# UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

# FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS

# DISTANCIA Y ESTABILIDAD DE GROMOV-HAUSDORFF PARA FLUJOS

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE DOCTOR EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA

ELABORADA POR:

**ANDRES VICENTE CHULLUNCUY CENTENO**

**ASESOR:**

Dr. ROGER JAVIER METZGER ALVÁN

**ASESOR EXTERNO:**

Dr. ALEXANDER EDUARDO ARBIETO MENDOZA

LIMA-PERÚ

2019

*Agradezco a mi familia, a mis asesores Roger Metzger, y Alexander Arbieto por su orientación y gran ayuda. A Concytec-Fondecyt (CG 217-2014) por el apoyo financiero, sin el cual hubiese sido imposible la realización de este trabajo. Y finalmente, a mis profesores y amigos del IMCA y de la UNI.*

# Índice general

**Resumen**

En la primera parte del presente trabajo mostramos que un teorema análogo al teorema 2 de [14] vale para el caso de acciones de los números reales no negativos sobre un espacio métrico compacto. Esto es, la existencia de puntos no transitivos asociados a un semiflujo, implica la densidad de estos. Mostraremos también que este conjunto de puntos no transitivos es un $F_\sigma$-conjunto. Además construiremos una acción de un semigrupo sobre un espacio métrico compacto, tal que el conjunto de puntos no transitivos asociado es no vacío, pero no es denso.

En la segunda parte, definiremos el concepto de *GH-estabilidad topológica* para flujos, basándonos en el concepto análogo para homeomorfismos dado en [3], y en el concepto de estabilidad topológica para flujos dado en [1]. En [3], Arbieto y Morales definen la noción de $GH$-estabilidad topológica para homeomorfismos y demuestran que expansividad más la propiedad de sombreamiento da lugar a la $GH$-estabilidad topológica para homeomorfismos. En [1], Romeo Thomas menciona una definición de estabilidad topológica para flujos y muestra que un flujo expansivo con la propiedad de sombreamiento y sin singularidades es topológicamente estable. Así, motivados por el camino seguido en [3] y basándonos en [1], definimos la noción de $GH$-estabilidad topológica para flujos y probamos que un flujo expansivo sobre un espacio métrico compacto, con la propiedad de sombreamiento, y sin singularidades es topológicamente $GH$-estable.

**Abstract**

In the first part of this work, we prove that an analogous result to Theorem 2 of [14] still work for cases of actions of non-negative real numbers on a compact metric space. Indeed, the existence of non transitive points of a semi-flow implies the density of them. Moreover, we will also construct an action of a semigroup on a compact metric space, such that the associated set of non transitive points is non-empty, but not dense.

In the second part, we introduce the notion of topological $GH$-stability for flow, based on the analogous concept about homeomorphism given in [3], and on the notion about topological stability for flows given in [1]. In [3], Arbieto and Morales define the notion of topological $GH$-stability for homeomorphisms and they prove that every expansive homeomorphism with the pseudo-orbit tracing property on a compact metric space is topologically $GH$-stable. In [1], Romeo Thomas mentions a definition of topological stability for flows and he proves that an expansive flow with the shadowing property and without singularities is topologically stable. In this way, we had been motivated to follow the path in [3] and also had been based on [1], we define the topological $GH$-stability for flows and we prove that an expansive flow on a compact metric space, with the shadowing property, and without singularities is topologically $GH$-stable.

**Notaciones**

| | |
|---|---|
| $\mathbb{Z}$: | conjunto de los números enteros. |
| $\mathbb{N}$: | conjunto de los números naturales, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. |
| $\mathbb{R}$: | conjunto de los números reales. |
| $\mathbb{R}^+$: | conjunto de los números reales positivos. |
| $\#(G)$: | cardinalidad del conjunto finito $G$. |
| $(X, d^X)$: | espacio métrico $X$ con métrica $d^X$ |
| $(X, \Phi)$: | flujo definido sobre el espacio métrico $X$. |
| $\Phi_t$: | homeomorfismo tiempo $t$ asociado al flujo $\Phi$. |
| $d(z, A)$: | distancia del punto $z$ al conjunto $A$. |
| $B_\eta(a)$: | bola abierta de centro $a$ y radio $\eta > 0$. |
| $B(a, \eta)$: | bola abierta de centro $a$ y radio $\eta > 0$. |
| $d_{C^0}(f, g)$: | distancia $C^0$ entre las funciones continuas $f, g : Z \to X$. |
| $d_H(A, B)$: | distancia de Hausdorff entre los subconjuntos $A$ y $B$ de $X$. |
| $d_{GH}(A, B)$: | distancia de Gromov-Hausdorff entre los conjuntos $A$ y $B$. |
| $d_{GH^0}(f, g)$: | distancia $C^0$-Gromov-Hausdorff entre los homeomorfismos $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$. |
| $D_{GH^0}(\Phi, \Psi)$: | distancia $C^0$-Gromov-Hausdorff entre los flujos $(X, \Phi)$ y $(Y, \Psi)$. |
| $\text{diám}(B)$: | diámetro del conjunto $B$. |
| $h(f)$: | entropía topológica de la función continua $f : X \to X$. |
| $h(\Phi)$: | entropía topológica del flujo $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$. |
| $\text{Rep}^+$: | conjunto de homeomorfismos crecientes $\alpha$ en $\mathbb{R}$, con $\alpha(0) = 0$. |
| Rep: | conjunto de funciones continuas en $\mathbb{R}$ que fijan el neutro aditivo. |
| $\text{Per}(T)$: | conjunto de puntos *periódicos* de $T$. |
| $\Omega(f)$ | conjunto de puntos *no errantes* de $f$. |

# Capítulo 1

# Introducción

## 1.1. Sobre la noción de $GH$-estabilidad topológica para flujos

En [3], Arbieto y Morales definen el concepto de *$GH$-estabilidad topológica* para homeomorfismos y, entre otras cosas, muestran que un homeomorfismo expansivo con la propiedad de sombreamiento es topológicamente $GH$-estable. Para definir esta $GH$-estabilidad combinan la noción de estabilidad topológica usual (de Walters) de homeomorfismos, y la distancia $C^0$-Gromov-Hausdorff, la cual permite medir "distancias" entre dinámicas que actúan en espacios posiblemente diferentes. Para esto, esencialmente ellos combinan la noción de distancia de Gromov-Hausdorff (que mide la "distancia" entre dos conjuntos que pertenecen a espacios métricos diferentes), y la distancia $C^0$ usual (que mide la distacia entre dos funciones que van de un espacio métrico a otro), y definen la *distancia $C^0$-Gromov-Hausdorff* para funciones, denotada por $d_{GH^0}$. En términos precisos, dados $\Delta > 0$, y dos espacios métricos $X$ y $Y$ con métricas $d^X$ y $d^Y$ respectivamente, en [3] definen el concepto de *$\Delta$-isometría* de $X$ a $Y$ como una función $i : X \to Y$ verificando que

$$\text{máx}\left\{\sup_{x,z\in X}\left|d^Y\big(i(x),i(z)\big)-d^X(x,z)\right|, d_H\big(i(X),Y\big)\right\}<\Delta,$$

donde $d_H$ es la distancia de Hausdorff en $Y$. Y en seguida definen:

**Definición 1** (Distancia $C^0$-Gromov-Hausdorff para funciones)**.** *Dadas dos funciones $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$, definidas sobre los espacios métricos $X$ e $Y$ respectivamente, la* distancia $C^0$-Gromov-Hausdorff *entre $f$ y $g$ es definida por*

$$d_{GH^0}(f,g) = \text{ínf}\Big\{\Delta > 0; \exists\, i : X \to Y, \exists\, j : Y \to X,\ \Delta\textit{-isometrías, tales que}$$
$$d_{C^0}(i\circ f, g\circ i) < \Delta \ \textit{y}\ d_{C^0}(j\circ g, f\circ j) < \Delta\Big\}.$$

*Donde las $\Delta$-isometrías $i$ y $j$ no necesariamente son continuas.*

Basándonos en estos hechos, en el presente trabajo definimos la *distancia $C^0$-Gromov-Hausdorff para flujos*, que denotamos por $D_{GH^0}$, y que nos permitirá medir "distancias" entre dinámicas continuas que actúen en espacios métricos posiblemente diferentes. Mostraremos también algunas propiedades de esta, análogas a las propiedades de $d_{GH^0}$.

**Definición 2** (Distancia $C^0$-Gromov-Hausdorff para flujos)**.** *Dados dos flujos $(X,\Phi)$ y $(Y,\Psi)$, definimos la $C^0$-*distancia de Gromov-Hausdorff para flujos *entre $\Phi$ y $\Psi$, por*

$$\begin{aligned} D_{GH^0}(\Phi,\Psi) = \text{ínf}\Big\{\Delta > 0\,;\, \exists\ \Delta\text{-}\textit{isometrías continuas } i : X \to Y \ \textit{y}\ j : Y \to X \\ \textit{tales que } d_{C^0}(\Psi_t \circ i, i \circ \Phi_t) < \Delta\ \forall\, t \in [0,1], \\ \textit{y}\ d_{C^0}(\Phi_t \circ j, j \circ \Psi_t) < \Delta\ \forall\, t \in [0,1]\Big\}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dados dos flujos $(X,\Phi)$ y $(Y,\Psi)$, decimos que estos son *isométricos entre sí*, si existe alguna isometría $h : X \to Y$ tal que $h \circ \Phi_t = \Psi_t \circ h$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Además, como en la Definición 6.1 de [10], decimos que un flujo $\Phi$, definido sobre un espacio métrico $X$, es *isométrico* si

$$d\big(\Phi_t(x), \Psi_t(y)\big) = d(x,y) \text{ para cada } x,y \in X, \text{ y cada } t \in \mathbb{R}.$$

Donde $d$ es la métrica de $X$.

Motivados en las propiedades de la distancia $d_{GH^0}$ de Gromov-Hausdorff para homeomorfismo, dadas en el Teorema 1 de [3], demostramos propiedades análogas para la distancia $D_{GH^0}$ de Gromov-Hausdorff para flujos. Así, establecemos nuestro primer resultado.

**Teorema 1.** *Para cada par de flujos $(X,\Phi)$ y $(Y,\Psi)$, definidos sobre espacios métricos compactos, se tiene que:*

(1) *Si $X = Y$ entonces $D_{GH^0}(\Phi,\Psi) \le \sup_{t\in[0,1]} d_{C^0}(\Phi_t,\Psi_t)$. Donde la desigualdad puede ser estricta.*

(2) *$d_{GH}(X,Y) \le D_{GH^0}(\Phi,\Psi)$. Y si $\Phi^X$ y $\Psi^Y$ son los flujos tales que $(\Phi^X)_t = \mathrm{Id}_X$ y $(\Psi^Y)_t = \mathrm{Id}_Y$ para cada $t \in \mathbb{R}$, entonces $d_{GH}(X,Y) = D_{GH^0}(\Phi^X,\Psi^Y)$.*

(3) *$D_{GH^0}(\Phi,\Psi) = 0$ si, y solamente si, $\Phi$ y $\Psi$ son isométricos entre sí.*

(4) *$D_{GH^0}(\Phi,\Psi) = D_{GH^0}(\Psi,\Phi)$.*

(5) *Para cada flujo $(Z, \xi)$ definido sobre un espacio métrico compacto, tenemos que*

$$D_{GH^0}(\Phi, \Psi) \leq 2 \cdot \big(D_{GH^0}(\Phi, \xi) + D_{GH^0}(\xi, \Psi)\big).$$

(6) $D_{GH^0}(\Phi, \Psi) \geq 0$. *Además, si $X$ y $Y$ son acotados entonces $D_{GH^0}(\Phi, \Psi) < \infty$.*

(7) *Si $X$ es un espacio métrico compacto, y si existe una sucesión*

$$\big(\Psi^n : \mathbb{R} \times Y_n \to Y_n\big)_{n \in \mathbb{N}}$$

*de flujos isométricos tales que $\lim\limits_{n \to +\infty} D_{GH^0}(\Phi, \Psi^n) = 0$. Entonces $\Phi$ es también un flujo isométrico.*

Las propiedades (3), (4) y (5) nos dicen que $D_{GH^0}$ es una *pseudo-casi-métrica* con coeficiente 2 en el espacio de flujos continuos definidos sobre espacios métricos compactos, módulo isometrías de flujos.

Así también, basándonos en la definición de *GH-estabilidad topológica* para homeomorfismos, dada en [3]; y en la definición de *estabilidad topológica para flujos*, dada en [1], definimos el concepto de *GH-estabilidad topológica* para flujos. Para ello previamente definimos el concepto de *$\mathcal{H}$-continuidad*: decimos que una función $h : Y \to X$, es *$\mathcal{H}$-continua* si existe alguna función multivaluada $g : Y \rightsquigarrow X$, semicontinua superior, y con valores cerrados, tal que

- $h(y) \in g(y)$ para cada $y \in Y$; y
- para cada $y \in Y$ se tiene que para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $z \in Y$,

$$\text{si } d(z, y) < \delta \text{ y } d_H\big(g(z), g(y)\big) < \delta, \text{ entonces } d\big(h(z), h(y)\big) < \epsilon.$$

**Definición 3** ($GH$-estabilidad topológica para flujos)**.** *Sea $(X, \Phi)$ un flujo definido sobre un espacio métrico $X$. Decimos que $\Phi$ es* topológicamente $GH$-estable *si, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $(Y, \Psi)$ es un flujo continuo para el cual existen $\delta$-isometrías continuas $i : X \to Y$ y $j : Y \to X$, tales que,*

$$d_{C^0}(\Psi_t \circ i, i \circ \Phi_t) < \delta \text{ para cada } t \in [0, 1]; \text{ y} \tag{1.2}$$

$$d_{C^0}(\Phi_t \circ j, j \circ \Psi_t) < \delta \text{ para cada } t \in [0, 1]. \tag{1.3}$$

*Entonces, existe $h : Y \to X$, función $\mathcal{H}$-continua, tal que $h$ es una $\epsilon$-isometría, y lleva órbitas de $\Psi$ en órbitas de $\Phi$.*

Esta Definición 3, en términos de la distancia $D_{GH^0}$, resulta:

**Definición 4** ($GH$-estabilidad topológica para flujos)**.** *Dado un flujo* $(X, \Phi)$*. Decimos que este es* topológicamente $GH$-estable *si, para cada* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que, si* $(Y, \Psi)$ *es un flujo, con* $D_{GH^0}(\Psi, \Phi) < \delta$*, entonces existe alguna función* $\mathcal{H}$*-continua* $h : Y \to X$*, que es* $\epsilon$*-isometría, y que lleva órbitas de* $\Psi$ *en órbitas de* $\Phi$*.*

Además mostramos que, al igual que en el caso de homeomorfismos (como en el Teorema 3 de [3]), expansividad y POTP dan lugar a la $GH$-estabilidad topológica. Todo esto siguiendo la prueba del Teorema 3 dado en [1]. De este modo, establecemos nuestro segundo resultado.

**Teorema 2.** *Cada flujo expansivo* $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ *sin singularidades, definido sobre un espacio métrico compacto, y con la propiedad del sombreamiento* (POTP) *es topológicamente* $GH$*-estable.*

También definimos una variante de la $GH$-estabilidad topológica, que denominaremos $GH$-estabilidad $\sigma$-topológica,

**Definición 5** ($GH$-estabilidad $\sigma$-topológica para flujos)**.** *Sea* $(X, \Phi)$ *un flujo definido sobre un espacio métrico* $X$*. Decimos que* $\Phi$ *es* $\sigma$-topológicamente $GH$-estable *si, para cada* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que, si* $(Y, \Psi)$ *es un flujo, con* $D_{GH^0}(\Psi, \Phi) < \delta$*, entonces existe* $h : Y \to X$*, función continua sobre un conjunto residual de* $Y$*, tal que* $h$ *es una* $\epsilon$*-isometría, y lleva órbitas de* $\Psi$ *en órbitas de* $\Phi$*.*

Y mostramos un teorema análogo al Teorema 2, basándonos en el hecho que la semicontinuidad superior de una función multivaluada implica la continuidad de esta sobre un subconjunto residual de su dominio.

**Teorema 3.** *Cada flujo expansivo* $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ *sin singularidades, definido sobre un espacio métrico compacto, y con la propiedad del sombreamiento* (POTP) *es* $\sigma$*-topológicamente* $GH$*-estable.*

Basados en el Teorema 9 de [3], el cual nos dice que si tenemos dos homeomorfismos isométricos entre sí, tal que uno de ellos es topológicamente $GH$-estable, entonces el otro es también $GH$-estable. Mostramos, análogamente, que el concepto de $GH$-estabilidad topológica para flujos es invariante bajo isometrías de flujos.

**Teorema 4.** *Sean* $(X', \Phi')$ *y* $(X, \Phi)$ *flujos isométricos entre sí, tales que* $(X, \Phi)$ *es un flujo topológicamente* $GH$*-estable. Entonces* $(X', \Phi')$ *es también un flujo topológicamente* $GH$*-estable.*

Así también, el concepto de $GH$-estabilidad $\sigma$-topológica es invariante bajo isometrías de flujos.

**Teorema 5.** *Sean $(X', \Phi')$ y $(X, \Phi)$ flujos isométricos entre sí, tales que $(X, \Phi)$ es un flujo $\sigma$-topológicamente $GH$-estable. Entonces $(X', \Phi')$ es también un flujo $\sigma$-topológicamente $GH$-estable.*

Motivados en la Proposición 3.1.1 de [7], y como corolario de este y del ítem (3) del Teorema 1, mostramos el siguiente resultado,

**Corolario 1.** *Sean $(X, \Phi)$ y $(Y, \Psi)$ dos flujos definidos sobre espacios métricos compactos $X$ e $Y$, respectivamente. Si $D_{GH^0}(\Phi, \Psi) = 0$ entonces ambos flujos tienen la misma entropía topológica, esto es $h(\Phi) = h(\Psi)$.*

Por otro lado, en el Corolario 2 del Teorema 5 de [1], se muestra que si $f : X \to X$ es un homeomorfismo topológicamente estable definido sobre una variedad compacta de dimensión $\geq 2$, el cual es expansivo, entonces el flujo suspensión $\Phi^f : \mathbb{R} \times \widehat{X} \to \widehat{X}$ de $f$ (bajo la función constante $1 : X \to \mathbb{R}$ idénticamente uno) es topológicamente estable.

Así también podemos mostrar el siguiente corolario.

**Corolario 2.** *Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo topológicamente estable el cual es expansivo, definido sobre una variedad compacta $X$ de dimensión $\geq 2$. Entonces el flujo suspensión $\Phi^f : \mathbb{R} \times \widehat{X} \to \widehat{X}$ de $f$ (bajo la función constante $1 : X \to \mathbb{R}$) es topológicamente $GH$-estable y también $\sigma$-topológicamente $GH$-estable.*

## 1.2. Sobre densidad de puntos no transitivos para semiflujos

Dado un espacio métrico compacto $(X, d)$, y una función continua $f : X \to X$, un punto $a$ de $X$ es *transitivo* respecto de $f$, si su semiórbita positiva, $O_+(a, f) = \{f^n(a); n \in \mathbb{N}\}$, es densa en $X$. Denotaremos por $P_+(f)$ al conjunto de puntos transitivos de $f$, y por $Q_+(f)$ al conjunto de puntos no transitivos. En caso que $f$ fuese un homeomorfismo, a cada punto $a \in X$ está asociado también su semiórbita negativa, $O_-(a, f) = O_+(a, f^{-1})$; y la órbita de $a$, $O(a, f) = \{f^n(a); n \in \mathbb{Z}\}$. En este caso, $P_-(f)$ denotará a $P_+(f^{-1})$. En lo que sigue, diremos que un homeomorfismo $f : X \to X$, definido sobre un espacio métrico, es *minimal* si para cada $x \in X$, $x \in P_+(f)$.

Sean $(X,d)$ un espacio métrico, $\mathbb{R}^+ = [0,+\infty)$ el conjunto de los números reales no negativos, dotado con la topología de subespacio de $\mathbb{R}$ (con la topología usual). Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, y $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, ambos con la topología de subespacio de $\mathbb{R}$. Una función $\phi : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ es un *semiflujo*, esto es, una *acción de* $\mathbb{R}^+$ sobre $X$, si $\phi$ es una función continua tal que

- Para cada $x \in X$, $\phi(0,x) = x$;
- Para cada $t,s \in \mathbb{R}^+$, y para cada $x \in X$, $\phi\big(t,\phi(s,x)\big) = \phi(t+s,x)$.

Usualmente, denotaremos a un semiflujo $\phi$ por $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, donde $\phi_t : X \to X$ es la función dada por $\phi_t(x) = \phi(t,x)$, para cada $x \in X$ y cada $t \in \mathbb{R}^+$. Así, $\phi_0 = \mathrm{Id}$ y $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$, para cada $t,s \geq 0$. La *semiórbita positiva* de $x \in X$, asociada al semiflujo $\phi$, es

$$O_+(x,\phi) = \big\{\phi_t(x) \in X; t \geq 0\big\} = \phi_{\mathbb{R}^+}(x).$$

Decimos que $x \in X$ es un *punto transitivo* de $\phi$, si su semiórbita positiva es densa en $X$, esto es, si $\overline{O_+(x,\phi)} = X$. Denotaremos por $P_+(\phi)$ al conjunto de puntos transitivos de $\phi$, y por $Q_+(\phi)$ al conjunto de puntos no transitivos de $\phi$. Si cambiamos el semigrupo $\mathbb{R}^+$, por el grupo aditivo $\mathbb{R}$ obtenemos un *flujo* sobre $X$.

Análogamente, para un semigrupo $\mathcal{G} \in \{\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0\}$, una *acción* de $\mathcal{G}$ en $X$ es una función $\Psi : \mathcal{G} \times X \to X$ que satisface

($\alpha$) Para todo $x \in X$, $\Psi(e,x) = x$;

($\beta$) Para cada $t,s \in \mathcal{G}$, y para cada $x \in X$, $\Psi\big(t,\Psi(s,x)\big) = \Psi(t+s,x)$.

donde $e$ es el elemento neutro de $\mathcal{G}$. Dado $p \in X$, la *semiórbita* de $p$, asociada a la acción $\Psi$, es el conjunto $O_+(p,\Psi) = \big\{\Psi(x,p) \in X; x \in \mathcal{G}\big\}$. Decimos que un punto $p$ de $X$ es *transitivo* si su semiórbita es densa en $X$. Denotaremos por $P_+(\Psi)$ al conjunto de puntos transitivos de $\Psi$. Y por $Q_+(\Psi)$ al conjunto de puntos no transitivos de $\Psi$. Observe que para el caso $\mathcal{G} = \mathbb{N}_0$, tenemos que una acción $\Psi$ de $\mathbb{N}_0$ sobre $X$ está completamente definida por la función $\Psi(1,\cdot) : X \to X$, ya que $\Psi(m,\cdot) = \big[\Psi(1,\cdot)\big]^m$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Análogamente, para el caso $\mathcal{G} = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, tenemos que una acción $\Psi$ de $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ sobre $X$ está completamente definida por las funciones $\Psi\big((1,0),\cdot\big) : X \to X$ y $\Psi\big((0,1),\cdot\big) : X \to X$, ya que $\Psi\big((m,n),\cdot\big) = \big[\Psi\big((1,0),\cdot\big)\big]^m \circ \big[\Psi\big((0,1),\cdot\big)\big]^n$ para cada $m,n \in \mathbb{N}_0$. Además, de ($\beta$) tenemos que

$$\big[\Psi\big((1,0),\cdot\big)\big] \circ \big[\Psi\big((0,1),\cdot\big)\big] = \big[\Psi\big((0,1),\cdot\big)\big] \circ \big[\Psi\big((1,0),\cdot\big)\big].$$

Del Teorema 2, de [14], tenemos que dada una función continua $f : X \to X$ sobre un espacio métrico compacto $(X, d)$, si el conjunto de puntos no transitivos $Q_+(f)$ es un conjunto no vacío, entonces este es denso en $X$. En términos de acciones, la función $f$ da lugar a una acción $\phi : \mathbb{N}_0 \times X \to X$, de $\mathbb{N}_0$ sobre $X$, dada por $\phi(n, x) = f^n(x)$, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y $x \in X$. Una pregunta surge naturalmente, dada una acción $\phi : \mathbb{R}^+ \times X \to X$, de $\mathbb{R}^+$ sobre $X$: ¿$Q_+(\phi)$ no vacío, implica que $Q_+(\phi)$ es denso en $X$?
Observemos que para un semiflujo $\phi : \mathbb{R}^+ \times X \to X$, donde $X$ es un espacio métrico, puede ocurrir que exista un punto transitivo $p \in X$, tal que $\phi(t, p)$ sea un punto no transitivo para algún $t > 0$. Por ejemplo, considere $X = \mathbb{R}^+$, y $\phi(t, x) = x + t$ para cada $t, x \in \mathbb{R}^+$. Tenemos que $x = 0$ es un punto transitivo, pero $\phi(t, 0)$ no es transitivo para ningún $t > 0$. El Teorema 1, en [14], nos invita a hacer la siguiente hipótesis: si $x \in P_+(\phi)$, entonces $\phi(t, x) \in P_+(\phi)$ para cada $t \geq 0$. Bajo esta hipótesis obtendremos el siguiente resultado que será demostrado en la Sección 3.1.

**Teorema 6.** *Sea $X$ un espacio métrico compacto, y sea $\Phi : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ un semiflujo. Supongamos que*

$$\text{si } x \in P_+(\Phi), \text{ entonces } \Phi(t, x) \in P_+(\Phi) \text{ para cada } t > 0. \tag{1.4}$$

*Entonces, si el conjunto de puntos no transitivos $Q_+(\Phi)$ no es vacío, entonces es denso en $X$. Además, $Q_+(\Phi)$ es un $F_\sigma$-conjunto.*

Por otro lado, en la Sección 3.2, construimos, como en [15], un homeomorfismo $S : Y \to Y$ con un único punto fijo $p \in Y$, tal que cada punto diferente de $p$, tenga órbita densa en $Y$. Entonces obtendremos el segundo resultado.

**Teorema 7.** *Existe una acción $\Psi$ de $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ sobre un espacio métrico compacto $Y$ tal que $Q_+(\Psi)$ es no vacío, y no es denso en $Y$.*

# Capítulo 2

# Preliminares

## 2.1. Componente conexa en espacios Hausdorff compactos

A continuación, hacemos referencia a una conocida proposición sobre componentes conexas en espacios de Hausdorff compactos, el cual es propuesto como ejercicio 1 en la página 31 de [12]. Este resultado nos permitirá considerar la igualdad, $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, siempre que $\{x\}$ sea una componente conexa de un espacio topológico de Hausdorff compacto $X$, y donde los $U_n$ son conjuntos abiertos y cerrados de $X$ a la vez, y $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \cdots$.

**Proposición 1.** *Sea $X$ un espacio topológico de Hausdorff compacto. Si $C$ es una componente conexa de $X$, entonces $C = \bigcap_{A\in\mathcal{C}} A$, donde*

$$\mathcal{C} = \Big\{A \subseteq X;\ A \text{ es abierto y cerrado, y } C \subseteq A\Big\}.$$

*Demostración.* Observe que $\mathcal{C}$ es no vacío ya que $X \in \mathcal{C}$. Sea

$$K = \bigcap_{A\in\mathcal{C}} A.$$

De la definición de $\mathcal{C}$, $C \subseteq K$. Como $C$ es una componente conexa de $X$, para mostrar que $C = K$ es suficiente ver que $K$ es conexo. Sea $K = K_1 \cup K_2$, donde $K_1$ y $K_2$ son cerrados en $K$ (y por tanto cerrados en $X$), y disjuntos. Como $X$ es un espacio de Hausdorff compacto tenemos que $X$ es un espacio normal, así existen $V_1$ y $V_2$ abiertos disjuntos tales que $K_1 \subseteq V_1$ y $K_2 \subseteq V_2$. Por tanto $\bigcap_{A\in\mathcal{C}} A = K \subseteq V_1 \cup V_2$, y por la compacidad de $X$, y ya que cada $A$ en $\mathcal{C}$ es cerrado, tenemos que existen $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ tales que $\bigcap_{i=1}^n A_i \subseteq V_1 \cup V_2$. De hecho, como $\big(V_1 \cup V_2\big) \cup \bigcup_{A\in\mathcal{C}} A^c = X$ y $X$ es compacto, entonces existe un subcubrimiento finito de $X$, así existen $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ tales que $\big(V_1 \cup V_2\big) \cup \bigcup_{i=1}^n A_i^c = X$, esto es $\big(V_1 \cup V_2\big)^c \cap \bigcap_{i=1}^n A_i = \emptyset$. Sea

$$F = \bigcap_{i=1}^{n} A_i,$$

tenemos que $F$ es abierto y cerrado, y $F \supseteq K \supseteq C$, esto es, $F \in \mathcal{C}$. Como $C$ es conexo, y $C \subseteq V_1 \cup V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, entonces $C \subseteq V_1$ o $C \subseteq V_2$. Supongamos que $C \subseteq V_1$. Como $F \supseteq C$, entonces $F \cap V_1 \supseteq C$. Además, ya que $F$ es abierto, entonces $F \cap V_1$ es abierto; y como $F$ es cerrado y

$$F \cap V_1 = F \cap \big((V_1 \uplus V_2) \setminus V_2\big) = F \cap (X \setminus V_2),$$

entonces $F \cap V_1$ es cerrado. Así $F \cap V_1 \in \mathcal{C}$, y por tanto $K \subseteq F \cap V_1$. Luego $K \subseteq V_1$. Y como $K = K_1 \uplus K_2$, $K_1 \subseteq V_1$ y $K_2 \subseteq V_2$, entonces $K_2 = \emptyset$. Análogamente, si $C \subseteq V_2$, entonces $K_1 = \emptyset$. Esto muestra que $K$ es conexo. □

## 2.2. Un homeomorfismo *excepcional* más que minimal

Decimos que $\Lambda$ es un conjunto *perfecto* si es cerrado y no tiene puntos aislados (todos sus puntos son puntos de acumulación). Decimos que un conjunto topológico $\Lambda$ es *totalmente disconexo* si cada componente conexa de $\Lambda$ consiste de un solo punto. Por definición, un *conjunto de Cantor* es un conjunto compacto, perfecto, totalmente disconexo, y metrizable. Denotaremos por $S^1$ a la circunferencia de radio 1 centrada en el origen $(0,0)$ del plano $\mathbb{R}^2$, esto es $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 = 1\}$. A continuación recordamos dos importantes teoremas, dados en [16] (Lan Wen, páginas 16 y 17), respecto de la estructura del conjunto no errante asociado a homeomorfismos sobre $S^1$.

**Proposición 2.** *Sea $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo tal que $\mathrm{Per}(f) = \emptyset$. Entonces $\Omega(f)$ es un conjunto minimal. Además, o $\Omega(f)$ coincide con $S^1$, o es un conjunto de Cantor.*

**Proposición 3.** *Sea $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo que preserva orientación, tal que $\mathrm{Per}(f) \neq \emptyset$. Entonces todos los puntos periódicos de $f$ tienen el mismo periodo y $\mathrm{Per}(f) = \Omega(f)$.*

**Definición 6.** *Un homeomorfismo $f : S^1 \to S^1$ es llamado* excepcional *si $\mathrm{Per}(f) = \emptyset$ y $\Omega(f)$ es un conjunto de Cantor.*

Sabemos que una rotación irracional $f : S^1 \to S^1$ es un homeomorfismo *minimal*, esto es, para cada $x \in S^1$, $\mathrm{Orb}^+(x,f)$ es denso en $S^1$. Más aún, $f$ es más que minimal puesto que para cada $x \in S^1$, ambas semiórbitas, $\mathrm{Orb}^+(x,f)$ y $\mathrm{Orb}^-(x,f)$, son densas en $S^1$.

A continuación repliquemos la construcción de un homeomorfismo excepcional en $S^1$ (dado en el ejemplo 5 de la página 18 de [16]) a partir de alguna rotación irracional. Sea $f : S^1 \to S^1$

una rotación irracional (que preserva orientación), y considere $p \in S^1$. Reemplace cada uno de los puntos de la órbita de $p$,

$$\dots, f^{-2}(p), f^{-1}(p), p, f(p), f^2(p), \dots,$$

por intervalos cerrados no unitarios

$$\dots, I_{-2}, I_{-1}, I_0, I_1, I_2, \dots$$

Esto es, para cada $n \in \mathbb{Z}$ reemplace $f^n(p)$ por un intervalo cerrado (no trivial) $I_n$ en $S^1$, de modo que la longitud total de estos intervalos sea finita, $\sum_{i\in\mathbb{Z}} |I_i| < +\infty$. Esto nos da una nueva circunferencia $\Sigma$ (homeomorfa a $S^1$). Defina un homeomorfismo $g : \Sigma \to \Sigma$, tal que

$$g(x) = f(x) \text{ para cada } x \in \Sigma \setminus \biguplus_{n\in\mathbb{Z}} I_n. \tag{2.1}$$

Y tal que $g$ mapee $I_n$ sobre $I_{n+1}$ homeomórficamente para cada $n \in \mathbb{Z}$, de modo que $g$ resulte una función continua. Así, $g$ no tiene puntos periódicos, y posee puntos errantes, a saber,

$$\Sigma \setminus \Omega(g) = \biguplus_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{int}(I_n),$$

gracias a (2.1). Por lo tanto, $\Omega(g)$ es diferente de la circunferencia $\Sigma$. Del Teorema 2 concluimos que $\Omega(g)$ es un conjunto minimal el cual es un conjunto de Cantor.
Además, de las propiedades de la rotación irracional $f$, y de (2.1), tenemos que ambas semiórbitas, $\operatorname{Orb}^+(x, g)$ y $\operatorname{Orb}^-(x, g)$, son densas en $\Omega(g)$, para cada $x \in \Omega(g) = \Sigma \setminus \biguplus_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{int}(I_n)$.
Restringiendo $g$ a $\Omega(g)$ obtenemos un homeomorfismo

$$h = g|_{\Omega(g)} : \Omega(g) \to \Omega(g)$$

definido sobre un conjunto de Cantor (conjunto compacto, perfecto, totalmente disconexo, y metrizable) tal que ambas semiórbitas, $\operatorname{Orb}^+(x, h)$ y $\operatorname{Orb}^-(x, h)$, son densas en $\Omega(g)$, para cada $x \in \Omega(g)$.

## 2.3. Continuidad de funciones multivaluadas

A continuación, recordamos algunas definiciones dadas en [8] respecto al concepto de continuidad y semicontinuidad de funciones multivaluadas. Dados dos espacios métricos $(X, d^X)$ e $(Y, d^Y)$, una *función multivaluada* $F$, de $X$ a $Y$, que denotaremos por $F : X \rightsquigarrow Y$, es una función (en el sentido usual) de $X$ a $2^Y$. Donde $2^Y$ denota al conjunto de subconjuntos de $Y$. El *dominio* de $F$ es el subconjunto de elementos $x \in X$ tales que $F(x)$ es no vacío, esto es,

$$\operatorname{Dom}(F) = \Big\{x \in X; F(x) \neq \emptyset\Big\}.$$

Si las imágenes de una función multivaluada $F : X \rightsquigarrow Y$ son conjuntos cerrados (compactos), esto es, $F(x)$ es un subconjunto cerrado (compacto) de $Y$ para cada $x \in \mathrm{Dom}(F)$, decimos que $F$ tiene *valores cerrados* (*compactos*).

**Definición 7** (Semicontinuidad superior de funciones multivaluadas). *Una función multivaluada $F : X \rightsquigarrow Y$ es* semicontinua superior *en $x \in \mathrm{Dom}(F)$ si para cualquier vecindad $\mathcal{U}$ de $F(x)$, existe $\eta > 0$ tal que para cada $x' \in X$,*

$$\textit{si } d^X(x', x) < \eta \textit{ entonces } F(x') \subset \mathcal{U}.$$

*La función multivaluada $F$ es* semicontinua superior *si esta es semicontinua superior en cada punto de* $\mathrm{Dom}(F)$.

Cuando $F(x)$ es compacto, $F$ es semicontinua superior en $x$ si, y solamente si, para cada $\epsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que para cada $x' \in X$,

$$\text{si } d^X(x', x) < \eta \text{ entonces } F(x') \subset B_Y\big(F(x), \epsilon\big).$$

Donde, $B_Y\big(F(x), \epsilon\big) = \Big\{y \in Y; d(y, F(x)) < \epsilon\Big\}$ y $d\big(y, F(x)\big) = \inf \Big\{d^Y(y, w); w \in F(x)\Big\}$.

**Definición 8** (Semicontinuidad inferior de funciones multivaluadas). *Una función multivaluada $F : X \rightsquigarrow Y$ es* semicontinua inferior *en $x \in \mathrm{Dom}(F)$ si para cada $y \in F(x)$, y para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ convergiendo para $x$, existe alguna sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ tal que*

- *$y_n \in F(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$; y*
- $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$

*La función multivaluada $F$ es* semicontinua inferior *si esta es semicontinua inferior en cada punto de* $\mathrm{Dom}(F)$.

Observe que la definición de semicontinuidad inferior de $F : X \rightsquigarrow Y$ en un punto $x$ de $X$, es equivalente a que: para cada abierto $\mathcal{U}$ de $Y$, con $\mathcal{U} \cap F(x) \neq \emptyset$, exista $\eta > 0$ tal que para cada $x' \in X$,

$$\text{si } d^X(x', x) < \eta \text{ entonces } F(x') \cap \mathcal{U} \neq \emptyset.$$

En efecto, supongamos que esto último acontece. Sean $y \in F(x)$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, con $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$y \in F(x) \cap B_{1/n}(y).$$

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\eta_n > 0$ tal que para cada $x' \in X$,

$$\text{si } d^X(x', x) < \eta_n \text{ entonces } F(x') \cap B_{1/n}(y) \neq \emptyset. \tag{2.2}$$

Como $\lim_{m\to\infty} x_m = x$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $i_n \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\text{si } m \geq i_n \text{ entonces } d^X(x_m, x) < \eta_n.$$

Por lo tanto, de (2.2), $F(x_m) \cap B_{1/n}(y) \neq \emptyset$ si $m \geq i_n$. Sin pérdida de generalidad podemos elegir los $i_n$ tales que, $i_n < i_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, para cada $m \in [i_n, i_{n+1}) \cap \mathbb{Z}$,

$$F(x_m) \cap B_{1/n}(y) \neq \emptyset.$$

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, para cada $m \in [i_n, i_{n+1}) \cap \mathbb{Z}$,

$$\text{existe } y_m \in F(x_m) \cap B_{1/n}(y).$$

Por lo tanto,

- $y_m \in F(x_m)$ para cada $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq i_1$; y
- $d^Y(y_m, y) < 1/n$ para cada $m \in [i_n, i_{n+1}) \cap \mathbb{Z}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Así, $\lim_{m\to\infty} y_m = y$.

Recíprocamente, supongamos que $F$ es semicontinua inferior en $x \in \mathrm{Dom}(F)$. Sea $\mathcal{U}$ un conjunto abierto de $Y$ tal que

$$\mathcal{U} \cap F(x) \neq \emptyset.$$

Así, existe $y \in \mathcal{U} \cap F(x)$. Mostremos que existe $\eta > 0$ tal que para cada $x' \in X$,

$$\text{si } d^X(x', x) < \eta \text{ entonces } F(x') \cap \mathcal{U} \neq \emptyset. \tag{2.3}$$

Supongamos por contradicción que para cada $\eta > 0$, existe $x_\eta \in X$ tal que,

$$d^X(x_\eta, x) < \eta \text{ y } F(x_\eta) \cap \mathcal{U} = \emptyset.$$

En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que,

$$d^X(x_n, x) < 1/n \text{ y } F(x_n) \cap \mathcal{U} = \emptyset.$$

Así, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y

$$F(x_n) \cap \mathcal{U} = \emptyset \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Como $F$ es semicontinua inferior en $x$, existe alguna sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ tal que

(i) $y_n \in F(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$; y

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

Como $y \in \mathcal{U}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{si } n \geq n_0 \text{ entonces } y_n \in \mathcal{U}.$$

Así, de (i), tenemos que para cada $n \geq n_0$,

$$y_n \in \mathcal{U} \cap F(x_n).$$

Lo cual contradice (2.4). Por lo tanto existe $\eta > 0$ verificando (2.3).

**Definición 9.** *Decimos que una función multivaluada $F : X \rightsquigarrow Y$ es* continua *en $x \in \mathrm{Dom}(F)$ si $F$ es a la vez, semicontinua superior y semicontinua inferior en $x$. La función multivaluada $F$ es* continua *si esta es continua en cada punto de* $\mathrm{Dom}(F)$.

A continuación recordamos el Teorema 1.4.13 de [8], que nos dice que a pesar de que la semicontinuidad superior y la semicontinuidad inferior son conceptos distintos, ellos coinciden genéricamente. Esto nos permitirá mostrar la continuidad de una función (en el sentido usual) en un subconjunto residual de su dominio. Recordemos que un *subconjunto residual* de un espacio métrico $X$ es una intersección numerable de subconjuntos abiertos densos. El Teorema de Baire establece que un subconjunto residual de un espacio métrico completo es denso. Una propiedad es llamada *genérica* si vale para cada punto de un conjunto residual.

**Proposición 4** (Continuidad genérica de una función multivaluada)**.** *Sea $F : X \rightsquigarrow Y$ una función multivaluada de un espacio métrico completo $X$, a un espacio métrico completo separable $Y$.*

*(1) Si $F$ es semicontinua superior, entonces $F$ es continua sobre un subconjunto residual de $X$.*

*(2) Si $F$ es semicontinua inferior, con valores compactos, entonces $F$ es continua sobre un subconjunto residual de $X$.*

*Demostración de (1).* Como $Y$ es un espacio métrico separable, entonces existe una base topológica numerable de $Y$. Esto es, existe $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, colección numerable de abiertos de $Y$ tal que,

$$\forall \text{ abierto } V \subseteq Y, \forall\, y \in V, \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ tal que } y \in V_n \subseteq V. \tag{2.5}$$

Como $Y$ es un espacio métrico, entonces $Y$ es un espacio regular. Así, para cada abierto $V$, y para cada $y \in V$, existe algún abierto $W$ tal que $y \in W \subseteq \overline{W} \subseteq V$. Así, para $W$ y $y$, de (2.5), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y \in V_n \subseteq \overline{V_n} \subseteq W$. Por lo tanto,

$$\forall \text{ abierto } V \subseteq Y, \forall y \in V, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } y \in V_n \subseteq \overline{V_n} \subseteq V. \tag{2.6}$$

Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$L_n = F^{-1}\big(\overline{V_n}\big) = \Big\{x \in X; F(x) \cap \overline{V_n} \neq \emptyset\Big\}.$$

Mostremos que $L_n$ es un subconjunto cerrado de $X$. Sean $x_0 \in X$ y $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq L_n$ tales que

$$\lim_{m\to\infty} x_m = x_0. \tag{2.7}$$

Como $x_m \in L_n$, entonces $F(x_m) \cap \overline{V_n} \neq \emptyset$. Así, para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\text{existe } y_m \in F(x_m) \cap \overline{V_n} \neq \emptyset.$$

Suponiendo que $\overline{V_n}$ es compacto, tomando subsucesiones si es necesario, podemos suponer que existe $y_0 \in \overline{V_n}$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} y_m = y_0. \tag{2.8}$$

Suponiendo que $\mathrm{Dom}(F)$ es un conjunto cerrado, entonces $x_0 \in \mathrm{Dom}(F)$. Sea $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$, estrictamente decreciente tal que $\lim_{i\to\infty} \lambda_i = 0$. Como $F$ es semicontinua superior en $x_0$, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $\delta_i > 0$ tal que para cada $x' \in X$,

$$\text{si } d(x', x_0) < \delta_i \text{ entonces } F(x') \subseteq B\big(F(x_0), \lambda_i\big).$$

De (2.7), para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $k(i) \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\text{si } m \geq k(i) \text{ entonces } d(x_m, x_0) < \delta_i.$$

Por lo tanto, si $m \geq k(i)$ entonces $y_m \in F(x_m) \subseteq B\big(F(x_0), \lambda_i\big)$. Así, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$\text{para cada } m \geq k(i),\ d\big(y_m, F(x_0)\big) < \lambda_i.$$

Así, de (2.8), $d\big(y_0, F(x_0)\big) \leq \lambda_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $y_0 \in \overline{F(x_0)}$. Suponiendo que $F(x_0)$ sea cerrado, tenemos que $y_0 \in F(x_0)$. Así, puesto que $y_0 \in \overline{V_n}$, tenemos que $y_0 \in F(x_0) \cap \overline{V_n}$. Por lo tanto, $x_0 \in L_n$. Así, $L_n$ es un conjunto cerrado de $X$.

Notemos que si $x \in X$ es tal que,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \text{ si } x \in L_n \text{ entonces } x \in \operatorname{int}(L_n). \tag{2.9}$$

Entonces $F$ es semicontinua inferior en $x$. Donde $\operatorname{int}(L_n)$ denota al interior del conjunto $L_n$.

En efecto, sea $V$ un subconjunto abierto de $Y$ tal que $F(x) \cap V \neq \emptyset$. Así, existe $y \in F(x) \cap V$. De (2.6), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y \in V_n$ y $\overline{V_n} \subseteq V$. Por lo tanto,

$$y \in F(x) \cap \overline{V_n} \subseteq F(x) \cap V.$$

Así, $x \in L_n$. Por lo tanto, de (2.9), $x \in \operatorname{int}(L_n)$. Así, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_\delta(x) \subseteq L_n = F^{-1}\big(\,\overline{V_n}\,\big) \subseteq F^{-1}(V).$$

Así, para cada $x' \in X$,

$$\text{si } d(x', x) < \delta \text{ entonces } F(x') \cap V \neq \emptyset.$$

Por ende, $F$ es semicontinua inferior en $x$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos por $\partial L_n$ al borde de $L_n$, esto es

$$\partial L_n = \overline{L_n} \cap \overline{(X \setminus L_n)}.$$

Tenemos que cada $\partial L_n$ es un conjunto cerrado de $X$. Además, como $L_n$ es cerrado, entonces $\operatorname{int}(\partial L_n) = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea

$$R = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \partial L_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus \partial L_n).$$

Como $\partial L_n$ es cerrado con interior vacío, entonces $X \setminus \partial L_n$ es abierto y denso en $X$. Así, $R$ es un subconjunto residual de $X$. Dado que $X$ es un espacio métrico completo, entonces del Teorema de Baire tenemos que $R$ es denso en $X$. Sea $x \in R$, entonces

$$x \notin \partial L_m \text{ para cada } m \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

Así, dado $n \in \mathbb{N}$ (cualquiera), si $x \in L_n$ entonces

$$x \in L_n = \overline{L_n} = \operatorname{int}(L_n) \uplus \partial L_n,$$

entonces $x \in \operatorname{int}(L_n)$ o $x \in \partial L_n$, donde $\uplus$ denota a una unión disjunta. Entonces, de (2.10), $x \in \operatorname{int}(L_n)$. Así, hemos mostrado que se cumple (2.9). Por lo tanto, $F$ es semicontinua inferior en $x$. Como $x$ fue un punto cualquiera de $R$ tenemos que $F$ es semicontinua inferior en $R$. $\square$

## 2.4. La distancia $C^0$-Gromov-Hausdorff para homeomorfismos

A continuación, seguimos las notaciones dadas en [3]. Sean $(X, d^X)$ y $(Y, d^Y)$ un par de espacios métricos. Una *isometría* $i : X \to Y$ es una función sobreyectiva que preserva distancias, esto es

$$d^Y\big(i(x), i(x')\big) = d^X(x, x') \text{ para cada } x, x' \in X.$$

Dados un espacio métrico $(Z, d^Z)$, $w \in Z$ y $C \subseteq Z$, la distancia de $w \in Z$ al subconjunto $C \subseteq Z$, que denotamos por $d(w, C)$, es

$$d(w, C) = \text{ínf}\left\{d^Z(w, c); c \in C\right\}.$$

Dados $A, B \subseteq Z$, la *distancia de Hausdorff* entre $A$ y $B$, que denotamos por $d_H(A, B)$, es definida por

$$d_H(A, B) = \text{máx}\left\{\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(b, A)\right\}.$$

Dado $\Delta > 0$, una $\Delta$-*isometría* $i : X \to Y$ es una función (no necesariamente continua) tal que

$$\text{máx}\left\{\sup_{x,z\in X} \left|d^Y(i(x), i(z)) - d^X(x, z)\right|, d_H\big(i(X), Y\big)\right\} < \Delta.$$

Sean $(X, d^X)$ y $(Y, d^Y)$ dos espacios métricos. Dados dos subconjuntos $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, la *distancia de Gromov-Hausdorff* entre $A$ y $B$, que denotamos por $d_{GH}(A, B)$, es definida por

$$d_{GH}(A, B) = \text{ínf}\left\{\Delta > 0; \text{existen } \Delta\text{-isometrías } i : X \to Y \text{ y } j : Y \to X\right\}.$$

Dados dos espacios métricos compactos $(X, d^X)$ y $(Y, d^Y)$. La distancia $C^0$ entre las funciones (no necesariamente continuas) $f : X \to Y$ y $g : X \to Y$ es

$$d_{C^0}(f, g) = \sup_{x\in X} d^Y\big(f(x), g(x)\big),$$

donde $f$ y $g$ no necesariamente son funciones continuas. De la distancia de Gromov-Hausdorff y de la distancia $C^0$, los autores, en [3], definen la *distancia $C^0$-Gromov-Hausdorff*, entre dos dinámicas $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ que actúan sobre espacios métricos distintos, por

$$\begin{aligned} d_{GH^0}(f, g) = \text{ínf}\Big\{&\Delta > 0; \text{existen } \Delta\text{-isometrías } i : X \to Y, j : Y \to X \text{ tales que} \\ &d_{C^0}(i \circ f, g \circ i) < \Delta \text{ y } d_{C^0}(j \circ g, f \circ j) < \Delta\Big\}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

De las propiedades (3), (4) y (5) del Teorema 1 de [3], tenemos que $d_{GH^0}$ es una *pseudo-casi-métrica* con coeficiente 2 sobre el espacio de funciones continuas, definidas sobre espacios métricos compactos, módulo isometrías.

Decimos que un homeomorfismo $f : X \to X$ definido sobre un espacio métrico, es *expansivo* si existe $e > 0$ tal que para cada $x, y \in X$, si $d\big(f^n(x), f^n(y)\big) < e$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, entonces $x = y$. La constante $e$ es llamada *constante de expansividad* de $f$.

## 2.5. Flujos expansivos y propiedad de sombreamiento de flujos

En lo que sigue $(X, d)$ denotará a un espacio métrico compacto. Algunas notaciones que emplearemos, dados $x \in X$ y $\eta > 0$, $B_\eta(x)$ denotará a la bola abierta de centro $x$ y radio $\eta$, esto es $B_\eta(x) = \big\{y \in X; d(y, x) < \eta\big\}$. Una función $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ es un *flujo* si es una función continua tal que,

- $\Phi(0, x) = x$ para cada $x \in X$.
- $\Phi\big(t, \Phi(s, x)\big) = \Phi(t + s, x)$ para cada $t, s \in \mathbb{R}$, para cada $x \in X$.

Para cada $t \in \mathbb{R}$, denotaremos por $\Phi_t$ a la función $\Phi(t, \cdot) : X \to X$. Esto es, $\Phi_t(x) = \Phi(t, \cdot)(x) = \Phi(t, x)$. La órbita de $x \in X$ asociada a $\Phi$, es el conjunto $\Phi_{\mathbb{R}}(x) = \big\{\Phi(t, x); t \in \mathbb{R}\big\}$.

En [2], Bowen y Walters definieron el concepto de expansividad para flujos, como una extensión natural del concepto de expansividad para homeomorfismos.

**Definición 10.** *Un flujo $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ es* expansivo (en el sentido de Bowen-Walters) *si, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para cada $x, y \in X$, para cada función continua $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $s(0) = 0$,*

$$\textit{si } d\big(\Phi_t(x), \Phi_{s(t)}(y)\big) < \delta \textit{ para cada } t \in \mathbb{R}, \ \textit{ entonces } y \in \Phi_{(-\epsilon,\epsilon)}(x),$$

*donde* $\Phi_{(-\epsilon,\epsilon)}(x) = \Big\{\Phi_t(x) \in X; t \in (-\epsilon, \epsilon)\Big\}$.

Note que $y \in \Phi_{(-\epsilon,\epsilon)}(x)$ es equivalente a que $x \in \Phi_{(-\epsilon,\epsilon)}(y)$.

Sean $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ un flujo y $a, \delta > 0$. Dados $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq X$ y $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{R}$, decimos que el par ordenado $\big(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\big)$ es una $(\delta, a)$-*pseudo órbita* de $\Phi$ si

- $t_n \geq a$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, y
- $d\big(\Phi_{t_n}(x_n), x_{n+1}\big) < \delta$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ considere

$$s_n = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} t_k & , \text{ si } n \geq 1 \\ 0 & , \text{ si } n = 0 \\ -\sum_{k=n}^{-1} t_k & , \text{ si } n < 0. \end{cases}$$

Dado $\epsilon > 0$, decimos que una $(\delta, a)$-pseudo órbita $\big(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\big)$ de $\Phi$ es *$\epsilon$-sombreada* por una órbita de $\Phi$, si existen $z \in X$ y algún homeomorfismo creciente $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $\alpha(0) = 0$, tal que

$$d\big(\Phi_{\alpha(t)}(z), \Phi_{t-s_n}(x_n)\big) < \epsilon \text{ para cada } t \in [s_n, s_{n+1}), \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}\,.$$

**Definición 11.** *Dado $a > 0$. Un flujo $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ tiene la* propiedad de sombreamiento *respecto de $a$, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que cada $(\delta, a)$-pseudo órbita de $\Phi$ es $\epsilon$-sombreada por alguna órbita de $\Phi$.*

De la Proposición 1.4 de [1] tenemos que un flujo $\Phi$ tiene la propiedad de sombreamiento respecto de $a > 0$ si, y solamente si, $\Phi$ tiene la propiedad de sombreamiento respecto de 1.

**Definición 12.** *Un flujo $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ tiene la* propiedad de sombreamiento*, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que cada $(\delta, 1)$-pseudo órbita de $\Phi$ es $\epsilon$-sombreada por alguna órbita de $\Phi$.*

Cuando un flujo $\Phi$ tiene la propiedad de sombreamiento, diremos que $\Phi$ tiene POTP, por las siglas en inglés de: Pseudo Orbit Tracing Property.

A continuación enunciaremos algunas proposiciones y lemas sobre flujos expansivos dados en [1], que usaremos en la prueba de nuestros resultados. Un primer resultado sobre flujos expansivos $(X, \Phi)$ es que el estudio de estos se reduce a estudiar aquellos que no poseen singularidades siempre que $X$ sea un espacio métrico sin puntos aislados.

**Lema 1.** *Si $\Phi$ es un flujo expansivo sobre $X$, entonces cada singularidad de $\Phi$ es un punto aislado de $X$.*

*Demostración.* Sea $p \in X$ una singularidad de $(X, \Phi)$, esto es, $\Phi_t(p) = p$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Dado $\epsilon > 0$, de la expansividad de $\Phi$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in X$, para cada $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función continua, con $s(0) = 0$,

$$\text{si } d\big(\Phi_t(x), \Phi_{s(t)}(y)\big) < \delta \text{ para cada } t \in \mathbb{R}, \text{ entonces } y \in \Phi_{(-\epsilon,\epsilon)}(x).$$

En particular, si $y \in B_\delta(p)$, y si $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función idénticamente nula, tenemos que

$$d\big(\Phi_t(p), \Phi_{s(t)}(y)\big) = d(p, y) < \delta \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Entonces, $y \in \Phi_{(-\epsilon,\epsilon)}(p) = \{p\}$. Por lo tanto, $B_\delta(p) = \{p\}$. $\square$

**Lema 2.** *Sea $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ un flujo continuo sin singularidades. Entonces existe $T_0 > 0$ tal que para cada $T \in (0, T_0)$, existe $\gamma > 0$ tal que $d\big(\Phi_T(y), y\big) \geq \gamma$, para cada $y \in X$. Más aún, podemos considerar*

$$T_0 = \text{ínf}\Big\{t > 0; \Phi_t(x) = x, \ \textit{para algún } x \in X\Big\}.$$

*Demostración.* Considere

$$T_0 = \text{ínf}\Big\{t > 0; \Phi_t(x) = x, \ \text{para algún } x \in X\Big\}.$$

En caso el conjunto sobre el cual consideramos el ínfimo sea vacío, consideramos $T_0 = +\infty$. Dado que el flujo continuo $\Phi$ no tiene singularidades y puesto que $X$ es compacto, entonces necesariamente $T_0 > 0$. En efecto, supongamos que $T_0 = 0$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $t_n \in (0, 1/n)$ y $x_n \in X$ tales que $\Phi(t_n, x_n) = x_n$. Por compacidad de $X$, existen $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\omega \in X$ tales que $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = \omega$. Dado $t \in \mathbb{R}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $j_n \in \mathbb{Z}$ tal que $j_n t_n \leq t < (j_n + 1)t_n$. Así, $\lim_{n\to\infty} j_n t_n = t$. Como $\Phi(j_n t_n, x_n) = x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces en particular, $\Phi(j_{k_n} t_{k_n}, x_{k_n}) = x_{k_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Haciendo $n \to \infty$, y de la continuidad de $\Phi$, $\Phi(t, \omega) = \omega$. Como $t \in \mathbb{R}$ fue un número real arbitrario, $\omega \in X$ es una singularidad de $\Phi$. Lo cual es una contradicción pues $\Phi$ no posee singularidades. Por lo tanto $T_0 > 0$.

Sea $T \in (0, T_0)$. Entonces, $\Phi_T(x) \neq x$ para cada $x \in X$. Así, $d\big(\Phi_T(x), x\big) > 0$ para cada $x \in X$. De la continuidad de la función $\rho : X \to \mathbb{R}$, definida por $\rho(x) = d\big(\Phi_T(x), x\big)$; y de la compacidad de $X$, existe $\gamma > 0$ tal que $\rho(x) \geq \gamma$ para cada $x \in X$. $\square$

**Lema 3.** *Sea $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ un flujo, donde $(X, d)$ es un espacio métrico compacto. Para cada $\eta, T > 0$, existe $\lambda > 0$ tal que para cada $x, y \in X$, si $d(x, y) < \lambda$ entonces $d\big(\Phi_t(x), \Phi_t(y)\big) < \eta$, para cada $t \in [-T, T]$.*

*Demostración.* Sean $T > 0$ y $\eta > 0$. Como $\Phi|_{[-T,T]\times X} : [-T, T] \times X \to X$ es una función continua sobre un conjunto compacto, entonces $\Phi|_{[-T,T]\times X}$ es uniformemente continua. Por lo tanto, existe $\lambda > 0$ tal que para cada $(t, x), (s, y) \in [-T, T] \times X$, si $|t - s| + d(x, y) < \lambda$ entonces $d\big(\Phi(t, x), \Phi(s, y)\big) < \eta$. En particular, para cada $t \in [-T, T]$ y para cada $x, y \in X$, si $d(x, y) < \lambda$ entonces $d\big(\Phi(t, x), \Phi(t, y)\big) < \eta$. $\square$

**Lema 4.** *Sea $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ un flujo sobre un espacio métrico compacto $(X, d)$. Entonces, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para cada $\tau, \sigma \in \mathbb{R}$,*

$$si\ |\tau - \sigma| < \delta,\ entonces\ d\big(\Phi_\tau(y), \Phi_\sigma(y)\big) < \epsilon\ para\ cada\ y \in X.$$

*Demostración.* Sea $\epsilon > 0$. Como $\Phi|_{[-1,1]\times X} : [-1,1] \times X \to X$ es una función continua sobre un conjunto compacto, entonces $\Phi|_{[-1,1]\times X}$ es uniformemente continua. Por lo tanto, existe $\delta \in (0,1)$ tal que para cada $(t,x),(s,y) \in [-1,1] \times X$, si $|t - s| + d(x,y) < \delta$ entonces $d\big(\Phi(t,x), \Phi(s,y)\big) < \epsilon$. En particular, para cada $x \in X$, si $|t| < \delta$ entonces $d\big(\Phi(t,x), x\big) = d\big(\Phi(t,x), \Phi(0,x)\big) < \epsilon$. Así, para cada $y \in X$, y cada $s \in \mathbb{R}$, si $|t| < \delta$ entonces $d\big(\Phi_{t+s}(y), \Phi_s(y)\big) = d\big(\Phi(t, \Phi(s,y)), \Phi(s,y)\big) < \epsilon$. □

En el Teorema 3 de [2] se dan las siguientes caracterizaciones de expansividad de flujos sin singularidades.

**Proposición 5** (Caracterización de BW-expansividad de flujos). *Sea $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ un flujo continuo sin singularidades. Entonces, son equivalentes,*

(i) *El flujo $\Phi$ es expansivo.*

(ii) *Para cada $\epsilon > 0$, existe $\alpha > 0$ tal que, para cada $x, y \in X$, para cada $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, homeomorfismo creciente, con $h(0) = 0$,*

$$si\ d\big(\Phi_t(x), \Phi_{h(t)}(y)\big) < \alpha\ para\ cada\ t \in \mathbb{R},\ entonces\ y \in \Phi_{(-\epsilon,\epsilon)}(x).$$

(iii) *Para cada $\eta > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para cada $x, y \in X$, para cada $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, función continua, con $s(0) = 0$,*

$$si\ d\big(\Phi_t(x), \Phi_{s(t)}(y)\big) < \delta\ para\ cada\ t \in \mathbb{R},\ entonces\ y \in \Phi_{\mathbb{R}}(x),$$

*esto es, $y = \Phi_\tau(x)$ para algún $\tau \in \mathbb{R}$; y además $\Phi_t(x) \in B_\eta(x)$ para cada $t \in [0, \tau]$, si $\tau \geq 0$; o $\Phi_t(x) \in B_\eta(x)$ para cada $t \in [\tau, 0]$, si $\tau < 0$.*

(iv) *Para cada $\epsilon > 0$, existe $\alpha > 0$ tal que para cada $x, y \in X$, para cada par de sucesiones bilaterales $(t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, $(u_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ en $\mathbb{R}$, con $u_0 = t_0 = 0$, $0 < t_{i+1} - t_i \leq \alpha$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, $|u_{i+1} - u_i| \leq \alpha$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, $\lim_{i\to\infty} t_i = +\infty$ y $\lim_{i\to\infty} t_{-i} = -\infty$,*

$$si\ d\big(\Phi_{t_i}(x), \Phi_{u_i}(y)\big) \leq \alpha\ para\ cada\ i \in \mathbb{Z},\ entonces\ y \in \Phi_{(-\epsilon,\epsilon)}(x).$$

*Diremos que* (iii) *es la* versión geométrica, *y* (iv) *la* versión discreta *del concepto de expansividad para flujos.*

*Demostración.* Como $\Phi$ es un flujo sin singularidades, entonces del Lema 2,

$$T_0 = \text{ínf}\Big\{t > 0; \Phi_t(x) = x \text{ para algún } x \in X\Big\}$$

es positivo.

(i)$\Rightarrow$(ii): basta observar que todo homeomorfismo creciente es una función continua.

(ii)$\Rightarrow$(i): sea $\epsilon \in (0, T_0)$. Sea $\epsilon' > 0$ por elegir (en función de $\epsilon$). Para este $\epsilon' > 0$, de (ii), existe $\alpha > 0$ tal que para cada $x, y \in X$, y cada $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ homeomorfismo creciente, con $h(0) = 0$,

$$\text{si } d\big(\Phi_t(x), \Phi_{h(t)}(y)\big) < \alpha \text{ para cada } t \in \mathbb{R}, \text{ entonces } y \in \Phi_{(-\epsilon',\epsilon')}(x).$$

Sean $x, y \in X$ y $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, con $s(0) = 0$, tal que

$$d\big(\Phi_t(x), \Phi_{s(t)}(y)\big) < \delta \text{ para cada } t \in \mathbb{R}, \tag{2.12}$$

donde $\delta$ está por elegirse. Para cada $T \in (0, T_0)$, del Lema 2, existe $\gamma_T > 0$ tal que

$$d\big(\Phi_T(z), z\big) \geq \gamma_T \text{ para cada } z \in X.$$

Entonces, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\gamma_T &\leq d\big(\Phi_t(x), \Phi_{t+T}(x)\big)\\ &\leq d\big(\Phi_t(x), \Phi_{s(t)}(y)\big) + d\big(\Phi_{s(t)}(y), \Phi_{s(t+T)}(y)\big) + d\big(\Phi_{s(t+T)}(y), \Phi_{t+T}(x)\big)\\ &< 2\delta + d\big(\Phi_{s(t)}(y), \Phi_{s(t+T)}(y)\big).\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\gamma_T - 2\delta < d\big(\Phi_{s(t)}(y), \Phi_{s(t+T)}(y)\big)$. Si elegimos $\delta \in (0, \gamma_T/3)$, tenemos que: $\gamma_T/3 < d\big(\Phi_{s(t)}(y), \Phi_{s(t+T)}(y)\big)$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Para $\gamma_T/3$, del Lema 4, existe $\tau_T > 0$ tal que para cada $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$

$$\text{si } |\sigma_1 - \sigma_2| < \tau_T \text{ entonces, } d\big(\Phi_{\sigma_1}(z), \Phi_{\sigma_2}(z)\big) < \gamma_T/3 \text{ para cada } z \in X.$$

Por lo tanto, debemos tener que $\big|s(t+T) - s(t)\big| \geq \tau_T$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

De este modo hemos mostrado la siguiente afirmación:

*Afirmación 1.* Para cada $T \in (0, T_0)$, existe $\tau_T > 0$ tal que para cada $\delta \in (0, \gamma_T/3)$, para cada $x, y \in X$, para cada función continua $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $s(0) = 0$,

$$\text{si } d\big(\Phi_t(x), \Phi_{s(t)}(y)\big) < \delta \text{ para cada } t \in \mathbb{R}, \text{ entonces } \tau_T \leq \big|s(t+T) - s(t)\big|,$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Con las hipópesis de la afirmación 1, defina la función $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, por $\beta(t) = s(t+T) - s(t)$, $t \in \mathbb{R}$. $\beta$ es una función continua, y es claro que $\beta(t) \neq 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Del teorema del Valor Intermedio, $\beta(t) > 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$, o $\beta(t) < 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Mostraremos que $\beta(0) = s(T) > 0$. Así, concluiremos que

$$s(t+T) - s(t) > 0 \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

*Afirmación 2.* Para cada $T \in (0, T_0/3)$, existe $\delta_T \in (0, \gamma_T/3)$ tal que para cada $x, y \in X$, para cada función continua $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $s(0) = 0$,

$$\text{si } d\big(\Phi_t(x), \Phi_{s(t)}(y)\big) < \delta \text{ para cada } t \in \mathbb{R}, \text{ entonces } s(T) > 0.$$

*Demostración de la Afirmación 2.* En efecto, supongamos por contradicción que existe $T \in (0, T_0/3)$ tal que para cada $\delta \in (0, \gamma_T/3)$, existen $x_\delta, y_\delta \in X$, y alguna función continua $s_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $s_\delta(0) = 0$, tales que

$$d\big(\Phi_t(x_\delta), \Phi_{s_\delta(t)}(y_\delta)\big) < \delta \text{ para cada } t \in \mathbb{R}, \text{ y } s_\delta(T) \leq 0.$$

Discretizando: sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \gamma_T/3$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq n_0$, existen $x_n, y_n \in X$, y alguna función continua $s_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $s_n(0) = 0$, tales que

$$d\big(\Phi_t(x_n), \Phi_{s_n(t)}(y_n)\big) < 1/n \text{ para cada } t \in \mathbb{R}, \text{ y } s_n(T) \leq 0. \tag{2.13}$$

De (2.13), con $t = 0$, tenemos que $d(x_n, y_n) < 1/n$ para cada $n \geq n_0$. De (2.13), con $t = T$, tenemos que $d\big(\Phi_T(x_n), \Phi_{s_n(T)}(y_n)\big) < 1/n$ para cada $n \geq n_0$. Nos preguntamos si la sucesión $\big(s_n(T)\big)_{n \geq n_0}$ posee alguna subsucesión convergente. De (2.13), $s_n(T) \leq 0$ para cada $n \geq n_0$. Tenemos dos posibilidades.

(a) Existen infinitos valores de $n$ para los cuales $s_n(T) \in [-T, 0]$.

(b) Existe algún $n_1 \geq n_0$, tal que $s_n(T) < -T$ para cada $n \geq n_1$.

Supongamos que acontece (a). Por la compacidad de $X$ y de $[-T, 0]$, sin pérdida de generalidad, considerando subsucesiones si es necesario, podemos suponer que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$, $\lim_{n\to+\infty} y_n = x_0$ y $\lim_{n\to+\infty} s_n(T) = t_0$ para algunos $x_0 \in X$ y $t_0 \in [-T, 0]$. En (2.13) con $t = T$, haciendo $n \to \infty$, tenemos que $d\big(\Phi_T(x_0), \Phi_{t_0}(x_0)\big) = 0$. Así, $\Phi_{T-t_0}(x_0) = x_0$, donde $0 < T \leq T - t_0 \leq 2T < T_0$ ya que $T < T_0/3$. Lo que contradice la minimalidad de $T_0$.

Supongamos que acontece (b). Del Teorema del Valor Intermedio, para cada $n \geq n_1$ existe $t_n \in [0, T]$ tal que $s_n(t_n) = -T$. Así, de (2.13), tenemos que

$$d\big(\Phi_{t_n}(x_n), \Phi_{s_n(t_n)}(y_n)\big) < 1/n \text{ para cada } n \geq n_0. \tag{2.14}$$

Nuevamente por la compacidad de $[0,T]$ y de $X$, sin pérdida de generalidad, tomando subsucesiones si es necesario, podemos suponer que existen $t_0 \in [0,T]$ y $x_0 \in X$ tales que $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = x_0$. Por lo tanto, haciendo $n \to \infty$ en (2.14), tenemos que $d\big(\Phi_{t_0}(x_0), \Phi_{-T}(x_0)\big) = 0$. Así, $\Phi_{T+t_0}(x_0) = x_0$, donde $0 < T \leq T + t_0 \leq 2T < T_0$ ya que $T < T_0/3$. Lo cual contradice la minimalidad de $T_0$.

En cualquier caso, sea (a) o (b), llegamos a una contradicción. $\square$

De las afirmaciones 1 y 2, tenemos que se cumple la siguiente afirmación.

*Afirmación 3.* Para cada $T \in (0, T_0/3)$, existen $\tau_T > 0$ y $\delta_T \in (0, \gamma_T/3)$ tales que para cada $x, y \in X$, para cada función continua $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $s(0) = 0$,

$$\text{si } d\big(\Phi_t(x), \Phi_{s(t)}(y)\big) < \delta_T \ \forall t \in \mathbb{R}, \text{ entonces } s(t+T) - s(t) \geq \tau_T \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.15}$$

Considere $T \in (0, T_0/3)$ que se elegirá convenientemente. De la afirmación 3, existen $\delta_T \in (0, \gamma_T/3)$ y $\tau_T > 0$, verificando (2.15). En (2.12), elija $\delta \leq \delta_T$. Por lo tanto, $s(t+T) - s(t) \geq \tau_T$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Defina $h_T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h_T(nT) = s(nT)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, y extienda linealmente, esto es, defina

$$h_T(t) = \left(\frac{(n+1)T - t}{T}\right) s(nT) + \left(\frac{t - nT}{T}\right) s\big((n+1)T\big),$$

para cada $t \in \big[nT, (n+1)T\big]$, y cada $n \in \mathbb{Z}$. Claramente $h_T$ es un homeomorfismo creciente. Observe que para cada $n \in \mathbb{Z}$, para cada $t \in \big[nT, (n+1)T\big]$, existe $t_n' \in \big[nT, (n+1)T\big]$ tal que $h_T(t) = s(t_n')$. Dado $t \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $t \in \big[nT, (n+1)T\big]$. Tenemos que, usando (2.12),

$$\begin{aligned} d\big(\Phi_t(x), \Phi_{h_T(t)}(y)\big) &= d\big(\Phi_t(x), \Phi_{s(t_n')}(y)\big) \\ &\leq d\big(\Phi_t(x), \Phi_{t_n'}(x)\big) + d\big(\Phi_{t_n'}(x), \Phi_{s(t_n')}(y)\big) \\ &\leq \sup_{\substack{|r| \leq T \\ w \in X}} d\big(\Phi_r(w), w\big) + \delta. \end{aligned}$$

Notamos que debemos elegir $T \in (0, T_0/3)$ suficientemente pequeño tal que

$$\sup_{\substack{|r| \leq T \\ w \in X}} d\big(\Phi_r(w), w\big) + \delta < \alpha.$$

Por ejemplo, para $\alpha/2$ existe $\sigma > 0$ tal que $\sup\Big\{d\big(\Phi_t(w), w\big); |t| \leq \sigma, w \in X\Big\} < \alpha/2$. Elija $T > 0$ tal que $T < \min\big\{T_0/3, \sigma\big\}$ y $\delta \leq \min\big\{\alpha/2, \delta_T\big\}$. Y en cuanto a $\epsilon'$, basta elegir $\epsilon' = \epsilon$

(donde $\epsilon$ es positivo).

(i)$\Rightarrow$(iii): dado $\eta > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\text{si } |t| < \epsilon \text{ entonces } d\big(\Phi_t(\omega), \omega\big) < \eta, \text{ para cada } \omega \in X. \tag{2.16}$$

Para $\epsilon$, de la expansividad de $\Phi$, existe $\alpha > 0$ tal que, para cada $x, y \in X$, para cada función continua $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $h(0) = 0$,

$$\text{si } d\big(\Phi_t(x), \Phi_{h(t)}(y)\big) < \alpha \text{ para cada } t \in \mathbb{R}, \text{ entonces } y \in \Phi_{(-\epsilon,\epsilon)}(x).$$

Sean $x, y \in X$, y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, con $h(0) = 0$, tales que

$$d\big(\Phi_t(x), \Phi_{h(t)}(y)\big) < \alpha \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Entonces $y = \Phi_\tau(x)$, para algún $\tau \in (-\epsilon, \epsilon)$. Por lo tanto, de (2.16), $\Phi_{[0,\tau]}(x) \subseteq B_\eta(x)$ si $\tau \geq 0$; o $\Phi_{[\tau,0]}(x) \subseteq B_\eta(x)$ si $\tau < 0$.

(iii)$\Rightarrow$(i): Sea $\epsilon \in (0, T_0)$. Del Lema 2, existe $\eta > 0$ tal que

$$d\big(\Phi_\epsilon(\omega), \omega\big) \geq \eta, \text{ para cada } \omega \in X. \tag{2.17}$$

Por lo tanto, considerando $\omega = \Phi_{-\epsilon}(z)$, tenemos que

$$d\big(\Phi_{-\epsilon}(z), z\big) \geq \eta, \text{ para cada } z \in X. \tag{2.18}$$

Para $\epsilon$, de (iii), existe $\delta > 0$ tal que, para cada $x, y \in X$, para cada función continua $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $s(0) = 0$,

$$\text{si } d\big(\Phi_t(x), \Phi_{s(t)}(y)\big) < \delta \text{ para cada } t \in \mathbb{R}, \text{ entonces } y \in \Phi_{\mathbb{R}}(x),$$

esto es, $y = \Phi_\tau(x)$ para algún $\tau \in \mathbb{R}$; y además $\Phi_t(x) \in B_\eta(x)$ para cada $t \in [0, \tau]$, si $\tau \geq 0$; o $\Phi_t(x) \in B_\eta(x)$ para cada $t \in [\tau, 0]$, si $\tau < 0$. Sean $x, y \in X$, y $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función continua, con $s(0) = 0$, tales que $d\big(\Phi_t(x), \Phi_{s(t)}(y)\big) < \delta$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Entonces $y = \Phi_\tau(x)$, para algún $\tau \in \mathbb{R}$. Y $\Phi_{[0,\tau]}(x) \subseteq B_\eta(x)$, si $\tau \geq 0$; o $\Phi_{[\tau,0]}(x) \subseteq B_\eta(x)$, siempre que $\tau < 0$. Supongamos que $\tau \geq \epsilon$, entonces $\Phi_\epsilon(x) \in B_\eta(x)$. Esto es, $d\big(\Phi_\epsilon(x), x\big) < \eta$. Por otro lado, de (2.17), $d\big(\Phi_\epsilon(x), x\big) \geq \eta$. Lo cual es una contradicción. Así, $\tau < \epsilon$. Supongamos que $\tau \leq -\epsilon$, entonces $\Phi_{-\epsilon}(x) \in B_\eta(x)$. Esto es, $d\big(\Phi_{-\epsilon}(x), x\big) < \eta$. Lo cual contradice (2.18). Así, $-\epsilon < \tau$. Por lo tanto $\tau \in (-\epsilon, \epsilon)$.

(i)⇒(iv): Sea $\epsilon > 0$. De (i), existe $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in X$, para cada función continua $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $s(0) = 0$,

$$\text{si } d\big(\Phi_t(x), \Phi_{s(t)}(y)\big) < \delta \text{ para cada } t \in \mathbb{R}, \text{ entonces } y \in \Phi_{(-\epsilon,\epsilon)}(x). \tag{2.19}$$

Sea $\alpha > 0$ por elegir (en función de $\delta$). Sean los puntos $x, y \in X$ y las sucesiones $(t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$,$(u_i)_{i\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{R}$ con $t_0 = u_0 = 0$, $0 < t_{i+1} - t_i \leq \alpha$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, $|u_{i+1} - u_i| \leq \alpha$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, $\lim_{i\to\infty} t_i = \infty$ y $\lim_{i\to\infty} t_{-i} = -\infty$, tales que

$$d\big(\Phi_{t_i}(x), \Phi_{u_i}(y)\big) \leq \alpha \text{ para cada } i \in \mathbb{Z}. \tag{2.20}$$

Defina $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (función poligonal) tal que $h(t_i) = u_i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, y extienda linealmente por $h(t) = \left(\dfrac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right)u_{i+1} + \left(\dfrac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i}\right)u_i$ para cada $t \in [t_i, t_{i+1}]$, y para cada $i \in \mathbb{Z}$. Claramente $h$ es una función continua con $h(0) = 0$. Sea $t \in \mathbb{R}$, existe un único $i \in \mathbb{Z}$ tal que $t_i \leq t < t_{i+1}$. Entonces

$$\begin{aligned} d\big(\Phi_t(x), \Phi_{h(t)}(y)\big) &\leq d\big(\Phi_t(x), \Phi_{t_i}(x)\big) + d\big(\Phi_{t_i}(x), \Phi_{u_i}(y)\big) + d\big(\Phi_{u_i}(y), \Phi_{h(t)}(y)\big) \\ &\leq d\big(\Phi_{t-t_i}(\cdot), (\cdot)\big) + \alpha + d\big(\Phi_{h(t)-u_i}(\cdot), (\cdot)\big) \\ &\leq \alpha + 2 \cdot \sup_{\substack{|\tau|\leq\alpha \\ z\in X}} d\big(\Phi_\tau(z), z\big), \end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad se da por (2.20). En este punto observamos que debemos elegir $\alpha > 0$ en función de $\delta$, tal que

$$\alpha + 2 \cdot \sup_{\substack{|\tau|\leq\alpha \\ z\in X}} d\big(\Phi_\tau(z), z\big) < \delta.$$

Así, con esta elección, de (2.20), tenemos que $d\big(\Phi_t(x), \Phi_{h(t)}(y)\big) < \delta$ para cada $t \in \mathbb{R}$. De (2.19), tenemos que $y \in \Phi_{(-\epsilon,\epsilon)}(x)$.

(iv)⇒(i): sea $\epsilon > 0$. De (iv), existe $\alpha > 0$ tal que, para cada $x, y \in X$, para cada par de sucesiones $(t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ y $(u_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ con $u_0 = t_0 = 0$, $0 < t_{i+1} - t_i \leq \alpha$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, $|u_{i+1} - u_i| \leq \alpha$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, $\lim_{i\to\infty} t_i = \infty$ y $\lim_{i\to\infty} t_{-i} = -\infty$,

$$\text{si } d\big(\Phi_{t_i}(x), \Phi_{u_i}(y)\big) \leq \alpha \text{ para cada } i \in \mathbb{Z}, \text{ entonces } y \in \Phi_{(-\epsilon,\epsilon)}(x). \tag{2.21}$$

Sean $x, y \in X$ y $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, con $s(0) = 0$, tales que

$$d\big(\Phi_t(x), \Phi_{s(t)}(y)\big) < \alpha \text{ para cada } t \in \mathbb{R}\,. \tag{2.22}$$

Observe que para cada $n \in \mathbb{Z}$, $s|_{[n,n+1]}$ es uniformemente continua. Para $\alpha > 0$, existe $\delta_n \in (0, \alpha)$ tal que para cada $\tau_1, \tau_2 \in [n, n+1]$, si $|\tau_1 - \tau_2| < \delta_n$ entonces $|s(\tau_1) - s(\tau_2)| < \alpha$.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ considere una partición de $[n, n+1]$, $\{\tau_1^n < \tau_2^n < \cdots < \tau_{k_n}^n\}$ tal que $0 < \tau_{i+1}^n - \tau_i^n < \delta_n (< \alpha)$ para cada $i \in 1, 2, \ldots, k_n - 1$. De este modo, yuxtaponiendo estas particiones, construimos un par de sucesiones bilaterales $(t_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ y $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, donde $u_k = s(t_k)$ para cada $k \in \mathbb{Z}$, con $t_0 = 0$, tales que $0 < t_{k+1} - t_k < \alpha$ y $|u_{k+1} - u_k| < \alpha$ para cada $k \in \mathbb{Z}$, $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$ y $\lim_{k\to\infty} t_{-k} = -\infty$. De (2.22), tenemos que $d\big(\Phi_{t_k}(x), \Phi_{u_k}(y)\big) < \alpha$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, de (2.21), tenemos que $y \in \Phi_{(-\epsilon,\epsilon)}(x)$. □

En [1] se muestra el siguiente lema, el cual será necesario para demostrar el teorema principal, Teorema 2.

**Lema 5.** *Sea* $a > 0$. *Sea* $\{\alpha_i : [0, a] \to \mathbb{R}\}_{i\in\mathbb{N}}$, *una familia de funciones continuas, estrictamente crecientes, con* $\alpha_i(0) = 0$ *para cada* $i \in \mathbb{N}$, *tal que* $\lim\limits_{i\to+\infty} \alpha_i(a) = +\infty$. *Entonces, para cada* $\lambda, \beta > 0$ *existen* $j \in \mathbb{N}$, $t_1, t_2 \in [0, a]$, *con* $t_1 < t_2$, *tales que* $t_2 - t_1 < \lambda$ *y* $\alpha_j(t_2) - \alpha_j(t_1) = \beta$.

*Demostración.* Sea $\{s_0 = 0, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n = a\}$ una partición de $[0, a]$ tal que $0 < s_{k+1} - s_k < \lambda$, para cada $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Supongamos que existen infinitos $j$'s en $\mathbb{N}$ tales que

$$\alpha_j(s_{k+1}) - \alpha_j(s_k) < \beta, \text{ para cada } k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Así,

$$\alpha_j(a) = \alpha_j(s_n) - \alpha_j(s_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \big[\alpha_j(s_{k+1}) - \alpha_j(s_k)\big] < n\beta < +\infty, \tag{2.23}$$

para infinitos $j$'s en $\mathbb{N}$. Lo cual es una contradicción ya que $\lim_{j\to\infty} \alpha_j(a) = +\infty$. Por lo tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $j \geq N$, existe $k(j) \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ tal que $\alpha_j(s_{k(j)+1}) - \alpha_j(s_{k(j)}) \geq \beta$. De la continuidad de $\alpha_j : [0, a] \to \mathbb{R}$, tomando $t_2(j) = s_{k(j)+1}$, existe $t_1(j) \in \big[s_{k(j)}, s_{k(j)+1}\big]$ tal que $\alpha_j\big(t_2(j)\big) - \alpha_j\big(t_1(j)\big) = \beta$. □

## 2.6. Estabilidad topológica para flujos y homeomorfismos

En [1], Thomas menciona la siguiente definición del concepto de estabilidad topológica para flujos.

**Definición 13** (estabilidad topológica para flujos)**.** *Un flujo* $\Phi$ *sobre* $X$ *es* topológicamente estable *cuando para cada* $\epsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que para cada flujo* $\Psi$ *sobre* $X$, *si* $d_{C^0}(\Psi_t, \Phi_t) < \delta$ *para cada* $t \in [0, 1]$, *entonces existe alguna función continua* $h : X \to X$, *tal que* $d_{C^0}(h, \mathrm{Id}) < \epsilon$ *y* $h$ *lleva órbitas de* $\Psi$ *en órbitas de* $\Phi$.

Y prueba en el Teorema 3 de [1] que un flujo expansivo $\Phi$ con la propiedad de sombreamiento es topológicamente estable. Sin embargo, notamos que hay un error en la prueba del Lema 3.9, el cual es necesario para mostrar la continuidad de una función $h : X \to X$, que depende de un flujo $\Psi$ que está suficientemente próximo de $\Phi$, y donde $h$ lleva órbitas de $\Psi$ en órbitas de $\Phi$.

En [3], combinando la noción de estabilidad topológica de Walters dada a continuación,

**Definición 14** (Estabilidad topológica para homeomorfismos). *Decimos que un homeomorfismo $f : X \to X$, definido sobre un espacio métrico compacto, es* topológicamente estable *si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada homeomorfismo $g : X \to X$, con $d_{C^0}(g, f) < \delta$, existe una función continua $h : X \to X$ tal que $d_{C^0}(h, \mathrm{Id}) < \epsilon$ y $h \circ g = f \circ h$.*

Con la distancia $C^0$-Gromov-Hausdorff, dada en (2.11), Arbieto y Morales definen el concepto de $GH$-estabilidad topológica para homeomorfismos entre espacios métricos compactos.

**Definición 15** ($GH$-estabilidad topológica para homeomorfismos). *Un homeomorfismo $f : X \to X$ de un espacio métrico compacto $X$ es* $GH$-topológicamente estable *si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada homeomorfismo $g : Y \to Y$ de un espacio métrico compacto $Y$ satisfaciendo $d_{GH^0}(f, g) < \delta$, existe alguna $\epsilon$-isometría continua $h : Y \to X$ tal que $f \circ h = h \circ g$.*

A partir de estos dos conceptos, estabilidad topológica para flujos y $GH$-estabilidad topológica para homeomorfismos, proponemos una definición de la *$GH$-estabilidad topológica para flujos* y obtenemos resultados análogos al Teorema 4 de [3], y al Teorema 3 de [1], los que esencialmente dicen que expansividad más la propiedad de sombreamiento dan lugar a la estabilidad topológica.

## 2.7. Entropía topológica de flujos sobre espacios métricos compactos

En toda esta sección, siguiendo las notaciones dadas en [6], a continuación exponemos la noción de entropía topológica para flujos (continuos), definidos sobre espacios topológicos compactos.

### 2.7.1. Conjuntos generadores y conjuntos separados para flujos

Sea $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ un flujo (continuo) sobre un espacio métrico compacto $(M, d)$. Sea $K \subseteq M$ un subconjunto compacto. Dados $\epsilon > 0$ y $T > 0$, un conjunto $E \subseteq M$ es $(T, \epsilon)$-*generador* de $K$, si para cada $x \in K$, existe $a \in E$ tal que $d\big(\Phi_t(x), \Phi_t(a)\big) < \epsilon$ para cada $t \in [0, T]$. Esto es, $K \subseteq \bigcup_{a \in E} B(a, T, \epsilon)$, donde $B(a, T, \epsilon)$ es la *bola dinámica* de centro $a$, longitud $T$ y radio $\epsilon$,

$$B(a, T, \epsilon) = \Big\{ x \in M; d\big(\Phi_t(x), \Phi_t(a)\big) < \epsilon \text{ para cada } t \in [0, T] \Big\}.$$

De la compacidad de $M$ tenemos que el flujo $\Phi$ es *uniformemente continuo*, esto es, para cada $T > 0$ y $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in M$,

$$\text{si } d(x, y) < \delta \text{ entonces } d\big(\Phi_t(x), \Phi_t(y)\big) < \epsilon \text{ para cada } t \in [-T, T].$$

Así, podemos mostrar que cada bola dinámica $B(a, T, \epsilon)$ es un conjunto abierto.
Note que $w \in B(w, T, \eta)$ para cada $w \in M$, cada $T > 0$ y cada $\eta > 0$. Observe que dado un compacto $K \subseteq M$, tenemos que $K \subseteq \bigcup_{x \in K} B(x, T, \epsilon)$. Así, de la compacidad de $K$, existe algún conjunto finito $(T, \epsilon)$-generador de $K$ incluido en $K$. Dado $\epsilon > 0$ y $K \subseteq M$ subconjunto compacto, definamos

$$g(\Phi, \epsilon, K) = \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \log g_T(\Phi, \epsilon, K),$$

donde

$$\begin{aligned} g_T(\Phi, \epsilon, K) = \min &\Big\{ \# E \in \mathbb{N}; E \subseteq M \text{ es un conjunto } (T, \epsilon)\text{-generador de } K \Big\} \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Sean $\epsilon_2 > \epsilon_1 > 0$ y $T > 0$. Sea $E \subseteq M$ un conjunto $(T, \epsilon_1)$-generador de $K$ minimal, esto es $\# E = g_T(\Phi, \epsilon_1, K)$. Como $B(a, T, \epsilon_1) \subseteq B(a, T, \epsilon_2)$ para cada $a \in E$, entonces $E$ es $(T, \epsilon_2)$-generador de $K$. Así, $g_T(\Phi, \epsilon_2, K) \leq g_T(\Phi, \epsilon_1, K)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} g(\Phi, \epsilon_2, K) &= \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \log g_T(\Phi, \epsilon_2, K) \\ &\leq \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \log g_T(\Phi, \epsilon_1, K) = g(\Phi, \epsilon_1, K). \end{aligned}$$

Así, $\epsilon \in (0, +\infty) \mapsto g(\Phi, \epsilon, K)$ es una función no creciente. Por lo tanto, el siguiente límite existe en $[0, +\infty]$,

$$g(\Phi, K) = \lim_{\epsilon \to 0^+} g(\Phi, \epsilon, K) \in [0, +\infty].$$

Definimos $g(\Phi)$ como

$$g(\Phi) = \sup\Big\{g(\Phi, K) \in [0, \infty]; K \subseteq M \text{ es subconjunto compacto}\Big\}$$

Dados $T, \epsilon > 0$ y $K \subseteq M$ un subconjunto compacto. Decimos que $E \subseteq K$ es $(T, \epsilon)$-*separado* de $K$ si la bola dinámica $B(x, T, \epsilon)$ de cada $x \in E$ no contiene ningún otro elemento de $E$. Esto es, para cada $x, y \in E$,

$$\text{si } d\big(\Phi_t(x), \Phi_t(y)\big) < \epsilon \text{ para cada } t \in [0, T], \text{ entonces } x = y.$$

**Lema 6.** *Para cada $T > 0$, $\epsilon > 0$ y cada $K \subseteq M$ subconjunto compacto, la cardinalidad de cada conjunto $E \subseteq K$, que es $(T, \epsilon)$-separado es menor que $g_T(\Phi, \epsilon/2, K)$.*

*Demostración.* Sean $\epsilon > 0$, $T > 0$ y $K \subseteq M$ un subconjunto compacto. Sea $E \subseteq K$ un conjunto $(T, \epsilon)$-separado. Y sea $F \subseteq M$ un conjunto $(T, \epsilon/2)$-generador de $K$, esto es, $K \subseteq \bigcup_{z \in F} B(z, T, \epsilon/2)$. Así, $E \subseteq K \subseteq \bigcup_{z \in F} B(z, T, \epsilon/2)$. Por tanto, para cada $x \in E$, existe $y \in F$ tal que $x \in B(y, T, \epsilon/2)$, esto es, $d\big(\Phi_t(y), \Phi_t(x)\big) < \epsilon/2$ para cada $t \in [0, T]$. Defina una función $\xi : E \to F$ fijando para cada $x \in E$, un punto $\xi(x) \in F$ tal que $d\big(\Phi_t(x), \Phi_t(\xi(x))\big) < \epsilon/2$ para cada $t \in [0, T]$. Afirmamos que $\Phi$ es inyectiva. En efecto, sean $x, x' \in E$ tales que $\xi(x) = y = \xi(x')$. Entonces

$$d\big(\Phi_t(y), \Phi_t(x)\big) < \epsilon/2 \text{ para cada } t \in [0, T]; \text{ y}$$
$$d\big(\Phi_t(y), \Phi_t(x')\big) < \epsilon/2 \text{ para cada } t \in [0, T].$$

Por lo tanto, $d\big(\Phi_t(x), \Phi_t(x')\big) < \epsilon$ para cada $t \in [0, T]$, y $x, x' \in E$. Como $E$ es un conjunto $(T, \epsilon)$-separado, entonces $x = x'$. Lo que muestra la inyectividad de $\xi$.
Así, $\#E \leq \#F$. Como $F$ fue un conjunto $(T, \epsilon/2)$-generador arbitrario, en particular podemos considerar $F$ tal que $\#F = g_T(\Phi, \epsilon/2, K)$. Así, tenemos que $\#E \leq g_T(\Phi, \epsilon/2, K)$. □

Del Lema 6, tiene sentido considerar la siguiente definición,

$$s_T(\Phi, \epsilon, K) = \text{máx}\Big\{\#F; F \subseteq K \text{ es un conjunto } (T, \epsilon)\text{-separado}\Big\}.$$

Además, tenemos que $s_T(\Phi, \epsilon, K) \leq g_T(\Phi, \epsilon/2, K)$ para cada $\epsilon, T > 0$, y cada $K \subseteq M$ compacto. Defina $s(\Phi, \epsilon, K)$ como,

$$s(\Phi, \epsilon, K) = \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \log s_T(\Phi, \epsilon, K).$$

Sean $\epsilon_2 > \epsilon_1 > 0$, $T > 0$ y $K \subseteq M$ un subconjunto compacto. Sea $E \subseteq K$ un conjunto $(T, \epsilon_2)$-separado maximal, esto es, $\#E = s_T(\Phi, \epsilon_2, K)$ y para cada $x, y \in E$,

$$\text{si } x \neq y \text{ entonces, } d\big(\Phi_t(x), \Phi_t(y)\big) \geq \epsilon_2 \text{ para algún } t \in [0, T].$$

Como $\epsilon_2 > \epsilon_1$, entonces para cada $x, y \in E$,

$$\text{si } x \neq y \text{ entonces, } d\big(\Phi_t(x), \Phi_t(y)\big) \geq \epsilon_1 \text{ para algún } t \in [0, T].$$

Esto es, $E \subseteq K$ es un conjunto $(T, \epsilon_1)$-separado. Por lo tanto, $s_T(\Phi, \epsilon_2, K) = \#E \leq s_T(\Phi, \epsilon_1, K)$ para cada $T > 0$. Así,

$$\begin{aligned} s(\Phi, \epsilon_2, K) &= \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \log s_T(\Phi, \epsilon_2, K) \\ &\leq \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \log s_T(\Phi, \epsilon_1, K) = s(\Phi, \epsilon_1, K). \end{aligned}$$

Por ende, la función $\delta \in (0, +\infty) \mapsto s(\Phi, \delta, K)$ es no creciente. Así, el siguiente límite existe en $[0, +\infty]$,

$$s(\Phi, K) = \lim_{\delta \to 0^+} s(\Phi, \delta, K) \in [0, +\infty].$$

Defina $s(\Phi)$ como

$$s(\Phi) = \sup \Big\{ s(\Phi, K) \in [0, +\infty]; K \subseteq M \text{ es subconjunto compacto} \Big\}$$

**Lema 7.** *Para cada $T > 0$, $\epsilon > 0$ y cada compacto $K \subseteq M$, $g_T(\Phi, \epsilon, K) \leq s_T(\Phi, \epsilon, K) \leq g_T(\Phi, \epsilon/2, K)$.*

*Demostración.* Del Lema 6, $s_T(\Phi, \epsilon, K) \leq g_T(\Phi, \epsilon/2, K)$. Sea $E \subseteq K$ un conjunto $(T, \epsilon)$-separado maximal incluido en $K$. Esto es, $\#E = s_T(\Phi, \epsilon, K)$ y para cada $x, y \in E$,

$$\text{si } x \neq y \text{ entonces } d\big(\Phi_t(x), \Phi_t(y)\big) \geq \epsilon \text{ para algún } t \in [0, T]. \tag{2.24}$$

Por la maximalidad de $E \subseteq K$, para cada $a \in K \setminus E$, el conjunto $E \uplus \{a\} \subseteq K$ no es $(T, \epsilon)$-separado. Por lo tanto, de (2.24), existe $x \in E$ tal que

$$d\big(\Phi_t(a), \Phi_t(x)\big) < \epsilon \text{ para cada } t \in [0, T].$$

Por ende, $a \in B(x, T, \epsilon)$. Así, ya que $x \in B(x, T, \epsilon)$ para cada $x \in E$, tenemos que $K \subseteq \bigcup_{x \in E} B(x, T, \epsilon)$. Esto es, $E$ es un conjunto $(T, \epsilon)$-generador para $K$. Así, $g_T(\Phi, \epsilon, K) \leq \#E = s_T(\Phi, \epsilon, K)$. □

Del Lema 7 tenemos que

$$g(\Phi, \epsilon, K) \leq s(\Phi, \epsilon, K) \leq g(\Phi, \epsilon/2, K), \tag{2.25}$$

para cada $\epsilon > 0$ y cada $K \subseteq M$ compacto. Así, haciendo $\epsilon \to 0^+$ en (2.25), $g(\Phi, K) \leq s(\Phi, K) \leq g(\Phi, K)$ para cada $K \subseteq M$ compacto. Por lo tanto, $g(\Phi) \leq s(\Phi) \leq g(\Phi)$, esto es,

$g(\Phi) = s(\Phi)$. Definimos la *entropía topológica* de un flujo $\Phi$, que denotaremos por $h(\Phi)$, como siendo $h(\Phi) = g(\Phi) = s(\Phi)$.

Dado un flujo $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ sobre un espacio métrico compacto, la *aplicación tiempo uno* asociada a $\Phi$ es $\Phi_1 : X \to X$ definido por $\Phi_1(x) = \Phi(1, x)$. En la Sección 10.2.3, de [6], se da la siguiente proposición que relaciona la entropía del flujo $\Phi$ con la entropía del homeomorfismo $\Phi_1$.

**Proposición 6.** *Sea $\Phi$ un flujo uniformemente continuo sobre un espacio métrico $M$, entonces la entropía $h(\Phi)$ del flujo es igual a la entropía de la aplicación tiempo uno de $\Phi$. Esto es, $h(\Phi) = h(\Phi_1)$.*

Donde decimos que un flujo $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ sobre un espacio métrico $(X, d)$ es *uniformemente continuo* si para cada $\epsilon > 0$ y $T > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in X$, si $d(x, y) < \delta$ entonces $d\big(\Phi_t(x), \Phi_t(y)\big) < \epsilon$ para cada $t \in [-T, T]$. En particular, todo flujo sobre un espacio métrico compacto es uniformemente continuo.

*Demostración de la Proposición 6.* Basta mostrar que $g(\Phi, K) = g(\Phi_1, K)$ para cada $K \subseteq M$. Vea la Sección 10.2.3, de [6]. $\square$

# Capítulo 3

# Pruebas de los teoremas sobre densidad de puntos no transitivos para semiflujos

## 3.1. Acciones de $\mathbb{R}^+$ y densidad de puntos no transitivos

En lo que sigue $\mathbb{R}^+$ denotará a los reales no negativos $[0, +\infty)$. Veamos primero que $P_+(\Phi)$ es un $G_\delta$-conjunto. Y que por lo tanto, $Q_+(\Phi)$ es un $F_\sigma$-conjunto.

**Definición 16.** *Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Dado $Y \subseteq X$, decimos que $Y$ es* $\epsilon$-denso *en $X$, si la colección $\{B_\epsilon(y); y \in Y\}$ es un cubrimiento abierto de $X$, donde*

$$B_\epsilon(y) = \{z \in X; d(z, y) < \epsilon\}$$

*denota a la bola abierta centrada en $y$, y de radio $\epsilon$.*

Dado un espacio métrico $(X, d)$, y un subconjunto $A \subseteq X$, no vacío, y dado $\epsilon > 0$, denotaremos por $B(A, \epsilon)$ al conjunto

$$B(A, \epsilon) = \bigcup_{w \in A} B_\epsilon(w) = \Big\{z \in X; z \in B_\epsilon(w) \text{ para algún } w \in A\Big\}.$$

**Definición 17.** *Dado un semiflujo $\Phi : \mathbb{R}^+ \times X \to X$, definido sobre un espacio métrico compacto, y dado $\epsilon > 0$, definamos el conjunto $P_+(\epsilon, \Phi)$ por*

$$P_+(\epsilon, \Phi) = \Big\{x \in X; \Phi_{\mathbb{R}^+}(x) \text{ es } \epsilon\text{-denso en } X\Big\}.$$

**Lema 8.** *Sea $X$ un espacio métrico compacto, sean $\epsilon > 0$ y $x \in X$. Si $x \in P_+(\epsilon, \Phi)$, entonces existe $b \geq 0$ tal que $\Phi_{[0,b]}(x)$ es $\epsilon$-denso en $X$.*

*Demostración.* Sea $x \in P_+(\epsilon, \Phi)$, entonces

$$X = \bigcup_{y \in \Phi_{\mathbb{R}^+}(x)} B_\epsilon(y) = \bigcup_{t \geq 0} B_\epsilon\big(\Phi_t(x)\big).$$

De la compacidad de $X$, existe $k \in \mathbb{N}$ y existen $t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}^+$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^k B_\epsilon\big(\Phi_{t_i}(x)\big)$. Por lo tanto,

$$X = \bigcup_{t \in [0,b]} B_\epsilon\big(\Phi_t(x)\big) = B\big(\Phi_{[0,b]}(x), \epsilon\big),$$

donde $b = \text{máx}_{i \in \{1,2,\ldots,k\}} t_i$. □

**Lema 9.** *Sea $(X, \Phi)$ un semiflujo definido sobre un espacio métrico compacto. Para cada $\epsilon > 0$, el conjunto $P_+(\epsilon, \Phi)$ es un conjunto abierto de $X$.*

*Demostración.* Sea $\epsilon > 0$. Si $P_+(\epsilon, \Phi) = \emptyset$, entonces es un conjunto abierto. Supongamos que $P_+(\epsilon, \Phi) \neq \emptyset$. Sea $x \in P_+(\epsilon, \Phi)$, entonces del Lema 8, existe $b \geq 0$, dependiendo de $x$, tal que $Y = \Phi_{[0,b]}(x)$ es $\epsilon$-denso, esto es,

$$X = \bigcup_{t \in [0,b]} B_\epsilon\big(\Phi_t(x)\big) = B\big(\Phi_{[0,b]}(x), \epsilon\big). \tag{3.1}$$

Definamos la función $g : X \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(z) = d\big(z, \Phi_{[0,b]}(x)\big) = d(z, Y),$$

distancia del punto $z$ al conjunto $Y$. Tenemos que $g$ es una función continua. De la compacidad de $X$, existe $z_0 \in X$ tal que

$$d(z_0, Y) = g(z_0) = \max_{z \in X} g(z) = \max_{z \in X} d(z, Y) = c. \tag{3.2}$$

De (3.1), como $z_0 \in X$ tenemos que existe $r \in [0, b]$ tal que $z_0 \in B_\epsilon\big(\Phi_r(x)\big)$, esto es, $d\big(z_0, \Phi_r(x)\big) < \epsilon$. Por lo tanto, $d(z_0, Y) \leq d\big(z_0, \Phi_r(x)\big)$, puesto que $\Phi_r(x) \in Y$. Entonces $c < \epsilon$. Sea

$$\delta = \epsilon - c > 0.$$

De la continuidad uniforme de $\Phi|_{[0,b] \times X}$, existe $\eta > 0$ tal que para cada $s_1, s_2 \in [0, b]$ y cada $z_1, z_2 \in X$, si $\text{máx}\big\{|s_1 - s_2|, d(z_1, z_2)\big\} < \eta$ entonces $d\big(\Phi_{s_1}(z_1), \Phi_{s_2}(z_2)\big) < \delta$. En particular, para cada $z_1, z_2 \in X$,

$$\text{si } d(z_1, z_2) < \eta \text{ entonces, } d\big(\Phi_t(z_1), \Phi_t(z_2)\big) < \delta \tag{3.3}$$

para cada $t \in [0,b]$. Mostremos que $B_\eta(x) \subseteq P_+(\epsilon,\Phi)$. En efecto, dado $y \in B_\eta(x)$ entonces $d(y,x) < \eta$. Por lo tanto, de (3.3),

$$d\big(\Phi_t(y), \Phi_t(x)\big) < \delta \text{ para cada } t \in [0,b] \tag{3.4}$$

Afirmamos que $y \in P_+(\epsilon,\Phi)$. Sea $w \in X$. Por un lado, de (3.2), $d(w,Y) \leq c$. Y puesto que $Y$ es compacto, existe $t_0 \in [0,b]$ tal que $d(w,\Phi_{t_0}(x)) = d(w,Y) \leq c$.
Y por otro lado, de (3.4), tenemos que

$$d\big(\Phi_{t_0}(y), \Phi_{t_0}(x)\big) < \delta.$$

Así,

$$\begin{aligned} d\big(w, \Phi_{t_0}(y)\big) &\leq d\big(w, \Phi_{t_0}(x)\big) + d\big(\Phi_{t_0}(x), \Phi_{t_0}(y)\big) \\ &< c + \delta = \epsilon. \end{aligned}$$

Por ende, $w \in \bigcup_{t\in[0,b]} B_\epsilon\big(\Phi_t(y)\big)$. Por lo tanto, $X \subseteq \bigcup_{t\in[0,b]} B_\epsilon\big(\Phi_t(y)\big)$. Así,

$$X = \bigcup_{t\in[0,b]} B_\epsilon\big(\Phi_t(y)\big).$$

De modo que $y \in P_+(\epsilon,\Phi)$. Y entonces, $B_\eta(x) \subseteq P_+(\epsilon,\Phi)$. $\square$

**Lema 10.** *El conjunto $P_+(\Phi)$ es un $G_\delta$-conjunto.*

*Demostración.* Si $P_+(\Phi)$ es vacío, entonces es abierto. Supongamos que $P_+(\Phi) \neq \emptyset$. Mostremos que

$$P_+(\Phi) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_+\left(\frac{1}{n}, \Phi\right).$$

Sea $x \in P_+(\Phi)$, entonces $\overline{\Phi_{\mathbb{R}+}(x)} = X$. Sean $\epsilon > 0$ y $\omega \in X$, entonces $\omega \in \overline{\Phi_{\mathbb{R}+}(x)}$ y así, $B_\epsilon(\omega) \cap \Phi_{\mathbb{R}+}(x) \neq \emptyset$. Por lo tanto existe $y \in \Phi_{\mathbb{R}+}(x)$ tal que $d(y,\omega) < \epsilon$. Esto es,

$$\omega \in \bigcup_{z\in\Phi_{\mathbb{R}+}(x)} B_\epsilon(z).$$

Por lo tanto, $X \subseteq \bigcup_{z\in\Phi_{\mathbb{R}+}(x)} B_\epsilon(z)$ para cada $\epsilon > 0$. Entonces $x \in P_+(\epsilon,\Phi)$ para cada $\epsilon > 0$. Así,

$$P_+(\Phi) \subseteq P_+(\epsilon,\Phi), \text{ para cada } \epsilon > 0.$$

En particular, $P_+(\Phi) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_+(1/n,\Phi)$.

Recíprocamente, sea $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_+(1/n,\Phi)$, entonces $x \in P_+(1/n,\Phi)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{y\in\Phi_{\mathbb{R}+}(x)} B_{1/n}(y) = X$. Dado $\omega \in X$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe

$y_n \in \Phi_{\mathbb{R}^+}(x)$ tal que $d(\omega, y_n) < 1/n$. Por lo tanto, $\omega \in \overline{\Phi_{\mathbb{R}^+}(x)}$. Así, $X = \overline{\Phi_{\mathbb{R}^+}(x)}$, esto es, $x \in P_+(\Phi)$. Por ende, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_+(1/n, \Phi) \subseteq P_+(\Phi)$. Así,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_+(1/n, \Phi) = P_+(\Phi).$$

Así, $P_+(\Phi)$ es un $G_\delta$-conjunto, ya que del Lema 9, $P_+(1/n, \Phi)$ es un conjunto abierto para cada $n \in \mathbb{N}$. □

*Demostración del Teorema 6.* Dado un conjunto abierto $B$, no vacío, en el espacio métrico $X$, considere un conjunto abierto $A$, no vacío, con $\overline{A} \subseteq B$. Considere la colección de subconjuntos de $X$, $\{B_s\}_{s\in\mathbb{R}^+}$, donde

$$B_s = \Phi\big([0, s] \times \overline{A}\big),$$

para cada $s \geq 0$. Tenemos dos posibilidades:

(i) Existen $t, t' \in \mathbb{R}^+$, con $t' > t$, tal que $B_{t'} \subseteq B_t$.

(ii) Para cada $t', t \in \mathbb{R}^+$, con $t' > t$, se tiene que $B_{t'} \not\subseteq B_t$.

Supongamos que acontece (i). Sea $\delta = t' - t > 0$. En este caso se cumple la siguiente afirmación,

*Afirmación 1.* Tenemos que $B_{t'+\delta} \subseteq B_t$, y por lo tanto $B_s \subseteq B_t$ para cada $s \geq t$.

*Demostración de la Afirmación 1.* Sea $x \in B_{t'+\delta} = \Phi\big([0, t' + \delta] \times \overline{A}\big)$, entonces $x = \Phi(s, a)$ donde $s \in [0, t' + \delta]$ y $a \in \overline{A}$. Si $s \in [0, t']$ entonces $x = \Phi(s, a) \in B_{t'} \subseteq B_t$, por lo tanto, $x \in B_t$. Supongamos entonces que $s \in (t', t' + \delta]$. Entonces

$$x = \Phi(s, a) = \Phi\big(s - t', \Phi(t', a)\big).$$

Donde $\Phi(t', a) \in B_{t'} \subseteq B_t = \Phi\big([0, t] \times \overline{A}\big)$. Así, existen $s_1 \in [0, t]$ y $a_1 \in \overline{A}$, tales que $\Phi(t', a) = \Phi(s_1, a_1)$. Por lo tanto,

$$x = \Phi(s, a) = \Phi\big(s - t', \Phi(s_1, a_1)\big) = \Phi(s - t' + s_1, a_1).$$

Como $0 < s - t' \leq \delta$ y $0 \leq s_1 \leq t$, entonces $s - t' + s_1 \in [0, t + \delta] = [0, t']$. Por lo tanto, $x \in B_{t'}$. Como, por hipótesis, $B_{t'} \subseteq B_t$, entonces $x \in B_t$. Así, $B_{t'+\delta} \subseteq B_t$. Análogamente, mostramos que $B_{t'+2\delta} \subseteq B_t$, y en general, $B_{t'+k\delta} \subseteq B_t$ para cada $k \geq 0$, entero. Por lo tanto, $B_s \subseteq B_t$ para cada $s \geq t$. □

Tenemos dos posibilidades: $B_t = X$ o $B_t \neq X$.

(a) Suponga que $B_t = X$. Entonces como $Q_+(\Phi) \neq \emptyset$, existe $x \in Q_+(\Phi)$. Así, $x \in X = B_t$, por lo tanto $x = \Phi(s,a)$, para algunos $s \in [0,t]$ y $a \in \overline{A}$. Si $a \in P_+(\Phi)$ entonces, de (1.4), $x = \Phi(s,a) \in P_+(\Phi)$. Pero, como $x \in Q_+(\Phi)$, entonces $a \in Q_+(\Phi)$. Así $a \in Q_+(\Phi) \cap \overline{A}$.

(b) Suponga que $B_t \neq X$. Entonces $\Phi\big([0,s] \times \overline{A}\big) \subseteq B_t$ para cada $s \geq t$. Entonces, para cada $a \in \overline{A}$ tenemos que $O_+(a,\Phi) \subseteq B_t$. Entonces $\overline{O_+(a,\Phi)} \subseteq \overline{B_t} = B_t \subsetneq X$. Así, $a \in Q_+(\Phi)$. Por lo tanto $\overline{A} \subseteq Q_+(\Phi)$.

En cualquier caso, (a) o (b), $\overline{A} \cap Q_+(\Phi) \neq \emptyset$, y por lo tanto $B \cap Q_+(\Phi) \neq \emptyset$.

Supongamos que acontece (ii). Esto es, para cada $t', t \in \mathbb{R}_+$, con $t' > t$, se tiene que $B_{t'} \not\subseteq B_t$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n \not\subseteq B_{n-1}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\omega_n \in B_n$ tal que $\omega_n \notin B_{n-1}$. Así, $\omega_n = \Phi(t_n, x_n)$ para algunos $x_n \in \overline{A}$ y $t_n \in (n-1, n]$. En efecto, si $t_n \in [0, n-1]$ se tendría que $\omega_n \in B_{n-1}$.
Como $\omega_n = \Phi\big(s, \Phi(t_n - s, x_n)\big)$ para cada $s \in [0, t_n]$, y $\omega_n \notin B_{n-1} = \Phi\big([0, n-1] \times \overline{A}\big)$, entonces $\Phi(t_n - s, x_n) \notin \overline{A}$, para cada $s \in [0, n-1]$. Por lo tanto,

$$\Phi(r, x_n) \notin \overline{A}, \text{ para cada } r \in [\delta_n, t_n], \tag{3.5}$$

donde $t_n \in (n-1, n]$, y $\delta_n = t_n - (n-1) \in (0,1]$.
Por la compacidad de $X$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existe $x_0 \in \overline{A}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Se cumple la siguiente afirmación.
*Afirmación 2.* Si $t \geq 1$, entonces $\Phi(t, x_0) \in A^c$.

*Demostración de la Afirmación 2.* Sea $t \geq 1$. Por la continuidad de $\Phi$,

$$\Phi(t, x_0) = \lim_{n\to\infty} \Phi(t, x_n).$$

Como $t_n \in (n-1, n]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $t_n \geq t$. Así, $t \in [\delta_n, t_n]$ para cada $n \geq n_0$. Por lo tanto, de (3.5), $\Phi(t, x_n) \in X \setminus \overline{A} \subseteq X \setminus A$, para cada $n \geq n_0$. Así,

$$\Phi(t, x_0) = \lim_{n\to\infty} \Phi(t, x_n) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n \geq n_0}} \Phi(t, x_n) \in X \setminus A.$$

Por lo tanto, $\Phi(t, x_0) \in X \setminus A$ para cada $t \geq 1$. $\square$

Como $\Phi(t, x_0) \in X \setminus A$ para cada $t \geq 1$, entonces

$$\Phi\big(t-1, \Phi(1, x_0)\big) = \Phi(t, x_0) \in X \setminus A, \text{ para cada } t \geq 1$$

Esto es, $\Phi\big(s, \Phi(1, x_0)\big) \in X \setminus A$, para cada $s \geq 0$. Por lo tanto,

$$O_+\big(\Phi(1, x_0), \Phi\big) \subseteq X \setminus A.$$

Entonces, como $X \setminus A$ es cerrado, $\overline{O_+\big(\Phi(1, x_0), \Phi\big)} \subseteq \overline{X \setminus A} = X \setminus A$. Así,

$$\Phi(1, x_0) \in Q_+(\Phi).$$

Si $x_0 \in P_+(\Phi)$ entonces, de (1.4), se tendría que $\Phi(1, x_0) \in P_+(\Phi)$. Por lo tanto $x_0 \in Q_+(\Phi)$, y como $x_0 \in \overline{A}$, entonces $\overline{A} \cap Q_+(\Phi) \neq \emptyset$.

Así, sea en el caso (i) o en el caso (ii), concluimos que $B \cap Q_+(\Phi) \neq \emptyset$, para cada conjunto abierto, no vacío, $B$ en $X$. Por lo tanto, $Q_+(\Phi)$ es denso en $X$.

Además, del Lema 10, tenemos que $Q_+(\Phi) = X \setminus P_+(\Phi)$ es un $F_\sigma$-conjunto. □

## 3.2. Acciones de $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ y densidad de puntos no transitivos

A continuación construiremos un homeomorfismo $S : Y \to Y$, el cual posee un único punto fijo, y tal que todos los demás puntos de $Y$ tienen órbita densa, todo esto siguiendo la prueba del Teorema 1 de [15]. A partir de ello, construimos una $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)$-acción con puntos no transitivos que no son densos.

Sea $T : X \to X$ un homeomorfismo definido sobre un conjunto de Cantor $X$ (esto es, $X$ es un conjunto compacto, perfecto, totalmente disconexo, y metrizable), tal que para cada $x \in X$, ambas semiórbitas, positiva y negativa, son densas en $X$. Por ejemplo, basta considerar el homeomorfismo *excepcional* $f : \Sigma \to \Sigma$ obtenido en la Sección 2.2., y restringirlo al conjunto no errante $\Omega(f)$.

Para cada $x \in X$ asociamos $\widehat{x} = (\widehat{x}_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}}$, donde $\widehat{x}_n = T^n(x)$, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Consideremos el conjunto de sucesiones bilaterales

$$\widehat{X} = \left\{\widehat{x} \in X^{\mathbb{Z}}; x \in X\right\}.$$

Como $X$ es un espacio métrico compacto, totalmente disconexo, cada punto $x$ de $X$ constituye una componente conexa de $X$. Así, de la Proposición 1,

$$\{x\} = \bigcap_{A \in \mathcal{C}_x} A,$$

donde

$$\mathcal{C}_x = \Big\{A \subseteq X; A \text{ es abierto y cerrado, y } x \in A\Big\},$$

para cada $x \in X$ (ya que $X$ es Hausdorff, más aún métrico, y compacto).

**Proposición 7.** *Dado $x' \in X$ tal que $x' \in P_-(T) \cap P_+(T)$, existe $\big\{U_k\big\}_{k\in\mathbb{N}}$, colección numerable de conjuntos abiertos y cerrados a la vez, tal que*

$$\{x'\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k, \ \text{donde } U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \supseteq \cdots, \tag{3.6}$$

*Demostración.* Tenemos que $\{x'\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x', 1/n)$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como cada $A$ en $\mathcal{C}_{x'}$ es cerrado, como $X$ es compacto y $\bigcap_{A\in\mathcal{C}_{x'}} A = \{x'\} \subseteq B(x', 1/n)$, entonces existen $m_n \in \mathbb{N}$, y $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_{m_n} \in \mathcal{C}_{x'}$ tales que $\bigcap_{i=1}^{m_n} \tilde{A}_i \subseteq B(x', 1/n)$. Definiendo $A_n = \bigcap_{i=1}^{m_n} \tilde{A}_i$, tenemos que $A_n \in \mathcal{C}_{x'}$ y $A_n \subseteq B(x', 1/n)$. Por lo tanto $\{x'\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Más aún, podemos suponer que $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$. Basta definir $\tilde{U}_1 = A_1$, y $\tilde{U}_n = \tilde{U}_{n-1} \cap A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Fije $x' \in P_+(T) \cap P_-(T)$. Entonces existe $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, colección de subconjuntos de $X$ que son abiertos y cerrados a la vez, tal que $U_{n+1} \subseteq U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\{x'\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ existen infinitos $j \in \mathbb{Z}_+$ e infinitos $j \in \mathbb{Z}_-$ tales que $T^j(x') \in U_k$. Sea $(n_i)_{i\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{Z}$ la sucesión bilateral estrictamente creciente definida por

$$\begin{aligned} &T^{n_i}(x') \in U_1, \ \text{para cada } i \in \mathbb{Z}, \ \text{donde } n_0 = \text{mín}\big\{n \geq 0; T^n(x') \in U_1\big\}, \ \text{y} \\ &\text{si } n \in \mathbb{Z} \ \text{y } T^n(x') \in U_1, \text{ entonces } n \in \{n_i\}_{i\in\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Ahora, sea $(k_i)_{i\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la sucesión definida por

$$k_i = \text{máx}\big\{k \geq 1; T^{n_i}(x') \in U_k\big\}.$$

Observe que $n_0 = 0$ puesto que $x' \in U_1$. Así, $k_0 = +\infty$ ya que $T^{n_0}(x') = x' \in U_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de (3.6). Como $T$ es un homeomorfismo minimal definido sobre un conjunto de Cantor $X$ (no numerable), entonces $\text{Per}(T) = \emptyset$. En particular, para cada $i \neq 0$, $T^{n_i}(x') \neq x'$, y de (3.6) tenemos que existe $k' \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n_i}(x') \notin U_k$ para cada $k \geq k'$. Así, $k_i \in \mathbb{N}$ es caracterizado, para cada $i \neq 0$, por

$$T^{n_i}(x') \in U_{k_i} \text{ e } T^{n_i}(x') \notin U_{k_i+1}.$$

Sea $X_c = X \cup \{c\}$, donde $c$ es un punto fuera de $X$ tal que $c$ es un punto aislado de $X_c$, esto es, $\{c\}$ es un conjunto abierto de $X_c$. Sea

$$y' = \ldots, c, c, c, c, c, \widehat{x'}[\underline{n_0}, n_1)c^{k_1}\widehat{x'}[n_1, n_2)c^{k_2}\widehat{x'}[n_2, n_3)c^{k_3}\ldots \tag{3.7}$$

un elemento de $(X_c)^{\mathbb{Z}}$, con infinitos $c$'s a izquierda, donde $c^k$ denota a un bloque de $c$'s de longitud $k$, esto es, $c, c, \ldots, c, c$, ($k$ veces); y donde $\widehat{x'}[m,n)$ denota al siguiente bloque de la órbita de $x'$,

$$T^m(x'), T^{m+1}(x'), \ldots, T^{n-2}(x'), T^{n-1}(x'),$$

con $m < n$. En particular,

$$\widehat{x'}[\underline{n_0}, n_1) = \underline{T^{n_0}(x')}, T^{n_0+1}(x'), \ldots, T^{n_1-2}(x'), T^{n_1-1}(x'),$$

donde el término subrayado $\underline{T^{n_0}(x')}$ está en la posición cero, esto es, $(y')_0 = T^{n_0}(x')$.

Sea $S : (X_c)^{\mathbb{Z}} \to (X_c)^{\mathbb{Z}}$ es la *función desplazamiento*, definida por

$$S\big((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\big) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}, \text{ para cada } (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in (X_c)^{\mathbb{Z}}.$$

Considere el conjunto

$$Y = \overline{\Big\{ S^n(y') \in (X_c)^{\mathbb{Z}} ; n \in \mathbb{Z} \Big\}}, \tag{3.8}$$

la cerradura de $\big\{S^n(y')\big\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en la topología producto de $(X_c)^{\mathbb{Z}}$. Observe que $S$ es un homeomorfismo, cuya inversa es definida por $S^{-1}\big((z_n)_{n\in\mathbb{Z}}\big) = (z_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$.

**Observación 1.** Observe que $S(Y) \subseteq Y$, y que por lo tanto la restricción de $S$ a $Y$, $S|_Y : Y \to Y$, está bien definido. En efecto, sea $w \in S(Y)$. Así, $w = S(y)$ para algún $y \in Y$. Para cada abierto $W \subseteq (X_c)^{\mathbb{Z}}$ conteniendo $S(y)$, tenemos que $S^{-1}(W)$ es un abierto conteniendo $y$, y entonces, como $y \in Y$, existe $n_W \in \mathbb{Z}$ tal que $S^{n_W}(y') \in S^{-1}(W)$. Así, $S^{n_W+1}(y') \in W$. Por lo tanto,

$$W \cap \Big\{ S^n(y') \in (X_c)^{\mathbb{Z}} ; n \in \mathbb{Z} \Big\} \neq \emptyset.$$

Entonces, $S(y) \in \overline{\Big\{ S^n(y') \in (X_c)^{\mathbb{Z}};\ n \in \mathbb{Z} \Big\}} = Y$. Análogamente, $S^{-1}(Y) \subseteq Y$. Por lo tanto, considerando $Y$ con la topología de subespacio heredada de la topología producto de $(X_c)^{\mathbb{Z}}$, tenemos que la restricción $S|_Y : Y \to Y$ es un homeomorfismo. Por simplicidad, denotaremos también por $S : Y \to Y$ a dicha restricción.

Así, está bien definido el homeomorfismo $S : Y \to Y$, dado por

$$S\big((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\big) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}, \text{ para cada } (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in Y. \tag{3.9}$$

### 3.2.1. Algunos hechos importantes del homeomorfismo $S: Y \to Y$

1. El punto $\overline{c} = \ldots, c, c, c, \underline{c}, c, c, c, \ldots$, donde el término subrayado está en la posición cero, pertenece a $Y$, y es un punto fijo de $S: Y \to Y$.

*Demostración.* Para cada vecindad del tipo

$$W = \cdots \times X_c \times X_c \times \underline{\underline{X_c}} \times \{c\}^N \times X_c \times X_c \times X_c \times \cdots , \tag{3.10}$$

donde $\underline{\underline{X_c}}$ está en la posición $-1$, y $N \in \mathbb{N}$, existe $n \geq 1$ suficientemente grande tal que $S^{-n}(y') \in W$. De hecho, de (3.7),

$$S^{-n}(y') = \ldots, c, c, c, \underline{c}, c, c, c \ldots, c, c, c, \underline{\underline{c}}, \widehat{x'}[n_0, n_1)c^{k_1}\widehat{x'}[n_1, n_2)c^{k_2}\widehat{x'}[n_2, n_3)c^{k_3} \ldots,$$

donde $\underline{c}$ denota la posición 0, y $\underline{\underline{c}}$ denota la posición $n-1$. Así, considerando $n \geq N$ obtenemos que $S^{-n}(y') \in W$. Así, $W \cap \left\{S^m(y'); m \in \mathbb{Z}\right\} \neq \emptyset$. Observe que para cualquier vecindad $\tilde{W}$ de $\overline{c}$, existe alguna vecindad $W$ de $\overline{c}$, como en (3.10) (con $N$ suficientemente grande), tal que $W \subseteq \tilde{W}$, ya que $\{c\}$ es un conjunto abierto de $X_c$. Por lo tanto, $\overline{c} \in \overline{\left\{S^m(y'); m \in \mathbb{Z}\right\}} = Y$. Por otro lado, es claro que $S(\overline{c}) = \overline{c}$. $\square$

2. Existen puntos en $Y$ con infinitos $c$ a la izquierda, a saber, los puntos $S^n(y')$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ (desplazamientos de $y'$). Y existen puntos en $Y$ con infinitos $c$ a la derecha.

Puesto que $x \in P_+(T) \cap P_-(T)$ para cada $x \in X$. A cada $x \in X$ asociamos las sucesiones bilaterales $(n_i^x)_{i\in\mathbb{Z}}$ y $(k_i^x)_{i\in\mathbb{Z}}$ de modo análogo a como fueron definidos para $x'$. Esto es, para $x \in X$ definimos $(n_i^x)_{i\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{Z}$, una sucesión bilateral estrictamente creciente,

$$\cdots < n_{-2}^x < n_{-1}^x < n_0^x < n_1^x < n_2^x < \cdots ,$$

tal que

$$\begin{aligned}
&T^{n_i^x}(x) \in U_1, \text{ para cada } i \in \mathbb{Z}, \text{ donde } n_0^x = \text{mín}\left\{n \geq 0; T^n(x) \in U_1\right\}, \text{ y} \\
&\text{si } n \in \mathbb{Z} \text{ y } T^n(x) \in U_1, \text{ entonces } n \in \{n_i^x\}_{i\in\mathbb{Z}},
\end{aligned} \tag{3.11}$$

y definimos $(k_i^x)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, por

$$k_i^x = \text{máx}\left\{k \geq 1; T^{n_i^x}(x) \in U_k\right\}, \text{ para cada } i \in \mathbb{Z}. \tag{3.12}$$

En particular tenemos que $n_i = n_i^{x'}$ y $k_i = k_i^{x'}$, para cada $i \in \mathbb{Z}$.

A continuación presentamos un importante lema de aproximación.

**Lema 11.** *Para cada $x \in X$, y para cada $I \subset \mathbb{Z}$, subconjunto finito, con $k_i^x < \infty$ para cada $i \in I$, existe algún conjunto abierto $W$ de $X$, con $x \in W$, tal que si $z \in W$ entonces $n_i^z = n_i^x$ y $k_i^z = k_i^x$, para cada $i \in I$.*

*Demostración.* Sea $x \in X$. Sean $(n_i^x)_{i\in\mathbb{Z}}$ y $(k_i^x)_{i\in\mathbb{N}}$ las sucesiones asociadas a $x$. Supongamos inicialmente que todos los $k_i^x$ son finitos (este es el caso cuando $x \in X \setminus O(x', T)$). Supongamos que el conjunto de índices $I$ sea $I = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$. Entonces $T^{n_i^x}(x) \in U_1$ para cada $i \in I$; y $T^n(x) \notin U_1$ para cada $n \in (n_i^x, n_{i+1}^x)$, e $i \in \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$; y $T^n(x) \notin U_1$ para cada $n \in [0, n_0^x)$. Así,

- $x \in \left(T^{n_i^x}\right)^{-1}(U_1)$, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, N\}$,
- $x \in \bigcap_{n\in(n_i^x, n_{i+1}^x)} \left(T^n\right)^{-1}(U_1^c)$, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$,
- $x \in \bigcap_{n\in[0, n_0^x)} \left(T^n\right)^{-1}(U_1^c)$.

Entonces,

$$x \in \left\{\bigcap_{i=0}^{N} (T^{n_i^x})^{-1}(U_1)\right\} \cap \left\{\bigcap_{n\in[0,n_0^x)} (T^n)^{-1}(U_1^c)\right\} \cap \bigcap_{i=0}^{N-1} \left\{\bigcap_{n\in(n_i^x, n_{i+1}^x)} (T^n)^{-1}(U_1^c)\right\} =: W_1.$$

Por otro lado $T^{n_i^x}(x) \in U_{k_i^x}$ y $T^{n_i^x}(x) \notin U_{k_i^x+1}$ para cada $i \in \{0, 1, \ldots, N\}$. Así,

$$x \in \bigcap_{i=0}^{N} \left\{ \left(T^{n_i^x}\right)^{-1}(U_{k_i^x}) \cap \left(T^{n_i^x}\right)^{-1}(U_{k_i^x+1}^c) \right\} =: W_2.$$

Los conjuntos $W_1$ y $W_2$ son abiertos ya que $U_j$ y $U_j^c$ son abiertos para cada $j \in \mathbb{N}$. Así $W = W_1 \cap W_2$ es una vecindad de $x$, tal que si $z \in W$, entonces

1) $T^{n_i^x}(z) \in U_1$ para cada $i \in \{0, 1, \ldots, N\}$,

2) $T^n(z) \notin U_1$ para cada $n \in \left(n_i^x, n_{i+1}^x\right)$, y cada $i \in \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$,

3) $T^n(z) \notin U_1$ para cada $n \in [0, n_0^x)$.

De 1) y 2), tenemos que $n_0^x, n_1^x, n_2^x, \ldots, n_N^x$ son elementos consecutivos de $\{n_i^z\}_{i\in\mathbb{Z}}$. De 1) y 3), $n_0^z = n_0^x$. Por lo tanto,

$$n_i^z = n_i^x, \text{ para cada } i \in I = \{0, 1, 2, \ldots, N\}.$$

Además, como $z \in W_2$ entonces $k_i^z = k_i^x$ para cada $i \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$. □

Observe que todo subconjunto finito de $\mathbb{Z}$, está contenido en un subconjunto finito de enteros consecutivos.

**Lema 12.** *Dado $y = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in Y\setminus\{\overline{c}\}$, entonces existe $x \in X$ que aparece en la representación de $y$, esto es, existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $y_i = x \in X$. Además, $y$ es la órbita de $x$, incrustada por bloques finitos de $c$'s, y posiblemente algún bloque infinito de $c$'s.*

*Demostración.* Como $y = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in Y \setminus \{\overline{c}\}$, entonces $y \in (X_c)^{\mathbb{Z}} \setminus \{\overline{c}\}$, y por lo tanto existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $y_i \in X$. Sea $x = y_i$. Tenemos que $y_j \in X_c$, para cada $j \in \mathbb{Z}$. Así, o $y_j \in X$ o $y_j = c$, para cada $j \in \mathbb{Z}$.

Supongamos que $y_{i+1} \in X$. Mostremos que $y_{i+1} = T(x)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $V_n$ la vecindad de $y$ dada por,

$$V_n = \cdots \times X_c \times \underline{\underline{B_{1/n}(x)}} \times B_{1/n}(y_{i+1}) \times X_c \times \cdots,$$

donde el término subrayado está en la posición $i$. Como $c$ es un punto aislado de $X_c$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $B_{1/n}(x)$ y $B_{1/n}(y_{i+1})$ no contiene $c$, así, $B_{1/n}(x) \subset X$ y $B_{1/n}(y_{i+1}) \subset X$. Como $y \in Y$, existe $y^n \in \Big\{S^j(y') \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; j \in \mathbb{Z}\Big\} \cap V_n$. Así, existe $i_n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$T^{i_n}(x') \in B_{1/n}(x) \quad \text{y} \quad T^{i_n+1}(x') \in B_{1/n}(y_{i+1}),$$

esto es, $d\big(T^{i_n}(x'), x\big) < \dfrac{1}{n}$ y $d\big(T^{i_n+1}(x'), y_{i+1}\big) < \dfrac{1}{n}$ para cada $n \geq n_0$. Así,

$$\lim_{n\to+\infty} T^{i_n}(x') = x \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to+\infty} T^{i_n+1}(x') = y_{i+1}.$$

De la continuidad de $T$, tenemos que $T(x) = \lim_{n\to+\infty} T\big(T^{i_n}(x')\big) = y_{i+1}$.

Análogamente, supongamos que $y_{i+1} = \cdots = y_{i+N} = c$ y que $y_{i+N+1} \in X$. Así,

$$y = \ldots, \underline{\underline{x}}, \underbrace{c, c, \ldots, c}_{N \text{ veces}}, y_{i+N+1}, \ldots,$$

donde $x = y_i$ está en la posición $i$-ésima. Considere la vecindad $W_n$ de $y$, dada por

$$W_n = \cdots \times X_c \times \underline{\underline{B_{1/n}(x)}} \times \{c\}^N \times B_{1/n}(y_{i+N+1}) \times X_c \times \cdots,$$

donde el término subrayado está en la posición $i$. Como $c$ es un punto aislado de $X_c$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $B_{1/n}(x)$ y $B_{1/n}(y_{i+N+1})$ no contiene $c$. Como $y \in Y$, tenemos que existe $y^n \in \Big\{S^j(y') \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; j \in \mathbb{Z}\Big\} \cap W_n$. Entonces, para cada $n \geq n_0$ existe $j_n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$d\big(T^{j_n}(x'), x\big) < \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad d\big(T^{j_n+1}(x'), y_{i+N+1}\big) < \frac{1}{n}.$$

Así, haciendo tender $n$ a $+\infty$, de la continuidad de $T$ tenemos que $y_{i+N+1} = T(x)$. Similarmente a izquierda de $x$ obtenemos la órbita negativa de $x$ (en ese caso usamos la continuidad de $T^{-1}$) incrustada por bloques de $c$'s.

Hemos probado que, para cada $\ell \in \mathbb{Z}$,

- si $y_\ell \in X$ y $y_{\ell+1} \in X$, entonces $y_{\ell+1} = T(y_\ell)$.
- si $y_\ell \in X$, $y_{\ell+1} = y_{\ell+2} = \cdots = y_{\ell+N} = c$ y $y_{\ell+N+1} \in X$, entonces $y_{\ell+N+1} = T(y_\ell)$.

$\square$

3. Para cada $x \in X$, de (3.11) y (3.12), tenemos definidas las sucesiones $(n_i^x)_{i\in\mathbb{Z}}$ y $(k_i^x)_{i\in\mathbb{Z}}$, donde $n_0^x = \min\left\{n \geq 0; T^n(x) \in U_1\right\}$. Ahora definamos la sucesión bilateral $y(x) \in (X_c)^{\mathbb{Z}}$, de la siguiente manera

1. Si $x \in X \setminus O(x', T)$, entonces

$$y(x) = \dots c^{k_{-2}^x}\widehat{x}[n_{-2}^x, n_{-1}^x)c^{k_{-1}^x}\widehat{x}[n_{-1}^x, n_0^x)c^{k_0^x}\widehat{x}[n_0^x, n_1^x)c^{k_1^x}\widehat{x}[n_1^x, n_2^x)\dots, \tag{3.13}$$

donde todos los bloques $c^{k_i^x}$ son finitos, puesto que $x \notin O(x', T)$, y $T^n(x) \neq x'$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

2. Si $x \in O(x', T)$ tal que $x = T^r(x')$, con $r \geq 0$, entonces

$$y(x) = \dots, c, c, c, \widehat{x}[n_{i_0}^x, n_{i_0+1}^x)c^{k_{i_0+1}^x}\widehat{x}[n_{i_0+1}^x, n_{i_0+2}^x)c^{k_{i_0+2}^x}\widehat{x}[n_{i_0+2}^x, n_{i_0+3}^x)c^{k_{i_0+3}^x}\dots, \tag{3.14}$$

donde $T^{n_{i_0}^x}(x) = x'$ (y por lo tanto $n_{i_0}^x = -r \leq 0$). Observe que el bloque infinito de $c$'s a izquierda corresponde al bloque $c^{k_{i_0}^x}$, donde

$$k_{i_0}^x = \max\left\{k \in \mathbb{N}; T^{n_{i_0}^x}(x) \in U_k\right\} = \max\left\{k \in \mathbb{N}; x' \in U_k\right\} = +\infty.$$

3. Si $x \in O(x', T)$ tal que $x = T^r(x')$, con $r < 0$, entonces

$$y(x) = \dots c^{k_{i_0-3}^x}\widehat{x}[n_{i_0-3}^x, n_{i_0-2}^x)c^{k_{i_0-2}^x}\widehat{x}[n_{i_0-2}^x, n_{i_0-1}^x)c^{k_{i_0-1}^x}\widehat{x}[n_{i_0-1}^x, n_{i_0}^x), c, c, c, \dots, \tag{3.15}$$

donde $T^{n_{i_0}^x}(x) = x'$ (y por lo tanto $n_{i_0}^x = -r > 0$). Observe que el bloque infinito de $c$'s a derecha corresponde al bloque $c^{k_{i_0}^x}$, donde

$$k_{i_0}^x = \max\left\{k \in \mathbb{N}; T^{n_{i_0}^x}(x) \in U_k\right\} = \max\left\{k \in \mathbb{N}; x' \in U_k\right\} = +\infty.$$

En los tres casos el término de la posición 0 es $x$, esto es, $\big(y(x)\big)_0 = x$. En particular, en (3.7), tenemos que $y' = y(x')$.

**Lema 13.** *Sea $x = T^r(x')$, para algún $r \geq 0$. Entonces $y(x) \in \left\{S^n(y') \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\right\}$, esto es, $y(x)$ es un desplazamiento de $y'$. Además, si $x = T^r(x')$ para algún $r < 0$, entonces $y(x) \in \left\{S^n(y'') \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\right\}$, donde*

$$y'' = \ldots, c^{k^{x'}_{-3}} \widehat{x'}[n^{x'}_{-3}, n^{x'}_{-2}) c^{k^{x'}_{-2}} \widehat{x'}[n^{x'}_{-2}, n^{x'}_{-1}) c^{k^{x'}_{-1}} \widehat{x'}[n^{x'}_{-1}, \underline{n^{x'}_0 - 1}]c, c, c, c, c, \ldots, \tag{3.16}$$

*y donde $\underline{T^{n^{x'}_0 - 1}(x')}$ está en la posición cero.*

*Demostración.* Sea $x \in O(x', T)$, entonces $x = T^r(x')$ para algún $r \in \mathbb{Z}$. Tenemos definida la sucesión estrictamente creciente $\left(n_i^{T^r x'}\right)_{i \in \mathbb{Z}}$ tal que

$$T^{n_i^{T^r x'}}(T^r x') \in U_1, \text{ para cada } i \in \mathbb{Z}, \text{ donde } n_0^{T^r x'} = \text{mín}\left\{n \geq 0; T^n(T^r x') \in U_1\right\}, \text{ y}$$

$$\text{si } n \in \mathbb{Z} \text{ y } T^n(T^r x') \in U_1, \text{ entonces } n \in \left\{n_i^{T^r x'}\right\}_{i \in \mathbb{Z}},$$

y $\left(k_i^{T^r x'}\right)_{i \in \mathbb{Z}}$ definida por

$$k_i^{T^r x'} = \text{máx}\left\{k \geq 1; T^{n_i^{T^r x'}}(T^r x') \in U_k\right\}.$$

Como

$$\begin{aligned} n_0^{T^r x'} &= \text{mín}\left\{n \geq 0; T^n(T^r x') \in U_1\right\} = \text{mín}\left\{n \geq 0; T^{n+r}(x') \in U_1\right\} \\ &= \text{mín}\left\{m \geq r; T^m(x') \in U_1\right\} - r = \text{mín}\left\{m \geq r; m \in \left\{n_i^{x'}\right\}_{i \in \mathbb{Z}}\right\} - r, \end{aligned}$$

entonces $n_0^{T^r x'} = n_{i_0}^{x'} - r$ para algún $i_0 \in \mathbb{Z}$, donde $n_{i_0}^{x'} \geq r$ y $n_{i_0 - 1}^{x'} < r$.
También tenemos que

$$\begin{aligned} \left\{n_i^{T^r x'}\right\}_{i \in \mathbb{Z}} &= \left\{n \in \mathbb{Z}; T^n(T^r x') \in U_1\right\} \\ &= \left\{n \in \mathbb{Z}; T^{n+r}(x') \in U_1\right\} \\ &= \left\{n \in \mathbb{Z}; n + r \in \left\{n_i^{x'}\right\}_{i \in \mathbb{Z}}\right\} \\ &= \left\{n_i^{x'} - r\right\}_{i \in \mathbb{Z}}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Mostremos que $n_i^{T^r x'} = n_{i+i_0}^{x'} - r$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. De (3.17), $n_1^{T^r x'} = n_{i_1}^{x'} - r$ para algún $i_1 \in \mathbb{Z}$. Observe que como $n_1^{T^r x'} > n_0^{T^r x'}$, entonces $n_{i_1}^{x'} > n_{i_0}^{x'}$, y así $i_1 > i_0$. Si $m \in \left(n_{i_0}^{x'}, n_{i_1}^{x'}\right)$ entonces $n_0^{T^r x'} + r < m < n_1^{T^r x'} + r$, entonces $n_0^{T^r x'} < m - r < n_1^{T^r x'}$, por tanto $m - r \notin \left\{n_i^{T^r x'}\right\}_{i \in \mathbb{Z}}$, y así $m \notin \left\{n_i^{T^r x'} + r\right\}_{i \in \mathbb{Z}} = \left\{n_i^{x'}\right\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Por lo tanto $i_1 = i_0 + 1$. Continuando de esa manera, obtenemos que

$$n_i^{T^r x'} = n_{i+i_0}^{x'} - r, \text{ para cada } i \in \mathbb{Z}. \tag{3.18}$$

Comparemos $k_i^{T^r x'}$ con $k_i^{x'}$. De la definición de $k_i^{T^r x'}$,

$$k_i^{T^r x'} = \text{máx}\left\{k \geq 1; T^{n_i^{T^r x'}}(T^r x') \in U_k\right\} = \text{máx}\left\{k \geq 1; T^{n_{i+i_0}^{x'}}(x') \in U_k\right\} = k_{i+i_0}^{x'}.$$

Observe que para $i=-i_0$, tenemos que, como $n_0^{x'}=0$,

$$k_{-i_0}^{T^r x'} = k_0^{x'} = \text{máx}\left\{k\geq 1; T^{n_0^{x'}}(x')\in U_k\right\} = \text{máx}\left\{k\geq 1; x'\in U_k\right\} = +\infty.$$

Así, cada bloque de la forma $c^{k_i^x}\widehat{x}\left[n_i^x, n_{i+1}^x\right)$, donde $x=T^r x'$, tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}
c^{k_i^x}\widehat{x}\left[n_i^x, n_{i+1}^x\right) &= c^{k_i^{T^r x'}}\widehat{T^r x'}\left[n_i^{T^r x'}, n_{i+1}^{T^r x'}\right) \\
&= c^{k_{i+i_0}^{x'}}\widehat{T^r x'}\left[n_{i+i_0}^{x'}-r, n_{i+1+i_0}^{x'}-r\right) \\
&= c^{k_{i+i_0}^{x'}}\widehat{x'}\left[n_{i+i_0}^{x'}, n_{i+1+i_0}^{x'}\right),
\end{aligned} \tag{3.19}$$

ya que $T^{\ell-r}(T^r x')=T^{\ell}(x')$, para cada $\ell\in\left[n_{i+i_0}^{x'}, n_{i+1+i_0}^{x'}\right)$, y para cada $i\in\mathbb{Z}$. Observe que en el caso que $i=-i_0$, tenemos que

$$\ldots, c, c, c, c, c, \widehat{T^r x'}\left[n_{-i_0}^{T^r x'}, n_{-i_0+1}^{T^r x'}\right) = \ldots, c, c, c, c, c, \widehat{x'}\left[n_0^{x'}, n_1^{x'}\right),$$

ya que en este caso $k_{-i_0}^{T^r x'}=+\infty$ y $k_0^{x'}=+\infty$. Así, en caso que $r\geq 0$, $n_{-i_0}^x=-r\leq 0$, y por tanto

$$x\in\widehat{x}\left[n_i^x, n_{i+1}^x\right) = T^{n_i^x}(x), T^{n_i^x+1}(x), \ldots, T^{n_{i+1}^x-1}(x) \text{ para algún } i\geq -i_0,$$

y entonces,

$$\begin{aligned}
y(x) &= \ldots, c, c, c, \widehat{x}[n_{-i_0}^x, n_{-i_0+1}^x)c^{k_{-i_0+1}^x}\widehat{x}\left[n_{-i_0+1}^x, n_{-i_0+2}^x\right)c^{k_{-i_0+2}^x}\widehat{x}\left[n_{-i_0+2}^x, n_{-i_0+3}^x\right)c^{k_{-i_0+3}^x}\ldots \\
&= \ldots, c, c, c, \widehat{x'}\left[n_0^{x'}, n_1^{x'}\right)c^{k_1^{x'}}\widehat{x'}\left[n_1^{x'}, n_2^{x'}\right)c^{k_2^{x'}}\widehat{x'}\left[n_2^{x'}, n_3^{x'}\right)c^{k_3^{x'}}\ldots,
\end{aligned}$$

donde el término de la posición 0 es $x=T^r(x')$. Esto muestra que $y(x)$ es un desplazamiento de $y'=y(x')$.

En caso que $r<0$, tenemos que $n_{-i_0}^x=-r>0$. Por tanto

$$x\in\widehat{x}\left[n_{i-1}^x, n_i^x\right) = T^{n_{i-1}^x}(x), T^{n_{i-1}^x+1}(x), \ldots, T^{n_i^x-1}(x) \text{ para algún } i\leq -i_0,$$

y entonces, similarmente, de (3.19) tenemos que $\widehat{x}[n_{i-1}^x, n_i^x)c^{k_i^x}$ tiene la forma

$$\begin{aligned}
\widehat{x}\left[n_{i-1}^x, n_i^x\right)c^{k_i^x} &= \widehat{T^r x'}\left[n_{i-1}^{T^r x'}, n_i^{T^r x'}\right)c^{k_i^{T^r x'}} \\
&= \widehat{T^r x'}\left[n_{i-1+i_0}^{x'}-r, n_{i+i_0}^{x'}-r\right)c^{k_{i+i_0}^{x'}} \\
&= \widehat{x'}\left[n_{i-1+i_0}^{x'}, n_{i+i_0}^{x'}\right)c^{k_{i+i_0}^{x'}}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Y cuando $i=-i_0$,

$$\widehat{T^r x'}\left[n_{-i_0-1}^{T^r x'}, n_{-i_0}^{T^r x'}\right), c, c, c, c, c, \ldots = \widehat{x'}\left[n_{-1}^{x'}, n_0^{x'}\right), c, c, c, c, c, \ldots,$$

ya que en este caso $k^{T^r x'}_{-i_0} = +\infty$ y $k^{x'}_0 = +\infty$. Entonces

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \dots c^{k^x_{-i_0-3}} \widehat{x}\big[n^x_{-i_0-3}, n^x_{-i_0-2}\big) c^{k^x_{-i_0-2}} \widehat{x}\big[n^x_{-i_0-2}, n^x_{-i_0-1}\big) c^{k^x_{-i_0-1}} \widehat{x}\big[n^x_{-i_0-1}, n^x_{-i_0}\big), c, c, c, \dots \\
&= \dots, c^{k^{x'}_{-3}} \widehat{x'}\big[n^{x'}_{-3}, n^{x'}_{-2}\big) c^{k^{x'}_{-2}} \widehat{x'}\big[n^{x'}_{-2}, n^{x'}_{-1}\big) c^{k^{x'}_{-1}} \widehat{x'}\big[n^{x'}_{-1}, n^{x'}_{0}\big) c, c, c, \dots,
\end{aligned}
$$

donde el término de la posición 0 es $x = T^r(x')$. Esto muestra que $y(x)$ es un desplazamiento de $y''$. $\square$

**Lema 14.** *Para cada $x \in X \setminus O(x', T)$, y cada $r \in \mathbb{Z}$. Si $z = T^r(x)$, entonces existe $i_0 \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$
n^z_i + r = n^x_{i+i_0} \quad y \quad k^z_i = k^x_{i+i_0}, \text{ para cada } i \in \mathbb{Z}.
$$

*Además, existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $y(z) = S^j\big(y(x)\big)$, esto es, $y(z)$ es un desplazamiento de $y(x)$.*

*Demostración.* Sean $x \in X \setminus O(x', T)$, $r \in \mathbb{Z}$ y $z = T^r(x)$, Como $z \in X \setminus O(x', T)$ es un punto positivamente y negativamente transitivo, como en (3.11), está definida la sucesión estrictamente creciente $(n^z_i)_{i\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{Z}$, con $n^z_0 = \text{mín}\,\big\{n \geq 0; T^n(z) \in U_1\big\}$, tal que

$$
T^{n^z_i}(z) \in U_1, \text{ para cada } i \in \mathbb{Z}, \text{ y} \tag{3.21}
$$

$$
\text{si } n \in \biguplus_{i\in\mathbb{Z}} \big(n^z_i, n^z_{i+1}\big) \text{ entonces } T^n(z) \notin U_1. \tag{3.22}
$$

Además, como en (3.12), está definida la sucesión $(k^z_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, tal que

$$
k^z_i = \text{máx}\left\{k \in \mathbb{N}; T^{n^z_i}(z) \in U_k\right\}.
$$

Como $z \notin O(x', T)$, entonces $T^{n^z_i}(z) \neq x'$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Y dado que $\{x'\} = \bigcap_{\ell\in\mathbb{N}} U_\ell$, entonces $k^z_i \in \mathbb{N}$ para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Análogamente están definidas las sucesiones $(n^x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{Z}$, estrictamente creciente, con $n^x_{-1} < 0 \leq n^x_0$, tal que

$$
T^{n^x_i}(x) \in U_1, \text{ para cada } i \in \mathbb{Z}; \text{ y} \tag{3.23}
$$

$$
\text{si } n \in \biguplus_{i\in\mathbb{Z}} (n^x_i, n^x_{i+1}) \text{ entonces } T^n(x) \notin\ U_1; \tag{3.24}
$$

y $(k^x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{N}$, donde $k^x_i = \text{máx}\left\{k \in \mathbb{N}; T^{n^x_i}(x) \in U_k\right\}$. De (3.21), $T^{n^z_i + r}(x) \in U_1$, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, de (3.23) y (3.24), existen $i_0, i'_0 \in \mathbb{Z}$ tales que $n^z_0 + r = n^x_{i_0}$ y $n^z_1 + r = n^x_{i'_0}$. Por lo tanto, $i_0 < i'_0$. Si $n \in \left(n^x_{i_0}, n^x_{i'_0}\right) = \left(n^z_0 + r, n^z_1 + r\right)$, entonces $n - r \in (n^z_0, n^z_1)$. Por tanto, de (3.22), $T^n(x) = T^{n-r}(z) \notin U_1$. Así, $i'_0 = i_0 + 1$. Continuando de esta manera tenemos que

$n_i^z + r = n_{i+i_0}^x$, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Por otro lado, para cada $i \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} k_i^z &= \text{máx}\Big\{k \geq 1; T^{n_i^z}(z) \in U_k\Big\} = \text{máx}\Big\{k \geq 1; T^{n_i^z+r}(x) \in U_k\Big\} \\ &= \text{máx}\Big\{k \geq 1; T^{n_{i+i_0}^x}(x) \in U_k\Big\} = k_{i+i_0}^x. \end{aligned}$$

Cada bloque de la forma $c^{k_i^z}\widehat{z}[n_i^z, n_{i+1}^z)$, que aparece en $y(z)$, es tal que

$$c^{k_i^z}\widehat{z}[n_i^z, n_{i+1}^z) = c^{k_{i+i_0}^x}\widehat{z}[n_{i+i_0}^x - r, n_{i+1+i_0}^x - r) = c^{k_{i+i_0}^x}\widehat{x}[n_{i+i_0}^x, n_{i+1+i_0}^x),$$

ya que $T^{\ell-r}(z) = T^{\ell}(x)$, para cada $\ell \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, cada bloque $c^{k_i^z}\widehat{z}[n_i^z, n_{i+1}^z)$, de $y(z)$, es igual al bloque $c^{k_{i+i_0}^x}\widehat{x}\big[n_{i+i_0}^x, n_{i+1+i_0}^x\big)$, de $y(x)$. Como $\big(y(x)\big)_0 = x$ y $\big(y(z)\big)_0 = z$, entonces existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $S^j\big(y(x)\big) = y(z)$. $\square$

**Lema 15.** *Para cada $x \in X \setminus O(x', T)$, tenemos que $y(x) \in Y$.*

*Demostración.* Sea $x \in X \setminus O(x', T)$. Asociado a $x$ tenemos las sucesiones $(n_i^x)_{i\in\mathbb{Z}}$ y $(k_i^x)_{i\in\mathbb{N}}$, donde todos los $k_i^x$ son finitos ya que $T^n(x) \neq x'$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, pues $x \notin O(x', T)$. Asociado a $x$ tenemos la sucesión bilateral $y(x) \in (X_c)^{\mathbb{Z}}$,

$$y(x) = \dots, c^{k_{-2}^x}\widehat{x}[n_{-2}^x, n_{-1}^x)c^{k_{-1}^x}\widehat{x}[n_{-1}^x, n_0^x)c^{k_0^x}\widehat{x}[n_0^x, n_1^x)c^{k_1^x}\widehat{x}[n_1^x, n_2^x), \dots,$$

tal que $\big(y(x)\big)_0 = x$ Sea $V \subseteq (X_c)^{\mathbb{Z}}$ una vecindad de $y(x)$ de la forma siguiente

$$\begin{aligned} V = \dots, &\{c\}^{k_{-\ell}^x}\widehat{V}[n_{-\ell}^x, n_{-\ell+1}^x) \dots \{c\}^{k_{-1}^x}\widehat{V}[n_{-1}^x, \underline{n_0^x - 1}]\{c\}^{k_0^x}\widehat{V}[n_0^x, n_1^x), \\ &\{c\}^{k_1^x}\widehat{V}[n_1^x, n_2^x) \dots \{c\}^{k_{\ell-1}^x}\widehat{V}[n_{\ell-1}^x, n_\ell^x), \dots, \end{aligned}$$

donde cada bloque $\{c\}^{k_i^x}\widehat{V}[n_i^x, n_{i+1}^x)$ denota al producto

$$\underbrace{\{c\} \times \dots \times \{c\}}_{k_i^x\text{-veces}} \times V_{n_i^x} \times V_{n_i^x+1} \times \dots \times V_{n_{i+1}^x-1},$$

donde $\ell \in \mathbb{N}$, y cada $V_j$ es un conjunto abierto de $X$ (y por lo tanto, abiertos de $X_c$), tal que

$$T^j(x) \in V_j, \text{ para cada } j \in \big\{n_{-\ell}^x, \dots, -1, 0, 1, \dots, n_\ell^x\big\}. \tag{3.25}$$

Además, $\underline{V_{n_0^x-1}}$ está en la posición $j_0$ y contiene a $T^{n_0^x-1}(x)$. Mostremos que $V$ contiene algún elemento de $\Big\{S^n(y') \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\Big\}$. Como $n_i^x$ y $k_i^x$ son finitos para cada $i \in \mathbb{Z}$, del Lema 11, existe $V_x$, vecindad de $x$, tal que si $z \in V_x$, entonces

$$n_i^z = n_i^x \;\text{ y }\; k_i^z = k_i^x, \text{ para cada } i \in \big\{-\ell, \dots, -1, 0, 1, \dots, \ell\big\}.$$

Considere el conjunto abierto

$$W = \bigcap_{i=n_{-\ell}^x}^{n_\ell^x} T^{-i}(V_i),$$

el cual, por (3.25), es una vecindad de $x$. Dado que $x' \in P_+(T)$, existen $r, r_1, r_2, \dots, r_\ell \in \mathbb{N}$, con $r_1 < r_2 < \cdots < r_\ell < r$, tales que $T^{r_i}(x') \in U_1$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$, y $z = T^r(x') \in V_x \cap W$. Entonces $T^{-r}(z) = x' \in U_1$, y así $-r = n^z_{i_0}$, para algún $i_0 \in \mathbb{Z}$. Más aún, $T^{r_i - r}(z) = T^{r_i}(x') \in U_1$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$. Así,

$$-r < r_1 - r < r_2 - r < \cdots < r_{\ell-1} - r < r_\ell - r < 0,$$

y $r_j - r = n^z_{i_j}$ para algún $i_j \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto,

$$n^z_{i_0} < n^z_{i_1} < n^z_{i_2} < \cdots < n^z_{i_\ell} < 0 \leq n^z_0.$$

Así, $i_0 < -\ell$. Además $k^z_{i_0} = \text{máx}\left\{k \geq 1; T^{n^z_{i_0}}(z) \in U_1\right\} = \text{máx}\left\{k \geq 1; x' \in U_1\right\} = +\infty$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} y(z) &= c^\infty, \dots, c^{k^z_{-\ell}} \widehat{z}[n^z_{-\ell}, n^z_{-\ell+1}), \dots, c^{k^z_{-1}} \widehat{z}[n^z_{-1}, n^z_0) c^{k^z_0} \widehat{z}[n^z_0, n^z_1) \dots c^{k^z_{\ell-1}} \widehat{z}[n^z_{\ell-1}, n^z_\ell) \dots \\ &= c^\infty, \dots, c^{k^x_{-\ell}} \widehat{z}[n^x_{-\ell}, n^x_{-\ell+1}), \dots, c^{k^x_{-1}} \widehat{z}[n^x_{-1}, n^x_0) c^{k^x_0} \widehat{z}[n^x_0, n^x_1) \dots c^{k^x_{\ell-1}} \widehat{z}[n^x_{\ell-1}, n^x_\ell) \dots, \end{aligned}$$

donde $c^\infty$ denota al bloque infinito de $c$'s. Por lo tanto, existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que

$$S^j\big(y(z)\big) = \dots, c^{k^x_{-\ell}} \widehat{z}[n^x_{-\ell}, n^x_{-\ell+1}), \dots, c^{k^x_{-1}} \widehat{z}[n^x_{-1}, \underline{n^x_0 - 1}] c^{k^x_0} \widehat{z}[n^x_0, n^x_1) \dots c^{k^x_{\ell-1}} \widehat{z}[n^x_{\ell-1}, n^x_\ell) \dots,$$

donde el término subrayado está en la posición $j_0$. Así, $S^j\big(y(z)\big) \in V$, ya que

$$c^{k^x_i} \widehat{z}[n^x_i, n^x_{i+1}) \in \{c\}^{k^x_i} \widehat{V}[n^x_i, n^x_{i+1})$$

para cada $i \in \{-\ell. -\ell + 1, \dots, \ell - 1\}$, pues $z \in W$. Por otro lado, del Lema 13, como $r > 0$ entonces $y(z) = y\big(T^r x'\big)$ es un desplazamiento de $y'$. Por lo tanto,

$$S^j\big(y(z)\big) \in \left\{S^n(y') \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\right\} \cap V.$$

Entonces, $y(x) \in \overline{\left\{S^n(y') \in (X_c)^{\mathbb{Z}};\ n \in \mathbb{Z}\right\}} = Y$.
Análogamente, puesto que también $x' \in P_-(T)$, podemos concluir que: si $x \in X \setminus O(x', T)$, entonces tenemos que $y(x) \in \overline{\left\{S^n(y'') \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\right\}}$. □

**Lema 16.** *Tenemos que $y''$, definido en (3.16), pertenece a $Y$.*

**Observación 2.** *Cuando $T^{n^x_i}(x) = x'$, tenemos que $k^x_i = +\infty$ y produce un bloque infinito de $c$'s, $c^{k^x_i}$. Dado $k \in \mathbb{N}$, cualquiera, sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $T^r(x') \in U_k \subseteq U_1$. Entonces, $n^{T^r x'}_0 = 0$, pues $T^r x' \in U_1$, y $k^{T^r x'}_0 = \text{máx}\left\{t \in \mathbb{N}; T^0(T^r x') \in U_t\right\} \geq k$, puesto que $T^r x' \in U_k$.*

*Demostración.* Sea $V$ una vecindad de $y''$ de la forma siguiente

$$V = (X_c)^{\infty}\{c\}^{k^{x'}_{-\ell}}\widehat{V}\left[n^{x'}_{-\ell}, n^{x'}_{-\ell+1}\right)\ldots\{c\}^{k^{x'}_{-2}}\widehat{V}\left[n^{x'}_{-2}, n^{x'}_{-1}\right)\{c\}^{k^{x'}_{-1}}\widehat{V}\left[n^{x'}_{-1}, \underline{n^{x'}_{0} - 1}\right]\{c\}^{k}(X_c)^{\infty},$$

donde $\ell, k \in \mathbb{N}$, y cada bloque $\{c\}^{k^{x'}_{j}}\widehat{V}\left[n^{x'}_{j}, n^{x'}_{j+1}\right)$ representa al producto

$$\underbrace{\{c\} \times \cdots \times \{c\}}_{k^{x'}_{j}\text{-veces}} \times V_{n^{x'}_{j}} \times V_{n^{x'}_{j}+1} \times \cdots \times V_{n^{x'}_{j+1}-1}$$

donde los $V_i$ son abiertos de $X$, y por lo tanto abiertos de $X_c$; el término subrayado $\underline{V_{n^{x'}_{0}-1}}$ está en la posición cero, y

$$T^{i}\left(x'\right) \in V_i \text{ para cada } i \in \left\{n^{x'}_{-\ell}, n^{x'}_{-\ell}+1, \ldots, n^{x'}_{0} - 1\right\}. \tag{3.26}$$

Mostremos que $V$ contiene elementos de $\left\{S^{n}(y') \in (X_c)^{\mathbb{Z}};\ n \in \mathbb{Z}\right\}$. Como los $k^{x'}_{i}$ son finitos para cada $i \in \{-\ell, \ldots, -2, -1\}$, del Lema 11, existe $V_{x'}$, vecindad de $x'$, tal que si $z \in V_{x'}$, entonces

$$\begin{aligned} n^{z}_{i} &= n^{x'}_{i}, \text{ para cada } i \in \left\{-\ell, -(\ell-1), \ldots, -2, -1, 0\right\}, \text{ y} \\ k^{z}_{i} &= k^{x'}_{i}, \text{ para cada } i \in \left\{-\ell, -(\ell-1), \ldots, -2, -1\right\}. \end{aligned}$$

De la Observación 2, tenemos que si $z \in U_k$ entonces $n^{z}_{0} = 0$ y $k^{z}_{0} \geq k$. Considere el conjunto abierto

$$W_2 = \bigcap_{i=n^{x'}_{-\ell}}^{n^{x'}_{0}-1} T^{-i}(V_i),$$

el cual contiene a $x'$, de (3.26). Así,

$$W = V_{x'} \cap U_k \cap W_2$$

es una vecindad de $x'$. Puesto que $x' \in P_{-}(T) \cap P_{+}(T)$ existen $r, r_1, \ldots, r_\ell \in \mathbb{N}$, con

$$r_1 < r_2 < \cdots < r_\ell < r,$$

tales que $x = T^{r}(x') \in W$, y

$$T^{r_i}\left(x'\right) \in U_1, \text{ para cada } i \in \left\{1, 2, \ldots, \ell\right\}$$

Así, $x \in W$, $T^{r_i - r}(x) \in U_1$ para cada $i \in \left\{1, 2, \ldots, \ell\right\}$, y $T^{-r}(x) = x' \in U_1$. Por lo tanto, existen $i_0, i_1, \ldots, i_\ell \in \mathbb{Z}$ tales que $-r = n^{x}_{i_0}$ y $r_j - r = n^{x}_{i_j}$, para cada $j \in \left\{1, 2, \ldots, \ell\right\}$. Así,

$$n^{x}_{i_0} < n^{x}_{i_1} < n^{x}_{i_2} < \cdots < n^{x}_{i_\ell} < 0 = n^{x}_{0}.$$

Así, tenemos que $i_0 < -\ell$, $c^{k^x_{i_0}}$ es un bloque infinito de $c$'s puesto que $T^{n^x_{i_0}}(x) = x' \in U_r$ para cada $r \in \mathbb{N}$; y $k^x_0 \geq k$, ya que $T^{n^x_0}(x) = x \in U_k$. Además, como $x \in V_{x'}$, entonces

$$\begin{aligned} y(x) &= c^{\infty}, \ldots, c^{k^x_{-\ell}}\widehat{x}[n^x_{-\ell}, n^x_{-\ell+1}), \ldots, c^{k^x_{-2}}\widehat{x}[n^x_{-2}, n^x_{-1})c^{k^x_{-1}}\widehat{x}[n^x_{-1}, n^x_0)c^{k^x_0}\ldots \\ &= c^{\infty}, \ldots, c^{k^{x'}_{-\ell}}\widehat{x}\big[n^{x'}_{-\ell}, n^{x'}_{-\ell+1}\big), \ldots, c^{k^{x'}_{-2}}\widehat{x}\big[n^{x'}_{-2}, n^{x'}_{-1}\big)c^{k^{x'}_{-1}}\widehat{x}\big[n^{x'}_{-1}, n^{x'}_0\big)c^{k^x_0}\ldots, \end{aligned} \tag{3.27}$$

donde el término de la posición cero es $x$. Por lo tanto, existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que

$$S^j\big(y(x)\big) = \ldots c^{k^{x'}_{-\ell}}\widehat{x}\big[n^{x'}_{-\ell}, n^{x'}_{-\ell+1}\big), \ldots, c^{k^{x'}_{-2}}\widehat{x}\big[n^{x'}_{-2}, n^{x'}_{-1}\big)c^{k^{x'}_{-1}}\widehat{x}\big[n^{x'}_{-1}, \underline{n^{x'}_0 - 1}\big]c^{k^x_0}\ldots,$$

donde el término subrayado está en la posición cero, y $k^x_0 \geq k$. Así, $S^j\big(y(x)\big) \in V$, ya que

$$T^i(x) \in V_i \text{ para cada } i \in \big[n^{x'}_{-\ell}, n^{x'}_0 - 1\big],$$

puesto que $x \in W \subseteq W_2$.

Además, del Lema 13, $y(x) = y\big(T^r x'\big)$ es un desplazamiento de $y'$. Así,

$$S^j\big(y(x)\big) \in \Big\{S^n(y') \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\Big\}.$$

Entonces, $y'' \in \overline{\Big\{S^n(y') \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\Big\}} = Y$. $\square$

4. Mostremos el siguiente lema, el cual brinda más información que el Lema 12.

**Lema 17.** *Si $y \in Y \setminus \{\overline{c}\}$ entonces $y$ es el desplazamiento de $y(\omega)$ para algún $\omega \in X$, esto es,*

$$Y \setminus \{\overline{c}\} \subseteq \Big\{S^n\big(y(\omega)\big) \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z} \quad y \quad \omega \in X\Big\},$$

*donde $y(\omega)$ es definido como en (3.13), si $\omega \in X \setminus O(x', T)$; como en (3.14), si $\omega = T^r(x')$, para algún $r \geq 0$; o como en (3.15), si $\omega = T^r(x')$, para algún $r < 0$.*

*Demostración.* Sea $y \in Y \setminus \{\overline{c}\}$, entonces por el Lema 12, $y$ es la órbita de $\omega$ incrustada por bloques de $c$'s, donde $\omega \in X$ tal que $\omega = y_{j_0}$, para algún $j_0 \in \mathbb{Z}$. Pero los bloques de $c$'s que aparecen en $y$ respetan los *"espacios adecuados"*?

Sea $c^k$ un bloque finito de $c$'s que aparece en $y$ entre $T^{i-1}(\omega)$ y $T^i(\omega)$, esto es,

$$y = \ldots, T^{i-1}(\omega), \underbrace{c, c, \ldots, c}_{k \text{ veces}}, \underline{\underline{T^i(\omega)}}, \ldots,$$

para algún $i \in \mathbb{Z}$, donde $\underline{\underline{T^i(\omega)}}$ está en la posición $l_0$.

Mostremos que $T^i(\omega) \in U_1$. En efecto, para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $W_m$ la vecindad de $y$ dada por,

$$W_m = \cdots \times X_c \times X_c \times B_{1/m}\big(T^{i-1}(\omega)\big) \times \{c\}^k \times \underline{\underline{B_{1/m}\big(T^i(\omega)\big)}} \times X_c \times X_c \times \cdots,$$

donde $B_{1/m}\big(T^i(\omega)\big)$ y $B_{1/m}\big(T^{i-1}(\omega)\big)$ son bolas abiertas en $X$, y por lo tanto conjuntos abiertos en $X_c$, y el término subrayado $\underline{\underline{B_{1/m}\big(T^i(\omega)\big)}}$ está en la posición $l_0$. Como $y \in Y$, entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $z_m \in \big\{S^q(y'); q \in \mathbb{Z}\big\} \cap W_m$, esto es, existe $i_m \in \mathbb{N}$ tal que

$$z_m = c^\infty, \dots, T^{n_{i_m}-1}(x'), c^{k_{i_m}}, \underline{\underline{T^{n_{i_m}}(x')}}, \dots \in \big\{S^q(y'); q \in \mathbb{Z}\big\} \cap W_m,$$

donde $\underline{\underline{T^{n_{i_m}}(x')}}$ está en la posición $l_0$, $n_j = n_j^{x'}$ y $k_j = k_j^{x'}$ para cada $j \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto,

$$T^{n_{i_m}}(x') \in U_1 \text{ para cada } m \in \mathbb{N}, \text{ y} \tag{3.28}$$

$$k_{i_m} = k \text{ para cada } m \in \mathbb{N}. \tag{3.29}$$

Como $\lim_{m\to\infty} T^{n_{i_m}}(x') = T^i(\omega)$, puesto que $T^{n_{i_m}}(x') \in B_{1/m}\big(T^i(\omega)\big)$, y ya que $U_1$ es cerrado, tenemos que, de (3.28), $T^i(\omega) \in U_1$.

Más aún, de (3.29),

$$T^{n_{i_m}}(x') \in U_k \text{ y } T^{n_{i_m}}(x') \notin U_{k+1}, \text{ para cada } m \in \mathbb{N}.$$

Entonces $T^{n_{i_m}}(x') \in U_k \backslash U_{k+1}$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Además, puesto que $U_k \backslash U_{k+1}$ es un conjunto cerrado, tenemos que $T^i(\omega) = \lim_{n\to\infty} T^{n_{i_m}}(x') \in U_k \setminus U_{k+1}$. Así, por definición tenemos que existe $j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $i = n_{j_0}^\omega$, y

$$k_{j_0}^\omega = \max\Big\{p \in \mathbb{N}; T^{n_{j_0}^\omega}(\omega) \in U_p\Big\} = k.$$

Por lo tanto,

$$y = \dots, T^{i-1}(\omega), \underbrace{c, c, \dots, c}_{k \text{ veces}}, \underline{\underline{T^i(\omega)}}, \dots = \dots, T^{n_{j_0}^\omega - 1}(\omega), c^{k_{j_0}^\omega}, \underline{\underline{T^{n_{j_0}^\omega}(\omega)}}, \dots$$

Así, si todos los bloques de $c$'s que aparecen en $y$ son bloques finitos, entonces

$$y = \dots c^{k_{j_0-2}^\omega} \widehat{\omega}\big[n_{j_0-2}^\omega, n_{j_0-1}^\omega\big) c^{k_{j_0-1}^\omega} \widehat{\omega}\big[n_{j_0-1}^\omega, n_{j_0}^\omega\big) c^{k_{j_0}^\omega} \widehat{\omega}\big[\underline{\underline{n_{j_0}^\omega}}, n_{j_0+1}^\omega\big) c^{k_{j_0+1}^\omega} \widehat{\omega}\big[n_{j_0+1}^\omega, n_{j_0+2}^\omega\big) \dots,$$

donde $\underline{\underline{T^{n_{j_0}^\omega}(\omega)}}$ está en la posición $l_0$. Por lo tanto, $y = S^{r_0}\big(y(\omega)\big)$ para algún $r_0 \in \mathbb{Z}$, donde $\omega \notin O(x', T)$, ya que $k_j^\omega \in \mathbb{N}$ para cada $j \in \mathbb{Z}$.

En caso que $y$ tenga un bloque infinito de $c$'s a izquierda, esto es,

$$y = \dots, c, c, c, c, c, \underline{T^i\omega}, \dots,$$

para algún $i \in \mathbb{Z}$, donde $\underline{T^i\omega}$ está en la posición $l_0$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $V_m$ la vecindad de $y$ dada por,

$$V_m = \dots \times X_c \times \{c\}^m \times \underline{B_{1/m}(T^i\omega)} \times X_c \times \cdots,$$

donde $\underline{B_{1/m}(T^i\omega)}$ está en la posición $l_0$, y donde $B_{1/m}(T^i\omega)$ es una bola abierta en $X$ (y por lo tanto un conjunto abierto de $X_c$). Como $y \in Y = \overline{\left\{S^q(y') \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; q \in \mathbb{Z}\right\}}$, entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $z_m \in V_m \cap \left\{S^q(y'); q \in \mathbb{Z}\right\}$, esto es, existe $i_m \in \mathbb{Z}$, con $i_m \geq 0$, tal que

$$z_m = c^\infty, \ldots, c^{k_{i_m}}, \underline{T^{n_{i_m}}(x')}, \ldots \in V_m \cap \left\{S^q(y'); q \in \mathbb{Z}\right\}, \tag{3.30}$$

donde $\underline{T^{n_{i_m}}(x')}$ está en la posición $l_0$, $k_{i_m} = k_{i_m}^{x'}$ y $n_{i_m} = n_{i_m}^{x'}$. Por lo tanto, $T^{n_{i_m}}(x') \in U_1$ y $k_{i_m} \geq m$. Así, $T^{n_{i_m}}(x') \in U_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, para cada $r \in \mathbb{N}$,

$$\text{si } m \geq r \text{ entonces } T^{n_{i_m}}(x') \in U_m \subseteq U_r. \tag{3.31}$$

De (3.30), $\text{lím}_{m\to\infty} T^{n_{i_m}}(x') = T^i(\omega)$. Y puesto que cada $U_r$ es cerrado, de (3.31), tenemos que

$$T^i(\omega) = \lim_{m\to\infty} T^{n_{i_m}}(x') = \lim_{\substack{m\to\infty \\ m\geq r}} T^{n_{i_m}}(x') \in \overline{U_r} = U_r,$$

para cada $r \in \mathbb{N}$. Así, $T^i(\omega) \in \bigcap_{r\in\mathbb{N}} U_r = \{x'\}$. Por ende, $T^i(\omega) = x' \in U_1$. Por lo tanto, existe $i_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $i = n_{i_0}^\omega$. Así, $T^{n_{i_0}^\omega}(\omega) = x'$ y $k_{i_0}^\omega = \infty$. Si $\ell > i_0$ entonces $T^{n_\ell^\omega}(\omega) \neq x'$, y por lo tanto $k_\ell^\omega \in \mathbb{N}$. Así,

$$y = \ldots, c, c, c, c, c, \widehat{\omega}\left[\underline{n_{i_0}^\omega}, n_{i_0+1}^\omega\right) c^{k_{i_0+1}^\omega} \widehat{\omega}\left[n_{i_0+1}^\omega, n_{i_0+2}^\omega\right) c^{k_{i_0+2}^\omega}, \ldots,$$

donde $\underline{T^{n_{i_0}^\omega}(\omega)}$ está en la posición $l_0$. Así, $y$ es un desplazamiento de $y(\omega)$, con $\omega \in O(x', T)$. Observe que $i = n_{i_0}^\omega \leq 0$ ya que $\omega$ aparece en la representación de $y$.

Análogamente, en caso que $y$ tenga un bloque infinito de $c$'s a derecha, esto es,

$$y = \ldots, \underline{T^i\omega}, c, c, c, c, c, \ldots,$$

para algún $i \in \mathbb{Z}$, donde $\underline{T^i\omega}$ está en la posición $l_0$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $V_m$ la vecindad de $y$ dada por,

$$V_m = \cdots \times X_c \times \underline{B_{1/m}(T^i\omega)} \times \{c\}^m \times X_c \times \cdots,$$

donde $\underline{B_{1/m}(T^i\omega)}$ está en la posición $l_0$, y donde $B_{1/m}(T^i\omega)$ es una bola abierta en $X$ (y por lo tanto un conjunto abierto de $X_c$). Como $y \in Y = \overline{\left\{S^q(y') \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; q \in \mathbb{Z}\right\}}$, entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $z_m \in V_m \cap \left\{S^q(y'); q \in \mathbb{Z}\right\}$, esto es, existe $i_m \in \mathbb{Z}$, con $i_m \geq 1$, tal que

$$z_m = c^\infty, \ldots, \underline{T^{n_{i_m}-1}(x')}, c^{k_{i_m}}, T^{n_{i_m}}(x'), \ldots \in V_m \cap \left\{S^q(y'); q \in \mathbb{Z}\right\}, \tag{3.32}$$

donde $\underline{T^{n_{i_m}-1}(x')}$ está en la posición $l_0$, $k_{i_m} = k_{i_m}^{x'}$ y $n_{i_m} = n_{i_m}^{x'}$. Por lo tanto, $T^{n_{i_m}}(x') \in U_1$ y $k_{i_m} \geq m$. Así, $T^{n_{i_m}}(x') \in U_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, para cada $r \in \mathbb{N}$,

$$\text{si } m \geq r \text{ entonces } T^{n_{i_m}}(x') \in U_m \subseteq U_r. \tag{3.33}$$

De (3.32), $\lim_{m\to\infty} T^{n_{i_m}-1}(x') = T^i(\omega)$. Por lo tanto, $\lim_{m\to\infty} T^{n_{i_m}}(x') = T^{i+1}(\omega)$. Y puesto que cada $U_r$ es cerrado, de (3.33), tenemos que

$$T^{i+1}(\omega) = \lim_{m\to\infty} T^{n_{i_m}}(x') = \lim_{\substack{m\to\infty\\ m\geq r}} T^{n_{i_m}}(x') \in \overline{U_r} = U_r,$$

para cada $r \in \mathbb{N}$. Así, $T^{i+1}(\omega) \in \bigcap_{r\in\mathbb{N}} U_r = \{x'\}$. Por ende, $T^{i+1}(\omega) = x' \in U_1$. Por lo tanto, existe $i_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $i+1 = n^{\omega}_{i_0}$. Así, $T^{n^{\omega}_{i_0}}(\omega) = x'$ y $k^{\omega}_{i_0} = \infty$. Si $\ell < i_0$ entonces $T^{n^{\omega}_{\ell}}(\omega) \neq x'$, y por lo tanto $k^{\omega}_{\ell} \in \mathbb{N}$. Así,

$$y = \ldots, c^{k^{\omega}_{i_0-2}}\widehat{\omega}\left[n^{\omega}_{i_0-2}, n^{\omega}_{i_0-1}\right)c^{k^{\omega}_{i_0-1}}\widehat{\omega}\left[n^{\omega}_{i_0-1}, \underline{n^{\omega}_{i_0}-1}\right], c, c, c, c, \ldots,$$

donde $\underline{T^{n^{\omega}_{i_0}-1}(\omega)}$ está en la posición $l_0$. Así, $y$ es un desplazamiento de $y(\omega)$, con $\omega \in O(x', T)$. Observe que $i+1 = n^{\omega}_{i_0} > 0$ ya que $\omega$ aparece en la representación de $y$.
Por lo tanto, los bloques de $c$'s que aparecen en $y$ respetan los *"espacios adecuados"*. $\square$

5. Mostraremos que cada punto de $Y$ diferente del punto fijo $\overline{c}$ tiene órbita densa respecto de $S: Y \to Y$. Para ello será importante el siguiente lema.

**Lema 18.** *Tenemos que* $Y = \overline{\left\{S^n(y'') \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\right\}}$.

*Demostración.* Del Lema 16, tenemos que $y'' \in Y$. Por lo tanto

$$\overline{\left\{S^n(y'') \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\right\}} \subseteq Y.$$

Mostremos que $Y \subseteq \overline{\left\{S^n(y'') \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\right\}}$.

Sea $y \in Y$. Supongamos que $y = \overline{c} = \ldots, c, c, c, \underline{c}, c, c, c, \ldots$ Dado $V$, vecindad de $\overline{c}$, de la forma

$$V = \cdots \times X_c \times \underline{\underline{X_c}} \times \{c\}^m \times X_c \times X_c \times \cdots,$$

donde $m \in \mathbb{N}$, y $\underline{\underline{X_c}}$ está en la posición $i_0 \in \mathbb{Z}$. De la definición de $y''$, en (3.16), existe $j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$S^{j_0}(y'') = \ldots, c^{k^{x'}_{-2}}\widehat{x'}\left[n^{x'}_{-2}, n^{x'}_{-1}\right)c^{k^{x'}_{-1}}\widehat{x'}\left[n^{x'}_{-1}, \underline{\underline{n^{x'}_{0}-1}}\right], c, c, c, c, c, \ldots,$$

donde $\underline{\underline{T^{n^{x'}_0-1}(x')}}$ está en la posición $i_0$. Por lo tanto, $S^{j_0}(y'') \in V$. Así, puesto que cada vecindad de $\overline{c}$ contiene alguna vencindad $V$ con $m$ suficientemente grande, tenemos que

$$y = \overline{c} \in \overline{\left\{S^n(y'') \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\right\}}.$$

Supongamos que $y \in Y \setminus \{\overline{c}\}$, entonces existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $y_i \in X$. Sea $x = y_i$. Del Lema 17, existe $j_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $y = S^{j_1}\big(y(x)\big)$. Para mostrar que $y \in \overline{\left\{S^n(y'') \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\right\}}$, es suficiente probar que

$$y(x) \in \overline{\left\{S^n(y'') \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\right\}}.$$

Caso 1. Supongamos que $x \in X \setminus O(x', T)$. Entonces,

$$y(x) = \ldots, c^{k^x_{-2}} \widehat{x}[n^x_{-2}, n^x_{-1}) c^{k^x_{-1}} \widehat{x}[n^x_{-1}, n^x_0) c^{k^x_0} \widehat{x}[\underline{n^x_0}, n^x_1) c^{k^x_1} \widehat{x}[n^x_1, n^x_2), \ldots,$$

donde $\underline{T^{n^x_0}(x)}$ está en la posición $i_1 \in \mathbb{Z}$, y $k^x_i$ es finito para cada $i \in \mathbb{Z}$. Sea $V$, vecindad de $y(x)$, dada por

$$\begin{aligned} V = (X_c)^\infty \{c\}^{k^x_{-\ell}} \widehat{V}[n^x_{-\ell}, n^x_{-\ell+1}) \ldots \{c\}^{k^x_{-1}} \widehat{V}[n^x_{-1}, n^x_0) \{c\}^{k^x_0} \widehat{V}[\underline{n^x_0}, n^x_1) \\ \{c\}^{k^x_1} \widehat{V}[n^x_1, n^x_2) \ldots \{c\}^{k^x_{\ell-1}} \widehat{V}[n^x_{\ell-1}, n^x_\ell)(X_c)^\infty, \end{aligned} \tag{3.34}$$

donde $\ell \in \mathbb{N}$, y cada bloque $\{c\}^{k^x_i} \widehat{V}[n^x_i, n^x_{i+1})$ representa a

$$\underbrace{\{c\} \times \cdots \times \{c\}}_{k^x_i\text{-veces}} \times V_{n^x_i} \times V_{n^x_i+1} \times \cdots \times V_{n^x_{i+1}-1},$$

donde los $V_i$ son abiertos de $X$, y por ende abiertos de $X_c$; y

$$T^i(x) \in V_i \text{ para cada } i \in [n^x_{-\ell}, n^x_\ell]. \tag{3.35}$$

Además, $\underline{V_{n^x_0}}$ está en la posición $i_1$. Sea

$$W_2 = \bigcap_{i=n^x_{-\ell}}^{n^x_\ell - 1} T^{-i}(V_i).$$

Este es un conjunto abierto que contiene a $x$, de (3.35). Como $k^x_i$ es finito para cada $i \in [-\ell, \ell]$. Del Lema 11, existe $W_1$, vecindad de $x$ tal que para cada $z \in W_1$,

$$n^x_i = n^z_i \text{ y } k^x_i = k^z_i \text{ para cada } i \in [-\ell, \ell]. \tag{3.36}$$

Como $x' \in P_-(T) \cap P_+(T)$, existe $e \in \mathbb{N}$ (suficientemente grande, con $e > n^x_\ell$) tal que $\lambda = T^{-e}(x') \in W_1 \cap W_2$. Por lo tanto, $T^e(\lambda) = x'$. Así, existe $u \in \mathbb{Z}$ tal que $e = n^\lambda_u$. Como $\lambda \in W_1$, de (3.36),

$$\begin{aligned} y(\lambda) &= \ldots c^{k^\lambda_{-\ell}} \widehat{\lambda}\big[n^\lambda_{-\ell}, n^\lambda_{-\ell+1}\big) \ldots c^{k^\lambda_{-1}} \widehat{\lambda}\big[n^\lambda_{-1}, n^\lambda_0) c^{k^\lambda_0} \widehat{\lambda}\big[n^\lambda_0, n^\lambda_1\big) \ldots c^{k^\lambda_{\ell-1}} \widehat{\lambda}\big[n^\lambda_{\ell-1}, n^\lambda_\ell\big) \ldots c^\infty \\ &= \ldots c^{k^x_{-\ell}} \widehat{\lambda}[n^x_{-\ell}, n^x_{-\ell+1}) \ldots c^{k^x_{-1}} \widehat{\lambda}[n^x_{-1}, n^x_0) c^{k^x_0} \widehat{\lambda}[n^x_0, n^x_1) \ldots c^{k^x_{\ell-1}} \widehat{\lambda}[n^x_{\ell-1}, n^x_\ell) \ldots c^\infty, \end{aligned} \tag{3.37}$$

donde $\lambda$ está en la posición cero, con $n^\lambda_{-1} < 0 \leq n^\lambda_0$. Y $c^\infty$ denota a un bloque infinito de $c$'s a la derecha, correspondiente a $c^{k^\lambda_u}$, con $k^\lambda_u = \infty$ (puesto que $T^{n^\lambda_u}(\lambda) = x'$). Observe que $n^\lambda_u = e > n^x_\ell = n^\lambda_\ell$, y por lo tanto $u > \ell$. Así, el bloque infinito $c^\infty = c^{k^\lambda_u}$ está a la derecha de $c^{k^\lambda_\ell}$.

De (3.37), existe $i_2 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$S^{i_2}\big(y(\lambda)\big) = \ldots c^{k^x_{-\ell}} \widehat{\lambda}[n^x_{-\ell}, n^x_{-\ell+1}) \ldots c^{k^x_{-1}} \widehat{\lambda}[n^x_{-1}, n^x_0) c^{k^x_0} \widehat{\lambda}[\underline{n^x_0}, n^x_1) \ldots c^{k^x_{\ell-1}} \widehat{\lambda}[n^x_{\ell-1}, n^x_\ell) \ldots c^\infty,$$

donde $\underline{T^{n_0^x}(\lambda)}$ está en la posición $i_1$. Así, $S^{i_2}\big(y(\lambda)\big) \in V$ ya que $\lambda \in W_2$. Por otro lado, del Lema 13, como $\lambda = T^{-e}(x')$ con $e \in \mathbb{N}$, entonces

$$y(\lambda) = S^{i_3}(y'') \text{ para algún } i_3 \in \mathbb{Z}\,.$$

Así, $S^{i_2+i_3}(y'') = S^{i_2}\big(y(\lambda)\big) \in V$. Por lo tanto, $V \cap \Big\{S^n(y'') \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\Big\} \neq \emptyset$. Así,

$$y(x) \in \overline{\Big\{S^n(y'') \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\Big\}},$$

puesto que cada vecindad de $y(x)$ contiene alguna vecindad del tipo $V$ en (3.34), con $\ell$ suficientemente grande.

Caso 2. Supongamos que $x = T^r(x')$ para algún $r \geq 0$. En este caso,

$$y(x) = \ldots, c, c, c, \widehat{x}[\underline{n_{i_0}^x}, n_{i_0+1}^x)c^{k_{i_0+1}^x}\widehat{x}[n_{i_0+1}^x, n_{i_0+2}^x)c^{k_{i_0+2}^x}\widehat{x}[n_{i_0+2}^x, n_{i_0+3}^x)c^{k_{i_0+3}^x}, \ldots,$$

donde $\underline{T^{n_{i_0}^x}(x)}$ está en la posición $l_0$, $T^{n_{i_0}^x}(x) = x'$, con $n_{i_0}^x = -r$, y por lo tanto $k_{i_0}^x = \infty$. Sea $V$ una vecindad de $y(x)$ dada por

$$\begin{aligned} V =& (X_c)^{\infty}\{c\}^m \widehat{V}[\underline{n_{i_0}^x}, n_{i_0+1}^x)\{c\}^{k_{i_0+1}^x}\widehat{V}[n_{i_0+1}^x, n_{i_0+2}^x)\{c\}^{k_{i_0+2}^x}\cdots \\ & \cdots \widehat{V}[n_{i_0+\ell-1}^x, n_{i_0+\ell}^x)\{c\}^{k_{i_0+\ell}^x}(X_c)^{\infty}, \end{aligned} \tag{3.38}$$

donde cada bloque $\widehat{V}[n_i^x, n_{i+1}^x)\{c\}^{k_{i+1}^x}$ denota a

$$V_{n_i^x} \times V_{n_i^x+1} \times \cdots \times V_{n_{i+1}^x-1} \times \underbrace{\{c\} \times \cdots \times \{c\}}_{k_{i+1}^x\text{-veces}}$$

donde los $V_i$ son conjuntos abiertos de $X$, tales que

$$T^i(x) \in V_i \text{ para cada } i \in [n_{i_0}^x, n_{i_0+\ell}^x - 1]. \tag{3.39}$$

Y $\underline{V_{n_{i_0}^x}}$ está en la posición $l_0$. Sea

$$W_2 = \bigcap_{i=n_{i_0}^x}^{n_{i_0+\ell}^x-1} T^{-i}(V_i).$$

Este es un conjunto abierto de $X$ que contiene a $x$, de (3.39). Como $k_i^x$ es finito para cada $i \in [i_0+1, i_0+\ell]$. Del Lema 11, existe $W_1$, vecindad de $x$, tal que si $z \in W_1$ entonces

$$n_i^x = n_i^z \text{ para cada } i \in [i_0, i_0+\ell], \text{ y}$$
$$k_i^x = k_i^z \text{ para cada } i \in [i_0+1, i_0+\ell].$$

Como $T^{n^x_{i_0}}(x) = x' \in U_m$. De la continuidad de $T^{n^x_{i_0}}$, existe $W_3$, vecindad de $x$, tal que si $\omega \in W_3$ entonces $T^{n^x_{i_0}}(\omega) \in U_m$. Como $x' \in P_-(T) \cap P_+(T)$, existe $e \in \mathbb{N}$, con $e > n^x_{i_0+\ell}$, tal que $\lambda = T^{-e}(x') \in W_1 \cap W_2 \cap W_3$. Así, $k^x_i = k^\lambda_i$ para cada $i \in [i_0+1, i_0+\ell]$, y $n^x_i = n^\lambda_i$ para cada $i \in [i_0, i_0+\ell]$. En particular, $n^\lambda_{i_0} = n^x_{i_0}$, y como $\lambda \in W_3$, entonces $T^{n^\lambda_{i_0}}(\lambda) = T^{n^x_{i_0}}(\lambda) \in U_m$. Por lo tanto, $k^\lambda_{i_0} \geq m$. Así,

$$\begin{aligned} y(\lambda) &= \ldots c^{k^\lambda_{i_0}} \widehat{\lambda}[n^\lambda_{i_0}, n^\lambda_{i_0+1}) c^{k^\lambda_{i_0+1}} \widehat{\lambda}[n^\lambda_{i_0+1}, n^\lambda_{i_0+2}) c^{k^\lambda_{i_0+2}} \ldots \widehat{\lambda}[n^\lambda_{i_0+\ell-1}, n^\lambda_{i_0+\ell}) c^{k^\lambda_{i_0+\ell}} \ldots c^\infty \\ &= \ldots c^m \widehat{\lambda}[n^x_{i_0}, n^x_{i_0+1}) c^{k^x_{i_0+1}} \widehat{\lambda}[n^x_{i_0+1}, n^x_{i_0+2}) c^{k^x_{i_0+2}} \ldots \widehat{\lambda}[n^x_{i_0+\ell-1}, n^x_{i_0+\ell}) c^{k^x_{i_0+\ell}} \ldots c^\infty, \end{aligned} \tag{3.40}$$

donde $\lambda$ está en la posición cero, y $c^\infty$ está a la derecha de $c^{k^\lambda_{i_0+\ell}}$. En efecto, como $T^e(\lambda) = x'$ entonces existe $u \in \mathbb{Z}$ tal que $e = n^\lambda_u$ y $k^\lambda_u = \infty$. Así, $n^\lambda_u = e > n^x_{i_0+\ell} = n^\lambda_{i_0+\ell}$, y por lo tanto $u > i_0 + \ell$.

De (3.40), existe $j_1 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$S^{j_1}\big(y(\lambda)\big) = \ldots c^m \widehat{\lambda}[\underline{n^x_{i_0}}, n^x_{i_0+1}) c^{k^x_{i_0+1}} \widehat{\lambda}[n^x_{i_0+1}, n^x_{i_0+2}) c^{k^x_{i_0+2}} \ldots \widehat{\lambda}[n^x_{i_0+\ell-1}, n^x_{i_0+\ell}) c^{k^x_{i_0+\ell}} \ldots c^\infty,$$

donde $\underline{T^{n^x_{i_0}}(\lambda)}$ está en la posición $l_0$. Así, $S^{j_1}\big(y(\lambda)\big) \in V$ ya que $\lambda \in W_2$. Además, del Lema 13, como $\lambda = T^{-e}(x')$ y $e \in \mathbb{N}$, entonces $y(\lambda) = S^{j_2}(y'')$ para algún $j_2 \in \mathbb{Z}$. Así,

$$S^{j_1+j_2}(y'') = S^{j_1}\big(y(\lambda)\big) \in V.$$

Por lo tanto, $V \cap \{S^n(y''); n \in \mathbb{Z}\} \neq \emptyset$. Así, puesto que cada vecindad de $y(x)$ contiene alguna vecindad del tipo $V$ en (3.38), con $\ell$ suficientemente grande, entonces $y(x) \in \overline{\{S^n(y''); n \in \mathbb{Z}\}}$.

Caso 3. Supongamos que $x = T^r(x')$ para algún $r$ entero, con $r < 0$. Entonces, del Lema 13,

$$y(x) = S^{j_1}(y'') \text{ para algún } j_1 \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, $y(x) \in \{S^n(y'') \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \overline{\{S^n(y'') \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\}}$. □

### 3.2.2. Construcción de una $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)$-acción con puntos no transitivos no densos

A continuación establecemos que el homeomorfismo $S : Y \to Y$, definido en (3.9), posee un único punto fijo, y todos los demás puntos de $Y$ tienen órbita densa. A partir de ello, construimos una $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)$-acción con puntos no transitivos no densos. De la Sección 3.2.1. tenemos que $\bar{c} \in Y$ es un punto fijo de $S$. Además, del teorema siguiente, todo punto de $Y$ diferente de $\bar{c}$ tiene órbita densa en $Y$.

**Proposición 8.** *Si* $y \in Y \setminus \{\overline{c}\}$ *entonces* $\overline{O(y,S)} = Y$*, donde*

$$O(y,S) = \Big\{ S^n(y) \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

*Demostración.* Sea $y \in Y \setminus \{c\}$. Entonces $O(y,S) \subseteq Y$. Por lo tanto,

$$\overline{O(y,S)} \subseteq \overline{Y} = Y.$$

Mostremos la inclusión recíproca, $Y \subseteq \overline{O(y,S)}$.

Como $y \in Y \setminus \{\overline{c}\} \subset (X_c)^{\mathbb{Z}} \setminus \{\overline{c}\}$. Entonces existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $y_i \in X$. Así, $y_i \neq c$. Sea $x = y_i$. Del Lema 17 tenemos que

$$y = S^p\big(y(x)\big), \text{ para algún } p \in \mathbb{Z}. \tag{3.41}$$

Observe que como $\big(y(x)\big)_0 = x$ y $x = y_i = \big(S^p(y(x))\big)_i = \big(y(x)\big)_{i+p}$, entonces $p = -i$. Supongamos que $x \in X \setminus O(x', T)$. Esto garantiza que todos los bloques de $c$'s que aparecen en $y(x)$ son finitos, esto es, para cada $i \in \mathbb{Z}$, $k_i^x \in \mathbb{N}$.

Mostremos que $Y \subseteq \overline{O(y,S)}$. Sea $y^1$ un elemento cualquiera de $Y$. Veamos que cualquier vecindad de $y^1$ contiene elementos de $O(y,S)$.

Supongamos que $y^1 = \overline{c} = \ldots, c, c, c, \underline{c}, c, c, c, \ldots$. Dada la vecindad $V$ de $\overline{c}$,

$$V = \cdots \times X_c \times \underline{\underline{\underline{X_c}}} \times \{c\}^N \times X_c \times X_c \times \cdots, \tag{3.42}$$

donde $\underline{\underline{\underline{X_c}}}$ está en la posición $i_0$, y donde $N \in \mathbb{N}$ es tan grande como se quiera. De la transitividad de $x$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $z = T^n(x) \in U_N$. Así, $n_0^z = 0$ y $k_0^z \geq N$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} y(z) &= \ldots, c^{k_{-2}^z} \widehat{z}[n_{-2}^z, n_{-1}^z) c^{k_{-1}^z} \widehat{z}[n_{-1}^z, n_0^z) c^{k_0^z} \widehat{z}[\underline{n_0^z}, n_1^z) \ldots \\ &= \ldots, c^{k_{-2}^z} \widehat{z}[n_{-2}^z, n_{-1}^z) c^{k_{-1}^z} \widehat{z}[n_{-1}^z, n_0^z) \underbrace{c, c, \ldots, c, c}_{k_0^z \text{ veces}} \widehat{z}[\underline{n_0^z}, n_1^z) \ldots, \end{aligned}$$

donde $\underline{T^{n_0^z}(z)}$ está en la posición 0. Por lo tanto, existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que

$$S^j\big(y(z)\big) = \ldots, c^{k_{-1}^z} \widehat{z}[n_{-1}^z, \underline{\underline{n_0^z - 1}}] \underbrace{c, c, \ldots, c, c}_{k_0^z \text{ veces}} \widehat{z}[n_0^z, n_1^z), \ldots$$

pertenece a $V$. Y del Lema 14, tenemos que como $z = T^n(x)$, entonces $y(z) = S^{p'}\big(y(x)\big)$ para algún $p' \in \mathbb{Z}$. Así, $S^j\big(y(z)\big) = S^{j+p'}\big(y(x)\big) = S^{j+p'-p}(y)$. Por lo tanto, de (3.41),

$$S^{j+p'-p}(y) = S^j\big(y(z)\big) \in V \cap O(y,S).$$

Como cualquier vecindad de $y^1 = \overline{c}$ contiene alguna vecindad del tipo $V$ en (3.42), tenemos que $y^1 \in \overline{O(y,S)}$.

Supongamos que $y^1 \neq \overline{c}$, entonces existe $i \in \mathbb{Z}$, tal que $(y^1)_i \neq c$. Por tanto, $(y^1)_i \in X$. Sea $\xi = (y^1)_i$. Entonces del Lema 17, $y^1 = S^j\big(y(\xi)\big)$ para algún $j \in \mathbb{Z}$. Para mostrar que $y^1 \in \overline{\big\{S^n(y) \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\big\}}$, es suficiente probar que $y(\xi) \in \overline{\big\{S^n(y) \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\big\}}$.

Caso 1. Supongamos que $\xi \in X \setminus O(x',T)$. Tenemos que

$$y(\xi) = \dots, c^{k^\xi_{-2}}\widehat{\xi}\big[n^\xi_{-2}, n^\xi_{-1}\big)c^{k^\xi_{-1}}\widehat{\xi}\big[n^\xi_{-1}, n^\xi_0\big)c^{k^\xi_0}\widehat{\xi}\big[\underline{\underline{n^\xi_0}}, n^\xi_1\big)c^{k^\xi_1}\widehat{\xi}\big[n^\xi_1, n^\xi_2\big), \dots,$$

donde $\underline{\underline{T^{n^\xi_0}(\xi)}}$ está en la posición $i_0 \in \mathbb{Z}$. Sea $V$ una vecindad de $y(\xi)$ dada por

$$\begin{aligned} V = (X_c)^\infty \{c\}^{k^\xi_{-\ell}}\widehat{V}\big[n^\xi_{-\ell}, n^\xi_{-\ell+1}\big)\dots\{c\}^{k^\xi_{-1}}\widehat{V}\big[n^\xi_{-1}, n^\xi_0\big)\{c\}^{k^\xi_0}\widehat{V}\big[\underline{\underline{n^\xi_0}}, n^\xi_1\big), \\ \{c\}^{k^\xi_1}\widehat{V}\big[n^\xi_1, n^\xi_2\big)\dots\{c\}^{k^\xi_{\ell-1}}\widehat{V}\big[n^\xi_{\ell-1}, n^\xi_\ell\big)(X_c)^\infty, \end{aligned} \tag{3.43}$$

donde $\ell \in \mathbb{N}$, y cada bloque $\{c\}^{k^\xi_i}\widehat{V}\big[n^\xi_i, n^\xi_{i+1}\big)$ denota a

$$\underbrace{\{c\} \times \dots \times \{c\}}_{k^\xi_i\text{-veces}} \times V_{n^\xi_i} \times V_{n^\xi_i+1} \times \dots \times V_{n^\xi_{i+1}-1},$$

y cada $V_i$ es un conjunto abierto de $X$ tal que

$$T^j(\xi) \in V_j, \text{ para cada } j \in \left\{n^\xi_{-\ell}, \dots, -1, 0, 1, \dots, n^\xi_\ell\right\}, \tag{3.44}$$

y $\underline{\underline{V_{n^\xi_0}}}$ está en la posición $i_0$, conteniendo a $T^{n^\xi_0}(\xi)$. Sea

$$W_2 = \bigcap_{i=n^\xi_{-\ell}}^{n^\xi_\ell} T^{-i}(V_i).$$

Este es un conjunto abierto que contiene a $\xi$, de (3.44). Como $k^\xi_i$ es finito para cada $i \in [-\ell,\ell]$. Del Lema 11, existe $W_1$, vecindad de $\xi$ tal que $n^\xi_i = n^z_i$ y $k^\xi_i = k^z_i$ para cada $i \in [-\ell,\ell]$, y para cada $z \in W_1$. Dado que $x \in P_+(T) \cap P_-(T)$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda = T^r(x) \in W_1 \cap W_2$. Así,

$$\begin{aligned} y(\lambda) &= \dots, c^{k^\lambda_{-\ell}}\widehat{\lambda}\big[n^\lambda_{-\ell}, n^\lambda_{-\ell+1}\big)\dots c^{k^\lambda_{-1}}\widehat{\lambda}\big[n^\lambda_{-1}, n^\lambda_0\big)c^{k^\lambda_0}\widehat{\lambda}\big[n^\lambda_0, n^\lambda_1\big)\dots c^{k^\lambda_{\ell-1}}\widehat{\lambda}\big[n^\lambda_{\ell-1}, n^\lambda_\ell\big), \dots \\ &= \dots, c^{k^\xi_{-\ell}}\widehat{\lambda}\big[n^\xi_{-\ell}, n^\xi_{-\ell+1}\big)\dots c^{k^\xi_{-1}}\widehat{\lambda}\big[n^\xi_{-1}, n^\xi_0\big)c^{k^\xi_0}\widehat{\lambda}\big[n^\xi_0, n^\xi_1\big)\dots c^{k^\xi_{\ell-1}}\widehat{\lambda}\big[n^\xi_{\ell-1}, n^\xi_\ell\big), \dots, \end{aligned}$$

donde $\lambda$ está en la posición cero. Por lo tanto, existe $i_1 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$S^{i_1}\big(y(\lambda)\big) = \dots, c^{k^\xi_{-\ell}}\widehat{\lambda}\big[n^\xi_{-\ell}, n^\xi_{-\ell+1}\big)\dots c^{k^\xi_{-1}}\widehat{\lambda}\big[n^\xi_{-1}, n^\xi_0\big)c^{k^\xi_0}\widehat{\lambda}\big[\underline{\underline{n^\xi_0}}, n^\xi_1\big)\dots c^{k^\xi_{\ell-1}}\widehat{\lambda}\big[n^\xi_{\ell-1}, n^\xi_\ell\big), \dots,$$

donde $\underline{\underline{T^{n_0^\xi}(\lambda)}}$ está en la posición $i_0$. Así, de (3.43), $S^{i_1}\big(y(\lambda)\big) \in V$ ya que $\lambda \in W_2$. Por otro lado, del Lema 14, como $\lambda = T^r(x)$ y $x \in X \setminus O(x', T)$, entonces $y(\lambda) = S^{i_2}\big(y(x)\big)$ para algún $i_2 \in \mathbb{Z}$. Así, de (3.41),

$$S^{i_1+i_2-p}(y) = S^{i_1+i_2}\big(y(x)\big) = S^{i_1}\big(y(\lambda)\big) \in V.$$

Observe que cualquier vecindad abierta de $y(\xi)$ contiene alguna vecindad como $V$ en (3.43), con $\ell$ suficientemente grande. Por lo tanto, $V \cap \left\{S^n(y) \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\right\} \neq \emptyset$, para cualquier vecindad $V$ de $y(\xi)$. Por ende,

$$y(\xi) \in \overline{\left\{S^n(y) \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\right\}}.$$

Caso 2. Supongamos ahora que $\xi \in O(x', T)$ y que existe $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $\xi = T^r(x')$. Tenemos que

$$y(\xi) = \ldots, c, c, c, c, c, \widehat{\xi}\big[\underline{n_{j_0}^\xi}, n_{j_0+1}^\xi\big)c^{k_{j_0+1}^\xi}\widehat{\xi}\big[n_{j_0+1}^\xi, n_{j_0+2}^\xi\big)c^{k_{j_0+2}^\xi}\widehat{\xi}\big[n_{j_0+2}^\xi, n_{j_0+3}^\xi\big), \ldots,$$

donde $\underline{T^{n_{j_0}^\xi}(\xi)}$ está en la posición $i_0$ y $T^{n_{j_0}^\xi}(\xi) = x'$, y por lo tanto

$$k_{j_0}^\xi = \text{máx}\left\{k \geq 1; T^{n_{j_0}^\xi}(\xi) \in U_k\right\} = \infty.$$

De hecho, $n_{j_0}^\xi = -r$. Sea $V$ una vecindad de $y(\xi)$ dada por

$$\begin{aligned} V = (X_c)^\infty \{c\}^m \widehat{V}\big[\underline{n_{j_0}^\xi}, n_{j_0+1}^\xi\big)\{c\}^{k_{j_0+1}^\xi}\widehat{V}\big[n_{j_0+1}^\xi, n_{j_0+2}^\xi\big)\{c\}^{k_{j_0+2}^\xi}\ldots \\ \ldots \widehat{V}\big[n_{j_0+\ell-1}^\xi, n_{j_0+\ell}^\xi\big)\{c\}^{k_{j_0+\ell}^\xi}(X_c)^\infty, \end{aligned} \tag{3.45}$$

donde $m \in \mathbb{N}$, $\underline{V_{n_{j_0}^\xi}}$ está en la posición $i_0$, y cada bloque $\widehat{V}\big[n_i^\xi, n_{i+1}^\xi\big)\{c\}^{k_{i+1}^\xi}$ denota al producto cartesiano,

$$V_{n_i^\xi} \times \cdots \times V_{n_{i+1}^\xi - 1} \times \underbrace{\{c\} \times \cdots \times \{c\}}_{k_{i+1}^\xi\text{-veces}},$$

donde los $V_i$ son conjuntos abiertos de $X$ (y por lo tanto, abiertos en $X_c$), y

$$T^i(\xi) \in V_i \text{ para cada } i \in \left\{n_{j_0}^\xi, n_{j_0+1}^\xi, \ldots, n_{j_0+\ell}^\xi - 1\right\}. \tag{3.46}$$

Considere el conjunto

$$W_2 = \bigcap_{i=n_{j_0}^\xi}^{n_{j_0+\ell}^\xi - 1} T^{-i}(V_i), \tag{3.47}$$

que es abierto y contiene a $\xi$, de (3.46). Como $k_i^\xi$ es finito para cada $i \in [j_0+1, j_0+\ell]$. Del Lema 11, existe $W_1$, vecindad de $\xi$ tal que si $z \in W_1$ entonces

$$n_i^\xi = n_i^z \text{ para cada } i \in [j_0, j_0+\ell], \text{ y} \tag{3.48}$$

$$k_i^\xi = k_i^z \text{ para cada } i \in [j_0+1, j_0+\ell]. \tag{3.49}$$

Además, como $T^{n_{j_0}^\xi}(\xi) = x' \in U_m$, de la continuidad de $T^{n_{j_0}^\xi}$, existe $W_3$, vecindad abierta de $\xi$, tal que si $\omega \in W_3$ entonces $T^{n_{j_0}^\xi}(\omega) \in U_m$. Dado que $x \in P_+(T) \cap P_-(T)$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lambda = T^r(x) \in W_1 \cap W_2 \cap W_3.$$

Así, de (3.48) y (3.49), $k_i^\xi = k_i^\lambda$ para cada $i \in [j_0+1, j_0+\ell]$, y $n_i^\xi = n_i^\lambda$ para cada $i \in [j_0, j_0+\ell]$. En particular, $n_{j_0}^\lambda = n_{j_0}^\xi$, y como $\lambda \in W_3$, entonces $T^{n_{j_0}^\lambda}(\lambda) = T^{n_{j_0}^\xi}(\lambda) \in U_m$. Por lo tanto, $k_{j_0}^\lambda \geq m$. Así

$$\begin{aligned} y(\lambda) &= \ldots, c^{k_{j_0}^\lambda}\widehat{\lambda}[n_{j_0}^\lambda, n_{j_0+1}^\lambda)c^{k_{j_0+1}^\lambda}\widehat{\lambda}[n_{j_0+1}^\lambda, n_{j_0+2}^\lambda)c^{k_{j_0+2}^\lambda}\ldots\widehat{\lambda}[n_{j_0+\ell-1}^\lambda, n_{j_0+\ell}^\lambda)c^{k_{j_0+\ell}^\lambda}, \ldots \\ &= \ldots, c^{m}\widehat{\lambda}[n_{j_0}^\xi, n_{j_0+1}^\xi)c^{k_{j_0+1}^\xi}\widehat{\lambda}[n_{j_0+1}^\xi, n_{j_0+2}^\xi)c^{k_{j_0+2}^\xi}\ldots\widehat{\lambda}[n_{j_0+\ell-1}^\xi, n_{j_0+\ell}^\xi)c^{k_{j_0+\ell}^\xi}, \ldots, \end{aligned}$$

donde $\lambda$ está en la posición cero. Por lo tanto, existe $i_1 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$S^{i_1}\big(y(\lambda)\big) = \ldots, c^{m}\widehat{\lambda}[\underline{n_{j_0}^\xi}, n_{j_0+1}^\xi)c^{k_{j_0+1}^\xi}\widehat{\lambda}[n_{j_0+1}^\xi, n_{j_0+2}^\xi)c^{k_{j_0+2}^\xi}\ldots\widehat{\lambda}[n_{j_0+\ell-1}^\xi, n_{j_0+\ell}^\xi)c^{k_{j_0+\ell}^\xi}, \ldots,$$

donde $\underline{T^{n_0^\xi}(\lambda)}$ está en la posición $i_0$. Así, $S^{i_1}\big(y(\lambda)\big) \in V$ ya que $\lambda \in W_2$. Por otro lado, del Lema 14, como $\lambda = T^r(x)$ y $x \in X \setminus O(x', T)$, entonces $y(\lambda) = S^{i_2}\big(y(x)\big)$ para algún $i_2 \in \mathbb{Z}$. Así, de (3.41),

$$S^{i_1+i_2-p}(y) = S^{i_1+i_2}\big(y(x)\big) = S^{i_1}\big(y(\lambda)\big) \in V.$$

Por lo tanto, $V \cap \Big\{S^n(y) \in X_c^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\Big\} \neq \emptyset$, para cualquier vecindad $V$ de $y(\xi)$. Por lo tanto, $y(\xi) \in \overline{\Big\{S^n(y) \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\Big\}}$.

Caso 3. Supongamos ahora que $\xi \in O(x', T)$ y que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\xi = T^{-r}(x')$. Tenemos que

$$y(\xi) = \ldots, c^{k_{j_0-3}^\xi}\widehat{\xi}[n_{j_0-3}^\xi, n_{j_0-2}^\xi)c^{k_{j_0-2}^\xi}\widehat{\xi}[n_{j_0-2}^\xi, n_{j_0-1}^\xi)c^{k_{j_0-1}^\xi}\widehat{\xi}[n_{j_0-1}^\xi, \underline{n_{j_0}^\xi - 1}]c^\infty,$$

donde $c^\infty$ denota a un bloque infinito de $c$'s, $\underline{T^{n_{j_0}^\xi - 1}(\xi)}$ está en la posición $i_0$ y $T^{n_{j_0}^\xi}(\xi) = x'$, y por lo tanto $k_{j_0}^\xi = \max\big\{k \geq 1; T^{n_{j_0}^\xi}(\xi) \in U_k\big\} = \infty$. De hecho, $n_{j_0}^\xi = r$. Sea $V$ una vecindad de $y(\xi)$ dada por

$$\begin{aligned} V = &(X_c)^\infty\{c\}^{k_{j_0-\ell}^\xi}\widehat{V}\big[n_{j_0-\ell}^\xi, n_{j_0-\ell+1}^\xi\big)\{c\}^{k_{j_0-\ell+1}^\xi}\widehat{V}\big[n_{j_0-\ell+1}^\xi, n_{j_0-\ell+2}^\xi\big)\ldots \\ &\ldots\{c\}^{k_{j_0-2}^\xi}\widehat{V}\big[n_{j_0-2}^\xi, n_{j_0-1}^\xi\big)\{c\}^{k_{j_0-1}^\xi}\widehat{V}\big[n_{j_0-1}^\xi, \underline{n_{j_0}^\xi - 1}\big]\{c\}^m(X_c)^\infty, \end{aligned}$$

donde $m \in \mathbb{N}$, $\underline{V_{n^{\xi}_{j_0}-1}}$ está en la posición $i_0$; cada bloque $\{c\}^{k^{\xi}_i}\widehat{V}\big[n^{\xi}_i, n^{\xi}_{i+1}\big)$ denota al producto

$$\underbrace{\{c\} \times \cdots \times \{c\}}_{k^{\xi}_i\text{-veces}} \times V_{n^{\xi}_i} \times V_{n^{\xi}_i+1} \times \cdots \times V_{n^{\xi}_{i+1}-1},$$

y cada $V_i$ es un conjunto abierto de $X$ (y por lo tanto, abiertos en $X_c$), tal que

$$T^j(\xi) \in V_j, \text{ para cada } j \in \big[n^{\xi}_{j_0-\ell}, n^{\xi}_{j_0}\big], \tag{3.50}$$

Considere $W_2 = \bigcap_{i=n^{\xi}_{j_0-\ell}}^{n^{\xi}_{j_0}} T^{-i}(V_i)$, este es un conjunto abierto que contiene a $\xi$. Como $k^{\xi}_i$ es finito para cada $i \in [j_0-\ell, j_0-1]$. Del Lema 11, existe $W_1$, vecindad de $\xi$ tal que si $z \in W_1$ entonces $n^{\xi}_i = n^{z}_i$ para cada $i \in [j_0-\ell, j_0]$, y $k^{\xi}_i = k^{z}_i$ para cada $i \in [j_0-\ell, j_0-1]$. Además, de la continuidad de $T^{n^{\xi}_{j_0}}$, y puesto que $T^{n^{\xi}_{j_0}}(\xi) = x' \in U_m$, existe $W_3$, vecindad de $\xi$, tal que si $\omega \in W_3$ entonces $T^{n^{\xi}_{j_0}}(\omega) \in U_m$. Como $x \in P_+(T) \cap P_-(T)$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda = T^r(x) \in W_1 \cap W_2 \cap W_3$. Así, $k^{\xi}_i = k^{\lambda}_i$ para cada $i \in [j_0-\ell, j_0-1]$, y $n^{\xi}_i = n^{\lambda}_i$ para cada $i \in [j_0-\ell, j_0]$. En particular, $n^{\lambda}_{j_0} = n^{\xi}_{j_0}$, y como $\lambda \in W_3$, entonces $T^{n^{\lambda}_{j_0}}(\lambda) = T^{n^{\xi}_{j_0}}(\lambda) \in U_m$. Por lo tanto, $k^{\lambda}_{j_0} \geq m$. Así,

$$\begin{aligned} y(\lambda) &= \ldots c^{k^{\lambda}_{j_0-\ell}}\widehat{\lambda}\big[n^{\lambda}_{j_0-\ell}, n^{\lambda}_{j_0-\ell+1}\big)c^{k^{\lambda}_{j_0-\ell+1}}\widehat{\lambda}\big[n^{\lambda}_{j_0-\ell+1}, n^{\lambda}_{j_0-\ell+2}\big)\ldots c^{k^{\lambda}_{j_0-1}}\widehat{\lambda}\big[n^{\lambda}_{j_0-1}, n^{\lambda}_{j_0}-1\big]c^{k^{\lambda}_{j_0}}\ldots \\ &= \ldots c^{k^{\xi}_{j_0-\ell}}\widehat{\lambda}\big[n^{\xi}_{j_0-\ell}, n^{\xi}_{j_0-\ell+1}\big)c^{k^{\xi}_{j_0-\ell+1}}\widehat{\lambda}\big[n^{\xi}_{j_0-\ell+1}, n^{\xi}_{j_0-\ell+2}\big)\ldots c^{k^{\xi}_{j_0-1}}\widehat{\lambda}\big[n^{\xi}_{j_0-1}, n^{\xi}_{j_0}-1\big]c^{m}\ldots, \end{aligned}$$

donde $\lambda$ está en la posición cero. Por lo tanto, existe $i_1 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$S^{i_1}\big(y(\lambda)\big) = \ldots c^{k^{\xi}_{j_0-\ell}}\widehat{\lambda}\big[n^{\xi}_{j_0-\ell}, n^{\xi}_{j_0-\ell+1}\big)c^{k^{\xi}_{j_0-\ell+1}}\widehat{\lambda}\big[n^{\xi}_{j_0-\ell+1}, n^{\xi}_{j_0-\ell+2}\big)\ldots c^{k^{\xi}_{j_0-1}}\widehat{\lambda}\big[n^{\xi}_{j_0-1}, \underline{n^{\xi}_{j_0}-1}\big]c^{m}\ldots,$$

donde $\underline{T^{n^{\xi}_{j_0}-1}(\lambda)}$ está en la posición $i_0$. Así, $S^{i_1}\big(y(\lambda)\big) \in V$ ya que $\lambda \in W_2$. Por otro lado, del Lema 14, como $\lambda = T^r(x)$ y $x \in X \setminus O(x', T)$, entonces $y(\lambda) = S^{i_2}\big(y(x)\big)$ para algún $i_2 \in \mathbb{Z}$. Así, de (3.41),

$$S^{i_1+i_2-p}(y) = S^{i_1+i_2}\big(y(x)\big) = S^{i_1}\big(y(\lambda)\big) \in V.$$

Por lo tanto, $V \cap \big\{S^n(y) \in Y; n \in \mathbb{Z}\big\} \neq \emptyset$, para cualquier vecindad $V$ de $y(\xi)$. Por lo tanto, $y(\xi) \in \overline{\big\{S^n(y) \in Y; n \in \mathbb{Z}\big\}}$.

Así, en cualquier caso, $y(\xi) \in \overline{\big\{S^n(y) \in Y; n \in \mathbb{Z}\big\}}$. Entonces

$$y^1 \in \overline{\big\{S^n(y) \in Y; n \in \mathbb{Z}\big\}}, \text{ para cada } y^1 \in Y.$$

Así,

$$Y \subseteq \overline{\big\{S^n(y) \in Y; n \in \mathbb{Z}\big\}},$$

en el caso que $x \in X \setminus O(x', T)$, donde, de (3.41), $y = S^p\big(y(x)\big)$ para algún $p \in \mathbb{Z}$.

Supongamos que, en (3.41), $x \in O(x', T)$. En caso que $x = T^r(x')$ para algún $r \geq 0$, tenemos que, del Lema 13, existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $y(x) = S^i(y')$, donde $y' = y(x')$. Como $y = S^p\big(y(x)\big)$, entonces $y = S^{p+i}(y')$. Así,

$$\overline{\big\{S^n(y) \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\big\}} = \overline{\big\{S^{n+p+i}(y') \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\big\}}.$$

Entonces, de la definición de $Y$ en (3.8), concluimos que

$$Y = \overline{\big\{S^n(y) \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\big\}}.$$

En caso que $x = T^r(x')$ para algún $r < 0$, tenemos que, del Lema 13, existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $y(x) = S^i(y'')$. Como $y = S^p\big(y(x)\big)$, entonces $y = S^{p+i}(y'')$. Así,

$$\begin{aligned}\overline{\big\{S^n(y) \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\big\}} &= \overline{\big\{S^{n+p+i}(y'') \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\big\}} \\ &= \overline{\big\{S^m(y'') \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; m \in \mathbb{Z}\big\}} = Y,\end{aligned}$$

donde la última igualdad se da por el Lema 18. Así,

$$\overline{\big\{S^n(y) \in (X_c)^{\mathbb{Z}}; n \in \mathbb{Z}\big\}} = Y.$$

□

*Demostración del Teorema 7.* Sea $S : Y \to Y$ el homeomorfismo definido en (3.9). De la Proposición 8 tenemos que $S$ posee un único punto fijo $\bar{c} \in Y$, y todas los demás puntos de $Y$ tienen órbita densa, esto es,

$$\overline{O(x, S)} = \begin{cases} \{\bar{c}\} & , \text{ si } x = \bar{c}, \\ Y & , \text{ si } x \in Y \setminus \{\bar{c}\}. \end{cases} \tag{3.51}$$

Dado que $S$ y $S^{-1}$ conmutan, podemos considerar la acción $\Phi : \big(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0\big) \times Y \to Y$, del semigrupo $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ sobre $Y$, definida por $\Phi\big((1,0), \cdot\big) = S$ y $\Phi\big((0,1), \cdot\big) = S^{-1}$. Tenemos que la semiórbita de $x$ asociada a $\Phi$ es,

$$\begin{aligned} O_+(x, \Phi) &= \big\{\Phi\big((m,n), x\big) \in Y; (m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0\big\} \\ &= \big\{\Phi\big(m \cdot (1,0) + n \cdot (0,1), x\big) \in Y; (m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0\big\} \\ &= \big\{S^{m-n}(x) \in Y; m, n \in \mathbb{N}_0\big\} \\ &= \big\{S^{\ell}(x) \in Y; \ell \in \mathbb{Z}\big\} = O(x, S). \end{aligned}$$

Por lo tanto, de (3.51), tenemos que

$$\overline{O_+(\omega,\Phi)} = \begin{cases} \{\overline{c}\} & , \text{ si } \omega = \overline{c}, \\ Y & , \text{ si } \omega \in Y \setminus \{\overline{c}\}. \end{cases}$$

Así, $Q_+(\Phi) \neq \emptyset$ y $\overline{Q_+(\Phi)} \neq X$, puesto que $Q_+(\Phi) = \{\overline{c}\}$. Por lo tanto, en este caso, que el conjunto de puntos no transitivos asociado a $\Phi$ sea no vacío, no implica que este conjunto sea denso. Todo esto, a pesar de que sea válida la hipótesis: si $p \in Y$ es transitivo, entonces $\Phi\big((m,n),p\big)$ es transitivo, para cada $(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$; ya que el punto fijo $\overline{c}$ es el único punto no transitivo de $\Phi$. $\square$

## 3.3. Conclusiones

El Teorema 2 en [14], en términos de acciones de $\mathbb{N}_0$ sobre un espacio métrico compacto, nos dice que la existencia de algún punto no transitivo implica la densidad de estos.

Bajo una hipótesis motivada por el Teorema 1 de [14], probamos también que, para el caso de acciones de $\mathbb{R}^+$ sobre espacios métricos compactos, la existencia de puntos no transitivos implica la densidad de estos.

Finalmente, para el caso de acciones de $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ sobre espacios métricos compactos, no necesariamente la existencia de puntos no transitivos, implica la densidad de estos, aún si se cumpliese el análogo de la hipótesis hecha para semiflujos.

# Capítulo 4

# Pruebas de los teoremas sobre $GH$-estabilidad topológica para flujos

En primer lugar consideramos la definición de la pseudo-casi-métrica $D_{GH^0}$ para flujos, dada en (1.1), y sus propiedades a través del Teorema 1. Así como la definición de $GH$-estabilidad topológica para flujos, dada en la Definición 4, como los dos principales puntos de partida para el presente trabajo.

## 4.1. Demostración del Teorema 1

*Demostración del Teorema 1.* (1): Supongamos que $X = Y$. Dado $\epsilon > 0$, consideremos

$$\Delta = \sup_{t\in[0,1]} d_{C^0}(\Phi_t, \Psi_t) + \epsilon, \quad \text{y} \quad j = i = \mathrm{Id}_X\,.$$

Entonces, $i$ y $j$ son $\eta$-isometrías para cada $\eta > 0$, tales que

$$\begin{aligned} &d_{C^0}(\Psi_t \circ i, i \circ \Phi_t) = d_{C^0}(\Psi_t, \Phi_t) < \Delta, \text{ para cada } t \in [0,1]; \text{ y} \\ &d_{C^0}(\Phi_t \circ j, j \circ \Psi_t) = d_{C^0}(\Phi_t, \Psi_t) < \Delta, \text{ para cada } t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $D_{GH^0}(\Phi, \Psi) \le \Delta = \sup_{t\in[0,1]} d_{C^0}(\Phi_t, \Psi_t) + \epsilon$. Puesto que $\epsilon > 0$ fue arbitrario, entonces

$$D_{GH^0}(\Phi, \Psi) \le \sup_{t\in[0,1]} d_{C^0}(\Phi_t, \Psi_t).$$

Considerando dos flujos diferentes $\Phi$ y $\Psi$ sobre $X$, pero isométricos entre sí, del Ítem (3) (que probaremos después) del Teorema 1, tenemos que $D_{GH^0}(\Phi, \Psi) = 0$. Por otro lado, como $\Phi$ y $\Psi$ son flujos diferentes entonces existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que $\Phi_{t_0} \ne \Psi_{t_0}$. Observe que si $\Phi_t = \Psi_t$

para cada $t \in [0,1]$, entonces $\Phi_t = \Psi_t$ para cada $t \in \mathbb{R}$, esto es, $\Phi = \Psi$. Así,

$$0 < d_{C^0}(\Phi_{t_0}, \Psi_{t_0}) \leq \sup_{t \in [0,1]} d_{C^0}(\Phi_t, \Psi_t).$$

Por lo tanto, $D_{GH^0}(\Phi, \Psi) = 0 < \sup_{t \in [0,1]} d_{C^0}(\Phi_t, \Psi_t)$, y en este caso la desigualdad es estricta.

(2): Sean los flujos $(X, \Phi)$ y $(Y, \Psi)$. Tenemos que dado $\epsilon > 0$, existe $\Delta < D_{GH^0}(\Phi, \Psi) + \epsilon$, y existen $\Delta$-isometrías $i : X \to Y$ y $j : Y \to X$ tales que

$$\begin{aligned} &d_{C^0}\big(i \circ \Phi_t, \Psi_t \circ i\big) < \Delta \text{ para cada } t \in [0,1]; \text{ y} \\ &d_{C^0}\big(j \circ \Psi_t, \Phi_t \circ j\big) < \Delta \text{ para cada } t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Así, $d_{GH}(X, Y) \leq \Delta$. Por lo tanto, $d_{GH}(X, Y) < D_{GH^0}(\Phi, \Psi) + \epsilon$. Puesto que $\epsilon > 0$ fue arbitrario, $d_{GH}(X, Y) \leq D_{GH^0}(\Phi, \Psi)$. En particular, $d_{GH}(X, Y) \leq D_{GH^0}(\Phi^X, \Psi^Y)$.

Por otro lado, de la definición de $d_{GH}(X, Y)$, dado $\epsilon > 0$ existe $\Delta < d_{GH}(X, Y) + \epsilon$, y existen $\Delta$-isometrías $i : X \to Y$ y $j : Y \to X$. Puesto que $(\Phi^X)_t = \mathrm{Id}_X$ y $(\Psi^Y)_t = \mathrm{Id}_Y$ para cada $t \in [0,1]$, tenemos que

$$\begin{aligned} &d_{C^0}\big(i \circ (\Phi^X)_t, (\Psi^Y)_t \circ i\big) = d_{C^0}\big(i \circ \mathrm{Id}_X, \mathrm{Id}_Y \circ i\big) = 0 < \Delta \text{ para cada } t \in [0,1], \text{ y} \\ &d_{C^0}\big(j \circ (\Psi^Y)_t, (\Phi^X)_t \circ j)\big) = d_{C^0}\big(j \circ \mathrm{Id}_Y, \mathrm{Id}_X \circ j\big) = 0 < \Delta \text{ para cada } t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Así, $D_{GH^0}(\Phi^X, \Psi^Y) \leq \Delta$. Por lo tanto, $D_{GH^0}(\Phi^X, \Psi^Y) < d_{GH}(X, Y) + \epsilon$. Puesto que $\epsilon > 0$ fue arbitrario, tenemos que $D_{GH^0}(\Phi^X, \Psi^Y) \leq d_{GH}(X, Y)$.

(3): Sean $(X, \Phi)$ y $(Y, \Psi)$ flujos isométricos entre sí. Entonces, existe alguna isometría (sobreyectiva) $h : X \to Y$ tal que $h \circ \Phi_t = \Psi_t \circ h$ para cada $t \in [0,1]$. Dado cualquier $\Delta > 0$, $h : X \to Y$ y $h^{-1} : Y \to X$ son $\Delta$-isometrías continuas (ya que $h$ y $h^{-1}$ son isometrías) tales que,

$$\begin{aligned} &d_{C^0}(\Psi_t \circ h, h \circ \Phi_t) = 0 < \Delta \text{ para cada } t \in [0,1]; \text{ y} \\ &d_{C^0}(\Phi_t \circ h^{-1}, h^{-1} \circ \Psi_t) = 0 < \Delta \text{ para cada } t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $D_{GH^0}(\Phi, \Psi) \leq \Delta$. Como $\Delta > 0$ fue arbitrario, tenemos que

$$D_{GH^0}(\Phi, \Psi) = 0.$$

Recíprocamente, sean $(X, \Phi)$ y $(Y, \Psi)$ flujos definidos sobre espacios métricos compactos, tales que $D_{GH^0}(\Phi, \Psi) = 0$. Como $D_{GH^0}(\Phi, \Psi) < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $\Delta_n$-isometrías continuas $i_n : X \to Y$ y $j_n : Y \to X$, con $\Delta_n < 1/n$, tales que

$$d_{C^0}(\Psi_t \circ i_n, i_n \circ \Phi_t) < \Delta_n \text{ para cada } t \in [0,1]; \text{ y} \tag{4.1}$$

$$d_{C^0}(\Phi_t \circ j_n, j_n \circ \Psi_t) < \Delta_n \text{ para cada } t \in [0,1]. \tag{4.2}$$

Sean $A \subseteq X$ un subconjunto numerable denso en $X$, y $J = \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ denso en $[0,1]$. Sea

$$B = \Big\{\Phi(t,a); a \in A \text{ y } t \in \mathbb{N}_0 \cdot t_1 + \mathbb{N}_0 \cdot t_2 + \cdots + \mathbb{N}_0 \cdot t_k \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\Big\},$$

donde $\mathbb{N}_0 \cdot t_1 + \mathbb{N}_0 \cdot t_2 + \cdots + \mathbb{N}_0 \cdot t_k = \big\{n_1 \cdot t_1 + n_2 \cdot t_2 + \cdots + n_k \cdot t_k; n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0\big\}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Como $\mathbb{N}_0 \cdot t_1 + \mathbb{N}_0 \cdot t_2 + \cdots + \mathbb{N}_0 \cdot t_k$ es numerable para cada $k \in \mathbb{N}$, entonces $\widehat{N} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \big(\mathbb{N}_0 \cdot t_1 + \mathbb{N}_0 \cdot t_2 + \cdots + \mathbb{N}_0 \cdot t_k\big)$ también es numerable. Así, $\widehat{N} \times A$ es numerable. Por lo tanto $B = \Phi\big(\widehat{N} \times A\big)$ es numerable. Además,

$$\Phi_t(B) \subset B \text{ para cada } t \in J. \tag{4.3}$$

En efecto, sea $x \in B$ y $s \in J$, entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $s = t_i$, y existen $a \in A$, $k \in \mathbb{N}$, y $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0$ tales que $x = \Phi_{n_1\cdot t_1 + n_2\cdot t_2 + \cdots + n_k\cdot t_k}(a)$. Así, puesto que $\Phi$ es un flujo tenemos que,

$$\Phi_s(x) = \Phi_{t_i}\big(\Phi_{n_1\cdot t_1+n_2\cdot t_2+\cdots+n_k\cdot t_k}(a)\big) = \begin{cases} \Phi_{n_1\cdot t_1+\cdots+(n_i+1)\cdot t_i+\cdots+n_k\cdot t_k}(a) & \text{, si } i \leq k, \\ \Phi_{n_1\cdot t_1+n_2\cdot t_2+\cdots+n_k\cdot t_k+1\cdot t_i}(a) & \text{, si } i > k. \end{cases}$$

Por lo tanto, $\Phi_s(x) \in B$.

Como $B$ es numerable, denotemos $B = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. En lo que sigue, a través de un argumento del tipo Diagonal de Cantor, construyamos una isometría $i : X \to Y$, tal que $i \circ \Phi_t = \Psi_t \circ i$, para cada $t \in [0,1]$. De la compacidad de $Y$, la sucesión $\big(i_n(b_1)\big)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ posee alguna subsucesión convergente. Así, existen $(k_n^1)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($k_n^1 < k_{n+1}^1$ para cada $n \in \mathbb{N}$) e $i(b_1) \in Y$ tales que $\lim_{n\to\infty} i_{k_n^1}(b_1) = i(b_1)$.

De la compacidad de $Y$, existen $(k_n^2)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (k_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ e $i(b_2) \in Y$ tales que $\lim_{n\to\infty} i_{k_n^2}(b_2) = i(b_2)$. De la compacidad de $Y$, existen $(k_n^3)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (k_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ e $i(b_3) \in Y$ tales que $\lim_{n\to\infty} i_{k_n^3}(b_3) = i(b_3)$. Continuando de este modo, tenemos que para cada $m \in \mathbb{N}$ existen $i(b_m) \in Y$ y una sucesión estrictamente creciente $(k_n^m)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n\to\infty} i_{k_n^m}(b_m) = i(b_m)$. Y además, para cada $m \in \mathbb{N}$, $(k_n^{m+1})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (k_n^m)_{n\in\mathbb{N}}$. Considere la sucesión $(r(n))_{n\in\mathbb{N}}$, donde $r(n) = k_n^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $(r(n))_{n\geq m} \subseteq (k_n^m)_{n\geq m}$ para cada $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} i_{r(n)}(b_m) = i(b_m)$ para cada $m \in \mathbb{N}$. De este modo hemos definido $i : B \to Y$, por

$$i(b) = \lim_{n\to\infty} i_{r(n)}(b) \text{ para cada } b \in B. \tag{4.4}$$

Como cada $i_n$ es una $\Delta_n$-isometría, tenemos que

$$d^X(a,a') - \Delta_n < d^Y\big(i_n(a), i_n(a')\big) < d^X(a,a') + \Delta_n, \text{ para cada } a, a' \in B,$$

y cada $n \in \mathbb{N}$. Así, en particular,

$$d^X(a,a') - \frac{1}{r(n)} < d^Y\big(i_{r(n)}(a), i_{r(n)}(a')\big) < d^X(a,a') + \frac{1}{r(n)}, \text{ para cada } a, a' \in B,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Haciendo $n \to \infty$, obtenemos $d^X(a,a') \leq d^Y\big(i(a), i(a')\big) \leq d^X(a,a')$ para cada $a, a' \in B$. Esto es,

$$d^Y\big(i(a), i(a')\big) = d^X(a,a') \text{ para cada } a, a' \in B. \tag{4.5}$$

Por lo tanto, en particular, $i : B \to Y$ es uniformemente continua. Como $\overline{B} = X$, podemos extender el dominio de $i$ a todo $X$, extensión que denotamos por $\bar{i} : X \to Y$, definida por

$$\bar{i}(x) = \begin{cases} i(x) & \text{, si } x \in B \\ \lim_{n\to\infty} i(z_n) & \text{, para algún } (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B \text{ tal que } \lim_{n\to\infty} z_n = x. \end{cases}$$

Dadas un par de sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $B$ tales $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = z_0$ para algún $z_0 \in X$. Tenemos que la sucesión

$$\ell = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots, x_n, y_n, \ldots)$$

converge también a $z_0$. En particular $\ell$ es una sucesión de Cauchy. Por lo tanto, como $i$ es uniformemente continua, entonces

$$\ell' = \big(i(x_1), i(y_1), i(x_2), i(y_2), i(x_3), i(y_3), \ldots, i(x_n), i(y_n), \ldots\big)$$

es también una sucesión de Cauchy en $Y$, el cual es un espacio métrico completo (pues es un espacio métrico compacto). Por lo tanto $\ell'$ es una sucesión convergente. Así, las subsucesiones $\big(i(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\big(i(y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\ell'$, convergen al mismo punto. Esto muestra la buena definición de $\bar{i}$.

Además, de (4.5) y puesto que $\overline{B} = X$, tenemos que

$$d^Y\big(\bar{i}(x), \bar{i}(x')\big) = d^X(x,x') \text{ para cada } x, x' \in X. \tag{4.6}$$

Como $i_n : X \to Y$ es una $(1/n)$-isometría para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bar{i}$ es sobreyectiva. En efecto. Dados $x \in X$ y $y \in Y$. Como $\overline{B} = X$, existe alguna sucesión $(b_m^x)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq B$ tal que $\lim_{m\to\infty} b_m^x = x$, esto es $\lim_{m\to\infty} d^X(b_m^x, x) = 0$. De la desigualdad triangular,

$$\big|d^Y(y, i_n(b_m^x)) - d^Y(y, i_n(x))\big| \leq d^Y\big(i_n(b_m^x), i_n(x)\big) \text{ para cada } m, n \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Y como cada $i_n$ es una $\Delta_n$-isometría, entonces

$$d^Y\big(i_n(b_m^x), i_n(x)\big) < d^X(b_m^x, x) + \Delta_n \text{ para cada } m, n \in \mathbb{N}. \tag{4.8}$$

Por lo tanto, de (4.7) y (4.8),

$$\big|d^Y(y, i_n(b_m^x)) - d^Y(y, i_n(x))\big| < d^X(b_m^x, x) + \Delta_n \text{ para cada } m, n \in \mathbb{N}.$$

Así, $d^Y\big(y, i_n(b_m^x)\big) < d^Y\big(y, i_n(x)\big) + d^X(b_m^x, x) + \Delta_n$ para cada $m, n \in \mathbb{N}$. Por ende,

$$d\big(y, i_n(B)\big) < d^Y\big(y, i_n(x)\big) + d^X(b_m^x, x) + \Delta_n \text{ para cada } m, n \in \mathbb{N}.$$

Haciendo $m \to \infty$, tenemos que

$$d\big(y, i_n(B)\big) \leq d^Y\big(y, i_n(x)\big) + \Delta_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Puesto que $x \in X$ fue cualquiera, tenemos que

$$d\big(y, i_n(B)\big) \leq d\big(y, i_n(X)\big) + \Delta_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{4.9}$$

Puesto que $y \in Y$ fue arbitrario, tomando supremo sobre $y \in Y$ a ambos lados de (4.9), tenemos que

$$d_H\big(Y, i_n(B)\big) \leq d_H\big(Y, i_n(X)\big) + \Delta_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Y como $d_H\big(Y, i_n(X)\big) < \Delta_n$ (puesto que $i_n$ es una $\Delta_n$-isometría), entonces

$$\sup_{z \in Y} d\big(z, i_n(B)\big) = d_H\big(i_n(B), Y\big) < 2 \cdot \Delta_n < 2/n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Sea $y \in Y$. Entonces $d\big(y, i_n(B)\big) < 2/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $b_n \in B$ tal que $d^Y\big(y, i_n(b_n)\big) < 2/n$. En particular,

$$d^Y\big(y, i_{r(n)}(b_{r(n)})\big) < 2/r(n) \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{4.10}$$

De la compacidad de $X$, tomando alguna subsucesión si es necesario, podemos suponer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ es una sucesión convergente. Esto es, existe $w \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} d^X(b_n, w) = 0 \tag{4.11}$$

Así, puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$, $i_{r(n)}$ es una $\big(1/r(n)\big)$-isometría,

$$\begin{aligned} d^Y\big(y, \bar{i}(w)\big) &\leq d^Y\big(y, i_{r(n)}(b_{r(n)})\big) + d^Y\big(i_{r(n)}(b_{r(n)}), i_{r(n)}(w)\big) + d^Y\big(i_{r(n)}(w), \bar{i}(w)\big) \\ &\leq d^Y\big(y, i_{r(n)}(b_{r(n)})\big) + \left(d^X(b_{r(n)}, w) + \frac{1}{r(n)}\right) + d^Y\big(i_{r(n)}(w), \bar{i}(w)\big) \end{aligned} \tag{4.12}$$

En caso que $w \in B$, de la definición de $i$ en (4.4), $\bar{i}(w) = i(w) = \text{lím}_{n\to\infty} i_{r(n)}(w)$. Por lo tanto, de (4.10), (4.11), y haciendo $n \to \infty$ en (4.12), tenemos que $d^Y\big(y, \bar{i}(w)\big) = 0$, esto es, $y = \bar{i}(w)$.

En el caso que $w \in X \setminus B$, como $\overline{B} = X$ entonces existe $(w_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq B$ tal que $\text{lím}_{k\to\infty} w_k = w$. Tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N}$, puesto que $i_{r(n)}$ es una $\big(1/r(n)\big)$-isometría, y de (4.6),

$$\begin{aligned} d^Y\big(i_{r(n)}(w), \bar{i}(w)\big) &\leq d^Y\big(i_{r(n)}(w), i_{r(n)}(w_k)\big) + d^Y\big(i_{r(n)}(w_k), \bar{i}(w_k)\big) + d^Y\big(\bar{i}(w_k), \bar{i}(w)\big) \\ &\leq \left(d^X(w, w_k) + \frac{1}{r(n)}\right) + d^Y\big(i_{r(n)}(w_k), i(w_k)\big) + d^X(w_k, w). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Como $w_k \in B$, entonces, de (4.4), $i(w_k) = \text{lím}_{n\to\infty} i_{r(n)}(w_k)$. Por lo tanto, haciendo $n \to \infty$ en (4.13),

$$\limsup_{n\to\infty} d^Y\big(i_{r(n)}(w), \bar{i}(w)\big) \leq 2 \cdot d^X(w_k, w) \text{ para cada } k \in \mathbb{N}. \tag{4.14}$$

Haciendo $n \to \infty$ en (4.12), de (4.10), (4.11), y (4.14), tenemos que

$$d^Y\big(y, \bar{i}(w)\big) \leq 2 \cdot d^X(w_k, w) \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, como $\text{lím}_{k\to\infty} d^X(w_k, w) = 0$, entonces $d^Y(y, \bar{i}(w)) = 0$. Así, $y = \bar{i}(w)$. De este modo hemos mostrado que $\bar{i}$ es sobreyectiva.

De (4.1), $d^Y\big(\Psi_t(i_n(x)), i_n(\Phi_t(x))\big) < 1/n$ para cada $t \in [0,1]$, para cada $x \in X$. Así, en particular,

$$d^Y\big(\Psi_t(i_{r(n)}(b)), i_{r(n)}(\Phi_t(b))\big) < 1/r(n) \text{ para cada } t \in J, \text{ para cada } b \in B. \tag{4.15}$$

De (4.3), $\Phi_t(b) \in B$ para cada $b \in B$, y para cada $t \in J$. Por lo tanto, de (4.4), tenemos que $\text{lím}_{n\to\infty} i_{r(n)}\big(\Phi_t(b)\big) = i\big(\Phi_t(b)\big)$ para cada $t \in J$ y cada $b \in B$. Por otro lado, como $\Psi_t$ es continua para cada $t \in \mathbb{R}$, de (4.4), tenemos que $\text{lím}_{n\to\infty} \Psi_t\big(i_{r(n)}(b)\big) = \Psi_t\big(i(b)\big)$ para cada $b \in B$, y cada $t \in J$. Así, haciendo $n \to \infty$ en (4.15), tenemos que $\Psi_t\big(i(b)\big) = i\big(\Phi_t(b)\big)$ para cada $b \in B$, y cada $t \in J$. Esto es

$$\Psi\big(t, i(b)\big) = i\big(\Phi(t, b)\big) \text{ para cada } b \in B, \text{ y cada } t \in J. \tag{4.16}$$

Como $\overline{B} = X$ y $\overline{J} = [0,1]$, tenemos que $\Psi_t \circ \bar{i} = \bar{i} \circ \Phi_t$ para cada $t \in [0,1]$. En efecto, sean $x \in X$ y $t \in [0,1]$. Entonces existen sucesiones $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq J$ y $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ tales que $\text{lím}_{n\to\infty} s_n = t$ y $\text{lím}_{n\to\infty} w_n = x$. De la definición de $\bar{i}$, $\bar{i}(x) = \text{lím}_{n\to\infty} i(w_n)$. De la continuidad de $\Psi$,

$$\Psi\big(t, \bar{i}(x)\big) = \lim_{n\to\infty} \Psi\big(s_n, i(w_n)\big) \tag{4.17}$$

De la continuidad de $\Phi$, tenemos que $\Phi(t,x) = \lim_{n\to\infty} \Phi(s_n, w_n)$, donde, de (4.3), $\Phi(s_n, w_n) \in B$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, de la definición de $\bar{i}$,

$$\bar{i}\big(\Phi(t,x)\big) = \lim_{n\to\infty} i\big(\Phi(s_n, w_n)\big). \tag{4.18}$$

De (4.16), $\Psi\big(s_n, i(w_n)\big) = i\big(\Phi(s_n, w_n)\big)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Haciendo $n \to \infty$, de (4.17) y (4.18), tenemos que $\Psi\big(t, \bar{i}(x)\big) = \bar{i}\big(\Phi(t,x)\big)$. Por lo tanto,

$$\Psi\big(t, \bar{i}(x)\big) = \bar{i}\big(\Phi(t,x)\big) \text{ para cada } x \in X, \text{ y cada } t \in [0,1]. \tag{4.19}$$

Así, $\Psi_t \circ \bar{i} = \bar{i} \circ \Phi_t$ para cada $t \in [0,1]$, donde $\bar{i}$ es una isometría (sobreyectiva). Por ende, de la Observación 3, tenemos que $\Psi$ y $\Phi$ son flujos isométricos entre sí.

(4): Claramente, de la Definición (1.1), para cada par de flujos $(X,\Phi)$ y $(Y,\Psi)$ definidos sobre espacios métricos compactos, tenemos que $D_{GH^0}(\Phi,\Psi) = D_{GH^0}(\Psi,\Phi)$.

(5): Sean los flujos $(X,\Phi)$, $(Z,\xi)$ y $(Y,\Psi)$. Mostremos que

$$D_{GH^0}(\Phi,\Psi) \leq 2 \cdot \big(D_{GH^0}(\Phi,\xi) + D_{GH^0}(\xi,\Psi)\big).$$

Fije $\epsilon > 0$. Existe $\Delta_1 < D_{GH^0}(\Phi,\xi) + \epsilon$, y existen $\Delta_1$-isometrías continuas $i : X \to Z$ y $j : Z \to X$ tales que

$$\begin{aligned} &d_{C^0}(i \circ \Phi_t, \xi_t \circ i) < \Delta_1 \text{ para cada } t \in [0,1]; \text{ y} \\ &d_{C^0}(j \circ \xi_t, \Phi_t \circ j) < \Delta_1 \text{ para cada } t \in [0,1]. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Análogamente, existe $\Delta_2 < D_{GH^0}(\xi,\Psi) + \epsilon$, y existen $\Delta_2$-isometrías continuas $k : Y \to Z$ y $l : Z \to Y$ tales que

$$\begin{aligned} &d_{C^0}(k \circ \Psi_t, \xi_t \circ k) < \Delta_2 \text{ para cada } t \in [0,1]; \text{ y} \\ &d_{C^0}(l \circ \xi_t, \Psi_t \circ l) < \Delta_2 \text{ para cada } t \in [0,1]. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Tenemos que $j \circ k : Y \to X$ y $l \circ i : X \to Y$ son $2(\Delta_1 + \Delta_2)$-isometrías, que además son continuas puesto que $i, j, k$ y $l$ son funciones continuas. En efecto, de la desigualdad triangular de $d_H$,

$$\begin{aligned} d_H\big((l \circ i)(X), Y\big) &\leq d_H\big((l \circ i)(X), l(Z)\big) + d_H\big(l(Z), Y\big) \\ &< d_H\big((l \circ i)(X), l(Z)\big) + \Delta_2, \end{aligned} \tag{4.22}$$

ya que $l$ es una $\Delta_2$-isometría. Por definición,

$$d_H\big((l\circ i)(X), l(Z)\big) = \text{máx}\left\{\sup_{a\in X} d(l\circ i(a), l(Z)), \sup_{b\in Z} d(l(b), (l\circ i)(X))\right\}. \tag{4.23}$$

Para cada $a \in X$, $d\big(l\circ i(a), l(Z)\big) = \text{ínf}_{z\in Z} d^Y\big(l\circ i(a), l(z)\big)$. Como $l$ es una $\Delta_2$-isometría,

$$d^Y\big(l\circ i(a), l(z)\big) < d^Z(i(a), z) + \Delta_2, \text{ para cada } z \in Z.$$

Así,

$$d\big(l\circ i(a), l(Z)\big) = \text{ínf}_{z\in Z} d^Y\big(l\circ i(a), l(z)\big) \leq \text{ínf}_{z\in Z}\left\{d^Z(i(a), z) + \Delta_2\right\} = d\big(i(a), Z\big) + \Delta_2,$$

para cada $a \in X$. Por lo tanto,

$$\sup_{a\in X} d\big(l\circ i(a), l(Z)\big) \leq \sup_{a\in X} d\big(i(a), Z\big) + \Delta_2. \tag{4.24}$$

Análogamente, para cada $b \in Z$, $d\big(l(b), l\circ i(X)\big) = \text{ínf}_{x\in X} d^Y\big(l(b), l\circ i(x)\big)$. Como $l$ es una $\Delta_2$-isometría,

$$d^Y\big(l(b), l\circ i(x)\big) < d^Z\big(b, i(x)\big) + \Delta_2, \text{ para cada } x \in X.$$

Así,

$$d\big(l(b), l\circ i(X)\big) = \text{ínf}_{x\in X} d^Y\big(l(b), l\circ i(x)\big) \leq \text{ínf}_{x\in X}\left\{d^Z(b, i(x)) + \Delta_2\right\} = d\big(b, i(X)\big) + \Delta_2,$$

para cada $b \in Z$. Por lo tanto,

$$\sup_{b\in Z} d\big(l(b), l\circ i(X)\big) \leq \sup_{b\in Z} d\big(b, i(X)\big) + \Delta_2. \tag{4.25}$$

Por ende, de (4.23), (4.24) y (4.25),

$$\begin{aligned} d_H\big(l\circ i(X), l(Z)\big) &\leq \text{máx}\left\{\sup_{a\in X} d\big(i(a), Z\big), \sup_{b\in Z} d\big(b, i(X)\big)\right\} + \Delta_2 \\ &= d_H\big(i(X), Z\big) + \Delta_2 < \Delta_1 + \Delta_2. \end{aligned}$$

Así, de (4.22), tenemos que $d_H\big(l\circ i(X), Y\big) < \Delta_1 + 2\Delta_2$.

Dados $a, b \in X$, tenemos que

$$\begin{aligned} &\left|d^Y\big(l\circ i(a), l\circ i(b)\big) - d^X(a,b)\right| \\ &\qquad \leq \left|d^Y\big(l\circ i(a), l\circ i(b)\big) - d^Z\big(i(a), i(b)\big)\right| + \left|d^Z\big(i(a), i(b)\big) - d^X(a,b)\right| \\ &\qquad < \Delta_2 + \Delta_1, \end{aligned}$$

puesto que $l$ es una $\Delta_2$-isometría, e $i$ es una $\Delta_1$-isometría. Por lo tanto, $l\circ i : X \to Y$ es una $(\Delta_1 + 2\Delta_2)$-isometría. En particular, $l\circ i$ es una $2(\Delta_1 + \Delta_2)$-isometría. Análogamente, $j\circ k : Y \to X$ es una $(2\Delta_1 + \Delta_2)$-isometría, y en particular $j\circ k$ es una $2(\Delta_1 + \Delta_2)$-isometría.

Para cada $x \in X$ y cada $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
d^Y\big(\Psi_t(l(i(x))), l(i(\Phi_t(x)))\big) &\leq d^Y\big(\Psi_t(l(i(x))), l(\xi_t(i(x)))\big) + d^Y\big(l(\xi_t(i(x))), l(i(\Phi_t(x)))\big) \\
&< 2\Delta_2 + d^Z\big(\xi_t(i(x)), i(\Phi_t(x))\big) \\
&< 2\Delta_2 + \Delta_1 < 2(\Delta_1 + \Delta_2),
\end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad se da por (4.21) y puesto que $l$ es una $\Delta_2$-isometría, y la tercera desigualdad se da por (4.20). Por lo tanto,

$$d_{C^0}\big(\Psi_t \circ (l \circ i), (l \circ i) \circ \Phi_t\big) < 2(\Delta_1 + \Delta_2) \text{ para cada } t \in [0,1].$$

Análogamente, mostramos que

$$d_{C^0}\big((j \circ k) \circ \Psi_t, \Phi_t \circ (j \circ k)\big) < 2(\Delta_1 + \Delta_2) \text{ para cada } t \in [0,1].$$

Así, $D_{GH^0}(\Phi, \Psi) \leq 2(\Delta_1 + \Delta_2) < 2 \cdot \Big(D_{GH^0}(\Phi, \xi) + D_{GH^0}(\xi, \Psi) + 2\epsilon\Big)$. Por lo tanto,

$$D_{GH^0}(\Phi, \Psi) < 2 \cdot \Big(D_{GH^0}(\Phi, \xi) + D_{GH^0}(\xi, \Psi) + 2\epsilon\Big) \text{ para cada } \epsilon > 0.$$

Haciendo $\epsilon \to 0^+$, tenemos que $D_{GH^0}(\Phi, \Psi) \leq 2 \cdot \Big(D_{GH^0}(\Phi, \xi) + D_{GH^0}(\xi, \Psi)\Big)$.

(6): Es obvio que $D_{GH^0}(\Phi, \Psi) \geq 0$. Como $X$ y $Y$ son acotados, entonces $\text{diám}(X) < \infty$ y $\text{diám}(Y) < \infty$. Basta mostrar que

$$D_{GH^0}(\Phi, \Psi) \leq \text{máx}\Big\{d_{GH}(X, Y), \text{diám}(X), \text{diám}(Y)\Big\}.$$

Dado $\epsilon > 0$, de la definición de $d_{GH}(X, Y)$, existe $\Delta \in \big[d_{GH}(X, Y), d_{GH}(X, Y) + \epsilon\big)$, y existen $\Delta$-isometrías $i : X \to Y$ y $j : Y \to X$. Para cada $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
d_{C^0}(i \circ \Phi_t, \Psi_t \circ i) &= \sup_{x \in X} d^Y\big(i \circ \Phi_t(x), \Psi_t \circ i(x)\big) \leq \text{diám}(Y) \\
d_{C^0}(j \circ \Psi_t, \Phi_t \circ j) &= \sup_{y \in Y} d^X\big(j \circ \Psi_t(y), \Phi_t \circ j(y)\big) \leq \text{diám}(X).
\end{aligned}$$

Como $\Delta, \text{diám}(X), \text{diám}(Y) < \text{máx}\Big\{d_{GH}(X, Y), \text{diám}(X), \text{diám}(Y)\Big\} + \epsilon$, entonces

$$D_{GH^0}(\Phi, \Psi) \leq \text{máx}\Big\{d_{GH}(X, Y), \text{diám}(X), \text{diám}(Y)\Big\} + \epsilon.$$

Puesto que $\epsilon > 0$ fue arbitrario,

$$D_{GH^0}(\Phi, \Psi) \leq \text{máx}\Big\{d_{GH}(X, Y), \text{diám}(X), \text{diám}(Y)\Big\}.$$

(7): Como $\lim_{n\to\infty} D_{GH^0}(\Phi,\Psi^n)=0$, dada una sucesión $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq(0,\infty)$ tal que $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$, tenemos que para cada $n\in\mathbb{N}$ existen $\delta_n$-isometrías $i_n : X\to Y_n$ y $j_n : Y_n\to X$ tales que

$$d_{C^0}(\Psi_t^n\circ i_n, i_n\circ\Phi_t)<\delta_n \text{ para cada } t\in[0,1]; \tag{4.26}$$

$$d_{C^0}(\Phi_t\circ j_n, j_n\circ\Psi_t^n)<\delta_n \text{ para cada } t\in[0,1]. \tag{4.27}$$

Así, de (4.26), y puesto que $\Psi^n$ es un flujo isométrico, e $i_n$ es una $\delta_n$-isometría, para cada $t\in[0,1]$ tenemos que

$$\begin{aligned} d^{Y_n}\big(i_n(\Phi_t(x)), i_n(\Phi_t(x'))\big) &\le d^{Y_n}\big(i_n(\Phi_t(x)),\Psi_t^n(i_n(x))\big)+\\ &\quad + d^{Y_n}\big(\Psi_t^n(i_n(x)),\Psi_t^n(i_n(x'))\big)+d^{Y_n}\big(\Psi_t^n(i_n(x')), i_n(\Phi_t(x'))\big)\\ &< 2\delta_n + d^{Y_n}(i_n(x), i_n(x'))\\ &< 3\delta_n + d^{Y_n}(x,x') \text{ para cada } x,x'\in X. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Como $d^X\big(\Phi_t(x),\Phi_t(x')\big)<\delta_n+d^{Y_n}\big(i_n(\Phi_t(x)), i_n(\Phi_t(x'))\big)$, entonces, de (4.28),

$$d^X\big(\Phi_t(x),\Phi_t(x')\big)<4\delta_n+d^X(x,x') \text{ para cada } x,x'\in X,$$

para cada $t\in[0,1]$. Así, haciendo $n\to\infty$,

$$d^X\big(\Phi_t(x),\Phi_t(x')\big)\le d^X(x,x') \text{ para cada } x,x'\in X,$$

para cada $t\in[0,1]$. Como $X$ es compacto entonces $X$ es totalmente acotado. Así, de [5], puesto que cada $\Phi_t$ es sobreyectiva (pues es un homeomorfismo), tenemos que

$$d^X\big(\Phi_t(x),\Phi_t(x')\big)= d^X(x,x') \text{ para cada } x,x'\in X,$$

para cada $t\in[0,1]$. Por lo tanto,

$$d^X\big(\Phi_t(x),\Phi_t(x')\big)= d^X(x,x') \text{ para cada } x,x'\in X,$$

para cada $t\in\mathbb{R}$. Esto es, $\Phi$ es un flujo isométrico. □

*Observación.* Si cambiamos el intervalo $[0,1]$ por un intervalo compacto $[0,a]$, con $a>0$, en la definición de la distancia $D_{GH^0}$ en (1.1), obtenemos la distancia $D^a_{GH^0}$ definida por

$$\begin{aligned} D^a_{GH^0}(\Phi,\Psi)=\inf\Big\{\Delta>0\,;\,\exists\ \Delta\text{-isometrías continuas } i: X\to Y \text{ y } j: Y\to X\\ \text{tales que } d_{C^0}(\Psi_t\circ i, i\circ\Phi_t)<\Delta,\ \forall\, t\in[0,a];\\ \text{y } d_{C^0}(\Phi_t\circ j, j\circ\Psi_t)<\Delta,\ \forall\, t\in[0,a]\Big\}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Así, $D_{GH^0}(\cdot,\cdot)=D^1_{GH^0}(\cdot,\cdot)$. Un teorema análogo al Teorema 1, se cumple para la distancia $D^a_{GH^0}(\cdot,\cdot)$.

## 4.2. Demostración del Teorema 2

*Demostración del Teorema 2.* Sea $(X, \Phi)$ un flujo (continuo) expansivo, definido sobre un espacio métrico compacto $X$, sin singularidades, y con la propiedad del sombreamiento. Sea

$$T_0 = \text{ínf}\Big\{t > 0; \text{existe } x \in X \text{ tal que } \Phi_t(x) = x\Big\}.$$

Como $\Phi$ es un flujo (continuo) sin singularidades. Entonces, del Lema 2, tenemos que $T_0 > 0$.

Sea $\epsilon > 0$. Sin pérdida de generalidad considere $\epsilon < T_0/4$. De la caracterización discreta del concepto de flujo expansivo, según (iv) de la Proposición 5, para $\epsilon$ existe $r > 0$, con $r < \text{mín}\{\epsilon, 1/2\}$, tal que para cada $x, y \in X$, para cada par de sucesiones $(t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ y $(u_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, con $u_0 = t_0 = 0$; $0 < t_{i+1} - t_i \leq r$, para cada $i \in \mathbb{Z}$; $|u_{i+1} - u_i| \leq r$, para cada $i \in \mathbb{Z}$; $\text{lím}_{i\to\infty} t_i = +\infty$ y $\text{lím}_{i\to\infty} t_{-i} = -\infty$, se tiene que

$$\text{si } d\big(\Phi_{t_i}(x), \Phi_{u_i}(y)\big) \leq r \text{ para cada } i \in \mathbb{Z}, \text{ entonces } y \in \Phi_{(-\epsilon,\epsilon)}(x).$$

Como $0 < r < T_0/4$. Del Lema 2, existe $\gamma = \gamma_r > 0$ tal que

$$d\big(\Phi_r(y), y\big) \geq \gamma, \text{ para cada } y \in X. \tag{4.30}$$

De la expansividad de $\Phi$, para $r$ existe $\epsilon' > 0$, con $\epsilon' < r/3$ y $\epsilon' < \gamma$, tal que para cada $x, y \in X$, para cada función continua $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $s(0) = 0$,

$$\text{si } d\big(\Phi_t(x), \Phi_{s(t)}(y)\big) \leq \epsilon' \text{ para cada } t \in \mathbb{R}, \text{ entonces } y \in \Phi_{[-r,r]}(x).$$

De la propiedad de sombreamiento (POTP) de $\Phi$, para $\epsilon'/12$, existe $\delta > 0$, con $\delta < \epsilon'/12$, tal que cada $(\delta, 1)$-pseudo órbita de $\Phi$ es $(\epsilon'/12)$-sombreada por alguna órbita de $\Phi$.

Sea $\Psi$ otro flujo (continuo) sobre un espacio métrico compacto $Y$, $\Psi : \mathbb{R} \times Y \to Y$, tal que $D_{GH^0}(\Psi, \Phi) < \delta$. Entonces, existen $\delta$-isometrías continuas $i : X \to Y$ y $j : Y \to X$, tales que

$$\begin{aligned} &d_{C^0}(\Psi_t \circ i, i \circ \Phi_t) < \delta, \text{ para cada } t \in [0,1]; \text{ y} \\ &d_{C^0}(\Phi_t \circ j, j \circ \Psi_t) < \delta, \text{ para cada } t \in [0,1]. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Sea $y \in Y$. Considere el par ordenado $\big(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\big)$, dado por $x_n = (j \circ \Psi_n)(y)$ y $t_n = 1$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Como $t_n \geq 1$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, y

$$\begin{aligned} d\big(x_{n+1}, \Phi_{t_n}(x_n)\big) &= d\big((j \circ \Psi_{n+1})(y), \Phi_1((j \circ \Psi_n)(y))\big) \\ &= d\big((j \circ \Psi_1)(\Psi_n y), (\Phi_1 \circ j)(\Psi_n y)\big) \\ &\leq d_{C^0}(j \circ \Psi_1, \Phi_1 \circ j) < \delta, \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Entonces, $\big(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\big)$ es una $(\delta,1)$-pseudo órbita de $\Phi$. Por lo tanto, esta es $(\epsilon'/12)$-sombreada por alguna órbita de $\Phi$. Así, existen $z \in X$ y un homeomorfismo creciente $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $\alpha(0) = 0$, tales que

$$d\big(\Phi_{\alpha(t)}(z), \Phi_{t-s_n}(x_n)\big) < \frac{\epsilon'}{12} \text{ para cada } t \in [s_n, s_{n+1}), \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}; \tag{4.32}$$

donde

$$s_n = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t_k & , \text{ si } n \geq 1 \\ 0 & , \text{ si } n = 0 \\ \displaystyle -\sum_{k=n}^{-1} t_k & , \text{ si } n < 0. \end{cases}$$

Como $t_n = 1$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, entonces $s_n = n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Así, de (4.32),

$$d\big(\Phi_{\alpha(t)}(z), \Phi_{t-n}((j \circ \Psi_n)(y))\big) < \frac{\epsilon'}{12} \text{ para cada } t \in [n, n+1), \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}; \tag{4.33}$$

Sea $t \in \mathbb{R}$, entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq t < n+1$ (esto es, $t - n \in [0,1)$), entonces, de (4.31),

$$\begin{aligned} d\big(\Phi_{t-n}((j \circ \Psi_n)(y)), (j \circ \Psi_t)(y)\big) &= d\big((\Phi_{t-n} \circ j)(\Psi_n y), (j \circ \Psi_{t-n})(\Psi_n y)\big) \\ &\leq d_{C^0}(\Phi_{t-n} \circ j, j \circ \Psi_{t-n}) < \delta < \frac{\epsilon'}{12} \end{aligned} \tag{4.34}$$

De (4.33) y (4.34), y de la desigualdad triangular

$$d\big(\Phi_{\alpha(t)}(z), (j \circ \Psi_t)(y)\big) < \frac{\epsilon'}{6}, \text{ para cada } t \in \mathbb{R}\,.$$

Así, para cada $y \in Y$ existen $z = z_y \in X$, y un homeomorfismo creciente $\alpha = \alpha_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $\alpha(0) = 0$, tales que

$$d\big(\Phi_{\alpha(t)}(z), (j \circ \Psi_t)(y)\big) < \frac{\epsilon'}{6}, \text{ para cada } t \in \mathbb{R}. \tag{4.35}$$

Para el mismo $y \in X$, supongamos que existen $z' \in X$ y $\alpha' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, homeomorfismo creciente, con $\alpha'(0) = 0$, tales que

$$d\big(\Phi_{\alpha'(t)}(z'), (j \circ \Psi_t)(y)\big) < \frac{\epsilon'}{6}, \text{ para cada } t \in \mathbb{R}. \tag{4.36}$$

Entonces, de (4.35) y (4.36), tenemos que $d\big(\Phi_{\alpha(t)}(z), \Phi_{\alpha'(t)}(z')\big) < \epsilon'/3$, para cada $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$d\big(\Phi_{\alpha \circ (\alpha')^{-1}(\tau)}(z), \Phi_\tau(z')\big) < \frac{\epsilon'}{3} < \epsilon', \text{ para cada } \tau \in \mathbb{R},$$

donde $\alpha \circ (\alpha')^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un homeomorfismo creciente, con $\alpha \circ (\alpha')^{-1}(0) = 0$. Por lo tanto, del modo como fue tomado $\epsilon'$ dependiendo de $r$ según la expansividad de $\Phi$, tenemos que

$z' = \Phi_t(z)$, para algún $t \in \mathbb{R}$, con $|t| \le r < \epsilon$.

Hemos mostrado que para cada $y \in Y$, $j\big(\Psi_{\mathbb{R}}(y)\big) = \big\{(j \circ \Psi_t)(y)\big\}_{t\in\mathbb{R}}$ es $(\epsilon'/6)$-sombreada por una única órbita de $\Phi$, donde $\Psi_{\mathbb{R}}(y) = \big\{\Psi_t(y)\big\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Denotemos por $\mathrm{Rep}^+$ al conjunto de *reparametrizaciones temporales*, esto es,

$$\mathrm{Rep}^+ = \Big\{\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \alpha \text{ es un homeomorfismo creciente, con } \alpha(0) = 0\Big\}$$

Para cada $y \in Y$, definamos el conjunto de $(\epsilon'/6)$-*sombras destacadas* de $j\big(\Psi_{\mathbb{R}}(y)\big)$ como

$$A_y^\star = \Big\{x \in X; \text{ existe } \alpha \in \mathrm{Rep}^+, \text{ tal que } \\ d\big(\Phi_{\alpha(t)}(x), (j \circ \Psi_t)(y)\big) < \frac{\epsilon'}{6}, \text{ para cada } t \in \mathbb{R}\Big\}.$$

De (4.35), para cada $y \in Y$ tenemos que $A_y^\star \neq \emptyset$, ya que $z = z_y \in A_y$. También, para cada $y \in Y$ definamos el conjunto de $(\epsilon'/6)$-*sombras* de $\big\{j \circ \Psi_t(y)\big\}_{t\in\mathbb{R}}$ como

$$A_y = \Big\{x \in X; \forall \eta, T > 0, \text{ existe } \alpha \in \mathrm{Rep}^+, \text{ tal que } \\ d\big(\Phi_{\alpha(t)}(x), (j \circ \Psi_t)(y)\big) < \frac{\epsilon'}{6} + \eta, \text{ para cada } t \in [-T, T]\Big\}.$$

Es claro que $A_y^\star \subseteq A_y$ para todo $y \in Y$. Así, concluimos que $A_y \neq \emptyset$ para cada $y \in Y$. Mostremos las siguientes propiedades del conjunto $A_y$.

**Lema 19.** *Para cada $y \in Y$, existe $z_y \in A_y^\star$ tal que $A_y \subseteq \Phi_{[-\epsilon,\epsilon]}(z_y)$.*

**Lema 20.** *Para cada $y \in Y$, $A_y$ es un conjunto cerrado de $X$.*

*Demostración del Lema 19.* Sean $(\eta_i)_{i\ge 0} \subseteq \mathbb{R}_+$ una sucesión estrictamente decreciente tal que $\lim_{i\to\infty} \eta_i = 0$; y sea $(T_i)_{i\ge 0} \subseteq \mathbb{R}_+$ una sucesión estrictamente creciente tal que $T_{i+1} - T_i \ge 1$, para cada $i \ge 0$. Así, $\lim_{i\to\infty} T_i = \infty$. Sea $x \in A_y$, para cada $i \ge 0$, existe $\alpha_i \in \mathrm{Rep}^+$ tal que

$$d\big(\Phi_{\alpha_i(t)}(x), (j \circ \Psi_t)(y)\big) < \frac{\epsilon'}{6} + \eta_i, \text{ para cada } t \in [-T_i, T_i].$$

De (4.35), como $d\big(\Phi_{\alpha(t)}(z), (j \circ \Psi_t)(y)\big) < \frac{\epsilon'}{6}$ para cada $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$d\big(\Phi_{\alpha_i(t)}(x), \Phi_{\alpha(t)}(z)\big) < \frac{\epsilon'}{3} + \eta_i, \text{ para cada } t \in [-T_i, T_i].$$

Como $\lim_{i\to\infty} \eta_i = 0$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\eta_i < \epsilon'/6$, para cada $i \ge 0$. Ahora, considere $T_i' = \min\big\{|\alpha(T_i)|, |\alpha(-T_i)|\big\}$ para cada $i \ge 0$. Como $\alpha = \alpha_y$ es un homeomorfismo creciente entonces $(T_i')_{i\ge 0}$ es también una sucesión estrictamente creciente tal que $\lim_{i\to\infty} T_i' = \infty$. Así, para cada $i \ge 0$,

$$d\big(\Phi_{\alpha_i \circ \alpha^{-1}(u)}(x), \Phi_u(z)\big) < \frac{\epsilon'}{3} + \eta_i < \frac{\epsilon'}{2}, \text{ para cada } u \in [-T_i', T_i']. \tag{4.37}$$

Para cada $i \geq 0$, sea $\gamma_i = \alpha_i \circ \alpha^{-1}$. Es claro que $\gamma_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un homeomorfismo creciente, con $\gamma_i(0) = 0$, esto es, $\gamma_i \in \mathrm{Rep}^+$. De la continuidad uniforme de $\gamma_i|_{[-T_i',T_i']}$, existe $s_i \in (0,r)$, tal que

$$\text{si } u, u' \in [-T_i', T_i'] \text{ y } |u - u'| < s_i, \text{ entonces } \big|\gamma_i(u) - \gamma_i(u')\big| < r. \tag{4.38}$$

Además, tenemos que

$$\begin{aligned} d\big(\Phi_{\gamma_{i+1}(u)-\gamma_i(u)}(\Phi_{\gamma_i(u)}(x)), \Phi_{\gamma_i(u)}(x)\big) &= d\big(\Phi_{\gamma_{i+1}(u)}(x), \Phi_{\gamma_i(u)}(x)\big) \\ &\leq d\big(\Phi_{\gamma_{i+1}(u)}(x), \Phi_u(z)\big) + d\big(\Phi_{\gamma_i(u)}(x), \Phi_u(z)\big) \\ &< \frac{2}{3}\epsilon' + 2\eta_i < \epsilon' < \gamma, \end{aligned}$$

para cada $u \in [-T_i', T_i'] \subseteq [-T_{i+1}', T_{i+1}']$. De (4.30), no puede ser que $\gamma_{i+1}(u) - \gamma_i(u) = r$ para algún $u \in [-T_i', T_i']$. Análogamente, $\gamma_i(u) - \gamma_{i+1}(u) \neq r$ para cada $u \in [-T_i', T_i']$. Como la función $h_i : t \in [-T_i', T_i'] \mapsto \big|\gamma_{i+1}(t) - \gamma_i(t)\big|$ es continua, y $h_i(0) = 0$, por el Teorema del Valor Intermedio, no puede ser que exista $u \in [-T_i', T_i'] \setminus \{0\}$ tal que $\big|\gamma_{i+1}(u) - \gamma_i(u)\big| \geq r$. Así,

$$\big|\gamma_{i+1}(u) - \gamma_i(u)\big| < r, \text{ para cada } u \in [-T_i', T_i']. \tag{4.39}$$

En particular, $\big|\gamma_{i+1}(T_i') - \gamma_i(T_i')\big| < r$ y $\big|\gamma_{i+1}(-T_i') - \gamma_i(-T_i')\big| < r$ para cada $i \geq 0$. De la continuidad de la función $t \in \mathbb{R} \mapsto \big|\gamma_{i+1}(t) - \gamma_i(t)\big|$, tenemos que para cada $i \geq 0$, existe $\xi_i \in (0,r)$ tal que,

$$\text{si } u \leq T_i' \leq u' \leq T_{i+1}' \text{ y } u' - u < \xi_i, \text{ entonces } \big|\gamma_{i+1}(u') - \gamma_i(u)\big| < r. \tag{4.40}$$

Y también,

$$\text{si } -T_{i+1}' \leq u \leq -T_i' \leq u' \text{ y } u' - u < \xi_i, \text{ entonces } \big|\gamma_i(u') - \gamma_{i+1}(u)\big| < r. \tag{4.41}$$

Fije $i_0 \geq 0$, elijamos una sucesión bilateral estrictamente creciente $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ tal que $u_0 = 0$ y verificando que:

$$\begin{aligned} &\text{si } u_j \in \big[0, T_{i_0}'\big] \text{ entonces } u_{j+1} - u_j < \min\big\{\xi_{i_0}, s_{i_0}\big\}; \text{ y} \\ &\text{si } u_{j+1} \in \big[-T_{i_0}', 0\big] \text{ entonces } u_{j+1} - u_j < \min\big\{\xi_{i_0}, s_{i_0}\big\}. \end{aligned}$$

Y también, para cada $m \geq i_0$:

$$\begin{aligned} &\text{si } u_j \in \big(T_m', T_{m+1}'\big] \text{ entonces } u_{j+1} - u_j < \min\big\{\xi_{m+1}, s_{m+1}\big\}; \text{ y} \\ &\text{si } u_{j+1} \in \big[-T_{m+1}', -T_m'\big) \text{ entonces } u_{j+1} - u_j < \min\big\{\xi_{m+1}, s_{m+1}\big\}. \end{aligned}$$

Definamos la sucesión bilateral $(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ por:

$$t_j = \begin{cases} \gamma_{i_0}(u_j), & \text{si } u_j \in [-T'_{i_0}, T'_{i_0}] \\ \gamma_{m+1}(u_j), & \text{si } u_j \in [-T'_{m+1}, -T'_m) \cup (T'_m, T'_{m+1}]. \text{ Para cada } m \geq i_0. \end{cases}$$

Así, de la continuidad uniforme de $\gamma_{i_0}|_{[-T'_{i_0},T'_{i_0}]}$, de (4.38), si $u_j, u_{j+1} \in [-T'_{i_0}, T'_{i_0}]$, como $u_{j+1} - u_j < s_{i_0}$ entonces $\left|\gamma_{i_0}(u_{j+1}) - \gamma_{i_0}(u_j)\right| < r$, esto es $|t_{j+1} - t_j| < r$. Análogamente para $m > i_0$, de la continuidad uniforme de $\gamma_m|_{[-T'_m,T'_m]}$, de (4.38), si $u_j, u_{j+1} \in [-T'_m, T'_m] \setminus [-T'_{m-1}, T'_{m-1}]$, como $u_{j+1} - u_j < s_m$, entonces $\left|\gamma_m(u_{j+1}) - \gamma_m(u_j)\right| < r$, esto es $\left|t_{j+1} - t_j\right| < r$.

Para cada $m \geq i_0$, en caso que $0 \leq u_j \leq T'_m < u_{j+1} \leq T'_{m+1}$, como $u_{j+1} - u_j < \xi_m$ entonces, de (4.40), $\left|\gamma_{m+1}(u_{j+1}) - \gamma_m(u_j)\right| < r$, esto es, $|t_{j+1} - t_j| < r$. En caso que $-T'_{m+1} \leq u_j < -T'_m \leq u_{j+1} \leq 0$, puesto que $u_{j+1} - u_j < \xi_m$, entonces, de (4.41), $\left|\gamma_m(u_{j+1}) - \gamma_{m+1}(u_j)\right| < r$, esto es, $|t_{j+1} - t_j| < r$. De esta manera hemos definido un par de sucesiones bilaterales $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{R}$ y $(t_j)_{j\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{R}$ tales que $u_0 = t_0 = 0$, $\lim_{j\to\infty} u_j = +\infty$, $\lim_{j\to\infty} u_{-j} = -\infty$; $u_{j+1} - u_j < r$ y $|t_{j+1} - t_j| < r$, para cada $j \in \mathbb{Z}$; y de (4.37),

$$d\big(\Phi_{t_j}(x), \Phi_{u_j}(z)\big) < r, \text{ para cada } j \in \mathbb{Z}.$$

Entonces, como $r$ dependía de $\epsilon$ según la caracterización discreta de expansividad de $\Phi$, Ítem (iv) de la Proposición 5, concluimos que $x \in \Phi_{(-\epsilon,\epsilon)}(z)$, esto es, $x = \Phi_t(z)$ para algún $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Por lo tanto, como $x$ era un punto arbitrario de $A_y$, tenemos que $A_y \subseteq \Phi_{[-\epsilon,\epsilon]}(z)$. Esto culmina la prueba del Lema 19. □

*Demostración del Lema 20.* Como $2\epsilon < T_0$, entonces $\Phi_{[-\epsilon,\epsilon]}(z)$ es homeomorfo a un intervalo cerrado acotado $[-\epsilon, \epsilon]$ de la recta real. Además, $\Phi_{[-\epsilon,\epsilon]}(z)$ es un conjunto cerrado en $X$. En efecto, sean $w \in X$ y $(w_i)_{i\geq 0} \subseteq \Phi_{[-\epsilon,\epsilon]}(z)$ tales que $\lim_{i\to\infty} w_i = w$. Entonces, para cada $i \geq 0$, existe $a_i \in [-\epsilon, \epsilon]$ tal que $w_i = \Phi_{a_i}(z)$. Por la compacidad de $[-\epsilon, \epsilon]$, existe alguna subsucesión $(a_{k(i)})_{i\geq 0} \subseteq (a_i)_{i\geq 0}$, tal que $\lim_{i\to\infty} a_{k(i)} = b$, para algún $b \in [-\epsilon, \epsilon]$. Por lo tanto, de la continuidad de $\Phi$ tenemos que

$$w = \lim_{i\to\infty} w_{k(i)} = \lim_{i\to\infty} \Phi(a_{k(i)}, z) = \Phi(b, z) \in \Phi_{[-\epsilon,\epsilon]}(z).$$

Para mostrar el Lemma 20, que $A_y$ es un conjunto cerrado, es suficiente mostrar que $A_y$ es cerrado en $\Phi_{[-\epsilon,\epsilon]}(z)$. Considere $(z_i)_{i\geq 0}$, una sucesión de puntos en $A_y$, y sea $z' \in \Phi_{[-\epsilon,\epsilon]}(z)$ tales que $\lim_{i\to\infty} z_i = z'$. Por lo tanto, $z' = \Phi_{t'}(z)$ para algún $t' \in [-\epsilon, \epsilon]$, y para cada $i \geq 0$, $z_i = \Phi_{t_i}(z)$ para algún $t_i \in [-\epsilon, \epsilon]$. Sin pérdida de generalidad, tomando una subsucesión si es necesario, podemos suponer que existe $\tau \in [-\epsilon, \epsilon]$ tal que $\lim_{i\to\infty} t_i = \tau$. De la continuidad del flujo $\Phi$,

$$\Phi_{t'}(z) = z' = \lim_{i\to\infty} z_i = \lim_{i\to\infty} \Phi_{t_i}(z) = \Phi_\tau(z),$$

por lo tanto, de la inyectividad de $\Phi(\cdot, z)|_{[-\epsilon,\epsilon]}$ (puesto que $2\epsilon < T_0$), $t' = \tau$. Más aún, dada cualquier subsucesión convergente de $(t_i)_{i\geq 0}$, de la inyectividad de $\Phi(\cdot, z)|_{[-\epsilon,\epsilon]}$, debe de converger a $t'$. Así, de la compacidad de $[-\epsilon, \epsilon]$ tenemos que $\lim_{i\to\infty} t_i = t'$.
Dado $\eta, T > 0$, como $z_i \in A_y$ para cada $i \geq 0$ existe algún $\alpha_i \in \mathrm{Rep}^+$, tal que

$$d\big(\Phi_{\alpha_i(t)}(z_i), (j \circ \Psi_t)(y)\big) < \frac{1}{6}\epsilon' + \frac{1}{2}\eta, \text{ para cada } t \in [-T, T], \text{ y cada } i \geq 0. \tag{4.42}$$

Del Lema 4, para $\eta/2$ existe $\sigma > 0$ tal que, para cada $t, s \in \mathbb{R}$, y $w \in X$, si $|t-s| < \sigma$ entonces $d\big(\Phi_t(w), \Phi_s(w)\big) < \eta/2$. Como $\lim_{i\to\infty} t_i = t'$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $i \geq N$ entonces $|t_i - t'| < \sigma$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&d\big(\Phi_{t_i}(w), \Phi_{t'}(w)\big) < \eta/2, \text{ para cada } i \geq N, \text{ y cada } w \in X,\\
&d\big(\Phi_{t_i}(\Phi_l z), \Phi_{t'}(\Phi_l z)\big) < \eta/2, \text{ para cada } i \geq N, \text{ y cada } l \in \mathbb{R},\\
&d\big(\Phi_l(\Phi_{t_i} z), \Phi_l(\Phi_{t'} z)\big) < \eta/2, \text{ para cada } i \geq N, \text{ y cada } l \in \mathbb{R},\\
&d\big(\Phi_l(z_i), \Phi_l(z')\big) < \eta/2, \text{ para cada } i \geq N, \text{ y cada } l \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

En particular,

$$d\big(\Phi_{\alpha_i(t)}(z_i), \Phi_{\alpha_i(t)}(z')\big) < \frac{\eta}{2} \text{ para cada } i \geq N, \text{ y cada } t \in \mathbb{R}. \tag{4.43}$$

De (4.42) y (4.43), para cada $i \geq N$ tenemos que

$$d\big(\Phi_{\alpha_i(t)}(z'), (j \circ \Psi_t)(y)\big) < \frac{\epsilon'}{6} + \eta \text{ para cada } t \in [-T, T]. \tag{4.44}$$

Así, hemos mostrado que para cada $\eta, T > 0$ existe $i \in \mathbb{N}$ verificando (4.44). Esto es, $z' \in A_y$. Así, $A_y$ es un subconjunto cerrado de $\Phi_{[-\epsilon,\epsilon]}(z)$. Esto concluye la prueba del Lema 20. □

Para definir una función $h : Y \to X$, para cada $y \in Y$ necesitamos seleccionar un punto de $A_y$. Un punto $x \in X$ es llamado *extremo derecho* de $A_y$, si para cada $x' \in A_y$, existe $w = w(x') \in [0, 2\epsilon]$ tal que $x = \Phi_w(x')$.

Mostremos la existencia de extremos derechos de $A_y$. De (1), $A_y \subseteq \Phi_{[-\epsilon,\epsilon]}(z_y)$, donde $z_y \in A_y$. Sea $I_{z_y} = \big\{t \in [-\epsilon, \epsilon]; \Phi_t(z_y) \in A_y\big\}$. Este conjunto es no vacío puesto que $z_y \in A_y$, y así $0 \in I_{z_y}$. Por lo tanto, existe $t_0 = \sup(I_{z_y})$ tal que $0 \leq t_0 \leq \epsilon$. Mostremos que $x_0 = \Phi_{t_0}(z_y)$ es un extremo derecho de $A_y$. Sea $w \in A_y$. De (1), existe $t_w \in [-\epsilon, \epsilon]$ tal que $w = \Phi_{t_w}(z_y)$ y $t_w \in I_{z_y}$. Como $t_0 = \sup(I_{z_y})$, entonces $-\epsilon \leq t_w \leq t_0 \leq \epsilon$. Así,

$$x_0 = \Phi_{t_0}(z_y) = \Phi_{t_0 - t_w}\Phi_{t_w}(z_y) = \Phi_{t_0 - t_w}(w), \text{ donde } t_0 - t_w \in [0, 2\epsilon].$$

Ahora, mostraremos la unicidad del extremo derecho de $A_y$. Sean $x, \overline{x} \in A_y$ dos extremos derechos de $A_y$. Entonces

$$x = \Phi_{w_1}(\overline{x}), \text{ para algún } w_1 = w_1(\overline{x}) \in [0, 2\epsilon], \tag{4.45}$$

$$\overline{x} = \Phi_{w_2}(x), \text{ para algún } w_2 = w_2(x) \in [0, 2\epsilon]. \tag{4.46}$$

Además, como $A_y \subseteq \Phi_{[-\epsilon,\epsilon]}(z)$, donde $z \in A_y$, entonces

$$x = \Phi_t(z) \text{ y } \overline{x} = \Phi_{\overline{t}}(z), \text{ para algunos } t, \overline{t} \in [-\epsilon, \epsilon]. \tag{4.47}$$

Así, de (4.45) y (4.47), $\Phi_t(z) = \Phi_{w_1}\Phi_{\overline{t}}(z)$, y entonces $\Phi_{t-\overline{t}}(z) = \Phi_{w_1}(z)$, donde $t-\overline{t} \in [-2\epsilon, 2\epsilon]$ y $w_1 \in [0, 2\epsilon]$. De la inyectividad de $\Phi(\cdot, z)|_{[-2\epsilon,2\epsilon]}$, puesto que $4\epsilon < T_0$, tenemos que $t - \overline{t} = w_1 \geq 0$. Así, $t \geq \overline{t}$. Análogamente, de (4.46) y (4.47), $\Phi_{\overline{t}}(z) = \Phi_{w_2}\Phi_t(z)$, y por lo tanto $\Phi_{\overline{t}-t}(z) = \Phi_{w_2}(z)$, donde $\overline{t} - t \in [-2\epsilon, 2\epsilon]$ y $w_2 \in [0, 2\epsilon]$. De la inyectividad de $\Phi(\cdot, z)|_{[-2\epsilon,2\epsilon]}$, tenemos que $\overline{t} - t = w_2 \geq 0$. Por lo tanto, $\overline{t} \geq t$. Así, $t = \overline{t}$ y $x = \overline{x}$. Denotamos por $\ell(A_y)$ al único extremo derecho de $A_y$.

Definamos $h : Y \to X$ por $h(y) = \ell(A_y)$, para cada $y \in Y$. De la definición de $A_y$, si $x \in A_y$ entonces, para cada $\eta, T > 0$ existe $\alpha = \alpha_{\eta,T} \in \mathrm{Rep}^+$, tal que

$$d\big(\Phi_{\alpha(t)}x, (j \circ \Psi_t)(y)\big) < \frac{\epsilon'}{6} + \eta, \text{ para cada } t \in [-T, T]. \tag{4.48}$$

Supongamos que $\eta < \epsilon'/2$. Entonces, considerando $t = 0$ en (4.48), tenemos que

$$d\big(x, j(y)\big) < \frac{\epsilon'}{6} + \frac{\epsilon'}{2} < \epsilon' < \epsilon.$$

En particular, para $x = \ell(A_y) \in A_y$ tenemos que $d\big(h(y), j(y)\big) < \epsilon' < \epsilon$, para cada $y \in Y$. Así,

$$d_{C^0}(h, j) = \sup\big\{d\big(h(y), j(y)\big); y \in Y\big\} \leq \epsilon' < \epsilon. \tag{4.49}$$

Observe que $d$ alude a la métrica $d^X$ del espacio métrico $X$.

Siguiendo la prueba del Teorema 4 en [3], mostremos que $h : Y \to X$ es una $\epsilon$-isometría. De (4.49), tenemos que $d_H\big(h(Y), j(Y)\big) \leq \epsilon'$. En efecto, por definición de la distancia de Hausdorff $d_H$,

$$d_H\big(h(Y), j(Y)\big) = \text{máx}\left\{\sup_{a\in Y} d\big(h(a), j(Y)\big), \sup_{b\in Y} d\big(j(b), h(Y)\big)\right\}. \tag{4.50}$$

Para cada $a \in Y$, se tiene que

$$d\big(h(a), j(Y)\big) = \text{ínf}\big\{d\big(h(a), j(w)\big); w \in Y\big\} \leq d\big(h(a), j(a)\big) < \epsilon'.$$

Por lo tanto, $\sup_{a\in Y} d\big(h(a), j(Y)\big) \le \epsilon'$. Y también, para cada $b \in Y$, se tiene que

$$d\big(j(b), h(Y)\big) = \text{ínf}\,\big\{d\big(j(b), h(w)\big); w \in Y\big\} \le d\big(j(b), h(b)\big) < \epsilon'$$

Por lo tanto, $\sup_{b\in Y} d\big(j(b), h(Y)\big) \le \epsilon'$. Así, de (4.50), $d_H\big(h(Y), j(Y)\big) \le \epsilon'$. Por otro lado, como $j : Y \to X$ es una $\delta$-isometría, tenemos que $d_H\big(j(Y), X\big) < \delta$. Así, de la desigualdad triangular de $d_H$,

$$d_H\big(h(Y), X\big) \le d_H\big(h(Y), j(Y)\big) + d_H\big(j(Y), X\big) < \epsilon' + \delta < 2\epsilon' < r < \epsilon.$$

Sean $a, b \in Y$, comparando $h$ y $j$, y usando el hecho que $j$ es una $\delta$-isometría,

$$\begin{aligned}
\big|d^X(h(a), h(b)) - d^Y(a, b)\big| &\le \big|d^X(h(a), h(b)) - d^X(j(a), j(b))\big| + \big|d^X(j(a), j(b)) - d^Y(a, b)\big| \\
&\le \big|d^X(h(a), h(b)) - d^X(h(a), j(b))\big| + \big|d^X(h(a), j(b)) - d^X(j(a), j(b))\big| + \delta \\
&\le d^X\big(h(b), j(b)\big) + d^X\big(h(a), j(a)\big) + \delta \\
&< 2\epsilon' + \delta < 3\epsilon' < r < \epsilon,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de (4.49). Por lo tanto, $h$ es una $\epsilon$-isometría.

Ahora, mostraremos que $h$ lleva órbitas de $\Psi$ en órbitas de $\Phi$. Fijemos $y \in Y$. De (4.35), tenemos que $\big\{(j \circ \Psi_t)(y)\big\}_{t\in\mathbb{R}}$ es $(\epsilon'/6)$-sombreada por una (única) órbita de $\Phi$, esto es, existen $z = z_y \in X$ y $\alpha = \alpha_y \in \text{Rep}^+$ tales que

$$d\big(\Phi_{\alpha(t)}(z), (j \circ \Psi_t)(y)\big) < \frac{\epsilon'}{6}, \text{ para cada } t \in \mathbb{R}\,. \tag{4.51}$$

Sea $\Psi_u(y)$, un punto cualquiera de $\big\{\Psi_t(y)\big\}_{t\in\mathbb{R}}$. De (4.51), tenemos que para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$d\big(\Phi_{\alpha(t+u)-\alpha(u)}(\Phi_{\alpha(u)}(z)), (j \circ \Psi_t)(\Psi_u(y))\big) = d\big(\Phi_{\alpha(t+u)}(z), (j \circ \Psi_{t+u})(y)\big) < \frac{\epsilon'}{6}. \tag{4.52}$$

Considere la función $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\gamma(t) = \alpha(t+u) - \alpha(u)$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Claramente, $\gamma$ es un homeomorfismo creciente, con $\gamma(0) = 0$, esto es, $\gamma \in \text{Rep}^+$. Así, de (4.52),

$$d\big(\Phi_{\gamma(t)}(\Phi_{\alpha(u)}z), (j \circ \Psi_t)(\Psi_u y)\big) < \frac{\epsilon'}{6}, \text{ para cada } t \in \mathbb{R}\,.$$

En particular, para cada $\eta, T > 0$,

$$d\big(\Phi_{\gamma(t)}(\Phi_{\alpha(u)}z), (j \circ \Psi_t)(\Psi_u y)\big) < \frac{\epsilon'}{6} + \eta, \text{ para cada } t \in [-T, T].$$

Por lo tanto, $\Phi_{\alpha(u)}(z) \in A_{\Psi_u(y)}$. Y como $A_{\Psi_u(y)}$ está incluido en una (única) órbita de $\Phi$, entonces $h(\Psi_u y) \in A_{\Psi_u(y)} \subseteq \{\Phi_t(\Phi_{\alpha(u)}z)\}_{t\in\mathbb{R}} = \{\Phi_t(z)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Por otro lado, de (4.51), para cada $\eta, T > 0$,

$$d\big(\Phi_{\alpha(t)}(z), (j \circ \Psi_t)(y)\big) < \frac{\epsilon'}{6} + \eta, \text{ para cada } t \in [-T, T]. \tag{4.53}$$

Entonces, $z \in A_y$. Como $h(y) \in A_y$, y puesto que $A_y$ está incluido en una única órbita de $\Phi$, entonces $h(y) \in A_y \subseteq \{\Phi_t(z)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Por lo tanto, $\{\Phi_t(z)\}_{t\in\mathbb{R}} = \{\Phi_t(hy)\}_{t\in\mathbb{R}}$, y así, $h(\Psi_u y) \in \{\Phi_t(hy)\}_{t\in\mathbb{R}}$ para cada $u \in \mathbb{R}$.

Por hipótesis tenemos que $j : Y \to X$ es una función continua, además de ser una $\delta$-isometría. Mostremos que $h : Y \to X$ es $\mathcal{H}$-continua. Sean $\eta, T > 0$ y $y \in Y$. Considere el conjunto

$$A_{y,\eta,T} = \Big\{x \in X; \text{ existe } \alpha \in \text{Rep}^+, \text{ tal que } d\big(\Phi_{\alpha(t)}(x), (j \circ \Psi_t)(y)\big) < \frac{\epsilon'}{6} + \eta, \forall t \in [-T, T]\Big\}.$$

Observamos, de la continuidad uniforme de $\Phi$ restricto a conjuntos compactos de la forma $[-\tau, \tau] \times X$, que $A_{y,\eta,T}$ es un conjunto abierto para cada $y$, $\eta$ y $T$.
Algunas propiedades de este tipo de conjuntos son las siguientes,

(a) Si $\eta_1 \geq \eta_2 > 0$ entonces $A_{y,\eta_1,T} \supseteq A_{y,\eta_2,T}$, para cada $y \in Y$, y cada $T > 0$.

(b) Si $0 < T_1 \leq T_2$ entonces $A_{y,\eta,T_1} \supseteq A_{y,\eta,T_2}$, para cada $y \in Y$, y cada $\eta > 0$.

(c) Si $\eta_1 \geq \eta_2 > 0$ y $T_2 \geq T_1 > 0$, entonces

$$A_{y,\eta_1,T_1} \supseteq A_{y,\eta_2,T_2}, \text{ para cada } y \in Y.$$

En efecto, de (a) y (b), $A_{y,\eta_1,T_1} \supseteq A_{y,\eta_2,T_1} \supseteq A_{y,\eta_2,T_2}$.

(d) Sean $(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}, (T_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq (0, +\infty)$ tales que $\lim_{i\to\infty} \eta_i = 0$ y $\lim_{i\to\infty} T_i = +\infty$. Entonces,

$$A_y = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_{y,\eta_i,T_i}, \text{ para cada } y \in Y. \tag{4.54}$$

En efecto, sea $x \in A_y$. Entonces, para cada $\eta, T > 0$ existe $\alpha = \alpha_{\eta,T} \in \text{Rep}^+$ tal que

$$d\big(\Phi_{\alpha(t)}(x), (j \circ \Psi_t)(y)\big) < \frac{\epsilon'}{6} + \eta, \text{ para cada } t \in [-T, T].$$

Así, $x \in A_{y,\eta,T}$, y por lo tanto $A_y \subseteq A_{y,\eta,T}$, para cada $\eta, T > 0$. En particular, $A_y \subseteq \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_{y,\eta_i,T_i}$.

Recíprocamente, sea $x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_{y,\eta_i,T_i}$. Entonces, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $\alpha_i \in \mathrm{Rep}^+$ tal que

$$d\big(\Phi_{\alpha_i(t)}(x), (j \circ \Psi_t)(y)\big) < \frac{\epsilon'}{6} + \eta_i, \text{ para cada } t \in [-T_i, T_i]. \tag{4.55}$$

Dados $\eta, T > 0$, como $\eta_i \to 0$ y $T_i \to +\infty$ cuando $i \to +\infty$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\eta > \eta_{i_0}$ y $T < T_{i_0}$. De (4.55), para $i = i_0$,

$$d\big(\Phi_{\alpha_{i_0}(t)}(x), (j \circ \Psi_t)(y)\big) < \frac{\epsilon'}{6} + \eta_{i_0} < \frac{\epsilon'}{6} + \eta,$$

para cada $t \in [-T, T] \subseteq [-T_{i_0}, T_{i_0}]$. Así, $x \in A_y$.

**Lema 21.** *Para cada $y \in Y$, para cada $\lambda > 0$, existen $\eta, T > 0$ tales que*

$$A_{y,\eta,T} \subseteq B(A_y, \lambda).$$

*Donde* $B(A_y, \lambda) = \big\{w \in X; d(w, A_y) < \lambda\big\}$.

*Demostración.* Supongamos, por contradicción, que existen $\lambda > 0$ y $y \in Y$, tales que para cada $\eta, T > 0$,

$$A_{y,\eta,T} \not\subseteq B(A_y, \lambda);$$

esto es, para cada $\eta, T > 0$ existe $x_{\eta,T} \in A_{y,\eta,T}$ tal que $d(x_{\eta,T}, A_y) \geq \lambda$. En particular, dadas dos sucesiones $(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $(0, +\infty)$, con $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ estrictamente creciente, tales que $\lim_{i\to\infty} \eta_i = 0$ y $\lim_{i\to\infty} T_i = +\infty$; tenemos que para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$\text{existe } z_i \in A_{y,\eta_i,T_i}, \text{ tal que } d(z_i, A_y) \geq \lambda. \tag{4.56}$$

Supongamos además que $\eta_i < \epsilon'/6$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad, tomando una subsucesión si es necesario, podemos suponer que $(z_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X$, es una sucesión convergente,

$$\lim_{i\to\infty} z_i = z \text{ para algún } z \in X. \tag{4.57}$$

Como $z_i \in A_{y,\eta_i,T_i}$, existe algún homeomorfismo $\alpha_i \in \mathrm{Rep}^+$ tal que

$$d\big(\Phi_{\alpha_i(t)}(z_i), (j \circ \Psi_t)(y)\big) < \frac{\epsilon'}{6} + \eta_i, \text{ para cada } t \in [-T_i, T_i]. \tag{4.58}$$

Dadas las sucesiones $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\beta_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq (0, +\infty)$, tales que $\lim_{i\to\infty} \beta_i = 0$ y $\lim_{i\to\infty} w_i = \infty$. Como $\lim_{i\to\infty} z_i = z$, sin pérdida de generalidad, reemplazando la sucesión $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ por alguna subsucesión $(z_{k(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ si es necesario, podemos suponer que

$$d\big(\Phi_t(z_i), \Phi_t(z)\big) < \beta_i \text{ para cada } t \in [-w_i, w_i]. \tag{4.59}$$

En efecto, como $\Phi|_{[-w_i,w_i]\times X}$ es uniformemente continua, entonces existe $\delta_i \in (0, 1/i)$ tal que para cada $a, b \in X$,

$$\text{si } d(a,b) < \delta_i \text{ entonces, } d\big(\Phi_t(a), \Phi_t(b)\big) < \beta_i \text{ para cada } t \in [-w_i, w_i].$$

Como $\lim_{k\to\infty} z_k = z$, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $k(i) \in \mathbb{N}$ tal que, si $k \geq k(i)$ entonces $d(z_k, z) < \delta_i$. Podemos elegir $\big(k(i)\big)_{i\in\mathbb{N}}$ de tal modo que $k(1) < k(2) < k(3) < \cdots$.

De (4.59), tenemos que

$$d\big(\Phi_{\alpha_i(t)}(z_i), \Phi_{\alpha_i(t)}(z)\big) < \beta_i, \text{ para cada } t \in \left[\alpha_i^{-1}(-w_i), \alpha_i^{-1}(w_i)\right]. \tag{4.60}$$

Mostremos que $\lim_{i\to\infty} \alpha_i^{-1}(w_i) = +\infty$. Supongamos que esto no ocurre, entonces existe $a > 0$ y existe $\big(n(i)\big)_{i\in\mathbb{N}}$, con $n(1) < n(2) < n(3) < \cdots$, tal que $\alpha_{n(i)}^{-1}(w_{n(i)}) \leq a$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $w_{n(i)} \leq \alpha_{n(i)}(a)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Así, $\lim_{i\to\infty} \alpha_{n(i)}(a) = +\infty$. Considere $N \in \mathbb{N}$ tal que $a \in [-T_i, T_i]$ para cada $i \geq N$. Por tanto, $a \in [-T_{n(i)}, T_{n(i)}]$ para cada $i \geq N$. Como $\Psi|_{[0,a]\times Y}$ es uniformemente continua, para $\epsilon'/12$ existe $\delta' > 0$ tal que para cada $t_1, t_2 \in [0, a]$,

$$\text{si } |t_2 - t_1| < \delta' \text{ entonces, } d\big(\Psi_{t_2}(\omega), \Psi_{t_1}(\omega)\big) < \frac{\epsilon'}{12} \text{ para cada } \omega \in Y. \tag{4.61}$$

Del Lema 5, para $r$ y $\delta'$ existen $0 \leq t_1 < t_2 \leq a$ e $i \geq N$ tales que $t_2 - t_1 < \delta'$ y $\alpha_{n(i)}(t_2) - \alpha_{n(i)}(t_1) = r$. Del Lema 2, del modo como $\gamma$ depende de $r$, tenemos que

$$d\big(\Phi_{\alpha_{n(i)}(t_1)}(w), \Phi_{\alpha_{n(i)}(t_2)}(w)\big) \geq \gamma > \epsilon', \text{ para cada } w \in X.$$

En particular,

$$d\big(\Phi_{\alpha_{n(i)}(t_1)}(z_{n(i)}), \Phi_{\alpha_{n(i)}(t_2)}(z_{n(i)})\big) \geq \gamma > \epsilon'. \tag{4.62}$$

Por otro lado, de (4.58) y (4.61), y puesto que $j$ es una $\delta$-isometría, tenemos que

$$\begin{aligned}
&d\big(\Phi_{\alpha_{n(i)}(t_1)}(z_{n(i)}), \Phi_{\alpha_{n(i)}(t_2)}(z_{n(i)})\big)\\
&\quad\leq d\big(\Phi_{\alpha_{n(i)}(t_1)}(z_{n(i)}), (j\circ\Psi_{t_1})(y)\big) + d\big((j\circ\Psi_{t_1})(y), (j\circ\Psi_{t_2})(y)\big) + d\big((j\circ\Psi_{t_2})(y), \Phi_{\alpha_{n(i)}(t_2)}(z_{n(i)})\big)\\
&\quad< \left(\frac{\epsilon'}{6} + \eta_{n(i)}\right) + \Big(d\big(\Psi_{t_1}(y), \Psi_{t_2}(y)\big) + \delta\Big) + \left(\frac{\epsilon'}{6} + \eta_{n(i)}\right)\\
&\quad< 2\left(\frac{\epsilon'}{6} + \eta_{n(i)}\right) + \left(\frac{\epsilon'}{12} + \delta\right) < \frac{10}{12}\epsilon' < \epsilon', \text{ ya que } \delta < \frac{\epsilon'}{12}.
\end{aligned}$$

Lo que contradice (4.62). Por lo tanto,

$$\lim_{i\to\infty} \alpha_i^{-1}(w_i) = +\infty.$$

Análogamente se muestra que $\lim_{i\to\infty} \alpha_i^{-1}(-w_i) = -\infty$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$ considere $v_i = \min\big\{|\alpha_i^{-1}(-w_i)|, \alpha_i^{-1}(w_i)\big\}$. De (4.60), tenemos que

$$d\big(\Phi_{\alpha_i(t)}(z_i), \Phi_{\alpha_i(t)}(z)\big) < \beta_i, \text{ para cada } t \in [-v_i, v_i], \text{ y cada } i \in \mathbb{N}, \tag{4.63}$$

donde $\lim_{i\to\infty} v_i = +\infty$. De (4.58) y (4.63),

$$\begin{aligned} d\big(\Phi_{\alpha_i(t)}(z), (j\circ\Psi_t)(y)\big) &\leq d\big(\Phi_{\alpha_i(t)}(z), \Phi_{\alpha_i(t)}(z_i)\big) + d\big(\Phi_{\alpha_i(t)}(z_i), (j\circ\Psi_t)(y)\big) \\ &< \beta_i + \Big(\frac{\epsilon'}{6} + \eta_i\Big) = \frac{\epsilon'}{6} + (\beta_i + \eta_i), \end{aligned}$$

para cada $t \in [-k_i, k_i]$, donde $k_i = \min\{T_i, v_i\}$. Por lo tanto, $z \in A_{y,\beta_i+\eta_i,k_i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$, esto es, $z \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_{y,\beta_i+\eta_i,k_i}$. De (d), tenemos que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_{y,\beta_i+\eta_i,k_i} = A_y$, ya que $(\beta_i+\eta_i) \to 0$ y $k_i \to +\infty$ cuando $i \to \infty$. Así, $z \in A_y$.

Por otro lado, de la continuidad de la función $w \in X \mapsto d(w, A_y)$, de (4.57), y haciendo $i \to \infty$ en (4.56), tenemos que

$$d(z, A_y) \geq \lambda > 0.$$

Lo cual es una contradicción puesto que $z \in A_y$. Esto completa la prueba del Lema 21. □

**Lema 22.** *Para cada $y \in Y$, para cada $\lambda > 0$, existen $\delta > 0$ tal que para cada $y' \in Y$,*

$$\textit{si } d(y', y) < \delta \textit{ entonces } A_{y'} \subseteq B(A_y, \lambda).$$

*Donde, $B(A_y, \lambda) = \big\{w \in X; d(w, A_y) < \lambda\big\}$.*

*Demostración.* Dados $\lambda > 0$ y $y \in Y$, del Lema 21, existen $\eta_y, T_y > 0$ tales que

$$A_{y,\eta_y,T_y} \subseteq B(A_y, \lambda), \tag{4.64}$$

De la continuidad uniforme de $j : Y \to X$ (puesto que $j$ es continua y $Y$ es un espacio métrico compacto), para $\eta_y$ existe $\eta'_y > 0$ tal que, para cada $w_1, w_2 \in Y$,

$$\text{si } d(w_1, w_2) < \eta'_y \text{ entonces } d\big(j(w_1), j(w_2)\big) < \frac{\eta_y}{2}. \tag{4.65}$$

Para este $y \in Y$, existe $\delta_y > 0$ tal que para cada $y' \in Y$,

$$\text{si } y' \in B_{\delta_y}(y) \text{ entonces, } d\big((j\circ\Psi_t)(y), (j\circ\Psi_t)(y')\big) < \frac{\eta_y}{2}\ \forall t \in [-T_y, T_y]. \tag{4.66}$$

En efecto, como $\Psi|_{[-T_y,T_y]\times Y}$ es uniformemente continua, para $\eta_y' > 0$ existe $\delta_y > 0$ tal que, para cada $\omega_1, \omega_2 \in Y$,

$$\text{si } d(\omega_1,\omega_2) < \delta_y \text{ entonces }, d\big(\Psi_t(\omega_1), \Psi_t(\omega_2)\big) < \eta_y' \text{ para cada } t \in [-T_y, T_y].$$

En particular, para cada $\omega \in Y$,

$$\text{si } d(\omega, y) < \delta_y \text{ entonces }, d\big(\Psi_t(\omega), \Psi_t(y)\big) < \eta_y' \text{ para cada } t \in [-T_y, T_y].$$

Así, de (4.65), para cada $\omega \in Y$,

$$\text{si } d(\omega, y) < \delta_y, \text{ entonces } d\big((j \circ \Psi_t)(\omega), (j \circ \Psi_t)(y)\big) < \frac{\eta_y}{2}, \tag{4.67}$$

para cada $t \in [-T_y, T_y]$.

Sea $y' \in Y$ tal que $d(y', y) < \delta_y$. Sea $x \in A_{y',\eta_y/2,T_y}$. Entonces existe $\alpha \in \mathrm{Rep}^+$ tal que

$$d\big(\Phi_{\alpha(t)}(x), (j \circ \Psi_t)(y')\big) < \frac{\epsilon'}{6} + \frac{\eta_y}{2}, \text{ para cada } t \in [-T_y, T_y]. \tag{4.68}$$

Por lo tanto, como $d(y', y) < \delta_y$, de (4.67) y (4.68), tenemos que

$$d\big(\Phi_{\alpha(t)}(x), (j \circ \Psi_t)(y)\big) < \frac{\epsilon'}{6} + \eta_y, \text{ para cada } t \in [-T_y, T_y].$$

Así, $x \in A_{y,\eta_y,T_y}$. Por lo tanto,

$$A_{y',\eta_y/2,T_y} \subseteq A_{y,\eta_y,T_y}, \text{ para cada } y' \in B_{\delta_y}(y). \tag{4.69}$$

En particular, como $A_{y'} \subseteq A_{y',\eta_y/2,T_y}$ y de (4.64),

$$A_{y'} \subseteq B(A_y, \lambda), \text{ para cada } y' \in B_{\delta_y}(y).$$

Esto completa la prueba. □

**Lema 23.** *Sean $y \in Y$, $z \in X$ y un par de sucesiones $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tales que $z_n \in A_{y_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Entonces $z \in A_y$.*

*Demostración.* Considere una sucesión $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (0, +\infty)$ tal que $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$. Del Lema 21, para cada $k \in \mathbb{N}$, existen $\eta_k, T_k > 0$ tales que

$$A_{y,\eta_k,T_k} \subseteq B(A_y, \lambda_k). \tag{4.70}$$

De la continuidad uniforme de $j : Y \to X$, puesto que $j$ es continua y $Y$ es un espacio métrico compacto, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $\eta_k' > 0$ tal que para cada $w, w' \in Y$,

$$\text{si } d(w, w') < \eta_k' \text{ entonces } d\big(j(w), j(w')\big) < \frac{\eta_k}{2}. \tag{4.71}$$

Como $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, existe alguna subsucesión $(y_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$d\big(\Psi_t(y), \Psi_t(y_{n(k)})\big) < \eta'_k, \text{ para cada } t \in [-T_k, T_k], \text{ y cada } k \in \mathbb{N}. \tag{4.72}$$

En efecto, como $\Psi|_{[-T_k,T_k]\times Y}$ es uniformemente continua, para $\eta'_k$, existe $\delta_k > 0$ tal que, para cada $(t,p),(s,q) \in [-T_k,T_k] \times Y$,

$$\text{si } |t-s| + d(p,q) < \delta_k, \text{ entonces } d\big(\Psi(t,p), \Psi(s,q)\big) < \eta'_k.$$

En particular, para cada $p, q \in Y$,

$$\text{si } d(p,q) < \delta_k, \text{ entonces } d\big(\Psi_t(p), \Psi_t(q)\big) < \eta'_k \text{ para cada } t \in [-T_k, T_k].$$

Así, para cada $w \in Y$,

$$\text{si } d(w,y) < \delta_k, \text{ entonces } d\big(\Psi_t(y), \Psi_t(w)\big) < \eta'_k \text{ para cada } t \in [-T_k, T_k].$$

Como $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $n(k) \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n(k)$ entonces $d(y_n, y) < \delta_k$. Podemos elegir los $n(k)$ tales que $n(1) < n(2) < n(3) < \cdots$.

Como $z_{n(k)} \in A_{y_{n(k)}} \subseteq A_{y_{n(k)},\eta_k/2,T_k}$, existe $\alpha_k \in \mathrm{Rep}^+$ tal que

$$d\big(\Phi_{\alpha_k(t)}(z_{n(k)}), (j\circ\Psi_t)(y_{n(k)})\big) < \frac{\epsilon'}{6} + \frac{\eta_k}{2}, \text{ para cada } t \in [-T_k, T_k]. \tag{4.73}$$

De (4.71) y de (4.72), tenemos que

$$d\big((j\circ\Psi_t)(y), (j\circ\Psi_t)(y_{n(k)})\big) < \frac{\eta_k}{2}, \text{ para cada } t \in [-T_k, T_k], \text{ y cada } k \in \mathbb{N}. \tag{4.74}$$

Así, de (4.73) y de (4.74),

$$d\big(\Phi_{\alpha_k(t)}(z_{n(k)}), (j\circ\Psi_t)(y)\big) < \frac{\epsilon'}{6} + \eta_k, \text{ para cada } t \in [-T_k, T_k].$$

Esto es, $z_{n(k)} \in A_{y,\eta_k,T_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. De (4.70),

$$d(z_{n(k)}, A_y) < \lambda_k, \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Como $\lim_{k\to\infty} z_{n(k)} = z$ y $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$, y de la continuidad de $w \in X \mapsto d(w, A_y)$, tenemos que $d(z, A_y) = 0$. Así, $z \in \overline{A_y}$. Puesto que $A_y$ es un conjunto cerrado, esto es, $\overline{A_y} = A_y$; concluimos que $z \in A_y$. □

Defina la función multivaluada $g : Y \rightsquigarrow X$, por

$$g(y) = A_y \text{ para cada } y \in Y.$$

Del Lema 22, tenemos que $g$ es una función multivaluada semicontinua superior, y de (2), $g$ tiene valores cerrados.

**Lema 24.** *Para cada $y \in Y$, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para cada $y' \in Y$,*

$$\textit{si } d(y', y) < \delta \textit{ y } d_H\big(g(y'), g(y)\big) < \delta, \textit{ entonces } d\big(h(y'), h(y)\big) < \epsilon.$$

*Demostración.* Supongamos, por reducción al absurdo, que existen $y_0 \in Y$ y $\epsilon_0 > 0$ tales que, para cada $\delta > 0$, existe $y_\delta \in Y$ tal que

$$d(y_\delta, y_0) < \delta,\ d_H\big(g(y_\delta), g(y_0)\big) < \delta,\ \text{y } d\big(h(y_\delta), h(y_0)\big) \geq \epsilon_0.$$

En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in Y$ tal que

$$d(y_n, y_0) < \frac{1}{n} \ \text{ y } \ d_H\big(g(y_n), g(y_0)\big) < \frac{1}{n}, \tag{4.75}$$

$$d\big(h(y_n), h(y_0)\big) \geq \epsilon_0 \tag{4.76}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y_0 \tag{4.77}$$

De la compacidad de $X$, tomando subsucesiones si es necesario, podemos suponer que

$$\lim_{n\to\infty} h(y_n) = z^* \text{ para algún } z^* \in X. \tag{4.78}$$

De (4.77), (4.78), y del Lema 23, $z^* \in A_{y_0}$.

Sea $z$ un punto cualquiera de $A_{y_0}$. De (4.75), tenemos que

$$A_{y_0} \subseteq B(A_{y_n}, 1/n) \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $w_n \in A_{y_n}$ tal que $d(z, w_n) < 1/n$. En particular,

$$\lim_{n\to\infty} w_n = z. \tag{4.79}$$

Como $w_n \in A_{y_n}$, de la definición de $h(y_n)$, existe $t_n \in [0, 2\epsilon]$ tal que

$$\Phi(t_n, w_n) = h(y_n) \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{4.80}$$

Por la compacidad de $[0, 2\epsilon]$, considerando alguna subsucesión si es necesario, podemos suponer que

$$\lim_{n\to\infty} t_n = t^* \text{ para algún } t^* \in [0, 2\epsilon]. \tag{4.81}$$

De (4.78), (4.79), y (4.81), y de la continuidad de $\Phi$ en (4.80), tenemos que

$$\Phi(t^*, z) = z^*.$$

Por lo tanto, $z^* = h(y_0)$. Además, de (4.76) y (4.78),

$$d\big(z^*, h(y_0)\big) \geq \epsilon_0 > 0.$$

Lo cual es una contradicción. Por tanto, el lema está probado. $\square$

Por lo tanto, $h : Y \to X$ es una función $\mathcal{H}$-continua. Así, el flujo $(X, \Phi)$ es topológicamente $GH$-estable. □

## 4.3. Demostración del Teorema 3

*Demostración del Teorema 3.* Considerando todo lo hecho en la demostración del Teorema 2, excepto la parte final. Específicamente, en la demostración del Teorema 2, cambiando el Lema 24 por el siguiente lema, Lema 25, probaremos el Teorema 3.

**Lema 25.** *La función $h : Y \to X$ es continua sobre un subconjunto residual de $Y$.*

Notemos que, como $Y$ es un espacio métrico compacto (por lo tanto, métrico completo), del teorema de Baire $h : Y \to X$ es una función continua sobre un subconjunto denso de $Y$.

*Demostración del Lema 25.* Dado que $X$ y $Y$ son espacios métricos compactos, en particular, estos son espacios métricos completos y separables. Así, del Teorema 1.4.13 de [8], como $g : Y \rightsquigarrow X$ es una función multivaluada semicontinua superior, tenemos que existe un subconjunto residual $R$ de $Y$ tal que $g$ es a la vez, semicontinua superior y semicontinua inferior (como función multivaluada), sobre cada punto de $R$.

Mostremos la continuidad de $h : Y \to X$ en $R$. Sea $y \in R$. Sean $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$, y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, sucesiones tales que $z_n = h(y_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ y que $z = h(y) = \ell(A_y)$. Mostremos que $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. De la compacidad de $X$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee alguna subsucesión convergente. Veamos que toda subsucesión convergente de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $z$. Sin pérdida de generalidad, tomando una subsucesión si es necesario, supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z' \text{ para algún } z' \in X. \tag{4.82}$$

Del Lema 23, como $z_n \in A_{y_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y como $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, entonces $z' \in A_y$. Mostremos que $z' = \ell(A_y)$. Sea $x \in A_y$, un punto cualquiera de $A_y$. De la semicontinuidad inferior de $g$ en $y$ (Definición 8), tenemos que existe una sucesión $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que,

(i) $\omega_n \in A_{y_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$; y

(ii) $\lim_{n\to\infty} \omega_n = x$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, de la definición de $h(y_n) = z_n$ y de (i), tenemos que existe $t_n \in [0, 2\epsilon]$ tal que

$$\Phi(t_n, \omega_n) = z_n. \tag{4.83}$$

De la compacidad de $[0, 2\epsilon]$, existe $t_0 \in [0, 2\epsilon]$ y existe alguna subsucesiones $(t_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que,

$$\lim_{n\to\infty} t_{k(n)} = t_0, \tag{4.84}$$

donde $t_0 \in [0, 2\epsilon]$. De la continuidad de $\Phi$, de (4.82), (4.83), (4.84) y (ii), tenemos que

$$\Phi(t_0, x) = z'.$$

Por lo tanto, $z' = z = h(y)$. Así, cada subsucesión de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $z = h(y)$. Por ende,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z,$$

esto es, $h$ es continua en $y \in R$. □

Por lo tanto, $(X, \Phi)$ es $\sigma$-topológicamente $GH$-estable. □

## 4.4. Demostración del Teorema 4

Todos los flujos considerados estarán definidos sobre espacios métricos compactos. Del Teorema 1 tenemos que dados dos flujos $(X, \Phi)$ y $(Y, \Psi)$, $D_{GH^0}(\Phi, \Psi) = 0$ si, y solo si $\Phi$ y $\Psi$ son flujos isométricos entre sí.

**Observación 3.** Dados dos flujos $(X, \Phi)$ y $(Y, \Psi)$, estos son isométricos entre sí si, y solamente si, existen $a > 0$ y $h : X \to Y$, isometría, tales que

$$h \circ \Phi_t = \Psi_t \circ h \text{ para cada } t \in [0, a]. \tag{4.85}$$

En efecto, de (4.85), para cada $t \in [0, a]$ tenemos que

$$h \circ \Phi_{2t} = (h \circ \Phi_t) \circ \Phi_t = (\Psi_t \circ h) \circ \Phi_t = \Psi_t \circ (h \circ \Phi_t) = \Psi_t \circ (\Psi_t \circ h) = \Psi_{2t} \circ h.$$

Por lo tanto, procediendo inductivamente, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, y para cada $t \in [0, a]$,

$$h \circ \Phi_{nt} = \Psi_{nt} \circ h.$$

Así, $h \circ \Phi_s = \Psi_s \circ h$ para cada $s \in [0, n]$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por ende,

$$h \circ \Phi_t = \Psi_t \circ h, \text{ para cada } t \in [0, +\infty). \tag{4.86}$$

Como $h \circ \Phi_t = \Psi_t \circ h$ implica que $\Psi_{-t} \circ h = h \circ \Phi_{-t}$; de (4.86), tenemos que

$$h \circ \Phi_t = \Psi_t \circ h, \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

*Demostración del Teorema 4.* Dado que $(X, \Phi)$ y $(X', \Phi')$ son flujos isométricos entre sí, entonces existe alguna isometría (sobreyectiva) $\nu : X' \to X$ tal que

$$\Phi_t = \nu \circ \Phi'_t \circ \nu^{-1} \text{ para cada } t \in \mathbb{R}. \tag{4.87}$$

Sea $\epsilon > 0$. Para este $\epsilon$, de la $GH$-estabilidad topológica de $(X, \Phi)$, existe $\delta > 0$. Sea $(Y', \Psi')$ un flujo definido sobre un espacio métrico compacto $Y'$, tal que

$$D_{GH^0}(\Psi', \Phi') < \delta/2.$$

De (4.87) y de la propiedad (3) del Teorema 1, $D_{GH^0}(\Phi, \Phi') = 0$. De la propiedad (5) del Teorema 1, esto es, de la "desigualdad triangular", tenemos que

$$D_{GH^0}(\Phi, \Psi') \leq 2 \cdot \big(D_{GH^0}(\Phi, \Phi') + D_{GH^0}(\Phi', \Psi')\big) < 2 \cdot \frac{\delta}{2} = \delta,$$

Entonces, por la elección de $\delta$, existe alguna $\epsilon$-isometría $h' : Y' \to X$, que lleva órbitas de $\Psi'$ en órbitas de $\Phi$, y que es $\mathcal{H}$-continua. Esto es, existe alguna función multivaluada $g' : Y' \rightsquigarrow X$, con valores cerrados, y semicontinua superior tal que,

- $h'(y) \in g'(y)$ para cada $y \in Y'$; y
- para cada $y \in Y'$ se tiene que para cada $\eta > 0$, existe $\sigma > 0$ tal que para cada $z \in Y'$,

$$\text{si } d(z, y) < \sigma \text{ y } d_H\big(g'(z), g'(y)\big) < \sigma, \text{ entonces } d\big(h'(z), h'(y)\big) < \eta.$$

Definamos la función $h : Y' \to X'$ por

$$h = \nu^{-1} \circ h';$$

y la función multivaluada $g : Y' \rightsquigarrow X'$ por,

$$g(y) = \nu^{-1}(g'(y)) = \big\{\nu^{-1}(r); r \in g'(y)\big\} \text{ para cada } y \in Y'. \tag{4.88}$$

Como $h'$ es una $\epsilon$-isometría, y puesto que $\nu^{-1}$ es una isometría, tenemos que $h = \nu^{-1} \circ h'$ es una $\epsilon$-isometría. Como $h'$ lleva órbitas de $\Psi'$ en órbitas de $\Phi$, y ya que, de (4.87), $\nu^{-1}$ lleva órbitas de $\Phi$ en órbitas de $\Phi'$, tenemos que $h = \nu^{-1} \circ h'$ lleva órbitas de $\Psi'$ en órbitas de $\Phi'$. Además, puesto que $h'$ es $\mathcal{H}$-continua, y dado que $\nu^{-1}$ es una isometría, entonces $h$ es $\mathcal{H}$-continua. En efecto, basta mostrar las dos afirmaciones siguientes.

*Afirmación 1.* La función multivaluada $g$ es semicontinua superior, y tiene valores cerrados.

*Afirmación 2.* La función $h$ es $\mathcal{H}$-continua.

*Prueba de la Afirmación 1.* De la definición de $g$, en (4.88), tenemos que $g(y)$ es un subconjunto cerrado de $X'$, ya que $\nu^{-1}$ es una isometría (en particular, un homeomorfismo), y ya que $g'$ es una función multivaluada con valores cerrados.

Dados $y \in Y'$ y $\lambda > 0$, como $g'$ es una función multivaluada semicontinua superior, existe $\delta > 0$ tal que para cada $y' \in Y'$,

$$\text{si } d(y', y) < \delta \text{ entonces } g'(y') \subseteq B\big(g'(y), \lambda\big).$$

Dado $y' \in Y'$, tal que $d(y', y) < \delta$, se tiene que

$$g'(y') \subseteq B\big(g'(y), \lambda\big). \tag{4.89}$$

Sea $z \in g(y')$, entonces $\nu(z) \in g'(y')$. Así, de (4.89), existe $w \in g'(y)$ tal que $d\big(\nu(z), w\big) < \lambda$. Por lo tanto, $d(z, \nu^{-1}(w)) < \lambda$, con $\nu^{-1}(w) \in g(y)$. Por lo tanto,

$$g(y') \subseteq B\big(g(y), \lambda\big).$$

Así, para cada $y' \in Y'$,

$$\text{si } d(y', y) < \delta \text{ entonces } g(y') \subseteq B\big(g(y), \lambda\big).$$

Por lo tanto, $g$ es semicontinua superior. □

*Prueba de la Afirmación 2.* Sea $y \in Y'$. Dado $\eta > 0$, como $h'$ es $\mathcal{H}$-continua, existe $\sigma > 0$ tal que para cada $y' \in Y'$,

$$\text{si } d(y', y) < \sigma \text{ y } d_H\big(g'(y'), g'(y)\big) < \sigma, \text{ entonces } d\big(h'(y'), h'(y)\big) < \eta. \tag{4.90}$$

Sea $y' \in Y'$ tal que $d(y', y) < \sigma$ y $d_H\big(g(y'), g(y)\big) < \sigma$. Entonces,

$$\nu^{-1}\big(g'(y')\big) \subseteq B\big(\nu^{-1}(g'(y)), \sigma\big) \text{ y } \nu^{-1}\big(g'(y)\big) \subseteq B\big(\nu^{-1}(g'(y')), \sigma\big).$$

Por lo tanto, ya que $\nu$ es una isometría, tenemos que

$$g'(y') \subseteq B\big(g'(y), \sigma\big) \text{ y } g'(y) \subseteq B\big(g'(y'), \sigma\big).$$

Esto es, $d_H\big(g'(y'), g'(y)\big) < \sigma$. Así, como $d(y', y) < \sigma$, de (4.90), $d\big(h'(y'), h'(y)\big) < \eta$. Por ende, como $\nu^{-1}$ es una isometría,

$$d\big(h(y'), h(y)\big) = d\big(\nu^{-1}(h'(y')), \nu^{-1}(h'(y))\big) = d\big(h'(y'), h'(y)\big) < \eta.$$

Así, hemos mostrado que, para cada $y' \in Y'$,

$$\text{si } d(y', y) < \sigma \text{ y } d_H\big(g(y'), g(y)\big) < \sigma, \text{ entonces } d\big(h(y'), h(y)\big) < \eta.$$

De la Afirmación 1, $g$ es una función multivaluada semicontinua superior, y con valores cerrados. Además,

$$h(w) \in g(w) \text{ para cada } w \in Y',$$

ya que $h'(w) \in g'(w)$ para cada $w \in Y'$, y puesto que $\nu^{-1}$ es una isometría. Por lo tanto, $h$ es una función $\mathcal{H}$-continua. □

Así, $(X', \Phi')$ es topológicamente $GH$-estable. □

## 4.5. Demostración del Teorema 5

*Demostración del Teorema 5.* Dado que $(X, \Phi)$ y $(X', \Phi')$ son flujos isométricos entre sí, existe alguna isometría (sobreyectiva) $v : X' \to X$ tal que

$$\Phi_t = v \circ \Phi'_t \circ v^{-1} \text{ para cada } t \in \mathbb{R}. \tag{4.91}$$

Sea $\epsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ dado por la $GH$-estabilidad $\sigma$-topológica de $(X, \Phi)$. Sea $(Y', \Psi')$ un flujo definido sobre un espacio métrico compacto $Y'$, tal que

$$D_{GH^0}(\Psi', \Phi') < \delta/2.$$

De (4.91) y de la propiedad (3) del Teorema 1, $D_{GH^0}(\Phi, \Phi') = 0$. De la propiedad (5) del Teorema 1, esto es, de la "desigualdad triangular", tenemos que

$$D_{GH^0}(\Phi, \Psi') \leq 2 \cdot \big(D_{GH^0}(\Phi, \Phi') + D_{GH^0}(\Phi', \Psi')\big) < 2 \cdot \frac{\delta}{2} = \delta,$$

Entonces, por la elección de $\delta$, existe alguna $\epsilon$-isometría $h : Y' \to X$, que lleva órbitas de $\Psi'$ en órbitas de $\Phi$, y que es continua sobre un subconjunto residual $R$ de $Y'$. Así, puesto que $h$ es una $\epsilon$-isometría continua sobre $R \subseteq Y'$, y puesto que $v^{-1}$ es una isometría, tenemos que $v^{-1} \circ h : Y' \to X'$ es una $\epsilon$-isometría continua sobre $R$. Además, de (4.91), $v^{-1}$ lleva órbitas de $\Phi$ en órbitas de $\Phi'$. Por lo tanto, $v^{-1} \circ h$ lleva órbitas de $\Psi'$ en órbitas de $\Phi'$. Así, $(X', \Phi')$ es $\sigma$-topológicamente $GH$-estable. □

## 4.6. Demostración del Corolario 1

*Demostración del Corolario 1.* Supongamos que $D_{GH^0}(\Phi, \Psi) = 0$. Entonces $d_{GH^0}(\Phi_t, \Psi_t) = 0$ para cada $t \in [0, 1]$. En efecto, para cada $\delta > 0$, existen $\delta$-isometrías continuas $i_\delta : X \to Y$ y $j_\delta : Y \to X$ tales que

$$d_{C^0}(i_\delta \circ \Phi_t, \Psi_t \circ i_\delta) < \delta \text{ para cada } t \in [0, 1], \text{ y}$$

$$d_{C^0}(j_\delta \circ \Psi_t, \Phi_t \circ j_\delta) < \delta \text{ para cada } t \in [0, 1].$$

Así, para cada $t \in [0,1]$, $d_{GH^0}(\Phi_t, \Psi_t) \leq \delta$ para cada $\delta > 0$. Por lo tanto, $d_{GH^0}(\Phi_t, \Psi_t) = 0$ para cada $t \in [0,1]$. En particular, $d_{GH^0}(\Phi_1, \Psi_1) = 0$. Por lo tanto, de la Proposición 3.1.1 de [7], tenemos que $h(\Phi_1) = h(\Psi_1)$. Y por lo tanto, de la Proposición 6, puesto que $X$ y $Y$ son espacios métricos compactos tenemos que $h(\Phi) = h(\Phi_1)$ y $h(\Psi) = h(\Psi_1)$. Por ende, $h(\Phi) = h(\Psi)$. □

## 4.7. Demostración del Corolario 2

Esencialmente usaremos el hecho que el flujo suspensión de un homeomorfismo con la propiedad de sombreamiento (POTP) y expansividad preserva ambas propiedades. Y luego aplicaremos el Teorema 2 al flujo suspensión.

**Observación:** dado un homeomorfismo $f : X \to X$ expansivo con la propiedad de sombreamiento, entonces:

- Del Teorema 4 de [4], $f$ es homeomorfismo topológicamente estable.
- Del Teorema 4 de [3], tenemos que $f$ es un homeomorfismo topológicamente $GH$-estable.

Además, como el flujo suspensión de $f$, $\Phi^f$, aún posee la expansividad y la propiedad de sombreamiento, entonces:

- Del Teorema 3 de [1], $\Phi^f$ es un flujo topológicamente estable.
- Y del Teorema 2 tenemos que $\Phi^f$ es un flujo topológicamente $GH$-estable

*Demostración del Corolario 2.* Como $f$ es un homeomorfismo topológicamente estable (sobre una variedad compacta de dimensión $\geq 2$), entonces, del Teorema 11 de [4], $f$ tiene la propiedad de sombreamiento (POTP). Del Teorema 2 de [1] tenemos que el flujo suspensión de $f$, $\Phi^f$, tiene la propiedad de sombreamiento (POTP) para flujos. Además, como $f$ es un homeomorfismo expansivo, del Teorema 6 de [2], tenemos que $\Phi^f$ es un flujo expansivo. Así, del Teorema 2, puesto que $\Phi^f$ es un flujo expansivo con la propiedad de sombreamiento, tenemos que $\Phi^f$ es topológicamente $GH$-estable, y del Teorema 3 tenemos que $\Phi^f$ es $\sigma$-topológicamente $GH$-estable. □

# Bibliografía


[1] R.F. Thomas, *Stability properties of one-parameter flows*, Proc. London Math. Soc., (3) **45** (1982), 479-505.

[2] R. Bowen and P. Walters, *Expansive one-parameter flows*, J. Differential Equations, **12** (1972), 180-193.

[3] A. Arbieto, C. Morales, *Topological Stability from Gromov-Hausdorff viewpoint*, Discrete and continuous Dynamical System, **37** (2017), 3531-3544.

[4] P. Walters, *On the pseudo-orbit tracing property and its relationship to stability, The structure of attractors in dynamical systems* (Proc. Conf., North Dakota State Univ., Fargo, N.D.,), Lecture Notes in Math., Springer, Berlin **668** (1978), 231-244.

[5] A. Edrei, *On mapping which do not increase small distances*, Proc. London Math. Soc., **2** (1952), 272-278.

[6] M. Viana, K. Oliveira, *Fundamentos da Teoria Ergódica*; Rio de Janeiro: SBM 90 (2014).

[7] R. Cubas Becerra, *Propriedades de um homeomorfismo GH estável*, Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlandia. (2018).

[8] Jean-Pierre Aubin and Hélene Frankovska, *Set-Valued Analysis*, Reprint of the 1990 edition. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2009.

[9] R. Metzger, C. Morales and Ph. Thieullen, *Topological Stability in set-valued dynamics*, Discrete and continuous Dynamical System, **37** (2017), 1965-1975.

[10] M. Komuro, *One-parameter flow with the pseudo-orbit tracing property*, Monatsh. Math., (3) **98** (1984), 219-253.

[11] J. Munkres, *Topología*. 2ª. edición. Pearson Educación, S.A., Madrid 2002.

[12] G.E. Bredon, *Topology and Geometry*; Graduate Text in Mathematics 139. Springer-Verlag New York, Inc., 1993.

[13] E. Lima, *Espaços métricos*. 5.ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2015.

[14] S. Kinoshita, *On orbits of homeomorphisms*, Colloq. Math., **6** (1958).

[15] T. Downarowicz, X. Ye, *When every point is either transitive or periodic*, Colloq. Math., **93** (2002).

[16] L. Wen, *Differentiable Dynamical Systems. An introduction to Structural Stability and Hyperbolicity.* American Mathematical Society (2016).

[17] C. Robinson, *Dynamical Systems. Stability. Symbolic Dynamics, and Chaos*, CRC Press (1995).

[18] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Smooth Dynamical Systems*, Cambridge University Press (1995).

[19] M. Brin, G. Stuck, *Introduction to Dynamical System*, Cambridge University Press (2002).