UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE CIENCIAS

FENOMENOS NO-LINEALES. LA TRANSFORMACION DE BÄCKLUND Y LAS INTEGRALES DE HENON DE LA RED DE TODA.

TESIS

POR

HAROLD S. BLAS ACHIC

PARA OPTAR

EL TITULO DE:

LICENCIADO EN FISICA

LIMA - PERU

1994

A.

Mis Padres, ejemplares

Maestros.

NONLINEAR PHENOMENA. THE BACKLUND TRANSFORMATION AND THE HENON'S INTEGRALS OF TODA'S LATTICE.

Harold Blas.
Facultad de Ciencias
UNI.Lima-Perú

Abstract.

An introduction to nonlinear phenomena, starting with a simple generalization of the string wave equation is presented; following by a review of three remarkable nonlinear wave equations (Korteweg-de Vries, Sine-Gordon and Toda equations). In Chapters I and II we present the numerical solution for each equation .

The following Chapters are devoted to the Toda Lattice. A canonical transformation is presented, which gives the relation between two solutions of an exponential lattice. Using this relation a new solution can be obtained from a known solution. It is thus a discrete version of the Bäcklund transformation. Recursive application of the transformation provides an algebraic recursion formula for the solution. Using the recursion formula, two soliton solution is obtained (Chapter III); moreover, a method of approach to obtain N-soliton solutions is also presented (Chapter IV).

Chapter V shows the conservation laws from Bäcklund transformation, assuming the boundary condition

$$Q_n \longrightarrow \text{const.} \quad \text{as} \quad |n| \longrightarrow +\infty .$$

An explicit set of n integrals is given for a lattice of n particles with periodic boundary conditions, these are known as Hénon's type integrals (Chapter VI).

In the last part (Chapter VII), using integrals of Hénon's type, it is shown that the Toda's potential is the only possible one to make the system integrable, provided the assumption of the nearest neighbour interaction.

FENOMENOS NO LINEALES. LA TRANSFORMACION DE BACKLUND Y LAS INTEGRALES DE HENON DE LA RED DE TODA.

Harold Blas
Facultad de Ciencias
UNI.Lima-Perú

Resumen.

En el Cap.I se presenta una introducción a los fenómenos no-lineales, empezando con una simple generalización de la ecuación de la cuerda, siguiendo (Cap. II) con el estudio de tres ecuaciones diferenciales importantes (las ecuaciones de Korteweg-de Vries, Sine-Gordon y de Toda). También presentamos soluciones numéricas de cada ecuación.

En los siguientes capítulos estudiamos la Red de Toda. Se presenta una transformacion canónica, que proporciona una relación entre dos soluciones de la Red Exponencial. Usando esta relación, puede hallarse una nueva solución a partir de una solución conocida. Esta transformación es así una versión discreta de la transformación de Bäcklund. Una aplicación recursiva de dicha transformación da una relación algebraica y recursiva para las soluciones. Usando la relación recursiva se obtiene una solución 2-solitón (Cap. III). Además, se presenta un método para obtener una solución de tipo N-solitón (Cap. IV).

En el capítulo V se obtienen las leyes de conservación del sistema a partir de las Transformaciones de Bäcklund, asumiendo las condiciones de contorno:

$$Q_n \dashrightarrow \text{const.} \quad \text{cuando} \quad |n| \dashrightarrow +\infty .$$

Por otra parte, se presenta un conjunto de n Integrales explicitas para una red de n partículas con condiciones de contorno periodicas, éstas son conocidas como las Integrales de Hénon. (Cap. VI).

En la última parte (Cap. VII), usando las integrales de Hénon mostramos que el potencial de Toda, asumiendo que las particulas interactúan solamente con sus vecinas más próximas, es el único que permite que el sistema sea integrable.

PROLOGO

En las dos décadas pasadas se desarrolló una línea de investigación en la física que puede ser clasificada bajo la denominacion general de física no-lineal. Una extraordinaria manifestación de la naturaleza es la excitacion completamente no intuitiva llamada "el solitòn" , una forma de onda solitaria o región de transición.

El presente trabajo consta de tres partes bien definidas; en la primera parte, revisamos el concepto de onda y damos algunas definiciones de trabajo (capítulo I) que nos serviràn en el tratamiento general de ondas de tipo solitòn, luego en el capítulo II hacemos una visión general de las principales ecuaciones no-lineales que exhiben soluciones de tipo solitòn, además estudíamos el contexto en que surgen (La ecuacion de Korteweg y de Vries en hidrodinàmica (EKdeV), la ecuacion de Sine-Gordon en mecànica (ESG) y la ecuación de Toda en electromagnetismo y en una red anarmònica (ET)).

Tenemos información de hasta tres mètodos analíticos para resolver ecuaciones diferenciales no-lineales en diferencias (el Mètodo Inverso a la Dispersión (MID) [16], [5], la transformación de Bäcklund [15], [5] y la transformación de variable dependiente [19], [3]) que exhiben soluciones de tipo solitòn.

La transformación de Bäcklund es el tema de una parte de nuestro trabajo (capítulo III), lo aplicamos para resolver la ecuación de Toda y hallar soluciones de tipo multisolitòn (capítulo IV). La ecuación de Toda, fue la primera ecuación de su clase (ecuación diferencial en diferencias) que exhibió soluciones analíticas solitònicas; esta ecuación es un excelente modelo para estudiar el movimiento de una red unidimensional anarmònica. En el capítulo V usamos la transformación de Bäcklund para obtener sistemàticamente las leyes de conservación de una red infinita de Toda. En la última parte de nuestro trabajo, hallamos N integrales de Hènon de una red periodica de Toda (capítulo VI) y seguidamente demostramos la unicidad del potencial de Toda (capítulo VII) asumiendo integrales de Hènon para la red periodica de Toda.

Hemos desarrollado el mètodo de las diferencias finitas para las tres ecuaciones antes mencionadas y los correspondientes programas en Pascal se dan al final del capítulo II.

Estos programas fueron ejecutados en el centro de còmputo del grupo de Física Teòrica de la UNI y finalmente en el centro de còmputo de la Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad de Ancash (UNASAM) a quienes agradezco su buena disposiciòn.

Menciòn especial merece mi reconocimiento al Profesor Holger Valquí, por su invalorable apoyo en la consecuciòn del presente trabajo; su constancia en el trabajo, la abundante informaciòn en artículos y libros sobre el tema que me concediò y sus acertadas orientaciones y críticas hicieron posible el desarrollo del presente trabajo. Mi gratitud a los profesores A. Bernul y H. Sanchez, quienes en sus sucesivos viajes trajeron artículos que en nuestro medio no disponemos.

Agradezco a la Srta. Yudy Blas por el mecanografiado del borrador y a Alejandro Sullòn por su mecanografiado en computadora.

Harold Blas A.

Huaraz, Agosto 1991

INTRODUCCION

Haremos una breve descripción cualitativa y una vista retrospectiva al surgimiento del concepto del solitón a través de los ultImos 150 años de la fIsica, y ver por què algunos cientIfIcos hoy dIa ven en la fIsica no-lineal la más Importante frontera en la investigación de las leyes fundamentales de la naturaleza [18]. Antes de revisar la historia de la no-linealidad, veamos donde radica la dificultad de ésto. En problemas fIsicos, donde trabajamos con ondas, estamos acostumbrados a la asunción de que si nosotros doblamos la intensidad de la fuente, tendremos la misma clase de respuestas simplemente doblando en cantidad los resultados anteriores, es decir tenemos una relación lineal. Estamos familiarizados con sistemas de audio en el que la distorsión de las señales son debidos a la sobrecarga. Qué está sucediendo ? , pues, como la Intensidad de la fuente viene a ser más grande, el resultado de la emisión de ondas no está constituido solamente de suma de respuestas sino de sumas y productos de sumas, asi por el estilo, hasta el infinito. AsI no-lInealmente. Es sabido que el oIdo humano tiene una respuesta alineal de modo que cuando se producen 2 tonos a la vez, se perciben estos 2 tonos originales junto con otros adicionales originados por la alinealidad de dicho órgano. Estos son los llamados tonos de combinacIón y resultan de la intermodulación de los tonos aplicados, por ejemplo si $W1$ y $W2$ son las frecuencias originales tendremos, $W1 \pm W2$, $2W1$, $W1$, $W2$, etc, como respuesta. Transformada de Fourier, superposición de modos de oscilación, análIsis espectral; ninguna de las más apreciadas herramientas de trabajo tradicionales sirvieron para el estudio adecuado de estos fenómenos.

La observacIón de ondas solitarias se remonta al menos hasta 1838, cuando J. Scott Russel observó primero en un estrecho canal de lancha "una abultada elevación solitaria, suave y bien definido montón de agua que proseguIa su curso a lo largo del canal, aparentemente sin cambiar de forma o disminuir de velocidad" [19]. Extraordinariamente, esta hermosa onda coherente se formaba fuera de toda la turbulencia como resultado de la frenada y parada de un bote de canal; Russel persigulo esta onda solitaria montado en su caballo por una o dos millas, eventualmente perdiéndose la onda en un canal sinuoso. El derivó una expresión para la velocidad de una onda solitaria en un canal de profundidad uniforme y propuso que la onda no se destruye bajo condiciones ideales. En contraste, la autoridad en hidrodinámica en aquel tiempo, George B. Airy, insistía en que no existían ondas solitarias. Esta controversia sobrevivió hasta 1895, cuando D. J. Korteweg y G. de Vries derivaron, a partir de las ecuaciones de Euler de la hidrodinàmica (ecuaciones no-lineales), ondas de gran estabilidad; ondas que son, en efecto, permanentes, que se mueven con velocidades proporcionales a sus amplitudes, en concordancia con las observaciones.

Esto està , asi en contra de la intuición y el sentido comùn, nosotros esperamos que estas ondas de agua se desarrollen y recorran alguna distancia corta y finalmente se destruyan; que una coherente elevaciòn o protuberancia pueda formarse fuera de la turbulencia y tener una estabilidad para mantenerse por algunas millas, es una cosa no menos asombrosa. En efecto, los solitones y sus "primos" las ondas solitarias estàn presentes en muchas àreas de la fìsica hoy en dia. Dos factores han atraido nuestra atenciòn a esta antigua pero nuevo campo hoy dia de la fisica no-lineal: Primero, muchas dècadas atràs tenemos atacando sistemas fisicos complicados y màs complicados dentro del comportamiento lineal. Segundo, mètodos de simulaciòn en modernas computadoras nos han dado herramientas para exhibir los fenòmenos especialmente coherentes, fàcil y ràpidamente en un trabajo que podria tomar centurias con actuales pruebas experimentales.

Estos factores han permitido desarrollar mètodos analiticos para resolver ecuaciones diferenciales no-lineales, uno de los cuales aplicaremos a la ecuaciòn de Toda en el presente trabajo.

CAPITULO I

FENOMENOS ONDULATORIOS

CAPITULO I

1. FENOMENOS ONDULATORIOS

El concepto de onda es parte esencial de la física contemporánea, incluyendo la electrodinámica, la óptica y la teoría cuántica [1].

Qué es exactamente una onda? No es posible dar una única y precisa definición.

Muchas definiciones restrictivas pueden darse; abarcar todos los fenómenos ondulatorios en busca de una definición breve y univoca para la onda sería inutil. En el mejor de los casos, semejante definición refleja una o varias peculiaridades, rasgos y cualidades de la onda, más o menos importantes; parece preferible guiarse, por la vision intuitiva de que una onda es alguna 'señal' reconocible que es transferida de una parte de una región del espacio a otra con una definida velocidad de propagación.

Esta 'señal' puede ser alguna característica de la perturbación, por ejemplo, un máximo o un cambio abrupto en una magnitud que pueda proveer un claro reconocimiento y su ubicación en un tiempo determinado.

Esto puede parecer un poco vago pero es adecuado y algún intento de precisar mejor aparece como muy restrictivo; diferentes características son importantes en diferentes tipos de onda.

No obstante uno puede realizar las siguientes clasificaciones: la primera por la forma de la ecuación de onda, en hiperbolicas y no-hiperbólicas; la segunda, por la forma que toman las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales lineales, en dispersivas y no-dispersivas.

1.1.- Ondas Hiperbólicas.

Las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden de **tipo hiperbólico** se encuentran con mayor frecuencia en los problemas físicos relacionados con procesos oscilatorios. Una ecuación diferencial de 2do. orden con 2 variables independientes, de la forma

$$a_{11} U_{xx} + 2 a_{12} U_{xt} + a_{22} U_{tt} + F(x,t,U,U_x,U_t)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.1)$$

a_{11}, a_{12}, a_{22} son funciones de x y t; se llamará de **tipo hiperbólico** en el punto M(x,t) si en en éste punto: $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} > 0$.

(*) U_{tt}, U_{xx}, U_{xt} etc. como es usual indican derivadas parciales.

1.2.- Ondas no-hiperbólicas.

Estas ecuaciones no toman la forma señalada anteriormente, pero surgen en el estudio de procesos oscilatorios. Ejemplos:

$$U_t - U_{xx} = 0$$

$$U_t + 6\,U\,U_x + U_{xxx} = 0$$

$$i\,U_t + i\,3\alpha\,|U|^2\,U_x + \beta\,U_{xx} + i\sigma\,U_{xxx} + \delta\,|U|^2U = 0 \;\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.2)$$

α, β, σ y δ son constantes.

2.1.- La segunda clasificación no puede ser caracterizado fácilmente, pero desde que estas nacen de **ondas dispersivas** en problemas lineales, podemos referirnos a todas ellas como **dispersivas** y paulatinamente construir un completo panorama.

El prototipo para ondas dispersivas está basado en el tipo de solución antes que en el tipo de ecuación. Un sistema lineal dispersivo es algún sistema que admite soluciones de la forma

$$U(x,t) = a.\cos(kx-Wt),\ \text{con}\ \ W''(k) \neq 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.3)$$

Donde la frecuencia es una función real definida del número de onda k y W(k) es determinado por el sistema particular. La velocidad de fase es entonces W(k)/k y las ondas son usualmente llamadas "dispersivas" si esta velocidad de fase no es una constante. Una solución más general consistirá de la superposición de muchos modos iguales a (1.3) con diferente k (en el caso general una integral de Fourier es desarrollado de (1.3)). Si la velocidad de fase no es la misma para todo k, esto es, **$W \neq ck$**, donde c = const., los modos con diferente k se propagarán a velocidades diferentes; ellos se dispersarán. Ejemplos:

$$U_t + 2\,U_x + U_{xxx} = 0$$

$$U_{xx} - U_{tt} = U$$

Hay algún traslape en que cierto movimiento ondulatorio exhibe dos tipos de comportamiento. Observamos que (1.3) es solución de la ecuación hiperbólica $U_{xx} - U_{tt} = 0$, con W = ck, pero estos casos están excluidos de la clasificación dispersiva por la condición $W''(k) \neq 0$. Sin embargo no es difícil hallar casos de traslape genuino en que las ecuaciones hiperbólicas dan soluciones de la forma (1.3) con la relación $W = W(k)$ no trivial.

Uno de tales ejemplos es la ecuación de Klein-Gordon

$$U_{xx} - U_{tt} = U \quad \text{...} (1.4)$$

Esta es hiperbólica, sin embargo (1.3) es una solución de (1.4) con $W^2 = k^2+1$. Este dual comportamiento es limitado relativamente a pocos casos.

2.2.-Ondas no-dispersivas.

En este conjunto tenemos toda la variedad de ecuaciones no-lineales. También, tenemos en este conjunto las ecuaciones lineales que no admiten (1.3) como solución. Ejemplos:

$$(U + \theta).(U_{tt}-U_{xx}) - (U_t^2-U_x^2) = 0 \quad , \ \theta=\text{const.}$$

$$U_t + 6\,U\,U_x + U_{xxx} = 0$$

$$U_{tt} - U_{xx} = 0$$

$$U_t + U_{xx} + U_{txx} = 0$$

Antes de entrar al estudio de algunas ecuaciones, veamos primero el aparato conceptual que nos servirá para estudiar fenómenos ondulatorios en el presente trabajo.

Definimos un campo físico $\phi: R^{3+1} \longrightarrow R$; este campo por su generalidad nos permite representar el comportamiento de una onda; podemos dar algunas definiciones de trabajo y luego particularizar para $U : R^{1+1} \longrightarrow R$; U en adelante será solución de una ecuación diferencial.

$$\phi[k] =\{ (x,y,z,t) \ / \ \phi(x,y,z,t) = k\}; \quad \text{...} (1.5)$$

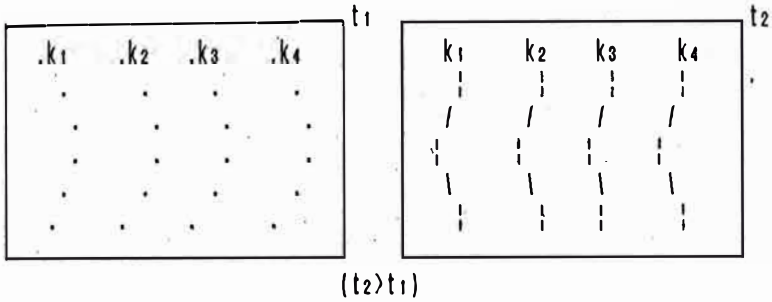
$\phi[k] \longrightarrow$ equipotencial físico o frente de onda.

sea $\phi_t(\bar{r}) \equiv \phi(\bar{r},t)$; $\phi_t : R^3 \longrightarrow R$

Luego:

$$\phi_t[k] = \{ (x,y,z) \ / \ \phi(x,y,z,t) = k\} \quad \text{...} (1.6)$$

Ver Fig. 1



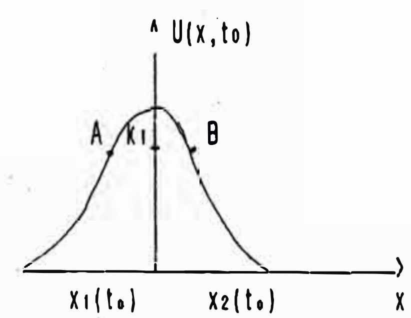
Figs.1 Frentes de onda que se deforman en el tiempo.

Estudiemos el caso particular de $U = f(x-at)$ ....(1.7)

$$U: R^{1+1} \dashrightarrow R$$

Frentes de onda:

$U_t[k] = \{ x/f(x-at) = k \}$; como ejemplo estudiemos el pulso mostrado en las Figs. 2 y 3, para cada k hay dos valores de x-at: $x_{1,2} = at + c_{1,2}$; es decir tenemos el frente de onda que en este caso se reduce a 2 puntos, a saber, (x_1,k_1) y (x_2,k_1) con $x_1(t) = at+c_1$ y $x_2(t) = at+c_2$. Llamamos fase de la onda al argumento $(x - at)$.



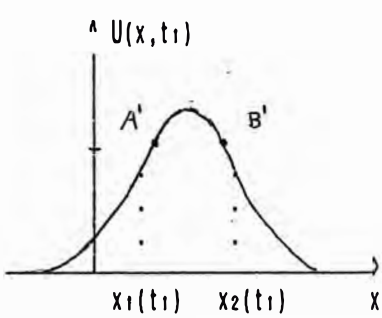


Fig.2 Fig.3

Velocidad de un frente de onda $U_t[k_1]$:

$$x_1(t_0) = at_0 + c_1$$

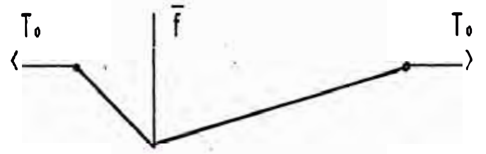
$$x_1(t_1) = at_1 + c_1 \quad \text{-----}\rangle \quad a = \frac{x_1(t_1) - x_1(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Podemos hacer esto para cada k y sus correspondientes c obteniendo la misma velocidad. La velocidad de propagación del pulso mostrado es precisamente la velocidad con la que se mueven los puntos de fase constante; es decir: $x - at = c$ derivando con respecto al tiempo esta relación

$$\frac{dx}{dt} = a \qquad (1.8)$$

En este caso tenemos un pulso de perfil rigido (para los puntos A y B del pulso: $x_B(t) - x_A(t) = \text{const.}$ para cualquier t) avanzando de izquierda a derecha con velocidad a.

ECUACION DE LAS OSCILACIONES PEQUEÑAS DE UNA CUERDA



$T_0 \gg f > P$
(P = peso de la cuerda)
T_0---->Tensiòn de la cuerda.

Fig.4 Fuerza $\bar{f}$ actuando sobre un hilo flexible.

- Asumimos que la cuerda es un hilo elástico flexible (las tensiones que surgen en la cuerda están dirigidas siempre por la tangente a su perfil instantáneo).
- Suponemos que la cuerda puede ser deformado a partir de su posición de equilibrio (eje x) por fuerzas transversales pequeñas (f) con respecto a T_0 (estas fuerzas pueden actuar permanentemente o haber sido usadas para dar un desplazamiento inicial). Ver Fig. 4

Entonces

$$\left|\frac{\delta y}{\delta x}\right|^2 \ll 1 \qquad (*)$$

- Suponemos que los desplazamientos horizontales son despreciables comparados con los desplazamientos verticales, suposición valida para los elementos de la cuerda.

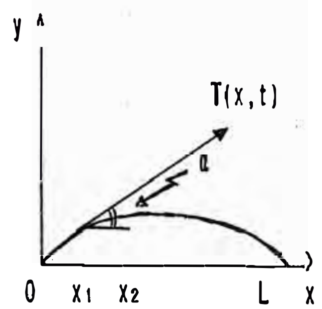


Fig.5

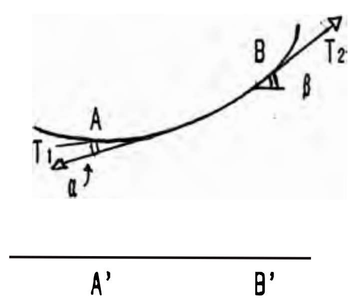


Fig.6

(*)En adelante, salvo explícita indicación en contra, también se usarà $\delta/\delta x$ como simbolo de la derivada parcial, èsto lo hacemos por motivos tipogràficos del procesador de texto usado.

De estas condiciones razonables deducimos

a) Los elementos de la cuerda pueden tener sólo desplazamientos transversales.

b) La fuerza tangencial en la cuerda es constante en todo tiempo y en todo punto constante (con gran aproximación) e igual a T_0.

b.1.- Veamos que $T(x,t) = T(x)$

Alargamiento de un segmento de la cuerda

$$s' = \int_{x_1}^{x_2} (1+(U_x)^2)^{1/2}\, dx \approx x_2 - x_1 = s; \text{ (ver Fig.5)}$$

En la aproximación que hemos convenido, en el proceso oscilatorio de la cuerda el alargamiento de los segmentos de la cuerda es despreciable, de aquí y en base a la ley de Hooke, se deduce que la magnitud de la tensión $T(x,t)$ no varia con el tiempo, esto es $T(x,t) = T(x)$.

b.2.-Podemos escribir para un trozo de cuerda AB (Fig.6) en cualquier tiempo t:

$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta \quad ; \text{ pero } \cos\alpha = \frac{}{(1+tg^2\alpha)^{1/2}} \approx 1 - (1/2)\, tg^2\alpha \approx 1$$

$$\text{igualmente} \quad \cos\beta \approx 1$$

Luego: $T_1 = T_2$; podemos escribir esto para cualquier par de puntos A y B;

luego $T_1 = T_2 = T_0$.

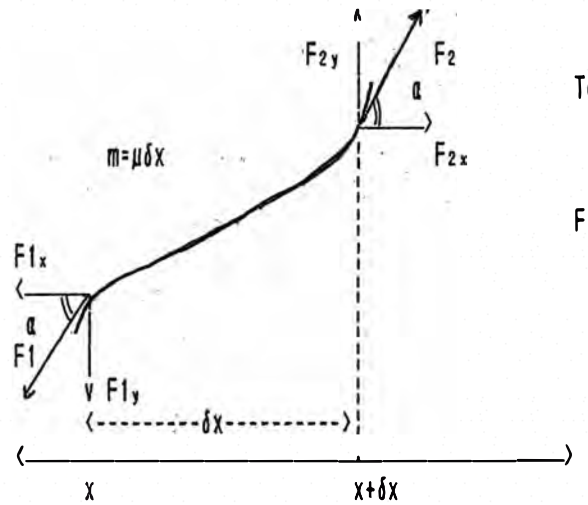
Estudiemos el movimiento de una pequeña sección δx de la cuerda, Sean:

μ—> masa por unidad de longitud en la posición de equilibrio.

m—> masa del trozo de cuerda 'δx' ($m = \mu\,\delta x$)

Despreciando la fuerza de la gravedad se hace el diagrama de fuerzas:

aceleración $a_x = 0$, $F_{1x} = F_{2x} = T_o$



T_o = tensión de la cuerda.

$F_{1x} = F_{2x}$ no cambian con el desplazamiento de la cuerda.

Fig.7 Diagrama de fuerzas sobre un trozo de cuerda δx.

Las pendientes:

$$\frac{F_{1y}}{F_{1x}} = \left[\frac{\delta y}{\delta x}\right]\Bigg|_{x} \quad , \quad \frac{F_{2y}}{F_{2x}} = \left[\frac{\delta y}{\delta x}\right]\Bigg|_{x+\delta x}$$

$$F_{2y} - F_{1y} = T_o \left\{ \left[\frac{\delta y}{\delta x}\right]\Bigg|_{x+\delta x} - \left[\frac{\delta y}{\delta x}\right]\Bigg|_{x} \right\}$$

según la 2da ley de newton :

$$F_{Tot} = \mu\delta x \frac{\delta^2 y}{\delta t^2}$$

$\xrightarrow{\hspace{2cm}}$ (aceleración transversal)

además, $F_{2y} - F_{1y} = F_{tot}$ luego

$$\lim_{\delta x \to 0} \left\{ \frac{\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)_{x+\delta x} - \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)_{x}}{\delta x} \right\} = \frac{\mu}{T_o} \frac{\delta^2 y}{\delta t^2} \quad ;$$

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{\mu}{T_0}\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.9)$$

la función $y(x,t) = f(x-at) + g(x+at)$ ....(1.10)

satisface (1.9), con $a = \left(\frac{T_0}{\mu}\right)^{1/2}$ en efecto:

$$y_{tt} = a^2 \ (f'' + g'') \quad ; \ y_{xx} = \ (f'' + g'')$$

$$y_{xx} - \frac{1}{a^2}\, y_{tt} = 0 \qquad y_{xx} - \frac{\mu}{T_0}\, y_{tt} = 0$$

como describimos en (1.7)-(1.8) 'a' es la velocidad de la onda, donde $f(x-at)$ representa un pulso viajando hacia la derecha y $g(x+at)$ en sentido contrario. Señalamos que f y g satisfacen (1.9) separadamente; $U = f + g$ también es solución de (1.9), por consiguiente esta ecuacón será llamada ecuación lineal.

En las ecuaciones no lineales no ocurre lo mismo, como mostramos a continuación. Sea la ecuación diferencial no-lineal

$$(U + \theta).(U_{tt} - U_{xx}) - (U_t^2 - U_x^2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.11)$$

$$\theta = \text{const.}$$

puede agruparse para dar lugar a

$$\frac{\delta^2}{\delta t^2}\,[\mathrm{Ln}(U + \theta)] - \frac{\delta^2}{\delta x^2}\,[\mathrm{Ln}(U + \theta)] = 0$$

sea $V = \mathrm{Ln}(U + \theta) \implies V_{tt} - V_{xx} = 0$

ésta última ecuación tiene la forma de la ecuación (1.9) que tiene como solución general [23]

$V(x,t) = F(x-t) + G(x+t)$

Una expresión de U:

$$U(x,t) + \theta = \exp[F(x-t) + G(x+t)] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.12)$$

(1.12) es una solución de (1.11).

Sean $F(x,t) = Ln[b\, f(x-t) + c]$ y $G(x,t) = Ln[d\, g(x+t) + e]$

Luego

$$U(x,t) + \theta = b\cdot d\cdot f(x-t)\cdot g(x+t) + b\cdot e\cdot f(x-t) + c\cdot d\cdot g(x+t) + c\cdot e$$

haciendo: $\alpha = b.e$, $\beta = c.d$, $\tau = b.d$ y $\theta = c.e$ tenemos

$$U(x,t) = \tau\, f(x-t).g(x+t) + \alpha\, f(x-t) + \beta\, g(x+t) \qquad (1.13)$$

(1.13) es una solución de (1.11) con $\theta = (\alpha.\beta)/\tau$ y representa la interacción no-lineal de dos ondas que viajan con sentidos opuestos, ambas con la misma rapidez.

En general podemos asumir que las funciones $f(\varepsilon_1)$ y $g(\varepsilon_2)$ con $\varepsilon_1 = x - t + \delta_1$ y $\varepsilon_2 = x+t+\delta_2$ (δ_1, δ_2 son los desfasajes) son pulsos que inicialmente están muy separados de tal forma que la interacción entre ellos no deforma el perfil del pulso (el término $\tau\, f(\varepsilon_1)\, g(\varepsilon_2)$ de (1.13) se anula o se convierte en f ó g cuando el valor asintótico de uno de ellos es constante); supongamos que inicialmente $f(x-t)$ está localizado (el pulso está en una region finita del espacio) en $\varepsilon_1 \to -M$ y $g(x+t)$ en $\varepsilon_2 \to +M$ (M es un número positivo suficientemente grande) y de esta configuración inicial ambos pulsos se mueven uno al encuentro del otro; nos interesa estudiar el efecto de la interacción en la forma de los pulsos originales y ver la posibilidad de alguna interacción que preserve las caracteristicas (ancho, altura, velocidad) de los pulsos originales.

a) <u>DEFORMACION DE UN PULSO.</u>

Como f y g son funciones arbitrarias, podemos tomar por comodidad las siguientes formas explicitas para pulsos:

$$f(\varepsilon_1) = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1^2+1} \quad ; \quad g(\varepsilon_2) = \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2^2+1)^{1/2}}$$

ANTES DE LA INTERACCION: Usaremos la forma que toma U en $x \to -M$ y $x \to +M$, para esto hallamos los valores asintóticos de f y g:

$$\lim_{\varepsilon_1 \to \pm\infty} f(\varepsilon_1) = 0$$

$$\lim_{\varepsilon_2 \to \pm\infty} g(\varepsilon_2) = \pm 1$$

$U = \tau\, fg + \alpha f + \beta g$

$\varepsilon_2 \dashrightarrow -M$ y $\varepsilon_1 = N \Longrightarrow U \approx -\tau.f + \alpha.f - \beta = (\alpha-\tau).f - \beta$

$\varepsilon_1 \dashrightarrow +M$ y $\varepsilon_2 = N \Longrightarrow U \approx \beta g.$ **(N << M)**

grafiquemos asignando los valores

$\alpha = 2,\ \tau = 1,\ \beta = 1$

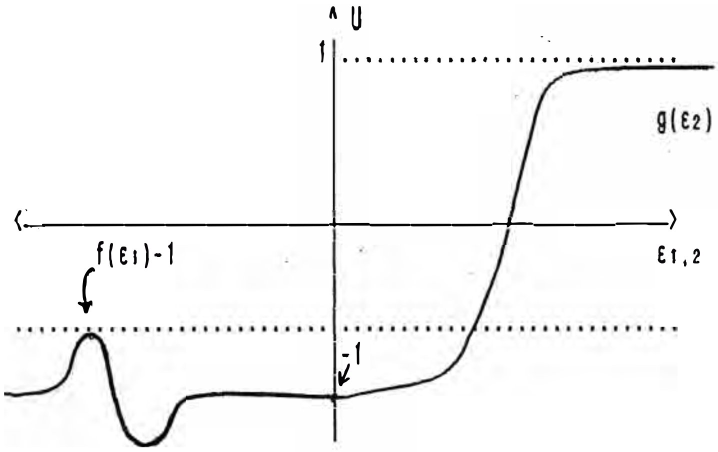


Fig. 8

DESPUES DE LA INTERACCION

$\varepsilon_2 \dashrightarrow +M$ y $\varepsilon_1 = N \Longrightarrow U \approx \tau.f + \alpha.f + \beta = (\alpha+\tau).f + \beta$

$\varepsilon_1 \dashrightarrow -M$ y $\varepsilon_2 = N \Longrightarrow U \approx \beta.g$

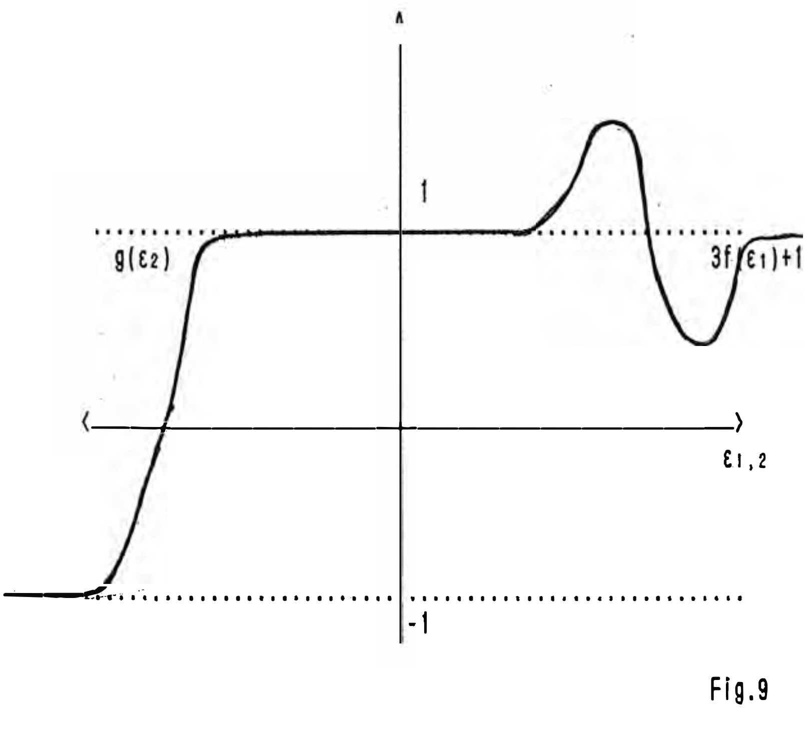


Fig.9

Observamos que el pulso f inicial, después de la interacción, deviene en 3f; mientras que g se mantuvo igual, además ambos pulsos conservan sus velocidades.

b) PULSOS QUE NO SE DEFORMAN EN LA INTERACCION

Sean $f(\varepsilon_1)=\dfrac{a}{1+\varepsilon_1^2}$; $g(\varepsilon_2)=\dfrac{b}{1+\varepsilon_2^2}$,los valores asintóticos de f y g en $\pm\infty$ es igual a 0.

ANTES

ε_2 ---> -M y ε_1 = N ===> U $\approx$ α.f

ε_1 ---> +M y ε_2 = N ===> U $\approx$ β.g, asumimos a<b;

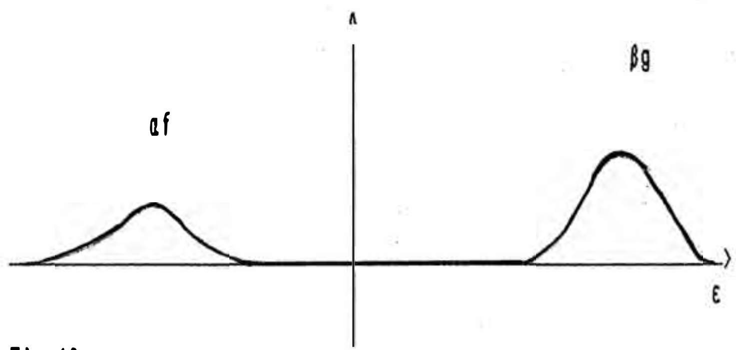


Fig.10

DESPUES

ε_2 ---> +M y ε_1 = N ===> U $\approx$ α.f

ε_1 ---> -M y ε_2 = N ===> U $\approx$ β.g

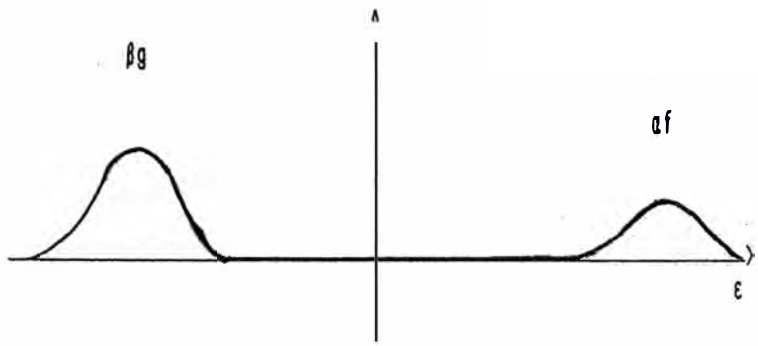


Fig.11

Observamos que los pulsos de este tipo conservan sus caracteristicas después de la interacción no-lineal gobernada por la ecuación (1.11). Este tipo de soluciones serán de importancia en los capítulos II, III y IV del presente trabajo.

2.FENOMENOS NO LINEALES: COMO SE GENERA UN SOLITON?

2.1. Influencia de la no-linealidad en el comportamiento de una onda comparando 2 ecuaciones.

$V_t + c\,V_x = 0$ ecuación lineal ....(1.14)

$U_t + c\,U_x + U\,U_x = 0$ ecuación no lineal ....(1.15)

$U,V: R^2 \text{---}\rangle R$ $U = U(x,t)$ $V = V(x,t)$; c = cte.

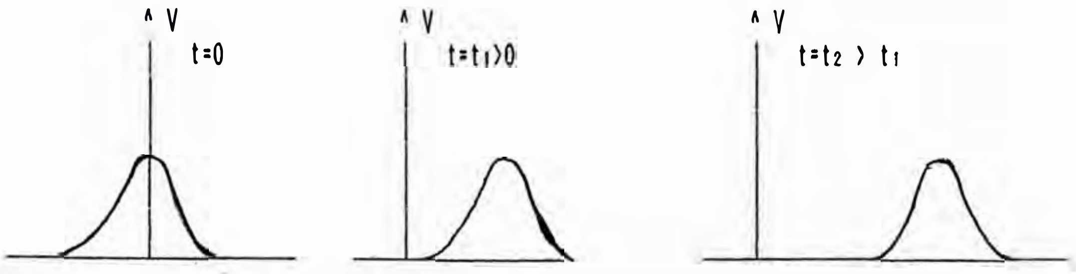
solución general de (1.14): $V(x,t) = f(x-ct)$ ....(1.16)

$f: R \text{---}\rangle R$; f---> función arbitraria. V ---> describe un pulso de onda desplazandose con velocidad c(cte) y sin deformarse. Llamamos onda lineal porque su comportamiento viene gobernando por una ecuación lineal: La linealidad de (1.14) se demuestra; sean V_1 y V_2 soluciones de (1.14), entonces

$$\left(\frac{\delta}{\delta t} + c\frac{\delta}{\delta x}\right)(\alpha V_1 + \beta V_2) = \alpha\left(\frac{\delta}{\delta t} + c\frac{\delta}{\delta x}\right)V_1 + \beta\left(\frac{\delta}{\delta t} + c\frac{\delta}{\delta x}\right)V_2 = 0$$

es decir $\alpha.V_1 + \beta.V_2$ es también una solución (α, β = consts.) de (1.14).

PERFIL DE UNA ONDA LINEAL



Figs. 12

Veamos ahora el comportamiento de un pulso soluciòn de (1.15); escribiendo (1.15) en la forma

$U_t + (c + U)\,U_x = 0$

admite soluciones de la forma

$U(x,t) = f[x - (c + U).t]$..(1.17)

$f : R \longrightarrow R$ con $(1 + tf') \neq 0$

$U(x,t)$ en (1.17) está definida en forma implícita; verifiquemos que es solución de (1.15)

$U_t = -[(U + c) + t.U_t]\, f'$ ....(1.18)

f' se evalúa en $(x - (U + c).t)$

$U_x = (1 - U_x.t)\, f'$

$(c + U)U_x = [(c + U) - (c + U).U_x.t]f'$ ....(1.19)

sumando (1.18) y (1.19):

$(U_t + c\, U_x + U\, U_x)\,(1 + t.f') = 0 \longrightarrow U_t + (c+U)\, U_x = 0$ ((1.17) es solución de (1.15))

La ecuación (1.15) sugiere la forma más general

$$\frac{\delta U}{\delta t} + \frac{\delta (f_o U)}{\delta x} = 0 \quad \text{..(1.20)}$$

sea $g(U) = f'(U)$

$$\frac{\delta U}{\delta t} + g(U)\frac{\delta U}{\delta x} = 0 \quad \text{..(1.21)}$$

admite solución de la forma

$U(x,t) = f\{x - g[U(x,t)].t\}$..(1.22)

con la restricción $g'.f'.t \neq 0$, verifiquemos esto en (1.20)

$U_t = f'\,(-g - t.g'.U_t)$ ....(1.23)

$U_x = (1 - t.g'.U_x)$ ....(1.24)

(1.23) y (1.24) en (1.20)

$f'\,[-g - t.g'.U_t + g(1 - t.g'.U_x)] = 0$

$f'\,[-g - t.g'.U_t + g - g.t.g'.U_x] = 0$

$f'.g'.t(U_t + g.U_x) = 0$

$U_t + g.U_x = 0$ ó $\dfrac{\delta U}{\delta t} + g(U)\dfrac{\delta U}{\delta x} = 0$, que es la ecuación (1.21)

Notamos que la ecuación (1.20) tiene la forma de las ecuaciones de la dinámica de fluidos en su forma 'ecuaciones de conservación'.

Esta ecuaciòn será motivo de estudio más adelante cuando apliquemos el método de las diferencias finitas para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales parciales haciendo uso de un programa de Pascal en un microcomputador personal.

Volviendo a (1.17) y (1.22); elegida una función particular f hay que despejar la función solución U correspondiente; hay que decir que esto no es fácil si la función f toma una forma tal que la ecuación para U es complicada. La ecuación (1.17) indica que un pulso cuya ordenada es U viaja con una velocidád (c+U), es decir, los de mayor ordenada avanzan con mayor velocidad. Una solución particular se muestra en las Figs. 13.

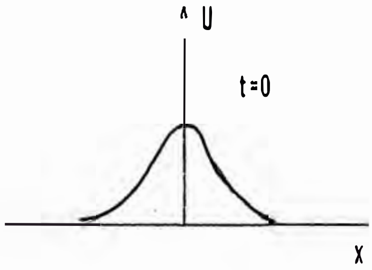


Fig.13.1 'La denominamos onda no-lineal por que su comportamiento está gobernado por una ecuaciòn diferencial no-lineal'.

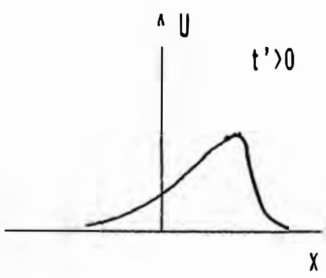


Fig.13.2 La onda para t'>0

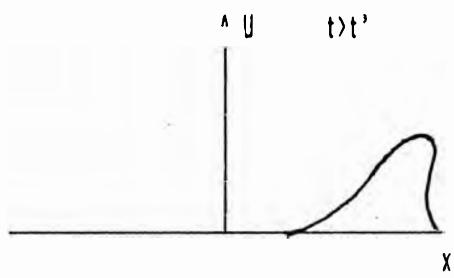


Fig.13.3 Comportamiento usual de una ONDA NO LINEAL(breaking) gobernado por (1.15).

La comparación de las figuras (12) y (13) sugiere lo siguiente:

'La presencia de un término no-lineal en la ecuación diferencial da lugar a que la onda solución correspondiente se vaya rompiendo a medida que se propaga. La onda de las Figs.13 no mantiene un perfil rigido'.

2.2.- ONDAS NO-LINEALES DE PERFIL RIGIDO

Estudiemos la ecuación de KdV (Korteweg y de Vries-1895)

$$U_t - 6\,U\,U_x + U_{xxx} = 0 \quad \text{...(1.25)}$$

Zabusky y Kruskal (1965) mediante simulación en un computador de soluciones numéricas de (1.25), encontraron ondas no-lineales que se propagan libremente sin deformarse y que al interactuar con otra onda recuperaban el mismo perfil que presentaban previa a la interacción. Casi todas las características de la onda: velocidad, ancho, y altura eran las mismas antes y después de la interacción. La única "huella" de la interacción era un desfasaje entre la posición que ocupaban y aquella que hubieran ocupado si no hubiesen interactuado; ellos acuñaron el término 'solitón' para designar estos pulsos extraordinarios. Este comportamiento parece contradecir las Figs. 8-9 y 13; asemejándose más al comportamiento mostrado en las Figs.10 y 11. Estudiemos los términos lineales y no-lineales de (1.25)

PRIMERO: Sea

$$U_t + c\,U_x + U_{xxx} = 0 \quad \text{..(1.26)}$$

c = cte, sea $U(x,0) = f(x)$ la condición inicial.

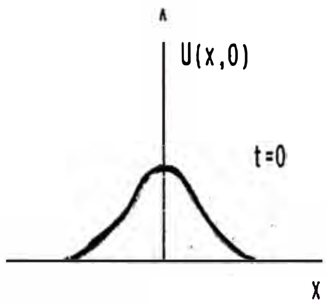


Fig.14.1

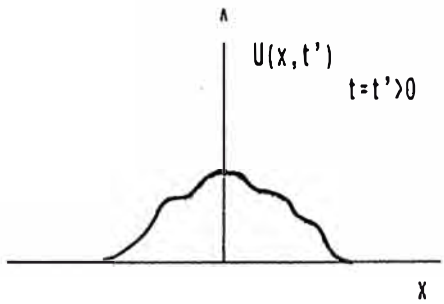


Fig.14.2

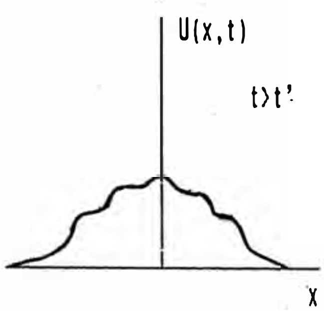


Fig.14.3 Comportamiento de una onda en un medio dispersivo.

$f(x)$ = suma de funciones armónicas

$$U(x,0) = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_f\,(k)\,\exp(ikx)\,dk$$

$\exp(ikx)$, k-ésima onda armónica.

Una solución $U(x,t)$ está dada por:

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_f(k)\,\exp\{i\,[k.x - w(k).t]\}\,dk \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.27)$$

$w(k) = ck - k^3$;

esto se obtiene reemplazando $U(x,t) = a\cos(k\,x - w\,t)$ en (1.26). $U(x,t)$ es el resultado de sumar infinitas ondas. En (1.27) cada onda componente viaja con diferente velocidad, (velocidad de fase $w(k)/k$) el perfil 'suma' se va dispersando a medida que transcurre el tiempo.

CONCLUSION: "La presencia del término U_{xxx} en la ecuación (1.26) ha dado lugar a que la onda solución correspondiente se vaya dispersando a medida que transcurre el tiempo".

SEGUNDO:

$$U_t + c\,U_x + U\,U_x + U_{xxx} = 0 \qquad c=cte \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.28)$$

U_{xxx} ⟶ término dispersivo

$U\,U_x$ ⟶ término no-lineal.

Se presenta la "competencia" entre los dos términos; tal competencia podría dar lugar a una onda cuyo perfil permanezca rígido. Ello ocurre en efecto! planteando una solución de la forma $U(x,t) = g(x-at)$ con a = cte.La ecuación (1.28) nos conduce a una ecuación que debe ser satisfecha por la función $g(z)$:

$z=x-at$;

$g''' + (g - a + c).g' = 0$ (se dará una solución particular en el capítulo II), por ahora tomamos el resultado

$$U(x,t) = -c + 3a\,\text{sech}^2\left[\frac{\sqrt{a}}{2}(x-at)\right]$$

a = cualquier valor real

Verifiquemos estas soluciones en (1.28).

Sea $U + c = V$, luego (1.28) queda

$$V_t + V\,V_x + V_{xxx} = 0 \quad \text{...} (1.29)$$

$$V(x,t) = \alpha\,\text{sech}^2(\beta x - \tau t),\ \alpha = 3a,\ \beta = \left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{a},\ \tau = (a^{3/2})/2.$$

Usando $(\tanh(y))' = \text{sech}^2(y)$,

$1 - \tanh^2(y) = \text{sech}^2(y)$ con $y = \beta x - \tau t$

tenemos:

$V_t = 2\,\alpha\,\tau \tanh y - 2\,\alpha\,\tau \tanh^3 y$, $V = \alpha - \alpha \tanh^2 y$,

$V\,V_x = -2\,\alpha^2\,\beta \tanh y + \alpha^2\,\beta \tanh^3 y - 2\,\alpha^2\,\beta \tanh^5 y$.

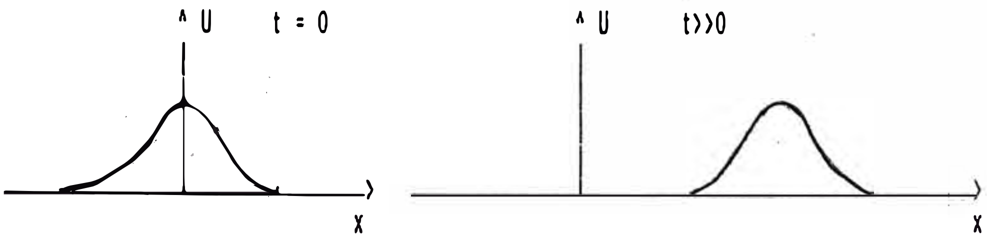
$V_{xxx} = 16\,\alpha\,\beta^3 \tanh y - 40\,\alpha\,\beta^3 \tanh^3 y + 24\,\alpha\,\beta^3 \tanh^5 y$

Reemplazando: V_t, VV_x y V_{xxx} en (1.29)

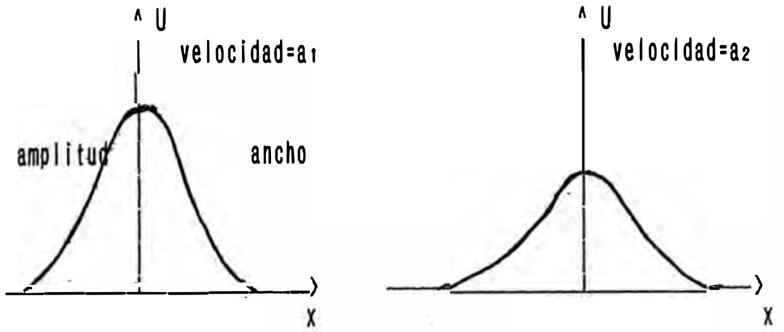
$2\alpha\,(\tau - \alpha\,\beta + 8\,\beta^3)\tanh y + 2\,\alpha\,(-\tau + 2\,\alpha\,\beta - 20\,\beta^3)\tanh^3 y + 2\,\alpha\,\beta\,(12\,\beta^2 - \alpha)\,[\tanh^5 y] = 0$,

los coeficientes de las funciones hiperbólicas se anulan para todo valor de a, satisfaciendo la ecuación (1.29).

Gráficas de U con c = 0:



Figs.15 Perfil de onda con velocidad 'a' que avanza sin deformarse a pesar de estar gobernando por una ecuación diferencial no-lineal.



Figs.16 Dos pulsos de onda con amplitudes diferentes;
(amplitud= 3 velocidad). Estas magnitudes se relacionan:
amplitud 1 > amplitud 2 ====> velocidad 1 > velocidad 2.

CONCLUSION:.- La competencia entre un comportamiento no-lineal (tendencia a deformar el perfil de la onda) y un comportamiento dispersivo ha dado como resultado una onda no-lineal de perfil rigido.

2.3. EL SOLITON

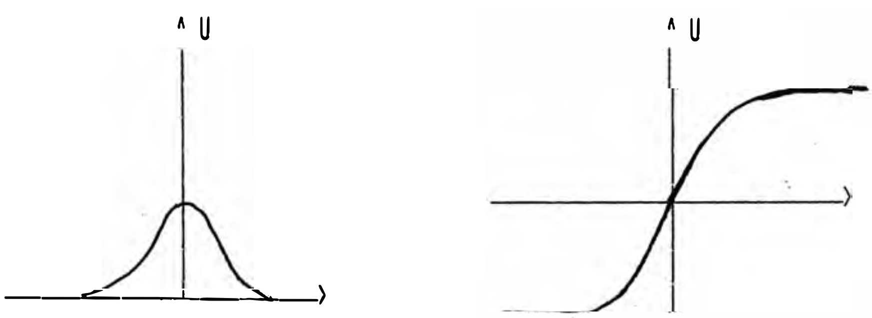
Para hacernos la idea de una onda solitón, primero debemos dar ciertas definiciones de trabajo.

DEFINICION 1.

Llamaremos **onda viajera** u onda de **perfil estable** aquella que viaja a través del tiempo sin sufrir deformación y cuya función de onda se define solo a través de $z = x \pm at$. Asi $U(x,t) = f(x-at)$, a = const. representa una **onda viajera**.

DEFINICION 2.

Llamaremos onda solitaria a toda onda viajera $U_{ST}(z)$ cuya transición de su estado asintótico (estado asintótico de $U_{ST}(x,t)$: el valor de $U_{ST}(z)$ en $z \to \pm\infty$) constante cuando $z = -\infty$ a otro posible estado asintótico constante cuando $z = +\infty$ lo realiza en forma apreciable en una región finita del espacio.



Figs.17 Ejemplo de ondas solitarias.

DEFINICION 3.

Un solitón es una onda solitaria, solución de una ecuación diferencial en derivadas parciales no-lineal; la característica más importante de los solitones parece ser la siguiente: cuando dos solitones colisionan, ellos emergen con las mismas características que tenían antes del choque: SENTIDO, FORMA y VELOCIDAD pero es posible un cambio de fase.

Si la solución U(x,t) formado solamente de **ondas solitarias** cuando t--->-∞:

$$U(x,t) \approx \sum_{j=1}^{N} U_{ST}(z_j); \qquad z_j = x - a_j.t + \delta_j, \quad \delta_j = \text{const.}$$

despues de sus interacciones mutuas emergen solamente con un cambio de fase y vuelven a formar U(x,t), esto es,

$$U(x,t) \approx \sum_{j=1}^{N} U_{ST}(\bar{z}_j); \qquad \bar{z}_j = x - a_j.t + \bar{\delta}_j, \quad \delta_j=\text{const.}$$

cuando t---> +∞ ,entonces estos pulsos son llamados 'solitones '.

Las ondas solitarias aparecen como un balance entre dos efectos bien diferenciados: por un lado el efecto no-lineal solamente ocasionarla un "breaking" (rompimiento de ola) y de otro lado un "breaking-up (efecto dispersivo) ocasionarla una dispersión o separación de la onda en sus componentes naturales de frecuencia. Anotemos aquí que soluciones solitònicas se han encontrado también para ecuaciones en diferencias, que veremos en el Capitulo II.

2.4. APLICACIONES.

LOS SOLITONES APARECEN EN LAS SIGUIENTES AREAS DE LA FISICA NO-LINEAL.

a. Dinámica de fluidos (ondas de agua superficiales; la ecuación de KdV aparece en el estudio de ondas de agua poco profundas).

b. Física de cristales no-lineales: cristales anarmónicos (Ecuaciòn de Toda).

c. Teoría de partículas elementales (solitones en Teoría de Campos: por ejemplo, el solitòn de 't Hooft-Polyakov como un monopolo magnètico)

Además en la bibliografía encontramos aplicación en:

a. Teoría de plasmas y la interacción de radiación con plasmas.

b. Teoría de junturas de Josephson.

c. Optica no-lineal resonante y no-resonante.

d. La fase-A del He^3 líquido a 2.6 mK donde las ondas de espín pueden propagarse como solitones, así como en la fase B.

e. Ferromagnetismo: Movimiento de la pared de BLOCH.

f. Física de cristales no-lineales: Teoría de dislocaciones, fenómenos de recurrencia en transporte térmico .

Las ecuaciones de onda no-lineales más importantes, que muestran soluciones tipo SOLITON son:

a. Ecuación de Korteweg-de Vries (EKdV) :

$$U_t + 6\,U\,U_x + U_{xxx} = 0$$

b. Ecuación No-Lineal de Schrödinger(ESNL):

$$iU_t + 2\,U\,|U|^2 + U_{xx} = 0$$

c. Ecuación de Sine - Gordon(ESG)

$$U_{xx} - U_{tt} = \text{sen}\,(U)$$

d. Ecuación de Toda (ET)

$$\ddot{R}_n = 2\exp(-R_n) - \exp(-R_{n-1}) - \exp(-R_{n+1}),$$

$$\text{con}\quad R_n = Q_n - Q_{n-1} \quad \text{y} \quad \ddot{R}_n = \frac{d^2R_n}{dt^2}$$

CAPITULO II

OBTENCION DE ALGUNAS ECUACIONES NO-LINEALES:

ECUACION DE KdV (en Hidrodinámica),
ECUACION DE SINE-GORDON (en Mecánica) y
LA ECUACION DE TODA (en Electromagnetismo).

CAPITULO II

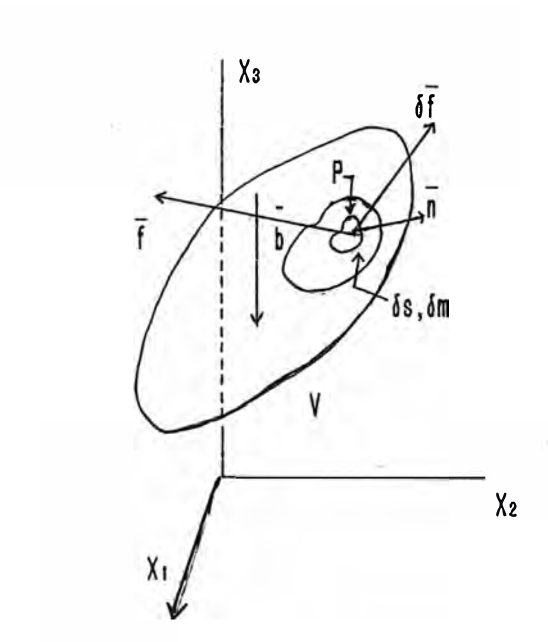
Para poder obtener la ecuación que gobierna el movimiento de ondas en líquidos es necesario desarrollar primero la hidrodinámica y dinámica de fluidos.

HIDRODINAMICA Y DINAMICA DE FLUIDOS.

Para caracterizar el movimiento de un fluido, se utilizan las funciones $u(r,t)$, $\Gamma(\bar{r},t)$, $p(\bar{r},t)$ y $F(\bar{r},t)$ que son respectivamente el vector velocidad, la densidad, la presión y la densidad de las fuerzas externas (si estas existen) respectivamente, todas ellas en el punto r y en el momento t.

Considerando un líquido viscoso es necesario estudiar el comportamiento de las fuerzas superficiales que actúan sobre un elemento de volumen del fluido.

PRINCIPIO DE TENSION DE CAUCHY:EL VECTOR TENSION



$\bar{f}$ ---> fuerzas superficiales.

$\bar{b}$ ---> peso

V ---> volumen

$\delta\bar{f}$---> incremento de la fuerza resultante ejercida a través de δs en la materia interior a V por la materia exterior a V.

δs---> incremento de superficie.
δm---> incremento de masa.

Fig.1 Fuerzas actuando sobre un elemento de volumen del fluido.

$\dfrac{\delta\bar{f}}{\delta s}$ ---->fuerza media por unidad de area

$\bar{n}$ ---> vector unitario perpendicular a δs en P.

El principio de tensión de Cauchy:

$$\frac{\delta\bar{f}}{\delta s} \xrightarrow[\delta s \to 0]{} \frac{d\bar{f}}{ds} \quad \text{y} \quad \delta m \xrightarrow[\delta s \to 0]{} 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2.1)$$

$$\bar{t}^{(\bar{n})} = \frac{d\bar{f}}{ds} = \lim_{\delta s \to 0} \frac{\delta\bar{f}}{\delta s} \; ;$$ $\bar{t}^{(\bar{n})}$: vector tensión aplicado en ds cuya normal es $\bar{n}$

por la tercera ley de Newton : $-\bar{t}^{(\bar{n})} = \bar{t}^{(-\bar{n})}$

En la superficie δs hay un vector $\bar{t}^{(\bar{n})}$ para cada $\bar{n}$:

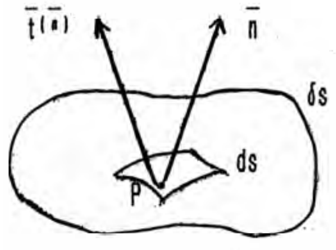


Fig.2

Se puede especificar $t^{(n)}$ en cada uno de tres planos perpendiculares entre si que se cortan en P. Entonces las ecuaciones de transformación de coordenadas sirven para relacionar las componentes del vector tensión en un plano dado y cualquier otro juego de planos que se cortan en P.

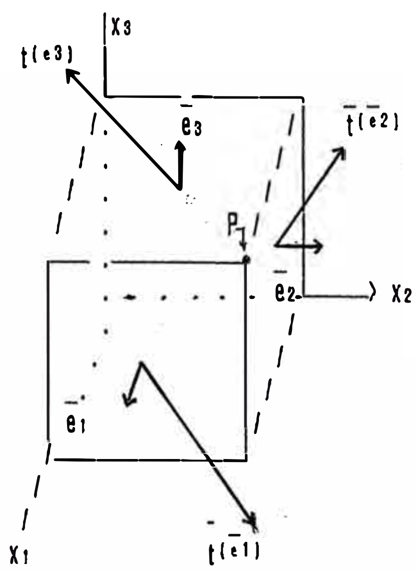


Fig.03

Por comodidad ubicaremos en un vèrtice de un cubo el punto P, como se muestra en la Fig.03. Expresamos el vector tensión de cada cara adyacente al punto P en función de la base normal.

El vector tensión aplicado en la cara normal a e_1:

$$\bar{t}^{(\bar{e}_1)} = \bar{t}_1^{(\bar{e}_1)}\,\bar{e}_1 + \bar{t}_2^{(\bar{e}_1)}\,\bar{e}_2 + \bar{t}_3^{(\bar{e}_1)}\,\bar{e}_3$$

podemos generalizar según la fórmula: $\bar{t}_j^{(\bar{e}_i)} = \sigma_{ij}$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{2i} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \qquad \sigma = \text{tensor de tensión}$$

$$t_j^{(\bar{e}_i)} = \sigma_{ij} \qquad \text{...(2.2)}$$

σ_{ij} = tensión en la cara i y dirección j ....(2.3)

σ_{jj} = tensión normal a la cara j.

σ_{ij} si $i \neq j$ es la tensión cortante.

RELACION ENTRE EL VECTOR TENSION Y EL TENSOR TENSION.

Obtenemos la relación entre los σ_{ij} en P y el $\bar{t}(\bar{n})$ en un plano arbitrario que pasa por P.

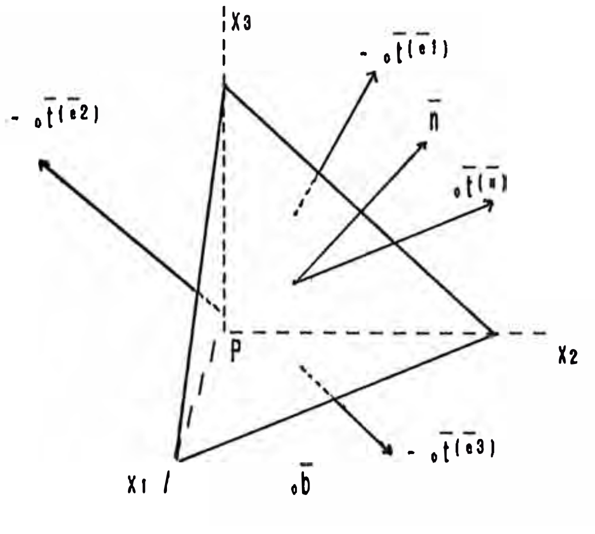


Fig. 04 Muestra un tetraedro infinitesimal con vèrtice P.

En el equilibrio para el fluido en forma de tetraedro tenemos

$${}_0\bar{t}^{(\bar{n})}\, ds - {}_0\bar{t}^{(\bar{e}_1)}\, ds_1 - {}_0\bar{t}^{(\bar{e}_2)}\, ds_2 - {}_0\bar{t}^{(\bar{e}_3)}\, ds_3 - \Gamma\, {}_0\bar{b}\, dV = 0 \quad \text{.........................(2.4)}$$

si hacemos que las dimensiones del tetraedro se reduzcan en la misma proporción tenemos que

$dV \dashrightarrow 0$ más rápido que ds,

$${}_0\bar{t}^{(\bar{e}_j)} \dashrightarrow \bar{t}^{(\bar{e}_j)}$$

$${}_0\bar{t}^{(\bar{n})} \dashrightarrow \bar{t}^{(\bar{n})},$$

La componente r-ésima del vector $\overline{ds}$ es $ds_r = \overline{ds}.\bar{e}_r = ds\, n_r$ tomando el límite y sustituyendo las relaciones últimas en (2.4) tenemos (escribiendo la componente i-ésima).

$$t_i^{(\bar{n})}\, ds = t_i^{(\bar{e}_1)}\, ds\, n_1 + t_i^{(\bar{e}_2)}\, ds\, n_2 + t_i^{(\bar{e}_3)}\, ds\, n_3$$

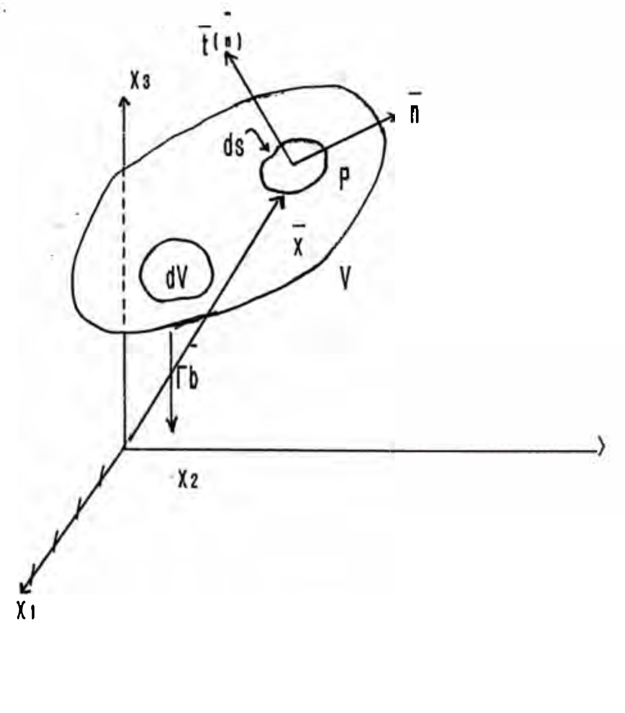
$$= t_i^{(\bar{e}_j)}\, n_j\, ds;$$

Indices repetidos en un término indican sumatoria sobre el mismo índice,

$$t_i^{(\bar{n})} = \sigma_{ji}\, n_j.$$

$$\left[t_1^{(\bar{n})},\ t_2^{(\bar{n})},\ t_3^{(\bar{n})} \right] = (n_1, n_2, n_3) \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \text{..................................(2.5)}$$

EQUILIBRIO DE FUERZAS Y MOMENTOS: SIMETRIA DEL TENSOR DE TENSION.



$\bar{t}^{(\bar{n})}$ = tensión en la superficie normal a $\bar{n}$

$\bar{n}$ = normal a cierta superficie ds.

P = punto perteneciente a ds.

$\bar{b}$ = peso

Γ = densidad de masa.

dV = diferencial de volumen V.

Equilibrio de fuerzas:

$$\int \bar{t}^{(n)}\, ds + \int \Gamma\, \bar{b}\, dV \quad 0;$$ tomamos la componente i-ésima.

$$\int_S \sigma_{ji}\, n_j\, ds + \int_V \Gamma\, b_i\, dV = 0 \quad \ldots\ldots (2.6)$$

aplicando el teorema de la divergencia al primer término de(2.6)

$$\int_V (\sigma_{ji,j} + \Gamma\, b_i)\, dV = 0\ ; \qquad \sigma_{ji,j} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}$$

Esta integral es cierta para cualquier V arbitrario del fluido; entonces la función dentro de la integral debe ser cero.

$$\sigma_{ji,j} + \Gamma\, b_i = 0 \quad \ldots\ldots (2.7)$$

Equilibrio de momentos.

$$\int_S \bar{x} \times t^{(n)}\, ds + \int_V \bar{x} \times \Gamma\, \bar{b}\, dV = 0,$$ por definición de

$$\left[\bar{A} \times \bar{B}\right]_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} A_j B_k;$$ A, B vectores y ε_{ijk} símbolo de Levi Civita.

Escribiendo la componente i-ésima

$$\sum_{jk} \left[\int_S \varepsilon_{ijk}\, x_j\, t_k^{(n)}\, ds + \int_V \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \Gamma\, b_k\, dV \right] = 0$$

$$\sum_{jk} \left[\int_S \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \sigma_{rk}\, n_r\, ds + \int_V \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \Gamma\, b_k\, dV \right] = 0$$

$$\sum_{jk} \left[\int_V \frac{\delta}{\delta x_r} (\varepsilon_{ijk}\, x_j\, \sigma_{rk})\, dV + \int_V \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \Gamma\, b_k\, dV \right] = 0\ ,$$

hemos aplicado el teórema de la divergencia, ahora realicemos la derivación en el primer término

$$\int_V [\varepsilon_{ijk}\, \delta_{rj}\, \sigma_{rk} + \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \sigma_{rk,r}]\, dV + \int_V \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \Gamma\, b_k\, dV = 0$$

$$\int_V \varepsilon_{ijk}\, \sigma_{jk}\, dV + \int_V \varepsilon_{ijk}\, (\sigma_{lk,l} + \Gamma\, b_k)\, x_j\, dV = 0 \text{ aplicando (2.7)}$$

$\varepsilon_{ijk}\, \sigma_{jk} = 0$ conmutando k y j: $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$

$- \varepsilon_{ijk}\, \sigma_{kj} = 0$

$\varepsilon_{ijk}\, (\sigma_{jk} - \sigma_{kj}) = 0 \; \text{--->} \; \sigma_{jk} = \sigma_{kj}$ ....(2.8)

el tensor de tensión es simètrico.

Tenemos para fluidos en reposo :

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ij}\, n_j$$

$= - p_o\, n_i$, p_o ---> presión hidrostàtica

$\sigma_{ij} = -p_o\, \delta_{ij}$ $\quad \delta_{ij}$--->delta de Kronecker,(-) indica

una tensión de compresión para un valor positivo de p_o.

Tenemos para un fluido en movimiento

$$\sigma_{ij} = \underbrace{-p}_{\text{presión}}\, \delta_{ij} + \underbrace{\tau_{ij}}_{\text{tensor de tensión viscoso}} \qquad (2.9)$$

Un fluido perfecto es aquel que cumple con $\tau_{ij} = 0$ aun en movimiento, es decir se denomina fluido perfecto o ideal el fluido sin rozamiento interno. En adelante usaremos p_{ij} en lugar de σ_{ij}.

LA ECUACION GENERAL DE MOVIMIENTO DE UN MEDIO CONTINUO.

Un elemento de masa contenido en algún dV es ΓdV, donde Γ es la densidad de masa. Si la velocidad de este elemento es $\bar{u}$, entonces según la segunda ley de Newton:

$$\frac{du}{dt}\, \Gamma\, dV = d\bar{F} \qquad (2.10)$$

(con respecto a un sistema de referencia inercial ligado a la tierra)

Integrando sobre un volumen finito

$$\int_V \frac{du}{dt}\,\Gamma\,dV = \int_V d\bar{F} \qquad \text{.........(2.11)}$$

La fuerza comprende dos componentes. Primero, su peso con densidad $\Gamma.\bar{g}$;

segundo, las fuerzas superficiales que son descritas con un tensor p_{ij}

según esto $$\int_V \frac{du_i}{dt}\,\Gamma\,dV \quad \int_V \Gamma\, g_i\, dV + \int_S p_{ik}\, ds_k \qquad \text{.........(2.12)}$$

Hemos escrito la i-ésima componente de (2.11); ds_k es la componente k-ésima del vector normal a la superficie que encierra el volumen V.

Usando el teorema de Gauss

$$\int_S p_{ki}\, ds_k = \int_V \frac{\delta p_{ki}}{\delta x_k}\, dV \qquad \text{.........(2.13)}$$

como la expresión está siendo integrado para un volumen arbitrario el integrando es igual a

$$\Gamma\,\frac{du_i}{dt} = \frac{\delta p_{ki}}{\delta x_k} + \Gamma\, g_i \qquad \text{.........(2.14)}$$

Las cantidades desconocidas son la $\bar{u}$ (tres componentes), la densidad(Γ), y seis componentes (p_{ki} es simétrico) del tensor de tensión(p_{ki}), un total de 10 cantidades para tres ecuaciones. En el caso más general, consecuentemente, una solución del problema requiere 7 ecuaciones más especificando las propiedades del fluido.

La masa se conserva (a velocidades no-relativistas) y la correspondiente ecuación de conservación es:

$$\int (\Gamma\,\bar{u}).d\bar{s} = -\frac{\delta m}{\delta t} = -\frac{\delta}{\delta t}\int_V \Gamma\, dV \Longrightarrow \int_V \bar{\nabla}.(\Gamma\bar{u})\, dV = -\int_V \frac{\delta \Gamma}{\delta t}\, dV$$

$$\bar{\nabla}.(\Gamma\,\bar{u}) + \frac{\delta\Gamma}{\delta t} = 0 \quad \ldots\ldots(2.15)$$

LIQUIDO Y GAS IDEALES.

En mecánica de fluidos, un líquido o gas es llamado ideal si todas las componentes no diagonales del tensor de tensión son cero. Esta propiedad es invariante con respecto a la rotación de coordenadas sólo si todas las componentes de la diagonal son iguales, esto es cuando el tensor de tensión viene a ser un escalar. Un líquido ideal aún en movimiento cumple con (Ley de Pascal)

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (\delta_{ij} \text{ delta de Kronecker}). \quad \ldots\ldots(2.16)$$

Esto reduce el númeo de cantidades desconocidas p_{ij} a 1.

Ahora (2.14) toma una forma distinta para líquidos ideales; para esto hacemos

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\delta\bar{u}}{\delta t} + \frac{dx}{dt}\frac{\delta\bar{u}}{\delta x} + \frac{dy}{dt}\frac{\delta\bar{u}}{\delta y} + \frac{dz}{dt}\frac{\delta\bar{u}}{\delta t} = \frac{\delta\bar{u}}{\delta t} + (\bar{u}.\bar{\nabla})\,\bar{u} \quad \ldots\ldots(2.17)$$

de (2.14), (2.16) y (2.17)

$$\boxed{\Gamma\left[\frac{\delta\bar{u}}{\delta t} + (\bar{u}.\bar{\nabla})\,\bar{u}\right] = -\bar{\nabla}.\,p + \Gamma\,\bar{g}} \quad \ldots\ldots(2.18)$$

(2.18) es la ecuación de movimiento de un líquido ideal (la ecuación de Euler)

se tiene

$$\bar{\nabla}\left[(1/2)\,\bar{u}^{2}\right] = (\bar{u}.\,\bar{\nabla})\,\bar{u} + \bar{u} \times \bar{\nabla} \times \bar{u} \quad \ldots\ldots(2.19)$$

Asumiendo el comportamiento irrotacional del líquido en todos los puntos:

$$\bar{\nabla} \times \bar{u} = \bar{0}$$

(2.19) en (2.18)

$$\frac{1}{\Gamma}\bar{\nabla} p = \bar{g} - \overline{\nabla}\ [(1/2)\ \bar{u}^2] - \frac{\delta \bar{u}}{\delta t}$$

$$\frac{1}{\Gamma}\bar{\nabla} p = \bar{\nabla}\ (\bar{g}.\bar{r}) - \bar{\nabla}\ [(1/2)\ \bar{u}^2] - \frac{\delta u}{\delta t} \quad ; \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta t} + \bar{\nabla}.(\Gamma\ \bar{u}) = 0$$

considerando un líquido incompresible (Γ=const =====> $\bar{\nabla}.\bar{u}$ =0)

e irrotacional : $\left[\ \bar{\nabla} \times \bar{u} = 0\ \right]$----> $\bar{u} = \bar{\nabla}\phi$

$$\frac{1}{\Gamma}\bar{\nabla} p = \bar{\nabla}\ (\bar{g}.\bar{r}) - \bar{\nabla}\ ((1/2)\ \bar{u}^2) - \frac{\delta \bar{u}}{\delta t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.20)$$

$$\bar{\nabla}\ .\ \bar{u} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.21)$$

ecuaciones para un líquido ideal e incompresible en movimiento irrotacional.

Antiderivando (2.20) y teniendo en cuenta $\bar{u} = \bar{\nabla}\phi$ y que $\bar{g}$ tiene la dirección del eje y:

$$\frac{p - p_o}{\Gamma} = B(t) - \phi_t - (1/2)(\ \bar{\nabla}\ \phi)^2 - g(y-y_o) \quad ; \ \phi = \phi(\bar{r},\ t)$$

$\bar{\nabla}^2\phi = 0$; B(t), y_o,p_o arbitrarios.

si definimos $\phi'(x,t) = \phi(x,t) - \int_{t_o}^{t} B(t)\ dt$

queda

$$\frac{p-p_o}{\Gamma} = -\ \phi_t - (1/2)\ (\bar{\nabla}\phi)^2 - g(y-y_o) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.22)$$

$\bar{u} = \bar{\nabla}\phi$ ....(2.23)

estas ecuaciones se usaràn en la obtención de la EKdV.

1.OBTENCION DE LA ECUACION DE KdV.

Obtendremos una ecuación que gobierna el movimiento de ondas en la superficie del agua en un canal poco profundo.

$\bar{\mu} = \bar{\nabla}\phi = (\phi_x, \phi_y, 0)$ ===> $\bar{\mu} = (u,v)$ velocidad en dos dimensiones ; $\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$

usaremos (2.22) y además la ecuación $\nabla^2\phi = 0$

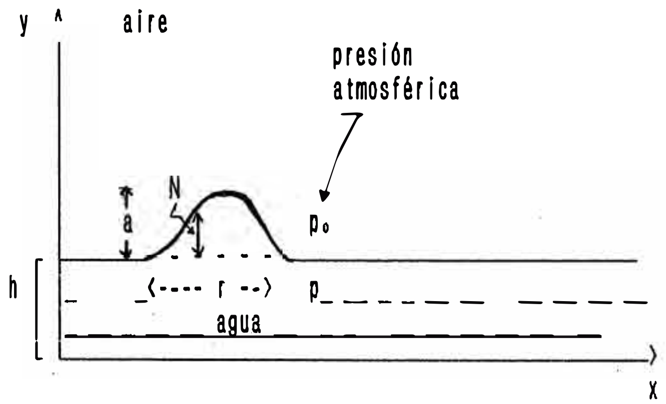


Fig.6 Pulso de onda en la superficie del líquido con velocidad (u,v).

ϕ:potencial de velocidad
g:aceleración de la gravedad
u:velocidad en la dirección x
v:velocidad en la dirección y
x,y:coordenadas espaciales
t:tiempo
Γ:densidad del líquido
p:presión del líquido en el límite aire-agua
N:onda superficial
a:altura del pulso
r:ancho del pulso
h:altura del líquido en el canal

La profundidad es constante,además asumimos que la forma de la onda no cambia a lo largo del eje z.

CONDICIONES DE CONTORNO

a) AIRE-AGUA;un punto de la superficie del pulso tiene ordenada 'y'

$h + N(x,t) - y = 0$ ....(2.24)

derivando (2.24) y considerando x(t) e y(t)

$N_t + N_x\,\phi_x = \phi_y$ ....(2.25)

asumiendo $p = p_o$(más adelante damos la justificación) y haciendo

$y_o = h$ en (2.22) tenemos $\phi_t + (1/2)\,(\nabla\phi)^2 + gN = 0$ ....(2.26)

usaremos $(\bar{\nabla}\phi)^2 = (\phi_x)^2 + (\phi_y)^2$

b) SUELO-AGUA

$y = 0$ ....(2.27)

derivando $\phi_y \Big|_{y=0} = 0$ ....(2.28)

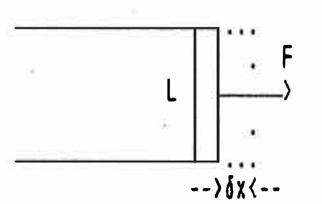
Justificación de la aproximación $p \approx p_o$

En la superficie límite entre el aire y el agua se forma una película elástica con una tensión superficial cuyo coeficiente se define como :

$$\tau = \frac{W}{\delta A}$$

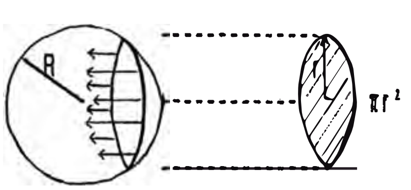
W = trabajo para desplazar δx una película ;

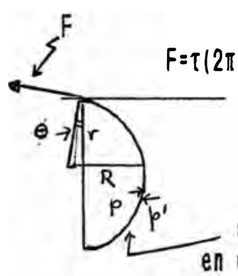
δA = pequeña área desplazada



$$\tau = \frac{W}{\delta A} = \frac{F\,\delta x}{L\,\delta x} = \frac{F}{L}$$ ....(2.29)

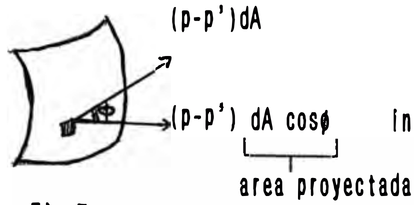
PARA UNA SUPERFICIE ESFERICA





$F = \tau(2\pi r)$....(*)

$\cos\theta = r/R$



Integrando: $(p-p')\pi r^2$ ....(**)

Fig.7

de (*)y (**) : $\tau\,(2\pi\, r)\cos\theta = (p - p')\,\pi\, r^2 \;\; \longrightarrow \;\; (p - p') = \dfrac{2\tau}{R}$ ....(2.30)

En la condición de contorno AIRE-AGUA del problema pusimos: $p=p_o$; esto estará justificado si (coeficiente de tensión superficial del agua: 0.073N/m) aproximadamente la relación $2\tau/R = 0.15/R$ (N/m), R en m.; para $R \gg 0.15$m podemos tomar $2\tau/R \approx 0$ con gran aproximación, luego ($p = p_o$). En este caso R representa los 'radios de curvatura' de la (s) onda (s) que se generan en la superficie del líquido. Continuamos con el procedimiento haciendo un resumen

1° RESUMEN:

$$\left.\begin{array}{l} N_t + N_x\,\phi_x = \phi_y \\ \phi_t + (1/2)\,(\nabla\phi)^2 + gN = 0 \end{array}\right]\; y = h + N \qquad \text{..................................(2.31)}$$

$$\begin{array}{lll} \phi_y = 0 &] & y = 0 \\ \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 &] & 0 < y < h + N \end{array}$$

Hacemos el siguiente cambio de variables (las nuevas variables serán adimensionales)

$x = rx'$; $\phi = \dfrac{gar}{c_o}\,\phi'$; $c_o = \sqrt{g\,h}$ (c_o tiene dimensión de velocidad)

$y = h\,y'$; $N = a\,N'$; $\alpha = a/h$; $\beta = (h/r)^2$; $t = (r/c_o)\,t'$ tenemos

$$\left.\begin{array}{l} N_t + N_x\,\phi_x = \phi_y \\ \dfrac{\delta}{\delta t} \longrightarrow \dfrac{c_o}{r}\dfrac{\delta}{\delta t'} \\ \dfrac{\delta}{\delta x} \longrightarrow \dfrac{1}{r}\dfrac{\delta}{\delta x'} \end{array}\right]\; \begin{array}{l} \dfrac{ac_o}{r}\dfrac{\delta N'}{\delta t'} + \dfrac{(gar)}{c_o r}\dfrac{\delta\phi'}{\delta x'}\,\dfrac{a}{r}\dfrac{\delta N'}{\delta x'} = \dfrac{gar}{c_o h}\dfrac{\delta\phi'}{\delta y'} \\ N'_{t'} + \dfrac{ag}{c_o^2}\,\phi'_{x'}\,N'_{x'} = \dfrac{gr^2}{c_o^2 h}\,\dfrac{\delta\phi'}{\delta y'} \end{array} \qquad \text{......................(2.32)}$$

escribiremos por comodidad las variables y funciones sin prima

$$N_t + \alpha\,N_x\,\phi_x = \frac{1}{\beta}\,\phi_y \quad \text{en } y = 1 + \alpha N \qquad \text{...(2.33)}$$

además $\frac{\delta}{\delta y} \longrightarrow \frac{1}{h}\frac{\delta}{\delta y'}$ tenemos en $\phi_t + \frac{1}{2}[(\phi_x)^2+(\phi_y)^2]+gN = 0$

$$\frac{gar}{c_o}\frac{c_o}{r}\frac{\delta\phi'}{\delta t'} + (1/2)\left(\frac{gar}{c_o}\right)^2\left(\frac{1}{r^2}\frac{\delta^2\phi'}{\delta x'^2} + \frac{1}{h^2}\frac{\delta^2\phi'}{\delta y'^2}\right) + g\,a\,N' = 0$$

$$\phi'_{t'} + (1/2)\,[\alpha\,(\phi'_{x'})^2 + \alpha/\beta\,(\phi'_{y'})^2\,] + N' = 0\ ,$$

escribiendo sin prima :

$$\phi_t+(1/2)\,[\,\alpha\,(\phi_x)^2+\,\alpha/\beta\,(\phi_y)^2\,] + N = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.34)$$

además $\phi'_{y'} = 0 \longrightarrow \phi_y = 0$ ....(2.35)

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \longrightarrow \frac{gar}{c_o}\frac{1}{r^2}\phi'_{x'x'} + \frac{gar}{c_o}\frac{1}{h^2}\phi'_{y'y'} = 0$$

$\beta\,\phi'_{x'x'}+\phi'_{y'y'} = 0$ en $0 < h\,y' < h+ aN'$

$0 < y' < 1 + \alpha N'$

escribiendo sin prima

$$\beta\,\phi_{xx}+\phi_{yy} = 0 \quad \text{en} \quad 0 < y < 1 + \alpha N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.36)$$

2° RESUMEN

$$\left.\begin{array}{l} A)\ N_t + \alpha N_x\,\phi_x = \frac{1}{\beta}\,\phi_y \\ \\ B)\ \phi_t + (1/2)\,[\alpha\,(\phi_x)^2 + \alpha/\beta\,(\phi_y)^2] + N = 0 \end{array}\right]\quad y = 1 + \alpha N$$

$$C)\ \phi_y = 0 \qquad]\quad y=0$$

$$D)\ \beta\,\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \qquad]\quad 0 < y < 1 + \alpha N$$

Debemos resolver la ecuación D) bajo las condiciones A) y B) en la superficie del líquido y la condición C) en el límite agua-suelo.

Se busca una solución de la forma

$$\phi(x,y,t) = \sum_{m=0}^{+\infty} y^m\,\Omega_m(x,t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.37)$$

derivando con respecto a x e y tenemos

$$\phi_y = \sum_{m=1}^{+\infty} m\,y^{m-1}\,\Omega_m(x,t)$$ sabemos que $\phi_y\Big|_{y=0} = 0 \longrightarrow \Omega_1(x,t) = 0$

$$\phi_{xx} = \sum_{m=0}^{+\infty} y^m \Omega_{mxx}(x,t); \qquad \phi_{yy} = \sum_{m=2}^{+\infty} m(m-1)\,\Omega_m(x,t)\,y^{m-2}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} (m+2)(m+1)\,\Omega_{m+2}(x,t)\,y^m$$

Reemplazando en D)

$$\sum_{m=0}^{+\infty} [\beta\,\Omega_{mxx} + (m+2)(m+1)\,\Omega_{m+2}]\,y^m = 0$$ como las potencias de y

en la sumatoria son linealmente independientes, tenemos

$$\Omega_{m+2} = -\frac{\beta}{(m+1)(m+2)}\,\Omega_{mxx} \longrightarrow \Omega_{m+4} = -\frac{\beta}{(m+3)(m+4)}\,\Omega_{(m+2)xx}$$

$$\Omega_{m+4} = \left[\frac{-\beta}{(m+1)(m+2)}\right]\left[\frac{-\beta}{(m+3)(m+4)}\right]\Omega_{mxxxx}$$

notación $\underbrace{\Omega_{mx\ldots x}}_{\text{'r' veces}} \equiv \Omega_{m(r)}$

$$\Omega_{m+4} = \frac{(-\beta)^2}{\dfrac{(m+4)!}{m!}}\,\Omega_{m(4)}; \quad \Omega_{m+6} = \frac{(-\beta)^2}{\dfrac{(m+6)!}{(m+2)!}}\,\Omega_{m+2(4)}$$

$$\Omega_{m+6} = \frac{(-\beta)^2}{\dfrac{(m+6)!}{(m+2)!}}\;\frac{(-\beta)}{(m+1)(m+2)}\;\Omega_{m(6)}$$

Generalizando estas relaciones

$$\Omega_{m+2k} = \frac{(-\beta)^k}{\dfrac{(m+2k)!}{m!}}\,\Omega_{m(2k)} = \frac{(-\beta)^k}{\dfrac{(m+2k)!}{m!}}\,\frac{d^{2k}\,\Omega_m}{dx^{2k}}$$

Para m = 0 tenemos:

$$\Omega_{2k} = \frac{(-\beta)^k}{(2k)!}\,\frac{d^{2k}\,\Omega_0}{dx^{2k}} \qquad \text{para } k = 1,2,3,\ldots$$

para m=1 tenemos

$$\Omega_{2k+1} = \frac{(-\beta)^k}{(2k)!} \frac{d^{2k}\,\Omega_1}{dx^{2k}} = 0\ , \qquad (\Omega_1 = 0)\quad k = 1,2,3,..$$

Luego

$$\phi(x,y,t) = \Omega_0 - (1/2)\ \beta\ y^2\ \Omega_{0xx} + (1/24)\ \beta^2\ y^4\ \Omega_{0xxxx} + O(\beta^3)\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2.38)$$

buscaremos soluciones para los cuales $\beta = (h\ /r)^2 \ll 1$ (el ancho de las ondas mucho mayor que la profundidad del líquido), para conocer la velocidad necesitamos conocer su potencial, por tanto buscamos Ω_0 que forma ϕ; pero para esto necesitamos conocer detalladamente las condiciones de contorno correspondientes a $y = 1+\alpha N$, pero en estas condiciones de contorno aparece la incógnita (N); esperamos que al reemplazar (2.38) en las ecuaciones (2.33), (2.34) y (2.35) pueda despejarse una ecuación para N.

Derivando (2.38):

$$\phi_x = \Omega_{0x} - (1/2)\ \beta\ y^2\ \Omega_{0xxx} + (1/24)\ \beta^2\ y^4\ \Omega_{0xxxxx} + O_x(\beta^3),$$

$O(\beta^3)$ contiene términos con potencias de β mayores o iguales que la cúbica.

$$\phi_y = -\ \beta\ y\ \Omega_{0xx} + (1/6)\ \beta^2\ y^3\ \Omega_{0xxxx} + O_y(\beta^3)$$

reemplazando en (2.33)

$$N_t + \alpha\ N_x\ [\Omega_{0x} - (1/2)\ \beta\ y^2\ \Omega_{0xxx} + (1/24)\ \beta^2\ y^4\ \Omega_{0xxxxx} + O(\beta^3)\ ] - (1/\beta)[$$

$$-\beta\ y\ \Omega_{0xx} + (1/6)\ \beta^2\ y^3\ \Omega_{0xxxx} + O_y(\beta^3)] = 0$$

$$N_t + \alpha\ N_x\ \Omega_{0x} + y\ \Omega_{0xx} - \frac{\alpha\beta}{2} N_x\ y^2\ \Omega_{0xxx} - \frac{1}{6}\ \beta\ y^3\ \Omega_{0xxxx} + O(\beta^2) = 0$$

usando $y = 1 + \alpha\ N$ en la última expresión

$$N_t + \Big[(1+\alpha N)\ \Omega_{0x}\Big]_x - \beta\Big[(1/6)(1+\alpha N)^3\ \Omega_{0xxxx} + (1/2)\alpha\ (1+\alpha N)^2\ \Omega_{0xxx}\Big] + O(\beta^2) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots(2.39)$$

y usando $y = 1 + \alpha\ N$ en (2.34)

$$N + \Omega_{0t} - (1/2)\ \beta(1+\alpha N)^2\Omega_{0xxt} + \alpha/2[(\Omega_{0x})^2 - \beta y^2 \Omega_{0x}\ \Omega_{0xxx}] + \frac{\alpha}{2\beta}\ (\beta y\ \Omega_{0xx})^2 + O(\beta^2) = 0$$

$$N + \Omega_{0t} + \alpha/2\ (\Omega_{0x})^2 - (1/2)\beta(1+\alpha N)^2\Big[\Omega_{0xxt} + \alpha\ \Omega_{0x}\ \Omega_{0xxx} - \alpha(\Omega_{0xx})^2\Big] + O(\beta^2) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots(2.40)$$

con las aproximaciones

$$\frac{a}{h} \ll 1 \quad y \quad \left(\frac{h}{r}\right)^2 \ll 1 \quad \Longrightarrow \alpha\beta \approx 0$$

Con esto (2.39) y (2.40) quedan:

$$N_t + \left[(1 + \alpha N)\, \Omega_{0x}\right]_x - (1/6)\, \beta\, \Omega_{0xxxx} + O(\alpha\beta,\beta^2) = 0 \quad \text{.......(2.41)}$$

$$N + \Omega_{0t} + (1/2)\, \alpha(\Omega_{0x})^2 - (1/2)\, \beta\, \Omega_{0xxt} + O(\alpha\beta,\beta^2) = 0 \quad \text{.......(2.42)}$$

sea $w = \Omega_{0x}$ en (2.41):

$$N_t + \left[(1 + \alpha N)\, w\right]_x - (1/6)\beta\, w_{xxx} + O(\alpha\beta,\beta^2) = 0 \quad \text{.......(2.43)}$$

derivando (2.42) con respecto a 'x'

$$N_x + w_t + \alpha\, w\, w_x - (1/2)\, \beta\, w_{xxt} + O(\alpha\beta,\beta^2) = 0 \quad \text{.......(2.44)}$$

si α, $\beta \approx 0$ (caso límite):

$$\left.\begin{array}{l} N_t + w_x + O(\alpha,\beta) = 0 \\ N_x + w_t + O(\alpha,\beta) = 0 \end{array}\right]$$

este sistema tiene como solución $w = N$, luego N y w satisfacen las ecuaciones:

$$N_t + N_x = -O(\alpha,\beta) \quad y \quad w_t + w_x = -O(\alpha,\beta) \quad \text{.......(2.45)}$$

la solución de la ecuación homogénea de este tipo es una onda viajera $N = f(x-t)$, como vimos en el Cap.1. Ahora buscamos una solución de la forma:

$$w = N + \alpha A + \beta B \quad \text{.......(2.46)}$$

$$A = A(x,t)\ ;\ B = B(x,t)$$

esto en (2.43)

$$N_t + w_x + \alpha\, N_x\, w + \alpha\, N\, w_x - (1/6)\beta(N_{xxx} + \alpha\, A_{xxx} + \beta\, B_{xxx}) + O(\alpha\beta,\ \beta^2) = 0$$

$$N_t + N_x + \alpha\, (A_x + 2N\, N_x) + \beta\, (B_x - (1/6)\, N_{xxx}) + O(\alpha^2,\beta^2,\alpha\beta) = 0 \quad \text{.......(2.47)}$$

Usando (2.46)en (2.44)

$$N_x + N_t + \alpha\, A_t + \beta\, B_t + \alpha(N + \alpha A + \beta B)(N_x + \alpha A_x + \beta B_x) - (1/2)\, \beta\, (N_{xxt} + \alpha\, A_{xxt} + \beta\, B_{xxt}) + O(\alpha\beta,\beta^2) = 0$$

además usando (2.45) en la última expresión

$$N_t + N_x + (A_t + NN_x) + \beta[B_t + (1/2)\, N_{xxx}] + O(\alpha\beta, \beta^2, \alpha^2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2.48)$$

comparando (2.47) y (2.48)

i) $A_x - A_t = -N\, N_x \Longrightarrow A = -(1/4)\, N^2$; luego $A_x = -(1/2)\, N_x\, N$ y $A_t = -(1/2) N\, N_t$

estas expresiones satisfacen la parte homogénea de la correspondiente ecuación (2.45) para w.

ii) $B_t - B_x + 2/3\, N_{xxx} = 0 \Longrightarrow B = 1/3\, N_{xx}$; luego $B_t = 1/3\, N_{xxt}$ y

$$B_x = 1/3\, N_{xxx},$$

igualmente estas expresiones satisfacen (2.45).

Con i) y ii) hemos comprobado que $w = N + \alpha A + \beta B$ satisface (2.45)

luego $$w = N - 1/4\, \alpha\, N^2 + 1/3\, \beta\, N_{xx} \qquad (w = Q_{0x}) \quad \ldots\ldots\ldots (2.49)$$

reemplazando en (2.48):

$$N_t + N_x + \alpha(-(1/2)\, N\, N_t + N\, N_x) + \beta(1/3\, N_{xxt} + (1/2)\, N_{xxx}) + O(\alpha^2, \beta^2, \alpha\beta) = 0$$

con $N_t = -N_x - O(\alpha, \beta)$; para $\alpha\beta,\ \alpha^2,\ \beta^2 \approx 0$

$$N_t + N_x + 3/2\, \alpha\, N\, N_x + 1/6\, \beta\, N_{xxx} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2.50)$$

haciendo la siguiente transformación

$$1 + 3/2\, \alpha\, N(x,t) = U(x',t')\ ; \quad x' = x/(\beta^{1/2})\ , \quad t' = t/(6\, \beta^{1/2})$$

agrupando $N_t + [1 + (3/2)\, \alpha\, N]\, N_x + (1/6)\, \beta\, N_{xxx} = 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta x} &\longrightarrow [1/(\beta^{1/2})]\frac{\delta}{\delta x'} \\ \frac{\delta}{\delta t} &\longrightarrow [1/(6\beta^{1/2})]\frac{\delta}{\delta t'} \end{aligned}\right] \quad \begin{aligned} &[1/(6\beta^{1/2})]\left(\frac{2\alpha}{3}\right)U_{t'} + U[1/(\beta^{1/2})]\left(\frac{2\alpha}{3}\right)U_{x'} + \\ &+\left(\frac{\beta}{6}\right)[1/(\beta^{3/2})]\left(\frac{2\alpha}{3}\right) U_{x'x'x'} = 0 \end{aligned}$$

Simplificando y escribiendo las variables sin prima

$$U_t + 6UU_x + U_{xxx} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2.51)$$

(2.51) es la ecuación de KdV; describe el movimiento de ondas superficiales en un canal de agua poco profundo. Nosotros buscaremos soluciones del tipo de las ondas viajeras.

Haciendo $U = \frac{1}{6} V$ en (2.51) tenemos

$$V_t + VV_x + V_{xxx} = 0 \qquad \text{...(2.52)}$$

Buscamos una solución de la forma:

$V(x,t) = f(x-ct) \longrightarrow \quad V_t = -cf'$

$c > 0 \qquad\qquad V_x = f'$

Reemplazando en (2.52)

$$-c f' + f f' + f''' = 0 \longrightarrow (-c f + \frac{1}{2} f^2 + f'')' = 0$$

Sí asumimos:

$$V, V_x, V_t \text{--------}\to 0 \qquad \text{...(2.53)}$$
$$/x/ \longrightarrow +\infty$$

Antiderivando: $-c f + \frac{1}{2} f^2 + f'' = 0$

Multiplicando por f': $-c f f' + \frac{1}{2} f' f^2 + f' f'' = 0$

$$(-c f^2/2 + 1/6 f^3 + 1/2 f'^2)' = 0$$

Asumiendo nuevamente (2.53) y antiderivando; además multiplicando por 6

$$-3 c f^2 + f^3 + 3 f'^2 = 0 \longrightarrow f'^2 = 1/3 f^2 (3c - f)$$

Sea: $s = x - ct$ y $f = 3 c \operatorname{sen}^2\theta$; $f' = 6 c \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, \theta'$

reemplazando en $\sqrt{3} f' = f \sqrt{3c-f}$ $\Longrightarrow \theta' = \sqrt{c/2} \operatorname{sen}\theta$

$\Longrightarrow \quad \csc\theta \, \theta' = \sqrt{c/2} \quad \text{.............}(*)$

sabemos $(\operatorname{Ln} \frac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta})' = -\csc\theta \, \theta'$ luego (*) queda

$1+\cos\theta = A \exp(-\frac{\sqrt{c}}{2} s) \operatorname{sen}\theta$; sea $k = A \exp(-\frac{\sqrt{c}}{2} s)$, tenemos

$$ctg(\theta/2)=k \quad ,\text{pero} \quad ctg(\theta/2) = \frac{1 + \sqrt{1-sen^2\theta}}{sen\theta}; \text{ luego}$$

$$\frac{1 + \sqrt{1-f/(3c)}}{(f/(3c))^{1/2}} = k, \quad \text{elevando al cuadrado y desarrollando}$$

$$f\,[(1+k^2)^2\, f - 12\, c\, k^2] = 0 \Longrightarrow f = 0 \text{ ó } f = \frac{(12c)k^2}{(1+k^2)^2}$$

$f = 0 \Longrightarrow V = 0$ satisface (2.52) (solución trivial)

$$f = 12c\,\frac{Ak}{(1+A^2k)^2} = 12c\,\frac{A^2}{\left[e^{\frac{\sqrt{c}}{2}s} + A^2\, e^{-\frac{\sqrt{c}}{2}s}\right]^2}$$

Tomamos A=1 en última ecuación para tener una función hiperbólica conocida

$$f = 3\, c\, sech^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct)\right]$$

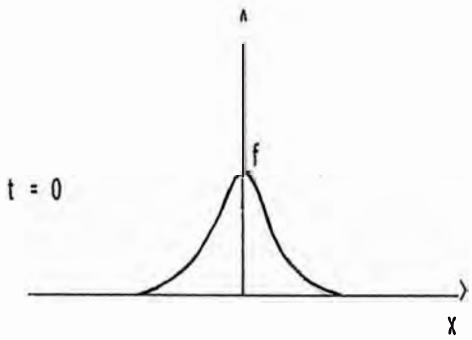


Fig.8

Volviendo a las variables originales sucesivamente

$$V = f = 6U$$

$$U = c/2\, sech^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x-ct)\right] \longrightarrow U(x',t') = c/2\, sech^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x'-ct')\right]$$

$$N(x,t) = (2/3)\, \alpha^{-1}\, [U(x',t') - 1]$$

$$= (2/3)\, \alpha^{-1}\, \{[c/2\, sech^2\, (\frac{1}{2}\sqrt{c}\,(x'- ct')\,] - 1\}$$

$$= (2/3)\, \alpha^{-1}\, \{c/2\, sech^2\, [\frac{1}{2}\sqrt{c}\,(\frac{x}{\sqrt{\beta}} - \frac{ct}{\sqrt{6}})\,] - 1\}$$

volviendo nuevamente ----->$N'(x',t')$

$$N'(x',t') = (2/3)\, \alpha^{-1} \{c/2 \operatorname{sech}^2[\frac{1}{2} c(\frac{x'}{\sqrt{\beta}} - \frac{ct'}{\sqrt{6}})] - 1\}$$

$$N = aN' = a\,(2/3)\, \alpha^{-1} \{c/2 \operatorname{sech}^2[\frac{1}{2} c(\frac{x}{r\sqrt{\beta}} - \frac{cc_0}{\sqrt{6}} t)] - 1]$$

$$N = (2/3) a\, \alpha^{-1} \{c/2 \operatorname{sech}^2[\frac{1}{2} \frac{\sqrt{c}}{r\sqrt{\beta}} (x - \frac{cc_0}{6} t)] - 1\}$$

Aqui podemos relacionar la amplitud y la velocidad de la onda con los parámetros del pulso (ancho y altura) y la altura h, velocidad: $u = \frac{c}{6}\sqrt{gh}$, amplitud: $a = \frac{c}{3}h$, con c = parámetro

METODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS

Antes de resolver la ecuación de KdV aplicaremos el método a la ecuación (1.20) :

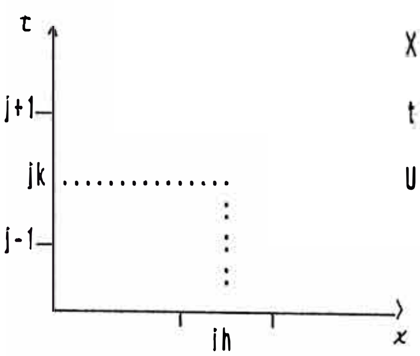
$$\frac{\delta U}{\delta t} + \frac{\delta F(x,t)}{\delta x} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.54)$$

$U = U(x,t)$.

Notamos que para $F = 1/2\, (a+U)^2$ se obtiene los primeros términos de la ecuación de KdV.

$$\frac{\delta U}{\delta t} + (a + U) \frac{\delta U}{\delta t} = 0$$

Abordaremos la ecuación (2.54):



$X_{i+1} - X_i = h$

$t_{j+1} - t_j = k$

$U(x,t) \approx U(x_i,t_j) \equiv U_{i,j}$
(aproximación y notación)

Fig. 9

Usaremos (omitimos escribir j) las siguientes aproximaciones de los operadores de derivada en diferencias finitas

$$U_{\bar{x},i} = \frac{U_i - U_{i-1}}{h} \qquad U_{x,i}^{+} = \frac{U_{i+1} - U_i}{h}$$

$$U_{\overset{\circ}{x},i} = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} = \frac{1}{2}\left[U_{\bar{x},i} + U_{x,i}^{+}\right]$$

$$(A F_x)_x = A F_{xx} + A_x F_x = \frac{1}{h}\left[(AF_x)_{i+1/2} - (AF_x)_{i-1/2}\right] =$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[A_{i+1/2}\,(f_{i+1} - f_i) - A_{i-1/2}(F_i - F_{i-1})\right]$$

$$\text{con} \quad A_{i\pm 1/2} = \frac{A_{i\pm 1} + A_i}{2}$$

En el presente trabajo no nos ocuparemos de la estabilidad de los cálculos, optaremos por comparar las soluciones analíticas conocidas con la correspondiente solución aproximada por mètodos numéricos.

Para i fijo, desarrollando U en torno de ij :

$$U_{i,j+1} = U_{ij} + k\left[\frac{\delta U}{\delta t}\right]_{ij} + \frac{1}{2} k^2 \frac{\delta}{\delta t}\left[\frac{\delta U}{\delta t}\right]_{i,j} + \ldots \text{ y teniendo}$$

y teniendo en cuenta (2.54)

$$= U_{ij} - k\left[\frac{\delta F}{\delta x}\right]_{i,j} - \frac{1}{2} k^2 \frac{\delta}{\delta t}\left[\frac{\delta F}{\delta x}\right]_{i,j} + \ldots$$

Asumimos que:

$$\frac{\delta}{\delta t}\left[\frac{\delta F}{\delta x}\right] = \frac{\delta}{\delta x}\left[\frac{\delta F}{\delta t}\right] = \frac{\delta}{\delta x}\left[\frac{\delta F}{\delta U}\,\frac{\delta U}{\delta t}\right] = -\frac{\delta}{\delta x}\left[\frac{\delta F}{\delta U}\,\frac{\delta F}{\delta x}\right]$$

Sea $A(U) = \dfrac{\delta F}{\delta U}$

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} - k \left[\frac{\delta F}{\delta x}\right]_{i,j} + \frac{1}{2} k^2 \frac{\delta}{\delta x} \left[A(U) \frac{\delta F}{\delta x}\right]_{i,j}$$

$$U_{i,j+1} = U_{ij} - \frac{k}{h} \frac{F_{i+1,j} - F_{i-1,j}}{2} + \frac{1}{2} \frac{k^2}{h^2} \{ A_{i+1/2,j} [F_{i+1,j} - F_{i,j}] - A_{i-1/2,j} [F_{i,j} - F_{i-1,j}] \}$$

$$U_{i,j+1} = U_{ij} - \frac{k}{h} \frac{F_{i+1,j} - F_{i-1,j}}{2} + 1/2 \left(\frac{K}{h}\right)^2 \left\{ \frac{A_{i+1,j} + A_{ij}}{2} [F_{i+1,j} - F_{i,j}] - \frac{A_{i-1,j} + A_{ij}}{2} [F_{i,j} - F_{i-1,j}] \right\}$$

$$U_{i,j+1} = U_{ij} - p \left[\frac{F_{i+1,j} - F_{i-1,j}}{2} \right] + \frac{1}{2} p^2 \{ (A_{i+1,j} + A_{ij}) F_{i+1,j} - (A_{i+1,j} + 2 A_{ij} + A_{i-1,j}) F_{ij} + (A_{i-1,j} + A_{ij}) F_{i-1,j} \} \quad \text{.........(2.55)}$$

donde $p=k/h$

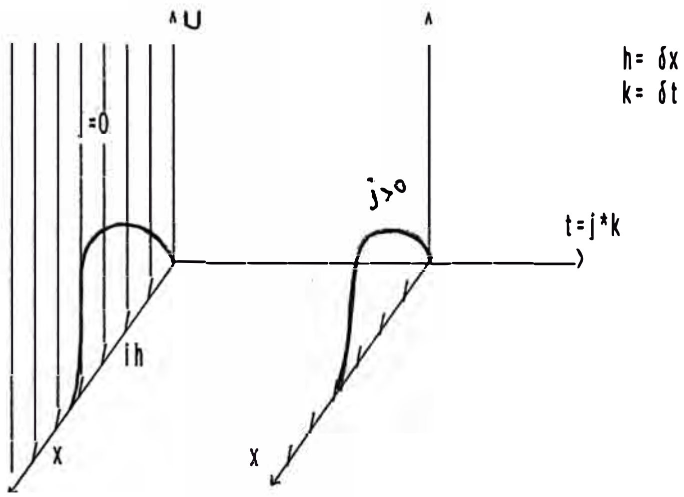


Fig. 15 Dada una forma de U en j=0, se muestra U para j > 0.

(2.55) nos servirà para hacer un programa y ver la progresiòn de la onda dada cierta condiciòn inicial. Como función $U(x,0)$ escogemos por comodidad un trapecio; se dan como datos los valores de x_a, x_b, x_c, x_d y las alturas s y r (vease la Fig. 16)

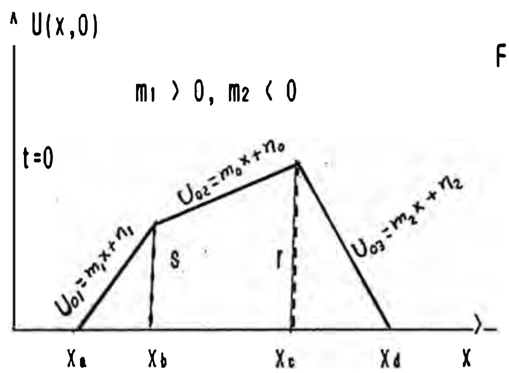


Fig. 16 Se muestra el perfil inicial del pulso de onda U_0

En general para

$$U_t + (a+U)U_x = 0$$

$$U(x,t) = V\{x-[a+U(x,t)]t\} \qquad (2.56)$$

$U_0 = V(x,0)$, la ecuación (2.56) define implicitamente la función $U(x,t)$, como ejemplo estudiemos el siguiente caso;sean U_{0i} ($i=1,2,3$) los lados del trapecio inicial y U_i los lados del mismo para $t>0$; ademas se tienen las siguientes relaciones

$$x_a = -\frac{n_1}{m_1},\quad x_b = \frac{s-n_1}{m_1},\quad x_c = \frac{r-n_2}{m_2},\quad x_b = \frac{s-n_0}{m_0},\quad x_c = \frac{r-n_0}{m_0},\quad x_d = -\frac{n_2}{m_2}$$

$$(n_1 < 0,\ s > n_1,\ s > n_0,\ r > n_2 \text{ y } n_2 > 0)$$

$$m_1 = s/(x_b-x_a),\quad m_0 = (r-s)/(x_c-x_b),\quad m_2 = -r/(x_d-x_c)$$

$$n_1 = -s\,x_a/(x_b-x_a),\quad n_0 = (s\,x_c - r\,x_b)/(x_c-x_b) \quad y \quad n_2 = r\,x_a/(x_a-x_c)$$

en la configuración $t>0$

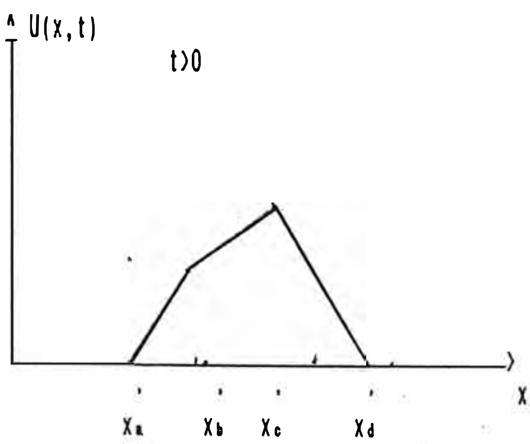


Fig.17

$$\left.\begin{array}{l} x_a = x_a + at \\ \\ x_b = x_b + (m_1 x_b + a + n_1)\, t \\ \\ x_c = x_c + (m_0 x_c + a + n_0)\, t \\ \\ x_d = x_d + a\, t \end{array}\right| \text{-..(2.57)}$$

Estudiemos el dominio de cada una de las rectas U_i cuando se tiene $t>0$

<u>recta</u> $U_1(x,t)$

$$x_a \leq x \leq x_b$$

$$x_a + at \leq x \leq x_b + (m_1 x_b + a + n_1)\, t$$

<u>recta</u> $U_2(x,t)$

$$x_b \leq x \leq x_c$$

$$x_b + (m_1 x_b + a + n_1)\, t \leq x \leq x_c + (m_0 x_c + a + n_0)\, t$$

pero $m_1 x_b + n_1 = m_0 x_b + n_0$

$$x_b + (m_0 x_b + a + n_0)\, t \leq x \leq x_c + (m_0 x_c + a + n_0)\, t$$

$t < \dfrac{1}{|m_0|}$ si $m_0 < 0$ y cualquier t si $m_0 > 0$

<u>recta</u> $U_3(x,t)$

$$x_c + (m_0 x_b + a + n_0)\, t \leq x \leq x_a + (m_2 x_a + a + n_2)\, t$$

$t < \dfrac{1}{|m_2|}$;esto quiere decir que para $t = \dfrac{1}{|m_0|}$ la recta U_3 se hace vertical dejando de ser función. Lo mismo pasa con U_2 si $m_0<0$. Esta solución explícita $U(x,t)$ se compara con la solución numèrica, mediante un programa de Pascal para ver la validez del mètodo numèrico aplicado a la ecuación (2.54).

METODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS APLICADO A LA EKdV

Se tiene la ecuaciòn

$U_t + 6(U+a)\,U_x + U_{xxx} = 0$ escribimos en la forma

$U_t + [F(U) + U_{xx}]_x = 0$ donde $F(U) = 3(U+a)^2$, sea

$$A(U) = \frac{\delta F}{\delta U} = 6(U+a)$$

Usaremos las siguientes aproximaciones de las derivadas

$$\bar{U}_{x,i} = \frac{U_i - U_{i-1}}{h} \quad ; \quad U_{x,i} = \frac{U_{i+1} - U_i}{h}$$

$$\overset{\circ}{U}_{x,i} = \frac{1}{2}(\bar{U}_{x,i} + U_{x,i}) = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h}$$

$$U_{xx} \simeq \bar{U}_{xx,i} = \frac{U_{x,i} - \bar{U}_{x,i}}{h} = \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2}$$

$$U_{xxx} \simeq \bar{\overset{\circ}{U}}_{xxx,i} = 1/h^2\left[\frac{U_{i+2} - U_i}{2h} - 2\left(\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h}\right) + \frac{U_i - U_{i-2}}{2h}\right]$$

$$= \frac{1}{2h^3}\left[U_{i+2} - 2\,U_{i+1} + 2\,U_{i-1} - U_{i-2}\right]$$

$$U_{xxxx} \simeq \bar{\overset{\circ}{U}}_{xxxx,i} = \frac{1}{h^2}\left[\left(\frac{U_{i+2} - 2\,U_{i+1} + U_i}{h^2}\right) - 2\left(\frac{U_{i+1} - 2\,U_i + U_{i-1}}{h^2}\right) + \left(\frac{U_i - 2\,U_{i-1} + U_{i-2}}{h^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{h^4}\left[U_{i-2} - 4\,U_{i-1} + 6\,U_i - 4U_{i+1} + U_{i+2}\right]$$

$$U_{xxxxxx} \simeq \bar{\bar{\bar{U}}}_{xxxxxx,i} = \frac{1}{h^6}\left[U_{i-3} - 6U_{i-2} + 15U_{i-1} - 20U_i + 15U_{i+1} - 6U_{i+2} + U_{i+3}\right]$$

Desarrollando $U(x,t)$ en serie de Taylor alrededor de ij:

$$U_{i,j+1} = U_{ij} + k\left[\frac{\delta U}{\delta t}\right]_{ij} + \frac{1}{2}k^2\,\frac{\delta}{\delta t}\left[\frac{\delta U}{\delta t}\right]_{i,j} + \ldots$$

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} - k\left[\frac{\delta}{\delta x}(F+U_{xx})\right]_{i,j} - \frac{1}{2}k^2\left\{\frac{\delta}{\delta t}\left[\frac{\delta}{\delta x}(F+U_{xx})\right]\right\}_{i,j}+\ldots\ldots\ldots\ldots(2.58)$$

asumimos

$$\frac{\delta}{\delta t}\left[\frac{\delta}{\delta x}(F+U_{xx})\right] = \frac{\delta}{\delta x}\left[\frac{\delta}{\delta t}(F+U_{xx})\right] = \frac{\delta}{\delta x}\left[\frac{\delta F}{\delta U}\frac{\delta U}{\delta t} + \frac{\delta^2}{\delta x^2}\left(\frac{\delta U}{\delta t}\right)\right]$$

$$= \frac{\delta}{\delta x}\left[-\frac{\delta F}{\delta U}\frac{\delta}{\delta x}(F+U_{xx}) - \frac{\delta^3}{\delta x^3}(F(U)+U_{xx})\right]$$

$$= -\frac{\delta}{\delta x}\left[\frac{\delta F}{\delta U}(F_x+U_{xxx}) + \frac{\delta^3 F}{\delta x^3} + U_{xxxxx}\right.$$

$$= -\frac{\delta}{\delta x}\left[A(U)\frac{\delta F}{\delta x} + A(U)\,U_{xxx} + F_{xxx} + U_{xxxxx}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots(2.59)$$

además $F_x = 6(U+a)U_x$ $\quad F_{xx} = 6(a+U)U_{xx} + (U_x)^2$

$$F_{xxx} = 6\left[(U+a)\,U_{xxx} + U_x U_{xx} + 2\,U_x U_{xx}\right]$$

$$= 6\left[(U+a)\,U_{xxx} + 3\,U_x U_{xx}\right]$$

$$= 6(U+a)\,U_{xxx} + 18\,U_x U_{xx}$$

$$= A\,U_{xxx} + 18\,U_x U_{xx}$$

reemplazando estas expresiones en (2.59)

$$\frac{\delta}{\delta t}\left[\frac{\delta}{\delta x}(F+U_{xx})\right] = -\frac{\delta}{\delta x}\left[AF_x + A\,U_{xxx} + A\,U_{xxx} + 18\,U_x U_{xx} + U_{xxxxx}\right]$$

$$= -\left[\frac{\delta}{\delta x}(AF_x) + 2\frac{\delta}{\delta x}(A\,U_{xxx}) + 18\frac{\delta}{\delta x}(U_x U_{xx}) + U_{xxxxxx}\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots(2.60)$$

aproximando la ecuación (2.60)

$$= -\left\{\frac{1}{h^2}\left[A_{i+1/2}(F_{i+1}-F_i) - A_{i-1/2}(F_i-F_{i-1})\right] + \frac{2}{h^2}\left\{A_{i+1/2}\left[\frac{U_{i+2}-2U_{i+1}+U_i}{h^2}\right.\right.\right. -$$

$$\frac{U_{i+1}-2U_i+U_{i-1}}{h^2}\Big] - A_{i-1/2}\Big\{\frac{U_{i+1}-2U_i+U_{i-1}}{h^2} - \frac{U_i-2U_{i-1}+U_{i-2}}{h^2}\Big\}+$$

$$\frac{18}{h^2}\Big[\Big(\frac{U_{i+1/2+1}-U_{i+1/2-1}}{2h}\Big)\Big(\frac{U_{i+2}-U_i}{2h} - \frac{U_{i+1}-U_{i-1}}{2h}\Big) -$$

$$\Big(\frac{U_{i-1/2+1}-U_{i-1/2-1}}{2h}\Big)\Big(\frac{U_{i+1}+U_{i-1}}{2h} - \frac{U_i-U_{i-2}}{2h}\Big)\Big] + \frac{1}{h^6}[U_{i-3}-6U_{i-2}+$$

$$15U_{i-1} - 20U_i + 15U_{i+1}-6U_{i+2}+U_{i+3}]\Big\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.61)$$

volviendo a (2.58)(se omite escribir el Indice j de U en el segundo miembro por comodidad)

$$U_{i,j+1} = U_i - k\,(F_x)_i - k(U_{xxx})_i + \frac{1}{2}k^2\,[(AF_x)_x + 2\,(AU_{xxx})_x + 18(U_xU_{xx})_x + U_{xxxxxx}]_i$$

$$= U_i - k\,(F_x)_i + \frac{}{2}k^2\,[(AF_x)_x]_i - k\,(Uxxx)_i +$$

$$+ \frac{}{2}k^2\,[2\,(AU_{xxx})_x + 18(U_xU_{xx})_x + U_{xxxxxx}]_i$$

Los tres primeros tèrminos aproximan a la ecuaciòn $U_t + (a+U)\,U_x = 0$; reemplazando (2.61) y los tèrminos conocidos para (2.55) tenemos

$$U_{ij+1} = U_{ij} - \frac{k}{h}\,\frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2} + \frac{1}{4}\Big(\frac{k}{h}\Big)^2][(A_{i+1}+A_i)F_{i+1} - (A_{i-1}+A_i)F_{i-}$$

$$-\frac{k}{2h^3}(U_{i+2}-2U_{i+1}+2U_{i-1}-U_{i-2}) + \frac{k^2}{2}\Big\{\frac{2}{2h^4}[(A_i+A_{i+1})(U_{i+2}-3U_{i+1}+$$

$$3U_i-U_{i-1}) - (A_i+A_{i-1})(U_{i+1}-3U_i+3U_{i-1}-U_{i-2})] + \frac{18}{8h^4}[(U_{i+2}+U_{i+1}-$$

$$-U_i-U_{i-1})(U_{i+2}-U_{i+1}-U_i-U_{i-1}) - (U_{i+1}+U_i-U_{i-1}-U_{i-2})(U_{i+1}-U_{i-1}-$$

$$-U_i+U_{i-2})] + \frac{1}{h^6}[U_{i-3}-6U_{i-2}+15U_{i-1}-20U_i+15U_{i+1}-6U_{i+2}+U_{i+3}]\Big\}$$

sean $s_1 = A_{i+1} + A_i$, $s_2 = A_{i-1} + A_i$ $\quad p = k/h$

Observación: Las aproximaciones usadas para las derivadas asegura que todas ellas tienden a un valor finito cuando h--->0, asumiendo funciones U(x,t) suaves; por ejemplo

U_{xxx}:

$$U_{xxx} \approx \overset{o}{\bar{U}}_{xxx} = \frac{1}{2h^3}\left[U_{i+2} - 2\,U_{i+1} + 2\,U_{i-1} - U_{i-2}\right]$$

Finalmente escribimos en la forma

$$U_{i,j+1} = U_{ij} + \left(-\,p/2 + \frac{p^2}{4}s_1\right)F_{i+1} + \left(p/2 + \frac{p^2}{4}s_2\right)F_{i-1} + (s_1+s_2)\left(-\frac{p^2}{4}\right)F_i -$$

$$-\frac{p}{2h^2}\left(U_{i+2} - 2\,U_{i+1} + 2\,U_{i-1} - U_{i-2}\right) + \frac{p^2}{2h^2}\left[A_i(U_{i+2} - 4U_{i+1} + 6U_i -\right.$$

$$\left. 4U_{i-1} + U_{i-2}) + A_{i+1}(U_{i+2} - 3U_{i+1} + 2U_i - U_{i-1}) - A_{i-1}(U_{i+1} - 3U_i + 3U_{i-1} - U_{i-2})\right] +$$

$$\frac{9p^2}{8h^2}\left[(U_{i+2}+U_{i+1}-U_i-U_{i-1})(U_{i+2}-U_{i+1}-U_i+U_{i-1}) - (U_{i+1}+U_i-U_{i-1}-U_{i-2})(U_{i+1}-\right.$$

$$\left. -U_{i-1}-U_i+U_{i-2})\right] + \frac{p^2}{2h^4}\left[U_{i-3} - 6U_{i-2} + 15U_{i-1} - 20U_i + 15U_{i+1} - 6U_{i+2} + U_{i+3}\right]$$

....(2.62)

(2.62) se usa en el programa **ecuaKdV.Pas.**

Una solución explícita de $U_t + 6UU_x + U_{xxx}=0$ es

$$U(x,t) = c/2\ \mathrm{sech}^2[1/2\ \sqrt{c}\ (x-ct)]$$

si U ----> $(U'+a)$ tenemos $U_t + 6(U + a)\,U_x + U_{xxx}=0$ ....(*)

luego $U = U - a = c/2\ \mathrm{sech}^2[\tfrac{1}{2}\ \sqrt{c}\ (x-ct)] - a$ es solución de (*)

escribiendo $U_t + 6(U + a)\,U_x + U_{xxx}=0$

una solución particular es

$$U(x,t) = c/2\ \mathrm{sech}^2[1/2\ \sqrt{c}\ (x-ct)]-a \quad \text{donde } a,c = \text{constantes}$$

esta última expresión para $t= 0$ es $U(x,0) = c/2\ \mathrm{sech}^2[1/2\ \sqrt{c}\ x]-a$ y se usará para dar condiciòn inicial (t=0) a la soluciòn por mètodos numèricos y comparar con la soluciòn analitica a medida que el pulso de onda viaja en el espacio-tiempo; esto se realiza en el programa ecuaciòn KdV. Pas.

2.ECUACION DE SINE-GORDON EN MECANICA

Tal vez la mejor manera de describir una ecuaciòn de onda (bidimensional) con soluciones de tipo solitòn se da en la ecuaciòn de Sine-Gordon

$$\phi_{xx}-\phi_{tt} = \operatorname{sen}\phi \quad \ldots\ldots (2.63)$$

Esta ecuaciòn es invariante bajo la transformaciòn de Lorentz siendo por lo tanto apropiado para describir particulas elementales en un espacio tiempo bidimensional. Esta ecuaciòn puede ser usada para describir fenòmenos fisicos como por ejemplo: propagaciòn de dislocamiento en cristales, movimiento de paredes de Bloch en cristales magnèticos, teoria de particulas elementales, etc. La ecuaciòn de Sine-Gordon apareciò en 1882 en un articulo de Bäcklund sobre Geometria Diferencial, èl obtuvo una soluciòn para multisolitòn 'sumando' diversas soluciones de tipo solitòn.

Una gran clase de fenòmenos no-lineales y dispersivos pueden ser ilustrados por el comportamiento de un arreglo de pèndulos acoplados con grades oscilaciones. Este ejemplo nos conduce al tipo de ecuaciòn de Sine-Gordon que permite describir fenòmenos no-lineales en diversas ramas de la fisica. Un arreglo de pèndulos como en la figura 19 es un buen ejemplo de un movimiento de ondas no-lineales.

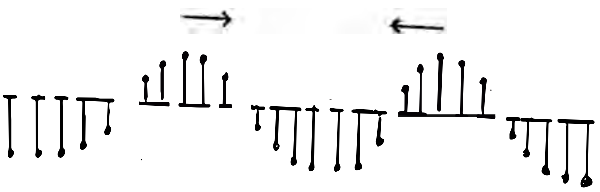


Fig.18 Interacciòn de dos ondas tipo solitòn en un sistema de muchos pèndulos acoplados.

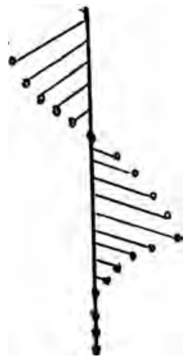


Fig.19 Arreglo de pèndulos acoplados con grandes oscilaciones. Ejemplo de un movimiento de ondas no-lineales.

Fig.20 Arreglo de pèndulos acoplados realizando pequeñas oscilaciones. Ejemplo de propagaciòn de una onda lineal.

Obtenciòn de la ecuaciòn de Sine-Gordon en el caso particular de pèndulos acoplados

Tenemos un arreglo de muchos pèndulos de longitud l_0 con masas iguales localizadas solamente en sus extremos; en sus extremos superiores estan unidos a un cilindro elàstico con mòdulo de rigidez G, de tal forma que el arreglo de pèndulos puede realizar movimientos solamente de torsiòn.

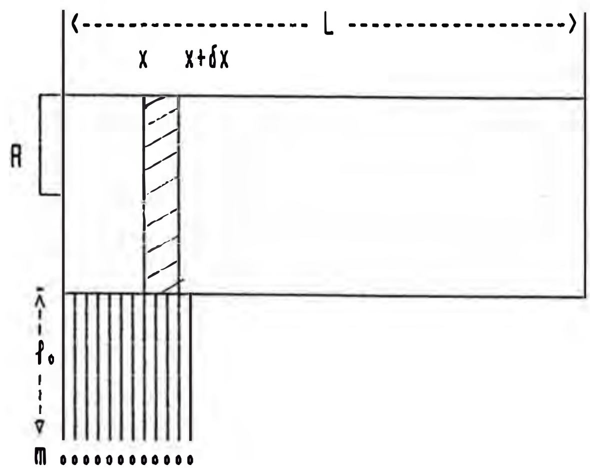


Fig.21 Tubo cilìndrico homogèneo con mòdulo de rigidez G.

$$\text{definimos } \mu = \frac{mgn}{L} = \text{constante.}$$

n--->nùmero de pèndulos.

μ--->peso por unidad de longitud

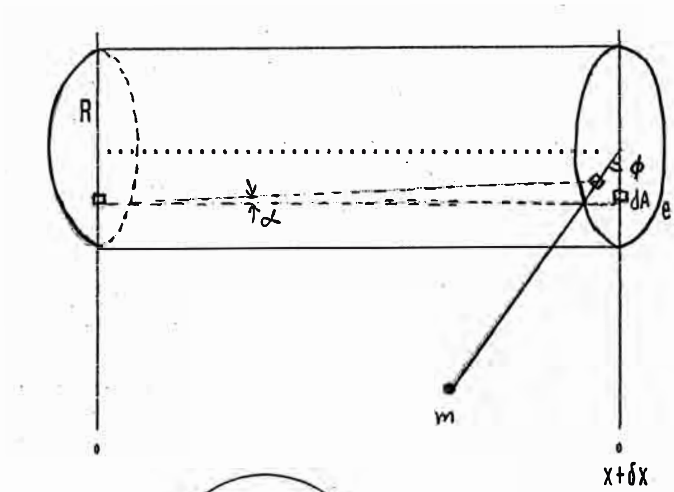


Fig.22 Cilindro infinitesimal de longitud δx.

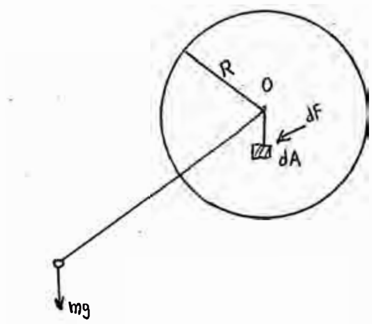


Fig.23 Se muestra una secciòn del cilindro.

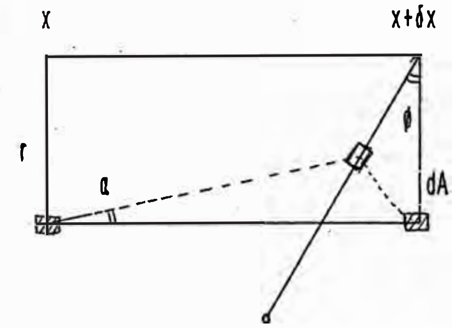


Fig.24 Se muestra el desplazamiento transversal de un solo pèndulo en la posiciòn x.

Escribimos la ley de Hooke

$$T = G\,\alpha$$

- α → àngulo de desplazamiento transversal
- G → mòdulo de rigidez
- T → tensiòn

Primero hallamos la relaciòn entre α y ϕ_x:

de la Fig. 22 podemos aproximar y escribir $\delta x\,\alpha = r\,\delta\phi$

de la Fig. 23 $T = \dfrac{dF}{dA}$ $\quad F(r,\phi)$ ---->fuerza superficial aplicado en una secciòn del cilindro.

usando la ley de Hooke

$$\frac{\delta F}{\delta A} = G\,\alpha$$

$$= Gr\,\frac{\delta\phi}{\delta x},$$ multiplicando por r e integrando para toda la superficie circuilar se tiene

$$Fr = [\int r^2 dA]\, G \frac{\delta\phi}{\delta x} \qquad \text{sean} \quad J = \int r^2 dA = \text{constante}$$

$$M_1 = JG \frac{\delta\phi}{\delta x}\ , \quad M_1 = Fr$$

M_1 ---> momento de las fuerzas de tensiòn.

Calculemos el momento debido a la acciòn del pèndulo

$$\delta M_2 = \delta w \,\text{sen}\phi\, (R+l_o) \qquad \text{donde } \delta w = \mu\, \delta x$$

$$= (R+l_o)\mu\, \delta x\, \text{sen}\phi \qquad \text{y} \quad \delta M_1 = JG\, \delta\left(\frac{\delta\phi}{\delta x}\right)$$

Para el mivimiento giratorio de un cuerpo sòlido alrededor del eje inmòvil tenemos

$$\delta I\, \phi_{tt} = \delta M \qquad M\text{---> momento total}$$

I--->momento de inercia

$$K\, \delta x\, \phi_{tt} = JG\, \delta\left(\frac{\delta\phi}{\delta x}\right) - (R+l_o)\, \mu\, \delta x\, \text{sen}\phi$$

donde K---->momento de inercia por unidad de longitud

llevando al lìmite esta ùltima relaciòn

$$\phi_{tt} = \frac{JG}{K}\phi_{xx} - \frac{(R+l_o)}{K}\mu\, \text{sen}\phi$$

$$K\, \phi_{tt} = JG\, \phi_{xx} - \mu(R+l_o)\, \text{sen}\phi$$

Haciendo la siguiente transformaciòn

$$x = \sqrt{\frac{GJ}{(R+l_o)\mu}}\, x' \qquad t = \sqrt{\frac{K}{(R+l_o)\mu}}\, t' \qquad \phi(x,t) = \Phi(x',t')$$

$$\Phi_{x'x'} - \Phi_{t't'} = \text{sen}\Phi$$

Escribiendo las variables sin prima obtenemos la ecuaciòn de Sine-Gordon usual

$$\Phi_{xx} - \Phi_{tt} = \text{sen}\Phi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.64)$$

lo que buscamos ahora es una soluciòn del tipo

$$\Phi(x,t) = \Omega(z)\ , \qquad \text{con} \quad z = x - ut$$

tenemos $\Phi_{xx} = \Omega''$, $\Phi_{tt} = u^2\Omega''$ reemplazando en (2.64) obtenemos

$$\Omega'' - u^2\,\Omega'' = \text{sen}\Omega \qquad \text{..........(2.65)}$$

$$\Omega'' = \frac{\text{sen}\Omega}{1-u^2} \qquad \text{..........(2.66)}$$

multiplicando (2.66) por Ω'

$$\Omega'\Omega'' = \frac{\Omega'\text{sen}\Omega}{1-u^2} \;\longrightarrow\; \Omega'\Omega'' - \frac{\Omega'\text{sen}\Omega}{1-u^2} = 0$$

$$\left[\frac{\Omega'^2}{2} + \frac{\cos\Omega}{1-u^2}\right] = 0 \quad \text{asumiendo } u^2 \neq 1 \qquad \frac{\Omega'^2}{2} + \frac{\cos\Omega}{1-u^2} = c_1$$

$|\Omega'| \longrightarrow 0$ cuando $|z| \longrightarrow \pm\infty$ (condiciones de contorno)

sabemos que $|\cos\Omega| < 1$

para obtener una soluciòn que tome la forma de una funciòn conocida hacemos

$$c_1 = \frac{1}{1-u^2}$$

$$\frac{\Omega'^2}{2} + \frac{\cos\Omega}{1-u^2} = \frac{1}{1-u^2} \;\longrightarrow\; \frac{d\Omega}{dz} = \pm\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{1-\cos\Omega}}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\int \frac{d\Omega}{(1-\cos\Omega)^{1/2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{(1-u^2)^{1/2}}\int dz$$

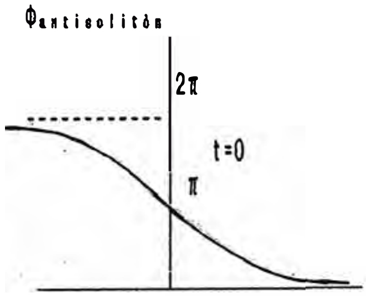
$$\sqrt{2}\log tg(\Omega/4) = \pm\frac{\sqrt{2}}{(1-u^2)^{1}}\int dz \;\longrightarrow\; \sqrt{2}\log tg(\Phi/4) = \pm\frac{\sqrt{2}(x-ut)}{(1-u^2)^{1/2}}$$

$$\log tg(\Phi/4) = \pm\frac{(x-ut)}{(1-u^2)^{1/2}} + c_2/\sqrt{2}$$

$$tg(\Phi/4) = C\exp\left[\pm\frac{(x-ut)}{(1-u^2)^{1/2}}\right]$$

tenemos dos soluciones

b)



Podemos expresar la velocidad en función de parámetros conocidos, sabemos que

$$x = \sqrt{\frac{GJ}{(R+l_o)\mu}}\, x' \quad , \quad t = \sqrt{\frac{K}{(R+l_o)\mu}}\, t' \quad ,$$

sean

$$\alpha = \sqrt{\frac{J}{(R+l_o)\mu}} \qquad \beta = \sqrt{\frac{K}{(R+l_o)\mu}} \quad ; \ \alpha \text{ y } \beta \text{ constantes}$$

$$\Phi(x',t') = 4\arctan\{\exp[\pm \frac{(x'-ut')}{(1-u^2)^{1/2}}]\}$$

$$\phi(x,t) = 4\arctan\{\exp[\pm \frac{x}{\alpha v\sqrt{G}} - \frac{ut}{\beta v}]\} \qquad \text{donde } v = (1-u^2)^{1/2}$$

podemos escribir en la forma:

$$\phi(x,t) = 4\arctan\{\exp[\pm \frac{1}{v\alpha\sqrt{G}}(x-ct)]\} \qquad \text{donde } c = \frac{\alpha}{\beta}u\sqrt{G}$$

$K = K_1+K_2$ = momento de inercia/unidad de longitud

$$K_1 = \int r^2 dV \quad ; \quad k_2 = \frac{\delta w}{g}\,\frac{(R+l_o)^2}{\delta x} = \frac{\mu}{g}(R+l_o)^2$$

$$J = \int_a^R \int_0^{2\pi} r^2(r\,d\phi\,dr) \quad \text{---->} \quad J = \frac{\pi}{2}(R^4-a^4)$$

$$K_1 = \frac{D}{L}\int_a^R \int_0^{2\pi} r^2 \int_0^L r\,d\phi\,dr\,dz \qquad D = \text{densidad del cilindro}$$

$$K_1 = \frac{\pi}{2} D(R^4-a^4)$$

$$c = u\sqrt{\frac{JG}{Ku}} = \sqrt{\frac{G}{\mu D + [2\mu/(\pi g)][(R+l_0)^2/(R^4-a^4)]}}$$

c---> velocidad de la onda tipo 1-solitòn

u---> paràmetro

Las condiciones de contorno usuales para la ecuaciòn

$\Phi_{xx} - \Phi_{tt} = \text{sen}\Phi$ son las siguientes

a) cuando los extremos estàn fijos rigidamente

$\Phi(0,t) = \Phi(L,t) = 0$ para todo t

$\Phi(x,0) = f(x)$, $\Phi_t(x,0) = g(x)$ donde $x \in (0,L)$

a.1) si $L \to +\infty$ podemos hacer tender $|x| \to +\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} \Phi(x,t) = c_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to +\infty} \Phi(x,t) = c_2$$

$\Phi(x,0) = f(x)$, $\Phi_t(x,0) = g(x)$ para todo $x \in R$

b)extremos libres

$\Phi_x(0,t) = \Phi_x(L,t) = 0$

c)extremos del cilindro elàsticamente fijados

$\Phi_x(0,t) - \varepsilon\,\Phi(0,t) = 0$; $\Phi_x(0,t) + \varepsilon\,\Phi(0,t) = 0$; ε = constante.

Mètodo de las diferencias finitas aplicado a la ecuaciòn de Sine-Gordon

sean los incrementos $x_{i+1}-x_i = h$, $t_{i+1}-t_i = k$ y la aproximaciòn :

$$\Phi(x,t) \approx \Phi(x_i,t_j) \equiv \Phi_{i,j}$$

usamos las siguientes aproximaciones de las derivadas

$$\phi_x \approx \phi_{\bar{x},i} = \frac{\phi_i-\phi_{i-1}}{h} \qquad \phi_x \approx \phi_{x,i} = \frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{h}$$

$$\phi_{xx} \approx \bar{\phi}_{xx,i} = \frac{\phi_{x,i}-\phi_{\bar{x},i}}{h} = \frac{\phi_{i+1}-2\phi_i+\phi_{i-1}}{h^2} \quad \text{.......(2.67)}$$

Desarrollando ϕ en serie de Taylor en torno a i:

$$\phi_{i\pm 1} = \phi_i \pm h\,\phi_i' + \frac{h^2}{2}\phi_i'' \pm \frac{h^3}{6}\phi_i''' + \frac{h^4}{24}\phi_i^{(IV)} + O(h^4) \quad \text{.......(2.68)}$$

$O(h^4)$ denota los tèrminos que tienden a 0 màs ràpido que h^4 cuando h--->0

$$\bar{\phi}_{xx} - \phi'' = \frac{h^2}{12}\phi^{(IV)} + O(h^4)$$

es decir $\bar{\phi}_{xx}$ aproxima a ϕ'' con segundo orden

$$\bar{\phi}_{xxi,j} = \frac{\phi_{i+1,j}-2\phi_{i,j}+\phi_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\bar{\phi}_{tti,j} = \frac{\phi_{i,j+1}-2\phi_{i,j}+\phi_{i,j-1}}{k^2}$$

reemplazando en (2.64)

$$\frac{\phi_{i+1,j}-2\phi_{i,j}+\phi_{i-1,j}}{h^2} - \frac{\phi_{i,j+1}-2\phi_{i,j}+\phi_{i,j-1}}{k^2} = \operatorname{sen}\phi_{i,j}$$

sea $p = k/h$

$$\phi_{i,j+1} = p^2(\phi_{i+1,j}-2\phi_{i,j}+\phi_{i-1,j}) - \phi_{i,j-1} + 2\phi_{i,j} - k^2\operatorname{sen}\phi_{i,j} \quad \text{.......(2.69)}$$

usando la condiciòn de contorno a.1) tenemos

$$\phi(x,0) = g(x) \;\text{---->}\; \phi_{i,o} = g(x_o+hi) \quad \text{.......(2.70)}$$

$x = x_o + hi$

tomamos $x_o = 0$, $t_o = 0$, $x_F = L$ y $t_F = T$;

L debe ser muy grande.

$t = t_o + kj$

$\Phi(0,t) = 0, \quad \Phi(L,t) = 0 , \quad \Phi_t(x,0) = F(x) \qquad i=1,2,3,.......N$

$$\Phi_{0,j} = \Phi_{N,j} = 0; \quad \left.\frac{\Phi_{i,j+1}-\Phi_{i,j}}{k}\right|_{j=0} = F(x)$$

$$\Phi_{i,1} - \Phi_{i,0} = kF(x_o+hi) \qquad (2.71)$$

Las ecuaciones (2.69), (2.70), (2.71) usaremos en el programa **Singor.pas**; en èste programa se compara la soluciòn numèrica con una soluciòn analltica obtenida por nosotros; se ve que el error es mlnimo; se hace pregresar ambas soluciones en el tiempo y no se aprecia gran diferencia entre ellas para t grandes.

3.ECUACION DE TODA

Es la primera ecuaciòn no-lineal en diferencias que diò como soluciones ondas de tipo solitòn [1],[11].

REDES NO-LINEALES

M. Toda [11] propuso un potencial exponencial de interacciòn entre partlculas adyacentes de la red:

$$V(r) = (e^{-r} - r)$$

se esperaba que tal sistema tuviera una relaciòn con un sistema flsico y admitiese soluciones a la ecuaciòn de movimiento que no fueran sumamente complejas.

Con este potencial las ecuaciones de movimiento son de la forma:

$$m\ddot{Q}_n = - V'(Q_n-Q_{n-1}) + V'(Q_{n+1}-Q_n)$$

$$V'(Q_n-Q_{n-1}) \equiv \frac{\delta V}{\delta Q_n}$$

Q_n ------> desplazamiento de la n-èsima partìcula.

$V(r_n)$----> potencial de interacciòn entre partìculas adyacentes.

con $r_n = Q_n - Q_{n-1}$; $V(Q_n) = \frac{a}{b} e^{-br_n} + a.r_n +$ const.

a,b = constantes.

Toda dice en uno de sus artìculos:

"No hubo una estrategia especial (para hallar el potencial-nota del traductor), excepto la enorme esperanza por lograrlo, por medio del procedimiento de ensayo y error, hallè un potencial de interacciòn y sus soluciones al mismo tiempo".

ESTUDIO DE UNA RED LC NO-LINEAL

Usando una red LC no-lineal se estudiaràn las propiedades fundamentales de los solitones iniciados por Zabusky y Kruskal, donde:

1.-Un pulso inicial (perturbaciòn) se convierte (rompe) en muchos solitones y una 'cola' oscilatoria.
2.-Un solitòn de gran amplitud viaja màs ràpido que uno de menor amplitud.

3.-Los solitones preservan sus identidades despues de interactuar nolinealmente con otros.

Algunas de las propiedades fundamentales de los solitones son explicados fìsicamente en tèrminos de propiedades de las redes LC no-lineales, y son demostrados matemàticamente estableciendo expresiones analìticas para solitones en una red particular. La equivalencia entre Red LC y la Red anarmónica se da en la pág. 108.

INTRODUCCION

M.Toda obtuvo satisfactoriamente soluciones analìticas de la ecualòn de movimiento en una red unidimensional anarmònica y hallò la existencia de "solitones de red" (solitones en una red no-lineal). El tambien descubriò que los solitones de red interactùan con otros sin perder sus identidades.

Se estudiarà un circuito LC no-lineal que es un sistema equivalente a una red unidimensional no-lineal; consiste de un circuito LC en forma de escalera conteniendo inductancias constantes y condensadores dependientes del voltaje.

PROPIEDADES GENERALES DE LAS REDES LC NO-LINEALES

Consideramos las propiedades generales de una cascada de 4 terminales LC no-lineales.

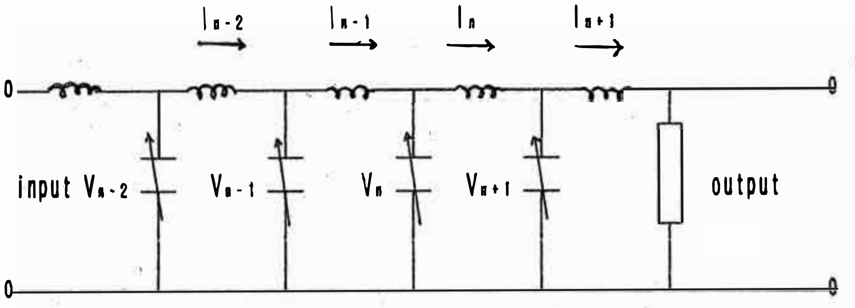


Fig.26 Malla no-lineal equivalente a una red unidimensional anarmònica.

Las ecuaciones de propagaciòn de las mallas son:

$$\frac{\delta}{\delta t}[LI_n(t)] = V_n(t)-V_{n+1}(t) \qquad (2.72)$$

$$\frac{\delta}{\delta t}[Q_n(t)] = I_{n-1}(t)-I_n(t) \qquad (2.73)$$

con $Q_n(t) = C[V_n(t)]V_n(t)$ $\qquad (2.74)$

$Q_n(t)$ ----->carga elèctrica en el n-èsimo condensador

$V_n(t)$ ---->Voltaje presente en el n-èsimo condensador con capacidad

$C[V_n(t)]$

$I_n(t)$ ----->Corriente que pasa a travès del n-èsimo inductor con inductancia constante.

L = const.

derivando (2.74)

$$\frac{\delta}{\delta t}[Q_n(t)] = CV_n'(t) + V_n(t)\frac{\delta C}{\delta V_n} V_n'$$

$$= [C[V_n(t) + V_n(t)\frac{\delta C}{\delta V_n}] V_n'$$

tomamos:

$$C(V_n) = \frac{C_oV_o}{V_n}\log(1+V_n/Vo) \qquad |V_n/Vo| \leq 1$$

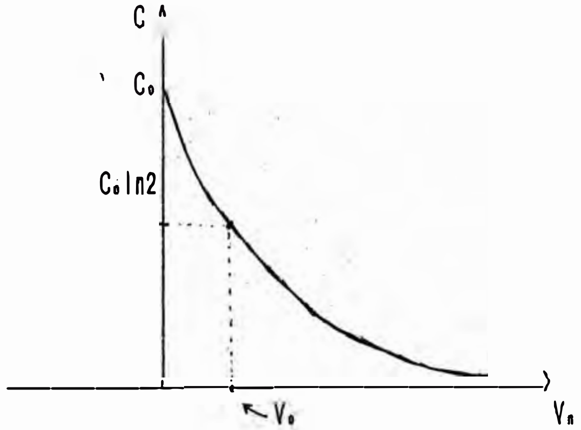


Fig.27 Se muestra la dependencia de C con respecto de V_n

Luego $$\frac{\delta Q_n(t)}{\delta t} = \left(\frac{C_0 V_0}{V_0+V_n}\right) V_n'$$

LEYES DE CONSERVACION

Para un pulso de onda definida por la condición que $V_n(t)$ y $I_n(t)$ y sus m-ésimas derivadas $V_n(t)^{(m)}$ y $I_n(t)^{(m)}$, con m = entero; tienden a cero cuando $/t/ \to +\infty$ y $/n/ \to +\infty$, obtenemos las siguientes leyes de conservación por integración de (2.72) y (2.73)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L \frac{\delta I_n}{\delta t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [V_n(t)-V_{n+1}(t)]\, dt$$

$$L I_n(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} V_n(t) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} V_{n+1}(t)\, dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V_n(t) dt = \text{constante independiente de } n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.75)$$

Por otra parte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta Q_n(t)}{\delta t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [I_{n-1}(t)-I_n(t)\; dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I_n(t)\, dt = \text{constante independiente de } n \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.76)$$

Sumando desde $n = -\infty$ hasta $n = +\infty$ las ecuaciones (2.72) y (2.73) respectivamente tenemos

$$\sum_{n=-m}^{p} L \frac{\delta I_n(t)}{\delta t} = \sum_{n=-m}^{p} (V_n - V_{n+1}) = V_p - V_m \text{ , haciendo } p,\, m \dashrightarrow +\infty$$

$$\lim_{m,p \to +\infty} \left[\frac{\delta}{\delta t} \left[\sum_{n=-m}^{p} L I_n(t) \right] \right] = 0 \quad \text{luego}$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} I_n(t) = \text{constante independiente de } t \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.77)$$

similarmente

$$\sum_{n=-m}^{p} L \frac{\delta Q_n(t)}{\delta t} = \sum_{n=-m}^{p} (I_{n-1} - I_n) = I_{p+1} - I_{-m} \text{ , haciendo } p,\, m \dashrightarrow +\infty$$

$$\lim_{m,p \to +\infty} \left[\frac{\delta}{\delta t} \left[\sum_{n=-m}^{p} Q_n(t) \right] \right] = 0 \quad \text{luego}$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} Q_n(t) = \text{constante independiente de } t \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.78)$$

LEY DE CONSERVACION DE LA ENERGIA

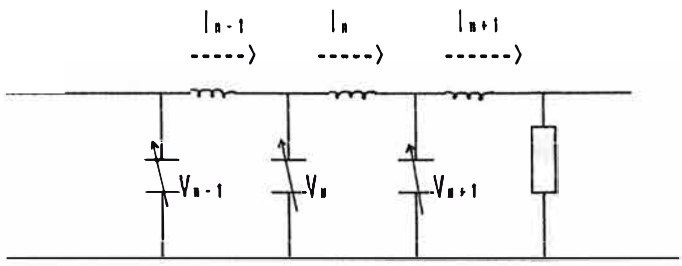


Fig.28

Podemos escribir la energía elèctrica almacenada en el n-èsimo condensador y la energía magnètica almacenada en la inductancia(vèase la Fig.28)

$$w_n(t)= \int_0^{Q_n} V_n(Q_n')dQ_n' + \frac{1}{2} L I_n^2(t) = E_n()+ M_n(t) \quad \ldots\ldots(2.79)$$

$$\frac{\delta w_n(t)}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}\int_0^{Q_n} V_n(Q_n')dQ_n' + L I_n(t)\frac{\delta I_n(t)}{\delta t}$$

$$= \frac{\delta}{\delta Q_n}\int_0^{Q_n} V_n(Q_n')dQ_n' \frac{\delta Q_n}{\delta t} + I_n(V_n-V_{n+1})$$

$$= V_n(I_{n-1}-I_n) + I_n(V_n-V_{n+1})$$

$$= V_n I_{n-1} - V_{n+1} I_n$$

$$\frac{\delta w_n(t)}{\delta t} = P_n-P_{n+1} \quad \ldots\ldots(2.80)$$

donde $P_n= V_n I_{n-1}$

integrando (2.80) tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta w_n(t)}{\delta t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(t)dt - \int_{-\infty}^{+\infty} P_{n+1}(t)dt =0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(t)dt = \text{constante independiente de } n \quad \ldots\ldots(2.81)$$

sumando (2.80)

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta w_n}{\delta t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (P_n-P_{n+1}) = 0$$

$$\frac{\delta}{\delta t}\sum_{-\infty}^{+\infty} W_n(t) = 0 \longrightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} W_n(t) = \text{constante independiente de } t \qquad (2.82)$$

OBSERVACION: Porquè L es constante ?

se sabe $E = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{di}\frac{dI}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$

$L = \frac{d\phi}{dI}$ "L no depende de I debido a la linealidad de los medios magnèticos asociados con la configuraciòn del circuito".

L=const.

E--->fem

ϕ--->flujo de campo magnètico

I--->intensidad de corriente de una espira

UN PULSO DE ONDA EN UN "ESTADO ESTABLE":'SOLITON'

Si un pulso de onda se propaga a travès de una malla sin cambiar su forma y velocidad:

$$V_n(t) = V(wt-pn) \qquad (2.83)$$

$$I_n(t) = I(wt-pn) \qquad (2.84)$$

Obtenemos las siguientes relaciones de (2.72)

$$\frac{\delta}{\delta t}[LI_n(t)] = V_n(t) - V_{n+1}(t)$$

$$= V(wt-pn) - V[wt-p(n+1)], \quad \text{sea } x = wt - pn$$

$$\frac{\delta}{\delta t}[LI_n(t)] = V(x) - V(x-p)$$

$$= V(x) - [V(x) - pV'(x) + \frac{p^2}{2}V''(x) - \ldots]$$

$$= p\frac{dV}{dx} - \frac{p^2}{2}\frac{d^2V}{dx^2} + \ldots$$

$$\int_{-\infty}^{t}\frac{\delta}{\delta t}[LI_n(t)]dt = \int_{-\infty}^{t}[\frac{p}{w}\frac{\delta V}{\delta t} - \frac{1}{2}(\frac{p}{w})^2\frac{\delta^2 V}{\delta t^2} + \ldots]dt$$

$$LI_n(t) = \frac{p}{w}V_n(t) - \frac{1}{2}(\frac{p}{w})^2\frac{\delta V_n}{\delta t} + \frac{1}{3!}(\frac{p}{w})^3\frac{\delta^2 V_n}{\delta t^2} - \ldots$$

$$w\int_{-\infty}^{+\infty} L I_n(t)dt = p\int_{-\infty}^{+\infty} V_n(t)dt - \frac{1}{2}w\left(\frac{p}{w}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta V_n}{\delta t}dt + \frac{1}{3!}w\left(\frac{p}{w}\right)^3\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta^2 V_n}{\delta t^2}dt - \dots$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L I_n(t)dt = p\int_{-\infty}^{+\infty} V_n(t)dt \quad \dots\dots (2.85)$$

de (2.73)

$$\frac{\delta Q_n(t)}{\delta t} = I_{n-1}(t) - I_n(t)$$

$$= I[wt - p(n-1)] - I(wt-pn), \quad \text{sea} \quad x = wt-pn$$

$$= I(x+p) - I(x)$$

$$= pI'(x) + \frac{p^2}{2} I''(x) + \dots \quad ; \quad \text{usamos} \quad \frac{\delta}{\delta x} = \frac{1}{w}\frac{\delta}{\delta t}$$

$$= \frac{p}{w}\frac{\delta I}{\delta t} + \frac{p^2}{2}\frac{\delta^2 I}{\delta t^2} + \dots$$

$$w\int_{-\infty}^{+\infty} Q_n(t)dt = p\int_{-\infty}^{+\infty} I_n(t)dt \quad \dots\dots (2.86)$$

de (2.80)

$$\frac{\delta W_n(t)}{\delta t} = P_n(t) - P_{n+1}(t) = I_{n-1}(t)V_n(t) - I_n(t)V_{n+1}(t)$$

$$= I[wt-p(n-1)]V(wt-pn) - I(wt-pn)V[wt-p(n+1)]$$

$$= P(wt-pn) - P[wt-p(n+1)]$$

sea $x = wt-pn$

$$= P(x) - P(x-p)$$

$$= \frac{p}{w}\frac{dP}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{w}\right)^2\frac{d^2P}{dt^2} - \dots$$

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{\delta W_n(t)}{\delta t} dt = \frac{p}{w} \int_{-\infty}^{t} \frac{\delta P}{\delta t} dt + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{w}\right)^2 \int_{-\infty}^{t} \frac{\delta^2 P}{\delta t^2} dt \ldots$$

$$w\int_{-\infty}^{+\infty} W_n(t)dt = p \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(t)dt \qquad (2.87)$$

donde

$$V_0 = \frac{w}{p} \qquad (2.88)$$

$$t_0 = 1/(\sqrt{LC}) \qquad (2.89)$$

$$C_0 = C(V_n) \quad \text{en } V_n = 0 \qquad (2.90)$$

(2.85),(2.86) y (2.87) son las leyes de conservaciòn para un pulso tipo solitòn.

Una soluciòn analìtica de Toda y su verificaciòn

Sea la ecuaciòn

$$LC_0 \frac{\delta^2}{\delta t^2}\log\left(1+\frac{V_n}{V_0}\right) = \frac{V_{n+1}+V_{n-1}-2V_n}{V_0} \qquad (2.91)$$

una soluciòn analìtica de (2.91)(*)

$$\frac{V_n(T)}{V_0} = w^2\operatorname{sech}^2(wT-pn) \quad \text{con} \quad T = t/(\sqrt{LC_0}),\ w = \operatorname{senh}(p),\ V_0 = \frac{w}{p}$$

(*) Esta ecuacìòn serà motivo de estudio en el capìtulo 3 y se hallarà precisamente esta soluciòn explìcita.

si $V_n'(T) = \frac{V_n(T)}{V_0} = w^2\operatorname{sech}^2(wT-pn)$,podemos escribir

$$\frac{\delta^2}{\delta T^2}\log(1+V_n') = V_{n+1}' + V_{n-1}' - 2V_n'$$

escribiendo sin primas

$$\frac{\delta^2}{\delta T^2}\log(1+V_n) = V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n \qquad (2.92)$$

para verificar que la soluciòn planteada satisface la ecuaciòn (2.92) usaremos las siguientes expresiones

1) $ch^2x = 1 + sh^2x$ 2) $(sechx)' = -(sechx\ thx)$

3) $1 - th^2x = sech^2x$ 4) $(thx)' = sech^2x$

5) $th(x \pm y) = \dfrac{thx \pm thy}{1 - thx\ thy}$; $th(-x) = -\ th(x)$

6) $sech^2(x \pm y) = (1 + th^2x\ th^2y - th^2x - th^2y)/(1 \pm thx\ thy)^2$

7) $sh(2p) = 2shp\ chp$

$ch(2p) = sh^2p + ch^2p$

$sech^2(x-p) = (sech^2x\ sech^2p)/(1 + th^2x\ th^2p - 2thx\ thp)$

$sech^2(x+p) = (sech^2x\ sech^2p)/(1 + th^2x\ th^2p + 2thx\ thp)$

necesitamos las siguientes derivadas

$$\frac{\delta \log(1+V_n)}{\delta T} = \frac{1}{1+V_n}\ \frac{\delta V_n}{\delta T}$$

$$\frac{\delta^2 \log(1+V_n)}{\delta T^2} = -\frac{\left(\dfrac{\delta V_n}{\delta T}\right)^2}{(1+V_n)^2} + \frac{\dfrac{\delta^2 V_n}{\delta T^2}}{1+V_n}$$

$$\frac{\delta V_n}{\delta T} = -2w^2 sech^2(wT-pn)\ th(wT-pn)$$

$$\frac{\delta^2 V_n}{\delta T^2} = 4\ w^4\ sech^2(wT-pn)\ th^2(wT-pn) - 2w^4\ sech^4(wT-pn)$$

$$\left(\frac{\delta V_n(T)}{\delta T}\right)^2 = 4\ w^2 V_n^2 - 4V_n^3$$

$$\frac{\delta^2 V_n}{\delta T^2} = 4w^2 V_n - 6V_n^2$$

luego

$$\frac{\delta^2 \log(1+V_n)}{\delta T^2} = -\frac{4\ w^2 V_n^2 - 4V_n^3}{(1+V_n)^2} + \frac{4w^2 V_n - 6V_n^2}{1+V_n}$$

$$= 2V_n \left[\frac{2w^2 - 3V_n - V_n^2}{(1+V_n)^2}\right] \quad ....(*)$$

sea $x = wt - pn$

$$V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n = w^2[\mathrm{sech}^2(x-p) + \mathrm{sech}^2(x+p) - 2\,\mathrm{sech}x]$$

usando las relaciones indicadas arriba llegamos a la siguiente expresiòn

$$V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n = 2V_n\left[\frac{2w^2 - 3V_n - V_n^2}{(1+V_n)^2}\right] \quad ....(**)$$

se observa que (*) y (**) son iguales;es decir

$$\frac{V_n(T)}{V_0} = w^2\mathrm{sech}^2(wT-pn) \quad \text{es soluciòn de (2.91)}$$

$$\text{con } T = t/(\sqrt{LC_0}),\ w = \mathrm{senh}(p),\ V_0 = \frac{w}{p}$$

Mètodo de las diferencias finitas aplicado a la ecuaciòn de Toda

Sea la ecuaciòn

$$LC_0 \frac{\delta^2}{\delta t^2} F(V_n) = \frac{V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n}{V_0} \quad \text{donde } F(V_n) = \log(1 + V_n/V_0)$$

Aproximando el primer miembro

$$\frac{F_{n,j+1} - 2F_{n,j} + F_{n,j-1}}{h^2} = \frac{V_{n+1,j} - 2V_{n,j} + V_{n-1,j}}{LC_0V_0} \quad ....(2.93)$$

$$\text{con } F_{n,j} = \log\left(1 + \frac{V_{n,j}}{V_0}\right) \text{---}> V_{n,j} = [\exp(F_{n,j}) - 1]\, V_0$$

de (2.93) tenemos

$$F_{n,j+1} = p\,(V_{n+1,j} - 2V_{n,j} + V_{n-1,j}) + 2F_{n,j} - F_{n,j-1} \quad ....(2.94)$$

$$\text{donde } p = \frac{h^2}{LC_0V_0}$$

La relaciòn (2.94) se usarà en el programa **Toda.pas**

```
PROGRAM ECUAKdV:{grafica la soluc. de la ecuac. de KdV: Ut+6*(U+a)*Ux+Uxxx=0 ó
Ut+Fx+Uxxx=0. para F=3*(a+U)^2 :además grafica la sol. de :
Ut+a*Ux+Uxxx=0 ó (Ut+Fx+Uxxx=0.con F=a*U.AA=a)}
Uses Graph.Crt.Printer;
Const xi=-10:xf=10:Nx=100:ti=0:tf=1{1}:Nt=1000;a=0:cc=1:
    {para estos valores  no se deforma el solitón:
     xi=-10:xf=10;Nx=100:ti=0:tf=1;Nt=1000:a=0.01:cc=1:}
{para U00 trapezoide Nx=100 Nt=100000000}
Const xa=0.1:xb=0.2:xc=0.3:xd=0.5:s=0.02:r=0.02:{validos para dar funcion
inicial un trapezoide}
Type real=extended:
VAR
Arch                                :Text:
U.U0                                :array [0..Nx] of real:
i,j.Gd,Gm.xx.yy.Ax.Ay.uh.uv           :integer:
x.hx.ht,p.s1.s2.s3.s4,s5.s6.s7,s8.s9.f1.f2,f3     :real:
t.c1.c2.c3.c4.ss0.ss1,ss2.ss3,ss4                        :real:
m1.m0,m2.n1.n0,n2.g1.g2.g3                    :real:
                                         :char;
FUNCTION F(x:real)                                              :real:
begin  F:=3*sqr(a+x){F:=a*x}{F:=2*(x*x*x)} :     end:
FUNCTION AA(x:real)                                               :real:
begin{AA:=6*(a+x)}{AA:=a} AA:=6*sqr(x+a):       end:{AA es la derivada de F}
Function U00(x:real)                      :real:
                        (*BEGIN{I}  IF  (x<xa) or (x>xd)  then  U00:=0     ELSE
                          begin{1}  If  (x<xb)   then  U00:=m1*x+n1  else
                          begin{2} If (x<xc)   then U00:=m0*x+n0   else
                          U00:=m2*x+n2 :end{2}:end{1}:
                           END:{I}*)
begin  U00:=0.1*sqr(2/(exp(x)+exp(-x)))
{cc*sqr(2/(exp((sqrt(cc)*x/2))+exp((-sqrt(cc)*x/2))))/2-a} : end:
BEGIN {■} ClrScr:Writeln('ONDASOLITON  ONDASOLITON'):
hx:=(xf-xi)/Nx:ht:=(tf-ti)/Nt:p:=ht/hx:
if xb=xa then m1:=0 else m1:=s/(xb-xa) :
If xc=xb then m0:=0 else m0:=(r-s)/(xc-xb):
If xd=xc then m2:=m0 else m2:=-r/(xd-xc):
If xb=xa then n1:=0 else n1:=-s*xa/(xb-xa):
If xc=xb then n0:=s-r else n0:=(s*xc-xb*r)/(xc-xb):
If xd=xc then n2:=0 else n2:=r*xd/(xd-xc):
{*}For i:=0 to Nx  do begin x:=xi+i*hx:U0[i]:=U00(x):U[i]:=0:end:
{For i:=0 to Nx do begin Writeln('U0[i]=',U0[i]:10:6)  end:}
{*}j:=0: WHILE j<=Nt DO  begin{j}
t:=ti+j*ht:
Writeln( '■ ■ ■ j=',j,'■ ■ t=',t:15:10):
{*}U0[0]:=U00(xi):U0[1]:=U00(xi+hx):U0[2]:=U00(xi+2*hx):
   U0[Nx-2]:=U00(xf-2*hx):U0[Nx-1]:=U00(xf-hx): U0[Nx]:=U00(xf):
   U[0]:=U00(xi):U[1]:=U00(xi+hx):U[2]:=U00(xi+2*hx):
   U[Nx-2]:=U00(xf-2*hx):U[Nx-1]:=U00(xf-hx): U[Nx]:=U00(xf):
{*}For i:=3 to Nx-3 do begin{i}
```

```
s1:=AA(U0[i+1])+AA(U0[i]) ;{Writeln(s1);}
s2:=AA(U0[i-1]+AA(U0[i]));
c1:=-p/2+sqr(p)*s1/4;
c2:=-sqr(p)*(s1+s2)/4;
c3:=p/2+sqr(p)*s2/4;
c4:=U0[i+2]-2*(U0[i+1])+2*(U0[i-1])-U0[i-2];
s3:=U0[i+2]-3*U0[i+1]+3*U0[i]-U0[i-1];
s4:=U0[i+1]-3*U0[i]+3*U0[i-1]-U0[i-2];
s5:=U0[i+2]+U0[i+1]-U0[i]-U0[i-1];
s6:=U0[i+2]-U0[i+1]-U0[i]+U0[i-1];
s7:=U0[i+1]+U0[i]-U0[i-1]-U0[i-2];
s8:=U0[i+1]-U0[i-1]-U0[i]+U0[i-2];
s9:=U0[i-3]-6*U0[i-2]+15*U0[i-1]-20*U0[i]+15*U0[i+1]-6*U0[i+2]+U0[i+3];
g1:=AA(U0[i]);g2:=AA(U0[i+1]);g3:=AA(U0[i-1]);
f1:=F(U0[i+1]);f2:=F(U0[i]);f3:=F(U0[i-1]);
ss0:=(-p/(2*hx*hx))*c4;
ss1:=(p*p/(2*hx*hx))*(g1*(s3-s4)+g2*s3-g3*s4);
ss2:=((9*p*p)/(8*hx*hx))*(s5*s6-s7*s8);
ss3:=((p*p)/(2*hx*hx*hx*hx))*s9;
{Writeln('ss0',ss0:10:6,'  ss1',ss1:10:6,'  ss2',ss2:10:6,'  ss3',ss3:10:6);}
ss4:=c3*f3+ss0+ss1+ss2;
U[i]:=U0[i]+c1*f1+c2*f2+ss4+ss3;
{For i:=0 to Nx do begin Writeln('U0=',U0[i]:10:6,'  U=',U[i]:10:6)  end;}
end{i};
if j>9      then begin
REPEAT {Graficación}
  Gd := Detect;InitGraph(Gd, Gm, 'D:\TP7\BGI');Write(Gd:2);
  if GraphResult <> grOk then Write('Error ***');SetBkColor(0);
OutTextxy(175,0,'  ¿ Valores de xx, Ax, yy, Ay ?');Readln(xx,Ax,yy,Ay);
  FOR i:=0 to Nx  DO
  begin   uh:=xx+Ax*i;x:=xi+i*hx;
            uv:=yy-(trunc(Ay*U[i]));
{U: }        Putpixel(uh,uv,15);   {4=rojo}
  end;
  Repeat until Keypressed;c:=UpCase(ReadKey);
UNTIL  c='C';                         {*}end;
{*}For i:=0 to Nx do U0[i]:=U[i];
{*}j:=j+1;end{j};Writeln;
 END.{[redacted]}
{cuando se da U00 igual a la solución analítica (1-solitón) de la ecuación de
KdV se observa que la onda inicial no se deforma cuando transcurre el tiempo}
*************)
```

```
PROGRAM SINGOR,{grafica las soluc. de la ecuac. de SINE-GORDON:φxx-φtt=sen(φ),
por metodos numericos y una solucion explicita(1-kink)}
Uses Graph,Crt,Printer;
Const xi=0.1;xf=5;Nx=500;ti=0;tf=100;Nt=1000;cc=0.1;a=1.9;{a>1}
Type real=extended;
VAR
U,U0,U1,U2                          :array[0..Nx] of real;
i,j,Gd,Gm,xx,yy,Ax,Ay,uh,uv,uw       :integer;
x,z,t,hx,ht,p,s1,s2   :real;
c                                    :char;
FUNCTION g(x:real)                                        :real;
begin  g:= {4*arctan(exp(a*x))}
         4*arctan(( (-sqrt(a*a-1)/a)*
         ((exp(a*x)-exp(-a*x))/2 )  /  ((exp(-sqrt(a*a-1)*t)+exp(sqrt(a*a-1)*t))/2) ) ); end;
FUNCTION F(x:real)                                        :real;
begin  F:={(4*sqrt(a*a-1)*(exp(a*x)))/(1+exp(2*a*x))}
       (-4)*((a*a-1)/a)*(1/(sqr(2/(exp(a*x)-exp(-a*x)))+1-1/(a*a)));end;
BEGIN {█} ClrScr;Writeln('ONDASOLITON  ONDASOLITON');
hx:=(xf-xi)/Nx;ht:=(tf-ti)/Nt;p:=ht/hx;
 j:=0;
For i:=0 to Nx  do begin x:=xi+i*hx;U0[i]:=g(x);U[i]:=0;end;
For i:=0 to Nx  do begin x:=xi+i*hx;U[i]:=U0[i];
                                  U2[i]:=g(x);end;
 j:=1;
For i:=0 to Nx  do begin x:=xi+i*hx;U1[i]:=ht*F(x)+U[i];U[i]:=0;end;
{For i:=0 to Nx  do begin x:=xi+i*hx;U[i]:=U1[i];end;}
{*}j:=0; While j<=Nt DO  begin{j}
   t:=ti+j*ht;
Writeln( '▮ ▮ ▮ j=',j,'▮ ▮ t=',t:15:10);
U[0]:=g(xi); U[Nx]:=g(xi); U2[0]:=0; U2[Nx]:=0;
{*}For i:=1 to Nx-1 do begin{i}
If j=0 then U[i]:=U0[i];x:=xi+i*hx;U2[i]:=g(x);
If j=1 then U[i]:=U1[i];z:=x+(sqrt(a*a-1)/a)*t;U2[i]:=g(z);
If j>1 then
 x:=xi+hx*i;z:=x+(sqrt(a*a-1)/a)*t;
s1:=p*p*(U1[i-1]-2*U1[i]+U1[i+1]);
s2:=-U0[i]+2*U1[i]-(ht*ht)*(sin(U1[i]));
U[i]:=s1+s2;U2[i]:=g(z);
end{i};
{*}If j>3
       then begin
REPEAT {Graficación}
  Gd := Detect;InitGraph(Gd, Gm, 'D:\TP7\BGI');Write(Gd:2);
  If GraphResult <> grOk then Write('Error ***');SetBkColor(0);
OutTextxy(175,0,'  ¿ Valores de xx, Ax, yy, Ay ?');Readln(xx,Ax,yy,Ay);
  FOR i:=0 to Nx  DO
  begin   uh:=xx+Ax*i;x:=xi+i*hx;
          uv:=yy-trunc(Ay*U[i]);
          uw:=yy-trunc(Ay*U2[i]);
{U: }        Putpixel(uh,uv,15);   {4=rojo}
             Putpixel(uh,uw,4);
  end;
Repeat until Keypressed;c:=UpCase(ReadKey);
UNTIL  c='C';                              {*}end;
  For i:=0 to Nx  do begin x:=xi+i*hx;U0[i]:=U1[i];end;
  For i:=0 to Nx  do begin x:=xi+i*hx;U1[i]:=U[i];end;
{*}j:=j+1;end{j}; END.{█}
```

```
PROGRAM TODA;{grafica la soluc.numer.dela ecuac. de TODA:(L*C*V0)[f(Vn)]tt=(Vn+1+Vn-1-2Vn)/V0;
y la compara con la sol.analitica Un=Vn}
{$N+}
Uses Graph,Crt,Printer;
Const xi=-300;Nx=900;ti=0;tf=10;Nt=1000;L=0.1;C1=10;V0=1;
                    a=0.09;e=+1;j0=19;{xi=-150,Nx=300,ht=0.1,a=0.025,j0=29,20 3 300 30*1000 estable}
                                      { ",",ht=0.1,a=0.015,j0=99,20 2 300 100*1000 estable}
                                      {",",ht=0.1,a=0.02,j0=49,20 3 300 90000 estable}
                                      {a=0.09,j0=19,e=1,Nt=10000,xi=-50,Nx=120, 20 1 300 5000}
                                      {si Nt=1000 en el caso a=.09 ya para j0=19 se aprecia}
                                      {una gran diferencia}
Type real=extended;
VAR
Arch                                  :Text;
U,U0,U1,F,F0,F1,V                     :array[0..Nx] of real;
i,j,Gd,Gm,xx,yy,Ax,Ay,uh,uv,uw        :integer;
x,t,z,hx,ht,p,s1,s2    :real;
                                      :char;
FUNCTION g(x:real)                                        :real;
begin {if x<100 then g:=1 else g:=0}
    g:=sqr((exp(a)-exp(-a))/2)*(4/sqr(exp(a*x)+exp(-a*x)))
    {g:=1/(exp(0.5*x)+exp(-0.5*x))}
    {g:=1/(sqr(a)*x*x+1)};end;
FUNCTION g1(x:real)                                       :real;
begin  {g1:=0}
  g1:=(-1)*sqr(exp(a)-exp(-a))*(exp(a)-exp(-a))
  *(1-exp(2*a*x))*(1/(sqr(exp(-(2/3)*a*x)+exp((4/3)*a*x))*(exp(-(2/3)*a*x)+exp((4/3)*a*x))))
  {g1:=-(exp(0.5*x)-exp(-0.5*x))/sqr(exp(0.5*x)+exp(-0.5*x))}
   {-(2*sqr(a)*x)/sqr(sqr(a)*x*x+1)};end;
BEGIN {█} ClrScr;Writeln('ONDASOLITON  ONDASOLITON');
hx:=1;ht:=(tf-ti)/Nt;p:=ht/hx;
 j:=0;
For i:=0 to Nx  do begin x:=xi+i*hx;U0[i]:=g(x);U[i]:=0;
                                    F0[i]:=ln(1+U0[i]/V0);
                                     end;
For i:=0 to Nx  do begin x:=xi+i*hx;U[i]:=U0[i];end;
 j:=1;
For i:=0 to Nx  do begin x:=xi+i*hx;U1[i]:=ht*g1(x)+U[i];
                                    F1[i]:=F0[i];end;
{*}j:=0; While j<=Nt DO  begin{j}
   t:=ti+j*ht;
Writeln( '▮ ▮ ▮ j=',j,'▮ ▮ t=',t:15:10);
U[0]:=0; U[Nx]:=0; V[0]:=0; V[Nx]:=0;  {***       extremos!!     *******}
{*}For i:=1 to Nx-1 do begin{i}
If j=0 then U[i]:=U0[i];x:=xi+i*hx;V[i]:=g(x);
If j=1 then U[i]:=U1[i];x:=xi+i*hx;V[i]:=g(x-e*(((exp(a)-exp(-a))/2)/a)*t);
If j>1 then
   x:=xi+hx*i;z:=x-e*(((exp(a)-exp(-a))/2)/a)*t;
s1:=p*(U1[i-1]-2*U1[i]+U1[i+1]);
s2:=2*F1[i]-F0[i];
F[i]:=s1+s2;
U[i]:=(exp(F[i])-1)/V0;
V[i]:=g(z);
end{i};
{*}If j>j0
    then begin
```

```
{*}If j>j0
    then begin
REPEAT {Graficación}
  Gd := Detect;InitGraph(Gd, Gm, 'D:\TP7\BGI');Write(Gd:2);
  If GraphResult <> grOk then Write('Error ***');SetBkColor(0);
  OutTextxy(175,0,'  ¿ Valores de xx, Ax, yy, Ay ?');Readln(xx,Ax,yy,Ay);
  FOR i:=0 to Nx  DO
  begin       uh:=trunc(xx+(Ax*i));x:=xi+i;
              uv:=yy-trunc(Ay*U[i]);
              uw:=yy-trunc(Ay*V[i]);
              Putpixel(uh,uv,15);
              Putpixel(uh,uw,4);
  end;
Repeat until Keypressed;c:=UpCase(ReadKey);
UNTIL  c='C';                              {*}end;
  For i:=0 to Nx  do begin x:=xi+i*hx;U0[i]:=U1[i];
                                          F0[i]:=F1[i];end;
  For i:=0 to Nx  do begin x:=xi+i*hx;U1[i]:=U[i];
                                          F1[i]:=F[i];end;
{*}j:=j+1;end{j};
END.{[redacted]}
```

CAPITULO III

LA TRANSFORMACION DE BÄCKLUND DE LA RED DE TODA

CAPITULO III

TRANSFORMACION DE BÄCKLUND DE LA RED DE TODA

En la teoría de las Ecuaciones Diferenciales Parciales, la transformación de Bäcklund puede ser definido como sigue: Una transformación de Bäcklund de una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden en dos variables independientes es un par de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden que relaciona las variables de la primera ecuación con otras variables que satisfacen la misma ecuación (u otra) diferencial parcial de segundo orden. Desde que Lamb [5] aplica la transformación de Bäcklund a la ecuación de Sine-Gordon se han desarrollado sucesivas aplicaciones a las ecuaciones no-lineales en derivadas parciales.
En el presente capitulo se verá una transformacion canónica para la red de Toda [8] y luego usando esta transformación hallaremos soluciones analíticas de la ecuación de Toda. Esta transformación canónica da la relación entre dos soluciones de una Red exponencial (red de Toda); usando esta transformación puede obtenerse una nueva solución a partir de una solución conocida; esto viene ha ser así una versión discreta de la transformación de Bäcklund [7],[9],[11].

1. RED NO-LINEAL UNIDIMENSIONAL

Matemáticamente y físicamente, el estudio de los solitones puede ser dividido en dos categorías, continuos y discretos (redes). El solitón en sistemas discretos es a veces llamado "lattice-soliton".

1.1. DINAMICA DE UNA RED NO-LINEAL.

Consideramos una red unidimensional, que consiste de N particulas de masa m conectadas por resortes. Si la energía potencial es denotado por V (r), el Hamiltoniano para el sistema está dado por:

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{n=1}^{N} P_n^2 + \sum_{n=1}^{N} V(Q_n - Q_{n-1}) \;, \qquad (3.1)$$

donde Q_n ---> desplazamiento de la n-ésima partícula de su posición de equilibrio.

P_n ---> momento conjugado (momento generalizado) con Q_n

M. Toda propuso (1967) un potencial de la forma .

$$V(r) = \frac{a}{b} e^{-br} + ar + \text{const.} \qquad ab > 0 \quad \dots\dots \quad (3.2)$$

$V(r)$ ---> potencial de interacción entre 2 partículas adyacentes.

Tenemos los siguientes casos, para M suficientemente grande:

si $a > 0$,

$$r \to -M \implies V(r) \approx \frac{a}{b} e^{-br} \quad ; \quad r \to +M \implies V(r) \approx ar$$

si $a < 0$,

$$r \to +M \implies V(r) \approx \frac{a}{b} e^{-br} \quad ; \quad r \to -M \implies V(r) \approx ar$$

Estudiamos las oscilaciones no-lineales del sistema de N partículas iguales de masa 'm' acopladas, en el que cada partícula interactúa mediante el potencial de tipo exponencial,

$$V(r) = \frac{a}{b} e^{-br} + ar - \frac{a}{b} \quad ; \quad V(r = 0) = 0$$

Nos proponemos estudiar las oscilaciones longitudinales de las partículas alrededor de sus posiciones de equilibrio. Consideremos primero los desplazamientos de Q_{n-1}, Q_n, Q_{n+1} de las masas numeradas n-1, n, n+1 indicadas en la figura 3.

Este potencial tiene amplia aplicacion porque variando a y b podemos obtener potenciales desde el límite armónico (ab se mantiene finito cuando a ---> ∞ y b --> 0) hasta el límite del potencial de una "esfera" infinitamente pequeña e impenetrable (ab se mantiene finito cuando $a \to 0$ y $b \to \infty$).

Límite armónico:

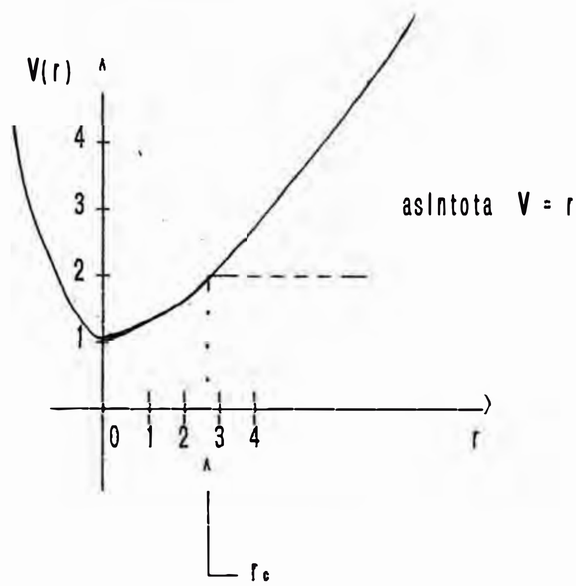
$$V(r) = \frac{ab}{2!} r^2 - \frac{ab^2}{3!} r^3 + \frac{ab^3}{4!} r^4 - \ldots$$

$$ab = \text{finito} \quad a \to \infty \ \text{ y } \ b \to 0 \qquad \text{luego} \quad V(r) = \frac{ab}{2} r^2$$

Límite de "esfera" impenetrable (hard sphere) :

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r \geq 0 \\ \infty & r < 0 \end{cases}$$

La función V(r)



$$V(r) = \begin{cases} e^{-r} + r & r \leq r_c \\ \text{const.} & r > r_c \end{cases}$$

r_c se define como

$$f_c = - \left. \frac{dV(r)}{d\,r} \right|_{r = r_c}$$

$f_c \to$ máxima tensión del 'resorte'.

Fig. 1. Gráfica del potencial

En este sistema el potencial es función únicamente de las coordenadas espaciales por tanto el campo de fuerzas es conservativo. Además el sistema no interactúa con fuerzas externas.

Semejante red es un modelo para estudiar sistemas de particulas que tienen interacciones internas; por ejemplo en las oscilaciones anarmónicas de un cristal unidimensional

Emplearemos las ecuaciones canónicas del movimiento para el estudio de nuestro sistema por tanto revisaremos la formulación hamiltoniana de la mecánica.

El hamiltoniano se considera siempre función de $\{Q_s, P_s, t\}$, mientras que la lagrangiana es función de $\{Q_s, \dot{Q}_s, t\}$;

sea:

$$L : R^{n+1} \longrightarrow R \quad , \qquad L(\bar{q},\bar{v},t) \quad ;$$

$$\text{definimos: } \bar{p} = \frac{\delta L}{\delta \bar{v}}(\bar{q},\bar{v},t) = \bar{V}(\bar{q}, \bar{v}, t) \quad ....(*)$$

suponiendo inversibilidad de (*):

$$\bar{V} = \bar{V}(\bar{q},\bar{p},t)$$

definimos:

$$H(\bar{q},\bar{p},t) = \bar{p}.\bar{V}(\bar{q},\bar{p},t) - L(\bar{q},\bar{V},t)$$

sean $\bar{q} = \bar{r}(t)$, $\bar{v} = \dot{\bar{r}}(t)$ luego $\tau(t)= L(\bar{r}(t),\dot{\bar{r}}(t),t)$ **Usaremos la notación:**

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}$$

usualmente tomamos: $L(\bar{q},\bar{v},t) = (1/2)\, m\, \bar{v}^2 - U(\bar{q},t)$

sea $\bar{g} : R \longrightarrow R^n$; con esto definimos una funcional de la forma:

$$J(\bar{g}) = \int_{t1}^{t2} L(\bar{g}(t),\dot{\bar{g}}(t),t)\, dt$$; para los $\bar{g}_o$, $J(g_o)$ toma un valor extremal (Principio de Hamilton)

$$\bar{g}_{(t1)} = \bar{g}_1 \quad , \quad \bar{g}_{(t2)} = \bar{g}_2 \ ; \quad \bar{g}_1 \text{ y } \bar{g}_2 \text{ constantes.}$$

para tales trayectorias tenemos la ecuación :

$$\left[L_{\bar{q}} - \frac{d}{dt} L_{\bar{v}} \right] \Bigg|_{\substack{\bar{q}=\bar{g}(t) \\ \bar{v}=\dot{\bar{g}}(t)}} = 0$$

Ecuaciónes de Euler-Lagrange, aquí tenemos n ecuaciones de segundo orden.

Nuestro objetivo es deducir las ecuaciones canónicas del movimiento de un sistema mecánico, para esto aplicaremos el principio de Hamilton modificado a la funcional que se formará en los siguientes pasos, sea

$$L^*(\bar{q},\bar{p},\bar{v},t) = \bar{p}.\bar{v} - H(\bar{q},\bar{p},t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (^{**})$$

$J^*(\bar{g},\bar{f}) = \int_{t1}^{t2} L^*(\bar{g}(t),\bar{f}(t),\dot{\bar{g}}(t),t)\,dt$; las funciones que hacen que la funcional sea un extremal deben satisfacer las siguientes ecuaciones :

$$\text{i)} \quad \left[L^*_{\bar{q}} - \frac{d}{dt} L^*_{\bar{v}} \right] \Bigg|_{\substack{\bar{q}=\bar{g}(t);\ \bar{p}=\bar{f}(t) \\ \bar{v}=\dot{\bar{g}}(t);}} = 0$$

$$\text{ii)} \quad \left[L^*_{\bar{p}} - \frac{d}{dt}(\bar{0}) \right] \Bigg|_{\substack{\bar{q}=\bar{g}(t);\ \bar{p}=\bar{f}(t) \\ \bar{v}=\dot{\bar{g}}(t);}} = 0$$

teniendo en cuenta que:

$$L^*_{\bar{p}} = \bar{v} - H_{\bar{p}} \quad ; \quad L^*_{\bar{q}} = - H_{\bar{q}} \quad \text{y} \quad L^*_{\bar{v}} = \bar{p} \ \ldots\ldots\ldots\ldots (^{***})$$

de i) $-H_{\bar{q}} = \dot{\bar{p}}$; de ii) $\bar{v} - H_{\bar{p}} = 0$

luego tenemos las ecuaciones canónicas del movimiento

$$\bar{f}(t) = -H_{\bar{q}}\Big|_{\substack{\bar{q}=g(t)\\ \bar{p}=f(t)}} \quad ; \quad \bar{g}(t) = H_{\bar{p}}\Big|_{\substack{\bar{q}=g(t)\\ \bar{p}=f(t)}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

Sea $h(t) = H[g(t),f(t),t]$,derivando con respecto al tiempo relacionemos h y H_t

$$\frac{dh}{dt} = H_{\bar{q}}\Big|_{\substack{\bar{q}=g(t)\\ \bar{p}=f(t)}} \bar{g}(t) + H_{\bar{p}}\Big|_{\substack{\bar{q}=g(t)\\ \bar{p}=f(t)}} \bar{f}(t) + H_t$$

; usando las ecuaciones canónicas tenemos:

$$\frac{dh}{dt} = H_t \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

En la formulación hamiltoniana los momentos también son variables independientes similares a las coordenadas generalizadas. Por consiguiente el concepto de transformación de coordenadas debe ser extendido para incluir simultáneamente las coordenadas independientes y momentos, q_i p_i a un nuevo juego de Q_i , P_i según alguna ecuación de transformación.

En la mecánica hamiltoniana tienen interés las transfromaciones para los cuales Q , P son coordenadas canónicas (una condición indispensable para obtener las ecuaciones canónicas es que Q y P sean independientes). Esto se cumple si existe $K(\bar{Q},\bar{P},t)$ tal que

$$\bar{F}(t) = -K_{\bar{Q}}\Big|_{\substack{\bar{Q}=G(t)\\ \bar{P}=F(t)}} \quad ; \quad \bar{G}(t) = K_{\bar{P}}\Big|_{\substack{\bar{Q}=G(t)\\ \bar{P}=F(t)}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(\#)$$

Las transformaciones para los cuales son válidas las relaciones (#) son llamadas canónicas.

K es el hamiltoniano en las nuevas coordenadas. Q_i y P_i por ser canónicas deben satisfacer el Principio Modificado de Hamilton :

$$\delta \int_{t1}^{t2} [\ \bar{F}(t).\bar{G}(t) - K(\bar{G},\bar{F},t)]\ dt = 0 \quad \text{..............................(##)}$$

al mismo tiempo q_i, p_i satifacen:

$$\delta \int_{t1}^{t2} [\ \bar{f}(t).\bar{g}(t) - H(\bar{g},\bar{f},t)]\ dt = 0 \quad \text{..............................(###)}$$

La simultánea validez de las ecuaciones (##) y (###); significa que los integrandos pueden diferenciarse a lo màs en una derivada total con respecto al tiempo de una función arbitraria W(t) ya que la variación de

$$\int_{t1}^{t2} \frac{dW}{dt}\ dt = F(2)-F(1)$$ es cero para cualquier función W; desde que $\delta F(2) = \delta F(1) = 0$.

W debe ser función de {q,p,Q,P,t} donde solo 2n de estas 4n variables son independientes, porque se tiene 2n ecuaciones de transformación; en nuestro estudio usaremos la función generatriz del tipo W(q,Q,t).

Luego

$$\bar{f}(t).\bar{g}(t) - H(\bar{g}(t),\bar{f}(t),t) = \bar{F}(t).\bar{G}(t) - K(\bar{G}(t),\bar{F}(t),t) + \dot{W}(\bar{g}(t),\bar{G}(t),t)$$

$$\dot{W}(t) = W_{\bar{q}}\Big|_{\substack{q=g(t)\\ \bar{Q}=\bar{G}(t)}} .\dot{\bar{g}}(t) + W_{\bar{Q}}\Big|_{\substack{q=g(t)\\ \bar{Q}=\bar{G}(t)}} .\dot{\bar{G}}(t) + W_t$$

$$[\bar{f}(t) - W_{\bar{q}}\Big|_{\substack{q=g(t)\\ \bar{Q}=\bar{G}(t)}}].\dot{\bar{g}}(t) - [\bar{F}(t) + W_{\bar{Q}}\Big|_{\substack{q=g(t)\\ \bar{Q}=\bar{G}(t)}}].\ \dot{\bar{G}}(t) + \{K(\bar{G}(t),\bar{F}(t),t) - H[\bar{g}(t),\bar{f}(t),t] - W_t\} = 0 \quad \text{........................(####)}$$

Como las antiguas coordenadas y las nuevas q_s y Q_s son consideradas como independientes,

(####) puede ser una identidad sólo si los coeficientes de $\dot{\bar{g}}(t)$ y $\dot{\bar{G}}(t)$ se anulan separadamente, luego

$$\bar f(t) = W_{\bar q}\Big|_{\substack{q=g(t)\\ \bar Q=\bar G(t)}} \ , \qquad \bar F(t) = -W_{\bar Q}\Big|_{\substack{\bar q=\bar g(t)\\ \bar Q=\bar G(t)}} \ , \ K[\bar G(t),\bar F(t),t] = H[\bar g(t),\bar f(t),t] + W_t$$

finalmente

$$\bar p = W_{\bar q}$$

$$\bar P = -W_{\bar Q} \qquad \text{y} \qquad K(\bar Q,\bar P,t) = H(\bar q,\bar p,t) + W_t(\bar Q,\bar q,t)$$

En adelante usaremos

$$\bar q = (Q_1,Q_2,\ldots Q_n,\ldots,Q_N);\ \bar v = (\dot Q_1,\dot Q_2,\ldots \dot Q_n,\ldots,\dot Q_N)$$

$$\bar p = (P_1,P_2,\ldots P_n,\ldots,P_N)$$

```
              m             m              m             m
|—\/\/\/\/- o - /\/\/\/- o - ........- o -/\/\/\/- o -/\/\/\/—|
0             1             2             N-1           N
```

Fig. 2 Red unidimensional con extremos fijos.

Posición de equilibrio:

```
—\/\/\/\/— o –  /\/\/\/- o -/\/\/\/- o -/\/\/\/—
           n-1           n           n+1
```

oscilando:

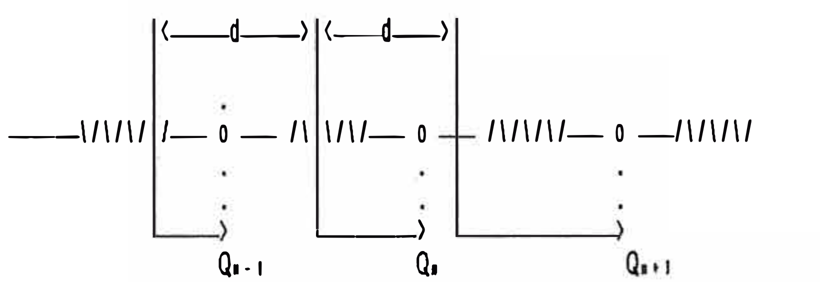


Fig. 3 Q_n , Q_{n-1} , Q_{n+1} los desplazamientos de las partículas respecto a sus posiciones de equilibrio. Longitud normal de cada 'resorte' = d .

$$T = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} m\dot{\bar{X}}_n^2 \quad , \quad V = \sum_{n=1}^{N+1} V(\bar{X}_n , \bar{X}_{n-1}) \quad \text{.............................} \quad (3.3)$$

T ---> energía cinética total

$\bar{X}_n$ --> Vector posición de la partícula n-ésima con respecto a O de la Fig. 2

V --> energía potencial total.

Pero $\bar{X}_n = X_n\, i = (X_{on} + Q_n)\, i$ donde X_{on} ---> coordenada de la posición de equilibrio de la n-ésima partícula.

i ----> vector unitario

$$\dot{\bar{X}}_n = \dot{Q}_n\, i$$

$$(\bar{X}_n - \bar{X}_{n-1}) = (\bar{Q}_n - \bar{Q}_{n-1}) + \bar{d} \quad , \qquad V = V(\bar{X}_n - \bar{X}_{n-1} - \bar{d})$$

el potencial depende de la elongación del resorte respecto de su longitud normal.

luego:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} m\dot{Q}_n^2 \qquad V = \sum_{n=1}^{N+1} V(Q_n - Q_{n-1}) \quad ; \quad \text{aqui } Q_0 = Q_{N+1} = 0$$

obtenemos la lagrangeana

$L = T - V$ y de aqui el momentum generalizado: $P_n = \dfrac{\delta L}{\delta \dot{Q}_n} = \dfrac{\delta T}{\delta \dot{Q}_n}$

$$P_n = m\dot{Q}_n$$

$$T = (1/2)\sum_{n=1}^{N} P_n^2 \quad , \quad V = \sum_{n=1}^{N+1} V(Q_n - Q_{n-1}) \quad \text{....................................} (3.4)$$

Q_n ----->coordenadas generalizadas.

P_n ----->momentum generalizados.

construimos el lagrangiano del sistema:

$$L = T-V = \frac{1}{2}m\sum_{n=1}^{N}\dot{Q}_n^2 - \sum_{n=1}^{N+1} V(Q_n - Q_{n-1}) \qquad (Q_0 = Q_{N+1} = Q_{-N-1} = 0)$$

luego obtenemos el hamiltoniano

$$H(Q_n,P_n,t) = \sum_n P_n \dot{Q}_n - L(Q_n,\dot{Q}_n,t) \text{ ....}(\alpha)$$

$$\text{pero } P_n = \frac{\delta L}{\delta \dot{Q}_n} = m\dot{Q}_n \text{ ----> } T = \frac{1}{2} m \sum_{n=1}^{N} \dot{Q}_n^2 = \frac{1}{2} m \sum_{n=1}^{N} P_n \dot{Q}_n$$

$$\sum_{n=1}^{N} P_n \dot{Q}_n = 2T \text{ ......}(\beta)$$

$$\text{reemplazando } (\beta) \text{ en } (\alpha) : H = T+V = \frac{1}{2m} \sum_{n=1}^{N} P_n^2 + \sum_{n=1}^{N+1} V(Q_n - Q_{n-1}) \text{.....................}(3.5)$$

H es la energla total del sistema, èsto es consecuencia del potencial dependiente solamente de las coordenadfas espaciales y consecuencia de que las ecuaciones de transformaciòn entre los X_n y los Q_n no contienen explIcitamente el tiempo, con lo cual la energla cinètica (T) serà una funaciòn homogènea de segundo grado de los $\dot{Q}_n$.

Esto es asi porque i) $\bar{X}_n = \bar{X}_n(Q_n)$ ---->independiente del tiempo explIcitamente.

ii) $V = V(\bar{X}_n)$ ---->independiente de $\bar{X}_n$.

$$H = (1/2m)\sum_{n=1}^{N} P_n^2 + \sum_{n=-N_0}^{N+1} [(a/b)e^{-b(Q_n - Q_{n-1})} + a(Q_n - Q_{n-1})]$$

$$= (1/2m)\sum_{n=1}^{N} P_n^2 + \sum_{n=-N_0}^{N+1} [(a/b)\, e^{-b(Q_n - Q_{n-1})} + a\,(Q_{N+1} - Q_{-N_0-1})]$$

$$=(1/2m)\sum_{n=1}^{N} P_n^2 + \sum_{n=-N_0}^{N+1} (a/b)e^{-b(Q_n - Q_{n-1})} \quad \ldots\ldots(3.6)$$

De allí obtenemos las ecuaciones canónicas

$$\dot{Q}_n = \frac{\delta H}{\delta P_n} \longrightarrow Q_n = m^{-1}P_n \quad \ldots\ldots(3.7)$$

sea $V = V_0 g$ con $g = g(Q_i - Q_{i-1})$

$$\dot{P}_n = -\frac{\delta H}{\delta P_n} \longrightarrow \dot{P}_n = -\left\{\frac{\delta}{\delta Q_n}\sum_{i=1}^{N+1} V(Q_i, Q_{i-1})\right\}$$

$$= -\frac{\delta}{\delta Q_n}[\ldots + V(Q_i, Q_{i-1}) + V(Q_{i+1}, Q_i) + \ldots]$$

$$= -\left[\frac{\delta}{\delta Q_n} V(Q_n, Q_{n-1}) + \frac{\delta}{\delta Q_n} V(Q_{n+1}, Q_n)\right]$$

tenemos

$$V(Q_n, Q_{n-1}) = \sum_{n=0}^{N+1} \left[(a/b)e^{-b(Q_n - Q_{n-1})} + a(Q_n - Q_{n-1})\right]$$

$$V(Q_{n+1}, Q_n) = \sum_{n=-N_0}^{N+1} \left[(a/b)e^{-b(Q_{n+1} - Q_n)} + a(Q_{n+1} - Q_n)\right]$$

$$\dot{P}_n = -a\, e^{-b(Q_n - Q_{n-1})} + a + a\, e^{-b(Q_{n+1} - Q_n)} - a$$

$$P_n = ae^{-b(Q_n - Q_{n-1})} - a\, e^{-b(Q_{n+1} - Q_n)} \quad \ldots\ldots(3.8)$$

haciendo una transformación de variables

$Q_n = \alpha Q_n'$, $P_n' = \beta P_n$, $t' = \tau t$;

hallaremos las constantes α, β y τ de tal manera que las ecuaciones (3.7) y (3.8) se escriban en función de variables adimensionales. Derivando Q_n y P_n y usando la regla de la cadena de la derivación

$$\frac{dQ_n}{dt} = \frac{dQ_n'}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \frac{\tau}{\alpha}\frac{dQ_n'}{dt'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(r_1)$$

$$\frac{dP_n}{dt} = \frac{\tau}{\beta}\frac{dP_n'}{dt'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(r_2)$$

reemplazando las relaciones (r_1) y (r_2) en (3.7) y (3.8) tenemos

$$\frac{\tau}{\beta}\frac{dQ_n'}{dt'} = \frac{1}{\beta m}P_n' \; ; \quad \frac{\tau}{a\beta}\frac{dP_n'}{dt'} = e^{-(b/\alpha)(Q_n' - Q_{n-1}')} - e^{-(b/\alpha)(Q_{n+1}' - Q_n')}$$

luego $\alpha = b$, $\dfrac{\tau}{\alpha} = \dfrac{1}{\beta m}$ y $\dfrac{\tau}{a\beta} = 1$, de estas relaciones obtenemos una para β

$$\frac{b}{\beta m} = a\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(r_3)$$

finalmente

$$\alpha = b, \quad \beta = \sqrt{\frac{b}{am}} \;, \quad \tau = \sqrt{\frac{ab}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(r_4)$$

observemos que los paràmetros a y b del potencial V tienen las dimensiones fìsicas de fuerza e inversa de longitud respectivamente, por lo que las relaciones (r_4) dan para α, β y τ la inversa de longitud, momentum y tiempo respectivamente.

$$\frac{dQ_n'}{dt'} = P_n' \; ; \quad \frac{dP_n'}{dt'} = e^{-(Q_n' - Q_{n-1}')} - e^{-(Q_{n+1}' - Q_n')}$$

por comodidad en la notaciòn escribimos las variables sin primas:

$$\frac{dQ_n}{dt} = P_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.9)$$

$$\frac{dP_n}{dt} = e^{-(Q_n - Q_{n-1})} - e^{-(Q_{n+1} - Q_n)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.10)$$

de (3.9) y (3.10)

$$\frac{d^2}{dt^2}(Q_n-Q_{n-1}) \qquad \frac{dP_n}{dt}-\frac{dP_{n-1}}{dt}$$

$$= e^{-(Q_n - Q_{n-1})} - e^{-(Q_{n+1} - Q_n)} -[e^{-(Q_{n-1} - Q_{n-2})} - e^{-(Q_n - Q_{n-1})}$$

$$= 2\, e^{-(Q_n - Q_{n-1})} - e^{-(Q_{n+1} - Q_n)} - e^{-(Q_{n-1} - Q_{n-2})}$$

sea $r_n = Q_n-Q_{n-1}$

$$\frac{d^2 r_n}{dt^2} = 2\, e^{-r_n} - e^{-r_{n-1}} - e^{-r_{n+1}} \quad \textbf{(ECUACION DE TODA)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.11)$$

La ecuaciòn de movimiento de la red de Toda (3.11) està escrita en tèrminos del desplazamiento relativo de particulas adyacentes.

El hamiltoniano en funciòn de Q'_n, P'_n y t' es

$$H=(1/2m)\sum_{n=1}^{N} P_n^2 + \sum_{n=1}^{N+1} V(Q_n - Q_{n-1}) = \frac{1}{2m\beta^2}\sum_{n=0}^{N} P_n'^2 + \sum_{n=0}^{N+1} [(a/b)e^{-(b/\alpha)(Q'_n - Q'_{n-1})} +(a/\alpha)(Q'_n -Q'_{n-1})]$$

$$H=(a/b)[\sum_{n=1}^{N} P_n'^2 + \sum_{n=1}^{N+1} e^{-(Q'_n - Q'_{n-1})} +(Q'_{N+1} - Q'_{-N_0-1})]$$

sí las particulas son enumeradas de $-N_0$ a N y escribiendo las variables sin primas tenemos

$$H=(a/b)[\sum_{n=-N_0}^{N} P_n^2 + \sum_{n=-N_0}^{N+1} e^{-(Q_n - Q_{n-1})}]$$

1.2 ESTUDIO DE UN TIPO DE TRANSFORMACION CANONICA

En adelante aplicaremos la teorla de las transformaciones canónicas a una red no-lineal unidimensional en la forma de red exponencial segun la ecuación (3.11).

El objetivo del presente capltulo es primero la introducción de una transformación canónica que lleve de un sistema de variables dinámicas a otras ecuaciones canónicas de la red exponencial y nos permita obtener nuevas soluciones de la ecuación de movimiento a partir de ciertas soluciones sencillas, ya conocidas.

Para muchas ecuaciones de onda no-lineales, en derivadas parciales se conocen las transformaciones de Bäcklund que permiten hallar nuevas soluciones a partir de otras ya conocidas. Particularmente la transformacion canónica descrita aquí puede considerarse como una versión discreta de la transformación de Bäcklund.

Sea la siguiente transformación canónica:

$$\left.\begin{aligned} P_n &= \frac{F(Q_n)}{F(Q_n')} + \frac{F(Q'_{n-1})}{F(Q_n)} \\ P_n &= \frac{F(Q_n)}{F(Q_n)} + \frac{F(Q'_n)}{F(Q_{n+1})} \end{aligned}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.12)$$

la expresión

$$\left\{(1/2)\sum_{-N_0}^{N} P_n'^{2} + \sum_{-N_0}^{N} \frac{F(Q'_{n-1})}{F(Q'_n)}\right\} = (1/2)\sum_{n=-N_0}^{N}\left\{\left(\frac{F(Q_n)}{F(Q'_n)}\right)^2 + 2\,\frac{F(Q_n)}{F(Q_{n+1})} + \left(\frac{F(Q'_n)}{F(Q_{n+1})}\right)^2\right\} + \left\{\sum_{n=-N_0}^{N} \frac{F(Q'_{n-1})}{F(Q_n)}\right\} \ldots\ldots\ldots (3.13)$$

Agrupando con la primera sumatoria la segunda y apartando en una sumatoria independiente el 2do término de la 1era sumatoria :

$$= (1/2)\sum_{n=-N_0}^{N}\left\{\left(\frac{F(Q_n)}{F(Q'_n)}\right)^2 + 2\,\frac{F(Q'_{n-1})}{F(Q_n)} + \left[\frac{F(Q'_n)}{F(Q_{n+1})}\right]^2\right\} + \left\{\sum_{n=-N_0}^{N} \frac{F(Q_n)}{F(Q_{n+1})}\right\} \ldots\ldots\ldots (3.14)$$

esto último se obtiene intercambiando en (3.13) $\sum_{n=-N_o}^{N} \frac{F(Q_n)}{F(Q_{n+1})}$ con

$\sum_{n=-N_o}^{N} \frac{F(Q'_{n-1})}{F(Q_n)}$; además (3.14) aparece en la primera parte

$$\sum_{-N_o}^{N} \left(\frac{F(Q'_n)}{F(Q_{n+1})}\right)^2 = \sum_{-N_o+1}^{N+1} \left(\frac{F(Q'_{n-1})}{F(Q_n)}\right)^2 = \sum_{-N_o}^{N} \left(\frac{F(Q'_{n-1})}{F(Q_n)}\right)^2 + \left(\frac{F(Q'_N)}{F(Q_{N+1})}\right)^2 - \left(\frac{F(Q'_{-N_o-1})}{F(Q_{-N_o})}\right)^2$$

además $\sum_{-N_o}^{N} P_n^2 = \sum_n \left\{ \left(\frac{F(Q_n)}{F(Q'_n)}\right)^2 + 2\,\frac{F(Q'_{n-1})}{F(Q'_n)} + \left(\frac{F(Q'_{n-1})}{F(Q_n)}\right)^2 \right\}$

Es decir:

$$(1/2)\sum_{-N_o}^{N} P_n^{,2} + \sum_{-N_o}^{N} \frac{F(Q'_{n-1})}{F(Q'_n)} = (1/2)\sum_{-N_o}^{N} \left\{ \left(\frac{F(Q_n)}{F(Q'_n)}\right)^2 + 2\,\frac{F(Q'_{n-1})}{F(Q'_n)} + \left(\frac{F(Q'_n)}{F(Q_{n+1})}\right)^2\right\} + \sum_{-N_o}^{N} \frac{F(Q_n)}{F(Q_{n+1})}$$

$$= (1/2)\sum_{-N_o}^{N} \left\{ \left(\frac{F(Q_n)}{F(Q'_n)}\right)^2 + 2\,\frac{F(Q'_{n-1})}{F(Q'_n)} + \left(\frac{F(Q'_{n-1})}{F(Q_n)}\right)^2 \right\} + \frac{F(Q'_N)}{F(Q_{N+1})} - \frac{F(Q'_{-N_o-1})}{F(Q_{-N_o})} + \sum_{-N_o}^{N} \frac{F(Q_n)}{F(Q_{n+1})}$$

luego en (3.13) y (3.14) :

$$\left\{(1/2)\sum_{-N_o}^{N} P_n^{,2} + \sum_{-N_o}^{N} \frac{F(Q'_{n-1})}{F(Q'_n)}\right\} = (1/2)\sum_{-N_o}^{N} P_n^2 + \sum_{-N_o}^{N} \frac{F(Q_n)}{F(Q_{n+1})} + \frac{1}{2}\left(\frac{F(Q'_N)}{F(Q_{N+1})}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{F(Q'_{-N_o-1})}{F(Q_{-N_o})}\right)^2$$

....................(3.15)

es decir :

$$H' = H + \text{const.} \; ; \text{ con } H = (1/2) \sum_{-N_0}^{N} P_n^2 + \sum_{-N_0}^{N} \frac{F(Q_n)}{F(Q_{n+1})} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.16)$$

$$\text{pues } \frac{\delta H'}{\delta Q'_n} = -\dot{P}'_n \qquad \frac{\delta H'}{\delta P'_n} = \dot{Q}'_n$$

Si tomamos una transformación canónica de la forma (3.12) puede transformar el hamiltoniano H en si mismo excepto por una constante, cuando imponemos condiciones de contorno apropiadas.

Una transformación mucho más general es :

$$\left.\begin{aligned} P_n &= \frac{F'(Q_n)}{F(Q_n)} + \frac{F(Q'_{n-1})}{F(Q_n)} - \alpha \\ P'_n &= \frac{F'(Q_n)}{F(Q_n)} + \frac{F(Q'_n)}{F(Q_{n+1})} - \alpha \end{aligned}\right\} \quad \alpha = \text{const.} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.17)$$

tenemos las siguientes relaciones:

$$\sum_{-N_0}^{N} (P'_n - P_n) = \sum_{-N_0}^{N} \left[\frac{F(Q'_{n-1})}{F(Q_n)} - \frac{F(Q'_n)}{F(Q_{n+1})}\right] = \frac{F(Q'_{-N_0-1})}{F(Q_{-N_0})} - \frac{F(Q'_N)}{F(Q_{N+1})} = \text{const.} \qquad \ldots\ldots\ldots (3.18)$$

Efectuando la siguiente diferencia:

$$\left\{(1/2)\sum_{-N_0}^{N} (P'_n+\alpha)^2 + \sum_{-N_0}^{N} \frac{F(Q'_{n-1})}{F(Q_n)} \right\} - \left\{(1/2)\sum_{-N_0}^{N} (P_n+\alpha)^2 + \sum_{-N_0}^{N} \frac{F(Q_n)}{F(Q_{n+1})} \right\} =$$

$$\left\{(1/2)\sum_{-N_0}^{N} (P'_n)^2 + \sum_{-N_0}^{N} \frac{F(Q'_{n-1})}{F(Q_n)} \right\} - \left\{(1/2)\sum_{-N_0}^{N} (P_n)^2 + \sum_{-N_0}^{N} \frac{F(Q_n)}{F(Q_{n+1})} \right\} - \alpha \sum_{-N_0}^{N} (P'_n - P_n) \qquad \ldots\ldots\ldots (3.19)$$

Usando la relación (3.15) en el segundo miembro de la relación (3.19) y además teniendo en cuenta la igualdad

$\sum_{-N_0}^{N} (P'_n - P_n) = \text{const.}$ en la relación (3.15) haciendo los cambios

$$P'_n \text{---->} P'_n+\alpha \quad \text{y} \quad P_n \text{----->} P_n+\alpha \; :$$

$$(1/2)\sum_{-N_0}^{N} (P'_n+\alpha)^2 + \sum_{-N_0}^{N} \frac{F(Q'_{n-1})}{F(Q'_n)} = (1/2)\sum_{-N_0}^{N} (P_n+\alpha)^2 + \sum_{-N_0}^{N} \frac{F(Q_n)}{F(Q_{n+1})} + \text{const.}$$

esto puede obtenerse ya que en (3.17) si $P'_n \text{--->} P'_n-\alpha$ y $P_n \text{--->} P_n-\alpha$, se obtienen las relaciones (3.12), luego usando la relación (3.19) se obtiene nuevamente:

$$(1/2)\sum_{-N_0}^{N} (P'_n)^2 + \sum_{-N_0}^{N} \frac{F(Q'_{n-1})}{F(Q'_n)} = \{(1/2)\sum_{-N_0}^{N} (P_n)^2 + \sum_{-N_0}^{N} \frac{F(Q_n)}{F(Q_{n+1})} + \text{const.}$$

$H' = H + \text{const.}$

sean $\dfrac{F(Q_n)}{F(Q'_n)} = A\dfrac{e^{Q_n}}{e^{Q'_n}}$ y $\dfrac{F(Q'_{n-1})}{F(Q_n)} = \dfrac{1}{A}\dfrac{e^{Q'_{n-1}}}{e^{Q_n}}$

luego $P_n = A\dfrac{e^{Q_n}}{e^{Q'_n}} + \dfrac{1}{A}\dfrac{e^{Q'_{n-1}}}{e^{Q_n}} - \alpha$ y $P'_n = A\dfrac{e^{Q_n}}{e^{Q'_n}} + \dfrac{1}{A}\dfrac{e^{Q'_n}}{e^{Q_{n+1}}} - \alpha$

además se sabe:

$$P_n = \frac{\delta W}{\delta Q_n} \qquad \text{...(3.20)}$$

$$P'_n = -\frac{\delta W}{\delta Q'_n} \qquad \text{...(3.21)}$$

de (3.20)

$$\frac{\delta W}{\delta Q_n} = A\frac{e^{Q_n}}{e^{Q'_n}} + \frac{1}{A}\frac{e^{Q'_{n-1}}}{e^{Q_n}} - \alpha \; ; \qquad W = W(\bar{Q},\bar{Q}',t)$$

sea $W_n = A\dfrac{e^{Q_n}}{e^{Q'_n}} + \dfrac{1}{A}\dfrac{e^{Q'_{n-1}}}{e^{Q_n}} - \alpha$

podemos escribir

$$W_n = \sum_m \frac{\delta}{\delta Q_n}\left[A\frac{e^{Q_m}}{e^{Q'_m}} - \frac{1}{A}\frac{e^{Q'_{m-1}}}{e^{Q_m}} - \alpha Q_m\right] = \sum_m \frac{\delta}{\delta Q_n} R_m$$

con $R_m = A\dfrac{e^{Q_m}}{e^{Q'_m}} - \dfrac{1}{A}\dfrac{e^{Q'_{m-1}}}{e^{Q_m}} - \alpha Q_m$

luego $\dfrac{\delta W(\bar{Q},\bar{Q}',t)}{\delta Q_n} = \sum_m \dfrac{\delta}{\delta Q_n}(R_m) \implies W(\bar{Q},\bar{Q}',t) = \sum_m R_m + S(\bar{Q}',t)$

usando (3.21):

$$A\frac{e^{Q_n}}{e^{Q'_n}} + \frac{1}{A}\frac{e^{Q'_n}}{e^{Q_{n+1}}} - \alpha = -\left\{\sum_m\left[A\frac{e^{Q_m}}{e^{Q'_m}}\delta_{mn} - \frac{1}{A}\frac{e^{Q'_{m-1}}}{e^{Q_m}}\delta_{n\,m-1} + \frac{\delta S}{\delta Q_n}\right]\right\}$$

$$= A\frac{e^{Q_n}}{e^{Q'_n}} + \frac{1}{A}\frac{e^{Q'_n}}{e^{Q_{n+1}}} - \frac{\delta S}{\delta Q_n} \implies S(\bar{Q}',t) = \alpha\sum_n Q'_n + Et$$

luego la función generatriz $W = W(Q,Q',t)$

$$W(\bar{Q},\bar{Q}',t) = \sum_n \left\{A\frac{e^{Q_n}}{e^{Q'_n}} - \frac{1}{A}\frac{e^{Q'_{n-1}}}{e^{Q_n}} + \alpha(Q'_n - Q_n)\right\} + Et \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.22)$$

de (3.20),(3.21) y (3.22) y además sabiendo

$P_n = Q_n$, $P'_n = \dot{Q}'_n$ (ecuaciones canónicas) ,tenemos

$$\frac{dQ_n}{dt} = A\,\frac{e^{Q_n}}{e^{Q'_n}} + \frac{1}{A}\,\frac{e^{Q_{n-1}}}{e^{Q_n}} - \alpha \qquad \text{..(3.23)}$$

$$\frac{dQ'_n}{dt} = A\,\frac{e^{Q_n}}{e^{Q'_n}} + \frac{1}{A}\,\frac{e^{Q'_n}}{e^{Q_{n+1}}} - \alpha \qquad \text{..(3.24)}$$

a partir de ambas relaciones tenemos

$$\frac{d}{dt}(Q'_n - Q_{n-1}) = A\left\{\frac{e^{Q_n}}{e^{Q'_n}} - \frac{e^{Q_{n-1}}}{e^{Q'_{n-1}}}\right\} \qquad \text{..(3.25)}$$

TRANSFROMACIONES DE BACKLUND
DE LA RED EXPONENCIAL DE TODA

$$\frac{d}{dt}(Q'_n - Q_{n-1}) = \frac{1}{A}\left\{\frac{e^{Q'_n}}{e^{Q_{n+1}}} - \frac{e^{Q'_{n-1}}}{e^{Q_n}}\right\} \qquad \text{..(3.26)}$$

Las relaciones (3.25) y (3.26) son llamadas transformaciones de Bäcklund de la ecuaciòn (3.11)

$$\frac{d^2 r_n}{dt^2} = 2e^{-r_n} - e^{-r_{n-1}} - e^{-r_{n+1}} \qquad \text{donde } r_n = Q_n - Q_{n-1}$$

Obtenemos las relaciones equivalentes a (3.25) y (3.26) imponiendo las condiciones de contorno:

$|Q_n|$ y $|Q_n|$ ---->constantes cuando /n/--->+∞;por otro lado necesitamos

$$\dot{Q}'_{n-1} = A\,\frac{e^{Q_{n-1}}}{e^{Q'_{n-1}}} + \frac{1}{A}\,\frac{e^{Q'_{n-1}}}{e^{Q_n}} - \alpha \qquad \text{...........(r5)}$$

$$Q_{n-1} = A\,\frac{e^{Q_{n-1}}}{e^{Q'_{n-1}}} + \frac{1}{A}\,\frac{e^{Q'_{n-2}}}{e^{Q_{n-1}}} - \alpha \qquad \text{...........(r6)}$$

de (3.23) y (r6)

$$Q_n - A\frac{\underset{e}{Q_n}}{\underset{e}{Q_n}}, - \frac{1}{A}\,\frac{\underset{e}{Q'_{n-1}}}{\underset{e}{Q_n}} = Q_{n-1} - A\frac{\underset{e}{Q_{n-1}}}{\underset{e}{Q_{n-1}}}, + \frac{1}{A}\,\frac{\underset{e}{Q'_{n-2}}}{\underset{e}{Q_{n-1}}} \qquad \text{(3.27)}$$

en (3.27) si repetimos la igualdad hasta $n \longrightarrow -\infty$ y $/Q_n/$ = constante.

$/n/ \longrightarrow +\infty$

tenemos

$$Q_n - A\frac{\underset{e}{Q_n}}{\underset{e}{Q_n}}, - \frac{1}{A}\,\frac{\underset{e}{Q'_{n-1}}}{\underset{e}{Q_n}} = 0 - AC - \frac{1}{AC} \quad \text{donde} \quad C = \frac{\underset{e}{Q_{-\infty}}}{\underset{e}{Q_{-\infty}}}, = \text{const.}$$

$$Q_n = A\left[\frac{\underset{e}{Q_n}}{\underset{e}{Q_n}}, - C\right] + \frac{1}{A}\left[\frac{\underset{e}{Q'_{n-1}}}{\underset{e}{Q_n}} - \frac{1}{C}\right] \qquad \text{(3.28)}$$

de (3.24) y (r_5)

$$\dot{Q}'_n - A\frac{\underset{e}{Q_n}}{\underset{e}{Q_n}}, - \frac{1}{A}\,\frac{\underset{e}{Q'_{n-1}}}{\underset{e}{Q_{n+1}}} = \dot{Q}'_{n-1} - A\frac{\underset{e}{Q_{n-1}}}{\underset{e}{Q_{n-1}}}, - \frac{1}{A}\,\frac{\underset{e}{Q'_{n-2}}}{\underset{e}{Q_n}}$$

nuevamente tomando en cuenta que si $n \longrightarrow -\infty$ $/Q_n/$ y $/Q'_n/$ = constantes.

$$\dot{Q}'_n = A\left[\frac{\underset{e}{Q_n}}{\underset{e}{Q_n}}, - C\right] + \frac{1}{A}\left[\frac{\underset{e}{Q'_n}}{\underset{e}{Q_{n+1}}} - \frac{1}{C}\right] \qquad \text{(3.29)}$$

Ahora efectuamos un cambio de variables en las ecuaciones (3.28) y (3.29); nos interesa hacer una transformaciòn de las variables primadas Q'_n a otra funciòn màs sencilla de n y t, luego usar el hecho de que la ecuaciòn (3.11) admite la soluciòn trivial $r_n=0$ con $/Q_n/ = v$ (v=const.) para todo n que serà usado màs adelante.

Haciendo la transformaciòn

$$\frac{e^{Q'_{n-1}}}{e^{Q_{-n}}} = Z\,\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \quad \text{...} (3.30)$$

$$\text{donde}\quad \phi n \equiv \phi(n,t)\ ,\ Z = A\,\frac{e^{Q_{-n}}}{e^{Q_{-n}}} = \varepsilon\, e^{-w} \quad \text{con } |Z|<1 \quad y \quad \varepsilon = \pm 1 \ \text{........................} (3.31)$$

$$\text{luego} \quad Z = AC \ \text{..} (3.32)$$

(3.30) toma la forma $e^{Q'_{n-1}} = A\, e^{Q_{-n}}\,\dfrac{\phi_n}{\phi_{n+1}}$

Asumimos las formas asintòticas de ϕn : $\phi_n \xrightarrow[n \to -\infty]{} B(t)\,Z^n$ y $\phi_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} G(t)\,Z^{-n}$

Usaremos $Q_n = v =$ const. para todo n, denominada como la soluciòn trivial de (3.11)

es decir $\dfrac{dQ_n}{dt} = 0$ para todo n o equivalentemente $e^{Q_n} =$ const. para todo n;

de (3.9) tenemos $P_n = 0$ para todo n.

Reemplazando (3.30) en (3.28)

$$\frac{dQ_n}{dt} = A\,\frac{e^{Q_n}}{e^{Q_n}} - A\,\frac{e^{Q_{-n}}}{e^{Q_{-n}}} + \frac{1}{A}\,\frac{e^{Q'_{n-1}}}{e^{Q_n}} - \frac{1}{A}\,\frac{e^{Q'_{-n}}}{e^{Q_{-n}}}$$

$$= \frac{e^{Q_n}}{e^{Q_{-n}}}\,\frac{\phi_{n+2}}{\phi_{n+1}} - A\,\frac{e^{Q_{-n}}}{e^{Q_{-n}}} + \frac{e^{Q_{-n}}}{e^{Q_n}}\,\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} - \frac{1}{A}\,\frac{e^{Q'_{-n}}}{e^{Q_{-n}}}$$

En el segundo miembro aparecen Z y 1/Z ,en el segundo y cuarto tèrminos respectivamente.

$$\phi_{n+1}\,Q_n = \sigma_n\,\phi_{n+2} - (Z + 1/Z)\,\phi_{n+1} + [1/\sigma(n)]\,\phi_n \ \text{................................} (3.33)$$

donde $\sigma_n = \dfrac{e^{Q_n}}{e^{Q_{-n}}}$; $\sigma_n = 1$ para todo n porque $Q_n = v$ para todo n, pues $Q_n = v$ es una soluciòn trivial de (3.11) de (3.33) considerando $Q_n = 0$ y $n \longrightarrow n-1$

$$\phi_{n+1} + \phi_{n-1} = (Z + 1/Z)\,\phi_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.34)$$

de (3.30) $e^{Q'_n} = A\, e^{Q_{-\infty}} \dfrac{\phi_{n+1}}{\phi_{n+2}} \longrightarrow e^{Q'_n}\, \dot{Q}_n = A\, e^{Q_{-\infty}} \left[\dfrac{\dot{\phi}_{n+1}\phi_{n+2} - \phi_{n+1}\dot{\phi}_{n+2}}{\phi_{n+2}^{2}}\right]$

multiplicando (3.29) por $\exp(Q'_n)$ y reemplazando $C = \exp(Q_{-\infty})/\exp(Q'_{-\infty})$

$$e^{Q'_n}\, \dot{Q}_n = A\, e^{Q_n} - A \frac{e^{Q_{-\infty}}}{e^{Q'_{-\infty}}} e^{Q'_n} + \frac{1}{A} \frac{e^{2Q'_n}}{e^{Q_{n+1}}} - \frac{1}{2} \frac{e^{Q'_{-\infty}}}{e^{Q_{-\infty}}} e^{Q'_n}$$

Usando

$$e^{Q'_{n-1}} = A\, e^{Q_{-\infty}} \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}$$

$$A\, e^{Q_{-\infty}} \left[\frac{\dot{\phi}_{n+1}\phi_{n+2} - \phi_{n+1}\dot{\phi}_{n+2}}{\phi_{n+1}^{2}}\right] = A\, e^{Q_n} - A \frac{e^{Q_{-\infty}}}{e^{Q'_{-\infty}}} e^{Q'_n} + \frac{1}{A} \frac{e^{2Q'_n}}{e^{Q_{n+1}}} - \frac{1}{2} \frac{e^{Q'_{-\infty}}}{e^{Q_{-\infty}}} e^{Q'_n}$$

$$\frac{\dot{\phi}_{n+1}\phi_{n+2} - \phi_{n+1}\dot{\phi}_{n+2}}{\phi_{n+1}^{2}} = \sigma_n - \frac{e^{Q'_n}}{e^{Q'_{-\infty}}} + \frac{e^{Q_{-\infty}}}{A^2\, e^{Q_{n+1}-Q_{-\infty}}} - \frac{e^{Q'_{-\infty}}}{A^2\, e^{Q_{-\infty}}} \frac{e^{Q'_n}}{e^{Q_{-\infty}}}$$

$$= 1 - Z \frac{\phi_{n+1}}{\phi_{n+2}} + \frac{e^{2Q'_n}}{Z^2\, e^{2Q'_{-\infty}}} - \frac{e^{Q'_n}}{Z^2\, e^{Q'_{-\infty}}}$$

reemplazando (3.30) en la última ecuación

$$\frac{\phi_{n+1}\,\phi_{n+2}-\phi_{n+1}\,\dot{\phi}_{n+2}}{\phi_{n+2}^{2}} = 1- Z\,\frac{\phi_{n+1}}{\phi_{n+2}} + \frac{\phi_{n+1}^{2}}{(\phi_{n+2})^{2}} - \frac{1}{Z}\,\frac{\phi_{n+1}}{\phi_{n+2}}$$

$$=1-(Z+1/Z)\,\frac{\phi_{n+1}}{\phi_{n+2}}+\left[\frac{\phi_{n+1}}{\phi_{n+2}}\right]^{2}$$

usando (3.34) en el segundo miembro de la última ecuación

$$\frac{\phi_{n+1}\,\phi_{n+2}-\phi_{n+1}\,\dot{\phi}_{n+2}}{\phi_{n+2}^{2}} = 1-\frac{\phi_{n+2}+\phi_{n}}{\phi_{n+2}}+\left[\frac{\phi_{n+1}}{\phi_{n+2}}\right]^{2}$$

$$\phi_{n+1}\,\phi_{n+2}-\phi_{n+1}\,\dot{\phi}_{n+2}=\phi_{n+1}^{2}-\phi_{n}\,\phi_{n+2}\;\longrightarrow\;\frac{\dot{\phi}_{n+1}}{\phi_{n+1}}+\frac{\phi_{n}}{\phi_{n+1}}=\frac{\dot{\phi}_{n+2}}{\phi_{n+2}}+\frac{\phi_{n+1}}{\phi_{n+2}}$$

cambiendo índices $n \longrightarrow n-2$

$$\frac{\dot{\phi}_{n}}{\phi_{n}}+\frac{\phi_{n-1}}{\phi_{n}}=\frac{\dot{\phi}_{n-1}}{\phi_{n-1}}+\frac{\phi_{n-2}}{\phi_{n-1}}=\alpha(t)\qquad\text{.............................(3.35)}$$

usaremos las relaciones (3.34) y (3.35) para resolver y dar la expresión de $\phi_n = \phi(n,t)$

usando las condiciones $/Q_n/$ y $/\dot{Q}_n/ \xrightarrow[/n/\to+\infty]{} \text{const.}$ y las formas asintóticas dadas por (3.30), (3.35) nos dice que la forma asintótica $\phi_n \xrightarrow[n\to-\infty]{} B(t)Z^{n}$ es consistente con la ecuación (3.30) ($B(t) \longrightarrow$ función arbitraria del tiempo).

Las formas asintóticas las reemplazaremos en (3.35); esto es $\dfrac{\dot{\phi}_{n-1}}{\phi_{n-1}} \longrightarrow \dfrac{\dot{B}(t)}{B(t)}$; $\dfrac{\phi_{n-2}}{\phi_{n-1}} \longrightarrow \dfrac{1}{Z}$

De (3.35) escribimos

$$\phi_n = -\phi_{n-1}+\alpha(t)\,\phi_n \qquad\text{...(3.36)}$$

para $\alpha(t)=\dfrac{\dot{B}(t)}{B(t)}+\dfrac{1}{Z}$; tomaremos $\alpha=(1/2)\,(Z+1/Z)$ entonces $\alpha=\varepsilon\cosh w$

con èsto y usando (3.34) tenemos:

$$\phi_n = 1/2\ \phi_{n+1} - 1/2\ \phi_{n-1} \quad \text{.................................} (3.37)$$

En el ANEXO A desarrollamos un procedimiento para $\alpha = \alpha(t)$ en general, hallaremos una soluciòn de tipo solitòn acompañado con otras funciones. En el caso $\alpha = \varepsilon \cosh w$ obtenemos solitones puros.

La ecuaciòn (3.34)

$\phi_{n+1} + \phi_{n-1} = (Z + 1/Z)\ \phi_n$, tiene como soluciòn

$$\phi_n = B(t) Z^n + G(t)\ Z^{-n} \quad \text{...} (3.38)$$

La forma asintòtica

$\phi_n \xrightarrow[n \to -\infty]{} B(t) Z^n$, exige que $|Z| < 1$

verificamos la soluciòn

$$B\ Z^{n+1} + G\ Z^{-n-1} + B\ Z^{n-1} + G\ Z^{-n+1} = (Z + 1/Z)[B\ Z^n + G\ Z^{-n}]$$

$$= B\ Z^{n+1} + G\ Z^{-n-1} + B\ Z^{n-1} + G\ Z^{-n+1}$$

que satisface para B y G en general.

$$\frac{B(t)}{B(t)} = (1/2)(Z - 1/Z) \quad \text{además} \quad Z = \varepsilon\ e^{-w} \longrightarrow B(t) = B_o\ e^{\varepsilon/2(Z - 1/Z)t} = B_o\ e^{\varepsilon(-\mathrm{senh}\ w)t}$$

(3.38) en (3.37) : $\dot{B}\ Z^n + \dot{G}\ Z^{-n} = (1/2)[B\ Z^{n+1} + G\ Z^{-n-1} - B\ Z^{n-1} - G\ Z^{-n+1}]$

$[\dot{B} - \frac{1}{2}(Z-1/Z)B\ ]\ Z^n + [\dot{G} - (1/2)(Z-1/Z)\ G]\ Z^{-n} = 0$; esta relaciòn debe ser vàlida tambièn cuando $n \to +\infty$; en este caso $Z^n \to 0$ puesto que $|Z| < 1$, pero $Z^{-n} \xrightarrow[n \to -\infty]{} \infty$

entonces se exige que el coeficiente de este tèrmino sea cero.

$$G + (1/2)(Z-1/Z)\ G = 0 \longrightarrow G(t) = G_o\ e^{\varepsilon(\mathrm{senh}\ w)t}$$

la soluciòn general de (3.34)

$$\phi_n \equiv \phi(n,t) = B_0 Z^n e^{-\varepsilon[\text{senh } w]t} + G_0 Z^{-n} e^{+\varepsilon[\text{senh } w]t} \quad \text{.....(3.39)}$$

usando $Z = \varepsilon e^{-w}$

$$\phi(n,t) = B_0 e^{-[nw+\varepsilon \text{senh } w]t} + G_0 e^{[nw+\text{senh } w]t} \quad \text{.....(3.40)}$$

DEDUCCION DE LA RELACION

$$e^{-(Q'_n - Q'_{n-1})} = 1 + \frac{d^2}{dt^2} \text{Ln } \phi_{n+1} \quad \text{.....(3.41)}$$

(3.41) nos da una relaciòn para la "elongaciòn" relativa del n-èsimo y (n-1)-èsimo resortes en las coordenadas Q'_n.

de (3.34) haciendo n--->n+1

$$\text{i)} \quad \phi_{n+2} + \phi_n = (Z + 1/Z)\,\phi_{n+1}$$

de (3.37)

$$\text{ii)} \quad \phi_{n+1} = \frac{1}{2}\phi_{n+2} - \frac{1}{2}\phi_n \implies \dot{\phi}_{n+1} = -\phi_n + \frac{1}{2}(Z + 1/Z)\phi_{n+1} \quad \text{.....(3.42)}$$

de (i) y i):

$$\dot{\phi}_{n+1} = \phi_{n+2} - \frac{1}{2}(Z + 1/Z)\phi_{n+1} \quad \text{.....(3.43)}$$

derivando ii):

$$\ddot{\phi}_{n+1} = \dot{\phi}_{n+2} - \frac{1}{2}(Z + 1/Z)\dot{\phi}_{n+1} \quad \text{.....(3.44)}$$

derivando i):

$$\dot{\phi}_{n+2} + \dot{\phi}_n = (Z + 1/Z)\dot{\phi}_{n+1}$$

despejando $\dot{\phi}_{n+2}$ y reemplazando la expresiòn $\dot{\phi}_{n+1}$

$$\dot{\phi}_{n+2} = (Z + 1/Z)\left[\phi_{n+2} - \frac{1}{2}(Z + 1/Z)\phi_{n+1}\right] - \dot{\phi}_n$$

de (3.43) obtenemos $\dot{\phi}_n$, luego

$$\dot{\phi}_{n+2} = (Z+1/Z)[\phi_{n+2} - 1/2(Z+1/Z)\phi_{n+1}] - [\phi_{n+1} - 1/2(Z+1/Z)\phi_n]$$

en (3.44) reemplazamos la última expresión de ϕ_{n+2} y ϕ_{n+1}

$$\ddot{\phi}_{n+1} = (Z+1/Z)[\phi_{n+2} - 1/2(Z+1/Z)\phi_{n+1}] - [\phi_{n+1} - 1/2(Z+1/Z)\phi_n] - 1/2(Z+1/Z)[\phi_{n+2} - 1/2(Z+1/Z)\phi_{n+1}]$$

$$= (Z+1/Z)\phi_{n+2} - 1/2(Z+1/Z)^2\phi_{n+1} - \phi_{n+1} + 1/2(Z+1/Z)\phi_n - 1/2(Z+1/Z)\,[\phi_{n+2} - 1/2(Z+1/Z)\phi_{n+1}]$$

agrupando

$$\ddot{\phi}_{n+1} = 1/2(Z+1/Z)\,\phi_{n+2} - (1/4)(Z+1/Z)^2\phi_{n+1} - \phi_{n+1} + 1/2(Z+1/Z)\phi_n$$

usando (3.34)

$$\ddot{\phi}_{n+1} = 1/2(Z+1/Z)[(Z+1/Z)\phi_{n+1} - \phi_n] - (1/4)(Z+1/Z)^2\phi_{n+1} - \phi_{n+1} + 1/2(Z+1/Z)\phi_n$$

$$\ddot{\phi}_{n+1} = -\phi_{n+1} + (1/4)(Z+1/Z)^2\phi_{n+1} \qquad \text{.....(3.45)}$$

de (3.30) tenemos

$$\frac{e^{-Q'_n}}{e^{-Q'_{n-1}}} = \exp[-(Q'_n - Q'_{n-1})] = \frac{\phi_n\phi_{n+2}}{[\phi_{n+1}]^2} \qquad \text{.....(3.46)}$$

(3.42) y (3.43) en (3.46) :

$$\exp[-(Q'_n - Q'_{n-1})] = \frac{[-\dot{\phi}_{n+1} + 1/2(Z + 1/Z)\phi_{n+1}][\dot{\phi}_{n+1} + 1/2(Z + 1/Z)\phi_{n+1}]}{[\phi_{n+1}]^2}$$

$$= \frac{(1/4)(Z + 1/Z)^2\phi_{n+1}^2 - \dot{\phi}_{n+1}^2}{[\phi_{n+1}]^2}$$, usando (3.45) tenemos

$$\exp[-(Q'_n - Q'_{n-1})] = \frac{\phi_{n+1}\,(\ddot{\phi}_{n+1} + \phi_{n+1}) - \dot{\phi}_{n+1}^2}{[\phi_{n+1}]^2} = 1 + \frac{\phi_{n+1}\ddot{\phi}_{n+1} - \dot{\phi}_{n+1}\dot{\phi}_{n+1}}{[\phi_{n+1}]^2}$$

$$= 1 + \frac{d}{dt}\left[\frac{\phi_{n+1}}{\phi_{n+1}}\right]$$

$$= 1 + \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}Ln(\phi_{n+1})\right]$$

$$\boxed{\exp[-(Q_n'-Q_{n-1}')] = 1 + \frac{d^2}{dt^2}\,Ln(\phi_{n+1})} \qquad (3.47)$$

Es la relación que anticipamos.

Como $r_n' = Q_n'-Q_{n-1}'$ es el desplazamiento relativo de partículas adyacentes, es fácil hallar r_n de (3.47), conociendo previamente ϕ_n.

Volviendo a la relación (3.40)

Caso 1) si BoGo > 0

$$\phi(n,t) = \sqrt{B_oG_o}\left[\sqrt{\frac{B_o}{G_o}}\, e^{-[nw+\varepsilon t\ \mathrm{senh}\ w]} + \sqrt{\frac{G_o}{B_o}}\, e^{[nw+\varepsilon t\ \mathrm{senh}\ w]}\right]$$

sean $D_o = \sqrt{B_oG_o}$; $e^{\delta_1}\sqrt{\frac{B_o}{G_o}} = e^{w}$ y $Z_1 = \varepsilon e^{-w}$

$$\phi(n,t) = 2D_o \cosh[(n-1)\,w + \varepsilon t\ \mathrm{senh}\ w + \delta_1] \qquad (3.48)$$

Caso 2) si BoGo < 0

$$\phi(n,t) = \sqrt{-B_oG_o}\left[\sqrt{\frac{-B_o}{G_o}}\, e^{-[n\hat{w}+\varepsilon t\ \mathrm{senh}\ \hat{w}]} - \sqrt{\frac{-G_o}{B_o}}\, e^{[n\hat{w}+\varepsilon t\ \mathrm{senh}\ \hat{w}]}\right]$$

sean $D_o' = \sqrt{-B_oG_o}$; $e^{\delta_2}\sqrt{\frac{-B_o}{G_o}} = e^{\hat{w}}$ y $Z_2 = \varepsilon e^{-\hat{w}}$

$$\phi(n,t) = 2D_o' \,\mathrm{senh}[(n-1)\,\hat{w} + \varepsilon t\ \mathrm{senh}\ \hat{w} + \delta_2] \qquad (3.49)$$

A partir de ahora distinguiremos δ_1 y δ_2; w y $\hat{w}$ para los casos 1 y 2 respectivamente.

Usando la relación (3.47) tenemos para el caso (1)

$$\exp[-(Q_n'-Q_{n-1}')] = 1 + \frac{d^2}{dt^2}\,Ln\{2D_o \cosh[n\,w + \varepsilon t\ \mathrm{senh}\ w + \delta_1]\}$$

$$= 1 + \mathrm{senh}^2 w\ \mathrm{sech}^2[n\,w + \varepsilon t\ \mathrm{senh}\ w + \delta_1] \qquad (3.50)$$

$$= 1+ \operatorname{senh}^2 w\, \operatorname{sech}^2\left[w\left(n+ \varepsilon t\, \frac{\operatorname{senh} w}{w}\right) + \delta_1\right] \quad \text{.......................(3.51)}$$

para el caso 2 tenemos:

$$\exp[-(Q'_n-Q'_{n-1})] = 1 + \frac{d^2}{dt^2} \operatorname{Ln}\{2D_0 \operatorname{senh}[n \hat{w} + \varepsilon t \operatorname{senh} \hat{w} + \delta_2]\}$$

$$= 1- \operatorname{senh}^2 w\, \operatorname{csch}^2[n \hat{w} + \varepsilon t \operatorname{senh} \hat{w} + \delta_2] \quad \text{.......................(3.52)}$$

$$= 1- \operatorname{senh}^2 w\, \operatorname{csch}^2\left[\hat{w}\left(n+ \varepsilon t\, \frac{\operatorname{senh} \hat{w}}{\hat{w}}\right) + \delta_2\right] \quad \text{.......................(3.53)}$$

La soluciòn regular (3.50), $\exp[-(Q'_n-Q'_{n-1})] = 1+ \operatorname{senh}^2 w\, \operatorname{sech}^2[n\, w + \varepsilon t \operatorname{senh} w + \delta_1]$, es llamada **1-solitòn**, pulso de onda viajando hacia la derecha o hacia la izquierda segùn sea el signo (-) ò (+) de ε respectivamente. La soluciòn singular (3.52)

$$\exp[-(Q'_n-Q'_{n-1})]= 1- \operatorname{senh}^2 w\, \operatorname{csch}^2[n\, \hat{w} + \varepsilon t \operatorname{senh} \hat{w} + \delta_2],$$

es llamada 1-antisolitón y es una solución físicamente no aceptable, por la divergencia de $\operatorname{csch}(\mu)$ en $\mu = 0$; sin embargo juega un rol muy importante en la teoría de la transformación de Bäcklund, como se verá más adelante.

sean $\mu = nw + \varepsilon t \operatorname{senh} w + \delta_1$ y $\hat{\mu} = n\hat{w} + \varepsilon t \operatorname{senh} \hat{w} + \delta_2$

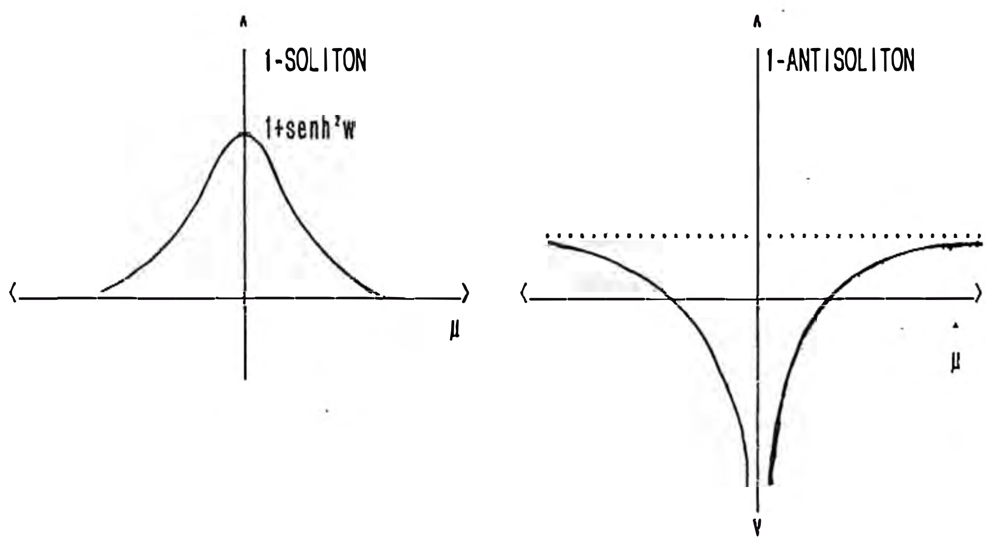


Fig. 4 Gráficas de 1-solitón
y 1-antisolitón

de (3.51) y (3.53) podemos deducir que las velocidades son

$$V_1 = \frac{\text{senh } w}{w} \quad \text{y} \quad V_2 = \frac{\text{senh } w}{\hat{w}}$$

respectivamente (aunque para 1-antisolitón no es posible definir una velocidad)

De la Fig. 4 se observa la inconsistencia de la función $(1 - \text{senh}^2 w \ \text{csch}^2 \hat{\mu})$ con

$\exp\{-(Q'_n - Q'_{n-1})\} > 0$ en el dominio $\hat{\mu} = \langle -w, w \rangle$.

Para representar la transformación de Bäcklund es conveniente usar un diagrama, que indique la transformación de las coordenadas Q_n a Q'_n con los parámetros A y Z.

Esta clase de diagrama es frecuentemente llamado el diagrama de Lamb para una transformación de Bäcklund, desde que él aplicó esta transformación para resolver la ecuación de Sine-Gordon.

$$Q_n \xrightarrow{A,Z} Q'_n$$

Fig. 5 Diagrama de Lamb mostrando la transformación de Bäcklund de Q_n a Q'_n con parámetros A y Z.

ANEXO A

Desarrollaremos un procedimiento general en el que obtendremos una solución para $\alpha = \alpha(t)$, que nos dara por resultado funciones solitónicas acompañadas de otras funciones.

de (3.35)

$$\phi_n + \phi_{n-1} = \alpha_Z(t)\,\phi_n \quad , \; Z \text{ es un parámetro de } \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A.1)$$

usando (3.38)

$$\phi_n = B(t)\,Z^n + G\,(t)Z^{-n} \quad \text{que es la solución general de (3.34)} \;\ldots\ldots \quad (A.2)$$

reemplazando (A.2) en (A.1)

$$\left(\dot{B} + \frac{B}{Z} - B\alpha\right)Z^n + \left(\dot{G} + \frac{G}{Z} - G\alpha\right)Z^{-n} = 0$$

para $|n| \longrightarrow \infty$: $\dfrac{\dot{B}}{B} + \dfrac{1}{Z} = \alpha\,(t,Z)$, $\dfrac{\dot{G}}{G} + Z = \alpha\,(t,Z)$ aquí $\alpha = \alpha\,(t,Z)$,

(en adelante omitiremos escribir ε)

$$B(t) = B_0\,\beta(t)\,e^{-t/Z} \quad , \quad G(t) = G_0\,\beta(t)\,e^{-Zt}$$

con $\beta(t) = \exp\left[\int_0^t \alpha(t')\,dt'\right]$, eligiendo convenientemente $\alpha(t)$ se obtiene una forma simple de $B(t)$ y $G(t)$;por ejemplo $\alpha(t) = (1/2)(Z + \frac{1}{Z})$ con lo que $B(t) = B_0\; e^{-(\operatorname{senh} w)t}$

y $G(t) = G_0\; e^{(\operatorname{senh} w)t}$

llegando a la relación (3.39) del procedimiento anterior.

En general tenemos

$$\phi(n,t) = B_0\,\beta(t)\,e^{-t/Z}\,Z^n + G_0\,\beta(t)\,e^{-Zt}\,Z^{-n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A.3)$$

con B_0, G_0 ε R y $\beta(t) = \exp\left[\int_0^t \alpha(t') \, dt'\right]$

multiplicando y diviendo por $\exp\left[(1/2)\left(Z + \frac{1}{Z}\right)\right]$ la relación (A.3):

$$\phi(n,t) = \beta(t) \; \exp[-t \cosh w] \; \Phi(n,t) \qquad \text{(A.4)}$$

$$\text{donde } \Phi(n,t) = B_0 \, e^{-[nw + t \operatorname{senh} w]} + G_0 \, e^{[nw + t \operatorname{senh} w]} \qquad \text{(A.5)}$$

si $\beta(t) = e^{\alpha_0 (t-t_0)}$ con $\alpha = \alpha_0$ y $t_0 = 0$

$\alpha_0 = \text{const.}$

$\beta(t) = e^{\alpha_0 t}$

$\phi(n,t) = e^{[\alpha_0 - \cosh w]t} \; \Phi(n,t)$

$$\phi(n,t) = B_0 \, e^{[-nw - t(\operatorname{senh} w + \cosh w - \alpha_0)]} + G_0 \, e^{[nw + t(\operatorname{senh} w - \cosh w + \alpha_0)]} \qquad \text{(A.6)}$$

$$= B_0 \, e^{[-nw - t(e^{w} - \alpha_0)]} + G_0 \, e^{[nw - t(e^{-w} + \alpha_0)]} \qquad \text{(A.7)}$$

Se ve que las ondas viajan con velocidades $\frac{e^{w} - \alpha_0}{w}$ y $\frac{e^{-w} + \alpha_0}{w}$ respectivamente.

Nosotros tratamos de encontrar ondas viajeras, luego ver si son ondas solitarias para finalmente verificar si tienen las propiedades de un solitón; según nuestra definición de trabajo (Capitulo I). (A.6) exige que $\alpha_0 = \cosh w$ para que $\phi(n,t)$ sea una onda viajera.

Una forma mucho más general es posible para la relación entre $\exp\{-(Q'_n - Q'_{n-1})\}$ y ϕ_{n+1} , en el procedimiento que conduce a (3.41) se tomó: $\alpha(t) = \frac{1}{2}(Z + \frac{1}{Z})$, porque sólo así se tenía

ONDA VIAJERA (que es una condición previa para ser una onda solitaria y luego eventualmente tener las propiedades de un solitón)

Ahora supondremos $\alpha = \alpha(t)$ en general, sólo con la condición de que $\alpha(t)$ exista y sea continua.

Usaremos (3.34) y (3.35):

1) $\phi_{n+2} + \phi_n = r\,\phi_{n+1}$ .... (A.8)

$$\phi_{n+1} + \phi_{n-1} = r\,\phi_n \qquad \text{con} \qquad r = Z + \frac{1}{Z} ;$$

2) $\dot{\phi}_n = -\phi_{n-1} + \alpha\,\phi_n \;\text{--->}\; \dot{\phi}_{n+1} = -\phi_n + \alpha\,\phi_{n+1}$ .... (A.9)

$\dot{\phi}_{n+1} = \phi_{n+2} + (\alpha - r)\,\phi_{n+1}$ .... (A.10)

Derivando (A.10) con respecto a t: $\ddot{\phi}_{n+1} = \dot{\phi}_{n+2} + (\alpha - r)\,\dot{\phi}_{n+1} + \dot{\alpha}\,\phi_{n+1}$ ..... (A.11)

Igualmente derivando (A.8): $\dot{\phi}_{n+2} + \dot{\phi}_n = r\,\dot{\phi}_{n+1}$; reemplazando (A.10) en ésta expresión:

$\dot{\phi}_{n+2} = r\phi_{n+2} + (\alpha r - r^2 - 1)\,\phi_{n+1} - (\alpha - r)\,\phi_n$ .... (A.12)

(A.10) y (A.12) en (A.11)

$$\ddot{\phi}_{n+1} = \alpha\,\phi_{n+2} + (\alpha^2 - \alpha r - 1)\,\phi_{n+1} - (\alpha - r)\,\phi_n + \dot{\alpha}\,\phi_{n+1}$$

usando (A.8): $\phi_{n+2} = r\,\phi_{n+1} - \phi_n$ y $\phi_n = \dot{\phi}_{n+1} - \alpha\,\phi_{n+1}$

$$\ddot{\phi}_{n+1} = (\alpha^2 - 1)\,\phi_{n+1} - (2\alpha - r)\,(\dot{\phi}_{n+1} - \alpha\,\phi_{n+1}) + \dot{\alpha}\,\phi_{n+1}$$

$\ddot{\phi}_{n+1} = -(k + 1)\,\phi_{n+1} - (2\alpha - r)\,\dot{\phi}_{n+1} + \dot{\alpha}\,\phi_{n+1}$ .... (A.13) donde $k=\alpha r - 3\alpha^2$

Sabemos de (3.49) que $\exp\{-(Q'_n - Q'_{n-1})\} = \dfrac{\phi_n \, \phi_{n+2}}{\phi_{n+1}^2}$ .... (A.14)

de (A.9) tenemos $\phi_n = \alpha \phi_{n+1} - \phi_{n+1}$

de (A.10) tenemos $\phi_{n+2} = \phi_{n+1} - (\alpha - r)\phi_{n+1}$

reemplazando estas expresiones en (A.14) y efectuando:

$$\frac{\phi_n \, \phi_{n+2}}{\phi_{n+1}^2} = \frac{-\alpha(\alpha - r)\phi_{n+1}^2 - \dot{\phi}_{n+1}^2 + (2\alpha - r)\,\phi_{n+1}\,\phi_{n+1}}{\phi_{n+1}^2}$$

$$= -\alpha^2 + \alpha r + (2\alpha - r)\frac{\phi_{n+1}}{\phi_{n+1}} - \left(\frac{\phi_{n+1}}{\phi_{n+1}}\right)^2 \quad \text{......................} \quad (A.15)$$

Usando (A.13) ; multiplicando por ϕ_{n+1} en ambos miembro y luego restando $\dot{\phi}_{n+1}^2$ en ambos miembros:

$$\ddot{\phi}_{n+1}\,\phi_{n+1} - \dot{\phi}_{n+1}^2 = -\dot{\phi}_{n+1}^2 - (2\alpha - r)\,\phi_{n+1}\,\phi_{n+1} + (\alpha - k - 1)\,\phi_{n+1}^2$$

dividiendo entre ϕ_{n+1}^2

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\operatorname{Ln}\phi_{n+1}\right] = -\left(\frac{\dot{\phi}_{n+1}}{\phi_{n+1}}\right)^2 - (2\alpha - r)\frac{\dot{\phi}_{n+1}}{\phi_{n+1}} + (\alpha - k - 1) \quad \text{.............} \quad (A.16)$$

reemplazando $\left(\dfrac{\phi_{n+1}}{\phi_{n+1}}\right)^2$ de (A.16) en (A.15):

$$\frac{\phi_n \, \phi_{n+2}}{\phi_{n+1}^2} = -\alpha^2 + \alpha r + (2\alpha - r)\frac{\phi_{n+1}}{\phi_{n+1}} + \frac{d^2}{dt^2}\operatorname{Ln}\phi_{n+1} + (2\alpha - r)\frac{\phi_{n+1}}{\phi_{n+1}} - (\alpha - k - 1)$$

reemplazando $k=\alpha r - 3\alpha^2$

$$\frac{\phi_n\ \phi_{n+2}}{\phi_{n+1}^2} = 2\alpha(r-2\alpha)+ 2\ (2\alpha - r)\ D_t\ Ln\ \phi_{n+1} + D_t^2\ Ln\ \phi_{n+1} - D_t\ \alpha(t) + 1 \quad \text{........(A.17)}$$

(A.17) es la expresión general que para $\alpha(t) = r/2$ se convertirá en la relación (3.47), que nos da solitones puros; reordenando tenemos:

$$e^{-(Q'_n-Q'_{n-1})} = [1 + D_t^2 Ln\ \phi_{n+1}] - D_t\ \alpha(t) + 2\ [2\alpha(t) - r]\ D_t\ Ln\ \phi_{n+1} + 2\alpha(t)[r-2\alpha(t)] \quad \text{.....(A.18)}$$

Observación: (A.18) muestra que en general, si tomamos la relación (A.4) como:

$\phi(n,t) = \beta(t)\ \exp\ [-t \cosh w]\ \Phi(\mu,t)$ y la empleamos en (A.18),

$e^{-(Q'_n-Q'_{n-1})}$ no resulta una onda viajera con argumento $\mu = (nw + \varepsilon\ t\ \text{senh}\ w)$

debido a la dependencia arbitraria de $\alpha(t)$. Pero está presente la expresión $1 + D_t^2\ Ln\ \phi_{n+1}$ que es una función solitónica, para α= const.

En el capitulo II, desarrollamos la ecuaciòn de Toda por el método de las diferencias finitas, usando èste mètodo podemos graficar una soluciòn de la forma que muestra la Fig.6. Dado un pulso inicial en t = 0 se observa en t > 0, varios pulsos (pulsos 'solitònicos' màs una 'cola oscilatoria).

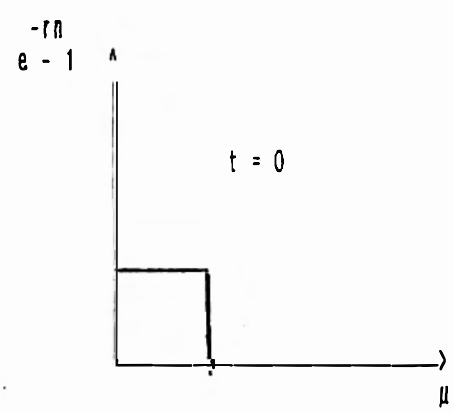
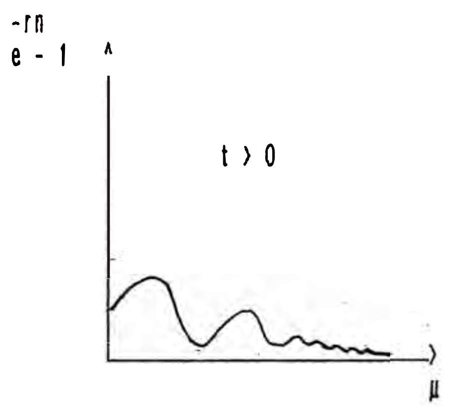


Fig. 6.
Gráfica de la solución de la Ecuación de Toda con una condición inicial dada.



Equivalencia entre la red LC y la red no-lineal de resortes.

$$LC\, D_t^2 \,\mathrm{Ln}\left(1 + \frac{V_n}{V_0}\right) = \frac{V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n}{V_0}$$

$$D_t^2\, r_n = 2\,e^{-r_n} - e^{-r_{n+1}} - e^{-r_{n-1}}$$

con

$$1 + \frac{V_n}{V_0} = e^{-r_n} \quad y \quad LC = 1$$

En la Fig. 6 se aprecian 2 solitones y una 'cola' oscilatoria correspondiente a los tèrminos que generan $\alpha(t)$, $D_t\, \alpha(t)$ y $D_t\mathrm{Ln}\, \phi_{n+1}$ en (A.18).

CAPITULO IV

OBTENCION DE SOLUCIONES DE TIPO N-SOLITON MEDIANTE LA TRANSFORMACION DE BÄCKLUND

CAPITULO IV

1. METODO PARA CONSTRUIR SOLUCIONES DE TIPO N-SOLITON

1.1 RESUMEN DEL PROCEDIMIENTO SEGUIDO PARA OBTENER 2-SOLITON

Hemos seguido los siguientes pasos :

1.- Obtención de la ECUACION DE TODA (3.11).

2.- Transformaciones de Bäcklund (TB) (3.25) y (3.26): $Q_n \dashrightarrow Q_n^{(1)}$

3.- Imponiendo condiciones de contorno $|Q_n| \xrightarrow[|n|\to+\infty]{} \text{const.}$ y $|Q_n^{(1)}| \xrightarrow[|n|\to+\infty]{} \text{const.}$ en el paso 2

obtenemos las ecuaciones (3.28) y (3.29).

4.- Haciendo la transformación $\exp[Q_{n-1}^{(1)} - Q_{n}^{(1)}] = Z\,\phi_n/\phi_{n+1}$ en 3 y usando la solución trivial Q_n = const. para todo n, obtenemos dos ecuaciones diferenciales para ϕ_n; la primera en diferencias (3.34) y la segunda diferencial (3.36).

Asumiendo $\alpha = (1/2)(Z + \frac{1}{Z})$ en (3.36); resolvemos ambas ecuaciones obteniendo

$\phi_1(n,t)$ en (3.48) y $\bar{\phi}_1(n,t)$ en (3.49).

4.1.- Las expresiones $\exp[Q_n^{(1)} - Q_{n-1}^{(1)}]$ y $\exp[Q_n^{(2)} - Q_{n-1}^{(2)}]$

obtenidas en (3.46) usando ϕ_1 y $\bar{\phi}_1$ respectivamente son 1-solitón y 1-antisolitón.

5.-En forma similar al paso 2 tenemos: $Q_n^{(1)} \xrightarrow{A'\ Z'} Q_n'$

$$Q_n^{(2)} \xrightarrow{A''\ Z''} Q_n''$$

6.-Exigimos que $Q_n' = Q_n'' \equiv Q_n^{(12)}$; lo cual se cumple si $A' = A_2$, $Z' = Z_2$

$A'' = A_1$, $Z'' = Z_1$

como podrá apreciarse en el próximo diagrama.

7.-Siguiendo la idea del capítulo 1 y la ecuación (1.11) y su solución (1.13) buscamos una solución que exprese la interacción de dos pulsos; en este caso obtenemos 2-solitón haciendo uso de las coordenadas $Q_n^{(12)}$ que generan un antisolitón en el paso 4.1; por ejemplo en [5] se usa un antisolitón para obtener 2-solitón aplicando la T.B. a la ecuación de Sine-Gordon.

Podemos obtener infinitas soluciones de tipo ondas solitarias para la red de Toda, esto en las ecuaciones (3.51) y (3.53) tomando w y $\hat{w}$ para 1-solitón y 1-antisolitón respectivamente, por otro lado, vimos en (1.11) (Cap. 1) ciertas ecuaciones no-lineales poseen soluciones en los cuales tenemos dos pulsos de onda solitaria interactuando no-linealmente.

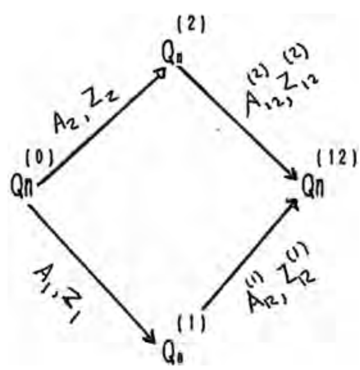
En el Cap.1 obtuvimos la solución (1.13) en el cual dos pulsos (cada uno de los cuales también es solución de (1.11)) interactúan y excepcionalmente observamos que ciertos pulsos emergen de la interacción sin perder sus caracterlsticas (Figs. 10, 11).

Justamente este tipo de soluciones buscaremos en este capitulo. Para esto relacionamos 4 juegos de coordenadas 'Q' usando la transformación de Bäcklund.

En esta sección obtendremos una fórmula algebraica para construir sistemáticamente una cadena de soluciones [7]. Para este propósito, consideramos una secuencia de la transformación de Bäcklund como se muestra en el siguiente diagrama

donde $Q_n^{(1)}$ y $Q_n^{(2)}$ se relacionan con $Q_n^{(0)}$, y $Q_n^{(12)}$ con $Q_n^{(1)}$ y $Q_n^{(2)}$

DIAGRAMA DE LAMB.
PARA OBTENER
UNA SOLUCION
2-SOLITON



$[A_{12}^{(1)}, Z_{12}^{(1)}]$ y $[A_{12}^{(2)}, Z_{12}^{(2)}]$ parámetros de las transformaciones $Q_n^{(1)}$--->$Q_n^{(12)}$ y $Q_n^{(2)}$--->$Q_n^{(12)}$

respectivamente.

Las relaciones $A_{12}^{(1)} = A_2$ y $A_{12}^{(2)} = A_1$ son las condiciones que se impondrán a las transformaciones (4.1) -(4.4); usamos reiteradamente la ecuación (3.25) de la transformación de Bäcklund (TB)

$$\frac{d}{dt}\left(Q_n^{(0)} - Q_{n-1}^{(1)}\right) = A_1 \left[\frac{e^{Q_n^{(0)}}}{e^{Q_n^{(1)}}} - \frac{e^{Q_{n-1}^{(0)}}}{e^{Q_{n-1}^{(1)}}} \right] \qquad (4.1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(Q_n^{(0)} - Q_{n-1}^{(2)}\right) = A_2 \left[\frac{e^{Q_n^{(0)}}}{e^{Q_n^{(2)}}} - \frac{e^{Q_{n-1}^{(0)}}}{e^{Q_{n-1}^{(2)}}} \right] \qquad (4.2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(Q_n^{(1)} - Q_{n-1}^{(12)}\right) = A_2 \left[\frac{e^{Q_n^{(1)}}}{e^{Q_n^{(12)}}} - \frac{e^{Q_{n-1}^{(1)}}}{e^{Q_{n-1}^{(12)}}} \right] \qquad (4.3)$$

$$\frac{d}{dt}\left(Q_n^{(2)} - Q_{n-1}^{(12)}\right) = A_1 \left[\frac{e^{Q_n^{(2)}}}{e^{Q_n^{(12)}}} - \frac{e^{Q_{n-1}^{(2)}}}{e^{Q_{n-1}^{(12)}}} \right] \qquad (4.4)$$

1ra condición de contorno:

$$Q_{-\infty}^{(0)} = v^{(0)}, \quad Q_{-\infty}^{(1)} = v^{(1)}, \quad Q_{-\infty}^{(2)} = v^{(2)}, \quad Q_{-\infty}^{(12)} = v^{(12)};$$

$v^{(0)}$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ y $v^{(12)}$ = constantes.

2da condición de contorno:

$$Q_{-n}^{(0)} + Q_{-n}^{(12)} = Q_{-n}^{(1)} + Q_{-n}^{(2)} \Longrightarrow V^{(0)} + V^{(12)} = V^{(1)} + V^{(2)}$$

Sean:

$$C_1 = \frac{e^{Q_{-n}^{(0)}}}{e^{Q_{-n}^{(1)}}} \quad ; \quad C_2 = \frac{e^{Q_{-n}^{(0)}}}{e^{Q_{-n}^{(2)}}}$$

$$C_{12}^{(1)} = \frac{e^{Q_{-n}^{(1)}}}{e^{Q_{-n}^{(12)}}} \quad ; \quad C_{12}^{(2)} = \frac{e^{Q_{-n}^{(2)}}}{e^{Q_{-n}^{(12)}}}$$

Usando la 2da condición:

$$C_1 = C_{12}^{(2)} \quad \text{y} \quad C_2 = C_{12}^{(1)}$$

luego:

$$Z_{12}^{(1)} = A_{12}^{(1)}\, C_{12}^{(1)} = A_2\, C_2 = Z_2$$

$Z_{12}^{(2)} = Z_1$,como se muestra en el diagrama de Lamb.

de (4.1) , (4.2),(4.3) y (4.4) eliminaremos las derivadas temporales ;

restando (4.1) de (4.2):

$$\frac{d}{dt}\left(Q_{n-1}^{(1)} - Q_{n-1}^{(2)}\right) = e^{Q_n^{(0)}}\left[\frac{A_2}{e^{Q_n^{(2)}}} - \frac{A_1}{e^{Q_n^{(1)}}}\right] - e^{Q_{n-1}^{(0)}}\left[\frac{A_2}{e^{Q_{n-1}^{(2)}}} - \frac{A_1}{e^{Q_{n-1}^{(1)}}}\right]$$

reemplazando (n) por (n+1)

$$\frac{d}{dt}\left(Q_n^{(1)} - Q_n^{(2)}\right) = e^{Q_{n+1}^{(0)}}\left[\frac{A_2}{e^{Q_{n+1}^{(2)}}} - \frac{A_1}{e^{Q_{n+1}^{(1)}}}\right] - e^{Q_n^{(0)}}\left[\frac{A_2}{e^{Q_n^{(2)}}} - \frac{A_1}{e^{Q_n^{(1)}}}\right] \qquad \ldots(4.5)$$

restando (4.3) - (4.4):

$$\frac{d}{dt}\left(Q_n^{(1)} - Q_n^{(2)}\right) = \frac{1}{e^{Q_n^{(12)}}}\left[A_2 e^{Q_n^{(1)}} - A_1 e^{Q_n^{(2)}}\right] - \frac{1}{e^{Q_{n-1}^{(12)}}}\left[A_2 e^{Q_{n-1}^{(1)}} - A_1 e^{Q_{n-1}^{(2)}}\right] \quad \ldots.(4.6)$$

igualando los 2dos miembros de (4.5) y (4.6) y trasponiendo términos:

$$\frac{1}{e^{Q_n^{(12)}}}\left[A_2 e^{Q_n^{(1)}} - A_1 e^{Q_n^{(2)}}\right] - e^{Q_{n+1}^{(0)}}\left[\frac{A_2}{e^{Q_{n+1}^{(2)}}} - \frac{A_1}{e^{Q_{n+1}^{(1)}}}\right] =$$

$$= \frac{1}{e^{Q_{n-1}^{(12)}}}\left[A_2 e^{Q_{n-1}^{(1)}} - A_1 e^{Q_{n-1}^{(2)}}\right] - e^{Q_n^{(0)}}\left[\frac{A_2}{e^{Q_n^{(2)}}} - \frac{A_1}{e^{Q_n^{(1)}}}\right]$$

$$= A_2 C_{12}^{(1)} - A_1 C_{12}^{(2)} - (A_2 C_2 - A_1 C_1) = (Z_2 - Z_1) - (Z_2 - Z_1)$$

$= 0$; hemos bajado el subíndice n hasta $n \to -\infty$

despejando $\exp(Q_n^{(12)} + Q_{n+1}^{(0)} - V^{(12)} - V^{(0)})$ de la última expresión,y usando

$A_1 = Z_1/C_1$ y $A_2 = Z_2/C_2$

$$\frac{Z_2}{C_2} e^{Q_n^{(1)}} - \frac{Z_1}{C_1} e^{Q_n^{(2)}} = e^{(Q_{n+1}^{(0)} + Q_n^{(12)})}\left[\frac{Z_2C_1 e^{Q_{n+1}^{(1)}} - Z_1C_2 e^{Q_{n+1}^{(2)}}}{C_1C_2 e^{Q_{n+1}^{(1)} + Q_{n+1}^{(2)}}}\right]$$

$$\frac{\left(Z_1C_2 e^{Q_n^{(2)}} - Z_2C_1 e^{Q_n^{(1)}}\right) e^{(Q_{n+1}^{(1)} + Q_{n+1}^{(2)})}}{Z_1C_2 e^{Q_{n+1}^{(2)}} - Z_2C_1 e^{Q_{n+1}^{(1)}}} = e^{(Q_{n+1}^{(0)} + Q_n^{(12)})}$$

$$e^{\left(Q^{(0)}_{n+1} + Q^{(12)}_{n}\right)} = \frac{Z_1\, e^{\left(Q^{(2)}_{n} - Q^{(2)}_{-\infty}\right)} - Z_2\, e^{\left(Q^{(1)}_{n} - Q^{(1)}_{-\infty}\right)}}{Z_1\, e^{\left(Q^{(2)}_{n+1} - Q^{(2)}_{-\infty}\right)} - Z_2\, e^{\left(Q^{(1)}_{n+1} - Q^{(1)}_{-\infty}\right)}}\; e^{\left(Q^{(1)}_{n+1} + Q^{(2)}_{n+1}\right)}$$

Hemos usado C_1 y C_2, ahora usaremos

$$Q^{(1)}_{-\infty} + Q^{(2)}_{-\infty} = Q^{(12)}_{-\infty} + Q^{(0)}_{-\infty} \quad y \quad v^{(1)} + v^{(2)} = v^{(12)} + v^{(0)} ;$$

esto de la 2da condición de contorno

$$e^{\left[Q^{(12)}_{n} - v^{(12)} + Q^{(0)}_{n+1} - v^{(0)}\right]} = \frac{Z_1\, e^{\left(Q^{(2)}_{n} - v^{(2)}\right)} - Z_2\, e^{\left(Q^{(1)}_{n} - v^{(1)}\right)}}{Z_1\, e^{\left(Q^{(2)}_{n+1} - v^{(2)}\right)} - Z_2\, e^{\left(Q^{(1)}_{n+1} - v^{(1)}\right)}}\; e^{\left(Q^{(1)}_{n+1} - v^{(1)} + Q^{(2)}_{n+1} - v^{(2)}\right)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.7)$$

usaremos las siguientes transformaciones:

$$\frac{e^{Q^{(1)}_{n}}}{e^{Q^{(1)}_{-\infty}}} = Z_1 \frac{\phi_{1(n+1)}}{\phi_{1(n+2)}} , \qquad \frac{e^{Q^{(2)}_{n}}}{e^{Q^{(2)}_{-\infty}}} = Z_2 \frac{\phi_{2(n+1)}}{\phi_{2(n+2)}} \quad y$$

$$\frac{e^{Q^{(12)}_{n}}}{e^{Q^{(12)}_{-\infty}}} = Z_{12} \frac{f_n}{f_{n+1}} \quad ; \text{ con } \quad Q^{(1)}_{-\infty} = v^{(1)} \quad ; \quad Q^{(2)}_{-\infty} = v^{(2)}$$

$$y \quad Q^{(12)}_{-\infty} = v^{(12)}$$

encontramos Z_{12} en función de Z_1 y Z_2 y $f_n = f_n\,(\phi_1\,,\ \phi_2\,)$

$$\left[e^{[Q_n^{(12)} - v^{(12)} + Q_{n+1}^{(0)} - v^{(12)}]} \right] =$$

$$= \frac{Z_1 Z_2 \dfrac{\phi_1(n+1)}{\phi_1(n+2)} - Z_1 Z_2 \dfrac{\phi_2(n+1)}{\phi_2(n+2)}}{Z_2 Z_1 \dfrac{\phi_1(n+2)}{\phi_1(n+3)} - Z_1 Z_2 \dfrac{\phi_2(n+2)}{\phi_2(n+3)}} Z_1 Z_2 \frac{\phi_2(n+2)}{\phi_2(n+3)} \frac{\phi_1(n+2)}{\phi_1(n+3)}$$

$$= Z_1 Z_2 \frac{\phi_1(n+1)\ \phi_2(n+2) - \phi_2(n+1)\ \phi_1(n+2)}{\phi_1(n+2)\ \phi_2(n+3) - \phi_2(n+2)\ \phi_1(n+3)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.8)$$

con $Q_n^{(0)} = v^{(0)}$ = const. solución trivial de $\ddot{r}_n = 2\,e^{-r_n} - e^{-r_{n-1}} - e^{-r_{n+1}}$ nos da

una relación para $Q_n^{(12)}$ en función de ϕ_1 y ϕ_2;

$$e^{-(Q_n^{(12)} - v^{(12)})} = Z_1 Z_2 \frac{\phi_1(n+1)\ \phi_2(n+2) - \phi_2(n+1)\ \phi_1(n+2)}{\phi_1(n+2)\ \phi_2(n+3) - \phi_2(n+2)\ \phi_1(n+3)} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.9)$$

encontramos $Z_{12} = Z_1 Z_2$; de (4.9) obtenemos

$$e^{-(Q_n^{(12)} - Q_{n-1}^{(12)})} = \frac{f_{n+1}\ f_{n-1}}{f_n^{(2)}} \quad (\text{ 2- solitón}) \ldots\ldots\ldots\ldots (4.10)$$

con $f_n = \phi_2(n+1)\ \phi_1(n+2) - \phi_1(n+1)\ \phi_2(n+2)$ ....(4.11)

De la ecuación (3.43) del capítulo III:

$$\phi_1(n) = B_1 \, e^{-nw_1 - \varepsilon t\, shw_1} + C_1 \, e^{+nw_1 + \varepsilon t\, shw_1} \qquad B_1, C_1 \in R$$

$B_1 C_1 > 0$ (en adelante omitiremos escribir ε)

(ε , es el coeficiente de shw_1 que toma los valores ± 1)

$\phi_1(n)$ conducla a la solución 1-solítón.

$$\phi_2 = B_2 \, e^{-nw_2 - t\, shw_2} + C_2 \, e^{nw_2 + t\, sh\, w_2} \qquad \text{(aquI hemos omitido escribir } \varepsilon = \pm 1)$$

$B_2 C_2 < 0$

ϕ_2 conducla a la solución 1-antisolitón.

Se usa ϕ_1 y ϕ_2 para construir 2-solitón [9], esto está de acuerdo con el procedimiento usado en el caso de la ecuación de Sine-Gordon en el que se usa el 1-antisolítón (1-antikink) para obtener la solución N-solitón usando la transformación de Bäcklund para aquella ecuación [5].

Desarrollando
$$f_1 = \left[B_2 \, e^{-nw_2 - t\, shw_2 - w_2} + C_2 \, e^{nw_2 + t\, sh\, w_2 + w_2} \right] \left[B_1 \, e^{-nw_1 - t\, shw_1 - 2w_1} + C_1 \, e^{nw_1, + t\, shw_1 + 2w_1} \right] -$$

$$- \left[B_1 \, e^{-nw_1 - t\, shw_1 - w_1} + C_1 \, e^{nw_2 + t\, shw_2 + w_1} \right] \left[B_2 \, e^{-nw_2 - t\, shw_2 - 2w_2} + C_2 \, e^{nw_2 + t\, shw_2 + 2w_2} \right]$$

(usaremos: senhw $\equiv$ shw coshw $\equiv$ chw)

$$= B_1 B_2 \, e^{-n(w_1+w_2) - t(shw_2+shw_1)} \, e^{-(w_2+2w_1)} + C_1 C_2 \, e^{n(w_1+w_2) + t(shw_1+shw_2)} \, e^{(w_2+2w_1)}$$

$$- B_1 B_2 \, e^{-n(w_1+w_2) - t(shw_1+shw_2)} \, e^{-(w_1+2w_2)} - C_1 C_2 \, e^{n(w_1+w_2) + t(shw_1+shw_2)} \, e^{(w_1+2w_2)}$$

$$+ B_2 C_1 e^{n(w_1-w_2) + t(shw_1-shw_2)} e^{(-w_2+2w_1)} + C_2 B_1 e^{-n(w_1-w_2) - t(shw_1-shw_2)} e^{(w_2-2w_1)}$$

$$- B_2 C_1 e^{n(w_1-w_2) + t(shw_1-shw_2)} e^{(w_1-2w_2)} - B_1 C_2 e^{-n(w_1-w_2) - t(shw_1-sw_2)} e^{(-w_1+2w_2)}$$

$$= B_1 B_2 \left[e^{-(w_2+2w_1)} - e^{-(w_1+2w_2)} \right] e^{-n(w_1+w_2) - t(shw_1+shw_2)} + C_1C_2 \left[e^{w_2+2w_1} - e^{w_1+2w_2} \right] e^{n(w_1+w_2)+t(shw_1+shw_2)}$$

$$+ B_2 C_1 \left[e^{-w_2+2w_1} - e^{w_1-2w_2} \right] e^{n(w_1-w_2)+t(shw_1-shw_2)} + C_2B_1 \left[e^{w_2-2w_1} - e^{-w_1+2w_2} \right] e^{-n(w_1-w_2)-t(shw_1-shw_2)}$$

Sean: $S_+ = n\,(w_1 + w_2) + t(shw_1 + shw_2)$

$S_- = n\,(w_1 - w_2) + t(shw_1 - shw_2)$

CON ε_1 Y ε_2 sería :

$S_+ = n(w_1+w_2) + t(\varepsilon_1 shw_1+\varepsilon_2 shw_2)$

$S_- = n(w_1-w_2) + t(\varepsilon_1 shw_1-\varepsilon_2 shw_2)$

agrupando tenemos:

$$= B_1B_2\, e^{-\frac{3}{2}(w_1+w_2)} \left[e^{-\frac{(w_1-w_2)}{2}} - e^{\frac{w_1-w_2}{2}} \right] e^{-S_+} + C_1C_2\, e^{\frac{3}{2}(w_1+w_2)} \left[e^{\frac{(w_1-w_2)}{2}} - e^{-\frac{w_1-w_2}{2}} \right] e^{S_+} + B_2C_1\, e^{\frac{3}{2}(w_1-w_2)} \left[e^{\frac{(w_1+w_2)}{2}} - e^{-\frac{w_1+w_2}{2}} \right] e^{S_-}$$

$$+ C_2B_1\, e^{-\frac{3}{2}(w_1-w_2)} \left[e^{-\frac{(w_1+w_2)}{2}} - e^{\frac{w_1+w_2}{2}} \right] e^{-S_-}$$

$$= \left[A_1\, e^{-\frac{3}{2}(w_1+w_2)}\, e^{-S_+} + A_2\, e^{\frac{3}{2}(w_1+w_2)}\, e^{-S_+} \right] sh\left(\frac{w_1-w_2}{2}\right) +$$

$$+ \left[A_3\, e^{-\frac{3}{2}(w_1-w_2)}\, e^{-S_-} + A_4\, e^{\frac{3}{2}(w_1-w_2)}\, e^{S_-} \right] sh\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right)$$

con $A_1 = -2\,B_1B_2$, $A_2 = 2\,C_1C_2$, $A_3 = -2\,C_2B_1$ y $A_4 = 2\,B_2C_1 \Longrightarrow A_1A_2 > 0$ y $A_3A_4 > 0$

De las condiciones $B_1C_1 > 0$ y $B_2C_2 < 0$ tenemos $-B_1C_1B_2C_2 > 0$

Luego $A_1A_2 > 0$ y $A_3A_4 < 0$

sean $D_1 = \sqrt{A_1A_2}\; sh\left(\frac{w_1-w_2}{2}\right)$; $e^{\delta_1} = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}}\; e^{-\frac{3}{2}(w_1+w_2)}$

$D_2 = \sqrt{A_3A_4}\; sh\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right)$; $e^{\delta_2} = \sqrt{\frac{A_4}{A_3}}\; e^{-\frac{3}{2}(w_1-w_2)}$

con esto queda:

$$f_1 = 2D_1\, Ch\,(S_+ + \delta_1) + 2D_2\, Ch\,(S_- + \delta_2) \quad \text{.........................} \quad (4.12)$$

escribiendo nuevamente ε_1 , ε_2

con : $U_+ = n\,(w_1+w_2) + t(\varepsilon_1 sh w_1 + \varepsilon_2 sh w_2) + \delta_1$; $U_+ = S_+ + \delta_1$

$U_- = n\,(w_1-w_2) + t(\varepsilon_1 sh w_1 - \varepsilon_2 sh w_2) + \delta_2$; $U_- = S_- + \delta_2$

queda:

$$f_1 = 2D_1\, ch\, U_+ + 2D_2\, ch\, U_- \quad \text{...} \quad (4.13)$$

$$D_1^2 = -4B_1B_2\, C_1C_2\, sh^2\left(\frac{w_1-w_2}{2}\right) \qquad e^{2\delta_1} = \frac{-C_1C_2}{B_1B_2}\, e^{3(w_1+w_2)}$$

$$D_2^2 = -4B_1B_2\,C_1C_2\,sh^2\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right) \qquad e^{2\delta_2} = \frac{-B_2C_1}{B_1C_2}\, e^{3(w_1-w_2)}$$

demostraremos la siguiente relación [3]

$$f_{n+1}\, f_{n+1} = f_n^2 + \ddot{f}_n\, f_n - \dot{f}_n^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4.14)$$

entonces tenemos $e^{-(Q_n^{(12)} - Q_{n-1}^{(12)})} = 1 + \dfrac{\ddot{f}_n\, f_n - \dot{f}_n^2}{f_n^2}$

$$e^{-(Q_n^{(12)} - Q_{n-1}^{(12)})} = \frac{f_{n+1}\, f_{n-1}}{f_n^2} = 1 + D_t^2\, \mathrm{Ln}\, f_n\, ;$$

donde $D_t^2 \log f_n \equiv \dfrac{d^2}{dt^2}(\log f_n)$

Asumimos que se cumple la siguiente relación en general :

$e^{-(Q_n^{(12)} - Q_{n-1}^{(12)})} = 1 + D_t^2\, \mathrm{Ln}\, f_n$; donde $Q_n^{(12)}$ y $Q_{n-1}^{(12)}$ son las coordenadas usadas en la transformación de Bäcklund para $Q_n^{(0)}$, $Q_n^{(1)}$, $Q_n^{(2)}$ y $Q_n^{(12)}$

$$e^{-r_n^{(12)}} = 1 + D_t^2 \log f_n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4.15)$$

Esta relación (4.15) es equivalente a la relación (3.47) para ϕ_{n+1} y $r_n^{(1)}$ .Demostremos esto para f_n y $r_n^{(12)}$

$$\ddot{r}_n^{(12)} = 2\, e^{-r_n^{(12)}} - e^{-r_{n-1}^{(12)}} \quad e^{-r_{n+1}^{(12)}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4.16)$$

$$r_n^{(12)} = Q_n^{(12)} - Q_{n-1}^{(12)}$$

además considerando las siguientes condiciones:

1) $r_n^{(12)} = 0$ cuando $|n| \to +\infty$ y

2) $f_n \xrightarrow[n\to-\infty]{} F(t)e^{-nw} + G(t)e^{-nw}$; $w = w_1 + w_2$ ....(4.17)

$w = w_1 - w_2$ (tomamos $w_1 > w_2$)

En (4.13) vemos que la forma asintótica de f_n cuando $n\to-\infty$ es consistente con la relación (4.9); vemos que

$$\lim_{n\to-\infty}\frac{f_n}{f_{n+1}} = \lim_{n\to-\infty}\frac{F(t)+G(t)e^{n(2w_2)}}{F(t)e^{-w}+G(t)\,e^{-w}\,e^{n(2w_2)}} = e^{w} = e^{(w_1+w_2)}$$

$= 1/(Z_1Z_2)$; esto está de acuerdo con (4.9).

Hallamos

$$\lim_{n\to-\infty}\frac{d^2}{dt^2}\log f_n = \lim_{n\to-\infty}\frac{\ddot{f}_n f_n - \dot{f}_n^{2}}{f_n^{2}}$$;asumiendo:

1) $\dot{f}_n \xrightarrow[n\to-\infty]{} \dot{F}(t)e^{-wn} + \dot{G}(t)e^{-nw}$

2) $\ddot{f}_n \xrightarrow[n\to-\infty]{} \ddot{F}(t)e^{-wn} + \ddot{G}(t)e^{-nw}$

$$\lim_{n\to-\infty} D_t^2\log f_n = \lim_{n\to-\infty}\frac{[w^2F(t)e^{-nw}+\dot{w}^2G(t)e^{-n\dot{w}}][F(t)e^{-nw}+G(t)e^{-n\dot{w}}]-[wF(t)e^{-nw}+\dot{w}G(t)e^{-n\dot{w}}]}{[F(t)e^{-nw}+G(t)e^{-n\dot{w}}]^2}$$

$$\lim_{n\to-\infty} D_t^2\log f_n = \lim_{n\to-\infty}(w^2+\dot{w}^2)\left[\frac{F(t)\,G(t)}{[F(t)e^{-n\dot{w}}+G(t)e^{-nw}]^2}\right] = 0 \quad\text{..............................(4.18)}$$

(4.18) y la condición 1) satisfacen la ecuación (4.15).

Necesitamos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n^2}{f_{n-1} f_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{[F(t)e^{nw}+G(t)e^{nw}]^2}{[F(t)e^{nw+w}+G(t)e^{nw+w}][F(t)e^{nw-w}+G(t)e^{nw-w}]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{2F(t)G(t)[\cosh(2w_2)]-1}{[F(t)e^{nw_2}+G(t)e^{-nw_2}]^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n^2}{f_{n-1} f_{n+1}} = 1 \qquad (4.19)$$

reemplazando (4.15) en (4.16)

$$-\frac{d^2}{dt^2}\left[\log\left(1+\frac{d^2}{dt^2}\log f_n\right)\right] = \frac{d^2}{dt^2}\left(2\log f_n - \log f_n - \log f_{n-1}\right)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} r_n^{(12)} = \frac{d^2}{dt^2}\left[\log\left(\frac{f_n^2}{f_{n+1}\, f_{n-1}}\right)\right] \qquad (4.20)$$

Integrando (4.20) dos veces con respecto al tiempo :

$$r_n^{(12)} = \log \frac{f_n^2}{f_{n+1}\, f_{n-1}} + a + bt \qquad (4.21)$$

a,b se determinan de las condiciones de contorno :

I) $r_n^{(12)} \longrightarrow 0$

$|n| \longrightarrow +\infty$

II) $\lim_{|n|\to+\infty} \log\left(\frac{fn^2}{fn-1\, fn+1}\right) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $b = 0$

puesto que $\lim_{|n|\to+\infty}\left[\frac{fn^2}{f_{n-1}\, f_{n-1}}\right] = 1$;luego $r_n^{(12)} = \log \frac{fn}{fn-1 fn+1}$ ....(4.22)

volviendo a (4.15) y (4.22)

$$r_n^{(12)} = -\operatorname{Log}\left(1 + \frac{d^2}{dt^2}\operatorname{Log} fn\right)$$

usando: $r_n^{(12)} = \operatorname{Ln}\left(\frac{fn^2}{f_{n+1}\, f_{n-1}}\right)$

$$-\operatorname{Ln}\left(1 + \frac{d^2}{dt^2}\operatorname{Ln} f_n\right) = \operatorname{Ln}\left(\frac{fn^2}{f_{n+1}\, f_{n-1}}\right)$$

$$1 + \frac{d^2}{dt^2}\operatorname{Ln} fn = \frac{f_{n+1}\, f_{n-1}}{fn^2}$$

es decir : $f_{n+1}\, f_{n-1} = fn^2 + \ddot{fn}\, fn - \dot{fn}^2$

Luego :

$$e^{-(Q_n^{(12)} - Q_{n-1}^{(12)})} = 1 + D_t^2 \operatorname{Ln} fn$$; hemos usado (4.15) que relaciona

$r_n^{(12)} = Q_n^{(12)} - Q_{n-1}^{(12)}$ y fn; analogamente teníamos una relación entre $r_n^{(1)}$ y ϕ_{n+1}

teníamos : $e^{-(Q_n^{(1)} - Q_{n-1}^{(1)})} = 1 + D_t^2\, \phi_{n+1} \Longrightarrow e^{-r_n^{(1)}} = 1 + D_t^2\, \phi_{n+1}$

con $r_n^{(1)} = Q_n^{(1)} - Q_{n-1}^{(1)}$

ESTUDIO DE LA SOLUCION 2-SOLITON

$$\exp\{-(Q_n^{(12)} - Q_{n-1}^{(12)})\} = \frac{f_{n+1}\, f_{n-1}}{f_n^2} = \frac{[2D_1 ch(U_+ + P_1) + 2D_2 ch(U_- + P_2)]\ [2D_1 ch(U_+ - P_1) + 2D_2 ch(U_- - P_2)]}{[2D_1 chU_+ + 2D_2 chU_-\ ]^2} \qquad \text{....................(4.23)}$$

con $P_1 = W_1 + W_2$

$P_2 = W_1 - W_2$

recordando que : $\dfrac{shW_1}{W_1}$ -------> Velocidad de 1-solitón

$\dfrac{shW_2}{W_2}$ -------> "Velocidad" de 1-antisolitón.

Desarrollando en el numerador :

$$D_1^2\ (ch^2U_+ ch^2P_1 - sh^2U_+ sh^2P_1) + D_2^2\ (ch^2U_- ch^2P_2 - sh^2U_- sh^2P_2) + 2\, D_1D_2 \left[chP_1 chP_2 chS_+ chS_- - shP_1 shP_2 shU_+ shU_- \right]$$

Agrupando términos el numerador queda :

$$(\ D_1\ chP_1\ chU_+ + D_2\ chP_2\ chU_-)^2 - (D_1\ shP_1\ shU_+ + D_2\ shP_2\ shU_-)^2 \text{....................(*)}$$

Ahora haremos el siguiente cambio de variables :

$$\left.\begin{array}{l} U_+ = a + b;\ a = nw_1 + \varepsilon_1 t\ sh\ w_1 + \dfrac{\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2}{2} \\[3ex] U_- = a - b;\ b = nw_2 + \varepsilon_2 t\ sh\ w_2 + \dfrac{\dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_2}{2} \end{array}\right] \qquad \text{.......................................(4.24)}$$

Usando el numerador dado en (*) y (4.24), la expresión (4.23) queda :

$$\frac{[\,D_1\,chP_1(cha\,chb+sha\,shb) + D_2\,chP_2(cha\,chb - sha\,shb)\,]^2 - [\,(D_1\,shP_1 + D_2\,shP_2)\,sha\,chb\,+}{[\,(D_1+D_2)\,cha\,chb + (D_1-D_2)\,sh\,a\,sh\,b\,]^2}$$

$$+[(D_1 shP_1 - D_2 shP_2)\,sh\,b\,ch\,a\,]^2$$

Desarrollando los binomios al cuadrado en el numerador :

$$= 2\Big[(D_1\,chP_1+D_2\,chP_2)(D_1\,chP_1-D_2\,chP_2)-(D_1\,shP_1+D_2\,shP_2)(D_1\,shP_1-D_2\,shP_2)\Big].(cha\,chb\,sha\,shb)\,+$$

$$+\,(D_1\,chP_1+D_2\,chP_2)^2\,ch^2a\,ch^2b \;+\; (D_1\,chP_1-D_2\,chP_2)^2\,sh^2a\,sh^2b - (D_1\,shP_1+D_2\,shP_2)^2(sh^2a)\,($$

$$ch^2b) - (D_1\,shP_1-D_2\,shP_2)^2\,sh^2a\,ch^2b.$$

Dividiendo el numerador y el denominador entre $ch^2a\,ch^2b$ y luego agrupando términos en el numerador :

$$2\,(D_1^2 - D_2^2)\,tha\,thb + (\,D_1\,chP_1 + D_2\,chP_2\;)^2 + (D_1\,chP_2 - D_2\,chP_2)^2\,th^2a\,th^2b - (\,D_1\,shP_1\,+$$

$$+\,D_2\,shP_2)^2\,th^2b - (D_1\,shP_1 - D_2\,shP_2)^2\,th\,b.$$

El denominador queda :

$$[\,(D_1 + D_2) + (D_1 - D_2)\,tha\,thb\,]^2$$

Nuestra intención es hallar una expresión del tipo :

$e^{-r_n} = 1 + V_n$; V_n ---> función de μ_i; $\mu_i = n\,w_i + \varepsilon_i\,t\,senh\,w_i + \delta_i$;$i=1,2$

En el numerador sumando y restando la expresión:

$(D_1 + D_2)^2 + (D_1 - D_2)^2 \, th^2a \, th^2b$ y agrupando términos luego de usar $th^2a = 1\text{-}csch^2a$ y

$th^2b = 1 - csch^2b$:

$$= [\ (D + D_2) + (D_1 - D_2)\ tha\ thb\ ]^2 + [(D_1\ chP_1 + D_2\ chP_2)^2 - (D_1 shP_1 + D_2\ sh\ P_2)^2 - (D_1 shP_1 -$$

$$- (D\ shP_2)^2 - (D_1 + D_2)^2 + (D_1\ chP_1 - D_2\ chP_2)^2 - (D_1 - D_2)^2] + sech^2a\ sech^2b\ [(D_1 chP_1 - D_2 chP_2)^2 -$$

$$- (D_1 - D_2)^2] + sech^2a\ [(D_1 - D_2)^2 - (D_1\ chP_1 - D_2\ chP_2)^2 + (D_1\ shP_1 + D\ shP_2)^2]\ sech^2b\ [(D_1 - D_2)^2 -$$

$$- (D\ chP_1 - D_2\ chP_2)^2 + (D_1\ shP_1 - D_2\ sh\ P_2)^2\ ]$$

Agrupando términos constantes en el numerador :

$$= 2D_1^2\ (ch^2P_1 - sh^2P_1) + 2D_2^2\ (ch^2P_2 - sh^2P_2) - 2\ (D_1^2 - D_2^2) + 2\ D_1D_2\ sech^2a\ [\ ch(P_1+P_2) - 1]\ +$$

$$+ (D_1 - D_2)\ sech^2b\ [\ ch\ (P_1 - P_2)\ -1\ ] + [\ (D_1 chP_1 - D_2 chP_2)^2 - (D_1 - D_2)^2]\ sech^2a\ sech^2b\ +$$

$$+ [\ (D_1 + D_2) + (D_1 - D_2)\ tha\ thb\ ]^2$$

la expresión total queda :

$$= 1 + \frac{2\ D_1D_2\ sech^2a\ [\ ch(P_1+P_2) - 1\ ] + 2D_1D_2\ sech^2b\ [\ ch\ (P_1 - P_2) - 1\ ] + [\ (D_1 chP_1 - D_2 chP_2)^2 -}{[\ (D_1 + D_2) + (D_1 - D_2)\ tha\ thb\ ]^2}$$

$$- (D_1 - D_2)^2]\ \ (sech^2a\ sechb)$$

Volviendo a las variables originales :

$$P_1 + P_2 = 2w_1 \qquad \left[\begin{array}{l} a = nw_1 + \varepsilon_1 \, tsh\, w_1 + \delta_1 \\ \\ b = nw_2 + \varepsilon_2 \, tsh\, w_2 + \delta_2 \end{array}\right.$$

$$P_1 - P_2 = 2w_1$$

sabemos:

$$ch\,(2w_1) - 1 = 2\, sh^2 w_1 \quad ; \quad ch\,(2w_2) - 1 = 2\, sh^2 w_2$$

Reemplazando estas expresiones y dividiendo el numerador y denominador entre 4 D_1D_2

$$-1 + \frac{sh^2 w_1 \; sech^2\,(nw_1 + \varepsilon_1\, tsh\, w_1 + \delta_1) + sh^2 w_2 \; sech^2\,(nw_2 + \varepsilon_2\, tshw_2 + \delta_2) + S_o sech^2(}{[\, S_1 + S_2 \; th\,(nw_1 + \varepsilon_1 tshw_1 + \delta_1)\; th\,(nw_2 + \varepsilon_2 tshw_2 + \delta_2)]^2} \;\ldots\ldots$$

$$\ldots \frac{(nw_1 + \varepsilon_1\, tsh\, w_1 + \delta_1)\; sech^2\,(nw_2 + \varepsilon_2\, tshw_2 + \delta_2)}{} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.25)$$

con $S_0 = [\,(D_1\, chP_1 - D_2\, chP_2)^2 - (D_1 - D_2)^2]/\,(4\, D_1\, D_2)$

$$S_1 = (D_1 + D_2)\,/\,(4\, D_1D_2)^{1/2} \; ; \; P_1 = w_1 + w_2$$

$$P_2 = w_1 - w_2$$

$$S_2 = (D_1 - D_2)\,/\,(4\, D_1D_2)^{1/2}$$

Se ve que :

$$S_1^2 - S_2^2 = 1 \; \text{------>} \; S_1 = ch\,(P/2\,) \; ; \; P = P(w_1, w_2)$$

$$S_2 = sh\,(P/2\,)$$

$\hat{\delta}_1$ y $\hat{\delta}_2$ estan dados en (4.20)

$$\text{con} \quad \delta_1 = \frac{\hat{\delta} + \hat{\delta}_2}{2} \qquad \delta_2 = \frac{\hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_2}{2}$$

Esta expresión (4.25) ya es conocida para nosostros ya que verificamos en el capitulo II como solución de la ecuación de Toda de una red LC no-lineal.

2. FORMAS ASINTOTICAS DE LA SOLUCION DE TIPO 2-SOLITON

Veamos las formas asintóticas de la solución **Φ2**. (**Φ2** = **2-SOLITON**)

$$\Phi_2 = 1 + \frac{sh^2 w_1 \, sech^2\mu_1 + sh^2 w_2 \, sech^2\mu_2 + S_0 \, sech^2\mu_2 \, sech^2\mu_2}{(S_1 + S_2 \, th\, \mu_1 \, th\mu_2)^2}$$

con $\mu_1 = nw_1 + \varepsilon_1 t \, shw_1 + \delta_1$ $\qquad$ $\mu_2 = nw_2 + \varepsilon_2 t \, shw_2 + \delta_2$

$\mu_1 = w_1 \ (n + \varepsilon_1 V_1 t) + \delta_1$ $\qquad$ $\mu_2 = w_2 \ (n + \varepsilon_2 V_2 t) + \delta_2$

$$V_i = \frac{senh \, w_i}{w_i} \qquad i = 1,2$$

Con V_i la velocidad de propagación de la señal i-ésima.

Las fases totales μ_1 y μ_2 nos indican la existencia de 2 pulsos interactuando entre ellos,nosotros queremos ver **Φ2** cuando la interacción entre ellos es despreciable; para esto asumimos las siguientes condiciónes :

i) $w_1 > w_2 \Longrightarrow \frac{shw_1}{w_1} > \frac{shw_2}{w_2}$ ($V_1 > V_2$, la primera onda es más veloz que la segunda).

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$ (las ondas avanzan de izquierda a derecha , en el plano **Φ2**,μ^i).

ii) $\mu_1 \text{ -----> } -\infty$ manteniendo $\mu_2 \text{ ---> }$ finito $\Longrightarrow \operatorname{sech}^2 \mu_1 \text{ ---> } 0$

(la onda 1 está en $-\infty$)

$\operatorname{th} \mu_1 \text{ ---> } -1$

entonces Φ_2 queda

$$\Phi_2 = 1 + \frac{\operatorname{sh}^2 w_2 \operatorname{sech}^2 \mu_2}{(S_1 - S_2 \operatorname{th} \mu_2)^2} = 1 + \left(\frac{\operatorname{sh} w_2}{\operatorname{ch} \sigma/2 \operatorname{ch}\mu_2 - \operatorname{sh}\sigma/2 \operatorname{sh}\mu_2}\right)^2$$

de (4.25) tenemos :

$$S_1 = \operatorname{ch} \sigma/2$$

$$S_2 = \operatorname{sh} \sigma/2, \quad \frac{\sigma}{2} = \operatorname{ch} \left[\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{w_1}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{w_2}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{w_1-w_2}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right)}\right]$$

luego :

$$\Phi_2 = 1 + \operatorname{sh}^2 w_2 \operatorname{sech}^2(\mu_2 - \sigma/2)$$

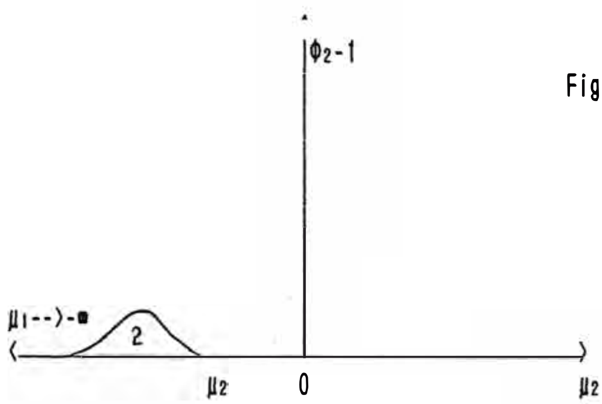


Fig.1.-En este caso las ondas practicamente no interactúan

En las regiones próximas al punto $\mu = 0$,tenemos los siguientes perfiles:

Fig.2 Se muestra la onda 1 próxima a la onda 2.

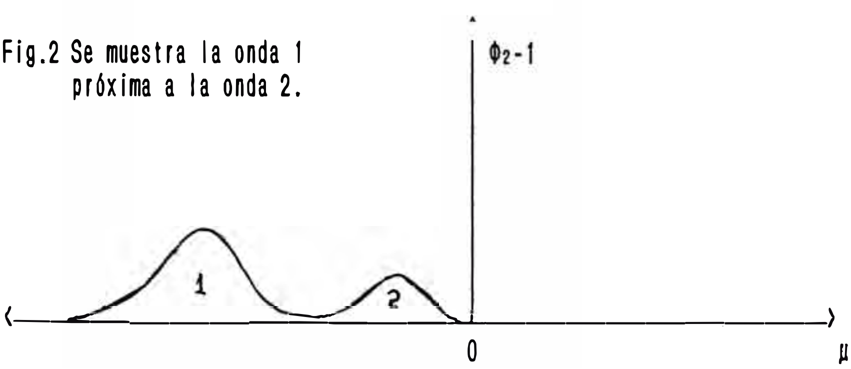


Fig.3.-Interacción de las 2 ondas.

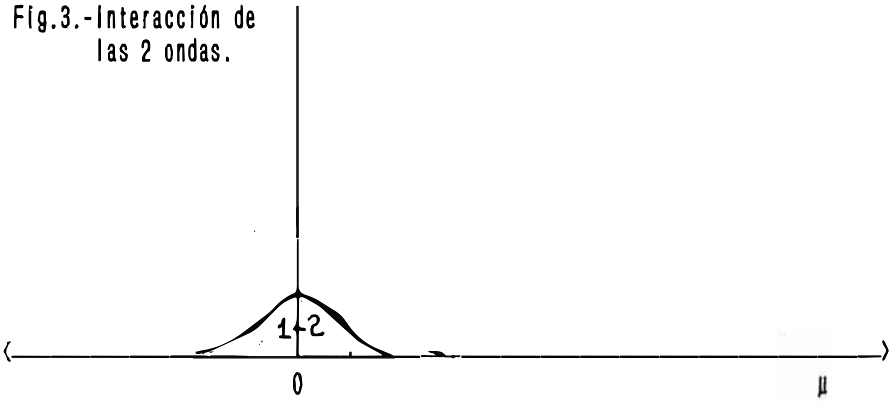
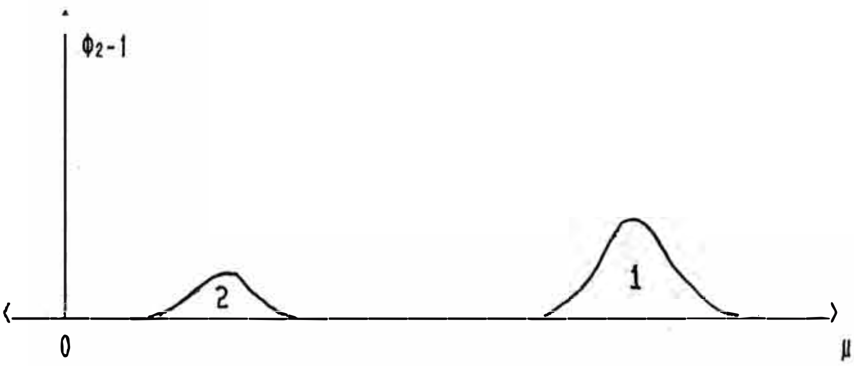


Fig.4.-La onda 1 se aleja después de la interacción más rápido que la onda 2.



iii) $\mu_1 \text{ -----}\rangle +\infty$ manteniendose $\mu_2 \text{ ---}\rangle$ finito $\text{====}\rangle \ \text{sech}^2 \mu_1 \text{ ---}\rangle\ 0$

(la onda 1 esta en $+\infty$)

$\text{th } \mu_1 \text{ ---}\rangle +1$

Φ_2 queda

$$\Phi_2 = 1 + \frac{\text{sh}^2 w_2 \ \text{sech}^2 \mu^2}{(S_1 + S_2 \text{ th } \mu_2)^2}$$; tomando S_1 y S_2 en función de $\sigma/2$.

tenemos :

$$\Phi 2 = 1 + sh^2\, w_2\ sech^2 \left(\mu_2 + \frac{\sigma}{2}\right)$$

Vemos en la Fig. 4 que la forma del 2do pulso se mantuvo invariable después de la colisión con el pulso 1. Excepto que se produjo un cambio total en su fase igual a σ, que está relacionado con w_1 y w_2 según:

$$\sigma = ch^{-1}\left[\frac{sh^2\left(\frac{w_1-w_2}{2}\right) + sh^2\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right)}{sh^2\left(\frac{w_1-w_2}{2}\right)\, sh^2\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right)}\right]$$

3. SOLUCION TIPO 3-SOLITON

DIAGRAMA DE LAMB PARA OPTENER 3-SOLITON.

2-solitón

$$\begin{tikzcd} & Q_n^{(12)} \arrow[dr, "A_2\ Z_2"] & \\ Q_n^{(1)} \arrow[ur, "Z_1\ A_1"] \arrow[dr, "A_2\ Z_2"'] & & Q_n^{(3)} \\ & Q_n^{(13)} \arrow[ur, "Z_1\ A_1"'] & \end{tikzcd}$$

3-solitón

Solución 1-solitón

2-solitón

Usando la relación (4.7):

$$e^{(Q_n^{(3)} - v^{(3)} + Q_{n+1}^{(1)} - v^{(1)})} = \frac{Z_1 e^{(Q_n^{(13)} - v^{(13)})} - Z_2 e^{(Q_n^{(12)} - v^{(12)})}}{Z_1 e^{(Q_{n+1}^{(13)} - v^{(13)})} - Z_2 e^{(Q_{n+1}^{(12)} - v^{(12)})}}\, e^{(Q_{n+1}^{(12)} - v^{(12)} + Q_{n+1}^{(13)} - v^{(13)})} \quad \text{..........} \qquad (4.26)$$

Haciendo las transformaciones:

$$e^{Q_n^{(12)} - V^{(12)}} = Z_1 \frac{f_n}{f_{n+1}} \quad ; \quad e^{Q_n^{(13)} - V^{(13)}} = Z_2 \frac{\tilde{f}_n}{\tilde{f}_{n+1}} \quad ; \quad e^{Q_n^{(1)} - V^{(1)}} = Z \frac{\phi_{n+1}}{\phi_{n+2}}$$

Reemplazando las últimas relaciones en (4.26)

$$e^{Q_n^{(3)} - V^{(3)}} = \frac{f_n \tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n f_{n+1}}{f_{n+1} \tilde{f}_{n+2} - \tilde{f}_{n+1} f_{n+2}} \left(\frac{Z_1 Z_2}{Z}\right) \frac{\phi_{n+3}}{\phi_{n+2}}$$

si hacemos $g_n = (f_n \tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n f_{n+1})/\phi_{n+2}$

tenemos

$$e^{Q_n^{(3)} - V^{(3)}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z} \frac{g_n}{g_{n+1}} \qquad \text{como } r_n^{(3)} = Q_n^{(3)} - Q_{n-1}^{(3)}$$

tenemos

$$e^{-r_n^{(3)}} = \frac{g_{n-1} g_{n+1}}{g_n^2} \qquad \text{(3-SOLITON)} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4.27)$$

La obtención de las funciones g_n es muy laboriosa, por la dependencia de $f_n, \tilde{f}_n$ y ϕ_n, cuyas expresiones vemos en (4.12) para f_n y $\tilde{f}_n$ y (3.48)-(3.49) para ϕ_n. En (4.11) vemos que

$f_n = f_n[\phi_1(n), \phi_2(n)]$; de acuerdo al diagrama de Lamb para 3-SOLITON tenemos $\tilde{f}_n = \tilde{f}_n[\phi_1(n), \phi_3(n)]$

f_n y $\tilde{f}_n$ tienen una función $\phi_1(n)$ común, [$\phi_1(n)$ da lugar a 1-solitón].

Sí w_1 es la frecuencia de $\phi_1(n)$, observamos que w_1 debe aparecer tanto en f_n como en f_n; luego, $\exp[-(r_n^{(3)})]$ tiene tres frecuencias (w_1, w_2 y w_3) que corresponden a la interacción de tres pulsos con sus frecuencias respectivas, en $|\mu_i| \longrightarrow +\infty$ tenemos

$$\Phi 3 = \exp[-(r_n^{(3)})] = \sum_{i=1}^{3} \Phi_3(\mu_i) \quad ; \quad \mu_i = n\, w_i + \varepsilon_i\, t \,\mathrm{senh}\, w_i + \delta_i$$

$\Phi_3(\mu_i) \longrightarrow$ representa a cada una de las ondas solitarias que forman 3-solitón

Anotamos que $\phi_1(n)$ puede ser (3.48) que forma 1-solitón o (3.49) que forma 1-antisolitón, más adelante aclaramos este aspecto.

ANEXO B

RESUMEN DEL PROCEDIMIENTO PARA OBTENER SOLUCIONES DE TIPO N-SOLITON DE LA RED DE TODA

Hasta ahora hemos usado variables asignándoles índices y sub-índices según la necesidad sin tener en cuenta su uso sucesivo hasta obtener la solución de tipo N-solitón, ahora reformularemos nuestras notaciones para evitar confusiones, partimos de la ecuación:

$$r_n = Q_n - Q_{n-1} \qquad \ddot{r}_n = 2e^{-r_n} - e^{-r_{n+1}} - e^{-r_{n-1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(B.1)$$

Con la condición de contorno : $|\,Q_n\,| =$ constante para todo n.

$$|\,n\,| \longrightarrow +\infty$$

Notamos que $\{ Q_n \}$ = constante es una solución de (B.1), a esta solución llamaremos la solución trivial de (B.1).

La idea es partir de esta solución para obtener otras soluciones mediante una transformación canónica previamente obtenida.

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(Q_n - Q_{n-1}^{(1)}\right) = A_1 \left[\exp\left[-\left(Q_n^{(1)} - Q_n\right)\right] - \exp\left[-\left(Q_{n-1}^{(1)} - Q_{n-1}\right)\right]\right] \ldots\ldots(B.2) \\[2em] \dfrac{d}{dt}\left(Q_n^{(1)} - Q_n\right) = A_1^{-1} \left[\exp\left[-\left(Q_{n+1} - Q_n^{(1)}\right)\right] - \exp\left[-\left(Q_n - Q_{n-1}^{(1)}\right)\right]\right] \ldots\ldots(B.3) \end{array}\right.$$

Donde A_1 es una constante arbitraria; se verificó que $r_n = Q_n - Q_{n-1}$ y $r_n^{(1)} = Q_n^{(1)} - Q_{n-1}^{(1)}$ satisfacen (B.1) . Las expresiones (B.2)-(B.3) son llamadas la T.B para la red exponencial de

Toda cuya ecuación de movimiento es (B.1). Es conveniente introducir la función auxiliar ϕ_n :

$$e^{(Q^{(1)}_{n-1} - Q^{(1)}_{-n})} = Z \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} ; \qquad \phi_n \equiv \phi(n,t)$$

$$Z = \frac{A\, e^{Q_{-n}}}{e^{Q^{(1)}_{-n}}} \qquad Z \text{ es un parámetro.}$$

Y buscamos soluciones de ϕ_n usando (B.2) y (B.3) y además la solución trivial;

$$\phi(n,t) = B(t)\, Z^{+n} + C(t)\, Z^{-n} \qquad B_{(t)} \text{ y } C_{(t)} \text{ funciones de } t \text{ por determinar.}$$

$$B(t) = B_0\, e^{-\varepsilon\, t s h w} , \qquad C_{(t)} = C_0\, e^{\varepsilon\, t s h w} ;$$

$$\text{con: } Z = \varepsilon\, e^{-w} \qquad w > 0 ; \quad \varepsilon = \pm 1; \quad |Z| < 1$$

$$\phi(n,t) = B_0\, e^{-nw - \varepsilon\, t s h w} + C_0\, e^{nw + \varepsilon\, t s h w}$$

De acuerdo al signo de B_0 C_0 tenemos 2 clases de soluciones, una <u>solución regular</u> y otra <u>solución singular.</u>

El signo de ε determina en que dirección se propaga la onda.

$$\text{además : } e^{[Q^{(1)}_n - Q^{(1)}_{n-1}]} = \frac{\phi_n\, \phi_{n+2}}{\phi^2_{n+1}}$$

$B_0 C_0 > 0$

1-SOLITON : Φ_1

$$\Phi_1(n,t)=e^{-r_n^{(1)}} \; ; \; r_n^{(1)} = Q_n^{(1)} - Q_{n-1}^{(1)}$$

$$\phi_1(n,t)=2D_0 \operatorname{ch}[(n-1)w_1+\varepsilon t \operatorname{sh} w_1+\delta_1]$$

$$D_0^2 = B_0 C_0, \quad e^{\delta_1} = \sqrt{\frac{C_0}{B_0}}\, e^{w_1}$$

$$\Phi_1(n,t) = \frac{\phi_1(n)\,\phi_1(n+2)}{\phi_1^2(n+1)} \quad (\text{ solitón })$$

$$\Phi_1(n,t) = 1+\operatorname{sh}^2 w_1 \operatorname{sech}^2(nw_1+\varepsilon_1 t \operatorname{sh} w_1+\delta_1)$$
(solitón)

$B_0 C_0 < 0$

1-ANTISOLITON : $\tilde{\Phi}_1$

$$\tilde{\phi}_2(n,t)=2\tilde{D}_0 \operatorname{sh}[(n-1)w^{(1)}+\varepsilon t \operatorname{sh} w^{(1)}+\tilde{\delta}^{(1)}]$$

$$\tilde{D}_0^2 = -B_0 C_0, \quad e^{\tilde{\delta}^{(1)}} = \sqrt{\frac{-\tilde{C}_0}{\tilde{B}_0}}\, e^{w^{(1)}}$$

$$\tilde{\Phi}_1(n,t) = \frac{\tilde{\phi}_1(n)\,\tilde{\phi}_1(n+2)}{\tilde{\phi}_1^2(n+1)} \quad (\text{ antisolitón })$$

$$\tilde{\Phi}_1(n,t) = 1-\operatorname{sh}^2 w \operatorname{csch}^2(nw^{(1)}+\varepsilon t \operatorname{sh} w^{(1)}+\tilde{\delta}^{(1)})$$
(antisolitón)

Nota : Para determinar ϕ_1 ó $\tilde{\phi}_1$ se necesitan tres parámetros para cada uno :

(B_0 C_0 y δ_1) y (B_0 C_0 y $\delta^{(1)}$) respectivamente.

Método para construir una solución de TIPO 2-SOLITON

Para esto partimos del diagrama de Lamb para:

$Q_n^{(0)}$ -------> Solución trivial.

$Q_n^{(1)}$ -------> Solución 1-solitón.

$\tilde{Q}_n^{(1)}$ -------> Solución 1-antisolitón.

$Q_n^{(2)}$ -------> Solución 2-solitón.

Los tres primeros (solucion trivial, 1-solitón y 1-antisolitón) son conocidos , nos proponemos usar una secuencia de la T.B.según el siguiente diagrama :

Diagrama de Lamb para 2-solitón.

$$
\begin{tikzcd}
 & Q_n^{(1)} \arrow[dr, "\tilde{A}_1\ \tilde{Z}_1"] & \\
Q_n^{(0)} \arrow[ur, "Z_1\ A_1"] \arrow[dr, "\tilde{A}_1\ \tilde{Z}_1"'] & & Q_n^{(2)} \\
 & \tilde{Q}_n^{(1)} \arrow[ur, "Z_1\ A_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$\frac{d}{dt}\left(Q_n^{(0)} - Q_{n-1}^{(1)}\right) = A_1\left[\exp\left\{-\left(Q_n^{(1)} - Q_n^{(0)}\right)\right\} - \exp\left[-\left(Q_{n-1}^{(1)} - Q_{n-1}^{(0)}\right)\right]\right] \quad \text{...........(B.4)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(Q_n^{(0)} - \tilde{Q}_{n-1}^{(1)}\right) = \tilde{A}_1\left[\exp\left\{-\left(\tilde{Q}_n^{(1)} - Q_n^{(0)}\right)\right\} - \exp\left[-\left(\tilde{Q}_{n-1}^{(1)} - Q_{n-1}^{(0)}\right)\right]\right] \quad \text{...........(B.5)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(Q_n^{(1)} - Q_{n-1}^{(2)}\right) = \tilde{A}_2\left[\exp\left\{-\left(Q_n^{(2)} - Q_n^{(1)}\right)\right\} - \exp\left[-\left(Q_{n-1}^{(2)} - Q_{n-1}^{(1)}\right)\right]\right] \quad \text{...........(B.6)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tilde{Q}_n^{(1)} - Q_{n-1}^{(2)}\right) = A_1\left[\exp\left\{-\left(Q_n^{(2)} - \tilde{Q}_n^{(1)}\right)\right\} - \exp.\left[-\left(Q_{n-1}^{(2)} - \tilde{Q}_{n-1}^{(1)}\right)\right]\right] \quad \text{...........(B.7)}$$

Imponiendo las condiciones de contorno :

1) $Q_{-\infty}^{(0)} = v^{(0)} = \text{const.}\ Q_{-\infty}^{(1)} = v^{(1)} = \text{const.}\ Q_{-\infty}^{(2)} = v^{(2)} = \text{const.}\ \tilde{Q}_{-\infty}^{(1)} = \tilde{v}^{(1)} = \text{const.}$

2) $Q_{-\infty}^{(0)} + Q_{-\infty}^{(2)} = Q_{-\infty}^{(1)} + \tilde{Q}_{-\infty}^{(1)}$

con :

$Z_1 = A_1 \exp\left(v^{(0)} - v^{(1)}\right) = A_1 \exp\left(\tilde{v}^{(1)} - v^{(2)}\right);\ \dot{Z}_2 = A_1 \exp\left(v^{(0)} - \tilde{v}^{(1)}\right) =$

$A_1 \exp\left(v^{(1)} - v^{(2)}\right)$

$$e^{-\left(Q_n^{(2)} - Q_{-\infty}^{(2)}\right)} = Z_1 \dot{Z}_1 \frac{\dot{\phi}_2(n)}{\phi_2(n+1)}, \quad Z_2 = Z_1 \dot{Z}_1$$

$$e^{-\left(Q_n^{(2)} - Q_{-\infty}^{(2)}\right)} = \frac{\phi_2(n+1)\,\phi_2(n-1)}{\left[\phi_2(n)\right]^2} \quad \text{..(B.8)}$$

Hemos despejado una relación para $Q_n^{(2)}$ en función de $Q_n^{(0)}$, $Q_n^{(1)}$ y $\tilde{Q}_n^{(1)}$ a partir de las relaciones (B.4), (B.5), (B.6) y (B.7) con:

$$\phi_2(n) = \dot{\phi}_1(n+1)\,\phi_1(n+2) - \phi_1(n+1)\,\dot{\phi}_1(n+2)$$

ϕ_1, ϕ_1 ya son conocidos

sea

$$\phi_2 = e^{-\left(Q_n^{(2)} - Q_{-\infty}^{(2)}\right)}$$

usaremos

$$\phi 2(n)=2D_1\, ch[n(w_1+w^{(1)})+\varepsilon t(shw_1+sh\hat{w}^{(1)})+\delta_1]+2D_2\, ch[n(w_1-w^{(1)})+\varepsilon t(shw_1-sh\hat{w}^{(1)})+\delta_2]$$

sabiendo que

$$\Phi_2 = \frac{\phi_2(n+1)\phi_2(n-1)}{[\phi_2(n)]^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2\text{-solitón}$$

$$\Phi=1+\frac{sh^2(w1)sech^2\Omega_1+ sh^2(w^{(1)})\, sech^2\Omega_2 + S_0\, sech^2\Omega_1\, sech^2\Omega_2}{[S_1 + S_2\, th\Omega_1\, th\Omega_2]^2} \quad (2\text{-solitón})$$

$$\Omega_1 = nw_1 + \varepsilon t\, shw_1 + \delta_2$$

$$\Omega_2 = nw^{(1)} + \varepsilon t\, sh\hat{w}^{(1)} + \delta_2$$

$$S_0 = [(D_1\, ch\sigma_1-D_2\, ch\sigma_2)^2-(D_1-D_2)^2]/(4D_1D_2)$$

$$S_1 = (D_1 + D_2)/\sqrt{4D_1D_2} \qquad \sigma_1 = w_1 + w^{(1)}$$

$$S_2 = (D_1 - D_2)/\sqrt{4D_1D_2} \qquad \sigma_2 = w_1 - w^{(1)}$$

$$\delta_2 = \frac{\hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_2}{2} \qquad \hat{\delta}_2 = \frac{\hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_2}{2}$$

con
$$e^{2\hat{\delta}_1} = -\frac{C_0\,\bar{C}_0}{B_0\,\tilde{B}_0}\, e^{3(w_1+w^{(1)})}, \quad e^{2\hat{\delta}_2} = -\frac{B_0\,\bar{C}_0}{B_0\,\tilde{C}_0}\, e^{3(w_1-w^{(1)})}$$

$$D_1 = -4B_0\,\bar{B}_0\, C_0\,\bar{C}_0\, sh^2\left[\frac{w_1 - w^{(1)}}{2}\right] \qquad D_2 = -4B_0\,\bar{B}_0\, C_0\,\bar{C}_0\, sh^2\left[\frac{w_1 + w^{(1)}}{2}\right]$$

$$e^{\delta_2} = e^{\frac{\hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_2}{2}} = \sqrt[4]{\frac{C_0^2}{B_0^2}}\,[e^{(3/2)w_1}] = \sqrt{\frac{C_0}{B_0}}\,e^{(3/2)w_1}$$

$$e^{\hat{\delta}_2} = e^{\frac{\hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_2}{2}} = \sqrt[4]{\frac{C_0^2}{B_0^2}}\,[e^{(3/2)w^{(1)}}] = \sqrt{\frac{\tilde{C}_0}{\tilde{B}_0}}\,e^{(3/2)w^{(1)}}$$

NOTA: Para determinar $\phi_2(n)$ se necesitan 6 parámetros ($B_0, C_0, \delta_2, \tilde{B}_0, \tilde{C}_0$ y $\tilde{\delta}_2$), hay

2 velocidades :

$$\frac{\operatorname{sh} w_1}{w_1} \quad y \quad \frac{\operatorname{sh} w^{(1)}}{w^{(1)}}$$, correspondoentes a las soluciones 1-solitón y

1-antisolitón respectivamente que nos han servido para hallar la solución 2-solitón.

Tomando condiciones de contorno adecuadas obtuvimos a partir de la TB una ecuación que relaciona 4 juegos de coordenadas, que simbolizaremos cada juego como

$Q_k^{(N)}(n,t)$

- (N) ———→ orden del solitón.
- (n,t) ———→ función de n y t.
- k ———→ k-ésima solución obtenida.

El diagrama de Lamb para 2-solitón es:

Diagrama de Lamb para 2-solitón.

$$\begin{tikzcd}
 & Q_1^{(1)}(n,t) \arrow[dr, "\tilde{Z}_1"] & \\
Q_1^{(0)}(n,t) \arrow[ur, "Z_1"] \arrow[dr, "\tilde{Z}_1"'] & & Q_1^{(2)}(n,t) \\
 & \tilde{Q}_2^{(1)}(n,t) \arrow[ur, "Z_1"'] &
\end{tikzcd}$$

$Q_1^{(1)}(n,t)$ ———→ 1-solitón

$\tilde{Q}_2^{(1)}(n,t)$ ———→ 1-antisolitón podemos extender para 3-solitòn (obviando escribir la dependencia de n y t)

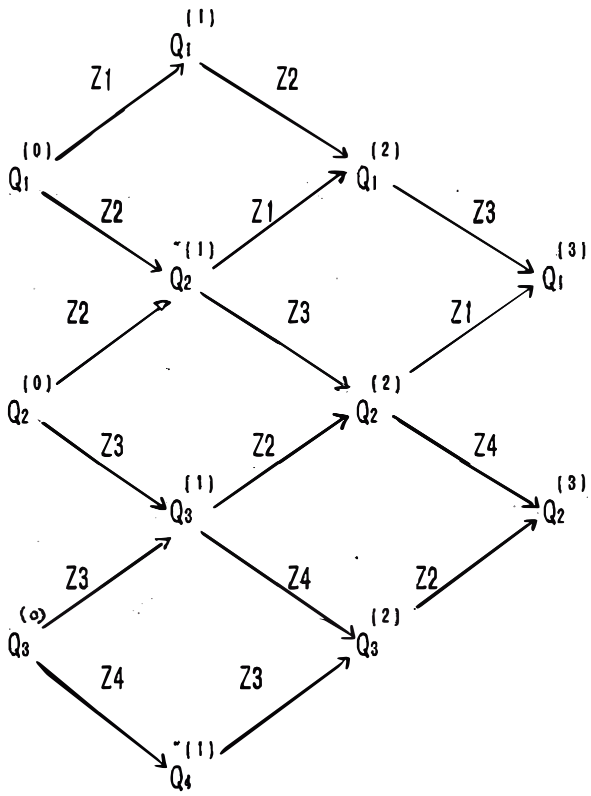


Diagrama de Lamb para obtener 2 soluciones de tipo 3-solitòn

-Se han usado 4 parámetros z_1, z_2, z_3 y z_4 (y sus correspondientes A_1, A_2, A_3 y A_4)
-Para obtener una soluciòn de tipo 3-solitòn es necesario tener previamente por lo menos 2 soluciones de tipo 2-solitòn.

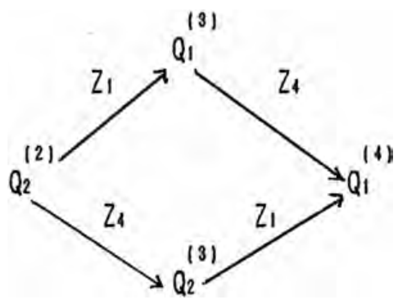


Diagrama de 4-solitòn.

Usamos la siguiente notaciòn por simplicidad

En la ecuaciòn (3.33) usamos la notaciòn anterior

$$\frac{e^{Q_k^{(1)}(n)}}{e^{Q_k^{(1)}(-\infty)}} = Z_k \, \frac{e^{Q_k^{(1)}(n+1)}}{e^{Q_k^{(1)}(n+2)}} \qquad k=1,2,3,4 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B.9)$$

para k=2,4 serán $\tilde{Q}_2^{(1)}(n)$ y $\tilde{Q}_4^{(1)}(n)$

y de la ecuaciòn (4.9)

$$\frac{e^{Q_i^{(2)}(n)}}{e^{Q_i^{(2)}(-\infty)}} = P_i\,\frac{\phi_i^{(2)}(n)}{\phi_i^{(2)}(n+1)} \qquad i=1,2,3 \quad ; \quad P_i = Z_i\, Z_{i+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B.10)$$

con $\phi_i^{(2)}(n) = \phi_i^{(1)}(n+1)\;\phi_{i+1}^{(1)}(n+2) - \phi_i^{(1)}(n+2)\;\phi_{i+1}^{(1)}(n+1)$

Usando la ecuación (4.7) para relacionar $\phi_{j+1}^{(1)}$, $\phi_j^{(2)}$, $\phi_{j+1}^{(2)}$ y $\phi_j^{(3)}$ según el diagrama de Lamb anterior

$$e^{(Q_j^{(3)}(n) - v_j^{(3)} + Q_{j+1}^{(1)}(n+1) - v_{j+1}^{(1)})} = \frac{Z_j e^{(Q_{j+1}^{(2)}(n) - v_{j+1}^{(2)})} - Z_{j+2}\, e^{(Q_j^{(2)}(n) - v_j^{(2)})}}{Z_j e^{(Q_{j+1}^{(2)}(n+1) - v_{j+1}^{(2)})} - Z_{j+2}\, e^{(Q_j^{(2)}(n+1) - v_j^{(2)})}}\; e^{(Q_{j+1}^{(2)}(n+1) - v_{j+1}^{(2)} + Q_j^{(2)}(n+1) - v_j^{(2)})} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B.11)$$

$j=1,2$

Usando (B.8)-(B.9) y agrupando

$$\frac{e^{Q_j^{(3)}(n)}}{e^{v_j^{(3)}}} = Z_{j+1}^{-1}\,\frac{\phi_j^{(3)}(n)}{\phi_j^{(3)}(n+1)} \quad ; \text{ con } \quad \phi_j^{(3)}(n) = \frac{\phi_{j+1}^{(2)}(n)\;\phi_j^{(2)}(n+1) - \phi_j^{(2)}(n)\;\phi_{j+1}^{(2)}(n+1)}{\phi_{j+1}^{(1)}(n+2)}$$

luego

$$e^{-[Q_j^{(3)}(n) - Q_j^{(3)}(n-1)]} = \frac{\phi_j^{(3)}(n-1)\;\phi_j^{(3)}(n+1)}{\left[\phi_j^{(3)}(n)\right]^2} \qquad \text{3-SOLITON} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B.12)$$

Es decir hemos escrito 3-solitón en la forma (B.8). Igualmente podemos escribir (B.11) para $\phi_j^{(N)}$, $\phi_j^{(N-1)}$, $\phi_{j+1}^{(N-1)}$ y $\phi_{j+1}^{(N-2)}$ y llegar a la expresiòn de la forma (B.12),pero esta vez para N-solitòn

$$e^{-[Q_j^{(N)}(n)-Q_j^{(N)}(n-1)]} = \frac{\phi_j^{(N)}(n-1)\,\phi_j^{(N)}(n+1)}{\left[\phi_j^{(N)}(n)\right]^2} \qquad \text{................................(N-solitòn)}$$

con

$$\phi_j^{(N)}(n) = \frac{\phi_{j+1}^{(N-1)}(n)\,\phi_j^{(N-1)}(n+1) - \phi_j^{(N-1)}(n)\,\phi_{j+1}^{(N-1)}(n+1)}{\phi_{j+1}^{(N-2)}(n+2)}$$

CAPITULO V

LA TRANSFORMACION DE BÄCKLUND Y LAS LEYES DE CONSERVACION DE LA RED INFINITA DE TODA

CAPITULO V

LA TRANSFORMACION DE BÄCKLUND Y LAS LEYES DE CONSERVACION DE LA RED INFINITA DE TODA

Además en esta sección presentamos un procedimiento sistemático para construir leyes de conservación a partir de la Transformación de Bäcklund asumiendo la condición de contorno:

$$Q_n \text{ y } Q_n' \longrightarrow \text{constantes cuando } |n| \longrightarrow \pm\infty$$

Considerando la función $e^{-(Q_n'-Q_{n+1})}$ derivable y continua de Z podemos desarrollar en serie de potencias enteras de Z, convergente en $|Z| < 1$.

$$e^{-(Q_n'-Q_{n+1})} = C \sum_{m=0}^{+\infty} Z^m f_n^{(m)} \; ; \qquad (5.1)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad f_n^{(m)} \equiv f_n^{(m)}$$

$Z = AC$, en secciones pasadas trabajamos con

$$e^{-(Q_{n-1}'-Q_{-\infty})} = Z \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}, \text{ donde } Z = A \frac{e^{Q_{-\infty}}}{e^{Q_{-\infty}'}}$$

Estos mismos parámetros A y C serán usados aquí en (5.1)

Considerando la condición de contorno señalada obtuvimos una relación a partir de la Transformación de Bäcklund, esta relación es:

$$\frac{dQ_n}{dt} = A\, e^{-(Q_n'-Q_n)} - AC + \frac{1}{A} e^{-(Q_n-Q_n')} - \frac{1}{AC} \qquad (5.2)$$

derivando k veces la expresión (5.1) tenemos:

$$C\, f_n^{(k)} = \frac{d^k}{dZ^k}\left(e^{-(Q_n - Q_{n+1})} \right)\Bigg|_{Z=0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.3)$$

hemos evaluado en $Z = 0$ para anular los términos de potencia mayores que k, para obtener $f_n^{(k)}$

usaremos $P_n = Q_n$ (momentum de la particula n-ésima de masa unidad)

Convengamos que:

$$f_{n-1}^{(-1)} = 0 \;,\; f_{n-1}^{(-2)} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.4)$$

sustituyendo la ecuación (5.1) en la ecuación (5.2) e igualando los términos con igual potencia

de Z, obtendremos una fórmula de recursión para los $f_n^{(n)}$:

$$P_n\, e^{-(Q'_{n-1}-Q_n)} = A\, e^{-(Q'_n-Q_n)}\, e^{-(Q'_{n-1}-Q_n)} - AC\, e^{-(Q'_{n-1}-Q_n)} + \frac{1}{A} - \frac{1}{AC}\, e^{-(Q'_{n-1}-Q_n)} \quad \ldots . \quad (5.5)$$

buscando otra expresión para $e^{-(Q'_n-Q_n)} = - e^{-(Q'_n-Q_{n+1})}\, e^{-(Q_{n+1}-Q_n)}$

$$\text{sean } a_n = \frac{1}{2}\, e^{-(Q_n-Q_{n-1})/2} \Longrightarrow a_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\, e^{-(Q_{n+1}-Q_n)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

luego la expresión queda : $e^{-(Q'_n-Q_n)} = 4\, a_{n+1}^2\, e^{-(Q'_n-Q_{n+1})}$

$$= 4a_{n+1}^2\; C \sum_{k=0}^{+\infty} Z^k f_n^{(k)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.6)$$

usando (5.6) y (5.5) la relación (5.5) queda:

$$P_n C \sum_{m=0}^{+\infty} Z^m f^{(m)}_{n-1} = AC^2(4a^2_{n+1}) \sum_{k=0}^{+\infty} Z^k f^{(k)}_n \sum_{l=0}^{+\infty} Z^l f^{(l)}_{n-1} - AC^2 \sum_{m=0}^{+\infty} Z^m f^{(m)}_{n-1}$$

$$+ \frac{1}{AC} - \frac{1}{AC}(C) \sum_{m=0}^{+\infty} Z^m f^{(m)}_{n-1}$$

simplificando "C" e introduciendo Z = AC tenemos

$$P_n \sum_{m=0}^{\infty} Z^m f^{(m)}_{n-1} = 4 a^2_{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} Z^{k+1} f^{(k)}_n \sum_{l=0}^{+\infty} Z^l f^{(l)}_{n-1} - Z \sum_{m=0}^{+\infty} Z^m f^{(m)}_{n-1}$$

$$+ \frac{1}{Z} - \frac{1}{Z} \sum_{m=0}^{+\infty} Z^m f^{(m)}_{n-1}$$

multiplicando por Z y agrupando en una sola sumatoria las potencias de Z del producto de sumatorias con índices independientes k y l :

$$P_n \sum_{m=0}^{+\infty} Z^{m+1} f^{(m)}_{n-1} = 4 a^2_{n+1} \sum_{k,l=0,1,\ldots}^{+\infty} Z^{k+l+2} f^{(k)}_n f^{(l)}_{n-1} - \sum_{m=0}^{+\infty} Z^{m+2} f^{(m)}_{n-1} + 1 - \sum_{m=0}^{+\infty} Z^m f^{(m)}_{n-1} \quad ..(5.7)$$

- el término del 2° miembro $4 a^2_{n+1} \sum_{k,l}^{+\infty} Z^{k+l+2} f^{(k)}_n f^{(l)}_{n-1}$ =

$$= 4 a^2_{n+1} \sum_{m=2}^{+\infty} Z^m \Big(\sum_{\substack{k,l = 0,1,\ldots \\ k+l = m-2}} f^{(k)}_n f^{(l)}_{n-1} \Big)$$

- reemplazando el término 1 del 2° miembro por $\sum_m Z^m \delta_{m,0}$ y reordenando (5.7)

- poniendo todas las sumatorias de Z^m

tenemos

$$\sum_{m=0}^{+\infty} Z^m f_{n-1}^{(m)} = \sum_{m=0} Z^m \delta_{m,0} - P_n \sum_{m=1}^{+\infty} Z^m f_{n-1}^{(m-1)} + 4\, a_{n+1}^{2} \sum_{m=2}^{+\infty} Z^m \Big[\sum_{\substack{k,l=0,1 \\ k+l=m-2}}^{+\infty} f_n^{(k)} \, f_{n-1}^{(l)} \Big] - \sum_{m=2}^{+\infty} Z^m f_{n-1}^{(m-2)} \qquad \text{.........................} \quad (5.8)$$

(5.8) es válido para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

igualando los coeficientes de las potencias iguales de Z:

$$f_{n-1}^{(0)} = 1\,, \qquad f_{n-1}^{(1)} = -P_n\, f_{n-1}^{(0)}, \qquad f_{n-1}^{(2)} = -P_n\, f_{n-1}^{(1)} + 4a_{n+1}^{2}\, f_n^{(0)}\, f_{n-1}^{(0)} - f_{n-1}^{(0)}\,,$$

reemplazando sucesivamente los $f_{n-1}^{(k)}$:

$$f_{n-1}^{(0)} = 1$$

$$f_{n-1}^{(1)} = -P_n$$

$$f_{n-1}^{(2)} = +P_n^{2} - 1 + 4\, a_{n+1}^{2}$$

$$f_{n-1}^{(3)} = -P_n^{3} + 2Pn - 4\, a_{n+1}^{2}\, (P_{n+1} + 2P_n)$$

$$f_{n-1}^{(4)} = +P_n^{4} - 3P_n^{2} + 1 + 4\, a_{n+1}^{2}\, (P_{n+1}^{2} + 3P_n^{2} + 2P_{n+1}\, P_n - 3) + 16(a_{n+2}^{2} + a_{n+1}^{2})\, a_{n+1}^{2}$$

....

Es decir hemos hallado una fórmula de recurrencia para los coeficientes de Z^n en el desarrollo (5.1); que podemos expresar:

$$e^{-(Q'_n-Q_{n+1})} = C\ \{\ 1 - P_n\, Z + (P_n^2-1 + 4a_{n+1}^2)\ Z^2 + [-P_n^3 + 2P_n - 4a_{n+1}^2\ (P_{n+1}+2P_n])\ Z^3 + ...\} \qquad ....(5.9)$$

Las expresiones anteriores podemos resumir en una fórmula de recurrencia

$$f^{(m)}_{n-1} = \delta_{m,0} - P_n\ f^{(m-1)}_{n-1} - f^{(m-2)}_{n-1} + 4a_{n+1}^2 \sum_{\substack{k,l=0,1 \\ k+l=m+2}} f^{(k)}_n\ f^{(l)}_{n-1} \qquad \text{para } m=2,3,............(5.10)$$

Veamos la forma que toma $\frac{df_n}{dt}$; nuestro deseo es obtener cantidades de la forma de f_n que se conservan es decir, la suma de alguna variable dinámica de todas las partIculas sea constante.

los $f^{(m)}_n$ $f^{(m)}$ (P_n, a_n); dependen de los P_n y de los Q_n a través de a_n.

Es decir los $f^{(m)}_n$ son funciones con variables dinámicas del sistema.

Para esto derivamos con respecto al tiempo la relación (5.1) y luego usamos otra de las transformaciones de Bäcklund, esto es

$$\frac{d}{dt}\,(Q'_n - Q_{n-1}) = A\ \left[e^{-(Q'_n-Q_n)} \qquad e^{-(Q'_{n-1}-Q_{n-1})}\right] \qquad (5.11)$$

Derivando (5.1)

$$(\dot{Q}_{n+1}-\dot{Q}_n)\, e^{-(Q_n-Q_{n+1})} = C\sum_{m=0}^{+\infty} Z^m f_n^{(m)}$$

$$(\dot{Q}_{n+1}-\dot{Q}_n)\left(C\sum_{k=0}^{+\infty} Z^k f_n^{(k)}\right) = C\sum_{r=0}^{+\infty} Z^r f_n^{(r)} \quad \text{..........................} \quad (5.12)$$

Además le daremos una forma distinta al segundo miembro de (5.11), lo pondremos en función de los a_{n+1} y los $f_n^{(m)}$ haciendo uso nuevamente de (5.1) y de $a_{n+1}^2 = (1/4)\, e^{-(Q_{n+1}-Q_n)}$;

tenemos

$$\frac{d}{dt}(\dot{Q}_n-\dot{Q}_{n-1}) = A\left[\,4a_{n+1}^2\, e^{-(Q_n-Q_{n+1})} - 4a_n^2\, e^{-(Q_{n-1}-Q_n)}\right]; \qquad \text{usando } Z = AC$$

$$= 4Z\left[\,a_{n+1}^2 \sum_{m=0}^{+\infty} Z^m f_n^{(m)} - a_n^2 \sum_{m=0}^{+\infty} Z^m f_{n-1}^{(m)}\right]$$

$$= 4\left[\,a_{n+1}^2 \sum_{m=0}^{+\infty} Z^{m+1} f_n^{(m)} - a_n^2 \sum_{m=0}^{+\infty} Z^{m+1} f_{n-1}^{(m)}\right]$$

$$\dot{Q}_n-\dot{Q}_{n-1} = 4\sum_{r=1}^{+\infty}\left(a_{n+1}^2 f_n^{(r-1)} - a_n^2 f_{n-1}^{(r-1)}\right) Z^r \quad \text{....................} (5.13)$$

reemplazando esta última relación en (5.12)

$$4\left[\sum_{r=1}^{+\infty}\left(a_{n+2}^2 f_{n+1}^{(r-1)} - a_{n+1}^2 f_n^{(r-1)}\right) Z^r\right]\left(\sum_{k=0}^{+\infty} Z^k f_n^{(k)}\right) = \sum_{r=0}^{+\infty} Z^r \frac{df_n^{(r)}}{dt}$$

desarrollando en el 1er miembro:

$$4 f_n^{(0)} \left[\sum_{r=1}^{+\infty} \left(a_{n+2}^2 f_{n+1}^{(r-1)} - a_{n+1}^2 f_n^{(r-1)}\right) Z^r\right] + 4 \sum_{p=2,3,..}^{+\infty} Z^p \left[a_{n+2}^2 \sum_{r=1}^{p-1} f_{n+1}^{(r-1)} f_n^{(p-r)}\right.$$

$$\left. - a_{n+1}^2 \sum_{r=1}^{p-1} f_n^{(r-1)} f_n^{(p-r)} \right] = \sum_{r=0}^{+\infty} Z^r \frac{df_n^{(r)}}{dt} \quad \text{..............................(5.14)}$$

igualando los coeficientes de las potencias iguales de Z.

$$\frac{d}{dt} f_n^{(0)} = 0 \longrightarrow f_n^{(0)} = \text{const}$$

$$\frac{d}{dt} f_n^{(1)} = f_n^{(0)} \left[a_{n+2}^2 f_{n+1}^{(0)} - a_{n+1}^2 f_n^{(0)}\right] \quad \text{...............................(5.15)}$$

$$\frac{df_n^{(p)}}{dt} = 4 \left\{ \left[a_{n+2}^2 f_{n+1}^{(p-1)} - a_{n+1}^2 f_n^{(p-1)}\right] f_n^{(0)} + \sum_{r=1}^{p-1} \left(a_{n+2}^2 f_{n+1}^{(r-1)} - a_{n+1}^2 f_n^{(r-1)}\right) f_n^{(p-r)} \right\}$$

para p = 2,3, ...

sumando para todas las particulas en ambos miembros de la última expresión:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{df_n^{(p)}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n^{(p)}\right) = 4 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[a_{n+2}^2 f_{n+1}^{(p-1)} - a_{n+1}^2 f_n^{(p-1)}\right] f_n^{(0)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=1}^{p-1} \left(a_{n+2}^2 f_{n+1}^{(r-1)} - a_{n+1}^2 f_n^{(r-1)}\right) f_n^{(p-r)} \right\} \quad \text{............(5.16)}$$

De la primera relaciòn (5.15) tenemos

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{df_n^{(0)}}{dt} = 0$$

De la segunda relaciòn (5.15)

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n^{(1)}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(a_{n+2}^2\, f_{n+1}^{(0)} - a_{n+1}^2\, f_n^{(0)}\right) f_n^{(0)}$$

en las sumatorias del tipo $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} (Y_{n+1}-Y_n) = \lim\limits_{r,s\to+\infty} \sum\limits_{n=-r}^{s} (Y_{n+1}-Y_n)$

$$= \lim_{r,s\to+\infty} \left(\sum_{n=-r+1}^{s+1} Y_n - \sum_{-r}^{s} Y_n\right)$$

$$= \lim_{r,s\to+\infty} \left(Y_{s+1}-Y_{-r}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (Y_{n+1}-Y_n) = Y_{+\infty} - Y_{-\infty} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.17)$$

Usando (5.17) en la relación para $f_n^{(1)}$; teniendo en cuenta además que $f_n^{(0)}$ = const. tenemos

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} f_n^{(1)}\right) = a_{+\infty}^2\, f_{+\infty}^{(0)} - a_{-\infty}^2\, f_{-\infty}^{(0)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pero } a_{+\infty}^2 = \dfrac{1}{4} \\[2ex] \quad\;\; a_{-\infty}^2 = \dfrac{1}{4} \end{array}\right] \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.18) \\[2ex] \text{por las condiciones } Q_n,\ Q_n' \to \text{const. cuando } |n| \to +\infty \end{array}$$

luego: $\frac{d}{dt}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} f_n^{(1)}\right) = 0 \Longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n^{(1)} = \text{const.}$; es decir nos confirma que el momentum total se conserva

La expresión (5.16) nos da la relación para

$\frac{df_n^{(p)}}{dt}$ p>1 , no todas las sumatorias son del tipo:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (Y_{n+1} - Y_n) \quad ;$$

que nos permitiría eventualmente obtener cero en el 2do miembro de (5.16); por tanto los

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n^{(p)}$ (p>1) no son cantidades que se conservan.

Buscaremos estas cantidades en la relación (5.13);

Desarrollando $(Q_n - Q'_{n-1})$ en serie de potencias enteras de Z

$$(Q_n - Q'_{n-1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} Z^k D_{n-1}^{(k)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.19)$$

$$D_{n-1}^{(k)} = \frac{d^k}{dZ^k}(Q_n - Q'_{n-1})\Big|_{Z=0}$$

Usando (5.19) en (5.13)

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} Z^k D_{n-1}^{(k)}\right) = 4\left\{\sum_{m=1}^{+\infty}\left[a_{n+1}^2 f_n^{(m-1)} - a_n^2 f_{n-1}^{(m-1)}\right] Z^m\right\}$$

por la propiedad de la derivada :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} Z^k \frac{d}{dt} D_{n-1}^{(k)} = 4 \left\{ \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\left(a_{n+1}^2 f_n^{(m-1)} - a_n^2 f_{n-1}^{(m-1)} \right) Z^m \right] \right\}$$

Igualando los términos de igual potencia de Z: i) $\dot{D}_{n-1}^{(0)} = 0$, para k=0

$$\text{ii)} \quad \frac{d}{dt} D_{n-1}^{(k)} = 4\, a_{n+1}^2 f_n^{(k-1)} - 4\, a_n^2 f_{n-1}^{(k-1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.20)$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots$$

(5.20) tiene la forma de una ley de conservación con la aproximación en diferencias de la derivada parcial de la expresiòn :

$a^2(x) f^{(k-1)}(x)$ cuando se toma $x_{n+1} = x_n + 1$

Una relación entre los $D_{n-1}^{(k)}$ y los $f_{n-1}^{(m)}$ obtenemos de (5.19) y (5.1):

de (5.1) $(Q_{n+1} - Q_n)' = \log \left(C \sum_{m=0}^{+\infty} Z^m f_n^{(m)} \right)$ luego comparando con (5.19)

$$\log \left(C \sum_{m=0}^{+\infty} Z^m f_{n-1}^{(m)} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} Z^k D_{n-1}^{(k)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.21)$$

Esta relación sirve para hallar los $D_{n-1}^{(k)}$ conociendo $f_n^{(m)}$ a partir de la relación de recurrencia (5.10)

DEMOSTRACION DE $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_{n-1}^{(k)} = \text{const.}$; k= 0,1,2,...

En la relación (5.20) sumando en ambos miembros de $n = -\infty$ hasta $n = +\infty$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} D_{n-1}^{(k)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 4 \left(a_{n+1}^2 f_n^{(k-1)} - a_n^2 f_{n-1}^{(k-1)} \right)$$; esta es una sumatoria del tipo

$$k=1,2, \ldots$$

$\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (Y_{n+1}-Y_n)$ que segun (5.17) es igual a $(Y_{+\infty} - Y_{-\infty})$; usaremos esta suma en la

última expresión ; con $Y_n = a_n^2 \, f_{n-1}^{(k-1)}$

Además usando la propiedad de la derivada tenemos,

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_{n-1}^{(k)}\right) = 4\left[a_{+\infty}^2 \, f_{+\infty}^{(k-1)} - a_{-\infty}^2 \, f_{-\infty}^{(k-1)} \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

de (5.18) tenemos $a_{+\infty}^2 = \frac{1}{4}$, $a_{-\infty}^2 = \frac{1}{4}$

y de la relación (5.3) tenemos:

$$c \, f_n^{(k)} = \frac{d^k}{dZ^k}\left(e^{-(Q_n'-Q_{n+1})} \right)\Big|_{Z=0}$$

cuando $|n| \to +\infty \Longrightarrow Q_n = \text{const.}\ Q_n' = \text{const.}$ luego $f_{\pm\infty}^{(0)} = \dfrac{e^{-(Q'_{-\infty} - Q_{-\infty})}}{C}$; sabemos que

$$C = \frac{e^{Q_{-\infty}}}{e^{Q'_{-\infty}}} , \Longrightarrow f_{\pm\infty}^{(0)} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.22)$$

para

$k = 1,2,\ldots$

$$\left.\begin{array}{l} c \, f_{-\infty}^{(k)} = \dfrac{d^k}{dZ^k}(C) = 0 \\[2ex] c \, f_{+\infty}^{(k)} = \dfrac{d^k}{dZ^k}(C^*) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f_{\pm\infty}^{(k)} = 0 , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.23)$$

Usando las relaciones (5.22) y (5.23) en (α):

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_{n-1}^{(k)}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n^{(k)} = \text{const} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (5.24)$$

Estas sumatorias son constantes del movimiento para $k = 0,1,2, \ldots\ldots$

De la relación (5.21) hallamos las expresiones para los $D_n^{(k)}$;

para esto asumimos que $(Q_{n+1} - Q_n') \leq \text{Ln } 2 + (Q_{-\infty} - Q_{-\infty}') \Longrightarrow$

$$0 \leq \frac{e^{(Q_{n+1} - Q_n)}}{e^{(Q_{-\infty} - Q_{-\infty}')}} \leq 2 \longrightarrow 0 \leq \exp\left[(Q_{n+1} - Q_n') - (Q_{-\infty} - Q_{-\infty}')\right] \leq 2$$

$$-1 \leq \frac{e^{(Q_{n+1} - Q_n')}}{C} - 1 \leq 1 \longrightarrow \left| \frac{\exp\,(Q_{n+1} - Q_n')}{C} - 1 \right| \leq 1 \ \ldots\ldots \qquad (5.25)$$

de (5.1) $\qquad \dfrac{e^{-(Q_n' - Q_{n+1})}}{C} - 1 = \displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} Z^m f_n^{(m)}$

sea $x = \sum_{m=1}^{+\infty} Z^m f_n^{(m)}$; por la condición impuesta en (5.25) $|X| = \left| \frac{e^{(Q_{n+1} - Q_n)}}{C} - 1 \right| \leq 1$

(usaremos el siguiente desarrollo en serie:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-)^{n+1} \frac{x^n}{n} \pm \ldots \; ; \qquad \text{con} \quad -1 < x \leq 1 \;)$$

en el primer miembro de (5.21) tenemos

$$\log\left(\sum_{m=0}^{+\infty} Z^m f_{n-1}^{(m)} \right) = \log\left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} Z^m f_{n-1}^{(m)} \right) + \log C$$

desarrollando los 4 primeros términos de la serie:

$$\log\left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} Z^m f_{n-1}^{(m)} \right) = \sum_{m=1}^{+\infty} Z^m f_{n-1}^{(m)} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} Z^m f_{n-1}^{(m)} \sum_{p=1}^{+\infty} Z^p f_{n-1}^{(p)} +$$

$$\frac{1}{3} \sum_{m=1}^{+\infty} Z^m f_{n-1}^{(m)} \sum_{p=1}^{+\infty} Z^p f_{n-1}^{(p)} \sum_{q=1}^{+\infty} Z^q f_{n-1}^{(q)} - \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{+\infty} Z^m f_{n-1}^{(m)} \sum_{p=1}^{+\infty} Z^p f_{n-1}^{(p)} \sum_{q=1}^{+\infty} Z^q f_{n-1}^{(q)} \sum_{r=1}^{+\infty} Z^r f_{n-1}^{(r)}$$

Obtengamos los primeros términos con potencias de Z (Z, Z^2, Z^3 y Z^4)

$$= (Z f_{n-1}^{(1)} + Z^2 f_{n-1}^{(2)} + Z^3 f_{n-1}^{(3)} + Z^4 f_{n-1}^{(4)}) - \frac{1}{2} (Z f_{n-1}^{(1)} + Z^2 f_{n-1}^{(2)} + Z^3 f_{n-1}^{(3)})(Z f_{n-1}^{(1)} + Z^2 f_{n-1}^{(2)} + Z^3 f_{n-1}^{(3)})$$

$$+ \frac{1}{3} (Z f_{n-1}^{(1)} + Z^2 f_{n-1}^{(2)})(Z f_{n-1}^{(1)} + Z^2 f_{n-1}^{(2)})(Z f_{n-1}^{(1)} + Z^2 f_{n-1}^{(2)}) - \frac{1}{4} (Z f_{n-1}^{(1)})(Z f_{n-1}^{(1)})(Z f_{n-1}^{(1)})(Z f_{n-1}^{(1)})$$

$$= Zf^{(1)}_{n-1} + Z^2\left[f^{(2)}_{n-1} - \frac{1}{2}(f^{(1)}_{n-1})^2\right] + Z^3\left[f^{(3)}_{n-1} - f^{(1)}_{n-1}f^{(2)}_{n-1} + \frac{1}{3}(f^{(1)}_{n-1})^3\right] + Z^4\left[f^{(4)}_{n-1} - \frac{1}{4}(f^{(1)}_{n-1})^4\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}(f^{(2)}_{n-1})^2 + f^{(2)}_{n-1}(f^{(1)}_{n-1})^2 - f^{(1)}_{n-1}\,f^{(3)}_{n-1}\right] + \ldots\ldots\ldots$$

comparando el último desarrollo con el 2do miembro de (5.21)

$$D^{(0)}_{n-1} = \log C$$

$$D^{(1)}_{n-1} = (-P_n)$$

$$D^{(2)}_{n-1} = \frac{1}{2}(f^{(1)}_{n-1})^2 + f^{(2)}_{n-1}$$

$$D^{(3)}_{n-1} = f^{(3)}_{n-1} + \frac{1}{3}(f^{(1)}_{n-1})^3 - f^{(1)}_{n-1}\,f^{(2)}_{n-1}$$

$$D^{(4)}_{n-1} = f^{(4)}_{n-1} - \frac{1}{4}(f^{(1)}_{n-1})^4 - f^{(1)}_{n-1}\,f^{(3)}_{n-1} + (f^{(1)}_{n-1})^2\,f^{(2)}_{n-1} - \frac{1}{2}(f^{(2)}_{n-1})^2$$

Usando las funciones $f^{(k)}_{n-1}$ tenemos.

$$D^{(1)}_{n-1} = -P_n \qquad\qquad \text{con } a^2_{n+1} = \frac{1}{4}\,e^{-(Q_{n+1}-Q_n)}$$

$$D^{(2)}_{n-1} = \frac{1}{2}P_n^2 + 4\,a^2_{n+1} - 1$$

$$D^{(3)}_{n-1} = P_n - \frac{1}{3}P_n^3 - 4\,a^2_{n+1}\,(P_{n+1} + P_n),$$

$$D^{(4)}_{n-1} = \frac{1}{2}P_n^4 - P_n^2 + \frac{1}{2} + 16\,a^2_{n+2}\left(a^2_{n+1} + \frac{1}{2}a^2_{n+1}\right) + 4a^2_{n+1}\left(P^2_{n+1} + 2P^2_n + P_{n+1}P_n - 2\right)$$

.... (5.26)

Son las 4 primeras cantidades que se conservan.

La primera es el momentumtotal : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n = \text{const}$

La segunda es la energla total de la Red

Energla cinética total ; $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}P_n^2$ (sistema con m=1)

Vimos en la sección anterior que la energla potencial total es

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 4a^2_{n+1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(Q_{n+1}-Q_n)}$$

En la suma $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} D^{(2)}_{n-1}$ surge la sumatoria $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(1)$ que diverge; este inconveniente se supera si desplazamos el nivel de referencia de la energla potencial de cada una de las partlculas; haciendo

$$V'_{n+1,n} \equiv e^{Q_{n+1} - Q_n} - 1 \quad \text{luego} \quad 4\,b^2_{n+1} = e^{Q_{n+1} - Q_n} - 1$$

$$a_{n+1}^2 = b_{n+1}^2 + \frac{1}{4}$$

con esto: $D_{n-1}^{(2)} = \frac{1}{2} P_n^2 + 4\, b_{n+1}^2$ todo esto conduce a

$$E_{total} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} P_n^2 + V'_{n+1,n} \right\} = \text{const.}$$

$D_{n-1}^{(3)}$ y $D_{n-1}^{(4)}$ en función de b_{n+1}^2 son:

$$D_{n-1}^{(3)} = -P_{n+1} - \frac{1}{3} P_n^3 - 4\, b_{n+1}^2 (P_{n+1} + P_n)$$

$$D_{n-1}^{(4)} = \frac{1}{2} P_n^4 + P_{n+1} P_n + P_{n+1}^2 + 4\, b_{n+2}^2 + 8\, b_{n+1}^2 (2\, b_{n+2}^2 + b_{n+1}^2) +$$

$$+ 4\, b_{n+1}^2 (P_{n+1}^2 + P_n^2 + P_{n+1} P_n)$$

Para las constantes $D_n^{(3)}$, $D_n^{(4)}$ ... no han sido hallados interpretaciones físicas sencillas.

Como se vè, hemos encontrado un número infinito de leyes de conservación puesto que $K = 1,2,3,\ldots$

Si nosotros pudieramos ser capaces de invertir las relaciones (5.26) de tal forma que tuviésemos $\{Q_n\}$ y $\{P_n\}$ en función de los $\{D_n^{(k)}\}$ entonces habriamos resuelto el sistema de ecuaciones que da las ecuaciones canónicas del movimiento.

Por supuesto que esto no es posíble, pero una vez que hemos hallado estas constantes, (en número que corresponde al número de grados de libertad del sistema) por lo dicho, esto nos dá una pista para pensar que estas ecuaciones canónicas se podran integrar completamente; es decir se podrán expresar las coordenadas y las impulsiones en función del tiempo y el movimiento del sistema quedará determinado cuando se dan las condiciones iniciales.

La existencia de un número infinito de cantidades que se conservan nos da la idea que el sistema de las ecuaciones canónicas tiene una solución explIcita.

En el caso de la ecuación de KdV; la existencia de un número infinito de leyes de conservación incentivó la busqueda de soluciones explIcitas de tal ecuación [1].

CAPITULO VI

LAS INTEGRALES DE HENON DE LA RED PERIODICA DE TODA

CAPITULO VI

6.1. INTEGRALES DE LA RED DE TODA

Ahora consideramos que la red de toda es un sistema de N masas **unitarias** conectadas por resortes no-lineales, gobernados por fuerzas de restitución exponenciales.

Esta es una red unidimensional no-lineal.

Las ecuaciones de movimiento son obtenidas usando el Hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} P_n^2 + \sum_{n=1}^{N} \{ e^{-(Q_n - Q_{n-1})} + (Q_n - Q_{n-1}) \}$$

Q_n : desplazamiento de la n-ésima partícula de su posición de equilibrio

P_n : momentum conjugado con Q_n

$$Q_n = P_n$$

$$P_n = e^{-(Q_n - Q_{n-1})} - e^{-(Q_{n+1} - Q_n)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.1)$$

Si hacemos $r_n = Q_n - Q_{n-1}$ y ponemos el momentum en función de la velocidad u_n correspondiente a la cordenada Q_n tenemos:

$$Q_n = U_n \qquad U_n = e^{-r_n} - e^{-r_{n+1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.2)$$

Son '2N' ecuaciones

Leyes de conservación de la Energía y el Momentum

Hacemos notar primero que las N coordenadas generalizadas son independientes. Las soluciones de las ecuaciones (6.1) para las N coordenadas generalizadas y sus respectivas velocidades, se pueden representar de la forma siguiente.

$Q_n = Q_n (t, c_1, c_2, \ldots\ldots c_{2N})$

$n = 1,2,\ldots N$; tenemos 2N constantes arbitrarias

$U_n = U_n (t, c_1, c_2, \ldots\ldots c_{2N})$

Cada juego de los c_n da una diferente función del tiempo para los Q_n y U_n y por tanto una ecuación de un movimiento particular.

De estas 2N ecuaciones se puede excluir el tiempo y obtener funciones de las coordenadas generalizadas Q_n y de las velocidades generalizadas U_n, que permanecen constantes durante el movimiento. Estas funciones se llaman <u>integrales del movimiento.</u>

El problema fundamental de la mecánica es hallar las integrales del movimiento; entre éstos la <u>primera integral de movimiento</u> de cualquier sistema cerrado es su energia total. Esta ley se deduce de la uniformidad del tiempo, es decir, de que las leyes del movimiento de un sistema son independientes del origen de los tiempos que se elija. En nuestro caso particular de sistema conservativo, de la uniformidad del tiempo se deduce la ley de la conservación de la <u>energla mecanica total del sistema.</u>

En efecto, en virtud de la uniformidad del tiempo la función de Lagrange L, que define la ley del movimiento del sistema conservativo que estudiamos, no depende explícitamente del tiempo.

<u>Primero:</u>

demostraremos que $\dfrac{\delta H}{\delta t} \qquad \dfrac{\delta L}{\delta t}$

Usaremos:

$$(*)\quad H(Q,P,t) = P_\alpha \dot{Q}_\alpha (Q,P,t) - L(Q,\dot{Q}(Q,P,t),\, t)$$

$$L = L(Q,\dot{Q},t)$$

$$(**)\ \text{de } P_\alpha = \frac{\delta L}{\delta \dot{Q}_\alpha} \quad \text{obtenemos } \dot{Q}_\alpha = \dot{Q}_\alpha(Q,P,t)$$

En (**) hemos usado el teorema siguiente:

sea $P_\alpha = f_\alpha(\dot{Q},Q,t)$ donde $Q = \{Q_1, Q_2, \ldots Q_N\}$

$\alpha = 1,2, \ldots, N$

Puede ser invertido para producir

$$\dot{Q}_\alpha = g_\alpha(Q,P,t) \quad \text{sólo si} \quad \det\left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta \dot{Q}_\beta}\right) \neq 0$$

$$\text{esto es si} \quad \det\left(\frac{\delta^2 L}{\delta \dot{Q}_\alpha\, \delta \dot{Q}_\beta}\right) \neq 0\,.$$

tenemos derivando (*)

$$\frac{\delta H}{\delta t} = P_\alpha \frac{\delta \dot{Q}_\alpha}{\delta t} - \frac{\delta L}{\delta t} - \frac{\delta L}{\delta \dot{Q}_\beta} \frac{\delta \dot{Q}_\beta}{\delta t} \quad (***)$$

el primer y tercer términos de (***) se cancelan de acuerdo con (**)

entonces

$$\frac{\delta H}{\delta t} = -\frac{\delta L}{\delta t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.3)$$

<u>Segundo</u> : Demostraremos que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\delta H}{\delta t} \quad \text{a partir de} \quad h(t) = H(Q(t),P(t),t)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\delta H}{\delta Q_\epsilon}\dot{Q}_\epsilon + \frac{\delta H}{\delta P_\epsilon}\dot{P}_\epsilon + \frac{\delta H}{\delta t} \quad \cdots\cdots (*)$$

Usando las ecuaciones canónicas : $\dot{P}_\epsilon = -\dfrac{\delta H}{\delta Q_\epsilon}$

$$\dot{Q}_\epsilon = -\frac{\delta H}{\delta P_\epsilon}$$

La expresión (*) queda :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\delta H}{\delta t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6.4)$$

de las propiedades (6.3) y (6.4) vemos que si L no depende explicitamente del tiempo, tampoco H dependera explícitamente y que H es entonces una constante de movimiento.

<u>Tercero:</u> Consideramos el Lagrangiano del sistema $L = T - V$

$$H = \dot{Q}_\epsilon P_\epsilon - L \Rightarrow H = \dot{Q}_\epsilon \frac{\delta L}{\delta \dot{Q}_\epsilon} - L = \dot{Q}_\epsilon \frac{\delta T}{\delta \dot{Q}_\epsilon} - L$$

$= \dot{Q}_\epsilon P_\epsilon - (T-V)$ (aqui usamos la relación (*) de la nota(1))

$= 2T - (T-V)$

$H = T + V$

En este caso $H = E =$ const.

Es decir que la energia total es una constante del movimiento del sistema.

<u>1.-NOTA</u>

$$L = \frac{1}{2} m \sum \dot{Q}_n^2 - \sum (e^{-r_n} + r_n)$$

donde:

$V = V(Q)$: la energia potencial del sistema que es independiente de los Q_n

$T = T(Q)$: la energía cinética que es cuadrático homogenea en los Q_n

$$T = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m \dot{Q}_n^2$$

$$\text{de L obtenemos: } P_n = \frac{\delta L}{\delta \dot{Q}_n} = m\dot{Q}_n$$

$$\text{luego: } \quad T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \dot{Q}_n P_n \qquad 2T = \sum_{n=1}^{N} \dot{Q}_n P_n \quad (*)$$

Integral del movimiento de un sistema cerrado es también el vector impulsión (o cantidad de movimiento) de dicho sistema. La ley de la conservación de la impulsión se deduce de la uniformidad del espacio. La uniformidad del espacio significa, que en él la traslación paralela de un sistema mecánico cerrado, como un todo único, no varia las propiedades mecánicas del mismo, es decir, que durante esta traslación su función de Lagrange permanece invariable.

La función de Lagrange del sistema :

$$L = \frac{1}{2} \sum \dot{Q}_n^2 - \sum (e^{-r_n} + r_n); \text{ estamos tomando } m = 1$$
para todas las particulas.

tomamos una variación de la función de Lagrange cuando el sistema se desplaza paralelamente una distancia infinitesimal, definida por el vector traslación $\overline{\delta g} = \delta g \, \hat{i}$ entonces todas las Q_n se sustituyen por $Q_n + \delta g$

$$\Longrightarrow \quad r_n' = (Q_n + \delta G) - (Q_{n-1} + \delta g)$$

$$r_n = Q_n - Q_{n-1}$$

r_n queda invariable, es decir:

$$r_n' \quad (Q_n, Q_{n-1}, \delta g) = r_n (Q_n, Q_{n-1})$$

$$\delta L = L\,(Q_n + \delta g,\ \dot{Q}_n + \delta\dot{g},\ t) - L\,(Q_n, \dot{Q}_n,\ t)$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} \sum (\dot{Q}_n + \delta\dot{g})^2 - \sum\left(e^{-r_n(\delta g)} + r_n(\delta g)\right) \right\} -$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \sum \dot{Q}_n^{\,2} - \sum \left(e^{-r_n} + r_n\right) \right\}$$

$$\delta L = 0$$

teniendo en cuenta $\frac{d}{dt}(\delta g) = 0$, puesto que δg = const.

además $\delta L = \sum_\alpha \frac{\delta L}{\delta Q_\alpha}\,\delta g = \delta g \sum_\alpha \frac{\delta L}{\delta Q_\alpha}$; usando la ecuación de Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{Q}_\alpha}\right) - \frac{\delta L}{\delta Q_\alpha} = 0$$

tenemos

$$\delta L = \delta g \left\{ \sum_\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{Q}_\alpha}\right)\right\}$$

$$\delta L = \delta g \frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha \frac{\delta L}{\delta Q_\alpha}\right)$$

usando $\delta L = 0 \implies \frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha \frac{\delta L}{\delta \dot{Q}_\alpha}\right) = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha P_\alpha\right) = 0 \implies P = \sum_\alpha P_\alpha = \text{const.}$$

como es una red unidimensional se entiende que si elegimos el eje x como la dirección de movimiento todos los $\bar{P}_\alpha$ estarán en el eje x

6.2. INTEGRALES DE HENON

Volviendo a las ecuaciones (6.2)

$$\dot{Q}_n = U_n \qquad \dot{U}_n = e^{-r_n} - e^{-r_{n+1}}$$

Trataremos de hallar mas integrales del movimiento.

Para esto definimos:

$$X_n = e^{-(Q_{n+1} - Q_n)} \quad ; \quad X_n = e^{-r_{n+1}} \qquad \text{con} \quad r_{n+1} = Q_{n+1} - Q_n$$

Las ecuaciones de movimiento vienen a ser:

$$\dot{X}_n = (U_n - U_{n+1}) X_n \quad ; \quad \dot{U}_n = X_{n-1} - X_n \text{ ....}(6.5)$$

Consideramos el caso de una red periodica:

$Q_{n+N} = Q_n$, (N es el número de partículas) ésta es una condición de contorno

El sistema será definido por un periodo completo, por ejemplo por las partículas del 1 al N. Probaremos que las siguientes expresiones son N integrales independientes del movimiento:

$$I_m = \Sigma \; U_{i_1} \; U_{i_2} \ldots U_{i_k} \; (-X_{j_1}) \; (-X_{j_2}) \ldots (-X_{j_r}) \quad ; \quad m = 1,2, \ldots , N \; (6.6)$$

donde la sumatoria se extiende a todos los términos que satisfacen las siguientes condiciones:

I .- Los Indices i_1, i_2, ..., i_k, j_1+1, ..., j_r, j_r+1, que aparacen en cada término, (en cualquier caso: explícitamente o implícitamente a través del factor X_j) son todos diferentes (con módulo N). Debe notarse que a través del factor Xj_r se determina 2 Indices de los Q, a saber:

$$(Qj_r \text{ y } Qj_{r+1})$$

II. El número de estos Indices es m; satisfaciendo esta relación:

$k + 2r = m$ (un Indice j_r ya determina el siguiente j_{r+1})

Si dos términos difieren sólo en el orden de los factores no son considerados diferentes, y por consiguiente solamente uno de aquellos términos aparecerá en la suma.

Escribamos esta expresiones para los primeros valores de N = 1, 2, 3 y 4

Para N = 1; primero determinamos los valores de k y r: $k + 2r = m$; para m = 1 es decir un Indice i_1 y ningun Indice j (ya que r = 0) el Indice i_1 tiene el único valor 1 (debe ser $i_1 \leq N$) por la condic. (I) en definitiva queda $I_1 = U_1$ como integral única de movimiento de la forma dada en (6.6) I_1 es el momentum para una particula de masa unidad.

Para N = 2; los valores de m serán 1 y 2, tendremos I_1 y I_2, ahora obtenemos valores de k y r para esos valores de m según la relación conocida entre aquellos,

k	+ 2r	= m
1	0	1
0	1	2
2	0	2

<u>para m = 1:</u> k = 1 y r = 0, es decir un indice i y ningún indice j,

es decir

$$i_1 = 1,2, \text{---}\!> I_1 = \sum_{i_1} U_{i_1}$$

$$I_1 = U_1 + U_2$$

<u>para m = 2:</u>

(*) $k = 0$ y $r = 1$, esto es, ningún índice

i y un índice j

$j_1 = 1,2$

tenemos la suma

$$\sum_{j_1} (- X_{j_1})$$

(**) $k = 2$ y $r = 0$, esto es, 2 índices

i (i_1, i_2) y ningún

índice j.

con i_1, i_2 = 1,2, tenemos la suma

$$\sum_{i_1, i_2} U_{i_1} \quad U_{i_2}$$

de (*) y (**) queda:

$$I_2 = \sum_{j_1} (-X_{j_1}) + \sum_{i_1, i_2} U_{i_1} U_{i_2}$$

$= - X_1 - X_2 + U_1 U_2$ en la segunda sumatoria hemos considerado la condición (II)

Para N = 2 hemos obtenido 2 integrales I_1 y I_2,

I_1 ----> es el momentum total que se conserva.

I_2 ----> un significado físico simple no tiene esta integral, pero se ve que está relacionado con la energía total E.

$$I_2 = \frac{1}{2}U_1^2 + \frac{1}{2}U_2^2 + U_1 U_2 - \left(\frac{U_1^2}{2} + \frac{U_2^2}{2} + X_1 + X_2\right)$$

$$= \frac{1}{2}(U_1 + U_2)^2 - (T + V)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}I_1^2 - E$$

hemos tomado $T = \frac{1}{2}U_1^2 + \frac{1}{2}U_2^2$ y $V = X_1 + X_2$ en la anterior demostración.

explicaremos esto : 1) U_1 y U_2 son las cantidades de movimiento de las particulas de masa Unidad 1 y 2 respectivamente.

entonces la energía cinética del sistema queda:

$$T = \frac{1}{2}U_1^2 + \frac{1}{2}U_2^2$$

2) la energía potencial total

$$V = V_1 + V_2$$

$$= \{e^{-(Q_1-Q_0)} + (Q_1-Q_0)\} + \{e^{-(Q_2-Q_1)} + (Q_2-Q_1)\}$$

Pero por la condición de una red periodica:

$Q_{n+2} = Q_n$; en esta caso $N = 2$

$n = 0,1,2, \ldots$

con esto $Q_0 = Q_2$ y $Q_1 = Q_3$

$$y \qquad V = e^{-(Q_3-Q_2)} + e^{-(Q_2-Q_1)} + (Q_1-Q_0) + (Q_2-Q_1)$$

$$= X_2 + X_1 + (-Q_2) + Q_2$$

$$V = X_2 + X_1$$

entonces $I_2 = \frac{1}{2} I_1^2 - E$, $\quad E$ ---> energía total

I_1---> momentum total

conclusión: para N = 2 hemos obtenido 2 integrales de movimiento (I_1 y I_2).

Para N = 3 Los valores de m = 1, 2, 3 ; tenemos I_1, I_2 y I_3

<u>para m = 1</u> ; $k + 2r = m$ $\quad$ Indices i : i_1 , ningun indice r

k	r	m
1	0	1

$$I_1 = \sum_{i_1=1,2,3} U_{i_1} = U_1 + U_2 + U_3$$

otra vez I_1 representa el momentum total.

<u>para m = 2</u> ; $k + 2r = m$ $\quad$ (*) es decir k = 0 (ningún indice i)

r = 1 (un Indice j) $j_1 = 1,2,3$

$$\left.\begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix}\right] 2$$

entonces tenemos la siguiente sumatoria para esta combinación de Indices.

$$\sum_{j_1} (-X_{j_1})$$

(**) $k = 2$; $i_1, i_2, = 1,2,3$

ningun indice j (r=0)

$$\sum_{i_1,i_2} (U_{i_1} \; U_{i_2})$$

de (*) y (**) tenemos:

$$I_2 \quad \sum_{i_1,i_2} (U_{i_1}\ U_{i_2}) + \sum_{j_1} (-X_{j_1})$$

$$= U_1 U_2 + U_1 U_3 + U_2 U_3 - X_1 - X_2 - X_3$$

al efectuar la primera sumatoria hemos considerado las condiciones (I) y (II) que prohibe los siguientes términos:

$U_1.U_1$, $U_2.U_2$, $U_3.U_3$; por tener índices que se repiten

$U_2 U_1$, $U_3 U_1$, $U_3 U_2$; términos que se diferencian con los ya escritos solamente en el orden de sus factores.

Nuevamente:

$$I_2 = \frac{1}{2}(U_1+U_2+U_3)^2 - \left(\frac{1}{2}U_1^2 + \frac{1}{2}U_2^2 + \frac{1}{2}U_3^2 + X_1 + X_2 + X_3\right)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} I_1^2 - E \qquad E = \text{Energía total.}$$

con $T = \frac{1}{2}(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)$, energía cinética (considerando masas unitarias)

$V = X_1 + X_2 + X_3$, energía potencial

verificamos $V = \sum_{n=1}^{N} \{ e^{-(Q_n-Q_{n-1})} + (Q_n-Q_{n-1}) \}$

en general para N = cualquiera y considerando $Q_{n+N} = Q_n$ (red periodica)

$$V = e^{-(Q_1-Q_0)} + (Q_1-Q_0) + e^{-(Q_2-Q_1)} + (Q_2-Q_1) + \ldots + e^{-(Q_{N-1}-Q_{N-2})} + (Q_{N-1}-Q_{N-2}) + e^{-(Q_N-Q_{N-1})} + (Q_N-Q_{N-1})$$

$$= e^{-(Q_1-Q_0)} + e^{-(Q_2-Q_1)} + \ldots + e^{-(Q_{N-1}-Q_{N-2})} + e^{-(Q_N-Q_{N-1})} + (Q_1-Q_0) + (Q_2-Q_1)+(Q_3-Q_2)+\ldots$$
$$+ (Q_{N-1}-Q_{N-2})+(Q_N-Q_{N-1})$$

$$= e^{-(Q_{N+1}-Q_N)} + e^{-(Q_2-Q_1)} + \ldots + e^{-(Q_{N-1}-Q_{N-2})} + e^{-(Q_N-Q_{N-1})} + (Q_0-Q_N)$$

Usando:

$$V = X_N + X_1 + \ldots + X_{N-2} + X_{N-1}$$

$Q_N = Q_0$

$Q_{N+1} = Q_1$ es decir $V = \sum_{j_1=1}^{N} (X_{j_1})$ energía potencial total ...... (6.7)

$Q_{N+1} - Q_N = Q_1 - Q_0$

para m = 3

$$k + 2r = m$$

$$\left.\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right] 3$$

tendremos dos tipos de sumatorias

(*) $k = 3 \Longrightarrow \{i_1, i_2, i_3,\}$ y ningún índice j

$$\sum_{i_1\, i_2\, i_3} U_{i_1} U_{i_2} U_{i_3}$$

(**) $k = 1 \Longrightarrow i_1 = 1,2,3$ y $r=1$, $j_1 = 1,2,3$

$$\sum_{i_1 j_1} U_{i_1} (-X_{j_1})$$

luego

$$I_3 = \sum_{i_1\, i_2\, i_3} U_{i_1} U_{i_2} U_{i_3} + \sum_{i_1 j_1} U_{i_1} (-X_{j_1})$$

$$= U_1 U_2 U_3 - U_1 X_2 - U_2 X_3 - U_3 X_1$$

<u>En la primera sumatoria</u> se tuvo en cuenta la condición (I); es decir, no aparecen los términos $U_1 U_1 U_3$, $U_2 U_2 U_3$, ... en los que se repiten los índices de las U.

Tampoco aparecen los términos $U_2 U_1 U_3$, $U_1 U_3 U_2$, $U_3 U_1 U_2$, $U_2 U_3 U_1$, $U_3 U_2 U_1$, que difieren del término $U_1 U_2 U_3$, ya escrito, solamente en el orden de sus factores.

<u>En la segunda sumatoria</u> se tuvo en cuenta la condición (II) que es fácil de tener en cuenta y la condición (I) que deja de lado los términos U_1X_3, U_2X_1, U_3X_2, ... puesto que a través de X_1, X_2, X_3, están los indices i_1 = 2, 3, 1, que repetirían los subíndices de U_2 U_3 y U_1 respectivamente, a saber:

$$X_1 = e^{-(Q_2-Q_1)}, \quad X_2 = e^{-(Q_3-Q_2)} \quad y \quad X_3 = e^{-(Q_4-Q_1)}$$

en X_1 ya aparece el subíndice 2 de Q_2 que repetiría el subíndice de U_2 en el producto U_2X_1, la misma explicación sirve para U_3X_2 y U_1X_3.

Si queremos desarrollar para N mayores, habra que fijarnos en los Im anteriores y hacer un cuadro

N ----> / m ↓	1	2	3	4
I_1	U_1	U_1+U_2	$U_1+U_2+U_3$	$U_1+U_2+U_3+U_4$
I_2		$U_1U_2-X_1-X_2$	$U_1U_2+U_1U_3+U_2U_3-X_1-X_2-X_3$	$U_1U_2+U_1U_3+U_1U_4+U_2U_3+U_3U_4+U_2U_4-$ $X_1-X_2-X_3-X_4$
I_3			$U_1U_2U_3-U_1X_2-U_3X_1-U_2X_3$	$-U_1X_2-U_1X_3-U_2X_3-U_2X_3-U_2X_4-$ $-U_3X_1-U_3X_4-U_4X_1-U_4X_2+$ $+U_1U_2U_3+U_1U_2U_4+U_2U_3U_4+U_1U_3U_4$
I_4				$U_1U_2U_3U_4-U_1U_2X_3-U_1U_4X_2-$ $-U_2U_3X_4-U_3U_4X_1+X_1X_3+X_2X_4$

Fig. Integrales de movimiento para sistemas con N = 1, 2, 3 y 4 partículas sucesivamente con condiciones de contorno periodicas.

Se aprecia en el cuadro que los I_1 son los momentum totales en cada caso y los I_2 están relacionados con I_1 y la Energía por : $I_2 = 1/2\ I_1^{2} - E$.

Para probar que $I_* = 0$, es conveniente hacer el siguiente convenio de notación:

Sean simbólicamente $U_n = [n]$, $(-X_n) = [n, n+1]$

las relaciones (6.5) vienen a ser:

$$X_n = (U_n - U_{n+1})\,X_n \quad \dashrightarrow \quad \frac{d}{dt}[n, n+1] = ([n]-[n+1])\,[n,n+1], \tag{6.8}$$

$$U_n = X_{n-1} - X_n \quad \dashrightarrow \quad \frac{d}{dt}[n] = -[n-1,n] + [n,n+1]$$

Escribamos nuevamente I_m :

$$I_m = \sum U_{i_1} U_{i_2} \ldots U_{i_k} (-X_{j_1})(-X_{j_2})..(-X_{j_r})$$

$$(m = 1,2,3,..N)$$

$$I_m = \sum [i_1][i_2]..[i_k][j_1,j_1+1][j_2,j_2+1]...[j_r,j_r+1]$$

Por consiguiente Im es una suma de términos de la misma forma como los términos originales excepto que un indice eventualmente puede aparecer 2 veces.

Observemos la derivada de un término de Im: $\frac{d}{dt}(ABC..G) = \dot{A}BC...G + A\dot{B}C...G + ... + ABC...\dot{G}$

Consideremos todos los casos.

a) <u>Un término derivado no tiene Indice doble:</u>

La no repetición de un Indice en un término derivado puede ocurrir solamente después de la derivación de un factor [n]; observamos que esto es asl por la forma que toma esta derivada en (6.8); es decir aparecen los Indices n-1 y n+1 que podrlan diferenciarse de los indices de los otros factores que eventualmente no han usado estos Indices (n-1) y (n+1) respectivamente.

Un término <u>nuevo</u> tendrá indices no repetidos si por ejemplo 'n+1' no ha sido usado por los otros factores de este término en cuestión, entonces el término resultante que contiene [n,n+1] <u>no tiene</u> Indice doble. Además existe otro

término original donde [n] es reemplazado por [n+1], quedando los otros factores con sus mismos indices correspondientes, es decir estos términos se diferencian sólo por los factores [n] y [n+1]; por la condición (I) un índice i_k toma los valores 1,2,3, ...N.

Este término una vez derivado el factor [n+1] produce dos terminos $\frac{d}{dt}[n+1] = -[n, n+1] + [n+1,n+2]$ uno de ellos, el que contiene a -[n,n+1] como factor, anula el término anterior.

Asl todos los términos derivados de esta manera se anulan.

En la tabla anterior podemos ver términos de este tipo en N = 4, m = 3

$-U_1X_3$ y $-U_2X_3$, $-U_2X_4$ y $-U_3X_4$, $-U_3X_1$ y $-U_4X_1$ (sabemos que $U_5 = U_{4+1} = U_1$ para red periodica).

por ejemplo: $-\frac{d}{dt}(U_1)X_3 = -(X_0 - X_1)\,X_3$

$$y \; -\frac{d}{dt}(U_2)X_3 = -(X_1 - X_2)\,X_3$$

se ve que los términos derivados $+X_1X_3$ y $-X_1X_3$ se cancelan.

b) <u>Un término derivado tiene un índice doble n, común a un factor [n] y a un factor [n,n+1].</u>

Esto puede resultar de la derivación de un término original que contenía [n,n+1] ó [n][n+1]

(despues de la derivación de [n+1] : $\frac{d}{dt}[n+1] = -[n, n+1] + [n+1,n+2]$)

En el primer caso : $\frac{d}{dt}[n,n+1] = ([n]-[n+1])\,[n, n+1]$, el término :

[n] [n,n+1] tiene signo (+)

En el segundo caso : $\frac{d}{dt}\{[n][n+1]\} = [n](-[n,n+1]+[n+1,n+2]) + (-[n-1,n]+[n,n+1])[n+1]$

Los otros términos de esta derivación no nos interesan por el momento. El término que contiene a [n][n,n+1] tiene signo (-); para algún término que contiene [n,n+1], existe otro término donde éste es reemplazado por [n][n+1], y viceversa, como está demostrado por la regla de formación usando la condición (I) donde los índices en cada término son todos diferentes y menores que N.

En la tabla vemos los siguiente términos de este tipo correspondiente a $N = 3$, $m = 3$;

$I_3 = U_1 U_2 U_3 - U_1X_2 - U_3X_1 - U_2X_3$; en nuestra notación:

$I_3 = [1][2][3] + [1][2,3] + [3][1,2] + [2][3,1]$

derivación: $I_3 = [1]'[2][3] + [1][2]'[3] + [1][2][3]' + [1]'[2][3] +$

$[1][2,3]' + [3]'[1,2] + [3][1,2]' + [2]'[3,1] + [2][3,1]'$

donde los factores primados signfican

derivadas con respecto al tiempo : $\frac{d}{dt}[1] = [1]'$

En este caso están los términos : [1][2,3]'y [1][2][3]', [3][1,2] y [1][2]'[3]

[2][3,1]' y [1]'[2][3]

Por ejemplo en el primer juego :

$[1][2,3]' = [1]([2]-[3])\ [2,3] = \underline{+[1][2][2,3]} - [1][3][2,3]$

y

$[1][2][3]' = [1][2](-[2,3]+[3,1]) = \underline{-[1][2][2,3]} + [1][2][3,1]$

Es decir los términos subrayados se anulan

c) <u>El caso de un índice doble n común a un factor [n-1,n] y a un factor [n]</u>

Este caso similar al anterior resulta de la derivación de [n-1,n] ó [n][n-1] (como resultado de la derivación de [n-1]: $\frac{d}{dt}$ [n-1] = -[n-2,n-1]+ $\underline{\text{[n-1,n]}}$)

en el primer caso :

$$\frac{d}{dt}[n-1,n] = ([n-1]-[n])\,[n-1,n] = [n-1][n-1,n] - \underline{[n][n-1,n]} \;...\; (*)$$

en el segundo caso :

$$\frac{d}{dt}([n][n-1]) = [n]\,[n-1]' + [n]'[n-1]$$

$$= [n]\,(-[n-2,n-1] + [n-1,n]) + [n]'[n-1]$$

$$- [n][n-2, n-1] + \underline{[n][n-1,n]} \;............\; (**)$$

los términos subrayados de (*) y (**) son terminos que tienen el Indice común [n]. Además, se anulan por tener signos distintos.

en I_2 de N = 3 vemos : $I_2 = U_1U_2 + U_2U_3 + U_3U_1 - X_1\text{-}X_2\text{-}X_3$

$$I_2 = [1]'[2]+[1][2]'+ [2]'[3]+[2][3]'+ [3]'[1]$$

$$+ [3][1]'+ [1,2]'+ [2,3]'+ [3,1]'$$

Vemos que en este caso están : [1]'[2] y [1,2]',[2]'[3] y [2,3]',[3]'[1]

y [3,1]'

en el primer juego: [1]'[2] = (-[3,1] + [1,2]) [2] = - [3,1] [2] + $\underline{\text{[1,2]}}$ $\underline{\text{[2]}}$

y

$$[1,2]' = ([1]-[2])\,[1,2]) = [1]\,[1,2] - \underline{[2]}\;\underline{[1,2]}$$

los terminos subrayados tiene el Indice comun [2], además se cancelan mutuamente.

d) Un término derivado tiene un Indice doble n común a un factor <u>[n-1,n]</u> <u>y</u> a un <u>factor [n,n+1]</u>.

Esto resulta de la derivación de un término original que contiene [n-1][n,n+1] ó [n-1,n] [n+1], (despues de derivar [n-1] y [n+1] respectivamente)

en el primer caso :

$$\frac{d}{dt}([n-1][n,n+1] = [n-1]'[n,n+1] + [n-1][n,n+1]'$$

$$= (-[n-2,n-1]+[n-1,n])[n,n+1]+[n-1][n,n+1]'$$

$$=-[n-2,n-1][n,n+1]+\underline{[n-1,n][n,n+1]}+[n-1][n,n+1]'$$

en el segundo caso :

$$\frac{d}{dt}([n-1,n][n+1])= [n-1,n]'[n+1] + [n-1,n][n+1]'$$

$$= [n-1,n]'[n+1] + [n-1,n]\ (-[n,n+1]+[n+1,n+2])$$

$$= [n-1,n]'[n+1]-\underline{[n-1,n][n,n+1]}+[n-1,n][n+1,n+2]$$

Los términos subrayados contienen el índice común n , y además se cancelan.

Tomando I_3 de N = 3 del cuadro : $I_3 = U_1 U_2 U_3 - U_1X_2 - U_2X_3 - U_3X_1$;

$$I_3 = \frac{d}{dt}([1][2][3]) + \underline{[1]'[2,3]} + [1][2,3]' + [2]'[3,1] + [2][3,1]'$$

$$+ [3]'[1,2] + [3][1,2]'$$

tenemos:

$[1]'[2,3]$, $[3]'[1,2]$, $[1]'[2,3]=(-[3,1]+[1,2])[2,3]=\underline{\underline{[3,1][2,3]}} + \underline{[1,2][2,3]}$ ..(*)

y

$[2]'[3,1]$ $\quad [3]'[1,2]=(-[2,3]+[3,1])[1,2]=-\underline{[2,3][1,2]}+[3,1][1,2]$......(**)

y

$[2]'[3,1] =(-[1,2]+[2,3])[3,1]=-[1,2][3,1]+\underline{\underline{[2,3][3,1]}}$ .... (***)

Los términos subrayados con (--) de (*) y (**) y los terminos subrayados con (==) de (*) y (***) se cancelan entre ellos.

ANEXO C

APROXIMACION CONTINUA DE LA RED DE TODA: LA ECUACION DE KdV.

Hacemos notar que la ecuación de KdV es una aproximación continua de la **Red de Toda**.

Mostramos la última afirmación a partir de la siguiente ecuación:

$$\dot{P}_n = e^{-(Q_n-Q_{n-1})} - e^{-(Q_{n+1}-Q_n)}$$; estamos trabajando con un sistema de partículas con masas unidad.

Subdiviendo cada partícula en M "Subpartículas" de masa 1/M y distribuyendo aquellas uniformemente a lo largo de los "resortes" nosotros localizamos cada partícula mediante su posición Q(x) en lugar de Q(n). Esto es, Q(x) es el desplazamiento de la sub-partícula de su posición de equilibrio, sea h = a/M la separación entre las sub-partículas, 'a' es la separación entre n y n+1, n y n-1, etc.

El número total de partículas es muy grande (N ---> $+\infty$)

sean $X = ih$, $i = 0, \pm 1., \pm 2, \ldots$ el índice que localiza las sub-partículas.

La ecuación queda $$\dot{P}_i = e^{-(Q_i-Q_{i-1})} - e^{-(Q_{i+1}-Q_i)}$$

siendo $Q_i = Q_{(x)}$ ===> $Q_{i+1} = Q_{(x+h)}$; $Q_{i-1} = Q_{(x-h)}$

Y

$$P_{(x)} \quad e^{-[Q_{(x)} - Q_{(x-h)}]} - e^{-[Q_{(x+h)} - Q_{(x)}]} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

usaremos los siguientes desarrollos en serie:

$$Q_{(x\pm h)} = Q_{(x)} \pm hQ^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2} Q^{(2)}_{(x)} \pm \frac{h^3}{6} Q^{(3)}_{(x)} + \frac{h^4}{24} Q^{(4)}_{(x)} + \ldots,$$ hemos omitido escribir la dependencia temporal de los $Q = Q_{(x,t)}$

del último desarrollo obtenemos $Q_{(x+h)} - Q_{(x)}$ y $Q_{(x-h)} - Q_{(x)}$ luego los reemplazamos hasta términos con h^4 en la ecuación (*) ; además $P_{(x)} = Q_{(x)}$

$$Q_{(x)} = e^{-(hQ^{(1)}_{(x)} - \frac{h^2}{2}Q^{(2)}_{(x)} + \frac{h^3}{6}Q^{(3)}_{(x)} - \frac{h^4}{24}Q^{(4)}_{(x)}..)} - e^{-(hQ^{(1)}_{(x)} + \frac{h^2}{2}Q^{(2)}_{(x)} + \frac{h^3}{6}Q^{(3)}_{(x)} + \frac{h^4}{24}Q^{(4)}_{(x)}+...)}$$

considerando ondas suficientemente 'suaves' y tomando el desarrollo de los exponenciales hasta una aproximación de 2^do^ orden:

$$\ddot{Q}_{(x)} \quad \left[hQ^{(1)} - \frac{h^2}{2}Q^{(2)} + \frac{h^3}{6}Q^{(3)} - \frac{h^4}{24}Q^{(4)}\right]_{(x)} + \frac{1}{2}\left[hQ^{(1)} - \frac{h^2}{2}Q^{(2)} + \frac{h^3}{6}Q^{(3)} - \frac{h^4}{24}Q^{(4)}\right]^2_{(x)}$$

$$+\left[hQ^{(1)} + \frac{h^2}{2}Q^{(2)} + \frac{h^3}{6}Q^{(3)} + \frac{h^4}{24}Q^{(4)}\right]_{(x)} - \frac{1}{2}\left[hQ^{(1)} + \frac{h^2}{2}Q^{(2)} + \frac{h^3}{6}Q^{(3)} + \frac{h^4}{24}Q^{(4)}\right]^2_{(x)}$$

agrupando términos y simplificando tenemos

$$Q_{(x)} = \frac{h^4}{12}Q^{(4)}_{(x)} + h^2Q^{(2)}_{(x)} - h^3 Q^{(1)}_{(x)} Q^{(2)}_{(x)}$$

; escribiendo las derivadas parciales como corresponde puesto que Q es una función de x y t. Esto es, para cada posición de equilibrio x el desplazamiento es función de t.

$$Q_{tt} = \frac{h^4}{12} Q_{xxxx} + h^2Q_{xx} - h^3 Q_x \; Q_{xx} \quad (*)$$

Haciendo la siguiente transformación $Q_x = \alpha V + \theta$; $Q_t = \beta V$; α, β, θ, const. y $V = V(x,t)$

reemplazando en la ecuación (*)

$$\frac{\beta}{h^2} V_t = [1-h\,(\theta + \alpha V)]\,\alpha V_x + \frac{\alpha h^2}{12} V_{xxx}$$

En la aproximación que se ha usado M es muy grande, de tal manera que los términos de la serie con factores h^r para $r > 4$ pueden despreciarse.

$$\alpha\,(1-h\,)\,V_x + V_t + \frac{h^3\alpha^2}{\beta}\,VV_x - \frac{\alpha h^4}{12\beta}\,V_{xxx} = 0\ ;$$

determinemos los parámetros

$$1 - h\theta = 0,\ h^3\,\frac{\alpha^2}{\beta} = -6\ ;\ \frac{h^4\alpha}{12\beta} = -1 \quad \text{-->} \quad \alpha = 1/(2h),\ \ \beta = -h^3/24 \ \text{ y } \ \theta = 1/h$$

$V_t - 6V\,V_x + V_{xxx} = 0$ Ecuación de Korteweg-de Vries.

CAPITULO VII

LAS INTEGRALES DE HENON
Y LA UNICIDAD DEL POTENCIAL DE TODA

CAPITULO VII

LAS INTEGRALES DE HENON Y LA UNICIDAD DEL POTENCIAL DE TODA

Bajo las condiciones de contorno periódicas hallamos en el Cap.VI las integrales de Hénon que usaremos en esta sección para 'recobrar' el potencial de Toda.De esto nosotros podemos obtener la condición de integrabilidad , asumiendo que las integrales de la red de Toda son del tipo de las integrales de Hénon y el potencial de interacción actua sólo entre las particulas adyacentes (vecinos mas cercanos) entonces es posible solamente el potencial exponencial de la RED DE TODA [13].

Bajo estas condiciones este es un problema de interacción de muchos cuerpos que tiene solución analltica.

Asumimos el potencial de interaccion entre los primeros vecinos mas cercanos con condiciones de contorno períódicas : $Q_{N+n} = Q_n$; $P_{N+n} = P_n$

Asi tomamos como el Hamiltoniano del sistema:

$$H(Q_n,P_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} P_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \{ V(Q_n-Q_{n-1}) + V(Q_{n+1}-Q_n) \} \quad ....(7.1)$$

En seguida justificamos la forma que toma la energla potencial en (7.1); debido a que podemos escribir el potencial del sistema de dos maneras

$$\sum_{n=1}^{N} \{ V(Q_n-Q_{n-1}) \quad ó \quad \sum_{n=1}^{N} \{ V(Q_{n+1}-Q_n) \quad \text{tomando} \quad Q_N = Q_0$$

en (7.1) hemos puesto el promedio de estas expresiones.

Además consideramos que la fuerza que actúa sobre la partlcula n debido a la partlcula n+1 es igual en intensidad, pero de sentido opuesto a la fuerza que actúa sobre n+1 debido a n (asumiendo que es válida la tercera ley de Newton)

```
         n-1                 n                 n+1
  ------o------\/\/\/\/\/------o------\/\/\/\/\------o------\/\
```

$$f_{nn+1} = - f_{n+1n}$$

$$\frac{\delta V(Q_n-Q_{n+1})}{\delta Q_n} = - \frac{\delta V(Q_{n+1}-Q_n)}{\delta Q_{n+1}} \longrightarrow V^{1}(Q_n-Q_{n+1}) = - V^{1}(Q_{n+1}-Q_n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7.2)$$

Para incluir el potencial de Toda en nuestro análisis, no asumiremos que

$$V\,(Q_n,Q_{n+1}) = V\,(|Q_{n+1}-Q_n|); \quad V_{nn-1} = V\,(Q_n-Q_{n-1})$$

sea A una función de $(\{Q_n\}, \{P_n\})$; definimos Γ un operador que actúa sobre A de la siguiente manera:

$\{H,A\} = \Gamma A$; H es el hamiltoniano del sistema.

$\{,\}$ es el corchete de <u>Poisson</u> usual

$$\{A,H\} = - \frac{\delta A}{\delta Q_\alpha}\frac{\delta H}{\delta P_\alpha} + \frac{\delta A}{\delta P_\alpha}\frac{\delta H}{\delta Q_\alpha}$$; donde los índices repetidos en un término indican sumatoria de α = 1 hasta N

$$\{H,A\} = \{ \sum_n P_n \frac{\delta}{\delta Q_n} - (1/2)\sum_n [V^{1}_{n,n+1} \frac{\delta}{\delta P_n} - V^{1}_{n,n+1} \frac{\delta}{\delta P_{n+1}} + V^{1}_{n,n-1} \frac{\delta}{\delta P_n} - V^{1}_{n,n-1} \frac{\delta}{\delta P_{n-1}}]\} A$$

..........(7.3)

En adelante $V_{n,n+1} \equiv V(Q_n-Q_{n+1})$, $V^{1}_{nn+1} \equiv V^{1}(Q_n,Q_{n+1})$, etc. y $V^{1}_{nn+1} = \frac{\delta}{\delta Q_n} V(Q_n-Q_{n+1})$, de (7.2) tenemos $\overset{1}{V}(Q_n,Q_{n-1}) = -\overset{1}{V}(Q_{n-1},Q_n)$ ....(7.4)

trabajando con los términos negativos de la 2da sumatoria de (7.3)

$$-\sum \overset{1}{V}_{n\,n+1}\frac{\delta}{\delta P_{n+1}} - \sum_{n} \overset{1}{V}_{n\,n-1}\frac{\delta}{\delta P_{n-1}} = -\sum_{n=2}^{N+1} \overset{1}{V}_{n-1\,n}\frac{\delta}{\delta P_n} - \sum_{n=0}^{N-1} \overset{1}{V}_{n+1\,n}\frac{\delta}{\delta P_n}$$

$$= \sum_{n=2}^{N+1} \overset{1}{V}_{n\,n-1}\frac{\delta}{\delta P_n} + \sum_{n=0}^{N-1} \overset{1}{V}_{n\,n+1}\frac{\delta}{\delta P_n}$$

hemos usado la igualdad (7.4)

Llevando esta última expresión al segundo miembro de (7.3)

$$\{H,A\} = \sum_{n} P_n \frac{\delta}{\delta Q_n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}\Big[\overset{1}{V}_{n\,n+1}\frac{\delta}{\delta P_n} + \overset{1}{V}_{n\,n-1}\frac{\delta}{\delta P_n}\Big] - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N+1} \overset{1}{V}_{n\,n-1}\frac{\delta}{\delta P_n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N+1} \overset{1}{V}_{n\,n+1}\frac{\delta}{\delta P_n}$$

por la condición de contorno periodica tenemos $\overset{1}{V}_{0,1} = \overset{1}{V}_{N\,N+1}$

$$\overset{1}{V}_{1,0} = \overset{1}{V}_{N+1\,N}$$

Luego podemos agrupar en un solo sumatorio los términos:

i) $\sum_{n} \overset{1}{V}_{n\,n+1}\frac{\delta}{\delta P_n}$ y $\sum_{n=0}^{N+1} \overset{1}{V}_{n\,n+1}\frac{\delta}{\delta P_n}$

$$ii)\quad \sum_{n} V^{1}_{nn-1} \frac{\delta}{\delta P_n} \quad y \quad \sum_{n=2}^{N+1} V^{1}_{nn-1} \frac{\delta}{\delta P_n}$$

Luego:

$$\{H,A\} = \{\sum_{n} P_n \frac{\delta}{\delta Q_n} - \sum_{n} [V^{1}_{nn+1} \frac{\delta}{\delta P_n} + V^{1}_{nn-1} \frac{\delta}{\delta P_n}] \} A \quad \text{.................................}(7.5)$$

Derivando A

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\delta A}{\delta Q_n} \dot{Q}_n + \frac{\delta A}{\delta P_n} \dot{P}_n + \frac{\delta A}{\delta t}$$; A es una función de $\{Q_n\}$ y $\{P_n\}$ y del tiempo t.

Usando las ecuaciones canónicas $\dot{P}_n = - \frac{\delta H}{\delta Q_n}$ $\quad \dot{Q}_n = \frac{\delta H}{\delta P_n}$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\delta A}{\delta Q_n} \frac{\delta H}{\delta P_n} - \frac{\delta A}{\delta P_n} \frac{\delta H}{\delta Q_n} + \frac{\delta A}{\delta t}$$

$$\frac{dA}{dt} = \{H,A\} + \frac{\delta A}{\delta t}$$

Así nosotros conocemos inmediatamente como $\frac{dA}{dt}$ depende de las coordenadas en el espacio de fase, o cómo A varía a lo largo del movimiento. Por supuesto para calcular $\frac{dA}{dt}$ como función del tiempo, necesitamos conocer las coordenadas como funciones del tiempo.

Pero para un caso especial A es útil sin esta información adicional, a saber, si A es una constante del movimiento. En este caso $\frac{dA}{dt} = 0$, luego A es una constante del movimiento si y solo si $\{H,A\} + \frac{\delta A}{\delta t} = 0$

Si A no depende explícitamente de t:

$$A = A(Q_n\ ,\ P_n) \implies \frac{\delta A}{\delta t} = 0 \quad \text{luego} \quad \{H,A\} = 0 \qquad \text{.....(7.6)}$$

como de la relación (7.5) $\{H,A\} = \Gamma A$ con :

$$\Gamma = \sum P_n \frac{\delta}{\delta Q_n} - \sum \{ V^{\,1}_{n\,n+1} \frac{\delta}{\delta P_n} + V^{\,1}_{n\,n-1} \frac{\delta}{\delta P_n} \}$$

=====> si A es una constante del movimiento tenemos:

$$\Gamma A = 0 \qquad \text{.....(7.7)}$$

sea $A = I \implies \Gamma I = 0$ .....(7.8)

con I una integral del movimiento. Como vimos las integrales de Hénon son de la forma

$$I_m = \sum U_{i_1}\ U_{i_2} \ldots U_{i_k}\ (-X_{j_1})\ (-X_{j_2}) \ldots (-X_{j_r})$$

con $U_n = Q_n$ y $X_n = e^{-(Q_{n+1} - Q_n)}$

es decir $P_n = U_n$ si $m = 1$ (masas unitarias)

$$I_m = \sum P_{i_1}\ P_{i_2} \ldots P_{i_k}\ (-X_{j_1}) \ldots (-X_{j_r}) \qquad \text{.....(7.9)}$$

como fácilmente podemos ver en (7.9) la única posiblidad en la forma de la integral cuyo principal término es el producto de todos los P_n es dado por

$$I_N = e^{-\delta/2} \prod_{n=1}^{N} P_n \ ; \text{ con } \delta = \sum_{n=1}^{N} (V_{n\,n+1} + V_{n+1\,n}) \left(\frac{\delta^2}{\delta P_n \delta P_{n+1}}\right)$$

δ es un operador que debe 'seleccionar' los P que deben aparecer en cada término de una sumatoria del tipo de la relación (7.9) y este mismo operador debe eventualmente multiplicar cada término por los $(-X_n)$ correspondientes, en los términos diferentes del principal πP_n

Buscaremos la condición para el potencial de tal forma que I_N sea verdaderamente una integral.

Los Indices de (7.9) satisfacen: $k + 2r = N$

Un término de (7.9) será $\prod_{n=1}^{N} P$ $(k = N \text{ y } r = 0)$

Buscamos una expresión para ΓI_N y luego usando la igualdad (7.8) en que asumimos que I_N es una integral, podemos determinar la condición que debe cumplir el potencial

$$V_{nn-1} = V(Q_n - Q_{n-1})$$

Estudiemos la integral I_N usando la teorla desarrollada para los integrales de Hénon:

$I_N = \Sigma\, P_{i_1} \ldots P_{i_k} \, (-X_{j_1}) \ldots (-X_{j_r})$ k y r cumplen $k + 2r = N$

los valores $k=N$ y $r=0$ satisfacen plenamente ==> tenemos el término

$\prod_{n=1}^{N} P_n$ que será el término principal de I_N

En efecto, la expresión asumida

$$I_N = e^{-\delta/2} \prod_{n=1}^{N} P = \left(1 - \delta/2 + \frac{\delta^2}{2^2 2!} - \frac{\delta^3}{2^3 3!} + \ldots\right) \prod_{n=1}^{N} P_n = \prod_{n=1}^{N} P_n - \frac{\delta}{2}\left(\prod_{n=1}^{N} P_n\right) + \frac{\delta^2}{2^2 2!}\left(\prod_{n=1}^{N} P_n\right) - \ldots$$

tiene también un término πP_n. En el ANEXO C obtenemos los I_N para I = 1, 2, 3 y 4; además una fórmula general para obtener cualquier I_N.

Al asumir la forma del operador δ hemos pensado también en que no deben aparecer indices repetidos en cada término, se vé que por ejemplo para el 2do término de la serie

$$\frac{\delta}{2}\prod_{m=1}^{N} P_m = \frac{1}{2}\sum_{n}\left(V_{nn+1}+V_{n+1n}\right)\frac{\delta^2}{\delta P_n \delta P_{n+1}}\prod_{m=1}^{N} P_m$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}\left(V_{nn+1}+V_{n+1n}\right)\prod_{\substack{m=1\\ m\neq n\\ m\neq n+1}}^{N} P_m$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}\left(V_{nn+1}+V_{n+1n}\right)\prod_{r=1}^{N\,(n,n+1)} P_r$$

$\prod^{(n,n+1)} P_r$ indica el producto de los P excepto P_n y P_{n+1}

Nuestro propósito es obtener una expresión para ΓI_N ; para esto desarrollemos

$e^{\delta/2}\,\Gamma\, e^{-\delta/2}$; sea $A = \delta/2$

Pongamos una sumatoria para cada exponencial de A y -A:

$$e^{A}\,\Gamma\, e^{-A} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{A^i}{i!}\,\Gamma\sum_{r=0}^{\infty}(-)^r\frac{A^r}{r!} = \sum_{i,r=0}^{\infty}(-)^i\frac{A^i\,\Gamma\,A^r}{i!\,r!}$$

sea $k=i+r$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}(-)^{k-r}\frac{A^r\,\Gamma\,A^{k-r}}{r!\,(k-r)!}$$,pongamos en la

siguiente forma que nos servirá más adelante:

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^{-r}\binom{k}{r}A^r\,\Gamma\,A^{k-r}\quad\text{........}(*)$$

donde $\binom{k}{r} - \dfrac{k!}{(k-r)!\,r!}$

Observamos que:

$C_1 = [\Gamma, A] = \Gamma A - A\Gamma$

$$C_2 = [\,[\Gamma, A], A] = \Gamma A^2 - 2 A \Gamma A + A^2 \Gamma$$

$$C_3 = [\,[\,[\Gamma , A], A], A] = \Gamma A^3 - 3 A \Gamma A^2 + 3A^2 \Gamma A + A^3 \Gamma$$

generalizando tenemos

$$C_k = \sum_{i=0}^{k} (-)^i \binom{k}{i} A^i \Gamma A^{k-i} \quad ; \text{ asumiendo } (-)^i = (-)^{-i}$$

podemos poner este resultado en (*),luego

$$e^{A} \Gamma e^{-A} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-)^k}{k!} C_k \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(**)$$

$$e^{\delta/2} \Gamma e^{-\delta/2} = \Gamma - \frac{1}{2.1!} [\Gamma,\delta] + \frac{1}{2^2 2!} [\,[\Gamma ,\delta],\delta\,] - \frac{1}{2^3 3!} [\,[\,[\Gamma,\delta\,],\delta\,],\,\delta] \,\} + \ldots\ldots.$$

Podemos escribir mediante una sumatoria

$$e^{\delta/2} \Gamma e^{-\delta/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-)^k}{2^k.k!} \underbrace{[\,\ldots [\,[\,\Gamma,\delta\,],\,\delta\,],\,\ldots\delta\,]}_{\text{'k' veces}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7.10)$$

efectuemos $[\Gamma,\delta]$, $[[\Gamma,\delta],\delta]$ Y $[[[\Gamma,\delta],\delta],\,\delta]$ sucesivamente

$$[\Gamma,\delta] = \{\sum_n P_n \frac{\delta}{\delta Q_n} - \sum_{n=1}^{N} (V_{nn+1} \frac{\delta}{\delta P_n} + V_{nn-1} \frac{\delta}{\delta P_n} \}\ \{\sum_m (V_{mm+1} + V_{m+1m}) \frac{\delta^2}{\delta P_m\, \delta P_{m+1}} \} \ -$$

$$-(\sum_m (V_{mm+1} + V_{m+1m}) \frac{\delta^2}{\delta P_m\, \delta P_{m+1}} \}\ \{\sum_n P_n \frac{\delta}{\delta Q_n} - \sum_n (V_{n,n+1} \frac{\delta}{\delta P_n} + V_{n,n-1} \frac{\delta}{\delta P_n})\}$$

$$= \sum_n P_n \frac{\delta}{\delta Q_n} (\ldots + (V_{m-1m} + V_{mm-1}) \frac{\delta^2}{\delta P_{m-1} \delta P_m} + (V_{mm+1} + V_{m+1m}) \frac{\delta^2}{\delta P_m \delta P_{m+1}} + \ldots)$$

$$-[\ldots + (V_{n-1\,n} + V_{n\,n-1}) \frac{\delta^2}{\delta P_{n-1}\delta P_n} + (V_{n\,n+1} + V_{n+1\,n}) \frac{\delta^2}{\delta P_n\, \delta P_{n+1}} + \ldots] \sum_n P_n \frac{\delta}{\delta Q_n}$$

los otros términos se cancelan mutuamente.

Considerando $\overset{1}{V}_{nm} = -\overset{1}{V}_{mn}$, $\overset{1}{V}_{nm} = \frac{\delta}{\delta Q_n} V(Q_n - Q_m)$; usaremos la delta de Kronecker:

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

$$= \sum_{m,n} \{P_n [\overset{1}{V}_{m\,m+1}(\delta_{mn} - \delta_{m+1\,n}) + \overset{1}{V}_{m+1\,m} (\delta_{n\,m+1} - \delta_{nm})] \frac{\delta^2}{\delta P_m\, \delta P_{m+1}} + P_n (V_{m\,m+1} + V_{m+1\,m}) \frac{\delta^3}{\delta Q_n\, \delta P_m\, \delta P_{m+1}} -$$

$$- (V_{m\,m+1} + V_{m+1\,m}) (\delta_{m+1\,n} \frac{\delta^2}{\delta P_m\, \delta Q_n} + \delta_{nm} \frac{\delta^2}{\delta P_{m+1}\, \delta Q_n} + P_n \frac{\delta^3}{\delta P_m\, \delta Q_n\, \delta P_{m+1}}$$

$$= \sum_n \{ \overset{1}{V}_{n,n-1} (P_n - P_{n-1}) \frac{\delta^2}{\delta P_n \delta P_{n-1}} + \overset{1}{V}_{n,n+1} (P_n - P_{n+1}) \frac{\delta^2}{\delta P_n\, \delta P_{n+1}}\} - \sum_n [(V_{n\,n+1} + V_{n+1\,n}) ($$

$$\frac{\delta^2}{\delta P_n\, \delta Q_{n+1}}) + (V_{n\,n-1} + V_{n-1\,n}) \frac{\delta^2}{\delta P_n \delta Q_{n-1}}] + \sum_{n,m} P_n (V_{m\,m+1} + V_{m+1\,m}) \frac{\delta^3}{\delta Q_n\, \delta P_m\, \delta P_{m+1}} -$$

$$- \sum_{n,m} P_n (V_{m\,m+1} + V_{m+1\,m}) \frac{\delta^3}{\delta P_m\, \delta Q_n\, \delta P_{m+1}}$$

Los dos últimos términos se anulan; si se consideran funciones continuas se pueden intercambiar el orden de las variables Q_n, P_m, respecto de los cuales se toman las derivadas.

luego:

$$[\Gamma,\delta] = \sum_{n} \{ (V^{1}_{nn+1}) (P_n - P_{n+1}) \frac{\delta^2}{\delta P_n\, \delta P_{n+1}} + (V^{1}_{nn-1}) (P_n - P_{n-1}) \frac{\delta^2}{\delta P_n\, \delta P_{n-1}} \} -$$

$$- \sum \{ (V_{nn+1} + V_{n+1n}) \frac{\delta^2}{\delta P_n\, \delta Q_{n+1}} + (V_{nn-1} + V_{n-1,n}) \frac{\delta^2}{\delta P_n\, \delta Q_{n-1}} \} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7.11)$$

Calculemos $[[\Gamma,\delta], \delta]$:

$$[[\Gamma,\delta],\delta] = \sum_{n,m} \{ V^{1}_{nn+1} (P_n-P_{n+1}) \frac{\delta^2}{\delta P_n\, \delta P_{n+1}} + V^{1}_{nn+1} (P_n-P_{n-1}) \frac{\delta^2}{\delta P_n\, \delta P_{n-1}} - (V_{nn+1}+ V_{n+1n}) \frac{\delta^2}{\delta P_n\, \delta Q_{n+1}}$$

$$-(V_{nn-1}+ V_{n-1n}) \frac{\delta^2}{\delta P_n\, \delta Q_{n-1}} \} [(V_{mm+1}+ V_{m+1m}) \frac{\delta^2}{\delta P_m\, \delta P_{m+1}}]-$$

$$- \sum_{nm}[(V_{mm+1}+ V_{m+1m}) \frac{\delta^2}{\delta P_m\, \delta P_{m+1}}]\{ V^{1}_{nn+1} (P_n-P_{n+1}) \frac{\delta^2}{\delta P_n\, \delta P_{n+1}} + V^{1}_{nn-1} (P_n-P_{n-1}) \frac{\delta^2}{\delta P_n\, \delta P_{n-1}}$$

$$(V_{nn+1}+ V_{n+1n}) \frac{\delta^2}{\delta P_n\, \delta Q_{n+1}} \quad (V_{nn-1} + V_{n-1n}) \frac{\delta^2}{\delta P_n\, \delta Q_{n-1}} \}$$

$$\sum_{n,m} \{ V^{1}_{nn+1}(P_n-P_{n+1}) (V_{mm+1}+ V_{m+1m}) \frac{\delta^4}{\delta P_n\, \delta P_{n+1}\, \delta P_m\, \delta P_{m+1}} + V^{1}_{nn-1}(P_n-P_{n-1}) (V_{mm+1}+ V_{m+1m}) ($$

$$\frac{\delta^4}{\delta P_n \delta P_{n-1} \delta P_m \delta P_{m+1}}) -(V_{nn+1}+V_{n+1n})\{[V^{1}_{mm+1}(\delta_{mn+1}-\delta_{m+1n+1})+V^{1}_{m+1m} (\delta_{m+1n+1}-\delta_{mn+1})] \frac{\delta^3}{\delta P_n\, \delta P_m\, \delta P_{m+1}} +$$

$$+(V_{nm+1}+V_{m+1n})\frac{\delta^4}{\delta P_n\,\delta Q_{n+1}\,\delta P_m\,\delta P_{m+1}}\}-(V_{nn-1}+V_{n-1n})\{[\overset{1}{V}_{nm+1}(\delta_{mn-1}-\delta_{m+1n-1})+\overset{1}{V}_{m+1m}(\delta_{m+1n-1}-\delta_{mn-1})](\frac{\delta^3}{\delta P_n\,\delta P_m\,\delta P_{m+1}})+(V_{nm+1}+V_{m+1m})\frac{\delta^4}{\delta P_n\,\delta Q_{n-1}\,\delta P_m\,\delta P_{m+1}}]\}-$$

$$-\sum_{n,m}\{(V_{nm+1}+V_{m+1m})\overset{1}{V}_{nn+1}[(\delta_{nm+1}-\delta_{n+1m+1})\frac{\delta^3}{\delta P_m\delta P_n\delta P_{n+1}}+(\delta_{nm}-\delta_{n+1m})\frac{\delta^3}{\delta P_{m+1}\delta P_n\delta P_{n+1}}+$$

$$(P_n-P_{n+1})\frac{\delta^4}{\delta P_m\,\delta Q_{m+1}\,\delta P_n\,\delta P_{n+1}}]+(V_{nm+1}+V_{m+1m})\overset{1}{V}_{nn-1}[(\delta_{nm+1}-\delta_{n-1m+1})\frac{\delta^3}{\delta P_m\,\delta P_n\,\delta P_{n-1}}+$$

$$+(\delta_{nm}-\delta_{n-1m})\frac{\delta^3}{\delta P_{m+1}\,\delta P_n\,\delta P_{n-1}}+(P_n-P_{n-1})\frac{\delta^4}{\delta P_n\,\delta Q_{m+1}\,\delta P_n\,\delta P_{n-1}}]-(V_{nm+1}+V_{m+1m})(V_{nn+1}+V_{n+1n})($$

$$\frac{\delta^4}{\delta P_m\,\delta Q_{m+1}\,\delta P_n\,\delta Q_{n+1}})-(V_{nm+1}+V_{m+1m})(V_{nn-1}+V_{n-1n})\frac{\delta^4}{\delta P_m\,\delta Q_{m+1}\,\delta P_n\,\delta Q_{n-1}}\}$$

simplificando y usando

$$\overset{1}{V}_{nm+1}=-\overset{1}{V}_{m+1m}$$

$$=-\sum_{n,m}2\{(V_{nn+1}+V_{n+1n})\overset{1}{V}_{nm+1}(\delta_{mn+1}-\delta_{m+1n+1})\frac{\delta^3}{\delta P_n\,\delta P_m\,\delta P_{m+1}})+(V_{nn-1}+V_{n-1n})(\overset{1}{V}_{nm+1})($$

$$(\delta_{mn-1}-\delta_{m+1n-1})\frac{\delta^3}{\delta P_n\,\delta P_m\,\delta P_{m+1}})-$$

$$-\sum_{n=1}^{N}\{(V_{n-1n}+V_{nn-1})\overset{1}{V}_{nn+1}\frac{\delta^3}{\delta P_{n-1}\,\delta P_n\,\delta P_{n+1}}-(V_{nn+1}+V_{n+1n})\overset{1}{V}_{nn+1}\frac{3}{\delta P_n\,\delta P_n\,\delta P_{n+1}}+$$

$$(V_{nn+1}+V_{n+1n})\overset{1}{V}_{nn+1}\frac{\delta^3}{\delta P_{n+1}\,\delta P_n\,\delta P_{n+1}}-(V_{n+1n+2}+V_{n+2n+1})\overset{1}{V}_{nn+1}\frac{\delta^3}{\delta P_{n+2}\,\delta P_n\,\delta P_{n+1}}+$$

$$(V_{n-1n} + V_{nn-1})\, V^{1}_{nn-1} \frac{\delta^3}{\delta P_{n-1}\, \delta P_n\, \delta P_{n-1}} - (V_{n-2n-1} + V_{n-1n-2})\, V^{1}_{nn-1} \frac{\delta^3}{\delta P_{n-2}\, \delta P_n\, \delta P_{n-1}} +$$

$$(V_{nn+1} + V_{n+1n})\, V^{1}_{nn-1} \frac{\delta^3}{\delta P_{n+1}\, \delta P_n\, \delta P_{n-1}} - (V_{n-1n} + V_{nn-1})\, V^{1}_{nn-1} \frac{\delta^3}{\delta P_n\, \delta P_n\, \delta P_{n-1}} +$$

$$= -2\sum_{n=1}^{N}[(V_{nn+1} + V_{n+1n})\, V^{1}_{n+1n+2} \frac{\delta^3}{\delta P_n\, \delta P_{n+1}\, \delta P_{n+2}}) - (V_{nn+1} + V_{n+1n}) V^{1}_{nn+1} \frac{\delta^3}{\delta P_n\, \delta P_n\, \delta P_{n+1}} +$$

$$(V_{nn-1} + V_{n-1n})\, V^{1}_{n-1n} \frac{\delta^3}{\delta P_n\, \delta P_{n-1}\, \delta P_n}) - (V_{nn-1} + V_{n-1n}) V^{1}_{n-2n-1} \frac{\delta^3}{\delta P_n\, \delta P_{n-2}\, \delta P_{n-1}} +$$

$$- \sum_{n=1}^{N}[(V_{n-1n} + V_{nn-1})\, V^{1}_{nn+1} \frac{\delta^3}{\delta P_{n-1}\, \delta P_n\, \delta P_{n+1}}) - (V_{nn+1} + V_{n+1n}) V^{1}_{nn+1} \frac{\delta^3}{\delta P_n\, \delta P_n\, \delta P_{n+1}} +$$

$$V_{nn+1} + V_{n+1n})\, V^{1}_{nn+1} \frac{\delta^3}{\delta P_{n+1}\, \delta P_n\, \delta P_{n+1}}) + \sum_{n=2}^{N+1} (V_{nn+1} + V_{n+1n})\, V^{1}_{n-1n} \frac{\delta^3}{\delta P_{n-1}\, \delta P_n\, \delta P_{n+1}})$$

$$-\sum_{n=1}^{N}[(V_{n-1n} + V_{nn-1})\, V^{1}_{nn-1} \frac{\delta^3}{\delta P_{n-1}\, \delta P_n\, \delta P_{n+1}} + (V_{nn+1} + V_{n+1n}) V^{1}_{nn-1} \frac{\delta^3}{\delta P_{n-1}\, \delta P_n\, \delta P_{n+1}} -$$

$$-(V_{n-1n} + V_{nn-1})\, V^{1}_{nn-1} \frac{\delta^3}{\delta P_n\, \delta P_{n-1}\, \delta P_{n-1}} + \sum_{n=0}^{N-1} (V_{n-1n} + V_{nn-1})\, V^{1}_{n+1n} \frac{\delta^3}{\delta P_{n-1}\, \delta P_n\, \delta P_{n+1}})$$

Agrupando tèrminos y usando $V^{1}_{nn+1} = -V^{1}_{n+1n}$, etc y ademàs usando las condiciones perlodicas:

Por ejemplo $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} (V_{n-1n} + V_{nn-1})\, V^{1}_{n+1n} \frac{\delta^3}{\delta P_{n-1}\, \delta P_n\, \delta P_{n+1}} =$

$$\sum_{n=1}^{N} (V_{n-1n} + V_{nn-1})\, V^{1}_{n+1n} \frac{\delta^3}{\delta P_{n-1}\, \delta P_n\, \delta P_{n+1}}$$

puesto que

$$V_{-1,0} = V_{N-1N} \quad , V^{1}_{1,0} = V^{1}_{N+1N}$$

$$Q_{-1} = Q_{N-1} \quad ,Q_0 = Q_N \;,Q_1 = Q_{N+1}$$

$$= -2\sum_{n=1}^{N} (V_{n-1n} + V_{nn-1})\, V^{1}_{nn+1} \frac{\delta^3}{\delta P_{n-1}\,\delta P_n\,\delta P_{n+1}} +$$

$$+2\sum_{n=1}^{N} (V_{n+1n} + V_{nn+1})\, V^{1}_{n-1n} \frac{\delta^3}{\delta P_{n-1}\,\delta P_n\,\delta P_{n+1}} +$$

$$-2\sum_{n=1}^{N} (V_{n-1n} + V_{nn-1})\, V^{1}_{nn+1} \frac{\delta^3}{\delta P_{n-1}\,\delta P_n\,\delta P_{n+1}} +$$

$$+2\sum_{n=1}^{N} (V_{n+1n} + V_{nn+1})\, V^{1}_{n-1n} \frac{\delta^3}{\delta P_{n-1}\,\delta P_n\,\delta P_{n+1}} +$$

$$-2\sum_{n=1}^{N} (V_{nn-1} + V_{n-1n})\, V^{1}_{nn+1} \frac{\delta^3}{\delta P_n\,\delta P_n\,\delta P_{n-1}} +$$

$$+2\sum_{n=1}^{N} (V_{nn+1} + V_{n+1n})\, V^{1}_{nn+1} \frac{\delta^3}{\delta P_n\,\delta P_n\,\delta P_{n+1}} -$$

$$-2\sum_{n=1}^{N} (V_{n-1n} + V_{nn-1})\, V^{1}_{nn-1} \frac{\delta^3}{\delta P_{n-1}\,\delta P_{n-1}\,\delta P_n} +$$

$$-2\sum_{n=1}^{N} (V_{nn+1} + V_{n+1n})\, V^{1}_{nn+1} \frac{\delta^3}{\delta P_{n+1}\,\delta P_{n+1}\,\delta P_n} +$$

Agrupando tèrminos tenemos finalmente

$$[\,[\Gamma,\delta\,],\delta\,] = -4\sum_{n=1}^{N} (V_{n-1n} + V_{nn-1})\, V^{1}_{nn+1} \frac{\delta^3}{\delta P_{n-1}\,\delta P_n\,\delta P_{n+1}} +$$

$$(V_{n+1n} + V_{nn+1})\, V^{1}_{nn-1} \frac{\delta^3}{\delta P_{n-1}\,\delta P_n\,\delta P_{n+1}} +$$

$$-2\sum_{n=1}^{N} (V_{nn+1} + V_{n+1n})\, V^{1}_{nn+1} \left(\frac{\delta^3}{\delta P_n\,\delta P_{n+1}\,\delta P_{n+1}} - \frac{\delta^3}{\delta P_n\,\delta P_n\,\delta P_{n+1}}\right)$$

$$(V_{nn-1} + V_{n-1n})\, V^{1}_{nn-1} \left(\frac{\delta^3}{\delta P_n\,\delta P_{n-1}\,\delta P_{n-1}} - \frac{\delta^3}{\delta P_n\,\delta P_n\,\delta P_{n-1}}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (7.12)$$

Además

$[[[\Gamma,\delta],\delta],\delta] = 0$; se ve claramente que los operadores en derivadas parciales de los momentum de (7.12) no afectan a las funciones $V_{ij} = V(Q_i - Q_j)$ del operador δ, por sus dependencias solamente de los Q_i.

luego,

$$\underbrace{[[\ldots[\Gamma,\delta],\delta],\delta]}_{\text{"k" veces}} = 0 \quad \text{para } k=3,4,5,\ldots$$

la serie (7.10) queda

$$e^{\delta/2}\,\Gamma\,e^{-\delta/2} = \Gamma - \frac{1}{2}[\Gamma,\delta] + \frac{1}{8}[[\Gamma,\delta],\delta]$$

$$= \sum P_n \frac{\delta}{\delta Q_n} - \sum_n \left(V'_{n,n+1} \frac{\delta}{\delta P_n} + V'_{n,n-1} \frac{\delta}{\delta P_n} \right)$$

$$- \frac{1}{2} \sum \Big[V'_{n,n+1}(P_n - P_{n+1}) \frac{\delta^2}{\delta P_n\, \delta P_{n+1}} + V'_{n,n-1}(P_n - P_{n-1}) \frac{\delta^2}{\delta P_n\, \delta P_{n-1}} \Big]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_n \Big[(V_{n,n+1} + V_{n+1,n}) \frac{\delta^2}{\delta P_n\, \delta Q_{n+1}} + (V_{n,n-1} + V_{n-1,n}) \frac{\delta^2}{\delta P_n\, \delta Q_{n-1}} + $$

$$- \frac{1}{4} \sum_n \Big[(V_{n,n+1} + V_{n+1,n})\, V'_{n,n+1} \left(\frac{\delta^3}{\delta P_n\, \delta P_{n+1}\, \delta P_{n+1}} - \frac{\delta^3}{\delta P_n\, \delta P_n\, \delta P_{n+1}} \right) + (V_{n,n-1} + V_{n-1,n}) \Big($$

$$V'_{n,n-1} \left(\frac{\delta^3}{\delta P_n\, \delta P_{n-1}\, \delta P_{n-1}} - \frac{\delta^3}{\delta P_n\, \delta P_{n-1}\, \delta P_{n-1}} \right) \Big]$$

$$- \frac{1}{2} \sum_n \Big[(V_{n-1,n} + V_{n,n-1})\, V'_{n,n+1} \left(\frac{\delta^3}{\delta P_n\, \delta P_{n+1}\, \delta P_{n-1}} \right) + (V_{n+1,n} + V_{n,n+1}) \Big($$

$$V'_{n,n-1} \left(\frac{\delta^3}{\delta P_n\, \delta P_{n+1}\, \delta P_{n-1}} \right)$$

Multiplicando por $\prod_{n=1}^{N} P_n$ en ambos miembros de la última expresión.

$$e^{\delta/2}\ \Gamma\ e^{-\delta/2}\ \prod_{n=1}^{N} P_n = -\sum_n \{ (V^{1}_{n,n+1} + V^{1}_{n,n-1}) \ \Pi^{(n)}_{n=1}{}^{N} P_n \ -$$

$$-\left[\frac{1}{2} \sum_n \{ (V_{n-1,n} + V_{n,n-1}) V^{1}_{n,n+1} + \frac{1}{2} \sum_n (V_{n+1,n} + V_{n,n+1}) V^{1}_{n,n-1} \right] \Pi^{(n-1,n,n+1)} P \ -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_n \{ V^{1}_{n,n+1} (P_n - P_{n+1}) \Pi^{(n,n+1)} P_n + V^{1}_{n,n-1} (P_n - P_{n-1}) \Pi^{(n,n-1)} P_n \}$$

sabemos que $V_{n-1,n} = V_{n,n-1}$, $V_{n+1,n} = V_{n,n+1}$ y $\frac{\delta}{\delta Q_n} (V_{n-1,n} \ V_{n,n+1}) =$

$$- V^{1}_{n-1,n} \ V_{n,n+1} + V_{n-1,n} \ V^{1}_{n,n+1}$$

$$= V^{1}_{n,n-1} \ V_{n,n+1} + V_{n-1,n} \ V^{1}_{n,n+1}$$

luego

$$e^{\delta/2}\ \Gamma\ e^{-\delta/2}\ \Pi P_n = -\sum_n (V^{1}_{n,n+1} + V^{1}_{n,n-1}) \ \Pi^{(n)} P \ -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_n \{ V^{1}_{n,n+1} (P_n - P_{n+1}) \ \Pi^{(n,n+1)} P + V^{1}_{n,n-1} (P_n - P_{n-1}) \ \Pi^{(n,n-1)} P \} \ -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_n \{ 2 \ \frac{\delta}{\delta Q_n} (V_{n-1,n} \ V_{n,n+1}) \ \Pi^{(n-1,n,n+1)} \ P \} \qquad \text{.............................(7.13)}$$

Donde $\Pi^{(n)} P$, $\Pi^{(n,m)} P$ y $\Pi^{(n,m,p)} P$ son los productos de todos los P excepto P_n , (P_n,P_m) y

(P_n, P_m, P_p) respectivamente. Puesto que $e^{\delta/2}$ es un operador no-singular, la necesaria y suficiente condición para que I_N definido por $I_N = e^{-\delta/2}\, \Pi P$ sea una integral de (7.7-7.8) es que (7.13) sea identicamente nulo.

Buscamos una ecuación diferencial más sencilla para V; se ve que la segunda sumatoria es

$$-\frac{1}{2} \sum_{n} \{ V^{1}_{n,n+1} (P_n - P_{n+1})\, \Pi^{(n,n+1)} P + V^{1}_{n,n-1} (P_n - P_{n-1})\, \Pi^{(n,n-1)} P \} =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n} \{ V^{1}_{n,n+1}\, \Pi^{(n+1)} P - V^{1}_{n,n+1}\, \Pi^{(n)} P + V^{1}_{n,n-1}\, \Pi^{(n-1)} P - V^{1}_{n,n-1}\, \Pi^{(n)} P \}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n} \{ V^{1}_{n,n+1}\, \Pi^{(n+1)} P + V^{1}_{n,n-1}\, \Pi^{(n-1)} P \} + \frac{1}{2} \sum_{n=1} \{ (V^{1}_{n,n+1} + V^{1}_{n,n-1})\, \Pi^{(n)} P \}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{N+1} V^{1}_{n-1,n}\, \Pi^{(n)} P - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} V^{1}_{n+1,n}\, \Pi^{(n)} P + \frac{1}{2} \sum_{n=1} \{ (V^{1}_{n,n+1} + V^{1}_{n,n-1})\, \Pi^{(n)} P \}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} V^{1}_{n,n-1}\, \Pi^{(n)} P + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} V^{1}_{n,n+1}\, \Pi^{(n)} P + \frac{1}{2} \sum_{n=1} \{ (V^{1}_{n,n+1} + V^{1}_{n,n-1})\, \Pi^{(n)} P \} \qquad \text{.....................(7.14)}$$

hemos usado $V^{1}_{n,n-1} = -V^{1}_{n-1,n}$, $V^{1}_{n,n+1} = -V^{1}_{n,n-1}$ y las condiciones de contorno periódicas en que:

$$\sum_{n=2}^{N+1} V^{1}_{n-1,n}\, \Pi^{(n)} P = \sum_{n=2}^{N} V^{1}_{n-1,n}\, \Pi^{(n)} P + V^{1}_{N,N+1}\, \Pi^{(N+1)} P = \sum_{n=2}^{N} V^{1}_{n-1,n}\, \Pi^{(n)} P + V^{1}_{0,1} P\, \Pi^{1} P$$

$$= \sum_{n=1}^{N} V'_{n-1n} \; \pi^{(n)} P$$

$$= - \sum_{n=1}^{N} V'_{nn-1} \; \pi^{(n)} P$$

lo mismo para el segundo término de (7.14)

luego (7.14) queda

$\sum_{n=1}^{N} (V'_{nn-1} + V'_{nn+1}) \; \pi^{(n)} P$; es decir la segunda sumatoria cancela la primera en la relación (7.13), luego tenemos

$$e^{\delta/2} \; \Gamma \; e^{-\delta/2} \; \pi P_n = - \sum_{n=1}^{N} \left\{ \frac{\delta}{\delta Q_n} [V(Q_{n-1}-Q_n) \; V(Q_n-Q_{n+1})] \; \pi^{(n-1,n,n+1)} P \right\} \qquad \text{......} \; (7.15)$$

los productos $\pi^{(n-1,n,n+1)} P$ que aparecen en cada término de la expresión última son linealmente independientes entre sí por lo tanto, para que sea identicamente nula la expresión debemos igualar a cero los coeficientes de estos productos.

$$\frac{\delta}{\delta Q_n} \{ V(Q_{n-1}-Q_n) \; V(Q_n-Q_{n+1}) \} = 0 \quad \text{...} (7.16)$$

de (7.16): $- V'_{n-1n} V_{nn+1} + V_{n-1n} V'_{nn+1} = 0$

$$\frac{V'_{n-1n}}{V_{n-1n}} = \frac{V'_{nn+1}}{V_{nn+1}} = B \quad ; \quad B = \text{const.}$$

$V'_{nn+1} - B V_{nn+1} = 0$, haciendo $Q_n - Q_{n+1} = Z_n$

$$\overset{1}{V}(Z_n) - B\,V(Z_n) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

(*) es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden equivalente a (7.16) y tiene una solución única (ver por ejemplo Haaser t.2)

$$V(Z_n) = A\,e^{B Z_n} \quad \text{que satisface } V(Z_0) = V_0;$$

La solución de la ecuación (7.16) es entonces

$$V(Q_n - Q_{n+1}) = A\,e^{B(Q_n - Q_{n+1})} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7.17)$$

En efecto

$$\{V(Q_{n-1}-Q_n)\;V(Q_n-Q_{n+1})\} = A\,e^{B(Q_{n-1}-Q_n)}\;A\,e^{B(Q_n-Q_{n+1})}$$

$$= A^2\,e^{B(Q_{n-1}-Q_{n+1})}$$

luego

$$\frac{\delta}{\delta Q_n}\{V(Q_{n-1}-Q_n)\;V(Q_n-Q_{n+1})\} = A^2\,\frac{\delta}{\delta Q_n}\,e^{B(Q_{n-1}-Q_{n+1})}$$

$$= 0$$

Así el potencial de Toda $V(Q_n-Q_{n-1}) = A\,e^{B(Q_{n-1}-Q_n)}$ es la única posible que tiene la integral $e^{-\delta/2}\;\pi\,P$ que es del tipo de las integrales de Hénon.

Otras integrales de este tipo serán deducidas en los pasos siguientes.

Notamos que

$$1)\;[\delta,\;\Sigma\,\frac{\delta}{\delta Q_n}\;] = \sum_{n,m}\;[(V_{nn+1} + V_{n+1n})\;\frac{\delta^2}{\delta P_n\,\delta P_{n+1}}]\;(\frac{\delta}{\delta Q_m})\;-$$

$$- \sum_{n,m} \left(\frac{\delta}{\delta Q_n}\right)\left[(V_{nm+1} + V_{m+1m}) \frac{\delta^2}{\delta P_m \, \delta P_{m+1}}\right]$$

efectuando obtenemos lo siguiente

$$\left[\delta, \sum \frac{\delta}{\delta Q_n} \right] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7.18)$$

$$2) \quad \left[\sum \frac{\delta}{\delta P_s}, \Gamma \right] = \sum_{n,m} \left\{ \frac{\delta}{\delta P_n} \right\}\left\{P_m \frac{\delta}{\delta Q_m}\right\} - \sum_{n,m} \frac{\delta}{\delta P_n} \left\{V_{nm+1} \frac{\delta^{1}}{\delta P_m} + V_{nm-1} \frac{\delta^{1}}{\delta P_m} \right\}$$

$$- \sum_{n,m} P_n \frac{\delta}{\delta Q_s} \left(\frac{\delta}{\delta P_m}\right) + \sum_{n,m} \left\{V_{nm+1} \frac{\delta^{1}}{\delta P_n} + V_{nm-1} \frac{\delta^{1}}{\delta P_n} \right\} \frac{\delta}{\delta P_m}$$

$$= \sum_{n} \frac{\delta}{\delta Q_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7.19)$$

Definimos

$$I_{N-n} = \left(\sum_{s=1}^{N} \frac{\delta}{\delta P_s}\right)^n I_N = \left(\sum_{s=1}^{N} \frac{\delta}{\delta P_s}\right)^n e^{-\delta/2} \, \pi P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.20)$$

Tenemos

$$\Gamma I_{N-n} = \Gamma \left(\sum_{s=1} \frac{\delta}{\delta P_s}\right)^n I_N \quad ; \text{ usando (5.19) tenemos:}$$

$$= \left(\sum_{s=1}^{N} \frac{\delta}{\delta P_s}\right)\Gamma \left(\sum_{s} \frac{\delta}{\delta P_s}\right)^{n-1} I_N - \left(\sum_{m} \frac{\delta}{\delta Q_m}\right) \left(\sum_{s} \frac{\delta}{\delta P_s}\right)^{n-1} I_N$$

ahora usando la definición (7.20) en el primer término de la última expresión e intercambiando

el orden de los operadores $\frac{\delta}{\delta Q_m}$ y $\frac{\delta}{\delta P_s}$

$$\Gamma I_{N-n} = \Big(\sum_{s=1} \frac{\delta}{\delta P_s}\Big) \Gamma I_{N-n+1} - \Big(\sum_{s} \frac{\delta}{\delta P_s}\Big)^{n-1} \Big(\sum_{m} \frac{\delta}{\delta Q_m}\Big) I_N$$

en el último término de la expresión final tenemos; poniendo $I_N = e^{-\delta/2}\, \pi P$ y usando (7.18)

reiteradamente: $\Big(\sum_{s} \frac{\delta}{\delta P_s}\Big)^{n-1} \Big(\sum_{m} \frac{\delta}{\delta Q_m}\Big) e^{-\delta/2}\, \pi P = \Big(\sum_{s=1} \frac{\delta}{\delta P_s}\Big)^{n-1} \Big(\sum_{m} \frac{\delta}{\delta Q_m}\Big) \Big(1 - \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{2^2 2!} - \frac{\delta^3}{2^3 3!} + \dots\Big) \pi P$

$$= \Big(\sum_{s=1} \frac{\delta}{\delta P_s}\Big)^{n-1} \Big(\sum_{m} \frac{\delta}{\delta Q_m} - \frac{\delta}{2} \sum_{m} \frac{\delta}{\delta Q_m} + \frac{\delta^2}{2^2 2!} \sum_{m} \frac{\delta}{\delta Q_m} - \dots\Big) \pi P$$

$$= \Big(\sum_{s=1} \frac{\delta}{\delta P_s}\Big)^{n-1} e^{-\delta/2} \Big(\sum_{m} \frac{\delta}{\delta Q_m}\Big) \pi P$$

$$= 0$$

luego:

$$\Gamma I_{N-n} = \Big(\sum_{s} \frac{\delta}{\delta P_s}\Big) \Gamma I_{N-n+1} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (5.21)$$

en el segundo miembro de la última expresión aumentando sucesivamente el subíndice de I hasta obtener ΓI_N, tenemos

$$\Gamma I_{N-n} = \Big(\sum_{s} \frac{\delta}{\delta P_s}\Big) \Gamma \Big(\sum_{s} \frac{\delta}{\delta P_s}\Big)^{n-1} I_N$$

$$= \Big(\sum_{s} \frac{\delta}{\delta P_s}\Big)^2 \Gamma \Big(\sum_{s} \frac{\delta}{\delta P_s}\Big)^{n-2} I_N - \Big(\sum_{s} \frac{\delta}{\delta Q_s}\Big) \Big(\sum_{s} \frac{\delta}{\delta P_s}\Big)^{n-2} I_N$$

El último término de la expresión final se anula como antes.

luego usando el argumento de Induccion tenemos.

$$\Gamma I_{N-n} = \Big(\sum_{s} \frac{\delta}{\delta P_s}\Big)^{n} \Gamma I_N \quad , \text{ pero } \quad \Gamma I_N = 0$$

luego $\Gamma I_{N-n} = 0 \qquad n = 0,1,2, \ldots\ldots\ldots, N-1$

Asl los I_{N-n} son las constantes del movimiento.

ANEXO D

Obtención de los I_N a partir de la relación

$$I_N = e^{-\delta/2} \prod_{s=1}^{N} P$$

Desarrollando en serie el exponencial y aplicando al producto de todos los P tenemos:

N=1 Tenemos el caso trivial de **una sola partícula** con su respectivo 'resorte'

$$\delta = (V_{12} + V_{21}) \frac{\delta^2}{\delta P_1\, \delta P_2}$$, pero $P_2=P_{1+1}=P_1$, el período es N=1 y $V_{12}=V_{11}$ puesto que $Q_2=Q_{1+1}=Q_1$, también $V_{21}=V_{11}$

luego

$$\delta = 2\, V_{11} \frac{\delta^2}{\delta P_1^2} \;\;{-}{-}{-}{>}\;\; I_1 = \left(1 - \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{2^2 2!} - \ldots\right) P_1$$

$$= \left(1 - V_{11} \frac{\delta^2}{\delta P_1^2}\right) P_1 = P_1$$

N=2 Sistema con dos partículas

$$\delta = (V_{12} + V_{21}) \frac{\delta^2}{\delta P_1\, \delta P_2} + (V_{23} + V_{32}) \frac{\delta^2}{\delta P_2\, \delta P_3}$$, por las condiciones de contorno periodicas tenemos: $P_3=P_{2+1}=P_1$, $V_{23}=V_{21}$ y $V_{32}=V_{12}$; (el período es N=2) ; sea $X_1=V_{12}$, $X_2=V_{21}$

$$I_2 = \left[1-(V_{12}+V_{21})\frac{\delta^2}{\delta P_1\,\delta P_2}\right] P_1P_2 = P_1P_2 - (V_{12}+V_{21})$$

$$I_2 = P_1P_2 - (X_1 + X_2)$$

N=3 Sistema con tres partículas

$$\delta = (V_{12}+V_{21})\frac{\delta^2}{\delta P_1\,\delta P_2} + (V_{23}+V_{32})\frac{\delta^2}{\delta P_2\,\delta P_3} + (V_{34}+V_{43})\frac{\delta^2}{\delta P_3\,\delta P_4}$$

luego

$$I_3 = \left[1 - \frac{V_{12}+V_{21}}{2}\frac{\delta^2}{\delta P_1\delta P_2} - \frac{V_{23}+V_{32}}{2}\frac{\delta^2}{\delta P_2\,\delta P_3} - \frac{V_{34}+V_{43}}{2}\frac{\delta^2}{\delta P_3\,\delta P_4}\right]P_1P^2P_3$$

sabemos: $P_4 = P_{3+1} = P_1$ y $V_{34} = V_{31}$ sea $X_1 = \frac{V_{12}+V_{21}}{2}$, $X_2 = \frac{V_{23}+V_{32}}{2}$

$$X_3 = \frac{V_{31}+V_{13}}{2}$$

$$I_3 = P_1P_2P_3 - X_1 P_3 - X_2 P_1 - X_3 P_2$$

N=4 Sistema con cuatro partículas

$$\delta = (V_{12}+V_{21})\frac{\delta^2}{\delta P_1\,\delta P_2} + (V_{23}+V_{32})\frac{\delta^2}{\delta P_2\,\delta P_3} + (V_{34}+V_{43})\frac{\delta^2}{\delta P_3\,\delta P_4} + (V_{45}+V_{54})\frac{\delta^2}{\delta P_4\,\delta P_5}$$

$$I_4 = \left\{1 - X_1\frac{\delta^2}{\delta P_1\,\delta P_2} - X_2\frac{\delta^2}{\delta P_2\,\delta P_3} - X_3\frac{\delta^2}{\delta P_3\,\delta P_4} - X_4\frac{\delta^2}{\delta P_4\,\delta P_5} + \frac{1}{8}\left[\sum_{n=1}^{4}(V_{n\,n+1}+V_{n+1\,n})\frac{\delta^2}{\delta P_n\,\delta P_{n+1}}\right]^2\right\}P_1P_2P_3P_4$$

$$I_4 = \prod_{n=1}^{4} P_n - X_1P_3P_4 - X_2 P_4P_1 - X_3 P_1P_2 - X_4 P_2P_3 + X_1X_3 + X_2X_4$$

Podemos comparar estos resultados con aquellos ya obtenidos en el capítulo 6, cuando usamos el procedimiento de Hénon.

ANEXO E

Una expresión general se obtiene para I_N

Usaremos $$\left[\sum_{i=1}^{N} a_i\right]^k = \sum_{\substack{j_1,j_2..j_N=0,1..\\ j_1+j_2+..+j_N=k}} \frac{k!}{j_1!j_2!...j_N!}\, a_1^{j_1}\, a_2^{j_2} \ldots a_N^{j_N}$$

Sea $$2A=\delta = \sum_{n=1}^{N}(V_{nn+1}+V_{n+1n})\frac{\delta^2}{\delta P_n\, \delta P_{n+1}} \equiv \sum_{n=1}^{N} Y_n \quad ;\text{ además}$$

$$e^{-A} = \sum_{r=0}^{+\infty} (-)^r \frac{A^r}{r!} = \sum \frac{(-)^r}{r!}\left(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} Y_n\right)^r = \sum \frac{(-)^r}{r!}\left[\, 2^{-r} \sum_{\substack{j_1,j_2..j_N=0,1..\\ j_1+j_2+..+j_N=r}} \frac{r!}{j_1!\, j_2! \ldots j_N!}\, Y_1^{j_1}\, Y_2^{j_2} \ldots Y_N^{j_N} \right]$$

además $$Y_n^{j_n} = (V_{nn+1}+V_{n+1n})^{j_n} \frac{\delta^{2j_n}}{\delta P_n^{j_n}\, \delta P_{n+1}^{j_n}}$$

Sea $W_n = V_{nn+1}+V_{n+1n}$

$$e^{-(\delta/2)} \prod_{n=1}^{N} P_n = e^{-A} \prod_{N=1}^{N} P_n = \sum_{r=0}^{+\infty} 2^{-r}(-)^r \sum_{j_1+j_2+..+j_N=r} C\, W_1^{j_1}\, W_2^{j_2} \ldots W_N^{j_N} \left[\frac{\delta^{2j_1}}{\delta P_1^{j_1}\, \delta P_2^{j_1}} \frac{\delta^{2j_2}}{\delta P_2^{j_2}\, \delta P_3^{j_2}} \ldots\ldots \frac{\delta^{2j_N}}{\delta P_N^{j_N}\, \delta P_{N+1}^{j_N}} \right] \prod_{n=1}^{N} P_n \quad ; (P_{N+1}=P1)$$

cuando se derive la expresión πP se anulan todos los términos

escepto cuando $j_1, j_2, \ldots, j_N = 0$ ó 1 luego,

$$C = \frac{1}{j_1!\, j_2!\, j_3! \ldots j_N!} = 1$$

$$= \sum_{r=0}^{[N/2]} (-)^r \sum_{j_1+j_2+..+j_N=r} W_1^{j_1}\, W_2^{j_2} \ldots W_N^{j_N} \left[\frac{\delta^{2(j_1+j_2+\ldots+j_N)}}{\delta P_1^{j_1+j_N}\ \delta P_2^{j_1+j_2}\ \delta P_3^{j_2+j_3} \ldots\ldots \delta P_N^{j_{N-1}+j_N}} \right];$$

se usó $P_{N+1}=P_1$

Para construir los otros I_m ($m=1,2,\ldots N$) usaríamos la ecuación (5.20).

DISCUSION, CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

Hasta donde conocemos, las características de una ecuación de onda necesarias y suficientes que aseguren la interacción no destructiva de sus ondas solitarias, son desconocidas. Un procedimiento seguro para ver si una onda es o no un solitón, sigue siendo el uso de métodos numéricos.

Soluciones de tipo solitón han sido halladas en el presente trabajo, en tres àreas de la Física (Hidrodinàmica, Mecànica y Electromagnetismo), ésto sugiere que el concepto de solitón tiene mucha importancia en Física Aplicada. Por otra parte, el entendimiento de éste fenómeno puede contribuir a la mejor comprensión de algunos problemas fundamentales en Física Teórica.

En las publicaciones especializadas de los últimos años se encuentra abundante información relacionada a la Teoría de Campos de Toda (contínuo y discreto), Clàsico y Cuàntico; ésto es interesante porque se introduce la nueva àrea de estudio, La Teoría de Campos Integrables; en particular, es interesante el Sistema Períodico de Toda y su perturbación en base a los Algebras de Lie; este último tema sería de interés en un estudio posterior, como continuación del presente trabajo.

REFERENCIAS

1.-G.B. Whitham, "Linear and Nonlinear Waves" J.W. sons Inc. 1974.

2.-Ryogo Hirota and Kimio Suzuki,"Theoretical and Experimental Studies of Lattice Solitons in Nonlinear Lumped Networks" Proc.of the IEEE. Vol 61, No 10, Oct. 1973.

3.-R. Hirota and J. Satsuma, "A Variety of Nonlinear Network Equations Generated from the Bäcklund transformation for the Toda Lattice",Prog. of Theor. Phys. Suppl. No59 (1976)64.

4.-Karl Lonngren and A. Scott (Eds)1978 "Solitons in Action" Acad. Press.Inc.

5.-Dodd-Eilbeck-Gibbon-Morris,"Solitons and Nonlinear Wave Equations"(1982) Acad.Press.Inc.(London).

6.-J.Lopes Cardoso Jr., Revista Brasilera de Fisica V.10, No3 (1980).

7.-M.Wadati, "The Toda Lattice and the transformation theories" Prog.Theor.Phys.Suppl.39(1976)36.

8.-M.Toda-M.Wadati,"Canonical Transformation for the Exponential Lattice",J.Phys.Soc.Japan 39(1975) 1204 .

9.-M.Wadati-M.Toda."Bäcklund Transformation for the Exponential Lattice",J.Phys.Soc.Japan 39(1975)1196.

10.-M.Hènon,"Integrals of the Toda Lattice" Phys. Rev. B Vol.9 No 4(1974)1921.

11.-Bullough R.K. and Caudrey P.J. (Eds)1980 Solitons.Berlin,Springer.Topics in Current Physics,Vol.17.

12.-H.Flaschka,"The Toda Lattice I.Existence of Integrals" Phys.Rev. B Vol.9 No 4 (1974)1924.

13.-K.Sawada and T.Kotera,"The Hènon's Integrals and the Uniqueness of the Toda's Potential" Reprinted from Prog. of Theor. Phys. Suppl. No 59(1976).

14.-E.J. Saletan-A.H.Cromer, "Theoretical Mechanics"John Wiley sons Inc.(1971).

15.-C. Lamb Jr.,"Elements of Soliton Theory" 1980 John Wiley and sons Inc.

16.-A. La Rosa,"Fenòmenos No-lineales.La Ecuaciòn de KdV y el Mètodo Inverso a la Dispersiòn" UNI,FC,Dic.1984.

17.-T.J.Rolfe,S.A. Rice and J. Danca 'A Numerical Study of Large Amplitude Motion on a Chain of Coupled Nonlinear Oscillators' J.Chem.Phys.70(1) 1 Jan. 1979.

18.-J.A.Krumhansl 'Unity in the Science of Physics', Phys.Today, March (1991)33.

19.-M.J.Ablowitz-H.Segur, 'Solitons and the Inverse Scattering Transform' Siam Philadelphia.1981.

20.-B.M.Budak,A.A.Samarski y A.N.Tijonov 'Problemas de la Física matemàtica' Ed.MIR Moscù 1980.

21.-A. Bernui, Notas 'El Solitòn' UNI.1980.

22.-A.C.Scott,F.Y.F. Chu and D.W.Mclaughlin,Proc of the IEEE Vol.61 No 10 Oct.1973.

23.-A. Tijonov- A.Samarsky,'Ecuaciones de la Física Matemàtica' Ed. MIR 1983.

INDICE