UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS

EL TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN

PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

ELABORADO POR:
DIMAS PERCY ABANTO SILVA

ASESOR:
Lic. SEGUNDO FÉLIX ESCALANTE DEL ÁGUILA

LIMA-PERÚ
2020

Este trabajo va dedicado a todos mis amigos y colegas.

Agradecimiento

Quiero agradecer al Prof. Félix Escalante por ayudarme en la composición de este trabajo.

Resumen

El presente trabajo es acerca del teorema de la curva de Jordan, resultado que es plausible a la intuición geométrica. En lo que sigue veremos como elementos de topología algebraica nos darán una demostración completa de este importante resultado mencionado en diversas áreas de la matemática como ecuaciones diferenciales, geometría diferencial, análisis complejo y análisis vectorial.

Abstract

This work is about the Jordan curve theorem, a result that seems plausible to the geometrical interpretation but whose demonstration is not direct. In what following, we will see how elements from algebraic topology give us a complete proof of this important result in various areas of mathematics as differential equations, differential geometry, complex analysis and vector analysis.

Prólogo

El teorema de la curva de Jordan es uno de los resultados que intuitivamente parece evidente y que una prueba sería no muy elaborada. El teorema afirma que toda curva cerrada simple en el plano divide al plano en dos regiones, una acotada y otra no. El primero en intentar dar una demostración fue Jordan. Todavía hay dudas si la prueba dada por él es completa. Algunos creen que sí, mientras que otros creen que la primera prueba completa fue dada por O. Veblen.

Para motivar el uso de este resultado, consideremos una curva cerrada $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ sin auto-intersecciones, como por ejemplo una curva que describe el borde de un disco, o de un cuadrado o de un triángulo en el plano; uno podría preguntarse o ver si la curva está dando una vuelta en sentido anti-horario o horario, para ello uno hace analogía con el giro descrito por una de las manecillas de un reloj; en el caso de los ejemplos dados pensamos que el centro del reloj está en alguna parte de la región limitada por la curva, esto es, la región que está en el interior de la figura. Estos ejemplos sugieren que en general una curva cerrada *simple* divide el plano en dos regiones. Así, de demostrarse, se podría preguntar si una curva en general α da una vuelta en sentido anti horario o en sentido horario.

A primera instancia, pareciera bastante obvio que hay exactamente dos regiones conexas determinadas por una curva cerrada simple C. Y, además, la curva C es el borde de cualquiera de las dos regiones; este hecho es conocido como el Teorema de la curva de Jordan.

Luego veremos una generalización de este resultado, el teorema de separación de Jordan-Brouwer. En este caso tendremos un encaje topólogico de una esfera de dimensión m en el espacio euclídeo $(m+1)$-dimensional y obtendremos un resultado semejante.

La distribución del contenido de la presente tesis es dada por capítulos.

Índice general

Introducción

En lo que sigue veremos una prueba del teorema de la curva de Jordan en el plano. Se utilizarán algunos conceptos de topología algebraica como el grupo fundamental y aplicaciones de cubrimiento.

Es sabido que el plano euclídeo se puede encajar en la esfera bi-dimensional, así la curva de Jordan puede ser considerada en la esfera. Notamos que la cantidad de componentes conexas que determina la curva en el plano es la misma que determina en la esfera, mostraremos que el número de componentes que se determina en la esfera es dos. Luego, la curva separa el plano en dos componentes, una acotada y otra no acotada. Finalmente mostraremos cómo el borde de cualquiera de las componentes es la curva de Jordan.

En el primer capítulo veremos el concepto de homotopía de aplicaciones continuas, como también homotopía de caminos cerrados. En el capítulo 2 definiremos el grupo fundamental de un espacio topológico y hallaremos el grupo fundamental de la circunferencia. Allí también veremos el concepto de equivalencia homotópica de funciones continuas, concepto importante de topología algebraica. Con ello veremos que espacios con mismo tipo de homotopía tienen grupos fundamentales isomorfos. En el capítulo 3 introduciremos las aplicaciones de cubrimiento, las cuales gozan de la propiedad de levantamiento único de caminos, es más, podremos levantar homotopías con extremos fijos, ello nos dará información del grupo fundamental del espacio base. En el capítulo 4 daremos un resultado de homotopía y algunos resultados acera del grupo fundamental de un espacio que es cubierto por dos abiertos, estos resultados serán utilizados posteriormente. En el capítulo 5, veremos que una curva de Jordan separa la esfera, mientras que un arco de curva no la separa. Luego mostraremos que el número de componentes es dos y que el borde de cualquiera de las componentes es la curva de Jordan dada. En el capítulo 6, se definirá el concepto de índice de una curva cerrada plana con respecto a un punto en su complemento. En el capítulo 7 se muestra el Teorema de número de giros de Hopf, teorema utilizado en geometría diferencial. En el capítulo 8, se introduce el concepto de homología singular. En el capítulo 9, se muestra el teorema de separación de Jordan-Brouwer.

Capítulo 1

Homotopía

En este capítulo introduciremos el concepto de homotopía de funciones, caminos en un espacio topológico y homotopía de caminos. En este capítulo X e Y son espacios topológicos.

1.1. Homotopía de funciones

Definición 1.1. *Diremos que los mapeos continuos $f : X \to Y$ y $g : X \to Y$ son homotópicos si existe una aplicación continua $H : [0,1] \times X \to Y$ tal que*

$$\begin{aligned} H(0,x) =& f(x) \quad \forall\, x \in X \\ H(1,x) =& g(x) \quad \forall\, x \in X \end{aligned}$$

La aplicación H es llamada una homotopía entre f y g.

Por ejemplo, las funciones constantes $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f = 2 \qquad g = 3$$

son homotópicas, una homotopía es dada por $H : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que es definida como

$$H(t,x) = 2 + t \quad \forall\, (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,1].$$

Dados X e Y denotemos por

$$C(X,Y) = \{f : X \to Y / f \text{ es continua}\}.$$

Proposición 1.1. *La relación en $C(X,Y)$ de ser aplicaciones homotópicas es de equivalencia.*

Demostración. Veamos:

- **Reflexiva:** Dado $f \in C(X,Y)$, definimos $H : [0,1] \times X \to Y$ como

$$H(t,x) = f(x) \quad \forall\,(t,x) \in [0,1] \times X.$$

Así f es homotópica a f.

- **Simétrica:** Sea $f \in C(X,Y)$ homotópica a $g \in C(X,Y)$. Luego, existe una homotopía $H : [0,1] \times X \to Y$ entre f y g. Sea $G : [0,1] \times X \to Y$ definido como

$$G(t,x) = H(1-t,x) \quad \forall\,(t,x) \in [0,1] \times X.$$

Luego G es una homotopía entre g y f.

- **Transitiva:** Sean $f,g,h \in C(X,Y)$ tal que f es homotópico a g y g es homotópico a h, entonces existen mapeos continuos $H_1, H_2 : [0,1] \times X \to Y$ donde H_1 es una homotopía entre f y g, y H_2 es una homotopía entre g y h. Definimos el mapeo continuo $H : [0,1] \times X \to Y$ como

$$H(t,x) = \begin{cases} H_1(2t,x) & , \text{ si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ H_2(2t-1,x) & , \text{ si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Luego, H es una homotopía entre f y h.

□

1.2. Caminos en un espacio topológico

Definición 1.2. *Un camino en X es una función continua $\alpha : [0,1] \to X$. Dado el camino $\alpha : [0,1] \to X$, el punto $\alpha(0)$ es llamado* "punto inicial" *del camino y $\alpha(1)$ es llamado* "punto final" *del camino α.*

Ejemplo: En el plano $\mathbb{R}^2$, la función $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (t,t) \qquad \forall\, t \in [0,1],$$

es un camino cuyo punto inicial es el origen $(0,0)$ y tiene como punto final a $(1,1)$.

Definición 1.3 (Camino cerrado). *Diremos que un camino $\alpha : [0,1] \to X$ es cerrado si $\alpha(0) = \alpha(1)$.*

Por ejemplo, $\alpha(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, donde $t \in [0,1]$, define un camino cerrado en el plano.

1.3. Homotopía de caminos

En el caso que dos caminos que tienen mismo punto inicial y tienen mismo punto final, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.4 (Homotopía con extremos fijos). *Sean $\alpha : [0,1] \to X$ y $\beta : [0,1] \to X$ caminos con $\alpha(0) = \beta(0)$ y $\alpha(1) = \beta(1)$. Diremos que α y β son* ***homótopicas con extremos fijos*** *si existe una homotopía $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ entre ellas tal que*

$$\begin{aligned} H(s,0) =& \alpha(0) \quad s \in [0,1] \\ H(s,1) =& \alpha(1) \quad s \in [0,1] \end{aligned}$$

A tal homotopía H llamaremos ***homotopía con extremos fijos****.*

Remarque: Notemos que la variable de deformación de la homotopía se ha cambiado de "t" a "s" ya que usualmente la variable de caminos es t.
Ejemplo: Las curvas planas $\alpha(t) = (1-t, 0)$ y $\beta(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\pi t), \frac{1}{2}\sin(\pi t)\right)$, $t \in [0,1]$, son homotópicas con extremos fijos. Una homotopía con extremos fijos es dada por

$$H(s,t) = (1-s)\alpha(t) + s\beta(t) \quad (s,t) \in [0,1] \times [0,1].$$

Notación: Si dos curvas α, $\beta : [0,1] \to X$ son homotópicas con extremos fijos lo denotaremos por $\alpha \sim \beta$.
Una situación importante es cuando tenemos dos caminos cerrados y la homotopía es así de caminos cerrados.

Definición 1.5 (Homotopía por caminos cerrados). *Dos caminos cerrados $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ son* ***homotópicos por caminos cerrados*** *si existe una homotopía $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ entre ellas tal que para cada $s \in [0,1]$:*

$$t \in [0,1] \mapsto H(s,t) \textit{ es un camino cerrado.}$$

Tal homotopía es llamada ***homotopía por caminos cerrados****.*

Ejemplo: El camino cerrado $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$\alpha(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \quad \forall\, t \in [0,1]$$

y el camino constante $\beta = (0,0)$, son homotópicos por caminos cerrados. En efecto, sea $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definido como

$$H(s,t) = [1-s] \cdot (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \quad (s,t) \in [0,1] \times [0,1].$$

Luego, H es una homotopía entre α y β por caminos cerrados.

1.4. Lazos

Definición 1.6. *Dado $x_0 \in X$, diremos que un camino $\alpha : [0,1] \to X$ es* ***un lazo*** *en x_0 si $\alpha(0) = x_0 = \alpha(1)$.*

Con esto tenemos la siguiente definición.

Definición 1.7. *Sean $\alpha : [0,1] \to X$ y $\beta : [0,1] \to X$ dos lazos en $x_0 \in X$. Diremos que son* ***homotópicos por lazos en*** *x_0 si $\alpha \sim \beta$.*

Notemos que si $H : [0,1] \times [0,1] \to M$ es una homotopía con extremos fijos entre α y β, dado que α y β son lazos en x_0 tenemos que:

para todo s en $[0,1]$, el camino $t \mapsto H(s,t)$ es un lazo en x_0.

Podríamos decir que H es una **homotopía de lazos en** x_0, ó de caminos cerrados en x_0 entre α y β.
Ejemplo: El lazo $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ en $(1,0)$ dado por

$$\alpha(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)\,, \quad t \in [0,1],$$

es homotópico por lazos en $(1,0)$ al camino constante $\beta = (1,0)$. Una homotopía por lazos es dada por $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definida como

$$H(s,t) = (1,0) + (1-s)\,[\alpha(t) - (1,0)] \quad \forall\,(s,t) \in [0,1] \times [0,1].$$

Capítulo 2

Grupo fundamental

En este capítulo introduciremos el grupo fundamental de una espacio topológico. Hallaremos el grupo fundamental de la circunferencia unitaria $\mathbb{S}^1$ con la ayuda del concepto de número de vueltas. Finalmente, veremos qué es una equivalencia homotópica entre espacios topológicos.

2.1. Espacio de lazos

Dado $x_0 \in X$ consideremos el espacio de todos los lazos (caminos cerrados) en x_0

$$\mathrm{L}(X, x_0) = \{\alpha : [0,1] \to M / \alpha \text{ es un lazo en } x_0\}$$

Veamos que la relación $\sim$ en $\mathrm{L}(X, x_0)$ es de equivalencia.

Proposición 2.1. *La relación $\sim$ en $\mathrm{L}(X, x_0)$ es de equivalencia.*

Demostración. La relación es:

1. *Reflexiva:* Sea $\alpha \in \mathrm{L}(X, x_0)$ entonces $\alpha \sim \alpha$.

2. *Simétrica:* Sean α y β en $\mathrm{L}(X, x_0)$ con $\alpha \sim \beta$ entonces existe una homotopía con extremos fijos H entre α y β, luego $G : [0,1] \times [0,1] \to X$ definido por

$$G(s,t) = H(1-s,t) \quad \forall\, (t,s) \in [0,1] \times [0,1],$$

   es una homotopía con extremos fijos entre β y α. Así $\beta \sim \alpha$.

3. *Transitiva:* Sean α, β y γ lazos en $\mathrm{L}(X, x_0)$ tales que $\alpha \sim \beta$ y $\beta \sim \gamma$. Existe una homotopía con extremos fijos H_1 entre α y β, también existe

una homotopía con extremos fijos H_2 entre β y γ. Consideremos la aplicación $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ definido por

$$H(t,s) = \begin{cases} H_1(2s,t) & s \in [0,1/2] \\ H_2(2s-1,t) & s \in [1/2,1] \end{cases}$$

Luego, H es una homotopía con extremos fijos entre α y γ, así $\alpha \sim \gamma$.

□

A continuación, en el espacio $\mathrm{L}(X, x_0)$ definimos una operación binaria.

Definición 2.1 (Concatenación de lazos). *Sean α y β dos lazos en x_0. Definimos la* concatenación *de α y β como el camino $\alpha * \beta : [0,1] \to M$*

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & , \text{ si } t \in [0,1/2] \\ \beta(2t-1) & , \text{ si } t \in [1/2,1] \end{cases}$$

así, tenemos nuevamente un lazo en x_0.

Por ejemplo, consideremos los lazos en $(2,0)$ dados por $\alpha(t) = (\cos(2\pi t) + 1, \sin(2\pi t))$ y $\beta(t) = (2+\sin(2\pi t), 1-\cos(2\pi t))$, donde $t \in [0,1]$, luego, $\alpha * \beta$ es un lazo que, dinámicamente, recorre el camino α con doble de velocidad y luego recorre β, también a una doble velocidad que la de β.

Tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.2. *Sean α, β y γ lazos en x_0. Luego,*

$$(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma) \ .$$

Demostración. Sea $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ la aplicación definida como

$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{4}{s+1} \cdot t\right) & \text{si } t \in [0,(s+1)/4] \\ \beta\left(4 \cdot \left(t - \frac{s+1}{4}\right)\right) & \text{si } t \in \left[\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}\right] \\ \gamma\left(\frac{4}{2-s} \cdot \left(t - \frac{s+2}{4}\right)\right) & \text{si } t \in [(s+2)/4, 1] \end{cases}$$

entonces

$$H(0,t) = \begin{cases} \alpha(4t) & [0,1/4] \\ \beta(4t-1) & [1/4,1/2] \\ \gamma(2t-1) & [1/2,1] \end{cases} \quad \text{y} \quad H(1,t) = \begin{cases} \alpha(2t) & [0,1/2] \\ \beta(4t-2) & [1/2,3/4] \\ \gamma(4t-3) & [3/4,1] \end{cases} .$$

Así H es una homotopía con extremos fijos entre $(\alpha * \beta) * \gamma$ y $\alpha * (\beta * \gamma)$. □

2.2. Grupo fundamental

Fijemos algunas notaciones que serán útiles.

Definición 2.2. *Sea $x_0 \in X$ y α un lazo en x_0, definimos*

1. *El camino constante $e_{x_0} : [0,1] \to X$ como $e_{x_0}(t) = x_0$ para todo $t \in [0,1]$, y*

2. *El camino inverso $\alpha^{-1} : [0,1] \to X$ de α como $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$ para todo $t \in [0,1]$.*

Tenemos las siguientes proposiciones.

Proposición 2.3. *Dado una lazo α en x_0, se cumple*

1. *$\alpha * e_{x_0} \sim \alpha \sim e_{x_0} * \alpha$.*

2. *$\alpha * \alpha^{-1} \sim e_{x_0} \sim \alpha^{-1} * \alpha$*

Demostración. Empecemos con las pruebas.

1. Veamos que $\alpha * e_{x_0} \sim \alpha$ (análogamente se prueba que $\alpha \sim e_{x_0} * \alpha$). Sea $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ definido por

$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{2}{s+1} \cdot t\right) & , \text{ si } 0 \leq t \leq (s+1)/2, \\ e_{x_0} & , \text{ si } (s+1)/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Tenemos que H es un mapeo continuo y, además, H es una homotopía con extremos fijos entre $\alpha * e_{x_0}$ y $\alpha = H(1,\cdot)$. Por lo tanto $\alpha * e_{x_0} \sim \alpha$.

2. Dado un lazo α en x_0, sea $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ definida como

$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha\,(2s \cdot t) & , \text{ si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \alpha\,(2s \cdot (1-t)) & , \text{ si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

entonces H es una homotopía entre $e_{x_0} = H(0,\cdot)$ y $\alpha * \alpha^{-1} = H(1,\cdot)$. De manera análoga se prueba que $e_{x_0} \sim \alpha^{-1} * \alpha$.

□

Denotemos

$$\pi_1(X, x_0) := \mathrm{L}(X, x_0)/\sim$$

al espacio de clases de equivalencia. Vamos a dar $\pi(X, x_0)$ una estructura de grupo. Para ello necesitamos de algunos resultados.

Sean α, α_1, β y β_1 lazos en x_0, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.4. *Si* $\alpha \sim \alpha_1$ *y* $\beta \sim \beta_1$ *entonces*

$$\alpha * \beta \sim \alpha_1 * \beta_1$$

Demostración. Sean $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ una homotopía con extremos fijos entre α y α_1, y $G : [0,1] \times [0,1] \to X$ una homotopía con extremos fijos entre β y β_1.
Consideremos la aplicación $F : [0,1] \times [0,1] \to M$ definida por

$$F(s,t) = \begin{cases} H(s,2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G(s,2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Luego, F es una homotopía con extremos fijos entre $\alpha * \beta$ y $\alpha_1 * \beta_1$, por lo tanto $\alpha * \beta \sim \alpha_1 * \beta_1$. □

Por la proposición 2.4 podemos definir la operación binaria $*$ (de concatenación) en $\pi_1(X, x_0)$; esto es, dados $[\alpha]$ y $[\beta]$ en $\pi_1(X, x_0)$ definimos

$$[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta].$$

Por las proposiciones 2.2 y 2.3 tenemos que

1. $*$ es asociativa.
2. $(\pi_1(X, x_0), *)$ tiene un neutro.
3. Todo elemento de $\pi_1(M, x_0)$ tiene inverso.

Definición 2.3 (Grupo fundamental). *El grupo* $(\pi_1(X, x_0), *)$ *es llamado el grupo fundamental de* X *con punto base* x_0*, también llamado primer grupo de homotopía de* X *en* x_0.

Ejemplo: El grupo fundamental de cualquier conjunto convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es trivial, ya que dado $x_0 \in \Omega$, todo lazo en x_0 es homotópico en Ω al camino constante e_{x_0}.
En la siguiente sección hallaremos el grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$. Veremos que éste es isomorfo al grupo aditivo de los enteros.

2.3. Número de vueltas en $\mathbb{S}^1$

Sea $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ el homeomorfismo local dado por

$$\pi(t) = (\cos(t), \sin(t)) \quad t \in \mathbb{R},$$

Definición 2.4. *Dada una curva $\alpha : I \to \mathbb{S}^1$, donde I es un intervalo, diremos que $\widetilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}$ es un levantamiento de α si*

$$\pi(\widetilde{\alpha}) = \alpha \quad \text{en } I.$$

Tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.1 (Unicidad del levantamiento). *Sean $\widetilde{\alpha}$ y γ levantamientos de $\alpha : I \to \mathbb{R}$. Si existe $t_0 \in I$ tal que $\widetilde{\alpha}(t_0) = \gamma(t_0)$ entonces $\widetilde{\alpha} = \gamma$.*

Demostración. Sea $F : [0,1] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la aplicación continua definida por

$$F(t) = (\widetilde{\alpha}(t), \gamma(t)) \quad \forall\, t \in [0,1]$$

y consideremos la diagonal $\Delta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Tenemos que $F^{-1}(\Delta)$ es *cerrado* en $[0,1]$.

Veamos que $F^{-1}(\Delta)$ es *abierto* en $[0,1]$. Sea $t_1 \in F^{-1}(\Delta)$, por la continuidad de F en $t = t_1$, dado la vecindad abierta $J \times J$ de $F(t_1) = (s_1, s_1)$ donde $J = \langle s_1 - \pi, s_1 + \pi \rangle$, existe $\delta > 0$ tal que si $I_1 = \langle t_1 - \delta, t_1 + \delta \rangle \cap [0,1]$ entonces $F(I_1) \subset U \times U$, esto es, $\widetilde{\alpha}(I_1) \subset J$ y $\gamma(I_1) \subset J$.

Usando el homeomorfismo

$$\pi : \langle s_1 - \pi, s_1 + \pi \rangle \to U \qquad \text{donde } U = \pi(\langle s_1 - \pi, s_1 + \pi \rangle),$$

como $\pi(\widetilde{\alpha}|I_1) = \alpha = \pi(\gamma|I_1)$ en I_1, tenemos

$$\widetilde{\alpha}|I_1 = \gamma|I_1.$$

Luego $I_1 \subset F^{-1}(\Delta)$. Esto muestra que $F^{-1}(\Delta)$ es abierto en $[0,1]$.

Como $F^{-1}(\Delta)$ es abierto y cerrado en $[0,1]$, y $t_0 \in F^{-1}(\Delta)$, tenemos que $F^{-1}(\Delta) = [0,1]$, por lo tanto

$$\widetilde{\alpha} = \gamma \text{ en } [0,1].$$

□

Teorema 2.2 (Existencia de levantamiento). *Dado un lazo $\alpha : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ en e_1, existe una función continua $\widetilde{\alpha} : [0,1] \to \mathbb{R}$ con $\widetilde{\alpha}(0) = 0$ tal que*

$$\pi(\widetilde{\alpha}) = \alpha \quad \text{en } I.$$

Además, la curva $\widetilde{\alpha} : [0,1] \to \mathbb{R}$ es única.

Demostración. La *unicidad* es obtenida a partir de la unicidad de levantamiento de caminos (Teorema 2.1).
Veamos la *existencia.* Tenemos que $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{-e_1\}$ es una vecindad abierta de e_1 en $\mathbb{S}^1$ y

$$\pi : (-\pi, \pi) \to U$$

es un homeomorfismo. Usando la continuidad de α en 0, para la vecindad abierta U de $e_1 = \alpha(0)$ existe $\delta > 0$ tal que $\alpha([0, \delta\rangle) \subset U$. Luego usando el homeomorfismo

$$\pi : (-\pi, \pi) \to U$$

obtenemos una curva $\widetilde{\alpha} : [0, \delta) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha}(0) &= 0 \quad \text{y} \\ \pi(\widetilde{\alpha}) &= \alpha \quad \text{en } [0, \delta), \end{aligned}$$

esto es, existe un levantamiento $\tilde{\alpha}$ de α en una vecindad de $t = 0$ con $\tilde{\alpha}(0) = 0$. Sea

$$A = \{a \in \langle 0, 1] \;/\; \exists\, \widetilde{\alpha} : [0, a) \xrightarrow{C} \mathbb{R} \text{ con } \widetilde{\alpha}(0) = 0 \text{ y } \pi(\widetilde{\alpha}) = \alpha \text{ en } [0, a)\} \, .$$

Tenemos que $\delta \in A$. Observemos que dados $a, \tau \in A$ con $a < \tau$ existen $\widetilde{\alpha} : [0, a) \to \mathbb{R}$ y $\gamma : [0, \tau) \to \mathbb{R}$ con $\widetilde{\alpha}(0) = 0$, $\gamma(0) = 0$,

$$\pi(\widetilde{\alpha}) = \alpha|[0, a) \qquad \text{y} \qquad \pi(\gamma) = \alpha|[0, \tau),$$

luego, por la unicidad de levantamiento de un camino, se tienes $\widetilde{\alpha} = \gamma|[0, a)$.

Sea $b = \sup A \in (0, 1]$. Vamos a definir un levantamiento $\widetilde{\alpha} : [0, b) \to \mathbb{R}$ de $\alpha|[0, b)$ con $\widetilde{\alpha}(0) = 0$ como sigue: dado $t \in [0, b)$ existe $a \in A$ tal que $t < a$, luego existe un levantamiento γ de $\alpha|[0, a)$ con $\gamma(0) = 0$, definimos $\widetilde{\alpha}(t) = \gamma(t)$. Por la observación anterior tenemos que $\widetilde{\alpha}(t)$ está bien definido, y

$$\pi(\widetilde{\alpha}) = \alpha|[0, b).$$

Afirmación 1: *Podemos extender en $t = b$ el levantamiento $\tilde{\alpha}$.*

Sean $z_1 = \alpha(b)$ y $s_1 \in \mathbb{R}$ tales que $\pi(s_1) = z_1$. Tenemos que $W = \mathbb{S}^1 \setminus \{-z_1\}$ es una vecindad abierta de z_1 y

$$\pi^{-1}(W) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} \langle s_1 + (2n-1)\pi, s_1 + (2n+1)\pi \rangle = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$$

donde $\bigsqcup$ simboliza la unión disjunta. Por continuidad de α en $t = b$ existe $\delta \in (0, b)$ tal que $\alpha(\langle b - \delta, b + \delta\rangle \cap [0, 1]) \subset W$. Sea $b - \delta < t_0 < b$, como $\alpha(t_0) \in W$, tenemos que $\widetilde{\alpha}(t_0) \in I_n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$, luego a partir del homeomorfismo $\pi : I_n \to W$ tenemos un levantamiento γ de $\alpha|[t_0, b]$ con $\gamma(t_0) = \widetilde{\alpha}(t_0)$, por la unicidad del levantamiento $\alpha|[t_o, b) = \gamma$ en $[t_0, b)$. Definimos $\widehat{\alpha} : [0, b] \to \mathbb{R}$ como

$$\widehat{\alpha}(t) = \begin{cases} \widetilde{\alpha}(t) & t \in [0, t_0] \\ \gamma(t) & t \in [t_0, b] \end{cases} .$$

Este camino es el levantamiento de $\alpha|[0, b]$ con $\widehat{\alpha}(0) = 0$ que extiende al camino $\tilde{\alpha}$ en $t = b$.

Afirmación 2: *Afirmamos que* $b = 1$. Caso contrario podemos tomar $\delta > 0$ pequeño tal que $[b, b+\delta\rangle \subset (0, 1)$ y exista un levantamiento $\gamma : [b, b+\delta) \to \mathbb{R}$ de $\alpha|[b, b+\delta)$ con $\gamma(b) = \widetilde{\alpha}(b)$. Si definimos la función $\widehat{\alpha} : [0, b+\delta) \to \mathbb{R}$

$$\widehat{\alpha}(t) = \begin{cases} \widetilde{\alpha}(t) & t \in [0, b] \\ \gamma(t) & t \in [b, b+\delta) \end{cases}$$

tenemos un levantamiento de $\alpha|[0, b+\delta)$ con $\widehat{\alpha}(0) = 0$, luego $b + \delta \in A$, pero b es el supremo de A, esto es, hemos obtenido una contradicción. Por lo tanto $b = 1$. Esto culmina la demostración de existencia. □

El camino $\widetilde{\alpha}$ del Teorema 2.2 es llamado *levantamiento* de α con inicio en el origen. Notemos que $\widetilde{\alpha}(1) = 2k\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$, este entero es llamado *número de vueltas* de α y lo denotaremos como $n(\alpha)$.

En lo que sigue sólo consideraremos lazos en $\mathbb{S}^1$ con punto inicial-final $e_1 = (1, 0)$. Definimos para cada $k \in \mathbb{Z}$ el lazo $\alpha_k : [0, 1] \to \mathbb{S}^1$ dado por

$$\alpha_k(t) = (\cos(2k\pi t), \sin(2\pi k t)) \quad \forall\, t \in [0, 1],$$

en este caso tenemos que $n(\alpha_k) = k$.

Lema 2.1. *Sea* $k = n(\alpha)$ *entonces* $\alpha \sim \alpha_k$.

Demostración. Tenemos que el mapeo $H : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{S}^1$ dado por

$$H(t, s) = \pi\left((1 - s)\widetilde{\alpha}(t) + s \cdot 2k\pi t\right) \quad t \in [0, 1],\ s \in [0, 1]$$

es una homotopía con extremos fijos entre α y α_k, así $\alpha \sim \alpha_k$. □

Lema 2.2. *Si* $n(\alpha) = n(\beta)$ *entonces* $\alpha \sim \beta$.

También tenemos el siguiente lema.

Lema 2.3. *Si $\alpha \sim \beta$ entonces $n(\alpha) = n(\beta)$.*

Demostración. Sean $k = n(\alpha)$ y $l = n(\beta)$, tenemos que $\alpha \sim \alpha_k$ y $\beta \sim \alpha_l$ luego $\alpha_k \sim \alpha_l$, entonces

$$2k\pi = \oint_{\alpha_k} \omega = \oint_{\alpha_l} \omega = 2\pi l \qquad \text{donde } \omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

así $k = l$, esto es, $n(\alpha) = n(\beta)$. $\square$

Definimos la función $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\pi_1(\mathbb{S}^1), e_1)$ como

$$f(k) = [\alpha_k] \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Como $n(\alpha_{k+l}) = k + l = n(\alpha_k) + n(\alpha_l) = n(\alpha_k * \alpha_l)$, por el lema 2.2, tenemos $\alpha_{k+l} \sim \alpha_k * \alpha_l$, esto es, $[\alpha_{k+l}] = [\alpha_k] * [\alpha_l]$. Así f es un homomorfismo de grupos.

Proposición 2.5. *El homomorfismo $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\pi_1(\mathbb{S}^1), e_1)$ es un isomorfismo.*

Demostración. La aplicación f es inyectiva por el lema 2.3.
El homomorfismo f es sobreyectivo debido al lema 2.1. $\square$

Luego, $\pi_1(\mathbb{S}^1, e_1)$ es isomorfo al grupo aditivo de los enteros $\mathbb{Z}$.

2.4. Independencia del punto base

En esta sección veremos que el grupo fundamental de un espacio conexo por caminos es independiente del punto base tomado. Comenzamos con la siguiente definición.

Definición 2.5 (Concatenación de tres caminos). *Sean α, β y γ caminos en X tales que $\alpha(1) = \beta(0)$ y $\beta(1) = \gamma(0)$. Definimos $\alpha * \beta * \gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}$ como*

$$\alpha * \beta * \gamma(t) = \begin{cases} \alpha(3t) & t \in [0, 1/3] \\ \beta(3t-1) & t \in [1/3, 2/3] \\ \gamma(3t-2) & t \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

Tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.6. *Sean α, β y γ caminos en X tales que existe $\alpha * \beta * \gamma$, entonces $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * \beta * \gamma$.*

Demostración. Consideremos el mapeo $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ definido por

$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{12}{3+s} \cdot t\right) & , \text{ si } 0 \leq t \leq (3+s)/12 \quad , \\ \beta\left(\frac{12}{3+s} \cdot \left(t - \frac{3+s}{12}\right)\right) & , \text{ si } (3+s)/12 \leq t \leq (3+s)/6 \quad , \\ \gamma\left(\frac{6}{3-s} \cdot \left(t - \frac{3+s}{6}\right)\right) & , \text{ si } (3+s)/6 \leq t \leq 1 \quad . \end{cases}$$

Luego, H es una homotopía con extremos fijos entre $(\alpha * \beta) * \gamma$ y $\alpha * \beta * \gamma$. Así $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * \beta * \gamma$. □

Definición de $\mathrm{I}_\gamma : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$

Sea $\gamma : [0,1] \to X$ un camino de x_0 a x_1 entonces tenemos que $\mathrm{I}_\gamma : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$ dado por

$$\mathrm{I}_\gamma([\beta]) = \left[\gamma * \beta * \gamma^{-1}\right] \qquad \forall\ [\beta] \in \pi_1(X, x_1).$$

es un homomorfismo de grupos.

Teorema 2.3. *El homomorfismo* $\mathrm{I}_\gamma : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$ *es un isomorfismo con inversa* $\mathrm{I}_{\gamma^{-1}}$.

Demostración. Notemos que $\mathrm{I}_{\gamma^{-1}}\mathrm{I}_\gamma = \mathrm{id} : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_1)$ análogamente $\mathrm{I}_\gamma \circ \mathrm{I}_{\gamma^{-1}}$ es $\mathrm{id} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$. □

Así en espacios conexos por caminos el grupo fundamental con respecto a un punto base es isomorfo al grupo fundamental con respecto a otro punto base. Muchas veces diremos que dos grupos fundamentales son iguales si ellos son isomorfos, una práctica común en topología.

2.5. Grupo fundamental y aplicaciones homotópicas

Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua, $x_0 \in X$ y $y_0 = f(x_0)$. Denotaremos por

$$f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$$

la aplicación continua f con $f(x_0) = y_0$. Sea α un lazo en x_0 entonces $f \circ \alpha$ es un lazo en y_0. Sean α y β lazos en x_0 tal que $\alpha \sim \beta$ entones existe una homotopía $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ con extremos fijos entre α y β, luego $G : [0,1] \times [0,1] \to Y$ definida por

$$G(s,t) = f \circ H(s,t) \quad s \in [0,1]\ t \in [0,1]$$

es una homotopía con extremos fijos entre $f \circ \alpha$ y $f \circ \beta$. Así tenemos una aplicación

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

dada por

$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha] \quad \forall\, [\alpha] \in \pi_1(X, x_0)\ .$$

Como $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$ tenemos que f_* es un homomorfismo de grupos. Tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.7. *Sean $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ y $g : (X, x_0) \to (Y, y_1)$ aplicaciones homotópicas entonces*

$$f_* = I_\gamma \circ g_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

para algún camino $\gamma : [0,1] \to Y$ de y_0 a y_1.

Demostración. Sea $H : [0,1] \times X \to Y$ una homotopía entre f y g. Sea $\gamma : [0,1] \to Y$ el camino definido como $\gamma(t) = H(t, x_0)$, para todo $t \in [0,1]$, entonces γ es un camino de y_0 hacia y_1. Sea $\alpha \in \mathrm{L}(X, x_0)$ un lazo en x_0 y consideremos el mapeo continuo $G : [0,1] \times [0,1] \to Y$ definido como

$$G(s,t) = \begin{cases} \gamma(3st) & , \text{ si } 0 \leq t \leq 1/3 \\ H\left(s, \alpha(3t-1)\right) & , \text{ si } 1/3 \leq t \leq 2/3 \\ \gamma\left(3s(1-t)\right) & , \text{ si } 2/3 \leq 1 \end{cases}$$

entonces G es una homotopía entre $e_{y_0} * (f \circ \alpha) * e_{y_0}$ y $\gamma * (g \circ \alpha) * \gamma^{-1}$, esto es,

$$f_*\left([\alpha]\right) = I_\gamma\left(g_*([\alpha])\right).$$

Por lo tanto,

$$f_* = I_\gamma \circ g_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0).$$

□

Sean $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ y $g : (Y, y_0) \to (X, x_1)$ aplicaciones continuas, entonces

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

En particular, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.4. *Sea $f : (X, x_0) \to (X, x_1)$ una aplicación homotópica a la identidad $id : X \to X$. Luego, $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ es un isomorfismo.*

2.6. Equivalencia homotópica

En esta sección veremos el concepto de equivalencia homotópica o tipo de homotopía .

Definición 2.6 (Equivalencia homotópica). *Diremos que dos espacios topológicos X e Y son homotópicamente equivalentes o tienen el mismo tipo de homotopía si existen aplicaciones continuas $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $g \circ f$ es homotópica a la identidad y $f \circ g$ también es homotópica a la identidad. Llamaremos al par (f, g) una equivalencia homotópica entre X e Y.*

Ejemplo: El disco $\overline{\mathbb{B}^2}$ o la bola cerrada $\overline{\mathbb{B}^n}$, donde $n \geq 1$, tiene el mismo tipo de homotopía de $\{0\}$: Sean $f : \overline{\mathbb{B}^n} \to \{0\}$ el mapeo constante y $g : \{0\} \to \overline{\mathbb{B}^n}$ el mapeo inclusión, entonces $f \circ g : \{0\} \to \{0\}$ es la identidad y $g \circ f : \overline{\mathbb{B}^n} \to \overline{\mathbb{B}^n}$ es homotópico a la identidad vía la homotopía $H : [0, 1] \times \overline{\mathbb{B}^n} \to \overline{\mathbb{B}^n}$ dada por

$$H(t, x) = (1 - t) \cdot x \quad \forall\, (t, x) \in [0, 1] \times \overline{\mathbb{B}^n} \ .$$

Proposición 2.8. *La relación de tener el mismo tipo de homotopía en la clase de espacios topológicos es una relación de equivalencia.*

Demostración. Sean X, Y y Z espacios topológicos:

- **Reflexiva:** Es claro que X tiene el mismo tipo de homotopía que X.
- **Simétrica:** Si X tiene el mismo tipo de homotopía que Y, entonces Y tiene el mismo tipo de homotopía que X.
- **Transitiva:** Supongamos que X tiene el mismo tipo de homotopía que Y e Y tiene el mismo tipo de homotopía que Z. Luego, existen funciones continuas $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, $h : Y \to Z$ y $\zeta : Z \to Y$ tales que:

  1. $g \circ f$ es homotópica a $\mathrm{id} : X \to X$, $f \circ g$ es homotópica a $\mathrm{id} : Y \to Y$.
  2. $\zeta \circ h$ es homotópica a $\mathrm{id} : Y \to Y$, $h \circ \zeta$ es homotópica a $\mathrm{id} : Z \to Z$

  Veamos que $h \circ f : X \to Z$ forma una equivalencia homotópica con $g \circ \zeta : Z \to X$ como pareja. Tenemos que $g \circ \zeta \circ h \circ f$ es homotópico a $g \circ f$ y éste a su vez es homotópico a $\mathrm{id} : X \to X$. También tenemos que $h \circ f \circ g \circ \zeta$ es homotópico a $h \circ \zeta$ y éste es homotópico a $\mathrm{id} : Z \to Z$. Por lo tanto, X tiene el mismo tipo de homotopía de Z.

Así la relación de tener el mismo tipo de homotopía es de equivalencia. □

Ejemplo: El plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ o el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, donde $n \geq 1$, tiene el tipo de homotopía de $\{0\}$: Como $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo a $\mathbb{B}^n(\mathbf{0}; 2)$, estos espacios tienen el mismo tipo de homotopía. Sea $f : \mathbb{B}^n(\mathbf{0}; 2) \to \overline{\mathbb{B}^n}$ definido por

$$f(x) = \begin{cases} x & , \text{ si } |x| \leq 1, \\ \dfrac{x}{|x|} & , \text{ si } 1 \leq |x| < 2 \end{cases}$$

y sea $g : \overline{\mathbb{B}^n} \to \mathbb{B}^n(\mathbf{0}; 2)$ la inclusión. Tenemos que $f \circ g = \mathrm{id} : \overline{\mathbb{B}^n} \to \overline{\mathbb{B}^n}$. Veamos que $g \circ f : \mathbb{B}^n(\mathbf{0}; 2) \to \mathbb{B}^n(\mathbf{0}; 2)$ es homotópico a la identidad. Sea $H : [0, 1] \times \mathbb{B}^n(\mathbf{0}; 2) \to \mathbb{B}^n(\mathbf{0}; 2)$ definido por

$$H(t, x) = (1 - t) \cdot f(x) + t \cdot x \qquad \forall\, (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{B}^n(\mathbf{0}; 2),$$

entones H es una homotopía entre $g \circ f$ e $\mathrm{id} : \mathbb{B}^n(\mathbf{0}; 2) \to \mathbb{B}^n(\mathbf{0}; 2)$. Luego $\mathbb{B}^n(\mathbf{0}; 2)$ tiene el mismo tipo de homotopía de $\overline{\mathbb{B}^n}$. Por transitividad, $\mathbb{R}^n$ tiene el mismo tipo de homotopía de $\overline{\mathbb{B}^n}$. Así $\mathbb{R}^n$ tiene el mismo tipo de homotopía de $\{0\}$.
Tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.5. *Sea (f, g) una equivalencia homotópica entre X e Y, $x_0 \in X$ e $y_0 = f(x_0)$. Luego, $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo a $\pi_1(Y, y_0)$.*

Demostración. Sea $x_1 = g(y_0)$, tenemos que $h = g \circ f : (X, x_0) \to (X, x_1)$ es homotópica a la identidad. Por el teorema 2.4, $g_* \circ f_*$ es un isomorfismo, digamos T_1, luego $g_* \circ (f_* \circ T_1^{-1})$ es la identidad en $\pi_1(X, x_1)$. Análogamente $f_* \circ g_*$ es un isomorfismo, digamos T_2, mas aquí $f_* : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, y_1)$ donde $y_1 = f(x_1)$, a este homomorfismo lo denotaremos por $\tilde{f}_*$. Tenemos $(T_2^{-1} \circ \tilde{f}_*) \circ g_*$ es identidad en $\pi_1(Y, y_0)$. Como g_* tiene una inversa a la izquierda y una a la derecha, entonces g_* es un isomorfismo, así también lo es $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$. Por lo tanto, $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo a $\pi_1(y, y_0)$. $\square$

Ejemplo 1: Veamos que $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}, e_1) = \mathbb{Z}$.
Consideremos la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{S}^1$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\},$$

y $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ la inclusión, entonces $f \circ g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es la identidad. Veamos que $h = g \circ f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ dada por

$$h(x) = \frac{x}{|x|} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\},$$

es homotópica a la identidad $id : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Sea $H : (\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}) \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ el mapeo definido por

$$H(x,s) = \left[(1-s)\frac{1}{|x|} + s\right] x \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\},\ s \in [0,1].$$

entonces el par (f,g) es una equivalencia homotópica entre $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ y $\mathbb{S}^1$, tomando $x_0 = e_1 = (1,0)$, tenemos que $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}, e_1) = \mathbb{Z}$ con la estructura de grupo aditivo.

Ejemplo 2: De forma análoga se muestra que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tiene el mismo tipo de homotopía que $\mathbb{S}^{n-1}$ para todo $n \geq 1$.

Ejemplo 3: La esfera $\mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{s}, \mathbf{n}\}$ menos 2 puntos tiene el mismo tipo de homotopía que $\mathbb{S}^{n-1}$, debido a que $\mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{s}, \mathbf{n}\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Capítulo 3

Espacios de recubrimiento

En este capítulo definiremos el concepto de aplicación de cubrimiento. Luego, mostraremos la propiedad fundamental de este tipo de aplicaciones: **el levantamiento de caminos**. Finalmente veremos que también podemos levantar homotopías con extremos fijos.
En lo que sigue, a menos que se diga lo contrario, Y denotará a un espacio de Hausdorff y X será un espacio conexo por caminos, a menos que se indique lo contrario.

Definición 3.1 (Aplicación de cubrimiento). *Sea $\pi : Y \to X$ un homeomorfismo local sobreyectivo. Diremos que π es una aplicación de cubrimiento si todo $x \in X$ tiene una vecindad abierta U tal que*

$$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in \Lambda} V_i$$

donde $\bigsqcup$ denota la unión disjunta, y para cada $i \in \Lambda$:

$$\pi : V_i \to U$$

es un homeomorfismo. El abierto $U \subset X$ es llamado abierto distinguido del cubrimiento π.

Ejemplo: La aplicación $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por $\pi(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in \mathbb{R}$, es una aplicación de cubrimiento.

El espacio Y de la definición de aplicación de cubrimiento $\pi : Y \to X$ es llamado espacio recubridor.

Definición 3.2 (Levantamiento de funciones). *Dada una función continua $f : Z \to X$, diremos que una función continua $\tilde{f} : Z \to Y$ es un levantamiento de f, respecto a $\pi : Y \to X$, si*

$$\pi(\tilde{f}) = f \text{ en } Z.$$

Ejemplo: Sea $f : Z \to X$ es la función constante x_0. Si $y_0 \in Y$ es tal que $\pi(y_0) = x_0$, entonces la función constante $\tilde{f} : Z \to Y$ igual a y_0 es un levantamiento para f.

Definición 3.3 (Levantamiento de caminos). *Dado un camino $\alpha : I \to X$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, diremos que el camino $\widetilde{\alpha} : I \to Y$ es un levantamiento de α, respecto a $\pi : Y \to X$, si*

$$\pi(\widetilde{\alpha}) = \alpha \text{ en } I.$$

Tenemos el siguiente resultado cuya demostración es similar a la del teorema 2.1.

Teorema 3.1 (Unicidad del levantamiento). *Sean $\widetilde{\alpha}$ y γ levantamientos de $\alpha : I \to \mathbb{R}$. Si existe $t_0 \in I$ tal que $\widetilde{\alpha}(t_0) = \gamma(t_0)$, entonces $\widetilde{\alpha} = \gamma$.*

Una de las características principales de las aplicaciones de cubrimiento es dada por el siguiente teorema.

Teorema 3.2 (Existencia de levantamiento). *Sean $\pi : Y \to X$ una aplicación de cubrimiento, $y_0 \in Y$, $x_0 \in X$ tales que $\pi(y_0) = x_0$. Si $\alpha : [0,1] \to X$ un camino que empieza en x_0, entonces existe un camino $\widetilde{\alpha} : [0,1] \to Y$ que empieza en y_0 tal que*

$$\pi(\widetilde{\alpha}) = \alpha \quad en\ [0,1].$$

Tal camino es único.

Nuevamente, la demostración es similar a la del teorema 2.2. El camino $\widetilde{\alpha}$ del teorema 3.2 es llamado *levantamiento* de α con punto inicial y_0.

En la siguiente sección veremos que podemos levantar también otro tipo de aplicaciones.

3.1. Levantamiento de homotopías de caminos

En esta sección veremos que podemos levantar homotopías de caminos.

Proposición 3.1. *Sea $\pi : Y \to X$ una aplicación de cubrimiento y $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ una homotopía de caminos con $H(0,0) = p \in X$. Si $q \in Y$ con $\pi(q) = p$, entonces existe una aplicación continua $G : [0,1] \times [0,1] \to Y$ tal que*

$$\pi \circ G = H \quad en\ \ [0,1] \times [0,1]$$

y $G(0,0) = q$. Esto es, existe un levantamiento G de H con $G(0,0) = q$.

Demostración. La familia $\mathcal{C}$ de pre-imágenes vía H de los abiertos distinguidos forman un cubrimiento abierto del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$. Utilizando el número de Lebesgue para este cubrimiento, tenemos que existe un cubrimiento abierto finito $\{U_\lambda\}_{\lambda \in F}$ de $H([0,1] \times [0,1])$ formado por abiertos distinguidos de π, y una partición por rectángulos $\{[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j] : 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$ de $[0,1] \times [0,1]$ tal que si $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$, entonces

$$H([s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]) \text{ está contenido en algún } U_\lambda.$$

Empezamos con $H|[s_0, s_1] \times [t_0, t_1]$ para obtener parte del levantamiento. Como su imagen está contenida en un abierto distinguido, existe $G : [s_0, s_1] \times [t_0, t_1] \to Y$ continuo con $\pi \circ G = H$ en $[s_0, s_1] \times [t_0, t_1]$ y $G(0,0) = q$; esto es, G es el levantamiento de $H|[s_0, s_1] \times [t_0, t_1] \to X$ con $G(0,0) = q$. Notemos que $\beta : s \in [s_0, s_1] \mapsto G(s, t_1)$ es el levantamiento del camino $s \in [s_0, s_1] \mapsto H(s, t_1)$ con inicio en $G(s_0, t_1)$. Continuamos con $H|[s_0, s_1] \times [t_1, t_2]$ para obtener un levantamiento $F : [s_0, s_1] \times [t_1, t_2] \to Y$ con $F(s_0, t_1) = G(s_0, t_1)$ por la unicidad del levantamiento β, los levantamientos G y F coinciden en $[s_0, s_1] \times \{t_1\}$. Así que extendamos a G utilizando F; tenemos que $G : [s_0, s_1] \times [t_0, t_2] \to Y$ es levantamiento de $H|[s_0, s_1] \times [t_0, t_2]$ con $G(0,0) = q$, continuando con el mismo argumento podemos extender G a un levantamiento de $H|[s_0, s_1] \times [0,1]$ con $G(0,0)$; luego lo extendemos a $[s_0, t_2] \times [0,1]$ y así, sucesivamente, hasta $[0,1] \times [0,1]$, esto es, obtenemos un levantamiento $G : [0,1] \times [0,1] \to Y$ de H con $G(0,0) = q$. □

Denotemos por $\pi : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ a la aplicación de cubrimiento $\pi : Y \to X$, donde $y_0 \in Y$, $x_0 \in X$ satisfacen $\pi(y_0) = x_0$. Tenemos la siguiente proposición acerca de caminos homotópicos con extremos fijos.

Proposición 3.2. *Sea $\pi : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ una aplicación de cubrimiento. Dados dos caminos α y β en X que empiezan en x_0, y $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ sus levantamientos que empiezan en y_0. Si $\alpha \sim \beta$ entonces $\widetilde{\alpha} \sim \widetilde{\beta}$.*

Demostración. Sea $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ una homotopía con extremos fijos entre α y β, esto es, H es una homotopía entre α y β, y si $\alpha(1) = x_1 = \beta(1)$ entonces

$$\begin{aligned} H(s,0) &= x_0 \quad \forall\, s \in [0,1]\,, \\ H(s,1) &= x_1 \quad \forall\, s \in [0,1]\,. \end{aligned}$$

Sea $p = x_0 \in X$ y $q = y_0 \in Y$, por la proposición 3.1 existe un levantamiento $G : [0,1] \times [0,1] \to Y$ de H con $G(0,0) = q$, esto es,

$$\pi \circ G(s,t) = H(s,t) \qquad \forall\, (s,t) \in [0,1] \times [0,1].$$

Como para todo $s \in [0,1]$, tenemos $H(s,0) = p$, por la unicidad del levantamiento de camino constante tenemos que $s \mapsto G(s,0) = q$, para todo $s \in [0,1]$. Análogamente, por unicidad de levantamiento de camino, tenemos que $G(s,1) = G(0,1) = y_1 \in Y$. Nuevamente, de la unicidad de levantamientos de α y β, tenemos que $\tilde{\beta}(t) = G(1,t)$ para todo $t \in [0,1]$ y $\tilde{\alpha}(t) = G(0,t)$ para todo $t \in [0,1]$. Así G es una homotopía con extremos fijos entre $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$. Por lo tanto $\widetilde{\alpha} \sim \widetilde{\beta}$. $\square$

Observación: Observemos que si α es un lazo en $x_0 \in X$, entonces $\tilde{\alpha}$ no es necesariamente un lazo en y_0, la proposición anterior sólo afirma que existe una homotopía con extremos fijos entre los levantamientos $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$. Así, si la homotopía, H, es por lazos en x_0, entonces el levantamiento $\tilde{H}$ es una homotopía con extremos fijos, no necesariamente una homotopía por lazos en y_0.

Capítulo 4

Homotopía y grupo fundamental

En este capítulo veremos algunos resultados de homotopía y grupo fundamental que serán útiles para los teoremas de separación de curvas de Jordan y de no separación para arcos compactos.
Empezamos con un resultado de homotopía.

Proposición 4.1. *Sea $f : K \to \mathbb{S}^2 \setminus \{a, b\}$ una aplicación continua definida en un compacto K, donde a y b son puntos distintos de $\mathbb{S}^2$. Si a y b están en la misma componente de $\mathbb{S}^2 \setminus f(K)$, entonces f es homotópica a una función constante.*

Demostración. Consideremos la composición $\eta = \pi \circ f : K \to \mathbb{R}^2$ donde $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo con $\pi(a) = 0$. Sea $\alpha : [0,1] \to \mathbb{S}^2 \setminus f(K)$ un camino de a hacia b con $\alpha([0,1)) \subset \mathbb{S}^2 \setminus \{b\}$, entonces $\beta = \pi \circ \alpha : [0,1) \to \mathbb{R}^2$ satisface

$$\lim_{t \to 1^-} |\beta(t)| = +\infty. \tag{4.1}$$

Como $\eta(K) \subset \mathbb{R}^2$ es compacto, existe $R > 0$ tal que $\eta(K) \subset \overline{\mathbb{B}^2_{(0,R)}}$, y, de (4.1), tenemos que existe $t_0 \in [0,1)$ tal que

$$R < |\beta(t_0)|\,.$$

Consideremos la aplicación $H : [0,1] \times K \to \mathbb{S}^2 \setminus \{a, b\}$ definida por

$$H(s,x) = \pi^{-1}\left(\eta(x) - \beta(s \cdot t_0)\right) \quad \forall\,(s,x) \in [0,1] \times K.$$

Está función está bien definida ya que $\eta(K)$ y $\beta([0,1))$ son disjuntos. La aplicación H es una homotopía entre f y la aplicación $g : K \to \mathbb{S}^2 \setminus \{a, b\}$ dada por $g(x) = \pi^{-1}(\eta(x) - \beta(t_0))$, para todo $x \in K$. Luego el mapeo $G : [0,1] \times K \to \mathbb{S}^2 \setminus \{a, b\}$ dado por

$$G(s,x) = \pi^{-1}\left(s \cdot \eta(x) - \beta(t_0)\right) \quad \forall\,(s,x) \in [0,1] \times K,$$

es una homotopía entre una aplicación constante $h : K \to \mathbb{S}^2 \setminus \{a, b\}$ y g. Esto concluye la demostración. $\square$

Pasamos a ver dos resultados acerca del grupo fundamental.

Proposición 4.2. *Sean $X = U \cup V$, donde U y V son conjuntos abiertos y conexos por caminos de X, y $x_0 \in U \cap V$. Si $U \cap V$ es conexo por caminos entonces las imágenes de*

$$i_1 : \pi_1(U, x_0) \to \pi_1(X, x_0) \qquad i_2 : \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

generan $\pi_1(X, x_0)$.

Demostración. Sean $\alpha : [0,1] \to X$ una lazo en x_0 y $(t_0, \ldots, t_k)$ una partición de $[0,1]$, tal que para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ se tiene $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset U$ o $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset V$ (tal partición existe[1]). Si $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ es tal que $\alpha(t_i) \in U$ pero $\alpha(t_i) \notin V$ entonces $\alpha([t_{i-1}, t_{i+1}]) \subset U$, luego, suprimimos t_i de la partición y aún tendremos una partición con la propiedad inicial (en el caso que $\alpha(t_i) \in V$ se procede de manera análoga). Luego de un número finito de supresiones obtenemos una partición, que la denotaremos nuevamente con la misma simbología, $(t_0, \ldots, t_k)$ tal que $\alpha(t_i) \in U \cap V$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Ya tenemos que para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, $p_i = \alpha(t_i) \in U \cap V$. Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ tenemos que $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset U$ o $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset V$, entonces consideremos el camino $\alpha_i : [0,1] \to U$ (o, $\alpha_i : [0,1] \to V$) definido por

$$\alpha_i(t) = \alpha\left(t_{i-1} + (t_i - t_{i-1})t\right) \quad \forall\, t \in [0,1]$$

y un camino $\beta_i : [0,1] \to U \cap V$ de p_i a x_0. Tal camino existe debido a que $U \cap V$ es conexo por caminos, y así tenemos que

1. $\alpha_1 * \beta_1$ es un lazo en x_0 contenido en U o en V.
2. Para $1 < i < k-1$: $\beta_{i-1}^{-1} * \alpha_i * \beta_i$ es un lazo en x_0 contenido en U o en V.
3. $\beta_{k-1}^{-1} * \alpha_k$ es un lazo en x_0 contenido en U o en V.

Tenemos que

$$[(\alpha_1 * \beta_1) * (\beta_1^{-1} * \alpha_2 * \beta_2) * \cdots * (\beta_{k-1}^{-1} * \alpha_k)] \in \pi_1(X, x_0)$$

[1]Sea $\varepsilon > 0$ un número de Lebesgue para el cubrimiento $\{\alpha^{-1}(U), \alpha^{-1}(V)\}$ de $[0,1]$, tomemos una partición $(t_0, \ldots, t_k)$ de $[0,1]$ con norma menor que ε.

es un elemento generado por las imágenes de $i_1 : \pi_1(U, x_0) \to (X, x_0)$ y de $i_2 : \pi_1(V, x_0) \to (X, x_0)$ y $[(\alpha * \beta_1) * (\beta_1^{-1} * \alpha_2 * \beta_2) * \cdots * (\beta_{k-1}^{-1} * \alpha_k)] = [\alpha_1 * \cdots * \alpha_k]$. Como

$$[\alpha_1 * \cdots * \alpha_k] = [\alpha],$$

tenemos que todo elemento de $\pi_1(X, x_0)$ es generado por las imágenes de $i_1 : \pi_1(U, x_0) \to (X, x_0)$ y de $i_2 : \pi_1(V, x_0) \to (X, x_0)$. $\square$

La esfera $\mathbb{S}^2$ es cubierta por dos abiertos $U = \mathbb{S}^2 \setminus \{\mathbf{n}\}$ y $V = \mathbb{S}^2 \setminus \{\mathbf{s}\}$ cuya intersección $\mathbb{S}^2 \setminus \{\mathbf{n},\mathbf{s}\}$ es conexo por caminos. Como U y V son homeomorfos al plano $\mathbb{R}^2$ tenemos que los grupos fundamentales son triviales. Luego por la proposición 4.2, la esfera $\mathbb{S}^2$ tiene grupo fundamental trivial.

Definición 4.1 (Espacio simplemente conexo). *Diremos que un espacio arco-conexo X es simplemente conexo si su grupo fundamental es trivial.*

Como ejemplo, tenemos que la esfera $\mathbb{S}^2$ es simplemente conexo además de los subconjuntos convexos del plano. La circunferencia $\mathbb{S}^1$ no es un espacio simplemente conexo.

El siguiente resultado nos dará una condición suficiente para que un espacio posea grupo fundamental no trivial.

Proposición 4.3. *Sea $\{U, V\}$ un cubrimiento abierto de X tal que $U \cap V = A \cup B$ donde A y B son abiertos disjuntos. Sean a y a' elementos de A, b un elemento de B, α un camino en U de a hacia b, β un camino en V de b hacia a, γ un camino en U de a hacia a' y δ un camino en V de a' hacia a. Luego,*

1. *El subgrupo cíclico generado por $[f] = [\alpha * \beta] \in \pi(X, a)$ es infinito.*

2. *El subgrupo cíclico generado por $[g] = [\gamma * \delta] \in \pi(X, a)$ sólo tiene en común con el subgrupo generado con $[f]$ al elemento neutro.*

Demostración. Sea f un lazo. Dado $k \in \mathbb{Z}$, el símbolo $k \cdot f$ denotará la concatenación k veces de f cuando $k > 0$. Si $k < 0$, $k \cdot f$ denotará al camino inverso de $|k| \cdot f$, y $0 \cdot f = e_a$.

1. Construiremos un espacio recubridor $\tilde{X}$ de X de manera que identificaremos los levantamientos de los caminos cerrados $\{k \cdot f : k \in \mathbb{Z}\}$ con los enteros. Consideremos el subespacio de $Y \subset X \times \mathbb{Z}$ formado por la unión de los conjuntos abiertos

$$U \times \{2k\}, \quad V \times \{2k+1\} \quad , \text{ donde } k \in \mathbb{Z}.$$

Definimos la siguiente relación: dado $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{lcll} (x, 2k) & \sim & (x, 2k+1) & x \in B \\ (x, 2k-1) & \sim & (x, 2k) & x \in A \end{array}$$

esto define una relación de equivalencia en Y; denotaremos el espacio cociente por $\tilde{X}$. Tenemos la proyección $p : Y \to \tilde{X}$ definida por

$$p(x,k) = [x,k] \quad \forall\, (x,k) \in Y.$$

Esta aplicación es abierta ya que

$$p|U \times \{2k\} \to \tilde{X} \quad \text{y} \quad p|V \times \{2k+1\} \to \tilde{X} \quad (\text{donde } k \in \mathbb{Z})$$

son aplicaciones abiertas. Por ejemplo si $W \subset U$ es abierto entonces

$$p^{-1}\left(p|_{U\times\{2k\}}(W)\right) = \underbrace{W \times \{2k\}} \cup \overbrace{(W \cap B) \times \{2k+1\}} \cup \overbrace{(W \cap A) \times \{2k-1\}}$$

es abierto en Y.

El mapeo $\pi : \tilde{X} \to X$ definido como $\pi([x,k]) = x$ para todo $[x,k] \in \tilde{X}$, es continuo ya que la aplicación continua $\pi \circ p$ es la proyección a la primera componente. Este mapeo es sobreyectivo. Veamos que es una aplicación de cubrimiento: para U tenemos

$$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}} p\,(U \times \{2k\})$$

donde $\bigsqcup$ denota la unión disjunta de conjuntos. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, la aplicación $\pi : p\,(U \times \{2k\}) \to U$ definida como

$$\pi([x, 2k]) = x \quad \forall\, x \in U$$

es un homeomorfismo. En efecto, la inversa es la composición $U \hookrightarrow U \times \{2k\} \xrightarrow{p} p(U \times \{2k\})$ de homeomorfismos. De manera análoga se procede para $V \subset X$. Esto demuestra que π es una aplicación de cubrimiento.

Recordemos que $a \in A \subset U \cap V$ y $\alpha : [0,1] \to U$ es un camino de a hacia b, este camino tiene un levantamiento $[\alpha, 0] : [0,1] \to \tilde{X}$ con punto inicial $[a,0]$ y punto final $[b,0] = [b,1]$, mientras que el levantamiento de $\beta : [0,1] \to V$ con punto inicial $[b,1]$ es $[\beta,1] : [0,1] \to \tilde{X}$ que tiene punto final $[a,2]$. Luego dado $k \in \mathbb{Z}$, el levantamiento de $k \cdot f$ con punto inicial $[a, 0]$ tiene punto final $[a, 2k]$. Sea G el grupo cíclico generado por $[f]$, definimos la función $h : G \to \mathbb{Z}$ como

$$h([k \cdot f]) = 2k \ ,$$

esto es, $h([k \cdot f])$ es la segunda componente par o nivel par del final del levantamiento de $k \cdot f$ que empieza en $[a, 0]$. Esta aplicación es un monomorfismo (homomorfismo inyectivo), así G es un subgrupo cíclico infinito de $\pi_1(X, a)$.

2. Consideremos el levantamiento de $\gamma : [0, 1] \to U$ con punto inicial $[a, 0]$, esto es, $[\gamma, 0]$, entonces el punto final es $[a', 0] = [a', -1]$. Luego el levantamiento de $\delta : [0, 1] \to V$ que empieza con $[a', -1]$ es $[\delta, -1]$, que tiene final $[a, -1] = [a, 0]$; esto es, hemos obtenido una curva cerrada como levantamiento de g, luego si j y k son enteros tales que

$$j \cdot g \sim k \cdot f$$

tenemos que $k = 0$ necesariamente. Así el único elemento del subgrupo generado por $[g]$ que está en G es el neutro $[e_a]$. Esto culmina la demostración.

$\square$

Capítulo 5

Teorema de la curva de Jordan

En este capítulo demostraremos el teorema de la curva de Jordan. Primero demostraremos que una curva de Jordan separa el plano, luego mostraremos que un arco compacto no lo separa, y finalmente mostraremos el teorema principal del trabajo.

5.1. Curva cerrada simple

Empezamos con la definición de curva cerrada simple.

Definición 5.1 (Camino cerrado simple). *Un camino cerrado* $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *es llamado simple si* $\alpha|[0,1) \to \mathbb{R}$ *es inyectivo.*

Ejemplo: El camino $\alpha(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, $t \in [0,1]$, que describe una partícula dando una vuelta a la circunferencia unitaria, es un camino cerrado simple.

Dada una camino cerrado simple es común llamar a su imagen C una "*curva de Jordan*". Comenzamos con algunas observaciones. Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan. Como C es acotada, existe $R > 0$ tal que $C \subset \overline{B_{[0;R]}} = B$, es decir $B^c \subset \mathbb{R}^2 \setminus C$. Así, Tenemos una componente de $\mathbb{R}^2 \setminus C$ que contiene a B^c. Tenemos el siguiente lema.

Lema 5.1. $\mathbb{R}^2 \setminus C$ *tiene una componente no acotada y sólo una.*

Del lema anterior tenemos que si $\mathbb{R}^2 \setminus C$ tuviera más componentes, éstas serían acotadas.
Veremos luego que de hecho tiene por lo menos una componente acotada, esto es, $\mathbb{R}^2 \setminus C$ es disconexo.

Notemos, que utilizando la proyección estereográfica de la esfera menos el polo norte con el plano euclídeo, obtenemos una *curva de Jordan*[1] en la esfera, que la denotaremos por el mismo símbolo C; usando esta proyección tenemos una correspondencia biunívoca entre la colección de componentes de $\mathbb{S}^2 \setminus C$ y la colección de componentes de $\mathbb{R}^2 \setminus C$.
La forma como mostraremos el resultado principal será probando el teorema de la curva de Jordan en la esfera, esto nos dará el teorema de la curva de Jordan en el plano por las observaciones precedentes.

5.2. Teorema de separación

Definición 5.2. *Diremos que una curva cerrada simple $C \subset \mathbb{S}^2$ separa la esfera $\mathbb{S}^2$ si $\mathbb{S}^2 \setminus C$ es disconexo.*

Por ejemplo, la circunferencia del ecuador de $\mathbb{S}^2$ separa la esfera. Así nuestra primera meta es mostrar que de hecho toda curva de Jordan en $\mathbb{S}^2$ la separa.

Teorema 5.1 (Teorema de separación). *Una curva de Jordan $C \subset \mathbb{S}^2$ separa la esfera.*

Demostración. La prueba es por contradicción. Supongamos que $\mathbb{S}^2 \setminus C$ es conexo. Sea $C = C_1 \cup C_2$ donde C_1 y C_2 son arcos compactos de C tal que C_1 interseca a C_2 en dos puntos a y b. Si consideramos los conjuntos abiertos

$$U = \mathbb{S}^2 \setminus C_2 \quad \text{y} \quad V = \mathbb{S}^2 \setminus C_1$$

se tiene que $U \cap V = \mathbb{S}^2 \setminus C$ y $U \cup V = \mathbb{S}^2 \setminus \{a, b\}$.

Tomemos $x_0 \in U \cap V$, mostremos que $i_1 : \pi_1(U, x_0) \to \pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{a, b\}, x_0)$ e $i_2 : \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{a, b\}, x_0)$ son triviales. Mostraremos que i_1 es trivial (análogamente se muestra que i_2 es trivial). Sea $\alpha : [0, 1] \to U$ un lazo en x_0, tenemos la aplicación continua $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{S}^2 \setminus \{a, b\}$. Como C_2 une a con b y $\alpha([0, 1]) \cap C_2 = \emptyset$, por la proposición 4.1 tenemos que $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{S}^2 \setminus \{a, b\}$ es homotópica por caminos cerrados a una constante por la proposición 9.4, $[\alpha] = 0$ en $\pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{a, b\}, x_0)$. Luego, por la proposición 4.2, $\pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{a, b\}, x_0)$ es trivial pero $\pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{a, b\}, x_0) = \mathbb{Z}$. Hemos obtenido una contradicción.

Por lo tanto, $\mathbb{S}^2 \setminus C$ es disconexo, en otra palabras, C separa $\mathbb{S}^2$. □

5.3. Teorema de no separación

Definición 5.3. *Un arco en $\mathbb{S}^2$ es una aplicación continua e inyectiva $h : [0, 1] \to \mathbb{S}^2$.*

[1]Una curva cerrada simple en la esfera $\mathbb{S}^2$.

Sea $h : [0,1] \to \mathbb{S}^2$ un arco. Denotemos con $A_1 = h([0,1/2])$ al arco de $h(0)$ a $h(1/2)$, con $A_2 = h([1/2,1])$ al arco de $h(1/2)$ a $h(1)$. Consideremos dos puntos p y q de $\mathbb{S}^2 \setminus h([0,1])$. Supongamos que existe un camino en $\mathbb{S}^2 \setminus A_1$ que une estos dos puntos, y existe, también, un camino en $\mathbb{S}^2 \setminus A_2$ que los une. Tenemos la siguiente afirmación.
Afirmación: *Existe un camino en* $\mathbb{S}^2 \setminus h([0,1])$ *que une* p *con* q.

Demostración. Caso contrario, sean $U = \mathbb{S}^2 \setminus A_2$, $V = \mathbb{S}^2 \setminus A_1$ y $w = h(1/2)$, entonces $U \cup V = \mathbb{S}^2 \setminus \{w\}$ y $U \cap V = \mathbb{S}^2 \setminus h([0,1])$ es disconexo, por la proposición 4.3 el grupo $\pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{w\}, p)$ contiene un subgrupo cíclico infinito, lo que es una contradicción. Por lo tanto, existe un camino de p a q en $\mathbb{S}^2 \setminus h([0,1])$. □

Teorema 5.2 (Teorema de no separación). *La esfera menos un arco es conexo por caminos.*

Demostración. Sea $h : [0,1] \to \mathbb{S}^2$ un arco. Queremos mostrar que $\mathbb{S}^2 \setminus h([0,1])$ es conexo por caminos. Sean p y q dos puntos de $\mathbb{S}^2 \setminus h([0,1])$. Supongamos que no existe un camino en $\mathbb{S}^2 \setminus h([0,1])$ que los une, vamos a llegar a una contradicción. Por la afirmación anterior, o bien, no existe un camino en $\mathbb{S}^2 \setminus h([0,1/2])$ que los une, o bien, no existe un camino en $\mathbb{S}^2 \setminus h([1/2,1])$ que los une. Así podemos afirmar que no existe un camino en $\mathbb{S}^2 \setminus h([a_1,b_1])$ que los une donde o bien $[a_1,b_1] = [0,1/2]$ o bien $[a_1,b_1] = [1/2,1]$, en cualquier caso $b_1 - a_1 = 1/2$. Nuevamente, por la afirmación anterior, existe un sub-intervalo compacto $[a_2,b_2] \subset [a_1,b_1]$ tal que no existe un camino en $\mathbb{S}^2 \setminus h([a_2,b_2])$ que los une y $b_2 - a_2 = 2^{-2}$, continuando de esa manera obtenemos una sucesión de intervalos compactos encajantes $\{[a_n,b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $[0,1]$ tal que no existe un camino en $\mathbb{S}^2 \setminus h([a_n,b_n])$ que une p con q y además $b_n - a_n = 2^{-n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\lim_{\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Como $\mathbb{S}^2 \setminus \{h(a)\}$ es conexo existe un camino $\alpha : [0,1] \to \mathbb{S}^2 \setminus \{h(a)\}$ que une p con q. Por continuidad de h en $t = a$, para la vecindad $V = \mathbb{S}^2 \setminus \alpha([0,1])$, existe un $\delta > 0$ tal que $h([0,1] \cap \langle a-\delta, a+\delta\rangle) \subset V$, esto es, $h([0,1] \cap \langle a-\delta, a+\delta\rangle)$ no interseca a $\alpha([0,1])$, tomemos un $n \in \mathbb{N}$ tal que $[a_n,b_n] \subset \langle a-\delta, a+\delta\rangle$. Tenemos que α es un camino en $\mathbb{S}^2 \setminus h([a_n,b_n])$ que une p con q, lo que es una contradicción con nuestra construcción de $[a_n,b_n]$. Por lo tanto, existe un camino en $\mathbb{S}^2 \setminus h([0,1)$ que une p con q. Concluimos que $\mathbb{S}^2 \setminus h([0,1)$ es conexo por caminos. Esto termina la demostración. □

5.4. Teorema de la curva de Jordan

Finalmente, estamos en condiciones de mostrar el resultado principal.

Teorema 5.3 (Teorema de la curva de Jordan). *La esfera $\mathbb{S}^2$ menos una curva de Jordan C es la unión disjunta de dos dominios y el borde de cualquiera de los dominios es C, esto es, $\mathbb{S}^2 \setminus C = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$, donde Ω_1 y Ω_2 son abiertos y conexos, y $\partial\Omega_1 = C = \partial\Omega_2$.*

Demostración. Tenemos que C separa $\mathbb{S}^2$. Mostremos primero que $\mathbb{S}^2 \setminus C$ tiene 2 componentes. La prueba es por contradicción. Supongamos que $\mathbb{S}^2 \setminus C$ tiene más de 2 componentes: Sean Ω_1 y Ω_2 dos de ellas y Ω_3 la unión de las demás componentes. Tomemos puntos $a \in \Omega_1$, $b \in \Omega_2$ y $c \in \Omega_3$. Sea $C = C_1 \cup C_2$ la unión de dos arcos compactos tal que $C_1 \cap C_2$ está constituido por 2 elementos p y q. Consideremos los conjuntos abiertos $U = \mathbb{S}^2 \setminus C_1$ y $V = \mathbb{S}^2 \setminus C_2$, que son conexos por caminos por el teorema de no separación, teorema 5.2. Tenemos que $U \cup V = \mathbb{S}^2 \setminus \{p, q\}$ y $U \cap V = \mathbb{S}^2 \setminus C = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$. Sean α un camino en U que va de a hacia b, β un camino en V que va de b hacia a, γ un camino en U que va de a hacia c y δ un camino en V que va de c hasta a. Por la proposición 4.3

$$[f] = [\alpha * \beta] \quad \text{y} \quad [g] = [\gamma * \delta]$$

generan subgrupos cíclicos infinitos de $\pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{p, q\}, a)$ que sólo tienen como elemento en común el neutro. Pero cualquier par de subgrupos cíclicos infinitos de $\pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{p, q\}, a) = \mathbb{Z}$ tienen infinitos elementos en común. Hemos obtenido una contradicción. Por lo tanto, $\mathbb{S}^2 \setminus C$ tiene 2 componentes. Sean éstas Ω_1 y Ω_2.

Ahora veamos que el borde de Ω_1 es C, de manera análoga se muestra que $\partial\Omega_2 = C$. Sea $x \in \partial\Omega_1$, luego $x \in \mathbb{S}^2 \setminus \Omega_1 = C \cup \Omega_2$; como $x \notin \Omega_2$ tenemos que $x \in C$. Recíprocamente, sea $x \in C$, vamos a mostrar que $x \in \partial\Omega_1$. Consideremos una vecindad abierta V de x, veamos que $V \cap \Omega_1 \neq \emptyset$: sea $C = C_1 \cup C_2$ la unión de 2 arcos compactos tal que x está en el interior de $C_1 \subset V$ y $C_1 \cap C_2$ está constituido por dos puntos. Sean $y \in \Omega_1$ y $z \in \Omega_2$, como $\mathbb{S}^2 \setminus C_2$ es conexo por caminos, existe un camino en $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{S}^2 \setminus C_2$ que va de y hacia z. Debido a que $y \in \Omega_1$ y $z \notin \Omega_1$, por la proposición 9.5 existe un $t_0 \in [0, 1]$ tal que $\alpha(t_0) \in \partial\Omega_1 \subset C_1 \cup C_2$. Como $\text{Im}(\alpha) \cap C_2 = \emptyset$, entonces $\alpha(t_0) \in C_1$. De allí que $\alpha(t_0) \in V$, como $\alpha(t_0) \in \partial\Omega_1$ existe $x_1 \in \Omega_1 \cap V$. Esto muestra que $V \cap \Omega_1 \neq \emptyset$. Entonces $x \in \overline{\Omega_1}$. Como $x \notin \Omega_1$ tenemos que $x \in \partial\Omega_1$. Esto termina la demostración.

□

De este teorema tenemos el clásico teorema de Jordan:

> Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan en el plano. Entonces C separa el plano en dos dominios, uno acotado y otro no acotado, tales que el borde de cualquier dominio es C.

Capítulo 6

Índice de un camino cerrado plano

En este capítulo definiremos el índice de una curva cerrada en el plano, con respecto un punto en su complemento. Veremos que el índice con respecto a dos puntos es el mismo si estos puntos están en la misma componente conexa del complemento del camino. Veremos que en el caso de la curva de Jordan, el índice con respecto a un punto el cual está en la componente acotada es uno o menos uno, esto nos servirá para decir si la curva está orientada positiva o negativamente.

6.1. Índice de un camino cerrado con respecto a un punto

Sea $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ una curva cerrada (no necesariamente simple) y $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \alpha([0,1])$. Con el vector posición de α con respecto a p podemos obtener el camino cerrado $u_p : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ donde

$$u_p(t) = \frac{\alpha(t) - p}{|\alpha(t) - p|} \in \mathbb{S}^1 \quad \forall\, t \in [0,1].$$

Tomemos un levantamiento $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ de $u = u_p$ con respecto al cubrimiento $t \mapsto e^{it}$ de $\mathbb{S}^1$, así

$$\begin{aligned} u(t) &= (\cos\theta(t), \sin\theta(t)) \\ u(t) &= \mathrm{e}^{i\theta(t)}, \quad t \in [0,1] \end{aligned}$$

Notemos que $\theta(1) - \theta(0)$ no depende del levantamiento tomado para u y es $2\pi k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Definición 6.1. *Definimos el número de vueltas de α con respecto a p como el número entero*
$$\mathrm{Ind}(\alpha;p) = \frac{1}{2\pi}\left(\theta(1) - \theta(0)\right).$$

Notemos que el número de vueltas de u es igual al número de vueltas del lazo
$$u/u(0) : [0,1] \to \mathbb{S}^1$$
en e_1, donde consideramos $u(0)$ como un número complejo. El número de vueltas de este lazo es igual a $\mathrm{Ind}(\alpha;p)$.
Tenemos la siguiente proposición.

Proposición 6.1. *Sea* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \alpha([0,1])$ *un camino de p a q entonces*
$$\mathrm{Ind}(\alpha;p) = \mathrm{Ind}(\alpha;q).$$

Demostración. Tenemos que $u_p/u_p(0)$ es homotópico a $u_q/u_q(0)$ con extremos fijos, en efecto, la aplicación $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{S}^1$ dada por
$$H(s,t) = \frac{u_{\gamma(s)}(t)}{u_{\gamma(s)}(0)}$$
es una homotopía entre ellos, así, el número de vueltas de ambos son iguales. Por lo tanto,
$$\mathrm{Ind}(\alpha;p) = \mathrm{Ind}(\alpha;q).$$
□

Veamos que el número de vueltas de una curva cerrada con respecto a puntos que están muy lejos de α es cero.

Proposición 6.2. *Sean* $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *una curva cerrada y* $p \in \mathbb{R}^2$. *Si p está en la componente no acotada de* $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha([0,1])$ *entonces*
$$\mathrm{Ind}(\alpha;p) = 0.$$

Demostración. Sea $q \in \mathbb{R}^2$ tal que $|q| > |\alpha(t)|$ para todo $t \in [0,1]$, entonces q está en la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha([0,1])$, luego q y p pueden ser unidos por un camino, y
$$\mathrm{Ind}(\alpha;q) = \mathrm{Ind}(\alpha;p).$$
Mostremos que $\mathrm{Ind}(\alpha;q) = 0$. Tenemos
$$\langle u_q(t), q\rangle = \frac{\langle \alpha(t), q\rangle - |q|^2}{|\alpha(t) - q|} < 0 \quad \forall\, t \in [0,1]$$

Sean $u_q(t) = e^{i\theta(t)}$ y $q = |q|e^{i\nu}$ tenemos que $\langle u_q(z), q\rangle = |q|\cos(\theta(t) - \nu) < 0$, esto es, $\cos[\theta(t) - \nu] < 0$ para todo $t \in [0,1]$. Por conexidad de $\{\theta(t) - \nu : t \in [0,1]\}$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\theta(t) - \nu \in \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3}{2}\pi\right),$$

luego

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{2\pi}\left[\theta(1) - \theta(0)\right] < \frac{1}{2},$$

así $\operatorname{Ind}(\alpha; q) = 0$. De allí que $\operatorname{Ind}(\alpha; p) = 0$. Esto completa la demostración.

□

Teorema 6.1 (Teorema de Índice de una curva de Jordan). *Sea $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ una curva cerrada simple y $C = \alpha([0,1])$. Si p está en la componente acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus C$ entonces* $\operatorname{Ind}(\alpha; p) \in \{-1, 1\}$.

Demostración. Como las componentes de $\mathbb{R}^2 \setminus C$ son conexas por caminos, bastará mostrar que existe p en la componente acotada de manera que $\operatorname{Ind}(\alpha; p) \in \{-1, 1\}$. Sean x_1 y x_2 el mínimo y el máximo de $P_1 = \{x \in \mathbb{R} / \exists\, y \in \mathbb{R} : (x, y) \in \alpha([0,1])\}$ (la proyección de C sobre el eje X). Entonces $C = \alpha([0,1])$ está entre las rectas $x = x_1$ y $x = x_2$. Sea $t_1 \in [0,1]$ el último instante tal que $\alpha(t_1)$ está en la recta $x = x_1$, análogamente consideramos $t_2 \in [0,1]$ es primer instante que toca $x = x_2$, tenemos que $t_1 \neq t_2$. Supongamos por ejemplo que $t_1 < t_2$. Sean $v_1 = \alpha(t_1)$ y $v_2 = \alpha(t_2)$, y consideremos la curvas $\alpha_1 = \alpha|_{[t_1, t_2]}$ que va de v_1 a v_2 y la curva $\alpha_2 : [t_2, 1 + t_1] \to \mathbb{R}^2$ definido como

$$\alpha_2(t) = \begin{cases} \alpha(t) & t \in [t_2, 1] \\ \alpha(t-1) & t \in [t_2, 1 + t_1] \end{cases}$$

que va de v_2 a v_1. Notemos que, con respecto a cualquier punto de $\mathbb{R}^2 \setminus C$, el número de vueltas de $\alpha_1 \cup \alpha_2$ es el mismo que el de α. Ahora tomemos líneas verticales $y = y_2$ y $y = y_1$, con $y_1 < y_2$, tales que C esté entre estas dos líneas y no toca estas líneas. Sean L_1 el camino rectilíneo inferior de v_1 a v_2, y L_2 el camino rectilíneo superior de v_2 a v_1. Tomemos una recta $L : \{x = x^*\}$ donde $x_1 < x^* < x_2$. Como α_1 van de $\{x = x_1\}$ a $\{x = x_2\}$ y α_2 va de $\{x = x_2\}$ a $\{x = x_1\}$ tenemos que la recta L tiene elementos de $C_1 = \alpha_1([t_1, t_2])$ y $C_2 = \alpha_2([t_2, 1 + t_1])$.

Supongamos que el *primer punto de toque* (x^*, y_1) de L con C viniendo desde abajo está en C_1.

Afirmación: *El último punto de toque de L con C, más precisamente, el punto de $L \cap C$ con mayor ordenada, perteneces a C_2.*

Caso contrario, el primer y último punto de toque de L con C perteneces a C_1, sean estos q_1 y q_2, respectivamente. Sea C^* el arco de C_1 que une estos extremos de $L \cap C_1$, preservando la orientación de q_1 a q_2. Tenemos que la unión de la semilínea vertical para abajo de q_1, el arco C^* y la semilínea vertical para arriba de q_2 separa al plano en dos regiones, una que contiene a v_1 y otra contiene v_2. Denotaremos a está unión de caminos por A. Los puntos v_1 y v_2 son unidos por el arco C_2, luego este arco tiene que intersecar a A, como el arco no interseca las semilíneas verticales, el arco C_2 interseca C^*, él cual está en el interior de C_1, pero esto indicaría que α no es simple, lo que es una contradicción. Así el último punto de toque de L con C está en C_2.

Ahora consideremos sea q^* el primer punto de toque de L, desde abajo, con C_2. Antes que L tocará C_2 hay un último punto de toque con C_1, sea este p^*. Entre p^* y q^* tomemos un $p \in (p^*, q^*)$. Vamos a mostrar que $\operatorname{Ind}(\alpha; p) = 1$. Sean L_1 el camino rectilíneo inferior de v_1 a v_2, y L_2 el camino rectilíneo superior de v_2 a v_1, tenemos

$$\operatorname{Ind}(\alpha; p) + \operatorname{Ind}(C_2^{-1} \cup L_2; p) = \operatorname{Ind}(C_1 \cup L_2; p)$$

Por la elección de p, tenemos que p está en la componente no acotada de $C_2^{-1} \cup L_2$, así $\operatorname{Ind}(C_2^{-1} \cup L_2; p) = 0$, luego

$$\operatorname{Ind}(\alpha; p) = \operatorname{Ind}(C_1 \cup L_2; p).$$

Tenemos el camino $[p, q^*] \cup \beta$ donde β es el arco de C_2 que va de q^* a q_2, el último punto de toque de L con C. Este camino no toca $C_1 \cup L_2$ luego

$$\operatorname{Ind}(C_1 \cup L_2; p) = \operatorname{Ind}(C_1 \cup L_2; q_2)$$

De otro lado,

$$\operatorname{Ind}(C_1 \cup L_2; q_2) + \operatorname{Ind}(C_1^{-1} \cup L_1; q_2) = \operatorname{Ind}(L_1 \cup L_2; q_2),$$

como $\operatorname{Ind}(C_1^{-1} \cup L_1; q_2) = 0$ e $\operatorname{Ind}(L_1 \cup L_2; q_2) = 1$ entonces $\operatorname{Ind}(C_1 \cup L_2; q_2) = 1$.

Así

$$\operatorname{Ind}(\alpha; p) = 1.$$

Si el primer punto de toque de L con C perteneces a C_2 tendríamos, por un argumento similar, que

$$\operatorname{Ind}(\alpha; p) = -1.$$

Esto completa la demostración. □

Corolario 6.1. *Sean* $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *una curva cerrada,* $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \alpha([0, 1])$ *y* $k = \operatorname{Ind}(\alpha; p)$. *Si* $|k| > 1$ *entonces* α *no es simple.*

6.2. Orientación en curvas de Jordan

Ahora definiremos qué es una curva de Jordan con orientación positiva.

Definición 6.2 (Curva de Jordan positivamente orientada). *Diremos que una curva de Jordan $\alpha : [0, a] \to \mathbb{R}^2$ es positivamente orientada si el índice de la curva con respecto a un punto de la región acotada que delimita es 1. En caso que el índice es -1 diremos que la curva es orientada negativamente o que tiene orientación negativa.*

Ejemplo: La curva de Jordan $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida como

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t) \quad \forall\, t \in [0, 2\pi]$$

es positivamente orientada. Mientras que la curva de Jordan $\beta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida como

$$\beta(t) = (\cos t, -\sin t) \quad \forall\, t \in [0, 2\pi]$$

es orientada negativamente.

Proposición 6.3. *Sea $H : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}^2\setminus\{p\}$ una homotopía de caminos cerrados entre α y β, entonces $\operatorname{Ind}(\alpha; p) = \operatorname{Ind}(\beta; p)$.*

Demostración. Tenemos la aplicación continua $G : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{S}^1$ definida como

$$G(s,t) = \frac{H(s,t) - p}{|H(s,t) - p|} \qquad \forall\, (s,t) \in [0,1] \times [0,1]$$

es una homotopía de caminos cerrados en $\mathbb{S}^1$. Sea $F : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{S}^1$ definida como

$$F(s,t) = \frac{G(s,t)}{G(s,0)} \quad \forall\, (s,t) \in [0,1] \times [0,1]$$

es una homotopía de lazos en $e_1 \in \mathbb{S}^1$. Luego, el número de vueltas de α con respecto a p es igual al número de vueltas de β con respecto a p, esto es,

$$\operatorname{Ind}(\alpha; p) = \operatorname{Ind}(\beta; p).$$

□

Proposición 6.4. *Sea $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan positivamente orientada y $p \in \mathbb{R}^2$ un punto en la componente acotada que delimita α. Existe $r > 0$ tal que α es homotópica por caminos cerrados al camino $\beta : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ definido por*

$$\beta(t) = p + re^{2\pi i t} \qquad \forall\, t \in [0,1].$$

Demostración. Como la componente acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Im}(\alpha)$ es abierta, existe $r > 0$ tal que $\overline{B_{(p;r)}}$ está contenida en la componente acotada. Consideremos el mapeo continuo $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ definido como

$$H(s,t) = p + ((1-s)\,|\alpha(t) - p| + s \cdot r)\,\frac{\alpha(t) - p}{|\alpha(t) - p|} \quad \forall\,(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$$

es una homotopía de caminos cerrados entre α y el camino $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ dado por

$$\gamma(t) = p + r\frac{\alpha(t) - p}{|\alpha(t) - p|} \quad \forall\,(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$$

Por la proposición 6.3 tenemos que $\mathrm{Ind}(\alpha; p) = \mathrm{Ind}(\gamma; p)$. Debido a que α es positivamente orientada, se sigue que $\mathrm{Ind}(\gamma; p) = 1$. El camino $u_\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ definido por

$$u_\gamma(t) = \frac{\alpha(t) - p}{|\alpha(t) - p|} \quad \forall\,(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$$

es homótopico por caminos cerrados a $t \mapsto e^{2\pi i t}$, entonces γ es homotópico por caminos cerrados al camino $\beta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definido como

$$\beta(t) = p + re^{2\pi i t} \quad \forall\, t \in [0,1].$$

$\square$

Capítulo 7

El índice de una curva de Jordan regular

En este capítulo veremos que el número de vueltas de la tangente de una curva de Jordan regular de clase C^1 es uno si la curva está positivamente orientada.

7.1. Número de vueltas de la tangente

Sea $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan de clase C^1 parametrizada por longitud de arco, así

$$|\alpha'| = 1 \quad \text{y} \quad \alpha'(l) = \alpha'(0) \ .$$

Llamaremos a la curva $\alpha' : [0, l] \to \mathbb{S}^1$ la *tangente de* α.
Sea $\theta : [0, l] \to \mathbb{R}$ una función de ángulo de clase C^1 para α', esto es,

$$\alpha'(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t)) \quad \forall\ t \in [0, l].$$

Tenemos que $\theta(l) - \theta(0) = 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Llamaremos a tal k el número de vueltas de la tangente de α.

Proposición 7.1. *El número de vueltas de la tangente de una curva de Jordan de clase C^1 es +1 si la curva es orientada positivamente, y es -1 si es orientada negativamente.*

Demostración. Sea α positivamente orientada. Supongamos, sin perdida de generalidad, que la curva está apoyada sobre la recta horizontal $\{y = 0\}$ en $\alpha(0)$.

Sea $T = \{(s,t) \in [0,1] \times [0,1] : s \leq t\}$ un triángulo. Definamos el mapeo $H : T \to \mathbb{R}^2$ como

$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha'(s) & , \text{ si } s = t \\ \frac{\alpha(t)-\alpha(s)}{|\alpha(t)-\alpha(s)|} & , \text{ si } s < t \text{ y } (s,t) \neq (0,1) \\ -\alpha'(0) & , \text{ si } (s,t) = (0,1) \end{cases}$$

Tenemos que H es una aplicación continua. Debido a la geometría de T tenemos una homotopía con extremos fijos entre el camino $\alpha' : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, y el camino β formado por los caminos $\beta_1(t) = H(0,t)$ y $\beta_2(t) = H(t,1)$, para todo $t \in [0,1]$. Notemos que ambos caminos son cerrados, luego el número de vueltas de α' es igual al número de vueltas de β. En una vecindad abierta de $\alpha(0)$ en $\mathbb{R}^2$, la curva α es el gráfico de una función de clase C^1, definida en un abierto de $\mathbb{R}$. Debido a que α esta orientada positivamente, la orientación de recorrido de la función coincide con la orientación de la curva[1], entonces para $t > 0$ pequeño, tenemos que $\alpha(t)$ está a la derecha de $\alpha(0)$. Sea $\eta_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función ángulo para β_1 con $\eta_1(0) = 0$. Entonces $\eta_1(t)$ es no-negativo para valores pequeños de t. Notemos que η_1 no puede tomar valores negativos después. Cuando t está cerca de 1 tenemos que $\eta(t)$ está cerca de π. Así $\eta_1(1) = \pi$. Un argumento análogo muestra que la variación angular de β_2 es π. Por lo tanto el número de vueltas de β es 1 y así el número de vueltas de α' es $+1$.

En el caso α este orientada negativamente, tenemos que α^- es orientada positivamente, luego su vector tangente da una vuelta, así el número de vueltas del vector tangente de α es -1. □

Tenemos la siguiente proposición.

Proposición 7.2 (Hopf). *La variación angular de la tangente de una curva de Jordan C^1-regular es 2π si está positivamente orientada y -2π si está orientada negativamente.*

7.2. Vértices de una curva de Jordan C^1-por partes

Sea $\alpha : [0,l] \to \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan que por partes es de clase C^1 y está parametrizada por longitud de arco.

[1] A partir de la prueba del número de vueltas de α, como α es positivamente orientada, el primer punto de contacto, desde abajo, de una vertical con α está en C_1, el arco que va de v_1 a v_2.

Definición 7.1 (Vértice). *Diremos que $\alpha(t)$, donde $t \in [0,l]$, es un* vértice *de α si una de las siguientes condiciones se cumple:*

1. $t \in \langle 0, l\rangle$ *y* $\alpha'(t^-) \neq \alpha'(t^+)$
2. $t \in \{0, l\}$ *y* $\alpha'(0) \neq \alpha'(l)$

Notemos que podemos suponer que $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una curva con periodo $l > 0$ debido a que $\alpha(l) = \alpha(0)$. Así $\alpha(t)$, donde $t \in [0,l]$, es un vértice si

$$\alpha'(t^-) \neq \alpha'(t^+).$$

Diremos que un vértice $\alpha(t)$ es una *cúspide* si $\det(\alpha'(t^-), \alpha'(t^+)) = 0$. Si $\det(\alpha'(t^-), \alpha'(t^+)) \neq 0$ diremos que $\alpha(t)$ es una *esquina*.

Ángulo exterior orientado

Sea $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ es una curva de Jordan que por partes es C^1-regular y parametrizada por longitud de arco. A continuación, definiremos el ángulo exterior orientado en vértices el cual lo denotaremos por θ^{ext}.

1. Si $\alpha(t)$ una esquina
   - Si $\det(\alpha'(t^-), \alpha'(t^+)) > 0$ definimos
   $$\theta^{\text{ext}} = \arccos\left(\langle \alpha'(t^-), \alpha'(t^+)\rangle\right) \in (0, \pi)\ .$$
   - Si $\det(\alpha'(t^-), \alpha'(t^+)) < 0$ definimos
   $$\theta^{\text{ext}} = -\arccos\left(\langle \alpha'(t^-), \alpha'(t^+)\rangle\right) \in (-\pi, 0)\ .$$
2. Si $\alpha(t)$ una cúspide : Por medio de una traslación en el plano y una rotación, supongamos que $\alpha(t) = \mathbf{0}$ y $\alpha'(t^-) = (1,0)$, así $\alpha'(t^+) = (-1,0)$. Existen $t_0 < t < t_2$ tales que $\alpha_1 = \alpha|[t_0, t]$ y $\alpha_2 = \alpha|[t, t_2]$ son gráficos de funciones de clase C^1 digamos $f : [-\delta, 0] \to \mathbb{R}$ y $g : [-\delta, 0] \to \mathbb{R}$, respectivamente.
   - Si el gráfico de f está por debajo del gráfico de g definimos
   $$\theta^{\text{ext}} = \pi.$$
   - Si el gráfico de g esté por debajo del gráfico de f definimos
   $$\theta^{\text{ext}} = -\pi.$$

7.3. Triángulos curvilíneos

Vamos a mostrar, para ciertos *triángulos curvilíneos* con orientación positiva, que la suma de las variaciones angulares de las tangentes de los arcos más la suma de los ángulos exteriores en los vértices es igual a 2π. Empezamos con la definición triángulo curvilíneo.

Definición 7.2 (Triángulo curvilíneo)**.** *Un triángulo curvilíneo es una curva de Jordan* $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ *que es por partes* C^1*-regular, con sólo* 3 *vértices.*

Podemos suponer que los vértices están en $0 < t_1 < t_2$. Sean $\Delta\theta_1$ la variación angular de $\alpha'|[0, t_1]$, $\Delta\theta_2$ la variación angular de $\alpha'|[t_1, t_2]$ y $\Delta\theta_3$ la variación angular de $\alpha'|[t_2, l]$. Sean θ_1^{ext} el ángulo exterior (orientado) de α en el vértice de $\alpha(t_1)$, θ_2^{ext} el ángulo exterior de α en el vértice de $\alpha(t_2)$ y θ_3^{ext} el ángulo exterior de α en el vértice de $\alpha(l)$.
Tenemos el siguiente lema.

Lema 7.1. *Sea T un triángulo curvilíneo descrito por los arcos C^1-regulares $\alpha_1 : [0, t_1] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha_2 : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2$ y $\alpha_3 : [t_2, l] \to \mathbb{R}^2$. Supongamos que $\theta_2^{\text{ext}} = \theta_3^{\text{ext}} = \pi$, $0 < |\theta_1^{\text{ext}} + \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2| < \pi$ y $0 < |\Delta\theta_3| \leq \pi$, entonces*

$$\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3 + \theta_1^{\text{ext}} = 0.$$

En particular

$$\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3 + \theta_1^{\text{ext}} + \pi + \pi = 2\pi.$$

Demostración. Percatándonos del sentido de α_3 tenemos $-\Delta\theta_3 = \Delta\theta_1 + \theta_1^{\text{ext}} + \Delta\theta_2 + 2n\pi$ donde $n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned} |2n\pi| - |\Delta\theta_1 + \theta_1^{\text{ext}} + \Delta\theta_2| &\leq |\Delta\theta_3| \leq \pi \\ |2n\pi| - \pi &< |\Delta\theta_3| \leq \pi \end{aligned}$$

luego $2|n| < 2$, entonces $n = 0$. Así

$$\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3 + \theta_1^{\text{ext}} = 0$$

□

Sean $A = \alpha_1(0)$, $B = \alpha_2(t_1)$ y $C = \alpha_3(t_2)$ los vértices de T. El lema anterior afirma que la variación angular A de C por el camino AC es igual a la suma de las variaciones angulares de AB, de BC con el ángulo exterior en B.

Lema 7.2. *Sea T un triángulo curvilíneo descrito por los arcos C^1-regulares $\alpha_1 : [0, t_1] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha_2 : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2$ y $\alpha_3 : [t_2, l] \to \mathbb{R}^2$. Supongamos que $\theta_1^{\text{ext}} = \theta_2^{\text{ext}} = \theta_3^{\text{ext}} = \pi$, $|\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2| < \pi$ y $-\pi \leq \Delta\theta_3 \leq 0$, entonces*

$$\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3 + \pi = 0.$$

En particular

$$\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3 + \pi + \pi + \pi = 2\pi.$$

Demostración. Tenemos $-\Delta\theta_3 = \Delta\theta_1 + \pi + \Delta\theta_2 + 2n\pi$ donde $n \in \mathbb{Z}$, luego

$$-\Delta\theta_3 \geq |2n+1|\pi - |\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2| > |2n+1|\pi - \pi$$

entonces $2\pi > |2n+1|\pi$. Luego $n = 0$ o $n = -1$, si $n = -1$ entonces $\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 > \pi$ lo que es una contradicción, es por ello que $n = 0$. Así

$$\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3 + \pi = 0.$$

□

Este lema tiene una interpretación análoga, la variación angular de A a C por el camino AC es la suma de la variaciones angulares de AB, de BC con el ángulo exterior en B. Los lemas 7.1 y 7.2 tienen análogos.

Lema 7.3. *Sea T un triángulo curvilíneo descrito por los arcos C^1-regulares $\alpha_1 : [0, t_1] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha_2 : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2$ y $\alpha_3 : [t_2, l] \to \mathbb{R}^2$. Supongamos que $\theta_2^{\text{ext}} = \theta_3^{\text{ext}} = -\pi$, $0 < |\theta_1^{\text{ext}} + \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2| < \pi$ y $0 < |\Delta\theta_3| \leq \pi$, entonces*

$$\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3 + \theta_1^{\text{ext}} = 0.$$

En particular

$$\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3 + \theta_1^{\text{ext}} - \pi - \pi = -2\pi.$$

La demostración es sólo considerar el triángulo con la orientación opuesta y aplicar el lema 7.1. También tenemos el siguiente lema.

Lema 7.4. *Sea T un triángulo curvilíneo descrito por los arcos C^1-regulares $\alpha_1 : [0, t_1] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha_2 : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2$ y $\alpha_3 : [t_2, l] \to \mathbb{R}^2$. Supongamos que $\theta_1^{\text{ext}} = \theta_2^{\text{ext}} = \theta_3^{\text{ext}} = -\pi$, $|\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2| < \pi$ y $0 \leq \Delta\theta_3 \leq \pi$, entonces*

$$\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3 - \pi = 0.$$

En particular

$$\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3 - \pi - \pi - \pi = -2\pi.$$

7.4. Curva de Jordan C^1 por partes

Sea C una curva de Jordan, que por partes es C^1 y está parametrizada por longitud de arco. Supongamos inicialmente que C tiene solamente una esquina, entonces si retiramos un arco que contiene a la esquina en su interior y lo reemplazamos por otro arco C^1, de manera que ahora tengamos una curva de Jordan C^1 tenemos que el número de giros de su vector tangente es $+1$ o -1. Digamos que sea 1. Notemos que el ángulo de giro de la tangente la nueva curva es 2π, entonces el ángulo de giro de la tangente del nuevo arco es 2π menos la variación del ángulo de la tangente del arco que quedo, esto es, cualquier arco que se coloque de manera que se obtiene una curva de Jordan de clase C^1 regular, tiene la misma variación de ángulo.

Ahora, sea $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan que por partes es C^1 y parametrizado por longitud de arco, con únicos vértices en $t_1, \ldots, t_k$, donde $0 < t_1 < \ldots < t_k < l$. Entonces para $h > 0$ pequeño, tenemos, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, se puede reemplazar el arco $\alpha([t_i - h, t_i + h])$ por un arco C_i :, tal que al final se obtenga una curva de Jordan C' de clase C^1 y regular, luego la variación ángulo del mapeo tangente es 2π o -2π, supongamos que sea 2π para fijar las ideas. En cada reemplazo por C_i, hemos dejado de lado los arcos $\alpha([t_i - h, t_i])$ y $\alpha([t_i, t_i + h])$. Sean $\theta_i^1(h)$ la variación de ángulo de la tangente de $\alpha([t_i - h, t_i])$ y $\theta_i^2(h)$ la variación de ángulo de la tangente de $\alpha([t_i, t_i + h])$. Luego si $\varphi_i(h)$ es la variación del ángulo de la tangente de C_i, tenemos que

$$\varphi_i(h) = \theta_i^1(h) + \theta_i^{\text{ext}} + \theta_i^2(h). \tag{7.1}$$

donde θ_i^{ext} es el ángulo exterior orientado del vértice de α en el instante t_i.

Sea β_i una función ángulo para $\alpha'|_{[t_{i-1}, t_i]}$, tenemos

$$\begin{aligned}
2\pi = {} & [\beta_1(t_1 - h) - \beta_1(0)] + \sum_{i=2}^{k} [\beta_i(t_i - h) - \beta_i(t_{i-1} + h)] + \beta_{k+1}(1) - \beta_{k+1}(t_k + h) \\
& + \sum_{i}^{k} \varphi_i(h)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\pi = {} & [\beta_1(t_1 - h) - \beta_1(0)] + \sum_{i=2}^{k} [\beta_i(t_i - h) - \beta_i(t_{i-1} + h)] + \beta_{k+1}(1) - \beta_{k+1}(t_k + h) \\
& + \sum_{i}^{k} \left[\theta_i^1(h) + \theta_i^2(h)\right] + \sum_{i=1}^{k} \theta_i^{\text{ext}}
\end{aligned}$$

aplicando límite cuando $h \to 0^+$:

$$2\pi = \Delta\beta_1 + \sum_{i=2}^{k} \Delta\beta_i + \Delta\beta_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \theta_i^{\text{ext}}$$

debido a que $\theta_1^i(h) \to 0$ y $\theta_2^i(h) \to 0$ cuando $h \to 0^+$.
Hemos visto la idea de la demostración del siguiente resultado.

Teorema 7.1 (Hopf). *La variación angular de las tangentes de los arcos de una curva de Jordan C^1-regular por partes, más la suma de los ángulos exteriores en sus vértices es 2π o -2π.*

Capítulo 8

Homología singular

En este capítulo introduciremos lo necesario de homología singular para demostrar el teorema de Jordan-Brouwer.

8.1. Cadenas singulares

Sea X un espacio topológico. Dado $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos

$$\Delta^k = \left\{ (t_0, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^{k+1} : t_i \geq 0 \; \forall i \in \{0, \ldots, k\} \;,\; \sum_{i=0}^{k} t_i = 1 \right\}$$

Definición 8.1 (Simplex singular). *Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Un mapeo continuo $\sigma : \Delta^k \to X$ es llamado k-simplex singular en X.*

Definición 8.2 (Grupo de k-cadenas). *Sea Φ el conjunto de todos los k-simplexes en X, definimos el grupo de k-cadenas singulares en X como*

$$C_k(X) = \bigoplus_{\sigma \in \Phi} \mathbb{Z} \qquad \text{(Suma directa)} \quad .$$

Esto es,

$$C_k(X) = \left\{ f : \Phi \to \mathbb{Z} \;/\; f(\sigma) = 0 \text{ salvo un número finito de } \sigma\text{'s} \right\}$$

Ejemplo: Si $X = \{p\}$ es formado por un solo elemento, entonces $C_0(X) = \mathbb{Z}$ y $C_k(X) = \mathbb{Z}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Representación de una cadena

Es común representar una cadena $f \in C_k(X)$ como

$$c = \sum_{i=1}^{m} n_i \cdot \sigma_i$$

donde $n_i = f(\sigma_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, y $f(\sigma) = 0$ para todo $\sigma \in \Phi \setminus \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$. Adoptaremos, usualmente, está notación para las cadenas singulares en X.

Operador borde

Dado $k \in \mathbb{N}$ definiremos el operador borde $\partial : C_k(X) \to C_{k-1}(X)$. Como el operador será un homomorfismo, bastará definirlo en el conjunto de los k-simplex. Dado un k-simplex singular σ en X definimos

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \sigma \circ \partial_i$$

donde $\partial_i : \Delta^{k-1} \to \Delta^k$ es la aplicación definida como

$$\partial_i\,(t_0, \ldots, t_{k-1}) = (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{k-1}) \quad , \quad \forall\,(t_0, \ldots, t_{k-1}) \in \Delta^{k-1}.$$

La función ∂_i es un $(k-1)$-simplex en el conjunto convexo Δ^k, este simplex es la restricción de una aplicación afín de $\mathbb{R}^k$ a $\mathbb{R}^{k+1}$, es por ello, que este mapeo es llamado *simplex afín.*

Definición 8.3 (Simplex afín). *Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Un k-simples $\eta : \Delta^k \to C$ en un conjunto convexo C de un espacio vectorial E es llamado afín si es la restricción de una aplicación afín de $\mathbb{R}^{k+1}$ a E.*

Notemos que un simplex afín $\eta : \Delta^k \to C$ queda completamente determinado por sus valores en $e_0 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_1 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots$, $e_k = (0, 0, \ldots, 1)$. Para cada $i = 0, \ldots, k$ sea $v_i = \sigma(e_i)$, denotaremos

$$\eta = [v_0, \ldots, v_k]$$

al k-simplex afín tal que $v_i = \sigma(e_i)$ para todo $i = 0, \ldots, k$.
En el caso de $\eta = \mathrm{id} : \Delta^k \to \Delta^k$ tenemos

$$\mathrm{id} = [e_0, \ldots, e_k]$$

Si no hay lugar a confusión denotaremos al k-simplex identidad como Δ^k, así

$$\Delta^k = [e_0, \ldots, e_k].$$

Dado un k-simplex afín $[v_0, \ldots, v_k]$ denotaremos por $[v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_k]$, al $(k-1)$-simplex afín $[v_0, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k]$. Así $\partial_i = [e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_k]$. Luego

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma \circ [e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_k].$$

Definimos el operador borde $\partial : C_0(X) \to \{0\}$ como el operador idénticamente nulo. Existe también otro operador $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ definido como

$$\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} n_i \cdot \sigma_i\right) = \sum_{i=1}^{m} n_i$$

que es usado para definir *homología reducida* de un espacio topológico, concepto que veremos más adelante.

8.2. Funciones continuas y cadenas

Sea $f : X \to Y$ un mapeo continuo y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definimos el operador $f_\# : C_k(X) \to C_k(Y)$ de la siguiente manera: en cualquier k-simplex σ,

$$f_\#(\sigma) = f \circ \sigma \in C_k(Y),$$

y luego lo extendemos a toda k-cadena en X.

Proposición 8.1. *Sea $k \in \mathbb{N}$. Dado un k-simplex σ en X se cumple*

$$\partial\sigma = \sigma_\#\left(\partial\Delta^k\right).$$

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned}
\partial\sigma &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma_\#(\partial_i) \\
&= \sigma_\#\left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i (\partial_i)\right) \\
&= \sigma_\#\left(\partial\Delta^k\right).
\end{aligned}$$

□

Proposición 8.2. *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ aplicaciones continuas, y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tenemos que $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\# : C_k(X) \to C_k(Z)$.*

Demostración. Sea $\sigma \in C_k(X)$ entonces

$$\begin{aligned}(g \circ f)_\# (\sigma) &= (g \circ f) \circ \sigma \\ &= g \circ (f \circ \sigma) \\ &= g_\# (f \circ \sigma) \\ &= g_\# (f_\#(\sigma))\end{aligned}$$

así $(g \circ f)_\#(c) = g_\# \circ f_\#(c)$ para toda k-cadena c en X. □

Proposición 8.3. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua y $k \in \mathbb{N}$, entonces se cumple*

$$\partial \circ f_\# = f_\# \circ \partial : C_k(X) \to C_{k-1}(Y) .$$

Demostración. Veamos que la igualdad es válida para todo k-simplex σ en X,

$$\begin{aligned}(\partial \circ f_\#) (\sigma) &= \partial (f \circ \sigma) \\ &= (f \circ \sigma)_\# \left(\partial \Delta^k\right) \\ &= f_\# \left((\sigma)_\# \left(\partial \Delta^k\right)\right) \\ &= f_\# (\partial \sigma) \\ &= (f_\# \circ \partial) (\sigma)\end{aligned}$$

luego para toda k-cadena c en X tenemos

$$(\partial \circ f_\#) (c) = (f_\# \circ \partial) (c) .$$

Esto culmina la demostración. □

El siguiente resultado nos dice que el borde del borde de cualquier simplex es el vacío, y naturalmente se extiende este hecho para toda cadena.

Teorema 8.1. *Si $k > 1$, entonces $\partial^2 : C_k(X) \to C_{k-2}(X)$ es el operador nulo.*

Demostración. Bastará probar el teorema en k-simplexes en X. Sea σ un k-simplex en X, entonces

$$\begin{aligned}\partial\partial\sigma &= \partial \left(\sigma_\# \left(\partial \Delta^k\right)\right) \\ &= (\partial \circ \sigma_\#) \left(\partial \Delta^k\right) \\ &= (\sigma_\# \circ \partial) \left(\partial \Delta^k\right) \\ &= (\sigma_\#) \left(\partial\partial \Delta^k\right) .\end{aligned}$$

Veamos que $\partial\partial\Delta^k = 0$. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
\partial\partial\Delta^k &= \partial\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\partial_i\right) \\
&= \partial\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\,[e_0,\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_k]\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\partial\,[e_0,\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_k] \\
&= \partial\,[\widehat{e_0},\ldots,e_k] + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i\,\partial\,[e_0,\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_k] + (-1)^k\partial\,[e_0,\ldots,\widehat{e_k}]
\end{aligned}
$$

Notemos además que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{i+j}\,\partial\,[e_0,\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_k] = &\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i+j}\,[e_0,\ldots,\widehat{e_j},\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_k] \\
&+\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i}^{k-1}(-1)^{i+j}\,[e_0,\ldots,\widehat{e_i},\ldots,\widehat{e_{j+1}}\ldots,e_k]
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\partial\,[\widehat{e_0},\ldots,e_k] &= \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\,[\widehat{e_0},\ldots,\widehat{e_{j+1}}\ldots,e_k] \\
(-1)^k\partial\,[e_0,\ldots,\widehat{e_k}] &= \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k+j}\,[e_0,\ldots,\widehat{e_j},\ldots,\widehat{e_k}]
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\partial\partial\Delta^k &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i+j}\,[e_0,\ldots,\widehat{e_j},\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_k] \\
&\quad + \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=i}^{k-1}(-1)^{i+j}\,[e_0,\ldots,\widehat{e_i},\ldots,\widehat{e_{j+1}}\ldots,e_k] \\
&= \sum_{0\le j<i\le k}(-1)^{i+j}\,[e_0,\ldots,\widehat{e_j},\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_k] \\
&\quad + \sum_{r=0}^{k-1}\sum_{s=r}^{k-1}(-1)^{r+s}\,[e_0,\ldots,\widehat{e_r},\ldots,\widehat{e_{s+1}}\ldots,e_k] \\
&= \sum_{0\le j<i\le k}(-1)^{i+j}\,[e_0,\ldots,\widehat{e_j},\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_k] \\
&\quad - \sum_{r=0}^{k-1}\sum_{s=r+1}^{k}(-1)^{r+s}\,[e_0,\ldots,\widehat{e_r},\ldots,\widehat{e_s}\ldots,e_k] \\
&= \sum_{0\le j<i\le k}(-1)^{i+j}\,[e_0,\ldots,\widehat{e_j},\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_k] \\
&\quad - \sum_{0\le r<s\le k}(-1)^{r+s}\,[e_0,\ldots,\widehat{e_r},\ldots,\widehat{e_s}\ldots,e_k] \\
&= 0\ .
\end{aligned}
$$

Así

$$\partial\partial\sigma = 0.$$

Luego $\partial^2 = 0$. □

8.3. Grupos de homología

Sea X un espacio topológico, tenemos el complejo de cadenas singulares

$$\cdots \xrightarrow{\partial} C_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial} C_k(X) \xrightarrow{\partial} C_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_0(X)$$

Definimos *el grupo de homología de X de orden cero* como

$$H_0(X) = \frac{C_0(X)}{\mathrm{Im}\left(C_1(X) \xrightarrow{\partial} C_0(X)\right)}$$

Para $k \in \mathbb{N}$, como $\partial\partial = 0$, entonces $\operatorname{Im}(C_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial} C_k(X)) \subset \operatorname{Ker}\left(C_k(X) \xrightarrow{\partial} C_{k-1}(X)\right)$. Definimos *el grupo de homología de X de orden k* como

$$H_k(X) = \frac{\operatorname{Ker}\left(C_k(X) \xrightarrow{\partial} C_{k-1}(X)\right)}{\operatorname{Im}\left(C_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial} C_k(X)\right)}$$

Ejemplo: Sea $X = \{p\}$, luego $\partial : C_k(X) \to C_{k-1}(X)$ puede ser visto como un homomorfismo $\partial : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $k \in \mathbb{N}$:

- Si k es impar tenemos

  $$\partial\sigma_p = 0,$$

  donde $\sigma_p : \Delta^k \to X$ es el camino constante. Luego $\operatorname{Ker}_k = \mathbb{Z}$ e $\operatorname{Im}_k = \{0\}$.

- Si k es par entonces

  $$\partial\sigma_p = \sigma_p^{k-1} : \Delta^{k-1} \to X$$

  entonces $\operatorname{Ker}_k = \{0\}$ e $\operatorname{Im}_k = \mathbb{Z}$.

Luego, si $k > 0$

$$H_k(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}/\mathbb{Z} & , \text{ si } k \text{ es impar} \\ \{0\} & , \text{ si } k \text{ es par} \end{cases}.$$

Así tenemos la siguiente proposición debido a que $C_0(X) = \mathbb{Z}$.

Proposición 8.4. *Si $X = \{p\}$, entonces*

$$H_k(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ si } k = 0, \\ 0 & , \text{ si } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Definición 8.4 (Espacio contráctil). *Diremos que un espacio topológico es contráctil si tiene el tipo de homotopía de un espacio con un sólo elemento.*

Ejemplo: El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es contráctil para todo $n \in \mathbb{N}$, debido a que tiene el tipo de homotopía de $\overline{\mathbb{B}^n}$, y este último es contráctil.
Observación: Veremos más adelante que espacios con el mismo tipo de homotopía tienen mismos grupos de homología (teorema 8.2).
Merece mencionar la siguiente proposición acerca del grupo $H_0(X)$.

Proposición 8.5. *Sea* $X = \bigsqcup_{i\in\Lambda} X_i$ *donde cada* X_i *es una componente arco-conexa de* X *para todo* $i \in \Lambda$, *entonces*

$$H_0(X) = \bigoplus_{i\in\Lambda} \mathbb{Z} \qquad \text{(Suma directa)} \quad .$$

Demostración. Sea $X = \bigsqcup_{i\in\Lambda} X_i$ donde cada X_i es una componente arco-conexa de X para todo $i \in \Lambda$. Veamos que el grupo de homología $H_0(X)$ está en correspondencia biunívoca con

$$\bigoplus_{i\in\Lambda} \mathbb{Z} = \{f : \Lambda \to \mathbb{Z} / f(i) = 0 \text{ salvo un número finito de } i\text{'s}\} .$$

Para cada $i \in \Lambda$ fijemos un $x_i \in X_i$. Veamos, primero, como todo elemento de $H_0(X)$ se puede expresar. Sea $[c] \in H_0(X)$ donde $c = \sum_{j=1}^{m} n_j \cdot e_{p_j}$ con $p_j \in X$ y $n_j \in \mathbb{Z}$, para todo $j = 1, \ldots, m$. Para cada $i \in \Lambda$ sea

$$F_i = \{j \in \{1, \ldots, m\} : p_j \in X_i\}$$

Como los X_i's son disjuntos y $\{1, \ldots, m\}$ es finito, se sigue que $F_i = \emptyset$ salvo un número finito de i's. Sea $F_i \neq \emptyset$: para cada $j \in F_i$ existe un camino $\alpha_j : [0,1] \to X_i$ que va de x_i a p_j, tenemos que $e_{p_j} - e_{x_i} = \partial\alpha_j$, luego

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in F_i} n_j \cdot e_{p_j} &= \sum_{j\in F_i} n_j \cdot e_{p_j} - \left[\sum_{j\in F_i} n_j\right] e_{x_i} + \left[\sum_{j\in F_i} n_j\right] e_{x_i} \\
&= \sum_{j\in F_i} n_j \cdot \partial\alpha_j + \left[\sum_{j\in F_i} n_j\right] e_{x_i} \\
&= \sum_{j\in F_i} n_j \cdot \partial\alpha_j + m_i \cdot e_{x_i}
\end{aligned}$$

donde $m_i = \sum_{j\in F_i} n_j$, entonces

$$\sum_{j\in F_i} n_j \cdot [e_{p_j}] = m_i \cdot [e_{x_i}] ,$$

así

$$\sum_{j=1}^{m} n_j \cdot [e_{p_j}] = \sum_{i/F_{i\neq\emptyset}} m_i \cdot [e_{x_i}] .$$

Definimos, ahora, la función $A : \bigoplus_{i\in\Lambda} \mathbb{Z} \to H_0(X)$ como

$$A(f) = \sum_{i\in\Lambda} n_i\,[e_{x_i}] \quad , \text{ donde } n_i = f(i),$$

para todo $f \in \bigoplus_{i\in\Lambda} \mathbb{Z}$, está aplicación es un homomorfismo de grupos. El homomorfismo A es sobreyectivo. Veamos que es inyectivo. Sea $f \in \bigoplus_{i\in\Lambda} \mathbb{Z}$ tal que

$$A(f) = 0 \in H_0(X).$$

Recordemos que existe un subconjunto finito $F \subset \Lambda$ tal que $f(i) = 0$ si $i \in \Lambda \setminus F$, así tenemos

$$A(f) = \sum_{i\in F}^{m} n_i \cdot [e_{x_i}] = 0 \quad \text{en } H_0(X)$$

donde $n_i = f(i)$ para todo $i \in F$. Existe una 1-cadena $c \in C_1(X)$ tal que

$$\partial c = \sum_{i\in F} n_i \cdot e_{x_i},$$

las imagenes de los 1-simplexes que forman c están contenidas en las componentes arco-conexas de X, luego podemos dispensar de las cadenas en c que están en algún X_i, donde $i \in \Lambda \setminus F$, así,

$$c = \sum_{i\in F} c_i$$

donde cada c_i es una 1-cadena en X_i para todo $i \in F$, luego tenemos

$$\partial c_i = n_i \cdot e_{x_i} \qquad \text{para todo } i \in F.$$

Como $\varepsilon(\partial c_i) = 0$, tenemos que $n_i = 0$ para todo $i \in F$. Así $f = 0$, esto muestra que A es un homomorfismo inyectivo.
Por lo tanto $A : \bigoplus_{i\in\Lambda} \mathbb{Z} \to H_0(X)$ es un isomorfismo.

$\square$

Ejemplo: Si X es arco-conexo, entonces $H_0(X) = \mathbb{Z}$. Si X tiene 2 componentes arco-conexas entonces $H_0(X) = \mathbb{Z}^2$.

Funciones continuas y homología

Sean $f : X \to Y$ una función continua y $k \in \mathbb{N}$. Por la proposición 8.3 vemos que si $c \in C_k(X)$ es un ciclo, esto es $\partial c = 0$, entonces $f_\#(c)$ también lo es. También, si $c = \partial\alpha$ para algún $\alpha \in C_k(X)$ entonces $f_\#(c) = \partial f_\#(\alpha)$ (esto también es cierto si $k = 0$). Luego podemos definir el operador $f_* : H_k(X) \to H_k(Y)$ como

$$f_*([c]) = [f_\#(c)] \quad , \quad \forall\, [c] \in H_k(X)\ .$$

Esto definición también vale cuando $k = 0$.

8.4. Operador prisma

Definiremos el operador prisma en dos etapas: primero para cadenas afines, y luego para cadenas singulares.

En cadenas afines

Sea Δ^k el simplex afín en $\mathbb{R}^{k+1}$ el cual es la inclusión. Sea $\mathcal{C}$ un conjunto convexo. Dado una secuencia $(v_0, \ldots, v_k)$ de elementos de $\mathcal{C}$, tenemos el k-simplex afín $\sigma : \Delta^k \to \mathcal{C}$ dado por

$$\sigma(t_0, \ldots, t_k) = \sum_{i=0}^{k} t_i v_i \quad , \quad \forall\, t = (t_0, \ldots, t_k) \in \Delta^k.$$

Denotaremos este simplex como $[v_0, \ldots, v_k] = \sigma$. Notemos que $\sigma(e_i) = v_i$, para todo $0 \le i \le k$. Recordemos que cualquier k-simplex afín en $\mathcal{C}$ queda completamente determinado por los valores que toma en $e_0, \ldots, e_k$. Esto es, si $\eta : \Delta^k \to \mathcal{C}$ es un k-simplex afín, entonces

$$\eta(t) = \sum_{i=0}^{k} t_i \cdot \eta(e_i) \quad , \quad \forall\, t \in \Delta^k.$$

También, dado $0 \le i \le k$ recordemos que $[v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_k]$ es el simplex afín $[v_0, \ldots, v_{i-1}, v_i, \ldots, v_k]$, así tenemos

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i [v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_k],$$

donde $v_i = \sigma(e_i)$, para todo $0 \le i \le k$.

Vamos a definir el operador prisma $P : C_k^{\text{aff}}(E) \to C_{k+1}^{\text{aff}}([0,1]\times E)$ primero en k-simplexes afines. Sea $[v_0, \ldots, v_k] = \sigma$, definimos

$$P(\sigma) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j [(0, v_0), \ldots, (0, v_j), (1, v_j), \ldots, v_k].$$

y luego extendemos de forma natural a $C_k^{\text{aff}}(E)$. Sea $i_0 : E \to [0,1] \times E$ definido como

$$i_0(v) = (0, v) \qquad \forall\, v \in E.$$

Análogamente, definimos $i_1 : E \to [0,1] \times E$. Tenemos la siguiente proposición.

Proposición 8.6. *Dado $c \in C_k^{\text{aff}}(E)$, se cumple que*

$$\partial P(c) + P\partial(c) = (i_1)_\#(c) - (i_0)_\#(c).$$

Demostración. Veamos que la identidad se cumple en todo k-simplex afín en X. Sea $\sigma = [v_0, \ldots, v_k]$ un k-simplex afín en X entonces

$$\begin{aligned}
\partial P(\sigma) = {} & [(1, v_0) \ldots (1, v_k)] - [(0, v_0) \ldots (0, v_k)] + \sum_{j=1}^{k} \Big[(0, v_0) \ldots \widehat{(0, v_j)}(1, v_j) \ldots (1, v_k)\Big] \\
& - \sum_{j=0}^{k-1} \Big[(0, v_0) \ldots (0, v_j)\widehat{(1, v_j)} \ldots (1, v_k)\Big] \\
& + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+j} \Big[(0, v_0) \ldots \widehat{(0, v_i)} \ldots (0, v_j)(1, v_j) \ldots (1, v_k)\Big] \\
& - \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=j+1}^{k} (-1)^{i+j} \Big[(0, v_0) \ldots (0, v_j)(1, v_j) \ldots \widehat{(1, v_i)} \ldots (1, v_k)\Big] ,
\end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned}
\partial P(\sigma) = {} & [(1, v_0) \ldots (1, v_k)] - [(0, v_0) \ldots (0, v_k)] \\
& + \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} \Big[(0, v_0) \ldots \widehat{(0, v_i)} \ldots (0, v_j)(1, v_j) \ldots (1, v_k)\Big] \\
& - \sum_{0 \le j < i \le k} (-1)^{i+j} \Big[(0, v_0) \ldots (0, v_j)(1, v_j) \ldots \widehat{(1, v_i)} \ldots (1, v_k)\Big] .
\end{aligned}$$

De otro lado,

$$
\begin{aligned}
P(\partial\sigma) = & \sum_{0\leq j<i\leq k} (-1)^{i+j}\left[(0,v_0)\ldots(0,v_j)(1,v_j)\ldots\widehat{(1,v_i)}\ldots(1,v_k)\right] \\
& -\sum_{0\leq i<j\leq k} (-1)^{i+j}\left[(0,v_0)\ldots\widehat{(0,v_i)}\ldots(0,v_j)(1,v_j)\ldots(1,v_k)\right]
\end{aligned}
$$

entonces

$$\partial P(\sigma)+P\partial(\sigma)=(i_1)_{\#}(\sigma)-(i_0)_{\#}(\sigma)\ .$$

□

En cadenas singulares

Ahora definiremos el operador prisma $P : C_k(X) \to C_{k+1}([0,1]\times X)$ en cadenas singulares en X, donde $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.
Dado σ un k-simplex, sea $\tilde{\sigma} : [0,1]\times\Delta^n \to [0,1]\times X$ el mapeo dado por $\tilde{\sigma}(t,v) = (t,\sigma(v))$ para todo $(t,v)\in[0,1]\times\Delta^k$. Consideremos el operador $(\tilde{\sigma})_{\#} : C_{k+1}([0,1]\times\Delta^k) \to C_{k+1}([0,1]\times X)$, definimos

$$P(\sigma) = (\tilde{\sigma})_{\#}\left(P(\Delta^k)\right)$$

y luego lo extendemos P en cualquier k-cadena en X.
Sabemos que

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma\circ\partial_i$$

donde $\partial_i = [e_0,\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_k]$ para cada $i\in\{0,\ldots,k\}$.

Proposición 8.7. *Dado un k-simplex σ en X se cumple*

$$P(\partial\sigma) = \tilde{\sigma}_{\#}\left(P\left(\partial\Delta^k\right)\right).$$

Demostración. Tenemos que

$$P(\partial\sigma) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^iP(\sigma\circ\partial_i)$$

Como $(\widetilde{\sigma\circ\partial_i})_{\#} = \widetilde{\sigma}_{\#}\circ\left[\widetilde{\partial_i}\right]_{\#} : C_k^{\text{aff}}\left([0,1]\times\Delta^{k-1}\right)\to C_k\left([0,1]\times X\right)$ entonces

$$
\begin{aligned}
P(\sigma\circ\partial_i) &= \widetilde{\sigma}_{\#}\circ\left(\widetilde{\partial_i}\right)_{\#}(P\Delta^{k-1}) \\
&= \widetilde{\sigma}_{\#}\left(P(\partial_i)\right) \quad \text{para cada } i.
\end{aligned}
$$

Así

$$P(\partial\sigma) = \tilde{\sigma}_{\#}\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i P\partial_i\right)$$
$$P(\partial\sigma) = \tilde{\sigma}_{\#}\left(P\left(\partial\Delta^k\right)\right)$$

□

Sean $i_0, i_1 : X \to [0,1] \times X$ las inclusiones definidas como

$$i_0(x) = (0,x) \qquad \text{y} \qquad i_1(x) = (1,x) \quad \forall x \in X.$$

Proposición 8.8. *Dado $c \in C_k(X)$ se cumple*

$$\partial P(c) + P\partial(c) = (i_1)_{\#}(c) - (i_0)_{\#}(c).$$

Demostración. Veamos que la identidad es válida para todo k-simplex en X. Sea σ un k-simplex en X, entonces

$$\begin{aligned}\partial P\sigma &= \partial(\tilde{\sigma}_{\#}(P\Delta^k)) \\ &= \tilde{\sigma}_{\#}(\partial P\Delta^k)\ .\end{aligned}$$

Por la proposición 8.6

$$\partial P\sigma = \tilde{\sigma}_{\#}(-P\partial\Delta^k) + (i_1)_{\#}(\sigma) - (i_0)_{\#}(\sigma)\ ,$$

luego, por la proposición 8.7, tenemos

$$\partial P\sigma = -P\partial\sigma + (i_1)_{\#}(\sigma) - (i_0)_{\#}(\sigma).$$

Así

$$\partial P(c) + P\partial(c) = (i_1)_{\#}(c) - (i_0)_{\#}(c) \quad , \quad \forall c \in_k (X).$$

□

8.5. Homología y tipo de homotopía

Veamos que funciones homotópicas generas mismos operadores en homología.

Proposición 8.9. *Sean $f, g : X \to Y$ aplicaciones continuas y homotópicas, entonces*

$$f_* = g_* : H_k(X) \to H_k(Y)$$

para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demostración. Sea $H : [0,1] \times X \to Y$ una homotopía entre f y g, tenemos que para todo $c \in C_k(X)$

$$\partial P(c) + P\partial(c) = (i_1)_\#(c) - (i_0)_\#(c).$$

Aplicando $H_\#$ tenemos

$$\partial H_\# P(c) + H_\# P\partial(c) = (g)_\#(c) - (f)_\#(c),$$

si $\partial c = 0$ tenemos

$$\partial H_\# P(c) = (g)_\#(c) - (f)_\#(c),$$

esto es,

$$g_*([c]) = f_*([c]).$$

Por lo tanto,

$$f_* = g_* : H_k(X) \to H_k(Y)$$

para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. □

El siguiente resultado será utilizado posteriormente con frecuencia.

Teorema 8.2. *Sean X e Y espacios con el mismo tipo de homotopía entonces para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:*

$$H_k(X) = H_k(Y).$$

Demostración. Existen funciones continuas $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $g \circ f$ es homotópico a Id_X y $f \circ g$ es homotópico a Id_Y. Entonces

$$g_* \circ f_* = \mathrm{Id}_{H_k(X)}$$
$$f_* \circ g_* = \mathrm{Id}_{H_k(X)}$$

para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, esto es, f_* es un isomorfismo de grupos, por lo tanto

$$H_k(X) = H_k(Y).$$

□

8.6. Operador de división baricéntrica

El operador de división baricéntrica será definido en dos etapas, primero para simplexes afines y luego para simplexes singulares.

En simplexes afines:

Definición 8.5 (Baricentro de un simplex afín). *Dado un k-simplex afín $\sigma : \Delta^k \to \mathcal{C}$ en un conjunto convexo $\mathcal{C}$ definimos el baricentro de σ como*

$$b(\sigma) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} \sigma(e_i)$$

Dado $b \in \mathcal{C}$, vamos a definir un operador $K_b : C_k^{\text{aff}}(\mathcal{C}) \to C_{k+1}^{\text{aff}}(\mathcal{C})$ llamado *operador cono en b*. Primero lo definiremos en k-simplex afines en $\mathcal{C}$. Sea σ un k-simplex afín en $\mathcal{C}$, definimos

$$K_b(\sigma) = [b, \sigma(e_0), \ldots, \sigma(e_k)] \ ,$$

y luego lo extendemos a toda k-cadena afín en $\mathcal{C}$.

Proposición 8.10. *Para toda $c \in C_k^{\text{aff}}(\mathcal{C})$ se cumple*

$$\partial K_b(c) + K_b(\partial c) = c.$$

Demostración. Sea $\sigma = [v_0, \ldots, v_k]$ un k-simplex afín en $\mathcal{C}$, entonces

$$\begin{aligned}
\partial K_b(\sigma) &= [v_0, \ldots, v_k] + \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \, [b, v_0, \ldots, \widehat{v_{i-1}}, \ldots, v_k] \\
&= [v_0, \ldots, v_k] - \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \, [b, v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_k] \\
&= [v_0, \ldots, v_k] - \sum_{i=0}^{k} (-1)^i K_b \left([v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_k] \right) \\
&= [v_0, \ldots, v_k] - K_b \left(\partial \sigma \right).
\end{aligned}$$

Así

$$\partial K_b(c) + K_b(\partial c) = c \quad , \quad \forall \, c \in C_k^{\text{aff}}(\mathcal{C}).$$

□

Ahora vamos a definir el operado de división baricéntrica $B : C_k^{\text{aff}}(\mathcal{C}) \to C_k^{\text{aff}}(\mathcal{C})$ inductivamente.

1. Para $k = 0$, el operador $B : C_0^{\text{aff}}(\mathcal{C}) \to C_0^{\text{aff}}(\mathcal{C})$ es la identidad.

2. Para $k \in \mathbb{N}$ definimos $B : C_k^{\text{aff}}(\mathcal{C}) \to C_k^{\text{aff}}(\mathcal{C})$ primero para todo k-simplex afín σ en $\mathcal{C}$ como

   $$B(\sigma) = K_{b(\sigma)} \left(B(\partial \sigma) \right),$$

   y luego lo extendemos para todo $c \in C_k^{\text{aff}}(\mathcal{C})$.

Proposición 8.11. *Para todo* $c \in C_k^{\text{aff}}(\mathcal{C})$ *se cumple*

$$\partial B(c) = B\partial(c).$$

Demostración. Dado $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, si la fórmula es válida para todo k-simplex afín, entonces es válida para toda cadena. Mostraremos por inducción en k. Si $k = 0$ es válida la fórmula ya que B es sólo la identidad. Supongamos que la proposición es válida para un $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sea σ un $(k+1)$-simplex afín en $\mathcal{C}$ entonces

$$\begin{aligned}\partial B(\sigma) &= \partial K_{b(\sigma)}(B\partial\sigma)\\ &= B\partial(\sigma) - K_{b(\sigma)}\partial(B\partial\sigma)\\ &= B\partial(\sigma) - K_{b(\sigma)}((\partial B)\,\partial\sigma)\end{aligned}$$

utilizando la hipótesis inductiva

$$\begin{aligned}\partial B(\sigma) &= B\partial(\sigma) - K_{b(\sigma)}(B\partial(\partial\sigma))\\ &= B\partial(\sigma) - K_{b(\sigma)}(B\partial\partial\sigma)\\ &= B\partial(\sigma).\end{aligned}$$

Así para toda $c \in C_{k+1}^{\text{aff}}(\mathcal{U})$

$$\partial B(c) = B\partial(c).$$

La proposición ha sido mostrada. □

Vamos a definir un operador $T : C_k^{\text{aff}}(\mathcal{C}) \to C_{k+1}^{\text{aff}}(\mathcal{C})$ que nos servirá para obtener una relación entre $B(c)$ y c para cualquier k-simplex afín c en $\mathcal{C}$.

1. Para $k = 0$, definimos $T : C_0^{\text{aff}}(\mathcal{C}) \to C_1^{\text{aff}}(\mathcal{C})$ para cualquier 0-cadena afín c en $\mathcal{C}$ como
$$T(c) = 0.$$
2. Para $k \in \mathbb{N}$, definimos $T : C_k^{\text{aff}}(\mathcal{C}) \to C_{k+1}^{\text{aff}}(\mathcal{C})$ en cualquier k-simplex afín σ en $\mathcal{C}$ como
$$T(\sigma) = K_{b(\sigma)}(\sigma - T(\partial\sigma)),$$
y luego extendemos a toda k-cadena afín en $\mathcal{C}$.

Tenemos la siguiente proposición.

Proposición 8.12. *Sea* $k \in \mathbb{N}$. *Para todo* $c \in C_k^{\text{aff}}(\mathcal{C})$ *se cumple*

$$c - B(c) = T(\partial c) + \partial T(c).$$

Demostración. Dado $k \in \mathbb{N}$, bastará mostrar la fórmula para todo k-simplex afín en $\mathcal{C}$, para que ésta sea válida para toda k-cadena afín en $\mathcal{C}$. La prueba será por inducción en $k \in \mathbb{N}$. Sea $k = 1$ y consideremos un 1-simplex afín σ en $\mathcal{C}$, tenemos

$$\begin{aligned} B(\sigma) &= K_{b(\sigma)}\left(B(\partial\sigma)\right) \\ &= K_{b(\sigma)}\left(\partial\sigma\right) \\ &= \sigma - \partial K_{b(\sigma)}\left(\sigma\right) \end{aligned}$$

como $T(\sigma) = K_{b(\sigma)}(\sigma)$, tenemos

$$B(\sigma) = \sigma - \partial T(\sigma) \ ,$$

esto es,

$$\sigma - B(\sigma) = \partial T(\sigma) + T\partial(\sigma) \ .$$

Ahora, supongamos que la fórmula es válida para algún $k \in \mathbb{N}$. Sea σ un $(k+1)$-simplex afín en $\mathcal{C}$, entonces

$$B(\sigma) = K_{b(\sigma)}\left(B(\partial\sigma)\right)$$

usando la hipótesis inductiva, tenemos

$$\begin{aligned} B(\sigma) &= K_{b(\sigma)}\left(\partial\sigma - \partial T(\partial\sigma)\right) \\ &= K_{b(\sigma)}\partial\left(\sigma - T\partial(\sigma)\right) \\ &= \sigma - T\partial(\sigma) - \partial K_{b(\sigma)}\left(\sigma - T\partial(\sigma)\right) \\ &= \sigma - T\partial(\sigma) - \partial T(\sigma) \ , \end{aligned}$$

esto es,

$$\sigma - B(\sigma) = T\partial(\sigma) + \partial T(\sigma).$$

Luego, para toda $c \in C^{\text{aff}}_{k+1}(\mathcal{C})$ se tiene

$$c - B(c) = T\partial(c) + \partial T(c).$$

Así, la proposición ha sido mostrada. $\square$

Notamos que $B^n : C^{\text{aff}}_0(\mathcal{C}) \to C^{\text{aff}}_0(\mathcal{C})$ es la identidad para todo $n \in \mathbb{N}$ (adoptamos la convención de que $B^0 = \text{Id} : C^{\text{aff}}_0(\mathcal{C}) \to C^{\text{aff}}_0(\mathcal{C})$). Sea $k = 1$, si $\sigma \in C^{\text{aff}}_1(\mathcal{C})$ tiene diámetro $\text{diam}(\sigma)$ entonces cada uno de los 1-simplexes que aparecen en $B(\sigma)$ tiene diámetro a lo más $\frac{1}{2}\text{diam}(\sigma)$, luego para todo $n \in \mathbb{N}$, los simplexes que aparecen en $B^n(\sigma)$ tienen diámetro a lo más

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \text{diam}(\sigma) \ .$$

Mostremos lo siguiente.

Proposición 8.13. *Sea $k \in \mathbb{N}$. Dado un k-simplex afín σ en $\mathcal{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, el diámetro de cualquier k-simplex que aparece en $B^n(\sigma)$ es menor o igual que*

$$\left(\frac{k}{k+1}\right)^n \times \operatorname{diam}(\sigma) .$$

Demostración. La prueba será por inducción en $k \in \mathbb{N}$, ya vimos que cuando $k = 1$ se cumple la proposición. Supongamos que la proposición es válida para algún $k \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\sigma = [v_0, \ldots, v_k, v_{k+1}]$ un $(k+1)$-simplex afín en $\mathcal{C}$, tenemos que $B(\sigma) = K_{b(\sigma)}(B(\partial\sigma))$, esto es,

$$B(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+1} K_{b(\sigma)}(B(\sigma_i))$$

donde $\sigma_i = [v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_{k+1}]$.
Notemos que cada $(k+1)$-simplex η de la cadena $K_{b(\sigma)}(B(\sigma_i))$ tiene como vértices a los vértices de un simplex de $B(\sigma_i)$ y al vértice $b(\sigma)$. Sean u_1 y u_2 dos vértices de η:

- Si u_1 y u_2 están en un simplex de $B(\sigma_i)$ entonces, por hipótesis inductiva

$$\begin{aligned} |u_1 - u_2| &\leq \frac{k}{k+1}\operatorname{diam}(\sigma_i) \\ &\leq \frac{k}{k+1}\operatorname{diam}(\sigma) \\ &\leq \frac{k+1}{k+2}\operatorname{diam}(\sigma). \end{aligned}$$

- Si uno de los vértices es $b(\sigma)$ y otro de los vértices está en un simplex de $B(\sigma_i)$, a partir de

$$|b(\sigma) - v_j| \leq \left|\frac{1}{k+2}\sum_{\nu=0}^{k+1} v_\nu - v_j\right|$$

$$|b(\sigma) - v_j| \leq \left|\frac{1}{k+2}\sum_{\nu=0}^{k+1} (v_\nu - v_j)\right|$$

$$|b(\sigma) - v_j| \leq \left|\frac{1}{k+2}\sum_{\nu=0,\nu\neq j}^{k+1} (v_\nu - v_j)\right|$$

$$|b(\sigma) - v_j| \leq \frac{k+1}{k+2}\operatorname{máx}\{|v_\nu - v_j| : 0 \leq \nu \leq k+1\}$$

$$|b(\sigma) - v_j| \leq \frac{k+1}{k+2}\operatorname{diam}(\sigma)$$

para todo $j = 0, \ldots, k+1$, tenemos que la distancia entre estos vértices es menor o igual $\frac{k+1}{k+2}\text{diam}(\sigma)$.

Así el diámetro de η es menor que $\frac{k+1}{k+2}\text{diam}(\sigma)$. Luego, dado $n \in \mathbb{N}$, el diámetro de cualquier $(k+1)$-simplex que forma $B^n(\sigma)$ tiene diámetro menor o igual que

$$\left(\frac{k}{k+1}\right)^n \times \text{diam}(\sigma) .$$

□

Lema 8.1. *Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sea $\mathcal{C}$ un conjunto convexo, dado un k-simplex afín $\eta : \Delta^k \to \mathcal{C}$ se cumple*

$$T(\eta) = \eta_{\#}\left(T\Delta^k\right).$$

Demostración. La prueba será por inducción en $k \in \mathbb{N}$. Sea $k = 0$. Dado un 0-simplex $\eta : \Delta^0 = \{e_0\} \to \mathcal{C}$ tenemos

$$T(\eta) = 0 = \eta_{\#}\left(T\Delta^0\right)$$

Supongamos que el lema es válido para algún $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sea $\eta : \Delta^{k+1} \to \mathcal{C}$ un $(k+1)$-simplex afín, entonces

$$\begin{aligned} T(\eta) &= K_{b(\eta)}\left(\eta - T(\partial\eta)\right) \\ &= K_{b(\eta)}(\eta) - \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i K_{b(\eta)}\left(T(\eta_i)\right) \end{aligned}$$

donde $\eta_i = \eta \circ \partial_i : \Delta^k \to \mathcal{C}$, por la hipótesis inductiva $T(\eta_i) = (\eta_i)_{\#}\left(T\Delta^k\right)$ para todo $i = 0, \ldots, k+1$. Luego,

$$\begin{aligned} T(\eta) &= K_{b(\eta)}(\eta) - \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i K_{b(\eta)}\left((\eta_i)_{\#}(T\Delta^k)\right) \\ &= K_{b(\eta)}(\eta) - \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i K_{b(\eta)}\left((\eta \circ \partial_i)_{\#}(T\Delta^k)\right) \\ &= K_{b(\eta)}(\eta) - \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i K_{b(\eta)}\left((\eta)_{\#}(T\partial_i)\right) \\ &= K_{b(\eta)}(\eta) - K_{b(\eta)}\left((\eta)_{\#}T\left(\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\partial_i\right)\right) \end{aligned}$$

como $\eta_\# \circ K_b = K_{\eta(b)} \circ \eta_\#$,

$$\begin{aligned}
T(\eta) &= K_{b(\eta)}(\eta) - K_{b(\eta)}\left((\eta)_\# \left(T\left(\partial\Delta^{k+1}\right)\right)\right) \\
&= \eta_\# \left(K_{b(\Delta^{k+1})}\left(\Delta^{k+1}\right)\right) - \eta_\# \left(K_{b(\Delta^{k+1})}\left(T\left(\partial\Delta^{k+1}\right)\right)\right) \\
&= \eta_\# \left(K_{b(\Delta^{k+1})}\left(\Delta^{k+1} - T\left(\partial\Delta^{k+1}\right)\right)\right) \\
&= \eta_\# \left(T\Delta^{k+1}\right).
\end{aligned}$$

Esto termina con la demostración □

En simplexes singulares:

Ahora, vamos a extender de manera natural el operador de división baricéntrica para cadenas en un espacio topológico, y también definiremos su operador compañero que lo denotaremos por S en vez de T.

Definición 8.6. *Sea X un espacio topológico y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:*

1. *Definimos el operador de división baricéntrica $B : C_k(X) \to C_k(X)$ en todo k-simplex σ en X como*

$$B(\sigma) = \sigma_\# \left(B(\Delta^k)\right),$$

y luego lo extendemos a toda k-cadena en X.

2. *También definimos el operador $S : C_k(X) \to C_{k+1}(X)$ en cualquier k-simplex σ en X como*

$$S(\sigma) = \sigma_\# \left(T(\Delta^k)\right),$$

y luego lo extendemos a cualquier k-cadena en X.

El operado baricentro conmuta con el operador borde.

Proposición 8.14. *Sea $k \in \mathbb{N}$. Dada una k-cadena c en X se cumple*

$$\partial B(c) = B\partial(c).$$

Tenemos la siguiente proposición útil.

Proposición 8.15. *Sea $k \in \mathbb{N}$. Dado un k-simplex σ en X se cumple*

$$S(\partial\sigma) = \sigma_\# \left(T(\partial\Delta^k)\right).$$

Demostración. Tenemos

$$S(\partial\sigma) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i S(\sigma_i)$$

donde $\sigma_i = \sigma \circ \partial_i$, entonces

$$\begin{aligned} S(\partial\sigma) &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i(\sigma_i)_{\#}(T\Delta^{k-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i(\sigma)_{\#}\left((\partial_i)_{\#}(T\Delta^{k-1})\right) \end{aligned}$$

por el lema 8.1,

$$\begin{aligned} S(\partial\sigma) &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i(\sigma)_{\#}\left(T(\partial_i)\right) \\ &= \sigma_{\#}\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i T(\partial_i)\right) \\ &= \sigma_{\#}\left(T(\partial\Delta^k)\right) \end{aligned}$$

□

Proposición 8.16. *Sea $k \in \mathbb{N}$. Dado un k-cadena c en X se cumple*

$$c - B(c) = S\partial(c) + \partial S(c).$$

Demostración. Bastará mostrar la proposición para todo k-simplex en X. Sea σ un k-simplex en X. A partir de

$$\Delta^k - B(\Delta^k) = T\partial(\Delta^k) + \partial T(\Delta^k)$$

aplicamos $\sigma_{\#}$, entonces

$$\sigma - B(\sigma) = \sigma_{\#}\left(T\partial\Delta^k\right) + \partial S(\sigma).$$

Por la proposición 8.15 tenemos

$$\sigma - B(\sigma) = S(\partial\sigma) + \partial S(\sigma).$$

Así culmina nuestra demostración. □

8.7. División baricéntrica respecto a un cubrimiento

Consideremos un cubrimiento abierto $\{U, V\}$ de X. Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos

$$C_k^{\mathcal{U}}(X) = \left\{ c = \sum_{i=1}^{m} n_i \sigma_i \in C_k(X) \Big/ \sigma_i \text{ está en } U \text{ ó está en } V \right\},$$

este conjunto es un subgrupo de $C_k(X)$. Tenemos el complejo

$$\cdots \xrightarrow{\partial} C_{k+1}^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\partial} C_k^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\partial} C_{k-1}^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_0^{\mathcal{U}}(X).$$

Observemos que $C_0^{\mathcal{U}}(X) = C_0(X)$.
Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vamos a definir un operador $\mathcal{B} : C_k(X) \to C_k^{\mathcal{U}}(X)$ utilizando el operador baricentro para cadenas afines. Cuando $k = 0$ es sólo la identidad, así que consideraremos que $k \in \mathbb{N}$. Dado $\sigma \in C_k(X)$, tenemos que $\Delta^k \subset \sigma^{-1}(U) \cup \sigma^{-1}(V)$. Como

$$\operatorname{diam}\left(B^n(\Delta^k)\right) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

existe $n(\sigma) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mínimo tal que cada k-simplex que forma $B^n(\Delta^k)$ está en $\sigma^{-1}(U)$ o está en $\sigma^{-1}(V)$, esto es debido a la existencia de un número de Lebesgue para Δ^k relativo al cubrimiento $\{\sigma^{-1}(U), \sigma^{-1}(V)\}$ definimos

$$\mathcal{B}(\sigma) = \sigma_{\#}\left(B^{n(\sigma)}(\Delta^k)\right),$$

y luego lo extendemos a toda $c \in C_k(X)$.

Definimos también el operador $Q : C_k(X) \to C_{k+1}(X)$ en cualquier k-simplex σ en X como

$$Q(\sigma) = \begin{cases} \left(I + B + \cdots + B^{n(\sigma)-1}\right) S(\sigma), & \text{si } n(\sigma) > 0, \\ 0, & \text{si } n(\sigma) = 0, \end{cases}$$

y luego lo extendemos a cualquier k-cadena en X.

Proposición 8.17. *Sea $k \in \mathbb{N}$. Dada una $c \in C_k(X)$ tenemos*

$$c - \mathcal{B}(c) = T_c(\partial c) + \partial Q(c)$$

para algún homomorfismo $T_c : C_{k-1}(X) \to C_k(X)$.

Demostración. Veamos que la fórmula es válida para todo k-simplex σ en X: Si $n(\sigma) = 0$ entonces $Q(\sigma) = 0$ y $Q(\partial\sigma) = 0$ así se cumple la fórmula.

Supongamos que $n(\sigma) > 0$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma - B(\sigma) &= S\partial(\sigma) + \partial S(\sigma) \\ B(\sigma) - B^2(\sigma) &= BS\partial(\sigma) + \partial BS(\sigma) \\ &\cdots\ \cdots \\ B^{n(\sigma)-1}(\sigma) - B^{n(\sigma)}(\sigma) &= B^{n(\sigma)-1}S\partial(\sigma) + \partial B^{n(\sigma)-1}S(\sigma) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \sigma - B^{n(\sigma)}(\sigma) &= T_\sigma(\partial\sigma) + \partial Q(\sigma) \\ \sigma - \mathcal{B}(\sigma) &= T_\sigma(\partial\sigma) + \partial Q(\sigma). \end{aligned}$$

donde $T_\sigma = \left(I + B + \cdots + B^{n(\sigma)-1}\right) \circ S : C_{k-1}(X) \to C_k(X)$. Luego para toda k-cadena c en X se tiene

$$c - \mathcal{B}(c) = T_c(\partial c) + \partial Q(c),$$

donde $T_c : C_{k-1}(X) \to C_k(X)$ es un homomorfismo.
Esto concluye la demostración. $\square$

Dado $c \in C_k(x)$, notemos que:

- Si $\partial c = 0$, entonces $c - \mathcal{B}(c) = \partial Q(c)$, así $\partial\mathcal{B}(c) = 0$.
- Si $c = \partial\alpha$ entonces $\partial\alpha - \mathcal{B}(c) = \partial Q(c)$, esto es, $\mathcal{B}(c) = \partial(\alpha - Q(c))$.

El operador $\mathcal{B}$ lleva k-ciclos en k-ciclos y k-bordes en k-bordes, entonces tenemos una aplicación bien definida $\mathcal{B} : H_k(X) \to H_k^{\mathcal{U}}(X)$. Este operador compuesto con la inclusión $L : H_k^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow H_k(X)$ es la identidad. En efecto, sea $[c] \in H_k(X)$ entonces

$$L\mathcal{B}([c]) = [\mathcal{B}(c)],$$

como $\partial c = 0$ tenemos que $c - \mathcal{B}(c) = \partial Q(c)$, esto es, $[\mathcal{B}(c)] = [c]$. También, la composición $\mathcal{B} \circ L : H_k^{\mathcal{U}}(X) \to H_k^{\mathcal{U}}(X)$ es la identidad. Así tenemos la siguiente proposición.

Proposición 8.18. *Dado $k \in \mathbb{N}$, el operador $\mathcal{B} : H_k(X) \to H_k^{\mathcal{U}}(X)$ es un isomorfismo.*

Que también es válida si $k = 0$. La proposición será útil en lo que sigue, la secuencia de Mayer-Vietoris.

8.8. Secuencia de Mayer-Vietoris

Sean U y V subconjuntos abiertos de X que lo cubren. Denotemos por $\mathcal{U} = \{U, V\}$. Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos

$$C_k^{\mathcal{U}}(X) = \left\{ c = \sum_{i=1}^{m} n_i\sigma_i \in C_k(X) \middle/ \sigma_i \text{ está en } U \text{ ó está en } V \right\}$$

este conjunto es un subgrupo de $C_k(X)$. Tenemos el complejo

$$\cdots \xrightarrow{\partial} C_{k+1}^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\partial} C_k^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\partial} C_{k-1}^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_0^{\mathcal{U}}(X)$$

sus grupos de homología serán denotados como $H_k^{\mathcal{U}}(X)$. Tenemos la secuencia de homomorfismos, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$0 \to C_k(U \cap V) \xrightarrow{i} C_k(U) \oplus C_k(V) \xrightarrow{j} C_k^{\mathcal{U}}(U \cup V) \to 0 \quad , \qquad (8.1)$$

donde el primer homomorfismo es la inclusión $i : C_k(U \cap V) \to C_k(U) \oplus C_k(V)$ definida como $i(c) = (c, c)$ para todo $c \in C_k(U \cap V)$, y el segundo homomorfismo j es definido como $j(c_1, c_2) = c_1 - c_2$, para todo $c_1 \in C_k(U)$ y $c_2 \in C_k(V)$. El segundo homomorfismo es sobreyectivo. Notemos también que $\mathrm{Im}(i) = \mathrm{Ker}(j)$. Esto es, la secuencia (8.1) es exacta.
Si no hay lugar a confusión denotaremos por ∂ al operador $\partial \oplus \partial : C_k(U) \oplus C_k(V) \to C_{k-1}(U) \oplus C_{k-1}(V)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como $\partial \circ i = i \circ \partial$ y $\partial \circ j = j \circ \partial$, tenemos la secuencia exacta

$$H_k(U \cap V) \xrightarrow{i} H_k(U) \oplus H_k(V) \xrightarrow{j} H_k^{\mathcal{U}}(U \cup V)$$

Ahora nuestro objetivo será *conectar* las secuencias del nivel k y del nivel $k-1$ de manera *exacta*, cuando $k > 0$.

Proposición 8.19. *Sea $\{U, V\}$ un cubrimiento abierto de X, entonces para cada $k > 0$ existe un homomorfismo $\delta : H_k^{\mathcal{U}}(X) \to H_{k-1}(U \cap V)$ tal que la secuencia*

$$H_k(U) \oplus H_k(V) \xrightarrow{j} H_k^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\delta} H_{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{i} H_{k-1}(U) \oplus H_{k-1}(V)$$

es exacta.

Demostración. Queremos definir

$$\delta : H_k^{\mathcal{U}}(X) \to H_{k-1}(U \cap V).$$

Sea $[c] \in H_k^{\mathcal{U}}(X)$, esto es $c \in C_k^{\mathcal{U}}(X)$ con $\partial c = 0$. Como la secuencia (8.1) es exacta, existe $\beta \in C_k(U) \oplus C_k(V)$ tal que $j(\beta) = c$. A partir de $\partial c = (\partial \circ j)(\beta) = (j \circ \partial)(\beta)$, tenemos que $\partial\beta \in \operatorname{Ker}\big(j : C_{k-1}(U) \oplus C_{k-1}(V) \to C_{k-1}^{\mathcal{U}}(X)\big)$, nuevamente como (8.1) es exacta, existe un *único* $\alpha \in C_{k-1}(U \cap V)$ tal que $\partial\beta = i(\alpha)$. Si $k-1 > 0$ notemos que $i(\partial\alpha) = \partial \circ i(\alpha) = \partial\partial\beta = 0$, como i es inyectiva, se sigue que $\partial\alpha = 0$. Veamos que

$$\delta([c]) = [\alpha]$$

es una buena definición. Sea $c' \in C_k^{\mathcal{U}}(X)$ tal que $c' - c = \partial\gamma$ donde $\gamma \in C_{k+1}^{\mathcal{U}}(X)$, esto es, $[c'] = [c]$. Tenemos que existe $\beta' \in C_k(U) \oplus C_k(V)$ tal que $c' = j(\beta')$, luego

$$j(\beta') - j(\beta) = \partial\gamma, \tag{8.2}$$

como antes, existe un *<u>único</u>* $\alpha' \in C_{k-1}(U \cap V)$ tal que $\partial\beta' = i(\alpha')$. Sabemos que $\partial\alpha' = 0$. De otro lado, existe $b \in C_{k+1}^{\mathcal{U}}(X)$ tal que $j(b) = \gamma$, entonces en (8.2) tenemos

$$j(\beta' - \beta) = j(\partial b)$$

luego existe $a \in C_{k+1}(U \cap V)$ tal que

$$\beta' - \beta - \partial b = i(a),$$

tomando borde, obtenemos

$$\begin{aligned} \partial(\beta' - \beta) &= i(\partial a) \\ i(\alpha') - i(\alpha) &= i(\partial a) \end{aligned}$$

entonces $\alpha' = \alpha + \partial a$, esto es, $[\alpha'] = [\alpha]$ en $H_k(U \cap V)$. Esto prueba la buena definición de δ.

Veamos que la secuencia dada en la proposición es exacta:

- $\operatorname{Im}\Big(H_k(U) \oplus H_k(V) \xrightarrow{j} H_k^{\mathcal{U}}(X)\Big) = \operatorname{Ker}\Big(H_k^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\delta} H_{k-1}(U \cap V)\Big)$:

  Sea $([c_1],[c_2]) \in H_k(U) \oplus H_k(V)$ entonces $j([c_1],[c_2]) = [c_1 - c_2]$ en $H_k^{\mathcal{U}}(X)$, luego

  $$\delta\left(j([c_1],[c_2])\right) = [0]\ ,$$

  ya que $j(c_1,c_2) = c_1 - c_2$ y $\partial(c_1,c_2) = (0,0) = i(0)$. Ahora, sea $[c] \in \operatorname{Ker}\big(\delta : H_k^{\mathcal{U}}(X) \to\ H_{k-1}(U \cap V)\big)$ entonces, usando la notación para la definición de $\delta([c]) = [\alpha]$, tenemos que $\alpha = \partial\alpha_1$, donde $\alpha_1 \in C_k(U \cap V)$. Como $i(\alpha) = \partial\beta$ entonces $(i \circ \partial)(\alpha_1) = \partial\beta$, esto es $(\partial \circ i)(\alpha_1) = \partial\beta$. Sea $[b] = [\beta - i(\alpha_1)] \in H_k(U) \oplus H_k(V)$ entonces

  $$j([b]) = [c].$$

- $\mathrm{Im}\left(H_k^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\delta} H_{k-1}(U \cap V)\right) = \mathrm{Ker}\left(H_{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{i} H_{k-1}(U) \oplus H_{k-1}(V)\right)$:

  Sea $[c] \in H_k^{\mathcal{U}}(X)$ entonces, usando la notación de la definición de $\delta([c]) = [\alpha]$, tenemos que $i(\alpha) = \partial\beta$, luego,

$$(i \circ \delta)([c]) = [0].$$

  Ahora sea $[\alpha] \in \mathrm{Ker}\left(H_{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{i} H_{k-1}(U) \oplus H_{k-1}(V)\right)$, entonces $i(\alpha) = \partial\beta$ para algún $\beta \in C_k(U) \oplus C_k(V)$. Sea $c = j(\beta) \in C_k^{\mathcal{U}}(X)$, entonces $\partial c = j(\partial\beta) = (j \circ i)(\alpha) = 0$ y

$$\delta([c]) = [\alpha].$$

Finalmente, por la proposición 8.18 podemos reemplazar $H_k^{\mathcal{U}}(X)$ por $H_k(X)$. Esto culmina la demostración. □

8.9. Homología reducida

La homología reducida se define de la siguiente manera. Consideremos el complejo de cadenas:

$$\cdots \xrightarrow{\partial} C_2(X) \xrightarrow{\partial} C_1(X) \xrightarrow{\partial} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

donde $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ es definida como

$$\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} n_i\sigma_i\right) = \sum_{i=1}^{m} n_i \ .$$

Definimos el grupo de homología reducida de X de orden 0 como

$$\tilde{H}_0(X) = \frac{\mathrm{Ker}(\varepsilon)}{\mathrm{Im}\left(C_1(X) \xrightarrow{\partial} C_0(X)\right)}$$

y para cada $k > 0$ definimos el grupo de homología reducida de X de orden k como

$$\tilde{H}_k(X) = H_k(X).$$

Notemos que $\tilde{H}_0(X)$ tiene una relación con $H_0(X)$.

Proposición 8.20. *Sea $X = \bigsqcup_{i\in\Lambda} X_i$ donde cada X_i es una componente arco-conexa de X. Dado $i_0 \in \Lambda$, sea $\Gamma = \Lambda \setminus \{i_0\}$ entonces*

$$\tilde{H}_0(X) = \bigoplus_{i\in\Gamma} \mathbb{Z}$$

Demostración. Recordemos que

$$H_0(X) = G = \{f : \Lambda \to \mathbb{Z} / f(i) = 0 \text{ salvo un número finito de } i\text{'s}\}$$

Más precisamente,

$$H_0(X) = \bigoplus_{i\in\Lambda} \mathbb{Z} \qquad \text{suma directa de } \mathbb{Z}\text{'s.}$$

Para cada $i \in \Lambda$ sea $x_i \in X_i$.
Sea $i_0 \in \Lambda$ fijo y $\Gamma = \Lambda \setminus \{i_0\}$: definimos $A : \bigoplus_{i\in\Gamma} \mathbb{Z} \to \tilde{H}_0(X)$ como

$$A(f) = \left(-\sum_{i\in\Gamma} f(i)\right) [e_{x_{i_0}}] + \sum_{i\in\Gamma} f(i) [e_{x_i}]$$

entonces A es una biyección, por lo tanto,

$$\tilde{H}_0(X) = \bigoplus_{i\in\Gamma} \mathbb{Z}$$

□

Ejemplo: Si $\tilde{H}_0(X) = \mathbb{Z}$ entonces $H_0(X) = \mathbb{Z}^2$, esto es, el espacio X tiene 2 componentes arco-conexas.

Mayer-Vietoris en homología reducida

Sea $\{U, V\}$ un cubrimiento abierto de X con $U \cap V \neq \emptyset$, tenemos la secuencias exactas

$$0 \to C_0(U \cap V) \xrightarrow{i} C_0(U) \times C_0(V) \xrightarrow{j} C_0(X) \to 0$$
$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathbb{Z} \to 0$$

como $i \circ \varepsilon = (\varepsilon \times \varepsilon) \circ i$ y $\varepsilon \circ j = j \circ (\varepsilon \times \varepsilon)$ tenemos la secuencia exacta la secuencia exacta

$$\tilde{H}_0(U \cap V) \xrightarrow{i} \tilde{H}_0(U) \times \tilde{H}_0(V) \xrightarrow{j} \tilde{H}_0(X).$$

Utilizando homología reducida tenemos un resultado análogo al teorema de Mayer-Vietoris.

Proposición 8.21. *Sea $\{U, V\}$ un cubrimiento abierto de X con $U \cap V \neq \emptyset$, entonces para cada $k > 0$ existe un homomorfismo $\delta : \tilde{H}_k(X) \to \tilde{H}_{k-1}(U \cap V)$ tal que la secuencia*

$$\tilde{H}_k(V) \oplus \tilde{H}_k(V) \to \tilde{H}_k(X) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_{k-1}(U \cap V) \to \tilde{H}_{k-1}(U) \oplus \tilde{H}_{k-1}(V)$$

es exacta.

Demostración. Si $k > 1$ ya tenemos que la secuencia dada es exacta, debido que los grupos de homología reducida coinciden con los de homología singular. Así, que consideraremos $k = 1$.

Para $c \in C_1(X)$ con $\partial c = 0$ existe $\beta = (b_1, b_2) \in C_1(U) \times C_1(V)$ tal que $c = b_1 - b_2$ a partir de la secuencia exacta

$$0 \to C_1(U \cap V) \xrightarrow{i} C_1(U) \times C_1(V) \xrightarrow{j} C_1(X) \to 0,$$

luego $\partial b_1 = \partial b_2$. Tenemos que $\alpha = \partial b_1 \in C_0(U \cap V)$. Notemos que no sabemos si $b_1 \in C_1(U \cap V)$, pero si que $\varepsilon(\alpha) = 0$. Si $\beta' = (b_1', b_2') \in C_1(X)$ satisface $j(\beta') = c$ y $\alpha' \in C_0(U \cap V)$ es tal que $i(\alpha') = (\partial \oplus \partial)\beta$, tenemos que

- $\varepsilon(\alpha') = 0$.
- De $j(\beta - \beta') = 0$ existe $a \in C_1(X)$ tal que $i(a) = \beta - \beta'$, esto es $a = b_1 - b_1'$ entonces

$$\begin{aligned} \partial a &= \partial(b_1 - b_1') \\ \partial a &= \alpha - \alpha' \end{aligned}$$

  así podemos definir $\delta : \tilde{H}_1(X) \to \tilde{H}_0(U \cap V)$ de forma análoga para la homología sin reducir, esto es,

$$\delta([c]) = [\alpha] \in \tilde{H}_0(U \cap V) \qquad \forall\ [c] \in \tilde{H}_1(X).$$

Que la secuencia dada es exacta es mostrada de manera análoga a homología sin reducir. Veamos

- $\operatorname{Im}\left(\tilde{H}_1(U) \oplus \tilde{H}_1(V) \xrightarrow{j} \tilde{H}_1^{\mathcal{U}}(X)\right) = \operatorname{Ker}\left(\tilde{H}_1^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_0(U \cap V)\right)$:

  Sea $([c_1], [c_2]) \in H_1(U) \oplus \tilde{H}_1(V)$ entonces $j([c_1], [c_2]) = [c_1 - c_2]$ en $\tilde{H}_1^{\mathcal{U}}(X)$, luego
$$\delta\left(j([c_1], [c_2])\right) = [0]$$
  ya que $j(c_1, c_2) = c_1 - c_2$ y $\partial(c_1, c_2) = (0, 0) = i(0)$. Ahora, sea $[c] \in \operatorname{Ker}\left(\delta : \tilde{H}_1^{\mathcal{U}}(X) \to \tilde{H}_0(U \cap V)\right)$ entonces, usando la notación para la

definición de $\delta([c]) = [\alpha]$, tenemos $\alpha = \partial\alpha_1$, donde $\alpha_1 \in C_1(U \cap V)$. Como $i(\alpha) = \partial\beta$ entonces $(i \circ \partial)(\alpha_1) = \partial\beta$ esto es $(\partial \circ i)(\alpha_1) = \partial\beta$. Sea $[b] = [\beta - i(\alpha_1)] \in \tilde{H}_1(U) \oplus \tilde{H}_1(V)$ entonces

$$j([b]) = [c].$$

- $\mathrm{Im}\left(\tilde{H}_1^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_0(U \cap V)\right) = \mathrm{Ker}\left(\tilde{H}_0(U \cap V) \xrightarrow{i} \tilde{H}_0(U) \oplus \tilde{H}_0(V)\right)$:

  Sea $[c] \in \tilde{H}_1^{\mathcal{U}}(X)$ entonces, usando la notación de la definición de $\delta([c]) = [\alpha]$, tenemos que $i(\alpha) = \partial\beta$, luego,

  $$(i \circ \delta)([c]) = [0].$$

  Ahora sea $[\alpha] \in \mathrm{Ker}\left(\tilde{H}_0(U \cap V) \xrightarrow{i} \tilde{H}_0(U) \oplus \tilde{H}_0(V)\right)$, entonces $i(\alpha) = \partial\beta$ para algún $\beta \in C_1(U) \oplus C_1(V)$. Sea $c = j(\beta) \in C_1^{\mathcal{U}}(X)$, entonces $\partial c = j(\partial\beta) = (j \circ i)(\alpha) = 0$ y

  $$\delta([c]) = [\alpha].$$

$\square$

Ejemplo 1: Grupos de homología de $\mathbb{S}^1$.

Utilizando la secuencia de Mayer-Vietoris para $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{\mathbf{n}\}$ y $V = \mathbb{S}^1 \setminus \{\mathbf{s}\}$ tenemos

$$0 \oplus 0 \to \tilde{H}_k(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{i} 0 \oplus 0 \quad , \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

como $U \cap V$ tiene el tipo de homotopía de dos puntos, tenemos que $\tilde{H}_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ y para $k > 1$, $\tilde{H}_k(\mathbb{S}^1) = 0$.

Ejemplo 2: Grupos de homología de $\mathbb{S}^2$.

Sean $U = \mathbb{S}^2 \setminus \{\mathbf{n}\}$ y $V = \mathbb{S}^2 \setminus \{\mathbf{s}\}$, utilizando la secuencia de Mayer-Vietoris tenemos

$$0 \oplus 0 \to \tilde{H}_k(\mathbb{S}^2) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{i} 0 \ominus 0 \quad , \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

como $U \cap V$ tiene el tipo de homotopía de $\mathbb{S}^1$ tenemos $\tilde{H}_1(\mathbb{S}^2) = 0$, $\tilde{H}_2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$ y si $k > 2$ se tiene que $\tilde{H}_k(\mathbb{S}^2) = 0$.

Ejemplo 3: Grupos de homología de $\mathbb{S}^n$, cuando $n \geq 1$.

Como antes tenemos que para todo $k > 0$:

$$\tilde{H}_k(\mathbb{S}^n) = \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}).$$

Por inducción en $n \in \mathbb{N}$ se muestra que

$$\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ si } i = n\,, \\ 0 & , \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Capítulo 9

Teorema de Jordan-Brouwer y teoremas de invariancia

En este capítulo veremos un teorema de separación como, también, uno de no separación para mostrar el teorema de Jordan-Brouwer, teorema que generaliza el teorema de la curva de Jordan. También veremos los teoremas de invariancia de dominio y de invariancia de la dimensión.

9.1. Teorema de no separación

Empecemos con un teorema de no separación general.

Proposición 9.1. *Dado $k \in \mathbb{N}$. Sea $n \geq k$, si $f : \overline{B^k_{(0;1)}} \to \mathbb{S}^n$ es un encaje topológico entonces $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus \mathrm{Im}(f)) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Demostración. La prueba será por inducción en $k \in \mathbb{N}$.

- Sea $k = 1$. Dado $n \geq 1$ y $f : \overline{B^1_{(0;1)}} \to \mathbb{S}^n$ un encaje topológico. Sean $A = f([-1, 0])$ y $B = f([0, 1])$, tenemos los abiertos $U = \mathbb{S}^n \setminus A$ y $V = \mathbb{S}^n \setminus B$ en $\mathbb{S}^n$. Notemos que $U \cap V = \mathbb{S}^n \setminus \mathrm{Im}(f)$ y $U \cup V = \mathbb{S}^n \setminus \{p\}$, donde $p = f(0)$. Usando la secuencia de Mayer-Vietoris para homología reducida tenemos para todo $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

  $$\tilde{H}_{i+1}(\mathbb{S}^n \setminus \{p\}) \to \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus \mathrm{Im}(f)) \to \tilde{H}_i(U) \oplus \tilde{H}_i(V) \to \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus \{p\})$$

  Como $\mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ es contráctil

  $$0 \to \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus \mathrm{Im}(f)) \to \tilde{H}_i(U) \ominus \tilde{H}_i(V) \to 0$$

  Afirmación: *$\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus \mathrm{Im}(f))$ es trivial.*
  Supongamos que $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus \mathrm{Im}(f))$ no es trivial. Sea $[c] \neq 0$ en $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus$

$\mathrm{Im}(f))$. Entonces $[c] \neq 0$ en $\tilde{H}_i(U)$ o $[c] \neq 0$ en $\tilde{H}_i(V)$. Supongamos que $[c] \neq 0$ en $\tilde{H}_i(V)$, luego $[c] \neq 0$ en $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus f([0,1/2]))$ o $[c] \neq 0$ en $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus f([1/2,1]))$, continuando así, obtenemos un colección numerable de intervalos encajantes $\{I_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ en $[-1,1]$ con $l(I_\nu) = \frac{1}{2^\nu}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$[c] \neq 0 \text{ en } \tilde{H}_i\left(\mathbb{S}^n \setminus f(I_\nu)\right)$$

Sea $t_0 \in \bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} I_\nu$. Tenemos que $\mathbb{S}^n \setminus \{f(t_0)\}$ es contráctil, luego, $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus \{f(t_0)\}) = 0$ para todo $i \geq 0$. Así

$$c = \partial\beta$$

donde β es una $(i+1)$-cadena en $\mathbb{S}^n \setminus \{f(t_0)\}$. Sea $\varepsilon = \mathrm{dis}(f(t_0), \beta) > 0$ la distancia entre $f(t_0)$ y la unión de los $(i+1)$-simplexes que conforman β. Por continuidad de f en t_0 existe $\delta > 0$ tal que si $t \in [-1,1]$ con $|t - t_0| < \delta$ entonces

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

Existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^\nu} < \delta$, luego

$$\beta \in C_{i+1}\left(\mathbb{S}^n \setminus f(I_\nu)\right)$$

y $\partial\beta = c$, esto es,

$$[c] = 0 \text{ en } \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus f(I_\nu)).$$

lo que es una contradicción con la construcción de I_ν.

Así $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus \mathrm{Im}(f)) = 0$.

- Supongamos que la proposición es válida para algún $k \in \mathbb{N}$. Sea $n \geq (k+1)$ y $f : \overline{B^{k+1}_{(0;1)}} \to \mathbb{S}^n$ es un encaje topológico. Reemplacemos $\overline{B^{k+1}_{(0;1)}}$ por $[0,1]^{k+1}$, así tenemos un encaje topológico $f : [0,1]^{(k+1)} \to \mathbb{S}^n$ con $(k+1) \leq n$. Sean $A = [0,1/2] \times [0,1]^k$ y $B = [1/2,1] \times [0,1]^k$, tenemos los abiertos $U = \mathbb{S}^n \setminus A$ y $V = \mathbb{S}^n \setminus B$, notemos que tanto A como B son homeomorfos a $\overline{B^{k+1}_{(0;1)}}$. Tenemos que $U \cap V = \mathbb{S}^n \setminus \mathrm{Im}(f)$ y $U \cup V = \mathbb{S}^n \setminus f(\{1/2\} \times [0,1]^k)$. Utilizando la secuencia de Mayer-Vietoris para homología reducida, tenemos para todo $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\tilde{H}_{i+1}(U \cup V) \to \tilde{H}_i(U \cap V) \to \tilde{H}_i(U) \oplus \tilde{H}_i(V) \to \tilde{H}_i(U \cup V)$$

por hipótesis inductiva $\tilde{H}_{i+1}(U \cup V) = 0 = \tilde{H}_i(U \cup V)$, así tenemos

$$0 \to \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus \mathrm{Im}(f)) \to \tilde{H}_i(U) \oplus \tilde{H}_i(V) \to 0.$$

Afirmación: $H_i(\mathbb{S}^n \setminus \mathrm{Im}(f))$ *es trivial.*
Supongamos que $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus \mathrm{Im}(f))$ no es trivial. Sea $[c] \neq 0$ en $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus \mathrm{Im}(f))$. Entonces $[c] \neq 0$ en $\tilde{H}_i(U)$ o $[c] \neq 0$ en $\tilde{H}_i(V)$. Supongamos que $[c] \neq 0$ en $\tilde{H}_i(U)$, luego $[c] \neq 0$ en $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus f([0,1/2] \times [0,1/2] \times [0,1]^{k-1}))$ o $[c] \neq 0$ en $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus f([1/2,1] \times [1/2,1] \times [0,1]^{k-1})))$, continuando así, obtenemos un colección numerable de bloques encajantes $\{I_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ en $[0,1]^{k+1}$ tal que $\mathrm{diam}(I_\nu) \to 0$ cuando $n \to \infty$, y para todo $\nu \in \mathbb{N}$:

$$[c] \neq 0 \text{ en } \tilde{H}_i\left(\mathbb{S}^n \setminus f(I_\nu)\right)$$

Sea $x_0 \in \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} I_\nu$. Tenemos que $\mathbb{S}^n \setminus \{f(x_0)\}$ es contráctil, luego, $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus \{f(x_0)\}) = 0$ para todo $i \geq 0$. Así

$$c = \partial\beta$$

donde β es una $(i+1)$-cadena en $\mathbb{S}^n \setminus \{f(x_0)\}$. Sea $\varepsilon = \mathrm{dis}(f(x_0), \beta) > 0$ la distancia entre $f(t_0)$ y la unión de los $(i+1)$-simplexes que conforman β. Por continuidad de f en x_0 existe $\delta > 0$ tal que si $x \in [0,1]^{k+1}$ con $|x - x_0| < \delta$ entonces

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{diam}(I_\nu) < \delta$, luego

$$\beta \in C_{i+1}\left(\mathbb{S}^n \setminus f(I_\nu)\right)$$

y $\partial\beta = c$, esto es,

$$[c] = 0 \text{ en } \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus f(I_\nu)).$$

lo que es una contradicción con la construcción de I_ν. Por lo tanto $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus \mathrm{Im}(f))$ es trivial.

Esto concluye la demostración. □

Tenemos los resultados principales de la sección.

Teorema 9.1 (Teorema de no separación). *Sea $B \subset \mathbb{S}^n$ un conjunto homeomorfo a $\overline{B^n_{(0;1)}}$, donde $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathbb{S}^n \setminus B$ es arco-conexo.*

Demostración. Por la proposición anterior con $i = 0$: si $k = n$, tenemos que $\mathbb{S}^n \setminus S$ tiene sólo una componente. □

Teorema 9.2 (Teorema de no separación). *Sea $B \subset \mathbb{S}^n$ un conjunto homeomorfo a $\overline{B^{n-1}_{(0;1)}}$, donde $n \geq 2$, entonces $\mathbb{S}^n \setminus B$ es arco-conexo.*

Demostración. Nuevamente, por la proposición anterior con $i = 0$: si $k = n - 1$ tenemos que $\mathbb{S}^n \setminus S$ tiene sólo una componente. □

9.2. Teorema de separación

Comenzamos con una proposición útil para el teorema de separación.

Proposición 9.2. *Dados $0 < k < n$, sea $A_k \subset \mathbb{S}^n$ un conjunto homeomorfo a $\mathbb{S}^k$. Denotemos por $A_{k-1} = D_1 \cap D_2$ es subespacio homemorfo $\mathbb{S}^{k-1}$, donde D_1 y D_2 son homeomorfos a $\overline{\mathbb{B}}^k$ y $D_1 \cup D_2 = A_k$. Entonces para todo $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:*

$$\tilde{H}_i\left(\mathbb{S}^n \setminus A_k\right) = \tilde{H}_{i+1}\left(\mathbb{S}^n \setminus A_{k-1}\right).$$

Demostración. Sean $U = \mathbb{S}^n \setminus D_1$ y $V = \mathbb{S}^n \setminus D_2$, usando la secuencia de Mayer-Vietoris para homología reducida, como U y V son contráctiles, tenemos

$$0 \oplus 0 \to \tilde{H}_{i+1}\left(\mathbb{S}^n \setminus A_{k-1}\right) \to \tilde{H}_i\left(\mathbb{S}^n \setminus A_k\right) \to 0 \oplus 0$$

debido a que $U \cap V = \mathbb{S}^n \setminus A_k$ y $U \cup V = \mathbb{S}^n \setminus A_{k-1}$. El resultado ha sido demostrado. □

Teorema 9.3 (Teorema de separación). *Sea $A \subset \mathbb{S}^n$ un subconjunto homeomorfo a $\mathbb{S}^{n-1}$, donde $n \geq 2$, entonces $\mathbb{S}^n \setminus A$ tiene dos componentes.*

Demostración. Usando la notación anterior de la proposición anterior, coloquemos $A_{n-1} = A$ entonces

$$\tilde{H}_0\left(\mathbb{S}^n \setminus A_{n-1}\right) = \tilde{H}_1\left(\mathbb{S}^n \setminus A_{n-2}\right) = \tilde{H}_2\left(\mathbb{S}^n \setminus A_{n-3}\right) = \cdots = \tilde{H}_{n-1}\left(\mathbb{S}^n \setminus A_0\right)$$

como $S^n \setminus A_0$ tiene el mismo tipo de homotopía que $\mathbb{S}^{n-1}$ se tiene

$$\tilde{H}_0\left(\mathbb{S}^n \setminus A_{n-1}\right) = \mathbb{Z}$$

luego $\mathbb{S}^n \setminus A_{n-1}$ tiene dos componentes. □

El resultado anterior vale también si $n = 1$.

9.3. Teorema de Jordan-Brouwer

Ahora veamos la generalización del teorema de la curva de Jordan.

Teorema 9.4 (Teorema de Jordan-Brouwer). *Sea $S \subset \mathbb{S}^n$ un subconjunto homeomorfo a $\mathbb{S}^{n-1}$, donde $n \geq 2$. Entonces $\mathbb{S}^n \setminus S = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ donde Ω_1 y Ω_2 son dominios de $\mathbb{S}^n$ tales que $\partial\Omega_1 = \partial\Omega_2 = S$.*

Demostración. Tenemos que $\mathbb{S}^n \setminus S = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ donde Ω_1 y Ω_2 son dominios de $\mathbb{S}^n$. Faltaría probar que $\partial\Omega_1 = S = \partial\Omega_2$. Veamos que $\partial\Omega_1 = S$. Sea $x \in \partial\Omega_1$ entonces $x \in S$, debido a que $\overline{\Omega} \subset \Omega_1 \cup S$. Esto muestra que $\partial\Omega_1 \subset S$. Ahora, sea $x \in S$. Dado $V \subset \mathbb{S}^n$ una vecindad abierta de x. Sea $S = B_1 \cup B_2$, donde B_1 y B_2 son homeomorfos a la bola cerrada $\overline{B^{n-1}_{(0;1)}}$, su intersección $B_1 \cap B_2$ es homeomorfa a $\mathbb{S}^{n-2}$ y $B_1 \subset V$. Como B_2 no separa $\mathbb{S}^n$, tenemos que $\mathbb{S}^n \setminus B_2$ es conexo por caminos. Sean $a \in \Omega_1$ y $b \in \Omega_2$, existe un camino $\alpha : [0,1] \to \mathbb{S}^n \setminus B_2$ en $\mathbb{S}^n \setminus B_2$ que une a con b. Como $a \in \Omega_1$ y $b \notin \Omega_1$ existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $\alpha(t_0) = x_0 \in \partial\Omega_1$. De $\partial\Omega_1 \subset B_1 \cup B_2$, tenemos que $x_0 \in B_1$. De $B_1 \subset V$ tenemos que $x_0 \in V$. Como $x_0 \in \partial\Omega_1$, existe $x_1 \in \Omega_1 \cap V$. Así $\Omega_1 \cap V \neq \emptyset$. Esto es, $x \in \overline{\Omega_1}$. Como $x \notin \Omega_1$ tenemos que $x \in \partial\Omega_1$. Esto muestra que $S \subset \partial\Omega_1$. Análogamente se muestra que $\partial\Omega_2 = S$. Esto concluye la demostración. □

9.4. Invariancia de dominio

Veamos una aplicación del teorema de Jordan-Brouwer.

Teorema 9.5 (Invariancia de dominio). *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua e inyectiva definida en un dominio de $\mathbb{R}^n$, donde $n \geq 1$, entonces $f(U)$ es un dominio en $\mathbb{R}^n$*

Demostración. Si $n = 1$ entonces U es un intervalo abierto, así $f(U)$ es un intervalo abierto.
Sea $n \geq 2$. Dado $x \in U$ existe $\delta > 0$ tal que $\overline{B_{[x;\delta]}} = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq \delta\} \subset U$, veamos que $f\left(B_{(x;\delta)}\right)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$. Tenemos el homeomorfismo $f : \partial B_{(x;\delta)} \to S = f(B_{(x;\delta)}) \subset \mathbb{R}^n$. Como S es homeomorfo a la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$, con $n \geq 2$, por el teorema de Jordan-Brouwer, tenemos $\mathbb{R}^n \setminus S = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ donde Ω_1 y Ω_2 son dominios en $\mathbb{R}^n$, y cualquiera de los dominios tiene como borde S. Como $f(B_{(x;\delta)})$ es conexo tenemos que $f(B_{(x;\delta)}) \subset \Omega_1$ o $f(B_{(x;\delta)}) \subset \Omega_2$. Supongamos, por ejemplo, que $f(B_{(x;\delta)}) \subset \Omega_1$. Tenemos que $\mathbb{R}^n \setminus f\left(\overline{B_{(x;\delta)}}\right)$ es conexo y

$$\mathbb{R}^n \setminus f\left(\overline{B_{(x;\delta)}}\right) = \left[\Omega_1 \setminus f\left(\overline{B_{(x;\delta)}}\right)\right] \sqcup \Omega_2 \ .$$

entonces $\Omega_1 \subset f\left(\overline{B_{(x;\delta)}}\right) = f\left(B_{(x;\delta)}\right) \sqcup S$. Luego $\Omega_1 \subset f\left(B_{(x;\delta)}\right)$. Así $f(B_{(x;\delta)}) = \Omega_1$ es abierto.

Como para todo $x \in U$, existe $\delta_x > 0$ tal que $\overline{B_{(0;\delta_x)}} \subset U$, entonces

$$f(U) = \bigcup_{x \in U} f\left(B_{(x;\delta_x)}\right) \quad \text{es abierto y conexo.}$$

Esto termina la demostración. □

9.5. Invariancia de la dimensión

Ahora, veamos una aplicación del teorema de invariancia de dominio.

Teorema 9.6 (Invariancia de la dimensión). *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^m \to V \subset R^n$ un homomorfismo entre abiertos U y V, entonces $m = n$.*

Demostración. Supongamos, por ejemplo, que $m > n$ entonces tenemos la inclusión continua $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$h(y) = (y, 0) \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n,$$

entonces $h \circ f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua e inyectiva. Luego, por le teorema de la invariancia de dominio, $h(f(U))$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, lo que es una contradicción. Análogamente, no se puede tener que $m < n$. Por lo tanto $m = n$. $\square$

Apéndice 1: Algunos resultados topológicos

Veamos que las componentes del complemento de un cerrado en la esfera son conexas por caminos[1].

Proposición 9.3. *Sea $K \subset \mathbb{S}^2$ un subconjunto compacto y consideremos una componente C de $\mathbb{S}^2 \setminus K$, entonces C es conexa por caminos.*

Demostración. Sea $p \in C$ y consideremos

$$D = \{q \in \mathbb{S}^2 \setminus K : \exists \text{ un camino } \alpha \text{ en } \mathbb{S}^2 \setminus K \text{ que va de } p \text{ a } q\}$$

Vamos a mostrar que $D = C$.

1. El conjunto D es abierto, ya que si $q \in D$, entonces $q \in \mathbb{S}^2 \setminus K$. Luego existe una vecindad abierta $V \subset \mathbb{S}^2 \setminus K$ de q que es conexa por caminos; entonces $V \subset D$.

2. El complemento de D en $\mathbb{S}^2 \setminus K$ es abierto. En efecto, existe una vecindad abierta $V \subset \mathbb{S}^2 \setminus K$ de q que es conexa por caminos. Esta vecindad no interseca D, ya que si interseca D, tendríamos un camino en $\mathbb{S}^2 \setminus K$ que va de p a q, pero $q \notin D$, así $C \setminus D$ es abierto.

Tenemos $C = D \cup (C \setminus D)$ y $p \in D$, como C es conexo, tenemos que $D = C$. Así C es conexo por caminos. $\square$

El siguiente resultado muestra que un camino cerrado que es homotópico por caminos cerrados a un camino constante, esto es, no necesariamente todos los caminos tienen el mismo punto inicial (-final), entonces la curva cerrada es homotópica con extremos fijos a un camino constante.

Proposición 9.4. *Sea α un lazo en $x_0 \in X$. Si α es homotópica al camino constante e_{x_1} por caminos cerrados entonces $[\alpha] = [e_{x_0}]$.*

[1]La propiedad de que las componentes de un espacio topológico son arco-conexas la tiene cualquier espacio que sea localmente conexo por caminos.

Demostración. Sea $H : [0,1]\times[0,1] \to X$ una homotopía de caminos cerrados entre α y e_{x_1}, así

$$H(0,t) = \alpha(t) \quad \forall\, t \in [0,1],$$
$$H(1,t) = e_{x_1} \quad \forall\, t \in [0,1],$$

para cada $s \in [0,1]$: $t \in [0,1] \mapsto H(s,t)$ es un camino cerrado.

Consideremos el mapeo $G : [0,1] \times [0,1] \to X$ dado por

$$G(t,s) = \begin{cases} H(3s\cdot t, 0) & t \in [0,1/3] \\ H(s, 3t-1) & t \in [1/3, 2/3] \\ H\left(3s\cdot(1-t), 0\right) & t \in [2/3, 1] \end{cases}$$

entonces G es una homotopía con extremos fijos entre $e_{x_0}*\alpha*e_{x_0}$ y $\gamma*e_{x_1}*\gamma^{-1}$, donde $\gamma(s) = H(s,0)$, $s \in [0,1]$. Como $\gamma*e_{x_1}*\gamma^{-1} \sim (\gamma*e_{x_1})*\gamma^{-1} \sim \gamma*\gamma^{-1} \sim e_{x_0}$, tenemos por transitividad que $\alpha \sim e_{x_0}$. Por lo tanto $[\alpha] = [e_{x_0}]$. □

El siguiente lema es útil.

Lema 9.1. *Sean $\alpha : [0,1] \to X$ un camino, y $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ una función continua tal que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$. Sea $\beta = \alpha \circ \varphi : [0,1] \to X$, entonces $\alpha \sim \beta$.*

Demostración. Tenemos que $\beta(0) = \alpha(0)$ y $\beta(1) = \alpha(1)$. Consideremos el mapeo continuo $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ definido por

$$H(t,s) = \alpha\left[(1-s)t + s\varphi(t)\right] \quad \forall\, (t,s) \in [0,1] \times [0,1],$$

entonces H satisface

$$H(s,0) = \alpha(0) \quad \forall\, s \in [0,1]$$
$$H(s,1) = \alpha(1) \quad \forall\, s \in [0,1]$$
$$H(0,t) = \alpha(t) \quad \forall\, t \in [0,1]$$
$$H(1,t) = \beta(t) \quad \forall\, t \in [0,1],$$

así $\alpha \sim \beta$. □

El siguiente resultado muestra que si un camino parte un abierto y va al exterior del abierto, entonces la curva tiene un punto en el borde del abierto.

Proposición 9.5. *Sean $\alpha : [0,1] \to X$ un camino y W un abierto en X. Si $\alpha(0) \in W$ y $\alpha(1) \in W^c = X \setminus W$, entonces existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $\alpha(t_0) \in \partial W$.*

Demostración. Caso contrario tenemos que $U = \alpha^{-1}(W)$ y $V = \alpha^{-1}(W^c) = \alpha^{-1}(X \setminus \overline{W})$ son abiertos en $[0,1]$, disjuntos, no-vacíos que cubren $[0,1]$. Tendríamos una escisión no trivial de $[0,1]$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\alpha([0,1]) \cap \partial W$ es no vacío. □

Apéndice 2: Relación entre $\pi_1(X, x_0)$ y $H_1(X)$

Sea X un espacio conexo por caminos y $x_0 \in X$. Definimos la aplicación $T : \mathrm{L}(X, x_0) \to C_1(X)$ de la siguiente manera:

Para cada $\alpha \in \mathrm{L}(X, x_0)$ definimos $\sigma(\alpha) = \sigma : \Delta^1 \to X$ el 1-simplex definido por

$$\sigma(t_0, t_1) = \alpha(t_1) \qquad \forall (t_0, t_1) \in \Delta^1.$$

Notemos que $\partial\sigma = \sigma(e_0) - \sigma(e_1) = \alpha(1) - \alpha(0) = 0$, esto es, $\sigma(\alpha)$ es un 1-ciclo en X.
El siguiente resultado vale tanto para lazos como para caminos con una homotopía con extremos fijos:

Proposición 9.6. *Si $\alpha \sim \beta$, entonces $[\sigma(\alpha) - \sigma(\beta)] = 0$ en $H_1(X)$.*

Demostración. Sea $H : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ una homotopía con extremos fijos entre α y β, así

$$H(s, 0) = x_0 \quad \text{y} \quad H(s, 1) = x_1 \quad \forall\, s \in [0, 1]\ .$$

Definimos $\eta : \Delta^2 \to X$ como

$$\eta(t_0, t_1, t_2) = \begin{cases} H\left(\frac{t_1}{t_0 + t_1}, t_2\right) & , \ \text{si } (t_0, t_1) \neq (0, 0) \\ x_0 & , \ \text{si } (t_0, t_1) = (0, 0) \end{cases}$$

que es un 2-simplex en X con

$$\partial\eta = \sigma(\beta) - \sigma(\alpha) + \sigma_{x_0}$$

Como $\sigma_{x_0} = \partial\xi$ donde $\xi : \Delta^2 \to X$ es el mapeo constante x_0 entonces

$$[\sigma(\alpha)] = [\sigma(\beta)] \quad \text{en} \quad H_1(X).$$

$\square$

Proposición 9.7. *Sean α y β caminos en X con $\alpha(1) = \beta(0)$, entonces $\sigma(\alpha * \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$ en homología.*

Demostración. Sea $\eta : \Delta^2 \to X$ definido como

$$\eta(t_0, t_1, t_2) = \begin{cases} \alpha(1 + t_1 - t_0) & , \text{ si } t_0 \geq t_1 \\ \beta(t_1 - t_0) & , \text{ si } t_0 \leq t_1 \end{cases} .$$

entonces

$$\partial\eta = \sigma(\alpha * \beta) - \sigma(\alpha) - \sigma(\beta)$$

así

$$[\sigma(\alpha * \beta)] = [\sigma(\alpha) + \sigma(\beta)]$$

□

Definimos la función $T : \pi_1(x, x_0) \to H_1(X)$ como

$$T([\alpha]) = [\sigma(\alpha)] \quad \forall\, [\alpha] \in \pi_1(X, x_0) .$$

Es una buena definición por la proposición 9.6 y es un homomorfismo de grupos por la proposición 9.7.

Notemos que $T = 0$ en $S = [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$, podemos pasar al cociente para obtener el homomorfismo de grupos.

$$T : \pi_1(X, x_0)/S \to H_1(X)$$

Denotaremos por $\overline{\alpha}$ a cualquier elemento de $\pi_1(X, x_0)/S$.

El homomorfismo T es sobreyectivo.

Sea $c = \sum_{i=1}^{m} n_i \cdot \sigma_i \in C_1(X)$ con $\partial c = 0$. Queremos encontrar un lazo α en x_0 tal que

$$T([\alpha]) = [c].$$

Asumiremos que $n_i \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$, de lo contrario el lazo constante en x_0 bastará. Sean $F_1 = \{i \in \{1, \ldots, m\} : \sigma_i \text{ es ciclo}\}$ y $F_2 = \{1, \ldots, m\} \setminus F_1$. Ambos conjuntos son finitos. Tenemos

$$c = \sum_{i \in F_1} n_i \cdot \sigma_i + \sum_{i \in F_2} n_i \cdot \sigma_i$$

Como $\sigma_i + \sigma_i^{-1} = \partial\xi$ para alguna 2-cadena en X. Asumiremos que $n_i > 0$ para todo i.

Supongamos que $F_2 \neq \emptyset$. Tenemos

$$\partial c = \sum_{i \in F_2} n_i \cdot \partial \sigma_i = 0$$

Recordemos que cada σ_i, con $i \in F_2$, no es ciclo. Luego, existe un σ_j con $j \in F_2$ cuyo punto inicial coincide con el punto final de σ_i, si el punto final de σ_j coincide con el punto inicial de σ_i podemos reemplazar este par por un ciclo, más precisamente

$$[\sigma_i + \sigma_j] = [\sigma_i * \sigma_j]$$

Caso el final de σ_j no coincida con el inicio de α_i, existe α_l, donde $l \in F_2$, y continuando así reemplazamos una suma finita de σ_i's por un simplex ciclo en homología. Al final podemos suponer que $F_2 = \emptyset$. Tenemos

$$c = \sum_{i=1}^{m} n_i \cdot \sigma_i$$

donde cada σ_i es un ciclo. Antes de continuar damos la siguiente definición.

Definición 9.1. *Para cada* 1*-simplex* σ *en* X *definimos el camino* $\alpha(\sigma) : [0,1] \to X$ *como*

$$\alpha(\sigma)(t) = \sigma(1-t, t) \quad \forall\, t \in [0,1].$$

Ahora continuamos. Sea $\gamma_i : [0,1] \to X$ un camino de x_0 a $x_i = \sigma_i(0)$, tenemos que

$$\gamma_i * \alpha(\sigma_i) * \gamma_i^{-1}$$

es un lazo en x_0 que es igual a σ_i en homología, para cada $i = 1, \ldots, m$. Luego podemos suponer que

$$c = \sum_{i=1}^{m} n_i \cdot \sigma_i$$

donde cada σ_i es un lazo en x_0. Tenemos

$$T\left([\alpha_1^{n_1} * \cdots * \alpha_m^{n_m}]\right) = [c],$$

donde $\alpha_i = \alpha(\sigma_i)$ para todo $i = 0, \ldots, m$. Así T es sobreyectiva.

Inversa de T

Para cada $x \in X$ fijemos un camino $\gamma_x : [0,1] \to X$ de x_0 a x, donde fijaremos $\gamma_{x_0} : [0,1] \to X$ como el camino constante x_0.
Sea $A : C_1(X) \to \pi_1(x, x_0)/S$ el homomorfismo de grupos, de manera que en cada 1-simplex σ en X se cumple

$$A(\sigma) = \overline{\gamma_{\sigma(0)} * \alpha(\sigma) * \gamma^{-1}_{\sigma(1)}} \,.$$

Sea $c \in C_1(X)$ un 1-borde, esto es, $c = \partial\xi$ para algún $\xi \in C_2(X)$. Sea $\xi = \sum_{i=1}^{m} n_i \cdot \xi_i$, donde ξ_i es un 2-simplex en X y $n_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i = 1, \ldots, m$, entonces

$$c = \sum_{i=1}^{m} n_i \cdot (\xi_{i0} - \xi_{i1} + \xi_{i2}) \;,$$

donde $\xi_{ij} = \xi \circ \partial_j : \Delta^1 \to X$ para $j = 0, 1, 2$. Vamos a ver que $A(c) = 0$. Tenemos que

$$A(c) = \sum_{i=1}^{m} n_i \cdot A\left(\xi_{i0} - \xi_{i1} + \xi_{i2}\right).$$

Notamos que

$$\begin{aligned} A\left(\xi_{i0} - \xi_{i1} + \xi_{i2}\right) &= \overline{\gamma_{\xi_{i0}(0)} * \alpha(\xi_{i0}) * \gamma^{-1}_{\xi_{i0}(1)}} * \overline{\gamma_{\xi_{i1}(0)} * \alpha(\xi_{i1}) * \gamma^{-1}_{\xi_{i1}(1)}}^{\,-1} \\ &\quad * \overline{\gamma_{\xi_{i2}(0)} * \alpha(\xi_{i2}) * \gamma^{-1}_{\xi_{i2}(1)}} \\ &= \overline{\gamma_{\xi_{i0}(0)} * \alpha(\xi_{i0}) * \gamma^{-1}_{\xi_{i0}(1)}} * \overline{\gamma_{\xi_{i1}(1)} * \alpha(\xi_{i1})^{-1} * \gamma^{-1}_{\xi_{i1}(0)}} \\ &\quad * \overline{\gamma_{\xi_{i2}(0)} * \alpha(\xi_{i2}) * \gamma^{-1}_{\xi_{i2}(1)}} \end{aligned}$$

Como $\xi_{i0}(1) = \xi_{i1}(1)$ y $\xi_{i1}(0) = \xi_{i2}(0)$ entonces

$$A\left(\xi_{i0} - \xi_{i1} + \xi_{i2}\right) = \overline{\gamma_{\xi_{i0}(0)} * \alpha(\xi_{i0}) * \alpha(\xi_{i1})^{-1} * \alpha(\xi_{i2}) * \gamma^{-1}_{\xi_{i2}(1)}} \,,$$

además $\xi_{i1}(0) = \xi_{i2}(1)$, así tenemos

$$A\left(\xi_{i0} - \xi_{i1} + \xi_{i2}\right) = \overline{\gamma_{\xi_{i0}(0)} * \alpha(\xi_{i0}) * \alpha(\xi_{i1})^{-1} * \alpha(\xi_{i2}) * \gamma^{-1}_{\xi_{i0}(0)}} \,.$$

Como $[\alpha(\xi_{i0}) * \alpha(\xi_{i1})^{-1} * \alpha(\xi_{i2})] = 0$ en $\pi_1(X, \xi_{i0}(0))$, entonces

$$A(\xi_{i0} - \xi_{i1} + \xi_{i2}) = 0 \quad \text{en } \pi_1(X, x_0).$$

Luego
$$A(c) = A(\partial\xi) = 0 \qquad \text{en } \pi_1(X, x_0).$$
Tenemos el homomorfismo de grupos $\mathcal{A} : H_1(X) \to S$ bien definido como
$$\mathcal{A}([c]) = [A(c)] \quad \forall\, [c] \in H_1(X).$$
Luego
$$\mathcal{A}T([\alpha]) = [\alpha] \quad \forall\, [\alpha] \in \pi_1(x, x_0).$$
Así T es inyectiva. Por lo tanto, $T : \pi_1(X, x_0)/S \to H_1(X)$ es un isomorfismo de grupos.

Conclusiones

- A cada espacio topológico podemos asociar un grupo, llamado grupo fundamental, de manera que espacios homeomorfos tienen grupos isomorfos.
- El grupo fundamental de la circunferencia $\mathbb{S}^1$ es el grupo aditivo de los números enteros.
- Espacios que son equivalentes homotópicamente tienen grupos fundamentales isomorfos. Así el grupo fundamental del plano real menos un punto es isomorfo al grupo fundamental de la circunferencia.
- Se dio una condición suficiente en un espacio topológico para que el grupo fundamental contenga un sub-grupo cíclico infinito.
- Se mostró que un arco compacto no separa al plano euclídeo o a la esfera $\mathbb{S}^2$.
- Toda curva de Jordan separa el plano en dos dominios, uno acotado y el otro no. El borde de cualquiera de los dominios es la curva de Jordan dada.
- Se mostró que el índice de una curva de Jordan es 0,-1 o 1.
- Se mostró el teorema de separación de Jordan-Brouwer. La imagen de un encaje topológico $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ separa $\mathbb{R}^{m+1}$.

Recomendaciones

- El teorema de la curva de Jordan tiene una extensión de la siguiente forma. Dada una curva de Jordan $\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ del plano cuya restricción a $\mathbb{S}^1$ es α. Este resultado es llamado *teorema de Jordan-Schoenflies* [5].

- Si $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es además una hipersuperficie regular puede mostrarse el teorema de la curva de Jordan utilizando técnicas de topología diferencial. Una tal demostración puede ser encontrada en [1]. Allí es utilizado el concepto de índice de S con respecto a un punto en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus S$.

- Otro resultado más general es el siguiente: Si $S \subset \mathbb{S}^{n+1}$ es un subespacio cerrado que separa $\mathbb{S}^{n+1}$ en k componentes, entonces cualquier otro subespacio homotópicamente equivalente a S también separa $\mathbb{S}^{n+1}$ en k componentes. Tal resultado es una consecuencia del teorema de dualidad de Alexander-Pontryagin que puede ser visto en [4].

Bibliografía

[1] GUILLEMIN, V.; POLLACK, A. *Differential topology.* Prentice Hall, 1974.

[2] MASSEY, W. *A basic course in Algebraic topology.* GTM **127**. Springer-Verlag, 1991.

[3] MUNKRES, J. *Topología.* 2ª edición. Prentice Hall, 2002.

[4] MUNKRES, J. *Elements of Algebraic topology.* The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1984.

[5] SCHOENFLIES, A. Beiträge zur Theorie der Punktmengen III. *Mathematische Annalen*, **62** (2): 286–328, 1906.