

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS



**MÉTODOS MULTIMALLA V-CICLO Y F-CICLO  
PARA EL PROBLEMA BIARMÓNICO USANDO  
EL ELEMENTO HSIEH-CLOUGH-TOCHER**

TESIS

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN  
CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA

ELABORADO POR:

CRISTINA NAVARRO FLORES

ASESOR

MG. WILLIAM CARLOS ECHEGARAY CASTILLO

LIMA - PERÚ

2013

## **Dedicatoria**

A mis grandes amores:

    Mi esposo y mi hijo.

    A mis padres:

    Margarita y Valentín, por todos sus cuidados.

    A mis hermanos:

    Walter y Emiliana, por ser los mejores hermanos.

## **Agradecimientos**

A mi asesor, por su gran apoyo.

A los profesores de la FIC.

A mis amigas Flor y Norma por su amistad en todo momento.

# RESUMEN

Este trabajo presenta un estudio ordenado de los métodos multimalla para ecuaciones diferenciales de cuarto orden, usando el elemento finito conforme Hsieh-Clough-Tocher (HCT) para su discretización. Para el cual se elige como problema modelo al problema biarmónico.

El problema biarmónico se lleva a su forma variacional, verificándose la existencia y unicidad de su solución. Se busca que la solución del problema sea lo suficientemente regular, para ello se amplía la búsqueda en espacios de Sobolev de índice fraccionario donde ya se sabe que el problema biarmónico tiene una regularidad elíptica  $\alpha \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$ .

Se hace un estudio de los métodos multimalla, usando la teoría aditiva para mostrar la convergencia de los métodos V-ciclo y F-ciclo. Se adapta los métodos multimalla para la discretización del elemento HCT y se demuestra que los métodos multimalla son convergentes para las ecuaciones diferenciales parciales de cuarto orden, mostrándose que el número de contracción decrece uniformemente, si el número de pasos suaves se incrementa. También se muestra que para un número  $m$  de pasos totales (pre-suave y pos-suave) suficientemente grande, el número de contracción es menor o igual que  $\frac{C}{m^{\alpha/2}}$ , donde  $C$  es una constante independiente de la malla.

Se muestran resultados numéricos de la convergencia de las multimallas, se encuentra el valor de la constante  $C$  para cualquier valor de  $m$  y  $\alpha$  fijo, verificándose el análisis teórico. Se comparan los resultados de los diferentes algoritmos multimallas algebraicos, se muestran resultados de la solución numérica del problema biarmónico, usando el elemento finito HCT y las multimallas V-Ciclo, W-Ciclo y F-Ciclo en la solución del sistema lineal resultante, finalmente se dan algunas sugerencias para la mejora de ellos.

# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Marco teórico</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1. Generalidades . . . . .  | 1         |
| 1.2. Conceptos preliminares . . . . .   | 3         |
| 1.2.1. Definición de espacios . . . . .   | 3         |
| 1.2.2. El Problema Biarmónico . . . . .   | 4         |
| 1.2.3. Regularidad elíptica . . . . .   | 7         |
| 1.2.4. Espacio del elemento finito y los métodos multimallas . . . . .                                  | 9         |
| 1.2.5. Descripción del método multimalla iterativo del nivel $k$ . . . . .                              | 13        |
| <b>2. Teoría aditiva de las multimallas y método multimalla para la discretización del elemento HCT</b> | <b>20</b> |
| 2.1. Teoría aditiva de las multimallas . . . . .  | 20        |
| 2.1.1. Las hipótesis de la teoría aditiva . . . . .   | 37        |
| 2.1.2. Estimaciones preliminares . . . . .  | 39        |
| 2.1.3. Una desigualdad fortalecida de Cauchy-Schwarz . . . . .  | 52        |
| 2.1.4. Convergencia de los algoritmos V-Ciclo y F-Ciclo . . . . .                                       | 61        |
| 2.2. Método multimalla para la discretización del elemento Hsieh Clough Tocher (HCT) . . . . .          | 69        |
| 2.2.1. El elemento Hsieh Clough Tocher (HCT) . . . . .  | 69        |
| 2.2.2. El método HCT, para el problema modelo Biarmónico. . . . .                                       | 71        |
| 2.2.3. Operador de interpolación y operadores de transferencia entre mallas . . . . .                   | 75        |
| <b>3. Análisis de convergencia</b>  | <b>89</b> |
| 3.1. Prueba de las hipótesis A, de la teoría aditiva . . . . .  | 89        |
| 3.2. Prueba de las hipótesis B, de la teoría aditiva . . . . .  | 89        |

|  |            |
|--|------------|
| 3.3. Prueba de las hipótesis C, de la teoría aditiva . . . . .   | 102        |
| <b>4. Resultados Numéricos</b>   | <b>106</b> |
| 4.1. Implementación del elemento finito HCT completo . . . . .   | 106        |
| 4.1.1. Polinomios de forma . . . . .   | 108        |
| 4.2. Aplicación física: Problema de una losa . . . . .   | 113        |
| 4.2.1. Formulación variacional del problema de la losa . . . . .   | 114        |
| 4.3. Implementación del método de elementos finitos HCT para la reso-<br>lución del problema de Losa Variacional . . . . .                             | 115        |
| 4.4. Aplicación de los métodos multimalla V-Ciclo simétrico, W-Ciclo y F-<br>Ciclo para solucionar el sistema lineal del problema de la losa . . . . . | 116        |
| 4.5. Resultados numéricos del problema de la losa . . . . .  | 122        |
| 4.5.1. Resultados de la convergencia de los métodos multimalla<br>V-Ciclo simétrico, W-Ciclo y F-Ciclo . . . . .                                       | 122        |
| 4.5.2. Deformadas de la losa, curvas de nivel y curvas asintóticas .   | 126        |
| <b>5. Conclusiones y recomendaciones</b>   | <b>136</b> |
| <b>Anexo</b>   | <b>138</b> |
| <b>1. Expresiones y desigualdades importantes</b>  | <b>139</b> |
| <b>Bibliografía</b>  | <b>144</b> |

# Lista de Algoritmos

|    |   |     |
|----|---|-----|
| 1. | Método multimalla V-Ciclo . . . . .           | 16  |
| 2. | Método multimalla V-Ciclo simétrico. . . . .  | 17  |
| 3. | Método multimalla W-Ciclo . . . . .           | 18  |
| 4. | Método multimalla F-Ciclo simétrico . . . . . | 19  |
| 5. | Principal HCT - Multimallas . . . . .         | 135 |

# Índice de figuras

|   |     |
|---|-----|
| 1.1. Diámetro de un triángulo $T \in \mathcal{T}_k$ . . . . .   | 10  |
| 2.1. El macro elemento Hsieh-Clough-Tocher . . . . .  | 70  |
| 2.2. Un elemento en $V_{k-1}$ y en $V_k$ . . . . .  | 71  |
| 2.3. Triángulo de referencia $T$ de la familia $\mathcal{T}_k$ . . . . .  | 73  |
| 2.4. Triángulo de referencia $\tilde{T}$ para la familia $\mathcal{T}_{k-1}$ . . . . .  | 83  |
| 3.1. Vértice $p \in \mathcal{T}_k \setminus \mathcal{T}_{k-1}$ . . . . .  | 91  |
| 3.2. Un triángulo $T \in \mathcal{T}_{k-1}$ dividido en cuatro triángulos en $\mathcal{T}_k$ . . . . .                        | 96  |
| 4.1. Elemento finito HCT completo . . . . .   | 107 |
| 4.2. Coordenadas de área para un triángulo $K$ . . . . .  | 108 |
| 4.3. Doce funciones de forma para el sub_triángulo K1 . . . . .   | 111 |
| 4.4. Dos funciones de forma para el sub_triángulo K2 . . . . .  | 112 |
| 4.5. Dos funciones de forma para el sub_triángulo K3 . . . . .  | 112 |
| 4.6. Triangulación del dominio cuadrado ( $\Omega \subset R^2$ ) . . . . .  | 117 |
| 4.7. Representación de los métodos multimalla y sus operadores de transfe-<br>rencia entre mallas. . . . .                    | 118 |
| 4.8. <b>Elaboración propia: Dominio estructural considerado para<br/>resolver el problema de Losa computacional</b> . . . . . | 122 |
| 4.9. Decrecimiento uniforme del Nro. de Contracción para el V-Ciclo . . . . .   | 123 |
| 4.10. Decrecimiento uniforme del Nro. de Contracción para el W-Ciclo . . . . .  | 124 |
| 4.11. Decrecimiento uniforme del Nro. de Contracción para el F-Ciclo . . . . .  | 125 |
| 4.12. Usando V-Ciclo en el nivel $k = 4$ , con 200 elementos . . . . .  | 127 |
| 4.13. Usando V-Ciclo en el nivel $k = 5$ , con 648 elementos . . . . .  | 128 |
| 4.14. Usando W-Ciclo en el nivel $k = 4$ , con 200 elementos . . . . .  | 129 |
| 4.15. Usando W-Ciclo en el nivel $k = 5$ , con 648 elementos . . . . .  | 130 |
| 4.16. Usando F-Ciclo en el nivel $k = 4$ , con 200 elementos . . . . .  | 131 |

|   |     |
|---|-----|
| 4.17. Usando F-Ciclo en el nivel $k = 5$ , con 648 elementos . . . . .      | 132 |
| 4.18. Asintoticidad de las curvas, para $m=6$ en las multimallas . . . . .  | 133 |
| 4.19. Asintoticidad de las curvas, para $m=20$ en las multimallas . . . . . | 134 |
| 4.20. Comparando las asintoticidades de las curvas . . . . .                | 135 |
| 1.1. $y = Ln(mx)$ , $x \in [0, 1]$ , siendo $m \in \mathbb{Z}^+$ . . . . .  | 140 |

# Índice de cuadros

|  |     |
|--|-----|
| 4.1. Número de contracción ( $\gamma_{m,k,v}$ ) para el algoritmo multimalla V-Ciclo para diferentes niveles de triangulación. . . . . | 123 |
| 4.2. Número de contracción ( $\gamma_{m,k,v}$ ) para el algoritmo multimalla W-Ciclo para diferentes niveles de triangulación. . . . . | 124 |
| 4.3. Número de contracción ( $\gamma_{m,k,v}$ ) para el algoritmo multimalla F-Ciclo para diferentes niveles de triangulación. . . . . | 125 |
| 4.4. Constante $C = 5$ independiente de la malla para el V-Ciclo. . . . .  | 126 |
| 4.5. Constante $C = 5$ independiente de la malla para el F-Ciclo. . . . .  | 126 |

# Capítulo 1

## Marco teórico

### 1.1. Generalidades

#### Introducción

Los métodos multimallas son métodos iterativos, eficientes para resolver sistemas lineales cuya matriz principal puede ser esparsa con un número de condición muy grande.

Los métodos multimalla se estudiaron por vez primera en Rusia en los años sesenta. Los primeros resultados de convergencia para un W-ciclo para una discretización de elemento finito conforme lo dan Bank y Dupont en 1981.

En 1983 Braess y Hackbusch probaron que bajo una regularidad elíptica total ( $\alpha = 1$ ), el número de contracción de un multimalla V-ciclo simétrico para un problema de segundo orden era menor o igual a  $\frac{C}{C+m}$  donde  $m$  es el número de pasos suaves totales y  $C$  una constante independiente del número de iteraciones.

Luego una teoría multimalla multiplicativa se desarrolló por Zhang, Bramble y Pasciak, Xu y otros, mostrando que el número de contracción es menor o igual a un número  $\delta$  entre 0 y 1 independiente del número de pasos suaves e iteraciones.

La teoría multimalla aditiva fué desarrollada por Brenner, para problemas de segundo orden, que completa la generalización de los resultados clásicos de Braess y Hackbusch. La teoría multimalla aditiva es extendida a problemas de cuarto orden por Jie zhao.

## Objetivos

Los objetivos que se pretende lograr en la tesis son:

- Ilustrar la teoría aditiva para las multimallas.
- Aplicar el método multimalla para la discretización del elemento Hsieh-Clough-Tocher (HCT).
- Analizar la convergencia de los métodos multimallas para el elemento HCT, que es medido por el número de contracción para estos algoritmos.

## Formulación de la hipótesis

Se postula que mediante un algoritmo multimalla para resolver numéricamente un sistema lineal de ecuaciones, obtenida con el elemento finito HCT se puede conseguir buenos resultados de convergencia.

## Metodología del trabajo

El trabajo está constituido por una parte teórica y una componente computacional. Y para un mejor desarrollo, se hace los siguientes pasos para el elemento HCT:

- Análisis de los algoritmos.

Para aplicar los algoritmos multimalla, es necesario definir el producto interno en el espacio del elemento finito y los operadores de transferencia entre mallas.

- Análisis de convergencia.

La convergencia de los algoritmos V-ciclo y F-ciclo para un número de pasos suficientemente grande se establecerá y se mostrará que el número de contracción de estos algoritmos decrece en una proporción determinada por el índice de regularidad elíptica  $\alpha$ .

- Resultados numéricos.

Los resultados numéricos mostrarán las conclusiones de los teoremas y se compararán los resultados obtenidos por cada algoritmo multimalla.

## Organización de la tesis

La tesis ha sido desarrollada en cuatro capítulos, donde se demuestra la validez de lo desarrollado y es como sigue:

En el primer capítulo, se desarrolla el marco teórico.

En el segundo capítulo, se desarrolla la teoría aditiva de las multimallas y el método multimalla para la discretización del elemento HCT.

En el tercer capítulo, se desarrolla el análisis de convergencia de los algoritmos multimalla para el sistema obtenido por la discretización por el elemento finito HCT.

En el cuarto capítulo, se da la implementación numérica apoyado en el software MATLAB.

## 1.2. Conceptos preliminares

Se mencionan los conceptos necesarios, que se puede ver en [1], [20], [22]

### 1.2.1. Definición de espacios

#### Espacio $L_2(\Omega)$

Se define

$$L_2(\Omega) = \{v : v \text{ real definida en } \Omega \text{ y } \int_{\Omega} v^2 dx < \infty\}$$

con producto interno y norma respectivamente

$$\langle u, v \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv dx, \quad \|v\|_{L_2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} v^2 dx \right)^{1/2}$$

#### Espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$

Se define

$$H^2(\Omega) = \{v \in L_2(\Omega) : D^\alpha v \in L_2(\Omega), |\alpha| \leq 2\},$$

donde

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \quad \alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ y } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$$

dotado del producto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \left( \sum_{|\alpha| \leq 2} D^{\alpha} u D^{\alpha} v \right) dx$$

la norma asociada

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq 2} \|D^{\alpha} u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad (1.1)$$

y la semi norma

$$|u|_{H^2(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha|=2} \|D^{\alpha} u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad (1.2)$$

Al espacio  $H^2(\Omega)$  se le conoce como el espacio de Sobolev de orden 2.

**Definición 1.2.1** (*Normas Equivalentes*)

Sea un espacio  $V$  dotado de dos normas  $\|\cdot\|_{N_1}$  y  $\|\cdot\|_{N_2}$ , se dice que estas normas son equivalentes si:

Existen constantes positivas  $c$  y  $C$  tales que  $c\|v\|_{N_1} \leq \|v\|_{N_2} \leq C\|v\|_{N_1}$ ,  $\forall v \in V$

Es conocido:

- El espacio  $H^2(\Omega)$  es un espacio Hilbert, al igual que el espacio  $L_2(\Omega)$
- La norma (1.1) y la semi norma (1.2) son normas equivalentes.

**Teorema 1.2.1** (*Fórmula de Green generalizada*) Se tiene la siguiente fórmula generalizada de Green: Para toda función  $u \in H^2(\Omega)$  y toda función  $v$  de  $H^1(\Omega)$ , se tiene:

$$-\int_{\Omega} (\Delta u)v dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v ds$$

**1.2.2. El Problema Biarmónico**

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio poligonal acotado, con frontera  $\Gamma = \partial\Omega$  continua Lipschitz. Dado el siguiente problema biarmonico con condiciones de frontera dirichlet homogeneo, ver [1], [14]

Encontrar  $u$  definida en  $\Omega$  solución de

$$(PB) \quad \begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{en } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{en } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (1.3)$$

Donde  $f \in L_2(\Omega)$ .

Se buscará la forma variacional de la ecuación (1.3). Para ello se define primero el espacio

$$H_0^2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega) : v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma = \partial\Omega\}$$

Multiplicando (1.3) por una función test  $v \in H_0^2(\Omega)$  e integramos sobre  $\Omega$ , a ambos lados y usando la fórmula de Green, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v dx &= \int_{\Omega} v \Delta^2 u dx \\ &= \int_{\Omega} v \Delta(\Delta u) dx \\ &= \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \Delta u v ds}_0 - \int_{\Omega} \nabla(\Delta u) \cdot \nabla v dx, \quad \text{por Green generalizado (1.2.1)} \\ &= - \int_{\Omega} \nabla(\Delta u) \cdot \nabla v dx \\ &= - \underbrace{\int_{\Gamma} \Delta u \frac{\partial v}{\partial n} ds}_0 + \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx, \quad \text{nuevamente por Green generalizado (1.2.1)} \\ &= \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx \end{aligned}$$

## Formulación Variacional

Luego, se tiene la siguiente forma variacional del problema (1.3)

$$(PV) \quad \begin{cases} \text{Encontrar: } u \in H_0^2(\Omega) \text{ tal que} \\ a(u, v) = \phi(v), \quad \forall v \in H_0^2(\Omega) \end{cases} \quad (1.4)$$

Donde

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx := \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} dx \quad (1.5)$$

y

$$\phi(v) = \int_{\Omega} f v dx$$

Luego se verifica:

1.  $a(., .)$  es acotado.

En efecto:

$a(u, v) : H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$  define un producto interno, pues cumple:

- $a(u, v) = a(v, u)$ . Luego  $a(., .)$  es simétrica.
- $a(u + v, w) = a(u, w) + a(v, w)$
- $a(\alpha u, v) = \alpha a(u, v)$ ,  $\forall \alpha = cte$
- $a(u, u) = \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \geq 0$ ,  $\forall u \in H_0^2(\Omega)$

Luego se le asocia una norma  $\|u\|_a = \sqrt{a(u, u)}$ ,  $\forall u \in H_0^2(\Omega)$ .

Luego por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la forma bilineal  $a(., .)$  es acotada, es decir:

$$|a(v, w)| \leq \|v\|_{H^2(\Omega)} \|w\|_{H^2(\Omega)} \quad \forall v, w \in H_0^2(\Omega) \quad (1.6)$$

2.  $a(., .)$  es coerciva.

En efecto:

$$\begin{aligned}
a(u, u) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dx \\
&= \int_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)^2 \right\} dx \\
&= |u|_{H^2(\Omega)}^2 \\
&\geq C \|u\|_{H^2(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H_0^2(\Omega), \quad \text{ya que son normas equivalentes.}
\end{aligned}$$

Asi

$$a(u, u) \geq C \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_0^2(\Omega) \quad \text{para alguna constante } C. \quad \square \quad (1.7)$$

3.  $\phi(\cdot)$  es acotada.

En efecto:

$$\begin{aligned}
|\phi(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v \right| \\
&= \langle f, v \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \text{pues } f \in L_2(\Omega), \quad v \in H_0^2(\Omega) \subset L_2(\Omega) \\
&\leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)}, \quad \text{por la desigualdad de Cauchy Schwarz} \\
&\leq M \|v\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega), \quad M = cte. \quad \square
\end{aligned}$$

Luego  $\phi$  es acotada y continua.

## Existencia y unicidad de la solución de (PV)

Como la bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  es acotada, coerciva y la lineal  $\phi$  es continua y acotada, por el teorema de Lax-Milgram el problema (PV) (1.4), tiene solución única  $u \in H_0^2(\Omega)$ .

### 1.2.3. Regularidad elíptica

La estimación abstracta, llamada Lema de Cea, reduce la estimación del error para el método de Ritz Galerkin a un problema en la teoría de aproximación, es decir, a la

determinación de la magnitud del error de la mejor aproximación de  $u \in H_0^2(\Omega)$  por un miembro de  $V_k$  (espacio de dimensión finita,  $V_k \subset H_0^2(\Omega)$ ).

La solución de este problema depende de la regularidad (suavidad) de  $u$  y de la naturaleza del espacio  $V_k$ . De este modo:  $u - \tilde{u}$ ,  $\tilde{u} \in V_k$ , se puede medir en otras normas.

## Espacio dual

**Definición 1.2.2** Sea  $B(\Omega)$  el espacio definido sobre  $\Omega$ . Se define  $B'(\Omega) = \mathcal{L}(B(\Omega), \mathbb{R})$ , es decir si  $\Lambda \in B'(\Omega)$

$$\Lambda : B(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es una aplicación lineal y continua.}$$

y se representa

$$\Lambda(v) = \langle \Lambda, v \rangle, \quad \forall v \in B(\Omega)$$

Luego  $B'(\Omega)$  es el conjunto de funcionales aplicadas sobre el espacio  $B(\Omega)$ , al cual se le llama el **Espacio dual de  $B(\Omega)$** .

Y está dotado por la norma

$$\|\Lambda\|_{B'(\Omega)} := \sup_{0 \neq v \in B(\Omega)} \frac{\langle \Lambda, v \rangle}{\|v\|_{B(\Omega)}}, \quad \text{con } \Lambda \in B'(\Omega)$$

donde  $\|\cdot\|_{B(\Omega)}$  es la norma en  $B(\Omega)$ .

**Definición 1.2.3** (El Dual de  $H_0^2(\Omega)$ )

El espacio dual de  $H_0^2(\Omega)$  se denota por  $H^{-2}(\Omega)$ , es decir  $H^{-2}(\Omega) = [H_0^2(\Omega)]'$ , con norma

$$\|\phi\|_{H^{-2}(\Omega)} := \sup_{0 \neq v \in H_0^2(\Omega)} \frac{\langle \phi, v \rangle}{\|v\|_{H_0^2(\Omega)}}, \quad \text{con } \phi \in H^{-2}(\Omega)$$

## Estimación de la Regularidad de la solución del problema Biarmónico

### Breve descripción de la regularidad elíptica

La estimación de la regularidad se presenta en términos de las normas de Sobolev de índice fraccionario, basado en la teoría de interpolación entre espacios de Hilbert

(desarrollado por Lions y Peetre) e interpolación entre subespacios de un espacio de Hilbert, estos resultados se pueden ver en [4], [11] y [18], y se usa la siguiente notación

$$H^{\alpha m + (1-\alpha)n} = \underbrace{[H^n, H^m]_\alpha}_{\text{Espacio interpolante}}, \quad \text{para } \alpha \in [0, 1] \text{ con } 0 \leq m < n \quad (1.8)$$

Donde:  $\alpha$  se le conoce como el índice suavidad o regularidad.

$H^m$  y  $H^n$  son espacios de Sobolev.

## Resultados para el Problema Biarmónico

Los siguientes resultados se tienen de [4], el cual menciona:

- De la formulación variacional (1.4), la funcional  $\phi$  puede ser elegido en un espacio mas general  $H^{-2}(\Omega) = [H_0^2(\Omega)]'$ .
- La regularidad elíptica de la ecuación biarmónica, implica que existe  $\alpha \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$  tal que la solución  $u$  de la ecuación (1.4) pertenece a  $H^{2+\alpha}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$  donde  $\phi \in H^{-2+\alpha}(\Omega)$  y

$$\|u\|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \leq C_\Omega \|\phi\|_{H^{-2+\alpha}(\Omega)} \quad (1.9)$$

Donde:  $C_\Omega$  depende solo de la forma de  $\Omega$ .

$\alpha$  es el índice de regularidad elíptica.

- Finalmente la siguiente estimación de la dualidad se mantiene para la forma bilineal  $a(., .)$

$$a(v, w) \leq C |v|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} |w|_{H^{2-\alpha}(\Omega)}, \quad \forall v \in H^{2+\alpha}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega), \quad w \in H_0^2(\Omega) \quad (1.10)$$

Para alguna constante  $C$ .

**Observación 1.2.1** *Los espacios  $H^{2+\alpha}$ ,  $H^{-2+\alpha}$ ,  $H^{2-\alpha}$  son definidos como en (1.8).*

### 1.2.4. Espacio del elemento finito y los métodos multimallas

Las soluciones numéricas para el problema modelo (1.3), se puede obtener usando el método de elemento finito Hsieh–Clough–Tocher (HCT).

Sea  $\{T_k\}_{k \geq 1}$  una familia de triangulaciones de  $\Omega$  obtenidas por una subdivisión regular, es decir:  $T_{k+1}$  se obtiene por la unión de los puntos medios de los lados del triángulo de  $T_k$ .

Sea  $h_k = \max\{\text{diam } T : T \in \mathcal{T}_k\}$  el tamaño de la malla. Luego (ver fig.(1.1)):

$$h_{k-1} = 2h_k \quad (1.11)$$

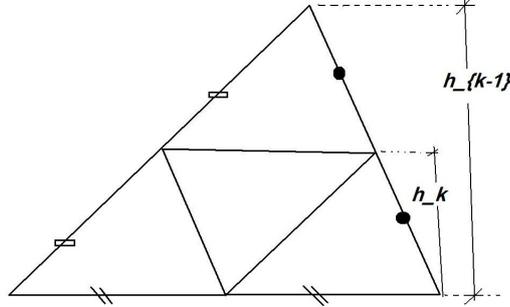


Figura 1.1: Diámetro de un triángulo  $T \in \mathcal{T}_k$

**Definición 1.2.4** *Elemento Finito Conforme.*

Sea  $V_k$  el espacio del elemento finito asociado a la triangulación  $T_k$ . Si  $V_k \subset H_0^2(\Omega)$ , se dice que el elemento finito es conforme.

**Definición 1.2.5** *Elemento Finito No Conforme.*

Sea  $V_k$  el espacio del elemento finito asociado a la triangulación  $T_k$ . Si  $V_k \not\subset H_0^2(\Omega)$ , se dice que el elemento finito es no conforme.

## Formulación discreta

Sea  $V_k \subset H_0^2(\Omega)$ , ( $V_k$  de dimensión finita) y sea la siguiente notación

**Notación 1.2.1**

$$a_k(\cdot, \cdot) = a(\cdot, \cdot) \quad \text{para el espacio } V_k$$

y se define

$$a_k(v, w) := \sum_{T \in \mathcal{T}_k} \int_T D^2 v D^2 w dx, \quad \forall v, w \in V_k \quad (1.12)$$

Luego una solución aproximada de la ecuación (1.4), se puede obtener por el siguiente método de elemento finito:

$$(PD) \quad \begin{cases} \text{Encontrar: } u_k \in V_k \text{ tal que} \\ a_k(u_k, v) = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in V_k \end{cases} \quad (1.13)$$

Se define el producto interno sobre  $V_k$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_k : V_k \times V_k \longrightarrow \mathbb{R}$$

para ello se define  $A_k : V_k \rightarrow V_k$  como

$$\langle A_k v, w \rangle_k = a_k(v, w), \quad \forall v, w \in V_k \quad (1.14)$$

De este modo (1.14), define un producto interno en  $V_k$ . En efecto:

i) Sean  $v, w \in V_k$ :

$$\begin{aligned} \langle A_k v, w \rangle_k &= a_k(v, w), \quad \text{por (1.14)} \\ &= a_k(w, v), \quad \text{pues } a_k \text{ es simétrica} \\ &= \langle A_k w, v \rangle_k, \quad \text{por (1.14)} \end{aligned} \quad (1.15)$$

ii) Sea  $v \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \langle A_k v, v \rangle_k &= a_k(v, v), \quad \text{por (1.14)} \\ &= \|v\|_{a_k}^2 > 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

iii) Si  $v = 0$ :

$$\langle A_k 0, 0 \rangle_k = a_k(0, 0) = 0, \quad \text{por (1.14)} \quad (1.17)$$

Por lo tanto  $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$  es una norma en  $V_k$   $\square$

De (1.15) y (1.16),  $A_k$  es simétrica y definida positiva respecto al producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ .

Reescribiendo (1.14), sea  $v \in V_k$

$$a_k(u_k, v) = \langle A_k u_k, v \rangle_k = \langle f_k, v \rangle_k \quad \text{donde } f_k = A_k u_k \in V_k \quad (1.18)$$

De este modo

$$\begin{aligned}\langle f_k, v \rangle_k &= a_k(u_k, v) \\ &= \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in V_k, \quad \text{por (1.14)}\end{aligned}$$

Luego  $f_k \in V_k$  es definido por

$$\langle f_k, v \rangle_k = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in v_k \quad (1.19)$$

Se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\langle A_k u_k, v \rangle_k &= a_k(u_k, v), \quad \text{por (1.18)} \\ &= \int_{\Omega} f v dx, \quad \text{por (1.13)} \\ &= \langle f_k, v \rangle_k, \quad \forall v \in V_k, \quad \text{por (1.19)}\end{aligned}$$

Luego

$$\langle A_k u_k, v \rangle_k = \langle f_k, v \rangle_k, \quad \forall v \in V_k \implies \langle A_k u_k - f_k, v \rangle_k = 0, \quad \forall v \in V_k$$

De este modo

$$A_k u_k = f_k \quad (1.20)$$

Usando una base para el espacio finito  $V_k$ , la ecuación (1.20) es representado por un sistema de ecuaciones lineales, donde la matriz principal es una matriz esparsa con un número de condición muy grande.

Para dar solución a (1.20), los métodos iterativos clásicos convergen muy lentamente para este tipo de sistemas, sin embargo con los métodos multimalla se puede superar esta dificultad, ya que son solucionadores rápidos (para este tipo de sistemas).

Se eligirá el siguiente elemento finito para ilustrar la teoría multimalla:

- El elemento Hsieh-Clough-Tocher (HCT). Este elemento HCT es conforme. La solución aproximada, obtenida por este método pertenece al espacio de polinomios de grado 3.

Además para solucionar el sistema (1.20) se usará los métodos multimallas.

### 1.2.5. Descripción del método multimalla iterativo del nivel k

En el nivel k el algoritmo multimalla, da una solución aproximada del sistema

$$A_k z = g \quad (1.21)$$

cuya solución aproximada es denotada por

$$\tilde{z} = MG(k, g, z_0, m_1, m_2) \quad (1.22)$$

donde

$z_0$ : es una aproximación inicial.

$m_1$ : número de pasos pre suave.

$m_2$ : número de pasos pos suave.

Sea  $\rho(A_k)$  el radio espectral de  $A_k$ , entonces se elige  $\Lambda_k$  tal que:

$$\rho(A_k) < \Lambda_k = Ch_k^{-4}, \quad \text{para alguna constante } C. \quad (1.23)$$

Sean los siguientes operadores de transferencia entre mallas

$$P_k^{k-1} : V_k \rightarrow V_{k-1} \quad \text{de fino a rugoso (Restricción)}$$

$$I_{k-1}^k : V_{k-1} \rightarrow V_k \quad \text{de rugoso a fino (Interpolación)}$$

que se definen como

$$(P_k^{k-1}v, w)_{k-1} = (v, I_{k-1}^k w)_k, \quad \forall v \in V_k, w \in V_{k-1} \quad (1.24)$$

#### Método multimalla en la iteración de nivel k

i) Para  $k = 1$ ,  $MG(k, g, z_0, m_1, m_2) = A_1^{-1}g$ .

ii) Para  $k > 1$ ,  $MG(k, g, z_0, m_1, m_2)$  se tiene por los tres pasos que siguen:

1. Pre suavizador.

Para  $j = 1, 2, \dots, m_1$

$$\text{Calcular } z_j: z_j = z_{j-1} + \frac{1}{\Lambda_k}(g - A_k z_{j-1})$$

2. Corrección de la malla.

Sea el residual:  $r_k = g - A_k z_{m_1}$ .

Aplicando la iteración del nivel (k-1), p veces la iteración MG, con valor inicial 0, a la ecuación

$$A_{k-1} r_{k-1} = P_k^{k-1} r_k$$

para obtener  $\tilde{r}_{k-1} \in V_{k-1}$  y hacer la corrección del error

$$z_{m_1+1} = z_{m_1} + I_{k-1}^k \tilde{r}_{k-1}$$

3. Post suavizador.

Para  $j = m_1 + 2, m_1 + 3, \dots, m_1 + m_2 + 1$ . Calcular  $z_j$ :

$$z_j = z_{j-1} + \frac{1}{\Lambda_k} (g - A_k z_{j-1})$$

Finalmente  $MG(k, g, z_0, m_1, m_2) = z_{m_1+m_2+1}$   $\square$

Del algoritmo multimalla genérico, se tiene

**Definición 1.2.6** *Algoritmo V-Ciclo*

*Del algoritmo anterior, si  $p = 1$ , el algoritmo es llamado un V-ciclo y se denota:  $MG_V$ .*

**Definición 1.2.7** *Algoritmo V-Ciclo Simétrico*

*El algoritmo multigrad V-Ciclo simétrico es un método de solución iterativo para las ecuaciones de la forma de (1.20).*

*Dado  $g \in V_k$  y una aproximación inicial  $z_0 \in V_k$ , el resultado del algoritmo  $MG_V(k, g, z_0, m)$  es una solución aproximada para la ecuación*

$$A_k z = g \tag{1.25}$$

*Donde: m es el número de pasos pre suavizador y pos suavizador.*

**Definición 1.2.8** *Algoritmo W-ciclo*

*Del algoritmo anterior, si  $p = 2$ , el algoritmo es llamado un W-ciclo y se denota:  $MG_W$ .*

**Definición 1.2.9** *Algoritmo F-ciclo*

Si en el paso (2) del algoritmo genérico ( $k > 1$ ) se usa una vez en el nivel ( $k-1$ ) seguido por una iteración V-ciclo, el algoritmo es llamado un F-ciclo y se denota:  $MG_F$ .

**Observación 1.2.2**

Si en la ecuación (1.22) los valores  $m_1$  y  $m_2$  son iguales se tiene métodos multimallas simétricos.

**Observación 1.2.3**

Para el algoritmo V-ciclo, si el número de pasos suaves en las distintas niveles son diferentes, se usará la siguientes notación  $m(k)$ , que representa el número de pasos suaves en el nivel  $k$ . Además, si se cumple:

$$\beta_0 m(k) \leq m(k-1) \leq \beta_1 m(k) \quad \text{con } 1 < \beta_0 \leq \beta_1 \quad (1.26)$$

el algoritmo es llamado V-ciclo Variable.

---

**Algoritmo 1** Método multimalla V-Ciclo

---

i) Para  $k = 1$ ,

$$MG_V(k, g, z_0, m_1, m_2) = A_1^{-1}g \quad (1.27)$$

ii) Para  $k \geq 2$ , se obtiene  $MG_V(k, g, z_0, m_1, m_2)$  en tres pasos:

1. Pre suavizador.

Para  $j = 1, 2, \dots, m_1$ , se calcula  $z_j$  con

$$z_j = z_{j-1} + \frac{1}{\Lambda_k}(g - A_k z_{j-1}) \quad (1.28)$$

2. Corrección de la malla.

Calcular  $z_{m_1+1}$  con

$$z_{m_1+1} = z_{m_1} + I_{k-1}^k MG_V(k-1, P_k^{k-1}(g - A_k z_{m_1}), 0, m_1, m_2) \quad (1.29)$$

3. Post suavizador.

Para  $j = m_1 + 2, m_1 + 3, \dots, m_1 + m_2 + 1$ . Calcular  $z_j$  con

$$z_j = z_{j-1} + \frac{1}{\Lambda_k}(g - A_k z_{j-1}) \quad (1.30)$$

Finalmente

$$MG_V(k, g, z_0, m_1, m_2) = z_{m_1+m_2+1} \quad (1.31)$$

---

---

**Algoritmo 2** Método multimalla V-Ciclo simétrico.

---

i) Para  $k = 1$ , se define  $MG_V(1, g, z_0, m) = A_1^{-1}g$ .

ii) Para  $k > 1$ , se obtiene  $MG_V(k, g, z_0, m)$  en tres pasos:

1. Pre suavizador.

Para  $j = 1, 2, \dots, m$

$$\text{Calcular } z_j: z_j = z_{j-1} + \frac{1}{\Lambda_k}(g - A_k z_{j-1})$$

Donde  $\Lambda_k$  es una constante dominante del radio espectral de  $A_k$ .

2. Corrección de la grilla.

Calcular  $z_{m+1}$  por

$$z_{m+1} = z_m + I_{k-1}^k MG_V(k-1, P_k^{k-1}(g - A_k z_m), 0, m).$$

3. Pos suavizador.

Para  $j = m+2, \dots, 2m+1$ .

Calcular  $z_j$ :

$$z_j = z_{j-1} + \frac{1}{\Lambda_k}(g - A_k z_{j-1})$$

Finalmente

$$MG_V(k, g, z_0, m) = z_{2m+1}$$

---

---

**Algoritmo 3** Método multimalla W-Ciclo

---

i) Para  $k = 1$ , se define  $MG_W(1, g, z_0, m) = A_1^{-1}g$ .

ii) Para  $k > 1$ , se obtiene  $MG_W(k, g, z_0, m)$  en tres pasos:

1. Pre suavizador.

Desde  $j = 1, 2, \dots, m$

Calcular  $z_j$ :  $z_j = z_{j-1} + \frac{1}{\Lambda_k}(g - A_k z_{j-1})$

Donde  $\Lambda_k$  es una constante dominante del radio espectral de  $A_k$ . fin-Desde

2. Corrección de la grilla.

Desde  $p=m+1 : m+2$  hacer

Calcular  $z_p$  por

$$z_p = z_{p-1} + I_{k-1}^k MG_V(k-1, P_k^{k-1}(g - A_k z_{p-1}), 0, m).$$

fin-Desde

3. Pos suavizador.

Desde  $j = m+3, \dots, 2m+2$ .

Calcular  $z_j$ :

$$z_j = z_{j-1} + \frac{1}{\Lambda_k}(g - A_k z_{j-1})$$

Finalmente

$$MG_W(k, g, z_0, m) = z_{2m+2}$$

---

---

**Algoritmo 4** Método multimalla F-Ciclo simétrico

---

i) Para  $k = 1$ , se define

$$MG_F(1, g, z_0, m) = A_1^{-1}g \quad (1.32)$$

ii) Para  $k > 1$ , se obtiene  $MG_F(k, g, z_0, m)$  en tres pasos:

1. Pre suavizador

Para  $j = 1, 2, \dots, m$  Calcular  $z_j$ :

$$z_j = z_{j-1} + \frac{1}{\Lambda_k}(g - A_k z_{j-1}) \quad (1.33)$$

Donde  $\Lambda_k$  es una constante dominante del radio espectral de  $A_k$ .

2. Corrección de la malla.

Calcular  $z_{m+1}$  por los siguientes pasos

$$q' = MG_F(k-1, P_k^{k-1}(g - A_k z_m), 0, m) \quad (1.34)$$

$$z_{m+1} = z_m + I_{k-1}^k MG_V(k-1, P_k^{k-1}(g - A_k z_m), q', m) \quad (1.35)$$

3. Pos suavizador

Para  $j = m+2, \dots, 2m+1$ . Calcular  $z_j$ :

$$z_j = z_{j-1} + \frac{1}{\Lambda_k}(g - A_k z_{j-1}) \quad (1.36)$$

Finalmente

$$MG_F(k, g, z_0, m) = z_{2m+1} \quad (1.37)$$

---

# Capítulo 2

## Teoría aditiva de las multimallas y método multimalla para la discretización del elemento HCT

### 2.1. Teoría aditiva de las multimallas

#### Introducción

El objetivo de esta sección es presentar la teoría necesaria para establecer la convergencia de los algoritmos V-ciclo y F-ciclo. La teoría aditiva de las multimallas fué desarrollada en [12] , [13] y [21].

#### Hipótesis de la teoría

Se desarrollará las hipótesis de la teoría para el algoritmo V-ciclo simétrico y para el algoritmo F-ciclo simétrico.

Sea  $V_k$  el espacio de dimensión finita y se definen los siguientes operadores

- a) Operador identidad  $Id_k : V_k \longrightarrow V_k$
- b) Operador de Relajación  $R_k : V_k \longrightarrow V_k$  definido por

$$R_k = Id_k - \frac{1}{\Lambda_k} A_k \tag{2.1}$$

donde:  $\Lambda_k$  cumple con (1.23).

c) Operador de restricción de malla fina a gruesa,  $P_k^{k-1} : V_k \longrightarrow V_{k-1}$

d) Operador de interpolación de malla gruesa a fina,  $I_{k-1}^k : V_{k-1} \longrightarrow V_k$

Que están relacionados respecto a la forma bilineal  $a_k(.,.)$

$$a_{k-1}\langle P_k^{k-1}v, w \rangle = a_k\langle v, I_{k-1}^k w \rangle, \quad \forall v \in V_k, w \in V_{k-1} \quad (2.2)$$

e) El operador  $T_{j,k,m} : V_k \longrightarrow V_j$

f) El operador  $T_{k,j,m} : V_j \longrightarrow V_k$  y se definen como

$$T_{j,k,m} = P_{j+1}^j R_{j+1}^m \dots P_k^{k-1} R_k^m, \quad \forall j < k \quad (2.3)$$

$$T_{k,j,m} = R_k^m I_{k-1}^k \dots R_{j+1}^m I_j^{j+1}, \quad \forall j < k \quad (2.4)$$

Con

$$T_{k,k,m} = Id_k \quad (2.5)$$

## Relaciones importantes de los operadores

Con los operadores anteriores se verificarán relaciones importantes, como siguen

$$\begin{aligned} a_j \langle R_j v, w \rangle &= a_j \langle (Id_j - \frac{1}{\Lambda_j} A_j) v, w \rangle, \text{ por (2.1)} \\ &= a_j \langle v - \frac{1}{\Lambda_j} A_j v, w \rangle \\ &= a_j \langle v, w \rangle - \frac{A_j}{\Lambda_j} a_j \langle v, w \rangle \\ &= a_j \langle v, w \rangle - a_j \langle v, \frac{A_j}{\Lambda_j} w \rangle \\ &= a_j \langle v, w - \frac{A_j}{\Lambda_j} w \rangle \\ &= a_j \langle v, Id_j w - \frac{A_j}{\Lambda_j} w \rangle \\ &= a_j \langle v, (Id_j - \frac{A_j}{\Lambda_j}) w \rangle \\ &= a_j \langle v, R_j w \rangle, \text{ por (2.1)} \end{aligned}$$

Luego se verifica

$$a_j \langle R_j v, w \rangle = a_j \langle v, R_j w \rangle, \quad \forall v, w \in V_j \tag{2.6}$$

Esta última relación permite mostrar lo siguiente

- (i) Para  $m = 1$ :  $a_j \langle R_j v, w \rangle = a_j \langle v, R_j w \rangle$  por (2.6)
- (ii) Suponiendo que para  $m > 1$  se cumple:  $a_j \langle R_j^m v, w \rangle = a_j \langle v, R_j^m w \rangle$

(iii) Veamos para  $m + 1$ :

$$\begin{aligned}
a_j \langle R_j^{m+1} v, w \rangle &= a_j \langle R_j^m \underbrace{R_j v}_{v_1}, w \rangle \\
&= a_j \langle R_j^m v_1, w \rangle \\
&= a_j \langle v_1, R_j^m w \rangle, \text{ por (ii)} \\
&= a_j \langle R_j v, R_j^m w \rangle \\
&= a_j \langle v, R_j R_j^m w \rangle, \text{ por (i)} \\
&= a_j \langle v, R_j^{m+1} w \rangle
\end{aligned}$$

Con lo que se verifica

$$a_j \langle R_j^{m+1} v, w \rangle = a_j \langle v, R_j^{m+1} w \rangle, \quad \forall v, w \in V_k \quad (2.7)$$

Para los operadores  $T_{j,k,m}$  y  $T_{k,j,m}$  con  $j < k$ , si se realizan los siguientes pasos, se tiene

$$\begin{aligned}
a_j \langle T_{j,k,m} v, w \rangle &= a_j \langle P_{j+1}^j \underbrace{R_{j+1}^m P_{j+2}^{j+1} R_{j+2}^m \cdots P_k^{k-1} R_k^m v}_y, w \rangle, \text{ por (2.3)} \\
&= a_j \langle P_{j+1}^j y, w \rangle \\
&= a_{j+1} \langle y, I_j^{j+1} w \rangle, \text{ por (2.2)} \\
&= a_{j+1} \langle R_{j+1}^m \underbrace{P_{j+2}^{j+1} R_{j+2}^m \cdots P_k^{k-1} R_k^m v}_x, I_j^{j+1} w \rangle \\
&= a_{j+1} \langle R_{j+1}^m x, I_j^{j+1} w \rangle \\
&= a_{j+1} \langle x, R_{j+1}^m I_j^{j+1} w \rangle, \text{ por (2.7)} \\
&= a_{j+1} \langle P_{j+2}^{j+1} R_{j+2}^m \cdots P_k^{k-1} R_k^m v, R_{j+1}^m I_j^{j+1} w \rangle
\end{aligned}$$

Si se realiza el mismo procedimiento anterior para los restantes  $k - (j + 1)$  pares de operadores, se tendrá

$$\begin{aligned}
&= a_{j+(k-j)} \langle v, R_{j+(k-j)}^m I_{j+(k-j-1)}^{j+(k-j)} R_{j+(k-j-1)}^m I_{j+(k-j-2)}^{j+(k-j-1)} \cdots R_{j+1}^m I_j^{j+1} w \rangle \\
&= a_k \langle v, R_k^m I_{k-1}^k R_{k-1}^m I_{k-2}^{k-1} \cdots R_{j+1}^m I_j^{j+1} w \rangle \\
&= a_k \langle v, T_{k,j,m} w \rangle, \text{ por (2.4)}
\end{aligned}$$

Con lo que se tiene

$$a_j \langle T_{j,k,m} v, w \rangle = a_k \langle v, T_{k,j,m} w \rangle, \quad \forall v \in V_k, w \in V_j \quad (2.8)$$

Considerando  $1 \leq j \leq k \leq l$ , se tiene usando la ecuación (2.3)

$$\begin{aligned}
T_{j,l,m} &= \underbrace{P_{j+1}^j R_{j+1}^m P_{j+2}^{j+1} R_{j+2}^m \cdots P_k^{k-1} R_k^m}_{T_{j,k,m}} \underbrace{P_{k+1}^k R_{k+1}^m \cdots P_l^{l-1} R_l^m}_{T_{k,l,m}} \\
&= T_{j,k,m} \cdot T_{k,l,m}
\end{aligned}$$

asimismo si usamos la ecuación (2.4) se tiene

$$\begin{aligned}
T_{l,j,m} &= \underbrace{R_l^m I_{l-1}^l R_{l-1}^m I_{l-2}^{l-1} \cdots R_{k+1}^m I_k^{k+1}}_{T_{l,k,m}} \underbrace{R_k^m I_{k-1}^k \cdots R_{j+1}^m I_j^{j+1}}_{T_{k,j,m}} \\
&= T_{l,k,m} \cdot T_{k,j,m}
\end{aligned}$$

Luego para  $1 \leq j \leq k \leq l$ , se cumplen

$$\begin{cases} T_{j,l,m} = T_{j,k,m} T_{k,l,m} \\ T_{l,j,m} = T_{l,k,m} T_{k,j,m} \end{cases} \quad (2.9)$$

Se verificará una relación importante, sea  $v \in V_k$ ,  $w \in V_{k-1}$  y  $P_k^{k-1} v \in V_{k-1}$  :

$$\begin{aligned}
\langle A_{k-1} P_k^{k-1} v, w \rangle_{k-1} &= a_{k-1} \langle P_k^{k-1} v, w \rangle, \text{ por (1.14)} \\
&= a_k \langle v, I_{k-1}^k w \rangle, \text{ por (2.2)} \\
&= \langle A_k v, I_{k-1}^k w \rangle_k, \text{ por (1.14)} \\
&= \langle P_k^{k-1} A_k v, w \rangle_{k-1}, \text{ por (1.24)}
\end{aligned}$$

Y los operadores  $A_k$ ,  $A_{k-1}$ ,  $I_{k-1}^k$  y  $P_k^{k-1}$  son relacionados por

$$A_{k-1}P_k^{k-1} = P_k^{k-1}A_k \quad (2.10)$$

## Operador del error de propagación del algoritmo multimalla V-Ciclo

**Definición 2.1.1** Sea  $E_{k,m_1,m_2} : V_k \rightarrow V_k$  el operador del error de propagación del algoritmo multimalla V-ciclo aplicado a la ecuación (1.21), definido:

$$\mathbb{E}_{k,m_1,m_2}(z - z_0) = z - MG_V(k, g, z_0, m_1, m_2) \quad (2.11)$$

Donde

$z$ : Es la solución exacta de (1.21)

$z_0$ : Es la aproximación inicial

Se expresará los efectos de algoritmo multimalla V-ciclo, Algoritmo N°1 para  $k \geq 2$ , usando las ecuaciones (2.1), (2.10) y (2.11).

(a) De la ecuación (1.28)

Para  $j = 1$

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0 + \frac{1}{\Lambda_k}(g - A_k z_0) \\ &= (Id_k - \frac{1}{\Lambda_k}A_k)z_0 + \frac{g}{\Lambda_k} \\ &= R_k z_0 + \frac{g}{\Lambda_k}, \text{ por (2.1)} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
z - z_1 &= z - R_k z_0 - \frac{g}{\Lambda_k} \\
&= z - \underbrace{\frac{1}{\Lambda_k} A_k z + \frac{1}{\Lambda_k} A_k z}_{\frac{1}{\Lambda_k} A_k z} - R_k z_0 - \frac{g}{\Lambda_k} \\
&= \underbrace{\left( Id_k - \frac{1}{\Lambda_k} A_k \right) z}_{\frac{1}{\Lambda_k} A_k z} - R_k z_0 + \frac{1}{\Lambda_k} A_k z - \frac{g}{\Lambda_k} \\
&= R_k(z - z_0) + \frac{1}{\Lambda_k} A_k z - \frac{g}{\Lambda_k}, \text{ por (2.1)} \\
&= R_k(z - z_0) + \frac{g}{\Lambda_k} - \frac{g}{\Lambda_k}, \text{ por (1.21)}
\end{aligned}$$

la última línea produce la siguiente relación

$$z - z_1 = R_k(z - z_0) \tag{2.12}$$

Para  $j = 2$

$$\begin{aligned}
z - z_2 &= R_k(z - z_1), \text{ análogo a (2.12)} \\
&= R_k(R_k(z - z_0)), \text{ por (2.12)} \\
&= R_k^2(z - z_0)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Para  $j = 3$

$$\begin{aligned}
z - z_3 &= R_k(z - z_2), \text{ análogo a (2.12)} \\
&= R_k(R_k^2(z - z_0)), \text{ por (2.12)} \\
&= R_k^3(z - z_0)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Generalizando, para  $j = m_1$  se tiene

$$z - z_{m_1} = R_k^{m_1}(z - z_0) \tag{2.15}$$

(b) La expresión  $MG_V(k-1, P_k^{k-1}(g - A_k z_{m_1}), 0, m_1, m_2)$  es la solución aproximada de:

$$A_{k-1}z = P_k^{k-1}(g - A_k z_{m_1}) \quad (2.16)$$

Luego de (2.16)

$$\begin{aligned} A_{k-1}z &= P_k^{k-1}(g - A_k z_{m_1}) \\ &= P_k^{k-1}g - P_k^{k-1}A_k z_{m_1} \\ &= P_k^{k-1}A_k z - A_{k-1}P_k^{k-1}z_{m_1}, \quad \text{por (1.21) y (2.10)} \\ &= A_{k-1}P_k^{k-1}z - A_{k-1}P_k^{k-1}z_{m_1}, \quad \text{por (2.10)} \\ &= A_{k-1}P_k^{k-1}(z - z_{m_1}) \end{aligned}$$

De lo anterior se puede escribir

$$z = P_k^{k-1}(z - z_{m_1}) \quad (2.17)$$

Usando (1.29)

$$\begin{aligned} z - z_{m_1+1} &= z - \{z_{m_1} + I_{k-1}^k MG_V(k-1, P_k^{k-1}(g - A_k z_{m_1}), 0, m_1, m_2)\} \\ &= z - z_{m_1} - I_{k-1}^k MG_V(k-1, P_k^{k-1}(g - A_k z_{m_1}), 0, m_1, m_2) \\ &= I_{k-1}^k z - I_{k-1}^k z + (z - z_{m_1}) - I_{k-1}^k MG_V(k-1, P_k^{k-1}(g - A_k z_{m_1}), 0, m_1, m_2) \\ &= I_{k-1}^k (z - MG_V(k-1, P_k^{k-1}(g - A_k z_{m_1}), 0, m_1, m_2)) - I_{k-1}^k z + (z - z_{m_1}) \\ &= I_{k-1}^k (\mathbb{E}_{k-1, m_1, m_2})z - I_{k-1}^k z + (z - z_{m_1}) \\ &= I_{k-1}^k \{\mathbb{E}_{k-1, m_1, m_2} P_k^{k-1} - P_k^{k-1}\}(z - z_{m_1}) + (z - z_{m_1}), \quad \text{de (2.17)} \\ &= \{I_{k-1}^k \mathbb{E}_{k-1, m_1, m_2} P_k^{k-1} - I_{k-1}^k P_k^{k-1} + Id_k\}(z - z_{m_1}) + (z - z_{m_1}) \\ &= \{(Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) + I_{k-1}^{k-1} \mathbb{E}_{k-1, m_1, m_2} P_k^{k-1}\}(z - z_{m_1}) \end{aligned}$$

Y tenemos la siguiente relación

$$z - z_{m_1+1} = \{(Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) + I_k^{k-1} \mathbb{E}_{k-1, m_1, m_2} P_k^{k-1}\} (z - z_{m_1}) \quad (2.18)$$

(c) De la ecuación (1.30), similar al ítem (a).

Para  $j = m_1 + 2$

$$\begin{aligned} z_{m_1+2} &= z_{m_1+1} + \frac{1}{\Lambda_k} (g - A_k z_{m_1+1}) \\ &= (Id_k - \frac{1}{\Lambda_k} A_k) z_{m_1+1} + \frac{g}{\Lambda_k} \\ &= R_k z_{m_1+1} + \frac{g}{\Lambda_k}, \text{ por (2.1)} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} z - z_{m_1+2} &= z - R_k z_{m_1+1} - \frac{g}{\Lambda_k} \\ &= \underbrace{z - \frac{1}{\Lambda_k} A_k z + \frac{1}{\Lambda_k} A_k z}_{\text{}} - R_k z_{m_1+1} - \frac{g}{\Lambda_k} \\ &= \underbrace{(Id_k - \frac{1}{\Lambda_k} A_k) z}_{\text{}} - R_k z_{m_1+1} + \frac{1}{\Lambda_k} A_k z - \frac{g}{\Lambda_k} \\ &= R_k (z - z_{m_1+1}) + \frac{1}{\Lambda_k} A_k z - \frac{g}{\Lambda_k}, \text{ por (2.1)} \\ &= R_k (z - z_{m_1+1}) + \frac{g}{\Lambda_k} - \frac{g}{\Lambda_k}, \text{ por (1.21)} \end{aligned}$$

la última línea produce la siguiente relación

$$z - z_{m_1+2} = R_k (z - z_{m_1+1}) \quad (2.19)$$

Para  $j = m_1 + 3$

$$\begin{aligned} z - z_{m_1+3} &= R_k (z - z_{m_1+2}), \text{ análogo a (2.19)} \\ &= R_k (R_k (z - z_{m_1+1})), \text{ por (2.19)} \\ &= R_k^2 (z - z_{m_1+1}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Para  $j = m_1 + 4$

$$\begin{aligned}
z - z_{m_1+4} &= R_k(z - z_{m_1+3}), \text{ análogo a (2.19)} \\
&= R_k(R_k^2(z - z_{m_1+1})), \text{ por (2.20)} \\
&= R_k^3(z - z_{m_1+1})
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Generalizando, para  $j = m_1 + m_2 + 1$  se tiene

$$z - z_{m_1+m_2+1} = R_k^{m_2}(z - z_{m_1+1}) \tag{2.22}$$

De la ecuación (2.11)

$$\begin{aligned}
E_{k,m_1,m_2}(z - z_0) &= z - MG_V(k, g, z_0, m_1, m_2) \\
&= z - z_{m_1+m_2+1}, \text{ por (1.31)} \\
&= R_k^{m_2}(z - z_{m_1+1}), \text{ por (2.22)} \\
&= R_k^{m_2}\{(Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) + I_k^{k-1} \mathbb{E}_{k-1,m_1,m_2} P_k^{k-1}\}(z - z_{m_1}), \text{ por (2.18)} \\
&= R_k^{m_2}\{(Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) + I_k^{k-1} \mathbb{E}_{k-1,m_1,m_2} P_k^{k-1}\} R_k^{m_1}(z - z_0), \text{ por (2.15)}
\end{aligned}$$

haciendo  $v = z - z_0$

$$E_{k,m_1,m_2}v = R_k^{m_2}(Id_k + E_{k-1,m_1,m_2}P_k^{k-1} - P_k^{k-1})R_k^{m_1}v, \quad \forall v \in V_k, \quad k \geq 2 \tag{2.23}$$

## Operador del error de propagación del algoritmo multimalla V-Ciclo simétrico

**Definición 2.1.2** Sea el operador del error de propagación del algoritmo V-ciclo simétrico,  $\mathbb{E}_{k,m} : V_k \rightarrow V_k$  aplicado a la ecuación (1.21), definido

$$\mathbb{E}_{k,m}(z - z_0) = z - MG_V(k, g, z_0, m, m) \tag{2.24}$$

Donde:

$z$  es la solución exacta de (1.21)

$z_0$  es una solución aproximada

De la ecuación (2.24), para  $k = 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{1,m}(z - z_0) &= z - MG_V(1, g, z_0, m, m) \\
&= z - A_1^{-1}g, \text{ por (1.27)} \\
&= z - z, \text{ por (1.21)} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.25}$$

De la ecuación (2.23) y (2.25), se cumplen las siguientes relaciones

$$\mathbb{E}_{k,m} = R_k^m [(Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) + I_{k-1}^k \mathbb{E}_{k-1,m} P_k^{k-1}] R_k^m, \text{ para } k \geq 2 \tag{2.26}$$

$$\mathbb{E}_{1,m} = 0 \tag{2.27}$$

Denotando

$$fact_j = Id_j - I_{j-1}^j P_j^{j-1}, \text{ para algún } j \tag{2.28}$$

Veamos una expresión equivalente a la ecuación (2.26)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{k,m} &= R_k^m [(Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) + I_{k-1}^k \mathbb{E}_{k-1,m} P_k^{k-1}] R_k^m, \text{ por (2.26)} \\
&= R_k^m (fact_k) R_k^m + R_k^m I_{k-1}^k \mathbb{E}_{k-1,m} P_k^{k-1} R_k^m, \text{ por (2.28)} \\
&= Id_k R_k^m (fact_k) R_k^m Id_k + R_k^m I_{k-1}^k \mathbb{E}_{k-1,m} P_k^{k-1} R_k^m \\
&= T_{k,k,m} R_k^m (fact_k) R_k^m T_{k,k,m} + R_k^m I_{k-1}^k \mathbb{E}_{k-1,m} P_k^{k-1} R_k^m, \text{ por (2.5)}
\end{aligned}$$

usando la ecuación (2.26) por segunda vez

$$\begin{aligned}
&= T_{k,k,m} R_k^m (fact_k) R_k^m T_{k,k,m} + \\
&\quad R_k^m I_{k-1}^k \{ R_{k-1}^m [(fact_{k-1}) + I_{k-2}^{k-1} \mathbb{E}_{k-2,m} P_{k-1}^{k-2}] R_{k-1}^m \} P_k^{k-1} R_k^m \\
&= T_{k,k,m} R_k^m (fact_k) R_k^m T_{k,k,m} + \underbrace{R_k^m I_{k-1}^k}_{T_{k,k-1,m}} R_{k-1}^m (fact_{k-1}) R_{k-1}^m \underbrace{P_k^{k-1} R_k^m}_{T_{k-1,k,m}} + \\
&\quad R_k^m I_{k-1}^k R_{k-1}^m I_{k-2}^{k-1} \mathbb{E}_{k-2,m} P_{k-1}^{k-2} R_{k-1}^m P_k^{k-1} R_k^m \\
&= T_{k,k,m} R_k^m (fact_k) R_k^m T_{k,k,m} + T_{k,k-1,m} R_{k-1}^m (fact_{k-1}) R_{k-1}^m T_{k-1,k,m} + \\
&\quad R_k^m I_{k-1}^k R_{k-1}^m I_{k-2}^{k-1} \mathbb{E}_{k-2,m} P_{k-1}^{k-2} R_{k-1}^m P_k^{k-1} R_k^m
\end{aligned}$$

usando la ecuación (2.26) por tercera vez

$$\begin{aligned}
&= T_{k,k,m} R_k^m (fact_k) R_k^m T_{k,k,m} + T_{k,k-1,m} R_{k-1}^m (fact_{k-1}) R_{k-1}^m T_{k-1,k,m} + \\
&\quad R_k^m I_{k-1}^k R_{k-1}^m I_{k-2}^{k-1} \{ R_{k-2}^m [(fact_{k-2}) + I_{k-3}^{k-2} \mathbb{E}_{k-3,m} P_{k-2}^{k-3}] R_{k-2}^m \} P_{k-1}^{k-2} R_{k-1}^m P_k^{k-1} R_k^m \\
&= T_{k,k,m} R_k^m (fact_k) R_k^m T_{k,k,m} + T_{k,k-1,m} R_{k-1}^m (fact_{k-1}) R_{k-1}^m T_{k-1,k,m} + \\
&\quad \underbrace{R_k^m I_{k-1}^k R_{k-1}^m I_{k-2}^{k-1}}_{T_{k,k-2,m}} R_{k-2}^m (fact_{k-2}) R_{k-2}^m \underbrace{P_{k-1}^{k-2} R_{k-1}^m P_k^{k-1} R_k^m}_{T_{k-2,k,m}} + \\
&\quad R_k^m I_{k-1}^k R_{k-1}^m I_{k-2}^{k-1} R_{k-2}^m I_{k-3}^{k-2} \mathbb{E}_{k-3,m} P_{k-2}^{k-3} R_{k-2}^m P_{k-1}^{k-2} R_{k-1}^m P_k^{k-1} R_k^m \\
&= T_{k,k,m} R_k^m (fact_k) R_k^m T_{k,k,m} + T_{k,k-1,m} R_{k-1}^m (fact_{k-1}) R_{k-1}^m T_{k-1,k,m} + \\
&\quad T_{k,k-2,m} R_{k-2}^m (fact_{k-2}) R_{k-2}^m T_{k-2,k,m} + \\
&\quad R_k^m I_{k-1}^k R_{k-1}^m I_{k-2}^{k-1} R_{k-2}^m I_{k-3}^{k-2} \mathbb{E}_{k-3,m} P_{k-2}^{k-3} R_{k-2}^m P_{k-1}^{k-2} R_{k-1}^m P_k^{k-1} R_k^m
\end{aligned}$$

si se sigue realizando el proceso anterior usando la ecuación (2.26), se va notando una secuencia que en la  $(k - 1)$  vez se tendrá

$$\begin{aligned}
&= T_{k,k,m} R_k^m (fact_k) R_k^m T_{k,k,m} + T_{k,k-1,m} R_{k-1}^m (fact_{k-1}) R_{k-1}^m T_{k-1,k,m} + \\
&T_{k,k-2,m} R_{k-2}^m (fact_{k-2}) R_{k-2}^m T_{k-2,k,m} + \cdots + \\
&T_{k,k-(k-2),m} R_{k-(k-2)}^m (fact_{k-(k-2)}) R_{k-(k-2)}^m T_{k-(k-2),k,m} + \\
&R_k^m I_{k-1}^k R_{k-1}^m I_{k-2}^{k-1} \cdots R_{k-(k-2)}^m I_{k-(k-1)}^{k-(k-2)} \underbrace{\mathbb{E}_{k-(k-1),m}}_0 P_{k-(k-2)}^{k-(k-1)} R_{k-(k-2)}^m \cdots P_{k-1}^{k-2} R_{k-1}^m P_k^{k-1} R_k^m
\end{aligned}$$

luego por la ecuación (2.27), se tiene

$$\begin{aligned}
&= T_{k,k,m} R_k^m (fact_k) R_k^m T_{k,k,m} + T_{k,k-1,m} R_{k-1}^m (fact_{k-1}) R_{k-1}^m T_{k-1,k,m} + \\
&T_{k,k-2,m} R_{k-2}^m (fact_{k-2}) R_{k-2}^m T_{k-2,k,m} + \cdots + T_{k,2,m} R_2^m (fact_2) R_2^m T_{2,k,m} \\
&= \sum_{j=2}^k T_{k,j,m} R_j^m (fact_j) R_j^m T_{j,k,m}
\end{aligned}$$

Asi por (2.28)

$$\mathbb{E}_{k,m} = \sum_{j=2}^k T_{k,j,m} R_j^m (Id_j - I_{j-1}^j P_j^{j-1}) R_j^m T_{j,k,m} \quad (2.29)$$

## Operador del error de propagación del algoritmo multimalla F-Ciclo simétrico

**Definición 2.1.3** Sea el operador de error de propagación del algoritmo F-ciclo

$$\tilde{\mathbb{E}}_{k,m} : \tilde{V}_k \longrightarrow \tilde{V}_k$$

aplicado a la ecuación (1.21), definido

$$\tilde{\mathbb{E}}_{k,m}(z - z_0) = z - MG_F(k, g, z_0, m) \quad (2.30)$$

Donde:

$z$ : es la solución exacta de (1.21)

$z_0$ : es la aproximación inicial

Se verá un primer resultado para  $k = 1$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{E}}_{1,m}(z - z_0) &= z - MG_F(1, g, z_0, m), \quad \text{por (2.30)} \\
&= z - A_1^{-1}g, \quad \text{por (1.32)} \\
&= z - z, \quad \text{por (1.21)} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Usando la relación (1.36):

a) Para  $j = m + 2$

$$\begin{aligned}
z - z_{m+2} &= z - \left\{ z_{m+1} + \frac{1}{\Lambda_k}(g - A_k z_{m+1}) \right\}, \quad \text{por (1.36)} \\
&= z - z_{m+1} - \frac{1}{\Lambda_k}(g - A_k z_{m+1}) \\
&= z - Id_k z_{m+1} - \frac{1}{\Lambda_k}g + \frac{1}{\Lambda_k}z_{m+1} \\
&= z - \frac{1}{\Lambda_k}g - \underbrace{\left( Id_k - \frac{1}{\Lambda_k}A_k \right)}_{R_k} z_{m+1} \\
&= z - \frac{1}{\Lambda_k}A_k z + \frac{1}{\Lambda_k} \underbrace{A_k z}_g - \frac{1}{\Lambda_k}g - R_k z_{m+1} \\
&= \underbrace{Id_k z - \frac{1}{\Lambda_k}A_k z}_{R_k z} + \frac{1}{\Lambda_k}g - \frac{1}{\Lambda_k}g - R_k z_{m+1} \\
&= R_k z - R_k z_{m+1} \\
&= R_k(z - z_{m+1})
\end{aligned}$$

De este modo

$$z - z_{m+2} = R_k(z - z_{m+1}) \quad (2.32)$$

b) Para  $j = m + 3$

$$\begin{aligned} z - z_{m+3} &= z - \left\{ z_{m+2} + \frac{1}{\Lambda_k}(g - A_k z_{m+2}) \right\}, \text{ por (1.36)} \\ &= z - z_{m+2} - \frac{1}{\Lambda_k}(g - A_k z_{m+1}) \\ &= R_k(z - z_{m+2}), \text{ de forma similar al proceso de (2.32)} \\ &= R_k(R_k(z - z_{m+1})), \text{ por (2.32)} \\ &= R_k^2(z - z_{m+1}) \end{aligned}$$

Finalmente se puede escribir

$$z - z_{2m+1} = z - z_{m+(m+1)} = R_k^m(z - z_{m+1}) \quad (2.33)$$

a) Para  $j = 1$

$$\begin{aligned} z - z_1 &= z - \left\{ z_0 + \frac{1}{\Lambda_k}(g - A_k z_0) \right\}, \text{ por (1.33)} \\ &= z - z_0 - \frac{1}{\Lambda_k}g + \frac{1}{\Lambda_k}A_k z_0 \\ &= z - Id_k z_0 - \frac{1}{\Lambda_k}g + \frac{1}{\Lambda_k}A_k z_0 \\ &= z - \frac{1}{\Lambda_k}A_k z + \frac{1}{\Lambda_k}A_k z - \frac{1}{\Lambda_k}g - \underbrace{\left( Id_k - \frac{1}{\Lambda_k}A_k \right) z_0}_{R_k} \\ &= Id_k z - \frac{1}{\Lambda_k}A_k z + \frac{1}{\Lambda_k}g - \frac{1}{\Lambda_k}g - R_k z_0 \\ &= R_k z - R_k z_0 \\ &= R_k(z - z_0) \end{aligned}$$

$$z - z_1 = R_k(z - z_0) \quad (2.34)$$

b) Para  $j = 2$

$$\begin{aligned} z - z_2 &= z - \left\{ z_1 + \frac{1}{\Lambda_k} (g - A_k z_1) \right\}, \text{ por (1.33)} \\ &= R_k(z - z_1), \text{ análogo al proceso anterior} \\ &= R_k(R_k(z - z_0)), \text{ por (2.34)} \\ &= R_k^2(z - z_0) \end{aligned}$$

Finalmente, para  $j = m$

$$z - z_m = R_k^m(z - z_0) \quad (2.35)$$

La siguiente expresión  $MG_V(k-1, P_k^{k-1}(g - A_k z_m), q', m)$ , con  $q'$  valor inicial representa la solución aproximada de  $A_{k-1}z = P_k^{k-1}(g - A_k z_m)$ . Luego

$$\begin{aligned} A_{k-1}z &= P_k^{k-1}(g - A_k z_m) \\ &= P_k^{k-1}g - \underbrace{P_k^{k-1}A_k}_{\text{por (1.21)}} z_m \\ &= \underbrace{P_k^{k-1}A_k}_{\text{por (2.10)}} z - A_{k-1}P_k^{k-1}z_m, \text{ por (1.21) y (2.10)} \\ &= A_{k-1}P_k^{k-1}z - A_{k-1}P_k^{k-1}z_m, \text{ por (2.10)} \\ &= A_{k-1}P_k^{k-1}(z - z_m) \end{aligned}$$

Luego

$$z = P_k^{k-1}(z - z_m) \quad (2.36)$$

Se verá el siguiente resultado

$$\begin{aligned}
z - z_{m+1} &= z - \{z_m + I_{k-1}^k MG_V(k-1, P_k^{k-1}(g - A_k z_m), q', m)\} \\
&= (z - z_m) - I_{k-1}^k MG_V(k-1, P_k^{k-1}(g - A_k z_m), q', m) \\
&= I_{k-1}^k z - I_{k-1}^k z + (z - z_m) - I_{k-1}^k MG_V(k-1, P_k^{k-1}(g - A_k z_m), q', m) \\
&= I_{k-1}^k \mathbb{E}_{k-1, m}(z - q') - I_{k-1}^k P_k^{k-1}(z - z_m) + (z - z_m), \quad \text{por (2.36)} \\
&= I_{k-1}^k \mathbb{E}_{k-1, m}[z - MG_F(k-1, I_k^{k-1}(g - A_k z_m), 0, m)] - I_{k-1}^k P_k^{k-1}(z - z_m) + (z - z_m), \\
&= I_{k-1}^k \mathbb{E}_{k-1, m} \tilde{\mathbb{E}}_{k-1, m}(z) - I_{k-1}^k P_k^{k-1}(z - z_m) + (z - z_m), \quad \text{por (2.30)} \\
&= I_{k-1}^k \mathbb{E}_{k-1, m} \tilde{\mathbb{E}}_{k-1, m} P_k^{k-1}(z - z_m) - I_{k-1}^k P_k^{k-1}(z - z_m) + \underbrace{(z - z_m)}_{Id_k(z-z_m)}, \quad \text{por (2.36)} \\
&= \{(Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) + I_{k-1}^k \mathbb{E}_{k-1, m} \tilde{\mathbb{E}}_{k-1, m} P_k^{k-1}\}(z - z_m)
\end{aligned}$$

Así se tiene

$$z - z_{m+1} = \{(Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) + I_{k-1}^k \mathbb{E}_{k-1, m} \tilde{\mathbb{E}}_{k-1, m} P_k^{k-1}\}(z - z_m) \quad (2.37)$$

Se verá lo siguiente para  $k \geq 2$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{E}}_{k, m}(z - z_0) &= z - MG_F(k, g, z_0, m), \quad \text{por (2.30)} \\
&= z - z_{2m+1}, \quad \text{por (1.37)} \\
&= R_k^m(z - z_{m+1}), \quad \text{por (2.33)} \\
&= R_k^m \{(Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) + I_{k-1}^k \mathbb{E}_{k-1, m} \tilde{\mathbb{E}}_{k-1, m} P_k^{k-1}\}(z - z_m), \quad \text{por (2.37)} \\
&= R_k^m \{(Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) + I_{k-1}^k \mathbb{E}_{k-1, m} \tilde{\mathbb{E}}_{k-1, m} P_k^{k-1}\} R_k^m(z - z_0), \quad \text{por (2.35)}
\end{aligned}$$

De este modo se tienen los siguientes resultados importantes

$$\tilde{\mathbb{E}}_{k,m} = R_k^m \left[ (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) + I_{k-1}^k \mathbb{E}_{k-1,m} \tilde{\mathbb{E}}_{k-1,m} P_k^{k-1} \right] R_k^m, \quad \text{para } k \geq 2 \quad (2.38)$$

y de (2.31)

$$\tilde{\mathbb{E}}_{1,m} = 0 \quad (2.39)$$

### 2.1.1. Las hipótesis de la teoría aditiva

Una teoría aditiva para el análisis de convergencia de los algoritmos multimalla V-ciclo y F-ciclo, se desarrolló en [21], basados en los operadores de error de propagación de los algoritmos multimalla V-Ciclo y F-Ciclo simétrico, ecuaciones (2.29 ) y (2.38).

**Definición 2.1.4** (*Norma dependiente de la malla*)

Una herramienta importante en el análisis de la convergencia, es la norma dependiente de la malla  $\|\cdot\|_{s,k}$  definido como sigue:

$$\|v\|_{s,k} = \sqrt{(A_k^{s/2} v, v)_k}, \quad \forall v \in V_k \quad (2.40)$$

**Definición 2.1.5** (*Norma de la energía*)

Se define la norma de la energía

$$\|v\|_{a_k} = \sqrt{a_k(v, v)}, \quad \forall v \in V_k \quad (2.41)$$

Para abreviar ciertas expresiones se usarán las siguientes notaciones:

**Notación 2.1.1** Si  $X$  e  $Y$  representan expresiones:

Se denota como  $X \lesssim Y$ , si  $X \leq CY$ ,  $C = cte$  independiente de la malla

Se denota como  $X \approx Y$ , si  $X \lesssim Y$  e  $Y \lesssim X$

De la ecuación (1.12),  $a_k(v, v)$  está bien definido para  $v \in V_{k-1}$ , puesto que está representado por la misma expresión. Luego

$$a_k(v, v) = a_{k-1}(v, v), \quad \forall v \in V_{k-1} \quad (2.42)$$

De acuerdo a la teoría desarrollada en [21], se requiere verificar las siguientes hipótesis para completar el análisis de la convergencia:

**Hipótesis A, sobre  $V_k$**

$$(v, v)_k \approx \|v\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \forall v \in V_k \quad (2.43)$$

$$\|v\|_{a_k} \lesssim h_k^{-2} \|v\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall v \in V_k \quad (2.44)$$

**Hipótesis B, para los operadores de interpolación entre mallas  $I_{k-1}^k$  y  $P_k^{k-1}$**

$$\|I_{k-1}^k v\|_{2,k}^2 \leq (1 + \theta^2) \|v\|_{2,k-1}^2 + C_1 \theta^{-2} h_k^{2\alpha} \|v\|_{2+\alpha,k-1}^2, \quad \forall v \in V_{k-1}, \theta \in \langle 0, 1 \rangle \quad (2.45)$$

$$\|I_{k-1}^k v\|_{2-\alpha,k}^2 \leq (1 + \theta^2) \|v\|_{2-\alpha,k-1}^2 + C_2 \theta^{-2} h_k^{2\alpha} \|v\|_{2,k-1}^2, \quad \forall v \in V_{k-1}, \theta \in \langle 0, 1 \rangle \quad (2.46)$$

$$\|P_k^{k-1} v\|_{2-\alpha,k-1}^2 \leq (1 + \theta^2) \|v\|_{2-\alpha,k}^2 + C_3 \theta^{-2} h_k^{2\alpha} \|v\|_{2,k}^2, \quad \forall v \in V_k, \theta \in \langle 0, 1 \rangle \quad (2.47)$$

con las constantes  $C_1, C_2$  y  $C_3$ , son independientes de la malla.

**Hipótesis C, para el producto de operadores:  $I_{k-1}^k P_k^{k-1}$  y  $P_k^{k-1} I_{k-1}^k$**

$$\|(Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1})v\|_{2-\alpha,k} \lesssim h_k^{2\alpha} \|v\|_{2+\alpha,k}, \quad \forall v \in V_k \quad (2.48)$$

$$\|(Id_{k-1} - P_k^{k-1} I_{k-1}^k)v\|_{2-\alpha,k-1} \lesssim h_k^\alpha \|v\|_{2,k-1}, \quad \forall v \in V_{k-1} \quad (2.49)$$

Basandose en estas hipótesis, se establecerá la convergencia de los algoritmos V-ciclo y F-ciclo.

### 2.1.2. Estimaciones preliminares

Sea el operador  $A_k : V_k \rightarrow V_k$ , definido en (1.14). De (1.15) y (1.16)  $A_k$  es simétrico y definido positivo con respecto al producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ , y se tiene la siguiente relación ver ([7])

$$a_k(A_k^s v_1, v_2) = a_k(v_1, A_k^s v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in V_k, \quad s \in \mathbb{R} \quad (2.50)$$

Además sea  $\lambda$  un autovalor de  $A_k$  y  $v \in V_k$  el correspondiente autovector. Entonces

$$a_k(v, v) = \langle A_k v, v \rangle_k = \langle \lambda v, v \rangle_k = \lambda \langle v, v \rangle_k$$

Despejando  $\lambda$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{a_k(v, v)}{\langle v, v \rangle_k} \\ &= \frac{\|v\|_{a_k}^2}{\langle v, v \rangle_k} \quad \text{por (2.41)} \\ &\leq \frac{\|v\|_{a_k}^2}{C \|v\|_{L_2(\Omega)}^2} \quad \text{por (2.43)} \\ &\lesssim \frac{(h_k^{-2} \|v\|_{L_2(\Omega)})^2}{C \|v\|_{L_2(\Omega)}^2} \quad \text{por (2.44)} \\ &\lesssim h_k^{-4} \end{aligned}$$

Luego el radio espectral  $\rho(A_k)$  de  $A_k$  cumple:

$$\rho(A_k) \lesssim h_k^{-4} \quad (2.51)$$

### Propiedades de las normas dependientes de la malla

a)

$$\|v\|_{0,k} = \sqrt{\langle v, v \rangle_k} \approx \|v\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall v \in V_k \quad (2.52)$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\|v\|_{0,k} &= \sqrt{\langle v, v \rangle_k}, \text{ por (2.40)} \\
&= \sqrt{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2}, \text{ por (2.43)} \\
&= \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad \square
\end{aligned}$$

b)

$$\|v\|_{2,k} = \sqrt{a_k(v, v)} = \|v\|_{a_k}, \quad \forall v \in V_k \quad (2.53)$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\text{Sea } v \in V_k : \|v\|_{2,k} &= \sqrt{\langle A_k v, v \rangle_k}, \text{ por (2.40)} \\
&= \sqrt{a_k(v, v)}, \text{ por (1.14)} \\
&= \|v\|_{a_k} \quad \square
\end{aligned}$$

c)

$$\|A_k^s v\|_{t,k} = \|v\|_{t+4s,k}, \quad \forall v \in V_k, \quad s, t \in \mathbb{R} \quad (2.54)$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\|A_k^s v\|_{t,k} &= \sqrt{\langle A_k^{\frac{t}{2}} A_k^s v, A_k^s v \rangle_k} \text{ por (2.40)} \\
&= \sqrt{\langle A_k^{\frac{t+2s}{2}} v, A_k^s v \rangle_k} \\
&= \sqrt{a_k(A_k^{\frac{t+2s-2}{2}} v, A_k^s v)} \text{ por (1.14)} \\
&= \sqrt{a_k(A_k^s A_k^{\frac{t+2s-2}{2}} v, v)} \text{ por (2.50)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{a_k(A_k^{\frac{4s+t-2}{2}} v, v)} \\
&= \sqrt{\langle A_k A_k^{\frac{4s+t-2}{2}} v, v \rangle_k} \text{ por (1.14)} \\
&= \sqrt{\langle A_k^{\frac{4s+t}{2}} v, v \rangle_k} \\
&= \|v\|_{4s+t, k}, \quad \forall v \in V_k, \quad s, t \in \mathbb{R} \text{ por (2.40)} \quad \square
\end{aligned}$$

d) La desigualdad de Cauchy-Schwarz implica que

$$\|v\|_{2+t, k} = \sup_{w \in V_k \setminus \{0\}} \frac{a_k(v, w)}{\|w\|_{2-t, k}}, \quad \forall v \in V_k, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.55)$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
|a_k(v, w)| &= |a_k(A_k^{-t/4} A_k^{t/4} v, w)| \\
&= |a_k(A_k^{t/4} v, A_k^{-t/4} w)| \text{ por (2.50)} \\
&\leq \|A_k^{t/4} v\|_{a_k} \|A_k^{-t/4} w\|_{a_k} \\
&= \sqrt{a_k(A_k^{t/4} v, A_k^{t/4} v)} \sqrt{a_k(A_k^{-t/4} w, A_k^{-t/4} w)} \\
&= \sqrt{a_k(A_k^{t/2} v, v)} \sqrt{a_k(A_k^{-t/2} w, w)} \text{ por (2.50)} \\
&= \sqrt{\langle A_k^{\frac{2+t}{2}} v, v \rangle_k} \sqrt{\langle A_k^{\frac{2-t}{2}} w, w \rangle_k} \text{ por (1.14)} \\
&= \|v\|_{2+t, k} \|w\|_{2-t, k} \\
\implies |a_k(v, w)| &\leq \|v\|_{2+t, k} \|w\|_{2-t, k} \\
\implies \frac{|a_k(v, w)|}{\|w\|_{2-t, k}} &\leq \|v\|_{2+t, k}, \quad \forall v \in V_k, \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
\implies \|v\|_{2+t, k} &= \sup_{w \in V_k \setminus \{0\}} \frac{a_k(v, w)}{\|w\|_{2-t, k}}, \quad \forall v \in V_k, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \square
\end{aligned}$$

Como  $A_k$  es simétrica y definida positiva, sus valores propios son positivos, luego: Sean:  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n_k}$  los valores propios de  $A_k$  y  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n_k}$  los correspondientes vectores propios, que satisfacen la relación de ortonormalidad.

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle_k = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.56)$$

Para algún  $v \in V_k$ , se puede escribir

$$v = \sum_{i=1}^{n_k} c_i \phi_i \quad \text{entonces} \quad \langle v, v \rangle_k = \sum_{i=1}^{n_k} c_i^2 \quad (2.57)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle_k &= \left\langle \sum_{i=1}^{n_k} c_i \phi_i, \sum_{i=1}^{n_k} c_i \phi_i \right\rangle_k \\ &= \sum_{i=1}^{n_k} \langle c_i \phi_i, \sum_{i=1}^{n_k} c_i \phi_i \rangle_k \\ &= \sum_{i=1}^{n_k} c_i^2 \quad \square \end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned} \langle A_k^s v, v \rangle_k &= \left\langle A_k^s \sum_{i=1}^{n_k} c_i \phi_i, \sum_{i=1}^{n_k} c_i \phi_i \right\rangle_k \quad \text{por (2.57)} \\ &= \sum_{i=1}^{n_k} \left\langle A_k^s \sum_{i=1}^{n_k} c_i \phi_i, c_i \phi_i \right\rangle_k \\ &= \sum_{i=1}^{n_k} \left\langle \sum_{i=1}^{n_k} c_i A_k^s \phi_i, c_i \phi_i \right\rangle_k \quad (2.58) \\ &= \sum_{i=1}^{n_k} \left\langle \sum_{i=1}^{n_k} c_i \lambda_i^s \phi_i, c_i \phi_i \right\rangle_k \\ &= \sum_{i=1}^{n_k} c_i^2 \lambda_i^s \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\langle A_k^s v, v \rangle_k &= \sum_{i=1}^{n_k} c_i^2 \lambda_i^s \text{ por (2.58)} \\
&\lesssim h_k^{-4s} \sum_{i=1}^{n_k} c_i^2 \text{ por (2.51)} \\
&= h_k^{-4s} \langle v, v \rangle_k, \text{ para todo } s \geq 0
\end{aligned}$$

De este modo se tiene

$$\langle A_k^s v, v \rangle_k \lesssim h_k^{-4s} \langle v, v \rangle_k, \text{ para todo } s \geq 0 \quad (2.59)$$

Además

$$\begin{aligned}
\|v\|_{s,k}^2 &= \langle A_k^{s/2} v, v \rangle_k \text{ por (2.40)} \\
&= \langle A_k A_k^{s/2-1} v, v \rangle_k \\
&= a_k(A_k^{(s-2)/2} v, v) \\
&= a_k(A_k^{t/4} A_k^{-t/4} A_k^{(s-2)/2} v, v) \\
&= a_k(A_k^{-t/4+(s-2)/2} v, A_k^{t/4} v) \\
&= \langle A_k A_k^{-t/4+(s-2)/2} v, A_k^{t/4} v \rangle_k \\
&= \langle A_k^{s/2-t/4} v, A_k^{t/4} v \rangle_k \\
&= \langle A_k^{s/2-t/2} A_k^{t/4} v, A_k^{t/4} v \rangle_k \\
&\lesssim h_k^{-4(s/2-t/2)} \langle A_k^{t/4} v, A_k^{t/4} v \rangle_k, \text{ si } s \geq t, \text{ por (2.59)} \\
&= h_k^{-2(s-t)} a_k(A_k^{(t-4)/4} v, A_k^{t/4} v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= h_k^{-2(s-t)} a_k(A_k^{t/2-1} v, v) \\
&= h_k^{-2(s-t)} \langle A_k^{t/2} v, v \rangle_k \\
&= h_k^{-2(s-t)} \|v\|_{t,k}^2, \text{ para } s \geq t
\end{aligned}$$

De este modo se establece una importante estimación inversa

$$\|v\|_{s,k} \lesssim h_k^{-(s-t)} \|v\|_{t,k}, \quad \forall v \in V_k, \quad 0 \leq t \leq s \quad (2.60)$$

Para el operador de relajación  $R_k : V_k \rightarrow V_k$  definido en (2.1), se tiene los siguientes resultados.

**Lema 2.1.1** *Las siguientes propiedades de suavidad se mantienen para  $0 \leq t \leq s \leq 4$ :*

a)

$$\|R_k v\|_{s,k} \leq \|v\|_{s,k}, \quad \forall v \in V_k \quad (2.61)$$

b)

$$\|R_k^m v\|_{s,k} \lesssim h_k^{-(s-t)} m^{-(s-t)/4} \|v\|_{t,k}, \quad \forall v \in V_k \quad (2.62)$$

Demostración:

a) Sea  $v \in V_k$  y  $v = \sum_{i=1}^{n_k} c_i \phi_i$

Entonces

$$\begin{aligned}
R_k v &= (Id_k - \frac{1}{\Lambda_k} A_k) v, \text{ por (2.1)} \\
&= v - \frac{1}{\Lambda_k} A_k v \\
&= \sum_{i=1}^{n_k} c_i \phi_i - \frac{1}{\Lambda_k} \sum_{i=1}^{n_k} A_k c_i \phi_i \\
&= \sum_{i=1}^{n_k} c_i \phi_i - \frac{1}{\Lambda_k} \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i c_i \phi_i, \text{ pues } \lambda_i \text{ y } \phi_i \text{ son valores propios de } A_k \\
&= \sum_{i=1}^{n_k} (1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k}) c_i \phi_i
\end{aligned}$$

Y se tiene

$$R_k v = \sum_{i=1}^{n_k} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k}\right) c_i \phi_i \quad (2.63)$$

Luego

$$\begin{aligned} \|R_k v\|_{s,k}^2 &= \langle A_k^{s/2} R_k v, R_k v \rangle_k \text{ por (2.40)} \\ &= \langle A_k^{s/2} \sum_{i=1}^{n_k} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k}\right) c_i \phi_i, \sum_{i=1}^{n_k} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k}\right) c_i \phi_i \rangle_k \text{ por (2.63)} \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n_k} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k}\right) c_i \underbrace{A_k^{s/2} \phi_i}_{\lambda_i^{s/2} \phi_i}, \sum_{i=1}^{n_k} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k}\right) c_i \phi_i \right\rangle_k \\ &= \sum_{i=1}^{n_k} \left\langle \left(1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k}\right) c_i \lambda_i^{s/2} \phi_i, \sum_{j=1}^{n_k} \left(1 - \frac{\lambda_j}{\Lambda_k}\right) c_j \phi_j \right\rangle_k \\ &= \sum_{i=1}^{n_k} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k}\right)^2 c_i^2 \lambda_i^{s/2} \underbrace{\langle \phi_i, \phi_i \rangle_k}_1 \text{ por (2.56)} \\ &= \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i^{s/2} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k}\right)^2 c_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i^{s/2} c_i^2, \text{ pues } \lambda_i < \Lambda_k \implies \frac{\lambda_i}{\Lambda_k} < 1 \implies \left(1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k}\right) < 1 \\ &= \langle A_k^{s/2v,v} \rangle_k, \text{ por (2.58)} \\ &= \|v\|_{s,k}^2 \text{ por (2.40)} \quad \square \end{aligned}$$

b) El operador  $R_k$  es lineal. En efecto:

Sea  $v, w \in V_k$  y  $c = cte$

$$\begin{aligned} R_k(cv + w) &= \left(Id_k - \frac{1}{\Lambda_k} A_k\right)(cv + w) \\ &= c Id_k v - c \frac{1}{\Lambda_k} A_k v + Id_k w - \frac{1}{\Lambda_k} A_k w = c R_k v + R_k w \end{aligned}$$

Afirmación:

$$R_k^m v = \sum_{i=1}^{n_k} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k}\right)^m c_i \phi_i, \quad m \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.64)$$

En efecto:

i) Si  $m = 1$ :  $R_k v = \sum_{i=1}^{n_k} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k}\right) c_i \phi_i$  por (2.63)

ii) Suponiendo que se cumple para  $m - 1$ :

$$R_k^{m-1} v = \sum_{i=1}^{n_k} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k}\right)^{(m-1)} c_i \phi_i \quad (2.65)$$

iii) Para  $m$ :

$$\begin{aligned} R_k^m v &= R_k(R_k^{m-1} v) \\ &= R_k\left(\sum_{i=1}^{n_k} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k}\right)^{(m-1)} c_i \phi_i\right) \quad \text{por (2.65)} \\ &= \sum_{i=1}^{n_k} \left\{ \left(1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k}\right)^{(m-1)} c_i R_k \phi_i \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{n_k} \left\{ \left(1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k}\right)^{(m-1)} c_i \left( Id_k - \frac{1}{\Lambda_k} A_k \right) \phi_i \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{n_k} \left\{ \left(1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k}\right)^{(m-1)} c_i \left( \phi_i - \frac{1}{\Lambda_k} \underbrace{A_k \phi_i}_{\lambda_i \phi_i} \right) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{n_k} \left\{ \left(1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k}\right)^{(m-1)} c_i \left(1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k}\right) \phi_i \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{n_k} \left\{ \left(1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k}\right)^m c_i \phi_i \right\} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\|R_k^m v\|_{s,k}^2 &= \langle A_k^{s/2} R_k^m v, R_k^m v \rangle_k \\
&= \langle A_k^{s/2} \sum_{i=1}^{n_k} (1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k})^m c_i \phi_i, \sum_{i=1}^{n_k} (1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k})^m c_i \phi_i \rangle \quad \text{por (2.64)} \\
&= \langle \sum_{i=1}^{n_k} (1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k})^m c_i \underbrace{A_k^{s/2} \phi_i}_{\lambda_i^{s/2} \phi_i}, \sum_{i=1}^{n_k} (1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k})^m c_i \phi_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i^{s/2} (1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k})^m c_i \langle \phi_i, \sum_{j=1}^{n_k} (1 - \frac{\lambda_j}{\Lambda_k})^m c_j \phi_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i^{s/2} (1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k})^m c_i (1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k})^m c_i \\
&= \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i^{s/2} (1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k})^{2m} c_i^2 \\
&= \Lambda_k^{(s-t)/2} \sum_{i=1}^{n_k} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k}\right)^{2m} \left(\frac{\lambda_i}{\Lambda_k}\right)^{(s-t)/2} \lambda_i^{t/2} c_i^2, \quad \text{dando forma} \\
&\lesssim h_k^{-2(s-t)} \underbrace{\sum_{i=1}^{n_k} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda_k}\right)^{2m} \left(\frac{\lambda_i}{\Lambda_k}\right)^{(s-t)/2}}_{\text{por (2.51)}} \lambda_i^{t/2} c_i^2 \\
&\lesssim h_k^{-2(s-t)} \left[ \sup_{0 \leq x \leq 1} (1-x)^{2m} x^{(s-t)/2} \right] \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i^{t/2} c_i^2, \quad \text{haciendo } x = \frac{\lambda_i}{\Lambda_k} \\
&\lesssim h_k^{-2(s-t)} m^{-(s-t)/2} \langle A_k^{t/2} v, v \rangle, \quad \text{por Anexo (1.0.2) y (2.58)} \\
&= h_k^{-2(s-t)} m^{-(s-t)/2} \|v\|_{t,k}^2 \quad \square
\end{aligned}$$

Se verá algunas relaciones importantes de los operadores  $I_{k-1}^k$  y  $P_k^{k-1}$ .

Se tiene

$$\begin{aligned}
\|I_{k-1}^k\|_{2,k}^2 &\leq (1 + \theta^2) \|v\|_{2,k-1}^2 + C_1 \theta^{-2} h_k^{2\alpha} \|v\|_{2+\alpha,k-1}^2 \quad \text{por (2.45)} \\
&\lesssim (1 + \theta^2) \|v\|_{2,k-1}^2 + C_1 \theta^{-2} h_k^{2\alpha} h_k^{-2\alpha} \|v\|_{2,k-1}^2 \quad \text{por (2.60)} \\
&= (1 + \theta^2) \|v\|_{2,k-1}^2 + C_1 \theta^{-2} \|v\|_{2,k-1}^2 \quad \text{por (2.60)} \\
&= \|v\|_{2,k-1}^2 [(1 + \theta^2) + C_1 \theta^{-2}], \quad 0 < \theta < 1 \text{ y } \exists C > (1 + \theta^2) + C_1 \theta^{-2} \\
&\lesssim \|v\|_{2,k-1}^2
\end{aligned}$$

Asi

$$\|I_{k-1}^k v\|_{2,k} \lesssim \|v\|_{2,k-1}, \quad \forall v \in V_{k-1} \quad (2.66)$$

También

$$\begin{aligned}
\|(Id_{k-1} - P_k^{k-1} I_{k-1}^k)v\|_{2,k-1} &\lesssim h_{k-1}^{-\alpha} \|(Id_{k-1} - P_k^{k-1} I_{k-1}^k)v\|_{2-\alpha,k-1}, \quad \text{por (2.60)} \\
&\lesssim h_{k-1}^{-\alpha} h_{k-1}^{2\alpha} \|v\|_{2+\alpha,k-1}, \quad \text{por (2.48)} \\
&= h_{k-1}^{\alpha} \|v\|_{2+\alpha,k-1}, \quad \text{pero } h_{k-1} = 2h_k \\
&= (2h_k)^{\alpha} \|v\|_{2+\alpha,k-1} \\
&\lesssim (h_k)^{\alpha} \|v\|_{2+\alpha,k-1}
\end{aligned}$$

De este modo

$$\|(Id_{k-1} - P_k^{k-1} I_{k-1}^k)v\|_{2,k-1} \lesssim h_k^{\alpha} \|v\|_{2+\alpha,k-1}, \quad \forall v \in V_{k-1} \quad (2.67)$$

De (2.2) se tiene

$$\begin{aligned}
a_{k-1}(P_k^{k-1} v, w) &= a_k(v, I_{k-1}^k w) \\
&\leq \|v\|_{2,k} \|I_{k-1}^k w\|_{2,k}, \quad \text{por (2.55) para } t = 0 \\
&\leq \|v\|_{2,k} \|w\|_{2,k-1}, \quad \text{por (2.66)}
\end{aligned}$$

$$\implies \frac{a_{k-1}(P_k^{k-1}v, w)}{\|w\|_{2,k-1}} \leq \|v\|_{2,k}$$

tomando supremo a ambos lados

$$\underbrace{\sup_{w \in V_{k-1} \setminus \{0\}} \frac{a_{k-1}(P_k^{k-1}v, w)}{\|w\|_{2,k-1}}}_{\leq} \leq \sup_{w \in V_{k-1} \setminus \{0\}} \|v\|_{2,k} = \|v\|_{2,k}$$

$$\implies \|P_k^{k-1}v\|_{2,k-1} \leq \|v\|_{2,k}, \quad \forall v \in V_k, \quad \text{por (2.55)}$$

y se tiene la siguiente relación

$$\|P_k^{k-1}v\|_{2,k-1} \lesssim \|v\|_{2,k}, \quad \forall v \in V_k \quad (2.68)$$

**Lema 2.1.2** *Dado un número  $w \in \langle 0, 1 \rangle$ , las siguientes estimaciones se mantienen para un  $m$  suficientemente grande:*

a)

$$\|I_{k-1}^k R_{k-1}^m v\|_{2,k} \leq (1+w) \|v\|_{2,k-1}, \quad \forall v \in V_{k-1} \quad (2.69)$$

b)

$$\|P_k^{k-1} R_k^m v\|_{2-\alpha, k-1} \leq (1+w) \|v\|_{2-\alpha, k}, \quad \forall v \in V_k \quad (2.70)$$

c)

$$\|R_k^m I_{k-1}^k v\|_{2+\alpha, k} \leq (1+w) \|v\|_{2+\alpha, k-1}, \quad \forall v \in V_{k-1} \quad (2.71)$$

Demostración:

a) De (2.45) se tiene

$$\begin{aligned} \|I_{k-1}^k R_{k-1}^m v\|_{2,k}^2 &\leq (1+w^2) \|R_{k-1}^m v\|_{2,k-1}^2 + Cw^{-2} h_k^{2\alpha} \|R_{k-1}^m v\|_{2+\alpha,k-1}^2 \\ &\leq (1+w^2) h_{k-1}^{-2(2-t)} m^{-(2-t)/2} \|v\|_{2,k-1}^2 + \\ &\quad Cw^{-2} h_k^{2\alpha} h_{k-1}^{-2(2+\alpha-t)} m^{-(2+\alpha-t)/2} \|v\|_{2,k-1}^2, \quad \text{por (1.13)} \end{aligned}$$

si  $t = 2$  y  $h_{k-1} = 2h_k$  se tiene

$$\begin{aligned} &= (1+w^2) \|v\|_{2,k-1}^2 + Cw^{-2} 2^{-2\alpha} m^{-\alpha/2} \|v\|_{2,k-1}^2 \\ &= (1+w^2) \|v\|_{2,k-1}^2 + C'w^{-2} m^{-\alpha/2} \|v\|_{2,k-1}^2, \quad C' = C 2^{-2\alpha} \\ &= \|v\|_{2,k-1}^2 (1+w^2 + C'w^{-2} m^{-\alpha/2}) \\ &\quad \text{si } m^{\alpha/2} \geq \frac{C'w^{-3}}{2} \implies 1+w^2 + C'w^{-2} m^{-\alpha/2} \leq (1+w)^2 \\ &\leq \|v\|_{2,k-1}^2 (1+w)^2 \quad \square \end{aligned}$$

b) De (2.47) se tiene

$$\|P_k^{k-1} R_k^m v\|_{2-\alpha,k-1}^2 = (1+w^2) \|R_k^m v\|_{2-\alpha,k}^2 + Cw^{-2} h_k^{2\alpha} \|R_k^m v\|_{2,k}^2$$

por (2.62) y para  $t = 2 - \alpha$  se sigue

$$\begin{aligned} &\lesssim (1+w^2) \|v\|_{2-\alpha,k}^2 + Cw^{-2} h_k^{2\alpha} h_k^{-2\alpha} m^{-2\alpha/4} \|v\|_{2-\alpha,k}^2 \\ &= (1+w^2) \|v\|_{2-\alpha,k}^2 + Cw^{-2} m^{-\alpha/2} \|v\|_{2-\alpha,k}^2 \\ &= \|v\|_{2-\alpha,k}^2 (1+w^2 + Cw^{-2} m^{-\alpha/2}) \\ &\quad \text{si } m^{\alpha/2} \geq \frac{Cw^{-3}}{2} \implies 1+w^2 + Cw^{-2} m^{-\alpha/2} \leq (1+w)^2 \\ &\leq \|v\|_{2-\alpha,k}^2 (1+w)^2 \quad \square \end{aligned}$$

c) De (2.62) se tiene

$$\begin{aligned}
\|R_k^m I_{k-1}^k v\|_{2+\alpha,k}^2 &\lesssim h_k^{-2\alpha} m^{-\alpha/2} \|I_{k-1}^k v\|_{2,k}^2 \\
&\leq h_k^{-2\alpha} m^{-\alpha/2} \{(1+w^2) \|v\|_{2,k-1}^2 + C w^{-2} h_k^{2\alpha} \|v\|_{2+\alpha,k-1}^2\}, \text{ por (2.45)} \\
&= h_k^{-2\alpha} m^{-\alpha/2} (1+w^2) \|v\|_{2,k-1}^2 + C w^{-2} m^{-\alpha/2} \|v\|_{2+\alpha,k-1}^2
\end{aligned}$$

**Corolario 2.1.1** *Sea  $j \leq k$ . Dado algún  $w \in \langle 0, 1 \rangle$ , para un  $m$  suficientemente grande se cumple las siguientes estimaciones*

a)

$$\|T_{j,k,m} v\|_{2-\alpha,j} \leq (1+w)^{k-j} \|v\|_{2-\alpha,k}, \quad \forall v \in V_k \quad (2.72)$$

b)

$$\|T_{k,j,m} v\|_{2+\alpha,k} \leq (1+w)^{k-j} \|v\|_{2+\alpha,j}, \quad \forall v \in V_j \quad (2.73)$$

Demostración

a) De (2.3) se sigue

$$\begin{aligned}
\|T_{j,k,m} v\|_{2-\alpha,j} &= \|P_{j+1}^j R_{j+1}^m \cdots P_k^{k-1} R_k^m v\|_{2-\alpha,j}, \text{ hay } (k-j) \text{ pares de operadores} \\
&\leq (1+w) \underbrace{\|P_{j+2}^{j+1} R_{j+2}^m \cdots P_k^{k-1} R_k^m v\|_{2-\alpha,j+1}}_{(k-j-1) \text{ pares}}, \text{ por (2.70)} \\
&\leq (1+w)^{(k-j)} \|v\|_{2-\alpha,k} \text{ por (2.70) y repitiendo el proceso. } \quad \square
\end{aligned}$$

b) De (2.4) se sigue

$$\begin{aligned}
\|T_{k,j,m} v\|_{2+\alpha,k} &= \|R_k^m I_{k-1}^k \cdots R_{j+1}^m I_j^{j+1} v\|_{2+\alpha,k}, \text{ hay } (k-j) \text{ pares de operadores} \\
&\leq (1+w) \underbrace{\|R_{k-1}^m I_{k-2}^{k-1} \cdots R_{j+1}^m I_j^{j+1} v\|_{2+\alpha,k-1}}_{(k-j-1) \text{ pares}}, \text{ por (2.71)} \\
&\leq (1+w)^{(k-j)} \|v\|_{2+\alpha,j} \text{ por (2.71) y repitiendo el proceso. } \quad \square
\end{aligned}$$

### 2.1.3. Una desigualdad fortalecida de Cauchy-Schwarz

Se deducirán algunas estimaciones sobre los operadores  $T_{k,j,m}$  y  $T_{j,k,m}$ . Se harán las siguientes simplificaciones para facilitar el desarrollo.

#### Notación 2.1.2

$$\begin{aligned} T_{k,j,m} &\text{ por } T_{k,j} \\ T_{j,k,m} &\text{ por } T_{j,k} \end{aligned}$$

Sean las desigualdades que se verifican y su demostración están en el anexo (1.0.1), (1.0.2) y (1.0.3)

$$2ab \leq \theta^2 a^2 + \theta^{-2} b^2, \quad \forall a, b \in R, \quad \theta \in \langle 0, 1 \rangle \quad (2.74)$$

$$(a + b)^2 \leq (1 + \theta^2) a^2 + (1 + \theta^{-2}) b^2, \quad \forall a, b \in R, \quad \theta \in \langle 0, 1 \rangle \quad (2.75)$$

$$(a + b)^2 \leq (1 + \theta^2) a^2 + C \theta^{-2} b^2, \quad \forall a, b \in R, \quad \theta \in \langle 0, 1 \rangle, \quad C = \text{alguna cte.} \quad (2.76)$$

**Propiedad 2.1.1** De (2.4) se sigue

$$T_{k,j} = R_k^m I_{k-1}^k \underbrace{R_{k-1}^m I_{k-2}^{k-1} \dots R_{j+1}^m I_j^{j+1}}_{T_{k-1,j}} = R_k^m I_{k-1}^k T_{k-1,j} \quad (2.77)$$

**Lema 2.1.3** Sea  $k \leq K$ . Entonces la siguiente estimación se cumple

$$\| \| T_{K,k,m} v \| \|_{2,K} \lesssim \| \| v \| \|_{2,k} \quad \forall v \in V_k, \quad \text{para un } m \text{ suficientemente grande.} \quad (2.78)$$

Demostración:

Sea  $v \in V_k$ . Para algún  $w \in \langle 0, 1 \rangle$  se tiene

$$\begin{aligned} \| \| T_{K,k,m} v \| \|_{2,K}^2 &= a_K(T_{K,k} v, T_{K,k} v) \quad \text{por (2.53)} \\ &= a_K(R_K^m I_{K-1}^K T_{K-1,k} v, R_K^m I_{K-1}^K T_{K-1,k} v) \quad \text{por (2.77)} \\ &= \| \| R_K^m I_{K-1}^K T_{K-1,k} v \| \|_{a_K}^2 \\ &= \| \| R_K^m I_{K-1}^K T_{K-1,k} v \| \|_{2,K}^2 \quad \text{por (2.53)} \\ &\leq \| \| I_{K-1}^K T_{K-1,k} v \| \|_{2,K}^2 \quad \text{por (2.61)} \\ &= a_K(I_{K-1}^K T_{K-1,k} v, I_{K-1}^K T_{K-1,k} v) \quad \text{por (2.53)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{K-1}(P_K^{K-1} I_{K-1}^K T_{K-1,k} v, T_{K-1,k} v) \quad \text{por (2.2)} \\
&= a_{K-1}(T_{K-1,k} v + (P_K^{K-1} I_{K-1}^K - Id_{K-1}) T_{K-1,k} v, T_{K-1,k} v) \\
&= a_{K-1}(T_{K-1,k} v, T_{K-1,k} v) + a_{K-1}((P_k^{K-1} I_{K-1}^K - Id_{K-1}) T_{K-1,k} v, T_{K-1,k} v)
\end{aligned}$$

por (2.53) y la desigualdad de Cauchy Schwarz, se sigue

$$\begin{aligned}
&\leq \| \| T_{K-1,k} v \| \|_{2,K-1}^2 + \underbrace{\| \| (P_k^{K-1} I_{K-1}^K - Id_{K-1}) T_{K-1,k} v \| \|_{2,K-1}}_{\text{}} \| \| T_{K-1,k} v \| \|_{2,K-1} \\
&\leq \| \| T_{K-1,k} v \| \|_{2,K-1}^2 + \underbrace{h_K^\alpha \| \| T_{K-1,k} v \| \|_{2+\alpha,K-1}}_b \underbrace{\| \| T_{K-1,k} v \| \|_{2,K-1}}_a, \quad \text{por (2.67)} \\
&\leq \| \| T_{K-1,k} v \| \|_{2,K-1}^2 + \{ \theta^{-2} h_K^{2\alpha} \| \| T_{K-1,k} v \| \|_{2+\alpha,K-1}^2 + \theta^2 \| \| T_{K-1,k} v \| \|_{2,K-1}^2 \}, \quad \text{por (2.74)} \\
&= (1 + \theta_K^2) \| \| T_{K-1,k} v \| \|_{2,K-1}^2 + C \theta_K^{-2} h_K^{2\alpha} \| \| T_{K-1,k} v \| \|_{2+\alpha,K-1}^2
\end{aligned}$$

Por (2.73) y para  $m$  suficientemente grande se sigue

$$= (1 + \theta_K^2) \| \| T_{K-1,k} v \| \|_{2,K-1}^2 + C \theta_K^{-2} h_K^{2\alpha} (1 + w)^{2(K-1-k)} \| \| v \| \|_{2+\alpha,k}^2$$

Luego se tiene

$$\| \| T_{K,k} v \| \|_{2,K}^2 \leq (1 + \theta_K^2) \| \| T_{K-1,k} v \| \|_{2,K-1}^2 + C \theta_K^{-2} h_K^{2\alpha} (1 + w)^{2(K-1-k)} \| \| v \| \|_{2+\alpha,k}^2 \quad (2.79)$$

Si consideramos esta desigualdad y la volvemos a iterar sobre  $\| \| T_{K-1,k} v \| \|_{2,K-1}^2$  y se tiene

$$\begin{aligned}
\| \| T_{K,k} v \| \|_{2,K}^2 &\leq \underbrace{\left[ \prod_{q=k+1}^K (1 + \theta_q^2) \right]}_{\text{alpha}} \| \| v \| \|_{2,k}^2 + \\
&C \left[ \sum_{p=k+1}^K \left( \prod_{q=p+1}^K (1 + \theta_q^2) \right) \theta_p^{-2} \underbrace{(1 + w)^{2(p-k)} h_p^{2\alpha}}_{\text{beta}} \right] \| \| v \| \|_{2+\alpha,k}^2
\end{aligned} \quad (2.80)$$

donde  $\theta_{k+1}, \dots, \theta_K$  son números arbitrarios entre  $\langle 0, 1 \rangle$ . De (1.11) tenemos  $h_p = 2^{k-p} h_k$ .  
Eligiendo

$$w = \left(\frac{4}{3}\right)^{\alpha/2} - 1$$

se tiene

$$beta := (1 + w)^{2(p-k)} h_p^{2\alpha} = \left(\frac{4^{\alpha/2}}{3^{\alpha/2}}\right)^{2(p-k)} h_p^{2\alpha} = 3^{-\alpha(p-k)} h_k^{2\alpha} \quad (2.81)$$

Para  $k + 1 \leq q \leq K$ , sea

$$\theta_q = \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha(q-k)/2} \quad (2.82)$$

Usando (2.82) se tiene

$$alpha := \prod_{q=k+1}^K (1 + \theta_q^2) = \prod_{q=k+1}^K \left\{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha(q-k)}\right\} = \prod_{j=1}^{(K-k)} \left\{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha j}\right\} = \rho_1 < \infty \quad (2.83)$$

usando (2.83), (2.82) y (2.81) se tiene

$$\begin{aligned} omega &:= \sum_{p=k+1}^K \underbrace{\left( \prod_{q=p+1}^K (1 + \theta_q^2) \right)}_{alpha} \theta_p^{-2} \underbrace{(1 + w)^{2(p-k)} h_p^{2\alpha}}_{beta} \\ &\leq \sum_{p=k+1}^K \rho_1 \theta_p^{-2} 3^{-\alpha(p-k)} h_k^{2\alpha} \\ &= \rho_1 \sum_{p=k+1}^K \left(\frac{2}{3}\right)^{-\alpha(p-k)} 3^{-\alpha(p-k)} h_k^{2\alpha} \\ &= \rho_1 h_k^{2\alpha} \sum_{p=k+1}^K (2)^{-\alpha(p-k)} \\ &= \rho_1 h_k^{2\alpha} \underbrace{\sum_{j=1}^{(K-k)} (2)^{-\alpha j}}_{=\rho_2 < \infty} \\ &= \rho_1 \rho_2 h_k^{2\alpha} \end{aligned} \quad (2.84)$$

Regresando a (2.80) y por (2.84) se sigue

$$\begin{aligned}
\|T_{K,k,m}v\|_{2,K} &\leq \rho_1 \|v\|_{2,k}^2 + C\rho_1\rho_2 h_k^{2\alpha} \|v\|_{2+\alpha,k}^2 \\
&\leq \rho_1 \|v\|_{2,k}^2 + C\rho_1\rho_2 h_k^{2\alpha} h_k^{-2\alpha} \|v\|_{2,k}^2, \quad \text{por (2.60)} \\
&= \|v\|_{2,k}^2 \{\rho_1 + C\rho_1\rho_2\} \\
&\lesssim \|v\|_{2,k}^2 \quad \square
\end{aligned} \tag{2.85}$$

**Corolario 2.1.2** *Sea  $k \leq K$  entonces se cumple la siguiente estimación:*

$$\|T_{k,K,m}v\|_{2,k} \lesssim \|v\|_{2,K}, \quad \forall v \in V_K, \quad \text{para } m \text{ suficientemente grande.} \tag{2.86}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\|T_{k,K,m}v\|_{2,k}^2 &= \|T_{k,K,m}v\|_{a_k}^2, \quad \text{por (2.53)} \\
&= a_k(T_{k,K,m}v, T_{k,K,m}v) \\
&= a_K(v, \underbrace{T_{K,k,m} T_{k,K,m} v}), \quad \text{por (2.8)} \\
&= a_K(v, T_{K,K,m}v), \quad \text{por (2.9)} \\
&= a_K(v, Id_K v), \quad \text{por (2.5)} \\
&= a_K(v, v) \\
&= \|v\|_{a_k}^2 \\
&= \|v\|_{2,K}^2 \quad \square
\end{aligned}$$

**Lema 2.1.4** *Sea  $k \leq K$ . Entonces se cumple la siguiente estimación, para un  $m$  suficientemente grande*

$$\|T_{K,k,m}v\|_{2-\alpha,K} \lesssim \|v\|_{2-\alpha,k}, \quad \forall v \in V_k \tag{2.87}$$

Demostración:

Sea  $v \in V_k$

$$\begin{aligned}
\|T_{K,k}v\|_{2-\alpha,K}^2 &= \|R_K^m I_{K-1}^K T_{K-1,k}v\|_{2-\alpha,K}^2, \text{ por (2.4)} \\
&\leq \|I_{K-1}^K T_{K-1,k}v\|_{2-\alpha,K}^2, \text{ por (2.61)} \\
&\leq (1 + \theta_K^2) \|T_{K-1,k}v\|_{2-\alpha,K-1}^2 + C\theta_K^{-2} h_K^{2\alpha} \|T_{K-1,k}v\|_{2,K-1}^2, \text{ por (2.46)}
\end{aligned}$$

para  $m$  suficientemente grande y  $\theta_K \in \langle 0, 1 \rangle$  se sigue

$$\leq (1 + \theta_K^2) \|T_{K-1,k}v\|_{2-\alpha,K-1}^2 + C\theta_K^{-2} h_K^{2\alpha} \|v\|_{2,k}^2, \text{ por (2.78)}$$

Iterando esta desigualdad sobre  $\|T_{K-1,k}v\|_{2-\alpha,K-1}^2$  se tiene

$$\begin{aligned}
\|T_{K,k}v\|_{2-\alpha,K}^2 &\leq \left[ \prod_{q=k+1}^K (1 + \theta_q^2) \right] \|v\|_{2-\alpha,k}^2 \\
&\quad + C \left[ \sum_{p=k+1}^K \underbrace{\left( \prod_{q=p+1}^K (1 + \theta_q^2) \right)}_{\text{alpha}} \theta_p^{-2} h_p^{2\alpha} \right] \|v\|_{2,k}^2
\end{aligned} \tag{2.88}$$

donde  $\theta_{k+1}, \dots, \theta_K$  son números arbitrarios en  $\langle 0, 1 \rangle$ . Así como en la demostración del lema (2.1.3), si se elige

$$\theta_q = \left( \frac{1}{2} \right)^{\alpha(q-k)/2}, \text{ para } k+1 \leq q \leq K \tag{2.89}$$

Se tiene

$$\text{alpha} := \prod_{q=k+1}^K (1 + \theta_q^2) = \prod_{q=k+1}^K \left\{ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^{\alpha(q-k)} \right\} = \prod_{j=1}^{(K-k)} \left\{ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^{\alpha j} \right\} = \rho_1 < \infty \tag{2.90}$$

también, usando (2.90), (2.89) y  $h_{k-1} = 2h_k \longrightarrow h_p^{2\alpha} = 2^{2\alpha(k-p)} h_k^{2\alpha}$  se tiene

$$\begin{aligned}
\omega &:= \sum_{p=k+1}^K \underbrace{\left( \prod_{q=p+1}^K (1 + \theta_q^2) \right)}_{\alpha} \theta_p^{-2} h_p^{2\alpha} \\
&\leq \rho_1 \sum_{p=k+1}^K \theta_p^{-2} h_p^{2\alpha} \\
&= \rho_1 \sum_{p=k+1}^K h_p^{2\alpha} \theta_p^{-2} \\
&= \rho_1 h_k^{2\alpha} \sum_{p=k+1}^K (2)^{3\alpha(k-p)} \\
&= \rho_1 h_k^{2\alpha} \underbrace{\sum_{j=1}^{(K-k)} (2)^{-3\alpha j}}_{=\rho_2 < \infty} \\
&= \rho_1 \rho_2 h_k^{2\alpha}
\end{aligned} \tag{2.91}$$

Regresando a (2.88) y con (2.90), (2.91) se sigue

$$\begin{aligned}
\|T_{K,k}v\|_{2-\alpha,K}^2 &\leq \rho_1 \|v\|_{2-\alpha,k}^2 + C\rho_1 \rho_2 h_k^{2\alpha} h_k^{-2\alpha} \|v\|_{2-\alpha,k}^2 \\
&= \|v\|_{2-\alpha,k}^2 \{\rho_1 + C\rho_1 \rho_2\} \\
&\lesssim \|v\|_{2-\alpha,k}^2 \quad \square
\end{aligned} \tag{2.92}$$

**Lema 2.1.5** *Sea  $k \leq K$ . Entonces se cumple la siguiente estimación*

$$\|T_{k,K,m}v\|_{2-\alpha,k}^2 \lesssim \|v\|_{2-\alpha,K}^2 + h_k^{2\alpha} \|v\|_{2,K}^2, \quad \forall v \in V_K \tag{2.93}$$

*Para un  $m$  suficientemente grande.*

Demostración:

Sea  $v \in V_K$

$$\| \|T_{k,K} v\| \|_{2-\alpha,k}^2 = \| \|P_{k+1}^k R_{k+1}^m T_{k+1,K} v\| \|_{2-\alpha,k}^2, \text{ por (2.3)}$$

$$\leq (1 + \theta_{k+1}^2) \| \|R_{k+1}^m T_{k+1,K} v\| \|_{2-\alpha,k+1}^2 +$$

$$C \theta_{k+1}^{-2} h_{k+1}^{2\alpha} \| \|R_{k+1}^m T_{k+1,K} v\| \|_{2,k+1}^2 \text{ por (2.47)}$$

$$\leq (1 + \theta_{k+1}^2) \| \|T_{k+1,K} v\| \|_{2-\alpha,k+1}^2 + C \theta_{k+1}^{-2} h_{k+1}^{2\alpha} \| \|T_{k+1,K} v\| \|_{2,k+1}^2, \text{ por (2.62)}$$

$$\lesssim (1 + \theta_{k+1}^2) \| \|T_{k+1,K} v\| \|_{2-\alpha,k+1}^2 + C \theta_{k+1}^{-2} h_{k+1}^{2\alpha} \| \|v\| \|_{2,K}^2, \text{ por (2.86)}$$

para  $m$  suficientemente grande, donde  $\theta_{k+1} \in \langle 0, 1 \rangle$  arbitrario. Iterando esta desigualdad sobre  $\| \|T_{k+1,K} v\| \|_{2-\alpha,k+1}^2$  se tiene

$$\begin{aligned} \| \|T_{k,K} v\| \|_{2-\alpha,k}^2 &\leq \left[ \prod_{q=k+1}^K (1 + \theta_q^2) \right] \| \|v\| \|_{2-\alpha,K}^2 \\ &+ C \left[ \sum_{p=k+1}^K \left( \prod_{q=k+1}^{p-1} (1 + \theta_q^2) \right) \theta_p^{-2} h_p^{2\alpha} \right] \| \|v\| \|_{2,K}^2 \end{aligned} \quad (2.94)$$

eligiendo  $\theta_q$  como en (2.89) y usando (2.90) y (2.91) se tiene

$$\begin{aligned} \| \|T_{k,K,m} v\| \|_{2-\alpha,K}^2 &\lesssim \rho_1 \| \|v\| \|_{2-\alpha,K}^2 + C \rho_1 \rho_2 h_k^{2\alpha} \| \|v\| \|_{2,K}^2 \\ &\lesssim \| \|v\| \|_{2-\alpha,K}^2 + h_k^{2\alpha} \| \|v\| \|_{2,K}^2 \quad \square \end{aligned}$$

**Lema 2.1.6** *Sea  $k \leq K$ . Entonces se cumple la siguiente estimación*

$$\| \|T_{k,K,m} T_{K,k,m} v\| \|_{2-\alpha,k} \lesssim \| \|v\| \|_{2-\alpha,k}, \quad \forall v \in V_k \quad (2.95)$$

Demostración:

De (2.93) se sigue

$$\begin{aligned} \| \|T_{k,K,m} T_{K,k,m} v\| \|_{2-\alpha,k} &\lesssim \| \|T_{K,k,m} v\| \|_{2-\alpha,K} + h_k^{2\alpha} \| \|T_{K,k,m} v\| \|_{2,K} \\ &\lesssim \| \|v\| \|_{2-\alpha,k} + h_k^{2\alpha} \| \|v\| \|_{2,k} \quad \text{por (2.87) y (2.78)} \\ &\lesssim \| \|v\| \|_{2-\alpha,k} + h_k^{2\alpha} h_k^{-2\alpha} \| \|v\| \|_{2-\alpha,k} \quad \text{por (2.60)} \\ &\lesssim \| \|v\| \|_{2-\alpha,k}, \text{ para } m \text{ suficientemente grande.} \quad \square \end{aligned}$$

Con los resultados anteriores se establecerá el resultado más importante de esta sección.

**Lema 2.1.7** (*Desigualdad fortalecida de Cauchy-Schwarz con suavidad*)

Sea  $1 \leq j \leq k \leq K$ . Dado algún  $w \in \langle 0, 1 \rangle$ , se cumple la estimación siguiente

$$a_K (T_{K,j,m} R_j^q v_j, T_{K,k,m} R_k^q v_k) \lesssim q^{-\alpha/2} \left( \frac{1+w}{2^\alpha} \right)^{k-j} (h_j^{-\alpha} \|v_j\|_{2-\alpha,j}) (h_k^{-\alpha} \|v_k\|_{2-\alpha,k}) \quad (2.96)$$

se cumple para todo  $v_j \in V_j$  y  $v_k \in V_k$ , con  $m$  suficientemente grande.

Demostración:

Se requiere algunos pasos previos.

$$h_j = 2h_{j+1} = 2^{k-j} h_k \implies \frac{h_k}{h_j} = \frac{1}{2^{k-j}} \quad (2.97)$$

Luego, usando (2.97) se sigue

$$\begin{aligned} \text{Sea } \beta &:= \frac{(1+w)^{k-j}}{q^{\alpha/2}} \left( \frac{h_k}{h_j} \right)^\alpha \\ &= q^{-\alpha/2} \left( \frac{1+w}{2^\alpha} \right)^{k-j} \end{aligned} \quad (2.98)$$

Sea  $v_j \in V_j$  y  $v_k \in V_k$  y dado algún  $w \in \langle 0, 1 \rangle$ , se sigue

$$\begin{aligned} a_K (T_{K,j} R_j^q v_j, T_{K,k} R_k^q v_k) &= a_j (R_j^q v_j, T_{j,K} T_{K,k} R_k^q v_k), \quad \text{por (2.8)} \\ &\leq \|R_j^q v_j\|_{2+\alpha,j} \|T_{j,K} T_{K,k} R_k^q v_k\|_{2-\alpha,j} \quad \text{por (2.55)} \\ &= \|R_j^q v_j\|_{2+\alpha,j} \|T_{j,k} R_k^q v_k\|_{2-\alpha,j} \quad \text{por (2.9)} \\ &\leq \|R_j^q v_j\|_{2+\alpha,j} (1+w)^{(k-j)} \|R_k^q v_k\|_{2-\alpha,k} \quad \text{por (2.72)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim \|\|R_j^q v_j\|\|_{2+\alpha,j} (1+w)^{(k-j)} \|\|v_k\|\|_{2-\alpha,k} \text{ por (2.62)} \\
&\lesssim h_j^{-(2\alpha)} q^{-\alpha/2} \|\|v_j\|\|_{2-\alpha,j} (1+w)^{(k-j)} \|\|v_k\|\|_{2-\alpha,k} \text{ por (2.62)} \\
&\lesssim \frac{h_j^{-(2\alpha)}}{q^{\alpha/2}} \|\|v_j\|\|_{2-\alpha,j} (1+w)^{(k-j)} \|\|v_k\|\|_{2-\alpha,k} \\
&= \underbrace{\frac{(1+w)^{k-j}}{q^{\alpha/2}} \left(\frac{h_k}{h_j}\right)^\alpha}_{\text{beta}} (h_j^{-\alpha} \|\|v_j\|\|_{2-\alpha,j}) (h_k^{-\alpha} \|\|v_k\|\|_{2-\alpha,k}) \\
&= q^{-\alpha/2} \left(\frac{1+w}{2^\alpha}\right)^{k-j} (h_j^{-\alpha} \|\|v_j\|\|_{2-\alpha,j}) (h_k^{-\alpha} \|\|v_k\|\|_{2-\alpha,k}) \text{ por (2.98)}
\end{aligned}$$

con  $m$  suficientemente grande.  $\square$

**Corolario 2.1.3** *Sea  $v_k \in V_k$  para  $1 \leq k \leq K$ . Entonces la siguiente estimación*

$$a_K \left( \sum_{k=1}^K T_{K,k,m} R_k^q v_k, \sum_{k=1}^K T_{K,k,m} R_k^q v_k \right) \lesssim q^{-\alpha/2} \sum_{k=1}^K h_k^{-2\alpha} \|\|v_k\|\|_{2-\alpha,k}^2 \quad (2.99)$$

se cumple para  $m$  suficientemente grande.

Demostración:

Sea  $w \in \langle 0, 1 \rangle$ , del lema (2.1.7), se tiene

$$\begin{aligned}
a_K \left( \sum_{k=1}^K T_{K,k,m} R_k^q v_k, \sum_{k=1}^K T_{K,k,m} R_k^q v_k \right) &= \sum_{j=1}^K a_K \left( T_{K,j,m} R_j^q v_j, \sum_{k=1}^K T_{K,k,m} R_k^q v_k \right) \\
&= \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K a_K (T_{K,j,m} R_j^q v_j, T_{K,k,m} R_k^q v_k) \quad (2.100) \\
&= \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K a_K (T_{K,j} R_j^q v_j, T_{K,k} R_k^q v_k)
\end{aligned}$$

Eligiendo  $w$  tal que  $(1+w)2^{-\alpha} < 1$ , de (2.100) y usando la desigualdad de Young se sigue

$$\begin{aligned}
&\lesssim q^{-\alpha/2} \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K \left( \frac{1+w}{2^\alpha} \right)^{k-j} (h_j^{-\alpha} \|v_j\|_{2-\alpha,j}) (h_k^{-\alpha} \|v_k\|_{2-\alpha,k}), \quad k > j \quad \text{por (2.96)} \\
&\leq q^{-\alpha/2} \sum_{j=1}^K \left( \sum_{k=1}^K (h_j^{-\alpha} \|v_j\|_{2-\alpha,j}) (h_k^{-\alpha} \|v_k\|_{2-\alpha,k}) \right) \\
&\lesssim q^{-\alpha/2} \sum_{k=1}^K h_k^{-2\alpha} \|v_k\|_{2-\alpha,k}^2
\end{aligned}$$

para  $m$  suficientemente grande  $\square$ .

#### 2.1.4. Convergencia de los algoritmos V-Ciclo y F-Ciclo

En esta parte se establecerá el comportamiento asintótico del número de contracción de los algoritmos V-Ciclo y F-Ciclo con respecto al número  $m$  de pasos suaves.

##### Definición 2.1.6 (Operador auxiliar)

Sea el operador auxiliar  $\mathcal{E}_{K,m} : V_K \rightarrow V_K$  definido por:

$$\mathcal{E}_{K,m} = \sum_{k=2}^K T_{K,k,m} \left[ R_k^m (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) h_k^{-2\alpha} A_k^{-\alpha/2} (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m \right] T_{k,K,m}$$

**Lema 2.1.8** *La siguiente estima:*

$$\|\mathcal{E}_{K,m} v\|_{2,K} \lesssim m^{-\alpha/2} \|v\|_{2,K}, \quad \forall v \in V_K \quad (2.101)$$

Se cumple para  $m$  suficientemente grande.

Demostración:

Sea  $v \in V_K$  y sea

$$v_k = (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) h_k^{-2\alpha} A_k^{-\alpha/2} (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m T_{k,K,m} v \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned}
a_K(\mathcal{E}_{K,m} v, \mathcal{E}_{K,m} v) &= a_K \left( \sum_{k=2}^K T_{K,k,m} R_k^m v_k, \sum_{k=2}^K T_{K,k,m} R_k^m v_k \right), \quad \text{por (2.1.6) y (2.102)} \\
&\lesssim m^{-\alpha/2} \sum_{k=2}^K h_k^{-2\alpha} \|v_k\|_{2-\alpha,k}^2, \quad \text{por (2.99)}
\end{aligned} \quad (2.103)$$

para  $m$  suficientemente grande.

Por (2.102), se sigue

$$\begin{aligned}
\|v_k\|_{2-\alpha,k} &= \|(Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) h_k^{-2\alpha} A_k^{-\alpha/2} (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m T_{k,K,m} v\|_{2-\alpha,k} \\
&\lesssim h_k^{2\alpha} \|h_k^{-2\alpha} A_k^{-\alpha/2} (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m T_{k,K,m} v\|_{2+\alpha,k}, \quad \text{por (2.48)} \\
&= \|A_k^{-\alpha/2} (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m T_{k,K,m} v\|_{2+\alpha,k} \\
&= \|A_k^{\alpha/4} A_k^{-\alpha/2} (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m T_{k,K,m} v\|_{2,k}, \quad \text{por (2.54)} \\
&= \|A_k^{-\alpha/4} (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m T_{k,K,m} v\|_{2,k}
\end{aligned}$$

Luego se tiene

$$\|v_k\|_{2-\alpha,k} \lesssim \|A_k^{-\alpha/4} (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m T_{k,K,m} v\|_{2,k} \quad (2.104)$$

Sea

$$w_k := (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m T_{k,K,m} v$$

y sea

$$Aux := \sum_{k=2}^K h_k^{-2\alpha} \| \underbrace{A_k^{-\alpha/4} (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m T_{k,K,m} v}_{w_k} \|_{2,k}^2$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
Aux &= \sum_{k=2}^K h_k^{-2\alpha} \langle A_k A_k^{-\alpha/4} w_k, A_k^{-\alpha/4} w_k \rangle_k, \quad \text{por (2.40)} \\
&= \sum_{k=2}^K h_k^{-2\alpha} a_k (A_k^{-\alpha/4} w_k, A_k^{-\alpha/4} (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m T_{k,K,m} v), \quad \text{por (1.14)} \\
&= \sum_{k=2}^K h_k^{-2\alpha} a_k (A_k^{-\alpha/4} A_k^{-\alpha/4} w_k, (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m T_{k,K,m} v), \quad \text{por (2.50)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=2}^K a_k(h_k^{-2\alpha} A_k^{-\alpha/2} w_k, (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m T_{k,K,m} v), \text{ por (2.50)}$$

$$= \sum_{k=2}^K \{a_k(h_k^{-2\alpha} A_k^{-\alpha/2} w_k, R_k^m T_{k,K,m} v) - a_k(h_k^{-2\alpha} A_k^{-\alpha/2} w_k, I_{k-1}^k P_k^{k-1} R_k^m T_{k,K,m} v)\}$$

por (2.6) y (2.2), se sigue

$$= \sum_{k=2}^K \{a_k(R_k^m h_k^{-2\alpha} A_k^{-\alpha/2} w_k, T_{k,K,m} v) - a_{k-1}(P_k^{k-1} h_k^{-2\alpha} A_k^{-\alpha/2} w_k, P_k^{k-1} R_k^m T_{k,K,m} v)\}$$

por (2.2), se sigue

$$= \sum_{k=2}^K \{a_k(R_k^m h_k^{-2\alpha} A_k^{-\alpha/2} w_k, T_{k,K,m} v) - a_k(I_{k-1}^k P_k^{k-1} h_k^{-2\alpha} A_k^{-\alpha/2} w_k, R_k^m T_{k,K,m} v)\}$$

por (2.6), se sigue

$$= \sum_{k=2}^K \{a_k(R_k^m h_k^{-2\alpha} A_k^{-\alpha/2} w_k, T_{k,K,m} v) - a_k(R_k^m I_{k-1}^k P_k^{k-1} h_k^{-2\alpha} A_k^{-\alpha/2} w_k, T_{k,K,m} v)\}$$

$$= \sum_{k=2}^K a_k(R_k^m (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) h_k^{-2\alpha} A_k^{-\alpha/2} w_k, T_{k,K,m} v)$$

$$= \sum_{k=2}^K a_K(T_{K,k,m} R_k^m (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) h_k^{-2\alpha} A_k^{-\alpha/2} w_k, v), \text{ por (2.8)}$$

$$= a_K \underbrace{\left( \sum_{k=2}^K T_{K,k,m} R_k^m (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) h_k^{-2\alpha} A_k^{-\alpha/2} w_k, v \right)}_{\mathcal{E}_{K,m} v}$$

Asi

$$\sum_{k=2}^K h_k^{-2\alpha} \| \| A_k^{-\alpha/4} (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m T_{k,K,m} v \| \|_{2,k}^2 = a_K(\mathcal{E}_{K,m} v, v) \quad (2.106)$$

Luego:

$$\|\mathcal{E}_{K,m}v\|_{2,K}^2 = a_K(\mathcal{E}_{K,m}v, \mathcal{E}_{K,m}v), \text{ por (2.53)}$$

$$\lesssim m^{-\alpha/2} \sum_{k=2}^K h_k^{-2\alpha} \|v_k\|_{2-\alpha,k}^2, \text{ por (2.103)}$$

$$\lesssim m^{-\alpha/2} \sum_{k=2}^K h_k^{-2\alpha} \|A_k^{-\alpha/4 (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m T_{k,K,m}v}\|_{2,k}^2, \text{ por (2.104)}$$

$$= m^{-\alpha/2} a_K(\mathcal{E}_{K,m}v, v), \text{ por (2.106)}$$

$$\leq m^{-\alpha/2} \|\mathcal{E}_{K,m}v\|_{2,K} \|v\|_{2,K}, \text{ por la desigualdad de Cauchy-Schwarz } \square$$

Seguidamente se muestra la convergencia del algoritmo V-Ciclo.

**Teorema 2.1.9** (*Convergencia del algoritmo V-Ciclo simétrico*)

Sea  $\mathbb{E}_{k,m}$  el operador de error de propagación para el algoritmo V-Ciclo, definido en (2.24). Entonces existen constantes positivas  $C$  y  $m_*$ , con  $C$  independiente de la malla tal que:

$$\|\mathbb{E}_{K,m}v\|_{2,K} \leq \frac{C}{m^{\alpha/2}} \|v\|_{2,K}, \quad \forall v \in V_K, \quad m \geq m_* \quad (2.107)$$

Demostración:

Si  $K \geq 2$ , sea  $v \in V_K$  y

$$v_k = (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m T_{k,K,m}v \quad (2.108)$$

Entonces

$$\begin{aligned} a_K(\mathbb{E}_{K,m}v, \mathbb{E}_{K,m}v) &= a_K \left( \sum_{k=2}^K T_{K,k,m} R_k^m v_k, \sum_{k=2}^K T_{K,k,m} R_k^m v_k \right), \text{ por (2.29) y (2.108)} \\ &\lesssim m^{-\alpha/2} \sum_{k=2}^K h_k^{-2\alpha} \|v_k\|_{2-\alpha,k}^2, \text{ por (2.99)} \end{aligned} \quad (2.109)$$

para  $m$  suficientemente grande.

Se tiene

$$\begin{aligned} \|v_k\|_{2-\alpha,k} &= \|A_k^{-\alpha/4} v_k\|_{2,k}, \text{ por (2.54), para } t = 2, \quad s = -\alpha/4 \\ &= \|A_k^{-\alpha/4} (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m T_{k,K,m}v\|_{2,k}, \text{ por (2.108)} \end{aligned} \quad (2.110)$$

Luego

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{E}_{K,m}v\|_{2,K}^2 &= a_K(\mathbb{E}_{K,m}v, \mathbb{E}_{K,m}v), \text{ por (2.53)} \\
&\lesssim m^{-\alpha/2} \sum_{k=2}^K h_k^{-2\alpha} \|v_k\|_{2-\alpha,k}^2, \text{ por (2.109)} \\
&= m^{-\alpha/2} \sum_{k=2}^K h_k^{-2\alpha} \|A_k^{-\alpha/4} (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m T_{k,K,m}v\|_{2,k}^2, \text{ por (2.110)} \\
&= m^{-\alpha/2} a_K(\mathcal{E}_{K,m}v, v), \text{ por (2.106)} \\
&\leq m^{-\alpha/2} \underbrace{\|\mathcal{E}_{K,m}v\|_{2,K}} \|\|v\|_{2,K}, \text{ por la desigualdad de Cauchy-Schwarz} \\
&\lesssim m^{-\alpha/2} m^{-\alpha/2} \|\|v\|_{2,K} \|\|v\|_{2,K}, \text{ por (2.101)} \\
&= m^{-\alpha} \|\|v\|_{2,K}^2
\end{aligned}$$

Asi

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{E}_{K,m}v\|_{2,K} &\lesssim m^{-\alpha/2} \|\|v\|_{2,K} \\
&\leq C m^{-\alpha/2} \|\|v\|_{2,K}
\end{aligned}$$

para  $C$  constante positiva independiente de la malla.  $\square$

Algunas relaciones importantes que se necesitarán. Por (2.62), para  $t = 2 - \alpha$ , se sigue:

$$\begin{aligned}
\| \| R_k^m \underbrace{(Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m v}_{2,k} \| \|_{2,k} &\lesssim h_k^{-\alpha} m^{-\alpha/4} \| \| \underbrace{(Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m v}_{2-\alpha,k} \| \|_{2-\alpha,k}, \\
&\lesssim h_k^{-\alpha} m^{-\alpha/4} h_k^{2\alpha} \| \| R_k^m v \| \|_{2+\alpha,k}, \text{ por (2.48)} \\
&= h_k^\alpha m^{-\alpha/4} \| \| R_k^m v \| \|_{2+\alpha,k} \\
&\lesssim h_k^\alpha m^{-\alpha/4} h_k^{-\alpha} m^{-\alpha/4} \| \| v \| \|_{2,k}, \\
&\text{por (2.62) con } s = 2 + \alpha, t = 2 \\
&= m^{-\alpha/2} \| \| v \| \|_{2,k}
\end{aligned}$$

Así se tiene:

$$\| \| R_k^m \underbrace{(Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m v}_{2,k} \| \|_{2,k} \lesssim m^{-\alpha/2} \| \| v \| \|_{2,k} \quad (2.111)$$

También

$$\begin{aligned}
\| \| R_k^m \underbrace{I_{k-1}^k \mathbb{E}_{k-1,m} \tilde{\mathbb{E}}_{k-1,m} P_k^{k-1} R_k^m v}_{2,k} \| \|_{2,k} &\leq h_k^{-(2-t)} m^{-(2-t)/4} \| \| I_{k-1}^k \mathbb{E}_{k-1,m} \tilde{\mathbb{E}}_{k-1,m} P_k^{k-1} R_k^m v \| \|_{t,k} \\
&\text{por (2.62), para } t \leq s = 2 \\
&= \| \| I_{k-1}^k \mathbb{E}_{k-1,m} \tilde{\mathbb{E}}_{k-1,m} P_k^{k-1} R_k^m v \| \|_{2,k}, \text{ si } t = 2 \\
&\lesssim \| \| \mathbb{E}_{k-1,m} \tilde{\mathbb{E}}_{k-1,m} P_k^{k-1} R_k^m v \| \|_{2,k-1}, \text{ por (2.66)} \\
&\leq C m^{-\alpha/2} \| \| \tilde{\mathbb{E}}_{k-1,m} P_k^{k-1} R_k^m v \| \|_{2,k-1}, m \geq m_* \\
&\text{por (2.107), } C \text{ cte. independiente de la malla}
\end{aligned}$$

Luego:

$$\| \| R_k^m I_{k-1}^k \mathbb{E}_{k-1,m} \tilde{\mathbb{E}}_{k-1,m} P_k^{k-1} R_k^m v \| \|_{2,k} \lesssim m^{-\alpha/2} \| \| \tilde{\mathbb{E}}_{k-1,m} P_k^{k-1} R_k^m v \| \|_{2,k-1} \quad (2.112)$$

para  $m \geq m_*$

**Teorema 2.1.10** (*Convergencia del algoritmo F-Ciclo*)

Sea  $\tilde{\mathbb{E}}_{k,m}$  el operador de error de propagación para el algoritmo F-Ciclo, definido en (2.30). Entonces existen constantes positivas  $C$  y  $m_*$ , con  $C$  independientes de la malla, tales que:

$$\|\tilde{\mathbb{E}}_{k,m}v\|_{2,k} \leq \frac{C}{m^{\alpha/2}} \|v\|_{2,k}, \quad \forall v \in V_k, \quad m \geq m_* \quad (2.113)$$

*Demostración:*

Sea  $v \in V_k$ . Considerando que el número de contracción en la  $j$ -ésima iteración del algoritmo F-Ciclo es  $\eta_j$ , es decir cumple:

$$\eta_j := \sup_{v \in V_j \setminus \{0\}} \frac{\|\tilde{\mathbb{E}}_{j,m}v\|_{2,j}}{\|v\|_{2,j}} \quad 1 \leq j \leq k \quad (2.114)$$

$$\|\tilde{\mathbb{E}}_{k,m}v\|_{2,k} = \|R_k^m \left[ (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) + I_{k-1}^k \mathbb{E}_{k-1,m} \tilde{\mathbb{E}}_{k-1,m} P_k^{k-1} \right] R_k^m v\|_{2,k}, \quad \text{por (2.38)}$$

$$\leq \|R_k^m (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m v\|_{2,k} + \|R_k^m I_{k-1}^k \mathbb{E}_{k-1,m} \tilde{\mathbb{E}}_{k-1,m} P_k^{k-1} R_k^m v\|_{2,k}$$

$$\lesssim h_k^{-\alpha} m^{-\alpha/4} \| (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m v\|_{2-\alpha,k} +$$

$$\|I_{k-1}^k \mathbb{E}_{k-1,m} \tilde{\mathbb{E}}_{k-1,m} P_k^{k-1} R_k^m v\|_{2,k}, \quad \text{por (2.62)}$$

por (2.48) y (2.66), se sigue

$$\lesssim h_k^{-\alpha} m^{-\alpha/4} h_k^{2\alpha} \|R_k^m v\|_{2+\alpha,k} + \|\mathbb{E}_{k-1,m} \tilde{\mathbb{E}}_{k-1,m} P_k^{k-1} R_k^m v\|_{2,k-1}$$

por (2.62) y (2.107), se sigue

$$\begin{aligned}
&\lesssim h_k^\alpha m^{-\alpha/4} h_k^{-\alpha} m^{-\alpha/4} \|v\|_{2,k} + m^{-\alpha/2} \|\tilde{\mathbb{E}}_{k-1,m} P_k^{k-1} R_k^m v\|_{2,k-1} \\
&= m^{-\alpha/2} \|v\|_{2,k} + m^{-\alpha/2} \|\tilde{\mathbb{E}}_{k-1,m} P_k^{k-1} R_k^m v\|_{2,k-1} \\
&\leq m^{-\alpha/2} \|v\|_{2,k} + m^{-\alpha/2} \eta_{k-1} \|P_k^{k-1} R_k^m v\|_{2,k-1}, \text{ por (2.114)} \\
&\lesssim m^{-\alpha/2} \|v\|_{2,k} + m^{-\alpha/2} \eta_{k-1} \|R_k^m v\|_{2,k}, \text{ por (2.68)} \\
&\lesssim m^{-\alpha/2} \|v\|_{2,k} + m^{-\alpha/2} \eta_{k-1} \|v\|_{2,k}, \text{ por (2.62)} \\
&= m^{-\alpha/2} (1 + \eta_{k-1}) \|v\|_{2,k} \text{ para } m \geq m_0, m_0 \in \mathbb{Z}^+ \text{ (i.m)}
\end{aligned}$$

Así

$$\|\tilde{\mathbb{E}}_{k,m} v\|_{2,k} \lesssim m^{-\alpha/2} (1 + \eta_{k-1}) \|v\|_{2,k}, \text{ para } m > m_0 \quad (2.115)$$

Además  $\eta_k$  es acotado. En efecto, de (2.115) se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\|\tilde{\mathbb{E}}_{k,m} v\|_{2,k}}{\|v\|_{2,k}} &\lesssim m^{-\alpha/2} (1 + \eta_{k-1}), \text{ para } m > m_0 \\
\Rightarrow \underbrace{\sup_{v \in V_k \setminus \{0\}} \frac{\|\tilde{\mathbb{E}}_{k,m} v\|_{2,k}}{\|v\|_{2,k}}}_{\eta_k} &\lesssim m^{-\alpha/2} (1 + \eta_{k-1}), \text{ para } m > m_0
\end{aligned}$$

Teniéndose una fórmula recursiva para  $\eta_k$

$$\eta_k \lesssim m^{-\alpha/2} (1 + \eta_{k-1}), \text{ para } m > m_0$$

Que implica:

$$\eta_k \leq C_0 m^{-\alpha/2} (1 + \eta_{k-1}), \text{ para } m > m_0, C_0 : \text{cte (i.m)} \quad (2.116)$$

i) Si  $k = 1$ , por (2.39) y (2.114), se tiene que

$$\eta_1 = 0$$

ii) Usando la fórmula recursiva (2.116), se sigue

$$\text{Si } k = 2 : \eta_2 \leq C_0 m^{-\alpha/2} (1 + \eta_1) = C_0 m^{-\alpha/2} = \frac{C_0}{m^{\alpha/2}} \leq \frac{C_0}{m^{\alpha/2} - C_0}$$

iii) Usando la fórmula recursiva (2.116), se sigue

$$Si \ k = 3 : \eta_3 \leq C_0 m^{-\alpha/2}(1 + \eta_2) \leq C_0 m^{-\alpha/2}\left(1 + \frac{C_0}{m^{\alpha/2} - C_0}\right) = \frac{C_0}{m^{\alpha/2} - C_0}$$

Teniéndose una cota general para

$$\eta_k \leq \frac{C_0}{m^{\alpha/2} - C_0}, \quad \forall k \text{ con } m^{\alpha/2} > C_0 \quad (2.117)$$

Regresando a (2.115) y teniéndose que  $\eta_k$  es acotado

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbb{E}}_{k,m} v\|_{2,k} &\lesssim m^{-\alpha/2}(1 + \eta_{k-1}) \|v\|_{2,k} \text{ para } m \geq \max\{m_0, C_0^{2/\alpha}\} \\ &\leq \frac{C}{m^{\alpha/2}} \|v\|_{2,k} \quad \square \end{aligned}$$

## 2.2. Método multimalla para la discretización del elemento Hsieh Clough Tocher (HCT)

En esta sección se desarrolla los operadores de transferencia entre mallas para la discretización del elemento conforme HCT.

### 2.2.1. El elemento Hsieh Clough Tocher (HCT)

El elemento Hsieh Clough Tocher completo se define en un triángulo. Y este a su vez se divide en tres triángulos los cuales tienen como vértice común al centroide del triángulo mayor y sus otros dos vértices los vértices del triángulo mayor.

Sus funciones forma son funciones de clase  $\mathbf{C}^1$  en el triángulo, cuyas restricciones para cada triángulo menor son polinomios cúbicos.

Las variables nodales incluyen: Las evaluaciones de las funciones forma en los vértices del triángulo, las evaluaciones de las gradientes en los vértices y de las derivadas normales en los puntos medios de los lados del triángulo, (Ver fig.(2.1)) .

Sea  $\{\mathcal{T}_k\}_k \geq 1$  la familia de triangulaciones de  $\Omega$ , las cuales se obtienen por una subdivisión regular, es decir  $\mathcal{T}_{k+1}$  se obtiene por la conexión de los puntos medios de los lados de los triángulos en  $\mathcal{T}_k$  .

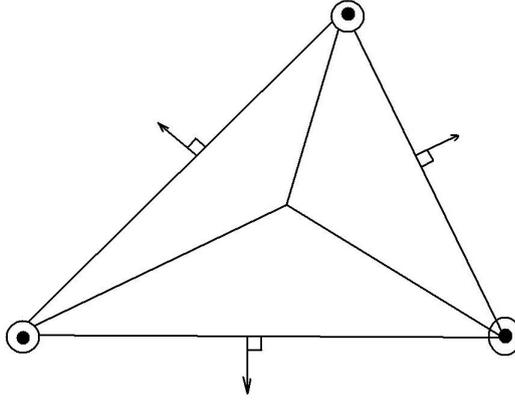


Figura 2.1: El macro elemento Hsieh-Clough-Tocher

Sea  $V_k$  el espacio del elemento Hsieh Clough Tocher completo, asociado con  $\mathcal{T}_k$  .  
Luego:

$$Si, \quad v \in V_k \implies v \in \mathbf{C}^1(\bar{\Omega})$$

Cuyas restricciones para cada  $T \in \mathcal{T}_k$  es un polinomio cúbico por partes y cuyo valor nodal a lo largo de su frontera  $\partial\Omega$  son cero.

También se tiene que:

$$V_k \subset H_0^2(\Omega)$$

y

$$V_{k-1} \not\subset V_k$$

Es decir el elemento HCT es conforme pero no anidado, en efecto:

Suponiéndose que

$$V_{k-1} \subset V_k \tag{2.118}$$

con  $\mathcal{T}_{k-1}$  y  $\mathcal{T}_k$  sus respectivas triangulaciones.

Del gráfico (2.2): Sea  $T = \triangle ABC \subset \mathcal{T}_{k-1}$  y sea  $\tilde{T} = \triangle MNP \subset \mathcal{T}_k$ .

Luego, sea  $v \in V_{k-1}$  entonces  $v$  es un polinomio cúbico por partes en  $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ , es decir  $v$  es un polinomio cúbico sólo en un triángulo  $T_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Si esto sucediese para

$$T_1 = \triangle ABQ, \quad \text{donde } v \text{ es un polinomio cúbico} \tag{2.119}$$

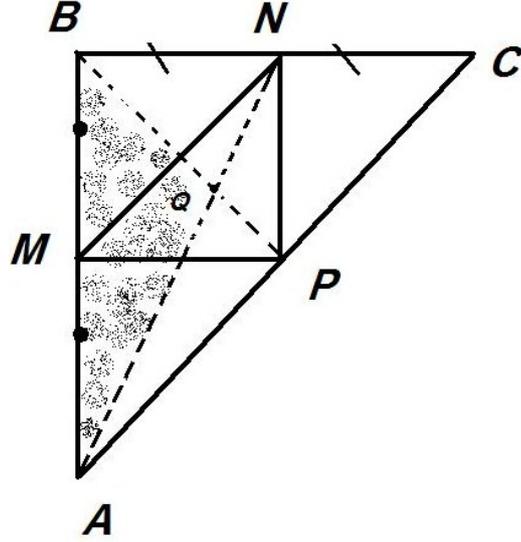


Figura 2.2: Un elemento en  $V_{k-1}$  y en  $V_k$

por (2.118) (lo supuesto):  $v \in V_k$  entonces

$$v \text{ es un polinomio cúbico sólo en } \bar{T}_1 = \Delta MNQ \quad (2.120)$$

invariante de la elección de  $\bar{T}_1, \bar{T}_2$  y  $\bar{T}_3$  tal que  $\bar{T} = \bar{T}_1 \cup \bar{T}_2 \cup \bar{T}_3$ .

Como  $T_1 \not\subseteq \bar{T}_1$  y  $\bar{T}_1 \not\subseteq T_1$ , de (2.119) y (2.120) se tiene ( $\rightarrow \leftarrow$ ).

Por lo tanto  $V_{k-1} \not\subseteq V_k$   $\square$

### 2.2.2. El método HCT, para el problema modelo Biarmónico.

El método HCT para el problema modelo es como sigue.

Encontrar  $u_k \in V_k$ , tal que:

$$a(u_k, v) = \phi(v), \quad \forall v \in V_k \quad (2.121)$$

Sean  $u$  y  $u_k$  soluciones de (1.4) y (2.121) respectivamente.

**Definición 2.2.1** *Operador de interpolación nodal*

Se define el operador de interpolación nodal de  $\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})$  a  $V_k$ :

$$\Pi_k : \mathbf{C}^1(\bar{\Omega}) \cap H_0^2 \longrightarrow V_k$$

Entonces:

$$\|u - u_k\|_a = \min_{v \in V_k} \|u - v\|_a \leq \|u - \Pi_k u\|_a \quad (2.122)$$

Usando la teoría de aproximación, ver [18] tenemos:

$$\|\zeta - \Pi_k \zeta\|_{L_2(\Omega)} + h_k^2 |\zeta - \Pi_k \zeta|_{H^2(\Omega)} \lesssim h_k^{2+\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)}, \quad \forall \zeta \in H_0^2(\Omega) \cap H^{2+\alpha}(\Omega) \quad (2.123)$$

La norma de la energía  $\|\cdot\|_a$  en  $H_0^2(\Omega)$  está definido por:

$$\|v\|_a^2 = a(v, v) = |v|_{H^2(\Omega)}^2, \quad \forall v \in V_k \quad (2.124)$$

Como el espacio de HCT es conforme, la forma bilineal  $a_k(\cdot, \cdot)$  es simplemente  $a(\cdot, \cdot)$ .

Luego:

$$\|\cdot\|_{a_k} = \|\cdot\|_a$$

De (2.122) y (2.124), se sigue

$$\begin{aligned} h_k^2 \|u - u_k\|_a &\leq h_k^2 |u - \Pi_k u|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq |u - \Pi_k u|_{L_2(\Omega)} + h_k^2 |u - \Pi_k u|_{H^2(\Omega)} \\ &\lesssim h_k^{2+\alpha} |u|_{H^{2+\alpha}(\Omega)}, \quad \text{por (2.123)} \end{aligned}$$

Entonces

$$\|u - u_k\|_a \lesssim h_k^\alpha \|u\|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \quad (2.125)$$

**Notación 2.2.1** *Producto interno en  $V_k$*

Sean las siguientes notaciones:

$$\mathcal{V}_k = \text{conjunto de vértices internos de } \mathcal{T}_k$$

$$\mathcal{E}_k = \text{conjunto de bordes internos de } \mathcal{T}_k$$

$$m_e = \text{punto medio del borde } e \quad (2.126)$$

$$N = \text{número de triángulos que comparten al nodo } p \text{ como vértice}$$

$$n(p) = \frac{1}{6} \times N$$

**Definición 2.2.2** (*Producto interno dependiente de la malla*)

Se define el producto interno en  $V_k$ , por:

$$(v_1, v_2)_k := h_k^2 \sum_{p \in \mathcal{V}_k} n(p) v_1(p) v_2(p) + h_k^4 \sum_{p \in \mathcal{V}_k} \nabla v_1(p) \cdot \nabla v_2(p) + h_k^4 \sum_{e \in \mathcal{E}_k} \frac{\partial v_1}{\partial n}(m_e) \frac{\partial v_2}{\partial n}(m_e) \quad (2.127)$$

**Lema 2.2.1** *Se cumple la hipótesis (2.43):*

$$(v, v)_k \approx \|v\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \forall v \in V_k \quad (2.128)$$

*Demostración:*

Sea  $T$  un triángulo en  $\mathcal{T}_k$  (asociado a  $V_k$ ), asumiendo que  $diam(T) = h_k = 1$  y sea:  $V(T)$  el espacio función de polinomios cúbicos por partes y que son de clase  $C^1$  en  $T$ . Sea  $v \in C^1(T)$  y se define su norma en el espacio de dimensión finita, por (2.127) se tiene:

$$\|v\|_{C^1(T)} = \left[ \sum_{j=1}^3 \{v^2(p_j) + |\nabla v(p_j)|^2\} + \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial v}{\partial n}(m_j) \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.129)$$

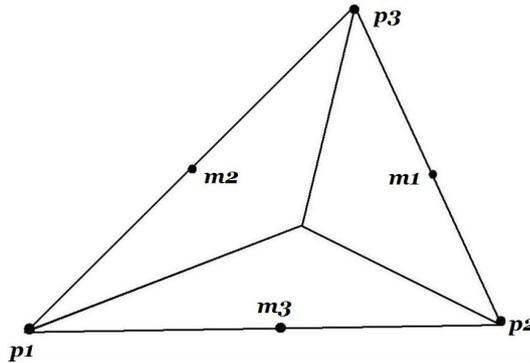


Figura 2.3: Triángulo de referencia  $T$  de la familia  $\mathcal{T}_k$

Pero  $T \subset V_k$ , luego

$$\|v\|_{C^1(T)} = \|v\|_k \quad (2.130)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
(v, v)_k &= \|v\|_k^2 \\
&= \|v\|_{C^1(T)}^2 \text{ por (2.130)} \\
&= \sum_{j=1}^3 \{v^2(p_j) + |\nabla v(p_j)|^2\} + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial v}{\partial n}(m_j)\right)^2 \text{ por (2.129)} \\
&\approx \|v\|_{L_2(T)}^2, \quad \forall v \in V(T)
\end{aligned}$$

Luego si se cumple para un  $T \in \mathcal{T}_k$ , se cumple para todo triángulo en  $\mathcal{T}_k$ .

Así

$$(v, v)_k \approx \|v\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad \forall v \in V_k \quad \square$$

**Definición 2.2.3** *Operador  $A_k$*

Se puede representar la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  por el operador  $A_k : V_k \rightarrow V_k$ , que se define como:

$$(A_k v_1, v_2)_k = a(v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V_k$$

Así la ecuación (2.121) se puede reescribir como sigue

$$A_k u_k = f_k \tag{2.131}$$

donde  $f_k \in V_k$  es definido por

$$(f_k, v)_k = \phi(v), \quad \forall v \in V_k$$

**Definición 2.2.4** *(Operador de transferencia entre malla gruesa a fina)*

El operador de transferencia entre malla gruesa a malla fina

$$I_{k-1}^k : V_{k-1} \rightarrow V_k$$

se define como  $I_{k-1}^k = \Pi_k |_{V_{k-1}}$

**Definición 2.2.5** (*Operador de transferencia entre malla fina a gruesa*)

*El operador de transferencia entre malla fina a malla gruesa, se define*

$$I_k^{k-1} : V_k \longrightarrow V_{k-1}$$

*como la transpuesta de  $I_{k-1}^k$  con respecto al producto interno discreto, es decir:*

$$(I_k^{k-1}v, w)_{k-1} = (v, I_{k-1}^k w)_k \quad \forall v \in V_k, w \in V_{k-1}$$

### 2.2.3. Operador de interpolación y operadores de transferencia entre mallas

En esta sección se tratará de las propiedades del operador de interpolación y de los operadores de transferencia entre mallas. Se inicia con una estimación que sigue de (2.123) y una interpolación del operador  $I_d - \Pi_k$  entre espacios de Sobolev, donde  $I_d$  es el operador identidad en  $L_2(\Omega)$ .

$$|\zeta - \Pi_k \zeta|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \lesssim h_k^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \quad \forall \zeta \in H_0^2(\Omega) \cap H^{2+\alpha}(\Omega) \quad (2.132)$$

**Lema 2.2.2** *Sea  $\zeta \in H_0^2(\Omega) \cap H^{2+\alpha}(\Omega)$  y  $\zeta_k \in V_k$  que se relacionan por*

$$a(\zeta, v) = a(\zeta_k, v) \quad \forall v \in V_k \quad (2.133)$$

*Entonces*

$$\|\zeta - \zeta_k\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \lesssim h_k^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \quad (2.134)$$

Demostración:

Sea  $\phi \in H^{-2+\alpha}(\Omega)$ . Entonces existe  $\xi \in H_0^2(\Omega) \cap H^{2+\alpha}(\Omega)$  tal que

$$a(\xi, v) = \phi(v) \quad \forall v \in H_0^2(\Omega) \quad (2.135)$$

Por la estimación de la regularidad elíptica (1.9), se tiene

$$\|\xi\|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \lesssim \|\phi\|_{H^{-2+\alpha}(\Omega)} \quad (2.136)$$

De (2.133) y como  $\Pi_k \xi \in V_k$  (definición de  $\Pi_k$ ), se tiene:

$$a(\zeta, \Pi_k \xi) = a(\zeta_k, \Pi_k \xi) \quad , \quad \xi_k \in V_k$$

$$\Rightarrow a(\zeta - \zeta_k, \Pi_k \xi) = 0$$

y por la simetría de  $a$  se tiene:

$$a(\Pi_k \xi, \zeta - \zeta_k) = 0 \quad (2.137)$$

También, por (2.123) se tiene

$$\forall \zeta \in H_0^2(\Omega) \cap H^{2+\alpha}(\Omega) : h_k^2 |\zeta - \Pi_k \zeta|_{H^2(\Omega)} \lesssim h_k^{2+\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)}$$

Así

$$\forall \zeta \in H_0^2(\Omega) \cap H^{2+\alpha}(\Omega) : |\zeta - \Pi_k \zeta|_{H^2(\Omega)} \lesssim h_k^\alpha |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \quad (2.138)$$

Luego, sea  $\zeta \in H_0^2(\Omega) \cap H^{2+\alpha}(\Omega)$ , entonces

$$\begin{aligned} \phi(\zeta - \zeta_k) &= a(\xi, \zeta - \zeta_k) \quad \text{por (2.135)} \\ &= a(\xi, \zeta - \zeta_k) - a(\Pi_k \xi, \zeta - \zeta_k) \quad \text{por (2.137)} \\ &= a(\xi - \Pi_k \xi, \zeta - \zeta_k) \\ &\leq |\xi - \Pi_k \xi|_{H^2(\Omega)} |\zeta - \zeta_k|_{H^2(\Omega)} \quad \text{por la desigualdad de Cauchy-Schwarz} \\ &\lesssim h_k^\alpha |\xi|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} h_k^\alpha |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \quad \text{por (2.138) y (2.125)} \\ &= h_k^{2\alpha} |\xi|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \\ &\lesssim h_k^{2\alpha} \|\phi\|_{H^{-2+\alpha}(\Omega)} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \quad \text{por (2.136)} \end{aligned}$$

Teniéndose

$$\phi(\zeta - \zeta_k) \lesssim h_k^{2\alpha} \|\phi\|_{H^{-2+\alpha}(\Omega)} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)}$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{\phi(\zeta - \zeta_k)}{\|\phi\|_{H^{-2+\alpha}(\Omega)}} &\lesssim h_k^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \\ \Rightarrow \sup_{\phi \in H^{-2+\alpha}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\phi(\zeta - \zeta_k)}{\|\phi\|_{H^{-2+\alpha}(\Omega)}} &\lesssim h_k^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \end{aligned}$$

Usando la fórmula de la dualidad

$$\|\zeta - \zeta_k\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} := \sup_{\phi \in H^{-2+\alpha}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\phi(\zeta - \zeta_k)}{\|\phi\|_{H^{-2+\alpha}(\Omega)}} \lesssim h^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \quad \square$$

De la estimación inversa (2.60), se tiene

$$\|v\|_{s,k} \lesssim h_k^{-(s-t)} \|v\|_{t,k}, \quad \forall v \in V_k, \quad 0 \leq t \leq s$$

considerando  $s = 2$  y  $t = 0$  se tiene

$$\|v\|_{2,k} \lesssim h_k^{-2} \|v\|_{0,k}, \quad \forall v \in V_k$$

por (2.53) y (2.52), se sigue

$$\|v\|_{a_k} \lesssim h_k^{-2} \|v\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall v \in V_k \quad \square \quad (2.139)$$

Haciendo un repaso

- El lema (2.2.1) prueba la hipótesis (2.43)
- La relación (2.139) prueba la hipótesis (2.44)
- Con la norma  $\|\cdot\|$  definida en (2.40) y (2.127), las propiedades (2.51), (2.52), (2.53), (2.54), (2.55), (2.60), (2.61) y (2.62) están totalmente establecidas para el espacio HCT.

Se verifican las siguientes relaciones importantes

a) Sea  $v \in (V_k, \|\cdot\|_{0,k})$

$$\|v\|_{0,k}^2 \leq C \|v\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \text{por (2.52)}$$

b) Sea  $v \in (V_k, \|\cdot\|_{2,k})$

$$\begin{aligned} \|Id_k\|_{2,k}^2 &= \|v\|_{2,k}^2 \\ &= \|v\|_{a_k}^2, \quad \text{por (2.53)} \\ &= |v|_{H^2(\Omega)}^2, \quad \text{por (2.124)} \end{aligned}$$

Luego por los items (a) y (b), se tiene que el operador  $Id_k$  es acotado de:

$$\text{i) } (V_k, \|\cdot\|_{0,k}) \longrightarrow L_2(\Omega)$$

$$\text{ii) } (V_k, \|\cdot\|_{2,k}) \longrightarrow H^2(\Omega)$$

**Definición 2.2.6** (*Operador de proyección de  $L_2$  en  $V_k$* )

Sea el Operador de proyección de  $L_2$  en  $V_k$ , como

$$Q_k : L_2(\Omega) \longrightarrow V_k$$

es decir, para cada  $\zeta \in L_2(\Omega)$  la función  $Q_k(\zeta) \in V_k$  y tiene las siguientes propiedades:

$$Q_k(v) = v \quad \forall v \in V_k \quad (2.140)$$

$$\|Q_k(\zeta)\|_{L_2(\Omega)} \lesssim \|\zeta\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall \zeta \in L_2(\Omega) \quad (2.141)$$

$$\|Q_k(\zeta)\|_{H_2(\Omega)} \lesssim \|\zeta\|_{H_2(\Omega)} \quad \forall \zeta \in H_0^2(\Omega) \quad (2.142)$$

De las propiedades (2.141) y (2.142), se tiene que el operador  $Q_k$  es acotado de:

$$\text{i) } L_2(\Omega) \longrightarrow (V_k, \|\cdot\|_{0,k})$$

$$\text{ii) } H_0^2(\Omega)(V_k, \|\cdot\|_{2,k}) \longrightarrow (V_k, \|\cdot\|_{2,k})$$

**Propiedad 2.2.1** (*Interpolación de espacios de Sobolev y las normas de Hilbert*)

Las siguientes propiedades se pueden ver en [12]:

$$\|v\|_{H^s(\Omega)} \lesssim \|v\|_{s,k} \quad \forall v \in V_k \quad (2.143)$$

y

$$\|Q_k \zeta\|_{s,k} \lesssim \|\zeta\|_{H^s(\Omega)} \quad \forall \zeta \in H_0^s(\Omega) \quad \text{para } s \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \quad (2.144)$$

El siguiente lema relaciona las normas dependientes y las normas de Sobolev.

**Lema 2.2.3** Para  $s \in [0, 2]$  con  $s \neq \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$ , se cumple

$$\|v\|_{s,k} \approx \|v\|_{H^s(\Omega)} \quad \forall v \in V_k \quad (2.145)$$

Demostración:

( $\longrightarrow$ ) Sea  $v \in V_k$ ,  $s \neq \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$ , luego

$$\|v\|_{s,k} = \|Q_k v\|_{s,k} \text{ por (2.140)}$$

$$\lesssim \|v\|_{H^s(\Omega)}, \text{ por (2.144)}$$

( $\longleftarrow$ ) De (2.143):

$$\|v\|_{H^s(\Omega)} \lesssim \|v\|_{s,k}, \quad \forall v \in V_k$$

Por lo tanto

$$\|v\|_{s,k} \approx \|v\|_{H^s(\Omega)}, \quad \forall v \in v_k \quad \square$$

**Lema 2.2.4** Para  $\zeta_k \in V_k$  sea  $\zeta \in H_0^2(\Omega)$  definido por

$$a(\zeta, \phi) = a(\zeta_k, Q_k \phi) \quad \forall \phi \in H_0^2(\Omega) \quad (2.146)$$

Entonces

a)

$$a(\zeta, v) = a(\zeta_k, v) \quad \forall v \in V_k \quad (2.147)$$

b)

$$\|\zeta\|_{H^2(\Omega)} \lesssim \|\zeta_k\|_{2,k} \quad (2.148)$$

c)

$$\|\zeta\|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \lesssim \|\zeta_k\|_{2+\alpha,k} \quad (2.149)$$

d)

$$\|\Pi_k \zeta\|_a \lesssim \|\zeta_k\|_{2,k} \quad (2.150)$$

Demostración:

a) Sea  $v \in V_k$ :

$$a(\zeta, v) = a(\zeta_k, Q_k v), \text{ por (2.146)}$$

$$= a(\zeta_k, v), \text{ por (2.140)} \quad \square$$

b)

$$|\zeta|_{H^2(\Omega)}^2 = a(\zeta, \zeta) \text{ por (2.124)}$$

$$= a(\zeta_k, Q_k \zeta) \text{ por (2.146)}$$

$$\leq \|\zeta_k\|_a \|Q_k \zeta\|_a \text{ por la desigualdad de Cauchy-Schwarz}$$

$$= |\zeta_k|_{H^2(\Omega)} |Q_k \zeta|_{H^2(\Omega)} \text{ por (2.124)}$$

$$\lesssim |\zeta_k|_{H^2(\Omega)} |\zeta|_{H^2(\Omega)} \text{ por (2.142)}$$

Teniéndose

$$|\zeta|_{H^2(\Omega)}^2 \lesssim |\zeta_k|_{H^2(\Omega)} |\zeta|_{H^2(\Omega)}$$

Así

$$|\zeta|_{H^2(\Omega)} \lesssim |\zeta_k|_{H^2(\Omega)}$$

$$= \|\zeta_k\|_a = \|\zeta_k\|_{a_k}, \text{ por (2.124)}$$

$$= \|\zeta_k\|_{2,k} \quad \square$$

c) De (2.55), se tiene:

$$a(\zeta_k, Q_k \zeta) \leq \|\zeta_k\|_{2+\alpha,k} \|Q_k \zeta\|_{2-\alpha,k}, \quad \forall \zeta_k \in V_k, Q_k \zeta \in V_k \setminus \{0\} \quad (2.151)$$

$$\lesssim \|\zeta_k\|_{2+\alpha,k} \|\zeta\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)}, \text{ por (2.144)}$$

Además  $\zeta \in H_0^2(\Omega)$  pero también  $\zeta \in H^{-2+\alpha}(\Omega)$  por (2.146) ( $\phi$  es como  $\zeta$ , de (1.9)).

Por (2.146), se sigue

$$\begin{aligned} a(\zeta, \zeta) &= a(\zeta_k, Q_k \zeta) \\ &\lesssim \|\zeta_k\|_{2+\alpha, k} \|\zeta\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)}, \quad \text{por (2.151)} \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{a(\zeta, \zeta)}{\|\zeta\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)}} \lesssim \|\zeta_k\|_{2+\alpha, k}$$

Entonces

$$\underbrace{\sup_{\zeta \in H^{-2+\alpha}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{a(\zeta, \zeta)}{\|\zeta\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)}}}_{\lesssim \|\zeta_k\|_{2+\alpha, k}}$$

$$\|\zeta\|_{H^{-2+\alpha}(\Omega)} \lesssim \|\zeta_k\|_{2+\alpha, k} \quad (2.152)$$

Por (1.9), se sigue

$$\begin{aligned} \|\zeta\|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} &\lesssim \|\phi\|_{H^{-2+\alpha}(\Omega)} \\ &= \|\zeta\|_{H^{-2+\alpha}(\Omega)}, \quad \text{pues } \phi \text{ es como } \zeta \\ &\lesssim \|\zeta_k\|_{2+\alpha, k} \quad \text{por (2.152)} \quad \square \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\|\Pi_k \zeta\|_a &\leq \|\Pi_k \zeta - \zeta_k + \zeta_k\|_a \\
&\leq \|\Pi_k \zeta - \zeta_k\|_a + \|\zeta_k\|_a \\
&\lesssim h_k^{-\alpha} \|\Pi_k \zeta - \zeta_k\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} + \|\zeta_k\|_a \\
&= h_k^{-\alpha} \|\Pi_k \zeta - \zeta + \zeta - \zeta_k\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} + \|\zeta_k\|_a
\end{aligned}$$

por la desigualdad triangular se sigue

$$\begin{aligned}
&\leq h_k^{-\alpha} \|\Pi_k \zeta - \zeta\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} + h_k^{-\alpha} \|\zeta - \zeta_k\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} + \|\zeta_k\|_a \\
&\lesssim h_k^{-\alpha} h_k^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} + h_k^{-\alpha} h_k^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} + \|\zeta_k\|_a, \quad \text{por (2.132) y (2.134)} \\
&= 2h_k^\alpha |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} + \|\zeta_k\|_a \\
&\lesssim 2h_k^\alpha \|\zeta_k\|_{2+\alpha, k} + \|\zeta_k\|_a, \quad \text{por (2.149)} \\
&\lesssim 2h_k^\alpha h_k^{-\alpha} \|\zeta_k\|_{2, k} + \|\zeta_k\|_a, \quad \text{por (2.60)} \\
&= 2\|\zeta_k\|_a + \|\zeta_k\|_a, \quad \text{por (2.53)} \\
&\lesssim \|\zeta_k\|_a \\
&= |\zeta_k|_{H^2(\Omega)} \quad \text{por (2.124)} \\
&\lesssim \|\zeta_k\|_{2, k} \quad \text{por (2.148)} \quad \square
\end{aligned}$$

**Lema 2.2.5** *Sea  $s \in [0, 2]$ . Se cumplen los siguientes:*

a)

$$\|\Pi_{k-1} v - v\|_{L_2(\Omega)} + h_k^s |\Pi_{k-1} v|_{H^s(\Omega)} \lesssim h_k^s |v|_{H^s(\Omega)}, \quad \forall v \in V_{k-1} + V_k \quad (2.153)$$

b)

$$\|\Pi_k v - v\|_{L_2(\Omega)} + h_k^s |\Pi_k v|_{H^s(\Omega)} \lesssim h_k^s |v|_{H^s(\Omega)}, \quad \forall v \in V_{k-1} + V_k \quad (2.154)$$

Demostración:

Sea  $T \in \mathcal{T}_{k-1}$  (un triángulo) dividido en cuatro triángulos  $\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$  tales que  $T_i \in \mathcal{T}_k$  para  $i = 1, 2, 3, 4$  y sea

$$\tilde{T} = \frac{T}{h_{k-1}} \text{ entonces } |\tilde{T}| \approx 1 \text{ ya que } h_{k-1} = |T|$$

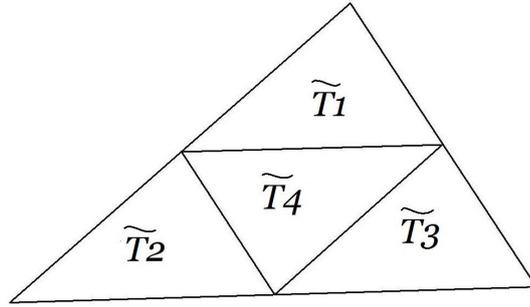


Figura 2.4: Triángulo de referencia  $\tilde{T}$  para la familia  $\mathcal{T}_{k-1}$

Se define, para cada  $v \in V_k$ :

$$\tilde{v}(\tilde{x}) = v(h_{k-1}\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \tilde{T}$$

Si  $w = \Pi_{k-1}v$ , entonces se define:

$$\tilde{w} = \tilde{\Pi}_{k-1}\tilde{v}$$

Sea  $V(\tilde{T})$  el espacio del elemento finito HCT asociado con  $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3, \tilde{T}_4$  sin restricciones en la frontera. Además  $V(\tilde{T})$  es un espacio de dimensión finita y  $|\tilde{v}|_{H^2(\tilde{T})}$  define una norma en el espacio cociente:

$\frac{V(\tilde{T})}{P_1(\tilde{T})}$  donde  $P_1(\tilde{T})$  es el espacio de polinomios de grado menor o igual a 1 en  $\tilde{T}$

$$\frac{V(\tilde{T})}{P_1(\tilde{T})} = \{v + P_1(\tilde{T}) / v \in V(\tilde{T})\}$$

Por otro lado:

$$v \longrightarrow \|\tilde{\Pi}_{k-1}\tilde{v} - \tilde{v}\|_{L_2(\tilde{T})} \text{ define una semi-norma sobre } \frac{V(\tilde{T})}{P_1(\tilde{T})}$$

siendo la norma y la seminorma, normas equivalentes. Esto se puede ver en [12].

Luego se tiene

$$\|\tilde{\Pi}_{k-1}\tilde{v} - \tilde{v}\|_{L_2(\tilde{T})} \lesssim |\tilde{v}|_{H^2(\tilde{T})} \quad (2.155)$$

Considerando argumentos de escala en (2.155) se tiene

$$\|\tilde{\Pi}_{k-1}v - v\|_{L_2(T)} \lesssim h_k^2 |v|_{H^2(T)}, \quad \forall v \in V_k, T \in \mathcal{T}_{k-1} \quad (2.156)$$

Sea  $z \in V_{k-1} + V_k$ , luego  $z = w + v$  tal que  $w \in V_{k-1}$  y  $v \in V_k$ , de este modo

i)

$$\begin{aligned} \|\Pi_{k-1}z - z\|_{L_2(\Omega)} &= \|\Pi_{k-1}(w + v) - (w + v)\|_{L_2(\Omega)} \\ &= \|\underbrace{\Pi_{k-1}w}_w + \Pi_{k-1}v - (w + v)\|_{L_2(\Omega)} \\ &= \|\Pi_{k-1}v - v\|_{L_2(\Omega)}, \quad v \in V_k \\ &\lesssim h_k^2 |v|_{H^2(\Omega)}, \quad \text{por (2.156)} \\ &\approx h_k^2 \|v\|_{2,k}, \quad \text{por (2.145)} \\ &\lesssim h_k^2 h_k^{-(2-s)} \|v\|_{s,k}, \quad s \leq 2 \quad \text{por (2.60)} \\ &= h_k^s \|v\|_{s,k} \\ &\approx h_k^s |v|_{H^s(\Omega)} \end{aligned} \quad (2.157)$$

ii) También

$$\begin{aligned}
|\Pi_{k-1}z|_{H^s(\Omega)} &= |\Pi_{k-1}(w+v)|_{H^s(\Omega)} \\
&= |\underbrace{\Pi_{k-1}w}_w + \Pi_{k-1}v - v + v|_{H^s(\Omega)} \\
&= |\Pi_{k-1}v - v|_{H^s(\Omega)} + |\underbrace{w+v}_z|_{H^s(\Omega)} \\
&\approx |\Pi_{k-1}v - v|_{s,k} + |z|_{H^s(\Omega)}, \text{ por (2.145)} \\
&\lesssim h_k^{-s} |\Pi_{k-1}v - v|_{0,k} + |z|_{H^s(\Omega)}, \text{ por (2.60)} \\
&\approx h_k^{-s} \|\Pi_{k-1}v - v\|_{L_2(\Omega)} + |z|_{H^s(\Omega)}, \text{ por (2.52)} \\
&\lesssim h_k^{-s} h_k^s |v|_{H^s(\Omega)} + |z|_{H^s(\Omega)}, \text{ por (2.60)} \\
&= |v|_{H^s(\Omega)} + |z|_{H^s(\Omega)}
\end{aligned} \tag{2.158}$$

Usando las relaciones (2.157) y (2.158) se tiene

$$\|\Pi_{k-1}z - z\|_{L_2(\Omega)} + h_k^s |\Pi_{k-1}z|_{H^s(\Omega)} \lesssim h_k^s |v|_{H^s(\Omega)} + h_k^s |v|_{H^s(\Omega)} + h_k^s |z|_{H^s(\Omega)}$$

como  $v \in V_k$  y  $v = 0 + v \in V_{k-1} + V_k$

$$\lesssim h_k^s z, \quad \forall z \in V_{k-1} + V_k \quad \square$$

Que procediendo del mismo modo se prueba (2.154).

**Lema 2.2.6** *Sea cumplan las siguientes relaciones:*

a)

$$\|\Pi_{k-1}v - v\|_{L_2(\Omega)} \lesssim h_k^{2+\alpha} \|v\|_{2+\alpha,k} \quad \forall v \in V_k \tag{2.159}$$

b)

$$\|\Pi_k v - v\|_{L_2(\Omega)} \lesssim h_k^{2+\alpha} \|v\|_{2+\alpha,k-1} \quad \forall v \in V_{k-1} \tag{2.160}$$

Demostración:

- a) Sea  $\zeta_k \in V_k$ ,  $\zeta \in H_0^2(\Omega)$  y  $\zeta_{k-1} \in V_{k-1}$ , relacionados por la definición en (2.146) y se cumple (2.147)

$$a(\zeta_k, v) = a(\zeta, v) \quad \forall v \in V_k \quad (2.161)$$

Luego

$$\begin{aligned} \|\Pi_{k-1}\zeta_k - \zeta_k\|_{L_2(\Omega)} &= \|\Pi_{k-1}\zeta_k - \zeta_{k-1} + \zeta_{k-1} - \zeta_k\|_{L_2(\Omega)} \\ &= \|\Pi_{k-1}(\zeta_k - \zeta_{k-1}) - (\zeta_k - \zeta_{k-1})\|_{L_2(\Omega)}, \quad \text{pues } \Pi_{k-1}(\zeta_{k-1}) = \zeta_{k-1} \\ &\lesssim h_k^2 |\zeta_k - \zeta_{k-1}|_{H^2(\Omega)} \quad \text{de (2.153), para } s = 2 \\ &= h_k^2 |\zeta_k - \zeta + \zeta - \zeta_{k-1}|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq h_k^2 \{|\zeta_k - \zeta|_{H^2(\Omega)} + |\zeta - \zeta_{k-1}|_{H^2(\Omega)}\} \\ &\approx h_k^2 \{ \|\zeta_k - \zeta\|_{2,k} + \|\zeta - \zeta_{k-1}\|_{2,k-1} \} \quad \text{por (2.145)} \\ &\lesssim h_k^2 \{ h_k^{-\alpha} \|\zeta_k - \zeta\|_{2-\alpha,k} + h_k^{-\alpha} \|\zeta - \zeta_{k-1}\|_{2-\alpha,k-1} \} \quad \text{por (2.60)} \\ &= h_k^{(2-\alpha)} \{ \|\zeta_k - \zeta\|_{2-\alpha,k} + \|\zeta - \zeta_{k-1}\|_{2-\alpha,k-1} \} \\ &\approx h_k^{(2-\alpha)} \{ \|\zeta_k - \zeta\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} + \|\zeta - \zeta_{k-1}\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \} \quad \text{por (2.145)} \\ &\lesssim h_k^{(2-\alpha)} \{ h_k^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} + h_k^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \} \quad \text{por (2.134)} \\ &\lesssim h_k^{(2+\alpha)} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \\ &\lesssim h_k^{2+\alpha} \|\zeta_k\|_{2+\alpha,k}, \quad \text{por (2.149)} \quad \square \end{aligned}$$

- b) Sea  $\zeta_{k-1} \in V_{k-1}$ ,  $\zeta \in H_0^2(\Omega)$  y  $\zeta_k \in V_k$ , relacionados por la definición en (2.146) y se cumple (2.147)

$$a(\zeta_{k-1}, v) = a(\zeta, v) \quad \forall v \in V_{k-1} \quad (2.162)$$

Luego

$$\begin{aligned}
\|\Pi_k \zeta_{k-1} - \zeta_{k-1}\|_{L_2(\Omega)} &= \|\Pi_k \zeta_{k-1} - \zeta_k + \zeta_k - \zeta_{k-1}\|_{L_2(\Omega)} \\
&= \|\Pi_k(\zeta_{k-1} - \zeta_k) - (\zeta_{k-1} - \zeta_k)\|_{L_2(\Omega)} \\
&\lesssim h_k^2 |\zeta_{k-1} - \zeta_k|_{H^2(\Omega)}, \quad \text{por (2.154) para } s = 2 \\
&= h_k^2 |\zeta_{k-1} - \zeta + \zeta - \zeta_k|_{H^2(\Omega)} \\
&\leq h_k^2 \{|\zeta_{k-1} - \zeta|_{H^2(\Omega)} + |\zeta - \zeta_k|_{H^2(\Omega)}\} \\
&\approx h_k^2 \{ \|\zeta_{k-1} - \zeta\|_{2,k-1} + \|\zeta - \zeta_k\|_{2,k} \}, \quad \text{por (2.145)} \\
&\lesssim h_k^2 \{ h_k^{-\alpha} \|\zeta_{k-1} - \zeta\|_{2-\alpha,k-1} + h_k^{-\alpha} \|\zeta - \zeta_k\|_{2-\alpha,k} \}, \quad \text{por (2.60)} \\
&= h_k^{2-\alpha} \{ \|\zeta_{k-1} - \zeta\|_{2-\alpha,k-1} + \|\zeta - \zeta_k\|_{2-\alpha,k} \} \\
&\approx h_k^{2-\alpha} \{ \|\zeta_{k-1} - \zeta\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} + \|\zeta - \zeta_k\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \}, \quad \text{por (2.145)} \\
&\lesssim h_k^{2-\alpha} \{ h_k^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} + h_k^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \}, \quad \text{por (2.134)} \\
&\lesssim h_k^{2+\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \\
&\lesssim h_k^{2+\alpha} \|\zeta_{k-1}\|_{2+\alpha,k-1}, \quad \text{por (2.149)} \quad \square
\end{aligned}$$

**Corolario 2.2.1** *Se cumplen las siguientes estimaciones:*

a)

$$\|\Pi_{k-1} v - v\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \lesssim h_k^{2\alpha} \|v\|_{2+\alpha,k} \quad \forall v \in V_k \quad (2.163)$$

b)

$$\|\Pi_k v - v\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \lesssim h_k^{2\alpha} \|v\|_{2+\alpha,k-1} \quad \forall v \in V_{k-1} \quad (2.164)$$

Demostración

a) Sea  $v \in V_k$

$$\|\Pi_{k-1}v - v\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \approx \|\|\Pi_{k-1}v - v\|\|_{2-\alpha,k}, \quad \text{por (2.145)}$$

$$\lesssim h_k^{-(2-\alpha)} \|\|\Pi_{k-1}v - v\|\|_{0,k}, \quad \text{por (2.60)}$$

$$\approx h_k^{-(2-\alpha)} \|\|\Pi_{k-1}v - v\|\|_{L_2(\Omega)}, \quad \text{por (2.52)}$$

$$\lesssim h_k^{-(2-\alpha)} h_k^{(2+\alpha)} \|\|v\|\|_{2+\alpha,k}, \quad \text{por (2.159)}$$

$$= h_k^{2\alpha} \|\|v\|\|_{2+\alpha,k} \quad \square$$

b) Sea  $v \in V_{k-1}$

$$\|\|\Pi_k v - v\|\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \approx \|\|\Pi_k v - v\|\|_{2-\alpha,k}, \quad \text{por (2.145)}$$

$$\lesssim h_k^{-(2-\alpha)} \|\|\Pi_k v - v\|\|_{0,k-1}, \quad \text{por (2.60)}$$

$$\approx h_k^{-(2-\alpha)} \|\|\Pi_k v - v\|\|_{L_2(\Omega)}, \quad \text{por (2.52)}$$

$$\lesssim h_k^{-(2-\alpha)} h_k^{(2+\alpha)} \|\|v\|\|_{2+\alpha,k-1}, \quad \text{por (2.160)}$$

$$= h_k^{2\alpha} \|\|v\|\|_{2+\alpha,k-1} \quad \square$$

# Capítulo 3

## Análisis de convergencia

En esta sección se desarrolla la convergencia de los métodos multimallas V-Ciclo y F-Ciclo para la discretización con el elemento finito HCT. Para ello se requiere verificar el cumplimiento de las hipótesis de (2.43) a (2.49).

### 3.1. Prueba de las hipótesis A, de la teoría aditiva

Es referido al cumplimiento de las hipótesis sobre  $V_k$ . Las cuales ya fueron probadas en el capítulo anterior. La hipótesis (2.43) se verificó en el Lema(2.2.1) y la hipótesis (2.44) se verificó en (2.139).

### 3.2. Prueba de las hipótesis B, de la teoría aditiva

Es referido al cumplimiento de las hipótesis para los operadores de interpolación entre mallas:  $I_{k-1}^k$  y  $P_k^{k-1}$ .

**Lema 3.2.1** *La hipótesis (2.45) se cumple, es decir:*

$$\|I_{k-1}^k v\|_{2,k}^2 \leq (1 + \theta^2) \|v\|_{2,k-1}^2 + C_1 \theta^{-2} h_k^{2\alpha} \|v\|_{2+\alpha,k-1}^2, \quad \forall v \in V_{k-1}, \quad \theta \in (0, 1) \quad (3.1)$$

Demostración:

Sea  $v \in V_{k-1}$

$$\begin{aligned} \|I_{k-1}^k v\|_{2,k}^2 &= |\Pi_k v|_{H^2(\Omega)}^2, \quad \text{por definición (2.2.4)} \\ &= |\Pi_k v - v + v|_{H^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \{ |v|_{H^2(\Omega)} + |\Pi_k v - v|_{H^2(\Omega)} \}^2 \\
&\leq (1 + \theta^2) |v|_{H^2(\Omega)}^2 + C\theta^{-2} |\Pi_k v - v|_{H^2(\Omega)}^2, \quad \text{por (2.76)} \\
&= (1 + \theta^2) \|v\|_{2,k-1}^2 + C\theta^{-2} |\Pi_k v - v|_{d_k}^2, \quad \text{por (2.124)} \\
&= (1 + \theta^2) \|v\|_{2,k-1}^2 + C\theta^{-2} |\Pi_k v - v|_{2,k}^2, \quad \text{por (2.53)} \\
&\leq (1 + \theta^2) \|v\|_{2,k-1}^2 + C\theta^{-2} h_k^{-4} |\Pi_k v - v|_{0,k}^2, \quad \text{por (2.60)} \\
&\leq (1 + \theta^2) \|v\|_{2,k-1}^2 + C\theta^{-2} h_k^{-4} |\Pi_k v - v|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \text{por (2.52)} \\
&\leq (1 + \theta^2) \|v\|_{2,k-1}^2 + C\theta^{-2} h_k^{2\alpha} \|v\|_{2+\alpha,k-1}^2, \quad \text{por (2.160)} \quad \square
\end{aligned}$$

**Lema 3.2.2** *Se cumple*

$$\|I_{k-1}^k v\|_{0,k}^2 \leq (1 + \theta^2) \|v\|_{0,k-1}^2 + C\theta^{-2} h_k^{2\alpha} \|v\|_{\alpha,k-1}^2, \quad \forall v \in V_{k-1}, \theta \in \langle 0, 1 \rangle \quad (3.2)$$

Demostración:

Sea  $v \in V_{k-1}$  y sea  $w = I_{k-1}^k v = \Pi_k v$  entonces

$$w(p) = v(p) \quad \forall p \in \mathcal{T}_k,$$

$$\nabla w(p) = \nabla v(p) \quad \forall p \in \mathcal{T}_k,$$

$$\frac{\partial w}{\partial n}(m_e) = \frac{\partial v}{\partial n}(m_e) \quad \forall e \in \mathcal{E}_k,$$

Donde  $m_e$  es el punto medio de  $e \in \mathcal{E}_k$ . Luego de (2.43) y (2.127), se tiene

$$\|v\|_{0,k-1}^2 = h_{k-1}^2 \sum_{p \in \mathcal{V}_{k-1}} n(p) v(p)^2 + h_{k-1}^4 \sum_{p \in \mathcal{V}_{k-1}} |\nabla v(p)|^2 + h_{k-1}^4 \sum_{e \in \mathcal{E}_{k-1}} \left[ \frac{\partial v}{\partial n}(m_e) \right]^2 \quad (3.3)$$

y

$$\|w\|_{0,k}^2 = h_k^2 \sum_{p \in \mathcal{V}_k} n(p) v(p)^2 + h_k^4 \sum_{p \in \mathcal{V}_k} |\nabla v(p)|^2 + h_k^4 \sum_{e \in \mathcal{E}_k} \left[ \frac{\partial v}{\partial n}(m_e) \right]^2 \quad (3.4)$$

Si  $p \in \mathcal{V}_k \setminus \mathcal{V}_{k-1}$ , entonces  $p$  es punto medio del algún lado  $e \in \mathcal{E}_{k-1}$ , que es el lado común de dos triángulos  $T, T' \in \mathcal{T}_{k-1}$ . Por lo tanto  $p$  es el vértice común de 6 triángulos en  $\mathcal{T}_k$  y  $n(p) = 1$ .

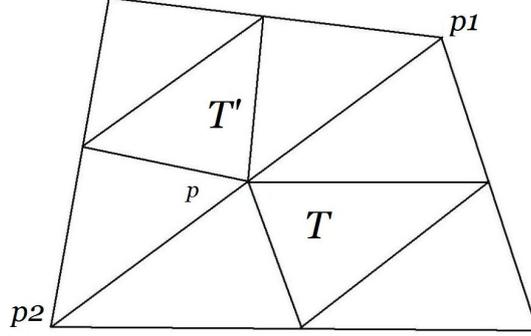


Figura 3.1: Vértice  $p \in \mathcal{T}_k \setminus \mathcal{T}_{k-1}$

La primera parte de (3.4) se puede expresar como, ya que  $n(p) = 1$

$$\sum_{p \in \mathcal{V}_k} n(p)v(p)^2 = \sum_{p \in \mathcal{V}_{k-1}} n(p)v(p)^2 + \sum_{p \in \mathcal{V}_k \setminus \mathcal{V}_{k-1}} v(p)^2 \quad (3.5)$$

Suponiendo que  $p_1$  y  $p_2$  son dos puntos extremos del lado  $e$ . Entonces se tiene

$$\begin{aligned} v^2(p) &= \{v(p_1) + [v(p) - v(p_1)]\}^2 \\ &\leq (1 + \theta^2)v(p_1)^2 + C\theta^{-2}[v(p) - v(p_1)]^2, \quad \text{por (2.76)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Por el teorema de valor medio y una estimación inversa estandar se tiene

$$[v(p) - v(p_1)]^2 \leq |p - p_1|^2 \|\nabla v\|_{L^\infty(T)}^2 \leq C|v|_{H^1(T)}^2 \quad (3.7)$$

Reemplazando (3.7) en (3.6) queda

$$v(p)^2 \leq (1 + \theta^2)v(p_1)^2 + C\theta^{-2}|v|_{H^1(T)}^2 \quad (3.8)$$

de forma similar

$$v(p)^2 \leq (1 + \theta^2)v(p_2)^2 + C\theta^{-2}|v|_{H^1(T')}^2 \quad (3.9)$$

Luego de (3.8) y (3.9)

$$v(p)^2 \leq \frac{1}{2}(1 + \theta^2)\{v^2(p_1) + v^2(p_2)\} + C\theta^{-2}\{|v|_{H^1(T)}^2 + |v|_{H^1(T')}^2\} \quad (3.10)$$

Sea

$|S_p|$  : Número de triángulos que comparten a  $p$  como vértice y  $|S_p| = 6 n(p)$  por (2.126)

Tomando sumatoria de la desigualdad (3.10) sobre todo  $p \in \mathcal{V}_k \setminus \mathcal{V}_{k-1}$  se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \mathcal{V}_k \setminus \mathcal{V}_{k-1}} v(p)^2 &\leq \frac{1}{2}(1 + \theta^2) \sum_{p \in \mathcal{V}_{k-1}} |S_p| v(p)^2 + C\theta^{-2} \sum_{T \in \mathcal{T}_{k-1}} |v|_{H^1(T)}^2 \\ &= 3(1 + \theta^2) \sum_{p \in \mathcal{V}_{k-1}} n(p)v(p)^2 + C\theta^{-2}|v|_{H^1(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Reemplazando (3.11) en (3.5), se tiene

$$\sum_{p \in \mathcal{V}_k} n(p)v(p)^2 \leq 4(1 + \theta^2) \sum_{p \in \mathcal{V}_{k-1}} n(p)v(p)^2 + C\theta^{-2}|v|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (3.12)$$

Sea  $T \in \mathcal{T}_k$  y  $e$  un borde de  $T$ . Por una estimación inversa estandar se tiene

$$\left[ \frac{\partial v}{\partial n}(m_e) \right]^2 \lesssim \|\nabla v\|_{L^\infty(T)}^2 \lesssim h_k^{-2}|v|_{H^1(T)}^2$$

De donde

$$h_k^4 \sum_{e \in \mathcal{E}_k} \left[ \frac{\partial v}{\partial n}(m_e) \right]^2 \leq Ch_k^2 |v|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (3.13)$$

De manera similar

$$h_k^4 \sum_{p \in \mathcal{V}_k} |\nabla v(p)|^2 \leq Ch_k^2 |v|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (3.14)$$

Luego se tiene

$$\begin{aligned}
\|I_{k-1}^k v\|_{0,k}^2 &= \|w\|_{0,k}^2 \\
&= h_k^2 \sum_{p \in \mathcal{V}_k} n(p)v(p)^2 + h_k^4 \sum_{p \in \mathcal{V}_k} |\nabla v(p)|^2 + h_k^4 \sum_{e \in \mathcal{E}_k} \left[ \frac{\partial v}{\partial n}(m_e) \right]^2, \quad \text{por (3.4)} \\
&\text{por (3.12), (3.13) y (3.14), se sigue} \\
&\leq h_k^2 \left[ 4(1 + \theta^2) \sum_{p \in \mathcal{V}_{k-1}} n(p)v(p)^2 + C\theta^{-2} |v|_{H^1(\Omega)}^2 \right] \\
&\leq (1 + \theta^2) h_{k-1}^2 \underbrace{\sum_{p \in \mathcal{V}_{k-1}} n(p)v(p)^2}_{\leq \|v\|_{0,k-1}^2} + C\theta^{-2} h_k^2 \|v\|_{1,k-1}^2, \quad \text{por (1.11) y (2.145)} \\
&\leq (1 + \theta^2) \|v\|_{0,k-1}^2 + C\theta^{-2} h_k^{2\alpha} \|v\|_{\alpha,k-1}^2, \quad \text{por (2.60)} \quad \square
\end{aligned}$$

**Lema 3.2.3** *Se cumple la hipótesis (2.46)*

$$\|I_{k-1}^k v\|_{2-\alpha,k}^2 \leq (1 + \theta^2) \|v\|_{2-\alpha,k-1}^2 + C_2 \theta^{-2} h_k^{2\alpha} \|v\|_{2,k-1}^2, \quad \forall v \in V_{k-1}, \theta \in \langle 0, 1 \rangle \quad (3.15)$$

Demostración:

Sea  $C_*$  una constante dominante de las constantes  $C_1$  y  $C$  de (3.1) y (3.2) respectivamente, es decir

$$C_* = \max\{C_1, C\}$$

Se define

$$\langle v_1, v_2 \rangle_{k-1,\theta} = (1 + \theta^2) (v_1, v_2)_{k-1} + C_* \theta^{-2} h_k^{2\alpha} (A_{k-1}^{\alpha/2} v_1, v_2)_{k-1} \quad (3.16)$$

$$\forall v_1, v_2 \in V_{k-1} \text{ y } \theta \in (0, 1).$$

Además  $A_{k-1}$  es simétrica y definida positiva con respecto al producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k-1,\theta}$

De (3.2) se tiene

$$\begin{aligned}
\|I_{k-1}^k v\|_{0,k}^2 &\leq (1 + \theta^2) \|v\|_{0,k-1}^2 + C\theta^{-2} h_k^{2\alpha} \|v\|_{\alpha,k-1}^2 \\
&= (1 + \theta^2) \langle v, v \rangle_{k-1} + C\theta^{-2} h_k^{2\alpha} \langle A_{k-1}^{\alpha/2} v, v \rangle_{k-1}, \quad \text{por (2.52) y (2.40)} \\
&\leq (1 + \theta^2) \langle v, v \rangle_{k-1} + C_* \theta^{-2} h_k^{2\alpha} \langle A_{k-1}^{\alpha/2} v, v \rangle_{k-1} \tag{3.17} \\
&= \langle v, v \rangle_{k-1, \theta}, \quad \text{por (3.16)} \\
&= \langle A_{k-1}^0 v, v \rangle_{k-1, \theta}, \quad \forall v \in V_{k-1}
\end{aligned}$$

También de (3.1) se tiene

$$\begin{aligned}
\|I_{k-1}^k v\|_{2,k}^2 &\leq (1 + \theta^2) \|v\|_{2,k-1}^2 + C_1 \theta^{-2} h_k^{2\alpha} \|v\|_{2+\alpha,k-1}^2 \\
&\quad \text{por (2.53) y (2.40) se sigue} \\
&= (1 + \theta^2) \langle A_{k-1} v, v \rangle_{k-1} + C_1 \theta^{-2} h_k^{2\alpha} \langle A_{k-1}^{\alpha/2} A_{k-1} v, v \rangle_{k-1} \tag{3.18} \\
&\leq (1 + \theta^2) \langle A_{k-1} v, v \rangle_{k-1} + C_* \theta^{-2} h_k^{2\alpha} \langle A_{k-1}^{\alpha/2} A_{k-1} v, v \rangle_{k-1} \\
&= \langle A_{k-1}^1 v, v \rangle_{k-1, \theta}, \quad \forall v \in V_{k-1} \quad \text{por (3.16)}
\end{aligned}$$

Por interpolación entre espacios de Hilbert, ver en [4], [18], considerando las relaciones (3.17) y (3.18) se sigue

$$\begin{aligned}
\|I_{k-1}^k v\|_{2-\alpha,k}^2 &\leq \langle A_{k-1}^{1-\alpha/2} v, v \rangle_{k-1, \theta} \\
&= (1 + \theta^2) \langle A_{k-1}^{1-\alpha/2} v, v \rangle_{k-1} + C_* \theta^{-2} h_k^{2\alpha} \langle A_{k-1}^{\alpha/2} A_{k-1}^{1-\alpha/2} v, v \rangle_{k-1}, \quad \text{por (3.16)} \\
&= (1 + \theta^2) \langle A_{k-1}^{(2-\alpha)/2} v, v \rangle_{k-1} + C_* \theta^{-2} h_k^{2\alpha} \langle A_{k-1} v, v \rangle_{k-1} \\
&= (1 + \theta^2) \|v\|_{2-\alpha,k-1}^2 + C_* \theta^{-2} h_k^{2\alpha} \|v\|_{2,k-1}^2, \quad \text{por (2.40)} \quad \square
\end{aligned}$$

**Lema 3.2.4** *Se cumple*

$$\|\Pi_{k-1} v\|_{2,k-1}^2 \leq (1 + \theta^2) \|v\|_{2,k}^2 + C \theta^{-2} h_k^{2\alpha} \|v\|_{2+\alpha,k}^2, \quad \forall v \in V_k, \theta \in \langle 0, 1 \rangle \tag{3.19}$$

Demostración:

Sea  $v \in V_k$

$$\begin{aligned}
\|\Pi_{k-1}v\|_{2,k-1}^2 &= |\Pi_{k-1}v|_{H^2(\Omega)}^2 \\
&\leq \{|v|_{H^2(\Omega)} + |\Pi_{k-1}v - v|_{H^2(\Omega)}\}^2 \\
&\leq \{\|v\|_{2,k} + Ch_k^{-2}\|\Pi_{k-1}v - v\|_{L_2(\Omega)}\}^2, \quad \text{por (2.53), (2.124) y (2.44)} \\
&\leq \{\|v\|_{2,k} + Ch_k^\alpha\|v\|_{2+\alpha,k}\}^2, \quad \text{por (2.159)} \\
&\leq (1 + \theta^2)\|v\|_{2,k}^2 + C\theta^{-2}h_k^{2\alpha}\|v\|_{2+\alpha,k}^2, \quad \text{por (2.76)} \quad \square
\end{aligned}$$

**Lema 3.2.5** *Se cumple*

$$\|\Pi_{k-1}v\|_{0,k-1}^2 \leq (1 + \theta^2) \|v\|_{0,k}^2 + C \theta^{-2} h_k^{2\alpha} \|v\|_{\alpha,k}^2, \quad \forall v \in V_k, \theta \in \langle 0, 1 \rangle \quad (3.20)$$

Demostración:

Sea

$\mathcal{V}_T$  : Conjunto de vértices del triángulo  $T$

Sea  $v \in V_k$  cualquiera. De (2.127) se tiene

$$\|v\|_{0,k}^2 = \frac{1}{6} h_k^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_k} \sum_{p \in \mathcal{V}_T} v(p)^2 + h_k^4 \sum_{p \in \mathcal{V}_k} |\nabla v(p)|^2 + h_k^4 \sum_{e \in \mathcal{E}_k} \left[ \frac{\partial v}{\partial n}(m_e) \right]^2 \quad (3.21)$$

Sea  $w = \Pi_{k-1}v$ . Entonces los valores nodales de  $w$  y  $v$  en  $\mathcal{T}_{k-1}$  son los mismos. De donde

$$\begin{aligned}
\|w\|_{0,k-1}^2 &= \frac{1}{6} h_{k-1}^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_{k-1}} \sum_{p \in \mathcal{V}_T} v(p)^2 + h_{k-1}^4 \sum_{p \in \mathcal{V}_{k-1}} |\nabla v(p)|^2 \\
&\quad + h_{k-1}^4 \sum_{e \in \mathcal{E}_{k-1}} \left[ \frac{\partial v}{\partial n}(m_e) \right]^2
\end{aligned} \quad (3.22)$$

Sea el triángulo  $T \in \mathcal{T}_{k-1}$  que es dividido en cuatro triángulos  $T_1, T_2, T_3$  y  $T_4$  donde  $T_i \in V_k$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , cuyos vértices son etiquetados como en la figura (3.2).

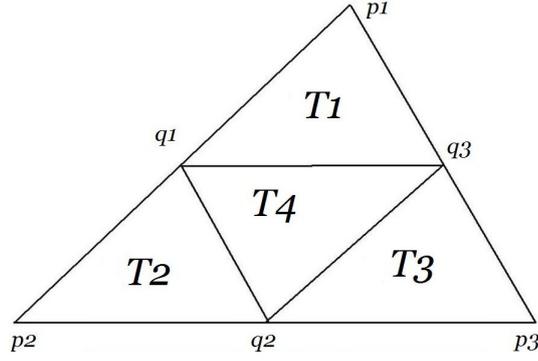


Figura 3.2: Un triángulo  $T \in \mathcal{T}_{k-1}$  dividido en cuatro triángulos en  $\mathcal{T}_k$

Entonces se tiene

$$4 \sum_{p \in \mathcal{V}_T} v(p)^2 = \sum_{i=1}^3 v(p_i)^2 + 3 \sum_{i=1}^3 [v(q_i) + (v(p_i) - v(q_i))]^2$$

por (2.76) se sigue

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=1}^3 v(p_i)^2 + 3 \sum_{i=1}^3 [(1 + \theta^2)v(q_i)^2 + (1 + \theta^{-2})(v(p_i) - v(q_i))^2] \\ &\leq (1 + \theta^2) \sum_{i=1}^4 \sum_{p \in \mathcal{V}_{T_i}} v(p)^2 + C\theta^{-2} \sum_{i=1}^4 |v|_{H^1(T_i)}^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

De (1.11) y (3.23) tenemos

$$h_{k-1}^2 \sum_{p \in \mathcal{V}_T} v(p)^2 \leq (1 + \theta^2) h_k^2 \sum_{i=1}^4 \sum_{p \in \mathcal{V}_{T_i}} v(p)^2 + C\theta^{-2} h_k^2 \sum_{i=1}^4 |v|_{H^1(T_i)}^2 \quad (3.24)$$

Sumando sobre todos los  $T \in \mathcal{T}_{k-1}$  se tiene

$$h_{k-1}^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_{k-1}} \sum_{p \in \mathcal{V}_T} v(p)^2 \leq h_k^2 (1 + \theta^2) \sum_{T \in \mathcal{T}_k} \sum_{p \in \mathcal{V}_T} v(p)^2 + C\theta^{-2} h_k^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_k} |v|_{H^1(T)}^2 \quad (3.25)$$

De forma similar a (3.13) y (3.14), se tiene

$$h_{k-1}^4 \sum_{p \in \mathcal{V}_{k-1}} |\nabla v(p)|^2 + h_{k-1}^4 \sum_{e \in \mathcal{E}_{k-1}} \left[ \frac{\partial v}{\partial n}(m_e) \right]^2 \leq Ch_k^2 |v|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (3.26)$$

Luego se tiene

$$\|\Pi_{k-1}v\|_{0,k-1}^2 = \|w\|_{0,k-1}^2$$

de (3.22), (3.25) y (3.26) se sigue

$$\begin{aligned} &\leq \frac{h_k^2}{6}(1+\theta^2) \sum_{T \in \mathcal{T}_k} \sum_{p \in \mathcal{V}_T} v(p)^2 + C\theta^{-2}h_k^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_k} |v|_{H^1(T)}^2 \\ &= (1+\theta^2) \underbrace{\frac{h_k^2}{6} \sum_{T \in \mathcal{T}_k} \sum_{p \in \mathcal{V}_T} v(p)^2}_{\leq \|v\|_{0,k}^2} + C\theta^{-2}h_k^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_k} |v|_{H^1(T)}^2 \\ &\leq (1+\theta^2)\|v\|_{0,k}^2 + C\theta^{-2}h_k^2\|v\|_{1,k}^2, \quad \text{por (2.145)} \\ &\leq (1+\theta^2)\|v\|_{0,k}^2 + C\theta^{-2}h_k^{2\alpha}\|v\|_{\alpha,k}^2, \quad \text{por (2.60)} \quad \square \end{aligned}$$

**Lema 3.2.6** *Se cumple*

$$\|\Pi_{k-1}v\|_{2-\alpha,k-1}^2 \leq (1+\theta^2) \|v\|_{2-\alpha,k}^2 + C\theta^{-2}h_k^{2\alpha} \|v\|_{2,k}^2, \quad \forall v \in V_k, \theta \in \langle 0, 1 \rangle \quad (3.27)$$

*Demostración*

Sea  $v \in V_k$ .

Del lema (3.2.4) y por el lema (3.2.5)

$$\|\Pi_{k-1}v\|_{2,k-1}^2 \leq (1+\theta^2) \|v\|_{2,k}^2 + C\theta^{-2}h_k^{2\alpha} \|v\|_{2+\alpha,k}^2, \quad \forall v \in V_k, \theta \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$\|\Pi_{k-1}v\|_{0,k-1}^2 \leq (1+\theta^2) \|v\|_{0,k}^2 + C\theta^{-2}h_k^{2\alpha} \|v\|_{\alpha,k}^2, \quad \forall v \in V_k, \theta \in \langle 0, 1 \rangle$$

Por la interpolación entre espacios de Hilbert, ver [4], [18] se tiene

$$\|\Pi_{k-1}v\|_{2-\alpha,k-1}^2 \leq (1+\theta^2) \|v\|_{2-\alpha,k}^2 + C\theta^{-2}h_k^{2\alpha} \|v\|_{2,k}^2, \quad \forall v \in V_k, \theta \in \langle 0, 1 \rangle \quad \square$$

**Lema 3.2.7** *Sea  $\zeta_k \in V_k$ . Sea  $\zeta \in H_0^2(\Omega)$  y  $\zeta_{k-1} \in V_{k-1}$  relacionados por la definición en (2.146) y (2.161). Entonces*

$$\|\zeta_{k-1} - P_k^{k-1}\zeta_k\|_{2-\alpha,k-1} \lesssim h_k^{2\alpha} \|\zeta_k\|_{2+\alpha,k} \quad (3.28)$$

Demostración:

Sea  $w \in V_{k-1}$  arbitrario.

$$\begin{aligned}
a(\zeta_{k-1} - P_k^{k-1}\zeta_k, w) &= a(\zeta_{k-1}, w) - a(P_k^{k-1}\zeta_k, w) \\
&= a(\zeta, w) - a(P_k^{k-1}\zeta_k, w) \text{ por lema(2.2.4), (2.147) y (2.161)} \\
&= a(\zeta, w) - a(\zeta_k, I_{k-1}^k w) \text{ por (2.2) y por } a(\cdot, \cdot) = a_{k-1}(\cdot, \cdot) = a_k(\cdot, \cdot) \\
&= a(\zeta, w) - a(\zeta_k, \Pi_k w) \text{ por (2.2.4)} \\
&= a(\zeta, w) - a(\zeta, \Pi_k w) \text{ por (2.147)} \\
&= a(\zeta, w - \Pi_k w)
\end{aligned}$$

Luego

$$a(\zeta_{k-1} - P_k^{k-1}\zeta_k, w) = a(\zeta, w - \Pi_k w) \quad (3.29)$$

También

$$\begin{aligned}
a(\zeta, w - \Pi_k w) &\lesssim |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \|w - \Pi_k w\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \text{ por (1.10)} \\
&\lesssim h_k^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \|w\|_{2+\alpha, k-1} \text{ por (2.164)} \\
&\lesssim h_k^{2\alpha} \|\zeta_k\|_{2+\alpha, k} \|w\|_{2+\alpha, k-1}
\end{aligned}$$

Así

$$a(\zeta, w - \Pi_k w) \lesssim h_k^{2\alpha} \|\zeta_k\|_{2+\alpha, k} \|w\|_{2+\alpha, k-1} \quad (3.30)$$

De (3.29) y (3.30)

$$\begin{aligned}
a(\zeta_{k-1} - P_k^{k-1}\zeta_k, w) &\lesssim h_k^{2\alpha} \|\zeta_k\|_{2+\alpha, k} \|w\|_{2+\alpha, k-1} \\
\implies \frac{a(\zeta_{k-1} - P_k^{k-1}\zeta_k, w)}{\|w\|_{2+\alpha, k-1}} &\lesssim h_k^{2\alpha} \|\zeta_k\|_{2+\alpha, k} \\
\implies \underbrace{\sup_{w \in V_{k-1} \setminus \{0\}} \frac{a(\zeta_{k-1} - P_k^{k-1}\zeta_k, w)}{\|w\|_{2+\alpha, k-1}}}_{\|\zeta_{k-1} - P_k^{k-1}\zeta_k\|_{2-\alpha, k-1}} &\lesssim \underbrace{\sup_{w \in V_{k-1} \setminus \{0\}} h_k^{2\alpha} \|\zeta_k\|_{2+\alpha, k}}_{h_k^{2\alpha} \|\zeta_k\|_{2+\alpha, k}} \\
\|\zeta_{k-1} - P_k^{k-1}\zeta_k\|_{2-\alpha, k-1} &\lesssim h_k^{2\alpha} \|\zeta_k\|_{2+\alpha, k} \text{ por (2.55)} \quad \square
\end{aligned}$$

Se tiene las siguientes relaciones importantes:

$$\|\zeta_k\|_{2+\alpha,k} \lesssim h_k^{-\alpha} \|\zeta_k\|_{2,k}, \quad \text{haciendo en (2.60) } s = 2 + \alpha \text{ y } t = 2 \quad (3.31)$$

$$\|\zeta_k\|_{2+\alpha,k} \lesssim h_k^{-2\alpha} \|\zeta_k\|_{2-\alpha,k}, \quad \text{haciendo en (2.60) } s = 2 + \alpha \text{ y } t = 2 - \alpha \quad (3.32)$$

Sean  $\zeta \in H_0^2(\Omega)$ ,  $\zeta_{k-1} \in V_{k-1}$ ,  $\zeta_k \in V_k$ , relacionados por (2.146) y sea  $w = \zeta_{k-1} - \zeta_k \in V_{k-1} + V_k$  entonces:

$$\begin{aligned} \|\zeta_{k-1} - \Pi_{k-1}\zeta_k\|_{2-\alpha,k-1} &= \|\Pi_{k-1}\zeta_{k-1} - \Pi_{k-1}\zeta_k\|_{2-\alpha,k-1} \\ &= \|\Pi_{k-1}(\zeta_{k-1} - \zeta_k)\|_{2-\alpha,k-1} \\ &= \|\Pi_{k-1}(w)\|_{2-\alpha,k-1} \\ &\approx \|\underbrace{\Pi_{k-1}(w)}_{\in V_{k-1}}\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)}, \quad \text{por Lema(2.2.3) y (2.145)} \\ &\lesssim |w|_{H^{2-\alpha}(\Omega)}, \quad \text{por Lema(2.2.5) y (2.153)} \\ &= |\zeta_{k-1} - \zeta_k|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |\zeta_{k-1} - \zeta + \zeta - \zeta_k|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \\
&\leq |\zeta_{k-1} - \zeta|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} + |\zeta - \zeta_k|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \\
&\lesssim h_k^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} + h_k^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)}, \quad \text{por Lema(2.2.2) y (2.134)} \\
&\lesssim h_k^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} + h_k^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)}, \quad \text{por Lema(2.2.2) y (2.134)} \\
&= 2h_k^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \\
&\lesssim h_k^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \\
&\lesssim h_k^{2\alpha} \|\zeta_k\|_{2+\alpha,k}
\end{aligned}$$

Asi se tiene

$$\|\zeta_{k-1} - \Pi_{k-1}\zeta_k\|_{2-\alpha,k-1} \lesssim h_k^{2\alpha} \|\zeta_k\|_{2+\alpha,k}, \quad \zeta_{k-1} \in V_{k-1}, \quad \zeta_k \in V_k \quad (3.33)$$

También

$$\begin{aligned}
\|\zeta_{k-1}\|_{2-\alpha,k-1} &= \|\Pi_{k-1}\zeta_k + \zeta_{k-1} - \Pi_{k-1}\zeta_k\|_{2-\alpha,k-1} \\
&\leq \|\Pi_{k-1}\zeta_k\|_{2-\alpha,k-1} + \|\zeta_{k-1} - \Pi_{k-1}\zeta_k\|_{2-\alpha,k-1} \\
&\lesssim \|\Pi_{k-1}\zeta_k\|_{2-\alpha,k-1} + h_k^{2\alpha} \|\zeta_k\|_{2+\alpha,k}, \quad \text{por (3.33)} \\
&\approx \|\Pi_{k-1}\zeta_k\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} + h_k^{2\alpha} \|\zeta_k\|_{2+\alpha,k}, \quad \text{por (3.33)} \\
&\lesssim |\zeta_k|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} + h_k^{2\alpha} \|\zeta_k\|_{2+\alpha,k}, \quad \text{por (2.158)} \\
&\approx \|\zeta_k\|_{2-\alpha,k} + h_k^{2\alpha} \|\zeta_k\|_{2+\alpha,k}, \quad \text{por (2.145)}
\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado lo anterior:

$$\begin{aligned}
\|\zeta_{k-1}\|_{2-\alpha, k-1}^2 &\lesssim (\|\zeta_k\|_{2-\alpha, k} + h_k^{2\alpha} \|\zeta_k\|_{2+\alpha, k})^2 \\
&= \|\zeta_k\|_{2-\alpha, k}^2 + 2\|\zeta_k\|_{2-\alpha, k} h_k^{2\alpha} \underbrace{\|\zeta_k\|_{2+\alpha, k}} + h_k^{4\alpha} \underbrace{\|\zeta_k\|_{2+\alpha, k}^2} \\
&\lesssim \|\zeta_k\|_{2-\alpha, k}^2 + 2\|\zeta_k\|_{2-\alpha, k} h_k^{2\alpha} h_k^{-2\alpha} \|\zeta_k\|_{2-\alpha, k} + h_k^{4\alpha} h_k^{-4\alpha} \|\zeta_k\|_{2-\alpha, k}^2 \\
&\quad \text{por (2.60)} \\
&= \|\zeta_k\|_{2-\alpha, k}^2 + 2\|\zeta_k\|_{2-\alpha, k}^2 + \|\zeta_k\|_{2-\alpha, k}^2 \\
&= 4\|\zeta_k\|_{2-\alpha, k}^2 \\
&\lesssim \|\zeta_k\|_{2-\alpha, k}^2
\end{aligned}$$

Y así se tiene

$$\|\zeta_{k-1}\|_{2-\alpha, k-1}^2 \lesssim \|\zeta_k\|_{2-\alpha, k}^2 \quad (3.34)$$

**Lema 3.2.8** *La hipótesis (2.47) se cumple, es decir*

$$\|P_k^{k-1} v\|_{2-\alpha, k-1}^2 \leq (1 + \theta^2) \|v\|_{2-\alpha, k}^2 + C\theta^{-2} h_k^{2\alpha} \|v\|_{2, k}^2 \quad \forall v \in V_k, \theta \in (0, 1) \quad (3.35)$$

Demostración:

Sea  $\zeta_k \in V_k$  arbitrario, y sean  $\zeta \in H_0^2(\Omega)$ ,  $\zeta_{k-1} \in V_{k-1}$  definidos en (2.146).

Luego

$$\begin{aligned}
\|P_k^{k-1} \zeta_k\|_{2-\alpha, k-1}^2 &= \|\zeta_{k-1} + P_k^{k-1} \zeta_k - \zeta_{k-1}\|_{2-\alpha, k-1}^2 \\
&\leq (\|\zeta_{k-1}\|_{2-\alpha, k-1} + \|P_k^{k-1} \zeta_k - \zeta_{k-1}\|_{2-\alpha, k-1})^2, \text{ desig. triangular} \\
&\leq (1 + \theta^2) \|\zeta_{k-1}\|_{2-\alpha, k-1}^2 + C\theta^{-2} \|P_k^{k-1} \zeta_k - \zeta_{k-1}\|_{2-\alpha, k-1}^2, \text{ por (2.75)} \\
&\leq (1 + \theta^2) \underbrace{\|\zeta_{k-1}\|_{2-\alpha, k-1}^2}_{\text{por (3.34)}} + C\theta^{-2} h_k^{4\alpha} \|\zeta_k\|_{2+\alpha, k}^2, \text{ por el Lema(3.2.7)}
\end{aligned}$$

$$\leq (1 + \theta^2) \|\zeta_k\|_{2-\alpha, k}^2 + C\theta^{-2} h_k^{4\alpha} \underbrace{\|\zeta_k\|_{2+\alpha, k}^2}_{\text{por (3.34)}}$$

$$\leq (1 + \theta^2) \|\zeta_k\|_{2-\alpha, k}^2 + C\theta^{-2} h_k^{4\alpha} h_k^{-2\alpha} \|\zeta_k\|_{2, k}^2$$

por (2.60), para  $s = 2 + \alpha$  y  $t = 2$

$$= (1 + \theta^2) \|\zeta_k\|_{2-\alpha, k}^2 + C\theta^{-2} h_k^{2\alpha} \|\zeta_k\|_{2, k}^2, \quad \forall \zeta_k \in V_k, \theta \in \langle 0, 1 \rangle \quad \square$$

### 3.3. Prueba de las hipótesis C, de la teoría aditiva

Se refiere al cumplimiento de las hipótesis para el producto de operadores:  $I_{k-1}^k P_k^{k-1}$  y  $P_k^{k-1} I_{k-1}^k$ , como se verá en lo que sigue.

**Lema 3.3.1** *La hipótesis (2.48) se cumple, es decir*

$$\|(Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1})v\|_{2-\alpha, k} \lesssim h_k^{2\alpha} \|v\|_{2+\alpha, k}, \quad \forall v \in V_k \quad (3.36)$$

Demostración:

Sea  $\zeta_k \in V_k$  arbitrario.

Si  $\zeta \in H_0^2(\Omega)$  y  $\zeta_{k-1} \in V_{k-1}$  se relacionan por la definición en (2.146) y (2.161).

Entonces

$$\begin{aligned} |\zeta_k - P_k^{k-1} \zeta_k|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} &= |\zeta_k - \zeta + \zeta - \zeta_{k-1} + \zeta_{k-1} - P_k^{k-1} \zeta_k|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \\ &\leq |\zeta_k - \zeta|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} + |\zeta - \zeta_{k-1}|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} + |\zeta_{k-1} - P_k^{k-1} \zeta_k|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \\ &\lesssim h_k^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} + h_k^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} + |\zeta_{k-1} - P_k^{k-1} \zeta_k|_{H^{2-\alpha}(\Omega)}, \quad \text{por (2.134)} \\ &\lesssim 2h_k^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} + \|\zeta_{k-1} - P_k^{k-1} \zeta_k\|_{2-\alpha, k-1}, \quad \text{por (2.145)} \\ &\lesssim 2h_k^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} + h_k^{2\alpha} \|\zeta_k\|_{2+\alpha, k}, \quad \text{por Lema(3.2.7) y (3.28)} \\ &\lesssim 2h_k^{2\alpha} \|\zeta_k\|_{2+\alpha, k} + h_k^{2\alpha} \|\zeta_k\|_{2+\alpha, k}, \quad \text{por Lema(2.2.4) y (2.149)} \\ &\lesssim h_k^{2\alpha} \|\zeta_k\|_{2+\alpha, k} \end{aligned}$$

y se tiene

$$|\zeta_k - P_k^{k-1}\zeta_k|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \lesssim h_k^{2\alpha} \|\zeta_k\|_{2+\alpha,k} \quad (3.37)$$

Tambi3n

$$P_k^{k-1}\zeta_k \in V_{k-1} \implies I_{k-1}^k(P_k^{k-1}\zeta_k \in V_{k-1}) = \Pi_k(P_k^{k-1}\zeta_k), \quad \text{por (2.2.4)} \quad (3.38)$$

Luego

$$\begin{aligned} \|(Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1})\zeta_k\|_{2-\alpha,k} &= \|\zeta_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}\zeta_k\|_{2-\alpha,k} \\ &= \|\zeta_k - \Pi_k(P_k^{k-1}\zeta_k)\|_{2-\alpha,k}, \quad \text{por (3.38)} \\ &\approx \|\zeta_k - \Pi_k(P_k^{k-1}\zeta_k)\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)}, \quad \text{por (2.145)} \\ &= \|\Pi_k\zeta_k - \Pi_k(P_k^{k-1}\zeta_k)\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)}, \quad \text{por (2.145)} \\ &= \|\Pi_k(\zeta_k - P_k^{k-1}\zeta_k)\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)}, \quad \text{por (2.145)} \\ &\lesssim |\zeta_k - P_k^{k-1}\zeta_k|_{H^{2-\alpha}(\Omega)}, \quad \text{por (2.154)} \\ &\lesssim h_k^{2\alpha} \|\zeta_k\|_{2+\alpha,k}, \quad \forall \zeta_k \in V_k \quad \text{por (3.37)} \quad \square \end{aligned}$$

**N3tese:**

Sea  $v \in V_k$

$$\begin{aligned} |P_k^{k-1}v|_{H^{2-\alpha}(\Omega)}^2 &\approx \|\|P_k^{k-1}v\|_{2-\alpha,k-1}^2, \quad \text{por (2.145)} \\ &\lesssim (1 + \theta^2) \|v\|_{2-\alpha,k}^2 + C\theta^{-2} h_k^{2\alpha} \underbrace{\|v\|_{2,k}^2}_{}, \quad \text{por (3.35)} \\ &\lesssim (1 + \theta^2) \|v\|_{2-\alpha,k}^2 + C\theta^{-2} h_k^{2\alpha} h_k^{-2\alpha} \|v\|_{2-\alpha,k}^2, \quad \text{por (2.60)} \\ &= (1 + \theta^2) \|v\|_{2-\alpha,k}^2 + C\theta^{-2} \|v\|_{2-\alpha,k}^2 \\ &\lesssim \|v\|_{2-\alpha,k}^2 \\ &\approx \|v\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)}, \quad \forall v \in V_k \quad \text{por (2.145)} \end{aligned}$$

Luego

$$|P_k^{k-1}v|_{H^{2-\alpha}(\Omega)}^2 \lesssim \|v\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)}, \quad \forall v \in V_k \quad (3.39)$$

**Lema 3.3.2** *La hipótesis (2.49) se cumple, es decir*

$$\| (Id_{k-1} - P_k^{k-1}I_{k-1}^k) v \|_{2-\alpha, k-1} \lesssim h_k^\alpha \|v\|_{2, k-1}, \quad \forall v \in V_{k-1} \quad (3.40)$$

Demostración:

Sea  $\zeta_{k-1} \in V_{k-1}$  y se definen  $\zeta \in H_0^2(\Omega)$  y  $\zeta_k \in V_k$  por:

$$a(\zeta, \phi) = a(\zeta_{k-1}, Q_{k-1}\phi), \quad \forall \phi \in H_0^2(\Omega)$$

$$a(\zeta_k, v) = a(\zeta, v), \quad \forall v \in V_k$$

Co el fin de reducir las expresiones amplias, se hace que:

$$Form = \| (Id_{k-1} - P_k^{k-1}I_{k-1}^k)\zeta_{k-1} \|_{2-\alpha, k-1}$$

Asi

$$\begin{aligned} Form &= \| Id_{k-1}\zeta_{k-1} - P_k^{k-1}I_{k-1}^k\zeta_{k-1} \|_{2-\alpha, k-1} \\ &= \| \zeta_{k-1} - P_k^{k-1}I_{k-1}^k\zeta_{k-1} \|_{2-\alpha, k-1} \\ &\approx | \zeta_{k-1} - P_k^{k-1}I_{k-1}^k\zeta_{k-1} |_{H^{2-\alpha}(\Omega)}, \quad \text{por (2.145)} \\ &= | \zeta_{k-1} - P_k^{k-1}\Pi_k\zeta_{k-1} |_{H^{2-\alpha}(\Omega)}, \quad \text{por (2.2.4)} \\ &= | \zeta_{k-1} - P_k^{k-1}\zeta_k + P_k^{k-1}\zeta_k - P_k^{k-1}\Pi_k\zeta_{k-1} |_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \\ &\leq | \zeta_{k-1} - P_k^{k-1}\zeta_k |_{H^{2-\alpha}(\Omega)} + | P_k^{k-1}(\zeta_k - \Pi_k\zeta_{k-1}) |_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \\ &\lesssim h_k^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} + | \zeta_k - \Pi_k\zeta_{k-1} |_{H^{2-\alpha}(\Omega)}, \quad \text{por (2.2.2) y (3.39)} \\ &\lesssim h_k^{2\alpha} \| \zeta_{k-1} \|_{2+\alpha, k-1} + | \zeta_k - \Pi_k\zeta_{k-1} |_{H^{2-\alpha}(\Omega)}, \quad \text{por (2.149)} \\ &= h_k^{2\alpha} \| \zeta_{k-1} \|_{2+\alpha, k-1} + | \zeta_k - \zeta_{k-1} + \zeta_{k-1} - \Pi_k\zeta_{k-1} |_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \\ &\leq h_k^{2\alpha} \| \zeta_{k-1} \|_{2+\alpha, k-1} + | \zeta_k - \zeta_{k-1} |_{H^{2-\alpha}(\Omega)} + | \zeta_{k-1} - \Pi_k\zeta_{k-1} |_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim h_k^{2\alpha} \|\zeta_{k-1}\|_{2+\alpha, k-1} + |\zeta_k - \zeta_{k-1}|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} + h_k^{2\alpha} \|\zeta_{k-1}\|_{2+\alpha, k-1}, \quad \text{por (2.164)} \\
&\leq h_k^{2\alpha} \|\zeta_{k-1}\|_{2+\alpha, k-1} + |\zeta_k - \zeta|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} + |\zeta - \zeta_{k-1}|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} + h_k^{2\alpha} \|\zeta_{k-1}\|_{2+\alpha, k-1} \\
&\lesssim h_k^{2\alpha} \|\zeta_{k-1}\|_{2+\alpha, k-1} + h_k^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} + h_k^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \\
&\quad + h_k^{2\alpha} \|\zeta_{k-1}\|_{2+\alpha, k-1}, \quad \text{por (2.134)} \\
&\lesssim h_k^{2\alpha} \|\zeta_{k-1}\|_{2+\alpha, k-1} + h_k^{2\alpha} |\zeta_{k-1}|_{2+\alpha, k-1} + h_k^{2\alpha} |\zeta_{k-1}|_{2+\alpha, k-1} \\
&\quad + h_k^{2\alpha} \|\zeta_{k-1}\|_{2+\alpha, k-1}, \quad \text{por (2.149)} \\
&\lesssim h_k^{2\alpha} \|\zeta_{k-1}\|_{2+\alpha, k-1} \\
&\lesssim h_k^{2\alpha} h_k^{-\alpha} \|\zeta_{k-1}\|_{2, k-1}, \quad \text{por (2.60)} \\
&= h_k^\alpha \|\zeta_{k-1}\|_{2, k-1}, \quad \forall \zeta_{k-1} \in V_{k-1} \quad \square
\end{aligned}$$

Hasta aquí se verificaron todas las hipótesis de la teoría aditiva (2.1.1) para los métodos multimalla con la discretización del elemento finito HCT.

En consecuencia los teoremas de convergencia para el algoritmo V-Ciclo simétrico y para el algoritmo F-Ciclo simétrico ( Teorema (2.1.9) y el Teorema (2.1.10)) se cumplen para el elemento HCT, con lo cual se prueba la convergencia.

# Capítulo 4

## Resultados Numéricos

Todas las demostraciones de los ejemplos numéricos se realizan con el software MATLAB version 7.8 (R2009a).

Para esta parte se puede ver [2], [10], [17], [15], [16]

### 4.1. Implementación del elemento finito HCT completo

Sea el triángulo  $K$  de vértices  $a_1, a_2$  y  $a_3$ , con centro de gravedad  $a$ . Además sean  $\{b_1, b_2, b_3\}$  los puntos medios de sus lados y sean  $\{c_1, c_2, c_3\}$  los puntos donde recaen las alturas. El triángulo  $K$  se divide en tres triángulos  $K_1, K_2$  y  $K_3$ , como se observa en la figura (4.1).

Donde

$$P_K = \{p \in C^1(K) : p_i = p|_{K_i} \in P_3(K_i), 1 \leq i \leq 3\}$$

$$\Sigma_K = \{p(a_1), p(a_2), p(a_3), \nabla p(a_1), \nabla p(a_2), \nabla p(a_3), \frac{\partial p}{\partial n}(b_1), \frac{\partial p}{\partial n}(b_2), \frac{\partial p}{\partial n}(b_3)\}$$

Teniéndose presente que  $\nabla p(a_i)$  representa a dos grados de libertad, para cada  $i = 1, 2, 3$ . De este modo la  $\dim P_K = 12$ , es decir se deben tener 12 funciones de forma.

Para ello y por su simplicidad se expresarán en coordenadas de áreas  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  que se define como:

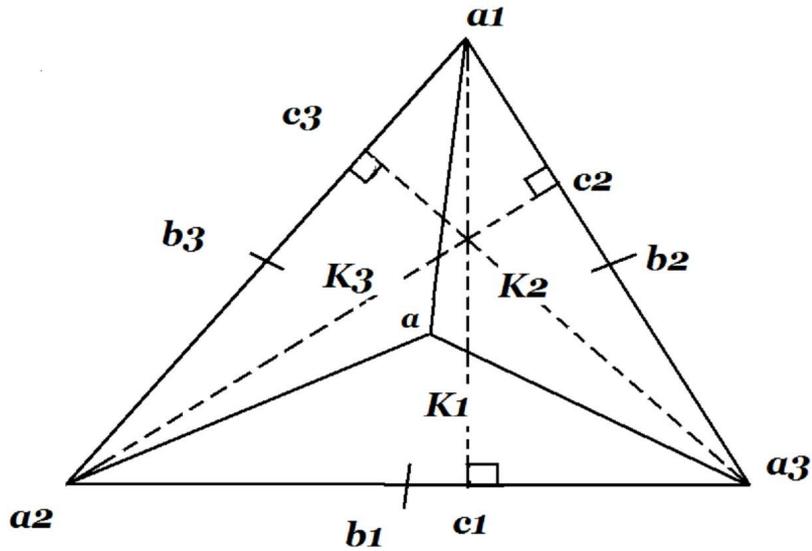


Figura 4.1: Elemento finito HCT completo

Sea un punto  $(x, y)$  interior a un triángulo, ver figura (4.2), donde

$$\lambda_1 = \text{área}(K_1)/\text{área}(K)$$

$$\lambda_2 = \text{área}(K_2)/\text{área}(K)$$

$$\lambda_3 = \text{área}(K_3)/\text{área}(K)$$

Así  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$

Si se conoce los vértices del triángulo  $a_1 = (x_1, y_1)$ ,  $a_2 = (x_2, y_2)$  y  $a_3 = (x_3, y_3)$  se tiene lo siguiente

$$\begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \\ y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 \end{cases} \quad (4.1)$$

De igual modo:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{(x - x_2)(y_2 - y_3) + (x_3 - x_2)(y - y_2)}{\Delta} \\ \lambda_2 = \frac{(x - x_3)(y_3 - y_1) + (x_1 - x_3)(y - y_3)}{\Delta} \\ \lambda_3 = \frac{(x - x_1)(y_1 - y_2) + (x_2 - x_1)(y - y_1)}{\Delta} \end{cases} \quad (4.2)$$

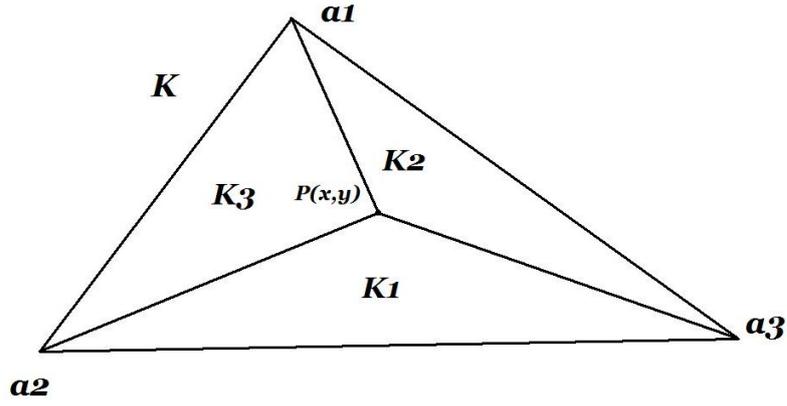


Figura 4.2: Coordenadas de área para un triángulo  $K$

con 
$$\Delta = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$

Así mismo se definen los parámetros de excentricidad para el triángulo  $K$  como

$$n_1 = \frac{(l_3)^2 - (l_2)^2}{l_1^2}, \quad n_2 = \frac{(l_1)^2 - (l_3)^2}{l_2^2}, \quad n_3 = \frac{(l_2)^2 - (l_1)^2}{l_3^2} \quad (4.3)$$

donde

$$l_1 = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}, \quad l_2 = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}, \quad l_3 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

#### 4.1.1. Polinomios de forma

Para cada subtriángulo  $K_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  se tiene 12 polinomios de forma, que se denota como

$$R_i = \{R_1^i, R_2^i, R_3^i, R_4^i, R_5^i, R_6^i, R_7^i, R_8^i, R_9^i, R_{10}^i, R_{11}^i, R_{12}^i\} \quad (4.4)$$

y cada polinomio de forma  $R_j^i$ ,  $j = 1, 2, \dots, 12$  es de grado 3, y están en función de:

- Para el subtriángulo  $K_1$

$$L_1 = \{\lambda_1^3, \lambda_2^3, \lambda_3^3, \lambda_1^2\lambda_3, \lambda_1^2\lambda_2, \lambda_2^2\lambda_1, \lambda_2^2\lambda_3, \lambda_3^2\lambda_2, \lambda_3^2\lambda_1, \lambda_1\lambda_2\lambda_3\}, \text{ en ese orden.}$$

- Para el subtriángulo  $K_2$

$$L_2 = \{\lambda_2^3, \lambda_3^3, \lambda_1^3, \lambda_2^2\lambda_1, \lambda_2^2\lambda_3, \lambda_3^2\lambda_2, \lambda_3^2\lambda_1, \lambda_1^2\lambda_3, \lambda_1^2\lambda_2, \lambda_2\lambda_3\lambda_1\}, \text{ en ese orden.}$$

- Para el subtriángulo  $K_3$

$$L_3 = \{\lambda_3^3, \lambda_1^3, \lambda_2^3, \lambda_3^2\lambda_2, \lambda_3^2\lambda_1, \lambda_1^2\lambda_3, \lambda_1^2\lambda_2, \lambda_2^2\lambda_1, \lambda_2^2\lambda_3, \lambda_3\lambda_1\lambda_2\}, \text{ en ese orden.}$$

Donde los coeficientes que componen la combinación está almacenada en las matrices de coeficientes  $Cf_1$ ,  $Cf_2$ ,  $Cf_3$  para los subtriángulos  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  respectivamente, como sigue

$$Cf_1 = \begin{pmatrix} -(n_2 - n_3)/2 & 0 & 0 & 3(3 + n_2)/2 & 3(3 - n_3)/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1 - 2n_1 - n_3)/2 & 1 & 0 & -3(1 - n_1)/2 & 3(n_1 + n_3)/2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3(1 - n_1) \\ (1 + 2n_1 + n_2)/2 & 0 & 1 & -3(n_1 + n_2)/2 & -3(1 + n_1)/2 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3(1 + n_1) \\ -(1 + n_2)/12 & 0 & 0 & (7 + n_2)/4 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(1 - n_3)/12 & 0 & 0 & -1/2 & (7 - n_3)/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(7 + n_3)/12 & 0 & 0 & 1/2 & (5 + n_3)/4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ (4 - n_1)/6 & 0 & 0 & -(3 - n_1)/4 & -(5 - n_1)/4 & 0 & 1 & 0 & 0 & (3 - n_1)/2 \\ (4 + n_1)/6 & 0 & 0 & -(5 + n_1)/4 & -(3 + n_1)/4 & 0 & 0 & 1 & 0 & (3 + n_1)/2 \\ -(7 - n_2)/12 & 0 & 0 & (5 - n_2)/4 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4/3 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -2/3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Cf_2 = \begin{pmatrix} -(n_3 - n_1)/2 & 0 & 0 & 3(3 + n_3)/2 & 3(3 - n_1)/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1 - 2n_2 - n_1)/2 & 1 & 0 & -3(1 - n_2)/2 & 3(n_2 + n_1)/2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3(1 - n_2) \\ (1 + 2n_2 + n_3)/2 & 0 & 1 & -3(n_2 + n_3)/2 & -3(1 + n_2)/2 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3(1 + n_2) \\ -(1 + n_3)/12 & 0 & 0 & (7 + n_3)/4 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(1 - n_1)/12 & 0 & 0 & -1/2 & (7 - n_1)/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(7 + n_1)/12 & 0 & 0 & 1/2 & (5 + n_1)/4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ (4 - n_2)/6 & 0 & 0 & -(3 - n_2)/4 & -(5 - n_2)/4 & 0 & 1 & 0 & 0 & (3 - n_2)/2 \\ (4 + n_2)/6 & 0 & 0 & -(5 + n_2)/4 & -(3 + n_2)/4 & 0 & 0 & 1 & 0 & (3 + n_2)/2 \\ -(7 - n_3)/12 & 0 & 0 & (5 - n_3)/4 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4/3 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -2/3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Cf_3 = \begin{pmatrix} -(n_1 - n_2)/2 & 0 & 0 & 3(3 + n_1)/2 & 3(3 - n_2)/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1 - 2n_3 - n_2)/2 & 1 & 0 & -3(1 - n_3)/2 & 3(n_3 + n_2)/2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3(1 - n_3) \\ (1 + 2n_3 + n_1)/2 & 0 & 1 & -3(n_3 + n_1)/2 & -3(1 + n_3)/2 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3(1 + n_3) \\ -(1 + n_1)/12 & 0 & 0 & (7 + n_1)/4 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(1 - n_2)/12 & 0 & 0 & -1/2 & (7 - n_2)/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(7 + n_2)/12 & 0 & 0 & 1/2 & (5 + n_2)/4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ (4 - n_3)/6 & 0 & 0 & -(3 - n_3)/4 & -(5 - n_3)/4 & 0 & 1 & 0 & 0 & (3 - n_3)/2 \\ (4 + n_3)/6 & 0 & 0 & -(5 + n_3)/4 & -(3 + n_3)/4 & 0 & 0 & 1 & 0 & (3 + n_3)/2 \\ -(7 - n_1)/12 & 0 & 0 & (5 - n_1)/4 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4/3 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -2/3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estas matrices se obtienen haciendo cumplir las condiciones que hay entre los sub\_triángulos, planteando las ecuaciones y escribiendolos en términos de las excentricidades (4.3) del triángulo  $K$ .

Luego los polinomios de forma para cada sub\_triángulo (4.4), se obtiene como

$$R_i = Cf_i * L_i^t, \text{ para } i = 1, 2, 3$$

En la figura Fig.(4.3), se muestran las 12 funciones de forma para el sub\_triángulo  $K1$ , en la figura Fig.(4.4) se muestran 2 de las 12 funciones de forma del sub\_triángulo  $K2$ ; análogamente para el sub\_triángulo  $K3$ , en la figura Fig.(4.5) se muestran 2 de sus 12 funciones de forma .

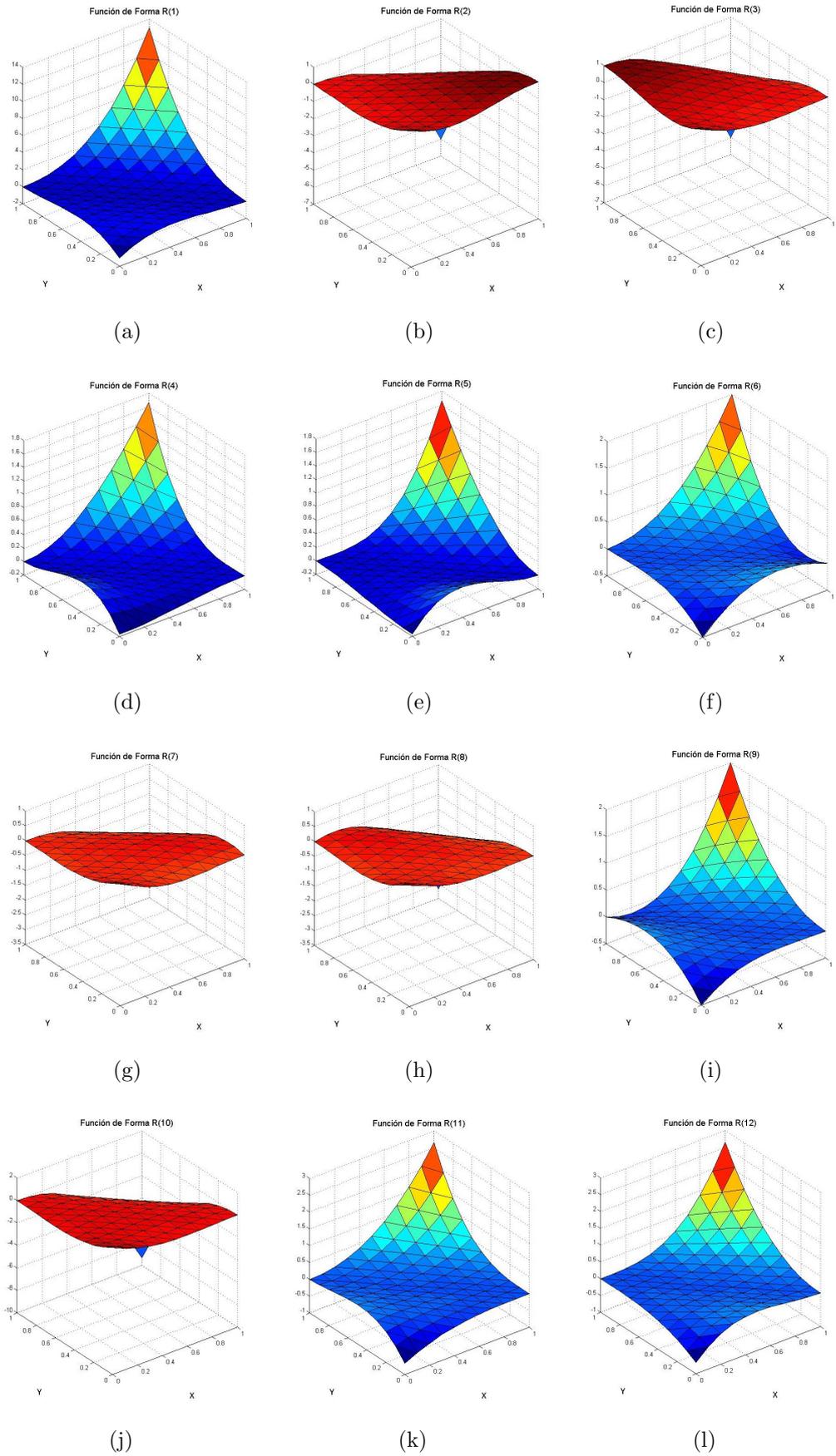
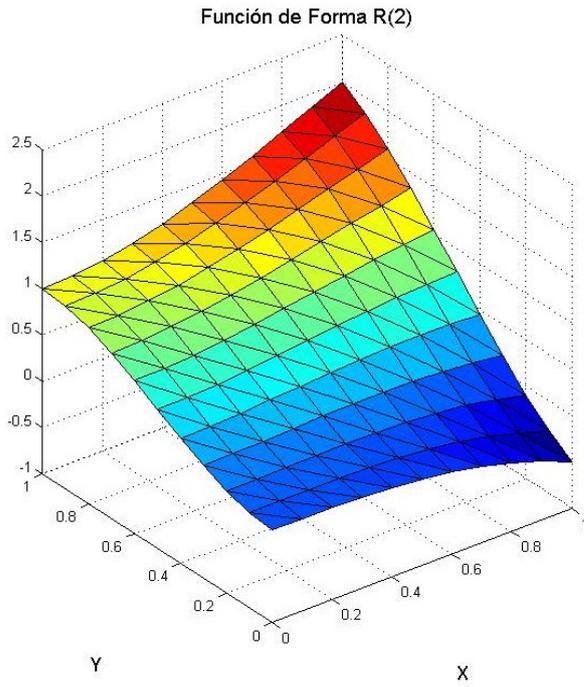
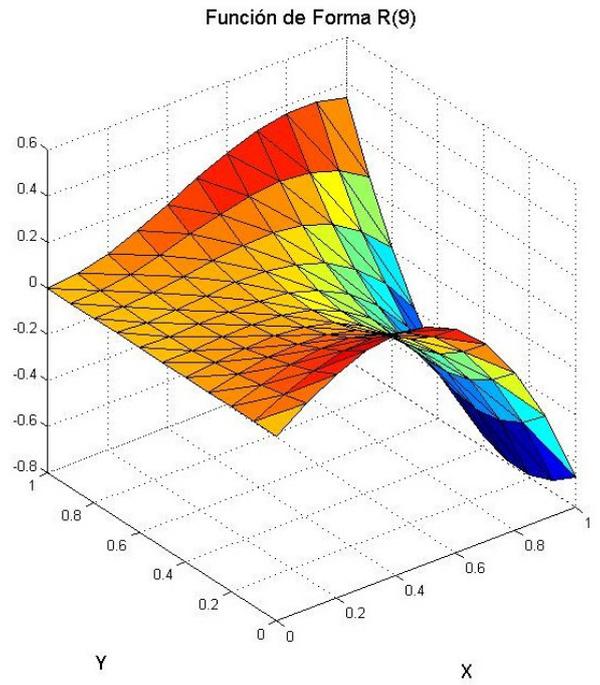


Figura 4.3: Doce funciones de forma para el sub triángulo K1

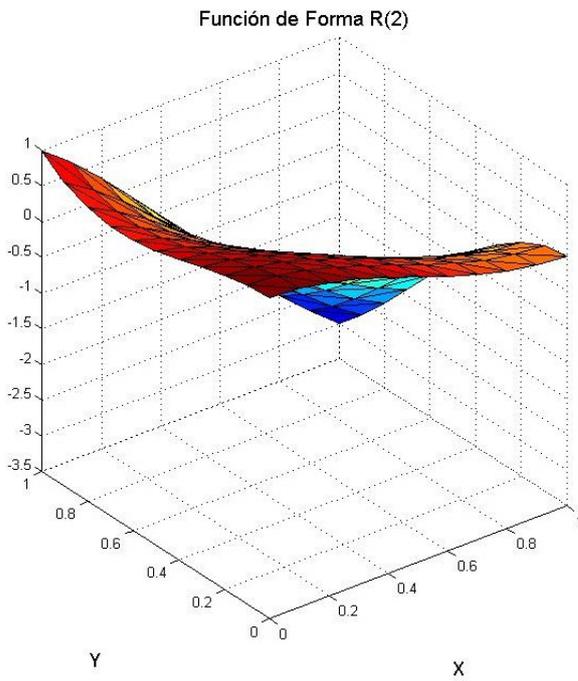


(a)

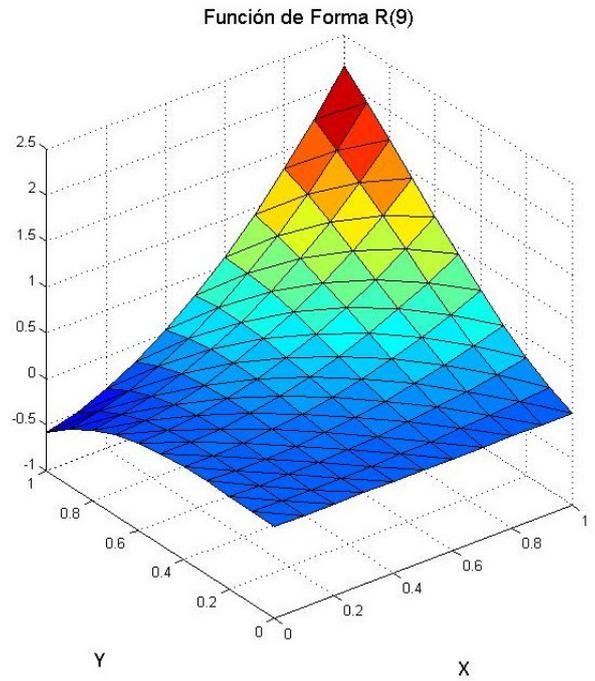


(b)

Figura 4.4: Dos funciones de forma para el sub\_triángulo K2



(a)



(b)

Figura 4.5: Dos funciones de forma para el sub\_triángulo K3

## 4.2. Aplicación física: Problema de una losa

Se aplicará al siguiente problema de una losa delgada de material elástico homogéneo e isotrópico, es decir que presenta el mismo comportamiento mecánico para cualquier dirección de estiramiento alrededor de un punto.

$$P : \begin{cases} \int_{\Omega} \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 u = f, & u \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & u \in \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (4.5)$$

Donde:

$E$  : Módulo de Young

$\nu$  : Coeficiente de Poisson

$e$  : Espesor de la losa

$f$  : Fuerza uniformemente distribuída a la losa

$u$  : **Desplazamiento vertical del plano medio de la losa**

Por las condiciones de frontera, se dice que este tipo de losa es empotrada en los bordes, **sostenida por la teoría de losas delgadas de Kirchhoff**. Donde el coeficiente de Poisson es la constante de elasticidad del material y  $E$  (el módulo de Young) que lleva las propiedades del material.

Las losas son elementos estructurales horizontales cuyas dimensiones en planta son relativamente grandes en comparación con su altura donde las cargas son perpendiculares a su plano, se emplean para proporcionar superficies planas y útiles. Las losas separan horizontalmente el espacio vertical conformando diferentes niveles y constituyen a su vez, el piso de uno de ellos y el techo del otro. La losa es el principal sostén para las personas, elementos, maquinarias que puedan desarrollar de forma segura todas las actividades y a veces de contribuir a la estabilidad de los edificios. Es el elemento que recibe directamente la carga. Las losas de entrepisos y techos, aparte de su función estructural cumplen con otras funciones tales como: Control ambiental, seguridad e instalaciones, pavimentos o pisos, ver Fig. (4.8)

Por esta razón es de mucha importancia el buen comportamiento de la losa y es por ello el interés de estimar la deformación de la losa por efecto de fuerzas aplicadas

sobre ella, usando el método de elemento finito HCT seguido de las multimallas para la solución del sistema respectivo, además verificando la convergencia de ellas. Que puede verse en [23], [24], [25]

### 4.2.1. Formulación variacional del problema de la losa

Su formulación variacional ya se vió en el Capítulo 1 en la ecuación (1.5) y se mostró que una forma bilineal es

$$a_1(u, v) = \int \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v \, dx dy = \int \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (4.7)$$

Sin embargo esta forma bilineal no es única ver [1] pág. 26, si se considera al operador

$$\Delta^2 \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right)$$

se tiene otra forma bilineal

$$a_2(u, v) = \int \int_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right\} dx dy \quad (4.8)$$

Luego de (4.7) y (4.8) se tiene infinitas formas bilineales

$$a_t(u, v) = t a_1(u, v) + (1 - t) a_2(u, v), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (4.9)$$

Si se considera a  $t = \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}$  en (4.9), se tiene

$$a(u, v) = (1 - \nu) [u_{xx} v_{xx} + 2u_{xy} v_{xy} + u_{yy} v_{yy}] + \nu [u_{xx} + u_{yy}] [v_{xx} + v_{yy}]$$

De este modo, se tiene como formulación variacional del problema a:

$$FV : \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{Ee^3}{12(1 - \nu^2)} \{ (1 - \nu) [u_{xx} v_{xx} + 2u_{xy} v_{xy} + u_{yy} v_{yy}] + \\ \nu [u_{xx} + u_{yy}] [v_{xx} + v_{yy}] \} dx dy = \int_{\Omega} f v dx dy \end{array} \right. \quad (4.10)$$

### 4.3. Implementación del método de elementos finitos HCT para la resolución del problema de Losa Variacional

Sea  $V_h$  el espacio discreto construido a partir del elemento finito HCT completo. Luego el problema (4.10) en el espacio finito  $V_h$ , se puede expresar

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u_h \in V_h \text{ tal que para todo } v_h \in V_h \\ a(u_h, v_h) = f(v_h) \end{cases} \quad (4.11)$$

La matriz de rigidez elemental relacionados a cada uno de los subtriángulos  $K_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  se obtiene de

$$\int_{K_i} \underbrace{\frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)}}_{\xi} \begin{bmatrix} \partial_{xx}u_h & \partial_{xy}u_h & \partial_{yy}u_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \nu \\ 0 & 2(1-\nu) & 0 \\ \nu & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_{xx}v_h \\ \partial_{xy}v_h \\ \partial_{yy}v_h \end{bmatrix} dxdy = [DLG(u_h)]$$

$$[DA_i] \left\{ \int_{K_i} \xi \begin{bmatrix} \partial_{xx}L_i & \partial_{xy}L_i & \partial_{yy}L_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \nu \\ 0 & 2(1-\nu) & 0 \\ \nu & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_{xx}L_i \\ \partial_{xy}L_i \\ \partial_{yy}L_i \end{bmatrix} dxdy \right\} [DA_i]^t [DLG(v_h)]^t$$

Donde  $[DLG]$  y  $[DA_i]$  son matrices de derivadas en coordenadas de áreas y de cambio a coordenadas de áreas, respectivamente.

Luego usando integración numérica (cuadratura  $S = 3$ ) en coordenadas de área.

$$\int_{K_i} \phi(x, y) dxdy \approx Area(K_i) \sum_{s=1}^S \omega_s \phi(b_s)$$

para la resolución numérica del problema discreto, se puede expresar

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} [DLG(u_h)]_{1 \times 12} [M]_{12 \times 12} [DLG(v_h)]_{12 \times 1}^t$$

$$f_h(v_h) = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} [B]_{1 \times 12} [DLG(v_h)]_{12 \times 1}^t$$

Donde

$$[M] = \sum_{i=1}^3 [M_i]$$

$$[M_i] = [DA_i] \left[ Area(K_i) \sum_{s=1}^S \omega_s \left\{ \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)^2} \left[ \begin{array}{ccc} \partial_{xx}L_i & \partial_{xy}L_i & \partial_{yy}L_i \end{array} \right] \right. \right.$$

$$\left. \left. \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & \nu \\ 0 & 2(1-\nu) & 0 \\ \nu & 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} \partial_{xx}L_i & \partial_{xy}L_i & \partial_{yy}L_i \end{array} \right]^t \right\} b(s) \right] [DA_i]^t$$

Análogamente

$$[B] = \sum_{i=1}^3 [B_i]$$

$$[B_i] = Area(K_i) \sum_{s=1}^S \omega_s f(b_l) [L_i(b_s)] [DA_i]^t$$

Que puede quedar finalmente expresado en un sistema lineal de forma

$$Ku = F \tag{4.12}$$

Que se solucionará numéricamente con los métodos multimallas V-Ciclo, W-Ciclo y F-Ciclo.

#### 4.4. Aplicación de los métodos multimalla V-Ciclo simétrico, W-Ciclo y F-Ciclo para solucionar el sistema lineal del problema de la losa

En esta sección se presenta la aplicación y los resultados numéricos para ilustrar la convergencia de los métodos multimalla al sistema (4.12), es decir se ilustran los resultados de los teoremas (2.1.9) y (2.1.10). Para ello, recordamos la definición del número de contracción para los métodos multimalla.

**Definición 4.4.1** *Número de contracción ( $\gamma_k$ )*

Si se tiene el sistema  $A_k u = \psi$  y  $MG(A_k, \psi, u_0, m_1, m_2)$  es el resultado de usar un método multimalla, con  $u_0$  vector inicial para las iteraciones,  $m_1$  y  $m_2$  los pasos pre-suaves y pos-suaves de la multimalla, se define:

$$\gamma_k = \sup_{u \in V_k \setminus \{0\}} \frac{\|u - MG(A_k, \psi, u_0, m_1, m_2)\|_{2,k}}{\|u - u_0\|_{2,k}}$$

Si al dominio cuadrado convexo  $\Omega \subset R^2$ , ya utilizado en el elemento finito HCT, se le hace una triangulación por una subdivisión regular, de forma continua, se tiene mallas por niveles, como se puede ver en fig. (4.6).

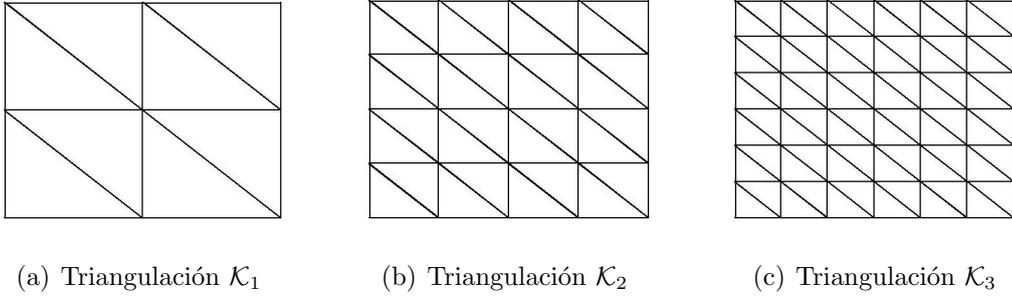


Figura 4.6: Triangulación del dominio cuadrado ( $\Omega \subset R^2$ )

Sea  $e_k^t := u_k(x_i, y_j) - u_k^t(x_i, y_j)$  el error global en la malla de nivel  $k$  en la  $t$ -ésima iteración. Este error, representado en un espacio de Fourier, tiene dos tipos de componentes: Alta frecuencia y de baja frecuencia.

Los métodos Multimalla combinan dos esquemas complementarios para reducir el error global ( $e_k^t$ ):

- a) Procesos de relajación, para reducir las componentes de alta frecuencia y sucede en el nivel de malla  $k$ .
- b) Corrección en las mallas más gruesas, para reducir las componentes de baja frecuencia y se da en un nivel de malla inferior ( $k - 1$ ).

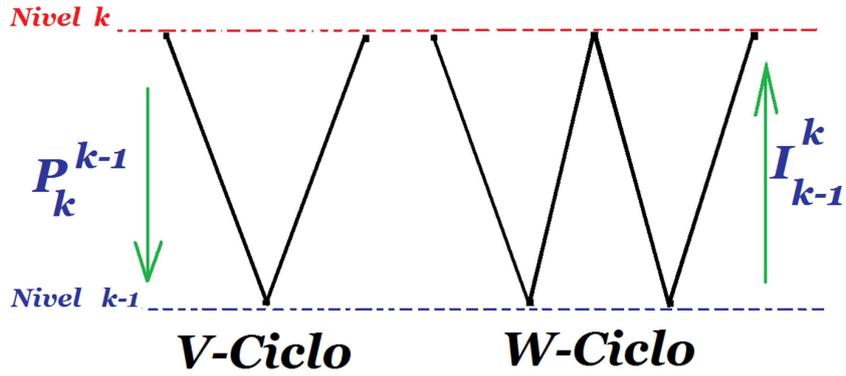


Figura 4.7: Representación de los métodos multimalla y sus operadores de transferencia entre mallas.

Luego se requieren los dos operadores: De restricción ( $P_k^{k-1}$ ) e interpolación ( $I_{k-1}^k$ ) para ir de una malla fina a otra malla más gruesa y viceversa.

Los métodos multimalla son de dos tipos:

- Geométricas, si el número de nudos interiores de la malla coincide con el orden del sistema lineal a resolver.
- Algebraicas, si no se da el caso geométrico o no se tiene información de la malla en el sistema lineal a resolver. Que se puede ver en [5], [6], [8], [19]

El sistema lineal del problema de la losa (4.12) es de orden cuatro veces el número de nudos de la malla, para cualquier nivel de malla. Es por ello que se usará multimallas algebraicas, que es similar a las geométricas, donde la diferencia está en encontrar los adecuados operadores de transferencia entre mallas.

Para el sistema lineal del problema de la losa, se usó el siguiente modelo de operador (matriz) de restricción  $P_k^{k-1}$ :

$$P_k^{k-1} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 \end{pmatrix}_{3 \times 12}$$

y cuyo operador (matriz) de interpolación es  $I_{k-1}^k := 4(P_k^{k-1})^T$ .

La aplicación de estos operadores se puede explicarse como sigue: Dado un vector columna  $v_{12 \times 1}$  este vector puede ser reducido por la matriz operador restricción  $P_k^{k-1}$  con  $P_k^{k-1}v$  que resulta ser un vector de orden  $3 \times 1$ . Análogamente, se puede ampliar un vector columna de 3 elementos por la aplicación de la matriz operador interpolación  $I_{k-1}^k$  al hacer  $I_{k-1}^k v$  que resultaría un vector columna de  $12 \times 1$  elementos.

Estos operadores de transferencia de una malla a otra, cumplen con la propiedad que si se aplica a una matriz simétrica, el resultado también es una matriz simétrica.

**Ejemplo 4.4.1** *Sea la matriz simétrica*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{12 \times 12}$$

Al multiplicar los operadores por la izquierda y derecha a la matriz  $A$ , se tiene

$$P_k^{k-1} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} I_{k-1}^k = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Y se consigue reducir el orden de la matriz  $A$  de 12, a una matriz de orden 3, conservando su simetría.  $\square$

Y si denotamos la matriz principal del sistema lineal del problema de la losa (4.12) por  $A_h$  (matriz correspondiente al nivel de malla  $k$ ) al cual se llevará al nivel inferior por la aplicación de los operadores de transferencia haciendo:  $A_{2h} = P_k^{k-1} A_h I_{k-1}^k$ . Luego haciendo uso de las siguientes funciones tenemos los resultados.

```
function solAprox=MultimallaVCycloHCT(Ah, fh, vh, m)
vh=SORRichardson(Ah, fh, vh, m);
[R,I]=MatricesReIHCT(length(vh));
for p = 1 : 1
    rh = fh - Ah * vh;    f2h = R * rh;    A2h = R * Ah * I;
    v0 = zeros(length(f2h), 1);
    v2h=SORRichardson(A2h, f2h, v0, 20);
    vh = vh + I * v2h;
end
vh=SORRichardson(Ah, fh, vh, m);    solAprox = vh;
```

```

function solAprox=MultimallaWCycloHCT(Ah, fh, vh, m)
vh=SORRichardson(Ah, fh, vh, m);
[R,I]=MatricesReIHCT(length(vh));
for p = 1 : 2
    rh = fh - Ah * vh;    f2h = R * rh;    A2h = R * Ah * I;
    v0 = zeros(length(f2h), 1);
    v2h=SORRichardson(A2h, f2h, v0, 20);
    vh = vh + I * v2h;
end
vh=SORRichardson(Ah, fh, vh, m);    solAprox = vh;

```

```

function solAprox=MultimallaFCycloHCT(Ah, fh, vh, m)
vh=SORRichardson(Ah, fh, vh, m);
[R,I]=MatricesReIHCT(length(vh));
for p = 1 : 2
    rh = fh - Ah * vh;    f2h = R * rh;    A2h = R * Ah * I;
    v0 = zeros(length(f2h), 1);
    v2h=SORRichardson(A2h, f2h, v0, 20);
    vh = vh + I * v2h;
    vh=MultimallaVCycloHCT(Ah, fh, vh, m);
end
vh=SORRichardson(Ah, fh, vh, m);    solAprox = vh;

```

## 4.5. Resultados numéricos del problema de la losa

En Ingeniería Civil, el problema de las losas es un problema común y de gran importancia, se requiere conocer los desplazamientos, con ellos se consiguen las deformaciones y los esfuerzos para un buen comportamiento estructural.

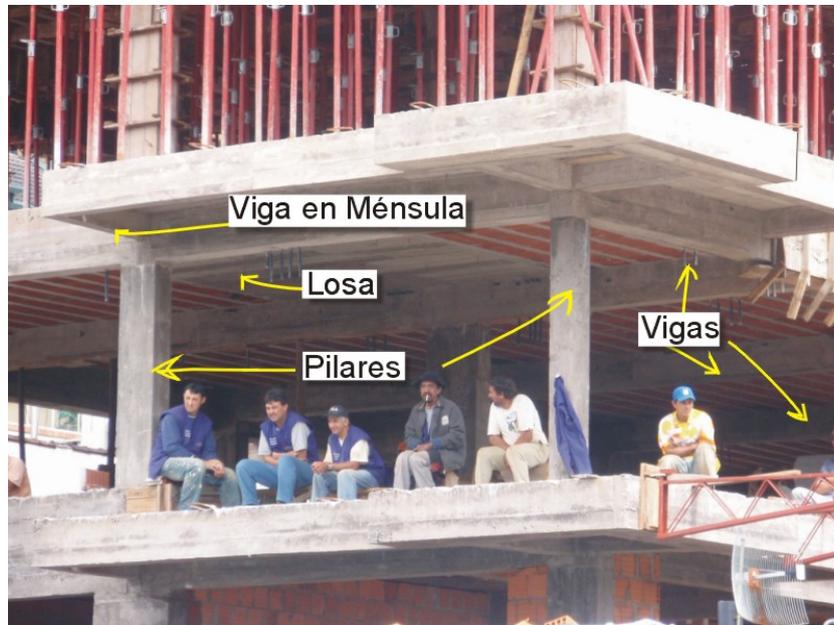


Figura 4.8: **Elaboración propia: Dominio estructural considerado para resolver el problema de Losa computacional**

Considerando que la losa es un dominio cuadrado convexo de 1 metro de lado, es decir  $\Omega = [0, 1 \text{ m}] \times [0, 1 \text{ m}] \subset \mathbb{R}^2$ , una fuerza uniformemente distribuida  $f(x, y) = -10 \text{ Ton}/\text{m}^2$ ,  $E = 2,1 \times 10^7 \text{ Ton}/\text{m}^2$  (Módulo de Young),  $\nu = 0,2$  (coeficiente de Poisson) y  $e = 0,1 \text{ m}$  (espesor de la losa).

Se considera el plano medio de la losa en su estado inicial al nivel del plano XY, luego los puntos del plano medio por efecto de la fuerza aplicada verticalmente, se desplazarán en la dirección de  $Z^-$ .

### 4.5.1. Resultados de la convergencia de los métodos multimalla V-Ciclo simétrico, W-Ciclo y F-Ciclo

Los sistemas lineales que se obtiene por la discretización del elemento finito HCT, son resueltos con los métodos multimallas V-Ciclo, W-Ciclo y F-Ciclo. En los siguientes

Cuadro 4.1: Número de contracción ( $\gamma_{m,k,v}$ ) para el algoritmo multimalla V-Ciclo para diferentes niveles de triangulación.

| $\gamma_{m,k,v}$ | $m = 1$ | $m = 4$ | $m = 7$ | $m = 10$ | $m = 13$ | $m = 16$ | $m = 19$ | $m = 22$ |
|------------------|---------|---------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $k = 2$          | 0.9707  | 0.8930  | 0.8345  | 0.7742   | 0.7416   | 0.7213   | 0.6871   | 0.6541   |
| $k = 3$          | 0.9757  | 0.8961  | 0.8346  | 0.7778   | 0.7414   | 0.7254   | 0.6878   | 0.6545   |
| $k = 4$          | 0.9723  | 0.8990  | 0.8458  | 0.7880   | 0.7497   | 0.7209   | 0.6891   | 0.6527   |
| $k = 5$          | 0.9705  | 0.8975  | 0.8469  | 0.7713   | 0.7349   | 0.7273   | 0.6804   | 0.6575   |

se aprecian los cálculos de los números de contracción y se muestran los resultados de convergencia para los métodos multimallas, para distintas triangulaciones del dominio. Se muestran el decrecimiento uniforme de los números de contracción a medida que se incrementa el número de pasos  $m$  pre-suaves y pos-suaves.

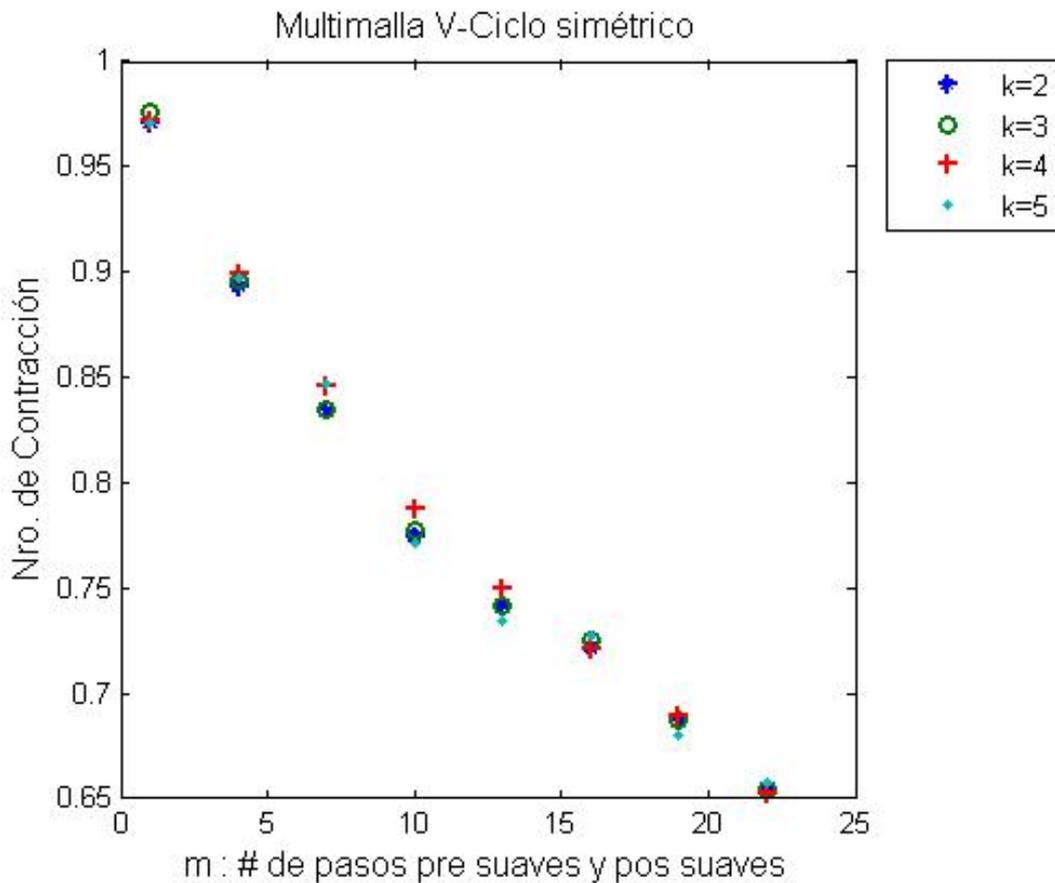


Figura 4.9: Decrecimiento uniforme del Nro. de Contracción para el V-Ciclo

Cuadro 4.2: Número de contracción ( $\gamma_{m,k,v}$ ) para el algoritmo multimalla W-Ciclo para diferentes niveles de triangulación.

| $\gamma_{m,k,v}$ | $m = 1$ | $m = 4$ | $m = 7$ | $m = 10$ | $m = 13$ | $m = 16$ | $m = 19$ | $m = 22$ |
|------------------|---------|---------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $k = 2$          | 0.9707  | 0.8988  | 0.8332  | 0.7772   | 0.7406   | 0.7274   | 0.6874   | 0.6523   |
| $k = 3$          | 0.9757  | 0.8954  | 0.8375  | 0.7758   | 0.7414   | 0.7221   | 0.6854   | 0.6598   |
| $k = 4$          | 0.9793  | 0.8990  | 0.8386  | 0.7811   | 0.7497   | 0.7239   | 0.6874   | 0.6532   |
| $k = 5$          | 0.9695  | 0.8956  | 0.8324  | 0.7893   | 0.7449   | 0.7222   | 0.6895   | 0.6544   |

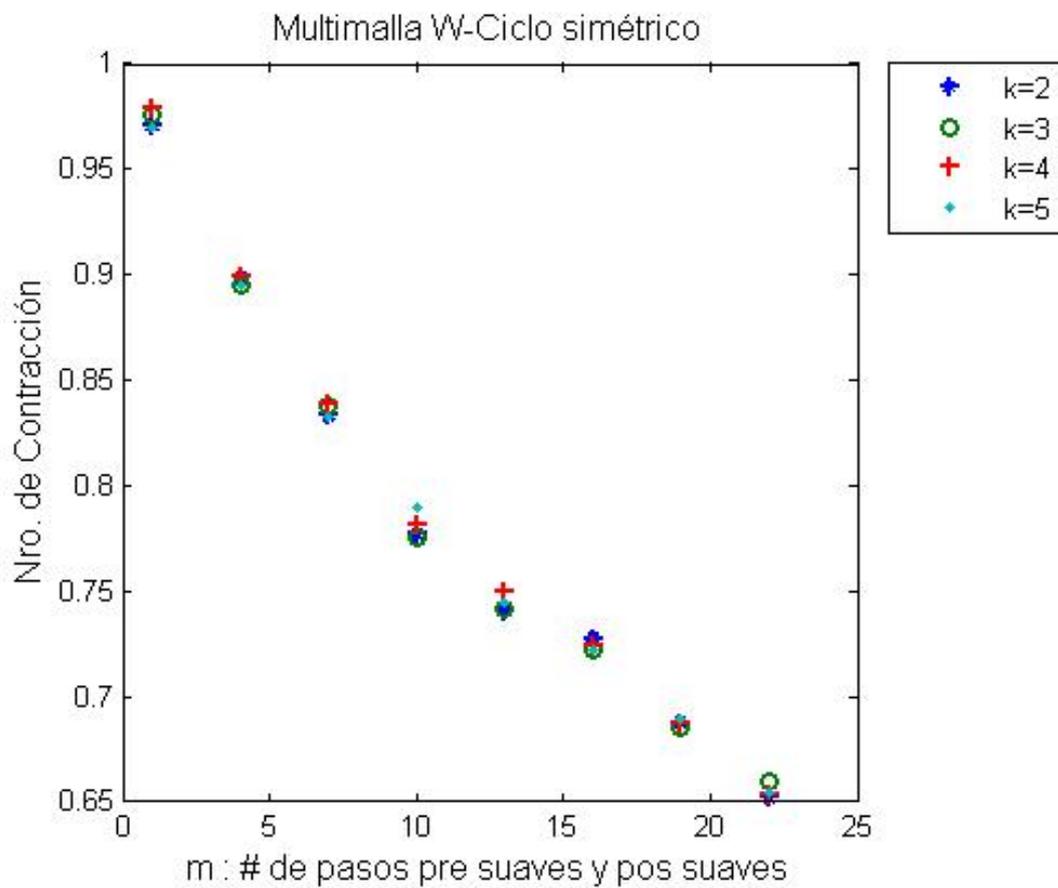


Figura 4.10: Decrecimiento uniforme del Nro. de Contracción para el W-Ciclo

Cuadro 4.3: Número de contracción ( $\gamma_{m,k,v}$ ) para el algoritmo multimalla F-Ciclo para diferentes niveles de triangulación.

| $\gamma_{m,k,v}$ | $m = 1$ | $m = 4$ | $m = 7$ | $m = 10$ | $m = 13$ | $m = 16$ | $m = 19$ | $m = 22$ |
|------------------|---------|---------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $k = 2$          | 0.9754  | 0.8976  | 0.8354  | 0.7765   | 0.7474   | 0.7299   | 0.6854   | 0.6565   |
| $k = 2$          | 0.9837  | 0.8943  | 0.8390  | 0.7764   | 0.7477   | 0.7267   | 0.6885   | 0.6484   |
| $k = 2$          | 0.9854  | 0.8843  | 0.8323  | 0.7832   | 0.7445   | 0.7274   | 0.6704   | 0.6443   |
| $k = 2$          | 0.9865  | 0.8975  | 0.8354  | 0.7824   | 0.7464   | 0.7244   | 0.6785   | 0.6463   |

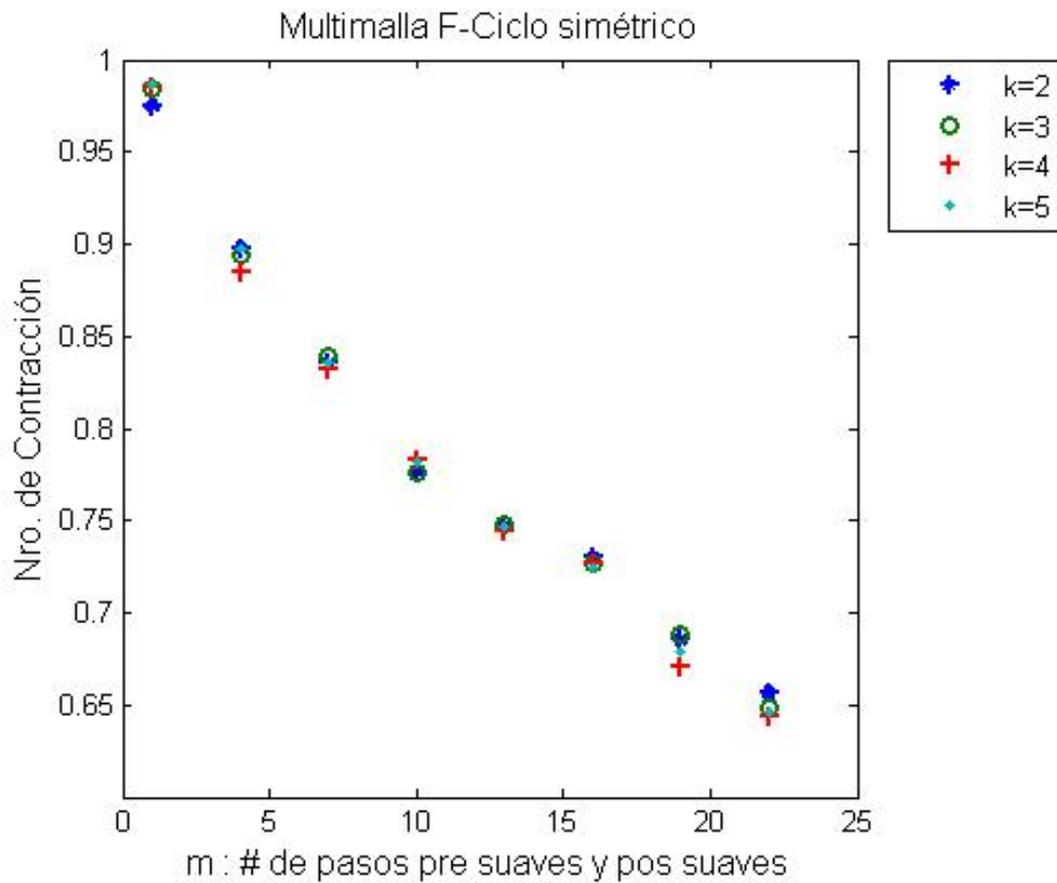


Figura 4.11: Decrecimiento uniforme del Nro. de Contracción para el F-Ciclo

En el cuadro (4.1), cuadro (4.2) y cuadro (4.3), se puede ver que los algoritmos convergen para  $m$  tan pequeño como 1, así también se puede apreciar de las tres

Cuadro 4.4: Constante  $C = 5$  independiente de la malla para el V-Ciclo.

| $m^{1/2}\gamma_{m,k,v}$ | $m = 16$ | $m = 19$ | $m = 22$ | $m = 40$ | $m = 60$ | $m = 80$ | $m = 100$ |
|-------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| $k = 2$                 | 2.88     | 2.99     | 3.06     | 3.85     | 4.02     | 3.55     | 3.12      |
| $k = 3$                 | 2.90     | 2.99     | 3.06     | 3.95     | 4.23     | 3.59     | 3.21      |
| $k = 4$                 | 2.88     | 3.00     | 3.06     | 3.84     | 4.12     | 3.51     | 3.12      |
| $k = 5$                 | 2.90     | 2.96     | 3.08     | 3.89     | 4.02     | 3.61     | 3.16      |

Cuadro 4.5: Constante  $C = 5$  independiente de la malla para el F-Ciclo.

| $m^{1/2}\gamma_{m,k,v}$ | $m = 16$ | $m = 19$ | $m = 22$ | $m = 40$ | $m = 60$ | $m = 80$ | $m = 100$ |
|-------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| $k = 2$                 | 2.91     | 2.98     | 3.07     | 3.73     | 4.18     | 3.39     | 2.91      |
| $k = 3$                 | 2.90     | 3.00     | 3.04     | 3.74     | 4.21     | 3.41     | 3.03      |
| $k = 4$                 | 2.90     | 2.92     | 3.02     | 3.80     | 4.22     | 3.38     | 3.12      |
| $k = 5$                 | 2.89     | 2.95     | 3.03     | 3.82     | 4.29     | 3.44     | 2.96      |

tablas, que la proporción de convergencia son casi los mismos.

En el cuadro (4.4) y el cuadro (4.5) se muestran los resultados numéricos del teorema (2.1.9) y del teorema (2.1.10), que mencionan la existencia de una constante  $C$  independiente de la malla y del número de pasos pre y pos suaves en la multimalla, a partir de un  $m^*$  suficientemente grande tal que  $m^{1/2}\gamma_{m,k,v} \leq C$ .

Para estos resultados se asume que el índice de regularidad elíptica  $\alpha = 1$ , ya que este dominio  $\Omega$  es poligonal convexo (resultado teórico visto en [3]).

#### 4.5.2. Deformadas de la losa, curvas de nivel y curvas asintóticas

Los resultados se mostrarán para dos niveles de mallas:

|               | N° de elementos<br>triangulares totales | Orden de la<br>matriz $Ah$ | Número de condición<br>de la matriz $Ah$ |
|---------------|---|----------------------------|--|
| Nivel $k = 4$ | 200                                     | 484                        | $7,6480 \times 10^7$                     |
| Nivel $k = 5$ | 648                                     | 1444                       | $2,5069 \times 10^8$                     |

En los gráficos de la Fig.(4.12) se muestran las deformaciones y sus curvas de nivel de la losa, donde los sistemas lineales fueron resueltos con el **método multimalla V-Ciclo** en un nivel de malla  $k = 4$  para  $m = 6$  y  $m = 20$  pasos pre-suaves y pos-suaves en el algoritmo.

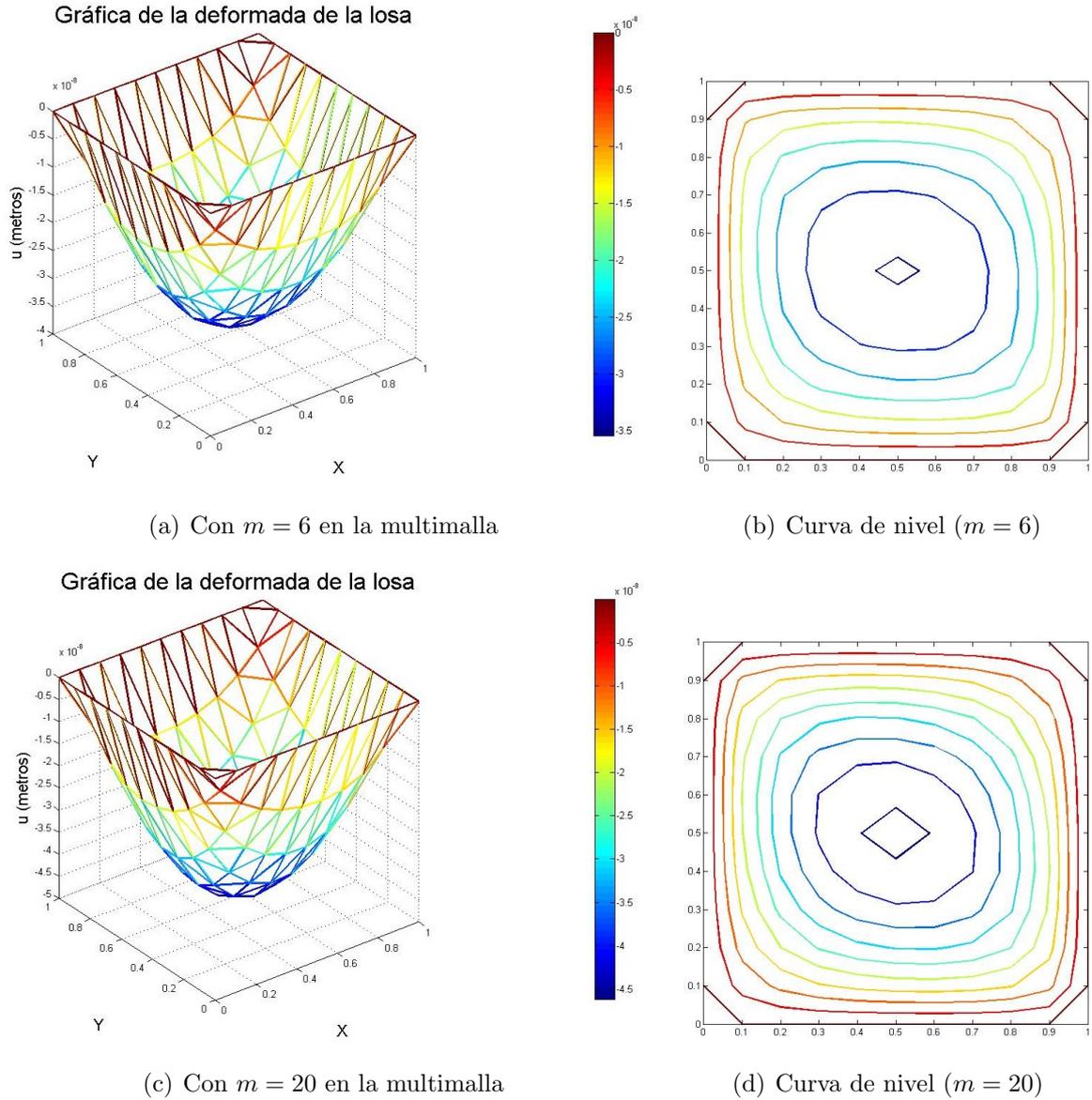


Figura 4.12: Usando V-Ciclo en el nivel  $k = 4$ , con 200 elementos

En los gráficos de la Fig.(4.13) se muestran las deformaciones y sus curvas de nivel de la losa, donde los sistemas lineales fueron resueltos con el **método multimalla V-Ciclo** en un nivel de malla  $k = 5$  para  $m = 6$  y  $m = 20$  pasos pre-suaves y pos-suaves

en el algoritmo.

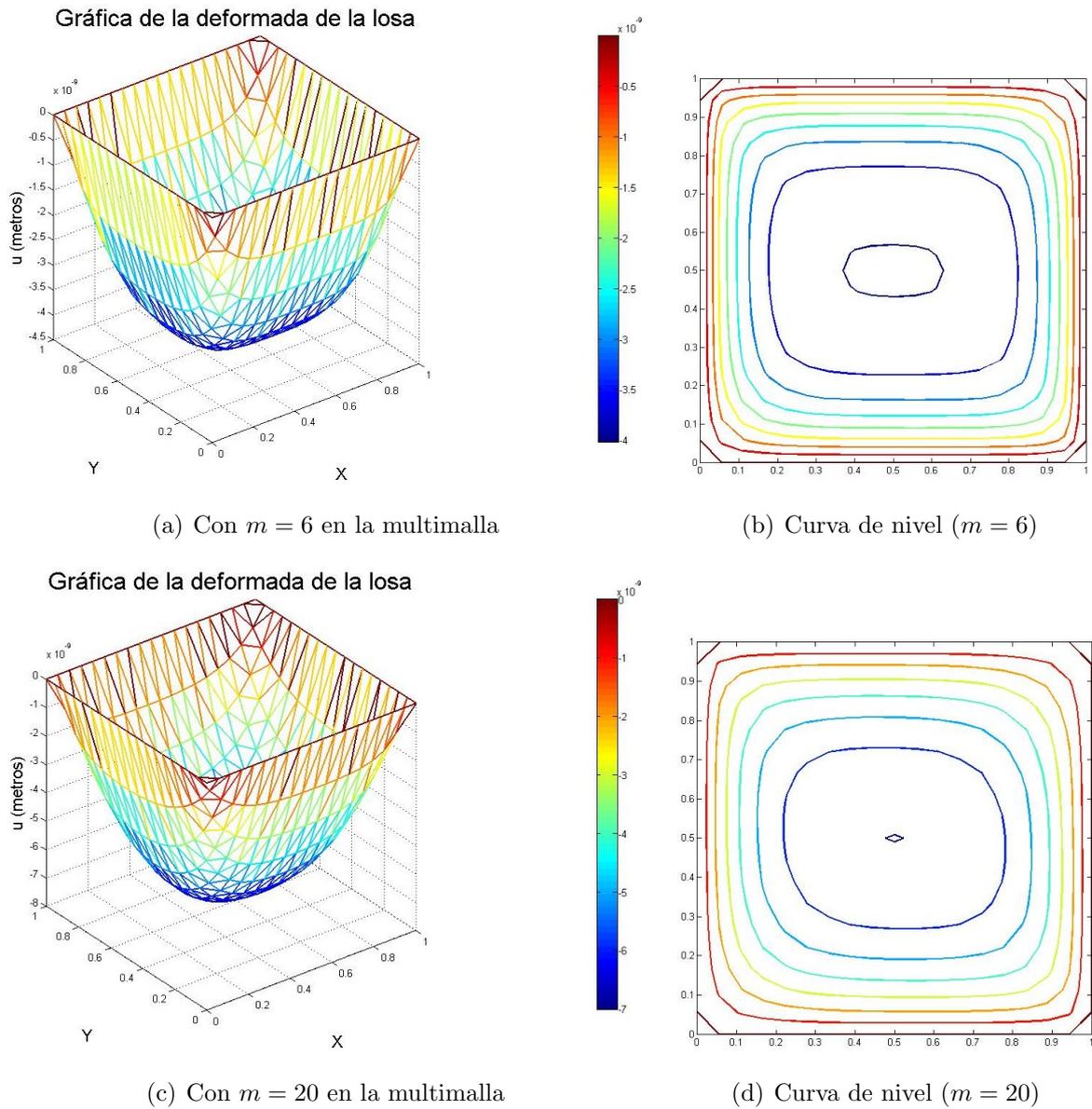


Figura 4.13: Usando V-Ciclo en el nivel  $k = 5$ , con 648 elementos

En los gráficos de la Fig.(4.14) se muestran las deformaciones y sus curvas de nivel de la losa, donde los sistemas lineales fueron resueltos con el **método multimalla W-Ciclo** en un nivel de malla  $k = 4$  para  $m = 6$  y  $m = 20$  pasos pre-suaves y

pos-suaves en el algoritmo.

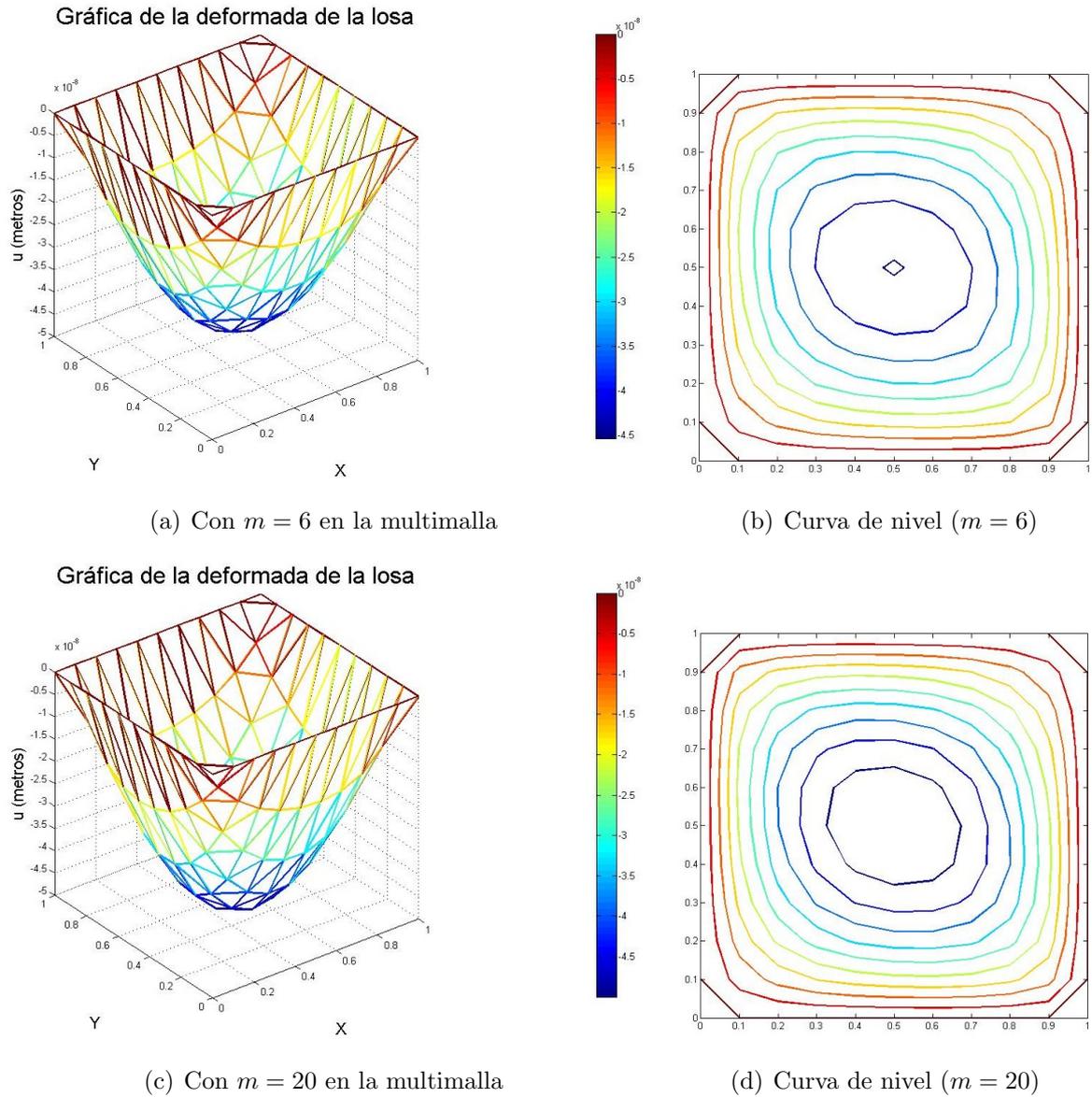


Figura 4.14: Usando W-Ciclo en el nivel  $k = 4$ , con 200 elementos

En los gráficos de la Fig.(4.15) se muestran las deformaciones y sus curvas de nivel de la losa, donde los sistemas lineales fueron resueltos con el **método multimalla W-Ciclo** en un nivel de malla  $k = 5$  para  $m = 6$  y  $m = 20$  pasos pre-suaves y pos-suaves

en el algoritmo.

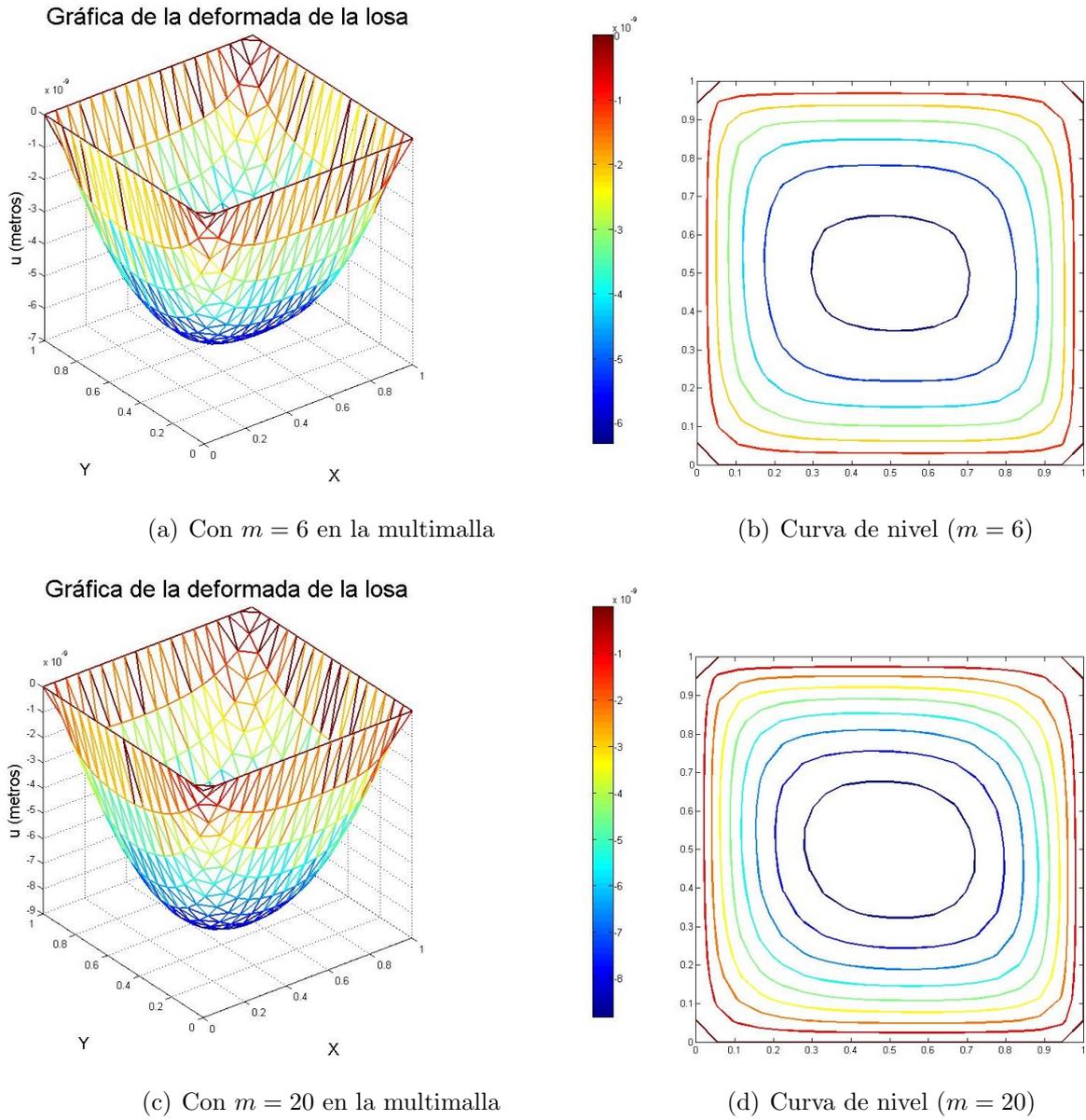


Figura 4.15: Usando W-Ciclo en el nivel  $k = 5$ , con 648 elementos

En los gráficos de la Fig.(4.16) se muestran las deformaciones y sus curvas de nivel de la losa, donde los sistemas lineales fueron resueltos con el **método multimalla F-Ciclo** en un nivel de malla  $k = 4$  para  $m = 6$  y  $m = 20$  pasos pre-suaves y pos-suaves

en el algoritmo.

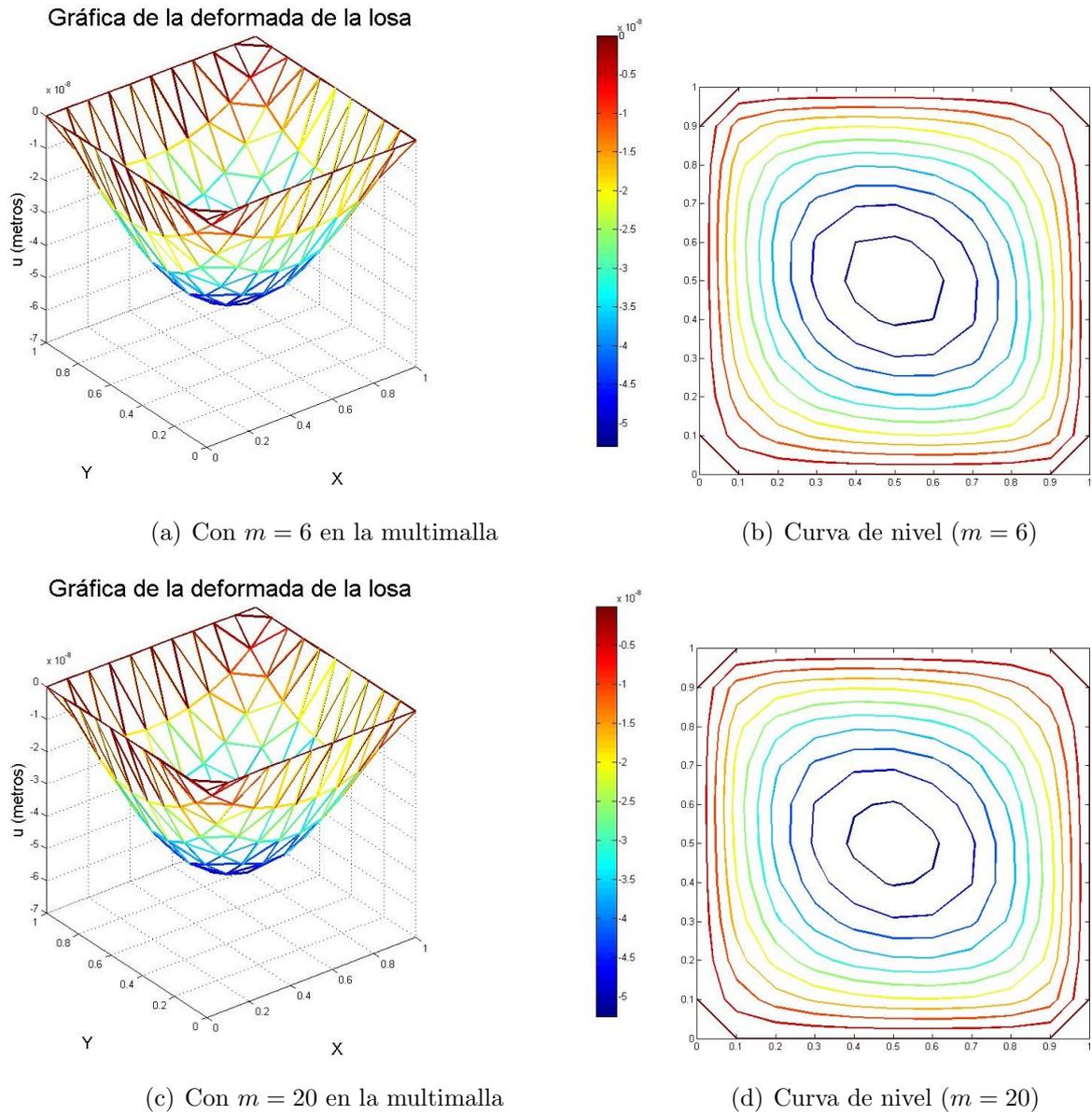


Figura 4.16: Usando F-Ciclo en el nivel  $k = 4$ , con 200 elementos

En los gráficos de la Fig.(4.17) se muestran las deformaciones y sus curvas de nivel de la losa, donde los sistemas lineales fueron resueltos con el **método multimalla F-Ciclo** en un nivel de malla  $k = 5$  para  $m = 6$  y  $m = 20$  pasos pre-suaves y pos-suaves

en el algoritmo.

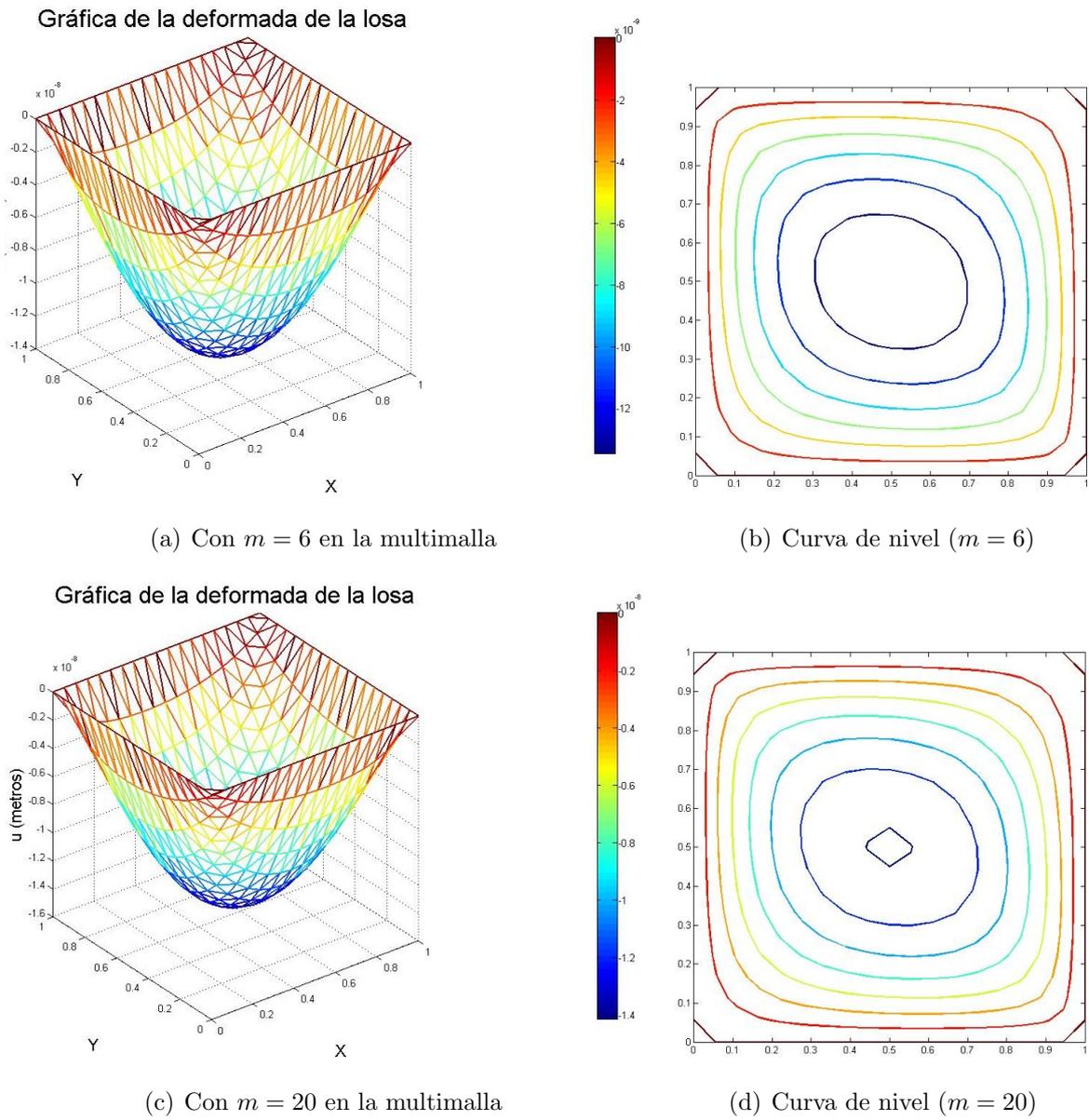


Figura 4.17: Usando F-Ciclo en el nivel  $k = 5$ , con 648 elementos

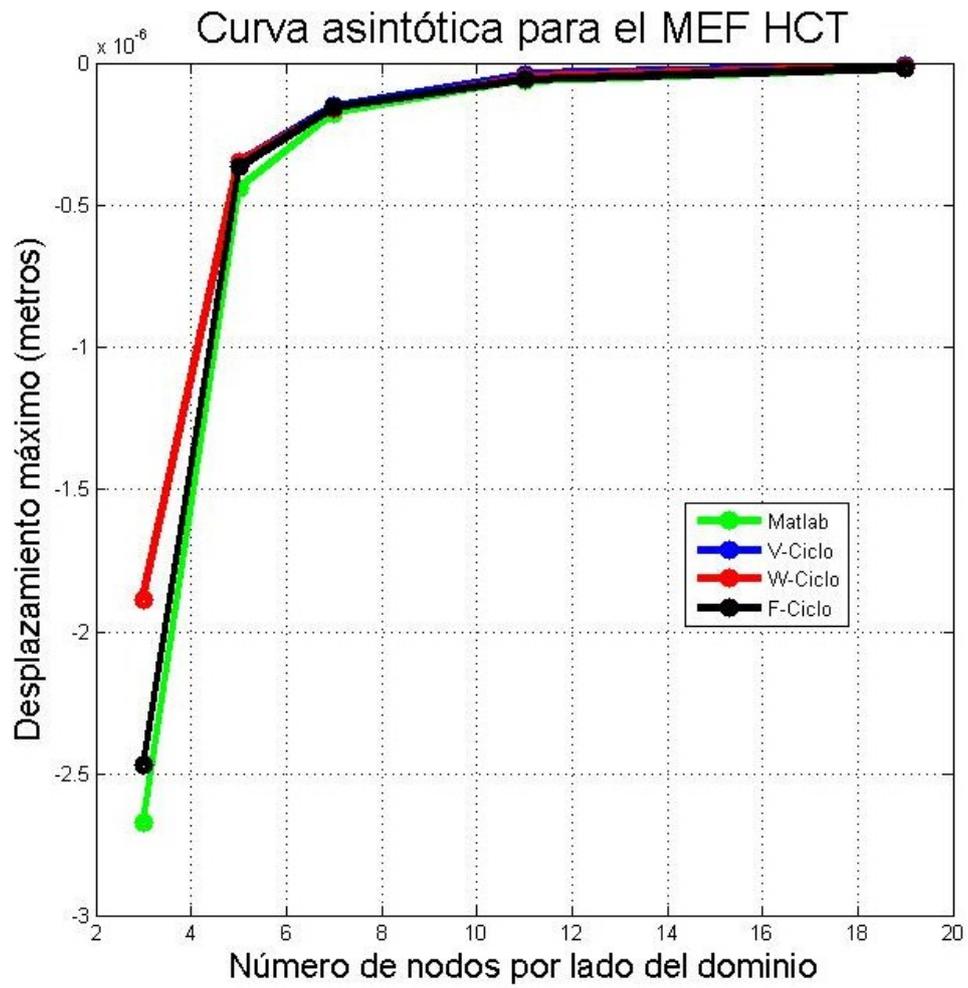


Figura 4.18: Asintoticidad de las curvas, para  $m=6$  en las multimallas

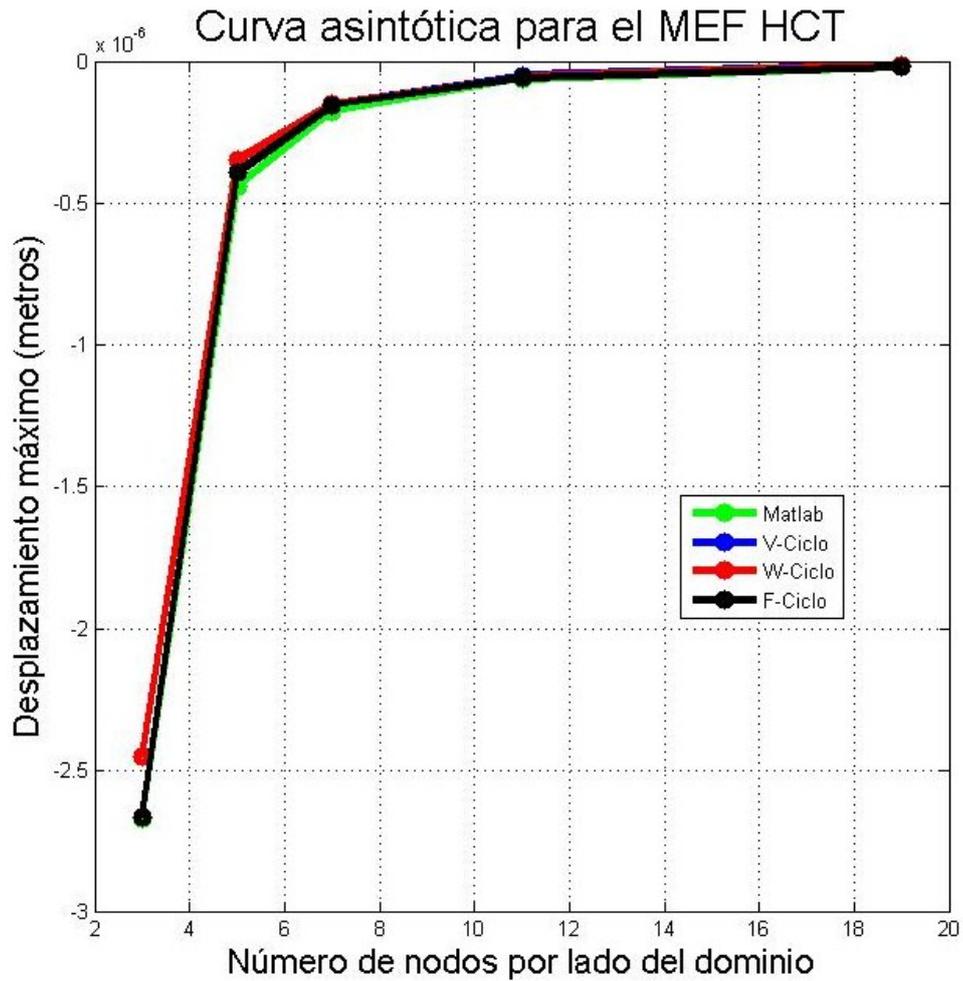
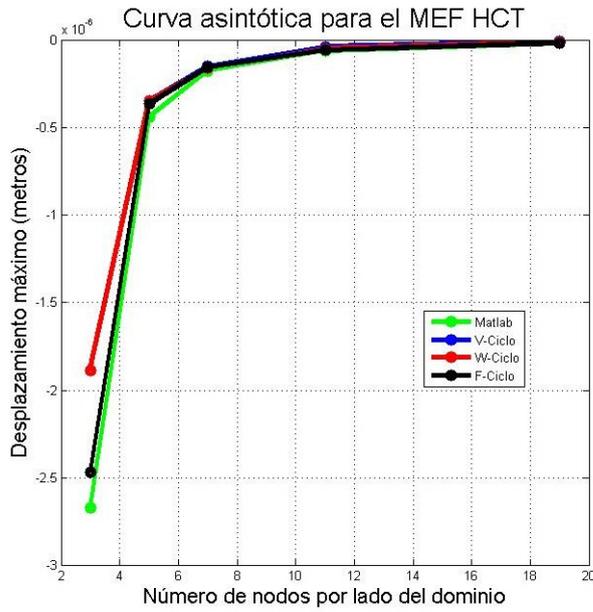
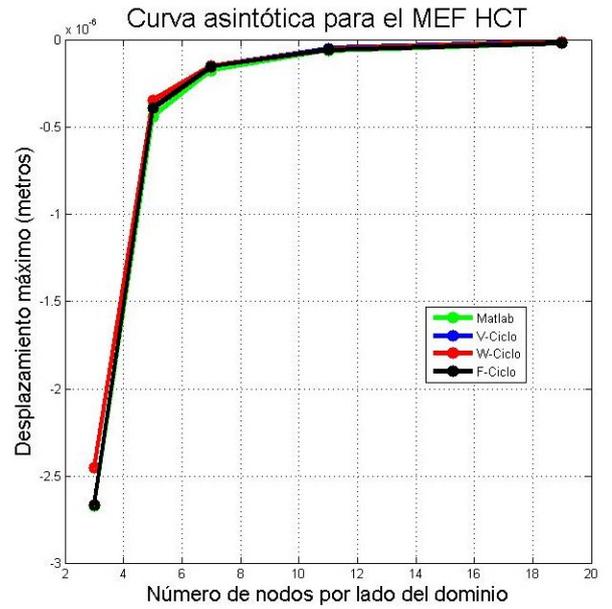


Figura 4.19: Asintoticidad de las curvas, para  $m=20$  en las multimallas

En la figura Fig.(4.20), se pueden comparar los comportamientos de las asintoticidades de las curvas y se puede ver que para el nivel de malla  $k = 5$  todas coinciden, para cual sea el valor del número de pasos pre-suaves y pos-suaves en las multimallas.



(a) Con  $m = 6$  para las multimallas



(b) Con  $m = 20$  para las multimallas

Figura 4.20: Comparando las asintoticidades de las curvas

---

#### Algoritmo 5 Principal HCT - Multimallas

---

1. **Definir el dominio:** Nivel de la malla ( $k$ )     $X \leftarrow [0, 1]$      $Y \leftarrow [0, 1]$
  2. **Triangulación de dominio:**

$$[N^{\circ}\text{Triángulos}, \text{Triángulos}] \leftarrow \mathbf{Triangulación}(X, Y)$$
  3. **Asignar:**  $E \leftarrow 2,1 \times 10^7$      $\nu \leftarrow 0,2$      $ee \leftarrow 0,1$
  4. **Desde**  $i = 1, 2, \dots, N^{\circ}\text{Triángulos}$  **hacer**

$$v \leftarrow \mathbf{Coordenadas}(\text{Triángulo}(i))$$

$$[Ke_i, Fe_i] \leftarrow \mathbf{KyF}(v, E, ee, \nu)$$
  5.  $K \leftarrow \mathbf{Ensamblar}(Ke_i)$      $F \leftarrow \mathbf{Ensamblar}(Fe_i)$
  6.  $u \leftarrow \mathbf{Solucionar\ sistema\ lineal}(K, F)$
  7.  $Z \leftarrow \mathbf{Selección\ de\ los\ desplazamientos}(u)$
  8. **Graficar:**  $(X, Y, Z)$
-

# Capítulo 5

## Conclusiones y recomendaciones

1. El elemento finito HCT, por sus propiedades del operador de interpolación nodal hace que sea apropiado para resolver problemas de cuarto orden. Siendo sus funciones de forma implícitas y dependerá de las coordenadas de cada elemento. Las coordenadas de área fueron de gran ayuda por su expresión breve y clara para el cálculo de sus derivadas, y por la simplicidad en la cuadratura.
2. La matriz global del sistema lineal, que resulta de aplicar el elemento HCT al problema biarmónico, es simétrica y definida positiva de orden muy alto y con un número de condición tan grande, que indica que estos sistemas están mal condicionados y que con los métodos iterativos clásicos no se obtienen buenos resultados, es por ello que se utilizan los métodos multimallas.
3. Las matrices globales de los sistemas lineales son del orden muy alto ( $[2(n-1)^2]4$  versus  $n^2$ ) con respecto a los nodos totales en la malla, por lo cual se optó por usar multimallas algebraicas, ya que ellas no requieren alguna información de la matriz con respecto a malla, aunque siguen el mismo proceso de un multimalla geométrico.
4. En los resultados numéricos se verifica, la convergencia de los métodos multimalla V-Ciclo y F-Ciclo y que sus números de contracción ( $\gamma_{m,k,v}$ ) decrecen uniformemente como el número de pasos suaves ( $m$ ) aumenta para cualquier nivel de malla. Así también, se verifica que para un número de pasos suaves  $m$  lo suficientemente grande, el número de contracción es menor o igual que  $\frac{C}{m^{\alpha/2}}$  siendo  $C$  una constante independiente de  $m$  y del nivel de la malla  $k$ .

5. Por la mejor distribución y definición de las curvas de nivel, se puede decir que el método multimalla F-Ciclo es que resuelve mejor los sistemas lineales del elemento HCT.
6. Se sugiere usar como un suavizador en los algoritmos multimalla, el método de Relajación de Richardson, por la simplicidad de su algoritmo. También puede usarse el algoritmo de Jacobi (SORJacobi) con  $w = 2/3$  como el coeficiente de relajación.
7. Puede usarse para la triangulación del dominio la función de matlab DelaunayTri, por su facilidad en triangular y su confiabilidad respecto a otras triangulaciones, sin embargo numera los elementos triangulares aleatoriamente ocasionando que se dispersen de la diagonal los elementos no nulos de la matriz global y por lo tanto no teniéndose buenos resultados en la solución del sistema. Por esta razón, se programó un mallado apropiado.
8. Finalmente, los resultados de la deformada de la losa, va depender: De un buen mallado del dominio donde la numeración de sus elementos sean los más cercanos posibles, la transformación de elementos triangulares, la elección de un buen método de relajación para las multimallas y la cuadratura que se elija.

# Anexo



También se tiene

$$\frac{d}{dx} \ln(mx) = \frac{1}{x}, \quad \text{luego} \quad \frac{d}{dx} \{\ln(mx)\} \Big|_{x=\frac{1}{m}} = m \quad (1.3)$$

Así la recta tangente a la curva  $y = \ln(mx)$  en  $x = \frac{1}{m}$  es  $y = mx - 1$ . Entonces

$$\ln(mx) \leq mx - 1 \quad (1.4)$$

ver figura (1.1).

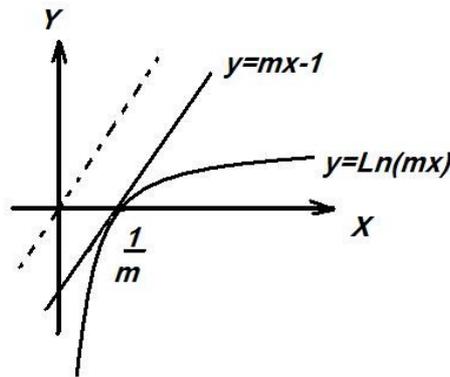


Figura 1.1:  $y = \ln(mx)$ ,  $x \in [0, 1]$ , siendo  $m \in \mathbb{Z}^+$

De la expansión de Taylor, teniéndose que  $0 < x < 1$

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$\implies \ln(1 - x) < -x$$

$$\implies -\ln(1 - x) > x \implies -\frac{1}{\ln(1 - x)} < \frac{1}{x}$$

multiplicando por  $\ln(mx) > 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} -\frac{\ln(mx)}{\ln(1-x)} &< \frac{\ln(mx)}{x} \\ &\leq \frac{mx-1}{x}, \text{ por (1.4)} \\ &= m - \frac{1}{x} \\ &< m \end{aligned}$$

Y se muestra (1.1).

Finalmente con (i) y (ii) queda demostrado.  $\square$

**Afirmación 1.0.2** *Siendo  $0 \leq x \leq 1$ ,  $m \in \mathbb{Z}^+$  y  $0 \leq t \leq s \leq 4$ , se cumple*

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} [(1-x)^{2m} x^{(s-t)/2}] < m^{-(s-t)/2} \quad (1.5)$$

Demostración

Si  $x = 0$  ó  $x = 1$ , se verifica la desigualdad (1.5).

Si  $0 < x < 1$ , se tiene:

a) Si  $t = s$ :

Se tiene  $0 < x < 1$  entonces  $0 < 1-x < 1$ , luego

$$\begin{aligned} (1-x)^{2m} x^{(s-t)/2} &= (1-x)^{2m} \\ &< 1, \text{ pues } 0 < 1-x < 1 \\ &= m^0, \quad m \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

De esta manera  $\sup_{0 < x < 1} [(1-x)^{2m} x^{(s-t)/2}] < m^{-(s-t)/2}$ ,  $\forall m \in \mathbb{Z}^+$

b) Si  $t \neq s$ :

Se tiene que  $0 \leq t < s \leq 4$  entonces  $0 < s-t \leq 4$  luego se verifica

$$m \leq \frac{4m}{s-t} \quad (1.6)$$

De la Afirmación (1.0.1), ecuación (1.1), se tiene:

$$\begin{aligned} -\frac{\ln(mx)}{\ln(1-x)} &< m \\ &\leq \frac{4m}{s-t}, \text{ por (1.6)} \\ &= \frac{2m}{\left(\frac{s-t}{2}\right)} \end{aligned}$$

Sea  $\beta = \frac{s-t}{2}$ , además  $\beta > 0$  entonces de lo anterior se tiene

$$-\frac{\ln(mx)}{\ln(1-x)} < \frac{2m}{\beta}$$

luego

$$-\beta \frac{\ln(mx)}{\ln(1-x)} < 2m$$

multiplicando por  $\ln(1-x)$  que es negativo:

$$-\beta \ln(mx) > 2m \ln(1-x)$$

$$\implies \ln(mx)^{-\beta} > \ln(1-x)^{2m}, \text{ por propiedad de los logaritmos}$$

así

$$0 > \ln(1-x)^{2m} - \ln(mx)^{-\beta}$$

$$= \ln\left[\frac{(1-x)^{2m}}{(mx)^{-\beta}}\right], \text{ por propiedad de los logaritmos}$$

quedando

$$\ln\left[\frac{(1-x)^{2m}}{(mx)^{-\beta}}\right] < 0 = \ln(1)$$

y como la función logaritmo es creciente, se cumple

$$\frac{(1-x)^{2m}}{(mx)^{-\beta}} < 1 \implies (1-x)^{2m}(mx)^{\beta} < 1 \implies (1-x)^{2m}(x)^{\beta}(m)^{\beta} < 1$$

de la última relación

$$(1-x)^{2m}(x)^{\beta} < (m)^{-\beta}$$

reemplazando el valor de  $\beta = \frac{s-t}{2}$ , queda

$$(1-x)^{2m} x^{\frac{s-t}{2}} < \underbrace{m^{-\frac{s-t}{2}}}_{\text{cota superior}}, \quad \forall x \in \langle 0, 1 \rangle$$

de esta manera

$$\sup_{0 < x < 1} [(1-x)^{2m} x^{(s-t)/2}] < m^{-(s-t)/2}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+$$

Finalmente se demuestra la desigualdad (1.1)  $\square$

### Desigualdad 1.0.1

$$2ab \leq \theta^2 a^2 + \theta^{-2} b^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \theta \in \langle 0, 1 \rangle \quad (1.7)$$

Demostración

Sea  $0 < \theta < 1$  y  $a, b \in \mathbb{R}$

$$0 \leq (a\theta - \theta^{-1}b)^2 = a^2\theta^2 + \theta^{-2}b^2 - 2ab\theta\theta^{-1}$$

$$\implies 0 \leq a^2\theta^2 + \theta^{-2}b^2 - 2ab$$

$$\implies 2ab \leq a^2\theta^2 + \theta^{-2}b^2 \quad \square$$

### Desigualdad 1.0.2

$$(a+b)^2 \leq (1+\theta^2)a^2 + (1+\theta^{-2})b^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \theta \in \langle 0, 1 \rangle \quad (1.8)$$

Demostración

Sea  $0 < \theta < 1$  y  $a, b \in \mathbb{R}$

$$\text{De (1.7):} \quad 2ab \leq \theta^2 a^2 + \theta^{-2} b^2$$

$$\implies \underbrace{a^2 + b^2 + 2ab} \leq a^2 + b^2 + \theta^2 a^2 + \theta^{-2} b^2$$

$$\implies (a+b)^2 \leq (1+\theta^2)a^2 + (1+\theta^{-2})b^2 \quad \square$$

### Desigualdad 1.0.3

$$(a+b)^2 \leq (1+\theta^2)a^2 + C\theta^{-2}b^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \theta \in \langle 0, 1 \rangle, \quad C = \text{alguna cte.} \quad (1.9)$$

Demostración

Sea  $0 < \theta < 1$  y  $a, b \in \mathbb{R}$

Si  $C = \theta^2 + 1$ , por la desigualdad (1.0.2) se sigue

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &\leq (1+\theta^2)a^2 + (1+\theta^{-2})b^2 \\ &= (1+\theta^2)a^2 + \theta^{-2} \underbrace{(1+\theta^2)}_C b^2 \\ &= (1+\theta^2)a^2 + C\theta^{-2}b^2 \quad \square\end{aligned}$$

# Bibliografía

- [1] AGMON, S., *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems*. (Van Nostrand, Princeton, 1965).
- [2] ALBERTO CARDONA, *Introducción al Método de los Elementos Finitos*. Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería. (20 de setiembre de 2004).
- [3] CONSTANTIN BACUTA - JAMES H. BRAMBLE - JOSEPH E. PASCIAK, *Shift Theorems for the Biharmonic Dirichlet Problem*, Recent Progress in Computational and Applied PDES - Zhangjiajie July 2001.
- [4] CONSTANTIN BACUTA, *Subspace Interpolation with Applications to Elliptic Regularity*, Diciembre 2007.
- [5] FERDINAND KICKINGER, *Algebraic Multigrid Solver for Discrete Elliptic Second Order Problems*, Institut für Mathematik - Johannes Kepler Universität Linz, 1998
- [6] GUNDOLF HAASE, *Multigrid Methods: From Geometrical to Algebraic Versions.*, Institute of Computational Mathematics - Johannes Kepler University of Linz. Altenbergerstr. 69, A-4040 Linz, Austria, 2006.
- [7] P. W. HEMKER, *Introduction to Multigrid Methods*, Nieuw Archief Voor Wiskunde (3), XXIX (1981), 71-101.
- [8] KLAUS STUBEN, *Algebraic Multigrid: Multigrid Methods and Parallel Computing*, Fraunhofer Institute SCAI - Schloss Birlinghoven, September 14-16, 2009.
- [9] HAIM BRÉZIS. *Análisis funcional, teoría y aplicaciones*. Ed.Cast.:Alianza Editorial, S.A. Madrid 1984

- [10] IRLA MANTILLA, *Generación de un mallado optimo para la resolución numérica de problemas de contorno mediante elementos finitos*, Revista TECNIA, Vol. 10, N° 1, pp-15-21 (2000).
- [11] IZSÁK FERENC, *Fractional Order Sobolev Spaces*. Thesis - Matematikys MSc - Budapest (2012)
- [12] JAMES H. BRAMBLE - XUEJUN ZHANG, *The Analysis of multigrid Methods*, Texas AM University, College Station, TX 77843, 1997.
- [13] JIE ZHAO, *Multigrid Methods for Fourth Order Problems* Electronic Transactions on Numerical analysis. Volume 7, 1998 pp. 40-55.
- [14] JONATHAN COHEN and JOHN GOSSELIN, *The Dirichlet Problem for the Biharmonic Equation in a  $C^1$  Domain in the Plane*. Indiana University Mathematics Journal. Vol 32. No 5. (1983).
- [15] JOSÉ RAFAEL TORO GÓMEZ, *Problemas Variacionales y elementos finitos en Ingeniería Mecánica*. Ediciones Uniandes, Universidad de los Andes. Facultad de Ingeniería. Departamento de Ingeniería Mecánica, 2007.
- [16] LUIS FERRAGUT CANALS Y MABEL ASENSIO SEVILLA, *Métodos Numéricos para Ecuaciones en Derivadas Parciales*. 3 de setiembre de 2007
- [17] MICHAEL BERNADOU - KAMAL HASSAN, *Basis Functions for general Hsieh-Clough-Tocher triangles, Complete or reduced*. Rapports de Recherche N°5 (1980)
- [18] PHILIPPE G. CIARLET, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, Université Pierre et Marie Curie, Paris-France, SIAM (2002).
- [19] ROBERT D. FALGOUT, *An Introduction to Algebraic Multigrid*, Computing in Science and Engineering. Lawrence Livermore National Laboratory. W-7405-Eng-48. April 25, 2006.
- [20] SUSANNE C. BRENNER. AND CARSTEN CARSTENSEN, *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Fundamentals (2004) Vol 1.
- [21] SUSANNE C. BRENNER. , *Convergence of the Multigrid V-Cycle Algorithm for second-order boundary value problems without full Elliptic Regularity.*, MATHEMATICS OF COMPUTATION. Vol 71, Number 238, Pages 507-525 - 2001.

- [22] SUSANNE C. BRENNER. L. RIDGWAY SCOTT, *The Mathematical theory of finite Element Methods*, TAM, Third Edition Springer-Verlag, 2008
- [23] J. R. WHITEMAN, *Conforming finite element methods for the clamped plate problem*. Technical University of Clausthal in September, 1974.
- [24] ZIENKIEWICZ-TAYLOR, *El Método de los Elementos Finitos. Formulación Básica y Problemas Lineales* Volumen 1 - 4ta. Edición. (1994)
- [25] ZIENKIEWICZ, *The Dirichlet Problem for the Biharmonic Equation in a  $C^1$  Domain in the Plane*. Indiana University Mathematics Journal. Vol 32. No 5. (1983).