UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS

ESTABILIDAD TOPOLÓGICA DE GROMOV-HAUSDORFF PARA HOMEOMORFISMOS

PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

ELABORADO POR:

ANDRES VICENTE CHULLUNCUY CENTENO

ASESOR:

Dr. ROGER JAVIER METZGER ALVÁN

LIMA-PERÚ

2022

Dedicado a mis padres, Teresa y Vicente.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres, Teresa y Vicente, por su apoyo constante e incondicional siempre.

Agradezco por el tiempo vivido en las aulas del pabellón J y del pabellón R de la UNI, donde conocí a muchos Profesores y amigos que indudablemente contribuyeron en mi formación matemática. Y que en algunos casos, me alentaron a continuar en este camino de las matemáticas.

Resumen

En el presente trabajo desarrollamos algunos aspectos teóricos respecto a la GH-estabilidad topológica para homeomorfismos, por ello el presente trabajo está basado en los aportes de A. Arbieto y C. Morales [1], y en los aportes dados por R. Cubas [3]. El concepto de GH-estabilidad topológica para homeomorfismos fue dado por Arbieto y Morales en [1], en 2017. Esencialmente, ellos combinan la noción de distancia de Gromov-Hausdorff con la distancia C^0 usual, y obtienen una “distancia” que permite relacionar dinámicas discretas que actúan en espacios métricos posiblemente diferentes. De este modo definen la distancia C^0-*Gromov-Hausdorff*. Y combinando la noción de estabilidad topológica de Walters (para homeomorfismos), con esta distancia d_{GH^0}, En [1], los autores introducen la noción de *GH-estabilidad topológica* para homeomorfismos. Y, siguiendo la prueba dada por Walters del teorema 4 de [2], Arbieto y Morales prueban que todo homeomorfismo expansivo con la propiedad de sombreamiento satisface la GH-estabilidad topológica.

También consideramos los aportes dados por R. Cubas sobre la GH-estabilidad topológica, dados en [3]. De este modo estudiamos la densidad de puntos periódicos asociados a homeomorfismos transitivos topológicamente GH-estables, y algunas consecuencias de la GH-estabilidad topológica en espacios métricos disconexos. También estudiamos el hecho de que la GH-estabilidad topológica preserva entropía positiva en dinámicas sobre la circunferencia S^1, y la relación entre la GH-estabilidad topológica y el Lema de aproximación de Anosov.

Abstract

In the present work we study some theoretical aspects about the topological GH-stability for homeomorphisms. For this reason this work is based on the contributions of A.Arbieto and C. Morales [1], and the contributions given by R. Cubas [3]. The concept of topological GH-stability for homeomorphisms was given by Arbieto and Morales in [1], in 2017. Essentially, they combine the notion of Gromov-Hausdorff metric with the usual C^0-distance. So, they obtain a distance that allows relate discrete dynamics of possibly different metric spaces. In this way they define the C^0-Gromov-Hausdorff distance. On the other hand, in [1], the authors combine the notion of Walters's topological stability (for homeomorphisms), with the C^0-Gromov-Hausdorff distance. So, they introduce the notion of topological GH-stability for homeomorphisms. Afterwards, following the proof given by Walters of Theorem 4 in [2], Arbieto and Morales prove that every expansive homeomorphism with the pseudo-orbit tracing property satisfies the topological GH-stability.

We also consider the contributions given by R. Cubas on GH-topological stability, given in [3]. In this way we study the density of periodic points associated to topologically GH-stable transitive homeomorphisms, and some consequences of topological GH-stability in disconnected metric spaces. We also study the fact that the topological GH-stability preserves positive entropy in dynamics on the circle S^1, and the relationship between the topological GH-stability and the Anosov Closing Lemma.

Notaciones

$\mathbb{Z}$:	representa a la colección de números enteros.
$\mathbb{N}$:	representa a la colección de números naturales.
$\mathbb{R}$:	representa a la colección de números reales.
$\#(\mathcal{H})$:	denota a el número de elementos de $\mathcal{H}$.
(Z, d^Z):	denota al espacio métrico Z provisto de la métrica d^Z
$d(c, \mathcal{P})$:	representa a la distancia entre el punto c y el conjunto $\mathcal{P}$.
$B(c, \lambda)$:	denota a la bola abierta centrada en c y con radio λ.
$d_{C^0}(h, k)$:	denota a la distancia C^0 entre las funciones h y k.
$d_H(C, D)$:	representa a la distancia de Hausdorff entre $C, D \subset X$.
$d_{GH}(C, D)$:	representa a la distancia de Gromov-Hausdorff entre C y D.
$d_{GH^0}(J, K)$:	denota a la C^0-Gromov-Hausdorff distancia entre los homeomorfismos $J : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ y $K : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$.
diám$(\mathcal{R})$:	denota al diámetro de $\mathcal{R} \subset X$.
$h(g)$:	denota a la entropía topológica de $g : Z \to Z$.
Per(J):	denota a la colección de *puntos periódicos* de $J : Z \to Z$.
$\Omega(g)$	representa a la colección de *puntos no errantes* de g.
$\mathcal{R}(g)$	denota a la colección de *puntos recurrentes por cadenas* de g.
$L(g)$	denota a la colección de *puntos límite* de g.

Índice general

Introducción

En este trabajo el principal resultado que presentamos es el Teorema 3, el cual esencialemte dice que la propiedad de expansividad más la propiedad de sombreamiento implican la GH-estabilidad topológica en el ámbito de los sistemás dinámicos discretos. Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en el Cápitulo 1, establecemos las notaciones y definiciones que usaremos más adelante, presentamos por ejemplo las nociones de GH-estabilidad topológica y la C^0-Gromov-Hausdorff distancia para homeomorfismos. Asimismo, presentamos la demostración del teorema de estabilidad topológica de Walters, Teorema 1, el cual es la base para la demostración del Teorema 3, y recordamos la definición de entropía topológica de funciones continuas. En el Capítulo 2 presentamos los aportes dados por A. Arbieto y C. Morales, dados en [1], trabajo en el cual los autores definen la noción de GH-estabilidad topológica en sistemas dinámicos discretos, y presentan también la C^0-Gromov-Hausdorf distancia. En el Capítulo 3 recogemos los aportes dados por R. Cubas en [3] respecto a la GH-estabilidad topológica. Finalmente, en el Capítulo 4 damos algunas conclusiones pertinentes, respecto a posibles generalizaciones de la GH-estabilidad topológica para homeomorfismos al ámbito de los sistemas dinámicos continuos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Definiciones previas

Considere el espacio métrico (W, d^W). Sea $g : W \to W$ un homeomorfismo definido sobre W. Decimos que g es *expansivo* si existe algún $\xi > 0$ tal que para cada $x \in W$, el conjunto

$$\Big\{ y \in W; d^W\big(g^m(y), g^m(x)\big) < \xi \text{ para cada } m \in \mathbb{Z} \Big\} \text{ es unitario e igual a } \{x\}. \tag{1.1}$$

En este caso $\xi > 0$ es denominado constante de expansividad de g.

Por otro lado, para introducir la noción de *sombreamiento*, necesitamos de algunas notaciones y conceptos previos. Dado $\lambda > 0$, decimos que la colección $\{z_m\}_{m \in \mathbb{Z}} \subseteq W$ es una *λ-pseudoórbita* de g si

$$d^W\big(g(z_m), z_{m+1}\big) < \Lambda \text{ para todo } m \in \mathbb{Z}.$$

Dados $\rho > 0$ y una λ-pseudoórbita $\{z_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ de g. Decimos que un punto $w \in W$ *ρ-sombrea* a la λ-pseudoórbita $\{z_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ si,

$$d^W\big(g^m(w), z_m\big) < \rho \text{ para todo } m \in \mathbb{Z}.$$

Decimos que g posee la *propiedad del sombreamiento*, si se cumple que para todo $\rho > 0$, existe $\lambda > 0$ satisfaciendo lo siguiente: toda λ-pseudoórbita de g es ρ-sombreada por al menos un punto de W.

Sean dos funciones $p, q : Z \to W$, no necesariamente continuas, donde (Z, d^Z) y (W, d^W) representan a espacios métricos provistos con las distancias d^Z y d^W, respectivamente. La *distancia* C^0 entre las funciones p y q es dada por:

$$d_{C^0}(p, q) = \sup\left\{d^W\big(p(\omega), q(\omega)\big); \omega \in Z\right\}. \tag{1.2}$$

A continuación recordamos la definición de estabilidad topológica dada por Walters en [2].

Definición 1 (Estabilidad topológica de Walters)**.** *Sea (Z, d) un espacio métrico compacto. Un homeomorfismo $g : Z \to Z$ es* topológicamente estable *si se cumple que: para todo $\xi > 0$, existe $\lambda > 0$ tal que, $k \circ h = h \circ k$ y $d_{C^0}(h, \mathrm{Id}_Z) < \xi$ para alguna función continua $h : Z \to Z$, siempre que $d_{C^0}(k, g) < \lambda$ para algún homeomorfismo $k : Z \to Z$.*

Dado un homeomorfismo $f : X \to X$, definido sobre el espacio métrico X. La *órbita* de $a \in X$ asociada a f, es el conjunto $O_f(a) = \{f^n(a); n \in \mathbb{Z}\}$. Y la *semiórbita positiva* de $a \in X$ es $O_f^+(a) = \{f^n(a); n \in \mathbb{N}\}$. Decimos que f es un homeomorfismo *transitivo* si existe $a \in X$ tal que tiene semiórbita positiva densa en X, esto es, $\overline{O_f^+(a)} = X$. En este caso, el punto a es llamado *punto transitivo* de f.
Además, decimos que f es un homeomorfismo *minimal* si cada punto de X es un punto transitivo de f.

Dado un espacio métrico (Z, d^Z). La distancia entre un punto $\omega \in Z$ y un subconjunto $T \subseteq Z$ es definida por $d(\omega, T) = \text{ínf}\left\{d^Z(\omega, \alpha); \alpha \in T\right\}$.
Además, dados dos subconjuntos T y S de Z tenemos que $d_H(T, S)$ denota a la *distancia de Hausdorff* entre T y S, y

$$d_H(T, S) = \text{máx}\left\{\sup_{\alpha \in T} d(\alpha, S), \sup_{\beta \in S} d(\beta, T)\right\}. \tag{1.3}$$

Dados (Z, d^Z) y (W, d^W) espacios métricos. Decimos que una función $g : Z \to W$ es una *isometría* si g es sobreyectiva y, para cada $c, d \in Z$, $d^Z(c, d) = d^W\big(g(c), g(d)\big)$. Además, dado $\mu > 0$ decimos que g es una *μ-isometría* si

$$\text{máx}\left\{\sup_{c,d \in X}\left|d^X(c, d) - d^Y(g(c), g(d))\right|, d_H\big(g(Z), W\big)\right\} < \mu.$$

Considerando (Z, d^Z) y (W, d^W), la *distancia de Gromov-Hausdorff* entre estos dos, es dada por

$$d_{GH}(Z, W) = \text{ínf}\left\{\mu \in]0, +\infty[;\ \exists\, \mu\text{-isometrías } k : Z \to W, l : W \to Z\right\} \tag{1.4}$$

En [1], Arbieto y Morales combinan las nociones de distancia de Gromov-Hausdorff, y la distancia C^0, y definen el concepto de distancia C^0-*Gromov-Hausdorff*, denotada por d_{GH^0}, que relaciona dos dinámicas discretas, cada una en diferentes espacios métricos en general. Esto es,

$$\begin{aligned} d_{GH^0}(h_1, h_2) = \text{ínf}\,\big\{\mu > 0;\ \exists\, \mu\text{-isometrías } k : Z \to W, l : W \to Z \text{ satisfaciendo} \\ d_{C^0}(k \circ h_1, h_2 \circ k) < \mu \text{ y } d_{C^0}(l \circ h_2, h_1 \circ l) < \mu\big\}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

donde $h_1 : Z \to Z$ y $h_2 : W \to W$ son funciones definidos sobre espacios métricos.

En [1], los autores introducen la noción de *GH-estabilidad topológica para homeomorfismos* definidos sobre espacios métricos compactos. Para tal fin, ellos fusionan la noción de estabilidad topológica de Walters (Definición 1), con la GH^0-distancia vista en 1.5).

Definición 2 (GH-estabilidad topológica para homeomorfismos)**.** *Sean (Z, d^Z) un espacio métrico, y $g : Z \to Z$ un homeomorfismo. Decimos que g es* topológicamente GH-estable *si para todo $\xi \in]0, +\infty[$ existe al menos un $\lambda \in]0, +\infty[$ satisfaciendo: si $\widehat{g} : W \to W$ es un homeomorfismo sobre el espacio métrico W tal que $d_{GH^0}(g, \widehat{g}) < \lambda$, entonces existe $\ell : W \to Z$, ξ-isometría continua, verificando que $g \circ \ell = \ell \circ \widehat{g}$.*

1.2. Teorema de estabilidad topológica de Walters

En [2], Walters mostró que un homeomorfismo expansivo con la propiedad de sombreamiento (POTP), es topológicamente estable. A continuación desarrollaremos la prueba de este teorema.

Teorema 1 (Estabilidad topológica de Walters)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo. Si f es expansivo y tiene la propiedad del sombreamiento, entonces f es topológicamente estable.*

Demostración. Como f es un homeomorfismo expansivo, entonces existe $e > 0$ (una constante de expansividad de f) tal que, para cada $a, b \in X$,

$$a = b, \text{ siempre que } d(f^m a, f^m b) < e \text{ para todo } m \in \mathbb{Z}.$$

Queremos probar que f es topológicamente estable, esto es, que dado cualquier $\epsilon > 0$, existe algún $\delta > 0$ verificando que si $g : X \to X$ es un homeomorfismo tal que $d_{C^0}(g, f) < \delta$, entonces $f \circ h = h \circ g$ y $d_{C^0}(h, \mathrm{Id}_X) < \epsilon$ para alguna función continua $h : X \to X$.

En efecto. Sea $\epsilon > 0$, considere $\overline{\epsilon} > 0$ tal que

$$\overline{\epsilon} < \text{mín}\{e/3, \epsilon\} \tag{1.6}$$

Para $\overline{\epsilon} > 0$, de la propiedad de sombreamiento, existe $\delta > 0$ tal que cada δ-pseudoórbita (respecto a f) en X es $\overline{\epsilon}$-sombreada por algún punto de X.
Sea $g : X \to X$ un homeomorfismo tal que $d_{C^0}(g, f) < \delta$. Dado $y \in X$, considere $x_m^y = g^m(y)$ para cada $m \in \mathbb{Z}$. Tenemos que

$$f(x_m^y) = f(g^m y) \;\text{ y }\; x_{m+1}^y = g(g^m y), \;\text{ para cualquier } m \in \mathbb{Z}\,.$$

Por lo tanto,

$$d\big(f(x_m^y), x_{m+1}^y\big) = d\big(f(g^m y), g(g^m y)\big) \le d_{C^0}(f, g) < \delta,$$

para cualquier $m \in \mathbb{Z}$. Por consiguiente, $\{x_m^y\}_{m\in\mathbb{Z}}$ es una δ-pseudoórbita (respecto a f) para cada $y \in X$. Por lo tanto, de la propiedad del sombreamiento, para cada $y \in X$, existe $x^y \in X$ que $\overline{\epsilon}$-sombrea $\{x_m^y\}_{m\in\mathbb{Z}}$, es decir, $d(f^m(x^y), x_m^y) < \overline{\epsilon}$, para cualquier $m \in \mathbb{Z}$. Más aún, de la expansividad de f, y como $\overline{\epsilon} < e/2$, x^y es único. En efecto, dado $y \in X$, supongamos que existen $x_1, x_2 \in X$ tales que,

$$d\big(f^m(x_1), x_m^y\big) < \overline{\epsilon} \quad \text{y} \quad d\big(f^m(x_2), x_m^y\big) < \overline{\epsilon}, \;\text{ para cualquier } m \in \mathbb{Z}\,.$$

Entonces, $d\big(f^m(x_1), f^m(x_2)\big) < 2\overline{\epsilon} < e$ siempre que $m \in \mathbb{Z}$. Por tanto $x_1 = x_2$. Por lo tanto, para cada $y \in X$, existe un único $x^y \in X$, satisfaciendo que

$$\text{para todo } m \in \mathbb{Z},\; d\big(f^m(x^y), x_m^y\big) < \overline{\epsilon}. \tag{1.7}$$

Definamos $h : X \to X$, por $h(y) = x^y$ para $y \in X$. De (1.7), reemplazando m por $m+1$ concluimos que

$$d\big(f^{m+1}(hy), g^{m+1}y\big) < \overline{\epsilon}, \;\text{ para cualquier } m \in \mathbb{Z}, \;\text{ y cada } y \in X. \tag{1.8}$$

Además, de (1.7), cambiando y por $g(y)$ se tiene que

$$d\big(f^m(h(g(y))), g^m(gy)\big) < \bar{\epsilon}, \text{ para cualquier } m \in \mathbb{Z}, \text{ y cada } y \in X. \tag{1.9}$$

Así, de (1.8) y (1.9), concluimos respectivamente que

$$d\big(f^m(f \circ h(y)), x_m^{g(y)}\big) < \bar{\epsilon}, \text{ para todo } m \in \mathbb{Z}, \text{ y todo } y \in X; \text{ y}$$
$$d\big(f^m(h \circ g(y)), x_m^{g(y)}\big) < \bar{\epsilon}, \text{ para todo } m \in \mathbb{Z}, \text{ y cada } y \in X.$$

Esto es, $(f \circ h)(y)$ y $(h \circ g)(y)$ son puntos de X que $\bar{\epsilon}$-sombrean a la misma δ-pseudoórbita $\{x_m^{g(y)}\}_{m\in\mathbb{Z}}$, para cada $y \in X$. Así, de la unicidad del punto que sombrea a la δ-pseudoórbita, tenemos que $(f \circ h)(y) = (h \circ g)(y)$ para cada $y \in X$. Por lo tanto,

$$f \circ h = h \circ g.$$

De (1.7), para $m = 0$, tenemos que

$$d\big(h(y), y\big) < \bar{\epsilon} < \epsilon, \text{ para cada } y \in X.$$

Por lo tanto,

$$d_{C^0}(h, \mathrm{Id}_X) < \epsilon.$$

El siguiente lema será fundamental para probar la continuidad de $h : X \to X$. Esencialmente nos dice que la continuidad de h es consecuencia de la expansividad de f.

Lema 1. *Para cada $e' \in (0, e)$, y para cada $\Lambda > 0$, existe $M_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cualesquiera $x, y \in X$, se tiene que*

$$d(x, y) < \Lambda, \textit{ siempre que } d\big(f^m(x), f^m(y)\big) < e' \textit{ para todo } m \in [-M_0, M_0] \cap \mathbb{Z}.$$

Prueba del Lema 1. Supongamos por contradicción que existe $e' \in (0, e)$, y existe $\Lambda_0 > 0$ tal que, para cualquier $M \in \mathbb{N}$, existen $a_M, b_M \in X$, verificando que

$$\text{para todo } m \in [-M, M] \cap \mathbb{Z}, \ d\big(f^m(a_M), f^m(b_M)\big) < e'; \text{ y } d(a_M, b_M) \geq \Lambda_0. \tag{1.10}$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer (considerando subsucesiones si es necesario), por la compacidad de X que, existen $a, b \in X$ tales que $\lim\limits_{M\to\infty} d(a_M, a) = 0$ y $\lim\limits_{M\to\infty} d(b_M, b) = 0$. Fijemos $m \in \mathbb{Z}$, un entero cualquiera. Consideremos $M_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|m| \leq M_0$. Por lo tanto,

$$d\big(f^m(a_M), f^m(b_M)\big) < e' \text{ para cada } M \geq M_0. \tag{1.11}$$

Desde que f^m es continua, tenemos que $\lim\limits_{M\to\infty} f^m(a_M) = f^m(a)$ y $\lim\limits_{M\to\infty} f^m(b_M) = f^m(b)$. Por consiguiente, de (1.11), haciendo $M \to +\infty$, tenemos que $d\big(f^m(a), f^m(b)\big) \leq e'$. Puesto que $m \in \mathbb{Z}$ fue cualquiera, tenemos que

$$d\big(f^m(a), f^m(b)\big) < e \text{ para cada } m \in \mathbb{Z}.$$

Así, de la expansividad de f, concluimos que $a = b$. Por otro lado, como $\lim\limits_{M\to\infty} a_M = a$ y $\lim\limits_{M\to\infty} b_M = b$, de (1.10), se tiene que $d(a,b) \geq \Lambda_0 > 0$. Lo cual contradice el hecho que $a = b$. Esto finaliza la prueba del Lema 1. $\square$

Dado $\Lambda > 0$, puesto que $3\overline{\epsilon} \in (0, e)$, del Lema 1, tenemos que existe $M_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $a, b \in X$,

$$\text{si } d\big(f^m(a), f^m(b)\big) < 3\overline{\epsilon} \text{ para cada } m \in [-M_0, M_0], \text{ entonces } d(a,b) < \Lambda. \tag{1.12}$$

Por continuidad uniforme de $g^i : X \to X$, para cada $i \in [-M_0, M_0]$; tenemos que existe algún $\rho > 0$ tal que, para cualesquiera $x, y \in X$,

$$d\big(g^i(x), g^i(y)\big) < \overline{\epsilon} \text{ para todo } i \in [-M_0, M_0], \text{ siempre que } d(x,y) < \rho.$$

Sean $p, q \in X$ tales que $d(p,q) < \rho$. Entonces

$$d\big(g^i(p), g^i(q)\big) < \overline{\epsilon} \text{ para cada } i \in [-M_0, M_0]. \tag{1.13}$$

Buscamos que $d\big(f^i(hp), f^i(hq)\big) < 3\overline{\epsilon}$, para cada $i \in [-M_0, M_0]$. De allí concluiríamos, de (1.12), que $d(hp, hq) < \Lambda$. Recordemos que $h(p)$ es tal que verifica

$$d\big(f^m(hp), g^m(p)\big) < \overline{\epsilon}, \text{ para cada } m \in \mathbb{Z}, \tag{1.14}$$

Y también que $h(q)$ es tal que cumple,

$$d\big(f^m(hq), g^m(q)\big) < \overline{\epsilon}, \text{ para cada } m \in \mathbb{Z}\,. \tag{1.15}$$

Dado $i \in [-M_0, M_0]$, de (1.14) y (1.15), tenemos que

$$\begin{aligned} d\big(f^i(hp), f^i(hq)\big) &\leq d\big(f^i(hp), g^i(p)\big) + d\big(g^i(p), g^i(q)\big) + d\big(g^i(q), f^i(hq)\big) \\ &< \overline{\epsilon} + d\big(g^i(p), g^i(q)\big) + \overline{\epsilon}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Luego, de (1.13) y (1.16), tenemos que

$$d\big(f^i(hp), f^i(hq)\big) < 3\overline{\epsilon} \text{ para cada } i \in [-M_0, M_0].$$

Por lo tanto, de (1.12), tenemos que $d\big(h(p), h(q)\big) < \Lambda$. Así, hemos mostrado que h es uniformemente continua. Lo cual culmina la prueba del Teorema de estabilidad de Walters. $\square$

1.3. Entropía topológica de aplicaciones continuas

En esta sección, desarrollaremos el concepto de entropía topológica siguiendo las notaciones y resultados presentados en [4].

Sea M un espacio topológico compacto. Sea $\alpha = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de conjuntos abiertos de M tales que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = M$, esto es, α es un *cubrimiento abierto* de M. Llamamos *entropía de* α a

$$H(\alpha) = \log N(\alpha),$$

donde $N(\alpha) = \text{mín}\left\{\#\gamma \in \mathbb{N}; \gamma \subseteq \alpha, M = \bigcup_{V\in\gamma} V, \#\gamma < \infty\right\}$. Por la compacidad de M, todo cubrimiento abierto de M posee algún subcubrimiento finito.
Dados dos cubrimientos abiertos α y β de M, decimos que α es *menos fino* que β, lo que denotamos por $\alpha \prec \beta$, si para cada $V \in \beta$ existe $U \in \alpha$ tal que $V \subseteq U$. En este caso, β tiene abiertos más pequeños que α y aún cubre a M.
Sean α y β cubrimientos abiertos de M tales que $\alpha \prec \beta$. Sea $\gamma \subseteq \beta$ tal que $N(\beta) = \#\gamma$. Sea $\gamma = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$, donde $k = N(\beta)$. Observe que, de la minimalidad de γ, tenemos que $V_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Como $\alpha \prec \beta$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ existe $U_i \in \alpha$ tal que $V_i \subseteq U_i$. Como $\bigcup_{i=1}^k V_i = M$ entonces $\bigcup_{i=1}^k U_i = M$. Así, $\gamma' = \{U_1, U_2, \ldots, U_k\}$ es un subcubrimiento finito de α. Así, $N(\alpha) \leq \#(\gamma') = \#(\gamma) = N(\beta)$. Por lo tanto $H(\alpha) \leq H(\beta)$.
Dados los cubrimientos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, definimos la *suma* de ellos como

$$\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_k = \{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \subseteq M; A_1 \in \alpha_1, \ldots, A_k \in \alpha_k\}.$$

Sean α y β cubrimientos abiertos de M. Sea $\alpha' \subseteq \alpha$ un subcubrimiento finito de α tal que $\#(\alpha') = N(\alpha)$. Supongamos que $\alpha' = \{U_1, \ldots, U_r\}$. Sea $\beta' \subseteq \beta$ un subcubrimiento finito de β tal que $\#(\beta') = N(\beta)$. Supongamos que $\beta' = \{V_1, \ldots, V_s\}$. Como $M = \bigcup_{i=1}^r U_i$ y $M = \bigcup_{j=1}^s V_j$, entonces $\bigcup_{i,j}(U_i \cap V_j) = M$. Así,

$$\gamma = \left\{U_i \cap V_j; i \in \{1, \ldots, r\}, j \in \{1, \ldots, s\} \text{ y } U_i \cap V_j \neq \emptyset\right\}$$

es un subcubrimiento finito de $\alpha \vee \beta$ y con cardinalidad $\leq r \cdot s$. Así, $N(\alpha \vee \beta) \leq \#\gamma \leq r \cdot s = N(\alpha)N(\beta)$. Por lo tanto,

$$H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta).$$

Sea $f : M \to M$ continua. Sea α un cubrimiento abierto de M. Entonces $f^{-j}(\alpha) = \{f^{-j}(A); A \in \alpha\}$ para cada $j \geq 1$. Para $n \geq 1$, sea

$$\alpha^n = \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee f^{-2}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}(\alpha).$$

Tenemos que para cada $m, n \in \mathbb{N}$,

$$H(\alpha^{m+n}) = H\big(\alpha^m \vee f^{-m}(\alpha^n)\big) \leq H(\alpha^m) + H\big(f^{-m}(\alpha^n)\big). \tag{1.17}$$

Observe que

$$\alpha^{m+n} = \underbrace{\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-(m-1)}(\alpha)}_{\alpha^m} \vee \underbrace{f^{-m}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-(m+n-1)}(\alpha)}_{f^{-m}(\alpha^n)} = \alpha^m \vee f^{-m}(\alpha^n).$$

Tenemos que $H(f^{-m}(\alpha)) \leq H(\alpha)$. En efecto, basta probar que $H(f^{-1}(\alpha)) \leq H(\alpha)$. Sea $\alpha' \subseteq \alpha$ una subcobertura finita de α tal que $\#(\alpha') = N(\alpha)$. Como $M = \bigcup_{U \in \alpha'} U$ entonces $M = f^{-1}(M) = \bigcup_{U \in \alpha'} f^{-1}(U)$. Así, $\alpha'' = \{f^{-1}(U) \subseteq M; U \in \alpha' \text{ y } f^{-1}(U) \neq \emptyset\}$ es un cubrimiento de M tal que $\#(\alpha'') \leq \#(\alpha')$. Por lo tanto, $N(f^{-1}(\alpha)) \leq \#(\alpha'') \leq \#(\alpha') = N(\alpha)$. Así, $H(f^{-1}(\alpha)) \leq H(\alpha)$, y por lo tanto,

$$H(f^{-m}(\alpha)) \leq H(\alpha) \text{ para cada } m \geq 1. \tag{1.18}$$

Observe que puede ocurrir que $f^{-1}(U) = \emptyset$ para algún $U \in \alpha'$. En caso que f sea sobreyectiva $\#(\alpha) = \#(f^{-1}(\alpha))$.

De (1.17) y (1.18), tenemos que

$$H(\alpha^{m+n}) \leq H(\alpha^m) + H\big(\alpha^n\big) \text{ para cada } m, n \in \mathbb{N}. \tag{1.19}$$

Esto es, la sucesión $\big(H(\alpha^n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ es *subaditiva.*

Lema 2. *Sea $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0, \infty)$ una sucesión subaditiva de números reales no negativos. Esto es, para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$, $\xi_{m+n} \leq \xi_m + \xi_n$. Entonces existe $\lim_{k\to\infty} \dfrac{\xi_k}{k} \in [0, \infty)$.*

Prueba. Sea $L = \inf\left\{\dfrac{\xi_k}{k} \geq 0; k \in \mathbb{N}\right\}$. Como $\xi_k \geq 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$, entonces $L \geq 0$. Dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\xi_{k_0}}{k_0} < L + \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.20}$$

Dado $k \in \mathbb{N}$, del algoritmo euclideano, existen $q_k, r_k \in \mathbb{Z}$ tales que $k = k_0 \cdot q_k + r_k$, donde $0 \leq r_k < k_0$ y $q_k \geq 0$. Por lo tanto,

$$\xi_k = \xi_{k_0 \cdot q_k + r_k} \leq \xi_{k_0 \cdot q_k} + \xi_{r_k} \leq q_k \cdot \xi_{k_0} + \xi_{r_k},$$

donde $\xi_{r_k} = 0$ si $r_k = 0$. Por ende,

$$0 \leq \frac{\xi_k}{k} \leq \frac{q_k \cdot \xi_{k_0}}{k} + \frac{\xi_{r_k}}{k} \leq \frac{\xi_{k_0}}{k_0} + \frac{\xi_{r_k}}{k} \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Por consiguiente, siendo $\ell = \max\left\{0, \xi_{r_1}, \xi_{r_2}, \ldots, \xi_{r_{k_0-1}}\right\}$, tenemos que

$$\frac{\xi_k}{k} \leq \frac{\xi_{k_0}}{k_0} + \frac{\ell}{k}, \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Del Principio Arquimediano,

$$\text{existe } p_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \frac{\ell}{p_0} < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.21}$$

Por tanto, de (1.20) y (1.21), si $k \geq p_0$ entonces $L \leq \frac{\xi_k}{k} < L + \epsilon$. Por consiguiente, $\lim_{k\to\infty} \frac{\xi_k}{k} = L = \inf\left\{\frac{\xi_m}{m}; m \in \mathbb{N}\right\}$. $\square$

Del Lema 2, tenemos que existe el límite

$$h(f, \alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{H(\alpha^n)}{n} = \inf\{H(\alpha^n)/n; n \in \mathbb{N}\},$$

para cada cubrimiento abierto α de M. Se define la *entropía topológica* de f como

$$h(f) = \sup\left\{h(f, \alpha) \geq 0; \alpha \text{ es un cubrimiento abierto de } M\right\}.$$

Sean α y β cubrimientos abiertos de M tales que $\alpha \prec \beta$. Entonces $\alpha^n \prec \beta^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En efecto, sean $n \in \mathbb{N}$ y $V_0 \in \beta^n$. Así, existen $V_1, V_2, \ldots, V_n \in \beta$ tales que

$$V_0 = V_1 \cap f^{-1}(V_2) \cap \cdots \cap f^{-(n-1)}(V_n).$$

Como $\alpha \prec \beta$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existe $U_i \in \alpha$ tal que $V_i \subseteq U_i$. Considere

$$U_0 = U_1 \cap f^{-1}(U_2) \cap \cdots \cap f^{-(n-1)}(U_n).$$

Tenemos que $U_0 \in \alpha^n$ y $V_0 \subseteq U_0$.

Por consiguiente,

$$H(\alpha^n) \leq H(\beta^n) \text{ para cualquier } n \in \mathbb{N},$$

puesto que $\alpha^n \prec \beta^n$ siempre que $n \in \mathbb{N}$, Por ende, $h(f, \alpha) \leq h(f, \beta)$.

Para cada cubrimiento abierto α de M, de la compacidad de M, existe algún subcubrimiento finito $\beta \subseteq \alpha$. En particular, $\alpha \prec \beta$. Así, $h(f,\alpha) \leq h(f,\beta)$. Por lo tanto,

$$h(f) \leq \sup\big\{h(f,\beta) \geq 0; \beta \text{ es un cubrimiento abierto finito de } M\big\}.$$

Y claramente,

$$\sup\big\{h(f,\beta) \geq 0; \beta \text{ es un cubrimiento abierto finito de } M\big\} \leq h(f).$$

Por lo tanto

$$h(f) = \sup\big\{h(f,\beta) \geq 0; \beta \text{ es un cubrimiento abierto finito de } M\big\}.$$

1.3.1. Invarianza de la entropía topológica por conjugaciones topológicas

La noción de entropía topológica es invariante por conjugaciones topológicas. Esto es, dadas dos aplicaciones continuas $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$, tales que existe un homeomorfismo $h : Y \to X$ con $h \circ g = f \circ h$; tenemos que $h(f) = h(g)$. Una tal función h es llamada una *conjugación topológica* entre f y g.

Sean $f : M \to M$ y $g : N \to N$ funciones continuas definidas sobre espacios compactos. Decimos que g es un *factor* de f, si existe alguna función $h : M \to N$, que es continua y sobreyectiva tal que $h \circ f = g \circ h$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ N & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

Una tal función h es llamada una *semiconjugación topológica* entre f y g.

Lema 3. *Sean $f : M \to M$ y $g : N \to N$ funciones continuas definidas sobre espacios compactos. Si $g : N \to N$ es un factor de $f : M \to M$. Entonces $h_{top}(g) \leq h_{top}(f)$.*

Demostración. Sea $\theta : M \to N$ una función continua y sobreyectiva tal que $\theta \circ f = g \circ \theta$. Sea α un cubrimiento abierto de N. Entonces $\theta^{-1}(\alpha) = \{\theta^{-1}(A); A \in \alpha\}$ es un cubrimiento abierto de M. Sean $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1} \in \alpha$. Tenemos que

$$\theta^{-1}\Big(\bigcap_{j=0}^{n-1} g^{-j}(A_j)\Big) = \bigcap_{j=0}^{n-1} \theta^{-1}\big(g^{-j}(A_j)\big) = \bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}\big(\theta^{-1}(A_j)\big). \tag{1.22}$$

Por definición, $\theta^{-1}(\alpha^n)$ está formado por conjuntos como el del lado izquierdo de la igualdad (1.22), y los conjuntos como los del lado derecho de (1.22) constituyen $\big(\theta^{-1}(\alpha)\big)^n$. Por lo tanto,

$$\theta^{-1}(\alpha^n) = \big(\theta^{-1}(\alpha)\big)^n. \tag{1.23}$$

Sea $\gamma \subset \alpha^n$. Si γ cubre N, entonces $\theta^{-1}(\gamma) \subset \big(\theta^{-1}(\alpha)\big)^n$ cubre M.
Se tiene que $N(\alpha^n) = N\big(\theta^{-1}(\alpha^n)\big)$, puesto que θ es sobreyectiva. Por ende, de (1.23), concluimos que $N(\alpha^n) = N\big([\theta^{-1}(\alpha)]^n\big)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente,

$$H(\alpha^n) = H\big([\theta^{-1}(\alpha)]^n\big) \text{ para cualquier } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces,

$$h(g,\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{H(\alpha^n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{H\big([\theta^{-1}(\alpha)]^n\big)}{n} = h\big(f, \theta^{-1}(\alpha)\big).$$

Así, para cada cubrimiento abierto α de N, $h(g,\alpha) = h(f,\theta^{-1}(\alpha))$. Como $h(f,\theta^{-1}(\alpha)) \leq h_{\text{top}}(f)$, para cada cubrimiento abierto α de N. Entonces, $h(g,\alpha) \leq h_{\text{top}}(f)$ para cada cubrimiento abierto α de N. Así,

$$h_{\text{top}}(g) = \sup\big\{h(g,\alpha); \alpha \text{ es cubrimiento abierto de } N\big\} \leq h_{\text{top}}(f).$$

□

Como consecuencia directa de este Lema 3 tenemos el siguiente corolario

Corolario 1. *Sean $f : M \to M$ y $g : N \to N$ funciones continuas, definidas sobre espacios compactos, que son conjugadas topológicamente. Entonces $h(f) = h(g)$.*

Demostración. Como f y g son funciones continuas conjugadas topológicamente, existe algún homeomorfismo $h : M \to N$ tal que $h \circ f = g \circ h$. Por lo tanto, también se tiene que $h^{-1} \circ g = f \circ h^{-1}$, donde h^{-1} es también un homeomorfimso. Por ende g es un factor de f, y f es un factor de g. Así, $h(g) \leq h(f)$ y $h(f) \leq h(g)$. Por tanto, $h(f) = h(g)$. □

1.3.2. Conjuntos generadores y conjuntos separados

Sea $f : M \to M$ una función continua sobre un espacio métrico (M,d), no necesariamente compacto. Sea $K \subseteq M$ un subconjunto compacto. Dados $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, un conjunto $E \subseteq M$ es (n,ϵ)-*generador* de K, si para cualquier $x \in K$, existe al menos un $a \in E$ verificando que para todo $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $d\big(f^i(x), f^i(a)\big) < \epsilon$. Esto es, $K \subseteq \bigcup_{a \in E} B(a, n, \epsilon)$, donde $B(a, n, \epsilon)$ es la *bola dinámica* de centro a, longitud n y radio ϵ,

$$B(a, n, \epsilon) = \Big\{x \in M; d\big(f^i(x), f^i(a)\big) < \epsilon \text{ para cada } i \in \{0, 1, \dots, n-1\}\Big\}.$$

Denotando por $B(w, \delta)$ a la bola abierta de centro $w \in M$ y radio $\delta > 0$, tenemos que

$$B(a, n, \epsilon) = \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}\big(B(f^i a, \epsilon)\big).$$

Note que $w \in B(w, k, \eta)$ para cada $w \in M$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cualquier $\eta > 0$. Claramente se tiene que

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B(x, n, \epsilon).$$

Desde que K es compacto, existe algún $E \subset K$ finito satisfaciendo que

$$K \subseteq \bigcup_{x \in E} B(x, n, \epsilon).$$

Es decir, existe algún $E \subseteq K$ que es (n, ϵ)-generador del compacto K.

Sean K un subconjunto compacto de M, y $\epsilon > 0$. Definamos

$$g(f, \epsilon, K) = \limsup_{m \to \infty} \frac{1}{m} \log g_m(f, \epsilon, K),$$

donde

$$g_m(f, \epsilon, K) = \min \Big\{\#E \in \mathbb{N}; E \subseteq M \text{ es un conjunto } (m, \epsilon)\text{-generador de } K\Big\}.$$

Fijemos $\epsilon_1, \epsilon_2 \in]0, +\infty[$ tales que $\epsilon_1 < \epsilon_2$. Considere $E \subseteq M$ siendo un (n, ϵ_1)-generador de K minimal, esto es $\#E = g_n(f, \epsilon_1, K)$ y $K \subseteq \bigcup_{a \in E} B(a, n, \epsilon_1)$. Tenemos que $B(a, n, \epsilon_1) \subseteq B(a, n, \epsilon_2)$ para cualquier $a \in E$, ya que $\epsilon_1 < \epsilon_2$. Por consiguiente E es un (n, ϵ_2)-generador de K. De lo cual, $g_n(f, \epsilon_2, K) \leq g_n(f, \epsilon_1, K)$. Por lo tanto,

$$\underbrace{\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log g_n(f, \epsilon_2, K)}_{g(f, \epsilon_2, K)} \leq \underbrace{\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log g_n(f, \epsilon_1, K)}_{g(f, \epsilon_1, K)},$$

donde $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$. Por ende, existe $g(f, K)$ donde

$$g(f, K) = \lim_{\epsilon \to 0^+} g(f, \epsilon, K) \in [0, +\infty],$$

para cada subconjunto compacto K de M, ya que la aplicación $\epsilon \in (0, +\infty) \mapsto g(f, \epsilon, K)$ es no creciente.

Definimos $g(f)$ como

$$g(f) = \sup \big\{ g(f, K) \in [0, \infty]; K \subseteq M \text{ es subconjunto compacto} \big\}$$

Observación: En caso que M sea un espacio métrico compacto, entonces $g(f) = g(f, M)$.

Dados $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$ y un subconjunto compacto K de M. Un subconjunto no vacío $E \subseteq K$ se dice que es (n, ϵ)-*separado*, si para todo $x \in E$ se tiene que

$$B(x, n, \epsilon) \cap E = \{x\}.$$

Es decir, para cada $x, z \in E$,

$$\text{si } d\big(f^j(x), f^j(z)\big) < \epsilon \text{ para todo } j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \text{ entonces } x = z.$$

Lo cual es equivalente a que para cada $x, z \in E$,

$$d\big(f^j(x), f^j(z)\big) \geq \epsilon \text{ para algún } j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \text{ siempre que } x \neq z.$$

Lema 4. *Sean $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$ y K un subconjunto compacto de M. Si $E \subseteq K$ es un conjunto (n, ϵ)-separado, entonces $\#E \leq g_n(f, \epsilon/2, K)$.*

Demostración. Sean $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ y consideremos $K \subseteq M$ compacto. Sea $E \subseteq K$ un conjunto (n, ϵ)-separado. Y sea $F \subseteq M$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_{z \in F} B(z, n, \epsilon/2),$$

esto es, F es un $(n, \epsilon/2)$-generador de K. Por ende, $E \subseteq K \subseteq \bigcup_{z \in F} B(z, n, \epsilon/2)$. Luego, para todo $x \in E$, hay algún $y \in F$ verificando que $x \in B(y, n, \epsilon/2)$, es decir,

$$\text{para todo } i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \; d\big(f^i(y), f^i(x)\big) < \epsilon/2.$$

Sea $\xi : E \to F$ una función de manera que para todo $x \in E$, fijamos un punto $\xi(x) \in F$ satisfaciendo que

$$\text{para todo } i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \; d\big(f^i(x), f^i(\xi(x))\big) < \epsilon/2.$$

Mostremos que ξ es una función inyectiva. En efecto, consideremos $x, x' \in E$ verificando que que $\xi(x) = y = \xi(x')$. Por ende, puesto que $\xi(x) = y$ tenemos que

$$d\big(f^i(y), f^i(x)\big) < \epsilon/2 \text{ para todo } i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}; \tag{1.24}$$

y dado que $\xi(x') = y$, tenemos que

$$d\big(f^i(y), f^i(x')\big) < \epsilon/2 \text{ para cualquier } i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}. \tag{1.25}$$

Por consiguiente, de (1.24) y (1.25), concluimos que

$$d\big(f^i(x), f^i(x')\big) < \epsilon \text{ para cualquier } i \in \{0, 1, \ldots, n-1\},$$

donde $x, x' \in E$. Por lo tanto $x = x'$, desde que E es un conjunto (n, ϵ)-separado, y $x, x' \in E$. Así, de este modo hemos mostrado que ξ es inyectiva.

Por lo tanto, tenemos que $\#E \leq \#F$ para todo conjunto F que es $(n, \epsilon/2)$-generador de K. Particularmente, considerando el caso en el que F sea un conjunto $(n, \epsilon/2)$-generador de K tal que $\#F = g_n(f, \epsilon/2, K)$. Por ende, concluimos que

$$\#E \leq g_n(f, \epsilon/2, K).$$

□

Del Lema 4, tiene sentido considerar la siguiente definición, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$ y un subconjunto compacto $K \subseteq M$,

$$s_n(f, \epsilon, K) = \text{máx}\Big\{\#F ; F \subseteq K \text{ y } F \text{ es } (n, \epsilon)\text{-separado}\Big\}.$$

Por ende, del mismo Lema 4, concluimos que $s_n(f, \epsilon, K) \leq g_n(f, \epsilon/2, K)$ para todo $\epsilon > 0$, todo compacto $K \subseteq M$, y todo $n \in \mathbb{N}$. Considere que $s(f, \epsilon, K)$ denota a

$$s(f, \epsilon, K) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log s_n(f, \epsilon, K).$$

Fijemos $\lambda_1, \lambda_2 \in]0, +\infty[$ tales que $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. Consideremos también un compacto K en M, y $n \in \mathbb{N}$. Sea E un conjunto (n, λ_2)-separado tal que $E \subseteq K$ y $\#E = s_n(f, \lambda_2, K)$. Por ende, para cualesquiera $x, y \in E$,

$$d\big(f^{j_0}(x), f^{j_0}(y)\big) \geq \lambda_2 \text{ para algún } j_0 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \text{ siempre que } x \neq y. \tag{1.26}$$

Por consiguiente, de (1.26), y dado que $\lambda_2 > \lambda_1$, se tiene que para cada $x, y \in E$,

$$d\big(f^{j_0}(x), f^{j_0}(y)\big) \geq \lambda_1 \text{ para algún } j_0 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \text{ siempre que } x \neq y.$$

Por ende, E es (n, λ_1)-separado y $E \subseteq K$. Así, concluimos que

$$\text{para todo } n \in \mathbb{N},\ s_n(f, \lambda_2, K) = \#E \leq s_n(f, \lambda_1, K), \tag{1.27}$$

donde

$$s_n(f, \lambda_1, K) = \text{máx}\Big\{\#F; F \subseteq K \text{ y } F \text{ es } (n, \lambda_1)\text{-separado}\Big\}.$$

Por consiguiente, de (1.27),

$$\underbrace{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s_n(f, \lambda_2, K)}_{s(f, \lambda_2, K)} \leq \underbrace{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s_n(f, \lambda_1, K)}_{s(f, \lambda_1, K).}$$

Por lo tanto, existe

$$\lim_{\lambda\to 0^+} s(f, \lambda, K) \in [0, +\infty], \tag{1.28}$$

ya que la aplicación

$$\lambda \in]0, +\infty[\mapsto s(f, \lambda, K) \in [0, +\infty[$$

es no creciente. Denotaremos por $s(f, K)$ al límite anterior en (1.28). Esto es,

$$s(f, K) = \lim_{\lambda\to 0^+} s(f, \lambda, K),$$

para cada subconjunto compacto K de M. Defina $s(f)$ como

$$s(f) = \sup\big\{s(f, K) \in [0, +\infty]; K \subseteq M \text{ es subconjunto compacto}\big\}$$

Observación: En caso M sea un espacio métrico compacto, entonces $s(f) = s(f, M)$.

Lema 5. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$ y cada compacto $K \subseteq M$,*

$$g_n(f, \epsilon, K) \leq s_n(f, \epsilon, K) \leq g_n(f, \epsilon/2, K).$$

Demostración. Dados $\epsilon > 0$, y $K \subseteq M$ compacto. Del Lema 4, $s_n(f, \epsilon, K) \leq g_n(f, \epsilon/2, K)$. Solo nos falta mostrar que

$$g_n(f, \epsilon, K) \leq s_n(f, \epsilon, K).$$

Considere un conjunto (n,ϵ)-separado tal que $\#E = s_n(f,\epsilon,K)$ y $E \subseteq K$. El hecho que E sea (n,ϵ)-separado significa que, para todo $x, y \in E$,

$$\text{existe } i \in \{0,1,\dots,n-1\} \text{ tal que } d\big(f^i(x), f^i(y)\big) \geq \epsilon, \text{ siempre que } x \neq y. \tag{1.29}$$

Desde que $E \subseteq K$ es un conjunto (n,ϵ)-separado maximal en K, esto es, $E \subseteq K$ y

$$\#E = s_n(f,\epsilon,K) = \text{máx}\Big\{\#F; F \subseteq K \text{ y } F \text{ es } (n,\lambda_1)\text{-separado}\Big\},$$

tenemos que $E \uplus \{a\} \subseteq K$ no es (n,ϵ)-separado, siempre que $a \in K \setminus E$. Fijemos $a \in K \setminus E$. Tenemos que no es cierto que para todo $x, y \in E \uplus \{a\}$,

$$\text{existe } i \in \{0,1,\dots,n-1\} \text{ tal que } d\big(f^i(x), f^i(y)\big) \geq \epsilon, \text{ siempre que } x \neq y.$$

Por consiguiente, de (1.29), existe $x_a \in E$ verificando que

$$\text{para todo } j \in \{0,1,\dots,n-1\},\ d\big(f^j(a), f^j(x_a)\big) < \epsilon.$$

Por lo tanto, $a \in B(x_a, n, \epsilon)$. De este modo concluimos que, para cada $a \in K \setminus E$, existe $x_a \in E$ tal que $a \in B(x_a, n, \epsilon)$. Por tanto,

$$K \setminus E \subseteq \bigcup_{z \in E} B(z, n, \epsilon).$$

Así, desde que $\omega \in B(\omega, n, \epsilon)$ para todo $\omega \in E$, concluimos que

$$K \subseteq \bigcup_{z \in E} B(z, n, \epsilon).$$

Por lo tanto, E es un conjunto (n,ϵ)-generador de K. Por consiguiente, desde que $g_n(f,\epsilon,K) \leq \#E$, tenemos que $g_n(f,\epsilon,K) \leq \#E = s_n(f,\epsilon,K)$. $\square$

Del Lema 5, dados $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$ y $K \subseteq M$ compacto,

$$g_n(f,\epsilon,K) \leq s_n(f,\epsilon,K) \leq g_n(f,\epsilon/2,K).$$

Considerando $\limsup$ cuando $n \to +\infty$, tenemos que

$$\underbrace{\limsup_{n\to+\infty} g_n(f,\epsilon,K)}_{g(f,\epsilon,K)} \leq \underbrace{\limsup_{n\to+\infty} s_n(f,\epsilon,K)}_{s(f,\epsilon,K)} \leq \underbrace{\limsup_{n\to+\infty} g_n(f,\epsilon/2,K)}_{g(f,\epsilon/2,K)},$$

Por lo tanto, para todo $\epsilon > 0$ y cualquier compacto $K \subseteq M$,

$$g(f,\epsilon,K) \leq s(f,\epsilon,K) \leq g(f,\epsilon/2,K), \tag{1.30}$$

Entonces, en (1.30), tomando límite cuando $\epsilon \to 0^+$, concluimos que para todo compacto K en M,

$$g(f,K) \leq s(f,K) \leq g(f,K) \tag{1.31}$$

Por ende, en (1.31), tomando supremo sobre la colección deconjuntos compactos incluidos en M,

$$\underbrace{\sup_{\substack{K\subseteq M \\ K \text{ compacto}}} g(f,K)}_{g(f)} \leq \underbrace{\sup_{\substack{K\subseteq M \\ K \text{ compacto}}} s(f,K)}_{s(f)} \leq \underbrace{\sup_{\substack{K\subseteq M \\ K \text{ compacto}}} g(f,K)}_{g(f)}$$

Por lo tanto, $g(f) = s(f)$.

Proposición 1. *Sea $f : M \to M$ una función continua definida sobre un espacio métrico compacto (M,d). Entonces $h(f) = g(f) = s(f)$.*

Demostración. Sea α un cubrimiento abierto de M. Por la compacidad de M existe $\epsilon > 0$ tal que 2ϵ es un número de Lebesgue asociado al cubrimiento α, esto es, para cada $A \subseteq M$, con $\text{diám}(A) \leq 2\epsilon$, se tiene que existe $U \in \alpha$ tal que $A \subseteq U$. Así en particular, para cada $x \in M$, existe $U \in \alpha$ tal que $B(x,\epsilon) \subseteq U$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in M$, existe $V \in \alpha^n$ tal que $B(x,n,\epsilon) \subseteq V$. En efecto, dados $x \in M$ y $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $B(x,n,\epsilon) = \bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}\big(B(f^j x,\epsilon)\big)$ y para cada $j \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, existe $U_j \in \alpha$ tal que $B(f^j x,\epsilon) \subseteq U_j$. Así, $B(x,n,\epsilon) \subseteq \bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(U_j) \in \alpha^n$.
Sea $F \subseteq M$ un conjunto (n,ϵ)-generador de M minimal, esto es, $M = \bigcup_{x\in F} B(x,n,\epsilon)$ y $\#F = g_n(f,\epsilon,M)$. Para cada $x \in F$, existe $U_x \in \alpha^n$ tal que $B(x,n,\epsilon) \subseteq U_x$. Así, $\{U_x\}_{x\in F}$ es un subcubrimiento finito de α^n. Así, $N(\alpha^n) \leq \#F = g_n(f,\epsilon,M)$. Por lo tanto,

$$\underbrace{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N(\alpha^n)}_{h(f,\alpha)} \leq \underbrace{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log g_n(f,\epsilon,M)}_{g(f,\epsilon,M).}$$

Hemos mostrado que para cada cubrimiento abierto α de M, existe $\epsilon > 0$ tal que $h(f,\alpha) \leq g(f,\epsilon,M)$. Como la función $\delta \in (0,+\infty) \mapsto g(f,\delta,M)$ es no creciente, se tiene que $h(f,\alpha) \leq g(f,M)$ para cada cubrimiento abierto α de M. Por lo tanto,

$$h(f) = \sup\big\{h(f,\alpha); \alpha \text{ es un cubrimiento abierto de } M\big\} \leq g(f,M) = g(f). \tag{1.32}$$

Dado $\epsilon > 0$, sea α un cubrimiento abierto de M tal que $\text{diám}(\alpha) < \epsilon$. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\beta \subseteq \alpha^n$ tal que $N(\alpha^n) = \#\beta$. Sea $E \subseteq M$ un conjunto (n,ϵ)-separado de M. Sean $x, y \in E \cap V$, con $V \in \beta$. Como $\beta \subseteq \alpha^n$, para cada $j \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ existe $V_j \in \alpha$ tal que $V = \bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(V_j)$. Tenemos que $x, y \in E$ y $x, y \in V$, esto es, $x, y \in f^{-j}(V_j)$ para cada $j \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. Por lo tanto, $x, y \in E$ y, $d\big(f^j(x), f^j(y)\big) \leq \text{diám}(V_j) \leq \text{diám}(\alpha) < \epsilon$ para cada $j \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. Como E es (n,ϵ)-separado, entonces $x = y$. Por lo tanto, para cada $V \in \beta$, $\#(E \cap V) \leq 1$. Como $M = \bigcup_{V\in\beta} V$ y $E \subseteq M$, entonces $E = \bigcup_{V\in\beta}(E \cap V)$ y por lo tanto, $\#E \leq \sum_{V\in\beta} \#(E\cap V) \leq \#(\beta) = N(\alpha^n)$. Así, para cualquier conjunto (n,ϵ)-separado $E \subseteq M$, se tiene que

$$\#E \leq N(\alpha^n).$$

Por ende, en particular concluimos que

$$s_n(f,\epsilon,M) \leq N(\alpha^n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Hemos mostrado que para cada $\epsilon > 0$, existe algún cubrimiento abierto α de M tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $s_n(f,\epsilon,M) \leq N(\alpha^n)$. Por consiguiente, tomando lím sup cuando $n \to +\infty$,

$$\underbrace{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s_n(f,\epsilon,M)}_{s(f,\epsilon,M)} \leq \underbrace{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N(\alpha^n)}_{h(f,\alpha).}$$

Así, para cada $\epsilon > 0$, existe α, cubrimiento abierto de M tal que $s(f,\epsilon,M) \leq h(f,\alpha)$. Como para cada cubrimiento abierto θ de M, $h(f) \geq h(f,\theta)$, tenemos que

$$s(f,\epsilon,M) \leq h(f), \text{ para cada } \epsilon > 0. \tag{1.33}$$

Por lo tanto, en (1.33), haciendo $\epsilon \to 0^+$, tenemos que

$$s(f) = s(f,M) \leq h(f). \tag{1.34}$$

En resumen, de (1.34) tenemos que $s(f) \leq h(f)$. Además, de (1.32), $h(f) \leq g(f)$. Por consiguiente,

$$s(f) \leq h(f) \leq g(f).$$

Dado que del Lema 5, se tiene que $g(f) = s(f)$, concluimos que $h(f) = g(f) = s(f)$. $\square$

Capítulo 2

Resultados principales sobre la GH-estabilidad topológica

2.1. Propiedades de la distancia C^0-*Gromov-Hausdorff*

Sean los espacios métricos (X, d^X) e (Y, d^Y). Consideremos dos homeomorfismos $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$. En caso exista alguna isometría $h : X \to Y$ satisfaciendo que $h \circ f = g \circ h$, diremos que f y g son *isométricos entre sí.*

Además, decimos que una función continua $f : X \to X$, es una *isometría* si f es sobreyectiva, y

$$\text{para todo } z, w \in X,\ d^X\big(f(z), g(w)\big) = d^X(z, w).$$

Por lo tanto, cada isometría es un homeomorfismo.

Teorema 2. *Sean los espacios métricos (X, d^X), (Y, d^Y) y (Z, d^Z). Dadas las funciones $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$, tenemos que:*

(1) $d_{GH^0}(f, g) \leq d_{C^0}(f, g)$, *siempre que $X = Y$. Además, la desigualdad puede ser estricta.*

(2) $d_{GH}(X, Y) \leq d_{GH^0}(f, g)$. *Y si $f = \mathrm{Id}_X$ y $g = \mathrm{Id}_Y$, entonces*

$$d_{GH}(X, Y) = d_{GH^0}(f, g).$$

(3) *Si X e Y son compactos, y g es continua entonces: $d_{GH^0}(f, g) = 0$ si, y solamente si, f y g son isométricos entre sí.*

(4) $d_{GH^0}(f,g) = d_{GH^0}(g,f)$.

(5) *Para cada homeomorfismo* $h : Z \to Z$, *se tiene que*

$$d_{GH^0}(f,g) \leq 2 \cdot \big(d_{GH^0}(f,h) + d_{GH^0}(h,g)\big).$$

(6) $d_{GH^0}(f,g) \geq 0$. *Además,* $d_{GH^0}(f,g) < \infty$ *siempre que* X *e* Y *sean espacios métricos acotados.*

(7) *Sean* $\big(g_m : Y_m \to Y_m\big)_{m\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de isometrías, y sea* X *compacto satisfaciendo que*

$$\lim_{m\to\infty} d_{GH^0}(g_m, f) = 0.$$

Entonces f *es también una isometría.*

Demostración del Teorema 2. (1): Sean X e Y dos espacios métricos tales que $X = Y$. Sea $\Lambda > d_{C^0}(f,g)$ y sean $i = \mathrm{Id}_X = j$, donde Id_X representa a la función identidad sobre X. Por ende, i y j son isometrías. En particular, para cualquier $\rho > 0$, i y j son ρ-isometrías, satisfaciendo que:

$$d_{C^0}(g\circ i, i\circ f) = d_{C^0}(g,f) < \Lambda; \text{ y}$$
$$d_{C^0}(f\circ j, j\circ g) = d_{C^0}(f,g) < \Lambda.$$

Por ende, $d_{GH^0}(f,g) \leq \Lambda$. De este modo,

$$d_{GH^0}(f,g) \leq \Lambda, \text{ para todo } \Lambda > d_{C^0}(f,g). \tag{2.1}$$

Haciendo tender Λ a $d_{C^0}(f,g)$ en (2.1), $\Lambda \to d_{C^0}(f,g)$, concluimos que

$$d_{GH^0}(f,g) \leq d_{C^0}(f,g).$$

Consideremos dos homeomorfismos diferentes f y g sobre X, pero isométricos entre sí. Del ítem (3) del Teorema 2, $d_{GH^0}(f,g) = 0$. Por otro lado, como f y g son homeomorfismos diferentes entonces $d_{C^0}(f,g) > 0$. Así,

$$d_{C^0}(f,g) > 0 = d_{GH^0}(f,g).$$

(2): Sean $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos homeomorfismos. Dado $\epsilon > 0$, de la definición de $d_{GH^0}(f,g)$,

$$\text{existe } \Lambda < d_{GH^0}(f,g) + \epsilon, \tag{2.2}$$

tal que

$$d_{C^0}(i \circ f, g \circ i) < \Lambda; \text{ y}$$
$$d_{C^0}(j \circ g, f \circ j) < \Lambda.$$

para algunas funciones $i : X \to Y$ y $j : Y \to X$, las cuales son Λ-isometrías. Por ende,

$$d_{GH}(X, Y) \leq \Lambda. \tag{2.3}$$

Por lo tanto, de (2.2) y (2.3), concluimos que

$$d_{GH}(X, Y) < d_{GH^0}(f, g) + \epsilon. \tag{2.4}$$

Por consiguiente,

$$d_{GH}(X, Y) \leq d_{GH^0}(f, g), \tag{2.5}$$

desde que $\epsilon > 0$ fue arbitrario en (2.4).

Por otro lado, supongamos que $f = \mathrm{Id}_X$ y $g = \mathrm{Id}_Y$. Dado $\epsilon > 0$, de la definición de $d_{GH}(X, Y)$, existen dos Λ-isometrías $i : X \to Y$ y $j : Y \to X$, para algún $\Lambda < d_{GH}(X, Y) + \epsilon$.
Además, tenemos que

$$d_{C^0}\big(i \circ f, g \circ i\big) = d_{C^0}(i \circ \mathrm{Id}_X, \mathrm{Id}_Y \circ i) = 0 < \Lambda, \text{ y}$$
$$d_{C^0}\big(j \circ g, f \circ j)\big) = d_{C^0}(j \circ \mathrm{Id}_Y, \mathrm{Id}_X \circ j) = 0 < \Lambda,$$

puesto que $f = \mathrm{Id}_X$ y $g = \mathrm{Id}_Y$. Por ende,

$$d_{GH^0}(f, g) \leq \Lambda. \tag{2.6}$$

Por lo tanto, desde que $\Lambda < d_{GH}(X, Y) + \epsilon$, de (2.6), deducimos que

$$d_{GH^0}(f, g) < d_{GH}(X, Y) + \epsilon. \tag{2.7}$$

Por consiguiente, $d_{GH^0}(f, g) \leq d_{GH}(X, Y)$, desde que ϵ representaba a cualquier real positivo en (2.7). Así, de (2.5), concluimos que $d_{GH^0}(f, g) = d_{GH}(X, Y)$ cuando $f = \mathrm{Id}_X$ y $g = \mathrm{Id}_Y$.

(3): Consideremos los homeomorfismo $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ satisfaciendo que $h \circ f = g \circ h$, para alguna isometría $h : X \to Y$. Es decir, f y g son isométricos entre sí. Por ende, $h^{-1} \circ g = f \circ h^{-1}$ ya que $h \circ f = g \circ h$. Por consiguiente, $h : X \to Y$ y $h^{-1} : Y \to X$ son isometrías, verificando que

$$d_{C^0}(g \circ h, h \circ f) = 0 < \Lambda; \text{ y}$$
$$d_{C^0}(f \circ h^{-1}, h^{-1} \circ g) = 0 < \Lambda.$$

para cualquier $\Lambda > 0$. Además, h y h^{-1} son Λ-isometrías para todo $\Lambda > 0$, desde que h y h^{-1} son isometrías. Por ende,

$$d_{GH^0}(f, g) \leq \Lambda.$$

Como $\Lambda > 0$ fue arbitrario, tenemos que

$$d_{GH^0}(f, g) = 0.$$

Recíprocamente, sean $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos homeomorfismos tales que

$$d_{GH^0}(f, g) = 0.$$

Donde X e Y son compactos. De la definición de $d_{GH^0}(f, g)$, puesto que

$$d_{GH^0}(f, g) = 0 < \frac{1}{n}, \text{ para cualquier } n \in \mathbb{N};$$

se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$ existen Λ_n-isometrías $i_n : X \to Y$ y $j_n : Y \to X$, no necesariamente continuas, donde $\Lambda_n < 1/n$, satisfaciendo que

$$d_{C^0}(g \circ i_n, i_n \circ f) < \Lambda_n; \tag{2.8}$$
$$d_{C^0}(f \circ j_n, j_n \circ g) < \Lambda_n. \tag{2.9}$$

De la compacidad del conjunto X, considere $A \subseteq X$, un subconjunto numerable denso en X. Sea

$$B = \{f^n(a); a \in A \text{ y } n \in \mathbb{N}_0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} f^n(A),$$

donde $f^n(A) = \{f^n(a); a \in A\}$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$. Como A es numerable, entonces $f^n(A)$ es también numerable para cada $n \in \mathbb{N}_0$. Por lo tanto, $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} f^n(A)$ es numerable. Además,

$$f^k(B) \subset B \, \mathrm{para cada} k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.10}$$

En efecto, sea $x \in B$ y $k \in \mathbb{N}_0$. Mostremos que $f^k(x) \in B$. Como $x \in B$, entonces existen $a \in A$ e $i \in \mathbb{N}_0$, tales que $x = f^i(a)$. Así, tenemos que

$$f^k(x) = f^k(f^i(a)) = f^{k+i}(a),$$

donde $k + i \in \mathbb{N}_0$ y $a \in A$. Por lo tanto, $f^k(x) \in B$.

Consideremos la notación $B = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, desde que B es un conjunto numerable.

Lema 6. *Bajo las hipótesis anteriores, en el ítem* (3) *del* Teorema 2 *, siendo X e Y espacios métricos compactos, existe una isometría $\bar{i} : X \to Y$, verificando que $\bar{i} \circ f = g \circ \bar{i}$. Esto es, g y f son homeomorfismos isométricos entre sí.*

Demostración del Lema 6. Tenemos que $B = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset Y$ es numerable y denso en Y. De la compacidad de Y, toda sucesión en Y admite al menos una subsucesión convergente a algún punto de Y. Por ende para $\big(i_n(b_1)\big)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$, existe $\big(i_{k_n^1}(b_1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, subsucesión de $\big(i_n(b_1)\big)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$, satisfaciendo que

$$\lim_{n\to\infty} i_{k_n^1}(b_1) = i(b_1),$$

para algún $i(b_1) \in Y$.

Nuevamente, puesto que Y es compacto, para $\big(i_{k_n^1}(b_2)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ existen $i(b_2) \in Y$ y alguna subsucesión $\big(i_{k_n^2}(b_2)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\big(i_{k_n^1}(b_2)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, satisfaciendo que

$$\lim_{n\to\infty} i_{k_n^2}(b_2) = i(b_2).$$

Por ende, $(k_n^2)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (k_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$.

Una vez más, dado que Y es compacto, para $\big(i_{k_n^2}(b_3)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ existen $i(b_3) \in Y$ y alguna subsucesión $\big(i_{k_n^3}(b_3)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\big(i_{k_n^2}(b_3)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, verificando que

$$\lim_{n\to\infty} i_{k_n^3}(b_3) = i(b_3).$$

Por lo tanto, $(k_n^3)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (k_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sea $m \in \mathbb{N}$. Si existe una sucesión estrictamente creciente $(k_n^m)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$, y existe $i(b_m) \in Y$ verificando que

$$\lim_{n\to\infty} i_{k_n^m}(b_m) = i(b_m);$$

entonces para la sucesión $\big(i_{k_n^m}(b_{m+1})\big)_{n\in\mathbb{N}}$, existe alguna subsucesión $\big(i_{k_n^{m+1}}(b_{m+1})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\big(i_{k_n^m}(b_{m+1})\big)_{n\in\mathbb{N}}$, y existe $i(b_{m+1}) \in Y$, satisfaciendo que

$$\lim_{n\to\infty} i_{k_n^{m+1}}(b_{m+1}) = i(b_{m+1}),$$

todo ello desde que Y es un espacio métrico compacto.

Así, de este modo, inductivamente, tenemos definida la sucesión estrictamente creciente $(k_n^m)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ e $i(b_m) \in Y$, para todo $m \in \mathbb{N}$, satisfaciendo las siguientes dos condiciones:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} i_{k_n^m}(b_m) = i(b_m)$, para cualquier $m \in \mathbb{N}$.

(ii) $(k_n^{m+1})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (k_n^m)_{n\in\mathbb{N}}$, para cualquier $m \in \mathbb{N}$.

Sea $\big(\sigma(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, una sucesión definida por

$$\sigma(n) = k_n^n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Fijemos $m \in \mathbb{N}$. Puesto que $\big(\sigma(n)\big)_{n\geq m}$ es una subsucesión de $(k_n^m)_{n\geq m}$, entonces $\big(i_{\sigma(n)}(b_m)\big)_{n\geq m}$ es una subsucesión de $\big(i_{k_n^m}(b_m)\big)_{n\geq m}$. Por consiguiente, de (i),

$$\lim_{n\to\infty} i_{\sigma(n)}(b_m) = i(b_m).$$

Dado que m representó a un número natural arbitrario, y puesto que $B = \{b_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, podemos definir $i : B \to Y$, de la siguiente manera

$$i(b_m) = \lim_{n\to\infty} i_{\sigma(n)}(b_m) \text{ para todo } m \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

Veamos que i es una función que preserva distancias. En efecto, en principio fijemos $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que, para cualesquiera $w, w' \in B$,

$$d^X(w,w') + \Lambda_n > d^Y\big(i_n(w), i_n(w')\big) > d^X(w,w') - \Lambda_n,$$

dado que i_n es una Λ_n-isometría. Por ende, desde que $\Lambda_n < \dfrac{1}{n}$,

$$d^X(w,w') + \frac{1}{n} > d^Y\big(i_n(w), i_n(w')\big) > d^X(w,w') - \frac{1}{n}.$$

Por consiguientes, para cualesquiera $w, w' \in B$,

$$d^X(w,w') + \frac{1}{\sigma(n)} > d^Y\big(i_{\sigma(n)}(w), i_{\sigma(n)}(w')\big) > d^X(w,w') - \frac{1}{\sigma(n)}.$$

Puesto que $n \in \mathbb{N}$, representó a un número natural cualquiera, tenemos que dados $w, w' \in B$, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$d^X(w,w') + \frac{1}{\sigma(n)} > d^Y\big(i_{\sigma(n)}(w), i_{\sigma(n)}(w')\big) > d^X(w,w') - \frac{1}{\sigma(n)}. \tag{2.12}$$

Así, en (2.12), tomando límite cuando n tiende a $+\infty$, concluimos que para cualesquiera $w, w' \in B$,

$$d^X(w, w') \geq d^Y\big(i(w), i(w')\big) \geq d^X(w, w').$$

Por ende,

$$d^Y\big(i(w), i(w')\big) = d^X(w, w') \text{ para cualesquiera } w, w' \in B. \tag{2.13}$$

Definamos la función $\bar{i} : X \to Y$, como una extensión natural de $i : B \to Y$, de la siguiente manera

$$\bar{i}(w) = \begin{cases} i(w) & \text{, si } w \in B \\ \lim\limits_{n\to+\infty} i(w_n) & \text{, siempre que } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B \text{ satisfaga que } \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = w. \end{cases}$$

Observe que dado que $\overline{B} = X$, para cada $w \in X \setminus B$, existe al menos una sucesión de puntos en B que converge a w.
Se tiene que $\bar{i} : X \to Y$ está bien definida. En efecto, sean $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dos sucesiones en B verificando que

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} z_n = \alpha_0 \in X \setminus B; \tag{2.14}$$

mostraremos que $\lim\limits_{n\to+\infty} i(w_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} i(z_n)$.
Definamos la sucesión $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ del siguiente modo:

$$\theta_n = \begin{cases} w_{\frac{n}{2}} \text{ , si } n \in \mathbb{N} \text{ es par,} \\ z_{\frac{n+1}{2}} \text{ , si } n \in \mathbb{N} \text{ es impar.} \end{cases}$$

De (2.14), tenemos que $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ es una sucesión convergente tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \theta_n = \alpha_0.$$

Por ende, $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ es una sucesión de Cauchy. Esto es, para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d^X(\theta_n, \theta_m) < \epsilon, \text{ siempre que } n, m \geq n_0.$$

Por lo tanto, desde que $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$, de (2.13), concluimos que para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d^Y\big(i(\theta_n), i(\theta_m)\big) = d^X(\theta_n, \theta_m) < \epsilon, \text{ siempre que } n, m \geq n_0.$$

Es decir, $\big(i(\theta_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio métrico compacto Y. Dado que todo espacio métrico compacto es un espacio métrico completo, tenemos que $\big(i(\theta_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente en Y. De la definición de $\big(\theta_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, se deduce que

$$i(\theta_n) = \begin{cases} i(w_{\frac{n}{2}}) \ , \ \text{si } n \in \mathbb{N} \text{ es par}, \\ i(z_{\frac{n+1}{2}}) \ , \ \text{si } n \in \mathbb{N} \text{ es impar}. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to+\infty} i(\theta_{2n}) = \lim_{n\to+\infty} i(\theta_{2n-1}),$$

desde que $\big(i(\theta_{2n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\big(i(\theta_{2n-1})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ son subsucesiones de la sucesión convergente $\big(i(\theta_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Así, dado que $i(\theta_{2n}) = i(w_n)$ y $i(\theta_{2n-1}) = i(z_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se deduce que

$$\lim_{n\to+\infty} i(w_n) = \lim_{n\to+\infty} i(z_n),$$

Por consiguiente, $\bar{i} : X \to Y$ está bien definida.

Dados $z, w \in X$, dado que $\overline{B} = X$, existen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ y $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ satisfaciendo que

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to+\infty} w_n = w.$$

Por ende, de (2.13),

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} d^Y\big(i(z_n), i(w_n)\big)}_{d^Y\left(\bar{i}(z), \bar{i}(w)\right)} = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} d^X\big(z_n, w_n\big)}_{d^X(z,w).}$$

Por tanto,

$$\text{para cualesquiera } z, w \in X,\ d^Y\big(\bar{i}(z), \bar{i}(w)\big) = d^X(z, w). \tag{2.15}$$

Mostremos ahora que $\bar{i} : X \to Y$ es sobreyectiva. Sean $x \in X$ e $y \in Y$, tenemos que

$$\lim_{m\to\infty} d^X(b_m^x, x) = 0,$$

para alguna sucesión $(b_m^x)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq B$, puesto que $\overline{B} = X$. De la desigualdad triangular de la métrica d^Y, para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ concluimos que,

$$\begin{aligned} & d^Y\big(y, i_n(b_m^x)\big) \leq d^Y\big(y, i_n(x)\big) + d^Y\big(i_n(x), i_n(b_m^x)\big), \\ \text{y} \qquad & d^Y\big(y, i_n(x)\big) \leq d^Y\big(y, i_n(b_m^x)\big) + d^Y\big(i_n(b_m^x), i_n(x)\big). \end{aligned}$$

Por ende, para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\left| d^Y\big(y, i_n(b_m^x)\big) - d^Y\big(y, i_n(x)\big) \right| \leq d^Y\big(i_n(b_m^x), i_n(x)\big). \tag{2.16}$$

Además, para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$,

$$d^Y\big(i_n(b_m^x), i_n(x)\big) < d^X(b_m^x, x) + \Lambda_n, \tag{2.17}$$

desde que i_n es una Λ_n-isometría. Por consiguiente, para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$.

$$\left| d^Y\big(y, i_n(b_m^x)\big) - d^Y\big(y, i_n(x)\big) \right| < d^X(b_m^x, x) + \frac{1}{n},$$

desde que se verifican (2.16) y (2.17), y $\Lambda_n < \dfrac{1}{n}$. Por ende, para cada $m, n \in \mathbb{N}$,

$$d^Y\big(y, i_n(b_m^x)\big) < d^Y\big(y, i_n(x)\big) + d^X(b_m^x, x) + \frac{1}{n}.$$

Por consiguiente, desde que $d\big(y, i_n(B)\big)$ es el ínfimo de las distancias entre y y puntos de $i_n(B)$, concluimos que para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$,

$$d\big(y, i_n(B)\big) < d^Y(y, i_n(x)) + d^X(b_m^x, x) + \frac{1}{n}. \tag{2.18}$$

Así, tomando límite cuando m tiende a $+\infty$, en (2.18), se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$d\big(y, i_n(B)\big) \leq d^Y\big(y, i_n(x)\big) + \frac{1}{n}.$$

Dado que x representa a un punto arbitrario de X, tomando ínfimo $\inf\limits_{x \in X}$ a ambos lados de la desigualdad anterior, se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\inf_{x \in X} d\big(y, i_n(B)\big) \leq \inf_{x \in X} \left(d^Y\big(y, i_n(x)\big) + \frac{1}{n} \right)$$

$$d\big(y, i_n(B)\big) \leq d\big(y, i_n(X)\big) + \frac{1}{n}. \tag{2.19}$$

Desde que y representa a un punto cualquiera de Y, considerando el supremo sobre los puntos y en Y, $\sup\limits_{y \in Y}$, al lado izquierdo y derecho de la desigualdad dada en (2.19), concluimos que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{y \in Y} d\big(y, i_n(B)\big) \leq \sup_{y \in Y} \left(d\big(y, i_n(X)\big) + \frac{1}{n} \right)$$

$$d_H\big(Y, i_n(B)\big) \leq d_H\big(Y, i_n(X)\big) + \frac{1}{n}. \tag{2.20}$$

Por otro lado, dado que i_n es una Λ_n-isometría, con $\Lambda_n < \dfrac{1}{n}$, se tiene que

$$d_H\big(Y, i_n(X)\big) < \Lambda_n < \frac{1}{n}. \tag{2.21}$$

Por lo tanto, de (2.20) y (2.21), para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\underbrace{d_H\big(i_n(B), Y\big)}_{\sup\limits_{z\in Y} d\big(z, i_n(B)\big)} < \frac{2}{n}.$$

Por tanto, para todo $y \in Y$ se tiene que $d\big(y, i_n(B)\big) < \dfrac{2}{n}$. Esto es, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\inf_{\omega\in B} d^Y\big(y, i_n(\omega)\big) < \frac{2}{n}. \tag{2.22}$$

Fijemos $y \in Y$. De (2.22), para todo $n \in \mathbb{N}$, existe al menos un $\mu_n \in B$ satisfaciendo que

$$d^Y\big(y, i_n(\mu_n)\big) < \frac{2}{n}.$$

Por consiguiente, para cada $y \in Y$ existe una sucesión $\big(\mu_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ en $B \subset X$, satisfaciendo que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$d^Y\big(y, i_n(\mu_n)\big) < \frac{2}{n}.$$

Por consiguiente,

$$\text{para todo } n \in \mathbb{N},\ d^Y\big(y, i_{\sigma(n)}(\mu_{\sigma(n)})\big) < \frac{2}{\sigma(n)}. \tag{2.23}$$

Así, desde que X es compacto, existe al menos una subsucesión $(\mu_{\rho(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $(\mu_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ en $B \subset X$, y existe $w \in X$ verificando que

$$\lim_{n\to\infty} d^X(\mu_{\rho(n)}, w) = 0. \tag{2.24}$$

Tenemos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d^Y(y,\bar{i}(w)) &\leq d^Y\big(y, i_{\rho(n)}(\mu_{\rho(n)})\big) + d^Y\big(i_{\rho(n)}(\mu_{\rho(n)}), i_{\rho(n)}(w)\big) + d^Y\big(i_{\rho(n)}(w), \bar{i}(w)\big) \\ &\leq d^Y\big(y, i_{\rho(n)}(\mu_{\rho(n)})\big) + \left(d^X(\mu_{\rho(n)}, w) + \frac{1}{\rho(n)}\right) + d^Y\big(i_{\rho(n)}(w), \bar{i}(w)\big), \end{aligned} \tag{2.25}$$

desde que $i_{\rho(n)}$ es una $\frac{1}{\rho(n)}$-isometría para todo $n \in \mathbb{N}$. De (2.23) y (2.25), se tiene que

$$\begin{aligned} d^Y\big(y, \bar{i}(w)\big) &\leq d^Y\big(y, i_{\rho(n)}(\mu_{\rho(n)})\big) + d^Y\big(i_{\rho(n)}(\mu_{\rho(n)}), i_{\rho(n)}(w)\big) + d^Y\big(i_{\rho(n)}(w), \bar{i}(w)\big) \\ &\leq \quad \frac{2}{\rho(n)} \quad + \left(d^X(\mu_{\rho(n)}, w) + \frac{1}{\rho(n)}\right) + d^Y\big(i_{\rho(n)}(w), \bar{i}(w)\big). \end{aligned}$$

Por ende,

$$d^Y\big(y, \bar{i}(w)\big) \leq \frac{3}{\rho(n)} + d^X(\mu_{\rho(n)}, w) + d^Y\big(i_{\rho(n)}(w), \bar{i}(w)\big), \tag{2.26}$$

En este punto, tenemos dos posibilidades: $w \in B$ o $w \in X \setminus B$.

- **Caso I.** Supongamos que $w \in B$. De (2.11), tenemos que

$$i(w) = \lim_{n\to\infty} i_{\rho(n)}(w), \tag{2.27}$$

dado que $w \in B$.

Puesto que $\bar{i}(w) = i(w)$, tomando límite cuando n tiende a $+\infty$ a ambos lados de la desigualdad en (2.26), de (2.24) y (2.27), concluimos que $d^Y(y, \bar{i}(w)) = 0$. Por lo tanto, $y = \bar{i}(w)$.

- **Caso II.** Supongamos que $w \in X \setminus B$. Tenemos que $\lim_{k\to+\infty} \ell_k = w$, para alguna sucesión $(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq B$ desde que $\overline{B} = X$.

Consideremos $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$. De la desigualdad triangular para la métrica d^Y,

$$d^Y\left(i_{\rho(n)}(w), \bar{i}(w)\right) \leq d^Y\left(i_{\rho(n)}(w), i_{\rho(n)}(\ell_k)\right) + d^Y\left(i_{\rho(n)}(\ell_k), \bar{i}(\ell_k)\right) + d^Y\left(\bar{i}(\ell_k), \bar{i}(w)\right). \tag{2.28}$$

De (2.15), $d^Y\left(\bar{i}(\ell_k), \bar{i}(w)\right) = d^X\left(\ell_k, w\right)$. Además,

$$d^Y\left(i_{\rho(n)}(w), i_{\rho(n)}(\ell_k)\right) < d^X(w, \ell_k) + \frac{1}{\rho(n)},$$

desde que $i_{\rho(n)}$ es una $\frac{1}{\rho(n)}$-isometría. Por ende, de (2.28),

$$\begin{aligned} d^Y\left(i_{\rho(n)}(w), \bar{i}(w)\right) &\leq d^Y\left(i_{\rho(n)}(w), i_{\rho(n)}(\ell_k)\right) + d^Y\left(i_{\rho(n)}(\ell_k), \bar{i}(\ell_k)\right) + d^Y\left(\bar{i}(\ell_k), \bar{i}(w)\right) \\ &\leq \left(d^X(w, \ell_k) + \frac{1}{\rho(n)}\right) + d^Y\left(i_{\rho(n)}(\ell_k), i(\ell_k)\right) + d^X(\ell_k, w). \end{aligned}$$

Así, para cualesquiera $k, n \in \mathbb{N}$,

$$d^Y\left(i_{\rho(n)}(w), \bar{i}(w)\right) \leq 2 \cdot d^X(w, \ell_k) + \frac{1}{\rho(n)} + d^Y\left(i_{\rho(n)}(\ell_k), i(\ell_k)\right). \tag{2.29}$$

De la definición de $i : B \to Y$, en (2.11), se concluye que

$$\lim_{n\to+\infty} d^Y\left(i_{\rho(n)}(\ell_k), i(\ell_k)\right) = 0, \tag{2.30}$$

dado que $(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos en B. Por ende, considerando el límite superior cuando n tiende a $+\infty$, a ambos lados de la desigualdad (2.29),

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} d^Y\left(i_{\rho(n)}(w), \bar{i}(w)\right) &\leq \limsup_{n\to\infty} \left(2 \cdot d^X(w, \ell_k) + \frac{1}{\rho(n)} + d^Y\left(i_{\rho(n)}(\ell_k), i(\ell_k)\right)\right) \\ &\leq 2 \cdot d^X(w, \ell_k) + \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\rho(n)} + d^Y\left(i_{\rho(n)}(\ell_k), i(\ell_k)\right)\right). \end{aligned}$$

Por ende, usando (2.30) en la desigualdad anterior, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\limsup_{n\to\infty} d^Y\big(i_{\rho(n)}(w), \bar{i}(w)\big) \leq 2 \cdot d^X(\ell_k, w). \tag{2.31}$$

Considerando el límite superior cuando $n \to +\infty$, a ambos lados de la desigualdad (2.26), y de (2.24), concluimos que

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to+\infty} d^Y\big(y, \bar{i}(w)\big) &\leq \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{\rho(n)}}_{0} + \underbrace{\lim_{n\to+\infty} d^X(\mu_{\rho(n)}, w)}_{0} + \limsup_{n\to+\infty} d^Y\big(i_{\rho(n)}(w), \bar{i}(w)\big),\\
&\leq \limsup_{n\to+\infty} d^Y\big(i_{\rho(n)}(w), \bar{i}(w)\big).
\end{aligned}$$

Por consiguiente, de (2.31), en la desigualdad anterior, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$d^Y\big(y, \bar{i}(w)\big) \leq 2 \cdot d^X(\ell_k, w).$$

Por ende, $d^Y\big(y, \bar{i}(w)\big) = 0$, puesto que $\lim_{k\to\infty} d^X(\ell_k, w) = 0$. Por consiguiente, $y = \bar{i}(w)$.

Sea en el caso I, o en el caso II, tenemos que $\bar{i} : X \to Y$ es sobreyectiva.

Por otro lado, para todo $x \in X$ se tiene que $d^Y\big(g(i_n(x)), i_n(f(x))\big) < \frac{1}{n}$, gracias a (2.8), y ya que $\Lambda_n < \frac{1}{n}$. Por consiguiente, para todo $b \in B$

$$d^Y\big(g(i_{\rho(n)}(b)), i_{\rho(n)}(f(b))\big) < \frac{1}{\rho(n)}. \tag{2.32}$$

Además, de la definición de $i : B \to Y$ en (2.11), para todo $b \in B$, se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} i_{\rho(n)}\big(f(b)\big) = i\big(f(b)\big), \tag{2.33}$$

dado que, de (2.10), $f(b) \in B$ siempre que $b \in B$.

Ahora, puesto que de (2.11), $\lim_{n\to+\infty} i_{\rho(n)}(b) = i(b)$ para todo $b \in B$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} g\big(i_{\rho(n)}(b)\big) = g\big(i(b)\big), \tag{2.34}$$

desde que $g : Y \to X$ es continua. Por consiguiente, tomando límite cuando n tiende a $+\infty$ a ambos lados de (2.32), de (2.33) y (2.34), se concluye que para todo $b \in B$,

$$\lim_{n\to+\infty} d^Y\big(g(i_{\rho(n)}(b)), i_{\rho(n)}(f(b))\big) \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\rho(n)}$$

$$d^Y\left(\underbrace{\lim_{n\to+\infty} g(i_{\rho(n)}(b))}_{g(i(b))}, \underbrace{\lim_{n\to+\infty} i_{\rho(n)}(f(b))}_{i(f(b))}\right) \leq 0$$

Por lo tanto, para todo $b \in B$,

$$g\big(i(b)\big) = i\big(f(b)\big). \tag{2.35}$$

Como $\overline{B} = X$, tenemos que $g \circ \bar{i} = \bar{i} \circ f$. En efecto, sea $\omega_0 \in X$. Entonces existe alguna sucesión $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formada por puntos en B satisfaciendo que

$$\lim_{n\to+\infty} \omega_n = \omega_0. \tag{2.36}$$

Por lo tanto $\bar{i}(\omega_0) = \lim\limits_{n\to\infty} i(\omega_n)$, gracias a la definición de $\bar{i}$. Por consiguiente,

$$g\big(\bar{i}(\omega_0)\big) = \lim_{n\to+\infty} g\big(i(\omega_n)\big), \tag{2.37}$$

dado que g es continua. Además, $f(\omega_0) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(\omega_n)$, desde que se cumple (2.36) y gracias a que f es continua. Por lo tanto,

$$\bar{i}\big(f(\omega_0)\big) = \lim_{n\to+\infty} i\big(f(\omega_n)\big), \tag{2.38}$$

gracias a la definición de $\bar{i}$, y puesto que $f(\omega_n) \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de (2.10). De (2.35), dado que $\omega_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se concluye que

$$g\big(i(\omega_n)\big) = i\big(f(\omega_n)\big) \text{ para cualquier } n \in \mathbb{N}.$$

Considerando el límite cuando n tiende a $+\infty$, en ambos lados la igualdad anterior, se tiene que, de (2.37) y (2.38),

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} g\big(i(\omega_n)\big)}_{g(\bar{i}(\omega_0))} = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} i\big(f(\omega_n)\big)}_{\bar{i}(f(\omega_0))}.$$

Por ende, desde que ω_0 representó a un punto cualquiera de X, concluimos que

$$g\big(\bar{i}(\omega_0)\big) = \bar{i}\big(f(\omega_0)\big) \text{ para cada } \omega_0 \in X. \tag{2.39}$$

Por tanto, existe una isometría $\bar{i} : X \to Y$ verificando que $g \circ \bar{i} = \bar{i} \circ f$. Esto prueba que f y g son isométricos entre sí, de este modo culminamos la demostración del Lema 6. $\square$

(4): Sean $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos homeomorfismos. De la definición de distancia C^0-Gromov-Hausdorff, dada en (1.5),

$$\begin{aligned} d_{GH^0}(f,g) &= \text{ínf}\,\big\{\mu > 0;\ \exists\,\mu\text{-isometrías } k : X \to Y, l : Y \to X \text{ satisfaciendo} \\ &\qquad d_{C^0}(k\circ f, g\circ k) < \mu \text{ y } d_{C^0}(l\circ g, f\circ l) < \mu\big\} \\ &= \text{ínf}\,\big\{\mu > 0;\ \exists\,\mu\text{-isometrías } l : Y \to X, k : X \to Y, \text{ satisfaciendo} \\ &\qquad d_{C^0}(l\circ g, f\circ l) < \mu \text{ y } d_{C^0}(k\circ f, g\circ k) < \mu\big\} \\ &= d_{GH^0}(g,f). \end{aligned}$$

(5): Sean los homeomorfismos $f : X \to X$, $h : Z \to Z$ y $g : Y \to Y$. Mostremos que

$$d_{GH^0}(f,g) \le 2\cdot \Big[d_{GH^0}(f,h) + d_{GH^0}(h,g)\Big].$$

Sea $\epsilon > 0$. De la definición de $d_{GH^0}(f,h)$ tenemos que existen $i : X \to Z$ y $j : Z \to X$, Λ_1-isometrías, para algún $\Lambda_1 \in]0, d_{GH^0}(f,h)+\epsilon[$ satisfaciendo que

$$d_{C^0}(i\circ f, h\circ i) < \Lambda_1, \tag{2.40}$$

$$\text{y}\quad d_{C^0}(j\circ h, f\circ j) < \Lambda_1. \tag{2.41}$$

De manera similar, de la definición de $d_{GH^0}(h,g)$ se tiene que existen $k : Y \to Z$ y $l : Z \to Y$, Λ_2-isometrías, para algún $\Lambda_2 \in]0, d_{GH^0}(h,g)+\epsilon[$ verificando que

$$d_{C^0}(k\circ g, h\circ k) < \Lambda_2, \tag{2.42}$$

$$\text{y}\quad d_{C^0}(l\circ h, g\circ l) < \Lambda_2. \tag{2.43}$$

Claramente, de la definición de Λ-isometría tenemos que, dado $\Delta_1 > 0$, toda Δ_1-isometría es una Δ_2-isometría, siempre que $\Delta_2 > \Delta_1$.
Mostremos que las funciones $j\circ k : Y \to X$ y $l\circ i : X \to Y$ son $2(\Lambda_1+\Lambda_2)$-isometrías. Dado que la distancia de Hausdorff d_H en Y satisface la desigualdad triangular,

$$d_H\big((l\circ i)(X), Y\big) \le d_H\big((l\circ i)(X), l(Z)\big) + d_H\big(l(Z), Y\big).$$

Además, como l es Λ_2-isometría se tiene que $d_H\big(l(Z), Y\big) < \Lambda_2$. Por ende,

$$d_H\big((l\circ i)(X), Y\big) < d_H\big((l\circ i)(X), l(Z)\big) + \Lambda_2, \tag{2.44}$$

De la definición de distancia de Hausdorff d_H entre $(l\circ i)(X)$ y $l(Z)$,

$$d_H\big((l\circ i)(X), l(Z)\big) = \text{máx}\left\{\sup_{a\in X} d\big((l\circ i)(a), l(Z)\big), \sup_{b\in Z} d\big(l(b), (l\circ i)(X)\big)\right\}. \tag{2.45}$$

Tenemos que para cualesquiera $z \in Z$ y $a \in X$,

$$d^Y\big((l \circ i)(a), l(z)\big) < d^Z\big(i(a), z\big) + \Lambda_2,$$

gracias a que l es una Λ_2-isometría. Por lo tanto, tomando ínfimo sobre los puntos z en Z a ambos lados de la desigualdad anterior, se tiene que para todo $a \in X$,

$$\begin{aligned}
\inf_{z\in Z}\Big[d^Y\big((l \circ i)(a), l(z)\big)\Big] &\leq \inf_{z\in Z}\Big[d^Z\big(i(a), z\big) + \Lambda_2\Big] \\
\underbrace{\inf_{z\in Z}\Big[d^Y\big((l \circ i)(a), l(z)\big)\Big]}_{d\big((l\circ i)(a),\, l(Z)\big)} &\leq \underbrace{\inf_{z\in Z}\Big[d^Z\big(i(a), z\big)\Big]}_{d\big(i(a),\, Z\big)} + \Lambda_2.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Por lo tanto, tomando supremo, respecto a los puntos a en X, a ambos lados de la desigualdad (2.46), concluimos que

$$\sup_{a\in X}\Big[d\big((l \circ i)(a), l(Z)\big)\Big] \leq \sup_{a\in X}\Big[d\big(i(a), Z\big)\Big] + \Lambda_2. \tag{2.47}$$

De manera similar, para cualesquiera $b \in Z$ y $x \in X$,

$$d^Y\big(l(b), (l \circ i)(x)\big) < d^Z(b, i(x)) + \Lambda_2,$$

puesto que l es una Λ_2-isometría. Por ende, tomando ínfimo sobre los puntos x en X a ambos lados de la desigualdad anterior, se tiene que para todo $b \in Z$,

$$\begin{aligned}
\inf_{x\in X}\Big[d^Y\big(l(b), (l \circ i)(x)\big)\Big] &\leq \inf_{x\in X}\Big[d^Z\big(b, i(x)\big) + \Lambda_2\Big] \\
\underbrace{\inf_{x\in X}\Big[d^Y\big(l(b), (l \circ i)(x)\big)\Big]}_{d^Y\big(l(b),\, (l\circ i)(X)\big)} &\leq \underbrace{\inf_{x\in X}\Big[d^Z\big(b, i(x)\big)\Big]}_{d^Z\big(b,\, i(X)\big)} + \Lambda_2.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Por lo tanto, tomando supremo, respecto a los puntos b en Z, a ambos lados de la desigualdad (2.48), se tiene que

$$\sup_{b\in Z}\Big[d\big(l(b), (l \circ i)(X)\big)\Big] \leq \sup_{b\in Z}\Big[d\big(b, i(X)\big)\Big] + \Lambda_2. \tag{2.49}$$

Por consiguiente, de (2.45), (2.47) y (2.49), se deduce que

$$\begin{aligned}
d_H\big((l \circ i)(X), l(Z)\big) &\leq \text{máx}\left\{\sup_{a\in X}\Big[d\big(i(a), Z\big)\Big] + \Lambda_2, \sup_{b\in Z}\Big[d\big(b, i(X)\big)\Big] + \Lambda_2\right\} \\
d_H\big((l \circ i)(X), l(Z)\big) &\leq \underbrace{\text{máx}\left\{\sup_{a\in X}\Big[d\big(i(a), Z\big)\Big], \sup_{b\in Z}\Big[d\big(b, i(X)\big)\Big]\right\}}_{d_H\big(i(X),\, Z\big)} + \Lambda_2.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$d_H\big((l\circ i)(X), l(Z)\big) \le \Lambda_1 + \Lambda_2,$$

desde que $d_H\big(i(X), Z\big) < \Lambda_1$, ya que i es una Λ_1-isometría. Por ende,

$$\begin{aligned} d_H\big((l\circ i)(X), Y\big) &< \underbrace{d_H\big((l\circ i)(X), l(Z)\big)}_{} + \Lambda_2 \\ &< \qquad (\Lambda_1 + \Lambda_2) \quad + \Lambda_2, \end{aligned}$$

gracias a (2.44). Por lo tanto,

$$d_H\big((l\circ i)(X), Y\big) < \Lambda_1 + 2\Lambda_2. \tag{2.50}$$

Para cualesquiera $c, d \in X$, de la desigualdad triangular para $|\cdot|$, se tiene que

$$\begin{aligned} &\big|d^Y\big((l\circ i)(c), (l\circ i)(d)\big) - d^X(c,d)\big| \\ &\qquad \le \big|d^Y\big((l\circ i)(c), (l\circ i)(d)\big) - d^Z(i(c), i(d))\big| + \big|d^Z(i(c), i(d)) - d^X(c,d)\big| \\ &\qquad < \Lambda_2 + \Lambda_1, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se da gracias a que

$$\big|d^Y\big((l\circ i)(c), (l\circ i)(d)\big) - d^Z(i(c), i(d))\big| < \Lambda_2,$$

pues l es una Λ_2-isometría; y gracias a que $\big|d^Z(i(c), i(d)) - d^X(c,d)\big| < \Lambda_1$, pues i es una Λ_1-isometría.

Por ende, para cualesquiera $c, d \in X$,

$$\big|d^Y\big(l\circ i(c), l\circ i(d)\big) - d^X(c,d)\big| < \Lambda_2 + \Lambda_1. \tag{2.51}$$

Por consiguiente, de (2.50) y (2.51), $l\circ i : X \to Y$ es una $(\Lambda_1 + 2\Lambda_2)$-isometría. De este modo, concluimos que $l\circ i$ es una $2(\Lambda_1+\Lambda_2)$-isometría.

De manera análoga, $j\circ k : Y \to X$ es una $2(\Lambda_1+\Lambda_2)$-isometría, ya que $j\circ k$ es una $(2\Lambda_1 + \Lambda_2)$-isometría. En efecto

Dado que la distancia de Hausdorff d_H en Y satisface la desigualdad triangular,

$$d_H\big((j\circ k)(Y), X\big) \le d_H\big((j\circ k)(Y), j(Z)\big) + d_H\big(j(Z), X\big).$$

Además, como j es Λ_1-isometría se tiene que $d_H\big(j(Z),X\big) < \Lambda_1$. Por ende,

$$d_H\big((j\circ k)(Y),X\big) < d_H\big((j\circ k)(Y),j(Z)\big)+\Lambda_1, \tag{2.52}$$

De la definición de distancia de Hausdorff d_H entre $(j\circ k)(Y)$ y $j(Z)$,

$$d_H\big((j\circ k)(Y),j(Z)\big) = \text{máx}\left\{\sup_{a\in Y} d\big((j\circ k)(a),j(Z)\big), \sup_{b\in Z} d\big(j(b),(j\circ k)(Y)\big)\right\}. \tag{2.53}$$

Tenemos que para cualesquiera $z\in Z$ y $a\in Y$,

$$d^X\big((j\circ k)(a),j(z)\big) < d^Z\big(k(a),z\big)+\Lambda_1,$$

gracias a que j es una Λ_1-isometría. Por lo tanto, tomando ínfimo sobre los puntos z en Z a ambos lados de la desigualdad anterior, se tiene que para todo $a\in Y$,

$$\begin{aligned}
\inf_{z\in Z}\left[d^X\big((j\circ k)(a),j(z)\big)\right] &\le \inf_{z\in Z}\left[d^Z\big(k(a),z\big)+\Lambda_1\right]\\
\underbrace{\inf_{z\in Z}\left[d^X\big((j\circ k)(a),j(z)\big)\right]}_{d\left((j\circ k)(a),j(Z)\right)} &\le \underbrace{\inf_{z\in Z}\left[d^Z\big(k(a),z\big)\right]}_{d\left(k(a),Z\right)}+\Lambda_1.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Por lo tanto, tomando supremo, respecto a los puntos a en Y, a ambos lados de la desigualdad (2.54), concluimos que

$$\sup_{a\in Y}\left[d\big((j\circ k)(a),j(Z)\big)\right] \le \sup_{a\in Y}\left[d\big(k(a),Z\big)\right]+\Lambda_1. \tag{2.55}$$

De manera similar, para cualesquiera $b\in Z$ y $y\in Y$,

$$d^X\big(j(b),(j\circ k)(y)\big) < d^Z(b,k(y))+\Lambda_1,$$

puesto que j es una Λ_1-isometría. Por ende, tomando ínfimo sobre los puntos y en Y a ambos lados de la desigualdad anterior, se tiene que para todo $b\in Z$,

$$\begin{aligned}
\inf_{y\in Y}\left[d^X\big(j(b),(j\circ k)(y)\big)\right] &\le \inf_{y\in Y}\left[d^Z\big(b,k(y)\big)+\Lambda_1\right]\\
\underbrace{\inf_{y\in Y}\left[d^X\big(j(b),(j\circ k)(y)\big)\right]}_{d\left(j(b),(j\circ k)(Y)\right)} &\le \underbrace{\inf_{y\in Y}\left[d^Z\big(b,k(y)\big)\right]}_{d\left(b,k(Y)\right)}+\Lambda_1.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Por lo tanto, tomando supremo, respecto a los puntos b en Z, a ambos lados de la desigualdad (2.56), se tiene que

$$\sup_{b\in Z}\left[d\big(j(b),(j\circ k)(Y)\big)\right] \le \sup_{b\in Z}\left[d\big(b,k(Y)\big)\right]+\Lambda_1. \tag{2.57}$$

Por consiguiente, de (2.53), (2.55) y (2.57), se deduce que

$$d_H\big((j\circ k)(Y), j(Z)\big) \leq \text{máx}\left\{\sup_{a\in Y}\Big[d\big(k(a), Z\big)\Big] + \Lambda_1, \sup_{b\in Z}\Big[d\big(b, k(Y)\big)\Big] + \Lambda_1\right\}$$

$$d_H\big((j\circ k)(Y), j(Z)\big) \leq \underbrace{\text{máx}\left\{\sup_{a\in Y}\Big[d\big(k(a), Z\big)\Big], \sup_{b\in Z}\Big[d\big(b, k(Y)\big)\Big]\right\}}_{d_H\big(k(Y),Z\big)} + \Lambda_1.$$

Por tanto,

$$d_H\big((j\circ k)(Y), j(Z)\big) \leq \Lambda_2 + \Lambda_1,$$

desde que $d_H\big(k(Y), Z\big) < \Lambda_2$, ya que k es una Λ_2-isometría. Por ende,

$$\begin{aligned} d_H\big((j\circ k)(Y), X\big) &< \underbrace{d_H\big((j\circ k)(Y), j(Z)\big)} + \Lambda_1 \\ &< \qquad (\Lambda_2 + \Lambda_1) \quad + \Lambda_1, \end{aligned}$$

gracias a (2.52). Por lo tanto,

$$d_H\big((j\circ k)(Y), X\big) < 2\Lambda_1 + \Lambda_2. \tag{2.58}$$

Para cualesquiera $c, d \in Y$, de la desigualdad triangular para $|\cdot|$, se tiene que

$$\begin{aligned} &\left|d^X\big((j\circ k)(c), (j\circ k)(d)\big) - d^Y(c,d)\right| \\ &\qquad \leq \left|d^X\big((j\circ k)(c), (j\circ k)(d)\big) - d^Z(k(c), k(d))\right| + \left|d^Z(k(c), k(d)) - d^Y(c,d)\right| \\ &\qquad < \Lambda_1 + \Lambda_2, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se da gracias a que

$$\left|d^X\big((j\circ k)(c), (j\circ k)(d)\big) - d^Z(k(c), k(d))\right| < \Lambda_1,$$

pues j es una Λ_1-isometría; y gracias a que $\left|d^Z(k(c), k(d)) - d^Y(c,d)\right| < \Lambda_2$, pues k es una Λ_2-isometría.

Por ende, para cualesquiera $c, d \in Y$,

$$\left|d^X\big((j\circ k)(c), (j\circ k)(d)\big) - d^Y(c,d)\right| < \Lambda_1 + \Lambda_2. \tag{2.59}$$

Por consiguiente, de (2.58) y (2.59), $j\circ k : Y \to X$ es una $(2\Lambda_1 + \Lambda_2)$-isometría. De este modo, concluimos que $j \circ k$ es una $2(\Lambda_1 + \Lambda_2)$-isometría.

Por otro lado, de la desigualdad triangular para d^Y, para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned}
&d^Y\big(g(l(i(x))), l(i(f(x)))\big)\\
&\qquad \le d^Y\big(g(l(i(x))), l(h(i(x)))\big) + d^Y\big(l(h(i(x))), l(i(f(x)))\big).
\end{aligned} \tag{2.60}$$

De (2.43), $d^Y\big(g(l(i(x))), l(h(i(x)))\big) < \Lambda_2$. Además, desde que l es una Λ_2-isometría,

$$\begin{aligned}
d^Y\big(l(h(i(x))), l(i(f(x)))\big) &< d^Z\big(h(i(x)), i(f(x))\big) + \Lambda_2\\
&< \Lambda_1 + \Lambda_2,
\end{aligned}$$

gracias a (2.40). Por consiguiente, de (2.60), concluimos que para cualquier $x \in X$,

$$d^Y\big(g(l(i(x))), l(i(f(x)))\big) < 2\Lambda_2 + \Lambda_1 < 2(\Lambda_1 + \Lambda_2),$$

Por ende, tomando supremo sobre los puntos x en X,

$$\underbrace{\sup_{x\in X}\Big[d^Y\big(g(l(i(x))), l(i(f(x)))\big)\Big]}_{d_{C^0}\left(g\circ(l\circ i), (l\circ i)\circ f\right)} < 2(\Lambda_1 + \Lambda_2). \tag{2.61}$$

De manera similar, tenemos que

$$d_{C^0}\big((j\circ k)\circ g, f\circ(j\circ k)\big) < 2(\Lambda_1 + \Lambda_2).$$

En efecto, de la desigualdad triangular para d^X, para todo $y \in Y$,

$$\begin{aligned}
&d^X\big(f(j(k(y))), j(k(g(y)))\big)\\
&\qquad \le d^X\big(f(j(k(y))), j(h(k(y)))\big) + d^X\big(j(h(k(y))), j(k(g(y)))\big).
\end{aligned} \tag{2.62}$$

De (2.41), $d^X\big(f(j(k(y))), j(h(k(y)))\big) < \Lambda_1$. Además, desde que j es una Λ_1-isometría,

$$\begin{aligned}
d^Y\big(j(h(k(y))), j(k(g(y)))\big) &< d^Z\big(h(k(y)), k(g(x))\big) + \Lambda_1\\
&< \Lambda_2 + \Lambda_1,
\end{aligned}$$

gracias a (2.42). Por consiguiente, de (2.62), concluimos que para cualquier $y \in Y$,

$$d^Y\big(f(j(k(y))), j(k(g(y)))\big) < 2\Lambda_1 + \Lambda_1 < 2(\Lambda_1 + \Lambda_2),$$

Por ende, tomando supremo sobre los puntos y en Y,

$$\underbrace{\sup_{y\in Y}\Big[d^Y\big(f(j(k(y))), j(k(g(y)))\big)\Big]}_{d_{C^0}\left(f\circ(j\circ k), (j\circ k)\circ g\right)} < 2(\Lambda_1 + \Lambda_2). \tag{2.63}$$

Por lo tanto, de (2.61) y (2.63), y puesto que $j \circ k : Y \to X$ y $l \circ i : X \to Y$ son $2(\Lambda_1 + \Lambda_2)$-isometrías, se deduce que

$$d_{GH^0}(f, g) \leq 2(\Lambda_1 + \Lambda_2).$$

Dado que $\Lambda_1 \in]0, d_{GH^0}(f, h) + \epsilon[$ y $\Lambda_2 \in]0, d_{GH^0}(h, g) + \epsilon[$, se concluye que

$$d_{GH^0}(f, g) \leq 2(\Lambda_1 + \Lambda_2) < 2\Big[d_{GH^0}(f, h) + d_{GH^0}(h, g) + 2\epsilon\Big].$$

Desde que ϵ representó a un número real positivo cualquiera, tenemos que

$$d_{GH^0}(f, g) < 2\Big[d_{GH^0}(f, h) + d_{GH^0}(h, g)\Big] + 4\epsilon, \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Considerando el límite cuando ϵ tiende para 0, $\epsilon \to 0^+$, se concluye que

$$d_{GH^0}(f, g) < 2\Big[d_{GH^0}(f, h) + d_{GH^0}(h, g)\Big].$$

(6): De la definición de distancia de Gromov-Hausdorff, se tiene que $d_{GH^0}(f, g) \geq 0$. Además, $\text{diám}(X) < +\infty$ y $\text{diám}(Y) < +\infty$, dado que X e Y son espacios métricos acotados. Para concluir que $d_{GH^0}(f, g) < +\infty$ es suficiente con probar que

$$d_{GH^0}(f, g) \leq \text{máx}\Big\{d_{GH}(X, Y), \text{diám}(X), \text{diám}(Y)\Big\}.$$

Observamos que cuando $\text{diám}(X) < +\infty$ y $\text{diám}(Y) < +\infty$, entonces

$$d_{GH}(X, Y) < +\infty.$$

Fijemos $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Considere la función constante $i : X \to Y$ tal que $i(x) = y_0$ para todo $x \in X$, y $j : Y \to X$ tal que $j(y) = x_0$ para todo $y \in Y$. Para cualquier

$$\kappa > \text{máx}\big\{\text{diám}(X), \text{diám}(Y)\big\},$$

i y j son κ-isometrías. En efecto, para cada $c, d \in X$,

$$\big|d^Y\big(i(c), i(d)\big) - d^X(c, d)\big| = d^X(c, d) \leq \text{diám}(X) < \kappa.$$

Además,

$$d_H\big(i(X), Y\big) = d_H\big(\{y_0\}, Y\big) = \sup_{\omega \in Y} d^Y(y_0, \omega) \leq \text{diám}(Y) < \kappa.$$

Por ende, i es una κ-isometría. De manera análoga, para cada $c, d \in Y$,

$$\big|d^X\big(j(c), j(d)\big) - d^Y(c, d)\big| = d^Y(c, d) \leq \text{diám}(Y) < \kappa.$$

Además,

$$d_H\big(j(Y),X\big) = d_H\big(\{x_0\},X\big) = \sup_{\omega\in X} d^X(x_0,\omega) \leq \text{diám}(X) < \kappa.$$

Por lo tanto, j es una κ-isometría. Por consiguiente,

$$d_{GH}(X,Y) < \kappa.$$

para todo $\kappa > \text{máx}\big\{\,\text{diám}(X), \text{diám}(Y)\big\}$. Por tanto,

$$d_{GH}(X,Y) \leq \text{máx}\big\{\,\text{diám}(X), \text{diám}(Y)\big\}.$$

Sea $\nu_0 = \text{máx}\Big\{d_{GH}(X,Y), \text{diám}(X), \text{diám}(Y)\Big\} \in \mathbb{R}$.

Fijemos $\epsilon > 0$. Puesto que $d_{GH}(X,Y) + \epsilon > d_{GH}(X,Y)$, tenemos que existe

$$\Lambda < d_{GH}(X,Y) + \epsilon, \tag{2.64}$$

tal que existen $i : X \to Y$ y $j : Y \to X$, Λ-isometrías. Por otro lado,

$$d_{C^0}(j\circ g, f\circ j) = \sup_{w\in Y} d^X\big(j\circ g(w), f\circ j(w)\big) \leq \text{diám}(X) \leq \nu_0, \tag{2.65}$$

$$\text{y} \quad d_{C^0}(i\circ f, g\circ i) = \sup_{\omega\in X} d^Y\big(i\circ f(\omega), g\circ i(\omega)\big) \leq \text{diám}(Y) \leq \nu_0. \tag{2.66}$$

De (2.64), $\Lambda < d_{GH}(X,Y) + \epsilon \leq \nu_0 + \epsilon$. Por ende, $i : X \to Y$ y $j : Y \to X$ son también $(\nu_0 + \epsilon)$-isometrías. Así, de (2.65) y (2.66), concluimos que

$$d_{GH^0}(f,g) < \nu_0 + \epsilon.$$

Dado que ϵ representó a un número real positivo cualquiera, se tiene que

$$d_{GH^0}(f,g) \leq \nu_0.$$

(7): Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, puesto que $d_{GH^0}(f,g_n) < d_{GH^0}(f,g_n) + \dfrac{1}{n}$, de la definición de $d_{GH^0}(f,g_n)$, se tiene que existe ϱ_n, con

$$0 < \varrho_n < d_{GH^0}(f,g_n) + \frac{1}{n}; \tag{2.67}$$

de tal manera que existen $i_n : X \to Y_n$ y $j_n : Y_n \to X$, ϱ_n-isometrías, satisfaciendo las siguientes desigualdades:

$$d_{C^0}(g_n\circ i_n, i_n\circ f) < \varrho_n; \tag{2.68}$$

$$d_{C^0}(f\circ j_n, j_n\circ g_n) < \varrho_n. \tag{2.69}$$

Se tiene que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varrho_n = 0$, gracias a (2.67) y puesto que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_{GH^0}(f, g_n) = 0$. Dado $n \in \mathbb{N}$, de la desigualdad triangular para d^{Y_n}, para cualesquiera $x, x' \in X$,

$$\begin{aligned} d^{Y_n}\big(i_n(f(x)), i_n(f(x'))\big) \leq d^{Y_n}\big(i_n(f(x)), g_n(i_n(x))\big) + \\ + d^{Y_n}\big(g_n(i_n(x)), g_n(i_n(x'))\big) + d^{Y_n}\big(g_n(i_n(x')), i_n(f(x'))\big). \end{aligned} \tag{2.70}$$

Se tiene que

$$d^{Y_n}\big(g_n(i_n(x)), g_n(i_n(x'))\big) = d^X\big(i_n(x), i_n(x')\big), \tag{2.71}$$

puesto que g_n es una isometría. Además,

$$d^{Y_n}\big(i_n(f(x)), g_n(i_n(x))\big) < \varrho_n, \tag{2.72}$$

$$\text{y} \quad d^{Y_n}\big(i_n(f(x')), g_n(i_n(x'))\big) < \varrho_n, \tag{2.73}$$

dado que se cumple (2.68). Por ende, considerando (2.71), (2.72) y (2.73), en (2.70), se tiene que para cualesquiera $x, x' \in X$, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d^{Y_n}\big(i_n(f(x)), i_n(f(x'))\big) &\leq \varrho_n + d^{Y_n}\big(i_n(x), i_n(x')\big) + \varrho_n \\ &= d^{Y_n}\big(i_n(x), i_n(x')\big) + 2\varrho_n. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Como i_n es una ϱ_n-isometría, $\left|d^{Y_n}\big(i_n(x), i_n(x')\big) - d^X(x, x')\right| < \varrho_n$. Por lo tanto,

$$d^{Y_n}\big(i_n(x), i_n(x')\big) < d^X(x, x') + \varrho_n.$$

Así, de (2.74), se concluye que para cualesquiera $x, x' \in X$,

$$d^{Y_n}\big(i_n(f(x)), i_n(f(x'))\big) \leq d^X(x, x') + 3\varrho_n, \tag{2.75}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Dados, $x, x' \in X$, desde que i_n es una ϱ_n-isometría,

$$d^X\big(f(x), f(x')\big) < d^{Y_n}\big(i_n(f(x)), i_n(f(x'))\big) + \varrho_n. \tag{2.76}$$

Por ende, para todo $x, x' \in X$, y para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$d^X\big(f(x), f(x')\big) < d^X(x, x') + 4\varrho_n, \tag{2.77}$$

gracias a (2.75) y (2.76). Por ende, considerando el límite cuando n tiende a $+\infty$, a ambos lados de la desigualdad (2.77), se concluye que para cualesquiera $x, x' \in X$,

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} d^X\big(f(x), f(x')\big)}_{d^X\left(f(x), f(x')\right)} \leq \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \left[d^X(x, x') + 4\varrho_n\right]}_{d^X(x, x').} \tag{2.78}$$

Así, en particular, de (2.78), tenemos que f es uniformemente continua.

Además, de la desigualdad triangular de d_H en X,

$$d_H\big(f(j_n(Y_n)), X\big) \leq d_H\big(f(j_n(Y_n)), j_n(g_n(Y_n))\big) + d_H\big(j_n(g_n(Y_n)), X\big),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ende,

$$d_H\big(f(j_n(Y_n)), X\big) \leq d_H\big(f(j_n(Y_n)), j_n(g_n(Y_n))\big) + d_H\big(j_n(Y_n), X\big), \tag{2.79}$$

ya que $g_n(Y_n) = Y_n$, dado que g_n es una isometría. Como j_n es una ϱ_n-isometría, entonces $d_H\big(j_n(Y_n), X\big) < \varrho_n$. Por tanto, de (2.79), para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$d_H\big(f(j_n(Y_n)), X\big) < d_H\big(f(j_n(Y_n)), j_n(g_n(Y_n))\big) + \varrho_n. \tag{2.80}$$

Por otro lado, veamos que $d_H\big(f(j_n(Y_n)), j_n(g_n(Y_n))\big) \leq \varrho_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. En efecto, fijemos $n \in \mathbb{N}$. De la definición de distancia de Hausdorff,

$$\begin{aligned} &d_H\big(f(j_n(Y_n)), j_n(g_n(Y_n))\big) \\ &\qquad = \text{máx}\left\{ \sup_{y \in Y_n} d\big(f(j_n(y)), j_n(g_n(Y_n))\big), \sup_{y \in Y_n} d\big(j_n(g_n(y)), f(j_n(Y_n))\big) \right\}. \end{aligned} \tag{2.81}$$

De (2.69), $d^X\big(f(j_n(\omega)), j_n(g_n(\omega))\big) < \varrho_n$ para todo $\omega \in Y$. Por consiguiente, para cualquier $y \in Y$,

$$\underbrace{\inf_{z \in Y_n} d^X\big(f(j_n(y)), j_n(g_n(z))\big)}_{d\left(f(j_n(y)), j_n(g_n(Y_n))\right)} \leq d^X\big(f(j_n(y)), j_n(g_n(y))\big) < \varrho_n$$

Así, para cualquier $y \in Y$, $d\big(f(j_n(y)), j_n(g_n(Y_n))\big) < \varrho_n$. Considerando a ambos lados, el supremo sobre los puntos y en Y,

$$\sup_{y \in Y} \Big[d\big(f(j_n(y)), j_n(g_n(Y_n))\big)\Big] \leq \varrho_n. \tag{2.82}$$

De manera similar, gracias a (2.69), para todo $\omega \in Y$, $d^X\big(j_n(g_n(\omega)), f(j_n(\omega))\big) < \varrho_n$. Por ende, para todo $y \in Y$,

$$\underbrace{\inf_{z \in Y_n} \Big[d^X\big(j_n(g_n(y)), f(j_n(z))\big)\Big]}_{d\left(j_n(g_n(y)), f(j_n(Y_n))\right)} \leq d^X(j_n(g_n(y)), f(j_n(y))) < \varrho_n.$$

Por tanto, $d\big(j_n(g_n(y)), f(j_n(Y_n))\big) < \varrho_n$ para cualquier $y \in Y$. Por ende, tomando supremo sobre los puntos y de Y a ambos lados,

$$\sup_{y\in Y}\Big[d\big(j_n(g_n(y)), f(j_n(Y_n))\big)\Big] \leq \varrho_n, \tag{2.83}$$

Por consiguiente, considerando (2.82) y (2.83) en (2.81), concluimos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$d_H\big(f(j_n(Y_n)), j_n(g_n(Y_n))\big) \leq \varrho_n. \tag{2.84}$$

Por lo tanto, gracias a (2.80) y (2.84), para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$d_H\big(f(j_n(Y_n)), X\big) < \underbrace{d_H\big(f(j_n(Y_n)), j_n(g_n(Y_n))\big)}_{\leq \varrho_n} + \varrho_n.$$

Esto es, para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$\underbrace{d_H\big(f(j_n(Y_n)), X\big)}_{} < 2\varrho_n$$

$$\sup_{a\in X} d\big(a, f(j_n(Y_n))\big) < 2\varrho_n.$$

Así, para cada $a \in X$, y para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\underbrace{d\big(a, f(j_n(Y_n))\big)}_{} < 2\varrho_n$$

$$\inf_{b\in Y_n} d\big(a, f(j_n(b))\big) < 2\varrho_n. \tag{2.85}$$

Fijemos $a \in X$. Dado cualquier $n \in \mathbb{N}$, gracias a (2.85), existe algún b_n en Y satisfaciendo que

$$d^X\big(a, f(j_n(b_n))\big) < 2\varrho_n. \tag{2.86}$$

Desde que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en el espacio métrico compacto Y, existe alguna subsucesión convergente, esto es, existen $(b_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $z \in Y$, verificando que

$$\lim_{n\to+\infty} j_n(b_{k(n)}) = z.$$

De este modo, concluimos que

$$\lim_{n\to+\infty} f\big(j_n(b_{k(n)})\big) = f(z),$$

gracias a la continuidad de f. Así, de (2.86), haciendo $n \to +\infty$ tenemos que

$$d^X\big(a, f(z)\big) = 0.$$

Por tanto, $a = f(z)$. Así, dado que $a \in X$ fue un punto arbitrario de X, tenemos que f es sobreyectiva.

Además, X es un espacio métrico totalmente acotado desde que X es compacto. Por consiguiente, de [6], y dado que f es sobreyectiva y verifica (2.78), se concluye que para cualesquiera $x, x' \in X$,

$$d^X\big(f(x), f(x')\big) = d^X(x, x'),$$

Esto es, f es una isometría. □

2.2. Teorema principal de estabilidad de Gromov-Hausdorff

Uno de los principales resultados sobre la GH-estabilidad topológica es el Teorema de Estabilidad topológica de Walters-Arbieto-Morales, que esencialmente nos dice que un homeomorfismo expansivo con la propiedad de sombreamiento es topológicamente GH-estable. La prueba presentada por Arbieto y Morales en el Teorema 4 de [1], sigue las ideas dadas en el Teorema de estabilidad topológica de Walters, Teorema 1.

Teorema 3. *Dados un espacio métrico compacto (X, d^X), y $f : X \to X$ un homeomorfismo sobre X. Se tiene que f es topológicamente GH-estable, siempre que f sea expansivo y posea la propiedad del sombreamiento.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, y sea e la constante de expansividad de f. Considere

$$\overline{\epsilon} \in \left]0, \text{mín}\left\{\frac{\epsilon}{3}, \frac{e}{8}\right\}\right[. \tag{2.87}$$

Asociado a este $\overline{\epsilon}$, existe $\delta > 0$ de la propiedad de sombreamiento de f, tal que $\delta < \overline{\epsilon}$. Sea Y un espacio métrico compacto provisto de la métrica d^Y, considere un homeomorfismo $g : Y \to Y$, satisfaciendo que $d_{GH^0}(g, f) < \delta$. De la definición de $d_{GH^0}(g, f)$, existe $\kappa > 0$, con $\kappa < \delta$, de tal modo que existen dos κ-isometrías $i : X \to Y$ y $j : Y \to X$, verificando que,

$$\begin{aligned} &d_{C^0}(f \circ j, j \circ g) < \kappa, \\ \text{y} \ \ &d_{C^0}(g \circ i, i \circ f) < \kappa. \end{aligned}$$

Por ende,

$$d_{C^0}(f \circ j, j \circ g) < \delta, \tag{2.88}$$

$$\text{y} \ \ d_{C^0}(g \circ i, i \circ f) < \delta. \tag{2.89}$$

Sea $y \in Y$. Considere la sucesión bilteral $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definida como

$$x_n = j\big(g^n(y)\big), \text{ para cualquier } n \in \mathbb{Z}.$$

Puesto que

$$f(x_n) = \big(f \circ j\big)\big(g^n(y)\big) \quad \text{y} \quad x_{n+1} = \big(j \circ g\big)\big(g^n(y)\big),$$

concluimos que, de (2.88), para cualquier $n \in \mathbb{Z}$,

$$d\big(x_{n+1}, f(x_n)\big) \leq d_{C^0}(j \circ g, f \circ j) < \delta.$$

Por consiguiente, $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una δ-pseudo órbita de f. Así, ya que f tiene la propiedad del sombreamiento, existe $x = x(y)$ (que depende de y) tal que para cualquier $n \in \mathbb{Z}$,

$$d\big(f^n(x), x_n\big) < \bar{\epsilon}.$$

Por ende, para cualquier $y \in Y$, existe un único $x = x(y) \in X$ tal que

$$d\big(f^n(x), j(g^n(y))\big) < \bar{\epsilon}, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z},$$

donde la unicidad se da gracias a que de (2.87), $\bar{\epsilon} < e/2$, donde e es una constante de expansividad de f.

En efecto, dado $y \in Y$, sean $x, x' \in X$ tales que para cualquier $n \in \mathbb{Z}$,

$$d\big(f^n(x), j(g^n(y))\big) < \bar{\epsilon} \tag{2.90}$$

$$\text{y} \quad d\big(f^n(x'), j(g^n(y))\big) < \bar{\epsilon}. \tag{2.91}$$

Entonces, gracias a (2.90) y (2.91), para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} d^X\left(f^n(x), f^n(x')\right) &\leq \overbrace{d^X\left(f^n(x), j(g^n(y))\right)}^{<\bar{\epsilon}} + \overbrace{d^X\left(j(g^n(y)), f^n(x')\right)}^{<\bar{\epsilon}} \\ &< 2\bar{\epsilon} < e, \end{aligned}$$

puesto que de (2.87), $\bar{\epsilon} < \dfrac{e}{2}$. Por consiguiente, de la expansividad de f, tenemos que $x = x'$. De este modo hemos definido $h : Y \to X$ tal que para cada $y \in Y$, $h(y)$ es el único elemento de X tal que

$$d\big(f^n(h(y)), j(g^n(y))\big) < \bar{\epsilon}, \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}. \tag{2.92}$$

De (2.92), cambiando n por $n+1$ en la desigualdad, tenemos que para todo $y \in Y$,

$$d\big(f^{n+1}(h(y)), j(g^{n+1}(y))\big) < \bar{\epsilon}, \text{ para cualquier } n \in \mathbb{Z},$$

$$d\big(f^n(h(g(y))), j(g^n(g(y)))\big) < \bar{\epsilon}, \text{ para cualquier } n \in \mathbb{Z}.$$

Así, para todo $y \in Y$,

$$d\big(f^n(f \circ h(y)), j(g^n(g(y)))\big) < \overline{\epsilon}, \text{ para cualquier } n \in \mathbb{Z},$$

$$d\big(f^n(h \circ g(y)), j(g^n(g(y)))\big) < \overline{\epsilon}, \text{ para cualquier } n \in \mathbb{Z},$$

Por consiguiente, de la unicidad dada en (2.92), $f \circ h = h \circ g$.

En seguida, mostremos que h es una δ-isometría. De (2.92), para $n = 0$ tenemos lo siguiente: para cualquier $y \in Y$,

$$d\big(h(y), j(y)\big) < \overline{\epsilon}. \tag{2.93}$$

De (2.93), se sigue que

$$d_H\big(h(Y), j(Y)\big) \leq \overline{\epsilon}. \tag{2.94}$$

En efecto, tenemos que

$$d_H\big(h(Y), j(Y)\big) = \text{máx}\left\{\sup_{z\in Y} d\big(h(z), j(Y)\big), \sup_{w\in Y} d\big(j(w), h(Y)\big)\right\}, \tag{2.95}$$

gracias a la definición de d_H en X. Además,

$$\begin{aligned} d\big(h(z), j(Y)\big) &= \inf_{y\in Y} d^X\big(h(z), j(y)\big) \\ &\leq d^X\big(h(z), j(z)\big) < \overline{\epsilon}, \end{aligned} \tag{2.96}$$

para cualquier $z \in Y$; y

$$\begin{aligned} d\big(j(w), h(Y)\big) &= \inf_{y\in Y} d^X\big(j(w), h(y)\big) \\ &\leq d^X\big(j(w), h(w)\big) < \overline{\epsilon}, \end{aligned} \tag{2.97}$$

para cualquier $w \in Y$. Así, considerando (2.96) y (2.97), en (2.95), concluimos que $d_H\big(h(Y), j(Y)\big) \leq \overline{\epsilon}$.

Por ende, puesto que $d_H(j(Y), X) < \delta$, ya que j es una δ-isometría; y de (2.94) tenemos que

$$d_H\big(h(Y), X\big) \leq \overbrace{d_H\big(h(Y), j(Y)\big)}^{\leq\overline{\epsilon}} + \overbrace{d_H\big(j(Y), X\big)}^{<\delta} < \overline{\epsilon} + \delta < 2\overline{\epsilon} < \epsilon,$$

gracias a la desigualdad triangular para d_H, y puesto que $\delta < \overline{\epsilon}$. Por lo tanto,

$$d_H\big(h(Y), X\big) < \epsilon. \tag{2.98}$$

Por otro lado, dados $z, w \in Y$, se tiene que

$$\left|d^X\big(h(z),h(w)\big) - d^Y(z,w)\right| \leq \left|d^X\big(h(z),h(w)\big) - d^X\big(j(z),j(w)\big)\right| + \left|d^X\big(j(z),j(w)\big) - d^Y(z,w)\right|,$$

gracias a la desigualdad triangular para el valor absoluto $|\cdot|$. Ahora, puesto que j es una δ-isometría, $\left|d^X(j(z),j(w)) - d^Y(z,w)\right| < \delta$. Por ende,

$$\left|d^X\big(h(z),h(w)\big) - d^Y(z,w)\right| \leq \left|d^X\big(h(z),h(w)\big) - d^X\big(j(z),j(w)\big)\right| + \delta. \tag{2.99}$$

Una vez más por la deisgualdad triangular para $|\cdot|$,

$$\begin{aligned}\left|d^X\big(h(z),h(w)\big) - d^X\big(j(z),j(w)\big)\right| &\leq \left|d^X\big(h(z),h(w)\big) - d^X\big(h(z),j(w)\big)\right| + \\ &\qquad + \left|d^X\big(h(z),j(w)\big) - d^X\big(j(z),j(w)\big)\right| \\ &\leq d^X\big(h(w),j(w)\big) + d^X\big(h(z),j(z)\big). \end{aligned} \tag{2.100}$$

donde la última desigualdad se da ya que de la desigualdad triangular para d^X se tiene:

$$\begin{aligned} &\left|d^X\big(h(z),h(w)\big) - d^X\big(h(z),j(w)\big)\right| \leq d^X\big(h(w),j(w)\big), \\ \text{y} \quad &\left|d^X\big(h(z),j(w)\big) - d^X\big(j(z),j(w)\big)\right| \leq d^X\big(h(z),j(z)\big). \end{aligned}$$

Por consiguiente, de (2.99) y (2.99),

$$\begin{aligned}\left|d^X\big(h(z),h(w)\big) - d^Y(z,w)\right| &\leq \overbrace{d^X\big(h(w),j(w)\big)}^{<\bar{\epsilon}} + \overbrace{d^X\big(h(z),j(z)\big)}^{<\bar{\epsilon}} + \delta \\ &< 3\bar{\epsilon}, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de (2.93), y puesto que $\delta < \bar{\epsilon}$. Por ende, ya que $\bar{\epsilon} < \epsilon/3$ gracias a (2.87), se tiene que

$$\left|d^X\big(h(z),h(w)\big) - d^Y(z,w)\right| < \epsilon, \text{ para cada } z, w \in Y. \tag{2.101}$$

Por lo tanto, de (2.98) y (2.101), tenemos que h es una ϵ-isometría.

Mostremos ahora que h es continua. Afirmamos que: para cada $e' \in (0, e)$, para cada $\Delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $a, b \in X$,

$$\text{si } d\big(f^n(a), f^n(b)\big) < e' \text{ para cualquier } n \in [-N, N], \text{ entonces } d(a,b) < \Delta.$$

Supongamos por contradicción que existe $e' \in (0, e)$, y existe $\Delta_0 > 0$ tal que, para cualquier $N \in \mathbb{N}$, existen $a_N, b_N \in X$, satisfaciendo que

$$d\big(f^n(a_N), f^n(b_N)\big) < e' \text{ para cualquier } n \in [-N, N], \text{ y } d(a_N, b_N) \geq \Delta_0. \tag{2.102}$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer (considerando subsucesiones si es necesario), por la compacidad de X que, existen $a, b \in X$ tales que

$$\lim_{N \to +\infty} a_N = a \quad \text{y} \quad \lim_{N \to +\infty} b_N = b. \tag{2.103}$$

Fijemos $n \in \mathbb{Z}$. Existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|n| \leq N_0$. Por lo tanto, de (2.102), se tiene que

$$d\big(f^n(a_N), f^n(b_N)\big) < e' \text{ para cualquier } N \geq N_0. \tag{2.104}$$

Como f^n es continua, de (2.103), tenemos que

$$\lim_{N \to +\infty} f^n(a_N) = f^n(a) \quad \text{y} \quad \lim_{N \to +\infty} f^n(b_N) = f^n(b).$$

Por lo tanto, considerando el límite cuando N tiende a $+\infty$, en (2.104), se concluye que $d\big(f^n(a), f^n(b)\big) \leq e' < e$. Dado que $n \in \mathbb{Z}$ fue arbitrario, se concluye que

$$d\big(f^n(a), f^n(b)\big) < e \text{ para cualquier } n \in \mathbb{Z}\,. \tag{2.105}$$

Por tanto, de la expansividad de f, $a = b$. Por otro lado, de (2.102) y (2.103), tenemos que $d(a, b) \geq \Delta_0 > 0$. Lo que contradiría el hecho que $a = b$.

Sea $\Delta > 0$. De la afirmación anterior, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $a, b \in X$,

$$d^X(a, b) < \Delta, \text{ siempre que } d^X\left(f^n(a), f^n(b)\right) < \frac{e}{2} \text{ para todo } n \in [-N, N]. \tag{2.106}$$

De la continuidad uniforme de $g^{-N}, \ldots, g^{-1}, g, \ldots, g^N$, para $\bar{\epsilon} > 0$, existe $\rho > 0$ tal que, para cualesquiera $p, q \in Y$,

$$d\big(g^n(p), g^n(q)\big) < \bar{\epsilon} \text{ para todo } n \in [-N, N], \text{ siempre que } d(p, q) < \rho.$$

Sean $p, q \in Y$, tales que $d(p, q) < \rho$, por lo tanto

$$d\big(g^n(p), g^n(q)\big) < \bar{\epsilon} \text{ para cada } n \in [-N, N]. \tag{2.107}$$

Tenemos que $h(p)$ está caracterizado (de modo único) por:

$$d\big(f^n(h(p)), j(g^n(p))\big) < \bar{\epsilon} \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}. \tag{2.108}$$

Y $h(q)$ está caracterizada (de modo único) por:

$$d\big(f^n(h(q)), j(g^n(q))\big) < \bar{\epsilon} \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}. \tag{2.109}$$

Por lo tanto, de (2.107), (2.108) y (2.109), y puesto que j es una δ-isometría, tenemos que

$$\begin{aligned} d\big(f^n(h(p)), f^n(h(q))\big) &\leq d\big(f^n(h(p)), j(g^n(p))\big) + d\big(j(g^n(p)), j(g^n(q))\big) + d\big(j(g^n(q)), f^n(h(q))\big) \\ &< \bar{\epsilon} + \Big[\delta + d\big(g^n(p), g^n(q)\big)\Big] + \bar{\epsilon} \leq 3\bar{\epsilon} + d\big(g^n(p), g^n(q)\big). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $d\big(f^n(h(p)), f^n(h(q))\big) < 4\bar{\epsilon} < e/2$ para cada $n \in [-N, N]$, gracias a que de (2.87), $\bar{\epsilon} < \dfrac{e}{8}$. Así, de (2.106), tenemos que $d\big(h(p), h(q)\big) < \Delta$. Así, hemos mostrado que para cada $\Delta > 0$, existe $\rho > 0$ tal que para cualesquiera $a, b \in X$,

$$d^X\big(h(a), h(b)\big) < \Delta, \text{ siempre que } d^Y(a, b) < \rho.$$

Esto es, h es uniformemente continua.
Observe que la expansividad de f, y la compacidad de los espacios métricos (X, d^X) y (Y, d^Y) dan lugar a la continuidad (uniforme) de h. $\square$

2.3. Invarianza del concepto de GH-estabilidad topológica

El concepto de GH-estabilidad topológica para homeomorfismos es invariante bajo homeomorfismos isométricos entre sí.

Teorema 4. *Sean $f' : X' \to X'$ y $f : X \to X$ homeomorfismos isométricos entre sí, tales que f es topológicamente GH-estable. Entonces f' es también topológicamente GH-estable.*

En esta sección, supondremos que los homeomorfimos tomados en cuenta están definidos sobre espacios métricos compactos. Del Teorema 2 se tiene que para cualesquiera par de homeomorfismos $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$, $d_{GH^0}(f, g) = 0$ si, y solo si f y g son isométricos entre sí.

Prueba del Teorema 4. Considere los homeomorfismos $f' : X' \to X'$ y $f : X \to X$, los cuales son isométricos entre sí. Esto es, se verifica que

$$f \circ v = v \circ f'. \tag{2.110}$$

para alguna función isométrica $v : X' \to X$. Dado $\xi > 0$, se tiene que, gracias a la GH-estabilidad topológica de f, existe $\lambda > 0$ dependiendo de ξ como en la definición 2.

Sea $g' : Y' \to Y'$ un homeomorfismo definido sobre un espacio métrico compacto Y', tal que

$$d_{GH^0}(g', f') < \lambda/2.$$

De (2.110) y de la propiedad (3) del Teorema 2, $d_{GH^0}(f, f') = 0$. Por ende,

$$d_{GH^0}(f, g') \leq 2 \cdot \left[\underbrace{d_{GH^0}(f, f')}_{0} + \underbrace{d_{GH^0}(f', g')}_{<\lambda/2}\right] < \lambda,$$

gracias al ítem (5) del Teorema 2. Así,

$$d_{GH^0}(f, g') < \lambda. \tag{2.111}$$

Por consiguiente, de (2.111) y del modo como se eligió λ dependiendo de ξ gracias a la GH-estabilidad topológica de f, se tiene que

$$h \circ g' = f \circ h. \tag{2.112}$$

para alguna función continua $h : Y' \to X$, la cual es una ξ-isometría.
Concluimos que $v^{-1} \circ h : Y' \to X'$ es una ξ-isometría continua, dado que $h : Y' \to X$ también lo es, y desde que v^{-1} es un homeomorfismo pues v era una isometría. Además, de (2.110), $v^{-1} \circ f = f' \circ v^{-1}$. Y por tanto, de (2.112),

$$\begin{aligned} v^{-1} \circ (h \circ g') &= v^{-1} \circ (f \circ h) \\ &= (v^{-1} \circ f) \circ h \\ &= (f' \circ v^{-1}) \circ h \\ &= f' \circ (v^{-1} \circ h) \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$(v^{-1} \circ h) \circ g' = f' \circ (v^{-1} \circ h),$$

donde $v^{-1} \circ h : Y' \to X'$ es una ξ-isometría continua. Así, $f' : X' \to X'$ es topológicamente GH-estable. $\square$

2.4. Relaciones entre la GH-estabilidad topológica y la estabilidad topológica

2.4.1. Un homeomorfismo topológicamente estable que no es topológicamente GH-estable

Lema 7. *Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo topológicamente GH-estable, definido sobre un espacio métrico compacto X. Si*

$$\inf_{x\in X} d_H\big(X, O_f^+(x)\big) > 0,$$

entonces existe $\delta > 0$ satisfaciendo lo siguiente: para cualquier homeomorfismo $g : Y \to Y$, donde Y es métrico compacto, con $d_{GH^0}(f, g) < \delta$, se tine que g no es transitivo. En particular, g no es minimal.

Prueba del Lema 7. Por hipótesis, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$d_H\big(X, O_f^+(x)\big) > \epsilon \text{ para cada } x \in X. \tag{2.113}$$

Para este $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ dependiendo de ϵ según la GH-estabilidad topológica de f. Mostremos que para cada homeomorfismo $g : Y \to Y$, definido sobre un espacio métrico compacto Y, con $d_{GH^0}(g, f) < \delta$, se tiene que g no es transitivo. En efecto, supongamos por reducción al absurdo que existe algún homeomorfismo $g : Y \to Y$, definido sobre un espacio métrico compacto Y, tal que $d_{GH^0}(g, f) < \delta$ y g es transitivo. De la dependencia de δ respecto de ϵ (según la GH-estabilidad topológica de f), se concluye que

$$h \circ g = f \circ h, \tag{2.114}$$

para alguna función continua $h : Y \to X$, que es también una ϵ-isometría.

Puesto que g es un homeomorfismo transitivo, existe $y \in Y$ tal que $O_g^+(y)$ es denso en Y. De la continuidad de h, $h\big(\overline{O_g^+(y)}\big) \subseteq \overline{h(O_g^+(y))}$. Así, $h(Y) \subseteq \overline{h(O_g^+(y))}$. De (2.114), tenemos que $h\big(O_g^+(y)\big) = O_f^+(h(y))$. Así,

$$h(Y) \subseteq \overline{O_f^+(h(y))}. \tag{2.115}$$

Como h es una ϵ-isometría, tenemos que

$$d_H\big(X, h(Y)\big) < \epsilon. \tag{2.116}$$

Por lo tanto, de (2.115) y (2.116),

$$d_H\big(X, \overline{O_f^+(h(y))}\big) \leq d_H(X, h(Y)) < \epsilon.$$

Por lo tanto, $d_H\big(X, O_f^+(h(y))\big) < \epsilon$. Lo que contradice (2.113). □

2.4.2. La GH-estabilidad topológica implica la estabilidad topológica usual en S^1

Consideremos $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$. Dados $x, y \in S^1$, denotaremos por $[x, y]$ al arco de S^1, con punto inicial x y punto final y, en sentido antihorario. La longitud del arco $[x, y]$ será denotada por $L([x, y])$. Definamos la función $d : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}$, por $d(x, y) = \text{mín}\{L([x, y]), L([y, x])\}$ para cada $x, y \in S^1$. Entonces, efectivamente d es una métrica en S^1. Consideraremos que $L(S^1) = 1$.

Lema 8. *Dado $\epsilon \in (0, 1/4)$. Cada ϵ-isometría continua $h : S^1 \to S^1$, es sobreyectiva.*

Demostración. Sea $h : S^1 \to S^1$ una ϵ-isometría continua. Sean N, S, E y O, los puntos norte, sur, este y oeste, respectivamente, de S^1. Como $[E, N]$ es conexo y h es continua, entonces $h([E, N])$ es conexo y continene a $h(E)$ y $h(N)$. Mostremos que $h(S) \notin h([E, N])$. En efecto, supongamos, por contradicción, que existe $Q \in [E, N]$ tal que $h(Q) = h(S)$. Entonces

$$\frac{1}{4} \leq d(Q, S) = \big|d\big(h(Q), h(S)\big) - d(Q, S)\big| < \epsilon < \frac{1}{4}.$$

Lo cual es una contradicción. Análogamente, $h(O) \notin h([E, N])$. Por lo tanto, $h([E, N]) \subset S^1$ es conexo y $h(O), h(S) \notin h([E, N])$. Análogamente, $h([N, O])$ es conexo y $h(S), h(E) \notin h([N, O])$, $h([O, S])$ es conexo y $h(E), h(N) \notin h([O, S])$, y $h([S, E])$ es conexo y $h(N), h(O) \notin h([S, E])$. Por lo tanto,

$$[h(E), h(N)] \subseteq h([E, N]), [h(N), h(O)] \subseteq h([N, O]),$$

$$[h(O), h(S)] \subseteq h([O, S]) \text{ y } [h(S), h(E)] \subseteq h([S, E]),$$

□

donde $[h(E), h(N)]$ alude al arco de S^1 que contiene a $h(E)$ y $h(N)$, y no contiene ni a $h(S)$ ni a $h(O)$. Análogamente para $[h(N), h(O)]$, $[h(O), h(S)]$ y $[h(S), h(E)]$. Así,

$S1 = [h(E), h(N)] \cup [h(N), h(O)] \cup [h(O), h(S)] \cup [h(S), h(E)]$
$\subseteq h([E, N]) \cup h([N, O]) \cup h([O, S]) \cup h([S,E]) = h(S^1)$.

Esto es una función sobreyectiva.

Capítulo 3

Lema de aproximación de Anosov y la GH-estabilidad topológica

En el presente capítulo recogemos los principales resultados obtenidos por R. Cubas en [3]. En particular, lo hecho sobre el Lema de Aproximación de Anosov, al debilitar las condiciones de este resultado, y obtener la misma conclusión.

3.1. GH^0-aproximación de homeomorfismos transitivos

En esta sección seguimos los resultados presentados por R. Cubas en [3]. El siguiente teorema consiste en aproximar (en el sentido de la distancia C^0-Gromov-Hausdorff) un homeomorfismo $f : X \to X$ transitivo, definido sobre un espacio métrico compacto. Para este fin la idea fundamental es que podemos aproximar el conjunto X, en el sentido de la distancia de Hausdorff d_H, por un subconjunto finito (de X) que es un tramo (finito) de una órbita de f. Y definir en este subconjunto una biyección que naturalmente será un homeomorfismo.

Dado que el único espacio métrico que consideraremos es (X, d^X), por simplicidad, denotaremos por d a la métrica d^X de X.

Teorema 5. *Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo transitivo, donde X es compacto. Se tiene que para todo $\delta > 0$, existe algún homeomorfismo $g_\delta : Y_\delta \to Y_\delta$, definido sobre un conjunto finito Y_δ, tal que $d_{GH^0}(f, g_\delta) < \delta$.*

Demostración. Como f es transitivo, existe $a \in X$ tal que $O_f^+(a)$ es densa en X. Observe que de la continuidadde f, paracada$n \in \mathbb{N}$ la semiórbitapositivade $f^n(a)$ es densa en X. Sea $\delta > 0$ (cualquiera). De la continuidad uniforme de f, existe

$$\alpha \in \left]0, \frac{\delta}{3}\right[, \tag{3.1}$$

satisfaciendo que para cualesquiera $x, x' \in X$,

$$d\big(f(x), f(x')\big) < \frac{\delta}{3} \text{ siempre que } d(x, x') < \alpha. \tag{3.2}$$

Para este $\alpha > 0$, de la compacidad de X, y tomando una cantidad finita de bolas de radio $\dfrac{\alpha}{2}$ que cubran X, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $d_H\big(\{f^i(a)\}_{i=0}^M, X\big) < \alpha$. Como $O_f^+\left(f^M(a)\right)$ es densa en X, entonces existe $N \geq M$ tal que $d\big(f^{N+1}(a), a\big) < \alpha$.

Sea $Y = \big\{a, f(a), f^2(a), \ldots, f^N(a)\big\}$. Observe que Y es una α-pseudoórbita periódica, ya que

$$\begin{cases} d\big(f(f^i(a)), f^{i+1}(a)\big) = 0 < \alpha & \text{, para cada } i \in \{0, 1, 2, \ldots, N-1\} \\ d\big(f(f^i(a)), a\big) < \alpha & \text{, para } i = N. \end{cases}$$

En Y defina g "siguendo" la α-pseudoórbita Y. Esto es, defina $g : Y \to Y$ por

$$\begin{cases} g\big(f^k(a)\big) = f^{k+1}(a), \text{ para cada } k \in \{0, 1, 2, \ldots, N-1\} \\ g\big(f^N(a)\big) = a. \end{cases}$$

Observe que g se comporta como f en todos los puntos de Y, salvo en $f^N(a)$, donde

$$d\big(g(f^N(a)), f(f^N(a))\big) = d\big(a, f^{N+1}(a)\big) < \alpha.$$

Claramente, $g : Y \to Y$ es una biyección, y por lo tanto es un homeomorfismo ya que Y es un conjunto finito (discreto). Comparemos $g : Y \subseteq X \to Y$ y $f : X \to X$. Como observamos antes, tenemos que

$$d\big(g(y), f(y)\big) < \alpha < \frac{\delta}{3}, \text{ para cada } y \in Y. \tag{3.3}$$

Mostremos que, $d_{GH^0}(g, f) < \delta$. Como $Y \subseteq X$, considere la inclusión $i : Y \to X$. Claramente i es una δ-isometría, pues conserva distancias y

$$d_H\big(i(Y), X\big) = d_H(Y, X) < \alpha < \frac{\delta}{3}.$$

Además, $d_{C^0}(i \circ g, f \circ i) < \delta$, puesto que

$$d\big(i \circ g(y), f \circ i(y)\big) = d\big(g(y), f(y)\big) < \alpha < \frac{\delta}{3},$$

para cada $y \in Y$. Por otro lado, como

$$\sup_{w\in X} d(w,Y) = d_H(Y,X) < \alpha,$$

entonces, para cada $w \in X$, $\inf \{d(w,y); y \in Y\} = d(w,Y) < \alpha$. Por lo tanto, para cada $w \in X$, existe $x_w \in Y$ tal que $d(w,x_w) < \alpha$. Más aún, si $w \in Y$ podemos considerar $x_w = w$. Fijando x_w para cada $w \in X$, definimos $j : X \to Y$ por $j(w) = x_w$. Así,

$$d\big(w, j(w)\big) < \alpha \text{ para cada } w \in X. \tag{3.4}$$

Sean $x, x' \in X$, de (3.4) tenemos que

$$\begin{aligned} d\big(j(x), j(x')\big) &\leq \overbrace{d\big(j(x), x\big)}^{<\alpha} + d(x,x') + \overbrace{d\big(x', j(x')\big)}^{<\alpha} \\ &\leq d(x,x') + 2\alpha, \end{aligned}$$

Y también,

$$\begin{aligned} d(x,x') &\leq \overbrace{d\big(x, j(x)\big)}^{<\alpha} + d\big(j(x), j(x')\big) + \overbrace{d\big(j(x'), x'\big)}^{<\alpha} \\ &\leq d(j(x), j(x')) + 2\alpha. \end{aligned}$$

Por consiguiente, para cualesquiera $x, x' \in X$,

$$\big|d\big(j(x), j(x')\big) - d(x,x')\big| < 2\alpha < \delta.$$

Además, por construcción de $j : X \to Y$, tenemos que $d_H\big(Y, j(X)\big) \leq \alpha < \delta$. En efecto, como $j(X) \subseteq Y$ entonces, de (3.4),

$$d_H\big(Y, j(X)\big) = \sup_{w\in Y} d\big(w, j(X)\big) = \sup_{w\in Y} \inf_{z\in X} d\big(w, j(z)\big) \leq \sup_{w\in Y} d\big(w, j(w)\big) \leq \alpha.$$

Por lo tanto, $j : X \to Y$ es una 2α-isometría. Así, j es una δ-isometría.

Mostremos que, $d_{C^0}(j \circ f, g \circ j) < \delta$. En efecto, para cada $x \in X$, de (3.2), (3.3) y (3.4), se concluye lo suguiente:

$$\begin{aligned} d\big((j\circ f)(x), (g\circ j)(x)\big) &\leq \overbrace{d\big(j(f(x)), f(x)\big)}^{<\alpha} + \overbrace{d\big(f(x), f(j(x))\big)}^{<\delta/3} + \overbrace{d\big(f(j(x)), g(j(x))\big)}^{<\alpha} \\ &< \alpha + \frac{\delta}{3} + \alpha < \delta, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se da gracias a (3.1). Por lo tanto, $d_{C^0}(j \circ f, g \circ j) < \delta$. Así,

$$d_{GH^0}(f,g) < \delta.$$

Como Y fue un conjunto finito, entonces $h_{\text{top}}(g) = 0$. □

Observamos que en el anterior lema no se hace uso de la GH-estabilidad topológica. En caso de haber supuesto además la GH-estabilidad topológica de f, pudimos haber establecido alguna relación más estrecha entre f y sus GH^0-aproximaciones (por ejemplo a través de una "conjugación" entre f y g).

Teorema 6. *Existe un homeomorfismo f, definido sobre un espacio métrico compacto, que es GH^0-estable, con entropía positiva tal que para cada $\delta > 0$, existe algún homeomorfismo $g : Y \to Y$ tal que $d_{GH^0}(g, f) < \delta$ y $h_{top}(g) = 0$.*

Demostración. Sea el espacio métrico compacto $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, provisto de la topología producto, y de la métrica $d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|x_n - y_n|}{2^{|n|}}, \text{ para cada } x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \text{ y } y = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \text{ en } \Sigma_2. \tag{3.5}$$

Obsérvese que esta métrica genera la topología producto sobre Σ_2. Considere la función $f : \Sigma_2 \to \Sigma_2$, dada por

$$f\big((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}\big) = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}, \text{ para todo } (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_2.$$

Esta función f es conocida como "desplazamiento bilateral". Sabemos que f es un homeomorfismo expansivo con la propiedad de sombreamiento, por lo tanto (debido al Teorema 3) f es topológicamente GH-estable. Además, f es transitivo. Por lo tanto, del Teorema 5, para cada $\delta > 0$ existe algún homeomorfismo $g : Y \to Y$ (definido sobre una espacio métrico compacto finito $Y \subset X$) tal que $d_{GH^0}(g, f) < \delta$ y $h_{\text{top}}(g) = 0$. □

3.2. Densidad de puntos periódicos

En esta sección seguimos los resultados presentados por R. Cubas en [3]. En lo que sigue todos los homeomorfismos y funciones continuas considerados estarán definidos sobre espacios métricos compactos. En esta sección usaremos por primera vez la GH-estabilidad topológica (o simplemente, GH^0-estabilidad) de un homeomorfismo conjuntamente con la construcción hecha en la sección anterior a partir de un homeomorfismo transitivo $f : X \to X$. Esto es, existe $g : Y \to Y$, GH^0-próximo de $f : X \to X$, donde $Y \subset X$ es un subconjunto finito.

Dado el homeomorfismo $h : Z \to Z$, $\text{Per}(h)$ representará a la colección de puntos periódicos de h

Lema 9. *Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo topológicamente GH-estable y transitivo. Entonces para cada $\epsilon > 0$, existe $x \in \mathrm{Per}(f)$ tal que*

$$d_H\big(\mathcal{O}_f(x), X\big) < \epsilon.$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ dependiendo de ϵ, según la GH^0-estabilidad de f. Para este $\delta > 0$, siguiendo la prueba del Teorema 5, existen $N \in \mathbb{N}$ y $a \in X$ (punto transitivo de f) tales que la función $g : Y \to Y$ definida por

$$g\big(f^k(a)\big) = \begin{cases} f^{k+1}(a) & , \text{ si } k \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\} \\ a & , \text{ si } k = N, \end{cases}$$

cumple que $d_{GH^0}(g, f) < \delta$, donde $Y = \big\{a, f(a), f^2(a), \dots, f^N(a)\big\}$.
Como δ depende de ϵ según la GH^0-estabilidad de f, entonces

$$h \circ g = f \circ h,$$

para alguna función continua $h : Y \to X$, que es también ϵ-isometría. Por lo tanto,

$$h \circ g^k = f^k \circ h, \text{ para cada } k \in \mathbb{Z}. \tag{3.6}$$

Como $h : Y \to X$ es una ϵ-isometría, entonces $d_H(h(Y), X) < \epsilon$. Donde

$$h(Y) = \big\{h(a), h(f(a)), h(f^2(a)), h(f^3(a)), \dots, h(f^N(a))\big\}. \tag{3.7}$$

Como $f(f^k a) = g(f^k a)$, para cada $k \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$. Entonces

$$g^k(a) = f^k(a) \text{ para cada } k \in \{0, 1, 2, \dots, N\}. \tag{3.8}$$

En efecto, $g^0(a) = a = f^0(a)$. Supongamos que $g^k(a) = f^k(a)$ para algún $k \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$. Entonces $g^{k+1}(a) = g(g^k(a)) = g(f^k(a)) = f^{k+1}(a)$.
Por lo tanto, de (3.6), (3.7) y (3.8), tenemos que,

$$h(Y) = \big\{h(a), f(h(a)), f^2(h(a)), f^3(h(a)), \dots, f^N(h(a))\big\}.$$

Además, $h(a) \in \mathrm{Per}(f)$. En efecto, de (3.6),

$$f^{N+1}(h(a)) = h(g^{N+1}(a)) = h(g(g^N(a))) = h(g(f^N(a))) = h(a),$$

donde la tercera igualdad se da por (3.8). Por lo tanto, $h(a) \in \mathrm{Per}(f)$ y $h(Y) = \mathcal{O}_f(h(a))$. Así, como $h : Y \to X$ es una ϵ-isometría,

$$d_H\big(\mathcal{O}_f(h(a)), X\big) = d_H(h(Y), X) < \epsilon.$$

□

Teorema 7. *Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo, definido sobre un espacio métrico compacto X, que es topológicamente GH-estable y transitivo, entonces $\overline{\mathrm{Per}(f)} = X$.*

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\overline{\mathrm{Per}(f)} \neq X$. Entonces existe $b \in X \setminus \overline{\mathrm{Per}(f)}$. Como $\overline{\mathrm{Per}(f)}$ es compacto y $b \notin \overline{\mathrm{Per}(f)}$, entonces $d\big(b, \overline{\mathrm{Per}(f)}\big) > 0$. Sea $\epsilon = d\big(b, \overline{\mathrm{Per}(f)}\big)$. Del Lema 9, para este $\epsilon > 0$, existe $x \in \mathrm{Per}(f)$ tal que

$$\sup_{z \in X} d\big(z, \mathcal{O}_f(x)\big) = d_H(\mathcal{O}_f(x), X) < \epsilon.$$

En particular, $d(b, \mathcal{O}_f(x)) < \epsilon$. Como $x \in \mathrm{Per}(f)$, entonces $\mathcal{O}_f(x) \subseteq \mathrm{Per}(f) \subseteq \overline{\mathrm{Per}(f)}$. Por lo tanto,

$$d\big(b, \overline{\mathrm{Per}(f)}\big) \leq d(b, \mathcal{O}_f(x)) < \epsilon$$

Lo cual contradice el hecho que $\epsilon = d\big(b, \overline{\mathrm{Per}(f)}\big)$. Por lo tanto,

$$\overline{\mathrm{Per}(f)} = X.$$

□

Corolario 2. *Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo minimal sobre un espacio métrico compacto X no finito. Entonces, f no puede ser topológicamente GH-estable.*

Demostración. Suponga, por contradicción, que f es topológicamente GH-estable. Como f es minimal, en particular f es transitivo. Por el Teorema 7 se tendría que $\overline{\mathrm{Per}(f)} = X$. Así, en particular $\mathrm{Per}(f) \neq \emptyset$. Lo cual contradice el hecho que $f : X \to X$ es minimal y X no finito. □

Corolario 3. *Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo minimal, definido sobre un espacio métrico compacto X (no finito). Entonces o f no es expansivo, o f no tiene la propiedad de sombreamiento.*

Demostración. Suponga que f tiene las dos propiedades: expansividad y la propiedad de sombreamiento. Entonces del Teorema 3 tenemos que f es topológicamente GH-estable. Lo cual es una contradicción, pues del Corolario 2, como f es minimal y X es compacto no finito, entonces f no puede ser topológicamente GH-estable. □

3.3. Consecuencias de la GH-estabilidad topológica en espacios disconexos

Siguiendo los resultados presentados por R. Cubas en [3], se muestra que dado un homeomorfismo topológicamente GH-estable sobre un espacio métrico compacto y disconexo, entonces las dinámicas GH^0-próximas no deben estar definidas en espacios métricos conexos.

Teorema 8. *Sea X un espacio métrico compacto disconexo tal que existe $\epsilon > 0$ verificando que*

$$d_H(C, X) \geq \epsilon, \text{ para cada } C \in Comp(X);$$

donde $Comp(X)$ denota al conjunto de componentes conexas de X. Si $f : X \to X$ es un homeomorfismo topológicamente GH-estable, entonces existe $\delta > 0$ (dependiendo de ϵ) tal que, si $g : Y \to Y$ es un homeomorfismo sobre un espacio métrico compacto y conexo Y, entonces $d_{GH^0}(g, f) \geq \delta$.

Demostración. Por hipótesis tenemos que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$d_H(C, X) \geq \epsilon, \text{ para cada } C \in \mathrm{Comp}(X). \tag{3.9}$$

Como f es topológicamente GH-estable, existe $\delta > 0$ tal que si $g : Y \to Y$ es un homeomorfismo sobre un espacio métrico compacto Y, tal que $d_{GH^0}(g, f) < \delta$, entonces

$$f \circ h = h \circ g,$$

para alguna función continua $h : Y \to X$, que además es una ϵ-isometría.

Suponga, por reducción al absurdo, que existe un homeomorfismo $g : Y \to Y$ sobre un espacio métrico compacto y conexo Y, tal que $d_{GH^0}(g, f) < \delta$. De la GH-estabilidad topológica de f, se concluye que

$$f \circ h = h \circ g,$$

para alguna función continua $h : Y \to X$, que es también una ϵ-isometría. Como $h : Y \to X$ es continua y Y es conexo, entonces $h(Y)$ es conexo en X. Por lo tanto, existe $C_0 \in \mathrm{Comp}(X)$ tal que $h(Y) \subseteq C_0$. Entonces, de (3.9),

$$d_H(h(Y), X) \geq d_H(C_0, X) \geq \epsilon.$$

Esto es, $d_H(h(Y), X) \geq \epsilon$. Lo que contradice el hecho que $h : Y \to X$ es una ϵ-isometría. Por lo tanto, para cada homeomorfismo $g : Y \to Y$, definido sobre un espacio métrico compacto y conexo Y, se tiene que $d_{GH^0}(g, f) \geq \delta$. $\square$

Corolario 4. *Sea $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ la función* desplazamiento bilateral. *Esto es, σ es dada por lo siguiente:*

$$\sigma\big((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\big) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}} \textit{ para cualquier } (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_2,$$

donde $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, dotado con la topología producto, y provisto de la métrica d dada en (3.5). Entonces, existe $\delta > 0$ tal que para cada homeomorfismo $g : Y \to Y$, definido sobre un espacio métrico compacto y conexo Y, se tiene que $d_{GH^0}(g, \sigma) \geq \delta$.

Demostración. En este caso Σ_2 es compacto, y totalmente disconexo. Para cada $p \in \Sigma_2$, $\{p\}$ es componente conexa de Y, tome $p^* \in \Sigma_2$ tal que

$$p_n^* = \begin{cases} p_n & , \text{para cada } n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \\ 1 - p_0 & , \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Así, $d_H\big(\Sigma_2, \{p\}\big) = \sup_{q\in\Sigma_2} d(q, p) \geq d(p^*, p) = 1$. Por lo tanto,

$$d_H(C, \Sigma_2) \geq 1, \text{para cada } C \in \text{Comp}(\Sigma_2). \tag{3.10}$$

Observe que, de (3.5), se tiene que para cualesquiera $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_2$,

$$d\big((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}\big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|x_n - y_n|}{2^{|n|}}.$$

En este caso, para $\epsilon = 1$ existe $\delta > 0$ dependiendo de ϵ, según la GH-estabilidad topológica de σ. Suponga, por reducción al absurdo, que existe un homeomorfismo $g : Y \to Y$ sobre un espacio métrico compacto y conexo Y, tal que $d_{GH^0}(g, \sigma) < \delta$. De la GH-estabilidad topológica de σ, se concluye que,

$$\sigma \circ h = h \circ g,$$

para alguna función continua $h : Y \to \Sigma_2$, que es una ϵ-isometría.

Como $h : Y \to \Sigma_2$ es continua y Y es conexo, entonces $h(Y)$ es conexo en Σ_2. Por lo tanto, existe $C_0 \in \text{Comp}(\Sigma_2)$ tal que $h(Y) \subseteq C_0$. Entonces, de (3.10),

$$d_H(h(Y), \Sigma_2) \geq d_H(C_0, \Sigma_2) \geq \epsilon.$$

Esto es, $d_H(h(Y), \Sigma_2) \geq \epsilon$. Lo que contradice el hecho que $h : Y \to \Sigma_2$ es una ϵ-isometría. Por lo tanto, para cada homeomorfismo $g : Y \to Y$, definido sobre un espacio métrico compacto y conexo Y, se tiene que

$$d_{GH^0}(g, \sigma) \geq \delta.$$

$\square$

3.4. La GH-estabilidad topológica preserva entropía en dinámicas sobre S^1

En esta sección seguimos los resultados presentados por R. Cubas en [3].

Teorema 9. *Sea $f : S^1 \to S^1$ una aplicación continua, topológicamente GH-estable. Existe $\delta > 0$ tal que para cada aplicación continua $g : S^1 \to S^1$, con $d_{GH^0}(f, g) < \delta$, se tiene que*

$$h_{top}(g) \geq h_{top}(f).$$

Demostración. Sea $\epsilon \in (0, 1/4)$. Entonces existe $\delta > 0$, dependiendo de ϵ, según la GH-estabilidad topológica de f. Sea $g : S^1 \to S^1$ una aplicación continua, con $d_{GH^0}(f, g) < \delta$. Entonces existe alguna ϵ-isometría continua $h : S^1 \to S^1$, tal que $h \circ g = f \circ h$. Del Lema 8 tenemos que h es sobreyectiva. Así, puesto que $h \circ g = f \circ h$, entonces h es una semiconjugación. Por lo tanto, del Lema 3 tenemos que $h_{\mathrm{top}}(g) \geq h_{\mathrm{top}}(f)$. $\square$

Corolario 5. *Sea $f : S^1 \to S^1$ una aplicación continua, y topológicamente GH-estable tal que $h_{top}(f) > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada homeomorfismo $g : S^1 \to S^1$, con $d_{GH^0}(g, f) < \delta$, se tiene que $h_{\mathrm{top}}(g) > 0$.*

Demostración. Del Teorema 9, para $\epsilon \in (0, 1/4)$, existe $\delta > 0$ tal que para cada aplicación continua $g : S^1 \to S^1$, con $d_{GH^0}(g, f) < \delta$, se tiene que $h_{\mathrm{top}}(g) \geq h_{\mathrm{top}}(f)$. $\square$

3.5. Lema de aproximación de Anosov

En esta sección seguimos los resultados presentados por R. Cubas en [3]. Dado un homeomorfismo $f : X \to X$ definido sobre un espacio métrico compacto (X, d). Decimos que $x \in X$ es un *punto recurrente por cadenas* de f, si para cada $\delta > 0$ existe alguna

δ-cadena periódica $\{x_i\}_{i=0}^n \subseteq X$, con $x_0 = x_n = x$ (esto es, $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$ para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$). Denotamos por $\mathcal{R}(f)$ al conjunto de *puntos recurrentes por cadenas* de f.

Definición 3. *Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo sobre un espacio métrico compacto (X, d). Sea $\Lambda \subseteq X$ un subconjunto compacto, f-invariante. Decimos que Λ es* aproximado por cadenas *si para cada $\delta > 0$ existen una cantidad finita de δ-cadenas periódicas y disjuntas*

$$\{x_{1,j}\}_{j=0}^{k_1}, \{x_{2,j}\}_{j=0}^{k_2}, \dots, \{x_{n,j}\}_{j=0}^{k_n} \subseteq \Lambda,$$

con $x_{i,0} = x_{i,k_i}$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tales que

$$d_H\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{x_{i,j}\}_{j=0}^{k_i}, \Lambda\right) < \delta.$$

Teorema 10. *Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo sobre un espacio métrico compacto (X, d). Sea $\Lambda \subseteq X$ aproximado por cadenas, y $f|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$ un homeomorfismo topológicamente GH-estable. Entonces $\overline{\mathrm{Per}(f) \cap \Lambda} = \Lambda$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ (arbitrario). Para este ϵ, de la GH-estabilidad topológica de $f|_\Lambda$ existe $\alpha \in (0, \epsilon)$. Como $f|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$ es uniformemente continua, existe $\delta \in (0, \alpha/3)$ tal que para cada $z, w \in \Lambda$,

$$\text{si } d(z, w) < \delta \text{ entonces } d(f(z), f(w)) < \alpha/3. \tag{3.11}$$

Como Λ es aproximado por cadenas, existe una cantidad finita de δ-cadenas periódicas,

$$\{x_{1,j}\}_{j=0}^{k_1}, \{x_{2,j}\}_{j=0}^{k_2}, \dots, \{x_{n,j}\}_{j=0}^{k_n} \subseteq \Lambda,$$

con $x_{i,0} = x_{i,k_i}$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tal que

$$d_H\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{x_{i,j}\}_{j=0}^{k_j}, \Lambda\right) < \delta.$$

Sea

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_{i,j}\}_{j=0}^{k_j} \subseteq \Lambda.$$

Definamos la función $g : Y \to Y$ por

$$g(x_{i,j}) = x_{i,j+1} \text{ para cada } j \in \{0, 1, 2, \dots, k_i - 1\}, \text{ y cada } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Observe que definimos g esencialmente "siguiendo" las δ-cadenas periódicas. Por lo tanto

$$d\big(g(w), f(w)\big) < \delta \text{ para cada } w \in Y. \tag{3.12}$$

En efecto, puesto que los $\{x_{i,j}\}_{j=0}^{k_i}$ son δ-cadenas periódicas,

$$d\big(f(x_{i,j}), g(x_{i,j})\big) = d\big(f(x_{i,j}), x_{i,j+1}\big) < \delta \text{ para cada } j \in \{0, 1, 2, \ldots, k_i - 1\},$$

y para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Considere la función inclusión $i : Y \to \Lambda$, definida por $i(w) = w$ para cada $w \in Y$. Tenemos que i es una δ-isometría puesto que i conserva distancias, y

$$d_H\big(i(Y), \Lambda\big) = d_H(Y, \Lambda) < \delta.$$

Además, para cada $z \in Y$ (donde Y es finito),

$$\begin{aligned} d\big(f \circ i(z), i \circ g(z)\big) &= d\big(f(i(z)), i(g(z))\big) \\ &= d(f(z), g(z)) < \delta. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$d_{C^0}(f \circ i, i \circ g) \leq \delta < \alpha.$$

Por otro lado, como $\sup_{z\in\Lambda} d(z, Y) = d_H(Y, \Lambda) < \delta$, entonces para cada $w \in \Lambda$, existe $j_w \in Y$ tal que $d(w, j_w) < \delta$. Para cada $w \in \Lambda$ fije $j_w \in Y$, y defina $j : \Lambda \to Y$ por $j(w) = j_w$. Así,

$$d(w, j(w)) < \delta \text{ para cada } w \in \Lambda. \tag{3.13}$$

Como en la demostración del Teorema 5, tenemos que $j : \Lambda \to Y$ es una α-isometría. Además, de (3.11), (3.12) y (3.13), para cada $x \in \Lambda$,

$$\begin{aligned} d\big(j \circ f(x), g \circ j(x)\big) &\leq \overbrace{d\big(j(f(x)), f(x)\big)}^{<\delta} + \overbrace{d\big(f(x), f(j(x))\big)}^{<\alpha/3} + \overbrace{d\big(f(j(x)), g(j(x))\big)}^{<\delta} \\ &< \delta + \frac{\alpha}{3} + \delta = 2\delta + \frac{\alpha}{3} < \alpha. \end{aligned}$$

Entonces $d_{C^0}(j \circ f, g \circ j) < \alpha$. Por lo tanto,

$$d_{GH^0}(f, g) < \alpha.$$

Como α depende de ϵ según la GH-estabilidad topológica de $f|_\Lambda$, se concluye lo siguiente:

$$f \circ h = h \circ g,$$

para alguna función continua $h : Y \to \Lambda$, que es también una ϵ-isometría.

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, para cada $j \in \{0, 1, 2, \ldots, k_i - 1\}$,

$$f(h(x_{i,j})) = h(g(x_{i,j})) = h(x_{i,j+1}).$$

Así, $f^k(h(x_{i,j})) = h(x_{i,j+k})$ siempre que $j + k \leq k_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. En particular,

$$f^{k_i}\big(h(x_{i,0})\big) = h(x_{i,0+k_i}) = h(x_{i,k_i}) = h(x_{i,0})$$

para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} h\big(\{x_{i,j}\}_{j=0}^{k_i}\big) &= \big\{h(x_{i,0}), f(h(x_{i,0})), f^2(h(x_{i,0})), \ldots, f^{k_i-1}(h(x_{i,0}))\big\} \\ &= \mathcal{O}_f\big(h(x_{i,0})\big), \end{aligned}$$

para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Así, $h(Y) \subseteq \mathrm{Per}(f) \cap \Lambda$. Además,

$$d_H\big(h(Y), \Lambda\big) < \epsilon,$$

desde que $h : Y \to \Lambda$ es una ϵ-isometría. Por lo tanto,

$$d_H\big(\overline{\mathrm{Per}(f) \cap \Lambda}, \Lambda\big) \leq d_H(h(Y), \Lambda) < \epsilon.$$

Así, $d_H\big(\overline{\mathrm{Per}(f) \cap \Lambda}, \Lambda\big) < \epsilon$ para cada $\epsilon > 0$. Por lo tanto,

$$d_H\big(\overline{\mathrm{Per}(f) \cap \Lambda}, \Lambda\big) = 0.$$

Así, puesto que Λ y $\overline{\mathrm{Per}(f) \cap \Lambda}$ son compactos, entonces $\overline{\mathrm{Per}(f) \cap \Lambda} = \Lambda$. $\square$

Proposición 2. *Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo definido sobre una variedad compacta. Sean $x, y \in \mathcal{R}(f)$, con $x \neq y$. Para cada $\delta > 0$ existen un par de δ-cadenas periódicas $\{x_i\}_{i=0}^n, \{y_i\}_{i=0}^m \subseteq \mathcal{R}(f)$, con $x_0 = x_n = x$ y $y_0 = y_m = y$, tales que $\{x_i\}_{i=0}^n \cap \{y_i\}_{i=0}^m = \emptyset$.*

Demostración. Sean $x, y \in \mathcal{R}(f)$, con $x \neq y$. Dado $\delta > 0$, como $\mathcal{R}(f)$ es compacto y $f|_{\mathcal{R}(f)}$ es uniformemente continua, existe $\delta' \in (0, \delta/2)$ tal que

$$\text{si } z, w \in \mathcal{R}(f) \text{ y } d(z, w) < \delta' \text{ entonces } d(f(z), f(w)) < \delta/2. \tag{3.14}$$

Del Teorema de Conley, $\mathcal{R}(f) = \mathcal{R}(f|_{\mathcal{R}(f)})$. Como $x, y \in \mathcal{R}(f)$ entonces $x, y \in \mathcal{R}(f|_{\mathcal{R}(f)})$. Así, existen δ'-cadenas periódicas $\{x_i\}_{i=0}^n, \{y_i\}_{i=0}^m \subseteq \mathcal{R}(f)$, con $x_0 = x_n = x$ y $y_0 =$

$y_m = y$. Si $\{x_i\}_{i=0}^n \cap \{y_i\}_{i=0}^m = \emptyset$, entonces no hay nada que probar. Supongamos que existen $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ y $j_0 \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ tales que $x_{i_0} = y_{j_0} = a$. Sea $b \in \mathcal{R}(f) \cap B(a, \delta')$, con $b \neq a$. Tenemos que

$$\begin{aligned} d\big(f(x_{i_0-1}), b\big) &\leq d\big(f(x_{i_0-1}), x_{i_0}\big) + d(x_{i_0}, b) \\ &< \delta' + \delta' < \delta, \end{aligned}$$

puesto que $\{x_i\}_{i=0}^n$ es una δ'-cadena, y $b \in B(a, \delta')$. Además, de (3.14),

$$\begin{aligned} d(f(b), x_{i_0+1}) &\leq d(f(b), f(x_{i_0})) + d(f(x_{i_0}), x_{i_0+1}) \\ &< (\delta/2) + \delta' < \delta. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{x_0, x_1, \ldots, x_{i_0-1}, b, x_{i_0+1}, \ldots, x_n\}$ y $\{y_i\}_{i=0}^m$ son δ-cadenas periódicas, con $x_0 = x_n = x$ y $y_0 = y_m = y$, tal que $b \neq y_{j_0}$.
Si existen algún $i_1 \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \setminus \{i_0\}$, y $j_1 \in \{1, 2, \ldots, m-1\} \setminus \{j_0\}$ tales que $x_{i_1} = y_{j_1} = c$. Sea $d \in \mathcal{R}(f) \cap B(c, \delta')$, con $d \neq c$. Tenemos que

$$\begin{aligned} d\big(f(x_{i_1-1}), d\big) &\leq d\big(f(x_{i_1-1}), x_{i_1}\big) + d(x_{i_1}, d) \\ &< \delta' + \delta' < \delta, \end{aligned}$$

puesto que $\{x_i\}_{i=0}^n$ es una δ'-cadena, y $d \in B(c, \delta')$. Además, de (3.14),

$$\begin{aligned} d(f(d), x_{i_1+1}) &\leq d(f(d), f(x_{i_1})) + d(f(x_{i_1}), x_{i_1+1}) \\ &< (\delta/2) + \delta' < \delta. \end{aligned}$$

Continuando de este modo, cambiando $x_{i_0} = y_{j_0}$ por b, y $x_{i_1} = y_{j_1}$ por d, podemos suponer que $\{x_i\}_{i=0}^n \cap \{y_i\}_{i=0}^m = \emptyset$. □

Lema 10. *Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo sobre una variedad compacta M, entonces*

(i) *$\mathcal{R}(f)$ es aproximado por cadenas.*

(ii) *$L(f)$ es aproximado por cadenas.*

(iii) *$\Omega(f|_{\Omega(f)})$ es aproximado por cadenas.*

Demostración. (i): Sea $\delta > 0$. Como $\mathcal{R}(f)$ es un conjunto compacto. Considerando un cubrimiento finito de $\mathcal{R}(f)$ por bolas abiertas de radio $\delta/2$, podemos obtener

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq \mathcal{R}(f)$, conjunto finito con n elementos, tal que $d_H\big(\{x_i\}_{i=1}^n, \mathcal{R}(f)\big) < \delta$. De la Proposición 2, existen una cantidad finita de δ-cadenas periódicas disjuntas

$$\{x_{1,j}\}_{j=0}^{k_1}, \{x_{2,j}\}_{j=0}^{k_2}, \ldots, \{x_{n,j}\}_{j=0}^{k_n} \subseteq \mathcal{R}(f),$$

donde $x_{i,0} = x_{i,k_i} = x_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Como

$$\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq \bigcup_{i=1}^n \{x_{i,j}\}_{j=0}^{k_i},$$

entonces

$$d_H\left(\bigcup_{i=1}^n \{x_{i,j}\}_{j=0}^{k_i}, \mathcal{R}(f)\right) \leq d_H\big(\{x_i\}_{i=1}^n, \mathcal{R}(f)\big) < \delta.$$

□

Teorema 11. *Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo sobre una variedad compacta M. Entonces,*

(i) *Si $f|_{\mathcal{R}(f)}$ es topológicamente GH-estable, entonces*

$$\overline{\mathrm{Per}(f)} = \mathcal{R}(f) = L(f) = \Omega(f).$$

(ii) *Si $f|_{L(f)}$ es topológicamente GH-estable, entonces* $\overline{\mathrm{Per}(f)} = L(f)$.

(iii) *Si $f|_{\Omega(f|_{\Omega(f)})}$ es topológicamente GH-estable, entonces* $\overline{\mathrm{Per}(f)} = \Omega(f|_{\Omega(f)})$.

Demostración. (i): Sea $f|_{\mathcal{R}(f)} : \mathcal{R}(f) \to \mathcal{R}(f)$ topológicamente GH-estable. Por el Lema 10 tenemos que $\mathcal{R}(f)$ es apróximado por cadenas periódicas. Por lo tanto, del Teorema 10 tenemos que

$$\mathcal{R}(f) = \overline{\mathcal{R}(f) \cap \mathrm{Per}(f)} = \overline{\mathrm{Per}(f)}, \tag{3.15}$$

puesto que $\mathrm{Per}(f) \subset \mathcal{R}(f)$. Además, ya sabíamos que

$$\overline{\mathrm{Per}(f)} \subseteq L(f) \subseteq \Omega(f) \subseteq \mathcal{R}(f).$$

Por lo tanto, de (3.15), $\overline{\mathrm{Per}(f)} = L(f) = \Omega(f) = \mathcal{R}(f)$. □

Corolario 6 (Anosov Closing Lemma)**.** *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo de clase C^1, definido sobre una variedad compacta. Entonces:*

(i) *Si el conjunto de los puntos recurrentes por cadenas de f, $\mathcal{R}(f)$, tiene estructura hiperbólica, entonces* $\overline{\mathrm{Per}(f)} = \mathcal{R}(f) = L(f) = \Omega(f)$.

(ii) *Si el conjunto límite de* f*,* $L(f)$*, tiene estructura hiperbólica, entonces* $\overline{\mathrm{Per}(f)} = L(f)$*.*

(iii) *Si el conjunto de puntos no errantes de* f*,* $\Omega(f)$*, es un conjunto hiperbólico, entonces* $\overline{\mathrm{Per}(f)} = \Omega(f|_{\Omega(f)})$*.*

Demostración. Todo homeomorfismo $f : Z \to Z$ definido sobre un conjunto hiperbólico, es un homeomorfismo expansivo y tiene la propiedad de sombreamiento. Por lo tanto, del Teorema 3, tenemos que f es GH-topológicamente estable. En el caso de (i), $f|_{\mathcal{R}(f)} : \mathcal{R}(f) \to \mathcal{R}(f)$ es un homeomorfismo GH-topológicamente estable. Así, del Teorema 11 concluimos la prueba del corolario. Análogamente en los casos (ii) y (iii). $\square$

Capítulo 4

Conclusiones

En el Teorema 4 de [2], Walters muestra que todo homemorfismo expansivo sobre un espacio métrico compacto, satisfaciendo la propiedad de sombreamiento necesariamente es topológicamente estable. Además, en el Teorema 3 de [1], ya habiendo introducido la noción de GH-estabilidad topológica, Arbieto y Morales muestran que todo homeomorfismo expansivo con la propiedad de sombreamiento es topológicamente GH-estable, también sobre espacios métricos compactos. Todo lo anterior en el marco de un sistema dinámico discreto.

Mientras que en el caso continuo, en [13], Thomas muestra en el Teorema 3 que cada flujo (continuo) expansivo sin singularidades, definido sobre un espacio métrico compacto, con la propiedad de sombreamiento es topológicamente estable. Por ende es natural preguntarse si es posible definir algún tipo de GH-estabilidad topológica para flujos asociada a una C^0-Gromov-Hausdorff distancia entre flujos de espacios posiblemente diferentes, de tal manera que aún se cumpla que expansividad más la propiedad de sombreamiento impliquen la GH-estabilidad topológica en el ámbito continuo. Respondemos estas cuestiones en [14].

Por otro lado, en [3], respecto al Lema de Aproximación de Anosov (Anosov Closing Lemma), se debilitan las condiciones del Anosov Closing Lemma, cambiando la hipótesis de que un homeomorfismo $f : X \to X$ sea restringido a un subconjunto hiperbólico Λ de X, por la GH-estabilidad topológica del homeomorfismo restricción $f|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$. Observe que si $\Lambda \subseteq X$ es un conjunto hipérbólico (respecto de f), entonces $f|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$ es un homeomorfismo expansivo con la propiedad de sombreamiento (POTP). Y por ende, $f|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$ es un homeomorfismo topológicamente GH-estable, gracias al Teorema principal, Teorema 3.

Bibliografía

[1] A. Arbieto, C. Morales, *Topological Stability from Gromov-Hausdorff viewpoint*, Discrete and continuous Dynamical System, **37** (2017), 3531-3544.

[2] P. Walters, *On the pseudo-orbit tracing property and its relationship to stability, The structure of attractors in dynamical systems* (Proc. Conf., North Dakota State Univ., Fargo, N.D.,), Lecture Notes in Math., Springer, Berlin **668** (1978), 231-244.

[3] R. Cubas Becerra, *Propriedades de um homeomorfismo GH estável*, Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlandia. (2018).

[4] M. Viana, K. Oliveira, *Fundamentos da Teoria Ergódica*; Rio de Janeiro: SBM 90 (2014).

[5] R. Metzger, C. Morales and Ph. Thieullen, *Topological Stability in set-valued dynamics*, Discrete and continuous Dynamical System, **37** (2017), 1965-1975.

[6] A. Edrei, *On mapping which do not increase small distances*, Proc. London Math. Soc., **2** (1952), 272-278.

[7] J. Munkres, *Topología.* 2ª. edición. Pearson Educación, S.A., Madrid 2002.

[8] E. Lages Lima, *Espaços métricos.* 5.ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2015

[9] Lan Wen, *Differentiable Dynamical Systems. An introduction to Structural Stability and Hyperbolicity.* American Mathematical Society (2016).

[10] C. Robinson, *Dynamical Systems. Stability. Symbolic Dynamics, and Chaos*, CRC Press (1995)

[11] A. Katok & B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Smooth Dynamical Systems*, Cambridge University Press (1995)

[12] M. Brin & G. Stuck, *Introduction to Dynamical System*, Cambridge University Press (2002)

[13] R. Thomas, *Stability Properties of one-parameter flows*, Proc. London Math. Soc. (3) **45** (1982), 479-505.

[14] A. Chulluncuy, *Topological stability for flows from a Gromov-Hausdorff viewpoint*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, **53** (2022), 307-341.

[15] P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Springer Verlag (1982)

[16] K. Petersen, *Ergodic theory*, Cambridge University Press (1983)