UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

SECCIÓN DE POSGRADO Y SEGUNDA ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA

TÍTULO

Modelamiento Matemático del Sistema de Transporte Metropolitano de Lima

POR

EDGARD KENNY VENEGAS PALACIOS

ASESOR

ELADIO OCAÑA ANAYA

Lima, Perú

2013

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi asesor de tesis Eladio Ocaña Anaya por aconsejarme a lo largo de este trabajo de investigación y por su apoyo constante; también a mis profesores de la Universidad Nacional de Ingeniería por sus enseñanzas, las cuales me permitieron concluir esta tesis.

Una mención especial aquí es para mi esposa Karina Taipe por su brindarme su aliento incondicional y comprensión, gracias a ella he tenido la motivación necesaria y suficiente para involucrarme en este trabajo.

RESUMEN

Presentaremos dos modelos matemáticos relacionados a un mismo problema de transporte. El primero de ellos es planteado del punto de vista de la Empresa de Transportes que desea minimizar sus costos operativos y el segundo problema consiste en minimizar el tiempo total de viaje de todos los usuarios del Metropolitano, esto implica determinar la asignación óptima de N buses en cada ruta y la frecuencia de las salidas de los buses. Luego de formular estos modelos se propone un algoritmo para resolver el segundo problema y se estudia el caso estocástico para realizar simulaciones en el Sistema Metropolitano de Transporte de Lima. Finalmente se relacionarán los problemas planteados en uno solo que minimiza el costo total, el cual incluye los costos operativos y el costo de espera.

Índice general

Introducción

El Sistema Metropolitano de Transporte de Lima, o simplemente El Metropolitano, se ha convertido en el transporte urbano más importante que conecta 16 distritos limeños desde Chorrillos hasta Independencia. Actualmente, los usuarios sienten que el servicio puede ser optimizado; como respuesta a ello en su momento se implementó los servicios Regular C, los Expresos 3 y 4, y el "Súper-Expreso", luego se han modificado las rutas A y C, e incrementado el número de buses. Sin embargo, una simulación de las modificaciones a este Sistema puede determinar si se mejorará o no la situación actual o si el aumento de buses beneficiará a más usuarios.

Debido a que el problema a tratar es complicado, nos limitaremos a estudiar el Problema de Transporte del Metropolitano en un intervalo de tiempo en donde es notorio la sobredemanda de este servicio, lo cual ocurre en las mañanas y noches. En las mañanas hay una fuerte demanda en ambas direcciones, sin embargo, la principal demanda es en el sentido de Norte a Sur, mientras que en las noches la principal demanda es de Sur a Norte. Por lo mencionado anteriormente nos dedicaremos a modelar el Sistema Metropolitano de Transporte de Lima en las mañanas (de lunes a viernes) y solamente en la ruta troncal, es decir, no incluiremos a los buses alimentadores; y en un inicio no incluiremos al bus Regular C ni al Expreso 4 por circular sólo los sábados.

Es posible extender el estudio presentado aquí para determinar la programación diara o semanal usando correctamente las simulaciones y los modelos matemáticos propuestos.

Los buses articulados son aquellos que transitan en la ruta troncal y su longitud está entre 18 a 19 metros de largo. Dichos buses tienen dos capacidades distintas, de 160 y 120 pasajeros; y están pintados de plomo. Actualmente hay 300 buses articulados los cuales son de última generación, con tecnología EURO 4 y modernos comparados con la actual edad promedio de los buses en circulación. Para simplificar consideraremos sólo buses con capacidad para 120 pasajeros en el caso de las rutas regulares A y B, y una capacidad de 160 pasajeros en el caso de las rutas de los Expresos.

En el primer capítulo plantearemos dos problemas de transporte en el Metropolitano desde dos puntos de vista, siendo el segundo de ellos (del punto de vista del usuario) el que más nos motivó a realizar este trabajo.

En el primer problema, minimizar los costos operativos es equivalente a encontrar el número mínimo de buses que se necesita para transportar a todos los usuarios en un horario determinado; cabe mencionar que aquí no se considera el costo de espera. En el segundo problema se modelará el Sistema Metropolitano de Transporte de Lima de tal modo que se pueda minimizar el tiempo total de viaje de todos los usuarios; esto implica reducir el tiempo en el que realizan el recorrido y el tiempo de espera de los pasajeros en las estaciones, sobre todo en horas punta. En este caso se determinará la distribución óptima de N buses en todas las rutas, considerando las rutas vigentes antes del 17 de setiembre del 2012, y tomando en cuenta la frecuencia de las salidas de los buses. Debemos resaltar que los problemas mencionados en este capítulo no modelan fielmente la situación actual del Metropolitano, es por ello que en el Capítulo 4 serán reformulados.

Hay que mencionar que hasta el momento se considera que el problema a resolver es determinístico y no estocástico. El método más usado para resolver problemas estocásticos es considerarlo como un un problema en dos niveles. Es por ello que en el Capítulo 2 proponemos un algoritmo para resolver el segundo problema mediante subproblemas de programación lineal.

En el Capítulo 3 estudiamos la programación estocástica para resolver el problema de minimizar los tiempos totales de viaje de todos los usuarios teniendo en cuenta que los tiempos y cantidades con los que trabajaremos pueden ser obtenidos mediante una simulación con el método de Monte Carlo.

En el Capítulo 4 incluímos la ruta del bus Regular C debido a que en la actualidad circula durante todo el día. Esto implica modificar los problemas de transporte propuestos en el Capítulo 1, más aún se incluirá a los buses que parten dirigiéndose de sur a norte, debido a que en el primer capítulo sólo se consideró que los buses parte desde la Estación Naranjal; en consecuencia se estudia el problema de la asignación del número total de buses. Finalmente se considera el cambio de rutas de los buses al final de cada recorrido y se propone un problema de minimización del costo total asociado a N buses, el cual incluye los costos operativos y el costo de espera.

En el Capítulo 5 daremos todas las pautas necesarias para realizar una simulación numérica considerando la estocasticidad de las variables involucradas en los problemas mencionados en el Capítulo 4 con el fin de resolver el problema de minimización del costo total.

Capítulo 1

El Problema de Transporte en el Metropolitano

Hay dos puntos de vista en un problema de transporte, el primero de ellos es por parte del usuario que desea minimizar su tiempo de viaje y/o minimizar el costo para dirigirse de su punto de partida hacia su destino. Debido a que en el Metropolitano los precios de los pasajes ya están fijos y que es la única oferta considerada, entonces para minimizar el tiempo de recorrido debemos reducir el tiempo de espera en las estaciones, ya que los tiempos de viaje son estables en el sentido de el usuario tarda casi siempre lo mismo si mantiene constante sus estaciones de origen y destino y la ruta de el(los) bus(es) que utiliza para trasladarse. El segundo punto de vista es por parte de la empresa que brinda el servicio de transporte, el cual quiere maximizar su ganacia y/o minimizar sus costos operativos. Si consideramos que el número de usuarios no cambiará si se mantiene el costo, entonces para minimizar los costos operativos se debe conocer el número mínimo de buses que se necesita para transportar a todos los usuarios en un determinado tiempo.

Primero plantearemos un problema de optimización para determinar el número mínimo de buses que se necesita para garantizar el desplazamiento de los usuarios, es decir satisfacer la demanda. Recuerde que aquí no se está considerando los costos de espera, los cuales depende de los tiempos de espera de los pasajeros.

1.1. Minimización del número de buses

Para plantear un problema de optimización que permita determinar el número mínimo de buses, necesitamos datos que relacione la cantidad de usuarios que deben desplazarse de una estación a otra. Estos datos se sintetizan en un cuadro conocido como Matriz de Origen - Destino.

Denotemos por $\mathcal{A}$ la matriz Origen - Destino y supongamos que las personas que viajarán lo harán en un intervalo de tiempo, por ejemplo una hora, que es el tiempo total promedio del recorrido de los buses.

Definición 1.1. *Para cada $k, l \in \{1, 2, \ldots, 38\}$ tenemos las siguientes notaciones*

- $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{38\times 38}$, *debido a que hay 38 estaciones. Consideraremos la estación 1 a la estación Naranjal y la 38 a la estación Matellini.*
- $\mathcal{A}_{(k,l)}$ *denota el número de personas que suben en la estación k y bajan en la estación l.*
- $\mathcal{A}_{(k,k)} = 0$ *para todo $i = 1, \ldots, 38$, ya que asumimos que toda persona que usa el Metropolitano se desplaza a una estación distinta de la que sube.*

Para simplificar nuestro modelo, supondremos que sólo existen las rutas A y B, lo cual ocurre cuando no es hora punta, más aún, en esta sección las cantidades mencionadas serán constantes, es decir, tomará el mismo valor independientemente del día. El caso en que estas cantidades son variables serán consideradas en el Capítulo 4.

Observación 1.1. *En adelante denotaremos a la ruta A por la ruta 1 y a la ruta B por la ruta 2; usaremos indistintamente cualquiera de las notaciones.*

1.1.1. El caso cuando no es hora punta

En el Cuadro 1.1 tenemos todas las estaciones y las rutas que circulan por ellas.

Definición 1.2. *Para cada $k, l \in \{1, 2, \ldots, 38\}$ definamos $\alpha_{(k,l)} \in [0, 1]$ de tal modo que*

- $\alpha_{(k,l)}\mathcal{A}_{(k,l)}$ *sea el número de personas que van de la estación k a la estación l usando la ruta 1 (regular A).*
- $(1 - \alpha_{(k,l)})\mathcal{A}_{(k,l)}$ *sea el número de personas que van de la estación k a la estación l usando la ruta 2 (regular B).*

Debido a que $\mathcal{A}_{(k,k)} = 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, 38$ podemos colocar cualquier valor para $\alpha_{(k,k)}$, pero haremos que

$$\alpha_{(k,k)} = \frac{1}{2}, \text{ para todo } k = 1, 2, \ldots, 38. \tag{1.1}$$

N° de Estación	ESTACIÓN	Paradero de la Ruta
1	Naranjal	A,B
2	Izaguirre	A,B
3	Pacífico	A,B
4	Independencia	A,B
5	Los Jazmines	A,B
6	Tomás Valle	A,B
7	El Milagro	A,B
8	Honorio Delgado	A,B
9	UNI	A,B
10	Parque del trabajo	A,B
11	Caquetá	A,B
12	Ramón Castilla	A
13	Tacna	A
14	Jr. de la Unión	A
15	Colmena	A
16	2 de mayo	B
17	Quilca	B
18	España	B
19	Estación Central	A,B
20	Estadio Nacional	A,B
21	México	A,B
22	Canadá	A,B
23	Javier Prado	A,B
24	Canaval y Moreyra	A,B
25	Aramburú	A,B
26	Domingo Orué	A,B
27	Angamos	A,B
28	Ricardo Palma	A,B
29	Benavides	A,B
30	28 de Julio	A,B
31	Plaza de flores	A,B
32	Balta	A,B
33	Boulevard	A,B
34	Estadio Unión	A,B
35	Escuela militar	A,B
36	Terán	A,B
37	Rosario de Villa	A,B
38	Matellini	A,B

Cuadro 1.1: Paraderos de las rutas A y B

Como en las estaciones 12, 13, 14 y 15 pasa solamente la ruta A y en las estaciones 16, 17 y 18 sólo la ruta B, entonces:

$$\alpha_{(k,l)} = 1, \text{ para todo } k, l \in \{12, 13, 14, 15\} \text{ y para todo } k \neq l. \tag{1.2}$$

$$\alpha_{(k,l)} = 0, \text{ para todo } k, l \in \{16, 17, 18\} \text{ y para todo } k \neq l. \tag{1.3}$$

Por otro lado, si un pasajero quiere desplazarse desde la Estación $k \in \{1, 2, \ldots, 11\}$ a la Estación $l \in \{19, 20, \ldots, 38\}$, o viceversa, entonces es más probable que elija usar la ruta B debido a que dicha ruta es más corta, lo cual puede expresarse como:

$$0 \leq \alpha_{(k,l)} \leq \frac{1}{2}, \text{ para todo } k \leq 11 \text{ y para todo } l \geq 19. \tag{1.4}$$

$$0 \leq \alpha_{(k,l)} \leq \frac{1}{2}, \text{ para todo } k \geq 19 \text{ y para todo } l \leq 11. \tag{1.5}$$

Por último, si un pasajero quiere desplazarse desde la Estación $k \in \{12, \ldots, 15\}$ a la Estación $k \in \{16, \ldots, 18\}$, o viceversa, entonces debe pasar de una ruta a otra, en este caso el usuario tendrá que ir primero a la Estación 11 (Caquetá) o la Estación 19 (Estación Central) para realizar un transbordo; cuya cantidad de usuarios ya está considerada en ambos casos, en conclusión:

$$\mathcal{A}_{(k,l)} = \mathcal{A}_{(l,k)} = 0 \text{ y } \alpha_{(k,l)} = \alpha_{(l,k)} = \frac{1}{2}, \text{ para todo } 12 \leq k \leq 15 \text{ con } 16 \leq l \geq 18. \tag{1.6}$$

En consecuencia, el número total de pasajeros que **suben** en la k-ésima estación será:

$$\sum_{l=k+1}^{38} \alpha_{(k,l)} \mathcal{A}_{(k,l)}, \text{ si el bus se dirige de norte a sur y realiza la ruta A.} \tag{1.7}$$

$$\sum_{l=k+1}^{38} \left(1 - \alpha_{(k,l)}\right) \mathcal{A}_{(k,l)}, \text{ si el bus se dirige de norte a sur y realiza la ruta B.} \tag{1.8}$$

$$\sum_{l=1}^{k-1} \alpha_{(k,l)} \mathcal{A}_{(k,l)}, \text{ si el bus se dirige de sur a norte y realiza la ruta A.} \tag{1.9}$$

$$\sum_{l=1}^{k-1} \left(1 - \alpha_{(k,l)}\right) \mathcal{A}_{(k,l)}, \text{ si el bus se dirige de sur a norte y realiza la ruta B.} \tag{1.10}$$

Del mismo modo, el número total de pasajeros que **bajan** en la j-ésima estación será:

$$\sum_{i=1}^{j-1} \alpha_{(k,l)} \mathcal{A}_{(k,l)}, \text{ si el bus se dirige de norte a sur y realiza la ruta A.} \tag{1.11}$$

$$\sum_{i=1}^{j-1} \left(1 - \alpha_{(k,l)}\right) \mathcal{A}_{(k,l)}, \text{ si el bus se dirige de norte a sur y realiza la ruta B.} \tag{1.12}$$

$$\sum_{i=j+1}^{38} \alpha_{(k,l)}\mathcal{A}_{(k,l)}, \text{ si el bus se dirige de sur a norte y realiza la ruta A.} \tag{1.13}$$

$$\sum_{i=j+1}^{38} \left(1-\alpha_{(k,l)}\right)\mathcal{A}_{(k,l)}, \text{ si el bus se dirige de sur a norte y realiza la ruta B.} \tag{1.14}$$

Recordemos que el anális que estamos realizando lo aplicaremos sólo a un intervalo de tiempo, debido a que la cantidad de personas que usa el Metropolitano es dintinta en cada momento del día; más aún, el número de usuarios no coincide en el mismo periodo de tiempo en todas las semanas. Teniendo esto en cuenta veamos las siguientes notaciones:

- N_1^{ns}: número de buses que se desplazan de norte a sur por la ruta 1 (regular A).
- N_2^{ns}: número de buses que se desplazan de norte a sur por la ruta 2 (regular B).
- N_1^{sn}: número de buses que se desplazan de sur a norte por la ruta 1 (regular A).
- N_2^{sn}: número de buses que se desplazan de sur a norte por la ruta 2 (regular B).

Observe que se desea minimizar $N_1^{\mathrm{ns}}+N_2^{\mathrm{ns}}+N_1^{\mathrm{sn}}+N_2^{\mathrm{sn}}$, que representa el número total de buses que circularán por el Metropolitano en un intervalo de tiempo dado. Para obtener las restricciones a nuestro problema de optimización consideraremos cantidades promedio, es decir constantes en un intervalo de tiempo, ya que en realidad el número de usuarios debe considerarse como variables aleatorias así como los tiempos realizados por los buses de una estación a otra.

Definición 1.3. *Para cada $j \in \{1,2\}$ y $k \in \{1,\dots,38\}$ veamos las siguientes notaciones:*

- $\mathcal{S}_j^{k,ns}$*: número de pasajeros que* ***suben*** *en la k-ésima estación al bus que realiza la ruta j viajando de norte a sur.*
- $\mathcal{S}_j^{k,sn}$*: número de pasajeros que* ***suben*** *en la k-ésima estación al bus que realiza la ruta j viajando de sur a norte.*
- $\mathcal{B}_j^{k,ns}$*: número de pasajeros que* ***bajan*** *en la k-ésima estación del bus que realiza la ruta j viajando de norte a sur.*
- $\mathcal{B}_j^{k,sn}$*: número de pasajeros que* ***bajan*** *en la k-ésima estación del bus que realiza la ruta j viajando de sur a norte.*

Hay que tener en cuenta que $1 \leq k \leq 38$ y $j=1$ si la ruta es la A y $j=2$ si la ruta es la B. Además:

$$\mathcal{S}_j^{38,\mathrm{ns}} = \mathcal{S}_j^{1,\mathrm{sn}} = 0, \quad \forall \;\; j=1,2. \tag{1.15}$$

$$\mathcal{B}_j^{1,\text{ns}} = \mathcal{B}_j^{1,\text{sn}} = 0, \quad \forall \;\; j = 1, 2. \tag{1.16}$$

Si denotamos C_j la capacidad de personas que pueden viajar en el bus que realiza la ruta j; en este caso se tiene que $C_j = 120$ para $j = 1, 2$. Luego, la cantidad de pasajeros que hay dentro del bus en cada tramo del recorrido es menor o igual a 120, lo cual se puede expresar como:

$$\sum_{l=1}^{k} \left(\mathcal{S}_j^{l,\text{ns}} - \mathcal{B}_j^{l,\text{ns}} \right) \leq C_j = 120, \quad \forall \;\; j = 1, 2; \;\; \forall \;\; k = 1, \ldots, 38. \tag{1.17}$$

$$\sum_{l=1}^{k} \left(\mathcal{S}_j^{l,\text{sn}} - \mathcal{B}_j^{l,\text{sn}} \right) \leq C_j = 120, \quad \forall \;\; j = 1, 2; \;\; \forall \;\; k = 1, \ldots, 38. \tag{1.18}$$

Además, la suma del número de usuarios que suben en todas las estaciones debería coincidir con la suma del número de usuarios que bajan; esto implica que

$$\sum_{k=1}^{38} \mathcal{S}_j^{k,\text{ns}} = \sum_{k=1}^{38} \mathcal{B}_j^{k,\text{ns}}, \quad \forall \;\; j = 1, 2. \tag{1.19}$$

$$\sum_{k=1}^{38} \mathcal{S}_j^{k,\text{sn}} = \sum_{k=1}^{38} \mathcal{B}_j^{k,\text{sn}}, \quad \forall \;\; j = 1, 2. \tag{1.20}$$

Desde luego que la ecuación anterior es cierta si se considera todo el día y no un intervalo de tiempo, debido a que hay pasajeros que subirán (probablemente al final del intervalo de tiempo) que aún se encontrarán en los buses al concluir dicho lapso de tiempo; también habrán pasajeros que bajan al inicio del lapso de tiempo y dicha cantidad de usuarios no se toma en cuenta en algún $\mathcal{S}_j^{k,\text{ns}}$ ó $\mathcal{S}_j^{k,\text{sn}}$. A pesar de estas observaciones seguiremos suponiendo por ahora válidas las ecuaciones (1.19) y (1.20).

El número total de pasajeros que **suben** en la k-ésima estación será:

$$N_1^{\text{ns}} \mathcal{S}_1^{k,\text{ns}}, \text{ si el bus se dirige de norte a sur y realiza la ruta A.} \tag{1.21}$$

$$N_2^{\text{ns}} \mathcal{S}_2^{k,\text{ns}}, \text{ si el bus se dirige de norte a sur y realiza la ruta B.} \tag{1.22}$$

$$N_1^{\text{sn}} \mathcal{S}_1^{k,\text{sn}}, \text{ si el bus se dirige de sur a norte y realiza la ruta A.} \tag{1.23}$$

$$N_2^{\text{sn}} \mathcal{S}_2^{k,\text{sn}}, \text{ si el bus se dirige de sur a norte y realiza la ruta B.} \tag{1.24}$$

Del mismo modo, el número total de pasajeros que **bajan** en la k-ésima estación será:

$$N_1^{\text{ns}} \mathcal{S}_1^{k,\text{ns}}, \text{ si el bus se dirige de norte a sur y realiza la ruta A.} \tag{1.25}$$

$$N_2^{\text{ns}} \mathcal{B}_2^{k,\text{ns}}, \text{ si el bus se dirige de norte a sur y realiza la ruta B.} \tag{1.26}$$

$$N_1^{\text{sn}} \mathcal{S}_1^{k,\text{sn}}, \text{ si el bus se dirige de sur a norte y realiza la ruta A.} \tag{1.27}$$

$$N_2^{\text{sn}} \mathcal{B}_2^{k,\text{sn}}, \text{ si el bus se dirige de sur a norte y realiza la ruta B.} \tag{1.28}$$

Luego, de las ecuaciones (1.7),...,(1.14), tenemos que para cada $k \in \{1, 2, \ldots, 38\}$ los pasajeros que **suben** en la k-ésima estación serán

$$
\begin{aligned}
N_1^{\mathrm{ns}} \mathcal{S}_1^{k,\mathrm{ns}} &= \sum_{l=k+1}^{38} \alpha_{(k,l)} \mathcal{A}_{(k,l)} && (1.29)\\
N_2^{\mathrm{ns}} \mathcal{S}_2^{k,\mathrm{ns}} &= \sum_{l=k+1}^{38} \left(1 - \alpha_{(k,l)}\right) \mathcal{A}_{(k,l)} && (1.30)\\
N_1^{\mathrm{sn}} \mathcal{S}_1^{k,\mathrm{sn}} &= \sum_{l=1}^{k-1} \alpha_{(k,l)} \mathcal{A}_{(k,l)} && (1.31)\\
N_2^{\mathrm{sn}} \mathcal{S}_2^{k,\mathrm{sn}} &= \sum_{l=1}^{k-1} \left(1 - \alpha_{(k,l)}\right) \mathcal{A}_{(k,l)} && (1.32)
\end{aligned}
$$

Del mismo modo, de las ecuaciones (1.21),...,(1.28), tenemos que para cada $k \in \{1, 2, \ldots, 38\}$ los pasajeros que **bajan** en la k-ésima estación serán

$$
\begin{aligned}
N_1^{\mathrm{ns}} \mathcal{S}_1^{k,\mathrm{ns}} &= \sum_{l=1}^{k-1} \alpha_{(l,k)} \mathcal{A}_{(l,k)} && (1.33)\\
N_2^{\mathrm{ns}} \mathcal{B}_2^{k,\mathrm{ns}} &= \sum_{l=1}^{k-1} \left(1 - \alpha_{(l,k)}\right) \mathcal{A}_{(l,k)} && (1.34)\\
N_1^{\mathrm{sn}} \mathcal{S}_1^{k,\mathrm{sn}} &= \sum_{l=k+1}^{38} \alpha_{(l,k)} \mathcal{A}_{(l,k)} && (1.35)\\
N_2^{\mathrm{sn}} \mathcal{B}_2^{k,\mathrm{sn}} &= \sum_{l=k+1}^{38} \left(1 - \alpha_{(l,k)}\right) \mathcal{A}_{(l,k)} && (1.36)
\end{aligned}
$$

Observación 1.2. *Teniendo en cuenta que la cantidad de usuarios, $(\mathcal{A}_{(k,l)})$, que se traslada de la k-ésima estación a la estación l en un intervalo de tiempo no siempre considera a aquellos pasajeros que suben al final o bajan al inicio de dicho lapso de tiempo, entonces en las ecuaciones $(1{,}29), \ldots, (1{,}32)$ y $(1{,}33), \ldots, (1{,}36)$, se debe cambiar el igual $(=)$ por la desigualdad $(\geq)$. Esto se debe a que en caso estas ecuaciones se cumplan, esto no garantiza que N_j^{ns} o N_j^{sn} sean números enteros, donde $j = 1, 2$; es por ello que consideramos la desigualdad.*

Observación 1.3. *Si se toman datos para obtener los valores de $\mathcal{S}_j^{k,ns}, \mathcal{S}_j^{k,sn}, \mathcal{B}_j^{k,ns}$ y $\mathcal{B}_j^{k,sn}$ para todo $j \in \{1, 2\}$ y $k \in \{1, \ldots, 38\}$, entonces debemos verificar que se cumplan las ecuaciones $(1{,}15), \ldots, (1{,}20)$, aunque sabemos que las ecuaciones $(1{,}19)$ y $(1{,}20)$ no necesariamente son ciertas en un intervalo de tiempo, es por ello que estas ecuaciones no formarán parte de las restricciones.*

Observación 1.4. *Si* $\mathcal{S}_1^{k,ns} = \mathcal{S}_2^{k,ns}$*, o son cantidades aproximadas, entonces la desigualdad mostrada en la ecuación* (1,4) *implica que* $\sum_{l=k+1}^{38} \alpha_{(k,l)}\mathcal{A}_{(k,l)} \leq \sum_{l=k+1}^{38} \left(1-\alpha_{(k,l)}\right)\mathcal{A}_{(k,l)}$*, luego, de las ecuaciones* (1,29) *y* (1,30) *se tiene que* $N_1^{ns} \leq N_2^{ns}$*; en consecuencia deben existir más buses que realicen la ruta* B *que la ruta* A*. Lo mismo se concluye si* $\mathcal{S}_1^{k,sn} = \mathcal{S}_2^{k,sn}$*,* $\mathcal{S}_1^{k,ns} = \mathcal{B}_2^{k,ns}$ *ó* $\mathcal{S}_1^{k,sn} = \mathcal{B}_2^{k,sn}$*.*

De la definición de $\alpha_{(k,l)}$, de las ecuaciones (1.1),...,(1.6) y de las observaciones (1.2) y (1.3), el problema de optimización para minimizar el número de buses es:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar}\quad & N_1^{\text{ns}} + N_2^{\text{ns}} + N_1^{\text{sn}} + N_2^{\text{sn}} \\
\text{Sujeto a}\quad & N_1^{\text{ns}}\mathcal{S}_1^{k,\text{ns}} \geq \sum_{l=k+1}^{38} \alpha_{(k,l)}\mathcal{A}_{(k,l)},\ 1 \leq k \leq 37 \\
& N_2^{\text{ns}}\mathcal{S}_2^{k,\text{ns}} \geq \sum_{l=k+1}^{38} \left(1-\alpha_{(k,l)}\right)\mathcal{A}_{(k,l)},\ 1 \leq k \leq 37 \\
& N_1^{\text{sn}}\mathcal{S}_1^{k,\text{sn}} \geq \sum_{l=1}^{k-1} \alpha_{(k,l)}\mathcal{A}_{(k,l)},\ 2 \leq k \leq 38 \\
& N_2^{\text{sn}}\mathcal{S}_2^{k,\text{sn}} \geq \sum_{l=1}^{k-1} \left(1-\alpha_{(k,l)}\right)\mathcal{A}_{(k,l)},\ 2 \leq k \leq 38 \\
& N_1^{\text{ns}}\mathcal{S}_1^{k,\text{ns}} \geq \sum_{l=1}^{k-1} \alpha_{(l,k)}\mathcal{A}_{(l,k)},\ 2 \leq k \leq 38 \\
& N_2^{\text{ns}}\mathcal{B}_2^{k,\text{ns}} \geq \sum_{l=1}^{k-1} \left(1-\alpha_{(l,k)}\right)\mathcal{A}_{(l,k)},\ 2 \leq k \leq 38 \\
& N_1^{\text{sn}}\mathcal{S}_1^{k,\text{sn}} \geq \sum_{l=k+1}^{38} \alpha_{(l,k)}\mathcal{A}_{(l,k)},\ 1 \leq k \leq 37 \\
& N_2^{\text{sn}}\mathcal{B}_2^{k,\text{sn}} \geq \sum_{l=k+1}^{38} \left(1-\alpha_{(l,k)}\right)\mathcal{A}_{(l,k)},\ 1 \leq k \leq 37 \\
& 0 \leq \alpha_{(k,l)} \leq 1,\ 1 \leq k,l \leq 38 \\
& \alpha_{(k,k)} = \tfrac{1}{2},\ 1 \leq k \leq 38 \\
& \alpha_{(k,l)} = 1,\ \ \forall\ \ i \neq j;\ 12 \leq k,l \leq 15 \\
& \alpha_{(k,l)} = 0,\ \ \forall\ \ i \neq j;\ 16 \leq k,l \leq 18 \\
& 0 \leq \alpha_{(k,l)} \leq \tfrac{1}{2},\ 1 \leq k \leq 11; 19 \leq l \leq 38 \\
& 0 \leq \alpha_{(k,l)} \leq \tfrac{1}{2},\ 19 \leq k \leq 38; 1 \leq l \leq 11
\end{aligned}
\tag{PB}
$$

$$\alpha_{(k,l)} = \tfrac{1}{2},\ 12 \le k \le 15; 16 \le l \le 18$$
$$\alpha_{(k,l)} = \tfrac{1}{2},\ 16 \le k \le 18; 12 \le l \le 15$$
$$N_1^{\mathrm{ns}}, N_2^{\mathrm{ns}}, N_1^{\mathrm{sn}}, N_2^{\mathrm{sn}} \in \mathbb{N}$$

En el Problema (PB) los valores de $\mathcal{S}_j^{k,\mathrm{ns}}, \mathcal{S}_j^{k,\mathrm{sn}}, \mathcal{B}_j^{k,\mathrm{ns}}, \mathcal{B}_j^{k,\mathrm{sn}}$ y $\mathcal{A}_{(k,l)}$ son conocidos después de realizar una toma de datos, mientras que $N_j^{\mathrm{ns}}, N_j^{\mathrm{sn}}$ y $\alpha_{(k,l)}$ son incógnitas.

Observe que el Problema (PB) puede dividirse en dos subproblemas independientes. El primero de ellos representa el problema para minimizar el número de buses que se dirigen de norte a sur:

$$\begin{array}{rl}
\text{Minimizar} & N_1^{\mathrm{ns}} + N_2^{\mathrm{ns}} \\
\text{Sujeto a} & N_1^{\mathrm{ns}}\mathcal{S}_1^{k,\mathrm{ns}} \ge \displaystyle\sum_{l=k+1}^{38} \alpha_{(k,l)}\mathcal{A}_{(k,l)},\ 1 \le k \le 37 \\
& N_2^{\mathrm{ns}}\mathcal{S}_2^{k,\mathrm{ns}} \ge \displaystyle\sum_{l=k+1}^{38} \left(1-\alpha_{(k,l)}\right)\mathcal{A}_{(k,l)},\ 1 \le k \le 37 \\
& N_1^{\mathrm{ns}}\mathcal{S}_1^{k,\mathrm{ns}} \ge \displaystyle\sum_{l=1}^{k-1} \alpha_{(l,k)}\mathcal{A}_{(l,k)},\ 2 \le k \le 38 \\
& N_2^{\mathrm{ns}}\mathcal{B}_2^{k,\mathrm{ns}} \ge \displaystyle\sum_{l=1}^{k-1} \left(1-\alpha_{(l,k)}\right)\mathcal{A}_{(l,k)},\ 2 \le k \le 38 \\
& 0 \le \alpha_{(k,l)} \le 1,\ 1 \le k < l \le 38 \\
& \alpha_{(k,l)} = 1,\ \ \forall\ \ k < l;\ 12 \le k, l \le 15 \\
& \alpha_{(k,l)} = 0,\ \ \forall\ \ k < l;\ 16 \le k, l \le 18 \\
& 0 \le \alpha_{(k,l)} \le \tfrac{1}{2},\ 1 \le k \le 11; 19 \le l \le 38 \\
& \alpha_{(k,l)} = \tfrac{1}{2},\ 12 \le k \le 15; 16 \le l \le 18 \\
& N_1^{\mathrm{ns}}, N_2^{\mathrm{ns}} \in \mathbb{N}
\end{array} \qquad (PB_1)$$

El segundo de ellos representa el problema para minimizar el número de buses que se dirigen de sur a norte:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & N_1^{\text{sn}} + N_2^{\text{sn}} \\
\text{Sujeto a} \quad & N_1^{\text{sn}} \mathcal{S}_1^{k,\text{sn}} \geq \sum_{l=1}^{k-1} \alpha_{(k,l)} \mathcal{A}_{(k,l)}, \ 2 \leq k \leq 38 \\
& N_2^{\text{sn}} \mathcal{S}_2^{k,\text{sn}} \geq \sum_{l=1}^{k-1} \left(1 - \alpha_{(k,l)}\right) \mathcal{A}_{(k,l)}, \ 2 \leq k \leq 38 \\
& N_1^{\text{sn}} \mathcal{S}_1^{k,\text{sn}} \geq \sum_{l=k+1}^{38} \alpha_{(l,k)} \mathcal{A}_{(l,k)}, \ 1 \leq k \leq 37 \\
& N_2^{\text{sn}} \mathcal{B}_2^{k,\text{sn}} \geq \sum_{l=k+1}^{38} \left(1 - \alpha_{(l,k)}\right) \mathcal{A}_{(l,k)}, \ 1 \leq k \leq 37 \\
& 0 \leq \alpha_{(k,l)} \leq 1, \ 1 \leq l < k \leq 38 \\
& \alpha_{(k,l)} = 1, \ \ \forall \ \ k > l; \ 12 \leq k, l \leq 15 \\
& \alpha_{(k,l)} = 0, \ \ \forall \ \ k > l; \ 16 \leq i, j \leq 18 \\
& 0 \leq \alpha_{(k,l)} \leq \tfrac{1}{2}, \ 19 \leq k \leq 38; 1 \leq l \leq 11 \\
& \alpha_{(k,l)} = \tfrac{1}{2}, \ 16 \leq k \leq 18; 12 \leq l \leq 15 \\
& N_1^{\text{sn}}, N_2^{\text{sn}} \in \mathbb{N}
\end{aligned}
\tag{PB_2}
$$

Observación 1.5. *A pesar de que los problemas* (PB_1) *y* (PB_2) *son más simples que el Problema* (PB)*; tienen 895 incógnitas y 1285 restricciones, donde 2 de las variables son enteras.*

Observación 1.6. *Para disminuir el número de incógnitas y de restricciones, cuando se realice la toma de datos para hallar los valores de* $\mathcal{A}_{(k,l)}$*, podemos conocer también los valores de* $\alpha_{(k,l)}$*, aunque probablemente estos datos no sean confiables. De ser así, los problemas* (PB_1) *y* (PB_2) *sólo tendrían* 2 *incógnitas* (*enteras*) *y* 148 *restricciones de desigualdad.*

Por consiguiente, asumiendo conocidos los valores de $\mathcal{A}_{(k,l)}, \alpha_{(k,l)}, \mathcal{S}_j^{k,\text{ns}}, \mathcal{S}_j^{k,\text{sn}}, \mathcal{B}_j^{k,\text{ns}}$ y $\mathcal{B}_j^{k,\text{sn}}$, podemos reducir la complejidad de los problemas (PB_1) y (PB_2), para ello veamos primero las siguientes notaciones:

- $\mathcal{A}^1_{(k,l)} = \alpha_{(k,l)} \mathcal{A}_{(k,l)}$, el número de personas que van de la estación k a la estación l usando la ruta A.

- $\mathcal{A}^2_{(k,l)} = (1-\alpha_{(k,l)}) \mathcal{A}_{(k,l)}$, el número de personas que van de la estación k a la estación l usando la ruta B.

Con las hipótesis y notaciones anteriores, el Problema (PB_1) se convierte en

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & N_1^{\text{ns}} + N_2^{\text{ns}} \\
\text{Sujeto a} \quad & N_1^{\text{ns}} \mathcal{S}_1^{k,\text{ns}} \geq \sum_{l=k+1}^{38} \mathcal{A}_{(k,l)}^1, \ 1 \leq k \leq 37 \\
& N_2^{\text{ns}} \mathcal{S}_2^{k,\text{ns}} \geq \sum_{l=k+1}^{38} \mathcal{A}_{(k,l)}^2, \ 1 \leq k \leq 37 \\
& N_1^{\text{ns}} \mathcal{S}_1^{k,\text{ns}} \geq \sum_{l=1}^{k-1} \mathcal{A}_{(l,k)}^1, \ 2 \leq k \leq 38 \\
& N_2^{\text{ns}} \mathcal{B}_2^{k,\text{ns}} \geq \sum_{l=1}^{k-1} \mathcal{A}_{(l,k)}^2, \ 2 \leq k \leq 38 \\
& N_1^{\text{ns}}, N_2^{\text{ns}} \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Como ahora, para cada j, l y k, los valores de $\mathcal{A}_{(k,l)}^j, \mathcal{S}_j^{k,\text{ns}}$ y $\mathcal{S}_j^{k,\text{sn}}$ son conocidos, entonces el problema anterior puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & N_1^{\text{ns}} + N_2^{\text{ns}} \\
\text{Sujeto a} \quad & N_1^{\text{ns}} \geq \max_{1 \leq k \leq 38} \left\{ \sum_{l=k+1}^{38} \frac{\mathcal{A}_{(k,l)}^1}{\mathcal{S}_1^{k,\text{ns}}}, \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\mathcal{A}_{(l,k)}^1}{\mathcal{S}_1^{k,\text{ns}}} \right\} \\
& N_2^{\text{ns}} \geq \max_{1 \leq k \leq 38} \left\{ \sum_{l=k+1}^{38} \frac{\mathcal{A}_{(k,l)}^2}{\mathcal{S}_2^{k,\text{ns}}}, \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\mathcal{A}_{(l,k)}^2}{\mathcal{B}_2^{k,\text{ns}}} \right\} \\
& N_1^{\text{ns}}, N_2^{\text{ns}} \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{Pb_1}$$

Observación 1.7. *Debido a que* $N_1^{ns} \in \mathbb{N}$ *y* $N_1^{ns} \geq \max_{1 \leq i \leq 38} \left\{ \sum_{l=k+1}^{38} \frac{\mathcal{A}_{(k,l)}^1}{\mathcal{S}_1^{k,ns}}, \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\mathcal{A}_{(l,k)}^1}{\mathcal{S}_1^{k,ns}} \right\}$, *entonces*

$$N_1^{ns} \geq \left[\!\!\left[\max_{1 \leq i \leq 38} \left\{ \sum_{l=k+1}^{38} \frac{\mathcal{A}_{(k,l)}^1}{\mathcal{S}_1^{k,ns}}, \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\mathcal{A}_{(l,k)}^1}{\mathcal{S}_1^{k,ns}} \right\} \right]\!\!\right],$$

donde $[\![\cdot]\!]$ *denota al operador máximo entero.*

Del mismo modo, tendremos que $N_2^{\text{ns}} \geq \left[\!\!\left[\max_{1 \leq i \leq 38} \left\{ \sum_{l=k+1}^{38} \frac{\mathcal{A}_{(k,l)}^2}{\mathcal{S}_2^{k,\text{ns}}}, \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\mathcal{A}_{(l,k)}^2}{\mathcal{B}_2^{k,\text{ns}}} \right\} \right]\!\!\right]$. En consecuencia, la solución del Problema Pb_1 ocurre cuando

$$N_1^{\text{ns}} = \left[\!\!\left[\max_{1 \leq k \leq 38} \left\{ \sum_{l=k+1}^{38} \frac{\mathcal{A}_{(k,l)}^1}{\mathcal{S}_1^{k,\text{ns}}}, \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\mathcal{A}_{(l,k)}^1}{\mathcal{S}_1^{k,\text{ns}}} \right\} \right]\!\!\right] \text{ y } N_2^{\text{ns}} = \left[\!\!\left[\max_{1 \leq i \leq 38} \left\{ \sum_{l=k+1}^{38} \frac{\mathcal{A}_{(k,l)}^2}{\mathcal{S}_2^{k,\text{ns}}}, \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\mathcal{A}_{(l,k)}^2}{\mathcal{B}_2^{k,\text{ns}}} \right\} \right]\!\!\right].$$

De manera similar, el Problema (PB_2) puede expresarse como

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & N_1^{\text{sn}} + N_2^{\text{sn}} \\
\text{Sujeto a} & N_1^{\text{sn}} \geq \displaystyle\max_{1\leq k\leq 38} \left\{ \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\mathcal{A}^1_{(k,l)}}{\mathcal{S}_1^{k,\text{sn}}}, \sum_{l=k+1}^{38} \frac{\mathcal{A}^1_{(l,k)}}{\mathcal{S}_1^{k,\text{sn}}} \right\} \\
& N_2^{\text{sn}} \geq \displaystyle\max_{1\leq k\leq 38} \left\{ \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\mathcal{A}^2_{(k,l)}}{\mathcal{S}_2^{k,\text{sn}}}, \sum_{l=k+1}^{38} \frac{\mathcal{A}^2_{(l,k)}}{\mathcal{B}_2^{k,\text{sn}}} \right\} \\
& N_1^{\text{sn}}, N_2^{\text{sn}} \in \mathbb{N}
\end{array}
\qquad (Pb_2)
$$

Por consiguiente, la solución del Problema (Pb_1) ocurre cuando

$$
N_1^{\text{ns}} = \left[\!\left[\max_{1\leq k\leq 38} \left\{ \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\mathcal{A}^1_{(k,l)}}{\mathcal{S}_1^{k,\text{sn}}}, \sum_{l=k+1}^{38} \frac{\mathcal{A}^1_{(l,k)}}{\mathcal{S}_1^{k,\text{sn}}} \right\} \right]\!\right] \text{ y } N_2^{\text{ns}} = \left[\!\left[\max_{1\leq k\leq 38} \left\{ \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\mathcal{A}^2_{(k,l)}}{\mathcal{S}_2^{k,\text{sn}}}, \sum_{l=k+1}^{38} \frac{\mathcal{A}^2_{(l,k)}}{\mathcal{B}_2^{k,\text{sn}}} \right\} \right]\!\right].
$$

Observación 1.8. *Los problemas (Pb_1) y (Pb_2) son problemas de programación entera simples de resolver; sin embargo, debemos recordar que hemos asumido que los valores de $\mathcal{A}_{(k,l)}, \alpha_{(k,l)}, \mathcal{S}_j^{k,ns}$ y $\mathcal{S}_j^{k,sn}$ son conocidos y constantes en un intervalo de tiempo.*

La observación anterior nos invita a usar técnicas de programación estocástica para determinar el número mínimo de buses.

1.1.2. El caso cuando es hora punta

En la subsección anterior se pudo incluir al servicio Regular C, pero nuestro objetivo es trabajar cuando circulan los Expresos, es decir en hora punta. Empecemos mostrando una tabla que contiene todas las estaciones y las rutas que circulan por ellas de lunes a viernes en las mañanas.
En la tabla mostrada, la notación Ex_3^{ns} indica que el Expreso 3 sólo para en la Estación señalada si va de norte a sur. Ex_3^{sn} y SX^{sn} indican que el Expreso 3 y el Súper Expreso sólo se detendrán si viaja de sur a norte respectivamente.

Empecemos denotando las rutas que hay en las mañanas.

- Ruta 1: Ruta del Bus Regular A.
- Ruta 2: Ruta del Bus Regular B.
- Ruta 3: Ruta del Bus Expreso 1 (Ex_1).
- Ruta 4: Ruta del Bus Expreso 2 (Ex_2).
- Ruta 5: Ruta del Bus Expreso 3 (Ex_3).
- Ruta 6: Ruta del Bus Súper Expreso (SX).

N° de Estación	ESTACIÓN	Paradero de la Ruta
1	Naranjal	A,B,Ex_1,Ex_2,Ex_3,SX
2	Izaguirre	A,B,Ex_3
3	Pacífico	A,B
4	Independencia	A,B,Ex_3^{ns}
5	Los Jazmines	A,B
6	Tomás Valle	A,B,Ex_2
7	El Milagro	A,B
8	Honorio Delgado	A,B
9	UNI	A,B,Ex_1,Ex_2,Ex_3^{ns}
10	Parque del trabajo	A,B
11	Caquetá	A,B,Ex_1,Ex_2,Ex_3
12	Ramón Castilla	A
13	Tacna	A
14	Jr. de la Unión	A
15	Colmena	A
16	2 de mayo	B,Ex_1
17	Quilca	B,Ex_1
18	España	B,Ex_1,Ex_3^{sn}
19	Estación Central	A,B,Ex_1,Ex_2,Ex_3,SX^{sn}
20	Estadio Nacional	A,B
21	México	A,B
22	Canadá	A,B,Ex_3
23	Javier Prado	A,B,Ex_1,Ex_2,Ex_3
24	Canaval y Moreyra	A,B,Ex_1,Ex_2,Ex_3,SX
25	Aramburú	A,B,Ex_3
26	Domingo Orué	A,B
27	Angamos	A,B,Ex_1,Ex_2,Ex_3,SX
28	Ricardo Palma	A,B
29	Benavides	A,B,Ex_3
30	28 de Julio	A,B
31	Plaza de flores	A,B,Ex_2,Ex_3,SX
32	Balta	A,B,Ex_1
33	Boulevard	A,B,Ex_1
34	Estadio Unión	A,B,Ex_1
35	Escuela militar	A,B,Ex_1
36	Terán	A,B,Ex_1
37	Rosario de Villa	A,B,Ex_1
38	Matellini	A,B,Ex_1

Cuadro 1.2: Paraderos de los servicios Regulares y Expresos

Definición 1.4. *Para cada $j \in \{1, \ldots, 6\}$ denotemos por $\mathcal{A}^j_{(k,l)}$ al número de usuarios que parten de la k-ésima estación y se dirigen a la estación l usando la ruta j.*

De la definición anterior tenemos que

- $\mathcal{A}_{(k,l)} = \sum_{j=1}^{6} \mathcal{A}^j_{(k,l)}$, para todo $k, l \in \{1, \ldots, 38\}$.
- $\mathcal{A}^j_{(k,k)} = 0$, para todo $k = 1, \ldots, 38$ y para todo $j = 1, \ldots, 6$.
- $\mathcal{A}^1_{(k,l)} = 0$, si $k \in \{16, 17, 18\}$ ó $l \in \{16, 17, 18\}$; (k ó l en $\{16, 17, 18\}$).
- $\mathcal{A}^2_{(k,l)} = 0$, k ó l en $\{12, \ldots, 15\}$.
- $\mathcal{A}^3_{(k,l)} = 0$, k ó l en $\{2, \ldots, 8, 10, 12, \ldots, 15, 20, 21, 22, 25, 26, 28, \ldots, 31\}$.
- $\mathcal{A}^4_{(k,l)} = 0$, k ó l en $\{2, \ldots, 5, 7, 8, 10, 12, \ldots, 18, 20, 21, 22, 25, 26, 28, 29, 30, 32, \ldots, 38\}$.
- $\mathcal{A}^5_{(k,l)} = 0$, k ó l en $\{3, 5, \ldots, 8, 10, 12, \ldots, 18, 20, 21, 26, 28, 30, 32, \ldots, 38\}$ tal que $k < l$.
- $\mathcal{A}^5_{(k,l)} = 0$, k ó l en $\{3, \ldots, 8, 9, 10, 12, \ldots, 17, 20, 21, 26, 28, 30, 32, \ldots, 38\}$ tal que $k > l$.
- $\mathcal{A}^6_{(k,l)} = 0$, k ó l en $\{2, \ldots, 23, 25, 26, 28, 29, 30, 32, \ldots, 38\}$ tal que $k < l$.
- $\mathcal{A}^6_{(k,l)} = 0$, k ó l en $\{2, \ldots, 18, 20, \ldots, 23, 25, 26, 28, 29, 30, 32, \ldots, 38\}$ tal que $k > l$.

Del mismo modo que en la subsección anterior, veamos las siguientes definiciones:

Definición 1.5. *Para cada $j \in \{1, \ldots, 6\}$ denotemos por N^{ns}_j al número de buses que realizan la ruta j si se dirigen de norte a sur y N^{sn}_j al número de buses que realizan la ruta j si se dirigen de sur a norte.*

Definición 1.6. *Para cada $j \in \{1, \ldots, 6\}$ denotemos por $\mathcal{S}^{k,ns}_j$ al número de usuarios que **suben** en la k-ésima estación usando la ruta j viajando de norte a sur y $\mathcal{S}^{k,sn}_j$ al número de usuarios que **suben** en la k-ésima estación usando la ruta j viajando de sur a norte.*

Definición 1.7. *Para cada $j \in \{1, \ldots, 6\}$ denotemos por $\mathcal{B}^{k,ns}_j$ al número de usuarios que **bajan** en la k-ésima estación usando la ruta j viajando de norte a sur y $\mathcal{B}^{k,sn}_j$ al número de usuarios que **bajan** en la k-ésima estación usando la ruta j viajando de sur a norte.*

En las definiciones anteriores se debe tener en cuenta que $1 \leq k \leq 38$ y $1 \leq j \leq 6$. Además:

$$\mathcal{S}_j^{38,\mathrm{ns}} = \mathcal{S}_j^{1,\mathrm{sn}} = 0, \quad \forall \;\; j = 1, \ldots, 6. \tag{1.38}$$

$$\mathcal{B}_j^{1,\mathrm{ns}} = \mathcal{B}_j^{38,\mathrm{sn}} = 0, \quad \forall \;\; j = 1, \ldots, 6. \tag{1.39}$$

Si denotamos C_j la capacidad de personas que pueden viajar en el bus que realiza la ruta j; en este caso se tiene que

$$C_j := \begin{cases} 120, \;\text{para } j = 1, 2 \\ 160, \;\text{para } j = 3, \ldots, 6. \end{cases}$$

Luego, respecto de la cantidad de pasajeros que hay dentro del bus en cada tramo del recorrido podemos decir que

$$\sum_{k=1}^{l} \left(\mathcal{S}_j^{k,\mathrm{ns}} - \mathcal{B}_j^{k,\mathrm{ns}} \right) \leq C_j, \quad \forall \;\; j = 1, \ldots, 6; \quad \forall \;\; l = 1, \ldots, 38. \tag{1.40}$$

$$\sum_{k=1}^{l} \left(\mathcal{S}_j^{k,\mathrm{sn}} - \mathcal{B}_j^{k,\mathrm{sn}} \right) \leq C_j, \quad \forall \;\; j = 1, \ldots, 6; \quad \forall \;\; l = 1, \ldots, 38. \tag{1.41}$$

Además, la suma del número de usuarios que suben en todas las estaciones debería coincidir con la suma del número de usuarios que bajan; esto implica que

$$\sum_{k=1}^{38} \mathcal{S}_j^{k,\mathrm{ns}} = \sum_{k=1}^{38} \mathcal{B}_j^{k,\mathrm{ns}}, \quad \forall \;\; j = 1, \ldots, 6. \tag{1.42}$$

$$\sum_{k=1}^{38} \mathcal{S}_j^{k,\mathrm{sn}} = \sum_{k=1}^{38} \mathcal{B}_j^{k,\mathrm{sn}}, \quad \forall \;\; j = 1, \ldots, 6. \tag{1.43}$$

Recuerde que la ecuación anterior es cierta si se considera todo el día y no un intervalo de tiempo. Así, el número total de pasajeros que **suben** en la k-ésima estación será:

$$N_j^{\mathrm{ns}} \mathcal{S}_j^{k,\mathrm{ns}}; \text{ si el bus se dirige de norte a sur y realiza la ruta } j. \tag{1.44}$$

$$N_j^{\mathrm{sn}} \mathcal{S}_j^{k,\mathrm{sn}}; \text{ si el bus se dirige de norte a sur y realiza la ruta } j. \tag{1.45}$$

Del mismo modo, el número total de pasajeros que **bajan** en la k-ésima estación será:

$$N_j^{\mathrm{ns}} \mathcal{B}_j^{k,\mathrm{ns}}; \text{ si el bus se dirige de norte a sur y realiza la ruta } j. \tag{1.46}$$

$$N_j^{\mathrm{sn}} \mathcal{B}_j^{k,\mathrm{sn}}; \text{ si el bus se dirige de norte a sur y realiza la ruta } j. \tag{1.47}$$

De la Observación 1.2, de las ecuaciones (1.44),...,(1.47) y de la definición de $\mathcal{A}^{j}_{(k,l)}$ tenemos para cada $k \in \{1,\ldots,38\}$ y $j \in \{1,\ldots,6\}$:

$$N_j^{\text{ns}}\mathcal{S}_j^{k,\text{ns}} \geq \sum_{l=k+1}^{38} \mathcal{A}^{j}_{(k,l)} \tag{1.48}$$

$$N_j^{\text{sn}}\mathcal{S}_j^{k,\text{sn}} \geq \sum_{l=1}^{k-1} \mathcal{A}^{j}_{(k,l)} \tag{1.49}$$

$$N_j^{\text{ns}}\mathcal{B}_j^{k,\text{ns}} \geq \sum_{l=k+1}^{38} \mathcal{A}^{j}_{(k,l)} \tag{1.50}$$

$$N_j^{\text{sn}}\mathcal{B}_j^{k,\text{sn}} \geq \sum_{l=1}^{k-1} \mathcal{A}^{j}_{(k,l)} \tag{1.51}$$

Ahora ya podemos formular nuestro problema, el cual lo dividiremos en dos subproblemas. El primero de ellos plantea el problema para minimizar el número de buses que se dirigen de norte a sur y con el segundo de ellos minimizaremos el número de buses que se dirigen de sur a norte.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & N_1^{\text{ns}} + N_2^{\text{ns}} + N_3^{\text{ns}} + N_4^{\text{ns}} + N_5^{\text{ns}} + N_6^{\text{ns}} \\ \text{Sujeto a} & N_j^{\text{ns}}\mathcal{S}_j^{k,\text{ns}} \geq \displaystyle\sum_{l=k+1}^{38} \mathcal{A}^{j}_{(k,l)},\ 1 \leq k \leq 37,\ 1 \leq j \leq 6 \\ & N_j^{\text{ns}}\mathcal{B}_j^{k,\text{ns}} \geq \displaystyle\sum_{l=1}^{k-1} \mathcal{A}^{j}_{(l,k)},\ 2 \leq k \leq 38,\ 1 \leq j \leq 6 \\ & N_j^{\text{ns}}, \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq 6 \end{array} \tag{P_1}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & N_1^{\text{sn}} + N_2^{\text{sn}} + N_3^{\text{sn}} + N_4^{\text{sn}} + N_5^{\text{sn}} + N_6^{\text{sn}} \\ \text{Sujeto a} & N_j^{\text{sn}}\mathcal{S}_j^{k,\text{sn}} \geq \displaystyle\sum_{l=1}^{k-1} \mathcal{A}^{j}_{(k,l)},\ 2 \leq k \leq 38,\ 1 \leq j \leq 6 \\ & N_j^{\text{sn}}\mathcal{B}_j^{k,\text{sn}} \geq \displaystyle\sum_{l=k+1}^{38} \mathcal{A}^{k}_{ji},\ 1 \leq k \leq 37,\ 1 \leq j \leq 6 \\ & N_j^{\text{sn}}, \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq 6 \end{array} \tag{P_2}$$

Observación 1.9. *Si en los problemas* (P_1) *y* (P_2) *asumimos que todos los valores* $\mathcal{S}_j^{k,ns}, \mathcal{S}_j^{k,sn}, \mathcal{B}_j^{k,ns}$ *y* $\mathcal{B}_j^{k,sn}$ $\mathcal{A}^{j}_{(k,l)}$ *son conocidos, entonces podemos resolver estos problemas del mismo modo que los problemas* (Pb_1) *y* (Pb_2)*, los cuales son problemas de programación entera con 6 variables y 6 restricciones. Así, la solución del Problemas* (P_1) *se obtiene para*

$$N_j^{ns} = \left[\!\!\left[\max_{1 \leq i \leq 38} \left\{ \sum_{l=k+1}^{38} \frac{\mathcal{A}^{j}_{(k,l)}}{\mathcal{S}_j^{k,ns}}, \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\mathcal{A}^{j}_{(l,k)}}{\mathcal{B}_j^{k,ns}} \right\} \right]\!\!\right] \quad \textit{para todo } 1 \leq j \leq 6.$$

De manera similar, la solución del Problemas (P_1) se obtiene para

$$N_j^{\text{sn}} = \left[\!\!\left[\max_{1\leq k\leq 38} \left\{ \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\mathcal{A}_{(k,l)}^{j}}{\mathcal{S}_j^{k,\text{sn}}}, \sum_{l=k+1}^{38} \frac{\mathcal{A}_{ji}^{k}}{\mathcal{B}_j^{k,\text{sn}}} \right\} \right]\!\!\right] \text{ para todo } 1 \leq j \leq 6.$$

1.2. Minimización de los tiempos de viaje

Para formular un problema que minimice los tiempos de viaje de los usuarios, veamos primero el clásico **Problema de Transporte** el cual se plantea para minimizar costos o tiempos. Al igual que en la sección anterior las cantidades mencionadas serán constantes, es decir, no tomará el mismo valor independientemente del día. El caso en que estas cantidades son variables serán consideradas en el Capítulo 4.

1.2.1. Formulación General

El problema de transporte clásico queda definido por la siguiente información:

1. Un conjunto de m puntos de salida (oferta). Cada punto de oferta $i \in \{1, \ldots, m\}$ tiene asociado una oferta s_i.
2. Un conjunto de n puntos de llegada (demanda). Cada punto de demanda $j \in \{1, \ldots, n\}$ tiene asociada una demanda d_j.
3. Cada unidad enviada desde un punto de salida $i \in \{1, \ldots, m\}$ a un punto de llegada $j \in \{1, \ldots, n\}$ tarda un tiempo unitario de transporte t_{ij}.

Consideremos x_{ij} el número de unidades enviadas desde el punto de salida $i \in \{1, \ldots, m\}$ al punto de llegada $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Luego, la formulación general del problema de transporte es:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{t}_{ij}\mathrm{x}_{ij} \\
\text{Sujeto a} \quad & \sum_{j=1}^{n} \mathrm{x}_{ij} \leq s_i, \ 1 \leq i \leq m, \ \text{(Restricciones de oferta)} \\
& \sum_{i=1}^{m} \mathrm{x}_{ij} \geq d_i, \ 1 \leq j \leq n, \ \text{(Restricciones de demanda)} \\
& \mathrm{x}_{i,j} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \ 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n
\end{aligned} \qquad (T)$$

Observación 1.10. *El problema anterior es un problema de programación entera con* mn *variables y* $m + n$ *restricciones (sin considerar las* mn *resticciones de signo para* x_{ij}*).*

El problema de transporte anterior es llamado **balanceado** si $\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$, luego en el Problema (T) las desigualdades en las restricciones de oferta y demanda serán ahora igualdades.

Observación 1.11. *Si el problema de transporte no está balanceado, entonces tenemos los siguientes casos:*

- *Si la oferta excede la demanda se introduce un nodo ficticio de demanda.*
- *Si la demanda excede la oferta se introduce un nodo ficticio de oferta.*

De este modo se puede garantizar la existencia de soluciones factibles.

Desde luego que el Sistema del Metropolitano no posee las características mostradas en el Problema (T), pero veremos que nuestro problema se puede plantear como un problema de transporte clásico.

1.2.2. Formulación de un modelo en hora punta

Formularemos un modelo matemático para minimizar el tiempo de recorrido total de N buses que se dirigen de norte a sur, donde $N \geq N_1^{\text{ns}} + N_2^{\text{ns}} + N_3^{\text{ns}} + N_4^{\text{ns}} + N_5^{\text{ns}} + N_6^{\text{ns}}$. De manera similar se podrá plantear un modelo cuando los buses se dirigen de sur a norte. Los N buses saldrán dentro de un lapso de tiempo, por ejemplo una hora.

En este caso seguimos considerando que la ruta A parte de la Estación Naranjal y llega hasta la estación Matellini, ya que la modificación de esta ruta (vigente desde el 17 de setiembre del 2012) se considera en el Capítulo 4. Además en la actualidad la ruta A da la vuelta en la Estación Central, lo cual implica que volverá a dar la vuelta nuevamente en la Estación Naranjal y existe la posibilidad de circular otra vez de norte a sur, y este caso no se está considerando en la siguiente formulación del problema.

El modelo matemático tiene como objetivo optimizar la distribución de los N buses en las 6 rutas y optimizar la frecuencia de las salidas de los buses, la cual puede ser considerada constante para simplificar nuestro problema.

Para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$, $j \in \{1, \ldots, 6\}$ y $k \in \{1, \ldots, 38\}$ tenemos las siguientes notaciones:

- $s_{i,j}^k$ es el número de pasajeros que suben al i-ésimo bus, el cual realiza la ruta j, en la estación k.

- $b_{i,j}^k$ es el número de pasajeros que bajan del i-ésimo bus, el cual realiza la ruta j, en la estación k.

- $t_{i,j}^k$ es el tiempo (en minutos) que tarda el i-ésimo bus, el cual realiza la ruta j, en el k-ésimo tramo, el cual comprende desde la estación k hasta la estación $k+1$.

Observación 1.12. *El tramo* 38 *puede considerarse como el tramo en la Estación Matellini usado para voltear y luego dirigirse de sur a norte, esto es, la estación 39 sigue siendo la Estación Matellini.*

Observación 1.13. *En* $t_{i,j}^k$ *debemos incluir el tiempo de embarque y desembarque en la* k*-ésima estación.*

Como en la Estación Matellini no sube ningún usuario y en la Estación Naranjal no baja ningún pasajero, entonces

$$s_{i,j}^{38} = b_{i,j}^1 = 0, \ \forall \ i = 1, \dots, N; \ \forall \ i = 1, \dots, 6.$$

Como la cantidad total de pasajeros que suben coincide con el número total de usuarios que bajan del bus, entonces

$$\sum_{k=1}^{38} s_{i,j}^k = \sum_{k=1}^{38} b_{i,j}^k, \ \forall \ i = 1, \dots, N; j \in 1, \dots, 6. \tag{1.52}$$

Debido a que los buses no se detienen en todos las estaciones, entonces para todo $i \in \{1, \dots, N\}$ se tiene que

- $s_{i,1}^k = b_{i,1}^k = t_{i,1}^k = 0$, para todo $k = 16, 17, 18$.

- $s_{i,2}^k = b_{i,2}^k = t_{i,2}^k = 0$, para todo $k = 12, \dots, 15$.

- $s_{i,3}^k = b_{i,3}^k = t_{i,3}^k = 0$, para todo $k = 2, \dots, 8, 10{,}12, \dots, 14, 15{,}20, 21, 22{,}25, 26, 28, \dots, 31$.

- $s_{i,4}^k = b_{i,4}^k = t_{i,4}^k = 0$, para todo $k = 2, \dots, 5, 7, 8{,}10, 12, \dots, 18{,}20, 21, 22{,}25, 26, 28, \dots, 37$.

- $s_{i,5}^k = b_{i,5}^k = t_{i,5}^k = 0$, para todo $k = 3, 5, \dots, 8, 10{,}12, \dots, 18{,}20, 21, 26{,}28, 30, 32, \dots, 37$.

- $s_{i,6}^k = b_{i,6}^k = t_{i,6}^k = 0$, para todo $k = 2, \dots, 23{,}25, 26, 28, 29, 30{,}32, \dots, 37$.

En las ecuaciones anteriores, se ha considerado cuando el i-ésimo bus que realiza la ruta j no se detiene en las estaciones $k+1,\dots,k+l$, que el tiempo que tarda de la estación k a la estación $k+l+1$ será $t_{i,j}^k$. Por ejemplo, si i-ésimo bus realiza la ruta del Expreso 1, entonces el tiempo que tarda desde la Estación Central hasta la Estación Javier Prado será $t_{i,4}^{19}$, mientras que $t_{i,j}^k = 0$ para todo $k = 20, 21, 22$.

Definición 1.8. *Para cada $i \in \{1,\dots,N\}$ y $j \in \{1,\dots,6\}$ definamos*

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \textit{si el i-ésimo bus realiza la ruta } j; \\ 0, & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

Observación 1.14. *La variable $x_{i,j}$ es una variable de asignación que indica que el i-ésimo bus realiza solamente una de las rutas.*

Luego, para todo $i \in \{1,\dots,N\}$ tenemos que

$$\sum_{j=1}^{6} x_{i,j} = 1, \text{ con } x_{i,j} \in \{0,1\}.$$

Además para cada $i \in \{1,\dots,N\}$, $j \in \{1,\dots,6\}$ y $k \in \{1,\dots,37\}$ se debe cumplir que el i-ésimo bus que realiza la ruta j transporta una cantidad limitada de pasajeros, esto es

$$\sum_{l=1}^{k} \left[s_{i,j}^l - b_{i,j}^l \right] \leq C_j = \begin{cases} 120, & \text{si } j = 1,2; \\ 160, & \text{si } j = 3,\dots,6. \end{cases} \tag{1.53}$$

Si el i-ésimo bus realiza la ruta j, esto implica que $x_{i,j} = 1$ y que la suma de los tiempos de viaje de los pasajeros que han usado el i-ésimo bus que se dirige de norte a sur es

$$\sum_{k=1}^{37} t_{i,j}^k x_{i,j} \left[\sum_{l=1}^{k} \left(s_{i,j}^l - b_{i,j}^l \right) \right],$$

ya que $\displaystyle\sum_{l=1}^{k} \left(s_{i,j}^l - b_{i,j}^l \right)$ es la cantidad de usuarios que hay dentro del bus en el tramo k.

En consecuencia, el tiempo acumulado de viaje (T_v) que realizan los pasajeros de los N buses dirigiéndose de norte a sur será

$$T_v = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{6} \sum_{k=1}^{37} t_{i,j}^k \sum_{l=1}^{k} \left(s_{i,j}^l - b_{i,j}^l \right) x_{i,j}. \tag{1.54}$$

Observación 1.15. *Si para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$ y $j \in \{1, \ldots, 6\}$ definimos* $\mathrm{T}_{i,j} := \sum_{k=1}^{37} t_{i,j}^k \sum_{l=1}^{k} \left(s_{i,j}^l - b_{i,j}^l \right)$*, entonces*

$$T_v = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{6} \mathrm{T}_{ij} x_{i,j}, \tag{1.55}$$

el cual coincide con la función objetivo del Problema (T) para $m = N$ y $n = 6$, más aún es una función lineal en la variable $x_{i,j}$..

Observación 1.16. *Note que T_v no incluye los tiempos de espera de los usuarios en cada estación, los cuales son muy importantes ya que en hora punta decenas de pasajeros esperan en cada estación por mucho tiempo hasta poder subir al bus.*

Los tiempos de espera de los usuarios ocurren en dos casos, cuando no pudieron ingresar al bus que estuvieron esperando, debido a su capacidad, o porque el bus que acaba de llegar no era el bus al que iban a subir, lo cual motiva la siguiente definición:

Definición 1.9. $p_{i,j}^k$ *es la cantidad total de usuarios que esperan al i-ésimo bus en las 3 puertas de embarque de la ruta j en la estación k.*

Observación 1.17. *El número de pasajeros que esperan un bus es mayor que la cantidad de usuarios que suben a dicho bus, esto es*

$$p_{i,j}^k \geq s_{i,j}^k, \ \forall \ i = 1, \ldots, N; j = 1, \ldots, 6; k = 1, \ldots, 37.$$

El tiempo de espera de los usuarios en las estaciones que no subieron al i-ésimo bus que no esperaban en el embarque de la ruta j será

$$\sum_{k=1}^{37} \left(p_{i,j}^k - s_{i,j}^k \right) x_{i,j} f,$$

donde $x_{i,j} = 1$ y $f = 60/N$ indica que los buses salen cada f minutos a los embarques de la Estación Naranjal.

El tiempo de espera en las estaciones de los demás usuarios que no subieron al i-ésimo bus será

$$\sum_{j=1}^{6} \sum_{k=1}^{37} (1 - x_{i,j}) f p_{i,j}^k.$$

Luego, el tiempo de espera para el i-ésimo bus es

$$\sum_{j=1}^{6} \sum_{k=1}^{37} \left[(p_{i,j}^k - s_{i,j}^k) x_{i,j} f + (1 - x_{i,j}) p_{i,j}^k f \right] = \sum_{j=1}^{6} \sum_{k=1}^{37} \left[p_{i,j}^k - s_{i,j}^k x_{i,j} \right] f.$$

Por lo tanto, el tiempo de espera (T_e) para los N buses será

$$T_e = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{37}\left[p_{i,j}^k - s_{i,j}^k x_{i,j}\right] f.$$

Observación 1.18. *Si el bus realiza la ruta j no se detiene en la estación k, entonces $p_{i,j}^k = 0$ para todo $i = 1, \dots, N$. Note además que*

$$T_e = K_e - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{6} F_{i,j} x_{i,j}, \tag{1.56}$$

el cual es una función lineal afín en la variable $x_{i,j}$, donde

$$K_e := \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{37} p_{i,j}^k f \ \text{ y } F_{i,j} := \sum_{k=1}^{37} f s_{i,j}^k.$$

Por consiguiente, nuestra función objetivo es $T_v + T_e$ y el problema a resolver es:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{37} t_{i,j}^k \sum_{l=1}^{k}\left(s_{i,j}^l - b_{i,j}^l\right) x_{i,j} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{37}\left[p_{i,j}^k - s_{i,j}^k x_{i,j}\right] f \\ \text{Sujeto a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{6} x_{i,j} = 1,\ 1 \le i \le N \\ & x_{i,j} \in \{0,1\},\ 1 \le i \le N,\ 1 \le j \le 6 \end{array} \tag{T_s}$$

Observación 1.19. *De las ecuaciones* (1,54) *y* (1,56) *tenemos que*

$$T_v + T_e = K_e + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{6} \mathcal{T}_{ij} x_{i,j}, \tag{1.57}$$

donde $\mathcal{T}_{i,j} := \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{37}\left[t_{i,j}^k \sum_{l=1}^{k}\left(s_{i,j}^l - b_{i,j}^l\right) - s_{i,j}^k f\right]\right)$, *con* $1 \le i \le N$ *y* $1 \le j \le 6$. *En consecuencia, nuestra función objetivo es lineal afín respecto a la variable $x_{i,j}$.*

Para el caso en que la frecuencia de la salida de los buses no sea constante, consideremos la siguiente definición:

Definición 1.10. *Para cada $i \in \{1, \dots, N\}$, f_i es el tiempo de separación entre el bus $i-1$ y el i-ésimo bus.*

Observación 1.20. *f_1 es el tiempo que tarda en salir el primer bus. Más aún, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} f_i = 60$ (minutos).*

Observación 1.21. *Si consideramos que la frecuencia es constante, es decir,* $f_i = 60/N$ *para todo* $i = 1, \ldots, N$*, entonces el problema de transporte que estamos formulando es un problema de asignación.*

Teniendo en cuenta las frecuencias variables, el tiempo de espera es

$$T_e = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{6} \sum_{k=1}^{37} f_i \left[p_{i,j}^k - s_{i,j}^k x_{i,j} \right].$$

De este modo, nuestro problema a resolver será el problema no lineal entero mixto:

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{6} \sum_{k=1}^{37} t_{i,j}^k \sum_{l=1}^{k} \left(s_{i,j}^l - b_{i,j}^l \right) x_{i,j} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{6} \sum_{k=1}^{37} \left[p_{i,j}^k - s_{i,j}^k x_{i,j} \right] f_i \\
\text{Sujeto a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{6} x_{i,j} = 1, \ 1 \leq i \leq N \\
& x_{i,j} \in \{0, 1\}, \ 1 \leq i \leq N, \ 1 \leq j \leq 6 \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{N} f_i = 60 \\
& f_i \geq 0, \ 1 \leq i \leq N
\end{array} \qquad (T_m)$$

Finalmente, al encontrar los valores de $x_{i,j}$ determinaremos de manera óptima la ruta debe realizar el i-ésimo bus al salir de la Estación Naranjal y además sabremos después de cuanto tiempo debe salir el bus $i + 1$.

1.2.3. Consideración de los buses vacíos

En los modelos formulados en los problemas (T_s) y (T_m) no se tiene en cuenta el hecho de que en algunas estaciones llegan buses vacíos debido a que decenas de usuarios esperan hasta más de 10 minutos para poder ingresar a un bus. Esto ocurre en las estaciones que son paraderos de los buses expresos.

Para modelar este fenómeno aumentaremos ficticiamente 4 nuevas rutas, las cuales harán las rutas 7, 8, 9 y 10 con las siguientes características:

- **Ruta 7**: Hace el mismo recorrido que la ruta 3 (Expreso 1), pero su paradero inicial es la Estación Uni (estación 9).
- **Ruta 8**: Hace el mismo recorrido que la ruta 4 (Expreso 2), pero su paradero inicial es la Estación Tomás Valle (estación 6).

- **Ruta 9**: Hace el mismo recorrido que la ruta 5 (Expreso 3), pero su paradero inicial es la Estación Izaguirre (estación 2).
- **Ruta 10**: Hace el mismo recorrido que la ruta 5 (Expreso 3), pero su paradero inicial es la Estación Independencia (estación 4).

Luego, manteniendo las notaciones $s^k_{i,j}, b^k_{i,j}, t^k_{i,j}, p^k_{i,j}$ y $x_{i,j}$, pero esta vez con $j \in \{1, \ldots, 10\}$, el problema real a resolver será el problema no lineal entero mixto:

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{10}\sum_{k=1}^{37} t^k_{i,j} \sum_{l=1}^{k} \left(s^l_{i,j} - b^l_{i,j}\right) x_{i,j} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{10}\sum_{k=1}^{37} \left[p^k_{i,j} - s^k_{i,j} x_{i,j}\right] f_i \\ \text{Sujeto a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{10} x_{i,j} = 1, \ 1 \le i \le N \\ & x_{i,j} \in \{0,1\}, \ 1 \le i \le N, \ 1 \le j \le 10 \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} f_i = 60 \\ & f_i \ge 0, \ 1 \le i \le N \end{array} \qquad (T_r)$$

Por otro lado, a partir del 17 de setiembre del 2012, se han modificado las rutas A y C, razón por la cual haremos los cambios necesarios considerando además ahora el total de los buses, es decir incluyendo los buses que viajan de sur a norte. La formulación del problema resultante lo estudiaremos en el Capítulo 4.

Es normal preguntarse si permitir la circulación de buses que realizarían las rutas 7, 8, 9 ó 10 implica la disminución del tiempo total de viaje de los usuarios, es por ello que mostramos la siguiente proposición.

Proposición 1.1. *El valor óptimo del Problema* (T_r) *es menor que el valor óptimo del Problema* (T_m).

Prueba: Sean

$$D^m_1 = \left\{ x^m \in \mathbb{R}^{6N} : \sum_{j=1}^{6} x_{i,j} = 1, \ 1 \le i \le N; x_{i,j} \in \{0,1\}, \ 1 \le i \le N, \ 1 \le j \le 6 \right\}$$

y

$$D^r_1 = \left\{ x^r \in \mathbb{R}^{10N} : \sum_{j=1}^{10} x_{i,j} = 1, \ 1 \le i \le N; x_{i,j} \in \{0,1\}, \ 1 \le i \le N, \ 1 \le j \le 10 \right\}$$

conjuntos tales que $D_1^m \times D_2$ y $D_1^r \times D_2$ sean los conjuntos factibles de los problemas (T_m) y (T_r) respectivamente, donde

$$D_2 = \left\{ f \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N} f_i = 60; f_i \geq 0, \ 1 \leq i \leq N \right\}.$$

Del mismo modo definamos $G^m(x,f)$ y $G^r(x,f)$ las funciones objetivos de los problemas (T_m) y (T_r) respectivamente. Definiendo $x_0 \in \mathbb{R}^4$ por $x_0 = (0,0,0,0)$, tenemos que $x_0^m = x^m \times x_0 \in D_1^r$ para todo $x^m \in D_1^m$, luego

$$G^r(x_0^m, f) = G^m(x^m, f).$$

De la igualdad anterior y notando que $D_1^m \times \{x_0\} D_2 \subset D_1^r \times D_2$, entonces el valor óptimo del Problema (T_r) es menor que el valor óptimo del Problema (T_m). $\square$

De la proposición se concluye que si permitimos la circulación de buses que realizarían las rutas 7, 8, 9 ó 10 esto implica la disminución del tiempo total de viaje de los usuarios.

Capítulo 2

Algoritmo para el Problema (T_r)

Debido a que el conjunto factible del Problema (T_r) presenta dos tipos de variables, aprovecharemos que éstas son independientes para resolver este problema mediante subproblemas. Primero plantearemos y estudiaremos la convergencia del algoritmo para subproblemas lineales y luego pasamos al caso no lineal.

2.1. Formulando el algoritmo

El problema (T_r) es equivalente al problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{10}\sum_{k=1}^{37}\left[t_{i,j}^{k}\sum_{l=1}^{k}\left(s_{i,j}^{l}-b_{i,j}^{l}\right)-s_{i,j}^{k}f_i\right]x_{i,j}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{10}\sum_{k=1}^{37}p_{i,j}^{k}f_i \\ \text{Sujeto a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{10}x_{i,j}=1,\ 1\le i\le N \\ & x_{i,j}\in\{0,1\},\ 1\le i\le N,\ 1\le j\le 10 \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{N}f_i=60 \\ & f_i\ge 0,\ 1\le i\le N \end{array} \qquad (\widehat{T})$$

Sean $x=(x_{1,1},\ldots,x_{1,10},\ldots,x_{N,1},\ldots,x_{N,10})\in\mathbb{R}^{10N}$ y $f=(f_1,\ldots,f_N)\in\mathbb{R}^N$.
Dado $(x,f)\in\mathbb{R}^{10N}\times\mathbb{R}^N$, definamos la función

$$G(x,f)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{10}\sum_{k=1}^{37}\left[t_{i,j}^{k}\sum_{l=1}^{k}\left(s_{i,j}^{l}-b_{i,j}^{l}\right)-s_{i,j}^{k}f_i\right]x_{i,j}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{10}\sum_{k=1}^{37}f_i p_{i,j}^{k}.$$

Para cada $x\in\mathbb{R}^{10N}$ fijo, definamos $G_x(f):\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ por

$$G_x(f)=G(x,f)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{10}\sum_{k=1}^{37}t_{i,j}^{k}\sum_{l=1}^{k}\left(s_{i,j}^{l}-b_{i,j}^{l}\right)x_{i,j}+\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{10}\sum_{k=1}^{37}\left[p_{i,j}^{k}-s_{i,j}^{k}x_{i,j}\right]\right)f_i,$$

el cual es una función afín lineal.

Del mismo modo, para cada $f \in \mathbb{R}^N$ fijo, definamos $G_x(f) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por

$$G_f(x) = G(x,f) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{10}\left(\sum_{k=1}^{37}\left[t_{i,j}^k \sum_{l=1}^{k}\left(s_{i,j}^l - b_{i,j}^l\right) - s_{i,j}^k f_i\right]\right) x_{i,j} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{10}\sum_{k=1}^{37} p_{i,j}^k f_i,$$

el cual es también una función afín lineal.

Luego, si $(\overline{x}, \overline{f})$ es la solución del Problema $(\widehat{T})$, entonces para cada $x \in \mathbb{R}^{10N}$ y para cada $f \in \mathbb{R}^N$ tenemos

$$G(\overline{x}, \overline{f}) \leq G_x(\overline{f}) \text{ y } G(\overline{x}, \overline{f}) \leq G_f(\overline{x}).$$

Veremos que el Problema $(\widehat{T})$ puede dividirse en dos subproblemas, para ello definamos los conjuntos

$$D_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^{10N} : \sum_{j=1}^{10} x_{i,j} = 1,\ 1 \leq i \leq N; x_{i,j} \in \{0,1\},\ 1 \leq i \leq N,\ 1 \leq j \leq 10 \right\}, \text{ y} \tag{2.1}$$

$$D_2 = \left\{ f \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N} f_i = 60; f_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq N \right\}. \tag{2.2}$$

De este modo, el Problema $(\widehat{T})$ puede escribirse como

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & G(x,f) \\ \text{Sujeto a} & (x,f) \in D_1 \times D_2 \end{array}$$

Definamos los subproblemas

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & G_f(x) \\ \text{Sujeto a} & x \in D_1 \end{array} \tag{$\widehat{T}_f$}$$

donde $f \in \mathbb{R}^N$ es fijo, y

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & G_x(f) \\ \text{Sujeto a} & f \in D_2 \end{array} \tag{$\widehat{T}_x$}$$

donde $x \in \mathbb{R}^{10N}$ es fijo.

Observación 2.1. *El conjunto D_1 es compacto y el conjunto D_2 es compacto y convexo.*

Sea $f^1 \in \mathbb{R}^N$ tal que $f_i^1 = 60/N$ para todo $i \in \{1, \ldots, N\}$, luego $f^1 \in D_2$.

Definamos $x^k \in \mathbb{R}^{10N}$ tal que x^k es la solución del Problema $(\widehat{T}_{f^k})$, para todo $k \geq 1$.

De manera similar, definamos $f^k \in \mathbb{R}^N$ tal que f^k es la solución del Problema $(\widehat{T}_{x^{k-1}})$, para todo $k > 1$.

Desde que los conjuntos factibles a los problemas $(\widehat{T}_f)$ y $(\widehat{T}_x)$ son acotados, entonces $\{f^k\}$ y $\{x^k\}$ poseen subsucesiones convergentes. Denotemos por $\widehat{f}$ y $\widehat{x}$ puntos de adherencia de las sucesiones anteriores respectivamente, esto es, $f^k \to \widehat{f}$ y $x^k \to \widehat{x}$.

Proposición 2.1. *Para todo $k \geq 1$ se tiene que*

$$G(\overline{x}, \overline{f}) \leq G(\widehat{f}, \widehat{x}) \leq G(x^{k+1}, f^{k+1}) \leq G(x^k, f^k) \tag{2.3}$$

donde $(\overline{x}, \overline{f})$ es solución del Problema $(\widehat{T})$.

Prueba: Como f^{k+1} es solución de $(\widehat{T}_{x^k})$, entonces

$$G_{x^k}(f^{k+1}) \leq G_{x^k}(f^k) = G(x^k, f^k).$$

Debido a que x^{k+1} es solución de $(\widehat{T}_{f^{k+1}})$, entonces

$$G(x^{k+1}, f^{k+1}) = G_{f^{k+1}}(x^{k+1}) \leq G_{f^{k+1}}(x^k) = G(x^k, f^k).$$

Observe que la sucesión $\{G(x^k, f^k)\} \subset \mathbb{R}$ es decreciente y acotada pues G es continua sobre el compacto $D_1 \times D_2$, en consecuencia $\{G(x^k, f^k)\}$ es convergente y converge a $G(\widehat{f}, \widehat{x})$. Luego

$$G(\widehat{f}, \widehat{x}) \leq G(x^k, f^k), \ \forall \ k \geq 1.$$

Por lo tanto, como $(\overline{x}, \overline{f})$ es solución del Problema $(\widehat{T})$, entonces

$$G(\overline{x}, \overline{f}) \leq G(\widehat{f}, \widehat{x}),$$

con lo cual se obtiene la ecuación (2.3). □

Proposición 2.2. *Si $(\overline{x}, \overline{f})$ es solución del Problema $(\widehat{T})$, entonces*

$$G(\widehat{x}, \widehat{f}) \leq G(\widehat{x}, \overline{f}) \text{ y } G(\widehat{x}, \widehat{f}) \leq G(\overline{x}, \widehat{f}).$$

Prueba:
Como x^k es solución del Problema $(\widehat{T}_{f^k})$, entonces

$$G(x^k, f^k) = G_{f^k}(x^k) \leq G_{f^k}(\overline{x}) = G(x, f^k), \ \forall \ k \geq 1, \ \forall \ x \in D_1.$$

Haciendo $k \to \infty$, tenemos que

$$G(\widehat{x}, \widehat{f}) \leq G(\overline{x}, f), \ \forall \ f \in D_2,$$

en particular

$$G(\widehat{x}, \widehat{f}) \leq G(\overline{x}, \widehat{f}).$$

Del mismo modo, como f^k es solución del Problema $(\widehat{T}_{x^{k-1}})$, entonces

$$G(x^k, f^k) \leq G_{x^{k-1}}(f^k) \leq G_{x^{k-1}}(\overline{f}) = G(x^{k-1}, f), \ \forall \ k > 1, \ \forall \ f \in D_2$$

Haciendo $k \to \infty$, tenemos que

$$G(\widehat{x}, \widehat{f}) \leq G(\widehat{x}, f), \ \forall \ f \in D_2,$$

en particular

$$G(\widehat{x}, \widehat{f}) \leq G(\widehat{x}, \overline{f}).$$

$\square$

Para demostrar que $(\widehat{x}, \widehat{f})$ es solución del Problema $(\widehat{T})$ necesitamos utilizar alguna condición de optimalidad. En caso de que el conjunto factible sea convexo, el método anterior coincide con el de Gauss-Seidel. Esto nos motiva a trabajar considerando la cápsula convexa de D_1 y determinar si la solución de este nuevo problema coincide con la solución del Problema $(\widehat{T})$.

Si consideramos $co(D_1)$ en lugar de D_1, entonces

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & G(x, f) \\ \text{Sujeto a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{10} x_{i,j} = 1, \ 1 \leq i \leq N \\ & 0 \leq x_{i,j} \leq 1, \ 1 \leq i \leq N, \ 1 \leq j \leq 10 \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} f_i = 60 \\ & f_i \geq 0, \ 1 \leq i \leq N \end{array} \qquad (\widetilde{T})$$

puede escribirse como

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & G(x, f) \\ \text{Sujeto a} & (x, f) \in co(D_1) \times D_2 \end{array}$$

donde $co(D_1) = co(D_{1_1}) \times \cdots \times co(D_{1_N})$ y

$$co(D_{1_i}) = \left\{ (x_{i,1}, \ldots, x_{i,10}) \in \mathbb{R}^{10} : \sum_{j=1}^{10} x_{i,j} = 1; 0 \leq x_{i,j} \leq 1, \ 1 \leq j \leq 10 \right\}, \ 1 \leq i \leq N.$$

Observación 2.2. *Note que* $D_1 = D_{1_1} \times \cdots \times D_{1_N}$, *donde*

$$D_{1_i} = \left\{ (x_{i,1}, \ldots, x_{i,10}) \in \mathbb{R}^{10} : \sum_{j=1}^{10} x_{i,j} = 1; x_{i,j} \in \{0,1\},\ 1 \leq j \leq 10 \right\},\ 1 \leq i \leq N.$$

Nuestro objetivo es mostrar que $(\widehat{x}, \widehat{f})$ es solución del Problema $(\widehat{T})$, para ello veamos que los puntos extremos de $co(D_1)$ pertenecen a D_1.

Lema 2.1. *Los puntos extremos de la cápsula convexa de*

$$C^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \cdots + x_n = 1; x_i \in \{0,1\},\ 1 \leq i \leq n\}$$

pertenecen a C^n, *esto es* $Ext(co(C^n)) \subset C^n$.

Prueba: Supongamos que existe $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que x sea punto extremo de

$$co(\mathrm{C}^n) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \cdots + x_n = 1; 0 \leq x_i \leq 1,\ 1 \leq i \leq n\}$$

tal que $x \notin \mathrm{C}^n$.
Sean $\alpha_i = x_i \in [0,1]$, para todo $i = 1, \ldots, n$, y $c_i = (c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$c_{i_j} = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ 1, & j = i \end{cases} \quad \text{para todo } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Debido a que $c_{i_j} \in \{0,1\}$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ y $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_{i_j} = 1$, entonces $c_i \in \mathrm{C}^n \subset co(\mathrm{C}^n)$.
Por otro lado, como $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i$ es una combinación convexa no trivial de elementos de C^n, más aún,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i = \sum_{i=1}^{n} x_i(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, \ldots, 0) = x.$$

En consecuencia, x no puede ser punto extremo de $co(C_n)$, con lo cual queda demostrado el lema. □

Observación 2.3. *Como* $Ext(C^n) = \{c_1, \ldots, c_n\} = C^n$ *y* $C^n \subset co(C^n)$, *del lema anterior tenemos que* $Ext(co(C^n)) = C^n$.

Lema 2.2. *Dados* $A, B \subset \mathbb{R}^n$ *convexos y no vacíos, entonces* $Ext(A \times B) \subset Ext(A) \times Ext(B)$.

Prueba: Procedamos por contradicción. Sea $(a,b) \in \text{Ext}(A\times B)$ tal que $(a,b) \notin \text{Ext}(A)\times \text{Ext}(B)$; esto implica que $a \notin \text{Ext}(A)$ ó $b \notin \text{Ext}(B)$.
Supongamos que $a \notin \text{Ext}(A)$, esto es, existen $a_1, a_2 \in A$ y $\lambda \in]0,1[$ tales que $\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 = a$.
Por otro lado

$$(a,b) = \lambda(a_1,b) + (1-\lambda)(a_2,b) \in A\times B,$$

lo cual contradice el hecho que $a \notin A$. □

Observación 2.4. *De manera similar podemos mostrar que la otra inclusión en el lema anterior es verdad, por consiguiente tendríamos*

$$Ext(A\times B) = Ext(A)\times Ext(B)$$

si A y B son convexos y no vacíos.

Lema 2.3. *Para el conjunto D_1 definido en la ecuación* (2,1) *se cumple que*

$$Ext(co(D_1)) \subset D_1.$$

Prueba: Como $co(D_1) = co(D_1^1)\times\cdots\times co(D_1^N)$, del lema anterior (por un proceso de inducción) tenemos que

$$\text{Ext}(co(D_1)) \subset \text{Ext}(co(D_1^1))\times\cdots\times\text{Ext}(co(D_1^N)).$$

Debido al Lema 2.1 se obtiene que $\text{Ext}(co(D_1^i)) \subset D_1^i$ para todo $i = 1,\ldots,n$. En consecuencia

$$\text{Ext}(co(D_1)) \subset D_1^1\times\cdots\times D_1^N = D_1$$

□

Ahora que sabemos que los puntos extremos de $co(D_1)$ pertenecen a D_1 vamos a proponer un algoritmo que solucione el Problema $\widetilde{T}$. Para ello definamos los subproblemas

$$\begin{array}{rl}\text{Minimizar} & G_f(x)\\ \text{Sujeto a} & x\in co(D_1)\end{array} \qquad (\widetilde{T}_f)$$

donde $f\in\mathbb{R}^N$ es fijo, y

$$\begin{array}{rl}\text{Minimizar} & G_x(f)\\ \text{Sujeto a} & f\in D_2\end{array} \qquad (\widetilde{T}_x)$$

donde $x\in\mathbb{R}^{10N}$ es fijo.

Algoritmo 2.1. *Dado N el número de buses que se dirigirán de norte a sur en un determinado intervalo de tiempo de la mañana:*

1. *Sea $f^1 \in \mathbb{R}^N$ tal que $f_i^1 = 60/N$ para todo $i \in \{1, \ldots, N\}$ y $k = 1$.*
2. *Determinar $x^k \in \mathbb{R}^{10N}$ la solución del Problema $(\widetilde{T}_{f^k})$.*
3. *Determinar $f^{k+1} \in \mathbb{R}^N$ la solución del Problema $(\widetilde{T}_{x^k})$.*
4. *Hacer $k = k + 1$ y volver al paso 2.*

Observación 2.5. *Como los problemas $(\widetilde{T}_{f^k})$ y $(\widetilde{T}_{x^k})$ son problemas afines lineales, entonces uno de los puntos extremos de $co(D_1)$ y de D_2 son soluciones de estos problemas respectivamente.*

En virtud del Lema 2.3 tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.3. *Sea $(\widetilde{x}, \widetilde{f})$ el punto de acumulación de la sucesión $\{(x^k, f^k)\}$ formada en el Algoritmo 2.1, entonces $(\widetilde{x}, \widetilde{f})$ es solución del Problema $(\widehat{T})$.*

Prueba: De la observación anterior se tiene que $x^k \in D_1$ y $f^k \in D_2$, más aún, como el Problema $(\widetilde{T})$ es un problema cuadrático entonces uno de los puntos extremos de $co(D_1) \times D_2$ será solución de este problema.
Como $(\widetilde{x}, \widetilde{f})$ el punto de acumulación de la sucesión $\{(x^k, f^k)\}$ formada en el Algoritmo 2.1, entonces veamos primero que $(\widehat{x}, \widehat{f})$ del Problema $(\widetilde{T})$.
Debido a que f^{k+1} es solución del Problema $(\widetilde{T}_{x^k})$ y D_2 es convexo, entonces

$$\langle \nabla_f G(x^k, f^{k+1}), f - f^{k+1} \rangle = \langle \nabla G_{x^k}(f^{k+1}), f - f^{k+1} \rangle \geq 0, \ \forall \ k \leq 1.$$

Haciendo $k \to \infty$, tenemos que

$$\langle \nabla_f G(\widetilde{x}, \widetilde{f}), f - \widetilde{f} \rangle \geq 0.$$

Del mismo modo, como x^k es solución del Problema $(\widetilde{T}_{f^k})$ y $co(D_1)$ es convexo, entonces

$$\langle \nabla_y G(x^k, f^k), x - x^k \rangle = \langle \nabla G_{f^k}(x^k), y - x^k \rangle \geq 0, \ \forall \ k \geq 1.$$

Haciendo $k \to \infty$, tenemos que

$$\langle \nabla_x G(\widetilde{x}, \widetilde{f}), x - \widetilde{x} \rangle \geq 0.$$

En consecuencia

$$\langle \nabla G(\widetilde{x}, \widetilde{f}), (x, f) - (\widetilde{x}, \widetilde{f}) \rangle = \langle \nabla_x G(\widetilde{x}, \widetilde{f}), x - \widetilde{x} \rangle + \langle \nabla_f G(\widetilde{x}, \widetilde{f}), f - \widetilde{f} \rangle \geq 0$$

para todo $(x, f) \in co(D_1) \times D_2$.

Por lo tanto, $(\widetilde{x}, \widetilde{f})$ es solución del Problema $(\widetilde{T})$ y por ser un punto extremo de $co(D_1) \times D_2$ se tiene que $(\widetilde{x}, \widetilde{f}) \in D_1 \times D_2$, en consecuencia $(\widetilde{x}, \widetilde{f})$ es también solución del Problema $(\widehat{T})$. $\square$

Desde luego que la solución de un problema lineal no es necesariamente un punto extremo, pero podemos resolver el problema de tal modo que esto ocurra como por ejemplo el método simplex. Considerando un método que garantice que la solución de un problema lineal sea un punto extremo, tenemos que la proposición anterior es válida, más aún, se obtiene la siguiente observación.

Observación 2.6. *Se tiene que* $(\widetilde{x}, \widetilde{f}) = (\widehat{x}, \widehat{f})$ *debido a que* $(x^k, f^k) \in D_1 \times D_2$ *para todo* $k \geq 1$.

El método simplex se caracteriza por resolver un problema de programación lineal en finitos pasos. El siguiente resultado nos dice que podemos solucionar el Problema (T_r) en finitos pasos.

Proposición 2.4. *El Algoritmo 2.1 resuelva el Problema* (T_r) *en finitos pasos.*

Prueba: Supongamos que al ejecutar el método simplex para resolver los problemas $(\widetilde{T}_{f^k})$ y $(\widetilde{T}_{x^k})$ se necesiten a lo más n_f y n_x pasos respectivamente para cualquier $k \geq 1$, entonces el Algoritmo 2.1 resuelva el Problema (T_r) en a lo más $n_f n_x$ pasos. $\square$

Observación 2.7. *Al resolver Problema* (T_r) *con el Algoritmo 2.1 estamos dividiendo un problema no lineal entero mixto en subproblemas lineales, los cuales se resuelven rápidamente en comparación del problema inicial.*

2.2. El caso no lineal

Decir que $y \in \{0, 1\}$ es equivalente a decir que y es solución de $y^2 - y = 0$. Esto implica que la restricción de una variable del tipo entero que puede tomar sólo dos valores se puede convertir en una restricción no lineal de igualdad.

Empecemos reescribiendo el conjunto D_1:

$$D_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^{10N} : \sum_{j=1}^{10} x_{i,j} = 1,\ 1 \leq i \leq N; x_{i,j}^2 - x_{i,j} = 0,\ 1 \leq i \leq N,\ 1 \leq j \leq 10 \right\}.$$

Este conjunto sigue siendo compacto, más aún, $G_f(x)$ es convexa diferenciable sobre el conjunto D_1 que acabamos de mostrar. Además D_2 es compacto y convexo, y $G_x(f)$ es también convexa diferenciable sobre D_2. En consecuencia al aplicar el Algoritmo 2.1 sobre los subproblemas

$$\begin{array}{cl} \text{Minimizar} & G_f(x) \\ \text{Sujeto a} & x \in D_1 \end{array}$$

donde $f \in \mathbb{R}^N$ es fijo, y

$$\begin{array}{cl} \text{Minimizar} & G_x(f) \\ \text{Sujeto a} & f \in D_2 \end{array}$$

donde $x \in \mathbb{R}^{10N}$ es fijo, tendremos que las subsucesiones x^k y f^k determinadas por éste algoritmo son tales que $(x^k, f^k) \in D_1 \times D_2$ para todo $k \geq 1$.

Para garantizar que todo punto de adherencia de (x^k, f^k) sea solución de $\widehat{T}$ necesitamos que D_1 y D_2 sean convexos, tal como se mostró en la Proposición 2.3, sin embargo, D_1 no es convexo.

Para trabajar con el caso estocástico de nuestro problema, veamos primero algunas generalidades de la programación estocástica.

Capítulo 3

Programación Estocástica

Tal como su nombre indica, la Programación Estocástica trata problemas de Programación Matemática en cuya formulación aparece algún elemento estocástico. La aleatoriedad en coeficientes en unos casos se deberá a la falta de fiabilidad en los datos recogidos, en otros casos a errores de medida, en otros a eventos futuros aún no conocidos, etc.

3.1. Definiciones básicas

Se considera el siguiente problema de Programación Estocástica:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \widetilde{G}(x,\xi) \\ \text{Sujeto a} & \widetilde{g}_i(x,\xi) \leq 0, i = 1,\ldots,m, \\ & x \in D, \end{array} \tag{PE}$$

donde el conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ y ξ es un vector aleatorio definido sobre un conjunto $E \subset \mathbb{R}^s$. Suponemos que están dados una familia de eventos F formada por subconjuntos de E y una distribución de probabilidad P definida sobre F. Por tanto, para cada $A \subset E$, es $A \in F$, y la probabilidad $P(A)$ es conocida. Además suponemos que las funciones $g_i(x,\cdot) : E \to \mathbb{R}$, $\forall\, x, i$ son variables aleatorias y que la distribución de probabilidad P es independiente del vector de variables de decisión x.

Obsérvese que en el problema formulado (PE) para cada vector aleatorio $\xi \in E$ se tiene un problema determinístico. Un vector $x \in D$ puede ser factible para algún $\xi \in E$ y no serlo para otros casos.

Asimismo puede ocurrir que dados $x_1, x_2 \in D$ y $\xi_1, \xi_2 \in D$ se tenga que $\widetilde{G}(x_1,\xi_1) < \widetilde{G}(x_2,\xi_1)$ y $\widetilde{G}(x_2,\xi_2) < \widetilde{G}(x_1,\xi_2)$.

Un caso particular del Problema (PE) es el siguiente problema de Programación Lineal Estocástica:

$$\begin{aligned}\min_{x} \quad & c^T(\xi)x, \\ \text{Sujeto a} \quad & Ax = b, \\ & T(\xi)x \geq h(\xi), \\ & x \geq 0,\end{aligned} \tag{PLE}$$

donde la matriz A y el vector b son determinísticos. La matriz $T(\cdot)$ y los vectores $c(\cdot)$ y $h(\cdot)$ dependen del vector aleatorio ξ y por tanto son estocásticos.

Normalmente el problema estocástico se reemplaza por un problema determístico, que se llama determinista equivalente cuya solución optima pasa a considerarse la solución optima del problema estocástico.

Fundamentalmente existen dos tipos de modelos en Programación Estocástica:

- Modelos "esperar y ver" ("wait and see") o modelos de programación estocástica pasiva, basados en la suposición de que el decisor es capaz de esperar a que se conozcan las variables aleatorias y tomar su decisión con información completa luego, con lo que el problema se convierte en determinístico y es posible encontrar el valor optimo de las variables de decisión con las técnicas habituales de programación matemática determinística. En ocasiones puede tener interés el conocer la distribución de probabilidad del valor objetivo óptimo (valor esperado o varianza) antes de conocer la realización de sus variables aleatorias. Tales problemas se llaman problemas de distribución.

- Modelos "aquí y ahora" ("here and now") o modelos de programación estocástica activa. En estos modelos el decisor toma la decisión sin el conocimiento de la realización de las variables aleatorias, sin que por ello queden afectadas las distribuciones de probabilidad de las mismas.

En las siguientes secciones veremos diferentes enfoques para resolver un problema estocástico.

3.2. Programación con restricciones probabilísticas

Se considera el problema (PE) en el que se supone que la función objetivo no contiene ninguna variable aleatoria:

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & G(x), \\ \text{Sujeto a} \quad & \widetilde{g}_i(x,\xi) \leq 0, i = 1, \ldots, m, \\ & x \in D. \end{aligned} \tag{3.1}$$

El método de restricciones de azar fue introducido en 1958. La idea consiste en transformar el problema dado en un determinista equivalente en el que se verifiquen las restricciones con, al menos, una determinada probabilidad fijada de antemano. Hay que distinguir dos casos según se fije la probabidad para el conjunto de las restricciones o para cada una de ellas por separado.

Restricciones de azar conjuntas:

Sea $p \in [0,1]$ dado. Se define el determinista equivalente:

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & G(x), \\ \text{Sujeto a} \quad & P(\widetilde{g}_1(x,\xi) \leq 0, \ldots, \widetilde{g}_m(x,\xi)) \geq p, \\ & x \in D. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Para este problema, $1 - p$ es el riesgo admisible para el decisor de que la solución del problema sea no factible.

En el caso particular de que para cada $x \in D$ las variables aleatorias $\widetilde{g}_1(x,\xi), \widetilde{g}_2(x,\xi), \ldots, \widetilde{g}_m(x,\xi)$ sean mutuamente estadísticamente independientes, el problema equivalente determinista anterior se puede expresar de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & G(x), \\ \text{Sujeto a} \quad & P(\widetilde{g}_1(x,\xi) \leq 0) \cdots P(\widetilde{g}_m(x,\xi)) \geq p, \\ & x \in D. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Restricciones de azar separadas o individuales:

Para cada restricción $i \in \{1, \ldots, m\}$ sea $p_i \in [0,1]$ dado. Se define el determinista equivalente:

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & G(x), \\ \text{Sujeto a} \quad & P(\widetilde{g}_i(x,\xi) \leq 0) \geq p_i, \text{ para } i = 1, \ldots, m, \\ & x \in D. \end{aligned} \tag{3.4}$$

La siguiente proposición recoge la relación entre los dos casos:

Proposición 3.1. *Supongamos que x es una solución factible del Problema* (3,4) *para los valores $p_1, \dots, p_m$. Entonces para $p = 1 - m + \sum_{i=1}^{m} p_i$, se verifica que x es factible para el Problema* (3,2).

Prueba: Sea $\widehat{x}$ solución factible del Problema (3.2). Ello quiere decir que se verifica: $P(\xi | g_i(\widehat{x}, \xi) \leq 0) \geq p_i$, para todo $i = 1, \dots, m$. Definimos los eventos $\mathcal{A}_i$ de la siguiente forma: $\mathcal{A}_i = \{\xi | g_i(\widehat{x}, \xi) \leq 0\}$, para $i = 1, \dots, m$.
Se verifica que $P(\mathcal{A}_i) \geq p_i, P(A_i^C) \leq 1 - p_i$. Veamos que se verifica que

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{A}_i\right) \geq p,$$

lo cual quiere decir que $\widehat{x}$ es factible para el Problema (3.2). En efecto:
Teniendo en cuenta la desigualdad de Boole: $P\left(\bigcup_k S_k\right) \leq \sum_k P(S_k)$, se tiene que

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{A}_i\right) = 1 - P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{A}_i\right)^C\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{m} (\mathcal{A}_i)^C\right)$$

$$\geq 1 - \sum_{i=1}^{m} P\left((\mathcal{A}_i)^C\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{m} (1 - p_i) = p.$$

$\square$

Sean

$$q(x) = P(\xi | \widetilde{g}_1(x, \xi) \leq 0, \dots, \widetilde{g}_m(x, \xi) \leq 0),$$

$$q_i(x) = P(\xi | g_i(x, \xi) \leq 0), i = 1, 2, ..., m.$$

El conjunto factible del Problema (3.2) lo podemos representar de la siguiente forma: $C(p) = \{x \in D | q(x) \geq p\}$.

Sea $C_i(p_i) = \{x \in D | q_i(x) \geq p_i\}, i \in \{1, \dots, m\}$.

El conjunto factible del Problema (3.4) lo podemos respresentar como

$$\widehat{C}(p_1, \dots, p_m) = \bigcap_{i=1}^{m} C_i(p_i).$$

Sería deseable que los conjuntos $C(p)$ y $\widehat{C}(p_1, \dots, p_m)$, que son los conjuntos de soluciones factibles de los deterministas equivalentes que estamos estudiando, fueran no vacíos cerrados y convexos. Las siguientes proposiciones tratan sobre dichas cuestiones.

Proposición 3.2. *Sea $C(p)$ el conjunto de soluciones factibles del Problema* (3,2)*. En dicho conjunto se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Si $p_1 \leq p_2$, entonces $C(p_1) \supset C(p_2)$.*

2. *$C(0) = D$.*

3. *$C(p)$ es no vacío para todo $p \in [0,1]$ si, y sólo si, $C(1) = \emptyset$.*

Prueba:

1. Sea $p_1 \leq p_2$. Si $x \in C(p_2)$ se tiene que

$$q(x) = P(\xi | g_1(x,\xi) \leq 0, g_2(x,\xi) \leq 0, \ldots, g_m(x,\xi) \leq 0) \geq p_2 \geq p_1,$$

   entonces $x \in C(p_1)$.

2. $C(0) = \{x \in D | q(x) \geq 0\} = D$, ya que $q(x)$ es una probabilidad y por tanto es mayor o igual que cero.

3. Si $C(p) = \emptyset$, $\forall\ p \in [0,1]$, entonces $C(1) = \emptyset$. Por otra parte, si $C(1) = \emptyset$, entonces $\forall\ p \leq 1$, del primer item tenemos que $C(p) \supset C(1) = \emptyset$.

□

Observación 3.1. *Obsérvese que si $C(p) = \emptyset$, $\forall\, p \in [0,1]$, entonces $\widehat{C}(p_1, p_2, \ldots, p_m) = \emptyset$, para todo $p_1, p_2, \ldots, p_m \in [0,1]$.*

La siguiente proposición da condiciones que aseguran que los conjuntos que estamos considerando son cerrados.

Proposición 3.3. *Si las funciones $g_i : \mathbb{R}^n \times E \to \mathbb{R}$ son continuas, entonces los conjuntos factibles $C(p)$ y $C(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ son cerrados.*

A continuación se aborda el problema de la convexidad de los conjuntos $C(p)$ y $\widehat{C}(p_1, p_2, \ldots, p_m)$. Estos conjuntos en general no son convexos. Veamos condiciones para que sí lo sean.

Definición 3.1. *Una medida de probabilidad $P : F \to [0,1]$ se dice que es cuasicóncava si $\forall\ S_1, S_2 \in F$, siendo S_1 y S_2 conjuntos convexos, y $\forall\ \lambda \in [0,1]$, se verifica que $P(\lambda S_1 + (1-\lambda)S_2) \geq \text{mín}\{P(S_1), P(S_2)\}$.*

Definición 3.2. *Una medida de probabilidad $P : F \to [0,1]$ se dice que es log-cóncava si $\forall\ S_1, S_2 \in F$, siendo S_1 y S_2 conjuntos convexos, y $\forall\ \lambda \in [0,1]$, se verifica que $P(\lambda S_1 + (1-\lambda)S_2) \geq [P(S_1)]^{\lambda}[P(S_2)]^{1-\lambda}$.*

Las dos proposiciones siguientes dan condiciones para que una medida de probabilidad sea cuasicóncava.

Proposición 3.4. *Si P es una medida de probabilidad log-cóncava en F, entonces P es cuasicóncava.*

Proposición 3.5. *Sea P una medida de probabilidad en $\mathbb{R}^s$, de tipo continuo con función de densidad asociada f. Entonces se verifica:*

- *P es log-cóncava si, y sólo si, el logaritmo de f es una función cóncava.*
- *P es cuasicóncava si, y sólo si, $f^{1/s}$ es convexa.*

La siguiente proposición da condiciones suficientes para que los conjuntos que estamos estudiando sean convexos.

Proposición 3.6. *Si $g_i(\cdot,\cdot)$ es conjuntamente convexa en (x,ξ), para cada $i = 1,2,\ldots,m$ y P es cuasicóncava, entonces $C(p)$ es convexo para todo $p \in [0,1]$ y $C(p_1,p_2,\ldots,p_m)$ es convexo, $\forall\ p_1,p_2,\ldots,p_m$ en $[0,1]$.*

Algunas medidas de probabilidad cuasicóncavas son: La uniforme k-dimensional, sobre un conjunto convexo $S \subset \mathbb{R}^k$, la distribución exponencial en $\mathbb{R}$, la normal multivariante en $\mathbb{R}^k$, la distribución de Dirichlet, la beta, la distribución de Wishart, la gamma para ciertos valores del parámetro, la distribución de Cauchy, la distribución de Pareto para determinados valores, etc.

3.2.1. El caso lineal

Se considera el problema lineal estocástico (PLE), en el cual se supone que la función objetivo no contiene ninguna variable aleatoria:

$$\begin{array}{rl} \min\limits_{x} & c^T x, \\ \text{Sujeto a} & Ax = b, \\ & T(\xi)x \leq h(\xi), \\ & x \leq 0. \end{array} \tag{3.5}$$

Para el Problema (3.5), dado el valor $p \in [0,1]$, el programa determinista equivalente correspondiente al método de restricciones de azar tomadas en conjunto será

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & c^T x, \\ \text{sujeto a} \quad & Ax = b, \\ & P(T(\xi)x \leq h(\xi)) \leq p, \\ & x \leq 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Para el mismo Problema (3.5), dados los valores $p_1, p_2, \ldots, p_m$, pertenecientes al intervalo $[0,1]$, el programa determinista equivalente correspondiente al método de restricciones de azar tomadas de manera separada será:

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & c^T x, \\ \text{sujeto a} \quad & Ax = b, \\ & P(T_i(\xi)x \leq h_i(\xi)) \leq p_i, i = 1, 2, \ldots, m, \\ & x \leq 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Sean $C(p)$ el conjunto factible del Problema (3.6) y $C(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ el conjunto factible de (3.7). Aunque el programa estocástico inicial (3.5) es lineal, los conjuntos de soluciones factibles $C(p)$ y $\widehat{C}(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ no tienen por qué ser convexos, como se puede observar en el siguiente ejemplo.

Se considera el siguiente programa estocástico con una sola variable de decisión

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & g_0(x), \\ \text{sujeto a} \quad & Tx \geq h(\xi), \end{aligned}$$

donde $T = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h(\xi)$ toma los valores $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, con probabilidad 1/2, y $\begin{pmatrix} -10 \\ 3 \end{pmatrix}$, con probabilidad 1/2.
Para este programa estocástico se tiene que, para todo $p \in [0, 1/2]$ es $C(p) = \widehat{C}(p) = [0,2] \cup [3,5]$, que no es convexo.

Las siguientes proposiciones recogen los principales resultados conocidos para el tipo de problema que estamos considerando.

Proposición 3.7. *Se considera el programa estocástico (3.5). Supongamos que ξ es un vector aleatorio cuya distribución de probabilidad es discreta y finita.Sea $P(\xi = \xi^k) = \alpha k$, para $k = 1, 2, \ldots, K$. Entonces para $p > 1 - m \in \{1, 2, ..., K\}\alpha k$ se verifica que el conjunto factible $C(p)$ es convexo.*

A la vista de la proposición anterior, se comprueba inmediatamente que si $p_j > 1 - \text{mín}_k \in \{1, 2, \ldots, K\} \alpha_k$ para cada $j = 1, 2, \ldots, m$, el conjunto $\widehat{C}(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ es convexo.

Proposición 3.8. *Se considera el programa estocástico* (3,5)*. Supongamos que* $T(\xi) = T$ *y que la probabilidad* P *correspondiente a* $h(\xi) = h$ *es cuasicóncava. Entonces los conjuntos* $C(p)$ *y* $\widehat{C}(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ *son cerrados y convexos.*

Proposición 3.9. *Se considera el programa estocástico* (3,5)*. Sean* $\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2, \ldots, \widetilde{T}_m$ *las filas respectivas de la matriz* $T(\widetilde{\xi}), h(\widetilde{\xi}) = \widetilde{h}$*. Supongamos que* $\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2, \ldots, \widetilde{T}_m$ *,* h *tienen distribución normal con*

$$E\left[(\widetilde{T}_i - E(\widetilde{T}_i))\left(\widetilde{T}_j - E(\widetilde{T}_j)^T\right)\right] = r_{ij}C, \text{ para } i, j = 1, 2, \ldots, m,$$

$$E\left[(\widetilde{T}_i - E(\widetilde{T}_i))\left(\widetilde{h} - E(\widetilde{h})\right)\right] = s_iC, \text{ para } i, j = 1, 2, \ldots, m,$$

donde r_{ij} *y* s_i *son constantes para todo* i, j*. Entonces,* $C(p)$ *es convexo para* $p \leq 0,5$*.*

3.3. Función objetivo aleatoria

Consideremos el siguiente problema estocśtico, en el que todas las restricciones son determinísticas y la función objetivo es aleatoria.

$$\begin{array}{rl} \min\limits_{x} & \widetilde{g}_0(x, \widetilde{\xi}), \\ \text{sujeto a:} & x \in X \end{array} \tag{3.8}$$

El conjunto factible $X \subset \mathbb{R}^n$ está compuesto por restricciones determinísticas, bien porque lo sean de manera natural o bien porque se haya obtenido el determinista equivalente utilizando el método de restricciones de azar.

Veremos como trabajar la función objetivo estocástica en su determinista equivalente.

3.3.1. Algunos criterios

Criterio del valor esperado

Se convierte la variable aleatoria $\widetilde{g}_0(x, \widetilde{\xi})$ en una función determinística tomando la esperanza matemática

$$E[\widetilde{g}_0(x, \widetilde{\xi})].$$

El determinista equivalente del problema estocástico (3.8) será

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & E[\widetilde{g}_0(x,\widetilde{\xi})], \\ \text{sujeto a:} \quad & x \in X \end{aligned} \tag{3.9}$$

Para resolver el problema de programación estocástica siguiendo este criterio, basta con conocer el valor esperado de la función objetivo estocástica y, por tanto, es aplicable aún en el caso en el que se desconozca la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $\widetilde{g}_0(x,\widetilde{\xi})$.

Criterio de mínima varianza

Se convierte la variable aleatoria $\widetilde{g}_0(x,\widetilde{\xi})$ en una función determinística tomando su varianza: $Var[\widetilde{g}_0(x,\widetilde{\xi})] = E[\widetilde{g}_0(x,\widetilde{\xi})^2] - \{E[\widetilde{g}_0(x,\widetilde{\xi})]\}^2$.

La utilización de este criterio da lugar a la elección de aquel vector x para el que la variable aleatoria $\widetilde{g}_0(x,\widetilde{\xi})$ está más concentrada alrededor de su valor esperado, de manera que el determinista equivalente según el criterio de mínima varianza puede interpretarse como una medida de error cuadrático.

El criterio de optimización es el de mínima varianza tanto si se tratara de minimizar la función objetivo como si se tratara de maximizarlo.

Para poder utilizar este criterio es suficiente con que se conozca la varianza de la variable aleatoria $\widetilde{g}_0(x,\widetilde{\xi})$. No hace falta que se conozca su distribución de probabilidad.

El determinista equivalente del problema estocástico (3.8), según el criterio de mínima varianza será

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & Var[\widetilde{g}_0(x,\widetilde{\xi})], \\ \text{sujeto a:} \quad & x \in X \end{aligned} \tag{3.10}$$

Criterio de eficiencia valor esperado desviación estándar

Este concepto de eficiencia fue introducido por Markowitz en 1952 para resolver problemas de selección de carteras en el campo de las finanzas. Se trata de elegir una política x^0 que sea eficiente en el sentido de Markowitz:

Sean $\mu(x) = E[\widetilde{g}_0(x,\widetilde{\xi})]$, $\sigma^2(x) = Var[\widetilde{g}_0(x,\widetilde{\xi})]$. Se tiene que verificar que no existe ningún $x \in X$ para el cual se tenga que $\mu(x) = \mu(x^0)$ y $\sigma(x) < \sigma(x^0)$, o bien $\mu(x) < \mu(x^0)$ y

$\sigma(x) = \sigma(x^0)$.

El conjunto de puntos eficientes normalmente tiene infinitos elementos. Por tanto, normalmente este criterio no especifica un único punto como solución óptima. Si se quiere llegar a una única solución óptima habrá que añadir otras consideraciones al conjunto obtenido de puntos eficientes.

El cálculo de soluciones eficientes valor esperado desviación estándar se traduce en el cálculo de soluciones eficientes del siguiente problema biobjetivo determinista equivalente:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \left(E[\widetilde{g}_0(x, \widetilde{\xi})], Var[\widetilde{g}_0(x, \widetilde{\xi})] \right), \\ \text{sujeto a:} & x \in X \end{array} \tag{3.11}$$

Criterio de mínimo riesgo

Este criterio fue introducido por Bereanu con el nombre de criterio de mínimo riesgo, y por Charnes y Cooper con el nombre de P-modelo. Se trata de maximizar la probabilidad de que la función objetivo sea menor o igual que cierto valor previamente establecido. Por tanto, para resolver el problema hay que fijar un nivel para la función objetivo estocástica, $\lambda \in \mathbb{R}$, al que se denomina nivel de aspiración, y maximizar la probabilidad de que el objetivo sea menor o igual que ese nivel: $P\left\{\widetilde{g}_0(x, \widetilde{\xi}) \leq \lambda\right\}$.

La idea del nivel de aspiración es que a lo más el valor objetivo sea λ. El determinista equivalente del problema estocástico (3.8), según el criterio de mínimo riesgo será

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x} & P\left\{\widetilde{g}_0(x, \widetilde{\xi}) \leq \lambda\right\}, \\ \text{sujeto a:} & x \in X \end{array} \tag{3.12}$$

Teniendo en cuenta que

$$\max_x P\left\{\widetilde{g}_0(x, \widetilde{\xi}) \leq \lambda\right\} = \max_x \left\{1 - P\left\{\widetilde{g}_0(x, \widetilde{\xi}) > \lambda\right\}\right\} = 1 - \min_x P\left\{\widetilde{g}_0(x, \widetilde{\xi}) > \lambda\right\},$$

el Problema (3.12) es equivalente a

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & P\left\{\widetilde{g}_0(x, \widetilde{\xi}) > \lambda\right\}, \\ \text{sujeto a:} & x \in X \end{array} \tag{3.13}$$

y el problema puede interpretarse como la minimización del riesgo de que la función objetivo sobrepase el nivel de aspiración λ.

Si el problema a resolver consistiera en maximizar la función objetivo (en lugar de minimizar como estamos considerando), es decir, si el problema original fuera

$$\begin{aligned} \max_{x} \quad & \widetilde{g}_0(x, \widetilde{\xi}), \\ \text{sujeto a:} \quad & x \in X \end{aligned} \tag{3.14}$$

el problema de mínimo riesgo determinista equivalente será

$$\begin{aligned} \max_{x} \quad & P\left\{\widetilde{g}_0(x, \widetilde{\xi}) \geq \lambda\right\}, \\ \text{sujeto a:} \quad & x \in X \end{aligned} \tag{3.15}$$

En este caso la idea del nivel de aspiración es que el valor objetivo al menos sea λ.

La elección de un criterio u otro deberá realizarse en base a las características del problema y a las preferencias del decisor. De todas formas, los cuatro criterios están relacionados entre sí, dado que cada uno de ellos utiliza diferentes características de la función objetivo.

3.3.2. Relaciones entre las soluciones según los distintos criterios

Consideremos el problema estocástico (PE) en el que suponemos ahora que el conjunto de soluciones factibles $X \subset \mathbb{R}^n$ es no vacío, cerrado, acotado y convexo. Suponemos también que ξ es un vector aleatorio definido sobre un conjunto $E \subset \mathbb{R}^s$ cuyas componentes son variables aleatorias continuas y cuya distribución de probabilidad es independiente de las variables de decisión $x_1, x_2, \ldots, x_n$ del problema.

Proposición 3.10. *Se considera el problema estocástico (PE) con las hipótesis adicionales introducidas en esta subsección.*

1. *Si la solución óptima del problema según el criterio del valor esperado es única, entonces es una solución eficiente valor esperado desviación estándar. Si no es única sólo se puede asegurar que las soluciones óptimas valor esperado son soluciones débilmente eficientes valor esperado desviación estándar, pero no tienen por qué ser eficientes valor esperado desviación estándar.*

2. *Si la varianza de la función objetivo es una función estrictamente convexa, el problema de varianza mínima tiene solución única que es una solución eficiente valor esperado desviación estándar. Si no es única sólo se puede asegurar que las soluciones óptimas de mínima varianza son soluciones débilmente eficientes valor esperado desviación estándar, pero no tienen por qué ser eficientes valor esperado desviación estándar.*

Como ejemplo vamos a considerar el caso de función objetivo lineal con distribución de probabilidad normal.

Sea el programa estocástico lineal

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \xi^T x \\ \text{sujeto a} & x \in X \end{array} \tag{3.16}$$

El conjunto factible $X \subset \mathbb{R}^n$ está compuesto por restricciones determinísticas, bien porque lo sean de manera natural, bien porque se haya obtenido el determinista equivalente utilizando el método de restricciones de azar. Se supone que el vector aleatorio ξ sigue una distribución de probabilidad normal multivariante, con valor esperado $\overline{\xi}$ y matriz de varianzas y covarianzas S definida positiva.
En estas condiciones la variable aleatoria $\xi^T x$ es normal con valor esperado $\overline{\xi}^T x$ y varianza $x^T Sx$. Por tanto se tiene que $\dfrac{\xi^T x - \overline{\xi}^T x}{\sqrt{x^T Sx}}$ es una variable aleatoria $N(0,1)$ (normal con valor esperado 0 y desviaci ón t ípica 1).

A continuación se calcula el determinista equivalente del programa estoc ástico (3.16) para cada uno de los criterios considerados en este apartado.

1. Criterio del valor esperado

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \overline{\xi}^T x \\ \text{sujeto a} & x \in X \end{array} \tag{3.17}$$

2. Criterio de mínima varianza

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x^T Sx \\ \text{sujeto a} & x \in X \end{array} \tag{3.18}$$

3. Criterio de eficiencia valor esperado desviación estándar

$$\begin{array}{c} \min\limits_{x} \\ \left(\overline{\xi}^T x, \sqrt{x^T Sx}\right) \text{sujeto a} \quad x \in X \end{array} \tag{3.19}$$

4. Criterio de mínimo riesgo de nivel λ

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x} & P\left\{\xi^T x \leq \lambda\right\} \\ \text{sujeto a} & x \in X \end{array} \tag{3.20}$$

Pero

$$P\left\{\xi^T x \leq \lambda\right\} = P\left(\frac{\xi^T x - \overline{\xi}^T x}{\sqrt{x^T Sx}} \leq \frac{\lambda - \overline{\xi}^T x}{\sqrt{x^T Sx}}\right) = \Phi\left(\frac{\lambda - \overline{\xi}^T x}{\sqrt{x^T Sx}}\right),$$

donde *Phi* es la función de distribución de la $N(0,1)$, que es estrictamente creciente, por lo que

$$\max_x P\left\{\xi^T x \le \lambda\right\} = \max_x \Phi\left(\frac{\lambda - \overline{\xi}^T x}{\sqrt{x^T S x}}\right) = \Phi\left(\max_x \frac{\lambda - \overline{\xi}^T x}{\sqrt{x^T S x}}\right),$$

y el Problema (3.21) es equivalente a

$$\begin{array}{cc} \max\limits_x & \dfrac{\lambda - \overline{\xi}^T x}{\sqrt{x^T S x}} \\ \text{sujeto a} & x \in X \end{array} \tag{3.21}$$

Una vez resuelto este problema, la probabilidad máxima para la que se puede asegurar que la función objetivo estocástica es menor o igual que el nivel de aspiración fijado λ, es $\Phi\left(\max\limits_x \dfrac{\lambda - \overline{\xi}^T x}{\sqrt{x^T S x}}\right)$.

En el siguiente capítulo reformularemos los problemas de minimización de tiempo de viaje, (T_m) y (T_r), mostrados en la Sección 1.2.2 y en la Sección 5.1 usaremos las equivalencias presentadas en este capítulo para resolver el problema de minimización del costo total.

Capítulo 4

Problema de Transporte Actual

A diferencia del Capítulo 1, en este capítulo consideraremos la ruta C, el cual no fue incluído en el problema ya que en las mañanas (en hora punta) no circulaban buses de esta ruta. Sin embargo, ahora la ruta C circula durante todo el día, lo cual implica que el Problema (T_r) debe modificarse; más aún, contemplaremos ahora la asignación de los buses que viajan de norte a sur y de sur a norte, y la posibilidad del cambio de rutas de los buses al finalizar su recorrido.

4.1. Modificación de las rutas A y C

El servicio Regular A ahora circula desde la Estación Naranjal hasta la Estación Central y viceversa, mientras que el servicio Regular C circula desde la Estación Matellini hasta la Estación Ramón Castilla y viceversa, con el objetivo de disminuir los tiempos de espera en las estaciones Ramón Castilla, Tacna, Jr. de la Unión y Colmena.
Empecemos reordenando las notaciones dadas a las rutas de los servicios Regulares y Expresos:

- Ruta 1: Ruta del Bus Regular A.
- Ruta 2: Ruta del Bus Regular B.
- Ruta 3: Ruta del Bus Regular C.
- Ruta 4: Ruta del Bus Expreso 1 (Ex_1).
- Ruta 5: Ruta del Bus Expreso 2 (Ex_2).
- Ruta 6: Ruta del Bus Expreso 3 (Ex_3).
- Ruta 7: Ruta del Bus Súper Expreso (SX).

N° de Estación	ESTACIÓN	Paradero de la Ruta
1,76	Naranjal	A,B,Ex_1,Ex_2,Ex_3,SX
2,75	Izaguirre	A,B,Ex_3
3,74	Pacífico	A,B
4,73	Independencia	A,B,Ex_3^{ns}
5,72	Los Jazmines	A,B
6,71	Tomás Valle	A,B,Ex_2
7,70	El Milagro	A,B
8,69	Honorio Delgado	A,B
9,68	UNI	A,B,Ex_1,Ex_2,Ex_3^{ns}
10,67	Parque del trabajo	A,B
11,66	Caquetá	A,B,Ex_1,Ex_2,Ex_3
12,65	Ramón Castilla	A,C
13,64	Tacna	A,C
14,63	Jr. de la Unión	A,C
15,62	Colmena	A,C
16,61	2 de mayo	B,Ex_1
17,60	Quilca	B,Ex_1
18,59	España	B,Ex_1,Ex_3^{sn}
19,58	Estación Central	A,B,C,Ex_1,Ex_2,Ex_3,SX^{sn}
20,57	Estadio Nacional	B,C
21,56	México	B,C
22,55	Canadá	B,C,Ex_3
23,54	Javier Prado	B,C,Ex_1,Ex_2,Ex_3
24,53	Canaval y Moreyra	B,C,Ex_1,Ex_2,Ex_3,SX
25,52	Aramburú	B,C,Ex_3
26,51	Domingo Orué	B,C
27,50	Angamos	B,C,Ex_1,Ex_2,Ex_3,SX
28,49	Ricardo Palma	B,C
29,48	Benavides	B,C,Ex_3
30,47	28 de Julio	B,C
31,46	Plaza de flores	B,C,Ex_2,Ex_3,SX
32,45	Balta	B,C,Ex_1
33,44	Boulevard	B,C,Ex_1
34,43	Estadio Unión	B,C,Ex_1
35,42	Escuela militar	B,C,Ex_1
36,41	Terán	B,C,Ex_1
37,40	Rosario de Villa	B,C,Ex_1
38,39	Matellini	B,C,Ex_1

Cuadro 4.1: Estaciones y paraderos de los servicios Regulares y Expresos

Por consiguiente se obtiene el Cuadro 4.1, donde la notación Ex_3^{ns} indica que el Expreso 3 sólo para en la Estación señalada si va de norte a sur. Ex_3^{sn} y SX^{sn} indican que el Expreso 3 y el Súper Expreso sólo se detendrán si viaja de sur a norte respectivamente.

El modelo matemático a continuación tiene como objetivo optimizar la asignación de N buses (Regulares y Expresos) en las 7 rutas, considerando si parten de la Estación Naranjal o Matellini, y optimizar la frecuencia de las salidas de los buses.

Consideraremos que la salida de los N buses es de 6 a 7 a.m. Debido a que los buses Expresos circulan de 6 a 9 a.m., asusimos que éstos N buses retornarán (quizá en más de una ocasión) al punto de partida, los cuales serán las estaciones Naranjal y Matellini. Supondremos además que la ruta A parte sólo de la Estación Naranjal, la ruta C parte sólo de la Estación Matellini, mientras que los servicios de la ruta B y del Expreso 1 pueden partir de la Estación Naranjal o Matellini. Por último, los Expresos 2 y 3, y el Súper Expreso pueden partir de la Estaciones Naranjal o Plaza de Flores.

4.2. Consideración de los buses que van de sur a norte

Debido a que los buses retornan para iniciar nuevamente el circuito, este recorrido implica que pasarán por más de una vez en las estaciones donde se detienen, lo cual motiva la siguiente notación para $k = 1, \ldots, 76$:

$$\text{Tramo } k := \begin{cases} \text{Entre las estaciones } k \text{ y } k+1 \text{ en la dirección de norte a sur,} \\ 1 \le k < 38. \\ \text{Tramo en la Estación Matellini usado para voltear,} \quad k = 38. \\ \text{Entre las estaciones } 76-k \text{ y } 77-k \text{ en la dirección de sur a norte,} \\ 39 \le k < 76. \\ \text{Tramo en la Estación Naranjal usado para voltear,} \quad k = 76. \end{cases}$$

Como los buses retornan, hay que diferenciar cuando el bus está en el tramo k por primera, segunda o tercera vez, para todo $k = 1, \ldots, 76$. Por consiguiente, para cada $k \in \mathbb{N}$ por la unicidad de los valores $q, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $k = 76q + r$ y $0 < r \le 76$ definimos

$$\text{Tramo } k := \text{Tramo } r \text{ que se recorre por } (q+1)\text{-ésima vez.} \tag{4.1}$$

Observe que si $k = 76$, entonces $q = 0$ y $r = 76$, lo cual implica que el bus está en la Estación Naranjal preparándose a iniciar el recorrido de norte a sur.

El inicio del Tramo k será la estación k, donde la estación k coincide con la estación

$77 - k$ si $38 < k \leq 76$. Del mismo modo, el fin del Tramo k será la estación $k+1$, donde $1 \leq k \leq 76$ y la estación 77 coincide con la Estación Naranjal.

Para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$, $j \in \{1, \ldots, 7\}$, $k \in \{1, \ldots, 76\}$ y $t \geq 0$ tenemos las siguientes notaciones:

- $s_{i,j}^k(t)$ es la cantidad aproximada de pasajeros que suben al i-ésimo bus, el cual realiza la ruta j, cuando el bus se ha detenido en el tiempo t en el inicio del tramo k.
- $b_{i,j}^k(t)$ es la cantidad aproximada de pasajeros que bajan del i-ésimo bus, el cual realiza la ruta j, cuando el bus se ha detenido en el tiempo t en el final del tramo k.
- $t_{i,j}^k$ es el tiempo (en minutos) que tarda el i-ésimo bus, el cual realiza la ruta j, en el tramo k.

Por ejemplo, si el primer bus realiza la ruta C y se encuentra en el tramo 39, entonces el inicio de este tramo es la Estación Matellini y el fin será la Estación Rosario de Villa.

Observación 4.1. *Consideraremos que $t = 0$ a las 6 a.m. y $t = 60$ a las 7 a.m.*

Observación 4.2. *Recuerde que en la variable $t_{i,j}^k$ debemos incluir el tiempo de embarque y desembarque en la k-ésima estación.*

Si el i-ésimo bus se dirige de norte a sur, entonces en la Estación Matellini no sube ningún usuario y en la Estación Naranjal no baja ningún pasajero, entonces

$$s_{i,j}^{38}(t) = b_{i,j}^1(t) = 0, \ \forall \ i = 1, \ldots, N; j = 1, \ldots, 7; t \geq 0.$$

Del mismo modo, si el i-ésimo bus se dirige de sur a norte, entonces en la Estación Naranjal no sube ningún usuario y en la Estación Matellini no baja ningún pasajero, entonces

$$s_{i,j}^{76}(t) = b_{i,j}^{39}(t) = 0, \ \forall \ i = 1, \ldots, N; j = 1, \ldots, 7; t \geq 0.$$

Los tiempos en que los buses inician un tramo depende del tiempo de separación entre los buses, el cual definimos a continuación:

Definición 4.1. *Para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$, f_i es el tiempo de separación entre el bus $i-1$ y el i-ésimo bus.*

Observación 4.3. *f_1 es el tiempo que tarda en salir el primer bus. Más aún, como hemos supuesto que los buses sólo inician su recorrido de 6 a 7 a.m., entonces $\sum_{i=1}^{N} f_i = 60$ (minutos).*

Definición 4.2. *Para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$, $j \in \{1, \ldots, 12\}$ y $k \in \{1, \ldots, 266\}$, se denota por $\tau_{i,j}^k$ al tiempo cuando el i-ésimo bus que realiza la ruta j inicia el Tramo k, esto es*

$$\tau_{i,j}^k := \sum_{l=1}^{i} f_l + \sum_{l=1}^{k-1} t_{i,j}^l \tag{4.2}$$

Observación 4.4. *El tiempo en el que el i-ésimo bus que realiza la ruta j finaliza el Tramo k es $\tau_{i,j}^k + t_{i,j}^k$.*

Como la cantidad total de pasajeros que suben coincide con el número total de usuarios que bajan del bus, entonces

$$\sum_{k=1}^{38} s_{i,j}^k(\tau_{i,j}^k) = \sum_{k=1}^{38} b_{i,j}^k(\tau_{i,j}^k), \ \forall\ i = 1, \ldots, N; j \in 1, \ldots, 7. \tag{4.3}$$

$$\sum_{k=39}^{76} s_{i,j}^k(\tau_{i,j}^k) = \sum_{k=39}^{76} b_{i,j}^k(\tau_{i,j}^k), \ \forall\ i = 1, \ldots, N; j \in 1, \ldots, 7. \tag{4.4}$$

Debido a que los buses no se detienen en todos los paraderos, entonces para todo $i \in \{1, \ldots, N\}$ y para todo $t \geq 0$ se tiene las siguientes ecuaciones:

- $s_{i,1}^k(t) = b_{i,1}^k(t) = t_{i,1}^k = 0, \ \forall\ k = 16, 17, 18, \ldots, 57, 59, 60, 61, 63.$
- $s_{i,2}^k(t) = b_{i,2}^k(t) = t_{i,2}^k = 0, \ \forall\ k = 12, \ldots, 15, 62, \ldots, 65.$
- $s_{i,3}^k(t) = b_{i,3}^k(t) = t_{i,3}^k = 0, \ \forall\ k = 1, \ldots, 11, 16, 17, 18, 59, 60, 61, 65, \ldots, 76.$
- $s_{i,4}^k(t) = b_{i,4}^k(t) = t_{i,4}^k = 0, \ \forall\ k = 2, \ldots, 8, 10, 12, \ldots, 14, 15, 20, 21, 22, 25, 26, 28, \ldots, 31.$
- $s_{i,4}^k(t) = b_{i,4}^k(t) = t_{i,4}^k = 0, \ \forall\ k = 46, \ldots, 49, 51, 52, 55, 56, 57, 62, \ldots, 65, 67, 69, \ldots, 75.$
- $s_{i,5}^k(t) = b_{i,5}^k(t) = t_{i,5}^k = 0, \ \forall\ k = 2, \ldots, 5, 7, 8, 10, 12, \ldots, 18, 20, 21, 22, 25, 26, 28, \ldots, 45.$
- $s_{i,5}^k(t) = b_{i,5}^k(t) = t_{i,5}^k = 0, \ \forall\ k = 47, 48, 49, 51, 52, 55, 56, 57, 59, 65, 67, 69, 70, 72, \ldots, 75.$
- $s_{i,6}^k(t) = b_{i,6}^k(t) = t_{i,6}^k = 0, \forall\, k = 3, 5, \ldots, 8, 10, 12, \ldots, 18, 20, 21, 26, 28, 30, 32, \ldots, 45.$
- $s_{i,6}^k(t) = b_{i,6}^k(t) = t_{i,6}^k = 0, \ \forall\ k = 47, 49, 51, 56, 57, 60, \ldots, 65, 67, \ldots, 75.$
- $s_{i,7}^k(t) = b_{i,7}^k(t) = t_{i,7}^k = 0, \ \forall\ k = 2, \ldots, 23, 25, 26, 28, 29, 30, 32, \ldots, 45.$
- $s_{i,7}^k(t) = b_{i,7}^k(t) = t_{i,7}^k = 0, \ \forall\ k = 47, 48, 49, 51, 52, 54, \ldots, 57, 59, \ldots, 75.$

En las ecuaciones anteriores, se ha considerado cuando el i-ésimo bus que realiza la ruta j no se detiene en las estaciones $k+1, \ldots, k+l$, que el tiempo que tarda de la estación k a la estación $k+l+1$ será $t_{i,j}^{k}$. Por ejemplo, si i-ésimo bus realiza la ruta A, entonces el tiempo que tarda dar la vuelta en la Estación Central será $t_{i,1}^{19}$, mientras que $t_{i,1}^{k} = 0$ para todo $k = 1, \ldots, 57$.

Los resultados encontrados en las ecuaciones anteriores se pueden extender para $k > 76$ gracias a la ecuación (4.1):

$$s_{i,j}^{k}(t) := s_{i,j}^{r}(t), \; b_{i,j}^{k}(t) := b_{i,j}^{r}(t) \text{ y } t_{i,j}^{k} := t_{i,j}^{r},$$

con $0 < r \leq 76$ tal que $r = k - 76q$, para algún $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, donde $i \in \{1, \ldots, N\}$, $j \in \{1, \ldots, 7\}$ y $t \geq 0$. Por ejemplo, si el primer bus realiza la ruta C y está circulando por segunda vez en el tramo 39, entonces $s_{1,3}^{115}(t) = s_{1,3}^{39}(t)$.

También para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$ y $j \in \{1, \ldots, 7\}$ definamos

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si el } i\text{-ésimo bus realiza la ruta } j; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{4.5}$$

Note que la variable $x_{i,j}$ es una variable de asignación que indica que el i-ésimo bus realiza solamente una de las rutas.

Como ahora se tendrá en cuenta que los buses pueden partir de las estaciones Matellini o Plaza de Flores (para dirigirse de sur a norte), entonces para todas las rutas (excepto la ruta A) debemos realizar modificaciones apropiadas. Empecemos por la ruta C, en este caso asumimos que sólo parte de Matellini, luego si $x_{i,3} = 1$ entonces

$$s_{i,3}^{k}(t) = b_{i,3}^{k}(t) = t_{i,3}^{k} = 0, \text{ para todo } k = 1, \ldots, 38 \text{ y } t \geq 0;$$

lo cual implica que si inicia su recorrido en la Estación Naranjal, entonces se ha "teletransportado" hasta el final de su recorrido de norte a sur, además no han permitido que nadie suba ni baje en dicho trayecto.

4.2.1. Definiendo nuevas rutas

Para el servicio Regular B y los Expresos definimos las siguientes rutas:

- Ruta 8: Ruta del Bus Regular B que parte de la Estación Matellini.
- Ruta 9: Ruta del Bus Expreso 1 (Ex_1) que parte de la Estación Matellini.

- Ruta 10: Ruta del Bus Expreso 2 (Ex_2) que parte de la Estación Plaza de Flores.
- Ruta 11: Ruta del Bus Expreso 3 (Ex_3) que parte de la Estación Plaza de Flores.
- Ruta 12: Ruta del Bus Súper Expreso (SX) que parte de la Estación Plaza de Flores.

Asumiremos que éstas rutas verifican:

$$s_{i,j}^{k}(t) = b_{i,j}^{k}(t) = t_{i,j}^{k} = 0,$$

donde $i \in \{1, \ldots, N\}$, $j \in \{8, \ldots, 12\}$, $k \in \{1, \ldots, 38\}$ y $t \geq 0$.

Al extender la definición de $x_{i,j}$ vista en la ecuación (4,5) para las nuevas rutas se obtiene:

Definición 4.3. *Para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$ y $j \in \{1, \ldots, 12\}$ definamos*

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \textit{si el i-ésimo bus realiza la ruta } j; \\ 0, & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

Para hallar el tiempo acumulado de viaje (T_v) debemos calcular la cantidad de pasajeros dentro del bus en cada tramo, en consecuencia debemos encontrar el número de usuarios que suben y bajan en cada tramo, y para ello se debe calcular el tiempo en que ocurren.

Como el tiempo de circulación es de 3 horas (de 6 a 9 a.m.) y como el menor tiempo en que los buses completa su recorrido (ida y vuelta) lo realiza la ruta A (62 minutos aproximadamente), entonces a lo más el número de estaciones "visitadas" en 3 horas será $76 \times 3 = 228$.
A excepción de la ruta B, las demás rutas no se detienen en todas las estaciones, sin embargo en el modelo matemático propuesto asume que todos los buses visitan todas las estaciones aunque el tiempo que demanda esta acción es cero (minutos), más aún, si el bus no se detiene en alguna estación entonces no suben ni bajan pasajeros en dicha estación.
Por otro lado, la ruta C inicia su recorrido en la Estación Matellini, pero el modelo nos dice que previamente visitará las 37 estaciones anteriores, en consecuencia el número de estaciones visitadas serán a lo más $228 + 38 = 266$ en 3 horas.

Para todo $i \in \{1, \ldots, N\}$ tenemos que

$$\sum_{j=1}^{12} x_{i,j} = 1, \text{ con } x_{i,j} \in \{0, 1\}.$$

Además para cada $i \in \{1,\ldots,N\}$, $j \in \{1,\ldots,12\}$, $k > 0$ y $t \geq 0$ se debe cumplir que el i-ésimo bus que realiza la ruta j transporta una cantidad limitada de pasajeros, esto es

$$\sum_{l=1}^{k}\Big(s_{i,j}^{l}(\tau_{i,j}^{k}) - b_{i,j}^{l}(\tau_{i,j}^{k})\Big) \leq C_j := \begin{cases} 120, & \text{si } j = 1,2,3; \\ 160, & \text{si } j = 4,\ldots,7. \end{cases} \tag{4.6}$$

Si el i-ésimo bus realiza la ruta j, esto implica que $x_{i,j} = 1$ y que la suma de los tiempos de viaje de los pasajeros que han usado el i-ésimo hasta el m-ésimo tramo es

$$\sum_{k=1}^{m} t_{i,j}^{k} x_{i,j}\left[\sum_{l=1}^{k}\Big(s_{i,j}^{l}(\tau_{i,j}^{k}) - b_{i,j}^{l}(\tau_{i,j}^{k})\Big)\right], \text{ para todo } m > 0 \text{ y } t \geq 0,$$

ya que $\displaystyle\sum_{l=1}^{k}\left[s_{i,j}^{l}(\tau_{i,j}^{k}) - b_{i,j}^{l}(\tau_{i,j}^{k})\right]$ es la cantidad de usuarios que hay dentro del bus en el tramo k.

Como estamos interesados en calcular el tiempo total de viaje de los usuarios (incluyendo los tiempos de espera) en el intervalo de 6 a 9 a.m. y si no consideraremos a los pasajeros que suben o bajan después del tiempo $t > 180$ (minutos), de este modo tendremos que

$$s_{i,j}^{k}(t) = b_{i,j}^{k}(t) = 0, \ \forall\ i = 1,\ldots,N; j = 1,\ldots,12; k = 1,\ldots,266 \text{ y } t > 180.$$

Esto implica que los buses se detienen a las 9 a.m. sin terminar su recorrido, lo cual no será permitido, para ello denotaremos por

$$K(t) := \begin{cases} 1, & \text{si } t \leq 180; \\ 0, & \text{si } t > 180; \end{cases}$$

al parámetro que indicará si el bus debe iniciar nuevamente su recorrido o no.

Observación 4.5. *La expresión* $\displaystyle\sum_{k=1}^{266} t_{i,j}^{k} \sum_{l=1}^{k}\left[s_{i,j}^{l}(\tau_{i,j}^{k}) - b_{i,j}^{l}(\tau_{i,j}^{k})\right] x_{i,j}$ *será reemplazada por*

$$\sum_{n=0}^{6} K(\tau_{i,j}^{38n+1}) \sum_{k=1}^{38} t_{i,j}^{38n+k} \sum_{l=1}^{38n+k}\left[s_{i,j}^{l}(\tau_{i,j}^{l}) - b_{i,j}^{l}(\tau_{i,j}^{l})\right] x_{i,j},$$

donde $6 = \left[\!\left[\frac{180}{31}\right]\!\right] + 1$ *es el número de recorridos (de norte a sur y de sur a norte) que realizará un bus y* $K(\tau_{i,j}^{38n+1}) = 0$ *si el tiempo en que iniciaría el siguiente recorrido es mayor que* 180.

De las ecuaciones (4.3) y (4.4), la expresión anterior se reduce a

$$\sum_{n=0}^{6} K(\tau_{i,j}^{38n+1}) \sum_{k=1}^{38} t_{i,j}^{38n+k} \sum_{l=38n+1}^{38n+k}\Big(s_{i,j}^{l}(\tau_{i,j}^{38n+1}) - b_{i,j}^{l}(\tau_{i,j}^{38n+k})\Big) x_{i,j},$$

En consecuencia, el tiempo acumulado de viaje (T_v) que realizan los pasajeros de los N buses de 6 a 9 a.m. será

$$T_v = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{12}\sum_{n=0}^{6} K(\tau_{i,j}^{38n+1}) \sum_{k=1}^{38} t_{i,j}^{38n+k} \sum_{l=38n+1}^{38n+k} \left(s_{i,j}^{l}(\tau_{i,j}^{38n+1}) - b_{i,j}^{l}(\tau_{i,j}^{38n+k}) \right) x_{i,j}. \tag{4.7}$$

Observación 4.6. *Si para cada $i \in \{1, \dots, N\}$ y $j \in \{1, \dots, 12\}$ definimos*

$$\mathrm{T}_{i,j} := \sum_{n=0}^{6} K(\tau_{i,j}^{38n+1}) \sum_{k=1}^{38} t_{i,j}^{38n+k} \sum_{l=38n+1}^{38n+k} \left(s_{i,j}^{l}(\tau_{i,j}^{38n+1}) - b_{i,j}^{l}(\tau_{i,j}^{38n+k}) \right),$$

entonces

$$T_v = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{12} \mathrm{T}_{i,j} x_{i,j}, \tag{4.8}$$

el cual es una función lineal en la variable $x_{i,j}$.

Note que T_v no incluye los tiempos de espera de los usuarios en cada estación, los cuales son muy importantes ya que en hora punta decenas de pasajeros esperan en cada estación por mucho tiempo hasta poder subir al bus.

Los tiempos de espera de los usuarios ocurren en dos casos, cuando no pudieron ingresar al bus que estuvieron esperando, debido a su capacidad, o porque el bus que acaba de llegar no era el bus al que iban a subir, lo cual motiva la siguiente definición:

Definición 4.4. *$p_{i,j}^{k}(t)$ es la cantidad total de usuarios que esperan al i-ésimo bus en las 3 puertas de embarque de la ruta j en la estación k en el instante t.*

Observación 4.7. *El número de pasajeros que esperan un bus es mayor que la cantidad de usuarios que suben a dicho bus, esto es*

$$p_{i,j}^{k}(t) \geq s_{i,j}^{k}(t), \ \forall\ i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, 12; k = 1, \dots, 266 \ y\ t \geq 0. \tag{4.9}$$

El tiempo de espera de los usuarios en las estaciones que no subieron al i-ésimo bus que no esperaban en el embarque de la ruta j será

$$\sum_{k=1}^{266} \left(p_{i,j}^{k}(\tau_{i,j}^{k}) - s_{i,j}^{k}(\tau_{i,j}^{k}) \right) f x_{i,j},$$

donde $x_{i,j} = 1$.

El tiempo de espera en las estaciones de los demás usuarios que no subieron al i-ésimo bus será

$$\sum_{j=1}^{12}\sum_{k=1}^{266} (1 - x_{i,j}) f_i p_{i,j}^{k}(\tau_{i,j}^{k}).$$

Luego, el tiempo de espera para el i-ésimo bus es

$$\sum_{j=1}^{12}\sum_{k=1}^{266}\left[\left(p_{i,j}^k(\tau_{i,j}^k) - s_{i,j}^k(\tau_{i,j}^k)\right) f_i x_{i,j} + (1-x_{i,j})p_{i,j}^k(\tau_{i,j}^k) f_i\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{12}\sum_{k=1}^{266}\left[p_{i,j}^k(\tau_{i,j}^k) - s_{i,j}^k(\tau_{i,j}^k)x_{i,j}\right] f_i.$$

Por lo tanto, el tiempo de espera (T_e) para los N buses será

$$T_e = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{12}\sum_{k=1}^{266}\left[p_{i,j}^k(\tau_{i,j}^k) - s_{i,j}^k(\tau_{i,j}^k)x_{i,j}\right] f_i. \tag{4.10}$$

Si el bus realiza la ruta j no se detiene en la estación k, entonces $p_{i,j}^k(\tau_{i,j}^k) = 0$ para todo $i = 1,\dots,N$ y $t \geq 0$.

De modo similar que en la Observación 4.5, la ecuación (4.10) debe reemplazarse por

$$T_e = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{12}\sum_{n=0}^{6} K(\tau_{i,j}^{38n+1}) \sum_{k=1}^{38}\left[p_{i,j}^{38n+k}(\tau_{i,j}^{38n+k}) - s_{i,j}^{38n+k}(\tau_{i,j}^{38n+k})x_{i,j}\right] f_i \tag{4.11}$$

para incluir los tiempos de espera de los usuarios después de las 9 a.m., pero antes de que el i-ésimo bus termine su recorrido.

Observación 4.8. *Note que*

$$T_e = K_e - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{12} F_{i,j}x_{i,j},$$

el cual es una función lineal afín en la variable $x_{i,j}$, donde

$$K_e := \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{12}\sum_{n=0}^{6} K(\tau_{i,j}^{38n+1}) \sum_{k=1}^{38} p_{i,j}^{38n+k}(\tau_{i,j}^{38n+k}) f_i$$

y

$$F_{i,j} := \sum_{n=0}^{6} K(\tau_{i,j}^{38n+1}) \sum_{k=1}^{38} s_{i,j}^{38n+k}(\tau_{i,j}^{38n+k}) f_i.$$

Por consiguiente, de las observaciones 4.6 y 4.8 nuestra función objetivo es $T_v + T_e$ y el problema a resolver es el problema no lineal entero mixto:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & T_v + T_e = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{12} \mathrm{T}_{i,j} x_{i,j} + K_e - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{12} F_{i,j} x_{i,j} \\
\text{Sujeto a} \quad & \sum_{j=1}^{12} x_{i,j} = 1,\ 1 \le i \le N \\
& x_{i,j} \in \{0,1\},\ 1 \le i \le N,\ 1 \le j \le 12 \\
& \sum_{i=1}^{N} f_i = 60 \\
& f_i \ge 0,\ 1 \le i \le N
\end{aligned}
\tag{TA}
$$

Observación 4.9. *De las ecuaciones* (4,7) *y* (4,11) *tenemos que*

$$
T_v + T_e = K_e + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{12} \mathcal{T}_{ij} x_{i,j}, \tag{4.12}
$$

donde

$$
\mathcal{T}_{i,j} := \sum_{n=0}^{6} K(\tau_{i,j}^{38n+1}) \sum_{k=1}^{38} \left(t_{i,j}^{38n+k} \sum_{l=38n+1}^{38n+k} \left[s_{i,j}^{l}(\tau_{i,j}^{l}) - b_{i,j}^{l}(\tau_{i,j}^{l}) \right] - s_{i,j}^{38n+k}(\tau_{i,j}^{38n+k}) f_i \right),
$$

con $1 \le i \le N$ *y* $1 \le j \le 12$. *En consecuencia, nuestra función objetivo es lineal afín respecto a la variable* $x_{i,j}$.

Finalmente, al encontrar los valores de $x_{i,j}$ determinaremos de manera óptima la ruta que debe realizar el i-ésimo bus (desde el inicio de su recorrido) y si debe dirigirse de norte a sur o de sur a norte, además sabremos después de cuanto tiempo debe salir el bus $i+1$.

Observación 4.10. *A pesar de que el Problema* (TA) *es parecido al Problema* (T_r) *no podemos aplicar el Algoritmo 2.1 ya que la función objetivo del Problema* (TA) *no es lineal respecto a la variable* f_i*, lo cual implica que la solución de los subproblemas no necesariamente coincidan con un extremo relativo.*

4.3. Formulación real del modelo

Para formular un modelo matemático que refleje la realidad del transporte en el Metropolitano consideraremos ahora las rutas ficticias, la ampliación del intervalo de circulación de los buses y la posibilidad de que un bus cambie de ruta al finalizar un recorrido.

4.3.1. Considerando las rutas ficticias

En el modelo formulado en el Problema (TA) no se tiene en cuenta el hecho de que en algunas estaciones llegan buses vacíos debido a que decenas de usuarios esperan hasta más de 10 minutos para poder ingresar a un bus, lo cual ocurre en las estaciones que son paraderos de los buses expresos.

Para modelar este fenómeno aumentaremos ficticiamente 13 nuevas rutas con las siguientes características:

- **Ruta 13**: Hace el mismo recorrido que la ruta 4 (Expreso 1), pero su paradero inicial es la Estación Uni (estación 9).
- **Ruta 14**: Hace el mismo recorrido que la ruta 5 (Expreso 2), pero su paradero inicial es la Estación Tomás Valle (estación 6).
- **Ruta 15**: Hace el mismo recorrido que la ruta 6 (Expreso 3), pero su paradero inicial es la Estación Izaguirre (estación 2).
- **Ruta 16**: Hace el mismo recorrido que la ruta 6 (Expreso 3), pero su paradero inicial es la Estación Independencia (estación 4).
- **Ruta 17**: Hace el mismo recorrido que la ruta 10 (Expreso 2), pero su paradero inicial es la Estación Angamos (estación 50).
- **Ruta 18**: Hace el mismo recorrido que la ruta 10 (Expreso 2), pero su paradero inicial es la Estación Canaval y Moreira (estación 53).
- **Ruta 19**: Hace el mismo recorrido que la ruta 10 (Expreso 2), pero su paradero inicial es la Estación Javier Prado (estación 54).
- **Ruta 20**: Hace el mismo recorrido que la ruta 11 (Expreso 3), pero su paradero inicial es la Estación Benavides (estación 48).
- **Ruta 21**: Hace el mismo recorrido que la ruta 11 (Expreso 3), pero su paradero inicial es la Estación Angamos (estación 50).
- **Ruta 22**: Hace el mismo recorrido que la ruta 11 (Expreso 3), pero su paradero inicial es la Estación Canaval y Moreira (estación 53).
- **Ruta 23**: Hace el mismo recorrido que la ruta 11 (Expreso 3), pero su paradero inicial es la Estación Javier Prado (estación 54).
- **Ruta 24**: Hace el mismo recorrido que la ruta 12 (Súper Expreso), pero su paradero inicial es la Estación Angamos (estación 50).

- **Ruta 25**: Hace el mismo recorrido que la ruta 12 (Súper Expreso), pero su paradero inicial es la Estación Canaval y Moreira (estación 53).

Luego, manteniendo las notaciones $s_{i,j}^k(t), b_{i,j}^k(t), t_{i,j}^k, p_{i,j}^k(t), \tau_{i,j}^k(t)$ y $x_{i,j}$, pero esta vez con $j \in \{1, \ldots, 25\}$, el problema real a resolver será el problema no lineal entero mixto:

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{25}\sum_{n=0}^{6} K(\tau_{i,j}^{38n+1}) \sum_{k=1}^{38} t_{i,j}^{38n+k} \sum_{l=38n+1}^{38n+k} \left[s_{i,j}^l(\tau_{i,j}^l) - b_{i,j}^l(\tau_{i,j}^l)\right] x_{i,j} \\
& \displaystyle+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{25}\sum_{n=0}^{6} K(\tau_{i,j}^{38n+1}) \sum_{k=1}^{38} \left[p_{i,j}^{38n+k}(\tau_{i,j}^{38n+k}) - s_{i,j}^{38n+k}(\tau_{i,j}^{38n+k}) x_{i,j}\right] f_i \\
\text{Sujeto a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{25} x_{i,j} = 1, \ 1 \leq i \leq N \\
& x_{i,j} \in \{0,1\}, \ 1 \leq i \leq N, \ 1 \leq j \leq 25 \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{N} f_i = 60 \\
& f_i \geq 0, \ 1 \leq i \leq N
\end{array} \qquad (T^N)$$

De manera análoga a la Proposición 1.1 tenemos la siguiente proposición:

Proposición 4.1. *El valor óptimo del Problema* (T^N) *es menor que el valor óptimo del Problema* (TA).

Prueba: Sean

$$D_1^m = \left\{ x^m \in \mathbb{R}^{12N} : \sum_{j=1}^{12} x_{i,j} = 1, \ 1 \leq i \leq N; x_{i,j} \in \{0,1\}, \ 1 \leq i \leq N, \ 1 \leq j \leq 12 \right\}$$

y

$$D_1^r = \left\{ x^r \in \mathbb{R}^{25N} : \sum_{j=1}^{25} x_{i,j} = 1, \ 1 \leq i \leq N; x_{i,j} \in \{0,1\}, \ 1 \leq i \leq N, \ 1 \leq j \leq 25 \right\}$$

conjuntos tales que $D_1^m \times D_2$ y $D_1^r \times D_2$ sean los conjuntos factibles de los problemas (TA) y (T^N) respectivamente, donde

$$D_2 = \left\{ f \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N} f_i = 60; f_i \geq 0, \ 1 \leq i \leq N \right\}.$$

Del mismo modo definamos $G^m(x, f)$ y $G^r(x, f)$ las funciones objetivos de los problemas (TA) y (T^N) respectivamente. Definiendo $x_0 \in \mathbb{R}^{13}$ por $x_0 = (0, \ldots, 0)$, tenemos que $x_0^m = x^m \times x_0 \in D_1^r$ para todo $x^m \in D_1^m$, luego

$$G^r(x_0^m, f) = G^m(x^m, f).$$

De la igualdad anterior y notando que $D_1^m \times \{x_0\} D_2 \subset D_1^r \times D_2$, entonces el valor óptimo del Problema (T^N) es menor que el valor óptimo del Problema (TA). $\square$

De la proposición se concluye que si permitimos la circulación de buses que realizarían las rutas 13,. . ., 24 ó 25 esto implica la disminución del tiempo total de viaje de los usuarios.

4.3.2. Extensión del tiempo de circulación

Hasta el momento hemos considerado un intervalo de tiempo en que todas las rutas circulan; sin embargo ningún Expreso realiza servicio antes de las 6:00 a.m. ni después de las 9:00 a.m., lo cual implica que si queremos extender el horario de circulación (en las mañanas) debemos modificar la formulación del Problema (T^N). Por tal razón presentamos la siguientes definiciones:

Definición 4.5. *Para cada* $j \in \{1, \ldots, 25\}$ *se define el intervalo de circulación de la ruta* j *por el conjunto* $\Gamma_j \subset [0, 1000]$.

Definición 4.6. *Para cada* $j \in \{1, \ldots, 25\}$ *se define el tiempo del inicio del recorrido en la mañana de la ruta* j *por* γ_j^1.

Definición 4.7. *Para cada* $j \in \{1, \ldots, 25\}$ *se define el tiempo del final del recorrido en la mañana de la ruta* j *por* γ_j^2.

En este caso consideramos que $t = 0$ a las 5:20 a.m., mientras que $t = 1000$ equivale a las 10:00 p.m., en consecuencia el intervalo $[0, 1000]$ coincide con el horario de circulación de las rutas regulares A, B y C.

Observación 4.11. *Los intervalos de circulación (en minutos) son:*

- $\Gamma_j = [0, 1000]$, si $j = 1, 2, 3, 8$ (Rutas A, B y C).
- $\Gamma_4 = \Gamma_{13} := [40, 220] \cup [690, 940]$ (Expreso 1 de norte a sur).
- $\Gamma_5 = \Gamma_{14} := [45, 220] \cup [690, 920]$ (Expreso 2 de norte a sur).
- $\Gamma_j = \Gamma_9 := [70, 220] \cup [700, 895]$, si $j = 10, 17, 18, 19$ (Expresos 1 y 2 de sur a norte).
- $\Gamma_6 = \Gamma_{15} = \Gamma_{16} := [55, 220] \cup [700, 940]$ (Expreso 3 de norte a sur).
- $\Gamma_j = \Gamma_{11} := [40, 220] \cup [700, 940]$, si $j = 20, \ldots, 23$ (Expreso 3 de sur a norte).
- $\Gamma_j = \Gamma_7 := [75, 215]$, si $j = 12, 24, 25$ (Súper Expreso).

Observación 4.12. *Los inicios de los recorridos en las mañanas (en minutos) son:*

- $\gamma_j^1 := 0$, si $j = 1, 2, 3, 8$ (Rutas A, B y C).
- $\gamma_j^1 := 40$, si $j = 4, 11, 13, 20, \ldots, 23$ (Expreso 1 de norte a sur y Expreso 3 de sur a norte).
- $\gamma_5^1 = \gamma_{14}^1 := 45$ (Expreso 2 de norte a sur).
- $\gamma_j^1 := 70$, si $j = 9, 10, 17, 18, 19$ (Expresos 1 y 2 de norte a sur).
- $\gamma_j^1 := 75$, si $j = 7, 12, 24, 25$ (Súper Expreso).

Observación 4.13. *Los finales de los recorridos en las mañanas (en minutos) son:*

- $\gamma_j^2 := 1000$, si $j = 1, 2, 3, 8$ (Rutas A, B y C).
- $\gamma_j^2 := 220$, si $j = 4, 5, 6, 9, 10, 11, 13, \ldots, 23$ (Expresos 1, 2 y 3).
- $\gamma_j^2 := 215$, si $j = 7, 12, 24, 25$ (Súper Expreso).

Ahora falta proponer un nuevo horario para la salida de los N buses, cuyo inicio es 5:20 a.m. pero su final será hasta que se decida que un bus no circule más de una vuelta. Supongamos que $\Upsilon' > 0$ sea el instante (en minutos) en que sale a más tardar el N-ésimo bus y que $\Upsilon > \Upsilon'$ sea el instante (en minutos) en que el circuito se detiene. De este modo

$$\sum_{i=1}^{N} f_i = \Upsilon', \tag{4.13}$$

$$s_{i,j}^k(t) = p_{i,j}^k(t) = 0, \ \forall\, i = 1, \ldots, N; j = 1, \ldots, 25; k \in \mathbb{N} \text{ y } t < \gamma_j^1, \tag{4.14}$$

y

$$b_{i,j}^k(t) = 0, \ \forall\, i = 1, \ldots, N; j = 1, \ldots, 25; k \in \mathbb{N} \text{ y } t < \gamma_j^1. \tag{4.15}$$

Observación 4.14. *Se debe considerar que*

$$\Upsilon' > 75$$

para permitir la posibilidad de que los Expresos inicien su recorrido, ya que $\max_{1\le j\le 25} \gamma_j^1 = 75$.

El número de vueltas que a lo más puede recorrer un bus de 5:20 a.m. a 10:00 p.m. es 16, por lo tanto el valor máximo para k será $76 \times 16 + 38 = 1254$. Debido a que el modelo se complicaría mucho si se considera de nuevo los buses Expresos que circulan en la tarde, asumiremos que Υ es tal que no se exceda de las 4:50 p.m., luego $\Upsilon < 690$ (minutos). En este caso, el número máximo de recorridos que dará un bus será

$$m = \left[\!\left[\frac{690}{31}\right]\!\right] + 1 = 23. \tag{4.16}$$

Más aún, ahora se debe considerar que

$$K(t) = 0, \text{ si } t \geq \Upsilon.$$

Podemos permitir que todas las rutas circulen durante todo el día, pero debemos asegurar que los Expresos inicien su recorrido en su intervalo de circulación correspondiente, en general, el i-ésimo bus que realiza la ruta j iniciará su recorrido en el intervalo $[\gamma_j^1, \gamma_j^2]$. Para garantizar el cumplimiento de esta restricción mostramos el siguiente resultado:

Proposición 4.2. *Sean $i \in \{1, \ldots, N\}$ y $j \in \{1, \ldots, 25\}$ tales que $b_{i,j}^{38n+1}(t) := -\infty$ si $t < \gamma_j^1$ para todo $n \in \{1, \ldots, 23\}$, entonces $x_{i,j} = 0$.*

Prueba: Supongamos que $x_{i,j} = 1$. Si $\tau_{i,j}^{38n+1} < \gamma_j^1$ entonces

$$\sum_{l=38n+1}^{38n+k} \left[s_{i,j}^l(\tau_{i,j}^l) - b_{i,j}^l(\tau_{i,j}^l) \right] x_{i,j} = +\infty,$$

por consiguiente

$$T_v = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{25} \sum_{n=0}^{6} K(\tau_{i,j}^{38n+1}) \sum_{k=1}^{38} t_{i,j}^{38n+k} \sum_{l=38n+1}^{38n+k} \left[s_{i,j}^l(\tau_{i,j}^l) - b_{i,j}^l(\tau_{i,j}^l) \right] x_{i,j} = +\infty,$$

lo cual no es deseable, por lo tanto $x_{i,j} = 0$ si queremos minimizar el tiempo total del viaje; esto implica que el i-ésimo bus no debe realizar la ruta j si no está en su horario de circulación. □

Desde luego que se deben realizar algunas modificaciones para no contradecir las ecuaciones (4.3), (4.4), (4.6) y (4.15). Por consiguiente se reescribirán respectivamente como

$$\sum_{k=1}^{38} s_{i,j}^k(t) = \sum_{k=1}^{38} b_{i,j}^k(t), \ \forall\ i = 1, \ldots, N; j \in 1, \ldots, 25; t \in \Gamma_j. \tag{4.17}$$

$$\sum_{k=39}^{76} s_{i,j}^k(t) = \sum_{k=39}^{76} b_{i,j}^k(t), \ \forall\ i = 1, \ldots, N; j \in 1, \ldots, 25; t \in \Gamma_j. \tag{4.18}$$

$$\sum_{l=1}^{k} \left(s_{i,j}^l(t) - b_{i,j}^l(t) \right) \leq C_j(t) := \begin{cases} 120, & \text{si } j = 1, 2, 3, 8; t \geq 0, \\ 160, & \text{si } j = 4, \ldots, 7, 9 \ldots, 25; t \in \Gamma_j, \quad \forall\ k \in \mathbb{N}. \\ +\infty, & \text{si } j = 4, \ldots, 7, 9 \ldots, 25; t \notin \Gamma_j. \end{cases} \tag{4.19}$$

$$b_{i,j}^{38n+k}(t) := \begin{cases} -\infty, & \forall\ i=1,\dots,N; j=1,\dots,25; n=1,\dots,23; k=1 \text{ y } t<\gamma_j^1; \\ 0, & \forall\ i=1,\dots,N; j=1,\dots,25; n=1,\dots,23; k\neq 1 \text{ y } t<\gamma_j^1. \end{cases} \tag{4.20}$$

En consecuencia, la formulación del modelo en este caso es

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{25}\sum_{n=0}^{23} K(\tau_{i,j}^{38n+1}) \sum_{k=1}^{38} t_{i,j}^{38n+k} \sum_{l=38n+1}^{38n+k} \left[s_{i,j}^{l}(\tau_{i,j}^{l}) - b_{i,j}^{l}(\tau_{i,j}^{l}) \right] x_{i,j} \\ & + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{25}\sum_{n=0}^{23} K(\tau_{i,j}^{38n+1}) \sum_{k=1}^{38} \left[p_{i,j}^{38n+k}(\tau_{i,j}^{38n+k}) - s_{i,j}^{38n+k}(\tau_{i,j}^{38n+k}) x_{i,j} \right] f_i \\ \text{Sujeto a} \quad & \sum_{j=1}^{25} x_{i,j} = 1,\ 1\le i\le N \\ & x_{i,j}\in\{0,1\},\ 1\le i\le N,\ 1\le j\le 25 \\ & \sum_{i=1}^{N} f_i = \Upsilon' \\ & f_i \ge 0,\ 1\le i\le N \end{aligned} \tag{$T_{\Upsilon'}^{N}$}$$

Plantearemos un problema similar al Problema ($T_{\Upsilon'}^{N}$), de tal modo que el número máximo de recorridos que dará un bus será dado en función de Υ, luego la ecuación (4.16) será reemplazado por

$$m(\Upsilon) = \left[\!\left[\frac{\Upsilon}{31} \right]\!\right] + 1, \tag{4.21}$$

donde $\Upsilon \in [240, 300]$, lo cual implica que el circuito finalizará entre las 9:20 a.m. a 10:20 a.m. De modo similar $\Upsilon' \in [80, 120]$ de tal modo que el N-ésimo bus inicia su recorrido de 6:40 a.m. a 7:20 a.m.

Luego, la formulación del modelo en este caso es

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{25}\sum_{n=0}^{m(\Upsilon)} K(\tau_{i,j}^{38n+1}) \sum_{k=1}^{38} t_{i,j}^{38n+k} \sum_{l=38n+1}^{38n+k} \left[s_{i,j}^{l}(\tau_{i,j}^{l}) - b_{i,j}^{l}(\tau_{i,j}^{l}) \right] x_{i,j} \\ & + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{25}\sum_{n=0}^{m(\Upsilon)} K(\tau_{i,j}^{38n+1}) \sum_{k=1}^{38} \left[p_{i,j}^{38n+k}(\tau_{i,j}^{38n+k}) - s_{i,j}^{38n+k}(\tau_{i,j}^{38n+k}) x_{i,j} \right] f_i \\ \text{Sujeto a} \quad & \sum_{j=1}^{25} x_{i,j} = 1,\ 1\le i\le N \\ & x_{i,j}\in\{0,1\},\ 1\le i\le N,\ 1\le j\le 25 \\ & \sum_{i=1}^{N} f_i = \Upsilon' \\ & f_i \ge 0,\ 1\le i\le N \\ & \Upsilon' \in [80,120], \Upsilon \in [240,300] \end{aligned} \tag{$T_{\Upsilon,\Upsilon'}^{N}$}$$

Observación 4.15. *En este problema, a pesar de que se diferencian las rutas de ida y vuelta, debemos tener en cuenta que al regresar continúan haciendo la misma ruta. En el caso de una ruta ficticia al regresar ya no lo será, es decir, partirá del mismo punto de su último paradero; sin embargo, al completar la vuelta volverá a realizar la ruta ficticia.*

4.3.3. Cambio de rutas de los buses al final de su recorrido

Hasta ahora se ha considerado que los buses que parten realizando la ruta $j \in \{1, \dots, 25\}$ sigan haciendo esta misma ruta sin la posibilidad de regreso haga otra ruta que tenga quizá más demanda. A continuación se planteará la modificación del modelo para incluir esta posibilidad.

Empecemos incluyendo dos nuevas rutas para que se diferencien los recorridos de norte a sur y sur a norte de las rutas A y C:

- **Ruta 26**: Hace el recorrido que la ruta A de sur a norte.
- **Ruta 27**: Hace el recorrido que la ruta C de norte a sur.

Observación 4.16. *La ruta 1 será el recorrido de la ruta A de norte a sur y la ruta 3 es el recorrido que la ruta C de sur a norte.*

A partir de ahora podemos diferenciar las rutas que realizan los buses de norte a sur y de sur a norte, los cuales recorrerán a lo más 38 estaciones, para ello presentamos los siguientes conjuntos:

- $\Omega^{ns} := \{j \in \{1, \dots, 27\} :$ la ruta j va de norte a sur$\}$.
- $\Omega^{sn} := \{j \in \{1, \dots, 27\} :$ la ruta j va de sur a norte$\}$.

En consecuencia $\Omega^{ns} = \{1, 2, 4, \dots, 7, 13, \dots, 16, 27\}$ y $\Omega^{sn} = \{3, 8, \dots, 12, 17, \dots, 26\}$.

De modo similar se definen los conjuntos

- $\Omega^{ns}_{N} := \{j \in \{1, \dots, 27\} :$ la ruta j inicia su recorrido en la estación Naranjal$\}$.
- $\Omega^{ns}_{RC} := \{j \in \{1, \dots, 27\} :$ la ruta j inicia su recorrido en la estación Ramón Castilla$\}$.
- $\Omega^{sn}_{M} := \{j \in \{1, \dots, 27\} :$ la ruta j inicia su recorrido en la estación Matellini$\}$.

- $\Omega_{PF}^{sn} := \{j \in \{1, \ldots, 27\} :$ la ruta j inicia su recorrido en la estación Plaza de Flores$\}$.

- $\Omega_{EC}^{sn} := \{j \in \{1, \ldots, 27\} :$ la ruta j inicia su recorrido en la estación Estación Central$\}$.

En consecuencia $\Omega_N^{ns} = \{1, 2, 4, \ldots, 7, 13, \ldots, 16\}$, $\Omega_{RC}^{ns} = \{27\}$, $\Omega_M^{sn} = \{3, 8, 9, 17\}$, $\Omega_{PF}^{sn} = \{10, 11, 12, 18, \ldots, 25\}$ y $\Omega_{EC}^{sn} := \{26\}$.

Observación 4.17. *Se tiene que* $\Omega^{ns} = \Omega_N^{ns} \cup \Omega_{RC}^{ns}$ *y* $\Omega^{sn} = \Omega_M^{sn} \cup \Omega_{PF}^{sn} \cup \Omega_{EC}^{sn}$.

Observación 4.18. *Si una ruta inicia en una estación dada no implica que empieza a recoger pasajeros desde esa estación ya que puede tratarse de una ruta ficticia.*

Ahora redefinamos la variable $x_{i,j}$ de tal modo que se dependa del n-ésimo número de vuelta que realiza el i-ésimo bus de la ruta j:

Definición 4.8. *Para cada* $i \in \{1, \ldots, N\}$, $j \in \{1, \ldots, 27\}$ *y* $n \in \mathbb{N}$ *definamos*

$$x_{i,j}^n = \begin{cases} 1, & \textit{si el i-ésimo bus realiza la ruta } j \textit{ en el n-ésimo recorrido}; \\ 0, & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

De modo similar que en la ecuación anterior, redefiniremos las variables $s_{i,j}^k(t), b_{i,j}^k(t)$ y $p_{i,j}^k(t)$ teniendo en cuenta que dependen también de n:

Definición 4.9. *Para cada* $i \in \{1, \ldots, N\}$, $j \in \{1, \ldots, 27\}$, $k \in \{1, \ldots, 38\}$, $n \in \mathbb{N}$ *y* $t \geq 0$ *definamos*

- $s_{i,j}^{n,k}(t)$ *es la cantidad aproximada de pasajeros que suben al* i*-ésimo bus, el cual realiza la ruta* j*, cuando el bus se ha detenido en el tiempo* t *en el inicio del Tramo* k *en el* n*-ésimo recorrido.*

- $b_{i,j}^{n,k}(t)$ *es la cantidad aproximada de pasajeros que bajan del* i*-ésimo bus, el cual realiza la ruta* j*, cuando el bus se ha detenido en el tiempo* t *en el final del Tramo* k *en el* n*-ésimo recorrido.*

- $p_{i,j}^{n,k}(t)$ *es la cantidad total de usuarios que esperan al* i*-ésimo bus en las 3 puertas de embarque de la ruta* j *en la estación* k *en el* n*-ésimo recorrido en el instante* t.

Por último redefinamos las variables $\tau_{i,j}^k$ y $t_{i,j}^k$:

Definición 4.10. *Para cada* $i \in \{1, \ldots, N\}$, $j \in \{1, \ldots, 27\}$, $k \in \{1, \ldots, 38\}$, $n \in \mathbb{N}$ *y* $t \geq 0$ *definamos*

- $\tau_{i,j}^{n,k}$ *el tiempo cuando el i-ésimo bus que realiza la ruta j inicia el Tramo k en el n-ésimo recorrido.*

- $t_{i,j}^{n,k}$ *el tiempo hecho por el i-ésimo bus que realiza la ruta j en el Tramo k en el n-ésimo recorrido.*

En este problema se debe considerar las restricciones determinadas por las propias rutas, ya que un bus que viaja de norte a sur no puede regresar (de sur a norte) haciendo cualquier ruta, ya que su paradero final debe coincidir con el paradero inicial de la ruta que hará de regreso.

Por ejemplo, si en el n-ésimo recorrido del i-ésimo bus realiza la ruta 1 (regular A de norte a sur), entonces de regreso (recorrido $n+1$ del i-ésimo bus) sólo podrá realizar la ruta 26 (regular A de sur a norte) ya que es la única ruta que de sur a norte inicia en la Estación Central, el cual es el paradero final de la ruta 1. Podemos expresar esta condición por la ecuación

$$x_{i,1}^{n} - x_{i,26}^{n+1} = 0. \tag{4.22}$$

Observación 4.19. *La ecuación anterior implica que el i-ésimo bus realiza la ruta 1 en el recorrido n si, y sólo si en el recorrido $n+1$ realiza la ruta 26.*

Si el en el n-ésimo recorrido del i-ésimo bus realiza la ruta 3 (regular C de sur a norte), entonces de regreso (recorrido $n+1$ del i-ésimo bus) sólo podrá realizar la ruta 27 (regular C de norte a sur) ya que es la única ruta que de norte a sur inicia en la Estación Ramón Castilla, el cual es el paradero final de la ruta 3. Podemos expresar esta condición por la ecuación

$$x_{i,3}^{n} - x_{i,27}^{n+1} = 0. \tag{4.23}$$

Del mismo modo podemos mostrar ecuaciones para las rutas que inician su recorrido en la estación Matellini, para ello recordemos que las rutas que finializan su recorrido en esta estación son las rutas 1, 2, 4 y 13, que parten de la estación Naranjal, por esta razón definimos los conjuntos

- $\Omega_{N_M}^{ns} := \{j \in \Omega_N^{ns}:$ la ruta j finaliza su recorrido en la estación Matellini$\}$.

- $\Omega_{N_{PF}}^{ns} := \{j \in \Omega_N^{ns}:$ la ruta j finaliza su recorrido en la estación Plaza de Flores$\}$.

Observación 4.20. *Se tiene que* $\Omega_{N_M}^{ns} = \{2, 4, 13\}$, $\Omega_{N_{PF}}^{ns} = \{5, 6, 7, 14, 15, 16\}$ *y* $\Omega_N^{ns} = \Omega_{N_M}^{ns} \cup \Omega_{N_{PF}}^{ns}$.

En consecuencia tendremos la siguiente ecuación que implica que el i-ésimo bus realiza la ruta $j \in \Omega^{ns}_{N_M}$ en el recorrido n si, y sólo si en el recorrido $n+1$ realiza la ruta $j \in \Omega^{sn}_{M}$.

$$\sum_{j\in\Omega^{ns}_{N_M}} x^n_{i,j} - \sum_{j\in\Omega^{sn}_{M}} x^{n+1}_{i,j} = 0. \tag{4.24}$$

Análogamente tenemos la ecuación

$$\sum_{j\in\Omega^{ns}_{N_{PF}}} x^n_{i,j} - \sum_{j\in\Omega^{sn}_{PF}} x^{n+1}_{i,j} = 0. \tag{4.25}$$

Similar a la definición de los conjuntos $\Omega^{ns}_{N_M}$ y $\Omega^{ns}_{N_{PF}}$ se define:

- $\Omega^{sn}_{M_N} := \{j \in \Omega^{sn}_{M} :$ la ruta j finaliza su recorrido en la estación Naranjal$\}$.
- $\Omega^{sn}_{PF_N} := \{j \in \Omega^{sn}_{PF} :$ la ruta j finaliza su recorrido en la estación Naranjal$\}$.
- $\Omega^{sn}_{EC_N} := \{j \in \Omega^{sn}_{EC} :$ la ruta j finaliza su recorrido en la estación Naranjal$\}$.
- $\Omega^{sn}_{N} := \Omega^{sn}_{M_N} \cup \Omega^{sn}_{PF_N} \cup \Omega^{sn}_{EC_N}$

Observación 4.21. *Se tiene que* $\Omega^{sn}_{M_N} = \Omega^{sn}_{M} \setminus \{3\}$, $\Omega^{sn}_{PF_N} = \Omega^{sn}_{PF}$, $\Omega^{sn}_{EC_N} = \Omega^{sn}_{EC}$ *y* $\Omega^{sn}_{N} = \Omega^{sn} \setminus \{3\}$.

Finalmente se tiene la siguiente ecuación

$$\sum_{j\in\Omega^{sn}\setminus\{3\}} x^n_{i,j} - \sum_{j\in\Omega^{ns}_{N}} x^{n+1}_{i,j} = 0. \tag{4.26}$$

Considerando las ecuaciones $(4{,}22), \ldots, (4{,}26)$ como restricciones adicionales que se deben incluir en este nuevo problema además de las ecuaciones $(4{,}17), \ldots, (4{,}20)$ que deben verificar las funciones $s^{n,k}_{i,j}, b^{n,k}_{i,j}$ y $p^{n,k}_{i,j}$, y teniendo en cuenta las notaciones $\tau^{n,k}_{i,j}, t^{n,k}_{i,j}$ y $x^n_{i,j}$, y la ecuación (4.21), el problema a resolver será:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{27}\sum_{n=0}^{m(\Upsilon)} K(\tau^{n,1}_{i,j}) \sum_{k=1}^{38} t^{n,k}_{i,j} \sum_{l=1}^{k} \left[s^{n,l}_{i,j}(\tau^{n,l}_{i,j}) - b^{n,l}_{i,j}(\tau^{n,l}_{i,j})\right] x^n_{i,j} \\
& + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{27}\sum_{n=0}^{m(\Upsilon)} K(\tau^{n,1}_{i,j}) \sum_{k=1}^{38} \left[p^{n,k}_{i,j}(\tau^{n,k}_{i,j}) - s^{n,k}_{i,j}(\tau^{n,k}_{i,j}) x^n_{i,j}\right] f_i \\
\text{Sujeto a} \quad & \sum_{j=1}^{27} x^n_{i,j} = 1, \ 1 \le i \le N, \ 1 \le n < m(\Upsilon) \\
& x^n_{i,j} \in \{0,1\}, \ 1 \le i \le N, \ 1 \le j \le 27, \ 1 \le n < m(\Upsilon) \\
& x^n_{i,1} - x^{n+1}_{i,26} = 0, \quad 1 \le n < m(\Upsilon) \\
& x^n_{i,3} - x^{n+1}_{i,27} = 0, \quad 1 \le n < m(\Upsilon)
\end{aligned} \tag{$TR^N_{\Upsilon,\Upsilon'}$}$$

$$\sum_{j\in\Omega^{ns}_{N_M}} x^n_{i,j} - \sum_{j\in\Omega^{sn}_{M}} x^{n+1}_{i,j} = 0, \quad 1 \le n < m(\Upsilon)$$
$$\sum_{j\in\Omega^{ns}_{N_{PF}}} x^n_{i,j} - \sum_{j\in\Omega^{sn}_{PF}} x^{n+1}_{i,j} = 0, \quad 1 \le n < m(\Upsilon)$$
$$\sum_{j\in\Omega^{sn}\setminus\{3\}} x^n_{i,j} - \sum_{j\in\Omega^{ns}_{N}} x^{n+1}_{i,j} = 0, \quad 1 \le n < m(\Upsilon)$$
$$\sum_{i=1}^{N} f_i = \Upsilon'$$
$$f_i \ge 0,\ 1 \le i \le N$$
$$\Upsilon' \in [80, 120], \Upsilon \in [240, 300]$$

Veamos un resultado que muestra que considerar el cambio de rutas de los buses al final de su recorrido disminuye el tiempo total de viaje de todos los usuarios.

Proposición 4.3. *Dados* $\Upsilon' \in [80, 120]$*,* $\Upsilon \in [240, 300]$ *y* N *fijos, el valor óptimo del Problema* $(TR^N_{\Upsilon,\Upsilon'})$ *es menor que el valor óptimo del Problema* $(T^N_{\Upsilon,\Upsilon'})$*.*

Prueba: Debemos notar primero que en el Problema $(TR^N_{\Upsilon,\Upsilon'})$ se incluyen las rutas 26 y 27, los cuales son las rutas de regreso de los buses regulares A y C respectivamente, lo que significa que si al inicio un bus realiza la ruta 1 ó 3, entonces de regreso continúa realizando la misma ruta. En consecuencia, el Problema $(TR^N_{\Upsilon,\Upsilon'})$ puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{25}\sum_{n=0}^{m(\Upsilon)} K(\tau^{n,1}_{i,j}) \sum_{k=1}^{38} t^{n,k}_{i,j} \sum_{l=1}^{k} \left[s^{n,l}_{i,j}(\tau^{n,l}_{i,j}) - b^{n,l}_{i,j}(\tau^{n,l}_{i,j}) \right] x^n_{i,j} \\
& + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{25}\sum_{n=0}^{m(\Upsilon)} K(\tau^{n,1}_{i,j}) \sum_{k=1}^{38} \left[p^{n,k}_{i,j}(\tau^{n,k}_{i,j}) - s^{n,k}_{i,j}(\tau^{n,k}_{i,j}) x^n_{i,j} \right] f_i \\
\text{Sujeto a} \quad & \sum_{j=1}^{25} x^n_{i,j} = 1,\ 1 \le i \le N,\ 1 \le n < m(\Upsilon) \\
& x^n_{i,j} \in \{0, 1\},\ 1 \le i \le N,\ 1 \le j \le 25,\ 1 \le n < m(\Upsilon) \\
& \sum_{j\in\Omega^{ns}_{N_M}} x^n_{i,j} - \sum_{j\in\Omega^{sn}_{M}} x^{n+1}_{i,j} = 0, \quad 1 \le n < m(\Upsilon) \\
& \sum_{j\in\Omega^{ns}_{N_{PF}}} x^n_{i,j} - \sum_{j\in\Omega^{sn}_{PF}} x^{n+1}_{i,j} = 0, \quad 1 \le n < m(\Upsilon) \\
& \sum_{j\in\Omega^{sn}\setminus\{3\}} x^n_{i,j} - \sum_{j\in\Omega^{ns}_{N}} x^{n+1}_{i,j} = 0, \quad 1 \le n < m(\Upsilon) \\
& \sum_{i=1}^{N} f_i = \Upsilon' \\
& f_i \ge 0,\ 1 \le i \le N \\
& \Upsilon' \in [80, 120], \Upsilon \in [240, 300]
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Ahora si los valores de $x^n_{i,j}$ son iguales para todo $i \in \{0, \dots, m(\Upsilon)\}$, entonces la ecuación (4.24) es satisfecha ya que si $j \in \Omega^{ns}_{N_M} = \{2, 4, 13\}$ y $x^0_{i,j} = 1$, se tiene que el bus realiza la ruta regular B o el Expreso 1, entonces de regreso (de sur a norte) continuará haciendo la ruta B (ruta 8) o el Expreso 1 (ruta 9 ó 17), esto es $x^1_{i,j} = 1$ con $j \in \Omega^{sn}_M$, esto teniendo en cuenta la Observación 4.15.
Del mismo modo se verifican las ecuaciones (4.25) y (4.26), lo cual implica que el conjunto factible del problema anterior coincide con el Problema $(T^N_{\Upsilon,\Upsilon'})$, por lo tanto el valor óptimo del Problema $(T^N_{\Upsilon,\Upsilon'})$ es menor que el valor óptimo del Problema $(TR^N_{\Upsilon,\Upsilon'})$, ya que se trata de un caso particular. $\square$

A continuación veremos como se relaciona el problema de minimizar el tiempo total de viaje, en particular el tiempo de espera, y el problema de minimizar la cantidad de buses en circulación en un determinado periodo.

4.4. Minimización del costo total

De la teoría de colas es conocida la expresión

$$CT = C_S + C_E,$$

el cual relaciona el costo total por periodo (CT) como la suma del costo de servicio (C_S) y del costo de espera (C_E); más aún

$$C_S = c_s s \text{ y } C_E = c_w L \text{ ó } C_E = c_w L_q,$$

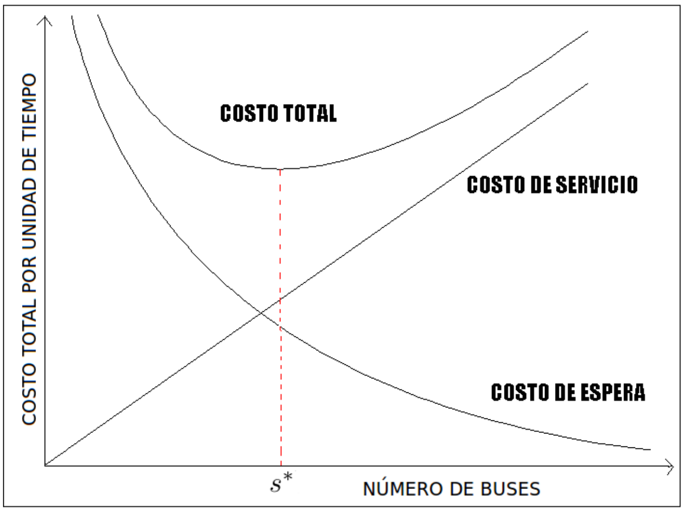
donde:

- c_s: costo de servicio por periodo de cada servidor.
- c_w: costo de espera por periodo de una unidad.
- L: cantidad de clientes en el sistema.
- L_q: cantidad de clientes en cola.
- s: cantidad de servidores.

El costo de servicio es fácil de determinar pues está asociado directamente a la operación de cada uno de los servidores. Sin embargo, el costo de espera es difícil de determinar pues depende de cada tipo de cliente y además de cuanto cuesta al negocio que un cliente se vaya al negocio de la competencia.

(C_E) es una función decreciente en función de N, ya que mientras más unidades se tenga a disposición esto implica que el usuario tardará menos en ser atendido; mientras que más servidores implica que mayor será el costo operativo de los mismos. En conclusión, la variación del número de servidores afecta en forma inversa a ambos componentes del costo total.

Conceptualmente se puede mostrar gráficamente como:



Observación 4.22. *La idea es determinar el número adecuado de buses* (s^*) *para obtener en el menor costo total.*

El sistema de transportes Metropolitano de Lima se puede considerar como una cola con varios servidores en serie, ya que cada estación se comporta como un servidor y cada usuario puede ser visto como un cliente que no necesariamente debe ser atendido en todos los servidores para salir de la cola. En consecuencia, el problema a resolver que es de interés para la empresa de transportes es el de minimizar el costo total, el cual está relacionado a los problemas de minimización de los buses y de minimización de los tiempos de viaje en un periodo de tiempo. Debido a que ya hemos modificado el problema de minimización de los tiempos de viaje en el periodo $[0, \Upsilon]$, ahora modifiquemos el problema de minimización de los buses visto en el Capítulo 1 considerando el periodo de tiempo $[0, \Upsilon]$ y que el número de pasajeros que se transportan depende además del tiempo en el que lo hacen.

4.4.1. Minimización del número de buses

Del mismo modo que en la Subsección 1.1.2, veamos las siguientes definiciones:

Definición 4.11. *Para cada* $j \in \{1, \ldots, 27\}$ *denotemos por* $\mathcal{A}^{j}_{(k,l)}(\Upsilon)$ *al número de usuarios que parten de la* k*-ésima estación y se dirigen a la estación* l *usando la ruta* j *en el intervalo de tiempo* $[0, \Upsilon]$.

Definición 4.12. *Para cada* $j \in \{1, \ldots, 27\}$ *denotemos por* $N_j^{ns}(\Upsilon)$ *al número de buses que realizan la ruta* j *si se dirigen de norte a sur y* $N_j^{sn}(\Upsilon)$ *al número de buses que realizan la ruta* j *si se dirigen de sur a norte, en el intervalo de tiempo* $[0, \Upsilon]$.

Definición 4.13. *Para cada* $j \in \{1, \ldots, 27\}$ *denotemos por* $\mathcal{S}_j^{k,ns}(\Upsilon)$ *al número de usuarios que* ***suben*** *en la* k*-ésima estación usando la ruta* j *viajando de norte a sur y* $\mathcal{S}_j^{k,sn}(\Upsilon)$ *al número de usuarios que* ***suben*** *en la* k*-ésima estación usando la ruta* j *viajando de sur a norte en el intervalo de tiempo* $[0, \Upsilon]$.

Definición 4.14. *Para cada* $j \in \{1, \ldots, 27\}$ *denotemos por* $\mathcal{B}_j^{k,ns}(\Upsilon)$ *al número de usuarios que* ***bajan*** *en la* k*-ésima estación usando la ruta* j *viajando de norte a sur y* $\mathcal{B}_j^{k,sn}(\Upsilon)$ *al número de usuarios que* ***bajan*** *en la* k*-ésima estación usando la ruta* j *viajando de sur a norte en el intervalo de tiempo* $[0, \Upsilon]$.

El número total de pasajeros que **suben** en la k-ésima estación será:

$$N_j^{\mathrm{ns}}(\Upsilon)\mathcal{S}_j^{k,\mathrm{ns}}(\Upsilon);\ \text{si el bus se dirige de norte a sur y realiza la ruta } j. \tag{4.28}$$

$$N_j^{\mathrm{sn}}(\Upsilon)\mathcal{S}_j^{k,\mathrm{sn}}(\Upsilon);\ \text{si el bus se dirige de norte a sur y realiza la ruta } j. \tag{4.29}$$

El número total de pasajeros que **bajan** en la k-ésima estación será:

$$N_j^{\mathrm{ns}}(\Upsilon)\mathcal{B}_j^{k,\mathrm{ns}}(\Upsilon);\ \text{si el bus se dirige de norte a sur y realiza la ruta } j. \tag{4.30}$$

$$N_j^{\mathrm{sn}}(\Upsilon)\mathcal{B}_j^{k,\mathrm{sn}}(\Upsilon);\ \text{si el bus se dirige de norte a sur y realiza la ruta } j. \tag{4.31}$$

De la definición de $\mathcal{A}^{j}_{(k,l)}(\Upsilon)$ y de las ecuaciones (4.28)...(4.31) para cada $i \in \{k, \ldots, 38\}$ y $j \in \{1, \ldots, 27\}$ tenemos:

$$N_j^{\mathrm{ns}}(\Upsilon)\mathcal{S}_j^{k,\mathrm{ns}}(\Upsilon) \geq \sum_{l=k+1}^{38} \mathcal{A}^{j}_{(k,l)}(\Upsilon) \tag{4.32}$$

$$N_j^{\mathrm{sn}}(\Upsilon)\mathcal{S}_j^{k,\mathrm{sn}}(\Upsilon) \geq \sum_{l=1}^{k-1} \mathcal{A}^{j}_{(k,l)}(\Upsilon) \tag{4.33}$$

$$N_j^{\mathrm{ns}}(\Upsilon)\mathcal{B}_j^{k,\mathrm{ns}}(\Upsilon) \geq \sum_{l=k+1}^{38} \mathcal{A}^{j}_{(k,l)}(\Upsilon) \tag{4.34}$$

$$N_j^{\mathrm{sn}}(\Upsilon)\mathcal{B}_j^{k,\mathrm{sn}}(\Upsilon) \geq \sum_{l=1}^{k-1} \mathcal{A}^{j}_{(k,l)}(\Upsilon) \tag{4.35}$$

Ahora ya podemos formular nuestro problema, el cual lo dividiremos en dos subproblemas. El primero de ellos plantea el problema para minimizar el número de buses que se dirigen de norte a sur y con el segundo de ellos minimizaremos el número de buses que se dirigen de sur a norte.

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad \sum_{j=1}^{27} N_j^{\mathrm{ns}}(\Upsilon) \\ &\text{Sujeto a} \quad N_j^{\mathrm{ns}}(\Upsilon)\mathcal{S}_j^{k,\mathrm{ns}}(\Upsilon) \geq \sum_{l=k+1}^{38} \mathcal{A}_{(k,l)}^{j}(\Upsilon),\ 1 \leq k \leq 37,\ 1 \leq j \leq 6 \\ &\qquad\qquad N_j^{\mathrm{ns}}(\Upsilon)\mathcal{B}_j^{k,\mathrm{ns}}(\Upsilon) \geq \sum_{l=1}^{k-1} \mathcal{A}_{(l,k)}^{j}(\Upsilon),\ 2 \leq k \leq 38,\ 1 \leq j \leq 6 \\ &\qquad\qquad N_j^{\mathrm{ns}} \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq 27 \end{aligned} \tag{P_Υ^{ns}}$$

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad \sum_{j=1}^{27} N_j^{\mathrm{sn}}(\Upsilon) \\ &\text{Sujeto a} \quad N_j^{\mathrm{sn}}(\Upsilon)\mathcal{S}_j^{k,\mathrm{sn}}(\Upsilon) \geq \sum_{l=1}^{k-1} \mathcal{A}_{(k,l)}^{j}(\Upsilon),\ 2 \leq k \leq 38,\ 1 \leq j \leq 27 \\ &\qquad\qquad N_j^{\mathrm{sn}}(\Upsilon)\mathcal{B}_j^{k,\mathrm{sn}}(\Upsilon) \geq \sum_{l=k+1}^{38} \mathcal{A}_{ji}^{k}(\Upsilon),\ 1 \leq k \leq 37,\ 1 \leq j \leq 27 \\ &\qquad\qquad N_j^{\mathrm{sn}}(\Upsilon) \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq 27 \end{aligned} \tag{P_Υ^{sn}}$$

4.4.2. Formulación del problema de minimización de costo total

Dado $\Upsilon \in [240, 300]$, sea

$$N_{\text{mín}}(\Upsilon) = \sum_{j=1}^{27} \overline{N}_j^{\mathrm{ns}}(\Upsilon) + \sum_{j=1}^{27} \overline{N}_j^{\mathrm{sn}}(\Upsilon) \tag{4.36}$$

el número mínimo de buses que se necesitan para transportar a todos los usuarios en el intervalo de tiempo $[0, \Upsilon]$, donde $\overline{N}_j^{\mathrm{ns}}(\Upsilon)$ y $\overline{N}_j^{\mathrm{sn}}(\Upsilon)$ son las cantidades que resulta de resolver los problemas (P_Υ^{ns}) y (P_Υ^{sn}) respectivamente. El número máximo de buses que circulan está considerado por $N_{\text{máx}}(\Upsilon) := 300$. Para hallar el número óptimo de buses definiremos previamente conceptos relacionados al costo de servicio (C_S) y al costo de espera (C_E).

Definición 4.15. *Para cada* $\Upsilon \in [240, 300], \Upsilon' \in [80, 120]$ *y* $N \in [N_{\text{mín}}(\Upsilon), N_{\text{máx}}(\Upsilon)]$ *fijos denotamos por*

$$\overline{x}(\Upsilon, \Upsilon', N) = \Big(\overline{x}_{1,1}^{1}(\Upsilon, \Upsilon', N), \ldots, \overline{x}_{i,j}^{n}(\Upsilon, \Upsilon', N), \ldots, \overline{x}_{N,27}^{m(\Upsilon)}(\Upsilon, \Upsilon', N)\Big) \tag{4.37}$$

y

$$\overline{f}(\Upsilon,\Upsilon',N)=(\overline{f}_1(\Upsilon,\Upsilon',N),\dots,\overline{f}_i(\Upsilon,\Upsilon',N),\dots,\overline{f}_N(\Upsilon,\Upsilon',N)) \tag{4.38}$$

a los valores que dan solución al Problema $(TR^N_{\Upsilon,\Upsilon'})$.

Definición 4.16. *Para cada* $\Upsilon\in[240,300],\Upsilon'\in[80,120],N\in[N_{\text{mín}}(\Upsilon),N_{\text{máx}}(\Upsilon)]$ *y* $k\in\{1,\dots,38\}$ *denotemos por*

- $L^{k,ns}(\Upsilon,\Upsilon',N):=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\in\Omega^{ns}}\sum_{n=0}^{m(\Upsilon)}K(\tau^{n,1}_{i,j})\Big[p^{n,k}_{i,j}(\tau^{n,k}_{i,j})-s^{n,k}_{i,j}(\tau^{n,k}_{i,j})\overline{x}^{n}_{i,j}(\Upsilon,\Upsilon',N)\Big]\,\overline{f}_i(\Upsilon,\Upsilon',N)$ *al tiempo de espera de todos los usuarios en la* k*-ésima estación dirigiéndose de norte a sur.*
- $L^{k,sn}(\Upsilon,\Upsilon',N):=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\in\Omega^{sn}}\sum_{n=0}^{m(\Upsilon)}K(\tau^{n,1}_{i,j})\Big[p^{n,k}_{i,j}(\tau^{n,k}_{i,j})-s^{n,k}_{i,j}(\tau^{n,k}_{i,j})\overline{x}^{n}_{i,j}(\Upsilon,\Upsilon',N)\Big]\,\overline{f}_i(\Upsilon,\Upsilon',N)$ *al tiempo de espera de todos los usuarios en la* k*-ésima estación dirigiéndose de sur a norte.*

Definición 4.17. *Para cada* $k\in\{1,\dots,38\}$ *denotemos por* $c^{k,ns}_w(\Upsilon,\Upsilon',N)$ *al* ***costo de espera de todos los usuarios en la*** k***-ésima estación dirigiéndose de norte a sur*** *en el periodo de tiempo* $[0,\Upsilon]$ *cuando el instante (en minutos) en que sale a más tardar el* N*-ésimo bus es* Υ'.

Definición 4.18. *Para cada* $k\in\{1,\dots,38\}$ *denotemos por* $c^{k,sn}_w(\Upsilon,\Upsilon',N)$ *al* ***costo de espera de todos los usuarios en la*** k***-ésima estación dirigiéndose de sur a norte*** *en el periodo de tiempo* $[0,\Upsilon]$ *cuando el instante (en minutos) en que sale a más tardar el* N*-ésimo bus es* Υ'.

Observación 4.23. *Para todo* $\Upsilon,\Upsilon'>0$ *y* $N\in\mathbb{N}$ *se tiene que* $c^{1,sn}_w(\Upsilon,\Upsilon',N)=0$ *y* $c^{38,ns}_w(\Upsilon,\Upsilon',N)=0$*, ya que no hay pasajeros que se dirigen de sur a norte en la estación Naranjal ni usuarios que se dirigen de norte a sur en la estación Matellini.*

Definición 4.19. *Sea* $c_s(\Upsilon,N)$ *al* ***costo de servicio por bus*** *en el periodo de tiempo* $[0,\Upsilon]$.

Ahora ya podemos plantear el problema de minimizar el costo total en el periodo de tiempo $[0,\Upsilon]$ debido a que el costo de servicio será

$$C_S(\Upsilon,N):=c_s(\Upsilon,N)N$$

y el costo de espera será

$$C_E(\Upsilon,\Upsilon',N):=\sum_{k=1}^{38}\Big[c^{k,ns}_w(\Upsilon,\Upsilon,N)L^{k,ns}(\Upsilon,\Upsilon',N)+c^{k,sn}_w(\Upsilon,\Upsilon,N)L^{k,sn}(\Upsilon,\Upsilon',N)\Big],$$

lo cual implica que el costo total será

$$CT(\Upsilon, \Upsilon', N) := C_S(\Upsilon, N) + C_E(\Upsilon, \Upsilon', N).$$

Luego, para cada $\Upsilon \in [240, 300]$ y $\Upsilon' \in [80, 120]$ se tiene el siguiente problema de minimización del costo total:

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & CT(\Upsilon, \Upsilon', N) \\ \text{Sujeto a} & N \in [N_{\text{mín}}(\Upsilon), N_{\text{máx}}(\Upsilon)] \end{array} \tag{$CT_{\Upsilon,\Upsilon'}$}$$

Capítulo 5

Simulación Numérica

Los problemas vistos en el capítulo anterior se han planteado de forma determinísticas, esto es, considerando que las cantidades de pasajeros y tiempos de viaje son iguales de lunes a viernes, lo cual no ocurre ya que son datos estocásticos los que debemos tener en cuenta para resolverlos.

5.1. Considerando la estocasticidad

Recurriremos a la equivalencia entre problemas estocásticos y determiísticos mencionados en el Capítulo 3 para considerar la estocasticidad de las cantidades y tiempos involucrados en los problemas planteados en el capítulo anterior.

Empecemos recordando la formulación del Problema $T^N_{\Upsilon,\Upsilon'}$:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{25}\sum_{n=0}^{m(\Upsilon)} K(\tau_{i,j}^{38n+1})\sum_{k=1}^{38} t_{i,j}^{38n+k}\sum_{l=38n+1}^{38n+k}\left[s_{i,j}^{l}(\tau_{i,j}^{l}) - b_{i,j}^{l}(\tau_{i,j}^{l})\right] x_{i,j} \\
& +\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{25}\sum_{n=0}^{m(\Upsilon)} K(\tau_{i,j}^{38n+1})\sum_{k=1}^{38}\left[p_{i,j}^{38n+k}(\tau_{i,j}^{38n+k}) - s_{i,j}^{38n+k}(\tau_{i,j}^{38n+k})x_{i,j}\right] f_i \\
\text{Sujeto a} \quad & \sum_{j=1}^{25} x_{i,j} = 1,\ 1\le i\le N \\
& x_{i,j}\in\{0,1\},\ 1\le i\le N,\ 1\le j\le 25 \\
& \sum_{i=1}^{N} f_i = \Upsilon' \\
& f_i \ge 0,\ 1\le i\le N \\
& \Upsilon'\in[80,120], \Upsilon\in[240,300]
\end{aligned} \tag{$T^N_{\Upsilon,\Upsilon'}$}$$

Manteniendo fijas las variables Υ, Υ' y N, tenemos que reconocer si las demás variables son determinísticas o estocásticas. Debido a que las variables $x_{i,j}$ y f_i son aquellas que debemos encontrar para resolver nuestro problema, queda claro que son variables determinísticas. Las demás variables y funciones representan cantidades de pasajeros o tiempos de viaje, excepto la función $K(\cdot)$, el cual solo toma los valores 0 y 1 dependiendo del valor de $\tau_{i,j}^{38n+1}$ para cada $n \in \{0, \ldots, m(\Upsilon)\}$; éstos valores serán simulados previamente antes de resolver el problema en cuestión.

5.1.1. Simulando los valores de $t_{i,j}^k$ y $\tau_{i,j}^k$

Empecemos generando los tiempos involucrados en este problema, para ello recordemos de la ecuación (4.2):

$$\tau_{i,j}^k := \sum_{l=1}^{i} f_l + \sum_{l=1}^{k-1} t_{i,j}^l,$$

observe que basta generar los valores de $t_{i,j}^l$, para $l \in \{1, \ldots, k-1\}$, para simular $\tau_{i,j}^k$, ya que f_l es una variable determinística. Como ahora estamos considerando la estocasticidad, el problema determinista equivalente en este caso se dará al considerar solo la función objetivo aleatoria ya que en las restricciones las variables $x_{i,j}$ y f_i son determinísticas; así que debemos escoger uno de los criterios mostrados en la Sección 3.3. Debido a que nuestra función objetivo no es simple, combinaremos los criterios del valor esperado y de mínimo riesgo.

Supongamos que para $i \in \{1, \ldots, N\}$, $j \in \{1, \ldots, 25\}$ y $k \in \mathbb{N}$ se han obtenido $n+1$ datos, $t_0, t_1, \ldots, t_n$, (cada uno con la misma probabilidad) los cuales están ordenados ascendemente, entonces a partir de estos datos debemos simular un valor que represente la variable $t_{i,j}^k$, es decir, generaremos una variable aleatoria discreta y uniforme t entre t_0 y t_n.

Generamos aleatoriamente $U \in]0,1[$ y hallamos $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $j - 1 \leq nU < j$. En este caso se recomienda realizar una función interpolante h (de preferencia usamos el método de los splines cúbicos por ser eficiente en la práctica) para encontrar el valor de $t := h(U) \in \;]t_{j-1}, t_j[$ simulado. La condición de interpolación que debe verificar la función h es

$$h(j/n) = t_j, \;\forall\; j = 0, 1, \ldots, n. \tag{5.1}$$

En la siguiente figura tenemos el resultado de la interpolación realizada en 41 puntos utilizando la interpolación.

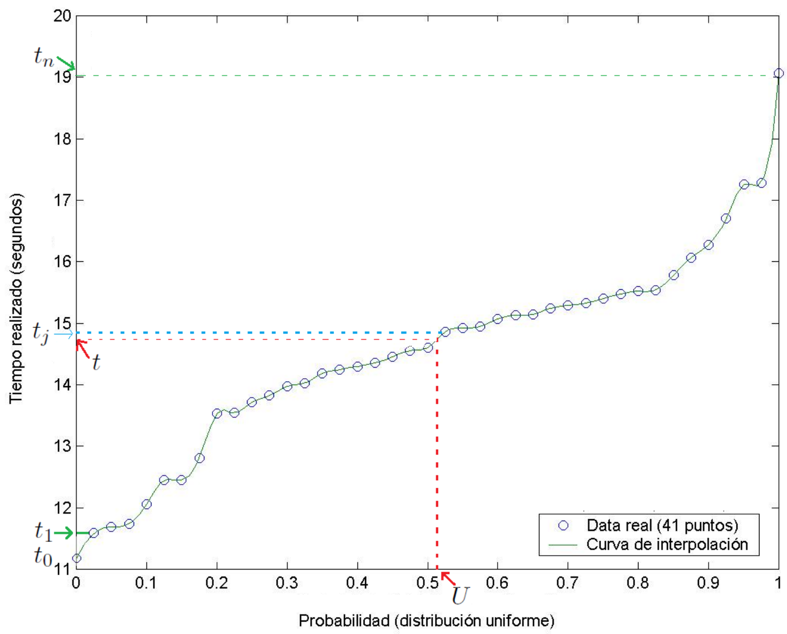


Figura 5.1: Interpolando datos reales.

La curva de la figura anterior es la gráfica de la función interpolante h que pasa por los 41 puntos mostrados, los cuales son datos reales que reflejan las distintas posibilidades que pueden obtenerse al generar un número aleatorio U entre 0 y 1.

Para considerar el nivel $\lambda \in [0, 1]$ de riesgo, al generar U verificaremos que

$$U \in \left]\lambda/2, 1 - \lambda/2\right[\,. \tag{5.2}$$

Por ejemplo, si $\lambda = 0.6$, entonces simularemos $t = h(U)$ sólamente si $U \in \;]0.3, 0.7[$, de lo contrario generaremos aleatoriamente otro valor U que verifique la condición (5.2).

5.1.2. Generando las funciones $s^k_{i,j}, b^k_{i,j}$ y $p^k_{i,j}$

Las funciones $s^k_{i,j}$ y $b^k_{i,j}$ son relativamente complentarias, ya que en la mañana en una estación sube aproximadamente la misma cantidad de personas que bajan en esa estación de noche. Desde luego que en la mañana no tiene el mismo comportamiento, sin embargo podemos utilizar la misma técnica para determinar estas funciones.

Supongamos que para el i-ésimo bus que realiza la ruta j se tienen los datos reales $\tau^k_{i,j}$ y $s^k_{i,j}(\tau^k_{i,j})$ para $k = 1, \ldots, 39m(\Upsilon)$, entonces determinaremos una función interpolante $S_{i,j}$

que verifique la condición

$$S_{i,j}(\tau_{i,j}^k) = s_{i,j}^k(\tau_{i,j}^k),\ \forall\ k = 1, \dots, 39m(\Upsilon). \tag{5.3}$$

De manera similar se debe encontrar las funciones interpolantes $B_{i,j}$ y $P_{i,j}$ que cumplan respectivamente la siguientes ecuaciones

$$B_{i,j}(\tau_{i,j}^k) = b_{i,j}^k(\tau_{i,j}^k),\ \forall\ k = 1, \dots, 39m(\Upsilon). \tag{5.4}$$

$$P_{i,j}(\tau_{i,j}^k) = P_{i,j}^k(\tau_{i,j}^k),\ \forall\ k = 1, \dots, 39m(\Upsilon). \tag{5.5}$$

Observación 5.1. *Las funciones interpolantes $S_{i,j}$ y $B_{i,j}$ satisfacen las ecuaciones* (4,17), …, (4,20)*, ya que las funciones $s_{i,j}^k$ y $b_{i,j}^k$ las cumplen, además las ecuaciones* (5,3) *y* (5,4) *implican la igualdad de las funciones interpolantes en los puntos a evaluarse la condición.*

Si los valores ${\tau'}_{i,j}^k$ son generados mediante simulación como en la subsección anterior, as funciones interpolantes $S_{i,j}$ y $B_{i,j}$ no necesariamente se vericarán las ecuaciones (4,17), …, (4,20), debido a que los valores generados no satisfacen las ecuaciones (5,3) y (5,4). Sin embargo, la función interpolante $P_{i,j}$ no debe verificar tales condiciones, de este modo sólo debemos generar apropiadamente las funciones $S_{i,j}$ y $B_{i,j}$.

Primero reformularemos la función interpolante $S_{i,j}$ teniendo en cuenta los valores ${\tau'}_{i,j}^k$ ya simulados. Definiremos ${S'}_{i,j}$ como la función interpolante que cumpla las condiciones

$${S'}_{i,j}({\tau'}_{i,j}^k) = S_{i,j}({\tau'}_{i,j}^k),\ \forall\ k = 1, \dots, 39m(\Upsilon). \tag{5.6}$$

$${S'}_{i,j}(\tau_{i,j}^k) = S_{i,j}(\tau_{i,j}^k) = s_{i,j}^k(\tau_{i,j}^k),\ \forall\ k = 1, \dots, 39m(\Upsilon). \tag{5.7}$$

Como consecuencia de la ecuación anterior debemos definir una función interpolante ${B'}_{i,j}$ que verifique las ecuaciones (4,17), …, (4,20) además de las condiciones

$${B'}_{i,j}({\tau'}_{i,j}^k) = B_{i,j}({\tau'}_{i,j}^k),\ \forall\ k = 1, \dots, 39m(\Upsilon). \tag{5.8}$$

$${B'}_{i,j}(\tau_{i,j}^k) = B_{i,j}(\tau_{i,j}^k) = b_{i,j}^k(\tau_{i,j}^k),\ \forall\ k = 1, \dots, 39m(\Upsilon). \tag{5.9}$$

5.2. Algoritmo para minimizar el costo total

Ahora supongamos que fijados $\Upsilon \in [240, 300]$ y $\Upsilon' \in [80, 120]$ se conoce el valor de $N_{\text{mín}}$ (definido en las ecuación 4.36) y $N_{\text{máx}} := 300$, entonces plantearemos un algoritmo que resuelve el Problema $CT_{\Upsilon,\Upsilon'}$.

Algoritmo 5.1. *Conocidos los valores de* $\Upsilon, \Upsilon', N_{\text{mín}}$ *y* $N_{\text{máx}}$*:*

1. *Definir* $N_{opt} := N_{\text{mín}}$ *y* $CT_{opt} := CT(\Upsilon, \Upsilon', N_{opt})$

2. *Para cada* $N = N_{\text{mín}} + 1$ *hasta* $N_{\text{máx}}$ *hacer*

   - *Si* $CT(\Upsilon, \Upsilon', N) < CT_{opt}$ *hacer*
     - $CT_{opt} := CT(\Upsilon, \Upsilon', N)$
     - $N_{opt} := N$

3. *Los valores* $x_{i,j}$ *y* f_j *que minimizan el costo total son* $\overline{x}(\Upsilon, \Upsilon', N_{opt})$ *y* $\overline{f}(\Upsilon, \Upsilon', N_{opt})$ *definidos en* (4,37) *y* (4,38) *respectivamente.*

Para hallar los valores $\overline{x}(\Upsilon, \Upsilon', N_{\text{opt}})$ y $\overline{f}(\Upsilon, \Upsilon', N_{\text{opt}})$ debemos simular previamente los valores ${\tau'}_{i,j}^{k}$ y las funciones ${S'}_{i,j}, {B'}_{i,j}$ y $P_{i,j}$, además de las variables implicadas en los problemas P_{Υ}^{ns} y P_{Υ}^{sn}.

5.2.1. Simulando los valores de $\mathcal{S}_j^{k,\mathbf{ns}}(\Upsilon), \mathcal{B}_j^{k,\mathbf{ns}}(\Upsilon)$ y $\mathcal{A}_{(k,l)}^{j}(\Upsilon)$

En el Problema (P_{Υ}^{ns}) la variable N_j^{ns} es determinística, mientras que las variables $\mathcal{S}_j^{k,\text{ns}}(\Upsilon), \mathcal{B}_j^{k,\text{ns}}(\Upsilon)$ y $\mathcal{A}_{(k,l)}^{j}(\Upsilon)$ son estocásticas, lo cual implica que se trata de un problema con restricciones probabilísticas, lo cual estudiamos en la Sección 3.2.

Trabajaremos con restricciones de azar separadas o individuales para determinar el problema determinista equivalente, esto es

$$P\left(N_j^{\text{ns}}(\Upsilon)\mathcal{S}_j^{k,\text{ns}}(\Upsilon) \geq \sum_{l=k+1}^{38} \mathcal{A}_{(k,l)}^{j}(\Upsilon)\right) \geq \lambda,\ 1 \leq k \leq 37,\ 1 \leq j \leq 6, \tag{5.10}$$

$$P\left(N_j^{\text{ns}}(\Upsilon)\mathcal{B}_j^{k,\text{ns}}(\Upsilon) \geq \sum_{l=1}^{k-1} \mathcal{A}_{(l,k)}^{j}(\Upsilon)\right) \geq \lambda,\ 2 \leq k \leq 38,\ 1 \leq j \leq 6, \tag{5.11}$$

donde $\lambda \in [0,1]$ es considerado constante en todas las $37 \times 6 \times 2 = 444$ restricciones del Problema (P_{Υ}^{ns}).

Para que los valores simulados de $\mathcal{S}_j^{k,\text{ns}}(\Upsilon), \mathcal{B}_j^{k,\text{ns}}(\Upsilon)$ y $\mathcal{A}_{(k,l)}^{j}(\Upsilon)$ satisfagan las ecuaciones 5.10 y 5.11 sugerimos trabajar del mismo modo que en la Subsección 5.1.1, es decir, generaremos aleatoriamente valores U que verifiquen la condición (5.2). De manera análoga simularemos los valores de $\mathcal{S}_j^{k,\text{sn}}(\Upsilon), \mathcal{B}_j^{k,\text{sn}}(\Upsilon)$ y $\mathcal{A}_{(k,l)}^{j}(\Upsilon)$ para el Problema (P_{Υ}^{sn}).

5.3. Proyecto para la obtención de datos

Para resolver cualquiera de los problemas planteados en el capítulo anterior dependemos de la simulación de datos recopilados en campo y conseguirlos implican un alto costo, es por ello que detallamos los tiempos y costos en el siguiente proyecto de manera breve.

Proyecto 5.1. *Para la recopilación de datos asumiremos que contamos con 160 personas que se colocarán en los 160 embarques de las 38 estaciones para tomar tiempos y contar el número de personas que suben, bajan y esperan en su embarque asignado, además de 6 personas que se dediquen a validar los datos obtenidos.*

- *La toma de datos se realizará por un dos semanas (de lunes a viernes) en el horario de 5:20 a 10:20 a.m.*
- *Los datos recopilados deben ser anexados en una hoja de cálculo y enviados a las personas que realizarán la validación.*
- *El tiempo de esta primera etapa es de 2 semanas y el pago considerado a cada persona es S/. 400, lo que hace un subtotal de S/. 64 000.*
- *Los datos a validar deben verificar las ecuaciones* $(4{,}17), (4{,}18)$ *y* $(4{,}19)$.
- *El tiempo adicional para la segunda etapa es de un mes y el pago considerado a cada persona es S/. 1 000, que implica un subtotal de S/. 6 000.*

En conclusión, el tiempo estimado para la toma de datos es de 45 días y el costo total sería S/. 70 000.

En vista que el costo es alto, se ha pensado en otras alternativas como el uso de las cámaras de vigilancia, sin embargo éstas no tienen el rango de visión para determinar el tipo de ruta realiza un bus ni se puede estimar apropiadamente la cantidad de personas que suben, bajan y esperan en cada embarque; por último, se complica el seguimiento (para la toma de tiempos) del i-ésimo bus en cada estación a pesar de que éstos cuentan con GPS.

Conclusiones

- Minimizar el tiempo total de viaje de todos los usuarios del Metropolitano implica resolver un problema (no lineal) de asignación, debido a que debemos distribuir óptimamente los buses para las rutas existentes.

- A pesar de que hay muchos factores que se consideran en un modelo matemático de transporte, como por ejemplo flujo vehicular, congestión en los paraderos y la semaforización, el problema de minimizar el tiempo total de viaje formulado depende de los tiempos de viaje realizados en cada viaje por los buses y de la frecuencia en sus salidas; los valores de éstos tiempos contienen implícitamente información de los factores que aparecen en otros modelos de transporte.

- Mostramos que un problema de asignación puede resolverse mediante subproblemas de programación lineal si a partir del problema planteado se pueden formular subproblemas de programación lineal entera mixta tales que sus conjuntos factibles, D_i, verifican que $Ext(co(Di)) \subset D_i$.

- El problema de minimización de los tiempos de viajes que se ha formulado puede adaptarse a los cambios de las rutas del Metropolitano o al aumento de nuevas rutas, aunque éstas sean ficticias como en los casos donde los buses inician su recorrido desde el segundo o tercer paradero.

- Si se modifica la ruta de un Expreso se puede calcular los tiempos realizados en cada tramo del viaje y pronosticar el comportamiento de los usuarios en la elección de la nueva ruta. De este modo es posible resolver el nuevo problema de minimización de los tiempos de viaje y determinar si conviene al promedio de los usuarios realizar el cambio de ruta.

- Al resolver el problema de minimización del costo total planteado se beneficia la empresa de transportes y los usuarios, ya que se considera la minimización del tiempo de espera.

Bibliografía

[1] Birge, J.R., Louveaux, F.V. *Introduction to Stochastic Programming.* Springer, 1997.

[2] Caballero, R., Cerdá, E., Muñoz, M.M., Rey, L. "Analysis and Comparisons of Some Solution Concepts for Stochastic Programming Problems". *Top*, 10(1), 101-124, 2002.

[3] Charnes, A., Cooper, W.W. "Deterministic Equivalents for Optimizing and Satisfying under Chance Constraints". *Operations Research*, 11, 1, 18-39, 1963.

[4] Crouzeix, J.P., Keraghel, A., Sosa W. *Programación Matemática Diferenciable*, Universidad Nacional de Ingeniería, 2011.

[5] Diwelar, U. "Optimization under Uncertainty: An Overview". *SIAG/OPT Views -and-News*, 13, 11-8, 2002.

[6] Hammer, P.L. *Stochastic Programming. State Of The Art*, 1998. Annals of Operations Research, Vol 85, 1999.

[7] Muñoz M.M. *Programación Estocástica: Algunas Aportaciones Teóricas y Computacionales.* Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid, 1998.

[8] Prawda, J. *Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones.* Vol. 2. Modelos Estocásticos. Ed. Limusa, 1980.

[9] Ríos Insua, S. *Investigación Operativa. Optimización.* Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S.A. Segunda Edición, 1993.

[10] Stancu-Minasian, I.M., Wets, M.J. "A Research Bibliography in Stochastic Programming 1955-1975". Operations Research, 24, 1078-1119, 1976.

[11] Venegas, E. *Transporte en un Circuito Minero con dos Frentes de Explotación.* Tesis de Licenciatura. Universidad Nacional de Ingeniería, 2009.

[12] Wets, R.J.B. "Stochastic Programming". Nemhauser, G.L., Rinnooy Kan, A.H.G., Todd, M.J. (ed). *Optimization.* Vol. 1 North-Holland, 1989.