

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

Sección de Posgrado y Segunda Especialización Profesional



Tesis para Optar el Grado Académico de Doctor en Ciencias con mención en
Matemática

Titulada

**CONTRIBUCION MATEMATICA PARA SIMULAR EL COMPORTAMIENTO
NUMÉRICO DEL FLUJO DE MEZCLA GAS - SÓLIDOS**

Por:

Mg. Irla Doraliza Mantilla Núñez

Asesores

Externo: Dr. Santiago de Vicente Cuenca

Universidad Politécnica de Madrid, España

Local: Dr. Julio Alcántara Bode

Universidad Nacional de Ingeniería, Perú

LIMA - PERÚ

2012

CONTRIBUCIÓN MATEMÁTICA PARA SIMULAR EL COMPORTAMIENTO NUMÉRICO DEL FLUJO DE MEZCLA GAS - SÓLIDOS

Resumen

Formulamos un nuevo modelo matemático del comportamiento hidrodinámico del flujo de mezcla Gas-Sólidos en una cámara de combustión con sistema de lecho fluido. El modelo en estudio se denominará Modelo de Mezcla Gas-Sólidos. Éste se construye promediando las ecuaciones de conservación (de masa y cantidad de movimiento) del modelo de fases de flujo bifásico, en el cual se toma en cuenta la existencia de un pequeño parámetro (Epsilon) relacionado con el cociente de las densidades máxicas de ambas fases generando un problema de frontera libre, en el cual se realiza una regularización asintótica originando así el modelo de mezcla. Entre las dificultades que presenta este modelo es la presencia de un sistema del tipo Navier - Stokes de aparente flujo compresible y lo usual en estos problemas corresponde a la no linealidad, el acoplamiento entre las variables y en particular durante el desarrollo de este caso aparecen singularidades por efecto de las zonas vacías de partículas, es decir cuando la fracción volumétrica de la fase dispersa es nula, por lo que se encuentran serias dificultades teóricas para demostrar la existencia de la solución analítica. El objetivo de la Tesis se centra en el estudio de la existencia de solución débil en subespacios del tipo Sobolev-Orlicz basado en la extensión de algunos resultados referidos en la bibliografía. Esta contribución se complementa con la construcción de un esquema numérico para el estudio cuantitativo del problema. Todo ello comprende la formulación de técnicas de desacoplamiento, cuasilinealización, discretización variacional y estabilización espacial-temporal. Aplicando el método de Galerkin con una técnica de captura de las discontinuidades en las líneas de corriente del flujo difusivo y el método de elementos finitos de tipo $P_1 + P_2$ se ha diseñado un esquema algorítmico junto a toda una batería de métodos numéricos adicionales para la resolución efectiva del problema evolutivo. El mayor interés que se ha puesto en este trabajo es la obtención original de los resultados de situaciones físicas relevantes del modelo con el rigor matemático requerido, mostrando su eficiencia en los resultados de simulación del problema en estudio. Con los resultados de este trabajo se contribuye al conocimiento de técnicas numéricas, muy importantes en el estudio de otros problemas con naturaleza multifase.

Palabras claves: *Modelo de Mezcla, lecho fluido, resolución numérica, elementos finitos, ecuaciones de Navier-Stokes compresible.*

**MATHEMATICAL CONTRIBUTION TO SIMULATE THE NUMERIC BEHAVIOR
OF THE MIXTURE FLOW GAS - SOLIDS**

Abstract

We formulate a new mathematical model of hydrodynamic flow for a Gas-Solids Mixture in a combustion chamber with fluid bed system. The model under study will be called Gas-Solids Mixture Model. It is constructed by averaging the conservation equations (mass and momentum) of the two-phase flow model, which takes into account the existence of a small parameter (Epsilon) related to the ratio of the mass densities of both phases, generating a free boundary problem, in which the asymptotic regularization made generates the mixture model. Among the difficulties presented by this model is the presence of systems such as Navier - Stokes, of apparent compressible flow and the usual corresponding problems, such as nonlinearity, the coupling between the variables and in particular during this case development the appearance of singularities in the particle free areas, when the volumetric fraction of the dispersed phase is zero, which is the reason why we found serious theoretical difficulties to demonstrate the existence of the analytical solution. The aim of this thesis focuses in the study of the existence of the weak solution in Sobolev-Orlicz type spaces based on the extension of some results reported in the literature. This contribution is complemented with the construction of a numerical scheme for the quantitative study of the problem. This includes the formulation of decoupling techniques, quasilinearization, space-time variational discretization and stabilization. Applying the Galerkin method with a technique of capture of the discontinuities in the diffusive flow streams and the method of finite elements of type $P_1 + P_2$ we have designed an algorithms scheme in addition to a battery of numerical methods for the effective resolution of the evolutionary problem. The greatest interest in this work was to obtain original results to physical situations related to the model, with the mathematical rigourousness required, showing the efficiency of the results in the simulation of the problem under study. The results of this work contribute to the knowledge of numerical techniques, very important in the study of other problems of multiphase nature.

Keywords: *Mixture model, fluid bed, numerical solution, finite element Navier-Stokes equations of compressible.*

Cod. UNESCO: 1202-1203-1206-2204-3328

CONTRIBUIÇÃO MATEMÁTICA PARA SIMULAR O COMPORTAMENTO NUMÉRICA DO FLUXO DE MISTURA GAS - SOLID

Sumário

Nós formulamos um novo modelo matemático hidrodinâmico de fluxo de gás-sólidos mistura em uma câmara de combustão com um sistema de leito fluidizado. O modelo em estudo é chamado Modelo Gas-Solids mistura. Ela é construída pela média das equações de conservação (massa e momentum) modelo de fases de duas fases de fluxo, que leva em conta a existência de um pequeno parâmetro (Epsilon) relacionadas com a relação entre a densidade de massa de ambos os geração de fase problema de fronteira livre e em que um ajuste é feito causando modelo de mistura assintótica. Entre as dificuldades apresentadas por este modelo é a presença de sistemas como o de Navier - Stokes fluxo compressível aparente do que é habitual nestes problemas, que corresponde à não-linearidade, o acoplamento entre as variáveis ϵ , em particular durante o desenvolvimento do efeito de singularidades aparecem áreas vazias de partículas, ou seja, quando a fração volumétrica da fase dispersa é zero, é por isso que são sérias dificuldades teóricas em provar a existência da solução analítica. O objetivo da tese enfoca o estudo da existência de solução fraca em Sobolev tipo subespaços com base na extensão de alguns resultados relatados na literatura. Esta contribuição é complementada pela construção de um esquema numérico para o estudo quantitativo do problema. Isso inclui a formulação de técnicas de dissociação, cuasilinearización, espaço-tempo de discretização variacional e estabilização. Aplicação do método de Galerkin com uma técnica de captura das discontinuidades nas linhas de energia por difusão eo método de elementos finitos do tipo $P_1 + P_2$. Nós projetamos um algoritmo de layout com uma bateria adicional de métodos numéricos para a resolução efetiva do problema evolutivo. O maior interesse tem sido neste trabalho é a obtenção de situações físicas originais relevantes do modelo com o rigor matemático necessário, mostrando sua eficiência nos resultados da simulação do problema em estudo. Com resultados de este trabalho contribui para o conhecimento de técnicas numéricas, muito importante, o estudo de outros problemas com a natureza multifásica.

Palavras-chave: *Modelo de mistura, leito fluidizado, solução numérica, elementos finitos Navier-Stokes compressíveis.*

Cod. UNESCO: 1202-1203-1206-2204-3328

ÍNDICE DE FIGURAS

1.	Curvas de fluidización	xiv
2.	Esquema de generacion de energía con CCLF	xv
3.	Central térmica con CCLF en Asturias, España	xv
4.	Planta de incineración con sistema CCLF en España	xvi
5.	Sala de Control del sistema de una planta con CCLF	xvi
6.	Parrilla de distribución de aire por boquillas en una CCLF	xvi
7.	Esquema de instalación de una planta piloto con CCLF	xvii
8.	Un esquema de prototipo virtual con CCLF	xvii
1.1.	Esquema de cámara con sistema de Lecho Fluidizado	1
1.2.	Efecto de la entrada de líquido y gas en un Lecho de partículas	2
1.3.	Porosidad del dominio de mezcla bifásica	9
1.4.	Coefficiente adimensional de arrastre C_D	15
1.5.	Fuerza de rozamiento del gas por unidad de volumen	16
1.6.	Funciones limitantes	20
2.1.	Dominio del problema de frontera libre	30
3.1.	Dominio unidimensional	82
3.2.	Elementos finitos P_1	92
3.3.	Función de forma lineal	92
3.4.	Mallado con Función de forma lineal	92
3.5.	Elementos finitos P_2	93
3.6.	Mallado con función de forma cuadrática	93

3.7. Elementos finitos evolutivos	100
3.8. Algoritmo de factorización PARDISO LU de matrices no simétricas . . .	124
4.1. Coeficiente de presión1	128
4.2. Coeficiente de presion2	128
4.3. Lecho inestable $t \geq 0$	128
4.4. Lecho inestable para $t > 0$	129
4.5. Lecho estable en $t \geq 0$	129
4.6. Velocidad de fracción volumétrica en $t \geq 0$	129
4.7. Velocidad gas en $t \geq 0$	130
4.8. Estabilidad del esquema regularizado en $t > 0$	130
4.9. Condición inicial escalón o step	132
4.10. Condición inicial sombrero rectangular	132
4.11. malla gruesa en 2D	132
4.12. malla refinada en 2D	133
4.13. Problema de Cauchy: sedimentacion inicial	133
4.14. Problema de Cauchy: con sedimentación media de la interfase	133
4.15. Problema de Cauchy: con sedimentacion maxima de la interfase	134
4.16. Lecho fijo mallado	134
4.17. Lecho fijo	134
4.18. Problema de Cauchy: Densidad de mezcla en $t = 5s$	134
4.19. Velocidad de la mezcla en $t = 25s$	134
4.20. Lineas de corriente del flujo	134
4.21. Campo direccional de Velocidad de mezcla en $t = 25s$	134
4.22. Isolineas de presión en $t = 15s$	134
4.23. Isolineas de presión $t = 25s$	134
4.24. Fracción volumétrica de mezcla soplado general	134
4.25. Lecho fluido $C_D = 0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 0,95, 0,975$ en $t = 20s$	134
4.26. Convergencia del esquema numérico	134
4.27. Matriz esparcida sin factorizacion	134
4.28. Matriz esparcida con factorizacion 1	134
4.29. Matriz esparcida con factorizacion 2	134

ÍNDICE GENERAL

Introducción	x
0.1. Antecedentes	x
0.2. Objetivos	xviii
0.3. Hipótesis	xviii
0.4. Organización del trabajo y metodología del estudio	xviii
1. Modelo Físico	1
1.1. Modelo de fases	4
1.2. El modelo de frontera libre	7
1.3. Modelo Físico de Mezcla Gas-Sólido	20
1.4. Relación entre ambos modelos	24
2. Estudio Matemático del Modelo de flujo de Mezcla Gas-Sólido	28
2.1. Formulación formal del sistema de conservación	28
2.2. Condiciones iniciales y de contorno	31
2.3. Existencia de solución para el problema de frontera libre	42
2.4. Dificultades de la extensión de resultados de existencia conocidos para sistemas de Navier - Stokes al modelo de Mezcla	46
3. Aproximación Numérica del problema de Mezcla con Elementos Finitos	
$P_1 + P_2$	65
3.1. Fundamento numérico para el problema de mezcla	65
3.1.1. Formulación Variacional del problema de flujo bidimensional	80

3.2.	Aproximación espacial del sistema EDP No lineal del flujo de mezcla	81
3.3.	Aproximación temporal del sistema EDO No lineal generado	112
3.3.1.	Método multipasos basado en integración numérica	113
3.3.2.	Método implícito de paso múltiple basado en derivación numérica (BDF)	114
3.4.	Esquema de resolución del sistema no lineal algebraico	118
3.5.	Estudio de la convergencia del esquema numérico global de solución	119
4.	Resultados Numéricos del estudio del problema de Mezcla en Lechos Fluidos	125
4.1.	Construcción del proceso computacional en COMSOL	129
4.2.	Resultados numéricos para el problema de sedimentación	132
4.3.	Resultados numéricos para el problema de flujo con boquilla	132
4.4.	Resultados numéricos para el problema de soplado general	133
5.	Conclusiones	151
6.	Anexos	154
6.1.	Principios de Conservación de los Medios continuos	154
6.1.1.	Principio de Conservación de la Masa	154
6.1.2.	Principio de Conservación de la Cantidad de Movimiento	156
6.1.3.	Principio de Conservación de la Energía	158
6.1.4.	Ecuaciones del sistema de Conservación de la Mecánica de los Medios Continuos	159
6.2.	Solución global 1D del Problema Lagrangeano \mathbf{P}_ϵ	161
6.2.1.	Formulación lagrangiana del Problema \mathbf{P}_ϵ	161
6.2.2.	El problema $\mathbf{P}_{L_{ch}}$	169
6.2.3.	Discretización del problema \mathbf{P}_ϵ	179
6.2.4.	Comportamiento en el límite $\epsilon \rightarrow 0$	184
6.2.5.	Resultados adicionales sobre los problemas ϵ -aproximados	189
6.2.6.	Viscosidad no lineal en la densidad	201
6.3.	Espacios de Sobolev	206
6.3.1.	Espacios Funcionales Evolutivos	209
6.4.	Reactores de Lecho Fluido	217
6.4.1.	Calderas de lecho fluidizado (CLF)	219

6.4.2. Características principales y diseño 219

Bibliografía **222**

INTRODUCCIÓN

0.1. Antecedentes

En los últimos años ha crecido el interés por la construcción de nuevos modelos matemáticos para hacer software de investigación multidisciplinaria. En softwares para Dinámica de Fluidos Computacional(CFD) existen una variedad de modelos implementados para simulación de flujos monofásicos, pero en el caso de flujos multifásicos aún es muy escaso. La dinámica de un flujo multifásico se presenta en procesos donde intervienen múltiples componentes de diferente especie, como es en el caso de secado ó combustión de residuos sólidos, en cámaras de lecho fluidificado, que se utiliza para la generación de energía térmica. La complejidad del comportamiento de los diferentes fenómenos que se originan en este proceso, hace muy difícil la obtención de un modelo matemático de modo generalizado, es por ello que se hacen estudios de cada una de sus etapas correspondientes; el entendimiento de cada fenómeno requiere del conocimiento de leyes físicas y ecuaciones matemáticas altamente especializadas. La creación de nuevos modelos eficientes para simular cada etapa que se presenta en la combustión, es un reto que viene siendo estudiado experimentalmente desde hace varias décadas. Desde el punto de vista hidrodinámico es interesante analizar el fenómeno de la mezcla bifásica gas - sólidos que se presenta en la fluidización, porque no solo este fenómeno se tiene en la combustión de sólidos, sino también en otros procesos industriales tales como en la Química Farmacéutica, Petroquímica y muchos más.

La Fluidización se puede describir como un resultado del contacto de los sólidos con un fluido (líquido o gas) de modo ascendente, donde las partículas aparecen suspendidas por efecto de un fluido y este hace que se movilizan en dirección vertical (columna). El

comportamiento hidrodinámico del proceso de fluidización gas sólido se asemeja a un líquido viscoso en movimiento.

En este trabajo, nos centraremos en el estudio de la mezcla bifásica que se presenta durante la fluidización de sólidos en las cámaras de combustión con Lecho fluido burbujeante, muy importante en la generación de vapor para centrales térmicas.

En nuestro País el 40 por ciento del total de la energía es térmica, y en su mayoría con sistema de combustión convencional, lo cual genera contaminación al medio ambiente. La industria de energía térmica con sistema de lecho fluido, en buenas condiciones de funcionamiento reduce notoriamente la contaminación, y cumple con la normativa ambiental.

El proceso de combustión con sistema de lecho fluidificado, tiene diversas ventajas, puesto que además de reducir la emisión de contaminantes, opera a bajas temperaturas y mantiene el nivel de temperatura dependiendo de la fluidización. Este fenómeno tiene una explicación, sucede que durante la etapa de calentamiento por fricción se desprenderá primero la humedad del material combustible y luego se generan las materias volátiles (hidrógeno, metano, monóxido de carbono, etc, ...), quedando finalmente carbono. Tanto las materias volátiles como el carbono se reducen con ayuda de la agitación (mezcla gas - sólidos) generando burbujas de gas y que adicionadas al gas (aire) primario entrante por las boquillas ubicadas en la parte inferior del lecho se optimiza la combustión. Por tanto el oxígeno que influye para estas reacciones proceden fundamentalmente del aire de fluidización, y de la oxidación del material sólido combustible, es por esto la importancia de usar sólidos en la combustión. La reacción frente a este fenómeno del lecho fluido, da lugar a la transferencia del oxígeno de las burbujas de aire a la partícula, difusión del oxígeno a través de la superficie de la partícula y difusión del dióxido de carbono procedente de la superficie de las partículas, las que hacen que se produzca una reacción química en la superficie que ocupa la partícula, generandose el burbujeo (lecho burbujeante).

En general, no todas las partículas sólidas de la combustión se queman en el lecho, sino que las burbujas de aire de la fluidización arrastran y proyectan partículas inquemadas hacia la corriente de gases por encima del lecho, las cuales, son volátiles que se queman en la región situada por encima del lecho y una parte de estas regresan al lecho dependiendo del diseño (caso de CLF circulante). De la calidad del combustible (partículas sólidas) se obtienen altas temperaturas y dependiendo del inmediato *proceso de mezcla homogénea* se obtiene una óptima transferencia de calor y óptimo tiempo de

residencia de las partículas en el lecho, para mayor detalle se refiere a [2] , donde se menciona, que la calidad del material combustible sólido está indicado por el contenido de humedad y tamaño de las partículas.

Experimentalmente, describen en [25] y [35], que la fluidización empieza cuando la fuerza de arrastre del flujo de aire es igual al peso de las partículas, es decir que la pérdida de presión en la sección del lecho es igual a su volumen por la fracción del sólido y por el peso específico aparente del sólido, generando una relación entre la velocidad superficial del fluido u y la caída de presión por fricción (ΔP), que se produce cuando el fluido atraviesa el lecho poroso en sentido ascendente.

Las curvas de fluidización son importantes por que sirven de un referente para determinar la calidad de la combustión; y de modo experimental lo obtienen en coordenadas logarítmicas, y cuyo comportamiento se puede ver a partir de la siguiente ecuación:

$$\Delta P = f(u)$$

donde $u = u_0 = W/A$, donde W es el caudal y A es el área de la sección del tubo, tal comportamiento se puede describir como en la figura 1.

La velocidad de la mezcla en el interior del lecho es importante obtener información de su comportamiento, puesto que origina la suspensión de las partículas en la línea de corriente ascendente. Esto significa un equilibrio entre la fuerza de arrastre del flujo ascendente y las partículas sólidas, perdiendo el peso aparente de las mismas y esto hace que puedan moverse libremente con una velocidad de mínima fluidización.

Al aumentar poco a poco la velocidad del fluido, se llega a un estado en que las partículas del lecho comienzan a separarse, incrementando la porosidad del lecho y algunas de ellas empieza a vibrar y a moverse a regiones restringidas. En este estado se genera un comportamiento de burbujeo y aparece la concentración de la fase dispersa, hasta formar una capa o manto de partículas como una masa única que luego sedimenta. La *velocidad de sedimentación* de esta capa está en función de la fracción volumétrica de los sólidos, y la fuerza impulsora que actúa, para esta manifestación es importante un análisis de la fuerza gravitatoria.

El incremento de la velocidad del gas por encima de la mínima fluidización, genera la inestabilidad del lecho cuyo efecto es la formación de burbujas y canalizaciones del gas, lo cual genera un problema de flujo bifásico gas-sólido inestable, lo que se denomina lecho fluidizado burbujeante.

Si continuamos aumentando la velocidad de entrada del gas el flujo de mezcla llega

a un estado en que las partículas son arrastradas por dicho flujo y pueden ser arrastradas hasta fuera del lecho produciendo un estado de transporte neumático de partículas fluidas.

En resumen el estudio del comportamiento de un lecho de partículas fluidizadas en una CCLF, es muy importante, en la industria de la energía, por una serie de ventajas que presenta esta tecnología frente a los sistemas convencionales, éstas se mencionan a continuación:

1. La distribución de temperatura en una cámara con sistema de lecho fluido es más uniforme [15] frente a una convencional, llegando a condiciones isotérmicas, siempre que tenga una óptima mezcla de fluido y partículas.
2. La calidad del combustible tal como el tamaño de las partículas y grado de humedad son factores importantes que ameritan un estudio [63] puesto que influyen en el comportamiento de la fluidización, tal es así que, aumentando la superficie de contacto del gas al sólido puede disminuir la resistencia a difusión del conjunto de los sólidos y si el comportamiento es similar a un líquido viscoso la velocidad de transferencia de calor del gas a las partículas será cada vez mayor.
3. La mezcla óptima por ejemplo de arena caliente con un material sólido combustible, en una cámara con sistema de lecho fluidizado se observa [63] que la transferencia de calor en el interior de la superficie será mayor.

Si L_0 es la altura del lecho (medida respecto a la sección transversal de la columna), ésta permanece fija si la velocidad de entrada del gas u_0 es nula .

Como se puede apreciar en la figura 1, en el punto 1 la curva de fluidización indica que el lecho permanece fijo, ó ΔP aumenta linealmente con la velocidad. En el punto 2 se alcanza el máximo gradiente (max. porosidad) con las partículas aún en contacto. En esta zona el estado del lecho se conoce como lecho expandido con velocidad de mínima fluidización. Si al llegar a 2 se aumenta ligeramente la velocidad del gas, las partículas se separan y comienza la fluidización. Al ocurrir esto, la caída de presión a través del lecho frecuentemente disminuye ligeramente al pasar el sistema desde 2 al punto 3. A partir de 3, si se sigue aumentando la velocidad, las partículas comienzan a moverse cada vez más intensamente, es decir, que aumenta el grado de mezcla en el lecho permaneciendo la pérdida de carga sensiblemente constante. En el punto 4 comienza el

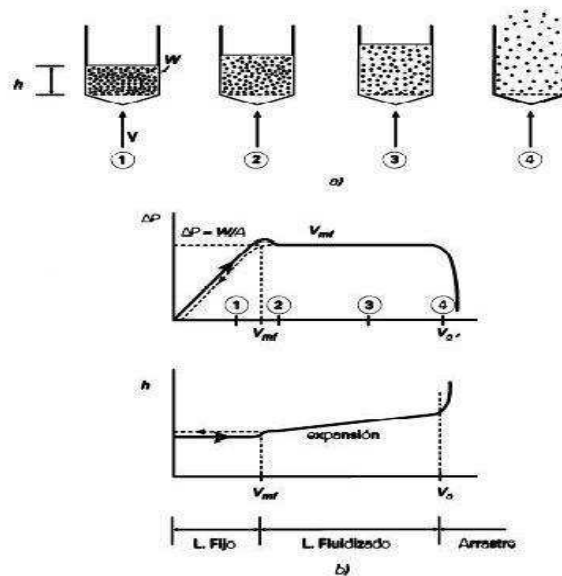


Figura 1: Curvas de fluidización

transporte neumático de las partículas. Si se continúa aumentando la velocidad del gas, se observará que a partir de allí ΔP cae bruscamente, debido a la disminución de la resistencia por la pérdida paulatina del peso del lecho. En 4 terminado el arrastre de las partículas fuera del lecho, a partir de allí al aumentar la velocidad del gas ΔP aumenta nuevamente.

Las curvas de fluidización son un referente para definir la calidad de la combustión en un combustor con sistema de Lecho fluido.

Pero la eficiencia de la combustión en una CCLF, depende de varios factores, no sólo de la caída de presión, mencionaremos por ejemplo de aquellos relacionados al mantenimiento de un flujo hidrodinámico e isotermico:

- Velocidad del fluido entrante (gas).
- Fracción volumétrica (concentración de la fase dispersa).
- Velocidad de la mezcla (homogénea).
- Fluidización (Burbujeo y sedimentación)
- Tamaño de las partículas sólidas.
- Tiempo de residencia del material sólido en la CCLF.

Respecto a la geometría de una Cámara de Combustión con sistema de Lecho Fluido (CCLF), ésta generalmente tiene la forma de un cilindro en sentido vertical, que se en-

cuentra apoyado sobre una placa en forma de rejilla con boquillas por las que pasa un flujo de gas (aire) en sentido ascendente. Cuando la velocidad del fluido inyectado es mayor que cero, éste simplemente circula a través de los canales conducentes dependiendo de la porosidad del lecho.

En países desarrollados como Estados Unidos, Japón España, etc., parte de la industria de la energía eléctrica, es mediante la transformación de residuos sólidos y utiliza la tecnología de CCLF, puesto que tiene cierta flexibilidad en el tipo de residuos, además del buen aprovechamiento de los residuos, que generan mejor transferencia de calor para el quemado óptimo, por esto hace que se considere a esta tecnología una protección del medio ambiente. En la Figura 2, se muestra un esquema de la generación de energía eléctrica con transformación de residuos en CCLF.

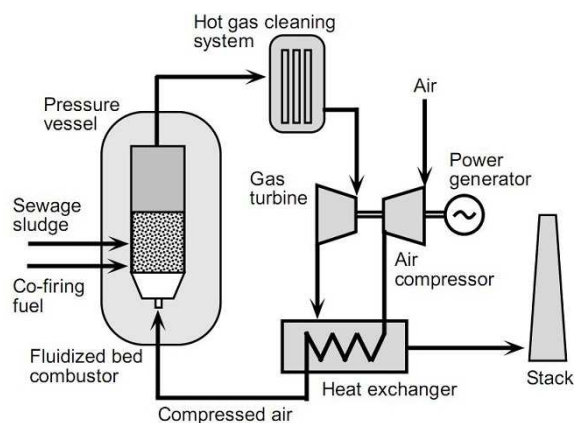


Figura 2: Esquema de generación de energía con CCLF

Su desarrollo sostenible depende del óptimo funcionamiento, mantenimiento y operación. El tipo de residuos combustible procede de los residuos minerales (carbón mineral con alto contenido de cenizas y azufre), o biomasa (de bajo poder energético y alto contenido de humedad) que luego de un previo secado es convertida en finas partículas.

En la Figura 3 se muestra una planta de generación de Energía con cámara de Lecho Fluido, de la central térmica de HUNOSA, ubicada en Asturias, España, el combustible es a base de residuos de carbón mineral.

En la Figura 4, se muestra una planta de incineración de residuos sólidos urbanos con CCLF en España.



Figura 3: Central térmica con CCLF en Asturias, España



Figura 4: Planta de incineración con sistema CCLF en España

Entre las dificultades que presenta esta tecnología es el control [62] en la congestión del material, por su diversidad, esto hace que ocurran fallos de funcionamiento, su recuperación operativa es de muy alto costo. Las causas que se atribuyen son a la calidad del material combustible (contenido de humedad y el tamaño de las partículas), la variedad del combustible sólido no reúne las condiciones de calidad para el diseño de fabricación la CCLF. Esto trae una serie de consecuencias, tales como la pérdida de calor y la no uniformidad de la mezcla gas-sólidos, originando la no fluidización y aparición de puntos calientes (con mayor temperatura) en alguna zonas de las paredes de la cámara.

En la Figura 5 se puede observar una sala de control de esta tecnología, en España.

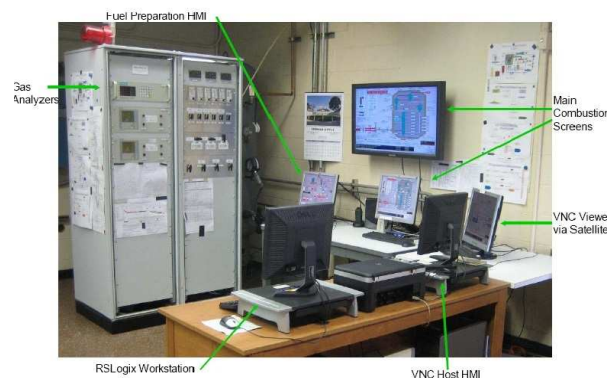


Figura 5: Sala de Control del sistema de una planta con CCLF

En la Figura 6 se observa una fotografía [63] de las boquillas de la parrilla de distribución de una CCLF ubicada en la parte inferior del lecho

Uno de los problemas de mayor interés de investigación es alcanzar una uniformidad de la mezcla, porque de este modo se puede obtener un sistema de lecho fluido burbujeante, y lograr así, el mayor tiempo de residencia del combustible a temperatura constante. La formación de burbujas en el lecho provoca una fácil expansión de la mezcla y por supuesto mejor combustión.

El flujo de mezcla gas - sólidos , se describe como un agregado de partículas, con una característica de movimiento caótico entre partículas, de modo que su comportamiento hidrodinámico se manifiesta en un promediado de todos los movimientos



Figura 6: Parrilla de distribución de aire por boquillas en una CCLF

generados por las partículas individuales.

Con velocidades de 2 a 6 m/seg , la mezcla se comporta como un flujo turbulento, en este caso el arrastre de partículas durante la fluidización, requiere de un sistema de recirculación de inquemados para devolver las cenizas al lecho y la fluidización puede llegar a una velocidad de 10 a 15 veces mas respecto a la carga de alimentación.

En la Figura 7, se puede apreciar un esquema de la instalación de una planta piloto experimental de caldera con cámara de sistema lecho fluido circulante.

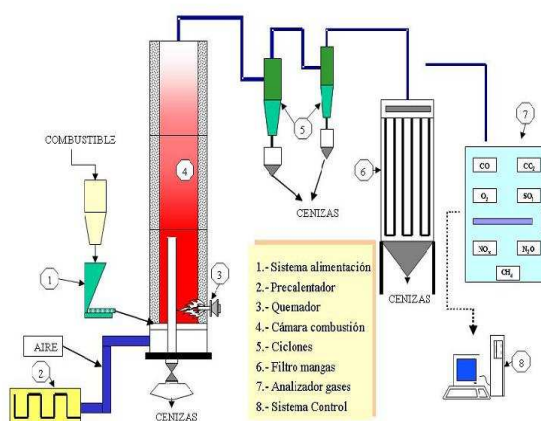


Figura 7: Esquema de instalación de una planta piloto con CCLF

Modelos experimentales del comportamiento de las fases gas-sólido, en cámaras de combustión con sistema de lecho fluido viene siendo estudiado en las últimas décadas, por los especialistas, para ello se construyen prototipos reales, lo cual eleva el costo de la investigación.

La idea fundamental en la actualidad, es la creación de prototipos virtuales, como medio

de investigación de menor costo en el comportamiento de diversos sistemas.

En la Figura 8, se puede apreciar un esquema de prototipo virtual propuesto por [39].



Figura 8: Un esquema de prototipo virtual con CCLF

Desde el punto de vista matemático la modelación de flujos multifásicos es muy importante para la investigación de múltiples problemas, que por la complejidad matemática que tienen, requiere un estudio altamente especializado. El comportamiento hidrodinámico del flujo de mezcla gas - sólido está fundamentado por dos leyes de conservación, la de conservación de masa y conservación de la cantidad de movimiento, que bajo un análisis diferencial éstas pueden ser expresadas mediante un sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) no lineales.

Las dificultades que presentan estos modelos, son la generación de singularidades y la no linealidad de las variables del sistema; originando problemas muy particulares de estudio, por este motivo cada caso tiene diversas restricciones.

Los primeros modelos propuestos fueron publicados por Fariborz T. en el 2005 [17] y la primera simulación del modelo experimental fue publicado por Gidaspow y M. Syamla [46] en el 2006, donde comentan las dificultades encontradas.

Un estudio matemático del problema de mezcla bifásica gas-sólidos durante la fluidización aún es inexistente a comparación de otros tipos de modelos estudiados [17]. El sistema de conservación del sistema tiene una forma muy particular de las ecuaciones del modelo, tales que su compatibilidad está basada en la forma que deben tomar las ecuaciones constitutivas y de estado que son las que cierran el sistema.

0.2. Objetivos

Los objetivos del presente trabajo son: Formular un nuevo modelo matemático del problema del flujo de mezcla bifásica gas-sólidos no estacionario, donde se tome en cuenta las ecuaciones constitutivas y de estado adecuadas, así también realizar un estudio cualitativo y cuantitativo de este modelo; y estos conocimientos aplicarlos para la obtención de los resultados en la simulación numérica del flujo de mezcla bifásica en un prototipo virtual de Cámara de Combustión con Lecho Fluido.

0.3. Hipótesis

Asumiendo que el modelo de fases del problema de flujo bifásico gas-sólido es isotermino entonces a partir de una regularización del problema de frontera libre que surge luego de un cálculo asintótico del modelo de fases, debido al fuerte gradiente de concentración de sólidos que representa el proceso de fluidización en toda su magnitud, ello supone construir toda una metodología matemática y una regularización de las singularidades durante el desarrollo del problema de mezcla. De una propuesta adecuada de las ecuaciones de estado y constitutiva, dependerá las propiedades de los esfuerzos viscosos. De este modo se puede obtener la convergencia del esquema de aproximación.

0.4. Organización del trabajo y metodología del estudio

El trabajo comprende cinco capítulos. En el capítulo 1, se establece el Modelo Físico del problema de flujo de mezcla en sistemas de lechos fluidos bifásicos. En el capítulo 2, se hace un estudio matemático del problema de existencia de solución del sistema de mezcla gas-sólido en el que se considera una contribución matemática en la regularización asintótica del problema. En el capítulo 3, se realiza el proceso de solución numérica del *problema de flujo convectivo-difusivo con término fuente no lineal*, el cual se transforma a un problema variacional y es resuelto mediante un método de Galerkin y elementos finitos estabilizado para la captación de las discontinuidades, este análisis cuantitativo permite obtener la aproximación de las variables del sistema, tales como **velocidad de mezcla, fracción volumétrica de la fase dispersa y presión**. En el

capítulo 4, se presentan los resultados del proceso de la simulación numérica del flujo de mezcla gas- sólidos en un prototipo virtual de Cámara de Combustión con Lecho Fluido (CCLF). En el capítulo 5, se presentan las conclusiones donde se resumen las contribuciones en el estudio del problema, así también se plantean algunos problemas abiertos para futuros trabajos de investigación. En el capítulo 6, se anexa temas adicionales relacionados al problema en estudio.

CAPÍTULO 1

MODELO FÍSICO

Para formular el modelo físico, se ubicará el dominio de estudio, sobre una sección transversal de una cámara de combustión, con múltiples boquillas para la entrada de aire, que se puede ver en la Figura 1.1, referida por [63]. En primer lugar se describirá el modelo de fases que surge del comportamiento hidrodinámico del flujo bifásico gas - sólidos, durante la fluidización, referidas en [30], [31].

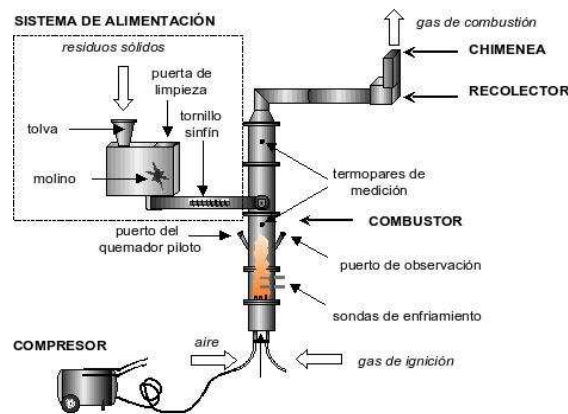


Figura 1.1: Esquema de cámara con sistema de Lecho Fluidizado

Supongamos que se considera una suspensión ascendente de las partículas sólidas por un flujo de aire al que se denomina fluidización gas-sólidos. Este fenómeno del comportamiento hidrodinámico considera que la fase densa (partículas sólidas) coexiste con una fase continua (gas), pudiendo originarse suspensiones estacionarias (nubes estacio-

narias) de partículas en el gas. Algunos modelos relacionados a este problema en estudio están referidos en: [24], [19], [35], [60].

El objetivo de esta sección es llegar a modelar el transporte de las partículas sólidas de una zona a otra generando una nube de partículas, cuyo hecho significa que el sistema gas-sólido se comporta macroscópicamente como un fluido viscoso y a temperaturas altas de modo isotérmico. En este sentido es posible obtener perfiles muy homogéneos [24], [35], [60]. Los estudios de los los problemas bifásicos con sistema de lecho fluido, son muy importantes por las ventajas que ofrecen en diversos procesos industriales. En ciertas aplicaciones de la industria intervienen sistemas fluidizados de partículas sólidas con líquidos, en lugar de gases, experimentalmente se observa que en estos casos, se obtienen nubes estables de partículas sólidas que se distribuyen uniformemente con el fluido [24],[35], [60]. Mientras que la fluidización de partículas con gas a presión ambiente, a partir de una cierta velocidad crítica, empieza a hacer ascender a las partículas sólidas generándo burbujas de gas que no contienen partículas sólidas. Este hecho, hace que el lecho no sea uniforme, con lo que se pierde la homogeneidad del sistema (inestabilidad). Sin embargo, en algunas referencias bibliográficas, consideran que los sistemas bifásicos gas-sólidos pueden comportarse de forma similar un sistema líquido - sólido pero en un estado de mínima fluidización, esto se puede observar en la Figura 1.2. Esto significa que si se consideran estos procesos a una presión mayor [60] se puede observar la diferencia de ambos sistemas.

Acerca de los estudios del sistema gas-sólidos la formación y evolución de las burbujas [56], se puede observar la dependencia del tamaño, forma y propiedades de las burbujas en función del tamaño de las partículas sólidas, de la diferencia de densidades de las fases y de las características del tipo de gas y de líquido que fluidifica a las partículas sólidas. La aparición de burbujas producto del aire inyectado a un lecho de partículas sólidas, en ocasiones tiene efectos importantes, pues al ascender entre las partículas sólidas en suspensión, las burbujas toman una forma cóncava en su parte inferior [24], [60] y arrastran tras de sí a las partículas sólidas, haciendo que los diferentes materiales sólidos se mezclen adecuadamente. También consideran [47], [57] que si la fase de partículas sólidas tienen además un comportamiento de tipo difusivo, éste provocaría un mezclado óptimo [24], [35]. Sin embargo, estas partículas arrastradas por las burbujas pueden dar lugar a problemas de erosión [14] y además, es posible que algunas partículas se escapen del recipiente (el caso de transporte neumático), lo que puede ser perjudicial para el medio ambiente, en especial si dichas partículas corresponden a un

catalizador.

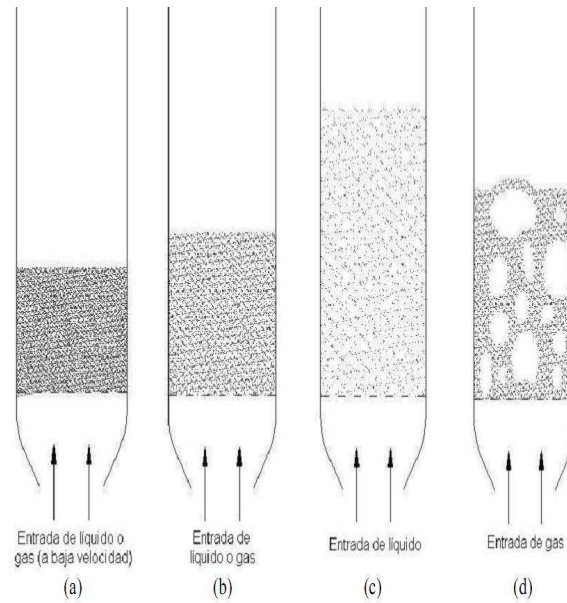


Figura 1.2: Efecto de la entrada de líquido y gas en un Lecho de partículas

Una discusión amplia acerca de los fenómenos experimentales que ocurren en los sistemas fluidificados, las ventajas e inconvenientes que éstos representan se pueden encontrar en [24], [19], [35], [60].

Para el presente estudio se han considerado un sistema fluidificado en el que el número de partículas sólidas es muy grande, por lo que el sistema expresado en términos de la posición de todas y cada una de las partículas presenta serios problemas en la modelización [51]. Por otra parte, se observa que una suspensión de partículas sólidas pequeñas en una escala del orden del tamaño de dichas partículas, se observa un comportamiento de tipo caótico, pues la interacción de las partículas entre sí y con el gas provoca en las partículas sólidas un movimiento de tipo browniano [18], [42]. Para poder abordar esta modelización del problema vamos a asumir que existe una homogeneización en el medio de modo que nos permita promediar las magnitudes asociadas a las partículas sólidas y escribir las ecuaciones del sistema de leyes de conservación de dichas magnitudes. Tal tipo de modelos son objeto de estudio en [13], [14], [45], [46], [50]. Se ha encontrado investigaciones relacionadas al problema donde consideran centrar el estudio en la evolución y tamaño de las burbujas en el caso de flujos bifásicos [56].

El estudio de la dinámica del lecho fluido en función de sus leyes de conservación permiten abordar una gran variedad de situaciones tan sólo centrandolo en la

forma que se considere las ecuaciones de estado y las leyes de comportamiento constitutivo, así como variar los coeficientes de dichas ecuaciones, con lo que se pueden simular diversos comportamientos de la velocidad del gas con proximidad a la velocidad de fluidización mínima, así como la velocidad próxima de volado de las partículas en sistemas de lecho fluido circulantes [59], [60], [61].

Consideraremos para ello tres tipos escalas:

1. *La microescala*: la escala del tamaño de las partículas sólidas.
2. *La macroescala*: la escala en la que se observan diferencias apreciables en las variables que definen el sistema.
3. *La mesoescala*: Una escala intermedia a las dos anteriores, de forma que un volumen de referencia de dicho tamaño sea lo suficientemente grande como para contener gran cantidad de partículas sólidas y suficientemente pequeña para que las variables a estudiar no varíen (en media).

Sea un volumen de referencia V , del tamaño de la mesoescala se puede descomponer en dos subvolúmenes V_g ocupado por gas y V_p ocupado por partículas sólidas. Llamando 1_p a la función que vale 1 en los puntos de V donde hay partículas sólidas y 0 en caso contrario, denotaremos:

$$\rho = \frac{V_p}{V} = \frac{\int_V 1_p dV}{\int_V dV}$$

a la *fracción volumétrica de la fase densa* y definimos la *velocidad media de las partículas de la fase densa* en dicho volumen por \vec{v} :

$$\rho \vec{v}_p V = \int_V 1_p \vec{v}_p dV$$

De manera análoga definimos la *velocidad media del gas* \vec{u} y posteriormente otras magnitudes de interés en este estudio, ya sean del tipo escalar, vectorial o tensorial.

En esta sección se considera la obtención del sistema de *las Leyes de Conservación de la Masa y de la Cantidad de Movimiento* de ambas fases, incluyendo en dichas ecuaciones los efectos de la interacción entre ellas. El comportamiento individual browniano de cada una de las partículas sólidas hace que, al promediar la densidad y la cantidad de movimiento de dichas partículas, éstas se comporten macroscópicamente de forma similar a las de un fluido. En particular en el promediado del comportamiento browniano de las partículas sólidas será necesario introducir en el modelo un término de tensiones

análogo al que se utiliza en el modelado del comportamiento de un sólo fluido. En ese sentido, el primer trabajo acerca de la consideración de una viscosidad efectiva en el estudio de una suspensión de partículas es atribuido a Einstein en 1905 [13]. Existen escasos estudios experimentales sobre la viscosidad efectiva de la mezcla de ambas fases, donde ésta se puede medir mediante diversos procedimientos [60]. El resultado de tales medidas es que se obtienen viscosidades decrecientes en la fracción volumétrica ocupada por la fase densa y creciente en el tamaño de las partículas que la forman.

1.1. Modelo de fases

En la obtención del modelo de fases separadas en un sistema bifásico asumiendo que no existe interacción química entre las fases, ni transformación de una fase en la otra. Además supondremos que el proceso es adiabático, es decir, sin pérdida de energía. Esta hipótesis permite describir la dinámica del sistema en términos de ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento, sin tener que considerar la ecuación de conservación de la energía. Supondremos además que las dos fases son incompresibles y tienen densidades ρ_g y ρ_p constantes, donde el subíndice p indica la fase de partículas de sólido y el subíndice g la fase gaseosa. Por último, para poder realizar el promediado, vamos a suponer que todas las partículas de sólido son esféricas y del mismo tamaño. Consideremos un volumen de referencia D , independiente del tiempo t y suficientemente grande en comparación con el volumen V en que realizamos el promediado de las magnitudes físicas.

El *Principio de Conservación de la Masa del Gas* en el volumen D se escribe en forma integral:

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho_g 1_g dV = - \int_S \rho_g 1_g \vec{u}_g \cdot \vec{n} ds$$

donde S es la frontera del volumen D , \vec{n} es el vector normal unitario exterior a la superficie y

$$1_g(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si hay una partícula de sólido en } (x, t) \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es la función indicatriz de la parte del dominio D ocupada por la fase gaseosa.

Considerando el promedio efectuado anteriormente, podemos escribir la ecuación de conservación anterior en la forma:

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho_g (1 - \rho) dV = - \int_S \rho_g (1 - \rho) \vec{u} \cdot \vec{n} ds$$

y escribiendo dicha ley en forma diferencial haciendo uso del teorema de Gauss ([51], [52], [36]) y suponiendo regularidad para el paso al límite, se tiene:

$$(1 - \rho)_t + \text{div}((1 - \rho) \vec{u}) = 0 \quad (1.1)$$

De forma similar podemos escribir el *Principio de Conservación de la Cantidad de Movimiento del Gas* en el volumen D :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_D \rho_g 1_g \vec{u}_g dV + \int_S \rho_g 1_g (\vec{u}_g \otimes \vec{u}_g) n ds = \int_S 1_g \underline{\sigma}_g n ds + \\ + \sum \int_{S_p} 1_g \underline{\sigma}_g n ds + \int_S \rho_g 1_g \mathbf{f} ds \end{aligned}$$

donde $\underline{\sigma}_g$ es el tensor de tensiones del gas y f es la densidad de fuerzas de volumen que actúan sobre el gas. En el segundo término del lado derecho de la igualdad anterior, la integración se realiza sobre la superficie S_p de todas las partículas de sólido. Dicho término modela la aportación de las fuerzas de rozamiento entre el gas y las partículas del sólido a la variación de la cantidad de movimiento del gas. El principio de acción - reacción implica que este término es igual en módulo y dirección pero de sentido contrario a la fuerza de rozamiento que ejerce el flujo de gas sobre las partículas. Posteriormente veremos que dicho término se puede expresar como un término fuente que estará en función de la fracción volumétrica de la fase densa ρ y las velocidades promediadas \vec{u} y \vec{v} , donde \vec{v} es la velocidad de las partículas sólidas.

Haciendo uso de las magnitudes promediadas se puede expresar la igualdad anterior en la forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_D \rho_g (1 - \rho) \vec{u} dV + \int_S \rho_g (1 - \rho) (\vec{u} \otimes \vec{u}) n ds = \int_S (1 - \rho) \tilde{\sigma}_g n ds + \\ + \int_D \mathbf{F}_{pg}(\rho, \vec{u}, \vec{v}) dV + \int_S \rho_g (1 - \rho) \mathbf{f} ds \end{aligned}$$

donde se ha puesto

$$\mathbf{F}_{pg}(\rho, \vec{u}, \vec{v}) = \sum \int_{S_p} (1 - \rho) \tilde{\sigma}_g n ds$$

y expresándolo en su forma diferencial (suponiendo regularidad para el paso al límite) se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \rho_g [((1 - \rho) \vec{u})_t + \text{div}((1 - \rho) (\vec{u} \otimes \vec{u}))] = \\ = \text{div}((1 - \rho) \tilde{\sigma}_g + \mathbf{F}_{pg} + \rho_g (1 - \rho) \mathbf{f}) \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

De modo análogo, escribiremos a continuación las ecuaciones de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento de las partículas sólidas en el volumen D .

Por el *Principio de conservación de la masa*, la ecuación de continuidad para la fase densa se expresa:

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho_p 1_p dV = - \int_S \rho_p 1_p \vec{v}_p \cdot \mathbf{n} ds$$

donde:

$$1_p(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si no hay una partícula de sólido en } (x, t) \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es la función indicatriz de la parte del dominio D ocupada por la fase densa ([51]).

Considerando la densidad promediada ρ y la velocidad promediada de partículas \vec{v} podemos escribir:

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho_p \rho dV = - \int_S \rho_p \rho \vec{v} \cdot \mathbf{n} ds$$

que, en su forma diferencial queda expresada por:

$$\rho_t + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.3)$$

Por el *Principio de conservación de cantidad de movimiento*, la fase densa en el volumen de referencia D se puede expresar por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_D \rho_p 1_p \vec{v}_p dV + \int_S \rho_p 1_p (\vec{v}_p \otimes \vec{v}_p) \mathbf{n} ds &= \int_S 1_p \underline{\sigma}_p \mathbf{n} ds + \\ &+ \sum \int_{S_p} 1_p \underline{\sigma}_p \mathbf{n} ds + \int_S \rho_p 1_p \mathbf{f} ds \end{aligned}$$

y considerando ([51]) las magnitudes promediadas se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_D \rho_p \rho \vec{v} dV + \int_S \rho_p \rho (\vec{v} \otimes \vec{v}) \mathbf{n} ds &= \int_S \rho \tilde{\sigma}_p \mathbf{n} ds + \\ &+ \int_D \mathbf{F}_{gp}(\rho, \vec{u}, \vec{v}) dV + \int_S \rho_p (1 - \rho) \mathbf{f} ds \end{aligned}$$

con

$$\int_D \mathbf{F}_{gp}(\rho, \vec{u}, \vec{v}) = \sum \int_{S_p} \rho \tilde{\sigma}_p \mathbf{n} ds$$

donde, por el principio de acción y reacción $\mathbf{F}_{pg} = -\mathbf{F}_{gp}$, dicha igualdad se puede expresar en forma diferencial:

$$\rho_p [(\rho \vec{v})_t + \text{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v})] - \text{div}(\rho \tilde{\sigma}_p) = \mathbf{F}_{gp} + \rho_p \rho \mathbf{f} \quad (1.4)$$

En resumen, el sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales (1.1), (1.2), (1.3) y (1.4) gobiernan la hidrodinámica de los sistemas bifásicos del modelo de fases:

$$\left. \begin{aligned} (1 - \rho)_t + \text{div}((1 - \rho) \vec{u}) &= 0 \\ \rho_g [((1 - \rho) \vec{u})_t + \text{div}((1 - \rho) (\vec{u} \otimes \vec{u}))] &= \\ = \text{div}((1 - \rho) \tilde{\sigma}_g - \mathbf{F}_{gp} + \rho_g (1 - \rho) \mathbf{g}) & \\ \rho_t + \text{div}(\rho \vec{v}) &= 0 \\ \rho_p [(\rho \vec{v})_t + \text{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v})] - \text{div}(\rho \tilde{\sigma}_p) &= \mathbf{F}_{gp} + \rho_p \rho \mathbf{f} \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

1.2. El modelo de frontera libre

Observemos que en el caso de considerar dos fases con una gran diferencia de densidades:

$$\epsilon = \frac{\rho_g}{\rho_p} \ll 1$$

los términos que aparecen en las ecuaciones pueden ser de órdenes de magnitud muy diferentes y son conocidas, por ejemplo, en el caso que nos ocupa de una fase gaseosa constituida por aire ($\rho_g \approx 1.293 \frac{Kg}{m^3}$) y una fase sólida no demasiado densa de partículas de carbón ([4], [26], [51]) ($\rho_p \approx 1.2 \cdot 10^3 \frac{Kg}{m^3}$), se tiene $\epsilon \approx 10^{-3}$.

Pero, cuando comienza la fluidificación la fuerza de rozamiento del gas sobre las partículas de la fase densa compensa las fuerzas externas aplicadas (peso) sobre éstas, con lo que dicho término es del orden de ρ_p . El término fuente de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento para la fase densa, también aparece en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento de la fase gas y todos los términos involucran a ρ_g , este hecho permite simplificar sustancialmente el sistema (1.5).

Considerando que el *tensor de tensiones de la fase gaseosa*, expresado en la forma habitual de la Mecánica de Fluidos ([26]), descompuesto en una parte isótropa debido a la *presión* (parte simétrica del tensor de tensiones) más un término de la contribución de la viscosidad (parte antisimétrica del tensor de tensiones) denominados *esfuerzos o tensiones desviadoras*:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_g = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_g - p_g \tilde{\mathbf{I}}$$

Dividiendo por ρ_p todos los términos de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento de la fase gaseosa (segunda de las ecuaciones (1.5)), se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon [((1 - \rho) \vec{u})_t + \text{div}((1 - \rho)(\vec{u} \otimes \vec{u})) - \text{div} \left((1 - \rho) \frac{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}{\rho_g} \right) - (1 - \rho) \mathbf{f}] = \\ = - \left(\nabla \left((1 - \rho) \frac{p_g}{\rho_p} \right) + \frac{1}{\rho_p} \mathbf{F}_{gp} \right) \end{aligned} \right\}$$

Esto significa que los únicos términos que tienen importancia cuando $\epsilon \ll 1$ son el término de presión y el término de fuerzas interactivas entre ambas fases, esta fuerza de interacción define el *Modelo de Frontera Libre* ([51]) basado en términos convectivos, fuerzas viscosas y fuerza externas. Para ello se admite la siguiente hipótesis:

Hipótesis 1 Se supone que, cuando $\epsilon = \frac{\rho_g}{\rho_p} \rightarrow 0$

(H 1. 1). . Las funciones ρ , u , así como la viscosidad de la fase gaseosa $\frac{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}{\rho_g}$ y la densidad de fuerzas externas de volumen f son independientes de ϵ .

(H 1. 2). Las funciones:

$$p_h = (1 - \rho) \frac{p_g}{\rho_p} \quad \text{y} \quad \mathbf{f}_{gp} = \frac{1}{\rho_p} \mathbf{F}_{gp} \quad (1.6)$$

permanecen, al menos, con un orden unidad frente a ϵ .

Nota 1.2.1

La hipótesis asintótica esencial (H 1. 2) se justifica de la forma siguiente: Por un lado, la presión de gas aparece en un medio incompresible como un multiplicador de Lagrange asociado justamente a la condición de incompresibilidad, y no parece razonable imponer que dicho multiplicador se anule en el balance de fuerzas. Por otro lado, si se omite de que el gas se comporta de modo incompresible y se asume, por ejemplo, un comportamiento de gas perfecto, se puede escribir:

$$p_h = (1 - \rho) \epsilon R T$$

donde R es la constante universal de los gases ([27]) dividida por el peso molecular y T la temperatura absoluta. Como $(1 - \rho)$ permanece del orden de la unidad (como se verá más adelante $\rho \in [0, \rho_* = \pi/6]$), y el factor $RT \approx 8.61 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{Kg}}$ para el aire a temperatura ambiente, resulta que (asumiendo $\epsilon = 10^{-3}$), $p_h \in [4, 9]$, lo que está dentro de la hipótesis. En lo que a la magnitud de f_{gp} , basta decir, por el momento, que es razonable esperar que F_{gp} sea del orden de ρ_p por la razón expuesta al principio de esta sección.

Sobre el dominio Ω y cuya frontera es $\delta\Omega$, obtenemos las ecuaciones que gobiernan el modelo de *Frontera Libre*, a partir de (1.5), pasando al límite este sistema de ecuaciones en derivadas parciales el nuevo sistema queda expresado por:

$$\left. \begin{aligned} \rho_t + \text{div}(\rho \vec{v}) &= 0 \\ (\rho \vec{v})_t + \text{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) - \text{div} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{f}_{gp} + \rho \mathbf{f} \\ \nabla p_h &= -\mathbf{f}_{gp} \\ \text{div}((1 - \rho) \vec{u} + \rho \vec{v}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

donde se introduce (1.6) (presión hidrodinámica y densidad de fuerzas de rozamiento de la fase gaseosa sobre la densa por unidad de volumen y de masa de la fase densa), así como:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\rho}{\rho_p} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_p \quad (1.8)$$

(tensión efectiva por unidad de masa sobre la fase densa). Además, hemos sustituido la ecuación de conservación de la masa de la fase gaseosa por la suma de las ecuaciones de conservación de la masa de ambas fases, en cada instante de tiempo t .

La porosidad en el dominio de mezcla es representado en la Figura 1.3: donde σ representa la concentración de sólidos y β es la zona libre de sólidos.

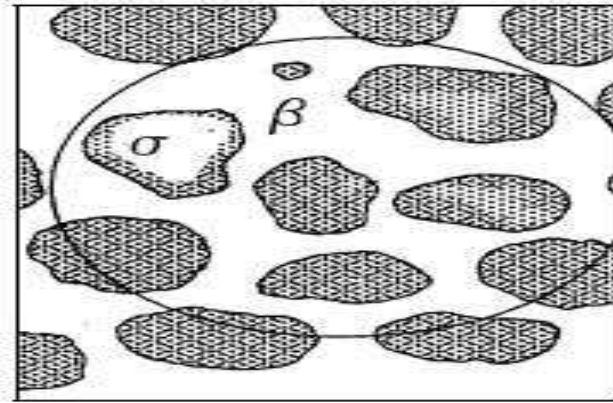


Figura 1.3: Porosidad del dominio de mezcla bifásica

Para que el sistema sea compatible se requiere completar el sistema de ecuaciones (1.7) para lo cual necesitamos expresar \mathbf{f} , \mathbf{f}_{gp} y $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_p$ en términos de ρ , \vec{u} y \vec{v} . En la mecánica de fluidos existen diversas relaciones de cierre para los diferentes términos mencionados de modo general. Un estudio general de las diferentes posibilidades se pueden encontrar en [14], [16], [25], [51].

Hasta ahora se puede observar que:

1. El proceso de homogeneización conduce al sistema de leyes de conservación hidrodinámicas (1.7) obtenido en la sección anterior.
2. El carácter intrínseco con respecto al cambio de sistema de referencia inercial de los escalares, vectores y tensores que aparecen en las ecuaciones de conservación (1.7).
3. Las diferentes posibilidades en la elección de las relaciones de cierre y se comentan las elecciones realizadas.

4. Una reflexión acerca de la importancia de elegir unas relaciones de cierre que permitan aproximar de forma eficiente las observaciones experimentales de que se disponen, y que no den lugar a problemas mal planteados. Por ejemplo, si se indica que en el caso de que todas las soluciones con fracción volumétrica $\rho = cte$, $\vec{v} = 0$ y $\vec{u} = cte$ sean linealmente inestables, el modelo está mal planteado.

En este trabajo, la única densidad de fuerzas externas aplicadas sobre la fase densa que consideraremos será proporcional al peso de las partículas, es decir:

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{g} \quad (1.9)$$

donde g es la aceleración de la gravedad y ρ es la fracción volumétrica de la fase densa.

A continuación se plantean las relaciones de cierre que han de considerarse para completar el sistema de ecuaciones y pueda ser compatible para su solución.

El modelado del término de rozamiento entre las fases gaseosa y sólida requiere un estudio detallado de la resistencia que ejerce una partícula aislada en un flujo incompresible, y de la fuerza que ejerce un lecho fijo de partículas sobre dicho flujo de gas. Experimentalmente, dichas fuerzas se pueden calcular en función de la caída de presión de un flujo de gas que circula alrededor de dichos obstáculos.

Para deducir cual es, cualitativamente, la *fuerza de rozamiento* que ejerce un fluido incompresible de densidad ρ_g y que, macroscópicamente, se mueve a velocidad w_∞ (constante) sobre *una partícula* incompresible en reposo de densidad ρ_p y volumen V_p , consideraremos el razonamiento siguiente:

1. Por un lado, si llamamos d a la dimensión lineal típica del obstáculo en la dirección del flujo, el trabajo desarrollado por la fuerza de rozamiento del fluido sobre el obstáculo (supuesta de la misma dirección y sentido que la velocidad del flujo) en el volumen del mismo, vendrá dado por:

$$W_{gp} = F d$$

2. Por otra parte, si no hubiera obstáculo, la energía cinética del fluido contenido en el volumen de la partícula, sería:

$$E_g = \frac{1}{2} V_d \rho_g w_\infty^2$$

Para que no existan pérdidas de energía en el proceso, el efecto de la fuerza de fricción del fluido sobre el obstáculo debe obtenerse igualando ambas expresiones, de forma que:

$$F \approx \frac{1}{2} \frac{V_d}{d} \rho_g w_\infty^2 \approx \frac{1}{2} S \rho_g w_\infty^2$$

donde se ha llamado S a la superficie del obstáculo transversal al mismo (sección eficaz o superficie efectiva). La fórmula anterior es sólo cualitativa, de modo que, en la situación general en la que tengamos una partícula animada de una velocidad \vec{v} en el seno de un flujo de gas incompresible caracterizado por la velocidad \vec{u} , se introduce la variable $w = \vec{u} - \vec{v}$, para denotar la diferencia de velocidades, que usualmente es aceptado en ([37], [47]) para expresar la fuerza total de rozamiento del flujo sobre la partícula, cuyo resultado es de la forma:

$$\mathbf{F} = C_D \frac{1}{2} S \rho_g |\vec{u} - \vec{v}| (\vec{u} - \vec{v}) \quad (1.10)$$

donde se introduce el coeficiente de proporcionalidad C_D denominado *coeficiente de arrastre* o *coeficiente de fricción*.

Un número importante que se introduce en el modelo es el *número de Reynolds* de la partícula:

$$Re_p = \frac{\rho_g |\vec{u} - \vec{v}| d}{\mu_g} \quad (1.11)$$

con el cual se describe la fuerza de rozamiento sobre la partícula de la forma siguiente:

$$\mathbf{F} = \frac{C_D}{2} Re_p \frac{\mu_g S}{d} (\vec{u} - \vec{v}) \quad (1.12)$$

En la práctica, para conocer la fuerza de fricción (1.10) ó (1.12) es necesario conocer el coeficiente adimensional de arrastre C_D en cada configuración particular. Para ello consideraremos tres situaciones:

1. La primera que podemos considerar es la fuerza que ejerce un flujo que verifica las ecuaciones de Stokes (incompresible viscoso) al circular a velocidades moderadas (lo que elimina los términos no lineales de inercia en las ecuaciones) alrededor de un obstáculo esférico en reposo. En este caso se puede realizar el cálculo exacto del perfil de la velocidad y de la presión. La fuerza neta que actúa sobre la esfera proviene de la integración sobre la superficie de la misma de las fuerzas normales y tangenciales que actúan sobre ella. El resultado final de dicha integración es el siguiente:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_t \quad \text{con} \quad \begin{cases} \mathbf{F}_n = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_g g + 2 \pi \mu_g R w_\infty \\ \mathbf{F}_t = 4 \pi \mu_g R w_\infty \end{cases}$$

donde w_∞ es la velocidad asintótica del fluido lejos de la partícula, μ_g la viscosidad del fluido y R el radio de la partícula. El primer término en F_n es el producido por la fuerza de flotación o empuje hidrostático, y el segundo término en F_n recibe el nombre de resistencia a la deformación. El término F_t se denomina de resistencia a la fricción. En definitiva, la fuerza dinámica (excluida la de flotación) que actúa en la interacción de una partícula pequeña con el fluido en movimiento que la rodea, viene dada por:

$$\mathbf{F} = 6 \pi \mu_g R w_\infty \quad (\text{Ley de Stokes}) \quad (1.13)$$

Nótese que, para partículas pequeñas, el cociente entre la fuerza de empuje hidrostático y la de fricción es del orden $\mathcal{O}(R^2)$ y en [43] se considera despreciable en la práctica. En el caso que se eliminen de las ecuaciones los términos convectivos, la ley de Stokes es válida únicamente cuando el número de Reynolds (1.11) es pequeño. En [43] se comenta que este resultado es válido cuando el número de Reynolds $Re_p = R w_\infty / 2 \mu_g$ es aproximadamente inferior a 0.1. Este caso se caracteriza por la virtual ausencia de remolinos aguas abajo de la esfera. Se tiene además, que para valores de $Re_p \approx 1$, la ley de Stokes (1.13) predice una fuerza que es aproximadamente en un diez por ciento menor que la que se observa en los experimentos. Si se tiene en cuenta que, para partículas esféricas de radio R , la sección transversal al flujo es:

$$S = \pi R^2 = \pi d^2 / 4$$

por lo que la Ley de Stokes se puede expresar por:

$$\mathbf{F} = 12 \frac{\mu_g S}{d} w_\infty$$

es decir, en la forma (1.12) con el coeficiente de arrastre dado por:

$$C_{Ds} = \frac{24}{Re_p} \quad \text{para} \quad Re_p < 0.1 \quad (\text{Régimen de Stokes}) \quad (1.14)$$

2. En [51] se analiza este problema en más detalle, de lo cual se concluye que, cuando $\rho_p \gg \rho_g$, considerando un número de Reynolds del gas pequeño (pudiendo por tanto despreciarse los efectos convectivos) y considerar un flujo laminar del gas, el único término importante es el término de rozamiento de Stokes proporcional a la diferencia de las velocidades de las fases (1.13).

3. Para valores del Número de Reynolds de partícula mayores que 0.1 es preciso acudir a correlaciones experimentales para el coeficiente de arrastre C_D , o lo que es lo mismo, para la fuerza de fricción ejercida por un flujo incompresible sobre una partícula. Se presentan aquí algunos de los tipos de coeficientes de arrastre que incluyen el Reynolds de partícula ([3], [46], [51]):

$$C_{D_I} = \frac{18.5}{Re_p^{3/5}} \quad \text{para} \quad 2 < Re_p < 5 \cdot 10^2 \quad (1.15)$$

Es el coeficiente de arrastre intermedio

$$C_{D_N} = 0.44 \quad \text{para} \quad 5 \cdot 10^2 < Re_p < 2 \cdot 10^5 \quad (\text{Coef. de arrastre de Newton}) \quad (1.16)$$

$$C_{D_P} = \frac{24}{Re_p} (1 + 0.15 Re_p^{0.687}) \quad \text{para} \quad Re_p < 1000 \quad (\text{Coef. de arrastre de Putnam}) \quad (1.17)$$

Si consideramos un lecho formado por partículas todas iguales de la fase densa en el seno de la fase gaseosa y llamamos N_d al número de partículas en la unidad de volumen y V_d al volumen ocupado por cada partícula, podemos escribir el volumen específico de la fase densa como:

$$\rho = N_d V_d$$

de forma que la densidad de fuerzas de rozamiento por unidad de volumen ejercida por la fase gaseosa sobre la fase densa y teniendo en cuenta (1.12), ésta queda expresada por:

$$\mathbf{F}_{gp} = N_d \mathbf{F} = \frac{C_D}{2} Re_p \frac{\mu_g S}{d V_d} \rho (\vec{u} - \vec{v}) \quad (1.18)$$

En el caso particular de partículas esféricas todas iguales:

$$\mathbf{F}_{gp} = \frac{3}{4} C_D Re_p \frac{\mu_p}{d^2} \rho (\vec{u} - \vec{v}) \quad (1.19)$$

Si, además el número de Reynolds de partícula es pequeño (régimen de Stokes):

$$\mathbf{F}_{gp} = 18 \frac{\mu_g}{d^2} \rho (\vec{u} - \vec{v}). \quad (1.20)$$

Otro estudio preliminar ([15], [60], [61]) es el cálculo del flujo del gas en un lecho fijo de partículas. Se supone en este caso que el problema es equivalente a considerar el paso del gas por canales de secciones transversales, donde se asume que el rozamiento total por unidad de área de las paredes del canal es la suma de dos tipos de fuerza: Las fuerzas de frotamiento viscoso que resultan ser proporcionales a la velocidad del fluido (gas) y las

fuerzas de inercia proporcionales al cuadrado de la velocidad. Entonces a velocidades moderadas, éstas últimas resultan despreciables frente a las primeras, pudiéndose, en definitiva, escribir las fuerzas de rozamiento mediante una expresión similar a la ley de Stokes (1.13). Pero el objetivo de estos estudios es obtener el comportamiento del lecho de partículas de la fase densa (sólidos) de modo disperso en la fase menos densa (gas) como una columna de sección constante, experimentalmente usualmente se estudia la pérdida de presión a través de los lechos porosos aplicando la ecuación de la caída de presión:

$$\Delta p = f_r \frac{L}{d} \frac{\rho}{(1 - \rho)^3} \rho_g w^2 \quad (1.21)$$

donde L es la altura del lecho o columna vertical, d el diámetro de partícula de la fase densa, ρ el volumen específico de la fase densa y f_r el coeficiente de fricción, siendo Δp la caída de presión en el lecho. Se puede entonces medir experimentalmente Δp y obtener correlaciones teórico-experimentales para el *coeficiente de fricción* f_r . Una de las más usuales es la *correlación de Ergun* ([26]):

$$f_r = \frac{150}{Re_p} \rho + 1.75 \quad (1.22)$$

Según [26], en el primer término de la ecuación (1.22) es importante considerar Reynolds de partícula moderados ($Re_p < 10 \rho$) puesto que representa el efecto de las fuerzas viscosas, mientras que si en el segundo predomina para Reynolds altos ($Re_p > 2 \times 10^3 \rho$) que representa el término de arrastre sobre partículas individuales o fuerzas de inercia. Entonces, es posible obtener la densidad de fuerza de rozamiento específica (por unidad de volumen) que actúa sobre la fase densa a partir de (1.21) y cuyo cambio de velocidad se expresa por $\mathbf{w} = w = \vec{u} - \vec{v}$:

$$\mathbf{F}_{gp} = \frac{\Delta p}{L} \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = f_r Re_p \frac{\mu_g}{d^2} \frac{1}{(1 - \rho)^3} \rho (\vec{u} - \vec{v}) \quad (1.23)$$

La comparación de (1.18) obtenida utilizando la suma de todas las partículas del lecho en la correlación experimental con el *coeficiente de arrastre* CD obtenido para una sola partícula, con (1.23), obtenida a partir de las correlaciones experimentales del *coeficiente de fricción* f_r en lechos porosos con altura finita, entonces para un gran número de partículas, nos permite sugerir la utilización de la fórmula (1.18) con el coeficiente de arrastre corregido, es decir:

$$C_{DL} = 2 f \frac{V_d}{d S} \frac{1}{(1 - \rho)^3} \quad (1.24)$$

asumiendo que, en el caso que todas las partículas sean esféricas e iguales, se utiliza la siguiente fórmula:

$$C_{DL} = \frac{4}{3} f_r \frac{1}{(1 - \rho)^3} \quad (1.25)$$

En el caso de partículas pequeñas, ([47]) debido a las condiciones experimentales, es preferible utilizar este *coeficiente de arrastre corregido*, con el *coeficiente de fricción* f_r calculado con la correlación de Ergun (1.22) para pequeños valores del número de Reynolds de la partícula y con la fracción volumétrica de la fase densa, ρ , correspondiente al *empaquetamiento máximo* de partículas (ρ_*), es decir:

$$\rho_* = \frac{\pi}{6} \approx 0.5236$$

$$CD_L = \frac{200}{Re_p} \frac{\rho_*}{(1 - \rho)^3} \quad (1.26)$$

Una relación entre estos tipos de Coeficiente de arrastre se muestran en la Figura 1.4:

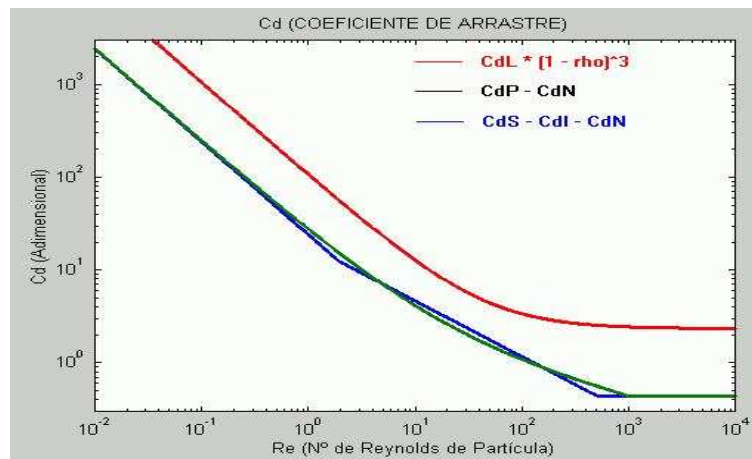


Figura 1.4: Coeficiente adimensional de arrastre C_D

En el modelado de la fuerza de arrastre se asume algunos datos experimentales que demuestran, que al aumentar un número grande de partículas, la interacción entre ellas hace que aumenten las fuerzas de rozamiento entre fases. De este modo la fuerza de rozamiento de la fase gaseosa sobre la fase densa, por unidad de volumen y de masa de la fase densa es $\mathbf{f}_{gp} = \mathbf{F}_{gp} / \rho_p$, es decir:

$$\mathbf{f}_{gp} = \rho q(\rho) (\vec{u} - \vec{v}) \quad (1.27)$$

donde:

$q : [0, \rho^*] \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función continua, estrictamente creciente tal que $q(\rho) > 0$

que satisface todas las correlaciones teórico-experimentales, y en [51] se sugiere que una forma óptima para q es la siguiente

$$q(\rho) = q(\rho^*) (1 - \rho)^{-m} \quad \text{para } 0 < \rho \leq \rho^* \quad \text{con } m \geq 0 \quad (1.28)$$

Cuando $\rho = 0$, para bajos números de Reynolds de partícula (lechos empaquetados), con partículas esféricas e iguales, según (1.20) se obtiene:

$$q(0) = 18 \frac{\mu_g}{\rho_p d^2} \quad \text{y } m = 0$$

o bien:

$$q(0) = 25 \pi \frac{\mu_g}{\rho_p d^2} \quad \text{y } m = 3 \quad \text{en el caso } (1.19), (1.26)$$

Otro caso que se asume a partir de (1.20) es:

$$q(0) = 18 \frac{\mu_g}{\rho_p d^2} \quad \text{con } m \in [1.4, 4.65]$$

Entonces el comportamiento de la fuerza de rozamiento del gas por unidad de volumen y de masa de la fase densa se muestra en la Figura 1.5.:

Otras correlaciones mucho más complicadas, pero con la forma (1.27), pueden encontrarse en [46], [51].

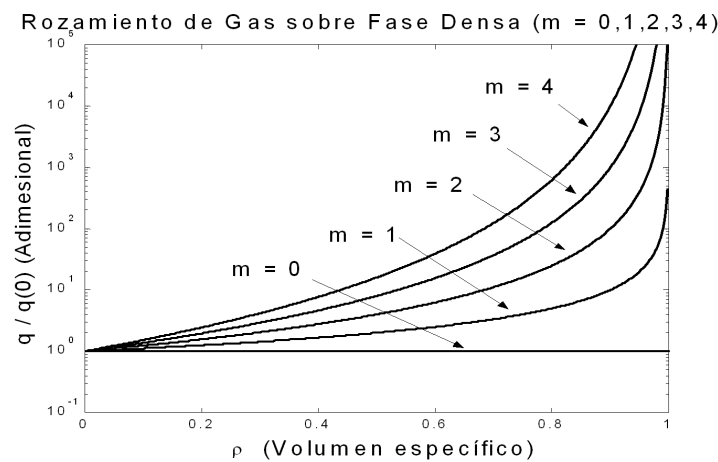


Figura 1.5: Fuerza de rozamiento del gas por unidad de volumen

Por tanto la fuerza que ejerce el gas sobre la fase densa se puede expresar por:

$$\mathbf{F}_{gp} = \frac{3\rho(1-\rho)\rho_g}{4V_r^2 d} (0.63 + 4.8\sqrt{V_r/Re_p^2} |\vec{u} - \vec{v}|) \quad (1.29)$$

donde:

$$V_r = 0.5(A - 0.06Re_p + \sqrt{0.0036Re_p^2 + 0.12Re_p(2B - A) + A^2})$$

$$A = (1 - \rho)^{4.14}, \quad B = \begin{cases} 0.8(1 - \rho)^{1.28} & \text{si } 1 - \rho \leq 0.85 \\ (1 - \rho)^{2.65} & 1 - \rho > 0.85 \end{cases}$$

De la expresión anterior se puede concluir que, para números de Reynolds de partícula moderados, es decir, bajo un régimen de Stokes $f_{gp} = F_{gp}/\rho_p$, y de las ecuaciones (1.27) - (1.28) $q(0)$ queda expresado por:

$$q(0) \approx 15.36 \frac{\mu_g}{\rho_p d^2} \quad \text{y} \quad m = 3.14$$

Nota 1.2.2

Se observa que en todos los casos considerados:

$$q(0) = K_q \frac{\mu_g}{\rho_p d^2}$$

donde $K_q > 0$ es una constante experimental tal que cumple la hipótesis asintótica (H 1. 2) y que al menos, $q(0)$ sea de orden $\mathcal{O}(1)$. Esta hipótesis exige, por tanto, que las partículas de la fase densa sean suficientemente pequeñas, cuyo diámetro está dado por:

$$d < d_* = \sqrt{K_q \nu_g \epsilon}$$

definiendo : $\nu_g = \mu_g/\rho_g$ como la viscosidad cinemática de la fase gaseosa y como ϵ al cociente $\epsilon = \rho_g/\rho_p$.

En particular, asumiendo que el gas es aire a temperatura ambiente ($\nu_g \approx 1.4 \times 10^{-5} \text{ kg}/(\text{m s})$), eligiendo $K_q \approx 26$ y $\epsilon \approx 10^{-3}$, se tiene que el diámetro de las partículas sólidas es inferior a $d_ \approx 6 \times 10^{-4} \text{ m}$.*

Cuando la velocidad del gas se encuentra por debajo de la velocidad mínima de fluidificación, la fuerza de rozamiento no es suficiente para compensar la fuerza de gravedad, con lo que un mecanismo de presión hace que la fuerza que ejerce el suelo del recipiente se transmita a lo largo de las partículas para alcanzar un empaquetamiento de las partículas en modo estacionario.

En el momento que se alcanza la velocidad de fluidificación las partículas empiezan a moverse, con lo que se producen choques entre ellas, entonces el tensor de tensiones de la fase partículas se puede descomponer en un término de presión y un término de viscosidad. Como se ha comentado anteriormente a un nivel microscópico el movimiento de cada una de las partículas es un movimiento browniano ([17], [18]), por lo que en una escala superior podemos considerar que las magnitudes promediadas se comportan de forma similar a las de un fluido.

El *tensor de tensiones efectivas de la fase densa*, expresado en su forma habitual de la Mecánica de Fluidos, se descompone en una parte isótropa debida a la presión (parte simétrica del tensor de tensiones) denominada *esfuerzos o tensiones desviadoras* y denotada por:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\tau} - p\tilde{I} \quad (1.30)$$

Entonces el choque entre las diferentes partículas de la fase densa se da con más frecuencia en las zonas en las que la proporción de volumen ocupado por éstas es mayor, este hecho da lugar a considerar una presión de partículas creciente en ρ . Además, la proporción de volumen ocupada por las partículas no puede ser la unidad pues al considerar que las partículas tiene forma sensiblemente esférica, siempre queda un espacio vacío (aire) entre ellas, con lo que la proporción de volumen ocupado por las partículas de sólido debe encontrarse por debajo del volumen específico correspondiente al empaquetamiento máximo ρ_* , en la práctica esto se consigue para un valor de $\rho_* = \pi/6 \approx 0.5236$).

La forma más sencilla de modelar el término de presión debida a la colisión de partículas, es considerando dicho término como una función creciente dependiente de ρ . La imposibilidad de que las partículas ocupen un volumen superior correspondiente al empaquetamiento máximo se puede modelar considerando leyes de estado para la presión no acotadas con tendencia al estado de empaquetamiento máximo. En definitiva, parece razonable imponer las siguientes condiciones para la función de presión p :

$$\begin{aligned} p : [0, \rho_*) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{función } C^1, \text{ estrictamente creciente y tal que:} \\ p(0) = p'(0) = 0 \quad &\text{y} \quad \lim_{\rho \rightarrow \rho_*^-} p(\rho) = +\infty \end{aligned} \quad (1.31)$$

En la literatura relacionada a este estudio existen algunas modelizaciones acerca de la función presión p :

- En [45], [60], [61] comentan que, a falta de evidencias experimentales, consideran el caso de presión lineal en el volumen específico de la fase densa, y consideran

leyes de estado que impiden a las partículas alcanzar el empaquetamiento máximo, y son función del volumen específico de la fase densa y de la diferencia de las velocidades promediadas de la fase sólida y de la fase gaseosa:

$$p(\rho) = c_0^2 \rho^2 e^{\frac{m\rho}{\rho^* - \rho}} |\vec{u} - \vec{v}|^2 \quad \text{con } c_0, m \text{ constantes positivas}$$

En el presente trabajo se considera que para lechos uniformemente fluidificados, la presión es función exclusivamente del volumen específico de la fase densa.

- En [51] se aplica la restricción $\rho \leq \rho_*$ para modelar la ecuación de la presión de partículas, la que sustituye como una variable dependiente de ρ a calcular en las ecuaciones para obtener la densidad cuando ésta tome el valor ρ^* y que es similar a la presión que aparece en las ecuaciones de flujo incompresibles de Navier-Stokes como un factor asociado a la condición de incompresibilidad. Sin embargo, en el estudio de la estabilidad de las perturbaciones, en las soluciones constantes es necesaria la presencia de una presión de partículas incluso cuando el volumen específico de la fase densa no ha alcanzado el empaquetamiento máximo.

En este estudio se considera como *ecuación de estado para la presión de partículas* a la que se denomina *Presión Colisional* expresada por:

$$p(\rho) = A^2 \rho^{\gamma_0 L(\rho/\rho_*)} \quad (1.32)$$

donde

- $\gamma_0 > 1$ es una constante denominada *coeficiente de colisión* (análoga al coeficiente adiabático de los gases).
- $A > 0$ es una constante con dimensiones de una velocidad característica del sistema. Denominando $v_0 > 0$ a esta velocidad característica, elegida adecuadamente, será útil definir el coeficiente de presión:

$$\alpha = \frac{A}{v_0} > 0 \quad (1.33)$$

- $L : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función adimensional, estrictamente creciente, de clase C^1 y tal que:

$$\left. \begin{aligned} L(0) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\rho \rightarrow 1^-} L(z) = +\infty \\ \frac{L'(z)}{L(z)} \geq 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\rho \rightarrow 1^-} \frac{L'(z)}{L(z)} = +\infty \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

donde $z = \frac{\rho}{\rho^*}$. A la función L se le denomina *función limitante* debido a que funciona como un mecanismo que permite acotar superiormente el volumen específico ρ por el valor correspondiente al empaquetamiento máximo ρ^* .

1.

$$L(\rho/\rho^*) = L_0(\rho/\rho^*) = (H_{-\rho^*}(\rho))^{-1}$$

donde $H_a(x)$ es la función de Heaviside centrada en el punto $a \in \mathbb{R}$, es decir:

$$L(\rho/\rho^*) = L_0(\rho/\rho^*) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho < \rho^* \\ +\infty & \text{si } \rho \geq \rho^* \end{cases} \quad (1.35)$$

2. Con $\epsilon > 0$ arbitrario:

$$L(\rho/\rho^*) = L_\epsilon(\rho/\rho^*) = \begin{cases} \exp\left(\frac{\epsilon \rho/\rho^*}{1 - \rho/\rho^*}\right) & \text{si } \rho < \rho^* \\ +\infty & \text{si } \rho \geq \rho^* \end{cases} \quad (1.36)$$

3. Con $\epsilon, s > 0$ arbitrarios:

$$L(\rho/\rho^*) = L_\epsilon(\rho/\rho^*) = \begin{cases} \left(\frac{1}{(1 - \rho/\rho^*)^s}\right)^\epsilon & \text{si } \rho < \rho^* \\ +\infty & \text{si } \rho \geq \rho^* \end{cases} \quad (1.37)$$

4. Con $\epsilon > 0$:

$$L(\rho/\rho^*) = L_\epsilon(\rho/\rho^*) = \begin{cases} \left(\frac{\rho}{\rho^*} + \frac{1}{1 - \rho/\rho^*} + 2 \log(1 - \rho/\rho^*)\right)^\epsilon & \text{si } \rho < \rho^* \\ +\infty & \text{si } \rho \geq \rho^* \end{cases} \quad (1.38)$$

A continuación se muestra en la Figura 1.6: el comportamiento de algunos tipos de función limitante

Todas las funciones limitantes dadas anteriormente verifican la condición (1.34) y, además, las funciones limitantes L_ϵ (1.36) a (1.38) pueden ser interpretadas como regularizaciones de la función limitante L_0 (1.35) en el sentido de que:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} L_\epsilon(z) &= L_0(z) = 1 \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{L'_\epsilon(z)}{L_\epsilon(z)} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{uniformemente } \forall z \in [0, 1) \quad (1.39)$$

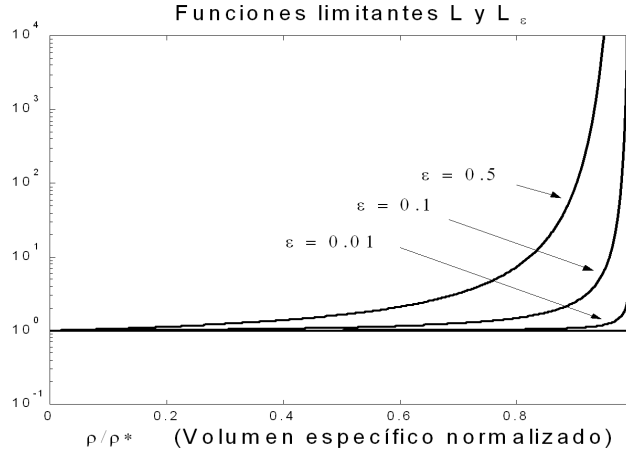


Figura 1.6: Funciones limitantes

1.3. Modelo Físico de Mezcla Gas-Sólido

Experimentalmente algunos autores sostienen que la mezcla entre las componentes del tipo sólido - gas en un lecho fluido, como se puede ver en ([19],[37],[38]) es descrito como un proceso de difusión de las partículas sólidas provocando efectos viscosos en torno al dominio considerado. Para explicar el fenómeno físico que ocurre en el marco del proceso de mezcla, se debe analizar el movimiento de las partículas sólidas que induce al burbujeo el cual es producto del flujo de aire entrante por las boquillas (ver Figura 5) ubicadas en la parte inferior del lecho.

Como se ha descrito anteriormente, la viscosidad de la mezcla gas - partículas sólidas es producida por la presencia física de las partículas sólidas y su comportamiento depende de la forma que se defina el tensor de tensiones efectivas (1.8) el cual es proporcional a la fracción volumétrica de la fase densa. Del modelo de mezcla depende una óptima permanencia de la suspensión de partículas en el lecho fluidizado, para ello es relevante analizar la fracción volumétrica de las partículas, lo cual está relacionado a la formación de las burbujas, velocidad de la fase dispersa, velocidad de la fase continua y sedimentación de la fase dispersa, a partir de la ley de conservación de la mezcla y conservación de la cantidad de movimiento de la mezcla partículas-fluido

Para ello, supondremos las siguientes hipótesis:

Hipótesis 2 (Sobre el tensor de esfuerzos desviadores efectivos) .

(H2. 1). Para $i, j = 1, \dots, d$; las funciones $\tau_{ij}(\cdot, \vec{v}) : \rho \rightarrow \tau_{ij}(\rho, \vec{v}), \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^d$ son funciones reales, de clase C^1 , tales que:

$$\tilde{\tau}(\rho, 0) \equiv \tilde{0}, \quad \tau_{ij} = \tau_{ji} \quad \text{para } i, j = 1, \dots, d$$

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\rho, \vec{v}) : \tilde{\mathbf{D}}(\vec{v}) = \sum_{i,j=1}^d \tau_{ij}(\rho, \vec{v}) D_{ij}(\vec{v}) \geq 0 \quad (1.40)$$

donde:

$$D_{ij}(\vec{v}) = \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j) \quad \text{para } i, j = 1, \dots, d \quad (1.41)$$

es el tensor linealizado de velocidades de deformación.

(H2. 2). Asumiremos también que $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ tiene la forma habitual para los fluidos newtonianos:

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\rho, \vec{v}) = \lambda (\text{div } \vec{v}) I + 2\mu \tilde{\mathbf{D}}(\vec{v}) \quad (1.42)$$

donde se supondrá que los coeficientes de viscosidad cinemática (λ y μ) de la fase densa son funciones de clase C^1 dependientes de ρ tales que:

$$\mu \geq 0 \quad \text{y} \quad d\lambda + 2\mu = 3k \geq 0 \quad (1.43)$$

Bajo estas condiciones ([51]) satisface la ecuación (1.40), puesto que:

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\rho, \vec{v}) : \tilde{\mathbf{D}}(\vec{v}) = \lambda (\text{div } \vec{v})^2 + 2\mu |\tilde{\mathbf{D}}(\vec{v})|^2 = \frac{3k}{d} (\text{div } \vec{v})^2 + \delta_v$$

donde δ_v es la tasa de disipación viscosa y está expresada por:

$$\delta_v = 2\mu \left| |\tilde{\mathbf{D}}(\vec{v})| - \frac{1}{d} (\text{div } \vec{v})^2 \tilde{I} \right|^2.$$

En particular, se tendrán en cuenta leyes de comportamiento constitutivas con los coeficientes de viscosidad del siguiente tipo

$$\mu = \nu \rho^\alpha \quad \text{y} \quad \lambda = \eta \rho^\alpha \quad \text{con } \nu \geq 0, d\eta + 2\nu \geq 0 \quad \text{y} \quad \alpha \geq 0 \quad (1.44)$$

En este caso, la viscosidad μ crece con la concentración de partículas de sólido, mientras que cuando $\nu = \eta = 0$ se tiene el flujo no viscoso; en cualquiera de los casos, para $\alpha > 0$, las funciones de viscosidad (1.44) se anulan cuando $\rho = 0$, con esto se puede confirmar la ausencia de fuerzas viscosas para la fase densa cuando ésta no existe (zona libre de partículas). Si la viscosidad es constante ($\nu > 0, d\eta + 2\nu \geq 0$ y $\alpha = 0$) a primera vista, se puede ver ([51]) que no se tiene la anulación de las fuerzas viscosas cuando no hay fase densa ($\rho = 0$); en el supuesto caso que se tenga este fenómeno, será necesario añadir una combinación de las funciones dependientes de ambas fases a la que se denomina *Condición de mezcla* bifásica definida por la ecuación

$$\text{div} ((1 - \rho) \vec{u} + \rho \vec{v}) = 0 \quad (1.45)$$

En [51] hay una amplia discusión acerca de la condición y respecto a los términos de viscosidad. Por ejemplo se considera:

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \mu_p \tilde{\mathbf{D}}(\vec{v})$$

con:

$$\mu_p = a_0 \rho \frac{\mu_g}{\rho_g} |Re_p|^{1/4}$$

Además, se observa ([30], [31]) que cuando el estado de fluidificación es uniforme la viscosidad es exclusivamente función del volumen específico de la fase densa.

Para determinar el sistema de conservación del *Modelo de flujo de mezcla* gas - sólido sobre un subconjunto abierto acotado bidimensional $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, éste se construye a partir del modelo de fases asumiendo lo siguiente:

Sea ρ , una función variable que depende de (x, y, t) que representa a la fracción volumétrica de la fase dispersa (partículas sólidas) y sean $\rho_g > 0$ y $\rho_p > 0$ parámetros constantes que representan a la densidad másica de las fases gas (fase continua) y partículas sólidas respectivamente tales que:

$$\rho \in [0, 1) \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad \varepsilon = \frac{\rho_g}{\rho_p} \text{ (muy cerca a cero)}$$

y $(1 - \rho)$ es la fracción volumétrica de la fase continua (gas), sean \mathbf{u}, \mathbf{v} las funciones variables dependientes de (x, y, t) que representan a las velocidades continua y partículas sólidas respectivamente, tales que satisfacen las ecuaciones de conservación: Para la fase gas:

$$\partial_t(1 - \rho) + \text{div}((1 - \rho)\vec{\mathbf{u}}) = 0 \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} \partial_t((1 - \rho)\vec{\mathbf{u}}) + \overrightarrow{\text{div}}((1 - \rho)\vec{\mathbf{u}} \otimes \vec{\mathbf{u}}) + \overrightarrow{\text{grad}}((1 - \rho)P_g) = \\ \overrightarrow{\text{div}}((1 - \rho)\tau_{\sim g}(\vec{\mathbf{u}})) + \vec{F}_{gp} + \rho_g(1 - \rho)\vec{g} \end{aligned} \quad (1.47)$$

Para la fase partículas sólidas:

$$\partial_t(\rho) + \text{div}((\rho)\vec{\mathbf{v}}) = 0 \quad (1.48)$$

$$\partial_t(\rho\vec{\mathbf{v}}) + \overrightarrow{\text{div}}(\rho\vec{\mathbf{v}} \otimes \vec{\mathbf{v}}) + \overrightarrow{\text{grad}}(\rho P_p) = \overrightarrow{\text{div}}(\rho\tau_{\sim p}(\vec{\mathbf{v}})) + \vec{F}_{gp} + \rho_p(\rho)\vec{g} \quad (1.49)$$

Ecuaciones de cierre:

$$\text{Ecuación de estado: } \begin{cases} P_g = P_g(\rho, \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) \\ P_p = P_p(\rho, \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) \end{cases}$$

$$\text{Ecuación constitutiva: } \begin{cases} \tau_{\sim g} = \tau_{\sim g}(\vec{\mathbf{u}}) \\ \tau_{\sim p} = \tau_{\sim p}(\vec{\mathbf{v}}) \\ \vec{F}_{gp} \end{cases}$$

Multiplicando a la ecuación (1.46) por ρ_g y por ρ_p a la ecuación (1.48), luego sumando ambas ecuaciones y dividiendo a este resultado por ρ_p e introduciendo las funciones R , que representa la fracción volumétrica de la mezcla y \vec{U} velocidad de la mezcla, definidas por:

$$\begin{aligned} R &= \rho + \varepsilon(1 - \rho), \\ \vec{U} &= \frac{1}{R}[\rho\vec{v} + \varepsilon(1 - \rho)\vec{u}] \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} R\vec{U} \otimes \vec{U} &= \varepsilon(1 - \rho)\vec{u} \otimes \vec{u} + \rho\vec{v} \otimes \vec{v} \\ &\quad - \varepsilon(1 - \rho)(\vec{u} - \vec{v}) \otimes (\vec{u} - \vec{v}) + \vartheta(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (1.51)$$

que se obtiene una ecuación de continuidad para el flujo de mezcla:

$$\partial_t R + \text{div}(R\vec{U}) = 0 \quad (1.52)$$

Multiplicando a la ecuación (1.47) por la constante ρ_g y por la constante ρ_p a la ecuación (1.49), luego sumando ambas ecuaciones y dividiendo a este resultado por ρ_p se obtiene la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento para el flujo de la mezcla:

$$\begin{aligned} \partial_t(R\vec{U}) + \text{div}(R\vec{U} \otimes R\vec{U}) &= \frac{R}{Re}[\Delta\vec{U} + \text{grad}(\text{div}\vec{U})] - \overrightarrow{\text{grad}}P_h - \\ &\quad \overrightarrow{\text{grad}}P_c - \overrightarrow{\text{div}}[\frac{\varepsilon}{R}\rho(1 - \rho)(\vec{u} - \vec{v}) \otimes (\vec{u} - \vec{v})] + R\vec{g} \end{aligned} \quad (1.53)$$

$$\text{Condición de mezcla: } \text{div}(\vec{U} + \frac{1-R}{R}\rho(\vec{u} - \vec{v})) = 0$$

Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, resulta la condición de mezcla, es decir, $\text{div}(\rho\vec{v} + (1 - \rho)\vec{u}) = 0$.

1.4. Relación entre ambos modelos

En el modelo de fases de un lecho fluido se considera que la densidad de la fase de partículas es muy superior en comparación con la de fase de gas, por lo que en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento de la fase gas solamente considera el término de la presión y el término fuente no lineal de interacción entre las dos fases. Se considera además en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento de la fase densa la presión efectiva pero no considera el término de viscosidad variable. Se asume también que en el caso de considerar partículas sólidas de pequeño radio, se puede completar dicha ecuación con la ley de estado de la presión, la cual está constituida por el producto de dos factores: el primero es una función dependiente del volumen específico de la fase dispersa (sólida) y el segundo del cuadrado de la diferencia de las

velocidades de las dos fases. Mientras que en el modelo de mezcla, se considera adicionalmente el término de arrastre en función de la diferencia de las velocidades y de una función del volumen específico de la fase densa con lo que se conforma una supuesta condición de mezcla variable dada por la ecuación (1.45).

En las secciones anteriores se ha modelado el comportamiento de sistemas bifásicos en los que una de las fases es muy densa con respecto a la otra, se ha descrito físicamente el modelo de flujo de mezcla. Tales sistemas de mezcla bifásicos aparecen en el proceso de la fluidización hidrodinámica de lechos fluidos donde una fase densa (partículas) se mezcla con una fase menos densa (gas), pudiendo originar ascensos y suspensiones (nubes estacionarias) de partículas en el gas.

Para el estudio matemático del problema de flujo de mezcla bifásica, se basarán en las siguientes consideraciones:

- Que la escala espacial de modelado es varios órdenes de magnitud superior al tamaño de partícula (en ambas fases), lo que permite escribir un modelo matemático homogenizado basado en las ecuaciones de conservación de cantidad de masa y cantidad de movimiento de la mezcla en un medio continuo.
- Que el tamaño de las partículas de la fase densa es del orden de la raíz cuadrada, o menor, de la relación entre las densidades de la fase gaseosa y de la fase densa. Esta hipótesis permite describir la interacción entre fases en términos de una fuerza de rozamiento proporcional a la diferencia de velocidades.
- Que no existe interacción química entre fases, ni transformación de una fase en otra, lo que permite describir la dinámica del sistema en términos de ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento, y no de energía.

Además, se añade la ecuación de mezcla que permite escribir el modelo bajo la (*hipótesis de incompresibilidad*) con fracción volumétrica variable:

- Que la densidad másica de la fase densa es constante y mucho mayor que la correspondiente a la fase gaseosa, también constante.

En estas condiciones, el sistema de conservación del modelo puede escribirse en la forma siguiente:

$$\partial_t \rho + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.54)$$

$$\partial_t(\rho \vec{v}) + \text{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) + \nabla p = \text{div} \tilde{\tau}(\rho, \vec{v}) + \rho g + \rho q(\rho) (\vec{u} - \vec{v}) \quad (1.55)$$

$$\text{div}((1 - \rho) \vec{u} + \rho \vec{v}) = 0 \quad (1.56)$$

donde

$$\nabla p_h = -\rho q(\rho) (\vec{u} - \vec{v}) \quad (1.57)$$

$$p = p(\rho, \rho_*) \quad (1.58)$$

En las ecuaciones (1.54) a (1.58):

- $0 \leq \rho \leq \rho_* < 1$ denota el volumen específico ocupado por la fase densa en cada posición e instante.
- \vec{u} , \vec{v} son las velocidades de partícula de la fase gas y de la fase densa, respectivamente.
- p es la denominada presión colisional de la fase densa (debida a la colisión entre partículas de la fase densa) y, en general, es una función no lineal algebraica conocida a priori (1.58), y que tiene un carácter fenomenológico o deriva de asustes experimentales. Esta función juega el papel de *ecuación de estado* para la *presión colisional*. En ella aparece una constante conocida $\rho_* \in (0, 1)$, que representa el volumen específico de empaquetamiento máximo de la fase densa.
- p_h designa la presión hidrodinámica originada por el rozamiento entre ambas fases. La ecuación (1.57) expresa que su gradiente es, precisamente, la fuerza de rozamiento entre las dos fases, en esencia (1.57) lo que dice es que la fuerza de rozamiento entre fases es un gradiente (deriva de un potencial de presiones p_h).
- g es un campo vectorial constante en tiempo y espacio de aceleración que, en la práctica, suele ser la aceleración de la gravedad.
- $\tilde{\tau}(\rho, v)$ es el tensor efectivo de tensiones desviadoras de la fase densa, cuyas leyes de comportamiento será necesario explicitar.
- La función algebraica $q(\rho)$, que se supondrá conocida, tiene el carácter de una ley de comportamiento, y describe la dependencia de la fuerza de rozamiento entre fases del volumen específico ocupado por la fase densa.

Nota 1.4.1

1. Las ecuaciones (1.54), (1.55), (1.56) son, respectivamente, las ecuaciones de conservación de la masa en la fase densa, la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en la fase densa y la ecuación de conservación de la masa total de ambas fases.

2. La ecuación (1.57) puede interpretarse de dos modos:

- a) Como una ecuación de estado diferencial para la presión hidrodinámica p_h , lo que permite definir la presión total como

$$P = p + p_h \quad (1.59)$$

y reescribir la ecuación (1.55) como:

$$\partial_t (\rho \vec{v}) + \text{div} (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) + \nabla P = \text{div} \tilde{\tau}(\rho, \vec{v}) + \rho g \quad (1.60)$$

- b) Como la ecuación (simplificada) de conservación de la cantidad de movimiento de la fase gas, en la que se han despreciado los términos correspondientes a las fuerzas convectivas, de masa distribuida y de viscosidad de la fase gaseosa, quedando únicamente los términos debidos a las fuerzas de presión y de rozamiento entre fases.

3. Las ecuaciones (1.54) a (1.58) se obtienen del límite asintótico formal de las ecuaciones de Navier-Stokes compresibles del modelo de fases, bajo hipótesis mencionadas anteriormente.

4. Las ecuaciones (1.54) a (1.56) tiene sentido, si $\rho > 0$. Cuando no es así, éstas se deben sustituir por:

$$\left. \begin{array}{l} \rho \vec{v} = 0 \\ \text{div} \vec{u} = 0 \end{array} \right\} \text{ en el complementario del cierre del conjunto donde } \rho > 0$$

Por tanto, el sistema de conservación (1.54) a (1.56) quedarán expresadas en términos de las variables conservativas del problema:

- ρ , es el volumen específico (por unidad de volumen) ocupado por la fase densa.
- $\mathbf{m} = \rho \vec{v}$, velocidad específica efectiva de la fase densa (cantidad de movimiento por unidad de volumen y masa de la fase densa).
- $\mathbf{M} = (1-\rho) \vec{u} + \rho \vec{v}$, velocidad específica efectiva de la mezcla (cantidad de movimiento por unidad de volumen y masa de la mezcla gas-sólido) y proporcional al flujo total.

El modelo de fases y el de frontera libre están relacionados al modelo de mezcla por la forma de la ecuación de conservación de masa y de movimiento, en el límite de la

zona libre de partículas. Esto se puede ver en el sistema conformado por las ecuaciones (1.52) y (1.53) con R y \vec{U} de la forma (1.50).

CAPÍTULO 2

ESTUDIO MATEMÁTICO DEL MODELO DE FLUJO DE MEZCLA GAS-SÓLIDO

En este capítulo se realiza la formulación de las ecuaciones adimensionales, así como una formalización matemática del problema del flujo de mezcla y un estudio cualitativo del problema, que comprende desde la definición del dominio de estudio, valores de frontera y condiciones iniciales, y condiciones de existencia de solución.

En el capítulo anterior se obtuvo las ecuaciones del modelo de frontera libre [31], en donde se realiza una regularización asintótica [40] dando origen a las ecuaciones del modelo de mezcla gas - sólido, y éste se adimensionaliza en la próxima sección.

2.1. Formulación formal del sistema de conservación

Formulación de las ecuaciones adimensionales

Las razones de adimensionalizar el modelo de Mezcla son las siguientes:

- Mejor enfoque físico
- Generalización del problema

- Simplificar la cantidad de parámetros involucrados en el modelo, y expresar los resultados sólo en números.
- Determinar la influencia o predominio entre las fuerzas de inercia, fuerzas viscosas y fuerzas de gravedad.

Entonces, asumiendo que:

$$\begin{aligned} x_0 &= \mathbf{v}_0 t_0, \quad p_0 = \mathbf{v}_0^2, \quad Re = \frac{x_0 \mathbf{v}_0}{\gamma_p}, \quad Fr = \frac{\mathbf{v}_0^2}{g x_0}, \\ \mathbf{v}_0 &= \frac{g}{q(0)}, \quad q(0) = \frac{18}{d_p^2} \gamma_g \varepsilon; \quad d_p^2 \approx x_0 \sqrt{\frac{Fr}{Re}} 18 \varepsilon \\ \frac{\gamma_g}{\gamma_p} &\approx 1, \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{Fr} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

donde Fr y Re son los números adimensionales de Froude y Reynolds respectivamente, siendo γ , la viscosidad cinemática.

El modelo adimensional del flujo de mezcla queda expresado por el siguiente sistema de ecuaciones adimensionales:

$$\partial_t R + \operatorname{div}(R \vec{U}) = 0$$

$$\partial_t(R \vec{U}) + \operatorname{div}(R \vec{U} \otimes R \vec{U}) + \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\varepsilon(1-\rho) \frac{P_g}{\rho_g} + \rho \frac{P_p}{\rho_p}) \quad (2.1)$$

$$= \operatorname{div} \left(\varepsilon(1-\rho) \frac{\tau(\vec{u})}{\rho_g} + \rho \frac{\tau(\vec{v})}{\rho_p} \right) - \operatorname{div}(\varepsilon(1-\rho)(\vec{u} - \vec{v}) \otimes (\vec{u} - \vec{v})) + R \vec{g}$$

$$\tau(u) = (\mu) [\nabla u + \nabla u^T]$$

$$\mu = (1-\rho)\mu_g + \rho\mu_p, \text{ Viscosidad de la mezcla}$$

$$\text{Ecuación Presión hidrodinámica} : -\overrightarrow{\operatorname{grad}} P_h = \frac{1}{Fr} \frac{R}{(1-R)^m} (\vec{u} - \vec{v}), \quad m \geq 0$$

$$\text{Ecuación de estado:} \quad P_c(\rho) = \rho \frac{P_p}{\rho_p}.$$

Para el análisis cualitativo del problema, se considera el dominio de estudio, un subconjunto abierto acotado, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$, entero), tal que para todo $t \in [0, T]$ con $T > 0$, representa el dominio de existencia de cada una de las variables dependientes

e incognitas del problema en estudio. Entonces este conjunto de puntos (\vec{x}, t) queda definido por el conjunto:

$$\Omega_+(t) = \{\vec{x} \in \Omega, \rho(\vec{x}, t) > 0\}, \quad \Omega_0(t) = \Omega \setminus \overline{\Omega_+}(t) \quad (2.2)$$

La representación del dominio del modelo matemático que se considera para el flujo de mezcla gas - sólido, se puede apreciar en la figura 2.1

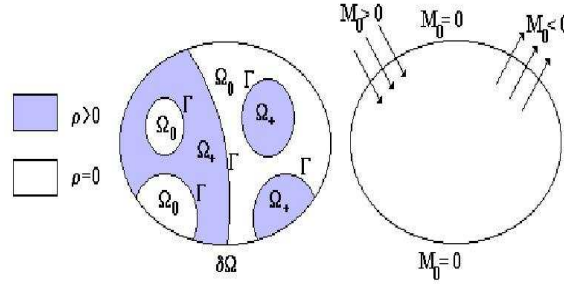


Figura 2.1: Dominio del problema de frontera libre

Introduciendo la variable \mathbf{m} , $\mathbf{m} = \rho \vec{v}$, $\mathbf{M} = (1 - \rho) \vec{u} + \rho \vec{v}$

El modelo matemático del problema de mezcla ([51] y [40]), puede expresarse también como el problema en derivadas parciales:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Hallar } \{\rho, \mathbf{m}, \mathbf{M}\} \text{ solución para todo } t \in (0, T) \text{ de:} \\ \left. \begin{array}{l} \partial_t \rho + \text{div } \mathbf{m} = 0 \\ \partial_t \mathbf{m} + \text{div} \left(\frac{\mathbf{m}}{\rho} \otimes \mathbf{m} \right) + \nabla p_c = \text{div } \tilde{\tau} + \rho \mathbf{g} - \nabla p_h \\ \rho = 0, \quad \mathbf{m} = 0 \\ \text{div } \mathbf{M} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{en } \Omega_+(t) \\ \text{en } \Omega_0(t) \\ \text{en } \Omega \end{array} \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

completado con las denominadas *ecuaciones de estado*:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla p_h = -\frac{\rho q}{1 - \rho} \left(\mathbf{M} - \frac{\mathbf{m}}{\rho} \right) \\ p_c = p_c(\rho, \rho^*) \end{array} \right\} \text{ en } \Omega_+(t) \quad (2.4)$$

y las ecuaciones constitutivas *leyes de comportamiento*

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\tau} = \tilde{\tau} \left(\rho, \frac{\mathbf{m}}{\rho} \right) \\ q = q(\rho) \end{array} \right\} \text{ en } \Omega_+(t) \quad (2.5)$$

donde cada una de las variables incognitas verifican las *condiciones iniciales*:

$$\left. \begin{array}{l} \rho(\vec{x}, 0) = \rho^0(\vec{x}) \geq 0 \\ \mathbf{m}(\vec{x}, 0) = \mathbf{m}^0(\vec{x}) \quad \text{tal que } \mathbf{m}^0 = 0 \quad \text{en } \Omega_0(0) \end{array} \right\} \text{ en } \overline{\Omega} \quad (2.6)$$

bajo las siguientes hipótesis:

Hipótesis 3 (sobre las leyes de comportamiento y ecuación de estado) .

Se supondrá en adelante que:

(H3. 1). Siendo \mathbf{e}_d el vector unitario en la dirección x_d , se asumirá que g es un campo gravitatorio vectorial constante (en \vec{x} y t) tal que $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_d$, con $g > 0$ donde $d = 3$.

(H3. 2). Para $i, j = 1, \dots, d$; las funciones $\tau_{ij}(\cdot, \vec{v}) : \rho \rightarrow \tau(\rho, \vec{v})$, $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^d$, son funciones reales de clase $C^0([0, +\infty))$, y tales que

$$\tilde{\tau}(\rho, 0) = \tilde{0}, \quad \tau_{ij} = \tau_{ji} \text{ para } i, j = 1, \dots, d$$

$$\tilde{\tau}(\rho, \vec{v}) : \tilde{\mathbf{D}}(\vec{v}) = \sum_{i,j=1}^d \tau_{ij}(\rho, \vec{v}) D_{ij}(\vec{v}) \geq 0$$

donde:

$$D_{ij}(\vec{v}) = \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j) \text{ para } i, j = 1, \dots, d \quad (2.7)$$

es el tensor linealizado de velocidades de deformación.

(H3. 3). $\rho_* \in (0, 1)$ es una constante.

(H3. 4). $q \in C^0([0, \rho_*])$, estrictamente creciente tal que $q(0) > 0$.

(H3. 5). $p \in C^1([0, \rho_*])$, estrictamente creciente tal que $p(0) = p'(0) = 0$ y

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_*} p(\rho) = +\infty.$$

En particular la ley de comportamiento de la fuerza de rozamiento:

$$q(\rho_*) = \frac{q(0)}{(1 - \rho_*)^m}, \quad m \geq 0, q(0) > 0 \quad (2.8)$$

Así también cada una de las variables incógnitas verifican ciertas condiciones cuyos valores en $t = 0$, y sobre cada una de las fronteras del dominio espacial se conocen, a éstos valores definimos como condiciones iniciales y de contorno:

2.2. Condiciones iniciales y de contorno

Se denota como $\Gamma(t)$ a la **frontera evolutiva** definida entre los subdominios $\Omega_+(t)$ y $\Omega_0(t)$ por:

$$\Gamma(t) = \bar{\Omega}_+(t) \cap \bar{\Omega}_0(t), \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.9)$$

Las condiciones de compatibilidad del sistema de ecuaciones verifican en cada subdominio en $\Omega_+(t)$ y $\rho = 0$, $\mathbf{m} = 0$ en $\Omega_0(t)$ que el flujo normal de la fase densa y la fuerza normal en dicha frontera que es la de contacto entre los subdominios con y sin fase densa, que puede ser nula inicialmente, debe satisfacer:

$$\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{y} \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma(t), \quad \forall t \in (0, T) \quad (2.10)$$

A las condiciones que no se conocen a priori se definen como **condiciones de frontera libre**, y están dadas por:

Nota 2.2.1

asumiendo que:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\rho, \cdot) = 0$$

y cuando se tiene $\nu = 0$ en (1.44) (el caso es no viscoso: $\lambda = \nu = 0$), o cuando $\nu > 0$ y $l > 0$ en (1.44) (las viscosidades no negativas en función de ρ se anulan cuando ρ tiende a cero), la condición $p(0) = 0$, en el caso que se considere la función ρ continua, las condiciones de frontera libre se verifican formalmente de forma trivial.

Al integrar (2.3), resulta lógico imponer *condiciones de contorno sobre la fase densa* de flujo normal nulo en el caso no viscoso, y de flujo total nulo en el caso viscoso, es decir:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{sobre } \partial \Omega \times (0, T) \quad \text{en el caso no viscoso } (\nu = 0 \text{ en (1.44)}) \\ \mathbf{m} = 0 \quad \text{sobre } \partial \Omega \times (0, T) \quad \text{en el caso viscoso } (\nu > 0 \text{ en (1.44)}) \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

Para justificar la *condición de contorno asociada a la ecuación de conservación del flujo de mezcla* (1.56), se debe asumir que

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = 0 \quad \text{en } \Omega$$

entonces, teniendo en cuenta la ecuación de estado de la presión hidrodinámica (primera de las (2.4)) en el subdominio $\Omega_+(t)$, y que $\rho = 0$ y $\mathbf{m} = 0$ en el subdominio $\Omega_0(t)$, se tiene la forma siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{m}}{\rho} - \frac{1 - \rho}{\rho q} \nabla p_h \right) = 0 \quad \text{en } \Omega_+(t) \\ |\nabla p_h| = 0 \quad \text{en } \Omega_0(t) \end{array} \right\} \quad (2.12)$$

donde aparece como nueva incógnita la presión hidrodinámica p_h . La condición de contorno natural asociada a la primera de las (2.12) es una condición de contorno de tipo

Newmann, mientras que la condición de contorno natural para la segunda de las (2.12) es una condición de contorno tipo Dirichlet en la presión hidrodinámica. Así llamando:

$$M_0 = -\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \text{en} \quad \partial\Omega \times (0, T)$$

e integrando sobre $\partial\Omega_0$ se tiene:

$$\int_{\partial\Omega_0} M_0(x, t) ds(x) = 0 \quad \forall t \in (0, T)$$

En particular, en el caso de una caldera de lecho fluido, la partición de $\partial\Omega$:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{+0} &= \{x \in \partial\Omega, \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\nu} \geq 0\} \\ \Gamma_{-} &= \{x \in \partial\Omega, \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\nu} < 0\} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

y se impondrán las condiciones de contorno sobre la viscosidad específica efectiva de la mezcla (proporcional al flujo de la mezcla):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\nu} = -M_0 \geq 0 \quad \text{conocido sobre} \quad \Gamma_{+0} \\ p_h = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_{-} \end{aligned} \right\} \quad \forall t \in (0, T) \quad (2.14)$$

Nota 2.2.2

1. *Las condiciones de contorno (2.11) introducidas sobre la fase densa son condiciones reflectantes o de pared fija. También pueden ser interpretadas como condiciones de contorno de impermeabilidad de la fase densa.*
2. *Observemos que la ecuación de conservación de la masa de la fase densa es una ecuación hiperbólica en ρ y del campo de velocidades \vec{v} (siendo $\mathbf{m} = \rho \vec{v}$), y que la condición de contorno (2.11) implica que la solución queda determinada por la condición inicial.*
3. *El valor M_0 sobre Γ_{+0} en (2.14) es proporcional al flujo entrante de la mezcla en el dominio Ω . Por esta razón se la supondrá no negativa para todo $t \in (0, T)$. En la práctica no es más que la velocidad de soplado de la mezcla a través de la frontera de entrada en el dominio Ω .*
4. *La condición de contorno $p_h = 0$ sobre Γ_{-} en (2.14) es de tipo Dirichlet, la que eventualmente permitirá determinar la solución para la ecuación de la presión hidrodinámica.*

5. Se puede asumir que $M_0(\cdot, t) \equiv 0 \Leftrightarrow \Gamma_{+0} \equiv \partial\Omega$.

6. Nótese que la partición (2.13) de la frontera $\partial\Omega$ es independiente del tiempo t .

Es importante obtener la solución del sistema (2.3) a (2.4) que me dará el comportamiento del problema tipo nube de partículas o frontera libre cuya solución está definida a continuación.

Definición 2.2.1 Se dice que el triplete $\{\rho, \mathbf{m}, \mathbf{M}\}$ es una solución del tipo **nube** sobre $\bar{\Omega} \times [0, T]$ si satisface las ecuaciones (2.3) a (2.4) con las condiciones de contorno (2.11), (2.14) y verificando la condición de frontera libre (2.10).

Para obtener la solución previo análisis de su existencia y unicidad, se transformará el problema (2.3) - (2.4) con (2.11), (2.14) y (2.10) en su forma adimensional que a continuación se detalla.

Integrando las ecuaciones (2.3) sobre la frontera libre, se pueden expresar en la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_+(t)} \rho(\vec{x}, t) dx = - \int_{\partial\Omega_+(t)} \mathbf{m}(\vec{x}, t) \cdot \boldsymbol{\nu}(\vec{x}, t) ds(\vec{x}) = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_+(t)} \mathbf{m}(\vec{x}, t) dx - \int_{\Omega_+(t)} (\rho \mathbf{g} - \nabla p_h)(\vec{x}, t) d\vec{x} = \int_{\Omega_+(t)} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\vec{x}, t) \boldsymbol{\nu}(\vec{x}, t) ds(\vec{x}) = 0 \quad (2.16)$$

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{M}(\vec{x}, t) \cdot \boldsymbol{\nu}(x) ds(\vec{x}) = 0 \quad (2.17)$$

donde se ha denominado

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\boldsymbol{\tau}} - p\tilde{I} \quad (2.18)$$

al tensor de tensiones efectivas y $\boldsymbol{\nu}$ al vector unitario normal a la frontera $\partial\Omega$ (resp. $\partial\Omega_+(t)$) y orientado exteriormente a Ω (resp. $\Omega_+(t)$).

La integración exacta de este sistema tal como está expresado no es posible, por tanto posteriormente se plantea una metodología adecuada para obtener una solución aproximada de tales ecuaciones.

Problema asintótico adimensional

Para adimensionalizar las escalas típicas que aparecen en el modelo descrito en la sección anterior, se selecciona, las unidades arbitrarias espaciales estrictamente positivas (\vec{x}_0), tiempo (t_0), velocidad (v_0), presión (p_0) y volumen específico de la fase densa ρ_0 . Por razones de coherencia dimensional, se eligen tales unidades de forma que:

$$t_0 = \frac{\vec{x}_0}{v_0}, \quad p_0 = \rho_0 v_0^2 \quad (2.19)$$

lo que permite considerar las variables y magnitudes adimensionales:

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &= \frac{\vec{x}}{x_0}, & \hat{t} &= \frac{t}{t_0} \\ \hat{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_0}, & \hat{\mathbf{m}} &= \frac{\mathbf{m}}{\rho v_0}, & \hat{\mathbf{M}} &= \frac{\mathbf{M}}{v_0}, & \hat{p} &= \frac{p}{p_0}, & \hat{p}_h &= \frac{p_h}{p_0} \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Asimismo, utilizando las Hipótesis (H 3. 1) y (H 3. 2), junto con (1.44), pueden definirse los números adimensionales usuales ([26], [51]):

$$Re = \frac{x_0 v_0}{\nu_0} \frac{1}{\rho_0^{l-1}} \quad (N^\circ \text{ de Reynolds}) \quad \text{y} \quad Fr = \frac{v_0^2}{g x_0} \quad (N^\circ \text{ de Froude}) \quad (2.21)$$

donde se ha tomado:

$$\nu_0 = \max(\nu, \eta) \geq 0, \quad \nu_0 = 0 \Leftrightarrow \nu = \eta = 0$$

así como elegir una unidad de volumen específico y de velocidad ligados a los parámetros del sistema:

$$\rho_0 = \rho_*, \quad v_0 = u_+ = \frac{g}{q(0)} \quad (\text{Velocidad de Volado}) \quad (2.22)$$

Con las elecciones realizadas en (2.22) sobre las unidades de volumen específico de la fase densa y de velocidad, quedan perfectamente determinada también (mediante (2.19)) la unidad de presión. Para completar las elecciones de unidades de referencia queda únicamente por explicitar, las unidades de espacio, x_0 y tiempo, t_0 , puesto que una depende de la otra mediante (2.19). La elección que se hará aquí será la de tomar la unidad de espacio directamente relacionada con el tamaño de la nube. Para ello será necesario que la nube tenga un tamaño finito, lo que sugiere la siguiente definición.

Definición 2.2.2 *Se dice que una nube es finita (o es de masa finita) si existe una constante $P_0 \in [0, +\infty)$ tal que para todo $t \in [0, T]$:*

$$\int_{\Omega} \rho(\vec{x}, t) d\vec{x} = \frac{P_0}{g}$$

Para nubes finitas se tendrá en cuenta (2.19):

$$P_0 = \rho_* g x_0^d \int_{\hat{\Omega}} \hat{\rho} d\hat{x}$$

por lo que resulta natural escoger la unidad de espacio mediante:

$$x_0 = h_0 = \left(\frac{P_0}{\rho_* g} \right)^{\frac{1}{d}} \quad (\text{Altura del lecho en reposo}) \quad (2.23)$$

ya que proporciona la condición de normalización para la masa de la fase densa:

$$\int_{\hat{\Omega}} \hat{\rho} d\hat{x} = 1$$

Nota 2.2.3

1. La constante P_0 que aparece en la definición de las nubes de masa finita, no es otra cosa que el peso por unidad de masa de la fase densa contenida en Ω .
2. Con ayuda de las definiciones de nube y nube finita, se puede ver ([25]) que la condición necesaria y suficiente para que una nube sea finita es que la condición inicial sea positiva.
3. Suponiendo que la condición inicial está estrictamente acotada por el volumen específico de empaquetamiento máximo ($\|\rho^0\|_{L^\infty(\Omega)} < \rho_*$), se puede asumir que

$$|\Omega| > x_0^d$$

4. La elección realizada en (2.23) para la unidad de espacio permite reescribir los números adimensionales de Froude y Reynolds como:

$$Fr = \left(\frac{\rho_* u_+^2}{P_0} \right)^{1-\frac{1}{d}}, \quad Re = \left(\frac{P_0}{\rho_* g} \right)^{\frac{1}{d}} \frac{u_+}{\nu_0} \frac{1}{\rho_*^{l-1}} \quad (2.24)$$

5. Si se toma como unidad de longitud:

$$x_0 = x_r = \frac{u_+^2}{g} \text{ (Longitud de Rozamiento)} \quad (2.25)$$

proveniente de equilibrar en (2.3) las fuerzas de rozamiento (∇p_h) con las de gravedad (ρg), resulta de (2.24) y (2.25) que la cantidad de masa de la nube en forma adimensional se puede expresar por:

$$\int_{\hat{\Omega}} \hat{\rho} d\hat{x} = \frac{1}{Fr^d}$$

Otra posibilidad más es elegir la unidad de longitud asociada a la escala espacial típica de la viscosidad, es decir, tomando:

$$x_0 = x_v = \frac{\nu_0}{u_+} \rho_*^{l-1} \text{ (Longitud viscosa)} \quad (2.26)$$

escala que se obtiene del equilibrio en (2.3) de las fuerzas de viscosidad ($\text{div } \tilde{\tau}$) con las de presión (∇p). En este caso, de (2.24) y (2.26), la masa de la nube adimensional resulta:

$$\int_{\hat{\Omega}} \hat{\rho} d\hat{x} = Re^d$$

6. Como se puede apreciar por lo descrito anteriormente, los números de Froude y Reynolds son relaciones entre escalas espaciales que caracteriza al sistema, es decir:

$$Fr = \frac{x_r}{h_0}, \quad Re = \frac{h_0}{x_v}$$

La relación que existe entre las tres escalas espaciales es :

$$x_v \ll x_r \ll h_0$$

esto justifica realizar un estudio asintótico del sistema resultante cuando:

$$Fr \rightarrow 0 \quad y \quad Re \rightarrow +\infty$$

7. Si $x_r \rightarrow 0$ (es decir, cuando $q(0) \rightarrow +\infty$) y $x_v \rightarrow 0$ (es decir, cuando $\nu_0 \rightarrow 0$), estas condiciones asintóticas se consiguen, con el tamaño de partícula de la fase densa con tendencia a cero, y con la viscosidad de la fase densa con tendencia a cero respectivamente. Bajo estas suposiciones darían lugar (eligiendo $x_0 = x_r$ llamada escala de rozamiento ó $x_0 = x_v$ longitud viscosa), a una masa infinita de la nube, lo que resultaría totalmente inaceptable.

Introduciendo la función Φ , que se denominará en adelante *función de rozamiento*:

$$\begin{aligned} \Phi : [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ \hat{\rho} &\rightarrow \Phi(\hat{\rho}) = (1 - \rho_0 \hat{\rho}) \frac{q(0)}{q(\rho_0 \hat{\rho})} \end{aligned} \quad (2.27)$$

que, en virtud de la Hipótesis (H3. 4) es continua, estrictamente decreciente y tal que:

$$\Phi(0) = 1 \quad y \quad \Phi(1) > 0 \quad (2.28)$$

Sea $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$, entero) un abierto, definiendo la partición de su frontera $\partial\Omega$:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{+0} &= \{x \in \partial\Omega, \mathbf{e}_d \cdot \boldsymbol{\nu} \leq 0\} \\ \Gamma_{-} &= \{x \in \partial\Omega, \mathbf{e}_d \cdot \boldsymbol{\nu} > 0\} \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

y llamando para todo $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \Omega_+(t) &= \{x \in \Omega, \rho(x, t) \neq 0\} \\ \Omega_0(t) &= \Omega \setminus \bar{\Omega}_+(t) \\ \Gamma(t) &= \bar{\Omega}_+ \cap \bar{\Omega}_0(t) \end{aligned}$$

El problema asintótico adimensional queda expresado por:

$$\left. \begin{aligned} \partial_t \rho + \operatorname{div} \mathbf{m} &= 0 \\ \partial_t \mathbf{m} + \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{m}}{\rho} \otimes \mathbf{m} \right) + \nabla p &= \frac{1}{Re} \operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{\tau}} - \nabla p_h - \frac{1}{Fr} \rho \mathbf{e}_d \\ \rho &= 0, \quad \mathbf{m} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{M} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{en } \Omega_+(t) \\ \text{en } \Omega_0(t) \\ \text{en } \Omega \end{array} \quad (2.30)$$

para todo $t \in (0, T)$, al que se añaden las:

- Ecuaciones de estado adimensional:

$$\left. \begin{aligned} \nabla p_h &= -\frac{1}{Fr} \frac{\rho}{\Phi} \left(\mathbf{M} - \frac{\mathbf{m}}{\rho} \right) \\ p &= p(\rho) \end{aligned} \right\} \text{en } \Omega_+(t) \quad (2.31)$$

- Leyes comportamiento adimensional:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\tau}} &= \tilde{\boldsymbol{\tau}} \left(\rho, \frac{\mathbf{m}}{\rho} \right) \\ \Phi &= \Phi(\rho) \end{aligned} \right\} \text{en } \Omega_+(t) \quad (2.32)$$

- Condiciones iniciales:

$$\left. \begin{aligned} \rho(\vec{x}, 0) &= \rho^0(\vec{x}) \in [0, 1] \quad \text{tal que} \quad \int_{\Omega} \rho^0(\vec{x}) d\vec{x} = 1 \\ \mathbf{m}(\vec{x}, 0) &= \mathbf{m}^0(\vec{x}) \quad \text{tal que} \quad \mathbf{m}^0 = 0 \quad \text{en } \Omega_0(0) \end{aligned} \right\} \text{en } \bar{\Omega}_+(t) \quad (2.33)$$

- Condiciones de frontera libre:

$$\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{y} \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma(t), \quad \forall t \in (0, T) \quad (2.34)$$

- Condiciones de contorno:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} &= 0 \quad \text{si} \quad Re = +\infty \\ \mathbf{m} &= 0 \quad \text{si} \quad Re \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \right\} \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (0, T) \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\nu} &= -M_0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_{+0} \\ p_h &= 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_- \end{aligned} \quad (2.36)$$

que en una conjunto abierto contenido en $[0, 1] \times [0, T]$, satisface las siguientes propiedades:

1. Para $i, j = 1, \dots, d$; los números $\tau_{ij} : \rho \rightarrow \tau_{ij}(\rho, \vec{v})$, $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^d$, son funciones reales de clase $(C^1([0, 1]))^d$, y tales que:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\tau}(\rho, \vec{v}) : \tilde{\mathbf{D}}(\vec{v}) \geq 0, \quad \tau_{ij} = \tau_{ji} \quad \text{para } i, j = 1, \dots, d \\ \lim_{Re \rightarrow +\infty} \tilde{\tau}(\rho, \vec{v}) \equiv \tilde{0}, \quad \tilde{\tau} \equiv \tilde{0} \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

2. $\Phi : [0, 1] \rightarrow (0, 1]$ es continua, estrictamente creciente y verifica:

$$\Phi(0) = 1 \quad (2.38)$$

3. $p[0, 1) \rightarrow [0, +\infty)$ es de clase C^1 , estrictamente creciente y verifica

$$p(0) = p'(0) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 1^-} p(\rho) = +\infty \quad (2.39)$$

4. $Re, Fr \in (0, +\infty)$ y

$$\left. \begin{aligned} M_0 \geq 0 \quad \text{es una función conocida sobre } \Gamma_{+0} \times (0, T) \\ \Gamma_{+0} \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \Gamma_{+0} \equiv \partial\Omega \Rightarrow M_0 \equiv 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

5. $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es un abierto tal que :

$$\left. \begin{aligned} \Omega \quad \text{es regular a trozos, acotado en las direcciones de } x_i, i = 1, \dots, d-1; \\ \text{simplemente conexo en tales direcciones y tal que } |\Omega| > 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

Nota 2.2.4

1. La frontera libre $\Gamma(t)$ (así como los dominios $\Gamma_+(t)$, $\Omega_0(t)$) forman parte de las incógnitas del problema.
2. En el caso particular de un lecho fluido, la ecuación de estado y las leyes de comportamiento adimensionales se escriben:

- Ecuación de estado:

$$p = a^2 \rho^{\gamma_0} L(\rho) \quad (2.42)$$

donde:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \alpha^2 \rho_*^{\gamma_0-1}, \quad \alpha > 0 \\ \gamma_0 &> 1 \\ L &\text{ verifica (1.34)} \end{aligned} \right\}$$

- Leyes de comportamiento:

$$\Phi(\rho) = (1 - \rho_* \rho)^{m+1}, \quad m \geq 0 \quad (2.43)$$

y

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\tau} &= \rho^l \left(\lambda_0 \left(\operatorname{div} \frac{\mathbf{m}}{\rho} \right) \tilde{I} + 2\mu_0 \tilde{\mathbf{D}} \left(\frac{\mathbf{m}}{\rho} \right) \right) \\ l &\geq 0, \quad \mu_0 \geq 0, \quad \lambda_0 + 2\mu_0 \geq 0 \\ Re &= +\infty \Leftrightarrow \lambda_0 = \mu_0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

- La propiedad (2.41) es importante y será técnicamente útil más adelante.

En el caso particular de una dimensión de espacio ($d = 1$), el sistema de conservación del flujo de mezcla adimensional (2.30) puede escribirse, en virtud de la condición de contorno

$$M(x, t) = M(t) = M_0(t) \geq 0$$

es decir, el flujo total de masa es independiente de la variable de espacio y coincide con la condición de contorno (2.36) en $x = 0$. Así, el gradiente de presión hidrodinámica en (2.31) viene dado por:

$$(p_h)_x = -\frac{1}{Fr} \frac{\rho}{\Phi} \left(M(t) - \frac{m}{\rho} \right)$$

entonces es posible expresar la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en términos de la condición de contorno (de soplado) $M(t) \geq 0$ incorporada explícitamente en el segundo miembro:

$$m_t + \left(\frac{m^2}{\rho} \right)_x + p_x - \frac{1}{Re} \tau_x + \frac{1}{Fr} \frac{m}{\Phi} = -\frac{1}{Fr} \rho \left(1 - \frac{M(t)}{\Phi} \right)$$

Por lo tanto, el problema asintótico unidimensional adimensional quedaría expresado en la forma siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \rho_t + m_x &= 0 \\ m_t + \left(\frac{m^2}{\rho}\right)_x + p_x - \frac{1}{Re} \tau_x &= -\frac{1}{Fr} \rho \left(1 - \frac{M(t)}{\Phi}\right) - \frac{1}{Fr \Phi} m \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

Se considerará este problema en dos dominios diferentes. En primer lugar, en un dominio acotado en espacio $\Omega = (0, L)$, cuyas paredes son impermeables a las partículas de sólido pero que pueden ser traspasadas por el gas. En este caso, las *condiciones de contorno* naturales del problema son

$$m = 0 \quad \text{en} \quad x = \{0, L\}$$

$$M(t) \geq 0 \quad \text{función conocida en} \quad (0, T)$$

La otra posibilidad consiste en plantear el problema en un dominio unidimensional semiinfinito $\Omega = (0, \infty)$. En este caso, las condiciones de contorno sobre la pared inferior del dominio $x = 0$ son las mismas que en el caso anterior, mientras que en el infinito tendrá que imponerse, al menos, una condición de comportamiento asintótico en la cantidad de movimiento:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} m(x, t) = 0$$

Para completar la formulación del problema, se debe imponer las *condiciones iniciales*:

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x) \geq 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

$$m(x, 0) = m_0(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

y además la *condición de compatibilidad*:

$$\rho_0(x) = 0 \Rightarrow m_0(x) = 0$$

El objetivo principal que realizaremos en este capítulo, es el estudio cualitativo del flujo de Mezcla gas - sólido a partir del estudio de existencia de solución del problema de frontera libre, con este análisis nos permite encontrar las dificultades de extensión para la predicción de existencia y unicidad de solución para el problema de mezcla.

2.3. Existencia de solución para el problema de frontera libre

Retomando el problema de frontera libre, en su forma diferencial unidimensional, al que denominaremos *problema P*:

Sean: $\rho : \overline{\Omega}_T \rightarrow \mathbb{R}_+$, $m : \overline{Q}_T \rightarrow \mathbb{R}_+$ funciones continuas sobre Q , donde $Q_T = \Omega \times (0, T)$, con $\Omega = (0, L)$ y $L < \infty$ y la formalidad matemática (2.30).

Los conjuntos C_γ , con $\gamma > 0$, con la identificación $v := m/\rho$, las variables dependientes (ρ, m) satisfacen las ecuaciones:

$$P = \begin{cases} \rho_t + m_x = 0 \\ m_t + \left(\frac{m^2}{\rho}\right)_x - \left(\mu(\rho) \left(\frac{m}{\rho}\right)_x\right)_x + p(\rho)_x = f(\rho, m, t) \end{cases} \quad (2.46)$$

Asumiendo en el sentido distribucional que la condición de frontera $m = 0$ en $\partial\Omega \times (0, T)$ y las condiciones iniciales, (ρ_0, m_0) satisfacen

$$\begin{aligned} \rho_0 &\in C(\overline{\Omega}), \quad \sqrt{\rho_0} \in H^1(\Omega), \quad \text{con } \rho_0 \geq 0 \text{ c.t.p. en } \Omega, \\ m_0 &\in L^2(\Omega) \quad \text{con } m_0 = 0 \text{ c.t.p. en } \{\rho_0 = 0\}, \\ v_0 := \frac{m_0}{\rho_0} &\in L^2(\Omega) \quad \text{definiendo } v_0 = 0 \text{ c.t.p. en } \{\rho_0 \neq 0\}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

donde $H^1(\Omega)$ es el espacio de Sobolev de orden 1.

Si la condición inicial, ρ_0 se sustituye por ρ_{0_ϵ} , tal que satisface $\rho_{0_\epsilon} > \rho_\epsilon > 0$, entonces para todo $\epsilon > 0$, la formulación asintótica - Problema P_ϵ , permite predecir la existencia de solución débil, $(\rho_\epsilon, m_\epsilon)$, del Problema de mezcla P_ϵ para $\rho_\epsilon > 0$ en Q_T . Además nos permite identificar el cociente m_ϵ/ρ_ϵ así como también la velocidad v_ϵ , y la terna $(\rho_\epsilon, v_\epsilon, m_\epsilon)$ que tiene una propiedad para las normas

$$\begin{aligned} &\|\rho_\epsilon\|_{L^\infty}, \quad \|\rho_{\epsilon x}\|_{L^\infty(L^2)}, \quad \|\rho_{\epsilon t}\|_{L^2(L^1)}, \\ &\|m_{\epsilon x}\|_{L^2(L^1)}, \quad \|m_{\epsilon t}\|_{L^1}, \\ &\|\sqrt{\rho_\epsilon}, v_\epsilon\|_{L^\infty(L^2)} \quad \text{y} \quad \|\sqrt{\mu_\epsilon} v_{\epsilon x}\|_{L^2} \end{aligned}$$

están uniformemente acotadas con respecto a ϵ y donde $\rho_{\epsilon x}$ y $\rho_{\epsilon t}$ son las derivadas de ρ_ϵ respecto a x y t respectivamente.

Estas estimaciones nos permiten asegurar la existencia de las funciones $\rho \in C(\overline{Q}_T)$, $m \in$

$L^2(Q_T)$, $\gamma \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $\xi \in L^2(\Omega_T)$ tales que

$$\begin{aligned} \rho_\epsilon &\rightarrow \rho \quad \text{uniformemente en } \overline{Q_T}, \\ m_\epsilon &\rightarrow m \quad \text{fuertemente en } L^2(Q_T), \\ \frac{m_\epsilon}{\sqrt{\rho_\epsilon}} &= \sqrt{\rho_\epsilon} u_\epsilon \rightharpoonup \gamma \quad \text{débilmente* en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ \sqrt{\mu_\epsilon} \left(\frac{m_\epsilon}{\rho_\epsilon} \right)_x &= \sqrt{\mu_\epsilon} u_{\epsilon x} \rightharpoonup \xi \quad \text{débilmente en } L^2(Q_T). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Además, los conjuntos C_γ son medibles ([51]). En estos conjuntos medibles es posible identificar γ^2 y $\sqrt{\mu(\rho)} \xi$ como $\frac{m^2}{\rho}$ y $\mu(\rho) \left(\frac{m}{\rho} \right)_x$, respectivamente.

Se tiene entonces que para toda $\psi \in C_0^1(Q_T)$ y para toda $\phi \in C_0^1(C_\gamma)$ (con $\gamma > 0$) se satisface

$$\int_{Q_T} \rho \psi_t + m \psi_x = 0, \quad (2.49)$$

$$\int_{Q_T} \left(m \phi_t + \frac{m^2}{\rho} \phi_x - \mu(\rho) \left(\frac{m}{\rho} \right)_x \phi_x + p(\rho) \phi_x + f(\rho, m, t) \phi \right) = 0. \quad (2.50)$$

Finalmente, se deduce que m y $\mu(\rho) \left(\frac{m}{\rho} \right)_x$ se anulan c.t.p. en el conjunto $\{\rho = 0\}$, y que $\left(\frac{m^2}{\rho} \right)_x$ se anula c.t.p. en el interior de dicho conjunto, por lo que las ecuaciones también se satisfacen en el interior de $\{\rho = 0\}$.

Además se asume que

$$\rho_0 \in H^1(\Omega) \quad \text{y} \quad v_0 \in H_0^1$$

Entonces el Problema P (con $\alpha = 1$) se transforma en el problema aproximado P_ϵ el cual resulta luego de que

- la viscosidad $\mu(\rho) := \rho$ se sustituye por:

$$\mu_\epsilon(\rho) := \rho + \epsilon, \quad (2.51)$$

donde $\epsilon > 0$,

- la condición inicial ρ_0 se sustituye por $\rho_{0\epsilon}$, la cual verifica localmente que

$$0 < \rho_\epsilon^- \leq \rho_{0\epsilon} \leq \rho^+ < 1 \quad \text{en } \Omega, \quad (2.52)$$

para ciertas constantes ρ_ϵ^- , ρ^+ , con $\rho_\epsilon^- \geq C\epsilon^{2/3}$.

Así mismo, asumiendo que

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho_{0\epsilon}} &\in H^1(\Omega), \\ \|\rho_{0\epsilon}\|_{L^1} &= 1, \\ \text{y } \sqrt{\rho_{0\epsilon}} &\rightarrow \sqrt{\rho_0} \quad \text{en } H^1(\Omega) \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.53)$$

y que

$$u_0 \in L^2(\Omega). \quad (2.54)$$

Sobre la presión y el término de arrastre, se consideran de la siguiente forma:

$$p(\rho) = a^2 \rho^{\gamma_0} \exp\left(\frac{\varepsilon \rho}{1 - \rho}\right), \quad a > 0, \quad \gamma_0 > 1 \quad (2.55)$$

$$f(\rho, u, t) = -\frac{\rho}{Fr} \left(1 - \frac{u - M(t)}{\phi(\rho)}\right) \quad (2.56)$$

con ϕ función continua, decreciente, acotada, verificando $\phi(0) = 1$ y $\phi(1) > 0$, y donde $M \in L^\infty(0, T)$.

Problema \mathbf{P}_ε

El primer problema regularizado al que se le llamará P_ε queda definido por:

$$\mathbf{P}_\varepsilon = \begin{cases} \rho_t + m_x = 0 \\ m_t + \left(\frac{m^2}{\rho}\right)_x - \left(\mu_\varepsilon(\rho) \left(\frac{m}{\rho}\right)_x\right)_x + p(\rho)_x = f(\rho, m, t) \end{cases} \quad (2.57)$$

Aplicando (2.53) resulta que $\rho_{0\varepsilon} \in H^1(\Omega)$, entonces, a partir de (2.51) y (2.57), el Problema \mathbf{P}_ε también puede ser expresado en la siguiente forma: Hallar $\rho : \overline{Q_T} \rightarrow \mathbb{R}_+$ y $u : \overline{Q_T} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (2.58)$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2)_x - ((\rho + \varepsilon)u_x)_x + p(\rho)_x = \rho f(\rho, u, t) \quad (2.59)$$

en Q_T , cumpliendo las siguientes condiciones de contorno e iniciales:

$$u = 0 \quad \text{en } \Gamma_T, \quad (2.60)$$

$$\rho(\cdot, 0) = \rho_{0\varepsilon}, \quad u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{en } \Omega. \quad (2.61)$$

Entonces a continuación se puede establecer una definición de solución débil del Problema \mathbf{P}_ε .

Definición 2.3.1 Diremos que (ρ, u) es solución débil del Problema \mathbf{P}_ε si:

1. $\rho : \overline{Q_T} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $u : \overline{Q_T} \rightarrow \mathbb{R}$ poseen la siguiente regularidad

$$\rho \in H^1(0, T; L^1(\Omega)) \cap C^0(\overline{Q_T}), \quad \sqrt{\rho} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \quad p(\rho) \in L^\infty(Q_T), \quad (2.62)$$

$$u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad m_t \in L^2(0, T; W^{-1,1}(\Omega)), \quad (2.63)$$

donde $m := \rho u$.

2. Existen constantes $\rho_- < \rho_\varepsilon^-$ y $\rho_+ > \rho^+$ tales que

$$0 < \rho_- \leq \rho \leq \rho_+ < 1 \quad \text{en } Q_T. \quad (2.64)$$

3. Se verifica la ecuación

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0 \quad \text{ctp en } Q_T, \quad (2.65)$$

y la identidad integral

$$\int_{Q_T} (\rho u (\phi_t + u \phi_x) - (\rho + \varepsilon) u_x \phi_x + p(\rho) \phi_x + \rho f(\rho, u, t) \phi) = 0, \quad (2.66)$$

para toda $\phi \in C_0^1(Q_T)$.

4. Se verifican las condiciones iniciales en el siguiente sentido:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\rho(\cdot, t) - \rho_{0\varepsilon}\|_{C^0} = \lim_{t \rightarrow 0} \|u(\cdot, t) - u_0\|_{H^{-1}} = 0. \quad (2.67)$$

Teorema 2.3.1 ([51], [41]) *Considerando la definición 2.3.1 y las hipótesis (2.52)-(2.54), entonces el problema (2.57) tiene una solución débil.*

Asumiendo la compacidad de las sucesiones $(\rho_\varepsilon, m_\varepsilon)$ de soluciones del problema (P_ε) , donde $m_\varepsilon := \rho_\varepsilon u_\varepsilon$, se verifica ([51]) los siguientes resultados:

Lema 2.3.1 *Consideremos la sucesión $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$ de soluciones de los Problemas P_ε asociadas a condiciones iniciales $(\rho_{0\varepsilon}, u_0)$ que verifican (2.52)-(2.54). Se tiene entonces que las normas*

$$\|\rho_{\varepsilon x}\|_{L^\infty(L^2)}, \quad \|\rho_{\varepsilon t}\|_{L^2(L^1)}, \quad \|\sqrt{\rho_\varepsilon} u_\varepsilon\|_{L^\infty(L^2)} \quad \text{y} \quad \|\sqrt{\rho_\varepsilon + \varepsilon} u_{\varepsilon x}\|_{L^2} \quad (2.68)$$

se pueden acotar independientemente de ε . Además, se tiene la siguiente estimación puntual en Q_T

$$\|\rho_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \rho_+ < 1, \quad (2.69)$$

donde ρ_+ fue dado en (2.64)

y al ser $\gamma > 1$ en la definición de la presión (2.42), dicho término está acotado si $\rho \leq \rho_+ < 1$, por lo que los datos iniciales (2.52)-(2.53) permiten acotar el lado derecho de (6.104) por una constante independiente de ε . Tenemos así estimaciones independientes de ε para las normas

$$\|\sqrt{\rho_\varepsilon} u_\varepsilon\|_{L^\infty(L^2)} \quad \text{y} \quad \|\sqrt{\rho_\varepsilon} u_{\varepsilon x}\|_{L^2}.$$

Observación 2.3.1 *Las propiedades (2.62) y (2.63) implican la regularidad de la variable m que representa a la cantidad de movimiento, es decir:*

$$m \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; W^{-1,1}(\Omega)).$$

La continuidad de ρ se deduce apartir de la regularidad de ρ_t y ρ_x , ([51]). Por otra parte, la regularidad de ρ_t y de m_t se obtiene a partir de la regularidad de ρ_x , m_x y de las ecuaciones (2.65) y (2.66). Finalmente, se tiene que $\rho \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ y la inyección compacta $H^1(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ permiten interpretar la condición inicial $\rho_{0,\varepsilon}$ en el sentido de (2.67). Análogamente sucede con u . La regularidad de ρ y u permite considerar la ecuación (2.65) ctp.

Asumiendo menos regularidad de los datos iniciales, en este estudio se considera la presencia de un término fuente no lineal para la densidad volumétrica y un término de presión colisional que no permanece necesariamente acotado.

2.4. Dificultades de la extensión de resultados de existencia conocidos para sistemas de Navier - Stokes al modelo de Mezcla

- Al resolver la ecuación de la presión hidrodinámica

$$\nabla p_h = -\rho q(\rho)(\vec{u} - \vec{v}) \quad (2.70)$$

en el sentido debil o de distribuciones, se puede expresar:

$$\int_Q p_h \nabla \varphi dxdt = \int_Q \rho q(\rho)(\vec{u} - \vec{v}) \varphi dxdt \quad \forall \varphi \in D(Q) \quad (2.71)$$

Pero luego en la evaluación con las condiciones de frontera, en los integrandos que aparecen, resultan las variables acopladas. Entonces predecir la existencia de

solución tal cual está expresada el sistema de ecuaciones existen muchas dificultades. La solución débil del sistema puede obtenerse si es que las variables se llegan a desacoplar.

- Al analizar los coeficientes de viscosidad no lineales dependientes de la densidad volumétrica, la demostración del resultado respecto a la compacidad requiere que los datos iniciales respecto a la densidad verifiquen una regularidad que únicamente se da en el comportamiento del flujo del tipo nubes estacionarias, es decir, cuando el exponente, γ , de la densidad para la ecuación de estado (presión colisional) cumpla que $\gamma < 2$.

Si se consideran coeficientes de viscosidad $\mu(\rho) \sim \rho^\alpha$ y $\gamma < 2\alpha$ con $\alpha > 1$, para obtener soluciones de tipo nube estacionaria se requiere obtener una regularidad del problema. Esta regularización origina el estudio del problema de mezcla en un dominio espacial acotado $[0, L]$ con una condición inicial de tipo escalón para la fracción volumétrica, y la condición de contorno Dirichlet homogénea para la velocidad de mezcla.

El problema del flujo de mezcla expresado formalmente, con las ecuaciones (1.50), (1.52)-(1.53), y teniendo en cuenta que, cuando $\epsilon \rightarrow 0$, se tendría que, la fracción volumétrica de la mezcla, $R \rightarrow \rho$ y $\vec{U} \rightarrow \vec{v}$; luego haciendo: $u = \vec{v}$ y $f = g$, el modelo matemático del flujo de mezcla gas-sólido adopta la forma de un problema asintótico regularizado del problema de frontera libre, el cual se asemeja al problema del tipo Navier-Stokes de flujo viscoso de compresibilidad aparente, cuyo sistema de conservación toma la forma (2.72)-(2.73).

Bajo estas condiciones, el problema en estudio se puede expresar por el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u) = 0 \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u \otimes u) = \text{div}(\mathbb{P}' + \rho f) \quad (2.73)$$

donde ρ , u , f y \mathbb{P}' son la fracción volumétrica, velocidad, fuerzas externas y esfuerzos viscosos respectivamente.

En los últimos estudios del sistema de ecuaciones de Navier - Stokes de flujo viscoso y compresible, no existen avances de la existencia de solución de estas ecuaciones, y de los pocos que existen hay grandes diferencias en el fundamento matemático. Para sustentar la demostración de la existencia respecto a una y dos dimensiones espaciales, como se pueden ver en las referencias [32], [41], [65], mencionan la posibilidad de probar una existencia de solución débil, pero dependiendo del tipo de viscosidad, por lo que continúa ser un problema abierto, en sentido general.

En el caso del problema de mezcla, con las restricciones asumidas, en la finalidad de extender los resultados de existencia conocidos para las ecuaciones de Navier-Stokes compresible, con viscosidad lineal, se puede lograr demostrar la existencia de solución débil, tales es así que, si la fracción volumétrica ρ fuera constante, el estudio se reduce a un problema de Navier - Stokes de flujo incompresible, del cual ya existen avances en la referencia([41]) pero no es nuestro caso en estudio, puesto que para nosotros la densidad representa a una fracción volumétrica de la fase dispersa, y ésta es variable, por ello se toma la expresión de ζ compresibilidad aparente”.

Por notación, considerando a la variable temporal, t , tal que $0 \leq t \leq T < +\infty$, la variable espacial x , \otimes el producto tensorial, div la divergencia con respecto a x . Entonces según Stokes ([32]), se puede considerar \mathbb{P}' como el esfuerzo tensorial definido por

$$\mathbb{P}' = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\rho, J_s(\mathbb{D})) \mathbb{D}^k \quad (2.74)$$

donde \mathbb{D} es el esfuerzo tensorial de componentes $\mathbb{D} = [\mathbb{D}_{ij}] = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]$ y J_s son los invariantes básicos.

En el modelo clásico, \mathbb{P}' se tiene la ecuación

$$\mathbb{P}' = (\lambda div(u) - p)\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D}$$

donde los coeficientes de viscosidad λ y μ son constantes y p es la presión, en esta forma no es demostrable la existencia de solución global como se comenta en esta referencia [32].

Entonces si se considera la formulación presión, es decir:

$$\mathbb{P}'(u) = -\rho\mathbb{I} + \mathbb{P}(u) \quad \text{ó} \quad (2.75)$$

$$\mathbb{P}'(u) = \mathbb{P}(u) \quad (2.76)$$

donde el tensor $\mathbb{P}(u)$ satisface las propiedades enunciadas en la siguiente proposición.

Proposición 2.4.1 ([32]) Dado \mathbb{P} en la forma (2.75) ó (2.76), entonces \mathbb{P} satisface las siguientes propiedades

1. $\int_{\Omega} \mathbb{P}(u) : \mathbb{D}(u) dx \geq \int_{\Omega} M(|\mathbb{D}(w)|) dx$ con $|\mathbb{D}(w)|^2 = \sum_{i,j=1}^n \mathbb{D}_{ij}^2$.
2. $\int_{\Omega} (\mathbb{P}(w) - \mathbb{P}(v)) : \mathbb{D}(u - v) dx \geq 0$.
3. $\int_{\Omega} \overline{M}(|\mathbb{P}(w)|) dx \leq \text{const.} \int_{\Omega} (1 + M(|\mathbb{D}(u)|)) dx$
4. $\mathbb{P}(u - \epsilon v) \rightarrow \mathbb{P}(u)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.
5. El funcional $F(u) = \int_{\Omega} \mathbb{P}(u) : \mathbb{D}(w) dx$ convexo, donde M es la función convexa tal que

$$M(s) \geq \exp(s); \quad s \rightarrow +\infty$$

y \overline{M} es la conjugada de Young, es decir, $\overline{M}' = (M')^{-1}$; $(\cdot)'$ es la derivada y $(M')^{-1}$ es la inversa del operador y $A : B$ es el producto escalar euclideo de las matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

La forma general del tensor $\mathbb{P}(u)$ satisface las propiedades 1, 2, 3, 4 y 5 y $\mathbb{P}(u)$ se reduce a la forma (2.74) donde

$$\mathbb{P}(u) = \gamma_0(\text{div}(u))\mathbb{I} + \sum_{s=1}^N \gamma_s(|\mathbb{D}^s(u)|^2)\mathbb{D}^{2s-1}(u) \quad (2.77)$$

con γ_s continua y monótona tales que:

$\text{sgn}(\gamma_0(s)) = \text{sgn}(s)$, γ_s decrece (crece) cerca del infinito hasta γ_L para $s \neq L$, N es un número arbitrario que indica el índice de monotonicidad ([1]), la propiedad 3 es una consecuencia de la relación $\overline{M}\left(\frac{M(s)}{s}\right) \sim M(s)$ ([1], [41]) y finalmente se deduce ([32]) que la potencia de \mathbb{D} es menor que $n - 1$. Es decir, \mathbb{P}' se puede expresar en la siguiente forma:

$$\mathbb{P}' = \lambda(|\text{div}(u)|)\text{div}(u) \cdot \mathbb{I} + 2\mu(\|\mathbb{D}\|)\mathbb{D}$$

con λ, μ monótona y positiva, λ decrece pero no más que μ e \mathbb{I} es la matriz identidad. Para el caso del modelo (2.72) - (2.73), nuestro conjunto $M(\xi) = \gamma_L(\xi^2)\xi^2$ y para la Proposición 2.4.1-(3) se define $M(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^s \gamma_L(z^2) dz$. En el caso de la ecuación de la Proposición 2.4.1 - (3) fue considerada la forma (2.77) pero no el tensor abstracto \mathbb{P} como debería ser considerado en el modelo (1.52)-(1.53).

Cuando $\epsilon \rightarrow 0$ en el flujo de mezcla sobre el dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, el cual posee una frontera suficientemente regular y el dominio evolutivo denotado por $Q_T =$

$\Omega \times (0, T)$, el sistema queda expresado por la ecuación (2.72) - (2.73) y completado con la ecuación (2.75) (ó 3 de la Proposición 2.4.1), satisface los datos iniciales:

$$\rho|_{t=0} = \rho_0, \quad \rho u|_{t=0} = w \quad (2.78)$$

y la condición de frontera

$$u|_{\partial\Omega \times (0, T)} = 0 \quad (2.79)$$

El impulso inicial $w(x)$ está definido solamente en el soporte de $\rho_0(x)$; entonces introduciendo una velocidad inicial de la forma $u_0(x) = \frac{w(x)}{\rho_0(x)}$ la cual se extiende a la zona supuestamente vacía. Como no se conoce un valor para $\rho_0 u_0(x)$ a partir del desarrollo del problema de valores iniciales y de contorno original, puesto que se puede predecir el impulso inicial (pero no la velocidad), entonces para aceptarlo como valor inicial, esto está relacionado con la existencia de su derivada $(\rho u)_t$ mientras que u_t (ó $D_t^{1/2} u$) existe solamente cuando se promedia con ρ , y ρ puede anularse sobre un conjunto de medida positiva. Este echo se demuestra en los teoremas 2.4.2 y 2.4.3 que se verán mas adelante.

Antes de definir la solución débil del problema, se consideran algunas nociones teóricas requeridas de los espacios de Sobolev-Orlicz que con mayor detalle pueden encontrarlo en la referencia [1].

Definición 2.4.1 Sea $M(s)$ una función de Young (es decir es conexa, ésta crece en el infinito más que una función lineal, etc) entonces se define a la clase de Orlicz, como el conjunto

$$K_M(\Omega) = \left\{ v / \int_{\Omega} M(|v(x)|) dx < \infty \right\}$$

donde $|v(x)|$ es el módulo de la clase de equivalencia en casi todas partes de Ω de las funciones medibles v definidas sobre Ω .

$$L_M(\Omega) = \left\{ \lambda v / \lambda \in \mathbb{R}^+, v \in K_M(\Omega) \right\}$$

donde $L_M(\Omega)$ es el espacio de Orlicz, el cual es un espacio de Banach [1] con respecto a la norma de Luxemburg.

$$\| v \|_{L_M(\Omega)} = \sup \int_{\Omega} vw dx$$

sup es tomado para todo w tal que

$$\int_{\Omega} \overline{M}(w) dx \leq 1$$

y $K_M(\Omega)$ es el conjunto de clases de Orlicz $K_M(\Omega) \subset L_M(\Omega)$ donde M es una función convexa. Entonces se define el espacio de Sobolev-Orlicz como el conjunto:

$$W^m L_M(\Omega) = \{u \in L_M(\Omega), D^\alpha u \in L_M(\Omega) \text{ para todo } \alpha, |\alpha| \leq m\}$$

con norma

$$\|u\|_{m,M} = \|u\|_{m,M,\Omega} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{M,\Omega}$$

y el conjunto $W_0^m L_M(\Omega)$ representa al espacio clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^m L_M(\Omega)$.

Por ejemplo, si $1 < p < \infty$ y $M(t) = t^p/p$ entonces se tiene la siguiente relación,

$$L_{M_p}(\Omega) = K_{M_p}(\Omega) \quad \text{y además} \quad \|u\|_{M_p,\Omega} = p^{-1/p} \|u\|_{p,\Omega}.$$

La completación de $L_\infty(\Omega)$ con la norma de $L_M(\Omega)$ genera el espacio $E_M(\Omega)$ el cual en general representa al espacio clausura de $L_M(\Omega)$ donde

$$E_M(\Omega) = \{u / u \in K_M(\Omega) \text{ y } u \text{ es acotada en } \Omega \text{ y de soporte acotado en } \overline{\Omega}\}$$

Si se tiene una sucesión de soluciones u_j , ésta converge si $u_j \in E_M(\Omega)$ donde

$$u_j(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } |u(x)| \leq j \text{ y } |x| \leq j, \quad x \in \Omega \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por tanto, el espacio $E_M(\Omega)$ es separable y

$$(E_M(\Omega))^* = L_M(\Omega) \quad \text{para todo } M$$

La desigualdad de Young

$$uv \leq M(u) + \overline{M}(v)$$

Luego integrando, y aplicando la desigualdad de Holder se obtiene:

$$\int_{\Omega} uv \leq \|u\|_{L_M(\Omega)} \|v\|_{L_M(\Omega)} \quad (2.80)$$

Consideremos las funciones de Young:

$$\begin{aligned} \phi(s) &= s \ln^\beta(s), \quad \beta \geq 4 \\ \psi(s) &= \exp(s^{1/\beta}) \end{aligned} \quad (2.81)$$

e introduciendo los espacios

$$X = \{u / \mathbb{D}(u) \in L_M(\Omega); u|_{\partial\Omega} = 0\} \quad (2.82)$$

$$Y = \{v / \mathbb{D}(v) \in L_M(Q_T); v|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0\} \quad (2.83)$$

Se puede ver ([32]) que M crece más rápido que los polinomios del espacio X y no coincide con los de $L_M(0, T, X)$. Los espacios X e Y son conjugados y separables y tienen un subespacio denso y débil ([1]), así también las sucesiones de conjuntos acotados que son débilmente compactos y sus funciones con suficiente regularidad son débiles en un subespacio denso de X e Y .

Definición 2.4.2 *Sea ϕ una función convexa, el par $(\rho, u) \in L_\infty(0, T, L_\phi(\Omega)) \times Y$ es llamada una solución débil del problema (2.72), (2.73), (2.75), (2.78) y (2.79) si las ecuaciones (2.72) y (2.73) satisfacen en sentido distribucional a las siguientes ecuaciones integrales:*

$$\int_0^t \int_\Omega \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \cdot \nabla v \right) dx ds = \int_\Omega \rho \psi dx \Big|_0^t \quad (2.84)$$

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\rho u \frac{\partial v}{\partial t} + (\rho u \otimes u - \mathbb{P}(u)) : \mathbb{D}(v) + \rho \operatorname{div}(v) \rho f \cdot v \right) dx ds = \int_\Omega \rho u \cdot v dx \Big|_0^t \quad (2.85)$$

para todo u en X y v en Y .

Además en los espacios $L_M(0, T, W^{-1}L_\phi(\Omega))$ y Y^* respectivamente, los datos iniciales de (2.78) son aceptados en el sentido de funciones fuertemente continuas (con respecto a t) con valores en el espacio $W^{-1}L_\phi(\Omega) \times X^*$ y la condición de frontera (2.79) se cumple c.t.p. sobre $\partial\Omega \times (0, T)$.

Definición 2.4.3 *El par $(\rho, u) \in L_\infty(0, T, L_\phi(\Omega)) \times X$ es llamada una solución débil del problema (2.72), (2.73), Proposición 2.4.1-(3), (2.78) y (2.79), entonces si la ecuación (2.72) y (2.73) se satisfacen en el sentido distribucional (es decir, (2.84) y (2.85) sin el término $\rho \operatorname{div}(v)$) en el espacio $L_2(0, T, W^{-1}L_\phi(\Omega))$, los datos iniciales (2.78) son aceptados en el sentido de funciones fuertemente continuas (respecto a t) con valores en el espacio $W^{-1}L_\phi(\Omega) \times Y^*$, y la condición de frontera (2.79) que satisface en casi todas partes de $\partial\Omega \times (0, T)$.*

Posteriormente se hace un estudio de la existencia de la solución débil del problema basada en las definiciones 2.4.2 y 2.4.3 y en dos teoremas que demuestran la existencia, de modo tal que ésta debe satisfacer la ecuación de la mínima energía en el límite de la viscosidad (en particular en el límite de la viscosidad de la fase dispersa), es decir cuando la función $M(s)$ tiende a la función $M_0(s)$ tal que $M_0(s) \rightarrow +\infty$ cuando $s \rightarrow cte < +\infty$.

De los resultados anteriores se puede afirmar entonces que cualquier función que contiene al término $\rho u \otimes u$ es integrable. En conclusión, este hecho de algún modo, ayuda

a predecir la existencia de una solución débil para el problema en estudio, basada en la ecuación de la mínima energía, tal que satisface la propiedad 5 de la Proposición 2.4.1.

Existencia de solución débil En esta sección se probará la extensión de algunos resultados de existencia para el problema bajo las condiciones asumidas en estos resultados.

Lema 2.4.1 *La solución (ρ, u) del problema (2.72)-(2.73) con las condiciones iniciales y de contorno (2.78) - (2.79), para $\beta \geq 4$ satisfacen las siguientes desigualdades:*

$$\|\rho\|_{L_\infty(0,T,L_\phi(\Omega))} \leq C \quad (2.86)$$

$$\|u\|_Y \leq C \quad (2.87)$$

con C dependiendo solamente de $\|\rho_0\|_{L_\phi(\Omega)}$, $\|u_0\|_{L_\phi(\Omega)}$ y $\int_{Q_T} \psi(|f|^2) dxdt$.

Así mismo, considerando la proposición 2.4.1-(3), (2.78), (2.79) y la ecuación 2.81), el par (ρ, u) satisfacen también:

$$\|u\|_{L_\infty(0,T,X)} \leq C \quad (2.88)$$

$$\left\| \sqrt{\rho} \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_\phi(Q_T)} \leq C \quad (2.89)$$

con C dependiendo solamente de $\|\rho_0\|_{L_\phi(\Omega)}$, $\|u_0\|_X$ y $\int_{Q_T} \psi(|f|^2) dxdt$.

Demostración:

Multiplicando a la ecuación (2.73) por u e integrando sobre $\Omega \times (0, T)$ resulta las siguientes relaciones:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\rho|u|^2}{2} + \rho \ln(\rho) \right) dx \Big|_0^t + \int_0^t \int_{\Omega} (\mathbb{P}(u) : \mathbb{D}(u) - \rho u \cdot f) dx ds = 0 \quad (2.90)$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho|u|^2 dx \Big|_0^t + \int_0^t \int_{\Omega} (\mathbb{P}(u) : \mathbb{D}(u) - \rho u \cdot f) dx ds = 0 \quad (2.91)$$

entonces, en virtud de las propiedades de \mathbb{P} se obtiene:

$$\|u\|_Y \leq C$$

y se puede deducir también

$$\int_{Q_T} \exp(|\operatorname{div}(u)|) dxdt \leq C.$$

Luego multiplicando (2.72) por $\phi'(\rho)$, resulta

$$\int_{\Omega} \phi(\rho) dx \Big|_0^t + \int_0^t (\rho \phi'(\rho) - \phi(\rho)) \operatorname{div}(u) dx ds = 0 \quad (2.92)$$

y aplicando la desigualdad de Young, se tiene:

$$\left| \int_0^t \int_{\Omega} (\rho\phi'(\rho) - \phi(\rho)) \operatorname{div}(u) \, dx ds \right| \leq \int_0^t \int_{\Omega} A(\rho\phi'(\rho) - \phi(\rho)) \, dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} \exp(|\operatorname{div}(u)|) \, dx ds$$

con $A(\xi) = (1 + \xi) \ln(1 + \xi) - \xi$.

donde :

$$A(\rho\phi'(\rho) - \phi(\xi)) \leq C(\phi(\rho) + 1)$$

entonces, considerando la ecuación (2.92) se obtiene:

$$\| \rho \|_{L_{\infty}(0,T,L_{\phi}(\Omega))} \leq C$$

La ecuación (2.89) se obtiene a partir de la proposición 2.4.1-(5)

y multiplicando en (2.73) por $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Finalmente

$$\int_{\Omega} (\Gamma_0(\operatorname{div}u) + \sum_{s=1}^N \Gamma_0(\operatorname{Tr}\mathbb{D}^{2s})) \, dx \Big|_0^t + \int_0^t \int_{\Omega} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \, dx ds = \frac{1}{2} \int_0^t \rho (f - (u \cdot \nabla)u) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \, dx ds \quad (2.93)$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \, dx ds + \delta \int_0^t \int_{\Omega} (\rho |f|^2 + \rho |u|^2 \cdot |\mathbb{D}(u)|^2) \, dx ds$$

donde:

$$\begin{aligned} \Gamma_0(\xi) &= \int_0^{\xi} \Lambda_0(\tau) \, d\tau \\ \Gamma_s(\xi) &= \frac{1}{2s} \int_0^{\xi} \Lambda_s(\tau) \, d\tau, \quad s \geq 1; \quad M(\xi) = \Gamma_1(\xi^2) \end{aligned}$$

Se puede estimar:

$$\| |\mathbb{D}(u)|^2 \|_{L_{\phi}(\Omega)} \leq C \| u \|_X^2 \quad (2.94)$$

donde $\mathbb{D}(u) = \tilde{\tau}(\vec{\nabla}) = (\mu)[\nabla \vec{\nabla} + \nabla \vec{\nabla}^T]$.

A partir de (2.86),(2.93), (2.88) y (2.89) y por el Lema de Gronwall se obtiene la estimación. Así también se puede ver que el operador \mathbb{D} es acotado en $L_{\phi}(\Omega)$ con la norma de L_p , cuando p tiende a infinito. Esto implica que este operador es acotado, y va de $L_M(\Omega) \rightarrow L_M(\Omega)$ con $\Gamma(s) = \exp(\sqrt{s})$, luego reemplazando para $\beta \geq 4$, quedaría probado (2.94). \square

Considerando en forma arbitraria, el problema en estudio en estado estacionario, es el siguiente:

$$\operatorname{div}\mathbb{P}(u) = \alpha\rho u + \operatorname{div}(\rho u \otimes u_0) + \nabla P - \rho f_1 - \alpha f_2 \quad (2.95)$$

$$\alpha P + \operatorname{div}(\rho u_h) = \alpha g + \epsilon \Delta P, \quad \rho \geq 0 \quad (2.96)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \frac{\partial\rho}{\partial\eta}|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.97)$$

siendo f_1, f_2 y g funciones, con α, h constantes positivas, ϵ y g son no negativas, aquí el subíndice h significa la regularización de u con respecto a x , donde

$$u_h(x) = \int_{\Omega} u(y) h^{-n} \psi\left(\frac{x-y}{h}\right) dy.$$

Para el caso no estacionario se necesita la acotación de las derivadas ρ_t y $(\rho u)_t$ en la aproximación de la solución, entonces, usando la compacticidad como el caso anterior, en los términos convectivos, existen algunas complicaciones respecto al operador diferencial convectivo, pero éstas se mejoran con la propiedad difusiva $\sqrt{\rho}\mathbb{D}_t^{1/2}u = 0$ que se mostrará en el Teorema 2.4.2.

Teorema 2.4.1 Sean

$$|f_1|^2 \in L_{\phi}(\Omega), \beta > 7/2, g \in C^1(\Omega), g \geq g_0 > 0, f_2 \in L_{\phi}(\Omega), \epsilon > 0, h > 0$$

Entonces si existen dos números positivos

$$\alpha_0(h, \epsilon, |g|_{L_{\phi}(\Omega)}, \| |f_1|^2 \|_{L_{\phi}(\Omega)}, \| f_2 \|_{L_{\phi}(\Omega)})$$

el problema (2.95) - (2.97) posee una solución (ρ, u) , donde $\rho \geq \rho_0$, $\| \rho \|_{L_{\phi}(\Omega)} \leq \alpha$, $\int_{\Omega} M(|\mathbb{D}(u)|) dx \leq F(\alpha)$, con $\alpha > \alpha_0$.

Demostración:

La demostración se dará en 3 pasos.

Primer Paso: Se demostrará que la solución (ρ, u) de la ecuación (2.95), se puede expresar mediante la integral:

$$\int_{\Omega} M(|\mathbb{D}(w)|) dx \leq F_1(\| \rho \|_{L_{\phi}(\Omega)}) + C(f_1, f_2, \alpha) \quad (2.98)$$

donde F y $C(f_1, f_2, \alpha)$ crecen polinómicamente. Este hecho se establece mediante el Método de Galerkin y la monotonicidad estandar de sus componentes. La estimación de u a partir de la ecuación (2.95) es posible gracias a la desigualdad

$$\int_{\Omega} (\rho u \otimes u) : \mathbb{D}(u) dx \leq \frac{1}{4} \int_{\Omega} M(|\mathbb{D}(u)|) dx + F_2(\| \rho \|_{L_{\phi}(\Omega)})$$

y (F_2 crece polinómicamente).

Segundo Paso: Se obtiene (2.96) de la ecuación para ρ cuando u es dado. Debido a la regularidad de los coeficientes (resultados clásicos para la ecuación elíptica) y a la desigualdad

$$\alpha > \| \operatorname{div} u \|_{L_\phi(\Omega)} \cdot h^{-n} + C \quad (2.99)$$

resulta la condición de existencia de solución.

Luego, multiplicando (2.96) por $\phi'(\rho)$ se estiman los valores

$$\| \rho \|_{L_\phi(\Omega)} \quad \text{y} \quad \int_{\Omega} (1 + \rho)^{-1} \ln^{\beta-1}(1 + \rho) |\nabla \rho|^2 dx,$$

por tanto se puede obtener

$$\| Y(\rho) \|_{W_2^1(\Omega)} \leq C(\epsilon, g) \left(C \alpha + \int_{\Omega} \exp(|\operatorname{div}(u)|) dx \right)^{1/2} \quad (2.100)$$

donde

$$Y(\rho) = \int_0^\rho (1 + \xi)^{-1/2} \ln^{(\beta-1)/2}(1 + \xi) d\xi$$

Finalmente:

Tercer Paso: Para resolver (2.95) - (2.97) por el teorema de Schauder ([41]), dado ρ arbitrario del conjunto convexo K_α , donde

$$K_\alpha = \{ \rho \in L_{\phi_\beta}(\Omega) / \rho \geq 0, \int_{\Omega} \rho dx = \int_{\Omega} g dx; \| \rho \|_{L_{\phi_\beta}(\Omega)} \leq \alpha \}$$

se puede encontrar la función u de (2.95) con $\rho = \rho_1$ y de (2.96) haciendo $\rho = \rho_2$. La condición (2.99) es obtenida totalmente debido a (2.98) si α es suficientemente grande.

Si se tiene que

$$\| \rho_2 \|_{L_\phi(\Omega)} \leq G(\| Y(\rho_2) \|)_{L_N(\Omega)}$$

y

$$\| Y(\rho_2) \|_{L_N(\Omega)} \leq G(\| \rho_2 \|_{L_1(\Omega)}) = G(\| g \|_{L_1(\Omega)})$$

donde G crece polinómicamente, $N(\xi) = \xi^2 \ln(\xi)$, $N_1(\xi) = \xi^2 \ln^{1-\beta}(\xi)$, entonces

$$\| Y(\rho_2) \|_{L_N(\Omega)} \leq C(\delta) \| Y(\rho_2) \|_{L_{N_1}(\Omega)}^{1-\delta} \cdot \| Y(\rho_2) \|_{W_2^1(\Omega)}^\delta$$

donde δ es arbitrariamente positiva.

De las ecuaciones (2.98), (2.100) permiten concluir que el operador $B : \rho_1 \rightarrow \rho_2$ actúa en K_α tan pronto cuando α se hace suficientemente grande. Debido a la ecuación (2.100), el operador B es compacto, por tanto posee un punto fijo en K_α . De este modo el Teorema 2.4.1 queda probado. \square

Teorema 2.4.2 Sea $|f|^2 \in K_\psi(Q_T)$, $\rho_0 \in L_\phi(\Omega)$, $\rho \geq 0$, $W|_{\rho_0} \in L_\psi(\text{supp}(\rho_0))$ y $\beta > 7/2$. Entonces existe una solución para el problema (2.72), (2.73), (2.75), (2.78) y (2.79) en el sentido de la Definición 2.4.2. Además, la derivada promediada $\sqrt{\rho}\mathbb{D}_t^{1/2}u$ existe y es igual a cero, y cualquier solución del problema de la clase señalada en la Definición 2.4.2 satisface la identidad de la energía:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\rho|u|^2}{2} + \rho \ln(\rho) \right) dx \Big|_0^t + \int_0^t \int_{\Omega} (\mathbb{P}(u) : \mathbb{D}(u) - \rho u \cdot f) dx ds = 0 \quad (2.101)$$

Observación 2.4.1 Por la existencia de la derivada $\sqrt{\rho}\mathbb{D}_t^{1/2}u$, podemos implicar la acotación del valor

$$\mathbb{D}(\tau) = \int_{Q_T} \rho(t, x) \frac{|u(t + \tau, x) - u(t, x)|^2}{\tau} dx dt$$

uniformemente con respecto a τ , y si $\mathbb{D}(\tau) \rightarrow 0$ cuando $\tau \rightarrow 0$, entonces se dice que $\sqrt{\rho}\mathbb{D}_t^{1/2}u = 0$.

Demostración del Teorema 2.4.2. Construir la solución aproximada ρ_m y u_m para el problema (2.72), (2.73), (2.75), (2.78) y (2.79) como funciones definidas por sus valores ρ_{km}, u_{km} sobre el conjunto $\left(\frac{k-1}{m}T, \frac{k}{m}T\right) \times \Omega$, los cuales se obtienen de las ecuaciones ¹

$$\frac{\rho_{km} - \rho_{k-1,m}}{\tau_m} + \text{div}(\rho_{km}(u_{km})h_m) = \epsilon_m \Delta \rho_{km} \quad (2.102)$$

$$\frac{\rho_{km}u_{km} - \rho_{k-1,m}u_{k-1,m}}{\tau_m} + \text{div}(\rho_{km}u_{km} \otimes (u_{km})h_m) = \text{div}\mathbb{P}(u_{km}) - \nabla \rho_{km} + \rho_{km}f_{km} \quad (2.103)$$

$$\frac{\rho_{km}}{\eta} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_{km} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.104)$$

donde k y m son enteros positivos tales que

$$\tau_m, h_m, \epsilon_m \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad m \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad \tau_m^{-1} > \alpha_0(h_m, \epsilon_m, \rho_0, u_0, f).$$

¹Usaremos simultáneamente dos caminos para la definición de funciones sobre las etapas: $A(t, x) = A_k(x)$, $(k-1)\tau > t \leq k\tau$ y

$$A(t, x) = \left(\frac{t}{\tau} - k + 1\right) A_k(x) + \left(k - \frac{t}{\tau}\right) A_{k-1}(x), \quad (k-1)\tau \leq t \leq k\tau$$

La segunda fórmula se ha usado cuando $\frac{\partial A}{\partial t}$ es involucrada, pero no fijaremos nuestra atención en ésta por ahora.

La existencia de la solución aproximada está garantizada por el Teorema 2.4.1, sin embargo en la etapa τ_m se asume que la solución sea uniforme en todo Q_T . Esto es posible gracias a la estimación del sistema (2.102) - (2.104), que se obtiene, en primer lugar una solución apriori y luego la solución aproximada ρ_m, u_m .

Se basarán algunas consideraciones en la identidad de la energía tales como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_m |u_m|^2 dx \Big|_0^t + 2 \int_0^t \int_{\Omega} \rho_m (t - \tau_m) |\mathbb{D}_t^{1/2} u_m|^2 dx ds + \\ & + 2 \int_0^t \int_{\Omega} \mathbb{P}(u_m) : \mathbb{D}(u_m) dx ds = \epsilon \int_0^t \int_{\Omega} \nabla \rho_m \cdot \nabla |u_m|^2 dx + \\ & + 2 \int_0^t \int_{\Omega} (\rho_m \operatorname{div}(u_m) + \rho_m u_m f_m) dx ds \end{aligned} \quad (2.105)$$

siendo $\mathbb{D}_t^{1/2} u_m = \frac{u_{km} - u_{k-1,m}}{\sqrt{\tau}}$ sobre $\left(\frac{k-1}{m}T, \frac{k}{m}T\right) \times \Omega$ lo cual es una consecuencia de (2.102) y (2.104) sobre la desigualdad

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \phi(\rho_m) dx \Big|_0^t + \epsilon \int_0^t \int_{\Omega} \phi''(\rho_m) |\nabla \rho_m|^2 dx ds + \\ & \int_0^t \int_{\Omega} (\rho_m \phi'(\rho_m) - \phi(\rho_m)) \operatorname{div}(u_m) dx ds \leq 0 \end{aligned} \quad (2.106)$$

esto es cierto en virtud de la convexidad de ϕ (ambas relaciones (2.105) y (2.106) son expresadas en función del entero t/τ). Sumando (2.105) - (2.106) y operando sobre (2.106), se obtienen las estimaciones requeridas.

$$\| \rho_m \|_{L_{\infty}(0,T,L_{\phi}(\Omega))} \leq C \quad (2.107)$$

$$\| u_m \| \leq C \quad (2.108)$$

$$\epsilon \int_{Q_T} \phi'' |\nabla \rho_m|^2 dx dt \leq C \quad (2.109)$$

$$\int_{Q_T} (t - \tau_m) |\mathbb{D}_t^{1/2} u_m|^2 dx dt \leq C \quad (2.110)$$

Las propiedades (2.107)-(2.110) permiten obtener la convergencia débil de las siguientes sucesiones:

$$\begin{aligned} u_m & \rightarrow u \quad \text{en } Y \\ \mathbb{P}(u_m) & \rightarrow \bar{\mathbb{P}} \quad \text{en } L_{\hat{M}}(Q_T) \\ \rho_m & \rightarrow \rho \quad \text{en } L_{\infty}(0, T, L_{\phi}(\Omega)) \\ \rho_m u_m & \rightarrow a \quad \text{en } L_{\infty}(0, T, L_{\phi}(\Omega)) \\ \rho_m u_m \otimes u_m & \rightarrow B \quad \text{en } L_{\Lambda}(0, T, L_{\phi}(\Omega)) \end{aligned}$$

Sea $\Lambda(s) = \exp(\sqrt{s})$, como $\frac{\partial \rho_m}{\partial t}$ son acotadas en $L_2(0, T, W^{-1}L_{\phi}(\Omega))$, entonces $\rho_m \rightarrow \rho$ fuertemente en $L_2(0, T, L_{\phi}(\Omega))$ ([41]) y en consecuencia se tiene que $a = \rho u$.

Como $\frac{\partial \rho_m u_m}{\partial t}$ son acotadas en $L_1(0, T, X^*)$, entonces se tiene también convergencia fuerte de $\rho_m u_m$ y como $B = \rho u \otimes u$, por el mismo argumento $\rho_m u_m \otimes u_m$ también converge fuertemente en un espacio del tipo $L_2(0, T, Z)$. Por tanto se tiene que

$$\rho_m \rightarrow \rho, \quad \rho_m u_m \rightarrow \rho u \quad \rho_m u_m \otimes u_m \rightarrow \rho u \otimes u$$

*-débilmente en $L_\phi(\Omega)$ en casi todas partes respecto a t y *-débilmente en $L_\Lambda(0, T, L_\phi(\Omega))$ y consecuentemente las ecuaciones (2.84) y (2.85) son completadas, reemplazando $\mathbb{P}(u)$ por $\overline{\mathbb{P}}$ (el término $\epsilon_m \Delta \rho_m$ desaparece gracias a (2.109)).

Si asumimos que las identidades

$$\varphi = |u_\xi|^2/2, \quad v = u_\xi$$

(donde ξ significa la regularización de u con respecto a t).

Restando una de la otra, se obtiene la relación:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |u|^2 dx|_0^t + \int_0^t \int_{\Omega} (\overline{\mathbb{P}} : \mathbb{D}(u) - \rho \operatorname{div}(u) - \rho u - f) dx ds = \\ & = \int_0^t \int_{\Omega} \left(\rho f - \rho \frac{\partial u_\xi}{\partial t} \right) (u_\xi - u) dx ds + \\ & \quad \int_0^t \int_{\Omega} (\overline{\mathbb{P}} - \rho \mathbb{I}) : \mathbb{D}(u - u_\xi) dx ds + \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} (\rho u \otimes (u - u_\xi)) : (\rho u \otimes u_\xi) dx ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |u_\xi - u|^2 dx|_0^t \end{aligned}$$

cuando $\xi \rightarrow 0$ y usando la propiedad de renormalización ([65]) se obtiene :

$$- \int_0^t \int_{\Omega} \rho \operatorname{div}(u) dx ds = \int_{\Omega} \rho \ln(\rho) dx|_0^t$$

por tanto la identidad de la energía ².

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\rho |u|^2}{2} + \rho \ln(\rho) \right) dx|_0^t + \int_0^t \int_{\Omega} (\overline{\mathbb{P}} : \mathbb{D}(u) - \rho u \cdot f) dx ds = 0. \quad (2.111)$$

Ahora nos falta probar que $\operatorname{div} \mathbb{P}(u) = \operatorname{div}(\overline{\mathbb{P}})$. Para ello aplicamos límite en (2.105)

²Este límite es no trivial especialmente porque el término $\rho \frac{\partial u_t}{\partial t}$ el cual obviamente no es acotado apropiadamente en el espacio. Desafortunadamente esto puede mostrar que

$$\rho \frac{\partial u_t}{\partial t} = w_\xi + r(\xi)$$

donde $w \in Y^*$ y $r(\xi)$ son acotados en $L_\Lambda(0, T, W_\phi^{-1}(\Omega))$ con $\Lambda(s) = \exp(\sqrt{s})$

cuando $m \rightarrow \infty$, de lo cual resulta:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |u|^2 dx \Big|_0^t + \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{\Omega} \rho_m |\mathbb{D}_t^{1/2} u_m|^2 dx ds \\ & + \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \rho_m \ln(\rho_m) dx - \int_{\Omega} \rho_0 \ln(\rho_0) dx \\ & + \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{\Omega} \mathbb{P}(u_m) : \mathbb{D}(u_m) dx ds \leq \int_0^t \int_{\Omega} \rho u \cdot f dx ds \end{aligned} \quad (2.112)$$

tomando en cuenta la monotonicidad de $\mathbb{P}(\cdot)$ y las relaciones (2.112) y (2.111), se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} (\bar{\mathbb{P}} - \mathbb{P}(v)) : \mathbb{D}(u - v) dx ds \geq \limsup_{\|\cdot\| \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{\Omega} \rho_m |\mathbb{D}_t^{1/2} u_m|^2 dx ds \\ & + \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \rho_m \ln(\rho_m) dx - \int_{\Omega} \rho \ln(\rho) dx \end{aligned} \quad (2.113)$$

Como el funcional $\int_{\Omega} \rho \ln(\rho) dx$ es convexo, entonces el miembro de la derecha de (2.113) es no negativo y de esto se consigue $\operatorname{div}(\bar{\mathbb{P}}) = \operatorname{div}(\mathbb{P}(u))$. Así, ρ y u constituye la solución del problema (2.72)-(2.73) satisfaciendo (2.101). Además de la ecuación (2.113) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \ln(\rho) dx &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \rho_m \ln(\rho_m) dx \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{Q_T} \rho_m |\mathbb{D}_t^{1/2} u_m|^2 dx ds &= 0 \end{aligned}$$

Comparando (2.112) y (2.101) nos conduce a la relación:

$$\int_{Q_T} \mathbb{P}(u) : D(u) dx ds = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{Q_T} \mathbb{P}(u_m) : \mathbb{D}(u_m) dx ds$$

Consecuentemente, $\rho_m \rightarrow \rho$ fuertemente en $L_p(0, T, L_{\phi_1}(\Omega))$ con $\phi_1(s) = s \ln(s)$ y para $p < \infty$ arbitrario, $u_m \rightarrow u$ fuertemente en Y , y finalmente $\sqrt{p} \mathbb{D}_t^{1/2} u = 0$, por lo tanto, el Teorema 2.4.2 queda probado. \square

Teorema 2.4.3 *Sea $|f|^2 \in K_{\psi}(Q_T)$, $\rho_0 \in L_{\phi}(\Omega)$, $\rho_0 \geq 0$, $\beta \geq 4$, $u_0 \in X$ (es decir, se asume una extensión de la velocidad inicial en la zona vacía ($\rho_0 = 0$) de la clase X). Entonces existe una solución del problema (2.72), (2.73), que satisface la proposición 2.4.1 - (3), (2.78) y (2.79) según la Definición 2.4.3. Además la derivada promediada $\sqrt{\rho} \frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(Q_T)$ está bien definida y cualquier solución del problema del tipo señalado en la definición 2.4.3 satisface la identidad de la energía*

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |u|^2 dx \Big|_0^t + \int_0^t \int_{\Omega} (\mathbb{P}(u) : \mathbb{D}(u) - \rho u \cdot f) dx ds = 0 \quad (2.114)$$

Observación 2.4.2 Por la existencia de la derivada $\sqrt{\rho} \frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(Q_T)$ implica la acotación del valor de

$$\int_{Q_T} \rho(t, x) \left| \frac{u(t + \tau, x) - u(t, x)}{\tau} \right|^2 dx dt$$

uniformemente con respecto a τ .

Demostración del teorema 2.4.3

Mediante el método de Galerkin se construye una aproximación de la solución (ρ_m, u_m) que satisfacen (2.72) y (2.73) en el sentido de ortogonalidad para los m elementos de la base del espacio X . La existencia de ρ_m y u_m se debe al teorema de Schauder y por la compacidad de los coeficientes de Galerkin en el espacio $W_2^1(0, T)$, en cada etapa se tiene la siguiente estimación

$$\| \rho_m \|_{L_\infty(0, T, L_\phi(\Omega))} \leq C \quad (2.115)$$

$$\| u_m \|_{L_\infty(0, T, X)} \leq C \quad (2.116)$$

$$\left\| \sqrt{\rho_m} \frac{\partial u_m}{\partial t} \right\|_{L_1(Q_T)} \leq C \quad (2.117)$$

Las derivadas $\frac{\partial \rho_m}{\partial t}$ son acotadas por la ecuación de continuidad del sistema de conservación, las cuales satisfacen para todo m y la sucesión $\frac{\partial(\rho_m u_m)}{\partial t}$ son acotadas gracias a (2.117). Así también (2.115) - (2.117) son más fuertes que (2.107), (2.108) y cuando $m \rightarrow \infty$ en el límite es equivalente al modelo con presión (2.75) por lo que se obtiene la convergencia fuerte para u (pero no para ρ) y esto hace que se pruebe para $\sqrt{\rho u_t}$ en virtud de (2.117). \square

Viscosidad Límite

Denominaremos así al esfuerzo viscoso del flujo de mezcla gas sólido definido por el operador $\mathbb{D}(v)$, si \mathbb{P} está expresado solamente en términos de v , tal que, $|\mathbb{D}(v)| < A < +\infty$ y satisface (2.72) - proposición 2.4.1-(3) con la función convexa M definida en $[0, A)$ y tal que $M(s) \rightarrow +\infty$ cuando $s \rightarrow A$ (entonces \overline{M} es aceptado como una función lineal cerca del infinito) y A es un número real positivo. Este modelo puede ser usado para describir flujos cuando las tensiones son acotadas [3]. Desde la posición matemática este modelo relaciona la presión y la fracción volumétrica. Es interesante obtener la solución correspondiente a las ecuaciones (2.72), (2.73) en el límite de la viscosidad usual. Asumiendo que existe la aproximación del tensor esfuerzo \mathbb{P}_m satisfaciendo las propiedades (2.72) - proposición 2.4.1-(3) (con algunas funciones M_m definidas sobre \mathbb{R}^+) tales que

1. $\forall \delta > 0, \exists N > 0, \forall m > N : \mathbb{P}_m(v) = \mathbb{P}(v) \quad \forall v \text{ tal que } |\mathbb{D}(v)| \leq A - \delta$
2. Si $mes\{|\mathbb{D}(w)| \geq A\} > 0$, entonces $\int_{Q_T} M_m(|\mathbb{D}(w)|) dxdt \rightarrow +\infty$

Por ejemplo, en el caso (2.77) podemos tomar

$$\mathbb{P}_m(u) = \gamma_{0m}(\text{div } u)\mathbb{I} + \sum_{s=1}^N \gamma_{sm}(|\mathbb{D}^s(u)|^2 \mathbb{D}^{2s-1}(u))$$

donde $\gamma_{km}(s) = \gamma_m(s)$ cuando $s \leq A - 1/m$, γ_{km} son convexas, $\gamma_{km}(s) \leq \gamma_m(s)$ y $\gamma_{km}(s) > exp(s)$ cerca del infinito.

Reemplazando X_∞ por X para distinguirlo de los espacios X_m correspondientes al esfuerzo tensorial aproximado \mathbb{P}_m . El espacio L_M y $L_{\bar{M}}$ son equivalentes a L_∞ y L_1 respectivamente.

Los casos (2.75) y Proposición 2.4.1-(3) son equivalentes y se demuestran solo en el límite para los modelos con presión (2.75). La solución débil para el problema (2.72), (2.73), (2.75), (2.78) y (2.79) se define análogamente a la Definición 2.4.2 pero con $\rho \in L_\infty(Q_T)$, $u \in L_\infty(0, T, X_\infty)$.

Teorema 2.4.4 *Sea $f \in L_\infty(Q_T)$, $\rho_0 \in L_\infty(\Omega)$, $\rho_0 \geq 0$, $w/\rho_0 \in L_\infty(supp \rho_0)$. Entonces existe una solución $(\rho, u) \in L_\infty(Q_T) \times (L_\infty(0, T, X_\infty))^d$ del problema de flujo de mezcla gas-sólido-viscoso (2.72), (2.73) que satisfacen la proposición 2.4.1-(3), (2.78), (2.79) y las ecuaciones (2.72), (2.73) en los espacios $L_\infty(0, T, W_\infty^{-1}(\Omega))$ y $L_1(0, T, X_\infty^*)$ respectivamente.*

Los datos iniciales (2.78) son aceptados en el sentido de funciones continuas (con respecto a t) con valores en el espacio $W_\infty^{-1}(\Omega) \times X_\infty^$. La solución está dado por el límite de las funciones (ρ_m, u_m) , las cuales resuelven el problema de aproximación con la función de tensión \mathbb{P}_m . Cualquier solución del problema de la misma clase indicada satisface la ecuación (2.101).*

Demostración:

Las soluciones ρ_m, u_m del problema aproximado están acotadas en $L_\infty(0, T, L_\phi(\Omega)) \times L_{M_k}(0, T, X_k) \forall k$ y $\mathbb{P}(u_m)$ son uniformemente integrables. Consecuentemente existe el límite en el sentido débil

$$(\rho, u, \bar{\mathbb{P}}) \in L_\infty(0, T, L_\phi(\Omega)) \times L_{M_k}(0, T, X_k) \times L_1(Q_T) \quad \text{para todo } k$$

Este problema es análogo al problema con el estado del esfuerzo usual, tal que se prueba:

$$\rho_m u_m \rightarrow \rho u \quad \text{* -débilmente en } L_\phi(\Omega) \text{ c.t.p.t}$$

$$\rho_m u_m \otimes u_m \rightarrow \rho u \otimes u \quad \text{*}-\text{débilmente en } L_\Lambda(0, T, L_\phi(\Omega))$$

Como la función M_n es convexa y $M_k \succ M_n$ cuando $k > n$

$$\int_{Q'} M_n(|\mathbb{D}(u)|) dx ds \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{Q'} M_n(|\mathbb{D}(u_k)|) dx ds \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{Q'} M_k(|\mathbb{D}(u_k)|) dx ds \leq C$$

donde $Q' \subset Q_T$ es un conjunto arbitrario. Tomando primero Q' de la forma

$$Q' = \{(t, x) / |\mathbb{D}(u(t, x))| \geq A\}$$

se deduce que $|\mathbb{D}(u)| < A$ c.t.p. (consecuentemente, $\mathbb{P}(u)$ y $M(|\mathbb{P}(u)|)$ están bien definidos) y entonces cuando

$$Q' = \{(t, x) / |\mathbb{D}(u(t, x))| \geq A - \delta\}$$

se puede ver que $\mathbb{P}(u) \in L_1(Q_T)$.

Por otro lado

$$\int_{\Omega} M\left(\frac{|\mathbb{D}(u)|}{C}\right) dx \leq M\left(\frac{A}{C}\right) \text{mes}(\Omega) \leq 1$$

para C grande, entonces $u \in (L_\infty(0, T, X_\infty))^d$.

La prueba de $\text{div } \mathbb{P}(u) = \text{div } \bar{\mathbb{P}}$ es similar a la prueba realizada en la Sección 2.4. En este estudio en prioridad interesa los aspectos que aparecen en relación a la precisión (ó exactitud) que se requiere en los puntos donde $|\mathbb{D}|$ es cerrada para A .

Para una idea de la prueba, se considera que si $v \in K_M(Q_T)$ entonces

$$|\mathbb{D}(u_h)| \leq A - \delta(h)$$

(el índice h significa la regularización y $\delta(h) > 0$), y si $m \rightarrow \infty$ en la siguiente desigualdad

$$\int_0^t \int_{\Omega} (\mathbb{P}_m(u_m) - \mathbb{P}_m(v_\delta)) : \mathbb{D}(u_m - v_\delta) dx ds \geq 0$$

Tomando en cuenta la identidad de la energía para la solución aproximada y para la solución exacta ρ, u y $\bar{\mathbb{P}}$, se deduce

$$\int_0^t \int_{\Omega} (\bar{\mathbb{P}} - \mathbb{P}(v_\delta)) : \mathbb{D}(u - v_\delta) dx ds \geq 0$$

y solamente haciendo que $\delta \rightarrow 0$ se obtiene

$$\int_0^t \int_{\Omega} (\bar{\mathbb{P}} - \mathbb{P}(v)) : \mathbb{D}(u - v) dx ds \geq 0 \quad (2.118)$$

Haciendo $\mathbb{D}(u) = \tau(\vec{\nabla}) = (\mu)[\nabla \vec{\nabla} + \nabla \vec{\nabla}^T]$, para $v \in K_M(Q_T)$ arbitrario, esto permite establecer que $v = u - \epsilon w$; para ϵ pequeño, entonces, tomando el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ se obtiene la siguiente relación

$$\int_0^t \int_{\Omega} (\bar{\mathbb{P}} - \mathbb{P}(u)) : \mathbb{D}(w) dx ds \geq 0 \quad (2.119)$$

es claro que (2.119) se cumple para todo $w \in K$ donde

$$K \equiv \overline{\{w \in C^\infty(Q_T) / |w| \leq 1, \exists \epsilon > 0 : u - \epsilon w \in K_M(Q_T)\}}$$

(La clausura es tomada en el sentido débil en $K_M(Q_T)$).

También se puede ver ([32]):

$$K \supset \{w \in C^\infty(Q_T) / |w| \leq 1\}$$

y consecuentemente de (2.119) se obtiene

$$\operatorname{div} \bar{\mathbb{P}} = \operatorname{div} \mathbb{P}(u)$$

con lo cual quedaría probado el Teorema 2.4.4. \square

Note que la convergencia de $\rho_m \rightarrow \rho$ es fuerte pero la convergencia de $u_m \rightarrow u$ es en sentido débil.

CAPÍTULO 3

APROXIMACIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA DE MEZCLA CON ELEMENTOS FINITOS $P_1 + P_2$

3.1. Fundamento numérico para el problema de mezcla

Sean: $\rho : \bar{\Omega}_T \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\vec{v} : \bar{Q}_T \rightarrow \mathbb{R}^2$ funciones continuas sobre Q_T , donde $Q_T = \Omega \times (0, T)$, con $\Omega = (0, L) \times (0, 2L)$ y $L < \infty$.

Para hallar una solución débil en el límite $\epsilon = \rho_g/\rho_p \rightarrow 0$, esto origina a suponer que la fuerza ejercida por el gas es casi despreciable.

Por tanto de las ecuaciones (1.50)-(1.53) cuando $\epsilon \rightarrow 0$, se tiene que la fase partículas con densidad de partículas ρ_p constante, es la fase que mas prevalece o es la que mas está presente en el volumen de control, entonces el modelo de mezcla (frontera libre regularizado) quedaría constituido del modo siguiente:

$$\partial_t \rho + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.1)$$

$$\partial_t(\rho \vec{v}) + \text{div}(\rho \vec{v} \otimes \rho \vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}}(\rho \frac{P}{\rho_p})) = \text{div} \left(\frac{\tau(\vec{v})}{\rho_p} \right) + \rho \vec{g} \quad (3.2)$$

$$\tau(\vec{v}) = (\mu)[\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T] \quad (3.3)$$

$$\mu = (1 - \rho)\mu_g + \rho\mu_p, \text{ Viscosidad de la mezcla} \quad (3.4)$$

donde $\rho_p > 0$.

Nota 3.1.1 *La condición de compresibilidad del flujo bifásico depende de la variable ρ , que representa la fracción volumétrica de las partículas sólidas y de la porosidad $1 - \rho$ de la siguiente ecuación*

$$\text{div}((1 - \rho)\vec{u} + \rho\vec{v}) = 0$$

También se puede observar: la ecuación de Conservación de la cantidad de masa de la fase gaseosa casi se mantiene, puesto que esta fase gana masa a costa de la fase partículas, si se considera que se elimina la gasificación de las partículas, entonces no habría pérdida de masa de la fase partículas.

De la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento de la fase gaseosa, permanecen las fuerzas de presión y la de rozamiento entre partículas.

De la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento de la fase partículas se ha eliminado la pérdida de cantidad de movimiento por gasificación y se mantienen todos los demás términos.

En adelante, para la aproximación del problema la notación que utilizaremos es:

- ρ : concentración volumétrica de partículas sólidas.
- \vec{v} : velocidad de partículas sólidas.
- ∇p_c : gradiente de presión colisional.
- ∇p_h : gradiente de presión hidrodinámica.
- ∇P : gradiente de la presión global.
- \vec{u} : velocidad del gas.
- p_h : presión hidrodinámica.
- p_c : presión colisional.

Todas estas variables dependientes están definidas en el dominio Ω_t , dependientes de las variables independientes que representan un punto del espacio y tiempo, (\vec{x}, t) .

Desacoplamiento del sistema bidimensional

Se propone el siguiente procedimiento de desacoplamiento del sistema, a partir de la presión global definida por $P = p_c + p_h$ y su gradiente $\nabla P = \nabla p_c + \nabla p_h$ en la ecuación (3.4), donde p_c está dada por la ecuación de estado y es diferenciable con respecto a cada una de sus direcciones.

Entonces, la ecuación de la cantidad del movimiento (3.2) se puede expresar por:

$$\partial_t(\rho\vec{v}) + \text{div}(\rho\vec{v} \otimes \vec{v}) + \nabla p_c = \text{div}(\nu\rho(\vec{\nabla}v)) + \rho\vec{g} - \nabla p_h$$

El vector \vec{u} se puede expresar como

$$\vec{u} = (\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v}$$

entonces, multiplicando a esta expresión por el factor $(1 - \rho)$, e introduciendo una función \mathbf{w} , tal que

$$\nabla \mathbf{w} = (1 - \rho)(\vec{u} - \vec{v})$$

operando en esta ecuación se convierte en

$$(1 - \rho)\vec{u} + \rho\vec{v} = -\nabla \mathbf{w} - \vec{v}$$

por lo que la presión hidrodinámica p_h satisface la ecuación

$$\nabla p_h = \frac{q(\rho)\nabla \mathbf{w}}{1 - \rho}$$

Aplicando el operador divergencia en la ecuación anterior, y considerando la ecuación que corresponde al flujo de la mezcla total, se obtiene que

$$-\Delta \mathbf{w} = \text{div}(\vec{v})$$

esta ecuación en forma equivalente se escribiría por:

$$-\text{div}\left(\frac{1 - \rho}{q(\rho)}\nabla p_h\right) = \text{div}(\vec{v})$$

que se requiere resolver para obtener el valor de ∇p_h .

Dado $\mathbf{w} \in C([0, T]; V^m)$, se puede expresar el problema (3.1)-(3.2) en la forma siguiente

$$\text{Hallar } \rho \in C^1(\overline{Q}_T) \text{ tal que } \begin{cases} \partial_t \rho + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 & \text{en } Q_T \\ \rho|_{t=0} = \rho_0^m & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (3.5)$$

y dado $\mathbf{w} \in C([0, T]; V^m)$ y $\rho \in C^1(\overline{Q}_T)$

Hallar $\vec{v} \in C^1(0, T, V^m)$ tal que:

$$\begin{cases} \partial_t(\rho \vec{v}) + \text{div}(\rho \vec{v} \otimes \rho \vec{v}) + \overrightarrow{\text{grad}}(\rho \frac{P_p}{\rho_p}) = \text{div}\left(\rho \frac{\tau(\vec{v})}{\rho_p}\right) + \rho \vec{g} \\ \vec{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0 & \text{en } \Omega, \text{ para todo } \vec{v} \in V^m \end{cases} \quad (3.6)$$

observando las ecuaciones (3.5) - (3.6), éstas quedarían desacopladas y su resolución se daría por etapas resolviendo cada uno de estos problemas para $\rho_p = 1$ que se dan a continuación:

Problema 1

Encontrar $p_h(x)$, tal que para un instante de tiempo t_n , con $n = 1, 2, \dots$; satisfice la siguiente ecuación

$$- \operatorname{div} \left(\frac{1 - \rho^n}{q(\rho^n)} \nabla p_h \right) = \operatorname{div}(\vec{\nabla}^n) \quad \text{en } \Omega$$

Condiciones iniciales: $\vec{\nabla}(0, x) = \vec{\nabla}^0(x)$, $\rho(0, x) = \rho^0(x)$ y $\vec{u}(0, x) = \vec{u}^0(x)$.

Condiciones de contorno

$$\begin{aligned} \vec{M} \cdot \vec{n} &= -M_0 \quad \text{sobre } \Gamma_e \text{ (entrada)} \\ \text{donde } \vec{M} &= (1 - \rho^n) \vec{u}^n + \rho^n \vec{\nabla}^n \\ M \cdot \vec{n} &= \vec{0} \quad \text{sobre } \Gamma_2 \text{ paredes laterales} \\ p_h &= \vec{0} \quad \text{sobre } \Gamma_3 \text{ salida} \end{aligned}$$

M_0 representa el flujo de aire entrante por el fondo del lecho.

Problema 2

Hallar ρ y $\vec{\nabla}$ tales que:

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho) + \operatorname{div}(\rho \vec{\nabla}) &= 0 \\ \partial_t(\rho \vec{\nabla}) + \overrightarrow{\operatorname{div}}(\rho \vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla}) + \nabla p_c &= \\ &= \overrightarrow{\operatorname{div}}(\nu \rho(\vec{\nabla} \vec{\nabla})) + \rho(\vec{g} + \nabla p_h) \\ p_c(\rho) &= A(\rho)\rho \end{aligned}$$

junto a las condiciones iniciales $\vec{\nabla}(0, x) = \vec{\nabla}^0(x)$, $\rho(0, x) = \rho^0(x)$ y $\vec{u}(0, x) = \vec{u}^0(x)$ para $n = 0, 1, \dots$; y las condiciones de contorno dadas que satisfacen la regularidad de las ecuaciones.

Problema 3

Halle \vec{u} tal que

$$\vec{u} = -\frac{1}{q(\rho)} \nabla p_h + \vec{\nabla}$$

Como se observa, nos encontramos con tres problemas que se tienen que resolver para determinar las funciones incógnitas \vec{u} , p_h , ρ , $\vec{\nabla}$, entonces para ello se realizará una linealización.

Sistema de flujo convectivo-difusivo-reactivo bidimensional

El sistema de conservación de Navier Stokes compresible bidimensional se puede expresar en su forma compacta conservativa y ser casi linealizado como se puede ver en casos similares, introduciendo una función vectorial de estados $\vec{\varphi}$, $\vec{\nabla} = (v_1, v_2)$, de este modo el sistema conservativo en su forma de flujo convectivo-difusivo-reactivo, para

$\rho_p = 1$ en [27], [48] queda expresado por:

$$\bar{\varphi} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$\bar{F}(\bar{\varphi}) = (F_l^1(\bar{\varphi}) F_l^2(\bar{\varphi}))^T = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho v_1 \\ p_c + \rho v_1^2 \\ \rho v_1 v_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \rho v_2 \\ \rho v_1 v_2 \\ p_c + \rho v_2^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T \quad l = 1, 2, 3 \quad (3.8)$$

$$\bar{G}(\bar{\varphi}) = (G_1(\bar{\varphi}) G_2(\bar{\varphi})) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$\tau_{xx} = \frac{\mu}{Re_\infty} \frac{2}{3} \left(2 \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\mu}{Re_\infty} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yy} = \frac{\mu}{Re_\infty} \frac{2}{3} \left(2 \frac{\partial v_2}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial x} \right)$$

$$\mu = \rho \nu$$

ν representa la viscosidad cinemática del flujo y es una constante positiva y

$$\bar{S}(\bar{\varphi}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \left(\frac{q(\rho)}{1-\rho} \left(M(t) - \frac{\partial p_h}{\partial x} \right) - g_x \right) \\ \rho \left(\frac{q(\rho)}{1-\rho} \left(M(t) - \frac{\partial p_h}{\partial y} \right) - g_y \right) \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

donde: $\bar{F}(\bar{\varphi})$ es el flujo convectivo, $\bar{G}(\bar{\varphi})$ flujo difusivo y $\bar{S}(\bar{\varphi})$ flujo reactivo respectivamente y el sistema conservativo del flujo convectivo - difusivo -reactivo queda expresado en su forma compacta por:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (F(\varphi) - G(\varphi)) = S(\varphi) \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{F_1(\varphi)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(\varphi)}{\partial y} + \frac{\partial G_1(\varphi, \varphi_x)}{\partial x} + \frac{\partial G_2(\varphi, \varphi_y)}{\partial y} - S(\varphi) = 0. \quad (3.11)$$

Ahora falta encontrar la solución:

$$(\rho, u, \bar{\mathbb{P}}) \in L_\infty(0, T, L_\phi(\Omega)) \times L_{M_k}(0, T, X_k) \times L_1(Q_T) \quad \text{para todo } k$$

Sistema de flujo convectivo-difusivo-reactivo unidimensional

En un espacio unidimensional, teniendo en cuenta un subconjunto $\Omega = [0, L] \subset \mathbb{R}$, abierto acotado y de frontera regular; la conservación de las cantidades φ_1, φ_2 a través del espacio y del tiempo para todo punto $(x, t) \in \Omega_t \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, representa la posición de una partícula x en el instante t de un medio continuo y n el vector normal exterior a la frontera $\partial\Omega_t$ de Ω_t , con la regularidad suficiente de las funciones $\bar{\varphi} \in (C^1(\Omega_t) \cap C^0(\vec{\Omega}_t))^2$, que satisface las ecuaciones del problema expresado en su forma compacta o conservativa. que el vector de aceleración de la gravedad $\vec{g} = -g\vec{e}_3$ es paralelo al vector unitario \vec{e}_3 en el eje vertical al que denotamos por X , así mismo se puede observar que las funciones P y ρ son funciones que dependen solo de x solamente, en el caso particular que la ecuación de estado p_c de la fase partículas es una función que solo dependa de ρ , se tendría que $\partial p_c / \partial x$ es paralelo a \vec{e}_3 , y de la ecuación de Navier Stokes anterior se puede ver también que \vec{u} es paralelo a \vec{e}_3 , por tanto es una función que depende exclusivamente de x . En una primera instancia el problema resulta de gran interés resolverlo en una dimensión.

Entonces, tomando las consideraciones anteriores, en el que se han desacoplado las variables \vec{u} y \vec{v} , sus formas escalares se denotarán como u y v respectivamente, las cuales satisfacen la condición de mezcla bifásica, que puede escribirse como la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial x}((1 - \rho)u + \rho v) = 0$$

entonces, introduciendo $M = ((1 - \rho)u + \rho v)$, una función diferenciable que representa el suministro de aire al interior del lecho, luego en una dimensión, la condición de mezcla

$$\text{div } M = \frac{\partial M}{\partial x} = 0$$

esto conduce a representar M como una función constante en espacio pero variable respecto al tiempo, entonces en adelante a esta función lo denotaremos por $M(t)$, por ser una función que varía solamente en la variable t .

En el caso de una nube de partículas suspendidas, mantener a las partículas en esta posición, la función que representa la cantidad de aire entrante, se debe considerar como una condición de frontera en el problema de contorno.

- Si $M(t) = 0$ no hay entrada de partículas sólidas solo de aire por el fondo del lecho, es decir, que aparentemente las partículas se encuentran en reposo en el interior del recipiente al que se denomina lecho de partículas.

- Si $M(t) > 0$ entonces hay entrada de partículas sólidas y de aire y se producirá la fluidización en el lecho.

En cualesquiera de los casos, se debe considerar la ecuación:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = M(t) - v$$

Entonces el Problema 1 se convierte en una sucesión de problemas elípticos que se tienen que resolver en cada instante t_n :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 W^n}{\partial x^2} &= f_n, \quad \text{en } \Omega \\ f_n &= \frac{\partial v^n}{\partial x}, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

Condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W^n}{\partial x^2} &= M(t_n) - v^n, \quad \text{sobre la frontera inferior} \\ W^n &= 0 \quad \text{sobre la frontera superior.} \end{aligned}$$

Esta consideración es muy importante tenerlo en cuenta, la que no será la misma en el caso de una aproximación bidimensional. En el caso unidimensional en la práctica, solamente se considerará el segundo miembro de la ecuación.

Las ecuaciones del Problema 2 en una dimensión, se convierte en un sistema de Navier Stokes de flujo compresible unidimensional con término fuente no lineal.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2 + p_c)}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho \left(\frac{\partial}{\partial x} v \right) \right) - \rho g + \frac{\rho q(\rho)}{1 - \rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} M \right) \end{aligned}$$

Para cerrar el sistema consideramos la ecuación de estado definida por la función

$$p_c(\rho) = \mathcal{K}(\rho)$$

en particular tomaremos:

$$\mathcal{K}(\rho) = \rho^{\gamma_0 - 1} \exp\left(\frac{k\rho}{\rho - \rho^*}\right), \quad q(\rho) = \frac{C_q}{(1 - \rho)^m}, \quad C_q > 0, m > 0$$

es decir

$$p_c(\rho) = \rho^{\gamma_0} \exp\left(\frac{k\rho}{\rho^* - \rho}\right);$$

El Problema 3 quedaría expresado por la ecuación algebraica

$$u = \frac{1}{1 - \rho} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) + v$$

donde

- ρ : densidad volumétrica de la fase sólida.
 u : velocidad del gas en una dirección.
 v : velocidad de las partículas de la fase sólida en una dirección.
 γ : coeficiente adiabático a presión y volumen constante.

completaremos el sistema con la ecuación de estado

$$p_c(\rho) = p^{\gamma_0} \exp\left(\frac{k\rho}{\rho^* - \rho}\right); \quad \gamma_0 \geq 1,$$

con los datos iniciales

$$\rho|_{t=0} = \rho_0 \geq 0, \quad \rho \vec{\nabla}|_{t=0} = w$$

y la condición de frontera

$$\vec{\nabla}|_{\partial\Omega \times (0, T)} = 0$$

El sistema de leyes de conservación del flujo bifásico unidimensional escrito como un sistema de flujo convectivo-difusivo-reactivo puede expresarse en su forma compacta y conservativa introduciendo la función vectorial de estados $\vec{\varphi}$, de variables conservativas, así como también funciones vectoriales de flujo convectivo $\vec{F}(\vec{\varphi})$, de flujo difusivo \vec{G} y de fuerzas externas ($\vec{S}(\vec{\varphi})$), siendo

$$\begin{aligned} \vec{\varphi} &= \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \\ \vec{F}(\vec{\varphi}) &= \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p_c \end{pmatrix} \\ \vec{G}(\vec{\varphi}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \rho \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ν representa la viscosidad cinemática del flujo y es una constante positiva y

$$\vec{S}(\vec{\varphi}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \left(\frac{q(\rho)}{1 - \rho} (M(t) - v) - g_x \right) \end{pmatrix}$$

El vector de fuerzas externas $\vec{S}(\vec{\varphi})$ son las que se oponen al movimiento es llamado también término fuente o vector de reacción, donde g_x representa la aceleración de la gravedad, por comodidad se denota también por g .

Entonces las ecuaciones del flujo bifásico unidimensional, quedan expresadas matricialmente en su forma conservativa como el sistema de flujo Convectivo-Difusivo-Reactivo no lineal en función del vector de estado $\vec{\varphi}(x, t)$

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x}(\vec{\varphi}) - \frac{\partial}{\partial x} \vec{G}_x(\vec{\varphi}) = \vec{S}(\vec{\varphi}) \quad (3.12)$$

donde $\bar{\varphi}(x, t) = [\varphi_1(x, t), \varphi_2(x, t)]^T$ tiene componentes a las variables ρ y ρv respectivamente; \vec{F}_x y \vec{G}_{xx} son las variaciones respecto a la variable independiente x de los flujos convectivos y difusivos respectivamente y \vec{S} es la función término fuente no lineal.

Condiciones iniciales en $[0, L]$:

Estarían dadas para $\bar{\varphi}(x, t) = [\varphi_1(x, t), \varphi_2(x, t)]^T$ por:

$$\bar{\varphi}_1(x, 0) = \begin{cases} \bar{\varphi}_1^0(x) & \text{si } x \leq \frac{L}{4} \\ 0 & \text{si } x > \frac{L}{4} \end{cases}$$

$$\bar{\varphi}_2(x, 0) = \bar{\varphi}_2^0(x)$$

$$u(x, 0) = u^0(x)$$

donde $\varphi_1^0(x) > 0$, y $L/4$ es la altura inicial del lecho de partículas en el reactor.

Condiciones de contorno:

Asumiendo para un espacio cerrado en el intervalo de tiempo $[0, L]$, estan dadas por

$$\text{Condición de pared} \begin{cases} \varphi(0, t) = m_0(t) \\ \varphi(L, t) = m_L(t) \end{cases}$$

$$\text{Condición de entrada} \quad M(0, t) = M_0$$

donde, $m_0(t)$ representa la entrada de flujo de partículas sólidas al lecho, $m_L(t)$ representa la salida del flujo de partículas del lecho y U_0 representa la condición de contorno para la velocidad del gas (inyección del flujo de aire por la parte inferior del lecho).

Singularidades en el sistema unidimensional

Como la ecuación de estado para la fase partículas, relaciona la concentración volumétrica de partículas ρ con la componente colisional de la presión $p(\rho)$, su comportamiento depende de los valores que tomen el exponente adiabático y el coeficiente regulador de la presión, la que actúa sobre la concentración volumétrica de las partículas cuando ésta tiende a un congestionamiento máximo. En tal sentido se elegirá un parámetro óptimo para estas constantes.

La propiedad de homogeneidad del flujo, del sistema linealizado, no se cumple para este caso, entonces se propone superar esta dificultad de la heterogeneidad introduciendo una nueva matriz equivalente a la matriz Jacobiana del flujo convectivo, mediante una alternativa que se presenta en [54] para superar ésta dificultad y consiste en la descomposición del flujo, en flujo por la derecha (positivo) y flujo por la izquierda (negativo) pero

que con esta regularización en este caso de estudio no se logra anular las oscilaciones puesto que la regularidad de la matriz introducida en la definición del flujo convectivo, depende de la forma que tomen los valores propios de la matriz jacobiana y en este caso dependen de la derivada de la presión colisional $p_c = p(\rho)$, que significa fuertes gradientes de la presión en la zona vacía. Por tanto, para regularizar las singularidades que se presentan en la zona vacía o libre de partículas del problema unidimensional en estudio, se propone una linealización del sistema y luego la siguiente regularización.

Tratamiento cuasilineal del flujo unidimensional

En la linealización se procede a la obtención de la matriz Jacobiana solamente para el vector de los flujos convectivos del sistema. Los flujos difusivos y término fuente se conservan tal cual, por tanto el flujo no lineal se transforma en un sistema de EDP cuasilineal de primer orden no homogéneo y queda expresado así:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\varphi} + A(\vec{\varphi}) \frac{\partial}{\partial x} \vec{\varphi} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{G}_x(\vec{\varphi}) + \vec{S}(\vec{\varphi})$$

donde $A(\vec{\varphi})$ es la matriz jacobiana de \vec{F} .

Una vez aplicado este método de linealización al sistema conservativo, $A(\vec{\varphi})$ estará definida por la siguiente matriz:

$$A(\vec{\varphi}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^2 + p'_c(\varphi_1) & 2\frac{\varphi_2}{\varphi_1} \end{pmatrix}$$

$$p'_c = \frac{\gamma(\varphi_1)_c(\varphi_1)}{\varphi_1}$$

donde:

$$\gamma(\varphi_1) = \gamma_0 + \frac{\varphi_1 \rho^*}{(\rho^* - \varphi_1)^2}$$

Considerando $\varphi_1 = \rho$, para la determinación de la ecuación de estado $p_c(\rho)$, tendríamos que

$$p'_c = \rho^{\gamma_0 - 1} \exp\left(\frac{k\rho}{\rho^* - \rho}\right), \quad \gamma_0 \geq 1$$

donde $\gamma(\rho) > 0$, $\forall \rho \in [0, \rho^*)$, γ representa la función adiabática para la fase partículas y tiene como variable independiente a ρ . La constante positiva ρ^* es tal que $0 \leq \rho < \rho^* \leq 1$ y representa el empaquetamiento máximo de las partículas sólidas, $k \in (0, 1)$ es un parámetro regulador de esta función.

El comportamiento de la ecuación de estado

$$\begin{aligned} p_c &= p(\rho) \\ &= \rho^{\gamma_0} \exp\left(\frac{k\rho}{\rho^* - \rho}\right), \quad \gamma_0 > 1 \end{aligned}$$

depende de que valor tome γ_0 , y k .

Por ejemplo para los valores de:

$$\gamma_0 = 1.44; k = 0.01; \rho^* = 0.5$$

La no linealidad del término fuente está influenciado por el comportamiento de la función q , donde

$$q(\rho) = \frac{C_q}{(1 - \rho)^m}; \quad m > 1$$

que depende del coeficiente C_q y del valor que tome el exponente m en el término del denominador. Por ejemplo, si $C_q = 1$, $m = 2$.

Ahora se presenta otras dificultades matemáticas respecto a las componentes del sistema cuasilineal que dependen de la variable velocidad de partículas sólidas v , la cual está involucrada en el vector de flujos convectivos $\vec{F}(\vec{\varphi}) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p_c \end{pmatrix}$ y quien a su vez se involucra en su matriz Jacobiana $A(\vec{\varphi})$ y como la concentración volumétrica de partículas ρ del sistema, la que no es nula en la zona donde si hay partículas, cuya matriz es diagonalizable porque sus valores propios son todos reales y diferentes, sin embargo en el caso de que una zona del reactor sea libre de partículas sólidas, la concentración volumétrica ρ si es nula por tanto aquí es donde se genera una singularidad en el sistema, para cada $(x, t) \in \Omega_t$, lo que hace que se pierda la hiperbolicidad estricta del sistema, propagando la singularidad a toda la matriz convectiva del sistema. La función v que representa a la velocidad de las partículas es la función involucrada también en los autovectores a la matriz jacobiana de \vec{F} y es la que genera el efecto de singularidad para ρ , y hace que existan oscilaciones en el tramo de la discontinuidad por el movimiento de las partículas, haciendo que los términos del coeficiente de viscosidad se anulen y se pierda la convergencia para la solución, entonces para evitar esta dificultad en el dominio, se propone un controlador de la velocidad definido por $|v|_\epsilon$, el cual regulariza a v con un parámetro ϵ del tipo Harten ([21], [30]), denominada regularización de Harten, y en este trabajo se aplica en la redefinición de la norma ϵ para los autovectores v asociados a la matriz y definida por:

$$|v|_\epsilon = |v| + \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \text{sig}(\epsilon - |v|) \left(\frac{v^2 + \epsilon^2}{2\epsilon} - |v| \right) \right) \right\}$$

donde $0 < \epsilon \ll 1$ es un parámetro muy pequeño, donde $\epsilon \rightarrow 0$, en la zona vacía cuando la concentración volumétrica de partículas ρ es cero.

En este caso también la función del flujo convectivo del sistema no satisface la propiedad de homogeneidad del flujo, es decir que $\vec{F}(\vec{\varphi}) \neq A(\vec{\varphi})\vec{\varphi}$ condición suficiente

pero no necesaria para la aproximación del flujo (en el caso que se use la técnica de la descomposición del flujo).

Para salvar la no homogeneidad del flujo convectivo asociado a la matriz A , se propone también la introducción de una matriz A^* definida de la siguiente forma:

$$A^*(\bar{\varphi}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^2 + p'_c(\varphi_1) & 2\frac{\varphi_2}{\varphi_1} \end{pmatrix}$$

con la que se cumple la propiedad de homogeneidad, es decir,

$$\vec{F}(\bar{\varphi}) = A^*(\bar{\varphi})\bar{\varphi}$$

con

$$c^2 = \frac{p'_c}{\gamma}$$

donde $c = \pm \sqrt{\frac{p'_c}{\gamma}}$ representa la velocidad del sonido para la fase partículas, y se aproxima la matriz A^* a la matriz Jacobiana, multiplicando por un factor $\frac{1}{\gamma\varphi_1}$ al término $p'_c(\varphi_1)$, se consigue que $\gamma(\varphi_1) \rightarrow \gamma_0$ cuando $\varphi_1 \rightarrow 0$.

Analizando la matriz Jacobiana de $\vec{F}(\varphi)$, $A^*(\varphi)$ tal que:

$$|A^*| = R^{-1}|\Lambda^*|R$$

donde Λ^* es la matriz diagonal de los valores propios de $A^*(\varphi)$, con

$$A(\bar{\varphi}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^2 + p'_c(\varphi_1) & 2\frac{\varphi_2}{\varphi_1} \end{pmatrix}$$

entonces A^* satisface la propiedad:

$$\vec{F}(\varphi) = A^*(\varphi)\varphi$$

donde $\bar{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)^T$.

Si denotamos por $c_p(\varphi_1) = \pm \sqrt{p'_c(\varphi_1)}$ entonces simplificando $A^*(\varphi)$, se obtiene una matriz Q la cual se puede escribir como el operador matricial

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_p^2 - v^2 & 2v \end{pmatrix}$$

Nota 3.1.2

El valor c_p^2 es una cantidad que se le aproxima al cuadrado de la velocidad del sonido en la fase sólida y $\gamma(\rho) : [0, \rho^*) \rightarrow \mathbb{R}$ es la función adiabática, definida por:

$$\gamma(\rho) = \gamma_0 + \frac{\rho k \rho^*}{(\rho - \rho^*)^2}, \quad \gamma_0 \geq 1$$

Si $\rho \rightarrow 0$, $\gamma(\rho) \rightarrow \gamma_0$, $c_p^2 \rightarrow 0$.

Más adelante para introducir los Q -esquemas numéricos ([54]), es necesario determinar una condición de diagonalización para Q .

Para ello hallaremos los valores propios de la matriz Jacobiana de \vec{F} , denotada ya como Q , obteniéndose de la siguiente ecuación:

$$|Q - \lambda I_2| = 0$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\varphi_2}{\varphi_1} - c_p = v - c_p \\ \lambda_2 &= \frac{\varphi_2}{\varphi_1} + c_p = v + c_p \end{aligned}$$

son los valores propios y satisfacen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} Q \vec{\alpha} &= \lambda_1 \vec{\alpha}, \\ Q \vec{\beta} &= \lambda_2 \vec{\beta} \end{aligned}$$

donde los vectores $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$ son los vectores propios asociados a Q que se obtienen al resolver los sistemas de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} (Q - \lambda_1 I_2) \vec{\alpha} &= \vec{0} \\ (Q - \lambda_2 I_2) \vec{\beta} &= \vec{0} \end{aligned}$$

así

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ v - c \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ v + c \end{pmatrix}$$

De acuerdo a lo dicho anteriormente, λ_1 y λ_2 son los valores propios de la matriz Jacobiana y $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ son los vectores propios correspondientes a cada valor propio respectivamente.

Estos vectores son linealmente independientes, por tanto constituyen los vectores columnas de la matriz propia R , por lo que se le denomina matriz propia asociada a los autovectores y a sus valores propios λ_1 y λ_2 respectivamente.

La matriz de vectores propios R es una matriz no singular, por tanto, se puede determinar su inversa R^{-1} y tales que $RR^{-1} = I_2$, donde I_2 es la matriz identidad de

orden 2. Lo cual indica que Q es diagonalizable, es decir, existe una matriz diagonal Λ de componentes en su diagonal los valores propios λ_1 y λ_2 , tal que

$$\begin{aligned}\Lambda &= RQR^{-1} \\ Q &= R^{-1}\Lambda R\end{aligned}$$

siendo Λ , la matriz

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Denotemos por $|Q|$ a una matriz definida por

$$|Q| = R|\Lambda|R^{-1}$$

se denotará a la siguiente matriz positiva diagonal de Λ por:

$$|\Lambda| = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 \\ 0 & |\lambda_2| \end{pmatrix}$$

$|\lambda_1|$ y $|\lambda_2|$ son los valores absolutos de los valores propios λ_1 y λ_2 .

Por tanto ampliando con todos sus coeficientes $|Q|$ quedaría expresada así:

$$|Q| = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2|\lambda_1| - \lambda_1|\lambda_2| & -|\lambda_1| + |\lambda_2| \\ \lambda_1\lambda_2(|\lambda_1| - |\lambda_2|) & -\lambda_1|\lambda_1| + \lambda_2|\lambda_2| \end{pmatrix}$$

En los flujos convectivos, se verifica que cuando $\rho = 0$, $\lambda_2 = \lambda_1$ puede en $t > 0$ aparecer singularidades en los coeficientes de la matriz $|Q|$, para prevenir esta dificultad se realiza una corrección asintótica.

Si $\rho \rightarrow 0$, $c_p \rightarrow 0$, entonces $(\lambda_2 - \lambda_1) = -2c_p$, en el límite lo cual significa que, el sistema sin términos de difusión pierde también su hiperbolicidad estricta en la zona libre de partículas, generando singularidades en la matriz $|Q|$ y se corrigen estas singularidades en cada una de sus componentes, cuyo resultado se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}|Q|_{11} &\rightarrow 0, & |Q|_{12} &\rightarrow sig(v) \\ |Q|_{21} &\rightarrow -|v|^2 sig(v), & |Q|_{22} &\rightarrow 2|v|\end{aligned}$$

entonces $|Q|_\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & sig(v) \\ -|v|^2 sig(v) & 2|v| \end{pmatrix}$.

Antes de pasar al proceso de discretización se llevará el problema descrito en la sección anterior a un problema equivalente mediante la formulación variacional que a continuación se detalla.

Según la teoría de distribuciones, se puede extender también una formulación integral en espacios de Sobolev, al sistema generalizado de flujo viscoso Compresible en 1D el cual puede ser expresado en su forma compacta como un problema variacional de flujo conservativo.

Formulación Variacional del problema de flujo unidimensional

Sea una función test $\bar{w} \in H_0^1(\Omega)$, multiplicando por esta función a toda la ecuación, de flujo conservativo no lineal, se obtiene la siguiente formulación:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} \bar{w} dx + \int_{\Omega} \frac{\partial \vec{F}}{\partial x}(\bar{\varphi}) \bar{w} dx = \int_{\Omega} S(\bar{\varphi}) \bar{w} dx$$

Luego según el teorema de Stokes y las identidades de Green para el segundo término del primer miembro, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \vec{F}}{\partial x}(\bar{\varphi}) \bar{w} dx &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (\vec{F}(\bar{\varphi}) \bar{w}) dx - \int_{\Omega} \vec{F}(\bar{w}) \frac{\partial}{\partial x} \bar{w} dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \vec{F}(\bar{w}) \cdot n dx - \int_{\Omega} \vec{F}(\bar{w}) \frac{\partial}{\partial x} \bar{w} dx \\ \int_{\Omega} \frac{\partial \vec{G}}{\partial x}(\bar{\varphi}) \bar{w} dx &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (\vec{G}(\bar{\varphi}) \bar{w}) dx - \int_{\Omega} \vec{G}(\bar{w}) \frac{\partial}{\partial x} \bar{w} dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \vec{G}(\bar{w}) \cdot n dx - \int_{\Omega} \vec{G}(\bar{w}) \frac{\partial}{\partial x} \bar{w} dx \end{aligned}$$

Entonces, el flujo variacional del sistema puede ser expresado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \bar{\varphi} \bar{w} dx + \int_{\partial\Omega} \vec{F}(\bar{\varphi}) \bar{w} \cdot n dx - \int_{\Omega} \vec{F}(\bar{\varphi}) \frac{\partial}{\partial x} \bar{\varphi} dx \\ = \int_{\partial\Omega} \vec{G}(\bar{\varphi}) \bar{w} \cdot n dx - \int_{\Omega} \vec{G}(\bar{w}) \frac{\partial}{\partial x} \bar{w} dx + \int_{\Omega} S(\bar{\varphi}) \bar{w} dx \end{aligned} \quad (3.13)$$

a los términos que por mientras no están afectados por la variable temporal los asociamos en un operador $H(\bar{\varphi}(x, t))$ donde:

$$H(\bar{\varphi}(x, t)) = - \int_{\partial\Omega} \vec{F}(\bar{\varphi}) n_x dx + \int_{\partial\Omega} \vec{G}(\bar{\varphi}) n_x dx + \int_{\Omega} S(\bar{\varphi}) dx$$

denotando por: $\frac{d}{dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \bar{w} \cdot \frac{\partial}{\partial x}$ para la variable temporal t y fijando x e introduciendo la función integral $W(\bar{\varphi}(x, t)) = \int_{\Omega} \bar{\varphi} \bar{w} dx$, entonces el problema quedaría formulado como el problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= H(\bar{\varphi}(x, t)) \\ \varphi(t_0) &= \varphi^0 \end{aligned}$$

3.1.1. Formulación Variacional del problema de flujo bidimensional

Para hallar la solución

$$(\rho, \vec{\mathbf{v}}, P)$$

Se expresará el problema en sentido débil o variacional en la siguiente forma:

Halle las funciones $\rho \in L^\infty(\Omega_t)$, $\vec{\mathbf{v}} \in (L^2_{loc}(\Omega_t))^n$ con $\partial_i \vec{\mathbf{v}} \in (L^2_{loc}(\Omega_t))^n$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. $\vec{\mathbf{u}} \in (L^2_{loc}(\Omega_t))^n$, $P \in L^2_{loc}(\Omega_t)$, de modo que multiplicando en las ecuaciones (3.5) - (3.6) por $\Phi \in C^1(\Omega_t) \cap C^0(\Omega_t)$ de soporte compacto contenido en Ω_t y aplicando la fórmula de Green verifiquen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \rho(\Phi_t + \vec{\mathbf{v}} \nabla \Phi) dx dt &= \int_0^\infty \int_{\Gamma_0} \rho \vec{\mathbf{v}} \vec{\mathbf{n}} \Phi ds dt - \int_{\Omega} \rho(x, 0) \Phi(x, 0) dx \\ \int_{\Omega_t} \rho \vec{\mathbf{v}} (\Phi_t + \vec{\mathbf{v}} \nabla \Phi) dx dt + \int_{\Omega} P \tilde{I} - \rho \mathbb{D}(\vec{\mathbf{v}}) \nabla \Phi dx dt &= - \int_{\Gamma_0} \rho \vec{\mathbf{g}} \Phi dx dt \end{aligned}$$

con

$$\nabla p_h = -\rho q(\rho)(\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}})$$

en el sentido de distribuciones:

$$\int_{\Omega} p_h \nabla \varphi dx dt = \int_{\Omega} \rho q(\rho)(\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}) \varphi dx dt \quad \forall \varphi \in \mathbb{D}(\Omega)$$

donde los integrandos que aparecen para ser integradas sobre Ω y sobre $\partial\Omega_t$ vienen dadas por condiciones iniciales y de contorno similares a las que tienen en la formulación clásica (aunque con mayor regularidad).

El problema tiene solución aproximada si y sólo si las magnitudes $[\rho \vec{\mathbf{v}}] \vec{\mathbf{n}}$, $[(1 - \rho) \vec{\mathbf{u}} + \rho \vec{\mathbf{v}}] \vec{\mathbf{n}}$, $\int_{\Gamma_0} [\rho \vec{\mathbf{v}} \otimes \vec{\mathbf{v}} + P \tilde{I} - \rho \mathbb{D}(\vec{\mathbf{v}})] \vec{\mathbf{n}}$ son continuas (suficientemente regulares) en las superficies donde hay pérdida de regularidad, siendo $\vec{\mathbf{n}}$ el vector normal a la superficie.

Sean V y H dos espacios de Hilbert tales que $V \subset H \subset V'$. Sea $T > 0$ número real fijo. Consideremos el espacio $W(0, T)$ como sigue

$$W(0, T) = W(0, T, V, V') = \{\Phi \in L^2(0, T, V)^3 \quad \text{tal que} \quad \nabla \Phi \in L^2(0, T, V)^3\}$$

con norma

$$\|\Phi\| = \left[\int_0^T (\|\Phi(t)\|^2 + \|\nabla \Phi\|_*^2) dt \right]^{1/2}$$

donde $\|\cdot\|_*$ es la norma del dual V' .

Nota 3.1.3

1. Sea el espacio $C^\infty([0, T]; V)$, este espacio es denso en $W(0, T, V, V')$.
2. Se cumple que $W(0, T) \subset C^0([0, T]; H)$.

La demostración de las afirmaciones (1) y (2) se encuentran en forma detallada en [53],[33], [34],[48].

Aplicando algunos resultados de la formulación variacional unidimensional, éstos pueden ser extendidos a cada una de las ecuaciones del sistema, lo que permite obtener:

$$\int_0^t \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Phi + \int_0^t \int_\Omega \left(\frac{F_1(\varphi)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(\varphi)}{\partial y} + \frac{\partial G_1(\varphi, \varphi_x)}{\partial x} + \frac{\partial G_2(\varphi, \varphi_y)}{\partial y} - S(\varphi) \right) \Phi = 0. \quad (3.14)$$

$$\int_0^T \left(\left\langle \frac{d\varphi}{dt}, \Phi(t) \right\rangle + \langle F_1(\varphi(t)), \frac{d\Phi}{dt}(t) \rangle + \langle F_2(\varphi(t)), \frac{d\Phi}{dt}(t) \rangle + \langle G_1(\varphi, \varphi_x), \frac{d\Phi}{dt}(t) \rangle + \langle G_2(\varphi, \varphi_x), \frac{d\Phi}{dt}(t) \rangle + \langle S(\varphi), \Phi(t) \rangle \right) dt = \langle \varphi(T), \Phi(T) \rangle - \langle \varphi(0), \Phi(0) \rangle$$

$$\bar{\varphi} \in (C^1(\Omega_t) \cap C^0(\vec{\Omega}_t))^2$$

3.2. Aproximación espacial del sistema EDP No lineal del flujo de mezcla

Para hallar la solución aproximada, del problema de valor inicial expresado en su forma cuasilineal, consideraremos una aproximación espacial unidimensional y bidimensional.

Caso unidimensional - Esquemas de Harten y elementos finitos P_1

Para la discretización espacial 1D se considera una partición uniforme sobre Ω , esta partición genera un mallado monótono unidimensional denotado por \mathcal{M} , de la forma $x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n$ con paso uniforme Δx tal que:

$$\Delta x = |x_i - x_{i-1}| \quad (3.15)$$

y en el que se realiza un intermallado, en los puntos medios de cada elemento, como se aprecia en la Figura 3.1. La función u interpolada en los nodos x_i, x_{i-1}, x_{i+1} se puede expresar como $u(x_i) = u_i, u(x_{i-1}) = u_{i-1}, u(x_{i+1}) = u_{i+1}$ Entonces una discretización del problema (3.13) respecto a x se obtiene:

$$\begin{aligned} \omega_i &= \left(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right) \\ &= \left(x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{2}, x_i + \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

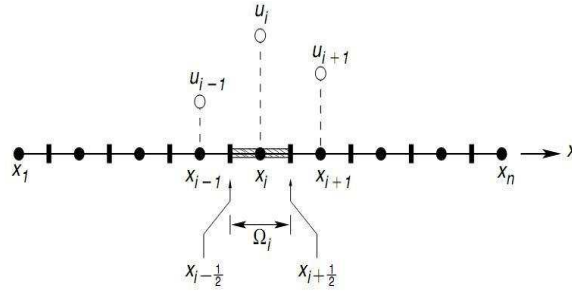


Figura 3.1: Dominio unidimensional

Sea

$$h = \left| \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} \right| = \frac{1}{2}|x_{i+1} - x_i| + \frac{1}{2}|x_i - x_{i-1}| = \frac{1}{2}(\Delta x + \Delta x)$$

como la participación \mathcal{M} es uniforme, entonces se denotará $h = \delta x$ y se tiene que $\omega_i \subset (\Omega_i \cup \Omega_{i+1} \in \mathcal{M})$.

Discretización espacial -temporal Mediante un método explícito progresivo del tipo Euler para $t \in [0, T]$, $T > 0$, con paso de tiempo variable en el intervalo de tiempo $I_j = [t^j, t^{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, n$; $\Delta t = [t^{j+1} - t^j]$

$$\int_{t^j}^{t^{j+1}} W'(t) dt = \int_{t^j}^{t^{j+1}} H(\bar{\varphi}(x, t)) dt \quad (3.17)$$

$$W^{j+1} = W^j + \int_{t^j}^{t^{j+1}} H(\bar{\varphi}(x, t)) dt \quad (3.18)$$

Ahora se debe aproximar el segundo término del segundo miembro de la igualdad en la ecuación (3.18), donde H es una función de funciones

$$W^{n+1} = W^n + \Delta t H(\bar{\varphi}^n(x, t^n)) + E_r \quad (3.19)$$

$$H(\bar{\varphi}^n(x, t^n)) = - \int_{\partial\Omega} \vec{F}(\bar{\varphi}^n) n_x dx + \int_{\partial\Omega} \vec{G}_x(\bar{\varphi}^n) n_x dx + \int_{\Omega} S(\bar{\varphi}^n) dx \quad (3.20)$$

$\bar{\varphi}^n(x, t^n)$ es una aproximación del vector de estados en el instante t^n y Δt es el paso de tiempo para el esquema explícito y será elegido según la condición de estabilidad, donde $t^n = n\Delta t$ y n es el número de iteraciones en el un intervalo de tiempo $[0, T]$ y E_r es el error de aproximación del esquema

$$W^{n+1} = W^n + \Delta t H(\bar{\varphi}^n(x_i, t^n))$$

Retomando la ecuación (3.20) sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ partimos en subdominios Ω_i el cual contiene a un punto nodal i .

Para utilizar una aproximación espacial - temporal del flujo convectivo en $1D$, consideramos que las funciones de soporte compacto satisfacen la siguiente condición:

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_i(x) &= 0 & \text{si } x \notin \Omega_i \\ \bar{\omega}_i(x) &= 1 & \text{si } x \in \Omega_i\end{aligned}$$

Si tomamos una función test constante $\bar{\omega}_i = 1$, para $x \in \Omega_i$, y si aplicamos en esa dirección el teorema de Gauss sobre los términos de los flujos, resulta que al integrar sobre ω_i se obtiene la ecuación integral

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega_i} \bar{\varphi} dx = - \int_{\partial\omega_i} \vec{F}(\bar{\varphi}) n_x dx + \int_{\partial\omega_i} \vec{G}_x(\bar{\varphi}) \cdot n_x dx + \int_{\omega_i} S(\bar{\varphi}) dx \quad (3.21)$$

donde n_x es el vector normal unitario exterior a la frontera $\partial\omega_i$.

Luego, regresando a la integración sobre cada dominio Ω_i la forma integral del sistema (3.17) expresada en el subdominio Ω_i limitado por la frontera cerrada $\partial\Omega_i$ estaría dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_i} \bar{\varphi} dx = - \int_{\partial\Omega_i} \vec{F}(\bar{\varphi}) dx + \int_{\partial\Omega_i} \vec{G}_x(\bar{\varphi}) dx + \int_{\Omega_i} S(\bar{\varphi}) dx \quad (3.22)$$

Una aproximación numérica para determinar la solución

$$\{\rho(x, t), p(x, t), u(x, t) \text{ y } v(x, t)\}$$

sobre el dominio espacial mediante el esquema de Harten y Galerkin explícito con elementos finitos de tipo P_1 , definido sobre el dominio espacial $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ genera el flujo numérico convectivo, difusivo y reactivo, donde: $\{x_i : i \in \mathbb{Z}\}$ las coordenadas de los nodos de Ω_i . Entonces, en cada subintervalo abierto $(x_{i-1}, x_i) \subset \Omega$, tal que $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, para cada $i \neq j \in \mathbb{Z}$ y $\bigcap_{i=1}^{NE} \Omega_i = \Omega$ para cada $i = 1, \dots, NE$, (NE es el número de elementos de la malla). Si por cada dos elementos de la malla Ω_i y Ω_{i+1} , definimos una celda centrada ω_i , formada por dos elementos de tipo P_1 .

Asumiendo que H es un operador continuo, diferenciable y es de Lipschitz para todo $\bar{\varphi}^n(x, t)$, entonces en cada punto $(x, t) \in \Omega_i \times I_j = [t^j, t^{j+1}]$ se tiene una discretización para la combinación de operadores $H_F + H_G + H_S$, donde H_F es el operador continuo convectivo, H_G es el operador continuo difusivo y H_S es el operador del término fuente tales que en cada etapa n , dependen de la función $\bar{\varphi}(x, t^n) = \bar{\varphi}^n(x)$ y ésta también en cada etapa n depende de x .

Luego el sistema expresado por:

$$W^{n+1} = W^n + \Delta t (H_F(\bar{\varphi}^n(x)) + H_{G_x}(\bar{\varphi}^n(x)) + H_S(\bar{\varphi}^n(x))) + E_r \quad (3.23)$$

El operador H con un esquema de integración reducida, resulta

$$H_{i+\frac{1}{2}}^n - H_{i-\frac{1}{2}}^n = H(\varphi_i^n, \varphi_{i+1}^n) - H(\varphi_{i-1}^n, \varphi_i^n)$$

donde $H_{i\pm\frac{1}{2}}^n = H(x_{i\pm\frac{1}{2}}, t^n)$, lo cual indica que la discretización en los puntos de soporte compacto de la ecuación (3.17) puede expresarse de la forma siguiente

$$\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n = -\sigma[H_{i+\frac{1}{2}}^n - H_{i-\frac{1}{2}}^n]$$

$n \in \mathbb{N}$ es el número de iteraciones que se requiere para obtener una buena aproximación numérica de la solución de la ecuación discreta, para lo cual tomamos un intervalo de tiempo finito, $0 \leq t \leq T$ donde $T > 0$ es el tiempo máximo y Δt , es el paso de tiempo variable del que depende la estabilidad del método.

En cada celda ω_i , consideraremos una aproximación de $\bar{\varphi}$ en cada punto de la forma :

$$x_{i+\frac{1}{2}} = (i + 1/2)\Delta x, \quad t^n = n\Delta t$$

$$\varphi^{n+1}(x) = \varphi^n + \Delta t(H_F + H_G + H_S)(\bar{\varphi}^n(x, t)) \quad (3.24)$$

Efectuando ahora la aproximación numérica del flujo difusivo en el sistema (3.24), con el método de Galerkin explícito y la regla de integración numérica reducida del punto medio para los flujos difusivos($H_G(\varphi)$) y reactivos ($H_S(\varphi)$), asociado a la formulación conservativa, asumiendo una aproximación del vector de estados en la forma

$$\varphi(x, t) = \sum_{i=1}^{\text{N}^\circ \text{ de Nodos}} \varphi_i(t)N_i(x) \quad \text{siendo } N_i \text{ las funciones de forma}$$

$\Delta x_{i-1} = \Delta x_i = \Delta x$, el sistema queda expresado por:

$$\varphi_i^{n+1}(x) = \varphi_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\hat{\Phi}(\varphi^n(x))|_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} + \bar{G}(\varphi^n(x))|_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} + \Delta x S(\varphi^n(x))|_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \right) \quad (3.25)$$

donde

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \sigma$$

donde se aplica los resultados formulados en problemas de flujos dominados por la convección encontrados en la referencia ([54]), se obtiene:

$$\begin{aligned} H_{F_{i+1/2}}^n &= \hat{\Phi}(\varphi^n(x_i + 1/2)) - \hat{\Phi}(\varphi^n(x_i - 1/2)) \\ \hat{\Phi}(\varphi^n(x_i))|_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} &= \hat{\Phi}(\varphi^n(x_i + 1/2)) - \hat{\Phi}(\varphi^n(x_i - 1/2)) \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde $\hat{\Phi}(\varphi^n(x_i + 1/2)) = \hat{\Phi}_{i+1/2}^n$, y se considera la matriz Q tal que

$$|Q| = R|\Lambda|R^{-1} \quad (3.27)$$

donde $|\Lambda| = \text{diag}(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_m|)$, entonces el flujo numérico convectivo queda expresado por

$$\hat{\Phi}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(F(\varphi_i) + F(\varphi_{i+1})) - \frac{1}{2}|Q|(\varphi_{i+1} - \varphi_i) \quad (3.28)$$

análogamente se define para $F_{i-1/2}^n$, y en el estado $\varphi_{i+1/2}$ en cada n -ésima iteración, queda expresado por la ecuación

$$\hat{\Phi}_{i+1/2}^n = \frac{1}{2}(F_{i+1}^n + F_i^n) - \frac{1}{2}|Q_i^n|(\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n) \quad (3.29)$$

$$\hat{\Phi}_{i+1/2}^n - \hat{\Phi}_{i-1/2}^n = \frac{1}{2}(F_{i+1}^n + F_{i-1}^n) - \frac{1}{2}|Q_i^n|(\varphi_{i+1}^n - 2\varphi_i^n + \varphi_{i-1}^n)$$

Por tanto

$$H_{F_i}^n = \frac{1}{2}(F_{i+1}^n + F_{i-1}^n) - \frac{1}{2}|Q_i^n|(\varphi_{i+1}^n - 2\varphi_i^n + \varphi_{i-1}^n) \quad (3.30)$$

La matriz $|Q_i^n|$ se ha evaluado en el punto i por ser el punto medio del soporte $i - 1$ y $i + 1$.

Luego de las aproximaciones, el sistema discreto se transforma en el siguiente problema algebraico no lineal:

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(H_{F_i}^n - H_{G_i}^n - \Delta x H_{S_i}^n), \quad (3.31)$$

$H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, tal que $\varphi_i^{n+1} = H(\varphi_i^n)$, siendo

$$H(\varphi_i^n) = (H_{F_i}^n - H_{G_i}^n - \Delta x H_{S_i}^n)$$

Este problema se resuelve utilizando el método iterativo de Punto Fijo y realiza el siguiente procedimiento en k -etapas utilizando las condiciones iniciales dadas para $v(x, t_0) = v^0(x)$ y $\rho(x, t_0) = \rho^0(x)$, y que son obtenidos automáticamente, calculando los términos del segundo miembro que se obtiene para cada valor de las variables conservativas del vector $\varphi_i^{k+1}(x_i)$, en cada paso de tiempo Δt variable y en cada punto i , para $k = 1, 2, \dots, n$; $i = 1, 2, \dots, n$ queda definido por el sistema de ecuaciones no lineales iterativamente de la forma siguiente

$$\begin{aligned} \varphi_i^{k+1}(x) &= \begin{pmatrix} \rho_i^{k+1}(x) \\ (\rho_i v_i(x))^{k+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho_i^k(x) \\ (\rho_i v_i(x))^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\Delta t}{\Delta x}(H_{F_i}^k(x) - H_{G_i}^k(x) - \Delta x H_{S_i}^k(x))_1 \\ \frac{\Delta t}{\Delta x}(H_{F_i}^k(x) - H_{G_i}^k(x) - \Delta x H_{S_i}^k(x))_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Convergencia del esquema numérico unidimensional

Dado el sistema de ecuaciones no lineales

$$\varphi_i^{k+1} = H(x, \rho_i^k, v_i^k), \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

un punto P es punto fijo de H si cumple $\varphi_i^{k+1}(P) = P$, donde

$$H(x, \rho_i^k, v_i^k) = \begin{pmatrix} \frac{\Delta t}{\Delta x} (H_{F_i}^k(x) - H_{G_i}^k(x) - \Delta x H_{S_i}^k(x))_1 \\ \frac{\Delta t}{\Delta x} (H_{F_i}^k(x) - H_{G_i}^k(x) - \Delta x H_{S_i}^k(x))_2 \end{pmatrix}$$

Proposición 3.2.1 *Sea H una función de clase $C^1(\Omega)$ tales que $\varphi_i^{k+1} = H(x, \rho_i^k, v_i^k)$ y con punto fijo contenido en Ω para las condiciones iniciales del problema, entonces el problema discreto converge a la solución única si existe un parámetro $\sigma \leq 1$, tal que*

$$\sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial H_i(x, \rho_i^k, v_i^k)}{\partial x_j} \right| < \sigma,$$

para $k = 1, 2, \dots, n; \quad i = 1, \dots, n$.

Prueba:

Considerando las condiciones asintóticas, $\rho_i^{n+1} \rightarrow 0, v_i^{k+1} \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$ y $\Delta x \rightarrow 0$ en el problema discreto unidimensional, el estudio de la convergencia del método de punto fijo estaría basadas en las condiciones de estabilidad de Courant-Friedrich-Lewy (CFL), puesto que la condición de estabilidad está definido por el paso de tiempo y este depende del máximo de los módulos de las velocidades características de la fase partículas y del tamaño del espaciado Δx para cada nodo y elemento del mallado, entonces introducimos el parámetro σ como el número de Courant [12] para la convergencia de la discretización total del sistema no lineal y se tiene la igualdad $\sigma = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$, los módulos de las velocidades características para la fase partículas, definidas como:

$$Y_1 = \varphi_{i_1}^{n+1} = |v_i^k + c|, \quad Y_2 = \varphi_{i_2}^{n+1} = |v_i^k - c|$$

Haciendo $a = \max(Y_1, Y_2)$ y $c = \sqrt{\frac{\gamma(\rho_i^k) p(\rho_i^k)}{\rho_i^k}}$ es la velocidad del sonido para estos materiales tales como para concentraciones volumétricas de partículas sólidas en un gas politrópico, se dice que el método satisface la condición de estabilidad CFL , cuando σ cumple la siguiente desigualdad

$$\sigma = a \frac{\Delta t}{\Delta x} = CFL \leq 1$$

expresando la estabilidad en términos de Δt como la función $\Delta t \leq E(\Delta x, v_i, c)$, definida por la siguiente desigualdad

$$\Delta t \leq \frac{(CFL)\Delta x}{\text{máx}(Y_1, Y_2)}$$

El parámetro σ es un número aproximado que puede ser dado como una tolerancia [12] para la estimación del error en el intervalo $(0, 1)$.

Es decir, el esquema es estable bajo la siguiente condición para el paso de tiempo Δt , es decir que:

$$\Delta t \leq \frac{(CFL) \Delta x}{\text{máx}(|v_i^k + c|, |v_i^k - c|)} \leq 1$$

donde $v_i^k + c$ y $v_i^k - c$ son las velocidades características del flujo.

La aproximación es aceptable bajo ciertas condiciones tales como la consistencia y estabilidad, ambas están relacionadas al comportamiento del conjunto de soluciones aproximadas W , donde

$$W = \{\varphi_{i_1}^{n+1}(x), \varphi_{i_2}^{n+1}(x) \dots \varphi_{i_j}^{n+1}(x) \text{ es solución aproximada } j = 1, 2\}$$

Si medimos el error global de todas las aproximaciones con la norma usual de R^n en W , el error no crece en cada etapa de la solución $\varphi_i^k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$ para pequeños cambios de la condición inicial, es decir, las propiedades de consistencia y estabilidad se cumplen bajo la condición:

$$\|H(\varphi_h^{k+1}(x))\|_W \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty, h \rightarrow 0$$

o de modo equivalente la norma de la matriz Jacobiana de H satisface la siguiente desigualdad:

$$\sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial H_i(x, \rho_i^k, v_i^k)}{\partial x_j} \right| < 1,$$

donde $h = \Delta x$ es la longitud del espaciado.

El error global está dado por:

$$error = dist(\varphi_i^{n+1}, \varphi_i^n) = \inf_{\varphi \in W} \|\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n\|$$

donde

$$\varphi_i^{n+1}(x) = \varphi_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (H_{F_i}^n - H_{G_i}^n - \Delta x H_{S_i}^n).$$

Aproximación del problema bidimensional

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, polígono acotado, de frontera Γ , η es el vector normal unitario exterior a

Γ , τ_h una partición de Ω .

Sea $H^2(\Omega)$ el espacio de Sobolev de funciones con derivadas de orden ≤ 2 que pertenecen al espacio $L_2(\Omega)$, y usamos la siguiente notación:

$$\|\cdot\|_{n,\Omega} \equiv \|\cdot\|_{H^2(\Omega)}, \quad \|\cdot\|_{\Omega} \equiv \|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$$

Método de Galerkin y el espacio de elementos finitos

Los espacios de aproximación con elementos finitos V_h , consisten en la interpolación con funciones de base polinomiales por tramos sobre las subdivisiones o *triangulaciones* $T_h = \{K\}$ de un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2$, en elementos K . Para $d = 1$ los elementos son intervalos, para $d = 2$ usaremos triángulos. Se necesita que $V_h \subset H^1(\Omega)$ o $V_h \subset H^2(\Omega)$ cuando se trata de problemas de frontera de segundo orden. Como el espacio V_h está constituido por polinomios, luego:

$$V_h \subset H^1(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad V_h \subset C^0(\bar{\Omega}) \quad (3.33)$$

$$V_h \subset H^2(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad V_h \subset C^1(\bar{\Omega}) \quad (3.34)$$

donde $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ y

$$\begin{aligned} C^0(\bar{\Omega}) &= \{v : v \text{ es una función continua definida en } \bar{\Omega}\} \\ C^1(\bar{\Omega}) &= \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in C^0(\bar{\Omega}), i = 1, 2\} \end{aligned}$$

O sea,

- $V_h \subset H^1(\Omega)$ si y sólo si las funciones $v \in V_h$ son continuas,
- $V_h \subset H^2(\Omega)$ si y sólo si las funciones $v \in V_h$ y sus primeras derivadas son continuas.

Nota:

1. La equivalencia (3.33) tiene sentido para espacios V_h formado por funciones v polinomiales sobre cada elemento K :
 - Si v es continua a través de la frontera común a dos elementos contiguos, entonces las primeras derivadas $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ existen, son continuas por tramos y de cuadrado integrable, con lo cual $v \in H^1(\Omega)$.

- Si v no fuera continua a través de alguna frontera inter-elementos, o sea $v \notin C^0(\bar{\Omega})$, no existirían las derivadas $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ ([28], [29]) representadas como funciones de la clase de equivalencia $L_2(\Omega)$ y luego $v \notin H^1(\Omega)$ (Si v fuera discontinua a través de una frontera inter-elementos S , luego $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ sería una función δ -Dirac con soporte en S , la cual no es de cuadrado integrable).

Un razonamiento similar se aplica a (3.34).

Para definir un espacio de elementos finitos V_h se debe especificar:

1. Una triangulación $T_h = \{K\}$ del dominio Ω ,
2. la naturaleza de las funciones $v \in V_h$ sobre cada elemento K (por ejemplo lineales, cuadráticas, cúbicas, etc.),
3. los parámetros usados para describir las funciones en V_h .

Asumiendo que Ω es un dominio en el plano \mathbb{R}^2 con frontera poligonal Γ . Sea $T_h = \{K\}$ una triangulación de Ω en triángulos K . Introducimos el espacio de aproximación polinomial:

$$P_r(K) = \{v : v \text{ es un polinomio de grado } \leq r \text{ sobre } K\}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

tal que para $r = 1$, $P_1(K)$ es un espacio de funciones *lineales* definidas sobre K , de la forma:

$$v(\mathbf{x}) = a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}x_2, \quad \mathbf{x} \in K$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Vemos que el conjunto de funciones ψ_1, ψ_2, ψ_3 donde

$$\psi_1(\mathbf{x}) = 1, \quad \psi_2(\mathbf{x}) = x_1, \quad \psi_3(\mathbf{x}) = x_2$$

es una base de $P_1(K)$ y que $\dim P_1(K) = 3$, donde $\dim W$ indica la dimensión del espacio lineal W y para $r = 2$, $P_2(K)$ es el espacio de funciones cuadráticas sobre K , de la forma:

$$v(\mathbf{x}) = a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}x_2 + a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2, \quad \mathbf{x} \in K$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Vemos que $1, x_1, x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2$ es una base de $P_2(K)$, cuya dimensión está dada por $\dim P_2(K) = 6$, es la base del espacio de aproximación de las variables de estudio.

En general se tiene que,

$$P_r(K) = \{v : v(\mathbf{x}) = \sum_{0 \leq i+j \leq r} a_{ij}x_1^i x_2^j \text{ para } \mathbf{x} \in K, \text{ donde } a_{ij} \in \mathbb{R}\}$$

y

$$\dim P_r(K) = \frac{(r+1)(r+2)}{2}$$

Esta igualdad, está directamente relacionada con el llamado triángulo de Pascal o de Tartaglia.

$$\begin{array}{cccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & x_1 & & x_2 & & \\ & & & & x_1^2 & & x_1x_2 & & x_2^2 & & \\ & & & & x_1^3 & & x_1^2x_2 & & x_1x_2^2 & & x_2^3 & & \\ & & & & & & & & & & & & \dots & \end{array}$$

Cuadro 3.1: Triángulo de Pascal

Espacio de aproximación con interpolación lineal P_1

Sea

$$V_h = \{v \in (C^0(\bar{\Omega}))^2 : v|_K \in (P_1(K))^2 \quad \forall K \in T_h\} \quad (3.35)$$

un espacio de funciones lineales continuas por tramos. Como parámetros o grados de libertad globales para describir las funciones de V_h elegimos los valores en los puntos nodales de T_h (incluyendo aquellos nodos sobre Γ). Se puede ver que esta elección es adecuada puesto que una función $v \in V_h$ es unicamente determinada por los valores de v (3.35). El siguiente análisis permite ver otras situaciones complicadas que surgen durante el proceso de aplicación en la resolución del problema

Si $K \in T_h$ es un triángulo con nodos en los vértices \mathbf{a}^i , $i = 1, 2, 3$, los grados de libertad de K que corresponden a (3.35) son los valores evaluados en cada nodo i :

$$\text{los vértices } \mathbf{a}^i, i = 1, 2, 3. \quad (3.36)$$

Para ver que una función $v \in V_h$ queda determinada en forma única por los grados de libertad (3.36), basta con mostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1 *Sea $K \in T_h$ un triángulo con vértices $\mathbf{a}^i = (a_1^i, a_2^i)$, $i = 1, 2, 3$. Una función $v \in P_1(K)$ está determinada en forma única por los grados de libertad (3.36), o sea dados los valores α_i , $i = 1, 2, 3$, existe una única función $v \in P_1(K)$ tal que:*

$$v(\mathbf{a}^i) = \alpha_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.37)$$

Demostración:

Como $v(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3$ para algunas constantes $c_i \in \mathbb{R}$, (3.37) es equivalente al sistema de ecuaciones lineales

$$c_1a_1^i + c_2a_2^i + c_3 = \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.38)$$

en las incógnitas c_i . Este sistema tiene solución única para valores α_i dados, si y sólo si el determinante $\det B$ de la matriz de coeficientes

$$B = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & 1 \\ a_1^2 & a_2^2 & 1 \\ a_1^3 & a_2^3 & 1 \end{pmatrix}$$

es distinto de cero. Puede verse fácilmente que

$$\frac{\det B}{2} = \text{área de } K \quad (3.39)$$

y luego $\det B \neq 0$. Como B es no singular, queda probado el resultado.

Veremos otra versión diferente de la demostración para este mismo teorema, la cual se usa en casos más complicados. Primero, notamos que

$$\dim P_1(K) = \text{número de grados de libertad } (= 3),$$

o sea, (3.39) tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. En este caso, $\det B \neq 0$ si y sólo si la solución de (3.39) es única, o dicho en otras palabras, si la única solución de (3.39) con $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ está dada por $c_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ ($\text{Ker } B = 0$).

Formalmente, equivale a pedir:

$$\text{Si } v \in P_1(K) \text{ y } v(\mathbf{a}^i) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \text{ luego } v = 0. \quad (3.40)$$

De hecho, se puede probar (3.40) directamente, sin usar (3.39), lo cual muestra que no es necesario calcular $\det B$ para probar que $\det B \neq 0$. Este razonamiento se aplicará a casos con polinomios de mayor grado.

Podemos ahora determinar las funciones de base (nodales) para $P_1(K)$ asociadas a los grados de libertad (3.36), o sea las funciones $\lambda_i \in P_1(K)$, $i = 1, 2, 3$, tal que

$$\lambda_i(\mathbf{a}^j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3$$

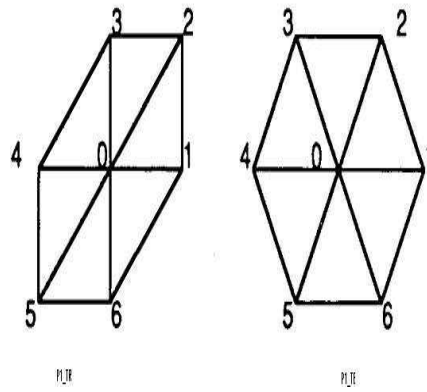


Figura 3.2: Elementos finitos P_1

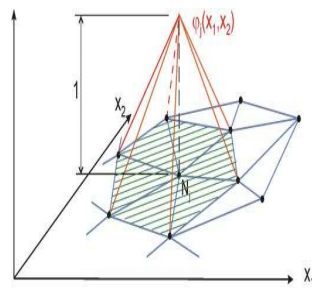


Figura 3.3: Función de forma lineal

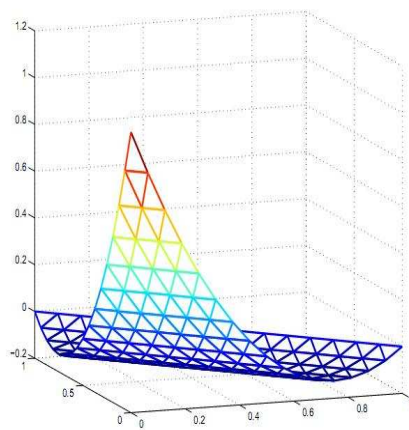


Figura 3.4: Mallado con Función de forma lineal

Sea $v_j(\mathbf{x}) \in P_1(K)$, $j = 1, 2$ una función arbitraria, luego ésta se puede representar por:

$$v_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 v(\mathbf{a}^i) \lambda_i(x), \quad \mathbf{x} \in K. \quad (3.41)$$

Para determinar las funciones base λ_i , debemos resolver el sistema de ecuaciones (3.39) para tres elecciones particulares del *RHS*, por ejemplo, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

Entonces dada la elección de los grados de libertad globales en (3.35) se puede describir que el espacio V_h (3.35) en forma alternativa es dado por

$$V_h = \{v : v|_K \in (P_1(K))^2 \forall K \in T_h, \text{ y } v \text{ es continua en los nodos de } T_h\} \quad (3.42)$$

Luego, una función $v \in V_h$ queda definida como una función lineal por tramos y que toma ciertos valores en los nodos de T_h .

Para verificar que (3.42) define efectivamente el mismo espacio que (3.35): o sea, que si $v \in V_h$ de acuerdo a (3.42) entonces v es continua ($v \in C^0(\overline{\Omega})$). Es suficiente mostrar que v es continua a través de todas las fronteras interelemento.

Para ello, sean K_1 y K_2 dos triángulos en T_h con lado común S y nodos extremos N_1 y N_2 . Supongamos ahora que $v \in V_h$ de acuerdo a (3.42), y como $v_i = v|_{K_i} \in (P_1(K_i))^2$, $i = 1, 2$ las restricciones de v a los triángulos K_i . Luego, la función $w = v_1 - v_2$ queda definida sobre S , por tanto w es nula sobre S . En consecuencia, v es continua a través de S y se concluye que $v \in (C^0(\overline{\Omega}))^2$.

Espacio de aproximación con interpolación cuadrática

Para la construcción de un espacio V_h usando funciones cuadráticas por tramos v , o sea $v|_K \in (P_2(K))^2$. Se especifica primero los grados de libertad del elemento. Sea $K \in T_h$ un elemento triangular de Lagrange con vértices \mathbf{a}^i , $i = 1, 2, 3$ y denotemos los puntos medios de K por \mathbf{a}^{ij} , $i < j$, $i, j = 1, 2, 3$.

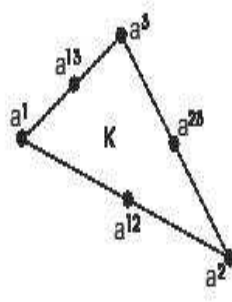
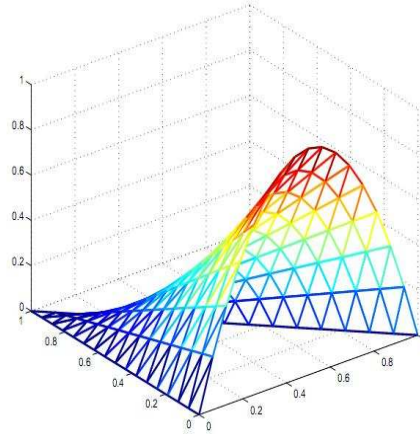
Figura 3.5: Elementos finitos P_2 

Figura 3.6: Mallado con función de forma cuadrática

Teorema 3.2.2 Una función $v \in (P_2(K))^2$ está determinada en forma única por los grados de libertad

$$\begin{aligned} v(\mathbf{a}^i), & \quad i = 1, 2, 3 \\ v(\mathbf{a}^{ij}), & \quad i < j, \quad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Demostración

Como $\dim P_2(K)$ es igual al número de grados de libertad (=6), es suficiente con probar que $\forall v \in (P_2(K))^2$:

$$v(\mathbf{a}^i) = 0, \quad v(\mathbf{a}^{ij}) = 0, \quad i < j, \quad i, j = 1, 2, 3, \Rightarrow v = 0. \quad (3.44)$$

Para ello, se considera el lado $\mathbf{a}^2\mathbf{a}^3$. A lo largo de éste la función varía en forma cuadrática y v se anula en los tres puntos distintos \mathbf{a}^2 , \mathbf{a}^{23} y \mathbf{a}^3 . Luego, v se anula sobre $\mathbf{a}^2\mathbf{a}^3$ lo cual significa que se puede extraer el factor λ_1 y escribir:

$$v(\mathbf{x}) = \lambda_1(\mathbf{x})w_1(\mathbf{x}), \quad x \in K$$

donde $w_1 \in P_2(K)$, entonces los $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ son funciones de la base para el espacio $P_2(K)$ de acuerdo al ejemplo anterior. De la misma manera vemos que v se anula

también a lo largo del lado $\mathbf{a}^1\mathbf{a}^3$, con lo cual podemos extraer el factor λ_2 , resultando:

$$v(\mathbf{x}) = \lambda_1(\mathbf{x})\lambda_2(\mathbf{x})w_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in K$$

donde ahora w_0 tiene grado 0, o sea $w_0 = \gamma = cte$. Si ahora finalmente tomamos $\mathbf{x} = \mathbf{a}^{12}$, vemos que

$$0 = v(\mathbf{a}^{12}) = \gamma\lambda_1(\mathbf{a}^{12})\lambda_2(\mathbf{a}^{12}) = \gamma \frac{1}{2} \frac{1}{2},$$

con lo cual $\gamma = 0$ y en consecuencia $v = 0$.

Una función $v_k \in P_2(K)$, $k = 1, 2$ puede representarse en la forma

$$v_k = \sum_{i=1}^3 v_k(\mathbf{a}^i)\lambda_i(2\lambda_i - 1) + \sum_{i,j=1, i<j}^3 v_k(\mathbf{a}^{ij})4\lambda_i\lambda_j \quad (3.45)$$

Para ver ello, se usa el teorema anterior, y se verifica que el lado derecho LD y el lado izquierdo LI de (3.45) toman los mismo valores en los puntos nodales \mathbf{a}^i y \mathbf{a}^{ij} , ya que la diferencia $LD - LI \in P_2(K)$.

A partir de (3.45), queda claro cuáles son las funciones nodales de base para $P_2(K)$ correspondientes a los grados de libertad (3.43):

$$\begin{aligned} \psi_i(\mathbf{x}) &= \lambda_i(2\lambda_i - 1) & i = 1, 2, 3 \\ \psi_{ij}(\mathbf{x}) &= 4\lambda_i\lambda_j & i < j, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

La función de base que corresponde a un grado de libertad dado, por ejemplo el valor en el vértice \mathbf{a}^i , cumple con la *condición delta*: es la función $\psi \in (P_2(K))^2$ tal que $\psi_i(\mathbf{a}^i) = 1$ y además se anula en los otros puntos nodales $\mathbf{a}^j, \mathbf{a}^{ij}$.

También se puede ver que dados dos grados de libertad se verifica la continuidad entre elementos. O sea, si tenemos $v_k \in P_2(K_i)$, $k = 1, 2$ donde K_1 y K_2 son los triángulos con lado común S , si v_1 y v_2 toman los mismos valores en los puntos extremos y en el punto medio de S , luego v_1 y v_2 coinciden sobre S . Esto demuestra que si $w = v_1 - v_2$ varía cuadráticamente a lo largo de S , y w se anula en tres puntos distintos sobre S , luego $w \equiv 0$ sobre S .

Entonces se tiene que:

$$V_h = \{v \in (C^0(\bar{\Omega}))^2 : v|_K \in (P_2(K))^2 \quad \forall K \in T_h\}.$$

Los grados de libertad globales de las funciones $v \in V_h$ pueden elegirse como sigue:

1. los valores de v en los nodos de T_h ,

2. los valores de v en los puntos medios de todos los lados de los triángulos de T_h .

Discretización espacial del problema bidimensional

Retomando las ecuaciones del flujo bidimensional en su forma compacta :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(F(\varphi) - G(\varphi)) = S(\varphi)$$

donde φ es el vector de estados dado en la ecuación (3.7).

Construimos los espacios de aproximación evolutiva considerando que el problema evoluciona en tiempo, de modo que, en: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = \hat{t}$ se tiene una sucesión de pasos de tiempo asociados a un intervalo de la forma $I_n = (t_{n-1}, t_n]$, $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$, en el espacio evolutivo $S_n = \tau_h \times I_n$, y en τ_h se construye una interpolación de tipo Lagrange.

Entonces sobre Ω , $\tau_h = \{K\}$, donde K es un triángulo equilátero de tres nodos para la interpolación lineal y de seis nodos, para la interpolación cuadrática, es decir usando los puntos medios i de los triángulos del mallado inicial τ_h para $n = 0$, $i = 1, \dots, N$.

Sea ω_{ij} la unión de los subtriángulos y $\partial\omega_{ij}$ la frontera de ω_{ij} y $\bar{\nu}_i = (\nu_{ij}^x, \nu_{ij}^y)$ el vector normal sobre $\partial\omega_{ij}$, tales que se puede construir ([28], [29]), los espacios de aproximación espacial:

$$V_h = \{v_h \in C^0(\Omega_h)^2 : v_h|_{\tau_h} \in (P_2)^2 \forall h\} \quad \text{espacio de aproximación de } v$$

$$Q_h = \{q_h \in C^0(\Omega_h) : q_h|_{\tau_h} \in P_1 \forall h\} \quad \text{espacio de aproximación de } p \text{ y } \rho$$

$$J_h = \{v_h \in V_h / (\nabla \cdot v_h, q)_h = 0 \quad \text{para todo } q \in Q_h\}$$

$$J_{0h} = \{v_h \in J_h : v_h|_{\partial\Omega} = 0\}$$

$$Q_h \subset L^2(\Omega)$$

$$V_h \subset (H^2(\Omega))^2 \subset (L^2(\Omega))^2$$

$$\dim(J_h) = 2(N_s + N_e - 1) + 2N_s - N_s + 1 = 3N_s + 2N_e - 1$$

donde N_s es el número de vértices y N_e es el número de elementos.

Integrando el sistema sobre la celda ω_{ij} :

$$\begin{aligned} \int \int_{\omega_{ij}} \frac{\varphi^{n+1}(x, y) - \varphi^n(x, y)}{\Delta t} dx dy + \int \int_{\omega_{ij}} \nabla \cdot F(\varphi^n(x, y)) dx dy = \\ = \int \int_{\omega_{ij}} \nabla \cdot G(\varphi(x, y)) dx dy + \int \int_{\omega_{ij}} S(x, y, \varphi(x, y)) dx dy \end{aligned} \quad (3.46)$$

aplicando el teorema de la divergencia de Gauss:

$$\begin{aligned} A_i \frac{\varphi_{ij}^{n+1} - \varphi_{ij}^n}{\Delta t} + \int_{\Gamma_{ij}} F(\varphi^n(x, y)) \cdot \eta_{ij} d\sigma = \\ = \int_{\Gamma_{ij}} G(\varphi(x, y)) \cdot \eta_{ij} d\sigma + \int \int_{\omega_{ij}} S(x, y, \varphi^n(x, y)) dx dy \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde $\Gamma_{ij} = \partial\omega_{ij}$.

aplicando el teorema de la divergencia de Gauss:

$$\begin{aligned} \int_{\omega_{ij}} (\varphi^{n+1} - \varphi^n) dx dt + \Delta t \int_{\partial\omega_{ij}} F(\varphi^n) \cdot \bar{v}_i d\sigma + \Delta t \int_{\partial\omega_{ij}} \underline{G}(\varphi^n) \cdot \bar{v}_i d\sigma + \\ + \Delta t \int \int_{\omega_{ij}} S(\varphi^n) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

evaluando estas integrales, bajo las condiciones de estabilidad de los términos hidrodinámicos para la convección

$$\frac{\Delta t}{\Delta h} \max(\|\vec{U} + C\|, \|\vec{U}\|, \|\vec{U} - C\|) = CFL_1 \leq 1 \quad \text{ó}$$

$$\Delta t = \frac{CFL_1 \Delta h}{\max(\|\vec{U} + C\|, \|\vec{U}\|, \|\vec{U} - C\|)}$$

donde $C = \sqrt{\frac{\gamma p_c}{\rho}}$, $\|\vec{U}\| = \sqrt{U_1^2 + U_2^2}$ es la norma de la velocidad de mezcla.

La estabilidad de los términos difusivos según ([44]) está dado por la siguiente condición:

$$\frac{2\Delta t}{\Delta h^2} \max\left(\frac{\gamma}{Pr}, \frac{1}{ReLe}\right) = CFL_2 \leq 1$$

y la condición de estabilidad para los términos reactivos es:

$$\Delta t \leq \frac{1}{CFL_3}, \quad CFL_3 = \exp(\theta), \quad \theta = \frac{\alpha - 1}{\alpha} Ma, \quad 0 < Ma < 0.3$$

L_e es el número de Lewis y Pr (N° de Prandtl), $Re = \frac{\mu_0 \rho_0}{\mu}$ (N° de Reynold), μ viscosidad del gas, μ_0 es la viscosidad del sólido y $Ma = \frac{u_0}{\sqrt{(\gamma - 1)c_p}}$ es el Número de Mach, $\alpha = 0.5$.

Notese que en esta formulación no estaríamos tomando en consideración el efecto de las fuerzas de inercia respecto a las fuerzas de gravedad, lo que estaría relacionando al número adimensional de Froude, y estaríamos involucrando otros dos números adimensionales que no son reelevantes para el problema en estudio.

Pero continuando con la integración de los términos temporales y fuente usaríamos,

entonces la expresión:

$$\begin{aligned} \int \int_{\omega_{ij}} (\varphi^{n+1} - \varphi^n) dx dy &= \text{área}(\omega_{ij})(\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n) \\ \int \int_{\omega_{ij}} S(\varphi^n) dx dy &= \text{área}(\omega_{ij})S(\varphi_i^n) \\ \int_{\partial\omega_{ij}} \underline{F}(\varphi^n) \bar{\nu} d\sigma &= \sum_{j \in K(i)} \underline{F}(\varphi^n) \int_{\partial\omega_{ij}} \bar{\nu}_i d\sigma + \underline{F}(\varphi^n) \int_{\partial\omega_{ij} \cup \Gamma} \bar{n} d\sigma \\ \bar{\nu}_{ij} &= (\nu_{ij}^x, \nu_{ij}^y); \quad \nu_{ij}^x = \int_{\partial\omega_{ij}} \nu_i^x d\sigma, \quad \nu_{ij}^y = \int_{\partial\omega_{ij}} \nu_i^y d\sigma \end{aligned}$$

y $K(i)$ es el conjunto de nodos vecinos de ω_{ij} .

$$\int_{\partial\omega_{ij}} F(\varphi^n) \bar{\nu}_i d\sigma = \phi(\varphi_i^n, \varphi_j^n, \bar{\nu}_{ij}) \quad (3.49)$$

ϕ es el flujo numérico convectivo que se obtiene mediante un esquema centrado ([54], [30]) el cual es expresado por:

$$\begin{aligned} \phi(\varphi_r, \varphi_L, \vec{n}) &= \frac{1}{2} [P_n(\varphi_R) + P_n(\varphi_L)] + \frac{1}{2} |Q_n(\vec{\varphi})| (\varphi_R - \varphi_L), \\ \varphi &= \frac{1}{2} (\varphi_R + \varphi_L), \quad P_n(\varphi) = n^x F_1(\varphi) + n^y F_2(\varphi) \\ Q_n(\varphi) &= \frac{\partial P_n}{\partial \varphi}(\varphi), \quad |Q_n| = |T \Lambda T^{-1}|, \quad \Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \\ &= T |\Lambda| T^{-1}, \quad |\Lambda| = (|\lambda_k|)_{k=1}^{\infty} \end{aligned}$$

Término Difusivo:

$$\int_{\partial\omega_{ij}} G(\varphi^n) \cdot \bar{\nu}_i d\sigma = \sum_{j \in K(i)} G_r^n \int_{\partial\omega_{ij} \cup \Gamma} \bar{\nu}_i d\sigma + \int_{\partial\omega_{ij} \cup \Gamma} G(\varphi^n) \bar{n} d\sigma$$

$K(i)$ es el conjunto de triángulos w_{ij} , G_r^n es el valor constante de G^n en un triángulo $\tau \in \mathcal{T}_h$.

Si se usa interpolación lineal para los flujos convectivos (3.49), es decir:

$$\begin{aligned} \varphi_x(\omega_{ij}) &= \frac{1}{\text{área}[supp(i)]} \int \int_{supp(i)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy \\ \varphi_y(\omega_{ij}) &= \frac{1}{\text{área}[supp(i)]} \int \int_{supp(i)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy \end{aligned}$$

$supp(i)$ denota la unión de los triángulos cuyo vértice en común es $w_i(x_i, y_i)$, los integrandos $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ que son las derivadas de las funciones de forma con la interpolación

del método de Galerkin estándar y elementos finitos de tipo P_1 , es decir: φ_{ij} y φ_{ji}

$$\begin{aligned}\varphi_{ij} &= \varphi_i + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi_x(\omega_i) \\ \varphi_y(\omega_i) \end{pmatrix} \cdot \overline{\omega_i \omega_j} \\ \varphi_{ji} &= \varphi_j + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi_x(\omega_j) \\ \varphi_y(\omega_j) \end{pmatrix} \cdot \overline{\omega_j \omega_i}.\end{aligned}$$

Al usar esta aproximación para obtener la integración de los flujos convectivos, referidos en algunos resultados encontrados para problemas dominados por la convección ([48], [44], [36]), se tiene:

$$\int_{\partial\omega_{ij}} \underline{F}(\varphi^n) \cdot \vec{v}_i d\sigma = \phi(\varphi_{ij}^n, \varphi_{ji}^n, \vec{v}_{ij}).$$

con una interpolación de Galerkin estandar y elementos finitos P_2 para resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\int_{\omega_{ij}} (\varphi^{n+1} - \varphi^n) dx dt + \sum_{j \in K(i)} \underline{F}(\varphi^n) \int_{\partial\omega_{ij}} \vec{v}_i d\sigma + \underline{F}(\varphi^n) \int_{\partial\omega_{ij} \cup \Gamma} \bar{\eta} d\sigma + \\ \sum_{\tau \in \pi_i} G_r^n \int_{\partial\omega_{ij} \cup \Gamma} \vec{v}_i d\sigma + \int_{\partial\omega_{ij} \cup \Gamma} G(\varphi^n) \bar{\eta} d\sigma = \int \int_{\omega_{ij}} S(\varphi^n) dx dy\end{aligned}\quad (3.50)$$

Luego de la aplicación de esta técnica usual en algunos autores de la literatura referida resulta que el flujo numérico genera oscilaciones en la solución y esto indica que en intervalos mayores de tiempo genera discontinuidades por las singularidades en los flujos numéricos convectivos, lo cual estaría condicionada a usar otra tecnica adicional basada en una extrapolación, es decir, cambiar los términos φ_{ij} y φ_{ji} por φ_{ij}^l y φ_{ji}^l y habría que buscar una definición apropiada para φ_{ij}^l y φ_{ji}^l .

En tal sentido buscaremos bajar el costo del proceso computacional en la finalidad de buscar una velocidad de convergencia, mediante una regularización para generar mejores resultados. Entonces se propone un método de Galerkin con estabilización en el flujo convectivo, aplicando una difusión en las líneas de corriente, para la captación de las discontinuidades. En la literatura referida se utiliza para el Sistema de Euler, de la dinámica del Gas, con elementos finitos $P_1 + P_2$, en este caso, se predice que se lograría cerrar las discontinuidades durante la fluidización en las paredes del recipiente de CLF. Este esquema numérico se construye su aplicación en la ecuación matricial a partir de:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial F_1(\varphi)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(\varphi)}{\partial y} + \frac{\partial G_1(\varphi, \varphi_x)}{\partial x} + \frac{\partial G_2(\varphi, \varphi_y)}{\partial y} - S(\varphi) = 0. \quad (3.51)$$

Método de Galerkin estabilizado

Sean H_{div} , V_{div} , $V = (H_0^1(\Omega))^d$ en particular para $d = 2$ y $Q = L_0^2(\Omega)$ los espacios de Hilbert.

Las perturbaciones que producen oscilaciones espúreas pueden ser eliminados haciendo un refinamiento del mallado en las zonas críticas, pero ello requiere un cálculo de matrices muy densas, lo cual hace que el proceso computacional sea mas lento y a veces imposible por la no convergencia en tiempo. Para ello se utiliza el método de estabilización con la difusión artificial en las líneas de corriente y lo nombra en [7] como "Difusion Streamline (SD)".

El método de Galerkin Estabilización SD con la captación de las discontinuidades consiste en lo siguiente:

Supongamos que tenemos el operador:

$$L(\varphi) = \sum_{i=1}^d A_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + K\varphi = S(\varphi) \quad \text{en } \Omega$$

$$(M - D)U = 0 \quad \text{sobre la } \Gamma$$

A_i, K, M son matrices de orden $m \times m$ dependiendo de x, φ y un vector $D = \sum_{i=1}^d n_i A_i$,

$A_i = \frac{\partial F_i}{\partial U_i}$ matriz jacobiana de F . Asumiendo que $\frac{M + M^t}{2} \geq 0$ sobre Γ , \bar{M} es simétrica y

$$\frac{K + K^*}{2} - \sum_{i=1}^d \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \geq \bar{\sigma} I \quad \text{en } \Omega$$

$$Ker(D - M) + Ker(D + M) = R^m \quad \text{sobre } \Gamma$$

donde $\bar{\sigma} > 0$ es no negativa; K, M son matrices

$$Ker(M) = \{\xi \in \mathbb{R}^d : M\xi = 0\}$$

Con el método de Galerkin usual:

$$(L\varphi^h, \mathbf{v}) + \frac{1}{2} \langle (M - D)\varphi^h, \mathbf{v} \rangle = (S, \mathbf{v}) \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in \hat{V}_\varphi$$

$$\|\varphi^h\| + |\varphi^h| \leq c \|S\|, \quad \|\varphi - \varphi^h\| \leq ch^r \|\varphi\|_{\sigma+1}$$

Luego con Galerkin estabilizado SD se multiplica a la ecuación por una función test especial, que lo diferencia del método de Galerkin estandar

$$\varphi, h \in \hat{V}_h$$

$$(L\varphi^h, \mathbf{v} + hL_0\mathbf{v}) + \frac{1}{2} \langle (M - D)\varphi^h, \mathbf{v} \rangle = (S, \mathbf{v} + hL_0\mathbf{v})$$

donde $L_0 = \sum_{i=1}^d A_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Si elegimos $\mathbf{v} = \varphi^h$, se obtiene la estabilidad con $\bar{\delta} > 0$, para h suficientemente pequeño.

$$V^m = \{\mathbf{v} : \mathbf{v} = \text{rot}(\varphi), \varphi \in \Psi^m\}$$

$$\Psi^m = \{\varphi \in (H^1(\Omega_m = \Omega \times I_m))^3 : \varphi|_K \in (P^{r+1}(\tau) \times P^r(I_m))^3,$$

$$\forall K = \tau \times I_m, \tau \in \tau_h \wedge \varphi = 0 \text{ sobre } \Gamma \times I_m$$

$$\varphi \text{ es continua sobre } \Omega_m\}.$$

$$(\varphi, \mathbf{v})^m = \int_{\Omega_m} \varphi \mathbf{v} \, dx dt \Rightarrow \int_{\Omega} \varphi(x, t_m) \mathbf{v}(x, t_m) \, dx$$

$$\mathbf{v}_{\pm}(x, t) = \lim_{s \rightarrow 0^{\pm}} \mathbf{v}(x, t + s), [\mathbf{v}] = \mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-$$

$$Q^m = \{\mathbf{v} \in (H^1(\Omega_m))^3 : \mathbf{v}|_K \in (P^r(I_m))^3, \forall k = \tau \times I_m, \tau \in \tau_h\}$$

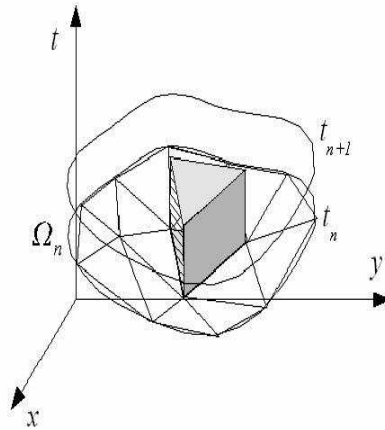


Figura 3.7: Elementos finitos evolutivos

\mathbf{v} es función continua en Ω_m .

$$\text{Sean } P = P(x, t) \text{ es la función } P_i = \frac{\partial P}{\partial x_i},$$

$f = (f_1, f_2)$ fuerza de volumen y gravitatorio que actúan sobre el fluido

$$|U| = u_1^2 + u_2^2$$

$$U \cdot n = 0$$

$$M \cdot n = M_0 \text{ Condición de frontera}$$

$$p_c + p_h = P, \quad p_c = p(\rho) \text{ presión colisional}$$

$$P \cdot n = 0 \text{ condición de salida en } \partial\Omega$$

Para $n = 1, \dots, N$

Hallar $\hat{\varphi}_h^n = (R_n, m_n) \equiv (R_h(t_n), m_h(t_n))$ con $\hat{\varphi}_h^n \in V_h \equiv W_h \times Q_h$ tales que:

$$\begin{aligned} & (\dot{R}_n, \mathbf{v}_n^T) - (U_n \bar{R}_n, \nabla \mathbf{v}_n^T) \\ & + (\delta U_n \cdot \nabla \bar{R}_n, U_n \cdot \nabla \mathbf{v}_n^T) + (\hat{\nu}_R \nabla \bar{R}_n, \nabla \mathbf{v}_n^T) = 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\hat{\mathbf{v}}_n = (\mathbf{v}_n^T, \mathbf{v}_n^m) \in V_h \quad \text{funciones test}$$

$$\begin{aligned} & (\dot{U}_n + \beta \cdot \nabla U_n + \nabla P, \mathbf{v} + \delta(\dot{\mathbf{v}} + \beta \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla q) dxdt) + \\ & \int_{\Gamma} ([U_n], \mathbf{v}_+) |n \cdot \beta + n_t| ds + \mu \int_K (\text{rot } w_n^*, \mathbf{v} + \delta(\dot{\mathbf{v}} + \beta \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla q) dxdt) = \\ & \int_{S_m} (f, \mathbf{v} + \delta(\dot{\mathbf{v}} + \beta \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla q)) dxdt \\ & \forall (\mathbf{v}, q) \in V^m \times Q^m \end{aligned} \quad (3.53)$$

donde

$$\text{rot}(w) = \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}, -\frac{\partial w}{\partial x_1} \right) = -\Delta \vec{U},$$

$$(\text{rot } \theta, U_n)^2 = (w_n^*, \theta)^2,$$

$$[U] = U^+ - U^-, \quad U_{\pm} = \lim_{s \rightarrow 0^{\pm}} (U(x + sn \cdot \beta, t + s)),$$

$$\beta = U_n \quad \text{ó} \quad \beta = \text{rot } U = \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1}, -\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)$$

$$U \cdot s = 0 \quad \text{c.t.p. sobre } \Gamma$$

$$0 \leq \mu \leq h, \quad \mu = \frac{R}{Re}$$

$$\delta = \tilde{c}h; \quad \tilde{c} \text{ es una constante positiva}$$

μ y f son los parámetros de estabilización[7].

$$\text{donde } \hat{\varphi}_h(x, t) \approx U(x, t) = \sum_{i=1}^{N^{\circ} \text{ Nodos externos}} U_i(t) N_i(\vec{x})$$

Ahora considerando el problema de valor inicial

$$\varphi_t + \sum_{i=1}^d f^i(\varphi)_{x_i} = \hat{S}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (\text{con } d = 2), \quad (3.54a)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (3.54b)$$

donde: $f^1 = F_1$, $f^2 = F_2$ y $\hat{S} = \hat{S}(G_{ij}(\varphi, \varphi_{xy}), S(\varphi))$ que almacena los flujos numéricos difusivos y reactivos de la forma compacta del sistema de conservación; $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, $m \geq 2$, $f^i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ son funciones continuas dadas, y siendo $\varphi_0 \in [L_2(\mathbb{R}^d)]^m$ (con $m = 3$) la condición inicial apropiada, de soporte compacto

contenido en Ω_i , diferenciando (3.54a), el sistema toma la forma

$$\varphi_t + \sum_{i=1}^d A_i \varphi_{x_i} = \hat{S}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (3.55a)$$

$$\varphi(0, x) = \varphi_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (3.55b)$$

donde $A_i = A_i(\varphi) = f_\varphi^i$ es el jacobiano de f^i , siendo φ definido por el vector de estados (3.7), las cuales son matrices de orden $m \times m$. Nosotros asumiremos que (3.54) está provista de una función a la que se denomina "función de entropía" $\eta(\varphi)$ la cual es estrictamente convexa, referida en detalle [3] con "flujo de entropía" asociado a $q(\varphi) = (q^i(\varphi))$ que satisface la relación de compatibilidad:

$$\eta_\varphi f_\varphi^i = q_\varphi^i, \quad i = 1, \dots, m; \quad (3.56)$$

donde η_φ es el gradiente de $\eta(\varphi)$.

Es decir, bajo una condición inicial apropiada(3.54):

$$\eta(\varphi)_t + \sum_{i=1}^d q^i(\varphi)_{x_i} \leq 0. \quad (3.57)$$

el sistema queda expresado de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A_1(v_1, v_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + A_2(v_1, v_2) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \hat{S}$$

donde

$$A_1(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - v_1^2 & 2v_1 & 0 \\ -v_1v_2 & v_2 & v_1 \end{pmatrix}, \quad A_2(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -v_1v_2 & v_2 & v_1 \\ c^2 - v_2^2 & 0 & 2v_2 \end{pmatrix}$$

Introduciendo $v_h \approx \vec{V}$, y un cambio de variables, $\bar{\varphi} = \eta_\varphi(\varphi)$, el sistema (3.55) toma la forma:

$$\bar{A}_0 \bar{\varphi}_t + \sum_{i=1}^d \bar{A}_i \bar{\varphi}_{x_i} = \hat{S}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (3.58a)$$

$$\bar{\varphi}(0, x) = \bar{\varphi}_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (3.58b)$$

$$v_h(x, t) = \sum_{i=1}^N v_i(t) N_i(x), \quad N_i \in V_h \quad (3.58c)$$

$$\rho_h(x, t) = \sum_{i=1}^N \rho_i(t) N_i(x) \quad N_i \subset Q_h \quad (3.58d)$$

$$p_h(x, t) = \sum_{i=1}^N p_i(t) N_i(x) \quad N_i \subset Q_h \quad (3.58e)$$

donde $\bar{A}_0 = \partial f^0 / \partial \bar{\varphi}$ y $\bar{A}_i = A_i \bar{A}_0$.

Usando la propiedad (3.56), se verifica que los \bar{A}_i son simétricos, con \bar{A}_0 definida positiva, entonces, si los A_i también son simétricos, η puede ser elegido ([8]) como $\eta(\varphi) = \frac{1}{2}|\varphi|^2$, donde $\bar{\varphi} = \varphi$ y (3.54) y (3.58) coinciden (en general, η no es cuadrático y η_φ no es lineal).

El Método de Galerkin con difusión en las líneas de corriente (3.54) está basado en la formulación (3.58) usando el vector de estados $\bar{\varphi}$ y se procede en la forma siguiente: Primero se realiza la integración de la desigualdad (3.57) respecto a x y t , con la integración de la condición inicial (control del estado):

$$\int_{\mathbb{R}^d} \eta(\varphi(t, \cdot)) dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \eta(\varphi_0) dx \quad (3.59)$$

En segundo lugar, multiplicando (3.54a) por η_φ resulta (3.57) (para soluciones continuas con la igualdad y para soluciones no continuas (entropía) con la desigualdad que se obtiene a partir de una regularización viscosa ([8], [55], [57]) en la ecuación (3.54), añadiendo el término $-\epsilon \Delta \varphi$ y haciendo $\epsilon \rightarrow \infty$). Alternativamente, (3.59) se obtiene a partir de (3.58a) pero multiplicada por $\bar{\varphi}$, desde que $\bar{\varphi} \bar{A}_0 \bar{\varphi}_t = \eta_\varphi \varphi_t = \eta_t$.

Para obtener un control del estado (3.59), se multiplica por η_φ en (3.54a) y por $\bar{\varphi}$ en (3.58a).

Cuando se aplica el método de Galerkin estandar, para resolver una ecuación $\mathcal{L}(w) = f$, donde \mathcal{L} es un operador diferencial lineal, generalmente se multiplica por una función de prueba v en ambos miembros de la ecuación y se aplica las fórmulas de Green para integrar en sentido débil y se asume que $v_h = \sum_{i=1}^n c_i w_i$ donde n es la dimensión del espacio de aproximación para la base w_i la cual es reemplazada en la ecuación variacional, no es así de fácil en el caso de operadores diferenciales con funciones no lineales que dependen de v .

Con el método de Galerkin estabilizado difusivo (SD) resuelve la ecuación (3.54) usando un control de la entropía (3.59), éste es automáticamente obtenido usando (3.58). Entonces se ha comprobado que al usar únicamente un método de Galerkin estandar (3.58) no es suficiente; para resolver sin viscosidad y en el límite de la viscosidad cuando se busca obtener una solución con elementos finitos, tales que cumpla la desigualdad (3.57) localmente y globalmente como lo establece (3.59). Por tanto también se necesita modificar la difusión en las líneas de corriente como se demuestra en el Teorema 3.2.3.

Bajo estas condiciones es posible construir un espacio de aproximación con elementos finitos basado en el método de Galerkin estabilizado y así obtener solución una del

problema (3.54).

Construcción del espacio de aproximación estabilizado Sea $\Omega_n \subset \mathbb{R}^d \times I_n$. Para $h > 0$ y $n = 0, 1, 2, \dots$; sea τ_h^n , por simplicidad, una triangulación cuasiuniforme de Ω_n en triángulos K de diámetro $h_k \sim h$ con ángulos muy pequeños uniformemente acotados y definimos para $k \geq 1$,

$$V_h^n = \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega_n)]^m : \mathbf{v}|_K \in P_k(K), K \in \tau_h^n\} \quad (3.60)$$

donde $P_k(K)$ denota el conjunto de polinomios sobre K de grado menor o igual a k . En otras palabras, V_h^n es la combinación de polinomios continuos a trozos sobre cada Ω_n . Típicamente, $t_{n+1} - t_n \sim h$, con Ω_n para un elemento dado. Note que desde que u_0 tiene soporte compacto, se sigue que también la solución u tiene soporte compacto en $\mathbb{R}^d \times [0, t]$ para cualquier t . Esto significa que podemos restringir las funciones en V_h^n a ser cero para $|x|$ muy grande.

Buscamos una solución aproximada $\bar{U} = \bar{U}^n$ en el espacio $V_h = \prod_{n \geq 0} V_h^n$, que satisfice (3.54), para $n = 0, 1, 2, \dots$ se tendrá

$$\bar{U}|_{\Omega_n} \in V_h^n$$

Note que las funciones en V_h son continuas en x y posiblemente discontinuas en t en las particiones discretas de tiempo t_n .

Por tanto el esquema SD y la captación de discontinuidades para (3.54), basado en (3.58), es formulado a continuación:

Encontrar $\bar{U} \in V_h$ tal que satisfice:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_n} \left(\bar{A}_0(\bar{U})\bar{U}_t + \sum_i \bar{A}_i(\bar{U})\bar{U}_{\Omega_i} \right) \cdot \left(\mathbf{v} + \delta \left(\bar{A}_0(\bar{U})\mathbf{v}_t + \sum_i \bar{A}_i(\bar{U})\mathbf{v}_{x_i} \right) \right) dx dt \\ & + \bar{\delta} \int_{\Omega_n} \frac{|\bar{A}(\bar{U})\bar{U}_t + \sum_i \bar{A}_i(\bar{U})\bar{U}_{x_i}|}{\epsilon + |\nabla \bar{U}|} \nabla \bar{U} \cdot \mathbf{v} dx dt \\ & + \bar{\bar{\delta}} \int_{\Omega_n} |\tilde{U}| \nabla_x \bar{U} \cdot \nabla_x \mathbf{v} dx dt \\ & + \int_{\mathbb{R}^d} (U_+^n - U_-^n) \cdot \mathbf{v}_+^n dx - \hat{S} = 0, \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in V_h^n, \end{aligned} \quad (3.61)$$

en un intervalo de tiempo finito en la n -ésima etapa iterativa, para $n = 0, 1, 2, \dots$

donde el punto denota el producto escalar usual en $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^d$ o \mathbb{R}^{d+1} con su respectiva norma $|\cdot|$.

Además, \bar{U} y U están relacionados por $\bar{U} = \eta_u(U)$ (notar que la variable de la condición inicial, U , aparece en el último término de (3.61)). Siendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\pm}^n(t, x) &= \lim_{s \rightarrow 0^{\pm}} \mathbf{v}(t_n + s, x), \quad U_{\pm}^0 = \varphi_0, \\ \nabla_x \mathbf{v} &= (\mathbf{v}_{x_1}, \dots, \mathbf{v}_{x_d}), \quad \nabla \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_{x_1}, \dots, \mathbf{v}_{x_d}), \\ \nabla_x \mathbf{v} \dot{\nabla}_x w &\equiv \sum_{i=1}^d \mathbf{v}_{x_i} \dot{w}_{x_i}, \quad \nabla \mathbf{v} \dot{\nabla} w = \mathbf{v}_t w_t + \nabla_x \mathbf{v} \dot{\nabla}_x w, \end{aligned}$$

y para todo $K \in \tau_h^n$:

$$\tilde{U}_K = \begin{cases} (U_+ - U_-)|_{K \cap (\mathbb{R}^d \times \{t_n\})} & \text{si } \int_{K \cap (\mathbb{R}^d \times \{t_n\})} dx > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Finalmente, ϵ , $\bar{\delta}$ y $\bar{\bar{\delta}}$ son parámetros que tienden a cero cuando $h \rightarrow 0$, y $\delta = \delta(\bar{U})$ es una matriz $m \times m$ definida positiva, el criterio de elección de δ la daremos en la Observación 3.2.1.

Respecto a la elección de ϵ , $\bar{\delta}$, $\bar{\bar{\delta}}$, normalmente esperaremos tener $\epsilon, \bar{\delta}, \bar{\bar{\delta}} = \mathcal{O}(h^0)$, con $0 < \epsilon \ll 1$.

La difusión en las líneas de corriente de las funciones de forma es dada por el término $\delta-$, mientras la captación de las discontinuidades cuando hay singularidades (zona vacía) está relacionado con $\bar{\delta}$ y $\bar{\bar{\delta}}$, las que corresponden a los términos de viscosidad artificial, cuyos coeficientes de viscosidad dependen a su vez de dos componentes, éstos son $|U_t + \sum_i f^i(U)_{x_i}|$ y $|\tilde{U}|$.

Observación 3.2.1 *La elección más simple de δ es dada por $\delta = ChI$ con I la matriz identidad. Esta elección no es tan adecuada en algunas situaciones.*

Por ejemplo, consideremos los coeficientes de (3.58) en el caso unidimensional:

$$A_0 w_t + A w_x = \hat{S}, \quad (3.62)$$

donde A_0 y A son simétricas, con A_0 definida positiva.

Sea $E = (A_0)^{-1/2} P$, donde P es una matriz ortogonal consistente de autovectores de A tales que $\tilde{A} \equiv (A_0)^{-1/2} A (A_0)^{-1/2}$.

Entonces E diagonaliza a las matrices A_0 y A , además se tiene:

$$E^T A_0 E = I, \quad E^T A E = \Lambda = \text{diag}(\lambda_i), \quad (3.63)$$

donde E^T denota la transpuesta de E y Λ es una matriz diagonal de valores propios λ_i de la matriz \tilde{A} .

Introduciendo la nueva variable \bar{w} por $w = W\bar{w}$, se tiene que

$$\begin{aligned} (A_0 w_t + A w_x + A w_x) \cdot (\mathbf{v} + \delta(A_0 \mathbf{v}_t + A \mathbf{v}_x)) &= \\ &= (A_0 E \bar{w}_t + A E \bar{w}_x) \cdot (E \mathbf{v} + \delta(A_0 E \mathbf{v}_t + A E \bar{w}_x)) \quad (3.64) \\ &= (\bar{w}_t + \Lambda \bar{w}_x) \cdot (\mathbf{v} + E^{-1} \delta E^{-T} (\mathbf{v}_t + \Lambda \mathbf{v}_t)). \end{aligned}$$

desde que $\bar{w}_t + \Lambda \bar{w}_x = \hat{S}$ es un sistema no acoplado de m ecuaciones escalares, siguiendo con la analogía en un caso escalar, elegiremos ahora el método SD para (3.62)

$$E^{-1} \delta E^{-T} = h(I + \Lambda^2)^{-1/2} = h \text{diag}(\mu_i), \quad \mu_i = (1 + \lambda_i^2)^{-1/2},$$

es decir,

$$\delta = hE(1 + \Lambda^2)^{-1/2} E^T = hA_0^{-1/2} (I + \tilde{A}^2)^{-1/2} (A_0)^{-1/2}. \quad (3.65)$$

Si ahora μ_i varía considerablemente su dimensión, entonces $\text{diag}(\mu_i)$ no es cercano a cualquier múltiplo de I y, si elegimos $\delta = ChI$, entonces en las componentes del correspondiente método SD para (3.62) no se conseguiría corregir al modificar la difusión en las líneas de corriente. Notar que \tilde{A} y A_1 en (3.55) tienen los mismos valores propios, es decir, los λ_i son los valores propios de A_1 .

En el caso $d > 1$, (3.62) es reemplazado por $A_0 w_t + A w_x = \hat{S}$, esto en general no es posible diagonalizar todas las matrices A_i . Entonces una generalización natural de (3.65) para el caso $d > 1$ está dado ([8]) por:

$$\delta = h(A_0)^{-1/2} \left(I + \sum_{i=1}^d \tilde{A}^2 \right)^{-1/2} (A_0)^{-1/2}, \quad (3.66)$$

donde $\tilde{A}_i = (A_0)^{-1/2} A_i (A_0)^{-1/2}$.

En (3.61) elegimos $\delta = \delta(t, x)$ de acuerdo a (3.66), con los A_i reemplazados por $\bar{A}_i(\bar{U}(t, x))$.

Observación 3.2.2 Es posible generalizar los términos de captación de las singularidades reemplazando $\nabla \bar{U} \dot{\nabla} \mathbf{v}$ por $M_0 \bar{U}_t \mathbf{v}_t + \sum_i M_i \bar{U}_{x_i} \mathbf{v}_{x_i}$, donde M_i , $i = 0, \dots, d$, son matrices $m \times m$ definidas positivas. En el caso unidimensional, una diagonalización como en la Observación 3.2.1 puede ser usada para encontrar adecuadamente M_i . En varias dimensiones, la elección es más complicado, en detalle puede verse en [23], por ejemplo puede ser natural elegir $M_i = A_0$, $i = 0, \dots, d$, lo cual corresponde a añadir difusión cerca a una singularidad en la forma $-h \nabla u$ en las variables de conservación, de modo que M pueda usarse como una matriz identidad en el cálculo computacional.

Observación 3.2.3 *Note que (3.61), aunque expresado en variables de entropía, puede ser considerado en forma conservativa, desde que*

$$U_t + \sum_i f^i(U)_{x_i} - \hat{S} \equiv \bar{A}_0(\bar{U})\bar{U}_t + \sum_i \bar{A}_i(\bar{U})\bar{U}_{x_i} - \hat{S} = 0.$$

En particular, esto significa que las condiciones discontinuas se satisfacen en el límite de la solución de (3.61).

Solución entrópica

Sea $\varphi \in [L_\infty(\Omega)]^m$, $\Omega = (0, \infty) \times \mathbb{R}^d$, se define como una solución entrópica de (3.54) si para todo $\psi \in [C_0^\infty(\bar{\Omega})]^m$, $\bar{\Omega} = [0, \infty) \times \mathbb{R}^d$, se tiene:

$$\int_{\Omega} \left(\varphi \cdot \psi_t + \sum_i f^i(\varphi) \cdot \psi_{x_i} \right) dt dx + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_0 \cdot \psi(0, \cdot) dx = \hat{S}, \quad (3.67)$$

y para todo $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ con $\psi \geq 0$ satisface:

$$\int_{\Omega} \left(\eta \psi_t + \sum_i q^i \psi_{x_i} \right) dt dx \geq 0, \quad (3.68)$$

donde η es una función estrictamente convexa y se define como la entropía de la solución. Es decir, existe un conjunto compacto $D \subset \mathbb{R}^m$ y constantes positivas σ, α_1 y α_2 tal que, para todo $\mathbf{v}, w \in D \subset \mathbb{R}^m$ con $\delta = \delta(\bar{\varphi}) = \delta(\eta_\varphi(U))$ se tiene:

$$\eta(\mathbf{v}) - \eta(w) - \eta_\varphi(w) \cdot (\mathbf{v} - w) \geq \sigma |\mathbf{v} - w|^2, \quad (3.69)$$

$$\alpha_1 h \leq x \cdot \delta x, \quad |x \cdot \delta y| \leq \alpha_2 h \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m, |x| = |y| = 1. \quad (3.70)$$

Convergencia de la aproximación entrópica

Lema 3.2.1 *Para $N = 1, 2, \dots$ se tiene:*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \eta(U_-^N) dx + \sigma \sum_{n=0}^{N-1} \|U_+^n - U^N -\|_{\mathbb{R}^d} + \alpha_1 h \sum_{n=0}^{N-1} \|U_t + \sum_i f^i(U)_{x_i}\|_{\Omega_n}^2 \\ + \bar{\delta} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega_n} \frac{|U_t + \sum_i f^i(U)_{x_i}| |\nabla \bar{U}|^2}{h + |\nabla \bar{U}|} \\ + \bar{\delta} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega_n} |\tilde{U} |\nabla_x \bar{U}|^2 dt dx - \hat{S} \leq \int_{\mathbb{R}^d} \eta(\varphi_0) dx. \end{aligned}$$

Demostración:

Tomando $\bar{v} = \bar{U} = \eta_\varphi(U)$ en (3.61), se obtiene

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_n} \left(\eta_t(U) + \sum_i q^i(U)_{x_i} \right) dt dx + \\ & + \int_{\Omega_n} \left(U_t + \sum_i f^i(U)_{x_i} \right) \cdot \delta \left(U_t + \sum_i f^i(U)_{x_i} \right) dt dx \\ & + \bar{\delta} \int_{\Omega_n} \left| U_t + \sum_i f^i(U)_{x_i} \right| \frac{|\nabla \bar{U}|^2}{h + |\nabla \bar{U}|} dt dx + \bar{\delta} \int_{\Omega_n} |\tilde{U}| |\nabla_x \bar{U}|^2 dt dx + \\ & + \int_{\mathbb{R}^d} (U_+^n - U_-^n) \cdot \eta_\varphi(U_+^n) - \hat{S} = 0, \end{aligned}$$

de modo que $U(t, x) = 0$ para $|x|$ muy grandes.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\mathbb{R}^d} (\eta(U_-^{n+1}) - \eta(U_+^{n+1}) + \eta_\varphi(U_+^n) \cdot (U_+^n - U_-^n)) dx \\ & + \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega_n} \left(U_t + \sum_i f^i(U)_{x_i} \right) \cdot \delta \left(U_t + \sum_i f^i(U)_{x_i} \right) dt dx \\ & + \bar{\delta} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega_n} \left| U_t + \sum_i f^i(U)_{x_i} \right| \frac{|\nabla \bar{U}|^2}{h + |\nabla \bar{U}|} dt dx + \bar{\delta} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega_n} |\tilde{U}| |\nabla_x \bar{U}|^2 dt dx \\ & \geq \int_{\mathbb{R}^d} \eta U_-^n dx - \int_{\mathbb{R}^d} \eta(\varphi_0) dx + \alpha_1 h \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega_n} \left| U_t + \sum_i f^i(U)_{x_i} \right|^2 dt dx \\ & \quad + \bar{\delta} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega_n} \left| U_t + \sum_i f^i(U)_{x_i} \right| \frac{|\nabla \bar{U}|^2}{h + |\nabla \bar{U}|} dt dx \\ & \quad + \bar{\delta} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega_n} |\tilde{U}| |\nabla_x \bar{U}|^2 dt dx \\ & + \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\mathbb{R}^d} (\eta(U_-^n) - \eta(U_+^n) - \eta_\varphi(U_+^n) \cdot (U_-^n - U_+^n)) dx - \hat{S} = 0 \end{aligned}$$

Luego, aplicando la desigualdad (3.69) el lema queda probado. \square

Estimación a priori del error Dada una función de interpolación standard, $w \in \prod_{n \geq 0} [H^1(\Omega_n) \cup \mathcal{C}(\Omega_n)]^m$, donde $\mathcal{C}(\Omega_n)$ es el espacio de funciones continuas sobre Ω_n y $\|\cdot\|_{k,w}$ denota la norma en el espacio de Sobolev $[H^k(w)]^m$, para estimar el error de aproximación usando el interpolante $\pi_h w \in V_h$ se sigue una variante del siguiente lema.

Lema 3.2.2 ([8]) *Existe una constante C tal que para todo $w \in [H^1(\Omega_n) \cup \mathcal{C}(\Omega_n)]^m$,*

$\psi \in H^1(\Omega_n) \cup C(\Omega_n)$, $\mathbf{v} \in V_h$, $n = 0, 1, 2, \dots$ y $k = 0, 1$,

$$\begin{aligned} h^k \| w - \pi_h w \|_{k, \Omega_n} + \sqrt{h} \| w_+^n - (\pi_h w)_+^n \|_{\mathbb{R}^d} &\leq Ch^2 \| w \|_{2, \Omega_n}, \\ h^k \| \mathbf{v}\psi - \phi_h(\mathbf{v}\psi) \|_{k, \Omega_n} + \sqrt{h} \| (\mathbf{v}\psi)_+^n - (\phi_h(\mathbf{v}\psi))_+^n \|_{\mathbb{R}^d} \\ &\leq Ch \| \mathbf{v} \|_{L^\infty(\Omega_n)} (\| \psi \|_{1, \Omega_n} + h \| \psi \|_{2, \Omega_n}). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Observación 3.2.4 *La aproximación (3.57) con la estimación de (3.56) no está establecida totalmente, puede ser reemplazada por una variante del Lema 3.2.2 que se verifica a continuación para $\Omega = \mathbb{R} \times (0, \infty)$, $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\mathbf{v} \in V_h$,*

$$\| \mathbf{v}\psi - \pi_h(\mathbf{v}\tilde{\psi}) \|_{s, \Omega} \leq Ch^{1-s} \| \mathbf{v} \|_{L^\infty(\Omega_n)} \| \psi \|_{1, \Omega}, \quad s = 0, 1; \quad (3.72a)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h \| (\mathbf{v}\psi)_+^n - (\pi_h(\mathbf{v}\tilde{\psi}))_+^n \|_R^2 \leq Ch^2 \| \mathbf{v} \|_{L^\infty(\Omega_n)}^2 \| \psi \|_{1, \Omega}^2, \quad (3.72b)$$

para $\mathbf{v} \equiv 1$. Aquí, $\tilde{\psi} \equiv \psi * \omega_h$ es una modificación de ψ , donde ω_h está definido por

$$\begin{aligned} \omega_h(x, t) &= \omega_h^0(x) \omega_h^0(t), \quad \omega_h^0(s) = h^{-1} \omega^0(s/h), \\ 0 \leq \omega^0 &\in C_0^\infty(R), \quad \int_R \omega^0(s) ds = 1, \quad \text{supp} \omega^0 = [-1, 1]. \end{aligned}$$

Considerando que η_φ^{-1} denota el inverso de $\eta : D \rightarrow \eta_\varphi(D)$ y $\bar{\varphi} = \eta_\varphi(\varphi)$ y asumiendo que $\epsilon = \bar{\delta} = \bar{\delta} = h$.

Una aproximación de la forma de $\varphi \in [L^\infty(\Omega)]^m$, $\Omega = (0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ del sistema de conservación (3.54) con elementos finitos y el método SD es una solución entrópica ([8], [20]), esto se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.3 *Supongamos una sucesión acotada de soluciones con el método de elementos finitos $\{\bar{U}_h\}$ de (3.61) con $\text{Rango}(\bar{U}_h) \subset \eta_\varphi(D)$ tal que converge sobre casi todo punto de Ω a una función $\bar{\varphi}$ cuando h tiende a cero. Entonces $\varphi = \eta_\varphi^{-1}(\bar{\varphi})$ satisface (3.67) y (3.68), es decir, φ tiene la forma de una solución entrópica de (3.54).*

La prueba está basada en los lemas anteriores donde σ y α_1 son dados en (3.69) y (3.70) respectivamente.

Demostración :

Para probar que φ satisface (3.67), tenemos $\bar{\mathbf{v}} = \pi_h(\psi)$ en (3.61) donde $\psi \in [C_0^\infty]^m$

para obtener

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_n} (U_t + \sum_i f^i(U)_{x_i}) \cdot \psi \, dt dx + \int_{\mathbb{R}^d} (U_+^n - U_-^n) \cdot \psi_+^n \, dx \\
&= \int_{\Omega_n} \left(U_t + \sum_i f^i(U)_{x_i} \right) \cdot (\psi - \pi_h(\psi)) \, dt dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d} (U_+^n - U_-^n) \cdot (\psi_+^n - (\pi_h \psi)_+^n) \, dx \\
&- \int_{\Omega_n} \left(U_t + \sum_i f^i(U)_{x_i} \right) \cdot \delta \left(\bar{A}_0(\bar{U})(\pi_h(\psi))_t + \sum_i \bar{A}_i(\bar{U})(\pi_h \psi)_{x_i} \right) \, dt dx \\
&\quad - \bar{\delta} \int_{\Omega_n} \frac{|U_t + \sum_i f^i(U)_{x_i}|}{h + |\nabla \bar{U}|} \nabla \bar{U} \cdot \nabla(\pi_h \psi) \, dt dx \\
&\quad - \bar{\delta} \int_{\Omega_n} |\tilde{U}| |\nabla_x \bar{U}| \cdot \nabla_x(\pi_h \psi) \, dt dx \\
&\equiv E_n^1 + E_n^2 + E_n^3 + E_n^4 + E_n^5 = \hat{S}.
\end{aligned}$$

Integrando por partes y sumando sobre n , resulta

$$- \int_{\Omega} \left(U \cdot \psi_t + \sum_i f^i(U) \cdot \psi_{x_i} \right) \, dt dx - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_0 \cdot \psi_+^0 \, dx = \sum_{j=1}^5 \sum_{n \geq 0} E_n^j \equiv \sum_{j=1}^5 R^j = \hat{S}.$$

Por los Lemas 3.2.1 y 3.2.2 y usando la hipótesis que $\|\bar{U}\|_{L^\infty(\Omega)}$ es uniformemente acotado en h , fácilmente encontramos que $|R^j| \leq C\sqrt{h}$, $j = 1, \dots, 5$ y (3.67) se sigue haciendo h tender a cero, usando ([1]) el teorema de convergencia dominada de Lebesgue.

Ahora, tomando $\bar{v} = \pi_h(\bar{U}\psi)$ en (3.61) con $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi \geq 0$, integrando por partes y sumando sobre $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left(\eta(U)\psi_t + \sum_i q^i(U)\psi_{x_i} \right) \, dt dx \\
&+ \sum_{n \geq 0} \int_{\mathbb{R}^d} (\eta(U_-^n) - \eta(U_+^n) - \eta_\varphi(U_+^n) \cdot (U_-^n - U_+^n)) \, dx \\
&+ \int_{\Omega} \left(U_t + \sum_i f^i(U)_{x_i} \right) \cdot \delta \left(U_t + \sum_i f^i(U)_{x_i} \right) \psi \, dt dx \\
&\quad + \delta \int_{\Omega} \left| U_t + \sum_i f^i(U)_{x_i} \right| \frac{|\nabla \bar{U}|^2}{h + |\nabla \bar{U}|} \psi \, dt dx \\
&+ \bar{\delta} \sum_{n \geq 0} \int_{\Omega_n} |\tilde{U}| |\nabla_x \bar{U}|^2 \psi \, dt dx \equiv \sum_{j=1}^8 \sum_{n \geq 0} F_n^j \equiv \sum_{j=1}^8 \hat{F}^j = \hat{S}
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
F_n^1 &= \int_{\Omega_n} \left(U_t + \sum_i f^i(U)_{x_i} \right) \cdot (\bar{U}\psi - \pi_h(\bar{U}\psi)) dt dx, \\
F_n^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} ((U_+^n - U_-^n)) \cdot ((\bar{U}\psi)_+^n - \pi(\bar{U}\psi)_+^n) dx \\
F_n^3 &= \int_{\Omega_n} \left(U_t + \sum_i f^i(U)_{x_i} \right) \cdot \left[\bar{A}_0(\bar{U})((\bar{U}\psi)_t - (\pi_h(\bar{U}\psi))_t) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_i \bar{A}_i(\bar{U})((\bar{U}\psi)_{x_i} - (\pi_h(\bar{U}\psi))_{x_i}) \right] dt dx,
\end{aligned}$$

$$F_n^4 = - \int_{\Omega_n} \left(U_t + \sum_i f^i(U)_{x_i} \right) \cdot \delta \left(\bar{A}_0(\bar{U})\bar{U}\psi_t + \sum_i \bar{A}_i(\bar{U})\bar{U}\psi_{x_i} \right) dt dx,$$

$$F_n^5 = \bar{\delta} \int_{\Omega_n} \frac{|U_t + \sum_i f^i(U)_{x_i}|}{h + |\nabla \bar{U}|} \nabla \bar{U} \cdot \nabla (\bar{U}\psi - \pi_h(\bar{U}\psi)) dt dx,$$

$$F_n^6 = -\bar{\delta} \int_{\Omega_n} \frac{|U_t + \sum_i f^i(U)_{x_i}|}{h + |\nabla \bar{U}|} \left(\bar{U}_t \cdot \bar{U}\psi_t + \sum_i \bar{U}_{x_i} \cdot \bar{U}\psi_{x_i} \right) dt dx,$$

$$F_n^7 = \bar{\delta} \int_{\Omega_n} |\tilde{U}| \nabla_x \bar{U} \cdot \nabla_x (\bar{U}\psi - \pi_h(\bar{U}\psi)) dt dx,$$

$$F_n^8 = -\bar{\delta} \int_{\Omega_n} |\tilde{U}| \left(\sum_i \bar{U}_{x_i} \cdot \bar{U}\psi_{x_i} \right) dt dx$$

Del argumento anterior, vemos que $|\hat{F}^j| \leq C\sqrt{h}$, $j = 1, \dots, 8$.

Asi mismo de (3.68), cuando h tiende a cero y usando la convexidad de η se prueba la convergencia de la sucesión, con esto queda demostrado el teorema. \square

3.3. Aproximación temporal del sistema EDO No lineal generado

En el caso no lineal la semidiscretización con MEF, conduce a un sistema EDO no lineal, y obtener una buena aproximación del problema de valor inicial asociado a este sistema, como es el caso de la ecuación (3.54), se puede utilizar un esquema del tipo Euler implícito de segundo orden conocido como el esquema de Gear, también llamado "backward differencing" (BDF), el cual se puede ver a continuación.

Supongamos que se tiene:

$$y' := \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}, \quad y_a := \begin{pmatrix} y_a^1 \\ y_a^2 \\ \vdots \\ y_a^n \end{pmatrix}, \quad f(t, y) = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ f_2(t, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

Por ejemplo en el caso escalar:

$$u' = f(t, u), \quad u(a) = u_a$$

con $a = 0$

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \quad u(0) = u^0$$

aplicando un método de diferencias finitas para obtener u

$$\begin{aligned} u_{i+1}^h &= u_i^h + h\phi(t_i, u_i^h, h), \quad i = 0, 1, \dots, N-1; \\ u_0^h &= u^0(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \text{ en forma discreta } (x_j, y_j), \quad u^0(x_j, y_j) \\ \phi(t, u, h) &= f(t, u) \\ \frac{1}{a}(u_{i+1}^h - u_i^h) &= f(t_i, u_i^h), \quad i = 0, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Por el método de Taylor de orden 3, se tiene:

$$u(t+h) = u(t) + hu'(t) + \frac{h^2}{2}u''(t) + \mathcal{O}(h^3)$$

ó

$$u(t+h) = u(t) + hf(t, u(t)) + \frac{h^2}{2}(f_t(t, u(t)) + f(t, u(t))f_u(t, u(t))) + \mathcal{O}(h^3)$$

y el de segundo orden

$$u_{i+1}^h = u_i^h + hf(t_i, u_i^h) + \frac{h^2}{2}(f_t(t_i, u_i^h) + f(t_i, u_i^h)f_u(t_i, u_i^h))$$

La desventaja de este método es la evolución de las derivadas parciales de la función no lineal f .

3.3.1. Método multipasos basado en integración numérica

Asumiendo que luego de la semidiscretización espacial con elementos finitos resulta un problema de valor inicial asociado a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineal expresado en la forma:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_{i+1}) &= y(x_{i-j}) + \int_{x_{i-j}}^{x_{i+1}} y'(\tau) d\tau \\ &= y(x_{i-j}) + \int_{x_{i-j}}^{x_{i+1}} f(\tau, y(\tau)) d\tau, \quad j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{aligned}$$

La función $f(\tau, y(\tau))$ bajo la integral es reemplazada por el polinomio de interpolación del grado máximo p definido por los puntos:

$$(x_i, f(x_i, y_i^h)), \dots, (x_{i-p}, f(x_{i-p}, y_{i-p}^h)),$$

luego, calculando la integral resulta

$$y_{i+1}^h = y_{i-j}^h + \int_{x_{i-j}}^{x_{i+1}} \left(\sum_{k=j}^{i+1} f(x_{i-k}, y_{i-k}^h) \right) \prod_{l=0}^p \frac{\tau - x_{i-l}}{x_{i-k} - x_{i-l}} d\tau$$

Si los nodos fueran equidistantes, se calcula a priori las constantes

$$\beta_{j,p,k} := \int_{x_{i-j}}^{x_{i+1}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^p \frac{\tau - x_{i-l}}{x_{i-k} - x_{i-l}} d\tau$$

Así, el método de paso múltiple estaría dado por

$$y_{i+1}^h = y_{i-j}^h + \sum_{k=0}^p \beta_{j,p,k} f(x_{i-k}, y_{i-k}^h)$$

Para $x_{i+1} - x_i = h_i = h$, $\forall i, p = j = 0$ resulta el método de Euler explícito, para $j = 0$, p arbitrario obtenemos los métodos de Adams - Bashforth.

A continuación se muestra los valores para los coeficientes $\beta_{j,p,k}$ con valores moderados de p :

$\frac{1}{h}\beta_{0,p,k}$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	Orden
$p = 0$	1				1
$p = 1$	3/2	-1/2			2
$p = 2$	23/12	-16/12	5/12		3
$p = 3$	55/24	-59/24	37/24	-9/24	4

En la práctica, no conviene usar sólo este método, a pesar de su simplicidad y ser de alto orden (por ejemplo en el caso de $p = 3$, se alcanza el orden 4, usando solamente la evaluación de f por paso). El problema está en el pequeño dominio de estabilidad de este método.

3.3.2. Método implícito de paso múltiple basado en derivación numérica (BDF)

Supongamos que se tiene:

$$y'(x_{i+1}) = f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$$

y aproximamos $y(x)$ por el polinomio de interpolación $P(x, i)$ del grado máximo $k + 1$ para los datos:

$$(x_{i+1}, y_{i+1}^h), \dots, (x_{i-k}, y_{i-k}^h), \quad k \geq 0$$

donde el valor de y_{i+1}^h aún es desconocido, se puede obtener y_{i+1}^h , de la ecuación

$$\frac{d}{dx} P(x, i)|_{x=x_{i+1}} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^h)$$

usando para la representación del polinomio la fórmula de Newton

$$P(x, i) = \sum_{j=0}^{k+1} y^h[x_{i+1}, \dots, x_{i+1-j}] \prod_{l=0}^{j-1} (x - x_{i+1-l})$$

donde $y^h[x_{i+1}, \dots, x_{i+1-j}]$ es una j -ésima diferencia dividida con respecto a los datos, h es un paso de tiempo.

Se tiene entonces:

$$\sum_{j=1}^{k+1} y^h[x_{i+1}, \dots, x_{i+1-j}] \prod_{l=1}^{j-1} (x_{i+1} - x_{i+1-l}) = f(x_{i+1}, y_{i+1}^h),$$

es decir, se obtendría un sistema de ecuaciones para determinar y_{i+1}^h .

Para el caso equidistante se puede calcular explícitamente los coeficientes de estas fórmulas. El procedimiento devolverá las siguientes fórmulas

$$y_{i+1}^h = \sum_{l=0}^k \alpha_{kl} y_{i-l}^h + h\beta_0 f(x_{i+1}, y_{i+1}^h) \quad (3.73)$$

con los coeficientes que se muestran en la tabla:

k	0	1	2	3	4	5
β_0	1	2/3	6/11	12/25	60/137	60/147
α_{k0}	1	4/3	18/11	48/25	300/137	360/147
α_{k1}		-1/3	-9/11	-36/25	-300/137	-450/147
α_{k2}			2/11	16/25	200/137	400/147
α_{k3}				-3/25	-75/137	-225/147
α_{k4}					12/137	72/147
α_{k5}						-10/147

Estas fórmulas son muy interesantes hasta $k \leq 5$, para aproximar sistemas semidiscretos con MEF, en 1D.

Si se considera: $k = 0$, $\beta_0 = 1$, $\alpha k_0 = 1$, se genera el esquema de Euler implícito. A éstas (3.73) se les conocen como fórmulas BDF (Backward differentiation formula) o método Gear de primer orden, su ecuación es de la siguiente forma:

$$y_{i+1}^h = \alpha_{00} y_i^h + \Delta t \beta_0 f(x_{i+1}, y_{i+1}^h), \quad \Delta_j = t_{j+1} - t_j, \quad \text{para todo } j$$

Extendiendo esta técnica numérica BDF, para obtener la solución del sistema EDO generado de la semidiscretización del problema con MEF en 2D, asumiendo que U_h es obtenida por el método de Elementos finitos, resulta, despues de la discretización BDF en tiempo, el siguiente sistema algebraico:

$$\begin{aligned} \frac{U_h^{j+1} - U_h^j}{\Delta t} &= M^{-1}(U_h^{j+1})[U_h^{j+1} - k(U_h^{j+1})U_h^{j+1}] \\ U_h^{j+1} - U_h^j &= \Delta t M^{-1}(U_h^{j+1})[U_h^{j+1} - k(U_h^{j+1})U_h^{j+1}] \\ U_h^{j+1} &= U_h^j + \Delta t M^{-1}(U_h^{j+1})[U_h^{j+1} - k(U_h^{j+1})U_h^{j+1}] \end{aligned}$$

Haciendo:

$$\begin{aligned} G(U_h^{j+1}) &= U_h^{j+1} - U_h^j - \Delta t M^{-1}(U_h^{j+1})[U_h^{j+1} - k(U_h^{j+1})U_h^{j+1}] \\ &= 0 \\ \bar{G}(U_h^{j+1}) = 0 &\Rightarrow U_h^{j+1} = U_h^j - \lambda [D\bar{G}(U_h^{j+1})]^{-1} \bar{G}(U_h^{j+1}) \end{aligned}$$

Convergencia del esquema BDF

Siguiendo el caso de un sistema EDO, en 1D, que tiene la siguiente fórmula de aproximación:

$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{m+i}^s = s \sum \beta_i f(x_{m+i}, y_{m+i}^s)$, $m = 0, \dots, N_h - k$ donde $s = t_{j+1} - t_j$ para todo j . la cual puede ser expresada por los polinomios

$$\rho(\xi) := \sum_{i=0}^k \alpha_i \xi^i; \quad \sigma(\xi) := \sum_{i=0}^k \beta_i \xi^i$$

Error de truncamiento local

$$\tau(x, y(x), s) := \frac{1}{s} \left(\sum \alpha_i (x + is) - h \sum_{i=0}^k \beta_i f(x + is, y(x + is)) \right)$$

Error de discretización global:

$$\epsilon(x, s) = y(x) - y_{N_s}^s, \quad N_s s = x - x_0$$

El método es consistente al menos de orden p si

$$\tau(x, y(x), s) = \mathcal{O}(h^s) \quad \text{para } s \rightarrow 0$$

y convergente del orden p si

$$\epsilon(x, s) = \mathcal{O}(h^s) \quad \text{para } s \rightarrow 0$$

Teorema 3.3.1 *El método (BDF) es consistente al menos de orden p , si $\rho_1(1) = 0$, $\rho_{j+1}(1) = j\sigma_j(1)$, donde los polinomios ρ_j y σ_j son definidos por la recursión $\rho_1(\xi) \equiv \rho(\xi)$, $\rho_1(\xi) \equiv \sigma(\xi)$, $\rho_{j+1}(\xi) \equiv \xi\rho'_j(\xi)$, $\sigma_{j+1}(\xi) \equiv \xi\sigma'_j(\xi)$.*

El método es convergente del orden p ([41], [49]), si además:

1. *Todos los ceros de ρ están localizados en el interior o en el borde del círculo unitario, y los ceros del borde son simples, es decir,*

$$(\rho(\xi) = 0 \Rightarrow |\xi| \leq 1) \wedge (\rho(\xi) = 0 \wedge |\xi| = 1 \Rightarrow \rho'(\xi) \neq 0)$$

2. *Los errores iniciales son del orden p*

$$y_i^s - y(x_i) = \mathcal{O}(s^p), \quad i = 0, \dots, k-1$$

La condición (1) es conocido como condición de estabilidad asintótica. El esquema BDF es estable y consistente ([41], [49]).

Por el Teorema de Dahlquist, el orden máximo de un método estable y consistente de k pasos es

$$p = \begin{cases} k+1 & \text{para } k \text{ impar} \\ k+2 & \text{para } k \text{ par} \end{cases}$$

Si $k = 1$ entonces la convergencia es de orden 2, como se puede ver en el siguiente ejemplo:

$k = 1, \beta_0 = 2/3, \alpha_{k_0} = 4/3$, entonces:

$$\begin{aligned} y_{i+1}^s &\approx \sum_{l=0}^1 \alpha_{kl} y_{i-l}^s + s \frac{2}{3} f(x_{i+1}, y_{i+1}^s) \\ &\approx \alpha_{k_0} y_i^s + \alpha_{k_1} y_{i-1}^s + s \frac{2}{3} f(x_{i+1}, y_{i+1}^s) \\ y_{i+1}^s &\approx \frac{4}{3} y_i^s - \frac{1}{3} y_{i-1}^s + \frac{2}{3} s f(y_{i+1}, y_{i+1}^s) \end{aligned}$$

Analogamente se construye la formulación para el sistema en estudio, luego el resultado es un sistema algebraico el mismo que se resuelve mediante el método de Newton discreto, para sistemas Sparse.

3.4. Esquema de resolución del sistema no lineal algebraico

Para resolver el sistema algebraico no lineal, se utiliza el método de Newton discreto, puesto que el sistema es de orden n con matrices esparcidas no simétricas, y que al usar el método de Newton involucra n^2 operaciones de las derivadas parciales de la matriz inversa de \vec{G} , éstas derivadas que se involucran en la matriz Jacobiana de G se aproximan automáticamente por un método de diferenciación finita, lo que conduce al llamado método de Newton Discreto.

Método de Newton Discreto con Sobre Relajación

Sean $\vec{U} \in D \subset \mathbb{R}^n$, dominio de \vec{G} , $K \in \mathbb{R}^m$ un parámetro, $J(\vec{U}, h) \in L(\mathbb{R}^{n \times n})$ una matriz linealizable del Jacobiano de \vec{G} , cuyos coeficientes de aproximación de $\frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{U}_i}$ en diferencias aproximados son $J(\vec{U}, h)_{ij}$ que se obtiene mediante el siguiente algoritmo:

Algoritmo 1

Dado: U^0

Calcular:

$$\vec{U}^{k+1} = \vec{U}^k - J(\vec{U}^k, h^k)^{-1} \vec{G}(\vec{U}^k), \quad k = 1, \dots; h^k \in \mathbb{R}^m$$

donde:

$$J(\vec{U}, h)_{ij} = \frac{1}{h_{ij}} (g_i(\vec{U} + h_{ij} e^j) - g_i(\vec{U}))$$

e^j ; $j = 1, \dots, n$; $\{e^1, e^2, \dots, e^n\}$ es la base natural de \mathbb{R}^n

$h \in \mathbb{R}^{n^2}$ es un vector con componentes pequeños no nulos.

En el sentido general, la discretización sería:

$$J(\vec{U}, h)_{ij} = \frac{1}{h_{ij}} \left[g_i(\vec{U} + \beta \sum_{l=1}^{j-1} h_{il} e^l + h_{ij} e^j) - g_i(\vec{U} + \beta \sum_{l=1}^{j-1} h_{i0} e^l) \right],$$

$$J(\vec{U}, h) \in L(\mathbb{R}^n)$$

haciendo $\beta = 1$, entonces requiere la evaluación de

$$g_i(\vec{U}); g_i(\vec{U} + \sum_{k=1}^j h_{ik} e^k); i = 1, 2, \dots, n; j = 1, \dots, n$$

y restringiendo $h_{ij} = h_j$ para $i = 1, \dots, n$; es de menos costo del proceso computacional a la diferencia $\frac{1}{h_j} (g(\vec{U} + h_j e^j)) - g(\vec{U})$, requiere de $n + 1$ llamadas a la restricción de g .

Proposición 3.4.1 ([41], [49]) Sea $\mathbf{G} : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, de clase C^1 y

$$\| DG(U) - DG(V) \| \leq \gamma \| U - V \|, \quad \text{para todo } U, V \in E.$$

Entonces si $U^* \in \text{int}(E)$, para cualquier bola de radio ρ y centro U^* , $\mathbb{B}(U^*, \rho) \subset E$:

$$\rho \leq \frac{2}{3\gamma \| DG(U^*)^{-1} \|}, \quad \gamma > 0.$$

3.5. Estudio de la convergencia del esquema numérico global de solución

La convergencia del esquema de Newton para sistemas de ecuaciones no lineales de orden n , esta basada en el teorema de punto fijo, por ser un método iterativo, el cual debe ser consistente y estable.

Consistencia

El método de Newton discreto con la derivada aproximada, es consistente pues satisface:

$$\| DG(U) - J(U, h) \| \leq c \| h \| \quad \text{para todo } U \in E_j, h \in E_h(r),$$

$$E_h(r) \equiv \{h \in E_h : \| h \| \leq r\}, \quad c, r > 0 \quad \text{constantes fijas}$$

La consistencia está dada por el orden de truncamiento de la serie de Taylor para funciones vectoriales no lineales.

Utilizando una condición inicial U_0 , en el desarrollo de Taylor alrededor de un punto U_k^* y truncando a partir de los términos de segundo orden, se tiene:

$$G(U) = G(U^k) + J(U^k)(U - U^k) + O(q^2), \quad q = U - U^k$$

haciendo que:

$$G(U^k) + J(U^k)(U - U^k) = 0$$

donde:

$$U = U^k - J^{-1}(U^k)G(U^k)$$

La relación de recurrencia del sistema no lineal es:

$$U^{k+1} = U^k - J^{-1}(U^k)G(U^k)$$

$$J(U^k) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(U^k)}{\partial U_1} & \dots & \frac{\partial g_1(U^k)}{\partial U_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n(U^k)}{\partial U_1} & \dots & \frac{\partial g_n(U^k)}{\partial U_n} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

Algoritmo 2

Paso inicial: Definir un punto $U^0 \in \mathbb{R}^n$, hacer $k = 1$ y $U^k \leftarrow U^0$

Paso 1 : Determinar la solución de

$$J(U^k)(U - U^k) = -G(U^k),$$

entonces $U = U^k - J^{-1}(U^k)G(U^k)$

Paso 2 : Si $U - U^k < tol$, parar (el problema está resuelto).

En caso contrario, hacer: $k = k + 1$, $U^k = U$

$$Er = \frac{\|U^k - U^{k-1}\|_\infty}{\|U^k\|_\infty}$$

Retornar al Paso 1.

$$U = U^k - J^{-1}(U^k)G(U^k)$$

$$\text{Sean: } J^{-1}(U^k) = (wD_k + L_k)^{-1}(U^k), \text{ y } \bar{b} = G(U^k)$$

$$U = (wD_k + L_k)^{-1}(U^k)\bar{b} + U^k \quad (\text{Newton discreto con sobrerrelajación SOR})$$

Estabilidad

La estabilidad queda garantizada mediante el siguiente teorema.

Teorema 3.5.1 (Estabilidad del método de Newton discreto) Sea $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un vector de funciones continuas, diferenciable en $D \subset \mathbb{R}^n$, D conjunto convexo. Supongamos que existe $U^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $G(U^*) = 0$ en una vecindad de centro U^* , radio $r > 0$, $S(U^*, r) \subset D$ tales que $J^{-1}(U^*)$ existe, $J \in Li_{p_\gamma}(S(U^*, r))$, $\|J(U^*)\| \leq \beta$, $\beta > 0$. Entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $U^0 \in S(U^*, r)$ la sucesión U^1, U^2, \dots , generada por la recurrencia

$$U^{k+1} = U^k - J^{-1}(U^k)G(U^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

converge a U^* verificándose que:

$$\| U^{k+1} - U^* \| \leq \beta \gamma \| U^k - U^* \|^2, \quad k = 0, 1, \dots$$

γ , es una constante mayor que cero.

Teorema 3.5.2 (Estabilidad del método de Newton discreto con sobre relajación) Para toda matriz J , el radio espectral ρ , del operador matricial $J_w^{-1} = (wD_k + L_k)^{-1}$ del método de Newton discreto con sobrerelajación satisface la desigualdad

$$\rho(J_w^{-1}(U^k)) \geq |w - 1|$$

siendo w un parámetro constante.

Demostración

Como el determinante de la matriz J_w es definida por el producto de los valores propios de la matriz jacobiana, entonces

$$\begin{aligned} \det(J_w(U^k)) &= \det((I - wL)^{-1}(U^k)[(I - w)I + wU]) \\ &= \det((I - wL)^{-1}(U^k)) \det([(I - w)I + wU]) \end{aligned}$$

siendo L una matriz triangular inferior con ceros en la diagonal principal y U una matriz triangular superior tal que $\det((I - wL)^{-1}(U^k)) = 1$, donde $\det((I - wL)(U^k)) = 1$. Entonces $((1 - w)I + wU)(U^k)$ es una matriz triangular superior y los elementos de su diagonal principal son todos iguales a $(1 - w)$, luego $\det[((1 - w)I + wU)(U^k)] = (1 - w)^n$. Por tanto, el producto de los valores propios de $J_w(U^k)$ satisface la siguiente igualdad:

$$\prod_{k=1}^n \lambda_k = (1 - w)^n$$

Por definición el radio espectral de $J_w(U^k)$ satisface las desigualdades:

$$\begin{aligned} \rho(J_w(U^k)) &\geq |\lambda_k|, \quad k = 1, \dots, n \\ \rho^n(J_w(U^k))^n &\geq \prod_{k=1}^n |\lambda_k| \end{aligned}$$

Entonces tomando módulos en la fórmula del producto se llega a la desigualdad

$$\rho^n(J_w(U^k))^n \geq (1 - w)^n$$

De las raíces n -ésimas en ambos miembros de la desigualdad se tiene:

$$\rho(J_w(U^k)) \geq \sqrt[n]{(1 - w)^n} = |w - 1| \quad \square$$

Corolario 3.5.1 *Una condición de convergencia del método de Newton discreto con sobrerelajación (SOR) es que el parámetro w pertenezca al intervalo*

$$0 < w < 2.$$

Prueba

Asumiendo que el método es convergente se cumple que $\rho(J_w(U^k)) < 1$, en el método de SOR se tiene que el radio espectral de la matriz $J_w(U^k)$ satisface la siguiente desigualdad:

$$\rho(J_w(U^k)) \geq |w - 1|$$

entonces $|w - 1| \geq \rho(J_w(U^k)) < 1$. Luego tomando ambos extremos se demuestra que: $0 < w < 2$ \square

Regularización para la no singularidad de la matriz Jacobiana

Se elige un parámetro λ de regularización y al evaluar $U^{k+1} = U^k - J_w^{-1}(U^k)G(U^k)$ se utiliza la regularización de

$$J_w^{-1}(U^k) = (J_w + \lambda I)^{-1}(U^k)$$

Entonces la regla iterativa queda expresada por:

$$U^{k+1} = U^k - (J_w + \lambda I)^{-1}(U^k)G(U^k); \quad \text{donde } \lambda \in [0, 1]$$

y λ es llamado factor de amortiguamiento.

Por tanto: por el teorema del punto fijo, y el desarrollo de Taylor para G se obtiene la estimación del error:

Error:

$$\frac{\|U^{k+1} - U^k\|}{\|U^k - U^0\|^2} \rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty$$

De este modo se consigue la convergencia superlineal bajo el control de los parámetros $\{\lambda, w\}$.

Ahora solo falta probar que el radio espectral de la matriz inversa es menor que la unidad.

Convergencia de la solución del sistema algebraico no simétrico

Definición 3.5.1

1. *El espectro de una matriz A denotado por $\Lambda(A)$, lo constituye el conjunto de soluciones de su ecuación característica, es decir*

$$\Lambda(A) = \{z \in \mathbb{C} : \det(zI - A) = 0\}$$

2. El radio espectral ρA de una matriz A de orden n se define como el máximo valor de los módulos de los valores propios de la matriz, es decir

$$\rho(A) = \max_{\lambda_i \in \Lambda(A)} |\lambda_i|$$

Teorema 3.5.3 Un esquema iterativo de un sistema algebraico $x_{k+1} = Mx_k + C$, es convergente si y sólo si el radio espectral de la matriz M es menor que uno, es decir, $\rho A < 1$. En este caso la sucesión $x^{(k)}$ converge a la solución de la ecuación matricial

$$M^{(k+1)} = Mx^{(k)} + C$$

Demostración:

Sea $e^k = x^{(k)} - x$ el error.

Si $e \rightarrow 0$ entonces $x^k \rightarrow x$. Supongamos que $e = 0$, entonces $Ax = b$. Luego

$$x^{(k+1)} = (I - R^{-1}A)x^{(k)} + R^{-1}b$$

$$Rx = sx + b, \quad A = R - s, \text{ Res diagonal, } s = R - A$$

$$x = R^{-1}(R - A)x + R^{-1}b$$

$$x = (I - R^{-1}A)x + R^{-1}b = Mx + c, \quad c = R^{-1}b, M = I - R^{-1}A$$

entonces, el método iterativo es convergente.

$$\text{si } \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x \Rightarrow |x^{(k)} - x| < \epsilon, \quad \epsilon \rightarrow 0$$

Sea $e^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ entonces $e^{(k)} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \rho < 1$.

$$\begin{aligned} e^{(k+1)} &= (I - R^{-1}A)x^{(k+1)} + R^{-1}b - (I - R^{-1}A)x^{(k)} - R^{-1}b \\ &= (I - R^{-1}A)(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = Me^{(k)} \end{aligned}$$

En general, $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} M^{(k)}e^{(0)}$, para que el error converja a cero, entonces

$\lim_{k \rightarrow \infty} M^{(k)} = 0$ (matriz nula), esto es cierto si y sólo si $\rho(M) < 1$. \square

Factorización LU

La factorización del sistema no simétrico, con el método PARDISO (Solver Direct Parallel), se realiza automáticamente, éste se encarga de particionar a la matriz en una base de los subespacios de Krylov, en bloques diagonales y luego elimina las columnas mediante la factorización de las submatrices con descomposición LU y una vez que ésta ha sido completada, resuelve el sistema como se puede apreciar en el esquema de la Figura 3.8.

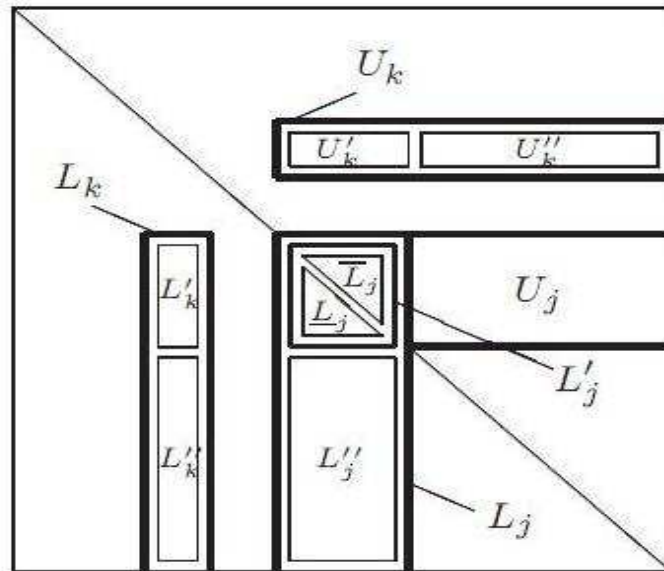


Figura 3.8: Algoritmo de factorización PARDISO LU de matrices no simétricas

Algoritmo 3 Para $j = 0$ hasta $j = N^\circ$ de supernodos hacer

Para $k = 0$ hasta $j - 1$ hacer $L_j \leftarrow L_j - L_k U'_k$

$U_j \leftarrow U_j - U''_k L'_k$

Fin

$L'_j \leftarrow LU$ (Descomposición de L'_j con pivoteo parcial aplicado a los pivots de U_j)

Resolver $J^* \bar{L}'_j = L'_j$, hacer $L'_j = J^*$

$J^* \underline{L}_j = U_j$, hacer $U_j = J^*$

Fin

Como se puede apreciar que los supernodos L_j y U_j reciben la actualización de L_k y U_k mientras éstos son factorizados. Este esquema de factorización, adicionalmente posee una batería de técnicas adicionales de preconditionamiento hasta la resolución final del sistema.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS NUMÉRICOS DEL ESTUDIO DEL PROBLEMA DE MEZCLA EN LECHOS FLUIDOS

Datos de entrada:

Dominio de estudio: una sección transversal de la cámara de combustión con sistema de lecho fluido representada por un conjunto de puntos en una y dos dimensiones de espacio: En el caso unidimensional se ubica en el intervalo $(0, L)$, con $L = 1/h_0$; donde $h_0 = 1$ es la altura del lecho de partículas en el reactor y el caso bidimensional se ubica en una región de geometría rectangular cuyo interior es el conjunto $(0, L) \times (0, H)$, donde L es la longitud de la base y $H = 2$ es la altura del reactor.

Condiciones iniciales: Para $t = 0$, se consideran una función del tipo escalón (Step) y la función de tipo sombrero recto (rect).

Condiciones de contorno: En la frontera inferior, una condición Neumann no homogénea para la entrada del flujo de aire inyectado, en la frontera de salida una condición de contorno homogénea o de tipo pared. En todas las fronteras para la velocidad de mezcla condición Dirichlet homogénea y en la frontera de salida una condición Dirichlet homogénea para la presión.

Indicadores de simulación del proceso de mezcla: Los indicadores del flujo de mezcla (convectivo - difusivo - reactivo) su validación está indicada por el comportamiento de la convergencia de las variables tales como de la velocidad del flujo de mezcla, for-

mación de burbujas en el interior del lecho, fracción volumétrica de la fase dispersa y sedimentación de la fase densa.

Salida de resultados: La presentación de los resultados es mediante imágenes de las variables correspondientes a la Fracción volumétrica de la fase dispersa, Velocidad de mezcla y Presión global.

Identificación de las variables para la simulación numérica

La aplicación del estudio teórico y la implementación numérica realizados en esta Tesis, se dirigen a la simulación numérica del flujo de mezcla bifásica gas- sólidos en un cámara de combustión con sistema de lechos fluidos y se asume como fase continua al flujo de aire y como fase dispersa el lecho de partículas sólidas fluidas, los parámetros y variables que intervienen en el comportamiento del flujo de mezcla, en términos dimensionales, las unidades de medida en el Sistema Internacional (SI), son las siguientes:

Velocidad de la mezcla [m/s]

Fracción volumétrica de la fase dispersa [m^3/m^3]

Fracción volumétrica de la fase Continua [m^3/m^3]

Velocidad de la fase continua [m/s] Velocidad de la fase dispersa [m/s]

Densidad de la fase continua [kg/m^3] Densidad de la fase dispersa [kg/m^3] Densidad de la mezcla [kg/m^3]

Presión [Pa]

Fracción de masa de la fase dispersa [kg/kg] $u_{slip} = U - V$: Velocidad relativa entre las 2 fases [m/s]

τ_{G_m} : Suma de esfuerzos viscosos [$kg/(m.s^2)$]

μ : Viscosidad de la mezcla [$Pa.s$]

g : vector gravedad [$m/(s^2)$]

F :Fuerzas de volumen [N/m^3].

En términos adimensionales, las variables de estudio, estan representadas sólo como números, es decir no tienen unidades.

Esquema de solución del problema unidimensional implementado con MATLAB

Esquema de aproximación numérica 1D

EDPS

Formulación Variacional

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega_i} \bar{\varphi} dx = - \int_{\partial\omega_i} \vec{F}(\bar{\varphi}) n_x dx + \int_{\partial\omega_i} \vec{G}_x(\bar{\varphi}) \cdot n_x dx + \int_{\omega_i} S(\bar{\varphi}) dx$$

Esquema de aproximación mixta MEF-VOF:

$$\varphi_i^{n+1}(x) = \varphi_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\hat{\Phi}(\varphi^n(x)) \Big|_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} + \bar{G}(\varphi^n(x)) \Big|_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} + \Delta x S(\varphi^n(x)) \Big|_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \right)$$

Flujo numérico convectivo

$$\hat{\Phi}_{i+1/2}^n - \hat{\Phi}_{i-1/2}^n = \frac{1}{2} (F_{i+1}^n + F_{i-1}^n) - \frac{1}{2} |Q_i^n| (\varphi_{i+1}^n - 2\varphi_i^n + \varphi_{i-1}^n)$$

Método de punto fijo

$$\varphi_i^{n+1} = H(\varphi_i^n) = (H_{F_i}^n - H_{G_i}^n - \Delta x H_{S_i}^n)$$

Convergencia:

$$\sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial H_i(x, \rho_i^k, v_i^k)}{\partial x_j} \right| < \sigma, \quad \text{donde} \quad \sigma = a \frac{\Delta t}{\Delta x} = CFL \leq 1$$

FIN

Resultados

DIAGRAMA DE ESTABILIDAD para $\gamma=3, m=0$

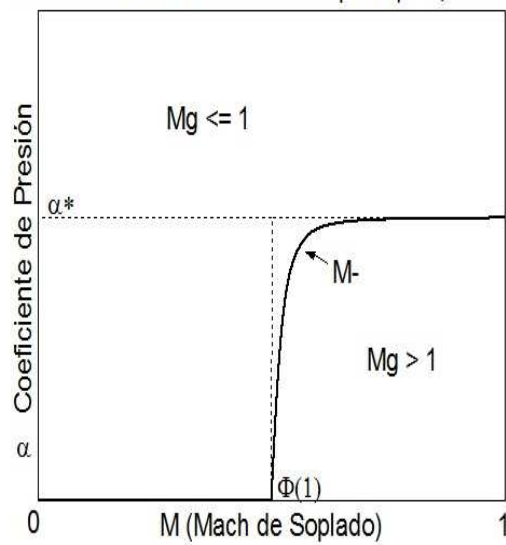


Figura 4.1: Coeficiente de presión1

DIAGRAMA DE ESTABILIDAD para $\gamma < 3, \Phi(1) > M^*$

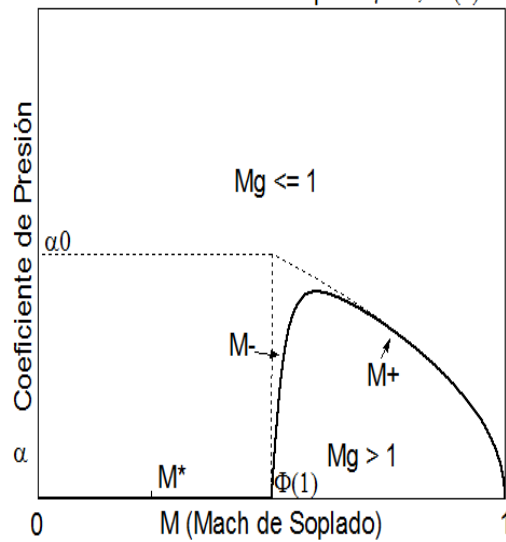


Figura 4.2: Coeficiente de presión2

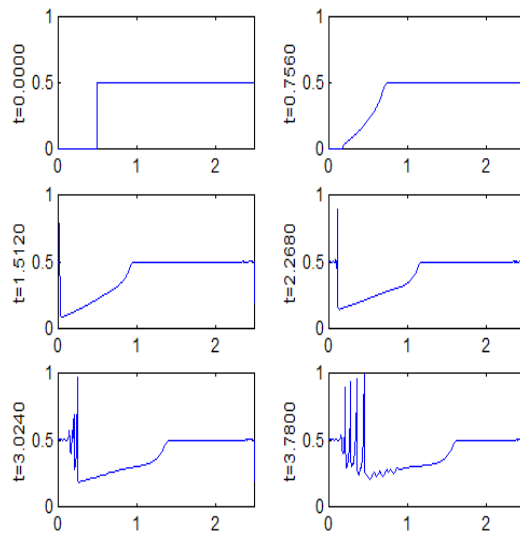


Figura 4.3: Lecho inestable $t \geq 0$

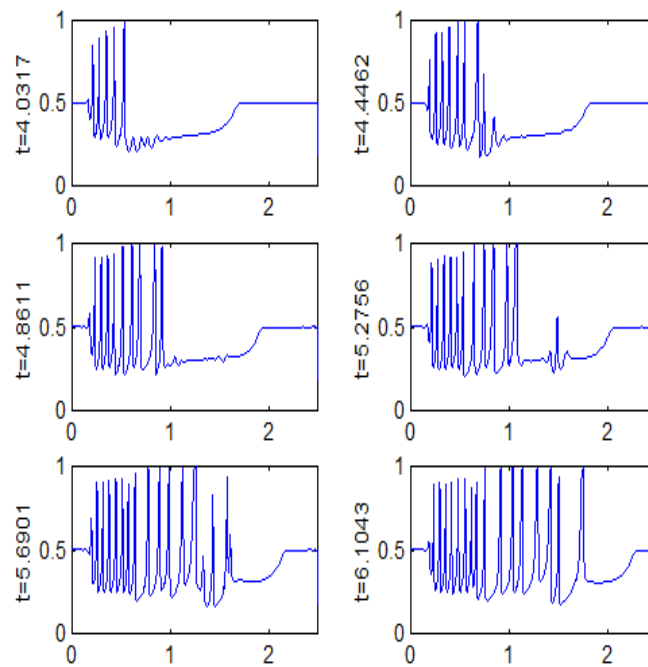
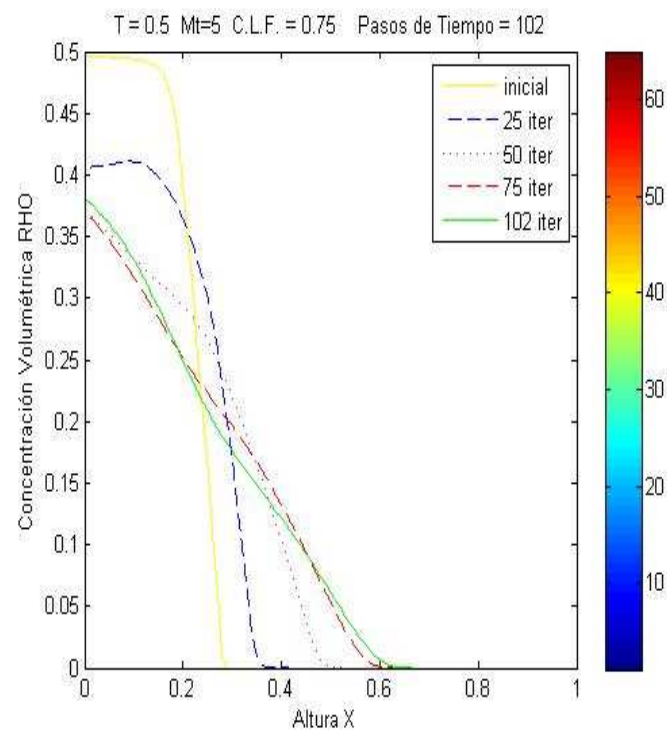


Figura 4.4: Lecho inestable para $t > 0$

Figura 4.5: Lecho estable en $t \geq 0$

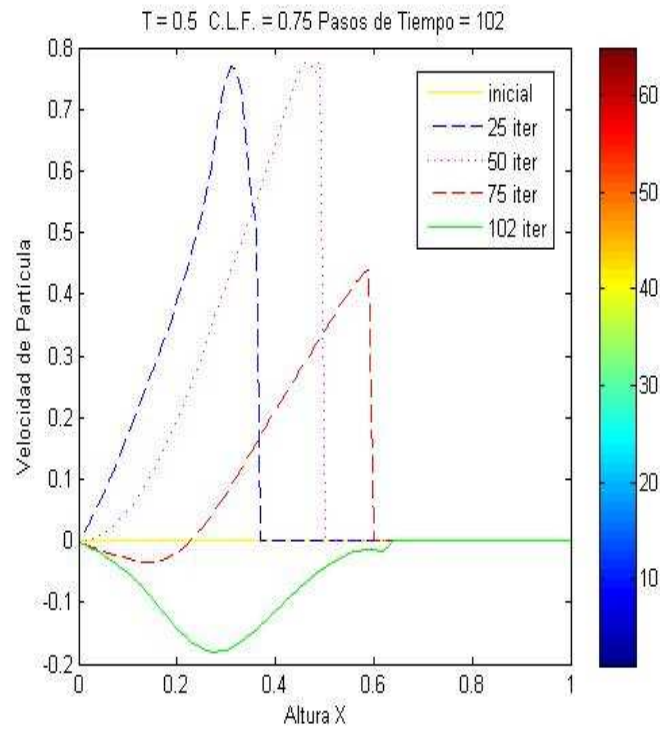


Figura 4.6: Velocidad de fracción volumétrica en $t \geq 0$

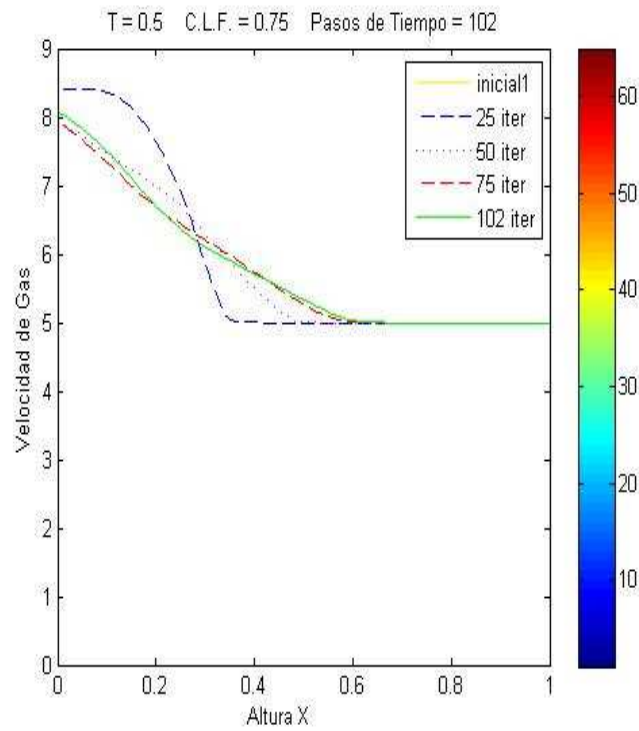


Figura 4.7: Velocidad gas en $t \geq 0$

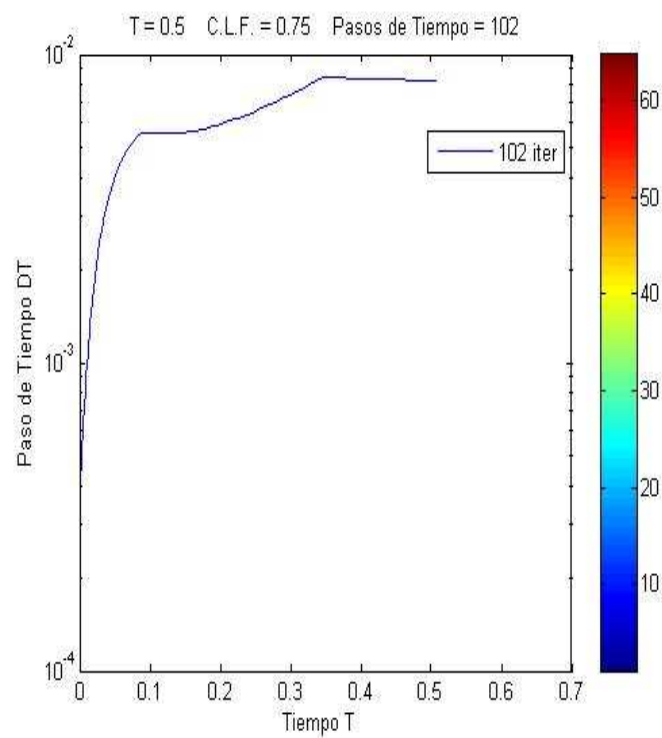
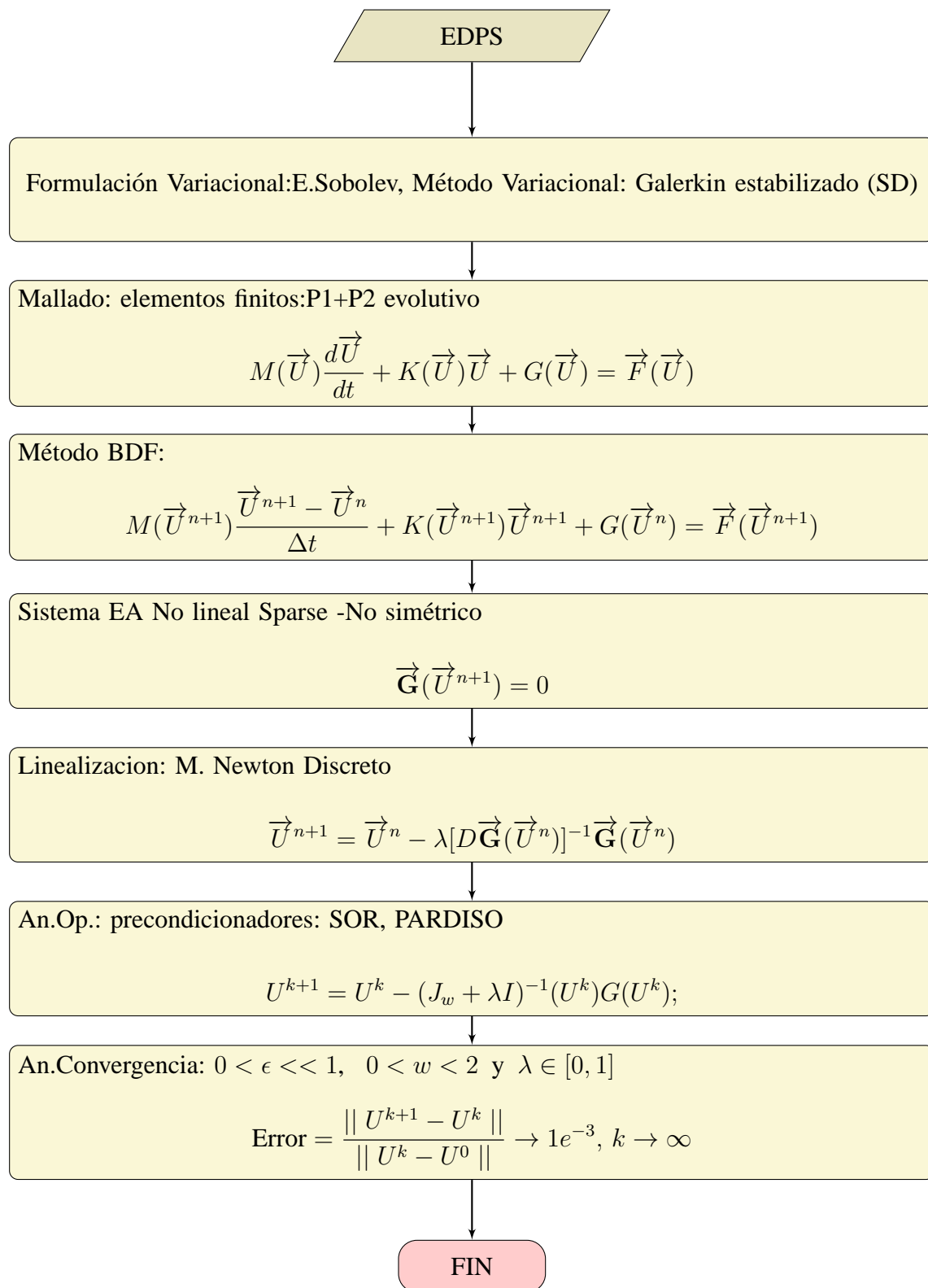


Figura 4.8: Estabilidad del esquema regularizado en $t > 0$.

4.1. Construcción del proceso computacional en COM-SOL

Esquema de aproximación numérica 2D



En esta sección presentamos los resultados numéricos de aproximación bidimensional correspondientes a la construcción de un nuevo Modelo sobre el comportamiento

hidrodinámico del flujo de mezcla Gas Sólido en una cámara de combustión con sistema de lecho fluido, implementado en COMSOL, con el esquema de aproximación numérica, construido en 2D.

COMSOL pertenece a Addlink Research, compañía que reúne a un consorcio de empresas dedicadas al desarrollo de nuevos modelos de software científico de los principales ámbitos de I+D+I acreditados actualmente en España. COMSOL nace en Suecia, inicialmente como FEMLAB, tiene un exitoso volumen de ventas (de aprox.22M. de Euros). Su primer lanzamiento fue en 1998. Es una herramienta que tiene diversas librerías para EDP, ODE y EA, MEF y una interfaz de usuario(GUI) de flexible acceso para construir modelos de simulación ilimitada en multifísica, muy intuitiva, usa el Script de MATLAB o JAVA), permite trabajar en plataformas de Windows, MAC y Linux

Proceso de modelado en COMSOL

1. Dibujar la geometría
2. Definir las ecuaciones del modelo (en sentido variacional)
3. Definir las condiciones de contorno
4. Definir las condiciones iniciales
5. Construcción del mallado sobre la geometría
6. Construcción del resolutor de aproximación del modelo
7. Visualizar y analizar los resultados: basado en el estudio de convergencia
8. Análisis avanzado: paramétrico y de optimización
9. Construir la presentación (imágenes y films)

Condiciones Iniciales

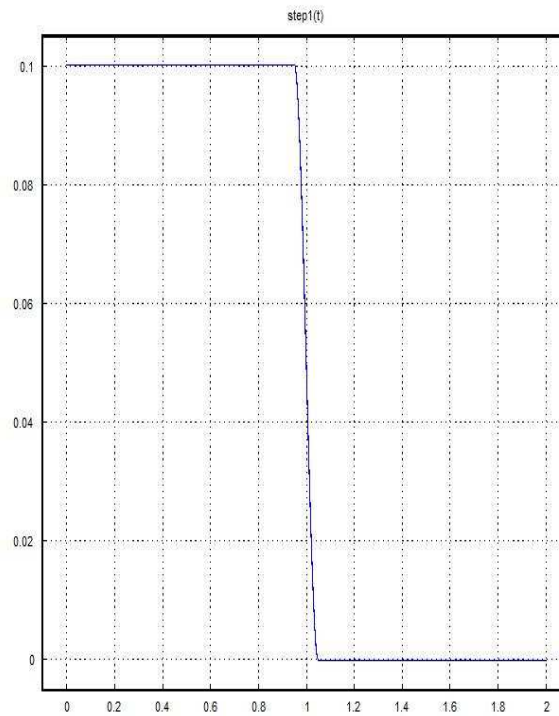


Figura 4.9: Condición inicial escalón o step

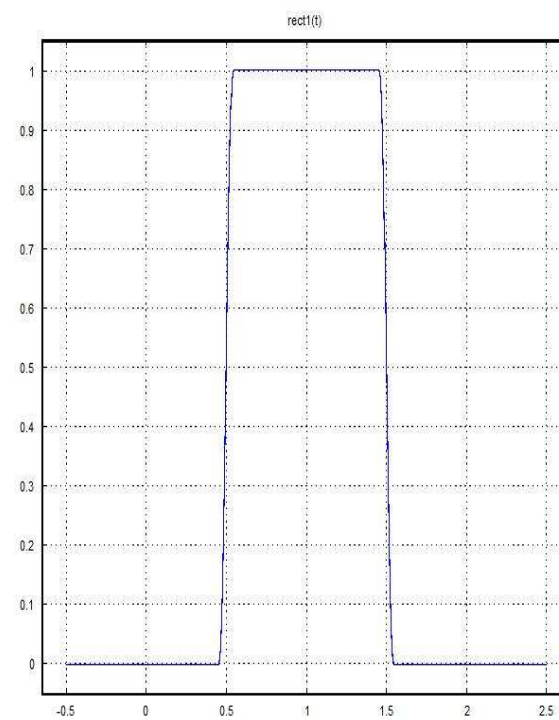


Figura 4.10: Condición inicial sombrero rectangular

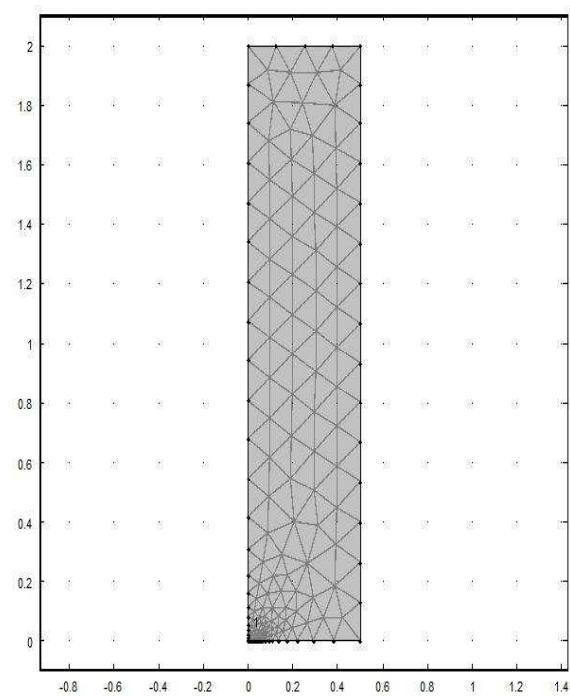


Figura 4.11: malla gruesa en 2D

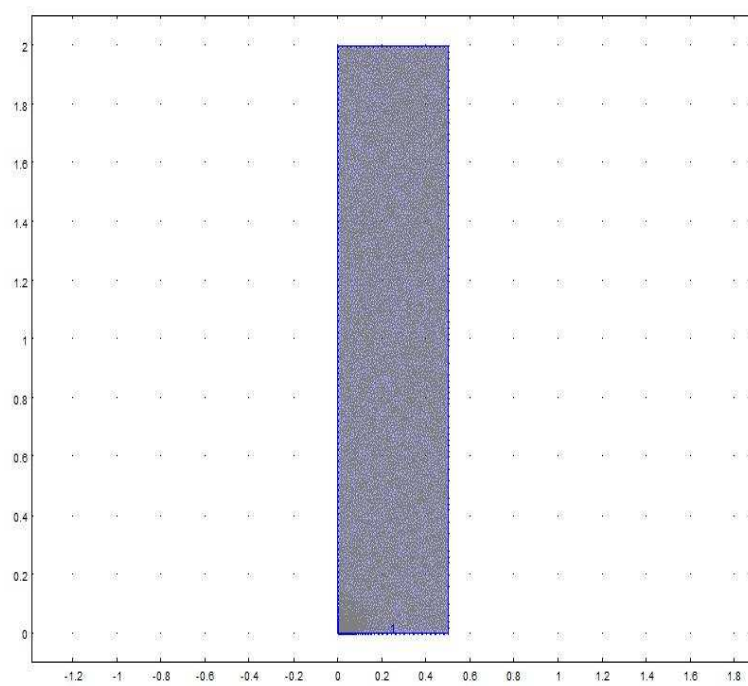


Figura 4.12: malla refinada en 2D

4.2. Resultados numéricos para el problema de sedimentación

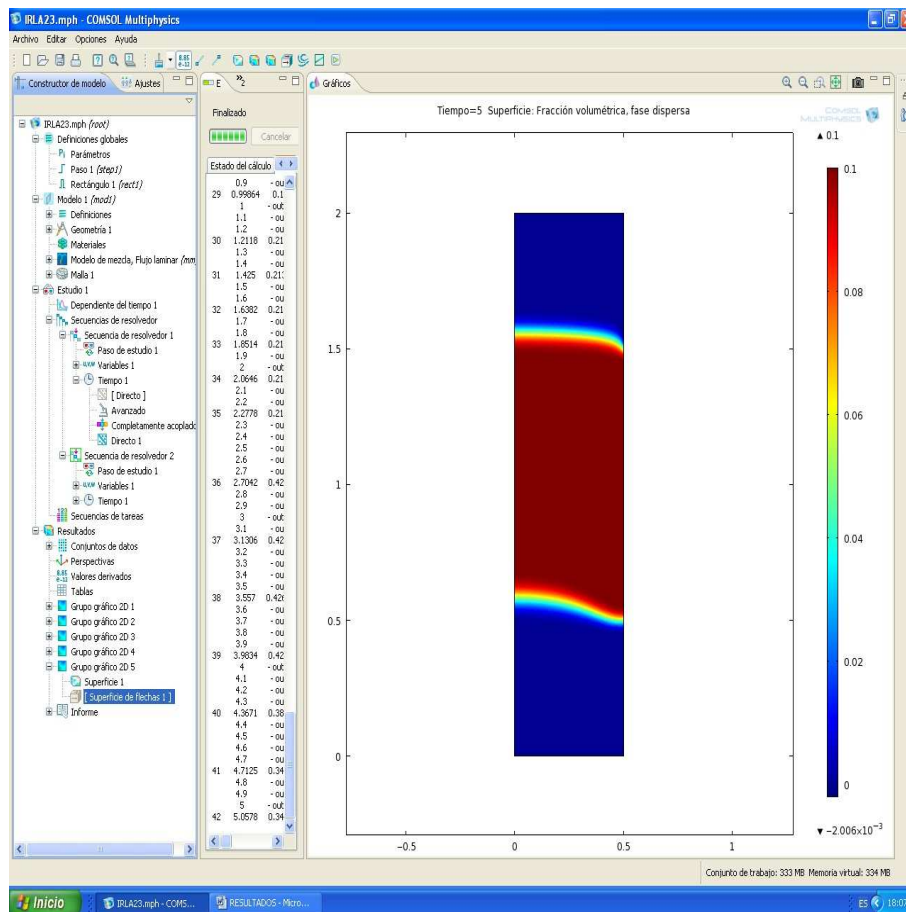


Figura 4.13: Problema de Cauchy: sedimentación inicial

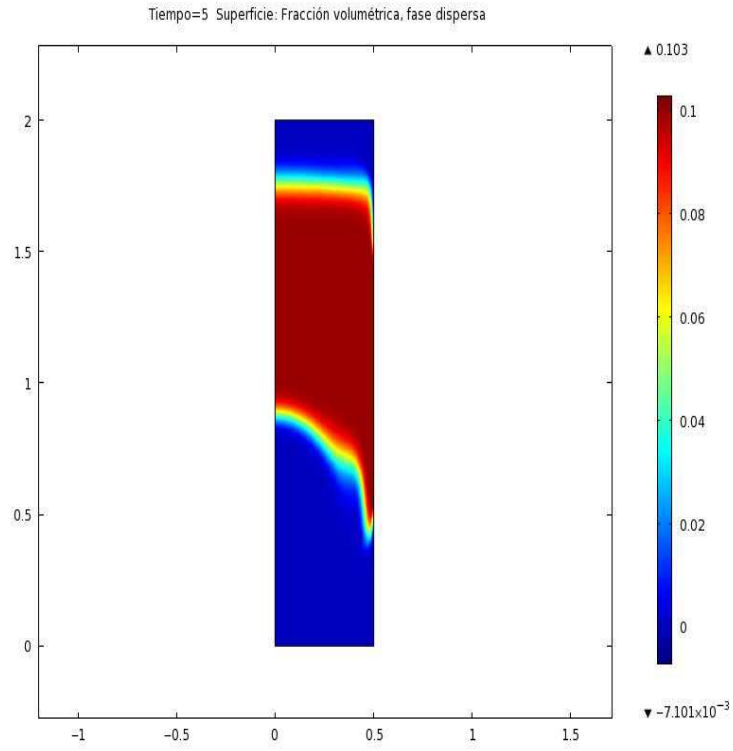


Figura 4.14: Problema de Cauchy: con sedimentación media de la interfase

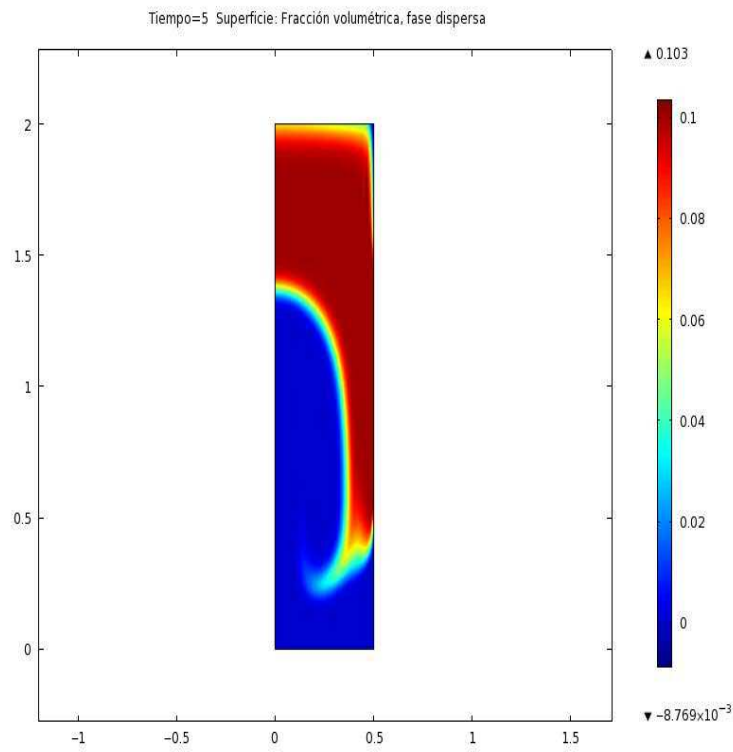


Figura 4.15: Problema de Cauchy: con sedimentación máxima de la interfase

4.3. Resultados numéricos para el problema de flujo con boquilla

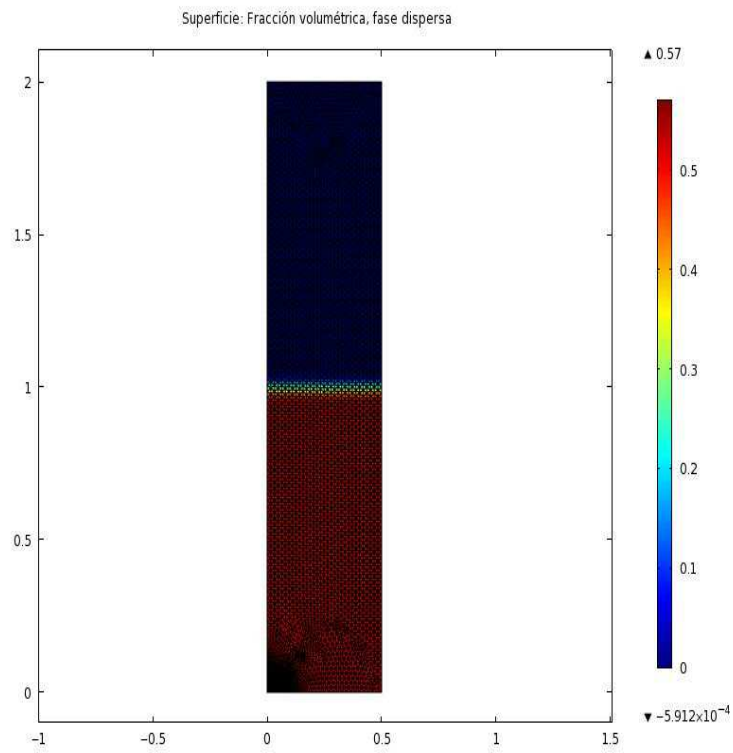


Figura 4.16: Lecho fijo mallado

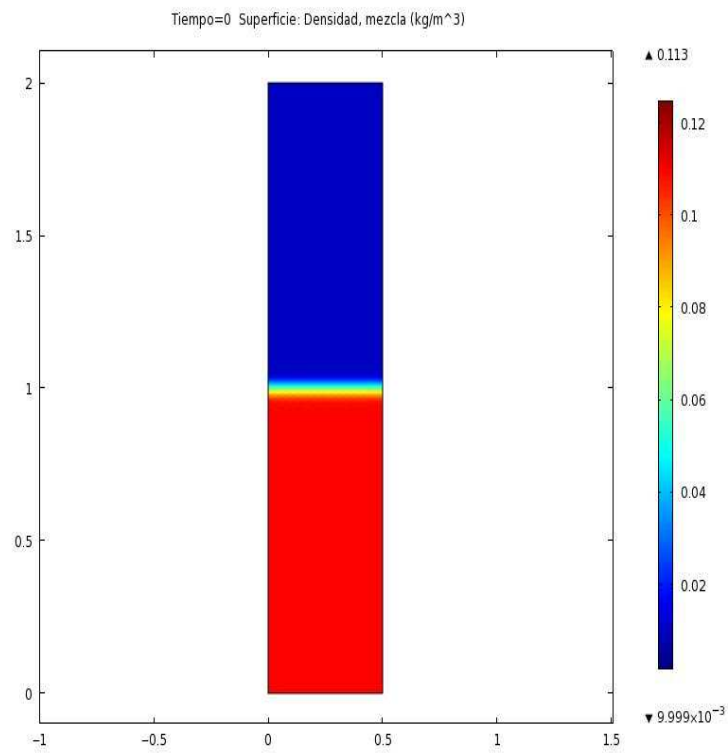
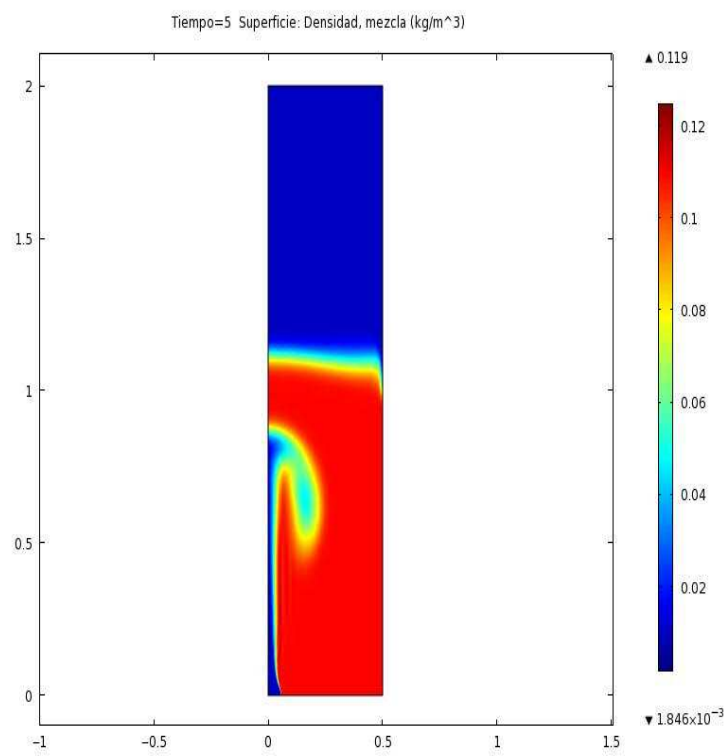


Figura 4.17: Lecho fijo

Figura 4.18: Problema de Cauchy: Densidad de mezcla en $t = 5s$

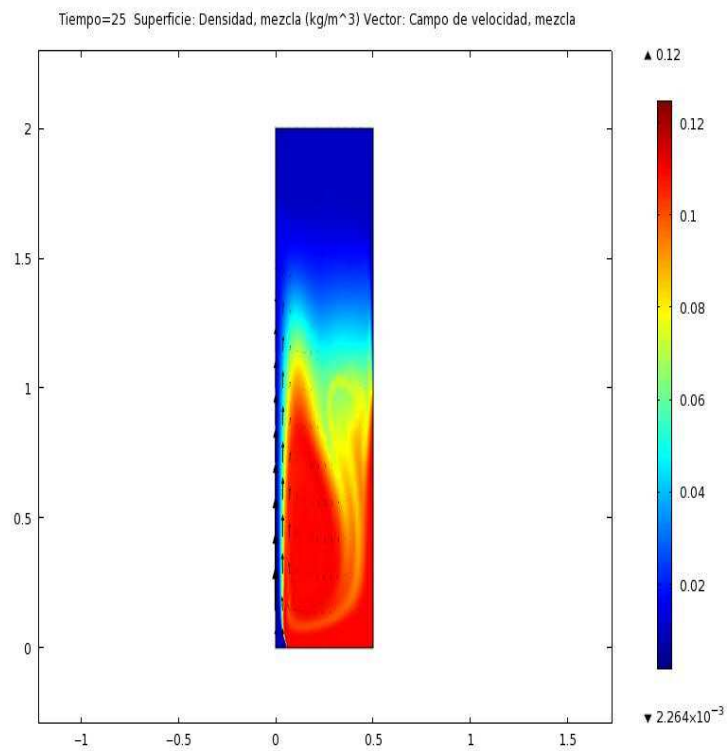


Figura 4.19: Velocidad de la mezcla en $t = 25s$

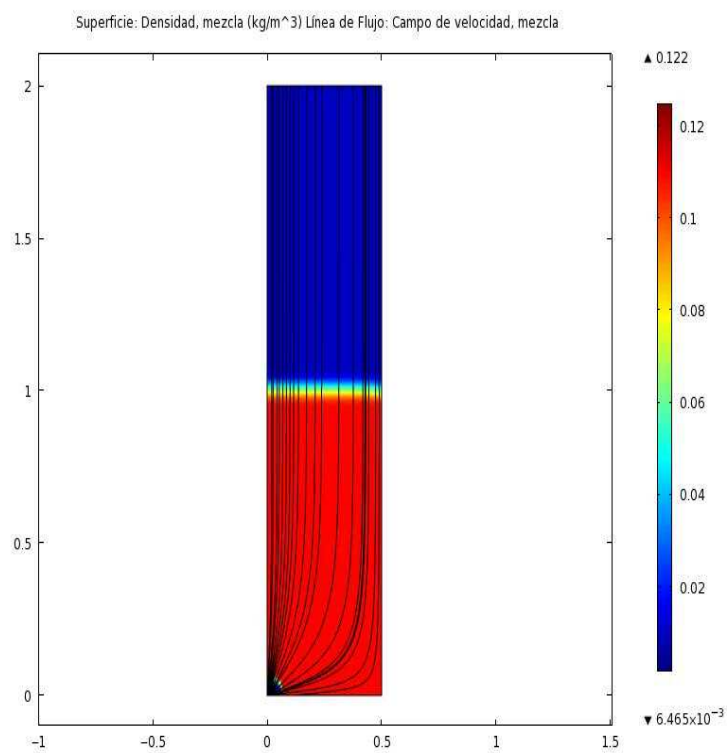


Figura 4.20: Líneas de corriente del flujo

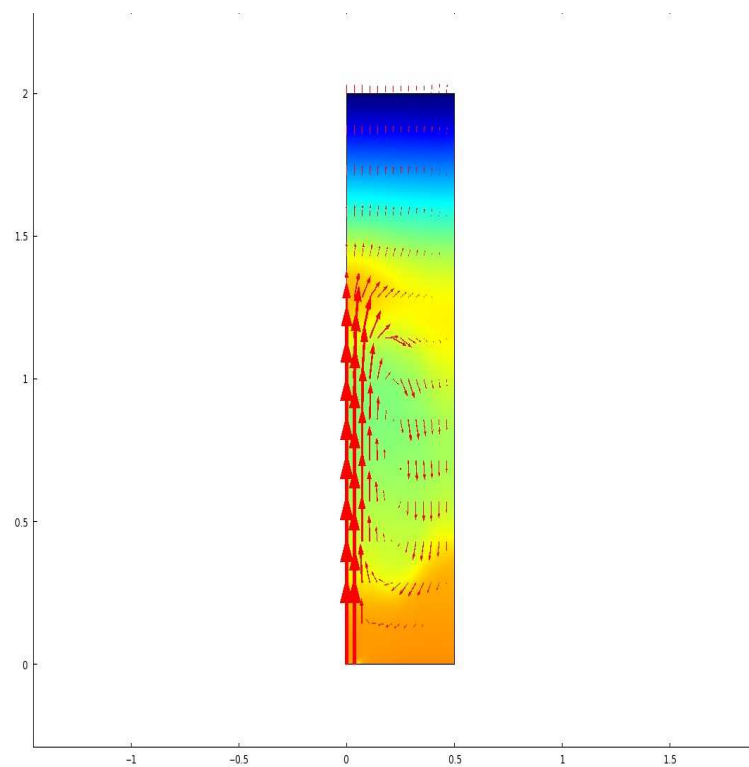


Figura 4.21: Campo direccional de Velocidad de mezcla en $t = 25s$.

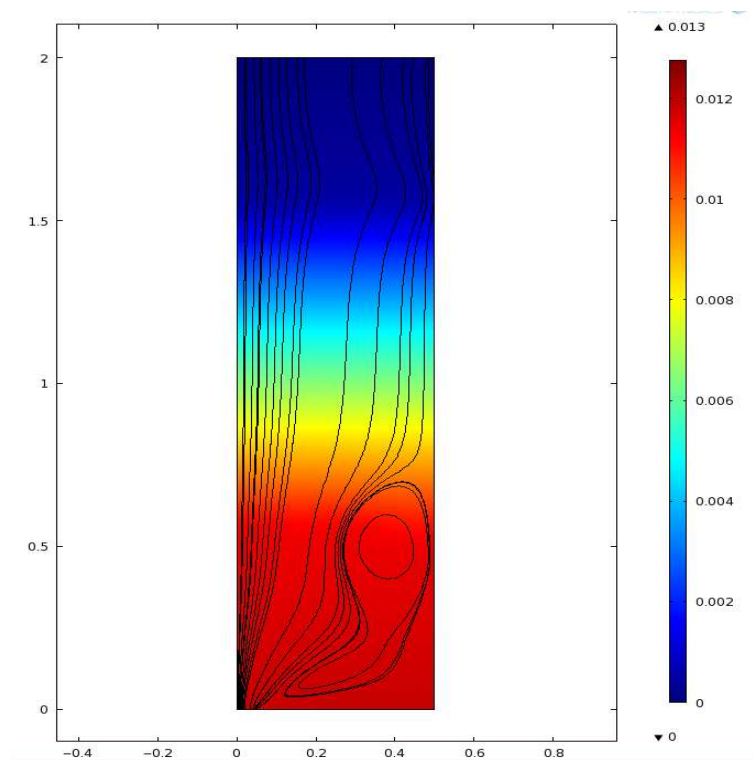


Figura 4.22: Isolneas de presión en $t = 15s$.

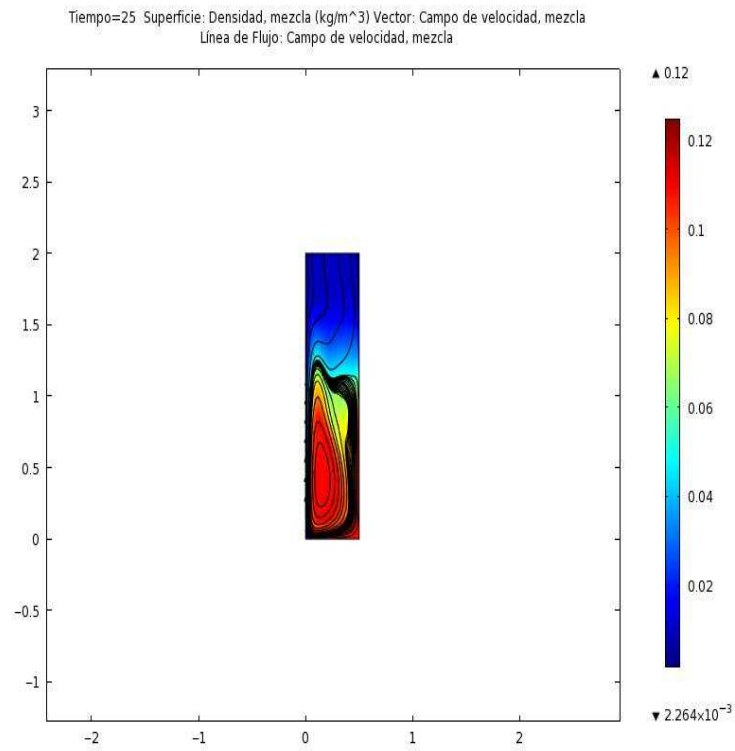


Figura 4.23: Isolinesas de presión $t = 25s$.

4.4. Resultados numéricos para el problema de soplado general

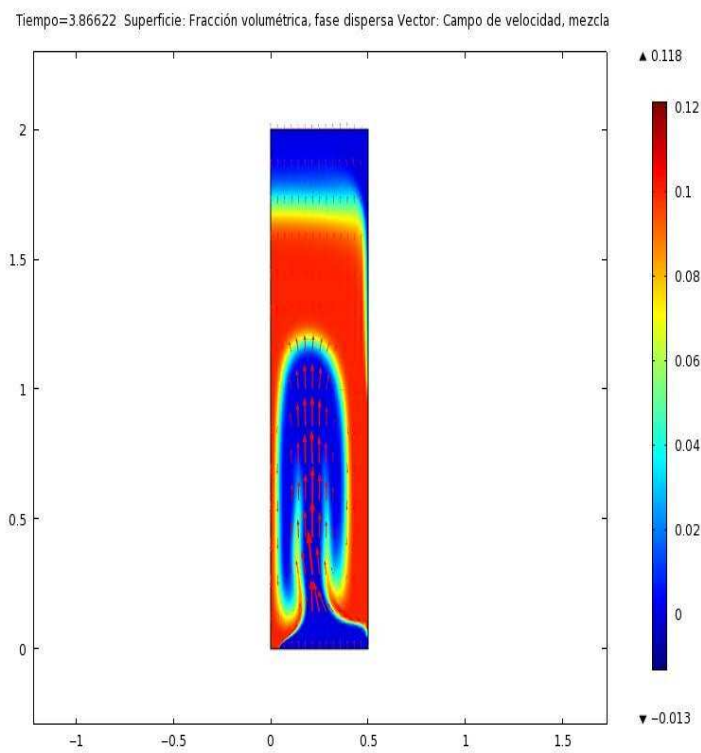


Figura 4.24: Fracción volumétrica de mezcla soplado general

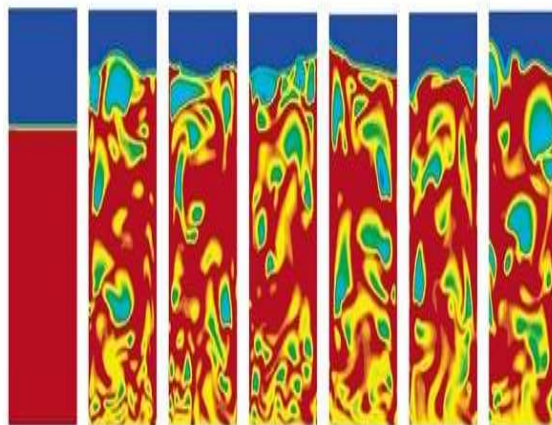


Figura 4.25: Lecho fluido $C_D = 0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 0,95, 0,975$ en $t = 20s$

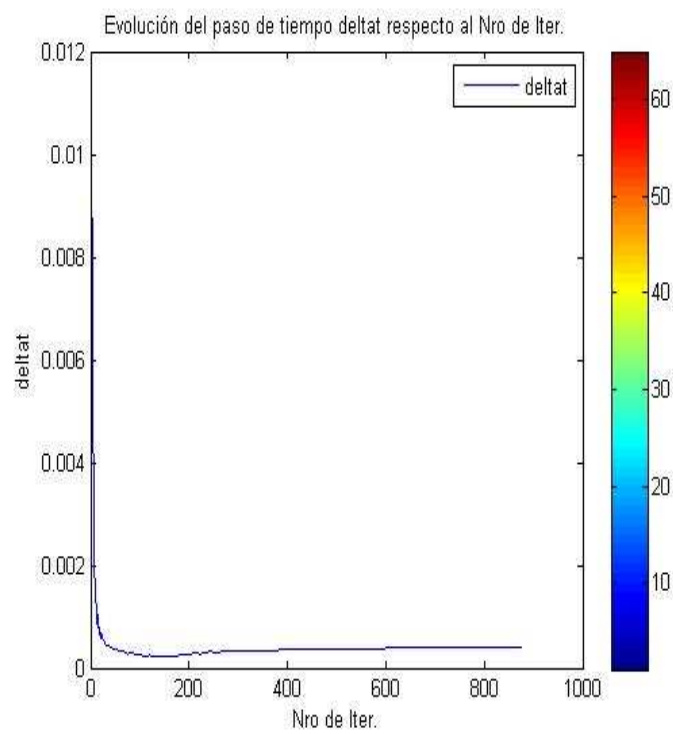


Figura 4.26: Convergencia del esquema numérico

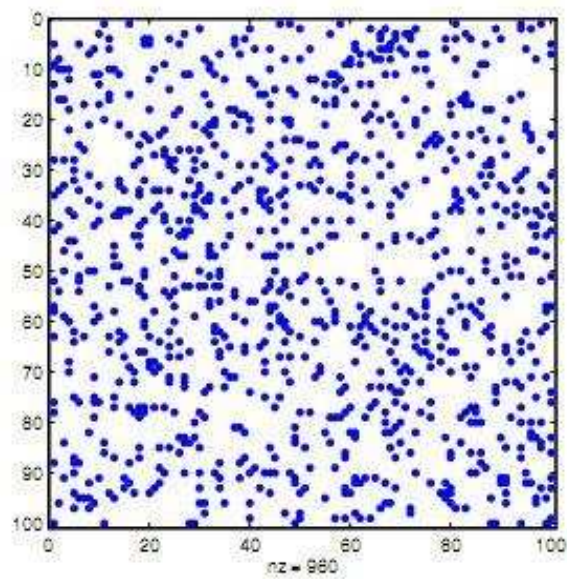


Figura 4.27: Matriz esparcida sin factorizacion

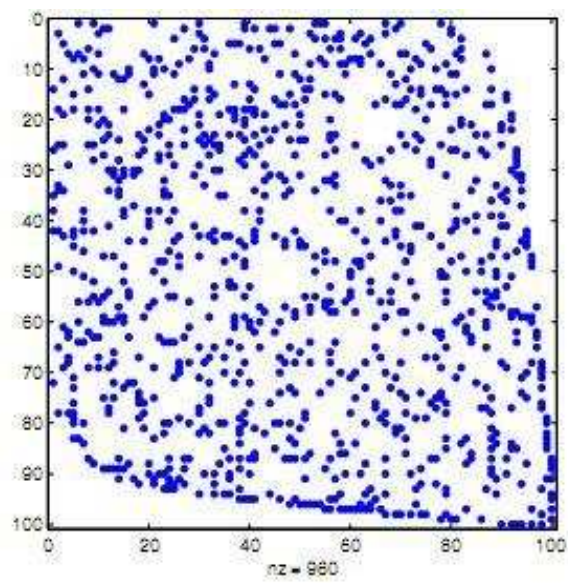


Figura 4.28: Matriz esparcida con factorizacion 1

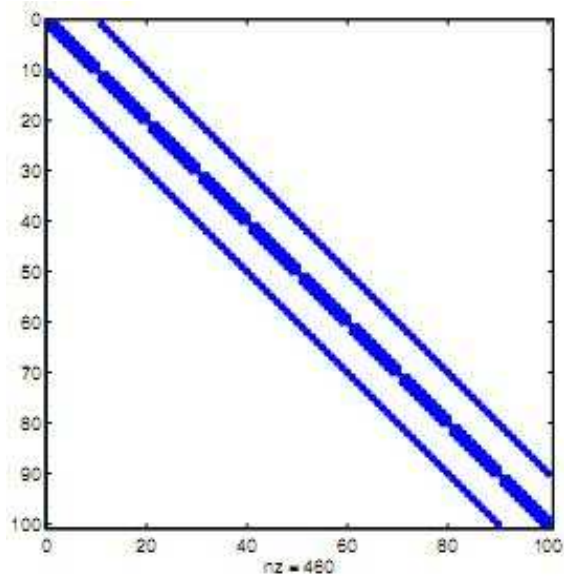


Figura 4.29: Matriz esparcida con factorizacion 2

DATOS	Valor	Descripción
h0	1	Unidad de Longitud (Altura del Lecho en Reposo)
L	1/h0	Base Adimensional [-L/2, L/2]
H	2*L	Altura Adimensional
Db	L/10	Diámetro Adimensional de la Boquilla
Epsilon	1e-2	Cociente entre Densidades de las Fases
Ng_Np	1	Cociente entre las Viscosidades Cinemáticas (gas sólido)
Fr	1, 5, 10	número Froude
Re	1e+2, 4x1e+2, 5x1e+2	número Reynolds
Dp	1e-4	Diámetro de partícula
ro_max	pi/6	Fracción Volumétrica de Sólidos Máxima
Vsoplado	0.2	vel. de soplado

Figura 4.30: Parámetros de Simulación

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

1. Se ha construido un algoritmo del proceso de solución de un modelo matemático no estacionario sobre un dominio regular evolutivo en espacios de una y dos dimensiones del problema de mezcla bifásica Gas - sólidos en una caldera con sistema de lecho fluido.
2. Se ha realizado un tratamiento asintótico para el desacoplamiento de las variables del sistema, generando la formulación de un problema de contorno y de valor inicial asociado a un sistema de conservación no lineal regularizado, expresado en términos de un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales del tipo Navier Stokes de flujo viscoso y apariencia compresible, para las variables conservativas del flujo tales como velocidad, densidad volumétrica y presión global.
3. Se ha probado las condiciones de existencia de solución del problema en sentido débil, en espacios de Sobolev de orden 1 y 2, lo que ha permitido definir los subespacios de aproximación para la simulación numérica del problema tanto de forma unidimensional como bidimensional, como se puede observar en los gráficos de los resultados numéricos.
4. En el caso unidimensional se consigue la convergencia condicional con un esquema de aproximación de diferencias explícito y elementos finitos con una corrección del flujo de Harten en la determinación del flujo numérico convectivo -

difusivo y término fuente. El sistema algebraico se resuelve con un método de aproximación sucesiva de punto fijo y la convergencia depende del tamaño de paso de tiempo el cual depende a su vez del número CFL, como se manifiesta en el gráfico de los resultados numéricos en 1D. Como se puede observar en los resultados gráficos con estabilidad en la figura 4.10.

5. En el caso bidimensional se aproxima la solución del problema con el método de Galerkin (SD) y un esquema de diferencias (BDF) explícito para la variable temporal y la captación de las discontinuidades por las singularidades en las líneas de corriente del flujo convectivo, se consigue estabilizar con una malla refinada evolutiva con paso de tiempo próximo a $10 * e^{-3}$ y longitud de lado del elemento, máxima de 0,04 y mínima de $1,5 * e^{-4}$ y con una resolución de curvatura de 0,25.
6. El método de Galerkin estabilizado (elemento finito evolutivo figura 3.7) se asemeja al método de Galerkin Discontinuo ([10], [11]) en la determinación de la formulación Variacional y en la aproximación de las funciones de base polinomial del flujo numérico, pero la diferencia está en el tipo de elemento finito y el uso de la función entrópica.
7. El sistema algebraico producto de la semidiscretización espacial se resuelve con el método de Newton-SOR el cual requiere de la aplicación de un preconditionamiento para la obtención de la matriz inversa aproximada en espacios de Krylov .
8. La convergencia del esquema numérico depende de los parámetros del preconditionado $\{\lambda_k, w_k\}$ y del reordenamiento de la matriz, para ello se ha utilizado el método de factorización PARDISO, los resultados se consiguen con $w_k \approx 2$, se muestra en los resultados gráficos figuras 4.29 y 4.26
9. La solución es continua en la discretización espacial pero es discontinua en la evolución temporal, y para la simulación numérica del modelo físico que depende también de algunos parámetros físicos, tales como los números adimensionales $Re \approx 400$, $Fr \approx 1$ y del diámetro de la partícula $\approx 10^{-4}$, para obtener una estabilidad del proceso tendiendo a la homogeneidad de la mezcla en un tiempo máximo de $[0, 25]$ se ha tomado la técnica de estabilización para salvar la sensibilidad a la discontinuidad en las líneas de corriente del flujo no estacionario.

10. El refinamiento del mallado permite la determinación automática del tamaño del paso de tiempo Δt , del cual depende ver el comportamiento de la convergencia respecto al número de iteraciones. Es un buen indicador de la convergencia si éste es del orden de 10^{-3}
11. Se puede concluir que mediante la fracción volumétrica de la fase dispersa se puede medir la mezcla rápida de los sólidos y ésta es la que permitirá el mantenimiento de las condiciones isotermicas, es decir la resistencia a los cambios de temperatura, como se había planteado en las hipótesis del problema.
12. Con el aumento de la presión en el reactor, se puede observar en las isoclinas de presión que la porosidad del lecho aumenta
13. La velocidad de fluidización disminuye con el aumento de la presión, siendo insignificante para lechos de partículas cuyo diámetro es menor a 10^{-4} como el que se ha supuesto en esta simulación, pero será muy significativo en el caso que el diámetro supere a 10^{-4} .
14. Se puede interpretar cuatro características respecto a la velocidad, éstas son: una velocidad superficial que se manifiesta cuando en el entorno de la columna de la sección representada en el espectro de la paleta de colores, cuando no existen partículas (ausencia del rojo) y solo fluye el gas (presencia del azul); una velocidad de mínima fluidización que se observa en los resultados con el aumento del caudal en el lecho, se manifiesta un estado de suspensión causado por el flujo ascendente del gas. Este flujo crea la fuerza de arrastre (fuerza de inercia) que equilibra la fuerza de gravedad, y la velocidad terminal que se manifiesta en la velocidad de caída libre de la fase dispersa a través del fluido y cuando ésta permanece alejada del entorno de la columna. La velocidad mínima de burbujeo se observa cuando aparece la primera burbuja, ésta es importante puesto que provoca el mezclado de las partículas y la expansión de partículas en la cámara de LF.
15. **Trabajos Futuros** Publicación de los resultados y desarrollo de proyectos de investigación considerando la fluidización con entrada de partículas en simultáneo con la entrada de gas, en lechos verticales y en lechos con diferentes ángulos de posición.

CAPÍTULO 6

ANEXOS

6.1. Principios de Conservación de los Medios continuos

En la descripción de un medio continuo aparecen tres principios de conservación básicos: Los principios de conservación de la Masa (o principio de Continuidad), de la Cantidad de Movimiento (o Ley de Newton) y de la Energía (o Primer Principio de la Termodinámica). En adelante, se supondrá que la velocidad material de los puntos del medio continuo es una función lo suficientemente regular como para aplicar el teorema del transporte, es decir:

$$\vec{v} \in (C^1(\Omega_t) \cup C^0(\bar{\Omega}_t))^n \quad (6.1)$$

6.1.1. Principio de Conservación de la Masa

Llamando $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ a la densidad de un medio continuo en el punto \mathbf{x} y en el instante t , se asumirá que:

Hipótesis 4 (Conservación de la Masa) *Para todo $t \geq 0$, existe una función ρ regular en Ω_t y no negativa, tal que*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0 \quad (6.2)$$

Nota 6.1.1 *La ecuación (6.2) significa que la masa total contenida en el dominio Ω_t se conserva a lo largo del tiempo, es decir, que*

$$\int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_0} \rho(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} \quad \forall t \geq 0 \quad (6.3)$$

Aplicando entonces el teorema del transporte, se tiene

$$\int_{\Omega_t} \{\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{v})\} dx = 0 \quad (6.4)$$

expresión que es válida para todo dominio Ω_t regular. Por tanto, siendo el integrando una función continua, deberá anularse, obteniéndose la llamada **Ecuación de Continuidad o Ecuación de Conservación de la Masa**:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (6.5)$$

Nota 6.1.2 (El caso de los Fluidos Reactivos) Si el medio continuo considerado es un fluido reactivo, es decir, es un fluido en el que conviven N especies químicas que pueden reaccionar entre sí, se debe añadir el Principio de Conservación de la Masa Total (6.2), el denominado Principio de Conservación de las N Masas Parciales, que puede ser enunciado como sigue

Hipótesis 5 (Conservación de las Especies) Para todo $t \geq 0$ y para $i = 1, 2, \dots, N$ existen funciones $\rho_i \geq 0$ regulares en Ω_t , así como funciones continuas en Ω_t , \vec{v}_i , \vec{v}_i^d , ρ_i tales que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho_i(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \dot{\rho}_i(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (6.6)$$

$$\sum_{i=1, \dots, N} \rho_i = \rho \quad , \quad \sum_{i=1, \dots, N} \dot{\rho}_i = 0 \quad (6.7)$$

$$\vec{v}_i = \vec{v} + \vec{v}_i^d \quad , \quad \sum_{i=1, \dots, N} \rho_i \vec{v}_i = \rho \vec{v} \quad (6.8)$$

En las ecuaciones anteriores:

- ρ_i es la densidad parcial de la especie i en la mezcla fluida, la primera de las (6.7) expresa el hecho de que la densidad del fluido se obtiene como contribución de las densidades de todas las especies.
- $\dot{\rho}_i$ es la velocidad de reacción química (aparición o desaparición de masa) de la especie i en la mezcla fluida, la segunda de las (6.7) describe el hecho de que la aparición o desaparición de masa de una especie es a costa de la aparición o desaparición de masa de las demás especies presentes en la mezcla fluida (equilibrio químico).
- \vec{v}_i y \vec{v}_i^d son, respectivamente, la velocidad de las moléculas de la especie i en la mezcla fluida y la denominada velocidad de difusión de la especie i en la mezcla

fluida. La primera de las (6.8) define la velocidad de difusión de la especie i , \vec{v}_i^d , como la diferencia entre la velocidad de las moléculas de la especie, \vec{v}_i , y la velocidad de la mezcla fluida en su conjunto, \vec{v} . Por su parte, la segunda de las (6.8) postula que la velocidad de la mezcla fluida se obtiene como media ponderada (con las densidades parciales) de las velocidades de cada especie química.

Aplicando entonces el teorema del transporte a (6.6) se tiene:

$$\int_{\Omega_t} \{\partial_t \rho_i + \text{div}(\rho_i \vec{v}) + \text{div}(\rho_i \vec{v}_i^d) - \dot{\rho}_i\} dx = 0 \quad (6.9)$$

expresión que es válida para todo dominio Ω_t regular. Por tanto, siendo el integrando una función continua, deberá anularse, obteniéndose la llamada **Ecuación de Conservación de la Especie i** :

$$\partial_t \rho_i + \text{div}(\rho_i \vec{v}) = -\text{div}(\rho_i \vec{v}_i^d) + \dot{\rho}_i \quad i = 1, \dots, N \quad (6.10)$$

Adviértase que, sumando (6.10) en i desde 1 hasta N , se obtiene, en virtud de (6.7) y (6.8), la ecuación de conservación de la masa total (6.5). Por tanto, basta considerar esta última ecuación y $N - 1$ de las ecuaciones de conservación de las especies.

En resumen, en el caso de los fluidos reactivos, las Ecuaciones de Conservación de la Masa pueden escribirse:

$$\partial_t \rho + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (6.11)$$

$$\partial_t (\rho z_i) + \text{div}(\rho z_i \vec{v}) = -\text{div}(\rho z_i \vec{v}_i^d) + \dot{\rho}_i \quad i = 1, \dots, N - 1 \quad (6.12)$$

donde se ha llamado:

$$x_i = \frac{\rho_i}{\rho}, \quad \sum_{i=1, \dots, N} z_i = 1 \quad (6.13)$$

a la fracción másica de la especie i en la mezcla fluida. A (6.11) se la denomina entonces **Ecuación Hidrodinámica de Conservación de la Masa** y a cada una de las (6.12) se les conoce como **Ecuaciones de Conservación Químicas**.

6.1.2. Principio de Conservación de la Cantidad de Movimiento

La cantidad de movimiento del medio continuo contenido en el dominio Ω_t se escribe:

$$\int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \vec{v}(x, t) d\mathbf{x} \quad (6.14)$$

Se supondrá entonces la:

Hipótesis 6 (Conservación del Momento) Para todo $t \geq 0$, existen una función vectorial $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ de clase $(C^0(\overline{\Omega}_t))^n$ y una función tensorial $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t)$ regular en Ω_t , tales que:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \vec{v}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_t} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{s}, t) \mathbf{n} \mathbf{s}, t ds \quad (6.15)$$

Aplicando entonces el teorema de la divergencia de (de Gauss) a la integral sobre $\partial\Omega_t$ y el teorema del transporte a la cantidad de movimiento, se puede escribir:

$$\int_{\Omega_t} \{ \partial_t(\rho \vec{v}) + \text{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) - \text{div} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{f} \} d\mathbf{x} = 0 \quad (6.16)$$

expresión que es válida para todo dominio Ω_t regular. Por tanto, siendo el integrando una función continua, deberá anularse, obteniéndose la llamada **Ecuación de Conservación de la Cantidad de Movimiento**:

$$\partial_t(\rho \vec{v}) + \text{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = \text{div} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f} \quad (6.17)$$

Nota 6.1.3 La ecuación (6.15) explicita la ley mecánica de acción y reacción o **ley de Newton**, que afirma que la variación temporal de la cantidad de movimiento contenida en el dominio Ω_t es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre el mismo. El Principio de Conservación, escrito en la forma (6.15) supone que las fuerzas que actúan sobre Ω_t son de dos tipos:

- fuerzas de volúmenes exteriormente aplicadas (tales como las de gravedad, electromagnéticas, etc), representadas por el término \mathbf{f} , que habitualmente no dependen de \vec{v} (son datos).
- fuerzas de superficie internas que actúan sobre la frontera del dominio y que son debidas a la fricción del elemento de medio continuo con el resto del medio que le rodea, o a la presión que éste ejerce sobre aquel. Estos son los términos representados por $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ (denominado tensor de tensiones), y habitualmente son dependientes de \vec{v} .

Nota 6.1.4 Además del principio de conservación de la cantidad de movimiento, hay otro principio de conservación mecánico que hay que añadir a éste: el **Principio de Conservación del Momento de la Cantidad de Movimiento**, que establece que la variación temporal del momento de la cantidad de movimiento contenida en el dominio Ω_t es igual a la suma de los momentos de las fuerzas que actúan sobre el mismo. Su consecuencia inmediata es la simetría del tensor de tensiones:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad i, j = 1, \dots, n$$

6.1.3. Principio de Conservación de la Energía

Se notará por $E(x, t)$ a la energía total específica (por unidad de volumen) del medio continuo en el punto \mathbf{x} y en el instante t . Se asumirá entonces la:

Hipótesis 7 (Conservación de la Energía) Para todo $t \geq 0$, existen una función escalar regular $E = E(\mathbf{x}, t) \geq 0$, una función escalar $f = f(\mathbf{x}, t) \in C^0(\Omega_t)$ y una función vectorial regular $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$, tales que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} E d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} f d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds + \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \vec{v} \cdot \rho \vec{v} d\mathbf{x} \quad (6.18)$$

Teniendo entonces en cuenta (6.15) se escribe:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} E d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} f d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\partial\Omega_t} f \cdot \vec{v} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_t} (\tilde{\sigma} \vec{v}) \cdot \mathbf{n} ds$$

a lo que puede aplicarse el teorema de la divergencia (de Gauss) a la integral sobre $\partial\Omega_t$ y el teorema del transporte a la energía total específica, para obtener:

$$\int_{\Omega_t} \{ \partial_t E + \text{div}(E \vec{v}) - \text{div}(\tilde{\sigma} \vec{v}) + f \cdot \vec{v} + \text{div} \mathbf{q} - f \} d\mathbf{x} = 0 \quad (6.19)$$

expresión que es válida para todo dominio Ω_t regular. Por tanto, siendo el integrando una función continua, deberá anularse, obteniéndose la llamada **Ecuación de Conservación de la Energía**:

$$\partial_t E + \text{div}(E \vec{v}) = -\text{div} \mathbf{q} + \text{div}(\tilde{\sigma} \vec{v}) + f \cdot \vec{v} + f = 0 \quad (6.20)$$

Nota 6.1.5 El Principio de Conservación de la Energía (6.18), corresponde a la formulación del **Primer Principio de la Termodinámica**, que establece que la variación en el tiempo de la energía total contenida en Ω_t debe ser igual a la cantidad de calor neta aportada al dominio Ω_t (dos primeros términos del segundo miembro de (6.18)) más el trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre el mismo. Adviértase que la cantidad de calor neta aportada al dominio Ω_t se compone de dos sumandos:

- Un término positivo debido al aporte de calor mediante fuentes volumétricas (o sumideros) de calor representadas por el término f .
- Un término negativo debido a las pérdidas de calor a través de la frontera $\partial\Omega_t$. Aquí, \mathbf{q} representa el flujo de pérdidas de calor a través de la frontera.

6.1.4. Ecuaciones del sistema de Conservación de la Mecánica de los Medios Continuos

Las *Ecuaciones de Conservación locales o diferenciales* que describen el estado $(\rho(\mathbf{x}, t), \rho \vec{v}(\mathbf{x}, t), E(\mathbf{x}, t), \rho x_1(\mathbf{x}, t), \dots, \rho z_n(\mathbf{x}, t))$ de un medio continuo general (fluido reactivo con N especies en \mathbb{R}^n) en todo punto material \mathbf{x} del mismo y en todo instante $t \geq 0$, son las siguientes:

Sistema de Conservación Hidrodinámico:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 & \text{(masa)} \\ \partial_t(\rho \vec{v}) + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = \operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f} & \text{(Momento)} \\ \partial_t E + \operatorname{div}(E \vec{v}) = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + \mathbf{f} \cdot \vec{v} + f & \text{(Energía)} \end{array} \right. \quad (6.21)$$

Sistema de Conservación Químico:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\rho z_i) + \operatorname{div}(\rho z_i \vec{v}) = -\operatorname{div}(\rho z_i \vec{v}_i^d) + \dot{\rho}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \\ \sum_{i=1}^N z_i = 1 \end{array} \right. \quad (6.22)$$

Así, suponiendo que se conocen las acciones exteriores sobre el medio continuo (fuerzas aplicadas exteriormente, \mathbf{f} , y fuentes externas de energía, f), y se hace recuento de ecuaciones y de incógnitas, se advierte que faltan definir en (6.21) y (6.22) el tensor de tensiones $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, el vector de flujo de calor \mathbf{q} , las velocidades de difusión de cada especie \vec{v}_i^d y la velocidad de reacción de cada especie $\dot{\rho}_i$. La descripción de tales cantidades físicas se hace por medio de una serie de leyes particulares de origen experimental, pero con una justificación teórica basa en la termodinámica y en la teoría cinética de los gases, que es necesario añadir a las leyes de conservación generales (6.21) y (6.22). Se entrará a continuación, de forma obligadamente sucinta, a la descripción somera de tales leyes particulares que permitirán cerrar el sistema (6.21), (6.22).

Ecuaciones Constitutivas Se supone que la velocidad material del medio continuo es tal que:

$$\vec{v} \in (C^2(\Omega_t) \cap C^1(\overline{\Omega_t}))^n \quad (6.23)$$

y que existen constantes reales $\lambda, \mu \geq 0$, así como una función p regular en Ω_t tales que

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\tau} - p\tilde{I}e \quad (6.24)$$

$$\tilde{\tau} = \lambda(\operatorname{div} \vec{v})\tilde{I} + 2\mu\tilde{D}(\vec{v}) \quad (6.25)$$

$$3\lambda + 2\mu = k \quad (6.26)$$

siendo

$$\tilde{D} = \frac{1}{2}(\widetilde{\operatorname{grad}} \vec{v} + (\widetilde{\operatorname{grad}} \vec{v})^t) \quad (6.27)$$

Nota 6.1.6 1. La ley de comportamiento (6.24) descompone el tensor de tensiones (fuerzas de superficie actuando sobre un elemento material) del medio continuo, en parte isótropa debida a la contribución de la presión que ejerce el resto del medio continuo sobre el elemento material ($-P\tilde{I}$), más otra, el tensor de tensiones desviadoras $\tilde{\tau}$, denominado así por ser la parte del tensor de tensiones que se desvía de la parte isótropa. Esta última parte representa las fuerzas de fricción ejercida por el elemento material sobre el resto del medio continuo, si éste es viscoso.

2. La ley de comportamiento (6.25), juntamente con (6.26), corresponde a la de los **fluidos newtonianos**, para los que se supone que las tensiones desviadoras de fricción $\tilde{\tau}$ son proporcionales a los gradientes o diferencias de velocidad entre capas fluidas. Esta suposición de comportamiento lineal de las tensiones desviadoras es válida en la práctica para todas las mezclas gaseosas y líquidas que no contengan macromoléculas. En general para otros comportamientos no lineales se tendrá, en lugar de (6.25) y (6.26), una ley de comportamiento del tipo $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}$ con $\tilde{\tau}$ función regular en Ω_t .

3. Adviértase que el tensor de tensiones $\tilde{\sigma}$ definido por (6.24), (6.25), (6.27) es simétrico, conforme a lo expuesto en la Nota 6.1.4.

4. En (6.25) y (6.26), las constantes μ y λ son las denominadas primera y segunda viscosidades dinámicas del fluido, mientras que la constante k es el llamado módulo volumétrico de deformación.

5. \tilde{D} es conocido como el tensor lineal de velocidades de deformación:

$$D_{ij}(\vec{v}) = \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j)$$

y evalúa de alguna forma la diferencia de velocidades entre capas fluidas.

6. La hipótesis suplementaria de regularidad (6.23) sobre el campo de velocidades es necesaria para poder aplicar el teorema del transporte al principio de conservación de la cantidad de movimiento (6.15).
7. Otro ejemplo de ley de comportamiento, la más sencilla de todas, corresponde a la de los **fluidos perfectos**: $\tilde{\tau} = \tilde{0}$, que son aquellos que no son viscosos, y por tanto la única fuerza que se ejerce sobre un elemento fluido es la de presión. En este caso, la hipótesis suplementaria de regularidad (6.23) no es necesaria.

6.2. Solución global 1D del Problema Lagrangeano P_ϵ

6.2.1. Formulación lagrangiana del Problema P_ϵ .

En esta sección consideraremos la formulación lagrangiana del Problema P_ϵ , en una dimensión espacial x y en cualquier instante t , el cual introduce un cambio de las variables eulerianas en (x, t) a coordenadas lagrangianas (X, T) que se determinan mediante la resolución del siguiente problema :

$$\frac{\partial X}{\partial x}(x, t) = \rho(x, t) \quad \text{para } (x, t) \in Q_T, \quad X(\cdot, 0) = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

$$T = t.$$

En general, usaremos las letras minúsculas para nombrar variables y funciones en coordenadas eulerianas y letras mayúsculas para las lagrangianas. Puesto que la variable temporal t no varía en su definición en ambos tipos de coordenadas, mantendremos la notación en letra minúscula también para las coordenadas lagrangianas.

El paso formal de las ecuaciones (2.58)-(2.59) a coordenadas lagrangianas nos conduce al problema, llamado **Problema PL1** $_\epsilon$:

$$R_t + R^2 U_X = 0, \tag{6.28}$$

$$U_t - [(R^2 + \epsilon R)U_X]_X + p(R)_X = F(R, U, t), \tag{6.29}$$

en $D_T := (0, 1) \times (0, T)$, con

$$U(0, \cdot) = U(1, \cdot) = 0 \quad \text{en } (0, T),$$

$$R(\cdot, 0) = R_0, \quad U(\cdot, 0) = U_0, \quad \text{en } (0, 1).$$

Observemos que el extremo superior del subdominio espacial de D_T es la masa $\int_{Q_T} \rho$, la cual permanece invariante a lo largo del tiempo debido a las condiciones de frontera $u = 0$ en Γ_T e igual a 1 debido a la hipótesis sobre la masa inicial formulada en (2.53). El Problema $PL1_\epsilon$ hereda del Problema P_ϵ las siguientes hipótesis sobre los datos iniciales:

$$R_{0\epsilon} \in H^1(0, 1), \quad 0 < \rho_\epsilon^- \leq R_{0\epsilon} \leq \rho^+ < 1 \quad \text{en } (0, 1), \quad (6.30)$$

$$U_0 \in L^2(0, 1), \quad (6.31)$$

y la siguiente noción de solución débil:

Definición 6.2.1 Diremos que (R, U) es solución débil de $(PL1_\epsilon)$ si:

1. $R : \overline{D_T} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $U : \overline{D_T} \rightarrow \mathbb{R}$ poseen la siguiente regularidad

$$R \in L^\infty(0, T; H^1(0, 1)) \cap H^1(0, T; L^2(0, 1)) \cap C^0(\overline{D_T}), \quad p(R) \in L^\infty(D_T), \quad (6.32)$$

$$U \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, T; H_0^1(0, 1)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(0, 1)). \quad (6.33)$$

2. Se verifican las estimaciones puntuales

$$0 < \rho_- \leq R \leq \rho_+ < 1 \quad \text{en } D_T, \quad (6.34)$$

con ρ_-, ρ_+ dadas en (2.64).

3. Se verifica la ecuación

$$R_t + R^2 U_X = 0 \quad \text{ctp en } D_T, \quad (6.35)$$

y la identidad integral

$$\int_{D_T} (U \Phi_t - (R^2 + \epsilon R) U_X \Phi_X + p(R) \Phi_X + F(R, U, t) \Phi) = 0, \quad (6.36)$$

para toda $\Phi \in C^1(D_T)$.

4. Se verifican las condiciones iniciales

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|R(\cdot, t) - R_{0\epsilon}\|_{C^0} = \lim_{t \rightarrow 0} \|U(\cdot, t) - U_0\|_{H^{-1}} = 0.$$

Observemos que los datos iniciales que hemos tomado en $PL1_\epsilon$ carecen, por el momento, de relación con los datos iniciales del Problema P_ϵ . En el siguiente teorema establecemos la equivalencia entre los problemas P_ϵ y $PL1_\epsilon$ cuando los datos iniciales de ambos problemas están convenientemente relacionados.

Teorema 6.2.1 (Cambio de coordenadas) .- Supongamos que (R, U) es una solución débil del Problema PLI_ϵ . Entonces existe una aplicación γ que define un cambio de coordenadas $\gamma : \overline{D_T} \rightarrow \overline{Q_T}$

$$\gamma(X, t) := (x(X, t), t) \equiv (x, t),$$

tal que $0 < \|\det(D\gamma)\|_{L^\infty(D_T)} < \infty$,

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial X}(X, t) = \frac{1}{R(X, t)} & \text{para } (X, t) \in D_T, \\ \frac{\partial x}{\partial t}(X, t) = U(X, t) & \text{para } (X, t) \in D_T, \\ x(\cdot, 0) = 0 & \text{en } (0, 1). \end{cases}$$

Además, las funciones $\rho : \overline{Q_T} \rightarrow \mathbb{R}_+$ y $u : \overline{Q_T} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\rho(x, t) := R(\gamma^{-1}(x, t)), \quad u(x, t) := U(\gamma^{-1}(x, t)) \quad \text{para } (x, t) \in Q_T, \quad (6.37)$$

son una solución débil de P_ϵ asociada a las condiciones iniciales

$$\rho_{0\epsilon}(x) = R_{0\epsilon}(\gamma^{-1}(x, 0)), \quad u_0(x) = U_0(\gamma^{-1}(x, 0)) \quad \text{para } x \in \Omega.$$

Recíprocamente, si (ρ, u) es una solución del Problema P_ϵ , entonces existe una solución (R, U) del Problema PLI_ϵ dada por

$$R(X, t) := \rho(\gamma(X, t)), \quad U(X, t) := u(\gamma(X, t)), \quad \text{para } (X, t) \in D_T,$$

verificando las condiciones iniciales

$$R_{0\epsilon}(X) = \rho_{0\epsilon}(\gamma(X, 0)), \quad U_0(X) = u_0(\gamma(X, 0)), \quad \text{para } X \in (0, 1).$$

Demostración 6.2.1 Dividimos la demostración en varios pasos, como sigue:

Paso 1. Regularización de la solución de PLI_ϵ . Sea (R, U) una solución débil de (PLI_ϵ) . Consideremos una regularización $R_n \in C^\infty(D_T)$ de R tal que $R_n \rightarrow R$ en los espacios de (6.32), que cumple las acotaciones puntuales (6.34) y normalizada de modo que

$$\int_0^1 \frac{1}{R_n}(X, t) dX = L \quad \text{para } t \in (0, T). \quad (6.38)$$

Definimos

$$U_n(X, t) := \int_0^X \left(\frac{1}{R_n} \right)_t.$$

Se sigue que

$$R_{nt} + R_n^2 U_{nX} = 0 \quad \text{en } D_T, \quad U_n(0, \cdot) = U_n(1, \cdot) = 0 \quad \text{en } (0, T)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, U_n está uniformemente acotada en $L^2(0, T; H^1(0, 1))$ y por tanto converge débilmente a un elemento de dicho espacio. De hecho,

$$U_{nX} = \left(\frac{1}{R_n} \right)_t \rightarrow \left(\frac{1}{R} \right)_t = U_X \quad \text{en } L^2(D_T),$$

donde U es la segunda componente de la solución débil de PLI_ϵ que estamos considerando.

Paso 2. Definición del cambio de variable regularizado

Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la aplicación

$$\begin{aligned} \gamma_n : \overline{D_T} &\rightarrow \overline{Q_T} \\ (X, t) &\rightarrow \gamma_n(X, t) := (y_n(X, t), t) \end{aligned}$$

donde

$$y_n(X, t) = \int_0^X \frac{1}{R_n}(Z, t) dZ. \quad (6.39)$$

Observemos que

- $\frac{\partial y_n}{\partial X} = \frac{1}{R_n} > 0$ en $\overline{D_T}$, con $y_n(0, \cdot) = 0$ y $y_n(1, \cdot) = L$ en $(0, T)$.
- $\frac{\partial y_n}{\partial t} = \int_0^X \left(\frac{1}{R_n} \right)_t = U_n$ en D_T ,
- $\frac{\partial y_n}{\partial t \partial X} = \left(\frac{1}{R_n} \right)_t$ en D_T .

Por tanto, $\gamma_n(D_T) = Q_T$, y

$$D\gamma_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_n} & U_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in C^\infty(D_T), \quad \det(D\gamma_n) = \frac{1}{R_n} > 0 \quad \text{en } \overline{D_T}.$$

Por otra parte, como $\frac{\partial y_n}{\partial X} > 0$ en $\overline{D_T}$, fijado $t \in (0, T)$ podemos considerar la aplicación inversa de y_n a la cual denotamos por Y_n . Es decir, $Y_n(\cdot, t) : [0, L] \rightarrow [0, 1]$ satisface

$$y_n(Y_n(x, t), t) = x \quad \text{para todo } x \in [0, L] \quad \text{y} \quad Y_n(y_n(X, t), t) = X \quad \text{para todo } X \in [0, 1].$$

De este modo, definimos

$$\begin{aligned} \Gamma_n : \overline{Q_T} &\rightarrow \overline{D_T} \\ (x, t) &\rightarrow \Gamma_n(x, t) := (Y_n(x, t), t). \end{aligned}$$

Observemos que Y_n es la solución única del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial x}(x, t) = R_n(Y(x, t), t) & \text{para } (x, t) \in Q_T, \\ Y(0, \cdot) = 0 & \text{en } (0, T). \end{cases}$$

Como $0 = Y_n(y_n(0, t), t) = Y_n(0, t)$ y $1 = Y_n(y_n(1, t), t) = Y_n(L, t)$, se sigue que $\Gamma_n(Q_T) = D_T$. Además,

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}(y_n(Y_n(x, t), t)) = \frac{\partial y_n}{\partial X}(Y_n(x, t), t) \frac{\partial Y_n}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial y_n}{\partial t}(Y_n(x, t), t),$$

de modo que

$$\frac{\partial Y_n}{\partial t}(x, t) = -R_n(Y_n(x, t), t)U_n(Y_n(x, t), t)$$

Tenemos pues

$$D\Gamma_n = \begin{pmatrix} R_n(Y_n, \cdot) & -R_n(Y_n, \cdot)U_n(Y_n, \cdot) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in C^\infty(Q_T), \quad \det(D\Gamma_n) = R_n(Y_n, \cdot) > 0 \quad \text{en } \overline{Q_T}. \quad (6.40)$$

Concluimos que γ_n satisface las condiciones del cambio de variable y que la inversa de γ_n es Γ_n .

Paso 3. Regularidad en coordenadas eulerianas

Sean:

$$\rho_n(x, t) := R_n(Y_n(x, t), t), \quad u_n := U_n(Y_n(x, t), t) \quad \text{con } (x, t) \in Q_T, \quad (6.41)$$

y para cualquier $\Phi \in C^\infty(D_T)$, $\phi_n(x, t) = \Phi(Y_n(x, t), t)$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \phi_{nt} &= \frac{\partial \Phi}{\partial t}(Y_n, \cdot) - \frac{\partial \Phi}{\partial X}(Y_n, \cdot)R_n(Y_n, \cdot)U_n(Y_n, \cdot), \\ \phi_{nx} &= \frac{\partial \Phi}{\partial X}(Y_n, \cdot)R_n(Y_n, \cdot) \end{aligned}$$

en Q_T . Por tanto, usando la convergencia de (R_n, U_n) a (R, U) en los espacios (6.32) y (6.33) y que cumple las acotaciones puntuales (6.34), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} |\rho_{nt}|^2 &= \int_{Q_T} \left| \frac{\partial R_n}{\partial t}(Y_n, \cdot) - \frac{\partial R_n}{\partial X}(Y_n, \cdot)R_n(Y_n, \cdot)U_n(Y_n, \cdot) \right|^2 = \int_{D_T} \left| \frac{\partial R_n}{\partial t} - \frac{\partial R_n}{\partial X}R_nU_n \right|^2 \frac{1}{R_n} \\ &\leq c \int_{D_T} \left| \frac{\partial R_n}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial R_n}{\partial X}U_n \right|^2 \leq c \left(\|R_{nt}\|_{L^2} + \|R_n\|_{L^\infty(H^1)} \|U_n\|_{L^2(L^\infty)} \right)^2 \leq c. \end{aligned}$$

$$\int_{Q_T} |\rho_{nx}|^2 = \int_{Q_T} \left| \frac{\partial R_n}{\partial X}(Y_n, \cdot)R_n(Y_n, \cdot) \right|^2 = \int_{D_T} \left| \frac{\partial R_n}{\partial X}R_n \right|^2 \frac{1}{R_n} \leq c \|R_n\|_{L^2(H^1)}^2 \leq c.$$

$$\sup_{t \in (0, T)} \int_0^L |u_n|^2 = \sup_{t \in (0, T)} \int_0^1 |U_n|^2 \frac{1}{R_n} \leq c \|U_n\|_{L^\infty(L^2)}^2 \leq c.$$

$$\int_{Q_T} |u_{nx}|^2 = \int_{Q_T} \left| \frac{\partial U_n}{\partial X}(Y_n, \cdot) R_n(Y_n, \cdot) \right|^2 = \int_{D_T} \left| \frac{\partial U_n}{\partial X} R_n \right|^2 \frac{1}{R_n} \leq c \|U_n\|_{L^2(H^1)}^2 \leq c.$$

De donde se deduce que existe una subsucesión (ρ_n, u_n) que converge débilmente a (ρ, u) , donde

$$\begin{aligned} \rho &\in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ u &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Paso 4. Convergencia uniforme del cambio regularizado

Debido a la convergencia uniforme de R_n a R se sigue que también

$$\gamma_n \rightarrow \gamma \quad \text{uniformemente convergente en } D_T.$$

Para demostrar la convergencia uniforme de Γ_n a Γ procedemos del siguiente modo:

gracias a la regularidad de R y U (6.32), (6.33), las normas $\|R_n\|_{L^\infty}$ y $\|U_n\|_{L^2(L^\infty)}$

están uniformemente acotadas. Entonces, usando (6.40), deducimos que para $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in Q_T$ se tiene

$$\begin{aligned} \|\Gamma_n(x_2, t_2) - \Gamma_n(x_1, t_1)\| &\leq \|\Gamma_n(x_2, t_2) - \Gamma_n(x_1, t_2)\| + \|\Gamma_n(x_1, t_2) - \Gamma_n(x_1, t_1)\| \\ &\leq |Y_n(x_2, t_2) - Y_n(x_1, t_2)| + |Y_n(x_1, t_2) - Y_n(x_1, t_1)| + |t_2 - t_1| \\ &\leq \|R_n\|_{L^\infty} |x_2 - x_1| + \|R_n\|_{L^\infty} \|U_n\|_{L^2(L^\infty)} |t_2 - t_1|^{1/2} + |t_2 - t_1| \\ &\leq C (|x_2 - x_1| + |t_2 - t_1|^{1/2}) + |t_2 - t_1|, \end{aligned}$$

por lo que la sucesión Γ_n es uniformemente equicontinua y por tanto, para una subsucesión

$$\Gamma_n \rightarrow \Gamma \quad \text{uniformemente en } \overline{Q_T}. \quad (6.42)$$

Observemos aquí que la convergencia uniforme de γ_n a γ permite obtener la acotación uniforme de u_{nt} en $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. En efecto, se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle u_{nt}, \phi \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} &= \int_{Q_T} \left(\frac{\partial U_n}{\partial t}(Y_n, \cdot) - \frac{\partial U_n}{\partial X}(Y_n, \cdot) R_n(Y_n, \cdot) U_n(Y_n, \cdot) \right) \phi \, dQ_T \\ &= \int_{D_T} \left(\frac{\partial U_n}{\partial t} - \frac{\partial U_n}{\partial X} R_n U_n \right) \frac{\phi(y_n, \cdot)}{R_n} \, dD_T \\ &= \int_{D_T} \left(\frac{\partial U_n}{\partial t} \frac{\phi(y_n, \cdot)}{R_n} + \frac{1}{2} U_n^2 \frac{\partial \phi}{\partial x}(y_n, \cdot) \frac{1}{R_n} \right) \, dD_T \\ &\leq c (\|U_{nt}\|_{L^2} + \|U_n\|_{L^4}^2) \|\phi\|_{L^2(H_0^1)} \leq c. \end{aligned}$$

Usando la inyección continua $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \subset L^4(D_T)$ deducimos que

$$\|u_{nt}\|_{L^2(H^{-1})} \leq c \left(\|U_{nt}\|_{L^2} + \|U_n\|_{L^2(H_0^1) \cap L^\infty(L^2)}^2 \right) \leq c,$$

y por tanto el límite, u , de u_n establecido en el paso anterior también satisface $u \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

Paso 5. Funciones test. Sea $\phi \in C^0([0, T]; C_0^1(\bar{\Omega}) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)))$ y definamos $\Phi_n := \phi(y_n, \cdot)$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\Phi_{nt} &= \frac{\partial \phi}{\partial t}(y_n, \cdot) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(y_n, \cdot)U_n, \\ \Phi_{nX} &= \frac{\partial \phi}{\partial x}(y_n, \cdot) \frac{1}{R_n},\end{aligned}$$

en D_T , y por tanto

$$\begin{aligned}\int_{D_T} |\Phi_{nt}|^2 &= \int_{D_T} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t}(y_n, \cdot) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(y_n, \cdot)U_n \right|^2 = \int_{Q_T} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x}U_n(Y_n, \cdot) \right|^2 R_n(Y_n, \cdot) \leq \\ &\leq c(\|\phi_t\|_{L^2} + \|\phi_x\|_{L^\infty} \|U_n\|_{L^2})^2 \leq c.\end{aligned}$$

$$\sup_{D_T} |\Phi_{nX}| = \sup_{D_T} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(y_n, \cdot) \frac{1}{R_n} \right| \leq c \sup_{Q_T} |\phi_x|,$$

además, gracias a la convergencia uniforme en D_T de γ_n y R_n se sigue que Φ_n está uniformemente acotada en $C^0([0, T]; C_0^1(0, 1) \cap H^1(0, T; L^2(0, 1)))$ y que existe un elemento, Φ , de este espacio tal que $\Phi_{nX} \rightarrow \Phi_X$ uniformemente en D_T y $\Phi_{nt} \rightharpoonup \Phi_t$ débilmente en $L^2(D_T)$. Además, la convergencia uniforme implica que $\Phi = \phi \circ \gamma$.

Paso 6. Observemos que la ecuación de conservación de la masa en eulerianas se cumple para todo n , como también ocurre en lagrangianas. En efecto, para (ρ_n, u_n) dadas por (6.41) se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \frac{\partial \rho_n}{\partial x}u_n + \rho_n \frac{\partial u_n}{\partial x} &= \frac{\partial R_n}{\partial t}(Y_n, \cdot) - \frac{\partial R_n}{\partial X}(Y_n, \cdot)R_n(Y_n, \cdot)U_n(Y_n, \cdot) + \\ &+ \frac{\partial R_n}{\partial X}(Y_n, \cdot)R_n(Y_n, \cdot)U_n(Y_n, \cdot) + R_n^2(Y_n, \cdot) \frac{\partial U_n}{\partial X}(Y_n, \cdot) = 0,\end{aligned}$$

en Q_T , y para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, la formulación débil de la ecuación del momento queda como sigue. Para cada $\phi \in C^0([0, T]; C_0^1(\bar{\Omega}) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)))$ tenemos

$$\begin{aligned}I_n &:= \int_{Q_T} (\rho_n u_n (\phi_t + u_n \phi_x) - (\rho_n + \epsilon) u_{nx} \phi_x + p(\rho_n) \phi_x + \rho_n f(\rho_n, u_n, t) \phi) = \int_{D_T} U_n \Phi_{nt} - \\ &- \int_{D_T} (R_n + \epsilon) R_n U_{nX} \Phi_{nX} + \int_{D_T} p(R_n) \Phi_{nX} + \int_{D_T} F(R_n, U_n, t) \Phi_n,\end{aligned}$$

donde $\Phi_n = \phi(y_n, \cdot)$ es, como vimos en el paso anterior, una función test admisible del problema PLI_ϵ . Debido a que (R_n, U_n) converge a (R, U) , solución de PLI_ϵ (ver Paso 1) y a que Φ_n converge a una función test admisible de PLI_ϵ (ver Paso 5) se sigue que $I_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. En efecto, la convergencia fuerte de la sucesión U_{nX} en $L^2(D_T)$ y la convergencia uniforme de R_n permite pasar al límite en todos los términos

del lado derecho de la igualdad anterior. Finalmente, observemos que la convergencia uniforme del cambio de variables Γ_n permite demostrar la convergencia uniforme de ρ_n , y que la acotación de u_n en $L^4(D_T)$ permite demostrar la convergencia débil para una subsucesión de u_n^2 en $L^2(D_T)$. Así, puesto que $(\rho_n, u_n) \rightarrow (\rho, u)$ en los espacios especificados en los Pasos 3 y 4, podemos pasar al límite en los términos del lado izquierdo de la igualdad anterior y concluir que (ρ, u) es una solución débil de P_ϵ . El recíproco se demuestra de modo análogo.

El Problema PL_ϵ

En lugar de buscar soluciones (R, U) del Problema $PL_{1\epsilon}$, vamos a reescribir el problema en términos de unas nuevas funciones incógnitas (W, U) donde

$$W := \frac{1}{R}.$$

Definición 6.2.2 Diremos que (W, U) es una solución débil de PL_ϵ si:

1. $W : \overline{D_T} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $U : \overline{D_T} \rightarrow \mathbb{R}$ poseen la siguiente regularidad

$$W \in L^\infty(0, T; H^1(0, 1)) \cap H^1(0, T; L^2(0, 1)) \cap C^0(\overline{D_T}), \quad p(1/W) \in L^\infty(D_T), \quad (6.43)$$

$$U \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, T; H_0^1(0, 1)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(0, 1)). \quad (6.44)$$

2. Se verifican las estimaciones puntuales

$$0 < 1/\rho_+ \leq W \leq 1/\rho_- < 1 \quad \text{en } D_T. \quad (6.45)$$

3. Se verifican las siguientes identidades

$$W_t = U_X \quad \text{ctp en } D_T, \quad (6.46)$$

$$\int_{D_T} (U\Phi_t - \beta(W)U_X\Phi_X + p(1/W)\Phi_X + F(1/W, U, t)\Phi) = 0, \quad (6.47)$$

para toda $\Phi \in C_0^1(Q_T)$, donde

$$\beta(s) := \frac{\epsilon}{s} + \frac{1}{s^2} \quad (6.48)$$

4. Se verifican las condiciones iniciales en el siguiente sentido

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|W(\cdot, t) - W_{0\epsilon}\|_{C^0} = \lim_{t \rightarrow 0} \|U(\cdot, t) - U_0\|_{H^{-1}} = 0, \quad \text{donde } W_{0\epsilon} := \frac{1}{R_{0\epsilon}}. \quad (6.49)$$

Observemos que las hipótesis sobre los datos que se heredan del Problema $PL1_\epsilon$ son:

$$W_{0\epsilon} \in H^1(0, 1), \quad 1 < 1/\rho^+ \leq W_{0\epsilon} \leq 1/\rho_\epsilon^- < \infty \quad \text{en } (0, 1), \quad (6.50)$$

$$U_0 \in L^2(0, 1). \quad (6.51)$$

Lema 6.2.1 (W, U) es una solución débil del Problema PL_ϵ si y sólo si (R, U) es una solución débil del Problema PLI_ϵ .

Prueba:

Supongamos que (R, U) es una solución débil de PLI_ϵ . Debido a la regularidad y las estimaciones puntuales dadas en (6.32)-(6.34) se tiene que la función $W = 1/R$ satisface $W \in C^0(\overline{D_T})$, $\bar{p}(W) := p(\frac{1}{R}) \in L^\infty(D_T)$,

$$W_X = -\frac{1}{R^2}R_X \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \quad \text{y} \quad W_t = -\frac{1}{R^2}R_t \in L^2(D_T). \quad (6.52)$$

Las estimaciones puntuales (6.45) se obtienen de forma inmediata de (6.34). Finalmente, es fácil comprobar a partir de las fórmulas (6.52) que (W, U) satisface las ecuaciones (6.46)-(6.47) y los datos iniciales (6.49). El recíproco se demuestra de forma similar.

Observemos que la formulación fuerte del Problema PL_ϵ es

$$W_t = U_X, \quad (6.53)$$

$$U_t - (\beta(W)U_X)_X + \bar{p}(W)_X = \bar{F}(W, U, t),$$

en D_T , con

$$U(0, t) = U(1, t) = 0 \quad \text{en } (0, T),$$

$$W(\cdot, 0) = W_0, \quad U(\cdot, 0) = U_0, \quad \text{en } (0, 1),$$

y donde

$$\bar{p}(W) = p\left(\frac{1}{W}\right) \text{ y } \bar{F}(W, U, t) := F(1/R, U, t).$$

En lo que sigue, mientras no dé lugar a equívocos, usaremos la notación p y F en vez de \bar{p} y \bar{F} .

6.2.2. El problema $PL_{\epsilon h}$

Para obtener una solución del Problema PL_ϵ introduciremos una discretización espacial que nos conducirá a la formulación de un sistema de ecuaciones diferenciales

respecto a la variable temporal. Una vez demostrada la existencia de solución, primero local, véase Lema 6.2.2 y después global, véase Teorema 6.2.2, realizaremos un paso al límite en el parámetro de discretización que nos permitirá obtener una solución del Problema PL_ϵ (véase el Teorema 6.2.3) y, a posteriori, del Problema P_ϵ , véase Corolario 6.2.1. Comenzamos introduciendo la notación que emplearemos en esta sección.

Fijemos $N \in \mathbb{N}$ y $h := 1/N$. En el intervalo $[0, 1]$ tomamos los puntos

$$\begin{aligned} X_k &= hk, & \text{para } k \in \{0, \dots, N\}, \\ X_{k+1/2} &= \frac{X_k + X_{k+1}}{2} = h(k + \frac{1}{2}), & \text{para } k \in \{0, \dots, N-1\}, \end{aligned}$$

puntos en los que discretizaremos las funciones U y W , respectivamente. Usaremos la notación $W_{k+1/2} := W(X_{k+1/2}, \cdot)$, $U_j := U(X_j, \cdot)$, etc. Definimos los operadores de diferencias usuales

$$\delta w_k := \frac{w_{k+1/2} - w_{k-1/2}}{h}, \quad \delta w_{k+1/2} := \frac{w_{k+1} - w_k}{h},$$

y de valor medio

$$\widetilde{W}_k := \frac{W_{k-1/2} + W_{k+1/2}}{2}.$$

Finalmente, usaremos la notación $\dot{F}(t) = \frac{d}{dt}F(t)$ para la derivación con respecto al tiempo.

Ya estamos en disposición de introducir la versión discreta del Problema PL_ϵ , a la cual llamaremos **Problema $PL_{\epsilon h}$** : Para $k \in \{0, \dots, N-1\}$ y $j \in \{0, \dots, N\}$, encontrar funciones

$$W_{k+1/2} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{y} \quad U_j : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$$

soluciones del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{W}_{k+1/2} = \delta U_{k+1/2}, \tag{6.54}$$

$$\dot{U}_j = \delta(p(W) - \beta(W)\delta U)_j + \widetilde{f}(\widetilde{W}_j, U_j), \tag{6.55}$$

sujeto a las condiciones iniciales

$$W_{k+1/2}(0) = W(X_{k+1/2}, 0), \tag{6.56}$$

$$U_j(0) = \frac{1}{h} \int_{X_{j-1/2}}^{X_{j+1/2}} U_0(X) dX, \tag{6.57}$$

y satisfaciendo las condiciones de compatibilidad

$$U_0(t) = U_N(t) = 0 \quad \text{para } t \in [0, T]. \tag{6.58}$$

En (6.55) hemos introducido la notación

$$\tilde{f}(x, y) := \frac{q(x)(n-y)}{1/\rho^* - \min(1/x, 1)} - g, \quad (6.59)$$

y abusando de la misma, hemos llamado U_0 tanto al dato inicial del Problema PL_ϵ como a la condición de contorno (6.58) del Problema $PL_{\epsilon h}$. Además, haremos la identificación $p(W)_j \equiv p(W_j)$, etc.

Observación 6.2.1 *La singularidad de la función f en $W = \rho^*$ y el hecho de que no podamos asegurar, a priori, que la función discretizada \widetilde{W}_j no toma este valor es el motivo por el cual hemos introducido la función \tilde{f} en sustitución de f en la ecuación (6.55). Más adelante demostraremos que el volumen específico W verifica la acotación puntual $1/W < 1$, por lo que $f \equiv \tilde{f}$ en el dominio de definición de ambas.*

Observación 6.2.2 *La regularidad (6.43) permite justificar la condición (6.56). Asimismo, la regularidad (6.51) permite considerar (6.57).*

Lema 6.2.2 *Existe un $T^* > 0$ tal que el Problema $PL_{\epsilon h}$ tiene una solución única en $(0, T^*)$.*

Demostración 6.2.2 *Comenzamos por reescribir el problema en la forma*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{c}}(t) &= \mathbf{F}(t, \mathbf{c}(t)), \quad \text{para } t > 0, \\ \mathbf{c}(0) &= \mathbf{c}_0, \end{aligned} \quad (6.60)$$

donde

$$\mathbf{c}(t) := (W_{1/2}(t), \dots, W_{N+1/2}(t), U_1(t), \dots, U_{N-1}(t)), \quad (6.61)$$

y las componentes de la función $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N-1}$ son:

- $F_1(t, \mathbf{x}) := \frac{1}{h}x_{N+1}$,
- $F_i(t, \mathbf{x}) := \frac{1}{h}(x_{N+i} - x_{N+i-1})$, para $i \in \{2, \dots, N-1\}$,
- $F_N(t, \mathbf{x}) := -\frac{1}{h}x_{2N-1}$,
-

$$\begin{aligned} F_{N+1}(t, \mathbf{x}) &:= \frac{1}{h^2} [\beta(x_2)x_{N+2} - \beta(x_2)x_{N+1} - \beta(x_1)x_{N+1}] + \\ &+ \frac{1}{h} [-p(x_2) + p(x_1)] + f\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2, x_{N+1})\right), \end{aligned}$$

- para $i \in \{N + 2, \dots, 2N - 2\}$,

$$F_i(t, \mathbf{x}) := \frac{1}{h^2} [\beta(x_{i+1-N})x_{i+1} - \beta(x_{i+1-N})x_i - \beta(x_{i-N})x_i + \beta(x_{i-N})x_{i-1}] \\ + \frac{1}{h} [-p(x_{i+1-N}) + p(x_{i-N})] + f\left(\frac{1}{2}(x_{i-N} + x_{i+1-N}, x_i)\right),$$

- y, finalmente,

$$F_{2N-1}(t, \mathbf{x}) := \frac{1}{h^2} [-\beta(x_N)x_{2N-1} - \beta(x_{N-1})x_{2N-1} + \beta(x_{N-1})x_{2N-2}] \\ + \frac{1}{h} [-p(x_N) + p(x_{N-1})] + f\left(\frac{1}{2}(x_{N-1} + x_N, x_{2N-1})\right).$$

Veamos a continuación que la función \mathbf{F} satisface las condiciones del Teorema de Piccard-Lipschitz cuando el dato inicial verifica (6.56) y, por tanto, las estimaciones puntuales (6.50). Comencemos comprobando que $\mathbf{F}(t, \mathbf{c})$ es continua en ambas variables y Lipschitziana en 2da segunda. Gracias a la hipótesis sobre la condición inicial de la densidad (6.56) se tiene

$$1 < 1/\rho^+ \leq c_{0i} \leq 1/\rho_\epsilon^-, \quad \text{para } i \in \{1, \dots, N\},$$

y debido a la regularidad de la velocidad inicial (6.51) y a la definición (6.57) se tiene

$$|U_k(0)| = \frac{1}{h} \left| \int_{X_{k-1/2}}^{X_{k+1/2}} U_0 \right| \leq \frac{1}{h} h^{1/2} \|U_0\|_{L^2(0,1)} =: C_0,$$

y por tanto

$$-C_0 \leq c_{0i} \leq C_0, \quad \text{para } i \in \{N + 1, \dots, 2N - 1\}.$$

Consideremos el subconjunto de \mathbb{R}^{2N-1}

$$[1/\rho_+, 1/\rho_-]^N \times [-C_0 - 1, C_0 + 1]^{N-1},$$

entorno de la condición inicial \mathbf{c}_0 . Puesto que $0 \notin [1/\rho_+, 1/\rho_-]^N$, es fácil comprobar que la función \mathbf{F} introducida al comienzo de esta demostración es continua y Lipschitziana en \mathbf{c} , por lo que el Teorema de Piccard-Lipschitz garantiza la existencia y unicidad de solución de (6.60) para un tiempo T^* suficientemente pequeño.

Observación 6.2.3 Hemos supuesto que el término de 'soplado' M verifica la regularidad $M \in L^\infty(0, T)$. Para que las ecuaciones diferenciales del problema $PL_{\epsilon h}$ sean clásicas, es necesario que $M \in C^0(0, T)$. Veremos posteriormente que si consideramos M_ϵ una regularización de M , podemos pasar al límite.

Para deducir la existencia global de solución de $PL_{\epsilon h}$ obtendremos estimaciones puntuales de la forma

$$1 < W_- \leq W_{k+1/2} \leq W_+ < \infty, \quad (6.62)$$

$$-\infty < U_- \leq U_k \leq U_+ < \infty, \quad (6.63)$$

en $(0, T)$, que nos permitirán asegurar que la constante de Lipschitz de la función F permanece acotada para cualquier $T > 0$. Estas estimaciones están basadas en la siguiente formulación haciendo uso de la integración por partes:

Dados los conjuntos de números reales $\{a_k\}$ y $\{b_j\}$, con $k \in \{0, \dots, N\}$ y $j \in \{1/2, \dots, N-1/2\}$, se tiene

$$\sum_{k=1}^{N-1} a_k \delta b_k = a_N b_{N-1/2} - a_0 b_{1/2} - \sum_{k=0}^{N-1} b_{k+1/2} \delta a_{k+1/2}. \quad (6.64)$$

En lo que sigue, denotaremos por C a cualquier constante independiente del parámetro de discretización h . Podemos enunciar ya la primera estimación de la energía discreta.

Lema 6.2.3 *Sea c definida por (6.61) una solución del Problema $PL_{\epsilon h}$. Entonces*

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N-1} U_k^2(T)h + \int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} U_k^2 h + \int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} \beta_{k+1/2} (\delta U_{k+1/2})^2 h + \sum_{k=0}^{N-1} E_p(W_{k+1/2}(T))h \\ & \leq C \left(T + \sum_{k=1}^{N-1} U_k^2(0)h + \sum_{k=0}^{N-1} E_p(W_{k+1/2}(0))h \right), \end{aligned} \quad (6.65)$$

donde

$$E_p(W) := \int_W^\infty \bar{p}(s) ds. \quad (6.66)$$

Demostración 6.2.3 *Multiplicando la ecuación de la velocidad (6.55) por $U_k h$ y sumando en k se tiene*

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} (\dot{U}_k)^2 h = - \sum_{k=1}^{N-1} \delta(p - \beta \delta U)_k U_k h + \sum_{k=1}^{N-1} f(\widetilde{W}_k, U_k) U_k h. \quad (6.67)$$

Aplicando la fórmula de suma por partes (6.64) y la condición de contorno para la velocidad (6.58), el primer término del lado derecho de la igualdad (6.67) es igual a

$$\sum_{k=0}^{N-1} (p - \beta \delta U)_{k+1/2} \delta U_{k+1/2} h = \sum_{k=0}^{N-1} p_{k+1/2} \delta U_{k+1/2} h - \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k+1/2} (\delta U_{k+1/2})^2 h. \quad (6.68)$$

Utilizando la ecuación discreta de conservación de la masa (6.54) se tiene que el primer sumando del lado derecho de (6.68) es igual a

$$\sum_{k=0}^{N-1} p_{k+1/2} W_{k+1/2} \dot{h} = - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{d}{dt} (E_p(W)_{k+1/2}) h. \quad (6.69)$$

Por último, el término fuente de (6.67) lo descomponemos como

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N-1} f(\tilde{W}_k, U_k) U_k h &= \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{q(\tilde{W}_k)}{1/\rho^* - \min(1/\tilde{W}_k, 1)} n - g \right) U_k h \\ &\quad - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{q(\tilde{W}_k)}{1/\rho^* - \min(1/\tilde{W}_k, 1)} U_k^2 h. \end{aligned} \quad (6.70)$$

El primer término de (6.70) lo acotamos del siguiente modo

$$\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{q(\tilde{W}_k)}{1 - \min(1/\tilde{W}_k, 1/\rho^*)} n - g \right) U_k h \leq C \sum_{k=1}^{N-1} U_k h \leq \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{C^2}{2\epsilon_1} h + \frac{\epsilon_1}{2} U_k^2 h \right), \quad (6.71)$$

para todo $\epsilon_1 > 0$. Integrando (6.67) en $(0, T)$ y usando (6.68)-(6.71) deducimos (6.65).

Observación 6.2.4 Es importante notar que el hecho de que el sistema de ecuaciones ordinarias mantenga el acoplamiento entre las ecuaciones de conservación de masa y de momento es el que permite usar la igualdad (6.69), fundamental en la obtención de la estimación de la energía (6.65). Por ello, un esquema iterativo o de punto fijo que desacople ambas ecuaciones no es útil.

Observación 6.2.5 Para leyes constitutivas de la presión de la forma

$$\bar{p}(W) := p(1/W) = K \left(\frac{1}{W} \right)^{\gamma_0} \exp\left(\frac{1/W}{1 - 1/W} \right),$$

véase ([51]), se tiene que $\bar{p} : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ es decreciente y

$$\lim_{W \rightarrow 1} \bar{p}(W) = \infty, \quad \lim_{W \rightarrow \infty} \bar{p}(W) = 0, \quad \int_{W'}^{\infty} \bar{p}(s) ds < \infty,$$

por lo que la función E_p introducida en (6.66) verifica:

1. $E_p : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\lim_{W \rightarrow \infty} E_p(W) = 0$, E_p es decreciente en $(1, \infty)$ y se tiene

$$\lim_{W \rightarrow 1} \int_W^{\infty} E_p(s) ds = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{W \rightarrow 1} \int_W^{W'} E_p(s) ds = \infty.$$

2. Considerando una función continua $g : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$, verificando

$$0 < g_- \leq |\gamma(W)| < g_+ < \infty \quad \text{para todo } W \in (1, W') \text{ con } W' > 1,$$

se tiene

$$\lim_{W \rightarrow 1^+} \int_W^{W'} g(s) E_p(s)^r ds = \int_1^{W'} E_p(s)^r ds = \infty \quad \text{para todo } r > 0. \quad (6.72)$$

Lema 6.2.4 *Sea c definida por (6.61) una solución del Problema $PL_{\epsilon h}$. Entonces existe una constante C independiente de h , tal que*

$$\sum_{k=1}^{N-1} (\delta E_k)^2(T)h \leq C \left(T + \sum_{k=1}^{N-1} U_k^2(0)h + \sum_{k=0}^{N-1} E_p(W_{k+1/2}(0))h + \sum_{k=1}^{N-1} (\delta E_k)^2(0)h \right), \quad (6.73)$$

donde

$$E_{k+1/2} := E(W_{k+1/2}) = \int_{W'}^{W_{k+1/2}} \beta(s)ds, \quad (6.74)$$

para cierta constante positiva W' .

Observación 6.2.6 *Como β es positiva, ver (6.48), la función E resulta ser creciente en $[1, \infty)$. Además,*

$$\lim_{W \rightarrow \infty} E(W) = \lim_{W \rightarrow \infty} \int_{W'}^W \left(\frac{\epsilon}{s} + \frac{1}{s^2} \right) ds = \infty.$$

Demostración 6.2.4 *Consideremos la ecuación*

$$\delta \dot{E}_k = \delta(\beta \delta U)_k = \dot{U}_k + \delta p_k - f_k,$$

la cual se obtiene de (6.54), (6.55) y la definición (6.74). Multiplicando por $E_k h$, sumando para $k \in \{1, \dots, N-1\}$ e integrando en $(0, T)$ se tiene

$$\int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} \delta \dot{E}_k E_k h = \int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} (\dot{U}_k + \delta p_k - f_k) \delta E_k h. \quad (6.75)$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} \dot{U}_k \delta E_k h &= \sum_{k=1}^{N-1} U_k \delta E_k h \Big|_0^T - \int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} U_k \delta \dot{E}_k h \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} U_k \delta E_k h \Big|_0^T - \int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} U_k \delta(\beta \delta U)_k h \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} U_k \delta E_k h \Big|_0^T + \int_0^T \sum_{k=0}^{N-1} \beta (\delta U_{k+1/2})^2 h \\ &\leq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{N-1} (\delta E_k)^2(T)h + 2 \sum_{k=1}^{N-1} U_k^2(T)h + \int_0^T \sum_{k=0}^{N-1} \beta (\delta U_{k+1/2})^2 h \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N-1} U_k(0) \delta E_k(0)h. \end{aligned}$$

Por otra parte, al ser p una función decreciente y E una función creciente,

$$\int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} \delta p_k \delta E_k h \leq 0,$$

por lo que podemos escribir a partir de (6.75)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} (\delta E_k)^2(T)h &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} (\delta E_k)^2(0)h + 2 \sum_{k=1}^{N-1} U_k^2(T)h \\ &\quad + \int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} \beta (\delta U_{k+1/2})^2 h + \sum_{k=1}^{N-1} U_k(0) \delta E_k(0)h \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} \delta (E_k)^2(T)h + \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2(t)h + \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} (\delta E_k)^2(t)h dt, \end{aligned}$$

y concluir usando la desigualdad de Gronwall, gracias a la acotación del lema 6.2.3.

Antes de demostrar la existencia de solución para todo tiempo del problema discreto PL_{eh} vamos a demostrar la siguiente desigualdad, la cual es la versión discreta de la inyección continua $H^1(0, 1) \subset L^\infty(0, 1)$.

Lema 6.2.5 Existe una constante $C > 0$ tal que

$$\sup_{k \in \{0, \dots, N-1\}} |a_{k+1/2}| \leq C \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_{k+1/2}^2 h + \sum_{k=1}^{N-1} (\delta a_k)^2 h \right)^{1/2}. \quad (6.76)$$

Demostración 6.2.5 Como la longitud del intervalo es 1, tenemos $\sum_{k=0}^{N-1} h = Nh = 1$, y por tanto

$$a_{m+1/2} \leq h \sum_{k=0}^{N-1} a_{k+1/2} \leq a_{n+1/2}$$

para algunos $m, n \in \{0, \dots, N-1\}$. Sea $j \in \{0, \dots, N-1\} \setminus \{m\}$. Supondremos sin pérdida de generalidad que $m < j$. Entonces

$$\begin{aligned} a_{j+1/2} &= a_{m+1/2} + \sum_{k=1}^{j-m} \delta a_k h \leq a_{m+1/2} + \left(\sum_{k=1}^{j-m} (\delta a_k)^2 h \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{j-m} h \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} a_{k+1/2} h + \left(\sum_{k=1}^{j-m} (\delta a_k)^2 h \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_{k+1/2}^2 h \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=0}^{N-1} (\delta a_k)^2 h \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene una cota superior cuando $j < m$. Para obtener la cota inferior razonamos de forma similar. Supongamos que $n < j$. Entonces

$$\begin{aligned} -a_{j+1/2} &= -a_{n+1/2} - \sum_{k=1}^{j-n} \delta a_k h \leq -a_{n+1/2} + \left(\sum_{k=1}^{j-n} (\delta a_k)^2 h \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{j-n} h \right)^{1/2} \\ &\leq -\sum_{k=0}^{N-1} a_{k+1/2} h + \left(\sum_{k=0}^{N-1} (\delta a_k)^2 h \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_{k+1/2}^2 h \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=0}^{N-1} (\delta a_k)^2 h \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

con lo que se demuestra la desigualdad (6.76) sin más que observar que

$$\begin{aligned} \sup_{k \in \{0, \dots, N-1\}} |a_{k+1/2}| &\leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_{k+1/2}^2 h \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=0}^{N-1} (\delta a_k)^2 h \right)^{1/2} \\ &\leq 2 \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_{k+1/2}^2 h + \sum_{k=0}^{N-1} (\delta a_k)^2 h \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Observación 6.2.7 De forma similar podemos obtener el siguiente resultado: existe una constante positiva C tal que

$$\sup_{k \in \{0, \dots, N-1\}} a_{k+1/2} \leq C \left(a_{j+1/2} + \sum_{k=1}^{N-1} (\delta a_k)^2 h \right) \quad (6.77)$$

para cualquier $j \in \{0, \dots, N-1\}$. En particular, si $a_{j+1/2} = 0$ para algún $j \in \{0, \dots, N-1\}$ entonces esta desigualdad es la versión discreta de la inyección $H_0^1(0, 1) \subset L^\infty(0, 1)$.

Existencia global de solución del Problema $PL_{\epsilon h}$.

En efecto, para $T > 0$ es suficiente demostrar que:

$$c(t) \in K_1 \quad \text{para todo } t \in (0, T),$$

donde el conjunto K_1 está contenido de forma compacta en cierto conjunto K , siendo F continua y Lipschitziana en la segunda variable en $[0, T] \times K$.

En el siguiente lema se establece una acotación independiente de h para los datos iniciales:

Lema 6.2.6 Asumamos las hipótesis (6.50) y (6.51). Entonces

$$\sum_{k=0}^{N-1} E_p(W_{k+1/2}(0))h, \quad \sum_{k=0}^{N-1} U_k^2(0)h \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{N-1} \delta E_k^2(0)h \quad (6.78)$$

poseen cotas independientes de h .

Demostración 6.2.6 Gracias a la definición de $W_{k+1/2}(0)$ (6.56) y la hipótesis (6.50) se tiene

$$1 < 1/\rho^+ \leq W_{k+1/2}(0) \leq 1/\rho_\epsilon^- < \infty \quad \text{para todo } k \in \{0, \dots, N-1\},$$

y por tanto

$$\sum_{k=0}^{N-1} E_p(W_{k+1/2}(0))h \leq C.$$

Por otra parte gracias a la definición de $U_k(0)$ se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N-1} U_k^2(0)h &= \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{1}{h} \int_{X_{k-1/2}}^{X_{k+1/2}} U_0(X) dX \right)^2 h \\ &\leq \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{1}{h} \left(\int_{X_{k-1/2}}^{X_{k+1/2}} U_0(X)^2 dX \right)^{1/2} \left(\int_{X_{k-1/2}}^{X_{k+1/2}} dX \right)^{1/2} \right)^2 h \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \int_{X_{k-1/2}}^{X_{k+1/2}} U_0(X)^2 dX \leq \|U_0\|_{L^2(0,1)}^2. \end{aligned}$$

Por último, considerando de nuevo la acotación puntual (6.56) se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N-1} \delta E_k^2(0)h &\leq C \sum_{k=1}^{N-1} \delta W_k^2(0)h = C \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{W_{k+1/2}(0) - W_{k-1/2}(0)}{h} \right)^2 h \\ &= C \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{h} \left(\int_{X_{k-1/2}}^{X_{k+1/2}} W_{0\epsilon X}(X) dX \right)^2 \leq C \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{h} h \int_{X_{k-1/2}}^{X_{k+1/2}} W_{0\epsilon X}^2(X) \\ &= \|W_{0\epsilon X}\|_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{6.79}$$

Teorema 6.2.2 Para todo $T > 0$ existe una solución, \mathbf{c} , del Problema $PL_{\epsilon h}$ con la siguiente propiedad

$$1 < W_- \leq W_{k+1/2} \leq W_+ < \infty \quad \text{en } (0, T), \tag{6.80}$$

para $k \in \{0, \dots, N-1\}$.

Demostración 6.2.7 La función \mathbf{F} es lipchitziana de (6.60) en un entorno de la solución para cualquier $T > 0$ la deduciremos a partir de acotaciones puntuales del volumen específico y de la velocidad, (6.62) y (6.63). La estimación puntual de la velocidad (6.63) se deduce la acotación de $\sum_{k=1}^{N-1} U_k^2 h$ del Lema 6.2.3y (6.65).

Para obtener la acotación de la fracción volumétrica (6.62) observemos que gracias a la estimación de la energía (6.65) tenemos que para todo tiempo T fijo, existe un k tal que, para $t \in (0, T)$,

$$E_p(W_{k+1/2}(t)) \leq C(T), \tag{6.81}$$

y por tanto

$$E_{k+1/2}(t) \leq C(T).$$

Ahora bien, (6.77) y la estimación (6.73) implican

$$\sup_{k \in \{0, \dots, N-1\}} E_{k+1/2}(t) \leq C(T).$$

Gracias a la definición (6.74) de $E_{k+1/2}$ y a (6.48) de β , se tiene que

$$W_{k+1/2} \leq W_+ < \infty$$

ya que $E \rightarrow \infty$ cuando $W \rightarrow \infty$.

Análogamente, para obtener la acotación inferior del volumen específico, definamos

$$G(W) = \int_{W'}^W \beta(s) E_p(s)^{1/2} ds.$$

Dicha función satisface:

1. $\lim_{W \rightarrow 1^+} G(W) = \infty$ (gracias a (6.72)).
2. $\frac{dG}{dE} = \frac{dG}{dW} \frac{dW}{dE} = \beta(W) E_p(W)^{1/2} \frac{1}{\beta(W)} = E_p(W)^{1/2}$,

donde hemos usado que $E(W)$ es una función diferenciable estrictamente creciente, a la que podemos aplicar el teorema de la función inversa (véase (6.74) y la Observación 6.2.6). Usando (6.81) se obtiene que $G(W_{k+1/2}(t)) \leq C(T)$.

Por tanto se deduce que la acotación para $l > k$, considerando valores intermedios $\bar{W}_j \in (\min\{W_{j-1/2}, W_{j+1/2}\}, \max\{W_{j-1/2}, W_{j+1/2}\})$ se tendría que:

$$\begin{aligned} G(W_{l+1/2}) - G(W_{k+1/2}) &= \sum_{j=k+1}^{N-1} (G(W_{j+1/2}) - G(W_{j-1/2})) = \sum_{j=k+1}^{N-1} E_p(\bar{W}_j)^{1/2} \delta E_j h \\ &\leq \sum_{j=1}^{N-1} (E_{pl-1/2} + E_{pl+1/2}) h + \sum_{j=1}^{N-1} (\delta E_k)^2 h \leq C(T). \end{aligned}$$

6.2.3. Discretización del problema P_ϵ

En esta sección se estudia el comportamiento evolutivo del problema discreto P_ϵ mediante un paso al límite en el parámetro de discretización, h , del Problema $PL_{\epsilon h}$. En efecto, hemos visto (Lema 6.2.1) que si (W, U) es una solución débil de PL_ϵ entonces $(R, U) := (1/W, U)$ es una solución débil de $(PL1_\epsilon)$, y que si (R, U) es una solución débil de $(PL1_\epsilon)$ entonces $(\rho, u) := (R \circ \gamma, U \circ \gamma)$, donde γ es el cambio de coordenadas eulerianas a lagrangianas, es una solución débil de P_ϵ . (Véase Teorema 6.2.1).

Puesto que el Problema $PL_{\epsilon h}$ es un problema en ecuaciones diferenciales ordinarias respecto el tiempo y discretizado respecto al espacio, antes de pasar al límite $h \rightarrow 0$ tendremos que construir funciones (W^h, U^h) , asociadas a cada solución de $(PL_{\epsilon h})$, que estén definidas en D_T . Una vez hecho esto, la existencia de soluciones de P_ϵ la deduciremos de la justificación del paso al límite $(W^h, U^h) \rightarrow (W, U)$ y de la identificación de (W, U) como solución débil de (PL_ϵ) .

Teorema 6.2.3 *Asumamos las hipótesis (6.50)-(6.51). Entonces existe una solución débil del Problema PL_ε .*

Demostración 6.2.8 *consideremos las siguientes funciones lineales a trozos*

$$U^h(X, t) = \frac{X - X_k}{h} U_{k+1}(t) + \frac{X_{k+1} - X}{h} U_k(t) \quad (6.82)$$

para $X \in [X_k, X_{k+1}]$, con $k \in \{0, \dots, N-1\}$, y

$$W^h(X, t) = \begin{cases} \frac{X - X_{k-1/2}}{h} W_{k+1/2}(t) + \frac{X_{k+1/2} - X}{h} W_{k-1/2}(t) & \text{para } X \in [X_{k-1/2}, X_{k+1/2}], \\ W^h(X, t) = W_{1/2}^h(t) & \text{para } X \in [0, X_{1/2}], \\ W(X, t) = W_{N-1/2}^h(t) & \text{para } X \in [X_{N-1/2}, X_N], \end{cases} \quad (6.83)$$

con $k \in \{1, \dots, N-1\}$. Gracias a las estimaciones de la energía discreta (6.65), (6.73)

y al Lema 6.2.6 se tiene,

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \int_0^1 (U^h)^2(\cdot, t) &= \sup_{t \in [0, T]} \sum_{k=1}^N \int_{X_{k-1}}^{X_k} (U^h)^2(\cdot, t) \leq \sup_{t \in [0, T]} \sum_{k=1}^N h \max\{U_{k-1}^2(t), U_k^2(t)\} \\ &\leq 2 \sup_{t \in [0, T]} \sum_{k=1}^{N-1} U_k^2(t) \leq C. \end{aligned} \quad (6.84)$$

De forma similar se obtiene una estimación en $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ de W^h . Usando la estimación puntual (6.80) obtenemos

$$1 < W_- \leq W^h(t) \leq W_+ < \infty \quad \text{para todo } t \in (0, T). \quad (6.85)$$

Además,

$$\int_0^T \int_0^1 (U_X^h)^2 = \int_0^T \sum_{k=0}^{N-1} h (\delta U_{k+1/2})^2,$$

y a partir de (6.85) y del hecho de que β está acotada inferiormente, obtenemos, usando la estimación de la energía (6.65)

$$\|U_X^h\|_{L^2}^2 = \int_0^T \sum_{k=0}^{N-1} h (\delta U_{k+1/2})^2 \leq C \int_0^T \sum_{k=0}^{N-1} h \beta(W_{k+1/2}^h) (\delta U_{k+1/2})^2 \leq C.$$

Análogamente se puede demostrar a partir de (6.85) y (6.73) una estimación en $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ de W_X^h . Por tanto, tenemos acotaciones independientes de h para las siguientes normas

$$\|U^h\|_{L^\infty(L^2)}, \quad \|W^h\|_{L^\infty(L^2)}, \quad \|U_X^h\|_{L^2}, \quad \text{y} \quad \|W_X^h\|_{L^\infty(L^2)}, \quad (6.86)$$

y también para las de las condiciones iniciales de los Problemas $PL_{\varepsilon h}$

$$\|U_0^h\|_{L^2} \quad \text{y} \quad \|W_{0\varepsilon x}^h\|_{L^2}. \quad (6.87)$$

Ahora bien, la primera ecuación de $PL_{\varepsilon h}$ (6.54) implica que las funciones lineales a trozos en espacio W_t^h y las funciones constantes a trozos en espacio, U_X^h , son iguales en cada punto $X_{k+1/2}$, con lo que de forma similar a (6.84) podemos obtener la estimación

$$\|W_t^h\|_{L^2} \leq 2\|U_X^h\|_{L^2} \leq C(T). \quad (6.88)$$

Tenemos pues que (6.86)-(6.88) nos permite extraer una subsucesión de (W^h, U^h) , que denotaremos de nuevo mediante el superíndice h , tal que

$$W^h \xrightarrow{*} W \text{ débil* en } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)),$$

$$W_X^h \xrightarrow{*} W_X \text{ débil* en } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)), \quad (6.89)$$

$$W_t^h \rightharpoonup W_t \text{ débil en } L^2(D_T), \quad (6.90)$$

$$U^h \xrightarrow{*} U \text{ débil* en } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)), \quad (6.91)$$

$$U_X^h \rightharpoonup U_X \text{ débil en } L^2(D_T). \quad (6.92)$$

El Lema de Aubin asegura que podemos extraer una nueva subsucesión tal que

$$W^h \rightarrow W \text{ fuerte en } L^2(D_T) \text{ y ctp en } D_T. \quad (6.93)$$

La convergencia de los términos de las condiciones iniciales se obtienen igualmente gracias a las estimaciones (6.87) y a la compacidad de la inyección $H^1 \rightarrow L^2$, que permiten demostrar la convergencia de una subsucesión

$$U_0^h \rightharpoonup U_0 \text{ débil en } L^2(0, 1), \quad (6.94)$$

$$W_{0\varepsilon}^h \rightarrow W_{0\varepsilon} \text{ fuerte en } L^2(0, 1). \quad (6.95)$$

Gracias a las acotaciones puntuales de la densidad (6.85) que hemos obtenido independientemente de h , y a la convergencia en casi todo punto (6.93) se tiene, cuando $h \rightarrow 0$

$$\beta^h \rightarrow \beta(W) \text{ fuerte en } L^r(D_T) \text{ con } r < \infty, \quad (6.96)$$

$$p(W^h) \rightarrow p(W) \text{ fuerte en } L^r(D_T) \text{ con } r < \infty, \quad (6.97)$$

$$f^h \rightarrow f \text{ fuerte en } L^2(D_T),$$

donde hemos introducido la notación $\beta^h := \beta(W^h)$. Por otra parte, (6.96) y (6.92) implican

$$\beta^h U_X^h \rightharpoonup \beta(W) U_X \text{ débil en } L^q(D_T) \text{ con } q < 2. \quad (6.98)$$

A continuación identificaremos el límite (W, U) como solución del Problema PL_ε . Sea $\phi \in C^\infty(D_T)$ con soporte compacto contenido en $(0, 1) \times [0, T)$. Vamos a utilizar las notaciones

$$\begin{aligned}\phi_k(t) &:= \phi(X_k, t) \quad \text{para } k \in \{1, \dots, N-1\}, \\ \phi_{k+1/2}(t) &:= \phi(X_{k+1/2}, t) \quad \text{para } k \in \{0, \dots, N-1\}.\end{aligned}$$

Multiplicando la segunda ecuación de $(PL_{\varepsilon h})$, (6.55), por $\phi_k(t)h$, sumando en k , aplicando la fórmula de integración por partes (6.64) e integrando en tiempo obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N-1} hU_k^h(0)\phi_k(0) + \int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} U_k^h \dot{\phi}_k + \int_0^T \sum_{k=0}^{N-1} (p^h - \beta^h \delta U^h)_{k+1/2} \delta \phi_{k+1/2} \\ + \int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{f}_k^h \phi_k = 0,\end{aligned}\tag{6.99}$$

con

$$\tilde{f}_k^h = f((W_{k-1/2}^h + W_{k+1/2}^h)/2, U_k^h).$$

De forma similar, multiplicando la ecuación de conservación de la masa en su versión discreta (6.54) por $\phi_{k+1/2}(t)h$ llegamos a

$$\sum_{k=0}^{N-1} hW_{k+1/2}^h(0)\phi_{k+1/2}(0) + \int_0^T \left[\sum_{k=0}^{N-1} hW_{k+1/2}^h \dot{\phi} - \sum_{k=1}^{N-1} hU_k^h \delta \phi_k \right] dt = 0.\tag{6.100}$$

Por otro lado, usando (6.89)-(6.92) y (6.94)-(6.95) se tiene que

$$\int_0^1 U^h(\cdot, 0)\phi(\cdot, 0) + \int_{D_T} [U^h \phi_t + (p^h - \beta^h U_X^h)\phi_X]\tag{6.101}$$

y

$$\int_0^1 W^h(\cdot, 0)\phi(\cdot, 0) + \int_{D_T} (W^h \phi_t - U^h \phi_X)\tag{6.102}$$

convergen a expresiones similares en las que se reemplazan W^h y U^h por W y U . Para demostrar que (W, U) es solución de (PL_ε) es suficiente demostrar que cuando $h \rightarrow 0$ los términos de (6.99) y (6.100) convergen al mismo límite que los términos de (6.101) y (6.102). Recordemos que al ser $\phi \in C^\infty$ se tiene que para $X \in [X_k, X_{k+1}]$

$$\begin{aligned}\delta \phi_{k+1/2}(t) - \phi_X(X, t) &= \frac{1}{h} \int_{X_k}^{X_{k+1}} [\phi_X(z, t) - \phi_X(X, t)] dz \\ &= \frac{1}{h} \int_{X_k}^{X_{k+1}} \int_X^z \phi_{XX}(s, t) ds dz = O(h).\end{aligned}$$

Gracias a la estimación (6.86) se tiene

$$|W^h(X, t) - W_{k+1/2}^h(t)| = \left| \int_{X_{k+1/2}}^{X_k} W_X^h(z, t) dz \right| \leq h^{1/2} \|W_X^h(\cdot, t)\|_{L^2}.$$

De forma análoga, las estimaciones puntuales de la densidad permiten demostrar

$$|\beta_{k+1/2}^h(t) - \beta(W(X, t))| \leq Ch^{1/2},$$

y para $X \in [X_{k-1/2}, X_{k+1/2}]$

$$|f^h(W(X, t), U(X, t) - \tilde{f}_k^h(t))| \leq Ch^{1/2}.$$

Observemos que, fijado ϕ , para h suficientemente pequeño, el soporte de ϕ está contenido en $[X_1, X_{N-1}]$. De modo que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^M \beta^h U_X^h \phi_X &= \int_0^T \sum_{k=0}^{N-1} \int_{X_k}^{X_{k+1}} \beta^h U_X^h \phi_X = \int_0^T \sum_{k=1}^{N-2} \int_{X_k}^{X_{k+1}} \beta^h U_X^h \phi_X \\ &= \int_0^T \sum_{k=0}^{N-1} \int_{X_k}^{X_{k+1}} [\beta_{k+1/2}^h + O(h^{1/2})] \delta U_{k+1/2}^h [\delta \phi_{k+1/2} + O(h)] \\ &= \int_0^T \sum_{k=1}^{N-2} h [\beta_{k+1/2}^h + O(h^{1/2})] \delta U_{k+1/2}^h [\delta \phi_{k+1/2} + O(h)] \\ &= \int_0^T \sum_{k=1}^{N-2} h \beta_{k+1/2}^h \delta U_{k+1/2}^h \delta \phi_{k+1/2} + O(h^{1/2}), \end{aligned}$$

y por tanto

$$\int_0^T \sum_{k=0}^{N-1} h \beta_{k+1/2}^h \delta U_{k+1/2}^h \delta \phi_{k+1/2} \rightarrow \int_{D_T} \beta U_X \phi_X \quad \text{cuando } h \rightarrow 0.$$

Análogamente se puede pasar al límite en los demás términos de (PL_ε) . Tenemos por tanto que (W, U) definidas por (6.83) y (6.82) forman una solución débil de (PL_ε) .

La regularidad de las derivadas temporales en la definición del Problema PL_ε se obtiene gracias a la regularidad de las derivadas espaciales y a las ecuaciones que verifican las soluciones. La continuidad de la densidad se sigue de la Observación 2.3.1.

Finalmente, las condiciones iniciales pueden ser recuperadas gracias a la convergencia de los datos iniciales (6.94)-(6.95) y la Observación 2.3.1.

Observación 6.2.8 Si consideramos M_ε regularización continua de $M \in L^\infty(0, T)$ se obtienen las acotaciones del teorema anterior independientemente de ε .

Terminamos esta sección enunciando un resultado que se deduce del Lema 6.2.1 y del Teorema 6.2.1 sobre la existencia de solución débil del problema P_ε expresado en coordenadas eulerianas.

Corolario 6.2.1 *Asumamos las condiciones (2.53) y (2.54). Entonces las funciones $\rho : \overline{Q_T} \rightarrow \mathbb{R}_+$ y $u : \overline{Q_T} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por*

$$\rho := R \circ \gamma, \quad u := U \circ \gamma \quad \text{en } \overline{Q_T},$$

donde γ es el cambio de variables introducido en el Teorema 6.2.1, son una solución débil del Problema P_ε .

6.2.4. Comportamiento en el límite $\varepsilon \rightarrow 0$

Demostración 6.2.9 *sea $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$ solución del Problema P_ε y consideremos la correspondiente solución de $(PL_{\varepsilon h})$, $(U_\varepsilon^h, W_\varepsilon^h)$. A partir de las estimaciones de la energía discreta (6.65), (6.73) obtenemos*

$$\frac{1}{2} \int_0^1 |U_\varepsilon^h|^2 + c \int_{D_T} |U_\varepsilon^h|^2 + \int_{D_T} \beta(U_\varepsilon^h) |U_{\varepsilon X}^h|^2 + \int_0^1 E_p(W_\varepsilon^h) \leq CT + \frac{1}{2} \int_0^1 U_{0\varepsilon}^{2h} + \int_0^1 E_p(W_{0\varepsilon}^h).$$

Usando la convergencia débil de la velocidad (6.91), la convergencia débil del término difusivo (6.98), y la convergencia fuerte de las condiciones iniciales, obtenemos que, en el límite $h \rightarrow 0$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 U_\varepsilon^2 + c \int_{D_T} U_\varepsilon^2 + \int_{D_T} \beta(U_\varepsilon) |U_{\varepsilon X}|^2 + \int_0^1 E_p(W_\varepsilon) \leq C \left(T + \int_0^1 U_{0\varepsilon}^2 + \int_0^1 E_p(W_{0\varepsilon}) \right), \quad (6.103)$$

donde $\beta(s) := 1/s + \varepsilon/s^2$, véase (6.59). Efectuando el cambio a coordenadas eulerianas se tiene

$$\begin{aligned} & \int_0^L \rho_\varepsilon(\cdot, T) u_\varepsilon^2(\cdot, T) + \int_{Q_T} \rho_\varepsilon u_\varepsilon^2 + \int_{Q_T} (\rho_\varepsilon + \varepsilon) |u_{\varepsilon x}|^2 + \int_0^L \rho_\varepsilon(\cdot, T) E_p(1/\rho_\varepsilon(\cdot, T)) \\ & \leq C \left(T + \int_0^L \rho_{0\varepsilon} u_{0\varepsilon}^2 + \int_0^L \rho_{0\varepsilon} E_p(1/\rho_{0\varepsilon}) \right). \end{aligned} \quad (6.104)$$

Recordemos aquí que en el Teorema 6.2.1 establecimos que $\frac{\partial x}{\partial X} = \frac{1}{R}$ en D_T . Los términos en E_p de la desigualdad anterior se pueden reescribir

$$E_p(1/\rho) = \int_{1/\rho}^\infty \bar{p}(s) ds = \int_0^\rho \frac{p(z)}{z^2} dz$$

De forma similar, a partir de la segunda estimación de la energía (6.73), de la estimación (6.79) y de (2.52)-(2.53) se tiene que la acotación (ver 6.74)

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_0^1 |E_X(\cdot, t)|^2 \leq C_1 + C_2 \int_0^1 |E_{0X}|^2 \quad (6.105)$$

es independiente de ε . Por tanto, realizando el cambio de variables a coordenadas eulerianas, se tiene

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \int_0^L \frac{1}{\rho_\varepsilon(\cdot, t)} |E_x|^2(\cdot, t) &= \sup_{t \in [0, T]} \int_0^L \frac{1}{\rho_\varepsilon(\cdot, t)} \beta^2(1/\rho_\varepsilon(\cdot, t)) \left| \left(\frac{1}{\rho_\varepsilon(\cdot, t)} \right)_x \right|^2(\cdot, t) \\ &= \sup_{t \in [0, T]} \int_0^L \left(\frac{\varepsilon + \rho_\varepsilon(\cdot, t)}{\rho_\varepsilon(\cdot, t)^{3/2}} \rho_{\varepsilon x}(\cdot, t) \right)^2, \end{aligned}$$

con lo que (6.105) implica

$$\begin{aligned} 4 \|(\sqrt{\rho_\varepsilon})_x\|_{L^\infty(L^2)}^2 &= \sup_{t \in [0, T]} \int_0^L \frac{|\rho_{\varepsilon x}(\cdot, t)|^2}{\rho_\varepsilon(\cdot, t)} = \sup_{t \in [0, T]} \int_0^L \frac{\rho_\varepsilon^2(\cdot, t) |\rho_{\varepsilon x}(\cdot, t)|^2}{\rho_\varepsilon^3(\cdot, t)} \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} \int_0^L \left| \frac{\varepsilon + \rho_\varepsilon(\cdot, t)}{\rho_\varepsilon^{3/2}(\cdot, t)} \rho_{\varepsilon x}(\cdot, t) \right|^2 \leq C_1 + C_2 \int_0^L \left(\frac{\varepsilon + \rho_{0\varepsilon}}{\rho_{0\varepsilon}^{3/2}} \rho_{0\varepsilon x} \right)^2 \\ &\leq C_1 + 2\varepsilon^2 C_2 \int_0^L \frac{|\rho_{0\varepsilon x}|^2}{\rho_{0\varepsilon}^3} + 2C_2 \int_0^L \frac{|\rho_{0\varepsilon x}|^2}{\rho_{0\varepsilon}} =: C_1 + I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Las hipótesis (2.52) y (2.53) implican que I_1 e I_2 están uniformemente acotados cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Obtenemos así una estimación independiente de ε para $\|(\sqrt{\rho_\varepsilon})_x\|_{L^\infty(L^2)}$, y para $\|\rho_{\varepsilon x}\|_{L^\infty(L^2)}$. Finalmente, a partir de la ecuación (2.58) deducimos la siguiente estimación independiente de ε :

$$\begin{aligned} \|\rho_{\varepsilon t}\|_{L^2(L^1)} &= \|m_{\varepsilon x}\|_{L^2(L^1)} = \left\| \rho \left(\frac{m_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} \right)_x + \rho_{\varepsilon x} \frac{m_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} \right\|_{L^2(L^1)} \\ &= \left\| \sqrt{\rho_\varepsilon} \sqrt{\rho_\varepsilon} \left(\frac{m_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} \right)_x + 2(\sqrt{\rho_\varepsilon})_x \frac{m_\varepsilon}{\sqrt{\rho_\varepsilon}} \right\|_{L^2(L^1)} \leq C. \end{aligned}$$

La acotación (2.69) independiente de ε se obtiene de forma similar a la demostración del Teorema 6.2.2, gracias a las acotaciones de $E_p(\rho_\varepsilon)$ y $\rho_{\varepsilon x}$ que acabamos de obtener.

Ya estamos en disposición de hacer el paso al límite en el parámetro de regularización ε .

Teorema 6.2.4 *Sea $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$ la sucesión de soluciones de los Problemas P_ε obtenidas en el Corolario 6.2.1 asociadas a las condiciones iniciales $(\rho_{0\varepsilon}, u_0)$, las cuales verifican las Hipótesis (2.52)-(2.54). Entonces:*

- 1) *Existen subsucesiones, que volveremos a denotar por $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$, y funciones $\rho \in C^0(\overline{Q_T})$, $m, \zeta, \Gamma \in L^2(Q_T)$, tales que*

$$\rho_\varepsilon \rightarrow \rho \quad \text{uniformemente en } \overline{Q_T}, \quad \text{con } \rho \leq \rho^+ < 1 \quad \text{en } \overline{Q_T}, \quad (6.106)$$

$$m_\varepsilon := \rho_\varepsilon u_\varepsilon \rightarrow m \quad \text{en } L^2(Q_T), \quad (6.107)$$

$$\rho_\varepsilon \left(\frac{m_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} \right)_x \rightharpoonup \zeta \quad \text{en } L^2(Q_T), \quad (6.108)$$

$$\frac{m_\varepsilon}{\sqrt{\rho_\varepsilon}} \rightharpoonup \Gamma \quad \text{en } L^2(Q_T). \quad (6.109)$$

Además, considerando el conjunto

$$Q^* := \{(x, t) \in Q_T : \rho(x, t) = 0\},$$

se tiene

$$m = 0 \quad \text{en } Q^*, \quad (6.110)$$

$$\zeta = 0 \quad \text{en } Q^*. \quad (6.111)$$

2) Interpretación del término difusivo. En (6.108) se tiene que

$$\zeta = \begin{cases} \rho \left(\frac{m}{\rho} \right)_x & \text{ctp en } Q_T \setminus Q^*, \\ 0 & \text{ctp en } Q^*. \end{cases} \quad (6.112)$$

3) Interpretación del término convectivo. Existe $\chi^2 \in \mathcal{R}(Q_T)$ (medidas de Radon positivas) con $\chi^2 \geq 0$, tal que

$$\frac{m_\varepsilon^2}{\rho_\varepsilon} \rightharpoonup \chi^2 \quad \text{en } \mathcal{R}(Q_T), \quad (6.113)$$

$$\chi^2 = \frac{m^2}{\rho} \quad \text{ctp en } Q^+ := \{(x, t) \in Q_T : \rho(x, t) > 0\},$$

$$(\chi^2)_x = 0 \quad \text{en } \text{Int}(Q^*),$$

donde $\text{Int}(Q^*)$ denota el interior de Q^* .

Demostración 6.2.10 1) La convergencia (6.106) se deduce, gracias a las estimaciones independientes de ε de las normas

$$\|\rho_\varepsilon\|_{L^\infty}, \quad \|\rho_{\varepsilon t}\|_{L^2(L^1)} \quad \text{y} \quad \|\rho_{\varepsilon x}\|_{L^\infty(L^2)}$$

dadas en el Lema 2.3.1, mediante la aplicación del Corolario 4, pág.85, de Simon [?] y el hecho de que, en dimensión uno, la inclusión $H^1(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ es compacta. La convergencia (6.107) se deduce del mismo resultado y que la inclusión $W^{1,1}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ es compacta.

Para demostrar (6.110), consideremos la función signo definida por $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donde

$$g(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s > 0, \\ 0 & \text{si } s = 0, \\ -1 & \text{si } s < 0. \end{cases}$$

La estimación uniforme de $\|\frac{m_\varepsilon}{\sqrt{\rho_\varepsilon}}\|_{L^2}$ obtenida en el Lema 2.3.1 permite demostrar

$$\int_{Q_T} m_\varepsilon g(m) 1_{Q^*} = \int_{Q_T} \frac{m_\varepsilon}{\sqrt{\rho_\varepsilon}} g(m) \sqrt{\rho_\varepsilon} 1_{Q^*} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0,$$

donde 1_{Q^*} es la función indicatriz del conjunto Q^* . Por otra parte,

$$\int_{Q_T} m_\varepsilon g(m) 1_{Q^*} \rightarrow \int_{Q^*} |m|,$$

y por tanto, se tiene (6.110).

Para estudiar el límite del término difusivo, observemos que en el Lema 2.3.1 obtuvimos una cota uniforme de la norma

$$\|\sqrt{\rho_\varepsilon + \varepsilon} u_{\varepsilon x}\|_{L^2} \equiv \|\sqrt{\rho_\varepsilon + \varepsilon} \left(\frac{m_\varepsilon}{\rho_\varepsilon}\right)_x\|_{L^2},$$

de donde se deduce la existencia de una función $\eta \in L^2(Q_T)$ tal que

$$\sqrt{\rho_\varepsilon} \left(\frac{m_\varepsilon}{\rho_\varepsilon}\right)_x \rightharpoonup \eta \quad \text{en } L^2(Q_T) \quad (6.114)$$

y que

$$\varepsilon \left(\frac{m_\varepsilon}{\rho_\varepsilon}\right)_x = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{m_\varepsilon}{\rho_\varepsilon}\right)_x \rightarrow 0 \quad \text{en } L^2(Q_T).$$

Como $\sqrt{\rho_\varepsilon} \rightarrow \sqrt{\rho}$ uniformemente en $\overline{Q_T}$, de (6.114) se tiene que existe $\zeta \in L^2(Q_T)$ tal que

$$\rho_\varepsilon \left(\frac{m_\varepsilon}{\rho_\varepsilon}\right)_x \rightharpoonup \sqrt{\rho} \eta := \zeta \quad \text{en } L^2(Q_T),$$

de donde deducimos (6.108) y

$$\zeta = 0 \quad \text{en } Q^*. \quad (6.115)$$

Por otra parte, de la estimación uniforme de $\|\frac{m_\varepsilon}{\sqrt{\rho_\varepsilon}}\|_{L^\infty(L^2)}$ obtenida en el Lema 2.3.1, deducimos que existe $\Gamma \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ tal que

$$\frac{m_\varepsilon}{\sqrt{\rho_\varepsilon}} \rightharpoonup \Gamma \quad \text{en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

con lo que terminamos la demostración de 1).

Finalmente, observemos que gracias a la convergencia uniforme (6.106), si consideramos los conjuntos

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon^\delta &= \{(y, t) : \rho_\varepsilon(y, t) > \delta\}, \\ Q^\delta &= \{(y, t) : \rho(y, t) > \delta\} \end{aligned} \quad (6.116)$$

se tiene que, fijado $\delta > 0$, existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$Q^\delta \subset Q_\varepsilon^{\delta/2} \quad \text{para todo } \varepsilon < \varepsilon_0. \quad (6.117)$$

2) Gracias a (6.117) y a las estimaciones del Lema 2.3.1, tenemos la siguiente estimación independiente de ε

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{m_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} \right)_x \right\|_{L^2(Q^\delta)} &= \|u_{\varepsilon x}\|_{L^2(Q^\delta)} \leq \|u_{\varepsilon x}\|_{L^2(Q_\varepsilon^{\delta/2})} \leq \sqrt{\frac{2}{\delta}} \|\sqrt{\rho_\varepsilon} u_{\varepsilon x}\|_{L^2(Q_\varepsilon^{\delta/2})} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{\delta}} \|\sqrt{\rho_\varepsilon} u_{\varepsilon x}\|_{L^2(Q_T)} \leq C. \end{aligned}$$

Por tanto, existe una función $\kappa_x \in L^2(Q^\delta)$ tal que, para una subsucesión

$$\left(\frac{m_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} \right)_x \rightharpoonup \kappa_x \quad \text{en } L^2(Q^\delta). \quad (6.118)$$

En cada conjunto Q^δ con $\delta > 0$, gracias a (6.117), (6.106) y (6.107) podemos identificar puntualmente $\kappa = \frac{m}{\rho}$ en Q_δ , con lo que a partir de (6.118) tenemos

$$\left(\frac{m_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} \right)_x \rightharpoonup \left(\frac{m}{\rho} \right)_x \quad \text{en } L^2(Q^\delta). \quad (6.119)$$

Finalmente, usando (6.106) y (6.119), se tiene

$$\rho_\varepsilon \left(\frac{m_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} \right)_x \rightharpoonup \rho \left(\frac{m}{\rho} \right)_x \quad \text{en } L^2(Q^\delta),$$

y por tanto podemos identificar la función ζ en los conjuntos Q^δ con $\delta > 0$, lo que junto con (6.115) permite identificar ζ como (6.112).

3) La sucesión $\frac{m_\varepsilon^2}{\rho_\varepsilon} \geq 0$, está uniformemente acotada en $L^1(Q_T)$, por lo que existe una distribución χ^2 tal que se verifica la convergencia (6.113).

Para identificar dicho límite, observemos, que gracias de nuevo a la convergencias de la densidad (6.106) y de la cantidad de movimiento (6.107), tenemos

$$\frac{m_\varepsilon^2}{\rho_\varepsilon} \rightarrow \chi^2 \quad \text{en } L^1(Q^\delta), \quad \text{para todo } \delta > 0.$$

Por otra parte, tomando en la ecuación de la velocidad (2.66) funciones test con soporte compacto incluido en $Q \setminus Q^*$, se tiene

$$\left(\frac{m^2}{\rho} \right)_x = 0 \quad \text{en } \text{Int}(Q^*),$$

ya que los demás términos de (2.66) son nulos.

Observación 6.2.9 Si consideramos M_ε regularización continua de $M \in L^\infty(0, T)$ verificando $M_\varepsilon \rightarrow M$ en $L^2(0, T)$, la convergencia uniforme de la densidad permite demostrar la existencia de solución pues podemos pasar al límite en el término fuente.

Observación 6.2.10 *En los problemas aproximados, la condición de contorno que se impone en la velocidad es $u = 0$, mientras que en el problema límite la condición de contorno que prevalece es $m = 0$. En efecto, si en uno de los lados del dominio la densidad es nula, hemos demostrado que $m = 0$. Por otra parte, si la densidad es no nula, se puede obtener una velocidad límite nula, por lo que de nuevo es $m = 0$. De esta manera se modelan de forma sencilla las dos posibles situaciones en el contorno cuando estudiamos la evolución de una nube de partículas encerrada en un recipiente de tamaño finito.*

Finalmente, observemos que la causa de no poder identificar el límite del término convectivo en el Problema P radica en el hecho de que solamente tenemos la estimación uniforme de la norma de $m_\varepsilon^2/\rho_\varepsilon$ en $L^1(Q_T)$. En el caso de que esta estimación se consiguiera en algún $L^p(Q_T)$, con $p > 1$, podríamos identificar completamente el término convectivo.

6.2.5. Resultados adicionales sobre los problemas ε -aproximados

Regularidad adicional y soluciones fuertes de los Problema PL_ε y P_ε

El siguiente teorema establece un resultado de regularidad adicional para las soluciones del Problema PL_ε cuando el dato inicial de la velocidad satisface $U_0 \in H_0^1(0, 1)$.

Teorema 6.2.5 *Asumamos (6.50) y supongamos que el dato inicial U_0 satisface*

$$U_0 \in H_0^1(0, 1). \quad (6.120)$$

Entonces, existe una solución débil, (W, U) , del Problema PL_ε tal que

$$\begin{aligned} U &\in L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1)) \cap L^2(0, T; H^2(0, 1)) \cap H^1(0, T; L^2(0, 1)), \\ \beta(W)U_X &\in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, T; H^1(0, 1)). \end{aligned} \quad (6.121)$$

Demostración 6.2.11 *Multiplicando la ecuación discreta de la velocidad (6.55) por $-\delta(\beta\delta U)_k h$, sumando en k , aplicando la fórmula de suma por partes (6.64) e integrando en $(0, T)$ se obtiene*

$$\int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} \delta(\beta\delta U)_k^2 h - \int_0^T \sum_{k=0}^{N-1} (\beta\delta U)_{k+1/2} \delta \dot{U}_{k+1/2} h = \int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} (-\delta p + f)_k \delta(\beta\delta U)_k h. \quad (6.122)$$

Esta es la identidad discreta que corresponde a multiplicar la ecuación continua de la velocidad por $(\beta(W)U_X)_X$ e integrar por partes en $(0, 1)$. Integrando el segundo

término de (6.122) por partes en $(0, T)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} (\beta \delta U)_{k+1/2} \delta \dot{U}_{k+1/2} h &= \int_0^T \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k+1/2} \frac{1}{2} (\delta \dot{U}_{k+1/2})^2 h \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} [\beta_{k+1/2} \frac{1}{2} (\delta \dot{U}_{k+1/2})^2 h]_0^T - \int_0^T \sum_{k=0}^{N-1} \dot{\beta}_{k+1/2} \frac{1}{2} (\delta U_{k+1/2})^2 h, \end{aligned}$$

de donde se sigue

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} \delta(\beta \delta U_k)^2 h + \sum_{k=0}^{N-1} [\beta_{k+1/2} (\delta U_{k+1/2})^2 h](T) &\leq \sum_{k=0}^{N-1} [\beta_{k+1/2} (\delta U_{k+1/2})^2 h](0) + \\ + \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} (-\delta p + f)_k^2 h + \int_0^T \sum_{k=0}^{N-1} \dot{\beta}_{k+1/2} \frac{1}{2} (\delta U_{k+1/2})^2 h. \end{aligned} \quad (6.123)$$

Observemos que el miembro izquierdo de esta desigualdad corresponde, en el caso continuo, a

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \beta(W) |U_X|^2 (T) + \int_{D_T} |(\beta(W)U_X)_X|^2.$$

Llamemos, para abreviar,

$$I := \int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} \delta(\beta \delta U_k)^2 h + \sum_{k=0}^{N-1} [\beta_{k+1/2} (\delta U_{k+1/2})^2 h](T).$$

La última integral de (6.123) la podemos estimar, gracias a la ecuación discreta de la conservación de la masa (6.54), como

$$- \int_0^T \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\beta(W)}{W} \right)_{k+1/2} \frac{1}{2} (\delta U_{k+1/2})^3 h \leq \frac{1}{2} \int_0^T \left(\sup_{k \in \{0, \dots, N-1\}} \{ \beta(W_{k+1/2}) |\delta U_{k+1/2}| \} \right. \quad (6.124)$$

$$\begin{aligned} &\times \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{W_{k+1/2}} (\delta U_{k+1/2})^2 h \Big) \\ &\leq \gamma \int_0^T \sup_{k \in \{0, \dots, N-1\}} \{ \beta(W_{k+1/2}) |\delta U_{k+1/2}| \}^2 \\ &+ \frac{1}{\gamma} \int_0^T \left| \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{W_{k+1/2}} (\delta U_{k+1/2})^2 h \right|^2. \end{aligned}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta la propiedad de acotación de W_k , (6.76), deducimos

$$\begin{aligned} \sup_{k \in \{0, \dots, N-1\}} \{ \beta(W_{k+1/2}) |\delta U_{k+1/2}| \}^2 &\leq C \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \{ \beta(W_{k+1/2}) |\delta U_{k+1/2}| \}^2 h \right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^{N-1} \delta[\beta(W) \delta U]_k^2 h \right\}. \end{aligned}$$

Podemos, por tanto, reescribir (6.123) como

$$I \leq \sum_{k=0}^{N-1} [\beta_{k+1/2} (\delta U_{k+1/2})^2 h](0) + \int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} (-\delta p + f)_k^2 h + C\gamma \int_0^T \sum_{k=0}^{N-1} \{\beta \delta U_{k+1/2}\}^2 h \\ + C\gamma \int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} \delta (\beta \delta U)_k^2 h + \frac{1}{\gamma} \int_0^T \left| \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{W_{k+1/2}} (\delta U_{k+1/2})^2 h \right|^2.$$

Tomando γ suficientemente pequeño, se tiene

$$I \leq C \left(\sum_{k=0}^{N-1} [\beta_{k+1/2} (\delta U_{k+1/2})^2 h](0) + \int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} (-\delta p + f)_k^2 h + \gamma \int_0^T \sum_{k=0}^{N-1} \{\beta \delta U_{k+1/2}\}^2 h \right. \\ \left. + \frac{1}{\gamma} \int_0^T \left| \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{W_{k+1/2}} (\delta U_{k+1/2})^2 h \right|^2 \right). \quad (6.125)$$

Observemos a continuación que, gracias a la hipótesis de regularidad adicional (6.120) y a la condición de compatibilidad, el primer término de la derecha de la desigualdad (6.125) se puede acotar independientemente de h . Los dos últimos términos de (6.125) se pueden acotar por

$$C\gamma \int_0^T \sum_{k=0}^{N-1} \beta (\delta U_{k+1/2})^2 h + \frac{1}{\gamma\varepsilon} \int_0^T \left| \sum_{k=0}^{N-1} \beta (\delta U_{k+1/2})^2 h \right|^2.$$

Finalmente, como el primer término de I es positivo, podemos escribir dicha desigualdad como

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [\beta_{k+1/2} (\delta U_{k+1/2})^2 h](T) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [\beta_{k+1/2} (\delta U_{k+1/2})^2 h](0) + \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} (-\delta p + f)_k^2 h + \\ + C\gamma \int_0^T \sum_{k=0}^{N-1} \beta (\delta U_{k+1/2})^2 h + \\ + \frac{1}{\gamma\varepsilon} \int_0^T \left| \sum_{k=0}^{N-1} \beta (\delta U_{k+1/2})^2 h \right| \sum_{k=0}^{N-1} \beta (\delta U_{k+1/2})^2 h. \quad (6.126)$$

Gracias a las estimaciones (6.86) y a la regularidad adicional del dato inicial, los tres primeros términos del lado derecho de la desigualdad (6.126) y el término

$$\left| \sum_{k=0}^{N-1} \beta (\delta U_{k+1/2})^2 h \right|(\cdot) =: g(\cdot) \in L^1(0, T)$$

están acotados, por lo que se tiene la estimación

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [\beta_{k+1/2} (\delta U_{k+1/2})^2 h](T) \leq \frac{1}{\gamma\varepsilon} \int_0^T \left| \sum_{k=0}^{N-1} g(t) \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k+1/2} (\delta U_{k+1/2})^2 h(t) \right| dt + C.$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall deducimos

$$\sum_{k=0}^{N-1} [\beta_{k+1/2} (\delta U_{k+1/2})^2 h](T) \leq C(T), \quad (6.127)$$

y por tanto, de nuevo de (6.125), se tiene que el primer término de I también está acotado:

$$\int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} \delta (\beta \delta U)_k^2 h \leq C(T). \quad (6.128)$$

Por otra parte, tenemos la siguiente estimación para \dot{U} : considerando las ecuaciones discretas de la velocidad (6.55), podemos escribir

$$\sum_{k=1}^{N-1} a_k \phi_k h = \sum_{k=1}^{N-1} b_k \phi_k h, \quad (6.129)$$

con

$$a_k := \dot{U}_k \quad \text{y} \quad b_k := \delta(p - \beta \delta U)_k + \tilde{f}(\tilde{W}_k, U_k). \quad (6.130)$$

Eligiendo en (6.129), $\phi_k = a_k h$, se tiene

$$\sum_{k=1}^{N-1} a_k^2 h = \sum_{k=1}^{N-1} b_k a_k h \leq \left(\sum_{k=1}^{N-1} a_k^2 h \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{N-1} b_k^2 h \right)^{1/2} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} a_k^2 h + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} b_k^2 h,$$

y por tanto

$$\sum_{k=1}^{N-1} a_k^2 h \leq \sum_{k=1}^{N-1} b_k^2 h.$$

Tenemos así, de la definición de a_k (6.130),

$$\int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} (\dot{U}_k)^2 h \leq C(T),$$

y al ser U_t^h lineal a trozos en espacio se tiene de forma similar a (6.84)

$$\int_{D_T} (\dot{U}_t^h)^2 \leq C(T). \quad (6.131)$$

Pasando al límite $h \rightarrow 0$ en (6.127) y (6.131) y teniendo en cuenta que $\beta(W) \in L^\infty(D_T)$ y $\beta(W) > c > 0$ deducimos

$$U \in H^1(0, T; L^2(0, 1)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1)).$$

Observemos que no podemos aplicar directamente la estimación (6.128) para demostrar la acotación del término difusivo, ya que las aproximaciones de la densidad y de la velocidad son lineales a trozos, por lo que $\int_0^T \sum_{k=1}^{N-1} \delta (\beta \delta U)_k^2 h$ no es una norma L^2

que corresponda a la de $(\beta^h U_X^h)_X$. Sin embargo, recurriendo de nuevo a la ecuación de la velocidad de (PL_ε) , (6.47), se deduce que

$$(\beta U_X)_X \in L^2(D_T), \quad (6.132)$$

puesto que el resto de miembros de dicha ecuación son también funciones de $L^2(D_T)$.

Para concluir la demostración, solamente nos hace falta demostrar la regularidad $U_{XX} \in L^2(D_T)$. Para demostrarla, observemos que gracias a la estimación (6.127) $\sqrt{\beta}U_X \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$, la cota puntual de W (6.45) permite obtener $\beta U_X \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$. Ahora bien, de (6.132) se tiene que $\beta U_X \in L^2(0, T; L^\infty(0, 1))$, y por tanto, utilizando de nuevo las cotas puntuales de W (6.45) se tiene $U_X \in L^2(0, T; L^\infty(0, 1))$. Finalmente, de la descomposición $(\beta U_X)_X = \beta_X U_X + \beta U_{XX}$ y de $\beta_X \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ (como consecuencia de (6.43) y (6.45)) se deduce $\beta U_{XX} \in L^2(D_T)$. Utilizando de nuevo (6.45) concluimos la demostración.

Observación 6.2.11 En el caso $\mu = \text{cte}$, veremos que se pueden obtener estimaciones similares independientes de la cota inferior de la densidad.

La regularidad obtenida en el Teorema 6.2.5 implica que la solución de (P_ε) , cuando $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, es una solución fuerte en el sentido de que todos los términos de las ecuaciones (6.35) y (6.36) son funciones de $L^2(D_T)$. Es decir, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 6.2.2 Si las condiciones iniciales verifican (6.50) y $U_0 \in H_0^1(0, 1)$, entonces existe una solución fuerte del Problema PL_ε en el siguiente sentido:

1. Se verifican las ecuaciones

$$W_t = U_X, \quad (6.133)$$

$$U_t - (\beta(W)U_X)_X + p(W)_X = F(W, U, t)$$

en $L^2(D_T)$.

2. Se verifican las condiciones iniciales en el siguiente sentido

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|R(\cdot, t) - R_{0\varepsilon}\|_{C^0} = \lim_{t \rightarrow 0} \|U(\cdot, 0) - U_0\|_{C^0} = 0. \quad (6.134)$$

3. Se verifica la condición de contorno

$$U(0, \cdot) = U(1, \cdot) = 0 \quad \text{en } t \in (0, T).$$

Observación 6.2.12 *El Corolario 4 de Simon [?] y las estimaciones*

$$\|U_t\|_{L^2}, \|U_X\|_{L^\infty(L^2)} \leq C,$$

donde la constante C depende de la cota inferior de la densidad, permiten demostrar la continuidad de U . Sin embargo, dicha dependencia impide obtener la equicontinuidad de una sucesión U_ε de soluciones con condiciones iniciales aún verificando la estimación adicional $\|U_{0\varepsilon}\|_{H_0^1} \leq C$.

El Corolario 6.2.2 junto con el Teorema 6.2.1 de cambio de variable nos permiten establecer la existencia de solución fuerte (en un sentido análogo al del Corolario 6.2.2) del Problema P_ε .

Corolario 6.2.3 *Sea (W, U) una solución fuerte del Problema PL_ε . Entonces las funciones $\rho : \overline{Q_T} \rightarrow \mathbb{R}_+$ y $u : \overline{Q_T} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por*

$$\rho := R \circ \gamma, \quad u := U \circ \gamma \quad \text{en } \overline{Q_T},$$

donde $R = 1/W$ y γ es el cambio de variable introducido en el Teorema 6.2.1, son una solución fuerte del Problema P_ε .

Unicidad fuerte-débil de soluciones de los Problemas PL_ε y convergencia de las soluciones del Problema $PL_{\varepsilon h}$

Tenemos el siguiente resultado.

Lema 6.2.7 *Sea (W, U) una solución fuerte de (PL_ε) y sea $(\widetilde{W}, \widetilde{U})$ una solución débil de (PL_ε) . Entonces $(W, U) = (\widetilde{W}, \widetilde{U})$ ctp en D_T . En particular, si $U_0 \in H_0^1(\Omega)$ entonces existe una solución única del Problema PL_ε , y a fortiori, del Problema P_ε .*

Demostración 6.2.12 *Consideremos las funciones $r = \widetilde{W} - W$ y $w = \widetilde{U} - U$ las cuales satisfacen, en sentido débil, el siguiente problema*

$$r_t = w_X,$$

$$w_t - (\beta w_X)_X = ((\widetilde{\beta} - \beta)U_X)_X - (\widetilde{p}_X - p_X) + f(\widetilde{W}, \widetilde{U}) - f(W, U),$$

en D_T , donde hemos introducido la notación $p \equiv p(W)$, $\beta \equiv \beta(W)$, $\widetilde{p} \equiv p(\widetilde{W})$ y $\widetilde{\beta} \equiv \beta(\widetilde{W})$, y las condiciones iniciales

$$r_0 = w_0 = 0 \quad \text{en } (0, 1)$$

y de contorno

$$w(0, \cdot) = w(1, \cdot) = 0 \quad \text{en } (0, T).$$

Considerando como función test en la primera ecuación $r \in L^2(D_T)$ y como función test en la segunda ecuación $w \in L^2(0, T; H^1(0, 1))$ y sumando las correspondientes identidades integrales se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^1 r^2 + \int_0^1 w^2 \right) + \int_0^1 \beta w_X^2 &= \int_0^1 w_X r - \int_0^1 \left((\tilde{\beta} - \beta) U_X - (\tilde{p} - p) \right) w_X \\ &+ \int_0^1 \left(f(\tilde{W}, \tilde{U}) - f(W, U) \right) w. \end{aligned} \quad (6.135)$$

Recordemos que gracias a la regularidad que conocemos de la solución (W, U) , sabemos que

$$\beta(t) \geq \beta_-(T) > 0 \quad \text{para todo } t \in [0, T],$$

por lo que

$$\int_0^1 w_X r \leq \frac{\delta_1}{2} \beta_-(T) \|w_X\|_{L^2(0,1)}^2(t) + \frac{1}{2\delta_1 \beta_-(T)} \|r\|_{L^2(0,1)}^2(t)$$

para cierto $\delta_1 > 0$. Los diferentes términos del lado derecho de (6.135) los podemos acotar como sigue

$$\int_0^1 [((\tilde{\beta} - \beta) U_X)_X - (\tilde{p}_X - p_X) + (f(\tilde{W}, \tilde{U}) - f(W, U))] w =: I_1 + I_2 + I_3.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 ((\tilde{p} - p) w_X) &\leq \frac{\delta_1}{2} \beta_-(T) \|w_X\|_{L^2(0,1)}^2(t) + \frac{1}{2\delta_1 \beta_-(T)} \|\tilde{p} - p\|_{L^2(0,1)}^2(t) \\ &\leq \frac{\delta_1}{2} \beta_-(T) \|w_X\|_{L^2(0,1)}^2(t) + \frac{1}{2\delta_1 \beta_-(T)} K_1 \|r\|_{L^2(0,1)}^2(t), \end{aligned}$$

donde

$$K_1 = \sup_{W \in [W_-, W_+]} |p'(W)|.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f(\tilde{W}, \tilde{U}) - f(W, U)) w &= \int_0^1 (f(\tilde{W}, \tilde{U}) - f(W, \tilde{U})) w + \int_0^1 (f(W, \tilde{U}) - f(W, U)) w \leq \\ &\leq K_2 \int_0^1 |r w| + K_3 \int_0^1 w^2 \leq \frac{K_2}{2} \|r\|_{L^2(0,1)}^2(t) + \frac{K_2}{2} \|w\|_{L^2(0,1)}^2 + K_3 \|w\|_{L^2(0,1)}^2(t), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} K_2 &= \sup_{(W,U) \in [W_-, W_+] \times [U_-, U_+]} |f'_1(W, U)|, \\ K_3 &= \sup_{(W,U) \in [W_-, W_+] \times (-\infty, \infty)} |f'_2(W, U)|. \end{aligned}$$

Por último

$$\begin{aligned}
-\int_0^1 (\tilde{\beta} - \beta) U_X w_X &\leq \frac{\delta_2}{2} \beta_-(T) \|w_X\|_{L^2(0,1)}^2(t) + \frac{1}{2\delta_2 \beta_-(t)} \|(\tilde{\beta} - \beta) U_X\|_{L^2(0,1)}^2 \\
&\leq \frac{\delta_2}{2} \beta_-(T) \|w_X\|_{L^2(0,1)}^2(t) + \frac{1}{2\delta_2 \beta_-(T)} \|U_X\|_{L^\infty(0,1)}^2(t) \|(\tilde{\beta} - \beta)\|_{L^2(0,1)}^2 \\
&\leq \frac{\delta_2}{2} \beta_-(T) \|w_X\|_{L^2(0,1)}^2(t) + \frac{1}{2\delta_2 \beta_-(T)} \|U_X\|_{L^\infty(0,1)}^2(t) K_4 \|r\|_{L^2(0,1)}^2,
\end{aligned}$$

para $\delta_2 > 0$, y con

$$K_4 = \sup_{W \in [W_-, W_+]} |\beta'(W)|.$$

Definiendo

$$\begin{aligned}
\Gamma(t) &:= \|r\|_{L^2(0,1)}^2(t) + \|w\|_{L^2(0,1)}^2(t), \\
c(t) &:= \max\left\{ \frac{1}{2\delta_1 \beta_-(T)} + \frac{1}{2\delta_1 \beta_-(t)} K_1 + \frac{K_2}{2} + \frac{1}{2\delta_2 \beta_-(T)} \|U_X\|_{L^\infty(0,1)}^2(t) K_4, \frac{K_2}{2} + K_3 \right\},
\end{aligned}$$

y considerando δ_1 y δ_2 suficientemente pequeños se tiene

$$\Gamma'(t) \leq c(t)\Gamma(t).$$

Observemos que gracias a la regularidad $\|U_X\|_{L^2(L^\infty)} \leq C(T)$, se tiene $c \in L^1(0, T)$, y por tanto, al ser $\Gamma(0) = 0$, se deduce gracias a la desigualdad de Gronwall

$$\Gamma(t) = 0 \quad \text{para } t \in [0, T],$$

de donde se sigue el resultado.

Convergencia de las soluciones del Problema $PL_{\varepsilon h}$

El resultado de unicidad fuerte-débil del Problema PL_ε y la convergencia demostrada de la sucesión de funciones (W^h, U^h) construidas en la demostración del Teorema 6.2.3 permiten demostrar el siguiente resultado de convergencia de las aproximaciones numéricas (W^h, U^h) a la solución fuerte del Problema PL_ε .

Lema 6.2.8 Asumamos (6.50) y $U_0 \in H_0^1(0, 1)$. Sean (W^h, U^h) las funciones obtenidas por interpolación de las soluciones de los Problemas $PL_{\varepsilon h}$, (véase (6.82), (6.83)), entonces

$$W^h \rightarrow W \text{ uniformemente en } D_T,$$

$$U^h \rightarrow U \text{ en } L^2(D_T),$$

donde (W, U) es la solución única del Problema PL_ε .

Demostración 6.2.13 *Observemos que en la demostración del Teorema 6.2.3, se prueba la convergencia en el sentido de las distribuciones de una subsucesión (W^h, U^h) a una solución del Problema PL_ε , y por otra parte, en la demostración del Lema 6.2.5, hemos obtenido, asumiendo la regularidad adicional de las condiciones iniciales, estimaciones de las funciones (W^h, U^h) que implican la convergencia fuerte de una subsucesión a una solución del Problema PL_ε .*

Por último, la unicidad de solución del Problema PL_ε demostrada en el Lema 6.2.7, permite concluir la convergencia de toda la sucesión.

Regularidad de las soluciones en el conjunto ocupado por las partículas

A continuación demostraremos el siguiente resultado de regularidad en la parte del dominio ocupada por las partículas.

Lema 6.2.9 *Consideremos una sucesión de condiciones iniciales $(W_{0\varepsilon}, U_0)$, obtenidas realizando los cambios de variable introducidos en el Teorema 6.2.1 a la sucesión de condiciones iniciales en coordenadas eulerianas (hipótesis (6.50)-(6.51)). Supongamos que se verifica la regularidad adicional $U_0 \in H_0^1(0, 1)$. Entonces*

$$\|U_T\|_{L^2(D^\delta)}, \|U_X\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))}, \|U_{XX}\|_{L^2(D^\delta)} \leq C$$

donde C es independiente de ε , y para todo $\delta > 0$ hemos definido

$$D^\delta := \{(X, t) \in D_T : R(X, t) \geq \delta\}$$

$$\Omega_t^\delta := \{X \in (0, 1) : R(X, t) \geq \delta\} \quad \text{para } t \in (0, T).$$

Demostración 6.2.14 *Hemos visto que para dichos datos iniciales $(W_{0\varepsilon}, U_{0\varepsilon})$, se pueden obtener soluciones fuertes de los Problemas PL_ε (Teorema 6.2.2) y además las funciones R_ε son estrictamente positivas. Las estimaciones obtenidas en el Lema 6.2.5 pueden explotar cuando la cota inferior de $R_{0\varepsilon}$ tiende a cero. Consideremos los conjuntos*

$$D_\varepsilon^{\delta'} = \{(X, t) \in D_T : R_\varepsilon(X, t) \geq \delta'\}.$$

Gracias a la convergencia uniforme $R_\varepsilon \rightarrow R$ en $\overline{D_T}$, tenemos para ε suficientemente pequeño:

$$D_\varepsilon^{2\delta} \subset D^\delta \subset D_\varepsilon^{\delta/2}. \quad (6.136)$$

Vamos a obtener estimaciones independientes de ε en los términos de la ecuación (6.47) en un dominio K cerrado incluido en $D_\varepsilon^{\delta/2}$.

La ecuación de la velocidad (6.47) del Problema PL_ε se puede interpretar en casi todo punto gracias a la regularidad fuerte de la solución, y además (prescindiendo por comodidad del subíndice ε),

$$U_T - (\beta(W)U_X)_X + p(W)_X = F \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)). \quad (6.137)$$

Sea $\phi \in \mathcal{D}(D_T)$ tal que

$$0 \leq \phi \leq 1 \quad \text{en } D_T,$$

$$\phi = 1 \quad \text{en } K,$$

$$\phi(x, t) = 0 \quad \text{en } \{(x, t) \in D_T : d((x, t), K) \geq \varepsilon\}.$$

Multiplicando (6.47) por ϕU_t obtenemos

$$\int_{D_T} \phi U_t^2 - \int_{D_T} (\beta(W)U_X)_X \phi U_t = \int_{D_T} F \phi U_t \leq \frac{1}{2} \int_{D_T} \phi U_t^2 + \frac{1}{2} \int_{D_T} \phi F^2. \quad (6.138)$$

Para acotar el segundo término del lado izquierdo de la desigualdad anterior, integramos por partes en espacio, y obtenemos

$$- \int_{D_T} (\beta(W)U_X)_X \phi U_t = \int_{D_T} \beta(W)U_X \phi_x + \int_{D_T} \phi(R^2 + \varepsilon R)U_X U_{XT} =: I_1 + I_2.$$

I_1 está acotada, gracias a las estimaciones (2.68) y a que $\|\phi_x\|_{L^\infty} \leq C$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{D_T} \phi(R^2 + \varepsilon R)U_X U_{XT} = \int_{D_T} \frac{1}{2} \phi(R^2 + \varepsilon R)(U_X^2)_T \\ &= \int_{D_T} \frac{1}{2} [\phi(R^2 + \varepsilon R)U_X^2]_T - \int_{D_T} \frac{1}{2} U_X^2 [\phi(R^2 + \varepsilon R)]_T \\ &=: I_{21} + I_{22}. \end{aligned}$$

Gracias a la ecuación de conservación de la masa (6.28):

$$I_{21} = - \int_{D_T} \frac{1}{2} U_X^2 [\phi(R^2 + \varepsilon R)]_T = \frac{-1}{2} \int_{D_T} U_X^2 (R^2 + \varepsilon R) \phi_t - \frac{1}{2} \int_{D_T} \phi U_X^2 (R^2 + \varepsilon R)_T,$$

y al ser $\|\phi_t\|_{L^\infty} \leq C$, se puede acotar I_{21} gracias a las estimaciones (2.68). Utilizando la ecuación de conservación de la masa (6.28), podemos reescribir

$$I_{22} = - \frac{1}{2} \int_{D_T} \phi U_X^2 (R^2 + \varepsilon R)_T = \frac{1}{2} \int_{D_T} \phi (2R + \varepsilon) R^2 U_X^3.$$

Llegamos así, a partir de (6.138) a una estimación de la forma

$$\frac{1}{2} \int_{D_T} \phi U_t^2 + \frac{1}{2} \int_{D_T} [\phi(R^2 + \varepsilon R)U_X^2]_T \leq C - \frac{1}{2} \int_{D_T} \phi (2R + \varepsilon) R^2 U_X^3. \quad (6.139)$$

De forma similar, si multiplicamos la ecuación (6.137) por $-\phi(\beta(W)U_X)_X$ e integramos en D_T :

$$\begin{aligned} - \int_{D_T} \phi(\beta(W)U_X)_X U_t + \int_{D_T} \phi(\beta(W)U_X)_X^2 &= - \int_{D_T} F(\beta(W)U_X)_X U_t \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{D_T} \phi(\beta(W)U_X)_X^2 + \frac{1}{2} \int_{D_T} \phi F^2. \end{aligned}$$

Podemos reescribir el primer término del lado izquierdo de la desigualdad anterior:

$$\begin{aligned} - \int_{D_T} \phi(\beta(W)U_X)_X U_t &= \int_{D_T} \phi(\beta(W)U_X) U_{Xt} = \frac{1}{2} \int_{D_T} \phi(\beta(W))(U_X^2)_t \\ &= \frac{1}{2} \int_{D_T} [\phi(\beta(W)U_X^2)]_t - \frac{1}{2} \int_{D_T} U_X^2 [\phi(\beta(W))]_t \\ &=: J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} J_3 &= -\frac{1}{2} \int_{D_T} U_X^2 [\phi(\beta(W))]_t = -\frac{1}{2} \int_{D_T} \phi_t \beta(W) U_X^2 - \frac{1}{2} \int_{D_T} \phi U_X^2 \beta(W)_t \\ &\leq C + \frac{1}{2} \int_{D_T} \phi(2R + \varepsilon) R^2 U_X^3, \end{aligned}$$

y por tanto, llegamos a una estimación de la forma

$$\frac{1}{2} \int_{D_T} \phi(\beta(W)U_X)_X^2 + \frac{1}{2} \int_{D_T} [\phi(\beta(W)U_X^2)]_t \leq C - \frac{1}{2} \int_{D_T} \phi(2R + \varepsilon) R^2 U_X^3. \quad (6.140)$$

Sumando (6.139) y (6.140) llegamos a

$$\frac{1}{2} \int_{D_T} \phi U_t^2 + \frac{1}{2} \int_{D_T} \phi(\beta(W)U_X)_X^2 + \int_{D_T} [\phi(R^2 + \varepsilon R)U_X^2]_t \leq C - \int_{D_T} \phi(2R + \varepsilon) R^2 U_X^3.$$

Ahora bien, a partir de

$$(\sqrt{\phi}\beta(W)U_X)_X^2 \leq 2[\sqrt{\phi}(\beta(W)U_X)_X]^2 + 2[(\sqrt{\phi})_X \beta(W)U_X]^2,$$

y utilizando que podemos construir ϕ de forma que

$$(\sqrt{\phi})_X = \frac{\phi_X}{2\sqrt{\phi}} \leq C,$$

podemos estimar

$$\int_{D_T} [(\sqrt{\phi})_X \beta(W)U_X]^2 \leq C \int_{K_\varepsilon} U_X^2 \leq C.$$

Llegamos así a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{D_T} \phi U_T^2 + \frac{1}{2} \int_{D_T} [\sqrt{\phi}\beta(W)U_X]_X^2 + \int_{D_T} (\phi\beta(W)U_X^2)_T &\leq C + \int_{D_T} \phi\beta(W)' R^2 |U_X|^3 = \\ &=: C + J_4. \end{aligned}$$

Considerando la función

$$1_{K_\varepsilon}(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } D_T((x, t), K) \leq \varepsilon \\ 0 & \text{si } D_T((x, t), K) > \varepsilon, \end{cases}$$

y el hecho de que $\beta(W)$ está acotado inferior y superiormente en K_ε , podemos acotar J_4 considerando:

$$\begin{aligned} \int_{D_T} \phi |U_X|^3 &\leq \int_0^T \sup_X (\sqrt{\phi} |U_X|) \int_0^1 U_X \sqrt{\phi} U_X \\ &\leq \frac{1}{4C} \int_0^T \sup_X (\sqrt{\phi} |U_X|)^2 + C \int_0^T \left(\int_{K_\varepsilon(t)} 1_{K_\varepsilon} U_X \sqrt{\phi} U_X \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \int_{D_T} [\sqrt{\phi} \mu U_X]_X^2 + C \int_0^T \left(\int_0^1 1_{K_\varepsilon} U_X^2 \right) \left(\int_0^1 \phi U_X^2 \right). \end{aligned}$$

Definiendo

$$\xi(t) = \int_0^1 1_{K_\varepsilon} U_X^2 D_T X \in L^1(0, T),$$

tenemos finalmente que

$$\frac{1}{2} \int_{D_T} \phi U_T^2 + \frac{1}{4} \int_{D_T} [\sqrt{\phi} \beta(W) U_X]_X^2 + \int_{D_T} (\phi \beta(W) U_X^2)_T \leq C_1 + C_2 \int_0^T \xi(t) \int_0^1 \phi \beta(W) U_X^2,$$

y concluimos mediante la desigualdad de Gronwall.

Paso al límite $\varepsilon \rightarrow 0$ en coordenadas lagrangianas (Problema PL 1_ε)

Si consideramos las soluciones $(R_\varepsilon, U_\varepsilon)$ de los problemas PL ε y pasamos al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtenemos el siguiente resultado.

Lema 6.2.10 Sean $(R_\varepsilon, U_\varepsilon)$ soluciones fuertes de los problemas PL ε , entonces, existen funciones $R : \overline{D_T} \rightarrow \mathbb{R}_+$ y $U : D_T \rightarrow \mathbb{R}$ tales que para una subsucesión

$$R_\varepsilon \rightarrow R \quad \text{uniformemente en } \overline{D_T}, \quad (6.141)$$

$$U_\varepsilon \xrightarrow{*} U \quad \text{en } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)). \quad (6.142)$$

donde $R \in L^\infty(0, T; H^1(0, 1))$, $U \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ son solución de

$$\begin{aligned} R_t &= -R^2 U_X \\ U_t + p(R)_X - (R \mu(R) U_X)_X &= \frac{q(R)}{1-R} (N - U) - g \end{aligned} \quad \text{en } D_T, \quad (6.143)$$

con $R = R_0$, $U = U_0$ en $(0, 1)$ y $U(0, \cdot) = U(1, \cdot) = 0$ en $(0, T)$.

Demostración 6.2.15 Hemos obtenido las siguientes estimaciones independientes de ε :

$$\|U_\varepsilon\|_{L^\infty(L^2)}, \|\sqrt{R_\varepsilon(R_\varepsilon + \varepsilon)}U_{\varepsilon X}\|_{L^2}, \|R_{\varepsilon X}\|_{L^\infty(L^2)}, \|R_{\varepsilon T}\|_{L^2} \leq C. \quad (6.144)$$

Las estimaciones de las derivadas espaciales de la densidad y el corolario 4 de Simon[?] permiten demostrar (6.141). Las estimaciones de la velocidad permiten demostrar (6.142) y pasar al límite en los Problemas PLI_ε para obtener el sistema de ecuaciones (6.143), excepto el término difusivo, para el cual tenemos

$$R_\varepsilon R_\varepsilon U_{\varepsilon X} \rightharpoonup R\sigma \in L^2(D_T),$$

sin quedar identificado dicho límite. Para identificarlo necesitamos demostrar que

$$\sigma = RU_X \quad \text{en } Q^+.$$

Ahora bien, fijado $\delta > 0$, la inclusión (6.136) permite obtener a partir de (6.144) la estimación uniforme en ε de la norma $\|U_{\varepsilon X}\|_{L^2(D^\delta)}^\delta$, por lo que

$$U_{\varepsilon X} \rightharpoonup U_X \quad \text{en } L^2(0, T; D^\delta),$$

y gracias a la convergencia fuerte de la densidad en todo el dominio, podemos identificar σ en Q^δ para todo $\delta > 0$, con lo que el término difusivo queda identificado.

Observación 6.2.13 Las dos claves para poder reinterpretar el término difusivo son el hecho de que a priori conocemos la regularidad del término, y que gracias a la continuidad uniforme de la densidad en las zonas en que la densidad es estrictamente positiva podemos obtener una estimación adicional de U_X independiente de ε en cada dominio D^δ con $\delta > 0$.

6.2.6. Viscosidad no lineal en la densidad

Hasta ahora nos hemos ocupado del caso en que la viscosidad viene modelada mediante una función lineal de la densidad. Las ventajas de esta modelización respecto aquella en la que la viscosidad es considerada como constante se manifiestan tanto en el análisis matemático del modelo (especialmente en lo que se refiere a las condiciones de contorno adecuadas) como en el análisis numérico del mismo (véase Capítulo ??).

En esta sección vamos a esbozar los resultados que se pueden obtener si se considera la viscosidad como una función no lineal de la densidad del tipo

$$\mu = \nu\rho^\alpha \quad \text{con } \alpha > 0, \quad (\alpha \neq 1/2)$$

Consideremos una sucesión de Problemas P_ε^α similares a los Problemas P_ε , excepto en el término de viscosidad. Tomemos una regularización, $(\rho_{0\varepsilon}, u_0)$, de las condiciones iniciales (ρ_0, u_0) , verificando

$$0 < \rho_\varepsilon^- \leq \rho_{0\varepsilon} \leq \rho^+ < 1 \quad \text{en } \Omega, \quad (6.145)$$

para ciertas constantes ρ_ε^- y ρ^+ , con $\rho_\varepsilon^- \geq C\varepsilon^{2/3}$. Además, asumiremos que

$$\rho_{0\varepsilon}^{\alpha-1/2} \in H^1(\Omega), \quad \|\rho_{0\varepsilon}\|_{L^1} = 1 \quad \text{y} \quad \rho_{0\varepsilon}^{\alpha-1/2} \rightarrow \rho_0^{\alpha-1/2} \quad \text{en } H^1(\Omega) \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (6.146)$$

$$u_0 \in L^2(\Omega). \quad (6.147)$$

Definición 6.2.3 Diremos que (ρ, u) es una solución débil del Problema P_ε^α si:

1. $\rho : \overline{Q_T} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $u : \overline{Q_T} \rightarrow \mathbb{R}$ poseen la siguiente regularidad

$$\rho \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)) \cap C^0(\overline{Q_T}), \quad \rho^{\alpha-1/2} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \quad p(\rho) \in L^\infty(Q_T), \quad (6.148)$$

$$u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad m_t \in L^2(0, T; W^{-1,1}(\Omega)), \quad (6.149)$$

donde $m := \rho u$.

2. Existen constantes $\rho_- < \rho_\varepsilon^-$ y $\rho_+ > \rho^+$ tales que

$$0 < \rho_- \leq \rho \leq \rho_+ < 1 \quad \text{en } Q_T. \quad (6.150)$$

3. Se verifica la ecuación

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0 \quad \text{ctp en } Q_T, \quad (6.151)$$

y la identidad integral

$$\int_{Q_T} (\rho u (\phi_t + u \phi_x) - (\rho^\alpha + \varepsilon) u_x \phi_x + p(\rho) \phi_x + \rho f(\rho, u, t) \phi) = 0, \quad (6.152)$$

para toda $\phi \in C_0^1(Q_T)$.

4. Se verifican las condiciones iniciales en el siguiente sentido:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\rho(\cdot, t) - \rho_{0\varepsilon}\|_{C^0} = \lim_{t \rightarrow 0} \|m(\cdot, t) - m_0\|_{H^{-1}} = 0. \quad (6.153)$$

De forma similar a como llevamos a cabo para el Problema P_ε , puede demostrarse la existencia de un cambio de coordenadas de eulerianas a lagrangianas (y viceversa) bien definido cuando $\rho > 0$, la existencia de soluciones de los problemas discretizados y la de los problemas ε -aproximados. La principal diferencia surge en las estimaciones de la energía debido a la presencia del nuevo término difusivo. Para ilustrar estas diferencias, demostraremos el siguiente resultado.

Lema 6.2.11 *Consideremos una sucesión de condiciones iniciales $(\rho_{0\varepsilon}, u_0)$ que verifiquen las condiciones (6.145)-(6.147). Entonces la sucesión $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$ de soluciones de los Problemas P_ε^α verifican las siguientes estimaciones independientes de ε*

$$\|(\rho_\varepsilon^{\alpha-1/2})_x\|_{L^\infty(L^2)} \leq C, \quad (6.154)$$

$$\|\rho_\varepsilon^{\alpha/2} u_{\varepsilon x}\|_{L^2} \leq C, \quad (6.155)$$

$$\|m_\varepsilon\|_{L^\infty(L^2)} \leq C. \quad (6.156)$$

$$\rho_\varepsilon \leq \rho_+ < 1.$$

Demostración 6.2.16 *La estimación de la energía análoga a (6.104) nos permite obtener estimaciones uniformes para las normas*

$$\|\rho_\varepsilon^\alpha u_{\varepsilon x}^2\|_{L^1} \quad y \quad \|\sqrt{\rho_\varepsilon} u_\varepsilon\|_{L^\infty(L^2)}.$$

Podemos proceder de forma similar al caso lineal $\mu = \rho$ para obtener la segunda estimación de la energía (ver lema 6.2.4). Realizando el cambio a coordenadas lagrangianas se obtiene el problema (en su versión débil)

$$R_T = -R^2 U_X,$$

$$U_T + p(R)_X - ((R^{1+\alpha} + \varepsilon R)U_X)_X = F,$$

por lo que

$$R_T = -R^2 U_X \Rightarrow -(R^{1+\alpha} + \varepsilon R)U_x = (R^{\alpha-1} + \frac{\varepsilon}{R})R_T = (\frac{1}{\alpha}R^\alpha + \varepsilon \log R)_T.$$

Tenemos así

$$U_T + P(R)_X + \frac{1}{\alpha}(\frac{1}{\alpha}R^\alpha + \varepsilon \log R)_{TX} = F.$$

Multiplicando por $(\frac{1}{\alpha}R^\alpha + \varepsilon \log R)_X$ e integrando por partes se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 [(\frac{1}{\alpha}R^\alpha + \varepsilon \log R)_X^2]_T + \int_0^1 P(R)_X (\frac{1}{\alpha}R^\alpha + \varepsilon \log R)_X \\ + \int_0^1 U_T (\frac{1}{\alpha}R^\alpha + \varepsilon \log R)_X = \int_0^1 F (\frac{1}{\alpha}R^\alpha + \varepsilon \log R)_X. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \int_0^M U_T\left(\frac{1}{\alpha}R^\alpha + \varepsilon \log R\right)_X &= \left[\int_0^M U\left(\frac{1}{\alpha}R^\alpha + \varepsilon \log R\right)_X\right]_T - \int_0^M U\left(\frac{1}{\alpha}R^\alpha + \varepsilon \log R\right)_{XT} \\ &= \left[\int_0^M U\left(\frac{1}{\alpha}R^\alpha + \varepsilon \log R\right)_X\right]_T + \int_0^M U\left(\frac{1}{\alpha}R^\alpha + \varepsilon \log R\right)U_X\right)_X \\ &= \left[\int_0^M U\left(R^\alpha\right)_X\right]_T - \int_0^M \left(\frac{1}{\alpha}R^\alpha + \varepsilon \log R\right)U_X^2. \end{aligned}$$

Las hipótesis (6.145) y (6.146) permiten obtener (realizando el cambio de variables)

$$\|\varepsilon(\log R_{0\varepsilon})_X\|_{L^2}^2 = \int_0^L \varepsilon^2 \frac{1}{\rho} (\log \rho_{0\varepsilon})_x^2 dx = \int_0^L \left(\varepsilon \frac{\rho_{0\varepsilon x}}{\rho_{0\varepsilon}^{3/2}}\right)^2 dx \leq C$$

cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, por lo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\alpha - 1/2)^2} \int_0^L (\rho_\varepsilon^{\alpha-1/2})_x^2(\cdot, T) dx &= \int_0^L \rho_\varepsilon^{2\alpha-3} \rho_{\varepsilon x}^2(\cdot, T) dx = \int_0^1 R_\varepsilon^{2\alpha-2} R_{\varepsilon X}^2(\cdot, T) dX = \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \| (R_\varepsilon^\alpha)_X(\cdot, T) \|_{L^2}^2 \leq C + \frac{1}{\alpha^2} \| (R_{0\varepsilon}^\alpha)_X \|_{L^2}^2 \leq C. \end{aligned}$$

La demostración de la acotación puntual de ρ_ε es similar a la demostración en el caso lineal.

Observación 6.2.14 Veamos que eligiendo $\alpha > 1$ podemos ampliar el rango de los valores de γ en el término de la presión para los cuales podemos considerar como condición inicial una nube estacionaria del Problema P. En efecto, una nube estacionaria se comporta en la proximidad de la frontera libre como $R_0^\alpha \sim X^{\alpha/\gamma}$ por lo que $R_{0X} \sim X^{\frac{\alpha-\gamma}{\gamma}}$. Por tanto

$$R_{0X} \in L^2 \Leftrightarrow \int_0^1 X^{2\frac{\alpha-\gamma}{\gamma}} < \infty.$$

Un sencillo cálculo nos permite obtener $R_{0X} \in L^2$ si y sólo si $\gamma < 2\alpha$. De aquí tenemos que si $\alpha = 1$ entonces $\gamma < 2$, lo que supone considerar condiciones iniciales regulares, ya que la nube estacionaria alcanza la frontera con pendiente nula. Sin embargo, el caso $\alpha > 1$ permite considerar condiciones iniciales de la forma de nube estacionaria no regulares (con pendiente infinita en la frontera libre).

En el caso $\alpha = \frac{1}{2}$ se obtienen estimaciones de $(\log \rho)_x$, asumiendo estimaciones análogas a (6.146) para $\log \rho_{0\varepsilon}$.

La diferencia fundamental con el caso lineal $\mu(\rho) = \rho$ surge a la hora de intentar obtener la estimación de $m_{\varepsilon x}$ que se deduce de la identidad

$$m_{\varepsilon x} = \rho_\varepsilon u_{\varepsilon x} + \rho_{\varepsilon x} u_\varepsilon.$$

Por una parte sabemos que $\rho_\varepsilon u_{\varepsilon x} \in L^2(Q_T)$, pero para el término $\rho_{\varepsilon x} u_\varepsilon$ sólo tenemos que

$$\rho_{\varepsilon x} u_\varepsilon = \rho_\varepsilon^{\alpha-3/2} \rho_{\varepsilon x} \rho_\varepsilon^{3/2-\alpha} u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)) \quad \text{si } \alpha \leq 1,$$

por lo que solamente podemos obtener la estimación $m_{\varepsilon x} \in L^2(0, T; L^1(\Omega))$ en el caso sublineal. Esto impide obtener una estimación uniforme independiente de ε de la norma $\|m_\varepsilon\|_{L^2(L^\infty)}$. Recordemos por último que la obtención de dicha estimación implicaría la acotación de $\|\rho_{\varepsilon t}\|_{L^2(L^\infty)}$ y, por tanto, la continuidad de ρ_ε .

Lema 6.2.12 *Bajo las hipótesis de Lema 6.2.11 existe una subsucesión $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$ tal que*

$$\rho_\varepsilon \rightarrow \rho \text{ uniformemente en } Q_T.$$

Demostración 6.2.17 *Prescindiendo de los subíndices, tenemos que*

$$(\rho^\alpha)_t = \alpha \rho^{\alpha-1} \rho_t = -\alpha \rho^{\alpha-1} \rho_x u - \alpha \rho^\alpha u_x.$$

De la desigualdad de la energía tenemos $\rho^{\alpha/2} u_x \in L^2(Q_T)$, luego $\rho^\alpha u_x \in L^2(Q_T)$, y además

$$\rho^{1/2} u \in L^2(Q_T), \quad \rho^{\alpha-3/2} \rho_x \in L^2(Q_T),$$

de donde

$$\rho^{\alpha-3/2} \rho_x \rho^{1/2} u \in L^2(0, T; L^1(\Omega)).$$

Por tanto, tenemos una estimación uniforme en ε de la norma $\|\rho_t\|_{L^2(L^1)}$. Ahora bien, de la estimación (6.154) y la acotación $\|\rho\|_{L^\infty} \leq \rho_+ < 1$ obtenemos también una estimación uniforme para $\|(\rho^\alpha)_t\|_{L^\infty(L^2)}$, y por tanto, utilizando de nuevo la Observación 2.3.1, podemos demostrar la convergencia uniforme de una subsucesión

$$\rho_\varepsilon^\alpha \rightarrow \rho^\alpha \text{ uniformemente en } Q_T.$$

Observación 6.2.15 *Utilizando el lema anterior y la estimación de m_ε podemos extraer una subsucesión tal que*

$$\begin{aligned} p(\rho_\varepsilon) &\rightarrow p(\rho) \quad \text{uniformemente en } Q_T, \\ \frac{q(\rho_\varepsilon)}{1-\rho_\varepsilon} &\rightarrow \frac{q(\rho)}{1-\rho} \quad \text{uniformemente en } Q_T, \\ m_\varepsilon &\rightharpoonup m \quad \text{en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ \rho_\varepsilon^\alpha \left(\frac{m_\varepsilon}{\rho_\varepsilon}\right)_x &\rightharpoonup \Gamma = \begin{cases} \rho^\alpha \left(\frac{m}{\rho}\right)_x & \text{en } Q^+ \\ 0 & \text{en } \rho^{-1}(0) \end{cases} \in L^2(Q_T), \end{aligned}$$

y por tanto pasando al límite obtenemos una solución del Problema P_ε^α similar a la obtenida en el caso $\mu(\rho) = \rho$, en el que no podemos identificar el término convectivo en Q_T .

Observación 6.2.16 *Observemos que*

$$(R_\varepsilon^\alpha)_T = \alpha R_\varepsilon^{\alpha-1} R_{\varepsilon T} = R_\varepsilon^{1+\alpha} U_{\varepsilon x}$$

y por tanto

$$(R_\varepsilon^\alpha)_T \in L^2 \quad (6.157)$$

lo cual nos permite, gracias al Corolario 4 de Simon [?], demostrar la convergencia uniforme de R_ε^α y por tanto la de R_ε .

Finalmente, observemos que la estimación (6.157) se puede refinar, obteniendo

$$L^2(Q_T) \ni -R^{(\alpha+1)/2} U_X = -R^{\alpha/2-3/2} R^2 U_X = R^{\alpha/2-3/2} R_T = \frac{2}{\alpha-3} (R^{(\alpha-1)/2})_T.$$

6.3. Espacios de Sobolev

Introducimos ahora los llamados espacios de Sobolev, puesto que sobre esta teoría se basa el estudio de la existencia de solución débil de las ecuaciones diferenciales parciales.

Sea k un entero no negativo, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) abierto y acotado, además sea p de modo que $1 \leq p \leq \infty$. Definimos:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{v \in L_p(\Omega) : D^\alpha v \in L_p(\Omega) \forall \alpha \text{ multiíndice tal que } |\alpha| \leq k\} \quad (6.158)$$

donde D^α indica la α -ésima derivada distribucional de v . Luego, el espacio $W^{k,p}(\Omega)$ es llamado **espacio de Sobolev** y sobre él se define la siguiente norma:

$$\|v\|_{k,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty \quad (6.159)$$

$$\|v\|_{k,p,\Omega} := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha v(x)| \quad \text{si } p = \infty \quad (6.160)$$

Definición 6.3.1 Sean $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión en $W^{k,p}(\Omega)$ y $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Decimos que u_m **converge** a $u \in W^{k,p}(\Omega)$ si y sólo si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{k,p,\Omega} = 0 \quad (6.161)$$

y lo denotamos como: $u_m \rightarrow u$ en $W^{k,p}(\Omega)$

Observación 6.3.1

- ▶ Si $p = 2$ entonces, utilizaremos la siguiente notación: $H^k(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$.
- ▶ Para $H^k(\Omega)$ se define la **seminorma** siguiente

$$\|v\|_{H^k(\Omega)} := \sqrt{\sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} (D^{\alpha} v)^2 d\Omega} \quad (6.162)$$

- ▶ Por simplicidad haremos uso de las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned} H^0(\Omega) &= L_2(\Omega) \\ H_0^k(\Omega) &= W_0^{k,2}(\Omega) \end{aligned}$$

- ▶ $W_0^{k,p}(\Omega)$ es el conjunto de aquellas funciones $u \in W^{k,p}(\Omega)$ tal que

$$D^{\alpha} u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad \text{para toda } |\alpha| \leq k-1 \quad (6.163)$$

Teorema 6.3.1 (Friedrichs) Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces existe una sucesión $\{u_n\}_{n=0}^{\infty} \subset C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$u_n|_{\Omega} \rightarrow u \quad \text{en } L_p(\Omega)$$

Para una función $v \in H^k(\Omega)$ queremos ahora obtener el valor de v sobre la frontera $\Gamma = \partial\Omega$, para lograrlo se hará uso del operador traza dada en la siguiente definición.

Definición 6.3.2 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado con frontera Γ poligonal y $k \geq 1$. Luego, existe una y sólo una aplicación lineal y continua γ_0 tal que

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^k(\Omega) &\rightarrow L_2(\Gamma) \\ v &\mapsto \gamma_0(v) = v|_{\Gamma} \end{aligned}$$

para todo $v \in H^k(\Omega) \cap C(\Omega)$.

El operador γ_0 es llamado el **operador traza** de v sobre Ω . La continuidad de γ_0 implica que existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|\gamma_0(v)\|_{L_2(\Gamma)} \leq \|v\|_{H^k(\Omega)}$$

Definición 6.3.3 *Nosotros denotaremos por $H^{-1}(\Omega)$ el espacio dual topológico de $H_0^1(\Omega)$.*

Teorema 6.3.2 (Caracterización de $H^{-1}(\Omega)$)

Si $f \in H^{-1}(\Omega)$ entonces existen funciones f^0, f^1, \dots, f^n en $L_2(\Omega)$ tal que:

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} \left(f^0 v + \sum_{i=1}^n f^i D_i(v) \right) dx \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega)$$

Teorema 6.3.3 *Para cada $k = 1, 2, \dots$ y $1 \leq p \leq \infty$, el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.*

Demostración:

Haremos el caso de $1 \leq p < \infty$

Primero probaremos que $\| \cdot \|_{k,p,\Omega}$ es una norma.

1. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $v \in W^{k,p}(\Omega)$ tenemos que:

$$\| \lambda v \|_{k,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha}(\lambda v)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \| v \|_{k,p,\Omega}$$

2. $\| v \|_{k,p,\Omega} = 0 \Leftrightarrow v = 0$ c.t.p. $x \in \Omega$

3. Sean $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$, entonces:

$$\begin{aligned} \| u + v \|_{k,p,\Omega} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha}(u + v)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \| D^{\alpha}(u + v) \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \| D^{\alpha}(u) + D^{\alpha}(v) \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

La desigualdad de Minkowski implica que

$$\begin{aligned} &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \| D^{\alpha}(u) \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \| D^{\alpha}(v) \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \| u \|_{k,p,\Omega} + \| v \|_{k,p,\Omega} \end{aligned}$$

De (1), (2) y (3) concluimos que $\| \cdot \|_{k,p,\Omega}$ es una norma.

Ahora veamos que $W^{k,p}(\Omega)$ es completo con respecto a la norma $\| \cdot \|_{k,p,\Omega}$:

Tomemos una sucesión de Cauchy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset W^{k,p}(\Omega)$ entonces para cada $|\alpha| \leq k$

k , $\{D^\alpha u_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $L_p(\Omega)$ y como éste es completo, entonces existe $u_\alpha \in L_p(\Omega)$ tal que:

$$D^\alpha u_n \rightarrow u_\alpha \quad \text{en} \quad L_p(\Omega) \quad (6.164)$$

en particular cuando $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ es decir:

$$D^\alpha u_n = u_n \rightarrow u_\alpha = u_{(0,0,\dots,0)} \quad \text{en} \quad L_p(\Omega) \quad (6.165)$$

Afirmamos ahora que $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $D^\alpha u = u_\alpha$ ($|\alpha| \leq k$).

En efecto, fijemos $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n D^\alpha \phi dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u_n \phi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} D^\alpha u_n \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_\alpha \phi dx \end{aligned}$$

y esto prueba la afirmación. Así,

$$D^\alpha u_n \rightarrow D^\alpha u \quad \text{en} \quad L_p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq k.$$

Por lo tanto, también obtenemos que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{en} \quad W^{k,p}(\Omega).$$

Así $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach. ■

6.3.1. Espacios Funcionales Evolutivos

Cuando consideremos funciones dependientes del tiempo y espacio: $v(x, t)$, es natural extender las definiciones de medida e integrabilidad a funciones de la forma:

$$f : [0, T] \rightarrow V$$

donde $T > 0$ y V es un espacio de Banach real con norma $\|\cdot\|$.

Consideremos para esta sección el intervalo $G = [0, T]$.

Definición 6.3.4

i) Una función $s : G \rightarrow V$, es llamado **simple** si tiene la forma:

$$s(t) = \sum_{i=1}^m \chi_{E_i} u_i \quad (0 \leq t \leq T)$$

donde cada E_i es medible Lebesgue de $[0, T]$ y $u_i \in V$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

ii) Una función $f : G \rightarrow V$ es **fuertemente medible** si existen funciones simples $s_k : [0, T] \rightarrow V$ tal que:

$$s_k(t) \rightarrow f(t) \quad \text{c.t.p.} \quad 0 \leq t \leq T$$

iii) Una función $f : G \rightarrow V$ es **débilmente medible** si para cada $u^* \in V^*$, la aplicación $t \mapsto \langle u^*, f(t) \rangle$ es medible Lebesgue.

Definición 6.3.5

i) Para una función $s(t) = \sum_{i=1}^m \chi_{E_i}(t) u_i$ simple, definimos:

$$\int_0^T s(t) dt := \sum_{i=1}^m |E_i| u_i$$

ii) Decimos que $f : G \rightarrow V$ es **sumable** si existe una sucesión $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ de funciones simples tal que:

$$\int_0^T \|s_k(t) - f(t)\| dt \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad k \rightarrow \infty$$

iii) Si $f : G \rightarrow V$ sumable, definimos:

$$\int_0^T f(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T s_k(t) dt$$

Teorema 6.3.4 (Bochner) Una función fuertemente medible $f : G \rightarrow V$ es sumable si y solamente si $t \mapsto \|f(t)\|$ es sumable. En este caso:

$$\left\| \int_0^T f(t) dt \right\| \leq \int_0^T \|f(t)\| dt$$

y además:

$$\left\langle u^*, \int_0^T f(t) dt \right\rangle = \int_0^T \langle u^*, f(t) \rangle dt$$

para todo $u^* \in V^*$.

Definición 6.3.6 Sea $T > 0$, $G = [0, T] \subset \mathbb{R}$ y V un espacio de Banach o de Hilbert. El espacio $C(G, V)$ se define como el conjunto de todas las funciones continuas $f : G \rightarrow V$ y en el cual se define la siguiente norma:

$$\|f\|_{C(G, V)} := \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\| < \infty \quad (6.166)$$

Definición 6.3.7 Sea una función $f : G \rightarrow V$, el soporte de f es definido por el conjunto:

$$\text{sop}(f) := \overline{\{x \in G / f(x) \neq 0\}}$$

Denotamos por $\mathcal{D}(G, \mathbb{K})$ como el siguiente conjunto

$$\mathcal{D}(G, \mathbb{K}) = \{f : G \rightarrow \mathbb{K} : f \in C^\infty(G), \text{sop}(f) \text{ es compacto y } \text{sop}(f) \subseteq G\} \quad (6.167)$$

donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} .

Definición 6.3.8 Sea V un espacio de Banach. El espacio $L_p(0, T, V)$ consiste de todas las funciones medibles $u : G \rightarrow V$ que satisfacen:

$$\|u\|_{L_p(0, T, V)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \text{si } 1 \leq p < \infty, \text{y} \quad (6.168)$$

$$\|u\|_{L_p(0, T, V)} := \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| < \infty \quad \text{si } p = \infty \quad (6.169)$$

Teorema 6.3.5 Sean V, W espacios de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} y sea $1 \leq p < \infty$.

Luego

- $C(G, V)$ es un espacio de Banach con la norma dada en (6.166).
- $L_p(0, T, V)$ es un espacio de Banach con la norma dada en (6.168) siempre que $1 \leq p < \infty$ y con (6.169) cuando $p = \infty$.
- $C(G, V)$ es denso en $L_p(0, T, V)$ y la inclusión $C(G, V) \subseteq L_p(0, T, V)$ es continua.
- El conjunto de polinomios $w : G \rightarrow V$, es decir

$$w(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

con $a_i \in V$ para todo $i, n = 0, 1, 2, \dots$ es denso en $C(G, V)$ y en $L_p(0, T, V)$.

- Si V es un espacio de Hilbert con producto interno $(\cdot, \cdot)_V$, entonces el espacio $L_2(0, T, V)$ también es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(u, v)_{L_2(0, T, V)} = \int_0^T (u(t), v(t))_V dt$$

- Si V es un espacio de Banach separable entonces el espacio $L_p(0, T, V)$ también es separable.

g) Si $V \subseteq W$ es una inclusión continua entonces

$$L_r(0, T, V) \subseteq L_q(0, T, W) \quad 1 \leq q \leq r < \infty$$

también es una inclusión continua.

Teorema 6.3.6 Sea V un espacio de Banach, entonces para todo $u \in L_p(0, T, V)$ y todo $v \in L_q(0, T, V^*)$ de modo que $1 < p, q < \infty$ y $p^{-1} + q^{-1} = 1$ se cumple la desigualdad de Holder, es decir

$$\int_0^T |\langle v(t), u(t) \rangle_V| dt \leq \left(\int_0^T \|v(t)\|_{V^*}^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Proposición 6.3.1 Sean: V un espacio de Banach reflexivo y separable, $1 < p, q < \infty$ de modo que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Luego

a) A cada función $v \in L_q(0, T, V^*)$ existe una única funcional $w \in L_p(0, T, V)^*$ tal que

$$\langle w, u \rangle_{L_p(0, T, V)^*} = \int_0^T \langle v(t), u(t) \rangle_V dt \quad \text{para todo } u \in L_p(0, T, V)$$

b) Inversamente, a cada función $w \in L_p(0, T, V)^*$ existe exactamente una funcional $v \in L_q(0, T, V^*)$ de modo que

$$\begin{aligned} \langle w, u \rangle_{L_p(0, T, V)^*} &= \int_0^T \langle v(t), u(t) \rangle_V dt \quad \text{para todo } u \in L_p(0, T, V) \quad \text{y,} \\ \|w\|_{L_p(0, T, V)^*} &= \|v\|_{L_q(0, T, V^*)} \end{aligned}$$

c) El espacio $L_p(0, T, V)$ es un espacio de Banach reflexivo y separable.

Observación 6.3.2

► La proposición anterior establece que si $1 < p, q < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ y V es un espacio de Banach reflexivo y separable. Luego, si $X = L_p(0, T, V)$ entonces su dual viene dado por $X^* = L_q(0, T, V^*)$.

Proposición 6.3.2 Sea V un espacio de Banach, además sean $1 < p, q < \infty$ tal que $p^{-1} + q^{-1} = 1$ y $0 \leq t \leq T < \infty$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones

a) Si $u \in L_p(0, T, V)$ entonces

$$\langle v^*, \int_0^t u(s) ds \rangle_V = \int_0^t \langle v^*, u(s) \rangle_V ds \quad \text{para todo } v^* \in V^*.$$

b) Si $u \in L_p(0, T, V^*)$ entonces

$$\left\langle \int_0^t u(s) ds, v \right\rangle_V = \int_0^t \langle u(s), v \rangle_V ds \quad \text{para todo } v \in V.$$

c) Si $\{u_n\}_{n=0}^\infty \in L_p(0, T, V)$ tal que $u_n \rightarrow u \in L_p(0, T, V)$ cuando $n \rightarrow \infty$ entonces

$$\int_0^t u_n(s) ds \rightarrow \int_0^t u(s) ds \quad \text{en } V \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

Adicionalmente si V es separable y reflexivo se tiene que para las sucesiones $\{u_n\}_{n=0}^\infty \in L_p(0, T, V)$ y $\{v_n\}_{n=0}^\infty \in L_q(0, T, V^*)$ tal que

d)

$$u_n \rightarrow u \in L_p(0, T, V) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

$$v_n \rightarrow v \in L_q(0, T, V^*) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

ó también

e)

$$u_n \rightarrow u \in L_p(0, T, V) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

$$v_n \rightarrow v \in L_q(0, T, V^*) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

entonces para ambos casos

$$\int_0^t \langle v_n(s), u_n(s) \rangle_V ds \rightarrow \int_0^t \langle v(s), u(s) \rangle_V ds \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Proposición 6.3.3 Sea V un espacio de Banach real, si $u \in L_1(0, T, V)$ y

$$\int_0^T \varphi(t)u(t) dt = 0 \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(G)$$

entonces

$$u(t) = 0 \quad \text{c.t.p. } t \in]0, T[$$

Definición 6.3.9 Sea V un espacio de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Luego, una funcional $u : \mathcal{D}(G, \mathbb{K}) \rightarrow V$ lineal y continua es llamada una **distribución**.

El conjunto de todas las distribuciones será denotado por $\mathcal{D}'(G, V)$, es decir

$$\mathcal{D}'(G, V) = \{f : \mathcal{D}(G, \mathbb{K}) \rightarrow V : f \text{ es lineal y continua}\} \quad (6.170)$$

Definición 6.3.10 Sean V y W dos espacios de Banach, $u \in L_1(0, T, V)$ y $w \in L_1(0, T, W)$. Se define la α -ésima derivada distribucional de la función u sobre G como la relación de igualdad :

$$\int_0^T \varphi^{(\alpha)}(t)u(t) dt = (-1)^\alpha \int_0^T \varphi(t)w(t) dt \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(G) \quad (6.171)$$

siendo $w = u^{(\alpha)}$

Proposición 6.3.4 Sean V y W dos espacios de Banach y sea $u \in L_1(0, T, V)$. Sean $v, w \in L_1(0, T, W)$, si:

$$u^{(\alpha)} = v \quad \text{y} \quad u^{(\alpha)} = w$$

en el sentido de derivadas distribucionales, entonces:

$$v(t) = w(t) \quad \text{c.t.p.} \quad t \in]0, T[$$

es decir: $v = w$ en $L_1(0, T, W)$.

Observación 6.3.3

► Para cada función $u \in L_1(0, T, V)$ podemos asignarle a u una distribución U de la siguiente manera

$$U(\varphi) = \int_0^T \varphi(t)u(t) dt \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, esta distribución tiene una n -ésima derivada $U^{(n)}$ definido por

$$U^{(n)} = (-1)^n U(\varphi^{(n)})$$

de la Definición 6.3.10 y (6.171) podemos representar $U^{(n)}$ de la siguiente forma

$$U^{(n)}(\varphi) = \int_0^T \varphi(t)u^{(n)}(t) dt \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(G) \quad (6.172)$$

La ventaja de trabajar con distribuciones, es que cada $u \in L_1(0, T, V)$ posee derivadas distribucionales de todos los órdenes.

Proposición 6.3.5 (Derivada distribucional y convergencia débil) Sean V y W dos espacios de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ con la inclusión continua $V \subseteq W$. Si para cada n -ésima derivada distribucional, $n \in \mathbb{N}$ fijo, se tiene

$$\begin{aligned} u_k^{(n)} &= v_k \quad \text{sobre }]0, T[\quad \text{para todo } k \\ u_k &\rightarrow u \quad \text{en } L_p(0, T, V) \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty \\ v_k &\rightarrow v \quad \text{en } L_q(0, T, W) \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

donde $1 \leq p, q < \infty$, entonces

$$u^{(n)} = v \quad \text{sobre }]0, T[$$

Esta proposición indica una relación de compatibilidad entre la derivada distribucional y la convergencia débil.

Nota: Este resultado es importante porque nos va a servir en adelante para probar la convergencia del método de Galerkin.

Definición 6.3.11 (Triple inclusión continua) *Dados los siguientes espacios funcionales V y H , se define la siguiente relación de triple de inclusión continua*

$$V \subseteq H \subseteq V^*$$

donde:

- i) V es un espacio de Banach real reflexivo y separable con espacio dual topológico V^* .
- ii) H es un espacio de Hilbert separable.
- iii) Para la inclusión continua $V \subseteq H$ se tiene que existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|v\|_H \leq c \|v\|_V \quad \text{para todo } v \in V$$

y V es denso en H .

Proposición 6.3.6 (Existencia y unicidad de $u^{(n)}$) *Sea V, H espacios de Hilbert de modo que $V \subseteq H \subseteq V^*$ forman una triple inclusión continua, $1 \leq p, q < \infty$ y $0 < T < \infty$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- a) Para $u \in L_p(0, T, V)$, la derivada distribucional $u^{(n)} \in L_q(0, T, V^*)$ es única, es decir, $t \mapsto u^{(n)}(t)$ puede ser modificada sobre un subconjunto de $]0, T[$ de medida cero.
- b) Sea $u \in L_p(0, T, V)$. Entonces existe la derivada distribucional $u^{(n)} \in L_q(0, T, V^*)$ si y sólo si existe una función $w \in L_q(0, T, V^*)$ tal que:

$$\int_0^T (u(t), v)_H \varphi^{(n)}(t) dt = (-1)^n \int_0^T \langle w(t), v \rangle_V \varphi(t) dt \quad (6.173)$$

para todo $v \in V$ y todo $\varphi \in C_0^\infty(0, T)$.

Luego, $u^{(n)} = w$ y:

$$\frac{d^n}{dt^n} (u(t), v)_H = \langle u^{(n)}(t), v \rangle_V \quad (6.174)$$

se cumple para todo $v \in V$ y casi todo punto $t \in]0, T[$. Aquí, d^n/dt^n significa la n -ésima derivada distribucional de una función real sobre $]0, T[$.

Definición 6.3.12 (Espacios de Sobolev evolutivos) Sea V un espacio de Banach real, $p, q \in \mathbb{R}$ tal que $1 < p, q < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Se define como el **espacio de Sobolev evolutivo** $W^{1,p}(0, T, V)$ de orden 1 al conjunto

$$W^{1,p}(0, T, V) = \{u \in L_p(0, T, V) / u' \in L_q(0, T, V^*)\}$$

donde u' es la primera derivada distribucional.

Para una k -ésima derivada distribucional se define el espacio de Sobolev

$$W^{k,p}(0, T, V) = \{u \in L_p(0, T, V) / u', \dots, u^{(k)} \in L_q(0, T, V^*)\}$$

siendo $u', \dots, u^{(k)}$ derivadas en el sentido distribucional.

Para $u \in W^{1,p}(0, T, V)$ se define la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T,V)} := \left(\int_0^T (\|u(t)\|_{L_p(0,T,V)} + \|u'(t)\|_{L_q(0,T,V^*)}) dt \right) \quad (6.175)$$

siendo $1 < p, q < \infty$ y $0 < T < \infty$.

Nota:

Para $k = 1$ y $p = 2$ el espacio $W^{1,2}(0, T, V)$ se denota como $H^1(0, T, V)$

Proposición 6.3.7 El espacio de Sobolev $W^{1,p}(0, T, V)$ es un espacio de Banach con la norma definida por la función dada en (6.175).

Proposición 6.3.8 Sean los espacios V y H que forman una triple inclusión continua; $p, q \in \mathbb{R}$ tal que $1 < p, q < \infty$ de modo que $p^{-1} + q^{-1} = 1$ y $0 < T < \infty$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones

a) La inclusión

$$W^{1,p}(0, T, V) \subseteq C([0, T], H)$$

es continua, es decir, si $u \in W^{1,p}(0, T, V)$, entonces existe una función continua únicamente determinada $u_1 : G \rightarrow H$ la cual coincide con la función inicial u en casi todo punto $t \in G$. Por ello, no haremos distinción entre u y u_1 , además, en este sentido, existe una constante $c > 0$ tal que

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_H \leq c \|u\|_{W^{1,p}(0,T,V)}$$

b) El conjunto de todos los polinomios $w : G \rightarrow V$, esto es

$$w(t) = \sum_i t^i a_i \quad \text{con } a_i \in V \quad \text{para todo } i$$

es denso en los espacios $W^{1,p}(0, T, V)$, $L_p(0, T, V)$ y $L_p(0, T, H)$.

Teorema 6.3.7 (Integración por partes en espacios de Sobolev)

Para todo $u, v \in W^{1,p}(0, T, V)$ y $t, s \in \mathbb{R}$ arbitrarios tal que $s \leq t \leq T$ ($T \in \mathbb{R}$ y $T \geq 0$). Luego, se verifica la fórmula de integración por partes, es decir

$$(u(t), v(t))_H - (u(s), v(s))_H = \int_s^t (\langle u'(\tau), v(\tau) \rangle_V + \langle v'(\tau), u(\tau) \rangle_V) d\tau \quad (6.176)$$

donde los valores de $u(t), v(t), u(s)$ y $v(s)$ son los valores de las funciones continuas $u, v : [0, T] \rightarrow H$ en el sentido de la Proposición 6.3.8-(a).

El siguiente teorema relaciona u y u' cuando no se encuentran en el mismo espacio.

Teorema 6.3.8 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) un subconjunto abierto y acotado. Luego, si $u \in L_2(0, T, H_0^1(\Omega))$ con $u' \in L_2(0, T, H^{-1}(\Omega))$ entonces:

$$u \in C([0, T], L_2(\Omega))$$

y la aplicación $t \mapsto \|u(t)\|_{L_2(\Omega)}$ es absolutamente continua con:

$$\frac{d}{dt} (\|u(t)\|_{L_2(\Omega)}^2) = 2 \langle u'(t), u(t) \rangle \quad \text{c.t.p.} \quad 0 \leq t \leq T$$

Además:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{L_2(\Omega)} \leq C \left(\|u\|_{L_2(0, T, H_0^1(\Omega))} + \|u'\|_{L_2(0, T, H^{-1}(\Omega))} \right)$$

donde la constante C depende solamente de T .

6.4. Reactores de Lecho Fluido

La normativa medio-ambiental, cada vez más estricta, en el sector de la generación de energía va marginando importantes recursos combustibles, debido a su alto contenido de azufre, o creando cantidades considerables de rechazos de lavado que son inutilizables según los métodos clásicos, como la combustión en calderas de carbón pulverizado. La Combustión en Lecho Fluido (CLF) de combustibles sólidos triturados es una alternativa en auge en todo el mundo, dada su capacidad para la reducción "in situ" de los óxidos de azufre y para quemar combustibles pobres sin el apoyo de hidrocarburos.

La combustión en lecho fluido es una tecnología de uso limpio del carbón que ha superado con éxito las etapas de Investigación, Desarrollo e Innovación (I + D + I), y se encuentra plenamente disponible y operativa a nivel comercial, hasta tamaños de 250

MWe y mayores. Sin embargo, hoy día existe una demanda creciente por parte de las empresas eléctricas y generadores independientes de grupos con potencia unitaria de 300 MWe o incluso superiores. Sensible a esta demanda, Covanta Energy y Babcock Foster Wheeler desarrollan este tipo de tecnología para satisfacer la evolución de los requisitos medioambientales que condicionará, cada vez más, la producción de energía en el futuro.

La combustión del carbón (u otros combustibles sólidos) en lecho fluido permite alcanzar fundamentalmente dos objetivos primordiales desde el punto de vista medio ambiental:

- i) Alto grado de retención de azufre en las cenizas, reduciendo las emisiones de óxidos de azufre en un 90 %, o incluso más, en comparación con las unidades convencionales de carbón pulverizado o de parrillas.
- ii) Baja emisión de óxidos de nitrógeno, aproximadamente la mitad (o menos) que en el caso de unidades convencionales.

Además, las unidades de lecho fluido presentan, entre otras, las siguientes ventajas:

- Admiten combustibles de bajo rango, con alto contenido en cenizas, sin que sea un problema la presencia de azufre.
- Gran flexibilidad a la hora de consumir combustibles distintos del de diseño.
- Buen índice de utilización del sorbente, habitualmente caliza triturada.
- Simplicidad de diseño y operación.
- Buena disponibilidad, superior al 90 %.
- Coste de primera inversión moderado, y buena eficiencia energética.
- Bajas necesidades de mantenimiento.

Mantener estas ventajas en todo el rango de potencias disponibles, hasta 250 MWe y más allá, quemando una amplia gama de combustibles sólidos, desde rechazos de antracita y semihullas de más de 60 % de cenizas hasta coque de petróleo, exige un diseño depurado que contemple todos y cada uno de los parámetros críticos del proceso y de la caldera en sí, aprovechando la experiencia adquirida en las distintas unidades en funcionamiento

y, sin olvidar, la selección y el diseño de los diversos auxiliares, para obtener una alta fiabilidad con un mantenimiento reducido.

6.4.1. Calderas de lecho fluidizado (CLF)

Llamados también reactores, en este tipo de calderas, el lecho se mantiene en suspensión en una corriente de aire inyectado desde el fondo del lecho a través de una rejilla provista de boquillas orientadas.

Las burbujas de aire ascienden a través del lecho, provocando en el mismo un movimiento similar al de un líquido en ebullición.

6.4.2. Características principales y diseño

La superficie de intercambio de calor está constituida por las paredes que constituyen la caldera y confinan el lecho, y por serpentines inmersos en el mismo, que se benefician del alto coeficiente de transferencia de calor propio de los lechos fluidos.

En las (** insertar figuras: figura de caldera CLF **) se representa esquemáticamente una sección de una caldera de lecho fluido burbujeante y su funcionamiento.

La (**Figura 16**) representa una caldera de lecho fluido burbujeante en tres dimensiones, donde se aprecian sus componente principales, a saber:

- Hogar.
- Sistema de alimentación de combustible.
- Rejilla distribuidora de aire y plenum.
- Zona de recuperación de calor (ZRC).

Además, forman parte importante de una instalación de este tipo los siguientes sistemas:

- Sistema de encendido.
- Sistema de descarga del lecho.
- Sistema de limpieza de gases.
- Sistema de control de temperatura.

Seguidamente se describe brevemente cada uno de estos componentes:

Hogar

El hogar es de sección rectangular, constituido por paneles de tubos soldados entre sí mediante pletinas longitudinales, como en el resto de las calderas de diseño FW. Se obtiene así un recinto estanco, totalmente regreigerado por agua, protegido por una delgada capa de refractario únicamente.

A la hora de modelar el proceso de mezcla y la fluidización en una caldera de lecho fluido hay que tener en cuenta diversos parámetros, entre los que podemos citar la velocidad de partículas sólidas, velocidad de gas, densidad de partículas, densidad del gas, velocidad de aire entrante, la temperatura del lecho, altura del lecho, tamaño de las partículas. La relación Ca/S entre estos parámetros a su vez determinarán, entre otros, la eficiencia de la mezcla y fluidización.

Sistema de alimentación de sólidos

Para la alimentación del combustible se utiliza normalmente unidades alimentadores de dispersión, bien mecánicos o asistidos neumáticamente.

Rejilla distribuidora de aire y plenum

La rejilla distribuidora de aire de fluidización está dotada de boquillas direccionales para dirigir las partículas de cenizas, material gastado, piedras alimentadas con el combustible, hacia el oportuno drenaje del lecho. Es necesario ir eliminando estos materiales para evitar la formación de aglomeraciones en el fondo del lecho.

Otro problema relacionado a los lechos fluidos es la susceptibilidad a la erosión. No obstante, con una selección adecuada de materiales y con ciertos sistemas de protección puede conseguirse un alto número de horas de funcionamiento sin aparentes problemas.

Sistema de encendido

En la puesta en marcha, es necesario elevar la temperatura del lecho hasta los 550 ó 600° C, que garantiza la ignición inicial del combustible.

Esto se consigue mediante un quemador en vena de aire situado en el conducto de aire de fluidificación. La velocidad se mantiene por debajo de la velocidad de fluidificación. hasta que la temperatura del lecho alcanza los 400 ó 500° C.

Sistema de descarga del lecho

La extracción del material gastado del lecho se realiza por medio de uno o varios tubos de drenaje situados en la parrilla de fluidificación.

A veces, dependiendo del combustible usado, la aglomeración o acumulación de partículas gruesas constituye un problema potencial. Estas partículas pueden ser cenizas aglomeradas, inquemados, inertes introducidos con el combustible, etc. Es deseable la eliminación selectiva de las partículas más grandes, ya que la fracción menuda puede contener cantidades considerables de sorbente sin reaccionar, así como combustible inquemado.

Sistema de limpieza de gases

Los gases de combustión, portadores de cantidades limitadas de SO_2 y NO_x , como hemos visto, han de ser por último desempolvados antes de ser emitidos a la atmósfera. Este desempolvado se realiza normalmente en dos etapas, la primera mediante el uso de ciclones y, posteriormente, mediante un filtro de mangas o un precipitador electrostático.

Las partículas recogidas en la primera etapa pueden reinyectarse al lecho. El polvo recogido en la segunda etapa se elimina mediante el sistema de transporte de cenizas.

Su diseño a una escala industrial supone el reto de resolver numerosos problemas en futuras investigaciones tales como:

- Preparación y alimentación de combustible y sorbente.
- Materiales y geometría de los tubos inmersos en el lecho.
- Dinámica de la reacción entre combustible y sorbente, en el lecho y sobre el lecho.
- Erosión, corrosión y ensuciamiento de las superficies de intercambio de calor.
- Limpieza de los gases calientes producto de la combustión.
- Recuperación y recirculación del combustible inquemado.
- Control del lecho, evitando la de fluidificación del mismo o la acumulación de gruesos.
- Eliminación del material gastado, incluyendo las cenizas y el sorbente sulfatado.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Robert A. Adams and John J. F. Fourmier, Sobolev Spaces, second edition Academic Press, Elsevier Science, 2006.
- [2] Beckmann, M., Scholz, R., “Residence Time Behaviour of Solid Material at Grate Systems.” Proc. INFUB 2000, 5th European Conference on Industrial Furnaces and Boilers, Porto, Portugal, 11.-14. 04. (2000).
- [3] R. Buscall, An effective hard-sphere model of the non-Newtonian viscosity of stable colloidal dispersions: comparison with further data for sterically stabilised lattices and with data for microgel particles, Colloids Surf. (A) 83 (1) (1994) 33–42.
- [4] V. Bertola, Two-Phase Flow Modelling and Experimentation. Proceedings of the Second International Symposium on Two-Phase Flow Modelling and Experimentation. Pisa, Italy, Ed. Springer Wien New York (2003).
- [5] L. A. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations, Comm. Pure Applied Maths., 35 (1982), pp. 771-831.
- [6] A.J. Chorin, J.E. Marsden, A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, Springer-Verlag, 1980.
- [7] Choi Y.H. y Merkle C. The application of preconditioning in viscous flows. Journal of Computational Physics, 105:207–223, 1993.
- [8] Claes Johnson, Numerical solution of partial differential equations by the finite element, Cambridge University Press, 1994.

- [9] COMSOL Multiphysics, User's guide. Version 4.0, COMSOL AB, 2010.
- [10] B. Cockburn, Discontinuous Galerkin Methods for Computational Fluid Dynamics, volume 3, pages 91-123, Jhon Wiley and Sons Ltd. England 2004.
- [11] B. Cockburn, Discontinuous Galerkin Methods. ZAMMA. Angew. Math. Mech, 83:731-754, 2003.
- [12] A.Courant, E. Isaacson, and M. Rees.- On the solution of no linear hiperbolic diferencial equations by differences, Comm. Pure Appl. Math. , 5ta.Ed. (1992).
- [13] Drew,D.A,1983 Mathematical modelling of two-phase flow. Ann.Rev.Fluid. Mech.Vol15.pp.261-291.
- [14] D. A. Drew, S. L. Passman, Theory of Multicomponent Fluids, Springer, New York, 1999.
- [15] Löhr, S. and etal; Combustion of Pulverized Coal at low Oxygen Concentrations, 33rd Int. Technical Conference on Coal Utilization and Fuel Systems, Clearwater, USA, June 01-05, 2008.
- [16] Ezequiel J. L. Proceiding Mecánica Computacional Vol XXVII, págs. 137-158 2008.
- [17] FLUENT 6.1 Documentation; Fluent Inc.: Lebanon, NH, 2003; Section 22.4 Eulerian Model.
- [18] Gidaspow, D. 1994. Multiphase flow and fluidization: continuum and kinetic theory description. Academic Press. Nueva York, NY. EEUU Grad, H. 1949. Communication. Pure and Applied Mathematics. 2(4):331-407.
- [19] Grace, J. R.; Sun, G. Influence of particle size distribution on the performance of fluidized bed reactors. Can. J. Chem. Eng. 1991, 69 (5), 1126-1134.
- [20] Glowinski, R. Numerical Methods for Non linear Variational Problems, Springer, 1983.
- [21] Harten. On a class of high resolution total variation stable Finite difference schemes. SIAM J. Numer. Anal., 21:123, 1984.

- [22] Hirsch C. Numerical Computation of Internal and External Flows. Volume 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows. John Wiley & Sons, 1990.
- [23] Hughes T. y Mallet M. A new finite element method for CFD: III. The generalized streamline operator for multidimensional advection-diffusion systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58:305–328, 1986.
- [24] Jenkins, J.T. and Louge, M.Y., 1997. On the Flux of Fluctuating Energy in a Collisional Grain Flow at a Flat Frictional Wall, *Phys. Fluids* 9 (10), pp. 2835-2840.
- [25] Knowlton, T., Geldart, D., Matsen, J., King, D. 1995. Comparison of CFD hydrodynamic models. PSRI challenge problem. Presentado en el 8th International Fluidization Conference. May. Tours, Francia.
- [26] Kunii, D., Levenspiel O. 1991. Fluidization engineering. 2a Ed. Butterworth-Heinemann. Nueva York, NY, EEUU.
- [27] R. J. Leveque. Finite volume methods for hiperbolic problems. Cambridge University Press, 2002.
- [28] Irla Mantilla, Adaptabilidad de mallados por similitud al comportamiento de un fluido compresible, *REVCUNI*, Vol. 05 N° 01, Julio 2001, 94 _107
- [29] Irla, Mantilla, Santiago de Vicente, Generación de un mallado óptimo, para la resolución numérica de problemas de contorno con elementos finitos, *TECNIA* Vol. 10, N° 1 - ISBN 983622, Julio 2000.
- [30] Irla Mantilla, Harten Van Leer, Method in the numerical simulation of two phase flow in a flowing bed, *European Congress on Computational Methods*, Actas del Congreso ECCOMAS, del 11 al 14 Setiembre del 2000.
- [31] Irla Mantilla N., Formulación del modelo matemático del flujo Bifásico de partículas sólidas, XIX Simposio Peruano de Física 2010, organizado por la Sociedad Peruana de Física FC- Universidad Nacional de Ingeniería.
- [32] Mamontov, A. Orlicz spaces in the existence problem the global solutions to viscous compressible non linear fluid equations Lavrentyev Institute for Hydrodynamics. Moscú(1996).

- [33] N. Nguyen, L. Peraire and B. Cockburn, An Implicit high order hybridizable DGM for nonlinear convection diffusion equations, *J. Comput. Phys.*, 228:8841-8855, 2009.
- [34] Nigro N., Storti M., y Toth J. A minimal element distortion strategy for computational mesh dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69:1898-1929, 2007.
- [35] M. Pell. Gas Fluidization. *Hanbook of powder technology*, Vol. 8, (1990).
- [36] Pironneau, O.- Méthodes des éléments finis pour les fluides. Masson, Paris, 1988
- [37] M.J. Rhodes, X.S. Wang, M. Nguyen, P. Stewart, K. Liffman, Study of mixing in gas-beds using a model, *Chem. Eng. Sci.* 56 (2001) 2859–2866.
- [38] K. Ropelato, H.F. Meier, M.A. Cremasco, CFD study of gas-solid behavior in downer reactors: an Eulerian-Eulerian approach, *Powder Technol.* 154 (2005) 179-184.
- [39] S. C. Saxena and C. K. Jotshi Department of Chemical Engineering (M/C 110), The University of Illinois at Chicago, 810 S. Clinton Street, Chicago, IL 60607-7000, U.S.A. 2003.
- [40] Haim Brézis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Editorial Springer New York, 2010
- [41] Simon, J. Compact sets in the space $L_p(0,T,H)$. *Anales de Matemática Pura y Applied*, 146, 65 - 96, (1987).
- [42] Simonin, O., Continuum modeling of dispersed two-phase flows, in *Combustion and Turbulence in Two-Phase Flows*, Von Karman Institute of Fluid Dynamics Lecture Series 1996-2, 1996.
- [43] Sun, G. Influence of particle size distribution on the performance of fluidized bed reactors. Ph.D. Thesis, University of British Columbia, Vancouver, British Columbia, Canada, 1991.
- [44] Simsek, E., Brosch, B., Wirtz S., Scherer, V., Krüll, F., “Numerical Simulation of Solid Fuel Conversion on a Forward Acting Grate with a Coupled CFD / Discrete.

- [45] Smoot, L. Douglas, and Smith, Philip J., "Coal combustion and gasification," The Plenum Chemical Engineering Series, Plenum (1985).
- [46] M. Syamlal, T.J. O'Brien, Summary of MFIx Equations, January 2006.
- [47] Taghipour, F.; Ellis, N.; Wong, C. Experimental and Computational Study of Gas-Solid Fluidized Bed Hydrodynamics. *Chem. Eng. Sci.* 2005, 60, 6857-6867.
- [48] E. F. Toro and A. Hidalgo. ADER Finite Volume Schemes for Diffusion Reaction Equations. *Applied Numerical Mathematics*, 59:73100, 2009.
- [49] R. Temam, "Navier-Stokes equations and Nonlinear functional analysis", SIAM, Philadelphia, 1983.
- [50] Tsuo, Y.P., Gidaspo, D. 1990. Computation of Flow patterns in circulating Fluidized beds. *AIChE J.* 36: 885-893.
- [51] Santiago de Vicente, Julian Velasco, Modelización de Nubes Estacionarias en Flujos Bifásicos, XV Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, (169) (1997)
- [52] Juan Luis Vásquez., La ecuación de Navier-Stokes - Un reto físico-matemático para el siglo XXI. Departamento de Matemáticas. Univ. Autónoma de Madrid, Real Academia de Ciencias de Zaragoza. 26: 31-56, (2004).
- [53] V. Girault, P.A. Raviart, Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations, Vol. 749(1991).
- [54] M. E. Vásquez Cendón: Estudio de esquemas descentrados para su aplicación a las leyes de conservación hiperbólicas con términos fuente. Tesis doctoral, Universidad de Santiago de Compostela (1994).
- [55] B. Van Leer. - Progress in Multidimensional Upwind differencing. Report N°. 92-43 NASA Langley Research. Center Hampton. VA (1992).
- [56] J. K. Walters and J. F. Davidson: The initial motion of a gas bubble formed in an inviscid liquid. part-2. *Journal of Fluid Mechanics*, 17:321-336, (1963)
- [57] Z. Xin: Zero Dissipation Limit to Rarefaction Waves for the One-Dimensional Navier-Stokes Equations of Compressible Isentropic Gases.' *Comm. on Pure and Applied Math.*, Vol. XLVI, pp 621-665, (1993).

- [58] H. C. Yee, R. F. Warming, and A. Harten. Implicit Total Variation Diminishing (TVD) Schemes for Steady State Problems. *J. Comput. Phys.*, 57:327360, 1985.
- [59] Yang Y.B., Lim C.N., Goodfellow J., Sharifi V.N., Swithenbank J., A diffusion model for particle mixing in a packed bed of burning solids, *Fuel*, 84, 213-225. (2005).
- [60] J. G. Yates: *Fundamentals of Fluidized-bed Chemical Processes*. Butterworths Monographs in Chemical Engineering. Ed. Butterworths, (1983).
- [61] W. M. Zajaczkowski: On nonstationary motion of a compressible barotropic viscous fluid bounded by a free surface . *Dissertationes Mathematicae, CCCXXIV*, Polska Akademia Nauk. Instytut Matematyczny, (1993).
- [62] <http://www.covantaenergy.co.uk/covanta-uk-home/energy-from-waste-101.aspx>
- [63] http://www.babcock.com/products/boilers/fluidized_bed.html
- [64] Peters, B., Dziugys, A., Hans Hunsinger, and Krebs, L. An approach to qualify the intensity of mixing on a forward acting grate. *Chemical Engineering Science*, 60(6), 1649-1659 (2005).
- [65] Lions, P.L. Compacité des solutions des equations de Navier-Stokes compressible isotropiques *C.R. Acad. Sci. Paris* 317, 115-120(1993).