UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

Facultad de Ciencias

TESIS

"CLAUSURAS DE OPERADORES MONÓTONOS EN ESPACIOS VECTORIALES TOPOLÓGICOS"

Para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática

ELABORADO POR
Carlos Alberto Santana Rosas

ASESOR
Dr. Orestes Martin Bueno Tangoa

Lima - Perú
2022

A Dios que me protege y me guía por el buen camino.

A mi padre, mi madre y mi novia a quienes amo mucho y son mis motivos para seguir adelante.

A mi familia y amigos que me aprecian mucho y confían en mí.

Agradecimientos

A mi padre Máximo Santana, mi madre Isabel Rosas y mi novia Giselle Pisfil por apoyarme mucho en mi vida y gracias a ellos se pudo realizar esta tesis de Licenciatura.

A mi asesor Orestes Bueno, a quien aprecio mucho, por siempre apoyarme en la parte profesional y sus consejos. Gracias por darme oportunidades en crecer como matemático.

A la Universidad Nacional de Ingeniería, mi segunda casa, donde tuve una sólida formación en matemáticas y momentos inolvidables.

Resumen

Fitzpatrick en [1] demostró que todo operador monótono maximal es un operador representable en espacios vectoriales topológicos. Por lema de Zorn, todo operador monótono tiene extesión monótona maximal; por lo tanto, todo operador monótono posee extensión representable y la menor de todas las extensiones representables es llamada la clausura representable. Por otro lado, la clausura polar monótona de un operador monótono, que la podemos ver como la intersección de todas las extensiones monótonas maximales, tiene la propiedad de ser representable y además contiene a la clausura representable. El objetivo de la tesis es saber cuando estas dos clausuras son iguales en espacios vectoriales topológicos. Además, demostrar que estas dos clausuras son iguales, sin ninguna hipótesis, en espacios de dimensión finita.

Abstract

A monotone operator is representable if it can be represented by a lower semi-continuous convex function. It is difficult by definition to know if a monotone operator is representable. Fitzpatrick in [1] proved that every maximal monotone operator is representable in topological vector spaces. By Zorn's lemma, every monotone operator has a maximal monotone extension. So that, every monotone operator has a representable extension and the smallest representable extension is called representable closure. Then a way to know if a monotone operator is representable is studying its representable closure but its geometry is difficult to know. On the other hand, the intersection of all maximal monotone extensions is called the monotone polar closure that is representable, this definition has a geometric interpretation. Martínez-Legaz and Svaiter in [2] prove that these two clousures are equals in finite dimension spaces. A natural question is to know if these closures are equals in infinite dimension spaces. Simons presents an example in [3] where these two closures are not equals. The goal of the thesis is to study the properties of these two closures and to know when they are equals in topological vector spaces. Furthermore, to give another proof of the equality of these closures in finite dimension spaces.

Índice general

1. Fundamentos de espacios de Banach y análisis convexo en espacios vectoriales topológicos **2**
1.1. Espacios reflexivos en espacios de Banach 2
1.2. Topología débil en espacios de Banach 3
1.3. Topología débil estrella en espacios de Banach 3
1.4. Espacios Vectoriales Topológicos 4
1.4.1. Tipos de Espacios Vectoriales Topológicos 5
1.4.2. Topología débil inducida por una familia de funciones 5
1.4.3. Topología débil de un espacio vectorial topológico 6
1.4.4. Topología débil estrella de un espacio vectorial topológico 7
1.5. Análisis convexo en espacios vectoriales topológicos 8
1.5.1. Funciones convexas en espacios vectoriales 9
1.5.2. Semicontinuidad inferior en espacios topológicos 12
1.5.3. Funciones convexas semicontinuas inferiores en espacios localmente convexos 15
1.5.4. Conjugada de Fenchel 16

2. Teoría de Operadores Monótonos **21**
2.1. Operadores Monótonos 21
2.1.1. Ejemplos de operadores monótonos 22
2.2. Operadores Monótonos Maximales 28
2.2.1. Ejemplos de operadores monótonos maximales 28
2.3. Engorde de un operador monótono 32
2.4. Clausura Polar Monótona 39

3. Clausura representable de un operador monótono **45**
3.1. Operadores Representables 45
3.2. Clausura representante de un operador monótono 54
3.3. Traslación 56

4. Clausuras de un operador monótono **59**

Introducción

Un operador monótono es representable si puede ser representado por una función convexa semicontinua inferior. Es muy difícil por definición saber si un operador monótono es representable. Fitzpatrick en [1] demostró que todo operador monótono maximal es representable en espacios vectoriales topológicos. Por el Lema de Zorn, todo operador monótono tiene extensión monótona maximal. Así, todo operador monótono tiene extensión representable y la menor extensión representable de un operador monótono es llamada clausura representable. Entonces una manera de saber si un operador monótono es representable es estudiando su clausura representable pero su geometría es difícil de conocer. Por otro lado, la intersección de extensiones monótonas maximales es llamado clausura polar monótono que es representable, esta definición tiene interpretación geométrica. Martínez-Legaz y Svaiter en [2] demuestran que estas dos clausuras son iguales en espacios de dimensión finita. Una pregunta natural es saber si estas dos clausuras son iguales en espacios de dimensión infinita. Simons presenta un ejemplo en [3] donde estas dos clausuras no son iguales. El objetivo de la tesis es estudiar las propiedades de estas dos clausuras y saber cuándo son iguales en espacios vectoriales topológicos. Además, dar otra demostración de la igualdad de estas dos clausuras en espacios de dimensión finita.

A continuación se describe el contenido de la tesis que consiste en 4 capítulos:

En el primer capítulo se estudia los conceptos y propiedades fundamentales de los espacios vectoriales topológicos, la topología débil, la topología débil estrella y análisis convexo en espacios localmente convexos.

En el segundo capítulo se presenta ejemplos y propiedades de los operadores monótonos, los operadores monótonos maximales, el enlargement de un operador monótono, el polar monótono y la clausura polar monótona de un operador multivaluado.

En el tercer capítulo se estudia los operadores representables, la función Fitzpatrick y la clausura representable.

En el último capítulo se demuestra que la clausura representable y la clausura polar monótona de un operador monótono son iguales en espacios vectoriales topológicos cuando la cápsula convexa del operador monótono no es monótono. Además, se da otra demostración de la igualdad de estas dos clausuras en espacios de dimensión finita sin asumir alguna hipótesis.

Capítulo 1

Fundamentos de espacios de Banach y análisis convexo en espacios vectoriales topológicos

En este capítulo se presenta conceptos fundamentales del análisis funcional y análisis convexo en espacios vectoriales topológicos.

1.1. Espacios reflexivos en espacios de Banach

Sea E un espacio normado en los reales y E^* su respectivo dual topológico.

El **producto dualidad** $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E^* \to \mathbb{R}$ se define como

$$\langle z, z^* \rangle := z^*(z), \quad \forall z \in E, \forall z^* \in E^*.$$

El dual topológio de E^* está denotado por $E^{**} := (E^*)^*$ llamado **bidual** de E.

La **aplicación canónica** $\mathcal{J} : E \to E^{**}$ se define como

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{J}(z): & E^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & z^* & \mapsto & \mathcal{J}(z)(z^*) := \langle z, z^* \rangle \end{array}$$

para todo $z \in E$.

La aplicación canónica tiene las propiedades de ser lineal, continua e isométrica. Así, se puede identificar a E con la imagen de la aplicación canónica en el espacio bidual E^{**}, es decir $E \simeq \mathcal{J}(E) \subset E^{**}$.

Definición 1.1. Si la aplicación canónica es sobroyectiva, entonces se dice que E es un espacio **reflexivo**. En este caso $E \simeq E^{**}$.

Son ejemplos de espacios reflexivos los espacios normados de dimensión finita y los espacios de Hilbert. Es fácil verificar que todo espacio normado reflexivo es de Banach. Más aún, un espacio de Banach es reflexivo si, y sólo si, su dual topológico es reflexivo. El lector interesado puede ver [4] para las demostraciones.

1.2. Topología débil en espacios de Banach

Sea E un espacio de Banach y E^* su espacio dual.

Definición 1.2. La **topología débil** en E denotada por $\sigma(E, E^*)$, se define como la menor topología que hace a las funcionales de E^* continuas.

Observación. En general la topología débil tiene menos abiertos que la topología de la norma $\tau_{\|\cdot\|}$, llamada también topología fuerte, es decir $\sigma(E, E^*) \subset \tau_{\|\cdot\|}$.

Denotemos $\rightharpoonup$ como la convergencia en la topología débil: sean (z_n) una sucesión y z en E, $z_n \rightharpoonup z$ si la sucesión (z_n) converge a z en la topología $\sigma(E, E^*)$. Cuando esto ocurre, z se denomina **límite débil** de la sucesión (z_n).

Propiedades. *La topología débil tiene las siguientes propiedades y están demostradas en [5]: Sean (z_n) una sucesión y z en E,*

- *El espacio topológico $(E, \sigma(E, E^*))$ es un espacio de Hausdorff.*
- *El límite débil de una sucesión es único.*
- $z_n \rightharpoonup z$ *en* $\sigma(E, E^*)$ *si, y sólo si,* $\forall h \in E^*, h(z_n) \to h(z)$.
- *Si* $z_n \to z$, *entonces* $z_n \rightharpoonup z$.
- *Si* $z_n \rightharpoonup z$ *en* E *y* $h_n \to h$ *en* E^*, *entonces* $h_n(z_n) \to h(z)$.

1.3. Topología débil estrella en espacios de Banach

Sea E un espacio de Banach y E^* su espacio dual.

Definición 1.3. La **topología débil estrella** en E^* denotada por $\sigma(E^*, E)$, se define como la menor topología que hace a las funcionales $\big\{J(z)\big\}_{z\in E} \subset E^{**}$ continuas.

Observación. La topología débil estrella es más débil que la topología débil, es decir $\sigma(E^*, E) \subset \sigma(E^*, E^{**})$. Más aún, $\sigma(E^*, E) = \sigma(E^*, E^{**})$ si, y sólo si, E es reflexivo.

Denotemos $\overset{*}{\rightharpoonup}$ como la convergencia en la topología débil estrella: sean (h_n) una sucesión y h en E^*, $h_n \overset{*}{\rightharpoonup} h$ si la sucesión (h_n) converge a h en la topología $\sigma(E^*, E)$. Cuando esto ocurre, h se denomina **límite débil estrella** de la sucesión (h_n).

Proposición. *La topología débil estrella tiene las siguientes propiedades y están demostradas en [5]: Sean (h_n) una sucesión y h en E^*.*

- *El espacio topológico $(E, \sigma(E^*, E))$ es un espacio de Hausdorff.*
- *El límite débil estrella de una sucesión es único.*
- $h_n \overset{*}{\rightharpoonup} h$ *en* $\sigma(E^*, E)$ *si, y sólo si,* $h_n(z) \to h(z)\ \forall z \in E$.
- *Si* $h_n \to h$ *en* E^*, *entonces* $h_n \rightharpoonup h$ *en* $\sigma(E^*, E^{**})$, *y esto implica que* $h_n \overset{*}{\rightharpoonup} h$ *en* $\sigma(E^*, E)$.

1.4. Espacios Vectoriales Topológicos

Un espacio vectorial topológico es un espacio vectorial real con una topología compatible con las operaciones del espacio vectorial de modo que cada conjunto unitario del espacio sea cerrado. Los lemas y proposiciones en esta sección pueden ser encontradas en [6].

Definición 1.4. Sean X un espacio vectorial real y τ una topogía de X, se dice que (X,τ) es un **espacio vectorial topológico** si

- El conjunto unitario $\{z\}$ es cerrado para todo $z \in X$. (Propiedad T_1)
- La función $(z_1, z_2) \in X \times X \mapsto z_1 + z_2 \in X$ es continua en $X \times X$.
- La función $(\lambda, z) \in \mathbb{R} \times X \mapsto \lambda z \in X$ es continua en $\mathbb{R} \times X$.

La siguiente observación es debido a la continuidad de la función suma.

Lema 1.1. *Si $z_1, z_2 \in X$ y $U_{z_1+z_2}$ es una vecindad de $z_1 + z_2$, entonces existen U_{z_1} y U_{z_2} vecindades de z_1 y z_2, tal que*

$$U_{z_1} + U_{z_2} \subset U_{z_1+z_2},$$

donde $U_{z_1} + U_{z_2} := \{u + v : \ u \in U_{z_1}, \ v \in U_{z_2}\}$.

Demostración. Sea $W := +(U_{z_1+z_2})^{-1} \subset X \times X$. Como la función $+$ es continua y $(z_1, z_2) \in W$, existen U_{z_1} y U_{z_2} vecindades de z_1 y z_2 tal que $U_{z_1} \times U_{z_2} \subset W$. Por lo tanto, $U_{z_1} + U_{z_2} \subset U_{z_1+z_2}$. $\square$

Proposición 1.1. *Si (x_n) y (y_n) son sucesiones en X tal que $x_n \to x$ y $y_n \to y$, entonces $x_n + y_n \to x + y$.*

Demostración. Sea U_{x+y} una vecindad de $x+y$. Por el Lema 1.1, existen U_x y U_y vecindades de x e y tal que $U_x + U_y \subset U_{x+y}$. Como $x_n \to x$ y $y_n \to y$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n + y_n \in U_x + U_y \subset U_{x+y}$ para todo $n \geq n_0$. Así, $x_n + y_n \to x + y$. $\square$

Proposición. *Los espacios vectoriales topológicos tienen las siguientes propiedades y están demostradas en [6]: Sean $z_0 \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,*

- *Las funciones $z \in X \mapsto z + z_0 \in X$ y $z \in X \mapsto \lambda z \in X$ definen homeomorfismos de X a X.*
- *Si $U \subset X$ es abierto, entonces $z_0 + U$ y λU son abiertos.*
- *Todo espacio vectorial topológico es Hausdorff.*

Debido al segundo item de la proposición anterior (invariancia por traslación), basta definir la base local de un espacio vectorial topológico en el origen.

Definición 1.5. Una colección de vecindades de 0 de un espacio vectorial topológico es una **base local** si toda vecindad de 0 contiene un elemento de la base local.

Observación. Todo abierto de un espacio vectorial topológico es unión de traslaciones de elementos de la base local.

Definición 1.6. Un subconjunto B de X es **acotado** si para toda vecindad V de 0, existe $s > 0$ tal que $B \subset tV$ para todo $t > s$.

Proposición 1.2. *Sea $B \subset X$. Entonces B es acotado si, y sólo si,*

$$\forall (x_n) \subset B \text{ y } \forall \alpha_n \subset \mathbb{R} \text{ tal que } \alpha_n \to 0, \text{ se cumple que } \alpha_n x_n \to 0.$$

Demostración. Supongamos que B es acotado. Sean $(x_n) \subset B$ y $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $\alpha_n \to 0$. Entonces, para toda vecindad balanceada V de 0, existe $s > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B \subset tV$ para todo $t \geq s$ y $|\alpha_n| < \frac{1}{s}$ para todo $n \geq n_0$. Así, $\alpha_n x_n \in V$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto, $\alpha_n x_n \to 0$.

Recíprocamente, supongamos que B no es acotado. Entonces, existe una vecindad U de 0 y una sucesión $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $\alpha_n \to +\infty$ y $B \not\subseteq \alpha_n U$. Luego, existe una sucesión $(z_n) \subset B$ tal que $\frac{1}{\alpha_n} z_n \notin U$ para todo $n \geq 1$. Por otro lado, por hipótesis, $\frac{1}{\alpha_n} z_n \to 0$, y por ende, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\alpha_n} z_n \in U$ para todo $n \geq n_0$, lo cual es una contradicción. □

1.4.1. Tipos de Espacios Vectoriales Topológicos

Un espacio vectorial topológico (X, τ) es:

- **localmente convexo** si posee una base local cuyos elementos son convexos.
- **localmente acotado** si existe una vecindad acotada de 0.
- **localmente contable o primero contable** si posee una base local contable.

1.4.2. Topología débil inducida por una familia de funciones

Dado una familia de funciones, se puede definir una topología a cualquier conjunto de la siguiente manera: Sean X un conjunto arbitrario y una familia $\mathscr{F}$ de funciones $f : X \to Y_f$ donde (Y_f, τ_{Y_f}) es un espacio topológico.

Definición 1.7. La **topología débil de X inducida por $\mathscr{F}$** denotada por $\sigma(X, \mathscr{F})$ es definida como la colección de todas las uniones arbitrarias de intersecciones finitas de conjuntos $f^{-1}(V)$ con $V \in \tau_{Y_f}$ y $f \in \mathscr{F}$.

Observación. La topología débil es una topología. Además, es la menor topología que hace a cada $f \in \mathscr{F}$ continua.

Definición 1.8. Una familia $\mathscr{F}$ de funciones en X se dice que **separa puntos en** X si para todo par de puntos $x, y \in X$ tal que $x \neq y$, existe $f \in \mathscr{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Proposición 1.3. *La familia de funciones que separan puntos tienen las siguientes propiedades:*

- *Sea $\mathscr{F}$ una familia de funciones $f : X \to Y_f$ donde Y_f es un espacio topológico de Hausdorff. Si $\mathscr{F}$ separa puntos en X, entonces $(X, \sigma(X, \mathscr{F}))$ es un espacio topológico de Hausdorff.*

- *Sean X un espacio vectorial y $\mathscr{F}$ un espacio de funcionales lineales en X que separa puntos en X. Se tiene que el espacio topológico $(X, \sigma(X, \mathscr{F}))$ es localmente convexo. Además,*
$$X^*_{\sigma(X,\mathscr{F})} = \mathscr{F}.$$

Demostración. Demostremos la primera propiedad. Sean $x, y \in X$ tal que $x \neq y$. Como $\mathscr{F}$ separa puntos en X, existe $f \in \mathscr{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$ en Y. Como Y_f es Hausdorff, existen $V, W \in \tau_{Y_f}$ vecindades de $f(x)$ y $f(y)$, respectivamente, tal que $V \cap W = \emptyset$. Así, $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W) = \emptyset$. Por definición $f^{-1}(V), f^{-1}(W) \in \sigma(X, \mathscr{F})$, se tiene que $(X, \sigma(X, \mathscr{F}))$ es Hausdorff.

La segunda propiedad está demostrada en [6]. $\square$

1.4.3. Topología débil de un espacio vectorial topológico

Definición 1.9. Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico. El **espacio dual** de (X, τ) denotado por X^* son las funcionales lineales en X que son τ-continuas.

Se presenta una propiedad de los espacios duales topológicos.

Proposición 1.4. *Sean X e Y espacios vectoriales topológicos, entonces*

$$(X \times Y)^*_{\tau_X \times \tau_Y} \simeq X^*_{\tau_X} \times Y^*_{\tau_Y} \text{ isomorfismo entre espacios vectoriales topológicos.}$$

Demostración. Considere la función $H : (X \times Y)^* \to X^* \times Y^*$ definida para $\psi \in (X \times Y)^*$ como
$$H(\psi) := (g_\psi, h_\psi)$$
donde $g_\psi(x) := \psi(x, 0)$ para todo $x \in X$ y $h_\psi(y) := \psi(0, y)$ para todo $y \in Y$. Observe que g_ψ, h_ψ y H son lineales.

Probemos que g_ψ y h_ψ son continuas en las topologías τ_X y τ_Y respectivamente. Sin pérdida de generalidad probemos que g_ψ es τ_X-continua. Sean $x_0 \in X$ y $U \subset \mathbb{R}$ una vecindad de $\psi(x_0)$. Como ψ es continua en $(x_0, 0)$, existen $V_{x_0} \in \tau_X$ y $W_0 \in \tau_Y$ vecindades de x_0 y 0, respectivamente, tal que
$$V_{x_0} \times W_0 \subset \psi^{-1}(U).$$
Así, $V_{x_0} \subset g_\psi^{-1}(U)$. Por lo tanto, g_ψ es τ_X-continua en x_0.

Ahora probemos que la función H es inyectiva. Si $H(\psi) = 0$, entonces $g_\psi = 0$ y $h_\psi = 0$. Como $\psi(x, y) = \psi((x, 0) + (0, y)) = \psi(x, 0) + \psi(0, y) = g_\psi(x) + h_\psi(y)$, se tiene que $\psi = 0$.

Probemos que H es sobreyectiva. Sean $g \in X^*$ y $h \in Y^*$. Defina $\psi(x, y) := g(x) + h(y)$, $\forall (x, y) \in X \times Y$. Claramente ψ es lineal. Probemos que ψ es continua. Sean $(x_0, y_0) \in X \times Y$

y $\varepsilon > 0$. Como g y h son continuas en x_0 e y_0, respectivamente, existen V y W vecindades de x_0 e y_0, respectivamente, tal que

$$V \subset g^{-1}(B(g(x_0), \frac{\varepsilon}{2})) \quad \text{y} \quad W \subset h^{-1}(B(h(y_0), \frac{\varepsilon}{2})).$$

Así, se tiene que

$$V \times W \subset \psi^{-1}(B(\psi(x_0, y_0), \varepsilon)).$$

Por lo tanto, F es continua en (x_0, y_0). Observe que $g = g_\psi$ y $h = h_\psi$. Por lo tanto, H es sobreyectiva.

Como H es un operador lineal, bien definido y biyectivo, entonces $(X \times Y)^* \simeq X^* \times Y^*$. $\square$

Proposición 1.5. *Si X es localmente convexo, entonces X^* separa puntos en X.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ tal que $x \neq y$. Como $\{x\}, \{y\}$ son cerrados y compactos, por Teorema 3.4, item (b) en [6], existe $f \in X^*$ tal que $f(x) < f(y)$. Así, X^* separa puntos en X. $\square$

Dado un espacio vectorial topológico (X, τ), se puede definir el espacio dual X^*, la cual es una familia de funciones. Así, se puede inducir una topología para X, llamada topología débil de X, de la siguiente manera:

Definición 1.10. Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico. Se define la **topología débil de** X denotado por ω cuando

$$\omega := \sigma(X, X^*).$$

Proposición 1.6. *Si X es localmente convexo, entonces (X, ω) es localmente convexo y Hausdorff. Además, $X^*_\omega = X^*$*

Demostración. Usando la Proposición 1.5, X^* separa puntos en X. Por la Proposición 1.3, se concluye la demostración. $\square$

1.4.4. Topología débil estrella de un espacio vectorial topológico

Hasta el momento el espacio dual de un espacio vectorial topológico no posee ninguna topología. En esta subsección, se define una familia de funciones en el espacio dual con el objetivo de inducir una topología al espacio dual y se llamará topología débil estrella.

Definición 1.11. Sean X un espacio vectorial topológico y $x \in X$. Se define la funcional lineal $\mathcal{J}_x : X^* \to \mathbb{R}$ como

$$\mathcal{J}_x(f) := f(x) = \langle x, f \rangle, \quad \forall f \in X^*.$$

Lema 1.2. *La familia de funcionales lineales $\{\mathcal{J}_x : X^* \to \mathbb{R}$ tal que $x \in X\}$ separa puntos en X^*.*

Demostración. Si $f, g \in X^*$ tal que $f \neq g$, existe $x \in X$ tal que $\mathcal{J}_x(f) = f(x) \neq g(y) = \mathcal{J}_x(g)$. Así, $\{\mathcal{J}_x : x \in X\}$ separa puntos en X^*. $\square$

Definición 1.12. La **topología débil estrella de un espacio vectorial topológico** X denotada por ω^* se define como

$$\omega^* := \sigma(X^*, \{\mathcal{J}_x : x \in X\}).$$

Se presenta una propiedad de la topología débil estrella:

Proposición 1.7. *El espacio dual con la topología débil estrella (X^*, ω^*) es localmente convexo y Hausdorff. Además,*

$$(X^*)^*_{\omega^*} = \{\mathcal{J}_x : x \in X\}.$$

Más aún, si X es localmente convexo,

$$\omega^* \simeq \sigma(X^*, X) \quad y \quad (X^*)^*_{\omega^*} \simeq X \text{ isomorfismos.}$$

Demostración. Usando la Proposición 1.3 con $\mathscr{F} := \{\mathcal{J}_x : x \in X\}$ que separa puntos en X^*, se tiene la primera afirmación. Si X es localmente convexo, la función $\mathcal{J}$ definida como

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{J}: & X & \to & \{\mathcal{J}_x : x \in X\} \\ & x & \mapsto & \mathcal{J}_x \end{array}$$

está bien definida y es biyectiva debido a que X^* separa puntos en X por la Proposición 1.5. Por lo tanto, $X \simeq \{\mathcal{J}_x : x \in X\}$. Así, $\omega^* \simeq \sigma(X^*, X)$ y $(X^*)^*_{\omega^*} \simeq X$. □

Definición 1.13. Sea X un espacio vectorial topológico. El **espacio bidual** X^{**} de X es definido como

$$X^{**} := (X^*)^*_{\omega^*}.$$

Observación. Si X es localmente convexo, entonces $X^{**} \simeq X$.

Lema 1.3. *Los semiespacios*

$$H_{x,\alpha} := \{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle \leq \alpha\} \quad \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

son cerrados en la topología ω^*.

Demostración. Dados $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que $H_{x,\alpha} = \mathcal{J}_x^{-1}(]-\infty, \alpha])$. Por ω^*-continuidad de $\mathcal{J}_x$, $H_{x,\alpha}$ es ω^*-cerrado. □

1.5. Análisis convexo en espacios vectoriales topológicos

En esta sección se define y presenta propiedades de las funciones convexas, las funciones semicontinuas inferiores y la conjugada de Fenchel. Los teoremas y proposiciones de esta sección pueden ser encontradas en [7].

1.5.1. Funciones convexas en espacios vectoriales

Sea X un espacio vectorial real, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definición 1.14. Se define el **dominio efectivo**, el **epígrafo**, el **epígrafo estricto**, el **subnivel** de f, respectivamente, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom} f &:= \{z \in X|\ f(z) \neq +\infty\}, \\ \mathrm{epi} f &:= \{(z,s) \in X \times \mathbb{R}|\ f(z) \leq s\}, \\ \mathrm{epi}_s f &:= \{(z,s) \in X \times \mathbb{R}|\ f(z) < s\}, \\ L_\lambda f &:= \{z \in X|\ f(z) \leq \lambda\}. \end{aligned}$$

Definición 1.15. Se dice que f es una función **propia**, si $\mathrm{dom} f \neq \emptyset$.

Definición 1.16. Se dice que f es una función **convexa** si

$$f(sz_1 + (1-s)z_2) \leq sf(z_1) + (1-s)f(z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in X,\ s \in [0,1], \tag{1.1}$$

con las convenciones: $(+\infty) + (-\infty) = +\infty$, $0 \cdot (+\infty) = +\infty$, $0 \cdot (-\infty) = 0$.

Observación. Cuando $z_1 = z_2$ o $s \in]0,1[$ o $\{z_1, z_2\} \not\subseteq \mathrm{dom} f$, se satisface la desigualdad (1.1). Por lo tanto, f es convexa si, y solamente si,

$$f(sz_1 + (1-s)z_2) \leq sf(z_1) + (1-s)f(z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in \mathrm{dom} f, z_1 \neq z_2,\ \forall s \in]0,1[.$$

Además, el dominio efectivo de toda función convexa es convexo.

El siguiente teorema establece algunas caracterizaciones de las funciones convexas.

Teorema 1.1. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *La función f es convexa.*
2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $z_1, \cdots, z_n \in X$, $s_1, \cdots, s_n \in]0,1[$ tal que $s_1 + \cdots + s_n = 1$,*

$$f(s_1 z_1 + \cdots + s_n z_n) \leq s_1 f(z_1) + \cdots + s_n f(z_n). \tag{1.2}$$

3. $\mathrm{epi} f$ *es convexo.*
4. $\mathrm{epi}_s f$ *es convexo.*

Demostración. Supongamos que f es convexa. Sean $(z_1, \lambda_1), (z_2, \lambda_2) \in \mathrm{epi}_s f$ y $s \in]0,1[$. Se cumple que,

$$f(sz_1 + (1-s)z_2) \leq sf(z_1) + (1-s)f(z_2) < s\lambda_1 + (1-s)\lambda_2.$$

Entonces, $s(z_1, \lambda_1) + (1-s)(z_2, \lambda_2) \in \mathrm{epi}_s f$. Así, $\mathrm{epi}_s f$ es convexo. Por lo tanto, item 1 implica item 4.

Supongamos que $\text{epi}_s f$ es convexo. Sean $(z_1, \lambda_1), (z_2, \lambda_2) \in \text{epi}f$ y $s \in]0, 1[$. Entonces, $(z_1, \lambda_1 + \varepsilon), (z_2, \lambda_2 + \varepsilon) \in \text{epi}_s f$ para todo $\varepsilon > 0$. Luego, $s(z_1, \lambda_1 + \varepsilon) + (1 - s)(z_2, \lambda_2 + \varepsilon) \in \text{epi}_s f$ para todo $\varepsilon > 0$. Se tiene que

$$f(sz_1 + (1 - s)z_2) < s(\lambda_1 + \varepsilon) + (1 - s)(\lambda_2 + \varepsilon), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Tomando límite $\varepsilon \to 0^+$, se tiene que $s(z_1, \lambda_1)+(1-s)(z_2, \lambda_2) \in \text{epi}f$. Así, $\text{epi}f$ es convexo. Por lo tanto, 4 implica 3.

Supongamos que $\text{epi}f$ es convexo. Sean $n \in \mathbb{N}$, $z_1, \cdots, z_n \in X$, $s_1, \cdots, s_n \in]0, 1[$ tal que $s_1 + \cdots + s_n = 1$. Si $f(z_i) \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \cdots, n$, entonces $(z_i, f(z_i)) \in \text{epi}f$. Como $\text{epi}f$ es convexo, $\sum_{1 \leq i \leq n} s_i(z_i, f(z_i)) \in \text{epi}f$. Así, la desigualdad (1.2) se tiene. Si existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $f(z_i) = +\infty$, entonces

$$\sum_{1 \leq j \leq n} s_j f(z_j) = +\infty.$$

Así, se tiene la desigualdad (1.2). Por lo tanto, 3 implica 2.

Si item 2 se cumple, entonces, para $n = 2$, el item 1 se cumple. $\square$

Proposición 1.8. *Se presenta propiedades de las funciones convexas.*

1. *Sean $f_\lambda : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ funciones convexas para todo $\lambda \in \Gamma$. Entonces,*

$$\sup_{\lambda \in \Gamma} f_\lambda \text{ es convexa} \quad \text{y} \quad \text{epi}(\sup_{\lambda \in \Gamma} f_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Gamma} \text{epi}f_\lambda.$$

2. *Sean $f, g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ funciones convexas y $\alpha > 0$. Entonces,*

$$f + g \quad \text{y} \quad \alpha f \quad \text{son funciones convexas.}$$

Más aún,

$$\text{dom}(f + g) = \text{dom}f \cap \text{dom}g, \quad \text{dom}(\alpha f) = \text{dom}f.$$

3. *Sean $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones convexas para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definida como*

$$f(z) := \limsup_{n \to +\infty} f_n(z), \quad \forall z \in X,$$

es convexa.

4. *Sea $A \subset X \times \mathbb{R}$ un conjunto convexo. La función $\varphi_A : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definida como*

$$\varphi_A(z) := \inf\{t \in \mathbb{R} : \ (z, t) \in A\}, \quad \forall z \in X,$$

es convexa.

5. *Sea $F : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa. La función marginal $h : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ asociada a F definida como*

$$h(y) := \inf_{x \in X} F(x, y), \quad \forall y \in Y,$$

es convexa.

Demostración. 1. Se tiene que $(z,\lambda) \in \text{epi}(\sup_{\lambda\in\Gamma} f_\lambda)$ si, y sólo si, $f_\lambda(z) \leq \lambda$ para todo $\lambda \in \Gamma$ si, y sólo si, $(z,\lambda) \in \cap_{\lambda\in\Gamma}\text{epi}f_\lambda$.

Como f_λ es convexa, por el Teorema 1.1, $\text{epi}f_\lambda$ es convexo. Entonces, $\text{epi}(\sup_{\lambda\in\Gamma} f_\lambda)$ es convexo. Por el Teorema 1.1, $\sup_{\lambda\in\Gamma} f_\lambda$ es convexa.

2. Se cumple que,

$$\begin{aligned}(f+g)(sz_1+(1-s)z_2) &\leq sf(z_1)+(1-s)f(z_2)+sg(z_1)+(1-s)g(z_2)\\ &= s(f+g)(z_1)+(1-s)(f+g)(z_2), \quad \forall z_1,z_2 \in X,\ s \in]0,1[.\end{aligned}$$

Por otro lado, $z \notin \text{dom}(f+g)$ si, y solamente si, $f(z) = +\infty$ o $g(z) = +\infty$ si, y solamente si, $z \notin \text{dom}f \cup \text{dom}g$.

Para todo $z_1, z_2 \in \text{dom}f$ y $s \in]0,1[$,

$$(\alpha f)(sz_1+(1-s)z_2) \leq \alpha(sf(z_1)+(1-s)f(z_2)) = s(\alpha f)(z_1)+(1-s)(\alpha f)(z_2).$$

Por otro lado, $z \notin \text{dom}(\alpha f)$ si, y sólo si, $f(z) = +\infty$ si, y sólo si, $z \notin \text{dom}f$.

3. Sean $z_1, z_2 \in \text{dom}f$ y $s \in]0,1[$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z_1, z_2 \in \text{dom}f_n$ para todo $n \geq n_0$. Como f_n es convexa, entonces

$$f_n(sz_1+(1-s)z_2) \leq sf_n(z_1)+(1-s)f_n(z_2), \quad \forall n \geq n_0.$$

Tomando límite superior $n \to +\infty$, se tiene que

$$\begin{aligned}f(sz_1+(1-s)z_2) &\leq \limsup_{n\to+\infty}(sf_n(z_1)+(1-s)f_n(z_2))\\ &\leq \limsup_{n\to+\infty}(sf_n(z_1)) + \limsup_{n\to+\infty}((1-s)f_n(z_2))\\ &= sf(z_1)+(1-s)f(z_2).\end{aligned}$$

4. Sean $(z_1,\lambda_1),(z_2,\lambda_2) \in \text{epi}_s\varphi_A$ y $s \in]0,1[$. Existen $t_1,t_2 \in \mathbb{R}$ tal que $(z_1,t_1),(z_2,t_2) \in A$, $t_1 < \lambda_1$, $t_2 < \lambda_2$. Como A es convexo, $s(z_1,t_1)+(1-s)(z_2,t_2) \in A$. Así,

$$\varphi_A(sz_1+(1-s)z_2) \leq st_1+(1-s)t_2 < s\lambda_1+(1-s)\lambda_2.$$

Entonces, $s(z_1,\lambda_1)+(1-s)(z_2,\lambda_2) \in \text{epi}_s\varphi_A$. Por el Teorema 1.1, φ_A es convexa.

5. Probemos que $\text{epi}\,h = \text{Pr}_{Y\times\mathbb{R}}(\text{epi}_sF)$.

$(y,\lambda) \in \text{epi}_sh$ si, y sólo si, existe $x \in X$ tal que $F(x,y) < \lambda$ si, y sólo si, existe $x \in X$ tal que $(x,y,\lambda) \in \text{epi}_sF$ si, y sólo si, $(y,\lambda) \in \text{Pr}_{Y\times\mathbb{R}}(\text{epi}_sF)$.

Por el Teorema 1.1, epi_sF es convexo. Como la proyección es lineal, $\text{Pr}_{Y\times\mathbb{R}}(\text{epi}_sF)$ es convexo. Por el Teorema 1.1, h es convexa.

□

1.5.2. Semicontinuidad inferior en espacios topológicos

Sea X un espacio topológico, $\mathcal{V}(x)$ una base local de $x \in X$ y $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Definición 1.17. Decimos que la función f es **semicontinua inferior en** $x \in X$ si para cualquier $\lambda < f(x)$, existe una vecindad W de x tal que $\lambda < f(x)$ para cualquier $x \in W$.

Decimos que la función f es **semicontinua inferior en** X si es semicontinua inferior en todos los puntos de X.

Definición 1.18. Se define el **límite inferior de** f **en** x como,

$$\liminf_{y \to x} f(y) := \sup_{V \in \mathcal{V}(x)} \inf_{y \in V} f(y).$$

Observación. Para todo $x \in X$, $\liminf\limits_{y \to x} f(x) \leq f(x)$.

La siguiente proposición establece una caracterización de la semicontinuidad inferior en un punto.

Proposición 1.9. *La función f es semicontinua inferior en $x \in X$ si, y sólo si,*

$$f(x) = \liminf_{y \to x} f(y).$$

Demostración. Supongamos que f es semicontinua inferior en $x \in X$. Supongamos que $\liminf_{y \to x} f(y) < f(x)$. Entonces,

$$\liminf_{y \to x} f(y) + \varepsilon < f(x), \quad \forall \varepsilon \in]0, f(x) - \liminf_{y \to x} f(y)[.$$

Por hipótesis de semicontinuidad inferior, existe $V_\varepsilon \in \mathcal{V}(x)$ tal que

$$\liminf_{y \to x} f(y) + \varepsilon < f(y), \quad \forall y \in V_\varepsilon.$$

Así, $\liminf_{y \to x} f(y) + \varepsilon \leq \liminf_{y \to x} f(y)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\liminf\limits_{y \to x} f(y) = f(x)$.

Recíprocamente, sea $\lambda < f(x) = \liminf_{y \to x} f(y)$. Por definición de supremo, existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $\lambda < \inf_{y \in V} f(y)$. Así, $\lambda < f(y)$ para todo $y \in V$. Por lo tanto, f es semicontinua inferior en x.

$\square$

A continuación se presenta una caracterización global de la semicontinuidad inferior.

Proposición 1.10. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *f es semicontinua inferior en X;*
2. *para todo $x \in X$, $f(x) = \liminf\limits_{y \to x} f(y)$;*
3. $\operatorname{epi} f$ *es cerrado;*

4. para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $L_\lambda f$ es cerrado.

Demostración. Por la Proposición 1.9, 1 es equivalente a 2.

Supongamos que f es semicontinua inferior en X. Si $(x, \lambda) \in (\text{epi} f)^c$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda + \varepsilon < f(x)$. Por hipótesis de semicontinuidad inferior, existe V vecindad de x tal que $\lambda + \varepsilon < f(y)$ para todo $y \in V$. Así, $V \times B(\lambda, \varepsilon) \subset (\text{epi} f)^c$. Por lo tanto, $(\text{epi} f)^c$ es abierto. Esto significa que 1 implica 3.

Supongamos que epi$f$ es cerrado. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $x \in (L_\lambda f)^c$, entonces $(x, \lambda) \in (\text{epi} f)^c$. Entonces, existe V vecindad de x y $\varepsilon > 0$ tal que $V \times B(\lambda, \varepsilon) \subset (\text{epi} f)^c$. Así, $V \subset (L_\lambda f)^c$. Por lo tanto, $(L_\lambda f)^c$ es abierto. Esto significa que 3 implica 4.

Supongamos que item 4 se cumple. Si $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda < f(x)$, entonces $x \in (L_\lambda f)^c$. Por hipótesis, existe una vecindad V de x tal que $V \subset (L_\lambda f)^c$. Así, $\lambda < f(y)$ para todo $y \in V$. Por lo tanto, f es semicontinua inferior en x. Esto significa que 4 implica 1.

□

Proposición 1.11. *Se presenta propiedades de la función semicontinua inferior.*

1. *Sean $f_\lambda : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones semicontinuas inferiores para todo $\lambda \in \Gamma$. Entonces,*

$$\sup_{\lambda \in \Gamma} f_\lambda \text{ es semicontinua inferior.}$$

2. *Sean $f_1, f_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones semicontinuas inferiores y $\alpha > 0$. Entonces,*

$$f_1 + f_2, \quad \min\{f_1, f_2\}, \quad \alpha f_1 \quad \text{son funciones semicontinuas inferiores.}$$

Demostración.

1. Por la demostración de la Proposición 1.8 item 1, se tiene que

$$\text{epi}(\sup_{\lambda \in \Gamma} f_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Gamma} \text{epi} f_\lambda.$$

Por la Proposición 1.10, epi$f$ es cerrado. Así, epi$(\sup_{\lambda \in \Gamma})$ es cerrado. Por la Proposición la 1.10, $\sup_{\lambda \in \Gamma}$ es semicontinua inferior.

2. Por la Proposición 1.10, epif_i es cerrado para $i = 1, 2$.

Si $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda < f_1(x) + f_2(x)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda - f_1(x) < \varepsilon$ y $\varepsilon < f_2(x)$. Por semicontinuidad inferior, existen vecindades V_1 y V_2 de x tal que

$$\lambda - \varepsilon < f_1(y), \quad \forall y \in V_1 \quad \text{y} \quad \varepsilon < f_2(y), \quad \forall y \in V_2.$$

Así, $\lambda < (f_1 + f_2)(y)$ para todo $y \in V_1 \cap V_2$ vecindad de x. Por lo tanto, $f_1 + f_2$ es semicontinua inferior en x.

Probemos que epi$(\min\{f_1, f_2\}) = \text{epi} f_1 \cup \text{epi} f_2$. $(x, \lambda) \in \text{epi}(\min\{f_1, f_2\})$ si, y sólo si, $f_1(x) \leq \lambda$ o $f_2(x) \leq \lambda$ si, y sólo si, $(x, \lambda) \in \text{epi} f_1 \cup \text{epi} f_2$. Entonces, epi$(\min\{f_1, f_2\})$ es cerrado. Así, por la Proposición 1.10, $\min\{f_1, f_2\}$ es cerrado.

Si $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda < \alpha f_1(x)$, por definición de semicontinuidad inferior, existe un abierto W que contiene a x tal que $\frac{\lambda}{\alpha} < f_1(y)$, $\forall y \in W$. Así, αf_1 es semicontinua inferior en x.

□

Definición 1.19. La **regularización semicontinua inferior de** f, denotada por $\bar{f} : X \to \overline{\mathbb{R}}$, es definida como

$$\bar{f}(x) := \liminf_{y \to x} f(y), \quad \forall x \in X.$$

La regularización de f es la mayor función semicontinua inferior menor que f.

Proposición 1.12. *Se presenta propiedades de la regularización semicontinua inferior.*

1. $\bar{f}$ *es semicontinua inferior.*

2. $\bar{f} = \sup\{\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}} :$ φ *es semicontinua inferior y* $\varphi \leq f\}$.

3. $\operatorname{epi}\bar{f} = \overline{\operatorname{epi} f}$.

Demostración. 1. Sean $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda < \bar{f}(x)$. Por definición de límite inferior, existe una vecindad V de x y $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda + \varepsilon < f(y)$ para todo $y \in V$. Si $z \in V$, entonces V es vecindad de z. Usando la última desigualdad,

$$\lambda + \varepsilon \leq \inf_{y \in V} f(y) \leq \sup_{V \in \mathcal{V}(z)} \inf_{y \in V} f(y) = \bar{f}(z).$$

Así, $\lambda < \bar{f}(z)$ para todo $z \in V$. Por lo tanto, $\bar{f}$ es semicontinua inferior.

2. Se observó que $\bar{f} := \liminf f \leq f$. Por item 1,

$$\bar{f} \leq \sup\{\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}} : \varphi \text{ es semicontinua inferior y } \varphi \leq f\}.$$

Sea φ una función semicontinua inferior tal que $\varphi \leq f$. Entonces, por la Proposición 1.10,

$$\varphi = \liminf \varphi \leq \liminf f = \bar{f}.$$

Así,

$$\sup\{\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}} : \varphi \text{ es semicontinua inferior y } \varphi \leq f\} \leq \bar{f}.$$

3. Como $\bar{f} \leq f$, se tiene que $\operatorname{epi} f \subset \operatorname{epi}\bar{f}$. Por item 1 y la Proposición 1.10, $\overline{\operatorname{epi} f} \subset \operatorname{epi}\bar{f}$.

Recíprocamente, supongamos que $(x, \lambda) \in \operatorname{epi}\bar{f}$. Sea V una vecindad de x y $\varepsilon > 0$. Entonces, por definición de límite superior,

$$\inf_{y \in V} f(y) \leq \lambda < \lambda + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por definición de ínfimo, existe $y_\varepsilon \in V$ tal que $f(y_\varepsilon) < \lambda + \varepsilon/2$. Así, $(y_\varepsilon, \lambda + \varepsilon/2) \in \operatorname{epi} f \cap V \times B(\lambda, \varepsilon)$. Por lo tanto, $(x, \lambda) \in \overline{\operatorname{epi} f}$. Es decir, $\operatorname{epi}\bar{f} \subset \overline{\operatorname{epi} f}$.

□

1.5.3. Funciones convexas semicontinuas inferiores en espacios localmente convexos

Se presenta una proposición de funciones convexas semicontinuas inferiores en espacios localmente convexos.

Proposición 1.13. *Sea X un espacio vectorial topológico y $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa semicontinua inferior.*

1. *Si $f(x_0) = -\infty$ para algún $x_0 \in X$, entonces $f(x) = -\infty$ para todo $x \in \mathrm{dom} f$.*

2. *Si X es localmente convexo, entonces $f > -\infty$ si, y sólo si, f es acotada inferiormente por una función afín continua.*

Demostración. 1. Supongamos que existe $x \in \mathrm{dom} f$ tal que $f(x) > -\infty$. Se cumple que, $(x, f(x)), (x_0, f(x) - n) \in \mathrm{epi} f$. Por el Teorema 1.1, $\mathrm{epi} f$ es convexo. Así,

$$(x + \frac{1}{n}(x_0 - x), -1 + f(x)) = \frac{1}{n}(x_0, f(x) - n) + (1 - \frac{1}{n})(x, f(x)) \in \mathrm{epi} f.$$

Tomando límite de sucesiones, Proposición 1.2 y la hipótesis de semicontinuidad inferior de f, resulta que

$$(x, -1 + f(x)) \in \overline{\mathrm{epi} f} = \mathrm{epi} f.$$

Así, $f(x) \leq -1 + f(x)$, una contradicción.

2. Supongamos que $f > -\infty$. Si $f = +\infty$, entonces $f \geq 0$. Si $f(x) \in \mathbb{R}$ para algún $x \in X$, entonces $(x, f(x) - 1) \notin \mathrm{epi} f$. Como $\mathrm{epi} f$ es convexo cerrado no vacío, por Teorema de Separación 3.4 item (b) en [6] y la Proposición 1.4, existe $(x^*, \alpha) \in X^* \times \mathbb{R}$ tal que

$$\langle y, x^* \rangle + \alpha t < \langle x, x^* \rangle + \alpha(f(x) - 1), \quad \forall (y, t) \in \mathrm{epi} f.$$

Eligiendo $(y, t) = (x, f(x))$, se tiene que $\alpha < 0$. Sin pérdida de generalidad $\alpha = -1$. Así,

$$\langle y, x^* \rangle + f(x) - 1 - \langle x, x^* \rangle < t, \quad \forall (y, t) \in \mathrm{epi} f.$$

Por lo tanto, para todo $y \in \mathrm{dom} f$

$$\langle y, x^* \rangle + \beta \leq f(y)$$

donde $\beta := f(x) - 1 - \langle x, x^* \rangle$.

Recíprocamente, existen $x^* \in X^*$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq \langle x, x^* \rangle + \beta$ para todo $x \in X$. Como $\langle x, x^* \rangle + \beta \in \mathbb{R}$, entonces $f(x) > -\infty$ para todo $x \in X$.

□

1.5.4. Conjugada de Fenchel

En esta subsección se define y presenta propiedades y teoremas de la conjugada de Fenchel y la biconjugada en espacios localmente convexo.

Sea X un espacio localmente convexo.

Definición 1.20. Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. La **conjugada de Fenchel** $f^* : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ de f es definida de la siguiente manera

$$f^*(x^*) := \sup_{x \in X} \langle x, x^* \rangle - f(x), \quad \forall x^* \in X^*.$$

Observación 1. *La conjugada de Fenchel tiene 3 casos:*

1. *Si $f(x_0) = -\infty$ para algún $x_0 \in X$, se cumple que $f^* = +\infty$.*
2. *Si $f = +\infty$, se cumple que $f^* = -\infty$.*
3. *Si f es propia, se cumple que*

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in \mathrm{dom} f} \langle x, x^* \rangle - f(x) > -\infty, \quad \forall x^* \in X^*.$$

Como X es localmente convexo, se observó que $X^{**} \simeq X$. Debido a ello, se define la conjugada de las funciones de X^* a $\overline{\mathbb{R}}$.

Definición 1.21. Sea $k : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$. Se define la **conjugada de Fenchel** $k^* : X \to \overline{\mathbb{R}}$ de k como

$$k^*(x) := \sup_{x^* \in X^*} \langle x, x^* \rangle - k(x^*), \quad \forall x \in X.$$

Definición 1.22. Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. La **biconjugada** $f^{**} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ de f es definida como

$$f^{**} := (f^*)^*.$$

A continuación se presentan propiedades de la conjugada y la biconjugada.

Proposición 1.14. *Sean X, Y espacios localmente convexos, $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $h : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ y $k : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$. Entonces,*

1. *f^* es convexa y ω^*-semicontinua inferior, k^* es convexa y semicontinua inferior.*
2. *Se satisface la desigualdad de Young-Fenchel,*

$$f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle, \quad \forall x \in X, \forall x^* \in X^*.$$

Además, $f^{**} \leq f$.

3. *Si $f \leq g$, entonces $g^* \leq f^*$.*

4. *Sean* $\alpha > 0$ *y* $\beta \neq 0$. *Se define* $g(x) := f(\beta x)$ *para todo* $x \in X$. *Entonces,*

$$(\alpha f)^*(x^*) = \alpha f^*(\alpha^{-1}x^*), \quad g^*(x^*) = f^*(\beta^{-1}x^*), \quad \forall x^* \in X^*.$$

5. *Se define* $g(x) := f(x + x_0)$ *para todo* $x \in X$. *Entonces,*

$$g^*(x^*) = f^*(x^*) - \langle x_0, x^* \rangle, \quad \forall x^* \in X^*.$$

6. *Sea* $x_0^* \in X^*$. *Entonces,*

$$(f + x_0^*)^*(x^*) = f^*(x^* - x_0^*), \quad \forall x^* \in X^*.$$

7. *Se define* $\Phi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *como* $\Phi(x, y) := f(x) + h(y)$ *para todo* $(x, y) \in X \times Y$. *Si* f, h *son propias, entonces*

$$\Phi^*(x^*, y^*) = f^*(x^*) + h^*(y^*), \quad \forall (x^*, y^*) \in X^* \times Y^*.$$

8. *Se define la* **cápsula convexa semicontinua inferior** $\mathrm{clconv} f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *de* f *como la mayor función convexa semicontinua inferior menor que* f. *Entonces,*

$$f^{**} \leq \mathrm{clconv} f \leq \bar{f} \leq f \quad y \quad f^* = (\bar{f})^* = (\mathrm{clconv} f)^*.$$

Demostración. 1. Para todo $x \in X$, la función $\langle x, \cdot \rangle - f(x) = \mathcal{J}_x(\cdot) - f(x)$ definida en X^* es lineal y ω^*-continua, en particular convexa y ω^*-semicontinua inferior. Entonces, por las Proposiciones 1.8 y 1.11 item 1, f^* es convexa y ω^*-semicontinua inferior.

Para todo $x^* \in X^*$, la función $\langle \cdot, x^* \rangle - k(x^*)$ definida en X es lineal y continua, en particular convexa y semicontinua inferior. Entonces, por las Proposiciones 1.8 y 1.11 item 1, k^* es convexa y semicontinua inferior.

2. Por la Observación 1, se tiene la desigualdad de Young-Fenchel. Usando la desigualdad de Young-Fenchel y la Observación 1,

$$f(x) \geq \langle x, x^* \rangle - f(x), \quad \forall x \in X, \, x^* \in X^*.$$

Así, $f \geq f^{**}$.

3. Por definición de supremo, $g^* \leq f^*$.

4. Para todo $x^* \in X^*$, se tiene lo siguiente

$$(\alpha f)^*(x^*) = \sup_{x \in X} \langle x, x^* \rangle - \alpha f(x) = \alpha \sup_{x \in X} \{ \langle x, \alpha^{-1} x^* \rangle - f(x) \} = \alpha f^*(\alpha^{-1} x^*),$$

$$g^*(x^*) = \sup_{x \in X} \langle x, x^* \rangle - f(\beta x) = \sup_{x \in X} \langle \beta^{-1} x, x^* \rangle - f(x) = f^*(\beta^{-1} x^*).$$

5. Para todo $x^* \in X^*$,

$$\begin{aligned} g^*(x^*) &= \sup_{x\in X} \langle x, x^*\rangle - f(x+x_0) \\ &= \sup_{x\in X} \langle x - x_0, x^*\rangle - f(x) \\ &= f^*(x^*) - \langle x_0, x^*\rangle. \end{aligned}$$

6. Para todo $x^* \in X^*$,

$$\begin{aligned} (f + x_0^*)^*(x^*) &= \sup_{x\in X} \langle x, x^*\rangle - f(x) - \langle x, x_0^*\rangle \\ &= \sup_{x\in X} \langle x, x^* - x_0^*\rangle - f(x) \\ &= f^*(x^* - x_0^*). \end{aligned}$$

7. Para todo $(x^*, y^*) \in X^* \times Y^*$,

$$\begin{aligned} \Phi^*(x^*, y^*) &= \sup_{(x,y)\in X\times Y} \langle (x,y), (x^*, y^*)\rangle - \Phi(x,y) \\ &= \sup_{y\in Y} \sup_{x\in X} \langle x, x^*\rangle - f(x) + \langle y, y^*\rangle - h(y) \\ &= \sup_{y\in Y} f^*(x^*) + \langle y, y^*\rangle - h(y) \\ &= f^*(x^*) + h^*(y^*). \end{aligned}$$

8. Por item 1 y 2, $f^{**} \leq f$ y f^{**} es convexa semicontinua inferior. Como $\mathrm{clconv} f$ es semicontinua inferior, entonces

$$f^{**} \leq \mathrm{clconv} f \leq \bar{f} \leq f. \tag{1.3}$$

Por item 3,

$$f^* \leq (\bar{f})^* \leq (\mathrm{clconv} f)^*. \tag{1.4}$$

Probemos que $(\mathrm{clconv} f)^* \leq f^*$. Sea $x^* \in X^*$. Si $f^*(x^*) = +\infty$, entonces usando la desigualdad (1.4), $(\mathrm{clconv} f)^*(x^*) = +\infty$. Si $f^*(x^*) = -\infty$, entonces por la Observación 1 caso 1, $f^{**} = +\infty$. Por la desigualdad (1.3), $\mathrm{clconv} f = +\infty$. Por la Observación 1 caso 2, $(\mathrm{clconv} f)^* = -\infty$. Si $f^*(x^*) \in \mathbb{R}$, la función $\varphi(x) := \langle x, x^*\rangle - f^*(x^*)$ para todo $x \in X$ es afín continua. Por item 2, se tiene que

$$\varphi(x) \leq f(x), \quad \forall x \in X.$$

Luego, $\mathrm{epi} f \subset \mathrm{epi}\, \varphi$. Como φ es continua y afín, en particular semicontinua inferior y convexa, se tiene que

$$\mathrm{epi}(\mathrm{clconv} f) = \mathrm{co}(\overline{\mathrm{epi} f}) \subset \mathrm{epi}\, \varphi.$$

Así, $-\infty < \varphi(x) \leq \mathrm{clconv} f(x)$, $\forall x \in X$. Es decir,

$$\langle x, x^*\rangle - \mathrm{clconv} f(x) \leq f^*(x^*), \quad \forall x \in X.$$

Por lo tanto, $(\mathrm{clconv} f)^*(x^*) \leq f^*(x^*)$.

$\square$

Proposición 1.15. *Sea* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *y* $k : X \to \overline{\mathbb{R}}$. *Se cumple que,*

1. f^* *es propia si, y sólo si,* $\mathrm{dom} f \neq \emptyset$ *y existen* $x_0^* \in X^*$*y* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que* $f \geq x_0^* + \alpha$.

2. k^* *es propia si, y sólo si,* $\mathrm{dom}\, k \neq \emptyset$ *y existen* $x_0 \in X$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$k(x^*) \geq \langle x_0, x^* \rangle + \alpha, \quad \forall x^* \in X^*.$$

Demostración. 1. Si f^* es propia, entonces existe $x_0^* \in X^*$ tal que $f^*(x_0^*) \in \mathbb{R}$. Por la Proposición 1.14 item 2, se tiene que

$$f(x) \geq \langle x, x_0^* \rangle - f^*(x_0^*), \quad \forall x \in X.$$

Recíprocamente, se tiene que f es propia. Por la Observación 1 caso 3, $f^* > -\infty$. Como $f \geq x_0^* + \alpha$, entonces $-\alpha \geq f^*(x_0^*)$. Así, $x_0^* \in \mathrm{dom} f^*$. Por lo tanto, f^* es propia.

2. Es análogo a item 1.

□

Teorema 1.2 (Fenchel-Moreau)**.** *Sea* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *una función convexa, semicontinua inferior y propia. Entonces,* f^* *es convexa,* ω^**-semicontinua inferior y propia; además,*

$$f^{**} = f.$$

Demostración. Por la Proposición 1.14 item 1, f^* es convexa y ω^*-semicontinua inferior. Por la Proposición 1.13 item 2, existe $x_0^* \in X^*$ y $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \geq \langle x, x_0^* \rangle + \theta, \quad \forall x \in X. \tag{1.5}$$

En consecuencia, por la Proposición 1.15 item 1, f^* es propia. Por la Proposición 1.14 item 2, $f^{**} \leq f$. Así, por la Observación 1 caso 3, f^{**} es propia.

Supongamos que $f^{**}(\bar{x}) < f(\bar{x})$ para algún $\bar{x} \in X$. Entonces, $(\bar{x}, f^{**}(\bar{x})) \notin \mathrm{epi} f$. Como $\mathrm{epi} f$ es convexo, cerrado y no vacío, por Teorema de Separación 3.4 item (b) en [6] y la Proposición 1.4, existen $(z_0^*, \alpha) \in X^* \times \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle x, z_0^* \rangle + t\alpha < \lambda < \langle \bar{x}, z_0^* \rangle + f^{**}(\bar{x})\alpha, \quad \forall (x, t) \in \mathrm{epi} f. \tag{1.6}$$

Tomando $(x, t) = (x_0, f(x_0) + n) \in \mathrm{epi} f$ con $x_0 \in \mathrm{dom} f$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$n\alpha \leq (f^{**}(\bar{x}) - f(x_0))\alpha + \langle \bar{x} - x_0, z_0^* \rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así, $\alpha \leq 0$. Supongamos que $\alpha < 0$. Sin pérdida de generalidad $\alpha = -1$ en ecuación (1.6). Entonces,

$$\langle x, z_0^* \rangle - t < \lambda < \langle \bar{x}, z_0^* \rangle - f^{**}(\bar{x}), \quad \forall (x, t) \in \mathrm{epi} f. \tag{1.7}$$

Por la desigualdad (1.7), se tiene que $\langle x, z_0^* \rangle - f(x) < \lambda$ para todo $x \in \mathrm{dom} f$. Usando esta útima desigualdad y la desigualdad (1.7),

$$f^*(z_0^*) < \lambda < \langle \bar{x}, z_0^* \rangle - f^{**}(\bar{x}).$$

Entonces, $f^{**}(\bar{x}) < \langle \bar{x}, z_0^* \rangle - f^*(z_0^*) < f^{**}(\bar{x})$, una contradicción.

Supongamos que $\alpha = 0$. Por la desigualdad (1.6), existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\langle x, z_0^* \rangle < \lambda < \langle \bar{x}, z_0^* \rangle - \varepsilon, \quad \forall x \in \mathrm{dom} f.$$

Usando esta última desigualdad y la desigualdad (1.5), se tiene que

$$f(x) \geq \langle x, x_0^* \rangle + \theta + t\langle x, z_0^* \rangle + t\varepsilon - t\langle \bar{x}, z_0^* \rangle, \quad \forall x \in \mathrm{dom} f, \forall t > 0.$$

Entonces,

$$-\theta - t\varepsilon + t\langle \bar{x}, z_0^* \rangle \geq \langle x, x_0^* + tz_0^* \rangle - f(x), \quad \forall x \in \mathrm{dom} f, \forall t > 0.$$

Así,

$$-\theta - t\varepsilon + t\langle \bar{x}, z_0^* \rangle \geq f^*(x_0^* + tz_0^*), \quad \forall t > 0.$$

Por definición de la conjugada y usando la última desigualdad,

$$f^{**}(\bar{x}) \geq \langle \bar{x}, x_0^* + tz_0^* \rangle - f^*(x_0^* + tz_0^*) \geq \langle \bar{x}, x_0^* \rangle + t\varepsilon + \theta, \quad \forall t > 0.$$

Tomando límite $t \to +\infty$, se tiene que $f^{**}(\bar{x}) = +\infty$, una contradicción. Por lo tanto, $f^{**} = f$.

$\square$

Capítulo 2

Teoría de Operadores Monótonos

En esta sección se introduce algunas definiciones y ejemplos de la teoría de operadores monótonos.

Sea X un espacio vectorial topológico real localmente convexo con la topología τ, X^* su respectivo dual topológico y $\omega^* := \sigma(X^*, X)$ la topología débil estrella.

Definición 2.1. Un **operador multivaluado** $A : X \rightrightarrows X^*$ es una relación $A \subset X \times X^*$.

Definición 2.2. Dados $A : X \rightrightarrows X^*$ operador multivaluado y $x \in X$,

$$A(x) := \{x^* \in X^* : \ (x, x^*) \in A\}.$$

Además, el **dominio**, **rango** y **gráfico** de A se definen como,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dom}(A) &:= \{x \in X : \ A(x) \neq \emptyset\}, \\
\mathrm{Ran}(A) &:= \{x^* \in X^* : \ \exists\, x \in \mathrm{Dom}(A),\, x^* \in A(x)\} \\
&= \bigcup_{x \in \mathrm{Dom}(A)} \{x^* \in X^* : \ x^* \in A(x)\}, \\
\mathrm{Gr}(A) &:= \{(x, x^*) \in X \times X^* : \ x^* \in A(x)\},
\end{aligned}$$

respectivamente.

2.1. Operadores Monótonos

En esta sección se define y presenta ejemplos de operadores monótonos. Las proposiciones de esta sección pueden ser encontradas en [9].

Definición 2.3. Un operador multivaluado $A : X \rightrightarrows X^*$ es **monótono** si

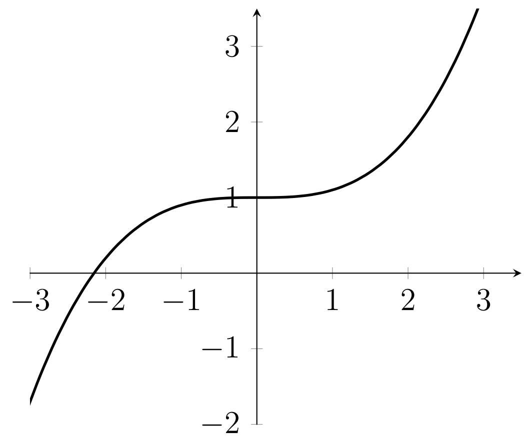
$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0, \quad \forall (x, x^*), (y, y^*) \in A.$$

Un operador monótono es la generalización de una función real de variable real no decreciente.

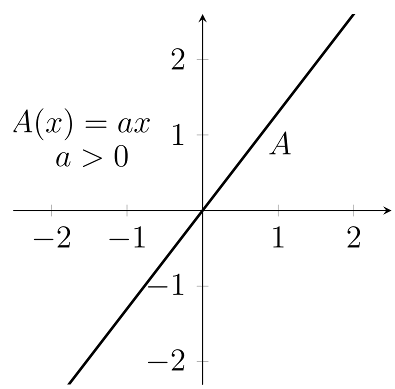
2.1.1. Ejemplos de operadores monótonos

Proposición 2.1. *Sea $D \subset \mathbb{R}$ no vacío. La función $\varphi : D \to \mathbb{R}$ es monótona si, y sólo si, φ es no decreciente. Es decir,*

$$(x-y).(\varphi(x)-\varphi(y)) \geq 0,\ \forall x,y \in D \text{ si, y sólo si, } \varphi(x) \leq \varphi(y) \text{ cuando } x < y.$$



Proposición 2.2. *Todo operador lineal $A : H \to H$ en un espacio de Hilbert H es monótono si, y sólo si, es un operador positivo; es decir, $\langle x, Ax \rangle \geq 0$, $\forall x \in H$.*



Demostración. Si A es monótono, entonces

$$0 \leq \langle x-0, A(x)-0 \rangle = \langle x, A(x) \rangle, \quad \forall x \in H.$$

Luego, A es un operador positivo.

Recíprocamente, si A es un operador positivo, entonces

$$\langle x-y, A(x)-A(y) \rangle = \langle x-y, A(x-y) \rangle \geq 0, \quad \forall x,y \in H.$$

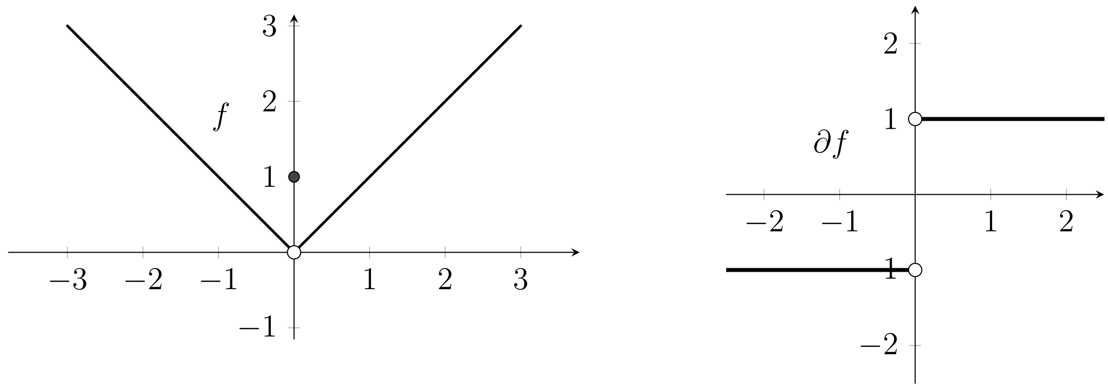
Así, A es monótono. □

Definición 2.4. Sea E un espacio de Banach, $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función y $x \in E$. El ***subdiferencial*** de la función f en el punto x denotado como $\partial f(x)$ es definido de la siguiente manera:

$$\partial f(x) := \{x^* \in E^* |\ f(y) - f(x) \geq \langle y-x, x^* \rangle \quad \forall y \in E\}$$

si $x \in dom(f)$, mientras $\partial f(x) = \emptyset$ si $x \in E \setminus dom(f)$.

Proposición 2.3. *El operador subdiferencial $\partial f : E \rightrightarrows E^*$ es monótono.*



Demostración. Sean $(x, x^*), (y, y^*) \in \partial f$, es decir $x, y \in dom(f)$. Entonces, por definición de subdiferenciabilidad,

$$f(y) - f(x) \geq \langle y - x, x^* \rangle$$
$$f(x) - f(y) \geq \langle x - y, y^* \rangle$$

Sumando estas dos desigualdades, se tiene que

$$0 \geq \langle x - y, -x^* \rangle + \langle x - y, y^* \rangle = \langle x - y, y^* - x^* \rangle.$$

Así, el subdiferencial de f es monótono. $\square$

Definición 2.5. Sea E un espacio de Banach, $f : E \to \mathbb{R}$ una función y $x, v \in E$. El **diferencial de Gateaux** de f en x en la dirección v denotada como $df(x; v)$ es definida como

$$df(x; v) := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x + \epsilon v) - f(v)}{\epsilon}.$$

Si el límite existe para todo $v \in E$, se dice que f es **Gateaux diferenciable en** x.

Se dice que f es **Gateaux diferenciable** en E si es Gateaux diferenciable para todo $x \in E$.

Se dice que f es **continuamente Gateaux diferenciable** en E si es Gateaux diferenciable y $df : E \times E \to \mathbb{R}$ es continua.

Observación. Por Lema 3.3.1 en [8], si f es continua y continuamente Gateaux diferenciable, entonces $df(x, \cdot) \in E^*$ para todo $x \in E$.

Proposición 2.4. *Sea f una función continua y Gateaux continuamente diferenciable en E. Entonces, f es convexa si, y sólo si, el operador diferencial de Gataeux*

$$\begin{array}{rcccl} df: & E & \to & E^* & \\ & x & \mapsto & df(x;\cdot): & E \to \mathbb{R} \\ & & & & v \mapsto df(x)(v) := df(x;v) = \langle df(x), v \rangle \end{array}$$

es monótono.

Demostración. Supongamos que f es convexa. Sean $x, y \in E$. Se tiene que

$$\frac{f(x+t(y-x))-f(x)}{t} \leq \frac{(1-t)f(x)+tf(y)-f(x)}{t} = f(y)-f(x),$$
$$\frac{f(y+t(x-y))-f(y)}{t} \leq \frac{(1-t)f(y)+tf(x)-f(y)}{t} = f(x)-f(y)$$

para todo $t \in]0,1[$. Así, tomando límite $t \to 0^+$,

$$\langle df(x), y-x\rangle = df(x)(y-x) \leq f(y)-f(x),$$
$$\langle df(y), x-y\rangle = df(y)(x-y) \leq f(x)-f(y).$$

Sumando estas dos últimas desigualdades, se tiene que

$$\langle df(x)-df(y), y-x\rangle \leq 0$$

Por lo tanto, el operador univaluado df es monótono.

Por otro lado, supongamos que df es monótono. Fijados $x, y \in E$ y $t \in]0,1[$, consideremos la función $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$\varphi(r) := f(rx+(1-r)y) - rf(x) - (1-r)f(y), \quad \forall r \in [0,1].$$

Observe que

$$\frac{\varphi(r+h)-\varphi(r)}{h} = \frac{f(rx+(1-r)y+h(x-y))}{h} - f(x) + f(y)$$

para todo $r \in]0,1[$ y $h > 0$ tal que $r+h \in]0,1[$. Tomando límite $h \to 0^+$, para todo $r \in]0,1[$

$$\varphi'(r) = df(rx+(1-r)y; x-y) - f(x) + f(y).$$

Así, la función φ es diferenciable en $]0,1[$.

Probemos que $\varphi(r) \leq 0$, para todo $r \in [0,1]$. Primero note que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Como φ es continua, por el Teorema de Weierstrass, φ posee máximo $t_0 \in [0,1]$. Supongamos que $\varphi(t_0) > 0$, entonces $t_0 \in]0,1[$. Como t_0 es maximizador de φ y $t_0 \in]0,1[$, entonces $\varphi'(t_0) = 0$. Luego, para cualquier $r \neq t_0$,

$$\begin{aligned}
\varphi'(r) = \varphi'(r) - \varphi'(t_0) &= df(rx+(1-r)y; x-y) - df(t_0x+(1-t_0)y; x-y) \\
&= \langle df(rx+(1-r)y), x-y\rangle - \langle df(t_0x+(1-t_0)y), x-y\rangle \\
&= \langle df(rx+(1-r)y) - df(t_0x+(1-t_0)y), x-y\rangle \\
&= \frac{1}{r-t_0}\langle df(z)-df(w), z-w\rangle
\end{aligned}$$

donde $z := rx+(1-r)y$ y $w := t_0x+(1-t_0)y$. Así, por la monotonía de df, $\varphi'(t) \geq 0$ para todo $r > t_0$ y $\varphi'(t) \leq 0$ para todo $r < t_0$, por lo tanto φ es no decreciente en $[t_0, 1]$ y no creciente en $[0, t_0]$. Esto es una contradicción, pues $0 < \varphi(t_0) \leq \varphi(1) = 0$ y $0 < \varphi(t_0) \leq \varphi(0) = 0$. Por lo tanto, $\varphi \leq 0$ y así f es convexa. □

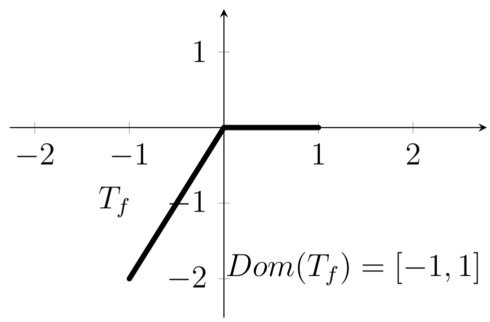
Proposición 2.5. *Este ejemplo surge de la teoría de punto fijo. Sea C un subconjunto de un espacio de Hilbert H y $f : C \to C$. Si f es* **no expansiva***:*

$$||f(x) - f(y)|| \leq ||x - y||, \quad \forall x, y \in C,$$

entonces el operador $T_f := I - f$ es monótono donde I es el operador identidad en H y $\mathrm{Dom}(T_f) = C$. Observe que f tiene un punto fijo en C si, y sólo si, $0 \in \mathrm{Ran}(T_f)$, es por ello que estudiar el rango de operadores monótonos es importante en la teoría de punto fijo.

Sea $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ una función non expansiva definida como

$$f(x) := |x| \quad \textit{para todo } x \in [-1, 1].$$



Demostración. Sean $x, y \in C$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \langle T_f(x) - T_f(y), x - y \rangle &= ||x - y||^2 - \langle f(x) - f(y), x - y \rangle \\ &\geq ||x - y||^2 - ||f(x) - f(y)|| \cdot ||x - y|| \geq 0. \end{aligned}$$

Entonces, T_f es un operador monótono. □

El siguiente Teorema puede ser encontrado en [4].

Teorema 2.1 (Teorema de la Proyección de Hilbert)**.** *Sea C un subconjunto convexo cerrado no vacío en un espacio de Hilbert. Entonces para todo $x \in H$, existe un único $y_x \in C$ tal que $y_x = \arg\min\{\|x - z\| : z \in C\}$.*

Demostración. Sea $x \in H$ y defina $\theta := \inf\{\|x - z\| : z \in C\} \neq -\infty$. Entonces, existe una sucesión (z_n) en C tal que $\|z_n - x\| \to \theta$. Como C es convexa, $\frac{1}{2}z_m + \frac{1}{2}z_n \in C$. Por la ley del paralelogramo,

$$\begin{aligned} \theta^2 &\leq \|x - \tfrac{1}{2}z_m - \tfrac{1}{2}z_n\|^2 = \|\tfrac{1}{2}(x - z_m) + \tfrac{1}{2}(x - z_n)\|^2 \\ &= 2\|\tfrac{1}{2}(x - z_m)\|^2 + 2\|\tfrac{1}{2}(x - z_n)\|^2 - \|\tfrac{1}{2}(x - z_m) - \tfrac{1}{2}(x - z_n)\|^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\|x - z_m\|^2 + \tfrac{1}{2}\|x - z_n\|^2 - \tfrac{1}{4}\|z_m - z_n\|^2, \end{aligned}$$

es decir

$$\|z_m - z_n\|^2 \leq 2\|x - z_m\|^2 + 2\|x - z_n\|^2 - 4\theta^2.$$

Esto implica que (z_n) es una sucesión de Cauchy en H. Así, existe $y \in H$ tal que $z_n \to y$. Como C es cerrado, $y \in \overline{C} = C$ y $\|y-x\| = \theta$. Por lo tanto, $y = \arg\min\{\|x-z\| : \ z \in C\}$.

Probemos la unicidad. Sean $y_1, y_2 \in C$ argumentos mínimos de la función $\|x - \cdot\|$ en C. Por la ley del paralelogramo y la convexidad de C, se tiene que

$$\begin{aligned} \|\tfrac{1}{2}(y_1 - y_2)\|^2 &= 2\|\tfrac{1}{2}(y_1 - x)\|^2 + 2\|\tfrac{1}{2}(y_2 - x)\|^2 - \|\tfrac{1}{2}(y_1 + y_2) - x\|^2 \\ &\leq \tfrac{1}{2}\theta^2 + \tfrac{1}{2}\theta^2 - \theta^2 = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $y_1 = y_2$. □

Definición 2.6. Sea C un subconjunto convexo, cerrado y no vacío en un espacio de Hilbert H. La **proyección** $P : H \to C$ es definida como

$$P(x) := \arg\min_{z\in C}\|x - z\|, \quad \forall x \in H.$$

La siguiente proposición puede ser encontrada en [4].

Proposición 2.6. *Sea C un subconjunto convexo, cerrado y no vacío en un espacio de Hilbert. La proyección P de H en C satisface la siguiente desigualdad variacional:*

$$\langle x - P(x), z - P(x)\rangle \leq 0, \quad \forall z \in C.$$

Demostración. Sean $z \in C$ y $t \in]0, 1[$. Se define $z_t := tz + (1 - t)P(x) \in C$. Se tiene que

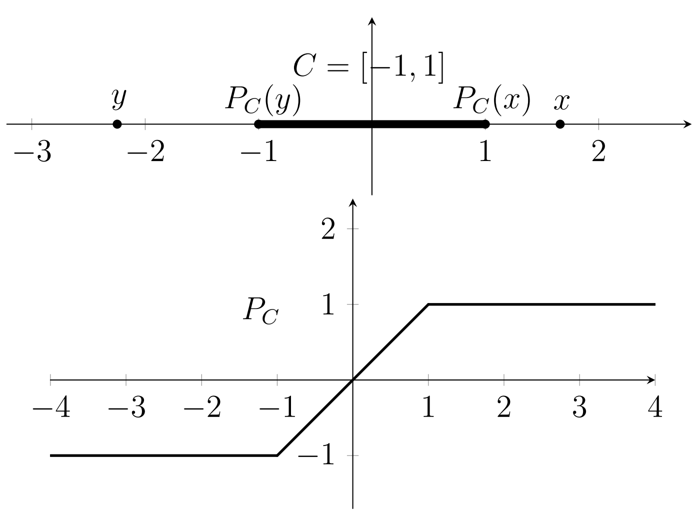
$$\begin{aligned} \|x - P(x)\|^2 &\leq \|x - z_t\|^2 = \|x - P(x) - t(z - P(x))\|^2 \\ &= \|x - P(x)\|^2 + t^2\|z - P(x)\|^2 - 2t\langle x - P(x), z - P(x)\rangle. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\langle x - P(x), z - P(x)\rangle \leq t\|z - P(x)\|^2.$$

Tomando límite $t \to 0^+$, se tiene la desigualdad variacional. □

Proposición 2.7. *La proyección P de H en C es monótono y no expansivo.*



Demostración. Sean $x, y \in H$. Usando la desigualdad variacional de la Proposición anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle x - P(x), P(y) - P(x) \rangle &\leq 0, \\ \langle y - P(y), P(x) - P(y) \rangle &\leq 0. \end{aligned}$$

Sumando estas dos desigualdades,

$$\begin{aligned} \langle -x + y + P(x) - P(y), P(x) - P(y) \rangle &\leq 0 \\ \|P(x) - P(y)\|^2 &\leq \langle x - y, P(x) - P(y) \rangle. \end{aligned}$$

Así, P es monótono y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (vea Lema 3.2 item (a) en [4]), P es no expansivo. □

Proposición 2.8. *Sea E un espacio normado. El* **operador dualidad** $J : E \rightrightarrows E^*$ *definido como*

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x^*, x \rangle = \|x^*\| \cdot \|x\| \text{ y } \|x^*\| = \|x\|\}$$

es monótono y $\mathrm{Dom}(J) = E$.

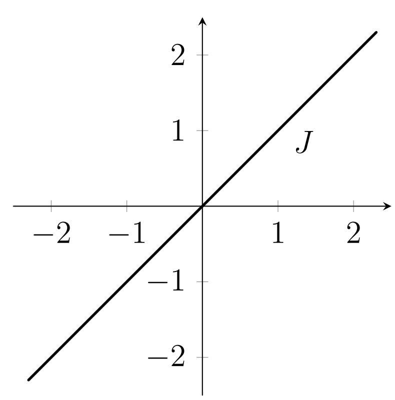
Demostración. Sea $x \in E$. Por el Corolario 1.3 del Teorema de Hahn Banach en [5], existe $x^* \in J(x)$. Entonces, $x \in Dom(J)$.

Sean $(x, x^*), (y, y^*) \in J$. Por definición del operador dualidad, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle x^* - y^*, x - y \rangle &= \|x^*\|\|x\| - \langle x^*, y \rangle - \langle y^*, x \rangle - \|y^*\|\|y\| \\ &\geq \|x\|^2 - \|x^*\|\|y\| - \|y^*\|\|x\| - \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \|x\|\|y\| - \|y\|\|x\| - \|y\|^2 = (\|x\| - \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Así, J es monótono.

Cuando $E = \mathbb{R}$, el operador dualidad satisface $J(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.



□

2.2. Operadores Monótonos Maximales

En esta sección se define y presenta ejemplos de los operadores monótonos maximales. Las proposiciones de esta sección pueden ser encontradas en [9].

Definición 2.7. Un operador monótono $A : X \rightrightarrows X^*$ es **monótono maximal** si no existe un conjunto monótono más grande que A. Es decir, si existe un operador monótono $B \subset X \times X^*$ tal que $A \subset B$, entonces $B = A$.

Proposición 2.9. *Un operador monótono $A \subset X \times X^*$ es monótono maximal si, y sólo si, si $(x, x^*) \in X \times X^*$ tal que $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$ para todo $(y, y^*) \in A$, entonces $(x, x^*) \in A$.*

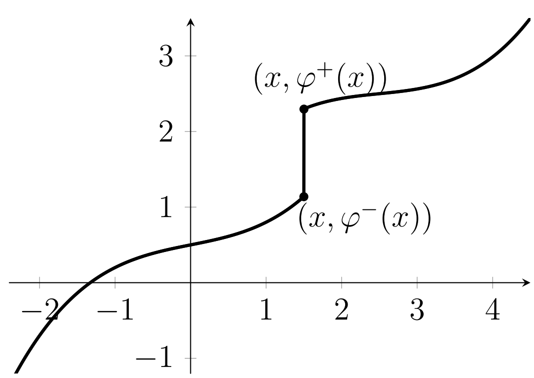
Demostración. Supongamos que A es un operador monótono maximal y que existe $(x, x^*) \in X \times X^* \setminus A$ tal que $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$, $\forall (y, y^*) \in A$. Así, $A \cup \{(x, x^*)\}$ es monótono. Entonces, se tiene una contradicción ya que existe un conjunto monótono más grande que A.

Recíprocamente, supongamos que A no es monótono maximal. Entonces, existe un operador monótono B tal que $A \subsetneq B$. Así, existe $(x, x^*) \in B \setminus A$ y por la monotonía de B, se tiene que $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$ para todo $(y, y^*) \in A$. Por lo tanto, por hipótesis, $(x, x^*) \in A$ lo cual es una contradicción. $\square$

2.2.1. Ejemplos de operadores monótonos maximales

Proposición 2.10. *Dado $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no decreciente. Un operador multivaluado $\hat{\varphi} : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Gr}(\varphi) \subset \mathrm{Gr}(\hat{\varphi})$ es monótono maximal si, y sólo si, $\hat{\varphi}(x) = [\varphi^-(x), \varphi^+(x)]$ para todo $x \in \mathbb{R}$ donde*

$$\varphi^+(x) := \lim_{t \to x^+} \varphi(t) \quad y \quad \varphi^-(x) := \lim_{t \to x^-} \varphi(t).$$



Demostración. Probemos que si $\hat{\varphi}$ es monótono, entonces $\hat{\varphi}(x) \subset [\varphi^-(x), \varphi^+(x)]$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dados $z \in \hat{\varphi}(x)$ y las sucesiones $(l_n), (r_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $l_n \to x^-$ y $r_n \to x^+$, por monotonía de $\hat{\varphi}$ y como $\mathrm{Gr}(\varphi) \subset \mathrm{Gr}(\hat{\varphi})$, se tiene que $\varphi(l_n) \leq z$ y $z \leq \varphi(r_n)$. Tomando límite $n \to +\infty$, se obtiene que $\varphi^-(x) \leq z$ y $z \leq \varphi^+(x)$. Así, $z \in [\varphi^-(x), \varphi^+(x)]$.

Supongamos que $\hat{\varphi}$ es monótono maximal y que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\hat{\varphi}(x) \subsetneq [\varphi^-(x), \varphi^+(x)]$. Entonces, existe $z \in [\varphi^-(x), \varphi^+(x)]$ tal que $z \notin \hat{\varphi}(x)$ y en consecuencia, el operador

$\{(x,z)\} \cup \mathrm{Gr}(\hat{\varphi})$ es monótono ya que, sin pérdida de generalidad, tomamos $(y,w) \in \mathrm{Gr}(\hat{\varphi})$ tal que $y > x$ y una sucesión $(x_n) \in]x,y[$ tal que $x_n \to x^+$, entonces $w \geq \lim \varphi(x_n) = \varphi^+(x) \geq z$. Como $\hat{\varphi}$ es momótono maximal, se tiene que $\{(x,z)\} \cup \mathrm{Gr}(\hat{\varphi}) = \mathrm{Gr}(\hat{\varphi})$, una contradicción ya que $(x,z) \notin \mathrm{Gr}(\hat{\varphi})$.

Recíprocamente, probemos que $\mathrm{Gr}(\hat{\varphi})$ es monótono. Dados $(x,z),(y,w) \in \mathrm{Gr}(\hat{\varphi})$ tal que $x < y$. Existen las sucesiones $(x_n),(y_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $x_n < y_n$, $x_n \to x^+$ y $y_n \to^{y\ -}$, entonces $z \leq \varphi^+(x) = \lim \varphi(x_n) \leq \lim \varphi(y_n) = \varphi^-(y) \leq w$. Así, $\hat{\varphi}$ es monótono.

Supongamos que $\hat{\varphi}$ no es monótono maximal. Por la Proposición 2.9, existe $(y,w) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Gr}(\hat{\varphi})$ tal que $(x-y)(z-w) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $z \in \hat{\varphi}(x)$. Como $(y,w) \notin Gr(\hat{\varphi})$, entonces $w \notin \hat{\varphi}(y) = [\varphi^-(y), \varphi^+(y)]$. Sin pérdida de generalidad $w > \varphi^+(y)$. Como existe una sucesión $(y_n) \subset]y,+\infty[$ tal que $y_n \to y^+$, entonces $\varphi(y_n) \geq w$. Así, $\varphi^+(y) \geq w$, lo cual es una contradicción.

□

Proposición 2.11. *Un operador lineal $A : H \to H$ en un espacio de Hilbert H es monótono maximal si, y sólo si, es un operador positivo si, y sólo si, es monótono.*

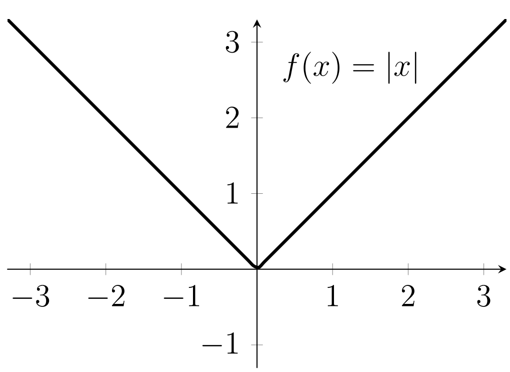
Demostración. Por Proposición 2.2, A es positivo si, y sólo si, es monótono.

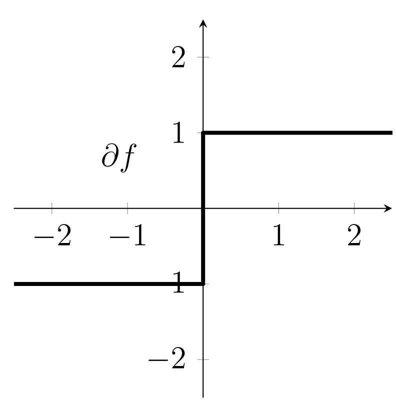
Probemos que todo operador lineal positivo es monótono maximal. Si $(x,x^*) \in H \times H$ tal que $\langle x-y, x^* - Ay\rangle \geq 0$ para todo $y \in H$, entonces $\langle z, x^* - Ax + Az\rangle \geq 0$ para todo $z \in H$. Se tiene que

$$t\langle z, x^* - Ax\rangle + t^2\langle z, Az\rangle \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall z \in H.$$

Entonces, $\langle z, x^* - Ax\rangle = 0$ para todo $z \in H$. Así, $x^* = Ax$. Por la Proposición 2.9, A es monótono maximal. □

Proposición 2.12. *Sea E un espacio de Banach. Si $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función convexa, semicontinua inferior y propia, entonces el subdiferencial ∂f es monótono maximal. Esta proposición será demostrada en la siguiente sección.*





Proposición 2.13. *Sea (X,τ) un espacio vectorial topológico y $A : X \to X^*$ un operador monótono univaluado tal que* $\mathrm{Dom}(A) = X$. *Si A es secuencialmente continuo de (X,τ) en (X^*, ω^*), entonces A es monótono maximal.*

Demostración. Supongamos que A no es monótono maximal. Por la Proposición 2.9, existe $(x, x^*) \in X \times X^* \setminus A$ tal que $\langle x-y, x^*-A(y)\rangle \geq 0$ para todo $y \in X$. Sea $y \in X$ y $t \in [0,1]$. Define $y_t := tx + (1-t)y$. Entonces,

$$0 \leq \frac{1}{(1-t)}\langle x - y_t, x^* - A(y_t)\rangle = \langle x - y, x^* - A(y_t)\rangle. \tag{2.1}$$

Tomando límite $t \to 1^-$, se tiene que $y_t \to x$. Por hipótesis secuencialmente continua, $A(y_t) \overset{*}{\rightharpoonup} A(x)$. Por ello, $\langle x - y, x^* - A(y_t)\rangle \to \langle x - y, x^* - A(x)\rangle$ cuando $t \to 1^-$. Usando la desigualdad (2.1), $\langle x - y, x^* - A(x)\rangle \geq 0$ para todo $y \in X$. Así, $x^* = A(x)$. Es decir, $(x, x^*) \in A$, lo cual es una contradicción. $\square$

Proposición 2.14. *El operador proyección P_C, dado en la definición 2.6, del espacio de Hilbert H en C subconjunto convexo, cerrado y no vació de H es monótono maximal.*

Demostración. En la Proposición 2.7, se vio que P_C es no expansivo, entonces es secuencialmente continua de (H, τ) en (H, ω^*). Como P_C es un operador monótono univaluado, por la Proposición 2.13, P_C es monótono maximal. $\square$

Definición 2.8. Sea E un espacio de Banach y $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función. Si $x \in dom(f)$, la **derivada direccional derecha** $d^+f(x) : E \to \overline{\mathbb{R}}$ es definida como

$$d^+f(x,y) := \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+ty) - f(x)}{t}, \quad \forall y \in E.$$

En [9] se demuestra que este límite existe cuando f es convexa.

Observación. Sea f convexa. Si $x \in dom(f)$,

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* |\ \langle x^*, y\rangle \leq d^+f(x,y) \quad \forall y \in E\}.$$

Proposición 2.15. *El operador dualidad J definido en la Proposición 2.8 es monótono maximal.*

Demostración. Sea $j(x) := \frac{1}{2}\|x\|^2$ para todo $x \in E$. Haciendo algunos cálculos, se tiene que

$$d^+j(x,y) = \lim_{t\to 0^+} \frac{(\|x+ty\| + \|x\|)}{2}.\frac{(\|x+ty\| - \|x\|)}{t} = \|x\|.d^+\|x\|(y), \quad \forall x, y \in E. \tag{2.2}$$

Probemos que $J(x) = \partial j(x)$ para todo $x \in E$. Si $x = 0$, por la Observación anterior y la ecuación (2.2), se tiene que $\partial j(0) = \{0\} = J(0)$. Supongamos que $x \neq 0$. Usando la Observación anterior y la ecuación (2.2),

$$x^* \in \partial j(x) \text{ si, y sólo si, } \langle \|x\|^{-1}x^*, y\rangle \leq d^+\|x\|(y) \text{ si, y sólo si, } \|x\|^{-1}x^* \in \partial\|x\|. \tag{2.3}$$

Sea $x^* \in \partial j(x)$. Por la ecuación (2.3), $\|x\|^{-1}x^* \in \partial\|x\|$. Para todo $z \in E$ tal que $\|z\| \leq 1$, se tiene que

$$\langle \|x\|^{-1}x^*, z\rangle \leq \|x+z\| - \|x\| \leq \|z\|.$$

Entonces,

$$\frac{1}{\|z\|}\langle x^*, z\rangle = \|x\| \quad \text{para todo } 0 < \|z\| \leq 1.$$

Así, $\|x^*\| = \|x\|$ y $\langle x^*, x\rangle = \|x\|^2$. Por lo tanto, $x^* \in J(x)$.

Sea $x^* \in J(x)$. Por la ecuación (2.3),

$$\langle \|x\|^{-1}x^*, y-x\rangle = \|x\|^{-1}(\langle x^*, y\rangle - \langle x^*, x\rangle) \leq \|x\|^{-1}(\|x^*\|\|y\| - \|x^*\|\|x\|) = \|y\| - \|x\|, \ \forall y \in E.$$

Entonces, $\|x\|^{-1}x^* \in \partial\|x\|$. Así, por la ecuación (2.3), $x^* \in \partial j(x)$.

Como $j = \frac{1}{2}\|\cdot\|^2$ es convexa, continua y propia, entonces $\partial j = J$ es monótono maximal. $\square$

El siguiente lema puede ser encontrado en [11].

Definición 2.9. Un operador multivaluado $A : X \rightrightarrows X^*$ es convexo si su gráfico es un conjunto convexo.

Lema 2.1. *Si $A : X \rightrightarrows X^*$ es un operador monótono maximal y convexo, entonces A es afín lineal.*

Demostración. Tomemos $(x_0, x_0^*) \in A$. Se define $A_0 := A - \{(x_0, x_0^*)\}$. Observe que A_0 es monótono maximal, convexo y contiene a $(0, 0)$.

Por la monotonía de A_0, se tiene que

$$\langle x, x^*\rangle = \langle x - 0, x^* - 0\rangle \geq 0, \quad \forall (x, x^*) \in A_0. \tag{2.4}$$

Probemos que A_0 es cono. Sea $(x, x^*) \in A_0$. Por la convexidad de A_0, observe que

$$s(x, x^*) = (1 - s)(0, 0) + s(x, x^*) \in A_0, \quad \forall s \in [0, 1].$$

Así,

$$1/s(y, y^*) \in A_0, \quad \forall s \geq 1, \forall (y, y^*) \in A_0.$$

Por la monotonía de A_0,

$$\langle sx - y, sx^* - y^*\rangle = s\langle x - \frac{1}{s}y, x^* - \frac{1}{s}y^*\rangle \geq 0, \quad \forall s \geq 1, \forall (y, y^*) \in A_0.$$

Por lo tanto, por la maximalidad de A_0,

$$t(x, x^*) \in A_0^\mu = A_0, \quad \forall t \geq 1$$

donde A_0^μ es el polar monótono de A_0 definido en 2.12.

Probemos que A_0 es cerrado bajo la suma. Como A_0 es convexo y cono,

$$(x, x^*) + (y, y^*) = 2\left(\frac{1}{2}(x, x^*) + \frac{1}{2}(y, y^*)\right) \in A_0, \quad \forall (x, x^*), (y, y^*) \in A_0. \tag{2.5}$$

Probemos que A_0 es simétrico; es decir, $A_0 = -A_0$. Por la ecuación (2.5) y la desigualdad (2.4),

$$(-x, -x^*) \in A_0^\mu = A_0, \quad \forall (x, x^*) \in A_0.$$

En conclusión, A_0 es un subespacio vectorial de $X \times X^*$ ya que es cono simétrico y cerrado bajo la suma. $\square$

2.3. Engorde de un operador monótono

En esta sección se define y presenta ejemplos y propiedades del ε-subdiferencial y el ε-engorde de un operador monótono.

Definición 2.10. Sea X^* un espacio vectorial topológico, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y $\varepsilon \geq 0$. Si $x_0 \in \operatorname{dom}(f)$, el **$\varepsilon$-subdiferencial de** f en x_0 es definido como

$$\partial_\varepsilon f(x_0) = \{x^* \in X^* | \ f(x_0 + y) - f(x_0) + \varepsilon \geq \langle x^*, y\rangle, \ \forall y \in E\}.$$

Las proposiciones, teorema y lemas relacionadas al ε-subdiferencial pueden ser encontradas en [9].

Proposición 2.16. *Se presenta propiedades del ε-subdiferencial de una función.*

1) *Para todo $x \in \operatorname{dom}(f)$ y $\epsilon \geq 0$, se cumple que $\partial_\varepsilon f(x)$ es convexo y cerrado en la topología débil estrella.*

2) *Para todo $x \in \operatorname{dom}(f)$, se tiene que $\partial_0 f(x) = \partial f(x)$.*

3) *Si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, entonces $\partial_{\varepsilon_1} f(x) \subset \partial_{\varepsilon_2} f(x)$, $\forall x \in \operatorname{dom}(f)$.*
   En particular, $\partial f(x) \subset \partial_\varepsilon f(x)$, $\forall \varepsilon > 0$.

Demostración. 1) Fijemos $x \in \operatorname{dom}(f)$ y $\varepsilon \geq 0$. Resulta que,

$$\partial_\varepsilon f(x) = \cap_{y \in E}\{x^* \in X^* | \ \langle x^*, y\rangle \leq c_y\}$$

donde $c_y := f(x + y) - f(x) + \varepsilon$. Como $\{x^* \in X^* | \ \langle x^*, y\rangle \leq c_y\} = J_y^{-1}(] - \infty, c_y]) \in (\omega^*)^c$ y es convexo, $\partial_\varepsilon f(x)$ es cerrado en ω^* y convexo.

2) Usando la definición del subdiferencial y el ε-subdiferencial, se obtiene la prueba de este item.

3) Por definición del ϵ-subdiferencial, se prueba este item.

□

Proposición 2.17. *Sea X un espacio vectorial topológico localmente convexo. Si $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es convexa, semicontinua inferior y propia en la topología fuerte, entonces $\partial_\varepsilon f(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in \operatorname{dom}(f)$ y $\varepsilon > 0$.*

Demostración. Sea $x \in \operatorname{dom}(f)$ y $\varepsilon > 0$. Como f es convexa, semicontinua inferior y propia, $\operatorname{epi}(f)$ es convexo, cerrado y no vacío. Por otro lado, $(x, f(x) - \varepsilon) \notin \operatorname{epi}(f)$. Entonces, por el Teorema 3.4.b en [6], existe $F \in (X \times \mathbb{R})^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x, f(x) - \varepsilon) < \alpha < F(y, \lambda), \quad \forall (y, \lambda) \in \operatorname{epi}(f)$$

Como $F \in (X \times \mathbb{R})^*$, define $h(x) := F(x, 0)$ para todo $x \in X$ y $g(t) := F(0, t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces, $h \in X^*$, $g \in \mathbb{R}^*$ y $F(x, t) = h(x) + g(t)$ para todo $(x, t) \in X \times \mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}^* \approx \mathbb{R}$, existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle x, h\rangle + \mu(f(x) - \varepsilon) < \alpha < \langle y, h\rangle + \mu\lambda, \quad \forall (y, \lambda) \in \operatorname{epi}(f).$$

Observe que $\mu \neq 0$. Si $\mu < 0$, entonces tomando límite $\lambda \to +\infty$, una contradicción. Por lo tanto, $\mu > 0$. Sin pérdida de generalidad $\mu = 1$. Se tiene que

$$f(y) - f(x) + \varepsilon > \langle x - y, h \rangle, \quad \forall y \in E.$$

Así, $-h \in \partial_\varepsilon f(x)$. □

A continuación se presenta un teorema y dos lemas con el objetivo de demostrar la Proposición 2.12, que dice que el subdiferencial de una función convexa, semicontinua inferior y propia es monótono maximal.

Teorema 2.2 (Brondsted-Rockafellar). *Sea E un espacio de Banach y $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, semicontinua inferior y propia. Entonces, para todo $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$, $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ y $x_0^* \in \partial_\varepsilon f(x_0)$, existe $x \in \mathrm{dom}(f)$ y $x^* \in E^*$ tal que*

$$x^* \in \partial f(x), \quad \|x - x_0\| \leq \varepsilon/\lambda \quad y \quad \|x^* - x_0^*\| \leq \lambda.$$

Demostración. Sean $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$, $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ y $x_0^* \in \partial_\varepsilon f(x_0)$. Se tiene que

$$g(y) \geq g(x_0) - \varepsilon, \quad \forall y \in E \quad \text{y} \quad g(x_0) \in \mathbb{R}$$

donde $g : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es definida como $g(x) := f(x) - \langle x, x_0^* \rangle$ para todo $y \in E$.

Como f es convexa, semicontinua inferior y propia; y $\langle \cdot, x_0^* \rangle$ es convexa, continua y finita, entonces g es convexa, semicontinua inferior y propia. Usando el Principio Variacional de Ekeland en [10], existe $z_0 \in E$ tal que

$$\|z_0 - x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{\lambda}, \quad g(z_0) \leq g(x_0) \quad \text{y} \quad g(x) \geq g(z_0) - \lambda\|x - z_0\|, \quad \forall x \neq z_0. \tag{2.6}$$

Defina $h : E \to \mathbb{R}$ como $h(x) := \lambda\|x - z_0\| - g(z_0)$ para todo $x \in E$. Usando la ecuación (2.6) e $\inf(g + h) \leq g(z_0) + h(z_0) = 0$, se tiene que $\inf(g + h) = 0$. Como h es convexa, continua y $h(z_0) = -g(z_0) \in \mathbb{R}$, por el Teorema Fenchel-Rockafellar 1.12 en [5],

$$0 = \inf_{x \in X}\{g(x) + h(x)\} = -\min_{x^* \in X^*}\{g^*(-x^*) + h^*(x^*)\}.$$

Entonces, existe $z_0^* \in X^*$ tal que

$$-h^*(z_0^*) = g^*(-z_0^*). \tag{2.7}$$

Usando las propiedades de la conjugada de Fenchel,

$$\begin{aligned} g^*(x^*) &= f^*(x^* + x_0^*) \\ & \quad y \\ h^*(x^*) &= \lambda\delta_{B[0,\lambda]}(x^*) + \langle z_0, x^* \rangle + g(z_0) \\ &= \lambda\delta_{B[0,\lambda]}(x^*) + \langle z_0, x^* - x_0^* \rangle + f(z_0), \quad \forall x^* \in X^*, \end{aligned}$$

donde

$$\delta_{B[0,\lambda]}(x) := \begin{cases} 0, & x \in B[0,\lambda] \\ +\infty, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Como $h^*(z_0^*) \in \mathbb{R}$, se tiene que $\delta_{B[0,\lambda]}(z_0^*) = 0$. Entonces, $\|z_0^*\| \le \lambda$. Usando la ecuación (2.7),

$$\begin{aligned} -\langle z_0, z_0^* - x_0^*\rangle - f(z_0) &= f^*(x_0^* - z_0^*) \ge \langle z, x_0^* - z_0^*\rangle - f(z) \\ f(z) &\ge f(z_0) + \langle z - z_0, x_0^* - z_0^*\rangle, \qquad \forall z \in E. \end{aligned}$$

Así, $x_0^* - z_0^* \in \partial f(z_0)$. Define $z^* := x_0^* - z_0^*$. Se tiene que $\|z^* - z_0^*\| \le \lambda$ y $z^* \in \partial f(z_0)$. □

Lema 2.2. *Sea E un espacio de Banach y $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, semicontinua inferior y propia. Si $\alpha, \beta > 0$, $x_0 \in E$ y $f(x_0) < \text{ínf}_E f + \alpha\beta$, entonces existe $x \in \text{dom}(f)$ y $x^* \in \partial f(x)$ tal que $\|x - x_0\| < \beta$ y $\|x^*\| < \alpha$.*

Demostración. Como f es propia, $\text{ínf}_E f < +\infty$. Observe que $x_0 \in \text{dom}(f)$ e $\text{ínf}_E f \in \mathbb{R}$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $f(x_0) - \text{ínf}_E f < \varepsilon < \alpha\beta$ y λ tal que $\varepsilon/\beta < \lambda < \alpha$. Entonces, $0 \in \partial_\varepsilon f(x_0)$. Por el Teorema 2.2 Brondsted-Rockafellar, existen $x \in \text{dom}(f)$ y $x^* \in \partial f(x)$ tal que $\|x - x_0\| \le \varepsilon/\lambda < \beta$ y $\|x^*\| \le \lambda < \alpha$. □

Lema 2.3. *Sea E un espacio de Banach, $x \in E$ y $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, semicontinua inferior y propia. Si $\text{ínf}_E f < f(x)$, entonces existe $z \in \text{dom}(f)$ y $z^* \in \partial f(z)$ tal que*

$$f(z) < f(x) \quad y \quad \langle z^*, x - z\rangle > 0.$$

Demostración. Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\text{ínf}_E f < \lambda < f(x)$ y

$$K_\lambda := \sup_{y \in E,\, y \ne x} \frac{\lambda - f(y)}{\|y - x\|}.$$

Probemos que $0 < K_\lambda < +\infty$. Por la Proposición 1.13 item 2, existen $u^* \in E^*$ y $r \in \mathbb{R}$ tal que $u^* + r \le f$ en E. Defina $F_\lambda := \{y \in E : \ f(y) \le \lambda\}$. Como f es semicontinua inferior y por definición de ínfimo de f, se tiene que F_λ es cerrado no vacío y $0 < dis(x, F) < +\infty$. Sea $y \in F_\lambda$, se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda - f(y) &\le \lambda - \langle y, u^*\rangle - r \\ &= \lambda - \langle x, u^*\rangle - r + \langle x - y, u^*\rangle \\ &\le |\lambda - \langle x, u^*\rangle - r| + \|x - y\|\|u^*\|. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{\lambda - f(y)}{\|y - x\|} \le \frac{|\lambda - \langle u^*, x\rangle - r|}{dis(x, F_\lambda)} + \|u^*\| < +\infty, \quad \forall y \in F_\lambda.$$

Por otro lado,

$$\frac{\lambda - f(y)}{\|y - x\|} < 0, \quad \forall y \notin F_\lambda,\ y \ne x.$$

Así, $K_\lambda < +\infty$. Se sabe que F_λ es no vacío. Existe $y \in E$ tal que $f(y) < \lambda$. Entonces, $y \ne x$ y

$$K_\lambda \ge \frac{\lambda - f(y)}{\|y - x\|} > 0.$$

Sea $\varepsilon \in]0,1[$. Se tiene que $(1-\varepsilon)K_\lambda < K_\lambda$. Por definición de K_λ y supremo, existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 \neq x$ y

$$(1-\varepsilon)K_\lambda < \frac{\lambda - f(x_0)}{\|x_0 - x\|}.$$

Define $N_\lambda(z) := K_\lambda \|z - x\|$ para todo $z \in E$. Usando la última desigualdad, se tiene que

$$(N_\lambda + f)(x_0) < \lambda + \varepsilon N_\lambda(x_0). \tag{2.8}$$

Por definición de N_λ y K_λ, se tiene que $\lambda < f(x) = (N_\lambda + f)(x)$ y $\lambda \leq \operatorname{ínf}_E(N_\lambda + f)$. Usando la ecuación (2.8),

$$(N_\lambda + f)(x_0) < \operatorname*{ínf}_E (N_\lambda + f) + \varepsilon N_\lambda(x_0).$$

Como N_λ es convexo continua y finita, la función $N_\lambda + f$ es convexa, semicontinua inferior y propia. Por el Lema 2.2 con $\alpha := \varepsilon K$ y $\beta := \|x_0 - x\|$, existen $z \in \operatorname{dom}(N_\lambda + f) = \operatorname{dom}(f)$ y $\omega^* \in \partial(N_\lambda + f)(z)$ tal que $\|z - x_0\| < \|x_0 - x\|$ y $\|\omega^*\| < \varepsilon K_\lambda$. Por la desigualdad triangular, $0 < \|z - x\|$. Por regla de la suma de subdiferenciales Teorema 3.16 en [9],

$$\partial(N_\lambda + f)(z) = \partial N_\lambda(z) + \partial f(z).$$

En consecuencia, existen $y^* \in \partial N_\lambda(z)$ y $z^* \in \partial f(z)$ tal que $\omega^* = y^* + z^*$. Como $y^* \in \partial N_\lambda(z)$, por definición de la subdiferenciabilidad, $\langle y^*, z - x\rangle \geq N_\lambda(z) - N_\lambda(x) = N_\lambda(z)$. Así,

$$\begin{aligned}
\langle z^*, x - z\rangle = \langle w^*, x - z\rangle - \langle y^*, x - z\rangle &\geq -\|w^*\|\|x - z\| + N_\lambda(z)\\
&\geq -\varepsilon K_\lambda \|x - z\| + K_\lambda \|x - z\|\\
&= (1-\varepsilon)K_\lambda \|x - z\| > 0.
\end{aligned}$$

Como $z^* \in \partial f(z)$, se tiene que $f(x) > f(z) + \langle z^*, x - z\rangle > f(z)$.

$\square$

Demostración de la Proposición 2.12. Sea $(x, x^*) \in E \times E^*$ tal que $\langle x - y, x^* - y^*\rangle \geq 0$ para todo $(y, y^*) \in \partial f$. Supongamos que $x^* \notin \partial f(x)$. Existe $y \in E$ tal que $f(y) < f(x) + \langle y - x, x^*\rangle$. Se tiene que

$$\operatorname*{ínf}_E (f - x^*) \leq (f - x^*)(y) < (f - x^*)(x).$$

Entonces, $0 \notin \partial(f - x^*)(x)$. Como x^* es lineal, continua y finita, $f - x^*$ es convexa, semicontinua inferior y propia. Así, por el Lema 2.3, existen $z \in \operatorname{dom}(f - x^*) = \operatorname{dom}(f)$ y $z^* \in \partial(f - x^*)(z)$ tal que $\langle z^*, x - z\rangle > 0$. En consecuencia, $x^* + z^* \in \partial f(z)$. Define $w^* := x^* + z^*$. Entonces, $(z, w^*) \in \partial f$ y $\langle x - z, x^* - w^*\rangle = -\langle x - z, z^*\rangle < 0$, una contradicción. Por lo tanto, $(x, x^*) \in \partial f$. Finalmente, por la Proposición 2.9, ∂f es monótono maximal.

$\square$

Definición 2.11. Sean $A : X \rightrightarrows X^*$ un operador multivaluado y $\varepsilon \geq 0$. El **ε-engorde del operador** A, en inglés $\varepsilon - enlargement$, denotado como $A^\varepsilon : X \rightrightarrows X^*$ es definido de la siguiente manera:

$$A^\varepsilon(x) := \{x^* \in X^* : \langle x - y, x^* - y^*\rangle \geq -\varepsilon,\ \forall (y, y^*) \in A\}.$$

Las siguientes proposiciones y ejemplos pueden ser encontradas en [12].

Proposición 2.18. *El engorde de un operador multivaluado tiene las siguientes propiedades.*

1. *Si* $0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2$*, entonces* $A^{\varepsilon_1} \subset A^{\varepsilon_2}$*.*
2. *Si* $I \subset [0, +\infty[$ *no vacío, entonces*
$$A^{\bar{\varepsilon}} = \bigcap_{\varepsilon \in I} A^{\varepsilon}$$
donde $\bar{\varepsilon} := \inf I$*.*
3. *Para todo* $x \in X$ *y* $\varepsilon \geq 0$*,* $A^{\varepsilon}(x)$ *es convexo y cerrado en la topología* ω^**.*
4. *Si* A *es monótono, entonces* $A \subset A^{\varepsilon}$*,* $\forall \varepsilon \geq 0$*.*
5. *Si* A *es monótono maximal, entonces* $A = A^0$*.*

Demostración.

1. Si $(x, x^*) \in A^{\varepsilon_1}$, entonces $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq -\varepsilon_1 > -\varepsilon_2$ para todo $(y, y^*) \in A$. Así, $(x, x^*) \in A^{\varepsilon_2}$.
2. Sea $\varepsilon \in I$. Como $\bar{\varepsilon} \leq \varepsilon$, por el item 1, $A^{\bar{\varepsilon}} \subset A^{\varepsilon}$. Entonces,
$$A^{\bar{\varepsilon}} \subset \bigcap_{\varepsilon \in I} A^{\varepsilon}.$$
Sea $(x, x^*) \in \cap_{\varepsilon \in I} A^{\varepsilon}$. Fijemos $(y, y^*) \in A$, se tiene que
$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq \sup_{\varepsilon \in I}(-\varepsilon) = -\inf_{\varepsilon \in I} \varepsilon = -\bar{\varepsilon}.$$
Así, $(x, x^*) \in A^{\bar{\varepsilon}}$.
3. Sean $x \in X$ y $\varepsilon \geq 0$. Resulta que
$$A^{\varepsilon}(x) \;\; = \;\; \cap_{(z,z^*) \in A} \{x^* \in X^* : \langle x - z, x^* \rangle \geq \langle x - z, z^* \rangle - \varepsilon\}.$$
Como $\{x^* \in X^* : \langle x - z, x^* \rangle \geq \langle x - z, z^* \rangle - \varepsilon\}$ es convexo y cerrado en la topología ω^* (ver Lema 1.3), entonces $A^{\varepsilon}(x)$ es convexo y cerrado en ω^*.
4. Sea $\varepsilon \geq 0$. Si $(x, x^*) \in A$, entonces $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0 \geq -\varepsilon$. Así, $(x, x^*) \in A^{\varepsilon}$.
5. Como A es monótono, por el item 4, $A \subset A^0$. Si $(x, x^*) \in A^0$, entonces para todo $(y, y^*) \in A$, $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$. Como A es monótono maximal, por la Proposición 2.9, $(x, x^*) \in A$.

□

Proposición 2.19. *Sea* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*. Se tiene que*
$$\partial_{\varepsilon} f \subset (\partial f)^{\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon \geq 0.$$

Demostración. Sea $(x, x^*) \in \partial_\varepsilon f$. Fijemos $(z, z^*) \in \partial f$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \varepsilon + f(z) - f(x) &\geq \langle z - x, x^* \rangle, \\ f(x) - f(z) &\geq \langle x - z, z^* \rangle. \end{aligned}$$

Sumemos estas dos últimas desigualdades, resulta que $\varepsilon \geq \langle x - z, z^* - x^* \rangle$. Por lo tanto, $(x, x^*) \in (\partial f)^\varepsilon$. $\square$

Ejemplo. *Se define la siguiente función*

$$f(x) := \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

El subdiferencial o 0*-subdiferencial de* f *es de la siguiente manera*

$$\partial f(x) = \partial_0 f(x) = \begin{cases} \{1\}, & x > 0 \\ \emptyset, & x = 0 \\ \{-1\}, & x < 0. \end{cases}$$

El 0*-engorde del operador* ∂f *es de la siguiente manera*

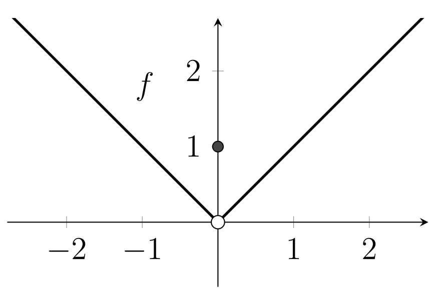
$$(\partial f)^0(x) = \begin{cases} \{1\}, & x > 0 \\ [-1, 1], & x = 0 \\ \{-1\}, & x < 0 \end{cases}$$

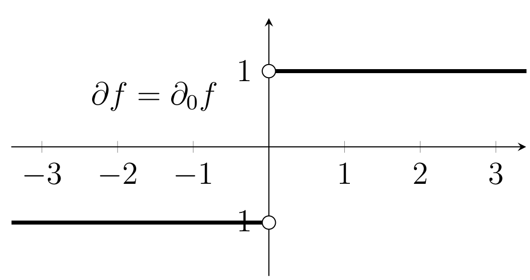
Sea $\varepsilon > 0$*. El* ε*-engorde del operador* ∂f *es*

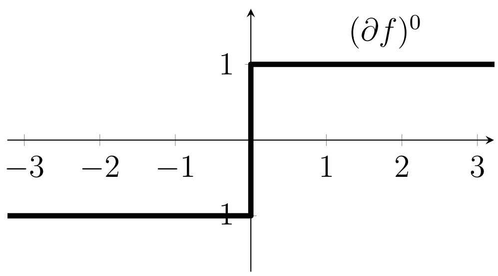
$$(\partial f)^\varepsilon(x) = \begin{cases} [1 - \frac{\varepsilon}{x}, 1], & x > \frac{\varepsilon}{2} \\ [-1, 1], & -\frac{\varepsilon}{2} \leq x \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ [-1, -1 - \frac{\varepsilon}{x}], & x < -\frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

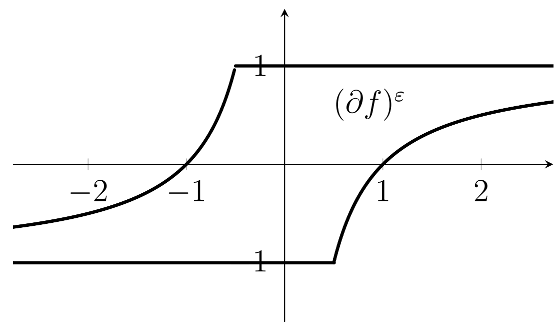
Se tiene que

$$\partial f = \partial_0 f \subsetneq (\partial f)^0 \subsetneq (\partial f)^\varepsilon.$$







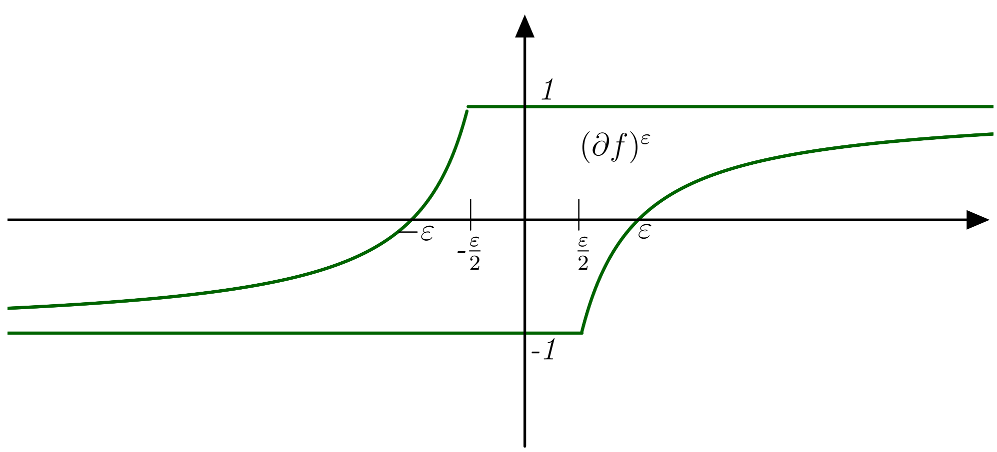


Ejemplos 1. *Se presenta ejemplos de engordes de operadores monótonos maximales.*

- *Sea* $f(x) = |x|$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *El* ε*-subdiferencial y el* ε*-engorde son iguales como sigue, para todo* $x \in \mathbb{R}$

$$\partial_\varepsilon f(x) = (\partial f)^\varepsilon(x) = \begin{cases} [1 - \frac{\varepsilon}{x}, 1], & x > \frac{\varepsilon}{2} \\ [-1, 1], & -\frac{\varepsilon}{2} \leq x \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ [-1, -1 - \frac{\varepsilon}{x}], & x < -\frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

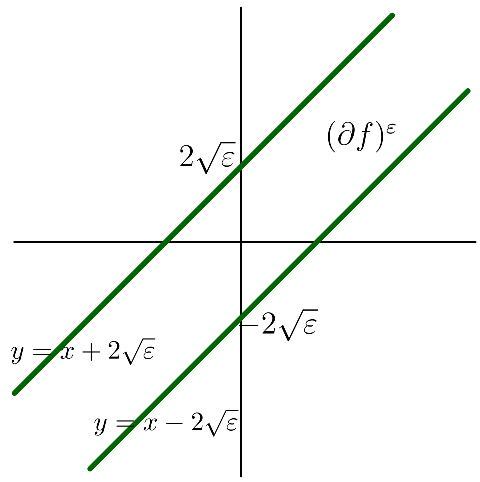
Por lo tanto, $\partial_\varepsilon f = (\partial f)^\varepsilon$ *para todo* $\varepsilon \geq 0$.



- *Sea* $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *El* ε*-subdiferencial y el* ε*-engorde son como sigue, para todo* $x \in \mathbb{R}$ *y* $\varepsilon \geq 0$

$$\begin{aligned} \partial_\varepsilon f(x) &= [x - \sqrt{2\varepsilon}, x + \sqrt{2\varepsilon}] \\ (\partial f)^\varepsilon(x) &= [x - 2\sqrt{\varepsilon}, x + 2\sqrt{\varepsilon}]. \end{aligned}$$

Observe que $\partial_\varepsilon f \subsetneq (\partial f)^\varepsilon$ *para todo* $\varepsilon > 0$.



2.4. Clausura Polar Monótona

En esta sección se define y presenta propiedades del polar monótono y la clausura polar monótona de un operador multivaluado.

Geométricamente el polar monótono está formado por los puntos del espacio producto que forman un segmento creciente con todos los puntos del operador multivaluado.

Definición 2.12. Sea A un operador multivaluado. El **polar monótono de** A denotado como $A^\mu : X \rightrightarrows X^*$ es definido de la siguiente manera

$$A^\mu := \{(x, x^*) \in X \times X^* : \ (x, x^*)\mu(z, z^*) \ \ \forall (z, z^*) \in A\}$$

donde $(x, x^*)\mu(z, z^*)$ es equivalente a $\langle x - z, x^* - z^* \rangle \geq 0$.

Definición 2.13. La **clausura polar monótona de** A es definida como

$$A^{\mu\mu} := (A^\mu)^\mu.$$

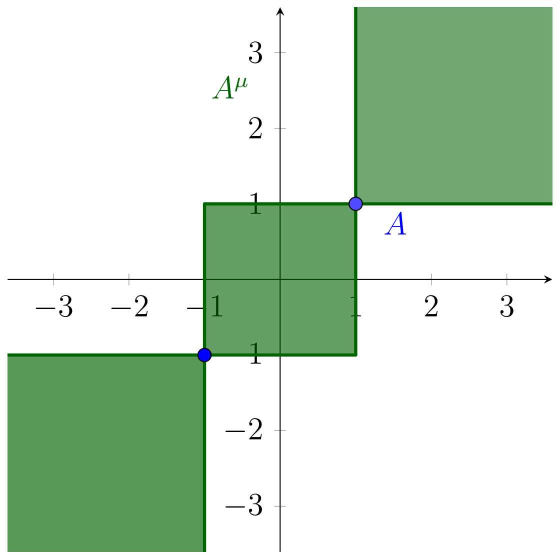
Ejemplos 2. *Se presenta ejemplos de polares monótonos y clausuras polares monótonas que no son monótonos.*

1. *Sea* $A := \{(-1, -1), (1, 1)\}$ *un operador monótono. El polar monótono de* A *es*

$$A^\mu(x) := \begin{cases} [1, +\infty[, & x \geq 1 \\ [-1, 1], & -1 \leq x \leq 1 \\ ]-\infty, -1], & x \leq 1. \end{cases}$$

Se tiene que

$$A = A^{\mu\mu} \subsetneq A^\mu.$$



2. Se define el siguiente operador monótono

$$A(x) = \begin{cases} \{x\}, & -1 < x \leq 1 \\ \emptyset, & \textit{otro caso.} \end{cases}$$

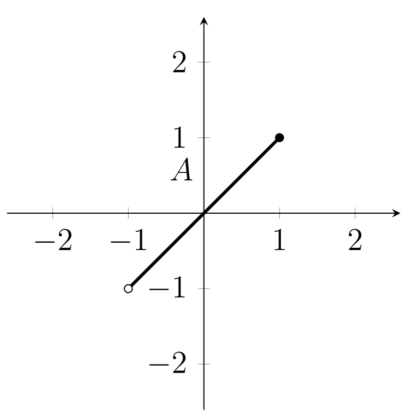
El polar monótono y la clausura polar monótona de A son, respectivamente,

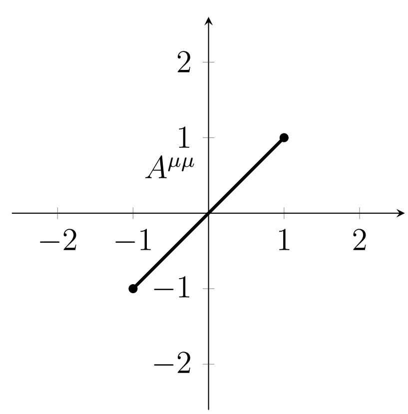
$$A^{\mu}(x) \quad = \quad \begin{cases} [1, +\infty], & x \geq 1 \\ \{x\}, & -1 \leq x \leq 1 \\ [-\infty, -1], & x \leq -1 \end{cases}.$$

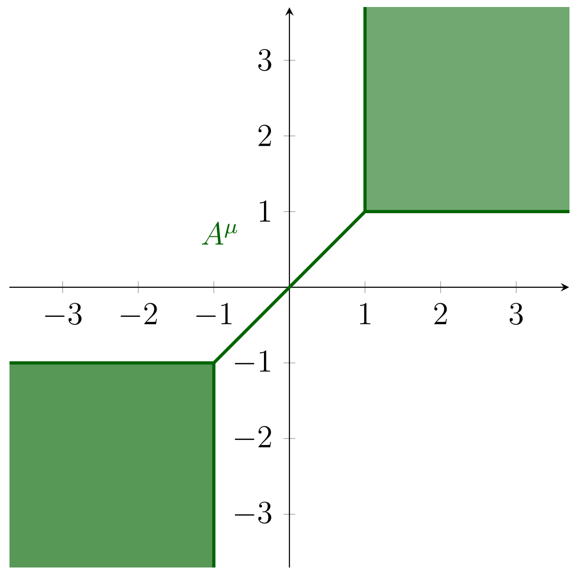
$$A^{\mu\mu}(x) \quad = \quad \begin{cases} \{x\}, & -1 \leq x \leq 1 \\ \emptyset, & \textit{otro caso} \end{cases}.$$

Observe que

$$A \subsetneq A^{\mu\mu} \subsetneq A^{\mu}.$$







3. Se define el siguiente operador no monótono

$$A(x) = \begin{cases} \{-x\}, & -1 \le x \le 1 \\ \emptyset, & \textit{otro caso.} \end{cases}$$

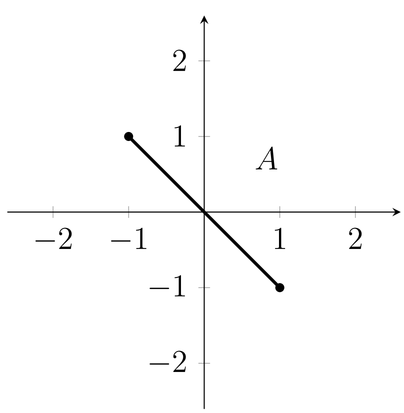
El polar monótono y la clausura polar monótona de A son, respectivamente,

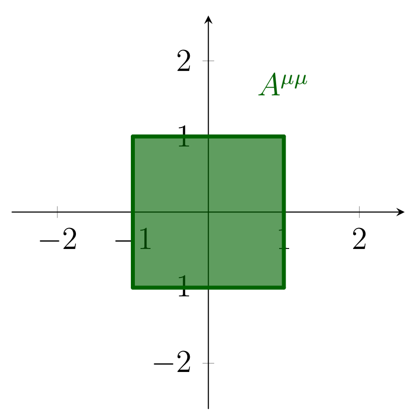
$$A^\mu(x) \quad = \quad \begin{cases} [1, +\infty], & x \ge 1 \\ \emptyset, & -1 \le x \le 1 \\ [-\infty, -1], & x \le -1 \end{cases}.$$

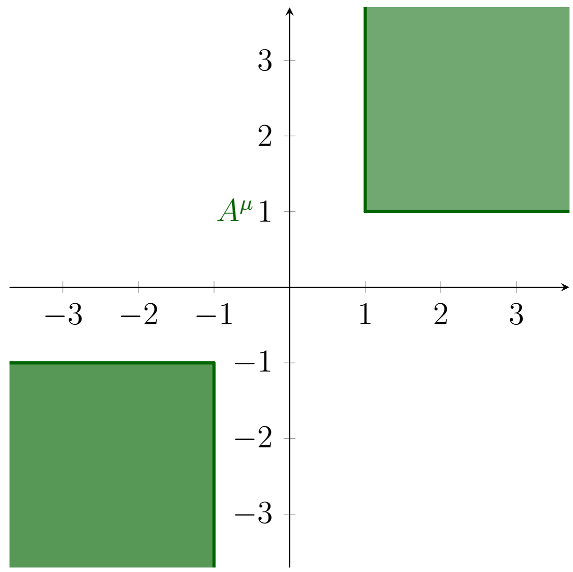
$$A^{\mu\mu}(x) \quad = \quad \begin{cases} [-1, 1], & -1 \le x \le 1 \\ \emptyset, & \textit{otro caso} \end{cases}.$$

Observe que

$$A \nsubseteq A^\mu, \quad A^{\mu\mu} \nsubseteq A^\mu, \quad A \subsetneq A^{\mu\mu}.$$







La siguiente proposición puede ser encontrada en [2].

Proposición 2.20. *Sean $A, B : X \rightrightarrows X^*$ operadores multivaluados.*

1. *$A \subset A^{\mu\mu}$.*
2. *Si $A \subset B$, entonces $B^\mu \subset A^\mu$.*
3. *A es monótono si, y sólo si, $A \subset A^\mu$.*
4. *A es monótono maximal si, y sólo si, $A = A^\mu$.*
5. *Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma}$ una familia arbitraria de operadores multivaluados no vacío. Entonces,*
$$(\bigcup_{\lambda\in\Gamma} A_\lambda)^\mu = \bigcap_{\lambda\in\Gamma} A_\lambda^\mu.$$
6. *Si A es monótono, entonces $(x, x^*) \in A^\mu$ si, y sólo si, $A \cup \{(x, x^*)\}$ es monótono.*
7. *Si A es monótono, entonces*
$$A^\mu = \bigcup_{\substack{A\subset M \\ M\ mon\ max}} M$$
y
$$A^{\mu\mu} = \bigcap_{\substack{A\subset M \\ M\ mon\ max}} M.$$
En particular, $A^{\mu\mu}$ es monótono. Además, $A \subset A^{\mu\mu} \subset A^\mu$.

Este último item da otra definición geométrica del polar monótono y la clausura polar monótona.

Demostración. 1. Si $(x,x^*) \in A$, por definición de polar monótono, $(x,x^*)\mu(y,y^*)$ para todo $(y,y^*) \in A^\mu$. Así, $(x,x^*) \in (A^\mu)^\mu$.

2. Si $(x,x^*) \in B^\mu$, por definición de polar monótono, $(x,x^*)\mu(y,y^*)$ para todo $(y,y^*) \in A$. Por lo tanto, $(x,x^*) \in A^\mu$.

3. Sea A monótono. Si $(x,x^*) \in A$, por definición de monótono, $(x,x^*)\mu(y,y^*)$ para todo $(y,y^*) \in A$. Por lo tanto, $(x,x^*) \in A^\mu$.

   Recíprocamente. Sean $(x,x^*),(y,y^*) \in A$. Por hipótesis, $(x,x^*) \in A^\mu$ y por definición del polar monótono, $(x,x^*)\mu(y,y^*)$. Por lo tanto, A es monótono.

4. Sea A monótono maximal. Por el item 3, $A \subset A^\mu$. Si $(x,x^*) \in A^\mu$, por la Proposición 2.9, $(x,x^*) \in A$.

   Recíprocamente. Por el item 3, A es monótono. Si $(x,x^*) \in X \times X^*$ tal que $(x,x^*)\mu(y,y^*)$ para todo $(y,y^*) \in A$, por definición de polar monótono, $(x,x^*) \in A^\mu = A$. Por la Proposición 2.9, A es monótono maximal.

5. Por el item 2,
$$(\bigcup_{\lambda\in\Gamma} A_\lambda)^\mu \subset A_\lambda^\mu, \quad \forall\lambda \in \Gamma.$$
   Así,
$$(\bigcup_{\lambda\in\Gamma} A_\lambda)^\mu \subset \bigcap_{\lambda\in\Gamma} A_\lambda^\mu.$$
   Sea $(x,x^*) \in \cap_{\lambda\in\Gamma} A_\lambda^\mu$. Fijemos $(y,y^*) \in \cup_{\lambda\in\Gamma} A_\lambda$. Existe $\lambda_0 \in \Gamma$ tal que $(y,y^*) \in A_{\lambda 0}$. Como $(x,x^*) \in A_{\lambda_0}^\mu$, se tiene que $(x,x^*)\mu(y,y^*)$. Por definición de polar monótono, $(x,x^*) \in (\cup_{\lambda\in\Gamma} A_\lambda)^\mu$.

6. $(x,x^*) \notin A^\mu$ si, y sólo si, existe $(y,y^*) \in A \setminus \{(x,x^*)\}$ tal que $\langle x-y, x^*-y^*\rangle < 0$ si, y sólo si, por la monotonía de A, $A \cup \{(x,x^*)\}$ no es monótono.

7. Para todo M maximal monótono tal que $A \subset M$, por el item 2 y 4, se tiene que $M = M^\mu \subset A^\mu$. Así,
$$\bigcup_{\substack{A\subset M \\ M\, max\, mon}} M \subset A^\mu.$$
   Si $(x,x^*) \in A^\mu$, por el item 6, $A \cup \{(x,x^*)\}$ es monótono. Por el Lema de Zorn, existe una extensión monótona maximal M tal que $A \cup \{(x,x^*)\} \subset M$. Luego,
$$A \cup \{(x,x^*)\} \subset M \subset \bigcup_{\substack{A\subset M \\ M\, max\, mon}} M.$$
   Así, $(x,x^*) \in \cup_{\substack{A\subset M \\ M\, max\, mon}} M$.

   Por el item 4 y 5. Se tiene que
$$(A^\mu)^\mu = (\bigcup_{\substack{A\subset M \\ M\, max\, mon}} M)^\mu = \bigcap_{\substack{A\subset M \\ M\, max\, mon}} M^\mu = \bigcap_{\substack{A\subset M \\ M\, max\, mon}} M.$$

Por el item 3, $A \subset A^{\mu}$ y por el item 2, se tiene que $A^{\mu\mu} \subset A^{\mu}$.

$\square$

Capítulo 3

Clausura representable de un operador monótono

En esta capítulo se define y presenta propiedades de los operadores representables y la clausura representable de un operador monótono. Las proposiciones y teoremas de este capítulo se pueden encontrar en [2] y [1].

Sea X un espacio vectorial topológico real localmente convexo con la topología τ, X^* su respectivo dual topológico y $\omega^* := \sigma(X^*, X)$ la topología débil estrella.

3.1. Operadores Representables

En esta sección se define y presenta ejemplos y propiedades de los operadores representables y la función Fitzpatrick.

Definición 3.1. Sean $A : X \rightrightarrows X^*$ un operador multivaluado no vacío y $\mathcal{O}$ una topología en $X \times X^*$. Se dice que A es **representable en la $\mathcal{O}$ topología** si existe $h : X \times X^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa y $\mathcal{O}$-semicontinua inferior tal que

$$\begin{aligned} h(z, z^*) &\geq \langle z, z^* \rangle, \quad \forall (z, z^*) \in X \times X^*, & (3.1) \\ A &= \{(z, z^*) \in X \times X^* : \ h(z, z^*) = \langle z, z^* \rangle\}. & (3.2) \end{aligned}$$

En este caso, se dice que h **representa** a A.

Es difícil saber si un operador es representable pero hay una condición que todo operador representable debe tener, la cual es ser monótono.

Proposición 3.1. *Se presenta propiedades de los operadores monótonos.*

1. *Todo operador representable es monótono.*
2. *Sea $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Gamma}$ una familia de operadores representables en la topología $\mathcal{O}$. Entonces,*

$$\bigcap_{\lambda \in \Gamma} R_\lambda \text{ es representable en la topología } \mathcal{O}.$$

Demostración. 1. Sea A un operador representable y $h : X \times X^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ un representante de A.

Sean $(z, z^*), (y, y^*) \in A$ y $\alpha, \beta \in [0,1]$ tal que $\alpha+\beta = 1$. Usando las ecuaciones (3.1), (3.2) y la convexidad, se tiene lo siguiente

$$\langle \alpha z+\beta y, \alpha z^*+\beta y^*\rangle \leq h(\alpha(z,z^*)+\beta(y,y^*)) \leq \alpha h(z,z^*)+\beta h(y,y^*) = \alpha\langle z,z^*\rangle+\beta\langle y,y^*\rangle.$$

Entonces,

$$0 \leq \alpha(1-\alpha)\langle z,z^*\rangle + \beta(1-\beta)\langle y,y^*\rangle - \alpha\beta\langle z,y^*\rangle - \alpha\beta\langle y,z^*\rangle = \alpha\beta\langle z-y, z^*-y^*\rangle.$$

Por lo tanto, A es monótono.

2. Para todo $\lambda \in \Gamma$, existe una función h_λ que representa a A. Por definición de operadores representables,

$$\begin{aligned} A = R_\lambda &= \{(z,z^*) \in X \times X^* : \ h_\lambda(z,z^*) = \langle z,z^*\rangle\} \\ &= \{(z,z^*) \in X \times X^* : \ h_\lambda(z,z^*) \leq \langle z,z^*\rangle\}, \quad \forall \lambda \in \Gamma. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Además, por las Proposiciones 1.8 y 1.11 item 1, $\sup_{\lambda\in\Gamma} h_\lambda$ es convexa y $\mathcal{O}$-semicontinua inferior. Usando la ecuación (3.3), se tiene que

$$\bigcap_{\lambda\in\Gamma} R_\lambda = \{(z,z^*) \in X \times X^* : \ \sup_{\lambda\in\Gamma} h_\lambda(z,z^*) = \langle z,z^*\rangle\}.$$

Por lo tanto, la función $\sup_{\lambda\in\Gamma} h_\lambda$ representa a $\cap_{\lambda\in\Gamma} R_\lambda$.

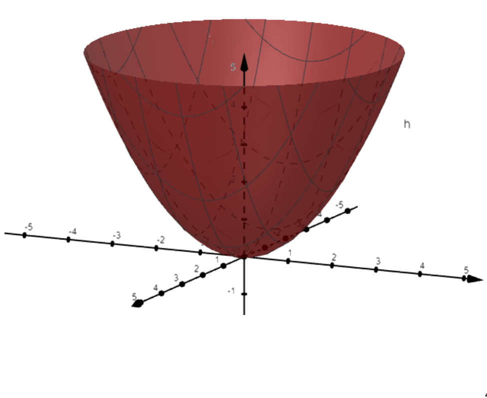
$\square$

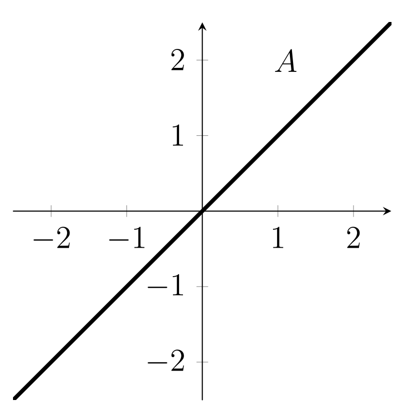
Observación. La Proposición 3.1 item 1 no necesita la semicontinuidad inferior.

Ejemplos 3. *Se presenta ejemplos de operadores representables.*

1. *Se puede construir operadores representantes conociendo las funciones representantes.*

   Se define la función $h(z,z^*) := \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}{z^*}^2$ para todo $(z,z^*) \in \mathbb{R}^2$. Observe que h es convexa, continua, finita y satisface la ecuación (3.1). Entonces, la función h representa el operador $A := \{(z,z^*) \in \mathbb{R}^2 : \ z = z^*\}$ representable.





2. *Todo operador monótono maximal $A \subset X \times X^*$ es $\tau \times \omega^*$-representable con la función representativa* **Fitzpatrick** $\varphi_A : X \times X^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *definida como*

$$\begin{aligned} \varphi_A(z, z^*) &:= \sup_{(y,y^*)\in A} \{\langle z, z^*\rangle - \langle z - y, z^* - y^*\rangle\} \\ &= \sup_{(y,y^*)\in A} \{\langle z, y^*\rangle + \langle y, z^*\rangle - \langle y, y^*\rangle\}, \quad \forall (z, z^*) \in X \times X^*. \end{aligned}$$

Además, la función Fitzpatrick es la menor función representativa de A.

Proposición 3.2. *Se presenta propiedades de la función Fitzpatrick. Sea $A : X \rightrightarrows X^*$ un operador multivaluado.*

1. *La función Fitzpatrick φ_A es $\tau \times \omega^*$-semicontinua inferior y convexa.*

2. *Si A es monótono no vacío, entonces*

   - *φ_A es propia.*
   - *$A \subset \{(z, z^*) \in X \times X^* : \varphi_A(z, z^*) = \langle z, z^*\rangle\}$.*
   - *$A \subset A^{\mu\mu} \subset A^{\mu} \subset \mathrm{dom}(\varphi_A)$.*

3. *$A^{\mu} = \{(z, z^*) \in X \times X^* : \varphi_A(z, z^*) \leq \langle z, z^*\rangle\}$.*

Demostración. 1. Fije $(y, y^*) \in A$ y define las funciones $g : X \to \mathbb{R}$, $h : X^* \to \mathbb{R}$ y $L_{(y,y^*)} : X \times X^* \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} g(z) &:= \langle z, y^*\rangle, \quad \forall z \in X, \\ h(z^*) &:= \langle y, z^*\rangle, \quad \forall z^* \in X^*, \\ L_{(y,y^*)}(z, z^*) &:= \langle z, y^*\rangle + \langle y, z^*\rangle - \langle y, y^*\rangle, \quad \forall (z, z^*) \in X \times X^*. \end{aligned}$$

La función g es τ-continua debido a que $g^{-1}(U) = \{z \in X : g(z) = \langle z, y^*\rangle \in U\} = {y^*}^{-1}(U) \in \tau$ para todo abierto $U \subset \mathbb{R}$.

La función h es ω^*-continua debido a que $h^{-1}(U) = \{z^* \in X^* : h(z^*) = \langle y, z^*\rangle = \mathcal{J}_y(z^*) \in U\} = \mathcal{J}_y^{-1}(U) \in \omega^*$ para todo abierto $U \subset \mathbb{R}$.

Por lo tanto, $L_{(y,y^*)}$ es $\tau \times \omega^*$-continua, además es lineal. Como $L_{(y,y^*)}$ es semicontinua inferior y convexa para todo $(y, y^*) \in A$, por las Proposiciones 1.8 y 1.11 item 1,

$$\varphi_A(\cdot) = \sup_{(y,y^*)\in A} L_{(y,y^*)}(\cdot)$$

es $\tau \times \omega^*$-semicontinua inferior y convexa.

2. Como A es monótono no vacío, existe $(z, z^*) \in A$ tal que $(z, z^*)\mu(y, y^*)$ para todo $(y, y^*) \in A$. Se cumple que,

$$\langle z, z^*\rangle - \langle z - y, z^* - y^*\rangle \leq \langle z, z^*\rangle, \quad \forall (y, y^*) \in A.$$

Así, $\varphi_A(z, z^*) \le \langle z, z^* \rangle < +\infty$. Por lo tanto, $\mathrm{dom}(\varphi_A) \neq \emptyset$.

Si $(z, z^*) \in A$, entonces como antes $\varphi_A(z, z^*) \le \langle z, z^* \rangle$. Por definición de supremo,

$$\langle z, z^* \rangle \le \sup_{(y,y^*)\in A} \{\langle z, z^* \rangle - \langle z - y, z^* - y^* \rangle\} = \varphi_A(z, z^*).$$

Por lo tanto, $\varphi_A(z, z^*) = \langle z, z^* \rangle$.

Si $(z, z^*) \in A^\mu$, entonces $\varphi_A(z, z^*) \le \langle z, z^* \rangle < +\infty$. Por lo tanto, $(z, z^*) \in \mathrm{dom}(\varphi_A)$. Así, por la Proposición 2.20 item 7,

$$A \subset A^{\mu\mu} \subset A^\mu \subset \mathrm{dom}(\varphi_A).$$

3. $(z, z)^* \in A^\mu$ si, y sólo si,

$$\langle z, z^* \rangle \ge \langle z, z^* \rangle - \langle z - y, z^* - y^* \rangle, \quad \forall (y, y^*) \in A$$

si, y sólo si, $\langle z, z^* \rangle \ge \varphi_A(z, z^*)$.

$\square$

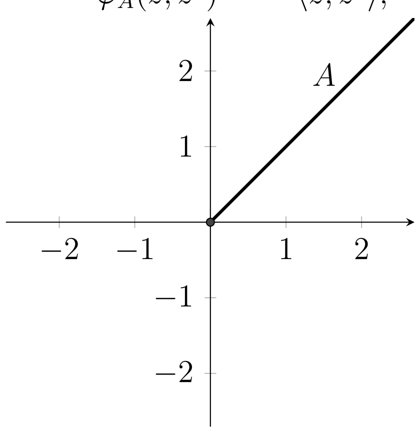
Ejemplo. *Se presenta un ejemplo de un operador monótono no maximal que no es representada por la función Fitzpatrick pero se verá en el último capítulo que es un operador representable.*

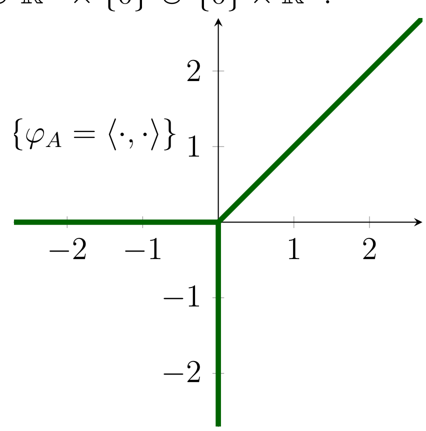
Sea $A := \{(z, z) \in \mathbb{R}^2,\ z \ge 0\}$ *un operador monótono no maximal. La función Fitzpatrick de* A *es*

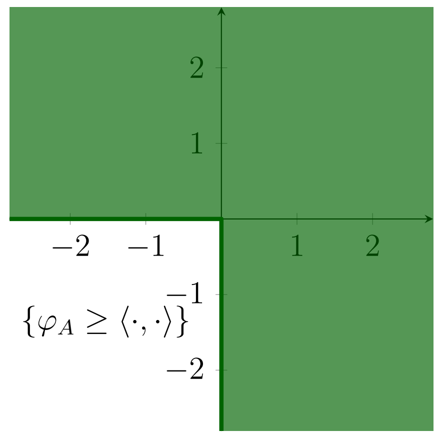
$$\begin{aligned}
\varphi_A(z, z^*) &= \sup_{y\ge0} zy - yz^* - y^2 \\
&= \sup_{y\ge0} \frac{1}{4}(z + z^*)^2 - (y - \frac{1}{2}(z + z^*))^2 \\
&= \begin{cases} \frac{1}{4}(z + z^*)^2, & z + z^* \ge 0 \\ 0, & z + z^* < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\varphi_A(z, z^*) &\ge \langle z, z^* \rangle, \quad \forall (z, z^*) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-, \\
\varphi_A(z, z^*) &= \langle z, z^* \rangle, \quad \forall (z, z^*) \in A \cup \mathbb{R}^- \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}^-.
\end{aligned}$$







Definición 3.2. Sea $f : X \times X^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa. Se define el operador multivaluado $A_f : X \rightrightarrows X^*$ como

$$A_f := \{(z, z^*) \in X \times X^* : \ (z^*, z) \in \partial f(z, z^*)\}, \quad \forall (z, z^*) \in X \times X^*.$$

Proposición 3.3. *Se presenta propiedades del operador A_f.*

1. *A_f es monótono.*

2. *Sean $(z, z^*) \in X \times X^*$ y U una vecindad de (z, z^*) tal que $f(y, y^*) \geq \langle y, y^* \rangle$, $\forall (y, y^*) \in U$. Si $f(z, z^*) = \langle z, z^* \rangle$, entonces $(z, z^*) \in A_f$.*

3. *Si $f(z, z^*) \geq \langle z, z^* \rangle$, $\forall (z, z^*) \in A_f$, entonces $\varphi_{A_f} \leq f$.*

Demostración. 1. Sean $(z, z^*), (y, y^*) \in A_f$. Se tiene que $((z, z^*), (z^*, z))$, $((y, y^*), (y^*, y)) \in \partial f$. Como ∂f es monótono,

$$0 \leq \langle (z, z^*) - (y, y^*), (z^*, z) - (y^*, y) \rangle = \langle z - y, z^* - y^* \rangle + \langle z - y, z^* - y^* \rangle = 2 \langle z - y, z^* - y^* \rangle.$$

Por lo tanto, A_f es monótono.

2. Como X es localmente convexo, existe una vecindad convexa V de (x, x^*) tal que $V \subset U$. Sea $(z, z^*) \in X \times X^*$. Por el Teorema 1.15 item (a) en [6], existe $s > 0$ tal que $(x, x^*) + r(z, z^*) \in V$ para todo $0 < r < s$. Entonces, por convexidad de f

$$f(x + rz, x^* + rz^*) \leq (1 - r) f(x, x^*) + r f(x + z, x^* + z^*), \quad \forall 0 < r < \text{mín}\{s, 1\}.$$

Así,

$$\begin{aligned} f(x + z, x^* + z^*) - f(x, x^*) &\geq \tfrac{1}{r}(f(x + rz, x^* + rz^*) - f(x, x^*)) \\ &= \tfrac{1}{r}(\langle x + rz, x^* + rz^* \rangle - \langle x, x^* \rangle) \\ &= \langle x, z^* \rangle + \langle z, x^* \rangle + s \langle z, z^* \rangle. \end{aligned}$$

Tomando límite $r \to 0^+$, se tiene que

$$f(x + z, x^* + z^*) - f(x, x^*) \geq \langle x, z^* \rangle + \langle z, x^* \rangle = \langle (z, z^*), (x^*, x) \rangle, \quad \forall (z, z^*) \in X \times X^*.$$

Por lo tanto, $(x^*, x) \in \partial f(x, x^*)$.

3. Sea $(z,z^*) \in X \times X^*$. Por definición de la subdiferenciabilidad,

$$\begin{aligned} \langle x,x^*\rangle - f(x,x^*) &\geq \langle x,x^*\rangle + \langle (z-x,z^*-x^*),(x^*,x)\rangle - f(z,z^*) \\ &= \langle z,z^*\rangle - \langle z-x,z^*-x^*\rangle - f(z,z^*), \qquad \forall (x,x^*) \in A_f. \end{aligned}$$

Así, por la última desigualdad y por hipótesis de f,

$$\begin{aligned} \varphi_{A_f}(z,z^*) - f(z,z^*) &= \sup_{(x,x^*)\in A_f} \langle z,z^*\rangle - \langle z-x,z^*-x^*\rangle - f(z,z^*) \\ &\leq \sup_{(x,x^*)\in A_f} \langle x,x^*\rangle - f(x,x^*) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.1. *Sea $A : X \rightrightarrows X^*$ un operador monótono. Si $f : X \times X^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función convexa tal que*

$$f(z,z^*) \geq \langle z,z^*\rangle, \quad \forall (z,z^*) \in X \times X^*$$

$$y$$

$$A \subset \{(z,z^*) \in X \times X^* : \ f(z,z^*) = \langle z,z^*\rangle\},$$

entonces $\varphi_A \leq f$.

Demostración. Probemos que $A \subset A_f$. Si $(z,z^*) \in A$, por hipótesis de f y por la Proposición 3.3 item 2, $(z,z^*) \in A_f$.

Por la Proposición 3.3 item 3 e hipótesis de f, se tiene que

$$\varphi_A(z,z^*) \leq \sup_{(y,y^*)\in A_f} \langle z,z^*\rangle - \langle z-y,z^*-y^*\rangle = \varphi_{A_f}(z,z^*) \leq f(z,z^*), \quad \forall (z,z^*) \in X \times X^*.$$

□

Demostración del Ejemplo 3 item 2. Probemos que $\varphi_A(z,z^*) \geq \langle z,z^*\rangle$, para todo $(z,z^*) \in X \times X^*$. Si $(z,z^*) \in A$, por la Proposición 3.2 item 2, se tiene que $\varphi_A(z,z^*) = \langle z,z^*\rangle$. Si $(z,z^*) \notin A = A^\mu$, existe $(y,y^*) \in A$ tal que $\langle z-y,z^*-y^*\rangle < 0$. Así, $\varphi_A(z,z^*) > \langle z,z^*\rangle$.

Si $(z,z^*) \in \{(z,z^*) \in X \times X^* : \ \varphi_A(z,z^*) = \langle z,z^*\rangle\}$ y supongamos que $(z,z^*) \notin A = A^\mu$. Por el párrafo anterior, $\varphi_A(z,z^*) > \langle z,z^*\rangle$, lo cual es una contradicción. Entonces, $(z,z^*) \in A$.

Finalmente, por la Proposición 3.2 item 1 y 2, la función Fitzpatrick φ_A representa a A.

Por el Teorema 3.1, $\varphi_A \leq h$ para toda función representativa h. □

Teorema 3.2. *Sea $A : X \rightrightarrows X^*$ un operador multivaluado. Entonces, A es monótono si, y solamente si, existe una función convexa $h : X \times X^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tal que*

$$h(z,z^*) \geq \langle z,z^*\rangle, \quad \forall (z,z^*) \in X \times X^*$$

$$y$$

$$A \subset \{(z,z^*) \in X \times X^* : \ h(z,z^*) = \langle z,z^*\rangle\}.$$

Más aún, si se adiciona la condición de $\tau \times \omega$-semicontinuidad inferior a h, el teorema sigue siendo cierto.

Demostración. Sea A un operador monótono. Por el Lema de Zorn, existe un operador monótono maximal M tal que $A \subset M$. Usando el Ejemplo 3 item 2, existe una función h que representa a M. Por lo tanto, $A \subset M = \{(z, z^*) \in X \times X^* : \; h(z, z^*) = \langle z, z^* \rangle\}$.

Recíprocamente, define $B := \{(z, z^*) \in X \times X^* : \; h(z, z^*) = \langle z, z^* \rangle\}$. Por demostración de la Proposición 3.1 item 1, B es monótono. Así, A es monótono ya que está incluido en el operador monótono B. $\square$

Definición 3.3. Sea Z un conjunto arbritario. La **función indicadora de** $Y \subset Z$ denotada como $\delta_Y : Z \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es definida de la siguiente manera:

$$\delta_Y(z) := \begin{cases} 0, & z \in Y \\ +\infty, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Proposición 3.4. *Sea $A \subset X \times X^*$ un operador multivaluado. Entonces,*

$$\varphi_A(z, z^*) = (\langle \cdot, \cdot \rangle + \delta_A)^*(z^*, z), \quad \forall (z, z^*) \in X \times X^*.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} (\langle \cdot, \cdot \rangle + \delta_A)^*(z^*, z) &= \sup_{(y,y^*) \in X \times X^*} \langle y, z^* \rangle + \langle z, y^* \rangle - \langle y, y^* \rangle - \delta_A(y, y^*) \\ &= \sup_{(y,y^*) \in A} \langle z, y^* \rangle + \langle y, z^* \rangle - \langle y, y^* \rangle \\ &= \varphi_A(z, z^*), \qquad \forall (z, z^*) \in X \times X^*. \end{aligned}$$

$\square$

Definición 3.4. Sea $f : X \times X^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. La mayor función convexa menor que f, llamada también la **cápsula convexa de** f denotada como $\text{conv}f : X \times X^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es definida de la siguiente manera:

$$\text{conv}f := \sup_{\substack{h : X \times X^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ h \text{ convexa} \\ h \leq f}} h$$

Definición 3.5. Sea $f : X \times X^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. La mayor función convexa semicontinua inferior menor que f, llamada también la **cápsula convexa cerrada de** f denotada como $\text{clconv}f : X \times X^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es definida de la siguiente manera:

$$\text{clconv}f := \sup_{\substack{h : X \times X^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ h \text{ convexa } \tau \times \omega^*\text{-s.c.i} \\ h \leq f}} h$$

Definición 3.6. Sea $A : X \rightrightarrows X^*$ un operador multivaluado. Se define $s_A, \sigma_A : X \times X^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ como

$$s_A := \text{conv}(\langle \cdot, \cdot \rangle + \delta_A), \quad \sigma_A := \text{clconv}(\langle \cdot, \cdot \rangle + \delta_A).$$

Observación 2. *Por las Proposiciones 3.4 y 1.14 item 8, se tiene que*

$$\varphi_A(z,z^*) = (\langle\cdot,\cdot\rangle + \delta_A)^*(z^*,z) = (s_A)^*(z^*,z) = (\sigma_A)^*(z^*,z), \quad \forall (z,z^*) \in X \times X^*.$$

Teorema 3.3. *Sea $A : X \rightrightarrows X^*$ un operador multivaluado. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A es monótono.*
2. $\varphi_A \leq \langle\cdot,\cdot\rangle + \delta_A$.
3. $\varphi_A \leq \sigma_A$.
4. $\sigma_A \geq \langle\cdot,\cdot\rangle$.
5. $s_A \geq \langle\cdot,\cdot\rangle$.

Demostración. Si A es monótono, por la Proposición 3.2 item 2, se tiene que $\varphi_A = \langle\cdot,\cdot\rangle$ en A. Así, $\varphi_A \leq \langle\cdot,\cdot\rangle + \delta_A$. Por lo tanto, 1 implica 2.

Si $\varphi_A \leq \langle\cdot,\cdot\rangle + \delta_A$, por la Proposición 3.2 item 1, φ_A es $\tau \times \omega^*$-semicontinua inferior y convexa. Por definición de σ_A, se tiene que $\varphi_A \leq \sigma_A$. Por lo tanto, 2 implica 3.

Si $\varphi_A \leq \sigma_A$, entonces $\varphi_A \leq \sigma_A \leq \langle\cdot,\cdot\rangle + \delta_A$. Por definición de la función Fitzpatrick, $\varphi_A = \langle\cdot,\cdot\rangle$ en A. En consecuencia, $\operatorname{ínf}_{(y,y^*)\in A}\langle z-y, z^*-y^*\rangle = 0$ para todo $(z,z^*) \in A$. Así, A es monótono. Por lo tanto, 3 implica 2 y esto implica 1.

Si A es monótono, por el Teorema 3.2, existe una función h convexa y $\tau\times\omega$-semicontinua inferior tal que $\langle\cdot,\cdot\rangle \leq h \leq \langle\cdot,\cdot\rangle + \delta_A$. Por definición de σ_A, se tiene que $h \leq \sigma_A$. Así, $\langle\cdot,\cdot\rangle \leq \sigma_A$. Por lo tanto 1 implica 4.

Como $\sigma_A \leq s_A$, entonces 4 implica 5.

Como $s_A \leq \langle\cdot,\cdot\rangle + \delta_A$, por el Teorema 3.2, 5 implica 1.

□

Definición 3.7. Se dice que $h : X \times X^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una **función representativa** si es convexa, $\tau \times \omega^*$-semicontinua inferior y $h \geq \langle\cdot,\cdot\rangle$.

Observación. El operador $\{h = \langle\cdot,\cdot\rangle\} := \{(z,z^*) \in X \times X^* : \ h(z,z^*) = \langle z,z^*\rangle\}$ es representable inducida por la función representativa h.

Definición 3.8. Sea A un operador multivaluado. Se define el conjunto de funciones representativas tales que los operadores representables inducidas por estas funciones representativas contienen a A, denotado como $\mathcal{F}(A)$,

$$\mathcal{F}(A) := \{h : X \times X^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \text{ función representativa}: \ A \subset \{h = \langle\cdot,\cdot\rangle\}\}.$$

Proposición 3.5. *Se presenta propiedades de $\mathcal{F}(A)$.*

1. *Si $h_1, h_2 \in \mathcal{F}(A)$ y $t \in]0,1[$, entonces*

$$th_1 + (1-t)h_2 \in \mathcal{F}(A).$$

2. *Si* $\{h_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma} \subset \mathcal{F}(A)$, *entonces*
$$\sup_{\lambda\in\Gamma} h_\lambda \in \mathcal{F}(A).$$

Demostración. 1. Por las Proposiciones 1.8 y 1.11 item 2, $th_1 + (1-t)h_2$ es convexa y $\tau \times \omega^*$-semicontinua inferior. Por otro lado,
$$A \subset \{h_1 = \langle\cdot,\cdot\rangle\} \cap \{h_2 = \langle\cdot,\cdot\rangle\} \subset \{th_1 + (1-t)h_1 = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$$

2. Por las Proposiciones 1.8 y 1.11 item 1, $\sup_{\lambda\in\Gamma} h_\lambda$ es convexa y $\tau \times \omega^*$-semicontinua inferior. Por otro lado,
$$A \subset \bigcap_{\lambda\in\Gamma} \{h_\lambda = \langle\cdot,\cdot\rangle\} \subset \{\sup_{\lambda\in\Gamma} h_\lambda = \langle\cdot,\cdot\rangle\}.$$

$\square$

El siguiente teorema dice que la función cápsula convexa cerrada de un operador monótono es la mayor función representativa tal que su operador representable contiene al operador monótono.

Teorema 3.4. *Sea* $A : X \rightrightarrows X^*$ *un operador multivaluado. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A es monótono.*

2. $\mathcal{F}(A) \neq \emptyset$.

3. $\sigma_A \in \mathcal{F}(A)$.

4. $\sigma_A = \sup\limits_{h\in\mathcal{F}(A)} h$.

Demostración. Por el Teorema 3.2, A es monótono si, y sólo si, existe $h \in \mathcal{F}(A)$. Por lo tanto, 1 es equivalente a 2.

Sea A monótono. Por el Teorema 3.3, $\langle\cdot,\cdot\rangle \leq \sigma_A \leq \langle\cdot,\cdot\rangle + \delta_A$. Así, $\sigma_A \in \mathcal{F}(A)$. Por lo tanto, 1 implica 3.

Si $\sigma_A \in \mathcal{F}(A)$, entonces $\sigma_A \leq \sup_{h\in\mathcal{F}(A)} h$. Fijemos $h \in \mathcal{F}(A)$. Entonces, $h \leq \langle\cdot,\cdot\rangle + \delta_A$. Por definición de σ_A, se tiene que $h \leq \sigma_A$. Así, $\sup_{h\in\mathcal{F}(A)} \leq \sigma_A$. Por lo tanto, 3 implica 4.

Si $\sigma_A = \sup_{h\in\mathcal{F}(A)} h$, por la Proposición 3.5 item 2, $\sigma_A \in \mathcal{F}(A)$. Por lo tanto, 4 implica 2. $\square$

Proposición 3.6. *Sean* $A : X \rightrightarrows X^*$ *un operador monótono y* $h : X \times X^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *una función convexa y* $\tau \times \omega^*$*-semicontinua inferior. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $h \in \mathcal{F}(A)$.

2. $\langle\cdot,\cdot\rangle \leq h \leq \sigma_A$.

3. $\langle \cdot, \cdot \rangle \leq h \leq \langle \cdot, \cdot \rangle + \delta_A$.

Demostración. Si $h \in \mathcal{F}(A)$, por el Teorema 3.4, $h \leq \sigma_A$. Por lo tanto, 1 implica 2.

Como $\sigma_A \leq \langle \cdot, \cdot \rangle + \delta_A$, entonces 2 implica 3.

Si $\langle \cdot, \cdot \rangle \leq h \leq \langle \cdot, \cdot \rangle + \delta_A$, entonces $A \subset \{h = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$. Así, $h \in \mathcal{F}(A)$. Por lo tanto, 3 implica 1. □

Proposición 3.7. *Si $A : X \rightrightarrows X^*$ es un operador representable, entonces σ_A representa a A y es la mayor función que representa a A.*

Demostración. Por la Proposición 3.1 item 1, A es monótono. Por el Teorema 3.3, se tiene que $\langle \cdot, \cdot \rangle \leq \sigma_A \leq \langle \cdot, \cdot \rangle + \delta_A$. Así, $A \subset \{\sigma_A = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$. Por otro lado, existe una función h que representa a A. Entonces, $h \in \mathcal{F}(A)$. Por la Proposición 3.6, se tiene que $\langle \cdot, \cdot \rangle \leq h \leq \sigma_A$. Así,

$$\{\sigma_A = \langle \cdot, \cdot \rangle\} \subset \{h = \langle \cdot, \cdot \rangle\} = A.$$

Por lo tanto, σ_A representa a A. Por el Teorema 3.4, σ_A es la mayor función que representa a A. □

3.2. Clausura representante de un operador monótono

En esta sección se define y presenta propiedades de la clausura representable de un operador monótono.

Por el Lema de Zorn, todo operador monótono posee una extensión monótona maximal y, por el Ejemplo 3 item 2, esta extensión monótona maximal es un operador representante. Por lo tanto, todo operador monótono tiene extensión representable. En esta sección se va a estudiar la menor extensión representable de un operador monótono, llamada también clausura representable.

Definición 3.9. Sea $A : X \rightrightarrows X^*$ un operador monótono. Se define la **clausura representable** de A como

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) := \bigcap_{\substack{R \text{ representable} \\ A \subset R}} R$$

Proposición 3.8. *Se presenta propiedades de la clausura representable de un operador monótono.*

1. *Las clausuras $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)$ y $A^{\mu\mu}$ son representables. Además, $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) \subset A^{\mu\mu}$.*

2. *$A \subset \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)$.*

3. *A es representable si, y sólo si, $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) = A$.*

4. *$\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)) = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)$.*

5. *Sea $B : X \rightrightarrows X^*$ un operador monótono. Si $A \subset B$, entonces $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) \subset \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(B)$.*

6. $\sigma_A = \sigma_{\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)}$ *representa a* $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)$ *y es la mayor función que representa a* $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)$*.*

7. $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) \subset \{\varphi_A = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$.

Demostración. 1. Por la Proposición 2.20 item 7, el Ejemplo 3 item 2 y la Proposición 3.1 item 2, las clausuras $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)$ y $A^{\mu\mu}$ son representables. Como $A^{\mu\mu}$ es representable, por definición de la clausura representable, $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) \subset A^{\mu\mu}$.

2. Por definición de la clausura representable.

3. Si A es representable, entonces $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) \subset A$. Por el item 2, $A = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)$. Si $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) = A$, por el item 1, A es representable.

4. Por el item 1, $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)$ es representable. Por el item 3, $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)) = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)$.

5. Por el item 2, $A \subset B \subset \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(B)$. Como $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(B)$ es representable, $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) \subset \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(B)$.

6. Por la Proposición 3.7, la función $\sigma_{\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)}$ representa a $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)$ y es la mayor función que representa a $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)$. Por el Teorema 3.3, el operador $\{\sigma_A = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ es representable inducida por la fución σ_A y contiene a A. Luego por el item 5,

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) \subset \{\sigma_A = \langle\cdot,\cdot\rangle\}.$$

Así, $\sigma_A \in \mathcal{F}(\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A))$. Por el Teorema 3.3, se tiene que $\sigma_A \leq \sigma_{\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)}$.

Por otro lado, por el item 2, se tiene que

$$\sigma_{\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)} \leq \langle\cdot,\cdot\rangle + \delta_{\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)} \leq \langle\cdot,\cdot\rangle + \delta_A.$$

Así, $\sigma_{\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)} \leq \sigma_A$. Por lo tanto, $\sigma_A = \sigma_{\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)}$.

7. Por la desigualdad de Young-Fenchel y la Observación 2,

$$\sigma_A(z,z^*) + \varphi_A(z,z^*) \geq \langle (z,z^*),(z^*,z)\rangle = 2\langle z,z^*\rangle, \quad \forall (z,z^*) \in X \times X^*. \tag{3.4}$$

Por el item 6,

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) = \{\sigma_A = \langle\cdot,\cdot\rangle\}.$$

Si $(z,z^*) \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)$, por la desigualdad (3.4), $\varphi_A(z,z^*) \geq \langle z,z^*\rangle$. Por otro lado, por el Teorema 3.3,

$$\varphi_A(z,z^*) \leq \sigma_A(z,z^*) = \langle z,z^*\rangle.$$

Así, $\varphi_A(z,z^*) = \langle z,z^*\rangle$.

$\square$

3.3. Traslación

Definición 3.10. Sea $(z_0, z_0^*) \in X \times X^*$. Se define $\tau_{(z_0,z_0^*)} : X \times X^* \to X \times X^*$ como

$$\tau_{(z_0,z_0^*)}(z, z^*) := (z, z^*) - (z_0, z_0^*), \quad \forall (z, z^*) \in X \times X^*.$$

Observación. La función traslación $\tau_{(z_0,z_0^*)}$ preserva monotonicidad y monotonicidad maximal. Además, es continua e invertible.

- $\tau_{(z_0,z_0)} A = A - \{(z_0, z_0^*)\}, \quad \forall A \subset X \times X^*, \ \forall (z_0, z_0^*) \in X \times X^*.$
- $\tau^{-1}_{(z_0,z_0^*)} = \tau_{-(z_0,z_0^*)}, \quad \forall (z_0, z_0^*) \in X \times X^*.$

Definición 3.11. Sean $h : X \times X^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y $(z_0, z_0^*) \in X \times X^*$. Se define $\mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)} h : X \times X^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ como

$$\mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)} h(z, z^*) := h((z, z^*) + (z_0, z_0^*)) - \langle (z, z^*), (z_0^*, z_0) \rangle - \langle z_0, z_0^* \rangle, \quad \forall (z, z^*) \in X \times X^*.$$

Proposición 3.9. *Sean $h : X \times X^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $A : X \rightrightarrows X^*$ y $(z_0, z_0^*) \in X \times X^*$. Entonces,*

1. *h es convexa y $\tau \times \omega^*$- semicontinua inferior si, y sólo si, $\mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)} h$ es convexa y $\tau \times \omega^*$- semicontinua inferior.*
2. *$h \geq \langle \cdot, \cdot \rangle$ si, y sólo si, $\mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)} h \geq \langle \cdot, \cdot \rangle$.*
3. *$\tau_{(z_0,z_0^*)}\{h = \langle \cdot, \cdot \rangle\} = \{\mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)} h = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$.*
4. *$h \in \mathcal{F}(A)$ si, y sólo si, $\mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)} h \in \mathcal{F}(\tau_{(z_0,z_0^*)} A)$.*
5. *$\varphi_{\tau_{(z_0,z_0^*)} A} = \mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)} \varphi_A$.*
6. *Si A es monótono, entonces*
$$\sigma_{\tau_{(z_0,z_0^*)} A} = \mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)} \sigma_A.$$
7. *Si A es monótono, entonces*
$$\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(\tau_{(z_0,z_0^*)} A) = \tau_{(z_0,z_0^*)} \mathrm{cl}_{\mathcal{R}} A.$$
8. *Si A es monótono, entonces*
$$(\tau_{(z_0,z_0^*)} A)^{\mu\mu} = \tau_{(z_0,z_0^*)} A^{\mu\mu}.$$

Demostración. 1. Se definen las funciones $g, h, L : X \times X^* \to \mathbb{R}$ como

$$g(z, z^*) := \langle z, z_0^* \rangle, \quad h(z, z^*) := \langle z_0, z^* \rangle \quad \text{y} \quad L(z, z^*) := \langle (z, z^*), (z_0^*, z_0) \rangle$$

para todo $(z,z^*)\in X\times X^*$. La funciones g y h son $\tau\times\omega^*$-continuas y lineales debido a que

$$g^{-1}(U)=\{(z,z^*)\in X\times X^*:\, y^*(z)\in U\}=y^{*-1}(U)\times X^*\in\tau\times\omega^*$$
$$h^{-1}(U)=\{(z,z^*)\in X\times X^*:\, \langle y,z^*\rangle=\mathcal{J}_y(z^*)\in U\}=X\times\mathcal{J}_y^{-1}(U)\in\tau\times\omega^*$$

para todo abierto $U\subset\mathbb{R}$. Esto implica que L es $\tau\times\omega^*$-continua y lineal. Por ello, se concluye la demostración.

2. Para todo $(z,z^*)\in X\times X^*$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)}h((z,z^*)-(z_0,z_0^*)) &= h(z,z^*)-\langle(z-z_0,z^*-z_0^*),(z_0^*,z_0)\rangle-\langle z_0,z_0^*\rangle\\ &= h(z,z^*)-\langle(z,z^*),(z_0^*,z_0)\rangle+\langle z_0,z_0^*\rangle.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Si $h\geq\langle\cdot,\cdot\rangle$, entonces

$$h((z,z^*)+(z_0,z_0^*))\geq\langle z,z^*\rangle+\langle(z,z^*),(z_0^*,z_0)\rangle+\langle z_0,z_0^*\rangle,\quad\forall(z,z^*)\in X\times X^*.$$

Así, $\mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)}(z,z^*)\geq\langle z,z^*\rangle,\ \forall(z,z^*)\in X\times X^*$.
Si $\mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)}h\geq\langle\cdot,\cdot\rangle$, entonces

$$\mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)}h((z,z^*)-(z_0,z_0^*))\geq\langle z,z^*\rangle-\langle(z,z^*),(z_0^*,z_0)\rangle+\langle z_0,z_0^*\rangle,\quad\forall(z,z^*)\in X\times X^*.$$

Por la desigualdad (3.5), $h(z,z^*)\geq\langle z,z^*\rangle,\ \forall(z,z^*)\in X\times X^*$.

3. Para todo $(z,z^*)\in X\times X^*$, $(z,z^*)\in\tau_{(z_0,z_0^*)}\{h=\langle\cdot,\cdot\rangle\}$ si, y sólo si,

$$h((z,z^*)+(z_0,z_0^*))=\langle z,z^*\rangle+\langle(z,z^*),(z_0^*,z_0)\rangle+\langle z_0,z_0^*\rangle,\tag{3.6}$$

si, y sólo si, $(z,z^*)\in\{\mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)}h=\langle\cdot,\cdot\rangle\}$.

4. Usanso el item 1, 2 y 3, se concluye la demostración.

5. Para todo $(z,z^*)\in X\times X^*$

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)}\varphi_A(z,z^*) &= \sup_{(y,y^*)\in A}\{\langle(z,z^*)+(z_0,z_0^*),(y^*,y)\rangle-\langle y,y^*\rangle\}+\ldots\\ &\quad -\langle(z,z^*),(z_0^*,z_0)\rangle-\langle z_0,z_0^*\rangle\\ &= \sup_{(w,w^*)\in\tau_{(z_0,z_0^*)}A}\{\langle(z,z^*)+(z_0,z_0^*),(w^*,w)+(z_0^*,z_0)\rangle+\ldots\\ &\quad -\langle w+z_0,w^*+z_0^*\rangle\}-\langle(z,z^*),(z_0^*,z_0)\rangle-\langle z_0,z_0^*\rangle\\ &= \sup_{(w,w^*)\in\tau_{(z_0,z_0^*)}A}\{\langle(z,z^*),(w^*,w)\rangle-\langle w^*,w\rangle\}\\ &= \varphi_{\tau_{(z_0,z_0^*)}A}(z,z^*).\end{aligned}$$

6. Por el item 3, la función $\mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)} : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(\tau_{(x_0,x_0^*)}A)$ definida como
$$\mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)}(h) := \mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)}h, \quad \forall h \in \mathcal{F}(A)$$
está bien definida. Además, es sobreyectiva ya que si $g \in \mathcal{F}(\tau_{(x_0,x_0^*)}A)$, entonces la función $h : X \times X^* \to \mathbb{R}$ definida como
$$h(x, x^*) := g((x, x^*) - (x_0, x_0^*)) + \langle (x, x^*) - (x_0, x_0^*), (x_0^*, x_0)\rangle + \langle x_0, x_0^*\rangle$$
pertenece a $\mathcal{F}(A)$ y $\mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)}h = g$. Observe que $\mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)}$ es inyectiva y no decreciente. Por el Teorema 3.4 y el item 4, se tiene que $\sigma_A \in \mathcal{F}(A)$ y $\mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)}\sigma_A \in \mathcal{F}(\tau_{(x_0,x_0^*)}\sigma_A)$. Así,
$$\mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)}\sigma_A \leq \sigma_{\tau_{(x_0,x_0^*)}A}.$$
Por el Teorema 3.4, $\sigma_{\tau_{(x_0,x_0^*)}A} \in \mathcal{F}(\tau_{(x_0,x_0^*)}A)$. Por la sobreyectividad de la función $\mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)}$, existe $h \in \mathcal{F}(A)$ tal que $\mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)}h = \sigma_{\tau_{(x_0,x_0^*)}A}$. Por el Teorema 3.4, $h \leq \sigma_A$. Así,
$$\sigma_{\tau_{(x_0,x_0^*)}A} = \mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)}h \leq \mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)}\sigma_A.$$

7. Por la Proposición 3.8 item 6,
$$\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) = \{\sigma_A = \langle\cdot,\cdot\rangle\} \quad \text{y} \quad \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(\tau_{(x_0,x_0^*)}A) = \{\sigma_{\tau_{(x_0,x_0^*)}A} = \langle\cdot,\cdot\rangle\} = \{\mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)}\sigma_A = \langle\cdot,\cdot\rangle\}.$$
Usando la anterior ecuación, se tiene que
$$\begin{aligned} \tau_{(x_0,x_0^*)}\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) &= \{(x, x^*) \in X \times X^* : \sigma_A((x, x^*) + (x_0, x_0^*)) = \langle x + x_0, x^* + x_0^*\rangle\} \\ &= \{\mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)}\sigma_A = \langle\cdot,\cdot\rangle\} \\ &= \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(\tau_{(x_0,x_0^*)}). \end{aligned}$$

8. Usando la función traslación τ y la Proposición 2.20 item 7,
$$(\tau_{(x_0,x_0^*)}A)^{\mu\mu} \subset \tau_{(x_0,x_0^*)}M, \quad \forall M \text{ extensión maximal monótona de } A.$$
Esto implica que,
$$\tau_{-(x_0,x_0^*)}(\tau_{(x_0,x_0^*)}A)^{\mu\mu} \subset M, \quad \forall M \text{ extensión maximal monótona de } A.$$
Así, por la Proposición 2.20 item 7 y la traslación τ,
$$(\tau_{(x_0,x_0^*)}A)^{\mu\mu} \subset \tau_{(x_0,x_0^*)}A^{\mu\mu}.$$
Por otro lado, usando la inversa de la función traslación τ y la Proposición 2.20 item 7,
$$A^{\mu\mu} \subset \tau_{-(x_0,x_0^*)}M, \quad \forall M \text{ extensión monótona maximal de } \tau_{(x_0,x_0^*)}A.$$
Esto implica que,
$$\tau_{(x_0,x_0^*)}A^{\mu\mu} \subset M, \quad \forall M \text{ extensión monótona maximal de } \tau_{(x_0,x_0^*)}A.$$
Así, por la Proposición 2.20 item 7,
$$\tau_{(x_0,x_0^*)}A^{\mu\mu} \subset (\tau_{(x_0,x_0^*)}A)^{\mu\mu}.$$

□

Capítulo 4

Clausuras de un operador monótono

En este capítulo se desarrollará el objetivo de la tesis, la cual es saber cuando la clausura representable y la clausura polar monótona de un operador monótono son iguales en espacios vectoriales topológicos. Además, demostrar que estas clausuras son iguales, sin hipótesis, en espacios de dimensión finita. Para ello se va utilizar las siguientes proposiciones y lemas. Las siguientes proposiciones, lemas y teorema pueden ser encontradas en [13] y [2].

Sea X un espacio vectorial topológico real localmente convexo con la topología τ, X^* su respectivo dual topológico y $\omega^* := \sigma(X^*, X)$ la topología débil estrella.

Se define el siguiente operador

$$N := \{(x, x^*) \in X \times X^* : \ \langle x, x^* \rangle < 0\}.$$

Proposición 4.1. *Para todo operador multivaluado $A \subset X \times X^*$ se cumple que $(0,0) \notin A^{\mu\mu}$ si, y sólo si, $N \cap A^{\mu} \neq \emptyset$.*

Demostración. $(0,0) \in (A^{\mu})^{\mu}$ si, y sólo si, existe $(x, x^*) \in A^{\mu}$ tal que $\langle x, x^* \rangle < 0$ si, y sólo si, $A^{\mu} \cap N = \emptyset$. □

La siguiente proposición da condiciones suficientes para que $(0,0) \notin A^{\mu\mu}$ en espacios vectoriales topológicos.

Proposición 4.2. *Sea $A : X \rightrightarrows X^*$ un operador monótono. Si cualquiera de las siguientes condiciones se cumple*

1. *$\varphi_A(0,0) < 0$ y $N \cap \operatorname{dom} \varphi_A \neq \emptyset$ o*

2. *$\varphi_A(0,0) = 0$ y existe $(x, x^*) \in N$ tal que $\varphi_A(x, x^*) < 0$ o*

3. *$\varphi_A(0,0) > 0$,*

entonces $(0,0) \notin A^{\mu\mu}$.

Demostración. 1. Si $\varphi_A(0,0) < 0$ y $N \cap \operatorname{dom} \varphi_A \neq \emptyset$, entonces existe $(x, x^*) \in N \cap \operatorname{dom} \varphi_A$; es decir, $\langle x, x^* \rangle < 0$ y $\varphi_A(x, x^*) \in \mathbb{R}$. Define $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$g(t) := t^2 \langle x, x^* \rangle - t\varphi_A(x, x^*) - (1-t)\varphi_A(0,0), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Como g es una función cuadrática cóncava y $g(0) = -\varphi_A > 0$, existe $\bar{t} \in]0,1[$, suficientemente pequeño, tal que

$$g(\bar{t}) = (\bar{t})^2\langle x, x^*\rangle - \bar{t}\varphi_A(x, x^*) - (1-\bar{t})\varphi_A(0,0) > 0.$$

Usando la convexidad de φ_A y la última desigualdad, se tiene que

$$\varphi_A(x_{\bar{t}}, x^*_{\bar{t}}) \leq (1-\bar{t})\varphi_A(0,0) + \bar{t}\varphi_A(x, x^*) < (\bar{t})^2\langle x, x^*\rangle < 0$$

donde $(x_{\bar{t}}, x^*_{\bar{t}}) := (1-\bar{t})(0,0) + \bar{t}(x, x^*) = \bar{t}(x, x^*)$.

Usando la última desigualdad, observe que

$$\varphi_A(x_{\bar{t}}, x^*_{\bar{t}}) < \langle x_{\bar{t}}, x^*_{\bar{t}}\rangle < 0.$$

Por la Proposición 3.2 item 3, $(x_{\bar{t}}, x^*_{\bar{t}}) \in A^\mu \cap N$. Así, por la Proposición 4.1, $(0,0) \in A^{\mu\mu}$.

2. Análogo al item anterior. Define $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$g(t) := t^2\langle x, x^*\rangle - t\varphi_A(x, x^*), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Como g es una función cuadrática cóncava, y 0 y $\varphi_A(x, x^*)/\langle x, x^*\rangle$ son raíces no negativas de la función g, entonces existe $\bar{t} \in]0,1[$, suficientemente pequeño, tal que

$$g(\bar{t}) = (\bar{t})^2\langle x, x^*\rangle - \bar{t}\varphi_A(x, x^*) > 0.$$

Usando la convexidad de φ_A y la última desigualdad, se tiene que

$$\varphi_A(x_{\bar{t}}, x^*_{\bar{t}}) \leq (1-\bar{t})\varphi_A(0,0) + \bar{t}\varphi_A(x, x^*) = \bar{t}\varphi_A(x, x^*) < (\bar{t})^2\langle x, x^*\rangle = \langle x_{\bar{t}}, x^*_{\bar{t}}\rangle < 0$$

donde $(x_{\bar{t}}, x^*_{\bar{t}}) := (1-\bar{t})(0,0) + \bar{t}(x, x^*) = \bar{t}(x, x^*)$.

Por la Proposición 3.2 item 3, $(x_{\bar{t}}, x^*_{\bar{t}}) \in A^\mu \cap N$. Así, por la Proposición 4.1, $(0,0) \in A^{\mu\mu}$.

3. Si $\varphi_A(0,0) > 0$, existe $(x, x^*) \in A$ tal que $0 > \langle x, x^*\rangle$; es decir, $(x, x^*) \in N \cap A$. Como A es monótono, por la Proposición 2.20 item 7, $(x, x^*) \in N \cap A^\mu$. Por la Proposición 4.1, $(0,0) \notin A^{\mu\mu}$.

□

El siguiente lema nos da otra condición suficiente para que $(0,0) \notin A^{\mu\mu}$.

Lema 4.1. *Sea $A : X \rightrightarrows X^*$ un operador monótono. Si $\varphi_A(0,0) = 0$ y $\sigma_A(0,0) > 0$, entonces $(0,0) \notin A^{\mu\mu}$.*

Demostración. Por el Teorema 3.3, $\langle\cdot,\cdot\rangle \leq \sigma_A \leq \langle\cdot,\cdot\rangle + \delta_A$. Entonces, σ_A es propia. Por el Teorema 1.2 de Fenchel-Moreau para espacios localmente convexos y la Observación 2, se tiene que

$$\sigma_A(x,x^*) = \sigma_A^{**}(x,x^*) = \varphi_A^*(x^*,x) = \sup_{(y,y^*)\in X\times X^*} \langle y,x^*\rangle + \langle x,y^*\rangle - \varphi_A(y,y^*),\ \forall (x,x^*) \in X\times X^*.$$

Como

$$\sigma_A(0,0) = \sup_{(y,y^*)\in X\times X^*} -\varphi_A(y,y^*) > 0,$$

existe $(y,y^*) \in X \times X^*$ tal que $\varphi_A(y,y^*) < 0$. Define $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$g(t) := t^2(\langle y,y^*\rangle - \varphi_A(y,y^*)) + t\varphi_A(y,y^*), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$y$$

$$\bar{t} := -\varphi_A(y,y^*)(\langle y,y^*\rangle - \varphi_A(y,y^*))^{-1}, \quad \text{si } \langle y,y^*\rangle - \varphi_A(y,y^*) \neq 0.$$

Probemos que existe $t \in]0,1[$, suficientemente pequeño, tal que $g(t) < 0$. Si $\langle y,y^*\rangle - \varphi_A(y,y^*) = 0$, entonces $g(t) < 0$ para todo $t > 0$. Si $\langle y,y^*\rangle - \varphi_A(y,y^*) > 0$, existe $t \in]0,1[$ tal que $g(t) < 0$ ya que g es una función cuadrática convexa, y 0 y $\bar{t}$ son raíces no negativas de g. Si $\langle y,y^*\rangle - \varphi_A(y,y^*) < 0$, existe $t \in]0,1[$ tal que $g(t) < 0$ porque g es una función cuadrática concava, y 0 y $\bar{t}$ son raíces no positivas de g.

Como

$$0 = -(1-t)\varphi_A(0,0) = -(1-t)\sup_{(x,x^*)\in A} -\langle x,x^*\rangle = \inf_{(x,x^*)\in A} (1-t)\langle x,x^*\rangle,$$

por definición de supremo, existe $(x,x^*) \in A$ tal que

$$(1-t)\langle x,x^*\rangle < \min\{-g(t), -t\varphi_A(y,y^*)\}. \tag{4.1}$$

Define $z := t(y,y^*) + (1-t)(x,x^*)$. Por la desigualdad (4.1), se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle z,z^*\rangle &= t^2\langle y,y^*\rangle + t(1-t)\langle y,x^*\rangle + (1-t)t\langle x,y^*\rangle + (1-t)^2\langle x,x^*\rangle \\
&= t^2\langle y,y^*\rangle + t(1-t)(\langle y,x^*\rangle + \langle x,y^*\rangle - \langle x,x^*\rangle) + (1-t)\langle x,x^*\rangle \\
&\leq t^2\langle y,y^*\rangle + t(1-t)\varphi_A(y,y^*) + (1-t)\langle x,x^*\rangle \\
&= g(t) + (1-t)\langle x,x^*\rangle \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Usando la convexidad de φ_A, la Proposición 3.2 item 2 y la desigualdad (4.1), se tiene que

$$\varphi_A(z,z^*) \leq t\varphi_A(y,y^*) + (1-t)\varphi_A(x,x^*) = t\varphi_A(y,y^*) + (1-t)\langle x,x^*\rangle < 0.$$

Por lo tanto, $(z,z^*) \in N \cap \{\varphi_A < 0\}$. Por la Proposición 4.2 item 2, $(0,0) \notin A^{\mu\mu}$. $\square$

Lema 4.2. *Sea $A : X \rightrightarrows X^*$ un operador monótono. Si* $\operatorname{dom}\varphi_A \cap N = \emptyset$*, entonces* $A^\mu = \operatorname{dom}\varphi_A$ *es monótono maximal.*

Demostración. Como $\operatorname{dom}\varphi_A$ es convexo y $\operatorname{dom}\varphi_A \cap N = \emptyset$, esto implica que

$$\frac{1}{2}(x,x^*) + \frac{1}{2}(y,y^*) \in \operatorname{dom}\varphi_A \setminus N, \quad \forall (x,x^*),(y,y^*) \in \operatorname{dom}\varphi_A.$$

Por lo tanto,

$$\langle x+y, x^*+y^* \rangle \geq 0, \quad \forall (x,x^*),(y,y^*) \in \operatorname{dom}\varphi_A. \tag{4.2}$$

Por la desigualdad (4.2),

$$(-x,-x^*) \in (\operatorname{dom}\varphi_A)^\mu, \quad \forall (x,x^*) \in \operatorname{dom}\varphi_A. \tag{4.3}$$

Si $(x,x^*) \in \operatorname{dom}\varphi_A$, por la desigualdad (4.2) y $A \subset \operatorname{dom}\varphi_A$, entonces $(-x,-x^*) \in A^\mu$. Como $A^\mu \subset \operatorname{dom}\varphi_A$, resulta que $(-x,-x^*) \in \operatorname{dom}\varphi_A$. En consecuencia, por la desigualdad (4.3), $(x,x^*) \in (\operatorname{dom}\varphi_A)^\mu$. Es decir,

$$\operatorname{dom}\varphi_A \subset (\operatorname{dom}\varphi_A)^\mu. \tag{4.4}$$

Así, por la Proposición 2.20 item 3, $\operatorname{dom}\varphi_A$ es monótono.

Por las Proposiciones 3.2 y 2.20 del item 2, se obtiene que

$$(\operatorname{dom}\varphi_A)^\mu \subset A^\mu \subset \operatorname{dom}\varphi_A. \tag{4.5}$$

Por lo tanto, por las ecuaciones (4.4) y (4.5), se obtiene que

$$\operatorname{dom}\varphi_A = (\operatorname{dom}\varphi_A)^\mu = A^\mu.$$

Por la Proposición 2.20 item 4, $\operatorname{dom}\varphi_A$ es monótono maximal.

□

Lema 4.3. *Sea A un operador monótono. Si $\varphi_A(0,0) < 0$ y $(0,0) \in A^{\mu\mu}$, entonces $A^\mu = \operatorname{dom}\varphi_A$ es monótono maximal.*

Demostración. Por la Proposición 4.2 item 1, $N \cap \operatorname{dom}\varphi_A = \emptyset$. Por el Lema 4.2, se concluye la demostración. □

Se define los operadores no engordables y pre-maximales que servirán para el siguiente teorema.

Definición 4.1. Un operador monótono $A : X \rightrightarrows X^*$ se dice **no engordable** si

$$A^\varepsilon = A, \quad \forall \varepsilon \geq 0.$$

Se presenta una caracterización de los operadores no engordables.

Proposición 4.3. *Un operador monótono $A : X \rightrightarrows X^*$ es no engordable si, y sólo si,*

$$A = \operatorname{dom}\varphi_A.$$

Demostración. Por la Proposición 3.2 item 2, $A \subset \operatorname{dom} \varphi_A$. Por la Proposición 2.18 item 4, $A \subset A^{\varepsilon}$ para todo $\varepsilon \geq 0$.

Sea A un operador no engordable. Supongamos que $A \subsetneq \operatorname{dom} \varphi_A$. Existe $(x, x^*) \in \operatorname{dom} \varphi_A \setminus A$. Entonces, $\varphi_A(x, x^*) \in \mathbb{R}$ y para todo $\varepsilon \geq 0$, existe $(y_\varepsilon, y^*_\varepsilon) \in A$ tal que

$$\langle x - y_\varepsilon, x^* - y^*_\varepsilon \rangle < -\varepsilon.$$

Por definición de la función Fitzpatrick, se tiene que

$$\varphi_A(x, x^*) > \langle x, x^* \rangle + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon \geq 0.$$

Tomando límite $\varepsilon \to +\infty$, se tiene una contradicción $\varphi_A(x, x^*) = +\infty$. Por lo tanto, $A = \operatorname{dom} \varphi_A$.

Recíprocamente, sea $A = \operatorname{dom} \varphi_A$. Supongamos que existe $\varepsilon \geq 0$ tal que $A \subsetneq A^{\varepsilon}$. Existe $(x, x^*) \in A^{\varepsilon}$ tal que $\varphi_A(x, x^*) = +\infty$. Por las definiciones de engordes de operadores monótonos y la función Fitzpatrick, se tiene una contradicción

$$\varepsilon + \langle x, x^* \rangle \geq \varphi_A(x, x^*).$$

Por lo tanto, $A = A^{\varepsilon}$ para todo $\varepsilon \geq 0$; es decir, A es no engordable. $\square$

Definición 4.2. Un operador monótono es **pre-maximal** si posee una única extension monótona maximal.

Se presenta una caracterización de los operadores monótonos pre-maximales.

Proposición 4.4. *Sea $A : X \rightrightarrows X^*$ un operador monótono. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *A es pre-maximal.*
2. *A^{μ} es monótono.*
3. *A^{μ} es monótono maximal.*

   Más aún, si se cumple una de las condiciones anteriores, A^{μ} es la única extensión monótono maximal.

Demostración. Por la Proposición 2.20 item 7, $A^{\mu\mu} \subset A^{\mu}$.

A^{μ} es monótono si, y sólo si, por la Proposición 2.20 item 3, $A^{\mu} = A^{\mu\mu}$ si, y sólo si, por la Proposición 2.20 item 4, A^{μ} es monótono maximal. Por lo tanto, item 2 es equivalente al item 3.

Sea A^{μ} monótono maximal. Si M es una extensión monótona maximal de A, entonces, por la Proposición 2.20,

$$M \subset A^{\mu} \quad \text{y} \quad A^{\mu} = A^{\mu\mu} \subset M.$$

Así, $A^{\mu} = M$. Por lo tanto, A^{μ} es la única extensión monótona maximal de A. Es decir, item 3 implica item 1.

Sea A pre-maximal. Si M es la única extensión monótona maximal. Por la Proposición 2.20 item 7, $A^{\mu} = M$. Es decir, A^{μ} es la única extensión monótona maximal de A. Por lo tanto, item 1 implica item 3. $\square$

Observación 3. *Todo operador monótono maximal es pre-maximal.*

El objetivo de la tesis es demostrar el siguiente teorema y corolario. Es decir, saber cuando la clausura representable y la clausura polar monótona son iguales en espacios vectoriales topológicos.

Teorema 4.1. *Sea* $A : X \rightrightarrows X^*$ *un operador monótono. Si* $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) \subsetneq A^{\mu\mu}$, *entonces*

1. A^μ *es monótono maximal, afín lineal y no engordable.*

2. *Existen* $(x_0, x_0^*) \in \operatorname{dom}\varphi_A$ *y* $\varepsilon > 0$ *tal que* $\langle x - x_0, x^* - x_0^*\rangle \geq \varepsilon$, $\forall (x, x^*) \in A$.

En particular, A *es pre-maximal.*

Demostración. Si $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) \subsetneq A^{\mu\mu}$, entonces existe $(z, z^*) \in A^{\mu\mu} \setminus \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)$. Como $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)$ y $A^{\mu\mu}$ preservan traslación, por la Proposición 3.9 item 7 y 8,

$$(0,0) \in (A - \{(z, z^*)\})^{\mu\mu} \setminus \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A - \{(z, z^*)\}).$$

Debido a ello, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que

$$(0,0) \in A^{\mu\mu} \setminus \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A).$$

1. Como $(0,0) \notin \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)$, por la Proposición 3.8 item 6 y el Teorema 3.3 item 4, $\sigma_A(0,0) > 0$. Por el Lema 4.1, $\varphi_A(0,0) \neq 0$. Por la Proposición 4.2 item 3, $\varphi_A(0,0) < 0$. Por el Lema 4.3,

   $$A^\mu = \operatorname{dom}\varphi_A \quad \text{es monótono maximal.}$$

   Así, por la Observación 3, A es pre-maximal. Como $\operatorname{dom}\varphi_A$ es convexo y monótono maximal, por el Lema 2.1, A^μ es afín lineal. Como $\varphi_A \leq \varphi_{A^\mu}$ y A^μ es monótono, por la Proposición 3.2 item 2,

   $$\operatorname{dom}\varphi_{A^\mu} \subset \operatorname{dom}\varphi_A = A^\mu \subset \operatorname{dom}\varphi_{A^\mu}.$$

   Debido a ello, por la Proposición 4.3, A^μ es no engordable.

2. Como A^μ es monótono maximal, se tiene que

   $$A^{\mu\mu} = A^\mu = \operatorname{dom}\varphi_A.$$

   Así, $(0,0) \in \operatorname{dom}\varphi_A$. En item 1 se vio que $\varepsilon := -\varphi_A(0,0) > 0$, entonces

   $$\langle x, x^*\rangle \geq -\varphi_A(0,0) = \varepsilon, \quad \forall (x, x^*) \in A.$$

□

Corolario 1. *Sea* $A : X \rightrightarrows X^*$ *un operador monótono. Si la cápsula convexa de* A *no es monótona, entonces*

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) = A^{\mu\mu}.$$

Demostración. Supongamos que $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) \subsetneq A^{\mu\mu}$. Por el Teorema 4.1, A^μ es convexo. Entonces, por la Proposición 2.20 item 3, $\mathrm{co}\,(A) \subset A^\mu$. Como A^μ es monótono, $\mathrm{co}(A)$ es monótono, lo cual es una contradicción. □

El Corolario 1 nos dice: para que las clausuras no sean iguales, una condición es que la co(A) sea monótona. A continuación presentamos un ejemplo donde las clausuras no son iguales en dimensión infinita, para ello vamos a usar la siguiente proposición.

Proposición 4.5. *Sea E un espacio de Banach reflexivo y $h : E \times E^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa. Entonces son equivalentes que h es semicontinua inferior en la topología $\tau_X \times \tau_{X^*}$, $\tau_X \times \omega_{X^*}$, $\tau_X \times \omega^*$, $\omega \times \omega_{X^*}$, $\omega \times \tau_X$, $\omega \times \omega_{X^*}$ y $\omega \times \omega^*$; donde τ_X y τ_X^* son la topología de la norma en X y X^* respectivamente, y $\omega_{X^*} := \sigma(X^*, X^{**})$ es la topología débil de X^*.*

Demostración. Como E es reflexivo, $\omega_{X^*} \simeq \omega^*$. Entonces, $\tau_X \times \omega_{X^*} \simeq \tau_X \times \omega^*$ y $\omega \times \omega_{X^*} \simeq \omega \times \omega^*$. Por otro lado, $\omega \times \omega_{X^*} \subset \tau_X \times \omega_{X^*} \subset \tau_X \times \tau_{X^*}$. Así, por Teorema 3.7 en [5], son equivalentes que h es semicontinua inferior en $\omega \times \omega_{X^*}$, $\tau_X \times \omega_{X^*}$ y $\tau_X \times \tau_{X^*}$. □

Proposición 4.6. *Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita, $T : H \to H$ una isometría y $p \in T(H)^\perp$ con $\|p\| = 1$. Definamos el operador univaluado $A \subset H \times H$ como*

$$A := \{(p + Tv + v, p + Tv - v) : v \in H\}.$$

Entonces, A es monótono, convexo y representable. Además,

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) \subsetneq A^{\mu\mu}$$

en cualquiera de las topologías $\tau_X \times \tau_{X^*}$, $\tau_X \times \omega_{X^*}$, $\tau_X \times \omega^*$, $\omega \times \omega_{X^*}$, $\omega \times \tau_X$, $\omega \times \omega_{X^*}$ y $\omega \times \omega^*$.

Demostración. La importancia de que H tenga dimensión infinita es para que exista la isometría T tal que $T(H) \subsetneq H$ sea subespacio propio.

Sean $v_1, v_2 \in H$ y $\alpha, \beta \in]0, 1[$ tal que $\alpha + \beta = 1$. Se tiene que

$$\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) = (p + T(\alpha v_1 + \beta v_2) + \alpha v_1 + \beta v_2, p + T(\alpha v_1 + \beta v_2) - \alpha v_1 - \beta v_2) \in A$$
y
$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle = \|T(v_1 - v_2)\|^2 - \|v_1 - v_2\|^2 = 0,$$

donde $(x_i, y_i) := (p + Tv_i + v_i, p + Tv_i - v_i)$ para $i = 1, 2$. Así, A es monótono y convexo.

Como T es continua, se observa que A cerrado en la topología fuerte×fuerte. Definamos la función $h : H \times H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ como

$$h(x, x^*) := \begin{cases} 1 & \text{si } (x, x^*) \in A; \\ +\infty & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Esta función h es convexa y semicontinua inferior en la topología fuerte×fuerte ya que A es convexo y cerrado. Además,

$$h \geq \langle \cdot, \cdot \rangle \quad \text{y} \quad A = \{h = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$$

ya que

$$\langle p + Tv + v, p + Tv - v \rangle = \|p + Tv\|^2 - \|v\|^2 = \|p\|^2 + \|Tv\|^2 - \|v\|^2 = 1, \quad \forall v \in H.$$

Por lo tanto, A es representable en la topología fuerte$\times$fuerte.

Si $(z, z^*) \in A^\mu$, por Proposición 3.2 item 2, $\varphi_A(x, x^*) < +\infty$. Como

$$\begin{aligned}\varphi_A(z, z^*) &= \sup_{(y,y^*)\in A}\{\langle z, y^*\rangle + \langle y, z^*\rangle - \langle y, y^*\rangle\} \\ &= \sup_{v\in H}\{\langle z, p + Tv - v\rangle + \langle p + Tv + v, z^*\rangle - 1\} \\ &= \langle z, p\rangle + \langle p, z^*\rangle - 1 + \sup_{v\in H}\langle v, z^* - z + T^*(z + z^*)\rangle,\end{aligned}$$

resulta que $z^* - z + T^*(z + z^*) = 0$; es decir, $z - z^* = T^*(z + z^*)$. Como $\|T^*\| = \|T\| = 1$ y por la ley del paralelogramo, se cumple que

$$\langle z, z^*\rangle = \frac{1}{4}(\|z + z^*\|^2 - \|z - z^*\|^2) = \frac{1}{4}(\|z + z^*\|^2 - \|T^*(z + z^*)\|^2) \geq 0.$$

Así, $A^\mu \subset H \setminus N$. Esto implica que $(0, 0) \in A^{\mu\mu}$. Como h representa a A, se cumple que $(0, 0) \notin A$. Por lo tanto, $A = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) \subsetneq A^{\mu\mu}$ en cualquiera de las topologías $\tau_X \times \tau_{X^*}$, $\tau_X \times \omega_{X^*}$, $\tau_X \times \omega^*$, $\omega \times \omega_{X^*}$, $\omega \times \tau_X$, $\omega \times \omega_{X^*}$ y $\omega \times \omega^*$; ya que, por Proposición 4.5, sus clausuras representables son iguales.

□

Teorema 4.2. *Sean V un espacio de dimensión finita y $A : V \rightrightarrows V^*$ un operador monótono. Se cumple que*

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) = A^{\mu\mu}.$$

Demostración. Ya que $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)$ y $A^{\mu\mu}$ preservan traslación, por la Proposición 3.9 item 7 y 8, podemos asumir sin pérdidad de generalidad que $(0, 0) \in A$.

Supongamos que $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) \subsetneq A^{\mu\mu}$. Por el Teorema 4.1 y $(0, 0) \in A^\mu$, se tiene que A^μ es lineal, monótono maximal, no engordable, y existen $(x_0, x_0^*) \in \mathrm{dom}\varphi_A$ y $\varepsilon > 0$ tal que

$$\langle x_0 - y, x_0^* - y^*\rangle \geq \varepsilon, \quad \forall (y, y^*) \in A. \tag{4.6}$$

Define $T := A^\mu$ y el subespacio lineal $T^\vdash \subset V \times V^*$ como

$$T^\vdash := \{(z, z^*) \in X \times X^* : \langle (z, z^*), (y^*, y)\rangle = 0,\ \forall (y, y^*) \in T\}.$$

Como T contiene a $(0, 0)$ y es monótono no engordable, se tiene que

$$T^\vdash \subset \{\varphi_T = 0\} \subset \mathrm{dom}\,\varphi_T = T. \tag{4.7}$$

Define el subespacio ortogonal $T^\perp$ de T y el operador $f : T^\perp \to T^\vdash$ como

$$\begin{aligned}T^\perp &:= \{(z, z^*) \in V \times V^* : \langle (z, z^*), (y, y^*)\rangle = 0,\ \forall (y, y^*) \in T\} \\ &\text{y} \\ f(z, z^*) &:= (z^*, z), \quad \forall (z, z^*) \in V \times V^*.\end{aligned}$$

El operador lineal f está bien definida ya que V es isomorfo a V^* por ser de dimensión finita. Debido a que

$$\langle (z, z^*), (y, y^*)\rangle = \langle z, y\rangle + \langle z^*, y^*\rangle = \langle (z^*, z), (y^*, y)\rangle, \quad \forall (z, z^*), (y, y^*) \in V \times V^*,$$

Observe que

$$(z, z^*) \in T^{\perp} \quad \text{si, y sólo si,} \quad (z^*, z) \in T^{\vdash}.$$

Así, f es un isomorfismo, $\dim T^{\perp} = \dim T^{\vdash}$ y

$$2n = \dim T^{\perp} + \dim T = \dim T^{\vdash} + \dim T.$$

Como T es monótono maximal, por el Teorema de Minty, $\dim T = n$. Por lo tanto, $\dim T^{\perp} = \dim T = n$. Por la ecuación (4.7),

$$T^{\vdash} = T.$$

Esto implica que

$$T \subset \{(z, z^*) \in V \times V^* | \, \langle z, z^* \rangle = 0\}.$$

Recordemos que, por el Teorema 4.1, $\operatorname{dom} \varphi_A = A^{\mu} = T$, entonces $(x_0, x_0^*) \in T$. Así, por la desigualdad (4.6),

$$\varepsilon \leq \langle x_0, x_0^* \rangle = 0,$$

una contradicción.

$\square$

Conclusiones

- En capítulo 2 se presenta ejemplos y se estudia las propiedades de los operadores monótonos y monótonos maximales, el enlargement de un operador monótono, el polar monótono y la clausura polar monótona. Se demuestra que la clausura polar monótona de un operador monótono es la intersección de extensiones monótonas maximales.

- En capítulo 3 se presenta ejemplos y se estudia las propiedades de los operadores representables y la función Fitzpatrick. Se demuestra que los operadores monótonos maximales son representables por la función Fitzpatrick que es la menor función representativa. Se demuestra que la clausura representable y la clausura polar monótona son representables y preservan traslación.

- En capítulo 4 se demuestra que la clausura representable y la clausura polar monótona de un operador monótono A son iguales en espacios vectoriales topológicos localmente convexos cuando la cápsula convexa del operador monótono A no es monótono. Se presenta otra demostración de la igualdad de estas dos clausuras en espacios de dimensión finita sin hipótesis.

Bibliografía

[1] Fitzpatrick, S., *Representing monotone operators by convex functions, in: Workshop/Miniconference on Functional Analysis and Optimization*, Canberra, Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ. 20, Austral. Nat. Unit., Canberra, 1988, pp.59-65.

[2] Martínez-Legaz, J.E. y Svaiter B.F., *Monotone Operators Representable by l.s.c. Convex Functions*, Set-Valued Anal. 13(1) (2005) 21-46.

[3] Simons, S., *Positive sets and monotone sets*, J. Convex Analysis 14(2) (2007) 297-317.

[4] Kreyszig, E., *Introductory functional analysis with applications*, Whiley, 1978.

[5] Brezis, H., *Functional Analysis Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[6] Rudin, W., *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1991.

[7] Zălinescu, C., *Convex Analysis in General Vector Spaces*, World Scientific, Singapore, 1952.

[8] Hamilton, R.S., *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Bulletin of the American Mathematical Society, 93(1), 1986.

[9] Phelps, R.R., *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, Lecture Notes Math. Nr.1364, Springer-Verlag (1989). Second Edition (1993).

[10] Ekeland, I., *On the variational principle*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, volume 47, 1974.

[11] Marques Alves, M. y Svaiter, B.F., *Maximal monotone operators with a unique extension to the bidual*, J.Convex Analysis 16(2) (2009) 409-421.

[12] Burachik, R.S, Iusem, A.N y Svaiter, B.F, *Enlargement of Monotone Operators with Applications to Variational Inequalities*, Set-Valued and Variational Analysis volume 5: 159-180, 1997.

[13] Bueno, O.M., Martínez-Legaz, J.E. y Svaiter B.F.,*On the Monotone Polar and Representable closures of Monotone Operators*, Journal of Convex Analysis volume 21: 495-505, 2014.

Notaciones

Símbolos	**Definiciones**	**Páginas**
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Producto dualidad	15
E^*	Dual topológico de un espacio normado	15
E^{**}	Bidual de un espacio normado	15
$\mathcal{J}$	Aplicación canónica en espacios normados o topológicos	15,22
$\sigma(E, E^*)$	Topología débil de un espacio de Banach	16
$\tau_{\\|\cdot\\|}$	Topología inducida por la norma $\\|\cdot\\|$ llamada topología fuerte	16
$\rightharpoonup$	Convergencia débil	16
$B(x, r)$	Bola unitaria centrada en x con radio r	16
$\sigma(E^*, E)$	Topología débil estrella en espacios de Banach	17
$\overset{*}{\rightharpoonup}$	Convergencia débil estrella	17
τ_X	Topología del espacio X	
$\sigma(X, \mathscr{F})$	Topología débil de X inducida por una familia de funciones $\mathscr{F}$	20
X_τ^*	Dual del espacio topológico X con la topología τ	
ω	Topología débil de un espacio topológico	21
ω^*	Topología débil estrella de un espacio topológico	22
$X^{**} := (X^*)_{\omega^*}^*$	Bidual de un espacio topológico	22
$\mathrm{dom} f$	Dominio efectivo de f	23
$\mathrm{epi} f$	Epígrafo de f	23
$\mathrm{epi}_s f$	Epígrafo estricto de f	23
$L_\lambda f$	Subnivel de f	23
$\mathrm{Pr}_X : X \times Y \to Y$	Proyección del espacio producto $X \times Y$ sobre el espacio X	23
$\liminf f$	Función límite inferior en espacios topológicos	26
$\bar{f}$	Regularización semicontinua inferior de f	28
f^*	Conjugada de Fenchel de f	30
f^{**}	Biconjugada de Fenchel de f	30
$\mathrm{clconv} f$	Cápsula convexa semicontinua inferior de f	31,65
$A : X \rightrightarrows X^*$	Operador multivaluado	35
$\mathrm{Dom} A$	Dominio del operador multivaluado A	35
$\mathrm{Ran} A$	Rango del operador multivaluado A	35
∂f	Subdiferencial de f	37
$df(x; v)$	Diferencial de Gateaux de f en x en la dirección v	38
$P : H \to C$	Proyección de H sobre C	40

J	Operador dualidad	41
$Gr(\varphi)$	Gráfico de la función φ	
$\varphi^+(x)$	Límite por derecha de la función φ en x	43
$\varphi^-(x)$	Límite por izquierda de la función φ en x	43
$df^+(x,y)$	Derivada direccional derecha de f en x con la dirección y	45
$\partial_\varepsilon f$	ε-subdiferencial de f	46
A^ε	ε-enlargement del operador multivaluado A	50
A^μ	Polar monótono del operador multivaluado A	54
$A^{\mu\mu}$	Clausura polar monótona del operador multivaluado A	54
φ_A	Función Fitzpatrick del operador multivaluado A	61
δ_Y	Función indicadora de Y	65
s_A, σ_A		65
$\mathcal{F}(A)$		66
$\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)$	Clausura representable de A	68
$\tau_{(x_0,x_0^*)}$	Función traslación	69
$\mathfrak{I}_{(x_0,x_0^*)}$		70
N		73
$T^\vdash$		79
$T^\perp$	Subespacio ortogonal de un subespacio vectorial T	79