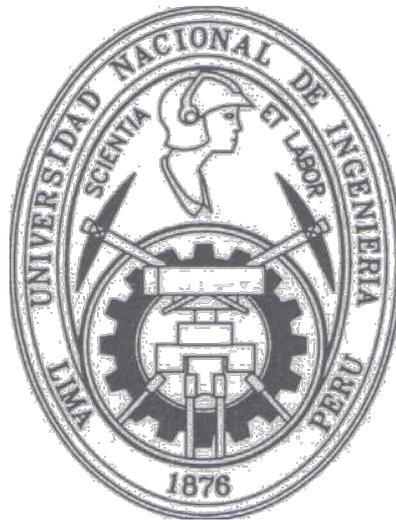


**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA**



**MODELO MATEMÁTICO PARA EL ANÁLISIS EN
ESTADO ESTACIONARIO DEL MOTOR
CAPACITOR**

TESIS

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE
INGENIERO MECÁNICO ELECTRICISTA

RUBÉN GARCÍA CUADROS

LIMA-PERÚ

1991

INDICE

PROLOGO	1
CAPITULO 1. INTRODUCCION	3
CAPITULO 2. MODELO "D-Q" DEL MOTOR CAPACITOR	5
2.1. METODOS DE ANALISIS	5
2.2. SUPUESTOS PARA EL ANALISIS	7
2.3. ECUACIONES DE EQUILIBRIO DEL MODELO "D-Q" DEL MOTOR	8
2.4. RELACION EXISTENTE ENTRE LAS INDUCTANCIAS ROTACIONALES E INDUCTANCIAS MUTUAS	9
2.5. ECUACIONES EN ESTADO ESTACIONARIO	11
CAPITULO 3. REDUCCION DE LAS MAGNITUDES A UN BOBINADO COMUN	14
3.1. CONDICIONES PARA LA REDUCCION	15
3.2. REDUCCION DE LAS MAGNITUDES DEL BOBINADO ROTORICO DIRECTO Y EN CUADRATURA	16
3.3. REDUCCION DE LAS MAGNITUDES DEL BOBINADO ESTATORICO EN CUADRATURA	19
3.4. REDUCCION DE LAS INDUCTANCIAS MUTUAS Y AUTOINDUCTANCIAS	21
3.4.1. REDUCCION DE LA AUTOINDUCTANCIA DEL BOBINADO ESTATORICO Y ROTORICO DIRECTO	

3.4.2. REDUCCION DE LA AUTO-INDUCTANCIA DEL BOBINADO ESTATORICO Y ROTORICO EN CUADRATURA	23
3.5 ECUACIONES EN ESTADO ESTACIONARIO CON MAGNITUDES REDUCIDAS	26
CAPITULO 4. APLICACION DE LOS COMPONENTES SIMETRICAS AL SISTEMA	34
4.1. MATRIZ DE TRANSFORMACION DE COMPONENTES SIMETRICAS BIFASICAS	35
4.2. APLICACION DE LAS COMPONENTES SIMETRICAS	
CAPITULO 5. CIRCUITO EQUIVALENTE DEL MOTOR CAPACITOR	54
5.1. DEDUCCION DEL CIRCUITO EQUIVALENTE EN FUNCION DE LAS COMPONENTES f y b	56
5.2. ECUACIONES TENSION-CORRIENTE	61
5.3. ECUACION DEL TORQUE ELECTROMAGNETICO	63
CAPITULO 6. VERIFICACION TEORICO - EXPERIMENTAL	72
6.1 DESCRIPCION DE INSTRUMENTOS USADOS EN LAS PRUEBAS Y DATOS DE PLACA DEL MOTOR	73
6.2. ENSAYOS REALIZADOS PARA LA DETERMINACION DE LOS PARAMETROS DEL CIRCUITO EQUIVALENTE	76
6.3. ENSAYO DEL MOTOR CON CARGA VARIABLE	77
6.4. COMPARACION DE RESULTADOS TEORICOS Y EXPERIMENTALES	77
CONCLUSIONES	85
BIBLIOGRAFIA	87

NOMENCLATURA	89
APENDICE	98
A. DESCRIPCION DE PRUEBAS	99
B. DETERMINACION DE LOS PARAMETROS DEL MOTOR CAPACITOR A PARTIR DE PRUEBAS	101
C. DATOS DE ENSAYOS Y CALCULO DE PARAMETROS	106
D. DIAGRAMA DE FLUJO PARA EL CALCULO TEORICO DEL COMPORTAMIENTO	110

PROLOGO

En el primer capítulo del presente trabajo titulado "MODELO MATEMATICO PARA EL ANALISIS EN ESTADO ESTACIONARIO DEL MOTOR CAPACITOR" se menciona el modelo usado, el método aplicado así como el propósito del estudio realizado.

En el segundo capítulo explica el modelo tomado para el análisis del mismo y sus consideraciones, tomadas como base estudio.

En el tercer capítulo se aplica el método de cálculo especial denominado "reducción ó reflexión" para facilitar el análisis en estado estacionario.

En el capítulo cuarto se aplica el método de componentes simétricas mediante el uso de algebra de matrices (transformaciones pasivas y activas).

En el quinto capítulo se deduce el circuito equivalente del motor en función de las componentes "+" (positiva) y componente "-" (negativa) a las que se les denomina respectivamente componente hacia adelante y hacia atras. En función de estas componentes se define las ecuaciones tensión-corriente y la ecuación del torque electromagnético.

El capítulo sexto describe los instrumentos usados y los ensayos realizados al motor capacitor y muestra la comparación de los resultados teóricos y experimentales como el error producido en ellos.

Quiero expresar a través de este trabajo mi más profundo agradecimiento al Ing. Roberto Ramirez A. por haberme brindado su apoyo incondicional a través de la asesoría prestada.

Así mismo hacer lo propio con el Jefe de Laboratorio de la FIEE, Ing. Miguel Julca por haberme dado todas las facilidades de los servicios del Laboratorio de Electricidad de la Ex-Enit sin lo cual no hubiese podido realizar los ensayos del presente trabajo.

CAPITULO 1

INTRODUCCION

En el presente trabajo se expone en forma sistemática los pasos a seguir para la elaboración del modelo matemático en estado estacionario de un motor asíncrono monofásico con condensador permanente denominado comunmente motor capacitor.

Tomando como punto de partida el modelo D-Q, aporte valioso de la teoría general de las máquinas eléctricas, y considerando la asimetría presente en el estator de esta máquina, se utiliza el método de las componentes simétricas para facilitar el análisis del motor capacitor.

El motor capacitor, utilizando el artificio de la "reducción o reflexión", es reemplazado por un motor equivalente cuyos bobinados tienen las características de uno de ellos escogido como "común".

A continuación, se aplican las componentes simétricas y es elaborado el modelo matemático para estado estacionario del motor capacitor y el correspondiente circuito equivalente, que se usa en el

cálculo teórico del comportamiento de un motor capacitor conocido. La precisión del modelo desarrollado es finalmente comprobado efectuando los ensayos experimentales pertinentes.

CAPITULO 2

MODELO D-Q DEL MOTOR CAPACITOR

La mayoría de los motores asíncronos para uso industrial se diseñan como máquinas completamente simétricas y operan también a estas condiciones. Sin embargo algunos de ellos debido sus condiciones particulares de operación son no-simétricos, por ejemplo el servomotor bifásico y el motor capacitor. El motor capacitor tiene impedancias diferentes en los dos bobinados del estator, mientras que el servomotor bifásico es operado con alimentación desbalanceada, y particularmente se utiliza en sistemas de control.

El modelo circuital del cual se inicia el análisis permitirá el estudio de todos estos casos para operación en estado estacionario, porque contempla el caso más general; la máquina no simétrica con alimentación desbalanceada.

2.1 Métodos de análisis

El análisis de un motor bifásico asimétrico en estado estacionario puede ser realizado mediante dos puntos de vista, en ambos casos se aplica el "principio de la superposición" para lo cual debe suponerse la

linealidad del circuito magnético. El primero de estos métodos es la TEORIA GENERAL DEL CAMPO GIRATORIO, que consiste en descomponer la onda pulsante de fuerza magnetomotriz producida por el estator en dos ondas de fuerza magnetomotriz que giran en sentidos contrarios y cuyas amplitudes son diferentes y constantes; luego para cada f.m.m. se sigue el procedimiento utilizado para el análisis del "motor bifásico simétrico".

El 2o. punto de vista para el análisis del motor capacitor es el METODO DE LAS COMPONENTES SIMETRICAS que consiste en descomponer un juego de magnitudes eléctricas asimétricas (tensiones y/o corrientes), en dos conjuntos de magnitudes simétricas cada uno de los cuales proporciona una solución y estas soluciones se adicionan (se superponen) para encontrar la respuesta total del sistema. Sin embargo la aplicación del método de la teoría de los campos giratorios al motor bifásico asimétrico alimentado con tensiones desequilibradas desemboca finalmente en el concepto de las componentes simétricas, en virtud a que la descomposición de las corrientes asimétricas en dos sistemas bifásicos simétricos con secuencias de fases invertidas equivale a descomponer la onda de f.m.m. del estator en sus dos componentes: directa (hacia adelante) e inversa (hacia atrás). Por lo tanto, ambos enfoques conducen a la misma meta, que es la obtención de un circuito equivalente para operación en estado estacionario.

Por las razones anteriores en el presente trabajo se optó por utilizar el método de las Componentes Simétricas.

2.2 Supuestos para el análisis

Para el estudio de la máquina bifásica asimétrica se haran las siguientes consideraciones:

- a.- La fase auxiliar esta desfasada 90° eléctricos respecto al devanado principal.
- b.- La reactancia del capacitor que esta en serie con el bobinado auxiliar del motor, será considerada como un elemento pasivo que puede incluirse en la impedancia (constituida por la resistencia y la reactancia de dispersión) de este bobinado del motor.
- c.- Las fuerzas magnétomotrices producidas por el estator y el rotor se distribuyen sinusoidalmente en un entrehierro uniforme. Por lo tanto se desprecian los efectos de todos los armónicos.
- d.- Los parámetros eléctricos del motor (resistencias y reactancias), se suponen constantes; no dependen de la corriente.
- e.- El rotor es perfectamente simétrico y puede representarse por dos bobinas idénticas en cuadratura.
- f.- Las perdidas en el fierro serán finalmente incluidas en el modelo para estado estacionario mediante una

resistencia equivalente en paralelo con la fase principal.

g.- Se asume que las pérdidas por fricción y ventilación varían con el cuadrado de la velocidad y serán restadas a la potencia de salida.

2.3 Ecuaciones de equilibrio del modelo "D-Q" del motor

De acuerdo a la Teoría General de las máquinas de Corriente Alterna, el modelo "D-Q" del motor bifásico asimétrico resulta un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Este hecho permitirá facilitar sustancialmente el análisis del motor capacitor.

Las ecuaciones de equilibrio para el modelo d-q del motor bifásico asimétrico, que se representa esquemáticamente en la fig 2.1 son:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_d \\ \dot{v}_q \\ v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_d + L_d p & 0 & M_d p & 0 \\ 0 & R_q + L_q p & 0 & M_q p \\ M_d p & -G_{dq} W & R_d + L_d p & -G_{dq} W \\ G_{dq} W & M_q p & G_{dq} W & R_q + L_q p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix}$$

Ecuación (2.1)

Es necesario recordar que en la Ec. (2.1), la impedancia del condensador forma parte de la componente

de dispersión de la autoinductancia " L_q ".

2.4 Relación existente entre las Inductancias Rotacionales e Inductancias Mutuas

- Para simplificar las ecuaciones (2.1) del modelo D-Q es necesario encontrar la relación entre las inductancias rotacionales y las inductancias mutuas de la máquina.
- En el esquema simplificado que se muestra en la fig.2.2, el devanado asimétrico del estator está representado por la bobina " N_q " la cual tiene dos conductores y la bobina " N_d " es esquematizada por solo un conductor. En el rotor hay un devanado simétrico denotado por las bobinas " N_d " y " N_q ".

Para la posición mostrada asumiendo que es una máquina de dos polos ($n = 1$), la inductancia mutua entre las bobinas " N_d " y " N_d " está dada por:

$$M_d^{rd} = \frac{N_d^r \Phi_d^{rd}}{i_d^r} = \frac{N_d^r * N_d^d i_d^d}{i_d^r i_d^d} = \frac{N_d^r * N_d^d}{i R_d^r} \quad (2.2)$$

Así mismo, para la misma posición, el voltaje inducido en la bobina " N_q ", debido a la velocidad de rotación es:

$$e_{qd}^{rd} = N_q^r \dot{\Phi}_d^{rd} W = G_{qd}^{rd} i_d^d W$$

$$N_q^r \theta_d^{rs} = G_{qd}^{rs} i_d^s \quad (2.3)$$

$$G_{qd}^{rs} = \frac{N_q^r \theta_d^{rs}}{i_d^s}$$

puesto que $N_q^r = N_d^r$ entonces se cumple:

$$G_{qd}^{rs} = M_d^{rs} \quad (2.4)$$

Para una máquina con un número de polos mayor a dos se cumplirá:

$$G_{qd}^{rs} = n M_d^{rs} \quad (2.5)$$

$$G_{qd}^{rr} = n L_d^r \quad (2.6)$$

$$G_{dq}^{rs} = n M_q^{rs} \quad (2.7)$$

$$G_{dq}^{rr} = n L_q^r \quad (2.8)$$

Reemplazando las inductancias rotacionales por sus respectivas equivalencias en la ecuación matricial 2.1 se obtiene:

$$\begin{bmatrix} v_d^s \\ v_q^s \\ v_d^r \\ v_q^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_d + L_d^s p & 0 & M_d^{sr} p & 0 \\ 0 & R_q + L_q^s p & 0 & M_q^{sr} p \\ M_d^{rs} p & -n M_q^{rs} W^r & R_d + L_d^r p & -n L_q^r W^r \\ n M_d^{rs} W^r & M_q^{rs} p & n L_d^r W^r & R_q + L_q^r p \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_q^s \\ i_d^r \\ i_q^r \end{bmatrix}$$

Ecuación (2.9)

2.5 Ecuaciones en estado estacionario

Empleando la notación compleja, todos los operadores "p=d/dt" se reemplazan por el operador "jw", por lo tanto la ecuación (2.9) se puede escribir en la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_d \\ \dot{V}_q \\ \dot{V}_d \\ \dot{V}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_d + j\omega L_d & 0 & j\omega M_d & 0 \\ 0 & R_q + j\omega L_q & 0 & j\omega M_q \\ j\omega M_d & -nM_q \omega & R_d + j\omega L_d & -nL_q \omega \\ nM_d \omega & j\omega M_q & nL_q \omega & R_q + j\omega L_q \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dot{I}_d \\ \dot{I}_q \\ \dot{I}_d \\ \dot{I}_q \end{bmatrix}$$

Ecuación (2.10)

La ecuación (2.10) escrita en forma matricial será:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{dq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{dq} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dot{I}_{dq} \end{bmatrix}$$

donde : $\begin{bmatrix} \dot{V}_{dq} \end{bmatrix}$: MATRIZ DE TENSIONES

$\begin{bmatrix} Z_{dq} \end{bmatrix}$: MATRIZ DE IMPEDANCIAS

$\begin{bmatrix} \dot{I}_{dq} \end{bmatrix}$: MATRIZ DE CORRIENTES

En la matriz de impedancias se debe tener en cuenta que debido a la simetría del rotor se cumple:

$$R_q = R_d \quad (2.11)$$

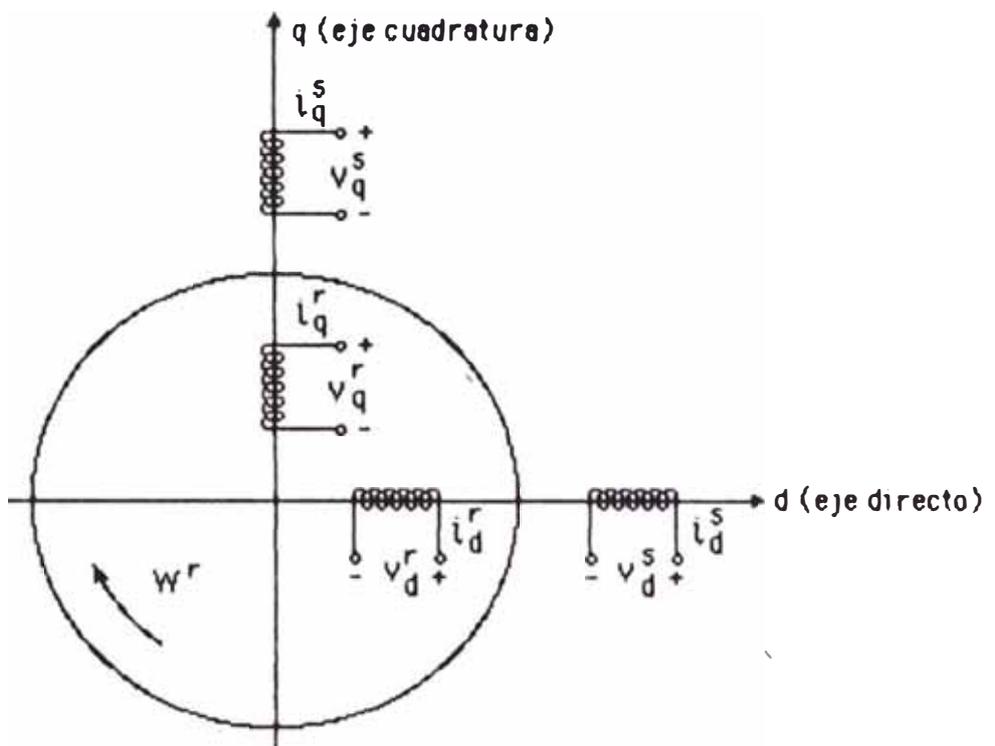


Fig. 2.1

CAPITULO 3

REDUCCION DE LAS MAGNITUDES A UN BOBINADO COMUN

Debido a la asimetría estática que presenta el motor capacitor, autoinductancia de cada fase del estator y las inductancias mutuas entre las fases del estator y el rotor no son iguales, esta dificultad es superada "reduciendo" todas las magnitudes a un bobinado común que permita obtener un circuito equivalente en función de las relaciones de espiras que se presenten.

"Reducción" es un artificio muy utilizado en el análisis de las máquinas eléctricas mediante el cual la máquina real, que tiene sus bobinados con diferente número de espiras, se **sustituye** por una máquina equivalente cuyos bobinados tienen espiras igual al de un bobinado común. En este caso se escoge como bobinado común al bobinado estático directo (N_d), también llamado bobinado principal

Con este artificio se eliminan los acoplamientos tipo transformador en el circuito equivalente, y los bobinados reducidos serán denotados marcando los símbolos de las magnitudes con un super-índice "prima" tal como se muestra a continuación.

MAQUINA REAL MAQUINA EQUIVALENTE

$N_d = N_d$	$N_d = N_d$
$N_a = N_a$	$N_a = N_d$
$N_a = N_a$	$N_a = N_d$
$N_d = N_d$	$N_d = N_d$

3.1 Condiciones para la reducción:

Para realizar una correcta reducción se deben respetar determinadas condiciones las cuales se basan en el principio de conservación de la energía.

a) CONDICION DE F.M.M CONSTANTE:

Esta condición significa que en la reducción debe conservarse el valor original de la fuerza magnetomotriz ó en otras palabras el flujo magnético se conserva.

b) CONDICION DE V - A CONSTANTE:

La reducción se efectúa manteniendo constante los volt-amper originales tanto en lo referente tensiones inducidas como a las tensiones de alimentación.

c) CONDICION DE $I^2 * R$ CONSTANTE:

Según esta condición se debe conservar las pérdidas de energía por efecto JOULE.

d) CONDICION DE $I^2 * L$ CONSTANTE:

Esta condición significa que la energía magnética del flujo de dispersión conserva su valor original.

3.2 Reducción de las magnitudes del bobinado rotórico directo y en cuadratura

Aplicando las condiciones de reducción en forma ordenada:

a) CONDICION F.M.M: CONSTANTE

$$N_d^r * i_d^r = N_d^{\bullet} * i_d^{\bullet r} = \text{constante}$$

$$N_q^r * i_q^r = N_q^{\bullet} * i_q^{\bullet r} = \text{constante}$$

Por simetría del rotor: $N_d^r = N_q^r = N^r$

luego respectivamente: $i_d^{\bullet r} = \frac{i_d^r}{a_d}$ (3.1)

$$i_q^{\bullet r} = \frac{i_q^r}{a_d}$$
 (3.2)

donde:

$$a_d = \frac{N_d^{\bullet}}{N^r}$$

b) CONDICION $V - A$: CONSTANTE

$$V_d^r * i_d^r = V_d^{\bullet r} * i_d^{\bullet r} = \text{constante}$$

$$V_q^r * i_q^r = V_q^{\bullet r} * i_q^{\bullet r} = \text{constante}$$

respectivamente se tiene: $v_d^r = v_d^r * \begin{bmatrix} i_d^r \\ i_d^r \end{bmatrix}$

$$v_a^r = v_a^r * \begin{bmatrix} i_a^r \\ i_a^r \end{bmatrix}$$

donde: $v_d^r = a_d^r v_d^r$ (3.3)

$$v_a^r = a_d^r v_a^r$$
 (3.4)

por analogía las tensiones inducidas serán:

$$e_d^r = a_d^r e_d^r$$
 (3.5)

$$e_a^r = a_d^r e_a^r$$
 (3.6)

c) CONDICION $i^2 * R$: CONSTANTE

$$\left[i_d^r \right]^2 * \left[R_d^r \right] = \left[i_d^r \right]^2 * \left[R_d^r \right] = \text{constante}$$

$$\left[i_a^r \right]^2 * \left[R_a^r \right] = \left[i_a^r \right]^2 * \left[R_a^r \right] = \text{constante}$$

respectivamente se tiene: $R_d^r = R_d^r * \begin{bmatrix} i_d^r \\ i_d^r \end{bmatrix}^2$

$$R_a^r = R_a^r * \begin{bmatrix} i_a^r \\ i_a^r \end{bmatrix}^2$$

por simetría del rotor: $R_d^r = R_q^r$, luego:

$$R_d^{gr} = a_d^z R_d^r$$

$$R_q^{gr} = a_d^z R_q^r$$

se deduce: $R_d^{gr} = R_q^{gr}$ (3.7)

d) CONDICION $i^2 * L_1$: CONSTANTE

$$\left[i_d^r \right]^2 * \left[L_{1d}^r \right] = \left[i_d^{gr} \right]^2 * \left[L_{1d}^{gr} \right] = \text{constante}$$

$$\left[i_q^r \right]^2 * \left[L_{1q}^r \right] = \left[i_q^{gr} \right]^2 * \left[L_{1q}^{gr} \right] = \text{constante}$$

respectivamente: $L_{1d}^{gr} = L_{1d}^r * \left[\frac{i_d^r}{i_d^{gr}} \right]^2$

$$L_{1q}^{gr} = L_{1q}^r * \left[\frac{i_q^r}{i_q^{gr}} \right]^2$$

luego: $L_{1d}^{gr} = a_d^z L_{1d}^r$

$$L_{1q}^{gr} = a_d^z L_{1q}^r$$

por simetría del rotor se tiene: $L_{1d}^r = L_{1q}^r$

entonces: $L_{1d}^{gr} = L_{1q}^{gr}$ (3.8)

3.3 Reducción de las magnitudes del bobinado estático en Cuadratura

Se aplican las condiciones de reducción para este bobinado teniendo presente que las magnitudes ligadas al bobinado estático en cuadratura reducidas (referidas) al bobinado estático directo se indican con el super índice "prima"

a) CONDICION F.M.M : CONSTANTE

$$N_a \dot{i}_a = N_a' \dot{i}_a' = \text{constante}$$

luego:

$$\dot{i}_a' = \left[\frac{N_a}{N_a'} \right] * \dot{i}_a$$

$$\dot{i}_a' = a \dot{i}_a$$

en estado estacionario: $I_a' = a I_a$ (3.9)

donde: $a = \frac{N_a}{N_a'}$ (3.10)

b) CONDICION V - A : CONSTANTE

$$V_a \dot{i}_a = V_a' \dot{i}_a' = \text{constante}$$

$$\dot{i}_a' = \frac{V_a}{V_a'} * \dot{i}_a$$

donde:

$$v_a = \frac{V_a}{a}$$

en estado estacionario:

$$v_a = \frac{V_a}{a} \quad (3.11)$$

por analogia las tensiones inducidas son:

$$e_a = \frac{e_a}{a}$$

en estado estacionario:

$$E_a = \frac{E_a}{a} \quad (3.12)$$

c) CONDICION $i^2 * R$: CONSTANTE

$$[i_a]^2 * R_a = [i_a']^2 * R_a'$$

$$R_a' = R_a * \left[\frac{i_a}{i_a'} \right]^2$$

donde :

$$R_a' = \frac{R_a}{a^2} \quad (3.13)$$

d) CONDICION $i^2 * L_1$: CONSTANTE

$$[i_a]^2 * L_{1a} = [i_a']^2 * L_{1a}'$$

$$L_{1a}' = L_{1a} * \left[\frac{i_a}{i_a'} \right]^2$$

donde :

$$L_{1q} = \frac{L_{1q}}{a^2}$$

o

$$X_{1q} = \frac{X_{1q}}{a^2} \quad (3.14)$$

3.4 Reducción de las inductancias mutuas y autoinductancias

Debido a la asimetría de los bobinados estatóricos, la autoinductancia e inductancias mutuas entre las fases del estator y rotor son diferentes. Este aparente problema queda superado con la reducción de dichas magnitudes.

Es necesario recordar que la auto-inductancia está formada por dos componentes, la primera componente cuantifica el flujo que cruza el entrehierro y se denomina inductancia propia de magnetización, mientras que la segunda componente representa el flujo de dispersión y es conocida como inductancia propia de dispersión. Ambas son proporcionales al cuadrado del número de espiras eficaces e inversamente proporcionales a sus respectivas reluctancias, esta última depende de la geometría del circuito magnético de la máquina y de su permeabilidad.

Por otro lado la inductancia mutua que está definida por la interacción magnética entre dos bobinas, es

directamente proporcional al producto de las espiras eficaces de las bobinas en juego, e inversamente proporcional a la reluctancia.

3.4.1 Reducción de la autoinductancia del bobinado estatórico y rotórico directo

La auto-inductancia total del bobinado estatórico y rotórico directo e inductancia mutua de ambos bobinados son correspondientemente los siguientes:

$$L_d^{\bullet} = L_d^{\bullet r} + L_{1d}^{\bullet} = \frac{[N_d^{\bullet}]^2}{iR_d^{\bullet}} + \frac{[N_d^{\bullet}]^2}{iR_{1d}^{\bullet}}$$

$$L_d^r = L_d^{r r} + L_{1d}^r = \frac{[N_d^r]^2}{iR_d^r} + \frac{[N_d^r]^2}{iR_{1d}^r}$$

$$M_d^{\bullet r} = M_d^{r \bullet} = \frac{N_d^r N_d^{\bullet}}{iR_d^{\bullet}}$$

Aplicando la reducción se tiene :

$$L_d^{\bullet} = L_d^{\bullet r} + L_{1d}^{\bullet} = \frac{[N_d^{\bullet}]^2}{iR_d^{\bullet}} + \frac{[N_d^{\bullet}]^2}{iR_{1d}^{\bullet}}$$

$$L_d^r = L_d^{r r} + L_{1d}^r = \frac{[N_d^r]^2}{iR_d^r} + \frac{[N_d^r]^2}{iR_{1d}^r}$$

$$M_d^{ee} = M_d^{rr} = \frac{[N_d^e]^2}{iR_d^e} \quad (3.15)$$

Por simetría de la estructura magnética en la fig.2.2 se observa que $iR_d^e = iR_d^r$ y así se tiene:

$$L_d^{ee} = L_d^{rr} = M_d^{ee}, \text{ como resultado se obtiene:}$$

$$L_d^e = M_d^{ee} + L_{1d}^e \quad (3.16)$$

$$L_d^r = M_d^{rr} + L_{1d}^r \quad (3.17)$$

3.4.2 Reducción de la autoinductancia del bobinado estático y rotórico en cuadratura

La auto-inductancia total del bobinado estático y rotórico en cuadratura e inductancia mutua de ambos bobinados, son respectivamente los siguientes:

$$L_d^e = L_{1d}^e + L_{1d}^e = \frac{[N_d^e]^2}{iR_d^e} + \frac{[N_d^e]^2}{iR_{1d}^e}$$

$$L_d^r = L_{1d}^r + L_{1d}^r = \frac{[N_d^r]^2}{iR_d^r} + \frac{[N_d^r]^2}{iR_{1d}^r}$$

$$M_d^{er} = M_d^{re} = \frac{N_d^r N_d^e}{iR_d^e}$$

Aplicando la reducción se tiene :

$$L_a^{gr} = L_a^{gr} + L_{1a}^{gr} = \frac{[N_d]^2}{iR_a} + \frac{[N_d]^2}{iR_{1a}}$$

$$L_a^{gr} = L_a^{gr} + L_{1a}^{gr} = \frac{[N_d]^2}{iR_a} + \frac{[N_d]^2}{iR_{1a}}$$

$$M_a^{gr} = M_a^{gr} = \frac{[N_d]^2}{iR_a} \quad (3.18)$$

Por simetría de la estructura magnética en la fig 2.2 se observa que $iR_a = iR_{1a}$ y así se tiene:

$$L_a^{gr} = L_a^{gr} = M_a^{gr} \quad , \text{ como resultado se obtiene:}$$

$$L_a^{gr} = M_a^{gr} + L_{1a}^{gr} \quad (3.19)$$

$$L_a^{gr} = M_a^{gr} + L_{1a}^{gr} \quad (3.20)$$

comparando la ecuación (3.18) y (3.15) se puede decir

$$M_a^{gr} = M_a^{gr} \quad (3.21)$$

debido a la simetría del rotor en la fig. 2.2 se puede observar que :

$$iR_{1a} = iR_{1a}$$

$$\text{luego :} \quad L_{1a}^{gr} = L_{1a}^{gr} \quad (3.22)$$

De las ecuaciones (3.7) y (3.8) se define

$$R_a^{sr} = R_d^{sr} = R_2 \quad (3.23)$$

y

$$L_{1d}^{sr} = L_{1a}^{sr} = L_2 \quad (3.24)$$

finalmente se tiene en el estator:

$$L_d^s = M_d^{sr} + L_{1d}^s \quad (3.25)$$

$$L_a^s = M_d^{sr} + L_{1a}^s \quad (3.26)$$

y en el rotor :

$$L_d^{sr} = M_d^{sr} + L_{1d}^{sr} \quad (3.27)$$

$$L_a^{sr} = M_d^{sr} + L_{1a}^{sr} \quad (3.28)$$

Reducidas todas las magnitudes tanto del rotor y del estator. En el acápite siguiente se harán los reemplazos respectivos en las ecuaciones matriciales de funcionamiento estacionario.

3.5 Ecuaciones en estado estacionario con magnitudes reducidas

Las ecuaciones (2.10) en estado estacionario del motor bifásico asimétrico de acuerdo al modelo "D - Q" serán transformadas utilizando las magnitudes reducidas que fueron explicadas en el acápite anterior.

Luego se tendrá :

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_d \\ \dot{V}_q \\ \dot{V}_d \\ \dot{V}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_d + j\omega L_d & 0 & j\omega M_d & 0 \\ 0 & R_q + j\omega L_q & 0 & j\omega M_d \\ j\omega M_d & -nM_d \omega & R_d + j\omega L_d & -nL_q \omega \\ nM_d \omega & j\omega M_d & nL_d \omega & R_q + j\omega L_q \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dot{I}_d \\ \dot{I}_q \\ \dot{I}_d \\ \dot{I}_q \end{bmatrix}$$

Ecuación (3.29)

Desdoblado las autoinductancias de la diagonal principal de la matriz de impedancias de la ecuación (3.29) por sus respectivas equivalencias expresadas por las ecuaciones (3.25), (3.26), (3.27), (3.28) se obtiene la ec (3.30)

Por definición la velocidad sincrónica está dada por:

$$\omega_s = \omega / n \quad (3.31)$$

el deslizamiento como:

$$s = (\omega_s - \omega) / \omega_s \quad (3.32)$$

la velocidad " \dot{W} " en función del deslizamiento es:

$$\dot{W}^r = (1 - S) * \dot{W}_s = (1 - S) * \dot{W} / n \quad (3.33)$$

se deduce: $\dot{W} * n = (1 - S) * \dot{W}$ (3.34)

reemplazando la ecuación (3.34) en el sistema de ecuaciones (3.30) se obtiene la ec. (3.35)

Si a continuación se define :

$$X_M = \dot{W} M_d^{r,n} \quad (3.36)$$

$$X_{1d} = \dot{W} L_{1d}^{r,n} \quad (3.37)$$

$$X_{1q} = \dot{W} L_{1q}^{r,n} \quad (3.38)$$

$$X_2 = \dot{W} L_{1d}^{r,n} \quad (3.39)$$

$$R_2 = R_d^{r,n} \quad (3.40)$$

Reemplazando estas últimas definiciones en la ecuación matricial (3.35) se obtiene la ec (3.41)

En estas ecuaciones se puede identificar las impedancias de los bobinados estáticos, los cuales son:

$$Z_d = R_d + j X_{1d} \quad (3.42)$$

$$Z_q = R_q + j X_{1q} \quad (3.43)$$

luego reemplazando las ecuaciones (3.42) y (3.43) en la ecuación matricial (3.41) se obtiene :

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_d \\ \dot{V}_q \\ \dot{V}_d \\ \dot{V}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_d + jX_M & 0 & jX_M & 0 \\ 0 & Z_q + jX_M & 0 & jX_M \\ jX_M & -(1-S)X_M & R_2 + j(X_2 + X_M) & -(1-S)(X_2 + X_M) \\ (1-S)X_M & jX_M & (1-S)(X_2 + X_M) & R_2 + j(X_2 + X_M) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dot{I}_d \\ \dot{I}_q \\ \dot{I}_d \\ \dot{I}_q \end{bmatrix}$$

Ecuación (3.44)

La ecuación (3.44) también se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{dq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{dq} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dot{I}_{dq} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

donde :

$\begin{bmatrix} \dot{V}_{dq} \end{bmatrix}$: matriz de tensiones reducidas

$\begin{bmatrix} Z_{dq} \end{bmatrix}$: matriz de impedancias reducidas

$\begin{bmatrix} \dot{I}_{dq} \end{bmatrix}$: matriz de corrientes reducidas

El sistema de ecuaciones (3.44) puede ser expresada en un primer circuito equivalente que se muestra en la fig. 3.1. Para obtenerlo se ha tenido en consideración que:

$$\dot{V}_d = \dot{V}_q = 0$$

(El rotor no posee fuente de tensión alguna en este caso, por ser un rotor en corto circuito)

Se define también en el circuito equivalente

$$\vec{E}_d = \left[\vec{I}_d + \vec{I}_d' \right] * \left[j X_M \right]$$

$$\vec{E}_q = \left[\vec{I}_q + \vec{I}_q' \right] * \left[j X_M \right]$$

Como se aprecia a partir del sistema de ecuaciones de funcionamiento que han sido obtenidas en este capítulo, es posible deducir un primer circuito equivalente que representa al motor capacitor en estado estacionario.

Para la aplicación de las componentes simétricas se tomará como punto de partida este 1^{er} circuito equivalente reducido que se ha obtenido en el presente capítulo.

$$\begin{bmatrix}
 \cdot^s V_d \\
 \cdot^s V_q \\
 \cdot^r V_d \\
 \cdot^r V_q
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \begin{matrix}
 s \\
 R + j(X + X) \\
 d \\
 M \\
 Id
 \end{matrix} & 0 & jX & 0 \\
 \begin{matrix}
 \cdot^s R + j(X + X) \\
 q \\
 M \\
 Iq
 \end{matrix} & 0 & 0 & jX \\
 \begin{matrix}
 -(1-S)X \\
 M \\
 R + j(X + X) \\
 2
 \end{matrix} & \begin{matrix}
 -(1-S)X \\
 M \\
 R + j(X + X) \\
 2
 \end{matrix} & \begin{matrix}
 -(1-S)X \\
 M \\
 R + j(X + X) \\
 2
 \end{matrix} & \begin{matrix}
 -(1-S)X \\
 M \\
 R + j(X + X) \\
 2
 \end{matrix} \\
 \begin{matrix}
 (1-S)X \\
 M \\
 jX \\
 M
 \end{matrix} & \begin{matrix}
 (1-S)X \\
 M \\
 jX \\
 M
 \end{matrix} & \begin{matrix}
 (1-S)X \\
 M \\
 R + j(X + X) \\
 2
 \end{matrix} & \begin{matrix}
 (1-S)X \\
 M \\
 R + j(X + X) \\
 2
 \end{matrix}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \cdot^s I_d \\
 \cdot^s I_q \\
 \cdot^r I_d \\
 \cdot^r I_q
 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

EQUACION (3.41)

CAPITULO 4

APLICACION DE LAS COMPONENTES SIMETRICAS AL SISTEMA

El sistema de ecuaciones en estado estacionario reducidas (3.44) presenta algunas desventajas, por ejemplo los voltajes reducidos son asimétricos lo cual complica el análisis del comportamiento del motor; por esta razón, para simplificar su solución es necesario introducir un nuevo conjunto de magnitudes eléctricas, lo cual será logrado con la aplicación de las Componentes Simétricas

La aplicación de las Componentes Simétricas a las ecuaciones (3.44) se lleva acabo transformando estas ecuaciones mediante la matriz de componentes simétricas bifásicas.

Esta matriz de transformación es del tipo no ortogonal, debido a que el sistema de ecuaciones de ligadura son de caracter lineal se podrá aplicar tanto a las tensiones como a las corrientes.

En principio se detalla la aplicación de la matriz de transformación de componentes simétricas al estator del motor con las figuras aclaratorias correspondientes y definiciones que serán usadas en el capítulo siguiente.

Luego se detalla la aplicación general de la matriz de transformación de componentes simétricas tanto al estator como al rotor.

Para transformar el sistema de ecuaciones reducidas (ec. 3.44) a componentes simétricas; para este fin se requiere el manejo operacional de matrices, que nos permita deducir un 2do. circuito equivalente en función de sus componentes de secuencia positiva y negativa.

4.1 Matriz de transformación de componentes simétricas bifásicas

La transformación de componentes simétricas bifásicas, para las tensiones "reducidas" del estator se expresa mediante la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{+-} \\ \dot{V}_{dq} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{+-,dq} * \begin{bmatrix} \dot{V}_{d+} \\ \dot{V}_{d-} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

La matriz de tensión presentes en la ec. (4.1) están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{d+} \\ \dot{V}_{d-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_d \\ \dot{V}_q \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{+-} \\ \dot{V}_{dq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{d(+)} \\ \dot{V}_{d(-)} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Debido a que el sistema es de carácter lineal, la matriz de transformación de tensiones inducidas y la corrientes reducidas del estator son similares a la ec. (4.1).

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{+-} \end{bmatrix} = \dot{i}R_{+-,dq} * \begin{bmatrix} \dot{I}_{dq} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{E}_{+-} \end{bmatrix} = \dot{i}R_{+-,dq} * \begin{bmatrix} \dot{E}_{dq} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

La matriz de transformación de componentes simétricas bifásicas para las magnitudes reducidas del estator es no ortogonal y se define por:

$$\dot{i}R_{+-,dq} = \begin{bmatrix} 1/2 & -j/2 \\ 1/2 & j/2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Dadas las tensiones (+,-), puede encontrarse fácilmente las D-Q, invirtiendo la ecuación (4.1), esto es:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{dq} \end{bmatrix} = \dot{i}R_{dq,+-} * \begin{bmatrix} \dot{V}_{+-} \end{bmatrix} \quad (4.7a)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{dq} \end{bmatrix} = \dot{i}R_{dq,+-} * \begin{bmatrix} \dot{I}_{+-} \end{bmatrix} \quad (4.7b)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{E}_{dq} \end{bmatrix} = \dot{i}R_{dq,+-} * \begin{bmatrix} \dot{E}_{+-} \end{bmatrix} \quad (4.7c)$$

Donde:

$$\dot{i}R_{dq,+-} = \left[\dot{i}R_{+-,dq} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Como se dijo anteriormente, también puede determinarse las corrientes reducidas y tensiones inducidas reducidas "D-Q" si son conocidas las componentes respectivas (+,-)

Para aclarar el significado de la transformación de componentes simétricas a las magnitudes reducidas, debe tenerse en cuenta las ecuaciones antes deducidas las cuales son:

$$\dot{I}_a = a \dot{I}_q \quad \text{de (3.9)}$$

$$\dot{V}_a = \frac{\dot{V}_q}{a} \quad \text{de (3.11)}$$

$$\dot{E}_a = \frac{\dot{E}_q}{a} \quad \text{de (3.12)}$$

Reemplazando dichas equivalencias en las componentes de la transformación dada por la matriz ec. (4.1), (4.4) y (4.5) se obtienen las magnitudes (+,-) del estator. Luego desarrollando la ec. (4.1) se obtiene:

$$\dot{V}_a(+,-) = 1/2 \left[\dot{V}_d - j\dot{V}_q \right] = 1/2 \left[\dot{V}_d - j\dot{V}_q / a \right] \quad (4.9)$$

$$\dot{V}_a(-,-) = 1/2 \left[\dot{V}_d + j\dot{V}_q \right] = 1/2 \left[\dot{V}_d + j\dot{V}_q / a \right] \quad (4.10)$$

En la fig. 4.1a se puede apreciar la interpretación gráfica de las ec. (4.9) y (4.10).

Desarrollando (4.4) se obtiene:

$$\dot{I}_{d(+)} = 1/2 \left[\dot{I}_d - j\dot{I}_q \right] = 1/2 \left[\dot{I}_d - ja\dot{I}_q \right] \quad (4.11)$$

$$\dot{I}_{d(-)} = 1/2 \left[\dot{I}_d + j\dot{I}_q \right] = 1/2 \left[\dot{I}_d + ja\dot{I}_q \right] \quad (4.12)$$

En la fig 4.2a se muestra la interpretación gráfica de las ec. (4.11) y (4.12), luego desarrollando la ec. 4.5 se obtiene:

$$\dot{E}_{d(+)} = 1/2 \left[\dot{E}_d - j\dot{E}_q \right] = 1/2 \left[\dot{E}_d - j\dot{E}_q / a \right] \quad (4.13)$$

$$\dot{E}_{d(-)} = 1/2 \left[\dot{E}_d + j\dot{E}_q \right] = 1/2 \left[\dot{E}_d + j\dot{E}_q / a \right] \quad (4.14)$$

En la fig. 4.3a se muestra la interpretación gráfica de las ec. (4.13) y (4.14)

De la misma forma como se dijo antes si son conocidas las componentes (+,-) se pueden determinar las componentes D-Q de las magnitudes reducidas. Por lo tanto desarrollando dichas equivalencias de las ecuaciones matriciales (4.7a), (4.7b) y (4.7c). De la ec. matricial (4.7a) se obtiene:

$$\dot{V}_d = \dot{V}_{d(+)} + \dot{V}_{d(-)} \quad (4.15a)$$

$$\dot{V}_q / a = j\dot{V}_{d(+)} - j\dot{V}_{d(-)} \quad (4.15b)$$

En la fig 4.1b se muestra su interpretación gráfica de las ec. (4.15a) y (4.15b)

De la ec. matricial (4.7b) se obtiene:

$$\dot{\mathbf{I}}_d = \dot{\mathbf{I}}_{d(+)} + \dot{\mathbf{I}}_{d(-)} \quad (4.16a)$$

$$a\dot{\mathbf{I}}_q = j\dot{\mathbf{I}}_{d(+)} - j\dot{\mathbf{I}}_{d(-)} \quad (4.16b)$$

En la fig 4.2b se muestra su interpretación gráfica de las ec. (4.16a) y (4.16b)

De la ec. matricial (4.7c) se obtiene:

$$\dot{\mathbf{E}}_d = \dot{\mathbf{E}}_{d(+)} + \dot{\mathbf{E}}_{d(-)} \quad (4.17a)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_q / a = j\dot{\mathbf{E}}_{d(+)} - j\dot{\mathbf{E}}_{d(-)} \quad (4.17b)$$

En la fig. 4.3b se muestra su interpretación gráfica de las ec. (4.17a) y (4.17b)

Definiendo las componentes (+,-) del bobinado auxiliar o cuadratura:

En tensiones aplicadas:

$$\dot{\mathbf{V}}_{q(+)} = + j a \dot{\mathbf{V}}_{d(+)} \quad (4.18a)$$

$$\dot{\mathbf{V}}_{q(-)} = - j a \dot{\mathbf{V}}_{d(-)} \quad (4.18b)$$

En corrientes:

$$\dot{\mathbf{I}}_{q(+)} = + j \dot{\mathbf{I}}_{d(+)} / a \quad (4.19a)$$

$$\dot{\mathbf{I}}_{q(-)} = - j \dot{\mathbf{I}}_{d(-)} / a \quad (4.19b)$$

En tensiones inducidas en forma análoga a las tensiones aplicadas se tiene:

$$\ddot{E}_q(+)= + j a \ddot{E}_d(+), \quad (4.20a)$$

$$\ddot{E}_q(-)= - j a \ddot{E}_d(-), \quad (4.20b)$$

Haciendo uso de las definiciones anteriores se puede deducir las siguientes ecuaciones

$$\ddot{V}_q = j a \left[\ddot{V}_d(+), - \ddot{V}_d(-) \right] \quad (4.21)$$

$$\ddot{I}_q = j/a * \left[\ddot{I}_d(+), - \ddot{I}_d(-) \right] \quad (4.22)$$

$$\ddot{E}_q = j a \left[\ddot{E}_d(+), - \ddot{E}_d(-) \right] \quad (4.23)$$

4.2 Aplicación de las componentes simétricas

El sistema de ecuaciones 3.44 se reescribe a continuación:

$$\begin{bmatrix} \ddot{V}_d \\ \ddot{V}_q \\ \ddot{V}_d \\ \ddot{V}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_d + jX_M & 0 & jX_M & 0 \\ 0 & Z_q + jX_M & 0 & jX_M \\ jX_M & -(1-S)X_M & R_2 + j(X_2 + X_M) & -(1-S)(X_2 + X_M) \\ (1-S)X_M & jX_M & (1-S)(X_2 + X_M) & R_2 + j(X_2 + X_M) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \ddot{I}_d \\ \ddot{I}_q \\ \ddot{I}_d \\ \ddot{I}_q \end{bmatrix}$$

La transformación de componentes simétricas para aplicarse tanto a los dos bobinados del estator como a los dos bobinados del rotor es:

$$\begin{bmatrix} \overline{V_{+-}} \\ \overline{iR_{+-,dq}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -j/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & +j/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -j/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & +j/2 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

La ecuación 3.44 también puede escribirse en forma matricial tal como se aprecia en la ec. 3.45 que se reescribe a continuación .

$$\begin{bmatrix} \overline{V_{dq}} \\ \overline{iR_{dq}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Z_{dq}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \overline{I_{dq}} \end{bmatrix}$$

Esta ecuación al usar la transformación completa de componentes simétricas dada en la ecuación (4.24) se transforma en:

$$\begin{bmatrix} \overline{V_{+-}} \\ \overline{iR_{+-}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Z_{+-}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \overline{I_{+-}} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$\text{Donde : } \begin{bmatrix} \overline{V_{+-}} \\ \overline{iR_{+-,dq}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{iR_{+-,dq}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \overline{V_{dq}} \\ \overline{iR_{dq}} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$\begin{bmatrix} \overline{I_{+-}} \\ \overline{iR_{+-}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{iR_{+-,dq}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \overline{I_{dq}} \\ \overline{iR_{dq}} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

y :

$$\begin{bmatrix} \overline{Z_{+-}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{iR_{+-,dq}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \overline{Z_{dq}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \overline{iR_{+-,dq}} \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.28)$$

Entonces reemplazando (4.28) en (4.25) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \ddot{V}_{+-} \\ \ddot{V}_{+-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{R}_{+-,dq} \\ \ddot{R}_{+-,dq} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \ddot{Z}_{dq} \\ \ddot{Z}_{dq} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \ddot{R}_{+-,dq} \\ \ddot{R}_{+-,dq} \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} \ddot{I}_{+-} \\ \ddot{I}_{+-} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Desarrollando la ecuación matricial (4.29) en todos sus términos se obtiene la ec. (4.30)

El resultado del producto de matrices es la ec(4.31)

Definiendo :

$$\ddot{E}_{d(+)} = \left[\ddot{I}_{d(+)} + \ddot{I}_{d(+)} \right] * (jX_M) \quad (4.32a)$$

$$\ddot{E}_{d(-)} = \left[\ddot{I}_{d(-)} + \ddot{I}_{d(-)} \right] * (jX_M) \quad (4.32b)$$

dividiendo la 3a. fila entre "S" y

" " 4a. " " "2-S" se obtiene la ec (4.33)

Podría decirse que el circuito equivalente es el desarrollo de la ecuación matricial (4.33) en el cual se agrega en forma conveniente las ecuaciones 4.32 a,b y teniendo en cuenta que

$$\ddot{V}_{d(+)} = \ddot{V}_{d(-)} = 0$$

porque el rotor está cortocircuitado, se obtiene :

$$\ddot{V}_{d(+)} = \ddot{I}_{d(+)} * 1/2 * (\ddot{Z}_d + \ddot{Z}_q) + \ddot{E}_{d(+)} + \ddot{I}_{d(-)} * 1/2 * (\ddot{Z}_d - \ddot{Z}_q) \quad (4.34a)$$

$$\ddot{V}_{d(-)} = \ddot{I}_{d(-)} * 1/2 * (\ddot{Z}_d + \ddot{Z}_q) + \ddot{E}_{d(-)} + \ddot{I}_{d(+)} * 1/2 * (\ddot{Z}_d - \ddot{Z}_q) \quad (4.34b)$$

$$0 = \ddot{E}_{d(+)} + \ddot{I}_{d(+)} * (R_z/S + jX_z) \quad (4.34c)$$

$$0 = \ddot{E}_{d(-)} + \ddot{I}_{d(-)} * \left[\frac{R_z}{(2-S)} + jX_z \right] \quad (4.34d)$$

Las ecuaciones de (4.34a) al (4.34d) se pueden reescribir de la siguiente manera:

$$\vec{V}_d(+)=\vec{I}_d(+)*Z_d+\vec{E}_d(+)+(\vec{I}_d(+)-\vec{I}_d(-))*1/2*(Z_q-Z_d) \quad (4.35a)$$

$$\vec{V}_d(-)=\vec{I}_d(-)*Z_d+\vec{E}_d(-)+(\vec{I}_d(-)-\vec{I}_d(+))*1/2*(Z_q-Z_d) \quad (4.35b)$$

$$0 = \vec{E}_d(+)+\vec{I}_d(+)*(R_z/S+jX_z) \quad (4.35c)$$

$$0 = \vec{E}_d(-)+\vec{I}_d(-)*(R_z/(2-S)+jX_z) \quad (4.35d)$$

El circuito equivalente de las cuatro ecuaciones antes escritas se puede apreciar en la fig 4.4

En la fig.4.4 se reemplaza las tensiones, corrientes y parámetros reducidos, dadas por ecuaciones deducidas anteriormente las cuales son :

$$\vec{I}_q = a * \vec{I}_d$$

$$\vec{V}_q = \vec{V}_d / a$$

$$\vec{E}_q = \vec{E}_d / a$$

$$R_q = R_d / a^2$$

$$X_{1q} = X_{1d} / a^2$$

Luego de reemplazar el resultado es la red de la fig.4.5 que muestra al circuito equivalente de la fig.4.4 con mayor detalle.

- Observese que la impedancia de acoplamiento entre las mallas positivas (que se denominará hacia adelante) y

la negativa (denominada hacia atras) del estator, es una impedancia de valor :

$$1 / 2 * (\dot{Z}_q - \dot{Z}_d)$$

- La existencia de esta impedancia de acoplamiento es una consecuencia de la asimetría en los bobinados del estator y la reactancia neta puede ser capacitiva o inductiva lo que dependerá en gran parte de la impedancia pasiva externa conectada en el circuito cuadratura del estator. Esta impedancia puede constar de elementos capacitivos así como inductivos; en el caso bajo estudio debe considerarse una capacidad. La impedancia " \dot{Z}_q " será una impedancia reducida (referida) que implícitamente incluye la impedancia capacitiva. Por lo tanto se puede escribir :

$$\dot{Z}_q = \left[\begin{array}{c} \dot{Z}_q \\ \frac{\dot{Z}_c}{a^2} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \dot{Z}_c \\ \frac{\dot{Z}_c}{a^2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} R_q & X_{1q} \\ \frac{R_q}{a^2} + j \frac{X_{1q}}{a^2} & \frac{R_c}{a^2} - j \frac{X_c}{a^2} \end{array} \right] \quad (4.36)$$

y también : $\dot{Z} = (\dot{Z}_q - \dot{Z}_d)$ (4.37)

donde al desarrollar esta ecuación se obtiene:

$$\dot{Z} = \left[\frac{(R_q + R_c)}{a^2} - R_d \right] + j \left[\left(\frac{X_{1q} - X_c}{a^2} \right) - X_{1d} \right] \quad (4.38)$$

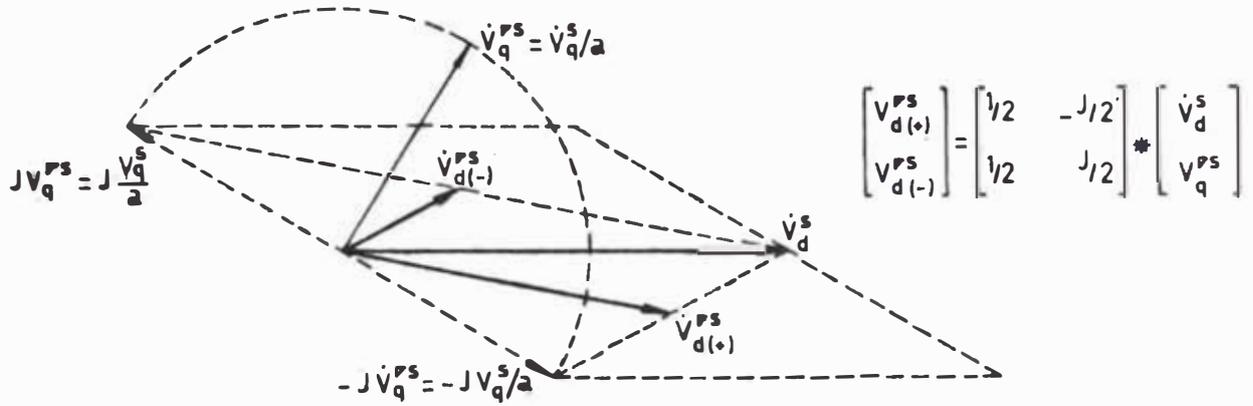
$$\begin{bmatrix}
 \cdot\cdot^s V \\
 d(+)\cdot\cdot^s
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 1/2 & -j/2 & 0 & 0 \\
 1/2 & j/2 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \cdot\cdot^s Z + jX \\
 d \cdot\cdot^s M \\
 0 & 0 & jX & M \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 1 & 1 & 0 & 0 \\
 j & -j & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \cdot\cdot^s I \\
 d(+)\cdot\cdot^s
 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 \cdot\cdot^s V \\
 d(-)\cdot\cdot^s
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 1/2 & -j/2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1/2 & -j/2
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \cdot\cdot^s Z + jX \\
 d \cdot\cdot^s M \\
 0 & 0 & jX & M \\
 -\frac{(1-S)X}{M} & R + j(X + X) & -\frac{(1-S)(X + X)}{2} & M
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \cdot\cdot^s I \\
 d(+)\cdot\cdot^s
 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 \cdot\cdot^s V \\
 d(-)\cdot\cdot^s
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 1/2 & j/2 \\
 0 & 0 & 1/2 & j/2
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \cdot\cdot^s Z + jX \\
 d \cdot\cdot^s M \\
 0 & 0 & jX & M \\
 \frac{(1-S)X}{M} & (1-S)(X + X) & R + (X + X) & M
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 0 & 0 & j & -j \\
 0 & 0 & j & -j
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \cdot\cdot^s I \\
 d(-)\cdot\cdot^s
 \end{bmatrix}$$

EDUACION (4.30)

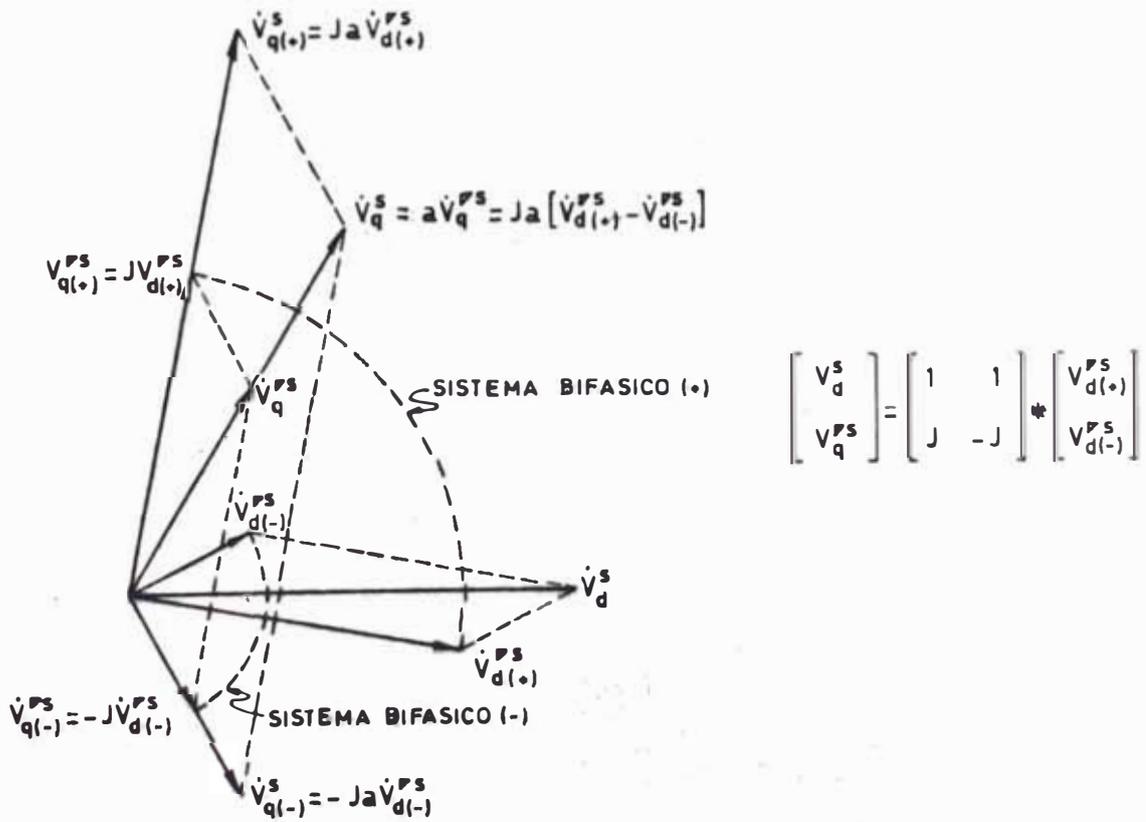
$$\begin{bmatrix}
 \dot{V}_d(+), s \\
 \dot{V}_d(-), s \\
 \dot{V}_d(+), s \\
 \dot{V}_d(-), s
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \frac{1}{2} \frac{\dot{V}_s}{d} \frac{1}{(Z + Z)} + jX \frac{M}{d} & \frac{\dot{V}_s}{2} \frac{1}{(Z - Z)} & jX \frac{M}{d} & 0 \\
 \frac{1}{2} \frac{\dot{V}_s}{d} \frac{1}{(Z - Z)} & \frac{\dot{V}_s}{2} \frac{1}{(Z + Z)} + jX \frac{M}{d} & 0 & jX \frac{M}{d} \\
 jX \frac{M}{d} & 0 & \frac{R}{2} \frac{1}{S} + j(X + X) \frac{M}{2} & 0 \\
 0 & jX \frac{M}{d} & 0 & \frac{R}{2} \frac{1}{(2-S)} + j(X + X) \frac{M}{2}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \dot{I}_d(+), s \\
 \dot{I}_d(-), s \\
 \dot{I}_d(+), s \\
 \dot{I}_d(-), s
 \end{bmatrix}$$

EDUACION (4.33)

COMPONENTES SIMÉTRICAS DE TENSIONES REDUCIDAS LIGADAS AL ESTATOR



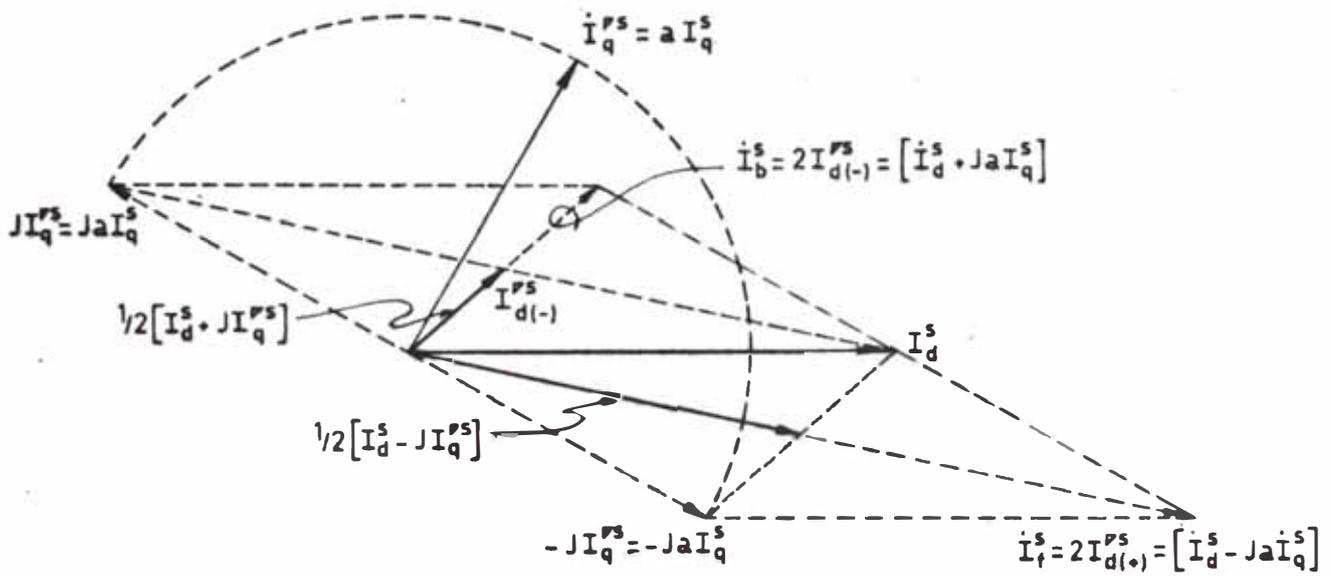
(a)



(b)

Fig. 4.1

COMPONENTES SIMETRICAS DE CORRIENTES
REDUCIDAS LIGADAS AL ESTATOR

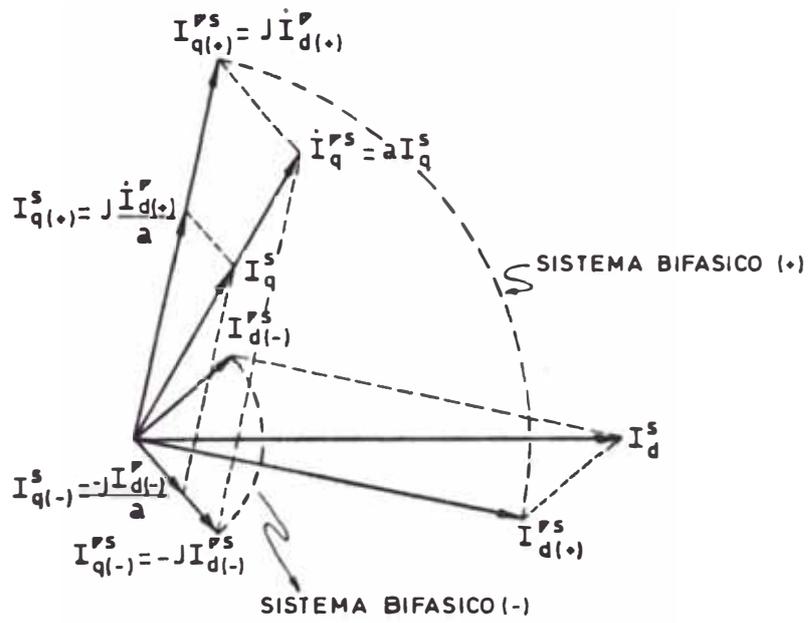


$$\begin{bmatrix} i_{d(+)}^{ps} \\ i_{d(-)}^{ps} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -J/2 \\ 1/2 & J/2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_q^s \end{bmatrix}$$

(a)

Fig. 4.2

COMPONENTES SIMETRICAS DE CORRIENTES
REDUCIDAS LIGADAS AL ESTATOR

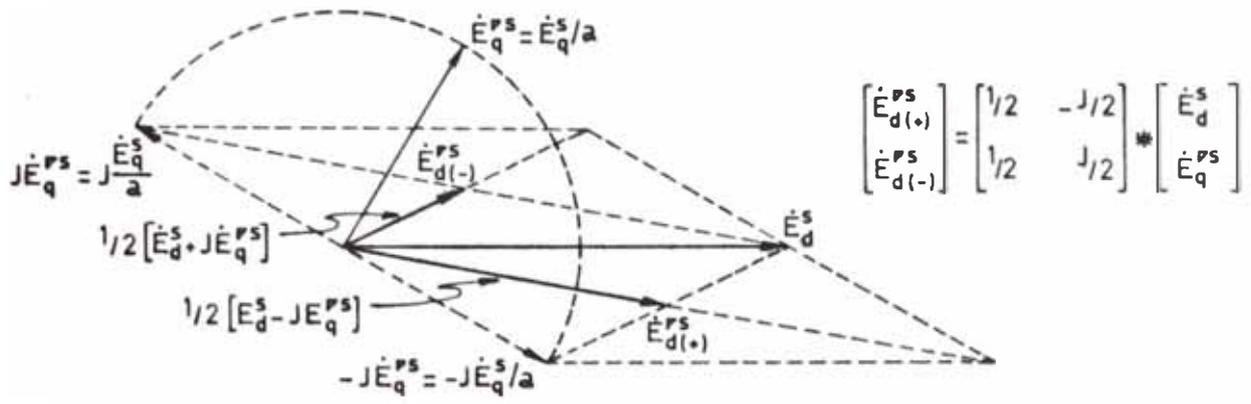


$$\begin{bmatrix} I_d^s \\ I_q^{ps} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} I_{d(+)}^{ps} \\ I_{d(-)}^{ps} \end{bmatrix}$$

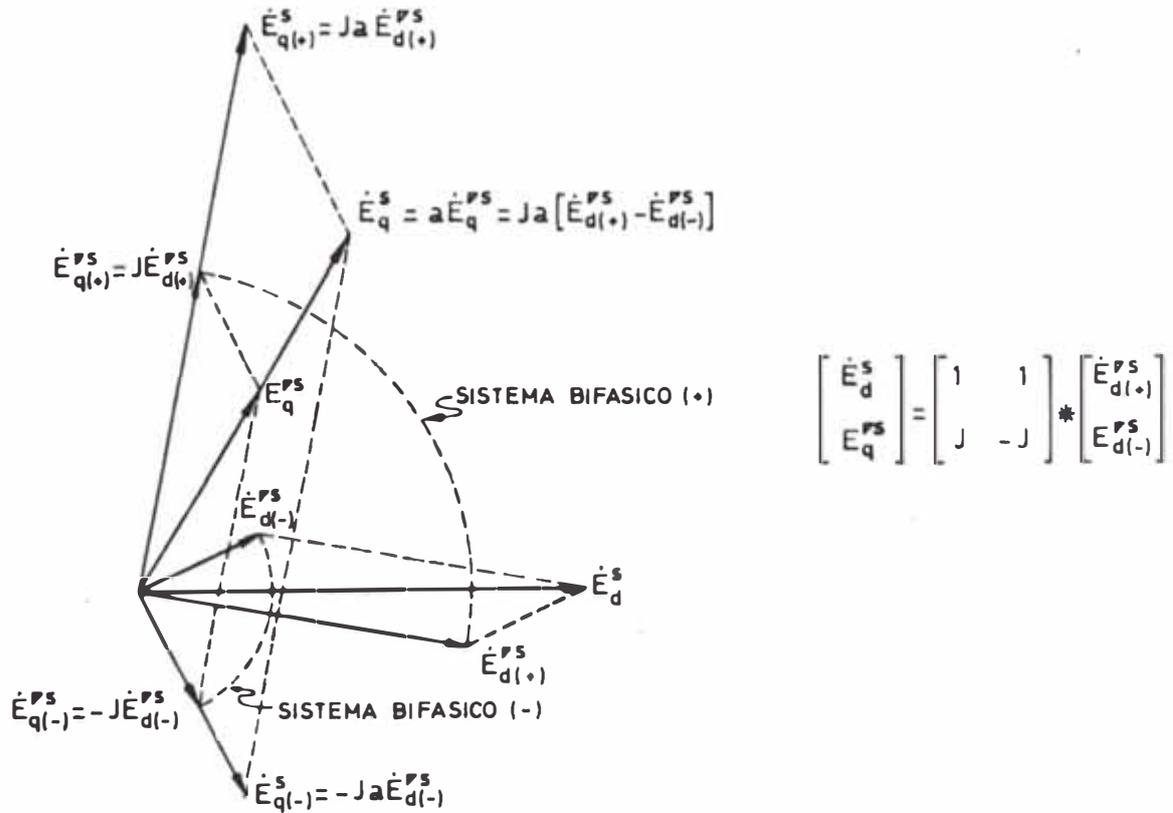
(b)

Fig. 4.2

COMPONENTES SIMETRICAS DE TENSIONES
INDUCIDAS REDUCIDAS LIGADAS AL ESTATOR

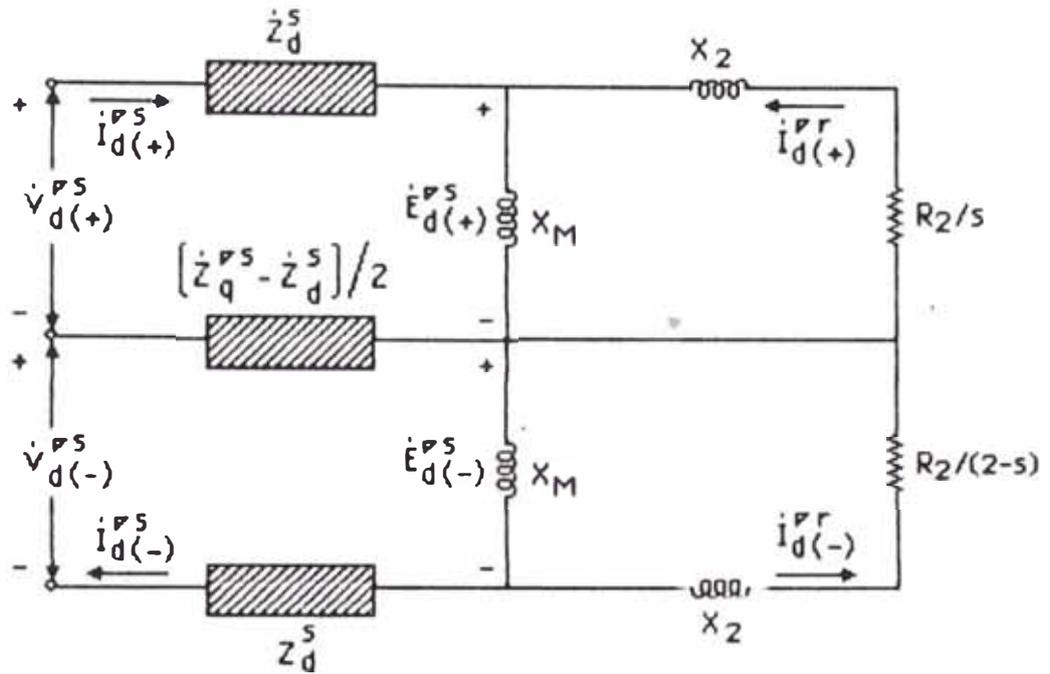


(a)



(b)

Fig. 4.3



$$\dot{Z}_q^S = \left[\frac{\dot{Z}_q^S}{a^2} + \frac{\dot{Z}_c}{a^2} \right] = \left[\left(\frac{R_q^S}{a^2} + j \frac{X_{lq}^S}{a^2} \right) + \left(\frac{R_c}{a^2} - j \frac{X_c}{a^2} \right) \right]$$

$$\dot{Z} = \left[\dot{Z}_q^{PS} - \dot{Z}_d^S \right] = \left[\left(\frac{\dot{Z}_q^S + \dot{Z}_c}{a^2} \right) - \dot{Z}_d^S \right] = \left[\frac{R_q^S + R_c}{a^2} - R_d^S \right] + j \left[\left(\frac{X_{lq}^S - X_c}{a^2} \right) - X_{ld}^S \right]$$

Fig. 4.4

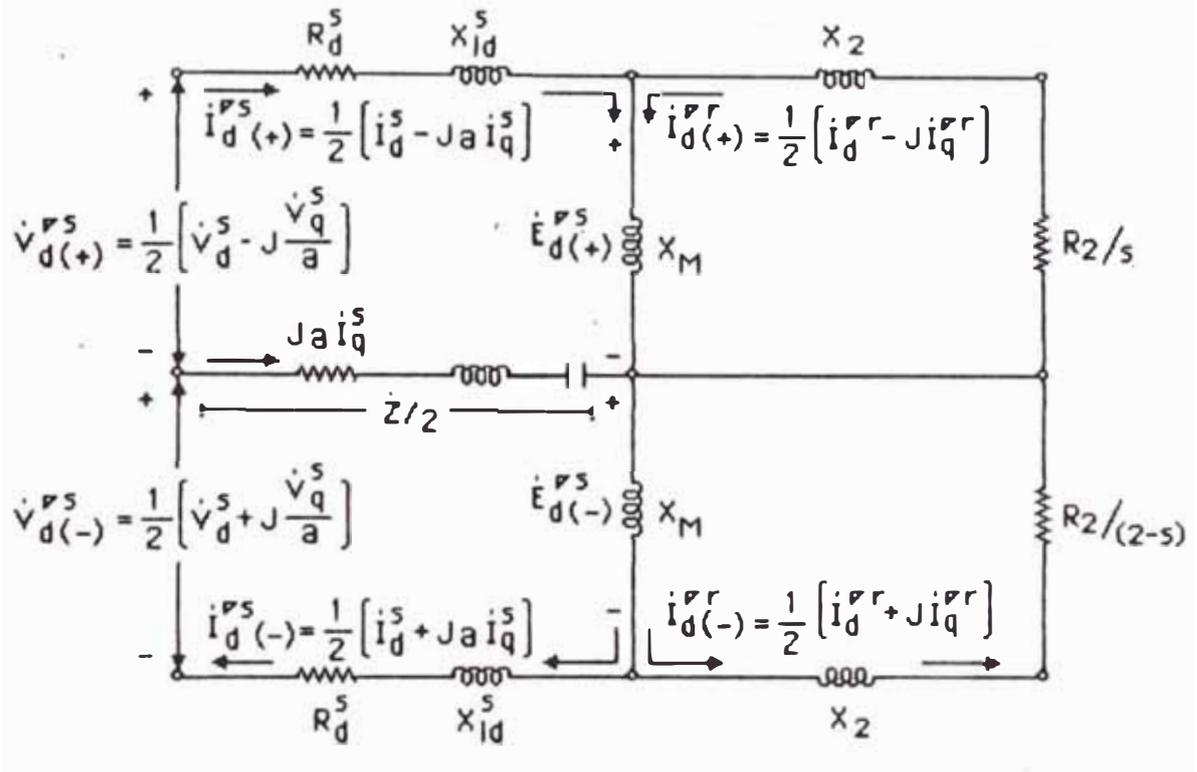


Fig. 4.5

CAPITULO 5

CIRCUITO EQUIVALENTE DEL MOTOR CAPACITOR

El circuito equivalente en función de las componentes simétricas, no ofrece una descripción del funcionamiento en forma independiente de cada bobinado tal como en la práctica se presenta y tampoco posibilita un cálculo de la corriente del bobinado tanto directo como el de cuadratura. Del mismo modo no ofrece una explicación descriptiva en forma independiente de las tensiones inducidas que se producen entre los bobinados del motor que están en cuadratura. Por estas razones, en este capítulo, usando definiciones matemáticas denominadas "backward-forward" que son fundamentadas convenientemente, se deduce un circuito equivalente práctico.

En este capítulo se incorpora como ya se ha dicho antes los términos "backward-forward" (adelante-atrás) que están relacionados en cada caso con un campo giratorio que obedece a una secuencia determinada (positiva o negativa) de una fuente de alimentación balanceada prevista que se denomina componente simétrica de la fuente.

A la componente simétrica "(+)" se le denominará la componente (forward) hacia adelante, a la intensidad que produce el campo giratorio respectivo se le especifica con el subíndice "f" (I_f), y a la impedancia que involucra dicha intensidad se le asigna también con el subíndice "f" (Z_f); esta impedancia está en función del deslizamiento.

En forma análoga se define la componente simétrica (-) o hacia atrás (backward) y se le especifica con el subíndice "b", así se tiene la intensidad (I_b) y su impedancia (Z_b). En este circuito equivalente práctico, al que se ha determinado circuito equivalente en función de las componentes hacia adelante y atrás, se le agrega una resistencia (R_o) en paralelo con la fuente de alimentación del bobinado directo o principal, esta resistencia representa las pérdidas en el fierro del motor.

Los campos giratorios hacia adelante (f) y hacia atrás (b) respectivamente proporcionan torque de giro, el efecto sustractivo de ambos proporciona el torque neto, que vendría ser el torque electromagnético del motor.

5.1 Deducción del circuito equivalente en función de componentes f y b

Del circuito equivalente general de la figura 4.5 por simple inspección se deduce la figura 5.1 donde se define " $Z_{(+)}$ " como el paralelo de

$$\left[jX_M \parallel (R_z/S + jX_z) \right]$$

Por analogía también se define " $Z_{(-)}$ " como el paralelo de

$$\left[jX_M \parallel (R_z / (2 - S) + jX_z) \right]$$

Por inspección de la figura 5.1 se puede deducir que las tensiones inducidas $\dot{E}_{d(+)}$ y $\dot{E}_{d(-)}$ son iguales a:

$$\dot{E}_{d(+)} = \dot{I}_{d(+)} * \dot{Z}_{(+)} \quad (5.1)$$

$$\dot{E}_{d(-)} = \dot{I}_{d(-)} * \dot{Z}_{(-)} \quad (5.2)$$

Haciendo el siguiente artificio, manteniendo constante el valor de la tensión inducida, se multiplica las corrientes por dos y se divide las impedancias entre dos, se obtiene:

$$\dot{E}_{d(+)} = (2 \dot{I}_{d(+)}) * (\dot{Z}_{(+)} / 2) = \dot{I}_f * \dot{Z}_f \quad (5.3)$$

$$\dot{E}_{d(-)} = (2 \dot{I}_{d(-)}) * (\dot{Z}_{(-)} / 2) = \dot{I}_b * \dot{Z}_b \quad (5.4)$$

Luego se define:

$$\dot{I}_r = 2 * \dot{I}_{d(+)} = (\dot{I}_d - jaI_q) \quad (5.5a)$$

por analogía $\dot{I}_r = 2 * \dot{I}_{d(+)}$ (5.5b)

$$\dot{I}_b = 2 * \dot{I}_{d(-)} = (\dot{I}_d + jaI_q) \quad (5.6a)$$

por analogía $\dot{I}_b = 2 * \dot{I}_{d(-)}$ (5.6b)

$$\dot{Z}_r = \dot{Z}_{(+)} / 2 \quad (5.7)$$

$$\dot{Z}_b = \dot{Z}_{(-)} / 2 \quad (5.8)$$

Las ecuaciones (5.5a) y (5.6a) están representadas en la figura 4.2.a

Bajo el concepto de mantener todas las tensiones con su valor original se obtiene la figura 5.2.

Otra forma de obtener el circuito de la figura 5.2 es partiendo del conjunto de ecuaciones (4.35), donde se multiplican las corrientes por dos y las impedancias son divididas entre dos como sigue:

$$\dot{V}_{d(+)} = 2 \dot{I}_{d(+)} * \frac{\dot{Z}_d}{2} + E_{d(+)} + 2 * (\dot{I}_{d(+)} - \dot{I}_{d(-)}) * \frac{(\dot{Z}_q - \dot{Z}_d)}{4}$$

Ecuación (5.9a)

$$\dot{V}_{d(-)} = 2 \dot{I}_{d(-)} * \frac{\dot{Z}_d}{2} + E_{d(-)} + 2 * (\dot{I}_{d(-)} - \dot{I}_{d(+)}) * \frac{(\dot{Z}_q - \dot{Z}_d)}{4}$$

Ecuación (5.9b)

$$0 = \ddot{E}_d(+)+ 2 \cdot \ddot{I}_d(+)* \left(\frac{R_z/S + jX_z}{2} \right) \quad (5.9c)$$

$$0 = \ddot{E}_d(-)+ 2 \cdot \ddot{I}_d(-)* \left(\frac{R_z/(2-S) + jX_z}{2} \right) \quad (5.9d)$$

Reemplazando en las ecuaciones (5.9) las definiciones (5.5) y (5.6) se obtiene:

$$\ddot{V}_d(+)= \ddot{I}_r * Z_d/2 + \ddot{E}_d(+)+ (\ddot{I}_r - \ddot{I}_b) * (Z_a - Z_d)/4 \quad (5.10a)$$

$$\ddot{V}_d(-)= \ddot{I}_b * Z_d/2 + \ddot{E}_d(-)+ (\ddot{I}_b - \ddot{I}_r) * (Z_a - Z_d)/4 \quad (5.10b)$$

$$0 = \ddot{E}_d(+)+ \ddot{I}_r * (R_z/2S + jX_z/2) \quad (5.10c)$$

$$0 = \ddot{E}_d(-)+ \ddot{I}_b * (R_z/2(2-S) + jX_z/2) \quad (5.10d)$$

Este último sistema de cuatro ecuaciones están representadas en el circuito de la figura 5.3 en forma detallada y que vendría a ser el circuito equivalente de un motor capacitor que se muestran en determinados libros de máquinas eléctricas (Ref. 13).

Retomando las ecuaciones 4.35a, 4.35b, 4.36, 4.15a, 4.15b, 4.16a y 4.16b que se escriben a continuación en forma ordenada.

$$\ddot{V}_d(+)= \ddot{I}_d(+)* Z_d + \ddot{E}_d(+)+ (\ddot{I}_d(+)- \ddot{I}_d(-)) * (Z_a - Z_d)/2 \text{ de (4.35a)}$$

$$\ddot{V}_d(-)= \ddot{I}_d(-)* Z_d + \ddot{E}_d(-)+ (\ddot{I}_d(-)- \ddot{I}_d(+)) * (Z_a - Z_d)/2 \text{ de (4.35b)}$$

$$\ddot{Z}_a = (\ddot{Z}_a + \ddot{Z}_c) / a^2 \quad \text{de (4.36)}$$

$$\ddot{V}_d = (\ddot{V}_d(+)+ \ddot{V}_d(-)) \quad \text{de (4.15a)}$$

$$\ddot{V}_q = j a (\ddot{V}_d^{(+)} - \ddot{V}_d^{(-)}) \quad \text{de (4.15b)}$$

$$\ddot{I}_d = (\ddot{I}_d^{(+)} + \ddot{I}_d^{(-)}) \quad \text{de (4.16a)}$$

$$\ddot{I}_q = j/a (\ddot{I}_d^{(+)} - \ddot{I}_d^{(-)}) \quad \text{de (4.16b)}$$

Reemplazando las ecuaciones (4.35a) y (4.35b) en (4.15a) y (4.15b) se obtiene:

$$\ddot{V}_d = Z_d (\ddot{I}_d^{(+)} + \ddot{I}_d^{(-)}) + (\ddot{E}_d^{(+)} + \ddot{E}_d^{(-)}) \quad (5.11)$$

$$\ddot{V}_q = j a Z_d (\ddot{I}_d^{(+)} - \ddot{I}_d^{(-)}) + j a (\ddot{E}_d^{(+)} - \ddot{E}_d^{(-)}) \quad (5.12)$$

Reemplazando (4.16a), (4.16b) y (4.36) en (5.11) y (5.12) se obtiene:

$$\ddot{V}_d = Z_d \ddot{I}_d + (\ddot{E}_d^{(+)} + \ddot{E}_d^{(-)}) \quad (5.13)$$

$$\ddot{V}_q = (Z_q + Z_c) \ddot{I}_q + j a (\ddot{E}_d^{(+)} - \ddot{E}_d^{(-)}) \quad (5.14)$$

Finalmente utilizando las ecuaciones antes definidas como

$$\ddot{I}_r = (\ddot{I}_d - j a \ddot{I}_q) \quad \text{de (5.5a)}$$

$$\ddot{I}_b = (\ddot{I}_d + j a \ddot{I}_q) \quad \text{de (5.6a)}$$

$$\ddot{E}_d^{(+)} = \ddot{I}_r \ddot{Z}_r \quad \text{de (5.3)}$$

$$\ddot{E}_d^{(-)} = \ddot{I}_b \ddot{Z}_b \quad \text{de (5.4)}$$

Reemplazando (5.5a) y (5.6a) en (5.3) y (5.4) respectivamente se obtiene:

$$\dot{E}_{d(+)} = \dot{I}_d * Z_r - ja^2 * \left(\frac{\dot{I}_q * Z_r}{a} \right) \quad (5.15)$$

$$\dot{E}_{d(-)} = \dot{I}_d * Z_b + ja^2 * \left(\frac{\dot{I}_q * Z_b}{a} \right) \quad (5.16)$$

Definiendo:

$$\dot{E}_{rd} = \dot{I}_d * Z_r \quad (5.17)$$

$$\dot{E}_{bd} = \dot{I}_d * Z_b \quad (5.18)$$

$$\dot{E}_{rq} = a^2 * \dot{I}_q * Z_r \quad (5.19)$$

$$\dot{E}_{bq} = a^2 * \dot{I}_q * Z_b \quad (5.20)$$

Reemplazando las cuatro últimas definiciones (5.17 al 5.20) en las ecuaciones (5.15) y (5.16) se obtiene(***):

$$\dot{E}_{d(+)} = \dot{E}_{rd} - j\dot{E}_{rq}/a \quad (5.21)$$

$$\dot{E}_{d(-)} = \dot{E}_{bd} + j\dot{E}_{bq}/a \quad (5.22)$$

Finalmente al reemplazar (5.21) y (5.22) en (5.13) y (5.14) se obtiene :

$$\dot{V}_d = Z_d * \dot{I}_d + \dot{E}_{rd} - j\dot{E}_{rq}/a + \dot{E}_{bd} + j\dot{E}_{bq}/a \quad (5.23)$$

$$\dot{V}_q = (Z_a + Z_c) * \dot{I}_q + ja * \dot{E}_{rd} + \dot{E}_{rq} - ja * \dot{E}_{bd} + \dot{E}_{bq} \quad (5.24)$$

*** $\dot{E}_{d(+)}$ por $\dot{E}_{d(+)}$; $\dot{E}_{d(-)}$ por $\dot{E}_{d(-)}$, se hace estas igualdades para obviar el superíndice " , " prima para una mejor comprensión y visualización de la fig 5.4

La figura (5.4) muestra el circuito equivalente del motor capacitor con ambos bobinados del estator en operación, basadas en las ecuaciones (5.23) y (5.24)

Luego debe agregarse una resistencia (R_o) en paralelo al circuito de la bobina principal que representa las pérdidas en el fierro, la figura (5.5) muestra el detalle.

5.2. Ecuaciones Tensión-Corriente

De la figura 5.5 considerando que la tensión aplicada a ambos devanados son iguales se tendrá

$$\dot{Z}_r = R_r + jX_r$$

$$\dot{Z}_b = R_b + jX_b$$

$$\dot{Z}_d = R_d + jX_{1d}$$

$$\dot{Z}_a = (R_a + R_c) + j(X_{1a} - X_c)$$

$$R_r = \frac{1}{2} * \frac{X_M * R_2 / S}{\left[(R_2 / S)^2 + (X_2 + X_M)^2 \right]}$$

$$R_b = \frac{1}{2} * \frac{X_M * R_2 / (2 - S)}{\left[(R_2 / (2 - S))^2 + (X_2 + X_M)^2 \right]}$$

$$X_r = \frac{1}{s} * \frac{X_M * [(R_z/S)^2 + X_z(X_z + X_M)]}{[(R_z/S)^2 + (X_z + X_M)^2]}$$

$$X_b = \frac{1}{s} * \frac{X_M * [(R_z/(2-S))^2 + X_z(X_z + X_M)]}{[(R_z/(2-S))^2 + (X_z + X_M)^2]}$$

En base al circuito equivalente de la figura 5.5, las ecuaciones (5.23) y (5.24) se pueden escribir en la siguiente forma:

$$\ddot{V}_d = (\dot{Z}_d + \dot{Z}_r + \dot{Z}_b) * \ddot{I}_d - ja(\dot{Z}_r - \dot{Z}_b) * \ddot{I}_a \quad (5.25)$$

$$\ddot{V}_a = ja(\dot{Z}_r - \dot{Z}_b) * \ddot{I}_d + (\dot{Z}_a + \dot{Z}_c + a^2(\dot{Z}_r + \dot{Z}_b)) * \ddot{I}_a \quad (5.26)$$

$$\ddot{V}_d = R_o * \dot{I}_o \quad (5.27)$$

Resolviendo las dos primeras ecuaciones usando las determinantes se obtiene

$$\ddot{I}_d = \frac{\begin{bmatrix} \ddot{V}_d & -ja(\dot{Z}_r - \dot{Z}_b) \\ \ddot{V}_a & \dot{Z}_c + \dot{Z}_a + a^2(\dot{Z}_r + \dot{Z}_b) \\ \dot{Z}_d + \dot{Z}_r + \dot{Z}_b & -ja(\dot{Z}_r - \dot{Z}_b) \\ +ja(\dot{Z}_r - \dot{Z}_b) & \dot{Z}_c + \dot{Z}_a + a^2(\dot{Z}_r + \dot{Z}_b) \end{bmatrix}}{\quad} \quad (5.28)$$

$$\dot{I}_a = \frac{\begin{bmatrix} \dot{Z}_d + \dot{Z}_r + \dot{Z}_b & \\ ja(\dot{Z}_r - \dot{Z}_b) & \\ \dot{Z}_d + \dot{Z}_r + \dot{Z}_b & -ja(\dot{Z}_r - \dot{Z}_b) \\ +ja(\dot{Z}_r - \dot{Z}_b) & \dot{Z}_c + \dot{Z}_a + a^2(\dot{Z}_r + \dot{Z}_b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_d \\ \dot{V}_a \end{bmatrix}}{\quad} \quad (5.29)$$

De la ecuación (5.27) se tiene

$$\dot{I}_o = \dot{V}_d / R_o \quad (5.30)$$

La corriente de línea es :

$$\dot{I} = (\dot{I}_d + \dot{I}_a + \dot{I}_o) \quad (5.31)$$

5.3 Ecuación del Torque Electromagnético

El torque electromagnético "Tem" es la diferencia entre los pares desarrollados por los campos magnéticos que giran hacia adelante y hacia atrás, que respectivamente son T_r y T_b

$$T_{em} = (T_r - T_b) \quad (5.32)$$

- Esta diferencia es para ambas fases. De la fig. 5.4 se tiene

$$(T_r - T_b) = \text{Real} \left[(\dot{E}_d(+), -\dot{E}_d(-)) * \dot{I}_d + j(\dot{E}_d(+), +\dot{E}_d(-)) a \dot{I}_a \right]$$

Ecuación (5.33)

- Los términos en el paréntesis en el lado derecho de la ec. (5.33) representan la potencia compleja.

- La ec. (5.33) puede re-escribirse en base a la fig. 5.5 como

$$(T_r - T_b) = (R_r - R_b) * \left[(\dot{I}_d)^2 + (a\dot{I}_a)^2 \right] + \text{Real} \left[-j\dot{E}_{ra}/a - j\dot{E}_{ba}/a \right] * \dot{I}_d + \text{Real} \left[ja\dot{E}_{rd} + ja\dot{E}_{bd} \right] * \dot{I}_a \quad (5.34)$$

El segundo y tercer término en el lado derecho de la ecuación (5.34) puede combinarse mediante el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned} -j/a \left[\dot{E}_{ra} + \dot{E}_{ba} \right] * \dot{I}_d &= -j*a \left[(R_r + R_b) + (X_r + X_b) \right] * \dot{I}_a * \dot{I}_d \\ &= \left[(X_r + X_b) - j(R_r + R_b) \right] * a * \dot{I}_a * \dot{I}_d \quad (5.35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ja \left[\dot{E}_{rd} + \dot{E}_{bd} \right] * \dot{I}_a &= j*a \left[(R_r + R_b) + j(X_r + X_b) \right] * \dot{I}_a * \dot{I}_d \\ &= - \left[(X_r + X_b) - j(R_r + R_b) \right] * a * \dot{I}_a * \dot{I}_d \quad (5.36) \end{aligned}$$

El real de una suma de fasores es igual a la suma de los reales de los fasores y la suma de las ecuaciones (5.35) y (5.36)

$$\begin{aligned} -j/a * \left[\dot{E}_{ra} + \dot{E}_{ba} \right] * \dot{I}_d + ja * \left[\dot{E}_{rd} + \dot{E}_{bd} \right] * \dot{I}_a &= \\ = \left[(X_r + X_b) - j(R_r + R_b) \right] * a * \left[\dot{I}_a * \dot{I}_d - \dot{I}_a * \dot{I}_d \right] & \quad (5.37) \end{aligned}$$

Ahora si:

$$\vec{I}_a = I_a \cdot e^{j\theta_a} \quad \text{y} \quad \vec{I}_d = I_d \cdot e^{j\theta_d}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \left[\vec{I}_a * \vec{I}_d^{**} - \vec{I}_d^{**} * \vec{I}_a \right] &= I_d \cdot I_a \left[e^{j(\theta_a - \theta_d)} - e^{-j(\theta_a - \theta_d)} \right] \\ &= j 2 I_d \cdot I_a \operatorname{sen} \left[\theta_a - \theta_d \right] \end{aligned}$$

por consiguiente :

$$\operatorname{Real} \left[-jE_{ra}/a - jE_{ba}/a \right] * I_d^{**} + \operatorname{Real} \left[jaE_{rd} + jaE_{bd} \right] * I_a^{**}$$

en la ec (5.34) puede reducirse a:

$$= 2 a I_d \cdot I_a (R_r + R_b) \operatorname{sen} \left[\theta_a - \theta_d \right]$$

y la ecuación (5.34) puede escribirse como :

$$T_{em} = \left[(I_d)^2 + (aI_a)^2 \right] * (R_r - R_b) + 2a * I_d * I_a * (R_r + R_b) * \operatorname{sen} \left[\theta_a - \theta_d \right]$$

Ecuación (5.38)

- Esta ecuación es la expresión del Torque Electromagnético en vatios sincronicos y que está en función de las corrientes estatóricas
- Esta expresión del Torque Electromagnético tambien puede escribirse en función de las componentes hacia adelante (f) y hacia atrás (b)
- De la ecuación (5.33) se puede escribir en forma desdoblada lo siguiente

$$T_f = \text{Real} \left[\dot{E}_d(+), \dot{I}_d^{**} + j a \dot{E}_d(+), \dot{I}_a^{**} \right] \quad (5.39)$$

$$T_b = \text{Real} \left[\dot{E}_d(-), \dot{I}_d^{**} - j a \dot{E}_d(-), \dot{I}_a^{**} \right] \quad (5.40)$$

- Haciendo la respectiva diferencia se tiene

$$\begin{aligned} [T_f - T_b] &= \text{Real} \left[\dot{E}_d(+), \dot{I}_d^{**} - j a \dot{I}_a^{**} - \dot{E}_d(-), \dot{I}_d^{**} + j a \dot{I}_a^{**} \right] \\ &= \text{Real} \left[(\dot{Z}_f * \dot{I}_f) * \dot{I}_f^{**} - (\dot{Z}_b * \dot{I}_b) * \dot{I}_b^{**} \right] \\ &= \text{Real} \left[(\dot{I}_f)^2 * \dot{Z}_f - (\dot{I}_b)^2 * \dot{Z}_b \right] \\ &= (\dot{I}_f)^2 * \text{Real} \left[\dot{Z}_f \right] - (\dot{I}_b)^2 * \text{Real} \left[\dot{Z}_b \right] \\ T_{em} &= \left[(\dot{I}_f)^2 * R_f - (\dot{I}_b)^2 * R_b \right] = [T_f - T_b] \quad (5.41) \end{aligned}$$

De (5.41) por identificación se puede deducir que

$$T_f = (\dot{I}_f)^2 * R_f \quad (5.42)$$

$$T_b = (\dot{I}_b)^2 * R_b \quad (5.43)$$

lo cual verifica la ecuación (5.32) asumiendo según (2.2) que las pérdidas por fricción y ventilación son proporcionales al cuadrado de la velocidad

De esta manera la potencia en el eje será expresada por la ecuación.

$$P_{eje} = T_{em} (1 - S) - P_M (1 - S)^2 \quad (5.44)$$

donde P_M : son las pérdidas por fricción y ventilación.

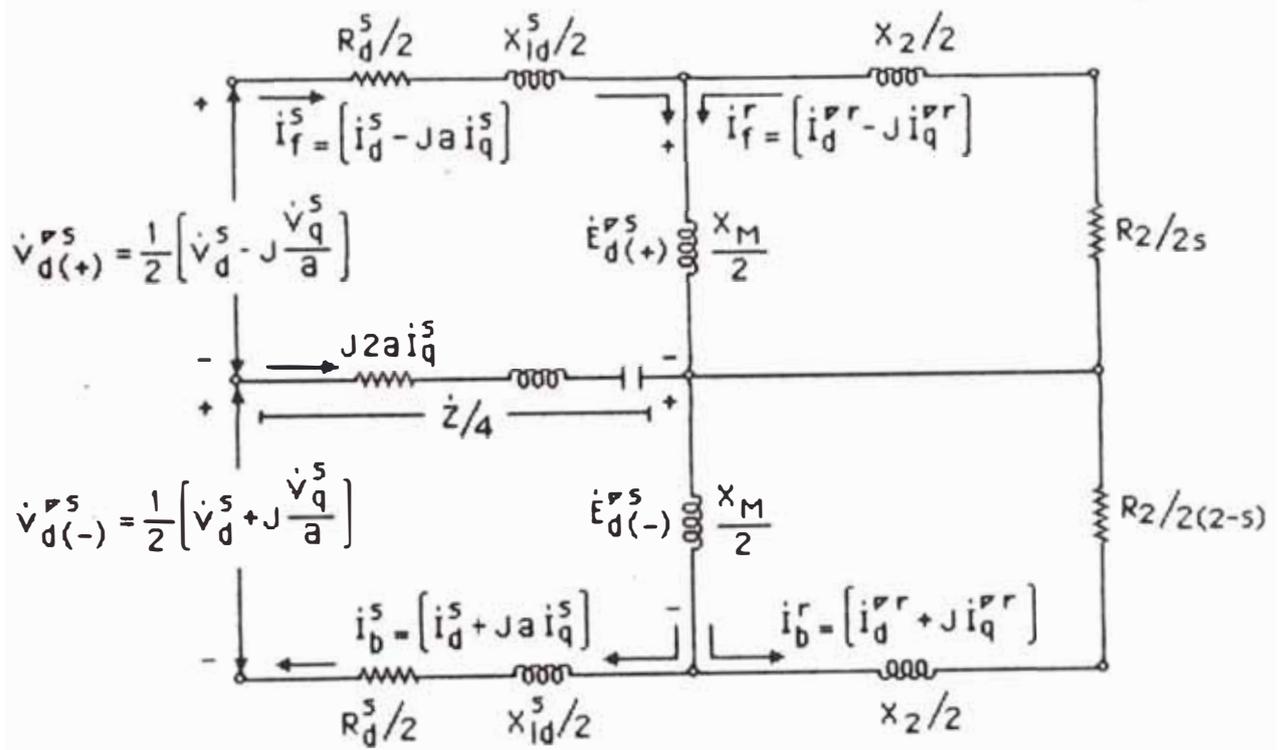


Fig. 5.3

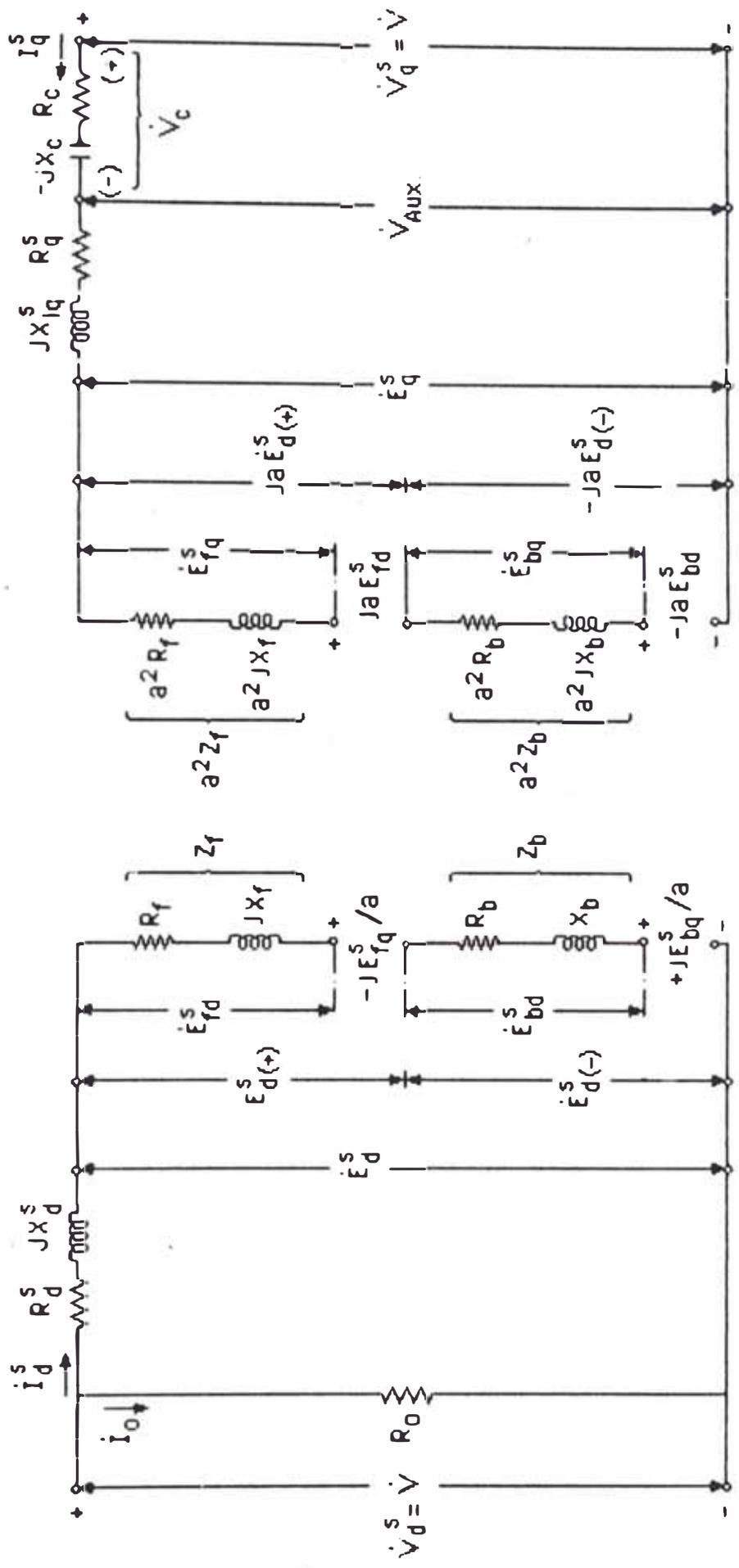


Fig 55

CAPITULO 6

VERIFICACION EXPERIMENTAL

Este capítulo es de singular importancia, pues en este punto se determina la exactitud del modelo teórico desarrollado, comparando sus resultados con los experimentales que se obtienen de las pruebas de laboratorio efectuadas al motor capacitor.

En la primera parte se presenta una descripción de los instrumentos empleados en las pruebas y se detallan sus datos de placa. En la segunda parte se resumen las lecturas tomadas en los ensayos realizados, La Tercera Parte expone los resultados experimentales que se obtienen a partir de las lecturas registradas. Y se describe el esquema de conexiones del motor. Finalmente se hace una comparación de los resultados Teorico-Experimentales.

6.1 Descripción de los instrumentos usados en las pruebas y datos de placa del motor

Tres amperímetros

Marca : Industrial Meters Private

Modelo : MIPT/20

Rango : 0 - 5 - 25 - 50 - 100 Amp

Frecuencia: 60 c/s

Clase : 0.5

Tres voltímetros

Marca : SIEMENS
Modelo : 061U04.171 - I
Rango : 0 - 150 - 300 - 600 Amp
Frecuencia: 60 c/s
Clase : 1.5

- Un multímetro (usado como voltímetro)

Numero : 460EO SANWA
Marca : SANWA
Modelo : 460ED Y 380CE
Rango : Desde*1; hasta 10K, de 3 a 300v DC y CA
Frecuencia: 60 c/s
Error : $\pm 3\%$

Dos vatímetros monofásicos

Marca : SIEMENS
Modelo : 062U9 - 015
Rango : 1.2Kw, de 125,250,500 vol de 5-10 amp

- Un tacómetro

Número : 202097
Marca : JAQUET Nº 628 - 630
Modelo : Mecánico

Un freno eléctrico (DINAMOMETRO)

Marca : SIEMENS
 Tipo : AQB592 - 4
 Potencia máx : 4.5Kw a 3600 RPM
 Torque máx : 3 KILOFONDIOS
 Excitación máx: voltios 220v, amperios 1.3
 min: voltios 50v, amperios 0.3

Un puente para medir resistencias en corriente continua

Marca : SIEMENS
 Tipo : WESTON
 Rango : 1, 0.1, 0.001 hasta 100

- Regulador de Tensión Trifásico

Rango : 0 - 280 voltios
 Amp : 12 A
 Hz : 50 -60 Hz

Resistencias

110 Ω 2.5A
 320 Ω 1.5A
 50 Ω 5A

- Transformador de Corriente

MARCA : SIEMENS

RANGO : 5%2.5; 10;25;100;125;250;500A

N° : 64-95742

- Datos de placa del motor

Marca : Motor CENTURY

Potencia : 2 HP

Hz : 60 Hz

Amp : 9.5 / 19 A

Tensión : 230 / 115 V

Velocidad : 3450 RPM

Clase de aislamiento "B"

Factor de servicio 1.0

Condensador de trabajo 15 MF - 370 V

Condensador de arranque 293 MF - 110 V

6.2 Ensayos realizados para la determinación de los parámetros del circuito equivalente

ENSAYO EN VACIO

V_L (volt)	I_L (Amp)	W (vat)	$\text{Cos}\phi$	RPM	OBSERVACIONES
115	9	250	0.32	3582	Con ambos devanados
115	13	300	0.25	3582	Sin devanado auxiliar

ENSAYO A ROTOR BLOQUEADO

V_L (volt)	I_L (Amp)	W (vat)	$\text{Cos}\phi$	OBSERVACIONES
25.0	19	250	0.526	Solo el devanado principal
27.0	21	300	0.529	Solo el devanado principal
31.5	25	500	0.680	Solo el devanado principal
115.0	12	1070	0.800	Solo el devanado auxiliar
125.0	13	1050	0.820	Solo el devanado auxiliar

MEDICION DE RESISTENCIAS A 20°C

$$r_{1p} = 0.0 \Omega$$

$$r_{1a} = 3.503 \Omega$$

Con el ensayo en vacio y rotor bloqueado se determinan los parametros del Circuito Equivalente motor capacitor (ver apéndice)

6.3 Ensayo del motor con carga variable

Con ayuda del dinamómetro el motor capacitor fue ensayado con carga, las lecturas registradas y las magnitudes de mayor importancia calculadas a partir de ellas se resumen a continuación en el cuadro A.

6.4 Comparación de resultados teóricos y experimentales

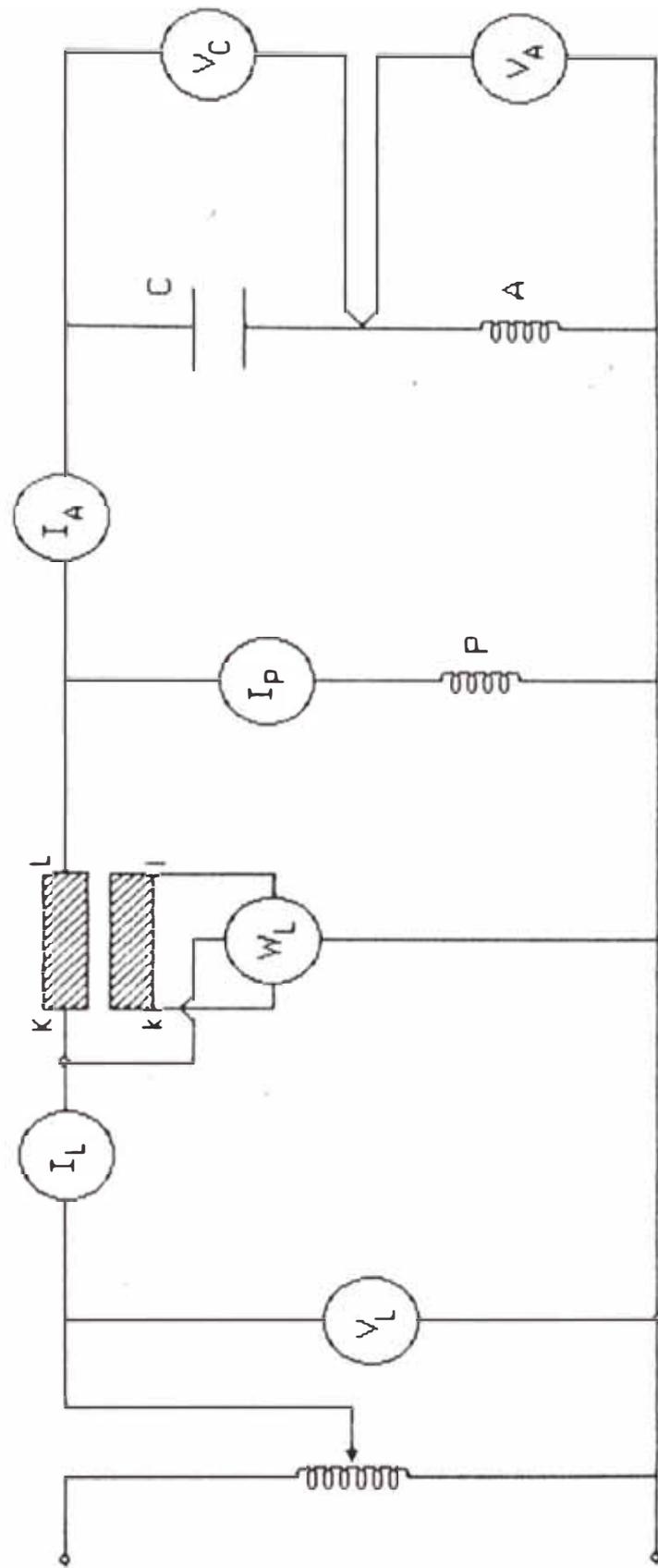
En el cuadro B se resume el comportamiento teórico del motor con carga variable obtenido a partir del circuito equivalente.

Luego en el cuadro C se presenta una comparación entre los resultados obtenidos del cálculo teórico con las lecturas y resultados procedentes de los ensayos experimentales. Se aprecia errores aceptables.

Así mismo se muestra el comportamiento de las curvas teóricas y experimentales en el estado estacionario: intensidad de línea vs RPM, tensión en el condensador vs RPM y torque vs RPM en los gráficos No.1, No.2 y No.3 respectivamente.

Los errores son mayores en la eficiencia, debido a "perdidas adicionales en carga" que provienen de las variaciones del espectro magnético en los ángulos de los dientes de los núcleos y de corriente de frecuencia superior (armónicas) en las barras del rotor.

ESQUEMA DE CONEXIONES



ENSAYO EXPERIMENTAL CON CARGA

RPM	IP	Ia	I _L	Vc	Vaux	W _L	Wa	T	HP	cos φ
3590	8.9	1.9	9.0	330	300	280	190	0.000	0.00	0.27
3570	10.8	1.9	11.0	320	290	290	190	0.000	0.00	0.23
3550	11.9	1.9	11.5	340	310	290	190	0.950	0.05	0.22
3560	12.0	1.9	12.0	325	300	450	185	0.768	0.38	0.34
3540	12.5	1.8	13.0	315	294	700	182	1.812	0.95	0.48
3520	13.5	1.7	14.5	305	288	900	180	2.194	1.09	0.56
3518	14.0	1.6	15.0	302	284	1000	178	2.575	1.27	0.60
3480	16.0	1.6	17.0	295	274	1200	174	3.291	1.61	0.64
3460	17.9	1.5	19.0	280	264	1500	170	3.911	1.95	0.72

V_N = 110v

I_N = 19A

P_{F&W} = 12w

P_{Fe} = 134.47w

CUADRO A

CARACTERISTICAS : 2 HP, 60 Hz, 110v, 2 POLOS

PARAMETROS EXPERIMENTALES : $P_{fe} = 134.47 \text{ w}$, $r_p = 0.3224 \Omega$, $r_a = 4.3437 \Omega$, $X_{1P} = 0.4847 \Omega$, $X_{1A} = 3.066 \Omega$,
 $r_2 = 0.5456 \Omega$, $X_2 = 0.4847 \Omega$, $X_M = 16.24 \Omega$, $a = 2.5$, cond de marcha $X_c = 176.83 \Omega$, cond de Arranque $X_c = 9.04841 \Omega$

RPM	S	I_p (Amp)	I_a (Amp)	I_L (Amp)	V_c (volt)	V_{aux} (volt)	W_L (vat)	W_a (vat)	W_p (vat)	T (N-m)	HP	$\eta \%$	F.P
3593	0.0019	9.51	1.72	9.10	305.6	279.1	266.84	181.46	-49.08	0.183	0.09	25.8	0.25
3590	0.0027	9.48	1.72	9.17	304.8	278.7	302.78	181.16	-12.85	0.280	0.14	34.7	0.28
3580	0.0055	9.48	1.71	9.48	302.4	277.1	421.11	180.17	107.34	0.590	0.30	53.0	0.38
3570	0.0083	9.60	1.69	9.91	299.9	275.5	540.22	179.15	226.59	0.910	0.45	63.0	0.47
3560	0.0111	9.85	1.68	10.43	297.5	273.8	657.41	178.11	344.83	1.210	0.60	69.0	0.54
3550	0.0138	10.22	1.66	11.04	295.0	272.2	773.54	177.04	462.02	1.510	0.75	72.9	0.60
3540	0.0166	10.67	1.65	11.70	292.5	270.5	888.54	175.96	578.10	1.810	0.89	75.5	0.66
3530	0.0194	11.22	1.64	12.42	290.1	268.9	1002.37	174.86	693.04	2.090	1.03	77.3	0.70
3520	0.0222	11.82	1.62	13.17	287.6	267.2	1115.00	173.73	806.79	2.370	1.17	78.5	0.73
3510	0.0250	12.49	1.61	13.96	285.2	265.6	1226.39	172.59	909.32	2.640	1.30	79.3	0.76
3500	0.0270	13.20	1.59	14.77	282.7	263.9	1336.51	171.44	1030.60	2.910	1.43	79.9	0.78
3490	0.0300	13.94	1.58	15.59	280.2	262.2	1445.33	170.27	1140.58	3.170	1.55	80.2	0.80
3480	0.0330	14.71	1.57	16.43	277.8	260.5	1552.81	169.09	1249.25	3.420	1.67	80.4	0.82
3470	0.0360	15.50	1.55	17.28	275.4	258.8	1658.94	167.89	1356.57	3.670	1.79	80.5	0.83
3460	0.0380	16.31	1.54	18.14	272.9	257.1	1763.69	166.68	1462.53	3.910	1.90	80.4	0.84
3450	0.0416	17.13	1.53	19.00	270.5	255.4	1867.03	165.47	1567.09	4.140	2.01	80.2	0.85

RESULTADOS TEORICOS BASADOS EN EL CIRCUITO EQUIVALENTE

	VACIO		POTENCIA NOMINAL			
	PRUEBA	CALCULO	e%	PRUEBA	CALCULO	e%
IL	9.00	9.10	-1.09	19.00	19.00	0.00
IP	8.90	9.50	-6.31	17.90	17.13	4.49
IA	1.90	1.72	10.46	1.50	1.53	-1.96
Vc	330.00	304.80	-8.26	280.00	272.90	2.60
T	0.00	0.00	0.00	3.91	4.14	-5.55
P	0.00	0.00	0.00	1.95	2.01	-2.98
n%	0.00	0.00	0.00	97.00	80.20	20.90
Cosφ	0.27	0.25	8.00	0.72	0.85	-15.00

CUADRO C

CONCLUSIONES

El presente trabajo, para los supuestos considerados se ha constatado que el método de las Componentes Simétricas y la Teoría del Campo Giratorio usadas en el análisis de las máquinas eléctricas en estado estacionario se complementan y tienen finalmente la misma meta: la elaboración del circuito equivalente.

Ambos métodos aplicados la Teoría General de Máquinas Eléctricas reproducen el mismo circuito equivalente del Motor Capacitor. En el circuito equivalente de sustitución del motor se plantean las ecuaciones de operación, en función del deslizamiento (velocidad). Estas ecuaciones constituyen el modelo del motor capacitor en estado estacionario.

El modelo propuesto permite predecir el comportamiento estacionario de cualquier tipo de motor capacitor, para lo cual es necesario resolver el sistema de ecuaciones de la máquina.

El modelo del motor capacitor se verifica experimentalmente, mostrando que el pronóstico teórico presenta una aproximación aceptable en todo el rango normal de funcionamiento del motor y produciendo

errores que son considerados normales en este tipo de análisis.

El presente trabajo puede ser usado con ciertas consideraciones adicionales al análisis de motores monofásicos de simple y doble tensión con o sin condensador permanente y en motores bifásicos asimétricos con devanados no en cuadratura.

BIBLIOGRAFIA

1. Fitzgerald A. E. y C. Kingsley, Jr. "Electric Machinery", 2^{da} ed. Mc. Graw Hill Book Company
2. Guru Bhag S "Resolving-field analysis of asymmetric three phase machines and its extension to single-and two phase machines", Electric Power Applications, February 1979, Vol 2 Nº 1
3. Kron Gabriel "Equivalent Circuit of the Capacitor Motor" General Electric Review Septiembre 1941
4. Leander Mash "Conversion Electromecánica"
5. Liwshitz-Garik y Whipple C.C "Máquinas de Corriente Alterna" ed CESCA Sexta edición
6. Mac Persons "Introduccion a las Máquinas Electricas" ed Limusa
7. Meisel Jerome "Principios de Conversión Electromecánica" Mc Graw Hill, 1969
8. Morrill , W.J " The Resolving - field Theory of the Capacitor Motor" AIEE trans vol 48, 1929
9. Fichoir J "Maquinas Electricas Asincronas" ed. Marcombo
10. Fuchstein A. F y Lloyd, T.C "Alternating-current Machines" John Wiley & Sons Inc. New York
11. Thaler George J y Wilcox M.L "Máquinas Electricas" ed

Limusa 1979

12. Trickey P.H "Performance Calculations on Capacitor Motors: the Resolving-Field Theory" AIEE Trans february 1941, Vol. 90
13. Veinott C. G "Theory and Desing of Small Induction Motors" Mc Graw-Hill Book Company, New York 1959.