UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS

"EL TEOREMA DE CAMERON-MARTIN"

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA

ELABORADA POR:
JUAN CARLOS ESPEJO DELZO

ASESOR:
JOHEL VICTORINO BELTRÁN RAMÍREZ

LIMA-PERÚ

2019

Pues, ¿quién soy yo para que pueda ofrecerte este trabajo?
Porque todo viene de ti, y de tu mano te lo doy.

Agradecimientos

El autor desea agradecer al profesor Johel Beltrán por haberle brindado la magnífica oportunidad de trabajar bajo su orientación, por haberlo formado, por su apoyo, consejos y haber despertado en él el interés y gusto por la teoría de la probabilidad. También, desea expresar la más profunda gratitud a su padre y hermanos por todo el amor recibido. Finalmente, quiere honrar la memoria de su madre.

Índice general

Índice de notaciones

Resumen

En el presente trabajo, se demuestra que si H es el subespacio del espacio de Wiener $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ cuyos vectores h son absolutamente continuos y poseen derivada cuadrado integrable, entonces la traslación de $\mathbf{P}$ por un h en H resulta en un medida $\mathbf{P}_h$ que es equivalente a $\mathbf{P}$ y se da una fórmula para su derivada de Radon-Nikodym con respecto a $\mathbf{P}$: la fórmula de Cameron-Martin. Además, se prueba que si h está en el complemento de H, entonces $\mathbf{P}_h$ y $\mathbf{P}$ son singulares.

En primer lugar, para la prueba de la equivalencia entre $\mathbf{P}_h$ y $\mathbf{P}$ cuando h está en H y la demostración de la fórmula de Cameron-Martin se estudiará la acción de cambiar la medida de probabilidad original por una equivalente sobre un movimiento Browniano de tal manera que el nuevo proceso estocástico también sea un movimiento Browniano respecto a la nueva medida de probabilidad.

En segundo lugar, para la demostración de la singularidad entre $\mathbf{P}_h$ y $\mathbf{P}$ cuando h está en el complemento de H se demostrará que los funcionales lineales continuos de Ω tienen una distribución Gaussiana centrada con respecto a la medida de probabilidad $\mathbf{P}$ y se dará una fórmula para calcular su varianza. Además, se dará una caracterización de los vectores de H que involucra a los funcionales lineales continuos de Ω.

Finalmente, tanto en la prueba de la equivalencia como en la singularidad se utilizará la fórmula de Itô, propiedades del cálculo estocástico y de la teoría de la probabilidad.

Capítulo 1

Introducción

En todo este trabajo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ denotará un espacio de probabilidad.

1.1. Motivación

A lo largo de esta sección $X : \Omega \to \mathbb{R}$ será una variable aleatoria con distribución normal estándar. A continuación veremos la acción de cambiar la medida de probabilidad original por una equivalente sobre variables aleatorias reales Gaussianas. La demostración de los siguientes resultados se pueden encontrar en la sección 10.1 de [Klebaner, 2012].

Teorema 1.1 (Eliminación de la media)**.** Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea $Y := X - a$. Luego, existe una medida de probabilidad $\widetilde{\mathbf{P}}$ equivalente a $\mathbf{P}$ tal que Y es $\mathcal{N}(0,1)$-distribuida bajo $\widetilde{\mathbf{P}}$ y

$$\frac{d\widetilde{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} = \exp\left(aX - \frac{1}{2}a^2\right). \tag{1.1}$$

$\diamondsuit$

Corolario 1.2. Sea $a \in \mathbb{R}$. Luego, existe una medida de probabilidad $\widetilde{\mathbf{P}}$ equivalente a $\mathbf{P}$ tal que X es $\mathcal{N}(a,1)$-distribuida bajo $\widetilde{\mathbf{P}}$ y la ecuación (1.1) se cumple. $\diamondsuit$

Observación 1.3. Bajo las mismas condiciones del corolario anterior, $X + a$ tiene una distribución $\mathcal{N}(a,1)$ bajo $\mathbf{P}$. Esta es una operación sobre los resultados de la variable aleatoria; sin embargo, si cambiamos la medida de probabilidad $\mathbf{P}$ por $\widetilde{\mathbf{P}}$, dejamos los resultados como están pero asignamos diferentes probabilidades a los eventos, y bajo esta nueva medida la misma variable aleatoria también es $\mathcal{N}(a,1)$-distribuida. $\diamondsuit$

El cambio de la medida de probabilidad puede ser útil en la simulación y estimación de probabilidades de eventos raros como se muestra en la siguiente aplicación del corolario de arriba.

Ejemplo 1.4 (Simulación de eventos raros.). A continuación, estimemos $\mathcal{N}(6,1)(-\infty,0)$ a través de simulaciones. Sea $\widetilde{\mathbf{P}}$ defina por

$$\frac{d\widetilde{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} = \exp(6X - 18).$$

Gracias al corolario anterior, X está $\mathcal{N}(6,1)$-distribuida bajo $\widetilde{\mathbf{P}}$. Así

$$\mathcal{N}(6,1)(-\infty,0) = \widetilde{\mathbf{P}}(X < 0) = \mathbf{E}_{\widetilde{\mathbf{P}}}[f(X)],$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathbf{1}_{(-\infty,0)}(x)$. Luego, en virtud de la integración de Montecarlo[1],

$$\frac{1}{n}\Big(f(X_1) + \cdots + f(X_n)\Big) \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbf{E}_{\widetilde{\mathbf{P}}}[f(X)],$$

donde $X_1, X_2, \ldots$ son i.i.d. con distribución $\mathcal{N}(6,1)$ bajo $\widetilde{\mathbf{P}}$. Por lo tanto, una estimación de $\mathcal{N}(6,1)(-\infty,0)$ llamando a `E_Pt(1e6,1e3)` del listado 1, i.e., en un millón de ejecuciones: $n = 10^6$, es cero. Como `pnorm(0,6,1)` es `9.865876e-10`, en un millón de ejecuciones no deberíamos esperar valores por debajo de cero. Ahora, gracias nuevamente al corolario anterior,

$$\mathbf{E}_{\widetilde{\mathbf{P}}}[f(X)] = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[\exp(6X - 18)f(X)] = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[g(X)],$$

donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(6x - 18)f(x)$. Luego, nuevamente en virtud de la integración de Montecarlo, tenemos

$$\frac{1}{n}\Big(g(X_1) + \cdots + g(X_n)\Big) \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[g(X)],$$

donde $X_1, X_2, \ldots$ son i.i.d. con distribución $\mathcal{N}(0,1)$ bajo $\mathbf{P}$. Por lo tanto, una estimación de $\mathcal{N}(6,1)(-\infty,0)$ llamando a `E_P(1e6,1e3)` del listado 1, es `9.903368e-10`. Finalmente, en esta segunda simulación, aproximadamente la mitad de las observaciones serán negativas, resultando en una estimación más precisa, incluso para un pequeño número n de ejecuciones. $\diamondsuit$

Ahora, supongamos que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = (\mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}), \mathcal{N}(0, I))$ y para cada h en Ω: $\mathbf{P}_h$ denotará la ley de $\Omega \ni \omega \mapsto \omega + h \in \Omega$ bajo $\mathbf{P}$. Luego, la medida de cualquier boreliano B de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ está dada por

$$\mathbf{P}(B) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_B \exp\left(-\frac{1}{2}(\omega,\omega)\right)\, d\omega.$$

[1]Para mayor detalle sobre esta técnica se puede ver el ejemplo 5.21 de [Klenke, 2014]

Así, para cada h en $\mathbb{R}^n$ tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_h(B) &= \mathbf{P}(B-h)\\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}\int_B \exp\left(-\frac{1}{2}(\omega-h,\omega-h)\right)\,d\omega\\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}\int_B \exp\left((h,\omega)-\frac{1}{2}|h|^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2}(\omega,\omega)\right)\,d\omega.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo h en $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{d\,\mathbf{P}_h}{d\,\mathbf{P}}(\omega) = \exp\left((h,\omega)-\frac{1}{2}|h|^2\right). \tag{1.2}$$

Así, para todo h en $\mathbb{R}^n$ se tiene que $\mathbf{P}_h$ es absolutamente continua con respecto a $\mathbf{P}$ y la derivada de Radon-Nikodym de $\mathbf{P}_h$ con respecto a $\mathbf{P}$ está dada por la ecuación (1.2).

1.2. Objetivos

En primer lugar, enunciamos el tipo de proceso estocástico sobre el cual integraremos estocásticamente.

Definición 1.5. Sean $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ un espacio de probabilidad completo y $T>0$. Luego, decimos que un proceso estocástico $\mathbb{R}^d$-valuado

$$\left(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]},(B_t)_{t\in[0,1]},\mathbf{P}\right).$$

es un **movimiento Browniano d-dimensional** si

- $B_0=0$ casi seguramente;
- para cada $0\le s<t\le T$: (B_t-B_s) es independiente de $\mathcal{F}_s$ y tiene distribución $\mathcal{N}(0,(t-s)I)$, donde I es la matriz identidad de orden d;
- y para cada $\omega\in\Omega$: $t\mapsto B_t(\omega)$ es continua.

Además, diremos que dicho proceso es **completo** si

- la filtración $(\mathcal{F}_t)$ sea continua a la derecha;
- y para cada $t\in[0,T]$: $\mathcal{F}_t$ contiene a $\mathcal{N}$, donde $\mathcal{N}$ es el la colección de eventos de medida nula de $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$.

Finalmente, diremos que un proceso estocástico es un **movimiento Browniano estándar** d-dimensional si es un movimiento Browniano d-dimensional y es completo. $\diamondsuit$

Los nombres de procesos estocásticos definidos arriba son nociones genéricas; a continuación, estamos interesados en un proceso particular y hasta el término del presente capítulo haremos las siguientes consideraciones:

- Ω denotará el espacio de aplicaciones continuas $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$-valuadas sobre $[0,1]$ que se anulan en 0 dotada de la topología uniforme;
- $\mathcal{G}$ será el σ-álgebra topológico sobre Ω;
- para cada t en $[0,1]$: B_t denotará la aplicación $\Omega \ni \omega \mapsto \omega(t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$;
- para cada t en $[0,1]$: denotamos $\mathcal{G}_t := \sigma(B_s,\ s \in [0,t])$[2];
- sea $\mathbf{Q}$ la medida de probabilidad sobre $\mathcal{G}$ tal que
$$\left(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t\in[0,1]}, (B_t)_{t\in[0,1]}, \mathbf{Q}\right)$$
sea un movimiento Browniano d-dimensional[3];
- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ denotará la completitud de $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{Q})$;
- para cada t en $[0,1]$: denotamos $\mathcal{F}_t := \sigma(\mathcal{G}_s, \mathcal{N})$, donde $\mathcal{N}$ es el la colección de eventos de medida nula de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Luego, continuando con la misma notación, definimos:
$$B := \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}, (B_t)_{t\in[0,1]}, \mathbf{P}\right).$$
Así, en virtud del corolario 4.1 de [Baldi, 2017], tenemos:

Observación 1.6. B es un movimiento Browniano estándar d-dimensional.

Definición 1.7. El espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ es conocido como el **espacio de Wiener** y la medida de probabilidad $\mathbf{P}$ como **medida de Wiener**. Además, el subespacio
$$H := \{h \in \Omega\ ;\ h \text{ es absolutamente continuo con derivada cuadrado integrable}\}$$
es llamado de **subespacio de Cameron-Martin**, el proceso estocástico B será llamado de **proceso canónico sobre el espacio de Wiener**[4] y para cada h en Ω: $\mathbf{P}_h$ denotará la ley de $\Omega \ni \omega \mapsto \omega + h \in \Omega$ bajo $\mathbf{P}$. $\diamondsuit$

[2]Vale la pena resaltar que $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1$.

[3]La teoría nos garantiza que dicha medida de probabilidad es única, para mayor detalles se puede ver la sección 3.2 de [Baldi, 2017].

[4]El adjetivo *canónico* está en el mismo sentido de la definición 14.6 de [Klenke, 2014].

Luego, se plantean las siguientes preguntas:

(i) ¿Para cuáles h de Ω se tiene que $\mathbf{P}_h$ es absolutamente continua con respecto a $\mathbf{P}$?

(ii) ¿Existe alguna fórmula para la derivada de Radon-Nikodym de $\mathbf{P}_h$ con respecto a $\mathbf{P}$ para dichos h de la pregunta anterior?

Así, para el caso finito dimensional (de hecho $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ puede ser visto como el espacio de caminos $\{1,\ldots,n\} \to \mathbb{R}$) se tiene una respuesta afirmativa para los análogos (en dimensión finita) de ambas preguntas planteadas arriba. Es decir, lo que se está planteando arriba es si en el caso infinito dimensional, la respuesta a dichas preguntas son también afirmativas. De este modo, los objetivos del presente trabajo son caracterizar aquellos h de Ω que cumplen que $\mathbf{P}_h$ y $\mathbf{P}$ son equivalentes y dar una fórmula análoga a la ecuación (1.2), a saber: la fórmula de Cameron-Martin. De hecho, se demostrará las siguientes afirmaciones:

(i) Si h está en H, entonces $\mathbf{P}_h$ y $\mathbf{P}$ son equivalentes y la derivada de Radon-Nikodym de $\mathbf{P}_h$ con respecto a $\mathbf{P}$ está dada por

$$\frac{d\mathbf{P}_h}{d\mathbf{P}} = \exp\left(\int_0^1 h'(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^1 |h'(s)|^2 ds\right),$$

donde la integral con respecto a dB_s es la integral estocástica.

(ii) Si h no está en H, entonces $\mathbf{P}_h$ y $\mathbf{P}$ son singulares.

1.3. Estructura de la memoria

En primer lugar, en el capítulo 2, se establece los elementos del cálculo estocástico necesarios para dar respuesta a las preguntas planteadas arriba: se presentan las propiedades de la integral estocásticas a ser empleadas, se extiende esta integral al caso multidimensional y se fija la versión de la fórmula de Itô con la que se trabajará.

En segundo lugar, en el capítulo 3, se ven dos aplicaciones –importantes para nuestro resultado final: teorema 4.1– de la fórmula de itô, a saber: el teorema de Girsanov y que las funcionales del dual topológico de Ω tienen una distribución gaussiana centrada con respecto a la medida de probabilidad $\mathbf{P}$. Además, se dará una caracterización de los vectores del subespacio de Cameron-Martin.

Por último, en el capítulo 4, se realiza la demostración de nuestro resultado final en dos partes: primero se probará la equivalencia de las medidas en el caso en que h está en H y luego se verificará la singularidad de las mismas en el caso contrario. Así mismo, en el capítulo 5, se explica la relación de nuestro resultado final con otros teoremas sobre medidas Gaussianas.

Capítulo 2

El cálculo estocástico

El presente capitulo es preliminar: tiene por objetivo fijar notacion e introducir conceptos y propiedades necesarias para el desarrollo del siguiente trabajo. Para una detallada introducción a la integral estocástica se puede consultar [Baldi, 2017], [Le Gall, 2016] o [Kuo, 2006].

Sea $T > 0$. Mientras no se diga lo contrario,

$$B := \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, (B_t)_{t\in[0,T]}, \mathbf{P}\right)$$

denotarán un movimiento Browniano estándar 1-dimensional y

$$X := \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, (X_t)_{t\in[0,T]}, \mathbf{P}\right)$$

un proceso estocástico $\mathbb{R}$-valuado.

Primero, para cada a y b en $[0, T]$, con $a < b$, se da sentido a la siguiente expresión:

$$\int_a^b X_s dB_s, \tag{2.1}$$

donde X cumplirá ciertas propiedades que especificaremos en la sección 2.1. Luego, se enuncian las propiedades de la integral estocástica que se emplearán en este trabajo. Seguidamente, en la sección 2.2 se extiende esta noción de integral al caso multidimensional y, así mismo, se dan algunas propiedades a ser utilizadas. Por último, de todas las propiedades, la de mayor potencial y uso en esta memoria es la fórmula de Itô (teorema 2.24) a ser enunciada en la sección 2.3.

2.1. La integral estocástica

Primero definamos los espacios de procesos que serán los integrandos de la integral (estocástica) a definir.

Definición 2.1. Sean a, b y p en $\mathbb{R}$ tales que $0 \leq a < b \leq T$ y $p \geq 1$. Denotamos por $M^p_{loc}[a,b]$ el espacio de clases equivalentes de procesos estocásticos $\mathbb{R}$–valuados progresivamente medibles

$$X := \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[a,b]}, (X_t)_{t\in[a,b]}, \mathbf{P}\right)$$

tales que

$$\int_a^b |X_s|^p ds < \infty \quad \text{casi seguramente}$$

y por $M^p[a,b]$ denotamos el subespacio de $M^p_{loc}[a,b]$ conformado por los procesos que satisfacen

$$\mathbf{E}\left[\int_a^b |X_s|^p ds\right] < \infty.$$

$\diamondsuit$

Para comenzar, definiremos la integral estocástica para ciertos procesos estocásticos que pasamos a precisar.

Definición 2.2. Si X en $M^2_{loc}[a,b]$ está dado por

$$X_t(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} X_j(\omega)\, \mathbf{1}_{[t_j,t_{j-1})}(t), \tag{2.2}$$

donde $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, entonces decimos que X es **proceso elemental**. $\diamondsuit$

Los procesos elementales serán los 'bloques de construcción' para la definición de esta integral sobre todos los procesos de $M^2_{loc}[a,b]$. Para ello, la inspiración viene de la integral de Riemann–Stieltjes (RS), para mayor detalle sobre la integral de RS y sus propiedades puede consultar [Gordon, 1994].

Definición 2.3. Sea X en $M^2_{loc}[a,b]$ dado por (2.2). La **integral estocástica** de X (con respecto a B), denotada $\int_a^b X_s dB_s$, es la variable aleatoria

$$\sum_{j=0}^{n-1} X_j \left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right).$$

$\diamondsuit$

La siguiente será la propiedad seminal de la integral estocástica que se extenderá hasta todo $M^2[a,b]$. La prueba de la misma se puede ver en la página 185 de [Baldi, 2017].

Propiedad 2.4. Si X es un proceso elemental en $M^2[a,b]$, entonces

$$\mathbf{E}\left[\int_a^b X_s dB_s \,\middle|\, \mathcal{F}_a\right] = 0$$
$$\mathbf{E}\left[\left(\int_a^b X_s dB_s\right)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_a\right] = \mathbf{E}\left[\int_a^b {X_s}^2 ds \,\middle|\, \mathcal{F}_a\right].$$

Particularmente, $\int_a^b X_s dB_s$ es una variable aleatoria cuadrado integrable, centrada y además

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_a^b X_s dB_s\right)^2\right] = \mathbf{E}\left[\int_a^b {X_s}^2 ds\right]. \tag{2.3}$$

$\diamondsuit$

Luego, para extender la integral estocástica para todo proceso en $M^2[a,b]$ utilizaremos un proceso por el cual aproximaremos procesos en $M^2[a,b]$ a través de procesos elementales. La demostración de esta propiedad puede leerse en las páginas 186-187 de [Baldi, 2017].

Propiedad 2.5. Sea X en $M^2[a,b]$. Entonces, existe una sucesión de procesos elementales (X_n) en $M^2[a,b]$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\int_a^b |X_s - X_n(s)|^p ds\right] = 0.$$

$\diamondsuit$

Ahora podemos extender la integral estocástica a todo $M^2[a,b]$. En efecto, la ecuación (2.3) garantiza que la integral estocástica es una isometría, y además la propiedad 2.5 dice que estos procesos elementales son densos en $M^2[a,b]$, por lo que establecemos:

Definición 2.6. Sea $M^2[a,b] \ni X \mapsto \int_a^b X_s dB_s \in L^2(\Omega)$ la extensión de la isometría entre los procesos elementales de $M^2[a,b]$ y $L^2(\Omega)$. Así, para cada X en $M^2[a,b]$ queda definida la **integral estocástica** de X (con respecto a B). $\diamondsuit$

Como se mencionó arriba, las tres ecuaciones de la propiedad 2.4 son válidas para todo X en $M^2[a,b]$, la prueba de esto puede verse en la página 188 de [Baldi, 2017]. Luego, en virtud de la propiedad de la isometría de la integral estocástica, se tiene:

Propiedad 2.7. Si $X, X^1, X^2, \ldots$ están en $M^2[a,b]$ y se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\int_a^b |{X^n}_s - X_s|^2 ds\right] = 0,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b {X^n}_s dB_s = \int_a^b X_s dB_s \qquad \text{en } L^2(\Omega).$$

$\diamondsuit$

El siguiente resultado nos dice que nuestra noción de integral estocástica extiende la integral de RS y este hecho será utilizado en la demostración del teorema 3.11.

Propiedad 2.8. Si $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada, entonces

$$\left(\int_0^T f(s)dB_s\right)(\omega) = (RS)\int_0^T f(s)dB_s(\omega)$$

para casi todo ω en Ω.

Demostración. Para cada $n = 1, 2, \ldots$ definimos

$$\Delta_n := \{t_n{}^0, t_n{}^1, \ldots, t_n{}^{2^n}\} := \left\{\frac{0}{2^n}, \frac{T}{2^n}, \ldots, \frac{2^nT}{2^n}\right\}$$

$$f_n := \sum_{j=1}^{2^n} f(t_n{}^{j-1})\,\mathbf{1}_{[t_n{}^{j-1}, t_n{}^j)}\,.$$

Por un lado, como $|\Delta_n| \to 0$, para todo ω en Ω:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^T f_n(s)dB_s\right)(\omega) = (RS)\int_0^T f(s)dB_s(\omega). \tag{2.4}$$

Por otro lado, como f está acotada, todos los f_n's están acotados por una misma cota. Además, por la convergencia puntual $f_n \to f$, en virtud del teorema de la convergnecia dominada,

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \qquad \text{en } L^2[0, T];$$

así, en virtud de la propiedad 2.7,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T f_n(s)dB_s = \int_0^T f(s)dB_s \qquad \text{en } L^2(\Omega).$$

Luego, tomando una subsucesión de (f_n) y denotándola (f_n), tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^T f_n(s)dB_s\right)(\omega) = \left(\int_0^T f(s)dB_s\right)(\omega) \tag{2.5}$$

para casi todo ω en Ω. Finalmente, de (2.4) y (2.5), se sigue la conclusión. □

Si X está en $M^2[0, T]$, entonces para cada $t \in [0, T]$ la restricción de X a $[0, t]$ también está en $M^2[0, t]$. Además, se verifica que $\int_0^t X_s dB_s$ es $\mathcal{F}_t$-medible, ver página 192 de [Baldi, 2017]. Finalmente, vale la pena resaltar que para la prueba de esta última aseveración se justifica el hecho de que B sea un movimiento Browniano estándar, a saber se emplea el hecho de que cada $\mathcal{F}_t$ contenga los eventos de medida nula de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Definición 2.9. Sea X en $M^2[0,T]$. Para cada t en $[0,T]$ defimos

$$I_t := \int_0^t X_s dB_s.$$

Luego, diremos que el proceso

$$I := \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, (I_t)_{t\in[0,T]}, \mathbf{P}\right)$$

es la **integral estocástica** del proceso X. $\diamondsuit$

La prueba de la siguiente propiedad, clave para el desarrollo de nuestro trabajo, puede verse en la página 193 de [Baldi, 2017].

Propiedad 2.10. Si X está en $M^2[0,T]$, entonces la integral estocástica de X es una martingala cuadrado integrable. $\diamondsuit$

A continuación, la prueba del siguiente resultado, a ser utilizado en la demostración del teorema 3.11, puede verse en las páginas 196-197 de [Baldi, 2017].

Propiedad 2.11. Si f está en $L^2[0,T]$, entonces la integral estocástica de f es un proceso estocástico Gaussiano. Además,

$$\int_0^T f(s)dB_s \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^T f^2(s)ds\right).$$

$\diamondsuit$

En ocasiones, como en la propiedad de Markov fuerte del movimiento Browniano, consideramos el valor de una variable aleatoria Y en un 'tiempo aleatorio' σ, a saber el valor de la variable aleatoria $Y_{\sigma(\omega)}(\omega)$. De forma general, un **tiempo aleatorio** es una variable aleatoria $\sigma : \Omega \to [0,\infty]$. Para extender nuestra definición de integral estocástica a todo $M^2_{loc}[0,T]$, trabajaremos con unos tiempos aleatorios especiales definidos a continuación.

Definición 2.12. Una variable aleatoria $\tau : \Omega \to [0,T] \cup \{\infty\}$ es llamada de **tiempo de espera** si para cada t en $[0,T]$: $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. $\diamondsuit$

Además, la siguiente propiedad, cuya prueba se puede revisar en las páginas 197-198 de [Baldi, 2017], será utilizada para este último paso de extensión.

Propiedad 2.13. Sea τ un tiempo de espera con $\tau \leq T$. Luego, si X está en $M^2[0,T]$ entonces $(X_t\, \mathbf{1}_{\{t<\tau\}})_t$ también está en $M^2[0,T]$ y además

$$\int_0^\tau X_s dB_s = \int_0^T X_s\, \mathbf{1}_{\{s<\tau\}}\, dB_s \quad \text{casi seguramente.}$$

$\diamondsuit$

Sea X en $M^2_{loc}[0,T]$ y para cada entero $n > 0$ definimos

$$\tau_n := \inf\{t \leq T\,;\, \int_0^t {X_s}^2 ds > n\}$$

con la convención de $\tau_n = T$ si $\int_0^t {X_s}^2 ds \leq n$. Luego τ_n es un tiempo de espera y el proceso $X_t\, \mathbf{1}_{\{t<\tau_n\}}$ está en $M^2[0,T]$. En efecto, gracias a la propiedad 2.13,

$$\int_0^T {X_s}^2\, \mathbf{1}_{\{s<\tau_n\}}\, ds = \int_0^{\tau_n \wedge T} {X_s}^2 ds \leq n.$$

Así, para cada $n > 0$, la integral $\int_0^t X_s\, \mathbf{1}_{\{s<\tau_n\}}\, dB_s$ está bien definida. Finalmente, estamos listos para nuestro último paso.

Definición 2.14. Sea X en $M^2_{loc}[0,T]$. Para cada t en $[0,T]$ definimos

$$I_t := \lim_{n\to\infty} \int_0^t X_s\, \mathbf{1}_{\{s<\tau_n\}}\, dB_s.$$

Luego, diremos que el proceso

$$I := \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, (I_t)_{t\in[0,T]}, \mathbf{P}\right)$$

es la **integral estocástica** del proceso X. $\diamondsuit$

Es importante verificar que esta última definición extiende la definición anterior. En efecto, sea X en $M^2[0,T]$. Luego, para cada entero $n > 0$ y t en $[0,T]$ definimos $X_n(t) := X_t\, \mathbf{1}_{\{t<\tau_n\}}$. Así, como $X_s = X_n(s)$ si $s < \tau_n$ y $X_n(s) = 0$ si $s \geq \tau_n$, tenemos que

$$\mathbf{E}\left[\int_0^T |X_s - X_n(s)|^2 ds\right] = \mathbf{E}\left[\int_{\tau_n}^T |X_s|^2 ds\right], \tag{2.6}$$

y como el lado derecho de (2.6) tiende a cero cuando n tiende a ∞, en virtud del teorema de la convergencia dominada y la propiedad 2.7, la aseveración se sigue.

La propiedad 2.10 no es verdadera en general si X está en $M^2_{loc}[0,T]$; no obstante, podemos aproximar I_t a través de martingalas. Este hecho motiva la siguiente noción.

Definición 2.15. Un proceso estocástico

$$M := \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, (M_t)_{t\in[0,T]}, \mathbf{P}\right)$$

es llamado de **martingala local** si existe una sucesión creciente (τ_n) de tiempos de espera tales que

(i) $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$ casi seguramente y

(ii) $(M_{t\wedge\tau_n})$ es una $(\mathcal{F}_t)$-martingala para cada n.

$\diamondsuit$

En primer lugar, toda martingala es una martingala local (basta fijar $\tau_n = \infty$). Luego, enunciamos la siguiente propiedad clave para el desarrollo del presente trabajo.

Propiedad 2.16. La integral estocástica de un proceso X en $M^2_{loc}[0,T]$ es una martingala local.

Demostración. Sea X en $M^2_{loc}[0,T]$ y para cada entero $n > 0$ definimos

$$\tau_n := \text{ínf}\{t \leq T\,;\, \int_0^t {X_s}^2 ds > n\},$$

con la convención de $\tau_n = T$ si $\int_0^t {X_s}^2 ds \leq n$. Luego τ_n es un tiempo de espera y el proceso $X_t\, \mathbf{1}_{\{t<\tau_n\}}$ está en $M^2[0,T]$. Finalmente, como

$$I_{t\wedge\tau_n} = \int_0^{t\wedge\tau_n} X_s dB_s = \int_0^t X_s\, \mathbf{1}_{\{s<\tau_n\}}\, dB_s,$$

la conclusión se sigue. $\square$

En general, una martingala local no es necesariamente integrable. No obstante, ella es integrable si es positiva. La prueba de esta última afirmación, a ser empleada en la demostración del teorema de Cameron-Martin en el capítulo 4, puede ser leída en las páginas 206-207 de [Baldi, 2017].

Propiedad 2.17. Una martingala local positiva es una supermartingala. $\diamondsuit$

Hasta el momento, según nuestra definición de la integral estocástica, para calcular la integral de un proceso estocástico lo determinamos como una cadena de límites de sucesiones de integrales más elementales. Así, este procedimiento parece muy largo y tedioso, pero pronto veremos un camino más corto de calcular esta integral. De hecho, emularemos un camino análogo que recorrimos en el pregrado con la integral de Riemann: (primero definimos la integral como una aproximación de funciones escalonadas y luego) encontramos formas más simples y eficientes de realizar el cálculo de estas integrales con el uso de primitivas ya calculadas. Precisamente, será la fórmula de Itô el camino que seguiremos para este fin. Sin embargo, antes de presentarla extenderemos nuestra noción de integral al contexto multidimensional.

2.2. La integral estocástica multidimensional

De ahora en adelante

$$B := \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, (B_t)_{t\in[0,T]}, \mathbf{P}\right)$$

denotará un movimiento Browniano estándar d-dimensional.

Definición 2.18. Sean a, b y p en $\mathbb{R}$ tales que $0 \leq a < b \leq T$ y $p \geq 1$. Decimos que un proceso estocástico $\mathbb{R}^{m\times d}$–valuado

$$X := \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[a,b]}, (X_t)_{t\in[a,b]}, \mathbf{P}\right),$$

está en $M^p_{loc}[a,b]$ si para cada $j = 1, \dots, m$ y cada $k = 1, \dots, d$:

- $X^{j,k}$ es progresivamente medible y
- $\int_a^b |X^{j,k}{}_s|^p ds < \infty$ a.s.

Además, diremos que X está en $M^p[a,b]$ si para cada j, k

- $X^{j,k}$ está en $M^p[a,b]$ y
- $\mathbf{E}\left[\int_a^b |X^{j,k}{}_s|^p ds\right] < \infty$.

Observación 2.19. $M^2[a,b]$ es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(X,Y)_{M^2[a,b]} = \mathbf{E}\left[\sum_{j=1}^m \int_a^b \left(X^j, Y^j\right)_{\mathbb{R}^d} ds\right],$$

donde X^j es la j-ésima fila de X.

Definición 2.20. Para cada proceso

$$X := \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[a,b]}, (X_t)_{t\in[a,b]}, \mathbf{P}\right)$$

$\mathbb{R}^{m\times d}$–valuado en $M^p_{loc}[a,b]$ definimos

$$\int_a^b X_s dB_s := \left(\sum_{k=1}^d \int_a^b X^{1k}{}_s dB^k{}_s, \dots, \sum_{k=1}^d \int_a^b X^{mk}{}_s dB^k{}_s\right),$$

donde B^k es la k-ésima coordenada de B. $\diamondsuit$

Observación 2.21.

(i) Conviene ver cada vector X_s de $\mathbb{R}^{m\times d}$ como la matriz de m filas y d columnas cuyos elementos son $X^{j,k}{}_s$. Así mismo, conviene ver a un vector de $\mathbb{R}^m$ como una matriz columna.

(ii) La integral estocástica definida arriba es una variable aleatoria $\mathbb{R}^m$–valuada.

(iii) En virtud de las propiedades de la integral estocástica en dimensión uno, si X está en $M^2_{loc}[0,T]$, entonces cada componente de $\int_0^T X_s dB_s$ es una martingala local. $\diamondsuit$

Propiedad 2.22. Si

$$X := \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, (X_t)_{t\in[0,T]}, \mathbf{P}\right)$$

es un proceso $\mathbb{R}^{m\times d}$–valuado en $M^2[0,T]$, entonces

$$(X,X)_{M^2[0,T]} = \mathbf{E}\left[\left|\int_0^T X_s dB_s\right|^2\right].$$

$\diamondsuit$

Observación 2.23. La última propiedad muestra que también en el caso multidimensional la integral estocástica es una isometría $M^2[0,T] \to L^2(\Omega)$. $\diamondsuit$

2.3. La fórmula de Itô

La siguiente versión de la fórmula de Itô, cuya demostración es análoga a la descrita en las páginas 220-221 de [Baldi, 2017], será utilizada en varias ocasiones a lo largo de los capítulos 3 y 4.

Teorema 2.24 (fórmula de Itô)**.** Sea

$$Y = \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, (Y_t)_{t\in[0,T]}, \mathbf{P}\right)$$

un proceso estocástico tal que para cada t en $[0,T]$

$$Y_t \;=\; Y_0 \;+\; \int_0^t F_s ds \;+\; \int_0^t G_s dB_s,$$

donde F es un proceso $\mathbb{R}^m$–valuado en $M^1_{loc}[0,T]$ y G es un proceso $\mathbb{R}^{m\times d}$–valuado en $M^2_{loc}[0,T]$. Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Entonces, para cada t en $[0,T]$

$$\begin{aligned} f(Y_t) \;&=\; f(Y_0) \;+\; \int_0^t \left[\sum_{j=1}^m f_{y_j}(Y_s)F^j{}_s \;+\; \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^m f_{y_j y_k}(Y_s)\cdot\left(G^j{}_s, G^k{}_s\right)_{\mathbb{R}^d}\right] ds \\ &\quad+\; \int_0^t \left[\sum_{j=1}^m f_{y_j}(Y_s)G^j{}_s\right] dB_s, \end{aligned}$$

donde F^j y G^j son la j-ésima componente de F y la j-ésima fila de G, respectivamente. $\diamondsuit$

Ejemplo 2.25. El proceso $Y_t = tB_t - \int_0^t B_s ds$ es una martingala. Además, $\mathbf{E}\left[{Y_t}^2\right] = \frac{t^3}{3}$. $\diamondsuit$

Observación 2.26. El ejemplo anterior nos muestra cómo la fórmula de Itô nos permite verificar si un proceso es una martingala: si el término ds desaparece, entonces el proceso es una integral estocástica y, así, necesariamente una martingala local. Si además esta es la integral estocástica de un proceso en $M^2[0,T]$, entonces se trata de una martingala. $\diamondsuit$

Finalmente, cerramos este capítulo con el siguiente resultado, cuya prueba puede encontarse en las páginas 239-240 de [Baldi, 2017], a ser utilizado en la demostración del lema 3.3.

Propiedad 2.27. Sea

$$X := \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, (X_t)_{t\in[0,T]}, \mathbf{P}\right)$$

un proceso estocástico $\mathbb{R}^{m\times d}$–valuado en $M^2[0,T]$ y sea θ un vector unitario en $\mathbb{R}^m$. Luego, si existe una constante b tal que

$$\int_0^T (X_s {X^*}_s \theta, \theta)_{\mathbb{R}^m} ds \ \leq \ b,$$

entonces

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |(\theta, X_t)_{\mathbb{R}^m}| \geq x\right) \ \leq \ 2\exp\left(-\frac{x^2}{2b}\right).$$

$\diamondsuit$

Capítulo 3

Aplicaciones de la fórmula de Itô

A lo largo de este capítulo:

$$B := \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}, (B_t)_{t\in[0,1]}, \mathbf{P}\right)$$

denotará un movimiento Browniano estándar d-dimensional y

$$X := \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}, (X_t)_{t\in[0,1]}, \mathbf{P}\right)$$

denotará un proceso $\mathbb{C}^{\mathrm{d}}$-valuado en $M^2_{loc}[0,1]$. Luego, para cada $t \in [0,1]$ definimos

$$Z_t := \exp\left(\int_0^t X_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t {X_s}^2 ds\right),$$

donde $z^2 := {z_1}^2 + \cdots + {z_d}^2$ si $z := (z_1, \ldots, z_d)$ está en $\mathbb{C}^{\mathrm{d}}$. Además, definimos el proceso

$$Z := \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}, (Z_t)_{t\in[0,1]}, \mathbf{P}\right).$$

3.1. El teorema de Girsanov

El siguiente teorema fue probado por Igor Girsanov en [Girsanov, 1960]. Daremos la prueba para una versión más débil de dicho teorema ya que esta versión será suficiente para demostrar el teorema de Cameron Martin en el próximo capítulo.

Teorema 3.1 (Girsanov)**.** Asumiendo que X sea un proceso d-dimensional tal que $\int_0^1 |X_s|^2 ds \leq a$ para algún $a \in \mathbb{R}$ y que Z sea una martingala, definimos $\widetilde{\mathbf{P}}$ como la probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ donde Z_1 es su función de densidad con respecto a $\mathbf{P}$. Entonces, el proceso

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}, (\widetilde{B}_t)_{t\in[0,1]}, \widetilde{\mathbf{P}}\right),$$

donde

$$\widetilde{B}_t := B_t - \int_0^t X_s ds,$$

es un movimiento Browniano. $\diamondsuit$

Demostración. En efecto, solo necesitamos probar que para cada $\theta \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$,

$$Y^\theta{}_t := \exp\left(i\left(\theta, \widetilde{B}_t\right) + \frac{1}{2}|\theta|^2 t\right)$$

es una martingala con respecto a $\widetilde{\mathbf{P}}$. Esto se sigue del lema 3.2 al demostrar que $Z_t Y^\theta{}_t$ es una martingala con respecto a $\mathbf{P}$. Sea $\theta \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$; luego

$$\begin{aligned}
Z_t Y^\theta{}_t &= \exp\left(\int_0^t X_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t {X_s}^2 ds + i\left(\theta, \widetilde{B}_t\right) + \frac{1}{2}|\theta|^2 t\right)\\
&= \exp\left(\int_0^t (X_s + i\theta) dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t {X_s}^2 ds - i\int_0^t (\theta, X_s)\, ds + \frac{1}{2}|\theta|^2 t\right)\\
&= \exp\left(\int_0^t (X_s + i\theta) dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t (X_s + i\theta)^2 ds\right).
\end{aligned}$$

Finalmente, de la hipótesis sobre X y el lema 3.3, $Z_t Y^\theta{}_t$ es una martingala con respecto a $\mathbf{P}$. $\square$

Lema 3.2. Con las mismas hipótesis del teorema de anterior, sea

$$Y := \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}, (Y_t)_{t\in[0,1]}, \widetilde{\mathbf{P}}\right).$$

Si

$$ZY := \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}, (Z_t Y_t)_{t\in[0,1]}, \mathbf{P}\right)$$

es una martingala, entonces Y es una martingala.

Demostración. Primero, para cada $0 \leq s \leq t \leq 1$:

$$\mathbf{E}_{\widetilde{\mathbf{P}}}[Y_t|\mathcal{F}_s] = \frac{\mathbf{E}[Z_1 Y_t|\mathcal{F}_s]}{\mathbf{E}[Z_1|\mathcal{F}_s]}.$$

Luego,

$$\mathbf{E}[Z_1 Y_t|\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}[Z_1 Y_t|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s\right] = \mathbf{E}\left[Y_t\, \mathbf{E}[Z_1|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s\right] = \mathbf{E}[Z_t Y_t|\mathcal{F}_s] = Z_s Y_s.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{E}_{\widetilde{\mathbf{P}}}[Y_t|\mathcal{F}_s] = \frac{Z_s Y_s}{Z_s} = Y_s.$$

$\square$

Lema 3.3. Si $\int_0^1 |X_s|^2 ds \leq b$ para algún $b \in \mathbb{R}$, entonces Z es una martingala compleja acotada en L^p para cada $p > 1$, donde $|z|^2 := |z_1|^2 + \cdots + |z_d|^2$ si $z := (z_1, \ldots, z_d)$ está en $\mathbb{C}^{\mathrm{d}}$.

Demostración. Sea $W := \sup_{s\in[0,1]} |Z_s|$. Afirmamos que $\mathbf{E}[W^p] < \infty$. En efecto, como

$$\mathbf{E}[W^p] = \int_0^\infty p r^{p-1} \mathbf{P}\{W \geq r\} dr, \tag{3.1}$$

probaremos que $r \mapsto \mathbf{P}\{W \geq r\}$ tiende a cero lo suficientemente rápido. En efecto, sea $r > 0$. Luego, como

$$\begin{aligned}|Z_t| =& \exp\left(\int_0^t \operatorname{Re} X_s\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\operatorname{Re} X_s|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t |\operatorname{Im} X_s|^2 ds\right)\\ \leq& \exp\left(\int_0^t \operatorname{Re} X_s\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t |\operatorname{Im} X_s|^2 ds\right),\end{aligned}$$

gracias a la propiedad 2.27,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{W \geq r\} \leq& \mathbf{P}\left[\sup_{t\in[0,1]} \int_0^t \operatorname{Re} X_s\, dB_s \;\geq\; \log(r) - \frac{1}{2}\int_0^1 |\operatorname{Im} X_s|^2 ds\right]\\ \leq& \mathbf{P}\left[\sup_{t\in[0,1]} \int_0^t \operatorname{Re} X_s\, dB_s \;\geq\; \log(r) - \frac{b}{2}\right]\\ \leq& 2\exp\left[-\frac{\left(log(r) - \frac{b}{2}\right)^2}{2b}\right].\end{aligned}$$

Así, el lado derecho tiende al infinito en el orden

$$\exp\left(-c\log^2(r)\right) = \frac{1}{r^{c\log(r)}}$$

por lo que $r \mapsto \mathbf{P}\{W \geq r\}$ tiende a cero cuando r tiende a ∞ más rápido que $r^{-\alpha}$ para todo $\alpha > 0$ y la integral en (3.1) es convergente para todo $p > 1$. Luego, como

$$\mathbf{E}\left[\int_0^1 |Z_s X_s|^2 ds\right] \leq \mathbf{E}\left[W^2 \int_0^1 |X_s|^2 ds\right] \leq b\,\mathbf{E}\left[W^2\right] < \infty,$$

entonces

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}, (Z_t X_t)_{t\in[0,1]}, \mathbf{P}\right)$$

está en $M^2[0,1]$. Así, como $\mathbf{E}[W^p] < \infty$ y en virtud del lema 3.4, Z es una martingala acotada en L^p. □

Lema 3.4. Z es una martingala local y más aún

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s X_s dB_s$$

para cada t en $[0,1]$.

Demostración. Para cada t en $[0,1]$ definimos

$$Y_t := \int_0^t X_s dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t {X_s}^2 ds.$$

La conclusión se sigue de aplicar la fórmula de Itô para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por $(x,y) \mapsto \exp(x)\cos(y)$ y por $(x,y) \mapsto \exp(x)\sin(y)$. $\square$

3.2. Propiedades del dual topológico del espacio de Wiener

De ahora en adelante $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ denotará el espacio de Wiener, H el subespacio de Cameron-Martin, B el proceso canónico sobre el espacio de Wiener y para cada h en Ω: $\mathbf{P}_h$ denotará la ley de $\Omega \ni \omega \mapsto \omega + h \in \Omega$ bajo $\mathbf{P}$.

Definición 3.5. Sobre H definimos el producto interno

$$(\sigma, \tau)_H := \sum_{j=1}^{d} \int_0^1 {\sigma'}_j(s) {\tau'}_j(s) ds.$$

$\diamondsuit$

Observación 3.6. $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ es un espacio de Hilbert. $\diamondsuit$

Definición 3.7. En virtud del teorema de representación de Riesz[1], para cada φ en Ω^* existe una medida con signo $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$-valuada ν^φ tal que para cada $j = 1, \ldots, d$: la aplicación

$$[0,1] \ni t \mapsto {\nu^\varphi}_j(0,t]$$

es de variación acotada y para todo ω en Ω:

$$\varphi(\omega) := \sum_{j=1}^{d} \left[(RS) \int_0^1 \omega_j(s) d{\nu^\varphi}_j(0,s] \right].$$

Para cada φ en Ω^* y t en $[0,1]$ definimos

$$(\iota^*\varphi)(t) := t\nu^\varphi(0,1] - \int_0^t \nu^\varphi(0,s] ds.$$

[1] Para mayor detalle por favor consulte la página 464 de [Royden and Fitzpatrick, 2010]

Luego, por un lado $\iota^*\varphi$ es absolutamente continuo; por otro lado,

$$(\iota^*\varphi)'(t) = \nu^\varphi(0,1] - \nu^\varphi(0,t], \tag{3.2}$$

está en $L^2([0,1], m)$, ya que $(\iota^*\varphi)'$ es de variación acotada. Así, tenemos que $\iota^*\varphi \in H$ y de ahora en adelante denotaremos por ι^* a dicha aplicación. $\diamondsuit$

Lema 3.8. Para todo φ en Ω^* y η en H:

$$\varphi(\eta) = (\iota^*\varphi, \eta)_H. \tag{3.3}$$

Demostración. Sean φ en Ω^* y η en H. Luego, gracias a la ecuación (3.2) y la fórmula de integración por partes,

$$\begin{aligned}
\varphi(\eta) &= \sum_{j=1}^{d} \left[(RS) \int_0^1 \eta_j(s) d\nu^\varphi{}_j(0,s] \right] \\
&= \sum_{j=1}^{d} \left[-(RS) \int_0^1 \eta_j(s) d(\iota^*\varphi)'{}_j(s) \right] \\
&= \sum_{j=1}^{d} \left[(RS) \int_0^1 (\iota^*\varphi)'{}_j(s) d\eta_j(s) \right] \\
&= \sum_{j=1}^{d} \int_0^1 (\iota^*\varphi)'{}_j(s) \eta_j'(s) ds \\
&= (\iota^*\varphi, \eta)_H.
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 3.9. La aplicación $\iota^* : \Omega^* \to H$ es lineal, inyectiva y su imagen es densa en $(H, |\cdot|_H)$.

Demostración. La linealidad e inyectividad se sigue de la ecuación (3.3). Luego, sea $\eta \in H$ tal que para todo $\varphi \in \Omega^*$:

$$(\eta, \iota^*\varphi)_H = 0.$$

Finalmente, de nuevo por la ecuación (3.3), para todo $\varphi \in \Omega^*$: $\varphi(\eta) = 0$, lo cual implica que $\eta = 0$. $\square$

A continuación, los dos lemas anteriores serán empleados para demostrar la siguiente caracterización de los vectores de H a ser usada en el próximo capítulo.

Teorema 3.10. Sea $h \in \Omega$. Luego, para que h esté en H es necesario y suficiente que exista $\alpha > 0$ tal que para todo $\varphi \in \Omega^*$:

$$|\varphi(h)| \le \alpha |\iota^*\varphi|_H.$$

Demostración. Primero, supongamos que $h \in H$. Luego, para todo $\varphi \in \Omega^*$, por la desigualdad de Cauchy–Schwarz,

$$|\varphi(h)| = |(\iota^*\varphi, h)_H| \leq |h|_H |\iota^*\varphi|_H.$$

Ahora, provemos la vuelta. Definimos la aplicación $\iota^*(\Omega^*) \ni \iota^*\varphi \mapsto \varphi(h)$, la cual es lineal y continua en virtud del lema 3.9 y de la hipótesis. Luego, otra vez gracias al lema 3.9, dicha aplicación puede ser extendida a todo H de tal forma que dicha extensión sea también lineal y continua; así, por el teorema de representación de Riesz-Fréchet, sea $\eta \in H$ la representación de la extensión. Finalmente, para todo $\varphi \in \Omega^*$:

$$\varphi(h) = (\iota^*\varphi, \eta)_H = \varphi(\eta),$$

lo cual implica que $h = \eta \in H$. □

Finalmente, la demostración del próximo teorema, también a ser empleado en el siguiente capítulo, fue motivada por la prueba del teorema 4.19 del capítulo 1 de [Huang and Yan, 2000].

Teorema 3.11. Para todo φ en Ω^*:

$$\varphi \sim \mathcal{N}\left(0, {|\iota^*\varphi|_H}^2\right)$$

con respecto a $\mathbf{P}$.

Demostración. Para cada $j = 1, \ldots, d$ y $t \in [0, 1]$ definimos

$$\begin{aligned}\psi_j(t) &:= \int_0^t {(\iota^*\varphi)''}_j(s)ds \quad \text{y} \\ \alpha_j(t) &:= {(\iota^*\varphi)'}_j(t) - \psi_j(t).\end{aligned}$$

Luego, para cada $t \in [0,1]$ definimos

$$Y_t := \begin{pmatrix} {B^1}_t \\ \vdots \\ {B^d}_t \\ \psi_1(t) \\ \vdots \\ \psi_d(t) \end{pmatrix},$$

$$F_t := \begin{pmatrix} 0_{d\times 1} \\ {\psi_1}'(t) \\ \vdots \\ {\psi_d}'(t) \end{pmatrix} \quad \text{y}$$

$$G_t := \begin{pmatrix} I_{d\times d} \\ 0_{d\times d}. \end{pmatrix}$$

Sea $f : \mathbb{R}^{\mathrm{d}} \times \mathbb{R}^{\mathrm{d}} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (x,y)_{\mathbb{R}^{\mathrm{d}}}$. Así, como

$$Y_t = \int_0^t F_s ds \ + \int_0^t G_s dB_s$$

para todo $t \in [0,1]$, en virtud de la fórmula de Itô,

$$f(Y_1) \ = \ \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^d {B^j}_s {\psi_j}'(s) \right] ds \ + \ \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^d \psi_j(s) I_j \right] dB_s, \tag{3.4}$$

donde I_j es la j-ésima columna de la matriz identidad I de orden d. Luego, para cada $\omega \in \Omega$, por un lado

$$\begin{aligned} f(Y_1)(\omega) &= \sum_{j=1}^d \omega_j(1)\psi_j(1) \\ &= \sum_{j=1}^d \omega_j(1) \left({(\iota^*\varphi)'}_j(1) - \alpha_j(1) \right) \\ &= -\sum_{j=1}^d \omega_j(1)\alpha_j(1), \end{aligned}$$

y por otro lado, gracias a la fórmula de integración por partes,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[\sum_{j=1}^d B^j{}_s(\omega)\psi_j{}'(s) \right] ds \\
&= \sum_{j=1}^d \left[\int_0^1 \omega_j(s)\psi_j{}'(s) ds \right] \\
&= \sum_{j=1}^d \left[(RS) \int_0^1 \omega_j(s) d\psi_j(s) \right] \\
&= \sum_{j=1}^d \left[(RS) \int_0^1 \omega_j(s) d(\iota^*\varphi)'{}_j(s) - \ (RS) \int_0^1 \omega_j(s) d\alpha_j(s) \right] \\
&= \sum_{j=1}^d \left[-(RS) \int_0^1 \omega_j(s) d\nu^\varphi{}_j(0,s] - \ (RS) \int_0^1 \omega_j(s) d\alpha_j(s) \right] \\
&= -\varphi(\omega) + \sum_{j=1}^d \left[-(RS) \int_0^1 \omega_j(s) d\alpha_j(s) \right] \\
&= -\varphi(\omega) + \sum_{j=1}^d \left[-\omega_j(1)\alpha_j(1) + (RS) \int_0^1 \alpha_j(s) d\omega_j(s) \right].
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[\sum_{j=1}^d \psi_j(s) I_j \right] dB_s \\
&= \sum_{j=1}^d \left[\int_0^1 \psi_j(s) I_j dB_s \right] \\
&= \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \left[\int_0^1 \psi_j(s) I_{j,k} dB^k{}_s \right] \\
&= \sum_{j=1}^d \left[\int_0^1 \psi_j(s) dB^j{}_s \right] \\
&= \sum_{j=1}^d \left[\int_0^1 (\iota^*\varphi)'{}_j(s) dB^j{}_s - \int_0^1 \alpha_j(s) dB^j{}_s \right] \\
&= \int_0^1 (\iota^*\varphi)' dB_s - \sum_{j=1}^d \left[\int_0^1 \alpha_j(s) dB^j{}_s \right].
\end{aligned}$$

Así, reemplazando estos últimos desarrollos en la ecuación (3.4), en virtud de la propiedad 2.8,

$$\varphi = \int_0^1 (\iota^* \varphi)' dB_s \quad \mathbf{P}\text{-a.s.}$$

Finalmente, en virtud de la propiedad 2.11, φ tiene distribución Gaussian con media cero y varianza

$$\sum_{j=1}^{d} \left[\int_0^1 (\iota^* \varphi)'_j(s) (\iota^* \varphi)'_j(s) ds \right] = |\iota^* \varphi|_H{}^2$$

con respecto a $\mathbf{P}$. □

Capítulo 4

Demostración del teorema de Cameron-Martin

El siguiente teorema fue probado por dos de los discípulos de Wiener: Robert Cameron y William Martin en [Cameron and Martin, 1944]; no obstante, la versión que daremos extiende a la original al completar el caso en que h está en el complemento del subespacio de Cameron-Martin: demostraremos que $\mathbf{P}_h$ y $\mathbf{P}$ son singulares en este caso. Recordemos que seguimos con la notación establecida al inicio de la sección 3.2. A continuación el enunciado:

Teorema 4.1 (Cameron-Martin)**.** Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ el espacio de Wiener, sea H el subespacio de Cameron-Martin, sea B el proceso canónico sobre el espacio de Wiener y sea h en Ω.

(i) Si h está en H entonces $\mathbf{P}_h$ y $\mathbf{P}$ son equivalentes; más aún,

$$\frac{d\,\mathbf{P}_h}{d\,\mathbf{P}} = \exp\left(\int_0^1 h'(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^1 |h'(s)|^2 ds\right). \tag{4.1}$$

(ii) Si h no está en H entonces $\mathbf{P}_h$ y $\mathbf{P}$ son singulares. $\diamondsuit$

La ecuación (4.1) es conocida como **fórmula de Cameron-Martin**. Dividiremos la demostración en dos partes: el caso en que h está en H y el caso contrario. Antes del desarrollo de las mismas, veamos el siguiente resultado.

Lema 4.2. Siguiendo la notación del teorema anterior, sea $\widetilde{\mathbf{P}}$ una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. Luego $\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}_h$ si y solo si

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}, (B_t - h(t))_{t\in[0,1]}, \widetilde{\mathbf{P}}\right)$$

es un movimiento Browniano d-dimensional. $\diamondsuit$

Demostración. Primero, afirmamos que para cada elección de n, de $0 \leq t_1 < \cdots < t_n \leq 1$ y de $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$:

$$\mathbf{P}_h\{B_{t_1} \in A_1, \ldots, B_{t_n} \in A_n\} = \mathbf{P}\{B_{t_1} + h(t_1) \in A_1, \ldots, B_{t_n} + h(t_n) \in A_n\}. \tag{4.2}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_h\{B_{t_1} \in A_1, \ldots, B_{t_n} \in A_n\} &= \mathbf{P}\left(\{B_{t_1} \in A_1, \ldots, B_{t_n} \in A_n\} - h\right) \\ &= \mathbf{P}\{B_{t_1} + h(t_1) \in A_1, \ldots, B_{t_n} + h(t_n) \in A_n\}.\end{aligned}$$

Luego, supongamos que $\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}_h$. Así, gracias a la ecuación (4.2),

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathbf{P}}\{B_{t_1} - h(t_1) \in A_1, \ldots, B_{t_n} - h(t_n) \in A_n\} = \\ =&\,\mathbf{P}_h\{B_{t_1} \in A_1 + h(t_1), \ldots, B_{t_n} \in A_n + h(t_n)\} \\ =&\,\mathbf{P}\{B_{t_1} + h(t_1) \in A_1 + h(t_1), \ldots, B_{t_n} + h(t_n) \in A_n + h(t_n)\} \\ =&\,\mathbf{P}\{B_{t_1} \in A_1, \ldots, B_{t_n} \in A_n\},\end{aligned}$$

lo que significa que

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}, (B_t - h(t))_{t\in[0,1]}, \widetilde{\mathbf{P}}\right)$$

es un movimiento Browniano d-dimensional.

Finalmente, asumamos que

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}, (B_t - h(t))_{t\in[0,1]}, \widetilde{\mathbf{P}}\right)$$

es un movimiento Browniano d-dimensional. Así, otra vez en virtud de la ecuación (4.2),

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathbf{P}}\{B_{t_1} - h(t_1) \in A_1, \ldots, B_{t_n} - h(t_n) \in A_n\} = \\ =&\,\mathbf{P}\{B_{t_1} \in A_1, \ldots, B_{t_n} \in A_n\} \\ =&\,\mathbf{P}\{B_{t_1} + h(t_1) \in A_1 + h(t_1), \ldots, B_{t_n} + h(t_n) \in A_n + h(t_n)\} \\ =&\,\mathbf{P}_h\{B_{t_1} \in A_1 + h(t_1), \ldots, B_{t_n} \in A_n + h(t_n)\} \\ =&\,\mathbf{P}_h\{B_{t_1} - h(t_1) \in A_1, \ldots, B_{t_n} - h(t_n) \in A_n\},\end{aligned}$$

y por la proposición 2.2 de [Baldi, 2017], concluimos que $\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}_h$. □

4.1. Demostración de la equivalencia

Sea h un elemento de H. Para cada t en $[0,1]$ definimos $X_t := h'(t)$. Luego, como X es un proceso d-dimensional en $M^2_{loc}[0,1]$, para cada t en $[0,1]$ definimos

$$Z_t := \exp\left(\int_0^t X_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t |X_s|^2 ds\right).$$

Sea
$$Y_t := \int_0^t X_s dB_s - \frac{1}{2}|X_s|^2 ds,$$
para cada t en $[0,1]$, y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x)$.

Primero, en virtud de la fórmula de Itô, para cada t en $[0,1]$ tenemos que
$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s X_s dB_s,$$
lo cual implica que
$$Z := \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}, (Z_t)_{t\in[0,1]}, \mathbf{P}\right)$$
es una martingala local positiva. Luego, por la propiedad 2.17, Z es una supermartingala.

Segundo, como la variable aleatoria $\int_0^1 X_s dB_s$ es Gaussiana y $\mathbf{E}[Z_1] = 1$, entonces Z es una martingala. Finalmente, en virtud del teorema de Girsanov: teorema 3.1,
$$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}, (\widetilde{B}_t)_{t\in[0,1]}, \widetilde{\mathbf{P}}\right)$$
es un movimiento Browniano d-dimensional, donde $d\widetilde{\mathbf{P}} = Z_1 d\mathbf{P}$ y
$$\widetilde{B}_t := B_t - \int_0^t X_s ds = B_t - h(t).$$

Finalmente, por el lema 4.2, tenemos $\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}_h$, $\mathbf{P}_h$ es equivalente a $\mathbf{P}$ y la ecuación (4.1) se satisface.

4.2. Demostración de la singularidad

Sea h un elemento del complemento de H. Por el teorema de descomposición de Lebesgue, tenemos que
$$\mathbf{P}_h = \mu + \nu,$$
donde μ y ν son medidas finitas sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que μ es absolutamente continua con respecto a $\mathbf{P}$ y, además, ν y $\mathbf{P}$ son singulares. La conclusión se sigue si probamos que $\mu(\Omega) = 0$. En efecto, para cada $\varphi \in \Omega^*$ definimos:
$$I_\varphi := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2} + i\theta\varphi(\omega)\right) \mathbf{P}_h(d\omega)d\theta.$$

En virtud del teorema de Fubini, esta integral está bien definida y tenemos dos formas de calcularla. Por un lado, gracias al teorema 3.11,

$$\begin{aligned}
I_\varphi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2}\right) \left(\int_\Omega \exp\left(i\theta\varphi(\widetilde{\omega}+h)\right) \mathbf{P}(d\widetilde{\omega})\right) d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2} + i\theta\varphi(h)\right) \left(\int_\Omega \exp\left(i\theta\varphi(\widetilde{\omega})\right) \mathbf{P}(d\widetilde{\omega})\right) d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2} + i\theta\varphi(h)\right) \exp\left(-\frac{1}{2}{|\iota^*\varphi|_H}^2\theta^2\right) d\theta \\
&= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(i\theta\varphi(h)\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(1+{|\iota^*\varphi|_H}^2)\theta^2\right) d\theta \\
&= \sqrt{\sigma^2} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(i\theta\varphi(h)\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}\right) d\theta \\
&= \sqrt{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\sigma^2\varphi^2(h)}{2}\right),
\end{aligned}$$

donde

$$\sigma^2 := \frac{1}{1+{|\iota^*\varphi|_H}^2}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
I_\varphi &= \int_\Omega \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(i\theta\varphi(\omega)\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2}\right) d\theta\right) \mathbf{P}_h(d\omega) \\
&= \int_\Omega \exp\left(-\frac{\varphi^2(\omega)}{2}\right) \mathbf{P}_h(d\omega) \\
&\geq \int_\Omega \exp\left(-\frac{\varphi^2(\omega)}{2}\right) \mu(d\omega).
\end{aligned}$$

Así, para todo $\varphi \in \Omega^*$, de estos últimos desarrollos, tenemos:

$$\int_\Omega \exp\left(-\frac{\varphi^2}{2}\right) d\mu \leq \frac{1}{\sqrt{1+|\iota^*\varphi|_H^2}} \exp\left(-\frac{\varphi^2(h)}{2\left(1+|\iota^*\varphi|_H^2\right)}\right). \tag{4.3}$$

Luego, en virtud del teorema 3.10,

$$\sup\left\{\varphi(h)\ ;\ \varphi \in \Omega^*,\ |\iota^*\varphi|_H = 1\right\} = \infty.$$

Así, sea (φ_n) una sucesión en Ω^* tal que

$$|\iota^*\varphi_n|_H = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(h) = \infty.$$

Ahora, para cada $\omega \in \Omega$ y todo n suficientemente grande definimos:

$$\psi_n(\omega) := \frac{\varphi_n(\omega)}{\sqrt{\varphi_n(h)}}.$$

Ahora tenemos que φ_n tiene distribución normal estándar para todo n y

$$-\frac{1}{\varphi_n(h)} < \frac{1}{2}$$

para todo n suficientemente grande. Así, en virtud de la función generadora de momentos de la distribución chi-cuadrada,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \exp\left(-\frac{{\varphi_n}^2(\omega)}{2\varphi_n(h)}\right) \mathbf{P}(d\omega) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\varphi_n(h)}\right)^{-1/2} = 1,$$

y por el teorema de la convergencia dominada,

$$\exp\left(-\frac{{\varphi_n}^2}{2\varphi_n(h)}\right) \xrightarrow{L^1(\mathbf{P})} 1.$$

Luego, considerando una subsucesión de ser necesario,

$$\exp\left(-\frac{{\varphi_n}^2}{2\varphi_n(h)}\right) \xrightarrow{\mathbf{P}-\text{a.s.}} 1,$$

y, también, como μ es absolutamente continua con respecto a $\mathbf{P}$,

$$\exp\left(-\frac{{\varphi_n}^2}{2\varphi_n(h)}\right) \xrightarrow{\mu-\text{a.s.}} 1.$$

Finalmente, considerando $\varphi = \psi_n$ en la desigualdad (4.3), otra vez por el teorema de la convergencia dominada, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mu(\Omega) &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \exp\left(-\frac{\varphi_n^2}{2\varphi_n(h)}\right) d\mu \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi_n(h)}} \exp\left(-\frac{\varphi_n(h)}{2\left(1 + \frac{1}{\varphi_n(h)}\right)}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

Una vez más, con la notación definida al inicio de la sección 3.2 en mente, observamos que en el desarrollo de este trabajo se obtuvieron los siguientes resultados:

(i) El teorema de Girsanov, teorema 3.1, nos garantiza que bajo ciertos desplazamientos estocásticos el nuevo proceso estocástico es un movimiento Browniano pero bajo otra medida de probabilidad equivalente a la original.

(ii) El teorema 3.11 nos asegura que cada funcional φ de Ω^* tiene distribución Gaussiana centrada y, más aún, nos dan una fórmula para hallar su varianza. Esta fórmula:

$$|\iota^*\varphi|_H{}^2$$

fue un resultado fundamental utilizado en la demostración de la singularidad de las medidas $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}_h$ en la sección 4.2.

(iii) La ecuación (4.2) nos dice que sin importar la naturaleza de h, $\mathbf{P}_h$ es siempre una medida Gaussiana.

En virtud de este último resultado observado, ítem (iii), nuestra versión del teorema de Cameron–Martin, teorema 4.1, prueba un caso particular del teorema de dicotomía de Felman–Hájek que establece que dos medidas Gaussianas sobre un mismo espacio localmente convexo son o bien equivalentes o bien singulares; para más detalles por favor vea el teorema 2.7.2 de [Bogachev, 1998].

No obstante, nuestra versión del teorema de Cameron–Martin extiende el teorema de Felman–Hájek en el sentido de que caracteriza aquellas medidas Gaussianas $\mathbf{P}_h$ que son equivalentes a $\mathbf{P}$, y más aún, en virtud de la inversión hecha en el cálculo estocástico, se obtuvo una fórmula para la derivada de Radon-Nikodym de $\mathbf{P}_h$ con respecto a $\mathbf{P}$, conocida como fórmula de Cameron-Martin: ecuación (4.1).

Bibliografía

[Baldi, 2017] Baldi, P. (2017). *Stochastic Calculus: An Introduction Through Theory and Exercises*. Universitext. Springer.

[Bogachev, 1998] Bogachev, V. (1998). *Gaussian Measures*. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society.

[Cameron and Martin, 1944] Cameron, R. and Martin, W. (1944). Transformations of weiner integrals under translations. *The Annals of Mathematics*, 45(2):386–396.

[Girsanov, 1960] Girsanov, I. (1960). On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures. *Theory of Probability and Its Applications*, 5(3):285–301.

[Gordon, 1994] Gordon, R. (1994). *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, volume 4 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society.

[Huang and Yan, 2000] Huang, Z. and Yan, J. (2000). *Introduction to Infinite Dimensional Stochastic Analysis*. Mathematics and Its Applications. Springer.

[Klebaner, 2012] Klebaner, F. (2012). *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. Imperial College Press, 3rd edition.

[Klenke, 2014] Klenke, A. (2014). *Probability Theory: A Comprehensive Course*. Universitext. Springer-Verlag London, 2nd edition.

[Kuo, 2006] Kuo, H.-H. (2006). *Introduction to Stochastic Integration*. Universitext. Springer, 1 edition.

[Le Gall, 2016] Le Gall, J.-F. (2016). *Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus*. Graduate Texts in Mathematics 274. Springer.

[Royden and Fitzpatrick, 2010] Royden, H. and Fitzpatrick, P. (2010). *Real Analysis*. Prentice Hall, 4th edition.

Anexos

```
E_P = function(n,k) {
    x = numeric(k)
    s = 0
    d = n - k
    for(i in 1:n) {
        z = g(rnorm(1,0,1))
        s = s + z
        if(i > d) x[i-d] = s/i
    }
    plot(x,type="l")
    tail(x,1)
}

E_Pt = function(n,k) {
    x = numeric(k)
    s = 0
    d = n - k
    for(i in 1:n) {
        z = f(rnorm(1,6,1))
        s = s + z
        if(i > d) x[i-d] = s/i
    }
    plot(x,type="l")
    tail(x,1)
}
```

Listado 1: Simulaciones de eventos raros.

```r
g = function(x) {
      if(x < 0) return(exp(6*x-18))
      else return(0)
}

f = function(x) {
      if(x < 0) return(x)
      else return(0)
}
```

Listado 2: Funciones empleadas en el listado 1.