

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS**



TESIS

**“SOLUCIÓN DE UN SISTEMA NO LINEAL
ALGEBRAICO POR OPTIMIZACIÓN
NUMÉRICA”**

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN
CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA

ELABORADA POR:

LEOPOLDO PAREDES SORIA

ASESOR:

Dr. PEDRO CANALES GARCÍA

LIMA-PERU

2022

A mis hijos
Joseph y Erick, a
mi esposa Issela
Lobón Flores.



Agradecimientos

Este trabajo no habría sido posible sin el apoyo y el estímulo de mi colega y amigo, Doctor Pedro Canales García, bajo cuya supervisión escogí este tema y comencé la tesis.

No puedo terminar sin agradecer a mis hijos Joseph y Erick, en especial a mi esposa Issela, a mi madre Julia, hermana Nora y hermano Roberto en cuyo estímulo constante y amor he confiado a lo largo de mis años en la Universidad. Estoy agradecido también a los ejemplos de mis difuntos hermana Irene, y padre Leopoldo, vigilantes. Su coraje resuelto y convicción siempre me inspirarán, y espero seguir, a mi propio y pequeño modo, la noble misión por la que dieron sus vidas. Es a ellos a quien dedico este trabajo.

Resumen

Se analizará la solución aproximada que se obtiene al pasar de una transformación lineal a una cuadrática en el espacio de Banach lo que resulta laborioso porque se trabaja con un sistema de ecuaciones de recurrencia.

Luego se procede a debilitar la función con la finalidad de generalizar el teorema de convergencia del método iterativo de Chebyshev.

Se procese analizar la nueva condición de detener los algoritmos en su ejecución, asimismo planteamos un modo de acelerar el error del teorema que se plantea en el Teorema de Convergencia.

Finalmente damos dos ejemplos de aplicación en el cual se analizará todo lo expuesto anteriormente.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE TABLAS	vii
1 SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES	4
1.1 Ecuaciones No Lineales y sus Soluciones por Iteración	4
1.2 El Teorema de Punto Fijo de Banach	4
1.3 Cálculo Diferencial de Operadores No Lineales	9
1.4 Teorema del Valor Medio	12
1.5 Derivada Parcial	12
1.6 La Derivada de Gateaux y Minimización Convexa	13
1.7 Características de los Problemas No Lineales	15
1.7.1 Método de Newton	17
1.7.2 Convergencia del Método de Newton	18
1.7.3 Teorema de Punto Fijo	21
1.8 Métodos Cuasi-Newton para Sistemas No Lineal	22
1.8.1 Método de Newton con Diferencias Finitas	22
1.8.2 Método Secante para Sistemas No Lineales	24
1.8.3 Método de Broyden	28
2 TEOREMA KANTOROVICH Y MÉTODO ITERATIVO DE CHEBYSHEV	30
2.1 Introducción	30
2.2 Análisis de Convergencia	34

2.3	Método Iterativo de Chebyshev	42
2.4	Relación Recurrente General	44
2.5	Teorema de Convergencia	59
3	APORTES	74
3.1	Deducción del Método de Segundo Orden	74
3.2	Debilitamiento de la Función F	75
3.3	Nueva Forma de Parada del Algoritmo	77
3.3.1	Usando b_n como Parada vs Error Absoluto	77
3.3.2	Usando b_n como Parada vs Error	78
3.3.3	Usando $d_n\eta$ como Parada vs el Error Absoluto	79
3.3.4	Usando $d_n\eta$ como Parada vs Error	80
3.4	Mejoramiento del Error del Teorema de Convergencia	82
4	APLICACIONES	83
4.1	Problema 1	83
4.1.1	Veamos la Convergencia del Método de Newton-Kantorovich.	85
4.1.2	Veamos la Convergencia del Método Iterativo de Chebyshev.	88
4.2	Problema 2	90
5	OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES	98
6	ANEXO I	101
6.1	Algoritmos	101
	BIBLIOGRAFÍA	110

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1	F es convexa y es cuasi-convexa.	76
Figura 3.2	F no es convexa y es cuasi-convexa.	76
Figura 3.3	F es discontinua y es cuasi-convexa.	77

LISTA DE TABLAS

Tabla 1.1	Resultados del Método de Newton	18
Tabla 1.2	Resultados del Método Cuasi-Newton	24
Tabla 1.3	Resultados del Método de Broyden	29
Tabla 2.1	Resultados del Método de Newton-Kantorovich	68
Tabla 2.2	Resultados del Método Iterativo de Chebyshev	69

INTRODUCCIÓN

*Si dominas el tema, las
palabras vendrán solas.
Catón el Viejo*

La importancia del presente trabajo es mostrar como en el caso de las funciones reales cuando se desea obtener una mejor aproximación de su solución del caso lineal se pasa al caso cuadrático, en el espacio de Banach si bien la idea es la misma pero las operaciones crece de una manera exorbitante el cual pone en riesgo su utilidad y a su vez trataremos de debilitar la función para extenderlo si fuera posible, y terminaremos analizando una nueva condición de detener el algoritmo con respecto al error absoluto tradicional que se aplica, asimismo se dara una alternativa para acelerar el error del teorema, para lo cual se darán dos ejemplos de aplicación en la especialidad de la Química y de la Física. Se está haciendo costumbre resolver sistemas de ecuaciones no lineales en la matemática computacional y en las aplicaciones, donde los modelos a estudiar representan fenómenos que no pueden expresarse en forma lineal. Es decir, los sistemas correspondientes no todos son de la forma $Ax = b$, donde A es una matriz y x , b son vectores.

Este nuevo tipo de ecuaciones algebraicas puede representarse en forma funcional compacta $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{0}$, donde $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ y $\bar{0} = (0, \dots, 0)^T$ en \mathbb{R}^n . En forma desarrollada escribimos

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

donde $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$ son las funciones componentes de la función vectorial \bar{f} . El caso $n = 1$ corresponde a una simple ecuación no-lineal con la incógnita $x \in \mathbb{R}$.

Frecuentemente, en las aplicaciones, un problema no lineal aparece en la forma de problema de punto fijo:

$$\text{Encontrar } \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } \bar{x} = \bar{g}(\bar{x}),$$

donde $\bar{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial. El problema, en este último sistema, consiste en encontrar un punto $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^n$ que satisface $\bar{\xi} = \bar{g}(\bar{\xi})$, y al cual se le denomina punto fijo de \bar{g} .

Cualquier ecuación o sistema de ecuaciones $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{0}$ puede escribirse en la forma de punto fijo, y esto puede realizarse de muchas maneras.

En el capítulo 1, daremos los conceptos más importantes que se requieren para poder dar soporte al estudio y desarrollo del presente trabajo.

En el capítulo 2, se detalla dos métodos importantes para conocerlos a profundidad y así poder dar mejoras o debilitar según sea el caso.

Además su trabajo se reduce en donde dados X y Y espacios de Banach y $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$ un operador no lineal, el cual es diferenciable Fréchet sobre un dominio convexo abierto Ω . Supongamos que $F'(x_0)^{-1} \in L(Y, X)$ existe para algún $x_0 \in \Omega$, donde $L(Y, X)$ es el conjunto de operadores lineales acotados de Y sobre X . El proceso iterativo más famoso que aproxima a la solución $x^* \in \Omega$ de la ecuación

$$F(x) = 0, \quad (1)$$

es el método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n), \quad n \geq 0. \quad (2)$$

Se muestra el resultado de la convergencia del método de Newton, con la existencia y unicidad de soluciones, y la estimación del error que se da en el teorema del tipo Kantorovich (ver [9], [11], [13] y [14]).

Por otra parte, Candela y Marquina [3], [4] construyen un conjunto de sucesiones que satisfacen algunas relaciones recurrentes, con la cual prueba la sucesión (2) está bien definida y converge para una solución x^* de (1) si

$$a = k\beta\eta \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \quad (3)$$

donde $\|F'(x_0)^{-1}\| \leq \beta$, $\|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| \leq \eta$, y $\|F'(x) - F'(y)\| \leq k\|x - y\|$.

En este trabajo, bajo la misma condición (3) como el método de Newton y con el mismo costo operacional, construimos un nuevo método iterativo para resolver (1).

$$x_{n+1} = x_n - [I + T(x_n)]\Gamma_n F(x_n), \quad n \geq 0. \quad (4)$$

Además, observamos que si la segunda derivada Fréchet es reemplazado en el método Chebyshev [1], [5] por el operador bilineal A , la ecuación (4) es también obtenido, y consecuentemente el proceso iterativo dado por (4) son llamados métodos iterativo de Chebyshev.

En el capítulo 3, daremos a conocer la deducción del método iterativo de Chebyshev de segundo orden, así como el debilitamiento de la función F , como también mostraremos el análisis del nuevo forma de parada que impone el método y se da una sugerencia para mejorar el error del Teorema de Convergencia.

En el capítulo 4, se da dos ejemplos de aplicación en el cual se resuelve con lo trabajado en el capítulo anterior, y cuya finalidad es dar a conocer el método iterativo de Chebyshev para su utilización.

En el capítulo 5, damos las observaciones y conclusiones que motivaron a desarrollar el siguiente trabajo.

1 SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

*A fuerza de construir bien, se llega a
buen arquitecto.
Aristóteles*

En este trabajo vamos determinar la solución $x^* \in \mathbb{R}^n$ de un sistema no lineal $F(x^*) = 0$, donde $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, generando una sucesión $\{x_k\}$ el cual tiene que converger a x^* , donde la disyuntiva es cuando parar. Un buen criterio de parada es preguntar en cada iteración si $\|F(x_k)\| \leq \epsilon_1$, para $\epsilon_1 > 0$ dado; o bien si dos iterados consecutivos satisfacen $\|x_{k+1} - x_k\| \leq \epsilon_2 \|x_{k+1}\|$. También como en el caso unidimensional, se puede fijar el número máximo de iteraciones, para detener el proceso en caso que no haya suficiente progreso hacia x^* .

1.1 Ecuaciones No Lineales y sus Soluciones por Iteración

Dados las consideraciones de las ecuaciones con operadores de la forma:

$$u = T(u), \quad u \in K \tag{1.1}$$

Donde, K es un subespacio de V , y $T : K \rightarrow V$; V es un espacio de Banach. Las soluciones de las ecuaciones de la forma (1.1) son llamados punto fijo del operador T . El método más importante del análisis para la solución teórica de cada ecuación es el teorema de punto fijo de Banach y discutiremos sus aplicaciones para el estudio de varios métodos iterativos en el análisis numérico.

1.2 El Teorema de Punto Fijo de Banach

Sea V un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|_V$, y sea $K \subset V$ un subconjunto. Sea $T : K \rightarrow V$ un operador definido sobre K . La existencia de la solución del operador para la ecuación (1.1) y la aproximación a la solución u por el método iterativo, puede ser abordado eligiendo un valor inicial $u_0 \in K$, y definiendo una sucesión $\{u_n\}$ por la

formula iterativa.

$$u_{n+1} = T(u_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.2)$$

Veamos el requerimiento que debe ser impuesto sobre T :

$$T(v) \in K, \quad \forall v \in K. \quad (1.3)$$

El problema para solucionar la ecuación

$$f(u) = 0, \quad (1.4)$$

para algún operador $f : K \subset V \rightarrow V$ puede ser reducido para un problema equivalente de punto fijo de la forma (1.1) definiendo $T(v) = v - f(v)$, o en forma general $T(v) = v - c_0 f(v)$ con algún escalar constante $c_0 \neq 0$.

Definición 1.2.1. *Dado un operador $T : K \subset V \rightarrow V$, este es llamado de contracción, con constante de contracción $\alpha \in [0, 1)$ si*

$$\| T(u) - T(v) \|_V \leq \alpha \| u - v \|_V, \quad \forall u, v \in K$$

El operador T es llamado no expansivo si

$$\| T(u) - T(v) \|_V \leq \| u - v \|_V, \quad \forall u, v \in K$$

y con continuidad Lipschitziana si existe una constante $L \geq 0$ tal que

$$\| T(u) - T(v) \|_V \leq L \| u - v \|_V, \quad \forall u, v \in K$$

Veamos la siguiente aplicación.

$$\begin{aligned} \text{Contracción} &\implies \text{no expansivo} \\ &\implies \text{continuidad Lipschitziana} \\ &\implies \text{continuidad} \end{aligned}$$

Teorema 1.2.2 (Teorema de Punto Fijo de Banach). *Asumimos que K es un conjunto cerrado no vacío en un espacio de Banach V , además que $T : K \rightarrow K$ es una contracción con la constante de contracción α , $0 \leq \alpha < 1$. Entonces, se tienen los siguientes resultados:*

1. *Existencia y unicidad:* Existe un único $u \in K$ tal que $u = T(u)$.
2. *La convergencia y estimación del error de la iteración:* Dado un punto inicial $u_0 \in K$, la sucesión $\{u_n\} \subseteq K$ definido por

$$u_{n+1} = T(u_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

converge a u :

$$\|u_n - u\| \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Para el error, los siguientes límites son válidos:

$$\|u_n - u\|_V \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|u_0 - u_1\|_V \quad (1.5)$$

$$\|u_n - u\|_V \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|u_{n-1} - u_n\|_V \quad (1.6)$$

$$\|u_n - u\|_V \leq \alpha \|u_{n-1} - u\|_V \quad (1.7)$$

Prueba: Siendo $T : K \rightarrow K$, la sucesión $\{u_n\}$ es definida.

Donde $\{u_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Usando la contracción de T , tenemos:

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u_n\|_V &= \|T(u_n) - T(u_{n-1})\|_V \\ &\leq \alpha \|u_n - u_{n-1}\|_V \\ &= \alpha \|T(u_{n-1}) - T(u_{n-2})\|_V \\ &\leq \alpha^2 \|u_{n-1} - u_{n-2}\|_V; \end{aligned}$$

continuando así recursivamente obtenemos:

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u_n\|_V &\leq \alpha \|u_n - u_{n-1}\|_V \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^n \|u_1 - u_0\|_V \end{aligned}$$

Entonces para $m \geq n \geq 1$.

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\|_V &\leq \sum_{j=0}^{m-n-1} \|u_{n+j+1} - u_{n+j}\|_V \\ &\leq \sum_{j=0}^{m-n-1} \alpha^{n+j} \|u_1 - u_0\|_V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\|_V &= \|u_1 - u_0\|_V \alpha^n (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots) \\ &= \|u_1 - u_0\|_V \alpha^n \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right), \text{ para } \alpha \in [0, 1). \end{aligned}$$

Luego

$$\|u_m - u_n\|_V \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|u_1 - u_0\|_V \quad (1.8)$$

Así, cuando $\alpha \in [0, 1)$, $\|u_m - u_n\| \rightarrow 0$ cuando $m, n \rightarrow \infty$. Entonces $\{u_n\}$ es una sucesión de Cauchy, y siendo K un conjunto cerrado en un espacio de Banach V , $\{u_n\}$ tiene un límite $u \in K$. Para ver que $u = T(u)$; tomamos

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(u_n)$$

entonces usando la continuidad de T

$$T(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n) = T(u)$$

así u es punto fijo de T .

Suponga que $u_1, u_2 \in K$ son puntos fijos de T . Entonces $u_1 = T(u_1)$ y $u_2 = T(u_2)$, obtenemos:

$$u_1 - u_2 = T(u_1) - T(u_2)$$

Donde

$$\|u_1 - u_2\|_V = \|T(u_1) - T(u_2)\|_V \leq \alpha \|u_1 - u_2\|_V$$

$$\implies \|u_1 - u_2\|_V = 0 \text{ con } \alpha \in [0, 1)$$

Esto prueba que el punto fijo de una contracción mapeado es único.

Ahora probaremos la estimación del error. Sea $m \rightarrow \infty$ en (1.8), estimamos (1.7). De:

$$\|u_n - u\|_V = \|T(u_{n-1}) - T(u)\|_V \leq \alpha \|u_{n-1} - u\|_V$$

obtenemos las estimaciones (1.6) y (1.5). Esta estimación juntamente con

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_V &= \|T(u_{n-1}) - T(u)\| \\ &\leq \alpha \|u_{n-1} - u\|_V \\ &\leq \alpha \|u_{n-1} - u_n\|_V + \alpha \|u_n - u\|_V \end{aligned}$$

$$(1 - \alpha) \|u_n - u\|_V \leq \alpha \|u_{n-1} - u_n\|_V$$

$$\|u_n - u\|_V \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|u_{n-1} - u_n\|_V$$

⋮

$$\|u_n - u\|_V \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|u_0 - u_1\|_V$$

implica las estimaciones (1.5), (1.6) y (1.7) ■

Ejemplo 1.2.3. *En el teorema de punto fijo de Banach, asumimos:*

1. V es un espacio completo,
2. K es conjunto cerrado no vacío en V ,
3. $T : K \rightarrow K$, y
4. T es una contracción.

Encontramos ejemplos donde, cada una de estas suposiciones es necesaria para la afirmación del teorema anterior, en particular el resultado falta para sostener si toda las otras suposiciones son considerados excepto que de T solo se exige que satisfaga

$$\|T(u) - T(v)\|_V \leq \alpha \|u - v\|_V, \quad \forall u, v \in V, \quad u \neq v,$$

como $\alpha < 1$, se cumple:

$$\|T(u) - T(v)\|_V < \|u - v\|_V, \quad \forall u, v \in V, \quad u \neq v,$$

Ejemplo 1.2.4. Sea K un conjunto cerrado no vacío del espacio de Banach V , y que $T : K \rightarrow K$. Suponemos que T^m es una contracción para algún entero positivo m . Probar que T tiene un único punto fijo en K . Además, probar que el método iterativo

$$u_{n+1} = T(u_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

converge.

Ejemplo 1.2.5. Sea $T : V \rightarrow V$ una contracción mapeada. Usando el teorema de punto fijo de Banach, la ecuación $v = T(v) + y$ tiene una única solución, denotamos por $u(y)$, para $y \in V$. Probar que $u(y)$ es una función continua de y . Debilitando la suposición de contracción tanto como sea posible, aún obtenemos la misma conclusión.

Ejemplo 1.2.6. Sea V un espacio de Banach, y sea $T : V \rightarrow K$ una aplicación de contracción mapeado donde:

$$K = \{v \in V / \|v\| \leq r\}$$

para algún $r > 0$. Asumiendo $T(0) = 0$. Probar que $v = T(v) + y$ tiene una única solución en K ; $\forall y \in K$ elegido suficientemente pequeño.

1.3 Cálculo Diferencial de Operadores No Lineales

Generalizaremos la notación de derivadas de funciones reales de los operadores

Definición 1.3.1. El operador f es diferenciable de Fréchet en u_0 si y sólo si existe $A \in L(V, W)$ tal que:

$$f(u_0 + h) = f(u_0) + Ah + o(\|h\|), \quad h \rightarrow 0.$$

La matriz A es llamado la derivada de Fréchet de f en u_0 , y escribimos $A = f'(u_0)$. El valor $df(u_0; h) = f'(u_0)h$ es llamado la diferencial de Fréchet de f en u_0 . Si f es diferenciable de Fréchet para todo punto en $K_0 \subseteq K$, llamaremos $f' : K_0 \subseteq V \rightarrow L(V, W)$ la derivada de Fréchet de f en K_0 .

Definición 1.3.2. *El operador f es diferenciable de Gateaux en u_0 si y sólo si existe $A \in L(V, W)$ tal que:*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + th) - f(u_0)}{t} = Ah, \quad \forall h \in V, \|h\| = 1.$$

La matriz A es llamado la derivada de Gateaux de f en u_0 , y escribiremos $A = f'(u_0)$. El valor $df(u_0; h) = f'(u_0)h$ es llamado la diferencial de Gateaux de f en u_0 . Si f es diferenciable de Gateaux para todo puntos en $K_0 \subseteq K$, llamamos $f' : K_0 \subseteq V \rightarrow L(V, W)$ la derivada de Gateaux de f en K_0 .

De la primera definición obtenemos los siguientes resultados.

Proposición 1.3.3. *Si $f'(u_0)$ existe como una derivada de Fréchet, entonces f es continua en u_0 .*

Proposición 1.3.4. *Una derivada de Fréchet es también una derivada de Gateaux.*

Presentamos algunas reglas diferenciales. Si no se especifica el tipo de derivada, entonces el resultado es valido para ambos la derivada de Fréchet y la derivada de Gateaux.

Proposición 1.3.5 (Regla de la Suma). *Si $f, g : K \subseteq V \rightarrow W$ son diferenciables en u_0 , entonces de los escalares α y β , $\alpha f + \beta g$ es diferenciable en u_0 y*

$$(\alpha f + \beta g)'(u_0) = \alpha f'(u_0) + \beta g'(u_0).$$

Proposición 1.3.6 (Regla del Producto). *Si $f_1 : K \subseteq V \rightarrow V_1$ y $f_2 : K \subseteq V \rightarrow V_2$ son diferenciables en u_0 y $b : V_1 \times V_2 \rightarrow W$ es una forma bilineal acotado, entonces el operador $B(u) = b(f_1(u), f_2(u))$ es diferenciable en u_0 y*

$$B'(u_0)h = b(f_1'(u)h, f_2(u)) + b(f_1(u), f_2'(u)h), \quad h \in V.$$

Proposición 1.3.7 (Regla de Composición). *Sea $f : K \subseteq U \rightarrow V$, $g : L \subseteq V \rightarrow W$ donde $f(K) \subseteq L$. Asumimos u_0 es un punto interior de K , $f(u_0)$ es un punto interior de L si $f'(u_0)$ y $g'(f(u_0))$ existe como derivadas de Fréchet, entonces $(g \circ f)$ es diferenciable de Fréchet en u_0 y*

$$(g \circ f)'(u_0) = g'(f(u_0))f'(u_0).$$

Si $f'(u_0)$ existe como una derivada de Gateaux y $g'(f(u_0))$ existe como una derivada de Fréchet, entonces $(g \circ f)$ es diferenciable de Gateaux en u_0 y la fórmula de arriba se cumple.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.3.8. Sea $f : V \rightarrow W$ es un operador afin continuo,

$$f(v) = Lv + b$$

donde $L \in L(V, W)$, $b \in W$ y $v \in V$. Entonces f es diferenciable de Fréchet y $f'(v) = L$ es constante, es decir

$$\begin{aligned} f(v+h) &= L(v+h) + b \\ &= Lv + Lh + b \\ &= f(v) + Lh \\ \Rightarrow f'(v) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(v+h) - f(v)}{h} = L \\ &= L = \text{cte.} \end{aligned}$$

Si es posible para introducir las derivadas de Fréchet y Gateaux de orden superior. De $f : K \subseteq V \rightarrow W$ diferenciable en $K_0 \subseteq K$, la derivada de Fréchet es un operador $f' : K_0 \subseteq V \rightarrow W$. Si f' es diferenciable de Fréchet en K_0 , entonces la segunda derivada de Fréchet es:

$$f'' = (f')' : K_0 \subseteq V \rightarrow L(V, L(V, W)).$$

Para cada punto $v \in K_0$, la segunda derivada $f''(v)$ puede ser examinado como un operador bilineal de $V \times V$ a W y

$$f'' : K_0 \subseteq V \rightarrow L(V \times V, W),$$

y esto es generalizado para f'' es considerado.

1.4 Teorema del Valor Medio

Para la generalización del teorema de valor medio para funciones diferenciables de una variable real. Es consecuencia de considerar el efecto de perturbación sobre una función no lineal en su argumento.

Proposición 1.4.1. Sean U y V espacios lineales reales, $F : K \subseteq U \rightarrow V$ donde K es un conjunto abierto. Asumamos que F es diferenciable en K y que $F'(u)$ es una función continua en u sobre K a $L(U, V)$. Si $u, w \in K$ y asumamos el segmento de línea unido está también contenido en K . Entonces

$$\|F(u) - F(w)\|_V \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|F'((1 - \theta)u + \theta w)\| \|u - w\|_U.$$

El siguiente resultado prueba un error acotado para la aproximación lineal de Taylor para una funcional no lineal.

Proposición 1.4.2. Sean U y V espacios lineales real. $F : K \subseteq U \rightarrow V$ donde K es un conjunto abierto. Asumamos que F es dos veces continuamente diferenciable en K , con $F'' : K \rightarrow L(U \times U, V)$. Si $u_0, u_0 + h \in K$ donde a lo largo del segmento de línea unido contenido en K . Entonces

$$\|F(x_0 + h) - [F(u_0) + F'(u_0)h]\|_V \leq \frac{1}{2} \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|F''(u_0 + \theta h)\| \|h\|_U^2.$$

1.5 Derivada Parcial

La siguiente definición es del tipo dos a dos derivable (Fréchet o Gateaux).

Definición 1.5.1. Sean U, V y W espacios de Banach, $f : D(f) \subseteq U \times V \rightarrow W$. De $v_0 \in V$ fijo, $f(u, v_0)$ es una función de u cuya derivada es con respecto a u_0 , si existe, es llamado la derivada parcial de f con respecto a u , y es denotado por $f_u(u_0, v_0)$. La derivada parcial $f_v(u_0, v_0)$ es definido similarmente.

Exploremos la relación entre la derivada de Fréchet y la derivada parcial de Fréchet.

Proposición 1.5.2. Si f es diferenciable de Fréchet en (u_0, v_0) , entonces las derivadas parciales de Fréchet $f_u(u_0, v_0)$ y $f_v(u_0, v_0)$ existen y

$$f'(u_0, v_0)(h, k) = f_u(u_0, v_0)h + f_v(u_0, v_0)k, \quad h \in U, k \in V$$

en una vecindad de (u_0, v_0) y son continuas en (u_0, v_0) , entonces f es diferenciable de Fréchet en (u_0, v_0) .

Corolario 1.5.3. Una aplicación $f(u, v)$ es continuamente diferenciable de Fréchet en una vecindad de (u_0, v_0) si y sólo si $f_u(u, v)$ y $f_v(u, v)$ son continuas en una vecindad de (u_0, v_0) .

Lo expuesto puede ser extendido completamente para aplicaciones de varias variables.

1.6 La Derivada de Gateaux y Minimización Convexa

Usaremos primero la notación de la derivada de Gateaux para caracterizar las funciones diferenciables convexas de Gateaux.

Teorema 1.6.1. Sea V un espacio normado y $K \subseteq V$ un subconjunto convexo no vacío. Asumimos $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable de Gateaux. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

1. f es convexo.
2. $f(v) \geq f(u) + \langle f'(u), v - u \rangle, \forall u, v \in K$.
3. $\langle f'(v) - f'(u), v - u \rangle \geq 0, \forall u, v \in K$.

Prueba: (a) \Rightarrow (b) Dado $t \in [0, 1]$, por la convexidad de f .

$$\begin{aligned}
 f(u + t(v - u)) &\leq tf(v) + (1 - t)f(u) \\
 \frac{f(u + t(v - u)) - f(u)}{t} &\leq f(v) - f(u), \quad t \in [0, 1] \\
 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(u + t(v - u)) - f(u)}{t} &\leq f(v) - f(u) \\
 \langle f'(u), v - u \rangle &\leq f(v) - f(u) \\
 \Rightarrow f(v) &\geq f(u) + \langle f'(u), v - u \rangle, \quad \forall u, v \in K. \quad (1.9)
 \end{aligned}$$

(b) \Rightarrow (a) Dados $u, v \in K$ y $\lambda \in [0, 1]$, tenemos:

$$\begin{aligned} f(v) &\geq f(u + \lambda(v - u)) + (1 - \lambda)\langle f'(u + \lambda(v - u)), v - u \rangle, \\ f(u) &\geq f(u + \lambda(v - u)) + \lambda\langle f'(u + \lambda(v - u)), u - v \rangle, \\ \Rightarrow \lambda f(v) + (1 - \lambda)f(u) &\geq f(u + \lambda(v - u)) \end{aligned}$$

de esta manera f es una función convexa.

(b) \Rightarrow (c) Dados $u, v \in K$, tenemos:

$$\begin{aligned} f(v) &\geq f(u) + \langle f'(u), v - u \rangle \\ f(u) &\geq f(v) + \langle f'(v), u - v \rangle \\ f(v) + f(u) &\geq f(u) + f(v) + \langle f'(u), v - u \rangle - \langle f'(v), v - u \rangle \\ 0 &\geq -\langle f'(v) - f'(u), v - u \rangle, \quad \forall u, v \in K \\ \langle f'(v) - f'(u), v - u \rangle &\geq 0, \quad \forall u, v \in K \end{aligned}$$

(c) \Rightarrow (b) Definiendo una función real.

$$\phi(t) = f(u + t(v - u)), \quad t \in [0, 1]$$

usando el teorema de Taylor, tenemos:

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(\theta), \quad \text{para algún } \theta \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Sabemos que $\phi(1) = f(v)$ y $\phi(0) = f(u)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi'(\theta) &= \langle f'(u + \theta(v - u)), v - u \rangle \\ &= \frac{1}{\theta}\langle f'(u + \theta(v - u)) - f'(u), v - u \rangle + \langle f'(u), v - u \rangle \\ &\geq \langle f'(u), v - u \rangle \\ \Rightarrow f(v) - f(u) &\geq \langle f'(u), v - u \rangle \\ \Rightarrow f(v) &\geq f(u) + \langle f'(u), v - u \rangle, \quad \forall u, v \in K. \quad \square \end{aligned} \tag{1.10}$$

La caracterización de minimización de las funciones diferenciables convexas de Gateaux, se da en el siguiente teorema.

Teorema 1.6.2. Sean V un espacio normado y $K \subseteq V$ un subconjunto convexo no vacío. Si $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable de Gateaux. Entonces $u \in k$:

$$f(u) = \inf_{v \in K} f(v)$$

si y sólo si $u \in K$:

$$\langle f'(u), v - u \rangle \geq 0, \forall v \in K.$$

Donde K es un subespacio, la inecuación anterior se reduce para una inecuación $u \in K$:

$$\langle f'(u), v \rangle = 0, \forall v \in K.$$

Definición 1.6.3. Sean U un espacio de Banach y $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funcional de clase $C^1(U, \mathbb{R})$ sobre V . Se dice que $u \in U$ es un punto crítico de F si $F'(u) \equiv 0$, es decir, si $F'(u)\varphi = 0, \forall \varphi \in U$.

Definición 1.6.4. Un número c es llamado valor crítico de F , si $F(u) = c$ para algún punto crítico $u \in U$, (esto es $P_c \neq \emptyset$). El conjunto de todos los puntos críticos en el nivel c , se define por

$$P_c = \{u \in U / F(u) = c, F'(u) = 0\}.$$

También definimos

$$A_s = \{u \in U / F(u) \leq s\}.$$

Los puntos críticos son importantes porque permite saber donde estas Hiper-superficies tienen valores máximos o mínimos.

1.7 Características de los Problemas No Lineales

De acuerdo a Dennis-Schnabel [1] las siguientes características deben tenerse en cuenta para desarrollar un algoritmo que resuelva un problema no lineal.

- El tamaño es un concepto que depende del procesador. Un problema se considera pequeño si tiene hasta 100 variables, mientras que si tiene entre

100 y 1000 variables se puede considerar mediano. Finalmente problemas grandes serán aquellos de más de 1000 variables. Claramente esta noción cambia a medida que cambia la tecnología.

Para problemas de gran tamaño existen algoritmos especiales que explotan la estructura del problema.

- La disponibilidad de las derivadas, cuando se sabe que las funciones que intervienen en el problema son continuamente diferenciables. Sin embargo las derivadas analíticas no están disponibles o son costosas de calcular. Para eso es necesario desarrollar algoritmos que trabajen en forma eficiente ante la ausencia de derivadas.
- La eficiencia es resolver el problema costoso donde las funciones que intervienen necesitan mucho tiempo de máquina para ser evaluadas y tal vez lugar de memoria para almacenar cálculos intermedios.
También puede suceder que para la resolución del problema se necesite resolver subproblemas sencillos relacionados con él.
Por lo tanto se necesitan desarrollar algoritmos que requieran pocas evaluaciones de funciones y sus derivadas, y que muestren rápida velocidad de convergencia.
- La precisión de los dígitos depende de la naturaleza del problema. En general se requieren más dígitos de los que se necesita para asegurar la convergencia del algoritmo, pero el punto es que la precisión requerida rara vez está cerca de la precisión de la máquina.
- La observación de un pobre escalamiento significa que los tamaños de las variables difieren considerablemente entre si. Si se ignora este fenómeno el comportamiento de un algoritmo para problemas no lineales se puede ver realmente afectado.

Entonces, tamaño del problema, eficiencia, precisión en la solución y escalamiento del problema son características que deben ser tenidas en cuenta en el desarrollo de un algoritmo que resuelve un problema no lineal, en particular los tres problemas mencionados al principio.

1.7.1 Método de Newton

Similar al caso unidimensional, el método más tradicional que se presenta es el método de Newton.

Dada una aproximación actual de x^* , con x_0 , se considera un modelo afín de $F(x)$ en un entorno de x_0 :

Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; $x \mapsto F(x) \in \mathbb{R}^n$ entonces $F'(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Supongamos que $F'(x_0)$ es no singular, se tiene

$$F(x) = F(x_0 + h) = F(x_0) + F'(x_0)h + R(x).$$

Denotemos por $M_0(h)$ a la suma $F(x_0) + F'(x_0)h$, $h \in \mathbb{R}^n$, es decir $M_0(h) = F(x_0) + F'(x_0)h$, donde $h = x - x_0$ y es llamado el paso de Newton obtenido de modo que $M_0(h) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} F'(x_0)h &= -F(x_0) \\ h &= -F'(x_0)^{-1}F(x_0) \\ x &= x_0 - F'(x_0)^{-1}F(x_0). \end{aligned}$$

Esta construcción nos permite establecer el algoritmo del método de Newton dado en el anexo I y siendo el algoritmo (1). También, hay que fijar el número máximo de iteraciones, para detener el proceso en caso que no haya suficiente progreso hacia x^* .

Ejemplo 1.7.1. *Consideremos*

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2 \\ e^{x-1} + y^3 - 2 \end{pmatrix}$$

Una solución es $x^* = (1 \ 1)^T$. Con $x_0 = (1.5 \ 2)^T$ tenemos

$$F'(x, y) = \nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ e^{x-1} & 3y^2 \end{pmatrix}$$

Luego

$$F'(x, y)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3y}{2(3xy - e^{x-1})} & -\frac{1}{3xy - e^{x-1}} \\ -\frac{e^{x-1}}{2y(3xy - e^{x-1})} & \frac{x}{y(3xy - e^{x-1})} \end{pmatrix}$$

por el método de Newton, haciendo $w_{n-1} = 3x_{n-1}y_{n-1} - e^{x_{n-1}-1}$

$$x_n = x_{n-1} - \begin{pmatrix} \frac{3y_{n-1}}{2w_{n-1}} & -\frac{1}{w_{n-1}} \\ -\frac{e^{x_{n-1}-1}}{2y_{n-1}w_{n-1}} & \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}w_{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2 - 2 \\ e^{x_{n-1}-1} + y_{n-1}^3 - 2 \end{pmatrix}$$

tabulando se muestra en la Tabla (1.1)

n	x_n	e_n
0	$x_0 = \begin{pmatrix} 1.5000000000000000 \\ 2.0000000000000000 \end{pmatrix}$	$e_0 = \ x_0 - x_*\ _\infty = 1.0000000000000000$
1	$x_1 = \begin{pmatrix} 0.80606920004709015 \\ 1.45794809996468233 \end{pmatrix}$	$e_1 = \ x_1 - x_*\ _\infty = 0.45794809996468233$
2	$x_2 = \begin{pmatrix} 0.89011927020523995 \\ 1.14557053209727622 \end{pmatrix}$	$e_2 = \ x_2 - x_*\ _\infty = 0.14557053209727622$
3	$x_3 = \begin{pmatrix} 0.99158914864004777 \\ 1.02105408396620123 \end{pmatrix}$	$e_3 = \ x_3 - x_*\ _\infty = 0.02105408396620123$
4	$x_4 = \begin{pmatrix} 0.99970847034838206 \\ 1.00053482580771580 \end{pmatrix}$	$e_4 = \ x_4 - x_*\ _\infty = 0.00053482580771580$
5	$x_5 = \begin{pmatrix} 0.99999982805353094 \\ 1.00000035721938252 \end{pmatrix}$	$e_5 = \ x_5 - x_*\ _\infty = 0.00000035721938252$
6	$x_6 = \begin{pmatrix} 0.99999999999991895 \\ 1.00000000000015965 \end{pmatrix}$	$e_6 = \ x_6 - x_*\ _\infty = 0.00000000000015965$

Tabla 1.1: Resultados del Método de Newton

1.7.2 Convergencia del Método de Newton

En el método de Newton, $F(x_0+h)$ es modelada por un modelo afín. Antes de enunciar el teorema de convergencia queremos hallar una cota para la diferencia entre $F(x_0+h)$ y el modelo $M_0(h)$. Para eso necesitamos una hipótesis de continuidad sobre la matriz $F'(x)$. Se debe tener presente la definición de la continuidad de Lipschitz. Se requiere el siguiente lema.

Lema 1.7.2. Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, continuamente diferenciable en un conjunto abierto y convexo $D \subset \mathbb{R}^n$. Sea $J \in Lip_\gamma(D)$ y considerando una norma vectorial y la correspondiente norma inducida, para todo $x + s \in D$ se tiene

$$\|F(x + s) - F(x) - J(x)s\| \leq \frac{\gamma}{2}\|s\|^2.$$

Prueba: Dado

$$\begin{aligned} F(x + s) - F(x) &= \int_0^1 J(x + st)s dt \\ F(x + s) - F(x) - J(x)s &= \int_0^1 J(x + st)s dt - J(x)s \\ &= \int_0^1 [J(x + st) - J(x)]s dt \end{aligned}$$

Tomando norma, usando propiedades de la integral, de la norma y del hecho que $J(x)$ es Lipschitz continua con constante γ en D se tiene

$$\begin{aligned} \|F(x + s) - F(x) - J(x)s\| &= \left\| \int_0^1 [J(x + st) - J(x)]s dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|J(x + st) - J(x)\| \|s\| dt \\ &\leq \gamma \int_0^1 \|st\| \|s\| dt \\ &\leq \frac{\gamma}{2} \|s\|^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 1.7.3 (Convergencia del Método de Newton). Sea $F : \Omega \subset X \rightarrow Y$, $X \subset \mathbb{R}^n$ abierto y convexo donde J es no singular. Asumiendo,

1. Existe $x^* \in \Omega$ tal que $F(x^*) = 0$.
2. Existe $\beta > 0$ tal que $\|J(x)^{-1}\| \leq \beta$, $\forall x \in \Omega$.
3. $F' \in Lip_\gamma(\Omega)$.

Entonces, si existe $\eta > 0$ tal que $\forall x_0 \in \Omega$ y $\|x_0 - x^*\| < \eta$, la sucesión $\{x_k\}$ generada por el algoritmo de Newton está bien definida y converge a x^* . Además

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \gamma\beta\|x_k - x^*\|^2$$

Prueba: Fue publicada en la revista de la universidad.

Significado de la constante $\gamma\beta$:

En la demostración del teorema se puede observar que el radio de la región de convergencia del método satisface

$$\epsilon \leq \frac{1}{2\gamma\beta} \quad (1.11)$$

La constante $\gamma\beta$ es una medida de la no linealidad relativa de F en x^* . Esto se deduce de

$$\begin{aligned} \|J(x^*)^{-1}[J(x) - J(x^*)]\| &\leq \|J(x^*)^{-1}\| \|J(x) - J(x^*)\| \\ &\leq \gamma\beta\|x - x^*\| \\ &\leq \gamma\beta\eta \\ &= a \end{aligned}$$

Observación 1.7.4. El teorema de convergencia nos dice que el radio de la región de convergencia es inversamente proporcional a la no linealidad relativa de F en x^* .

Observación 1.7.5. En práctica la expresión en (1.11) es una estimación del peor caso que muestra cuán lejos de x^* se extiende la región de convergencia del método. Si F es no lineal el radio será pequeño, mientras que si F es lineal la región de convergencia puede ser más grande.

Teorema 1.7.6 (Teorema de Kantorovich). Sean X y Y espacios de Banach y el operador no lineal, $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$, diferenciable Fréchet sobre un conjunto convexo abierto $D(x_0, r) \subset D_0 \subseteq \Omega$ y $x_0 \in D_0$, $J(x_0)$ no singular $J \in Lip_\gamma D(x_0, r)$ y que existen constantes $\beta, \eta > 0$ tal que

$$\|J(x_0)^{-1}F(x_0)\| \leq \eta, \quad a = \gamma\beta\eta.$$

Entonces

1. Si $\alpha \leq \frac{1}{2}$ y $r > r_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\alpha}}{\gamma\beta}$, entonces la sucesión generada por el método de Newton está bien definida y converge a x^* una única raíz de $F(x)$ en $N(x_0, r_0)$.

2. Si $\alpha < \frac{1}{2}$ entonces x^* es la única raíz de $F(x)$ en $N(x_0, r_1)$ donde $r_1 = \min \left\{ r, \frac{1 + \sqrt{1 - 2\alpha}}{\gamma\beta} \right\}$ y

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{\eta}{\alpha}(2\alpha)^k, \quad k \geq 0.$$

Comentario: La principal diferencia entre el teorema de Kantorovich y el teorema de convergencia 1.7.3 es que en el teorema 1.7.6 no se tiene ningún tipo de información acerca de la solución x^* y la no singularidad de $J(x^*)$. El precio que se paga por esa falta de información es que sólo se obtiene convergencia r-cuadrática y no se tiene información de la manera que mejora cada iteración.

1.7.3 Teorema de Punto Fijo

El método de Newton pertenece a una familia de métodos iterativos que satisfacen $x_{k+1} = G(x_k)$. El siguiente teorema establece condiciones sobre G bajo las cuales la sucesión $\{x_k\}$ converge q-linealmente a x^* desde un punto $x_0 \in D$. Además $x^* \in D$ es único tal que $G(x^*) = x^*$.

Teorema 1.7.7. Sea $G : D \rightarrow D$, $D \in \mathbb{R}^n$ cerrado. Si para alguna norma existe $\alpha \in [0, 1]$ tal que $\forall x, y \in D$:

$$\|G(x) - G(y)\| \leq \alpha \|x - y\|,$$

entonces:

1. Existe un único $x^* \in D$ tal que $G(x^*) = x^*$.
2. Para todo $x_0 \in D$ la sucesión $\{x_k\}$ generada por $x_{k+1} = G(x_k)$, permanece en D y converge q-linealmente a x^* con constante α .

3. Para todo η tal que $\|G(x_0) - x_0\| \leq \eta$ se cumple que

$$\|G(x_k) - x_k\| \leq \frac{\eta\alpha}{1-\alpha}, \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

1.8 Métodos Cuasi-Newton para Sistemas No Lineal

Una de las desventajas del método para sistemas no lineales es el cálculo de la matriz Jacobiana, lo que requiere una cantidad considerable de evaluaciones de funciones. En lo que sigue veremos dos estrategias, para evitar el cálculo de las derivadas.

1.8.1 Método de Newton con Diferencias Finitas

En el caso de una variable $f'(x)$ es aproximada por a , donde

$$a = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

y h es una cantidad tal que $|f'(x) - a| \approx O(h)$.

Para el caso n -dimensional es razonable aproximar la componente $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ por

$$a_{ij} = \frac{f_i(x + he_j) - f_i(x)}{h}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

donde e_j es el j -ésimo vector canónico. Esto es equivalente a aproximar la j -ésima columna de $J(x)$ por el vector

$$A_{.j} = \frac{F(x + he_j) - F(x)}{h}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Utilizando el lema 1.7.2 se puede probar fácilmente

$$\begin{aligned} \|A_{.j} - J(x)_{.j}\|_1 &\leq C_1|h| \\ \|A - J(x)\|_1 &\leq C_1|h|. \end{aligned}$$

Esto nos permite construir el algoritmo del método de Newton con diferencia finita dado en el anexo I y cuyo código del algoritmo (2).

Teorema 1.8.1 (Elección de h_k). Sean F , x^* , x_0 como en el teorema 1.7.3. Si $\{h_k\}$ es una sucesión de números reales tal que $0 < |h_k| \leq \eta$ para algún $\eta > 0$, la sucesión generada por el método de Newton con diferencias finitas hacia adelante converge a x^* q -linealmente. Además

1. Si $h_k \rightarrow 0$ la convergencia es q -superlineal.
2. Si existe $c_1 > 0$ tal que $|h_k| \leq c_1 \|x_k - x^*\|$ o equivalentemente si existe $c_2 > 0$ tal que $|h_k| \leq c_2 \|F(x_k)\|$ la convergencia es q -cuadrática.

Como en el caso de una variable este teorema no indica exactamente como elegir el tamaño del incremento h_k en la práctica.

Es claro que hay dos fuentes de error en conflicto.

- Si A_j es una aproximación de $J(x)_j$, el error es $O(|h|)$, esto sugiere tomar h .
- Sin embargo otro error que se introduce en el cálculo de A_j es causado al evaluar el numerador $F(x + he_j) - F(x)$. Este error, digamos δ es cada vez peor para valores pequeños de h . Al dividir por h el error en el cociente es $\frac{h}{\delta}$. El error δ que resulta de la inexactitud de los valores de F y de errores de cancelación, se supone que es una fracción de $\|F(x)\|$.

Entonces h debe elegirse de modo que exista un balance entre $O(|h|)$ y $O\left(\frac{\|F(x)\|}{|h|}\right)$ en la aproximación A_j de la j -ésima columna de $J(x)$.

Es razonable, que si $F(x)$ tiene t -dígitos confiables, entonces

$$F(x + he_j) - F(x)$$

debería diferir de $F(x)$ en la última mitad de estos dígitos. Más precisamente si el error relativo en el computo de $F(x)$ es η , entonces

$$\frac{\|F(x + he_j) - F(x)\|}{\|F(x)\|} \leq \sqrt{\eta}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

En ausencia de una mejor información para conseguir esto, es razonable perturbar cada componente x_j por su propio h_j . Usualmente se toma $h_j = \sqrt{\varepsilon_M} |x_j|, \forall j$.

Ejemplo 1.8.2. Sean

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 2 \\ e^{x_1-1} + x_2^3 - 2 \end{pmatrix}.$$

Una solución es $x^* = (1; 1)^T$. Aplicamos el algoritmo (2) dado, comenzando desde $x_0 = (1.5; 2)^T$ y $h_j = 10^{-7}|x_j|$, $j = 1, 2$. Tenemos la Tabla (1.2)

n	x_n	e_n
0	$x_0 = \begin{pmatrix} 1.5000000000000000 \\ 2.0000000000000000 \end{pmatrix}$	$e_0 = \ x_0 - x_*\ _\infty$ $= 1.0000000000000000$
1	$x_1 = \begin{pmatrix} 0.80606918855335619 \\ 1.45794816260888505 \end{pmatrix}$	$e_1 = \ x_1 - x_*\ _\infty$ $= 0.45794816260888505$
2	$x_2 = \begin{pmatrix} 0.89011919846188570 \\ 1.14557059900054492 \end{pmatrix}$	$e_2 = \ x_2 - x_*\ _\infty$ $= 0.14557059900054492$
3	$x_3 = \begin{pmatrix} 0.99158912749508554 \\ 1.02105411633138932 \end{pmatrix}$	$e_3 = \ x_3 - x_*\ _\infty$ $= 0.02105411633138932$
4	$x_4 = \begin{pmatrix} 0.99970846751379738 \\ 1.0005348300183325 \end{pmatrix}$	$e_4 = \ x_4 - x_*\ _\infty$ $= 0.0005348300183325$
5	$x_5 = \begin{pmatrix} 0.99999982799620535 \\ 1.00000035729197911 \end{pmatrix}$	$e_5 = \ x_5 - x_*\ _\infty$ $= 0.00000035729197911$
6	$x_6 = \begin{pmatrix} 0.99999999999988431 \\ 1.00000000000020428 \end{pmatrix}$	$e_6 = \ x_6 - x_*\ _\infty$ $= 0.00000000000020428$

Tabla 1.2: Resultados del Método Cuasi-Newton

1.8.2 Método Secante para Sistemas No Lineales

Recordemos que el método de Newton aplicado a $F(x) = 0$, en cada iteración resuelve un sistema lineal

$$F'(x_c)s_c = -F(x_c),$$

si la solución de este sistema es x_c , el nuevo iterado es

$$x_+ = x_c + s_c.$$

La iteración de Newton proviene de aproximar $F(x)$ por el modelo lineal alrededor del iterado actual x_c , esto es

$$M_c(x) = F(x_c) + F'(x_c)(x_+ - x_c).$$

Una desventaja del método de Newton es el cálculo de $F'(x_c)$. Por otra parte, si la matriz Jacobiana es aproximada utilizando diferencias finitas, nos encontramos con el inconveniente de tener que efectuar n^2 evaluaciones de funciones.

Entonces, ¿es posible aproximar $F'(x_c)$ o su inversa, cuando éstas no están disponibles, sin efectuar evaluaciones de funciones?

Recordemos que en el método de la secante para el caso unidimensional, considerábamos los dos últimos iterados x_c, x_+ y el modelo afín que aproxima f en un entorno de x_+ ,

$$m_+(x) = f(x_+) + a_+(x - x_+),$$

donde

$$a_+ = \frac{f(x_+) - f(x_c)}{x_+ - x_c}.$$

Observamos:

$$m_+(x_+) = f(x_+), \tag{1.12}$$

$$m_+(x_c) = f(x_c), \tag{1.13}$$

$$m_+(x_{++}) = 0. \tag{1.14}$$

El precio que se paga por esta aproximación es que se pierde la rápida convergencia cuadrática, obteniéndose sólo convergencia de orden $p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618033989$.

Para el caso $n > 1$, se procede en forma similar. Consideremos $x_c, x_+ \in \mathbb{R}^n$. El modelo lineal

$$M_+(x) = F(x_+) + A_+(x - x_+), \tag{1.15}$$

satisface $M_+(x_+) = F(x_+)$ y exigimos que A_+ sea tal

$$M_+(x_c) = F(x_c), \tag{1.16}$$

entonces de (1.15) y (1.16):

$$\begin{aligned} M_+(x_c) &= F(x_+) + A_+(x_c - x_+) \\ F(x_c) &= F(x_+) + A_+(x_c - x_+) \\ A_+(x_+ - x_c) &= F(x_+) - F(x_c). \end{aligned}$$

Dado que $x_+ - x_c = s_c$ es el paso; definiendo $y_c = F(x_+) - F(x_c)$ se tiene la ecuación de la secante

$$A_+ s_c = y_c. \quad (1.17)$$

Este es un sistema de n ecuaciones y n^2 incógnitas, las entradas de la matriz $A_+ \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Por lo tanto, no se tiene una solución única.

¿Cómo hallar una matriz A_+ ?

Dado que en la iteración actual no se tiene ninguna información acerca de la matriz Jacobiana o del modelo, hay que conservar la información que se tiene de las iteraciones previas. Por lo tanto el objetivo es:

Elegir A_+ tratando de minimizar el cambio en el modelo lineal satisfaciendo la ecuación de la secante.

Teorema 1.8.3. Sean $x_c, x_+ \in \mathbb{R}^n$ tal que $A_+ s_c = y_c$, entonces

$$M_+(x) - M_c(x) = (A_+ - A_c)(x - x_c), \quad \forall x \in \varepsilon(x_+).$$

Prueba:

$$\begin{aligned} M_+(x) - M_c(x) &= F(x_+) + A_+(x - x_+) - (F(x_c) + A_c(x - x_c)) \\ &= F(x_+) - F(x_c) + A_+ x - A_+ x_+ - A_c x + A_c x_c + A_+ x_c - A_+ x_c \\ &= F(x_+) - F(x_c) - A_+(x_+ - x_c) + A_+(x - x_c) - A_c(x - x_c) \\ &= y_c - A_+ s_c + (A_+ - A_c)(x - x_c) \\ &= (A_+ - A_c)(x - x_c). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ahora bien, dado $x \in \mathbb{R}^n$, $x - x_c$ se puede descomponer de manera única como

$$x - x_c = \alpha s_c + n, \quad \alpha \neq 0,$$

con $s_c^T n = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
 M_+(x) - M_c(x) &= (A_+ - A_c)(x - x_c) \\
 &= (A_+ - A_c)(\alpha s_c + n) \\
 &= \alpha(A_+ - A_c)s_c + (A_+ - A_c)n \\
 &= \alpha(y_c - A_c s_c) + (A_+ - A_c)n.
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

En la ecuación (1.18), el primer sumando involucra información conocida, luego para que el cambio en el modelo afín, al pasar de una iteración a otra, sea mínima en un entorno del iterado actual x_+ se debe elegir A_+ de modo que

$$\begin{cases} (A_+ - A_c)n = 0 \\ s_c^T n = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto A_+ no debe diferir de A_c en el complemento ortogonal del subespacio generado por la dirección del paso s_c . Esto significa que $A_+ - A_c$ debe ser una matriz de rango 1. Luego existe un par de vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{aligned}
 A_+ - A_c &= uv^T \\
 A_+ &= A_c + uv^T.
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

¿Cuáles son los vectores u y v ?

Determinamos u . En (1.19), calculamos

$$\begin{aligned}
 A_+ s_c &= A_c s_c + (uv^T)s_c \\
 &= A_c s_c + u(v^T s_c) \\
 y_c - A_c s_c &= u(v^T s_c)
 \end{aligned}$$

Luego

$$u = \frac{y_c - A_c s_c}{v^T s_c}. \tag{1.20}$$

Conclusión: Todas las actualizaciones o correcciones secantes de A_c están dadas por

$$A_+ = A_c + \frac{(y_c - A_c s_c)v^T}{v^T s_c}, \tag{1.21}$$

ver (1.19), para alguna elección de $v \neq 0$.

1.8.3 Método de Broyden

Si en (1.21) se elige v como el paso s_c , se tiene la actualización de Broyden

$$A_+ = A_c + \frac{(y_c - A_c s_c) s_c^T}{s_c^T s_c}. \quad (1.22)$$

La cual permite definir el método de Broyden que es quizá después del método de Newton el método más popular para resolver sistemas no lineales de ecuaciones algebraicas.

¿Qué significa el término actualizar?

Actualizar la matriz indica que no se está aproximando $F'(x_+)$ ignorando $F'(x_c)$, sino que la aproximación A_c de $F'(x_c)$ está siendo corregida de modo que A_+ sea una aproximación de $F'(x_+)$.

Como $\langle s_c, n \rangle = 0$, si S es el subespacio generado por s_c , esto es $S = \text{gen}\{s_c\}$, y siendo $\langle A_+ - A_c, n \rangle = 0$, entonces $(A_+ - A_c) \in S$. Pero S es unidimensional, por lo tanto $A_+ - A_c$ debe ser una matriz de rango 1. Luego debe existir un par de vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ tal que $A_+ - A_c = uv^T$; en efecto si $u = (u_1; u_2; u_3)^T$, $v = (v_1; v_2; v_3)^T$, entonces

$$uv^T = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix},$$

y vemos que $\text{rango}(uv^T) = 1$.

Así:

$$A_+ = A_c + uv^T.$$

Establecemos el algoritmo del método de Broyden dado en el anexo I y siendo el algoritmo (3) dado. El método trabaja bien localmente como garantiza el siguiente teorema.

Teorema 1.8.4 (convergencia del método de Broyden). *Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Bajo la hipótesis del teorema de convergencia del método de Newton. Si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es próximo a x^* (esto es $\|x_0 - x^*\|_2 \leq \delta$ para algún $\delta > 0$) y A_0 próxima a $F'(x^*)$, la sucesión $\{x_k\}$ generada por el método de Broyden converge a x^* q-superlinealmente.*

Que A_0 sea próxima a $F'(x^*)$ significa que en la norma l_2 , $\|A_0 - F'(x^*)\|_2 \leq \eta$, para algún $\eta > 0$.

Usualmente en práctica se elige $A_0 = I$, $A_0 = D$ (matriz diagonal) o bien $A_0 = F'(x_0)$ (ya sea analítica o calculada por diferencias finitas).

Ejemplo 1.8.5. Consideremos

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 2 \\ e^{x_1-1} + x_2^3 - 2 \end{pmatrix}.$$

Una solución es $x^* = (1; 1)^T$. Aplicamos el algoritmo (3), comenzando desde $x_0 = (1.5; 2)^T$ con $A_0 = J(x_0)$. Como se muestra en la Tabla (1.3)

n	x_n	e_n
0	$x_0 = \begin{pmatrix} 1.5000000000000000 \\ 2.0000000000000000 \end{pmatrix}$	$e_0 = \ x_0 - x^*\ _\infty = 1.0000000000000000$
1	$x_1 = \begin{pmatrix} 0.80606920004709015 \\ 1.45794809996468233 \end{pmatrix}$	$e_1 = \ x_1 - x^*\ _\infty = 0.45794809996468233$
2	$x_2 = \begin{pmatrix} 0.74107409443448291 \\ 1.27706713004655947 \end{pmatrix}$	$e_2 = \ x_2 - x^*\ _\infty = 0.27706713004655947$
3	$x_3 = \begin{pmatrix} 0.80227866409619397 \\ 1.15990043005029175 \end{pmatrix}$	$e_3 = \ x_3 - x^*\ _\infty = 0.19772133590380603$
4	$x_4 = \begin{pmatrix} 0.92947014324475741 \\ 1.07040623463282158 \end{pmatrix}$	$e_4 = \ x_4 - x^*\ _\infty = 0.07052985675524259$
5	$x_5 = \begin{pmatrix} 1.00402553285980733 \\ 1.00960905929482303 \end{pmatrix}$	$e_5 = \ x_5 - x^*\ _\infty = 0.00960905929482303$
6	$x_6 = \begin{pmatrix} 1.00308377650537794 \\ 0.99922128692012657 \end{pmatrix}$	$e_6 = \ x_6 - x^*\ _\infty = 0.00308377650537794$
7	$x_7 = \begin{pmatrix} 1.00054267542984210 \\ 0.99968545591629254 \end{pmatrix}$	$e_7 = \ x_7 - x^*\ _\infty = 0.00054267542984210$
8	$x_8 = \begin{pmatrix} 0.99999818269508567 \\ 1.00000000388837984 \end{pmatrix}$	$e_8 = \ x_8 - x^*\ _\infty = 0.00000181730491433$
9	$x_9 = \begin{pmatrix} 0.99999998846129678 \\ 0.9999999954397889 \end{pmatrix}$	$e_9 = \ x_9 - x^*\ _\infty = 0.00000001153870322$
10	$x_{10} = \begin{pmatrix} 0.9999999999474365 \\ 0.999999999997824 \end{pmatrix}$	$e_{10} = \ x_{10} - x^*\ _\infty = 0.00000000000525635$
11	$x_{11} = \begin{pmatrix} 1.00000000000000200 \\ 1.0000000000000000 \end{pmatrix}$	$e_{11} = \ x_{11} - x^*\ _\infty = 0.00000000000000200$

Tabla 1.3: Resultados del Método de Broyden

2 TEOREMA KANTOROVICH Y MÉTODO ITERATIVO DE CHEBYSHEV

*No puedo enseñar nada a nadie.
Solo puedo hacerles pensar.
Sócrates*

En este capítulo mostramos el teorema más importante y de gran utilidad para la solución de los sistemas de ecuaciones no lineales, el cual viene a ser el eje principal para las comparaciones con los nuevos métodos que existen y los que más adelante serán creados, vislumbrando un mejor futuro para el estudio de la matemática.

Luego vamos a trabajar exhaustivamente el método iterativo de Chebyshev (ver [7]) para un mejor entendimiento se detallarán las demostraciones, y mostrar algunos ejemplos.

2.1 Introducción

En este estudio nos preocupamos por el problema de la aproximación de una solución única a nivel local x^* de la ecuación

$$F(x) = 0 \tag{2.1}$$

donde F es un operador dos veces diferenciable Fréchet $F : D \subset U \rightarrow V$, donde D es un subconjunto convexo; U y V son espacio de Banach.

El método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \quad n \geq 0, \quad x_0 \in D \tag{2.2}$$

Se ha utilizado por muchos autores (ver [2], [8], [9] y [10]) para generar una sucesión $\{x_n\}_{n \geq 0}$ convergente a x^* . En particular, las siguientes condiciones se han utilizado.

Condición A: Sea $F : D \subseteq U \rightarrow V$ es diferenciable Fréchet sobre D , $F'(x_0)^{-1} \in L(V, U)$ para algún $x_0 \in D$, donde $L(V, U)$ es el conjunto de operadores

lineales acotados de V en U , y asumiendo

$$\|F'(x_0)^{-1}[F'(x) - F'(y)]\| \leq l\|x - y\|, \quad \forall x, y \in D \quad (2.3)$$

$$\|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| \leq a \quad (2.4)$$

y

$$2la \leq 1 \quad (2.5)$$

Sobre la condición A, se puede obtener el error estimado, la existencia y la unicidad de solución de las regiones, y saber si x_0 es una condición inicial contenido en dicha región, es decir, el método de Newton (2.2) a partir de x_0 converge a x^* . Pero a veces cuando queremos determinar si la iteración de Newton (2.2) a partir de x_0 converge, la condición A sería.

Ejemplo 2.1.1. Sea $U = V = \mathbb{R}$, $D = [\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1]$, $x_0 = \sqrt{2}$ y define el polinomio real F sobre D por

$$F(x) = \frac{1}{6}x^3 - \alpha, \quad \alpha = \frac{2^{3/2}}{6} + 0.23. \quad (2.6)$$

Veamos si la condición x_0 determina la convergencia del método de Newton.

Solución: Usando (2.3), se tiene:

$$\begin{aligned} \|F'(x_0)^{-1}[F'(x) - F'(y)]\| &= \left\| \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2}{\frac{1}{2}x_0^2} \right\| \\ &\leq \left\| \frac{x + y}{x_0^2} \right\| \|x - y\| \\ &\leq (\sqrt{2} + 1)\|x - y\| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow l = \sqrt{2} + 1 = 2.414213562.$$

Donde por (2.4), se tiene:

$$\begin{aligned} \|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| &= \left\| \frac{\frac{1}{6}x_0^3 - \alpha}{\frac{1}{2}x_0^2} \right\| = \left\| \frac{\frac{1}{6}x_0^3 - \frac{2^{3/2}}{6} - 0.23}{\frac{1}{2}x_0^2} \right\| \\ &= \|-0.23\| = 0.23 = a. \end{aligned}$$

Veamos si se satisface (2.5):

$$2al = 2(0.23)(2.414213562) = 1.110535256 > 1.$$

Entonces sobre la condición A no podemos determinar la convergencia del método de Newton (2) a partir de $x_0 = \sqrt{2}$. ♦

Es decir, tenemos que introducir una nueva condición y un nuevo teorema sobre el método de Newton para que converja con la condición $x_0 = \sqrt{2}$ del ejemplo anterior. De ahora en adelante asumiremos:

Condición B: Sea $F : D \subseteq U \rightarrow V$ es dos veces diferenciable Fréchet sobre D , con $F'(x) \in L(U, V)$, $F''(x) \in L(U, L(U, V))$ ($x \in D$), $F'(x_0)^{-1}$ existe para algún $x_0 \in D$, y asumimos

$$0 < \|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| \leq a \quad \text{y} \quad \|F'(x_0)^{-1}F''(x_0)\| \leq b \quad (2.7)$$

$$\|F'(x_0)^{-1}[F'(x) - F'(x_0)]\| \leq c\|x - x_0\|, \quad c > 0 \quad (2.8)$$

$$\|F'(x_0)^{-1}[F''(x) - F''(x_0)]\| \leq d\|x - x_0\|, \quad \forall x \in D \quad (2.9)$$

y

$$2La \leq 1 \quad (2.10)$$

donde sea

$$L = \max\{c, b + 2ad\} \quad (2.11)$$

o, si la función

$$f(t) = t^3 - 2bt^2 - (2d - b^2)t + 2d(b + ad) \quad (2.12)$$

tiene dos raíces positivas r_1 y r_2 tal que:

$$[b, b + 2ad] \subseteq [r_1, r_2] \quad (2.13)$$

entonces $L \geq c$ y

$$L \in [b, b + 2ad] \quad (2.14)$$

Ejemplo 2.1.2. Sean $U = V = \mathbb{R}$, $\Omega = [\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1]$, $x_0 = \sqrt{2}$ y definimos el polinomio real F sobre Ω por:

$$F(x) = \frac{1}{6}x^3 - \alpha, \quad \alpha = \frac{2^{3/2}}{6} + 0.23.$$

Entonces x_0 determina la convergencia del método de Newton.

Solución: Usando (2.7), se tiene:

$$\begin{aligned} 0 < \|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| &= \left\| \frac{\frac{1}{6}x_0^3 - \frac{2^{3/2}}{6} - 0.23}{\frac{1}{2}x_0^2} \right\| \\ &= |-0.23| = 0.23 \leq a. \end{aligned}$$

Entonces tomamos $a = 0.23$, donde

$$\|F'(x_0)^{-1}F''(x_0)\| = \left\| \frac{x_0}{\frac{1}{2}x_0^2} \right\| = \sqrt{2} \leq b,$$

sea $b = \sqrt{2}$, luego de (2.8), se tiene:

$$\begin{aligned} \|F'(x_0)^{-1}[F'(x) - F'(x_0)]\| &= \left\| \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x_0^2}{\frac{1}{2}x_0^2} \right\| \\ &\leq \left\| \frac{x + x_0}{x_0^2} \right\| \|x - x_0\|, \end{aligned}$$

con $\left\| \frac{x + x_0}{x_0^2} \right\| \leq \left\| \frac{\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}}{2} \right\| = 1.914213562$, consideramos $c = 1.914213562$, además de (2.9), se tiene:

$$\|F'(x_0)^{-1}[F''(x) - F''(x_0)]\| \leq \left\| \frac{2}{x_0^2} \right\| \|x - x_0\| = \|x - x_0\|,$$

hacemos $d = 1$, y de (2.11), se obtiene:

$$\begin{aligned} L &= \max\{1.914213562, \sqrt{2} + 2(0.23)(1)\} \\ &= \max\{1.914213562, 1.874213562\} = 1.914213562. \end{aligned}$$

Luego de (2.10), se tiene:

$$\begin{aligned} 2La &= 2(1.914213562)(0.23) \\ &= 0.8805382385 < 1, \end{aligned}$$

o, de (2.12), si la función:

$$\begin{aligned} f(t) &= t^3 - 2\sqrt{2}t^2 - (2(1) - \sqrt{2}^2)t + 2(1)(\sqrt{2} + 0.23(1)) \\ &= t^3 - 2.828427125t^2 + 3.28847125, \end{aligned}$$

resolviendo se tiene dos raíces reales positivos $r_1 = 1.73123$ y $r_2 = 2.03199$ de (2.13), se obtiene:

$$[\sqrt{2}; \sqrt{2} + 0.46] \not\subseteq [1.73123; 2.03199]$$

$$[1.414213562; 1.874213562] \not\subseteq [1.73123; 2.03199]$$

entonces $L = 1,914213562 \geq c = 1,914213562$ y de (2.11), se tiene:

$$1,914213562 \notin [1,414213562; 1,874213562]. \blacklozenge$$

Así, cumplido (2.12) vemos que la condición B determina la convergencia del método de Newton (2.2) a partir de $x_0 = \sqrt{2}$ con la primera parte, ya que la segunda parte no satisface.

2.2 Análisis de Convergencia

En el Análisis de convergencia necesitamos los lemas:

Lema 2.2.1. Sean a, L constantes positivos dados. Definimos el polinomio real p sobre $[0, \infty)$ por:

$$p(t) = \frac{L}{2}t^2 - t + a \quad (2.15)$$

y la sucesión $\{t_n\}_{n \geq 0}$ por

$$t_0 = 0 \quad (2.16)$$

$$t_{n+1} = t_n - \frac{p(t_n)}{p'(t_n)} \quad (2.17)$$

Asumimos

$$2La \leq 1 \quad (2.18)$$

Entonces la ecuación

$$p(t) = 0 \quad (2.19)$$

tiene dos raíces positivas r_1, r_2 con $r_1 \leq r_2$ y la sucesión $\{t_n\}_{n \geq 0}$ generado por (2.16)-(2.17) es tal que $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < r_1$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = r_1$.

Prueba: Usando (2.15) y (2.18) deducimos que la ecuación $p(t) = 0$ tiene dos raíces positivas

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2La}}{L} \quad y \quad r_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2La}}{L} \quad (2.20)$$

con $r_1 \leq r_2$. Además, la función $t - \frac{p(t)}{p'(t)}$ es creciente en $[0, r_1]$, siendo $p'(t) < 0$, $p''(t) > 0$ y $p(t) > 0$ en $[0, r_1]$. Donde para todo $t_n \in [0, r_1]$ valores interiores o iguales a n , entonces obtenemos:

$$S = \{n \in \mathbb{N} / t_n \text{ es creciente con } t_n \leq r_1, \forall n \geq 0\},$$

por inducción matemática, tenemos:

Para $n = 0$, se tiene, como $p(t_0) > 0$ y $p'(t_0) < 0$, entonces $-\frac{p(t_0)}{p'(t_0)} > 0$, luego

$$t_0 < t_0 + a = t_0 - \frac{p(t_0)}{p'(t_0)} = t_1 < r_1.$$

Por la hipótesis inductiva con $n = m$, tenemos:

$$t_m < t_{m+1} < r_1.$$

Luego para $n = m + 1$, tenemos

$$t_{m+1} < t_{m+1} - \frac{p(t_{m+1})}{p'(t_{m+1})} = t_{m+2} < r_1 - \frac{p(r_1)}{p'(r_1)} = r_1,$$

así, $S = \mathbb{N}$

Por tanto,

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n < r_1 \text{ con } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = r_1. \blacksquare$$

Los conjuntos

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in Y / \|x - x_0\| \leq r\}$$

y

$$B(x_0, r) = \{x \in X / \|x - x_0\| < r\}$$

Lema 2.2.2. *Las estimaciones siguientes son verdaderos para $x \in B(x_0, 1/c)$:*

$$\|F'(x)^{-1}F'(x_0)\| \leq (1 - c\|x - x_0\|)^{-1} \quad (2.21)$$

y

$$\|F'(x_0)^{-1}F''(x)\| \leq b + d\|x - x_0\|. \quad (2.22)$$

Prueba: *Si $x \in B(x_0, 1/c)$, usando (2.8), estimamos*

$$\|F'(x_0)^{-1}[F'(x) - F'(x_0)]\| \leq c\|x - x_0\| < 1,$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} -\|F'(x_0)^{-1}F'(x)\| + 1 &\leq \|F'(x_0)^{-1}[F'(x) - F'(x_0)]\| \\ &\leq c\|x - x_0\| \end{aligned}$$

$$\|F'(x_0)^{-1}F'(x)\| \geq 1 - c\|x - x_0\|,$$

y

$$\|F'(x)^{-1}F'(x_0)\| \leq \frac{1}{1 - c\|x - x_0\|}.$$

Como por (2.9)

$$\|F'(x_0)^{-1}[F''(x) - F''(x_0)]\| \leq d\|x - x_0\|.$$

Tenemos:

$$-b + \|F'(x_0)^{-1}F''(x)\| \leq \|F'(x_0)^{-1}[F''(x) - F''(x_0)]\|$$

y usando la desigualdad en (2.7)

$$-b + \|F'(x_0)^{-1}F''(x)\| \leq d\|x - x_0\|$$

$$\|F'(x_0)^{-1}F''(x)\| \leq b + d\|x - x_0\|. \quad \blacksquare$$

Ahora podemos probar el siguiente resultado semilocal relativo a la convergencia del método de Newton (2.2).

Teorema 2.2.3. *Sea F el operador definido en (2.1). Sea p el polinomio definido en (2.15). Supongamos que $B(x_0, 1/c) \subseteq D$ y cumple la condición B. Entonces la sucesión $\{x_n\}_{n \geq 0}$ generado por (2.2) está bien definido, sigue en $\overline{B}(x_0, r_1)$, $\forall n \geq 0$, y converge para una solución $x^* \in \overline{B}(x_0, r_1)$ de la ecuación $F(x) = 0$, que es única en $B(x_0, r_2)$ si $r_1 < r_2$. Si $r_1 = r_2$ la solución x^* es única en $\overline{B}(x_0, r_1)$. Además las siguientes estimaciones cumplen para todo $n \geq 0$.*

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n \quad (2.23)$$

y

$$\|x_n - x^*\| \leq r_1 - t_n = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2^n} (r_2 - t_n) \quad (2.24)$$

donde r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación cuadrática $p(t) = 0$ dado por (2.20)

Prueba: Sea $F(x) = 0$.

Donde

$$p(t) = \frac{L}{2}t^2 - t + a$$

con

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2La}}{L}, \quad r_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2La}}{L}.$$

Además Ω es un conjunto convexo con $B\left(x_0, \frac{1}{c}\right) \subseteq \Omega$, considerando (2.2)

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n), \quad \forall n \geq 0, \quad x_0 \in B,$$

sea

$$S = \{n \in \mathbb{N} / \|x_{n+1} - x_n\| < t_{n+1} - t_n, \quad \forall n \geq 0\},$$

veamos que $S = \mathbb{N}$, usaremos inducción matemática, se tiene:

Para $n = 0$, usando la definición de x_1 :

$$x_1 = x_0 - F'(x_0)^{-1}F(x_0),$$

entonces usando la condición B ,

$$\|x_1 - x_0\| = \|-F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| \leq a = t_1 - t_0 < r_1.$$

De ello se deduce que $x_1 \in \overline{B}(x_0, r_1)$ y (2.23) es válido.

Por la hipótesis inductiva para $n = m$, se cumple:

$$\begin{aligned} \|x_m - x_{m-1}\| &= \|-F'(x_{m-1})^{-1}F(x_{m-1})\| \\ &\leq a_{m-1} = t_m - t_{m-1} < r_1, \end{aligned}$$

entonces

$$x_m \in \overline{B}(x_{m-1}, r_1) \subset \overline{B}(x_0, r_1).$$

Luego para $n = m + 1$, se tiene:

$$\begin{aligned} \|x_{m+1} - x_m\| &= \|-F'(x_m)^{-1}F(x_m)\| \\ &\leq a_m = t_{m+1} - t_m < r_1, \end{aligned}$$

por hipótesis inductiva ya que $x_m \in \overline{B}(x_0, r_1)$, se tiene

$$x_{m+1} \in \overline{B}(x_m, r_1) \subset \overline{B}(x_0, r_1),$$

y $S = \mathbb{N}$. por lo tanto

$$\|x_{m+1} - x_n\| \leq \|t_{n+1} - t_n, \quad \forall n \geq 0.$$

Ahora, de (2.2): $-F(x_i) - F'(x_i)(x_{i+1} - x_i) = 0$, luego

$$\begin{aligned} F'(x_0)^{-1}F(x_{i+1}) &= F'(x_0)^{-1}[F(x_{i+1}) - 0] \\ &= F'(x_0)^{-1}[(x_i - x_{i+1})F'(x_i) + F(x_{i+1}) - F(x_i)] \end{aligned}$$

haciendo $w = x_i + t(x_{i+1} - x_i)$ donde si $t \rightarrow 0$ entonces $w \rightarrow x_i$ y si $t \rightarrow 1$ entonces $w \rightarrow x_{i+1}$, tenemos:

$$\begin{aligned} F'(x_0)^{-1}F(x_{i+1}) &= F'(x_0)^{-1} \left[x_{i+1}F'(w) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - wF'(w) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} F'(w)dw \right] \\ &= F'(x_0)^{-1} \left[x_{i+1}F'(w) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} wF''(w)dw \right] \\ &= F'(x_0)^{-1} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - w)F''(w)dw \right], \end{aligned}$$

volviendo a la variable inicial de t y donde $z = x_{i+1} - x_i$, obtenemos:

$$\begin{aligned} F'(x_0)^{-1}F(x_{i+1}) &= F'(x_0)^{-1} \left\{ z^2 \left[\int_0^1 F''(x_i + tz)(1-t)dt - \frac{1}{2}F''(x_0) + \frac{1}{2}F''(x_0) \right] \right\} \\ &= F'(x_0)^{-1} \left\{ z^2 \left[\int_0^1 G(t)(1-t)dt + \frac{1}{2}F''(x_0) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

con $G(t) = F''(x_i + tz) - F''(x_0)$. Usando inducción matemática para

$$S = \{n \in \mathbb{N} / \|x_{n+1} - x_0\| \leq t_{n+1} - t_0 < r_1, \forall n \geq 0\}.$$

Para $n = 0$ se tiene:

$$\|x_1 - x_0\| \leq t_1 - t_0 = t_1 \leq r_1.$$

Luego por la hipótesis inductivo cuando $n = m$ se tiene:

$$\|x_m - x_0\| \leq t_m - t_0 = t_m < r_1,$$

como $n = m + 1$ se tiene:

$$\begin{aligned} \|x_{m+1} - x_0\| &\leq \|x_{m+1} - x_m\| + \|x_m - x_0\| \\ &\leq t_{m+1} - t_m + t_m - t_0 \\ &\leq t_{m+1} - t_0 \leq t_{m+1} < r_1, \end{aligned}$$

luego $S = \mathbb{N}$.

Por tanto, $\|x_{n+1} - x_0\| < t_{n+1} - t_0 < r_1$, y

$$\begin{aligned} \|x_{i+1} - x_0\| &\leq \|x_i - t(x_{i+1} - x_i) - x_0\| \\ &\leq \|x_i - x_0\| - t(\|x_{i+1} - x_0\| - \|x_i - x_0\|) \\ &\leq t_i - t(t_{i+1} - t_i) < r_1. \end{aligned}$$

De (2.7), (2.9), (2.15), (2.22), (2.23) y (2.25) tenemos:

$$\begin{aligned} \|F'(x_0)^{-1}F(x_{i+1})\| &= \left\| \left[\int_0^1 G(t)(1-t)dt + \frac{1}{2}F''(x_0) \right] z^2 F'(x_0)^{-1} \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|G(t)F'(x_0)^{-1}\| (1-t)\|z\|^2 dt + \frac{1}{2} \|F'(x_0)^{-1}F''(x_0)\| \|z\|^2 \\ &\leq \left\{ \int_0^1 d(\|x_i - x_0\| + t\|z\|) (1-t)dt + \frac{1}{2}b \right\} \|z\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \left[b + d\|x_i - x_0\| + \frac{d}{3}\|z\| \right] \|z\|^2 \\ &\leq \left[b + dt_i + \frac{d}{3}(t_{i+1} - t_i) \right] \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2} \\ &\leq \frac{1}{2} \left[b + \frac{2}{3}dt_i + \frac{d}{3}t_{i+1} \right] (t_{i+1} - t_i)^2 \\ &\leq \frac{1}{2} [b + dr_1] (t_{i+1} - t_i)^2 \\ &\leq \frac{k}{2} (t_{i+1}^2 - 2t_it_{i+1} + t_i^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|F'(x_0)^{-1}F(x_{i+1})\| &\leq \frac{k}{2}t_{i+1}^2 - kr_1t_{i+1} + \frac{k}{2}r_1^2 \\ &\leq \frac{k}{2}t_{i+1}^2 - t_{i+1} + \frac{1}{2k}, \text{ con } 0 < r_1 < \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Luego

$$\|F'(x_0)^{-1}F(x_{i+1})\| \leq \frac{k}{2}t_{i+1}^2 - t_{i+1} + a = p(t_{i+1}). \quad (2.26)$$

Por (2.2), (2.17), (2.21) y (2.26) obtenemos

$$\|x_{i+2} - x_{i+1}\| \leq -\frac{p(t_{i+1})}{p'(t_{i+1})} = t_{i+2} - t_{i+1},$$

donde se aprecia (2.23), $\forall n \geq 0$.

Por el lema (2.2.1) y la estimación (2.23) se desprende que $\{x_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach U , por lo que converge a algún límite $x^* \in \overline{B}(x_0, r_1)$ (donde $\overline{B}(x_0, r_1)$ es un conjunto cerrado).

Por (2.2) y la continuidad de F , tenemos $F(x^*) = 0$. Para probar la unicidad sea $y \in B(x_0, r_2)$ tal que $F(y) = 0$. Usando (2.2) obtenemos:

$$\begin{aligned} y - x_{n+1} &= y - x_n + F'(x_n)^{-1}F(x_n) \\ &= F'(x_n)^{-1}F(x_n) \\ &= F'(x_n)^{-1}F(x_n) \cdot F'(x_0)^{-1}F'(x_0) \\ &= F'(x_n)^{-1}F'(x_0) \cdot F'(x_0)^{-1}F'(x_n), \end{aligned}$$

Se concluye:

$$\begin{aligned} y - x_{n+1} &= \left\{ \int_0^1 [F''(x_n + t(y - x_n)) - F''(x_0)](1 - t)dt + \right. \\ &\quad \left. \int_0^1 F''(x_0)(1 - t)dt \right\} F'(x_0)^{-1}(y - x_n)^2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Como en (2.25) y (2.26) tenemos $\|y - x_0\| \leq r_1 - t_0$ si $y \in \overline{B}(x_0, r_1)$, y

$$\|y - x_n\| \leq \lambda(r_2 - t_n), \quad a < \lambda < 1,$$

si $y \in B(x_0, r_2)$. Es decir, como en (2.25) y (2.26) tenemos $\|y - x_n\| \leq r_1 - t_n$ si $y \in \overline{B}(x_0, r_1)$ ($n \geq 0$), y $\|y - x_n\| \leq \lambda^{2^n}(r_2 - t_n)$ si $y \in B(x_0, r_2)$ ($n \geq 0$). Donde

$$S = \{n \in \mathbb{N} / \|y - x_n\| \leq \lambda^{2^n}(r_2 - t_n), \forall n \geq 0\}.$$

Veamos por inducción matemática.

Cuando $n = 0$:

$$\|y - x_0\| \leq (r_1 - t_0) \leq \lambda(r_2 - t_0) = \lambda^{2^0}(r_2 - t_0).$$

Por la hipótesis inductiva para $n = m$:

$$\|y - x_m\| \leq \lambda^{2^m}(r_2 - t_0).$$

Luego $n = m + 1$:

$$\|y - x_{m+1}\| \leq \lambda^{2^m}(r_1 - t_0) \leq \lambda^{2^{m+1}}(r_2 - t_0),$$

entonces $S = \mathbb{N}$, por lo tanto

$$\|y - x_n\| \leq \lambda^{2^n}(r_2 - t_n), \quad y \in B(x_0, r_2), \quad (n \geq 0),$$

y $F^*(x^*) = 0$ se deduce que:

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y,$$

en ambos casos.

Finalmente las estimaciones

$$\|x_n - x^*\| \leq r_1 - t_n = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2^n} (r_2 - t_n).$$

siguen utilizando técnicas estándar mejoradas (2.17) y (2.23) (ver [2], [8], [10]). ■

2.3 Método Iterativo de Chebyshev

Sean X y Y espacios de Banach y $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$ un operador no lineal, el cual es diferenciable Fréchet sobre un dominio convexo abierto Ω . Supongamos

que $F'(x_0)^{-1} \in L(Y, X)$ existe para algún $x_0 \in \Omega$, donde $L(Y, X)$ es el conjunto de operadores lineales acotados de Y sobre X .

El proceso iterativo más famoso que aproxima a la solución $x^* \in \Omega$ de la ecuación:

$$F(x) = 0, \quad (2.28)$$

es el método de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n), \quad n \geq 0. \quad (2.29)$$

El resultado básico concerniente a la convergencia del método de Newton de la existencia y unicidad de soluciones, y la estimación del error son dados por el Teorema de Kantorovich (ver [10], [12], [14] y [15]).

Por otra parte, Candela y Marquina [3], [4] construyen un conjunto de sucesiones que satisfacen algunas relaciones recurrentes, con la cual prueba que la sucesión (2.29) está bien definida y converge para una solución x^* de (2.28) si

$$a = k\beta\eta \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \quad (2.30)$$

donde

$$\begin{aligned} \|F'(x_0)^{-1}\| &\leq \beta, \\ \|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| &\leq \eta, \quad \text{y} \\ \|F'(x) - F'(y)\| &\leq k\|x - y\|. \end{aligned}$$

Bajo la misma condición (2.30) como el método de Newton y con el mismo costo operacional, construimos un nuevo método iterativo para resolver (2.28). Esta iteración es definido por:

$$\Gamma_n = F'(x_n)^{-1} \quad , \quad T(x_n) = \frac{1}{2}\Gamma_n A \Gamma_n F(x_n), \quad (2.31)$$

$$x_{n+1} = x_n - [I + T(x_n)]\Gamma_n F(x_n), \quad n \geq 0$$

Además, observamos que si la segunda derivada Fréchet es reemplazada en el método Chebyshev [1], [5] por el operador bilineal A , la ecuación (2.31) es también obtenido, y consecuentemente el proceso iterativo es llamado método iterativo de Chebyshev. Es decir, se debe a la aceleración convexa de los métodos aplicada a las ecuaciones

cuadráticas, en la cual la segunda derivada Fréchet es reemplazado por el operador bilineal A .

2.4 Relación Recurrente General

Sean a y b dos números reales que satisfacen $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ y $b \in \langle 0, \sigma \rangle$ respectivamente donde σ es definido por:

$$\sigma = \sigma(a) = \frac{2(2a^2 - 3a - 1 + \sqrt{1 + 8a - 4a^2})}{a(1 - 2a)} \in \langle 0, 2 \rangle. \quad (2.32)$$

Sean

$$a_0 = 1, \quad c_0 = 1, \quad b_0 = \frac{b}{2}, \quad d_0 = 1 + \frac{b}{2} \quad (2.33)$$

y

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 - aa_n d_n}, \quad c_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{2} \left[a + \frac{b}{(1 + b_n)^2} \right] d_n^2, \quad (2.34)$$

$$b_{n+1} = \frac{b}{2} a_{n+1} c_{n+1}, \quad d_{n+1} = (1 + b_{n+1}) c_{n+1} \quad \text{y} \quad r_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} d_k, \quad \forall n \geq 0. \quad (2.35)$$

En primer lugar, damos un lema cuya demostración técnica sigue inmediatamente.

Lema 2.4.1. Sean $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, $b \in \langle 0, \sigma \rangle$, $m = \frac{2a}{b}$ y $p = \frac{-m + \sqrt{m(m+4)}}{2m}$ los cuatro números reales. Definimos las funciones reales siguientes:

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - mx(1+x)}, \quad g(x) = \frac{1 + \frac{m(1+x)^2}{2}}{1 - mx(1+x)},$$

y $h(x) = f(x)g(x)$.

Entonces

- i) $f, g : [0, p) \rightarrow \mathbb{R}$ son crecientes, $f(0) = 0$, $g(0) = 1 + \frac{m}{2}$,
- ii) f' y g' son crecientes, $f'(0) = 0$ y $g'(0) = m \left(2 + \frac{m}{2}\right)$,
- iii) $h : [0, p) \rightarrow \mathbb{R}$ es creciente y $h(0) = 0$,
- iv) h' es creciente y $h'(0) = 0$.

Prueba: i) Sean $x_1, x_2 \in [0, p)$ con $x_1 < x_2$.

Donde $x_1^2 < x_2^2$ resulta $x_1 + x_1^2 < x_2 + x_2^2$,

como $a \geq 0$ y $b > 0$ tenemos $m = \frac{2a}{b} > 0$ resultando

$$mx_1(1 + x_1) < mx_2(1 + x_2)$$

$$-mx_2(1 + x_2) < -mx_1(1 + x_1)$$

$$1 - mx_2(1 + x_2) < 1 - mx_1(1 + x_1)$$

$$\frac{1}{1 - mx_1(1 + x_1)} < \frac{1}{1 - mx_2(1 + x_2)}$$

$$\frac{x_1^2}{1 - mx_1(1 + x_1)} < \frac{x_2^2}{1 - mx_2(1 + x_2)}$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Por lo tanto, f es creciente.

Además cuando $x = 0$ tenemos

$$f(0) = \frac{0^2}{1 - m \times 0 \times (1 + 0)} = 0.$$

Como $x_1 < x_2$ entonces

$$1 + x_1 < 1 + x_2$$

$$(1 + x_1)^2 < (1 + x_2)^2 \tag{2.36}$$

$$1 + \frac{m}{2}(1 + x_1)^2 < 1 + \frac{m}{2}(1 + x_2)^2$$

$$\frac{1 + \frac{m}{2}(1 + x_1)^2}{1 - mx_1(1 + x_1)} < \frac{1 + \frac{m}{2}(1 + x_2)^2}{1 - mx_2(1 + x_2)}$$

$$g(x_1) < g(x_2)$$

Resultando g es creciente.

Cuando $x = 0$ tenemos

$$g(0) = \frac{1 + \frac{m}{2}(1+0)^2}{1 - m \times 0 \times (1+0)} = 1 + \frac{m}{2}.$$

ii) Derivando y simplificando la función f tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(1 - mx(1+x)) - x^2(-m(1+2x))}{[1 - mx(1+x)]^2} \\ &= \frac{2x - mx^2}{[1 - mx(1+x)]^2} \end{aligned}$$

Sea $x_1, x_2 \in [0, p)$, si $x_1 < x_2$ entonces

$$2x_1 < 2x_2 \quad \wedge \quad mx_1^2 < mx_2^2$$

$$2x_1 - mx_1^2 < 2x_2 - mx_2^2$$

$$\frac{2x_1 - mx_1^2}{[1 - mx_1(1+x_1)]^2} < \frac{2x_2 - mx_2^2}{[1 - mx_2(1+x_2)]^2}$$

$$f'(x_1) < f'(x_2)$$

Por lo tanto, f' es creciente.

Haciendo $x = 0$ tenemos

$$f'(0) = \frac{2 \times 0 - m \times 0^2}{[1 - m \times 0 \times (1+0)]^2} = 0.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{m(1+x)[1 - mx(1+x)] - \left[1 + \frac{m}{2}(1+x)^2\right](-m(1+2x))}{[1 - mx(1+x)]^2} \\ &= \frac{m \left[2 + 3x + \frac{m}{2}(1+x)^2\right]}{[1 - mx(1+x)]^2} \end{aligned}$$

De (2.36) teníamos

$$\begin{aligned} (1+x_1)^2 &< (1+x_2)^2, \\ \frac{m}{2}(1+x_1)^2 &< \frac{m}{2}(1+x_2)^2 \\ \frac{2+3x_1+\frac{m}{2}(1+x_1)^2}{[1-mx_1(1+x_1)]^2} &< \frac{2+3x_2+\frac{m}{2}(1+x_2)^2}{[1-mx_2(1+x_2)]^2} \\ g'(x_1) &< g'(x_2) \end{aligned}$$

Se concluye que g' es creciente. Cuando $x=0$ resulta

$$g'(0) = \frac{m \left[2 + 3 \times 0 + \frac{m}{2}(1+0)^2 \right]}{[1 - m \times 0 \times (1+0)]^2} = m \left(2 + \frac{m}{2} \right).$$

iii) Sea

$$\begin{aligned} h(x) = f(x)g(x) &= \frac{x^2}{1-mx(1+x)} \times \frac{1+\frac{m}{2}(1+x)^2}{1-mx(1+x)} \\ &= \frac{x^2 \left[1 + \frac{m}{2}(1+x)^2 \right]}{[1-mx(1+x)]^2} \end{aligned}$$

Veamos que h es creciente en $[0, p)$, si $x_1 < x_2$ entonces

$$\begin{aligned} x_1^2 &< x_2^2 \\ \frac{m}{2}x_1^2(1+x_1)^2 &< \frac{m}{2}x_2^2(1+x_2)^2 \\ x_1^2 + \frac{m}{2}x_1^2(1+x_1)^2 &< x_2^2 + \frac{m}{2}x_2^2(1+x_2)^2 \\ \frac{x_1^2 \left[1 + \frac{m}{2}(1+x_1)^2 \right]}{[1-mx_1(1+x_1)]^2} &< \frac{x_2^2 \left[1 + \frac{m}{2}(1+x_2)^2 \right]}{[1-mx_2(1+x_2)]^2} \\ h(x_1) &< h(x_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, h es creciente.

Haciendo $x = 0$:

$$h(0) = \frac{0^2 \left[1 + \frac{m}{2}(1+0)^2\right]}{[1 - m \times 0 \times (1+0)]^2} = 0.$$

iv) Por último

$$\begin{aligned} h'(x) &= [f(x)g(x)]' \\ &= \frac{2x - mx^2}{[1 - mx(1+x)]^2} \times \frac{1 + \frac{m}{2}(1+x)^2}{1 - mx(1+x)} + \\ &\quad \frac{x^2}{1 - mx(1+x)} \times \frac{m \left[2 + 3x + \frac{m}{2}(1+x)^2\right]}{[1 - mx(1+x)]^2} \\ &= \frac{(2x - mx^2) \left[1 + \frac{m}{2}(1+x)^2\right] + mx^2 \left[2 + 3x + \frac{m}{2}(1+x)^2\right]}{[1 - mx(1+x)]^3} \\ &= \frac{x(2+m) + mx^2(3+4x)}{[1 - mx(1+x)]^3} \end{aligned}$$

Veamos que es creciente. Sea $x_1, x_2 \in [0, p)$ donde si $x_1 < x_2$ entonces

$$x_1(2+m) < x_2(2+m)$$

$$x_1(2+m) + mx_1^2(3+4x_1) < x_2(2+m) + mx_2^2(3+4x_2)$$

$$\frac{x_1(2+m) + mx_1^2(3+4x_1)}{[1 - mx_1(1+x_1)]^3} < \frac{x_2(2+m) + mx_2^2(3+4x_2)}{[1 - mx_2(1+x_2)]^3}$$

$$h'(x_1) < h'(x_2)$$

Por consiguiente h' es creciente.

Luego con $x = 0$ se cumple

$$h'(0) = \frac{0 \times (2+m) + m \times 0^2 \times (3+4 \times 0)}{[1 - m \times 0 \times (1+0)]^3} = 0 \quad \diamond$$

A continuación, obtenemos algunas propiedades de las secuencias definidas en (2.34) y (2.35).

Teorema 2.4.2. Sean $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, $b \in \langle 0, \sigma \rangle$, $m = \frac{2a}{b}$ y $p = \frac{-m + \sqrt{m(m+4)}}{2m}$. Entonces

- i) la sucesión $\{b_n\}$ es decreciente,
- ii) $aa_nd_n < 1, \forall n \geq 0$,
- iii) $a_n \geq 1, \forall n \geq 0$. Por otra parte, la sucesión $\{a_n\}$ es creciente.

Prueba:

i) De (2.34) y (2.35), obtenemos que:

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} = \frac{b}{2}a_{n+1}c_{n+1} &= \frac{b}{2} \left(\frac{a_n}{1 - aa_nd_n} \right) \frac{a_{n+1}}{2} \left[a + \frac{b}{(1+b_n)^2} \right] d_n^2 \\
 &= \frac{b}{4} \left(\frac{a_n}{1 - aa_nd_n} \right)^2 \left(a + \frac{b}{(1+b_n)^2} \right) d_n^2 \\
 &= \frac{\left(\frac{b}{2}a_nc_n \right)^2}{(1 - aa_nd_n)^2} \left(\frac{a}{b}(1+b_n)^2 + 1 \right) \\
 &= \frac{b_n^2 \left(1 + \frac{m}{2}(1+b_n)^2 \right)}{\left[1 - \frac{2ab}{b} \frac{a_nc_n}{c_n} \right]^2} \\
 &= \frac{b_n^2 \left(1 + \frac{m}{2}(1+b_n)^2 \right)}{[1 - mb_n(1+b_n)]^2}.
 \end{aligned}$$

Veamos que $\{b_n\}$ es decreciente, para lo cual definimos

$$S = \{n \in \mathbb{N} / b_n \text{ es decreciente}\}.$$

Por inducción matemática se tiene:

Haciendo $n = 0$, se cumple

$$b_1 = \frac{b_0^2 \left[1 + \frac{m}{2}(1+b_0)^2 \right]}{[1 - mb_0(1+b_0)]^2}.$$

Sea $1 - mb_0(1 + b_0) \geq -mb_0(1 + b_0)$. Como $-1 < -mb_0(1 + b_0) < 0$ entonces

$$[1 - mb_0(1 + b_0)]^2 \geq m^2 b_0^2 (1 + b_0)^2 \geq mb_0(1 + b_0)^2$$

$$\frac{1}{[1 - mb_0(1 + b_0)]^2} \leq \frac{1}{m^2 b_0^2 (1 + b_0)^2} \leq \frac{1}{mb_0(1 + b_0)^2}.$$

Además, dado $a < mb_0(1 + b_0) < 2a$ y $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ se cumple:

$$0 < mb_0(1 + b_0) < 1$$

$$0 < m(1 + b_0)^2 < \frac{1 + b_0}{b_0} \wedge 1 < 1 + b_0 < 2$$

$$0 < m(1 + b_0)^2 < \frac{2}{b_0}$$

$$1 < 1 + \frac{m}{2}(1 + b_0)^2 < 1 + \frac{1}{b_0} < \frac{2}{b_0}.$$

También de

$$0 < m(1 + b_0) < \frac{1}{b_0}$$

$$0 < m(1 + b_0)^2 < \frac{1 + b_0}{b_0} < \frac{2}{b_0}$$

$$0 < \frac{1}{m(1 + b_0)^2} < \frac{b_0}{2}$$

Luego

$$b_1 = \frac{b_0^2 \left[1 + \frac{m}{2}(1 + b_0)^2 \right]}{mb_0(1 + b_0)^2} \leq b_0^2 \times \frac{2}{b_0} \times \frac{1}{b_0} \times \frac{b_0}{2} = b_0$$

$$b_1 = h(b_0) \leq b_0.$$

Por la hipótesis inductiva $n = m$ se cumple:

$$b_{m+1} = h(b_m) \leq b_m.$$

Veamos para $n = m + 1$, usando la hipótesis inductiva

$$b_{m+2} = h(b_{m+1}) \leq h(b_m) = b_{m+1}$$

$$b_{m+2} \leq b_{m+1}$$

Por lo tanto

$$b_{n+1} \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

ii) Sea

$$S = \{n \in \mathbb{N} / aa_n d_n < 1\}$$

Por la inducción matemática, se tiene, haciendo $n = 0$ se cumple

$$aa_0 d_0 = a \times 1 \times \left(1 + \frac{b}{2}\right) = a \left(1 + \frac{b}{2}\right).$$

De las condiciones tenemos $1 < 1 + \frac{b}{2} < 1 + \frac{\sigma}{2}$.

Como $0 < \sigma < 2$ resulta $\frac{1}{2} < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) < 1$. Entonces

$$aa_0 d_0 = a \left(1 + \frac{b}{2}\right) < 1.$$

Por la hipótesis inductiva con $n = m$ se cumple

$$aa_m d_m < 1.$$

Veamos para $n = m + 1$, dado

$$d_{m+1} = (1 + b_{m+1})c_{m+1} < (1 + b_m)c_{m+1}, \quad (2.37)$$

como

$$b_{m+1} < b_m, \quad \frac{b}{2}a_{m+1}c_{m+1} < \frac{b}{2}a_m c_m$$

$$a_{m+1}c_{m+1} < a_m c_m.$$

Luego

$$\begin{aligned} a_{m+1}d_{m+1} &< a_{m+1}(1+b_m)c_{m+1} \\ &< a_m(1+b_m)c_m \\ &< a_md_m, \end{aligned}$$

usando la H.I.

$$aa_{m+1}d_{m+1} < aa_md_m < 1.$$

Por lo tanto $S = \mathbb{N}$.

iii) Sea

$$S = \{n \in \mathbb{N} / a_n \geq 1\}.$$

Como $a_0 = 1$ y $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 - aa_nd_n}$. Por la inducción matemática:
Para $n = 0$ se cumple

$$a_1 = \frac{a_0}{1 - aa_0d_0} = \frac{1}{1 - a\left(1 + \frac{b}{2}\right)}.$$

De las condiciones iniciales se cumple $1 < 1 + \frac{b}{2} < 2$ entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq a\left(1 + \frac{b}{2}\right) < 1 \\ -1 &< -a\left(1 + \frac{b}{2}\right) \leq 0 \\ 0 &< 1 - a\left(1 + \frac{b}{2}\right) \leq 1 \\ a_1 &= \frac{1}{1 - a\left(1 + \frac{b}{2}\right)} \geq 1. \end{aligned}$$

Por la hipótesis inductiva $n = m - 1$ tenemos

$$a_m \geq 1.$$

Veamos para $n = m$:

$$a_{m+1} = \frac{a_m}{1 - aa_m d_m} \geq \frac{1}{1 - aa_{m+1} d_{m+1}} \geq 1, \text{ por H.I. y ii).}$$

Por lo tanto, $S = \mathbb{N}$.

Nos queda verificar

$$S = \{n \in \mathbb{N} / \{a_n\} \text{ es creciente}\}.$$

Por inducción matemática.

Haciendo $n = 0$

$$a_1 = \frac{a_0}{1 - aa_0 d_0} = \frac{a_0}{1 - a \left(1 + \frac{b}{2}\right)},$$

como

$$0 \leq 1 - a \left(1 + \frac{b}{2}\right) < 1 \text{ entonces } \frac{1}{1 - a \left(1 + \frac{b}{2}\right)} > 1,$$

se cumple $a_1 > a_0$.

Por la hipótesis inductiva, cuando $n = m - 1$:

$$a_m > a_{m-1}.$$

Veamos para $n = m$ donde

$$a_{m+1} = \frac{a_m}{1 - aa_m d_m} > \frac{a_{m-1}}{1 - aa_{m-1} d_m} > \frac{a_{m-1}}{1 - aa_{m-1} d_{m-1}} = a_m, \text{ por H.I.}$$

Se concluye $a_{m+1} > a_m$.

Por lo tanto $S = \mathbb{N}$ ■

Teorema 2.4.3. Sean $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, $b \in \langle 0, \sigma \rangle$, y $\gamma = \frac{b_1}{b_0}$. Entonces $\gamma < 1$,

$$b_n \leq \frac{b}{2\gamma} \gamma^{2^n}, \quad \forall n \geq 1, \quad (2.38)$$

y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Prueba: De (2.34) se tiene

$$S = \{n \in \mathbb{N} / b_n \leq \delta b_{n-1}\}$$

Por la inducción matemática, cuando $n = 1$ se cumple

$$b_1 = \frac{b_0^2 \left(1 + \frac{m}{2}(1 + b_0)^2\right)}{[1 - mb_0(1 + b_0)]^2}$$

donde

$$\delta = \frac{b_0 \left(1 + \frac{m}{2}(1 + b_0)^2\right)}{[1 - mb_0(1 + b_0)]^2}$$

Como $0 \leq a < \frac{1}{2}$, $0 < b < \sigma$, $0 < \sigma < 2$ y $m = \frac{2a}{b}$ entonces

$$0 < b_0 = \frac{b}{2} < \frac{\sigma}{2} < 1$$

$$1 < 1 + b_0 < (1 + b_0)^2 < 2(1 + b_0) < 4$$

$$\frac{m}{2} < \frac{m}{2}(1 + b_0)^2 < 2m$$

$$\frac{a}{2b_0} < \frac{m}{2}(1 + b_0)^2 < \frac{2a}{b_0}$$

$$\frac{a}{2} < \frac{m}{2}b_0(1 + b_0)^2 < 2a$$

$$b_0 + \frac{a}{2} < b_0 + \frac{m}{2}b_0(1 + b_0)^2 < b_0 + 2a$$

$$0 < b_0 + \frac{m}{2}b_0(1 + b_0)^2 < 2$$

Luego $a < mb_0(1 + b_0)^2 < 4a < 2$, se tiene

$$0 < \frac{b_0 + \frac{m}{2}b_0(1 + b_0)^2}{[1 - mb_0(1 + b_0)]^2} < \frac{b_0 + \frac{m}{2}b_0(1 + b_0)^2}{mb_0(1 + b_0)^2} < 1$$

se concluye $\delta \in \langle 0, 1 \rangle$.

Por la hipótesis inductiva, cuando $n = m$ tenemos

$$b_m \leq \delta b_{m-1} \leq \delta^m b_0$$

Veamos cuando $n = m + 1$ donde

$$\begin{aligned} b_{m+1} &\leq \delta b_m \\ &\leq \delta(\delta b_{m-1}) \quad \text{por H.I.} \\ &\leq \delta^{m+1} b_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $S = \mathbb{N}$.

Además se sabe que $\{b_n\}$ es decreciente, donde

$$b_1 < b_0 \text{ con } \gamma = \frac{b_1}{b_0} < 1.$$

Veamos ahora

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N} / b_n \leq \frac{b}{2\gamma} \gamma^{2^n} \right\}$$

Usando inducción matemática.

Para $n = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} b_1 &\leq \frac{b}{2\gamma} \gamma^2 \\ &\leq \gamma b_0. \end{aligned}$$

Por la hipótesis inductiva, cuando $n = m$ tenemos

$$b_m \leq \frac{b}{2\gamma} \gamma^{2^m},$$

Veamos cuando $n = m + 1$ donde

$$\begin{aligned} b_{m+1} &\leq \gamma^2 b_m \\ &\leq \gamma^2 \frac{b}{2\gamma} \gamma^{2m} = \frac{b}{2\gamma} \gamma^{2m+1} \end{aligned}$$

Por lo tanto $S = \mathbb{N}$ ■

Teorema 2.4.4. Usando las condiciones del teorema anterior, entonces existe $M \in \mathbb{R}$: $M \geq 1$ tal que

$$a_n \leq M, \quad \forall n \geq 0.$$

Prueba: De (2.34) tenemos

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 - aa_n d_n},$$

y usando (2.37), y luego (2.35)

$$\begin{aligned} 1 - aa_n d_n &= 1 - aa_n(1 + b_n)c_n \\ &= 1 - \frac{2a}{b} \frac{b}{2} a_n c_n (1 + b_n) \\ &= 1 - mb_n(1 + b_n), \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 - mb_n(1 + b_n)} = a_n \left(1 + \frac{mb_n(1 + b_n)}{1 - mb_n(1 + b_n)} \right),$$

con $m = \frac{2a}{b}$. Por recurrencia se sigue que:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_{n-1} \left(1 + \frac{mb_{n-1}(1 + b_{n-1})}{1 - mb_{n-1}(1 + b_{n-1})} \right) \left(1 + \frac{mb_n(1 + b_n)}{1 - mb_n(1 + b_n)} \right) \\ &= a_0 \left(1 + \frac{mb_0(1 + b_0)}{1 - mb_0(1 + b_0)} \right) \cdots \left(1 + \frac{mb_n(1 + b_n)}{1 - mb_n(1 + b_n)} \right) \end{aligned}$$

$$a_{n+1} = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{mb_k(1+b_k)}{1-mb_k(1+b_k)} \right). \quad (2.39)$$

Además, sobre el intervalo $0 \leq b_n \leq \frac{b}{2}$, $\forall n \geq 0$, tenemos

$$\begin{aligned} 1 &\leq 1 + b_k \leq \frac{2+b}{2} \\ 0 &\leq b_k \leq b_k(1+b_k) \leq b_k \left(\frac{2+b}{2} \right) \leq \frac{b}{2} \left(\frac{2+b}{2} \right) \\ 0 &\leq mb_k(1+b_k) \leq m \frac{b}{2} \left(\frac{2+b}{2} \right) = \frac{a(2+b)}{2} \\ \frac{2-a(2+b)}{2} &\leq 1 - mb_k(1+b_k) \leq 1 \\ 1 &\leq \frac{1+b_k}{1-mb_k(1+b_k)} \leq \frac{2}{2-a(2+b)} \left(\frac{2+b}{2} \right) \\ 1 &\leq \frac{1+b_k}{1-mb_k(1+b_k)} \leq \frac{2+b}{2-a(2+b)} \end{aligned}$$

Además, observe que $b_{n_0+k} = h(b_{n_0+k-1}) = \frac{b_{n_0+k-1}^2 [1 + \frac{m}{2}(1+b_{n_0+k-1})^2]}{[1 - mb_{n_0+k-1}(1+b_{n_0+k-1})]^2}$ donde la función h es definido en lema 2.4.1 y el teorema 2.4.2. Entonces

$$b_{n_0+k} = h(b_{n_0+k-1}) - h(0) = h'(\xi_k)b_{n_0+k-1},$$

con $\xi_k \in \langle 0, b_{n_0+k} \rangle$. Concluimos, por lema 2.4.1 (iii), (iv) y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ (por el teorema anterior), entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, $h'(b_n) < \tau$, con $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$.

Así $b_{n_0+k} \leq \tau b_{n_0+k-1}$, y consecuentemente $b_{n_0+k} \leq \tau^k b_{n_0}$. Como un resultado la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge. Por lo tanto dado el producto infinito en (2.39) converge y la sucesión $\{a_n\}$ es acotado. ■

Teorema 2.4.5. Si $a \in \left[0, \frac{1}{2} \right)$ y $b \in \langle 0, \delta \rangle$, entonces

$$d_n \leq \frac{2+b}{2\gamma} \gamma^{2^n},$$

donde $\gamma = \frac{b_1}{b_0}$. Además $r - r_n \leq \frac{2+b}{2\gamma} \sum_{k=n}^{\infty} \gamma^{2^k}$, si $r = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$.

Prueba: En primer lugar, tenemos

$$d_n = \frac{aa_n d_n}{aa_n} = \frac{mb_n(1+b_n)}{aa_n} = \frac{2b_n(1+b_n)}{ba_n}$$

con $m = \frac{2a}{b}$. Considerando sobre el intervalo $0 \leq b_n \leq \frac{b}{2}$ y $1 \leq a_n \leq M$, $\forall n \geq 0$, si además que

$$1 \leq 1 + b_n \leq \frac{2+b}{2},$$

$$mb_n \leq mb_n(1+b_n) \leq \frac{mb_n}{2}(2+b),$$

luego

$$a \leq aa_n \leq aM,$$

$$\frac{1}{aM} \leq \frac{1}{aa_n} \leq \frac{1}{a},$$

entonces

$$\frac{mb_n}{aM} \leq \frac{mb_n(1+b_n)}{aa_n} \leq \frac{m}{2a} b_n(2+b),$$

$$\frac{2b_n}{bM} \leq d_n \leq \left(1 + \frac{2}{b}\right) b_n.$$

Resultando

$$\frac{2b_n}{bM} \leq d_n \leq \left(\frac{2+b}{b}\right) \frac{b}{2\gamma} \gamma^{2^n} = \left(\frac{2+b}{2\gamma}\right) \gamma^{2^n}.$$

Por otro lado, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ converge, ya que es dominada por la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ la cual es convergente (ver la prueba del teorema anterior), entonces existe $r = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$, donde

$r_n = \sum_{k=0}^n \gamma^{2^k}$ y $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \gamma^{2^k}$ entonces

$$r - r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \gamma^{2^k} \leq \frac{2+b}{2\gamma} \sum_{k=n}^{\infty} \gamma^{2^k},$$

esto es

$$r - r_n \leq \frac{2+b}{2\gamma} \sum_{k=n}^{\infty} \gamma^{2^k}. \quad \blacksquare$$

2.5 Teorema de Convergencia

Teorema 2.5.1. *Sea F un operador diferenciable Fréchet de primer orden no lineal sobre un conjunto convexo abierto Ω . Asumiendo que $\Gamma_0 = F'(x_0)^{-1}$ existe en algún $x_0 \in \Omega$, $\|\Gamma_0\| \leq \beta$ y $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \eta$. También suponemos que*

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leq k\|x - y\|, \quad x, y \in \Omega, k \geq 0,$$

y $\bar{B}(x_0, r\eta) \subseteq \Omega$. Si $a = k\beta\eta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ y $\alpha \in \left[0, \frac{\sigma}{\beta\eta}\right)$, entonces la sucesión $\{x_n\}$ dado por (2.31) está bien definido, $x_n \in B(x_0, r\eta)$, $\forall n \geq 0$, y converge para $x^* \in \bar{B}(x_0, r\eta)$ donde $r = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$. Además, la solución x^* es única en $B\left(x_0, \frac{2}{k\beta} - r\eta\right) \cap \Omega$. Finalmente, de la relación recurrente, tenemos las siguientes estimaciones:

$$I_n) \quad \|\Gamma_n\| \leq a_n\beta,$$

$$II_n) \quad \|\Gamma_n F(x_n)\| \leq c_n\eta,$$

$$III_n) \quad \|T(x_n)\| \leq b_n,$$

$$IV_n) \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq d_n\eta,$$

y

$$\|x^* - x_{n+1}\| \leq (r - r_n)\eta = \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k\eta \quad (2.40)$$

Prueba: *Escribimos $b = \alpha\beta\eta$ y construimos las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ y $\{d_n\}$ de (2.33) y (2.35). Primer paso, si $\alpha = 0$, la iteración (2.31) es reducido al método de*

Newton. Así $b_0 = \frac{b}{2} = 0$ con

$$b_{n+1} = \frac{b}{2}a_{n+1}c_{n+1} = 0,$$

por lo tanto $b_n = 0, \forall n \geq 0$ y $d_0 = 1 + \frac{b}{2} = 1 = c_0$, tenemos

$$d_{n+1} = (1 + b_{n+1})c_{n+1} = c_{n+1},$$

se concluye $d_n = c_n, \forall n \geq 0$, y usando las técnicas relativa para [4], probamos el teorema. Para el caso, si $\alpha > 0$, primero probamos por recurrencia la estimación I_n - IV_n). Observe que I_0 - IV_0) son una consecuencia de (2.33). Entonces asumimos que son verdaderos para un n fijo y todos los valores enteros mayores, donde:

$$S = \{n \in \mathbb{N} / \|\Gamma_n\| \leq a_n\beta\}$$

Por inducción matemática, se tiene $n = 0$

$$\|\Gamma_0\| = \|F'(x_0)^{-1}\| \leq \beta = a_0\beta \text{ con } a_0 = 1,$$

luego por hipotesis inductivo, se cumple para $n = m$

$$\|\Gamma_m\| \leq a_m\beta \text{ con } a_m = \frac{a_{m-1}}{1 - aa_{m-1}d_{m-1}}.$$

Veamos para $n = m + 1$:

$$\begin{aligned} \|\Gamma_{m+1}\| &= \|F'(x_{m+1})^{-1}\| \\ &\leq \|F'(x_m)F'(x_{m+1})^{-1}\| \|F'(x_m)^{-1}\| \\ &\leq \|F'(x_m)F'(x_{m+1})^{-1}\| a_m\beta. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} 1 - \|F'(x_m)^{-1}[F'(x_m) - F'(x_{m+1})]\| &\leq \|F'(x_{m+1})F'(x_m)^{-1}\| \\ &\leq 1 + \|F'(x_m)^{-1}[F'(x_{m+1}) - F'(x_m)]\|. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\|F'(x_m)^{-1}[F'(x_{m+1}) - F'(x_m)]\| &\leq aa_m d_m \\
-aa_m d_m &\leq -\|F'(x_m)^{-1}[F'(x_{m+1}) - F'(x_m)]\| \\
1 - aa_m d_m &\leq 1 - \|F'(x_m)^{-1}[F'(x_{m+1}) - F'(x_m)]\| \\
&\leq \|F'(x_m)^{-1}F'(x_{m+1})\| \\
\|F'(x_{m+1})^{-1}F'(x_m)\| &\leq \frac{1}{1 - aa_m d_m}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\|\Gamma_{m+1}\| \leq \frac{1}{1 - aa_m d_m} a_m \beta = a_{m+1} \beta.$$

Por lo tanto, $S = \mathbb{N}$.

Ahora

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid \|\Gamma_n F(x_n)\| \leq c_n \eta\}.$$

Usando inducción matemática, se tiene para $n = 0$:

$$\|\Gamma_0 F(x_0)\| = \|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| \leq \eta,$$

por lo tanto $c_0 = 1$. Luego por la hipótesis inductiva $n = m$:

$$\|\Gamma_m F(x_m)\| \leq c_m \eta.$$

Veamos para $n = m + 1$

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_{m+1} F(x_{m+1})\| &\leq \|\Gamma_{m+1}\| \|F(x_{m+1})\| \\
&\leq a_{m+1} \beta \|F(x_{m+1})\|,
\end{aligned}$$

donde por la fórmula de Taylor's y por (2.31), tenemos

$$\begin{aligned} F(x_{m+1}) &= F(x_m) + F'(x_m)(x_{m+1} - x_m) + \int_{x_m}^{x_{m+1}} (F'(x) - F'(x_m))dx \\ &= -\frac{A}{2}(\Gamma_n F(x_m))^2 + \int_{x_m}^{x_{m+1}} (F'(x) - F'(x_m))dx \end{aligned}$$

Tomando norma m.a.m., por lo tanto

$$\begin{aligned} \|F(x_{m+1})\| &\leq \frac{\|A\|}{2} \|\Gamma_m F(x_m)\|^2 + \frac{k}{2} \|x_{m+1} - x_m\|^2 \\ &\leq \frac{\alpha}{2} c_m^2 \eta^2 + \frac{k}{2} d_m^2 \eta^2 \end{aligned}$$

y

$$\|F(x_{m+1})\| \leq \frac{1}{2} \left(k\eta + \frac{\alpha\eta}{(1+b_m)^2} \right) d_m^2 \eta.$$

Resultando

$$\begin{aligned} \|\Gamma_{m+1} F(x_{m+1})\| &\leq \frac{a_{m+1}}{2} \left(k\beta\eta + \frac{\alpha\beta\eta}{(1+b_m)^2} \right) d_m^2 \eta \\ &= \frac{a_{m+1}}{2} \left(a + \frac{b}{(1+b_m)^2} \right) d_m^2 \eta \\ &\leq c_{m+1} \eta \end{aligned}$$

Por consiguiente, $S = \mathbb{N}$. Además

$$S = \{n \in \mathbb{N} / \|T(x_n)\| \leq b_n\}.$$

Por inducción matemática, se tiene para $n = 0$:

$$\begin{aligned} \|T(x_0)\| &= \left\| \frac{1}{2} \Gamma_0 A \Gamma_0 F(x_0) \right\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|\Gamma_0\| \|A\| \|\Gamma_0 F(x_0)\| \\ &\leq \frac{1}{2} \beta \alpha \eta = \frac{b}{2} = b_0 \end{aligned}$$

Entonces $\|T(x_0)\| \leq b_0$.

Por la hipótesis inductiva $n = m$, tenemos

$$\|T(x_m)\| \leq b_m.$$

Veamos para $n = m + 1$:

$$\begin{aligned} \|T(x_{m+1})\| &= \left\| \frac{1}{2} \Gamma_{m+1} A \Gamma_{m+1} F(x_{m+1}) \right\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|\Gamma_{m+1}\| \|A\| \|\Gamma_{m+1} F(x_{m+1})\| \\ &\leq \frac{1}{2} a_{m+1} \beta \alpha c_{m+1} \eta = \frac{b}{2} a_{m+1} c_{m+1} \end{aligned}$$

Entonces $\|T(x_{m+1})\| \leq b_{m+1}$.

Por lo tanto $S = \mathbb{N}$. Luego

$$S = \{n \in \mathbb{N} / \|x_{n+1} - x_n\| \leq d_n \eta\}$$

Usando la inducción matemática, para $n = 0$, tenemos

$$\|x_1 - x_0\| = \|-F'(x_0)^{-1} F(x_0)\|,$$

como $0 < b < \sigma < 2$ entonces $0 < \frac{b}{2} < \frac{\sigma}{2} < 1$ con $1 < 1 + \frac{b}{2} < 1 + \frac{\sigma}{2} < 2$ luego

$$\|x_1 - x_0\| \leq \eta \leq \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \eta = d_0 \eta.$$

Por la hipótesis inductiva $n = m$, tenemos

$$\|x_m - x_{m-1}\| \leq d_{m-1} \eta.$$

Veamos para $n = m + 1$:

$$\begin{aligned} \|x_{m+1} - x_m\| &= \|-F'(x_m)^{-1} F(x_m)\| \\ &\leq \|\Gamma_m\| \|F(x_m)\| \leq a_m \beta \frac{1}{2} \left(k\eta + \frac{\alpha\eta}{(1 + b_m)^2} \right) d_m^2 \eta \end{aligned}$$

$$\|x_{m+1} - x_m\| \leq \frac{a_m}{2} \left(a + \frac{b}{(1+b_m)^2} \right) d_m^2 \eta = c_m \eta \leq (1+b_m)c_m \eta = d_m \eta,$$

entonces $\|x_{m+1} - x_m\| \leq d_m \eta$.

Por consiguiente $S = \mathbb{N}$. Luego tenemos

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_0\| &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - x_{n-1}\| + \cdots + \|x_1 - x_0\| \\ &\leq d_n \eta + d_{n-1} \eta + \cdots + d_0 \eta \\ &= \sum_{k=0}^n d_k \eta = r_n \eta < r \eta. \end{aligned}$$

y consecuentemente $x_{n+1} \in B(x_0, r\eta)$.

Observe que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, donde la serie $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ es convergente.

Como

$$\|F(x_{n+1})\| \leq \frac{1}{2} \left(a + \frac{b}{(1+b_n)^2} \right) d_n^2 \frac{\eta}{\beta},$$

tenemos:

$$\begin{aligned} F(x^*) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x_{n+1})\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(a + \frac{b}{(1+b_n)^2} \right) d_n^2 \frac{\eta}{\beta} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{a_{n+1}} \frac{\eta}{\beta} = 0 \end{aligned}$$

por la continuidad de F .

Por lo tanto, de $p \geq 1$,

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_{n+1}\| &\leq \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \cdots + \|x_{n+2} - x_{n+1}\| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} d_k \eta = (r_{n+p-1} - r_n) \eta. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\|x^* - x_{n+1}\| &= \lim_{p \rightarrow \infty} \|x_{n+p} - x_{n+1}\| \\
&\leq \lim_{p \rightarrow \infty} (r_{n+p-1} - r_n)\eta \\
&= (r - r_n)\eta \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k \eta.
\end{aligned}$$

Por (2.40) es también verdadero.

Finalmente, probamos la unicidad, suponemos que existe otra solución y^* de $F(x) = 0$ en $B\left(x_0, \frac{2}{k\beta} - r\eta\right) \cap \Omega$. De la aproximación

$$\int_0^1 F'(x^* + t(y^* - x^*)) dt (y^* - x^*) = F(y^*) - F(x^*) = 0,$$

debemos probar que el operador $\int_0^1 F'(x^* + t(y^* - x^*)) dt$ es invertible y por lo tanto $y^* = x^*$. (ver [1]) ■

Note, que del teorema 2.5.1, deducimos

$$\|x^* - x_{n+1}\| \leq \frac{2+b}{2\gamma} \eta \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma^{2k}. \quad (2.41)$$

En el siguiente teorema vemos que la iteración definida en (2.31) es de orden dos para cada $\alpha \in \left[0, \frac{\sigma}{\beta\eta}\right)$.

Teorema 2.5.2. *Bajo las hipótesis del teorema anterior, el proceso iterativo dado por (2.31) y $\alpha \in \left[0, \frac{\sigma}{\beta\eta}\right)$ es de segundo orden.*

Prueba: De acuerdo a Ortega y Rheinboldt [12], una iteración es de orden dos, si para $n \geq n_0$ existe una constante $C \geq 0$ que satisface

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq C \|x_n - x_{n-1}\|^2,$$

$\forall n \geq n_0$. Teniendo en cuenta (2.31) y (2.40), y $b_n \leq \frac{b}{2}$, $\forall n \geq 0$, tenemos

$$\|F(x_n)\| \leq \left(\frac{k}{2} + \frac{2\alpha}{(2-b)^2} \right) \|x_n - x_{n-1}\|^2,$$

donde $b = \alpha\beta\eta$. Como resultado de ello,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &\leq \|I + T(x_n)\| \|\Gamma_n\| \|F(x_n)\| \\ &\leq (1 + b_n) a_n \beta \left(\frac{k}{2} + \frac{2\alpha}{(2-b)^2} \right) \|x_n - x_{n-1}\|^2 \\ &\leq \frac{(2+b)M}{2\eta} \left(\frac{a}{2} + \frac{2b}{(2-b)^2} \right) \|x_n - x_{n-1}\|^2, \end{aligned}$$

con $a_n \leq M$, $\forall n \geq 0$ y una constante $M \geq 1$. ■

En la práctica veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.5.3. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$F(x, y) = 0,$$

donde

$$F(x, y) = \left(x^2 - 2y + \frac{1}{3}, y^2 - 4x + \frac{2}{3} \right).$$

Por lo tanto

$$F'(x, y) = 2 \begin{pmatrix} x & -1 \\ -2 & y \end{pmatrix} y F'(x, y)^{-1} = \frac{1}{2(x \cdot y - 2)} \begin{pmatrix} y & 1 \\ 2 & x \end{pmatrix},$$

para $x \cdot y \neq 2$, lo cual significa que (x, y) no pertenece a la hipérbola $x \cdot y = 2$. Consideramos la norma máxima en \mathbb{R}^2 definida por:

$$\|B\| = \max\{|b_{11}| + |b_{12}|, |b_{21}| + |b_{22}|\},$$

donde $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Luego para $F'(x, y)^{-1}$ tenemos

$$\|F'(x, y)^{-1}\| = \max \left\{ \left| \frac{y}{2(xy-2)} \right| + \left| \frac{1}{2(xy-2)} \right|, \left| \frac{2}{2(xy-2)} \right| + \left| \frac{x}{2(xy-2)} \right| \right\}.$$

Según el teorema 2.5.1, si $(x_0; y_0) = (0.4; 0.4)$ y $\Omega = B((x_0, y_0); 1.4)$, tenemos

$$\begin{aligned}\Gamma_0 = F'(x_0, y_0)^{-1} &= \frac{1}{2(x_0 y_0 - 2)} \begin{pmatrix} y_0 & 1 \\ 2 & x_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.10869565217391304 & -0.27173913043478259 \\ -0.54347826086956519 & -0.10869565217391304 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Luego

$$\beta = \|\Gamma_0\| = \max\{0.38043478260869562, 0.65217391304347827\} \approx 0.65217391304347827,$$

con

$$\begin{aligned}\eta = \|\Gamma_0 F(x_0, y_0)\| &= \left\| -\frac{1}{3.68} \begin{pmatrix} 0.4 & 1 \\ 2 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.30666666666666667 \\ -0.7733333333333333 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \max\{0.2434782608695652, 0.25072463768115943\} \approx 0.25072463768115943,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\|F'(x, y) - F'(\bar{x}, \bar{y})\| &= \left\| 2 \begin{pmatrix} x & -1 \\ -2 & y \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \bar{x} & -1 \\ -2 & \bar{y} \end{pmatrix} \right\| \\ &= 2 \max\{x - \bar{x}, y - \bar{y}\}\end{aligned}$$

entonces $k = 2$, y $\bar{B}((x_0, y_0), r\eta) \subseteq \Omega$. Donde

$$a = k\beta\eta = 2(0.65217391304347816)(0.25072463768115943) \approx 0.32703213610586007 \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$$

y

$$\sigma = \frac{2(2a^2 - 3a - 1 + \sqrt{1 + 8a - 4a^2})}{a(1 - 2a)} = \frac{2(-1.76719637222565673 + 1.785625052959109)}{0.1131321000139365}$$

$$\approx 0.32579140788483496 \in \langle 0, 2 \rangle$$

con

$$\alpha \in \left[0, \frac{\sigma}{\beta\eta}\right) = [0, 1.99241219388529145).$$

A continuación, del sistema de ecuaciones, se escribe

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (x^2, y^2) + (-2y, -4x) + \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ &= (x, y) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

el operador bilineal es

$$\begin{aligned} 2A = F''(x, y) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{2.42}$$

de forma que $\|A\| = 1 = \alpha$ (ver [13] de la norma de un operador bilineal en \mathbb{R}^2). Al aplicar el método de Newton se obtiene la tabla siguiente:

n	x_n	e_n
0	$x_0 = \begin{pmatrix} 0.4000000000000000 \\ 0.4000000000000000 \end{pmatrix}$	$e_0 = \ x_0 - x^*\ _\infty = 0.22505510636517373$
1	$x_1 = \begin{pmatrix} 0.15652173913043482 \\ 0.14927536231884059 \end{pmatrix}$	$e_1 = \ x_1 - x^*\ _\infty = 0.03269416225227642$
2	$x_2 = \begin{pmatrix} 0.17466169160296993 \\ 0.18175549098561922 \end{pmatrix}$	$e_2 = \ x_2 - x^*\ _\infty = 0.00028320203185636$
3	$x_3 = \begin{pmatrix} 0.17494487829438393 \\ 0.18196948179003397 \end{pmatrix}$	$e_3 = \ x_3 - x^*\ _\infty = 0.00000004278108304$
4	$x_4 = \begin{pmatrix} 0.17494489363482577 \\ 0.18196952457111679 \end{pmatrix}$	$e_4 = \ x_4 - x^*\ _\infty = 0.00000000000000053$

Tabla 2.1: Resultados del Método de Newton-Kantorovich

Usando el programa del método iterativo de Chebyshev, tenemos la tabla siguiente:

n	x_n	e_n
0	$x_0 = \begin{pmatrix} 0.400000000000000000 \\ 0.400000000000000000 \end{pmatrix}$	$e_0 = \ x_0 - x^*\ _\infty = 0.22505510636517373$
1	$x_1 = \begin{pmatrix} 0.16828471594385547 \\ 0.16880096892322585 \end{pmatrix}$	$e_1 = \ x_1 - x^*\ _\infty = 0.01316855564789116$
2	$x_2 = \begin{pmatrix} 0.17492184274986330 \\ 0.18195440372201932 \end{pmatrix}$	$e_2 = \ x_2 - x^*\ _\infty = 0.00002305088496299$
3	$x_3 = \begin{pmatrix} 0.17494489359350243 \\ 0.18196952443105180 \end{pmatrix}$	$e_3 = \ x_3 - x^*\ _\infty = 0.0000000014006521$
4	$x_4 = \begin{pmatrix} 0.17494489363482627 \\ 0.18196952457111698 \end{pmatrix}$	$e_4 = \ x_4 - x^*\ _\infty = 0.00000000000000003$

Tabla 2.2: Resultados del Método Iterativo de Chebyshev

Teniendo en cuenta queda

$$(x^*, y^*) = (0.17494489363482627, 0.18196952457111698),$$

es la solución del sistema de $F(x, y) = 0$ con 17 dígitos significativos, se observa en las tablas, el método iterativo de Chebyshev, con A definido en (2.42), proporciona una mejor aproximación a (x^*, y^*) que el método de Newton.

Ejemplo 2.5.4. Consideramos la ecuación integral

$$F(x)(s) = x(s) - s + \frac{1}{2} \int_0^1 s \cos(x(t)) dt,$$

en el espacio $X = C[0, 1]$ de todas las funciones continua en el intervalo $[0, 1]$ con la norma

$$\|x\| = \max_{s \in [0, 1]} |x(s)|.$$

Si elegimos $x_0 = x_0(s) = s$, es fácil demostrar que:

$$\begin{aligned} F(x_0)(s) &= x_0(s) - s + \frac{1}{2} \int_0^1 s \cos(x_0(t)) dt = s - s + \frac{1}{2} \int_0^1 s \cos(t) dt \\ &= \frac{s}{2} \int_0^1 \cos(t) dt = \frac{s}{2} \text{Sen}(t) \Big|_0^1 = \frac{s}{2} \text{Sen}(1), \end{aligned}$$

$$F'(x)y(s) = x'(s) + \frac{1}{2} \int_0^1 s (-\text{Sen}(x(t))) x'(t) dt = y(s) - \frac{s}{2} \int_0^1 y(t) \text{Sen}(x(t)) dt,$$

$$F''(x)yz(s) = -\frac{s}{2} \int_0^1 y(t) \text{Cos}(x(t)) x'(t) dt = -\frac{s}{2} \int_0^1 y(t) z(t) \text{Cos}(x(t)) dt.$$

De la primera derivada Fréchet, se tiene:

$$y(s) = z(s) + \frac{s}{2} \int_0^1 y(t) \text{Sen}(x(t)) dt. \quad (2.43)$$

Hacemos:

$$A = \int_0^1 y(t) \text{Sen}(x(t)) dt. \quad (2.44)$$

En términos de A , la ecuación (2.43) se escribe:

$$y(s) = z(s) + \frac{1}{2} As, \quad (2.45)$$

de modo que y es una combinación lineal de z y s . Todo el problema se reduce a encontrar el valor de A para ello, reemplazamos (2.44) en (2.43) y obtenemos:

$$\underbrace{\int_0^1 y(s) \text{Sen}(x(s)) ds}_A = \int_0^1 z(s) \text{Sen}(x(s)) ds + \frac{A}{2} \int_0^1 s \text{Sen}(x(s)) ds$$

$$A \left(1 - \frac{1}{2} \int_0^1 s \text{Sen}(x(s)) ds \right) = \int_0^1 z(s) \text{Sen}(x(s)) ds$$

$$A = \frac{\int_0^1 z(s) \text{Sen}(x(s)) ds}{1 - \int_0^1 \frac{s}{2} \text{Sen}(x(s)) ds}.$$

Consecuentemente

$$y(s) = [F'(x)]^{-1} z(s) = z(s) + \frac{s}{2} \frac{\int_0^1 z(s) \text{Sen}(x(s)) ds}{1 - \int_0^1 \frac{s}{2} \text{Sen}(x(s)) ds}$$

como la iteración inicial es $x_0 = x_0(s) = s$, tenemos:

$$\Gamma_0 z(s) = [F'(x_0)]^{-1} z(s) = z(s) + \frac{s}{2} \frac{\int_0^1 z(s) \text{Sen}(x_0(s)) ds}{1 - \int_0^1 \frac{s}{2} \text{Sen}(x_0(s)) ds}$$

$$\Gamma_0 z(s) = z(s) + \frac{s}{2} \frac{\int_0^1 z(s) \text{Sen}(s) ds}{1 - \int_0^1 \frac{s}{2} \text{Sen}(s) ds} = z(s) + s \frac{\int_0^1 z(s) \text{Sen}(s) ds}{2 - \text{Sen}(1) + \text{Cos}(1)}$$

los parámetros que aparecen en el teorema (2.5.1) son

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0\| &= \left\| 1 + s \cdot \frac{\int_0^1 \text{Sen}(s) ds}{2 - \text{Sen}(1) + \text{Cos}(1)} \right\| \leq 1 + \max_{0 \leq s \leq 1} s \cdot \frac{\left| \int_0^1 \text{Sen}(s) ds \right|}{2 - \text{Sen}(1) + \text{Cos}(1)} \\ &\leq \frac{3 - \text{Sen}(1)}{2 - \text{Sen}(1) + \text{Cos}(1)} = 1.270596432 = \beta. \end{aligned}$$

Luego

$$\|\Gamma_0 F'(x_0)\| = \left\| \frac{1}{2} \int_0^1 s \text{Sen}(s) ds \right\| \leq \frac{-\text{Cos}(1) + \text{Sen}(1)}{2},$$

resultando

$$\|\Gamma_0\| \leq \frac{1}{1 - \frac{\text{Sen}(1) - \text{Cos}(1)}{2}} = \frac{2}{2 - \text{Sen}(1) + \text{Cos}(1)}.$$

Es lo que usaremos para

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0 F(x_0)\| &\leq \|\Gamma_0\| \|F(x_0)\| = \frac{2}{2 - \text{Sen}(1) + \text{Cos}(1)} \cdot \frac{\text{Sen}(1)}{2} \\ &= \frac{\text{Sen}(1)}{2 - \text{Sen}(1) + \text{Cos}(1)} = 0.495323446 = \eta. \end{aligned}$$

Por la condición de Lipschitz, tenemos:

$$\begin{aligned} \|F''(x) - F''(y)\| &= \left\| -\frac{s}{2} \int_0^1 y(t) z(t) [\text{Cos}(x(t)) - \text{Cos}(y(t))] dt \right\| \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{0 \leq s \leq 1} s \cdot \|y(t)\| \|z(t)\| \|y - x\| \int_0^1 dt \leq \frac{1}{2} \|y - x\| \Rightarrow k = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Entonces $a = k\beta\eta = 0.314678101 \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ y

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{2(2a^2 - 3a - 1 + \sqrt{1 + 8a - 4a^2})}{a(1 - 2a)} \\ &= \frac{2(-1.745989689 + 1.766730194)}{0.116633486} \\ &\approx 0.355652663 \in \langle 0, 2 \rangle\end{aligned}$$

$\alpha \in [0, 0.565105517)$. A continuación, el operador bilineal es:

$$2A = F''(x, y) = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

de modo que $\|A\| = 0.1 = \alpha$ y, por (2.41), se obtiene un límite superior $M = 0.0169947$ para $\|x^* - x_2\|$, donde x^* es una solución de la ecuación $F(x) = 0$ y x_2 es la segunda iteración del método (2.31).

Después de Candela y Marquina [3] - [5], tenga en cuenta que el error inicial obtenido por el método de Newton es $M = 0.0715694$, de modo que el último error obligado ha sido mejorado.

De la relación recurrente, se requiere $b = \alpha\beta\eta = 0.0013403275$ donde $a_0 = 1$, $b_0 = \frac{b}{2} = 0.06293562037120531$, $c_0 = 1$ y $d_0 = 1 + \frac{b}{2} = 1.06293562037120531$.

La tabla es:

k	a_k	b_k	c_k	d_k
0	1	0.06293562037120531	1	1.06293562037120526
1	1.50259023284077298	0.03420250739045965	0.36167697893610579	0.37404723848112709
2	1.82544056117588904	0.006343104598300086	0.00552125313946475	0.05556275025640789
3	1.88562343463814419	0.00015162694005017	0.00127768820665267	0.00127788193860578
4	1.88705429290261972	0.0000008060717710	0.00000067872336370	0.00000067872341841

Donde se garantiza la convergencia del método ya que la sucesión $\{b_n\}$ converge a cero, el error del teorema es:

k	<i>Error Teorema</i>	$r \cdot \eta$
0		0.52649693478863790
1	0.06700947333308800	0.59350640822172585
2	0.00054958028638119	0.59405598850810704
3	0.00000001614964684	0.59405600465775388
4	0.00000000000000001	0.59405600465775388

3 APORTES

*Pones tu pie en el camino y si no cuidas
tus pasos, nunca sabes a donde
te pueden llevar.*

*John Ronald Reuel Tolkien,
El Señor de
los Anillos*

En este capítulo vamos deducir a partir del desarrollo de Taylor la obtención del método iterativo de Chebyshev, luego se analizará el debilitamiento de la función F , se analizará las nuevas formas de detener los algoritmos y luego damos una alternativa que mejora el error del Teorema que se desarrollo en el Teorema de Convergencia.

Notaremos que $F'(x_0)^{-1}$ es una aplicación lineal definida entre los espacios X e Y que se usa en el método de Newton Kantorovich, mientras que el método iterativo de Chebyshev se tiene $[I + T(x_0)]F'(x_0)^{-1}$ es una aplicación definida entre los espacios X e Y . Ambas formulaciones permiten aplicarlo en contextos como sistemas de ecuaciones no lineales, ecuaciones diferenciales o integrales, problemas de cálculo de variaciones, etc.

3.1 Deducción del Método de Segundo Orden

Nace la incognita como en el caso real, cuando uno desea obtener mejor resultado debe ir al segundo orden, pero la dificultad aparece así como la diversificación de nuevos métodos.

El proceso iterativo que aproxima a la solución $x^* \in \Omega$ de la ecuación (2.28). Por el desarrollo de Taylor hasta el segundo orden, se tiene:

$$F(x_{n+1}) = F(x_n) + F'(x_n)h + F''(x_n)\frac{h^2}{2}$$

Se cumple que $F(x_{n+1}) = 0$ y $F''(x_n) = A$, logrando:

$$-F(x_n) - A\frac{h^2}{2} = F'(x_n)h$$

Además sabemos que $h = -F'(x_n)^{-1}F(x_n) = -\Gamma_n F(x_n)$ al reemplazar:

$$-F'(x_n)^{-1}F(x_n) - \frac{1}{2}F'(x_n)^{-1}A(-F'(x_n)^{-1}F(x_n))^2 = h$$

$$-\Gamma_n F(x_n) - \frac{1}{2}\Gamma_n A \Gamma_n F(x_n) \Gamma_n F(x_n) = h$$

$$-[I + T(x_n)]\Gamma_n F(x_n) = x_{n+1} - x_n$$

Finalmente

$$x_{n+1} = x_n - [I + T(x_n)]\Gamma_n F(x_n), \quad n \geq 0$$

donde I es el operador identidad sobre X y $A : X \times X \rightarrow Y$ es un operador bilineal que satisface $\|A\| = \alpha$ ($\alpha \geq 0$). Note que el método de Newton es obtenido haciendo $A \equiv 0$.

De la gran variedad de construir el proceso iterativo, vamos trabajar con este porque garantizará encontrar soluciones en las vecindades que se toman para un mejor entendimiento de las mismas.

Pasamos al debilitamiento del Teorema de Convergencia dado en el capítulo anterior.

3.2 Debilitamiento de la Función F

Se busca debilitar la función F como una experimentación y poder ver si es posible obter un nuevo enfoque de los conceptos dados en el capítulo anterior.

En el teorema de convergencia cuando debilitamos a F que es una función convexa con una cuasi-convexa tenemos:

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{F(x), F(y)\}, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Puede ocurrir los siguientes casos:

1. Como toda función convexa es cuasi-convexa, estamos en:

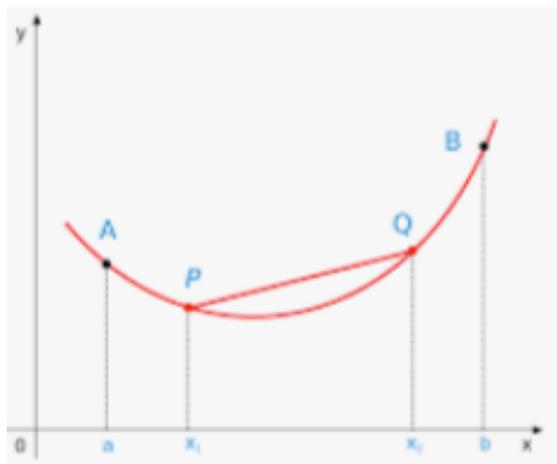


Figura 3.1: F es convexa y es cuasi-convexa.

En este caso diremos que el teorema de convergencia se cumple.

2. Existen funciones no convexas y que son cuasi-convexas, los cuales son:

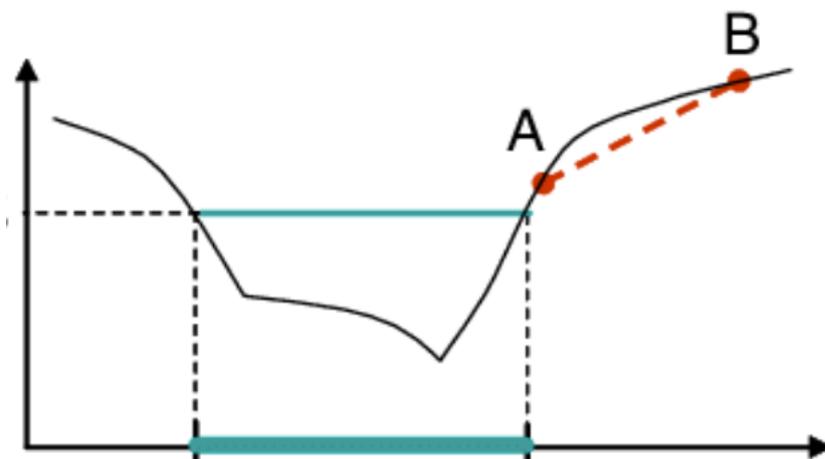


Figura 3.2: F no es convexa y es cuasi-convexa.

En este caso diremos que el teorema de convergencia no se cumple, porque F no tiene derivada Fréchet en los puntos picos.

3. Además hay funciones discontinuas que son cuasi-convexas, que son:

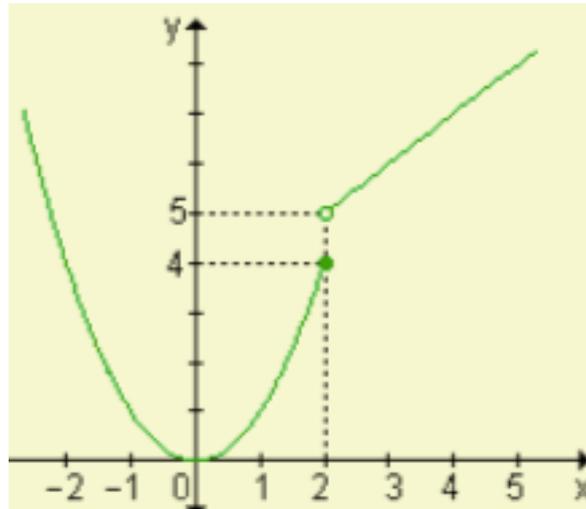


Figura 3.3: F es discontinua y es cuasi-convexa.

En este caso diremos que el teorema de convergencia no se cumple, porque F no es continua y no tiene derivada Fréchet en dicho punto.

Por consiguiente la convexidad de la función F está implícito en el Teorema de Convergencia por ser de suma importancia.

3.3 Nueva Forma de Parada del Algoritmo

La construcción de las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ y $\{d_n\}$ que son acotadas, el cual permite la convergencia del método iterativo de Chebyshev donde analizaremos y recomendaremos su utilización a partir de adelante.

Veamos el primer ejemplo dado en el capítulo anterior para entender mejor.

3.3.1 Usando b_n como Parada vs Error Absoluto

Si bien se puede usar la sucesión $\{b_n\}$ como parada en el algoritmo ya que garantiza

$$\|T(x_n)\| \leq b_n.$$

Al analizar en el ejemplo, tenemos el resultado siguiente:

n	x_n	E_n	ET_n
0	$x_0 = \begin{pmatrix} 0.4000000000000000 \\ 0.4000000000000000 \end{pmatrix}$	$e_0 = \ x_0 - x^*\ _\infty$ $= 0.22505510636517373$	0.08175803402646505
1	$x_1 = \begin{pmatrix} 0.16828471594385547 \\ 0.16880096892322585 \end{pmatrix}$	$e_1 = \ x_1 - x^*\ _\infty$ $= 0.01316855564789116$	0.05346686941709727
2	$x_2 = \begin{pmatrix} 0.17492184274986330 \\ 0.18195440372201932 \end{pmatrix}$	$e_2 = \ x_2 - x^*\ _\infty$ $= 0.00002305088496299$	0.01533574441421883
3	$x_3 = \begin{pmatrix} 0.17494489359350243 \\ 0.18196952443105180 \end{pmatrix}$	$e_3 = \ x_3 - x^*\ _\infty$ $= 0.00000000014006521$	0.00081892762593810
4	$x_4 = \begin{pmatrix} 0.17494489363482627 \\ 0.18196952457111698 \end{pmatrix}$	$e_4 = \ x_4 - x^*\ _\infty$ $= 0.00000000000000003$	0.00000202739651484
5	$x_5 = \begin{pmatrix} 0.17494489363482624 \\ 0.18196952457111701 \end{pmatrix}$	$e_5 = \ x_5 - x^*\ _\infty$ $= 0.00000000000000006$	0.00000000001233124

Notamos que el error absoluto es más efectivo que el error del método.

3.3.2 Usando b_n como Parada vs Error

Si bien se puede usar la sucesión $\{b_n\}$ como parada en el algoritmo ya que garantiza

$$\|T(x_n)\| \leq b_n.$$

Al analizar en el ejemplo, tenemos el resultado siguiente:

n	x_n	E_n	ET_n
0	$x_0 = \begin{pmatrix} 0.4000000000000000 \\ 0.4000000000000000 \end{pmatrix}$		0.08175803402646505
1	$x_1 = \begin{pmatrix} 0.16828471594385547 \\ 0.16880096892322585 \end{pmatrix}$	$e_1 = \ x_1 - x_0\ _\infty$ $= 0.23171528405614455$	0.05346686941709727
2	$x_2 = \begin{pmatrix} 0.17492184274986330 \\ 0.18195440372201932 \end{pmatrix}$	$e_2 = \ x_2 - x_1\ _\infty$ $= 0.01315343479879347$	0.01533574441421883
3	$x_3 = \begin{pmatrix} 0.17494489359350243 \\ 0.18196952443105180 \end{pmatrix}$	$e_3 = \ x_3 - x_2\ _\infty$ $= 0.00002305084363913$	0.00081892762593810
4	$x_4 = \begin{pmatrix} 0.17494489363482627 \\ 0.18196952457111698 \end{pmatrix}$	$e_4 = \ x_4 - x_3\ _\infty$ $= 0.0000000014006518$	0.00000202739651484
5	$x_5 = \begin{pmatrix} 0.17494489363482624 \\ 0.18196952457111701 \end{pmatrix}$	$e_5 = \ x_5 - x_4\ _\infty$ $= 0.00000000000000003$	0.00000000001233124

Notamos que el error es más efectivo que el error del método.

3.3.3 Usando $d_n\eta$ como Parada vs el Error Absoluto

Si bien se puede usar $d_n\eta$ como parada en el algoritmo ya que garantiza

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq d_n\eta.$$

Al analizar en el ejemplo, tenemos el resultado siguiente:

n	x_n	E_n	ET_n
0	$x_0 = \begin{pmatrix} 0.4000000000000000 \\ 0.4000000000000000 \end{pmatrix}$	$e_0 = \ x_0 - x^*\ _\infty$ $= 0.22505510636517373$	
1	$x_1 = \begin{pmatrix} 0.16828471594385547 \\ 0.16880096892322585 \end{pmatrix}$	$e_1 = \ x_1 - x^*\ _\infty$ $= 0.01316855564789116$	0.11162451057053752
2	$x_2 = \begin{pmatrix} 0.17492184274986330 \\ 0.18195440372201932 \end{pmatrix}$	$e_2 = \ x_2 - x^*\ _\infty$ $= 0.00002305088496299$	0.02390565967504889
3	$x_3 = \begin{pmatrix} 0.17494489359350243 \\ 0.18196952443105180 \end{pmatrix}$	$e_3 = \ x_3 - x^*\ _\infty$ $= 0.00000000014006521$	0.00117993663144372
4	$x_4 = \begin{pmatrix} 0.17494489363482627 \\ 0.18196952457111698 \end{pmatrix}$	$e_4 = \ x_4 - x^*\ _\infty$ $= 0.00000000000000003$	0.00000290918340157
5	$x_5 = \begin{pmatrix} 0.17494489363482624 \\ 0.18196952457111701 \end{pmatrix}$	$e_5 = \ x_5 - x^*\ _\infty$ $= 0.00000000000000006$	0.00000000001769436

Notamos que el error absoluto es más efectivo que el error del método.

3.3.4 Usando $d_n\eta$ como Parada vs Error

Si bien se puede usar $d_n\eta$ como parada en el algoritmo ya que garantiza

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq d_n\eta.$$

Al analizar en el ejemplo, tenemos el resultado siguiente:

n	x_n	E_n	ET_n
0	$x_0 = \begin{pmatrix} 0.4000000000000000 \\ 0.4000000000000000 \end{pmatrix}$		
1	$x_1 = \begin{pmatrix} 0.16828471594385547 \\ 0.16880096892322585 \end{pmatrix}$	$e_1 = \ x_1 - x_0\ _\infty$ $= 0.23171528405614455$	0.11162451057053752
2	$x_2 = \begin{pmatrix} 0.17492184274986330 \\ 0.18195440372201932 \end{pmatrix}$	$e_2 = \ x_2 - x_1\ _\infty$ $= 0.01315343479879347$	0.02390565967504889
3	$x_3 = \begin{pmatrix} 0.17494489359350243 \\ 0.18196952443105180 \end{pmatrix}$	$e_3 = \ x_3 - x_2\ _\infty$ $= 0.00002305084363913$	0.00117993663144372
4	$x_4 = \begin{pmatrix} 0.17494489363482627 \\ 0.18196952457111698 \end{pmatrix}$	$e_4 = \ x_4 - x_3\ _\infty$ $= 0.0000000014006518$	0.00000290918340157
5	$x_5 = \begin{pmatrix} 0.17494489363482624 \\ 0.18196952457111701 \end{pmatrix}$	$e_5 = \ x_5 - x_4\ _\infty$ $= 0.00000000000000003$	0.00000000001769436

Notamos que el error es más efectivo que el error del método.

En todos los casos analizados se tendrá los mismos valores de las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ y $\{d_n\}$ que son.

n	a_n	b_n	c_n	d_n
0	1.0000000000000000	0.08175803402646505	1.0000000000000000	1.08175803402646498
1	1.54743581059130442	0.05346686941709727	0.42261185276656121	0.44520758551254846
2	1.99747051646689333	0.01533574441421883	0.09390615194720636	0.09534627269239151
3	2.13014379142392984	0.00081892762593810	0.00470225483347491	0.00470610563986225
4	2.13715020986916171	0.00000202739651484	0.00001160307790419	0.00001160310142823
5	2.13716754144840015	0.0000000001233124	0.0000000007057288	0.0000000007057288

A pesar que para este ejemplo los errores del método no fueron tan eficientes se recomienda usarlos porque son propios del calculos de las sucesiones obtenidas y garantizan la convergencia del método.

3.4 Mejoramiento del Error del Teorema de Convergencia

En este proceso agregaremos en el programa lo siguientes pasos:

$$\beta = a_n \beta; \quad \eta = c_n \eta;$$

Con el cual se mejora el error del método, su utilidad se garantiza porque mientras que β_n crece debido que $a_n > 1$, los valores de η_n decrece como se muestra en la tabla siguiente:

k	β_n	η_n
0	0.65217391304347840	0.25072463768115943
1	1.00919726777693786	0.10595920366465955
2	2.01584178768337763	0.00995022107953850
3	4.29403286852666266	0.00004678847516540
4	9.17699324615683487	0.00000000054289032

es lo que permite mejorar el error de método y lo cual se muestra en los ejemplos de aplicación que damos a continuación.

4 APLICACIONES

*Resolver un problema es encontrar un camino
allí donde no se conocía previamente camino alguno,
encontrar la forma de salir de una dificultad,
de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado,
que no se consigue de manera inmediata,
utilizando los medios adecuados.
George Polya.*

En el presente capítulo vamos tener presente la nueva condición para detener el algoritmo del teorema de convergencia del método iterativo de Chebyshev que se planteo en el capítulo anterior el cual difiere del error absoluto tradicional que se aplica y por ende merece analizar su utilidad.

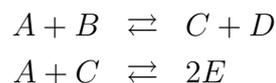
Además el interes de trabajar con profesores de Química para mostrarles que existen nuevos métodos para la solución de sus problemas que obtienen en sus trabajos de investigación y formar grupos multidisciplinarios en la falcultad.

La resolución de problemas es de suma importancia para el avance de las matemc'aticas así como su comprensión y aprendizaje. En el antegrado se resuelven usando los métodos de Jacobi, Gauss Seidel y SOR para sistemas de ecuaciones no lineales.

Asimismo cabe indicar que las constantes de equilibrio son fijos cuando llegue al equilibrio la concentración a la salida del reactor.

4.1 Problema 1

En un reactor se efectua las siguientes reacciones en fase gaseosa:



A la temperatura de la reacción, las constantes de equilibrio son $kp_1 = 2.6$ y $kp_2 = 3.1$. Las composiciones iniciales son $2 \frac{\text{mol}}{\text{l de A}}$ y $1 \frac{\text{mol}}{\text{l de B}}$. Determine la concentración a la salida del reactor, asumiendo que se alcanza el equilibrio usando sistemas de ecuaciones no lineales, usando los métodos de Newton Kantorovich y Chebyshev.

Solución: La ley de acción de masa que establece que para una reacción reversible en equilibrio y a una temperatura constante, una relación determinada de concentraciones de reactivos y productos cuando estos llegan al equilibrio tiene un valor constante que es llamado constante de equilibrio.

Así, para una temperatura constante se cumple que:

$$K_c = \frac{[C]^c[D]^d}{[A]^a[B]^b},$$

donde K es la constante de equilibrio y $[X]$ indica la concentración de la especie X en el equilibrio.

Para un equilibrio homogéneo gaseoso, se tomará en cuenta las presiones parciales de las especies reactivas. Así, para nuestra ecuación tenemos:

$$K_p = \frac{[PC]^c[PD]^d}{[PA]^a[PB]^b},$$

donde $[PX]$ indica la presión parcial de la especie X .

La relación entre ambas constantes de equilibrio está dada por:

$$K_p = K_c * (RT)^{(c+d-a-b)},$$

donde R es la constante universal de los gases ideales y T es la temperatura.

Las variables a usar son:

x : Cambio de concentración en la primera reacción.

y : Cambio de concentración en la segunda reacción.

Las cantidades de las concentraciones en las dos reacciones en el equilibrio son:

Concentración	Masas
n_A	$2 - x - y$
n_B	$1 - x$
n_C	$x - y$
n_D	x
n_E	$2y$

El cambio en el número de moles del gas en las dos ecuaciones químicas balanceadas es igual a 0, entonces se da que $K_p = K_c$.

Por la ley de acción de masas se tiene:

$$2.6 = K_{p1} = K_{c1} = \frac{[C][D]}{[A][B]} = \frac{(x-y)x}{(2-x-y)(1-x)}$$

$$3.1 = K_{p2} = K_{c2} = \frac{[E]^2}{[A][C]} = \frac{(2y)^2}{(2-x-y)(x-y)}$$

Planteando el siguiente sistema de ecuaciones no lineales de $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con:

$$f_1(x, y) = 1.6x^2 + 3.6xy - 7.8x - 2.6y + 5.2 = 0,$$

$$f_2(x, y) = 3.1x^2 + 0.9y^2 - 6.2x + 6.2y = 0.$$

Entonces

$$F(x, y) = (1.6x^2 + 3.6xy - 7.8x - 2.6y + 5.2, 3.1x^2 + 0.9y^2 - 6.2x + 6.2y).$$

4.1.1 Veamos la Convergencia del Método de Newton-Kantorovich.

De la condición B , tenemos.

Sea el $D = \langle -0.34; 1.94 \rangle \times \langle -0.74; 1.54 \rangle$ con $\bar{x}_0 = (0.8; 0.4) \in \Omega \subseteq D$.

El Jacobiano es:

$$F'(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 3.2x + 3.6y - 7.8 & 3.6x - 2.6 \\ 6.2x - 6.2 & 1.8y + 6.2 \end{bmatrix}$$

La inversa de la matriz Jacobiana es:

$$F'(\bar{x})^{-1} = P \begin{bmatrix} 0.9y + 3.1 & 1.3 - 1.8x \\ 3.1(1-x) & 1.6x + 1.8y - 3.9 \end{bmatrix}$$

con

$$P = \frac{1}{2(0.9y + 3.1)(1.6x + 1.8y - 3.9) - 6.2(x-1)(1.8x - 1.3)}.$$

El valor de $\|F'(\bar{x}_0)^{-1}\|_\infty = 0.277469478357381 = \beta$

Los valores son:

$$\|F'(\bar{x}_0)^{-1}F(\bar{x}_0)\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} -0.029399432729066 \\ -0.056135158465902 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 0.056135158465902$$

$$\Rightarrow a = 0.056135158465902.$$

$$F''(\bar{x}_0) = \begin{bmatrix} 3.2 & 3.6 \\ 3.6 & 0 \\ 6.2 & 0 \\ 0 & 1.8 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\|F'(\bar{x}_0)^{-1}F''(\bar{x}_0)\|_\infty = 1.774571463805648 = b.$$

Donde:

$$\begin{aligned} \|F'(\bar{x}_0)^{-1}[F'(\bar{x}) - F'(\bar{x}_0)]\|_\infty &= \left\| F'(\bar{x}_0)^{-1} \begin{bmatrix} 3.2(x - 0.8) + 3.6(y - 0.4) & 3.6(x - 0.8) \\ 6.2(x - 0.8) & 1.8(y - 0.4) \end{bmatrix} \right\|_\infty \\ &\leq \left\| F'(\bar{x}_0)^{-1} \begin{bmatrix} 3.2 & 3.6 \\ 3.6 & 0 \\ 6.2 & 0 \\ 0 & 1.8 \end{bmatrix} \right\|_\infty \|\bar{x} - \bar{x}_0\|_\infty \\ &\leq 1.77457146380568 \|\bar{x} - \bar{x}_0\|_\infty \\ &\Rightarrow c = 1.77457146380568. \end{aligned}$$

Dado que $F''(\bar{x})$ es constante, entonces $d = 0$. Además:

$$L = \max\{c, b + 2ad\} = \max\{c, b\} = 1.774571463805648,$$

con

$$2La = 0.199231700659596 < 1.$$

De

$$\begin{aligned} f(t) &= t^3 - 2bt^2 - (2d - b^2)t + 2d(b + ad) \\ &= t^3 - 2bt^2 + b^2t \\ &= t(t - b)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t = b = 1.774571463805648 = r_1 = r_2.$$

Se cumple:

$$[b, b + 2ad] = [b, b] \subseteq [r_1, r_2] \Rightarrow [b, b] \subseteq [r_1, r_1].$$

Entonces $L \geq c$ y $L \in [b, b + 2ad] \Rightarrow L \in [b, b]$. Del lema (2.2.1), tenemos:

$$p(t) = 0.887285731902824t^2 - t + 0.056135158465902.$$

Luego, la sucesión nos da una raíz, con $t_0 = 0$:

$$t_{n+1} = t_n - \frac{0.887285731902824t_n^2 - t_n + 0.056135158465902}{1.774571463805648t_n - 1}$$

n	t_n	E	$p(t_n)$
0	0		0.056135158465902
1	0.056135158465902	0.056135158465902	0.002795975771989
2	0.059240472762043	0.003105314296141	0.000008556075797
3	0.059250033974150	0.000009561212107	0.000000000081113
4	0.059250034064793	0.000000000090643	0.000000000000000

donde $2La = 0.199231700659596 < 1$.

Entonces

$$p(0.059250034064793) = 0 \Rightarrow r_1 = 0.059250034064793.$$

Análogamente

n	t_n	E	$p(t_n)$
0	1		-0.056579109631274
1	1.07304569336093	0.073045693360930	0.004734266805670
2	1.06780980931726	0.005235884043667	0.000024324478477
3	1.06778262823830	0.000027181078961	0.000000000655537
4	1.06778262750574	0.000000000732560	0.000000000000000

$$\Rightarrow r_2 = 1.06778262750574$$

Entonces, el método de Newton-Kantorovich está bien definido, la solución $\bar{x}^* \in \Omega$ y es única en el conjunto $\{\bar{x} / \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq r_1\} \cap \Omega$, donde $r_1 = 0.059250034064793$.

La tabla del método de Newton-Kantorovich es:

k	x_k	y_k	Error
0	0.8	0.4	
1	0.82939943272906658	0.45613515846590208	0.05613515846590206
2	0.83143705547870228	0.455656566698376683	0.00203762274963570
3	0.83143775304311807	0.45565480804967867	0.00000175893408816
4	0.83143775304199108	0.45565480804889952	0.00000000000112699

4.1.2 Veamos la Convergencia del Método Iterativo de Chebyshev.

De las condiciones del teorema (2.5.1).

Sea el $\Omega = D = \langle -0.34; 1.94 \rangle \times \langle -0.74; 1.54 \rangle$ con $\bar{x}_0 = (0.8; 0.4) \in \Omega$.

El Jacobiano es:

$$F'(x, y) = JF(x, y) = \begin{bmatrix} 3.2x + 3.6y - 7.8 & 3.6x - 2.6 \\ 6.2x - 6.2 & 1.8y + 6.2 \end{bmatrix}$$

La inversa de la matriz Jacobiana es:

$$JF(\bar{x})^{-1} = P \begin{bmatrix} 0.9y + 3.1 & 1.3 - 1.8x \\ 3.1(1 - x) & 1.6x + 1.8y - 3.9 \end{bmatrix}$$

con

$$P = \frac{1}{2(0.9y + 3.1)(1.6x + 1.8y - 3.9) - 6.2(x - 1)(1.8x - 1.3)}.$$

El valor de $\|J(\bar{x}_0)^{-1}\|_\infty = 0.277469478357381 = \beta$

Los valores son:

$$\begin{aligned} \|JF(\bar{x}_0)^{-1}F(\bar{x}_0)\|_\infty &= \left\| \begin{bmatrix} -0.029399432729066 \\ -0.056135158465902 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 0.056135158465902 \\ &\Rightarrow \eta = 0.056135158465902. \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} F'(x, y) - F'(u, v) &= \begin{bmatrix} 3.2x + 3.6y - 7.8 & 3.6x - 2.6 \\ 6.2x - 6.2 & 1.8y + 6.2 \end{bmatrix} - \\ &\quad \begin{bmatrix} 3.2u + 3.6v - 7.8 & 3.6u - 2.6 \\ 6.2u - 6.2 & 1.8v + 6.2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3.2(x - u) + 3.6(y - v) & 3.6(x - u) \\ 6.2(x - u) & 1.8(y - v) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3.2 & 3.6 \\ 3.6 & 0 \\ 6.2 & 0 \\ 0 & 1.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - u \\ y - v \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tomando norma m.a.m. tenemos:

$$\|F'(x, y) - F'(u, v)\|_\infty \leq \left\| \begin{array}{cc} 3.2 & 3.6 \\ 3.6 & 0 \\ 6.2 & 0 \\ 0 & 1.8 \end{array} \right\|_\infty \| (x, y) - (u, v) \|_\infty.$$

$$\Rightarrow k = 6.8$$

Si $a = k\beta\eta = 0.105915393331891 < 0.5$ y $\alpha = 3.4 \in \langle 0, 72.66851449131069 \rangle$. Entonces $\{x_n\}$ está bien definido, $x_n \in B(x_0, r\eta)$, $\forall n \geq 0$ y converge para $x^* \in \overline{B}(x_0, r\eta)$.

De la relación recurrente, se requiere $b = \alpha\beta\eta = 0.05295769666594540$ donde $a_0 = 1$, $b_0 = \frac{b}{2} = 0.02647884833297270$, $c_0 = 1$ y $d_0 = 1 + \frac{b}{2} = 1.02647884833297270$.

La tabla es:

k	a_k	b_k	c_k	d_k
0	1.0000000000000000	0.02647884833297268	1.0000000000000000	1.02647884833297276
1	1.12198175669574063	0.00274255551320829	0.09231463133324716	0.09256780933435996
2	1.13446117964838811	0.00002315406094655	0.00077079420488270	0.00077081205189869
3	1.13456626134685234	0.00000000160867924	0.00000005354766043	0.00000005354766052
4	1.13456626864746513	0.00000000000000001	0.00000000000000026	0.00000000000000026

el resultado del método iterativo de Chebyshev es:

k	x_k	y_k	<i>Error</i>	<i>Error Teorema</i>
0	0.8000000000000000	0.4000000000000000		
1	0.83063840915439191	0.45603984294276556	0.05603984294276554	0.00519630864582570
2	0.83143773132740284	0.45565501452268548	0.00079932217301093	0.00004326965668076
3	0.83143775304199252	0.45565480804890257	0.00000020647378290	0.00000000300590641
4	0.83143775304199086	0.45565480804889941	0.000000000000000316	0.00000000000000001

Se observa que cuando en el algoritmo agregamos $\beta = a_n\beta$ y $\eta = c_n\eta$ y realizamos los calculos lo que mejora es el error del teorema, como mostramos a continuación en las tablas siguientes:

k	a_k	b_k	c_k	d_k
0	1.0000000000000000	0.02647884833297268	1.0000000000000000	1.02647884833297276
1	1.12198175669574063	0.00274255551320829	0.09231463133324716	0.09256780933435996
2	1.13446117964838811	0.00002315406094655	0.00077079420488270	0.00077081205189869
3	1.13456626134685234	0.00000000160867924	0.00000005354766043	0.00000005354766052

el resultado del método iterativo de Chebyshev es:

k	x_k	y_k	$Error$	$Error Teorema$
0	0.8000000000000000	0.4000000000000000		
1	0.83063840915439191	0.45603984294276556	0.05603984294276554	0.00047969531693316
2	0.83143773132740284	0.45565501452268548	0.00079932217301093	0.00000000307887764
3	0.83143775304199252	0.45565480804890257	0.00000020647378290	0.00000000000000000

4.2 Problema 2

La teoría de la transferencia de radiación discutida hasta ahora utiliza la formulación local, ya que se emplean cantidades definidas solo localmente. En 1943 Ambarzumian formuló un principio de invariancia para la ley de reflexión difusa:

- La ley de la reflexión difusa de un medio paralelo plano homogéneo infinitamente profundo es invariante con respecto a la adición (o sustracción) de capas de espesor óptico finito arbitrario hacia (o desde) el medio.

Para la ley del oscurecimiento (es debido a la absorción y difusión de la luz de la estrella, ver [10]), el profesor Chandrasekhar modificó el principio de la siguiente manera:

- La distribución emergente de un medio paralelo plano semi-infinito es invariante a la suma (o resta) de capas de espesor óptico arbitrario hacia (o desde) el medio.

Consideremos el espacio $X = C[0, 1]$ de las funciones continuas en $[0, 1]$ y dotado de la norma del máximo $\|x\| = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|$, $x \in X$. Se desea encontrar una función $x \in X$ que obedece a la ecuación integral no lineal.

$$x(s) = 1 + \lambda x(s) \int_0^1 \frac{s}{s+t} x(t) dt, \quad s \in [0, 1]. \quad (4.1)$$

Solución: La resolución de (4.1) es equivalente a resolver (2.1), siendo $F : X \rightarrow X$ y tal que:

$$F(x)(s) = x(s) - 1 - \lambda x(s) \int_0^1 \frac{s}{s+t} x(t) dt, \quad s \in [0, 1].$$

Estudiamos el caso particular $\lambda = \frac{1}{4}$, por conveniencia.

Veamos la existencia y unicidad de la solución de esta ecuación.

Para aplicar el teorema de Kantorovich, necesitamos partir de una función inicial adecuada. Dado (4.1) se deduce que $x(0) = 1$, una elección razonable parece ser $x_0(s) = 1, \forall s \in [0, 1]$. Además:

$$F'(x)y(s) = y(s) - \frac{1}{4}x(s) \int_0^1 \frac{s}{s+t} y(t) dt - \frac{1}{4}y(s) \int_0^1 \frac{s}{s+t} x(t) dt, \quad y \in [0, 1].$$

$$F''(x)yz(s) = -\frac{1}{4}z(s) \int_0^1 \frac{s}{s+t} y(t) dt - \frac{1}{4}y(s) \int_0^1 \frac{s}{s+t} z(t) dt, \quad z \in [0, 1].$$

Podemos considerar el subconjunto $\Omega \subseteq D = \underbrace{\langle -0.5, 2.5 \rangle \times \langle -0.5, 2.5 \rangle \cdots \langle -0.5, 2.5 \rangle}_{s \text{ términos}}$, porque vemos que es conveniente, que aparece en el enunciado del teorema de Kantorovich como el propio espacio X , que es un conjunto convexo. Procedemos a calcular las constantes a, b, c y d .

En primer lugar,

$$\begin{aligned} F(x_0)(s) &= x_0(s) - 1 - \frac{1}{4}x_0(s) \int_0^1 \frac{s}{s+t} x_0(t) dt, \\ &= -\frac{s}{4} \int_0^1 \frac{1}{s+t} dt \\ &= -\frac{s}{4} \ln \left(\frac{s+1}{s} \right) \end{aligned}$$

tomando la norma del máximo m.a.m. tenemos.

$$\|F(x_0)\| = \frac{\ln(2)}{4} = 0.173286795139.$$

Por el lema de Banach sobre inversión de operadores nos permite encontrar una cota para $\Gamma_0 = F'(x_0)^{-1}$. Como lo mostraremos: Dada una función cualquiera $y \in X$, se

tiene que:

$$\begin{aligned}
\| [I - F'(x_0)]y \| &= \max_{s \in [0,1]} |y(s) - F'(x_0)y(s)| \\
&= \frac{1}{4} \max_{s \in [0,1]} \left| \int_0^1 \frac{s}{s+t} y(t) dt + y(s) \int_0^1 \frac{s}{s+t} dt \right| \\
&\leq \frac{\ln(2)}{2} \|y\|,
\end{aligned}$$

luego

$$\|I - F'(x_0)\| \leq \frac{\ln(2)}{2} = 0.346573590279 < 1,$$

con lo que se garantiza que existe $\Gamma_0 = F'(x_0)^{-1}$ y además

$$\|\Gamma_0\| \leq \frac{1}{1 - \|I - F'(x_0)\|} \leq \frac{1}{1 - 0.346573590279} = 1.530394219032.$$

En consecuencia,

$$\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \frac{\frac{\ln(2)}{4}}{1 - \frac{\ln(2)}{2}} = 0.265197109516 = a,$$

y

$$\|\Gamma_0 F''(x_0)yz\| \leq \|\Gamma_0\| \|F''(x_0)\| \|y\| \|z\| \leq \frac{\frac{\ln(2)}{2}}{1 - \frac{\ln(2)}{2}} \|y\| \|z\|$$

$$\Rightarrow \|\Gamma_0 F''(x_0)\| \leq 2a = 0.530394219033 = b,$$

luego

$$\|\Gamma_0 [F'(x) - F'(x_0)]y\| \leq \|\Gamma_0\| \|F'(x) - F'(x_0)\| \|y\| \leq \frac{\frac{\ln(2)}{2}}{1 - \frac{\ln(2)}{2}} \|y\|$$

$$\|\Gamma_0 [F'(x) - F'(x_0)]\| \leq b = 0.530394219033 = c.$$

No olvidemos que la $F''(x)$ es constante, entonces en forma parecida deducimos que

$$\begin{aligned} [F''(x) - F''(x_0)]yz &= -\frac{y}{4} \int_0^1 \frac{s}{s+t} z(t) dt - \frac{z}{4} \int_0^1 \frac{s}{s+t} y(t) dt + \frac{y}{4} \int_0^1 \frac{s}{s+t} z(t) dt + \\ &\quad \frac{z}{4} \int_0^1 \frac{s}{s+t} y(t) dt \\ &= 0yz. \end{aligned}$$

Completando

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0[F''(x) - F''(x_0)]yz\| &\leq \|\Gamma_0\| \| [F''(x) - F''(x_0)] \| \|yz\| \\ \Rightarrow \|\Gamma_0[F''(x) - F''(x_0)]\| &\leq 0 = d. \end{aligned}$$

Luego

$$L = \max\{c, b + 2ad\} = \max\{c, b\} = 0.530394219033,$$

Como $a, L > 0$. Del lema (2.2.1), tenemos:

$$p(t) = 0.265197109517251t^2 - t + 0.265197109517251.$$

Luego, la sucesión nos da una raíz, con $t_0 = 0$:

$$t_{n+1} = t_n - \frac{0.265197109517251t_n^2 - t_n + 0.265197109517251}{0.530394219034502t_n - 1}$$

n	t_n	E	$p(t_n)$
0	0		0.265197109517251
1	0.265197109517251	0.265197109517251	0.018651181942674
2	0.286901162090129	0.021704052572878	0.000124925314565
3	0.287048509341738	0.000147347251609	0.000000005757751
4	0.287048516133531	0.000000006791794	0.000000000000000

donde $2La = 0.281318027584 < 1$.

Entonces

$$p(0.287048516133531) = 0 \Rightarrow r_1 = 0.287048516133531,$$

la otra raíz se puede obtener por:

$$r_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2La}}{L} = 3.483731647428.$$

Entonces, la ecuación de Chandrasekhar (4.1) está bien definido, en el sentido donde la solución $x^* \subset \Omega$ y es única en el conjunto $\{x/\|x - x_0\| \leq r_1\} \cap \Omega$, donde $r_1 = 0.287048516133$.

Ahora vamos encontrar la ecuación de sistemas no lineales de (4.1), para lo cual utilizaremos la fórmula de Gauss-Legendre que permitirá obtener el operador bilineal A , trabajamos sobre:

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{x(s)}{4} \frac{s}{s+t} x(t)dt,$$

haciendo $b = 1$ y $a = 0$, tenemos:

$$t = \frac{1-0}{2}u + \frac{1+0}{2}, u \in [-1, 1],$$

con

$$g(u) = f\left(\frac{u}{2} + \frac{1}{2}\right).$$

Reemplazando, se cumple:

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(u)du = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m w_j g(u_j),$$

donde t_j y w_j son los nodos y pesos conocidos. Consideraremos $m = 8$ para obtener el cuadro siguiente:

j	u_j	t_j	w_j
1	-0.960289857	0.0198550715	0.101228536
2	-0.796666478	0.1016667610	0.222381034
3	-0.525532410	0.2372337950	0.313706646
4	-0.183434642	0.4082826790	0.362683783
5	0.183434642	0.5917173210	0.362683783
6	0.525532410	0.7627662050	0.313706646
7	0.796666478	0.8983332390	0.222381034
8	0.960289857	0.9801449285	0.101228536

Denotamos x_i a las aproximaciones $x(t_i)$, $i = 1, \dots, 8$, logrando obtener el sistema de ecuaciones no lineal siguiente:

$$x_i = 1 + \frac{1}{8}x_i \sum_{j=1}^8 w_j \frac{t_i}{t_i + t_j} x_j, \quad i = 1, \dots, 8.$$

Haciendo $a_{ij} = \frac{w_j t_i}{8(t_i + t_j)}$, tenemos.

$$x_i = 1 + x_i \sum_{j=1}^8 a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, 8.$$

El sistema de ecuaciones no lineales es:

$$F(x_i) = 1 + x_i \sum_{j=1}^8 a_{ij} x_j - x_i, \quad i = 1, \dots, 8, \quad (4.2)$$

donde A es un operador bilineal de orden 64×8 , el cual no es tan facil de ser representado.

La tabla del método de Newton-Kantorovich es:

k	0	1	2	3	4
x_{1k}	1.0	1.0216321195380	1.0217196919367	1.0217197313049	1.0217197313049
x_{2k}	1.0	1.0723926309838	1.0731860506442	1.0731863813236	1.0731863813238
x_{3k}	1.0	1.1234206296340	1.1257236176438	1.1257248935853	1.1257248935860
x_{4k}	1.0	1.1655465689728	1.1697503256108	1.1697533118573	1.1697533118591
x_{5k}	1.0	1.1970358811306	1.2030666694164	1.2030717508811	1.2030717508846
x_{6k}	1.0	1.2189686157623	1.2264838051852	1.2264908744001	1.2264908744056
x_{7k}	1.0	1.2329610851719	1.2415159986564	1.2415246001672	1.2415246001743
x_{8k}	1.0	1.2403088501166	1.2494390198051	1.2494485161911	1.2494485161993
<i>Error</i>		0.2651971095173	0.0217040525729	0.00014734725161	0.0000000067918

Veamos la convergencia del método iterativo de Chebyshev.

De las condiciones del teorema (2.5.1).

Sea el $\Omega = D = \langle -0.5; 2.5 \rangle \times \langle -0.5; 2.5 \rangle \cdots \langle -0.5; 2.5 \rangle$, tomando convenientemente $\bar{x}_0 = (1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1)^T \in \Omega$.

El Jacobiano evaluado en \bar{x}_0 es:

$$\|\Gamma_0\| \leq \frac{1}{1 - \frac{\ln(2)}{2}} = 1.53039421903450235 = \beta,$$

luego

$$\|\Gamma_0 F(\bar{x}_0)\| \leq \frac{\frac{\ln(2)}{4}}{1 - \frac{\ln(2)}{2}} = 0.26519710951725117 = \eta,$$

sabemos que:

$$\|F'(\bar{x}) - F'(\bar{u})\| \leq \frac{\ln(2)}{2} \|\bar{x} - \bar{u}\|$$

$$\Rightarrow k = \frac{\ln(2)}{2} = 0.34657359027997264.$$

Si $a = k\beta\eta = 0.14065901379260984 < 0.5$ y $\alpha = 0.09096495075 \in \langle 0, 2.410077214714 \rangle$ obtenido de (4.2). Entonces $\{\bar{x}_n\}$ está bien definido, $\bar{x}_n \in B(\bar{x}_0, r\eta)$, $\forall n \geq 0$ y converge para $\bar{x}^* \in \bar{B}(\bar{x}_0, r\eta)$.

De la relación recurrente, se requiere $b = \alpha\beta\eta = 0.03691868226846743$ donde $a_0 = 1$, $b_0 = \frac{b}{2} = 0.01845934113423372$, $c_0 = 1$ y $d_0 = 1 + \frac{b}{2} = 1.01845934113423375$.

La tabla es:

k	a_k	b_k	c_k	d_k
0	1.0000000000000000	0.01845934113423372	1.0000000000000000	1.01845934113423375
1	1.16720910873249228	0.00229881406392053	0.10669375046874623	0.10693901956285622
2	1.18806812283399976	0.00002643113469755	0.00120519762931557	0.00120522948405645
3	1.18830745853288811	0.00000000336176217	0.00000015325758104	0.00000015325758156
4	1.18830748897306648	0.00000000000000005	0.00000000000000248	0.00000000000000248

el resultado del método iterativo de Chebyshev es:

k	0	1	2	3	4
x_{1k}	1.0	1.022454300731	1.021720060694	1.021719731308	1.021719731305
x_{2k}	1.0	1.074262692436	1.073187124069	1.073186381337	1.073186381324
x_{3k}	1.0	1.126125785057	1.125727088903	1.125724894465	1.125724893586
x_{4k}	1.0	1.169971975665	1.169754542065	1.169753311893	1.169753311859
x_{5k}	1.0	1.199260424598	1.203071807777	1.203071750926	1.203071750885
x_{6k}	1.0	1.222444427002	1.226490824443	1.226490874452	1.226490874406
x_{7k}	1.0	1.236232343852	1.241523974166	1.241524600223	1.241524600174
x_{8k}	1.0	1.243219823740	1.249447374433	1.249448516250	1.249448516199
$E - T$		0.028359918883	0.000319623375	0.000000040643	0.000000000000

Se observa que cuando en el algoritmo agregamos $\beta = a_n\beta$ y $\eta = c_n\eta$ y realizamos los calculos lo que mejora es el error del teorema, como mostramos a continuación en las tablas siguientes:

k	a_k	b_k	c_k	d_k
0	1.0000000000000000	0.01845934113423372	1.0000000000000000	1.01845934113423375
1	1.16720910873249228	0.00229881406392053	0.10669375046874623	0.10693901956285622
2	1.18806812283399976	0.00002643113469755	0.00120519762931557	0.00120522948405645
3	1.18830745853288811	0.00000000336176217	0.00000015325758104	0.00000015325758156

el resultado del método iterativo de Chebyshev es:

k	0	1	2	3
x_{1_k}	1.0	1.022454300731	1.021720060694	1.021719731308
x_{2_k}	1.0	1.074262692436	1.073187124069	1.073186381337
x_{3_k}	1.0	1.126125785057	1.125727088903	1.125724894465
x_{4_k}	1.0	1.169971975665	1.169754542065	1.169753311893
x_{5_k}	1.0	1.199260424598	1.203071807777	1.203071750926
x_{6_k}	1.0	1.222444427002	1.226490824443	1.226490874452
x_{7_k}	1.0	1.236232343852	1.241523974166	1.241524600223
x_{8_k}	1.0	1.243219823740	1.249447374433	1.249448516250
$E - T$		0.003025826109	0.000000041099	0.000000000000

En este caso notamos que el cambio realizado en el algoritmo si mejora el error del Teorema y el cual es una gran utilidad.

5 OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

*Dar el ejemplo no es la principal manera
de influir sobre los demás;
es la única manera.
Albert Einstein.*

- Se dice que el método de Newton en su versión general se denomina el método de Newton Kantorovich, permite su aplicación a ecuaciones definidas entre espacios de funciones, como son el caso de ecuaciones diferenciales o ecuaciones integrales.
- La transformación cuadrática aplicada nos da un buen augurio su utilidad cuando se desea mejorar la solución aproximada que se desea obtener para un problema dado, ya que el método iterativo de Chebyshev nos garantiza que la solución existe y es único en la región abierta y convexa que se trabaja.
- Se menciona al Teorema de Kantorovich donde existe una contribución de las herramientas del Análisis Funcional a los problemas que se resuelven usando el Análisis Numérico que se aplica en los diversos problemas donde interactúan los sistemas de ecuaciones no lineales y cuya justificación recae en las herramientas del Análisis Funcional, así como las aplicaciones lineales, derivadas de Fréchet, etc.
- El sistema de relaciones recurrentes tiene la ventaja de reducir el problema original a una forma más simple con funciones y sucesiones escalares, y proporciona condiciones suficientes para asegurar la convergencia semilocal del método en espacios de Banach.
- Se intentó debilitar la función F al pasar de convexa a cuasi-convexa, y se concluyó que no es posible, lo cual nos indica que el Teorema de Convergencia del método iterativo de Chebyshev es fuerte.
- En la aplicación se noto que el sistema de relaciones recurrentes tiene la ventaja de que reduce el problema original a una forma más simple con funciones y sucesiones escalares, y proporciona condiciones suficientes para asegurar la convergencia semilocal del método en espacios de Banach.
- Al considerar métodos de orden superior, así como el método iterativo de Chebyshev que es de segundo orden se necesitan dos parámetros para controlar la convergencia semilocal y a partir de las relaciones recurrentes generan cuatro sucesiones reales como el orden de convergencia del método iterativo menos uno. Esto simplifica en gran manera su aplicación práctica para resolver una ecuación no lineal en espacios de Banach.
- Los métodos de orden superior no son considerados su utilidad por muchos autores,

debido a su alto costo computacional, además que se tiene que evaluar la derivada segunda de Fréchet, pero nuestros resultados muestran que el costo computacional es compensado por la velocidad de convergencia.

- En el problema que incluye a una ecuación integral, para el caso en particular se logra obtener el sistema de ecuaciones no lineal utilizando la fórmula de Gauss-Legendre, el cual es de suma importancia para lograr obtener la solución por ambos métodos.
- Es importante concluir con respecto a lo anterior, si no se conoce el sistema de ecuaciones no lineal solo se podrá analizar la convergencia o no del problema en estudio, ya que para el Teorema de Kantorovich es suficiente conocer los valores de r_1 y r_2 y en el Teorema de Chebyshev es observar que la sucesión de $\{b_n\}$ converga a 0.
- La nueva condición de parada del algoritmo dado en los métodos resulta ser una alternativa en tenerlo en consideración ya que en algunos problemas es más efectivo que en otros casos, en conclusión, es importante que los algoritmos que presentamos en el espacio de Banach muestran otra alternativa de detener la ejecución del algoritmo en ser considerado y su utilidad dependerá del problema en estudio.
- Al analizar la convergencia del Teorema de Kantorovich en el segundo problema de aplicación observamos que el error absoluto y el error del teorema difieren en su resultando, siendo más eficiente el error absoluto como se muestra en la tabla siguiente:

n	<i>Error</i>	<i>Error Teorema</i>
0		
1	0.24030885011662972	0.26519710951725117
2	0.00913016968850622	0.02170405257287755
3	0.00000949638598025	0.00014734725160875
4	0.00000000000818812	0.00000000679179379

- Al analizar la convergencia del Teorema de Chebyshev en el segundo problema de aplicación observamos que el error absoluto y el error del teorema difieren su resultando, siendo más eficiente el error del teorema como se muestra en la tabla siguiente:

n	<i>Error</i>	<i>Error Teorema</i>	$r \cdot \eta$
0			0.27009247342964288
1	0.24321982374028916	0.02835991888267824	0.29845239231232112
2	0.00622755069297209	0.00031962337547674	0.29877201568779788
3	0.00000219443735405	0.00000004064346764	0.29877205633126552
4	0.00000000087938390	0.00000000000000066	0.29877205633126619

cabe mencionar que el valor de $r \cdot \eta$ es el radio de la bola, en el cual se encuentran los valores del vector solución.

- Se concluye la utilización de variar el η con los nuevos no es solo porque mejora el error del método sino también porque reduce el número de operaciones como se muestra en la tabla siguiente con respecto al segundo ejemplo de aplicación:

n	<i>Error</i>	<i>Error Teorema</i>	$r \cdot \eta$
0			0.27009247342964288
1	0.24321982374028916	0.00302582610858236	0.27311829953822525
2	0.00622755069297209	0.00000004109942860	0.27311834063765383
3	0.00000219443735405	0.00000000000000000	0.27311834063765383

- Es importante tener presente que una desventaja del método iterativo de Chebychev es que se tiene que conocer las dos derivadas de Fréchet para poder dar solución al problema planteado y es debido que se puede no conocer la ecuación por la forma como se presenta el problema en estudio, siendo el caso de los problemas que contiene una ecuación integral.

6 ANEXO I

6.1 Algoritmos

Algoritmo 1: Método de Newton

```

1  $k = 0$ ;
2  $x1 = [1; 1]$ ;
3  $x = [1.5; 2]$ ;
4  $y = x$ ;
5  $n = 12$ ;
6  $er = \|x - x1\|$ ;
7 escribir('METODO DE NEWTON');
8 escribir( $k, x(1), x(2), Error$ );
9 escribir( $k, x(1), x(2), er$ );
10 mientras ( $er \geq 10^{-n}$ ) o ( $k \leq 20$ ) hacer
11    $x2 = x - mnl(x)$ ;
12    $x = x2$ ;
13    $er = \|x - x1\|$ ;
14    $k = k + 1$ ;
15   escribir( $k, x(1), x(2), er$ );
16 funcion  $h = mnl(x)$ ;
17    $w = 3x(1)x(2) - e^{x(1)-1}$ ;
18    $h = \begin{bmatrix} \frac{3x(2)}{2w} & -\frac{1}{w} \\ -\frac{e^{x(1)-1}}{2x(2)w} & \frac{x(1)}{x(2)w} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x(1)^2 + x(2)^2 - 2 \\ e^{x(1)-1} + x(2)^3 - 2 \end{bmatrix}$ ;
19 fin;
```

Algoritmo 2: Método de Newton con Diferencias Finitas

```

1  k = 0;
2  x1 = [1; 1];
3  x = [1.5; 2];
4  y = x;
5  n = 12;
6  er = ||x - x1||;
7  m = length(x);
8  Y = eye(m, m);
9  escribir('METODO DE NEWTON CON DIFERENCIA FINITA');
10 escribir('k', x(1)', x(2)', Error');
11 escribir(k, x(1), x(2), er);
12 mientras (er >= 10-n) o (k <= 20) hacer
13   h = 10-7 · abs(x);
14   j = 1;
15   mientras j <= m hacer
16     z = x + h(j) · Y(:, j);
17     B(:, j) =  $\frac{mdl(z) - mdl(x)}{h(j)}$ ;
18     j = j + 1;
19   [D, d] = GaussSeidel(B, mdl(x));
20   s = TriSup2(D, d);
21   x = x - s;
22   er = ||x - x1||;
23   k = k + 1;
24   escribir(k, x(1), x(2), er);
25 funcion x = TriSup2(D, d)
26   n = length(d);
27   x = zeros(n, 1);
28   x(n) =  $\frac{d(n)}{D(n,n)}$ ;
29   para k = (n - 1) : -1 : 1 hacer
30     s = 0;
31     para j = (k + 1) : n hacer
32       s = s + D(k, j) · x(j);
33     x(k) =  $\frac{d(k) - s}{D(k,k)}$ ;
34 fin

```

```

1 funcion  $g = mdl(x)$ ;
2      $g = [ x(1)^2 + x(2)^2 - 2 e^{x(1)-1} + x(2)^3 - 2 ]$ ;
3 fin
4 funcion  $[D, d] = GaussSeidel(D, d)$ 
5      $n = length(d)$ ;
6     para  $k = 1 : (n - 1)$  hacer
7         para  $i = (k + 1) : n$  hacer
8              $m(i, k) = \frac{D(i, k)}{D(k, k)}$ ;
9              $D(i, k) = 0$ ;
10            para  $j = (k + 1) : n$  hacer
11                 $D(i, j) = D(i, j) - m(i, k) \cdot D(k, j)$ ;
12             $d(i) = d(i) - m(i, k) \cdot d(k)$ ;
13 fin

```

Algoritmo 3: Método de Broyden

```

1 Funcion  $Broyden(x, e)$ 
2      $k = 0$ ;
3      $x1 = [1; 1]$ ;
4      $x = [1.5; 2]$ ;
5      $xx = x$ ;
6      $C = mbl(x)$ ;
7      $s = mnl(x)$ ;
8      $n = 12$ ;
9      $er = \|x - x1\|$ ;
10    escribir('METODO DE BROYDEN');
11    escribir( $k, x(1), x(2), Error$ );
12    escribir( $k, x(1), x(2), er$ );
13    mientras ( $er \geq e$ ) o ( $k \leq 20$ ) hacer
14         $xx = xx - s$ ;
15         $y = mdl(xx) - mdl(x)$ ;
16         $Z = \frac{(y - Cs)s'}{s's}$ ;
17         $C = C + Z$ ;
18         $x = x - s$ ;
19         $[D, d] = GaussSeidel(C, mdl(x))$ ;
20         $s = TriSup2(D, d)$ ;
21         $er = \|x - x1\|$ ;
22         $k = k + 1$ ;
23        escribir( $k, x(1), x(2), er$ );
24 fin

```

```

1 funcion  $h = mnl(x)$ 
2      $w = 3x(1)x(2) - e^{x(1)-1};$ 
3      $h = \begin{bmatrix} \frac{3x(2)}{2w} & -\frac{1}{w} \\ -\frac{e^{x(1)-1}}{2x(2)w} & \frac{x(1)}{x(2)w} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x(1)^2 + x(2)^2 - 2 \\ e^{x(1)-1} + x(2)^3 - 2 \end{bmatrix};$ 
4 fin
5 funcion  $f = mbl(x)$ 
6      $f = \begin{bmatrix} 2x(1) & 2x(2) \\ e^{x(1)-1} & 3x(2)^2 \end{bmatrix};$ 
7 fin
8 funcion  $[D, d] = GaussSeidel(D, d)$ 
9      $n = length(d);$ 
10    para  $k = 1 : (n - 1)$  hacer
11        para  $i = (k + 1) : n$  hacer
12             $m(i, k) = \frac{D(i, k)}{D(k, k)};$ 
13             $D(i, k) = 0;$ 
14            para  $j = (k + 1) : n$  hacer
15                 $D(i, j) = D(i, j) - m(i, k) \cdot D(k, j);$ 
16             $d(i) = d(i) - m(i, k) \cdot d(k);$ 
17 fin
18 funcion  $x = TriSup2(D, d)$ 
19      $n = length(d);$ 
20      $x = zeros(n, 1);$ 
21      $x(n) = \frac{d(n)}{D(n, n)};$ 
22     para  $k = (n - 1) : -1 : 1$  hacer
23          $s = 0;$ 
24         para  $j = (k + 1) : n$  hacer
25              $s = s + D(k, j) \cdot x(j);$ 
26          $x(k) = \frac{d(k) - s}{D(k, k)};$ 
27 fin

```

Algoritmo 4: Método de Newton-Kantorovich

```

1 Funcion NEWTON( $x, e$ )
2      $k = 0$ ;
3      $t = 0$ ;
4      $y = x$ ;
5      $a = \frac{\frac{\ln(2)}{2}}{1 - \frac{\ln(2)}{2}}$ ;
6      $b = 2a$ ;
7      $c = b$ ;
8      $d = 0$ ;
9      $et = 0$ ;
10     $er = 0$ ;
11    escribir('METODO DE NEWTON – KANTOROVICH');
12    escribir( $k, x(1), x(2), x(3), x(4), x(5), x(6), x(7), x(8), er, et$ );
13     $et = 1$ ;
14    mientras ( $et \geq 10^{-n}$ ) o ( $k \leq 20$ ) hacer
15         $z = F(x)$ ;
16         $W = JF(x)$ ;
17         $[D, d] = GaussSeidel(W, z)$ ;
18         $dx = TriSup2(D, d)$ ;
19         $[t, et] = pol(t, L, a)$ ;
20         $x = x - dx$ ;
21         $er = \|y - x\|$ ;
22         $y = x$ ;
23         $k = k + 1$ ;
24        escribir( $k, x(1), x(2), x(3), x(4), x(5), x(6), x(7), x(8), er, et$ );
25 fin
26 funcion  $z = F(x)$ 
27      $A = Matriz(x)$ ;
28      $z_i = 1 + x_i \sum_{j=1}^8 A(i, j)x_j - x_i, i = 1, \dots, 8$ ;
29 fin
30 funcion  $[t, et] = pol(t, L, a)$ 
31      $t1 = t$ ;
32      $t = t - \frac{\frac{L}{2}t^2 - t + a}{Lt - 1}$ ;
33      $et = abs(t - t1)$ ;
34 fin

```

```

1 funcion  $W = JF(x)$ 
2      $A = \text{Matriz}(x);$ 
3      $W = \nabla z_i = \nabla \left( 1 + x_i \sum_{j=1}^8 A(i, j)x_j - x_i \right), i = 1, \dots, 8;$ 
4 fin
5 funcion  $C = \text{Matriz}(x)$ 
6  $C = \begin{bmatrix} 0.0063267835 & 0.0045417676 & 0.0030284605 & 0.0021024520 & 0.0014718438 & 0.0009948407 & 0.0006011010 & 0.0002512375 \\ 0.0105861403 & 0.0138988146 & 0.0117636051 & 0.0090383680 & 0.0066472692 & 0.0046119161 & 0.0028260949 & 0.0011891600 \\ 0.0116763272 & 0.0194586198 & 0.0196066654 & 0.0166612421 & 0.0129743553 & 0.0093027273 & 0.0058072636 & 0.0024658339 \\ 0.0120667524 & 0.0222557172 & 0.0248020374 & 0.0226677364 & 0.0185096883 & 0.0136716101 & 0.0086860189 & 0.0037209230 \\ 0.0122427612 & 0.0237218291 & 0.0279910438 & 0.0268257846 & 0.0226677364 & 0.0171306676 & 0.0110387789 & 0.0047633530 \\ 0.0123325465 & 0.0245283244 & 0.0299106035 & 0.0295293963 & 0.0255302969 & 0.0196066654 & 0.0127644930 & 0.0055376967 \\ 0.0123799440 & 0.0249715343 & 0.0310211880 & 0.0311693449 & 0.0273322015 & 0.0212068209 & 0.0138988146 & 0.0060512387 \\ 0.0124023295 & 0.0251852569 & 0.0315717258 & 0.0320040696 & 0.0282692290 & 0.0220520407 & 0.0145041373 & 0.0063267835 \end{bmatrix};$ 
7 fin
8 funcion  $[D, d] = \text{GaussSeidel}(D, d)$ 
9      $n = \text{length}(d);$ 
10    para  $k = 1 : (n - 1)$  hacer
11        para  $i = (k + 1) : n$  hacer
12             $m(i, k) = \frac{D(i, k)}{D(k, k)};$ 
13             $D(i, k) = 0;$ 
14            para  $j = (k + 1) : n$  hacer
15                 $D(i, j) = D(i, j) - m(i, k) \cdot D(k, j);$ 
16             $d(i) = d(i) - m(i, k) \cdot d(k);$ 
17 fin
18 funcion  $x = \text{TriSup2}(D, d)$ 
19      $n = \text{lenth}(d);$ 
20      $x = \text{zeros}(n, 1);$ 
21      $x(n) = \frac{d(n)}{D(n, n)};$ 
22     para  $k = (n - 1) : -1 : 1$  hacer
23          $s = 0;$ 
24         para  $j = (k + 1) : n$  hacer
25              $s = s + D(k, j) \cdot x(j);$ 
26          $x(k) = \frac{d(k) - s}{D(k, k)};$ 

```

Algoritmo 5: Método Iterativo de Chebyshev

```

1 Funcion Chebyshev( $x, e$ )
2    $j = 0;$ 
3    $x1 = x;$ 
4    $n1 = \text{length}(x);$ 
5    $I = \text{eye}(n1, n1);$ 
6    $C = \text{Matriz}(x);$ 
7    $ZZ = JF(x);$ 
8    $F = \text{func1}(x);$ 
9    $A = J J F(x);$ 
10   $[D, d] = \text{GaussSeidel}(ZZ, F);$ 
11   $z = \text{TriSup}(D, d);$ 
12   $B = \frac{1}{1 - \frac{\ln(2)}{2}};$ 
13   $E = B \cdot \frac{\ln(2)}{4};$ 
14   $\text{alfa} = \text{norm}(A, \%inf);$ 
15   $k = \frac{\ln(2)}{2};$ 
16   $a = k \cdot B \cdot E;$ 
17   $b = \text{alfa} \cdot B \cdot E;$ 
18   $S = \text{Sigma}(a);$ 
19   $an = 1;$ 
20   $cn = 1;$ 
21   $bn = \frac{b}{2};$ 
22   $dn = 1 + bn;$ 
23   $Z = [];$ 
24  para  $i = 1 : n1$  hacer
25  |    $w = A \cdot (n1(i - 1) + 1 : n1 \cdot i, 1 : n1);$ 
26  |    $[D0, d0] = \text{GaussSeidel}(ZZ, w);$ 
27  |    $z0 = \text{TriSup}(D0, d0);$ 
28  |    $Z = [Z z0];$ 
29   $dx = (I + 0.5 \cdot Z)z;$ 
30   $r = dn;$ 
31   $rn = dn \cdot E;$ 
32   $er = 0;$ 
33   $ec = 0;$ 
34  escribir('METODO ITERATIVO DE CHEBYSHEV');
35  escribir( $j, x(1), x(2), \dots, x(8), er, an, bn, cn, dn, ec, r, rn$ );
36   $ec = 1;$ 

```

```

1      mientras (et >= e) o (k <= 20) hacer
2           $x = x - dx$ 
3           $ZZ = JF(x)$ ;
4           $F = \text{func1}(x)$ ;
5           $[D, d] = \text{GaussSeidel}(ZZ, F)$ ;
6           $z = \text{TriSup}(D, d)$ ;
7           $Z = []$ ;
8          para  $i = 1 : n1$  hacer
9               $w = A(n1(i - 1) + 1 : n1 \cdot i, 1 : n1) \cdot z$ ;
10              $[D0, d0] = \text{GaussSeidel}(ZZ, w)$ ;
11              $z0 = \text{TriSup}(D0, d0)$ ;
12          $dx = (I + 0.5 \cdot Z)z$ ;
13          $er = \|x - x1\|$ ;
14          $x1 = x$ ;
15          $an = \frac{an}{1 - a \cdot an \cdot dn}$ ;
16          $cn = \frac{an}{2} \cdot (a + \frac{b}{(1+bn)^2}) \cdot dn^2$ ;
17          $bn = \frac{b}{2} \cdot an \cdot dn$ ;
18          $dn = (1 + bn) \cdot cn$ ;
19          $rn = rn + dn \cdot E$ ;
20          $ec = dn \cdot E$ ;
21          $k = k + 1$ ;
22         escribir(k, x(1), x(2),  $\dots$ , x(8), er, an, bn, cn, dn, ec, r, rn);
23 fin
24 funcion  $F = \text{func1}(x)$ 
25      $H = \text{Matriz}(x)$ ;
26      $F_i = 1 + x_i \sum_{j=1}^8 H(i, j)x_j - x_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$ ;
27      $F = [F_1; F_2; F_3; F_4; F_5; F_6; F_7; F_8]$ ;
28 fin
29 funcion  $W = JF(x)$ 
30      $A = \text{Matriz}(x)$ ;
31      $W = \nabla z_i = \nabla \left( 1 + x_i \sum_{j=1}^8 A(i, j)x_j - x_i \right)$ ,  $i = 1, \dots, 8$ ;
32 fin

```

```

1 funcion  $A = JJF(x)$ 
2      $A = Matriz(x);$ 
3      $A = 0.5 \cdot \nabla^2 z_i = 0.5 \cdot \nabla^2 \left( 1 + x_i \sum_{j=1}^8 A(i, j)x_j - x_i \right), i = 1, \dots, 8;$ 
4 fin
5 funcion  $C = Matriz(x)$ 
6  $C = \begin{bmatrix} 0.0063267835 & 0.0045417676 & 0.0030284605 & 0.0021024520 & 0.0014718438 & 0.0009948407 & 0.0006011010 & 0.0002512375 \\ 0.0105861403 & 0.0138988146 & 0.0117636051 & 0.0090383680 & 0.0066472692 & 0.0046119161 & 0.0028260949 & 0.0011891600 \\ 0.0116763272 & 0.0194586198 & 0.0196066654 & 0.0166612421 & 0.0129743553 & 0.0093027273 & 0.0058072636 & 0.0024658339 \\ 0.0120667524 & 0.0222557172 & 0.0248020374 & 0.0226677364 & 0.0185096883 & 0.0136716101 & 0.0086860189 & 0.0037209230 \\ 0.0122427612 & 0.0237218291 & 0.0279910438 & 0.0268257846 & 0.0226677364 & 0.0171306676 & 0.0110387789 & 0.0047633530 \\ 0.0123325465 & 0.0245283244 & 0.0299106035 & 0.0295293963 & 0.0255302969 & 0.0196066654 & 0.0127644930 & 0.0055376967 \\ 0.0123799440 & 0.0249715343 & 0.0310211880 & 0.0311693449 & 0.0273322015 & 0.0212068209 & 0.0138988146 & 0.0060512387 \\ 0.0124023295 & 0.0251852569 & 0.0315717258 & 0.0320040696 & 0.0282692290 & 0.0220520407 & 0.0145041373 & 0.0063267835 \end{bmatrix};$ 
7 fin
8 funcion  $[D, d] = GaussSeidel(D, d)$ 
9      $n = length(d);$ 
10    para  $k = 1 : (n - 1)$  hacer
11        para  $i = (k + 1) : n$  hacer
12             $m(i, k) = \frac{D(i, k)}{D(k, k)};$ 
13             $D(i, k) = 0;$ 
14            para  $j = (k + 1) : n$  hacer
15                 $D(i, j) = D(i, j) - m(i, k) \cdot D(k, j);$ 
16             $d(i) = d(i) - m(i, k) \cdot d(k);$ 
17 fin
18 funcion  $x = TriSup(D, d)$ 
19      $n = lenth(d);$ 
20      $x = zeros(n, 1);$ 
21      $x(n) = \frac{d(n)}{D(n, n)};$ 
22     para  $k = (n - 1) : -1 : 1$  hacer
23          $s = 0;$ 
24         para  $j = (k + 1) : n$  hacer
25              $s = s + D(k, j) \cdot x(j);$ 
26          $x(k) = \frac{d(k) - s}{D(k, k)};$ 
27 fin
28 funcion  $S = Sigma(a)$ 
29      $s1 = 2(2a^2 - 3a - 1);$ 
30      $s2 = 2\sqrt{1 + 8a - 4a^2}$ 
31      $S = \frac{s1 + s2}{a(1 - 2a)};$ 

```

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Argyros I.K. Chen D, *Results on the Chebyshev Method in Banach Spaces*, *Proyecciones* 12(2);119-128, 1993.
- [2] Argyros I.K. and Szidarovszky F, *The Theory and Applications of Iteration Methods*, C.R.C. Press, Boca Raton, Fla., 1993.
- [3] Candela V, *Estimadores a priori del error para los métodos iterativos de Halley y de Chebyshev*, Valencia, 1988.
- [4] Candela V. Marquina A, *Recurrence Relations for Rational Cubic Methods I: The Halley Method*, *Computing* 44:169-184, 1990.
- [5] Candela V. Marquina A, *Recurrence Relations for Rational Cubic Methods II: The Chebyshev Method*, *Computing* 45:355-367, 1990.
- [6] Dennis J.E. and Schnabel R.B, *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear systems*, Prentice-Hall. Englewood Cliffs. New Jersey, 1983.
- [7] Ezquerro J.A. and Hernández M.A, *Recurrence Relations for Chebyshev-Type Methods*, Department of Mathematics and Computation. *Appl. Math. Optim.* **41** (2000), 227-236.
- [8] Gutiérrez J.M, *A new semilocal convergence theorem for Newton's method*, *J. Comput. Appl. Math.* **79** (1997), 131-145.
- [9] Huang Z, *A note on the Kantorovick theorem for Newton iteration*, *J. Comput. Appl. Math.* **47** (1993) 211-217.
- [10] Kantorovich L.V. Akilov G.P, *Functional Analysis*, Pergamon Press. Oxford, 1982.
- [11] Menon S.V, *Radiative Transfer-An Outline of Prof. Subramanyan Chandrasekhar's Contributions*, 1995.
- [12] Ortega J.M. Rheinboldt W.C, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press. New York, 1970.
- [13] Rall L.B, *Quadratic Equations in Banach Space*, *Rend Circ Mat Palermo* (2) **10**: 314-332, 1961.

- [14] Rall L.B, *Computational Solution of Nonlinear Operator Equations*, Krieger. Huntington. NJ, 1979.
- [15] Yamamoto T, *A Method for Finding Sharp Error Bounds for Newton's Method under the Kantorovich Assumptions*, Numer Math 49:203-220, 1986.

CIP - CATALOGO DE PUBLICACIÓN

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA NO LINEAL
ALGEBRAICO POR OPTIMIZACIÓN NUMÉRICA /
LEOPOLDO PAREDES SORIA.
EPM - FC - UNI, 2022.

p.: il.

Tesis de Maestría—Universidad Nacional de
Ingeniería, Facultad de Ciencias, Sección de Posgrado,
Lima, 2022. Asesor: PEDRO CANALES GARCÍA