

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL**



TESIS

**“ESTUDIO DE LA RESPUESTA ESTRUCTURAL DE
EDIFICIOS TIPO CORTE SIMPLE MEDIANTE MÉTODOS
DE ANÁLISIS CUALITATIVO DE ECUACIONES
DIFERENCIALES”**

**PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE
INGENIERO CIVIL**

ELABORADO POR

KEVIN LUIS MISAICO SAIRITUPAC

ASESOR

MSc. LEONARDO FLORES GONZALEZ

Lima- Perú

2021

RESUMEN

La simulación de la respuesta estructural frente a eventos sísmicos en edificaciones requiere resolver ecuaciones diferenciales utilizando métodos tradicionales cuantitativos obteniendo respuestas netamente numéricas, pero sin ningún análisis que nos muestre el comportamiento estable de la solución. En esta investigación se propone analizar la solución del problema de dos formas: numérica cuantitativa (utilizando Matlab) y cualitativa. Esta última proporciona herramientas para el análisis de la estabilidad de la solución del sistema, a través de su plano de fases se puede observar el comportamiento de la solución en su proximidad al punto crítico, el teorema de Lyapunov que nos permite obtener una función que nos dé condiciones de estabilidad, el teorema de Hartman-Grobman que permite aproximar un sistema no lineal a lineal cerca del punto de equilibrio y teoremas adicionales correspondientes de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias. Como resultado tendremos tres tipos de soluciones; inestables (ausencia de estabilidad), estables y asintóticamente estables, las dos últimas de vital importancia en obras de ingeniería civil, los comportamientos dinámicos de las estructuras deben ser seguras y estables durante y después de la acción del sismo, u otro tipo de fuerza externa (viento, explosión, tsunami). Por último, se estudiará la teoría del control que nos permitirá estabilizar sistemas lineales, incorporando al sistema dinámico un control que mande una señal eléctrica al actuador (ejemplo: disipador activo magneto-reológico) contrarrestando el movimiento que proviene de las fuerzas externas (sísmicas, viento etc.) y asegurando así la estabilidad del sistema dinámico.

ABSTRACT

The simulation of the structural response to seismic events in buildings requires solving differential equations using traditional quantitative methods, obtaining purely numerical responses, but without any analysis that shows us the stable behavior of the solution. In this research it is proposed to analyze the solution of the problem in two ways: quantitative numerical (using Matlab) and qualitative. The latter provides tools for the analysis of the stability of the system solution, through its phase plane the behavior of the solution can be observed in its proximity to the critical point, Lyapunov's theorem that allows us to obtain a function that give stability conditions, the Hartman-Grobman theorem that allows a nonlinear system to be approximated to linear near the equilibrium point and corresponding additional theorems of the qualitative theory of ordinary differential equations. As a result, we will have three types of solutions; unstable (lack of stability), stable and asymptotically stable, the last two of vital importance in civil engineering works, the dynamic behavior of the structures must be safe and stable during and after the action of the earthquake, or another type of external force (wind, explosion, tsunami). Finally, the theory of control will be studied that will allow us to stabilize linear systems, incorporating into the dynamic system a control that sends an electrical signal to the actuator (example: active magneto-rheological dissipator) counteracting the movement that comes from external forces (seismic, wind etc.) and thus ensuring the stability of the dynamic system.

PRÓLOGO

El resultado del estudio de la respuesta estructural mediante métodos cualitativos proporciona herramientas importantes como el plano de fases que nos muestra el comportamiento de las soluciones en su proximidad al punto crítico (punto de equilibrio), el plano de fases también nos muestra los puntos máximos y mínimos de la solución del problema (envolvente de soluciones), esto nos permite tener una herramienta poderosa que nos muestra el comportamiento de la estabilidad y respuesta estructural en un solo gráfico.

La estabilidad de la solución de un sistema dinámico que represente un modelo estructural es de mucha importancia ya que toda edificación debe ser estable antes y durante la acción de la carga externa (viento, sismo explosiones, etc.) que interactúe con la edificación, la estabilidad de la solución es estable si la trayectoria de la solución se mantiene cerca al punto de equilibrio, para probar estas condiciones nos basamos en la teoría de sistemas autónomos aquí encontramos diferentes puntos de equilibrio (puntos nodos estables, nodos inestables, nodo estelar estable, nodo estelar inestable, sillars, centros y espirales estables e inestable).

También se realizará un estudio más general del problema de la estabilidad según la teoría propuesta por Lyapunov que permitirá obtener una función positiva para obtener condiciones de estabilidad del sistema tanto para sistemas autónomos (sistemas en vibración libre) y no autónomos (sistemas que están afectados por una fuerza externa).

Por último, nos referimos a la teoría de control que nos permitirá analizar la estabilidad de sistemas dinámicos que incluyen en su modelo estructural dispositivos semiactivos (disipadores magneto-reológicos) que obedecen una ley de control óptimo cuadrático que atenúen el movimiento durante la acción de cargas externas.

ÍNDICE

RESUMEN	1
ABSTRACT	2
PRÓLOGO	2
ÍNDICE	4
LISTA DE TABLAS	7
LISTA DE FIGURAS	8
LISTA DE SÍMBOLOS Y SIGLAS	14
CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN	15
1.1 GENERALIDADES	15
1.2 PROBLEMÁTICA	15
1.3 OBJETIVOS	16
1.3.1 Objetivo General	16
1.3.2 Objetivos Específicos	16
CAPÍTULO II. FUNDAMENTO TEÓRICO	17
2.1 CONCEPTOS Y RESULTADOS BÁSICOS	17
2.1.1 Introducción	17
2.1.2 Definiciones básicas	17
2.1.3 Ecuaciones normales	19
2.1.4 Ecuaciones autónomas y no autónomas	20
2.2 ECUACIONES LINEALES	21
2.2.1 Introducción	21
2.2.2 Teoría general de ecuaciones lineales	21
2.3 SISTEMAS AUTÓNOMOS DE SEGUNDO ORDEN	25
2.3.1 Introducción	25
2.3.2 El caso lineal	26
2.3.3 Puntos singulares elementales. Estabilidad	31
2.3.4 Comportamiento cualitativo de soluciones de sistema no lineales.	35
2.3.5 El teorema de Hartman-Grobman	37
2.4 EL PROBLEMA DE ESTABILIDAD	38
2.4.1 Introducción	38
2.4.2 Estabilidad en el sentido de Liapunov	39
2.4.3 Estabilidad de soluciones periódicas	43
2.5 TEORÍA DE CONTROL	45
2.5.1 Introducción	45
2.5.2 Definiciones	46

2.5.3	Control en lazo cerrado en comparación con control en lazo abierto.	46
2.5.3.1	Sistemas de control realimentados	46
2.5.3.2	Sistemas de control en lazo cerrado.	47
2.5.4	Modelo matemático de sistemas de control.	47
2.5.4.1	Diagrama de bloques de un sistema de lazo cerrado.	48
2.5.5	Modelado en el espacio de estados.	49
2.5.6	Diseño de sistemas de control espacios de control en el espacio de estados.	51
2.5.6.1	Sistema regulador óptimo cuadrático.	51
CAPÍTULO III. ANÁLISIS NUMÉRICO CUANTITATIVO DE UN SISTEMA LINEAL.		55
3.1	INTRODUCCIÓN.	55
3.2	MODELO DE EDIFICIO LINEAL.	55
3.3	MODELO DE HISTÉRESIS BILINEAL.	58
3.4	MODELO DE HISTÉRESIS BOUC-WEN.	58
3.5	APLICACIÓN PARA MÚLTIPLES CASOS.	60
3.5.1	Vibración libre de un sistema dinámico de 3gdl.	60
3.5.2	Respuesta a excitaciones armónicas de un sistema dinámico de 3gdl.	62
3.5.3	Respuesta sísmica de sistemas lineales de un sistema dinámico de 3gdl.	65
3.5.4	Respuesta sísmica de sistemas inelásticos de un sistema dinámico de 3gdl.	67
CAPÍTULO IV: ANÁLISIS CUALITATIVO DE UN SISTEMA LINEAL.		71
4.1	INTRODUCCIÓN.	71
4.2	MODELO DE EDIFICIO LINEAL.	71
4.3	SISTEMAS DE ECUACIONES EN FUNCIÓN DE VARIABLES DE ESTADO.	72
4.4	DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL EN EL ESPACIO DE ESTADOS.	73
4.5	EL PROBLEMA DEL REGULADOR LINEAL CUADRÁTICO (LQR).	75
4.6	APLICACIÓN PARA MÚLTIPLES CASOS:	78
4.6.1	Vibración libre de un sistema de un grado de libertad (1 Gdl.)	78
4.6.2	Vibración libre de un edificio de planta simétrica de 3gdl, sin amortiguamiento.	88
4.6.3	Vibración libre de un edificio de planta simétrica de 3gdl, con amortiguamiento.	93
4.6.4	Vibración libre de un edificio de planta asimétrica de 3gdl.	98

4.6.5	Movimiento forzado de un edificio de planta simétrica de 3gdl. ..	106
4.6.6	Respuesta sísmica elástica de un edificio de planta simétrica de 3gdl.....	114
CAPÍTULO V: COMPROBACIÓN DE LA HIPÓTESIS.....		122
CONCLUSIONES		124
RECOMENDACIONES.....		126
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS		127
ANEXOS		129
ANEXOS A: CÓMO UTILIZAR SIMULINK.....		129
A.1	Creación de un modelo:	130
A.2	Funciones definidas por el usuario.	137
A.3	Correr simulaciones.....	137
ANEXOS B: CÓDIGOS EN MATLAB.....		138
B.1	Vibración libre varios grados de libertad.....	138
B.2	Movimiento forzado varios grados de libertad.	140
B.3	Respuesta sísmica de sistemas lineales.	142
B.4	Respuesta sísmica de sistemas inelásticos.	144
B.5	Respuesta controlada con ley de control óptimo con externa perturbación tipo sinusoidal.	148
B.6	Respuesta controlada con ley de control óptimo con externa perturbación sísmica LIMA 1974.....	151

LISTA DE TABLAS

Tabla N° 1 Resumen del comportamiento de sistemas lineales. (Coughanowr & LeBlanc, 2009)	35
Tabla N° 2 Parámetro sugeridos por Carr (2008b) para el modelo de Bouc-We.60	
Tabla N° 3 Comportamiento del punto crítico ($c=0$) caso a).....	79
Tabla N° 4 Comportamiento del punto crítico caso b)	81
Tabla N° 5 Comportamiento del punto crítico caso c)	83
Tabla N° 6 Comportamiento del punto crítico caso d)	85
Tabla N° 7 Resumen de los resultados de los casos analizados a),b),c) y d)	87
Tabla N° 8 Comportamiento del punto crítico ($c=0$) sistema en vibración libre.	89
Tabla N° 9 Comportamiento del punto crítico ($c>0$) sistema en vibración libre.	94
Tabla N° 10 Comportamiento del punto crítico ($c>0$) planta asimétrica, sistema en vibración libre.	100
Tabla N° 11 Comportamiento del punto crítico ($c>0$) movimiento forzado + control.	108
Tabla N° 12 Valores de respuesta obtenido por el control LQR para un sistema dinámico sometido a cargas externas sinusoidales.....	113
Tabla N° 13 Comportamiento del punto crítico ($c>0$) respuesta sísmica + control.	116
Tabla N° 14 Valores de respuesta obtenido por el control LQR. Elaboración propia.	121

LISTA DE FIGURAS

Figura N° 1 (Nodo) Caso I.	27
Figura N° 2 (Silla) Caso I.	28
Figura N° 3 (Nodo) Caso II.	28
Figura N° 4 (Nodo) Caso III.	29
Figura N° 5 (Centro) Caso IV.	30
Figura N° 6 (Espiral) Caso IV.	30
Figura N° 7 Foco estable.	32
Figura N° 8 Foco Inestable.	32
Figura N° 9 Nodo Estable.	33
Figura N° 10 Nodo Inestable.	33
Figura N° 11 Nodo estable de una tangente.	33
Figura N° 12 Nodo inestable.	34
Figura N° 13 Puerto.	34
Figura N° 14 (Estabilidad en el sentido de Lyapunov)	39
Figura N° 15 Estabilidad asintótica.	39
Figura N° 16 Punto de equilibrio Inestable.	40
Figura N° 17 Diagrama de bloques de un controlador PID en un lazo cerrado. .	45
Figura N° 18 Elementos de un diagrama de bloque.	48
Figura N° 19 Punto de suma.	48
Figura N° 20 Diagrama de bloques de un sistema de lazo cerrado.	48
Figura N° 21 Diagrama de bloques del sistema de control lineal en tiempo continuo representado en el espacio de estados.	51
Figura N° 22 Sistema de regulador óptimo.	52
Figura N° 23 Estructura de varios grados de libertad.	55
Figura N° 24 Modelo de Edificio Cortante.	57
Figura N° 25 Modelo de histéresis bilineal: Se presenta la composición a través de un resorte lineal y una curva elasto-plástica.	58
Figura N° 26 Sensibilidad de los modelos acorde a los parámetros utilizados. .	59
Figura N° 27 Diagrama de bloques en Simulink de un sistema dinámico en vibración libre de 3gdl.	61
Figura N° 28 Diagrama de bloques del subsistema (Vibración Libre) en Simulink de un sistema dinámico de 3gdl.	61

Figura N° 29 Respuesta de desplazamiento (m) para cada nivel, para una condición inicial de 0.1m para un tiempo de 5 segundos de vibración libre. 62

Figura N° 30 Diagrama de bloques en Simulink de un sistema dinámico de 3gdl sometido a un moviendo forzado..... 63

Figura N° 31 Diagrama de bloques del subsistema (Movimiento Forzado) en Simulink de un sistema dinámico de 3gdl sometido a un moviendo forzado. 64

Figura N° 32 Respuesta de desplazamiento (m) para cada nivel, para un tiempo de 20 segundos..... 64

Figura N° 33 Diagrama de bloques en Simulink de un sistema dinámico elástico de 3gdl sometido a una excitación sísmica LIMA 1974. 65

Figura N° 34 Diagrama de bloques del subsistema (Respuesta Sísmica) en Simulink de un sistema dinámico de 3gdl sometido a una excitación sísmica (Lima 1974). 66

Figura N° 35 Respuesta de desplazamiento (m) para cada nivel, para un tiempo de 100 segundos..... 66

Figura N° 36 Diagrama de bloques en Simulink de un sistema dinámico inelástico de 3gdl sometido a una excitación sísmica LIMA 1974. 67

Figura N° 37 Diagrama de bloques subsistema (Modelo histéresis bilineal). 68

Figura N° 38 Diagrama de bloques del subsistema (Respuesta Sísmica) en Simulink de un sistema dinámico de 3gdl sometido a una excitación sísmica (Lima 1974). 68

Figura N° 39 Gráficas fuerzas vs deriva en el primer nivel. 68

Figura N° 40 Gráfica fuerza vs tiempo en el primer nivel. 69

Figura N° 41 Gráficas fuerzas vs deriva y fuerza vs tiempo en el segundo nivel. 69

Figura N° 42 Gráficas fuerzas vs deriva y fuerza vs tiempo en el tercer nivel. ... 70

Figura N° 43 Estructura de varios grados de libertad. Imagen adaptada de Chopra (2001) con cambio de variables..... 71

Figura N° 44 Estructuras de varios grados de libertad con amortiguador magneto-reológico en el primer nivel. 74

Figura N° 45 Plano de fases, con sus respectivas componentes x_1 , x_2 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo centro estable. 80

Figura N° 46 Gráfico en 3 dimensiones x_1 , x_2 , t 80

Figura N° 47 Plano de fases, con sus respectivas componentes x_1 , x_2 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo nodo estable. 82

Figura N° 48 Gráfico en 3 dimensiones.	82
Figura N° 49 Plano de fases, con sus respectivas componentes x_1 , x_2 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.	84
Figura N° 50 Gráfico en 3 dimensiones.	84
Figura N° 51 Plano de fases, con sus respectivas componentes x_1 , x_2 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo nodo estable.	86
Figura N° 52 Gráfico en 3 dimensiones.	86
Figura N° 53 Diferentes casos para los planos de fases.	87
Figura N° 54 Captura de pantalla de los valores propios Matlab.	89
Figura N° 55 Plano de fases del Subsistema 1, con sus respectivas componentes y_1 , y_2 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo centro estable.	91
Figura N° 56 Plano de fases del Subsistema 2, con sus respectivas componentes y_3 , y_4 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo centro estable.	91
Figura N° 57 Plano de fases del Subsistema 3, con sus respectivas componentes y_5 , y_6 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo centro estable.	92
Figura N° 58 Gráfico en 3 dimensiones del último subsistema 3.	92
Figura N° 59 Captura de pantalla de los valores propios Matlab.	94
Figura N° 60 Plano de fases del Subsistema 1, con sus respectivas componentes y_1 , y_2 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.	96
Figura N° 61 Plano de fases del Subsistema 2, con sus respectivas componentes y_3 , y_4 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.	96
Figura N° 62 Plano de fases del Subsistema 3, con sus respectivas componentes y_5 , y_6 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.	97
Figura N° 63 Gráfico en 3 dimensiones del último subsistema 3.	97
Figura N° 64 Se muestra una parte de la salida de datos del Matlab.	99
Figura N° 65 Plano de fases del Subsistema 1, con sus respectivas componentes y_1 , y_2 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.	101
Figura N° 66 Plano de fases del Subsistema 2, con sus respectivas componentes y_3 , y_4 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.	101
Figura N° 67 Plano de fases del Subsistema 3, con sus respectivas componentes y_5 , y_6 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.	102
Figura N° 68 Plano de fases del Subsistema 4, con sus respectivas componentes y_7 , y_8 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.	102
Figura N° 69 Plano de fases del Subsistema 5, con sus respectivas componentes y_9 , y_{10} , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.	103

Figura N° 70 Plano de fases del Subsistema 6, con sus respectivas componentes y11, y12, se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable. 103

Figura N° 71 Plano de fases del Subsistema 7, con sus respectivas componentes y13, y14, se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable. 104

Figura N° 72 Plano de fases del Subsistema 8, con sus respectivas componentes y15, y16, se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable. 104

Figura N° 73 Plano de fases del Subsistema 8, con sus respectivas componentes y17, y18, se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable. 105

Figura N° 74 Gráfico en 3 dimensiones del último subsistema 8. 105

Figura N° 75 Plano de fases del Subsistema 1, con sus respectivas componentes y1, y2, se muestra según el gráfico un comportamiento tipo nodo estable. 109

Figura N° 76 Plano de fases del Subsistema 1, con sus respectivas componentes y3, y4, se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.... 109

Figura N° 77 Plano de fases del Subsistema 1, con sus respectivas componentes y5, y6, se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.... 110

Figura N° 78 Diagrama de bloques del sistema controlado. 110

Figura N° 79 Se muestra las gráficas de reducción de desplazamientos para todos los niveles..... 111

Figura N° 80 Se muestra las gráficas de reducción de velocidades para todos los niveles. 112

Figura N° 81 Desplazamiento vs tiempo para el primer nivel para un tiempo 8 s. 112

Figura N° 82 Gráfico en barras de los desplazamientos por nivel. Elaboración propia..... 113

Figura N° 83 Sismo de octubre Lima 1974 componente EW (Parque de la Reserva)..... 114

Figura N° 84 Se muestra que la para un $t=0$, tenemos una aceleración de 0.08046m/s^2 114

Figura N° 85 Plano de fases del Subsistema 1, con sus respectivas componentes y1, y2, se muestra según el gráfico un comportamiento tipo nodo estable. 117

Figura N° 86 Plano de fases del Subsistema 2, con sus respectivas componentes y3, y4, se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.... 117

Figura N° 87 Plano de fases del Subsistema 3, con sus respectivas componentes y5, y6, se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.... 118

Figura N° 88 Diagrama de bloques del sistema controlado. 118

Figura N° 89 Se muestra las gráficas de reducción de desplazamientos para todos los niveles.....	119
Figura N° 90 Se muestra las gráficas de reducción de velocidades para todos los niveles.	120
Figura N° 91 Desplazamiento vs tiempo para el primer nivel para un tiempo 14s.	120
Figura N° 92 Gráfico en barras del desplazamiento por nivel. Elaboración propia.	121
Figura N° 93 Respuesta en función del tiempo.....	122
Figura N° 94 Plano de fases de un sistema dinámico.	123
Figura N° 95 Graficas velocidad vs tiempo.	123
Figura A. 1 Interfaz de Simulink.....	129
Figura A. 2 Librerías Simulink.....	129
Figura A.1 1 Librería: Commonly Used Blocks.	130
Figura A.1 2 Librería: Continuous.....	130
Figura A.1 3 Librería: Discontinuities.....	130
Figura A.1 4 Librería: Discrete.....	130
Figura A.1 5 Librería: Logic and Bit Operations.	130
Figura A.1 6 Librería: Lookup Tables.	130
Figura A.1 7 Librería: Math Operations.	131
Figura A.1 8 Librería: Model Verafication.	131
Figura A.1 9 Librería: Model-Wide Utilities.....	131
Figura A.1 10 Librería: Ports & Subsystems.	131
Figura A.1 11 Librería: Signal Attributes.....	131
Figura A.1 12 Librería: Signal Routing.	131
Figura A.1 13 Librería: Sinks.	132
Figura A.1 14 Librería: Sources.....	132
Figura A.1 15 Librería: User Defined Functions.....	132
Figura A.1 16 Librería: Additional Math & Discrete.	132
Figura A.1 17 Función Gain.....	132
Figura A.1 18 Función Add.	133
Figura A.1 19 Función Integrator.....	133
Figura A.1 20 Función Saturation.	134

Figura A.1 21 Función Memory.	134
Figura A.1 22 Funcion Mux.	135
Figura A.1 23 From Workspace.	135
Figura A.1 24 Parametro To Workspace.	136
Figura A.1 25 Out, In.	136
Figura A.2 1 Funcion Matlab.	137

LISTA DE SÍMBOLOS Y SIGLAS

A' : Transpuesta de la matriz A.

Ax : Producto de la $n \times n$ matriz A y el $n \times 1$ del vector x.

$\|A\|$: Una norma de la matriz A.

AMR: Amortiguador magneto-reológico.

(a,b) : Intervalo abierto $a < t < b$.

$[a,b]$: Intervalo cerrado $a \leq t \leq b$.

C: Amortiguamiento

$d(a, b)$: Distancia entre a y b.

E^n : Espacio euclidiano de n dimensiones, en particular E^1 es la recta real.

E_+^1 : Los reales no negativos.

ε : Pertenece a, o es el elemento de.

$f: M \rightarrow N, f$: Es una función o transformación definida en M con valores en N.

MXN : Producto cartesiano de M y N.

$M = \{x \in E^n / P(x) = 1\}$ M es el conjunto de elementos en E^n tales que $P(x) = 1$

$M \cap N$: Intersección de M con N.

$M \cup N$: Unión de M con N.

$M \subset N$: M está contenido en N.

$|t|$: Valor absoluto del real t (análogamente para complejos).

$\|x\|$: Una norma del vector x.

x' : Transpuesto del vector x.

$\dot{x}: dx/dt$

$\ddot{x}: d^2x/dt^2$

$y'x$: Producto escalar de los vectores y, x.

CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN

1.1 GENERALIDADES

Para el análisis sísmico estructural de edificaciones se requiere resolver la ecuación dinámica del movimiento, para esto la dinámica estructural aplica métodos como el método de superposición de modos clásicos porque las ecuaciones modales individuales (desacopladas) se resuelven a fin de determinar las coordenadas modales y las respuestas modales, para después superponerlas y obtener la respuesta total. En forma más precisa, este método se denomina “El Método de Superposición de Desplazamientos Modales Clásicos” debido a que los desplazamientos modales se superponen. Este método de análisis está restringido a los sistemas lineales con amortiguamiento clásico. La linealidad del sistema está implícita en el uso del principio de superposición. El amortiguamiento debe tener la forma clásica para obtener ecuaciones modales que se desacoplen, una característica central del análisis modal. (K.CHOPRA, 2014).

Por ahora estos métodos cuantitativos nos llevan a obtener resultados netamente numéricos, sin tomar en cuenta la estabilidad de la solución y su convergencia al punto de equilibrio, por lo que es necesario incluir en el análisis de la dinámica de estructuras, criterios que nos permitan conocer el comportamiento de la solución con su cercanía a su punto de equilibrio, entonces la aplicación de la teoría cualitativa en ecuaciones diferenciales conlleva a tener otro panorama de la respuesta estructural de edificios que permite analizar la solución con énfasis en su estabilidad, a través del plano de fases, los valores propios de la matriz A y el teorema de Lyapunov, éstas herramientas permiten determinar si las soluciones son inestables, estables o asintóticamente estables, y tener un mejor entendimiento del comportamiento de la estabilidad de la solución.

1.2 PROBLEMÁTICA

Entender que la respuesta estructural de un edificio no se limite al cálculo de la solución sino conocer también la estabilidad de sus soluciones.

Obtener una herramienta que permita analizar la estabilidad de sus soluciones de ecuaciones diferenciales, en la respuesta estructural de edificios tipo corte simple.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo General

- Determinar la respuesta estructural de edificios tipo cortante simple utilizando teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales.

1.3.2 Objetivos Específicos.

- Obtener la respuesta del sistema utilizando métodos cuantitativos.
- Obtener la respuesta del sistema utilizando métodos cualitativos.
- Obtener un algoritmo numérico desarrollado en un lenguaje de programación que determine la respuesta estructural de un modelo estructural edificio tipo cortante simple, a partir de métodos cualitativos.
- Estabilizar un sistema dinámico utilizando la teoría de control.

CAPÍTULO II. FUNDAMENTO TEÓRICO

2.1 CONCEPTOS Y RESULTADOS BÁSICOS.

2.1.1 Introducción.

La finalidad de la sección 2.1, es sentar las bases sobre las cuales han de desarrollarse las secciones posteriores. Daremos las definiciones necesarias de las convenciones que se utilizarán a lo largo de la tesis. Las demostraciones de los teoremas que se pueden encontrar en libros de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias; ya que no es objetivo de esta tesis, sino la aplicación de las definiciones y teoremas al campo de la ingeniería civil.

2.1.2 Definiciones básicas. (IMAZ & VOREL, 1967)

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es una relación entre una variable independiente escalar t , una variable dependiente x y sus derivadas:

$$\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n},$$

Esto es, una relación de la forma:

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0,$$

Donde F es una función con dominio en E^{n+2} y los valores en E^1 . Una función $x(t)$, definida en cierto intervalo (a, b) en el cual posee derivadas hasta el orden n .

Ecuaciones exactas:

Consideremos ahora una ecuación diferencial:

$$f(t, x) \frac{dx}{dt} + g(t, x) = 0,$$

Donde las funciones f y g están definidas en algún dominio D del plano (t, x) y tiene derivadas parciales continuas tales que $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial x}$ para toda $(t, x) \in D$. En estas condiciones sabemos, por un resultado bien conocido del cálculo, que la expresión:

$$dH(t, x) = \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial t} dt = f dx + g dt$$

Donde $H(t, x)$ tiene derivadas parciales continuas hasta segundo orden.

Ecuaciones homogéneas:

Sea $f(t, x)$ una función definida en un dominio D del plano (t, x) . Diremos que $f(t, x)$ es homogénea (de grado cero) en D si para cada real α y cada punto $(t, x) \in D$ tal que $(\alpha t, \alpha x) \in D$ se tiene $f(t, x) = f(\alpha t, \alpha x)$.

Ahora se considera unas definiciones en notaciones vectoriales:

Sea x un n – vector de columna (n entero positivo) cuyas componentes serán en general números reales (o complejos), esto es:

$$(2.1.2.1) \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Donde x_i es un real para $i = 1, 2, \dots, n$, " x " es un elemento del espacio euclidiano real de n dimensiones (E^n), considerando como vector columna. La expresión (2.1.2.1) suele escribirse por conveniencia en la forma $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Con la letra t designaremos siempre a un número real, esto es, un elemento de $E^1 = \{t | -\infty < t < +\infty\}$. Pensaremos en t como variable independiente y en que las componentes $x_1(t), \dots, x_n(t)$ de x son funciones (reales) de t , esta situación la describimos simplemente diciendo que x es función de t , esto es, $x = x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$. La derivada con respecto a t de un vector $x(t)$ se define el vector $dx(t)/dt$ dado por:

$$(2.1.2.2) \quad \frac{dx(t)}{dt} = \left[\frac{dx_1(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(t)}{dt} \right]$$

Y en forma natural definimos derivadas sucesivas del vector $x(t)$. Cuando en el texto no se requieran derivadas superiores a la segunda utilizaremos las

notaciones $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$, esto es:

$$(2.1.2.3) \quad \dot{x}(t) = [\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)]; \ddot{x}(t) = [\ddot{x}_1(t), \dots, \ddot{x}_n(t)]$$

Con la notación $f(\dots)$ indicaremos una función vectorial de columna con n componentes, cada una de las cuales es función de los argumentos que aparezcan entre los paréntesis. Así, la notación $f(x, t)$ expresa:

$$(2.1.2.4) \quad f(x, t) = [f_1(x_1, \dots, x_n, t), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n, t)].$$

Definición 2.1.2.1: Una ecuación diferencial ordinaria de orden p (p entero positivo) es una relación de tipo:

$$(2.1.2.5) \quad f\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^p x}{dt^p}, t\right) = 0,$$

Donde f es una función con valores en E^n definida en algún subconjunto de $E^{n(p+1)} \times E^1$.

En (2.1.2.5) el cero de la derecha debe interpretarse como una n-columna de ceros, esto es, (2.1.2.5) es una abreviación del sistema:

$$f_1\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^p x}{dt^p}, t\right) = 0.$$

$$f_2\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^p x}{dt^p}, t\right) = 0.$$

$$f_3\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^p x}{dt^p}, t\right) = 0.$$

$$f_n\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^p x}{dt^p}, t\right) = 0$$

Definición 2.1.2.2: Una función $x = x(t)$ definida en un subconjunto de I , tal que $x(t)$ tiene derivadas hasta orden p y $\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \dots, \frac{d^p x(t)}{dt^p}\right) \in D$ para t en el dominio de $x(t)$, se dice que es solución de (2.1.2.5) si:

$$f\left[x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \dots, \frac{d^p x(t)}{dt^p}, t\right] = 0$$

Para t en el dominio de $x(t)$.

2.1.3 Ecuaciones normales.

Supongamos que en (2.1.2.5) puede despejarse en forma explícita a la p -ésima derivada, esto es, que puede obtenerse de (2.1.2.5) una expresión:

$$(2.1.3.1) \quad \frac{d^p x}{dt^p} = g\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{p-1} x}{dt^{p-1}}, t\right)$$

Entonces diremos que (2.1.2.5) es una ecuación diferencial normal (o un sistema normal).

Suponiendo que (2.1.2.5) es normal, consideremos una nueva variable $y = (y_1, y_2, \dots, y_{pn})$ determinada por las relaciones:

$$(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n) = x$$

$$(y_{n+1}, \dots, y_{2n}) = \left(\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}\right) = \frac{dx}{dt}$$

(2.1.3.2)

$$(y_{2n+1}, \dots, y_{3n}) = \left(\frac{d^2 x_1}{dt^2}, \dots, \frac{d^2 x_n}{dt^2} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$(y_{(p-1)n+1}, \dots, y_{pn}) = \left(\frac{d^{p-1} x_1}{dt^{p-1}}, \dots, \frac{d^{p-1} x_n}{dt^{p-1}} \right) = \frac{d^{p-1} x}{dt^{p-1}}$$

De (2.1.3.2) y (2.1.3.1) se obtienen, por derivación, las expresiones:

$$\left(\frac{dy_1}{dt}, \dots, \frac{dy_n}{dt} \right) = (y_{n+1}, \dots, y_{2n})$$

$$\left(\frac{dy_{n+1}}{dt}, \dots, \frac{dy_{2n}}{dt} \right) = (y_{2n+1}, \dots, y_{3n})$$

.
.
.

$$\left(\frac{dy_{(p-2)n+1}}{dt}, \dots, \frac{dy_{(p-1)n}}{dt} \right) = (y_{(p-1)n+1}, \dots, y_{pn})$$

$$\left(\frac{dy_{(p-1)n+1}}{dt}, \dots, \frac{dy_{pn}}{dt} \right) = (g_1(y, t), \dots, g_n(y, t)),$$

Y todo esto puede escribirse, como es inmediato de ver, en la forma:

$$(2.1.3.3) \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = G(y, t)$$

Donde $y = (y_1, y_2, \dots, y_{pn})$

$$G = (y_{n+1}, \dots, y_{2n}, y_{2n+1}, \dots, y_{3n}, \dots, y_{(p-1)n+1}, \dots, y_{pn}, g_1, \dots, g_n)$$

Las ecuaciones que estudiaremos son simples y normales y, por lo tanto, las supondremos en la forma (2.1.3.3)

2.1.4 Ecuaciones autónomas y no autónomas.

Supongamos dada una ecuación diferencial normal:

$$(2.1.4.1) \quad \dot{x} = f(x, t)$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), f = (f_1, \dots, f_n), \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

Si en el miembro derecho de (2.1.4.1) aparece t explícitamente, diremos que (2.1.4.1) es no autónoma, en caso contrario diremos que es autónoma, esto es:

$$\dot{x} = f(x, t), \text{ Es no autónoma.}$$

$$\dot{x} = g(x), \text{ Es autónoma.}$$

Sea $x(t), \alpha < t < \beta$, una solución de (2.1.4.1) en el intervalo (α, β) . El conjunto de puntos $(x_1(t), \dots, x_n(t), t)$, para $\alpha < t < \beta$, del espacio euclidiano real de $n + 1$ dimensiones (E^{n+1}) es una curva de solución de (2.1.4.1). La proyección de esta

curva en el espacio E^n obtenida al hacer $t = 0$ en la curva es una proyección de (2.1.4.1). Esto es, una trayectoria de (2.1.4.1). Esto es, una trayectoria en el conjunto de puntos de E^n dadas por $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ para $\alpha < t < \beta$.

El interés del estudio de este tipo de ecuaciones está en que podemos representar un modelo estructural de un edificio en vibración libre a través de ecuaciones diferenciales autónomas, también modelar edificios con cargas externas (sísmicas, viento y fuerzas desbalance de equipos vibrantes rotatorios) a través de sistemas no autónomas.

Como se observa los sistemas no autónomos son muy representativos en los modelos matemáticos más reales, como son los modelos ante cargas externas (sísmicas, de viento etc.).

2.2 ECUACIONES LINEALES.

2.2.1 Introducción. (IMAZ & VOREL, 1967)

Sea una ecuación diferencial escalar de la forma:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0(t)y = g(t),$$

Donde $a_0(t), \dots, a_{n-1}(t)$ y $g(t)$ son funciones complejas, digamos continuas, de t en cierto intervalo. Éstas ecuaciones son normales y la aplicación del cambio de variables indicado en la sección 2.1.3 las lleva a la forma:

$$(2.2.1.1) \quad \dot{x} = A(t)x + f(t)$$

En donde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$ y $A(t)$ es una matriz $n \times n$ de funciones complejas. El propósito de esta sección 2.2 es estudiar ecuaciones de la forma (2.2.1.1) que llamaremos con toda propiedad "lineales".

2.2.2 Teoría general de ecuaciones lineales.

Para caso homogéneo de (2.2.1.1), es decir, la ecuación:

$$(2.2.2.1) \quad \dot{x} = A(t).x$$

Donde $A(t)$ es continua en cierto intervalo (a, b) .

A continuación se muestra las formas canónicas de la matriz A para valores propios reales e imaginarios para $n=2$. (FERNANDEZ PEREZ, VAZQUEZ HERNANDEZ, & VEGAS MONTANER, 2003)

Sistemas lineales planos $n = 2$

Auto valores reales:

Para resolver el sistema homogéneo (2.2.2.1) intentamos aplicar una idea que resulta eficaz en muchos campos de la matemática, realizar un cambio de variables que nos transforme el problema en uno análogo que ya sepamos resolver:

$$x = Py, P = (p_{ij}), i, j = 1, 2$$

Despejamos y:

$$y = P^{-1}x$$

Ahora derivamos:

$$\dot{y} = P^{-1}\dot{x} = P^{-1}Ax = P^{-1}APy$$

Es decir, es solución del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{y} = By, B = P^{-1}AP \quad (2.2.2.2)$$

Y, recíprocamente, es inmediato ver que si $y(t)$ es solución del sistema (2.2.2.2), entonces la función $x(t) = Py(t)$ es la solución del sistema (2.2.2.1).

Dos matrices A y B que están en la relación $B = P^{-1}AP$, siendo P una matriz no singular, se dice que son semejantes (P se dice que es una matriz de paso entre A y B).

Los sistemas (2.2.2.1) y (2.2.2.2) son equivalentes por esta propiedad de que a cada solución de uno de ellos le corresponde una y sola una solución del otro (se "pasa" de las soluciones de uno a las otro del otro mediante la matriz P). Resolviendo uno de ellos, por lo tanto, se tiene resuelto el otro.

El sistema (2.2.2.2) será más sencillo de resolver que el sistema (2.2.2.1) si el cambio de variable dado por la matriz P es tal que su matriz de coeficientes $B = P^{-1}AP$ es más simple que la matriz A del sistema original.

Los sistemas más simples de resolver son, sin duda, los que tienen una matriz de coeficientes diagonal:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (2.2.2.3)$$

En efecto, el sistema es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (2.2.2.4)$$

Simplificando:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} c_1 \\ e^{\lambda_2 t} c_2 \end{pmatrix} \quad (2.2.2.5)$$

Así pues, si ocurre que A es semejante a una matriz diagonal Λ , o sea, si existe P no singular tal que $B = P^{-1}AP$ es de la forma (2.2.2.3) (en cuyo caso se dice que A es diagonalizable), el cambio de variables $x = Py$ transforma el sistema (2.2.2.1).

En un sistema de la forma (2.2.2.4), con soluciones dadas por (2.2.2.5). Deshaciendo el cambio de variable, se tendría para la solución general del sistema (2.2.2.1).

$$x(t) = Py(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} c, c \in \mathbb{R}^2$$

Estos sistemas de ecuaciones lineales con valores propios, no se presentan en el caso de modelos matemáticos de edificaciones.

Auto valores imaginarios

Supongamos que A , matriz real, tiene un par de auto valores complejos $a \pm ib$, $b \neq 0$ como en el caso de auto-valores reales y distintos, el sistema $\dot{x} = Ax$, planteado por el campo de complejo, es equivalente al sistema desacoplado:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda y_1 \\ \bar{\lambda} y_2 \end{pmatrix}$$

$$y_1(t) = K_1 e^{\lambda t}, y_2(t) = K_2 e^{\bar{\lambda} t}, K_1, K_2 \in \mathbb{C}$$

De donde resulta que el conjunto de soluciones complejas de $\dot{x} = Ax$ esta dado, por:

$$x(t) = K_1 w(t) + K_2 \bar{w}(t), K_1, K_2 \in \mathbb{C}$$

Donde:

$$w(t) = e^{(a+bi)t} w, \bar{w}(t) = e^{(a-bi)t} \bar{w}$$

Y siendo:

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + iv_1 \\ u_2 + iv_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u + iv$$

Un auto vector (complejo) de A correspondiente a $\lambda = a + ib$ (de lo que se deduce, como sabemos, que \bar{w} es autovector de $\bar{\lambda} = a - ib$)

La clave para manejar exponentes complejos es la identidad de Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, x \in \mathbb{R}$$

Que, combinada con la regla de los exponentes, nos da:

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

Utilizando se tiene que:

$$\begin{aligned} w(t) &= e^{\lambda t} w = e^{(a+ib)t} (u + iv) = e^{at} (\cos bt + i \sin bt) \left[\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= e^{at} \left[\cos bt \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \sin bt \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right] + i e^{at} \left[\sin bt \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \cos bt \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

Por la proposición anterior, las funciones reales.

$$\begin{aligned} u(t) &\equiv \operatorname{Re} w(t) = e^{at} \left[\cos bt \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \sin bt \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right] \\ v(t) &= \operatorname{Im} w(t) = e^{at} \left[\sin bt \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \cos bt \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

Son las soluciones del sistema, con lo que, por el principio de superposición, podemos afirmar que las combinaciones lineales, con $c_1, c_2 \in R$

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 u(t) + c_2 v(t) \\ &= c_1 e^{at} \left[\cos bt \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \sin bt \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right] \\ &\quad + c_2 e^{at} \left[\sin bt \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \cos bt \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$x(t) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{at} \cos bt & e^{at} \sin bt \\ -e^{at} \sin bt & e^{at} \cos bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Además sugiere un cambio de variable $x = Py$ que, como en los casos anteriores, transforma al sistema $\dot{x} = Ax$ en uno equivalente $\dot{y} = By$ con un matriz de coeficientes $B = P^{-1}AP$ más simple que el sistema original.

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^{at} \cos bt & e^{at} \sin bt \\ -e^{at} \sin bt & e^{at} \cos bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\dot{y} = By$$

$$x(t) = P \begin{pmatrix} e^{at} \cos bt & e^{at} \sin bt \\ -e^{at} \sin bt & e^{at} \cos bt \end{pmatrix} P^{-1} x_0$$

Los sistemas lineales que representan modelos de edificios en vibración libre, en general presentan valores imaginarios con parte real negativa, esto representa matemáticamente estabilidad de la solución, que en capítulos posteriores se analizará el problema con mayor detalle.

Para finalizar esta sección estudiaremos la forma de las soluciones de la ecuación no homogénea (2.2.1.1), esto es la ecuación: (IMAZ & VOREL, 1967)

$$\dot{x} = A(t)x + f(t)$$

Donde $A(t)$ y $f(t)$ son continuas en algún intervalo (a, b) .

Teorema 2.2.2.1: Sea el $X(t)$ una matriz fundamental de (2.2.2.1) definida en (a, b) entonces la solución $x(t)$ de (2.2.1.1) con condición inicial $x(t_0) = x^0$ esta dada por:

$$(2.2.2.6) \quad x(t) = X(t) \left(c^0 + \int_{t_0}^t X^{-1}(s) f(s) ds \right)$$

Donde el vector constante c^0 esta unívocamente determinado por la relación;

$$c^0 = X^{-1}(t_0)x^0$$

Este teorema nos permite encontrar la solución de la ecuación diferencial (2.2.1.1) en función de matriz fundamental.

Ahora consideremos la matriz exponencial, en la solución de la ecuación con el siguiente teorema:

En las siguientes ecuaciones la matriz A es constante.

$$\dot{x} = Ax \quad (2.2.2.7)$$

$$\dot{x} = Ax + f(t) \quad (2.2.2.8)$$

Teorema 2.2.2.2: Las soluciones con condición inicial (x^0, t_0) de (2.2.2.7) y (2.2.2.8) están dadas respectivamente por:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x^0 \dots \dots \text{solucion de (2.2.2.7)}$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} \left[x^0 + \int_{t_0}^t e^{A(t_0-s)} f(s) ds \right] \dots \dots \text{solucion de (2.2.2.8)}$$

Esta ecuación nos permite encontrar la solución de la matriz exponencial y condiciones iniciales.

2.3 SISTEMAS AUTÓNOMOS DE SEGUNDO ORDEN. (IMAZ & VOREL, 1967)

2.3.1 Introducción.

El asunto de esta sección es el análisis cualitativo de los sistemas autónomos y no autónomos de segundo y con generalización para "n" dimensiones.

El tipo de sistemas que nos proponemos estudiar en este capítulo es:

$$(2.3.1.1) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Donde x_1, x_2, f_1 y f_2 son escalares reales, y como de costumbre el punto indica derivación con respecto a "t". En (2.3.1.1) haremos, generalmente, la hipótesis de $f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$, esto es, de que el origen es un punto crítico (de equilibrio) del sistema y que tal punto es aislado, es decir que, en alguna vecindad del origen no hay otros puntos que anulen simultáneamente a $f_1(x_1, x_2)$ y $f_2(x_1, x_2)$. En estas

condiciones nos interesara estudiar el comportamiento de soluciones vecinas al origen. Finalmente estudiaremos algo sobre soluciones periódicas de (2.3.1.1).

2.3.2 El caso lineal.

Para el caso más simple, en que las funciones $f_1(x_1, x_2)$ y $f_2(x_1, x_2)$ son lineales, caso en el que puede hacerse un estudio completo.

Considerando el sistema:

$$(2.3.2.1) \quad \dot{x} = Ax$$

Donde $x = (x_1, x_2)$, A es una matriz real constante de orden 2x2 con elementos a_{ij} ($i, j = 1, 2$) y donde $D(A) \neq 0$. Ésta última condición nos permite asegurar que el origen, $x_1 = 0, x_2 = 0$, es un punto crítico aislado, de hecho es el único punto crítico.

Sean λ_1, λ_2 las raíces características de A, esto es, las raíces del polinomio de segundo grado:

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Como $Det(A) \neq 0$ ninguna raíz puede ser cero, y esencialmente se presentan tres casos para las raíces; estos son:

- Que sean reales y distintas
- Reales e iguales
- Complejas conjugadas.

Las formas canónicas de la matriz A corresponden a estos casos:

$$\text{Caso I: } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; \quad \text{Caso II: } \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix};$$

(2.3.2.2)

$$\text{Caso III: } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}; \quad \text{Caso IV: } \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix};$$

El caso I corresponde a raíces reales distintas, los casos II y III a raíces iguales y el caso IV a raíces complejas conjugadas donde α y β son respectivamente su parte real y su parte imaginaria.

Sea cual fuere el caso, siempre existe una matriz real no singular P tal que, la matriz $P^{-1}AP$ adopta la forma canónica; luego si hacemos el cambio de variable $x = Py$, obtenemos un sistema en el que la matriz tiene una de las formas canónicas. En vista de lo anterior podemos suponer que la matriz A en (2.3.2.1) está en una de las formas canónicas I, II, III, IV, y estudiaremos las soluciones en cada uno de estos casos.

Caso I: El sistema (2.3.2.1) adopta la forma:

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1$$

$$\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2$$

Cuyas soluciones generales son: $x_1 = k_1 e^{\lambda_1 t}$ y $x_2 = k_2 e^{\lambda_2 t}$, donde k_1, k_2 son constantes arbitrarias. Ahora pueden presentarse dos situaciones esencialmente diferentes, que λ_1 y λ_2 sean de igual o distinto signo. Suponemos que $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, en este caso es claro que cualquier solución tiende al origen con $t \rightarrow +\infty$ ya que las exponenciales tienden a cero, y en particular los semi-ejes son soluciones. Por otro lado se tiene $x_2/x_1 = k_2/k_1 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}$, y como $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$, la pendiente de cualquier solución con $k_2 \neq 0$ tiende al ∞ , luego de todas estas trayectorias entran tangentes al eje x_2 . Para $k_2 = 0$ la pendiente es cero.

En resumen, el aspecto de las soluciones es como en la figura N°1, caso que se conoce como “Nodo”.

Supongamos ahora que $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, en este caso, para cualquier solución, $x_1 \rightarrow 0$, y $t \rightarrow +\infty$ (salvo, claro está, si $k_1 = 0$). En esta situación se dice que el origen es un punto silla, y su aspecto es el indicado en la figura N°2.

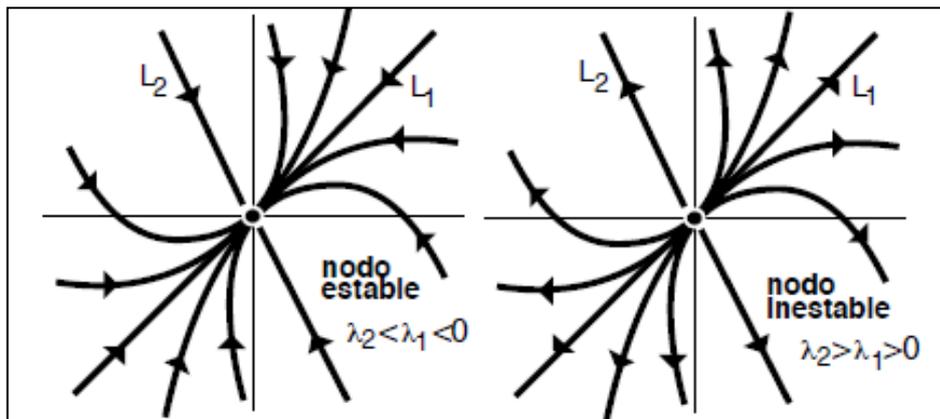


Figura N° 1: (Nodo) Caso I.
(Fuente: (ARANDA, 2009))

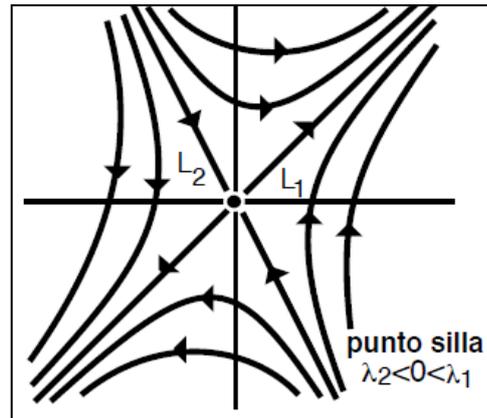


Figura N° 2: (Silla) Caso I.
(Fuente: (ARANDA, 2009))

Caso II: El sistema (2.3.2.1) adopta la forma:

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1$$

$$\dot{x}_2 = \lambda x_2$$

Cuya solución general es $x_1 = k_1 e^{\lambda t}$, $x_2 = k_2 e^{\lambda t}$. Éstas ecuaciones son las de una recta con pendiente k_2/k_1 y si $\lambda < 0$ las soluciones tienden al origen cuando $t \rightarrow +\infty$, este caso se conoce también como nodo y su aspecto está indicado en la figura N°3.

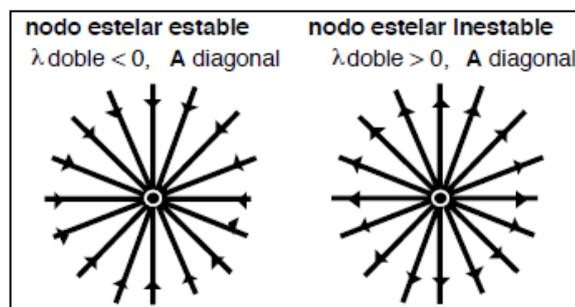


Figura N° 3: (Nodo) Caso II.
(Fuente: (ARANDA, 2009))

Caso III: El sistema (2.3.2.1) adopta la forma:

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = \lambda x_2$$

Cuya solución general es: $x_1 = (k_2 t + k_1) e^{\lambda t}$, $x_2 = k_2 e^{\lambda t}$ (k_1 y k_2 constantes arbitrarias). Si $\lambda < 0$, las soluciones tienden al origen cuando $t \rightarrow +\infty$. Por otro lado, la pendiente $x_2/x_1 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Y además todas las trayectorias, salvo para $k_2 = 0$, cortan al eje x_2 para $t =$

$-k_1/k_2$. Este caso es también un nodo y su aspecto está indicado en la figura N°4.

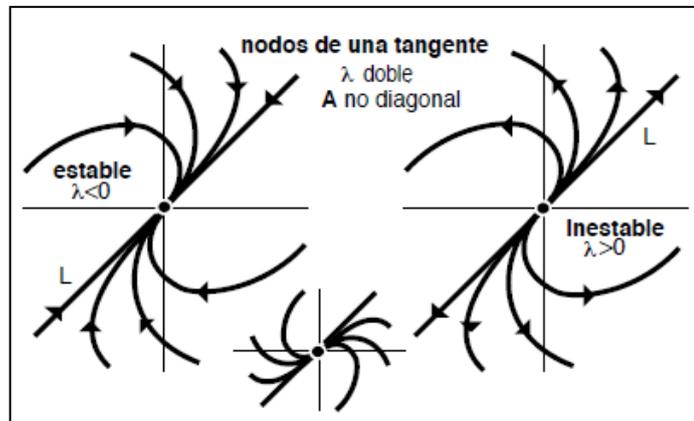


Figura N° 4: (Nodo) Caso III
(Fuente: (ARANDA, 2009))

Caso IV: Ahora las raíces son complejas conjugadas $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, y (2.3.2.1) adoptan la forma:

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1 + \beta x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\beta x_1 + \alpha x_2$$

Cuya solución general es $x_1 = e^{\alpha t}(k_1 \cos \beta t + k_2 \sin \beta t)$, $x_2 = e^{\alpha t}(-k_1 \sin \beta t + k_2 \cos \beta t)$ con k_1 y k_2 constantes arbitrarias. Distinguiremos ahora dos posibilidades $\alpha = 0$ y $\alpha \neq 0$.

Si $\alpha = 0$, es inmediato ver que $\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = k_1^2 + k_2^2$, y que por lo tanto las soluciones son círculos con centro en el origen, cuyo sentido para t creciente depende del signo de β . El caso se ilustra en la figura N°5 y se conoce como centro. Todas las soluciones son periódicas, con periodo $2\pi/\beta$.

Supongamos ahora que $\alpha \neq 0$, digamos $\alpha < 0$, ahora $\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = (k_1^2 + k_2^2)e^{2\alpha t}$. Las soluciones son espirales que tienden hacia el origen cuando $t \rightarrow +\infty$, este caso se llama punto espiral y está ilustrado en la figura N°6.

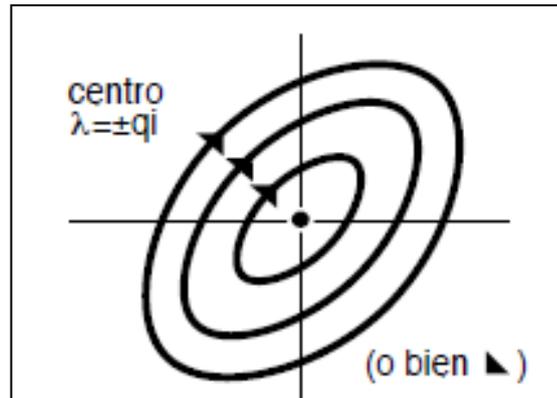


Figura N° 5 (Centro) Caso IV
(Fuente: (ARANDA, 2009))

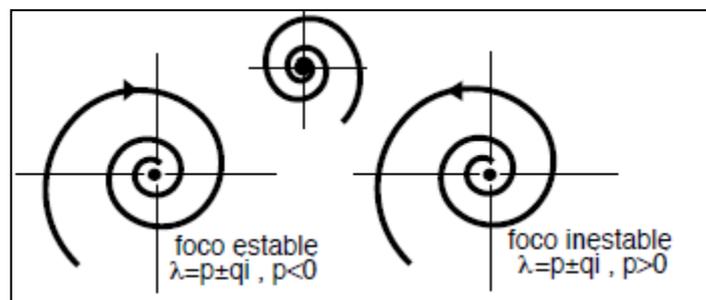


Figura N° 6 (Espiral) Caso IV
(Fuente: (ARANDA, 2009))

Obsérvese que el punto singular de un sistema lineal $\dot{z} = Az$, con $\det A \neq 0$, A matriz de 2×2 , es estable si ningún valor propio de A tiene parte real positiva, asintóticamente estable si los dos valores propios tienen parte real negativa, y débilmente estable si los valores propios son imaginarios puros. En consecuencia, nodos y focos estables son asintóticamente estables; puertos, nodos inestables y focos inestables son inestables; y los centros son débilmente estables.

El comportamiento de las trayectorias cerca de un punto singular es de considerable interés para el mapa de fases, considerando como un todo. En efecto, para obtener el mapa de fases, ordinariamente se empieza con los entornos de puntos singulares, de la misma forma que al dibujar la gráfica de una función se comienza con los puntos críticos. El mapa de fases, cerca de un punto singular, de un sistema no lineal puede muy bien parecerse al de uno lineal, pero también puede ocurrirse que sea totalmente diferente. Además, si el punto singular es un foco, por ejemplo, puede ser extremadamente difícil, precisar este hecho. La simple pregunta de si un punto singular es estable o inestable, puede ser muy difícil de contestar. (Plaat, 1974)

2.3.3 Puntos singulares elementales. Estabilidad (Plaat, 1974)

Un problema corriente en ecuaciones diferenciales es determinar el comportamiento de las soluciones en la proximidad de una solución constante dada. Desde el punto de vista físico, una solución constante representa un equilibrio, y muchos problemas de la ciencia y la tecnología se pueden reducir a la cuestión de la estabilidad o inestabilidad de un equilibrio. En el contexto de tales problemas, solo son de interés aquellas soluciones cuyos valores iniciales están cerca del punto de equilibrio, y la cuestión que se representa es, si hay posibilidad de que tiendan hacia el, en el transcurso del tiempo. Procuraremos precisar estas ideas en el caso del sistema autónomo de segundo orden.

$$\dot{x} = f(x, y) \quad (2.3.3.1)$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

Definición 2.3.3.1: Sea (x_0, y_0) un punto singular de (2.3.3.1). Decimos que (x_0, y_0) es estable si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que toda la solución u, v que verifique:

$$[u(t_0) - x_0]^2 + [v(t_0) - y_0]^2 < \delta^2 \quad (2.3.3.2)$$

Para un cierto t_0 también verifica:

$$[u(t) - x_0]^2 + [v(t) - y_0]^2 < \varepsilon^2$$

Para todo $t > t_0$. Geométricamente tiene el siguiente significado, dado un disco D_ε de radio ε y centro (x_0, y_0) , existe un disco D_δ de radio δ , tal que toda trayectoria que tiene un punto en D_δ continua después en D_ε . Si (x_0, y_0) no es estable, decimos que es inestable. Si (x_0, y_0) es estable, y si puede ser elegido δ de manera que (2.3.3.2) implique que $(u(t), v(t)) \rightarrow (x_0, y_0)$ cuando $t \rightarrow \infty$, decimos que (x_0, y_0) es asintóticamente estable. Un punto singular que sea estable pero no asintóticamente, se dice que es débilmente estable.

Teorema 2.3.3.1: Si A tiene los valores propios complejos $\alpha \pm i\beta$ con $\alpha \neq 0$, el punto singular es un foco, estable si $\alpha < 0$ figura N°7, inestable si $\alpha > 0$ figura N°8.

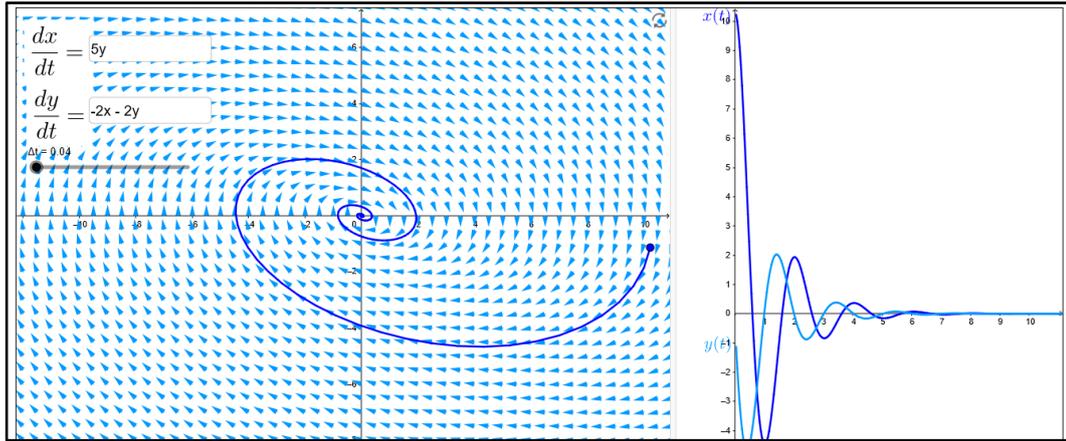


Figura N° 7 Foco estable.
 Fuente: GeoGebra.

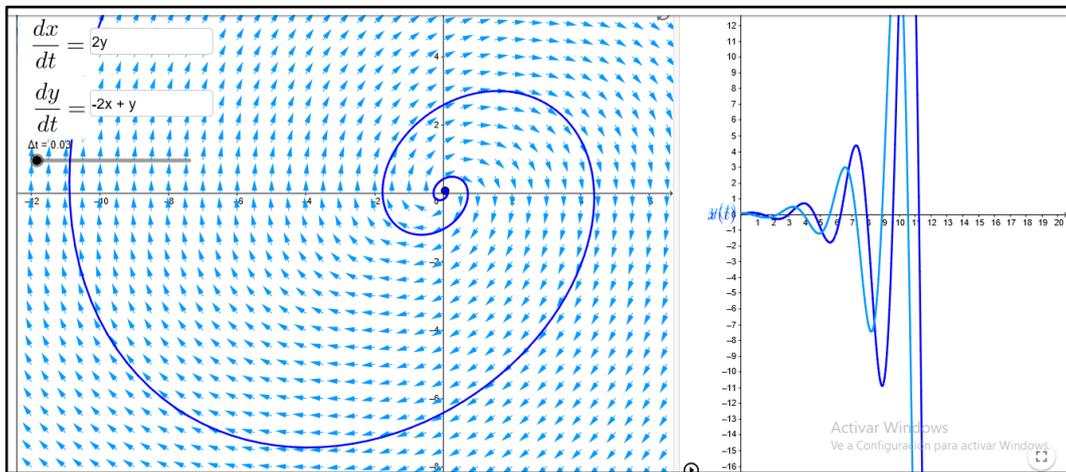


Figura N° 8 Foco Inestable.
 Fuente: GeoGebra.

Teorema 2.3.3.2: Si A tiene valores propios reales y distintos del mismo signo, el punto singular es un nodo, estable como se muestra en la figura N°9 o inestable figura N°10, según que los valores propios sean negativos o positivos.

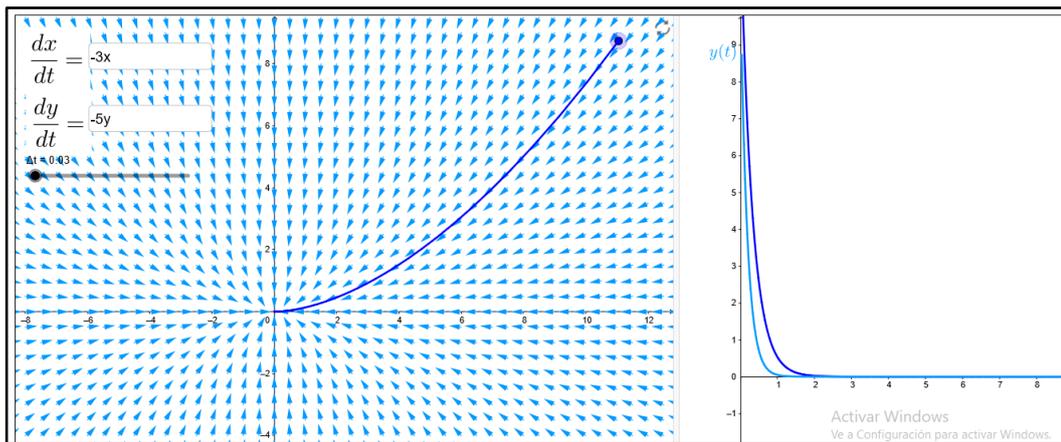


Figura N° 9 Nodo Estable.
 Fuente: GeoGebra.

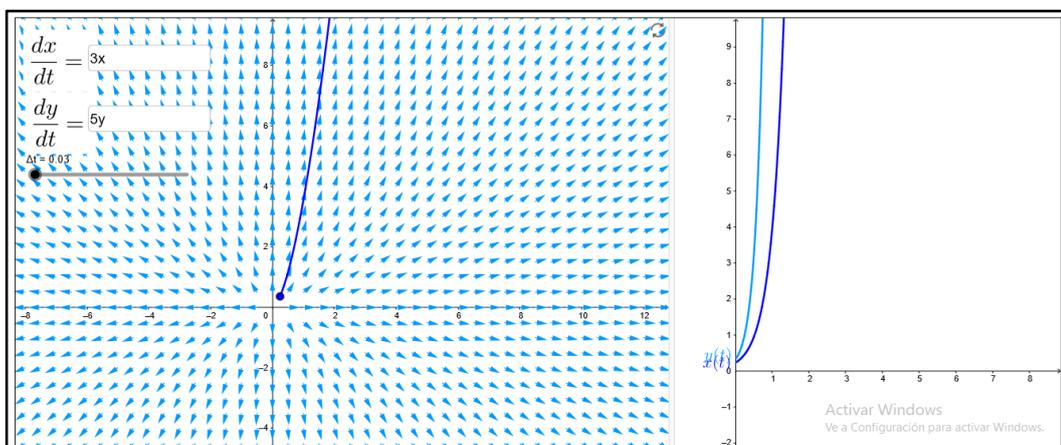


Figura N° 10 Nodo Inestable.
 Fuente: GeoGebra.

Teorema 2.3.3.3: Si A tiene valores propios doble λ , el punto singular es un atractor, estable (figura N°11) o inestable (figura N°12) según que λ sea negativo o positivo. Si además, f y g tienen derivadas parciales de segundo orden continuas, el punto singular es un nodo.

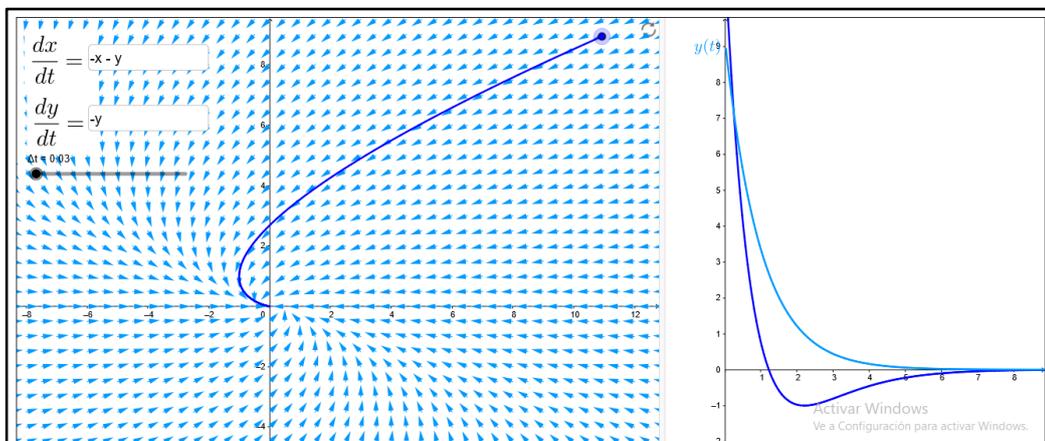


Figura N° 11 Nodo estable de una tangente. Fuente: GeoGebra.

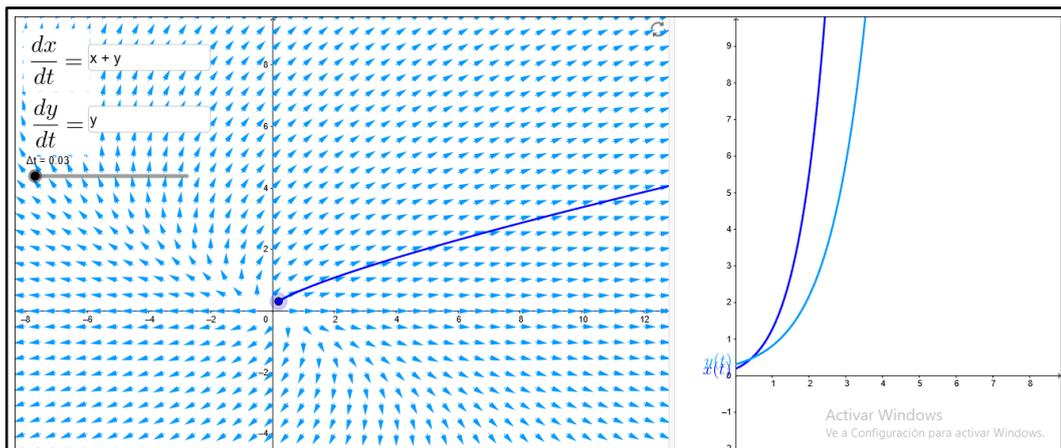


Figura N° 12 Nodo inestable.
Fuente: GeoGebra.

Teorema 2.3.3.4: Si A tiene valores propios reales de signo contrario, el punto singular es un puerto, figura N° 13.

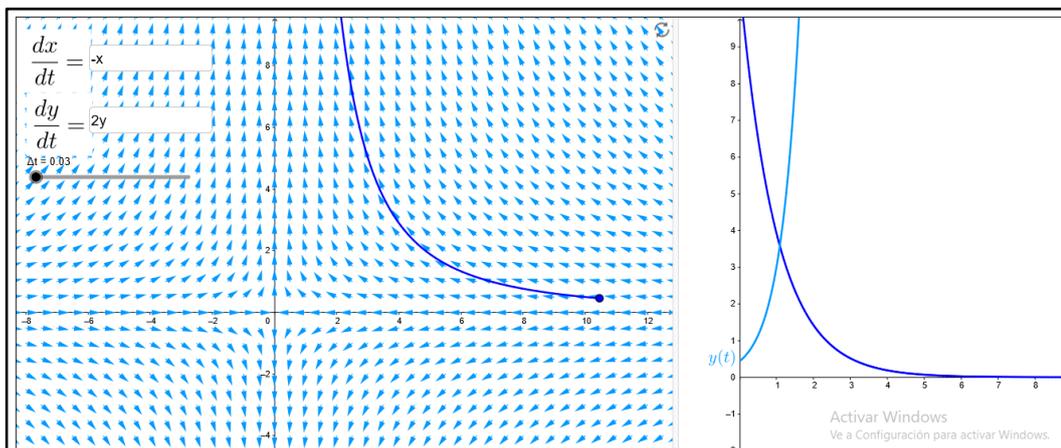


Figura N° 13 Puerto.
Fuente: GeoGebra.

Teorema 2.3.3.5: Si los resultados propios de A son imaginarios puros, el punto singular es un centro, un foco o un centro-foco.

Teorema 2.3.3.6.: Si el origen es un punto singular de:

$$\dot{x} = f(x, y) \quad (2.3.3.3)$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

Y es un centro para la aproximación lineal, y si se verifica.

$$(a) f(x, -y) = -f(x, y), g(x, -y) = g(x, y)$$

$$(b) f(-x, y) = f(x, y), g(-x, y) = -g(x, y)$$

Entonces el origen es un centro de (2.3.3.3).

Teorema 2.3.3.7: Si los dos valores propios de A tienen parte real negativas, el punto singular (x_0, y_0) de (2.3.3.1) es asintóticamente estable. Si alguno de los valores propios tiene parte real positiva, el punto singular es inestable.

Tabla N° 1 Resumen del comportamiento de sistemas lineales. (Coughanowr & LeBlanc, 2009)

Valores propios	Descripción de las raíces	Tipo de punto crítico	Estabilidad
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Reales, distintas, ambos signos positivos	Nodo	Inestable
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Reales, distintas, ambos signos negativos	Nodo	Estable
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Reales, distintas, ambos signos opuestos	Punto silla, Puerto	Inestable
Vectores propios independientes $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Reales, repetidas, signos negativos	Nodo, Atractor	Estable
Vectores propios independientes $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Reales, repetidas, signos positivos	Nodo, Fuente	Inestable
$\lambda = a \pm ib, a > 0$	Complejo, parte real positiva	Espiral, Foco	Inestable
$\lambda = a \pm ib, a < 0$	Complejo, parte real negativa	Espiral, Foco	Asintóticamente Estable
$\lambda = a \pm ib, a = 0$	Solo parte imaginaria	Centro o elipse	Estable

En la tabla N°1 se muestra un resumen del comportamiento de todos los puntos críticos solo conociendo los auto-valores de la matriz A.

2.3.4 Comportamiento cualitativo de soluciones de sistema no lineales. (MUÑOZ FERNANDEZ & SEOANE SEPULVEDA, 2017)

En esta sección nos dedicaremos a definir el concepto de punto de equilibrio de un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales asociado a un cierto problema de valor inicial, y lo clasificaremos en función de sus características. Para ello empezaremos haciendo una introducción de los principales aspectos del problema de valores iniciales objeto de nuestro estudio.

Consideremos el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.3.4.1)$$

Y el sistema no lineal:

$$y' = f(t, y) \quad (2.3.4.2)$$

En esta sección, siempre que se haga referencia al problema de valor inicial (2.3.4.1) y al sistema no lineal (2.3.4.2), tendremos en cuenta las consideraciones siguientes, salvo que se especifique lo contrario.

- Sea $E \subseteq R^n$ abierto. Suponemos que $f \in C^1([a, b] \times E; R^n)$, con $y_0 \in E$ y $[a, b] \subseteq R$. Algunas veces escribiremos $f(y)$, con $f \in C^1(E; R^n)$, para referirnos a dicha función.
- Denotamos por $\Phi(t, y_0)$ a la solución del sistema dado por (2.3.4.1) en su correspondiente intervalo máximo de existencia I_{y_0} .
- Expresemos “ y ” y $f(t, y(t))$ como vectores de R^n .

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad f(t, y) = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

Donde cada componente f_j de f es de manera que:

$$f_j \in C^1([a, b] \times E; R), \text{ para } 1 \leq j \leq n.$$

- Consideremos la diferencial de $f(t, y)$ en el punto $y(t) \in E$, a la que denotamos $Df(t, y) \in M_n(R)$. También denotaremos $Df(y)$ a la diferencial de f .

Definición 2.3.4.1: (Flujo de un sistema no lineal). Consideremos el problema de valor inicial (2.3.4.1)

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right\}$$

Se define el flujo del sistema no lineal $y'(t) = f(t, y(t))$ como la aplicación $\Phi_1(y_0) = \Phi(t, y_0)$, para cada $t \in I_{y_0}$. Dicha aplicación describe el movimiento del punto y_0 en el tiempo t .

La aplicación $\Phi_t(\cdot)$ verifica las siguientes propiedades;

1. $\Phi_0(y) = y$.
2. $\Phi_s(\Phi_t(y)) = \Phi_{s+t}(y)$, para cada $s, t \in R$
3. $\Phi_{-t}(\Phi_t(y)) = \Phi_t(\Phi_{-t}(y))$, para cada $s, t \in R$

Definición 2.3.4.2: Dado el problema de valor inicial (2.3.4.1), consideramos el sistema no lineal (2.3.4.2)

1. Se dice $x \in E$ es un punto de equilibrio del sistema $y' = f(y)$ si $f(x) = 0$.
 2. Un punto de equilibrio se denomina hiperbólico si ninguno de los autovalores de la matriz $Df(x)$ tiene parte real nula.
 3. Un punto de equilibrio se denomina no hiperbólico si algún autovalor de la $Df(x)$ tiene parte real nula.
 4. Al sistema $y' = Df(x)$ y se le denomina sistema lineal asociado a (2.3.4.2).
- Nótese que, en la definición anterior, $f \in C^1(E; R^n)$ por lo que 0 denota el vector nulo de R^n .

Definición 2.3.4.3: (Clasificación de Puntos de Equilibrio Hiperbólicos). Sea x un punto de equilibrio hiperbólico del sistema no lineal (2.3.4.2), se dice que:

1. X es un punto atractor si todos los autovalores de $Df(x)$ poseen parte real negativa, esto es, $Re(\lambda) < 0$ para cada λ autovalor de $Df(x)$. En este caso también diremos que el punto de equilibrio es asintóticamente estable.
2. X se denomina punto fuente si todos los autovalores de $Df(x)$ poseen parte real positiva, es decir, $Re(\lambda) > 0$ para cada λ autovalor de $Df(x)$.
3. X es un punto silla si $Df(x)$ posee algún autovalor λ_1 con $Re(\lambda_1) < 0$ y algún autovalor λ_2 con $Re(\lambda_2) > 0$.

Si x es un punto fuente o punto de silla también diremos que es un punto de equilibrio inestable.

2.3.5 El teorema de Hartman-Grobman. (MUÑOZ FERNANDEZ & SEOANE SEPULVEDA, 2017)

El teorema de Hartman-Grobman nos muestra que, en determinadas circunstancias, cerca de un punto de equilibrio x del sistema no lineal.

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Se tiene que este sistema y el sistema lineal asociado en el punto de equilibrio:

$$y'(t) = Df(t, x) \cdot y$$

Poseen la misma estructura cualitativa.

Este resultado fue probado por el matemático estadounidense Philip Hartman en 1960. Sin embargo, ya había sido enunciado públicamente en 1959 por el matemático ruso David Grobman, probablemente sin conocer el trabajo de Hartman. Al haber obtenido el resultado, aparentemente, de manera

independiente, Grobman lo publicó en 1962. Al día de hoy se le conoce como teorema de Hartman-Grobman.

Definición 2.3.5.1: (Sistemas Topológicamente Equivalentes). Dos sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales:

$$y'(t) = f(y(t)) \text{ con } f \in C^1(U; R^n) \quad (2.3.4.3)$$

$$y'(t) = g(y(t)) \text{ con } g \in C^1(V; R^n) \quad (2.3.4.4)$$

Se denomina topológicamente equivalente (o que posee la misma estructura cualitativa), en un entorno de un punto de equilibrio x , si existe un homeomorfismo H que envía un abierto U , con $x \in U$, a un abierto V , con $x \in V$, que manda trayectorias de (2.3.4.3) en U a trayectorias de (2.3.4.4) en V preservando orientación.

Teorema 2.3.5.1: (de Hartman-Grobman). Sea $E \subset R^n$ abierto con $x \in E$. Sea $f \in C^1([a, b] \times E; R^n)$, y sea ϕ_t el flujo del sistema no lineal $y' = f(y)$. Supongamos además que $f(x) = 0$, y que $A = Df(x)$ no posee autovalores con parte real nula; esto es, x es un punto de equilibrio hiperbólico del sistema $y' = f(y)$.

Entonces existe un homeomorfismo H de un abierto U , con $x_0 \in U$, a un abierto V , con $x_0 \in V$, tal que cada $y_0 \in U$ existe un intervalo abierto $I_0 \subset [a, b]$, con $t_0 \in I_0$ de manera que:

$$H(\phi_t(y_0)) = e^{At} \cdot H(y_0) \text{ Para cada } y_0 \in U \text{ y } t \in I_0$$

2.4 EL PROBLEMA DE ESTABILIDAD. (IMAZ & VOREL, 1967)

2.4.1 Introducción.

En las secciones anteriores hemos estudiado la manera en que las soluciones de una ecuación diferencial dependen de las condiciones iniciales para intervalos finitos del tiempo. Se demostró, bajo ciertas hipótesis, que si las condiciones iniciales eran suficientemente próximas entonces las soluciones se mantenían cercanas en todo intervalo considerado. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones es usualmente más importante saber si las soluciones permanecen cercanas al intervalo infinito de tiempo, suponiendo condiciones iniciales próximas; esto es, saber si las soluciones son estables. Este es el problema que se abordara en el presente capítulo.

2.4.2 Estabilidad en el sentido de Liapunov.

Sea:

$$(2.5.2.1) \quad \dot{x} = f(x, t)$$

Con $x = (x_1, \dots, x_n), f = (f_1, \dots, f_2)$ un sistema de n ecuaciones cuya parte derecha $f(x, t)$ satisface condiciones de soluciones en DxJ , donde D es un dominio de $E^n, J = [t_0, \infty >$.

Definición 2.5.2.1: una solución $x(t, t_0, x^0)$ de (2.5.2.1) definida para $t \in [t_0, \infty >$ se llama estable si: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que todas las soluciones $x(t, t_0, y)$ de (2.5.2.1) con $\|y - x^0\| < \delta$ están definidas para $t \in J$ y $\|x(t, t_0, y) - x(t, t_0, x^0)\| < \varepsilon$ para $t \in J$, (figura N°14) si además:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, t_0, y) - x(t, t_0, x^0)\| = 0 \text{ Para } \|y - x^0\| < \delta,$$

Entonces se dice que $x(t, t_0, x^0)$ es asintóticamente estable. Figura N°15.

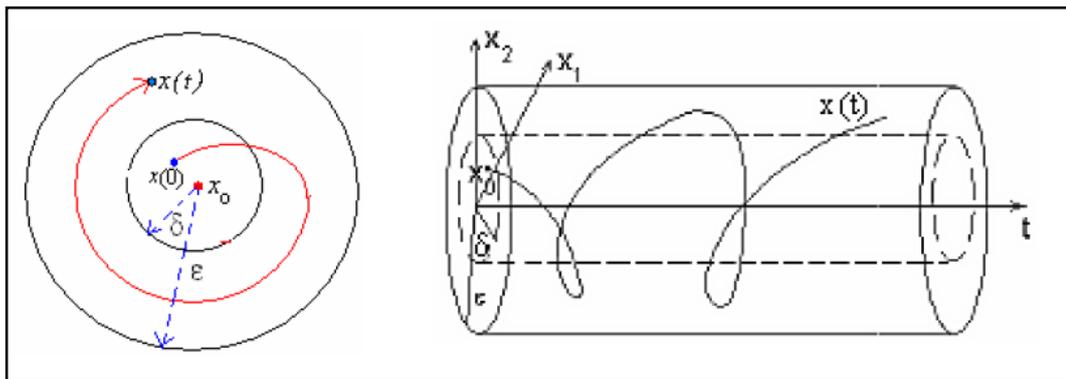


Figura N° 14 (Estabilidad en el sentido de Lyapunov). Fuente: (Velez, s.f.)

En la siguiente figura se muestra geoméricamente la definición 2.5.2.1, la solución debe estar entre los discos de radio ε y δ , para que la solución sea estable.

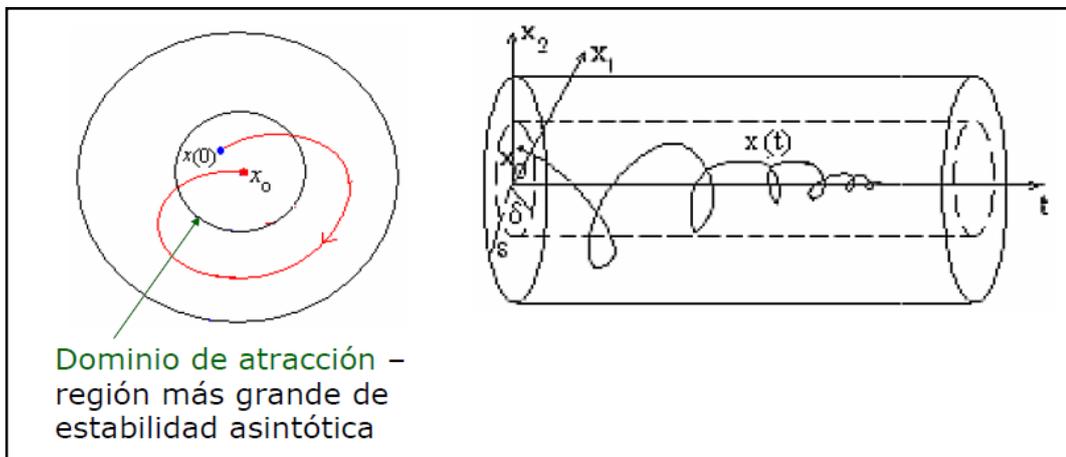


Figura N° 15 Estabilidad asintótica. Fuente: (Velez, s.f.)

Se muestra que la tendencia de la solución es al punto crítico cuando $t \rightarrow \infty$, por lo tanto la solución es asintóticamente estable, es el comportamiento más deseado en la dinámica estructural.

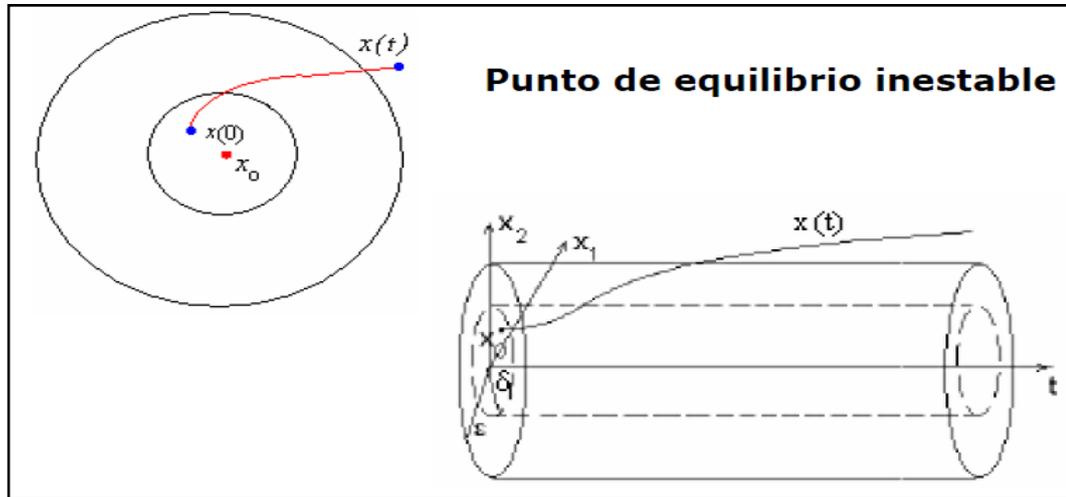


Figura N° 16 Punto de equilibrio Inestable. Fuente: (Velez, s.f.)

Si la solución se sale del disco ϵ y δ entonces la solución es inestable figura N°16.

Estabilidad de sistemas dinámicos. (GORDILLO, 2009)

En esta sección se consideran sistemas modelados por la ecuación:

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

Donde $x \in D \subset R^n$. Se supone, además que el sistema tiene un punto de equilibrio en $x = 0$, es decir, $f(0) = 0$. Este es el equilibrio del que se pretende analizar la estabilidad. En los casos de que el equilibrio de interés no esté en el origen, mediante un cambio de coordenadas (una simple traslación) es posible llevar el equilibrio al origen.

Definición 1: Estabilidad en el sentido de Liapunov.

Se dice que el equilibrio $x = 0$ del sistema (1) es (localmente) estable en el sentido de Liapunov, o simplemente estable, cuando para cada $\epsilon > 0$ existe un valor de $\delta > 0$ (posiblemente dependiente de ϵ) tal que:

$$\|x(0)\| < \delta \rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq 0.$$

En el lenguaje coloquial exente de rigor, esta definición se puede interpretar como si la condición inicial está suficientemente cerca del punto de equilibrio, la trayectoria no se aleja “demasiado” del mismo. En realidad la definición va más allá de ésta interpretación ya que establece que si se especifica cuanto, ϵ , se puede alejar la trayectoria del equilibrio, existe una distancia máxima, δ , de la condición inicial al equilibrio que garantiza el cumplimiento de esa especificación.

La figura N°14 ilustra el significado de esta definición. En ella se observa en el plano una trayectoria que parte dentro del círculo de radio δ y no sale del círculo de radio ε (si el sistema es estable esta trayectoria no debe de salir de este círculo por mucho que avance el tiempo ni ninguna otra trayectoria que parta del círculo de radio δ).

Como ejemplo de equilibrio estable en el sentido de Liapunov se suele dar la posición inferior (en reposo) de un péndulo simple en ausencia de fricción. En este caso si partimos de una posición suficientemente cerca de la posición inferior con una velocidad suficientemente baja, se cumple que el péndulo no se aleja “demasiado” de esa posición. Obsérvese que al ser un caso sin fricción el péndulo nunca se detiene y, por lo tanto, la trayectoria no tiende al equilibrio. Como se ve, el concepto de estabilidad en el sentido de Liapunov es bastante laxo y poco exigente.

Definición 2: Estabilidad asintótica.

Se dice que el equilibrio $x = 0$ del sistema (1) es asintóticamente estable si es (localmente) estable en el sentido de Liapunov y además existe un valor de $\delta > 0$ Tal que:

$$\|x(0)\| < \delta \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (3)$$

Como se puede observar el concepto de estabilidad asintótica reduce la laxitud de la estabilidad en el sentido de Liapunov imponiendo que las trayectorias finalmente converjan hacia el equilibrio. Continuando con el ejemplo del péndulo, en ausencia de fricción el equilibrio correspondiente a la posición inferior no es asintóticamente estable, pero si lo es si existe fricción, de manera que el péndulo finalmente se detiene en esta posición.

Es importante recalcar que no basta con la condición (3) para que el equilibrio sea asintóticamente estable, sino que es necesario que se cumpla la condición de estabilidad en el sentido de Liapunov. Así, la conocida ley de control de Astrom y Furuta (Astrom y Furuta, 2000) para el péndulo simple invertido hace que la posición superior cumpla (3) pero este equilibrio no es estable; a pesar de que la ley consigue levantar el péndulo (realizar el swing-up) y acercarlo a la posición superior, cualquier perturbación hará que el péndulo vuelva a caer. En ese caso la ley de control volverá a llevar el péndulo a la posición deseada (quizás tras una o varias revoluciones completas) pero este comportamiento no cumple (2) y por tanto el equilibrio no es estable en el sentido de Liapunov (y, por consiguiente,

tampoco es asintóticamente estable). Se dice que este equilibrio es atractivo. (GORDILLO, 2009).

Definición 2.5.2.2: Una función $V(x)$ continua y positiva definida en U se llama una función Liapunov no creciente en U con respecto a (2.5.2.1), si para cada solución $x(t)$ de (2.5.2.1) se cumple:

$$(2.5.2.2) \quad \frac{dV(x(t))}{dt} \leq 0$$

Para todas t tales que $x(t) \in U$.

Teorema 2.5.2.1: Si existe una función de Liapunov $V(x)$ no creciente con respecto a (2.5.2.1), entonces la solución $x(t) \equiv 0$ de (2.5.2.1) es estable.

Si además, existe una función $W(x)$ continua y negativa en U tal que la derivada con respecto a (2.5.2.1) $\frac{dV(x)}{dt} \leq W(x)$ para $x \in D \cap U, t \geq t_0$, entonces la solución $x(t) \equiv 0$ es asintóticamente estable.

$$(2.5.2.5) \quad \dot{x} = f(x)$$

Teorema 2.5.2.2: Supongamos que la función $f(x)$ en (2.5.2.5) satisface una condición de Lipschitz en una vecindad U del origen (es decir, existe una constante) L tal que $\|f(x^1) - f(x^2)\| \leq L\|x^1 - x^2\|$ para cada pareja $x^1, x^2 \in U$, $f(0) = 0$, y que existen $\delta > 0$ y una función $\varphi(t)$ escalar real definida para toda $t \geq 0$, asociada y tiende a cero para $t \rightarrow \infty$, $\int_0^\infty \varphi(t)dt < \infty$, tales que para cada solución $y(t, x) = (y_1(t, x), \dots, y_n(t, x))$ de (2.5.2.5) con condición inicial $\|x\| < \delta$ se tiene:

$$|y_1(t, x)y_1(t, x)| \leq \varphi(t)$$

Para $t \geq 0, i, j = 1, 2, \dots, n$. Entonces para cada matriz positiva definida simétrica C la función:

$$V(x) = \int_0^\infty y'(t, x)Cy(t, x)dt = \int_0^\infty \sum_{i,j=1}^n (C)_{ij}y_i((t, x)y_j(t, x)dt),$$

Es una función de Liapunov con derivada respecto a (2.5.2.5) dada por:

$$\frac{dV(x)}{dt} = -x'Cx, \text{ para } \|x\| < \delta$$

En el teorema siguiente comprobaremos que para el sistema:

$$(2.5.2.3) \quad \dot{x} = Ax + f(t, x)$$

Donde A es una $n \times n$ matriz real constante cuyas raíces características tienen parte real negativa y $f(t, x)$ es una función vectorial continua en (t, x) y lipschitziana en x con una constante independiente de t para $x \in U, t \geq t_0; f(t, 0) = 0$;

$\frac{\|f(t, x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0, \|x\| \rightarrow 0$, uniformemente con respecto a $t \geq t_0$; la estabilidad se determina por la estabilidad del sistema linealizado.

Además vamos a construir una función de Liapunov que permitirá no solo establecer la estabilidad asintótica, que es una propiedad local, sino también estimar el dominio de atracción de la solución trivial, es decir, estimar por dentro una vecindad del origen tal, que si una solución de (2.5.2.15) empieza en un punto de esta vecindad para $t = t_0$ entonces se queda en ella para toda $t \geq t_0$ y además, converge hacia el origen con $t \rightarrow \infty$.

Teorema 2.5.2.3: Por cada matriz positiva definida simétrica C existen una matriz única y positiva definida y simétrica D y un número $\mu > 0$ tales que:

$V(x) = x'Dx < u_1 < \mu$ Implica $V(y(t, t_0, x)) < \mu_1$ para cada solución $y(t, t_0, x)$ de (2.5.2.3) y $t \geq t_0$. Además para cada una de estas u_1 existe una constante positiva k_1 , tal que $V(y(t, t_0, x)) \leq V(x)e^{-k_1(t-t_0)}$, si $V(x) < \mu_1$.

Teorema 2.5.2.4: Si al menos una raíz característica de la matriz A es (2.5.2.1.5) tiene parte real positiva, la solución trivial de (2.5.2.3), donde $f(t, x)$ satisface las mismas hipótesis que en el teorema 2.5.2.3, no es estable.

Los teoremas 2.5.2.3 y 2.5.2.4 son válidos también si la matriz A en (2.5.2.3) es periódica en t .

Teorema 2.5.2.5: si $f(t, x)$ satisface la hipótesis del teorema 2.5.2.3 y si todos los exponentes característicos de la matriz real, ω -periódica y continua $A(t)$ tienen parte real negativa, entonces la solución trivial del sistema:

$$(2.5.2.4) \quad \dot{x} = A(t)x + f(t, x)$$

Es asintóticamente estable. Si al menos un exponente característico tiene parte real positiva, la solución trivial de (2.5.2.4) no es estable.

2.4.3 Estabilidad de soluciones periódicas.

En este párrafo vamos a estudiar la estabilidad de soluciones periódicas del sistema.

$$(2.5.3.1) \quad \dot{x} = f(t, x)$$

Donde $f(t, x)$ es una función vectorial definida y continua en DxJ , donde D es un dominio de $E^n, J = [t_0, \infty >$. Supondremos que las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = i, j = 1, \dots, n$, son continuas en DxJ . Uniformemente respecto a $t \in J$ y f es periódica en t , es decir, existe un número positivo ω tal que $f(t + \omega, x) = f(t, x)$ para todas $(t, x) \in DxJ$. Un caso especial de (2.5.3.1) se tiene cuando f no depende de t . Presentaremos condiciones suficientes para que una solución periódica, con periodo ω , de (2.5.3.1) sea asintóticamente estable (teorema 2.5.3.1). Sin embargo, estas condiciones y la afirmación correspondiente son demasiado fuertes, porque no se satisfacen, cuando f no depende de t . En consecuencia, para el caso autónomo tendremos que dar condiciones más débiles y obtendremos algo menos que la estabilidad asintótica (teorema 2.5.3.2). De manera parecida a como se hizo en el párrafo anterior trataremos de reducir el problema de la estabilidad de una solución periódica de (2.5.3.1) a la estabilidad de la solución trivial de una ecuación lineal.

$$(2.5.3.5) \quad \dot{y} = \frac{\partial f(t, \tilde{x}(t))}{\partial x} y$$

Teorema 2.5.3.1:

- a) Si todos los exponentes característicos de (2.5.3.5) tienen parte real negativa, entonces la solución periódica $\tilde{x}(t)$ de (2.5.3.1) es asintóticamente estable.
- b) Si al menos un exponente característico de (2.5.3.5) tiene parte real positiva, la solución periódica $\tilde{x}(t)$ de (2.5.3.1) no es estable.

Definición 2.5.3.1: sea $\tilde{x}(t)$ una solución del sistema:

$$(2.5.3.3) \quad \dot{x} = f(x)$$

Definida para toda $t \geq 0$, donde $f(x)$ es una función vectorial con n componentes reales, definidos y continuos para $x \in D, D$ un dominio de E^n , y sea $\emptyset =$

$\{x; x = \tilde{x}(t), t \geq 0\}; \tilde{x}(t)$ se llama orbitalmente estable, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ con las propiedades siguientes:

Existe una función real $\tau(t, y)$ definida para $t \geq 0$, y $y \in V(\delta, \emptyset)$ donde $V(\delta, \emptyset) = \{x; d(x, \emptyset) < \delta\}$, continua en t y tendientes de manera autónoma hacia ∞ con $t \rightarrow \infty$, tal que $d(y, \emptyset) < \delta$ implica:

- a) $x(t, y)$ esta definida para todas $t \geq 0$;

b) $\|x(t, y) - \check{x}(\tau(t, y))\| < \varepsilon$ para todas $t \geq 0$.

Si además existe $\delta_1 > 0$ tal que $d(y, \emptyset) < \delta_1$ implica $\|x(t, y) - \check{x}(\tau(t, y))\| \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$, $\check{x}(t)$ se llama orbitalmente estable. Si además $\lim_{t \rightarrow \infty} (\tau(t, y) - t)$ es finito, se dice que $\check{x}(t)$ tiene fase asintótica.

Teorema 2.5.3.2: Sea $\check{x}(t)$ una solución no constante periódica con periodo ω del sistema autónomo (2.5.3.2). Si $n-1$ raíces características de la primera variación de (2.5.3.1) con respecto a $\check{x}(t)$ tienen una parte real negativa, entonces $\check{x}(t)$:

- a) Es estable (según la definición 2.5.2.1)
- b) Es orbitalmente asintóticamente estable y tiene una fase asintótica.

2.5 TEORÍA DE CONTROL. (OGATA, 2010)

2.5.1 Introducción.

La idea general de la teoría del control es la siguiente. Se desea que un proceso, representado por una ecuación diferencial, llegue al cabo de algún tiempo a cierto estado (objetivo), prefijado, con tal fin se introducen en el proceso (ecuación diferencial) ciertos elementos que garanticen la consecución de tal objetivo, a estos elementos los llamamos controles. También puede ser el caso de que el proceso llegue por si solo al objetivo y entonces se introducen los controles con el fin de que lo alcance en mejor forma y en menos tiempo.

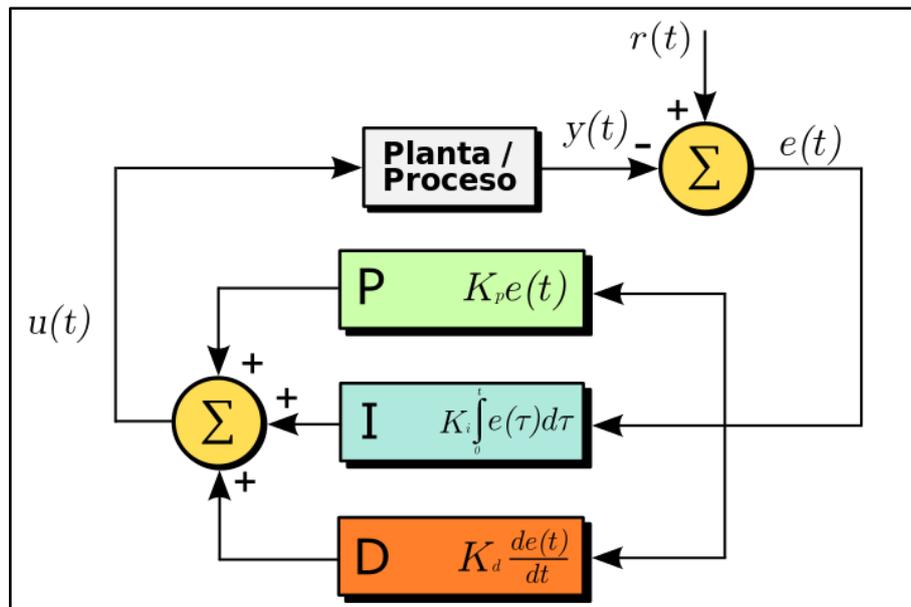


Figura N° 17 Diagrama de bloques de un controlador PID en un lazo cerrado.
Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Controlador_PID

Un controlador PID (controlador proporcional, integral y derivativo) es un mecanismo de control simultáneo por realimentación ampliamente usado de control industrial figura N°17.

2.5.2 Definiciones.

- Variables controladas y señal de control o variable manipulada: La variable controlada es la cantidad o condición que se mide y controla. La señal de control o variable manipulada es la cantidad o condición que el controlador modifica para afectar el valor de la variable controlada. Normalmente, la variable controlada es la salida del sistema. Controlar significa medir el valor de la variable del sistema y aplicar la variable manipulada al sistema para corregir o limitar la desviación del valor medido respecto al valor deseado.
- Plantas: Una planta puede ser una parte de un equipo, tal vez un conjunto de los elementos de una máquina que funcionan juntos y cuyo objetivo es efectuar una operación particular.
- Procesos: Se define como una operación o un desarrollo natural progresivamente continuo, marcado por una serie de cambios graduales que se suceden unos a otros de una forma relativamente fija y que conducen a un resultado o propósitos determinados.
- Sistemas: Un sistema es una combinación de componentes que actúan juntos y realizan un determinado objetivo.
- Perturbaciones: Una perturbación es una señal que tiende a afectar negativamente el valor de la salida de un sistema. Si la perturbación se genera dentro del sistema se denomina interna, mientras que una perturbación externa genera fuera del sistema y es una entrada.
- Control realimentado: El control realimentado se refiere a una operación que, en presencia de perturbaciones, tiende a reducir la diferencia entre la salida de un sistema y alguna entrada de referencia, y lo realiza tomando en cuenta esta diferencia.

2.5.3 Control en lazo cerrado en comparación con control en lazo abierto.

2.5.3.1 Sistemas de control realimentados

Un sistema que mantiene una relación determinada entre la salida y la entrada de referencia, comparándolas y usando la diferencia como medio de control, se

denomina sistema de control realimentado. Un ejemplo sería el sistema de control de temperatura de una habitación. Midiendo la temperatura real y controlada con la temperatura de referencia (temperatura deseada), el termostato activa o desactiva el equipo de calefacción o enfriamiento para asegurar que la temperatura de la habitación se mantenga en un nivel confortable independiente de las condiciones externas.

2.5.3.2 Sistemas de control en lazo cerrado.

Los sistemas de control realimentados se denominan también sistemas de control en lazo cerrado. En un sistema de control en lazo cerrado, se alimenta al controlador la señal de error de actuación, que es la diferencia entre la señal de entrada y la señal de realimentación (que puede ser la propia señal de salida o una función de la señal de salida y sus derivadas y/o integrales), con el fin de reducir el error y llevar la salida del sistema a un valor deseado. El término control en lazo cerrado siempre implica el uso de una acción de control realimentado para reducir el error del sistema.

2.5.4 Modelo matemático de sistemas de control.

Un sistema de control puede tener varios componentes. Para mostrar las funciones de cada componente en la ingeniería de control, por lo general se usa una representación denominada diagrama de bloques.

- Diagrama de bloques: Un diagrama de bloques de un sistema es una representación gráfica de las funciones que lleva a cabo cada componente y el flujo de señales. Tales diagramas muestran las relaciones existentes entre los diversos componentes. A diferencia de una representación matemática puramente abstracta, un diagrama de bloques tiene la ventaja de indicar la forma más realista el flujo de las señales del sistema real. En un diagrama de bloques todas las variables del sistema se enlazan con otras mediante bloques funcionales. El bloque funcional o simplemente bloque es un símbolo para representar la operación matemática que sobre la señal de entrada hace el bloque para producir la salida. Figura N°18.

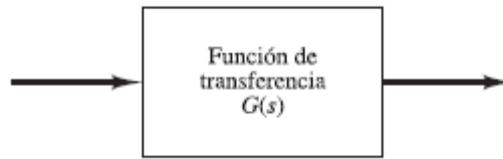


Figura N° 18 Elementos de un diagrama de bloque.

Fuente: (OGATA, 2010)

- Punto suma: Un círculo con una cruz es el símbolo que indica operación de suma. El signo más o el signo menos en cada punta de flecha indica si la señal debe sumarse o restarse. Es importante que las cantidades que se sumen o resten tengan las mismas dimensiones y las mismas unidades. FiguraN°19.

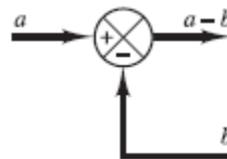


Figura N° 19 Punto de suma.

Fuente: (OGATA, 2010)

2.5.4.1 Diagrama de bloques de un sistema de lazo cerrado.

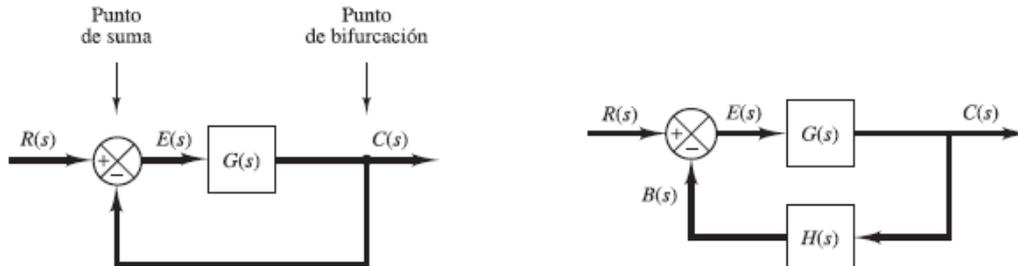


Figura N° 20 Diagrama de bloques de un sistema de lazo cerrado.

Fuente: (OGATA, 2010)

La figura N°20 muestra un ejemplo de un diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado. La salida $C(s)$ se realimentan al punto de suma, donde se compara con la entrada de referencia $R(s)$. La naturaleza en lazo cerrado del sistema se indica con claridad en la figura N°20. La salida del bloque, $C(s)$ en este caso, se obtiene multiplicando la función de transferencia $G(s)$ por la entrada al bloque $E(s)$. Cualquier sistema de control lineal puede representarse mediante un diagrama de bloques formando por punto suma, bloques y punto de ramificación.

2.5.5 Modelado en el espacio de estados.

- Estado: El estado de un sistema dinámico es el conjunto de variables más pequeño (llamadas variables de estado), de forma que el conocimiento de estas variables en $t = t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \gg t_0$, determinan completamente el comportamiento del sistema en cualquier $t \gg t_0$.
- Variables de estado: Las variables de un sistema dinámico son las variables que constituyen el menor conjunto de variables x_1, x_2, \dots, x_n para describir completamente el comportamiento de un sistema dinámico (de forma que una vez que la entrada para $t \gg t_0$ esta dada y el estado inicial en $t = t_0$ esta especificado, el estado futuro del sistema está determinado completamente).
- Vector de estados: si se necesitan n variables para describir completamente el comportamiento de un sistema dado, entonces esas n variables de estado se pueden considerar como las n componentes de un vector x . Este vector se denomina vector de estados. Un vector de estados determina unívocamente el estado del sistema $x(t)$ en cualquier instante del tiempo $t \gg t_0$ y se especifica la entrada $u(t)$ para $t \gg t_0$.
- Espacio de estados: El espacio de n -dimensional cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje x_1 , eje x_2 , ..., eje x_n donde x_1, x_2, \dots, x_n son las variables de estado, se denomina espacio de estados. Cualquier estado se puede representar como un punto en el espacio de estados.
- Ecuación en el espacio de estados: En el análisis en el espacio de estados se centra la atención en los tipos de variables que aparecen en el modelado de los sistemas dinámicos; las variables de entrada, las variables de salida y las variables de estado.
- Sea un sistema de múltiples entradas-múltiples salidas con n integradores. Supóngase también que hay r entradas $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ y m salidas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$. Se definen las "n" salidas de los integradores como variables de estado $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Entonces el sistema se puede describir mediante:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$

$$\dot{x}_n(t) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \quad (2.7.5.1)$$

Las salidas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ del sistema se obtienen mediante:

$$y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$

$$y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$

$$y_m(t) = g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \quad (2.7.5.2)$$

Si se define:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix}, \quad g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_1(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones (2.7.5.1) y (2.7.5.2) se convierten en:

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad (2.7.5.3)$$

$$y(t) = g(x, u, t) \quad (2.7.5.4)$$

La ecuación de estado es (2.7.5.3) y la ecuación de salida es (2.7.5.4). Si las funciones vectoriales f y/o g involucran explícitamente el tiempo t , el sistema se denomina sistema variante con el tiempo.

Si se linealizan las ecuaciones (2.7.5.3) y (2.7.5.4) alrededor del estado de operación, se tienen las siguientes ecuaciones de estado y de salida linealizadas:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2.5.5.5)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (2.5.5.6)$$

Donde $A(t)$ se denomina matriz de estado, $B(t)$ matriz de entrada, $C(t)$ matriz de salida y $D(t)$ matriz de transmisión directa. En la figura N°21. Aparece un diagrama de bloques que representa las ecuaciones (2.5.5.5) y (2.5.5.6).

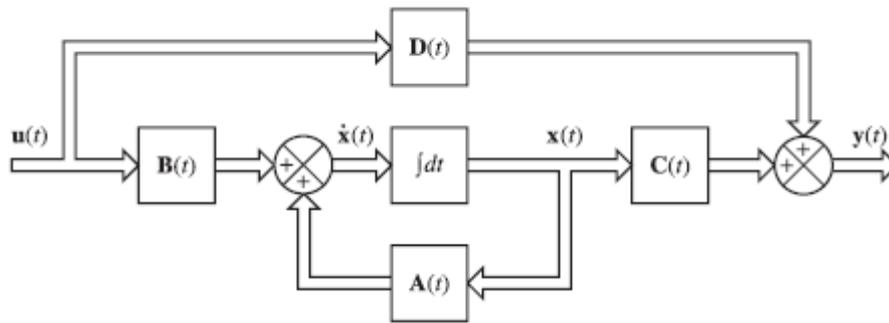


Figura N° 21 Diagrama de bloques del sistema de control lineal en tiempo continuo representado en el espacio de estados.

Fuente: (OGATA, 2010)

Si los sistemas vectoriales f y g no involucran el tiempo t explícitamente, el sistema se denomina sistema invariante con el tiempo. En este caso, las ecuaciones (2.5.5.5) y (2.5.5.6) se simplifican a:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.5.5.7)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.5.5.8)$$

La ecuación (2.5.5.7) es la ecuación de estado del sistema lineal e invariante con el tiempo y la ecuación (2.5.5.8) es la ecuación de salida para el mismo sistema.

2.5.6 Diseño de sistemas de control en el espacio de estados.

2.5.6.1 Sistema regulador óptimo cuadrático.

Una ventaja del método de control óptimo cuadrático respecto del método de asignación de polos es que el primero proporciona un procedimiento sistemático de calcular, la matriz de ganancia de control de realimentado del estado.

- Problemas de control óptimo cuadrático: Ahora se considerará el problema de regulador óptimo que, dadas las ecuaciones del sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.7.6.1.1)$$

Determina la matriz K del vector de control óptimo:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (2.7.6.1.2)$$

Con el objetivo de minimizar la función de coste:

$$J = \int_0^{\infty} (x^* Q x + u^* R u) dt \quad (2.7.6.1.3)$$

Donde "Q" es una matriz hermitica definida positiva (o semidefinida positiva) o simétrica real y "R" es una matriz hermitica definida positiva o simétrica real. Obsérvese que el segundo término del miembro derecho de la ecuación (2.7.6.1.3) considera el coste de energía de las señales de

control. Las matrices “Q” y “R” determinan la importancia relativa del error y del coste de esta energía. En este problema, se supone que el vector de control $u(t)$ no está restringido.

Como se verá después, la ley de control lineal obtenida mediante la ecuación (2.7.6.1.2) es la ley de control óptimo. Por lo tanto, si se determinan los elementos desconocidos de la matriz K.

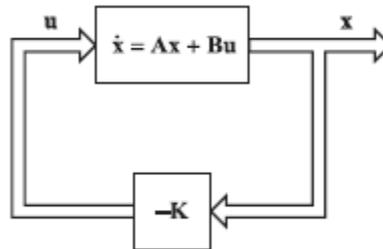


Figura N° 22 Sistema de regulador óptimo.
Fuente: (OGATA, 2010)

Para minimizar la función de coste, entonces $u(t) = -Kx(t)$ es óptima para cualquier estado inicial $x(0)$. El diagrama de bloques que da la configuración óptima se muestra en la figura N°22.

Ahora se resuelve el problema de optimización. Sustituyendo la ecuación (2.7.6.1.2) en (2.7.6.1.1), se obtiene:

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x$$

En las deducciones siguientes, se supone que la matriz $A - BK$ es estable, o que los valores propios de $A - BK$ tienen parte reales negativas.

Al sustituir la ecuación (2.7.6.1.2) en la ecuación (2.7.6.1.3) resulta:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} (x^* Q x + x^* K^* R K x) dt \\ &= \int_0^{\infty} x^* (Q + K^* R K) x dt \end{aligned}$$

Se iguala:

$$x^* (Q + K^* R K) x = - \frac{d(x^* P x)}{dt}$$

Donde P es una matriz hermitica definida positiva o simétrica real. Así, se obtiene:

$$x^* (Q + K^* R K) x = -\dot{x}^* P x - x^* P \dot{x} = -x^* [(A - BK)^* P + P(A - BK)] x$$

Al comparar ambos lados de esta última ecuación y considerando que la misma debe ser válida para cualquier x, se requiere que:

$$(A - BK)^*P + P(A - BK) = -(Q + K^*RK) \quad (2.7.6.1.4)$$

Se puede mostrar que si $A - BK$ es una matriz estable, existe una matriz P definida positiva que satisface la ecuación (2.7.6.1.4).

Por tanto, el procedimiento se basa en determinar los elementos de P a partir de la ecuación (2.7.6.1.4) y ver si es definida positiva. (Obsérvese que más de una matriz P puede satisfacer esta condición. Si el sistema es estable, siempre existe una matriz P definida positiva que satisface esta condición. Esto significa que, si se despeja la ecuación y se encuentra una matriz P definida positiva, el sistema es estable. Otras matrices P que satisface esta ecuación no son definidas positivas y deben descartarse.)

El índice de comportamiento J se calcula como:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} x^*(Q + K^*RK)x dt = -x^*Px \Big|_0^{\infty} \\ &= -x^*(\infty)Px(\infty) + x^*(0)Px(0) \end{aligned}$$

Como se supone que todos los valores propios de $A - BK$ tienen partes reales negativas, tenemos que $x(\infty) \rightarrow 0$. Por lo tanto, se obtiene:

$$J = x^*(0)Px(0) \quad (2.7.6.1.5)$$

Así, el índice de comportamiento J se obtiene en términos de la condición inicial $x(0)$ y P . Para obtener la solución al problema de control óptimo cuadrático, se procede de modo siguiente. Como se ha puesto que R es una matriz hermitica definida positiva o simétrica real, se puede escribir:

$$R = T^*T$$

Donde T es una matriz no singular. Así, la ecuación (2.7.6.1.4) se escribe como:

$$(A^* - K^*B^*)P + P(A - BK) + Q + K^*T^*TK = 0$$

Que puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} A^*P + PA + [TK - (T^*)^{-1}B^*P]^*[TK - (T^*)^{-1}B^*P] - PBR^{-1}B^*P + Q \\ = 0 \end{aligned}$$

La minimización de J con respecto a K requiere la minimización de:

$$x^*[TK - (T^*)^{-1}B^*P]^*[TK - (T^*)^{-1}B^*P]x$$

Con respecto a K . Como esta última expresión es no negativa, el mínimo ocurre cuando es cero, o cuando:

$$TK = (T^*)^{-1}B^*P$$

Por tanto:

$$K = T^{-1}(T^*)^{-1}B^*P = R^{-1}B^*P \quad (2.7.6.1.6)$$

La ecuación (2.7.6.1.6) de la matriz óptima K . Así la ley de control óptimo para el problema de control óptimo cuadrático es lineal cuando el índice de comportamiento está dado por la ecuación (2.7.6.1.3) y se puede expresar como:

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1}B^*Px(t)$$

La matriz P en la ecuación (2.7.6.1.6) debe satisfacer la ecuación (2.7.6.1.4) o la ecuación reducida siguiente:

$$A^*P + PA - PBR^{-1}B^*P + Q = 0 \quad (2.7.6.1.7)$$

La ecuación (2.7.6.1.7) se denomina ecuación matricial reducida de Riccati. Los pasos del diseño se plantean del modo siguiente:

1. Resolver la ecuación (2.7.6.1.7), ecuación matricial reducida de Riccati, para la matriz P . [Si existe una matriz P definida positiva] (ciertos sistemas pueden no tener una matriz P definida positiva), el sistema es estable o la matriz $A - BK$ es estable.
2. Sustituir esta matriz P en la ecuación (2.7.6.1.6). La matriz K resultante es la matriz óptima.

CAPÍTULO III. ANÁLISIS NUMÉRICO CUANTITATIVO DE UN SISTEMA LINEAL.

3.1 INTRODUCCIÓN.

Para el desarrollo de este capítulo se utilizará el Software MATLAB 2019 (Utilizando su entorno SIMULINK) que resolverá los sistemas de ecuaciones diferenciales de un modelo de edificio cortante, utilizando el método de RUNGE KUTTA. Se obtendrá la respuesta cuantitativa del modelo, como los desplazamientos, velocidad y aceleraciones por nivel.

3.2 MODELO DE EDIFICIO LINEAL.

Se considera un pórtico de varios grados de libertad, tal que se asume que los sistemas de vigas y pisos son demasiados rígidos a la flexión y se desprecian varios factores: la deformación axial de las vigas y las columnas, y el efecto de la fuerza axial sobre la rigidez de las columnas, figura N°23.

La masa se distribuye en todo el edificio, pero se idealizará como si estuviera concentrada en los niveles de los pisos. Este supuesto suele ser apropiado para edificios con varios niveles, porque la mayor parte de la masa del edificio se encuentra, en efecto, al nivel de los pisos. (K.CHOPRA, 2014)

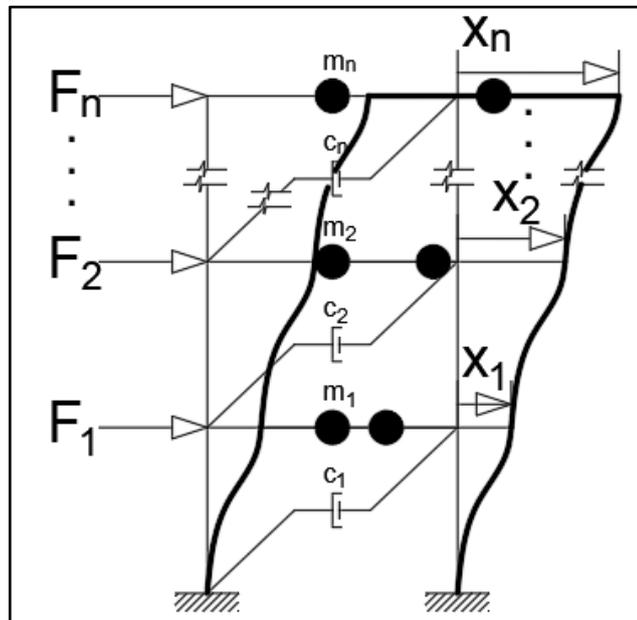


Figura N° 23 Estructura de varios grados de libertad. Imagen adaptada de CHOPRA (2001) con cambio de variables.

Para determinar la ecuación de movimiento (3.2.1) se supone una estructura lineal de n grados de libertad.

$$M_s \ddot{x}_s + C_s \dot{x}_s + K_s x_s = F(t) \quad (3.2.1)$$

Donde x_s es el vector de desplazamiento relativo a la base y M_s , C_s y K_s son las matrices $n \times n$ de masa, amortiguamiento y rigidez efectivamente:

$$M_s = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & m_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & m_n \end{bmatrix}, K_s = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & \cdot & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -k_n \\ 0 & \cdot & -k_n & k_n \end{bmatrix}, C_s = \alpha M_s + \beta K_s$$

$F(t)$ Es el vector de fuerzas externas actuando en cada piso y es frecuentemente desacoplado de la forma:

$$F(t) = -M_s R_s \ddot{x}_g$$

Donde R_s es el vector de coeficientes y \ddot{x}_g corresponde a la excitación basal.

$$R_s = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para el caso que se necesite conocer los desplazamientos relativos de entrepiso, esto está dado por (GIDARIS & TAFLANIDIS, 2013).

$$\Delta = T_s \cdot x_s$$

Donde la matriz de transformación T_s está definida por:

$$T_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n - x_{n-1} \end{bmatrix}$$

Si se tiene un edificio de corte, la matriz de rigidez se puede modelar a través de la matriz de transformación T_s y la rigidez asociada a cada piso k_i .

$$K_s = T_s^T \cdot \text{diag}(k_i) T_s \quad (3.2.3)$$

$$K_S = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -k_n \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -k_n & k_n \end{bmatrix}$$

Así, de la ecuación (3.2.3) se deriva el vector de fuerzas restitutivas para cada piso dependientes del desplazamiento relativo.

$$F_r = \text{diag}(k_i) T_s x_s \quad (3.2.4)$$

$$F_r = \begin{bmatrix} k_1 x_1 \\ k_2 (x_2 - x_1) \\ k_3 (x_3 - x_2) \\ \cdot \\ k_n (x_n - x_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Que al ser multiplicada por la matriz de transformación T_s , presenta las fuerzas aplicadas por cada piso.

$$T_s^T F_r = \begin{bmatrix} k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) \\ k_2 (x_2 - x_1) - k_3 (x_3 - x_2) \\ k_3 (x_3 - x_2) - k_4 (x_4 - x_3) \\ \cdot \\ k_n (x_n - x_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

De la ecuación (3.2.5), la ecuación de movimiento (3.2.1) es posible representarla a través del vector de fuerzas restitutivas como es mostrado a continuación (GIDARIS & TAFLANIDIS, 2013);

$$M_s \ddot{x}_s + C_s \dot{x}_s + T_s^T F_r = F(t) \quad (3.2.6)$$

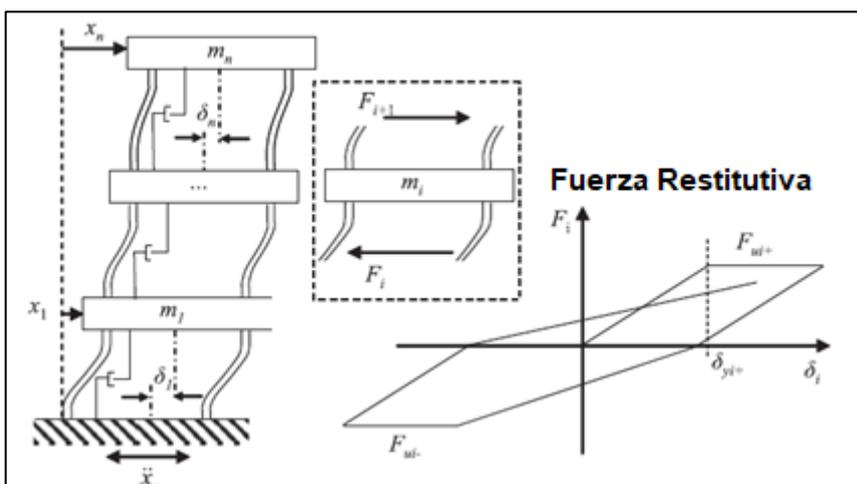


Figura N° 24 Modelo de Edificio Cortante. (GIDARIS & TAFLANIDIS, 2013).

3.3 MODELO DE DOBLE COMPONENTE O DE CLOUGH.

El modelo de doble componente o de Clough se determina por la combinación paralela de dos comportamientos un resorte lineal más una curva elasto-plástica (GIDARIS & TAFLANIDIS, 2013). La fuerza restitutiva generada se observa en la figura N° 24 y 25. Donde k_p representa la rigidez pre fluencia (o pendiente elástica), k_l la rigidez post fluencia y u_y el desplazamiento de fluencia.

La fuerza de fluencia queda determinada por $f_y = k_p u_y$.

Una forma generalizada de determinar el comportamiento de esta histéresis dependiente del desplazamiento queda determinada por la ecuación (3.2.7).

Donde Q representa la fuerza restitutivas.

$$Q(u) = k_l u + (k_p - k_l) \cdot u \quad (3.2.7)$$

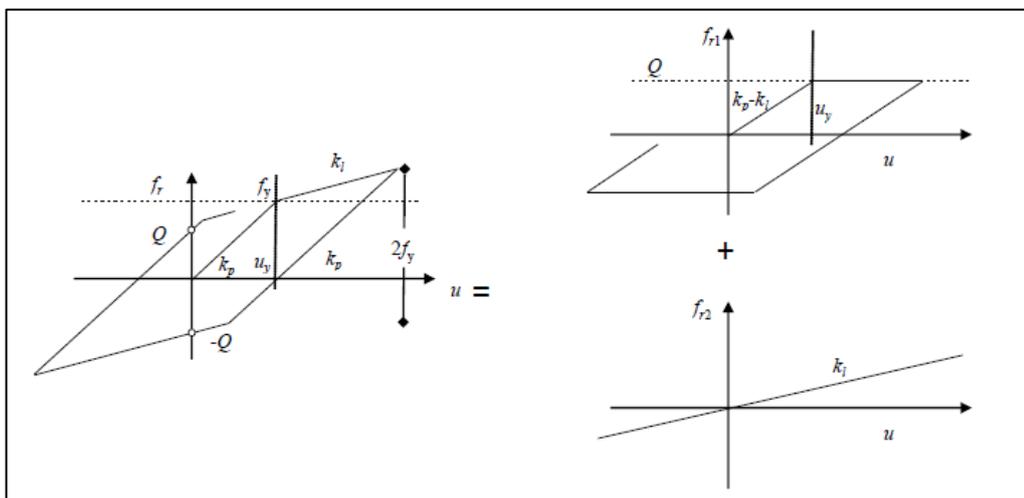


Figura N° 25 Modelo de histéresis bilineal: Se presenta la composición a través de un resorte lineal y una curva elasto-plástica.

Fuente: (GIDARIS & TAFLANIDIS, 2013)

3.4 MODELO DE HISTÉRESIS BOUC-WEN.

El comportamiento histerético basado en un modelo de Bouc-Wen se describe a través de una ecuación diferencial. Este modelo fue desarrollado por Bouc (1967) y generalizado por Wen (1967). Las ecuaciones mostradas a continuación fueron extraídas del manual de Ruaukoko de Carr (2008b).

$$\dot{z} = \frac{(A_3 \dot{u} - A_4 B)}{A_5 u_y} \quad (3.4.1)$$

Donde B se define como muestra en la ecuación 3.4.2:

$$B = |\dot{u}| |z|^n \left(A_1 \frac{z}{|z|} + A_2 \frac{u}{|\dot{u}|} \right) \quad (3.4.2)$$

La fuerza que genera este modelo esta definido por la ecuación:

$$Q = \beta K_0 u + (1 - \beta) f_y z \quad (3.4.3)$$

De las ecuaciones anteriores, u y \dot{u} son el desplazamiento y velocidad respectivamente, K_0 es la rigidez, β es la razón entre la pendiente post-fluencia y pre-fluencia, y u_y es el desplazamiento de fluencia. En cuanto a los parámetros propiamente del modelo, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 y n determinan la forma de la curva, y z es un parámetro adimensional, con un rango $|z| \leq 1$, que sigue una ecuación diferencial de primer orden con condición inicial cero y es la que controla el comportamiento histerético del modelo (Mavronicola and Komodromos, 2014).

Tal como se observa en la figura N°26, el modelo Bouc-Wen genera una suave transición para el cambio de rigidez en el elemento. Además, se ha utilizado en diversos problemas de ingeniería como el análisis inelástico de estructuras frente a excitaciones aleatorias (Wen, 1976), estructuras con base aisladas (Mavronicola and Komodromos.2014), análisis probabilísticos en riesgo sísmico (Taflanidis and Jia, 2011), puentes aislados (Bessason and Hafliadason, 2004) y el diseño óptimo de puentes con diferentes tipos de protección sísmicas (Taflanidis.2011).

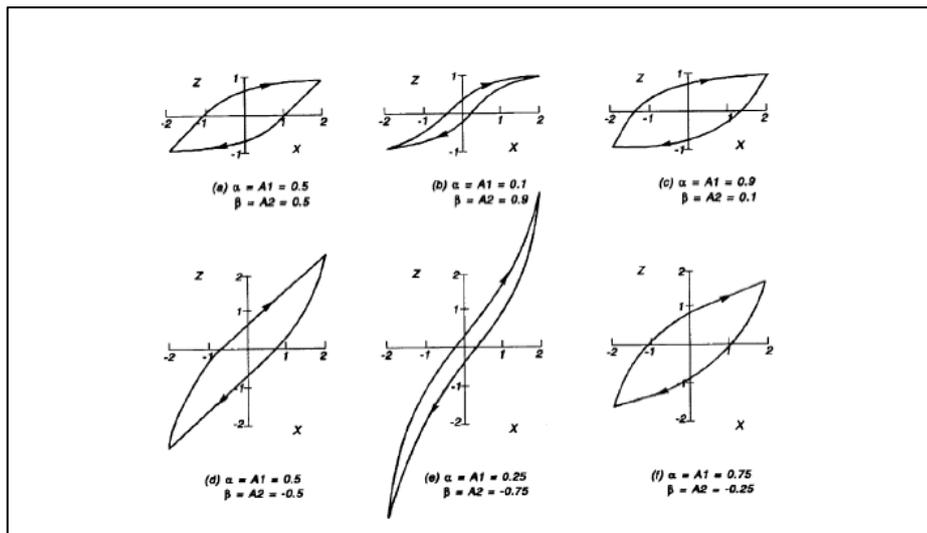


Figura N° 26 Sensibilidad de los modelos acorde a los parámetros utilizados.

Imagen proporcionada por (Wen 1976)

Los parámetros que controlan este modelo, tienen valores típicamente utilizados. En la tabla 2 se presentan los rangos sugeridos por Carr (2008b) en su manual de Ruaumoko.

Tabla N° 2 Parámetro sugeridos por Carr (2008b) para el modelo de Bouc-Wen. Fuente: Ruaumoko.

Parámetro	Rango sugerido
A_1	0.1-0.9
A_2	0.9
A_3	Usualmente 1
A_4	Usualmente 1
A_5	Usualmente 1
n	1-3, usualmente 1

3.5 APLICACIÓN PARA MÚLTIPLES CASOS

3.5.1 Vibración libre de un sistema dinámico de 3gdl.

Se muestra los datos de entrada del modelo edificio cortante, con amortiguamiento de Rayleigh, $\xi_1 = 5\%$, $\xi_2 = 8\%$ además se muestra las condiciones iniciales para la entrada de datos en el SIMULINK.

VIBRACIÓN LIBRE -3GDL

Propiedades del Modelo dinámico:

m3:	15.35	t.s ² /m
k3:	17904.7	t/m
m2:	16.51	t.s ² /m
k2:	18911.1	t/m
m1:	16.63	t.s ² /m
k1:	19490.2	t/m
w:	34.23	rad/s

Amortiguamiento de Rayleigh

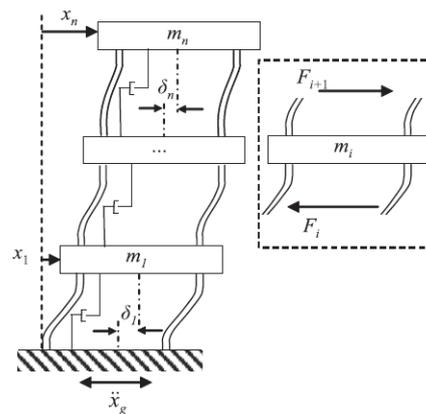
$$[c] = \alpha [M] + \beta [K]$$

Ecuaciones diferenciales en función de x_s :

$$[M_s]\ddot{x}_s + [C_s]\dot{x}_s + [K_s]x_s = 0$$

Condiciones iniciales:

$x_1 =$	0.10 m
$\dot{x}_1 =$	0.00 m/s
$x_2 =$	0.10 m
$\dot{x}_2 =$	0.00 m/s
$x_3 =$	0.10 m
$\dot{x}_3 =$	0.00 m/s



A continuación, se dibuja el diagrama de bloques general Figura N°28 y el subsistema Figura N°27 que resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales utilizando el método ode4 (Runge-Kutta).

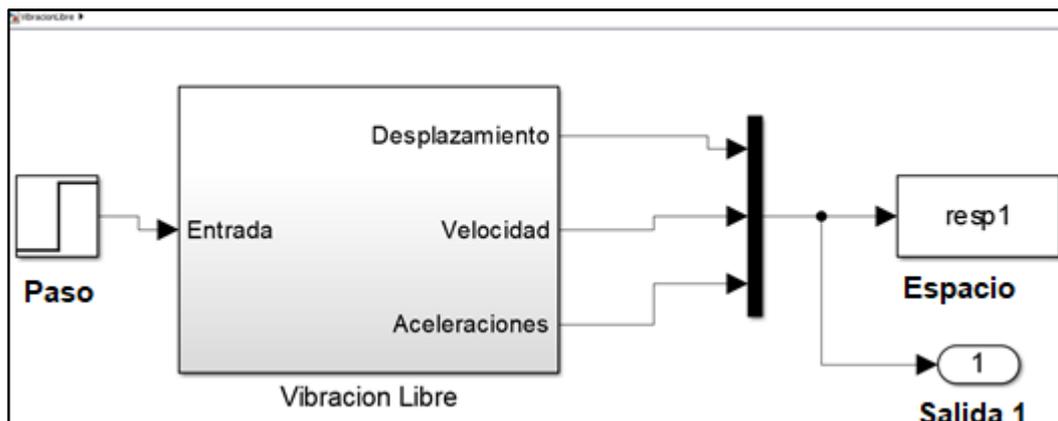


Figura N° 27 Diagrama de bloques en Simulink de un sistema dinámico en vibración libre de 3gd.
 Fuente: Matlab Simulink, codificación elaboración propia.

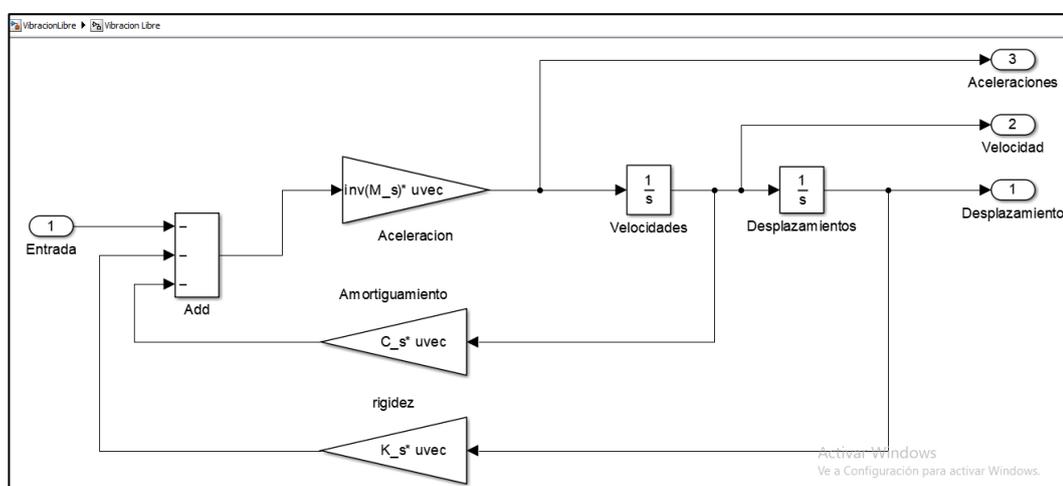


Figura N° 28 Diagrama de bloques del subsistema (Vibración Libre) en Simulink de un sistema dinámico de 3gd.
 Fuente: Matlab Simulink, codificación Elaboración propia.

Como respuesta obtenemos las gráficas (Desplazamiento vs tiempo) para cada nivel de la edificación figura N°29:

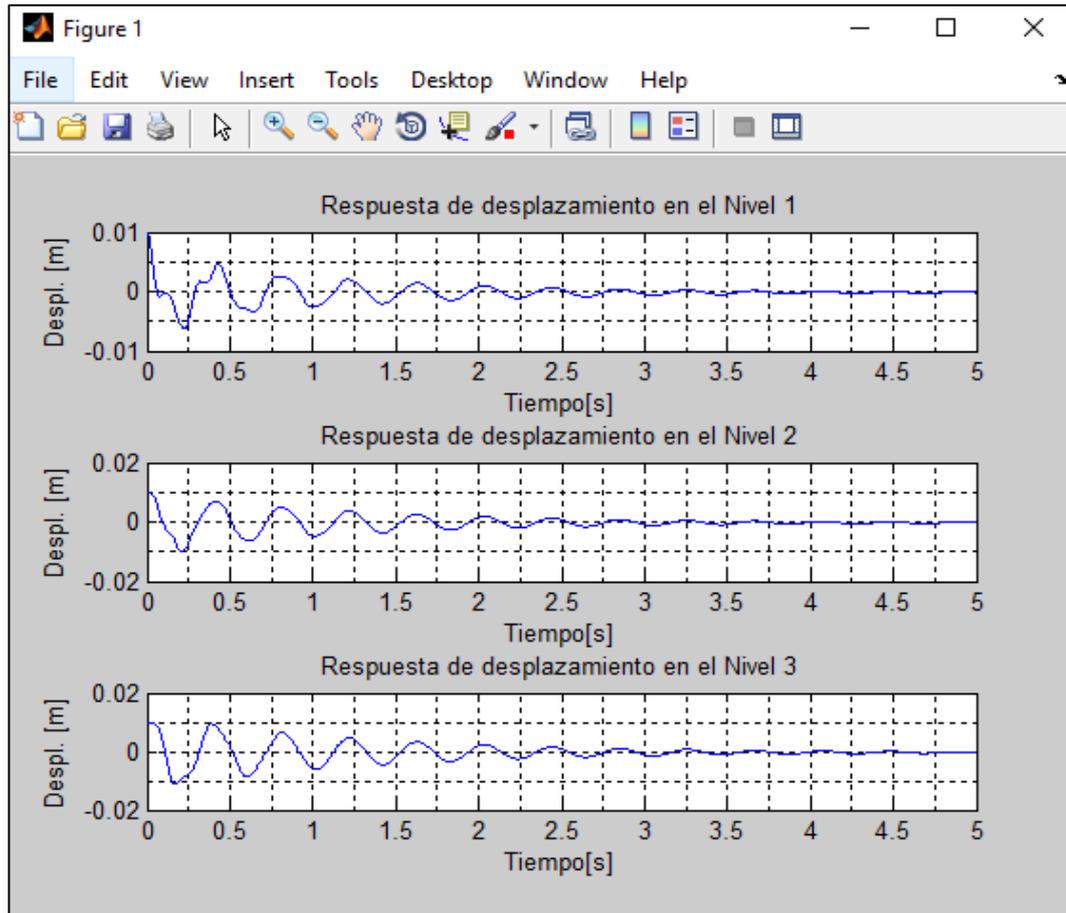


Figura N° 29 Respuesta de desplazamiento (m) para cada nivel, para una condición inicial de 0.1m para un tiempo de 5 segundos de vibración libre.

Fuente: Matlab Simulink, codificación elaboración propia.

3.5.2 Respuesta a excitaciones armónicas de un sistema dinámico de 3gdl.

Se muestra los datos de entrada del modelo de edificio cortante que incluyen fuerzas externas del tipo sinusoidal, con amortiguamiento de Rayleigh, $\xi_1 = 5\%$, $\xi_2 = 8\%$, además se muestra las condiciones iniciales para la entrada de datos en el SIMULINK.

VIBRACIÓN ARMÓNICA 3GDL

Propiedades del Modelo dinámico:

m3:	15.35	t.s ² /m
k3:	17904.7	t/m
m2:	16.51	t.s ² /m
k2:	18911.1	t/m
m1:	16.63	t.s ² /m
k1:	19490.2	t/m
w:	34.23	rad/s

Fuerzas externas:

$$F_1(t) = 5 \sin(10t)$$

$$F_2(t) = 5 \sin(10t)$$

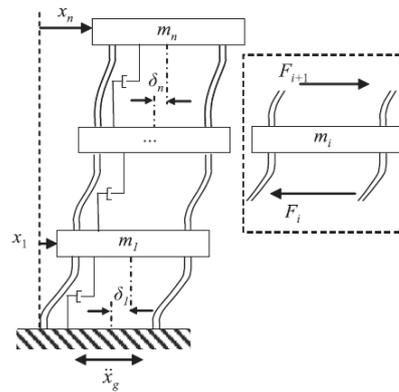
$$F_3(t) = 5 \sin(10t)$$

Ecuaciones diferenciales en función de xs:

$$[M_s]\ddot{x}_s + [C_s]\dot{x}_s + [k_s]x_s = F(t)$$

Condiciones iniciales:

$x_1 =$	0.00 m
$\dot{x}_1 =$	0.00 m/s
$x_2 =$	0.00 m
$\dot{x}_2 =$	0.00 m/s
$x_3 =$	0.00 m
$\dot{x}_3 =$	0.00 m/s



A continuación, se dibuja el diagrama de bloques general Figura N°31 y el subsistema Figura N°30 que resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales utilizando el método ode4 (Runge-Kutta).

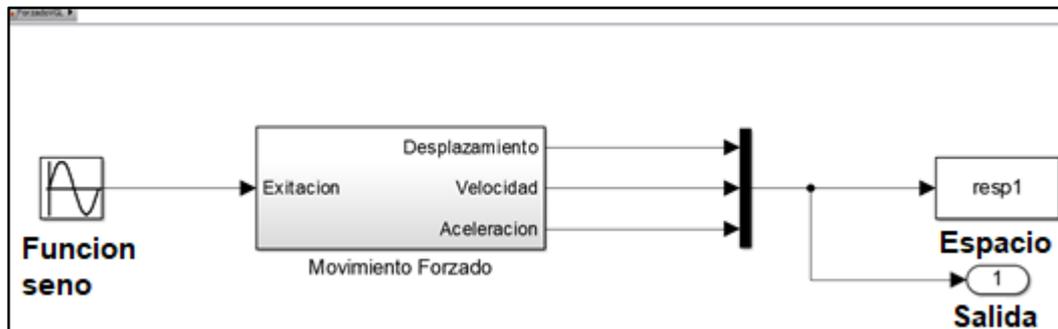


Figura N° 30 Diagrama de bloques en Simulink de un sistema dinámico de 3gdl sometido a un moviendo forzado.

Fuente: Matlab Simulink, codificación elaboración propia.

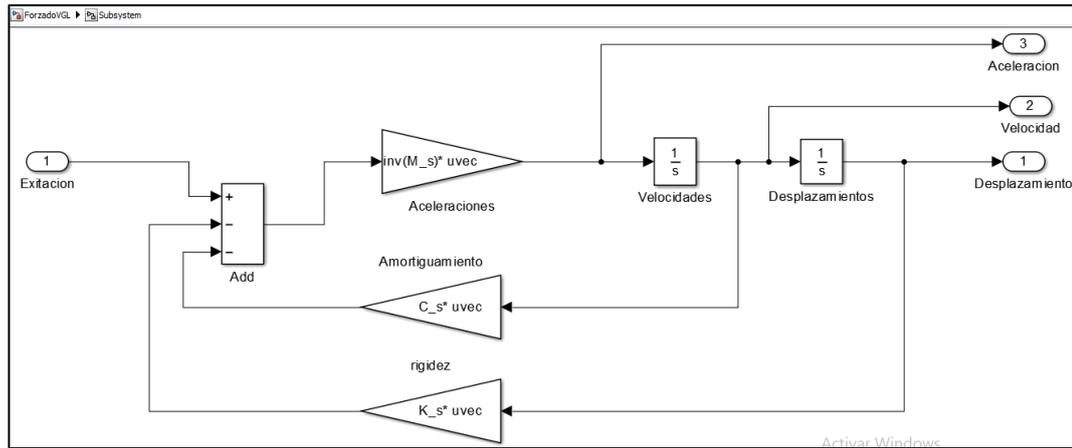


Figura N° 31 Diagrama de bloques del subsistema (Movimiento Forzado) en Simulink de un sistema dinámico de 3gdl sometido a un movimiento forzado.
 Fuente: Matlab Simulink, codificación elaboración propia.

Como respuesta obtenemos las gráficas (Desplazamiento vs tiempo) para cada nivel de la edificación figura N°32:

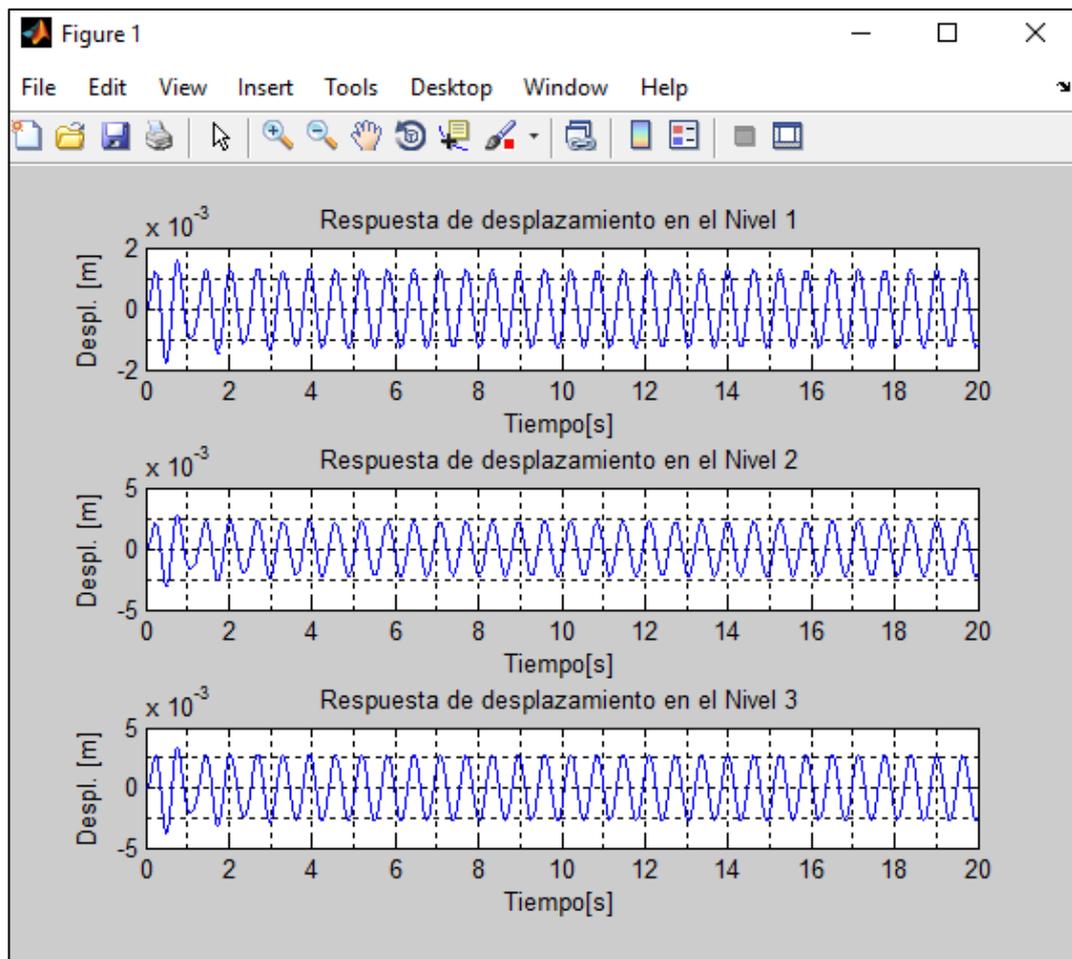


Figura N° 32 Respuesta de desplazamiento (m) para cada nivel, para un tiempo de 20 segundos.
 Fuente: Matlab Simulink, codificación elaboración propia.

3.5.3 Respuesta sísmica de sistemas lineales de un sistema dinámico de 3gdl. Para esta aplicación se pretende utilizar como fuerza externa un sismo de Lima tomado de la estación Parque de la Reserva (03 de octubre de 1974) además se muestra los datos de entrada, amortiguamiento de Rayleigh, $\xi_1 = 5\%$, $\xi_2 = 8\%$, y por último las condiciones iniciales para la entrada de datos en el SIMULINK.

RESPUESTA SÍSMICA DE UN EDIFICIO 3GDL

Propiedades del Modelo dinámico:

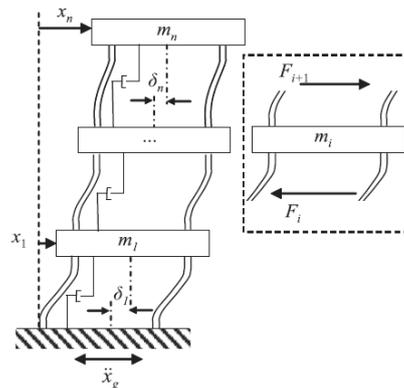
m3:	15.35	t.s ² /m
k3:	17904.74	t/m
m2:	16.51	t.s ² /m
k2:	18911.053	t/m
m1:	16.63	t.s ² /m
k1:	19490.207	t/m
w:	34.23	rad/s
$\ddot{x}_g =$	Sismo Lima 1974	

Ecuaciones diferenciales en función de xs:

$$[M_s]\ddot{x}_s + [C_s]\dot{x}_s + [k_s]x_s = -[M_s][R_s]\ddot{x}_g$$

Condiciones iniciales:

$x_1 =$	0.00 m
$\dot{x}_1 =$	0.00 m/s
$x_2 =$	0.00 m
$\dot{x}_2 =$	0.00 m/s
$x_3 =$	0.00 m
$\dot{x}_3 =$	0.00 m/s



A continuación, se dibuja el diagrama de bloques general Figura N°34 y el subsistema Figura N°33 que resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales utilizando el método ode4 (Runge-Kutta).

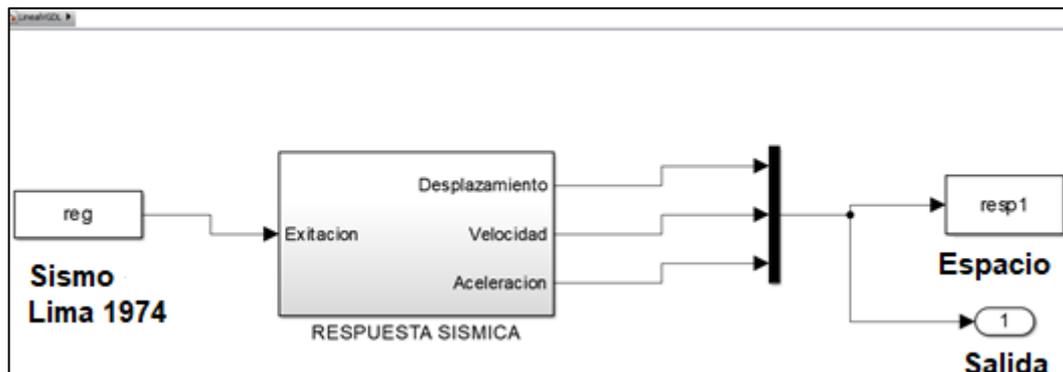


Figura N° 33 Diagrama de bloques en Simulink de un sistema dinámico elástico de 3gdl sometido a una excitación sísmica LIMA 1974.

Fuente: Matlab Simulink, codificación elaboración propia.

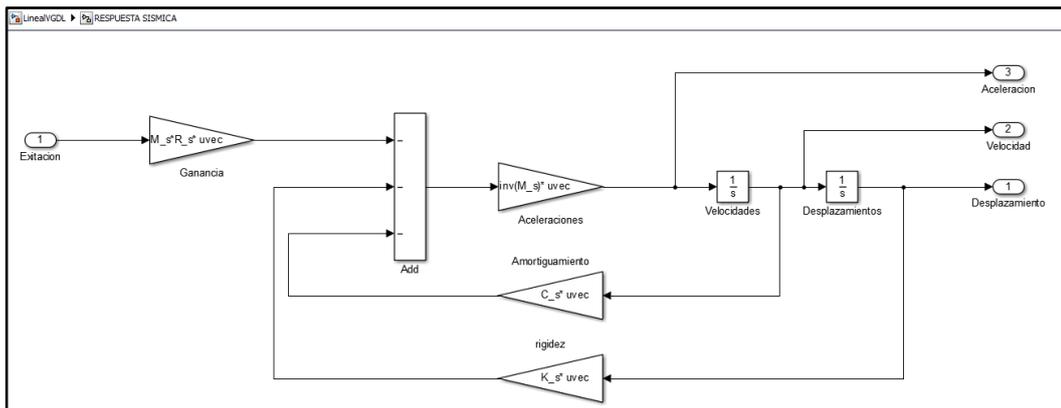


Figura N° 34 Diagrama de bloques del subsistema (Respuesta Sísmica) en Simulink de un sistema dinámico de 3gdl sometido a una excitación sísmica (Lima 1974).
 Fuente: Matlab Simulink, codificación elaboración propia.

Como respuesta obtenemos las gráficas (Desplazamiento vs tiempo) para cada nivel de la edificación en la figura N°35:

Respuesta de Desplazamiento por Piso:

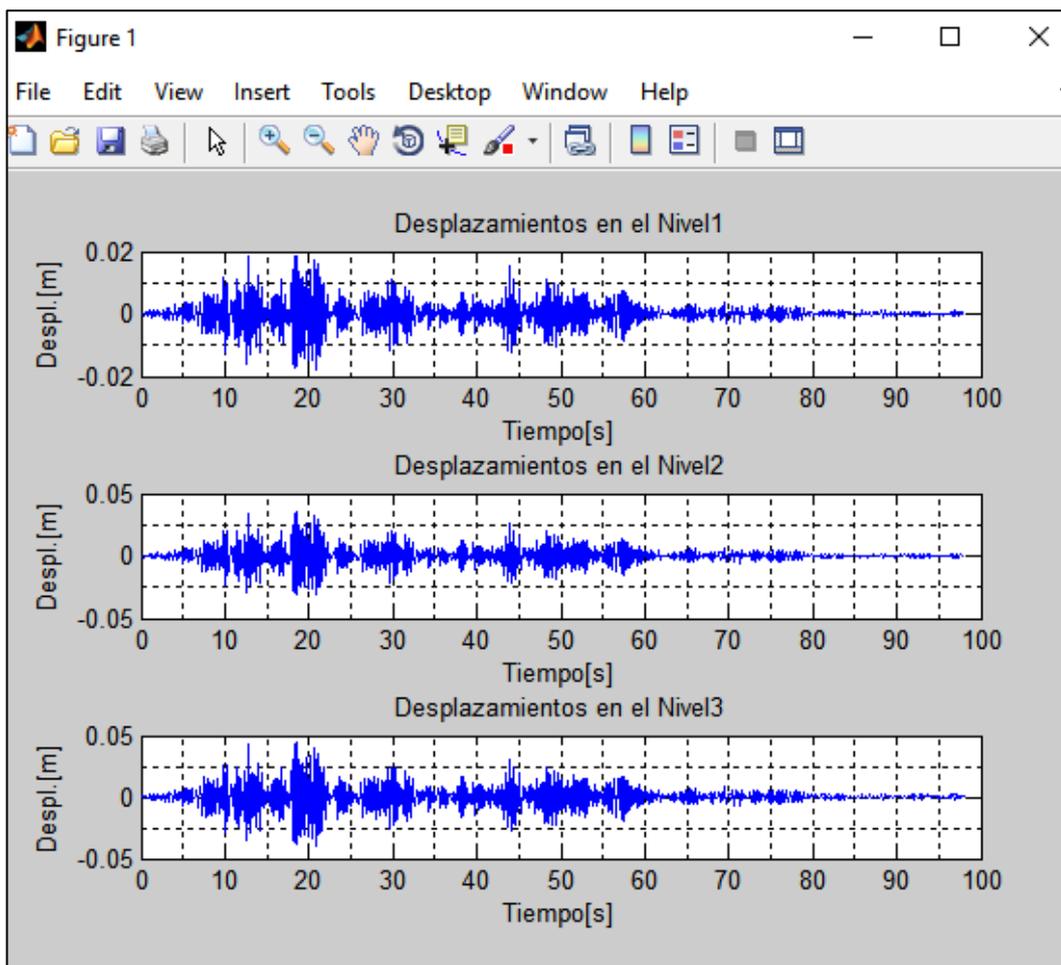


Figura N° 35 Respuesta de desplazamiento (m) para cada nivel, para un tiempo de 100 segundos.
 Fuente: Matlab Simulink, codificación elaboración propia.

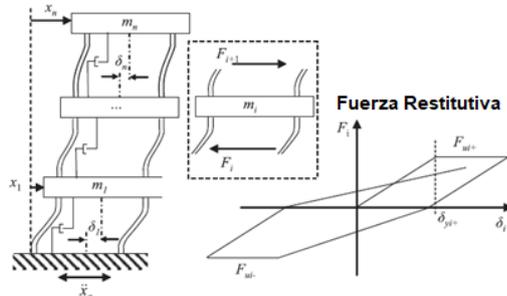
3.5.4 Respuesta sísmica de sistemas inelásticos de un sistema dinámico de 3gdl.

Los datos para esta aplicación son los mismos que el análisis anterior se adiciona un modelo de histéresis bilineal para la fuerza restauradora:

RESPUESTA SÍSMICA DE SISTEMAS INELÁSTICOS

Propiedades del Modelo dinámico:

m3:	15.35	t.s ² /m
k3:	17904.74	t/m
m2:	16.51	t.s ² /m
k2:	18911.053	t/m
m1:	16.63	t.s ² /m
k1:	19490.207	t/m
w:	34.23	rad/s
$\ddot{x}_g =$	Sismo Lima 1974	



Ecuaciones diferenciales en función de xs:

$$[M_s]\ddot{x}_s + [C_s]\dot{x}_s + [T_s^T][F_r] = -[M_s][R_s]\ddot{x}_g$$

Condiciones iniciales:

$x_1 =$	0.00 m
$\dot{x}_1 =$	0.00 m/s
$x_2 =$	0.00 m
$\dot{x}_2 =$	0.00 m/s
$x_3 =$	0.00 m
$\dot{x}_3 =$	0.00 m/s

A continuación, se dibuja el diagrama de bloques general Figura N°36, N°37 y N°38 que resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales utilizando el método ode4 (Runge-Kutta).

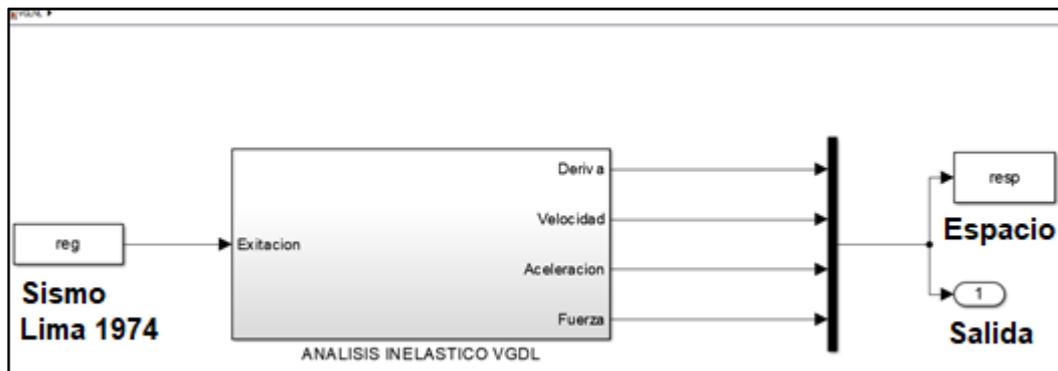


Figura N° 36 Diagrama de bloques en Simulink de un sistema dinámico inelástico de 3gdl sometido a una excitación sísmica LIMA 1974.

Fuente: Matlab Simulink, codificación elaboración propia.

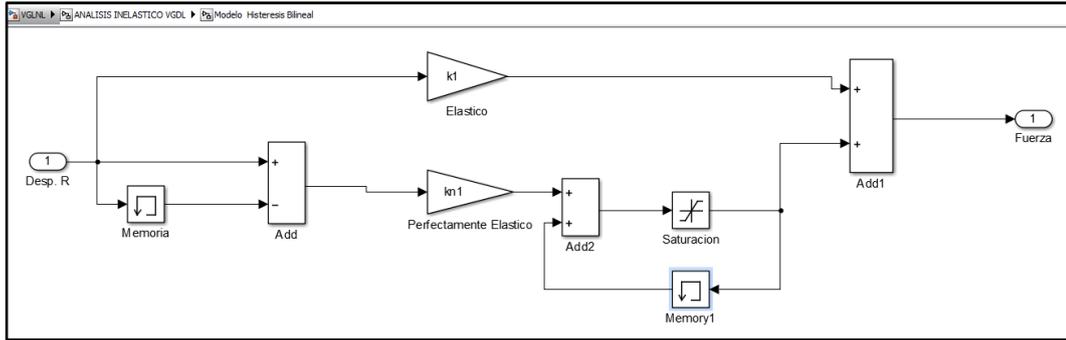


Figura N° 37 Diagrama de bloques subsistema (Modelo histéresis bilineal).
 Fuente: Matlab Simulink, codificación elaboración propia.

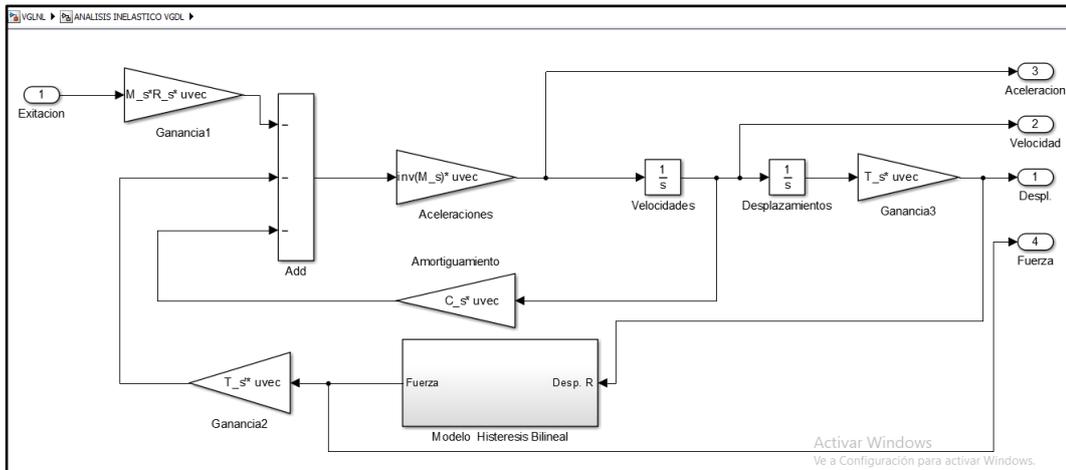


Figura N° 38 Diagrama de bloques del subsistema (Respuesta Sísmica) en Simulink de un sistema dinámico de 3gdl sometido a una excitación sísmica (Lima 1974).
 Fuente: Matlab Simulink, codificación elaboración propia.

Como respuesta obtenemos las gráficas (tiempo vs desplazamientos) y (Desplazamiento Relativo vs Fuerza) para cada nivel de la edificación en la figura N°39,40 y 41:

Respuesta de Desplazamiento por Piso:



Figura N° 39 Gráficas fuerzas vs deriva en el primer nivel.
 Fuente: Matlab Simulink, codificación elaboración propia.

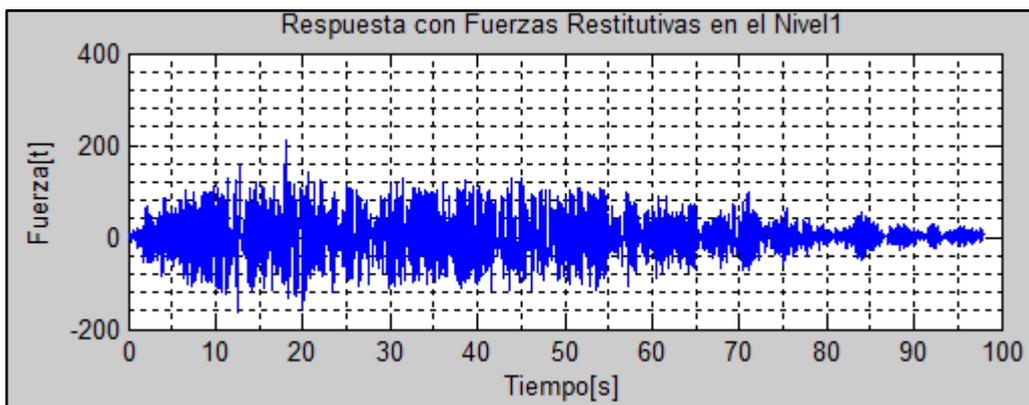


Figura N° 40 Gráfica fuerza vs tiempo en el primer nivel.
Fuente: Matlab Simulink, codificación elaboración propia.

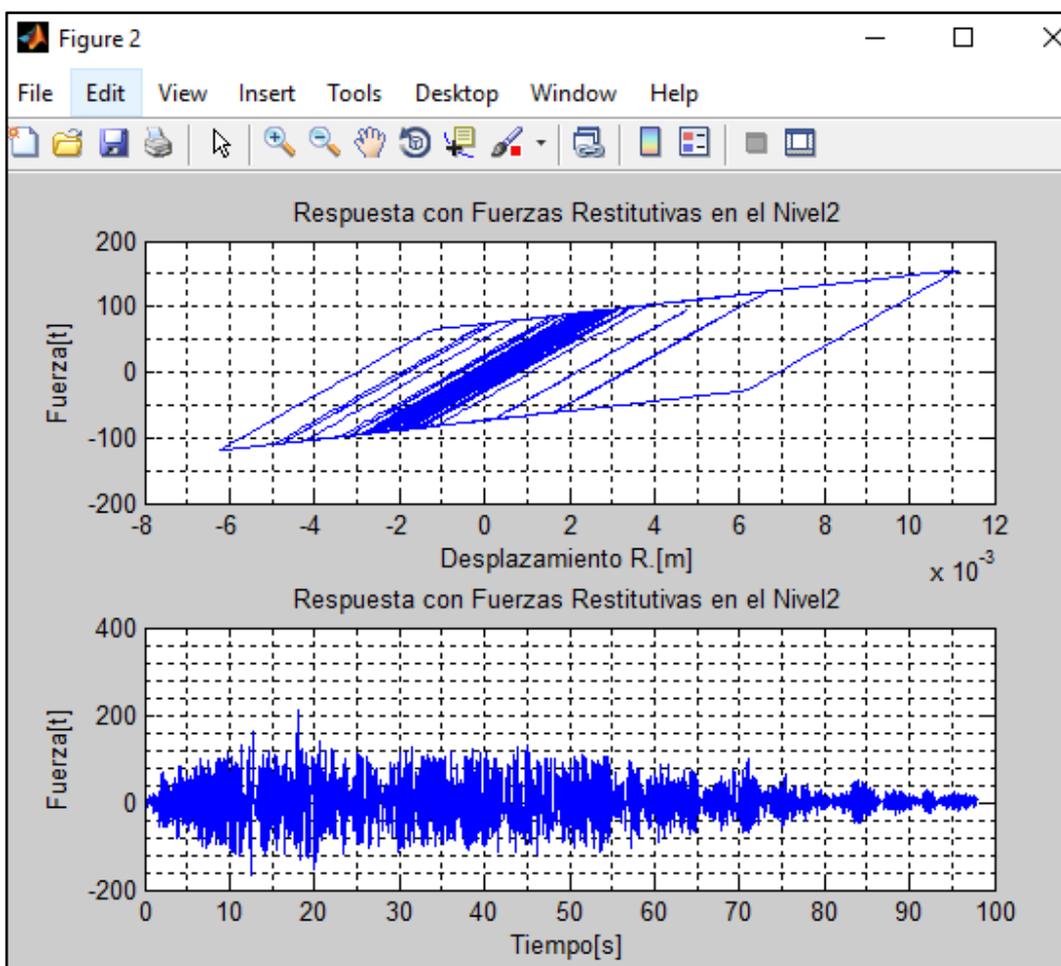


Figura N° 41 Gráficas fuerzas vs deriva, fuerza vs tiempo en el segundo nivel.
Fuente: Matlab Simulink, codificación elaboración propia.

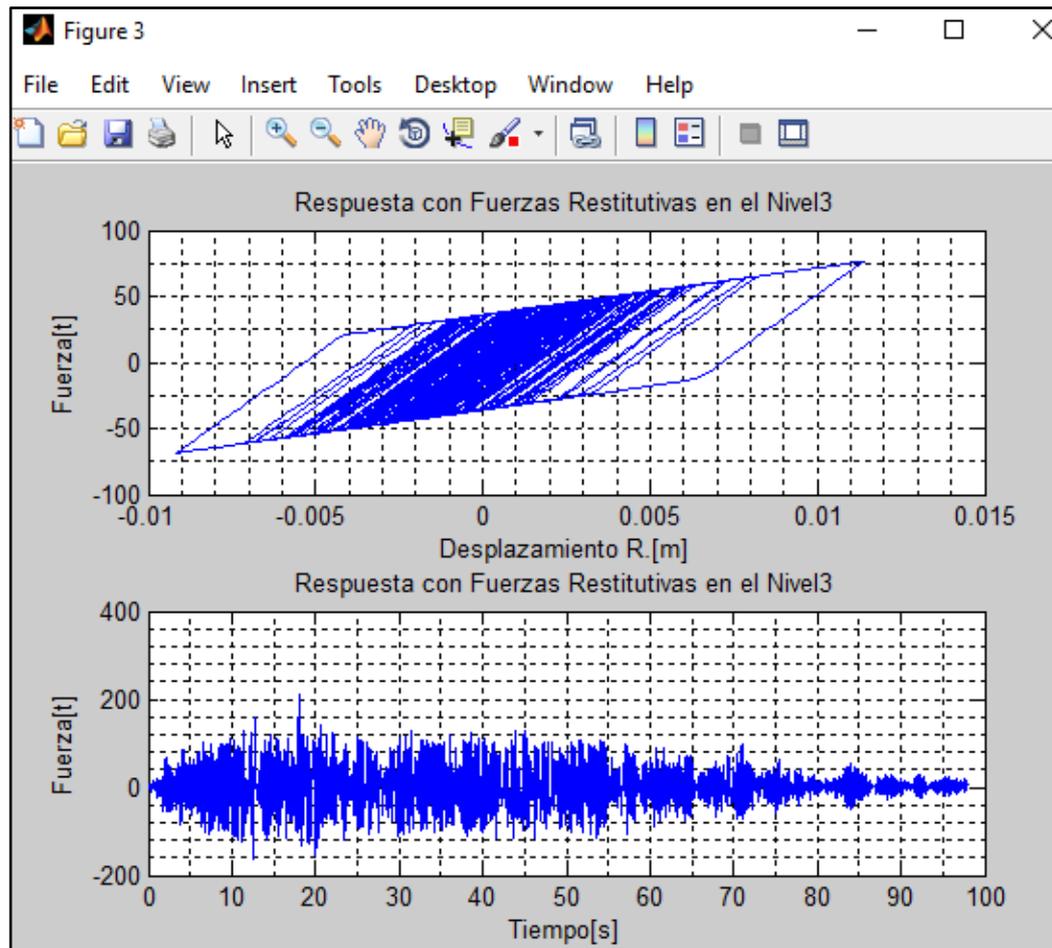


Figura N° 42 Gráficas fuerzas vs deriva, fuerza vs tiempo en el tercer nivel.
 Fuente: Matlab Simulink, codificación elaboración propia.

Todos los resultados obtenidos en este capítulo son netamente numéricos de gran utilidad para la dinámica estructural de edificaciones, pero sin ningún aporte en el comportamiento de su solución. De acuerdo a los resultados, lo más importante que podemos recalcar es que, para los sistemas en vibración libre la solución presentada en la figura N°29, cuando $t \rightarrow +\infty$, tiende a su punto de equilibrio, para los sistemas forzados, la solución presentada en la figura N°32, cuando $t \rightarrow +\infty$, la solución se mantiene alejada de su punto de equilibrio, para los sistemas lineales sometidas a cargas sísmicas cuya solución presentada en la figura N°35, solución que se aleja y se acerca a su punto de equilibrio según el registro de aceleraciones a que se somete la estructura, para los sistemas inelásticos utilizando un modelo de histéresis bilineal se muestra en la figura N° 39, 40, 41 y 42 incrementos de desplazamientos para todos los niveles, con respecto a un modelo elástico, haciendo que nuestro modelo se aleja más de su punto de equilibrio.

CAPÍTULO IV: ANÁLISIS CUALITATIVO DE UN SISTEMA LINEAL.

4.1 INTRODUCCIÓN.

Para este capítulo se analizará de manera cualitativa algunas aplicaciones del capítulo III, utilizaremos los teoremas del capítulo II y determinaremos la estabilidad de los casos múltiples como es la vibración libre de un edificio de planta simétrica y la vibración libre de un edificio de planta asimétrica; estabilizaremos un edificio por medio de una ley de control óptimo (LQR) utilizando la teoría de control.

4.2 MODELO DE EDIFICIO LINEAL.

Ahora trataremos de generalizar la ecuación de movimiento de “n” grados de libertad a un sistema de ecuaciones diferenciales. Figura N°43.

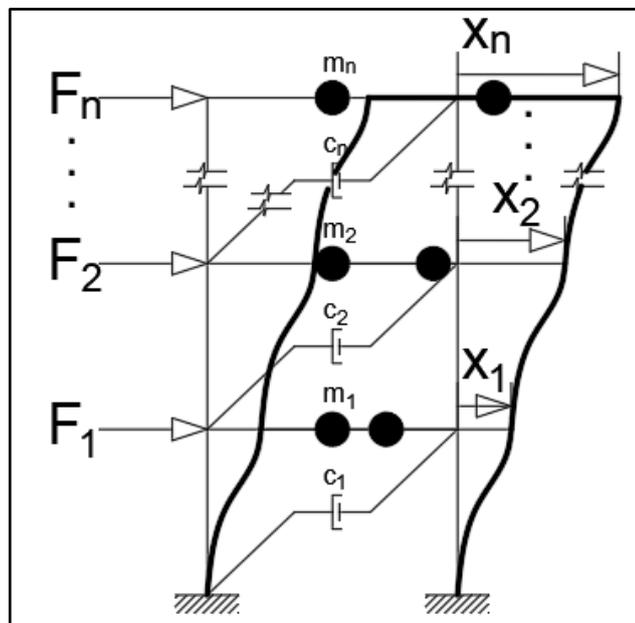


Figura N° 43 Estructura de varios grados de libertad. Imagen adaptada de CHOPRA (2001) con cambio de variables.

La ecuación diferencial ordinaria (ODE) que representa la dinámica de estructuras con múltiples grados de libertad (GDL), excitada en la base se muestra en la siguiente ecuación:

$$[M_s]\{\ddot{x}_s\} + [C_s]\{\dot{x}_s\} + [K_s]\{x_s\} = -[M]\{R_s\}\{\ddot{x}_g(t)\} \quad (4.2.1)$$

Donde x_s es el vector de desplazamiento relativo a la base, \ddot{x}_g vector de aceleración del suelo y M_s , C_s y K_s son las matrices $n \times n$ de masa, amortiguamiento y rigidez efectivamente.

Haciendo un cambio de variables:

$$x_1 = \{x_s\}, x_2 = \{\dot{x}_s\} \quad (4.2.2)$$

De la ecuación (4.1.2) se obtiene:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.2.3)$$

Usando la ecuación (4.1.1) y despejando $\{\ddot{x}_s\}$:

$$\{\ddot{x}_s\} = [M]^{-1}[F_E] - [M]^{-1}[C]\{\dot{x}_s\} - [M]^{-1}[K_S]\{x_s\} \quad (4.2.4)$$

Donde $F_E = -[M]\{R_s\}\{\ddot{x}_g(t)\}$ reemplazando la Ec. (4.2.2) y Ec. (4.2.3) en la ecuación (4.2.4):

$$\{\dot{x}_2\} = [M]^{-1}\{F_E\} - [M]^{-1}[C]\{x_2\} - [M]^{-1}[K]\{x_1\} \quad (4.2.5)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ [M]^{-1} \end{bmatrix} F_E \quad (4.2.6)$$

Donde x_1 y x_2 son vectores columnas.

Una transformación lineal es usada para obtener un modelo reducido:

$$\{x\} = [T]\{y\} \quad (4.2.7)$$

Donde $[T]$ es la matriz de transformación lineal, $\{x\}$ es el vector columna del modelo original y $\{y\}$ es el vector del sistema reducido. Este modelo reducido es equivalente a:

$$\{\dot{y}\} = [T]^{-1}[A][T]\{y\} + [T]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ [M]^{-1} \end{bmatrix} F_E \quad (4.2.8)$$

Donde:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix}$$

Donde encontrar la matriz A es nuestro principal objetivo, ya que permite determinar la estabilidad de sistemas autónomos a través de sus valores propios.

4.3 SISTEMAS DE ECUACIONES EN FUNCIÓN DE VARIABLES DE ESTADO.

Las ecuaciones anteriores están definidas desde el punto de vista de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias, ahora en adelante utilizaremos las definiciones de la teoría de control para redefinir las ecuaciones de movimiento:

Variables de estado:

$$x_1 = \{x_s\}, x_2 = \{\dot{x}_s\} \quad (4.3.1)$$

De las ecuaciones (4.3.1) se obtiene:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.3.2)$$

Usando la ecuación (4.2.1) y despejando $\{\ddot{x}_s\}$:

$$\{\ddot{x}_s\} = [M]^{-1}[F_E] - [M]^{-1}[C]\{\dot{x}_s\} - [M]^{-1}[K_S]\{x_s\} \quad (4.3.3)$$

Donde $F_E = -[M]\{R_s\}\{\ddot{x}_g(t)\}$ reemplazando la Ec. (4.3.1) y Ec. (4.3.2) en la ecuación (4.3.3):

$$\{\dot{x}_2\} = [M]^{-1}\{F_E\} - [M]^{-1}[C]\{x_2\} - [M]^{-1}[K]\{x_1\} \quad (4.3.4)$$

En espacio de estados la EDO es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ [M]^{-1} \end{bmatrix} F_E \quad (4.3.5)$$

Donde x_1 y x_2 son vectores columnas.

4.4 DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL EN EL ESPACIO DE ESTADOS.

La ecuación (4.3.5) se puede compactar de la forma siguiente:

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{u\} \quad (4.4.1)$$

Donde $\{\dot{x}\}$ es un vector de orden $2nx1$ que contiene las velocidades y aceleraciones del sistema para cada instante del registro sísmico; $[A]$ es una matriz que contiene las propiedades del sistema de varios grados de libertad, de orden $2nx2n$; $\{x\}$ es un vector que representa los desplazamientos y velocidades de los pisos de la estructura para cada instante del registro sísmico, de orden $2nx1$; $[B]$ es una matriz que establece la ubicación de las fuerzas de control en los pisos de la estructura donde están aplicadas; u es la fuerza de control y corresponde a un escalar para cada instante de tiempo. (BAENA RIVERA, 2005) Para seleccionar la respuesta específicas que se convienen a conocer, a partir del vector $\{x\}$, es necesario multiplicarlo con una matriz $[R]$, del cual resulta un vector $\{y\}$. Este vector contiene las respuestas elegidas de la estructura para cada instante de registro sísmico.

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{u\} \quad (4.4.2)$$

$$\{y\} = [R]\{x\} \quad (4.4.3)$$

Ahora si queremos estabilizar la ecuación con una perturbación (sismo) (4.2.1) nuestro nuevo modelo con un AMR se muestra en la siguiente figura N°44:

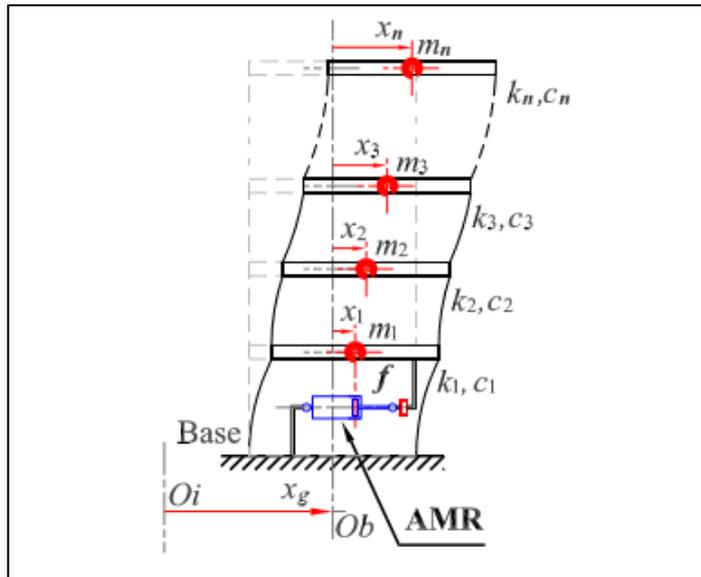


Figura N° 44 Estructuras de varios grados de libertad con amortiguador magneto-reológico en el primer nivel.

Fuente: (JIMENEZ, 2006)

La ecuación diferencial ordinaria (ODE) que representa la dinámica de estructuras con múltiples grados de libertad (GDL), excitada en la base y un actuador que reduce las vibraciones (disipador magneto-reológico) figura N°44, se muestra en la siguiente ecuación:

$$[M_s]\{\ddot{x}_s\} + [C_s]\{\dot{x}_s\} + [K_s]\{x_s\} = -[M]\{R_s\}\{\ddot{x}_g(t)\} - \{R_c\}F \quad (4.4.4)$$

Donde $\{R_c\}$ es un vector de coeficientes que establece la ubicación de la fuerza de control en los niveles de la estructura donde esta aplicada. Para nuestro caso se aplica en el primer nivel.

Utilizando las variables de estado (4.3.1)

Usando la ecuación (4.4.4) y despejando $\{\dot{x}_2\}$:

$$\{\dot{x}_2\} = -[M]^{-1}[C]\{x_2\} - [M]^{-1}[K]\{x_1\} - [M]^{-1}\{R_c\}F - \{R_s\}\ddot{x}_g(t) \quad (4.4.5)$$

Para la componente $\{\dot{x}_1\}$:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ [M]^{-1}\{R_c\} \end{Bmatrix} F - \begin{Bmatrix} 0 \\ \{R_s\} \end{Bmatrix} \ddot{x}_g(t)$$

Que equivale a la siguiente ecuación:

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B_c]\{u\} + [B_s]\ddot{x}_g(t) \quad (4.4.6)$$

$$\{y\} = [R]\{x\} \quad (4.4.7)$$

"u" Corresponde a la fuerza de control para cada instante de tiempo que se aplica usando estos dispositivos de control; u varía en el tiempo en función de {x} y se calcula como:

$$u = -[k]\{x\} \quad (4.4.8)$$

Esto significa que la señal del control está determinada por la respuesta en cada instante de tiempo. A esto se le llama retroalimentación de estado. El vector K denominado de ganancia, manipula el voltaje que será enviado al AMR en cada instante de tiempo, para que genere las fuerzas que controlaran la estructura. (BAENA RIVERA, 2005)

Al reemplazar la ecuación (4.4.8) en (4.4.6) se obtiene:

$$\begin{aligned} \{\dot{x}\} &= [A]\{x\} + [B_c]\{-k\{x\}\} + [B_s]\ddot{x}_g(t) \\ \{\dot{x}\} &= [[A] - [B_c][k]]\{x\} + [B_s]\ddot{x}_g(t) \quad (4.4.9) \end{aligned}$$

La estabilidad y respuesta del sistema en vibración libre se determinan a partir de los valores característicos de la matriz $[[A] - [B][k]]$.

4.5 EL PROBLEMA DEL REGULADOR LINEAL CUADRÁTICO (LQR). (LARA VALENCIA, 2011)

Para el cálculo de la matriz de ganancia k se utiliza el método de control óptimo cuadrático.

Trataremos de minimizar la función de coste:

$$J = \int_0^{\infty} (x^* Q x + u^* R u) dt \quad (4.5.1)$$

Utilizando la ley de control óptimo:

$$u(t) = -Kx(t)$$

Esta ley de control óptimo nos permite llevar la solución a su punto de equilibrio 0 por un proceso de retroalimentación como se muestra en la figura N°22.

Para resolver el problema del LQR con J definido por la ecuación (4.5.1) sometido a la restricción impuesta por el sistema descrito en la ecuación (4.4.6), se forma el Lagrangiano L agrupando estas dos ecuaciones con multiplicador de Lagrange variable a lo largo del tiempo $\lambda(t)$, Por tanto:

$$\begin{aligned} L = \int_0^{t_f} \{x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) + \lambda^T(t) [Ax(t) + B_c u(t) + B_s \ddot{x}_g(t) - \dot{x}(t)]\} dt \dots \\ \dots \dots (4.5.2) \end{aligned}$$

El multiplicador de Lagrange $\lambda(t)$, también es conocido como el vector de co-estado y asegura que la ecuación de estado sea considerada en el proceso de minimización.

Las condiciones necesarias que definen el control óptimo pueden ser encontradas por medio de la primera derivada del Lagrangiano en relación al estado y a las variables de control e igualando esta expresión a cero.

La primera variación del Lagrangiano es:

$$\delta L = -\lambda^T(t_f)\delta x(t_f) + \lambda^T(0)\delta x(0) + \int_0^{t_f} \left[\left(\dot{\lambda}^T + \frac{\delta \kappa}{\delta x} \right) \delta x + \frac{\delta \kappa}{\delta u} \delta u \right] dt \quad (4.5.3)$$

Donde κ es el Hamiltoniano definido como el integrando de la ecuación (4.5.2).

Partiendo de la condición inicial de la ecuación (4.4.4) se puede concluir que $\delta x(0) = 0$. Como se necesita de que $\delta L = 0$, se debe de cumplir:

$$\frac{\delta \kappa}{\delta u} = 0, \quad 0 \leq t \leq t_f \quad (4.5.4)$$

$$\dot{\lambda}^T + \frac{\delta \kappa}{\delta x} = 0, \quad 0 \leq t \leq t_f \quad (4.5.5)$$

Con condición de frontera:

$$\lambda^T(t_f) = 0 \quad (4.5.6)$$

Derivando parcialmente κ con relación a u y x se obtiene:

$$\dot{\lambda} = -A^T \lambda - 2Qx, \quad \lambda(t_f) = 0 \quad (4.5.7)$$

$$u = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T \lambda \quad (4.5.8)$$

El conjunto de ecuaciones (4.4.6), (4.5.7) y (4.5.8) proporcionan la solución óptima para $x(t)$, $u(t)$ y $\lambda(t)$. Particularmente la ecuación (4.5.8) es el término de control óptimo expresado como función de co-estado. Resta, por tanto, determinar una relación entre el co-estado y el estado. Para tal fin, se asume que el vector de control sea regulado por el vector de estado, es decir se realiza un control de malla cerrada que significa que la respuesta estructural del sistema será continuamente monitoreada, utilizando esta información para realizar correcciones y estado es lineal, se tiene:

$$\lambda(t) = P(t)x(t) \quad (4.5.9)$$

La matriz $P(t)$ se determina derivando la ecuación (4.5.9) en función del tiempo, obteniendo:

$$\dot{\lambda}(t) = \dot{P}(t)x(t) + P(t)\dot{x}(t) \quad (4.5.10)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.4.6), (4.5.8), (4.5.9) y (4.5.10) en la ecuación (4.5.7) se obtiene:

$$\left[\dot{P}(t) + P(t)A - \frac{1}{2} P(t)BR^{-1}B^T P(t) + A^T P(t) + 2Q \right] x(t) + P(t)B_s \ddot{x}_g(t) = 0$$

... .. (4.5.11)

$$P(t_f) = 0$$

Asumiendo que $\ddot{x}_g(t) = 0$, la ecuación reducida (4.5.11) es reducida a:

$$\dot{P}(t) + P(t)A - \frac{1}{2}P(t)BR^{-1}B^T P(t) + A^T P(t) + 2Q = 0, \quad P(t_f) = 0 \quad (4.5.12)$$

En la teoría de control óptimo, la ecuación (4.5.11) es llamada ecuación de Riccati, donde que $P(t)$ es especificado en t_f , ésta ecuación se resuelve de forma retroactiva en el dominio de tiempo.

La sustitución de la ecuación (4.5.9) en (4.5.8) muestra que el vector de control $u(t)$ es lineal en $x(t)$. Así la ley de control óptima es:

$$u(t) = G(t)x(t) = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T P(t)x(t) \quad (4.5.13)$$

Donde $G(t)$ es la ganancia de control.

Estrictamente hablando, la matriz de Riccati $P(t)$ obtenida de la ecuación (4.5.12) no proporciona una solución óptima a menos que el término de la excitación $\ddot{x}_g(t)$ desaparezca dentro del intervalo de control $[0, t_f]$ o esta sea un proceso estocástico de tipo ruido blanco. En aplicaciones estructurales, cálculos numéricos demostraron que la matriz de Riccati permanece generalmente constante en el intervalo de control, cayendo rápidamente para cero cuando se aproxima a t_f . Así $P(t)$ puede ser, en la mayor parte de los casos, aproximada a una matriz constante P haciendo con que la ecuación de Riccati reduzca a:

$$PA - \frac{1}{2}PBR^{-1}B^T P + A^T P + 2Q = 0 \quad (4.5.14)$$

Con esto, la ganancia de control pasa ser también una constante caracterizada por la siguiente expresión:

$$G = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T P \quad (4.5.15)$$

Por último, sustituyendo la ecuación (4.5.13) en la ecuación (4.4.6) se consigue determinar el comportamiento de la estructura controlada. El resultado es:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BG)x(t) + H\ddot{x}_g(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

Uno de los mayores desafíos al utilizar este tipo de control consiste en determinar de manera adecuada los valores de las matrices de ponderación “Q” y “R” incluidas en el índice de desempeño a minimizar en el problema LQR. Debido a falta de criterios establecidos en la literatura, el proceso de selección de éstas matrices es bastante artesanal convirtiéndose en un proceso de tentativa y error.

En su trabajo, Carneiro (2009) utilizó este procedimiento para evaluar el desempeño de distintas matrices de ponderación que consiguieron equilibrar la eficiencia del control y el consumo de energía en el sistema analizado. La conclusión del estudio de la autora evidenció que la matriz de ponderación “Q” demostró mayor eficiencia cuando se emplea en ella la matriz de rigidez estructural del sistema, mientras que la matriz “R” es mucho más eficiente y equilibrada cuando se utiliza la matriz identidad multiplicada por un factor establecido. (LARA VALENCIA, 2011). Con base en este criterio fueron seleccionadas las siguientes matrices de ponderación:

$$Q = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5.17)$$

$$R = 8 \times 10^{-7} I \quad (4.5.18)$$

Se modifica “R” para alcanzar los objetivos deseados de reducción de vibración.

4.6 APLICACIÓN PARA MULTIPLES CASOS:

4.6.1 Vibración libre de un sistema de un grado de libertad (1 Gdl.)

Ahora se analizará los posibles casos de estabilidad en el plano de fases para sistemas de un grado de libertad:

Sea la ecuación diferencial que gobierna el sistema dinámico de 1gdl:

$$m\ddot{x}_s + c\dot{x}_s + kx_s = 0 \quad (4.6.1.1)$$

Se calculará los valores propios de la ecuación:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$$

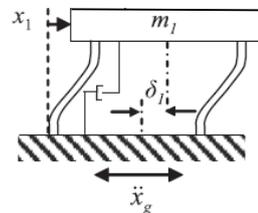
Se tiene múltiples casos:

- a) $c = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i$. El origen es un centro (Auto valores imaginarios puros).

VIBRACIÓN LIBRE DE UN SISTEMA DE 1GDL.

Propiedades del Modelo dinámico:

m1:	1	t.s ² /m
k1:	3	t/m
c1=	0	



Condiciones iniciales:

x1=	0.1	m
x2=	0	m/s.

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -c_1 \\ m_1 & m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Matriz A:

0	1
-3.00	0

>> [V,D]=eig(A)

V =

```
0.0000 - 0.5000i    0.0000 + 0.5000i
0.8660 + 0.0000i    0.8660 + 0.0000i
```

D =

```
0.0000 + 1.7321i    0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i    0.0000 - 1.7321i
```

Se observa valores propios imaginarios puros, descripción en la tabla N°3:

Tabla N° 3 Comportamiento del punto crítico (c=0) caso a).elaboración propia

Punto crítico	1
(,)	(0.00,0.00)
Valor propio λ	±1.732i
Descripción de la raíz	Imaginario puro
Comportamiento	Punto Centro
Estabilidad	Estable

Plano de fases:

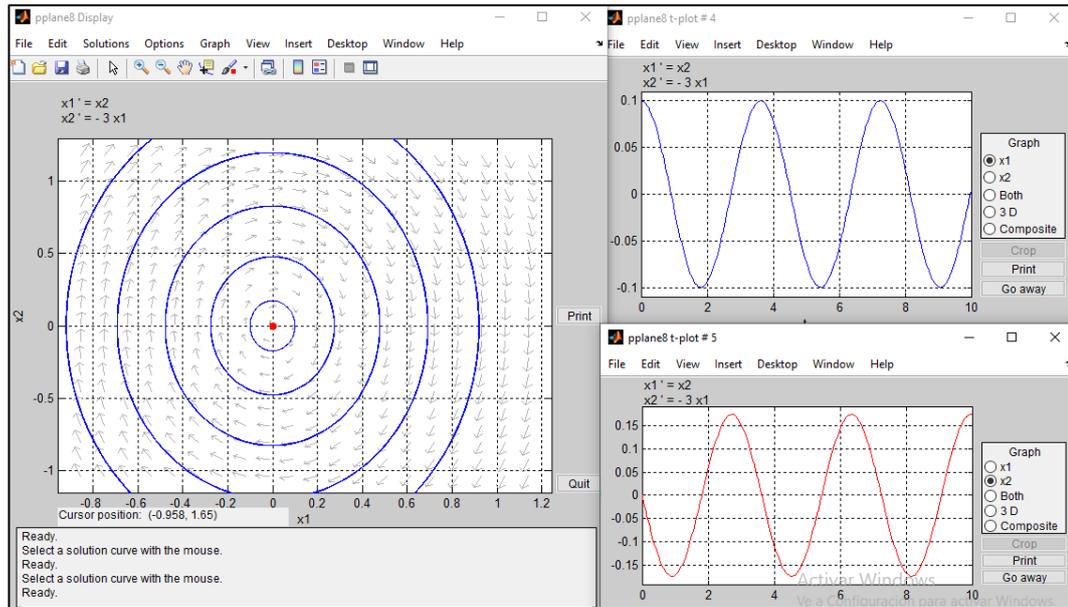


Figura N° 45 Plano de fases, con sus respectivas componentes x_1 , x_2 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo centro estable.
Fuente: pplane8.m (MATLAB).

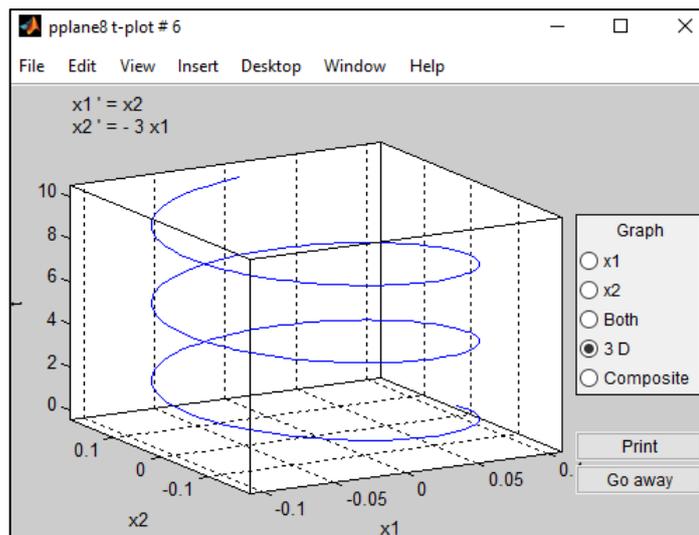


Figura N° 46 Gráfico en 3 dimensiones x_1 , x_2 , t .
Fuente: pplane8.m (MATLAB).

b) $c^2 - 4km = 0$, $c = \sqrt{4km}$, $\lambda_{1,2} = \frac{-c}{m}$, Auto valores reales negativos.

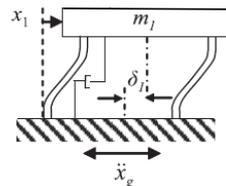
VIBRACIÓN LIBRE DE UN SISTEMA DE 1GDL.

Propiedades del Modelo dinámico:

m_1 :	1	t.s ² /m
k_1 :	1	t/m
c_1 :	2	

Condiciones iniciales:

x_1 =	0.1	m
x_2 =	0	m/s.



Sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -c_1 \\ m_1 & m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Matriz A:

0	1
-1.00	-2

```
>> [V,D]=eig(A)
```

V =

```
0.7071 -0.7071
-0.7071 0.7071
```

D =

```
-1 0
0 -1
```

Se observa valores propios dobles negativos, descripción en la tabla N°4.

Tabla N° 4 Comportamiento del punto crítico caso b).elaboración propia.

Punto crítico	1
(,)	(0.00,0.00)
Valor propio doble λ	-1
Descripción de la raíz	real negativo
Comportamiento	Nodo estable
Estabilidad	Estable

Plano de fases:

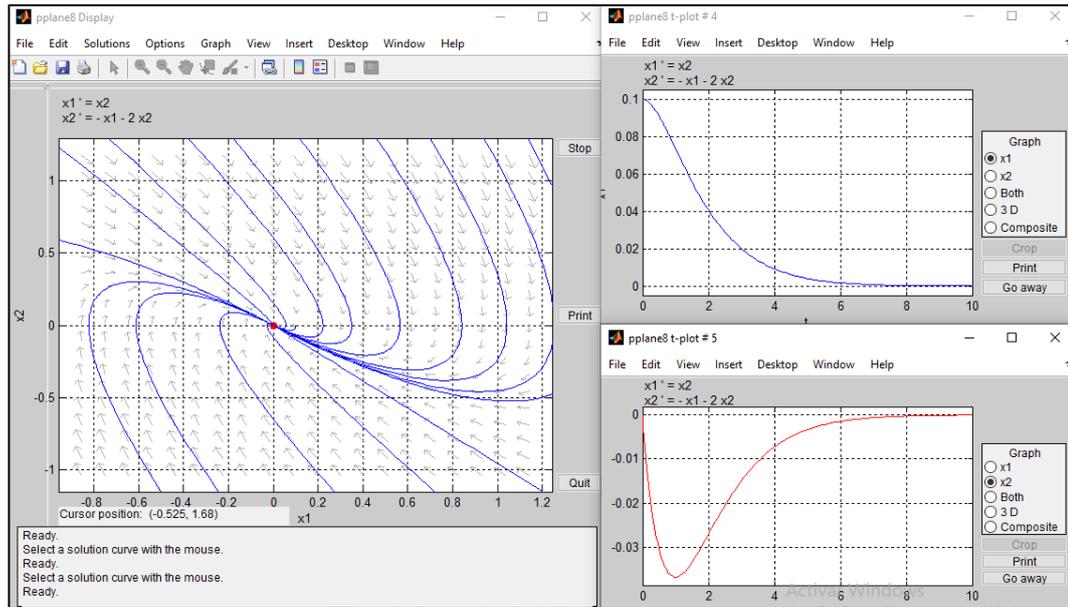


Figura N° 47 Plano de fases, con sus respectivas componentes x_1 , x_2 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo Nodo estable.
 Fuente: pplane8.m (MATLAB).

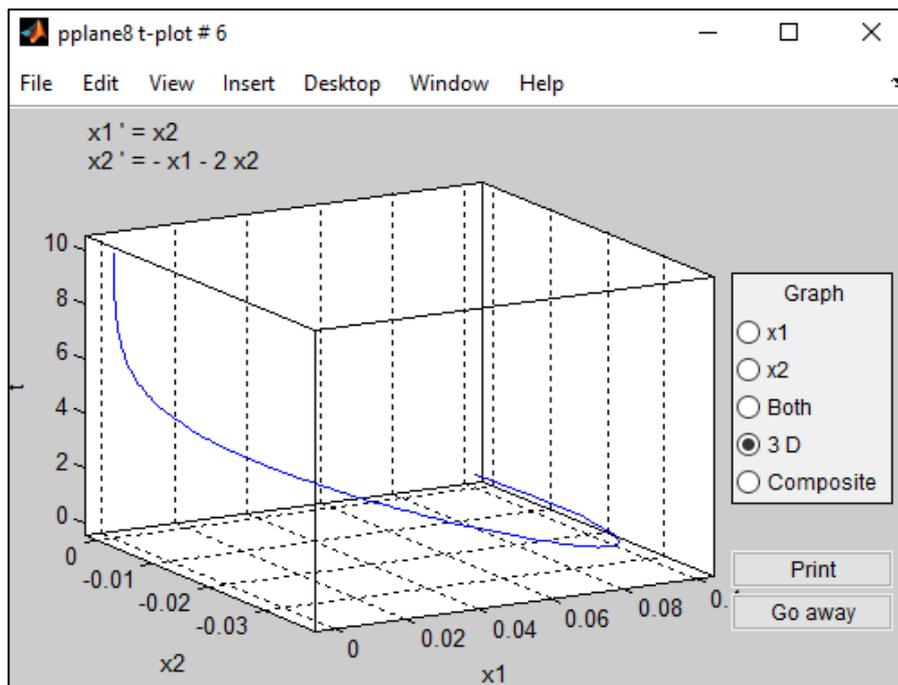


Figura N° 48 Gráfico en 3 dimensiones.
 Fuente: pplane8.m (MATLAB).

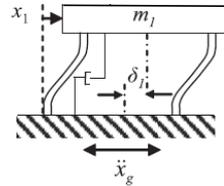
Según los gráficos N°47 y 48, para esta condición $c^2 - 4km = 0$, se muestran un amortiguamiento fuerte del sistema, es decir, no hay oscilación de su masa pero su solución tiende a su punto de equilibrio, considerándose estable según los datos analizados.

- c) $c^2 - 4km < 0$, $c < \sqrt{4km}$, Nudo estable (Auto valores complejos con $\text{Re } \lambda < 0$).

VIBRACIÓN LIBRE DE UN SISTEMA DE 1GDL.

Propiedades del Modelo dinámico:

m1:	1	t.s ² /m
k1:	1	t/m
c1=	1	



Condiciones iniciales:

x1=	0.1	m
x2=	0	m/s.

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1/m_1 & -c_1/m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Matriz A:

0	1
-1.00	-1

>> [V,D]=eig(A)

V =

```
0.7071 + 0.0000i    0.7071 + 0.0000i
-0.3536 + 0.6124i  -0.3536 - 0.6124i
```

D =

```
-0.5000 + 0.8660i    0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i   -0.5000 - 0.8660i
```

Se observa valores propios imaginarios con parte real negativa, descripción en la tabla N°5:

Tabla N° 5 Comportamiento del punto crítico caso c).elaboración propia.

Punto crítico	1
(,)	(0.00,0.00)
Valor propio λ	-0.5±0.866i
Descripción de la raíz	Complejo con parte real negativa
Comportamiento	Punto Espiral
Estabilidad	Estable

Plano de fases:

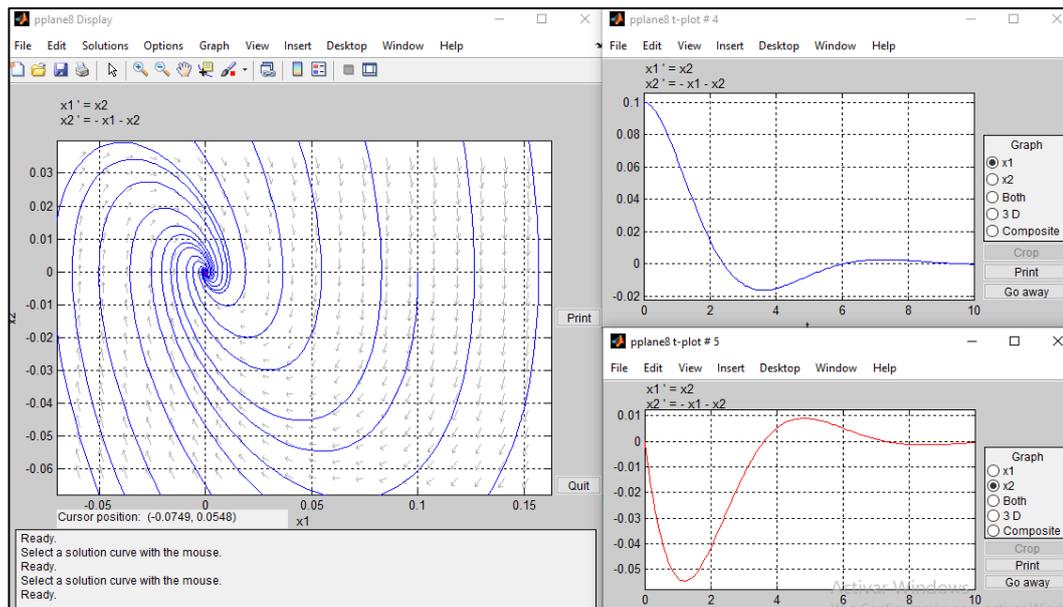


Figura N° 49 Plano de fases, con sus respectivas componentes x_1 , x_2 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.
 Fuente: pplane8.m (MATLAB).

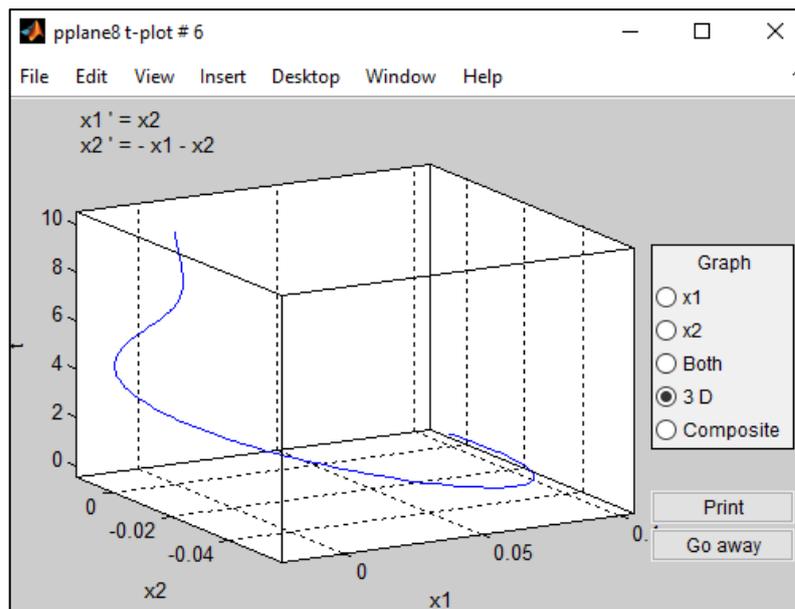


Figura N° 50 Gráfico en 3 dimensiones.
 Fuente: pplane8.m (MATLAB).

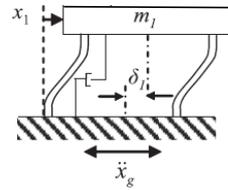
Según los gráficos N°49 y 50 se muestra que en su solución hay una pequeña oscilación de la masa luego esta regresa a su punto de equilibrio, este caso corresponde al comportamiento más común en vibración libre de modelos dinámicos en edificaciones, que corresponde al caso de sub- amortiguamiento, si se quiere obtener la curva solución con más oscilaciones es cuestión de modificar los datos a reales, ya que esta aplicación se tomaron datos simples que cumplen la condición $c^2 - 4km < 0$.

d) $c^2 - 4km > 0$, $\lambda_2 = \frac{-c}{2m} - \frac{\sqrt{c^2-4km}}{2m} < \lambda_1 = \frac{-c}{2m} + \frac{\sqrt{c^2-4km}}{2m} < 0$, Nodo estable.

VIBRACIÓN LIBRE DE UN SISTEMA DE 1GDL.

Propiedades del Modelo dinámico:

m1:	1	t.s ² /m
k1:	1	t/m
c1=	4	



Condiciones iniciales:

x1=	0.1	m
x2=	0	m/s.

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1/m_1 & -c_1/m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Matriz A:

0	1
-1.00	-4

>> [V,D]=eig(A)

V =

0.9659	-0.2588
-0.2588	0.9659

D =

-0.2679	0
0	-3.7321

Se observa que tenemos valores propios reales negativos, descripción en la tabla N°6:

Tabla N° 6 Comportamiento del punto crítico caso d), elaboración propia.

Punto crítico		1
(,)		(0.00,0.00)
Valor propio λ	1=	-0.2679
	2=	-3.7321
Descripción de la raíz		Real negativo.
Comportamiento		Nodo estable
Estabilidad		Estable

Plano de fases:

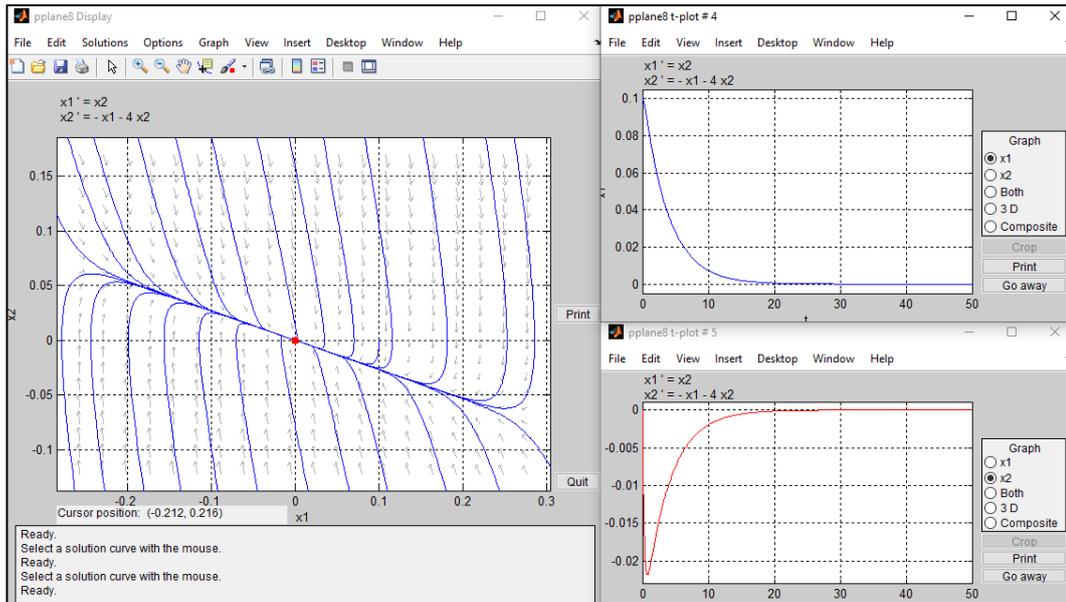


Figura N° 51 Plano de fases, con sus respectivas componentes x_1 , x_2 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo nodo estable.
 Fuente: pplane8.m (MATLAB).

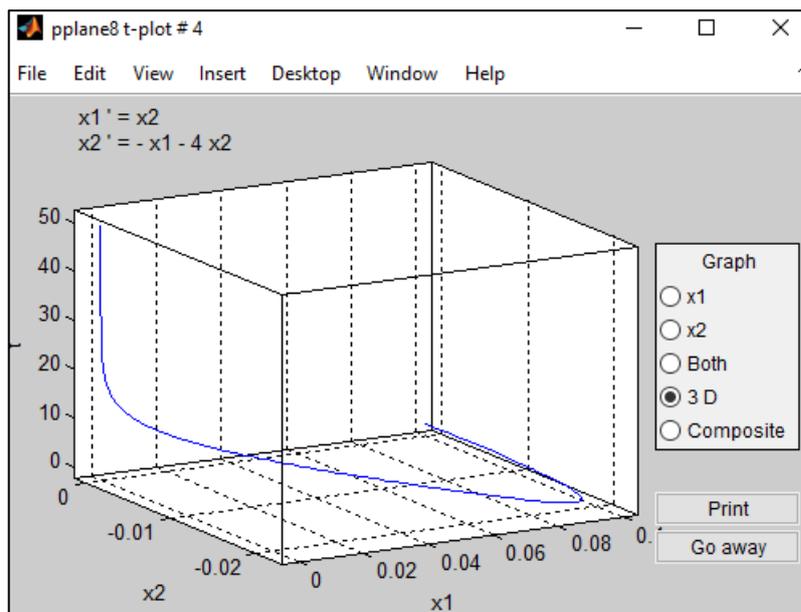


Figura N° 52 Gráfico en 3 dimensiones.
 Fuente: pplane8.m (MATLAB).

Según los gráficos N°51 y 52 se muestra que en su solución hay un amortiguamiento muy fuerte en el sistema, esto hace que la masa regrese a su punto de equilibrio, este caso corresponde en dinámica estructural a un sobre-amortiguamiento del sistema, no es el caso más estudiado ni el más recomendado en modelos de edificios, pero se muestra la condición para su aparición.

Tabla N° 7 Resumen de los resultados de los casos analizados a),b),c) y d), elaboración propia.

Caso:	Raíces:	Estabilidad
a) $c = 0$	Imaginario puros	Punto centro estable
b) $c^2 - 4km = 0$	Real negativos	Nodo estable
c) $c^2 - 4km < 0$	Complejo con real negativo	Punto espiral asintóticamente estable
d) $c^2 - 4km > 0$	Real negativos	Nodo estable

Si generalizamos y consideremos estas variables $p = c/m, q = k/m, \Delta = p^2 - 4q$ en la ecuación 4.6.1.1 se tendría los siguientes casos para los planos de fases:

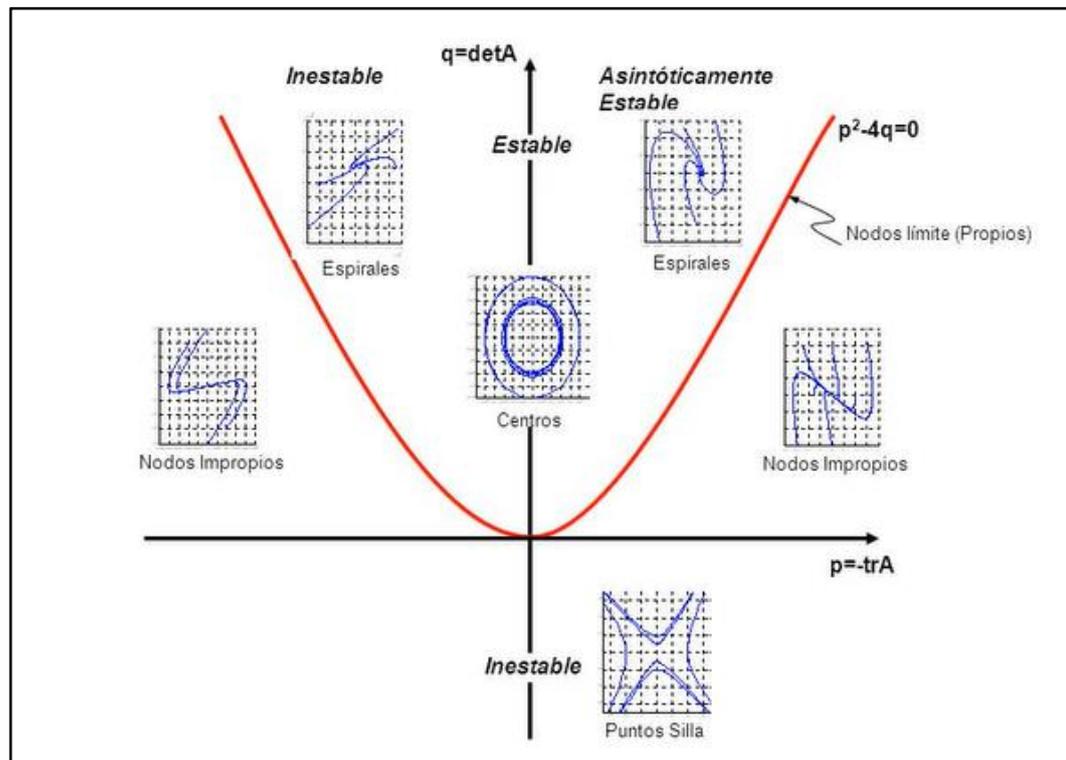


Figura N° 53 Diferentes casos para los planos de fases. Fuente: PPT - Sistemas no Lineales de Ecuaciones Diferenciales - Estabilidad de Sistemas de EDO PowerPoint Presentation - ID:4451345 (slideserve.com)

En la figura N°53 se muestra los diferentes casos del comportamiento del punto crítico si el $\Delta < 0$, está por encima de la parábola se tiene los casos: espirales inestables, asintóticamente estables y centros, $\Delta = 0$ tenemos nodos propios, $\Delta > 0$ tenemos nodos impropios y puntos sillas inestables, tomando en cuenta el signo de p y q , en la ubicación de los casos.

La tabla N°7 muestra el resumen de casos a), b), c) y d) para valores generales que cumplan las condiciones dadas, el análisis con valores reales tomados de proyectos de edificaciones según la configuración estructural y el peso de la estructura se analiza con más detenimiento en la siguiente aplicación.

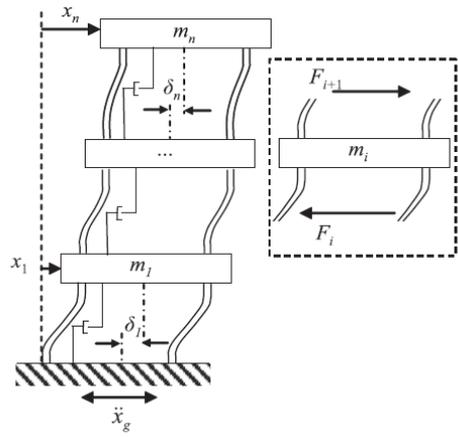
4.6.2 Vibración libre de un edificio de planta simétrica de 3gdl, sin amortiguamiento.

Se muestra el análisis cualitativo de un sistema en vibración libre de 3gdl sin considerar el amortiguamiento, el modelo es un edificio regular de planta simétrica, el objetivo principal es analizar la estabilidad del sistema utilizando teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias:

VIBRACIÓN LIBRE DE UN SISTEMA DE 3GDL (c=0)

Propiedades del Modelo dinámico:

m3:	15.35	t.s ² /m
k3:	17904.74	t/m
m2:	16.51	t.s ² /m
k2:	18911.053	t/m
m1:	16.63	t.s ² /m
k1:	19490.207	t/m



Ecuación Diferencial que gobierna el sistema dinámico:

$$[M_s]\{\ddot{x}_s\} + [K_s]\{x_s\} = 0$$

Condiciones iniciales:

$x_1 =$	0.10m
$x_2 =$	0.10m
$x_3 =$	0.10m
$\dot{x}_1 =$	0.00m/s
$\dot{x}_2 =$	0.00m/s
$\dot{x}_3 =$	0.00m/s

Cambio de variables:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \{x_s\} \quad \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \{\dot{x}_s\} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

Sistema de ecuaciones: $[\dot{x}] = [A][x]$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & \frac{k_3}{m_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_3}{m_3} & -\frac{k_3}{m_3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

Matriz A:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2309.156 & 1137.165 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1145.430 & -2229.909 & 1084.478 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1166.433 & -1166.433 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando con Matlab los valores y vectores propios utilizando el comando $[V, D]=\text{eig}(A)$:

```
>> [V,D]=eig(A)
V =
-0.0000 + 0.00999i -0.0000 - 0.00999i -0.0000 - 0.01691i -0.0000 + 0.01691i 0.0000 + 0.02091i 0.0000 - 0.02091i
0.0000 - 0.01201i 0.0000 + 0.01201i -0.0000 - 0.00781i -0.0000 + 0.00781i 0.0000 + 0.03811i 0.0000 - 0.03811i
-0.0000 + 0.00551i -0.0000 - 0.00551i -0.0000 + 0.01461i -0.0000 - 0.01461i -0.0000 + 0.04791i -0.0000 - 0.04791i
-0.6007 - 0.00001i -0.6007 + 0.00001i 0.7132 + 0.00001i 0.7132 + 0.00001i -0.3229 + 0.00001i -0.3229 - 0.00001i
0.7251 + 0.00001i 0.7251 + 0.00001i 0.3284 - 0.00001i 0.3284 + 0.00001i -0.5880 - 0.00001i -0.5880 + 0.00001i
-0.3363 - 0.00001i -0.3363 + 0.00001i -0.6188 - 0.00001i -0.6188 + 0.00001i -0.7388 + 0.00001i -0.7388 + 0.00001i

D =
0.0000 +60.6776i 0.0000 + 0.00001i 0.0000 + 0.00001i 0.0000 + 0.00001i 0.0000 + 0.00001i 0.0000 + 0.00001i
0.0000 + 0.00001i 0.0000 -60.6776i 0.0000 + 0.00001i 0.0000 + 0.00001i 0.0000 + 0.00001i 0.0000 + 0.00001i
0.0000 + 0.00001i 0.0000 + 0.00001i 0.0000 +42.2556i 0.0000 + 0.00001i 0.0000 + 0.00001i 0.0000 + 0.00001i
0.0000 + 0.00001i 0.0000 + 0.00001i 0.0000 + 0.00001i 0.0000 -42.2556i 0.0000 + 0.00001i 0.0000 + 0.00001i
0.0000 + 0.00001i 0.0000 + 0.00001i 0.0000 + 0.00001i 0.0000 + 0.00001i -0.0000 +15.4335i 0.0000 + 0.00001i
0.0000 + 0.00001i 0.0000 + 0.00001i 0.0000 + 0.00001i 0.0000 + 0.00001i -0.0000 -15.4335i
```

Figura N° 54 Captura de pantalla de los valores propios Matlab.

Se observa que tenemos valores propios imaginarios puros, descripción en la tabla N°8:

Tabla N° 8 Comportamiento del punto crítico (c=0) sistema en vibración libre. Elaboración propia.

Punto crítico N°:		1
(,)		(0.00,0.00)
Valor propio λ	1=	60.6776i
	2=	-60.6776i
	3=	42.2556i
	4=	-42.2556i
	5=	15.4335i
	6=	-15.4335i
Descripción de la raíz		Complejo, imaginario puro
Comportamiento		Centro
Estabilidad		Estable

Gráficamente se puede observar la estabilidad del sistema con la ayuda del plano de fases, para esto hacemos una transformación lineal $x = [T]y$, que convertirá al sistema en la siguiente ecuación:

$$\dot{y} = T^{-1}ATy$$

$$\dot{y} = By$$

Donde T es el vector que contiene los vectores propios de la matriz A y B representa la forma canónica de la matriz A, necesariamente tenemos que hacer este proceso de lo contrario el plano de fases sería una distorsión sin ninguna interpretación matemática.

[T]=

0.0000	0.0099	0.0000	-0.0169	0.0000	0.0209
0.0000	-0.0120	0.0000	-0.0078	0.0000	0.0381
0.0000	0.0055	0.0000	0.0146	0.0000	0.0479
-0.6007	0.0000	0.7132	0.0000	-0.3229	0.0000
0.7251	0.0000	0.3284	0.0000	-0.5880	0.0000
-0.3363	0.0000	-0.6188	0.0000	-0.7388	0.0000

[T]⁻¹=

0.0000	0.0000	0.0000	-0.6085	0.7292	-0.3144
36.8614	-44.1859	19.0622	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.7359	0.3363	-0.5893
-31.0924	-14.2414	24.8942	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	-0.3394	-0.6136	-0.7168
5.2445	9.4143	11.1003	0.0000	0.0000	0.0000

[B]=

0.000	60.670	0.00	0.00	0.00	0.00
-60.670	0.000	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.000	42.256	0.00	0.00
0.00	0.00	-42.256	0.000	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0	15.4335
0.00	0.00	0.00	0.00	-15.4335	0

Condición inicial: $y = [T]^{-1}x$

y=

0.000
1.174
0.000
-2.044
0.000
2.576

Con la condición inicial se obtiene la solución del problema que es la respuesta estructural de nuestro modelo.

Se desacopla la matriz B en tres subsistemas y se gráfica respectivamente:

Sub-sistema 1:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 60.670 \\ -60.670 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Graficando el plano de fases:

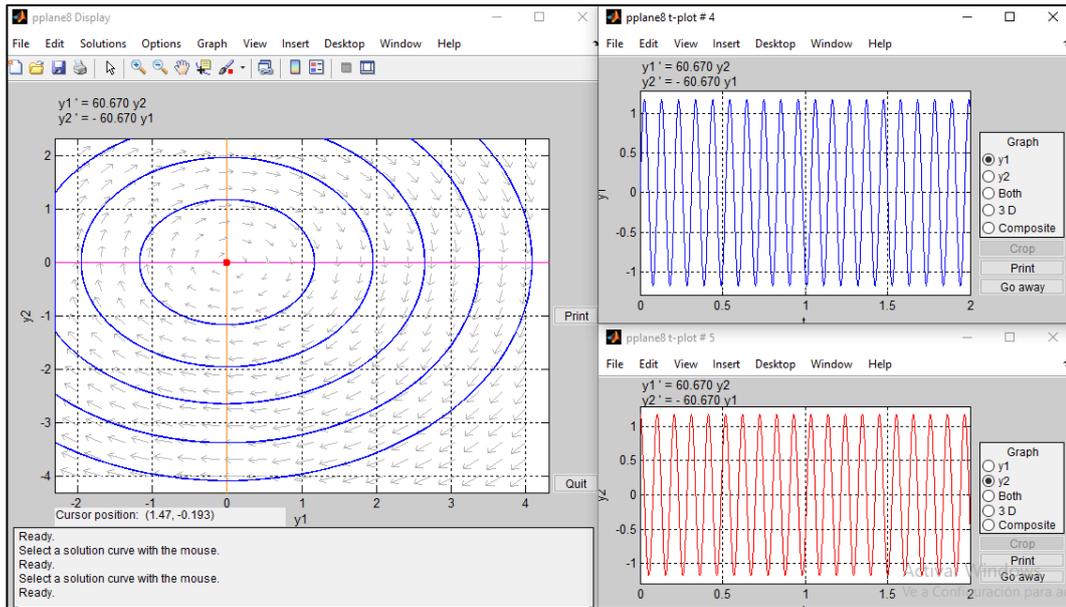


Figura N° 55 Plano de fases del Subsistema 1, con sus respectivas componentes y_1 , y_2 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo centro estable.
 Fuente: pplane8.m (MATLAB).

Sub-sistema 2:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 42.256 \\ -42.256 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

Graficando el plano de fases:

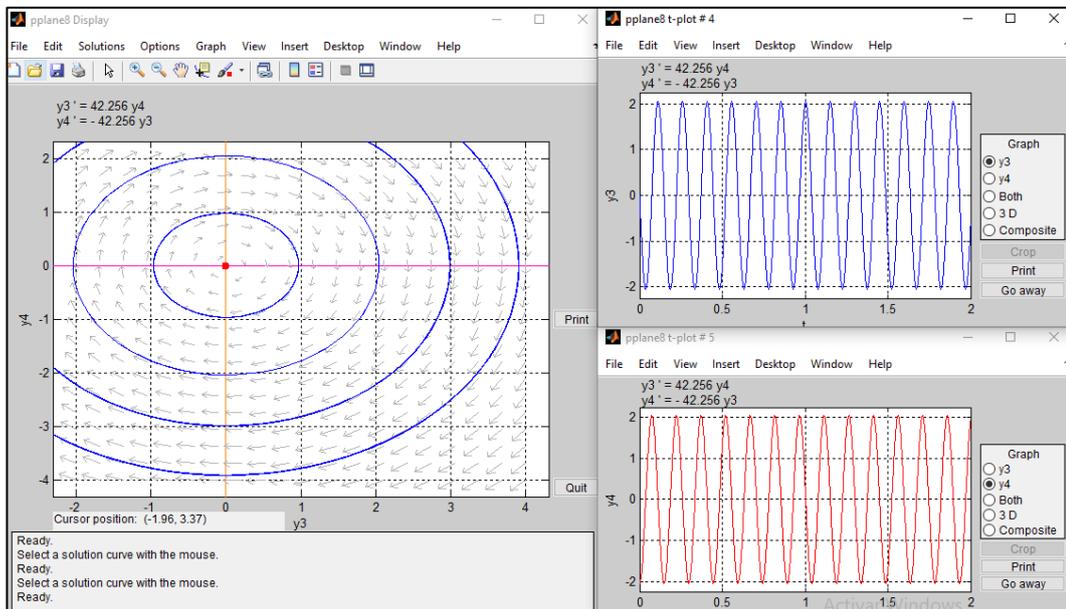


Figura N° 56 Plano de fases del Subsistema 2, con sus respectivas componentes y_3 , y_4 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo centro estable.
 Fuente: pplane8.m (MATLAB).

Sub-sistema 3:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_5 \\ \dot{y}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 15.43 \\ -15.43 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_5 \\ y_6 \end{bmatrix}$$

Graficando el plano de fases:

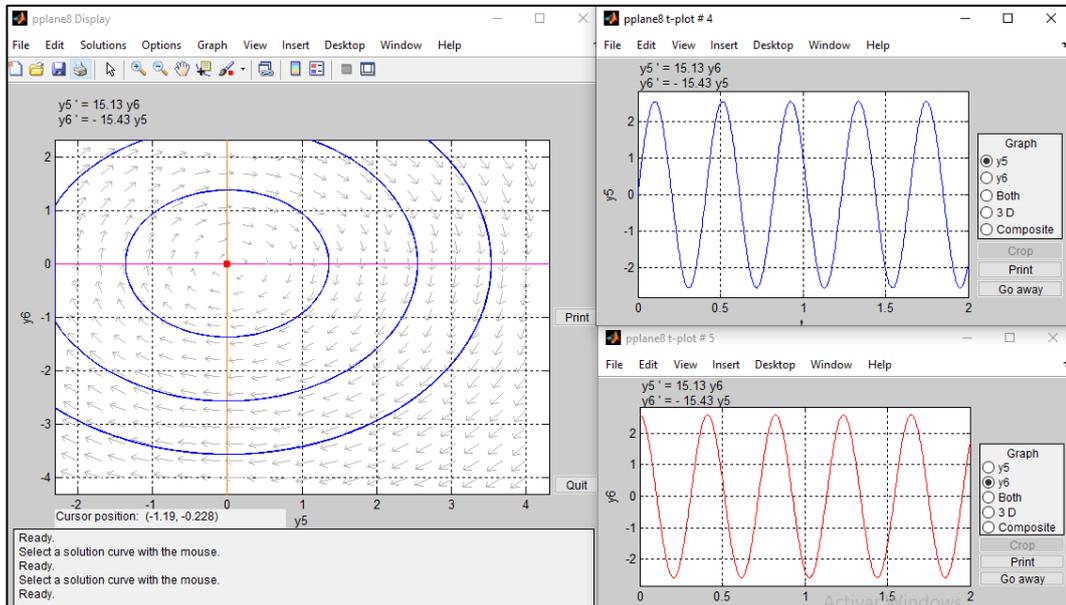


Figura N° 57 Plano de fases del Subsistema 3, con sus respectivas componentes y_5 , y_6 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo centro estable.

Fuente: pplane8.m (MATLAB).

Se muestra en los planos de fases figura N°55, 56 y 57 que los puntos críticos son centros estables, cuando $t \rightarrow +\infty$, la solución se mantiene cerca del punto crítico (0), esto se debe que el modelo no disipa energía por tanto el sistema siempre está en continuo oscilamiento.

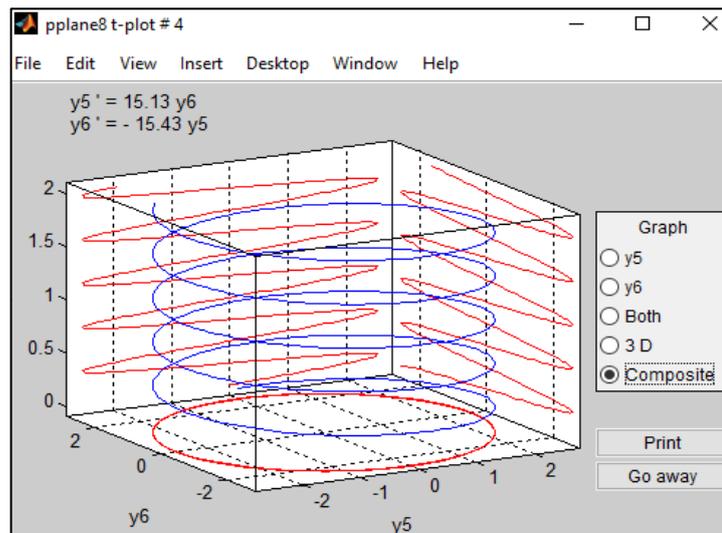


Figura N° 58 Gráfico en 3 dimensiones del último subsistema 3.

Fuente: pplane8.m (MATLAB).

4.6.3 Vibración libre de un edificio de planta simétrica de 3gdl, con amortiguamiento.

Se muestra el análisis cualitativo de un sistema en vibración libre de 3gdl, el modelo es un edificio regular de planta simétrica, el objetivo principal es analizar la estabilidad del sistema utilizando teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias:

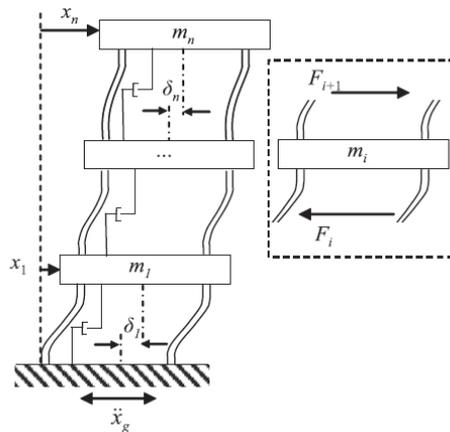
Propiedades del Modelo dinámico:

m3:	15.35	t.s ² /m
k3:	17904.74	t/m
m2:	16.51	t.s ² /m
k2:	18911.053	t/m
m1:	16.63	t.s ² /m
k1:	19490.207	t/m

Matriz de amortiguamiento de RAYLEIGH:

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K]$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 107.3269 & -44.840 & 0 \\ -44.840 & 103.4502 & -42.4539 \\ 0 & -42.454 & 57.4749 \end{bmatrix}$$



Ecuación Diferencial que gobierna el sistema dinámico :

$$[M_s]\{\ddot{x}_s\} + [C_s]\{\dot{x}_s\} + [K_s]\{x_s\} = 0$$

Condiciones iniciales:

$x_1 =$	0.10m
$x_2 =$	0.10m
$x_3 =$	0.10m
$\dot{x}_1 =$	0.00m/s
$\dot{x}_2 =$	0.00m/s
$\dot{x}_3 =$	0.00m/s

Cambio de variables:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \{x_s\} \quad \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \{\dot{x}_s\} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

Sistema de ecuaciones: $[\dot{x}] = [A][x]$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & -\frac{c_{11}}{m_1} & -\frac{c_{12}}{m_1} & -\frac{c_{13}}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & \frac{k_3}{m_2} & -\frac{c_{21}}{m_2} & -\frac{c_{22}}{m_2} & -\frac{c_{23}}{m_2} \\ 0 & \frac{k_3}{m_3} & -\frac{k_3}{m_3} & -\frac{c_{31}}{m_3} & -\frac{c_{32}}{m_3} & -\frac{c_{33}}{m_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

Matriz A:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2309.156 & 1137.165 & 0 & -6.454 & 2.696 & 0 \\ 1145.430 & -2229.909 & 1084.478 & 2.716 & -6.266 & 2.571 \\ 0 & 1166.433 & -1166.433 & 0 & 2.766 & -3.744 \end{bmatrix}$$

Calculando con Matlab los valores y vectores propios utilizando el comando [V, D]=eig(A):

```
Columns 1 through 5
-4.8542 +60.4831i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i -4.8542 -60.4831i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i -2.6061 +42.1752i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i -2.6061 -42.1752i  0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i -0.7717 +15.4142i
0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i

Column 6
0.0000 + 0.0000i
-0.7717 -15.4142i
```

Figura N° 59 Captura de pantalla de los valores propios Matlab.

Se observa que tenemos valores propios complejos con parte real negativa, descripción en la tabla N°9:

Tabla N° 9 Comportamiento del punto crítico (c>0) sistema en vibración libre. Elaboración propia.

Punto crítico N°:		1
(,)		(0.00,0.00)
Valor propio λ	1=	-0.7717+15.4142i
	2=	-0.7717-15.4142i
	3=	-2.6061+42.1752i
	4=	-2.6061-42.1752i
	5=	-4.8542+60.4831i
	6=	-4.8542-60.4831i
Descripción de la raíz		Complejo con parte real negativo
Comportamiento		Punto espiral
Estabilidad		Asintoticamente estable

Gráficamente se puede observar la estabilidad del sistema con la ayuda del plano de fases, para esto hacemos una transformación lineal $x = [T]y$, que convertirá al sistema en la siguiente ecuación:

$$\dot{y} = T^{-1}ATy$$

$$\dot{y} = By$$

Donde T es el vector que contiene los vectores propios de la matriz A y B representa la forma canónica de la matriz A, necesariamente tenemos que hacer este proceso de lo contrario el plano de fases sería una distorsión sin ninguna interpretación matemática.

$$[T]=$$

0.0008	0.0099	-0.0010	-0.0168	-0.0010	-0.0209
-0.0010	-0.0119	-0.0005	-0.0078	-0.0019	-0.0380
0.0004	0.0055	0.0009	0.0146	-0.0024	-0.0478
-0.6007	0.0000	0.7132	0.0000	0.3229	0.0000
0.7251	0.0000	0.3284	0.0000	0.5880	0.0000
-0.3363	0.0000	-0.6188	0.0000	0.7388	0.0000

$$[T]^{-1}=$$

0.0000	0.0000	0.0000	-0.6085	0.7292	-0.3144
37.1270	-44.3528	19.0262	0.0476	-0.0612	0.0259
0.0000	0.0000	0.0000	0.7359	0.3363	-0.5893
-31.1308	-14.3391	25.0108	-0.0445	-0.0190	0.0368
0.0000	0.0000	0.0000	0.3394	0.6136	0.7168
-5.2366	-9.4831	-11.0920	-0.0164	-0.0312	-0.0355

$$[B]=$$

-4.854	60.483	0.00	0.00	0.00	0.00
-60.483	-4.854	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	-2.606	42.175	0.00	0.00
0.00	0.00	-42.175	-2.606	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	-0.7717	15.4142
0.00	0.00	0.00	0.00	-15.4142	-0.7717

Condición inicial: $y = [T]^{-1}x$

$$y=$$

0.000
1.180
0.000
-2.046
0.000
-2.581

Con la condición inicial se obtiene la solución del problema que es la respuesta estructural de nuestro modelo.

Se desacopla la matriz B en tres subsistemas y se gráfica respectivamente:

Sub-sistema 1:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.854 & 60.483 \\ -60.483 & -4.854 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Graficando el plano de fases:

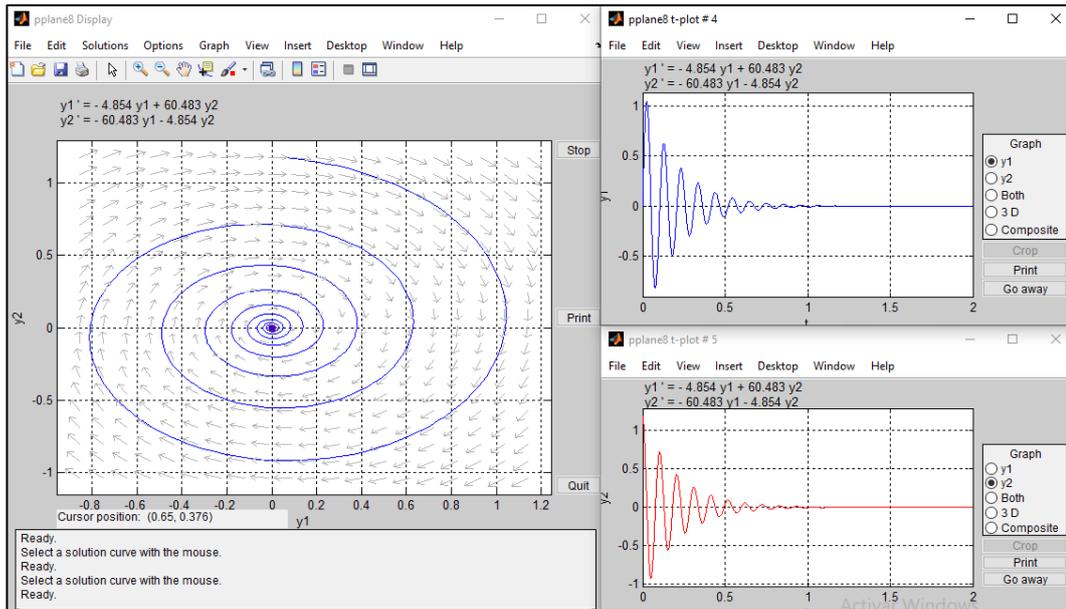


Figura N° 60 Plano de fases del Subsistema 1, con sus respectivas componentes y_1 , y_2 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.
 Fuente: pplane8.m (MATLAB).

Sub-sistema 2:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.606 & 42.175 \\ -42.175 & -2.606 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

Graficando el plano de fases:

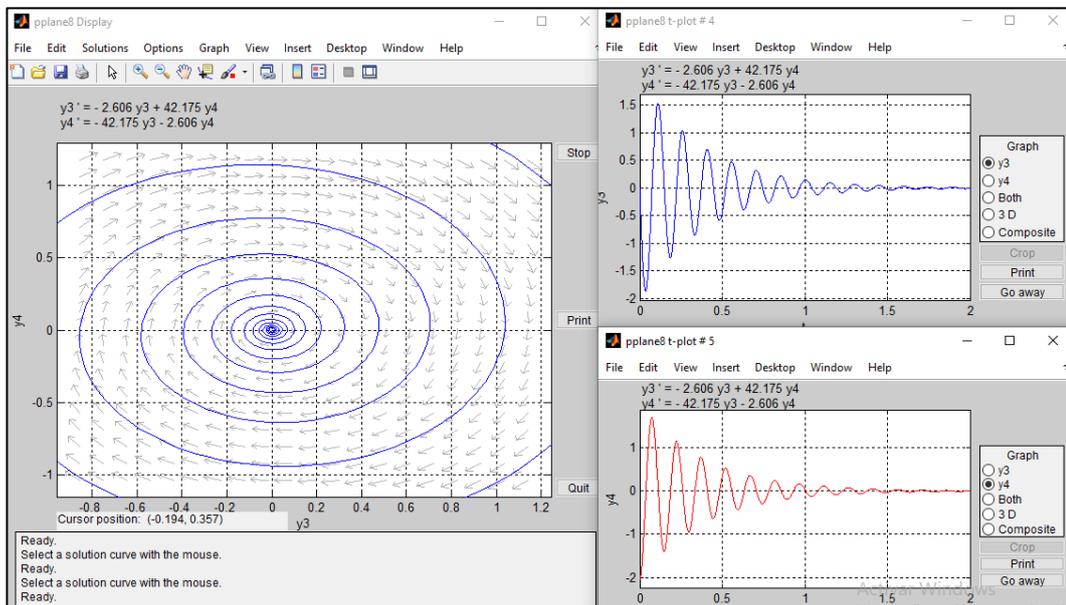


Figura N° 61 Plano de fases del Subsistema 2, con sus respectivas componentes y_3 , y_4 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.
 Fuente: pplane8.m (MATLAB).

Sub-sistema 3:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_5 \\ \dot{y}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7717 & 15.4142 \\ -15.4142 & -0.7717 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_5 \\ y_6 \end{bmatrix}$$

Graficando el plano de fases:

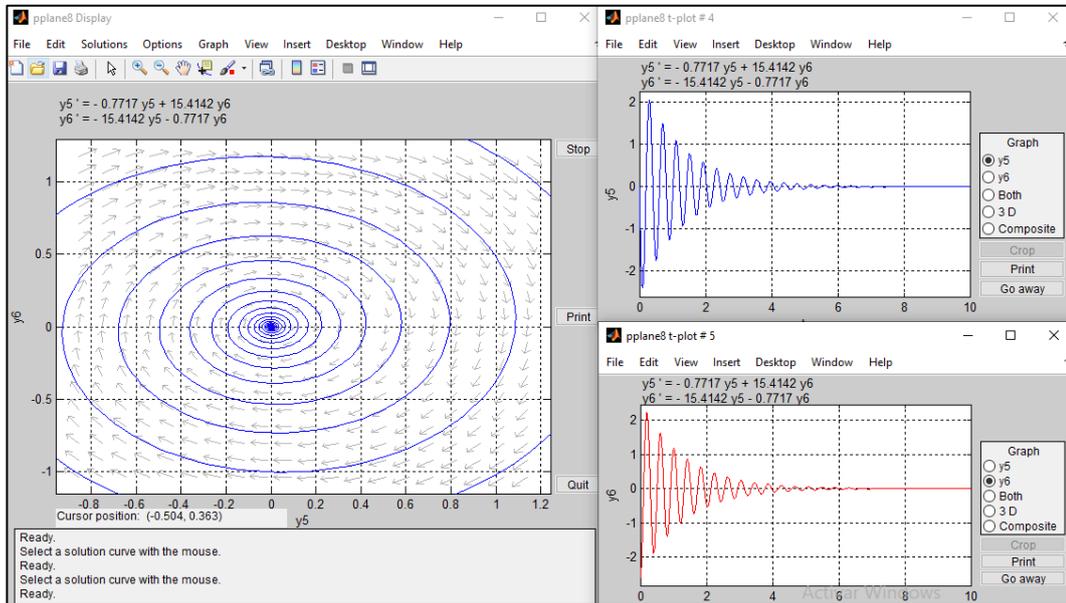


Figura N° 62 Plano de fases del Subsistema 3, con sus respectivas componentes \$y_5\$, \$y_6\$, se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.

Fuente: pplane8.m (MATLAB).

Se muestra en los planos de fases N°60, 61 y 62 que los puntos críticos son espirales asintóticamente estables, cuando \$t \to +\infty\$ la solución se acerca al punto crítico (0,0).

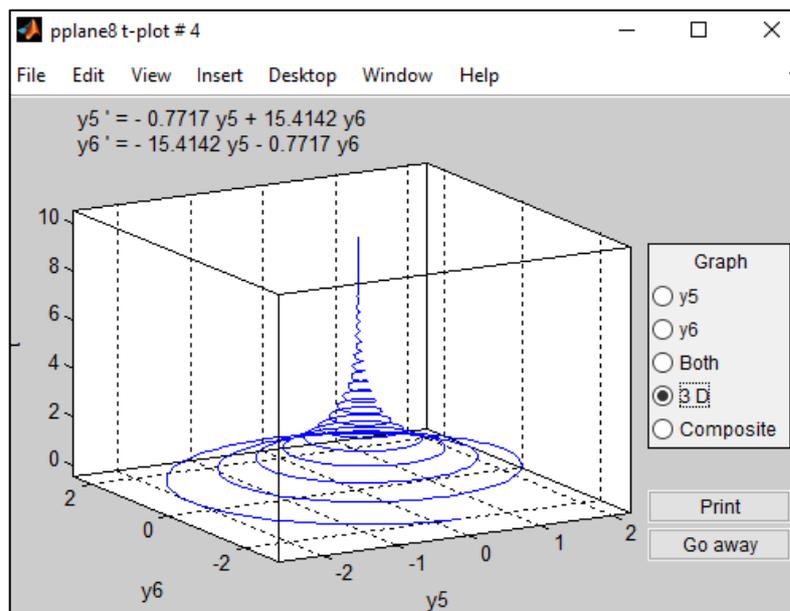


Figura N° 63 Gráfico en 3 dimensiones del último subsistema 3.

Fuente: pplane8.m (MATLAB).

4.6.4 Vibración libre de un edificio de planta asimétrica de 3gdl.

Para esta aplicación se utiliza un modelo de un edificio con planta asimétrica, y distribución de pórticos como se muestra en la siguiente imagen, los datos se presentan en la siguiente hoja de cálculo:

Propiedades del Modelo dinámico:

m3:	15.35	t.s ² /m
m2:	16.51	t.s ² /m
m1:	16.63	t.s ² /m

Portico A:

k3A:	654.138	t/m
k2A:	7141.5905	t/m
k1A:	7934.5325	t/m

Portico B:

k3B:	654.138	t/m
k2B:	7141.5905	t/m
k1B:	7934.5325	t/m

Portico C:

k3C:	4112.644	t/m
k2C:	6082.582	t/m
k1C:	10450.104	t/m

Matriz de amortiguamiento de RAYLEIGH:

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K]$$

$$C = \begin{bmatrix} 367.2 & -152.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -152.1 & 210.5 & -54.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -54.8 & 58.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 177 & -82.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -82.1 & 93.2 & -7.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7.5 & 10.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5185.9 & -2171.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2171.3 & 2952.6 & -699.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -699.8 & 775.6 \end{bmatrix}$$

Ecuación Diferencial que gobierna el sistema dinámico :

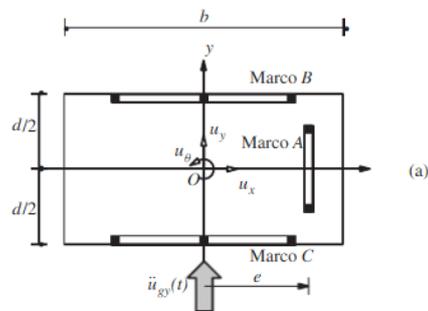
$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \dot{u}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{x\theta} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{y\theta} \\ k_{\theta x} & k_{\theta y} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ahora haremos un cambio de variables en la ecuación de movimiento (4.1.9) y lo llevaremos a la forma de la ecuación (4.1.6):

$$\{\dot{x}_2\} = [M]^{-1}\{F_E\} - [M]^{-1}[C]\{x_2\} - [M]^{-1}[K]\{x_1\} \quad (4.1.5)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ [M]^{-1} \end{bmatrix} F_E \quad (4.1.6)$$

Donde x_1 y x_2 son vectores columnas.



Continuando con el procedimiento:

Cambio de variables:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix} = \{x_s\} \quad \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{14} \\ u_{15} \\ u_{16} \\ u_{17} \\ u_{18} \end{bmatrix} = \{\dot{x}_s\} \quad \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \\ \dot{u}_5 \\ \dot{u}_6 \\ \dot{u}_7 \\ \dot{u}_8 \\ \dot{u}_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{14} \\ u_{15} \\ u_{16} \\ u_{17} \\ u_{18} \end{bmatrix}$$

Matriz A:

0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
-1900.710102	755.1997895	0	0	0	0	0	0	0	-22.080577	9.146121467	0	0	0	0	0	0	0	0
800.9795578	-1089.700454	288.7208964	0	0	0	0	0	0	9.2125984	-12.749884858	3.31920048	0	0	0	0	0	0	0
0	310.539544	-310.539544	0	0	0	0	0	0	0	0	-3.78501629	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-906.561816	429.4401984	0	-3399.60681	1610.401	0	0	0	-10.6434155	4.93686109	0	-39.1040289	18.5207456	0	0	0
0	0	0	432.5615082	-472.182223	39.62071472	1622.10566	-1770.68	148.57768	0	0	0	4.97274379	-5.6450636	0.45427014	18.6533604	-20.3634161	1.70805572	0
0	0	0	0	42.61488342	-42.61488342	0	159.8057	-159.8057	0	0	0	0.48859935	-0.70358306	0	1.83713355	-1.83713355	0	0
0	0	0	-148.8878895	70.52849974	0	-1168.61192	497.1503	0	0	0	-1.71258521	0.81112755	0	-13.6572284	5.71818385	0	0	0
0	0	0	71.04112361	-77.5481753	6.507051687	500.763733	-662.168	161.40476	0	0	0	0.81702308	-0.89182844	0.07480536	5.75974747	-7.83228037	1.85634011	0
0	0	0	0	6.998789795	-6.998789795	0	173.6021	-173.60212	0	0	0	0	0.0804584	-0.0804584	0	1.99662378	-2.21289141	0

La matriz A es de dimensión 18x18, ya que nuestro modelo tiene tres grados de libertad por nodo.

Calculando con Matlab los valores y vectores propios utilizando el comando [V, D]=eig(A):

```
D =
Columns 1 through 5
-13.9245 +46.9940i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i -13.9245 -46.9940i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i -4.3918 +26.9385i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i -4.3918 -26.9385i  0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i -12.9179 +49.2414i
0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i
```

Figura N° 64 Se muestra una parte de la salida de datos del Matlab.

Se observa que tenemos valores propios imaginarios puros, descripción en la tabla N°10:

Tabla N° 10 Comportamiento del punto crítico ($c>0$) planta asimétrica, sistema en vibración libre.
 Elaboración propia.

Punto crítico N°:		1
(,)		(0.00,0.00)
Valor propio λ	1=	-13.9245+46.994i
	2=	-13.9245-46.994i
	3=	-4.3918+26.9385i
	4=	-4.3918-26.9385i
	5=	-12.9179+49.2414i
	6=	-12.9179-49.2414i
	7=	-0.9914+12.3558i
	8=	-0.9914-12.3558i
	9=	-2.6113+23.9046i
	10=	-2.6113-23.9046i
	11=	-3.0294+24.3012i
	12=	-3.0294-24.3012i
	13=	-1.0199+12.9752i
	14=	-1.0199-12.9752i
	15=	-0.2415+5.077i
	16=	-0.2415-5.077i
	17=	-0.5273+9.73i
	18=	-0.5273-9.73i
Descripción de la raíz		Complejo con parte real negativo
Comportamiento		Punto espiral
Estabilidad		Asintoticamente estable

Para la gráfica de los planos de fases se sigue el mismo procedimiento de la aplicación 4.2.1, para esto hacemos una transformación lineal $u = [T]y$, que convertirá al sistema en la siguiente ecuación:

$$\dot{y} = T^{-1}ATy$$

$$\dot{y} = By$$

Donde T es el vector que contiene los vectores propios de la matriz A y B representa la forma canónica de la matriz A.

Se desacopla la matriz B en tres subsistemas y se gráfica respectivamente:

Sub-sistema 1:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13.92 & 46.99 \\ -46.99 & -13.92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

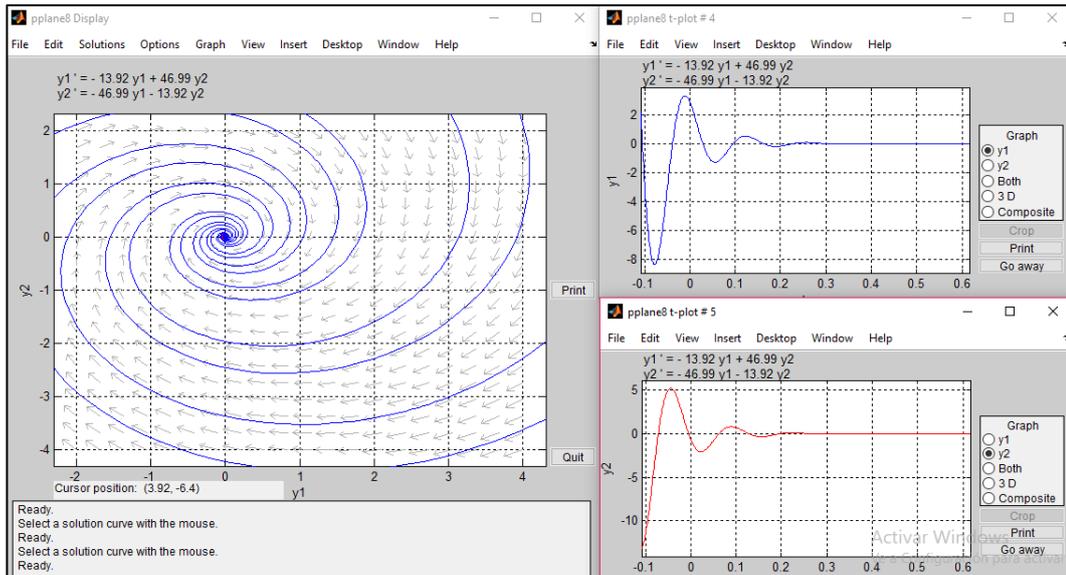


Figura N° 65 Plano de fases del Subsistema 1, con sus respectivas componentes y_1 , y_2 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.

Fuente: pplane8.m (MATLAB).

Sub-sistema 2:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.39 & 26.93 \\ -26.93 & -4.39 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

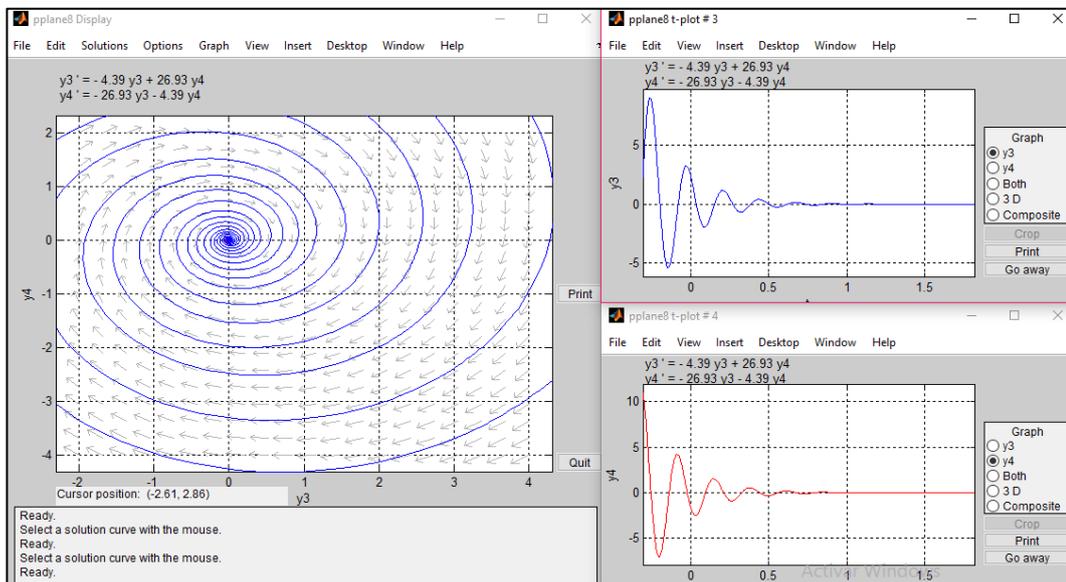


Figura N° 66 Plano de fases del Subsistema 2, con sus respectivas componentes y_3 , y_4 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.

Fuente: pplane8.m (MATLAB).

Sub-sistema 3:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_5 \\ \dot{y}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12.9179 & 49.2414 \\ -49.2414 & -12.9179 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_5 \\ y_6 \end{bmatrix}$$

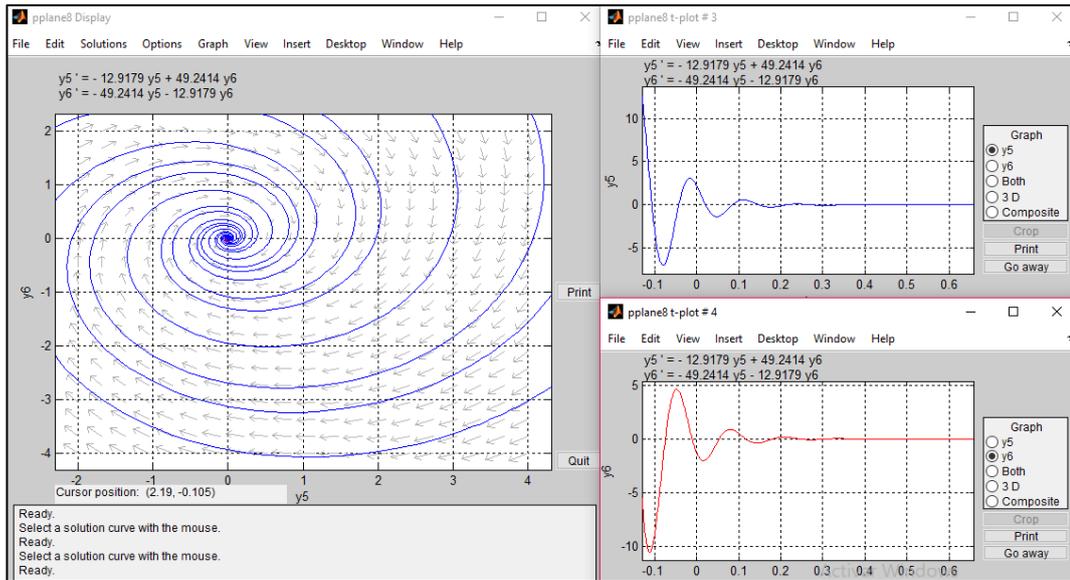


Figura N° 67 Plano de fases del Subsistema 3, con sus respectivas componentes y_5 , y_6 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.

Fuente: pplane8.m (MATLAB).

Sub-sistema 4:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_7 \\ \dot{y}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9914 & 12.3558 \\ -12.3558 & -0.9914 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_7 \\ y_8 \end{bmatrix}$$

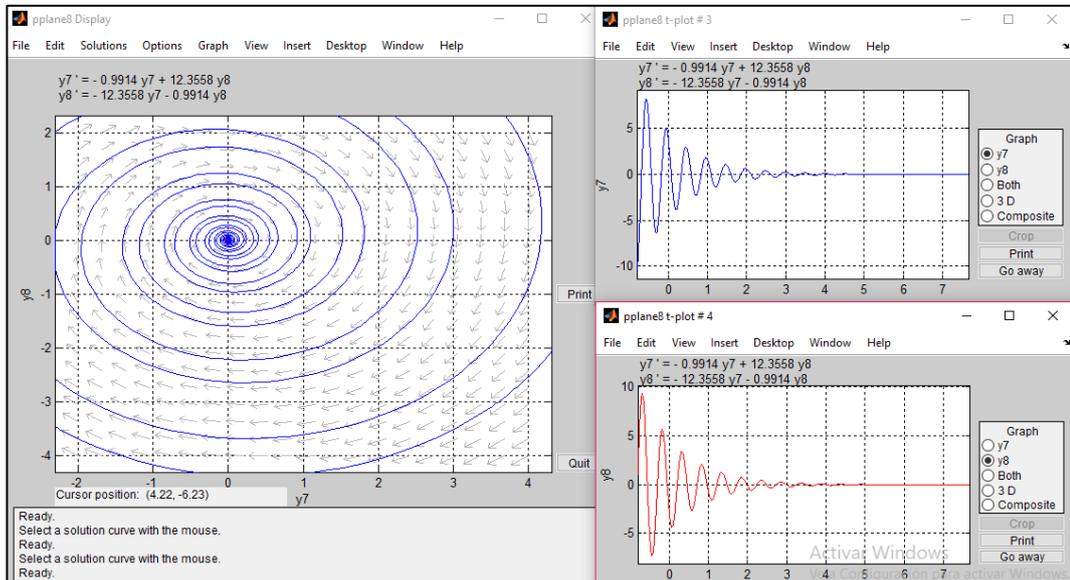


Figura N° 68 Plano de fases del Subsistema 4, con sus respectivas componentes y_7 , y_8 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.

Fuente: pplane8.m (MATLAB).

Sub-sistema 5:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_9 \\ \dot{y}_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.6113 & 23.9046 \\ -23.9046 & -2.6113 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_9 \\ y_{10} \end{bmatrix}$$

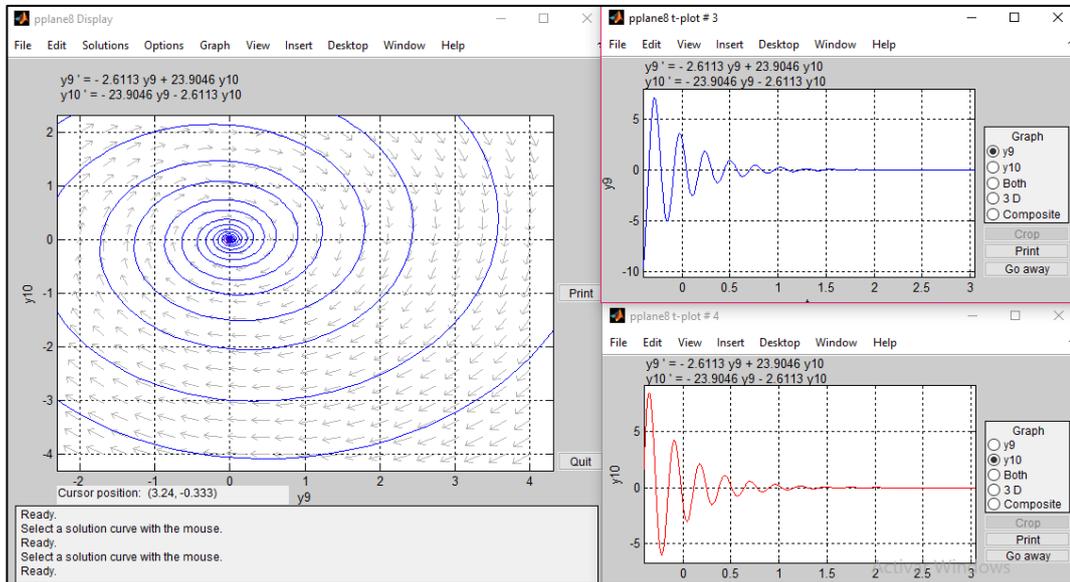


Figura N° 69 Plano de fases del Subsistema 5, con sus respectivas componentes y_9 , y_{10} , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.

Fuente: pplane8.m (MATLAB).

Sub-sistema 6:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_{11} \\ \dot{y}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.029 & 24.3012 \\ -24.3012 & -3.029 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \end{bmatrix}$$

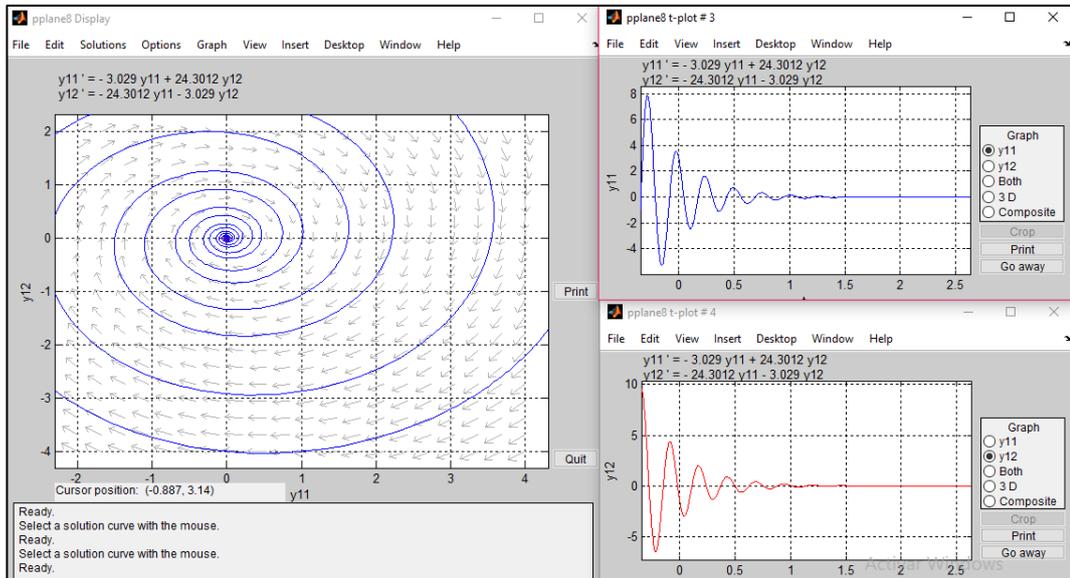


Figura N° 70 Plano de fases del Subsistema 6, con sus respectivas componentes y_{11} , y_{12} , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.

Fuente: pplane8.m (MATLAB).

Sub-sistema 7:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_{13} \\ \dot{y}_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.019 & 12.975 \\ -12.975 & -1.019 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{13} \\ y_{14} \end{bmatrix}$$

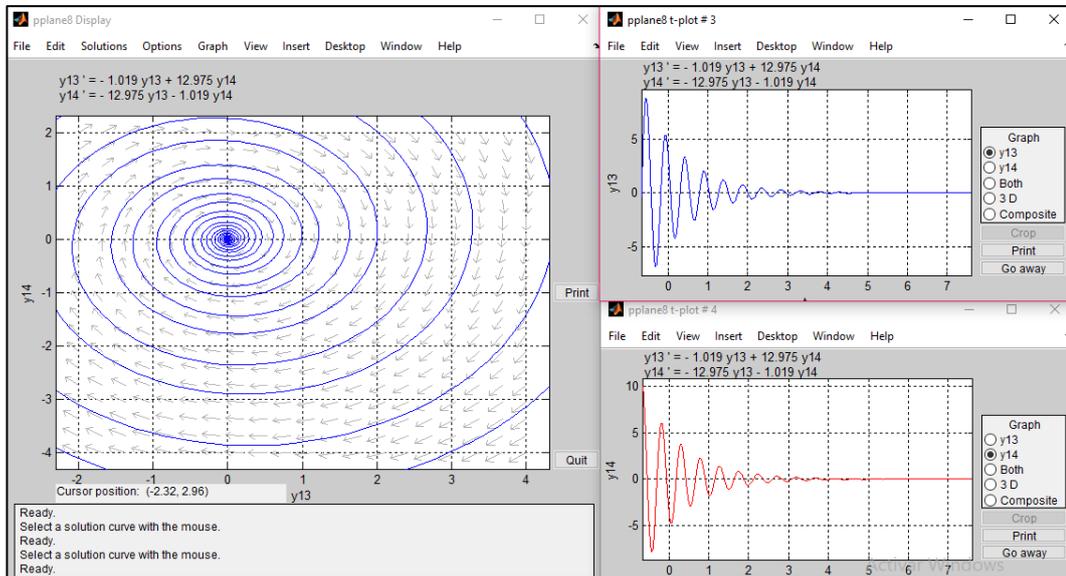


Figura N° 71 Plano de fases del Subsistema 7, con sus respectivas componentes y_{13} , y_{14} , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.

Fuente: pplane8.m (MATLAB).

Sub-sistema 8:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_{15} \\ \dot{y}_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2415 & 5.077 \\ -5.077 & -0.2415 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{15} \\ y_{16} \end{bmatrix}$$

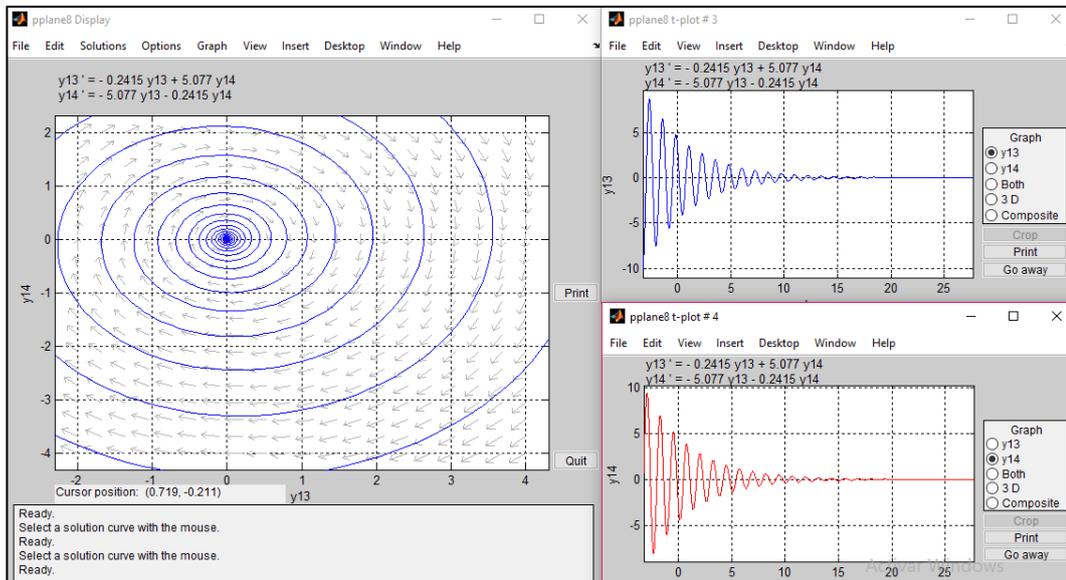


Figura N° 72 Plano de fases del Subsistema 8, con sus respectivas componentes y_{15} , y_{16} , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.

Fuente: pplane8.m (MATLAB).

Sub-sistema 9:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_{17} \\ \dot{y}_{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.527 & 9.73 \\ -9.73 & -0.527 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{17} \\ y_{18} \end{bmatrix}$$

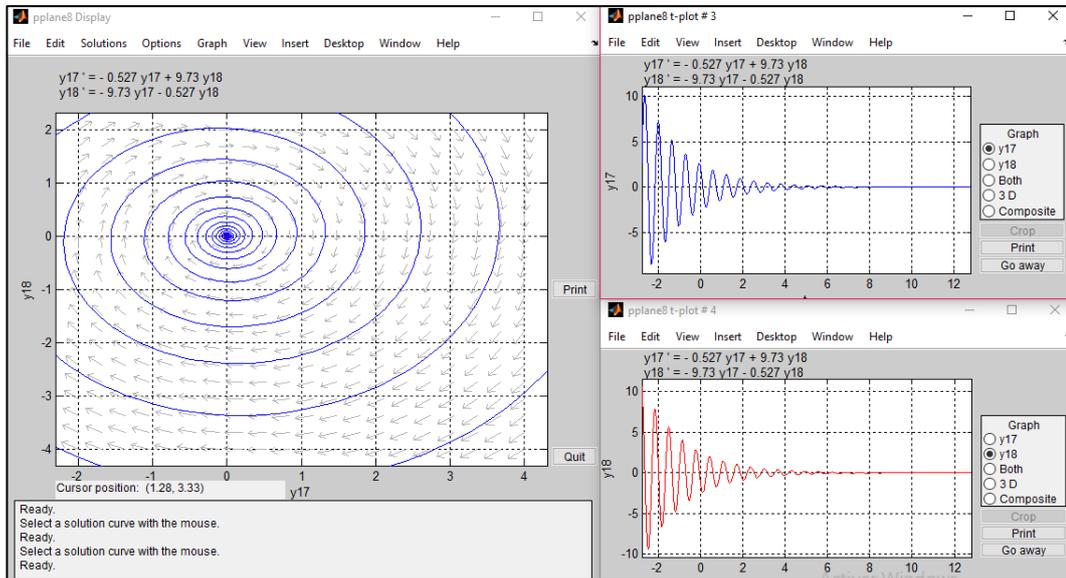


Figura N° 73 Plano de fases del Subsistema 8, con sus respectivas componentes y17, y18, se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.

Fuente: pplane8.m (MATLAB).

Se muestra en todos los planos de fases N°65 al 73 que los puntos críticos son espirales asintóticamente estables cuando, $t \rightarrow +\infty$ la solución se acerca al punto crítico (0), por lo tanto el sistema es asintóticamente estable, esto se debe al efecto del amortiguamiento en el sistema hace que el sistema disipe energía y atenué su movimiento.

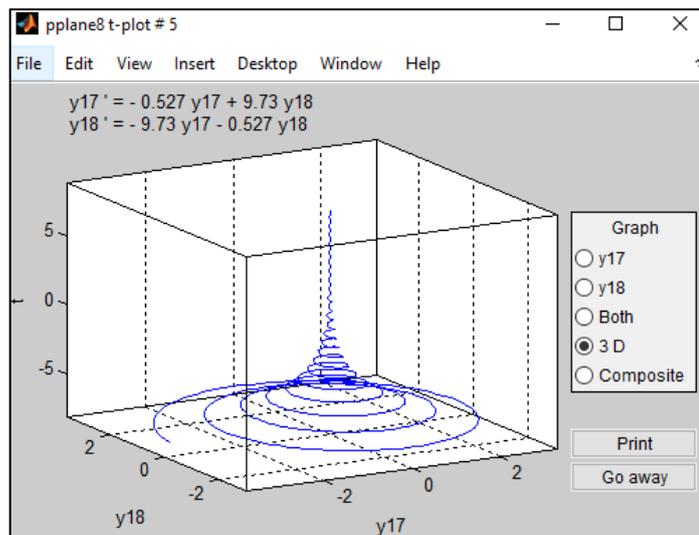


Figura N° 74 Gráfico en 3 dimensiones del último subsistema 8.

Fuente: pplane8.m (MATLAB).

4.6.5 Movimiento forzado de un edificio de planta simétrica de 3gd.

Para esta aplicación la ecuación de movimiento incluye una fuerza externa armónica (sinusoidal) que hace oscilar el modelo estructural, ahora se estabilizará este sistema con un control en el primer nivel, analizaremos su estabilidad:

Propiedades del Modelo dinámico:

m3:	15.35	t.s ² /m
k3:	17904.74	t/m
m2:	16.51	t.s ² /m
k2:	18911.053	t/m
m1:	16.63	t.s ² /m
k1:	19490.207	t/m

Matriz de amortiguamiento de RAYLEIGH:

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K]$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 107.3269 & -44.840 & 0 \\ -44.840 & 103.4502 & -42.4539 \\ 0 & -42.454 & 57.4749 \end{bmatrix}$$

Fuerzas externas

$$F_1(t) = 5 \sin(10t)$$

$$F_2(t) = 5 \sin(10t)$$

$$F_3(t) = 5 \sin(10t)$$

Ecuación Diferencial que gobierna el sistema dinámico :

$$[M_s]\{\ddot{x}_s\} + [C_s]\{\dot{x}_s\} + [K_s]\{x_s\} = \{F(t)\} - \Gamma F_c$$

Condiciones iniciales:

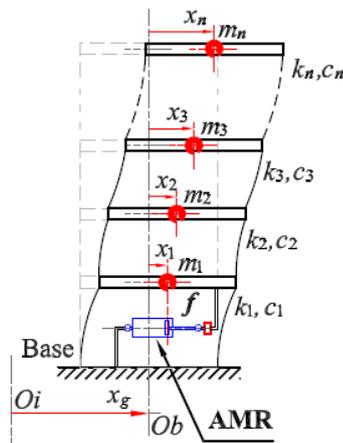
$x_1 =$	0.00m
$x_2 =$	0.00m
$x_3 =$	0.00m
$\dot{x}_1 =$	0.00m/s
$\dot{x}_2 =$	0.00m/s
$\dot{x}_3 =$	0.00m/s

Variables de estado:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \{x_s\} \quad \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \{\dot{x}_s\} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

Ecuaciones en el espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & -\frac{c_{11}}{m_1} & -\frac{c_{12}}{m_1} & -\frac{c_{13}}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & \frac{k_3}{m_2} & -\frac{c_{21}}{m_2} & -\frac{c_{22}}{m_2} & -\frac{c_{23}}{m_2} \\ 0 & \frac{k_3}{m_3} & -\frac{k_3}{m_3} & -\frac{c_{31}}{m_3} & -\frac{c_{32}}{m_3} & -\frac{c_{33}}{m_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_c + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ \frac{1}{m_2} \\ \frac{1}{m_3} \end{bmatrix} F_e$$



Compactando la ecuación en el espacio de estados:

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + \{B_c\}F_c + \{B_e\}F_e$$

Consideremos: $F_c = -[K]\{x\}$ control óptimo cuadrático:

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + \{B_c\} \cdot -[K]\{x\} + \{B_e\}F_e$$

$$\{\dot{x}\} = \{[A] - \{B_c\}[K]\}\{x\} + \{B_e\}F_e$$

Matriz A:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2309.156 & 1137.165 & 0 & -6.454 & 2.696 & 0 \\ 1145.430 & -2229.909 & 1084.478 & 2.716 & -6.266 & 2.571 \\ 0 & 1166.433 & -1166.433 & 0 & 2.766 & -3.744 \end{bmatrix}$$

Matriz Bc:

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.06013 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Be:

$$B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para obtener K, se obtiene de Matlab con el comando Lqr(A,Bc,Q,R)

$$K = 10^7[-2.3061 \quad 0.5268 \quad 0.2204 \quad -0.0115 \quad -0.0427 \quad -0.0121]$$

Matriz $\{[A] - \{B_c\}[K]\}$

0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000
-1388967.086	317902.005	132526.520	-6921.404	-25672.814	-7275.730
1145.430	-2229.909	1084.478	2.716	-6.266	2.571
0.000	1166.433	-1166.433	0.000	2.766	-3.744

Calculando con Matlab los valores y vectores propios utilizando el comando $[V, D]=\text{eig}(A)$, se muestra los resultados en la tabla N°11:

Tabla N° 11 Comportamiento del punto crítico ($c>0$) movimiento forzado + control. Elaboración propia.

Punto crítico N°:		1
(,)		(0.00,0.00)
Valor propio λ	1	-6704.5
	2	-193.8
	3	-9.9+51.5i
	4	-9.9-51.5i
	5	-6.7+17.5i
	6	-6.7-17.5i
Descripción de la raíz		Complejo con parte real negativo y negativo
Comportamiento		Punto espiral y nodos estable
Estabilidad		Estable

Gráficamente se puede observar la estabilidad del sistema con la ayuda del plano de fases, para esto hacemos una transformación lineal $x = [T]y$, que convertirá al sistema en la siguiente ecuación:

$$\dot{y} = T^{-1}ATy$$

$$\dot{y} = By$$

Donde T es el vector que contiene los vectores propios de la matriz A y B representa la forma canónica de la matriz A, necesariamente tenemos que hacer este proceso de lo contrario el plano de fases sería una distorsión sin ninguna interpretación matemática.

[T]=	-0.0001	0.0052	-0.0109	-0.0004	-0.0203	-0.0052
	0.0000	0.0001	-0.0024	-0.0126	-0.0169	-0.0250
	0.0000	0.0000	0.0050	0.0074	-0.0138	-0.0361
	1.0000	-1.0000	0.1267	-0.5583	0.2261	-0.3201
	-0.0004	-0.0161	0.6727	0.0000	0.5498	-0.1294
	0.0000	-0.0003	-0.4309	0.1831	0.7243	0.0000

[T]^-1=	209.6714	-47.7449	-20.1553	1.0225	3.8920	1.1049
	211.2178	-10.4208	-39.8658	0.0230	4.5904	1.4255
	3.2518	-10.1362	3.1091	0.0007	0.9585	-0.8139
	-0.8061	-56.5470	41.3935	-0.0003	-0.5899	-0.1054
	2.2258	8.2603	-8.6309	0.0005	0.7213	0.9237
	-0.5657	-16.1529	-15.4858	-0.0002	-0.2639	-0.4874

[B]=	-6704.500	0.000	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.000	-193.800	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	-9.900	51.500	0.00	0.00
	0.00	0.00	-51.500	-9.900	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	-6.7	17.5
	0.00	0.00	0.00	0.00	-17.5	-6.7

Se desacopla la matriz B en tres subsistemas y se gráfica respectivamente:

Sub-sistema 1:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6704.50 & 0.00 \\ 0.00 & -193.80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Graficando el plano de fases:

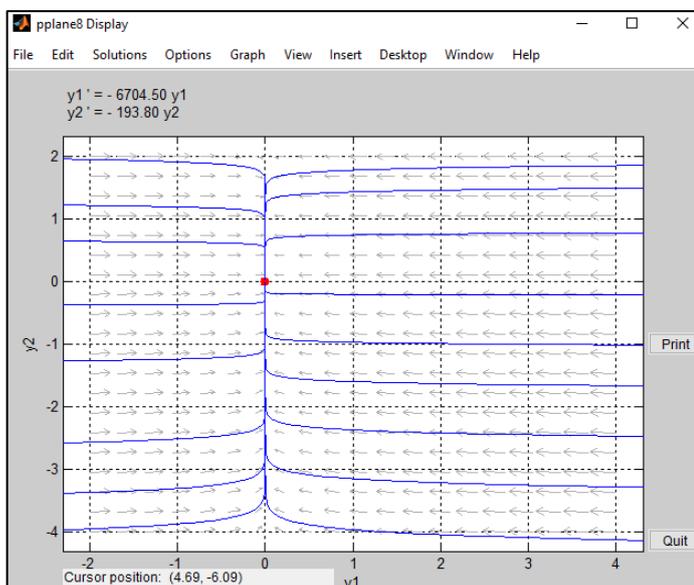


Figura N° 75 Plano de fases del Subsistema 1, con sus respectivas componentes y_1 , y_2 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo nodo estable.

Fuente: pplane8.m (MATLAB).

Sub-sistema 2:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.9 & 51.5 \\ -51.5 & -9.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

Graficando el plano de fases:

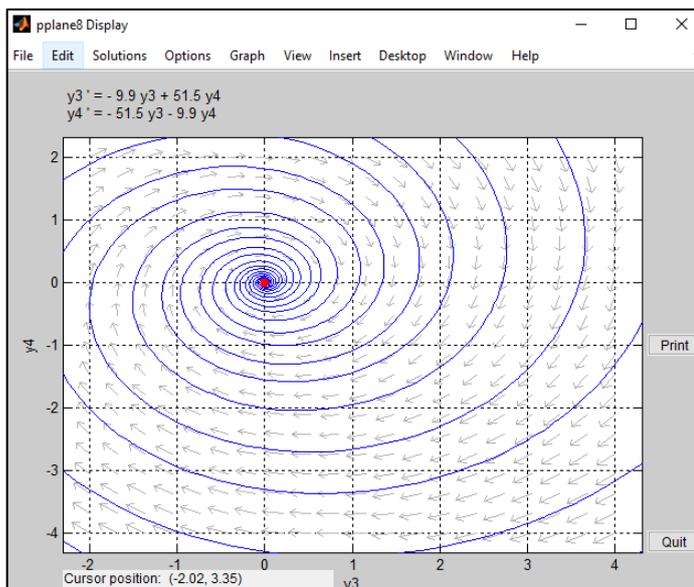


Figura N° 76 Plano de fases del Subsistema 1, con sus respectivas componentes y_3 , y_4 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.

Fuente: pplane8.m (MATLAB).

Sub-sistema 3:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_5 \\ \dot{y}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.7 & 17.50 \\ -17.50 & -6.70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_5 \\ y_6 \end{bmatrix}$$

Graficando el plano de fases:

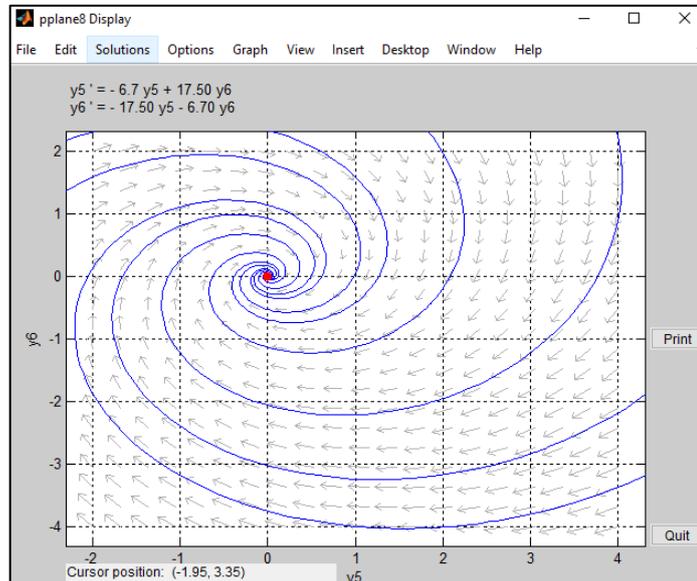


Figura N° 77 Plano de fases del Subsistema 1, con sus respectivas componentes y_5 , y_6 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.

Fuente: pplane8.m (MATLAB).

Ahora calcularemos la respuesta del sistema controlado, para esto utilizaremos un diagrama de bloques que represente las ecuaciones de movimiento descritas:

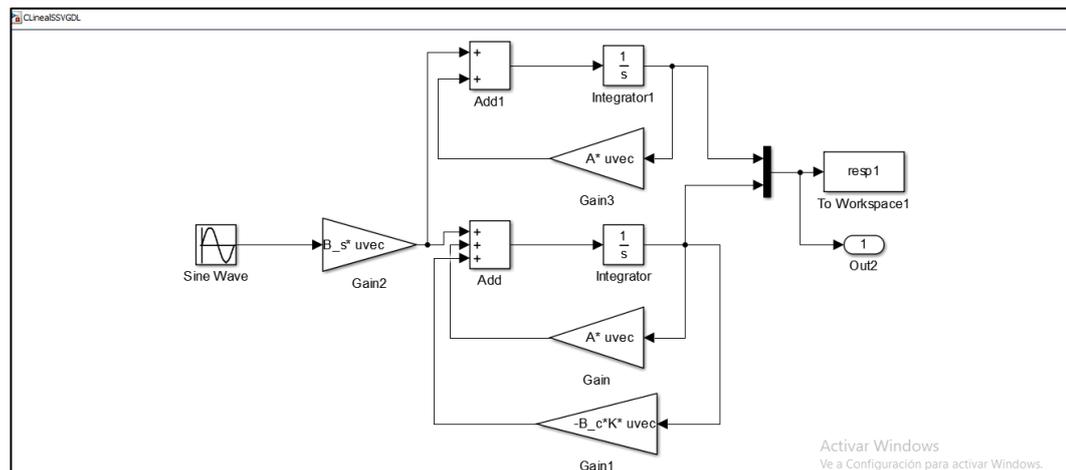


Figura N° 78 Diagrama de bloques del sistema controlado.

En el diagrama de bloques de la figura N°77 se muestra dos sistemas en lazo cerrado, el sistema superior corresponde al sistema ($\dot{x} = Ax$) y el sistema inferior corresponde al sistema con ley de control ($\dot{x} = Ax + Bu$), siendo $u = -Kx$, se desarrolla el sistema de ecuaciones diferenciales en SIMULINK.

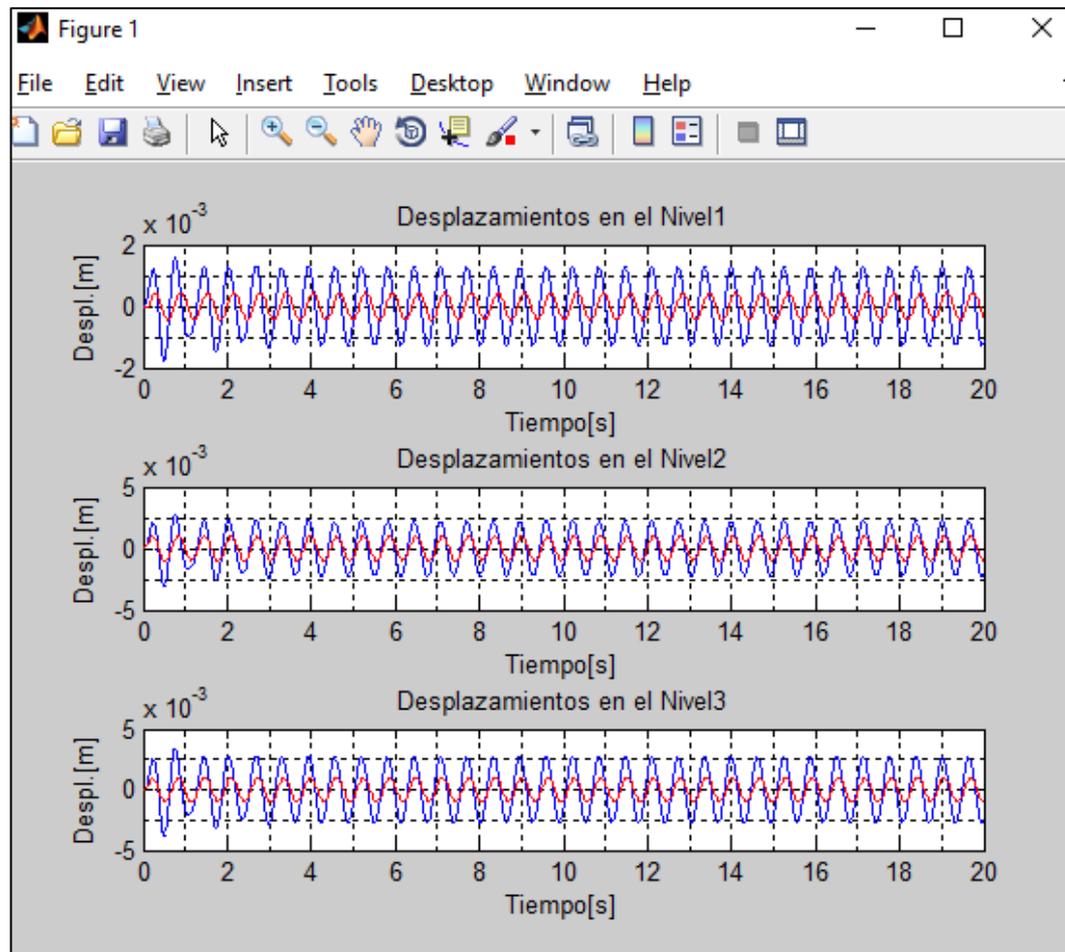


Figura N° 79 Se muestra las gráficas de reducción de desplazamientos para todos los niveles.

Se muestra en todos los planos de fases de la figura N°75, 76 y 77 que los puntos críticos son nodos y espirales estables cuando $t \rightarrow +\infty$, por lo tanto se cumple la hipótesis del método LQR que la matriz $A-BK$, es estable, encontrándose así una solución óptima y estable.

Se observa que existe una gran disminución del desplazamiento en el primer nivel esto se debe a que solo se le adiciona esta ley de control con el vector de influencias $B_c = [0; 0; 0; 1; 0; 0]$, si se le adiciona a más niveles es solo modificar esta matriz B_c .

También se muestra en la gráfica N°79 la comparativa de desplazamientos para el primer nivel, de color rojo sistema con control, de color azul sistema sin control, se observa una reducción de desplazamiento de más del 50% en el primer nivel, con más detalle se puede revisar la tabla N°12 que contiene datos de desplazamiento y velocidad para el primer y segundo nivel de nuestro modelo propuesto en esta investigación.

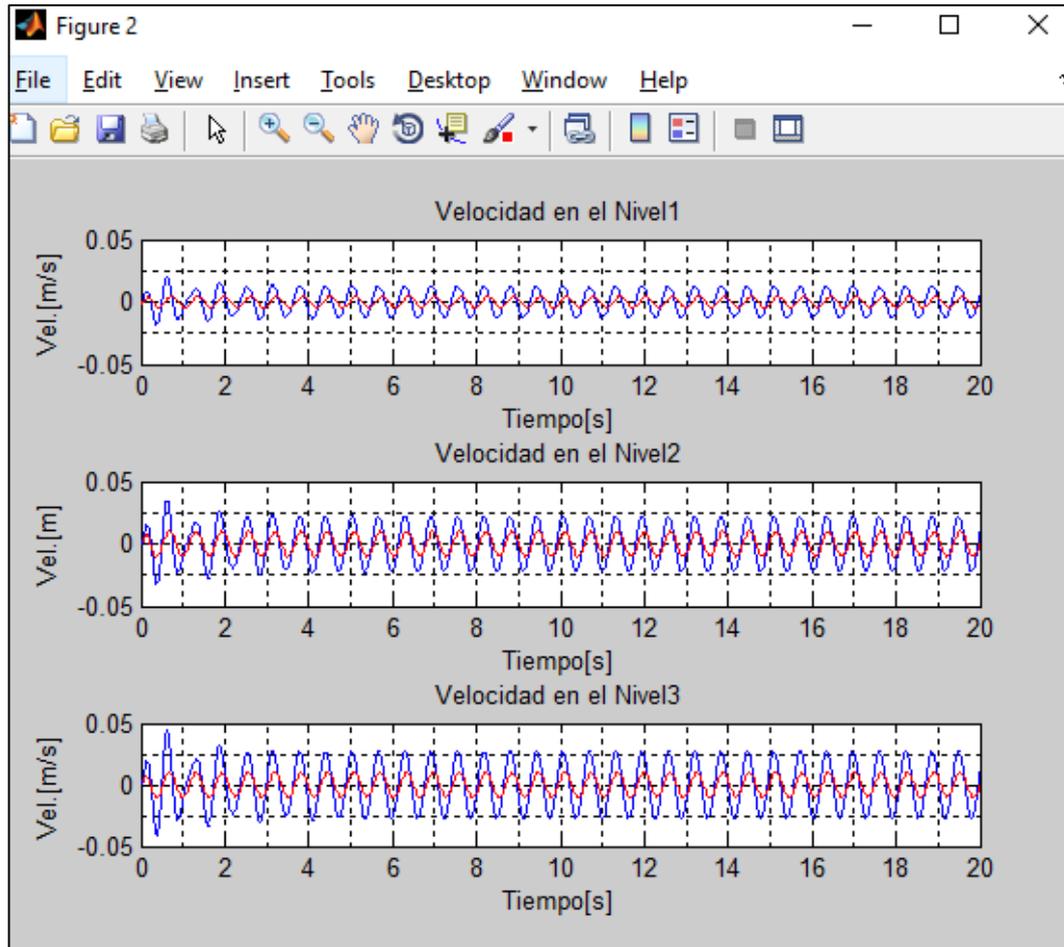


Figura N° 80 Se muestra las gráficas de reducción de velocidades para todos los niveles.

En la gráfica N°80 la comparativa de velocidades relativas para el primer nivel, de color rojo sistema con control, de color azul sistema sin control, se observa una reducción de velocidad de más del 50% en el primer nivel.

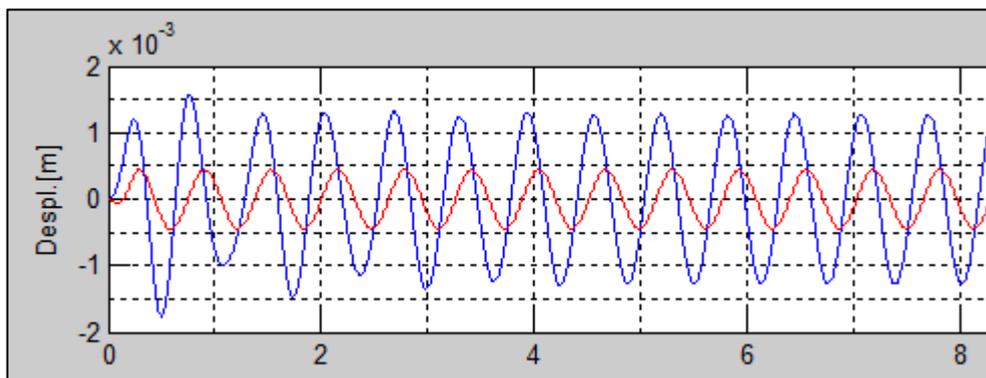


Figura N° 81 Desplazamiento vs tiempo para el primer nivel para un tiempo 8 s.

Ahora se presenta en la tabla N°12 una comparación de los resultados para desplazamientos, velocidades del primer y segundo nivel, se observa reducciones

de desplazamiento y velocidad de más del 50 %, para ser exactos en el primer nivel reducción de 71.97% en desplazamiento, y de 78.10% en velocidad.

Tabla N° 12 Valores de respuesta obtenido por el control LQR para un sistema dinámico sometido a cargas externas sinusoidales. Elaboración propia.

Valor de respuesta		Primer Nivel	Segundo Nivel
Desplazamiento	Pico máximo (m)	0.00157	0.003106
	Pico máximo LQR(m)	0.00044	0.001008
	Reducción pico %	71.97%	67.54%
Velocidad	Pico máximo (m/s)	0.02	0.0355
	Pico máximo LQR(m/s)	0.00438	0.01
	Reducción pico %	78.10%	71.83%

Graficando en barras estos resultados de la tabla 12 se muestra la figura N°82:

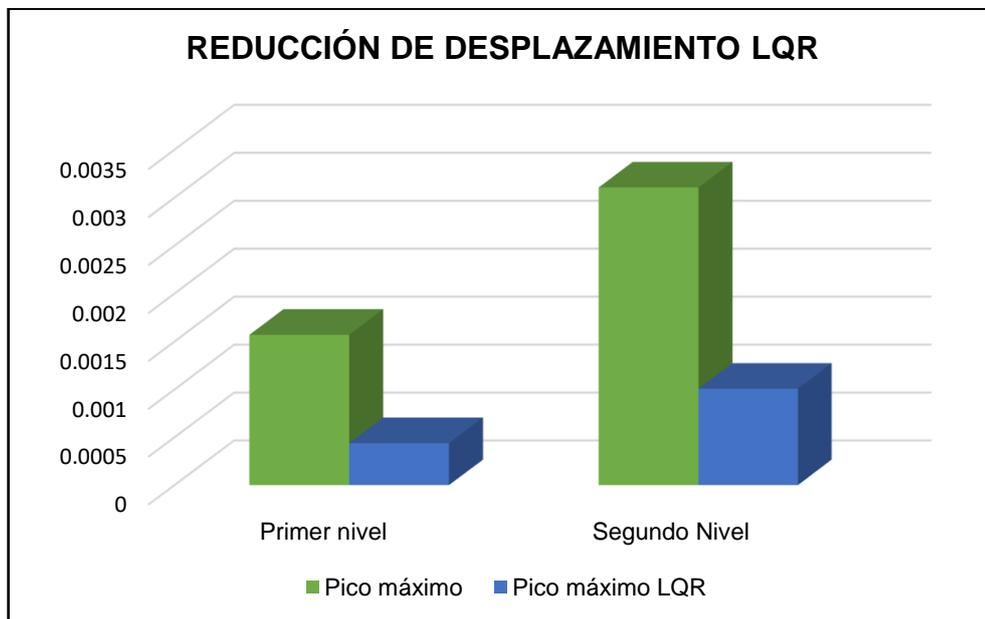


Figura N° 82 Gráfico en barras de los desplazamientos por nivel. Elaboración propia.

Se muestra la figura N°82 la gran reducción de los desplazamientos, barra en verde corresponde a los picos máximos de desplazamiento del sistema sin ley de control, la barra azul corresponde al sistema con ley de control óptimo (LQR).

4.6.6 Respuesta sísmica elástica de un edificio de planta simétrica de 3gdl.

Para esta aplicación se toma como fuerza externa un sismo real LIMA 1974 (Figura N°83 y 84) y se determinara la estabilidad del sistema:

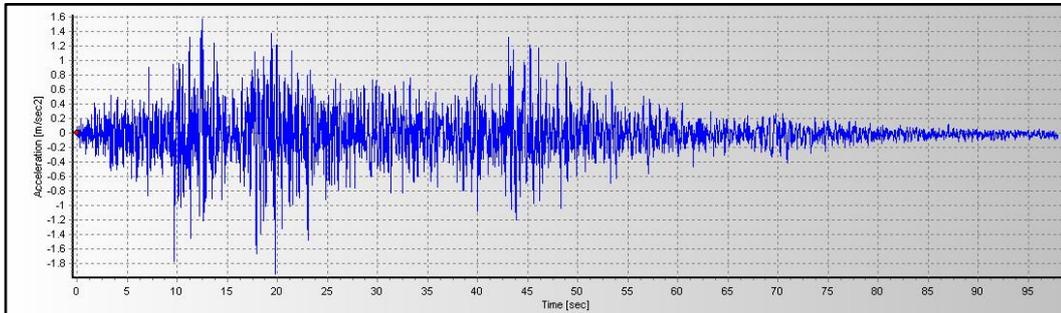


Figura N° 83 Sismo de octubre Lima 1974 componente EW (Parque de la Reserva).
Fuente: Seismosignal.

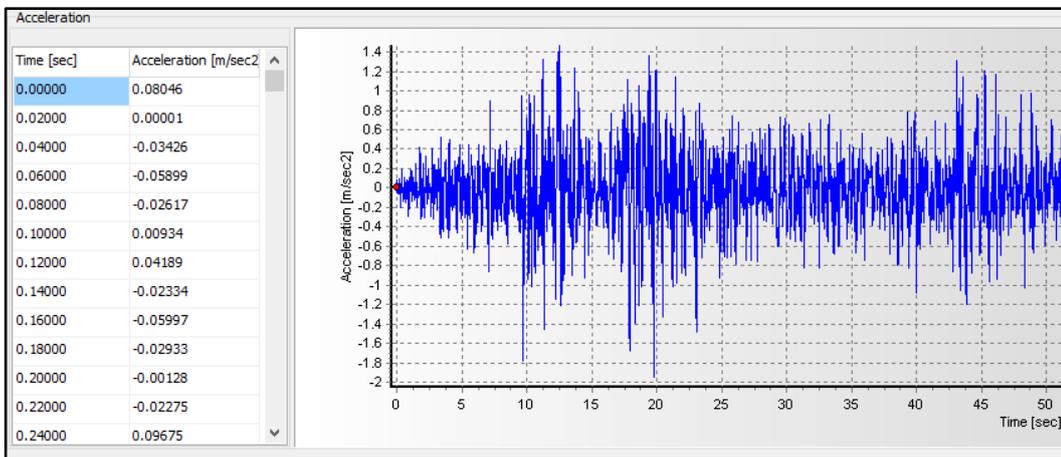


Figura N° 84 Se muestra que la para un t=0, tenemos una aceleración de 0.08046m/s².
Fuente: Seismosignal.

Propiedades del Modelo dinámico:

m3:	15.35	t.s²/m
k3:	17904.74	t/m
m2:	16.51	t.s²/m
k2:	18911.053	t/m
m1:	16.63	t.s²/m
k1:	19490.207	t/m

Matriz de amortiguamiento de RAYLEIGH:

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K]$$

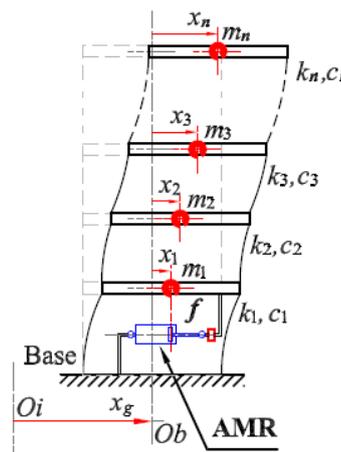
$$[C] = \begin{bmatrix} 107.3269 & -44.840 & 0 \\ -44.840 & 103.4502 & -42.4539 \\ 0 & -42.454 & 57.4749 \end{bmatrix}$$

Fuerzas externas

$\ddot{x}_g =$	Sismo Lima 1974
----------------	-----------------

Ecuación Diferencial que gobierna el sistema dinámico :

$$[M_s]\ddot{x}_s + [C_s]\dot{x}_s + [k_s]x_s = -[M_s][R_s]\ddot{x}_g - \Gamma F_c$$



Condiciones iniciales:

$x_1 =$	0.00m
$x_2 =$	0.00m
$x_3 =$	0.00m
$\dot{x}_1 =$	0.00m/s
$\dot{x}_2 =$	0.00m/s
$\dot{x}_3 =$	0.00m/s

Cambio de variables:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \{x_s\} \quad \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \{\dot{x}_s\} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

Sistema de ecuaciones no autónomos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & -\frac{c_{11}}{m_1} & -\frac{c_{12}}{m_1} & -\frac{c_{13}}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & \frac{k_3}{m_2} & -\frac{c_{21}}{m_2} & -\frac{c_{22}}{m_2} & -\frac{c_{23}}{m_2} \\ 0 & \frac{k_3}{m_3} & -\frac{k_3}{m_3} & -\frac{c_{31}}{m_3} & -\frac{c_{32}}{m_3} & -\frac{c_{33}}{m_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_c - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{x}_g(t)$$

Compactando la ecuación en el espacio de estados:

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + \{B_c\}F_c + \{B_e\}F_e$$

Consideremos: $F_c = u(t) = -[K]\{x\}$ control óptimo cuadrático:

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} - \{B_c\} \cdot [K]\{x\} + \{B_e\}F_e$$

$$\{\dot{x}\} = \{[A] - \{B_c\}[K]\}\{x\} + \{B_e\}F_e$$

Matriz A:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2309.156 & 1137.165 & 0 & -6.454 & 2.696 & 0 \\ 1145.430 & -2229.909 & 1084.478 & 2.716 & -6.266 & 2.571 \\ 0 & 1166.433 & -1166.433 & 0 & 2.766 & -3.744 \end{bmatrix}$$

Matriz Bc:

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.06013 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Be:

$$B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para obtener K, se obtiene de Matlab comando Lqr()

$$K = 10^7[-2.3061 \quad 0.5268 \quad 0.2204 \quad -0.0115 \quad -0.0427 \quad -0.0121]$$

Matriz $[A - \{B_c\}K]$

0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000
-1388967.086	318623.565	132526.520	-6921.404	-25672.814	-7275.730
1145.430	-2229.909	1084.478	2.716	-6.266	2.571
0.000	1166.433	-1166.433	0.000	2.766	-3.744

Calculando con Matlab los valores y vectores propios utilizando el comando $[V, D]=\text{eig}(A)$, se muestra los resultados en la tabla N°13:

Tabla N° 13 Comportamiento del punto crítico ($c>0$) respuesta sísmica + control. Elaboración propia.

Punto crítico N°:		1
(,)		(0.00,0.00)
Valor propio λ	1	-6704.5
	2	-193.8
	3	-9.9+51.5i
	4	-9.9-51.5i
	5	-6.7+17.5i
	6	-6.7-17.5i
Descripción de la raíz		Complejo con parte real negativo y negativo
Comportamiento		Punto espiral y nodos estable
Estabilidad		Estable

Siguiendo el procedimiento de la aplicación anterior:

$[T]=$

-0.0001	0.0052	-0.0109	-0.0004	-0.0203	-0.0052
0.0000	0.0001	-0.0024	-0.0126	-0.0169	-0.0250
0.0000	0.0000	0.0050	0.0074	-0.0138	-0.0361
1.0000	-1.0000	0.1267	-0.5583	0.2261	-0.3201
-0.0004	-0.0161	0.6727	0.0000	0.5498	-0.1294
0.0000	-0.0003	-0.4309	0.1831	0.7243	0.0000

$[T]^{-1}=$

209.6714	-47.7449	-20.1553	1.0225	3.8920	1.1049
211.2178	-10.4208	-39.8658	0.0230	4.5904	1.4255
3.2518	-10.1362	3.1091	0.0007	0.9585	-0.8139
-0.8061	-56.5470	41.3935	-0.0003	-0.5899	-0.1054
2.2258	8.2603	-8.6309	0.0005	0.7213	0.9237
-0.5657	-16.1529	-15.4858	-0.0002	-0.2639	-0.4874

$[B]=$

-6704.500	0.000	0.00	0.00	0.00	0.00
0.000	-193.800	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	-9.900	51.500	0.00	0.00
0.00	0.00	-51.500	-9.900	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	-6.7	17.5
0.00	0.00	0.00	0.00	-17.5	-6.7

Se desacopla la matriz B en tres subsistemas y se grafica respectivamente:

Sub-sistema 1:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6704.50 & 0.00 \\ 0.00 & -193.80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Graficando el plano de fases:

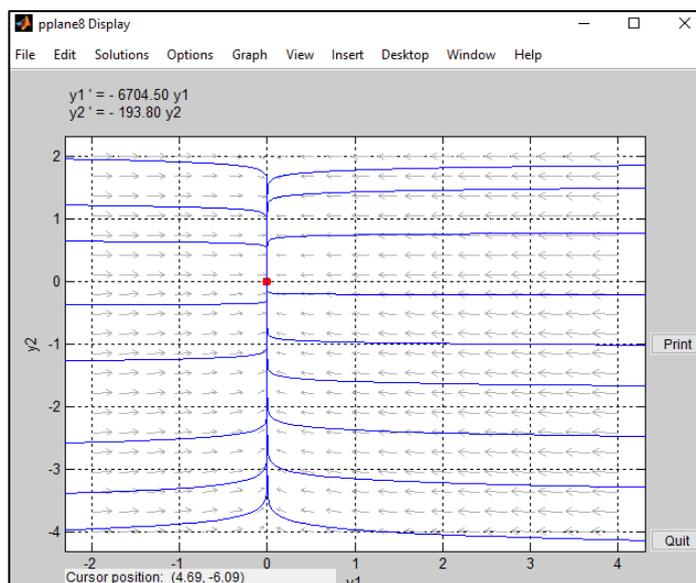


Figura N° 85 Plano de fases del Subsistema 1, con sus respectivas componentes y_1 , y_2 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo nodo estable.

Fuente: pplane8.m (MATLAB).

Sub-sistema 2:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.9 & 51.5 \\ -51.5 & -9.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

Graficando el plano de fases:

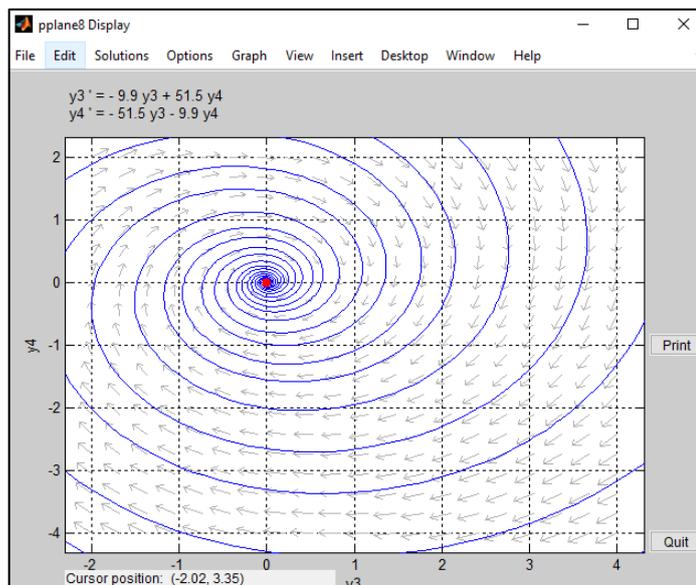


Figura N° 86 Plano de fases del Subsistema 2, con sus respectivas componentes y_3 , y_4 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.

Fuente: pplane8.m (MATLAB).

Sub-sistema 3:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_5 \\ \dot{y}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.7 & 17.50 \\ -17.50 & -6.70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_5 \\ y_6 \end{bmatrix}$$

Graficando el plano de fases:

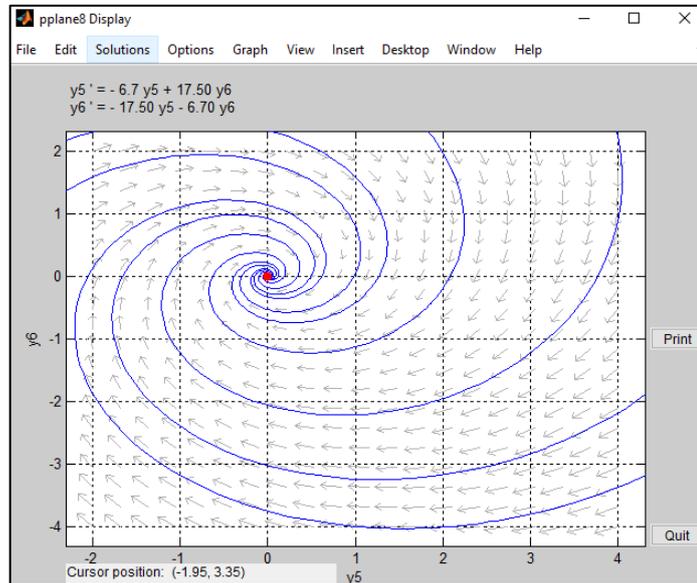


Figura N° 87 Plano de fases del Subsistema 3, con sus respectivas componentes y_5 , y_6 , se muestra según el gráfico un comportamiento tipo espiral estable.

Fuente: pplane8.m (MATLAB).

Ahora calcularemos la respuesta del sistema controlado, para esto utilizaremos un diagrama de bloques de la figura N° 88 que represente las ecuaciones de movimiento descritas:

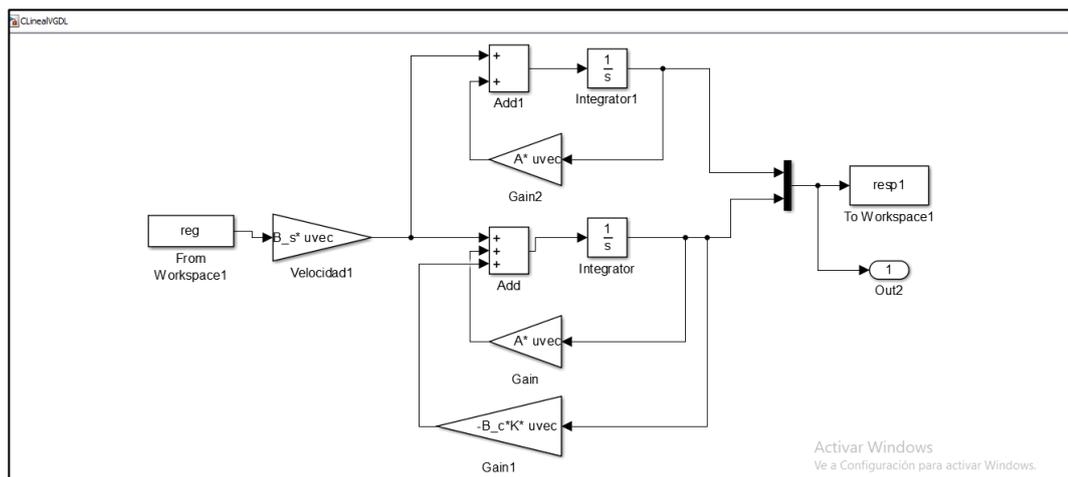


Figura N° 88 Diagrama de bloques del sistema controlado.

Este diagrama es de la misma estructura que el diagrama figura N°78, de la aplicación anterior la diferencia está en la fuerza externa que corresponde al sismo de Lima de 1974.

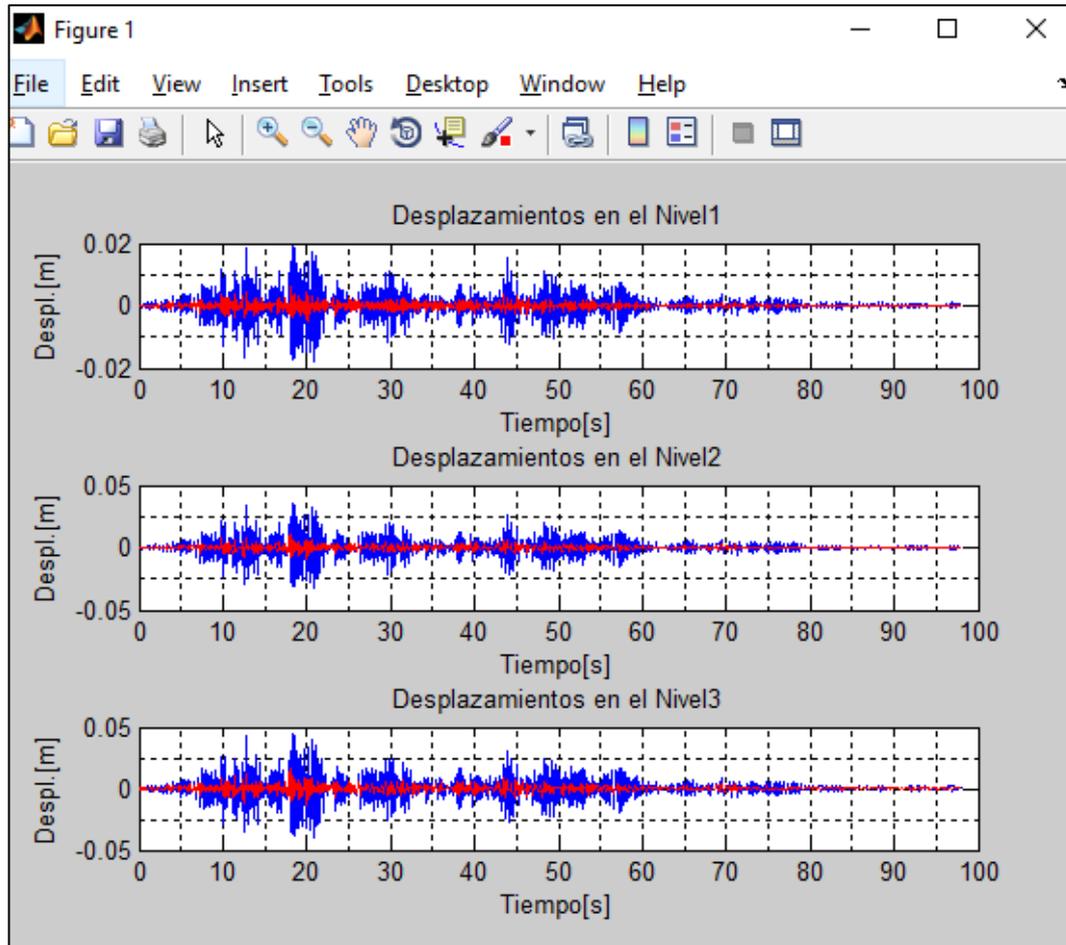


Figura N° 89 Se muestra las gráficas de reducción de desplazamientos para todos los niveles.

Se muestra en todos los planos de fases de la figura N°85,86 y 87 que los puntos críticos son nodos y espirales estables cuando $t \rightarrow +\infty$, por lo tanto se cumple la Hipótesis del método LQR que la matriz $A-BK$, es estable, encontrándose así una solución óptima y estable.

También se muestra en la gráfica N°89 la comparativa de desplazamientos para el primer nivel, de color rojo sistema con control LQR, de color azul sistema sin control, se observa una reducción de desplazamiento de más del 50% en el primer nivel.

Si hacemos un zoom de la figura N°89 en el primer nivel se obtiene la figura N°91 que corresponde a una gráfica desplazamiento vs tiempo se observa con más detalles los valores picos de reducción de desplazamiento, la tabla N°14.

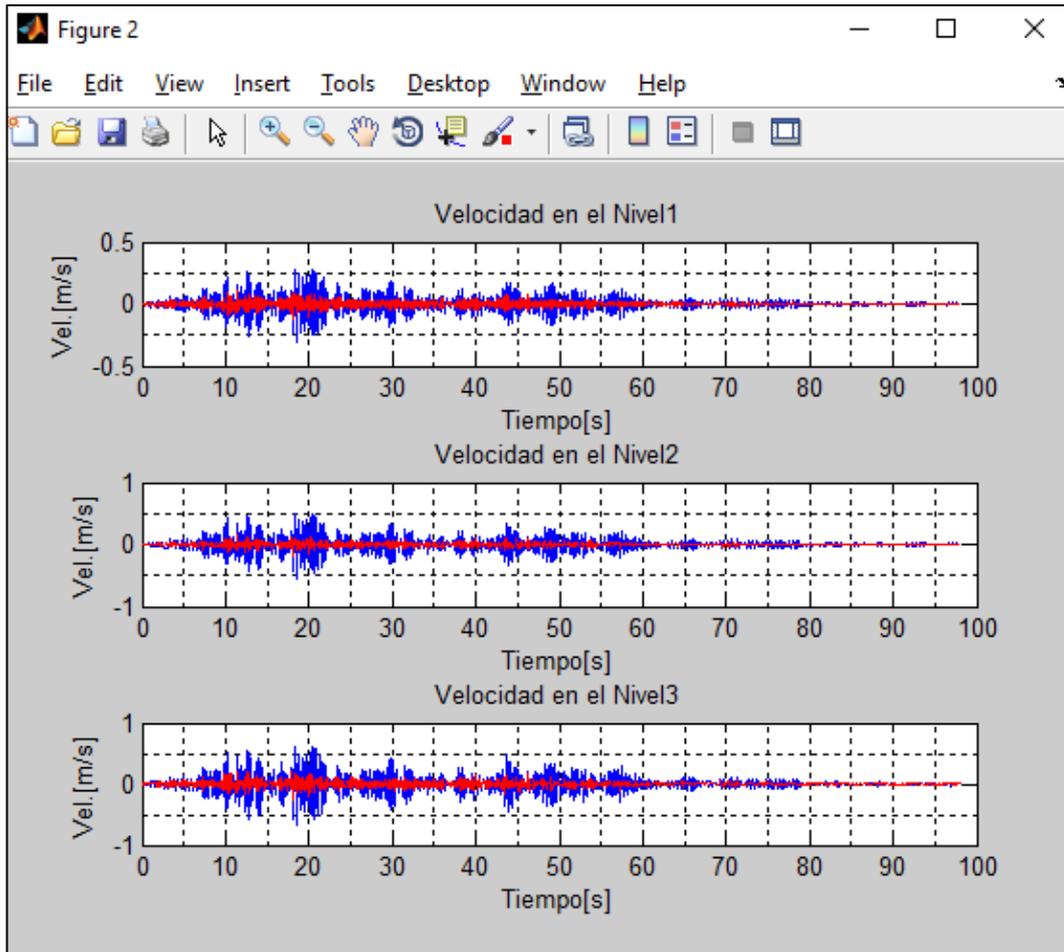


Figura N° 90 Se muestra las gráficas de reducción de velocidades para todos los niveles.

En la gráfica N°90 la comparativa de velocidades relativas para el primer nivel, de color rojo sistema con control, de color azul sistema sin control, se observa una reducción de velocidad de más del 50% en el primer nivel.

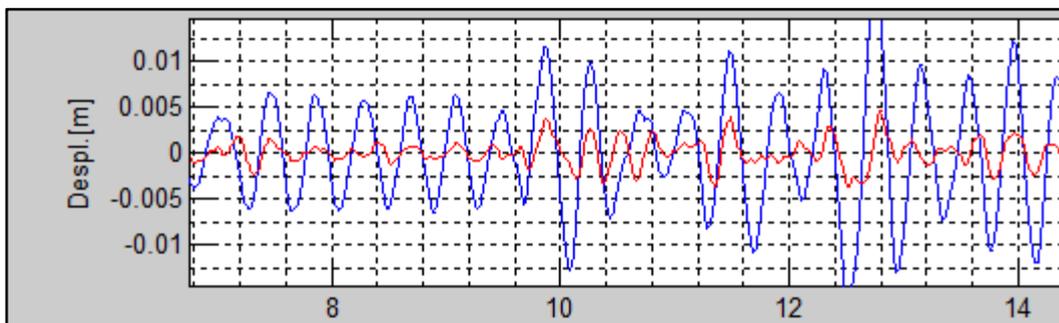


Figura N° 91 Desplazamiento vs tiempo para el primer nivel para un tiempo 14s.

Ahora se presenta en la tabla N°14 una comparación de los resultados para desplazamientos, velocidades del primer y segundo nivel, se observa reducciones

de desplazamiento y velocidad de más del 50 %, para ser exactos en el primer nivel reducción de 67.02% en desplazamiento, y de 61.07% en velocidad.

Tabla N° 14 Valores de respuesta obtenido por el control LQR. Elaboración propia.

Valor de respuesta		Primer Nivel	Segundo Nivel
Desplazamiento	Pico máximo (m)	0.019	0.0352
	Pico máximo LQR(m)	0.006265	0.0114
	Reducción pico %	67.02%	67.62%
Velocidad	Pico máximo (m/s)	0.28	0.494
	Pico máximo LQR(m/s)	0.109	0.145
	Reducción pico %	61.07%	70.64%

Con esto se comprueba la eficacia del método de control óptimo LQR al reducir los desplazamientos y tratar de llevar la solución del sistema dinámico lo más cerca posible de su punto de equilibrio 0.

Ahora se representa en barras los resultados de la tabla N°14:

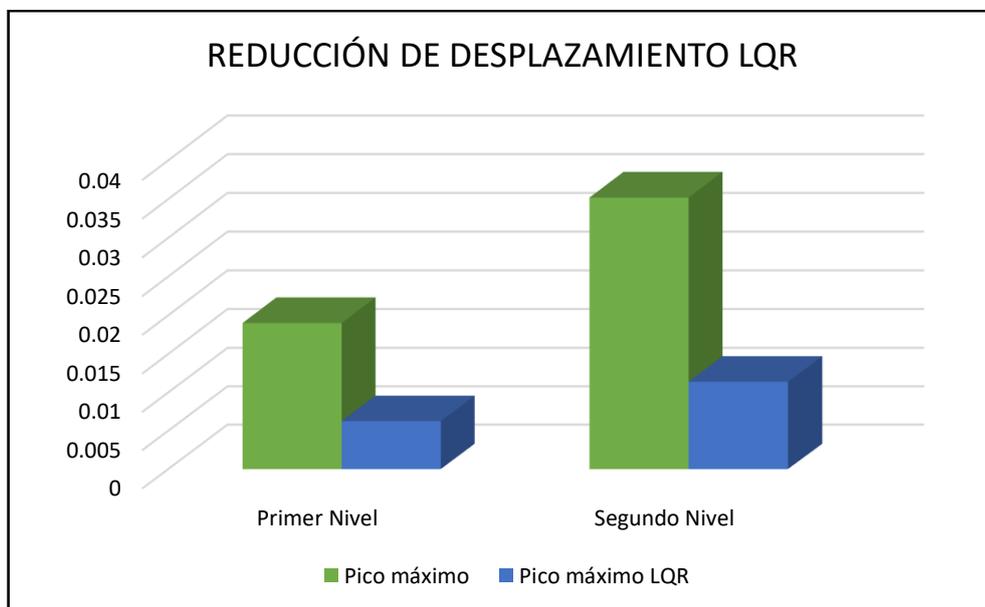


Figura N° 92 Gráfico en barras del desplazamiento por nivel. Elaboración propia.

Se muestra en la figura N°92 la reducción de desplazamientos utilizando la ley de control LQR, barras de color verde desplazamiento se reduce más del 50%.

CAPÍTULO V: COMPROBACIÓN DE LA HIPÓTESIS.

Se comprueba la hipótesis de estabilidad en las aplicaciones del capítulo IV, con la ayuda de los teoremas correspondientes a los autovalores propios y plano de fases. Los auto valores determinan la estabilidad y el plano de fases determinan los valores máximos, mínimos de la solución, las aplicaciones muestran resultados de sistemas dinámicos con valores imaginarios con parte real negativa presentan estabilidad asintótica y esto se muestra en la aplicación 4.5.1, 4.5.2, 4.5.3, 4.5.4.

En las aplicaciones 4.5.5 y 4.5.6 son sistemas no autónomos, la fuerza externa que lo excita siempre lo mantiene fuera de su punto de equilibrio, por lo dicho se utiliza la teoría de control para ser más específicos se utiliza la ley de control óptimo que tratará de llevar la solución del sistema a su punto de equilibrio 0.

La solución de todas las aplicaciones se basa en obtener los autos valores propios de la matriz $[A]$, $[A-BK]$, en vibración libre y ante perturbaciones, como se muestra en los resultados de las aplicaciones realizadas resultando raíces imaginarias con parte real negativa, y reales negativos con estos resultados se concluye que los sistemas presentan estabilidad de su solución ya sea un sistema autónomo y no autónomo.

Las aplicaciones del capítulo III muestran el cálculo numérico de la respuesta en función del tiempo como se muestra en la figura:

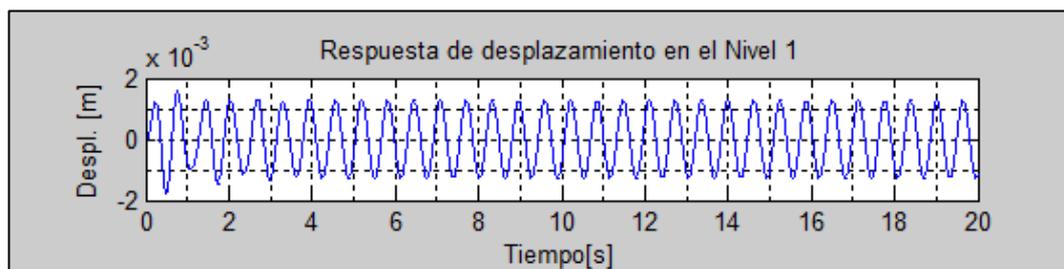


Figura N° 93 Respuesta en función del tiempo.

Se compara con la respuesta cualitativa que se obtiene del capítulo IV figura N°94, se muestra el plano de fases que se obtiene utilizando el comando ode45 de Matlab que resuelve la ecuación diferencial utilizando el método de Runge-Kutta, esta figura nos muestra el comportamiento de la solución con respecto a su punto crítico (0,0) se observa que la solución se mantiene cerca del punto de crítico, con ayuda del campo de direcciones y las figuras complementarias del lado izquierdo se muestra la repuesta desplazamiento vs tiempo y velocidad vs tiempo, con esta

herramienta como el plano de fases podemos obtener el comportamiento de su solución para sistemas autónomos.

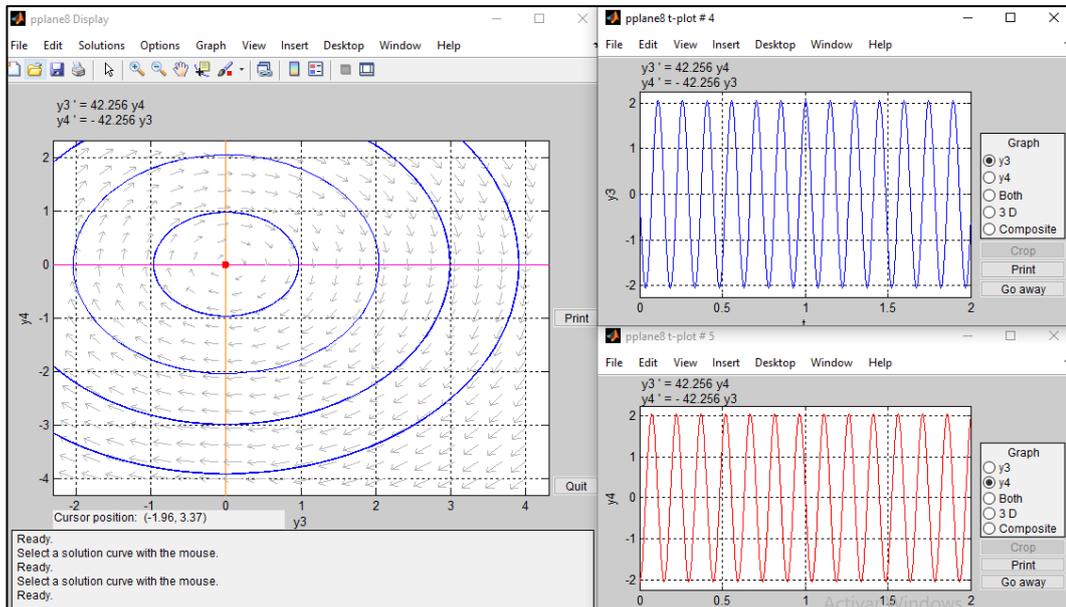


Figura N° 94 Plano de fases de un sistema dinámico.

Para sistemas no autónomos se emplea la teoría de control para poder contrarrestar los efectos de la perturbación se emplea una ley de control óptimo $u = -[k][x]$ para poder llevar lo más cerca posible la solución a su punto de equilibrio del sistema comprobándose así la estabilidad del sistema, calculando los auto valores propios de la matriz $[A-BK]$, resultando negativos e imaginarios con reales negativos, se muestra la figura para comprobar la eficacia del método:

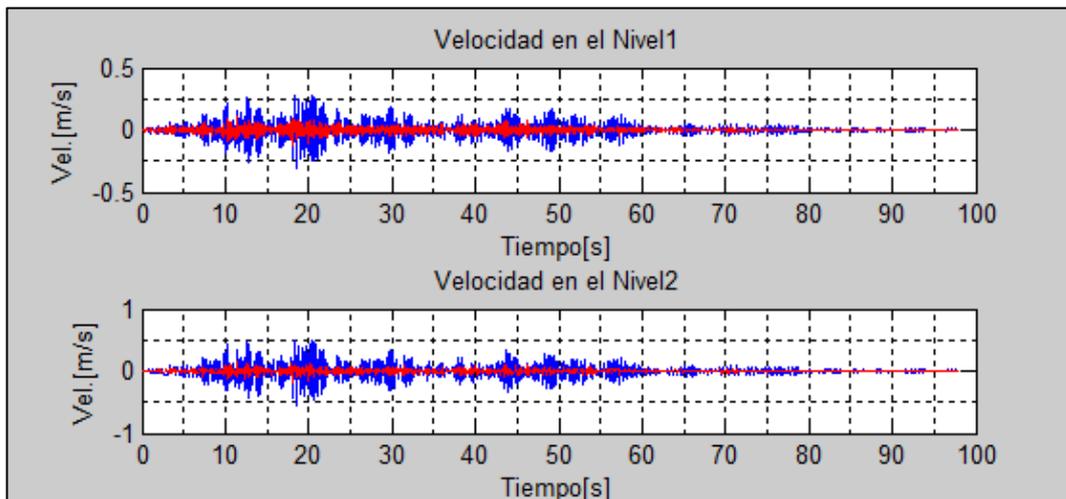


Figura N° 95 Graficas velocidad vs tiempo.

Con esto se comprueba las hipótesis planteadas para esta investigación.

CONCLUSIONES

- En el presente trabajo se ha realizado el estudio de la estabilidad, utilizando métodos cualitativos de ecuaciones diferenciales ordinarias en modelos de edificios tipo cortante con datos reales que son muy utilizados en la ingeniería civil.
- El estudio realizado comprende el punto de vista cualitativo y cuantitativo. En el cualitativo se ha considerado la definición de estabilidad según Lyapunov. Desde el punto de vista cuantitativo se ha resuelto el problema explícitamente con el método numérico de Runge Kutta de 4to orden para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias a través del software Matlab (SIMULINK).
- Se define matemáticamente a la estabilidad en el sentido de Lyapunov “Definición 2.5.2” para todo sistema dinámico libre y para un sistema dinámico afectado por cargas externas se estabiliza con una ley de control y se analiza su comportamiento en el plano de fases.
- Se detalla el análisis de un modelo matemático para un edificio tipo corte simple, se caracterizan los puntos de equilibrio (0,0) y se estudió la dinámica de su solución alrededor de su punto de equilibrio.
- Se muestra la facilidad de obtención de la respuesta estructural del modelo utilizando Simulink, a través de su diagrama de bloques se puede simular cualquier modelo estructural y con un corto tiempo de procesamiento numérico.
- Se muestra que los modelos estudiados en vibración libre son estables en el sentido de Lyapunov, esto se debe a efecto del amortiguamiento ($c > 0$) en los modelos atenuando el movimiento, su respuesta puede ser sub-amortiguado, crítico y sobre amortiguado esto dependiendo de los valores como la rigidez la masa y el amortiguamiento.
- Los modelos de edificios tipo cortante en condición de vibración libre analizados con datos reales presentan auto valores imaginarios con parte real negativa.
- Los modelos de edificios tipo cortante con una planta asimétrica en condición de vibración libre analizados con datos reales presentan auto valores imaginarios con parte real negativa.

- El modelo con un comportamiento lineal que es excitado ante una carga externa armónica y controlado con una ley de control óptimo es estable, se muestra esto en los auto valores que resultan ser negativos y complejos con parte real negativo de su matriz $[A-BK]$, se muestra la reducción de los desplazamientos en los niveles respectivos con reducciones de respuesta de más de 50%.
- El modelo con un comportamiento lineal que es excitado ante una carga sísmica LIMA 1974 y controlado con una ley de control óptimo es estable, se muestra esto en los auto valores que resultan ser negativos y complejos con parte real negativo de su matriz $[A-BK]$, se muestra la reducción de los desplazamientos en los niveles respectivos con reducciones de respuesta de más de 50%.
- Como conclusión general se logra estabilizar un modelo del sistema dinámico no autónomo para esta investigación con una ley de control óptimo, obteniendo resultados: raíces complejas con parte real negativa y negativas de la matriz $[A-BK]$. Se muestra que para ambos casos la matriz de ganancia K es semejante, esto depende del porcentaje de reducción que se tiene como resultado.

RECOMENDACIONES

- Es conveniente utilizar modelos estructurales más sofisticados que representen mejor la realidad del problema, y con ello estudiar el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial cualitativamente.
- Es conveniente estudiar de manera conjunta la no linealidad geométrica y del material sobre todo en edificios de gran altura. La no linealidad geométrica conduce a modelos matemáticos con inestabilidad en las soluciones de la ecuación diferencial (bifurcaciones), que puede hacer que la respuesta del modelo sea totalmente diferente.
- Es necesario incluir al modelo un tipo de actuador sísmico con un modelo matemático que lo represente que sea activado por realimentación de estado que se convierte en voltaje y este calcule la fuerza real del actuador.
- Es necesario hacer una comparación entre leyes de control en base al control óptimo, teorema de Lyapunov y pasividad como IDA (Interconnection and Damping Assignment) comparar estados (desplazamientos y velocidades).
- Es conveniente incluir en los modelos dinámicos un observador adaptable que proporcione el estado de salida del sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente para su realimentación.
- Es conveniente que la norma E.030 tenga presente la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales a través de la descripción de sus valores propios de la matriz A del sistema dinámico, ya que proporciona datos adicionales fuera de la respuesta numérica como la estabilidad de sus soluciones en sistemas autónomos, es importante tener en cuenta estos criterios ya que se requiere que las soluciones de los modelos matemático que representen estructuras civiles que diseñamos sean estables o asintóticamente estables.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alvares, Luis. & Jiménez, Rene. Semi-active Control Structures Using Magnetorheological Dampers, Universidad Nacional Autónoma de México. Coyoacán DF. 2003.

Baena, Rivera, Marcel, Elvira. Respuesta Sísmica De Un Modelo Controlado Con Amortiguadores Magneto-reológicos (Tesis de posgrado), Universidad Nacional Autónoma de México. México D.F. 2005.

Benazic, Renato. Tópicos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Universidad Nacional de Ingeniería. Lima 2006.

Borges, Carneiro, Rubia. Control semi-activo de vibraciones en estructuras utilizando amortiguador magnetorreológico, Universidad de Brasilia. Brasilia 2009.

Chopra, Anil, K. Dinámica de Estructuras, Pearson. México 2014.

Edwards, C.,Henry. & Penney, David, E. Ecuaciones Diferenciales. Pearson Educación. México 2001.

Fernández, Pérez, Carlos. & Vázquez, Hernández, Francisco, José. & Vegas, Montaner, José, Manuel. Ecuaciones Diferenciales y en diferencias Sistemas Dinámicos, Paraninfo. Madrid 2003.

Flores, González, Leonardo. Métodos numéricos aplicados a la ingeniería civil, Universidad Nacional de Ingeniería. Lima 2010.

Flores, González, Leonardo. Matlab Aplicado a la ingeniería civil, Instituto de Construcción y Gerencia. Lima 2010.

Gordillo, Francisco. Estabilidad De Sistemas No Lineales Basada En La Teoría De Liapunov, Escuela Superior de Ingenieros. Sevilla 2009.

Imaz, Carlos. & Vorel, Zdenek. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Limusa-Wiley. México 1968.

Lara, Valencia, Luis, Augusto. Estudio de control semi-activo aplicado a amortiguadores magnetorreológicos, Universidad de Brasilia. Brasilia. 2011.

Riveros, Carrasco, Jean, Carlos. Implementación De Estrategias Computacionales Eficientes Para Modelar Problemas No Lineales De Control De Vibraciones De Estructuras (Tesis de pregrado), Universidad de Chile. Santiago de Chile. 2017.

Muñoz, Fernández, Gustavo, A. & Seoane, Sepúlveda, Juan, B. Fundamentos y problema resuelto de teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. Paraninfo. Madrid 2017.

Masgo, Céspedes, Juan, Carlos. Sistemas Dinámicos no lineales para la simulación del control del VIH y ver su comportamiento bajo la acción de antirretrovirales (Tesis de pregrado), Universidad Nacional de Ingeniería. Lima. 2014.

Nagle, R.,Kent. & Saff, Edward, B. & Snider, Arthur, David. Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la frontera. Pearson Educación. México 2001.

Ogata, Katsuhiko. Ingeniería De Control Moderna, Pearson. Madrid 2003.

Pique del Pozo, J. & Scaletti, Farina, H. Análisis sísmico de edificios, Capitulo de Ingeniería civil. Lima 1991.

Paz, Mario. Dinámica Estructural, Reverte. Barcelona 1992.

Plaat, Otto. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Reverte. Barcelona 1974.

Sotomayor, Jorge. Lecciones De Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Hamburg. Brasil. 1979.

ANEXOS

ANEXOS A: COMO UTILIZAR SIMULINK.

Matlab ofrece una interfaz amigable para la simulación de sistemas dinámicos. El sistema es representado por un diagrama de bloques que se obtienen de la librería de Simulink (funciones para sumar, multiplicar, derivar e integrar entre otros).

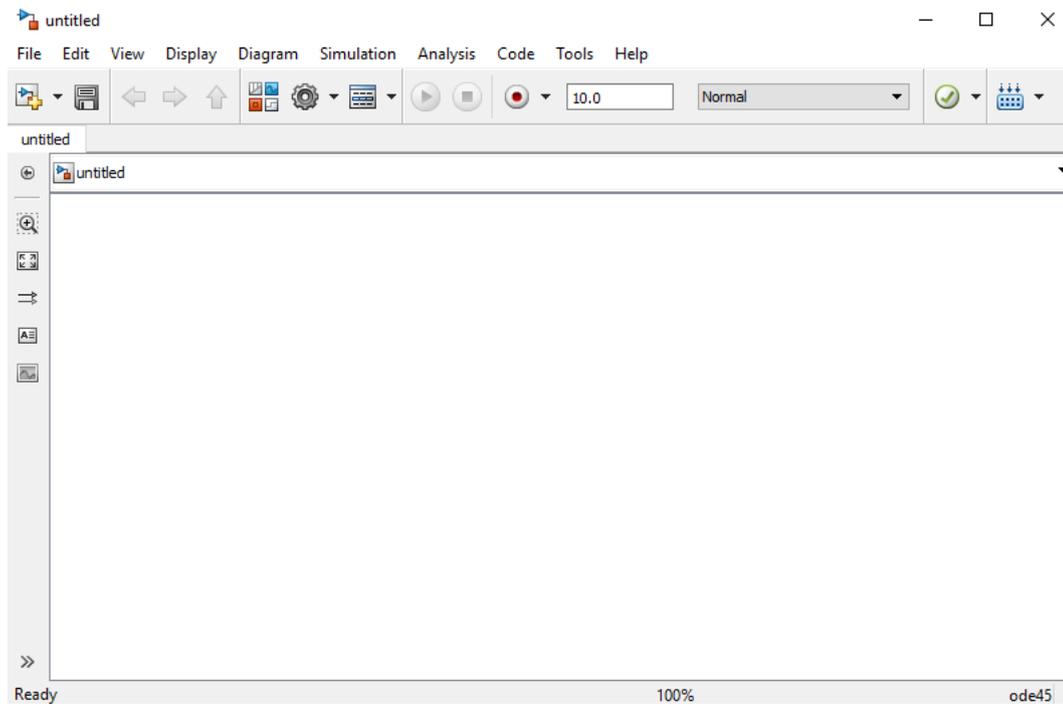


Figura A. 1 Interfaz de Simulink.

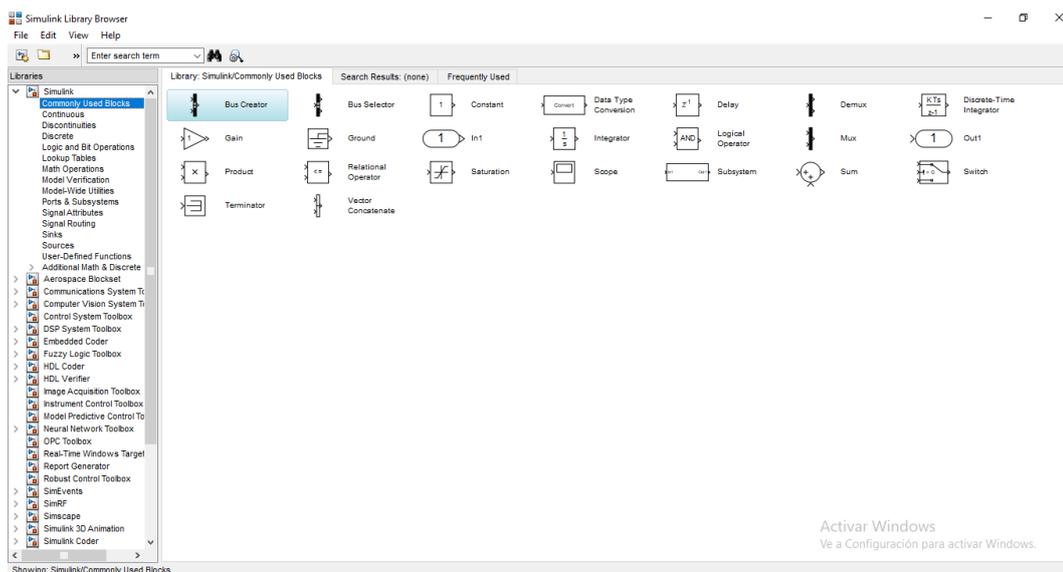


Figura A. 2 Librerías Simulink

A.1 Creación de un modelo:

- **Commonly Used Blocks: Bloques usados comúnmente:**

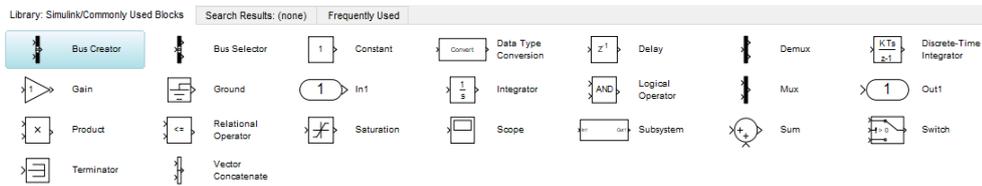


Figura A.1 1 Librería: Commonly Used Blocks.

- **Continuous: Bloques para sistemas dinámicos continuos, como integración en el tiempo:**



Figura A.1 2 Librería: Continuous.

- **Discontinuities: Bloques para el comportamiento de discontinuidades, como la saturación:**

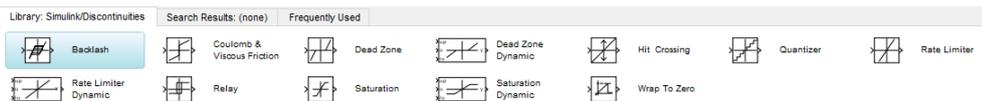


Figura A.1 3 Librería: Discontinuities.

- **Discrete: Para variables discretas:**



Figura A.1 4 Librería: Discrete.

- **Logic and Bit Operations: Operaciones lógicas y de bits:**

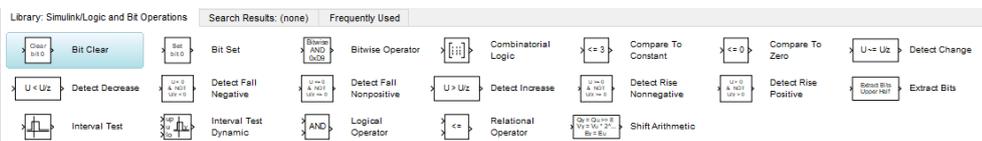


Figura A.1 5 Librería: Logic and Bit Operations.

- **Lookup Tables: Tablas de búsqueda:**



Figura A.1 6 Librería: Lookup Tables.

- **Math Operations: Todas las funciones matemáticas:**

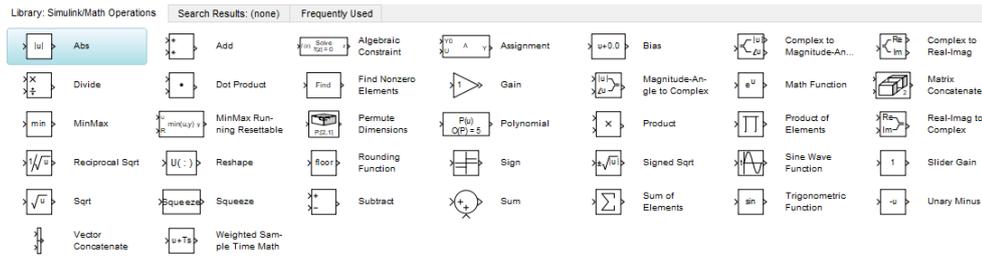


Figura A.1 7 Librería: Math Operations.

- **Model Verification: Verificación de modelo**



Figura A.1 8 Librería: Model Verification.

- **Model-Wide Utilities: Utilidades de todo el modelo:**



Figura A.1 9 Librería: Model-Wide Utilities.

- **Ports & Subsystems: Manejo de subsistemas y personalización de bloques:**

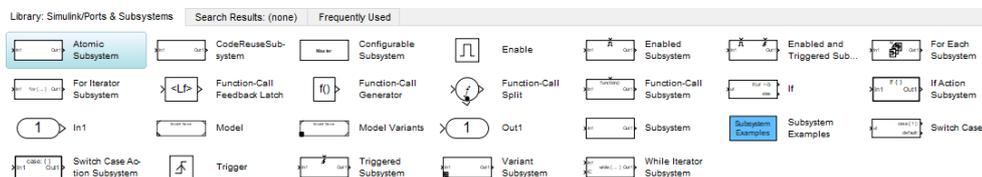


Figura A.1 10 Librería: Ports & Subsystems.

- **Signal Attributes: Atributos de señales**

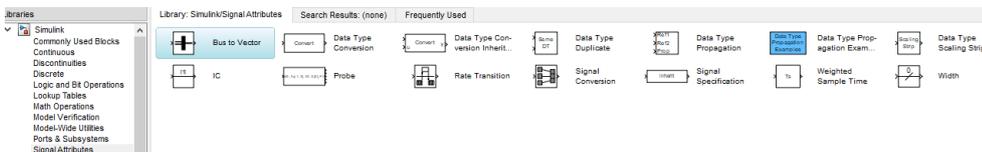


Figura A.1 11 Librería: Signal Attributes.

- **Signal Routing: Bloques para combinar señales:**



Figura A.1 12 Librería: Signal Routing.

- **Sinks: Comunicación hacia Matlab:**



Figura A.1 13 Librería: Sinks.

- Sources: Comunicación desde Matlab:

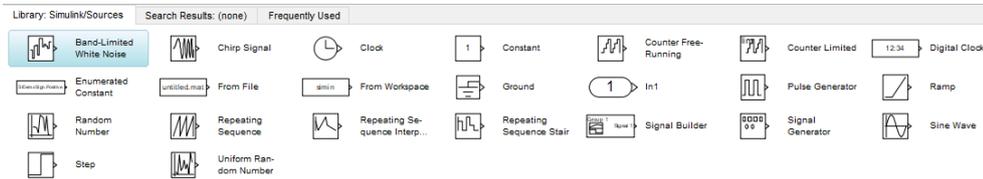


Figura A.1 14 Librería: Sources.

- User-Defined Functions: Funciones definidas por el usuario:

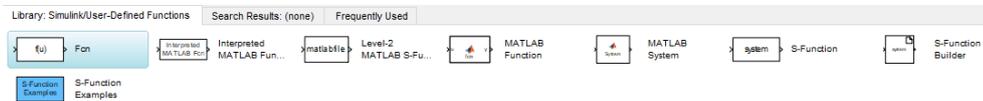


Figura A.1 15 Librería: User Defined Functions.

- Additional Math & Discrete: Matemáticas adicionales y discretas:



Figura A.1 16 Librería: Additional Math & Discrete.

Funciones usadas en esta tesis:

Gain: Esta función sirve para multiplicar la señal por el valor introducido en el gain.

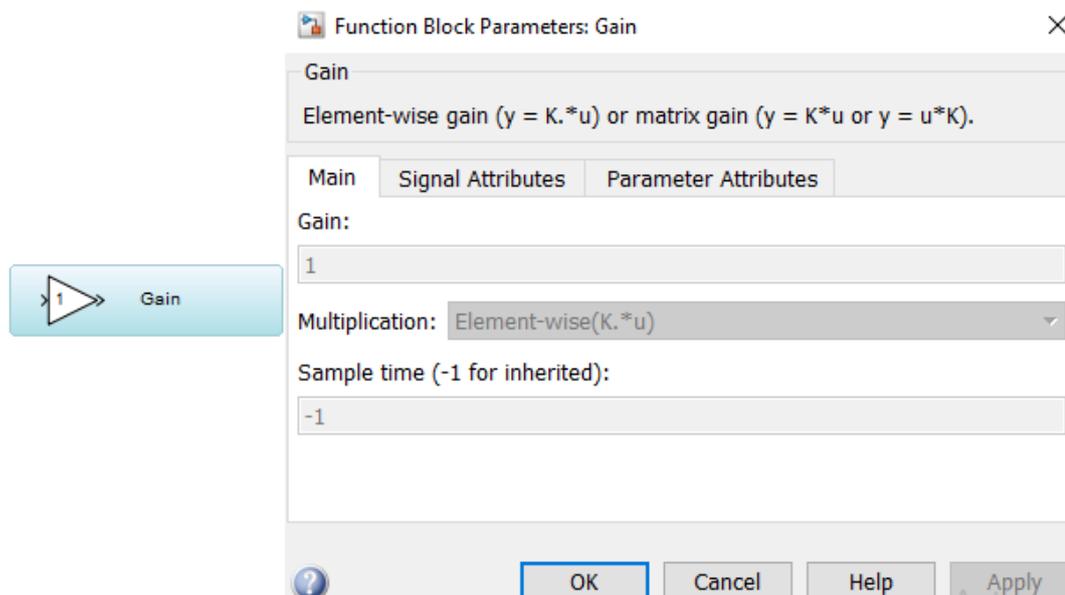


Figura A.1 17 Función Gain.

Add: Esta función sirve para adicionar o restar señales.

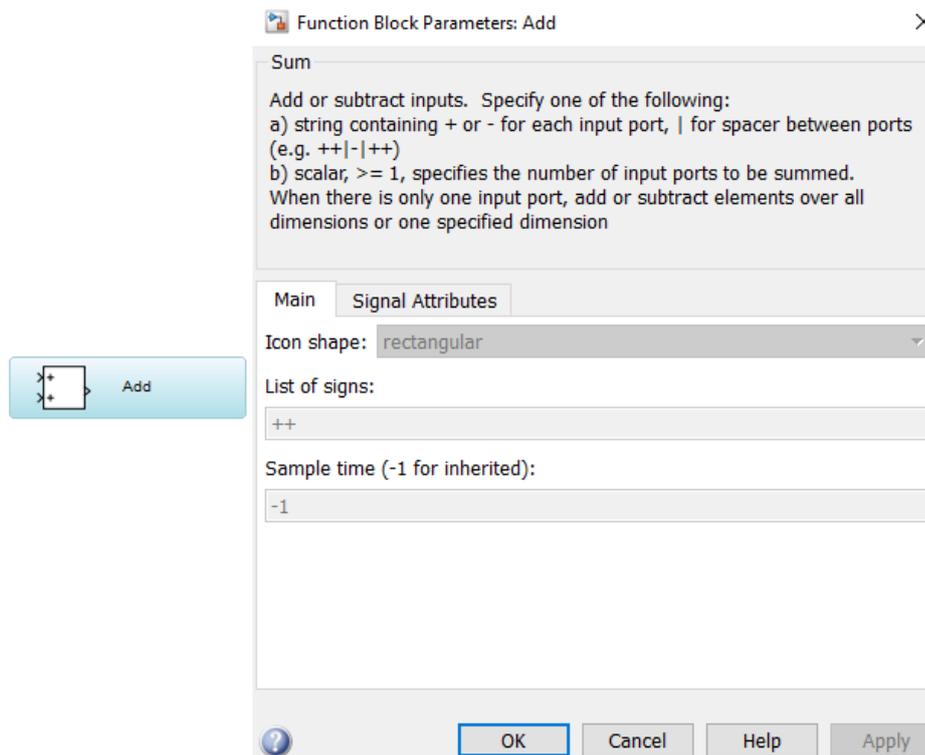


Figura A.1 18 Función Add.

Integrador: Esta función sirve para integrar la señal de entrada.

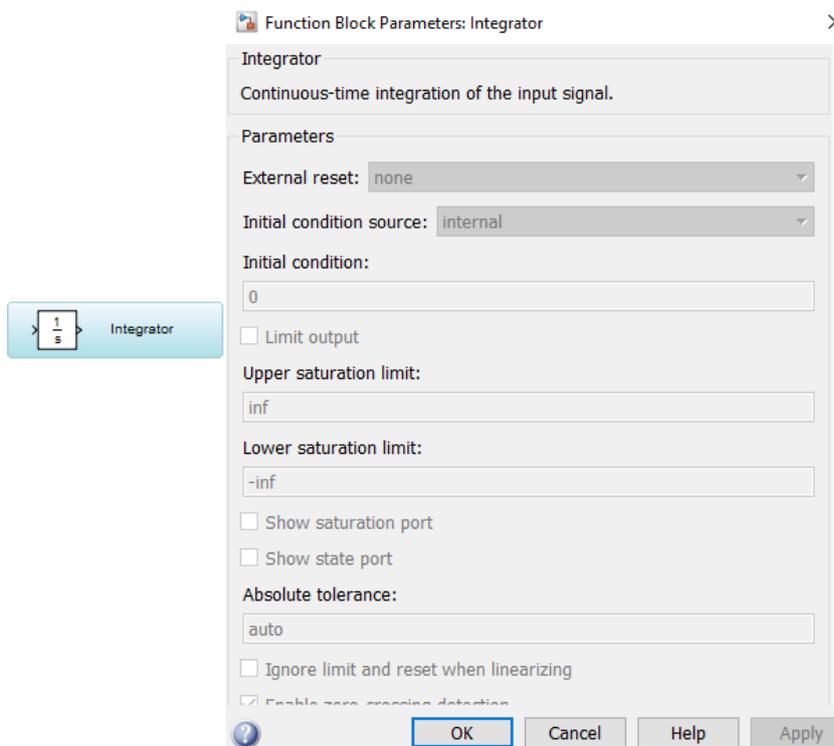


Figura A.1 19 Función Integrator.

Saturación: Esta función genera límites de saturación en la señal.

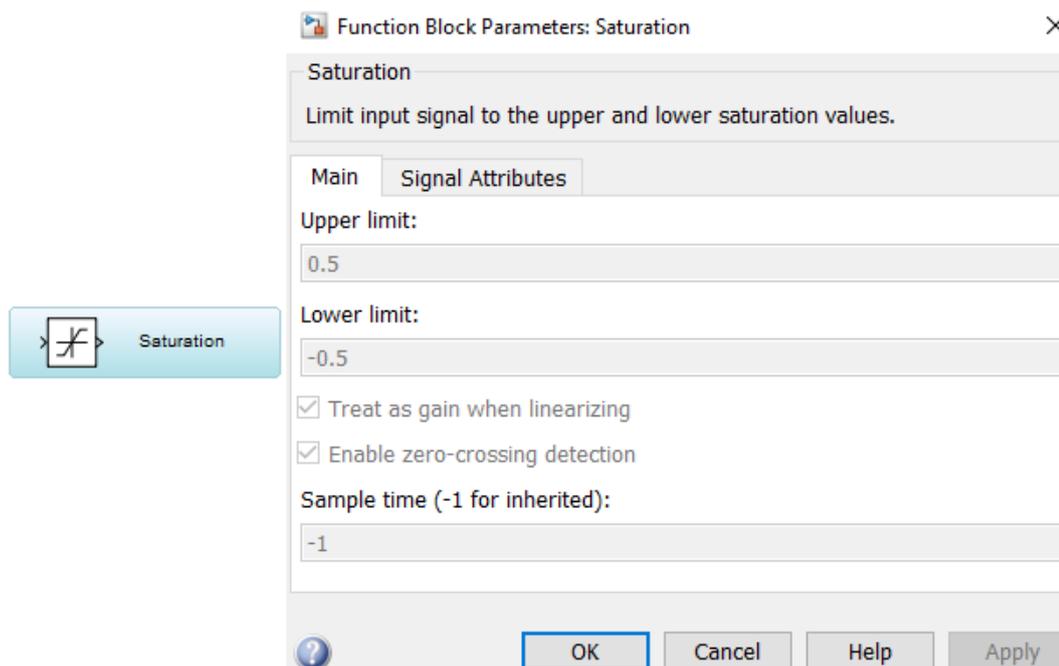


Figura A.1 20 Función Saturation.

Memory: Esta función proporciona una salida con los datos del paso anterior.

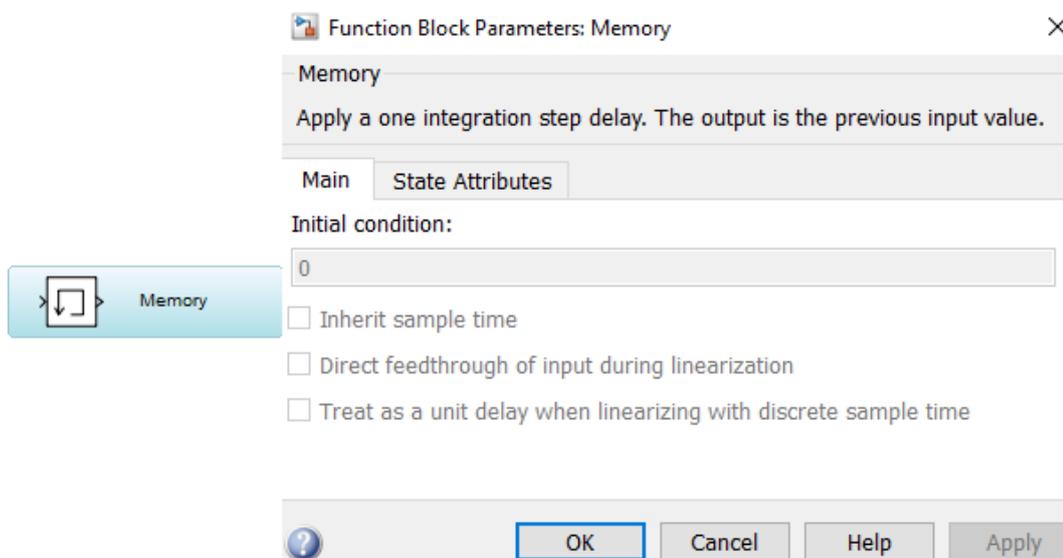


Figura A.1 21 Función Memory.

Mux: Esta función se utiliza para combinar señales.

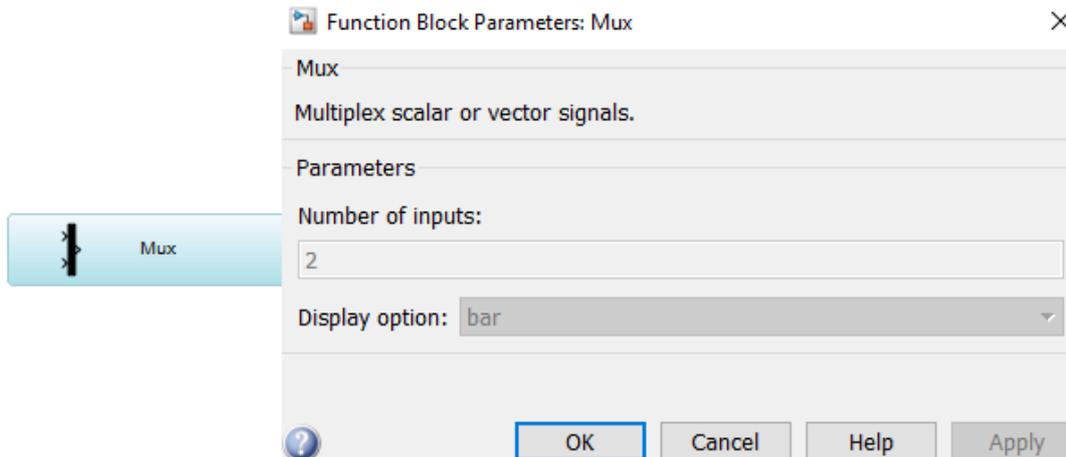


Figura A.1 22 Funcion Mux.

Simin: El nombre de la variable dentro de este bloque debe ser especificado en el Works pace de Matlab, y determina el parámetro de entrada del sistema. Si la variable es un vector, el tiempo debe ser incluido en la primera columna, con los datos de entrada en las columnas siguientes:

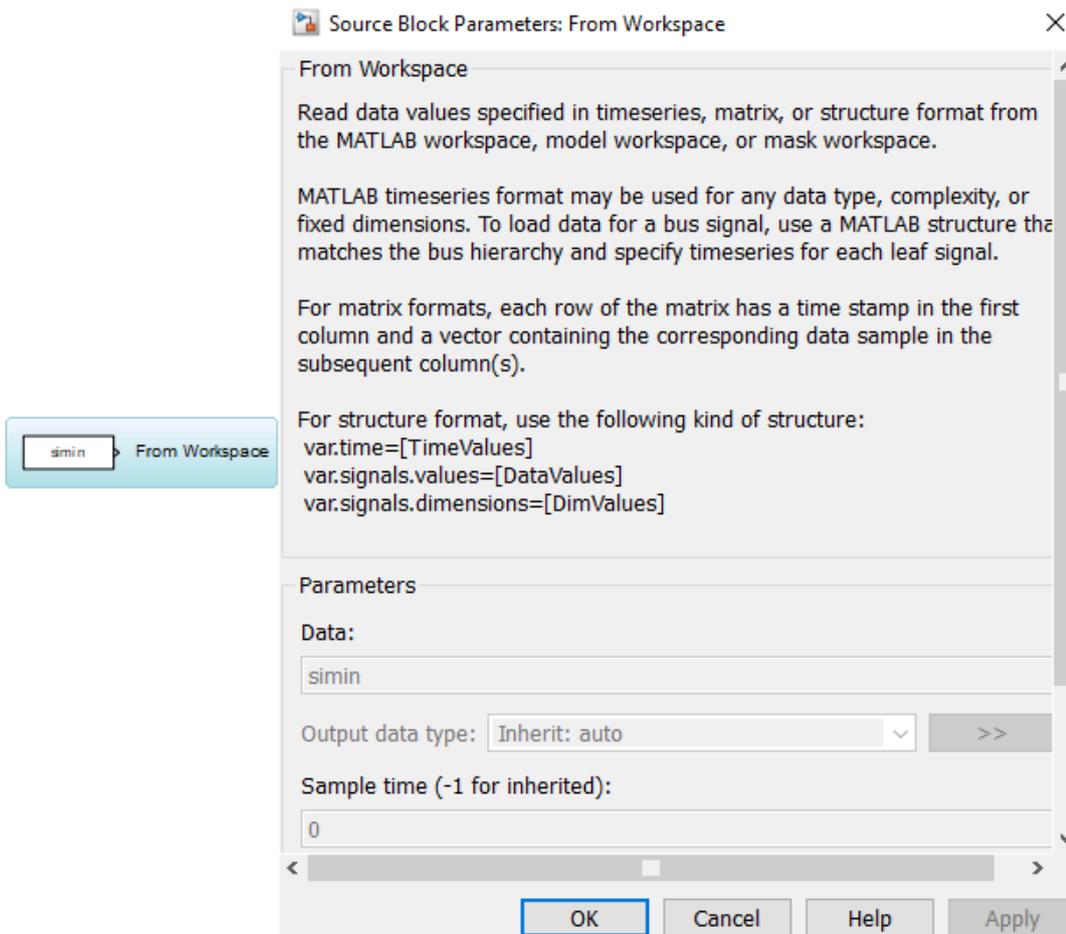


Figura A.1 23 From Workspace.

Simout: Son vectores de salida en formato de columna. Las señales de respuesta del sistema pueden ser exportadas al “workspace” con esta función.

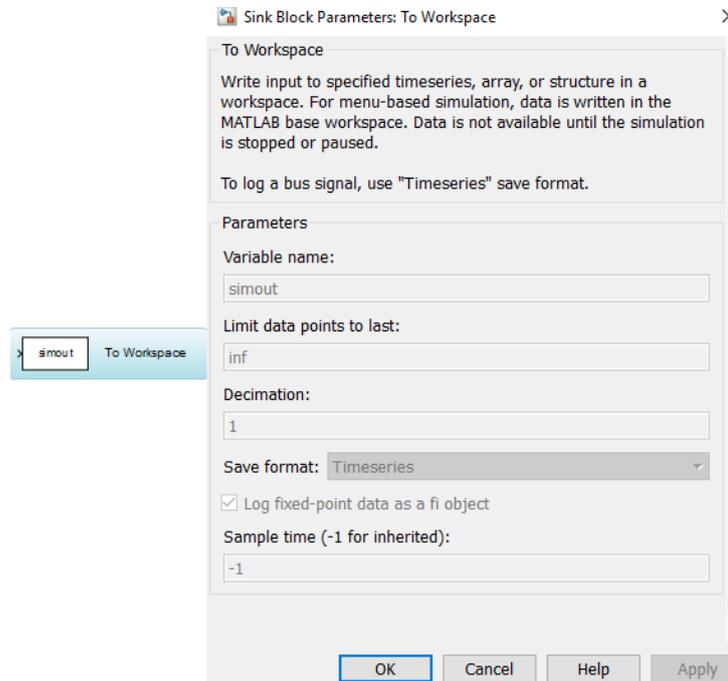


Figura A.1 24 Parámetro To Workspace.

In-out: Son funciones que determinan la señal de entrada o salida para la creación de un subsistema.

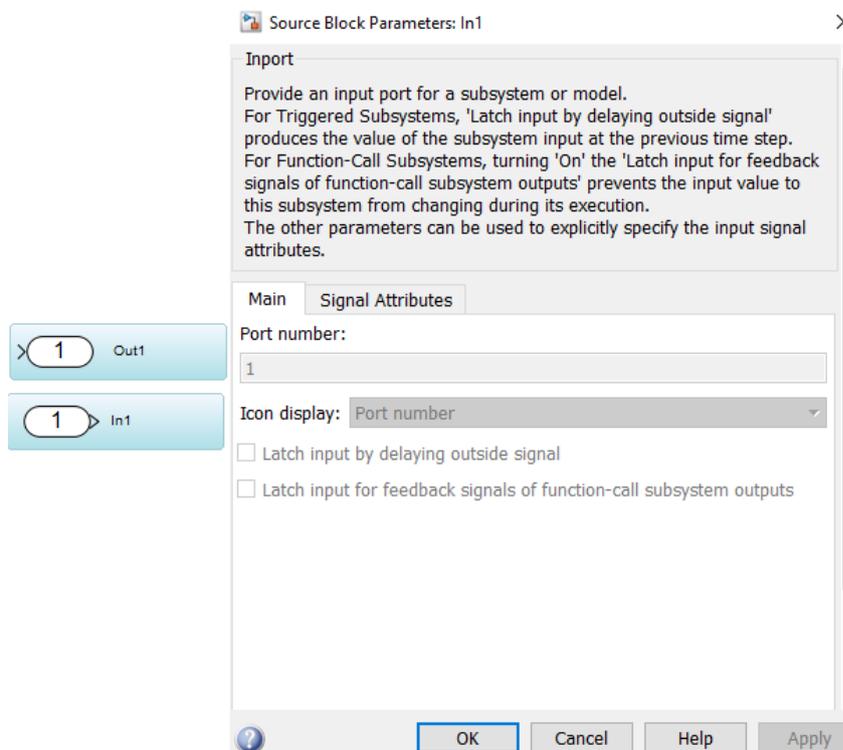


Figura A.1 25 Out, In.

A.2 Funciones definidas por el usuario.

Los modelos en Simulink utilizando bloques de funciones muestran una mayor eficiencia computacional, pero hay casos en que funciones complejas son difíciles de representar tan solo utilizando los bloques de Simulink.

Para estas situaciones es necesario utilizar funciones definidas por el usuario:



Figura A.2 1 Función Matlab.

A.3 Correr simulaciones.

En Simulink, los parámetros de simulación pueden ser puestos a través de Simulation-Model Configuration Parameters. Aquí se puede escoger el tipo de algoritmo numérico a utilizar, paso variable o fijo (Runge Kutta, Euler.....). También se puede definir características relacionadas con tolerancias absolutas y relativas, paso de tiempo (para algoritmos de paso fijo), paso de tiempo máximo y mínimo (para algoritmos de paso variable) entre otros.

Dentro de la interfaz de Matlab, la simulación poder caracterizada mediante el comando "sim":

$$[T, X, Y] = \text{sim}('modelo', 'tiempo', options)$$

Donde:

T: vector tiempo.

X: Estados en una matriz o en formato de estructura. Contiene todos los estados continuos o discretos involucrados en los bloques.

Y: Salida de una matriz o en formato de estructura. Esto incluye todos los bloques de salida del modelo principal (no de los subsistemas) y es el principal camino para pasar formación a Matlab automáticamente.

'Model': Nombre del modelo en Simulink.

'Tiempo': Generalmente en el tiempo final del vector tiempo.

'Options': Se incluyen los parámetros para simulación.

Ejemplo:

Options=simset('Solver','Ode4','fixedstep','0.005','SrcWorkspace','current') donde con solver se determina el tipo de algoritmo numérico, con fixedstep el paso de tiempo, y los dos último los datos actuales del "workspace" en Matlab.

ANEXOS B: CODIGOS EN MATLAB

B.1 Vibración libre varios grados de libertad.

```
%PROGRAMA QUE CALCULA LOS DESPLAZAMIENTOS Y PLANO DE FASES PARA
CADA PISO
%DE UN SISTEMA DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD.
%%INICIO=====
clc
close all
clear all
%=====OPCIONES DE
ANALISIS=====
options=simset('solver','ode4','fixedstep','0.002','SrcWorkspace',
'current');
%=====CONDICIONES
INICIALES=====
v0=0;
x0=0.01;
%=====AMORTIGUAMIENTO
MODAL=====
beta1=0.05; %modo 1
beta3=0.08; %modo 3

%=====MATRIZ DE MASA Y
RIGIDES=====
load('Mass.mat')           %Matriz de masas
load('Stiffness.mat')      %Matriz de rigidez
M_s=Mass;
K_s=Stiffness;

%=====PARAMETROS
MODALES=====
[phi,Tn]=eigsort(M_s,K_s);
wn=2*pi./Tn;
Am=( [1/(2*wn(1)),wn(1)/2;(1/(2*wn(3))),wn(3)/2]^-1)*[beta1
beta3]';
ar=Am(1);           %coeficiente de Rayleigh
br=Am(2);           %coeficiente de Rayleigh
C_s=ar*M_s+br*K_s; %matriz de amortiguamiento que se ajusta a
las razones
                    %de amortiguamientos modales

%=====RESPUESTA=====
=====
[T,R,Y]=VLVGL(M_s,C_s,K_s,v0,x0,options);

%=====GRAFICOS
DESPLAZAMIENTOS=====
%=====GRAFICOS 1ER
NIVEL=====
Nivel1=1;
figure;
subplot(3,1,1)
plot(T,Y(:,Nivel1),'b')
title(['Respuesta de desplazamiento en el Nivel '
,num2str(Nivel1)]...
,'FontWeight','normal')
```

```
xlabel('Tiempo[s]')
ylabel('Despl. [m]')
grid on
grid minor
%=====GRAFICOS 2DO
NIVEL=====
Nivel2=2;
subplot(3,1,2)
plot(T,Y(:,Nivel2),'b')
title(['Respuesta de desplazamiento en el Nivel '
,num2str(Nivel2)]...
      , 'FontWeight','normal')
xlabel('Tiempo[s]')
ylabel('Despl. [m]')
grid on
grid minor
%=====GRAFICOS 3ER
NIVEL=====
Nivel3=3;
subplot(3,1,3)
plot(T,Y(:,Nivel3),'b')
title(['Respuesta de desplazamiento en el Nivel '
,num2str(Nivel3)]...
      , 'FontWeight','normal')
xlabel('Tiempo[s]')
ylabel('Despl. [m]')
grid on
grid minor
%
%=====PLANO DE
FASES=====
%=====PLANO DE FASES 1ER
PISO=====
Piso1=4;
Fase1=1;
figure;
subplot(3,1,1)
plot(Y(:,Piso1),Y(:,Fase1),'b')
title(['Plano de Fases en el Piso ' ,num2str(Fase1)]...
      , 'FontWeight','normal')
xlabel('Posicion[m]')
ylabel('Velocidad [m/s]')
grid on
grid minor
%=====GRAFICOS 2DO
PISO=====
Piso2=5;
Fase2=2;
subplot(3,1,2)
plot(Y(:,Piso2),Y(:,2),'b')
title(['Plano de Fases en el Piso ' ,num2str(Fase2)]...
      , 'FontWeight','normal')
xlabel('Posicion[m]')
ylabel('Velocidad [m/s]')
grid on
grid minor
%=====GRAFICOS 3ER
PISO=====
```

```
Piso3=6;
Fase3=3;
subplot(3,1,3)
plot(Y(:,Piso3),Y(:,3),'b')
title(['Plano de Fases en el Piso ' ,num2str(Fase3)]...
      , 'FontWeight','normal')
xlabel('Posicion[m]')
ylabel('Velocidad [m/s]')
grid on
grid minor
xlswrite('DATOSVIBRACIONLIBRE.xlsx',Y);
%=====
```

B.2 Movimiento forzado varios grados de libertad.

```
%PROGRAMA QUE CALCULA LOS DESPLAZAMIENTOS PARA CADA PISO DE UN
SISTEMA DE
%VARIOS GRADOS DE LIBERTAD DE UN SISTEMA FORZADO.
%%INICIO=====
clc
close all
clear all
%=====OPCIONES DE
ANALISIS=====
options=simset('solver','ode4','fixedstep','0.002','SrcWorkspace',
'current');
%=====CONDICIONES
INICIALES=====
v0=0.0;
x0=0.0;
%=====AMORTIGUAMIENTO
MODAL=====
beta1=0.05; %modo 1
beta3=0.08; %modo 3

%=====MATRIZ DE MASA Y
RIGIDES=====
load('Mass.mat')           %Matriz de masas
load('Stiffness.mat')      %Matriz de rigidez
M_s=Mass;
K_s=Stiffness;

%=====PARAMETROS
MODALES=====
[phi,Tn]=eigsort(M_s,K_s);
wn=2*pi./Tn;
Am=( [1/(2*wn(1)),wn(1)/2;(1/(2*wn(3))),wn(3)/2]^-1)*[beta1
beta3]';
ar=Am(1);           %coeficiente de Rayleigh
br=Am(2);           %coeficiente de Rayleigh
C_s=ar*M_s+br*K_s; %matriz de amortiguamiento que se ajusta a
las razones
                    %de amortiguamientos modales

%=====RESPUESTA=====
[T,R,Y]=FVGL(M_s,C_s,K_s,v0,x0,options);

%=====GRAFICOS
DESPLAZAMIENTOS=====
```

```
%=====GRAFICOS 1ER
PISO=====
Nivel1=1;
figure;
subplot(3,1,1)
plot(T,Y(:,Nivel1),'b')
title(['Respuesta de desplazamiento en el Nivel '
,num2str(Nivel1)]...
      , 'FontWeight', 'normal')
xlabel('Tiempo[s]')
ylabel('Despl. [m]')
grid on
grid minor
%=====GRAFICOS 2DO
PISO=====
Nivel2=2;
subplot(3,1,2)
plot(T,Y(:,Nivel2),'b')
title(['Respuesta de desplazamiento en el Nivel '
,num2str(Nivel2)]...
      , 'FontWeight', 'normal')
xlabel('Tiempo[s]')
ylabel('Despl. [m]')
grid on
grid minor
%=====GRAFICOS 3ER
PISO=====
Nivel3=3;
subplot(3,1,3)
plot(T,Y(:,Nivel3),'b')
title(['Respuesta de desplazamiento en el Nivel '
,num2str(Nivel3)]...
      , 'FontWeight', 'normal')
xlabel('Tiempo[s]')
ylabel('Despl. [m]')
grid on
grid minor

%=====GRAFICOS PLANO DE
FASES=====
%=====PLANO DE FASES 1ER
PISO=====
Piso1=1;
Fase1=4;
figure;
subplot(1,1,1)
plot(Y(:,Piso1),Y(:,Fase1),'b')
title(['Plano de fases en el Nivel ' ,num2str(Fase1-3)]...
      , 'FontWeight', 'normal')
xlabel('Posicion[m]')
ylabel('Velocidad [m/s]')
grid on
grid minor
%=====PLANO DE FASES 2DO
PISO=====
Piso2=2;
Fase2=5;
subplot(1,1,1)
```

```

plot(Y(:,Piso2),Y(:,Fase2),'b')
title(['Plano de Fases en el Nivel ' ,num2str(Fase2-3)]...
      , 'FontWeight','normal')
xlabel('Posicion[m]')
ylabel('Velocidad [m/s]')
grid on
grid minor
%=====PLANO DE FASES 3ER
PISO=====
Piso3=3;
Fase3=6;
subplot(1,1,1)
plot(Y(:,Piso3),Y(:,Fase3),'b')
title(['Plano de Fases en el Nivel ' ,num2str(Fase3-3)]...
      , 'FontWeight','normal')
xlabel('Posicion[m]')
ylabel('Velocidad [m/s]')
grid on
grid minor
xlswrite('FORZADO.xlsx',Y);
%=====

```

B.3 Respuesta sísmica de sistemas lineales.

```

%PROGRAMA QUE CALCULA LA RESPUESTA DE DESPLAZAMIENTO ANTE UNA
EXITACION=====
%SISMICA LIMA 74 DE UN SISTEMA DE VGDL
LINEAL=====
%%INICIO
clc
close all
clear all
%=====Opciones de
Análisis=====
options=simset('solver','ode4','fixedstep','0.02','SrcWorkspace','
current')
%=====Registro=====
reg1=load('SISMO74.txt');
dt=0.02;
t=0:dt:(length(reg1)-1)*dt;
reg=[t reg1]; %Registro de forma adecuada

%=====Condiciones
Iniciales=====
v0=0;
x0=0;
%=====Amortiguamiento
modal=====
beta1=0.05; %Modo1
beta3=0.08; %Modo3

%=====MATRICES DE MASA Y
RIGIDEZ=====
load('Mass.mat')
load('Stiffness.mat')
M_s=Mass;
K_s=Stiffness;
%=====PARAMETROS MODALES=====

```

```
[phi,Tn]=eigsort(M_s,K_s);
wn=2*pi./Tn;
Am=[1/(2*wn(1)),wn(1)/2;1/(2*wn(3)),wn(3)/2]^-1*[beta1 beta3]';
ar=Am(1); %Coeficiente de Rayleigh
br=Am(2); %Coeficiente de Rayleigh
C_s=ar*M_s+br*K_s;%Matriz de amortiguamiento que se ajusta a las
razones %de amortiguamiento modales
R_s=ones(length(Tn),1); %Vector de influencia
n=length(K_s);
T_s=eye(n);
for i=1:n-1
    T_s(i+1,1)=-1 ; %matriz de transformación para desplazamientos
relativos
end

%=====CORRER MODELO
SIMULINK=====
[T,R,Y]=ALVGD(L(reg,M_s,C_s,K_s,R_s,v0,x0,options));

%=====GRAFICOS
DESPLAZAMIENTOS=====
%=====GRAFICO
PISO1=====
    Nivel1=1;
figure;
subplot(3,1,1)
plot(T,Y(:,Nivel1),'b')
title(['Desplazamientos en el Nivel',num2str(Nivel1)]...
    , 'FontWeight', 'normal')

xlabel('Tiempo[s]')
ylabel('Despl. [m]')
grid on
grid minor
xlswrite('LINEAL.xlsx',Y);
%=====GRAFICO
PISO2=====
Nivel2=2;
subplot(3,1,2)
plot(T,Y(:,Nivel2),'b')
title(['Desplazamientos en el Nivel',num2str(Nivel2)]...
    , 'FontWeight', 'normal')

xlabel('Tiempo[s]')
ylabel('Despl. [m]')
grid on
grid minor
%=====GRAFICO
PISO3=====
Nivel3=3;
subplot(3,1,3)
plot(T,Y(:,Nivel3),'b')
title(['Desplazamientos en el Nivel',num2str(Nivel3)]...
    , 'FontWeight', 'normal')
xlabel('Tiempo[s]')
ylabel('Despl. [m]')
```

```
grid on
grid minor

%=====PLANO DE
FASES=====
%=====GRAFICO
PISO1=====
Piso1=1;
Fase1=4;
figure;
subplot(1,1,1)
plot(Y(:,Piso1),Y(:,Fase1),'b')
title(['Plano de fases Nivel',num2str(Fase1-3)]...
      , 'FontWeight', 'normal')

xlabel('Posicion[m]')
ylabel('Velocidad[m/s]')
grid on
grid minor
%=====GRAFICO
PISO2=====
Piso2=2;
Fase2=5;
subplot(1,1,1)
plot(Y(:,Piso2),Y(:,Fase2),'b')
title(['Plano de fases Nivel',num2str(Fase2-3)]...
      , 'FontWeight', 'normal')

xlabel('Posicion[m]')
ylabel('Velocidad[m/s]')
grid on
grid minor
%=====GRAFICO
PISO3=====
Piso3=3;
Fase3=6;
subplot(1,1,1)
plot(Y(:,Piso3),Y(:,Fase3),'b')
title(['Plano de fases Nivel',num2str(Fase3-3)]...
      , 'FontWeight', 'normal')

xlabel('Posicion[m]')
ylabel('Velocidad[m/s]')
grid on
grid minor
%=====
```

B.4 Respuesta sísmica de sistemas inelásticos.

```
%=====
```

```
%PROGRAMA QUE CALCULA LAS FUERZAS Y DESPLAZAMIENTOS DE UN SISTEMA
DE VARIOS
%GRADOS DE LIBERTAD
%=====
%%INICIO
clc
close all
clear all
%=====OPCIONES DE
ANALISIS=====
options=simset('solver','ode4','fixedstep','0.002','SrcWorkspace',
'current')

%=====REGISTRO SISMICO LIMA
1974=====
reg1=load('SISMO74.txt');
dt=0.02;
t=0:dt:(length(reg1)-1)*dt;
reg=[t reg1]; %Registro de forma adecuada

%=====CONDICIONES
INICIALES=====
v0=0;
x0=0;
%=====AMORTIGUAMIENTO
MODAL=====
beta1=0.05; %modo 1
beta4=0.08; %modo 4

%=====MATRICES DE MASA Y
RIGIDEZ=====
load('Mass.mat') %Matriz de masas
load('Stiffness.mat') %Matriz de rigidez

M_s=Mass;
K_s=Stiffness;

%=====PARAMETROS
MODALES=====
[phi,Tn]=eigsort(M_s,K_s);
wn=2*pi./Tn;

Am=( [1/(2*wn(1)),wn(1)/2;(1/(2*wn(3))),wn(3)/2]^(-1) * [beta1
beta4] );
ar=Am(1); %coeficiente de Rayleigh
br=Am(2); %coeficiente de Rayleigh
C_s=ar*M_s+br*K_s %matriz de amortiguamiento que se ajusta a las
razones
%de amortiguamientos modales
R_s=ones(length(Tn),1); %vector de influencia

n=length(K_s);
T_s=eye(n);
for i=1:n-1
    T_s(i+1,i)=-1; %matriz de transformación para desplazamientos
%relativos
```

```
end
%=====PROPIEDADES DEL MODELO
INELASTICO=====
kp=diag(K_s);           %rigidez lineal
k1=kp*0.2;             %rigidez no lineal
kn1=kp-k1;

uy=0.002;
fy=uy*kp;              %fuerza de fluencia

%=====ANALIZAR CON
SIMULINK=====
[T,R,Y]=FNGDL_BL(reg,M_s,C_s,K_s,R_s,v0,x0,T_s,k1,kn1,fy,options);

%=====GRAFICAS
HISTERESIS=====
%=====1ERPISO=====
fuerza1=10;
Desp1=1;
figure;
subplot(2,1,1)
plot(Y(:,Desp1),Y(:,fuerza1),'b')
title(['Respuesta con Fuerzas Restitutivas en el
Nivel',num2str(Desp1)]...
      , 'FontWeight', 'normal')

xlabel('Deriva[m]')
ylabel('Fuerza[Ton]')
grid on
grid minor
subplot(2,1,2)
plot(T,Y(:,fuerza1),'b')
title(['Respuesta con Fuerzas Restitutivas en el
Nivel',num2str(Desp1)]...
      , 'FontWeight', 'normal')

xlabel('Tiempo[s]')
ylabel('Fuerza[Ton]')
grid on
grid minor
%=====2DOPIISO=====
fuerza2=11;
Desp2=2;
figure;
subplot(2,1,1)
plot(Y(:,Desp2),Y(:,fuerza2),'b')
title(['Respuesta con Fuerzas Restitutivas en el
Nivel',num2str(Desp2)]...
      , 'FontWeight', 'normal')

xlabel('Deriva[m]')
ylabel('Fuerza[Ton]')
grid on
grid minor
subplot(2,1,2)
plot(T,Y(:,fuerza1),'b')
```

```
title(['Respuesta con Fuerzas Restitutivas en el  
Nivel', num2str(Desp2)]...  
      , 'FontWeight', 'normal')  
  
xlabel('Tiempo[s]')  
ylabel('Fuerza[Ton]')  
grid on  
grid minor  
%=====3ERPISO=====3  
fuerza3=12;  
Desp3=3;  
figure;  
subplot(2,1,1)  
plot(Y(:,Desp3), Y(:, fuerza3), 'b')  
title(['Respuesta con Fuerzas Restitutivas en el  
Nivel', num2str(Desp3)]...  
      , 'FontWeight', 'normal')  
  
xlabel('Deriva[m]')  
ylabel('Fuerza[Ton]')  
grid on  
grid minor  
subplot(2,1,2)  
plot(T, Y(:, fuerza1), 'b')  
title(['Respuesta con Fuerzas Restitutivas en el  
Nivel', num2str(Desp3)]...  
      , 'FontWeight', 'normal')  
  
xlabel('Tiempo[s]')  
ylabel('Fuerza[Ton]')  
grid on  
grid minor  
  
%=====GRAFICAS PLANO DE  
FASES=====3  
%=====1ERPISO=====3  
vell1=4;  
Desp1=1;  
figure;  
subplot(1,1,1)  
plot(Y(:,Desp1), Y(:, vell1), 'b')  
title(['Plano de fases Nivel', num2str(Desp1)]...  
      , 'FontWeight', 'normal')  
  
xlabel('Posicion[m]')  
ylabel('Velocidad[m/s]')  
grid on  
grid minor  
%=====2DOPISO=====3  
vell2=5;  
Desp2=2;  
subplot(1,1,1)  
plot(Y(:,Desp2), Y(:, vell2), 'b')  
title(['Plano de fases Nivel', num2str(Desp2)]...  
      , 'FontWeight', 'normal')  
  
xlabel('Posicion[m]')
```

```

ylabel('Velocidad[m/s]')
grid on
grid minor
%=====3ERPISO=====
vel3=6;
Desp3=3;
subplot(1,1,1)
plot(Y(:,Desp3),Y(:,vel3),'b')
title(['Plano de fases Nivel',num2str(Desp3)]...
      , 'FontWeight', 'normal')

xlabel('Posicion[m]')
ylabel('Velocidad[m/s]')
grid on
grid minor
%=====

```

B.5 Respuesta controlada con ley de control óptimo con externa perturbación tipo sinusoidal.

```

%PROGRAMA QUE CALCULA LA RESPUESTA ANTE UNA EXITACION SINUSOIDAL,
DE
%UN SISTEMA CON LEY DE CONTROL OPTIMO DE
VGDL=====
%%INICIO
clc
close all
clear all
%=====Opciones de
Analisis=====
options=simset('solver','ode4','fixedstep','0.0002','SrcWorkspace'
, 'current')

%=====Condiciones
Iniciales=====
v0=0;
x0=0;
%=====Amortiguamiento
modal=====
beta1=0.05; %Modo1
beta3=0.08; %Modo3

%=====MATRICES DE MASA Y
RIGIDEZ=====
load('Mass.mat')
load('Stiffness.mat')
M_s=Mass;
K_s=Stiffness;
%=====PARAMETROS
MODALES=====
[phi,Tn]=eigsort(M_s,K_s);
wn=2*pi./Tn;
Am=[1/(2*wn(1)),wn(1)/2;1/(2*wn(3)),wn(3)/2]^-1*[beta1 beta3]';
ar=Am(1); %Coeficiente de Rayleigh
br=Am(2); %Coeficiente de Rayleigh
C_s=ar*M_s+br*K_s;%Matriz de amortiguamiento que se ajusta a las
razones
%de amortiguamiento modales

```

```
R_s=ones(length(Tn),1); %Vector de influencia
n=length(K_s);
T_s=eye(n);
R_c=[1;0;0];
%=====VECTORES DEL SISTEMA DE ESPACIO DE
ESTADOS=====
A=[zeros(n) eye(n);-M_s^-1*K_s -M_s^-1*C_s]; %Matriz A

B_s=[zeros(n,1); M_s^-1*ones(n,1)];
B_c=[zeros(n,1);-M_s^-1*R_c];

%=====CONTROL OPTIMO LQR u=-
Kx=====
Q=[K_s eye(3);eye(3) eye(3)];
R1=[8*10^-11];
K=lqr(A,B_c,Q,R1);
R=[0 0 0 1 0 0];
%=====CORRER MODELO
SIMULINK=====
[T,R,Y]=CLVSGDL(A,B_s,B_c,K,R,options);

%=====GRAFICOS
DESPLAZAMIENTOS=====
%=====GRAFICO
PISO1=====
Nivel1s=1;
Nivel1c=7;
figure;
subplot(3,1,1)
plot(T,Y(:,Nivel1s),'b')
hold on ;
plot(T,Y(:,Nivel1c),'r')
hold off;
title(['Desplazamientos en el Nivel',num2str(Nivel1s)]...
      , 'FontWeight','normal')
xlabel('Tiempo[s]')
ylabel('Despl.[m]')
grid on
grid minor
%=====GRAFICO
PISO2=====
Nivel2s=2;
Nivel2c=8;
subplot(3,1,2)
plot(T,Y(:,Nivel2s),'b')
hold on ;
plot(T,Y(:,Nivel2c),'r')
hold off ;
title(['Desplazamientos en el Nivel',num2str(Nivel2s)]...
      , 'FontWeight','normal')

xlabel('Tiempo[s]')
ylabel('Despl.[m]')
grid on
grid minor
%=====GRAFICO
PISO3=====
```

```
Nivel3s=3;
Nivel3c=9;
subplot(3,1,3)
plot(T,Y(:,Nivel3s),'b')
hold on ;
plot(T,Y(:,Nivel2c),'r')
hold off ;
title(['Desplazamientos en el Nivel',num2str(Nivel3s)]...
      , 'FontWeight', 'normal')

xlabel('Tiempo[s]')
ylabel('Despl. [m]')
grid on
grid minor

%=====GRAFICOS
VELOCIDAD=====
%=====GRAFICO
PISO1=====
Nivel1s=4;
Nivel1c=10;
figure;
subplot(3,1,1)
plot(T,Y(:,Nivel1s),'b')
hold on ;
plot(T,Y(:,Nivel1c),'r')
hold off;
title(['Velocidad en el Nivel',num2str(Nivel1s-3)]...
      , 'FontWeight', 'normal')
xlabel('Tiempo[s]')
ylabel('Vel. [m/s]')
grid on
grid minor
%=====GRAFICO
PISO2=====
Nivel2s=5;
Nivel2c=11;
subplot(3,1,2)
plot(T,Y(:,Nivel2s),'b')
hold on ;
plot(T,Y(:,Nivel2c),'r')
hold off ;
title(['Velocidad en el Nivel',num2str(Nivel2s-3)]...
      , 'FontWeight', 'normal')

xlabel('Tiempo[s]')
ylabel('Vel. [m]')
grid on
grid minor
%=====GRAFICO
PISO3=====
Nivel3s=6;
Nivel3c=12;
subplot(3,1,3)
plot(T,Y(:,Nivel3s),'b')
hold on ;
plot(T,Y(:,Nivel2c),'r')
```

```
hold off ;
title(['Velocidad en el Nivel', num2str(Nivel3s-3)]...
      , 'FontWeight', 'normal')
```

```
xlabel('Tiempo[s]')
ylabel('Vel. [m/s]')
grid on
grid minor
```

B.6 Respuesta controlada con ley de control óptimo con externa perturbación sísmica LIMA 1974.

```
%PROGRAMA QUE CALCULA LA RESPUESTA ANTE UNA EXCITACION SISMICA
LIMA 1974=====
%DE UN SISTEMA CON LEY DE CONTROL OPTIMO DE
VGDL=====
%%INICIO
clc
close all
clear all
%=====Opciones de
Analisis=====
options=simset('solver','ode4','fixedstep','0.0002','SrcWorkspace',
              , 'current')
%=====Registro=====
=====
reg1=load('SISMO74.txt');
dt=0.02;
t=0:dt:(length(reg1)-1)*dt;
reg=[t' reg1];    %Registro de forma adecuada

%=====Condiciones
Iniciales=====
v0=0;
x0=0;
%=====Amortiguamiento
modal=====
beta1=0.05;    %Modo1
beta3=0.08;    %Modo3

%=====MATRICES DE MASA Y
RIGIDEZ=====
load('Mass.mat')
load('Stiffness.mat')
M_s=Mass;
K_s=Stiffness;
%=====PARAMETROS
MODALES=====
[phi, Tn]=eigsort(M_s, K_s);
wn=2*pi./Tn;
Am=[1/(2*wn(1)), wn(1)/2; 1/(2*wn(3)), wn(3)/2]^-1*[beta1 beta3]';
ar=Am(1);      %Coeficiente de Rayleigh
br=Am(2);      %Coeficiente de Rayleigh
C_s=ar*M_s+br*K_s; %Matriz de amortiguamiento que se ajusta a las
razones
                    %de amortiguamiento modales
R_s=ones(length(Tn), 1); %Vector de influencia
```

```
n=length(K_s);
T_s=eye(n);
R_c=[1;0;0];
%=====VECTORES DEL SISTEMA DE ESPACIO DE
ESTADOS=====
A=[zeros(n) eye(n);-M_s^-1*K_s -M_s^-1*C_s]; %Matriz A

B_s=[zeros(n,1);-ones(n,1)];
B_c=[zeros(n,1);-M_s^-1*R_c];

%=====CONTROL OPTIMO LQR u=-
Kx=====
Q=[K_s eye(3);eye(3) eye(3)];
R1=[8*10^-11];
K=lqr(A,B_c,Q,R1);
R=[0 0 0 1 0 0];
%=====CORRER MODELO
SIMULINK=====
[T,R,Y]=CLVGD(leg,A,B_s,B_c,K,R,options);

%=====GRAFICOS
DESPLAZAMIENTOS=====
%=====GRAFICO
PISO1=====
Nivel1s=1;
Nivel1c=7;
figure;
subplot(3,1,1)
plot(T,Y(:,Nivel1s),'b')
hold on;
plot(T,Y(:,Nivel1c),'r')
hold off;
title(['Desplazamientos en el Nivel',num2str(Nivel1s)]...
      , 'FontWeight', 'normal')
xlabel('Tiempo[s]')
ylabel('Despl. [m]')
grid on
grid minor
%=====GRAFICO
PISO2=====
Nivel2s=2;
Nivel2c=8;
subplot(3,1,2)
plot(T,Y(:,Nivel2s),'b')
hold on;
plot(T,Y(:,Nivel2c),'r')
hold off;
title(['Desplazamientos en el Nivel',num2str(Nivel2s)]...
      , 'FontWeight', 'normal')
xlabel('Tiempo[s]')
ylabel('Despl. [m]')
grid on
grid minor
%=====GRAFICO
PISO3=====
Nivel3s=3;
Nivel3c=9;
```

```
subplot(3,1,3)
plot(T,Y(:,Nivel3s), 'b')
hold on;
plot(T,Y(:,Nivel3c), 'r')
hold off;
title(['Desplazamientos en el Nivel', num2str(Nivel3s)]...
      , 'FontWeight', 'normal')

xlabel('Tiempo[s]')
ylabel('Despl. [m]')
grid on
grid minor
%=====GRAFICOS
VELOCIDAD=====
%=====GRAFICO
PISO1=====
Nivel1s=4;
Nivel1c=10;
figure;
subplot(3,1,1)
plot(T,Y(:,Nivel1s), 'b')
hold on;
plot(T,Y(:,Nivel1c), 'r')
hold off;
title(['Velocidad en el Nivel', num2str(Nivel1s-3)]...
      , 'FontWeight', 'normal')
xlabel('Tiempo[s]')
ylabel('Vel. [m/s]')
grid on
grid minor
%=====GRAFICO
PISO2=====
Nivel2s=5;
Nivel2c=11;
subplot(3,1,2)
plot(T,Y(:,Nivel2s), 'b')
hold on;
plot(T,Y(:,Nivel2c), 'r')
hold off;
title(['Velocidad en el Nivel', num2str(Nivel2s-3)]...
      , 'FontWeight', 'normal')
xlabel('Tiempo[s]')
ylabel('Vel. [m/s]')
grid on
grid minor
%=====GRAFICO
PISO3=====
Nivel3s=6;
Nivel3c=12;
subplot(3,1,3)
plot(T,Y(:,Nivel3s), 'b')
hold on;
plot(T,Y(:,Nivel3c), 'r')
hold off;
title(['Velocidad en el Nivel', num2str(Nivel3s-3)]...
      , 'FontWeight', 'normal')
```

```
xlabel('Tiempo[s]')  
ylabel('Vel.[m/s]')  
grid on  
grid minor  
%=====
```