UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS

RESULTADOS SOBRE ENTROPÍA TOPOLÓGICA

PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN FÍSICA

ELABORADA POR

ROGER JAVIER METZGER ALVÁN

ASESOR:

Dr. ROSENDO OCHOA JIMÉNEZ

LIMA - PERÚ

2022

A Miryan y Paulo

Agradecimiento

A los amigos matemáticos, Félix, Oswaldo, Eladio, y a los amigos físicos, Rosendo, Orlando y Javier, quienes incesantemente me animaron a presentar este trabajo de licenciatura.

Agradezco también al Prof. Rosendo Ochoa Jimenez por aceptar asesorarme y a los revisores, pues me ayudaron a hacer más comprensible este trabajo.

Índice

1 Introducción **1**

1.1 Dinámica 4

1.2 Estructura del trabajo 5

2 Entropía topológica clásica **8**

2.1 Entropía topológica: conjuntos separados y generadores 13

2.2 Algunas propiedades de la entropía topológica 16

3 El caso multivaluado **27**

4 Propiedades **31**

5 Ejemplos **45**

6 Conclusiones **52**

7 Recomendaciones **54**

Referencias Bibliográficas **54**

A Medidas, entropía métrica y el principio variacional **59**

A.1 Entropía métrica 60

A.2 Particiones y sub-σ-álgebras 62

A.3 Incertidumbre y entropía 64

A.4 La entropía métrica y el principio variacional 67

Resumen

En la primera parte del trabajo damos una visión de la definición clásica de entropía topológica. Nos concentraremos en el desarrollo hecho por Bowen y Dinaburg de entropía topológica usando la noción de conjuntos generadores y conjuntos separados.

La otra parte del trabajo la dedicamos a estudiar una generalización de la noción de entropía para aplicaciones multivaluadas. Se definen entropías por conjuntos separados y generadores para aplicaciones multivaluadas. Con ellas se obtienen algunas propiedades de estas entropías que se asemejan al caso monovaluado y que replican los resultados clásicos cuando usamos funciones monovaluadas. También se obtendrán resultados que generalizan la definición de entropía para funciones no continuas.

Abstract

The first part we give a classic notion of topological entropy. We will enfasize the definition with the ideas for the topological entropy of Bowen and Dinaburg, using the notion of spanning and separated sets.

In the second part of the work we will give a generalization of the notion of entropy for set-valued maps. Indeed, we obtanin two definition of entropy for set-valued maps, one for separated sets and another using spanning sets. Using these definitions, we obtain some properties that resemble de single-valued maps and reflect classical results when applied to single-valued maps. We also obtain some results that generalize the definition of entropy to non continuous maps.

Capítulo 1

Introducción

El concepto de **entropía** fue introducido en la física por primera vez en los trabajos de Clasius: Teorías Mecánicas del Calor. La primera versión en alemán es [9], y su primera traducción al inglés es [10]. Los trabajos de Clasius dan inicio al estudio sistemático de lo que posteriormente se llamaría termodinámica. En ellos se presenta a la entropía como la parte de la energía de un sistema que no puede convertirse en trabajo.

Posteriormente, Boltzman, en su trabajo sobre la segunda ley de la termodinámica, es el primero en proponer una interpretación estadística de la entropía. En su trabajo junta nociones de probabilidad con los teoremas de equilibrio térmico, [4]. Para la fórmula que Boltzman deduce allí hace la suposición simplificadora de que las partículas en el gas son idénticas y que la distribución de probabilidad de cada partícula es independiente. Su trabajo tiene esencialmente tres partes:

(a) La entropía es una medida de la aleatoriedad o desorden en un sistema mecánico estadístico.

(b) Si S es la entropía de un sistema en un estado dado y W es la cantidad de microestados compatibles con el estado dado entonces $S = k \log W$, donde k es una constante física positiva.

(c) Los estados de equilibrio, que son los estados del sistema observados en la naturaleza, son aquellos con la mayor probabilidad termodinámica, lo que implica la mayor entropía. Por (a), son los estados del sistema más aleatorios, o más desordenados, y consistentes con cualquier restricción que el sistema tenga que satisfacer, como la conservación de la energía. La existencia de más de un estado de equilibrio dará lugar a transiciones de fase.

Von Neumann, en Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica, [30], hace una una generalización de las ideas de Boltzman. Shannon, Khinchin y McMillan, en [27], [16], [20], hacen una definición de entropía en el contexto de teoría de la información. En ella relacionan la entropía con la cantidad de información necesaria que un sistema requiere para ser descrito. Con esa idea, los sistemas bien ordenados requieren menos información para estar completamente descritos, y en los más desordenados se necesita más información. En 1988 Tsallis [29], define una nueva estadística de donde surgen tipos de entropía dependiendo de un parámetro (S_q) y recupera la entropía de Boltzman para $q = 1$.

En 1958, Kolmogorov [17] define la **entropía métrica** para K-sistemas y Sinai

[25] extiende esta definición a todas las transformaciónes que preservan medida. Está definición es un paso importante, e incluso tiene influencias en teoría de la información. Por su importancia, daremos un recuento de esta definición en el Anexo A.

Adler, Konheim y McAndrews, en [1] definen **entropía topológica** en espacios compactos mientras que Bowen en [5] y Dinaburg en [11] obtuvieron una definición equivalente en el caso metrizable, no necesariamente compacto.

Anatole Katok [14] dedujo la entropía métrica de las transformaciones ergódicas a partir de los conjuntos generadores.

Más referencias que incluyen notas históricas son [12], [14], [26].

En este trabajo estudiaremos algunos aspectos de la entropía topológica. De modo general, la entropía topológica está relacionado con el número de órbitas esencialmente diferentes de longitud n, más específicamente con la razón exponencial de ese número. Es un invariante topológico, esto es, se conserva por conjugación. Puede servir para diferencial dos sistemas que son espectralmente equivalentes, pero no topológicamente equivalentes.

Aunque la entropía topológica se desarrolló posteriormente a la entropía métrica, esta última no es necesaria para su desarrollo. De hecho, la entropía topológica es un poco más amplia, en vista del resultado siguiente.

Teorema 1.1 (Principio Variocional de la Entropía)**.** *La entropía topológica es el supremo de las entropías métricas respecto de las medidas invariantes del sistema.*

Para entender este enunciado desarrollaremos en el Anexo A la definición de entropía métrica y culminaremos enunciando con mayor precisión el principio variacional.

1.1 Dinámica

Dado un espacio de estados X, una función $f : X \to X$ representa la evolución del sistema. Es decir, si en un momento inicial estamos en el estado $x \in X$ al momento siguiente estaremos en el estado $f(x) \in X$. El "momento" siguiente puede ser después de un segundo, un día, un año, etc. dependiendo de la escala de tiempo que tomemos. Aunque no sepamos exactamente cual es la evolución del sistema, es decir aunque no sepamos determinar exactamente la órbita $\{f^n(x)|n \in \mathbb{N}\}$ es posible obtener información del conjunto y de donde estará. Muchas veces no es posible hacerlo de forma exacta, sin embargo se puede obtener información global del sistema, de las órbitas en su conjunto. Eso dependerá de la estructura que demos al espacio de estados X.

En relación a las estructuras mencionadas en el párrafo anterior, hay, para comenzar, dos puntos de vista igualmente importantes. Uno es la estructura topológica, la que nos habla de cercanías y límites y otro es el de medida, o probabilístico, que nos da los comportamientos más usuales y en promedio. El segundo punto de vista es el que se ve de forma usual reflejado en la Mecánica Estadística.

Un modo de ver la entropía está relacionado a la cantidad de información necesaria para describir un sistema dinámico. Si nos imaginamos nuestro sistema como una estructura regular periódica (como un cristal), necesitaremos menos información para describirla completamente. Si nuestro sistema está desordenado, necesitaremos pasar más información para poder describirla. Viéndolo de esa forma, la frase "la entropía siempre aumenta" tiene el sentido de que la información no se pierde.

La importancia de la entropía radica en que es un invariante que sirve para la clasificación de los sistemas dinámicos. Está relacionada con los exponentes de Lyapunov y por lo tanto indican que tan sensible a las condiciones iniciales puede ser un sistema dinámico.

1.2 Estructura del trabajo

En este trabajo presentaremos el enfoque topológico de la entropía, y avanzar un poco en la inclusión de relaciones que van más allá de las funciones continuas (clásicas), con la intención de que puedan servir de un punto de vista extendido de la entropía en la física.

Un modo de lograr esto es reproducir una noción de entropía topológica para aplicaciones multivaluadas en espacios métricos. Esto nos dará un avance en las posibilidades de estudio en este concepto, ver [7]. Los resultados dan la posibilidad de calcular un tipo de entropía bien comportada para funciones que no son continuas. Algo que se acerca más a la realidad.

De modo similar a lo que hace Bowen y Dinaburg obtenemos dos definiciones de entropía una dada por conjuntos separados y otra por conjuntos generadores.

Demostramos que se mantienen propiedades conocidas de la entropía topológica clásica del caso monovaluado [1], [5], [11].

Nuestra motivación viene no solamente de los trabajos antes mencionados si no también de que pensamos que la noción de entropía juega un rol importante en el análisis de los sistemas multivaluados caóticos, como en el caso monovaluado.

El trabajo se organiza como sigue.

En la sección 2, describiremos la definición y resultados comunes sobre la entropía topológica, principalmente la construcción y definición debida a Dinaburg [11] y Bowen [5].

En la sección 3 definimos las entropías separada y generada para un sistema dinámico multivaluado discreto.

En la sección 4 demostramos los resultados principales que tratan sobre las propiedades de estas entropías.

En la sección 5 presentamos algunos ejemplos relacionados.

En la sección 6 presentamos algunas conclusiones.

En el anexo A presentamos la definición de entropía métrica para que se pueda hacer un paralelo con la construcción que hemos hecho. Este anexo también tiene la intención de servir de contexto teórico para entender principio variacional de la entropía.

Capítulo 2

Entropía topológica clásica

En esta sección daremos la definición y resultados usuales de la entropía topológica. Esta introducción está contenida en el Capítulo 7 del trabajo de P. Walters [31]. Estaremos trabajando en un espacio topológico compacto X.

Un **cubrimiento abierto** de X es una colección de conjuntos abiertos cuya unión es X. Dados dos cubrimientos abiertos α y β de X, denotamos $\alpha \vee \beta$ a su **yuxtaposición** definida como todos los conjuntos de la forma $A \cap B$ donde $A \in \alpha$ y $B \in \beta$. De forma similar se define la la yuxtaposición $\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$ de cualquier colección finita de cubrimientos abiertos de X.

Dados dos cubrimientos α y β, decimos que β es un **refinamiento** de α, si para todo $B \in \beta$, existe $A \in \alpha$ tal que $B \subset A$, y lo denotamos $\alpha < \beta$. Es claro que $\alpha \vee \beta$ es un refinamiento tanto de α como de β.

Dado una transformación continua $T : X \to X$ y un cubrimiento abierto α denotamos como $T^{-1}\alpha$ al cubrimiento abierto formado por todos los conjuntos de la forma $T^{-1}A$ con $A \in \alpha$.

Si α es un cubrimiento abierto de X denotamos por $N(\alpha)$ al número de conjuntos en un subcubrimiento finito de α con la menor cardinalidad. Este número es finito pues estamos trabajando con X compacto.

Definimos la **entropía** de α como $H(\alpha) = \log N(\alpha)$.

Considerando a X el espacio de estados, α representa la colección de resultados posibles y distinguibles de un experimento fijado o detector. Así, $H(\alpha)$ es la entropía del sistema asociada con el experimento o detector.

Propiedades: Es fácil demostrar que

1. $T^{-1}(\alpha \vee \beta) = T^{-1}(\alpha) \vee T^{-1}(\beta)$.
2. $T^{-1}(\alpha) < T^{-1}(\beta)$, cuando $\alpha < \beta$.
3. $H(\alpha) \geq 0$.
4. $H(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow N(\alpha) = 1 \Longleftrightarrow X \in \alpha$.
5. Si $\alpha < \beta$ entonces $H(\alpha) \leq H(\beta)$.
6. $H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$.
7. Si $T : X \to X$ es continua entonces $H(T^{-1}\alpha) \leq H(\alpha)$. Si además T es sobreyectiva entonces $H(T^{-1}\alpha) = H(\alpha)$.

La demostración de estas propiedades no es difícil, vea [31].

Teorema 2.1 (Teorema 7.1 de [31]). *Si α es un cubrimiento abierto de X y $T : X \to X$ es continuo entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\big)$, existe.*

Demostración. Reproducimos con mínimas variaciones la demostración dada por Walters.

Hacemos $a_n = H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right)$.

Afirmamos que

$$a_{n+k} \leq a_n + a_k. \tag{2.0}$$

En efecto, primero observemos que

$$\begin{aligned} \bigvee_{i=0}^{n+k-1} T^{-i}\alpha &= \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) \bigvee \left(\bigvee_{i=n}^{n+k-1} T^{-i}\alpha\right) \\ &= \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) \bigvee T^{-n} \left(\bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i}\alpha\right). \end{aligned}$$

Donde la última igualdad sigue de la propiedad (1). Así,

$$\begin{aligned} a_{n+k} &= H\left(\bigvee_{i=0}^{n+k-1} T^{-i}\alpha\right) \\ &\leq H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) + H\left(T^{-n}\bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i}\alpha\right), \text{ usando la propiedad (6)} \\ &\leq a_n + a_k, \text{ usando la propiedad (7).} \end{aligned}$$

La demostración concluye usando un resultado bastante simple de convergencia de sucesiones que establece que si una sucesión de términos no negativos tiene la propiedad (2), entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ existe. □

Definición 2.1. Si α es un cubrimiento abierto de X y $T : X \to X$ es continuo, definimos la **entropía** de T relativa a α, denotada por $h(T,\alpha)$, como:

$$h(T,\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right).$$

Propiedades:

8. $h(T,\alpha) \geq 0$.

9. Cuando $\alpha < \beta$ se tiene $h(T,\alpha) \leq h(T,\beta)$.

10. $h(T,\alpha) \leq H(\alpha)$.

Demostración. La propiedad (8) sigue fácilmente usando (3) y la definición. Veamos la (9) Cuando $\alpha < \beta$ se tiene $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha \leq \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\beta$, de modo que (5) implica $H\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\big) \leq H\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\beta\big)$, sigue que $h(T,\alpha) \leq h(T,\beta)$.

Para probar (10), usamos la propiedad (6) y tenemos

$$\begin{aligned} H\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\big) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} H(T^{-i}\alpha) \\ &\leq n \cdot H(\alpha), \end{aligned}$$

□

Definición 2.2. Si $T : X \to X$ es continua, definimos la **entropía topológica** de T como

$$h(T) = \sup_{\alpha} h(T,\alpha).$$

Propiedades:

11. $h(T) \geq 0$.

12. En la definición de $h(T)$, usando la propiedad (9), el supremo se puede tomar sobre cubrimientos abiertos finitos de X.

13. $h(Id) = 0$, donde Id es la función identidad.

14. Si Y es un conjunto cerrado de X y $TY = Y$, entonces $h(T|Y) \leq h(T)$.

Teorema 2.2. *Si X_1 y X_2 son espacios compactos y $T_i : X_i \to X_i$ son funciones continuas para $i = 1, 2$, y si $\phi : X_1 \to X_2$ es un aplicación continua con $\phi X_1 = X_2$ y $\phi \circ T_1 = T_2 \circ \phi$ entonces $h(T_1) \geq h(T_2)$. Si ϕ es un homeomorfismo entonces $h(T_1) = h(T_2)$.*

Demostración. Sea α un cubrimiento abierto de X_2. Entonces

$$\begin{aligned}
h(T_2, \alpha) &= \lim \frac{1}{n} H\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T_2^{-i}\alpha\big) \\
&= \lim \frac{1}{n} H\big(\phi^{-1} \bigvee_{i=0}^{n-1} T_2^{-i}\alpha\big) \qquad \text{usando (7),} \\
&= \lim \frac{1}{n} H\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} \phi^{-1} T_2^{-i}\alpha\big) \\
&= \lim \frac{1}{n} H\big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T_1^{-i}\phi^{-1}\alpha\big) \\
&= h(T_1, \phi^{-1}\alpha)
\end{aligned}$$

Así, $h(T_2) \leq h(T_1)$. Además, si ϕ es un homeomorfismo, entonces también vale $\phi^{-1} \circ T_2 = T_1 \circ \phi^{-1}$, de modo que $h(T_1) \leq h(T_2)$. □

2.1 Entropía topológica: conjuntos separados y generadores

Aquí se describe el trabajo de Bowen y Dinaburg, en los términos de [31]. Trataremos con un espacio métrico (X, d) no necesariamente compacto. Las bolas abiertas de radio $r > 0$ y centro $x \in X$, se denotan por $B(x; r)$. Y el espacio de las funciones uniformemente continuas del espacio (X, d) las denotamos por $UC(X, d)$. Cuando mencionemos a la aplicación $T : X \to X$ estamos suponiendo que $T \in UC(X, d)$. Para cada n natural definimos la métrica d_n en X por $d_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(T^i x, T^i y)$. Así, la bola abierta centrada en x y radio r de la métrica d_n es $\bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-1}B(T^i(x); r)$, que corresponde a los puntos cuyas órbitas no se alejan de la órbita de x a más de r.

Definición 2.3. Sea n un numero natural, $\epsilon > 0$, y K un subconjunto compacto de X. Decimos que un subconjunto F de X, (n, ϵ) **genera** K con respecto a T si para todo $x \in K$ existe $y \in F$ con $d_n(x, y) \leq \epsilon$. Esto es,

$$K \subset \bigcup_{y \in F} \bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i}B(T^i y; \epsilon).$$

Definición 2.4. Si n es un número natural $\epsilon > 0$ y K un subconjunto compacto de X, denotamos por $r_n(\epsilon, K)$ a la menor cardinalidad de los conjuntos (n, ϵ)-generadores de K respecto de T. En caso necesario se puede escribir $r_n(\epsilon, K, T)$.

Es claro que $r_n(\epsilon, K) < \infty$ pues la compacidad de K implica que el cubrimiento de K por los conjuntos abiertos $\bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i}B(T^i; \epsilon)$, con $x \in X$, tiene un subcubrimiento finito.

También se cumple que $r_n(\epsilon_1, K) \geq r_n(\epsilon_2, K)$, cuando $\epsilon_1 < \epsilon_2$.

Definición 2.5. Si $\epsilon > 0$ y K es un conjunto compacto de X denotamos

$$r(\epsilon, K, T) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log r_n(\epsilon, K).$$

Escribimos $r(\epsilon, K, T, d)$ en caso necesario.

Si $\epsilon_1 < \epsilon_2$ entonces $r(\epsilon_1, K) \geq r(\epsilon_2, K)$, por la propiedad anterior.

Definición 2.6. Si K es un subconjunto compacto de X denotamos $h(T; K) = \lim_{\epsilon\to 0} r(\epsilon, K, T)$. La **entropía topológica** de T es $h(T) = \sup_K h(T; K)$, donde el supremo se toma sobre todos los subconjuntos compactos de X. Escribimos $h_d(T)$ cuando necesario.

Definamos ahora la entropía topológica usando los conjuntos separados.

Definición 2.7. Sea n un número natural, $\epsilon > 0$ y K un conjunto compacto de X. Un subconjunto E de K se dice (n, ϵ) **separado** con respecto a T si para cada par $x, y \in E$, distintos, se tiene $d_n(x, y) > \epsilon$. Esto es, la bola de radio ϵ centrada en x, en la métrica d_n, no contiene otro punto de E salvo x.

Definición 2.8. Si n es un número natural, $\epsilon > 0$ y K es un subconjunto compacto de X, denotamos $s_n(\epsilon, K)$ a la mayor cardinalidad de los subconjuntos (n, ϵ) separados de K respecto de T. Escribimos $s_n(\epsilon, K, T)$ en caso necesario.

Lema 2.3. *Se cumple que* $r_n(\epsilon, K) \leq s_n(\epsilon, K) \leq r_n(\epsilon/2, K)$, *de modo que* $s_n(\epsilon, K) < \infty$.

Demostración. Si E es (n, ϵ) separado de K con cardinalidad máxima entonces es (n,ϵ)-generador de K. Luego, $r_n(\epsilon, K) \leq s_n(\epsilon, K)$. Ahora suponga que E es un conjunto (n,ϵ) separado de K y F es un conjunto $(n,\epsilon/2)$-generador de K. Defina $\phi : E \to F$ eligiendo, para cada $x \in E$, un punto $\phi(x) \in F$ con $d_n(x, \phi(x)) \leq \epsilon/2$. Así, ϕ es inyectiva y por lo tanto la cardinalidad de E no es mayor que la de F. Así, $s_n(\epsilon, K) \leq r_n(\epsilon/2, K)$. $\square$

De forma análoga a la definición de conjuntos generadores, se cumple que $s_n(\epsilon_1, K) \geq s_n(\epsilon_2, K)$, cuando $\epsilon_1 < \epsilon_2$.

Definición 2.9. Si $\epsilon > 0$ y K es un subconjunto compacto de X denotamos $s(\epsilon, K, T) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s_n(\epsilon, K)$. Denotamos $s(\epsilon, K, T, d)$ cuando sea necesario.

Teorema 2.4. *Valen las siguientes propiedades:*

1. $r(\epsilon, K, T) \leq s(\epsilon, K, T) \leq r(\epsilon/2, K, T)$.

2. *Si* $\epsilon_1 < \epsilon_2$ *entonces* $s(\epsilon_1, K, T) \geq s(\epsilon_2, K, T)$.

3. $h(T; K) = \lim\limits_{\epsilon\to 0} s(\epsilon, K, T)$, *de modo que* $h(T) = \sup_K \lim_{\epsilon\to 0} s(\epsilon, K, T)$.

Demostración. (1) y (2) siguen del Lema 2.3 y de la observación hecha al final de la demostración de dicho lema.

(3) Se demuestra usando (1). $\square$

Este teorema, en especial la parte (3), permite definir la entropía topológica de dos maneras equivalentes, ya sea por conjuntos generadores o por conjuntos separados.

Si denotamos por $r_n'(\epsilon, K)$ a la menor cardinalidad de un conjunto K que (n, ϵ)- separa K entonces la prueba del Lema 2.3 también da $r_n'(\epsilon, K) \leq s_n(\epsilon, K) \leq r_n'(\epsilon/2, K)$. Así, se tiene

$$h(T) = \sup_K \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log r_n'(\epsilon, K).$$

2.2 Algunas propiedades de la entropía topológica

Comencemos con algunas observaciones:

1. Si $T : X \to X$ es una isometría del espacio métrico (X, d) entonces claramente $d_n = d$ para todo d lo que implica $s_n(\epsilon) = s_1(\epsilon, K)$ y $h_d(T) = 0$.

2. Fijándonos en la definición de $h_d(T)$ vemos que para que sea diferente de cero, se debe tener que $r_n(\epsilon, K)$ debe aumentar con n y eso ocurrirá cuando T aumenta las distancias. Es decir, $h_d(T)$ mide la tasa de expansión de T respecto de la métrica d.

3. Si (X, ρ) es un espacio métrico, el conjunto F ϵ-genera X si para todo $x \in X$ existe $y \in F$ tal que $\rho(x, y) \leq \epsilon$, y un subconjunto E es ϵ-separado si para todo $y, z \in E$ con $y \neq z$, entonces $\rho(y, z) > \epsilon$.

   La ϵ entropía de (X, ρ) es el logaritmo del mínimo número de elementos de conjuntos ϵ-generadores y la ϵ-capacidad es el logaritmo del máximo número de elementos de un conjunto ϵ-separado. Con estas notaciones, considerando los espacios métricos (K, d_n) se tiene que $r'_n(\epsilon, K)$ es la ϵ-entropía de (K, d_n) y $s_n(\epsilon, K)$ es la ϵ-capacidad de (K, d_n). Así

$$\begin{aligned} h(T;K) &= \lim_{\epsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\epsilon\text{-entropía de } (K,d_n)) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\epsilon\text{-capacidad de } (K,d_n)) \end{aligned}$$

Estas ideas son del trabajo de Kolmogorov y Tihomirov sobre el tamaño de espacios métricos (ver [18]).

Veamos ahora propiedades de invarianza.

Definición 2.10. Dos espacios métricos d y d' en X son **uniformemente equivalentes** si

$$Id : (X, d) \to (X, d') \qquad \text{y} \qquad Id : (X, d') \to (X, d)$$

son uniformemente continuos.

Si $UC(X, d)$ es el conjunto de las transformaciones uniformemente continuas del espacio métrico (X, d) entonces $T \in UC(X, d)$ si y solo si $T \in UC(X, d')$.

Teorema 2.5. *Si d y d' son uniformemente equivalentes y $T \in UC(X, d)$ entonces $h_d(T) = h_{d'}(T)$.*

Demostración. Sea $\epsilon_1 > 0$. Elija $\epsilon_2 > 0$ de modo que $d'(x, y) < \epsilon_2$ implica $d(x, y) < \epsilon_1$ y elija $\epsilon_3 > 0$ tal que $d(x, y) < \epsilon_3$ implica $d'(x, y) < \epsilon_2$.

Sea K compacto. Entonces

$$\begin{aligned} r_n(\epsilon_1, K, d) &\leq r_n(\epsilon_2, K, d') \\ r_n(\epsilon_2, K, d') &\leq r_n(\epsilon_3, K, d). \end{aligned}$$

Así, $r(\epsilon_1, K, d) \leq r(\epsilon_2, K, d') \leq r(\epsilon_3, K, d)$. Se tiene que $\epsilon_1 \to 0$ implica $\epsilon_2 \to 0$ y $\epsilon_3 \to 0$, así, tenemos

$$h_d(T, K) = h_{d'}(T, K).$$

$\square$

Cuando el espacio (X, d) es compacto, y d' es otra métrica equivalente, se tiene que cualquier función de X en X es uniformemente continua, por lo tanto si el espacio es compacto, dos métricas equivalentes son uniformemente equivalentes. De modo que, en el caso de espacios métricos compactos, la entropía de T no depende de las métricas equivalentes.

Teorema 2.6. *Sea (X, d) un espacio métrico y $T \in UC(X, d)$. Si $K \subset K_1 \cup \cdots K_m$ son todos compactos de X entonces $h(T; K) \leq \max\limits_{1 \leq i \leq m} h(T, K_i)$.*

Demostración. Claramente $s_n(\epsilon, K) \leq s_n(\epsilon, K_1) + \cdots + s_n(\epsilon, K_m)$. Si fijamos $\epsilon > 0$, para cada n podemos elegir el máximo entre los $s_n(\epsilon, K_j)$ y hacemos $K_{i(n,\epsilon)}$ tal que $s_n(\epsilon, K_{i(n,\epsilon)}) = \max_j s_n(\epsilon, K_j)$.

Entonces $s_n(\epsilon, K) \leq m \cdot s_n(\epsilon, K_{i(n,\epsilon)})$, de modo que

$$\log s_n(\epsilon, K) \leq \log m + \log s_n(\epsilon, K_{i(n,\epsilon)}).$$

Escogemos una sucesión $n_j \to \infty$ tal que

$$\frac{1}{n_j} \log s_{n_j}(\epsilon, K) \longrightarrow \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log s_n(\epsilon, K).$$

Como hay infinitos n_j y una cantidad finita de K_i, se tiene que en la sucesión $S_{n_j}(\epsilon, K_{i(n_j,\epsilon)})$ existe al menos un $K_{i(\epsilon)}$ que se repite una infinidad de veces. Podemos cambiar a esa subsucesión para obtener que $K_{i(n,\epsilon)}$ no dependa de j (i.e., $K_{i(n,\epsilon)} = K_{i(\epsilon)}$, para todo j.

Así, $s(\epsilon, K, T) \leq s(\epsilon, K_{i(\epsilon)})$. Con un razonamiento similar al anterior, podemos escoger una sucesión $\epsilon_q \to 0$ de modo que $K_{i(\epsilon_q)}$ sea constante igual a K_{i_0}, de modo que

$$h(T; K) = \lim_{\epsilon \to 0} s(\epsilon, K, T) \leq \lim_{\epsilon \to 0} s(\epsilon, K_{i_0}, T) = h(T; K) \leq \max_j h(T; K_j).$$

□

Como consecuencia de este teorema, para calcular $h_d(T)$, es suficiente tomar el supremo de $h(T; K)$ sobre todos los compactos de diámetro menor que δ dado. Esto es posible pues cualquier compacto puede ser cubierto por bolas abiertas B_i de diámetro suficientemente pequeño, es decir $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} K \cap B_i$, de donde $h(T; K) \leq \max_{1 \leq i \leq m} h(T; K \cap B_i)$.

Corolario 2.7. *Si X es un espacio compacto metrizable y d es cualquier métrica de X entonces $h(T) = h_d(T) = h(T, X)$.*

Demostración. Si K es un compacto de X es claro que $h(T; K) \leq h(T; X)$, y si tomamos supremos en los compactos K, obtenemos $h_d(T) = h_d(T; X)$. Pero vimos como consecuencia del Teorema 2.5 que si el espacio es compacto, la entropía no depende de la métrica. □

Cuando X es compacto, es posible usar el Corolario 2.7 para simplificar la definición de $h(T)$. En efecto, tome una métrica d que define la topología de X, luego

$$h(T) = \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log r_n(\epsilon, X) = \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log s_n(\epsilon, X).$$

La fórmula podemos interpretarla del siguiente modo. Suponga que queremos contar el número de órbitas de longitud n, del tipo $\{x, Tx, \ldots, T^{n-1}x\}$, pero que solo pueden ser vistas con un error ϵ. Entonces, $r_n(\epsilon, X)$ y $s_n(\epsilon, X)$ pueden ser vistas como el número de órbitas de longitud n con un error ϵ. De modo que cuando $\epsilon \to 0$, $h(T)$ mide la razón, respecto de n, del crecimiento del número de órbitas de longitud n con "resolución" ϵ.

Vamos a demostrar que la primera definición de entropía topológica con cubrimientos abiertos, dada en la Definición 2.2, y a la cual, por el momento llamaremos $h^*(T)$ ($h^*(T, \alpha)$ para la entropía de un cubrimiento) es equivalente a la definición dada con conjuntos separados y generadores. Esto se hará en el Teorema 2.12 aunque antes necesitaremos algunos resultados.

En (X, d) definimos el diámetro de un cubrimiento abierto como $\operatorname{diam}(\alpha) = \sup_{A \in \alpha} \operatorname{diam}(A)$. Recordemos que el número de Lebesgue de un partición tiene la propiedad de que cualquier conjunto con diámetro menor está contenido en un conjunto del cubrimiento. Así, si α y γ son cubrimientos abiertos de X y $\operatorname{diam}(\alpha)$ es menor que el número de Lebesgue para γ entonces α es un refinamiento de γ, $\gamma < \alpha$.

Teorema 2.8. *Sea (X, d) espacio métrico compacto. Si $\{\alpha_n\}_1^\infty$ es una sucesión de cubrimientos abiertos de X con $\operatorname{diam}(\alpha_n) \to 0$ entonces, si $h^*(T) < \infty$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} h^*(T, \alpha_n)$ existe y es igual a $h^*(T)$, en el caso $h^*(T) = \infty$ también se* *tiene* $\lim_{n\to\infty} h^*(T,\alpha_n)=\infty$.

Demostración. Suponga que $h^*(T)<\infty$. De la definición de supremo, para $\epsilon>0$ elegimos un cubrimiento abierto γ con $h^*(T,\gamma)>h^*(T)-\epsilon$. Sea δ el número de Lebesgue para γ. Elegimos N de modo que $n\geq N$ implica que $\mathrm{diam}(\alpha_n)<\delta$. Entonces, $\gamma<\alpha_n$ y así $h^*(t,\gamma)\leq h^*(T,\alpha_n)$ cuando $n\geq N$. Sigue que $n\geq N$ implica $h^*(T)\geq h^*(T,\alpha_n)>h^*(T)-\epsilon$ de donde $\lim_{n\to\infty} h^*(T,\alpha_n)=h^*$.

Cuando $h^*(T)=\infty$ tomamos $a>0$ y elegimos un cubrimiento γ con $h^*(T,\gamma)>a$. A partir de aquí podemos seguir análogamente al caso anterior para obtener $h^*(T,\alpha_n)=\infty$. $\square$

Corolario 2.9. *Se tiene* $h^*(T)=\lim\limits_{\delta\to 0}\{\sup h^*(T,\alpha)\mid \mathrm{diam}(\alpha)<\delta\}$.

Teorema 2.10. *Sea* $T:X\to X$ *una aplicación continua de un espacio métrico compacto* (X,d).

(i) *Si* α *es un cubrimiento abierto de* X *con número de Lebesgue* δ *entonces*

$$N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right)\leq r_n(\delta/2,X)\leq s_n(\delta/2,X).$$

(ii) *Si* $\epsilon>0$ *y* γ *es un cubrimiento abierto con* $\mathrm{diam}(\gamma)\leq\epsilon$ *entonces*

$$r_n(\epsilon,X)\leq s_n(\epsilon,X)\leq N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\gamma\right).$$

Demostración. Se demostró previamente, en Lema 2.3, que $r_n(\epsilon,X)\leq s_n(\epsilon,X)$, para todo $\epsilon>0$.

(i) Sea F un conjunto $(n, \delta/2)$ generador de X con cardinalidad $r_n(\delta/2, T)$. Entonces

$$X = \bigcup_{x \in F} \bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-1} \bar{B}(T^i(x); \delta/2)$$

y como para i se tiene que $\bar{B}(T^i(x); \delta/2)$ está en un elemento de α, tenemos $N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) \leq r_n(\delta/2, X)$.

(ii) Sea E un conjunto (n, ϵ) separado de cardinalidad $s_n(\epsilon, X)$. Ningún elemento del cubrimiento $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\gamma$ puede contener dos elementos de E de modo que $s_n(\epsilon, X) \leq N(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\gamma)$. $\square$

Corolario 2.11. *Sea $T : X \to X$ una aplicación continua de un espacio métrico compacto (X, d). Sea $\epsilon > 0$ y α_ϵ un cubrimiento de X por bolas abiertas de radio 2ϵ y γ_ϵ cualquier cubrimiento de X por bolas abiertas de radio $\epsilon/2$. Entonces*

$$N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha_\epsilon\right) \leq r_n(\epsilon, X) \leq s_n(\epsilon, X) \leq N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\gamma_\epsilon\right).$$

A continuación, el teorema anunciado.

Teorema 2.12. *Si $T : X \to X$ es una aplicación continua de un espacio métrico compacto (X, d) entonces $h(T) = h^*(T)$* i.e. *las dos definiciones de entropía topológica coinciden.*

Demostración. Si $\epsilon > 0$ y $\alpha_\epsilon, \gamma_\epsilon$ son como en el corolario anterior, entonces $h^*(T, \alpha_\epsilon) \leq r(\epsilon, X, T) \leq s(\epsilon, X, T) \leq h^*(T, \gamma_\epsilon)$. Si tomamos $\epsilon = 1/n$ y haciendo $n \to \infty$, tenemos, por el Teorema 2.8, que los dos términos extremos convergen a $h^*(T)$ y los términos del medio convergen a $h(T)$. $\square$

Teorema 2.13. *Si $T : X \to X$ es una aplicación continua de un espacio métrico (X, d) entonces*

$$h(T) = \lim_{\epsilon \to 0} \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log r_n(\epsilon, X) \leq \lim_{\epsilon \to 0} \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log s_n(\epsilon, X).$$

Demostración. Por el Coroloraio 2.11,

$$h^*(T, \alpha_\epsilon) \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log r_n(\epsilon, X) \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log s_n(\epsilon, X) \leq h^*(T, \gamma_\epsilon)$$

y tomando $\epsilon = 1/k$ y haciendo $k \to \infty$ podemos usar el Teorema 2.8 para concluir la demostración. □

Teorema 2.14.

(i) *Si (X, d) es un espacio métrico compacto, $T \in UC(X, d)$ y $m > 0$ entonces $h_d(T^m) = m \cdot h_d(T)$.*

(ii) *Dados dos espacios métricos compactos (X_1, d_1) y (X_2, d_2)., $T_i \in UC(X_i, .d_i)$. Defina una métrica en $X_1 \times X_2$ del siguiente modo $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))\}$. Entonces, $T_1 \times T_2 \in UC(X_1 \times X_2, d)$ y $h_d(T_1 \times T_2) \leq h_{d_1}(T_1) + h_{d_2}(T_2)$.*

Demostración. (i) Es claro que $r_n(\epsilon, K, T^m) \leq r_{nm}(\epsilon, K, T)$. De ahí

$$\frac{1}{n} \log r_n(\epsilon, K, T^m) \leq \frac{m}{nm} \log r_{nm}(\epsilon, K, T)$$

y en consecuencia $h_d(T^m) \leq m \cdot h_d(T)$.

Veamos ahora la otra desigualdad. Como T es uniformemente continuo, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,y) < \delta \qquad \text{implica} \qquad \max_{0 \le j \le m-1} d(T^j x, T^i x) < \epsilon.$$

Así, un conjunto (n,δ)-generador para K con respecto a T^m también es un (nm,ϵ)-generador para K con respecto a T. En consecuencia $r_n(\delta, K, T^m) \geq r_{nm}(\epsilon, K, T)$, luego $m \cdot r(\epsilon, K, T) \leq r(\delta, K, T^m)$. Lo que da

$$m \cdot h_d(T; K) \leq h_d(T^m, K).$$

(ii) Dados los compactos $K_i \subset X_i$ para $i = 1,2$. Si F_i es un conjunto (n,ϵ)-generador para K_i respecto de T_i entonces $F_1 \times F_2$ es un conjunto (n,ϵ)-generador para $K_1 \times K_2$ con respecto a $T_1 \times T_2$.

De modo que

$$r_n(\epsilon, K_1 \times K_2, T_1 \times T_2) \leq r_n(\epsilon, K_1, T_1) + r_n(\epsilon, K_2, T_2)$$

lo que implica

$$r(\epsilon, K_1 \times K_2, T_1 \times T_2) \leq r(\epsilon, K_1, T_1) + r(\epsilon, K_2, T_2).$$

Luego

$$h_d(T_1 \times T_2, K_1 \times K_2) \leq h_{d_1}(T_1, K_1) + h_{d_2}(T_2, K_2).$$

Sea $\pi_i : X \times X_2 \to X_i$, $i = 1,2$ las proyecciones. Si $K \subset X_1 \times X_2$ es compacto, entonces, $K_i = \pi_1(K)$ y $K_2 = \pi_2(K)$ también y $K \subset K_1 \times K_2$. En consecuencia

$$h_d(T_1 \times T_2, K) \leq h_2(T_1 \times T_2, K_1 \times K_2).$$

Luego

$$\begin{aligned}
h_d(T_1 \times T_2) &= \sup_{\substack{K \subset X_1 \times X_2 \\ \text{compacto}}} h_d(T_1 \times T_2, K) \\
&= \sup_{\substack{K_1 \subset X_1 \\ K_2 \subset X_2 \\ \text{compactos}}} h_d(T_1 \times T_2, K) \\
&\leq \sup_{\substack{K_1 \subset X_1 \\ \text{compacto}}} h_{d_1}(T_1, K_1) + \sup_{\substack{K_2 \subset X_2 \\ \text{compacto}}} h_{d_2}(T_2, K_2) \\
&= h_{d_1}(T_1) + h_{d_2}(T_2).
\end{aligned}$$

Hagamos el caso en que X_1 es compacto (similar para X_2). Como cualquier conjunto compacto de $X_1 \times X_2$ es un subconjunto compacto de $X_1 \times K_2$ para algún compacto K_2 de X_2, tenemos $h_d(T_1 \times T_2) = \sup\{h_d(T_1 \times T_2, X_1) \times K_2 \mid K_2$ es un subconjunto compacto de $X_2\}$.

Sea K_2 un subconjunto compacto de X_2. Tome $\delta > 0$. Si E es un conjunto (n, δ) separado de X_1 y E_2 es un conjunto (n, δ) separado de K_2, entonces $E_1 \times E_2$ es un conjunto (n, δ) separado de $X_1 \times K_2$. Tenemos entonces

$$s_n(\delta, X_1 \times K_2, T_1 \times T_2) \geq s_n(\delta, X_1, T_1) \cdot s_n(\delta, K_2, T_2)$$

luego

$$\begin{aligned}
s(\delta, X_1 \times K_2, T_1 \times T_2) &\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}[\log s_n(\delta, X_1, T_1) + \log s_n(\delta, K_2, T_2)] \\
&\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s_n(\delta, X_1, T_1) + \limsup_{n\to\infty} \log s_n(\delta, K_2, T_2).
\end{aligned}$$

Haciendo $\delta \to 0$ tenemos por el Teorema 2.13

$$h_d(T_1 \times T_2, X_1 \times K_2) \geq h_{d_1}(T_1) + h_{d_2}(T_2).$$

$\square$

Como última observación tenemos que en el caso en que T es un homeomorfismo, es posible que $h_d(T)$ y $h_d(T^{-1})$ sean diferentes. Por ejemplo $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $Tx = mx$ con $m \neq 1$. En un caso se puede ver que la entropía es mayor que cero mientras que la inversa tiene entropía cero.

Capítulo 3

El caso multivaluado

En este capítulo desarrollamos el objetivo principal del trabajo, definir entropía para aplicaciones multivaluadas. Seguiremos pasos análogos a lo hecho en el capítulo anterior. Más específicamente, lo haremos análogamente a la construcción de Bowen y Dinaburg, [5] [11].

Primero definamos la métrica que usaremos en el conjunto de partes de X.

Sea X un espacio métrico. Dados $A, B \subset X$ definimos la distancia entre dos subconjuntos de X.

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Denote por 2^X al conjunto potencia formado por todos los subconjuntos de X.

Llamaremos **aplicación multivaluada** en X a una aplicación $f : X \to 2^X$. Diremos que f es **monovaluada** si $card(f(x)) = 1$ para todo $x \in X$, donde *card* denota la cardinalidad (o número de elementos) del conjunto. Hay una correspondencia natural entre aplicaciones monovaluadas $f : X \to 2^X$ y aplicaciones $f : X \to X$.

De aquí en adelante estaremos suponiendo el caso en que cada aplicación multivaluada f es **estricta**, i.e., $f(x) \neq \emptyset$ para cada $x \in X$.

Considere f una aplicación multivaluada de X. Para todo $n \in \mathbb{N}^+$ definimos la aplicación $d_n : X \times X \to \mathbb{R}^+$ como

$$d_n(x,y) = \inf \left\{ \max_{0 \leq i \leq n-1} d(x_i, y_i) : \begin{array}{l} (x_i)_{i=0}^n, (y_i)_{i=0}^n \text{ sucesiones con} \\ x_0 = x, y_0 = y, \\ x_{i+1} \in f(x_i),\ y_{i+1} \in f(y_i) \\ \text{para todo } i \text{ con } 0 \leq i \leq n-1 \end{array} \right\}. \quad (3.0)$$

La notación d_n^f indica dependencia en f. Estas aplicaciones son métricas en el caso monovaluado. En general son solo semimétricas [3], [13] (vea el Ejemplo 5.5).

Defina las ϵ-bolas centradas en $x \in X$ con respecto a d_n,

$$B_n[x, \epsilon] = \{y \in X : d_n(x,y) \leq \epsilon\}.$$

Nuevamente, cuando usemos la notación $B_n^f[x, \epsilon]$ se está indicando dependencia de f.

Dado $\epsilon > 0$ y $F \subset X$ decimos que F es **(n, ϵ)-separado** para f si

$$B_n[x, \epsilon] \cap F = \{x\}, \qquad \text{para todo } x \in F.$$

Defina $s(n, \epsilon) = \sup\{card(F) : F \text{ es } (n, \epsilon)\text{-separado}\}$. Escribimos $s(n, \epsilon, f)$

cuando es necesario enfatizar f. Es posible que $s(n,\epsilon)=\infty$. Defina

$$h_{se}(f,\epsilon)=\limsup_{n\to\infty}\frac{\log s(n,\epsilon)}{n}.$$

Como cualquier conjunto (n,ϵ)-separado es (n,ϵ')-separado para todo ϵ' con $0<\epsilon'\leq\epsilon$, obtenemos $s(n,\epsilon)\leq s(n,\epsilon')$ de modo que $h_{se}(f,\epsilon)\leq h_{se}(f,\epsilon')$ para $0<\epsilon'\leq\epsilon$. Luego, el límite

$$\lim_{\epsilon\to 0}h_{se}(f,\epsilon)=\sup_{\epsilon>0}h_{se}(f,\epsilon)$$

existe y se da la siguiente definición.

Definición 3.1. La **entropía topológica separada** de f se define como

$$h_{se}(f)=\lim_{\epsilon\to 0}h_{se}(f,\epsilon).$$

De forma similar al caso monovaluado ([5], [11]) podemos considerar también la entropía topológica para aplicaciones multivaluadas vía conjuntos generadores.

Dado $n\in\mathbb{N}^+$, $\epsilon>0$ y $E\subset X$ decimos que E es (n,ϵ)**-generador** para f si

$$X=\bigcup_{x\in E}B_n[x,\epsilon].$$

Definimos $r(n,\epsilon)=\min\{card(E):E \text{ es } (n,\epsilon)\text{-generador}\}$ y escribimos $r(n,\epsilon,f)$ cuando sea necesario enfatizar f. Es posible tener $r(n,\epsilon)=\infty$.

Definimos

$$h_{sp}(f,\epsilon)=\limsup_{n\to\infty}\frac{\log r(n,\epsilon)}{n}.$$

Como cualquier conjunto (n,ϵ')-generador es (n,ϵ)-generador para $0<\epsilon'\leq\epsilon$, obtenemos $r(n,\epsilon)\leq r(n,\epsilon')$ de modo que $h_{sp}(f,\epsilon)\leq h_{sp}(f,\epsilon')$ para $0<\epsilon'\leq\epsilon$.

Sigue que el límite

$$\lim_{\epsilon \to 0} h_{sp}(f, \epsilon) = \sup_{\epsilon > 0} h_{sp}(f, \epsilon)$$

existe y se da la siguiente definición.

Definición 3.2. La **entropía topológica por conjuntos generadores** de f se define como

$$h_{sp}(f) = \lim_{\epsilon \to 0} h_{sp}(f, \epsilon).$$

Como se puede ver, estas definiciones imitan definiciones similares para aplicaciones monovaluadas hechas en la sección anterior. En particular, ambas se reducen a la entropía topológica clásica en el caso monovaluado. Entonces escribimos $h(f) = h_{se}(f) = h_{sp}(f)$ para aplicaciones f monovaluadas.

Note que, a diferencia de [5], [11], no suponemos ninguna hipótesis de continuidad para las aplicaciones involucradas. En el caso monovaluado, Ciklová [8] obtuvo propiedades para la entropía topológica sin tales hipótesis, incluyendo la igualdad entre las entropías por conjuntos separados y generadores, vea Proposición 3.4 de p. 624 en [8].

Capítulo 4

Propiedades

En esta sección probamos los resultados principales de este trabajo que tratan sobre las propiedades de las entropías por conjuntos separados y generadores.

Sea f una aplicación multivaluada en un espacio métrico X. Dado $A \subset X$ definimos

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} f(x).$$

Decimos que A es **invariante** si $f(A) \subset A$. Para tales conjuntos hay una aplicación $f|_A$ multivaluada inducida definida por $f|_A(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Nuestra primera propiedad es sobre la entropía separada de los conjuntos invariantes.

Teorema 4.1. *Sea f una aplicación multivaluada en un espacio métrico X. Si $X = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ donde cada A_i es un conjunto invariante de f, entonces $h_{se}(f) = \max_{1 \leq i \leq m} h_{se}(f|_{A_i})$.*

Demostración. Afirmamos que $h_{se}(f|_A) \leq h_{se}(f)$ para cualquier conjunto invariante $A \subset X$. En efecto, para cualquier $F \subset A$, $n \in \mathbb{N}^+$, $\epsilon > 0$ y $x \in F$ se tiene $B_n^{f|_A}[x, \epsilon] \cap F = B_n^f[x, \epsilon] \cap F$. Sigue que cada conjunto (n, ϵ)-separado F de $f|_A$ es (n, ϵ)-separado para f. En consecuencia, $s(n, \epsilon, f|_A) \leq s(n, \epsilon, f)$ de donde la afirmación sigue.

Por la afirmación tenemos $h_{se}(f) \geq \max_{0 \leq i \leq m} h_{se}(f|_{A_i})$. La desigualdad inversa sigue como en el Teorema 7.5 p. 172 de [31]. $\square$

Nuestra segunda propiedad es sobre el orden natural de inclusión en el conjunto de las aplicaciones multivaludas definida por $f \leq g$ si $f(x) \subset g(x)$ para todo $x \in X$.

Teorema 4.2. *Las entropía separada y generada invierten el orden de inclusión en el conjunto de las aplicaciones multivaluadas.*

Demostración. Sean f, g dos aplicaciones multivaluadas de un espacio métrico X con $f \leq g$. Sea F un conjunto (n, ϵ)-separado de g. Afirmamos que F también es (n, ϵ)-separado para f. En efecto, tome $x, y \in F$ distintas y sucesiones $(x_i)_{i=1}^n$, $(y_i)_{i=0}^n$ que satisfacen $x_0 = x$, $y_0 = y$, $x_{i+1} \in f(x_i)$ y $y_{i+1} \in f(y_i)$ para cada i con $0 \leq i \leq n-1$. Como $f \leq g$, obtenemos $x_{i+1} \in g(x_i)$ y $y_{i+1} \in g(y_i)$ para todo i con $0 \leq i \leq n-1$. Como F es (n, ϵ)-separado para g, concluimos que existe un i con $0 \leq i \leq n-1$ tal que $d(x_i, y_i) > \epsilon$. Luego, F es (n, ϵ)-separado para f como se afirmó. De aquí obtenemos $s(n, \epsilon, g) \leq s(n, \epsilon, f)$ para cada $(n, \epsilon) \in \mathbb{N}^+ \times]0, \infty[$, así

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log s(n,\epsilon,g)}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log s(n,\epsilon,f)}{n}, \qquad \forall \epsilon > 0.$$

Tomando límites cuando $\epsilon \to 0$ obtenemos $h_{se}(g) \leq h_{se}(f)$. La prueba de que la entropía generadora invierte el orden en las aplicaciones multivaluadas es similar.

□

Recuerde que una **selección** de una aplicación multivaluada $f : X \to 2^X$ es cualquier aplicación $s : X \to X$ que satisface $s(x) \in f(x)$ para todo $x \in X$. Las selecciones siempre existen por el axioma de elección. Una consecuencia directa del Teorema 4.2 es el siguiente.

Corolario 4.3. *Si f es una aplicación multivaluada en un espacio métrico, entonces $h_{se}(f) \leq h(s)$ para cada selección s de f.*

Cada aplicación monovaluada en un espacio métrico satisface $r(n,\epsilon) \leq s(n,\epsilon) \leq r(n,\frac{\epsilon}{2})$. Es natural esperar las mismas desigualdades en el caso multivaluado. Sin embargo, solo obtenemos la primera de estas desigualdades como se reporta abajo. La prueba de la segunda en el caso monovaluado depende del hecho de que las aplicaciones d_n en (3) son métricas, un hecho que es falso en general a la luz del Ejemplo 5.5 más adelante.

Lema 4.4. *Si f es una aplicación multivaluada en un espacio métrico, entonces $r(n,\epsilon) \leq s(n,\epsilon)$ para cada $n \in \mathbb{N}^+$ y $\epsilon > 0$.*

Demostración. Si $s(n,\epsilon) = \infty$ no hay nada que probar. Entonces, podemos suponer que $s(n,\epsilon) < \infty$. Por lo tanto, hay un conjunto (n,ϵ)-separado E tal que $card(E) = s(n, \epsilon)$. En particular $card(E) < \infty$. Si probamos que E es (n, ϵ)-generador, entonces $r(n, \epsilon) \leq card(E) = s(n, \epsilon)$ y lo tenemos listo. De otro modo, podemos hacer

$$y \in K \setminus \left(\bigcup_{x \in E} B_n[x, \epsilon] \right). \tag{4.0}$$

En particular, $y \notin E$ y así $card(E \cup \{y\}) > card(E)$ pues $card(E) < \infty$. Si $x \in E$, (4) implica que $B_n[x, \epsilon] \cap (E \cup \{y\}) = B_n[x, \epsilon] \cap E = \{x\}$. Más aun, si hubiera $x \in B_n[y, \epsilon] \cap E$ entonces $y \in B_n[x, \epsilon]$ para algún $x \in E$ en oposición a (4). Por lo tanto, $B_n[y, \epsilon] \cap E = \emptyset$ lo que prueba $B_n[y, \epsilon] \cap (E \cup \{y\}) = \{y\}$. Así, $E \cup \{y\}$ es (n, ϵ)-separado. Por (4) tenemos $y \in K$ así $E \cup \{y\} \subset K$ en contradicción a $card(E) = s(n, \epsilon)$. Lo que prueba el resultado. □

Nuestra tercera propiedad compara las entropías separada y generada.

Teorema 4.5. *La entropía generada es menor o igual a la entropía separada.*

Demostración. La prueba es una consecuencia directa del Lema 4.4. □

La propiedad siguiente da una condición suficiente para que las entropías separada y generada de un sistema dinámico multivaluado sean iguales.

Teorema 4.6. *Las entropías separada y generada coinciden cuando las aplicaciones d_n en (3) son métricas para todo n grande.*

Demostración. La prueba es similar al caso monovaluado [31]. En efecto, por el Teorema 4.5 es suficiente mostrar que $h_{se}(f) \leq h_{sp}(f)$ y, para esto, solo necesitamos probar que $s(n, \epsilon) \leq r(n, \frac{\epsilon}{2})$ para cualquier n grande y cualquier $\epsilon > 0$. Lo que se hace del siguiente modo.

Tome $N \in \mathbb{N}^+$ tal que d_n en (3) es una métrica para $n \geq N$. Sea F un conjunto (n, ϵ)-separado y E un conjunto $(n, \frac{\epsilon}{2})$-generador para $n \geq N$ y $\epsilon > 0$. Entonces, existe una aplicación $\phi : F \to E$ que satisface $x \in B_n[\phi(x), \frac{\epsilon}{2}]$ para $x \in F$. Esta aplicación es inyectiva. En efecto, si $\phi(x) = \phi(x')$ para $x, x' \in F$, entonces $d_n(x, x') \leq d_n(x, \phi(x)) + d_n(\phi(x'), x') \leq \epsilon$ porque $n \geq N$ y así d_n es una métrica. Esto implica que $x' \in B_n[x, \epsilon] \cap F$ de modo que $x = x'$. Sigue que $card(F) \leq card(E)$ lo que prueba $s(n, \epsilon) \leq r(n, \frac{\epsilon}{2})$. □

Observamos que las hipótesis del resultado anterior no son válidas en general (e.g. Ejemplo 5.5).

A continuación discutimos la invariancia de las entropías bajo conjugación topológica. Observe que, para cualquier par de conjuntos X y Y, cada aplicación $H : X \to Y$ induce una aplicación $H : 2^X \to 2^Y$ dada por $H(A) = \{H(a) : a \in A\}$ para $A \subset X$. Acerca de esta aplicación tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.7. *Sean f y g aplicaciones multivaluadas de espacios métricos X y Y respectivamente. Si existe una aplicación sobreyectiva uniformemente continua $H : X \to Y$ que satisface $H \circ f \leq g \circ H$, entonces $h_*(f) \geq h_*(g)$ para $* = se, sp$.*

Demostración. Primero probamos que $h_{se}(f) \geq h_{se}(g)$. Afirmamos que para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}^+$ y cada conjunto (n, ϵ)-separado F de g existe un conjunto (n, δ)-separado F' de f tal que $card(F) = card(F')$.

Como H es uniformemente continuo, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que cuando $a, b \in X$ se tiene que

$$d(H(a), H(b)) > \epsilon \qquad \text{implica} \qquad d(a, b) > \delta.$$

Sea F un conjunto (n, ϵ)-separado de g. Como H es sobreyectiva, podemos escoger una aplicación inyectiva $\phi : F \to X$ tal que $H \circ \phi = Id$ donde Id es la identidad. Probemos que $F' = \phi(F)$ es (n, ϵ)-separado para f.

Tome $x, y \in F'$ distintos y sucesiones $(x_i)_{i=0}^{n}$, $(y_i)_{i=0}^{n}$ tales que $x_0 = x$, $y_0 = y$, $x_{i+1} \in f(x_i)$ y $y_{i+1} \in f(y_i)$ para todo i tal que $0 \leq i \leq n-1$.

Como $x \neq y$, tenemos $H(x) \neq H(y)$. De hecho, $x = \phi(a)$ y $y = \phi(b)$ para $a, b \in F$. Como $x \neq y$ tenemos $a \neq b$ así $H(x) = H(\phi(a)) = a \neq b = H(\phi(b)) = H(y)$.

Ahora, las sucesiones $(H(x_i))_{i=0}^{n}$ y $(H(y_i))_{i=0}^{n}$ satisfacen $H(x_0) = H(x)$, $H(y_0) = H(y)$, $H(x_{i+1}) \in H(f(x_i)) \subset g(H(x_i))$ y $H(y_{i+1}) \in H(f(y_i)) \subset g(H(y_i))$ para todo i con $0 \leq i \leq n-1$. Como $H(x), H(y) \in F$ y F es (n, ϵ)-separado para g, existe un i_0 con $0 \leq i_0 \leq n-1$ tal que $d(H(x_{i_0}), H(y_{i_0})) > \epsilon$. Entonces, $d(x_{i_0}, y_{i_0}) > \delta$ y la afirmación está demostrada pues $card(F') = car(\phi(F)) = card(F)$.

De la afirmación sigue que para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $s(n, \epsilon, g) \leq s(n, \delta, f)$ de modo que

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\log s(n, \epsilon, g)}{n} \leq \limsup_{n \to \infty} \frac{\log s(n, \delta, f)}{n} \leq h_{se}(f).$$

Haciendo $\epsilon \to \infty$ obtenemos $h_{se}(g) \leq h_{se}(f)$.

A continuación probamos $h_{sp}(f) \geq h_{sp}(g)$. Afirmamos que para cada $\epsilon > 0$

existe $\delta > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}^+$ y cada conjunto (n, δ)-generador E'de f existe un conjunto (n, ϵ)-generador E de g tal que $card(E) \leq card(E')$.

Fije $\epsilon > 0$ y tome $\delta > 0$ tal que

$$d(a, b) \leq \delta \implies d(H(a), H(b)) \leq \epsilon.$$

Ahora fije $n \in \mathbb{N}^+$ y un conjunto (n, δ)-generador E' de f, i.e.,

$$X = \bigcup_{x \in E'} B_n[x, \delta].$$

Como H es sobreyectivo tenemos

$$Y = \bigcup_{x \in E'} H(B_n[x, \delta]).$$

Afirmamos que $H(B_n[x, \delta]) \subset B_n[H(x), \epsilon]$. Tome $y \in B_n[x, \delta]$. Sigue que existen sucesiones $(x_i)_{i=0}^n$ y $(y_i)_{i=0}^n$ que satisfacen $x_0 = x$, $y_0 = y$, $x_{i+1} \in f(x_i)$, $y_{i+1} \in f(y_i)$ y $d(x_i, y_i) \leq \delta$ para todo i con $0 \leq i \leq n - 1$. Luego, las sucesiones $(H(x_i))_{i=0}^n$ y $(H(y_i))_{i=0}^n$ satisfacen $H(x_0) = H(x)$, $H(y_0) = H(y)$, $H(x_{i+1}) \in H(f(x_i)) \subset g(H(x_i))$ y $H(y_{i+1}) \in H(f(x_i)) \subset g(H(y_i))$ para todo i con $0 \leq i \leq n - 1$. Más aun, también tenemos $d(H(x_i), H(y_i)) \leq \epsilon$ para todo i con $0 \leq i \leq n-1$ por la elección de δ. En consecuencia $H(y) \in B_n[H(x), \epsilon]$ probando nuestra afirmación.

Sigue de la afirmación que

$$Y = \bigcup_{x \in E'} B_n[H(x), \epsilon].$$

Luego, $E = H(E')$ es (n, ϵ)-generador para g. Claramente $card(E) \leq card(E')$ y la afirmación sigue.

La afirmación implica que para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $r(n, \delta, f) \geq r(n, \epsilon, g)$ para cada $n \in \mathbb{N}^+$. En efecto, fije $\epsilon > 0$ y tome δ como en la afirmación. Suponemos que $r(n, \delta, f) < \infty$. Pues el otro caso es directo. Entonces, existe un conjunto (n, δ)-generador de f tal que $card(E') = r(n, \delta, f)$. Por la afirmación podemos escoger un conjunto (n, ϵ)-generador E de g tal que $card(E') \geq card(E)$. Entonces, $r(n, \delta, f) = card(E') \geq card(E) \geq r(n, \epsilon, g)$. De aquí obtenemos que para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$h_{sp}(f) \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log r(n, \delta, f)}{n} \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log r(n, \epsilon, g)}{n}.$$

Como ϵ es arbitrario, obtenemos $h_{sp}(f) \geq h_{sp}(g)$. $\square$

Decimos que las aplicaciones multivaluadas f y g de los espacios métricos respectivos X y Y son **topológicamente conjugadas** si existe un homeomorfismo uniforme $H : X \to Y$ tal que $g \circ H = H \circ f$. Correspondientemente, dos métricas d y d' de X son dichas **uniformemente equivalentes** si ambas $Id : (X, d) \to (Xd')$ e $Id : (X, d') \to (X, d)$ son uniformemente continuas, donde $Id(x) = x$ es la identidad.

Nuestra siguiente propiedad es la invariancia de las entropías separada y generada bajo la conjugación o métricas equivalentes.

Teorema 4.8. *Las entropías separada y generada son invariantes bajo conjugación topológica. Más aun, ambas entropías son independientes de métricas uniformemente equivalentes.*

Demostración. La primera parte es una consecuencias directa de la Proposición

4.7 mientras que la segunda sigue de la primera. □

Observación 4.0.1. El Teorema 4.8 implica que la entropía topológica también es un invariante para cualquier aplicación monovaluada, continua o no. Esto extiende el resultado monovaluado obtenido en la Proposicion 3.7 de p. 625 en Ciklová [8].

Definimos la composición $g \circ f$ de aplicaciones multivaluadas f, g de X por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Definimos f^0 por $f^0(x) = \{x\}$ para todo $x \in X$. Inductivamente definimos $f^k = f \circ f^{k-1}$ para $k \geq 1$.

Lema 4.9. *Para cada aplicación multivaluada f de un espacio métrico se tiene*

$$d_n^{f^k} \leq d_{kn}^f \qquad \textit{para todo } n, k \in \mathbb{N}^+.$$

Demostración. Podemos suponer que $k \in \mathbb{N}^+$. Fije $n \in \mathbb{N}^+$ y $x, y \in X$. Dado $\gamma > 0$ existen sucesiones $(x_i)_{i=0}^{kn}$ y $(y_i)_{i=0}^{kn}$ tales que $x_0 = x$, $y_0 = y$, $x_{i+1} \in f(x_i)$, $y_{i+1} \in f(y_i)$ y $d(x_i, y_i) \leq d_{kn}^f(x, y) + \gamma$ para todo i con $0 \leq i \leq kn - 1$. Defina $\hat{x}_i = x_{ki}$ y $\hat{y}_i = y_{ki}$ para todo i con $0 \leq i \leq n$. Entonces, las sucesiones resultantes $(\hat{x}_i)_{i=0}^n$ y $(\hat{y}_i)_{i=0}^n$ satisfacen $\hat{x}_0 = x, \hat{y}_0 = y$, $\hat{x}_{i+1} \in f^k(\hat{x}_i)$, $\hat{y}_{i+1} \in f^k(\hat{y}_i)$ y $d(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \leq d_{kn}^f(x, y) + \gamma$ para todo i con $0 \leq i \leq n - 1$. Entonces, $d_n^{f^k}(x, y) \leq d_n^f(x, y) + \gamma$. Como γ es arbitrario obtenemos el resultado. □

El Lema 4.9 implica el siguiente corolario.

Corolario 4.10. *Para cualquier aplicación multivaluada f de un espacio X se tiene*

$$B^f_{kn}[x,\epsilon] \subset B^{f^k}_n[x,\epsilon], \qquad \forall x \in X, n \in \mathbb{N}^+, \epsilon > 0.$$

Decimos que una aplicación multivaluada f de un espacio métrico X es **uniformemente continua** si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ siempre que $x, y \in X$ satisfacen $d(x,y) < \delta$. Esta definición se reduce a la continuidad uniforme usual en el caso monovaluado.

El siguiente lema es un tipo de recíproca del corolario anterior en el caso uniformemente continuo.

Lema 4.11. *Sea f una aplicación multivaluada uniformemente continua en un espacio métrico. Entonces, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$B^{f^k}_n[x,\delta] \subset B^f_{kn}[x,\epsilon] \qquad \forall x \in X, n \in \mathbb{N}^+, k \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Fije $\epsilon > 0$. Como f es uniformemente continuo, existen $0 < \delta_k < \delta_{k-1} < \cdots < \delta_1 < \delta_0 = \epsilon$ tal que para cada r que satisface $0 \le r \le k$ y cada $a, b \in X$ se tiene

$$d(a,b) \le \delta_r \quad \Longrightarrow \quad d(f(b), f(a)) < \delta_{r-1}. \tag{4.0}$$

Probemos que $\delta = \delta_k$ satisface la conclusión del lema.

Fije $x \in X, n \in \mathbb{N}^+$ y $k \in \mathbb{N}$. Podemos suponer que $k \in \mathbb{N}^+$.

Tome $y \in B^{f^k}_n[x,\delta]$, i.e., existen sucesiones $(x_i)_{i=0}^n$ y $(y_i)_{i=0}^n$ tal que $x_0 = 0$, $y_0 = y$, $x_{i+1} \in f^k(x_i)$, $y_{i+1} \in f^k(y_i)$ y $d(x_i, y_i) \le \delta$ para todo i con $0 \le i \le n-1$.

Dado i con $0 \leq i \leq n-1$ construimos las sucesiones $(x_j^i)_{j=0}^{k-1}$ y $(y_j^i)_{j=0}^{k-1}$ del siguiente modo:

Defina $x_0^i = x_i$ y $y_0^i = y_i$. Entonces, $d(x_0^i, y_0^i) = d(x_i, y_i) \leq \delta = \delta_k$. Aplicando (4) existen $x_1^i \in f(x_0^i)$ y $y_1^i \in f(y_0^i)$ tales que $d(x_1^i, y_1^i) < \delta_{k-1}$. Nuevamente por (4) existen $x_2^i \in f(x_1^i)$ y $y_2^i \in f(y_1^i)$ tales que $d(x_2^i, y_2^i) < \delta_{k-2}$. Repitiendo el proceso obtenemos x_j^i y y_j^i para $1 \leq j \leq k-1$ tal que $x_{j+1}^i \in f(x_j^i)$, $y_{j+1}^i \in f(y_j^i)$ para todo j con $0 \leq j \leq k-2$ y $d(x_j^i, y_j^i) \leq \delta_{k-j}$ para todo i con $0 \leq j \leq k-1$. Esto completa la construcción.

A continuación definimos las sucesiones $(\hat{x}_l)_{l=0}^{kn}$ y $(\hat{y}_l)_{l=0}^{kn}$ por

$\hat{x}_{ik+j} = x_j^i$ y $\hat{y}_{ik+j} = y_j^i$ para todo i, j con $0 \leq i \leq n-1$ y $0 \leq j \leq k-1$ (resp.).

Sigue de estas elecciones que $\hat{x}_0 = x$, $\hat{y}_0 = y$, $\hat{x}_{l+1} \in f(\hat{x}_l)$, $\hat{y}_{l+1} \in f(\hat{y}_l)$ y $d(\hat{x}_l, \hat{y}_j) \leq \epsilon$ para todo l con $0 \leq l \leq kn-1$. Entonces, $y \in B_{kn}^f[x, \epsilon]$ y el lema sigue. $\square$

Nuestra próxima propiedad es una desigualdad de potencias para aplicaciones multivaluadas que corresponde a la fórmula de potencias $h(f^k) = k \cdot h(f)$ en el caso de una aplicación monovaluada f.

Teorema 4.12. *Cada aplicación multivaluada uniformemente continua f de un espacio métrico satisface*

$$h_*(f) \leq h_*(f^k) \leq k \cdot h_*(f) \qquad \forall k \in \mathbb{N}^+ \text{ where } * = sp, se.$$

Demostración. Primero probaremos el resultado para $* = se$. Fije $k \in \mathbb{N}^+$.

Sean $n \in \mathbb{N}^+$, $\epsilon > 0$ y F un conjunto (n, ϵ)-separado para f^k. Por el Corolario 4.10 obtenemos

$$F \cap B^f_{kn}[x, \epsilon] \subset F \cap B^{f^k}_n[x, \epsilon] = \{x\} \qquad \text{para todo} \qquad x \in F,$$

en consecuencia F es (kn, ϵ)-separado para f. Esto implica $s(n, \epsilon, f^k) \leq s(kn, \epsilon, f)$ y así $h_{se}(f^k) \leq k \cdot h_{se}(f)$.

Para probar $h_{se}(f) \leq h_{se}(f^k)$, sea $\epsilon > 0$ y tome δ del Lema 4.11. Tome $n \in \mathbb{N}$ y sea F un conjunto (kn, ϵ)-separado de f. Entonces, el Lema 4.11 implica

$$F \cap B^{f^k}_n[x, \delta] \subset F \cap B^f_{kn}[x, \epsilon] = \{x\} \qquad \forall x \in F,$$

de modo que F es (n, δ)-separado para f^k. Esto implica $s(kn, \epsilon, f) \leq s(n, \delta, f^k)$. Siendo $s(n, \epsilon, f)$ creciente en n, obtenemos $s(n, \epsilon, f) \leq s(n, \delta, f^k)$. Luego, $h_{se}(f) \leq h_{se}(f^k)$.

En seguida probaremos el resultado para $* = sp$. Fije $k \in \mathbb{N}^+$.

Sea $n \in \mathbb{N}^+$, $\epsilon > 0$ y E un conjunto (kn, ϵ)-generador para f. Por el Corolario 4.10 obtenemos

$$X = \bigcup_{x \in E} B^f_{kn}[x, \epsilon] \subset \bigcup_{x \in E} B^{f^k}_n[x, \epsilon]$$

y así E es (n, ϵ)-generador para f^k. Esto implica $r(n, \epsilon, f^k) \leq r(kn, \epsilon, f)$ de modo que $h_{sp}(f^k) \leq k \cdot h_{sp}(f)$.

Para probar que $h_{sp}(f) \leq h_{sp}(f^k)$, sea $\epsilon > 0$ y tome δ del Lema 4.11. Tome $n \in \mathbb{N}$ y sea E un conjunto (n, δ)-generador para f^k. Entonces, el Lema 4.11 implica

$$X = \bigcup_{x \in E} B^{f^k}_n[x, \delta] \subset \bigcup_{x \in E} B^f_{kn}[x, \epsilon]$$

y así E es (kn, ϵ)-generador para f. Esto implica $r(kn, \epsilon, f) \leq r(n, \delta, f^k)$. Pero nuevamente $r(n, \epsilon, f)$ es creciente en n, de modo que $h_{sp}(f) \leq h_{sp}(f^k)$. $\square$

Ahora probaremos el siguiente lema.

Lema 4.13. *Sea f una aplicación multivaluada uniformemente continua de un espacio métrico X. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}^+$ y $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d_n(x, y) < \epsilon$ siempre que $x, y \in X$ satisfacen $d(x, y) < \delta$.*

Demostración. Fije $\epsilon > 0$. Por la continuidad uniforme existen $0 < \delta_n < \cdots < \delta_1 < \delta_0 = \epsilon$ tales que $d(f(w), f(z)) < \delta_{i-1}$ cuando $d(z, w) < \delta_i$ y $1 \leq i \leq n$. Ahora tome $\delta = \delta_n$ y concluimos. $\square$

De este lema obtenemos la siguiente propiedad.

Lema 4.14. *Si f es una aplicación multivaluada uniformemente continua en un espacio métrico compacto X, entonces $s(n, \epsilon) < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$.*

Demostración. En caso contrario existen $n \in \mathbb{N}^+$, $\epsilon > 0$ y una sucesión F_k de conjuntos (n, ϵ)-separados que satisfacen $card(F_k) \to \infty$ cuando $k \to \infty$. Para estos n y ϵ fijamos $\delta > 0$ como en el Lema 4.13. Por compacidad existen k grande y puntos distintos $x, y \in F_k$ con $d(x, y) < \delta$. Entonces, el Lema 4.13 implica $y \in B_n[x, \epsilon] \cap F_k$ lo que contradice que F_k es (n, ϵ)-separado. $\square$

Decimos que una aplicación multivaluada f de un espacio métrico X es **equicontinua** si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in X$ con $d(x, y) < \delta$ existen sucesiones $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tales que $x_0 = x$, $y_0 = y$,

$x_{i+1} \in f(x_i)$, $y_{i+1} \in f(y_i)$ y $d(x_i, y_i) < \epsilon$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Esta definición es la extensión natural de la definición correspondiente en el caso monovaluado [6]. Otro concepto relacionado pero en el caso multivaluado es la Definición 3.1 en [19].

La última propiedad que demostraremos en aquí es la generalización de un hecho bien conocido en el caso monovaluado.

Teorema 4.15. *Ambas entropías, la separada y la generada se anulan para aplicaciones multivaluadas equicontinuas en espacios métricos compactos.*

Demostración. Equicontinuidad es equivalente a la propiedad que para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $B[x, \delta] \subset B_n[x, \epsilon]$, para cada $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Esto implica $s(n, \epsilon) \leq s(1, \delta)$ para todo $n \in \mathbb{N}^+$. Por otro lado, es obvio que que $s(1, \delta) > 0$ y además tenemos $s(1, \delta) < \infty$ por el Lema 4.14. Entonces, $h_{se}(f) = 0$ y así $h_{sp}(f) = 0$ por el Teorema 4.5. $\square$

Capítulo 5

Ejemplos

En esta sección presentaremos algunos ejemplos relacionados. Para esto necesitamos los siguientes hechos.

Lema 5.1. *Si f es una aplicación multivaluada en un espacio métrico X, entonces*

$$d_2(a,b) = \max\{d(a,b), d(f(a), f(b))\}, \qquad \textit{para todo } a, b \in X.$$

Demostración. Derivamos el resultado a partir de las siguientes afirmaciones:

- Si $d(f(a), f(b)) \leq d(a,b)$, entonces $d_2(a,b) = d(a,b)$.
- Si $d(a,b) < d(f(a), f(b))$, entonces $d_2(a,b) = d(f(a), f(b))$.

Sigue de la definición de d_2 que

$$d_2(a,b) = \inf\{\max(d(a,b), d(a_1, b_1)) : a_1 \in f(a), b_1 \in f(b)\}.$$

En particular, $d_2 \geq d$. Probemos la primera afirmación. Si $\gamma > 0$, entonces existen $a_1 \in f(a)$, $b_1 \in f(b)$ tales que $d(a_1, b_1) < d(a, b) + \gamma$. Para esta elección particular se tiene $\max(d(a, b), d(a_1, b_1)) < d(a, b) + \gamma$ de modo que $d_2(a, b) < d(a, b) + \gamma$. Como γ es arbitrario, $d_2(a, b) \leq d(a, b)$ y así $d_2(a, b) = d(a, b)$.

Para la segunda afirmación, si $d(a, b) < d(f(a), f(b))$, entonces

$$\max(d(a, b), d(a_1, b_1)) = d(a_1, b_1) \qquad \text{para todo } a_1 \in f(a),\ b_1 \in f(b).$$

Luego, $d_2(a, b) = d(f(a), f(b))$. □

Usando este lema obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 5.2. *Sea f una aplicación multivaluada en un espacio métrico X. Si existen $a, b, c \in X$ que satisfacen*

$$d(f(a), f(b)) = d(f(b), f(c)) = 0 \text{ y } \max(d(a, b), d(b, c)) < \frac{1}{2}d(f(a), f(c)),$$

entonces d_2 no es una métrica.

Demostración. Sigue inmediatamente del Lema 5.1 que $d_2(a, b) = d(a, b)$ y $d_2(b, c) = d(b, c)$. Por otro lado,

$$d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) < \frac{1}{2}d(f(a), f(c)) + \frac{1}{2}d(f(a), f(c)) = d(f(a), f(c)).$$

De aquí y del Lema 5.1 obtenemos $d_2(a, c) = d(f(a), f(c))$. Luego,

$$\begin{aligned} d_2(a,c) &= d(f(a),f(c)) \\ &= \frac{1}{2}d(f(a),f(c)) + \frac{1}{2}d(f(a),f(c)) \\ &> d(a,b) + d(b,c) \\ &= d_2(a,b) + d_2(b,c) \end{aligned}$$

y así d_2 no satisface la desigualdad triangular. Por consiguiente, d_2 no es una métrica y el resultado sigue. □

Ahora presentaremos algunos ejemplos. El primero es el llamado subdiferencial de la norma euclidiana $f(x) = |x|$ de $\mathbb{R}$ (ver p. 215 en [24]).

Ejemplo 5.3. *Considere la aplicación multivaluada ∂f de $\mathbb{R}$ definida por*

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{1\} & si \quad x > 0 \\ [-1,1] & si \quad x = 0 \\ \{-1\} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Al poner $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ y $c = -\frac{1}{2}$ en la Proposición 5.2 obtenemos que d_2 no es una métrica.

El segundo ejemplo es el siguiente.

Ejemplo 5.4. *Es fácil ver que la aplicación multivaluada f de $[0,1]$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} \{2x\} & si \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ [0,1] & si \quad x = \frac{1}{2} \\ \{2x-1\} & si \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

es uniformemente continua. Sin embargo, poniendo $a < b = \frac{1}{2} < c$ con $d(a, c)$ pequeño en la Proposición 5.2 obtenemos d_2 no es una métrica en este caso tampoco.

El siguiente es un ejemplo en que d_n no es una métrica para ningún n.

Ejemplo 5.5. *Para cada $k \in \mathbb{N}^+$ existe una aplicación multivaluada f en la esfera $S^k = \{x \in \mathbb{R}^{k+1} : \|x\| = 1\}$ de $\mathbb{R}^{k+1}$ para la cual d_n no es una métrica para ningún $n \geq 2$.*

Demostración. Seleccione tres puntos diferentes $a, b, c \in S^k$ y tres subconjuntos $A, B, C \subset S^k$ que satisfacen los siguientes tres hipótesis:

- $d(A, B) = d(B, C) = 0$;
- $\max(d(a, b), d(b, c)) < \frac{1}{2}d(A, C)$;
- $\{a, b, c\} \cap (A \cup B \cup C) = 0$.

Como $a \neq b \neq c \neq a$, la aplicación multivaluada f de S^k definida por

$$f(x) = \begin{cases} A & \text{si} \quad x = a \\ B & \text{si} \quad x = b \\ C & \text{si} \quad x = c \\ \{x\} & \text{si} \quad x \notin \{a, b, c\} \end{cases}$$

esta bien definida. Sigue de las dos primeras hipótesis y de la Proposición 5.2 que d_2 no es una métrica para este f. Usando la tercera hipótesis obtenemos

$d_n = d_2$ para cada $n \geq 2$, y así, d_n no es una métrica para $n \geq 2$. Esto termina la construcción. $\square$

Ejemplo 5.6. *Sea f una aplicación multivaluada en un espacio métrico X que satisface $x \in f(x)$ para todo $x \in X$. Sigue que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ para todo $x, y \in X$. Luego, $d_2 = d$ es una métrica por el Lema 5.1. Ahora fije $\delta > 0$ y defina la aplicación multivaluada f en $\mathbb{R}^2$ por $f(x) = B[x, \delta]$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Luego, f no es monovaluada pero d_2 es una métrica. Estas aplicaciones tienen ambas entropías la separada y la generada iguales a cero (vea el Ejemplo 5.7).*

Para finalizar presentamos algunos ejemplos donde las entropías separada y generada pueden ser calculadas.

Ejemplo 5.7. *Sea f una aplicación multivaluada en un espacio métrico X que satisface $x \in f(x)$ para todo $x \in X$. Entonces, $h_{se}(f) = h_{sp}(f) = 0$. En efecto, en este caso la identidad Id es una selección continua f de modo que $h_{se}(f) \leq h(Id) = 0$ por el Corolario 4.3. Esto también puede ser probado notando que todas las aplicaciones multivaluadas con esa propiedad son equicontinuas y por lo tanto ambas entropías se anulan por el Teorema 4.15. En particular, dado $\delta \geq 0$ la aplicación multivaluada $f(x) = B[x, \delta]$ para $x \in X$ tiene entropía topológica separada y generada igual a cero.*

Para los siguientes tres ejemplos consideraremos el círculo unitario

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Defina $g : S^1 \to S^1$ por $g(z) = z^2$. Sigue que $h(g) = \log 2$. Además g es una aplicación expansora, i.e., existe $\lambda > 1$ tal que $\|Dg(z)\| \geq \lambda$ para todo $z \in S^1$.

Ejemplo 5.8. *Provea al intervalo unitario* $[0,1]$ *con la métrica Euclidiana. Defina la aplicación multivaluada* f *de* $[0,1]$ *por*

$$f(x) = \begin{cases} \{2x\}, & \textit{if} \;\; 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \{0,1\}, & \textit{if} \;\; x = \frac{1}{2} \\ \{2x-1\}, & \textit{if} \;\; \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Sigue que $h_{se}(f) = \log 2$.

Demostración. Sea $H : [0,1] \to S^1$ definida por $H(x) = e^{2\pi x i}$. Sigue que H es una sobreyección continua. Se puede comprobar fácilmente que $g \circ H = H \circ f$ así tenemos $h_{se}(f) \geq h_{se}(g) = h(g) = \log 2$ por la Proposición 4.7. Por otro lado, la aplicación

$$s(x) = \begin{cases} 2x, & \text{if} \;\; 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x-1, & \text{if} \;\; \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

es una selección of f. Sigue que $h_{se}(f) \leq h(s)$ por el Corolario 4.3. Como $h(s) = \log 2$, obtenemos $h_{se}(f) \leq \log 2$ de donde $h_{se}(f) = \log 2$. □

Ejemplo 5.9. *Dado* $\delta > 0$ *definimos la aplicación multivaluada* f *de* S^1 *por* $f(z) = B[g(z), \delta]$ *para todo* $z \in S^1$. *Como* g *es expansora, existe* $n \in \mathbb{N}^+$ *dependiendo de* δ *solamente tal que* $f^n(z) = S^1$ *para todo* $z \in S^1$. *En particular,* $z \in f^n(z)$ *para todo* $z \in S^1$ *y así* $h_{se}(f^n) = 0$. *Por otro lado,* f *es claramente uniformemente continua de modo que* $h_{se}(f) \leq h_{se}(f^n) = 0$ *por el Teorema 4.12. Por lo tanto,* $h_{se}(f) = 0$. *De esto y del Teorema 4.5 obtenemos* $h_{sp}(f) = 0$.

El siguiente es un ejemplo de una aplicación genuina (i.e. no es monovaluada) para la cual las entropías separada y generada coinciden y el valor común es positivo.

Ejemplo 5.10. *Sea f una aplicación monovaluada en $[0,1]$ definida en el Ejemplo 5.8. Por el Teorema 4.5 se tiene $h_{sp}(f) \leq h_{se}(f) = \log 2$. Por otro lado, hemos visto que $h_{sp}(f) \geq h_{sp}(g)$. Y como $h_{sp}(g) = h_{se}(g) = \log 2$ concluimos que $h_{sp}(f) = h_{se}(f) = \log 2$.*

El último ejemplo es el siguiente.

Ejemplo 5.11. *La aplicación multivaluada f en $[0,1]$ definida en el Ejemplo 5.4 tiene ambas entropías la generada y la separada iguales a $\log 2$.*

Demostración. Es claro que f es mayor que la aplicación multivaluada en el Ejemplo 5.8 la cual, a su vez, tiene entropía generada menor o igual a $\log 2$. Luego, $h_{sp}(f) \leq \log 2$ por el Teorema 4.5. Por otro lado, tomando intervalos cerrados adecuados I_1, I_2 en cada lado de $\frac{1}{2}$ obtenemos un conjunto compacto invariante $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(I_1 \cup I_2)$ para el cual $f|_A$ tiene entropía topológica igual a $\log 2$. En consecuencia, $\log 2 \leq h_{sp}(f)$ por el Teorema 4.1 y listo. De forma similar obtenemos $h_{se}(f) = \log 2$. $\square$

Capítulo 6

Conclusiones

1. En este trabajo usamos el enfoque de conjuntos separados y generadores [5], [11] para definir las entropías topológicas separada h_{se} y generada h_{sp} para aplicaciones multivaluadas.

2. Probamos que dichas entropías satisfacen algunas propiedades que se asemejan a las del caso univaluado. Esto incluye un tipo de propiedad subaditiva en el Teorema 4.1, similar al caso monovaluado, que invierte el orden natural de inclusión para aplicaciones multivaluadas, resultado no reportado en el caso monovaluado.

3. Probamos que la entropía generada es menor que la separada, en general, y que ambas coinciden cuando las semimétricas inducidas son métricas.

4. Probamos que son invariantes topológicos, resultado similar al caso monovaluado, y que satisfacen una desigualdad de potencias cercanamente rela-

cionada a la fórmula de potencias en el caso monovaluado.

5. Probamos que ambas se anulan para aplicaciones multivaluadas equicontinuas, otra vez como en el caso monovaluado.

6. Además se han calculado las entropías en algunos ejemplos genuinamente multivaluados.

7. En particular, el ejemplo 5.8 se puede ver como asignar entropía a sistemas no continuos.

8. Los ejemplos implica que existe un modo natural de tratar un sistema discontinuo (al menos en dim = 1) como funciones multivaluadas. Eso nos da una forma de tratar la entropía en sistemas con saltos.

Capítulo 7

Recomendaciones

1. Se puede analizar los diferentes modos de definir para ver las consecuencias de estas definiciones en la física estadística. Un primer intento de esto es el trabajo pionero de Tsallis [29].

2. Es posible seguir la investigación para tratar de obtener funciones multivaluadas a partir de funciones discontinuas ahora en dimensión mayor a 1. Esto añadiría un conjunto mayor de sistemas dinámicos clasificables a través de su entropía.

3. Para que la relación entre las entropías topológicas, definidas aquí, y la física estadística, faltaría un resultado semejante al principio variacional. Esto puede ser una línea de investigación futura también.

Referencias Bibliográficas

[1] Adler, R.L., Konheim, A.G., McAndrew, M.H., **Topological entropy,** Trans. Amer. Math. Soc. 114 (1965), 309–319.

[2] Akin, E., **The general topology of dynamical systems**, Graduate Studies in Mathematics, 1. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

[3] Blumenthal, L.M., **A new concept in distance geometry with applications to spherical subsets,** Bull. Amer. Math. Soc. 47 (1941), 435–443.

[4] Boltzmann, L., **Über die beziehung dem zweiten Haubtsatze der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung respektive den Sätzen über das Wärmegleichgewicht**, Wiener Berichte 76 (1877), 373–435.

[5] Bowen, R., **Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces,** Trans. Amer. Math. Soc. 153 (1971), 401–414.

[6] Brin, M., Stuck, G., **Introduction to dynamical systems**. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[7] Carrasco-Oliveira, D., Metzger, R.J., Morales, C.A., **Topological entropy for set-valued maps**. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 20 (2015), no. 10, 3461–3474.

[8] Ciklová, M., **Dynamical systems generated by functions with connected $\mathbf{G}_\delta$ graphs,** Real Anal. Exchange, 30 (2004/05), no. 2, 617–637.

[9] Clausius, R., **Ueber verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie,** Annalen der Physik, 125: 353–400.

[10] Clausius, R., **The Mechanical Theory of Heat - with its Applications to the Steam Engine y to Physical Properties of Bodies.** London: John van Voorst (1867).

[11] Dinaburg, E.I., **A correlation between topological entropy and metric entropy (Russian),** Dokl. Akad. Nauk SSSR, 190 (1970), 19–22.

[12] Downarowicz, T., **Entropy in dynamical systems**, New Mathematical Monographs, 18. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[13] Gillam, B.E., **A new set of postulates for euclidean geometry,** Revista Ci. Lima, 42 (1940), 869–899.

[14] Katok, A., **Fifty years of entropy in dynamics: 1958–2007,** J. Mod. Dyn. 1 (2007), no. 4, 545–596.

[15] Katok, A. **Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms,** Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 51 (1980), 137–173.

[16] Khinchin, A.Y., **On the basic theorems of information theory,** Uspehi Mat. Nauk (N.S.), 11 (1956), 17–75.

[17] Kolmogorov, A.N., **A new metric invariant of transitive dynamical systems and automorphisms of Lebesgue spaces. (Russian) Topology, ordinary differential equations, dynamical systems,** Trudy Mat. Inst. Steklov. 169 (1985), 94–98, 254.

[18] Kolmogorov, A.N., Tihomirov, V.M. **ϵ-entropy and ϵ-capàcity de conjuntos in function spaces.** Amer. Math. Soc. Transl. 2. 17 (1961) 277–364.

[19] Maschler, M., Peleg, B., **Stable sets and stable points of set-valued dynamic systems with applications to game theory,** SIAM J. Control Optimization, 14 (1976), no. 6, 985–995.

[20] McMillan, B., **The basic theorems of information theory,** Ann. Math. Statistics 24, (1953). 196–219.

[21] Miller, W.M., **Frobenius-Perron operators and approximation of invariant measures for set-valued dynamical systems,** Set-Valued Anal. 3 (1995), no. 2, 181–194.

[22] Miller, W., Akin, E., **Invariant measures for set-valued dynamical systems,** Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999), no. 3, 1203–1225.

[23] Pilyugin, S.Y., Rieger, J., **Shadowing and inverse shadowing in set-valued dynamical systems. Hyperbolic case,** Topol. Methods Nonlinear Anal. 32 (2008), no. 1, 151–164.

[24] Rockafellar, R.T., **Convex analysis**. Reprint of the 1970 original. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton Paperbacks. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.

[25] Sinai, Ja., **On the concept of entropy for a dynamic system, (Russian)** Dokl. Akad. Nauk SSSR 124 1959 768–771.

[26] Sinai, Y., (2009) **Kolmogorov-Sinai entropy**, Scholarpedia, 4(3):2034.

[27] Shannon, C.E., **A mathematical theory of communication**, Bell System Tech. J. 27 (1948), 379–423, 623–656.

[28] Tarafdar, E., Watson, P., Yuan, X.-Z., **Poincare's recurrence theorems for set-valued dynamical systems,** Appl. Math. Lett. 10 (1997), no. 6, 37–44.

[29] Tsallis, C., Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics, J. of Statistical Phys.Vol 52 (1988), no.1/2 479–487.

[30] von Neumann, J., **Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik**. Unveränderter Nachdruck der ersten Auflage von 1932. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 38 Springer-Verlag, Berlin-New York 1968.

[31] Walters, P., **An introduction to ergodic theory**. Graduate Texts in Mathematics, 79. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[32] Zaslavski, A.J., **Convergence of trajectories of discrete dispersive dynamical systems,** Commun. Math. Anal. 4 (2008), no. 1, 10–19.

Appendix A

Medidas, entropía métrica y el principio variacional

Este apéndice tiene la intención de dar las nociones necesarias de medida para que este trabajo sea autocontenido. Así también se podrá comprender a cabalidad el llamado Principio Variacional de la entropía.

Dado un conjunto X, conjunto de estados, una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X es llamada σ-álgebra cuando cumple lo siguiente:

1. $X \in \mathcal{B}$.
2. Cada vez que $A \in \mathcal{B}$ se tiene que $A^c \in \mathcal{B}$.
3. Si $A_i \in \mathcal{B}$ es una colección numerable de elementos en $\mathcal{B}$ entonces $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A_i = A \in \mathcal{B}$.

Los conjuntos en $\mathcal{B}$ se llaman **conjuntos medibles**.

Una función μ con dominio en $\mathcal{B}$ es llamada medida cuando cumple lo siguiente

1. $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$.

2. $\mu = 0$.

3. $\mu \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$.

El par $(X, \mathcal{B})$ es llamado **espacio medible**, y el triplete $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es un **espacio de medida**. Cuando $\mu(X) = 1$ el espacio de medida es llamado **espacio de probabilidad**. Una función $T : X \to X'$, entre los espacios medibles $(X, \mathcal{B})$ y $(X', \mathcal{B}')$ es una **función medible**, cuando la preimagen de todo conjunto $\mathcal{B}'$-medible es $\mathcal{B}$-medible, i.e. $T^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ para todo $A \in \mathcal{B}'$. Compare estas definiciones con la de topología y funciones continuas.

Considere ahora una transformación, $T : X \to X$, medible, de un espacio de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$ en sí mismo. Decimos que T **preserva medida** cuando $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$, para todo conjunto medible A. Si T preserva la medida μ también podemos decir que μ es T invariante.

A.1 Entropía métrica

Comenzamos describiendo un caso que nos ayuda a entender las motivaciones de la definición de entropía. Específicamente la relacionada con teoría de la información.

Imaginemos que se transmiten símbolos en sucesión, tal como en la radio, en las comunicaciones computadora a computadora, o en la lectura de los estados de las partículas en un arreglo. El conjunto de los símbolos posibles es el conjunto X. Cuando se transmite un conjunto de símbolos decimos que se ha transmitido una palabra. Ahora bien, es claro que las palabras y los mensajes serán o no entendidos dependiendo de la codificación que se haya elegido para trasmitirlas. Por ejemplo si escogemos el castellano, y se transmiten las letras c-o-n-f-i-a-b-l . Son 8 letras que transmiten la información completa, pues la siguiente letra debe ser, inevitablemente, la letra "e". Entonces transmitir la letra que falta no añade información al mensaje ya enviado. La información necesaria ya está en las 7 letras anteriores.

Eso es porque la probabilidad de las secuencias de letras en un determinado código (castellano en este caso) no son las mismas. De hecho, la letras más frecuente en castellano son la "e" y la "a", de modo que transmitir estas letras aporta poca información. En cambio si transmitimos un mensaje y con la letra "ñ" o la letra "x", estaremos transmitiendo bastante información porque el mensaje estará casi completo solo con esas letras.

Si la aparición de una letra es independiente de la anterior, la probabilidad de una palabra es el producto de las probabilidades de aparición de cada letra. Esta es una de las razones por la que el logaritmo es usado en la definición de entropía. Por otro lado, añadir una letra al mensaje añade la información que esa aparición trae. Si p_α es la probabilidad de aparición de la letra $\alpha \in X$, podemos definir como $-\log p_\alpha$ como la información que la letra contiene.

La entropía de un canal de comunicación es el promedio de la información que se puede transmitir

$$h = \lim_{n} \frac{1}{n} \sum_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} -p_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \log p_{\alpha_1 \cdots \alpha_n}, \tag{A.0}$$

Donde $p_{\alpha_1 \cdots \alpha_n}$ es la probabilidad de que la palabra $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ aparezca.

A primera vista, parece extraño que la teoría de información se relacione con la física, sin embargo si pensamos en falta de información ya toma cierto sentido. Para eso debemos situarnos dentro del sistema y tratar de describirlo. Un sistema muy "ordenado" necesitará menos información para describirse y un sistema "desordenado" necesitará más, es decir, mayor entropía.

Es más, en teoría de la información es fácil entender que la entropía aumenta, porque lo que ya fue transmitido no lo podemos ignorar, de modo que cualquier añadido aumentará la información y por ende, la entropía.

A.2 Particiones y sub-σ-álgebras

En lo que sigue el alfabeto X será reemplazado por el espacio X llamado espacio de estados. La colección de los resultados posibles de una medición (que depende del detector y del experimento que se haga) es $\mathcal{B} \subset 2^X$. Sobre el existe la medida de probabilidad m. El triplete $(X, \mathcal{B}, m)$ es usualmente llamado espacio de probabilidad.

Una **partición** ξ de $(X, \mathcal{B}, m)$ es una colección de elementos de $\mathcal{B}$ cuya unión es X.

Si ξ es una partición finita de $(X, \mathcal{B}, m)$ entonces la colección de todos los elementos de $\mathcal{B}$ que son uniones de elementos de ξ es una sub-σ álgebra de $\mathcal{B}$. Lo denotamos por $\mathcal{A}(\xi)$. Recíprocamente, si $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ es un sub-σ álgebra finita de $\mathcal{B}$, entonces se puede formar una partición finita coleccionando los conjuntos de la forma $B_1 \cap \cdots \cap B_n$ donde $B_i = C_i$ o $X \setminus C_i$. La denotamos por $\xi(\mathcal{C})$. Es claro que $\mathcal{A}(\xi(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$. Esto establece que las sub-σ álgebras finitas están relacionadas 1 a 1 con las particiones finitas de $\mathcal{B}$.

Dadas dos particiones finitas, ξ y η, de $(X, \mathcal{B}, m)$. Escribimos $\xi \leq \eta$ cuando cada elemento de ξ es la unión de elementos de η. Decimos que η es un refinamiento de ξ. Observe que

$$\xi \leq \eta \iff \mathcal{A}(\xi) \subset \mathcal{A}(\eta)$$

y

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{C} \iff \xi(\mathcal{A}) \leq \xi(\mathcal{C}).$$

Definición A.1. Dado $\xi = \{A_1, \ldots, A_n\}$, $\eta = \{C_1, \ldots, C_k\}$ dos particiones finitas de $(X, \mathcal{B}, m)$. Definimos la partición **unión** de ξ y η como

$$\xi \vee \eta = \{A_i \cap C_j \ : \ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq k\}.$$

Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ son sub-σ álgebras finitas de $\mathcal{B}$ entonces $\mathcal{A} \vee \mathcal{C}$ denotan a la menor sub-σ álgebra de $\mathcal{B}$ que contiene a $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$. No es difícil de demostrar que consiste de todos los conjuntos que se pueden expresar como unión de conjuntos del tipo

$A \cap C$ con $A \in \mathcal{A}$ y $C \in \mathcal{C}$. Se tiene $\xi(\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) = \xi(\mathcal{A}) \vee \xi(\mathcal{C})$.

En lo que sigue $T : X \to X$ es una transformación que preserva medida, i.e. $m(T^{-1}(A)) = m(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

Si $\xi = \{A_1, \ldots, A_k\}$, la partición $\{T^{-n}A_1, \ldots, T^{-n}A_k\}$ será denotada por $T^{-n}\xi$ y si $\mathcal{A}$ es un sub-σ-álgebra de $\mathcal{B}$ entonces $T^{-n}(\mathcal{A})$ denota a la sub-σ-álgebra $\{T^{-n}A : A \in \mathcal{A}\}$, con $n \geq 0$.

Como las preimágenes de una transformación conservan las operaciones de conjunto, se tiene que

$$\begin{array}{rcl}
(T^{-n}\mathcal{A}) & = & T^{-n}\xi(A) \\
\mathcal{A}(T^{-n}\xi) & = & T^{-n}\mathcal{A}(\xi) \\
T^{-n}(\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) & = & T^{-n}\mathcal{A} \vee T^{-n}\mathcal{C} \\
T^{-n}(\xi \vee \nu) & = & T^{-n}\xi \vee T^{-n}\nu \\
\xi \leq \nu & \Longleftrightarrow & T^{-n}\xi \leq T^{-n}\nu \\
\mathcal{A} \subset \mathcal{C} & \Longleftrightarrow & T^{-n}\mathcal{A} \subset T^{-n}\mathcal{C}
\end{array}$$

A.3 Incertidumbre y entropía

A continuación damos la definición de entropía métrica, la que está relacionada con la probabilidad de los eventos, y que modela (bajo ciertos supuestos) la definición de entropía en los gases.

Dado el espacio de probabilidad $(X, \mathcal{B}, m)$ una partición finita $\xi =$

$\{A_1, \ldots, A_k\}$ representa los posibles resultados de un experimento específico. Así, la probabilidad de obtener el resultado A_i es $m(A_i)$.

La definición de entropía inicia definiendo el número $H(\xi)$ que me debe dar la cantidad de incertidumbre sobre el resultado del experimento. Esto es, $H(\xi)$ medirá la incertidumbre información ganada (o la incertidumbre retirada) cuando realizamos el experimento.

Definición A.2. Dado $\mathcal{A}$ una sub-σ-álgebra finita con $\xi(\mathcal{A}) = \{A_1, \ldots, A_k\}$, la **entropía** de $\mathcal{A}$ es el número

$$H(\mathcal{A}) = H(\xi(\mathcal{A})) = -\sum_{i=1}^{k} m(A_i) \log m(A_i).$$

Es notable el hecho que esta función es definida de esta manera para que se satisfagan ciertas propiedades esperadas, tomando en cuenta lo que debe representar.

Si identificamos $H(\xi) = H(m(A_1), \ldots, m(A_k))$, las propiedades son las siguientes:

Observación A.3.1. Propiedades de H.

1. $H(p_1, \ldots, p_k, 0) = H(p_1, \ldots, p_k)$.

2. Dados ξ y η, dos experimentos con resultados $\xi = \{A_1, \ldots, A_k\}$ y $\eta = \{B_1, \ldots, B_l\}$, se tiene

$$H(\xi|\eta) = \sum_{j=1}^{l} m(B_j) H\left(\left(\frac{m(A_1 \cap B_j)}{m(B_j)}, \frac{m(A_2 \cap B_j)}{m(B_j)}, \ldots, \frac{m(A_k \cap B_j)}{m(B_j)}\right)\right),$$

donde $H(\xi|\eta)$ es el valor que debe tener H cuando se realiza el experimento ξ después de haber realizado el experimento η. Es decir cuando ya ye obtuvo la información del experimento η. La fórmula indica un promedio del valor de H evaluado en las probabilidades $\frac{m(A_i \cap B_j)}{m(B_j)}$ que nos da la probabilidad de que ocurra el resultado A_i suponiendo que ya se dio el resultado B_j (del experimento η.)

3. $H(p_1, \ldots, p_k) \geq 0$, y el valor 0 solo es posible si algún $p_i = 1$.

4. La función H, tomada como función de las k variables p_i, con $\sum p_i = 1$, es continua y simétrica.

5. Para cada $k \geq 1$ H tiene su máximo valor para $p_i = 1/k$. Es decir cuando los k resultados posibles del experimento ξ son equiprobables.

   Esta propiedad tiene una recíproca interesante. Si damos la función H como en la definición (A.2). Y si, como es natural, las probabilidades de los eventos A_i nos dan el grado de conocimiento que tenemos del sistema, la suposición de que no tenemos ningún conocimiento especial sobre el sistema nos lleva a que los eventos son equiprobables. Esto es, el principio de máxima incertidumbre nos lleva a eventos equiprobables.

6. La entropía en los resultados de dos experimentos es la suma de la entropía de uno más la entropía del otro suponiendo que el primero ya se realizó.

$$H(\xi \vee \eta) = H(\xi) + H(\xi|\eta).$$

La entropía definida en (A.2) tiene una notable extensión en el trabajo de

Tsallis [29], donde se define la entropía dependiendo de un parámetro $q \in \mathbb{R}$ de modo que cuando $q \to 1$ se obtiene el resultado clásico.

A.4 La entropía métrica y el principio variacional

A modo de aclaración, el nombre entropía métrica es debido a que se refiere a una medida. No estamos trabajando con un espacio métrico, sino con un espacio de medida. Estamos trabajando en un espacio de medida de probabilidad $(X, \mathcal{B}, m)$ y una transformación $T : X \to X$ que preserva la medida m. Es para la transformación T que definiremos la entropía. Aquí es conveniente mantener en mente el paralelismo existente entre esta definición y el de entropía topológica.

Definición A.3. Dado $T : X \to X$ una transformación que preserva la medida. Si $\mathcal{A}$ es una sub-σ-álgebra finita de $\mathcal{B}$,definimos

$$h(T, \xi(\mathcal{A})) = h(T, \mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{A}\right),$$

la cual es llamada **entropía de T respecto de $\mathcal{A}$**.

Como antes, pensando en $\mathcal{A}$, como los posibles resultados de un experimento, tenemos que $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{A}$ son los posibles resultados de realizar n veces el experimento. Así, $h(T, \mathcal{A})$ es la información promedio que se puede obtener realizando los experimentos una infinidad de veces, o para un número suficientemente grande de veces.

Si pensamos en T como la evolución de un sistema de un día para otro (o de un segundo a otro). La partición ξ resulta en los posibles estados del sistema que inicialmente se ha podido determinar y $H(\xi)$ es la incertidumbre del sistema en el estado inicial. Así, con $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{A}$ obtengo los estados en lo que el sistema puede estar después de n pasos. Y $h(T, \xi(\mathcal{A}))$, es la entropía del sistema, del cual inicialmente sabíamos ξ.

Definición A.4. Si $T : X \to X$ es una transformación que preserva medida en el espacio $(X, \mathcal{B}, m)$ definimos

$$h(T) = \sup h(T, \mathcal{A}),$$

donde el supremo se toma sobre todas las sub-σ-álgebras de finitas de $\mathcal{B}$. Este valor $h(T)$ es llamado la **entropía métrica** de T. De forma equivalente $h(T) = \sup h(T, \xi)$, donde el supremo es tomado sobre todas las particiones finitas de X.

A continuación, vamos a enunciar de la manera más clara posible la relación que existe entre la entropía métrica (en donde intervienen las medidas) y la entropía topológica. Recuerde que la entropía topológica clásica trata sobre funciones continuas en espacios métricos.

Lo primero es definir una σ-álgebra relacionada con la métrica (topología) del espacio (X, d). Esta es llamada la σ-álgebra de Borel, y es la menor σ-álgebra generada por la topolgía, es decir, es la menor σ-álgebra donde los abiertos de la topología son medibles. La σ-álgebra de Borel se denota $\mathcal{B}(X)$.

Cuando usamos la σ-álgebra de Borel se tiene que las funciones continuas son medibles.

Dado $T : X \to X$ continuo del espacio métrico (X, d), vamos a considerar el espacio medible $(X, \mathcal{B}(X))$. A continuación coleccionamos todas las medidas μ definidas en ese espacio de modo que T preserve μ. Podemos pensar también que estamos coleccionando todas las medidas T invariantes. Denotamos por $M(X, T)$ al conjunto de todas las medidas de probabilidad que son T invariantes.

De las definiciones se tiene que si $\mu \in M(X, T)$, entonces T es una transformación que preserva la medida del espacio $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ de modo que tiene una entropía métrica que denotaremos como $h_\mu(T)$.

Definición A.5. La **función entropía** de una transformación continua $T : X \to X$ es la que asigna a cada medida $\mu \in M(X, T)$ su entropía métrica $h_\mu(T)$.

No es difícil ver que el espacio $M(X, T)$ es un subespacio convexo del espacio de todas las medidas definidas en $(X, \mathcal{B}(X))$. Esta propiedad también pasa a la entropía a través de la función entropía arriba definida.

Teorema A.1. *Sea $T : X \to X$ una función continua de un espacio métrico compacto. La función entropía es una función afín* i.e. *, si $\mu, m \in M(X, T)$ y $1 \leq p \leq 1$ entonces*

$$h_{p\mu+(1-p)m}(T) = ph_\mu(T) + (1-p)h_m(T).$$

Demostración. Para la demostración puede revisar Capítulo 8 p.183 [31]. □

Terminamos enunciando una de las relaciones más importantes entre la entropía topológica y la entropía métrica, que dice que la entropía topológica es el supremo de las entropías métricas.

Teorema A.2 (Principio Variacional de la Entropía). *Sea $T : X \to X$ una función continua de un espacio métrico compacto X. Entonces*

$$h(T) = \sup\{h_\mu(T) \mid \mu \in M(X;T)\}.$$