UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

SECCIÓN DE POSGRADO Y SEGUNDA ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL

TESIS

“CLASIFICACIÓN ANALÍTICA DE LA SILLA - NODO”

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA

ELABORADO POR

GERARDO JONATAN HUAROTO CÁRDENAS

ASESOR:
DR. RENATO MARIO BENZIC TOME

LIMA-PERÚ
2013

Indice

Agradecimientos

Agradezco a mis padres Gerardo Efrain Huaroto Alvites y Maria del Carmen Cardenas Paredes que siempre me apoyaron incondicionalmente en la parte moral y económica para poder llegar un ser profesional de la patria.

A mis hermanas y demás familiares en general por el apoyo que siempre me brindaron día a día en el transcurso de cada año de mi carrera universitaria.

Resumen

El presente trabajo tiene por objetivo hacer un estudio cualitativo de las soluciones de un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias complejas en la vecindad de un punto singular aislado, bajo la hipótesis de que el desarrollo de Taylor de la ecuación en la singularidad, tenga como parte lineal una matriz que posee un autovalor nulo. Tal singularidad es llamada **silla-nodo**. Más especificamente, se pretende encontrar formas normales de tales singularidades.

Introducción

Éste trabajo se enfoca básicamente en el estudio de clasificar la ecuación diferencial tipo silla-nodo

$$(1)\begin{cases} \dot{x_1} &=& \lambda_1 x_1 + \sum\limits_{|Q|\geq 2} a_{1Q}x^Q, \\ \dot{x_2} &=& \sum\limits_{|Q|\geq 2} a_{2Q}x^Q, \end{cases}$$

Para ello haremos uso de algunos teoremas, uno de ellos es el Teorema de Dulac, el cual nos brinda un primer criterio para la primera clasificación de la silla-nodo. Dicho teorema nos muestra que a silla nodo (1) es ***analíticamente-equivalente*** a:

$$(2)\begin{cases} \dot{x_1} &=& x_1(1+\lambda x_2^p) + x_2 R(x_1, x_2), \\ \dot{x_2} &=& x_2^{p+1}, \end{cases}$$

Llamada **forma normal de Dulac** de la silla-nodo. Donde el número entero $p+1$ será denominado número de Milnor de la silla-nodo. Entonces la primera clasificación consiste en agrupar aquellas sillas-nodos de la forma (1) que son analíticamete equivalente a la forma normal de Dulac (2), es decir las sillas-nodos con número de Milnor $p+1$. Dicho conjunto de agrupación se denota por D_p. Seguidamente haremos uso del Teorema 3.2, para una segunda clsificación, el cual muestra que la silla-nodo (2) es ***formalmente-equivalente*** a:

$$(3)\begin{cases} \dot{x_1} &=& x_1(1+\lambda x_2^p), \\ \dot{x_2} &=& x_2^{p+1}, \end{cases}$$

Llamada **forma normal final** de la silla-nodo. Luego así podemos realizar una sub-clasificación del conjunto D_p, denotando $D_{p,\lambda}$ aquellas sillas-nodos de la forma (1) que son formalmente-equivalente a la forma normal final (3). Luego denotemos por $D^N_{p,\lambda}$ al conjunto de las sillas-nodos que tienen la forma (2).

Se realizará el estudio en $D^N_{p,\lambda}$, para ver cuando dos sillas-nodo en $D^N_{p,\lambda}$ son analíticamente-equivalente, el cual será útil para una nueva sub-clasificación dentro del conjunto $D^N_{p,\lambda}$. Finalmente, se muestra una aplicación biyectiva de $D^N_{p,\lambda}/G^\circ$ a $\mathbb{C}^p \times \mathscr{H}^p$.

Sección 1

Preliminares

En ésta Sección se introducirán los conceptos y resultados de carácter general que serán utilizados a lo largo del trabajo.

1.1 Funciones holomorfas de varias variables complejas

Denotemos por $\mathbb{C}^n$ al conjunto de todas las n-uplas ($n \geq 1$) de números complejos, es decir

$$\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, \cdots, z_n);\ z_1, \cdots, z_n \in \ \mathbb{C}\} = \underbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{n \ \ veces}$$

Los elementos $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ son llamados puntos de $\mathbb{C}^n$ y los números complejos $z_1, \cdots, z_n$ son las coordenadas complejas de z.

Definición 1.1 *Sean $z = (z_1, \cdots, z_n)$ y $w = (w_1, \cdots, w_n)$ puntos de $\mathbb{C}^n$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Definimos la suma de z y w como*

$$z + w = (z_1 + w_1, \cdots, z_n + w_n)$$

y el producto de α por z como

$$\alpha z = (\alpha z_1, \cdots, \alpha z_n).$$

Es inmediato ver que con estas operaciones $\mathbb{C}^n$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión (compleja) n. Denotaremos a $\mathbb{C}^n$ de la topología producto. Un polidisco abierto (resp. cerrado) en $\mathbb{C}^n$ de centro $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ y poliradio $r = (r_1, \cdots, r_n) \in (\mathbb{R})^+$, será denotado por $\triangle(a; r)$

(resp. $\triangle[a;r]$), es el conjunto definido por

$$\begin{aligned}\triangle(a;r) &= \{z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n; |z_j-a_j|<r_j, \forall\, 1\leq j\leq n\}\\ (resp.\,\triangle\,[a;r] &= \{z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n; |z_j-a_j|\leq r_j, \forall\, 1\leq j\leq n\}).\end{aligned}$$

Observe que

$$\triangle(a,r)=D_{r_1}(a_1)\times\cdots\times D_{r_n}(a_n) \quad y \quad \triangle\,[a,r]=D_{r_1}\,[a_1]\times\cdots\times D_{r_n}\,[a_n]$$

Sea $D_r(T_0)\subseteq\mathbb{C}$ un disco y consideremos el camino complejo $\varphi: D_r(T_0)\longrightarrow\mathbb{C}^n$. Podemos asociar a φ n-funciones $\varphi_1,\cdots,\varphi_n: D_r(T_0)\longrightarrow\mathbb{C}$ tales que $\varphi(T)=(\varphi_1(T),\cdots\varphi_n(T))$, para todo $T\in D_r(T_0)$. Estas funciones son llamadas funciones coordenadas de φ. Decimos que φ es un camino holomorfo en $D_r(T_0)$ si y sólo si cada una de sus funciones coordenadas $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ son holomorfas en $D_r(T_0)$.
Si φ es holomorfa en $D_r(T_0)$, la derivada de φ en $T\in D_r(T_0)$, denotada por $\varphi'(T)$ se define como

$$\varphi'(T)=(\varphi_1'(T),\cdots,\varphi_n')$$

Definición 1.2 *Sea $U\in\mathbb{C}^n$ un abierto y $f:U\longrightarrow\mathbb{C}$. Decimos que f es holomorfa en $a=(a_1,\cdots,a_n)\in U$ si y sólo si existe un polidisco abierto $\triangle$ centrado en a tal que la función f tiene una expansión en serie de potencias*

$$f(z)=\sum_{q_1,\cdots,q_n=0}^{\infty} c_{q_1,\cdots,q_n}(z_1-a_1)^{q_1}\cdots(z_n-a_n)^{q_n}, \tag{1.1}$$

la cual es convergente en todo $z\in\triangle$.

Decimos que f es holomorfa en U si y sólo si f es holomorfa en a, para todo $a\in U$. El conjunto de todas las funciones holomorfas en U será denotado por $\mathcal{O}(U)$.
Para simplificar las notaciones, es conveniente introducir la noción de multi-índices de Schwartz. Un multi-índice de dimensión n, es una n-upla de enteros no negativos $Q=(q_1,\cdots,q_n)$. Su norma $|Q|$ se define como $|Q|=q_1+\cdots+q_n$.
Sea $z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ y $Q=(q_1,\cdots,q_n)$ un multi-índice, definimos

$$z^Q=z_n^{q_1}\cdots z_n^{q_n}$$

Con estas notaciones (1.1) se escribe

$$f(z)=\sum_{|Q|=0}^{\infty} c_Q(z-a)^Q. \tag{1.2}$$

Un resultado familiar del análisis elemental es que *si la serie de potencia (1.2) converge en algún punto $b \in \mathbb{C}$, entonces converge absoluta y uniformemente en algún polidisco abierto $\triangle(a, r)$ para el cual $r_j < |b_j - a_j|$.* Un prueba estandar de esta aseveración para series de potencias en una variable se extiende con facilidad para el caso de series de potencias en varias variables. La primera consecuencia de esta observación es que la función f es continua en algún polidisco, pues es el límite uniforme de funciones continuas; por lo tanto, *cualquier función holomorfa en D es necesariamente continua en D.* La segunda consecuencia es que la serie de potencia (1.2) puede ser reordenada arbitrariamente; así, si las coordenadas $z_1, \cdots, z_{j-1}, z_{j+1} \cdots, z_n$ tienen algunos valores fijos $b_1, \cdots, b_{j-1}, b_{j+1}, \cdots, b_n$, entonces la serie de potencias (1.2) puede ser reordenado como una serie de potencias convergentes en $z_j - a_j$. Es decir *una función $f \in \mathcal{O}(D)$ es holomorfa en cada variable por separado en todo el dominio D* en el sentido $f(b_1, \cdots, b_{j-1}, z_j, b_{j+1}, \cdots, b_n)$ es holomorfa como función de z_j para cualquier valor b_i cuando $(b_1, \cdots, b_{j-1}, z_j, b_{j+1}, \cdots, b_n) \in D$. El reciproco es también valido pero no es trivial y pues es eso lo que nos dice el siguiente teorema.

Teorema 1.1 (*Hartogs*) *Si una función compleja valuada es holomorfa en cada variable por separado en el dominio abierto $D \subseteq \mathbb{C}^n$, entonces ella es holomorfa en D.*

En cuanto al interes de la prueba lo puede encontar en Robert C. Gunning [5].

1.2 Campos vectoriales holomorfas y Ecuaciones diferenciales

En ésta sub-sección se mostrará definiciones básicas, si el lector desea tener más información puede consultar las notas de Renato Benazic [2].

Definición 1.3 *Sea $U \in \mathbb{C}^n$ abierto. Un campo vectorial holomorfo en U es una función*

$$\begin{aligned} Z : U &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ z &\longrightarrow Z(z) = (Z_1(z), \cdots, Z_n(z)) \end{aligned}$$

tal que

1) $Z_j : U \longrightarrow \mathbb{C}$ son funciones holomorfas, para $1 \leq j \leq n$.

2) Si $z \in U$ entonces $Z(z) \in \mathbb{C}^n$ es un vector cuyo punto de aplicación es z.

Notación 1.1 *Denotaremos por $\mathcal{X}(U)$ al conjunto de todos los campos vectoriales holomorfos definidos en U.*

Definición 1.4 *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, $Z \in \mathcal{X}(U)$. Un punto $z_0 \in U$ es llamado punto singular de Z si y sólo si $Z(z_0) = 0$, caso contrario, decimos que z_0 es un punto regular de Z. Denotaremos por $Sing(Z)$ al conjunto de todos los puntos singulares.*

A continuación se mostrará un ejemplo para la mejor comprensión de la definición.

Ejemplo 1.1 *Sea $A = (a_{jk}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, definimos*

$$\begin{aligned} Z : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ z &\longrightarrow Z(z) = Az = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k}z_k, \cdots, \sum_{k=1}^{n} a_{nk}z_k\right) \end{aligned}$$

Es claro que $Z \in \mathcal{X}(U)$ y es llamado campo lineal. Además $Sing(Z)$ es el núcleo $Nu(Z)$.

Otra definición que se necesita para éste trabajo es la de ***punto singular aislado***.

Definición 1.5 *Sea un subconjunto $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, $Z \in \mathcal{X}(U)$. Un punto $z_0 \in U$ es llamado punto singular aislada de Z si y sólo si $z_0 \in Sing(Z)$ y existe $V \subseteq U$ vecindad abierta de z_0 tal que $Sing(Z) \cap (V - z_0) = \emptyset$.*

Con respecto a la definición anterior se mostrará un ejemplo de una función holomorfa $Z(z_1, z_2)$ que tenga un punto singular aislado.

Ejemplo 1.2 *Sea $Z \in \mathcal{X}(\mathbb{C}^2)$ definido por $Z(z_1, z_2) = (z_1z_2 + z_2^3, z_2^2 + z_1z_2)$. Determinemos $Sing(Z)$:*

$$(z_1, z_2) \in Sing(Z) \Leftrightarrow Z(x_1, x_2) = (0, 0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z_1z_2 + z_2^3 &=& 0 \\ z_2^2 + z_1z_2 &=& 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z_2(z_1 + z_2^2) &=& 0 \\ z_2(z_2 + z_1) &=& 0 \end{array} \right.$$

Se sigue que

$$Sing(Z) = \{(z_1, 0);\ z_1 \in \mathbb{C}\} \cup \{(-1, 1)\}$$

Luego $(-1, 1)$ es la única singularidad aislada de Z.

La siguiente definición enunciada será muy usada durante el presente trabajo.

Definición 1.6 *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, $Z \in \mathcal{X}(U)$, $z_0 \in U$ y $k \in \mathbb{N}$. El Jet de orden k de Z en el punto z_0, denotado por $J^k_{z_0}(Z)$, se define como*

$$J^k_{z_0}(Z) = \left(\sum_{|Q|=0}^{k} c_{1Q}(z - z_0)^Q, \cdots, \sum_{|Q|=0}^{k} c_{nQ}(z - z_0)^Q\right) \tag{1.3}$$

Definición 1.7 *Sea* $U \subseteq \mathbb{C}^n$ *abierto,* $Z \in \mathcal{X}(U)$.

1) La ecuación Diferencial Ordinaria (*EDO*) *asociada al campo vectorial holomorfo* Z *es dada por:*

$$z' = Z(z) \tag{1.4}$$

2) Una solución de la EDO (1.4) *es una función holomorfa de* $\varphi : D \longrightarrow U$ *donde* $D \subseteq \mathbb{C}$ *es un disco abierto, tal que*

$$\varphi'(T) = Z(\varphi(T)), \quad \forall\, T \in D.$$

Definición 1.8 *Sea* $U \subseteq \mathbb{C}^n$ *abierto,* $Z \in \mathcal{X}(U)$, $z_0 \in U$, *y* $T_0 \in \mathbb{C}$

i) El Problema de Valor Inicial (*P.V.I.*) *o Problema de Cauchy asociado a* Z *es dado por:*

$$\left| \begin{array}{lcl} z' & = & Z(z) \\ z(T_0) & = & z_0, \end{array} \right. \tag{1.5}$$

ii) Una solución de (1.5) es una función holomorfa $\varphi : D \longrightarrow U$ *donde* $D \subseteq \mathbb{C}$ *es un disco abierto, tal que*

a) $T_0 \in D$.

b) $\varphi'(T) = Z(\varphi(T))$; *para todo* $T \in D$.

c) $\varphi(T_0) = z_0$.

1.3 Serie de potencias formales y convergente

Definición 1.9 *Una serie formal de potencias en las indeterminadas* x *e* y *con coeficientes en* $\mathbb{C}$, *es una expresión de la forma*

$$A = \sum_{|Q| \geq 0} a_Q x^{q_1} y^{q_2}$$

donde $a_Q \in \mathbb{C}$, *para todo* $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{N}^2$. *El conjunto de tales series formales será denotado por* $\mathbb{C}[[x, y]]$.

Observación 1.1 *Si denotamos por* $\mathbb{C}[x, y]$ *al conjunto de todos los polinomios con coeficientes complejos e indeterminadas* x, y, *entonces se cumple*

$$\mathbb{C}[x, y] \subseteq \mathbb{C}[[x, y]]$$

Definición 1.10 *Sean $A,\ B \in \mathbb{C}[[x,y]]$, y $\alpha \in \mathbb{C}$, donde $A = \sum_{|Q|\geq 0} a_Q x^{q_1} y^{q_2}$ y $B = \sum_{|Q|\geq 0} b_Q x^{q_1} y^{q_2}$. Definamos la suma de A y B como*

$$A + B = \sum_{|Q|\geq 0} (a_Q + b_Q) x^{q_1} y^{q_2}$$

y el producto de α por A como

$$\alpha A = \sum_{|Q|\geq 0} \alpha a_Q x^{q_1} y^{q_2}$$

Sea $A = \sum_{|Q|\geq 0} a_Q x^{q_1} y^{q_2} \in \mathbb{C}[[x,y]]$, observe que

$$\begin{aligned} A &= a_{(0,0)} + (a_{(1,0)}x + a_{(0,1)}y) + (a_{(2,0)}x^2 + a_{(1,1)}xy + a_{(0,2)}y^2) + \cdots \\ &= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{|Q|=n} a_Q x^{q_1} y^{q_2} \right) = \sum_{n\geq 0} A_n \end{aligned}$$

donde $A_n = \sum_{|Q|=n} a_Q x^{q_1} y^{q_2}$, para todo $n \geq 0$. Se sigue que A_n es un polinomio homogéneo en las indeterminadas x e y de grado n, concluimos que toda serie formal puede expresarse como una suma infinita de polinomios homogéneos.

Definición 1.11 *Sean $A,\ B \in \mathbb{C}[[x,y]]$, $A = \sum_{n\geq 0} A_n$, $B = \sum_{n\geq 0} B_n$, el producto de A y B, denotado por AB, es definido como:*

$$AB = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} A_{n-k} B_k \right)$$

Definición 1.12 *Sea $A = \sum_{|Q|\geq 0} a_Q x^{q_1} y^{q_2} \in \mathbb{C}[[x,y]]$ definimos $\frac{\partial A}{\partial x}$ y $\frac{\partial A}{\partial y} \in \mathbb{C}[[x,y]]$ como*

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \sum_{|Q|\geq 0} q_1 a_Q x^{q_1 - 1} y^{q_2} \quad y \quad \frac{\partial B}{\partial x} = \sum_{|Q|\geq 0} q_2 b_Q x^{q_1} y^{q_2 - 1}$$

De manera análoga se define las derivadas parciales formales de orden superior.
Es posible asociar a una serie formal, una serie convergente. Dado $A = \sum_{|Q|\geq 0} a_Q x^{q_1} y^{q_2} \in \mathbb{C}[[x,y]]$, definamos el conjunto

$$D_A = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2;\ \sum_{|Q|\geq 0} a_Q z_1^{q_1} z_2^{q_2} \in \mathbb{C} \right\}$$

Observe que $(0,0) \in D_A$, luego $D_A \neq \phi$. A continuación, vamos a establecer condiciones para que $D_A \neq \{(0,0)\}$. Denotemos $\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty[$ y consideremos el conjunto

$$\Gamma_A = \left\{ (r_1, r_2) \in \mathbb{R}_0^+ ; \sum_{|Q| \geq 0} |a_Q| r_1^{q_1} r_2^{q_2} < \infty \right\}$$

Observe que $\Gamma_A \neq 0$ puesto que $(0,0) \in \Gamma_A$.

Proposición 1.1 *Si* $(r_1, r_2) \in \Gamma_A$ *entonces* $\triangle[(0,0);(r_1,r_2)] \subseteq D_A$.

Prueba : En efecto, sean $(z_1, z_2) \in \triangle[(0,0);(r_1,r_2)]$ y $k \in \mathbb{N}$, se cumple

$$\sum_{|Q| \geq 0}^{k} |a_Q z_1^{q_1} z_2^{q_2}| = \sum_{|Q| \geq 0}^{k} |a_Q| \cdot |z_1|^{q_1} |z_2|^{q_2} \leq \sum_{|Q| \geq 0}^{k} |a_Q| r_1^{q_1} r_2^{q_2}| < +\infty$$

luego la serie de númeroa complejos $\sum\limits_{|Q| \geq 0}^{k} |a_Q z_1^{q_1} z_2^{q_2}|$ es absolutamente convergente y por lo tanto convergente, luego $(z_1, z_2) \in D_A$. ■

Dado $A = \sum\limits_{|Q| \geq 0} a_Q x^{q_1} y^{q_2} \in \mathbb{C}[[x,y]]$, denotemos por $\widehat{A}$ a la serie formal de términos no negativos en las indeterminadas x e y, obtenida de A, mediante

$$\widehat{A} = \sum_{|Q| \geq 0} |a_Q| x^{q_1} y^{q_2}$$

y denotemos por $\widetilde{A}$ a la serie formal de potencias de términos no negativos en la indeterminada x, obtenida de A mediante

$$\widetilde{A} = \sum_{|Q| \geq 0} |a_Q| x^{q_1} x^{q_2} = \sum_{|Q| \geq 0} |a_Q| x^{|Q|} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{|Q| = n} |a_Q| \right) x^n$$

Ejemplo 1.3 *Sea* $A = \sum\limits_{|Q| \geq 0} i^{|Q|} x^{q_1} x^{q_2} = 1 + ix + iy - x^2 - xy - y^2 + \cdots,$ *entonces*

$$\begin{aligned} \widehat{A} &= 1 + x + y + x^2 + xy + y^2 + \cdots \\ \widetilde{A} &= 1 + 2x + 3x^2 + \cdots \end{aligned}$$

Proposición 1.2 *Si* $\widetilde{A}$ *es convergente en* $D_R[0]$ *entonces* $(R, R) \in \Gamma_A$.

Prueba : En efecto, dado $k \in \mathbb{N}$, se cumple

$$\sum_{|Q|=0}^{k} |a_Q| R^{q_1} R^{q_2} = \sum_{|Q|=0}^{k} |a_Q| R^{|Q|} = \sum_{n=0}^{k} \left(\sum_{|Q|=n} |a_Q| \right) R^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{|Q|=n} |a_Q| \right) R^n < +\infty$$

Luego $\sum_{|Q|\geq 0} |a_Q| R^{q_1} R^{q_2} < \infty$ y por tanto $(R, R) \in \Gamma_A$. ■

Corolario 1.1 *Sea* $A = \sum_{|Q|\geq 0} |a_Q| x^{q_1} y^{q_2} \in \mathbb{C}[[x, y]]$. *Si* $\widetilde{A}$ *es convergente en* $D_R[0]$ *entonces* A *es convergente el en polidisco* $\triangle[(0, 0); (R, R)]$.

Sea $A = \sum_{|Q|\geq 0} |a_Q| x^{q_1} y^{q_2}$, $B = \sum_{|Q|\geq 0} |b_Q| x^{q_1} y^{q_2} \in \mathbb{C}[[x, y]]$, definimos

$$\widehat{A} \ll \widehat{B} \Longleftrightarrow |a_Q| \leq |b_Q|, \quad \forall |Q| \geq 0 \tag{1.6}$$

Proposición 1.3 *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\widehat{A + B} \ll \widehat{A} + \widehat{B} \ \ \forall\, A, B \in \mathbb{C}[[x, y]]$
2. $\widehat{\alpha A} \ll |\alpha| \widehat{A},\ \forall \alpha,\ \forall A \in \mathbb{C}[[x, y]]$
3. $\widehat{AB} \ll \widehat{A}\widehat{B},\ \forall\, A, B \in \mathbb{C}[[x, y]]$
4. $\widehat{A \circ \Theta} \ll \widehat{A} \circ \widehat{\Theta}$, *donde* $\Theta = (B, C)$ *y* $\widehat{\Theta} = \left(\widehat{B}, \widehat{C}\right)\ \forall\, A,\, B,\, C\, \in \mathbb{C}[[x, y]]$.

Si el lector está interesado en la prueba debe consultar Renato Benazic [2].

1.4 Aplicaciones Holomorfas

En esta sub-sección se tocará algunos Teoremas familiares del Análisis $\mathbb{R}^n$ como por ejemplo el Teorema de la función inversa y el Teorema de la función implícita que serán extendidos a funciones holomorfas en varias variables complejas, además teoremas ecuaciones diferenciales parciales parciales, teoremas fuertes como el teorema de división y preparación de Weierstrass y el teorema de extensión de Riemman.

Definición 1.13 *Sea* $U \subseteq \mathbb{C}^2$ *una vecindad abierta* $0 \in \mathbb{C}^2$ *y* $g \in \mathcal{O}(U)$, *decimos que* g *es regular de orden* k *con respecto a la variable* z_1 *(respectivamente* z_2*) en* 0 *si y sólo si* $g(z_1, 0)$ *(respectivamente* $g(0, z_2)$*) no es idénticamente nula, además* $\dfrac{\partial^i g}{\partial z_1^i}(0, 0) = 0$ *(respectivamente* $\dfrac{\partial^i g}{\partial z_2^i}(0, 0) = 0$*), para todo* $i = 0, \cdots, k - 1$ *y* $\dfrac{\partial^k g}{\partial z_1^k}(0, 0) \neq 0$ *(respectivamente* $\dfrac{\partial^k g}{\partial z_2^k}(0, 0) \neq 0$*).*

Teorema 1.2 (*Teorema de la Función Implícita*) *Sea* $z_0 = (z_0^1, z_0^2) \in \mathbb{C}^2$ *y* f *una función holomorfa en* $\triangle(z_0, r)$ *tal que* $f(z_0) = 0$ *y* $\dfrac{\partial f}{\partial z_2}(z_0) \neq 0$. *Entonces existe un polidisco abierto* $\triangle(z_0, R) \subseteq \triangle(z_0, r)$ *y existe una única función holomorfa* $\varphi : D_R(z_1^0) \longrightarrow D_R(z_2^0)$ *tal que* $\varphi(z_1^0) = z_2^0$ *y* $f(z, \varphi(z)) = 0$, *para todo* $z \in D_R(z_1^0)$.

Definición 1.14 *Una aplicación biholomorfa F de un subconjunto abierto $U \subseteq \mathbb{C}^n$ en un subconjunto abierto $V \subseteq \mathbb{C}^n$ es una aplicación holomorfa $F : U \longrightarrow V$ el cual admite una inversa holomorfa.*

Una interrogante que surge de inmediato de la definición anterior es, cuando una función holomorfa tiene una inversa holomorfa. A continuación se mostrará un criterio para ver cuando una función tiene inversa holomorfa.

Teorema 1.3 *Sea f una función holomorfa en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{C}^n$, y asumamos que f es inyectiva. Sea $V = f(U) \subset \mathbb{C}^n$ su imagen. Entonces $f : U \longrightarrow V$ es un biholomorfismo.*

Si en caso el lector está interesado en la prueba debe consultar el Serge Lang [8].

Teorema 1.4 (*Teorema de la Función Inversa*) *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, $z_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}^2$ función holomorfa en U tal que $f'(z_0) \in GL(\mathbb{C}^2)$, entonces existen abiertos $V_0 \subseteq U$ y $W_0 \subseteq \mathbb{C}^2$ con $z_0 \in V_0$, $f(z_0) \in W_0$ tales que $f|_{V_0} : V_0 \longrightarrow W_0$ es un biholomorfismo.*

El resultado de éste teorema será usado en la primera parte de éste trabajo.
Para una prueba detallada de éste teorema el lector debe consultar Robert C. Gunning [5]. Otro teorema importante para nosotros es el siguiente teorema visto en ecuaciones diferenciales parciales que es extendida para nuestro caso, la importancia de éste teorema radica en el hecho de brindarnos la existencia de una solución el cual será usado como un cambio de coordenadas en la primera parte del trabajo.

Teorema 1.5 *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, $D \subseteq \mathbb{C}$ un disco abierto, γ una curva suave en U parametrizada por $\gamma(t) = (\delta(t), \rho(t))$, $t \in D$, $f \in \mathcal{O}(D)$ y $a, b, c \in \mathcal{O}(U)$. Suponga que $|a(x, y)|^2 + |b(x.y)|^2 \neq 0$ para todo $(x, y) \in U$, y*

$$\begin{vmatrix} a(\delta(t), \rho(t)) & b(\delta(t), \rho(t)) \\ \delta'(t) & \rho'(t) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall\, t \in D$$

Entonces el problema

$$\begin{cases} a(x, y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\dfrac{\partial u}{\partial y} & = & c(x, y), \\ u(\delta(t), \rho(t)) & = & f(t), \quad t \in D \end{cases}$$

tiene una única solución $u \in \mathcal{O}(U)$.

La prueba del teorema para el caso real lo puede encontar en Valéria Iório [4], el caso complejo es una simple extensión sólo basta seguir los mismos pasos del caso real.

Definición 1.15 *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ una vecindad abierta $0 \in U$ y $f \in \mathcal{O}(U)$, se dice que f es un polinomio de Weierstrass de grado $k > 0$ en z_1 (resp. z_2) si es de la forma*

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= z_1^k + a_1(z_2)z_1^{k-1} + \cdots + a_{k-1}(z_2)z_1 + a_k(z_2) \\ (\textit{resp. } f(z_1, z_2) &= z_2^k + a_1(z_1)z_2^{k-1} + \cdots + a_{k-1}(z_1)z_2 + a_k(z_1)) \end{aligned}$$

donde los coeficientes $a_i(0) = 0$, para todo $i = 1, \cdots, k$.

A continuación se mostrarán dos teoremas muy fuertes, que serán usados para la primera clasificación de la silla-nodo.

Teorema 1.6 (*Teorema de Preparación de Weierstrass*) *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ una vecindad abierta del $0 \in U$ y $f \in \mathcal{O}(U)$ regular de orden k con respecto a la varible z_2 en 0 entonces existe un polidisco $\triangle = \triangle((0,0),(r_1,r_2))$ cuya cerradura esta contenida en U, existen $a_1, \cdots, a_k \in D_{r_1}(0)$ con $a_1(0) = \cdots = a_k(0) = 0$ y existe $u \in \mathcal{O}(\triangle)$ con $u(z_1, z_2) \neq 0$ en $\triangle$ tales que*

$$f(z_1, z_2) = u(z_1, z_2)\left(z_2^k + a_1(z_1)z_2^{k-1} + \cdots + a_{k-1}(z_1)z_2 + a_k(z_1)\right), \quad \forall (z_1, z_2) \in \triangle.$$

Observación 1.2 *Un resultado similar se obtiene si $f \in \mathcal{O}(U)$ regular de orden k con respecto a la varible z_1 en 0*

Teorema 1.7 (*Teorema de División de Weierstrass*) *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ una vecindad abierta del origen de $\mathbb{C}^2$ y $h \in \mathcal{O}(U)$ polinomio de Weierstrass de grado k. Entonces para toda $f \in \mathcal{O}(U)$, podemos escribir de forma única*

$$f(z_1, z_2) = g(z_1, z_2)h(z_1, z_2) + r(z_1, z_2)$$

siendo $r \in \mathcal{O}(U)$ un polinomio de Weierstrass de grado a lo mas $k - 1$ y $g \in \mathcal{O}(U)$.

Tanto el teorema de preparación como el de división de Weierstrass sus respectivas pruebas pueden ser ubicadas en Robert C. Gunning [5]. Por último, enunciaremos el teorema de extensión de Riemman visto en un curso de variable compleja.

Teorema 1.8 (*Riemman*) *Sea $U = D(z_0, r) - \{z_0\}$ y $f \in \mathcal{O}(U)$ y $r > \epsilon > 0$ tal que f es acotada en $\overline{D(z_0, \epsilon)} - \{z_0\}$,entonces existe una función $F \in \mathcal{O}(D(z_0, r))$ y $F|_U = f$.*

El uso de éste teorema será útil en la última parte de éste trabajo. Para la prueba de éste teorema el lector puede consultar a Serge Lang [8].

Sección 2

Resultados Previos

2.1 Definición del Problema

En éste trabajo se estudiará una ecuación diferencial en particular, denominada silla-nodo, para poder definirlá necesitamos alguna condiciones. Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, $Z \in \mathcal{X}(U)$ y $0 \in U$ singularidad aislada de Z, luego existe $V \subseteq U$ vecindad abierta de 0 tal que

$$Z(z) = \left(\sum_{|Q|\geq 1} a_{1Q} z^Q, \sum_{|Q|\geq 1} a_{2Q} z^Q \right)$$

y $Z(z) \neq (0,0)$, para todo $z \in V - \{0\}$. Sabemos que la EDO asociada a Z es

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x_1} & = & \sum_{|Q|\geq 1} a_{1Q} x^Q, \\ \dot{x_2} & = & \sum_{|Q|\geq 1} a_{2Q} x^Q, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

Entonces una ecuación diferencial tipo silla-nodo será ecuación como la (2.1) siempre que la matriz asocida (en la base canónica de $\mathbb{C}^2$) de $DZ(0)$ es de la forma

$$\begin{bmatrix} a_{1,(1,0)} & a_{1,(0,1)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es decir $a_{2,(1,0)} = a_{2,(0,1)} = 0$. Sim perdida de generalidad se estudiará una ecuación del tipo

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x_1} & = & \lambda_1 x_1 + \sum_{|Q|\geq 2} a_{1Q} x^Q, \\ \dot{x_2} & = & \sum_{|Q|\geq 2} a_{2Q} x^Q, \end{array} \right.$$

donde $x^Q = x_1^{q_1} x_2^{q_2}$, esto es debido a que por un cambio de coordenadas $DZ(0)$ puede ser expresada como

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El objetivo principal de éste trabajo es clasificar las sillas-nodos para así poder hacer un mejor estudio de ellas. A continuación se mostrarán algunos lemas importantes que nos ayudaran a cumplir nuestro objetivo.

2.2 Lemas Importantes

En ésta subsección se mostrará algunos resultados que nos ayudará a probar el Teorema de Dulac, el cual nos permitirá dar una primera clasificación a las sillas-nodos.

Lema 2.1 *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, $0 \in U$ y $Z(z_1, z_2) = (\lambda_1 z_1 + A_1(z_1, z_2), A_2(z_1, z_2)) \in \mathcal{X}(U)$, con singularidad aislada en el origen. La EDO asociada sería*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{z_1} & = & \lambda_1 z_1 + A_1(z_1, z_2), \\ \dot{z_2} & = & A_2(z_1, z_2), \end{array} \right. \tag{2.2}$$

donde $A_j(z_1, z_2) = \sum_{|Q| \geq 2} a_{jQ} z^Q$, $j = 1, 2$ y $\lambda_1 \in \mathbb{C} - \{0\}$. Entonces existe un cambio de coordenadas analíticas de modo que la ecuación anterior se escribe como

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{u_1} & = & \lambda_1 u_1 + u_2 g(u_1, u_2), \\ \dot{u_2} & = & u_2 h(u_1, u_2), \end{array} \right. \tag{2.3}$$

siendo $g(u_1, u_2)$ y $h(u_1, u_2)$ funciones analíticas en el origen de $\mathbb{C}^2$.

Prueba: En efecto, analizaremos formalmente el problema, consideremos un cambio de coordenada del tipo perturbación de la identidad

$$z = (z_1, z_2) = \xi(u_1, u_2) = (u_1 + \xi_1(u_1, u_2), u_2 + \xi_2(u_1, u_2))$$

donde $\xi_j(u_1, u_2) = \sum_{|Q| \geq 2} \xi_{jQ} u^Q$, $j = 1, 2$ tal que transforme (2.2) en

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{u_1} & = & \lambda_1 u_1 + B_1(u_1, u_2), \\ \dot{u_2} & = & B_2(u_1, u_2), \end{array} \right.$$

donde $B_j(u_1,u_2) = \sum_{|Q|\geq 2} b_{jQ}u^Q$, $j=1,2$.

Como $z_j = u_j + \xi_j(u_1,u_2)$; tenemos $(\lambda_2 = 0)$

$$\begin{aligned}
\lambda_j z_j + A_j(z_1,z_2) = \dot{z_j} &= \dot{u_j} + \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial \xi_j}{\partial u_k}\dot{u_k} \\
&= \lambda_j u_j + B_j(u_1,u_2) + \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial \xi_j}{\partial u_k}\left[\lambda_k u_k + B_k(u_1,u_2)\right]
\end{aligned}$$

luego

$$\lambda_j u_j + \lambda_j\xi_j(u_1,u_2) + A_j(\xi(u_1,u_2)) = \lambda_j u_j + B_j(u_1,u_2) + \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial \xi_k}{\partial u_k}\left[\lambda_j u_k + B_k(u_1,u_2)\right]$$

Cancelando y reordenando obtenemos

$$\lambda_j\xi_j(u_1,u_2) - \sum_{k=1}^{2}\lambda_k u_k\frac{\partial \xi_j}{\partial u_k} - B_j(u_1,u_2) = \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial \xi_j}{\partial u_k}B_k(u_1,u_2) - A_j(\xi(u_1,u_2)). \tag{2.4}$$

Además tenemos que $u_k\dfrac{\partial \xi_j}{\partial u_k}(u_1,u_2) = \sum_{|Q|\geq 2} q_k\xi_{jQ}u^Q$ entonces la expresión de la izquierda de la ecuación (2.4) puede ser expresada como

$$\lambda_j\xi_j(u_1,u_2) - \sum_{k=1}^{2}\lambda_k u_k\frac{\partial \xi_j}{\partial u_k} - B_j(u_1,u_2) = \sum_{|Q|\geq 2}\left[\left(\lambda_j - \sum_{k=1}^{2}\lambda_k q_k\right)\xi_{jQ} - b_{jQ}\right]u^Q$$

luego haciendo $\delta_{jQ} = \lambda_j - \sum_{k=1}^{2}\lambda_k q_k$ y reemplazando la ecuación anterior en (2.4) tenemos para $j=1,2$, lo siguiente

$$\sum_{|Q|\geq 2}\left(\delta_{jQ}\xi_{jQ} - b_{jQ}\right)u^Q = \frac{\partial \xi_j}{\partial u_1}B_1(u_1,u_2) + \frac{\partial \xi_j}{\partial u_2}B_2(u_1,u_2) - A_j(\xi(u_1,u_2)). \tag{2.5}$$

Por otro lado sea $\mathcal{I}$ un ideal de $\mathbb{C}\ [[u_1,u_2]]$ generado por u_2, es decir

$$S \in \mathcal{I} \Longleftrightarrow \exists\ R \in \mathbb{C}[[u_1,u_2]]\ \textit{tal que}\ S(u_1,u_2) = u_2 R(u_1,u_2),$$

vamos a despejar las incongnitas b_{jQ}, ξ_{jQ} de (2.5) imponiendo la siguiente regla

$$\begin{cases} u^Q \notin \mathcal{I} \quad , & \textit{entonces}\ \ b_{jQ} = 0, \\ u^Q \in \mathcal{I} \quad , & \textit{entonces}\ \ \xi_{jQ} = 0. \end{cases}$$

Observe que $u^Q \notin \mathcal{I}$ entonces $Q = (q_1, 0)$, con $q_1 \geq 2$.

Lo anterior implica que $B_j(u_1,u_2) \in \mathcal{I}$ y por tanto

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial u_1}(u_1,u_2)B_1(u_1,u_2) + \frac{\partial \xi_j}{\partial u_2}(u_1,u_2)B_2(u_1,u_2) \in \mathcal{I}.$$

Por otro lado observe que

$$\xi_j(u_1,u_2)=\xi_{j(2,0)}u_1^2+\xi_{j(3,0)}u_1^3+\xi_{j(4,0)}u_1^4+\cdots \tag{2.6}$$

Concluimos que para despejar los coeficientes de ξ_j sólo necesitamos considerar los multi-índices Q tales que $u^Q\notin\mathcal{I}$, para esto de (2.5) y del hecho que $B_j(u_1,u_2)\in\mathcal{I}$ resulta

$$\delta_{j(q_1,0)}\xi_{j(q_1,0)}=c_{j(q_1,0)},\quad q_1\geq 2 \tag{2.7}$$

donde $c_{j(q_1,0)}$ son los coeficientes de $-A_j(\xi(u_1,u_2))=\sum\limits_{|Q|\geq 2}c_{jQ}u^Q$.
Si $Q=(2,0)$ entonces $\xi_{jQ}=\dfrac{c_{jQ}}{\delta_{jQ}}=-\dfrac{a_{jQ}}{\delta_{jQ}}$.
Si $Q=(3,0)$ entonces c_{jQ} sólo dependera de a_{jQ} , $\xi_{j(2,0)}$, por tanto podemos despejar $\xi_{j(3,0)}$. El procedimiento continúa por inducción y de esta manera hemos construido el cambio formal de coordenadas ξ. A continuación, probaremos su convergencia en una vecindad del origen.

Afirmación 1: *Si $u^Q\notin\mathcal{I}$ entonces $\delta_{jQ}\neq 0$.*
En efecto, por la observación anterior tenemos $Q_{(q_1,0)}$, con $q_1\geq 2$, además recordemos que según las hipótesis del Lema (2.1) $\lambda_2=0$ luego así resulta

$$\begin{cases}\delta_{1(q_1,0)} &= \lambda_1-\lambda_1q_1-0\lambda_2=\lambda_1(1-q_1)\neq 0,\\ \delta_{2(q_1,0)} &= \lambda_2-\lambda_1q_1-0\lambda_2=-\lambda_1q_1\neq 0.\end{cases}$$

Por lo tanto $\delta_{jQ}\neq 0\ \forall\ |Q|\geq 2$ siempre que $u^Q\notin\mathcal{I}$, y por tanto lo afirmación 1 está probada.

Afirmación 2: $\delta=\left\{|\delta_{jQ}|,\ |Q|\geq 2,\ u^Q\notin\mathcal{I}\right\}>0$.
En efecto

$$\begin{aligned}\left|\delta_{1(q_1,0)}\right| &= |\lambda_1|\,|(1-q_1)|>|\lambda_1|\,,\\ \left|\delta_{2(q_1,0)}\right| &= |\lambda_1|\,|q_1|>|\lambda_1|\,.\end{aligned}.$$

Así resulta que $\delta>0$, por lo tanto la afirmación 2 es cierta. Ahora para demostrar la convergencia de ξ_j usaremos el método de los mayorantes Poincaré.

Afirmación 3 : $\delta\hat{\xi}_j\ll\widehat{A_j\circ\xi}$.
En efecto, haciendo uso de la ecuación (2.7) se deduce lo siguiente:
Si $Q=(q,0)$, por lo anterior tenemos

$$\delta\left|\xi_{(q,0)}\right|\leq\left|\delta_{j(q,0)}\xi_{(q,0)}\right|=\left|c_{j(q,0)}\right|. \tag{2.8}$$

Si $Q \neq (q,0)$, entonces $\xi_Q = 0$, luego

$$\delta\,|\xi_Q| = 0 \leq |c_{jQ}| \quad \forall\, Q \neq (q,0). \tag{2.9}$$

por lo tanto de (2.8) y (2.9) resulta

$$\delta\,|\xi_Q| \leq |c_{jQ}| \quad \forall\ |Q| \geq 2.$$

Luego así de (1.6) pues resulta que la Afirmación 3 es cierta.

Por otro lado haciendo uso de la Afirmación 3 y del item 4 de la Proposiciíon 1.3, se obtiene

$$\delta\hat{\xi}_j(u_1,u_2) \ll \hat{A}_j(u_1+\hat{\xi}_1(u_1,u_2), u_2+\hat{\xi}_2(u_1,u_2))$$

luego

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{\xi}_j(u) = \delta\hat{\xi}_j(u,u) &\ll \hat{A}_j(u+\hat{\xi}_1(u,u), u+\hat{\xi}_2(u,u)),\\
&\ll \hat{A}_j(u+\tilde{\xi}_1(u), u+\tilde{\xi}_2(u)),\\
&\ll \hat{A}_j(u+\tilde{\xi}_1(u)+\tilde{\xi}_2(u), u+\tilde{\xi}_1(u)+\tilde{\xi}_2(u)),\\
&\ll \tilde{A}_j(u+\tilde{\xi}_1(u)+\tilde{\xi}_2(u)).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

En consecuencia obtenemos

$$\tilde{\xi}_1(u)+\tilde{\xi}_2(u) \ll \delta^{-1}\left(\sum_{j=1}^{2}\tilde{A}_j(u+\tilde{\xi}_1(u)+\tilde{\xi}_2(u))\right). \tag{2.11}$$

Por lo visto en el Corolario 1.1 es suficiente probar que exista $R > 0$ tal que $\tilde{\xi}_1(u)+\tilde{\xi}_2(u)$ sea convergente en $D_R(0)$. Si denotamos

$$\begin{aligned}
F(u) &= \delta^{-1}\left(\sum_{j=1}^{2}\tilde{A}_j(u)\right) = \sum_{n\geq 2} f_n u^n, \ \ \textit{donde}\ \ f_n = \delta^{-1}\left(\sum_{|Q|=n}(|a_{1Q}|+|a_{2Q}|\right), \quad n \geq 2,\\
S(u) &= \tilde{\xi}_1(u)+\tilde{\xi}_2(u) \quad = \sum_{n\geq 2} s_n u^n, \ \ \textit{donde}\ \ s_n = \sum_{|Q|=n}(|\xi_{1Q}|+|\xi_{2Q}|), \qquad n \geq 2,
\end{aligned}$$

entonces (2.11) se expresa como

$$S(u) \ll F(u+S(u)). \tag{2.12}$$

Observe que F es una función holomorfa en una vecindad del $0 \in \mathbb{C}^2$ mientras que S es una serie formal.

En una vecindad del $0 \in \mathbb{C}^2$ definimos la función f a valores complejos como

$$f(w,v) = v - F(w+v).$$

Observe que $f(0,0)=0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v)=1-F'(w+v)$, por tanto $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)=1-F'(0)\neq 0$, luego haciendo uso del Teorema de la función implicita, existe una función analitica

$$\varphi : D_R(0) \longrightarrow D_R(0) \ \ tal\ que\ \ \varphi(0)=0\ y\ f(u,\varphi(u))=0,\ \forall \in D_R(0)$$

es decir

$$\varphi(u)=F(u+\varphi(u)) \quad \forall u \in D_R(0), \tag{2.13}$$

derivando

$$\varphi'(u)=F'(u+\varphi(u)).[1+\varphi'(u)],$$

luego $\varphi'(0)=0$, por lo tanto

$$\varphi(u)=\sum_{n\geq 2}\varphi_n u^n, \quad \forall u \in D_R(0),$$

donde $\varphi_n \in \mathbb{C}$. De (2.13) tenemos

$$\sum_{n\geq 2}\varphi_n u^n=\sum_{n\geq 2} f_n(u+\varphi(u))^n,$$

igualando los términos de orden n, tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= f_2\\
\varphi_3 &= 2\varphi_2 f_2+f_3\geq f_3\\
\varphi_4 &= \varphi_2^2 f_2+2f_2\varphi_3+3f_3\varphi_2+f_4\geq f_4\\
\vdots & \qquad\quad \vdots
\end{aligned}$$

Se sigue que $\varphi(u)$ es una serie de términos no negativos y por inducción, se cumple que $\varphi_n \geq f_n$, para todo $n\geq 2$, luego de (2.12) se tiene que $s_n \leq \varphi_n$, para todo $n \geq 2$. Así $S(u) \ll \varphi(u)$, como φ es holomorfa resulta que $S(u)=\tilde{\xi}_1(u)+\tilde{\xi}_2(u)$ es convergente en $D_R(0)$, luego en (2.10) resulta que $\tilde{\xi}_j(u)$ converge y usando el Corolario 1.1 se obtiene que $\xi_j(u_1,u_2)$ converge en una vecindad del cero. Por último, observamos que por la regla anterior, podemos construir inductivamente los coeficiente de B_j y por ser el cambio de coordenadas un biholomorfismo local se sigue que B_j también es analítica en una vecindad del origen. Además como se probó anteriormente $B_j \in \mathcal{I}$, entonces sólo basta considerar

$$g=\frac{B_1}{u_2} \ \ y \ \ h=\frac{B_2}{u_2}$$

Por lo tanto existe un cambio de coordenadas $\xi(u_1,u_2)$ analítica que transforma la ecuación (2.2) en la ecuación (2.3), así el Lema 3.1 queda demostrado. ∎

Lema 2.2 *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, $0 \in U$ y $Z\,(u_1, u_2) = (\lambda_1 u_1 + u_2 g(u_1, u_2), u_2 h(u_1, u_2)) \in \mathcal{X}(U)$, con singularidad aislada en el origen. La EDO asociada sería*

$$\begin{cases} \dot{u_1} &= \lambda_1 u_1 + u_2 g(u_1, u_2), \\ \dot{u_2} &= u_2 h(u_1, u_2), \end{cases} \tag{2.14}$$

Donde $g = \sum_{|Q| \geq 1} g_{jQ} u^Q$ y $h = \sum_{|Q| \geq 1} h_{jQ} u^Q$. Entonces existe un cambio de coordenadas analítica en el origen, $p \in \mathbb{N}$ y funciones analíticas $A(x_1, x_2)$ y $f(x_1, x_2)$ definidas en una vecindad del $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, $f(0,0) \neq 0$ tales que la silla-nodo se escribe.

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= f(x_1, x_2)(x_1 + A(x_1, x_2)), \\ \dot{x_2} &= f(x_1, x_2) x_2^{p+1}. \end{cases} \tag{2.15}$$

Prueba: En efecto, para transformar la ecuación (2.14) en la (2.15) debemos hallar un cambio de coordenadas del tipo siguiente

$$(x_1, x_2) = \xi(u_1, u_2) = (u_1, \eta(u_1, u_2))$$

donde $\eta(u_1, u_2) = u_2 \tilde{\eta}(u_1, u_2)$, con $\tilde{\eta}(0,0) \neq 0$.
Para una mejor comprensión de la prueba consideraremos las funciones holomorfas $C(u_1, u_2)$ y $D(u_1, u_2)$ definidas como

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= \lambda_1 u_1 + u_2 g(u_1, u_2) \\ D(u_1, u_2) &= u_2 h(u_1, u_2). \end{aligned}$$

Por otro lado, necesitamos garantizar la existencia de algún $p \in \mathbb{N}$ tal que $u_2^{p+1} \in \mathcal{J}$ (donde $\mathcal{J}$ es el ideal generado por $C(u_1, u_2)$ y $D(u_1, u_2)$).
En efecto, observe lo siguiente

$$C(u_1, 0) = \lambda_1 u_1, \quad C(0,0) = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial u_1}(0,0) = \lambda_1 \neq 0$$

En consecuencia $C(u_1, u_2)$ es regular de orden 1 con respecto a la variable u_1 en 0. Luego haciendo uso del Teorema de Preparación de Weierstrass, la función holomorfa $C(u_1, u_2)$ queda expresada como

$$C(u_1, u_2) = \tilde{C}(u_1, u_2)\,(u_1 + a(u_2)) \tag{2.16}$$

donde $a(0) = 0$ y $\tilde{C}(u_1, u_2) \in \mathcal{O}(\triangle)$ con $\tilde{C}(u_1, u_2) \neq 0$ en $\triangle$ ($\triangle$ polidisco), observe también que de la ecuación (2.16) se obtiene que

$$\tilde{C}(u_1, 0) = \lambda_1$$

Por otro lado aplicando el Teoremas de División de Weierstrass a las funciones holomorfas $D(u_1, u_2)$ y $u_1 + a(u_2)$, se deduce que $D(u_1, u_2)$ se puede escribir como

$$D(u_1, u_2) = q(u_1, u_2)\,(u_1 + a(u_2)) + b(u_2) \tag{2.17}$$

donde $q(u_1, u_2)$ y $b(u_2)$ son funciones holomorfas en $0 \in \mathbb{C}^2$, además notar que de (2.17) resulta

$$q(u_1, 0) = 0 \quad \text{y} \quad b(0) = 0.$$

Otra forma también de poder expresar $D(u_1, u_2)$ es la siguiente

$$D(u_1, u_2) = Q(u_1, u_2)C(u_1, u_2) + b(u_2) \tag{2.18}$$

donde $Q(u_1, u_2) = \dfrac{q(u_1, u_2)}{\tilde{C}(u_1, u_2)}$

Afirmación 1 : *La función analitica $b(u_2) \neq 0$.*
En efecto, supongamos lo contrario es decir que $b(u_2) = 0$, entonces (2.18) seria expresado como

$$D(u_1, u_2) = Q(u_1, u_2)C(u_1, u_2),$$

luego el problema (2.14) quedaría de la forma siguiente

$$\begin{cases} \dot{u_1} &= C(u_1, u_2), \\ \dot{u_2} &= Q(u_1, u_2)C(u_1, u_2), \end{cases}$$

es decir con campo $Z(u_1, u_2) = (C(u_1, u_2), Q(u_1, u_2)C(u_1, u_2))$, por otro lado, consideremos la siguiente sucesión $z_n = (-a(1/n), 1/n)$, observamos que $C(z_n) = 0$, además tenemos

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} z_n = 0,$$

así se tendría que $(0, 0)$ no sería punto singular aislado, lo cual es una contradicción, por lo tanto $b(u_2) \neq 0$.
En consecuencia se sigue que existe $p \in \mathbb{N}$ y $\tilde{b} = \tilde{b}(u_2)$ función analitica en $(0, 0) \in \mathbb{C}$, con $\tilde{b}(0) \neq 0$, tal que

$$b(u_2) = u_2^{p+1}.\tilde{b}(u_2),$$

luego (2.18) se expresa como

$$D(u_1,u_2) = Q(u_1,u_2)C(u_1,u_2) + u_2^{p+1}.\tilde{b}(u_2). \tag{2.19}$$

Como $\tilde{b}(0) \neq 0$, entonces por la continuidad resulta que para una vecindad de $(0,0)$ se tiene que $\tilde{b}(u_2) \neq 0$, luego de (2.19) tenemos

$$u_2^{p+1} = \frac{1}{\tilde{b}(u_2)}D(u_1,u_2) - \frac{Q(u_1,u_2)}{\tilde{b}(u_2)}C(u_1,u_2), \tag{2.20}$$

y por tanto $u_2^{p+1} \in \mathcal{J}$.

En conclución se a garantizado la existencia de un $p \in \mathbb{N}$ tal que $u_2^{p+1} \in \mathcal{J}$, y es pues este mismo p que se utilizará en la transformación de (2.14) en la (2.15). Ahora nuestro objetivo principal se reduce a encontrar $\eta(u_1,u_2)$, $f(x_1,x_2)$ y $A(x_1,x_2)$ que satisfagan las condiciones requeridas.

En efecto consideremos $\eta(u_1,u_2)$, como solución de la ecuación

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \eta}{\partial u_2} + Q(u_1,u_2)\dfrac{\partial \eta}{\partial u_1} & = & 0 \\ \eta(0,u_2) & = & \rho u_2, \end{array} \right. \tag{2.21}$$

donde $\rho \in \mathbb{C}$ satisface lo siguiente $\rho^p = \dfrac{\tilde{b}(0)}{\lambda_1}$.

La función holomorfa $\eta(u_1,u_2)$ existe gracias al teorema 1.5, además se deduce de (2.21) que

$$\eta(u_1,u_2) = \rho u_2 + u_1 u_2 \phi(u_1,u_2) \tag{2.22}$$

donde $\phi(u_1,u_2)$ es una función holomorfa en $0 \in \mathbb{C}^2$. En consecuencia nuestro cambio de coordenadas $\xi(u_1,u_2)$ se expresa de la forma siguiente

$$\xi(u_1,u_2) = (u_1, \rho u_2 + u_1 u_2 \phi(u_1,u_2)) \tag{2.23}$$

también observe que $\xi'(0,0) \in GL(\mathbb{C}^2)$, luego por el Teorema de la función inversa existe $\varphi(x_1,x_2)$ holomorfa tal que

$$\xi \circ \varphi(x_1,x_2) = (x_1,x_2) \quad \text{y} \quad \varphi \circ \xi(u_1,u_2) = (u_1,u_2) \tag{2.24}$$

además de (2.23) y (2.24) se obtiene que

$$\varphi(x_1,x_2) = (x_1, \varphi_2(x_1,x_2)).$$

Por otro lado definimos $\tilde{\eta}(u_1,u_2)$, $f(x_1,x_2)$ y $A(x_1,x_2)$ de la forma siguiente

$$\tilde{\eta}(u_1,u_2) = \rho + u_1\phi(u_1,u_2) \tag{2.25}$$

$$f(x_1,x_2) = \frac{\partial \eta}{\partial u_2}(x_1,\varphi_2(x_1,x_2))\frac{\tilde{b}(\varphi_2(x_1,x_2)}{[\tilde{\eta}(x_1,\varphi_2(x_1,x_2))]^{p+1}} \tag{2.26}$$

$$A(x_1,x_2) = \left(\frac{1}{f(x_1,x_2)} - \frac{1}{\lambda_1}\right)\lambda_1 x_1 + \frac{1}{f(x_1,x_2)}\varphi_2(x_1,x_2).g(x_1,\varphi_2(x_1,x_2)) \tag{2.27}$$

Observe que $f(0,0) = \lambda_1 \neq 0$, por lo tanto $A(x_1, x_2)$ esta bien definda. Además también note que $\eta(u_1, u_2) = u_2\tilde{\eta}(u_1, u_2)$.

A continuación probaremos que la funcion holomorfa $\xi(u_1, u_2)$ es el cambio de variable requerido por el Lema 2.2 para transformar la ecuación (2.14) en (2.15).

En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1, && (2.28) \\ x_2 &= \eta(u_1, u_2) = u_2\tilde{\eta}(u_1, u_2), && (2.29) \end{aligned}$$

derivando (2.28) respecto de t, resulta

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= \dot{u_1} = \lambda_1 u_1 + u_2 g(u_1, u_2) \\ &= \lambda_1 x_1 + \varphi_2(x_1, x_2) g(x_1, \varphi_2(x_1, x_2)) \\ &= f(x_1, x_2)\frac{1}{f(x_1, x_2)} \left(\lambda_1 x_1 + \varphi_2(x_1, x_2) g(x_1, \varphi_2(x_1, x_2))\right) \\ &= f(x_1, x_2)\left[x_1 + \left(\frac{1}{f(x_1, x_2)} - \frac{1}{\lambda_1}\right)\lambda_1 x_1 + \frac{1}{f(x_1, x_2)}\varphi_2(x_1, x_2).g(x_1, \varphi_2(x_1, x_2))\right] \\ &= f(x_1, x_2)\left[x_1 + A(x_1, x_2)\right] \end{aligned}$$

por lo tanto hemos llegado a

$$\dot{x_1} = f(x_1, x_2)\left[x_1 + A(x_1, x_2)\right].$$

Ahora derivando (2.29) respecto a t, resulta

$$\begin{aligned} \dot{x_2} &= \frac{\partial \eta}{\partial t}(u_1, u_2) = \frac{\partial \eta}{\partial u_1}\dot{u_1} + \frac{\partial \eta}{\partial u_2}\dot{u_2} \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial u_1} C(u_1, u_2) + \frac{\partial \eta}{\partial u_2} D(u_1, u_2). && (2.30) \end{aligned}$$

Por otro lado de (2.26) se tiene lo siguiente

$$\frac{\partial \eta}{\partial u_2}(u_1, u_2) = f(u_1, \eta(u_1, u_2))\left[\tilde{\eta}(u_1, u_2)\right]^{p+1} \frac{1}{\tilde{b}(u_2)} \quad (2.31)$$

además haciendo uso de (2.21) resulta que

$$\frac{\partial \eta}{\partial u_1}(u_1, u_2) = f(u_1, \eta(u_1, u_2))\left[\tilde{\eta}(u_1, u_2)\right]^{p+1} \frac{-Q(u_1, u_2)}{\tilde{b}(u_2)} \quad (2.32)$$

observe que de (2.31), (2.32) y (2.20) se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial u_1} C(u_1, u_2) + \frac{\partial \eta}{\partial u_2} D(u_1, u_2) &= f(u_1, \eta(u_1, u_2)) u_2^{p+1}\left[\tilde{\eta}(u_1, u_2)\right]^{p+1} \\ &= f(u_1, \eta(u_1, u_2))\left[u_2\tilde{\eta}(u_1, u_2)\right]^{p+1} \\ &= f(u_1, \eta(u_1, u_2))\left[\eta(u_1, u_2)\right]^{p+1} \\ &= f(x_1, x_2) x_2^{p+1} && (2.33) \end{aligned}$$

luego así de (2.30) y (2.33) tenemos que

$$\dot{x_2} = f(x_1,x_2)x_2^{p+1}$$

por lo tanto la función holomorfa $\xi(u_1,u_2)$ es el cambio de variable requerido para transformar la ecuación (2.14) en (2.15), por tanto el Lema 2.2 queda probado. ■

Lema 2.3 *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, $0 \in U$ y $Z(x_1,x_2) = \left(x_1 + x_2A(x_1,x_2), x_2^{p+1}\right) \in \mathcal{X}(U)$, con singularidad aislada en el origen. La EDO asociada sería*

$$\begin{cases} \dot{x_1} &=& x_1 + x_2A(x_1,x_2), \\ \dot{x_2} &=& x_2^{p+1}, \end{cases} \tag{2.34}$$

donde $A(x_1,x_2) = \sum_{|Q|\geq 1} a_Q x^Q$. Entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ y un sistema de coordenadas analíticas donde la ecuación anterior se escribe como

$$\begin{cases} \dot{w_1} &=& w_1(1+\lambda w_2^p) + w_2R(w_1,w_2), \\ \dot{w_2} &=& w_2^{p+1}, \end{cases} \tag{2.35}$$

donde $R(w_1,w_2)$ es de multiciplidad por lo menos $p+1$ en $0 \in \mathbb{C}^2$.

Prueba: En efecto, para ello primero transformaremos la ecuación (2.34) en la siguiente expresión

$$\begin{cases} \dot{x_1} &=& x_1(1+\tilde{B}(x_2)) + x_2S(x_1,x_2), \\ \dot{x_2} &=& x_2^{p+1}, \end{cases} \tag{2.36}$$

en el cual $\tilde{B}(x_2)$ será un polinomio de a lo mas grado p y $S(x_1,x_2)$ es de multiciplidad por lo menos $p+1 \in \mathbb{N}$.

En efecto, consideremos los cambios de variables sucesivos de la forma

$$\xi_l(x_1,x_2) = \begin{cases} (x_1 - a_{(0,1)}x_2^2, x_2) \quad , & si\ l=1 \\ (x_1 + \xi_{(l,1)}x_1^l x_2 + \cdots + \xi_{(2,l-1)}x_1^2x_2^{l-1} + \xi_{(0,l+1)}x_2^{l+1}, x_2) \quad , & si\ l \geq 2, \end{cases}$$

siendo ξ_Q de la siguiente manera

$$\xi_{(l,1)} = \frac{-\tilde{a}_{(l,0)}}{1-l}, \cdots, \xi_{(2,l-1)} = \frac{-\tilde{a}_{(2,l-1)}}{1-2},\ y\ \xi_{(0,l+1)} = -\tilde{a}_{(0,l)}$$

y los $\tilde{a}_Q$ con $|Q| = l$ dependen de los $\tilde{a}_{Q'}$, con $|Q'| \leq l-1$.

Dichos cambios de variables sucesivos se aplicarán hasta $l = p$, el cual nos permitirá transformar la ecuación (2.34) en la (2.36). Entonces a partir de ahora sin perdida de generalidad consideraremos

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= x_1(1+\tilde{B}(x_2)) + x_2 S(x_1,x_2), \\ \dot{x_2} &= x_2^{p+1}, \end{cases} \tag{2.37}$$

con $\tilde{B}(x_2) = b_i x_2^i + b_{i+1} x_2^{i+1} + \cdots + b_p x_2^p$ y $S(x_1, x_2)$ es de multiciplidad por lo menos $p+1 \in \mathbb{N}$ en el origen. Ahora en esta segunda parte deseamos transformar la ecuación (2.37) en

$$\begin{cases} \dot{w_1} &= w_1(1+\tilde{b}_{i+1} w_2^{i+1} + \tilde{b}_{i+2} w_2^{i+2} + \cdots + \tilde{b}_p w_2^p) + w_2 \tilde{R}(w_1,w_2), \\ \dot{w_2} &= w_2^{p+1}, \end{cases} \tag{2.38}$$

para realizar esta transformación tomaremos como cambio de variable a la siguiente función holomorfa

$$H_i(w_1, w_2) = (w_1, w_2 + \frac{b_i}{p-i} w_2^{i+1}),$$

observamos que este cambio de variable solo tiene sentido si $i < p$, luego haciendo uso de este cambio pues llegamos de la ecuación (2.37) a la (2.38), prosiguiendo sucesivamente hasta llegar a la ecuación

$$\begin{cases} \dot{w_1} &= w_1(1+\lambda w_2^p) + w_2 R(w_1,w_2), \\ \dot{w_2} &= w_2^{p+1}, \end{cases}$$

donde $R(w_1, w_2)$ es de multiciplidad por lo menos $p+1$ en el origen, por lo tanto el Lema 2.3 queda probado. ■

Sección 3

Formas Normales

3.1 Teorema de Dulac

Iniciamos con las formas normales que serán muy convenientes en la secuencia del trabajo. El resultado principal en esta sección es el siguiente.

Teorema 3.1 (*Dulac*) *Sea* $U \subseteq \mathbb{C}^2$ *una vecindad abierta del origen de* $\mathbb{C}^2$*, y* $Z \in \mathcal{X}(U)$ *de la forma* $Z(z_1, z_2) = (\lambda_1 z_1 + A_1(z_1, z_2), A_2(z_1, z_2))$*, con singularidad aislada en el origen. La EDO asociada sería*

$$\begin{cases} \dot{z_1} &= \lambda_1 z_1 + A_1(z_1, z_2), \\ \dot{z_2} &= A_2(z_1, z_2), \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $A_j(z_1, z_2) = \sum\limits_{|Q| \geq 2} a_{jQ} z^Q$*,* $j = 1, 2$ *definida en una vecindad del* $0 \in \mathbb{C}^2$*, entonces existe* $p \geq 1$ *entero,* $\lambda \in \mathbb{C}$ *y un sistema de coordenada donde la ecuación anterior se escribe como*

$$\begin{cases} \dot{w_1} &= w_1(1 + \lambda w_2^p) + w_2 R(w_1, w_2), \\ \dot{w_2} &= w_2^{p+1}, \end{cases} \tag{3.2}$$

donde $R(w_1, w_2)$ *es de multiciplidad por lo menos* $p+1$ *en* $0 \in \mathbb{C}^2$*. La ecuación* (3.2) *es llamada la* ***forma normal de Dulac*** *de la silla-nodo.*

Prueba: Para ello haremos uso de los Lemas vistos en la Sección anterior. En efecto observamos que la hipotesís del Teorema 3.1 son las mismas que la del Lema 2.1, entonces existe un cambio de coordenadas $\xi(z_1, z_2)$, tal que la ecuación (3.1) es llevado a

$$\begin{cases} \dot{u_1} &= \lambda_1 u_1 + u_2 g(u_1, u_2), \\ \dot{u_2} &= u_2 h(u_1, u_2), \end{cases} \tag{3.3}$$

donde $g = \sum_{|Q|\geq 1} g_{jQ}u^Q$ y $h = \sum_{|Q|\geq 1} h_{jQ}u^Q$, son funciones holomorfas en $0 \in \mathbb{C}^2$. Ahora sin perdida de generalidad consideremos las silla-nodo (3.3), luego haciendo uso del Lema 2.2, se prueba que existe un sistema de coordenadas analíticas $\varphi(u_1, u_2)$ tal que la ecuación (3.3) es transformada a

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= f(x_1, x_2)\left(x_1 + A(x_1, x_2)\right), \\ \dot{x_2} &= f(x_1, x_2)x_2^{p+1}, \end{cases} \tag{3.4}$$

donde $f(0,0) \neq 0$ y $A(x_1, x_2) = \sum_{|Q|\geq 2} a_Q x^Q$, son funciones holomorfa $0 \in \mathbb{C}^2$. Observe que del hecho que $f(0,0) \neq 0$, la ecuación (3.4) es equivalente a

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= x_1 + A(x_1, x_2), \\ \dot{x_2} &= x_2^{p+1}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Ahora consideremos una cambio de variable de la forma

$$\xi(x_1, x_2) = (x_1 + \xi_1(x_1, x_2), x_2)$$

y siguiendo la misma idea de la prueba del Lema 2.1, se llega a verificar que $\xi(x_1, x_2)$ es holomorfa en $0 \in \mathbb{C}^2$ y transforma la ecuación (3.5) en

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= x_1 + x_2 A_1(x_1, x_2), \\ \dot{x_2} &= x_2^{p+1}, \end{cases} \tag{3.6}$$

donde $A_1(x_1, x_2) = \sum_{|Q|\geq 1} a_{1Q}x^Q$, función holomorfa en $0 \in \mathbb{C}^2$. Finalmente aplicando el resultado del Lema 2.3 a la ecuación (3.6), nos garantiza la existencia de cambios de variables sucesivos tal que la ecuación (3.6) es llevada a

$$\begin{cases} \dot{w_1} &= w_1(1 + \lambda w_2^p) + w_2 R(w_1, w_2), \\ \dot{w_2} &= w_2^{p+1}, \end{cases}$$

donde $R(w_1, w_2)$ es una función holomorfa en una vecindad del origen de $\mathbb{C}^2$, además es de multiciplidad por lo menos $p+1$ en $0 \in \mathbb{C}^2$, y así queda probado el Teorema de Dulac. ∎

Observación 3.1 *Los siguientes items son propios del teorema de Dulac*

1. *El número entero $p+1$ que aparece en la ecuación (3.2) se denomina número de Milnor.*

2. *El Teorema de Dulac, nos permite hacer una* ***primera clasificacion*** *es decir, podemos agrupar en un conjunto aquellas sillas-nodos con número de Milnor $p+1$ y dicho conjunto será denotado por D_p.*

3. *Una pregunta natural que surge del Teorena de Dulac es, existirá una cambio de coordenadas analitica de tal manera que la ecuación (3.2) se reduzca a*

$$\begin{cases} \dot{w}_1 &=& w_1(1+\lambda w_2^p), \\ \dot{w}_2 &=& w_2^{p+1}, \end{cases}$$

para responder esta interrogante introduciremos algunas definiciones extras.

3.2 Clasificación Formal. Formas Normales

En ésta subsección se responderá a la interrogante hecha en la observación (3.1), además mostraremos una sub-clasificación del conjunto D_p, via un cambio formal de coordenadas en $\widehat{G}^{\circ}$.

Definición 3.1 *Consideremos lo siguiente*

1.- *Sea G° el grupo de difeomorfismos analíticos locales de $(\mathbb{C}^2,(0,0))$ del tipo*

$$(x_1,x_2) \longrightarrow (\varphi(x_1,x_2),x_2)$$

con $\varphi(x_1,0)=x_1$

2.- *Sea $\widehat{G}^{\circ}$ el grupo de difeomorfimos formales de $\mathbb{C}^2$ en $(0,0)$ del tipo*

$$(x_1,x_2) \longrightarrow (x_1+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x_1)x_2^n, x_2)$$

donde los coeficiente φ_n son holomorfos sobre una misma vecindad del origen de $\mathbb{C}$.

A continuación se mostrará algunos Lemas, que nos serviran para responder la interrogante hecha anteriormente.

Lema 3.1 *Sea* $U \subseteq \mathbb{C}^2$ *abierto,* $0 \in U$ *y* $Z(x_1, x_2) = \left(x_1 + x_2A(x_1,x_2), x_2^{p+1}\right) \in \mathcal{X}(U)$*, con singularidad aislada en el origen. La EDO asociada a la función holomorfa* $Z(x_1, x_2)$ *sería*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x_1} & = & x_1 + x_2A(x_1,x_2), \\ \dot{x_2} & = & x_2^{p+1}, \end{array}\right. \tag{3.7}$$

donde $A(x_1,x_2) = \sum_{|Q|\geq 1} a_Q x^Q$. *Entonces existe un sistema de coordenadas formal donde la ecuación anterior se escribe como*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x_1} & = & x_1(1 + f(x_2)) \\ \dot{x_2} & = & x_2^{p+1}, \end{array}\right.$$

donde $f \in \mathbb{C}[[x_2]]$.

Prueba: En efecto, analizaremos formalmente el Problema. Consideremos un cambio de coordenadas (formal) del tipo perturbación de la identidad

$$x = (x_1,x_2) = \xi(u_1,u_2) = (u_1 + \xi_1(u_1,u_2), u_2 + \xi_2(u_1,u_2))$$

donde $\xi_j(u_1,u_2) = \sum_{|Q|\geq 2} \xi_{jQ} u^Q$, $j = 1, 2$ que tranforme (3.7) en

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{u_1} & = & u_1 + B_1(u_1,u_2) \\ \dot{u_2} & = & \qquad B_2(u_1,u_2), \end{array}\right. \tag{3.8}$$

donde $B_j(u_1,u_2) = \sum_{|Q|\geq 2} b_{jQ} u^Q$, $j = 1,\ 2$. como $x_j = u_j + \xi_j(u_1,u_2)$ entonces

$$\begin{aligned} \lambda_j x_j + A_j(x_1,x_2) &= \dot{u}_j + \sum_{k=1}^{2} \dot{u}_k \frac{\partial \xi}{\partial u_k}(u_1,u_2) \\ &= \lambda_j u_j + B_j(u_1,u_2) + \sum_{k=1}^{2} (\lambda_k u_k + B_k(u_1,u_2)) \frac{\partial \xi}{\partial u_k}(u_1,u_2) \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $A_1(x_1,x_2) = x_2A(x_1,x_2)$ y $A_2(x_1,x_2) = x_2^{p+1}$, luego de (3.9) ordenando y cancelando términos tenemos

$$\lambda_j \xi_j(u_1,u_2) - \sum_{k=1}^{2} \lambda_k u_k \frac{\partial \xi_j}{\partial u_k}(u_1,u_2) - B_j(u_1,u_2) = \sum_{k=1}^{2} B_k(u_1,u_2) \frac{\partial \xi_j}{\partial u_k}(u_1,u_2) - A_j(\xi(u_1,u_2)$$

Prosiguiendo de forma similar como en el Lema 2.1 resulta

$$\sum_{|Q|\geq 2} (\delta_{jQ}\xi_{jQ} - b_{jQ})\, u^Q = \frac{\partial \xi_j}{\partial u_1} B_1(u_1,u_2) + \frac{\partial \xi_j}{\partial u_2} B_2(u_1,u_2) - A_j(\xi(u_1,u_2)). \tag{3.10}$$

$$= \sum_{|Q|\geq 2} c_{jQ} u^Q \tag{3.11}$$

donde $\delta_{jQ} = \lambda_j - \sum_{k=1}^{2} \lambda_k q_k$, además $c_{jQ} = a_{j,Q}$, si $|Q| = 2$ y c_{jQ} es función de a_{1Q}, a_{2Q}, $a_{1Q'}$, $a_{2Q'}$, $b_{1Q'}$, $b_{2Q'}$, $\xi_{1Q'}$, $\xi_{2Q'}$, (con $|Q'| < |Q|$) si $|Q| \geq 2$ observe que los a_{jQ} son los coeficientes de $A_j(x_1, x_2)$. Vamos a despejar las incógnitas b_{jQ} ξ_{jQ} de (3.11) imponiendo la siguiente regla

$$\begin{cases} \delta_{jQ} = 0 \quad , \quad \textit{entonces} \;\; b_{jQ} = 0, \\ \delta_{jQ} \neq 0 \quad , \quad \textit{entonces} \;\; \xi_{jQ} = 0. \end{cases}$$

recordemos que en este caso $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0$. Por otro lado analizando δ_{jQ}, se observa que

$$\begin{cases} \delta_{jQ} = 0 \quad , \quad \textit{si sólo si} \;\; Q = (1, q), \; q \neq 1 \\ \delta_{jQ} \neq 0 \quad , \quad \textit{si sólo si} \;\; Q = (0, q), \; q \neq 2. \end{cases}$$

Luego de la regla anterior impuesta resulta que

$$\xi_1(u_1, u_2) = \xi_{1(2,0)} u_1^2 + \xi_{1(0,2)} u_2^2 + \xi_{1(3,0)} u_1^3 + \xi_{1(2,1)} u_1^2 u_2 + \cdots \tag{3.12}$$

$$\xi_2(u_1, u_2) = \xi_{2(2,0)} u_1^2 + \xi_{2(1,1)} u_2 u_1 + \xi_{2(3,0)} u_1^3 + \xi_{2(2,1)} u_1^2 u_2 + \cdots \tag{3.13}$$

$$B_1(u_1, u_2) = b_{1(1,1)} u_1 u_2 + b_{1(1,2)} u_1 u_2^2 + b_{1(1,3)} u_1 u_2^3 + b_{1(1,4)} u_1 u_2^4 + \cdots \tag{3.14}$$

$$B_2(u_1, u_2) = b_{2(0,2)} u_2^2 + b_{2(0,3)} u_2^3 + b_{2(0,4)} u_2^4 + b_{2(0,5)} u_2^5 + \cdots \tag{3.15}$$

Afirmación: *Los coeficiente $b_{2(0,q)}$ satisfacen el siguiente hecho*

$$b_{2(0,q)} = \begin{cases} 0 \quad , \quad \textit{si } q \neq p+1 \\ 1 \quad , \quad \textit{si } q = p+1. \end{cases}$$

En efecto, de (3.10) tenemos

$$\sum_{|Q| \geq 2} (\delta_{2Q} \xi_{2Q} - b_{2Q})\, u^Q = \frac{\partial \xi_2}{\partial u_1} B_1(u_1, u_2) + \frac{\partial \xi_2}{\partial u_2} B_2(u_1, u_2) - [u_2 + \xi_2(u_1, u_2)]^{p+1} \tag{3.16}$$

Observemos de (3.13) y (3.14) se tiene

$$B_1(u_1, u_2), \; \frac{\partial \xi_2}{\partial u_2} \in \mathcal{I} \tag{3.17}$$

donde $\mathcal{I}$ es el ideal generado por u_1. Entonces si queremos hallar $b_{2(0,q)}$ pues el único término que nos brindará información es $[u_2 + \xi_2(u_1, u_2)]^{p+1}$, luego desarrollando este último término tenemos

$$[u_2 + \xi_2(u_1, u_2)]^{p+1} = u_2^{p+1} + T(u_1, u_2)$$

donde $T(u_1, u_2) \in \mathcal{I}$, así la afirmación está probada. Por lo tanto resulta como consecuencia que $B_2(u_1, u_2) = u_2^{p+1}$. Entonces logramos encontrar un cambio de coordenada $\xi(u_1, u_2)$ tal que tranforme (3.7) en

$$\begin{cases} \dot{u_1} &= u_1 + b_{1(1,1)}u_1u_2 + b_{1(1,2)}u_1u_2^2 + b_{1(1,3)}u_1u_2^3 + b_{1(1,4)}u_1u_2^4 + \cdots \\ \dot{u_2} &= u_2^{p+1}, \end{cases} \tag{3.18}$$

Ordenando (3.18) tenemos

$$\begin{cases} \dot{u_1} &= u_1(1 + f(u_2)) \\ \dot{u_2} &= u_2^{p+1}, \end{cases}$$

donde $f(u_2) = b_{1(1,1)}u_2 + b_{1(1,2)}u_2^2 + b_{1(1,3)}u_2^3 + \cdots$, luego así queda probado el Lema 3.1. ■

Lema 3.2 *Sea* $0 \in U \subseteq \mathbb{C}^2$ *abierto, y* $Z(x_1, x_2) = \left(x_1(1 + \lambda x_2^p) + x_2R(x_1, x_2), x_2^{p+1}\right) \in \mathcal{X}(U)$, *con singularidad aislada en el origen. La EDO asociada a la función holomorfa* $Z(x_1, x_2)$ *sería*

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= x_1(1 + \lambda x_2^p) + x_2R(x_1, x_2), \\ \dot{x_2} &= x_2^{p+1}, \end{cases} \tag{3.19}$$

donde la multiciplidad de $R(x_1, x_2)$ *en cero es como minimo* $p+1$ $(mult(R, 0) \geq p+1)$. *Entonces existe un cambio de coordenadas formal* $H \in \widehat{G}^\circ$ *donde la ecuación anterior se escribe como*

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= x_1(1 + \lambda x_2^p) + x_1x_2B(x_1, x_2), \\ \dot{x_2} &= x_2^{p+1}, \end{cases}$$

donde $B(x_1, x_2)$ *es de multiciplidad por lo menos* $\boldsymbol{p}$ *en el origen*

Prueba: En efecto, del Lema 3.1 tenemos que (3.19) es formalmente equivalente a

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= x_1(1 + f(x_2)) \\ \dot{x_2} &= x_2^{p+1}, \end{cases} \tag{3.20}$$

donde $f \in \mathbb{C}[[x_2]]$.

Observe además que una solución de (3.20) tomando como punto inicial el origen es (X_1, X_2), con $X_1 = 0$ luego del hecho que (3.19) y (3.20) son formalmente equivalentes entonces existe ξ como en el Lema 3.1 tal que (3.19) y (3.20) son conjugados.

Consideremos el flujo $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ asociado al problema (3.19) alrededor del origen, luego así tenemos

$$\begin{aligned} \xi(0, X_2) &= (\varphi_1(\xi(0,0), T), \varphi_2(\xi(0,0), T)) \\ (\xi_1(0, X_2), X_2) &= (\varphi_1(0, T), \varphi_2(0, T)) \end{aligned} \tag{3.21}$$

llamemos $\mu(X_2) = \xi_1(0, X_2)$, $x_1 = \varphi_1(0,T)$ y $x_2 = \varphi_2(0,T)$, luego de (3.21) resulta que

$$x_1 = \mu(x_2) \tag{3.22}$$

luego reemplazando (3.22) en (3.19) obtenemos

$$\mu(x_2)(1 + \lambda x_2^p) + x_2 R\left(\mu(x_2), x_2\right) - x_2^{p+1}\mu'(x_2) = 0 \tag{3.23}$$

de la igualdad anterior observe que $\mu(0) = 0$.

Afirmación : *La aplicación $\mu(x_2)$ es de la forma*

$$\mu(x_2) = \sum_{i=p+2}^{\infty} a_i x_2^i, \qquad a_i \in \mathbb{C}$$

En efecto, consideremos inicialmente $\mu(x_2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_2^i$, luego reemplazando en la ecuación (3.23) resulta

$$(a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 + \cdots)(1 + \lambda x_2^p) + x_2 R(\mu(x_2), x_2) - x_2^{p+1}\mu(x_2)' = 0 \tag{3.24}$$

Luego comparando los términos de la ecuación (3.24) tenemos

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{p+1} = 0$$

Por tanto

$$\mu(x_2) = \sum_{i=p+2}^{\infty} a_i x_2^i, \qquad a_i \in \mathbb{C}$$

Entonces así queda justificada la afirmación.

Gracias a la afirmación anterior, podemos considerar el siguiente cambio de variable

$$H(x_1, x_2) = (x_1 + \mu(x_2), x_2) \in \widehat{G}^{\circ}$$

lo que deseamos nosotros es encontrar una silla-nodo de la forma

$$\begin{cases} \dot{x_1} &=& x_1(1 + \lambda x_2^p) + x_1 x_2 B(x_1, x_2), \\ \dot{x_2} &=& x_2^{p+1}, \end{cases} \tag{3.25}$$

tal que el cambio de coordenadas H lo transforme en una silla-nodo tipo (3.19), luego así $x_1 = X_1 + \mu(X_2)$ y $x_2 = X_2$, en consecuencia

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= \dot{X}_1 + \mu'(X_2)\dot{X}_2 \\ x_1(1 + \lambda x_2^p) + x_2 R(x_1, x_2) &= X_1(1 + \lambda X_2^p) + X_1 X_2 B(X_1, X_2) + \mu'(X_2) X_2^{p+1} \\ (X_1 + \mu(X_2))(1 + \lambda x_2^p) + X_2 R\left(X_1 + \mu(X_2), X_2\right) &= X_1(1 + \lambda X_2^p) + X_1 X_2 B(X_1, X_2) + \mu'(X_2) X_2^{p+1} \end{aligned}$$

reduciendo términos tenemos

$$\mu(X_2)(1+\lambda X_2^p) + X_2 R(X_1+\mu(X_2), X_2) - \mu'(X_2)X_2^{p+1} = X_1X_2B(X_1, X_2)$$

además sabemos que $\mu(x_2)$ satisface (3.23), así resulta

$$-x_2R(\mu(x_2), x_2) + x_2R(x_1+\mu(x_2), x_2) = x_1x_2B(x_1, x_2) \tag{3.26}$$

consideremos $R(x_1, x_2) = \sum_{|Q|\geq p+1} a_Q x_1^{q_1} x_2^{q_2}$ así (3.26) queda expresado como

$$\sum_{|Q|\geq p+1} a_Q(x_1+\mu(x_2))^{q_1} x_2^{q_2} - \sum_{|Q|\geq p+1} a_Q(\mu(x_2))^{q_1} x_2^{q_2} = x_1B(x_1, x_2) \tag{3.27}$$

Observe que la expresión anterior, al momento de realizar la diferencia todos los términos de la forma $a_{(0,q)}$ se eliminan, entonces así (3.27) se muestra como

$$\sum_{|Q|\geq p+1} a_{(q_1+1,q_2)} \left((x_1+\mu(x_2))^{q_1+1} - \mu(x_2)^{q_1+1}\right) x_2^{q_2} = x_1B(x_1, x_2)$$

Haciendo uso del binomio de Newton obtenemos

$$\sum_{|Q|\geq p+1} a_{(q_1+1,q_2)} \left(\sum_{n=1}^{q_1+1} \frac{(q_1+1)!}{n!(q_1+1-n)!}\mu(x_2)^{q_1+1-n}x_1^n\right) x_2^{q_2} = x_1B(x_1, x_2)$$

así el B encontrado es

$$B(x_1, x_2) = \sum_{|Q|\geq p+1} a_{(q_1+1,q_2)} \left(\sum_{n=1}^{q_1+1} \frac{(q_1+1)!}{n!(q_1+1-n)!}\mu(x_2)^{q_1+1-n}x_1^{n-1}\right) x_2^{q_2}$$

además notamos que $mult(B, 0) \geq p$. Por tanto queda probado el Lema 3.2. ∎

Lema 3.3 *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, y $Z(x_1, x_2) = \left(x_1(1+\lambda x_2^p) + x_1x_2B(x_1, x_2), x_2^{p+1}\right) \in \mathcal{X}(U)$, con singularidad aislada en el origen. La EDO asociada a la función holomorfa $Z(x_1, x_2)$ sería*

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= x_1(1+\lambda x_2^p) + x_1x_2B(x_1, x_2), \\ \dot{x_2} &= x_2^{p+1}, \end{cases} \tag{3.28}$$

donde la multiciplidad de $B(x_1, x_2)$ en cero es como minimo p ($mult(B, 0) \geq p$). Entonces existe un cambio de coordenadas formal $H \in \widehat{G}^{\circ}$ donde la ecuación anterior se escribe como

$$\begin{cases} \dot{w_1} &= w_1(1+\lambda w_2^p) + w_1w_2B(0, w_2), \\ \dot{w_2} &= w_2^{p+1}, \end{cases} \tag{3.29}$$

Prueba: En efecto, observe que alcanzaria la forma (3.29) simplemente eliminando formalmente los monomios que no son asociados a la resonancia; entretanto, queremos obtener un cambio de variable en $\widehat{G}^{\circ}$. Para mayor claridad escribiremos la silla-nodo (3.28) como

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= x_1\widetilde{C}(x_1,x_2), \\ \dot{x_2} &= x_2^{p+1}, \end{cases} \tag{3.30}$$

donde $\widetilde{C}(x_1,x_2) = (1+\lambda x_2^p) + x_2 B(x_1,x_2)$.

Usemos como cambio de coordenadas

$$H(x_1,x_2) = (x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_1)x_2^n, x_2)$$

donde φ_n es a determinar. Observemos que ahora pretendemos llevar la ecuación (3.30) a

$$\begin{cases} \dot{w}_1 &= w_1\widetilde{C}(0,w_2), \\ \dot{w}_2 &= w_2^{p+1}, \end{cases} \tag{3.31}$$

Por otro lado del cambio de variable tenemos

$$w_1 = x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_1)x_2^n, \qquad w_2 = x_2$$

Derivando respecto al parametro $t \in \mathbb{C}$, resulta

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \dot{x_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(x_1)\dot{x_1}x_2^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\varphi_n(x_1)x_2^{n-1}\dot{x_2} \\ w_1\widetilde{C}(0,w_2) &= x_1\widetilde{C}(x_1,x_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(x_1)x_1\widetilde{C}(x_1,x_2)x_2^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\varphi_n(x_1)x_2^{n+p} \\ \left(x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_1)x_2^n\right)\widetilde{C}(0,x_2) &= \widetilde{C}(x_1,x_2)\left[x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} x_1\varphi_n'(x_1)x_2^n\right] + \sum_{n=1}^{\infty} n\varphi_n(x_1)x_2^{n+p} \end{aligned}$$

así tenemos

$$\widetilde{C}(x_1,x_2)\left[x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} x_1\varphi_n'(x_1)x_2^n\right] = \left(x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_1)x_2^n\right)\widetilde{C}(0,x_2) - \sum_{n=1}^{\infty} n\varphi_n(x_1)x_2^{n+p} \tag{3.32}$$

Escribamos

$$\widetilde{C}(x_1,x_2) = \widetilde{C}(0,x_2) - x_1x_2C_o(x_1,x_2); \quad C_o \in \mathbb{C}[[x_1,x_2]]$$

luego reemplazando en la igualdad anterior (3.32) resulta

$$\begin{aligned} \left(\widetilde{C}(0,x_2) - x_1x_2C_o(x_1,x_2)\right)\left[x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} x_1\varphi_n'(x_1)x_2^n\right] &= \left[x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_1)x_2^n\right]\widetilde{C}(0,x_2) \\ &\quad -\sum_{n=1}^{\infty} n\varphi_n(x_1)x_2^{p+n} \end{aligned}$$

Ordenando los términos tenemos

$$\widetilde{C}(0,x_2)\left(\sum_{n=1}^{\infty}(x_1\varphi_n'(x_1)-\varphi_n(x_1))x_2^n\right) = x_1x_2C_o(x_1,x_2)\left(x_1+\sum_{n=1}^{\infty}x_1\varphi_n'(x_1)x_2^n\right) -\sum_{n=1}^{\infty}n\varphi_n(x_1)x_2^{p+n} \tag{3.33}$$

recordemos que

$$\widetilde{C}(x_1,x_2)=1+\lambda x_2^p+x_2B(x_1,x_2)$$

es decir $\widetilde{C}(0,x_2)$ es invertible así en (3.33) tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_1\varphi_n'(x_1)-\varphi_n(x_1)\right)x_2^n = \widetilde{C}(0,x_2)^{-1}\left[x_1x_2C_o(x_1,x_2)\left(x_1+\sum_{n=1}^{\infty}x_1\varphi_n'(x_1)x_2^n\right) -\sum_{n=1}^{\infty}n\varphi_n(x_1)x_2^{p+n}\right] \tag{3.34}$$

Ahora comparando los términos x_2 en la ecuación (3.34) resulta

$$x_1\varphi_1'(x_1)-\varphi_1(x_1)=x_1^2C_o(x_1,0)$$

el cual posee solución

$$\varphi_1(x_1)=x_1\int_0^{x_1}C_o(s,0)ds$$

Observe que $\varphi_1(0)=\varphi'(0)=0$, procedamos ahora por inducción; supongamos determinados $\varphi_1,\cdots,\varphi_{n+1}$ todos satisfaciendo $\varphi_j'(0)=\varphi_j(0)=0$, $1\leq j\leq n-1$, por otro lado de la igualdad (3.34) comparando los términos x_2^n resulta que

$$x_1\varphi_n'(x_1)-\varphi_n(x_1)=x_1^2C_{n-1}(x_1,0)$$

donde $C_{n-1}(x_1,0)$ depende de $\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1}$ mas no φ_j para $j\geq n$, observe también que la solución de la ecuación anterior es

$$\varphi_n(x_1)=x_1\int_0^{x_1}C_{n-1}(s,0)ds$$

Como todos $C_j(x_1,0)$, $0\leq j\leq\infty$ son convergentes en un mismo disco centrado en $0\in\mathbb{C}$, resulta como consecuencia que $H\in\widehat{G}^{\circ}$. Por lo tanto hemos encontrado $H\in\widehat{G}^{\circ}$ tal que transforme (3.28) en (3.29). ∎

Lema 3.4 *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, y $Z\,(x_1, x_2) = \left(x_1(1+\lambda x_2^p) + x_1 x_2 B(0,x_2), x_2^{p+1}\right) \in \mathcal{X}(U)$, con singularidad aislada en el origen. La EDO asociada a la función holomorfa $Z\,(x_1, x_2)$ sería*

$$\begin{cases} \dot{x_1} &=& x_1(1+\lambda x_2^p) + x_1 x_2 B(0,x_2), \\ \dot{x_2} &=& x_2^{p+1}, \end{cases} \tag{3.35}$$

donde la multiciplidad de $B(0,x_2)$ en cero es como minimo p ($mult(B,0) \geq p$). Entonces existe un cambio de coordenadas formal $H \in \widehat{G}^\circ$ donde la ecuación anterior se escribe como

$$\begin{cases} \dot{y_1} &=& y_1(1+\lambda y_2^p), \\ \dot{y_2} &=& y_2^{p+1}, \end{cases} \tag{3.36}$$

Prueba: En efecto, observe que la ecuación (3.35) también puede ser escrita como

$$\begin{cases} \dot{x_1} &=& x_1\left(1+\lambda x_2^p + x_2^{p+1} S(x_2)\right), \\ \dot{x_2} &=& x_2^{p+1}, \end{cases} \tag{3.37}$$

donde $S(x_2) = \dfrac{B(0,x_2)}{x_2^p}$, esto pues es debido a que la multiciplidad de $B(0,x_2)$ en cero es como minimo p. Por otro lado utilicemos $H(y_1,y_2) = (y_1\xi(y_2), y_2) \in \widehat{G}^\circ$ como cambio de coordenadas que transforma (3.37) en

$$\begin{cases} \dot{y_1} &=& y_1(1+y_2^p) \\ \dot{y_2} &=& y_2^{p+1}, \end{cases}$$

como

$$x_1 = y_1\xi(y_2), \qquad x_2 = y_2$$

entonces

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= \dot{y_1}\xi(y_2) + y_1\xi'(y_2)\dot{y_2} \\ x_1\left(1+\lambda x_2^p + x_2^{p+1}S(x_2)\right) &= y_1(1+\lambda y_2^p)\xi(y_2) + y_1\xi'(y_2)y_2^{p+1} \\ y_1\xi(y_2)\left(1+\lambda y_2^p + y_2^{p+1}S(y_2)\right) &= y_1(1+\lambda y_2^p)\xi(y_2) + y_1\xi'(y_2)y_2^{p+1} \\ y_1\xi(y_2)\,(1+\lambda y_2^p) + y_1\xi(y_2)y_2^{p+1}S(y_2) &= y_1(1+\lambda y_2)\xi(y_2) + y_1\xi'(y_2)y_2^{p+1} \end{aligned}$$

Cancelando términos

$$y_1\xi(y_2)y_2^{p+1}S(y_2) = y_1\xi'(y_2)y_2^{p+1}$$

luego

$$\xi(y_2)S(y_2) = \xi'(y_2)$$

Observe además que la solución de la ecuación diferencial anterior es

$$\xi(y_2) = \exp \int_0^{y_2} S(t)dt$$

Luego $H(y_1, y_2)$ transforma (3.35) en (3.36). ■

Ahora se responderá a la interrogante hecha en la observación (3.1), con respecto a si la ecuación (3.2) puede ser reducida mediante un cambio de coordenadas analíticas. La respuesta a ésta pregunta, es que si es posible reducir la ecuación (3.2), pero lamentablemente el cambio de coordenadas es formal. El teorema que a continuación se muestra nos brinda más detalle con respecto a la interrogante hecha.

Teorema 3.2 *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, y $Z(x_1, x_2) = \left(x_1(1+\lambda x_2^p) + x_2 R(x_1, x_2), x_2^{p+1}\right) \in \mathcal{X}(U)$, con singularidad aislada en el origen. La EDO asociada a la función holomorfa $Z(x_1, x_2)$ sería*

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= x_1(1+\lambda x_2^p) + x_2 R(x_1, x_2), \\ \dot{x_2} &= x_2^{p+1}, \end{cases} \tag{3.38}$$

donde la multiciplidad de $R(x_1, x_2)$ en cero es como minimo $p+1$ ($mult(R, 0) \geq p+1$). Entonces existe un único cambio de coordenadas formal $H \in \widehat{G}^{\circ}$ tal que la ecuación anterior se escribe en su ***forma final****.*

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= x_1(1+\lambda x_2^p) \\ \dot{x_2} &= x_2^{p+1}, \end{cases} \tag{3.39}$$

donde $p \in \mathbb{N}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

Prueba: En efecto, haciendo uso de los Lema 3.2, Lema 3.3 y Lema 3.4 justamente antes probados, se logra encontrar $H \in \widehat{G}^{\circ}$ tal que transforme (3.38) en (3.39). En cuanto a la unicidad, supongamos que existan ϕ, $\phi_1 \in \hat{G}^{\circ}$ tal que la ecuación (3.38) es llevada en (3.39), luego $\widetilde{H} = \phi_1 \circ \phi^{-1}$ transforma

$$x_1(1+\lambda x_2^p)dx_2 - x_2^{p+1}dx_1 = 0$$

en si misma, por otro lado observe que $\widetilde{H}(x_1, x_2) = (x_1 + \psi_1, x_2)$ pues $\widetilde{H} \in \hat{G}^{\circ}$, entonces para ver la unicidad solo basta ver que $\psi_1 = 0$, en efecto tendremos

$$X_1 = x_1 + \psi_1 \;\; X_2 = x_2$$

Derivando la igualdad anterior respecto a la variable $t \in \mathbb{C}$ resulta

$$\begin{aligned}
\dot{X_1} &= \dot{x_1} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}\dot{x_1} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}\dot{x_2} \\
X_1(1+\lambda X_2^p) &= x_1(1+\lambda x_2^p) + x_1(1+\lambda x_2^p)\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + x_2^{p+1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \\
(x_1+\psi_1)(1+\lambda x_2^p) &= x_1(1+\lambda x_2^p) + x_1(1+\lambda x_2^p)\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + x_2^{p+1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}
\end{aligned}$$

Reduciendo los términos tenemos

$$\psi_1(1+\lambda x_2^p) = x_1(1+\lambda x_2^p)\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + x_2^{p+1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}$$

Hay que recordar que

$$\psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_1)x_2^n$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\varphi_n(x_1)x_2^n(1+\lambda x_2^p) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(x_1)x_2^n x_1(1+\lambda x_2^p) + \sum_{n=1}^{\infty} n\varphi_n(x_1)x_2^{p+n}$$

comparando términos x_2

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_1)x_2^n + \lambda\varphi_n(x_1)x_2^{p+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(x_1)x_1x_2^n + \lambda\varphi_n'(x_1)x_1x_2^{n+p} \\
\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n(x_1) - \varphi_n'(x_1)x_1)x_2^n &= \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda\varphi_n'(x_1)x_1 + n\varphi_n(x_1) - \lambda\varphi_n(x_1)x_2^{n+p}
\end{aligned}$$

Observe los siguiente

$$\begin{aligned}
Si\ \ i \leq p\ \ entonces \qquad\qquad \varphi_i(x_1) &= \varphi_i'(x_1)x_1\ \ entonces\ \ \varphi_i(x_1) = a_ix_1 \\
Si\ \ i > p\ \ entonces\ \ \varphi_i(x_1) - \varphi_i'(x_1)x_1 &= \lambda\varphi_{i-p}'(x_1)x_1 + (i-p)\varphi_{i-p}(x_1) - \lambda\varphi_{i-p}(x_1)
\end{aligned}$$

luego de las ecuaciones anteriores se decuce que $\varphi_i(x_1) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ por lo tanto $\psi_1 = 0$, luego así $\widetilde{H} = id$, por esta razón $\phi_1 = \phi$ y así se concluye que el cambio de variable es único. ■

Observación 3.2 *Los siguientes items son consecuencias del teorema anterior*

1.- Note que la ecuación (3.39) *es equivalente a*

$$w_{p,\lambda} = x_1(1+x_2^p)dx_2 - x_2^{p+1}dx_1 = 0$$

2.- El teorema 3.2, nos permite hacer una ***clasificación del tipo formal****, es decir designaremos por $D_{p,\lambda} \subset D_p$ al conjunto de sillas-nodos que son reducidas via un elemento de $\widehat{G}^{\circ}$ a la forma final $w_{p,\lambda}$.*

3.- Una pregunta natural que surge del Teorema 3.2 es si la forma final es única.

A continuación el siguiente Teorema responde afirmativamente, al hecho de que la forma final es única.

Teorema 3.3 *Sea* $U \subseteq \mathbb{C}^2$ *abierto,* $0 \in \mathbb{U}$ *y* $Z(x_1, x_2) = \left(x_1(1+\lambda x_2^p), x_2^{p+1}\right) \in \mathcal{X}(U)$ *y* $W(w_1, w_2) = \left(w_1(1+\lambda' w_2^p), w_2^{p+1}\right) \in \mathcal{X}(U)$ *con singularidad aislada en el origen. Las EDO-s asociadas a dichas funciones holomorfa son*

$$\begin{cases} \dot{x_1} &=& x_1(1+\lambda x_2^p), \\ \dot{x_2} &=& x_2^{p+1}, \end{cases} \tag{3.40}$$

$$\begin{cases} \dot{w_1} &=& w_1(1+\lambda' w_2^p), \\ \dot{w_2} &=& w_2^{p+1}, \end{cases} \tag{3.41}$$

Si (3.40) *y* (3.41) *son formalmente equivalentes, entonces* $\lambda = \lambda'$.

Prueba : En efecto, si las silla-nodos anteriores son formalmente equivalentes entonces el cambio coordenadas que necesariamente debe ser de la forma

$$H(x_1, x_2) = (x_1 a(x_1, x_2), x_2 b(x_1, x_2))$$

Luego así

$$w_1 = x_1 a(x_1, x_2), \quad w_2 = x_2 b(x_1, x_2)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \dot{w_1} &= \dot{x_1} a(x_1, x_2) + \frac{\partial a}{\partial x_1} x_1 \dot{x_1} + \frac{\partial a}{\partial x_2} x_1 \dot{x_2} \\ w_1(1+\lambda' w_2^p) &= a(x_1, x_2) x_1 (1+\lambda x_2^p) + x_1^2(1+\lambda x_2^p)\frac{\partial a}{\partial x_1} + x_1 x_2^{p+1} \frac{\partial a}{\partial x_2} \\ x_1 a(x_1, x_2)\left(1+\lambda' x_2^p b^p(x_1, x_2)\right) &= a(x_1, x_2) x_1 (1+\lambda x_2^p) + x_1^2(1+\lambda x_2^p)\frac{\partial a}{\partial x_1} + x_1 x_2^{p+1} \frac{\partial a}{\partial x_2} \end{aligned}$$

Simplificando x_1 resulta

$$a(x_1, x_2)(1+\lambda' x_2^p b^p(x_1, x_2)) = a(x_1, x_2)(1+\lambda x_2^p) + \frac{\partial a}{\partial x_1} x_1 (1+\lambda x_2^p) + \frac{\partial a}{\partial x_2} x_2^{p+1}$$

evaluando $x_1 = 0$ en la igualdad anterior

$$a(0, x_2)\left(1+\lambda' x_2^p b^p(0, x_2)\right) = a(0, x_2)(1+\lambda x_2^p) + x_2^{p+1} \frac{\partial a}{\partial x_2}(0, x_2) \tag{3.42}$$

Por otro lado tenemos

$$w_2 = x_2 b(x_1, x_2)$$

luego

$$\begin{aligned}
\dot{w_2} &= \dot{x_2}\, b(x_1, x_2) \quad + x_2 \left(\frac{\partial b}{\partial x_1}\dot{x_1} + \frac{\partial b}{\partial x_2}\dot{x_2} \right) \\
w_2^{p+1} &= x_2^{p+1} b(x_1, x_2) + x_2 \left(\frac{\partial b}{\partial x_1}\dot{x_1} + \frac{\partial b}{\partial x_2}\dot{x_2} \right) \\
x_2^{p+1}[b(x_1, x_2)]^{p+1} &= x_2^{p+1} b(x_1, x_2) + x_2 \left(\frac{\partial b}{\partial x_1}\dot{x_1} + \frac{\partial b}{\partial x_2}\dot{x_2} \right)
\end{aligned}$$

evaluando $x_1 = 0$ en la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
x_2^{p+1}[b(0, x_2)]^{p+1} &= x_2^{p+1} b(0, x_2) + x_2^{p+2} \frac{\partial b}{\partial x_2}(0, x_2) \\
[b(0, x_2)]^{p+1} &= b(0, x_2) + \quad x_2 \frac{\partial b}{\partial x_2}(0, x_2) \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

De (3.42) y (3.43) tenemos

$$\left(1 + \lambda' x_2^p [b(0, x_2)]^{p+1}\right) \left(b(0, x_2) + x_2 \frac{\partial b}{\partial x_2}(0, x_2) \right) - x_2^{p+1} \frac{[b(0, x_2)]^{p+1}}{a(0, x_2)} \frac{\partial a}{\partial x_2}(0, x_2)$$

$$= [b(0, x_2)]^{p+1}(1 + \lambda x_2^p) \quad (3.44)$$

Afirmación : *La aplicación $b(0, x_2)$ es de la forma siguiente*

$$b(0, x_2) = b_0 + \sum_{n=p+2}^{\infty} b_n x_2^n, \qquad b_n \in \mathbb{C}.$$

En efecto, consideremos

$$b(0, x_2) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_2^n$$

luego evaluando $x_2 = 0$ en (3.44) resulta que

$$b_0 = b_0^{p+1} \quad \text{ó} \quad b_0^p = 1$$

Para $k + 1 \leq p$, en (3.44) se forma inmediatamente lo siguiente

$$\left(1 + \lambda' x_2^p [b(0, x_2)]^p\right) \left(b(0, x_2) + x_2 \frac{\partial b}{\partial x_2}(0, x_2) \right) = [b(0, x_2)]^{p+1}(1 + \lambda x_2^p) mod \left(x_2^{k+1} \right)$$

Analicemos lo anterior para el caso $k = 1$

$$\left(1 + \lambda' x_2^p [b(0, x_2)]^p\right) \left(b(0, x_2) + x_2 \frac{\partial b}{\partial x_2}(0, x_2) \right) = [b(0, x_2)]^{p+1}(1 + \lambda x_2^p) mod \left(x_2^2 \right)$$

Luego haciendo uso del ideal generado por x_2^2 y comparando términos se obtiene

$$\begin{aligned} b_0 + 2b_1x_2 &= b_0^{p+1} + (p+1)b_0^p b_1 x_2 \\ 2b_1 &= (p+1)b_1 \\ b_1 &= 0 \end{aligned}$$

Luego de forma similar para los demas valor de k. Por tanto resulta que $b_k = 0$ para $k \leq p+1$, en consecuencia la afirmación es cierta por tanto

$$b(0, x_2) = b_0 + \sum_{n=p+2}^{\infty} b_n x_2^n, \qquad b_n \in \mathbb{C}. \tag{3.45}$$

Ahora reemplazando (3.45) en (3.44) e igualando los coeficientes de x_2^p obtenemos

$$\lambda b_0 + (p+1)b_0^p b_p = \lambda' b_0 b_0^p + (p+1)b_p,$$

además recuerde que $b_0^p = 1$, entonces resulta que $\lambda = \lambda'$ luego así el Teorema 3.3 queda probado y en conclución la **forma final** es única. ■

Definición 3.2 *Denotaremos por* $D^N_{p,\lambda}$ *al conjunto de las sillas-nodos que viene dadas en su forma normal de Dulac es decir*

$$w = (x_1(1 + \lambda x_2^p) + x_2 R(x_1, x_2))\, dx_2 - x_2^{p+1} dx_1 = 0.$$

3.3 Problema de clasificación

Como vimos en la subsección anterior, debemos clasificar las sillas-nodos en cada $D_{p,\lambda} \subset D_p$ con $p \in \mathbb{N}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Mediante la acción del grupo de $Dif(\mathbb{C}^2, 0)$, obtenemos ecuaciones cuyo $(p+1) - jet$ es $w_{p,\lambda} = 0$. Debemos decidir ahora cuando es que son analiticamente equivalentes las ecuaciones

$$w_{p,\lambda} + x_2 R_1(x_1, x_2) dx_2 = 0 \quad y \quad w_{p,\lambda} + x_2 R_2(x_1, x_2) = 0 \tag{3.46}$$

donde $mult(R_j, 0) \geq p+1$ para $j = 1, 2$. En efecto esto puede ser de hecho utilizando un subgrupo de $Dif(\mathbb{C}^p, 0)$ mas apropiado.

Notación 3.1 *Denotemos por* $G \subset Dif(\mathbb{C}^2, 0)$ *al subgrupo* $[G^\circ, L]$ *donde*

$$L = \left\{\phi \in Aut\left(\mathbb{C}^2\right) : \phi(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \beta x_2) \text{ } con \text{ } \alpha \in \mathbb{C}^* \text{ } y \text{ } \beta^p = 1\right\}$$

donde $\beta \in \mathbb{C}$ *y* $p \in \mathbb{N}$.

El Teorema principal de esta subsección nos dice esencialmente cuando es que dos sillas-nodos de la forma (3.46) son analiticamente equivalentes, para saber ello solo es necesario hallar la existencia de un elemento en G, es decir si no es posible hallar la existencia de un sistema de coordenadas en el conjunto G, entonces implicará que dichas sillas-nodos no son analiticamente equivalentes.

Para la demostración de dicho teorema necesitamos algunos resultados previos que serán probados a continuación.

Lema 3.5 *Sea $0 \in U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, y $Z(x_1, x_2) = \left(x_1(1 + \lambda x_2^p) + x_2 R(x_1, x_2), x_2^{p+1}\right) \in \mathcal{X}(U)$, con singularidad aislada en $0 \in \mathbb{C}^2$. La silla-nodo asociada a dicha función holomorfa sería*

$$w = [x_1(1 + \lambda x_2^p) + x_2 R(x_1, x_2)]\, dx_2 - x_2^{p+1} dx_1 = 0$$

donde $mult(R, 0) \geq p+1$, además consideremos $f(x_1, x_2) = P(x_2) + x_2^{p+1} r(x_1, x_2)$ una función holomorfa en $0 \in \mathbb{C}^2$, $P(0) = 0$, $P'(0) \neq 0$ y $grad(P) \leq p$. Entonces existe $\phi \in Dif(\mathbb{C}^2, 0)$ tal que $\phi^* w \wedge w = 0$ y $f \circ \phi = P$.

Prueba : En efecto, sea $f(t, x_1, x_2) = P(x_2) + t x_2^{p+1} r(x_1, x_2)$ para $t \in \mathbb{C}$ y $f_{t_0}(x_1, x_2) = f(t_0, x_1, x_2)$ cuando deseamos fijar $t_0 \in \mathbb{R}$. Por otro lado buscaremos una familia de campos de vectores holomorfos de la forma

$$X_{t_0}(x, y) = (\xi(t_0, x_1, x_2), \eta(t_0, x_1, x_2)$$

tales que

(a) $w(X_t) = 0$

(b) $\langle X_t, \bigtriangledown f_t \rangle = -\dfrac{\partial f(t, x_1, x_2)}{\partial t} = -x_2^{p+1} r(x_1, x_2)$

En efecto, observe que de la ecuación (a) obtenemos.

$$A(x_1, x_2)\eta(t, x_1, x_2) - x_2^{p+1}\xi(t, x_1, x_2) = 0(*)$$

del cual podemos considerar

$$\xi(t, x_1, x_2) = g(t, x_1, x_2) A(x_1, x_2), \tag{3.47}$$

$$\eta(t, x_1, x_2) = g(t, x_1, x_2) x_2^{p+1} \tag{3.48}$$

donde g es una función holomorfa. Por otro lado de la ecuación (b) obtenemos

$$\xi\frac{\partial f_t}{\partial x_1}+\eta\frac{\partial f_t}{\partial x_2}=-\frac{\partial f_t}{\partial t} \tag{3.49}$$

Luego reemplazando (3.47) y (3.48) en (3.49) obtenemos

$$g(t,x_1,x_2)\left(A(x_1,x_2)\frac{\partial f_t}{\partial x_1}+x_2^{p+1}\frac{\partial f_t}{\partial x_2}\right) \quad = \quad -x_2^{p+1}r(x_1,x_2)$$

Como $\dfrac{\partial f_t}{\partial x_1}=tx_2^{p+1}\dfrac{\partial r}{\partial x_1}$ luego así vemos que

$$g(t,x_1,x_2)=\frac{-r(x_1,x_2}{\frac{\partial f_t}{\partial x_2}+tA(x_1,x_2)\frac{\partial r}{\partial x_1}}$$

Observamos además que

$$\frac{\partial f_t}{\partial x_2}(t,0,0)+tA(0,0)\frac{\partial r}{\partial x_1}(0,0)=P'(0)\neq 0$$

de modo que $\boldsymbol{g}$ esta bién definida para $t\in\mathbb{C}$ y $(x_1,x_2)\in\mathbb{C}^2$ próximo al origen. Así hemos encontrado un campo $X_t(x_1,x_2)=(g(t,x_1,x_2)A(x_1,x_2),g(t,x_1,x_2)x_2^{p+1})$ que verifica (a) y (b). Ahora consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) &= X\left(t,Z(t)\right) \\ Z(0) &= id, \end{cases}$$

entonces llamemos $\Phi(t,x_1,x_2)$ al flujo asociado a la ecuación anterior, luego resulta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi_1}{\partial t}(t,x_1,x_2)=\xi(t,\Phi(t,x_1,x_2)) \\ \\ \dfrac{\partial\phi_2}{\partial t}(t,x_1,x_2)=\eta(t,\Phi(t,x_1,x_2)) \end{cases} \tag{3.50}$$

donde $\Phi(t,x_1,x_2)=(\phi_1(t,x_1,x_2),\phi_2(t,x_1,x_2))$, además por otro lado notemos que de (3.49)

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,\Phi_t(x_1,x_2))=0$$

Así $f_t\circ\Phi_t=P$. Observe que Φ_t en $t=1$ es lo que buscamos, denotemos por $\Phi=\Phi_{(1)}$.
Por otro lado note que

$$\Phi^*w=\left(A\circ\phi\frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}-\phi_2^{p+1}\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}\right)dx_1-\left(\phi_2^{p+1}\frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}-A\circ\phi\frac{\partial\phi_2}{\partial x_2}\right)$$

En consecuencia tenemos

$$\Phi^*w\wedge w=\left[A\circ\phi\left(A\frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}+x_2^{p+1}\frac{\partial\phi_2}{\partial x_2}\right)-\phi_2^{p+1}\left(A\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}+x_2^{p+1}\frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}\right)\right]dx_1\wedge dx_2 \tag{3.51}$$

Entretanto de evaluando $t = 1$ en las igualdades (3.50) se obtiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x_2}\dot{x_2} & = & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial t}(1, x_1, x_2) = \xi(1, \Phi(1, x_1, x_2)) \\ \\ \dfrac{\partial \phi_2}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \dfrac{\partial \phi_2}{\partial x_2}\dot{x_2} & = & \dfrac{\partial \phi_2}{\partial t}(1, x_1, x_2) = \eta(1, \Phi(1, x_1, x_2)) \end{cases} \tag{3.52}$$

Luego reemplazando (3.52) en (3.51) resulta que

$$\Phi^* w \wedge w = 0$$

Corolario 3.1 *Sea $\xi \in Dif(\mathbb{C}^2, 0)$ tal que*

$$\xi^* w_2 \wedge w_1 = 0$$

donde $w_i = \{x_1(1 + \lambda x_2^p) + x_2 R_i(x_1, x_2)\}\, dx_2 - x_2^{p+1} dx_1 = 0$ y $mult(R_i, 0) \geq p+1$, para $i = 1,\ 2$. Entonces existe $\phi(x_1, x_2) = (\varphi(x_1, x_2), P(x_2)) \in Dif(\mathbb{C}^2, 0)$, donde $grad\,(P) \leq p$, tal que

$$\phi^* w_2 \wedge w_1 = 0$$

Prueba: En efecto, del hecho que $\xi^* w_2 \wedge w_1 = 0$ resulta

$$\left[\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} A_1(x_1, x_2) + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} x_2^{p+1}\right] \{\xi_2(x_1, x_2)\}^{p+1} = \left[\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} A_1(x_1, x_2) + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} x_2^{p+1}\right] A_2(\xi(x_1, x_2)) \tag{3.53}$$

donde $A_i(x_1, x_2) = x_1(1 + \lambda x_2^p) + x_2 R_i(x_1, x_2)$. Por otro lado consideremos, la función holomorfa $\xi_2(x_1, x_2)$ de la forma siguiente

$$\xi_2(x_1, x_2) = \sum_{|Q| \geq 1} \xi_Q x^Q$$

Afirmación : *Los coeficientes $\xi_{(q,0)} = 0$ y $\xi_{(0,1)} \neq 0$* para todo $q \in \mathbb{N}$.

En efecto, evaluando $x_2 = 0$ en (3.53) y cancelando algunos términos obtenemos

$$\{\xi_2(x_1, 0)\}^{p+1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}(x_1, 0) = A_2(\xi(x_1, 0)) \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}(x_1, 0) \tag{3.54}$$

luego de la igualdad anterior comparando términos se deduce que $\xi_{(q,0)}$, para todo $q \in \mathbb{N}$, en particular para $q = 1$ en consecuencia $\xi_{(0,1)} \neq 0$ esto es debido a que $det(\xi'(0, 0)) \neq 0$, por tanto queda justificado la afirmación.

Gracias a la afirmación anterior se deduce que la función $\xi_2(x_1, x_2)$ es de la forma

$$\xi_2(x_1, x_2) = \xi_{(0,1)} x_2 + \sum_{|Q| \geq 2} \xi_Q x^Q$$

con $\xi_{(q,0)}$, para $q \in \mathbb{N}$. Además notar que

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}(x_1, 0) = 0$$

por lo tanto

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2 a_0(x_1, x_2) \tag{3.55}$$

entonces $\xi_2(x_1, x_2) = x_2 \tilde{a}(x_1, x_2)$ donde $\dfrac{\partial \tilde{a}}{\partial x_1} = a_0$, luego volviendo a (3.53) tenemos

$$x_2 a_0(x_1, x_2)\left(x_1(1 + \lambda x_2^p) + x_2 R_1(x_1, x_2)\right) + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} x_2^{p+1} = \left[x_2 \tilde{a}(x_1, x_2)\right]^{p+1},$$

cancelando el término x_2 resulta

$$a_0(x_1, x_2)\left(x_1(1 + \lambda x_2^p) + x_2 R_1(x_1, x_2)\right) + x_2^p \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = x_2^p \left[\tilde{a}(x_1, x_2)\right]^{p+1}$$

evaluando en $x_2 = 0$ en la ecuación anterior, se obtiene que $a_0(x_1, 0) = 0$ por esta razón resulta que

$$a_0(x_1, x_2) = x_2 a_1(x_1, x_2) \tag{3.56}$$

Reemplazando (3.56) en (3.55) obtenemos

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2^2 a_1(x_1, x_2)$$

prosiguiendo de forma sucesivamente hasta llegar a la siguiente expresión

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2^{p+1} V(x_1, x_2) \tag{3.57}$$

donde $V(x_1, x_2)$ es una función holomorfa en una vecindad de $0 \in \mathbb{C}^2$. De la ecuación (3.57) se llega a deducir facilmente la siguiente expresión

$$\xi_2(x_1, x_2) = P(x_2) + x_2^{p+1} Q(x_1, x_2)$$

donde $P(x_2)$ es un polinomio de orden menor e igual que p, además $Q(x_1, x_2)$ es una función holomorfa en una vecindad de $0 \in \mathbb{C}^2$. Ahora aplicando el Lema 4.1 a la función holomorfa $\xi_2(x_1, x_2)$ y a la forma $w_1 = 0$, llegamos a encontrar $\psi \in Dif(\mathbb{C}^2, 0)$ de tal modo que

$$\xi_2 \circ \psi = P \quad y \quad \psi^* w_1 \wedge w_1 = 0$$

Consideremos $\phi(x_1, x_2) = \xi \circ \psi(x_1, x_2)$, este es el difeomorfismo que buscamos, en efecto notar que

$$\phi(x_1, x_2) = (\varphi(x_1, x_2), P(x_2))$$

donde $\varphi(x_1,x_2)=\xi\circ\psi(x_1,x_2)$ además observe que

$$\phi^*w_2\wedge w_1=0$$

por lo tanto el corolario 3.1 queda probado. ■

Observación 3.3 *Notar que una consecuencia inmediata que nos brinda el Corolario 3.1 es que $P'(0)\neq 0$, esto nos dice indirectamente observando solamente la prueba del Corolario ó del hecho que $\phi(x_1,x_2)=(\varphi(x_1,x_2),P(x_2))\in Dif(\mathbb{C}^2,0)$.*

Teorema 3.4 *Sean dos sillas-nodos dadas como en* (3.46) *diremos que si ellas son $Dif(\mathbb{C}^2,0)-$ equivalente entonces ellas son $G-$ equivalentes.*

Prueba : En efecto, debido a que las sillas-nodos dadas en (3.46) son $Dif(\mathbb{C}^2,0)-equivalente$ entonces sin perdida de generalidad podemos suponer que existe un cambio de coordenadas $\phi(x_1,x_2)=(\varphi(x_1,x_2),P(x_2))\in Dif(\mathbb{C}^2,0)$ tal que $\phi^*w_2\wedge w_1=0$ con $grad(P)\leq p$, esto pues es debido al corolario 3.1. Por otro lado observe que debido a $\phi^*w_2\wedge w_1=0$, obtenemos

$$\{P(x_2)\}^{p+1}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}A_1(x_1,x_2)+x_2^{p+1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right\}=P'(x_2)x_2^{p+1}A_2(\xi(x_1,x_2)) \tag{3.58}$$

donde $A_i(x_1,x_2)=x_1[1+\lambda x_2^{p+1}]+x_2R_i(x_1,x_2)$.

Afirmación 1 : *La función holomorfa $\varphi(x_1,x_2)$ satisface lo siguiente*

$$\varphi(x_1,0)=\alpha x_1,\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(0,0)\neq 0\ \ y\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(0,0)=0$$

donde $\alpha=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}(0,0)$.

En efecto, haciendo $x_1=0$ en la ecuación (3.58) obtenemos

$$\{P(x_2)\}^{p+1}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}A_1(0,x_2)+x_2^{p+1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right\}=P'(x_2)x_2^{p+1}A_2(\xi(0,x_2))$$

luego comparando términos en la ecuación anterior se deduce facilmente que $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}(0,0)=0$.

Por otro lado debido a $\phi\in Dif(\mathbb{C}^2,0)$ entonces $\det(\phi'(0,0))\neq 0$, así necesariamente tiene que ocurrir que $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}(0,0)\neq 0$. Ahora si evaluamos $x_2=0$ en (3.58) obtenemos

$$\beta^pA_1(x_1,0)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1,0)=A_2(\xi(x_1,0)) \tag{3.59}$$

donde $P'(0)=\beta$, luego comparando términos en la igualdad (3.59) resulta que

$$\varphi(x_1,0)=\alpha x_1,$$

donde $\alpha = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0,0)$, por lo tanto queda así justificada la afirmación.

Por otro lado sabemos que gracias al Teorema 3.2 existen $\alpha_i \in \widehat{G}^{\circ}$ tales que

$$\alpha_i^* w_{p,\lambda} \wedge w_i = 0, \quad i = 1, 2$$

gracias a ello definamos la siguiente aplicación $\Theta(x_1, x_2) = \alpha_2 \circ \phi \circ \alpha_1^{-1}(x_1, x_2)$ que satisface algunas condiciones que veremos en la siguiente afirmación.

Afirmación 2 : *La aplicación $\Theta(x_1, x_2) = \alpha_2 \circ \phi \circ \alpha_1^{-1}(x_1, x_2)$ deja invariante a $w_{p,\lambda}$ es decir $\Theta^* w_{p,\lambda} \wedge w_{p,\lambda} = 0$.*

En efecto, veamos

$$\begin{aligned}
\Theta^* w_{p,\lambda} &= (\alpha_1^{-1})^* \phi^* \alpha_2^* w_{p,\lambda} = (\alpha_1^{-1})^* \phi^* w_2 = (\alpha_1^{-1})^* c_2 \circ \phi \phi^* w_2 \\
&= (\alpha_1^{-1})^* c_2 \circ \phi c w_1 = c_2 \circ \phi \circ \alpha_1^{-1} . c \circ \alpha_1^{-1} (\alpha_1^{-1})^* w_1 \\
&= c_2 \circ \phi \circ \alpha_1^{-1} c \circ \alpha_1^{-1} \frac{1}{c_1} w_{p,\lambda} \\
&= h w_{p,\lambda}
\end{aligned}$$

donde $h = c_2 \circ \phi \circ \alpha_1^{-1} c \circ \alpha_1^{-1} \dfrac{1}{c_1}$ por lo tanto

$$\Theta^* w_{p,\lambda} \wedge w_{p,\lambda} = 0 \tag{3.60}$$

luego $\Theta(x_1, x_2)$ deja invariante a $w_{p,\lambda} = 0$, y así queda justificada la afirmación.

Por otro lado observe también que

$$\Theta(x_1, x_2) = \alpha_2 \circ \phi \circ \alpha_1^{-1}(x_1, x_2) = (\theta(x_1, x_2), P(x_2)),$$

además si evaluamos $x_2 = 0$ obtenemos:

$$\theta(x_1, 0) = \varphi(x_1, 0), \tag{3.61}$$

luego de (3.61) y la afirmación 1 se deduce facilmente que $\theta(x_1, x_2)$ es de la forma

$$\theta(x_1, x_2) = \alpha x_1 + x_2 T(x_1, x_2) \tag{3.62}$$

donde $\alpha = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0,0) \neq 0$.

Observe que de la ecuación (3.60) se obtiene

$$x_1(1 + \lambda x_2^p) P(x_2)^{p+1} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = x_2^{p+1} \left[(1 + \lambda P(x_2)^p)\, \theta(x_1, x_2) P'(x_2) - (P(x_2))^{p+1} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right] \tag{3.63}$$

Luego evaluando $x_1 = 0$ en (3.63) y cancelando algunos términos llegamos a tener

$$(1+\lambda P(x_2)^p)\,\theta(0,x_2)P'(x_2) = (P(x_2))^{p+1}\frac{\partial\theta}{\partial x_2}(0,x_2)$$

por ende se deduce que necesariamente tiene que ocurrir que $\theta(0,x_2)=0$, si además usamos la igualdad (3.62) pues entonces $\theta(x_1,x_2)$ tiene que ser de la forma siguiente

$$\theta(x_1,x_2) = \alpha x_1 + x_1x_2U(x_1,x_2)$$

luego se puede considerar $\theta(x_1,x_2)$ de las siguientes maneras

$$\begin{aligned}\theta(x_1,x_2) &= \alpha x_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x_2)x_1^n\\ \theta(x_1,x_2) &= \alpha x_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x_1)x_2^n\end{aligned}$$

Por otro lado como $P(x_2)$ es un polinomio de $grad(P(x_2)) \leq p$ entonces necesariamente tiene que ser de la forma

$$P(x_2) = \beta x_2 + \beta_2x_2^2 + \cdots + \beta_p x_2^p$$

Se deduce facilmente que $\beta^p = 1$ con el simple hecho de reemplazar $x_2 = 0$ en la ecuación (3.63) y comparando términos.

Ahora reemplazando $\theta(x_1,x_2) = \alpha x_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x_2)x_1^n$ en (3.63) y como resultado tenemos

$$\begin{aligned}x_1(1+\lambda x_2^p)\left(\frac{P(x_2)}{x_2}\right)^{p+1}(\alpha+\psi_1+2\psi_2x_1\cdots) &= [1+\lambda(P(x_2))^p]\left((\alpha+\psi_1)x_1+\psi_2x_1^2+\cdots\right)P'(x_2)\\ &\quad -(P(x_2))^{p+1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n'(x_2)x_1^n\right)\end{aligned}$$

Luego igualando el término x_1 en la ecuación anterior se deduce que

$$\begin{aligned}(1+\lambda x_2^p)\left(\frac{P(x_2)}{x_2}\right)^{p+1}(\alpha+\psi_1) &= [1+\lambda(P(x_2))^p]\,P'(x_2)(\alpha+\psi_1)\\ &\quad -\psi_1'(x_1)\,(P(x_2))^{p+1} \qquad (3.64)\end{aligned}$$

Ahora haciendo uso de la teoria de modulos se obtiene

$$(1+\lambda x_2^p)\left(\frac{P(x_2)}{x_2}\right)^{p+1} = [1+\lambda(P(x_2))^p]\,P'(x_2)mod\left(x_2^{p+1}\right) \qquad (3.65)$$

esto pues es debido a que $\psi_1'(x_1)\,\{P(x_2)\}^{p+1} \in \mathcal{I}$ donde $\mathcal{I}$ es el ideal generado por x_2^{p+1}. Si igualamos los coeficientes de x_2 en (3.65) y usamos el hecho que $\beta^p = 1$ obtenemos

$$(p+1)\beta_2 = 2\beta_2$$

en consecuencia resulta que $\beta_2 = 0$. Supongamos que $\beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_k = 0$ mostremos que $\beta_k = 0$ para $k \leq p$.

En efecto, de forma analoga comparemos los coeficientes x_2^{k-1} en (3.65) y usando en hecho que $\beta^p = 1$ llegamos a tener

$$(p+1)\beta_k = k\beta_k$$

luego así $\beta_k = 0$, para todo $k \leq p$. Veamos ahora que $\theta(x_1, x_2) = \alpha x_1$, para ello reemplazando $P(x_2) = \beta x_2$ en (3.64) y usando nuevamente el hecho que $\beta^p = 1$ obtenemos

$$x_1(1+\lambda x_2^p)\frac{\partial \theta}{\partial x_1}(x_1, x_2) = (1+\lambda x_2^p)\theta(x_1, x_2) - x_2^{p+1}\frac{\partial \theta}{\partial x_2}(x_1, x_2) \tag{3.66}$$

Recordemos que una de las formas como se podia escribir $\theta(x_1, x_2)$ es la siguiente

$$\theta(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_1) x_2^n \tag{3.67}$$

Luego para ver que $\theta(x_1, x_2) = \alpha x_1$ sólo basta probar que $\varphi_n(x_1) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En efecto, reemplazando (3.67) en (3.66) tenemos

$$x_1(1+\lambda x_2^p)\left[\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(x_1) x_2^n\right] = (1+\lambda x_2^p)\left[\alpha x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_1) x_2^n\right] - x_2^{p+1}\sum_{n=1}^{\infty} n\varphi_n(x_1) x_2^{n-1}$$

ordenando y simplificando algunos términos se llega a la siguiente expresión

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_1) x_2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(x_1) x_1 x_2^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda \varphi_n'(x_1) x_1 + n\varphi_n(x1) - \lambda \varphi_n(x_1)\right] x_2^n. \tag{3.68}$$

Si igualamos los coeficiente de x_2^i para $i \leq p$, obtenemos

$$\varphi_i(x_1) = \varphi_i'(x_1) x_1$$

en consecuencia necesariamente tiene que ocurrir que $\varphi_i(x_1)$ es de la forma siguiente

$$\varphi_i(x_1) = c_i x_1 \tag{3.69}$$

para $i \leq p$. Volvamos a (3.68) y ahora igualamos los coeficiente x_2^{p+i} para $i \leq p$, entonces

$$\varphi_{p+i}(x_1) \quad = \quad \varphi_{p+i}'(x_1) x_1 + \lambda \varphi_i'(x_1) x_1 + i\varphi_i(x_1) - \lambda \varphi_i(x_2) \tag{3.70}$$

luego reemplazando (3.69) en (3.70) resulta

$$\varphi_{p+i}(x_1) \quad = \quad \varphi_{p+i}'(x_1) x_1 + i c_i x_1$$

siguiendo con la comparación de términos de los coeficientes de x_1 resulta

$$c_i = 0 \quad y \quad \varphi_{p+i}(x_1) = c_{p+i}x_1$$

para que $i \leq p$, por lo tanto se tiene lo siguiente para todo $i \leq p$, entonces

$$\varphi_i(x_1) = 0 \quad y \quad \varphi_{p+i}(x_1) = c_{p+i}x_1$$

para todo $i \leq p$, prosiguiendo de forma analoga resulta que

$$\varphi_i(x_1) = 0$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Así tendremos

$$\theta(x_1, x_2) = \alpha x_1 \quad y \quad P(x_2) = \beta x_2$$

con $\alpha \neq 0$ y $\beta^p = 1$, por lo tanto

$$\Theta(x_1, x_2) = (\theta(x_1, x_2), P(x_2)) = (\alpha x_1, \beta x_2) \in L$$

además observe lo siguiente

$$\phi(x_1, x_2) = \alpha_2^{-1} \circ \Theta \circ \alpha_1 \circ id(x_1, x_2)$$

donde $id(x_1, x_2)$ es la función identidad, además también sabemos que α_2^{-1}, $\alpha_1 \in \hat{G}^{\circ}$ y Θ, $id \in L$ por ende

$$\phi \in \left[\hat{G}^{\circ}, L\right]$$

Recordemos también que $\phi(x_1, x_2) = (\varphi(x_1, x_2), \beta x_2)$ con $\varphi(x_1, 0) = \alpha x_1$ luego

$$\phi(x_1, x_2) = \xi \circ \zeta(x_1, x_2)$$

donde la función holomorfa $\xi(x_1, x_2)$ y $\zeta(x_1, x_2)$ son definidas como

$$\xi(x_1, x_2) = \left(\varphi\left(\frac{x_1}{\alpha}, \frac{x_2}{\beta}\right), x_2\right) \quad y \quad \zeta(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \beta x_2)$$

notar también que $\zeta\,(x_1, 0) = x_1$ entonces

$$\xi \in G^{\circ} \quad y \quad \zeta \in L$$

en consecuencia $\phi \in [G^{\circ}, L] = G$, luego así queda probado el teorema. ∎

Sección 4

Acción de G° en $D^N_{p,\lambda}$

El objetivo de este sección se encontar una bijección entre el espacio cociente $D^N_{p,\lambda}/G^\circ$ y $\mathbb{C}^p \times \mathscr{H}^p$, para ello daremos algunas definiciones.

4.1 Enunciado del Teorema principal

Definición 4.1 *Diremos que una funcion holomorfa*

$$f : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0),$$

es tangente a la identidad si $f'(0) = 1$.

Notación 4.1 *Representaremos por* $\mathscr{H}$ *al conjunto de las funciones holomorfas en alguna vecindad del origen* $(\mathbb{C}, 0)$ *que dejan fijo al* $0 \in \mathbb{C}$ *y son tangentes a la identidad.*

A continuación veamos el teorema principal de ésta sección.

Teorema 4.1 *El espacio de orbitas de* G° *actuando en* $D^N_{p,\lambda}$ *está en biyección canónica con* $\mathbb{C}^p \times \mathscr{H}^p$.

Para la prueba del Teorema construiremos una aplicación canónica biyectiva T entre $D^N_{p,\lambda}$ y $\mathbb{C}^p \times \mathscr{H}^p$. Nuestro punto de partida será un resutado de *Hukuara*, *Kimura y Matuda*, que será enuciado en la siguiente subsección.

4.2 Desarrollo Asintótico

En ésta subsección se enunciarán definiciones necesarias para el teorema de *Hukuara, Kimura y Matuda*

Definición 4.2 *Un sector abierto $U \subseteq \mathbb{C}$, de vértice en $0 \in \mathbb{C}$, será un conjunto de la forma siguiente*

$$U = \{x \in \mathbb{C} : \ \alpha < argx < \beta, \ 0 < |x| < R\} \cup \{0\}$$

donde $R \in (0, +\infty]$.

De la definición anterior se considerará al número real $\beta - \alpha$, como la abertura del sector U.

Definición 4.3 *Sea U un sector abierto. Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}^n$. Sea $g \in \mathcal{O}(\Omega \times (U - \{0\}\,; \mathbb{C})$, se dice que g admite*

$$\widehat{g} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x) y^i, \quad a_i \in \mathcal{O}(\Omega).$$

un desarrollo asintótico (en parametros de Ω), si para todo sector cerrado $\overline{V}$ de U, todo compacto K de Ω y para todo entero $k \geqslant 0$, existe $C_{\overline{V},\ K,\ k} > 0$ tal que

$$\left| g(x_1, x_2) - \sum_{i=0}^{k} a_i(x) y^i \right| < C_{\overline{V},\ K,\ k} \, |x_1|^{k+1}, \ (x_1, x_2) \in K \times \left(\overline{V} - \{0\}\right)$$

Note que de la definición anterior se deduce facilmente que

$$\lim_{x_2 \to 0} \frac{\partial^k f}{\partial x_2^k}(x_1, x_2) = k! a_k(x_1).$$

A continuación daremos la definición de función asintotica en el sentido de Gèrard-Sibuya, el cual será usado en el Teorema de Hukuara, Kimura y Matuda, para ello consideremos una aplicación formal $\widehat{\varphi} : (\mathbb{C}, 0) \times (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ tal que $\widehat{\varphi}(x, 0) = x$.

Definición 4.4 *Sea φ una función holomorfa sobre $(U - \{0\}\,, 0) \times (\mathbb{C}, 0)$ se dice que es asintótica a $\widehat{\varphi}$ en el sentido de Gèrard-Sibuya, si para todo sector cerrado $\overline{V} \subset U$ y para todo disco cerrado $\overline{D}$ con centro en $0 \in \mathbb{C}$, y para todo entero $k \geqslant 0$ existe $C_{\overline{V},\ \overline{D},\ k} > 0$ de modo que*

$$\left| \varphi(x_1, x_2) - \widehat{\varphi}^k(x_1, x_2) \right| < C_{\overline{V},\ K,\ k} \, |(x_1, x_2)|^{k+1} \quad (x_1, x_2) \in \overline{V} \times \overline{D}$$

donde $\widehat{\varphi}^k$ es el $k-jet$ de $\widehat{\varphi}$.

De la definición anterior observe que el desarrollo asintótico de φ^{-1} en el sentido de Gèrard-Sibuya es $(\widehat{\varphi})^{-1}$. El teorema principal, que nos permitirá encontrar la biyección entre $D^N_{p,\lambda}/G^\circ$ y $\mathbb{C}^p \times \mathscr{H}^p$ es el teorema de Hukuara, Kimura y Matuda, que será enunciada a continuación, pero para ello consideremos una silla-nodo $w = 0$ en $D_{p,\lambda}$. Sabemos que por el Teorema 3.2 existe un cambio de coordenadas $\phi \in \widehat{G}^\circ$ donde $\phi = \left(x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_1)x_2^n, x_2\right)$, tal que

$$\phi^* w_{p,\lambda} \wedge w = 0$$

Teorema 4.2 (*Hukuara, Kimura y Matuda*) *Sea U un sector de vertice en $0 \in \mathbb{C}$ con una abertura como maximo $2\pi/p$, entonces existe una transformación holomorfa limitada $\phi_U : \Omega \times (U - \{0\}) \longrightarrow \mathbb{C} \times (U - \{0\})$, donde $\Omega \subset \mathbb{C}$ es una vecindad de $0 \in \mathbb{C}$, tal que*

(i) $\phi_U(x_1, x_2) = (\varphi_U(x_1, x_2), x_2)$

(ii) $\phi_U^* w_{p,\lambda} \wedge w = 0$

(iii) *φ_U es asintótico a $\varphi(x_1, x_2) = x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_1)x_2^n$ en $0 \in \mathbb{C}^2$, en el sentido de Gèrard-Sibuya.*

Para una demostración el lector debe consultar [7]. Observe que resulta facilmente que φ_U se extiende a $\Omega \times \{0\}$ como $\varphi_U(x_1, 0) = x_1, \;\; x_1 \in \mathbb{C}$, pues debido a que φ_U es asintotica a φ en el sentido de Gèrard-Sibuya.

El teorema anterior por tanto afirma que $\phi \in \widehat{G}^\circ$ no necesariamente es converge sin embargo ella posee representaciones cuando restringimos a sectores convenientes.

Definición 4.5 *Una aplicación holomorfa ϕ_U definida en $\Omega \times U$ será llamada* ***normalización sectorial*** *de $w = 0$ en $\Omega \times U$ si es dada como en el Teorema 4.2.*

En breve, se mostrará un lema que se usará posteriormente en esta sección

Lema 4.1 *Sean ϕ_U y ψ_U son normalizaciones sectoriales de $w = 0$ en $D_{p,\lambda}$ dadas por el Teorema 4.2, entonces $\pi_1 \circ \psi_U \circ \phi_U^{-1}$ es asintótica a x_1 en $0 \in \mathbb{C}^2$, en el sentido de Gèrard-Sibuya. Donde π_1 es a proyección con respecto a la primera coordenada.*

Prueba: En efecto, como ϕ_U y ψ_U son normalizaciones sectoriales, entonces tienen que ser dados de la forma siguiente y verificar la condición de asintótica,

$$\begin{aligned}
\phi_U(x_1, x_2) &= (\rho_U(x_1, x_2), x_2) \text{ entonces } |\rho_U(x_1, x_2) - \varphi_k| < c|(x_1, x_2)|^{k+1} \\
\psi_U(x_1, x_2) &= (\varphi_U(x_1, x_2), x_2) \text{ entonces } |\varphi_U(x_1, x_2) - \varphi_k| < c_1|(x_1, x_2)|^{k+1}
\end{aligned}$$

Donde φ_k es el k-jet de φ el cual está enunciado en el teorema 4.2, observe que facilmente se deduce que

$$\begin{aligned}\phi_U^{-1}(x_1,x_2) &= (\xi(x_1,x_2),x_2)\\ \rho_U\circ\phi_U^{-1}(x_1,x_2) &= x_1\end{aligned}$$

luego así

$$\pi_1\circ\psi_U\circ\phi_U^{-1}(x_1,x_2)=\varphi_U\circ\phi_U^{-1}(x_1,x_2)$$

Por lo tanto lo que se busca es lo siguiente

$$|\varphi_U\circ\phi_U^{-1}(x_1,x_2)-x_1|<c_3|(x_1,x_2)|^{k+1}.$$

En efecto

$$\begin{aligned}|\varphi_U\circ\phi_U^{-1}(x_1,x_2)-x_1| &= |\varphi_U\circ\phi_U^{-1}(x_1,x_2)-\varphi_k\circ\phi_U^{-1}(x_1,x_2)+\varphi_k\circ\phi_U^{-1}(x_1,x_2)-x_1|\\ &\leq \left|\varphi_U\circ\phi_U^{-1}(x_1,x_2)-\varphi_k\circ\phi_U^{-1}(x_1,x_2)\right|+\left|\varphi_k\circ\phi_U^{-1}(x_1,x_2)-x_1\right|\\ &< c_1|\phi_U^{-1}(x_1,x_2)|^{k+1}+\left|x_1-\varphi_k\circ\phi_U^{-1}(x_1,x_2)\right|\\ &< c_1|\phi_U^{-1}(x_1,x_2)|^{k+1}+|\rho_U\circ\phi_U^{-1}(x_1,x_2)-\varphi_k\circ\phi_U^{-1}(x_1,x_2)|\\ &< c_1|\phi_U^{-1}(x_1,x_2)|^{k+1}+c|\phi_U^{-1}(x_1,x_2)|^{k+1}=(c_1+c)|\phi_U^{-1}(x_1,x_2)|^{k+1}\end{aligned}$$

sólo basta considerar $c_2=c_1+c$, por lo tanto

$$|\varphi_U(\xi_1(x_1,x_2),x_2)-x_1|<c_2|\phi_U^{-1}(x_1,x_2)|^{k+1}\leq c_2c_3^{k+1}\,|(x_1,x_2)|^{k+1}$$

así queda demostrado el Lema 4.1. ■

Un pregunta que surge es, como son las funciones del tipo $\pi_1\circ\psi_U\circ\phi_U^{-1}$ para responder esta interrogante se dará una definición de lo que es isotropia sectorial.

4.3 Isotropías Sectoriales

Definición 4.6 *Sea $g:\Omega\times U\longrightarrow\mathbb{C}\times U$, diremos que g es una isotropía sectorial para $w_{p,\lambda}=0$, si $g(x_1,x_2)=(g_U(x_1,x_2),x_2)$ donde g_U es asintótica a x_1 en el sentido de Gèrard-Sibuya y además verifique $g^*\,w_{p,\lambda}\wedge w_{p,\lambda}=0$.*

La siguiente proposición responderá la interrogante hecha en la subsección anterior.

Proposición 4.1 *Conservando las notaciones anteriores, tenemos que:*

(*i*) *Si* $U-\{0\} \subset \{x_2 \in \mathbb{C};\ Re\,(x_2^p) > 0\}$ *entonces* $g_U(x_1,x_2) = x_1 + a_0 x_2^{\lambda} \exp(-1/px_2^p),\ a_0 \in \mathbb{C}$

(*ii*) *Si* $U-\{0\} \subset \{x_2 \in \mathbb{C};\ Re\,(x_2^p) < 0\}$ *entonces* $g_U(x_1,x_2) = x_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[x_2^{\lambda} \exp(-1/px_2^p)\right]^{1-n} x_1^n,$

$a_0 \in \mathbb{C}$ *donde* $x_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x_1^n \in \mathscr{H}$

(*iii*) *Si* U *contiene un rayo donde* $Re(x_2^p) = 0$, *entonces* $g_U(x_1,x_2) = x_1$.

Prueba: En efecto, escribamos $g_U(x_1,x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x_2) x_1^n$ (esto es debido al Lema de Hartogs) donde g_n son holomorfas para todo entero $n \geq 1$. La condición $g^*\ w_{p,\lambda} \wedge w_{p,\lambda} = 0$ es equivalente a

$$g_U(x_1,x_2)\,(1+\lambda x_2^p) = x_1\,(1+\lambda x_2^p)\,\frac{\partial g_U}{\partial x_1} + x_2^{p+1}\frac{\partial g_U}{\partial x_2}$$

reemplazando $g_U(x_1,x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x_2) x_1^n$ en la ecuación anterior y por identificación de la serie en términos de x_1 obtenemos

$$(1-n)(1+\lambda x_2^p) g_n(x_2) = x_2^{p+1} g_n'(x_2)$$

de donde se deduce que

$$g_n(x_2) = a_n \left[x_2^{\lambda} \exp\left(-1/px_2^p\right)\right]^{1-n}; \quad a_n \in \mathbb{C},$$

donde n es un entero no negativo. Por otro lado tenemos que $g_U(x_1,x_2)$ se extiende a $\Omega \times \{0\}$, como $g_U(x_1,0) = x_1$, por tanto resulta

$$g_1(x_1,x_2) = 1$$

además también del hecho que g_U es asintótica a x_1 (en sentido de Gèrard-Sibuya), se obtiene

$$\lim_{x_2 \to 0} \frac{g_n(x_2)}{x_2^k} = 0$$

para $n \neq 1$ y para todo $k \in \mathbb{N}$. Por otro lado observe que

$$\left|\frac{g_n(x_2)}{x_2^k}\right| = |a_n||x_2|^{\lambda_1(1-n)-k} \exp(-\lambda_2\theta) \exp\left(\frac{-Re(x_2^p)(1-n)}{p|x_2|^{2p}}\right)$$

donde $\lambda_1 = Re(\lambda)$, $\lambda_2 = Im(\lambda)$ y $\theta = \arg(x_2)$.

Veamos la prueba del item (*i*)

En este caso tenemos por hipótesis que $Re(x_2^p) > 0$, entonces

$$\exp\left(\frac{-Re\,(x_2^p(1-n))}{p|x_2|^{2p}}\right) \geq 1$$

luego de lo anterior se deduce

$$0 \leq |a_n||x_2|^{\lambda_1(1-n)-k} \leq \frac{g_n(x_2)}{x_2^k}$$

tomando límite cuando $x_2 \to 0$, entonces

$$\lim_{x_2\to 0} |a_n||x_2|^{\lambda_1(1-n)-k} = 0$$

si consideramos $k > \lambda_1(1-n)$ entonces $|a_n| = 0$ para $n > 1$. En consecuencia $g_U(x_2)$ queda expresado de la forma siguiente

$$g_U(x_2) = a_0 x_2^{\lambda} \exp\left(-1/px_2^p\right) + x_1, \quad \textit{donde} \;\; a_0 \in \mathbb{C}$$

Veamos la prueba del item (ii)

En este caso tenemos por hipótesis que $Re(x_2^p) < 0$, entonces

$$\exp\left(\frac{-Re\,(x_2^p)}{p|x_2|^{2p}}\right) \geq 1$$

luego de lo anterior se deduce

$$0 \leq |a_n||x_2|^{\lambda_1-k} \leq \frac{g_n(x_2)}{x_2^k}$$

tomando límite cuando $x_2 \to 0$, entonces

$$\lim_{x_2\to 0} |a_n||x_2|^{\lambda_1-k} = 0$$

si consideramos $k > \lambda_1$ entonces $|a_0| = 0$. En consecuencia $g_U(x_2)$ queda expresado de la forma siguiente

$$g_U(x_2) = x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[x_2^{\lambda} \exp\left(-1/px_2^p\right)\right]^{1-n} x_1^n$$

Además recordemos que g_U es holomorfa, así que los $\{a_n\}_{n\geq 2}$ tienen que ser elegidos de tal forma que no contradigan el hecho de que g_U se holomorfa, por esta razón es suficiente considerar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_1^n$$

sea convergente, o lo que es equivalente a

$$x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_1^n \in \mathscr{H}.$$

finalmente el item (iii) de la proposición, sigue el mismo razonamiento empleado en item (i) y (ii), luego así queda probado la Proposición 4.1. ∎

4.4 La aplicación Canónica inyectiva de $\mathbb{C}^p \times \mathscr{H}^p$ sobre $D_{p,\lambda}^N/G^\circ$

Ahora podemos definir la aplicación

$$T : D_{p,\lambda}^N/G^\circ \longrightarrow \mathbb{C}^p \times \mathscr{H}^p$$

Consideremos un recubrimiento de S^1 por sectores U_i, $i = 0, 1, \cdots, 2p-1$ de abertura $2\pi/p$ cuyas bisectrices son los rayos $Re(x_2^p) = 0$, esto es en la direcciones

$$\exp\left(\left[\frac{2k+1}{2p}\right]\pi i\right) \qquad k = 0, 1, \cdots, 2p-1.$$

Además $U_0 \cap U_1,\ U_1 \cap U_2,\ ,\cdots\ U_{2p-1} \cap U_0$ son sectores donde alternadamente encontramos $Re(x_2^p) < 0$ y $Re(x_2^p) > 0$. En cada U_i tenemos una única normalización sectorial. En efecto si existen ϕ_U y ψ_U normalizacines sectoriales , entonces $\pi_1 \circ \psi_U \circ \phi_U^{-1}$ es asintótica a la identidad (gracias al Lema 4.1) observe también $\left(\psi_U \circ \phi_U^{-1}\right)^* w_{p,\lambda} \wedge w_{p,\lambda} = 0$, por tanto $\psi_U \circ \phi_U^{-1}$ es una isotropía sectorial, además U_i es un sector que contiene un rayo donde $Re(x_2^p) = 0$, entonces por la Proposiciíon 4.1 resulta que $\psi_U \circ \phi_U^{-1} = id$, entonces $\psi_U = \phi_U$; en consecuencia en cada U_i existe una única normalización sectorial ϕ_i dada por el Teorema 4.2. Tenemos así que las isotropías sectoriales $\phi_i \circ \phi_{i+1}^{-1}$ son dadas por

$$\phi_i \circ \phi_{i+1}^{-1}(x_1, x_2) = \begin{cases} \left(x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^i \left[x_2^\lambda \exp\left(-1/px_2^p\right)\right]^{1-n} x_1^n, x_2\right) & ; \quad i = 0, 2, 4, \cdots, 2p-2 \\ \left(x_1 + a_0^i x_2^\lambda \exp\left(-1/px_2^p\right), x_2\right) & ; \quad i = 1, 3, 5 \cdots, 2p-1 \end{cases}$$

Ésto es debido que $\phi_i \circ \phi_{i+1}^{-1}$ son isotropías sectoriales. Definamos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \tilde{T} : D_{p,\lambda}^N &\longrightarrow \mathbb{C}^p \times \mathscr{H}^p \\ w &\longrightarrow \tilde{T}(w) \end{aligned}$$

donde $\tilde{T}(w) = \left(a_0^{(1)}, a_0^{(3)}, \cdots, a_0^{(2p-1)}, x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(0)} x_1^n, x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)} x_1^n, \cdots, x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2p-2)} x_1^n\right)$
Luego así definimos la aplicación cañonica T

$$\begin{aligned} T : D_{p,\lambda}^N/G^\circ &\longrightarrow \mathbb{C}^p \times \mathscr{H}^p \\ [w] &\longrightarrow T\left([w]\right) = \tilde{T}(w) \end{aligned}$$

El siguiente lema nos brinda la buena definición de la aplicación T y la inyectividad de la misma. Observe que la aplicación T es la aplicación que se busca para el teorema 4.1.

Lema 4.2 *La aplicación canónica T está bien definida y es inyectiva.*

Prueba: En efecto, sea $[w_1], [w_2] \in D^N_{p,\lambda}/G^\circ$ y $[w_1] = [w_2]$, entonces existe $\xi \in G^\circ$ tal que $\xi^* w_2 \wedge w_1 = 0$. Sabemos por el Teorema 3.2 que existen $\phi_1,\ \phi_2 \in \hat{G}^\circ$, únicos satisfaciendo

$$\phi_j^* w_{p,\lambda} \wedge w_j = 0, \quad j = 1,\ 2$$

por otro lado observe que

$$(\phi_2 \circ \xi)^* w_{p,\lambda} \wedge w_1 = 0$$

como sabemos $\phi_2 \in \hat{G}^\circ$ y $\xi \in G^\circ \subseteq \hat{G}^\circ$, luego $\phi_2 \circ \xi \in \hat{G}^\circ$, luego por la unicidad del Teorema 3.2 resulta que $\phi_2 \circ \xi = \phi_1$.

Ahora por el Teorema 4.2 podemos consideremos normalizaciones sectoriales $\phi_i^{(j)}$ de $w_j = 0$, $j = 1,\ 2$ y $i = 0,\ 1,\ \cdots,\ 2p-1$ ($\phi_i^{(j)}$ son normalizaciones asociadas a los $\Omega \times U_i$) además recuerde que $\phi_i^{(j)}$ es asintotica a ϕ_j, observe que siguiendo la definición de asintótica, resulta que

$$\phi_i^{(2)} \circ \xi \text{ es asintótica } \phi_2 \circ \xi = \phi_1. \tag{4.1}$$

Observe ahora que

$$(\phi_i^{(2)} \circ \xi)^* w_{p,\lambda} \wedge w_1 = 0, \tag{4.2}$$

luego de (4.1) y (4.2) resulta que

$$\phi_i^{(2)} \circ \xi = \phi_i^{(1)} \tag{4.3}$$

luego así de (4.3) se deduce facilmente que

$$\phi_i^{(1)} \circ \left(\phi_{i+1}^{(1)}\right)^{-1} = \phi_i^{(2)} \circ \left(\phi_{i+1}^{(2)}\right)^{-1} \tag{4.4}$$

entonces (4.4) nos brinda la buena definición de T, pasemos ahora a probar la inyectividad esto es $T(w_1) = T(w_2)$, entonces $w_1 \backsim w_2$, la relación de equivalencia significa probar que existe $\xi \in G^\circ$ tal que $\xi^* w_2 \wedge w_1 = 0$.

En efecto, si $T(w_1) = T(w_2)$, entonces

$$\phi_i^{(1)} \circ \left(\phi_{i+1}^{(1)}\right)^{-1} = \phi_i^{(2)} \circ \left(\phi_{i+1}^{(2)}\right)^{-1} \qquad \forall\, i = 0,\ 1,\ \cdots,\ 2p-1. \quad \text{en} \quad U_i \bigcap U_{i+1} \tag{4.5}$$

introduzcamos la siguiente función

$$\xi_i = \left(\phi_i^{(2)}\right)^{-1} \circ \phi_i^{(1)}, \quad \text{esta definida en cada } U_i,$$

observe que debido a (4.5) tenemos que

$$\xi_i = \xi_{i+1} \quad \text{en} \quad U_i \cap U_{i+1},$$

ahora si definamos ξ de la forma siguiente

$$\begin{aligned} \xi : \Omega \times (U - \{0\}) &\longrightarrow \mathbb{C} \times (U - \{0\}) \\ (x_1, x_2) &\longrightarrow \xi(x_1, x_2) = \xi_i(x_1, x_2), \;\; x_2 \in U_i - \{0\}\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde $U = \bigcup_{i=0}^{2p-1} U_i$, observemos que ξ es holomorfa, esto es debido a los $\phi_i^{(j)}$ son holomorfas en $\Omega \times (U_i - \{0\})$, además ξ se extiende continuamente en $(x_1, 0)$ como $\xi(x_1, 0) = (x_1, 0)$, esto también es debido al hecho que $\phi_i^{(j)}$ se extiende continuamente en $(x_1, 0)$, llamemos $\widetilde{\xi}$ a la extensión de ξ.

$$\widetilde{\xi}(x_1, x_2) = \begin{cases} \xi(x_1, x_2) \quad , \quad (x_1, x_2) \in \Omega \times (U - \{0\}). \\ \quad (x_1, 0) \quad , \quad x_1 \in \Omega, \;\; x_2 = 0, \end{cases}$$

Observe que $\widetilde{\xi} = (F(x_1, x_2), x_2)$ razón es por la forma como fueron creados los ξ_i. Para ver si $\widetilde{\xi}$ es holomorfa solo basta probar que F sea holomorfa en $\Omega \times U$, ahora nuestro problema se reduce a probar que F se una función holomorfa en $\Omega \times U$, para ver ello haremos uso del teorema de Hartogs, el cual nos dice una función es holomorfa si y solo si en cada variable separada el holomorfa, es decir solo basta ver que $F_{x_1}(x_2) = F(x_1, x_2)$ sea holomorfa en U y que $F_{x_2}(x_1) = F(x_1, x_2)$ sea holomorfa en Ω.

Afirmación 1: *La función $F_{x_2}(x_1) = F(x_1, x_2)$ es holomorfa en Ω, para cada x_2 fijo en U.*
En efecto, observemos que la función $F_{x_2}(x_1) = F(x_1, x_2)$ es de la forma

$$F_{x_2}(x_1) = \begin{cases} \rho(x_1, x_2) \quad , \quad x_2 \neq 0. \\ \qquad x_1 \quad , \quad x_2 = 0, \end{cases}$$

Observamos que para cada x_2 fijo en U la función es holomorfa en Ω, luego así la afirmación 1 queda justificada.

Afirmación 2: *La función $F_{x_1}(x_2) = F(x_1, x_2)$ es holomorfa en U, para cada x_1 fijo en Ω.*
En efecto, sabemos que la función $F_{x_1}(x_2) = F(x_1, x_2)$ es holomorfa en $U - \{0\}$, además $\lim_{x_2 \to 0} F_{x_1}(x_2) = x_1$ para cada x_1 fijo en Ω, luego haciendo uso del Teorema de Riemann resulta que $F_{x_1}(x_2)$ es holomorfa en U, por tanto así queda justificada la afirmación 2.

En consecuencia las afirmaciones anteriores nos dicen que la función $F(x_1, x_2)$ es holomorfa en cada variable separada, luego del teorema de Hartogs resulta que $F(x_1, x_2)$ es holomorfa en $\Omega \times U$ por lo tanto $\widetilde{\xi}$ es holomorfa en $\Omega \times U$. Sin perdida de generalidad consideremos $\widetilde{\xi} = \xi$.

Afirmación 3: *La función ξ verifica la siguiente ecuación $\xi^* w_2 \wedge w_1 = 0$.*
En efecto, recordemos que ξ es de la forma

$$\xi(x_1, x_2) = \begin{cases} \xi_i(x_1, x_2) & , \quad (x_1, x_2) \in \Omega \times (U_i - \{0\}). \\ (x_1, 0) & , \quad x_1 \in \Omega, \ x_2 = 0, \end{cases}$$

donde de los $\xi_i = (\phi_i^{(2)})^{-1} \circ \phi_i^{(1)}$, de donde los $\phi_i^{(j)}$ son normalizaciones sectoriales esto quiere decir que ellas verifican

$$(\phi_i^{(1)})^* w_{p,\lambda} \wedge w_1 = 0, \tag{4.7}$$

$$(\phi_i^{(2)})^* w_{p,\lambda} \wedge w_2 = 0, \tag{4.8}$$

luego de las ecuaciones (4.7) y (4.8) resulta que

$$\left(\left(\phi_i^{(2)} \right)^{-1} \circ \phi_1^{(1)} \right)^* w_2 \wedge w_1 = 0$$

es decir $\xi_i^* w_2 \wedge w_1 = 0$ por lo tanto de

$$\xi^* w_2 \wedge w_1 = 0$$

luego así que justificado la afirmación.

Volviendo a la prueba del Lema 4.2 tenemos ahora que ξ es holomorfa, además $\xi(x_1, 0) = (x_1, 0)$, luego de la definición de G° resulta que $\xi \in G^\circ$ y de la afirmación 3 se llega a probar que $w_1 \sim w_2$, esto quiere decir que T es inyectiva. ∎

4.5 Funciones C^∞ en el sentido de Whitney

Antes de examinar la sobreyectividad, haremos una pequeña introducción motivacional, por el aspecto peculiar de las isotropías sectoriales respecto a las funciones de clase C^∞ en el sentido de Whitney. Consideremos $K \subset \mathbb{C}^m$ compacto y $\left(f^k\right)_{k \in \mathbb{N}^m}$ una colección de funciones continuas en $C^0(K; \mathbb{C})$. Diremos que a cada función $F^{(l)}(x) = f^l(x)$ para $l \in \mathbb{N}^m$, esta asociada a su jet infinito $\left(f^{k+l}\right)_{k \in \mathbb{N}^m}$; el cambio de notación de f^l por $F^{(l)}$ es justamente para señalar que la función se hace acompañar de su jet. Escribiremos $|k| = k_1 + k_2 + \cdots k_m$ y $k! = k_1!k_2! \cdots k_m!$ para $k = (k_1,\, k_2, \cdots, k_m) \in \mathbb{N}^m$; si $z \in \mathbb{C}^m$, denotaremos por $z^k = z_1^{k_1}, \cdots, z_m^{k_m}$.

Definición 4.7 *Una función $F : K \longrightarrow \mathbb{C}$, es llamado C^∞ en el sentido de Whitney, si existe una colección de funciones $\left(f^k\right)_{k\in\mathbb{N}^m}$ continuas en $C^0(K;\mathbb{C})$ tal que para cada $l \in \mathbb{N}^m$ y $n \in \mathbb{N}$ exista $C_n^{(l)} > 0$ el cual verifique*

$$\left| F^{(l)}(y) - \sum_{|k|=0}^{n} \frac{f^{k+l}}{k!}(y-x)^l \right| \leqslant C_n^{(l)} \left|y - x\right|, \quad \forall x,\ y \in K \tag{4.9}$$

Denotemos a las funciones C^∞ en el sentido de Whitney, definidas en K por $C_W^\infty(K;\mathbb{C})$.

Observación 4.1 *Los siguientes items son observaciones puntuales de la definición anterior*

1. *Note que la función F representa el papel de $F^{(0)}(x) = f^0(x)$, para todo $x \in K$.*
2. *Es claro que si $B \subseteq \mathbb{C}^n$, es una bola abierta conteniendo a K y $g \in C(B;\mathbb{C})$ la colección asociada a g por la definición anterior es simplemente su jet de orden infinito usual.*

A continuación se mostrarán teoremas que permitan extender funciones C^∞ en el sentido de Whitney. En lo que sigue de esta sección se considerará $K \subset \mathbb{C}^m$ un conjunto compacto salvo, en casos donde se diga lo contrario. El siguiente Teorema nos dice que toda función C^∞ en el sentido de Whitney, definido en K puede ser extendida a $\mathbb{C}^m$.

Teorema 4.3 *Existe una aplicación $W : C_w^\infty(K;\mathbb{C}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{C}^m;\mathbb{C})$ tal que cada $F \in C_W^\infty(K;\mathbb{C})$ y para cada $x \in K$*

$$\frac{\partial^k WF(x)}{\partial x^k} = f^k(x), \quad \textit{para } k \in \mathbb{N}^m$$

donde f^k es el jet asociado de F.

Para la demostración, el lector debe consulta [7]. Otro criterio importante que necesitamos para la prueba de la sobreyectividad; es cuando dos funciones $F_i \in C_W^\infty(K_i;\mathbb{C})$, $i = 1,\ 2$ donde K_i es compacto, puede definir una $F \in C_W^\infty(K_1 \cap K_2;\mathbb{C})$, la cual sea una extensión de ambas es decir

$$F(x) = F_1(x) \;\; x \in K_1 \;\; y \;\; F(x) = F_2(x) \;\; x \in K_2$$

Es claro que necesariamente para poder definir F debe ocurri que

$$f_1^{(l)}(x) = f_2^{(l)}(x), \quad \forall x \in K_1 \cap K_2$$

donde $f_1^{(l)}$ y $f_2^{(l)}$ son los jet asociados respectivamente a F_1 y F_2. Otro requisito que necesitamos para poder definir F es que K_1 y K_2 sean compactos regularmente separados.

Definición 4.8 *Sean $K_1,\ K_2 \subseteq \mathbb{C}^m$, compactos; se dice que son compactos regularmente separados, si existen constantes $c > 0$, $\alpha > 0$ tal que*

$$d(x, K_2) \geq cd(x, K_1 \cap K_2)^{\alpha};\ \ \forall x \in K_1$$

El teorema de extensión de Whitney que nos da la existencia de la función F anteriormente dada es el siguiente.

Teorema 4.4 *Sean $K_1,\ K_2 \subseteq \mathbb{C}^m$, compactos regularmente separados y $F_i \in C^{\infty}_W(K_i;\mathbb{C})$, $i = 1,\ 2$ tal que $f_1^{(l)}(x) = f_2^{(l)}(x)$, para todo $x \in K_1 \cap K_2$, donde $f_1^{(l)}$ y $f_2^{(l)}$ son los jet asociados a F_1 y F_2 respectivamente, entonces existe $F_i \in C^{\infty}_W(K_i;\mathbb{C})$ tal que $f^{(l)}(x) = f_1^{(l)}(x)$, si $x \in K_1$ y $f^{(l)}(x) = f_2^{(l)}(x)$, si $x \in K_2$ donde $f^{(l)}$ es el jet asociado a F.*

4.6 Estructuras Casi-complejas

Vamos a empezar con un poco de álgebra lineal.

Sea W un espacio vectorial real, su complejizado viene a ser un espacio vectorial complejo $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} W$. Elementos de $W_{\mathbb{C}}$ son de la forma $x + iy$, con $x, y \in W$. También podríamos empezar con un espacio vectorial complejo V y consideranlo como un espacio vectorial real de dimensión doble.

Definición 4.9 *Una **estructura compleja** sobre un espacio vectorial real V es un endomorfismo $J : V \longrightarrow V$ que cumple*

$$J^2 = -id_V$$

Aquí, J^2 significa J compuesto consigo mismo y id_V es la identidad sobre V.

Recordemos que al ser V un espacio vectorial real, en él sólo está en principio definida la multiplicación por escalares reales. Observamos que el efecto de aplicar J dos veces, es el mismo que el de la multiplicación por -1. Esto nos recuerda el efecto de la multiplicación por la unidad imaginaria i en los espacios vectoriales complejos. Y de hecho, una estructura compleja J nos permitirá dotar a V de la estructura de espacio vectorial complejo. Para ello será necesario definir la multiplicación por escalares complejos de este modo:

$$(x + iy)v = xv + yJ(v)$$

para todo número real x, y y todo vector $v \in V$.

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, con una estructura compleja J, se puede extender J a $V_{\mathbb{C}}$ y obtener una aplicación $\mathbb{C}-lineal$ $J_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}$ definido como $V_{\mathbb{C}}(x+iy) = V(x) + iV(y)$ y por supuesto también satisface que $J_{\mathbb{C}}^2 = -id_{V_{\mathbb{C}}}$.

Por ejemplo, sea M una variedad compleja n-dimensional ($dim_{\mathbb{R}} M = 2n$) y $p \in M$. Designemos por T_pM su espacio tangente real en el punto $p \in M$ (para un mejor estudio detallado de espacios tangentes de una variedad compleja vea [10]), considerando en torno de $p \in M$ una carta de atlas analitico de M, con coordenadas $(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)$, se tiene que T_pM es generado por los vectores (o derivaciones $\mathbb{R}$-lineales sobre $C^\infty(M;\mathbb{R})$)

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}\right\}.$$

Ahora si deseamos complejificar T_pM obtenemos $(T_pM)^{\mathbb{C}}$, esto es, el espacio generado por

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\right\},$$

donde como usualmente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_k} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right)\\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right),\end{aligned}$$

donde $1 \leq k \leq n$.

Consideremos ahora la transformación $\mathbb{R}-lineal$ $L: T_pM \longrightarrow T_pM$; podemos tornarla $\mathbb{C}-lineal$ puesta $L^{\mathbb{C}}: (T_pM)^{\mathbb{C}} \longrightarrow (T_pM)^{\mathbb{C}}$, $L^{\mathbb{C}}(u+iv) = L(u) + iL(v)$. Se puede verificar rapidamente que

$$L^{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\right) = \overline{L^{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right)}.$$

Como ejemplo importante de ésta situación, tomaremos $J_p: T_pM \longrightarrow T_pM$, $\mathbb{R}-lineal$ satisfaciendo $J_p\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial y_k}$ y $J_p\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_k}$, $1 \leq k \leq n$.

Para verificar que $J_p^{\mathbb{C}}$ esta bien definida (esto es, independiente de la carta coordenada escojida en torno de $p \in M$), basta notar que $J_p^{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right) = i\frac{\partial}{\partial z_k}$ y $J_p^{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\right) = -i\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}$, $1 \leq k \leq n$.

Proposición 4.2 *Los siguientes items se desprenden del ejemplo anterior:*

1. *La aplicación J_p verifica lo siguiente $J_p^2 = -id$ para todo $p \in M$.*

2. *La aplicación $p \xrightarrow{J} J_p \in \mathcal{L}(T_pM, T_pM)$ es de clase C^∞.*

Si el lector desea una prueba se le sugiere ver Cesar Camacho [11].

Definición 4.10 *Sea M una variedad real diferenciable de clase C^∞ donde esta definida una aplicación $p \stackrel{J}{\longrightarrow} J_p \in \mathcal{L}(T_pM, T_pM)$ de clase C^∞ tal que $J_p^2 = -Id$ $\forall p \in M$. Diremos que J es una **estructura casi compleja** sobre M.*

Por tanto, una varidead compleja posee una estructura casi-compleja natural, subyacente a su propia estructura compleja. El problema que surge es saber si la existencia de una estructuta casi-compleja sobre una variedad real M garantice que M sea una variedad compleja. El teorema de Newlander-Niremberg responde afirmativamente a esta pregunta, cuando satisface una condición de integrabilidad.

Definición 4.11 *Sea M una variedad real diferenciable de clase C^∞ admitiendo una estructura casi-compleja J. Diremos que J es **integrable** si existe una cobertura $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de M por cartas coordenadas tal que si $p = (x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n) \in U_i$ entonces*

$$\begin{aligned} J_p\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) &= \frac{\partial}{\partial y_k} \\ J_p\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) &= -\frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

donde $1 \leq k \leq n$.

Proposición 4.3 *Sea M una variedad real diferenciable de clase C^∞, admitiendo una estructura casi-compleja J. Si J es integrable, entonces podemos escojer un atlas analítico que torna M variedad compleja.*

Con respecto a la prueba se le suguiere ver Cesar Camacho [11]. Como mencionamos anteriormente, El teorema de Newlander-Nirenberg dá una condición para que la estructura casi compleja sea integrable. Para enunciarlo, precisamos de algunas definiciones. Sea $J \in \mathcal{L}(V, V)$ tal que $J^2 = -Id_V$, donde V es un espacio vectorial real. Como el polinomio minimo de J es $P(t) = t^2 + 1$, vemos que existen subespacios V^+, V^- de $V^\mathbb{C}$ de modo que $V^\mathbb{C} = V^+ \oplus V^-$,

$$\begin{aligned} J^\mathbb{C}(v) &= iv, \quad \forall v \in V^+, \\ J^\mathbb{C}(v) &= -iv, \quad \forall v \in V^-. \end{aligned}$$

Además de ésto, la descomposición es única. Si ahora J es estructura casi compleja en M, tenemos $(TM)^\mathbb{C} = TM^+ \oplus TM^-$.

Definición 4.12 *Un campo de vectores en M es de **tipo holomorfo** cuando para una sección de TM^+. Indicaremos por $\mathfrak{X}^+(M)$ el espacio de tales campos.*

Teorema 4.5 (*Newlander-Nirenberg*) *Sea M una variedad real de clase C^∞ admitiendo una estructuta casi-compleja J. La estructura casi-compleja J es integrable si y soló si para todo $X,\ Y \in \mathfrak{X}^+(M)$ tenemos $[X,Y] \in \mathfrak{X}^+(M)$, osea $\mathfrak{X}^+(M)$ es cerrado por el corchete de Lie.*

La prueba de este teorema se encuentra en [9]. Observese que la condición es satisfecha necesariamente cuando M es una variedad compleja y J es una estructura casi-compleja natural.

Corolario 4.1 *Sea J una estructura casi-compleja en M, e integrable en un abierto y denso $\overline{M} \subset M$. Entonces J es integrable en M.*

Una prueba clara y sencilla del corolario lo puede encontrar en Cesar Camacho [11]. Con ésta herramientas vista anteriormente se podrá verificar la sobreyectividad de la aplicación T.

4.7 Sobreyectividad

A lo largo de esta subsección consideremos $U_{i,i+1} = U_i \cap U_{i+1}$, donde los U_i son los sectores de la subsección 5.4.

Proposición 4.4 *Las isotropías sectoriales $\phi_i \circ \phi_{i+1}^{-1}(x_1, x_2) = (\varphi_i(x_1, x_2), x_2)$, donde i toma los siguientes valores $i = 0, 1, 2, \cdots, 2p-1$ son tales que $\varphi_i \in C^\infty_W(\overline{D} \times \overline{V}; \mathbb{C})$, donde $\overline{D}$ es un disco cerrado y $\overline{V} \subset U_{i,i+1}$ y su desarrollo asintótico (según la definición 5.4) es x_1.*

Prueba : En efecto, como $\phi_i \circ \phi_{i+1}^{-1}(x_1, x_2) = (\varphi_i(x_1, x_2), x_2)$ es una isotropía sectorial, tenemos que φ_i, necesariamente tiene que ser de la forma

$$\varphi_i(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^i \left[x_2^\lambda \exp\left(-1/p x_2^p\right)\right]^{1-n} x_1^n & ; \quad i = 0, 2, 4, \cdots, 2p-2 \\ x_1 + a_0^i x_2^\lambda \exp\left(-1/p x_2^p\right), & ; \quad i = 1, 3, 5 \cdots, 2p-1 \end{cases}$$

esto es por lo visto en 5.4. Recordemos que una función es C^∞ en el sentido de Whitney si existe una colección de funciones continuas, las cuales satisfacen la desigualdad (4.9)

Afirmación : *La función $\varphi_i \in C^\infty_W(\overline{D} \times \overline{V}; \mathbb{C})$, donde $\overline{D}$ es un disco cerrado y $\overline{V} \subset U_{i,i+1}$.*

En efecto, definamos

$$F_i(x_1, x_2) = \begin{cases} \varphi_i(x_1, x_2), & x_2 \neq 0 \\ x_1, & x_2 = 0 \end{cases}$$

y solo bastará considerar la coleción $(f_i^{(l)})_{l \in \mathbb{N}^2}$ de funciones continuas donde los $f_i^{(l)}$ son de la forma siguiente

$$f_i^{(l)}(x_1, x_2) = \frac{\partial^l F_i}{\partial x_1^{l_1} x_2^{l_2}}; \quad l = (l_1, l_2)$$

observe que los $f_i^{(l)}$ son funciones continuas y satisfacen la desigualdad (4.9), por lo tanto φ_i es una función C^∞ en el sentido de Whitney en $\overline{D} \times \overline{V}$.

Ahora solo falta ver que φ_i sea asintótica a x_1 según la definición 5.4. De la observación hecha en la definición 5.4 resulta que el desarrollo asintótico de φ_i es

$$\widehat{g}(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x_1) x_2^k$$

donde $k! a_k(x_1) = \lim_{x_2 \to 0} \dfrac{\partial^k f}{\partial x_2^k}(x_1, x_2)$. Luego por la forma de los $\varphi_i(x_1, x_2)$ se deduce

$$a_k(x_1) = \begin{cases} x_1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

por lo tanto, el desarrollo asintótico de φ_i es $\widehat{g}(x_1, x_2) = x_1$. ∎

Volviendo analizar la sobreyectividad de la aplicación T. Dado un elemento en $\mathbb{C}^p \times \mathcal{H}^p$, este debe ser de la forma

$$\left(a_0^{(1)}, a_0^{(3)}, \cdots, a_0^{(2p-1)}, x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(0)} x_1^n, x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)} x_1^n, \cdots, x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2p-2)} x_1^n \right)$$

donde $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(i)} x_1^n$, $i = 0, 2, 4, \cdots, 2p-2$, converge en una vecindad del origen Ω. Ahora a cada coordenada le asociamos una isotropía sectorial de la forma

$$g_{i,i+1}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^i \left[x_2^\lambda \exp\left(-1/p x_2^p\right) \right]^{1-n} x_1^n & ; \quad i = 0, 2, 4, \cdots, 2p-2, \\ x_1 + a_0^i x_2^\lambda \exp\left(-1/p x_2^p\right), & ; \quad i = 1, 3, 5 \cdots, 2p-1. \end{cases}$$

Luego por la proposición anterior tenemos que $g_{i,i+1} \in C_W^\infty(\Omega \times U_{i,i+1}; \mathbb{C})$ donde U_i es un sector y su amplitud es $2\pi/p$. Nos gustaria que $(g_{i,i+1})_{i=0}^{2p-1}$ fuese una **cobordo** esto es que existan aplicaciones de la forma $\Phi_i(x_1, x_2) = (\phi_i(x_1, x_2), x_2)$ donde $\phi_i \in C_W^\infty(\Omega \times U_i; \mathbb{C})$ y sea holomorfa en $\Omega \times (U_i - \{0\})$ tal que

$$\Phi_i \circ \Phi_{i+1}(x_1, x_2) = G_{i,i+1}(x_1, x_2),$$

donde $G_{i,i+1}(x_1, x_2) = (g_{i,i+1}(x_1, x_2), x_2)$.

Observación 4.2 *Note que las funciones $g_{i,i+1}$ son holomorfas en $\Omega \times (U_{i,i+1} - \{0\})$ y además son inyectivas para cada x_2 fijo.*

En consecuencia por la observación hecha resulta que la función $G_{i,i+1}$ es holomorfa e inyectiva en $\Omega \times (U_{i,i+1} - \{0\})$, luego del Teorema 1.3 se deduce que $G_{i,i+1}$ es un biholomorfismo

$$G_{i,i+1} : \Omega \times (U_{i,i+1} - \{0\}) \longrightarrow \Omega_1 \times (U_{i,i+1} - \{0\})$$

donde Ω_1 es un vecindad del origen $\mathbb{C}$, y $G_{i,i+1}^{-1}$ es holomorfa en $\Omega_1 \times (U_{i,i+1} - \{0\}$. Sin perdida de generalidad consideremos $G_{j,j+1}^{-1}(x_1, x_2) = (g_{i,i+1}^{-1}(x_1, x_2), x_2)$.
Consideremos a Ω_2 una vecindad del origen de $\mathbb{C}$, tal que $\Omega_2 \subset \Omega_1$ y $\Omega_2 \subset \Omega$. sin perdida de generalidad consideremos $\Omega_2 = \Omega$. Luego así $G_{i,i+1}$ y $G_{i,i+1}^{-1}$ estan definidas en $\Omega \times (U_{i,i+1} - \{0\})$ y son holomorfas, además ambas se extiende en $x_2 = 0$ como

$$\begin{aligned} G_{i,i+1}(x_1, 0) &= (x_1, 0) \\ G_{i,i+1}^{-1}(x_1, 0) &= (x_1, 0) \end{aligned}$$

Por otro lado, definamos ahora $\dfrac{\Omega \times U_i}{\sim}$ como identificación de puntos.

$$\frac{\Omega \times U_i}{\sim} = \begin{cases} \left\{(x_1, x_2, i); (g_{i,i+1}^{-1}(x_1, x_2), x_2, i+1)\right\}; & y \in U_{i,i+1} - \{0\} \\ \{(x_1, x_2, i); (g_{i,i+1}(x_1, x_2), x_2, i-1)\}; & y \in U_{i-1,i} - \{0\} \\ \{(x_1 x_2, i)\} & ; y \in Re(x_2^p) = 0,\ y \neq 0 \\ \{(x_1, 0, k),\ k = 0, 1, 2, \cdots, 2p-1\}. & \end{cases}$$

Definamos $M_g = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{2p-1} \frac{\Omega \times U_i}{\sim}$. Designemos por λ_i a las incluciones naturales

$$\begin{aligned} \lambda_i : \Omega \times U_i &\longrightarrow M_g \\ (x_1, x_2) &\longrightarrow \lambda_i(x_1, x_2) = [x_1, x_2, i] \end{aligned}$$

donde $i = 0, 1, 2 \cdots, 2p-1$, y consideremos la proyección π_2 definida como

$$\begin{aligned} \pi_2 : \quad M_g &\longrightarrow \bigcup_{i=0}^{2p-1} U_i \\ [x_1, x_2, i] &\longrightarrow \pi_2([x_1, x_2, i]) = x_2 \end{aligned}$$

Observación 4.3 *Los siguientes item se deducen facilmente de lo visto anteriormente:*

1.- *Observe que* $\lambda_i(\Omega \times U_i) = \dfrac{\Omega \times U_i}{\sim}$ *esto es debido a la forma como fue creado* $\dfrac{\Omega \times U_i}{\sim}$.

2.- *Note que las incluciones naturales* λ_i*, son biyectivas, además verifican*

$$\lambda_i(x_1, x_2) = \lambda_{i+1} \circ G_{i,i+1}^{-1}(x_1, x_2),$$

para todo $(x_1, x_2) \in \lambda_i^{-1}\left(\dfrac{\Omega \times U_i}{\sim} \bigcap \dfrac{\Omega \times U_{i+1}}{\sim}\right)$

3.- *Del item 2 se ve facilmente que* $M_g - \pi_2^{-1}(0)$ *es una superficie compleja donde las cartas coordenadas* $\left(\lambda_i^{-1}, \lambda_i(\Omega \times (U_i - \{0\}))\right)$

Vamos ahora a prolongar esta estructura de $M_g - \pi_2^{-1}(0)$ de forma C^∞ a M_g. Para ello consideremos inicialmente una colección de sectores $\{\overline{V}_j\}$, $j = 0, 1, 2 \cdots, 2p-1$, con $\overline{V}_j \subset U_j$, $\overline{V}_j$ cerrado y $\overline{V}_j \cap \overline{V}_{j+1} \neq 0$.

Diremos que una función ξ definida en un abierto M_g será de clase C^∞ (por definición), si $\xi_i = \xi \circ \lambda_i \in C_W^\infty(\Omega \times \overline{V}_j; \mathbb{C})$.

Observación 4.4 *Los siguientes items son deducciones e interrogantes que surgen de lo estudiado anteriormente:*

1.- Lo que se predente hacer es extender funciones C^∞ de $M_g - \pi_2^{-1}(0)$ a M_g, es decir extenderlos a $\pi_2^{-1}(0)$, es logico que todos ellos se pueden extender, pero solo algunos se pueden extender de forma C^∞, es por ello que imponemos una condición de C^∞ en sentido de Whitney.

2.- Note que ya conocemos funciones C^∞ en $M_g - \pi_2^{-1}(0)$ y que la nueva definición es consistente con ésta.

3.- La condición impuesta anteriormente, implica que $\xi_i(x_1, x_2) = \xi_{j+1} \circ G_{j,j+1}^{-1}(x_1, x_2)$, para $(x_1, x_2) \in \Omega \times (\overline{V}_j \cap \overline{V}_{j+1})$, donde $j = 0, 1, 2 \cdots, 2p-1$.

4.- Una pregunta natural que surge es, existiran funciones C^∞ en M_g.

Para responder la pregunta hecha en la observación anterior haremos uso de los Teoremas de Whitney vistos en la sub-sección 5.5.

En efecto, mostremos ahora que si existen funciones C^∞ en M_g, para ello basta exhibir funciones $\xi_i \in C^\infty(\Omega \times \overline{V}_j; \mathbb{C})$, satisfaciendo $\xi_j = \xi_{j+1} \circ G_{j,j+1}^{-1}$, $(x_1, x_2) \in \Omega \times (\overline{V}_j \cap \overline{V}_{j+1})$, $j = 0, 1, \cdots, 2p-1$, note que necesitamos esa condición necesariamente por lo visto en la observación anterior.

Consideremos la siguiente función

$$\xi_0(x_1, x_2) = x_1 \quad en \quad \Omega \times \overline{V}_0$$

debido a la condición que necesitamos consideremos

$$\xi_1(x_1, x_2) = \xi_0 \circ G_{0,1}^{-1}(x_1, x_2) \quad en \quad \Omega \times \left(\overline{V}_0 \cap \overline{V}_1\right),$$

luego por el teorema 4.3 prolongamos ξ_1 a $\Omega \times \overline{V}_1$ y además $\xi_1 \in C_W^\infty(\Omega \times \overline{V}_1; \mathbb{C})$ de forma analoga definimos

$$\xi_2(x_1, x_2) = \xi_1 \circ G_{1,2}^{-1}(x_1, x_2) \quad en \quad \Omega \times \left(\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2\right),$$

por el mismo argumento dicho anteriormente tenemos que $\xi_2 \in C^\infty_W(\Omega \times \overline{V}_2; \mathbb{C})$, siguiendo así hasta obtener $\xi_{2p-2} \in C^\infty_W(\Omega \times \overline{V}_{2p-2}; \mathbb{C})$. Observe que hay un pequeño problema para obtener ξ_{2p-1} pues ella ya esta definida en $\overline{V}_{2p-2} \cap \overline{V}_{2p-1}$ y $\overline{V}_{2p-1} \cap \overline{V}_0$ esto nos obliga a usar el Teorema 4.4 pues estamos tratando con compacto regularmente separados, luego así $\xi_{2p-1} \in C^\infty_W(\Omega \times (\overline{V}_{2p-2} \cap \overline{V}_{2p-1}) \cup (\overline{V}_{2p-1} \cap \overline{V}_0); \mathbb{C})$, de modo que aplicando nuevamente el Teorem 4.3 obtenemos $\xi_{2p-1} \in C^\infty_W(\Omega \times \overline{V}_{2p-1}; \mathbb{C})$, luego así se tiene ξ definido como

$$\begin{array}{rccl} \xi: & M_g & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & [x_1, x_2, i] & \longrightarrow & \xi([x_1, x_2, i]) = \xi_i(x_1, x_2) \end{array}$$

Observe que ξ no depende del representante de clase, debido a que $\xi_j(x_1, x_2) = \xi_{j+1} \circ G^{-1}_{j,j+1}(x_1, x_2)$. En conclución existen funciones C^∞ en M_g, por lo tanto M_g es una variedad real de clase C^∞. Nuestro objetivo ahora es que M_g se torne una variedad compleja.

Afirmación: *Es variedad diferenciable M_g posee una estructura casi-compleja J, de clase C^∞, que coincide en $M_g - \pi_2^{-1}(0)$ con su estructura compleja. Además de esto, J es integrable.*
En efecto, basta tomar en cada $\Omega \times \overline{V}_j$ un operador J_j canonico de $\mathbb{C}^2$, esto es,

$$\begin{aligned} J_j\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right) &= i\frac{\partial}{\partial z_k} \\ J_j\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\right) &= -i\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}, \end{aligned}$$

donde $k = 1, 2$.

Observación 4.5 *En los siguiente item se dá una explicación de por que la elección de los J_j*

1.- *Note que la aplicación proviene básicamente del ejemplo de la subsección anteior, previamente definiento $J_p\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial y_k}$ y $J_p\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_k}$, posteriormente creando los $J_p^{\mathbb{C}}$ a partir de los J_p, observe que se ve obvio el paso de los J_p en la definición anterior y simplemente se coloco los $J_p^{\mathbb{C}}$ que en nuestro caso lo representamos por J_j.*

2.- *Se deduce claramente que J_j es de clase C^∞ en $\Omega \times \overline{V}_j$.*

3.- *El operador J_j verifica $J_j = J_{j+1} \circ dG^{-1}_{j,j+1}$; esto es debido a que $\lambda_j = \lambda_{j+1} \circ G^{-1}_{j,j+1}$ (ver item 2 de la observación 5.3).*

4.- *Note que el item anterior es importante al momento de crear el operador J puesto que el pegado en $\Omega \times \left(\overline{V_j} \cap \overline{V_{j+1}}\right)$ tiene que estar bien definido .*

Con las observaciones anteriores se muestra que la colección $\{J_j\}$, $j = 0, 1, \cdots, 2p-1$, define un operador en M_g. Note que la integrabilidad de J en $M_g - \pi_2^{-1}(0)$ es inmediata por lo visto en la sub-sección 5.6 y del hecho que éste espacio es una superficie compleja. Luego haciendo uso del Corolario 4.1 resulta que J es integrable en M_g, ahora por la proposición 4.3 obtenemos que M_g es una superficie compleja. Se sigue que podemos seleccionar una carta F' local de M_g, en torno de $(0,0)$, de clase C^∞, de modo que el sistema de cartas locales $\left\{\lambda_0^{-1}, \lambda_1^{-1}, \cdots, \lambda_{2p-1}^{-1}, F'\right\}$ torne a M_g en una superficie compleja. Por el Teorema de Hartogs, $\pi_2 : (M_g, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ pasa a ser una sumersión analitica. Además sin perdida de generealidad podemos escoger F' de modo que $F'(x_1, 0) = (x_1, 0)$, para todo $(x_1, 0) \in \pi_2^{-1}(0)$ y su segunda componente sea π_2. Recordemos que el objetivo es encontrar Φ_j tal que sea un cobordo para ello definamos las siguiente aplicación

$$\Phi'_j = \left(F' \circ \lambda_j\right)^{-1}$$

donde $j = 0, 1, 2 \cdots, 2p-1$. Observe que los Φ'_j verifican lo siguiente

$$\Phi'_j \circ \left(\Phi'_{j+1}\right)^{-1} = \lambda_j^{-1} \circ \lambda_{j+1}$$

luego usando el item 2 de la observación 5.3 resula que

$$\Phi'_j \circ \left(\Phi'_{j+1}\right)^{-1} = G_{j,j+1}$$

En consecuencia Φ'_j es un cobordo.

Note que los Φ'_j tienen el mismo desarrollo asintótico en el sentido de Gèrard-Sibuya el cual será un elemento de $\Phi' \in \widehat{G}^\circ$. Ahora definamos $w = (\Phi')^* \, w_{p,\lambda}$ y oberve que w es una silla-nodo que pertenece a D_p. Es facil ver que apartir del Teorema 3.1, existe $h \in G^\circ$ tal que $h^* w \wedge w^N = 0$, donde $w^N \in D_{p,\lambda}^N$. Se sigue que la aplicación que buscamos es $\Phi_j = \Phi'_j \circ h$ además ellas son normalizaciones sectoriales de $w^N = 0$, con desarrollo asintótico $\Phi = \Phi' \circ h \in \widehat{G}^\circ$ y $\Phi_j \circ (\Phi_{j+1})^{-1} = G_{j,j+1}$, en consecuencia se logro probar la sobreyectividad del problema.

Conclusión

Como conclusión de este trabajo se a logrado demostrar el teorema de Dulac, el cual nos permitió dar un criterio para nuestro objetivo de clasificar.

Además se logro probar que las sillas-nodos, pueden ser reducidas, a una expresión mas sencilla denominada **forma normal de final**. También concluimos que dos sillas-nodos en $D^N_{p,\lambda}$ son *difeomorfismo-equivalentes* si y solo si ellas son G°-*equivalentes*. Finalmente se logro demostrar la existencia de una aplicación biyectiva entre los espacios $D^N_{p,\lambda}/G^\circ$, $\mathbb{C}^p \times \mathscr{H}^p$.

Con respecto a está última, una pregunta natural que surge para posibles trabajos es :

Será posible encontrar otra transformación T de $D^N_{p,\lambda}/G^\circ$ a $\mathbb{C}^p \times \mathscr{H}^p$, el cual me dá un mejor representante de clase, en el sentido que su respectiva ecuación diferencial, sea fácil de trabajar.

Bibliografía

[1] Jean Martinet, *Problémes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre.* Publications mathématiques de L'I.H.É.S., tome 55 (1982), p.63-164.

[2] Renato Benazic,*Topicos de Dinámica Compleja.*

[3] Lages Lima,Elon, *Análisis Real vol.II.* Sexta Edición. Rio de Janeiro,IMPA, CNP-2000.Libros Técnicos e Científicos Editora S.A.

[4] Valéria Iório, *EDP curso de graduación .* Instituto de Matemática y Ciencias Afines, UNI, 1999 350pp.(Coleccíon Textos IMCA).

[5] Robert C. Gunning, *Introduction to holomorphic functions of several variable Vol I.* Princeton University.

[6] B. MALGRANGE, *Ideals of differentiable functions.* Oxford Univ. Press (1966).

[7] Hukuara, H. , Kimura, T. , Matuda, T., *Equations differentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe.*. Publ. Math. Soc. of Japan 1961.

[8] Serge Lang, *Complex Analysis.* Yale University.

[9] Arnold, V, *Chapitres Supplémentaries de la Théorie des Équations Différentielles Ordinaries.* Mir 1980.

[10] Raymond O. Wells, Jr., *Differential Analysis on Complex Manifolds.*, Springer 1980

[11] Camacho y Sad, *Pontos Singulares de Equacoes Diferenciais Analiticas*, 16Colóquio Brasileiro de Matemática.

[12] Kunihiko Kodaira, *Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures*, Springer-Verlag