UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS

“Métodos variacionales aplicados a ecuaciones elípticas no lineales y ecuaciones evolutivas no lineales”

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE DOCTOR EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA

ELABORADA POR:

HECTOR CARLOS GUIMARAY HUERTA

ASESOR:

Dr. ELADIO TEÓFILO OCAÑA ANAYA

LIMA – PERÚ

2021

Dedicatoria:

A mi madre Estela

Y hermanas Elena y Rosario

AGRADECIMIENTOS

Debo agradecer a mi asesor de tesis, Dr. Eladio Ocaña Anaya, profesor del IMCA & FC de la Univesidad Nacional de Ingeniería, Perú, por la revisión rigurosa y aportes para hacer realidad la presente tesis.

Asimismo, debo agredecer, en memoria, a mi co–asesor de tesis, Dr. Eduardo Arbieto Alarcón, quien fuera especialista en Ecuaciones en Derivadas Parciales de la Unversidade Federal de Goiás, Brasil, por haber planteado el tema de tesis para investigar sobre la existencia de solución de la Ecuación de Poisson-Boltzmann con condiciones de frontera de Neumann.

RESUMEN

En este trabajo estudiamos la existencia de solución débil de una ecuación diferencial parcial, a través del análisis variacional, considerando la solución débil como un punto crítico de una función definida en un espacio de búsqueda que en nuestro caso es el espacio de Sobolev H^1 ó H_0^1.

La motivación fundamental de este trabajo es estudiar la existencia de solución de la ecuación de Poisson–Boltzmann con condición de frontera de Neumann, considerada hasta la fecha un problema abierto.

ABSTRACT

In this work we study the existence of weak solutions of some partial differential equation through the variational analysis, considering the weak solution as critical points of functions defined on some search space, in our case, the Sobolev spaces H^1 or H^1_0.

The main motivation of this work is to study the existence of solution of the so called Poisson–Boltzmann equation with Neumann boundary condition, which is currently an open problem.

Contents

Introducción **1**

1 Notaciones, preliminares y propiedades básicas de análisis **5**

1.1 Notaciones y preliminares 5

1.2 Espacios L^p y espacios de Sobolev 9

2 Resultados generales **13**

2.1 Existencia de solución o de puntos críticos 18

3 Formulación variacional para ecuaciones diferenciales parciales **25**

3.1 Formulación variacional y la funcional de energía asociada . . 26

3.1.1 La ecuación de Laplace–Dirichlet 27

3.1.2 La ecuación de Poisson–Dirichlet 28

3.1.3 La ecuación de Poisson–Neumann 30

3.1.4 Problema de Poisson-Boltzmann: Un problema abierto 32

3.1.5 Otros tipos de ecuaciones 33

3.2 Validez de las formulaciones variacionales y de las funcionales correspndientes 38

3.3 Existencia de solución débil 41

Introducción

En optimización matemática estamos interesados en obtener la solución óptima de un problema de minimización o de maximización, muchas veces a través de los puntos críticos asociados al problema dado.

En dimensión finita el cálculo diferencial es una herramienta básica para estudiar tal situación; en tanto, que en dimensión infinita, la herramienta fundamental es el cálculo cariacional.

En el capítulo 1 presentamos algunas herramientas básicas de análisis que servirán para estudiar adecuadamente la formulación variacional y la existencia de puntos críicos de la funcional correspondiente asociadas a las ecuaciones diferenciales parciales tratadas en los capítulos 2 y 3 de este trabajo.

Los puntos críticos definidos en este trabajo son los ceros de la derivada, en el sentido de Gâteaux, de una función.

La formulación variacional de una ecuación diferencial parcial se obtiene a partir de una reformulación integral de tal ecuación con la ntervención de ciertos tipos de funciones llamadas funciones de prueba o test que para nosotros serán las funciones de clase C^∞, es decir,

$$C_0^\infty(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega) : \Omega \supset \operatorname{supp}(f) \text{ es compacto}\},$$

donde $\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$.

Para $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, definimos el **Espacio de Sobolev** $W^{m,p}(\Omega)$ como:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \exists\, D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

donde $D^\alpha u =: g_\alpha$ es la **derivada parcial débil** de u, esto es, la función g_α que satisface

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Un caso especial de espacio de Sobolev es el espacio $H^m(\Omega)$ y más aún, el espacio $H^1(\Omega)$, definido por:

$$H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega).$$

En el capítulo 2, desarrollamos herramientas generales entorno al análisis variacional, una de las herramientas importantes de mencionar es la **Fórmula de Green**,

$$\int_\Omega f \triangle g dx = -\int_\Omega \nabla f \nabla g dx + \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial \eta} ds,$$

donde $\frac{\partial g}{\partial \eta} = \nabla g.\eta$, esto nos permite pasar de una ecuación diferencial parcial (búsqueda de solución fuerte) a una ecuación integral (búsqueda de solución dbíl), y que bajo ciertas condiciones de regualidad, ambas soluciones son equivalentes.

Otro concepto de suma importancia es la **Condición Palais-Smale**. Su relevancia radica en la existencia de solución débil de una ecuación integral, similarmente a como sucede, en dimensión finita, con la compacidad de un conjunto para la existencia de puntos extremos (mínimo o máximo), [61] [68].

Con todas estas consideraciones, uno de los teoremas minimax conocido como el **Teorema del paso de la montaña** es una herramienta para determinar la existencia de punto críticos, [35] [64].

Finalmente, en el capítulo 3 procedemos con la **formulación variacional para ecuaciones diferenciales parciales**, siendo el punto de partida la **ecuación de Laplace**:

$$\Delta u = 0, \text{ sobre } \Omega,$$

y las condiciones de frontera, según el caso, de **Dirichlet** o **Neumann**, [27] [60].

El objetivo es determinar la funcional correspondiente para ciertos tipos de ecuaciones diferenciales parciales y así estudiar la existencia de tales ecuaciones a través de los puntos críticos de la funcional.

Hemos determinado, entre otras, las funcionales correspondientes a la ecuación de Poisson, del calor, de la onda y de la ecuación de Poisson–Boltzmann.

Esta última tiene la siguiente formulación:

$$\begin{cases} -\Delta u = -k^2 \sinh u, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = g, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{PBN}$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es asumido abierto y acotado. Este sistema modela los fenómenos electrostáticos estudiados por los químicos , y que hasta la fecha, la existencia de solución, sigue siendo un problema abierto, [21] [49].

Chapter 1

Notaciones, preliminares y propiedades básicas de análisis

1.1 Notaciones y preliminares

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función definida en un cierto conjunto X. Denotamos por $\operatorname{epi}(f)$ al epígrafo de f que es el conjunto

$$\operatorname{epi}(f) = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq \lambda\}.$$

Cuando X es un espacio topológico, se dice que f es semicontinua inferior (sci) en un punto $\bar{x} \in X$ si para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda < f(\bar{x})$, existe una vecindad V de $\bar{x}$ tal que $\lambda < f(x)$ para todo $x \in V$. Decimos que f es sci si esta es sci en todo punto de X. Desde luego, f es sci si y solo si $\operatorname{epi}(f)$ es cerrado en $X \times \mathbb{R}$ y que a su vez es equivalente a que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, el subnivel

$$S_\lambda(f) := \{x \in X : f(x) \leq \lambda\},$$

es cerrado en X.

Cuando X es un espacio vectorial, se dice que f es convexa si $\operatorname{epi}(f)$ es un conjunto convexo, esto es, para todo $x, y \in X$ y todo $\lambda \in [0, 1]$,

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Cuando la desigualdad en la expresión anterior es estricta para todo $x \neq y$ y todo $\lambda \in]0,1[$, se dice que f es estrictamente convexa.

Sea X un espacio de Banach. Denotamos por X^* al espacio dual topológico de X; y por X^{**} al espacio dual topológico de X^*. Denotamos por $\sigma(X, X^*)$ a la topología débil en X; $\sigma(X^*, X)$ denota la topología débil* (en X^*).

Se cumplen las siguientes propiedades (ver por ejemplo [15]):

1a) Una sucesión $\{x_n\}$ en X converge a x con la topología débil $\sigma(X, X^*)$ (o que $\{x_n\}$ converge débilmente a x, denotado por $x_n \rightharpoonup x$) si y solo si $f(x_n) \to f(x)$ para todo $f \in X^*$.

1b) Si $C \subset X$ es convexo, entonces C es cerrado con la topología débil $\sigma(X, X^*)$ (o débilmente cerrado) si y solo si es cerrado con la topología fuerte (o fuertemente cerrado). En particular, si $f : X \to \mathbb{R}$ es convexa, entonces esta es sci con la topología débil (o débilmente sci) si y solo si es sci con la topología fuerte (o fuertemente sci). Así por ejemplo, la función $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \|x\|$ para todo $x \in X$, es fuertemente continua. Por lo tanto,

$$\|x\| \leq \liminf \|x_n\| \quad \text{cuando} \;\; x_n \rightharpoonup x.$$

1c) **(Teorema de Banach–Alaoglu–Bourbaki)** La bola unitaria cerrada B_{X^*} es compacto en la topología $\sigma(X^*, X)$.

Sea X un espacio de Banach, se dice que X es reflexivo si la inyección canónica $j : X \to X^{**}$ definida por

$$\langle Jx, f \rangle_{X^{**}, X^*} = \langle f, x \rangle_{X^*, X} \quad \forall\, x \in X, \ \forall\, f \in X^*,$$

es sobreyectiva, esto es $JX = X^{**}$. En este caso se suele denotar a X^{**} por X.

Las siguientes propiedad acerca de los espacios reflexivos se puedes también encontrar en [15]:

2a) **(Teorema de Kakutani)** X es reflexivo si y solo si la bola unitaria cerrada B_X (de X) es compacto en la topología $\sigma(X, X^*)$.

2b) Si X es reflexivo entonces toda sucesión acotada en X admite una subsucesión débilmente convergente.

Sean X e Y dos espacios de Banach, se dice que un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo (o acotado) si existe $C > 0$ tal que

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \forall\, x \in X.$$

T es llamado compacto si la clausura (en Y) de $T(B_X)$ es un conjunto compacto (con la topología fuerte). Se deduce que T es acotado cuando T es compacto.

Las siguientes propiedades se cumplen (ver por ejemplo [15]):

3a) Si T es compacto, entonces toda sucesión débilmente convergente (en X) $x_n \rightharpoonup x$, implica $Tx_n \to Tx$ fuertemente en Y.

3b) Cuando X es reflexivo, vale la recíproca del item anterior.

Sean nuevamente X e Y dos espacios de Banach, se dice que X está inmerso de forma continua en Y, y se denota por $X \hookrightarrow Y$, si $X \subset Y$ y la aplicación $j : X \to Y$ (definida por $j(x) = x$, para todo $x \in X$) es lineal continuo, esto es, existe $C > 0$ tal que

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \forall\, x \in X.$$

Si además de esas dos propiedades, j es un operador compacto, entonces se dice que X está inmerso de forma compacta en Y.

Sean X e Y dos espacios vectoriales normados, denotamos por $\mathcal{L}(X, Y)$ al espacio lineal

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{\Phi : \Phi : X \to Y \text{ es lineal}\}.$$

Se dice que $f : A \subseteq X \to Y$ es **Fréchet diferenciable** en $a \in A$ si existe $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ continua tal que

$$\lim_{x \to 0,\, x \in \mathcal{F}} \frac{f(a + x) - f(a) - L(x)}{\|x\|} = 0,$$

donde $\mathcal{F} = \{x \in X : a + x \in A\}$. L es llamada la derivada de Fréchet de f en a y será denotada por $Df(a)$.

La función f es **Gâteaux diferenciable** en $a \in A$ si existe $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ continua tal que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a) - tL(v)}{t} = 0, \quad \text{para todo } v \in X \text{ con } a + tv \in A.$$

L es llamada la **derivada de Gâteaux** de f en a y es denotada por $f'(a)$.

La derivada direccional de f en el punto a en la dirección v es el límite (si existe)

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

En general se cumple $D_v f(a) = f'(a)v$.

Ejemplo 1.1.1 *Sea X un espacio de Banach y $a : X \times X \to \mathbb{R}$ una forma bilineal continua, esto es, existe $c > 0$ tal que $|a(x, y)| \leq c\|x\|\|y\|$ para todo $x, y \in X$. La función $J : X \to \mathbb{R}$ definida por $J(x) = a(x, x)$ para todo $x \in X$, es diferenciable (Fréchet) en todo X y*

$$DJ(x)w = a(x, w) + a(w, x) \quad \textit{para todo} \quad x, w \in X.$$

En particular, cuando a es simétrica, entonces

$$DJ(x)w = 2a(x, w) \quad \textit{para todo} \quad x, w \in X.$$

Cuando X es un espacio de Hilbert y a el producto interno correspondiente, entonces la función J definida anteriormente es $J(x) = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$ (para todo $x \in X$), entonces $DJ(x) = 2\langle x, \cdot \rangle$, para todo x.

Si $f : A \subset X \to Y$ es Gâteaux diferenciable, se dice que $a \in A$ es un **punto crítico de** f, si $f'(a) = 0$. El valor correspondiente $f(a)$ es llamado **valor crítico** de f. Cuando $f'(a) \neq 0$, se dice que a es un **punto regular** de f y el valor correspondiente $f(a)$ es llamado **valor regular** de f.

Se dice que $f : A \subset X \to Y$ es de **clase** C^1 (en $B \subset A$) cuando f es Fréchet diferenciable en B y su derivada (de Fréchet) Df es continua en A. De forma análoga, se dice que f es de **clase** C^k en B (para $k = 2, 3, \cdots$) cuando su derivada Df es de clase C^{k-1} en B. Por extensión, se dice que f es de **clase** C^0 en B cuando f es continua en B.

1.2 Espacios L^p y espacios de Sobolev

Definición 1.2.1 (Espacio L^p) *Para $p \geq 1$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definimos el espacio $L^p = L^p(\Omega)$ por*

$$L^p = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \ \textit{es medible en } \Omega \ \textit{y} \ \int_\Omega |f|^p < +\infty \right\}, \ \textit{si} \ \ p < \infty;$$

y

$$L^\infty = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \ \textit{es medible en } \Omega \ \textit{y} \ \operatorname{ess\,sup}(f) < +\infty \},$$

donde

$$\operatorname{ess\,sup}(f) = \inf[\, \lambda : m(\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\}) = 0\,],$$

siendo m, la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Las normas correspondientes a estos espacios son

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p} & \textit{si} \ \ p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}(f) & \textit{si} \ \ p = \infty. \end{cases}$$

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío y $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Asociado a un multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, , \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ y $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, denotamos

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Cuando $\alpha = 0$, denotamos

$$D^0 f = f.$$

Denotamos igualmente

$$C_0^\infty(\Omega) := \{ f \in C^\infty(\Omega) : \Omega \supset \operatorname{supp}(f) \text{ es compacto} \},$$

donde

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

Se cumple,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)} = L^p(\Omega), \ 1 \leq p < +\infty,$$

donde la clausura es tomada en $L^p(\Omega)$.

Concerniente a los espacios L^p tenemos las siguientes propiedades (ver por ejemplo [15])

- L^p es reflexivo para $1 < p < \infty$.
- **Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue:** Sea f_n una sucesión en $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$ tal que
  - $f_n(x) \to f(x)$ en ctp de Ω,
  - existe una función $g \in L^p(\Omega)$ tal que para todo n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ para ctp de Ω.

  Entonces $f \in L^p(\Omega)$ y $\|f_n - f\|_p \to 0$.
- Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ tal que $\|f_n - f\|_p \to 0$. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_j}\}$ de $\{f_n\}$ y $f \in L^p(\Omega)$ tales que
  - $f_{n_j}(x) \to f(x)$ en ctp de Ω,
  - para todo j, $|f_{n_j}(x)| \leq g(x)$ para ctp de Ω.

Definición 1.2.2 (Espacio de Sobolev) *Para* $1 \leq p \leq +\infty$, *el* **espacio de Sobolev** $W^{1,p}(\Omega)$ *se define como*

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) &= \{u \in L^p(\Omega) : \forall k = 1, \cdots, n,\ \exists g_k \in L^p(\Omega) \text{ tal que} \\ &\qquad \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = -\int_\Omega g_k \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\}, \end{aligned}$$

cuya norma asociada es

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{0 \leq |\alpha| \leq 1} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} & si \;\; p < \infty, \\ \displaystyle\max_{0 \leq |\alpha| \leq 1} \|D^\alpha u\|_\infty & si \;\; p = \infty, \end{cases}$$

donde

$$D^\alpha u = g_\alpha,$$

es llamada la **derivada débil** *de u.*

En general, para $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, definimos el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ como

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \exists\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

donde $D^\alpha u = g_\alpha$ es llamada la **derivada parcial débil** *de u, esto es, la función que satisface*

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

La norma asociada a este espacio es

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} & si \ \ p < \infty, \\ \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty & si \ \ p = \infty. \end{cases}$$

Para $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ y $1 \leq p < +\infty$, definimos

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)},$$

donde la clausura es tomada en $W^{m,p}(\Omega)$. Cuando $p = 2$, denotamos

$$H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega) \quad \text{y} \quad H_0^m(\Omega) := W_0^{m,2}(\Omega).$$

Espacio dual: Denotemos por $W^{-1,q}(\Omega)$ al espacio dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Cuando $p = 2$, denotamos

$$H^{-1}(\Omega) = W^{-1,2}(\Omega).$$

Sobre los espacios de Sobolev tenemos las siguientes propiedades (ver por ejemplo [15])

- $W^{1,p(\Omega)}$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$; reflexivo para $1 < p < \infty$. $W^{1,2} = H^1$ es un espacio de Hilbert.

- Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado, con $n \geq 3$, entonces $H_0^1 \hookrightarrow L^q(\Omega)$ (inmersión continua) para $1 \leq q \leq \dfrac{2n}{n-2}$; la inmersión es compacta si y solo si $1 \leq q < \dfrac{2n}{n-2}$. Al cociente $\dfrac{2n}{n-2}$ se le conoce como el **exponente crítico de Sobolev** para la inmersión de H_0^1 en $L^q(\Omega)$. El término crítico se refiere al hecho que la inmersión no se cumple cuando $q > \dfrac{2n}{n-2}$.

Finalicemos este capítulo dando algunos ejemplos concretos de funciones que caen dentro del ejemplo 1.1.1, dado anteriormente.

Ejemplo 1.2.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Las funcionales*

$$I : L^2(\Omega) \to \mathbb{R} \;\; \textit{definida por} \;\; I(u) = \int_\Omega u^2(x)dx,$$

$$J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R} \;\; \textit{definida por} \;\; J(u) = \int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2 dx,$$

$$K : H^1(\Omega) \to \mathbb{R} \;\; \textit{definida por} \;\; J(u) = \int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2 dx,$$

$$L : H^1(\Omega) \to \mathbb{R} \;\; \textit{definida por} \;\; L(u) = \int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2 dx + \int_\Omega u^2(x)dx,$$

son diferenciables.

Chapter 2

Resultados generales

Comencemos recordando el siguiente resultado que es una manera de demostrar la diferenciabilidad de una función a partir de su derivada de Gâteaux.

Proposición 2.0.1 *Si Φ es Gâteaux diferenciable en una vecindad V de a y Φ' continua en a, entonces Φ es Fréchet diferenciable en a.*

Demostración. Sea $v \in V$. Consideremos la función ψ definida por

$$\Psi(t) = \Phi(a + tv) - \Phi(a) - t\Phi'(a)v. \qquad (I)$$

Tenemos $\Psi(0) = 0$ y además,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(a+v) - \Phi(a) - \Phi'(a)v\| &= \|\Psi(1)\| \\
&= \sup_{\|x^*\|=1} |\langle x^*, \Psi(1)\rangle| \\
&= \sup_{\|x^*\|=1} |\langle x^*, \Psi(1)\rangle - \langle x^*, \Psi(0)\rangle| \\
&= \sup_{\|x^*\|=1} |\langle x^*, \frac{d}{dt}\Psi(\gamma)\rangle|, \ \gamma \in]0,1[\\
&\quad \text{(Teorema del valor medio)} \\
&\leq \sup_{\|x^*\|=1,\, 0\leq t\leq 1} |\langle x^*, \frac{d}{dt}\Psi(t)\rangle| \\
&\leq \sup_{\|x^*\|=1,\, 0\leq t\leq 1} \|x^*\| \|\frac{d}{dt}\Psi(t)\|,
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\|\Phi(a+v)-\Phi(a)-\Phi'(a)v\| &\leq \sup_{0\leq t\leq 1}\|\frac{d}{dt}\Psi(t)\| \\ &= \sup_{0\leq t\leq 1}\|\Phi'(a+tv)v-\Phi'(a)v\| \\ &\leq \|v\|\sup_{0\leq t\leq 1}\|\Phi'(a+tv)-\Phi'(a)\| \\ &= o(\|v\|) \text{ (pues } \Phi' \text{ es continua en } a).\end{aligned}$$

Se deduce que Φ es Fréchet diferenciable en a. ■

Asumiremos ahora que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto, acotado y con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1. Se dice que $\partial\Omega$ es de clase C^k $(k = 0, 1, \cdots)$ si para todo $a \in \partial\Omega$ existe $r > 0$ y $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ de clase C^k tal que

$$\Omega \cap B(a,r) = \{x \in B(a,r) : \; x_n > f(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Teorema 2.0.1 (Teorema de Gauss-Green) *Si $f \in C^1(\overline{\Omega})$, entonces*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_k}dx = \int_{\partial\Omega} f\eta^k ds; \; k = 1, \cdots, n,$$

donde η^k es la $k-$ésima componente del vector normal η, siendo este el vector normal exterior al conjunto $\partial\Omega$.

Demostración. Por el teorema de la divergencia [2],

$$\int_\Omega \operatorname{div} F dx = \int_{\partial\Omega} F\eta ds.$$

Sea $F = (0, \cdots, f, \cdots, 0)$, donde f está en la $k-$ésima coordenada, tenemos

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial 0}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial 0}{\partial x_n}\right)dx = \int_{\partial\Omega}(0\eta^1 + \cdots + f\eta^k + \cdots + 0\eta^n)ds,$$

lo que implica que

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_k}dx = \int_{\partial\Omega} f\eta^k ds; \; k = 1, \cdots, n.$$

La identidad queda establecida. ■

Teorema 2.0.2 (Fórmula de integración por partes) *Si* $f, g \in C^1(\overline{\Omega})$, *entonces*

$$\int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_k} dx = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_k} g dx + \int_{\partial\Omega} f g \eta^k ds;\ k = 1, \cdots, n.$$

Demostración. Considerando $f := fg$ en el teorema de Gauss–Green, tenemos

$$\int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_k} dx + \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_k} g dx = \int_\Omega \frac{\partial (fg)}{\partial x_k} dx = \int_{\partial\Omega} f g \eta^k ds;\ k = 1, \cdots, n,$$

de donde,

$$\int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_k} dx = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_k} g dx + \int_{\partial\Omega} f g \eta^k ds;\ k = 1, \cdots, n.$$

La fórmula queda establecida. ∎

Teorema 2.0.3 (Fórmula de Green) *Si* $f, g \in C^2(\overline{\Omega})$, *entonces*

$$\int_\Omega f \triangle g dx = -\int_\Omega \nabla f \nabla g dx + \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial \eta} ds,$$

donde $\frac{\partial g}{\partial \eta} = \nabla g . \eta$

Demostración. En la fórmula de integración por partes, Teorema 2.0.2, consideremos $g := \frac{\partial g}{\partial x_k}$, lo que implica que, para $k = 1, \cdots, n$,

$$\int_\Omega f \frac{\partial^2 g}{\partial x_k^2} dx = \int_\Omega f \frac{\partial}{\partial x_k} (\frac{\partial g}{\partial x_k}) dx = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial g}{\partial x_k} dx + \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_k} \eta^k ds.$$

Sumando, para $k = 1, \cdots, n$, tenemos

$$\int_\Omega f \triangle g dx = -\int_\Omega \nabla f \nabla g dx + \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial \eta} ds,$$

y por lo tanto la fórmula queda establecida. ∎

Proposición 2.0.2 *Sea X un espacio de Banach y $\Phi : X \to \mathbb{R}$ Fréchet (o Gâteaux) diferenciable. Esta es convexa si y solo si*

$$(\Phi'(v) - \Phi'(u))(v - u) \geq 0 \quad \textit{para todo } u, v \in X. \tag{2.1}$$

Si la desigualdad es estricta para todo $u \neq v$, entonces Φ es estrictamente convexa. También vale la recíproca.

Demostración. Asumamos en primer lugar que Φ es convexa, entonces para todo $u, v \in X$,

$$\Phi(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda\Phi(u) + (1 - \lambda)\Phi(v) \quad \forall\, \lambda \in [0, 1],$$

de donde

$$\frac{\Phi(u + \lambda(v - u)) - \Phi(u)}{\lambda} \leq \Phi(v) - \Phi(u), \quad \forall\, \lambda \in]0, 1].$$

Haciendo $\lambda \to 0^+$, tenemos

$$\Phi'(u)(v - u) \leq \Phi(v) - \Phi(u).$$

Análogamente,

$$\Phi'(v)(u - v) \leq \Phi(u) - \Phi(v).$$

Sumando estas dos últimas desigualdades, obtenemos la desigualdad (2.1).

Recíprocamente, sean $u, v \in X$ fijos y arbitrarios. Por el teorema de valor medio, existe $\lambda \in]0, 1[$ tal que

$$\Phi(v) - \Phi(u) = \Phi'(u + \lambda(v - u))(v - u),$$

de donde

$$\begin{aligned} \Phi(v) - \Phi(u) &= \frac{1}{\lambda}(\Phi'(u + \lambda(v - u) - \Phi'(u))[\lambda(v - u)] + \Phi'(u)(v - u) \\ &\geq \Phi'(u)(v - u). \end{aligned}$$

Se deduce que

$$\Phi(v) \geq \Phi(\lambda u + (1 - \lambda)v) - \lambda\Phi'(\lambda u + (1 - \lambda)v)(u - v),$$

y por lo tanto

$$(1-\lambda)\Phi(v) \geq (1-\lambda)\Phi(\lambda u + (1-\lambda)v) - \lambda(1-\lambda)\Phi'(\lambda u + (1-\lambda)v)(u-v).$$

Análogamente,

$$\lambda\Phi(u) \geq \lambda\Phi(\lambda u + (1-\lambda)v) + \lambda(1-\lambda)\Phi'(\lambda u + (1-\lambda)v)(u-v).$$

Sumando estas dos últimas desigualdades, obtenemos

$$\lambda\Phi(u) + (1-\lambda)\Phi(v) \geq \Phi(\lambda u + (1-\lambda)v),$$

y por lo tanto la convexidad de Φ. ■

El siguiente resultado muestra que para $1 \leq p < +\infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ está inmerso de forma continua en $L^p(\Omega)$.

Teorema 2.0.4 (Desigualdad de Poincaré) *Sean $1 \leq p < +\infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Entonces existe una constante positiva $c = c(\Omega, p)$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \textit{para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demostración. Sean f y g definidas en $\overline{\Omega}$ por

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} |u(x)|^p & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Tenemos

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial g(x)}{\partial x_k} = p\,|u(x)|^{p-1}\operatorname{sng} u(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_k},$$

de donde,

$$\begin{aligned}
\|u\|_p^p &= \int_\Omega 1|u(x)|^p dx \\
&= -\int_\Omega f\frac{\partial g}{\partial x_k} + \int_{\partial\Omega} fg\eta^k ds \text{ (integración por partes)} \\
&= -\int_\Omega f\frac{\partial g}{\partial x_k} \\
&= -\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) p\,|u(x)|^{p-1}\operatorname{sng} u(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}
\end{aligned}$$

lo que implica que

$$\|u\|_p^p \;\leq\; pM\|u\|_p^{p/q}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|_p \quad \text{(pues } \Omega \text{ es acotado)},$$

donde q es el exponente conjugado de p. Se deduce que

$$\|u\|_p \leq pM\left\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|_p \leq pM\|\nabla u\|_p,$$

y por lo tanto la desigualdad deseada. ∎

2.1 Existencia de solución o de puntos críticos

Teorema de Weierstrass 2.1.1 *Sean X un espacio métrico y $A \subset X$ compacto no vacío. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es sci, entonces Φ alcanza su mínimo global en A, esto es, existe $\bar{x} \in A$ tal que $f(\bar{x}) \leq f(x)$ para todo $x \in A$.*

Demostración. Sea $\{x_k\}$ una sucesión en A tal que $\alpha := \inf_{x\in A} f(x) = \lim f(x_k)$. Siendo A compacto, existe una subsucesión $\{x_{k_j}\}$ de $\{x_k\}$ que converge en A. Sea $\bar{x}$ el límite de tal subsucesión. Por la semicontinuidad inferior de f tenemos $f(\bar{x}) \leq \liminf f(x_{k_j}) = \alpha$, de donde $f(\bar{x}) = \alpha$. ∎

Observación. En espacios normados de dimensión infinita, los conjuntos acotados y cerrados no son en general compactos, lo que dificulta verificar la compacidad de un conjunto. Por ejemplo, un espacio normado tiene dimensión infinita si y solo si la bola cerrada unitaria no es compacto.

Es por esta razón que consideraremos otras condiciones con el fin de garantizar la existencia de un mínimo para una función dada.

Definición 2.1.1 (Función coerciva) *Sea X un espacio de Banach. Se dice que una función $\Phi : A \to \mathbb{R}$ es* **coerciva** *si $\Phi(u_k) \to +\infty$ para toda sucesión $\{u_k\}$ en X, con $\|u_k\| \to \infty$.*

Teorema 2.1.1 *Sea X un espacio de Banach reflexivo y $\Phi : X \to \mathbb{R}$ convexa, sci y coerciva. Entonces Φ alcanza su mínimo global en X.*

Demostración. Sea $\{x_k\}$ una sucesión minimizante de Φ, es decir que satisface

$$\alpha := \inf_{x\in X} \Phi(x) = \lim_{k\to\infty} \Phi(x_k).$$

La sucesión $\{x_k\}$ es acotada por la coercividad de Φ. Siendo X reflexivo, por **2b)** (capítulo precedente), existe una subsucesión $\{x_{k_j}\}$ de $\{x_k\}$ que converge débilmente a un elemento $x \in X$. Por la convexidad y la semicontinuidad inferior de Φ, entonces por **1b)** (también del capítulo precedente), $\Phi(x) \leq \liminf_{j\to\infty} \Phi(x_{k_j}) = \alpha$ y por lo tanto, x es un mínimo global de Φ. ■

El siguiente resultado puede ser encontrado por ejemplo en [35], [44], [63].

Teorema 2.1.2 (Principio variacional de Ekeland) *Sean (X, d) un espacio métrico completo, $\Phi : X \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ propia (ie, su dominio $\operatorname{dom}(\Phi) = \{x \in X : \Phi(x) < \infty\}$, es no vacío), acotada inferiormente y sci, $\epsilon > 0$ y $x \in X$ satisfaciendo $\Phi(x) \leq \inf_{u\in X} \Phi(u) + \epsilon$. Entonces para cada $\delta > 0$ existe $y = y(\epsilon) \in X$ tal que*

i) $d(y, x) \leq \delta$,

ii) $\Phi(y) \leq \Phi(x)$,

iii) $\Phi(y) < \Phi(u) + \frac{\epsilon}{\delta} d(y, u)$ *para todo* $u \in X \setminus \{y\}$.

Observación. Siendo $c = \inf_{u\in X} \Phi(u)$, se cumple:

a) $c \leq \Phi(y) \leq c + \epsilon$, por ii); y

b) $\Phi(u) - \Phi(y) + \epsilon d(y, u) > 0$ para todo $u \in X \setminus \{y\}$, por iii).

Definición 2.1.2 (Condición Palais–Smale) *Sean X un espacio de Banach y $\Phi : X \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Se dice que Φ satisface la condición* **Palais–Smale (PS)** *si toda sucesión $\{x_k\}$ en X satisfaciendo las condiciones:*

$$\{\Phi(x_k)\} \text{ acotada y } \Phi'(x_k) \to 0, \tag{2.2}$$

admite una subsucesión convergente.

Observación. Toda sucesión satisfaciendo (2.3) es llamada sucesión Palais–Smale.

La condición PS permite encontrar puntos críticos, no sólo mínimos o máximos locales, sino también del tipo silla.

Aún cuando Φ es convexa, una sucesión satisfaciendo (2.3) podría no admitir subsucesión convergente: Consideremos por ejemplo $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ convexa diferenciable tal que

$$\Phi(x,y) = \frac{x^2}{y} \text{ para todo } x, y \geq 1.$$

La sucesión $(x_k, y_k) = (k, k^2)$ para $k \in \mathbb{N}$ satisface

$$\Phi(x_k, y_k) = 1 \text{ y } \Phi'(x_k, y_k) \to (0,0).$$

Teorema 2.1.3 *Sean X un espacio de Banach, $\Phi : X \to \mathbb{R}$ de clase C^1 e inferiormente acotada. Si Φ satisface la condición PS, entonces esta alcanza su mínimo global.*

Demostración. Sea $c = \inf\limits_{u \in X} \Phi(u)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $u_k \in X$ tal que

$$c \leq \Phi(u_k) \leq c + \frac{1}{k},$$

de donde

$$\lim_{k \to +\infty} \Phi(u_k) = c = \inf_{u \in X} \Phi(u).$$

Por otra parte, por el principio variacional de Ekeland, para $\epsilon = \dfrac{1}{k}$,

$$\Phi(u_k) < \Phi(u) + \epsilon \|u_k - u\| \text{ para todo } u \in X, u \neq u_k,$$

de donde

$$\Phi(u) - \Phi(u_k) + \epsilon \|u - u_k\| > 0.$$

Sean $\lambda > 0$ y $v \in X$ tal que $\|v\|_X = 1$. Para $u = u_k + \lambda v$, tenemos

$$\Phi(u_k + \lambda v) - \Phi(u_k) + \epsilon \lambda \|v\| > 0,$$

lo que implica que

$$\Phi'(u_k)v = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\Phi(u_k + \lambda v) - \Phi(u_k)}{\lambda} \leq \epsilon,$$

de donde

$$||\Phi^{'}(u_k)||_{X'} \leq \epsilon = \frac{1}{k}$$

y así

$$\Phi^{'}(u_k) \to 0.$$

Siendo $\{\Phi(u_k)\}$ acotada, la condición PS implica que la sucesión $\{u_k\}$ admite una subsucesión $\{u_{k_j}\}$ convergente. Sea $\bar{u}$ el límite de tal subsucesión, entonces Φ alcanza su mínimo en $\bar{u}$ debido a que $\{u_k\}$ es una sucesión minimizante de Φ. ■

Definición 2.1.3 (Condición Palais–Smale local) *Sean X y Φ como en la definición 2.1.2 y $c \in \mathbb{R}$. Se dice que Φ satisface la condición* **Palais–Smale local** *en el nivel c, denotada por $(PS)_c$, si toda sucesión $\{x_k\}$ en X satisfaciendo las condiciones:*

$$\Phi(x_k) \to c \quad y \quad \Phi'(x_k) \to 0, \tag{2.3}$$

admite una subsucesión convergente.

Observación. Por supuesto la condición (PS) implica la condición $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Definición 2.1.4 (Condición geométrica del paso de la montaña) *Sean X un espacio de Banach y $\Phi : X \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Se dice que Φ satisface la condición geométrica del paso de la montaña si existen $u_0, v \in X$ y $r > 0$, con $r < \|v - u_0\|$, tales que*

$$\max\{\Phi(u_0), \Phi(v)\} < \inf_{u \in S(u_0,r)} \Phi(u),$$

donde $S(u_0, r) = \{u \in X : \|u - u_0\| = r\}$.

Lema 2.1.1 (Lema de deformación estandar) *Sean X un espacio de Banach, $\Phi : X \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y $c \in \mathbb{R}$. Asumamos que Φ satisface la condición $(PS)_c$. Si c es un valor regular de Φ, entonces para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño existe una función contunua $\eta : [0,1] \times X \to X$ tal que:*

i) $\eta(0,u) = u$ *para todo* $u \in X$;

ii) $\eta(t,u) = u$ *para todo* $u \notin \Phi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$ *y para todo* $t \in [0,1]$;

iii) $\eta(1, \Phi^{c+\epsilon}) \subset \Phi^{c-\epsilon}$, *donde* $\Phi^{c\pm\epsilon} := \{u \in X : \Phi(u) < c \pm \epsilon\}$;

iv) $\eta(t,\cdot)$ *es un homeomorfismo para todo* $t \in [0,1]$.

Teorema 2.1.4 (Teorema del paso de la montaña) *Sean X un espacio de Banach y $\Phi : X \to \mathbb{R}$ de clase C^1 satisfaciendo la condición PS. Si existen $v \in X$ y $r > 0$, con $r < \|v\|$, tal que*

$$\beta := \max\{\Phi(0), \Phi(v)\} < \inf_{u \in S(0,r)} \Phi(u) =: \alpha,$$

es decir, Φ satisface la condición geométrica del paso de la montaña, entonces

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)),$$

es un valor crítico de Φ, donde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \;\; y \;\; \gamma(1) = v\}.$$

Se deduce que,

$$c \geq \alpha.$$

Observación. El teorema del paso de la montaña es el más simple y uno de los teoremas de minimax más usados.

Demostración. Por definición, $c < +\infty$. Para todo $\gamma \in \Gamma$ el conjunto $\gamma([0,1])$ es conexo con $\gamma(0) = 0$ y $\gamma(1) = v$, de donde $\gamma([0,1]) \cap S(0,r) \neq \emptyset$. Tenemos $\max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)) \geq \inf_{u \in S(0,r)} \Phi(u) \geq \alpha$, lo que implica que $c \geq \alpha$.

Ahora asumamos por contradicción que c no es un valor crítico de Φ, entonces c es un valor regular de Φ, es decir, el conjunto $\{u \in X : \Phi(u) = c \ \text{ y } \ \Phi'(u) = 0\}$, es vacío.

Por el lema 2.1.1, existe $\epsilon \in]0, \dfrac{\alpha - \beta}{2}[$ y una función continua η con las propiedades indicadas en ese lema.

Por otra parte, por la definición de c, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)) < c + \epsilon. \tag{2.4}$$

La función $\gamma^* : [0,1] \to X$ definida por $\gamma^*(t) = \eta(1, \gamma(t))$ para todo $t \in [0,1]$, es continua. Tenemos,

$$\gamma^*(0) = \eta(1,0) \ \text{ y } \ \gamma^*(1) = \eta(1,v).$$

Siendo $\max\{\Phi(0), \Phi(v)\} = \beta < c - 2\epsilon$, los elementos 0 y v están fuera del conjunto $\Phi^{-1}(]c - 2\epsilon, c + 2\epsilon[)$ lo que implica, por la propiedad $ii)$ del lema 2.1.1,

$$\eta(1,0) = 0 \quad \text{y} \quad \eta(1,v) = v.$$

Se deduce que $\gamma^* \in \Gamma$.

Por otro lado, de (2.4) tenemos $\gamma([0,1]) \subseteq \Phi^{c+\epsilon}$ lo que implica, por la propiedad $iii)$ del lema 2.1.1, que

$$\gamma^*([0,1]) = \eta(1, \gamma([0,1])) \subseteq \Phi^{c-\epsilon}.$$

Tenemos, $\max\limits_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma^*(t)) \leq c - \epsilon$, que es una contradicción debido a que $\gamma^* \in \Gamma$. Por lo tanto, c es un valor crítico de Φ. $\blacksquare$

Observación. El teorema del paso de la montaña mencionado anteriormente, fue desarrollado por Ambrosetti y Rabinowitz [35], se ha aplicado con frecuencia para establecer la existencia de puntos críticos.

Intuitivamente, el correspondiente valor crítico en el teorema ocurre porque existen "puntos bajos" a ambos lados de la montaña.

Chapter 3

Formulación variacional para ecuaciones diferenciales parciales

Una solución clásica o solución fuerte de una ecuación diferencial parcial es aquella que verifica la ecuación en el sentido usual.

A cada ecuación diferencial parcial se le puede asociar una noción de solución débil a través de ciertas reformulaciones como por ejemplo usando el enfoque variacional.

En ese contexto, una de las herramientas básicas para estudiar la existencia de solución de las ecuaciones diferenciales parciales es la teoría de puntos críticos. En efecto, una solución débil de una ecuación diferencial parcial es un punto crítico u de una cierta función real Φ definida en un subconjunto W de $L^2(\Omega)$, en el sentido que

$$\Phi'(u) = 0,$$

donde $\Phi'(u)$ indica la derivada de Gâteaux de Φ en u.

La última expresión también se puede escribir a través de la derivada direccional:

$$D_\varphi \Phi(u) = 0,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{K},$$

donde

$$\mathcal{K} = \{\varphi \in L^2(\Omega) : u + \epsilon\varphi \in W, \text{ para todo } \epsilon \text{ suficientemente pequeño}\}.$$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es llamada **armónica** si

$$\Delta u = 0, \tag{3.1}$$

conocida como la **ecuación de Laplace**. Cuando (3.1) se reemplaza por

$$-\Delta u = f(x, u), \tag{3.2}$$

para una cierta función f, tal ecuación es llamada **ecuación de Poisson**, lineal o no lineal, dependiendo si f es lineal o no.

3.1 Formulación variacional y la funcional de energía asociada

En esta sección formularemos la expresión variacional para ciertos tipos de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) y también definiremos su funcional asociada (llamada en este trabajo "funcional de energía" en referencia a la funcional de energía de Dirichlet correspondiente a la ecuación de Laplace. Estas formulaciones variacioanles y sus respectivas funcionales serán estudiadas en la siguiente sección. Las ecuaciones diferenciales parciales que estudiaremos serán las ecuaciones de Poisson con fronteras de Dirichlet (PD) y de Neumann (PN).

Con el fin de tener una idea acerca de las formulaciones variacionales correspondientes a las ecuaciones diferenciales consideradas en esta sección, procederemos de manera formal para obtener las expresiones explícitas tanto de las formulaciones variacionales como de sus funcionales correspondientes.

En la siguiente sección estudiaremos algunas condiciones con el fin de demostrar que tales expresiones obtenidas de manera formal son en efecto expresiones válidas.

Comencemos estudiando un caso bastante particular de ecuación del tipo Poisson–Dirichlet.

3.1.1 La ecuación de Laplace–Dirichlet

La ecuación de Laplace con condición de frontera de Dirichlet viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sobre } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{LD}$$

Una función $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que satisface (LD) es llamada solución fuerte de la ecuación.

Formulación variacional de la ecuación (LD)

De la primera ecuación del sistema (LD), tenemos

$$\varphi \Delta u = 0, \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{3.3}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \varphi \triangle u \\ &= -\int_\Omega \nabla\varphi \nabla u + \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \eta} ds \quad \text{(fórmula de Green)} \\ &= -\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi. \end{aligned}$$

Así, de la expresión (3.3) tenemos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = 0, \quad \text{para todo } \; \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.4}$$

Una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface (3.4) es llamada **solución débil** de la ecuación (LD).

En general, se requieren ciertas condiciones de regularidad sobre $\partial\Omega$ y sobre u para que una solución débil sea también una solución fuerte.

La funcional de energía correspondiente a la ecuación (LD)

Asociada a la ecuación variacional (3.4), la funcional de energía correspondiente a la ecuación (LD) es la función $\psi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega). \tag{3.5}$$

Proposición 3.1.1 *La función ψ es de clase C^∞ en $H_0^1(\Omega)$. Además,*

$$D_\varphi \psi(u) = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi, \quad \textit{para todo} \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Demostración. Siendo $\langle u, v\rangle = \displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla v$ un producto interno de $H_0^1(\Omega)$ cuya norma asociada es $\|u\| = \left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}$, tenemos $\dfrac{1}{2}\|u\|^2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2$, de donde

$$\psi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2.$$

Se deduce que ψ es de clase C^∞ en $H_0^1(\Omega)$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} D_\varphi \psi(u) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\psi(u+\epsilon\varphi) - \psi(u)}{\epsilon} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\|u+\epsilon\varphi\|^2 - \|u\|^2}{\epsilon} \\ &= \langle u, \varphi\rangle \\ &= \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi, \end{aligned}$$

lo que muestra la identidad deseada. ∎

Se deduce que toda solución u de (3.4) es un punto crítico de la función ψ.

3.1.2 La ecuación de Poisson–Dirichlet

La ecuación de Poisson con condición de frontera de Dirichlet (PD) viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{sobre } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{PD}$$

para ciertas funciones f y g. Similar al caso anterior, una función $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que satisface (PD) es llamada solución fuerte.

Formulación variacional de la ecuación (PD)

De la primera ecuación del sistema (PD), tenemos

$$-\Delta u \varphi = f(x,u)\varphi, \quad \text{para todo} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{3.6}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(x,u)\varphi &= \int_\Omega (-\Delta u)\varphi \\ &= -\int_\Omega \varphi \Delta u \\ &= \int_\Omega \nabla\varphi\nabla u - \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \eta} ds \text{ (fórmula de Green)} \\ &= \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f(x,u)\varphi, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.7}$$

Una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface (3.7) es llamada **solución débil** de la ecuación (PD).

La funcional de energía correspondiente a la ecuación (PD)

Asociada a la ecuación (3.7), consideremos la función $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi = \psi - \phi, \tag{3.8}$$

donde ψ es la función definida en (3.5) y ϕ es la función definida en $H_0^1(\Omega)$ por

$$\phi(u) = \int_\Omega F(x,u)dx, \qquad \text{donde} \qquad F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds. \tag{3.9}$$

Tenemos,

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u\|^2 - \int_\Omega F(x,u)dx = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - F(x,u)\right].$$

Proposición 3.1.2 *Se cumple,*

$$D_\varphi \Phi(u) = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi - \int_\Omega f\varphi, \quad \textit{para todo} \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Demostración. Es suficiente demostrar que $D_\varphi \phi(u) = \int_\Omega f\varphi$. Tenemos,

$$\begin{aligned}
D_\varphi \phi(u) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\phi(u+\epsilon\varphi) - \phi(u)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega [F(x,u+\epsilon\varphi) - F(x,u)]dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int_\Omega \frac{1}{\epsilon}\left[\int_u^{u+\epsilon\varphi} f(x,s)ds\right]dx = \int_\Omega \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left[\int_u^{u+\epsilon\varphi} f(x,s)ds\right]dx \\
&= \int_\Omega \lim_{\epsilon\to 0} f(x,u+\epsilon\varphi)\varphi dx \text{ (regla de L'Hospital) } = \int_\Omega f\varphi.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $D_\varphi \Phi(u) = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi - \int_\Omega f\varphi$. ■

Se deduce que toda solución u de (3.7) es un punto crítico de Φ.

3.1.3 La ecuación de Poisson–Neumann

La ecuación de Poisson con condición de frontera de Neumann (PN) viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & \text{sobre } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = g, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{PN}$$

para ciertas funciones f y g.

Formulación variacional de la ecuación (PN)

De la primera ecuación del sistema (PN), tenemos

$$-\Delta u\varphi = f(x,u)\varphi,\ \text{para todo}\ \varphi\in C^{\infty}(\overline{\Omega}),\ \text{con}\ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=0,$$

de donde

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} f(x,u)\varphi &= -\int_{\Omega}\varphi\Delta u\\ &= \int_{\Omega}\nabla\varphi\nabla u-\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial u}{\partial\eta}ds\ \ \text{(fómula de Green).}\end{aligned}$$

Una función $u\in H^1(\Omega)$ que satisface la ecuación

$$\int_{\Omega}\nabla\varphi\nabla u-\int_{\partial\Omega}\varphi g ds=\int_{\Omega} f(x,u)\varphi,\ \forall\,\varphi\in C^{\infty}(\overline{\Omega}),\ \text{con}\ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=0,\quad (3.10)$$

es llamada **solución débil** de la ecuación (PN).

La funcional de energía correspondiente a la ecuación (PN)

Asociada a la ecuación (3.10), consideremos la función $\Phi : H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= -\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2+\int_{\Omega} uf(x,u)-\int_{\Omega}F(x,u)\\ &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2-\int_{\partial\Omega} ug-\int_{\Omega}F(x,u),\end{aligned}$$

donde $F(x,u)=\displaystyle\int_0^u f(x,s)ds.$

Proposición 3.1.3 *Se cumple,*

$$D_{\varphi}\Phi(u)=\int_{\Omega}\nabla\varphi\nabla u-\int_{\partial\Omega} g\varphi ds-\int_{\Omega} f\varphi,\ \forall\,\varphi\in C^{\infty}(\overline{\Omega}),\ \textit{con}\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=0.$$

Demostración. Similar a la demostración de la proposición 3.1.2. ■

Se deduce que toda solución u de (3.10) es un punto crítico de Φ.

3.1.4 Problema de Poisson-Boltzmann: Un problema abierto

Ahora consideremos la siguiente ecuación cuya existencia de solución sigue siendo a la fecha un problema abierto. Esta ecuación es conocida como la ecuación de Poisson–Boltzmann no Lineal con Condición de Frontera de Neumann:

$$\begin{cases} -\Delta u = -k^2 \sinh u, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = g, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{PBN}$$

donde k es una constante dada, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto acotado y g una cierta función definida en $\partial\Omega$.

Siendo esta ecuación un caso particular de la ecuación (PN) considerada en el problema anterior, con $f(x,u) = \sinh u$, su formulación variacional viene dada por

$$\int_\Omega \nabla\varphi\nabla u = -k^2 \int_\Omega \sinh u\varphi + \int_{\partial\Omega} g\varphi ds, \ \forall\, \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}), \text{ con } \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0. \tag{3.11}$$

Su funcional de energía correspondiente es la función $\Phi : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi(u) = k^2(\cosh u - 1) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_{\partial\Omega} gu.$$

La complejidad de este problema radica en el hecho de que $\sinh u$ es una función exponencial. Los resultados que se conocen en la literatura son básicamente para tipos polinomial correspondientes a la función f en la expresión de (PN).

Lo que hemos obtenido aquí por el momento es su formulación variacional y su funcional correspondiente, con el fin de poder estudiar a través de sus puntos críticos (en el caso que existiera) la existencia de solución para la ecuación formulada.

Como se podrá notar en la sección siguiente, todavía no hemos podido conseguir resultados que nos permitan afirmar o no acerca de la existencia de punto crítico para la funcional conseguida. Es un trabajo que está en camino!!.

3.1.5 Otros tipos de ecuaciones

La ecuación del calor

Consideremos en este caso el cilindro $Q = \Omega \times (0, \infty)$, donde Ω sigue siendo un conjunto abierto acotado con frontera $\partial\Omega$. La frontera de Q, llamada **frontera lateral de** Q, es el conjunto $\partial Q = \partial\Omega \times (0, \infty)$.

La ecuación del calor con condición de frontera de Dirichlet viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x, t, u) & \text{sobre } Q, \\ u = g(x.t, u) & \text{sobre } \partial Q, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{sobre } \Omega, \end{cases} \tag{CD}$$

para ciertas funciones f, g y u_0.

Formulación variacional de la ecuación (CD)

De la primera ecuación de (CD) tenemos

$$u_t\varphi - \Delta u\varphi = f\varphi, \text{ para todo } \varphi \in H^1(Q),$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_Q f\varphi &= \int_Q u_t\varphi - \int_Q \varphi\Delta u \\ &= \int_Q u_t\varphi + \int_Q \nabla u\nabla\varphi - \int_{\partial Q} \frac{\partial u}{\partial \eta}\varphi \quad \text{(fórmula de Green)} \\ &= \int_Q u_t\varphi + \int_Q \nabla u\nabla\varphi - \int_{\partial Q} \frac{\partial g}{\partial \eta}\varphi. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_Q u_t\varphi + \int_Q \nabla u\nabla\varphi = \int_Q f\varphi + \int_{\partial Q} \frac{\partial g}{\partial \eta}\varphi, \quad \text{para todo } \varphi \in H^1(Q). \tag{3.12}$$

Una función u en $H^1(\Omega)$ que satisface (3.12) es llamada solución débil de la ecuación (CD).

La funcional de energía correspondiente a la ecuación (CD)

Asociada a la ecuación (3.12) consideremos la función $\Phi : H^1(Q) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi = \psi - \phi + \Psi - \Theta, \tag{3.13}$$

donde ψ y ϕ son las funciones definidas en (3.5) y (3.9), respectivamente, y Ψ y Θ son las funciones definidas en $H^1(Q)$ por:

$$\Psi(u) = \int_Q \mathcal{F}(x,t,u)dx, \quad \text{donde} \quad \mathcal{F}(x,t,u) = \int_0^u u_t(x,t,s)ds. \tag{3.14}$$

$$\Theta(u) = \int_{\partial Q} \mathcal{G}(x,t,u)dx, \quad \text{donde} \quad \mathcal{G}(x,t,u) = \int_0^u \frac{\partial g}{\partial \eta}(x,t,s)ds. \tag{3.15}$$

Tenemos,

$$\Phi(u) = \int_Q \left[\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - F(x,t,u) + \mathcal{F}(x,t,u)\right] - \int_{\partial Q} \mathcal{G}(x,t,u).$$

Proposición 3.1.4 *Se cumple,*

$$D_\varphi \Phi(u) = \int_Q \nabla u \nabla \varphi - \int_Q f\varphi + \int_Q u_t \varphi - \int_{\partial Q} \frac{\partial g}{\partial \eta}\varphi, \quad \textit{para todo} \quad \varphi \in H^1(Q).$$

Demostración. Tenemos

$$
\begin{aligned}
D_\varphi \Psi(u) &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\Psi(u+\epsilon\varphi)-\Psi(u)}{\epsilon}\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int_Q [\mathcal{F}(x,t,u+\epsilon\varphi)-\mathcal{F}(x,t,u)]dx\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int_Q \left[\int_u^{u+\epsilon\varphi} u_t(x,t,s)ds\right]dx\\
&= \int_Q \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left[\int_u^{u+\epsilon\varphi} u_t(x,t,s)ds\right]dx\\
&= \int_Q \lim_{\epsilon\to 0} u_t(x,t,u+\epsilon\varphi)\varphi dx,\ \text{(regla de L'Hospital)}\\
&= \int_Q u_t\varphi.
\end{aligned}
$$

Asimismo,

$$
\begin{aligned}
D_\varphi \Theta(u) &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\Theta(u+\epsilon\varphi)-\Theta(u)}{\epsilon}\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int_{\partial Q} [\mathcal{G}(x,t,u+\epsilon\varphi)-\mathcal{G}(x,t,u)]dx\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int_{\partial Q} \left[\int_u^{u+\epsilon\varphi} \frac{\partial g}{\partial \eta}(x,t,s)ds\right]dx\\
&= \int_{\partial Q} \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left[\int_u^{u+\epsilon\varphi} \frac{\partial g}{\partial \eta}(x,t,s)ds\right]dx\\
&= \int_{\partial Q} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\partial g}{\partial \eta}(x,t,u+\epsilon\varphi)\varphi dx,\ \text{(regla de L'Hospital)}\\
&= \int_{\partial Q} \frac{\partial g}{\partial \eta}\varphi.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $D_\varphi\Phi(u) = \int_Q \nabla u\nabla\varphi - \int_Q f\varphi + \int_Q u_t\varphi - \int_{\partial Q}\frac{\partial g}{\partial \eta}\varphi.$ ∎

Se deduce que toda solución u de (3.12) es un punto crítico de Φ.

Ecuación de la onda

Similar a la ecuación del calor, consideremos $Q = \Omega \times (0, \infty)$, siendo nuevamente Ω un conjunto abierto con frontera $\partial\Omega$ y $\partial Q = \partial\Omega \times (0, \infty)$ es la frontera lateral del cilindro Q.

La ecuación de la onda con condición de frontera de Dirichlet viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f(x,t,u) & \text{sobre } Q, \\ u = g(x,t,u) & \text{sobre } \partial Q, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sobre } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \nu_0(x) & \text{sobre } \Omega, \end{cases} \tag{OD}$$

para ciertas funciones f, g, u_0 y ν_0.

Formulación variacional de la ecuación (OD)

De la primera ecuación de (OD) tenemos

$$u_{tt}\varphi - \Delta u\varphi = f\varphi, \quad \text{para todo } \varphi \in H^1(Q),$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_Q f\varphi &= \int_Q (u_{tt} - \Delta u)\varphi \\ &= \int_Q u_{tt}\varphi - \int_Q \varphi\Delta u \\ &= \int_Q u_{tt}\varphi + \int_Q \nabla u\nabla\varphi - \int_{\partial Q} \frac{\partial u}{\partial \eta}\varphi ds. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_Q u_{tt}\varphi + \int_Q \nabla u\nabla\varphi = \int_Q f\varphi + \int_{\partial Q} \frac{\partial g}{\partial \eta}\varphi \quad \text{para todo } \varphi \in H^1(\Omega) \tag{3.16}$$

Una función u en $H^1(Q)$ que satisface (3.16) es llamada solución débil de la ecuación (OD).

La funcional de energía correspondiente a la ecuación (OD)

Asociada a la ecuación (3.16), consideremos la función $\Phi : H^1(Q) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi = \psi - \phi + \Xi - \Theta, \tag{3.17}$$

donde ψ, ϕ y Θ son aquellas definidas en (3.5), (3.9) y (3.15), respectivamete, y Ξ es la función definida en $H^1(Q)$ por

$$\Xi(u) = \int_Q \mathcal{F}(t,x,u), \qquad \text{donde} \quad \mathcal{F}(t,x,u) = \int_0^u u_{tt}(t,x,s)ds. \tag{3.18}$$

Tenemos,

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \frac{1}{2}\int_Q \|\nabla u\|^2 - \int_Q F(t,x,u) + \int_Q \mathcal{F}(t,x,u) - \int_{\partial Q} \mathcal{G}(x,t,u) \\ &= \int_Q \left[\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - F(t,x,u) + \mathcal{F}(t,x,u)\right] - \int_{\partial Q} \mathcal{G}(x,t,u). \end{aligned}$$

Proposición 3.1.5 *Se cumple,*

$$D_\varphi \Phi(u) = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi - \int_\Omega f\varphi + \int_\Omega u_{tt}\varphi - \int_{\partial Q} \frac{\partial g}{\partial \eta}\varphi.$$

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned} D_\varphi \Xi(u) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\Xi(u+\epsilon\varphi) - \Xi(u)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\int_Q [\mathcal{F}(t,x,u+\epsilon\varphi) - \mathcal{F}(t,x,u)] \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\int_Q \left[\int_u^{u+\epsilon\varphi} u_{tt}(t,x,s)ds\right] \\ &= \int_Q \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\left[\int_u^{u+\epsilon\varphi} u_{tt}(t,x,s)ds\right] \\ &= \int_Q \lim_{\epsilon\to 0} u_{tt}(t,x,u+\epsilon\varphi)\varphi, \text{ (regla de L'Hospital)} \\ &= \int_Q u_{tt}\varphi. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $D_\varphi\Phi(u) = \int_Q \nabla u \nabla\varphi - \int_Q f\varphi + \int_Q u_{tt}\varphi - \int_{\partial Q} \frac{\partial g}{\partial\eta}\varphi$. ■

Se deduce que toda solución u de (3.16) es un punto crítico de Φ.

3.2 Validez de las formulaciones variacionales y de las funcionales correspndientes

En esta sección estudiaremos algunas condiciones para la validez tanto de las formulaciones variacionales como de las funcionales asociadas a las ecuaciones diferenciales parciales estudiadas en la sección precedente.

Proposición 3.2.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, abierto y acotado (con condición de regularidad sobre el borde de Ω). Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua satisfaciendo la siguiente condición: Existen $a, b > 0$ tales que*

$$|f(t)| \leq a + b|t|^{2^*-1} \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}, \tag{3.19}$$

donde $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$ es el exponente crítico de Sobolev con elfin de que $H^1(\Omega)$ esté inmerso en $L^p(\Omega)$.

Sean $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)ds$ y $J : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$J(u) = \int_\Omega F(u(x))dx.$$

Entonces J es diferenciable (Fréchet) en $H^1(\Omega)$ y

$$J'(u)v = \int_\Omega f(u(x))v(x)dx \quad \textit{para todo } u, v \in H^1(\Omega).$$

Lo mismo sucede si la funcional J es definida en $H_0^1(\Omega)$ (sin ninguna condición de regularidad sobre el borde de Ω).

Demostración. Notemos en primer lugar que la condición (3.19) implica que J está bien definida.

Por la Proposición 2.0.1, para demostrar que J es Fréchet diferenciable, primero demostraremos que J' es Gâteaux diferenciable y luego, su derivada de Gâteaux, es continua.

Recordemos la siguiente identidad elemental: para todo $p > 0$, existe $c_p > 0$ tal que

$$|a+b|^p \leq c_p(|a|^p + |b|^p) \text{ para todo } a, b \in \mathbb{R}.$$

i) Demostraremos que para todo $u, v \in H^1(\Omega)$,

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{F(u+tv)-F(u)}{t}dx = \lim_{t\to 0}\int_\Omega f(u)vdx.$$

Cláramente, para todo $x \in \Omega$,

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(u(x)+tv(x))-F(u(x))}{t} = f(u(x))v(x).$$

Por el teorema de valor medio, existe $\theta \in \mathbb{R}$ con $|\theta| \leq |t|$ tal que

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(u(x)+tv(x))-F(u(x))}{t}\right| &= [f(u(x)+\theta v(x))v(x)| \\ &\leq \left(a + b|u(x)+\theta v(x)|^{2^*-1}\right)|v(x)| \\ &\leq c_1|v(x)| + c_2|u(x)|^{2^*-1}|v(x)| + c_3|v(x)|^{2^*},\end{aligned}$$

para ciertas constantes positivas c_1, c_2 y c_3. El lado derecho de la última expresión está en $L^1(\Omega)$ y por lo tanto, por el teorema de la convergencia dominada, tenemos

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{F(u+tv)-F(u)}{t}dx = \lim_{t\to 0}\int_\Omega f(u)vdx.$$

Como el lado derecho, como función de v, es lineal y continua en $H^1(\Omega)$, J es Gâteaux diferenciable.

ii) Demostraremos que $J' : H^1(\Omega) \to [H^1(\Omega)]'$ es continua. Sea $\{u_k\}$ en $H^1(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ en $H^1(\Omega)$. Siendo $H^1(\Omega)$ inmerso en $L^{2^*}(\Omega)$, existe una subsucesión (que lo denotaremos del mismo modo) $\{u_k\}$ tal que

- $u_k \to u$ en $L^{2^*}(\Omega)$;
- $u_k(x) \to u(x)$ en ctp de Ω;
- existe $w \in L^{2^*}(\Omega)$ tal que $u_k(x) \leq w(x)$ en ctp de Ω y para todo k.

Por la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\begin{aligned}
|(J'(u_k) - J'(u))v| &\leq \int_\omega |f(u_k) - f(u)||v|dx \\
&\leq \left(\int_\omega |f(u_k) - f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} dx \left(\int_\Omega |v|^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2^*}}.
\end{aligned}$$

De otro lado, como $\lim\limits_{k\to\infty} |f(u_k(x)) - f(u(x))|$ en ctp de Ω, y

$$\begin{aligned}
|f(u_k) - f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} &\leq c\left(1 + |u_k|^{2^*-1} + |u|^{2^*-1}\right)^{\frac{2^*}{2^*-1}} \\
&\leq C\left(1 + |w|^{2^*-1} + |u|^{2^*-1}\right)^{\frac{2^*}{2^*-1}} \\
&\leq C\left(1 + |w|^{2^*} + |u|^{2^*}\right) \in L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Por el teorema de la convergencia dominada,

$$\lim_{k\to\infty} |f(u_k) - f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} = 0$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
|(J'(u_k) - J'(u))v| &= \sup\left[|(J'(u_k) - J'(u))v| : v \in H^1(\Omega),\, \|v\| = 1\right] \\
&\leq C\left(\lim_{k\to\infty} |f(u_k) - f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \to 0,
\end{aligned}$$

cuando $k \to \infty$. Se deduce que $J'(u_k) \to J'(u)$ en $[H^1(\Omega)]'$. Por lo tanto, J es Fréchet diferenciable en $H^1(\Omega)$ y $J'(u)v = \int_\Omega f(u)vdx$. ■

Definición 3.2.1 (Función Carathéodory) *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Se dice que una función $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Carathéodory si satisface las siguientes propiedades:*

i) para todo $s \in \mathbb{R}$, la función $f(\cdot, s)$ es medible en Ω,

ii) para todo $x \in \Omega$, la función $f(x, \cdot)$ es continua en $\mathbb{R}$.

Similar a la proposición anterior, consideremos la siguiente condición de crecimiento: existen $c, d > 0$ y $1 \leq \alpha < 2^*$ si $n \geq 3$ ($1 \leq \alpha < \infty$ si $n = 1, 2$) tales que

$$|f(x,s)| \leq c + d|s|^\alpha, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{3.20}$$

Proposición 3.2.2 ([22]) *Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Carathéodory satisfaciendo la condición de crecimiento (3.20) y $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)d\tau.$$

Entonces la funcional $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi(u) = \int_\Omega F(x,u)dx,$$

es de clase C^1 en H_0^1, con

$$D\Phi(u)v = \int_\Omega f(x,u)v \quad \textit{para todo } u, v \in H_0^1(\Omega).$$

3.3 Existencia de solución débil

En esta sección estudiaremos la existencia de solución de algunas ecuaciones particulares que caen dentro de las ecuaciones formuladas es este capítulo.

Comencemos considerando la ecuación de Poisson–Dirichlet (PD) donde la función f depende solamente de $x \in \Omega$.

Proposición 3.3.1 *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto acotado y $f \in L^2(\Omega)$. La función Φ definida en (3.8) correspondiente a la ecuación (PD) satisface la condición Palais–Smale.*

Demostración. Por definición, $F(x,u) = \int_0^u f(x)ds = f(x)u$, de donde

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u\|^2 - \int_\Omega F(x,u)dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u\|^2 - \int_\Omega f(x)udx, \qquad (3.21)$$

Tenemos

$$\langle \Phi'(u), \varphi\rangle = \Phi'(u)\varphi = D_\varphi \Phi(u) = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi - \int_\Omega f(x)\varphi \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Siendo $\langle \Phi'(u), \varphi\rangle = \int_\Omega \nabla(\Phi'(u))\nabla\varphi$ (producto interno en $H_0^1(\Omega)$), tenemos

$$\int_\Omega \nabla(\Phi'(u))\nabla\varphi = \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi - \int_\Omega f(x)\varphi \text{ para todo } \varphi \in H_0^1(\Omega). \qquad (3.22)$$

Por la fórmula de Green,

$$\int_\Omega \nabla(\Phi'(u))\nabla\varphi = \int_\Omega \nabla(\Phi'(u))\nabla\varphi - \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial \Phi'(u)}{\partial \eta} ds = -\int_\Omega \varphi\Delta(\Phi'(u))$$

de donde

$$\int_\Omega \nabla(\Phi'(u))\nabla\varphi = -\int_\Omega \varphi\Delta(\Phi'(u)).$$

Análogamente,

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi = -\int_\Omega \varphi\Delta u.$$

Así, de (3.22), tenemos

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \varphi\Delta(\Phi'(u)) &= -\int_\Omega \varphi\Delta u - \int_\Omega f(x)\varphi \\ &= \int_\Omega (-\Delta u - f(x))\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

de donde

$$-\Delta(\Phi'(u)) = -\Delta u - f(x),$$

lo que equivale a

$$u = \Phi'(u) + (-\Delta)^{-1} f(x).$$

Si $\{u_k\}$ es una sucesión en $H_0^1(\Omega)$ satisfaciendo $\Phi(u_k)$ acotada y $\Phi'(u_k) \to 0$, tenemos,

$$u_k = \Phi'(u_k) + (-\Delta)^{-1} f(x),$$

lo que implica que

$$u_k \to (-\Delta)^{-1} f(x).$$

Se deduce que una subsucesión de $\{u_k\}$ (de hecho toda la sucesión) es convergente. Por lo tanto, Φ satisface la condición de Palais-Smale. ■

Proposición 3.3.2 *Si además de las condiciones de la proposición anterior, la función g es cero, entonces la función correspondiente Φ alcanza su mínimo global en $H_0^1(\Omega)$. En particular, la función ψ definida en (3.5) correspondiente a la ecuación de Laplace–Dirichlet (LD) alcanza su mínimo global en $H_0^1(\Omega)$.*

Demostración. Teniendo en cuenta la Proposición 3.3.1 sobre la propiedad PS de la función Φ y el Teorema 2.1.3 sobre la existencia de un mínimo global, mostraremos que la función Φ es acotada inferiormente. Siendo Φ de la forma (3.21):

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \|\nabla u\|^2 - \int_\Omega f(x) u dx,$$

tenemos

$$\Phi(u) \geq - \int_\Omega f(x) u dx. \tag{3.23}$$

Por la desigualdad de Poincaré, tenemos $\|u\|_2 \leq c\|\nabla u\|$ (siendo c una constante positiva), lo que implica

$$\begin{aligned}
\|u\|_2^2 &\leq c^2\|\nabla u\|_2^2 \\
&= c^2\langle \nabla u, \nabla u\rangle \\
&= c^2\int_\Omega \nabla u \nabla u \\
&= c^2(-\int_\Omega u\Delta u + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial \eta}), \text{ (fórmula de Green)} \\
&= c^2\int_\Omega (-\Delta u)u \\
&= c^2\int_\Omega fu \\
&\leq c^2\|f\|\|u\|.
\end{aligned}$$

Se deduce que $\|u\| \leq c^2\|f\|$ y por lo tanto, por la desigualdad (3.23), tenemos

$$\Phi(u) \geq -c^2\|f\|^2,$$

de donde Φ es acotada inferiormente. Por el Teorema 2.1.3, la función Φ alcanza su mínimo global en $H_0^1(\Omega)$. ∎

Ahora asumiremos que la función f de la ecuación de Poisson–Dirichlet (PD), depende solamente de u:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.24}$$

Proposición 3.3.3 *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua satisfaciendo las siguientes propiedades:*

- $|f(u)| \leq a + b\|u\|^{\frac{n+2}{n-2}}$*, con* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $n \geq 3$*;*
- $f(t)t \leq 0$*; y*
- $[f(t) - f(s)](t - s) \leq 0$ *para todo* $t, s \in \mathbb{R}$.

Entonces la funcional Φ definida en (3.8) correspondiente a la ecuación (3.24) admite un único mínimo en $H_0^1(\Omega)$.

Demostración. La funcional Φ tiene la siguiente expresión

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u\|^2 - \int_\Omega F(u)dx,$$

donde $F(u) = \displaystyle\int_0^u f(s)ds$. Se observa que Φ es continua y además para $u, v \in H_0^1(\Omega)$, tenemos

$$\begin{aligned}
[\Phi'(u) - \Phi'(v)](u - v) &= \|u - v\|^2 - \int_\Omega [f(u) - f(v)](u - v)dx \\
&\geq \|u - v\|^2.
\end{aligned}$$

lo que implica que Φ es estrictamente convexa. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u\|^2 - \int_\Omega F(u)dx \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(u)dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 \text{ (pues, } F(u) \leq 0, \ \forall\, u)
\end{aligned}$$

lo que implica que Φ es coerciva. Así, siendo Φ estrictamente convexa, continua y coerciva, esta admite un único mínimo global en $H_0^1(\Omega)$. ■

CONCLUSIONES

1) A través de algunas herramientas del análisis variacional hemos estudiado la existencia de puntos críticos para ciertas funciones (o funcionales) correspondientes a las formulaciones variacionales de las ecuaciones diferenciales parciales asociadas.

2) Habiendo sido el objetivo principal determinar la existencia de solución de la ecuación de Poisson-Boltzmann con condiciones de frontera de Neumann, que modela los fenómenos electrostáticos estudiada por los químicos, y que hasta la fecha es un problema abierto, se ha logrado determinar la funcional correspondiente a dicha ecuación para luego poder estudiar la existencia de solución de la ecuación a través de los puntos críticos (si existe) de la funcional asociada a su formulación variacional.

PERSPECTIVAS

1) En general, hacer uso del Cáculo Variacional, en dimensión infinita, para determinar los puntos críticos de una funcional que corresponden a la existencia de solución de un modelo de problema de cualquier especialidad.

2) Habiendo logrado determinar la funcional conrrespondiente a la ecuación de Poisson-Boltzmann con condiciones de frontera de Neumann, que modela los fenómenos electrostáticos, queda por determinar la existencia de solución de dicha ecuación, analizando los puntos críticos de la funcional con ciertos teoremas minimax existentes o por plantear, pudiendo ser el teorema del Paso de Monataña o una versión más amplia de este que queda por estudiar.

Bibliography

[1] Adams, Robert A., *Sobolev Spaces*, Elsevier Ltd., Amsterdam, 2003.

[2] Amann, Herbert, *Analysis III*, Birkhäuser, Zwitzerland, 2009.

[3] Ambrosetti, Antonio, *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge University Press, New York, 1993.

[4] Aubin, Jean-Pierre, *Applied Nonlinear Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

[5] Badiale, Marino, *Semilinear Elliptic Equations for Beginners*, Springer-Verlag, England, 2011.

[6] Balakrishnan, Venkataraman, *Mathematical Physics. Applications and Problems*, Springer, Switzerland, 2020.

[7] Benyamini, Yoav, *Geometric Nonlinerar Functional Analysis. Volume 1*, American Mathematical Society, USA, 2000.

[8] Berezansky, Yurij M., *Functional Analysis Vol. I*, Birkhäuser Verlag, Switzerland, 1996.

[9] Berger, Melvyn S., *Introduction to Nonlinear Analysis*, W. A. Benjamin, INC., New York, 1968.

[10] Biagioni, Hebe A., *Multidimensional Kuramoto-Sivashinsky Type Equations: Singular Initial Data and Analytic Regularity*, UNICAMP, Brasil, 1997.

[11] Birkhoff, Garrett, *The Numerical Solution of Elliptic Equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, England, 1972.

[12] Blanchard, Philippe, *Mathematical Methods in Physics*, Birkhäuser Boston, USA, 2003.

[13] Boccardo, Lucio, *Elliptic Partial Differential Equations*, Walter de Gruyter GmbH, Germany, 2014.

[14] Bonanno, Gabriele, *Relations between the mountain pass theorem and local minima*, Enginnering Faculty, University of Messina, Italy, 2012.

[15] Brezis, Haim, *Functional Analysis, Sovolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2011.

[16] Byron, Frederick, *Mathematics of Classical and Quantum Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1992.

[17] Cañada Villar, Antonio, *Métodos Variacionales*, Universidad de Granada, España, 2011

[18] Cazenave, Thierry, *Contributions to nonlinear analysis*, Birkhäuser Verlag, Switzerland, 2006

[19] Chabrowski, Jan, *Weak convergence methods for semilininear elliptic equations*, World Scientific Publishing, USA, 1999

[20] Ciarlet, Philippe G., *The finite element method for elliptic problems*, Society for industrial and applied mathematics, USA, 2002

[21] Cosgrove, Terence, *Colloid Science. Principles, methods and applications*, John Wiley & Sons Ltd, United Kingdom, 2010

[22] Costa, David G., *An invitation to Variational Methods in Differential Equations*, Birkhäuser Boston, USA, 2007

[23] Daverman, Robert J., *Embeddings in Manifolds*, American Mathematical Society, USA, 2009

[24] Dupaigne, Louis, *Stable Solutions of Elliptic Partial Differential Equations*, Taylor and Francis Group, LLC, USA, 2011

[25] Ekeland, Ivar, *Convex Analisys and Variational Problems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia USA, 1999.

[26] Ekeland, Ivar, *Variationslemma von Ekeland*, Goethe-Universität, Deutschland, 1972.

[27] Epstein, Marcelo, *Partial Differential Equations. Mathematical Techniques for Engineers*, Springer International Publishing, Switzerland, 2017.

[28] Evans, Laurence C., *Partial Differential Equations*, University of California, USA, 1998.

[29] Flett, T. M., *Differential Analysis*, Cambridge

[30] Friedlander, F. Gerard, *Introduction to the theory of distributions*, Cambridge University Press, United Kingdom, 1998. University Press, New York, 1980.

[31] García Falset, Jesús, *Análisis Funcional No Lineal*, Universitat de Valéncia, España, 2007.

[32] Harrison, Jenny, *The Gauss-Green Theorem for Fractal Boundaries*, University of Texas, USA, 1992.

[33] Henner, Victor, *Mathematical methods in physics. Partial differential equations, Fourier series, and Special functions*, A K Peters, Ltd., India, 2009.

[34] Hokkanen, Veli-Matti, *Functional methods in differential equations*, Chapman & Hall / CRC, USA, 2002.

[35] Jabri, Youssef, *The Mountain Pass Theorem*, Cambridge University Press, 2003.

[36] Jost, Jürgen, *Calculus of Variations*, Cambridge University Press, England, 1998.

[37] Kanwal, Ram P., *Generalized Functions. Theory and Applications*, Springer Science + Business Media, New York, 2004.

[38] Keener, James P., *Principles of Applied Mathematics*, Addison-Wesley Publishing Company, California, 1988.

[39] Kichenassamy, Satyanad, *Nonlinear Wave Equations*, Marcel Dekker, INC, New York, 1996.

[40] Kravvaritis, Demetrius C., *Variational Methods in Nonlinear Anaysis*, CPI books GmbH, Berlin, 2020.

[41] Kubińska, Elżbieta, *Approximation of Carathéodory Functions and Multifunctions*, Cracow University of Economics, Poland, 2004.

[42] Larsson, Stig, *Partial Differential Equations with Numerical Methdos*, Springer-Verlag, Germany, 2009.

[43] Lebedev, Leonid P., *Functional analysis. Applications in mechanics and inverse problems*, Kluwer Academic Publishers, New York, 2003.

[44] Le Dret, Hervé, *Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations*, Springer International Publishing AG, Switzerland, 2018.

[45] Martín Gómez, José D., *Análisis Funcional y Optimización*, Universidad de Sevilla, España, 1999.

[46] Mawhin, Jean, *Critical Points Theory and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[47] Mawhin, Jean, *Origin and Evolution of the Palais-Smale Condition in Critical Point Theory*, Université Catholique de Louvain, Belgium, 2010.

[48] Miranda, Carlo, *Partial Differential Equations of Elliptic Type*, Springer-Velag, New York, 1970.

[49] Moore, John H., *Encyclopedia of chemical physics and physical chemistry*, Institute of Physics, University of Maryland, USA, 2001.

[50] Morais Pereira, Jardel, *Stability of Multidimensional Traveling Waves for a Benjamin-Bona-Mahony Type Equations*, Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil, 1996.

[51] Mortimer, Robert G., *Mathematics for Physical Chemistry*, Elsevier Inc., United Kingdom, 2013.

[52] Neuberger, John M., *Variational Methods: Open Problems, Recent Progress and Numerical Algorithms*, American Mathematical Society, USA, 2004.

[53] Protter, Murray H., *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[54] Pucci, Patrizia, *A Mountain Pass Theorem*, Dipartimento di Matematica, Università degli Studi, Perugia Italy, 1985.

[55] Raviart, Pierre-Arnaud, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dériveés partielles*, Masson, Paris, 1983.

[56] Reed, Michael C., *Abstract Non Linear Wave Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[57] Renardy, Michael, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 2004.

[58] Rudín, Walter, *Functional Analysis*, MacGraw-Hill, Inc., Singapore, 1991.

[59] Strang, Gilbert, *Differential Equations and Linear Algebra*, Cambridge Press, USA, 2014.

[60] Strichartz, Robert S., *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*, World Scientific Publishing, USA, 2003.

[61] Struwe, Michael, *Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[62] Tartar, Luc, *An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[63] Willem, Michel, *Functional Analysis. Fundamentals and Applications*, Springer Sciencie+Business Media, New York, 2013.

[64] Willem, Michel, *Minimax Theorems*, Birkhäuser, USA, 1996.

[65] Wu, Zhuoqun, *Elliptic* & *Parabolic Equations*, World Scientific Publishing, USA, 2006.

[66] Yosida, Kôsaku, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[67] Yu, Xinwei, *Poisson Equation in Sobolev Spaces*, Department of Mathematical and Statistical Sciences - University of Alberta, Canada, 2011.

[68] Zeidler, Heberhard, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications III*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[69] Zou, Wenming, *Critical Point Theory and its Appications*, Springer, New York, 2006.