \int_X f \cdot \chi_A d\mu = \int_A f d\mu = \int_A E(f|\mathcal{F}) d\mu.$$

Como  $T^{-1}A = A$  se sigue que

$$\int_X (f \cdot \chi_A) \circ T d\mu = \int_X (f \circ T) \cdot (\chi_A \circ T) d\mu = \int_X (f \circ T) \cdot (\chi_{T^{-1}A}) d\mu = \int_A f \circ T d\mu.$$

Así

$$\int_A f \circ T d\mu = \int_A E(f|\mathcal{F}_T) d\mu, \forall A \in \mathcal{F}_T.$$

Por la unicidad de la esperanza concluimos que  $E(f \circ T|\mathcal{F}_T) = E(f|\mathcal{F}_T)$ .

Además, siguiendo el mismo procedimiento para  $E(f|\mathcal{F}_T)$  en lugar de  $f$ , obtenemos que

$$\int_A E(f|\mathcal{F}_T) \circ T d\mu = \int_A E(E(f|\mathcal{F}_T)|\mathcal{F}_T) d\mu = \int_A E(f|\mathcal{F}_T) d\mu, \text{ para todo } A \in \mathcal{F}_T.$$

Luego

$$\int_A f \circ T d\mu = \int_A E(f|\mathcal{F}_T) \circ T d\mu, \forall A \in \mathcal{F}_T.$$

Ya que  $E(f|\mathcal{F}_T) \circ T$  es  $\mathcal{F}_T$ -medible, por unicidad de la esperanza tenemos que  $E(f \circ T|\mathcal{F}_T) = E(f|\mathcal{F}_T) \circ T$ .

Así queda probado el lema. □

Ahora exhibimos un resultado que caracteriza las medidas ergódicas a partir de la esperanza de  $f$ .

**Lema 2.25.** Si  $T$  es un homeomorfismo se cumple:

$\mu \in M_T^e(X)$  si y solo si  $\int E(f|\mathcal{F}_T)^2 d\mu - (\int f d\mu)^2 = 0$  para toda  $f \in C(X)$ .

*Demostración.* Sea  $\mu \in M_T^e(X)$  y  $f \in C(X)$ . Del Lema 2.24 tenemos que  $E(f|\mathcal{F}_T) = E(f|\mathcal{F}_T) \circ T$  y por la Proposición 2.15  $E(f|\mathcal{G})$  es constante  $\mu$ -c.t.p.. Luego la igualdad se cumple cuando  $f \in C(X)$ .

Por otro lado, debido a que cada función  $f \in L^1(\mu)$  es el límite puntual de una sucesión  $\{f_n\} \in C(X)$ , tenemos que la igualdad de la hipótesis es válida para toda  $f \in L^1(\mu)$  ([4],pág.338-339).

Sea  $f \in L^1(\mu)$  tal que  $f \circ T = f$ . Basta probar que  $f$  es constante  $\mu$ -c.t.p..

Dado  $L$  un subconjunto medible en  $\mathbb{R}$  entonces  $T^{-1}(f^{-1}(L)) = f^{-1}(L)$ , es decir,  $f^{-1}(L) \in \mathcal{F}_T$ . De esto  $f$  es  $\mathcal{F}_T$ -medible y por unicidad de la esperanza tenemos que  $f = E(f|\mathcal{F}_T)$ . Luego, de nuestra hipótesis se sigue que  $\int f^2 d\mu = (\int f d\mu)^2$ . Ya que la función  $x \mapsto x^2$  es estrictamente convexa, por el teorema de Jensen (ver [3], pág.62) esta última desigualdad es cierta solo si  $f$  es constante  $\mu$ -c.t.p., como requeríamos.  $\square$

Recordemos que en el Teorema ergódico de Birkhoff(2.22) tenemos que para una medida  $\mu \in M_T(X)$  y una  $f \in L^1(\mu)$  se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x) = f^*(x) \quad \mu - c.t.p.$$

donde  $f^* \circ T = f^*$  y  $\int f^* d\mu = \int f d\mu$

De lo último podemos afirmar que  $f^*$  es  $\mathcal{F}_T$ -medible, y si  $T$  es un homeomorfismo entonces  $f^* = E(f|\mathcal{F})$  y por lo tanto el límite de funciones escrito arriba converge justamente a la esperanza de  $f$  respecto a  $\mathcal{F}_T$ . Esto será necesario en la siguiente demostración.

**Teorema 2.26.** Si  $T$  es un homeomorfismo entonces el conjunto  $M_T^e(X)$  es un  $G_\delta$  en  $M_T(X)$ .

*Demostración.* Sabemos por el teorema de Stone-Weierstrass que  $C(X)$  es separable. Sea  $\{f_1, f_2, \dots, f_k, \dots\}$  un conjunto denso en  $C(X)$ . Dadas  $\mu \in M_T(X)$  y  $f \in C(X)$ .

Definimos

$$V(f, \mu) = \int E(f|\mathcal{F}_T)^2 d\mu - \left( \int f d\mu \right)^2.$$

Nótese que por el Teorema de Jensen se tiene que  $V(f, \mu) \geq 0$ . Por el lema anterior  $\mu$  es ergódica si y solo si  $V(f, \mu) = 0$ . Ya que  $f$  puede escribirse como el límite de una sucesión en  $\{f_1, f_2, \dots, f_k, \dots\}$  y por el teorema de la convergencia dominada para la esperanza (ver [4], pág.338-339) basta probar que  $V(f_k, \mu) = 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Definimos

$$V_n(f_k, \mu) = \int \left( \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n-1} f_k(T^r) \right)^2 d\mu - \left( \int f d\mu \right)^2.$$

Por el Teorema de Birkhoff tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(f_k, \mu) = V(f_k, \mu)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Notemos que  $V_n(f_k, \cdot)$  es continua sobre  $M(X)$ . Finalmente tenemos

$$M_T^e(X) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \left\{ V_m(f_k, \mu) < \frac{1}{r} \right\} = \{V(f, \mu) = 0, \forall f \in C(X)\}.$$

De esto,  $M_T^e(X)$  es un  $G_\delta$  en  $M(X)$ .

**Ejemplo 2.27.** Volveremos a tomar el Ejemplo 2.27. Sabemos que

$$M_T(X) = \{\lambda\delta_0 + (1 - \lambda)\delta_1 / \lambda \in [0, 1]\}.$$

Para ver que  $M_T^e(X)$  es un  $G_\delta$  en  $M_T(X)$  tomemos los abiertos  $U_n$  (en la topología  $\omega^*$ ) como:

$$U_n = \left\{ \nu \in M_T(X) / \left| \int_X f d\nu - \int_X f d\delta_1 \right| < 1/n \quad \text{o} \quad \left| \int_X g d\nu - \int_X g d\delta_0 \right| < 1/n \right\},$$

con  $f(x) = 1 - x$  y  $g(x) = x$ , lo que garantiza que  $\int_X f d\delta_1 = 0$  y  $\int_X g d\delta_0 = 0$ . También notemos que  $U_{n+1} \subset U_n$  y que dado  $\omega \in \bigcap_{n \geq 1} U_n$  tenemos que

$$\omega \in \left\{ \nu \in M_T(X) / \left| \int_X g d\nu - \int_X g d\delta_0 \right| < 1/n \right\}$$

para infinitos  $n$ 's, o  $\omega \in \left\{ \nu \in M_T(X) / \left| \int_X f d\nu - \int_X f d\delta_1 \right| < 1/n \right\}$  para infinitos  $n$ 's.

De esto  $\omega \in \{\delta_0, \delta_1\}$ , es decir

$$\bigcap_{n \geq 1} U_n = M_T^e(X).$$

Y las propiedades mencionadas son satisfechas. Notar que  $T$  en este caso es bimedible (función medible cuya inversa también es medible).

Notemos que este ejemplo puede ser generalizado para el caso en que  $T(x) = x^k$  para cualquier  $k$  natural. Además el conjunto de medidas invariantes es exactamente el mismo para la transformación  $T^{-1}$ . De hecho esto siempre es cierto cuando  $T$  es bimedible. En efecto, dada  $\mu \in M_T(X)$  y  $A \in \mathcal{B}$  entonces  $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ , luego  $\mu(T^{-1}(T(A))) = \mu(T(A)) = \mu(A)$ . Así  $\mu \in M_{T^{-1}}(X)$ .

**Ejemplo 2.28.** Volveremos a tomar el Ejemplo 2.17.

Sabemos que

$$M_T(S) = \{\lambda\delta_N + (1 - \lambda)\delta_S / \lambda \in [0, 1]\}.$$

Para ver que  $M_T^e(S)$  es un  $G_\delta$  sobre  $M_T(S)$  tomemos las funciones

$$f(z) = \frac{d(z, S)}{d(z, S) + d(z, N)} \quad , \quad g(z) = \frac{d(z, N)}{d(z, S) + d(z, N)}$$

y los abiertos

$$U_n = \left\{ \nu \in M_T(X) / \left| \int_X f d\nu - \int_X f d\delta_N \right| < 1/n \text{ o } \left| \int_X g d\nu - \int_X g d\delta_S \right| < 1/n \right\},$$

y observemos, como se hizo en el ejemplo anterior, que  $M_T^e(S) = \bigcap_{n \geq 1} U_n$ .

Observemos la gran similitud en nuestro procedimiento con el del ejemplo anterior. Esto se debe a que ambos sistemas poseen dos únicos atractores que además son puntos fijos.

□

## 2.4. Conexión entre las propiedades topológicas y la medida

En esta sección estudiaremos la relación que existe entre las propiedades de la medida y las propiedades dinámicas del sistema dinámico.

**Proposición 2.29.** *Sea  $(X, T)$  un sistema dinámico. Si  $\mu \in M_T^e(X)$  entonces*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k(x)} \rightarrow \mu \quad \mu - c.t.p..$$

*Demostración.* Para la prueba usaremos fuertemente la separabilidad del espacio  $C(X)$  y una caracterización de las medidas ergódicas.

Primero observemos que si  $\mu \in M_T^e(X)$ , dado  $f \in C(X)$  tenemos del Teorema 2.22 que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x) \rightarrow f^*(x) \quad \mu - c.t.p., \quad (2.1)$$

con  $\int_X f^* d\mu = \int_X f d\mu$  y  $f^* \circ T = f^*$   $\mu$ -c.t.p..

De esto  $f$  es constante  $\mu$ -c.t.p. y en consecuencia  $f^* = \int_X f d\mu$   $\mu$ -c.t.p..

Ahora, sea  $\{f_n/n \geq 0\}$  un subconjunto denso en  $C(X)$  y  $X_n$  el espacio formado por los puntos para los cuales la convergencia en 2.1 es cierta cuando  $f = f_n$ .

Sea  $Y = \bigcap_{n \geq 0} X_n$ , ya que  $\mu(X_n) = 1$  para todo  $n \geq 0$  se sigue que  $\mu(Y) = 1$ . Dado  $x \in Y, g \in C(X)$  y  $\epsilon > 0$  existe alguna  $f_n$  tal que  $\|g - f_n\|_\infty < \epsilon$  entonces

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g \circ T^k(x) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_n \circ T^k(x) \right| < \epsilon.$$

Como  $x \in Y$  tenemos que

$$\left| f_n^*(x) - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g \circ T^k(x) \right| \leq \epsilon,$$

$$\left| f_n^*(x) - \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g \circ T^k(x) \right| \leq \epsilon.$$

De la desigualdad triangular se sigue que

$$\left| \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g \circ T^k(x) - \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g \circ T^k(x) \right| \leq 2\epsilon.$$

Haciendo  $\epsilon \downarrow 0$  se sigue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g \circ T^k(x) \rightarrow g^*(x)$ , donde  $g^*$  es la función constante  $\mu$ -c.t.p. igual a  $\int_X g d\mu$  que se obtiene del teorema de Birkhoff. Concluimos a partir de esto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x) \rightarrow \int_X f d\mu \quad \forall x \in Y, \forall f \in C(X).$$

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} d\delta_{T^k(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_X f d\delta_{T^k(x)} \rightarrow \int_X f d\mu \quad \forall x \in Y, \forall f \in C(X).$$

Finalmente  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k(x)} \rightarrow \mu, \quad \forall x \in Y.$  □

Hasta el momento ha sido usual ver los promedios de medidas Delta de Dirac como herramienta de estudio del conjunto de medidas invariantes. En vista de ello es apropiado dar la siguiente definición.

Para  $x \in X$  y  $n \in \mathbb{N}_0$ , definimos la  $n$ -ésima *medida empírica* de  $x$  como

$$\varepsilon_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{T^j x},$$

y observemos que cualquier punto límite de la sucesión  $(\varepsilon_n(x))$  es  $T$ -invariante.

Para una medida  $\mu \in M_T(X)$  decimos que un punto  $x \in X$  es *genérico* para  $\mu$  si  $\varepsilon_n(x) \rightarrow \mu$  cuando  $n \uparrow \infty$ . Puede suceder en la práctica que una medida invariante no tiene ningún punto genérico, sin embargo por el Teorema de Birkhoff, si  $\mu$  es ergódico entonces, por la Proposición 2.29, el conjunto de puntos genéricos es de medida total.

La siguiente definición la damos como preámbulo a una proposición.

**Definición 2.30.** Diremos que un punto  $y \in X$  es un átomo (respecto de  $\mu$ ) si  $\mu(\{y\}) > 0$ .

Una medida  $\mu$  es puramente atómica si  $X$  solo posee átomos.

Notemos que esta definición es equivalente a decir que existe un conjunto numerable  $Y$  tal que  $\mu(\{y\}) > 0$  y  $\mu(Y) = 1$ .

**Proposición 2.31.** El punto  $x \in X$  es periódico de periodo  $N$  si y solo si

$$\varepsilon_N(x) \in M_T(X).$$

Si  $\mu$  es puramente atómica luego es combinación convexa (posiblemente de una cantidad infinita numerable) de estas medidas periódicas.

*Demostración.* Sea  $x \in X$  un punto periódico de periodo  $N$ . Para  $f \in C(X)$  tenemos que

$$\begin{aligned} \int_X f \circ T d\left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{T^k(x)}\right) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f \circ T^{k+1}(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f \circ T^k(x) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \int_X f d\delta_{T^k(x)} = \int_X f d\left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{T^k(x)}\right). \end{aligned}$$

De esto se sigue que  $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{T^k(x)} \in M_T(X)$ .

Por otro lado, sea  $x \in X$  un punto tal que  $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{T^k(x)} \in M_T(X)$ . Usando el argumento anterior tenemos que

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f \circ T^{k+1}(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f \circ T^k(x) \quad , \forall f \in C(X).$$

De esto  $f \circ T^N(x) = f(x)$ , para toda  $f \in C(X)$ . Luego  $T^N(x) = x$  como deseamos.

Si  $\mu \in M_T(X)$  es atómica puede ser escrita como  $\mu = \sum_{i \geq 0} p_i \delta_{x_i}$ ,  $p_i \geq 0$  con  $\sum_{i \geq 0} p_i = 1$ .

Dado  $f \in C(X)$  tenemos que

$$\sum_{i \geq 0} p_i f(T(x_i)) = \int_X f \circ T d\mu = \int_X f d\mu = \sum_{i \geq 0} p_i f(x_i),$$

entonces

$$\int_X f d\left(\sum_{i \geq 0} p_i \delta_{T(x_i)}\right) = \int_X f d\left(\sum_{i \geq 0} p_i \delta_{x_i}\right) \quad \forall f \in C(X).$$

Luego  $\sum_{i \geq 0} p_i \delta_{T(x_i)} = \sum_{i \geq 0} p_i \delta_{x_i}$ , entonces  $\mu$  asigna el mismo peso  $p_i$  a  $x_i$  y  $T(x_i)$  y de esto  $\mu$  le asigna el mismo peso  $p_i$  a cada punto de la órbita positiva de  $x_i$ . Luego agrupando las medidas  $\delta_{x_i}$  debe existir algún  $N_i$  para el cual  $T^{N_i}(x_i) = x_i$ .  $\square$

**Corolario 2.32.** *Un punto  $x \in X$  es periódico de periodo  $N$  si y solo si*

$$\varepsilon_N(x) \in M_T^e(X).$$

*Demostración.* Por la proposición anterior bastará probar la suficiencia.

Sea  $\mu = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{T^k(x)}$  y  $A \subset X$  un conjunto  $T$ -invariante.

Si  $x \in A$  entonces  $\{x, T(x), T^2(x), \dots, T^{N-1}(x)\} \subset A$  (pues  $A$  es  $T$ -invariante) y se sigue que  $\mu(A) = 1$ . Si  $x \notin A$  afirmamos que

$$\{x, T(x), \dots, T^{N-1}(x)\} \cap A = \emptyset.$$

En efecto, si  $T^{k_0}(x) \in A$  para algún  $k_0$  entonces  $T^N(x) = x \in A$  (por la invarianza de  $A$ ), lo cual es una contradicción. Luego  $A$  no posee ningún punto de la órbita de  $x$  y por lo tanto  $\mu(A) = 0$ .

Así  $\mu(A) \in \{0, 1\}$  para cualquier conjunto  $T$ -invariante  $A$ .  $\square$

**Ejemplo 2.33.** *Sea  $T_\alpha$  la rotación racional sobre  $S^1$ . En este caso todos los puntos son periódicos y por el Corolario 2.32 los promedios de las medidas Dirac de los puntos de*

la órbita de cada uno de los puntos serán ergódicos.

Si tomamos  $\mu \in M_{T_\alpha}(X)$  como la medida de Haar notamos que esta no puede ser escrita de la forma  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{T^i x}$  para ningún punto  $x$ , ya que este límite es en realidad una suma finita.

De la Proposición 2.29 concluimos que la medida de Haar no puede ser ergódica (aunque esto también se puede comprobar a partir de la definición).

De hecho, debido a la Proposición 2.29 deducimos que

$$M_{T_\alpha}^e(X) = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{T^i x} / x \in S^1 \right\} = \left\{ \frac{1}{n_0} \sum_{i=0}^{n_0-1} \delta_{T_\alpha^i(x)} / x \in S^1, \alpha = \frac{k}{n_0} \right\}.$$

Notemos que si bien es cierto la medida de Haar está en  $M_{T_\alpha}(X)$ , esta no puede ser escrita ni siquiera como combinación convexa numerable de estas medidas ergódicas. Si queremos conocer el conjunto  $M_{T_\alpha}(X)$  debemos hacer uso del Teorema de descomposición ergódico que lo enunciaremos en el próximo capítulo con el fin de mantener un orden en la estructura del trabajo.

Por el contrario, en el caso en que  $T$  es una rotación irracional se tiene que  $M_{T_\alpha}^e(X) = \{\lambda\}$  donde  $\lambda$  es la medida de Haar. Para ver esto probaremos que dada una medida  $\mu \in M_{T_\alpha}(X)$ , entonces  $\mu = \lambda$ .

Si  $T_\alpha(z) = e^{(2\pi i \alpha)} \cdot z$  donde  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  y  $[v, w) \subset S^1$ , donde  $v = e^{(2\pi i p)}$  y  $w = e^{(2\pi i q)}$ , un intervalo semiabierto en  $S^1$  tomado en sentido antihorario tal que  $l([v, w)) = q - p = \frac{1}{m}$  para algún  $m \in \mathbb{N}$ .

Sea  $\mu \in M_{T_\alpha}(X)$ , por la Proposición 1.9 dado  $\epsilon > 0$  existe  $F \subset (v, w)$  cerrado y  $U \supset [v, w]$  abierto tales que  $\mu((v, w) \setminus F) < \epsilon$  y  $\mu(U \setminus [v, w]) < \epsilon$ . Ya que  $v, w \in U \setminus F$  existe  $\epsilon > \delta > 0$  tal que  $[v - \delta, v + \delta] \cup [w - \delta, w + \delta] \subset U \setminus F$  y escogemos  $u \in [v - \delta, v)$ . Sabemos que la órbita del punto  $u$  es densa en  $S^1$ , entonces existen  $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$  con  $n_1 < n_2 < n_3$  tales que  $T_\alpha^{n_1} u \in (v, v + \delta]$ ,  $T_\alpha^{n_2} u \in [w - \delta, w)$  y  $T_\alpha^{n_3} u \in (w, w + \delta]$ . Luego

se tiene

$$\begin{aligned} \bigcup_{k=0}^{m-1} [T_{\alpha}^{n_1+k(n_3-n_1)}u, T_{\alpha}^{n_2+k(n_3-n_1)}u] &\subset \bigcup_{k=0}^{m-1} [v.e^{2\pi ik(q-p)}, v.e^{2\pi i(k+1)(q-p)}] \\ &\subset \bigcup_{k=0}^{m-1} [T_{\alpha}^{kn_2}u, T_{\alpha}^{n_3+kn_2}u] \end{aligned}$$

Notemos que la familia de conjuntos  $\{[v.e^{2\pi ik(q-p)}, v.e^{2\pi i(k+1)(q-p)}]\}_{0 \leq k \leq m-1}$  forman una partición de  $S^1$ . De esto se sigue que

$$\sum_{k=0}^{m-1} \mu([T_{\alpha}^{n_1+k(n_3-n_1)}u, T_{\alpha}^{n_2+k(n_3-n_1)}u]) \leq 1 \leq \sum_{k=0}^{m-1} \mu([T_{\alpha}^{kn_2}u, T_{\alpha}^{n_3+kn_2}u]).$$

Dado que  $\mu$  es  $T_{\alpha}$ -invariante tenemos

$$m\mu([T_{\alpha}^{n_1}u, T_{\alpha}^{n_2}u]) \leq 1 \leq m\mu([u, T_{\alpha}^{n_3}u]).$$

Notemos que  $F \subset [T_{\alpha}^{n_1}u, T_{\alpha}^{n_2}u]$  y  $[u, T_{\alpha}^{n_3}u] \subset U$ . Luego de la condición de regularidad se sigue

$$m\mu([v, w]) - m\epsilon < m\mu(U) - m\epsilon < m\mu(F) \leq 1 \leq m\mu(U) < m\mu(F) + m\epsilon < m\mu([v, w]) + m\epsilon.$$

Así

$$\frac{1}{m} - \epsilon < \mu([v, w]) < \frac{1}{m} + \epsilon.$$

De esto  $\mu([v, w]) = \frac{1}{m}$ .

Para el caso en que  $l([v, w]) = \frac{s}{m}$  para algunos  $s, m \in \mathbb{N}$  partimos el intervalo en  $s$  subintervalos semiabiertos de igual longitud y por lo anterior concluimos que  $\mu([v, w]) = \frac{s}{m}$ .

Por último, si  $[v, w)$  es cualquier intervalo semiabierto, lo podemos escribir como unión encajada de intervalos semiabiertos con longitud racional. Por la continuidad de  $\mu$  tendremos que  $\mu([v, w]) = \lambda([v, w])$ .

Finalmente como las uniones finitas de intervalos forman un álgebra, por el Teorema de extensión de Caratheodory (ver [1]) se sigue que  $\mu$  debe ser la medida de Haar.

Observemos que en la prueba anterior solo bastó considerar que existe un punto  $u$  con órbita densa, el resto de la prueba funciona bien debido a que  $T_\alpha$  es una isometría.

A sistemas como el de la rotación irracional se les denomina Únicamente Ergódicos. En general cuando el sistema es de este tipo se posee una mayor riqueza de las propiedades dinámicas.

**Definición 2.34.** *Decimos que un sistema  $(X, T)$  es únicamente ergódico si  $M_T(X)$  es un conjunto unitario. Diremos que el sistema es estrictamente ergódico si además es minimal.*

**Teorema 2.35.** *Sea  $T : X \rightarrow X$  un homeomorfismo del espacio métrico compacto  $X$ . Supongamos que  $T$  es únicamente ergódico y  $M_T(X) = \{\mu\}$ . Luego  $T$  es minimal si y solo si  $\mu(U) > 0$  para todo conjunto abierto no vacío  $U$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $T$  es minimal y sea  $U$  un abierto cualquiera en  $X$ . Luego  $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n U$  y debido a que  $\mu \in M_T(X)$  se sigue que  $\mu(U) > 0$  necesariamente. Recíprocamente, supongamos que  $\mu(U) > 0$  para todo conjunto abierto no vacío  $U$ . Por contradicción, supongamos que  $(X, T)$  no es minimal entonces existe  $K \subset X$  compacto tal que  $TK = K$ . Sabemos que el subsistema  $(K, T|_K)$  posee una medida de probabilidad invariante  $\mu_K$ . Definimos la medida  $\tilde{\mu}(A) = \mu_K(A \cap K)$  para todo  $A \in \mathcal{B}(X)$ . Observemos que  $\tilde{\mu} \in M_T(X)$  entonces  $\tilde{\mu} = \mu$  y de esto  $\tilde{\mu}(X \setminus K) = \mu(X \setminus K) = 0$ . Esto contradice nuestra hipótesis ya que  $X \setminus K$  es un conjunto abierto.  $\square$

De este teorema también se puede deducir, como se hizo antes, que la rotación irracional sobre  $S^1$  es un sistema minimal y por lo tanto estrictamente ergódico. Cualquier homeomorfismo sobre  $S^1$  sin puntos periódicos es un sistema únicamente ergódico aunque no siempre minimal. Para ver ello probamos la siguiente proposición.

**Proposición 2.36.** *Sea  $T : S^1 \rightarrow S^1$  un homeomorfismo sin puntos periódicos. Luego  $T$  es únicamente ergódico. Más aún*

- a) existe una aplicación sobreyectiva continua  $\phi : S^1 \rightarrow S^1$  y una rotación  $T_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$  con  $\phi \circ T = T_\alpha \circ \phi$ . La aplicación  $\phi$  tiene la propiedad que para cada  $z \in S^1$ ,  $\phi^{-1}(z)$  es o un punto o un subintervalo cerrado de  $S^1$ .
- b) Si  $T$  es minimal la aplicación  $\phi$  es un homeomorfismo.

*Demostración.*

- a) Ya que  $T$  no tiene puntos periódicos ningún miembro de  $M_T(S^1)$  puede asignar un valor positivo a un punto de  $S^1$ , caso contrario la medida de la órbita de dicho punto sería infinito. Sean  $\mu_1, \mu_2 \in M_T(S^1)$  y ponemos  $\nu = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) \in M_T(X)$ .

Definimos  $\phi : S^1 \rightarrow S^1$  por  $\phi(z) = \exp(2\pi i\nu([1, z]))$  donde  $[1, z]$  representa el intervalo cerrado de extremos 1 y  $z$  tomado en sentido antihorario. Ya que  $\nu$  no tiene puntos de medida positiva deducimos que  $\phi$  es continua y sobreyectiva.

Para cualesquiera tres puntos  $z_1, z_2, z_3$  de  $K$  tenemos

$$\nu([z_1, z_2]) + \nu([z_2, z_3]) \pmod{1} = \nu([z_1, z_3]),$$

entonces

$$\begin{aligned} \phi(T(z)) &= \exp(2\pi i\nu([1, T(z)])) = \exp(2\pi i\nu([1, T(1)])) \cdot \exp(2\pi i\nu([T(1), T(z)])) \\ &= \exp(2\pi i\nu([1, T(1)])) \cdot \exp(2\pi i\nu([1, z])) = \alpha\phi(z), \end{aligned}$$

donde  $\alpha = \exp(2\pi i\nu([1, T(1)])$ .

En otras palabras, si  $T_\alpha(z) = \exp(2\pi i\alpha)$  entonces  $\phi \circ T = T_\alpha \circ \phi$ .

Ahora mostraremos que  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ . Si  $\alpha^p = 1$  luego  $\phi(T^p z) = \phi(z) \forall z \in S^1$  tal que  $\nu([1, T^p z]) = \nu([1, z]) \pmod{1} \forall z \in S^1$ . Así que  $\nu([z, T^p z]) = 0 \pmod{1} \forall z \in S^1$ . Ya que  $T^p$  no tiene puntos fijos existe  $\delta > 0$  tal que  $d(z, T^p z) > \delta$  (en caso contrario se podría formar una sucesión de puntos en  $S^1$  que converja a un punto fijo). Por lo tanto

cada punto de  $S^1$  es el punto extremo de un intervalo de longitud  $\delta$  con medida nula. Esto haría que  $\nu(S^1) = 0$  lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ .

Sabemos que  $T_\alpha$  es minimal y que la medida de Haar  $\lambda$  es el único elemento de  $M_{T_\alpha}(X)$ . Por lo tanto  $\nu \circ \phi^{-1}, \mu_1 \circ \phi^{-1}, \mu_2 \circ \phi^{-1}$  son todas iguales a  $\lambda$ . Sea  $[a, b]$  un intervalo en  $S^1$ .

Luego  $\phi([a, b]) = [e^{2\pi i\nu(1,a)}, e^{2\pi i\nu(1,b)}]$  y  $\phi^{-1}\phi([a, b]) = [c, d]$  donde  $c = \inf\{z : \nu([z, a]) = 0\}$  y  $d = \sup\{w : \nu([b, w]) = 0\}$ .

Ya que  $\nu(\phi^{-1}\phi([a, b])\Delta[a, b]) = 0$  tenemos que  $\mu_i(\phi^{-1}\phi([a, b])\Delta[a, b]) = 0$ , para  $i = 1, 2$ , entonces  $\mu_i([a, b]) = \mu_i(\phi^{-1}\phi([a, b])) = \lambda(\phi([a, b]))$ .

Así que  $\mu_1([a, b]) = \mu_2([a, b])$  y por ende  $\mu_1 = \mu_2$ . Por lo tanto  $T$  es únicamente ergódica.

Sea  $w = e^{2\pi is} \in S^1$  y consideramos el conjunto  $\phi^{-1}(w)$ .

Sea  $a = \inf\{z : \nu([1, z]) = s\}$  y  $b = \sup\{z : \nu([1, z]) = s\}$ . Se sigue que  $\phi^{-1}(w) = [a, b]$  es un intervalo cerrado (o un punto) de medida nula.

b) Supongamos que  $T$  es minimal. Necesitamos mostrar que  $\phi$  es un homeomorfismo.

Del Teorema 2.35 sabemos que si  $M_T(X) = \{\nu\}$  luego  $\nu(U) > 0$  para todo conjunto abierto no vacío  $U$ . Si  $\phi(z) = \phi(w)$ , sin pérdida de generalidad supongamos que  $[1, w] = [1, z] \cup [z, w]$ , entonces

$$\exp(2\pi i\nu[1, z]) = \exp(2\pi i\nu[1, w]) = \exp(2\pi i\nu[1, z] + 2\pi i\nu[z, w]).$$

Así  $\nu([z, w]) = 0$  o 1 tal que  $\nu([z, w]) = 0$  o  $\nu([w, z]) = 0$ . Esto puede suceder solo si  $w = z$ . Por lo tanto  $\phi$  es inyectiva y por lo tanto un homeomorfismo.

□

Es claro que si un homeomorfismo sobre  $S^1$  es minimal entonces este no posee puntos periódicos. Por lo tanto todo homeomorfismo minimal sobre  $S^1$  siempre es únicamente

ergódico.

**Ejemplo 2.37.** La aplicación sobre  $S^1$ ,  $T(e^{2\pi i\theta}) = e^{2\pi i\theta^2}$ , con  $\theta \in [0, 1]$  es un ejemplo de un sistema únicamente ergódico el cual no es minimal. En efecto, observemos primero que el punto  $1 := (1, 0)$  es un punto atractor y el único punto fijo. Siguiendo el procedimiento para la obtención de medidas invariantes de los Ejemplos 2.16 y 2.17 deducimos que  $M_T(X) = \{\delta_1\}$ , es decir, el sistema es únicamente ergódico. Sin embargo, ya que 1 es un punto fijo, su órbita no es densa en  $S^1$  y por lo tanto el sistema no es minimal.

El procedimiento seguido en los Ejemplos 2.16 y 2.17 para obtener las medidas invariantes nos induce a pensar en un resultado en el que solo las propiedades dinámicas determinen el conjunto  $M_T(X)$ . En realidad para dar un resultado en esa dirección deberíamos pensar en aquellos puntos sobre los cuales las medidas invariantes están soportadas. Estos son llamados puntos recurrentes cuya importancia queda justificada por el siguiente resultado.

**Teorema 2.38.** (Teorema de Recurrencia de Poincaré) Para cada  $n \geq 0$ , sea  $\mu \in M_T(X)$  y  $E \subset X$  con  $\mu(E) > 0$ , luego existe un conjunto  $Y \subset E$  con  $\mu(Y) = \mu(E)$  tal que para todo  $y \in Y$  existe una sucesión creciente  $\{n_i\}_{i \geq 0}$  tal que  $T^{n_i}(y) \in E$ .

*Demostración.* Sea  $E_n = \bigcup_{k \geq n} T^{-k}(E)$  y  $F = \bigcap_{n \geq 0} E_n$ . Sea  $Y = F \cap E$ , para cualquier punto  $y \in Y$  existe una sucesión creciente  $\{n_i\}$  tal que  $T^{n_i}(y) \in E$ . Ya que  $T^{n_{i+1}-n_i}(T^{n_i}(y)) \in E$  para todo  $i \geq 0$  concluimos que cada  $T^{n_i}(y)$  está en  $Y$ . De esto  $Y$  está formado por puntos que cumplen las condiciones solicitadas en el teorema. Solo resta probar que  $\mu(Y) = \mu(E)$ .

Dado  $r \geq 0$  tenemos que el conjunto

$$\left( E \setminus \bigcup_{k \geq r} T^{-k}(E) \right) \cup \dots \cup \left( T^{-r}(E) \setminus \bigcup_{k \geq r} T^{-(k+r)}(E) \right) \cup \dots \cup \left( T^{-2r}(E) \setminus \bigcup_{k \geq r} T^{-(k+2r)}(E) \right)$$

está contenido en  $\bigcup_{k \geq 0} T^{-k}(E)$ .

Notemos que la familia  $\{T^{-lr}(E) \setminus \bigcup_{k \geq r} T^{-(k+lr)}(E)\}_{l \geq 0}$  es disjunta y ya que  $\mu \in M_T(X)$  tenemos que

$$\mu(E \setminus \bigcup_{k \geq r} T^{-k}(E)) = \mu(T^{-rl}(E) \setminus \bigcup_{k \geq r} T^{-(k+rl)}(E)), \quad \forall l \geq 0.$$

De esto  $\mu(E \setminus \bigcup_{k \geq r} T^{-k}(E)) = 0$ . Por lo tanto

$$\mu(E) = \mu(E \setminus \bigcup_{k \geq r} T^{-k}(E)) + \mu(E \cap \bigcup_{k \geq r} T^{-k}(E)) = \mu(E \cap \bigcup_{k \geq r} T^{-k}(E)) = \mu(E \cap E_r), \quad \forall r \geq 0.$$

Finalmente  $\mu(Y) = \lim_{r \rightarrow \infty} \mu(E \cap E_r) = \mu(E)$ .  $\square$

**Corolario 2.39.** Dada  $\mu \in M_T(X)$  se tiene que  $\mu(R_T(X)) = 1$ .

*Demostración.* Sea  $\{B_n\}_{n \geq 0}$  una base numerable para  $X$  (es posible obtener una ya que  $X$  es compacto) y veamos que

$$X \setminus R_T(X) = \bigcup_{n \geq 0} \bigcup_{r \geq 0} \bigcap_{k \geq r} T^{-k}(B_n^c) \cap B_n.$$

En efecto, si  $x \in R_T^c(X)$  entonces existe algún abierto  $B_{n_0}$  para el cual  $T^k(x) \notin B_{n_0}$  para todo  $k$  a partir de algún  $r_0$ . Así se tiene que  $R_T^c(X) \subset \bigcup_{n \geq 0} \bigcup_{r \geq 0} \bigcap_{k \geq r} T^{-k}(B_n^c) \cap B_n$ .

Del teorema (2.38) se sigue que  $\mu\left(\bigcup_{r \geq 0} \bigcap_{k \geq r} T^{-k}(B_n^c) \cap B_n\right) = 0$  para todo  $n \geq 0$  y por lo tanto  $\mu(X \setminus R_T(X)) = 0$ .  $\square$

Debido a este último resultado resulta sencillo encontrar el soporte de las medidas invariantes en los Ejemplos 2.16, 2.17, 2.37 ya que el conjunto de puntos recurrentes en estos es finito (solo serán los puntos fijos).

## Capítulo 3

# El espacio de medidas ergódicas soportadas en Odómetros

Ahora introduciremos el concepto más importante del trabajo. La importancia de este peculiar sistema dinámico radica en la forma que adopta el conjunto de medidas ergódicas. En todo el capítulo se considerará que  $X$  es un espacio métrico compacto con métrica  $d$  y  $T : X \rightarrow X$  es una aplicación continua, a menos que se especifique lo contrario.

**Definición 3.1.** Diremos que un sistema dinámico  $(X, T)$  es equicontinuo si para todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$  tal que

$$d(x, y) < \delta \text{ implica que } d(T^k x, T^k y) < \epsilon, \text{ para todo } k \geq 0.$$

**Definición 3.2.** Sea  $(X, T)$  un sistema dinámico. Decimos que  $(X, T)$  equicontinuo es un odómetro si existe  $p$  regularmente recurrente con  $X = \overline{O(x)}$ .

**Ejemplo 3.3.** La rotación irracional es un odómetro ya que es una isometría y cualquier punto en  $S^1$  es regularmente recurrente (como fue probado anteriormente). Del mismo modo una rotación racional restringida a la órbita de uno de sus puntos es un odómetro ya

que esta órbita es finita.

Para la demostración del **Teorema Principal** serán clave los siguientes lemas.

**Lema 3.4.** *Supongamos que  $(X, T)$  tiene la propiedad de sombreamiento. Dado  $\epsilon > 0$  y  $\delta > 0$  dados por la propiedad de sombreamiento y sea  $x \in X$ . Si  $d(T^n(x), x) < \delta$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ , luego para cualquier  $\psi > 0$  existen  $x' \in X$  y  $n' \in \mathbb{N}$  que es divisible por  $n$  y verifican*

1.  $d(T^{n'}(x'), x') < \psi$ .
2.  $d(T^{jn+i}(x'), T^i(x)) \leq \epsilon$  para  $i = 0, 1, \dots, n-1$  y para todo  $j \geq 0$ .

*Demostración.* El conjunto

$$\{x, Tx, T^2x, \dots, T^{n-1}x, x, Tx, \dots, T^{n-1}x, x, Tx, \dots, T^{n-1}x, \dots\},$$

es una  $\delta$ -pseudo órbita. Luego existe algún  $z \in X$  que lo  $\epsilon$ -sombrea. De esto

$$d(T^{jn+i}z, T^i x) \leq \epsilon \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad j \geq 0.$$

Sea  $Y$  la colección de puntos  $z \in X$  que satisfacen lo anterior. Este conjunto cumple lo siguiente:

- a)  $T^n(Y) \subset Y$ ,
- b)  $Y$  es cerrado.

Sea  $D$  un minimal para  $(Y, T^n)$  y fijamos  $x' \in D \subset Y$ . Sabemos que  $x'$  es uniformemente recurrente para  $T^n$ , por lo tanto para  $\psi > 0$  existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que

$$d(T^{nk}x', x') < \psi.$$

Ponemos  $n' = nk$ . □

**Lema 3.5.** *Supongamos que  $(X, T)$  posee la propiedad de sombreamiento.*

*Sea  $\epsilon > 0$  y  $\delta > 0$  el provisto por la propiedad de sombreamiento para  $\epsilon/4$  y sea  $x \in X$ .*

*Si  $d(T^n x, x) < \delta$  existe  $z \in X$  tal que*

1. *El punto  $z$  es regularmente recurrente y  $(\overline{O(z)}, T|_{\overline{O(z)}})$  es un odómetro.*

2. *Para todo  $\delta > 0$  se cumple*

$$d(T^{jn+i} z, x) \leq \epsilon \quad \text{para todo } i = 0, 1, \dots, n-1 \quad \text{para todo } j \geq 0.$$

*Demostración.* Vamos a definir una sucesión  $(z_k)_{k \geq 0}$  asociada a las sucesiones  $(\epsilon_k)_{k \geq 0}$  y  $(\zeta_k)_{k \geq 0}$  dadas de la siguiente manera:

- $\epsilon_1 = \epsilon/4$  y  $\epsilon_{k+1} = \epsilon_k/4$ ,
- $\zeta_k$  es el dado por la propiedad de sombreamiento para  $\epsilon_k$ .

Así  $z_1 = x$  y  $n_1 = n$ . Por el Lema 3.4 existe  $z_2 \in X$  y algún  $n_2$  divisible por  $n_1$  tal que

- $d(T^{jn+i}(z_2), T^i(z_1)) < \epsilon_1 \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad \forall j \geq 0$ ,
- $d(T^{n_2}(z_2), z_2) < \zeta_1$ .

Inductivamente podemos encontrar un punto  $z_k \in X$  y los números  $\epsilon_k, \zeta_k, n_k$  que satisfacen

- $d(T^{jn_k+i}(z_k), T^i(z_{k-1})) \leq \epsilon_{k-1}$  para todo  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$  y todo  $j \geq 0$ ,
- $d(T^{n_k}(z_k), z_k) < \zeta_k$ ,
- $n_k$  es divisible por  $n_{k-1}$ .

Para  $m > k$  tenemos que

$$d(z_k, z_m) \leq \sum_{i=k}^m d(z_i, z_{i+1}) \leq \sum_{i=k}^m \epsilon_i \leq 2\epsilon_k. \quad (3.1)$$

Así  $(z_k)_{k \geq 0}$  es una sucesión de Cauchy. Como  $X$  es compacto la sucesión converge a un punto  $z \in X$ .

Dado  $j \geq 0, k \geq 1$  y  $m > k$ . Ya que  $n_k$  divide a  $n_{m-1}$  existe  $l \geq 0$  y  $j_{m-1} \geq 0$  tal que

$$jn_k = ln_{m-1} + j_{m-1}n_k.$$

De hecho  $l = \lfloor jn_k/n_{m-1} \rfloor$  y  $j_{m-1} = j - ln_{m-1}/n_k$ .

Tenemos que

$$d(T^{ln_{m-1}+i}(z_m), T^i(z_{m-1})) \leq \epsilon_{m-1} \quad \forall i = 0, 1, \dots, n_k - 1.$$

En particular se tiene

$$d(T^{jn_k+i}(z_m), T^{j_{m-1}n_k+i}(z_{m-1})) \leq \epsilon_{m-1} \quad \forall i = 0, 1, \dots, n_k - 1.$$

Por el mismo argumento existe algún  $j_{m-2} \geq 0$  tal que

$$d(T^{j_{m-1}n_k+i}(z_{m-1}), T^{j_{m-2}n_k+i}(z_{m-2})) \leq \epsilon_{m-2} \quad \forall i = 0, 1, \dots, n_k - 1.$$

Repetiendo el proceso  $m - k$  veces se tiene

$$d(T^{j_{k+1}n_k+i}(z_{k+1}), T^i(z_k)) \leq \epsilon_k \quad \forall i = 0, 1, \dots, n_k - 1.$$

Al sumar todas las desigualdades anteriores y aplicar desigualdad triangular se sigue que

$$d(T^{jn_k+i}(z_m), T^i(z_k)) \leq \sum_{i=k}^{m-1} \epsilon_i \leq 2\epsilon_k.$$

Haciendo  $m \rightarrow \infty$

$$d(T^{jn_k+i}(z), T^i(z_k)) \leq 2\epsilon_k.$$

En particular para  $i = 0$  tenemos

$$d(T^{jn_k}(z), z_k) \leq 2\epsilon_k.$$

De la ecuación (3.1) deducimos al hacer  $m \uparrow \infty$  que  $d(z_k, z) \leq 2\epsilon_k$ . Por lo tanto

$$d(T^{jn_k}(z), z) \leq 4\epsilon_k.$$

Como  $j \geq 0$  y  $k \geq 1$  son arbitrarios,  $z$  es regularmente recurrente.

Dado  $\gamma > 0$  existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\epsilon_k < \gamma/6$ . Luego existe  $\delta > 0$  de manera que si  $d(x, y) < \delta$  entonces  $d(T^l x, T^l y) < \epsilon_k$  para todo  $l = 0, 1, \dots, n_k - 1$ . Sean  $p, q \in O(x)$  tal que  $d(p, q) < \delta$ . Escribamos  $p = T^{tn_k+i} z$  y  $q = T^{sn_k+j} z$  para algunos  $r, s, i, j$  con  $0 \leq i, j < n_k$ . De esto

$$d(T^{tn_k+i} z, T^{sn_k+j} z) < \delta.$$

Luego

$$d(T^{tn_k+i+l} z, T^{sn_k+j+l} z) < \epsilon_k \quad \forall l = 0, 1, \dots, n_k - 1.$$

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , existen  $q, r \geq 0$  tales que  $n = qn_k + r$  con  $0 \leq r < n_k - 1$ . Luego

$$\begin{aligned} d(T^{qn_k+r}(T^{tn_k+i} z), T^{qn_k+r}(T^{sn_k+j} z)) &= d(T^{(q+t)n_k+r+i} z, T^{(q+s)n_k+r+j} z) \\ &\leq d(T^{(q+t)n_k+r+i} z, T^{tn_k+r+i} z) + d(T^{tn_k+r+i} z, T^{sn_k+r+j} z) + d(T^{sn_k+r+j} z, T^{(q+s)n_k+r+j} z). \end{aligned}$$

Debido a que  $d(T^{jn_k+i} z, T^{mn_k+i} z) \leq 4\epsilon_k \quad \forall i = 0, 1, \dots, n_k - 1, j, m \geq 0$ , se obtiene que

$$d(T^{qn_k+r}(T^{tn_k+i} z), T^{qn_k+r}(T^{sn_k+j} z)) \leq 6\epsilon_k \leq \gamma.$$

Si  $p, q \in \overline{O(z)}$  tales que  $d(p, q) < \delta/2$ . Existe una sucesión  $(p_n)_{n \geq 0}$  y  $(q_n)_{n \geq 0}$  en  $O(z)$  convergentes a  $p$  y  $q$  respectivamente. Luego a partir de algún  $k > 0$  se tendrá que  $d(p_n, p) < \delta/2$  y  $d(q_n, q) < \delta/2$ . De esto  $d(p_n, q_n) < \delta$  para todo  $n > k$ . Luego

$$d(T^N p_n, T^N q_n) < \gamma \quad \forall N \geq 0.$$

Haciendo  $n \uparrow \infty$  se sigue que

$$d(T^N p, T^N q) < \gamma.$$

Así  $(\overline{O(z)}, T)$  es un odómetro. □

**Corolario 3.6.** *Sea  $(X, T)$  un sistema dinámico con la propiedad de sombreamiento. Luego la colección de puntos cuya clausura de su órbita es un odómetro es densa en el conjunto  $\Omega(T)$ .*

*Demostración.* Sea  $y \in \Omega(T)$ ,  $\epsilon > 0$  y  $\epsilon/2 > \delta > 0$  dado por la propiedad de sombreamiento para  $\epsilon/2$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $T^n B_{\delta/2}(y) \cap B_{\delta/2}(y) \neq \emptyset$ . De esto, existe  $x \in B_{\delta/2}(y)$  tal que  $d(T^n x, x) < \delta$ .

Finalmente por el Lema (3.5) existe  $z \in B_{\epsilon/2}(x)$  tal que  $(\overline{O(z)}, T|_{\overline{O(z)}})$  es un odómetro. Así el resultado queda probado.  $\square$

**Observación 3.7.** *Si  $(G_s, T_s)$  es un odómetro, luego podemos ver  $T_s$  como una rotación en un grupo compacto metrizable (Ver [7] por Downarowicz). Por lo tanto, cada odómetro es estrictamente ergódico, con la medida de Haar como la única medida invariante (por Teorema 2.35).*

Aún es necesario desarrollar algunos lemas previos al resultado final. El primero de ellos está referido a las medidas invariantes soportadas en la clausura de la órbita de un punto. Para el siguiente resultado haremos uso del Lema 2.12 desarrollado en el capítulo anterior.

**Lema 3.8.** *Sea  $x \in X$  y  $\mu \in M_T^e(\overline{O(x)})$ . Luego para todo  $\epsilon > 0$  y  $p, N \in \mathbb{N}$  existen  $n, m \in \mathbb{N}$  con  $p|n, p|m$  y  $m \geq N$  tal que  $d_{BL}(\varepsilon_m(T^n(x)), \mu) < \epsilon$ .*

*Demostración.* Escojamos un punto genérico  $z \in \overline{O(x)}$  para  $\mu$ . Luego existe  $N_1 > N + p$  tal que para cada  $m > N_1$ ,  $d_{BL}(\varepsilon_m(z), \mu) < \epsilon/4$ . Fijamos cualquier  $m_1 > N_1$  suficientemente grande que satisfaga

$$\frac{5p}{m_1 - p} \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

Existe  $\delta > 0$  tal que si  $d(x, y) < \delta < \epsilon/4$  entonces  $d(T^i x, T^i y) < \epsilon/4$  para todo  $i = 0, 1, \dots, m_1 - 1$ .

Ya que  $z \in \overline{O(x)}$  existe  $n_1 \in \mathbb{N}_0$  tal que  $d(T^{n_1}x, z) < \delta$ , entonces  $d(T^{n_1+i}(x), T^i(z)) < \epsilon/4$  para todo  $i = 0, 1, \dots, m_1 - 1$ . Por el lema (2.12),  $d_{BL}(\varepsilon_{m_1}(T^{n_1}(x)), \varepsilon_{m_1}(z)) < \epsilon/4$ . Tomamos enteros  $n_1 \leq n < n_1 + p$  y  $m_1 - p < m \leq m_1$  tales que  $p|n$  y  $p|m$ . Luego  $m_1 + n_1 - p \leq n + m \leq n_1 + m_1 + p$ . Sin pérdida de generalidad, tomemos el caso en que  $m + n \leq m_1 + n_1$ , por el lema 2.12(1) se sigue

$$\begin{aligned} d_{BL}(\varepsilon_{m_1}(T^{n_1}(x)), \varepsilon_m(T^n(x))) &\leq \frac{m_1 + m}{m_1 \cdot m}(m_1 - m) + \frac{|m_1 - m|}{m_1 \cdot m}m \\ &\leq \frac{m_1 + m}{m_1 \cdot m}(2p) + \frac{|m_1 - m|}{m_1 \cdot m}m \leq \frac{2m_1}{m_1 \cdot m}2p + \frac{p}{m_1} \leq \frac{2}{m_1 - p}2p + \frac{p}{m_1 - p} = \frac{5p}{m_1 - p} < \epsilon/4. \end{aligned}$$

Similarmemente

$$d_{BL}(\varepsilon_m(z), \varepsilon_{m_1}(z)) \leq \frac{m_1 + m}{m_1 \cdot m}(m_1 - m) + \frac{m_1 - m}{m_1 \cdot m}m \leq \frac{m_1 + m}{m_1 \cdot m}p + \frac{p}{m_1 \cdot m}m < \epsilon/4.$$

Luego

$$\begin{aligned} d_{BL}(\varepsilon_m(T^n x), \mu) &\leq d_{BL}(\varepsilon_m(T^n x), \varepsilon_{m_1}(T^{n_1}x)) + d_{BL}(\varepsilon_{m_1}(T^{n_1}x), \varepsilon_{m_1}(z)) \\ &\quad + d_{BL}(\varepsilon_{m_1}(z), \varepsilon_m(z)) + d_{BL}(\varepsilon_m(z), \mu) < \epsilon. \end{aligned}$$

□

Para la prueba de un lema posterior haremos uso del Teorema de descomposición ergódica que se puede ver como consecuencia del Teorema de Choquet (para la prueba ver [6]).

**Teorema 3.9. (Teorema de Choquet)**

Sea  $E$  un espacio métrico convexo,  $Y \subset E$  un subconjunto compacto convexo y  $x_0 \in Y$ . Luego existe una medida de probabilidad  $\mu$  sobre  $X$  el cual representa  $x_0$  y es soportada por los puntos extremos de  $Y$ .

El Teorema de descomposición ergódica es una consecuencia de este teorema para el caso en que  $E = M_T(X)$  y  $Y = M_T^e(X)$  siendo  $X$  compacto y  $T$  continua. Para el caso en que  $M_T^e$  es finito sabemos que cualquier medida en  $M_T(X)$  puede se expresada

como combinación convexa de las ergódicas. El Teorema de descomposición ergódica generaliza este hecho y nos garantiza que dada una medida invariante  $\mu$  existe una medida de probabilidad  $\tau$  sobre  $M_T^e(X)$  tal que

$$\mu = \int_{M_T^e} \omega d\tau(\omega).$$

**Lema 3.10.** *Sea  $\mu \in M_T(X)$ . Luego para todo  $\epsilon > 0$  existen medidas ergódicas  $\mu_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, M$  (no necesariamente distintas) tales que*

$$d_{BL} \left( \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mu_i, \mu \right) < \epsilon.$$

*Demostración.* Para cada  $\nu \in M_T^e(X)$  definimos

$$V_\nu = \{\omega \in M_T^e(X) / d_{BL}(\nu, \omega) < \epsilon/4\}.$$

Luego la familia  $\mathcal{F} = \{V_\nu / \nu \in M_T^e(X)\}$  es un cubrimiento por abiertos de  $M_T^e(X)$ . Por la compacidad de  $M_T^e(X)$  existen  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$  tales que la familia  $\{V_{\nu_i} / i = 1, 2, \dots, r\}$  es un subcubrimiento de  $\mathcal{F}$ . Sea  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$  una partición que refina dicha familia.

Por el teorema de descomposición ergódica existe una medida  $\tau$  sobre  $M_T^e$  tal que

$$\mu = \int_{M_T^e} \omega d\tau(\omega).$$

En cada  $P_i$  tomemos una medida  $\omega_i$ . Se cumple

$$d_{BL} \left( \omega_i, \frac{1}{\tau(P_i)} \int_{P_i} \omega d\tau(\omega) \right) \leq \epsilon/4 \quad \forall i = 1, 2, \dots, k.$$

Luego

$$d_{BL} \left( \sum_{i=1}^k \tau(P_i) \omega_i, \sum_{i=1}^k \int_{P_i} \omega d\tau(\omega) \right) \leq \sum_{i=1}^k \tau(P_i) d_{BL} \left( \omega_i, \frac{1}{\tau(P_i)} \int_{P_i} \omega d\tau(\omega) \right) \leq \epsilon/4 < \epsilon/2.$$

Tomando un entero suficientemente grande  $N$ , podemos encontrar enteros  $n_i$  tales que

$$d_{BL} \left( \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N} \omega_i, \sum_{i=1}^k \tau(P_i) \omega_i \right) < \epsilon/2.$$

Finalmente, de las dos últimas desigualdades tenemos

$$d_{BL} \left( \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N} \omega_i, \mu \right) = d_{BL} \left( \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N} \omega_i, \sum_{i=1}^k \int_{P_i} \omega d\tau(\omega) \right) < \epsilon.$$

Haciendo  $M = N.k$  y  $\mu_i = \omega_j$  cuando  $\sum_{s=1}^{j-1} n_s < i \leq \sum_{s=1}^j n_s$  tendremos

$$d_{BL} \left( \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mu_i, \mu \right) < \epsilon.$$

□

Recordemos el siguiente resultado del Análisis Real: *Si tenemos una sucesión en un espacio métrico compacto con la propiedad que toda subsucesión convergente converge al mismo punto, entonces la sucesión también convergerá a dicho punto.* De ello, si el sistema  $(X, T)$  es únicamente ergódico entonces todo punto en  $X$  es genérico para la única medida invariante. Esto será útil para la demostración del siguiente teorema.

**Teorema 3.11.** *Supongamos que  $(X, T)$  tiene la propiedad de sombreadamiento y  $\mu \in M_T(X)$ . Si  $\text{supp}(\mu) \setminus \sim$  es un conjunto unitario (donde  $\sim$  es la relación recurrencia por cadenas), luego para todo  $\epsilon > 0$  existe una medida ergódica  $\mu$  soportada sobre un odómetro tal que  $d_{BL}(\mu, \nu) < \epsilon$ .*

*Demostración.* Sea  $\delta \in (0, \epsilon/8)$  dado por la propiedad de sombreadamiento para  $\epsilon/32$ ,  $\xi \in (0, \delta)$  dado para  $\delta/2$  y  $\eta > 0$  dado por la propiedad de sombreadamiento para  $\xi$ . Existe  $\gamma > 0$  tal que si  $d(x, y) < \gamma < \eta$  entonces  $d(Tx, Ty) < \eta/2$ .

Sea  $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$  un cubrimiento abierto para  $\text{supp}(\mu)$  tal que  $\text{diam} V_i < \gamma$  para todo  $i = 1, 2, \dots, r$ .

Tomemos  $x_i \in V_i$  y  $y_j \in V_j$  puntos en  $\text{supp}(\mu)$ . Como  $\text{supp}(\mu)$  es un singleton existe

una  $\eta/2$ -pseudo órbita  $x_i = z_0, z_1, z_2, \dots, z_m = x_j$ . Fijando cualquier  $x \in V_i$  y  $y \in V_j$  observamos que  $x, z_1, z_2, \dots, z_{m-1}, y$  es una  $\eta$ -pseudo órbita de  $x$  a  $y$ . Luego, por la propiedad de sombreado, existe  $z \in X$  que  $\xi$ -sombrea esta órbita. Tomemos  $M$  el máximo de todas estas longitudes para  $1 \leq i, j \leq r$ . Luego dados  $u, v \in \text{supp}(\mu)$  existe  $m$  (con  $0 < m \leq M$ ) y  $z \in X$  tal que  $d(T^m z, v) < \xi$  y  $d(z, u) < \xi$ .

Por el Lema 3.10 existe  $K$  y medidas ergódicas  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K \in M_T(\text{supp}(\mu))$  tales que

$$d_{BL}\left(\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mu_i, \mu\right) < \epsilon/8.$$

Para todo  $i = 1, 2, \dots, K$  escogemos un punto genérico  $x_i \in \text{supp}(\mu)$  para cada  $\mu_i$ . Escogemos un entero positivo  $N$  suficientemente grande tal que

$$d_{BL}(\varepsilon_N(x_i), \mu_i) < \epsilon/8, \forall i = 1, 2, \dots, k.$$

Por desigualdad triangular tenemos

$$d_{BL}\left(\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \varepsilon(x_i), \mu\right) < \epsilon/4.$$

Por la definición de  $M$ , para cada  $1 \leq i < K$  existe  $0 < M_i \leq M$  y  $z_i \in X$  tal que

$$d(z_i, T^N x_i) < \xi \quad \text{y} \quad d(T^{M_i} z_i, x_{i+1}) < \xi.$$

También existe  $z_K \in X$  tal que

$$d(z_K, T^N x_K) < \xi \quad \text{y} \quad d(T^{M_K} z_K, x_1) < \xi.$$

Observemos que la elección de  $M$  es independiente de la de  $N$ . Luego podemos tomar  $N$  suficientemente grande tal que

$$M < N \quad \text{y} \quad \frac{4M}{N} < \epsilon/8.$$

Sea  $n = NK + \sum_{i=1}^K M_i$ , luego  $KN < n < K(N + M)$ .

Sea  $\{y_i/i = 1, 2, \dots, n-1\}$  la colección

$$x_1, Tx_1, T^2x_1, \dots, T^{N-1}x_1, z_1, Tz_1, \dots, T^{M_i-1}z_1$$

$$\begin{aligned}
& x_2, Tx_2, T^2x_2, \dots, T^{N-1}x_2, z_2, Tz_2, \dots, T^{M_i-1}z_2 \\
& \dots \dots \dots \\
& x_K, Tx_K, T^2x_K, \dots, T^{N-1}x_K, z_K, Tz_K, \dots, T^{M_i-1}z_K.
\end{aligned}$$

Del Lema 2.12(1) se sigue que

$$\begin{aligned}
d_{BL}\left(\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \varepsilon_N(x_i), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}\right) &\leq \frac{n - KN}{KN \cdot n} KN + \frac{n + KN}{KN \cdot n} (n - KN), \\
d_{BL}\left(\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \varepsilon_N(x_i), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}\right) &\leq \frac{(\sum_{i=1}^K M_i)KN + (KN + \sum_{i=1}^K (N + M_i)) \sum_{i=1}^K M_i}{KN(KN + \sum_{i=1}^K M_i)}, \\
d_{BL}\left(\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \varepsilon_N(x_i), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}\right) &\leq \frac{MN + (2N + M)M}{N^2} \leq \frac{4M}{N} < \epsilon/8.
\end{aligned}$$

Sea  $\alpha$  la sucesión periódica

$$(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_0, \dots).$$

Luego  $\alpha$  es una  $\xi$ -pseudo órbita. Por la propiedad de sombreado existe  $y \in X$  que  $\delta/2$ -sombrea  $\alpha$

$$d(T^{jn+i}y, y_i) < \delta/2, \quad \forall j \geq 0, i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Luego

$$d(T^n y, y) < d(T^n y, y_0) + d(y_0, y) < \delta,$$

y por el Lema 2.12 tenemos que

$$d_{BL}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{y_i}, \varepsilon_n(y)\right) < \delta/2 < \epsilon/8.$$

Ahora aplicando el Lema 3.5 para  $y, n, \epsilon/32$  y  $\delta$ , existe un punto  $z \in X$  tal que el sistema  $(\overline{O(z)}, T)$  es un odómetro y

$$d(T^{jn+i}z, T^i y), \quad \forall j \geq 0, i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Observemos que

$$\varepsilon_n(y) = \frac{1}{jn} j \sum_{i=1}^n \delta_{T^i y}.$$

De esto y por el lema 2.12(2) nuevamente tenemos que

$$d_{BL}(\varepsilon_{jn}(z), \varepsilon_n(y)) < \epsilon/8, \quad \forall j \geq 1.$$

Ya que  $(\overline{O(z)}, T)$  es un odómetro por la observación (3.7) será estrictamente ergódico, luego existe un único  $\nu$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(z) = \nu.$$

Luego existe  $j \geq 1$  tal que

$$d_{BL}(\varepsilon_{jn}(z), \nu) < \epsilon/8.$$

Combinando todas las desigualdades previas obtenemos que

$$d_{BL}(\mu, \nu) < \epsilon,$$

lo cual completa la prueba. □

Recordemos que un conjunto en un espacio topológico se dice que es residual cuando es un conjunto  $G_\delta$  denso. Ahora procedemos a probar el resultado principal de este trabajo

**Teorema 3.12.** *Supongamos que un sistema dinámico  $(X, T)$  es transitivo y tiene la propiedad de sombreamiento. Luego la colección de medidas ergódicas las cuales están soportadas sobre odómetros es densa en  $M_T(X)$ . En particular, si  $T$  es un homeomorfismo, el conjunto  $M_T^e(X)$  es residual en  $M_T(X)$ .*

*Demostración.* Ya que  $(X, T)$  es transitivo existe  $p \in X$  tal que  $\overline{O(p)} = X$ . Dado  $\delta > 0$  existe  $\delta > \gamma > 0$  tal que si  $d(x, y) < \gamma$  entonces  $d(Tx, Ty) < \delta$ . Para cualquier  $x, y \in X$  existen  $n_3 > n_2 > n_1 > 0$  tal que  $T^{n_1}p, T^{n_3}p \in B_\gamma(x)$  y  $T^{n_2}p \in B_\gamma(y)$ . Luego la colección  $x, T^{n_1+1}p, T^{n_1+2}p, \dots, T^{n_2-1}p, y$  es una  $\delta$ -pseudo órbita de  $x$  a  $y$  mientras que  $y, T^{n_2+1}p, T^{n_2+2}p, \dots, T^{n_3-1}p, x$  es una  $\delta$ -pseudo órbita de  $y$  a  $x$ . De esto  $x \sim y$

para cualquier  $x, y \in X$  y por lo tanto  $X = [x]/\sim$  para todo  $x \in X$ . Del teorema 3.11 se sigue directamente que si  $T$  es un homeomorfismo, la colección de las medidas ergódicas soportadas sobre un odómetro es densa en  $M_T(X)$ . Por el teorema 2.26  $M_T^e(X)$  es un  $G_\delta$  en  $M_T(X)$  y por lo tanto residual.  $\square$

A continuación presentaremos dos aplicaciones de nuestros resultados.

### 3.1. Los odómetros de la dinámica del shift

El ejemplo más representativo de un sistema transitivo con la propiedad de sombreadamiento es el que presentamos en (1.52) de la aplicación shift a izquierda  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  (o derecha), luego por el teorema 3.12 la familia de medidas soportadas sobre odómetros será densa en  $M_\sigma(\Sigma_2)$ . Ahora procederemos a caracterizar todos los odómetros de este sistema.

**Proposición 3.13.** *Todos los odómetros de  $(\Sigma_2, \sigma)$  están determinados por las órbitas de sus puntos periódicos.*

*Demostración.* Sea  $x \in \Sigma_2$  un punto regularmente recurrente y  $S = \overline{O(x)}$  tal que  $\sigma|_S$  es equicontinuo. Dado  $m \in \mathbb{N}$ , para  $\epsilon = 1/2^m$  existe  $\delta_m > 0$  tal que

$$d(z, y) < \delta_m \rightarrow d(\sigma^n z, \sigma^n y) < 1/2^m, \forall n \geq 0.$$

Más aún, podemos hacer que  $\delta_m > \delta_{m+1}$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Como  $x$  es regularmente recurrente podemos definir  $N_1 = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} / d(\sigma^k x, x) < \delta_1\}$  y  $N_m = \text{mín}\{k \geq N_{m-1} / d(\sigma^k x, x) < \delta_m\}$  para todo  $m > 1$ . Nótese que  $N_m < N_{m+1}$  y que  $N_m \geq m$  para todo  $m \geq 1$ . Por la equicontinuidad se sigue que

$$d(\sigma^{N(m)+s} x, \sigma^s x) < 1/2^m, \quad \forall s \geq 0, m \geq 1.$$

Escribamos  $x = (\dots x_{-2} x_{-1} x_0 x_1 x_2 \dots)$ . Para cualquier  $r \geq 0$  se tiene que

$$\frac{|x_{r-m} - x_{N(m)+r-m}|}{2^m} \leq d(T^{N(m)+r} x, T^r x) < 1/2^m, \forall m \geq 1.$$

De esto  $|x_{r-m} - x_{N(m)+r-m}| < 1$ , por lo tanto  $x_{r-m} = x_{N(m)+r-m}$  para todo  $r \geq 0$  y  $m \geq 1$ . Podemos reescribir esto último como  $x_s = x_{N_m+s}$  para todo  $s \geq -m$  y  $m \geq 1$ . Para  $d = N(1)$  se tiene que  $x_s = x_{d+s}$  para todo  $s \geq -1$ .

Tomemos  $m \geq 1$ , ya que  $N_m - m \geq 0$  se tiene que  $x_s = x_{N_m+s} = x_{d+N_m+s}$  para todo  $s \geq -m$ . Como  $x_{d+s} = x_{N_m+d+s}$  para todo  $s \geq -m$  concluimos que  $x_s = x_{d+s}$  para todo  $s \geq -m$ . Ya que  $m$  fue tomado arbitrariamente concluimos que  $x_s = x_{d+s}$  para todo  $s \in \mathbb{Z}$ . Así el punto  $x$  es periódico y por cómo fue tomado  $d$  concluimos que este es el periodo de dicho punto.

Finalmente concluimos que todos los odómetros en  $(\Sigma_2, \sigma)$  están determinados por las órbitas de sus puntos periódicos.  $\square$

## 3.2. Los odómetros de la Herradura de Smale

Como una segunda aplicación de nuestro resultado principal estudiaremos las medidas invariantes soportadas sobre los odómetros de la Herradura de Smale. Dicha dinámica fue introducida por Stephen Smale en la década de 1960 y la desarrollaremos basándonos en [19].

La transformación Herradura está definida en una región  $M$  compacta y conexa del plano. Dicha región  $M$  se compone de un cuadrado unitario  $S$  a cuyos lados laterales se le añaden dos semicírculos  $A$  y  $E$  de radio  $r = 1/2$ . Al conjunto  $M$  le asignaremos la métrica euclídeana de  $\mathbb{R}^2$  con la cual será compacto.

La transformación Herradura la denotaremos por  $H$ . El dominio y contradominio de  $H$  es precisamente  $M$ , es decir:

$$H : M \rightarrow M$$

Definiremos a  $H$  como la composición de otras funciones  $h_1, h_2$  y  $h_3$  definidas a continuación.

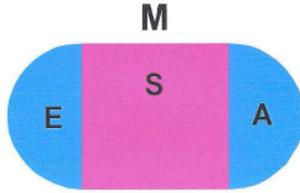


Figura 3.1: El conjunto inicial  $M$

La transformación  $h_1 : M \rightarrow M$  consiste en contraer linealmente  $M$  en la dirección del eje de las ordenadas un factor  $\delta < 1/2$ . Mientras que  $h_2 : M \rightarrow M$  consiste en expandir  $h_1(M)$  en la dirección del eje de las abscisas un factor  $1/\delta$ . Por último  $h_3 : M \rightarrow M$  consiste en doblar  $h_2(h_1(M))$  hacia la derecha de modo que quede contenida en  $M$ .

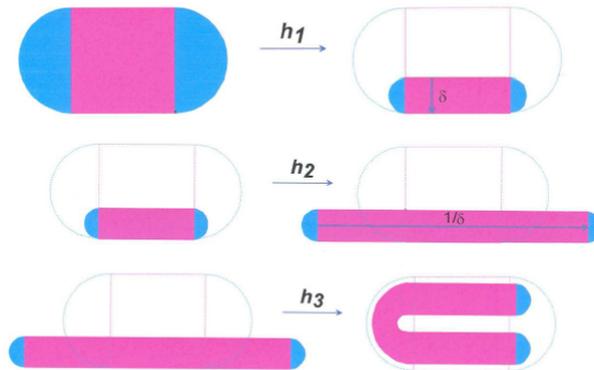


Figura 3.2: Las aplicaciones que forman la Herradura de Smale

Finalmente definimos  $H : M \rightarrow M$  como:

$$H = h_3 \circ h_2 \circ h_1.$$

El procedimiento que seguiremos a continuación consistirá primero en demostrar que la Herradura de Smale es en realidad conjugada a la dinámica del shift para luego, conociendo a priori los odómetros del shift, encontrar los odómetros en esta dinámica.

Para entender la dinámica de la Herradura de Smale dividamos el conjunto  $M$  en los subconjuntos  $A, B, C, D$  y  $E$  y veamos las imágenes de dichos subconjuntos de la siguiente manera.

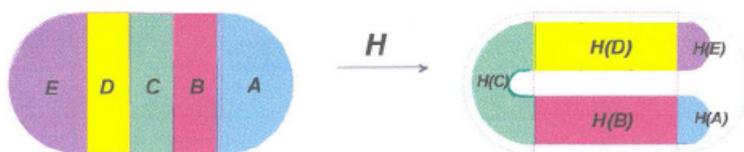


Figura 3.3: La Herradura de Smale

De aquí hacemos las siguientes observaciones:

1. La preimágen de  $S$  consiste en dos bandas verticales  $B$  y  $D$ .
2. La banda  $C$  de  $S$  se transforma dentro de la región  $E$ .
3. Bajo la transformación  $H$  tanto  $A$  como  $E$  son contraídas dentro de la región  $A$ .

Podemos notar que las bandas verticales  $B$  y  $D$  se transforman en las bandas horizontales  $H(B)$  y  $H(D)$  respectivamente.

Ahora nos preguntamos por aquel conjunto invariante de  $H$  más grande contenido en  $S$ . Sabemos que este conjunto debe ser necesariamente de la forma  $\bigcup_{-\infty}^{\infty} H^n(S)$ . Para conocer dicho conjunto observemos las iteraciones de  $H$ .

Bajo la  $n$ -ésima iteración de  $H$  los puntos de  $S$  que permanecen en  $S$ , son los que determinan  $2^n$  subbandas de  $D, B$  de grosor  $\delta^n$ . Observemos que, en el paso  $n$ , cada banda de ancho  $\delta^n$  da lugar a exactamente dos bandas de ancho  $\delta^{n+1}$  en el paso  $n + 1$ . Este proceso es, en esencia, el que se sigue en la construcción del conjunto de Cantor.

Al conjunto de puntos que permanecen en  $S$  para toda iteración entera positiva lo denotaremos por  $\Lambda^+$  y lo definimos como

$$\Lambda^+ = \{x \in S / H^n(x) \in S, \forall n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n=-1}^{-\infty} H^n(S).$$

Figura 3.4: El conjunto  $H^{-n}$

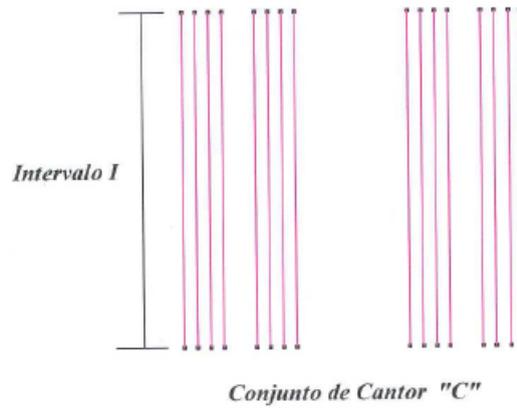


Figura 3.5: La aplicación  $H^{-1}$

Así  $\Lambda^+$  puede ser representado como el producto de un conjunto de Cantor con el intervalo vertical unitario como muestra la siguiente figura

También consideramos el conjunto formado por los puntos en  $S$  cuyas iteraciones negativas siguen perteneciendo a  $S$ ,

$$\Lambda^- = \{x \in S / H^{-n}(x) \in S, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n=1}^{-\infty} H^n(S).$$

Y el conjunto formado por la intersección de  $\Lambda^+$  y  $\Lambda^-$ .

$$\Lambda = \{x \in S / H^n(x) \in S, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Ahora bien, si la transformación  $H$  consiste en comprimir, expandir y doblar una región  $M$  compacta y conexa del plano, intuitivamente podemos considerar a  $H^{-1}$  como la transformación que consiste en desdoblar, contraer y expandir  $H(M)$  tal como se muestra en la siguiente secuencia de imágenes.

De lo anterior podemos decir lo siguiente:

Bajo la  $n$ -ésima iteración de  $H^{-1}$ , los puntos de  $S$  que permanecen en  $S$  son  $2^n$  rectángu-

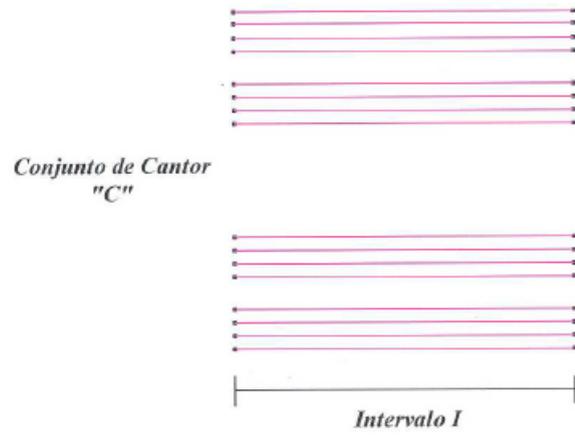


Figura 3.6: El conjunto  $H^n$

los determinados por  $(H^n(B) \cup H^n(D)) \cap S$ , cuyo ancho es  $\delta^n$  como ya habíamos observado.

El conjunto  $\Lambda^-$  representa entonces el producto cartesiano de un Conjunto de Cantor con un intervalo horizontal como se muestra en la siguiente figura.

La representación gráfica del conjunto  $\Lambda$  es muy fácil de imaginar, lo podemos describir como una “rejilla” de conjuntos de Cantor, es decir, es de la forma  $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ . Donde  $\mathcal{C}_1$  es un conjunto de Cantor horizontal y  $\mathcal{C}_2$  es uno vertical. Como el producto de conjuntos de Cantor es un conjunto de Cantor,  $\Lambda$  es un conjunto de Cantor.

En lo que sigue se demostrará que cada una de las sucesiones dobles infinitas representa un único punto del espacio  $\Lambda$ . Presentaremos la correspondencia entre ambos conjuntos de forma explícita, a través de un homeomorfismo  $\Psi : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ . La correspondencia consiste en asignar a cada punto de  $\Lambda$  una doble sucesión de 0's y 1's basándonos en el recorrido que posee la órbita del punto, tanto para las iteraciones de  $H$ , como para las de  $H^{-1}$ . De dicho recorrido lo único que nos va a interesar conocer será en cuál de las bandas,  $B$  o  $D$ , es aplicado el punto bajo cada iteración, y de esta manera determinar cada término de la sucesión.

Adoptaremos la siguiente convención: el “0” representará que la iteración del punto está en  $B$  y el “1” que está en  $D$ .

Para entender bien en qué consiste esta asignación, primero analizaremos cómo se conforma la sucesión derecha de cada punto de  $\Lambda$ .

Tomemos cualquier recta vertical,  $l_v$ , contenida en  $\Lambda^+$ . Notemos que  $H^k(l_v)$  es un segmento de recta vertical de longitud  $\delta^k$  en  $B$  o  $D$ . De ahí que podemos asociar una única sucesión infinita  $(s_0 s_1 s_2 s_3 \dots)$  de ceros y unos a todo punto en dicha recta  $l_v$ , de acuerdo a la siguiente regla:

$$s_j = 0 \quad \text{si y solo si} \quad H^j(l_v) \subset B,$$

$$s_j = 1 \quad \text{si y solo si} \quad H^j(l_v) \subset D.$$

Dado que definimos  $H^0$  como la transformación identidad, el valor que toma la doble sucesión en  $s_0$  nos indica en qué conjunto  $B$  o  $D$  se localiza  $l_v$ ,  $s_1$  nos indica en donde se localiza la imagen de  $l_v$  y así sucesivamente para los demás puntos.

De lo anterior es claro que cada recta vertical define una sucesión infinita derecha.

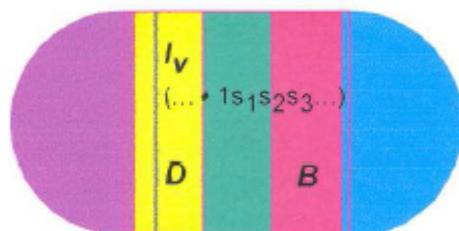


Figura 3.7: Asignación de puntos por líneas verticales

De una forma similar ahora podemos asociar una sucesión infinita de 0's y 1's a cada recta horizontal  $l_h$  de  $\Lambda^-$ . Notemos que  $H^{-1}(l_h), H^{-2}(l_h), \dots$ , son segmentos horizontales de longitud decreciente. A esta secuencia la llamaremos  $(\dots s_{-3}s_{-2}s_{-1}\dots)$  donde el valor de  $s_{-j}$  se determina como

$$s_{-j} = 0 \quad \text{si y solo si} \quad H^{-j}(l_h) \subset B,$$

$$s_{-j} = 1 \quad \text{si y solo si} \quad H^{-1}(l_h) \subset D.$$

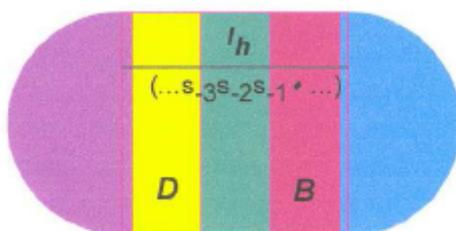


Figura 3.8: Asignación de puntos por líneas horizontales

De esta forma es claro que la asignación  $\Psi$  está bien definida ya que la intersección de una recta vertical con una horizontal es única. Por lo que para cada punto en  $\Lambda$ , existe una única doble sucesión infinita en  $\Sigma_2$  que le corresponde.

Así hemos definido la función  $\Psi$  sobre  $\Lambda$  de manera que para cada  $x \in \Lambda$  se tiene que  $\Psi(x) = (\dots s_{-3}s_{-2}s_{-1}s_0s_1s_2\dots)$ , tal que

$$s_j = 0 \quad \text{si y solo si} \quad H^j(x) \in B,$$

$$s_j = 1 \quad \text{si y solo si} \quad H^j(x) \in D.$$

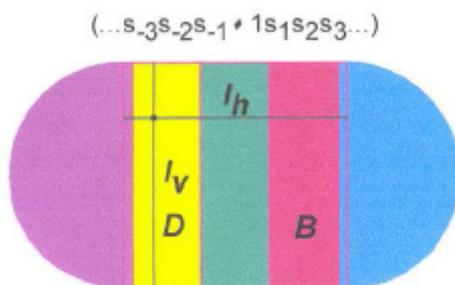


Figura 3.9: Asignación de puntos de la Herradura de Smale

Para cada  $r, k \geq 0$  denotaremos

$$\Omega_{s_{-r}s_{-r+1}\dots s_{-1}s_0s_1\dots s_k} = \bigcap_{i=-r}^k H^i(S),$$

estos conjuntos se muestran como cuadrados así como en la figura siguiente.

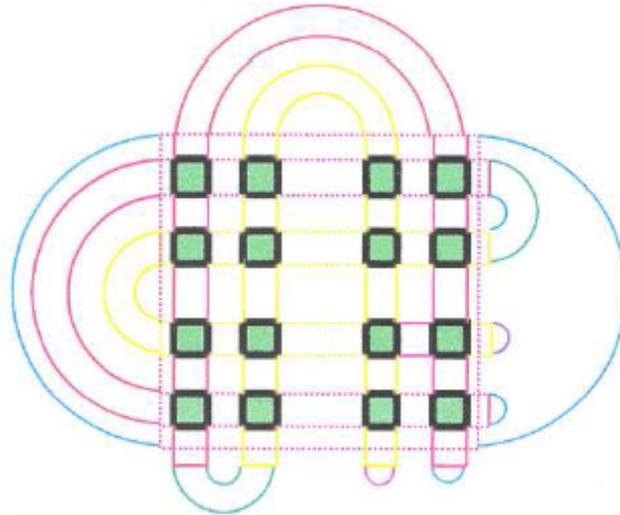


Figura 3.10: Cajas en la Herradura de Smale

Ahora demostraremos que  $\Psi$  es en efecto una conjugación entre la Herradura de Smale y la dinámica del shift. Para ello debemos demostrar primero lo siguiente.

**Proposición 3.14.** *La aplicación  $\Psi$  cumple que:*

1. *es sobreyectiva,*
2. *es inyectiva,*
3. *es continua,*
4. *su inversa es continua.*

*Demostración.*

1. Sea  $\bar{s} = (\dots s_{-k} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_{k-1} \dots)$  un elemento en  $\Sigma_2$ . Es claro que para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $s$  es un elemento del cuadrado:

$$\Omega_{s_{-k} \dots s_{-2} s_{-1} s_0 s_1 s_2 \dots s_{k-1}}$$

Estos cuadrados forman una sucesión anidada cuya longitud de cada lado es  $\delta^k$ , de

tal forma que podemos garantizar que existe un elemento  $\bar{x}_0$  en  $\Lambda$  tal que

$$\bar{x}_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_{s_{-k} \dots s_{-2} s_{-1} s_0 s_1 s_2 \dots s_{k-1}},$$

por lo que  $\Psi(\bar{x}_0) = \bar{s}$ .

2. Supongamos que  $\Psi(\bar{x}) = \Psi(\bar{y}) = (\dots s_{-2} s_{-1} s_0 s_1 s_2 \dots)$ , de esto los elementos  $\bar{x}, \bar{y}$  pertenecen a cada uno de los cuadrados

$$\Omega_{s_{-k} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_{k-1}}, k \in \mathbb{N},$$

de esta forma se cumple que

$$\bar{x} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_{s_{-k} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_{k-1}} \quad \text{y} \quad \bar{y} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_{s_{-k} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_{k-1}},$$

y ya que los cuadrados determinan un único punto conforme  $k \rightarrow \infty$ , obtenemos que  $\bar{x} = \bar{y}$ .

3. Sean  $\bar{x} \in \Lambda$  y  $\Psi(\bar{x}) = \bar{s} = (\dots s_{-2} s_{-1} s_0 s_1 s_2 \dots)$ . Sea  $\epsilon > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon$ . Para  $\delta > 0$  suficientemente pequeño, si  $\bar{y} \in \Lambda$  y  $|\bar{y} - \bar{x}| < \delta$  entonces  $\bar{y} \in \Omega_{s_{-n} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_{n-1}}$ . Sea  $\Psi(\bar{y}) = \bar{t} = (\dots t_{-2} t_{-1} t_0 t_1 t_2 \dots)$ , de esto  $t_k = s_k$  para  $-n \leq k \leq n$ . Así

$$d(\Psi(\bar{x}), \Psi(\bar{y})) \leq \sum_{i=-\infty}^{-(n+1)} \frac{1}{2^{|i|}} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon.$$

4. Sea  $\{y_n = \Psi(x_n)\}_{n \geq 0}$  una sucesión en  $\Sigma_2$  que converge a  $y \in \Sigma_2$ .

Luego  $\{\Psi^{-1}(y_n) = x_n\}_{n \geq 0}$  es una sucesión en  $\Lambda$  tal que cualquier subsucesión convergente necesariamente converge a  $\Psi^{-1}(y)$ . Por la compacidad de  $\Lambda$  concluimos que  $\{\Psi^{-1}(y_n) = x_n\}_{n \geq 0}$  debe converger a  $\Psi^{-1}(y)$ . Así  $\Psi^{-1}$  es continua.

□

**Proposición 3.15.** *La aplicación  $\Psi$  es una conjugación entre la Herradura de Smale  $(\Lambda, H)$  y el shift a izquierda  $(\Sigma_2, \sigma)$ .*

*Demostración.* Por la Proposición 3.14 sabemos que  $\Psi$  es un homeomorfismo. Resta ver que  $\sigma \circ \Psi = \Psi \circ H$ .

Dado  $x \in \Lambda$  y  $\bar{s} = \Psi(x) = (\dots s_{-2}s_{-1}s_0s_1s_2\dots)$  entonces  $\sigma(\Psi(x)) = (\dots s_{-1}s_0s_1s_2s_3\dots)$ .

Sea  $y = \Psi^{-1}(\dots s_{-1}s_0s_1s_2s_3\dots)$  entonces

$$s_{j+1} = 0 \quad \text{si y solo si} \quad H^j(y) \in B,$$

$$s_{j+1} = 1 \quad \text{si y solo si} \quad H^j(y) \in C.$$

Estas condiciones las podemos reescribir como

$$s_{j+1} = 0 \quad \text{si y solo si} \quad H^{j+1}(H^{-1}y) \in B,$$

$$s_{j+1} = 1 \quad \text{si y solo si} \quad H^{j+1}(H^{-1}y) \in C.$$

Ya que esta regla puede definir un único punto concluimos que  $H^{-1}(y) = x$  y de esto  $H(x) = y$ . Por lo tanto  $\sigma \circ \Psi(x) = \Psi \circ H(x)$  con lo que termina la prueba.  $\square$

Ahora que sabemos que  $(\Lambda, H)$  es conjugado a  $(\Sigma_2, \sigma)$  deducimos a partir de las proposiciones (1.47) y (1.48) que  $(\Lambda, H)$  es transitivo y posee la propiedad de sombreado, luego por el Teorema (3.12) concluimos que las medidas soportadas en sus odómetros forman una familia densa en el conjunto de medidas invariantes  $M_H(\Lambda)$ . Más aún debido a la proposición (3.13), donde probamos que los odómetros del shift son las órbitas de sus puntos periódicos, podemos también afirmar que los odómetros de  $(\Lambda, H)$  serán del mismo tipo. De manera que ahora podemos exhibir gráficamente los odómetros de la Herradura de Smale. Para ello tomemos un punto periódico del shift, por ejemplo el punto  $x = (\dots, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, \dots)$ , y vía la conjugación  $\psi$  se observa la órbita del punto  $\psi(x)$  en  $\Lambda$  en la siguiente figura.

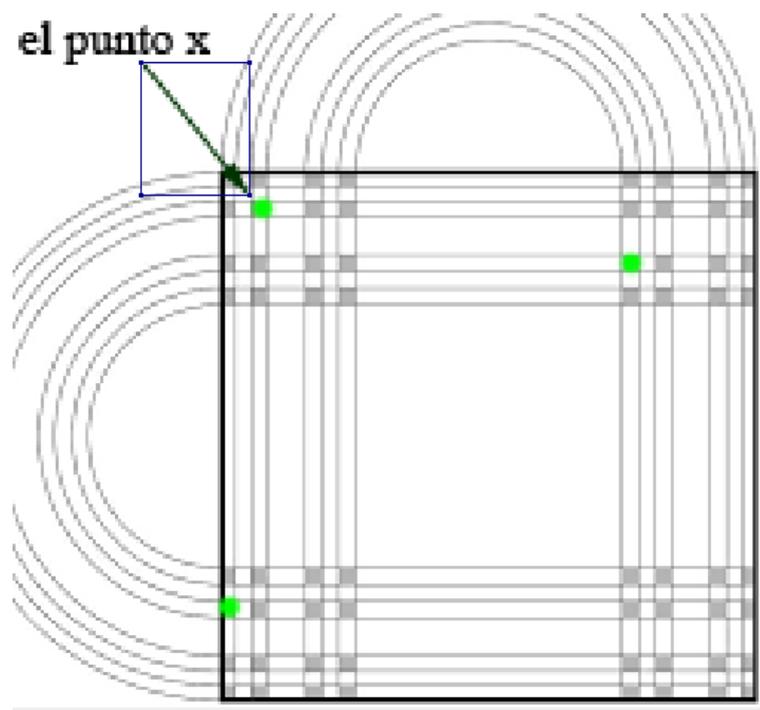


Figura 3.11: La órbita de  $x$

# Capítulo 4

## Conclusiones

1. El hecho que el conjunto de medidas ergódicas sea denso en el conjunto de medidas invariantes para el caso del shift ya había sido demostrado en [16], sin embargo como consecuencia del Teorema 3.12 estamos obteniendo una familia más grande de sistemas con dicha propiedad al garantizar que esta es satisfecha para cualquier sistema conjugado del shift (izquierda o derecha) como el caso de la Herradura de Smale.
2. Los ejemplos dados en el presente trabajo nos inducen a decir que en general conocer la geometría del conjunto de medidas invariantes es complicado. Cuando el conjunto de medidas ergódicas es finito se puede encontrar una isometría de este con algún conjunto simplex en  $\mathbb{R}^n$ . Pero si este conjunto es infinito no podemos concluir nada debido a la diversidad de casos que se puede presentar.
3. El lema (3.5) nos muestra un método para encontrar odómetros en un sistema dinámico con la propiedad de sombreado.

# Bibliografía

- [1] Gerald B. Folland, Real analysis, 2nd ed., Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley Sons, Inc., New York, 1999. Modern techniques and their applications; A Wiley-Interscience Publication.
- [2] R. M. Dudley, Real analysis and probability, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 74, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. Revised reprint of the 1989 original.
- [3] W. Rudin, Real and complex analysis, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [4] Walter Rudin, Functional analysis, 2nd ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.
- [5] Peter Walters, An introduction to ergodic theory, Graduate Texts in Mathematics, vol. 79, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [6] Robert R. Phelps, Lectures on Choquet's theorem, 2nd ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 1757, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [7] Tomasz Downarowicz, Survey of odometers and Toeplitz flows, Algebraic and topological dynamics, Contemp. Math., vol. 385, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

- [8] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz, *Linear Operators. I. General Theory*, With the assistance of W. G. Bade and R. G. Bartle. Pure and Applied Mathematics, Vol. 7, Interscience Publishers, Inc., New York; Interscience Publishers, Ltd., London, 1958.
- [9] C. E. Silva, *Invitation to ergodic theory*, Student Mathematical Library, vol. 42, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [10] H. Furstenberg, *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981. M. B. Porter Lectures.
- [11] R. Bowen. Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms. *Trans. Amer. Math. Soc.* 154 (1971), 377–397.
- [12] R. Bowen.  $\omega$ –limit sets for Axiom A diffeomorphisms. *J. Differential Equations* 18 (1975), 333–339.
- [13] T. K. S. Moothathu. Implications of pseudo-orbit tracing property for continuous maps on compacta. *Topol. Appl.* 158 (2011), 2232–2239.
- [14] T. K. S. Moothathu and P. Oprocha. Shadowing, entropy and minimal subsystems. *Monatsh. Math.* 172(2013), 357–378.
- [15] Jian Li and Piotr Oprocha, Properties of invariant measures in dynamical systems with the shadowing property, *System, Ergod. Th. and Dynam. Sys.* (First published online 2017), page 1 of 38\*, doi:10.1017/etds.2016.125, Cambridge University Press, 2017.
- [16] K. R. Parthasarathy, On the category of ergodic measures, *Illinois J. Math.* 5 (1961).
- [17] Flabio Armando Tal and Salvador Addas Zanata, *On maximizing measures of homeomorphisms on compact manifolds*, Universidade de Sao Paulo, 2008.

- [18] N. Aoki and K. Hiraide, Topological theory of dynamical systems, North-Holland Mathematical Library, vol. 52, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1994. Recent advances.
- [19] Rosa María Vargas M., Aspectos dinámicos y topológicos de la Herradura de Smale, Foro-Red-Mat: Revista electrónica de contenido matemático, ISSN 1405-1745, Vol. 28, N°. 1, 2011.