

Universidad Nacional de Ingeniería

PROGRAMA ACADEMICO DE INGENIERIA CIVIL

**CALCULO DE LATITUD POR MEDICION
DE ANGULOS HORIZONTALES**

Tesis

**Para Optar el Título Profesional
de Ingeniero Civil**

Antonio Baxerías Alvarado

Diciembre, 1981

Lima - Perú

C A P I T U L O I

SISTEMAS DE COORDENADAS

1.1. Definiciones Fundamentales

1.1.1. Esfera Celeste

La mayor parte de los objetos celestes que nosotros tendremos que observar se encuentran a distancias equivalentes a muchas veces el radio de la tierra.

Estos objetos, por lo tanto, se encuentran practicamente a distancias infinitas de nosotros y aparentemente están ubicados en la superficie de una gran esfera a la cual denominaremos Esfera Celeste, y entonces es practicamente suficiente disponer de un par de coordenadas para fijar su posición en dicha esfera celeste.

1.1.1. La vertical del observador intersecta a la esfera celeste en dos puntos: el punto de intersección, situado por encima del observador se denomina Zenit y el extremo opuesto de la vertical se denomina Nadir.

El plano perpendicular a la vertical del observador y que contiene al observador se denomina Horizonte Celeste.

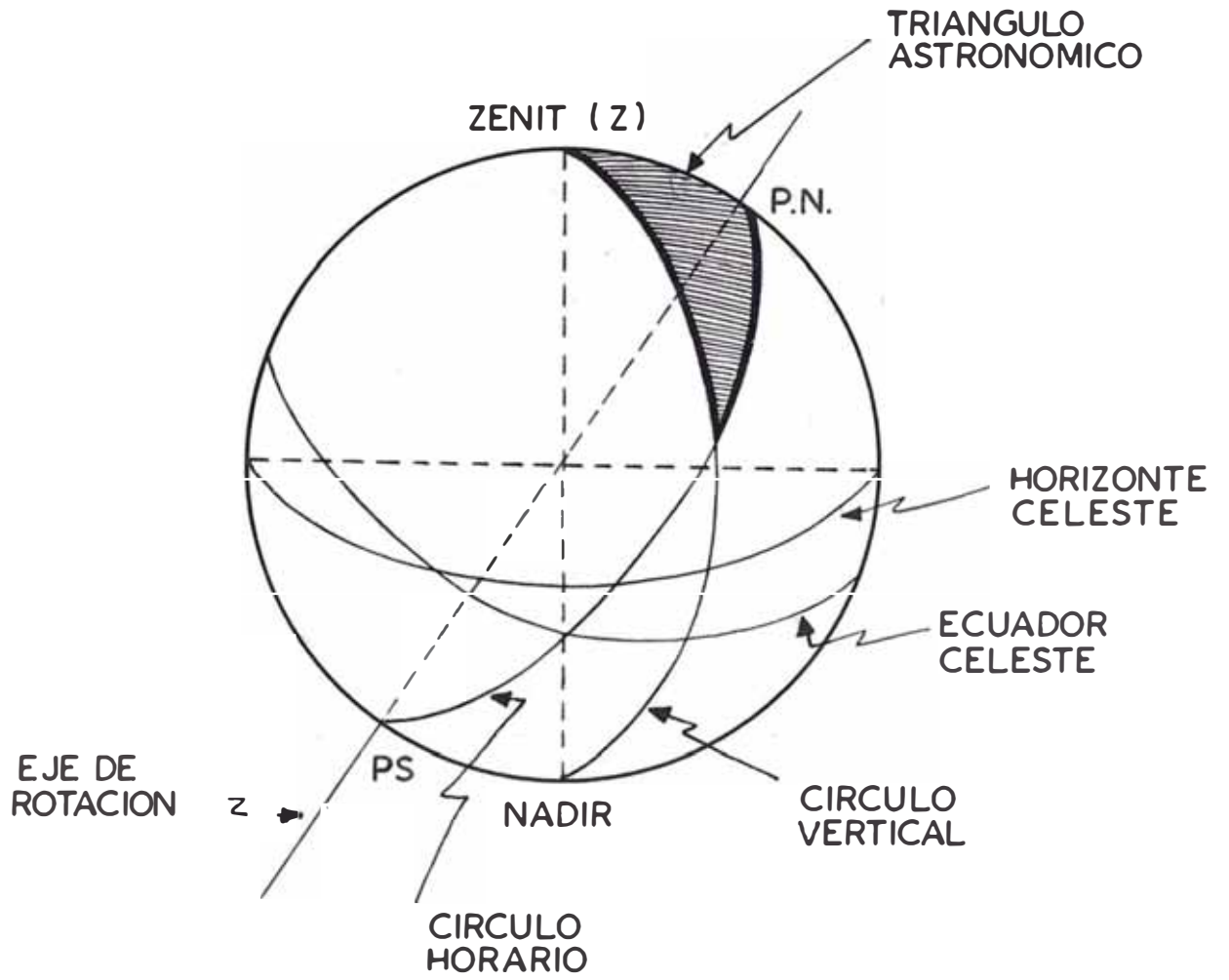


FIG. I.I.

1.1.3. Los puntos en que el eje de rotación de la tierra intersecta a la esfera celeste se denominan Polo Norte Celeste y Polo Sur Celeste.

El plano perpendicular al eje de rotación de la tierra y que contiene al centro de la misma es el Ecuador Celeste.

El círculo máximo que contiene a los polos y por lo tanto es perpendicular al ecuador celeste lo denominamos Círculo Horario.

El plano que contiene al zenit y es perpendicular al horizonte recibe el nombre de Plano Vertical.

El plano vertical del observador y que contiene a los polos lo denominamos Meridiano Celeste.

1.1.4. Consideremos un punto S cualquiera en la superficie de la Esfera Celeste. El Meridiano Celeste y los Círculos Horario y Vertical que pasan por el punto S forman un triángulo esférico denominado el Triángulo Astronómico. Los vértices de este triángulo son el Zenit, el Polo Sur Celeste y el punto S.

1.1.5. Otro elemento importante en la esfera celeste es la Eclíptica, la cual la definimos en términos del plano que contiene al centro del sol, el baricentro del sistema tierra-

luna y al vector velocidad heliocéntrica-inercial del baricentro del sistema tierra-luna.

La eclíptica siempre está dentro de los dos segundos de la aparente trayectoria del sol con respecto a la tierra.

La recta perpendicular a la eclíptica que contiene al centro de la tierra interseca a la esfera celeste en los Polos Eclípticos, norte y sur respectivamente .

La eclíptica interseca al ecuador celeste en una recta que contiene a los Equinoccios.

El punto Vernal es el punto de intersección en que el sol aparente corta al ecuador celeste de sur a norte en invierno.

Los dos puntos opuestos a la eclíptica - situados a 90° de los equinoccios se denominan Solsticios.

1.2. Sistema de Coordenadas

Para poder determinar la posición o dirección de los objetos en la esfera celeste se emplean los sistemas de Coordenadas Celestes.

Normalmente esta dirección o posición es expresada en base a dos componentes perpendiculares o Coordenadas Curvilíneas.

Una de las componentes es medida desde un plano primario de referencia y perpendicularmente a él; la otra componente desde un plano secundario de referencia y medida en el plano primario. Según cual sea el tipo de planos de referencia que se

utilice se obtienen los diferentes sistemas de coordenadas denominados del Horizonte, del Angulo Horario, de la Ascensión Recta, de la Eclíptica y del observador. Todos ellos tiene el origen de Coordenadas en el observador ó en el centro de la tierra. Dado que todos los objetos a determinar se encuentran a distancias cuya magnitud hace prácticamente despreciable las dimensiones de la tierra, no es necesario establecer ninguna diferencia entre los sistemas por causa de este motivo.

1.2.1. Sistema del Horizonte

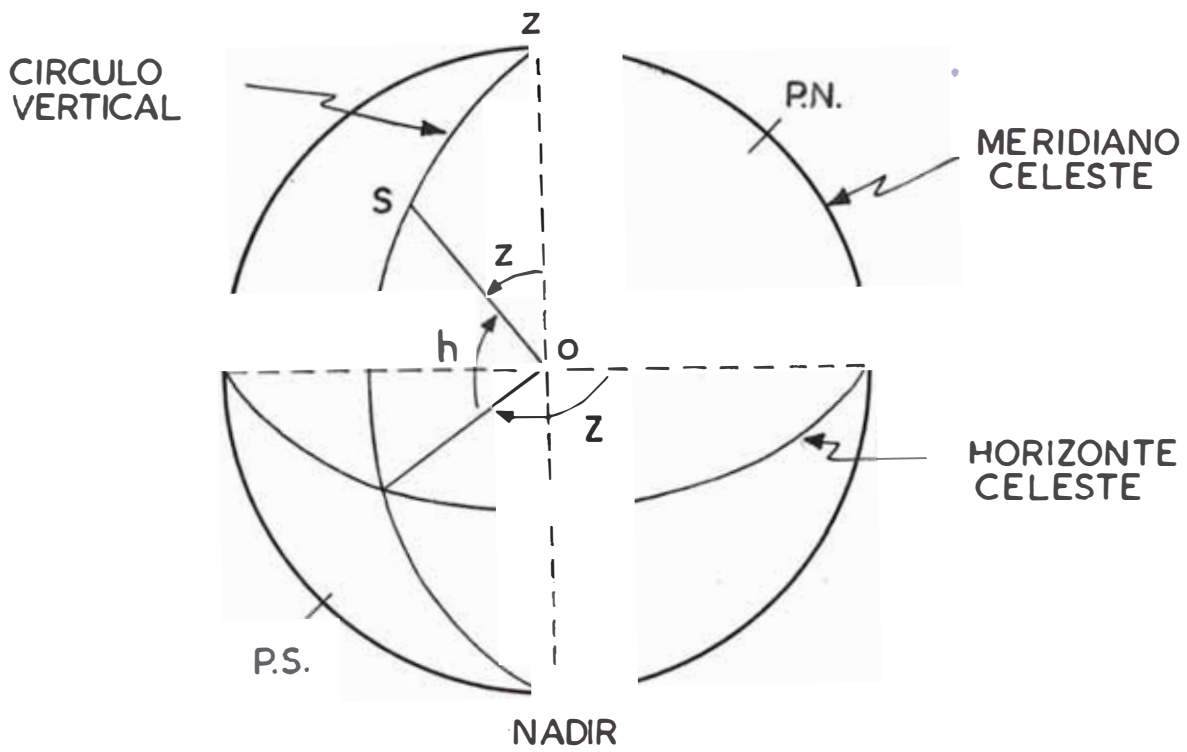
En este sistema el plano primario de referencia es el horizonte celeste y el plano secundario de referencia es el meridiano celeste del observador. Ver Fig. N° 1.2.1.

Si consideramos un punto cualquiera S perteneciente a la esfera celeste encontraremos que su posición está definida mediante los parámetros Altitud y Azimut

La altitud (h), es el ángulo entre la dirección OS y el horizonte celeste, medida de 0° a 90° en el plano del círculo vertical que pasa por S. Se le considera con signo positivo por encima del horizonte y con signo negativo por debajo de él.

Denominaremos Distancia Cenital al complemento de la altitud es decir: $z = 90^\circ - h$.

El azimut (Z), es el ángulo entre el plano vertical de S (punto observado) y el meridiano celeste del observador, medido desde el punto cardinal sur hacia el Oeste, en el horizonte celeste de 0° a 360°.



SISTEMA DEL HORIZONTE

FIG. I.2.I.

1.2.2. Sistema del Angulo horario

En este sistema el plano primario de referencia es el ecuador celeste y el plano secundario de referencia es el círculo horario que contiene al zenit o meridiano celeste del observador. Ver Fig. N°1.2.2.

Si consideramos un punto S cualquiera de la esfera celeste, su posición está determinada mediante la Declinación y el Angulo Horario. La Declinación δ es el ángulo entre la dirección OS y el ecuador celeste medio de 0° a 90° en el plano del círculo horario que pasa por S. Se le tomará con signo positivo en la semiesfera celeste del norte y con signo negativo en la semiesfera inferior.

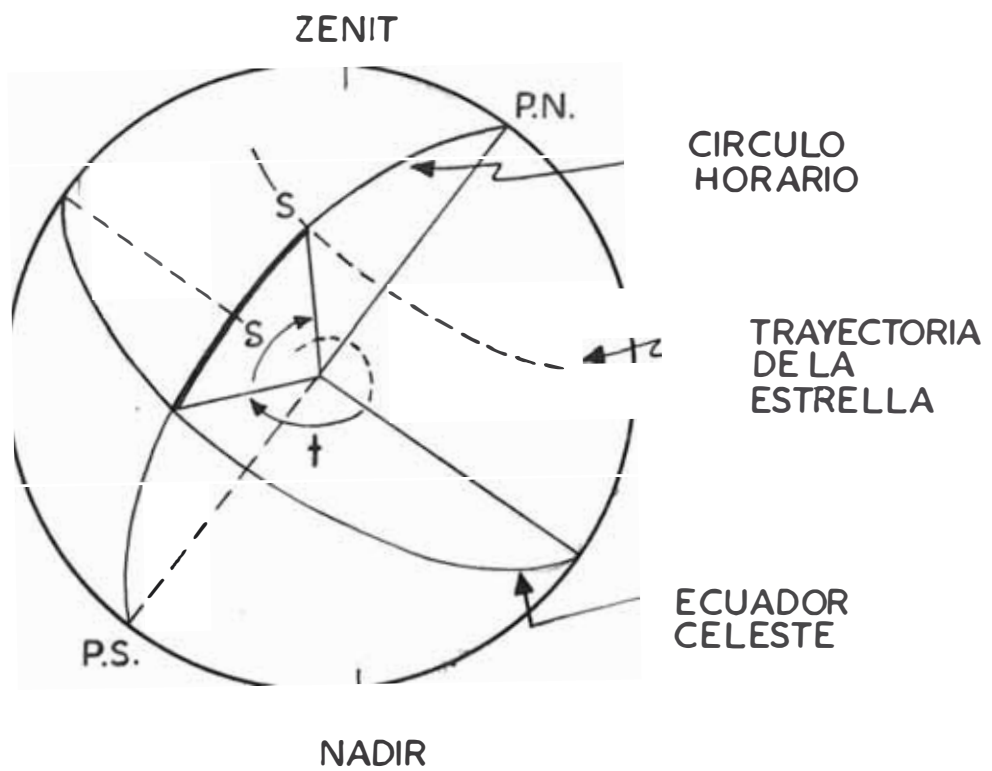
El complemento de la declinación recibe el nombre de Distancia Polar.

El ángulo horario (t) es el ángulo entre el círculo horario del punto S y el meridiano del observador medido desde la porción que contiene al zenit hacia el oeste y en el plano del ecuador celeste de 0^h a 24^h .

1.2.3. El sistema de ascensión recta

En el sistema el plano primario de referencia es el ecuador celeste pero el secundario es el coluro equinoccial. Fig. N°1.2.3.

Si S es un punto arbitrario en la esfera celeste, su posición está determinada por los parámetros Declinación y Ascensión Recta.



SISTEMA DEL ANGULO HORARIO

FIG. 1.2.2.

La ascensión recta (A.R.) es el ángulo entre el círculo horario de S y el coluro equinoccial medidos desde el punto vernal hacia el este en el plano del ecuador celeste de 0^h a 24^h .

1.2.4. Sistema de la Eclíptica

En este sistema el plano de referencia primario es la eclíptica y el secundario es el meridiano eclíptico del equinoccio. Fig.- No. 1.2.4.

Si S es un punto cualquiera de la esfera celeste su posición está determinada por los parámetros Latitud Eclíptica y Longitud Eclíptica.

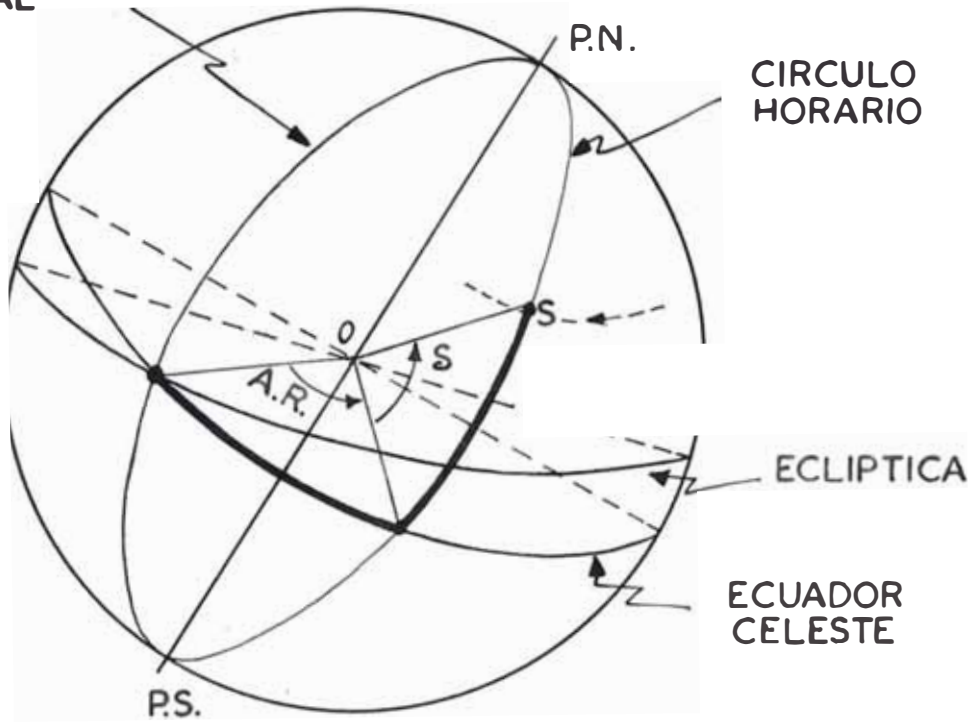
La latitud eclíptica β es el ángulo entre la dirección OS y la eclíptica, medido en el meridiano eclíptico de S de 0° a 90° . Se le considera con signo positivo al norte de la eclíptica y con signo negativo al sur de la misma.

El complemento de la latitud es la Distancia Polar Eclíptica.

La longitud eclíptica λ es el ángulo entre el meridiano eclíptico de S y aquel del equinoccio medido desde el punto vernal hacia el este, en la eclíptica de 0° a 360° .

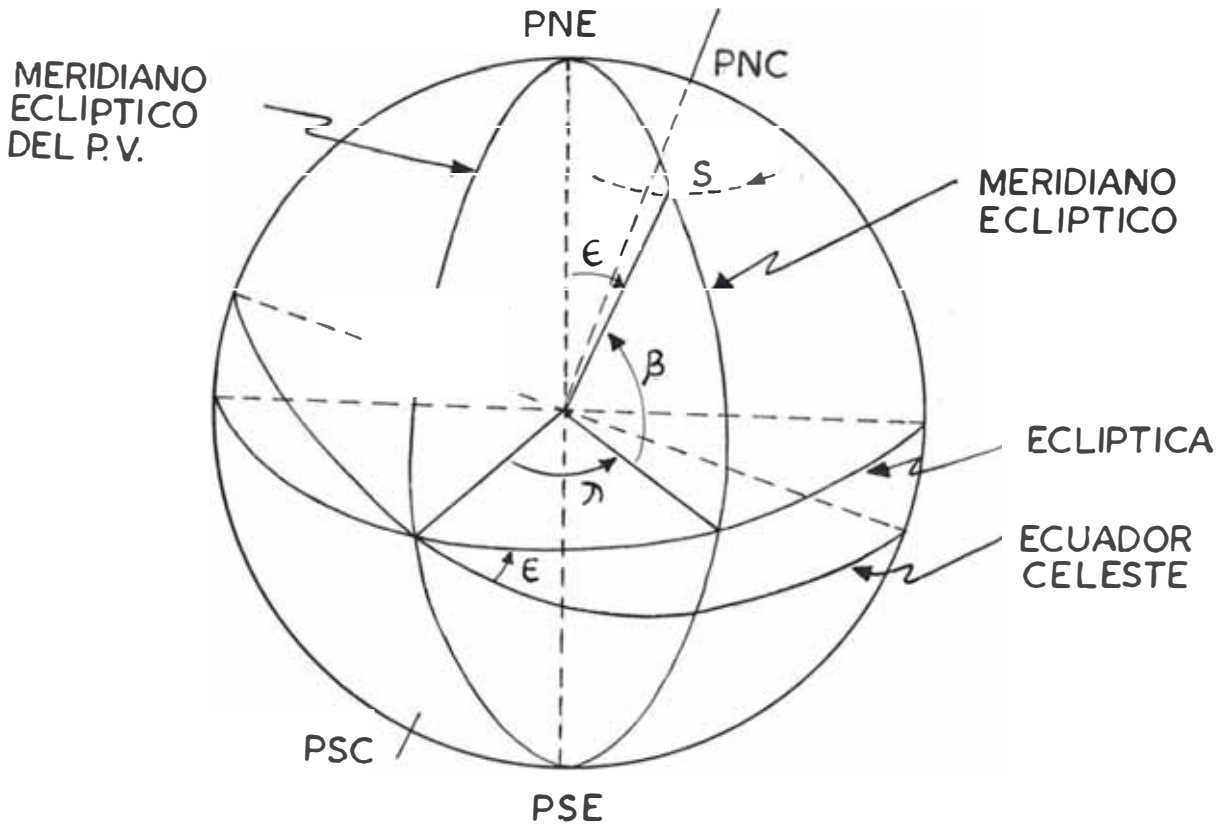
El ángulo agudo formado por la eclíptica y el Ecuador Celeste denominado la Oblicuidad de la Eclíptica los simbolizaremos por (ϵ)

COLURO
EQUINOCCIAL



SISTEMA DE ASCENSION RECTA

FIG. I.2.3.



SISTEMA DE LA ECLIPTICA
FIG. 1.2.4

1.2.5. Sistema del Observador

El plano de referencia primario es el ecuador celeste y el plano secundario es el meridiano celeste de Greenwich.

El zenit del observador, reemplaza en este sistema al punto S mencionado en los sistemas anteriores, su posición está determinada mediante la Latitud y la Longitud.

La latitud ϕ es el ángulo entre la dirección oz y el ecuador celeste medida de 0° a 90° en el plano del meridiano del observador.

Se le toma con signo positivo en la semiesfera celeste del norte y con signo negativo en la semiesfera del sur.

El complemento de la latitud se denomina Colatitud.

La longitud (λ) es el ángulo entre los círculos meridianos del observador y de Greenwich. Se le acostumbra a medir de 0° a 180° al este u oeste, según sea la posición del observador con relación al semimeridiano P.N. - G - P.S. (Fig. N° 1.2.5)

1.3. Transformaciones de Coordenadas

Es conveniente establecer relaciones que permitan pasar de un sistema de coordenadas a otro y a continuación deduciremos las relaciones que pueden establecerse entre los diferentes sistemas de coordenadas ya mencionados anteriormente.

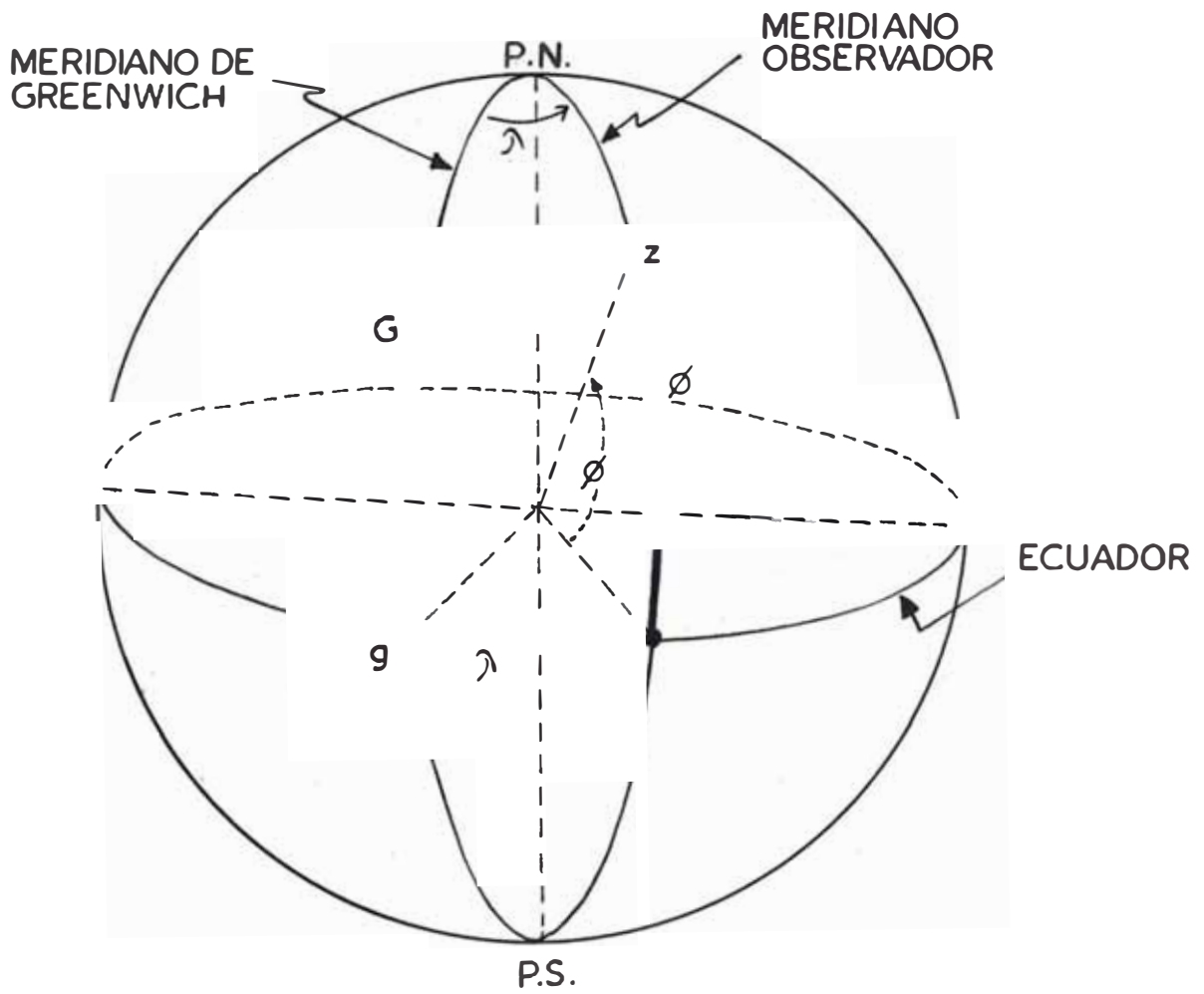


FIG. I.2.5.

SISTEMA DEL OBSERVADOR

1.3.1. Relaciones entre el Sistema del Horizonte y el Sistema del Angulo Horario

Consideremos un punto A cualquiera de la semi esfera celeste sur tal como aparece en la Fig. N° 1.3.1. donde se muestra los sistemas de horizonte y de ángulo horario.

En un instante determinado se ha observado un astro A y se han medido las coordenadas altura y azimut mediante un teodolito, en un lugar de latitud ϕ conocida. Se desea determinar las coordenadas del astro en el sistema ángulo horario, es decir declinación y ángulo horario propiamente dicho.

El triángulo astronómico con vértices : zenit, astro y polo elevado (el polo correspondiente a la latitud del observador), establece un enlace importante entre ambos sistemas. En nuestro caso trabajamos con el polo sur elevado - desde que nuestras observaciones las realizamos en el hemisferio sur. Analizamos los triángulos astronómicos para astros situados al oeste Fig. N° 1.3.1.a y al este Fig. N° 1.3.1.b.

En base a las propiedades de los triángulos esféricos podemos establecer relaciones tales que si queremos pasar del sistema del ángulo-horario al del horizonte serían:

$$\cos \delta \sin t = \sin z \cdot \sin Z \quad (1)$$

$$\cos z = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos t \quad (2)$$

$$\sin z \cos Z = -\sin \delta \cos \phi + \sin \phi \cos \delta \cos t \quad (3)$$

En las cuales son conocidos los valores δ , ϕ , Z , t ; por lo tanto al dividir (1) y (3) puede

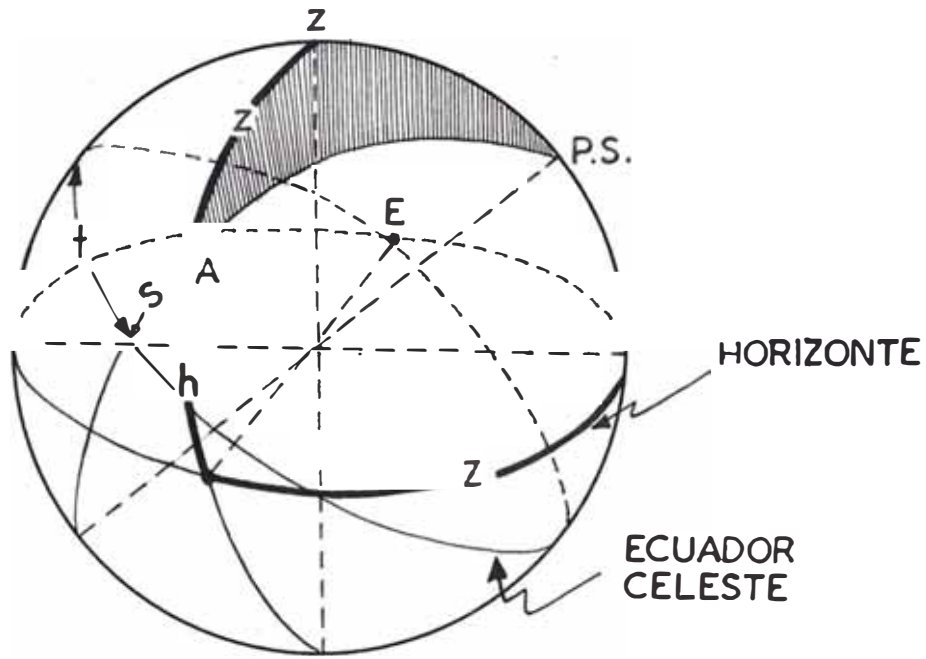
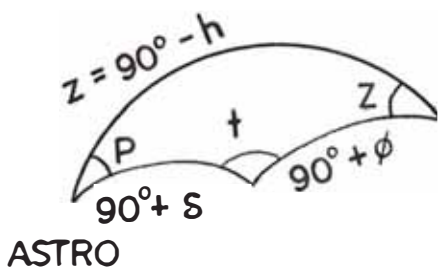
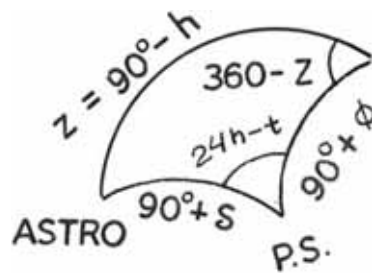


FIG. I.3.I.



ASTRO AL OESTE

FIG. I.3.I.- a



ASTRO AL ESTE

FIG. I.3.I - b

RELACIONES ENTRE EL SISTEMA DEL HORIZONTE Y EL SISTEMA DEL ANGULO HORARIO

calcularse el azimut Z. La distancia zenital z queda determinada por (2). El cuadrante del azimut queda establecido por el signo de su coseno.

Por un proceso análogo se puede establecer las fórmulas de conversión del sistema del horizonte al del ángulo horario.

1.3.2. Relaciones entre el Sistema del Angulo Horario y Ascensión Recta.

Como ambos sistemas utilizan el ecuador como referencia, sólo es necesario establecer relaciones entre las otras coordenadas no comunes a saber: ángulo horario y ascensión recta.

En la Fig. N° 1.3.2. se observa que:

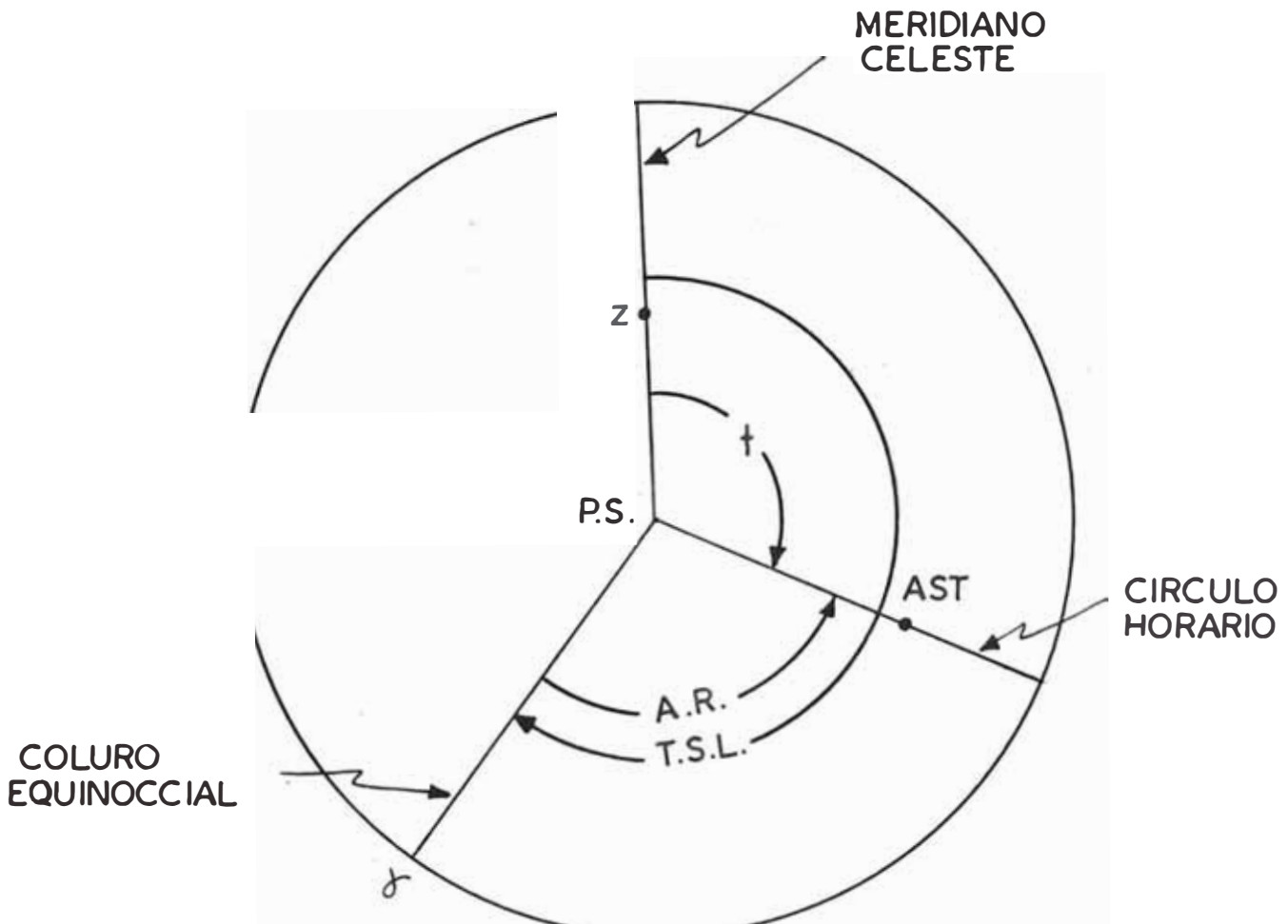
$$T.S.L. - A.R. + t \quad (1.4.)$$

donde T.S.L. es el Tiempo Sideral Local es decir el ángulo horario del punto vernal.

1.3.3. Relaciones entre el Sistema de Ascensión Recta y el de la Eclíptica

Consideremos un astro (A) en la semi esfera celeste Norte tal como aparece en la Fig. N° 1.3.3. que esté referido, simultáneamente, a los sistemas de ascensión recta y de la eclíptica.

Es conveniente observar que la ascensión recta del polo norte eclíptico (PNE) es 270° (18 horas) y similarmente, que la longitud del polo-norte celeste (PNC) es 90°. Es evidente que -



RELACIONES ENTRE EL SISTEMA DEL
ANGULO HORARIO Y EL DE ASCENSION
RECTA

FIG. I.3.2.

en el triángulo esférico PNE-PNC-A los ángulos en PNE y en PNC son: $(90^\circ - \lambda)$ y $(90^\circ + A.R.)$ respectivamente, tal como aparece en la Fig.- N° 1.3.3. a.

Si el astro A se encontrase del otro lado del solsticio colure, los ángulos correspondientes serían: $(\lambda - 90^\circ)$ y $(270^\circ - A.R.)$ respectivamente.

Las relaciones existentes entre ambos sistemas quedan obtenidas mediante la aplicación de las leyes del seno y del coseno a los diferentes elementos del triángulo esférico que aparece en la Fig. N° 1.3.3. a. y serían respectivamente:

$$\cos \delta \cos (A.R.) = \cos \beta \cos \lambda \quad (1.5.)$$

$$\sin \delta = \cos \beta \sin \lambda \sin \varepsilon + \sin \beta \cos \varepsilon \quad (1.6.)$$

$$\cos \delta \sin (A.R.) = \cos \beta \sin \lambda \cos \varepsilon - \sin \beta \sin \varepsilon \quad (1.7.)$$

$$\cos \beta \cos \lambda = \cos \delta \cos (A.R.) \quad (1.8.)$$

$$\sin \beta = -\cos \delta \sin (A.R.) \sin \varepsilon + \sin \delta \cos \varepsilon \quad (1.9.)$$

$$\cos \beta \sin \lambda = \cos \delta \sin (A.R.) \cos \varepsilon + \sin \delta \sin \varepsilon \quad (1.10)$$

Si fueran datos los parámetros del sistema eclíptico ε , λ y β (A.R.) queda determinada al dividir (1.7.) por (1.5.). La expresión (1.6.) proporciona el valor δ

Similarmente si los parámetros del sistema de ascensión recta (A.R.), δ y ε son conocidos λ pueden ser calculada al dividir (1.10.) por (1.8.).

La expresión (1.9.) proporciona el valor de β .

Los cuadrantes de (A.R.) y λ quedan determinados mediante el valor del seno y el signo de los cosenos.

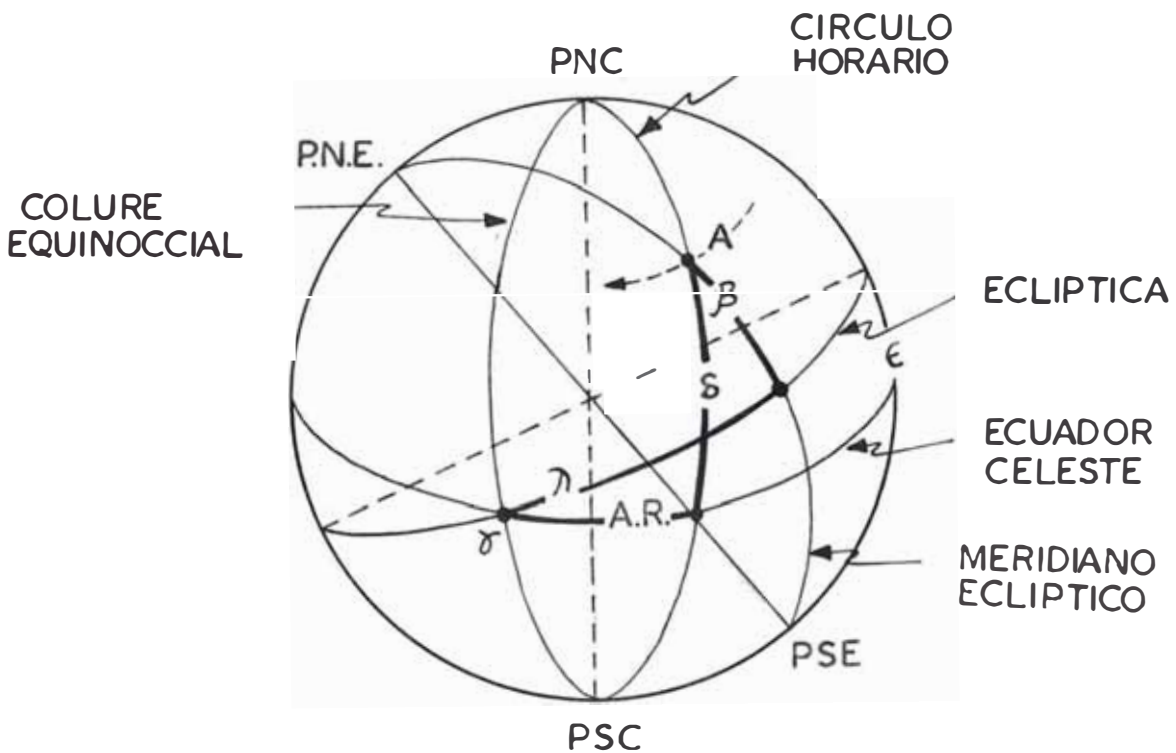
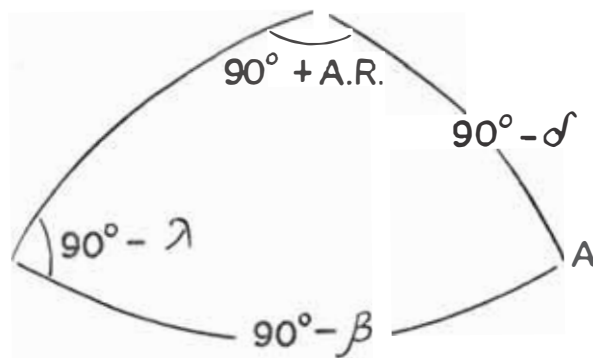


FIG. I.3.3.
RELACIONES ENTRE EL SISTEMA DE AS-
CENSION RECTA Y EL SISTEMA DE LA
ECLIPTICA



EL TRIANGULO ECLIPTICO
FIG. I.3.3. a

1.3.4. Transformación por medio de matrices

En sustitución a los métodos descritos en los puntos anteriores puede ser utilizado un sistema de transformación útil, especialmente, al emplear computadoras electrónicas.

Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas x, y, z, con su origen en el centro de la tierra. Ubiquemos el eje de las z perpendicular al plano primario de referencia de cualquier sistema celeste (ver tabla Nº 1) con su sentido positivo hacia el polo primario (ver tabla 2.); el eje de las x en la intersección de los planos primario y secundario con su sentido positivo hacia el polo secundario, y el eje de las y lo consideramos perpendicular a ambos y generado al rotar el eje de las x a un ángulo positivo de 90°, según las convenciones de signos seguidas en los diversos sistemas celestes.

De acuerdo a este sistema es evidente que los sistemas del horizonte y del ángulo horario son de la mano izquierda y que los sistemas de la ascensión recta y de la eclíptica son de la mano derecha.

Simbolizando las coordenadas curvilíneas medidas en el plano primario de referencia y en el plano perpendicular a él con los símbolos generales μ y ν respectivamente, las coordenadas cartesianas de un punto cualquiera de la esfera celeste, al considerar radio igual a uno, pueden ser calculadas de:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mu, \nu} = \begin{vmatrix} \cos \nu & \cos \mu \\ \cos \nu & \text{sen} \mu \\ \text{sen} \nu \end{vmatrix}$$

utilizaremos matrices ortogonales de rotación del orden 3×3 : $R_1(\theta)$, $R_2(\theta)$, y $R_3(\theta)$ para rotar el sistema general un ángulo θ alrededor de los ejes x, y, z , respectivamente.

$$R_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_3(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estas matrices son consistentes con un sistema coordenado de la mano derecha y signos positivos para una rotación antihoraria al observar el origen del sistema de coordenadas desde el extremo positivo del eje de rotación.

Las coordenadas en el sistema del ángulo horario podrían ser calculadas de aquellas correspondientes al sistema del horizonte mediante una rotación, en el último, de $\theta = 0^\circ$ alrededor del eje de las z y una rotación de $\theta = -(90^\circ - \phi)$ alrededor del eje de las Y .

Es decir:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{t, \delta} = R_2 (\phi - 90^\circ) R_3 (0^\circ) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{A, h}$$

El sistema de la eclíptica podría ser obtenido del sistema de ascensión recta mediante una simple rotación de $\theta = (\epsilon)$ alrededor del eje de las x .

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\lambda, \beta} = R_1 (\epsilon) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\alpha, \delta}$$

Las soluciones inversas a estas ecuaciones pueden ser obtenidas mediante la aplicación de las leyes generales del algebra de matrices:

Si: $x = R x^1$, entonces $x^1 = R^{-1} x$

$$(R_i R_j)^{-1} = R_j^{-1} R_i^{-1}$$

$$R^{-1} (\theta) = R(-\theta)$$

En base a estas condiciones las relaciones inversas en tre los diferentes sistemas serían:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{A, h} = R_3 (0^\circ) R_2 (90^\circ - \phi) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{t, \delta}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\alpha, \delta} = R_1 (-\epsilon) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\lambda, \beta}$$

Una vez realizada la conversión que corresponda, las coordenadas curvilíneas μ y ν pueden ser calculadas de:

$$\mu = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$\nu = \tan^{-1} \frac{z}{(x^2 + y^2)^{1/2}} - \sin^{-1} z$$

TABLA 1.- SISTEMAS DE COORDENADAS CELESTES (†)

Sistema	Plano de Referencia		Parámetros medidos desde el plano de referencia	
	Primario	Secundario	Primario	Secundario
Del Horizonte	Horizonte Celeste	Meridiano Celeste	Altitud $0^\circ \leq h \leq 90^\circ$ (+ hacia el zenit)	Azimut $0^\circ \leq Z \leq 360^\circ$ (+ al Oeste)
Del Angulo Horario	Ecuador Celeste	Círculo horario que contiene al zenit del observador	Declinación $- 90^\circ \leq \delta \leq + 90^\circ$	Angulo horario $0^h \leq t \leq 24^h$ (+ al Oeste)
De Ascensión Recta	Ecuador Celeste	Coluro equinoccial	Declinación $- 90^\circ \leq \delta \leq + 90^\circ$	Ascensión Recta $0^\circ \leq A.R. \leq 24^h$
De la Eclíptica	Eclíptica	Meridiano eclíptico del equinoccio	Latitud eclíptica $- 90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$	Longitud Eclíptica $0^\circ \leq \lambda \leq 360$

TABLA 2.- SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS CELESTES (+)

Sistema	Orientación del eje positivo			μ	ν	Sentido de la mano
	Polo secundario	y	z Polo primario			
Horizonte	Polo Sur	$Z = 90^\circ$	Zenit	Z	h	izquierda
Angulo Horario	Intersección del circulo horario del cenit con el ecuador celeste	$t = 90^\circ = 6^h$	Polo norte celeste	t	δ	izquierda
Ascensión Recta	Equinoccio vernal	A.R. = $90^\circ = 6^h$	Polo norte celeste	A.R.	δ	derecha
Eclíptica	Equinoccio vernal	$\lambda = 90^\circ$	Polo norte eclíptico	λ	β	derecha

1.3.5.- Ejemplo numérico.

Como una simple presentación de lo expuesto en el punto anterior consideraremos para la estrella 23487 del Catálogo General la conversión del Sistema de ascensión recta al de la eclíptica(+ +)

Datos de referencia

$$\alpha = 17^{\text{h}}20^{\text{m}}36^{\text{s}}.622 = 260^{\circ}09'09''.33$$

$$\delta = 40^{\circ}00'08''.04$$

$$\phi = 60^{\circ}00'00''.00$$

$$\epsilon = 23^{\circ}26'43''.06$$

La conversión por el método trigonométrico proporcionará:

$$\text{sen } \beta = -\cos \delta \text{ sen } \alpha \text{ sen } \epsilon + \text{sen } \delta \text{ cos } \epsilon$$

$$\text{sen } \beta = 0.89003496$$

$$\beta = 62^{\circ}52'39''.51$$

$$\text{tg } \lambda = \frac{\cos \delta \text{ sen } \alpha \cos \epsilon + \text{sen } \delta \text{ sen } \epsilon}{\cos \delta \cos \alpha}$$

$$\text{tg } \lambda = \frac{-0.43666300}{-0.13100831}$$

$$\operatorname{tg} \lambda = 3.33309391$$

$$\lambda = 73^{\circ}17'58''64 + 180^{\circ}$$

$$\lambda = 253^{\circ}17'58''64$$

Aplicando a la transformación el método matricial, tendremos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\alpha \delta} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.13100831 \\ -0.75473341 \\ 0.64281747 \end{bmatrix}$$

$$R_1(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & \operatorname{sen} \epsilon \\ 0 & -\operatorname{sen} \epsilon & \cos \epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.91744037 & 0.39787329 \\ 0 & -0.39787329 & 0.91744037 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\lambda \beta} = R_1(\epsilon) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\alpha \delta} = \begin{bmatrix} -0.13100831 \\ -0.43666300 \\ 0.89003496 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} \equiv \operatorname{tg}^{-1} 3.33309391 = 73^{\circ}17'58''64 + 180$$

$$\lambda = 253^{\circ}17'58''64$$

$$\beta = \operatorname{sen}^{-1} z = \operatorname{sen}^{-1} 0.89003496$$

$$\beta = 62^{\circ}52'39''51$$

C A P I T U L O 2

CALCULO DE LA LATITUD .- Métodos Tradicionales

La latitud astronómica, que ha sido definida ya anteriormente, queda determinada en el triángulo astronómico en base a la ley de cosenos: (Fig. N° 3.1.)

$$\cos z = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos t \cos \phi$$

Indudablemente el efecto provocado por los pequeños errores sistemáticos cometidos en las medidas de las distancias zenitales y ángulos horarios se obtiene al diferenciar la ecuación anterior con respecto a z y t , y es calculado por la expresión :

$$d \phi = -\sec Z dz - \cos \phi \operatorname{tg} Z dt$$

en esta expresión $\sec Z$ y $\operatorname{tg} Z$ alcanzan su menor valor cuando Z es 0° ó 180° ; es decir, cuando la estrella está en el meridiano.

La mayor fuente de errores sistemáticos en la distancia zenital z es el efecto de la refracción atmosférica el cual queda reducido al considerar pares de estrellas al norte y sur del zenit y que culminan aproximadamente en la misma distancia zenital.

Para la determinación de latitudes de primero y segundo ordenes se deben observar estrellas en el meridiano, por pares y los métodos tradicionales para el efecto son los de Horrebow-Talcot y de Sterneck que analizaremos brevemente a continuación.

2.1. METODO DE HORREBOW TALCOT

Este método se basa en la medida de la diferencia entre las distancias zenitales de dos estrellas situadas en el meridiano y a lados opuestos del zenit; utiliza pares de estrellas consecutivas de modo que a una estrella norte sigue obligatoriamente una estrella sur. Utiliza estrellas del Catálogo BOSS.

La ventaja de este método está en que no requiere la medida de distancias zenitales, reduciendo así las incertidumbres de corrección por refracción así como otros errores sistemáticos debidos a la lectura del círculo vertical (1)

Las estrellas son observadas en pares cuya diferencia de distancia zenital es tan pequeña que pueden ser medidas en el campo del telescopio, por medio del micrómetro impersonal, sin cambiar el ángulo vertical del telescopio.

Cualquier cambio en la inclinación entre las observaciones en las estrellas norte y sur se mide por medio de dos niveles HORREBOW, colocados en el eje horizontal del telescopio.

El procedimiento correspondiente a la observación - consiste en centrar el hilo móvil en la primera estrella cuando élla cruce el meridiano, leyendo el número de vueltas y divisiones del micrómetro; luego se leen los extremos de los niveles HORREBOW. Inmediatamente se gira el instrumento 180° y se repite el procedimiento para la segunda estrella.

(1) IVAN MUELLER. Spherical and practical astronomy p.p. 459.

La latitud queda determinada mediante las fórmulas:

$$\phi = \frac{1}{2} (\delta_S + \delta_N) + \frac{1}{2} (z_S - z_N) - \frac{1}{2} (\delta_S + \delta_N) + \frac{1}{2} (h_N - h_S)$$

para observaciones realizadas en el hemisferio norte (2)
y mediante la fórmula:

$$\phi = \frac{1}{2} (\delta_N + \delta_S) - \frac{1}{2} (z_N - z_S) = \frac{1}{2} (h_N - h_S) + \frac{1}{2} (\delta_N + \delta_S)$$

para observaciones realizadas en el hemisferio sur.

La diferencia de distancias zenitales en términos de la lectura del micrómetro se calcula por la expresión:

$$z_S - z_N = \pm (M_W - M_E) R$$

donde M_E y M_W son las lecturas del micrómetro, en unidades de vuelta del micrómetro, con ocular este y _este respectivamente, y R es el valor de una vuelta en segundos de arco (3)

Este signo es de acuerdo al instrumento utilizado (depende del sistema de graduación del micrómetro) siendo positivo para el WILD T-4.

En general deberá tenerse en cuenta las siguientes especificaciones:

1. El primer orden debe consistir en 16 pares de estrellas.
2. Debe usarse estrellas más brillantes que de la magnitud 7.

(2) IVAN MUELLER. Spherical and Practical Astronomy. p.p. 438
(3) IVAN MUELLER. Spherical and Practical Astronomy. p.p. 459

3. Las estrellas deben estar dentro de los 30° del zenit, es decir $\phi - 30^\circ \leq \delta \leq \phi + 30^\circ$
4. La diferencia de distancia zenital entre dos estrellas del par debe estar dentro del rango del micrómetro (20' para el WILD T-4).
5. La diferencia de ascensión recta no debe ser menor de 1^m ni mayor de 10^m .
6. La diferencia en ascensión recta entre la última estrella del par y la primera del par siguiente debe ser mínimo 2^m .
7. Necesariamente a una estrella norte (sur) , debe seguir una estrella sur (norte); este hecho es el que obliga el uso del Cátalogo BOSS
8. En una noche de trabajo la suma algebraica de - las diferencias micrométricas ($M_W - M_E$) debe- ser menor que el número de pares observados, a fin de minimizar el efecto de error por el valor del micrómetro.

2.2. METODO DE STERNECK

Este método está basado en la medida de las distancias zenitales meridianas de estrellas, es por ello que la principal fuente de error es debida a la refracción atmosférica.

Otras posibles causas de errores sistemáticos son el error del índice de la alidada vertical y el error de colocación del teodolito en el meridiano.

En general al aplicar este método deberá tenerse - en cuenta las siguientes especificaciones:

1. Los pares de estrellas no deben ser necesariamente consecutivos y no debe observarse más de 3 estrellas norte seguidas, ni más de 3 sur seguidas. Se utiliza el Catálogo FK-4.
2. Una determinación válida debe constar de ocho grupos separados, consistentes cada uno de 8 estrellas; en cada grupo se consideran 4 estrellas norte y 4 estrellas sur.
3. Las distancias zenitales de cualquier estrella no deben exceder de 40° , pero es preferible no exceder los 30° . La suma de distancias zenitales de las estrellas norte (sur) no debe exceder a la suma de las distancias zenitales de las estrellas sur (norte) en $+ 10^\circ$ pero es preferible que no exceda $+ 5^\circ$ por grupo.
4. Las observaciones se realizarán en dos noches, con un mínimo de 3 grupos por noche.
5. Las estrellas observadas deben ser de magnitud más brillante que 7.
6. El límbo vertical debe tener el nivel, nivelado y centrado, de modo que la suma de las posiciones izquierda - derecha de la burbuja se aproximen a 0 para cada grupo.
7. El error medio de la latitud no debe exceder de $0.3''$.

C A P I T U L O 3

LATITUD POR ANGULOS HORIZONTALES

3.1. Deducción de la fórmula del Azimut

Para deducir la fórmula que permite el cálculo del azimut de una estrella, aplicaremos en el triángulo esférico que aparece en la Fig. N° 3.1. las fórmulas de trigonometría esférica respectivas, teniendo así:

Por la ley de los senos:

$$\frac{\text{sen } Z}{\text{sen}(90^\circ + \delta)} = \frac{\text{sen } t}{\text{sen}(90^\circ - h)}$$

de donde:

$$\frac{\text{sen } Z}{\cos \delta} = \frac{\text{sen } t}{\cos h}$$

o bien:

$$\text{sen } Z = \frac{\text{sen } t \cos \delta}{\cos h} \tag{3.1.}$$

Por otra parte, aplicando la ley de los cosenos al mismo triángulo tendremos:

$$\cos(90^\circ + \delta) = \cos(90^\circ - h) \cos(90^\circ + \phi) + \text{sen}(90^\circ - h) \text{sen}(90^\circ + \phi) \cos Z$$

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ + \delta) \cos(90^\circ + \phi) + \text{sen}(90^\circ + \delta) \text{sen}(90^\circ + \phi) \cos t$$

que transformadas adecuadamente proporcionan:

$$\text{sen } \delta - \text{sen } h \text{ sen } \phi + \cos h \cos \phi \cos Z \tag{3.2.}$$

$$\text{sen } h - \text{sen } \phi \text{ sen } \delta + \cos \phi \cos \delta \cos t \tag{3.3.}$$

Por reemplazo de (3.3.) en (3.2.) tendremos:

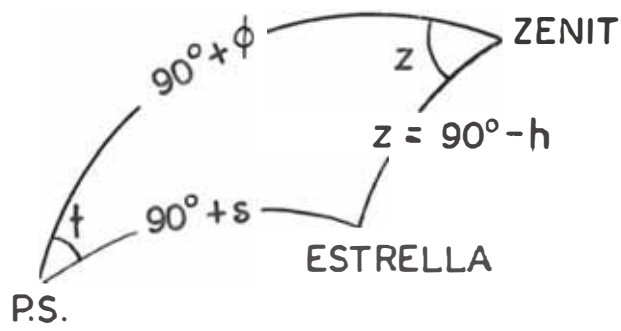


FIG. 3.I.

$$\begin{aligned}
 -\text{sen } \delta &= -(\text{sen } \phi \text{ sen } \delta + \text{cos } \delta \text{ cos } \phi \text{ cos } t) \text{sen } \phi + \text{cos } h \text{ cos } \phi \text{ cos } Z \\
 -\text{sen } \delta &= -(1 - \text{cos}^2 \phi) \text{sen } \delta - \text{cos } \delta \text{ cos } \phi \text{ sen } \phi \text{ cos } t + \text{cos } h \text{ cos } \phi \text{ cos } Z \\
 \text{cos}^2 \phi \text{ sen } \delta - \text{cos } \delta \text{ cos } \phi \text{ sen } \phi \text{ cos } t + \text{cos } h \text{ cos } \phi \text{ cos } Z &= 0
 \end{aligned}$$

simplificando y despejando $\text{cos } Z$ se tiene:

$$\text{cos } Z = \frac{\text{cos } \delta \text{ sen } \phi \text{ cos } t - \text{cos } \phi \text{ sen } \delta}{\text{cos } h} \quad (3.4.)$$

dividiendo (3.1.) por (3.4.) aparece:

$$\text{tg } Z = \frac{\text{sen } t \text{ cos } \delta}{\text{sen } \phi \text{ cos } t \text{ cos } \delta - \text{cos } \phi \text{ sen } \delta}$$

o bien:

$$\text{tg } Z = \frac{\text{sen } t}{\text{sen } \phi \text{ cos } t - \text{cos } \phi \text{ tg } \delta} \quad (3.5.)$$

y que equivale a:

$$\text{ctg } Z = \text{sen } \phi \text{ ctg } t - \frac{\text{cos } \phi \text{ tg } \delta}{\text{sen } t} \quad (3.6.)$$

Las expresiones equivalentes (3.5.) y (3.6.) nos señalan el azimut en que será observada una estrella en función de la declinación y ángulo horario de la misma, y de la latitud del observador.

El ángulo horario t , no es directamente observado de la estrella, pero es determinado de la lectura del cronómetro en el instante en que la estrella cruza el hilo vertical, y por lo tanto computado de:

$$\begin{aligned}
 \text{TSMG} &- T + \Delta T \\
 \text{TSAG} &- \text{TSMG} + n \\
 \text{TSAL} &- \text{TSAG} - \lambda \\
 t &- \text{TSAL} - \alpha
 \end{aligned}$$

donde:

T es la lectura del cronómetro

ΔT es la corrección al cronómetro determinada por señales radio horarias.

n nutación en ascensión recta.

α ascensión recta de la estrella.

t ángulo horario de la estrella.

3.2. Precisión del método : errores sistemáticos

las principales causas de errores sistemáticos son:

- a) El error ($d\phi$) en la latitud asumida.
- b) El error (dt) en el ángulo horario, debido esto a:

Un error constante en el tiempo observado del tránsito de la estrella.

Un error en la longitud asumida.

Un error en la corrección del cronómetro.

La influencia de estos errores en el cálculo del azimut de la estrella queda determinada por la diferencial total de azimut (dZ) en función de las derivadas parciales correspondientes.

Para la deducción de la diferencial total dZ , derivemos la expresión (3.6.) parcialmente con respecto a ϕ

$$-\operatorname{cosec}^2 Z \frac{\partial Z}{\partial \phi} = \cos \phi \operatorname{ctg} t + \frac{\operatorname{sen} \phi \operatorname{tg} \delta}{\operatorname{sen} t}$$

$$-\operatorname{cosec}^2 Z \frac{\partial Z}{\partial \phi} = \frac{\cos \phi \operatorname{ctg} t \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} \phi \operatorname{tg} \delta}{\operatorname{sen} t}$$

$$-\left(\frac{\partial Z}{\partial \phi} \right) \operatorname{cosec}^2 Z = \frac{\operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \delta + \cos \phi \cos t \cos \delta}{\operatorname{sen} t \cos \delta} \quad (3.7.)$$

teniendo en cuenta que en el triángulo esférico de trabajo se cumple:

$$\text{sen } h - \text{sen } \delta \text{ sen } \phi + \text{cos } \delta \text{ cos } \phi \text{ cos } t$$

al reemplazar esta expresión en (3.7) encontraremos:

$$\frac{\partial Z}{\partial \phi} = - \frac{\text{sen } h \text{ sen}^2 Z}{\text{sen } t \text{ cos } \delta} = - \frac{\text{sen } h \text{ sen } Z}{\text{cos } \delta} \cdot \frac{\text{sen } Z}{\text{sen } t}$$

asimismo, por la ley de los senos, tenemos que:

$$\frac{\text{sen } Z}{\text{sen } t} = \frac{\text{cos } \delta}{\text{cos } h}$$

por tanto:

$$\frac{\partial Z}{\partial \phi} = - \frac{\text{sen } h \text{ sen } Z}{\text{cos } \delta} \cdot \frac{\text{cos } \delta}{\text{cos } h} = - \frac{\text{sen } h \text{ sen } Z}{\text{cos } h}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \phi} = - \text{sen } Z \text{ tg } h \quad (3.8.)$$

Igualmente, calculando la derivada parcial en (3.6.)- con respecto a t, tendremos:

$$-\text{cosec}^2 Z \frac{\partial Z}{\partial t} = \text{sen } \phi (-\text{cosec}^2 t) + \frac{\text{cos } \phi \text{ tg } \delta \text{ cos } t}{\text{sen}^2 t}$$

que transformada adecuadamente, en función de la ley de los senos, proporciona:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = - \frac{\text{cos } \phi \text{ tg } \delta \text{ cos } t \text{ cos}^2 \delta}{\text{cos}^2 h} + \frac{\text{sen } \phi \text{ cos}^2 \delta}{\text{cos}^2 h} \quad (3.9.)$$

teniendo en cuenta que en el triángulo esférico se cumple:

$$\begin{aligned} & \cos \phi \sin \delta \cos t - \cos h \cos p + \cos \delta \sin \phi \\ & \cos \delta \cos p - -\cos h \sin \phi - \sin h \cos \phi \cos Z \end{aligned}$$

expresiones que reemplazadas en (3.9.) proporcionan:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \cos \phi (\operatorname{tg} \phi + \cos Z \operatorname{tg} h) \quad (3.10.)$$

en base a los resultados de (3.8.) y (3.10.) diremos que:

$$dZ = -\sin Z \operatorname{tg} h d\phi + \cos \phi (\operatorname{tg} \phi + \cos Z \operatorname{tg} h) dt \quad (3.11.)$$

expresión que nos permite determinar el error cometido en el cálculo del azimut, ocasionado por errores en la latitud, (ϕ), y en el ángulo horario (t).

En adición a los errores anteriores debemos considerar los errores casuales o accidentales los cuales tienen una forma aleatoria y no pueden ser corregidos.

Estos errores proceden de diversas fuentes, las principales son:

- a) Errores accidentales al señalar a la estrella.
- b) Errores accidentales en la lectura del cronómetro o cronógrafo.
- c) Errores accidentales en la marcha del cronómetro o cronógrafo.
- d) Variación en la ecuación personal.

Todos estos errores pueden ser fácilmente reducidos, principalmente mediante la repetición de las observaciones; pero, el análisis de los mismos es difícil ya que ellos

dependen del instrumento utilizado, de la habilidad del observador y las condiciones meteorológicas locales.

Con relación a ellos podemos establecer: (4)

m_{hp} error al señalar a la estrella con el hilo vertical. No depende de la velocidad de la estrella. Se puede estimar de $4.7''/v$ a $70''/v$ siendo v la magnificación del telescopio.

m_{ha} error al medir el ángulo horizontal entre una estrella y una marca de azimut, no tomando en cuenta el error de señalamiento a la estrella. Incluye el error de lectura en la marca del azimut.

m_e error de nivelación del teodolito o de la lectura del Striding Level.

error de tiempo por causa de variaciones en la ecuación personal del observador, errores en la lectura del cronómetro o cronógrafo y errores en la marcha del cronómetro o cronógrafo.

m_{va} error en la medida de la altura de una estrella, incluye el error de lectura y el error del centro de burbuja.

m_{vp} error de señalamiento de la estrella con el hilo horizontal del telescopio.

Para los teodolitos de segundo orden, así como para los teodolitos geodésicos, han sido ya determinados estos valores, los cuales aparecen en la tabla que se presenta a continuación (5); se considera tipo A al de

(4) IVAN MUELLER. Spherical and Practical Astronomy p.p.415.

Segundo orden (t-2) y de tipo B al geodésico (T-3).

Error Medio	Tipo A	Observación	Tipo B	Observación
m_{hp}	2.5	v - 28	1.8	V - 40
m_{ha}	2.5		0.8	
m_e	1.5	nivelado por medio del nivel limbo 20"/mm	0.9	Nivelado por medio del nivel limbo - 7"/2mm
m_e	1.0	Lectura Striding Level- 5"/2mm.		No lleva Striding level
m_{va}	1.8		0.4	
m_{vp}	2.5	$m_{vp} - m_{hp}$	1.8	$m_{vp} - m_{hp}$

Por otra parte es factible deducir la ecuación correspondiente al error Standard casual en la determinación del azimut promedio (6).

Para ello tengamos en cuenta la ecuación (3.11.)

$$dZ = -\sin Z \, \text{tg} \, h \, d\phi + \cos \phi (\text{tg} \, \phi + \cos Z \, \text{tg} \, h) \, dt$$

Si α es el azimut de un astro y ψ el ángulo horizontal medido a un punto, el azimut de la línea que une el punto con la estación de observación será:

$$Z = \alpha + \psi$$

Si fueran observadas dos estrellas:

$$\bar{Z} = \frac{1}{2} \left[(\alpha_1 + \psi_1) + (\alpha_2 + \psi_2) \right]$$

(5) ROELOFS, R. Astronomy Applied to land Survey p.p. 102

(6) ROELOFS, R. Astronomy Applied to land Survey p.p. 109

y teniendo en cuenta la ecuación (3.11.) se obtiene:

$$dZ = \frac{1}{2} (\text{sen } Z_1 \text{ tgh } h_1 + \text{sen } Z_2 \text{ tgh } h_2) d\phi + \frac{1}{2} (2\text{tg } \phi + \cos Z_1 \text{ tgh } h_1 + \cos Z_2 \text{ tgh } h_2) \cos \phi dt$$

los errores provenientes de ambas fuentes de error pueden ser eliminados si:

$$\text{sen } Z_1 \text{ tgh } h_1 = - \text{sen } Z_2 \text{ tgh } h_2 \quad (3.12)$$

$$2 \text{tg } \phi + \cos Z_1 \text{ tgh } h_1 = - \cos Z_2 \text{ tgh } h_2 \quad (3.13)$$

así mismo para las principales fuentes de errores casuales tendremos:

m_t error en el tiempo del cronómetro cronógrafo.

El error medio en el azimut, por efecto de este error, está dado por la fórmula obtenida al aplicar la ley de la propagación de errores a la expresión:

$$\cos \phi (\text{tg } \phi + \cos Z \text{ tgh } h)$$

es decir:

$$\cos \phi (\text{tg } \phi + \cos Z \text{ tgh } h) m_t$$

m_{hp} error medio al señalar la estrella. El efecto provocado en el azimut ($d\alpha$) por causa del error en el señalamiento de la estrella (dp) se deduce de la Fig. N° 3.2., en ella observamos que:

$$\frac{R}{R \cosh h} = \frac{d\alpha}{dp}$$

es decir:

$$d\alpha = \sec h dp$$

el efecto medio lo tendremos como:

$$m_{hp} \sec h$$

m_e error medio en la nivelación o en la lectura del-
Striding level. El efecto provocado en el azimut
es:

$$m_e \operatorname{tg} h_o$$

m_{ha} error de lectura de los dos círculos y error me-
dio en el señalamiento a la marca del azimut. El
efecto será m_{ha} .

Al sumar los cuadrados de estos efectos, para una es-
trella, tendremos:

$$\cos^2 \phi (\operatorname{tg} \phi + \cos Z_1 \operatorname{tg} h_1)^2 m_t^2 + m_{hp}^2 \sec^2 h_1 + m_{ha}^2 + m_e^2 \operatorname{tg}^2 h_1$$

o bien:

$$\cos^2 \phi (\operatorname{tg} \phi + \cos Z_1 \operatorname{tg} h_1)^2 m_t^2 + (m_{hp}^2 + m_e^2) \operatorname{tg}^2 h_1 + (m_{hp}^2 + m_{ha}^2)$$

Es indudable que el cuadrado del error medio para el azi-
mut, obtenido de dos series de observaciones, (cada una -
con anteojo directo o invertido), es un cuarto del valor
anterior.

Si observásemos otra estrella se cumpliría también lo se-
ñalado más arriba; el cuadrado del error medio para el-
azimut promedio \bar{Z} será:

$$m_{\bar{Z}}^2 = \frac{1}{16} \cos^2 \phi [(\operatorname{tg} \phi + \cos Z_1 \operatorname{tg} h_1)^2 + (\operatorname{tg} \phi + \cos Z_2 \operatorname{tg} h_2)^2] m_t^2$$

$$+ \frac{1}{16} (m_{hp}^2 + m_e^2) (\operatorname{tg}^2 h_1 + \operatorname{tg}^2 h_2) + \frac{1}{8} (m_{hp}^2 + m_{ha}^2) \quad (3.14.)$$

Si elevamos al cuadrado (3.12.) y (3.13.), al sumar los
resultados encontramos:

$$\operatorname{sen}^2 Z_1 \operatorname{tg}^2 h_1 = \operatorname{sen}^2 Z_2 \operatorname{tg}^2 h_2$$

$$4 \operatorname{tg}^2 \phi + 4 \operatorname{tg} \phi \cos Z_1 \operatorname{tg} h_1 + \cos^2 Z_1 \operatorname{tg}^2 h_1 = \cos^2 Z_2 \operatorname{tg}^2 h_2 \quad (3.15.)$$

$$4 \operatorname{tg}^2 \phi + 4 \operatorname{tg} \phi \cos Z_1 \operatorname{tg} h_1 + \cos^2 Z_1 \operatorname{tg}^2 h_1 + \operatorname{sen}^2 Z_1 \operatorname{tg}^2 h_1 = \\ - \operatorname{sen}^2 Z_2 \operatorname{tg}^2 h_2 + \cos^2 Z_2 \operatorname{tg}^2 h_2$$

por tanto:

$$\operatorname{tg}^2 h_2 = 4 \operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^2 h_1 + 4 \operatorname{tg} \phi \cos Z_1 \operatorname{tg} h_1 \quad (3.16.)$$

por (3.12.) (3.15.) y (3.16.) en (3.14.) encontramos:

$$\frac{m^2}{Z} - \frac{1}{16} \cos^2 \phi \{ (\operatorname{tg} \phi + \cos Z_1 \operatorname{tg} h_1)^2 + \operatorname{tg} \phi + (-2 \operatorname{tg} \phi - \cos Z_1 \operatorname{tg} h_1) \} m_t^2 + \\ + \frac{1}{16} (m_{hp}^2 + m_e^2) (\operatorname{tg}^2 h_1 + 4 \operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^2 h_1 + 4 \operatorname{tg} \phi \cos Z_1 \operatorname{tg} h_1) + \\ + \frac{1}{8} (m_{hp}^2 + m_{ha}^2)$$

desarrollando adecuadamente y simplificando:

$$\frac{m^2}{Z} = \frac{1}{16} \cos^2 \phi [2 \operatorname{tg}^2 \phi + 4 \operatorname{tg} \phi \cos Z_1 \operatorname{tg} h_1 + 2 \cos^2 Z_1 \operatorname{tg}^2 h_1] m_t^2 + \\ + \frac{1}{16} (m_{hp}^2 + m_e^2) (2 \operatorname{tg}^2 h_1 + 4 \operatorname{tg}^2 \phi + 4 \operatorname{tg} \phi \cos Z_1 \operatorname{tg} h_1) + \frac{1}{8} (m_{hp}^2 + m_{ha}^2) \\ \frac{m^2}{Z} = \frac{1}{8} \cos^2 \phi [\operatorname{tg} \phi + \cos Z_1 \operatorname{tg} h_1]^2 m_t^2 + \\ + \frac{1}{8} (m_{hp}^2 + m_e^2) (2 \operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^2 h_1 + 2 \operatorname{tg} \phi \cos Z_1 \operatorname{tg} h_1) + \\ + \frac{1}{8} (m_{hp}^2 + m_{ha}^2) \\ \frac{m^2}{Z} - \frac{1}{8} m_t^2 \left[(\operatorname{tg} \phi + \cos Z_1 \operatorname{tg} h_1)^2 \cos^2 \phi + \frac{(m_{hp}^2 + m_e^2)}{m_t^2} (2 \operatorname{tg}^2 \phi + \right. \\ \left. + \operatorname{tg}^2 h_1 + 2 \operatorname{tg} \phi \cos Z_1 \operatorname{tg} h_1) \right] + \frac{1}{8} (m_{hp}^2 + m_{ha}^2)$$

es decir:

$$m^2_{\bar{Z}} = \frac{1}{8} F m_t^2 + \frac{1}{8} (m_{hp}^2 + m_{ha}^2)$$

para :

$$F = \cos^2 \phi (\operatorname{tg} \phi + \cos Z_1 \operatorname{tg} h_1)^2 + m(2\operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^2 h_1 + 2\operatorname{tg} \phi \cos Z_1 \operatorname{tg} h_1)$$

$$m = \frac{m_{hp}^2 + m_e^2}{m_t^2}$$

que generalizando para n estrellas observadas proporciona:

$$m^2_{\bar{Z}} = \frac{1}{n} F m_t^2 + \frac{1}{n} (m_{hp}^2 + m_{ha}^2) \quad (3.17.)$$

3.3. Posiciones más convenientes de observación.- Estrellas en máxima elongación

A fin de evitar el conocimiento del tiempo de las observaciones podemos efectuar el cálculo del azimut por la altura de la estrella; en este proceso las lecturas de los limbos, horizontal y vertical, son realizadas al pasar la estrella por el centro de los hilos de retículo . (7).

El azimut es calculado mediante la fórmula

$$\cos Z = \frac{\operatorname{sen} h \operatorname{sen} \phi - \operatorname{sen} \delta}{\cos \phi \cos h} \quad (3.18.)$$

donde h es la altura de la estrella; ésta debe ser corregida por refracción.

Al diferenciar la ecuación (3.18.), a fin de analizar

(7) MUELLER, Ivan I., Spherical and Practical Astronomy . pp. 416

las fuentes de error, encontramos que:

$$-dZ \operatorname{sen} Z = (\operatorname{tg} h + \cos Z \operatorname{tg} \phi) d\phi + (\operatorname{tg} \phi + \cos Z \operatorname{tg} h) dh \quad (3.19.)$$

Observamos en (3.19.) que las principales fuentes de error sistemático corresponden, al error en la latitud asumida ($d\phi$) y error en la altura (dh) proveniente de error en la refracción.

El error en $d\phi$ es cero cuando:

$$\operatorname{tg} h = - \cos Z \operatorname{tg} \phi$$

es decir, cuando el ángulo horario de la estrella es 90° ó 270° .

El error en dh es cero cuando:

$$\operatorname{tg} \phi = - \cos Z \operatorname{tg} h$$

esto ocurre en la Elongación de la estrella.

De lo anterior se deducen dos métodos de observación:

- a) Para latitudes menores de 15° deberán ser observadas estrellas al este u oeste, cercanas a la elongación y en una altura aproximada de 15° .
- b) En latitudes mayores de 15° se observarán estrellas con un ángulo horario aproximado a los 90° ó 270° y en alturas cercanas a los 15° .

Por otra parte por el análisis de la expresión (3.11.) podemos establecer que para eliminar el error correspondiente a la toma de tiempo (dt) debe cumplirse:

$$\operatorname{tg} \phi = - \cos Z \operatorname{cotg} z$$

lo cual es satisfecho cuando el ángulo paraláctico de la estrella es 90° , es decir ella se encuentra en máxima elongación. Esta posición de máxima elongación solamente

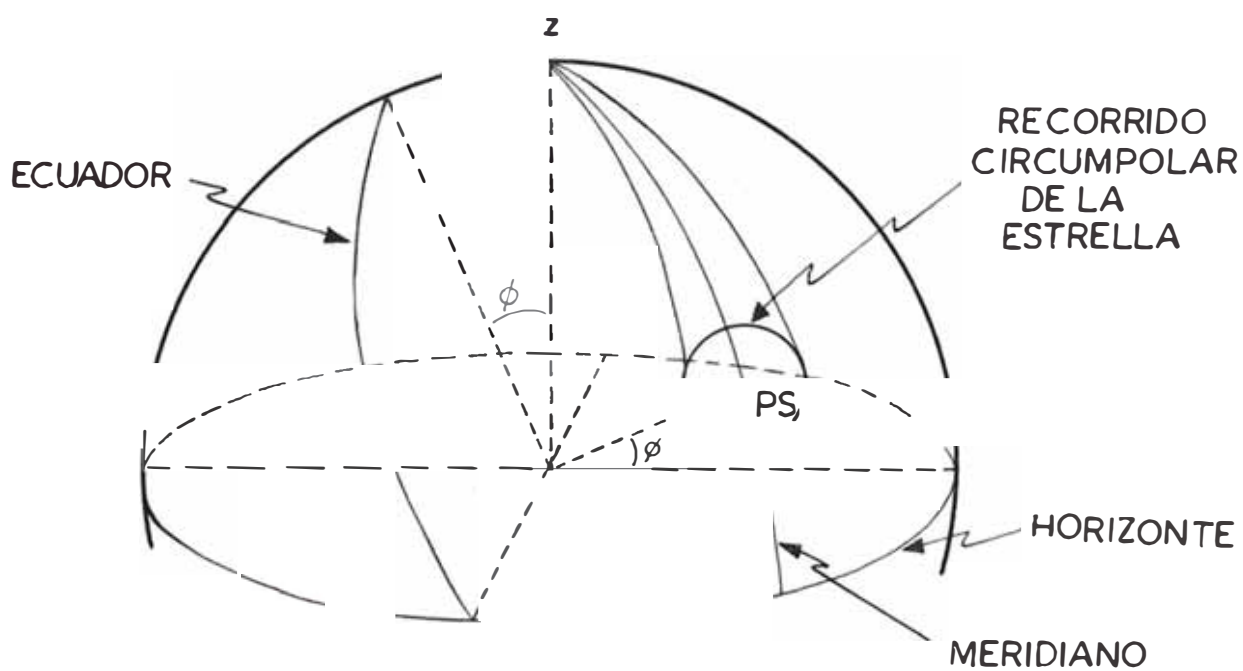


FIG. 3.3.

te se cumple con las estrellas circumpolares, (8) y, lógicamente, existirán dos posiciones de máxima elongación una en el este y otra hacia el oeste. (Fig. Nº 3.3.)

3.4. Programas de Estrellas

El programa de estrellas es el proceso mediante el cual seleccionamos las estrellas que van a ser observadas, analizando, previamente, si es factible su observación en horas nocturnas. Las posiciones que deberemos considerar para ellas en base a lo establecido en (3.3.) serán en máxima elongación y aplicaremos las fórmulas:

$$\text{sen } Z = \frac{\text{cos } \delta}{\text{cos } \phi}$$

$$\text{sen } h = \frac{\text{sen } \phi}{\text{sen } \delta}$$

$$\text{cos } t = \frac{\text{tg } \phi}{\text{tg } \delta}$$

donde Z siempre es menor de 90° para la posición de máxima elongación.

3.5. Medición de Angulos Horizontales

3.5.1. Inclinación del eje horizontal del anteojo.

Es el ángulo o altura del eje horizontal del anteojo con respecto al horizonte, en el punto de observación; es positivo cuando el extremo-Este, está más alto.

Este error instrumental hace variar el ángulo horizontal medido debido a que éste no es medido a partir de un círculo vertical, sino desde un círculo inclinado (zenit instrumental)

(8) MUELLER, Ivan I., Spherical and Practical Astronomy p.p. 409.

Sensibilidad del nivel montante

Para ajustes de este trabajo es necesario utilizar un nivel montante, con el objeto de calcular la inclinación del eje horizontal. La sensibilidad debe ser del rango de 1 a 2 segundos por cada división de 2 milímetros.

El cálculo de esta sensibilidad deberá efectuarse previamente a la observación.

C A P I T U L O 4

TRABAJO PRACTICO

4.1. Estrellas a observar.- Programa de estrellas

El trabajo se llevó a cabo el día 18 de Abril-1973
bajo las condiciones siguientes

$$T.S.G = 13^h 42^m 00^s$$

$$\lambda = 5^h 08^m 00^s$$

$$T.S.L = 8^h 34^m 00^s$$

= 7 pm hora legal

$$t = 2^h 30^m 00^s$$

Teniendo en cuenta que:

$$T.S.L = A.R + t(W)$$

$$T.S.L = A.R - t(E)$$

O sea:

$$A.R = T.S.L - t (W)$$

$$A.R = T.S.L + t (E)$$

tendremos que los valores mínimos aceptados serán

Estrellas al

$$\text{Este} : \text{A.R} = 11^{\text{h}} 04^{\text{m}} 00^{\text{s}}$$

$$\text{Oeste} : \text{A.R} = 6^{\text{h}} 04^{\text{m}} 00^{\text{s}}$$

Estrella 519

$$\text{A.R} : 14^{\text{h}} 05^{\text{m}}$$

$$\phi : - 12^{\circ} 06'$$

$$\delta : - 26^{\circ} 33'$$

magnitud 3.5

Estos valores proporcionan:

$$A = 66^{\circ} 11' 14'' \text{ (W)}, 293^{\circ} 48' 46'' \text{ (E)}$$

$$z = 62^{\circ} 01' 58''$$

$$t = 4^{\text{h}} 18^{\text{m}} 22^{\text{s}}$$

$$\text{T.S.L (E)} = 14^{\text{h}} 05^{\text{m}} - 4^{\text{h}} 18^{\text{m}} = 9^{\text{h}} 47^{\text{m}}$$

Estrella 1402

$$\text{A.R.} : 15^{\text{h}} 20^{\text{m}}$$

$$\phi : -12^{\circ} 06'$$

$$\delta : -40^{\circ} 33'$$

Magnitud 3.4

Estos valores proporcionan:

$$A = 50^{\circ} 59' 46'' \text{ (W)}, 309^{\circ} 00' 14'' \text{ (E)}$$

$$z = 71^{\circ} 11' 23''$$

$$t = 5^{\text{h}} 01' 57''$$

$$\text{T.S.L (E)} = 15^{\text{h}} 20^{\text{m}} - 5^{\text{h}} 02^{\text{m}} = 10^{\text{h}} 18^{\text{m}}$$

Estrella 223

$$\text{A.R.} = 5^{\text{h}} 50^{\text{m}}$$

$$\phi = -12^{\circ} 06'$$

$$\delta = 35^{\circ} 47'$$

magnitud 3.2

Estos valores proporcionan

$$A = 56^{\circ} 03' 52'' \text{ (W)}, 303^{\circ} 56' 08'' \text{ (E)}$$

$$z = 68^{\circ} 59' 32''$$

$$t = 4^{\text{h}} 50^{\text{m}} 47''$$

$$\text{T.S.L (W)} = 5^{\text{h}} 50^{\text{m}} + 4^{\text{h}} 51^{\text{m}} = 10^{\text{h}} 41^{\text{m}}$$

Estrella 238

$$A.R = 6^h 16^m$$

$$\phi = - 12^\circ 06^m$$

$$\delta = - 35^\circ 08^m$$

magnitud 4.5

Estos valores proporcionan

$$A = 56^\circ 45' 42'' \text{ (W)}, 303^\circ 14' 18'' \text{ (E)}$$

$$z = 68^\circ 38' 19''$$

$$t = 4^h 49^m 03^s$$

$$T.S.L = 6^h 16^m + 4^h 48^m = 11^h 05^m$$

Estrella 268

$$A.R = 6^h 58^m$$

$$\phi = -12^\circ 06'$$

$$\delta = -28^\circ 56'$$

magnitud 1.6

Estos valores proporcionan

$$A = 63^\circ 31' 02'' \text{ (W)}, 296^\circ 28' 58'' \text{ (E)}$$

$$z = 64^\circ 19' 26''$$

$$t = 4^h 28^m 46^s$$

$$T.S.L = 6^h 58^m + 4^h 24^m = 11^h 27^m$$

Estrella 1439

A.R : 16^h 50^m

ϕ : - 12° 06'

δ : - 38° 00'

magnitud 3.1

Estos valores proporcionan:

A = 53°41' 56" (E), 306° 18' 04" (W)

z = 70° 05' 39"

t = 4^h 56^m 18^s

T.S.L = 16^h 50^m - 4^h 56^m = 11^h 54^m

De las 6 estrellas programadas sólo se han considerado las 4 primeras porque para las 2 últimas se tuvo que renivelar el nivel montante y además las posiciones previas a las elongaciones quedaron en un intervalo muy pequeño.

4.2. Instrucciones de observación

La observación se realizó en uno de los jardines del Instituto Geográfico Militar situado en el distrito de Surquillo.

Instrumental utilizado

Se utilizó:

- Un teodolito KERN DKM -3A
- Un cromógrafo
- Un reloj sideral
- Un sintonizador automático
- Un radio de onda corta sintonizando la estación W W V (Washington).

Procedimiento de Observación

- Se instaló el teodolito apuntando 0° hacia el Sur
- Se observó las estrellas con el anteojo en posición directa e invertida, en las cercanías de su máxima elongación. ($\pm 10^m$).
- Al paso de cada estrella se leyó el ángulo horizontal, los extremos del nivel montante y se marcó la hora en el cromógrafo.

4.3. Linealización del método

Conforme a lo establecido en (3.11) tenemos:

$$dZ = \operatorname{sen} Z \operatorname{tgh} d\phi + \cos \phi (\operatorname{tg} \phi + \cos Z \operatorname{tgh}) dt$$

o lo que es lo mismo:

$$dZ = - \operatorname{sen} Z \operatorname{cot} z d\phi + \cos \phi (\operatorname{tg} \phi + \cos Z \operatorname{cot} z) dt \quad (4.1)$$

Considerando que se ha estado trabajando con un valor de latitud aproximada y que existen errores accidentales, debemos considerar la existencia de errores constantes y variables, teniendo así:

$$A_v = A_c + dZ = A_o + \Delta A \quad (4.2)$$

Siendo ΔA el error constante desconocido; de (4.2) tenemos:

$$dZ = A_o - A_c + \Delta A$$

que en (4.1) proporciona:

$$\begin{aligned} \Delta A + \operatorname{sen} Z \operatorname{cot} z d\phi - \cos \phi (\operatorname{tg} \phi + \cos Z \operatorname{cot} z) dt \\ - (A_c - A_o) = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde $\Delta\phi \cong d\phi$, $\Delta t \cong dt$

La ecuación (4.3) consta de tres variables ($\Delta A, \Delta\phi, \Delta t$) y por tanto sería necesario contar únicamente con tres observaciones las que proporcionarían un sistema de tres ecuaciones.

Dado que por razones de estadística disponemos de un mayor número de observaciones, el sistema consta de un número mayor de ecuaciones que de incógnitas y por tanto no existe una terna única que lo satisfaga, lo que conlleva a la necesidad de obtener el mejor valor de cada una de las variables mediante el método de mínimos cuadrados.

La ecuación (4.3) adopta entonces la estructura:

$$\Delta A + \operatorname{sen} A \cot z \Delta \phi - \cos \phi (\operatorname{tg} \phi + \cos A \cot z) \Delta t - (A_c - A_o) = v \quad (4.4)$$

donde v es el error variable.

La ecuación (4.4) es conocida como la ecuación linealizada del método.

4.4. Datos de campo.

En base a los datos de campo obtenidos puede formarse el cuadro de observaciones, tamizadas en primera instancia, que **aparece a** continuación para cada una de las estrellas observadas. En cada caso se eliminaron las posiciones iniciales y finales que son las más apartadas de la posición de máxima elongación.

ESTRELLA 238

Elongación Oeste δ -- - 35° 08' 04.80" AR: 6^h 15^m 35^s.955 α : 0.9881/ división ϕ : -12° 06' 00"

Posición	α	Azmut observado 56° 44'	Corrección de nivel	A_0 , azmut corregido	T. S. L. observado 11 h	Corrección de marcha	T. S. L. corregido	A_0 , azmut calculado 56°	λ_0 - λ	Sen A cot z	$\cos \phi (\pm \phi - \cos \lambda \cot z)$
I	67° 48' 36"	60 ^m .5	- 0.38	60 ^m .12	00' 35 ^m .72	0.07	35 ^m .79	45' 20 ^m .17	20 ^m .05	0.341113	-
I	56' 32"	61 ^m .5	- 0.38	61 ^m .12	01' 14 ^m .51	0.07	14 ^m .58	24 ^m .99	23 ^m .87	0.338890	0.007573
15 D	68° 10' 31"	61 ^m .1	1.88	62 ^m .92	02' 22 ^m .88	0.07	22 ^m .95	45' 31 ^m .45	28 ^m .53	0.334944	0.005027
D	14' 06"	62 ^m .0	2.11	64 ^m .11	40 ^m .40	0.07	40 ^m .47	32 ^m .69	28 ^m .58	0.333935	0.004376
D	17' 12"	61 ^m .7	2.34	64 ^m .04	55 ^m .60	0.07	55 ^m .67	33 ^m .63	29 ^m .59	0.333059	0.003819
D	20' 22"	61 ^m .8	2.37	64 ^m .17	03' 11 ^m .04	0.07	11 ^m .11	34 ^m .44	30 ^m .27	0.332171	0.003241
I	33' 34"	72 ^m .9	- 0.27	72 ^m .63	04' 16 ^m .50	0.07	16 ^m .57	36 ^m .44	23 ^m .81	0.328409	0.000936
20 I	38' 03"	74 ^m .5	- 0.39	74 ^m .11	04' 37 ^m .61	0.07	37 ^m .68	45' 36 ^m .58	22 ^m .47	0.327198	0.000059
I	41' 23"	74 ^m .9	- 0.39	74 ^m .51	53 ^m .86	0.07	53 ^m .93	36 ^m .53	22 ^m .02	0.326766	- 0.000544
I	45' 13"	73 ^m .6	- 0.39	73 ^m .22	05' 12 ^m .65	0.07	12 ^m .72	36 ^m .28	23 ^m .06	0.325189	- 0.001228
D	69° 00' 31"	60 ^m .5	- 0.38	62 ^m .57	06' 27 ^m .42	0.08	27 ^m .50	33 ^m .36	30 ^m .79	0.320912	- 0.003971
D	64' 40"	58 ^m .5	2.07	60 ^m .75	47 ^m .72	0.08	47 ^m .80	32 ^m .04	31 ^m .29	0.319753	- 0.004711
25 D	69° 11' 05"	55 ^m .9	2.25	58 ^m .21	07' 19 ^m .14	0.08	19 ^m .22	45' 29 ^m .55	31 ^m .34	0.317960	- 0.005849
D	14' 37"	54 ^m .4	2.31	56 ^m .78	36 ^m .43	0.08	36 ^m .51	27 ^m .95	31 ^m .17	0.316975	- 0.006477
I	27 ^m 43"	53 ^m .7	2.38	53 ^m .61	08' 40 ^m .48	0.08	40 ^m .56	20 ^m .61	27 ^m .00	0.313329	-
I	32' 06"	54 ^m .7	- 0.09	54 ^m .64	09' 01 ^m .90	0.08	01 ^m .98	17 ^m .66	23 ^m .02	0.312112	- 0.009577
I	35' 38"	51 ^m .0	- 0.06	50 ^m .98	19 ^m .22	0.08	19 ^m .30	15 ^m .09	24 ^m .11	0.311128	- 0.010197
30 I	69° 38' 57"	49 ^m .5	- 0.02	49 ^m .48	09' 35 ^m .42	0.08	35 ^m .50	45' 12 ^m .54	23 ^m .06	0.310204	- 0.010784
D	53' 50"	24 ^m .8	2.12	26 ^m .92	10' 48 ^m .22	0.08	48 ^m .30	44' 59 ^m .34	32 ^m .42	0.306084	0.013399
D	57' 43"	19 ^m .2	2.18	21 ^m .38	11' 07 ^m .22	0.08	07 ^m .30	44' 55 ^m .43	34 ^m .05	0.305009	-

ESTRELLA 223

Elongación Oeste

 δ :- 35° 46' 51" . 76AR. : 5^h 50^m 00^s . 811 ϕ :- 12° 06' 00"

d = 0.9881 / división

Posición	δ c	Azmut observado 56° 02'	Corrección de nivel	A_0 , azimut corregido	T. S. L. observado 10 ^h	Corrección de marcha	T. S. L. corregido	A_0 , azimut calculado 56°	$\lambda_0 - \lambda_0$	Sen λ cotz	$\cos \phi (tg \phi + \cos \lambda \cot z)$
5 I	67° 35' 19"	51 ^m .5	0 ^m .75	52 ^m .25	33 ^m 52 ^s .65	0.06	52 ^s . 71	03' 12". 81	20".56	0.342114	-
I	38' 46"	54 ^m .8	0 ^m .75	55 ^m .55	34 ^m 09 ^s .67	0.06	09 . 73	16 . 70	21 . 15	0.341144	0.016959
D	54 34	59 . 8	1 . 08	60 . 88	35 ^m 27 . 63	0.06	27 . 69	32 . 40	31 . 52	0.336710	-0.012000
D	59 27	64 . 8	1 . 22	66 . 02	51 . 70	0.06	51 . 76	36 . 56	30 . 54	0.335343	0.011050
D	68° 03' 36"	70 . 0	1 . 35	71 . 35	36 ^m 12 . 17	0.06	12 . 23	39 . 83	28 . 48	0.334182	0.010279
10 D	68° 06' 46"	68 . 8	1 . 47	70 . 27	27 . 79	0.06	27 . 85	03' 42 . 17	31 . 90	0.333296	-0.009568
I	25 08	87 . 8	0 . 37	88 . 17	37 ^m 58 . 30	0.06	58 . 36	53 . 01	24 . 84	0.328174	0.006290
I	29 04	91 . 9	0 . 25	92 . 15	38 ^m 17 . 71	0.06	17 . 77	54 . 74	22 . 59	0.327077	0.005568
I	32 40	92 . 8	0 . 14	92 . 94	35 . 48	0.06	35 . 54	56 . 14	23 . 20	0.326074	0.004907
I	38 12	97 . 5	0 . 08	97 . 58	39 ^m 02 . 78	0.06	02 . 84	57 . 94	20 . 36	0.324534	-
15 D	68° 52' 55"	87 . 4	0 . 86	88 . 26	40 ^m 15 . 31	0.06	15 . 37	04' 00 . 70	32 . 44	0.320451	-0.001169
D	56 09	88 . 5	0 . 93	89 . 43	31 . 22	0.06	31 . 28	00 . 91	31 . 48	0.319556	-0.000569
D	58 59	89 . 2	1 . 04	90 . 24	45 . 18	0.06	45 . 24	00 . 99	30 . 75	0.318772	0.000085
D	69° 03' 04"	89 . 0	1 . 10	90 . 10	41 ^m 05 . 34	0.06	05 . 40	04' 00 . 90	30 . 80	0.317640	0.000656
I	16' 41"	97 . 0	0 . 13	97 . 13	42 ^m 12 . 52	0.06	12 . 58	03' 58 . 99	21 . 86	0.313873	0.003125
20 I	69° 20' 53"	93 . 5	0 . 32	93 . 82	33 . 23	0.06	33 . 29	03' 57 . 90	24 . 08	0.312714	0.003886
I	30 23	88 . 1	0 . 48	88 . 58	43 ^m 20 . 02	0.06	20 . 08	54 . 57	25 . 99	0.310098	-
I	33 37	87 . 6	0 . 42	88 . 02	35 . 98	0.06	36 . 04	53 . 16	25 . 24	0.309206	0.006187
D	48 15	73 . 6	0 . 71	74 . 31	44 ^m 48 . 14	0.06	48 . 20	45 . 04	30 . 73	0.305182	0.008817
D	51 14	71 . 4	0 . 82	72 . 22	45 ^m 04 . 60	0.06	04 . 66	42 . 79	30 . 57	0.304266	0.009211

Posición	z ₀	Azmut observado 23° 48'	Corrección de nivel	A ₀ ' azimut corregido	T. S. L. observado	Corrección de marcha	T. S. L. corregido	A _c ' azimut calculado do 29°	A ₀ - Δ ₀	SenΔ.cotz	cosφ (-tgδ .cosΔ.cotz)
I	63° 44' 07"	92 ⁿ .8	1 ⁿ .49	1 ⁿ .49	35 ^m 54 ^s .01	0.02	54 ^s .03	50' 08 ⁿ .68	34.39	- 0.451376	- 0.008354
10 I	29' 42"	77 .2	1 ⁿ .50	1 .50	39 ^m 58 .45	0.02	58 .47	49' 55 .53	36.83	- 0.456169	- 0.012596
D	05 43	49 .5	3 .03	3 .03	41 ^m 45 .72	0.03	45 .75	49' 38 .00	45.47	- 0.464184	-
D	62° 59' 55"	43 .7	3 .30	3 .30	42 ^m 11 .67	0.03	11 .70	49' 34 .59	47.59	- 0.466131	-
D	51' 07"	40 .0	3 .52	3 .52	42 ^m 51 .01	0.03	51 .04	49' 30 .04	46.52	- 0.469098	0.007083
D	46' 20"	33 .5	3 .45	3 .45	43 ^m 12 .39	0.03	12 .42	49' 27 .87	50.92	- 0.470698	- 0.007086
15 I	62° 27' 23"	39 .5	2 .53	2 .53	44 ^m 37 .13	0.03	37 .16	49' 21 .49	39.46	- 0.477100	- 0.003647
I	21 43	37 .5	2 .53	2 .53	45 ^m 02 .45	0.03	02 .48	49' 20 .26	40.23	- 0.479020	- 0.002819
I	14' 24"	38 .4	2 .60	2 .60	45 ^m 35 .19	0.03	35 .22	49' 19 .14	38.14	- 0.481506	- 0.001752
I	09' 22"	35 .4	2 .51	2 .51	45 ^m 57 .73	0.03	57 .76	49' 18 .67	40.76	- 0.483221	- 0.001020
D	61° 53' 06"	28 .3	3 .25	3 .25	47 ^m 10 .46	0.03	10 .49	49' 18 .87	47.32	- 0.488770	- 0.001383
20 D	61° 48' 29"	27 .2	3 .26	3 .26	47 ^m 31 .09	0.03	31 .12	49' 19 .41	48.95	- 0.490349	0.002065
D	41 42	30 .6	3 .62	3 .62	48 ^m 01 .43	0.03	01 .46	49' 20 .58	46.36	- 0.492674	-
D	37 23	28 .6	3 .71	3 .71	48 ^m 20 .72	0.03	20 .75	49' 21 .56	49.25	- 0.494155	0.003716
I	18 39	44 .5	2 .38	2 .38	49 ^m 44 .50	0.03	44 .53	49' 27 .99	41.11	- 0.500607	0.006519
I	12 41	51 .2	2 .58	2 .58	50 ^m 11 .19	0.03	11 .22	49' 30 .78	37.00	- 0.502670	-
25 I	61° 08' 53"	47 .7	2 .53	2 .53	50 ^m 28 .16	0.03	28 .19	49' 32 .74	42.51	- 0.503983	-
I	0 03' 58"	54 .5	2 .54	2 .54	50 ^m 50 .17	0.03	50 .20	49' 35 .50	38.46	- 0.505689	0.007732
D	60° 45' 35"	57 .2	3 .85	3 .85	52 ^m 12 .35	0.03	12 .38	49' 47 .99	46.94	- 0.512078	-
D	33' 33"	68 .0	3 .85	3 .85	53 ^m 06 .20	0.03	06 .23	49' 58 .05	46.20	- 0.516283	-

ESTRELLA 1402

Elongación Este

 δ : - 40° 33' 14".78AR: 15^h 19^m 39^s.473 ϕ : - 12° 06' 00"

d : 0.9881 / división

Posición	z_c	Ázmut observado 308° 59'	Corrección de nivel	Ázmut observado corregido	T. S. L. observado 10 ^h	Corrección de marcha	Ázmut corregido	Ázmut calculado do 309°	$\Delta_c - \Delta_0$	Sen $\Delta_c \cot z$	cos $\beta (tg \delta + \cos \Delta_c \cot z)$
25 D	72° 18' 11"	77 ^m .4	2.84	80.24	11 ^m 50 ^s .35	0.04	50 ^m .29	01' 04 ^m .36	44 ^m .12	- 0.247909	- 0.013197
D	15' 14"	77 ^m .2	2.88	80.08	12 ^m 05.89	0.04	05.93	01.35	41.27	- 0.248647	-
I	00' 51"	71.6	2.26	73.86	13 ^m 21.63	0.04	21.67	00' 48 ^m .62	34.76	- 0.252249	- 0.009792
I	71° 57' 17"	69.1	2.24	71.34	40.40	0.04	40.44	45.96	34.62	- 0.253142	- 0.009282
I	52' 38"	68.3	2.22	70.52	14 ^m 04.87	0.04	04.91	42.79	32.27	- 0.254308	-
30 I	71° 49' 18"	63.5	2.19	65.69	22.50	0.04	22.54	00' 40.72	35.03	- 0.255148	- 0.007516
D	36' 53"	48.8	3.17	51.97	15 ^m 27.82	0.05	27.87	34.56	42.59	- 0.258265	- 0.005056
D	31' 13"	45.6	3.20	48.80	56.16	0.05	56.21	32.64	43.84	- 0.259619	- 0.003845
D	27' 47"	43.6	3.21	46.81	16 ^m 15.73	0.05	15.78	31.57	44.76	- 0.260555	- 0.003249
D	23' 19"	41.9	3.23	45.13	39.20	0.05	39.25	30.59	45.46	- 0.261677	- 0.002358
35 I	71° 07' 10"	52.1	2.69	54.79	18 ^m 04.23	0.05	04.28	00' 29.63	34.84	- 0.265749	0.000665
I	02' 32"	51.5	2.63	54.13	28.70	0.05	28.75	30.11	35.98	- 0.266923	0.001788
I	70° 58' 06"	51.8	2.61	54.41	52.03	0.05	52.08	30.90	36.49	- 0.268042	0.003678
I	54' 23"	50.6	2.53	53.13	19 ^m 11.53	0.05	11.58	31.79	38.66	- 0.268979	-
D	41' 47"	47.6	3.83	51.43	20 ^m 17.12	0.05	17.97	36.46	45.03	- 0.272170	0.005969
40 D	70° 38' 55"	47.0	3.80	50.80	32.96	0.05	33.01	00' 37.87	47.67	- 0.271893	0.006541
D	33' 03"	53.6	3.82	57.42	21 ^m 03.90	0.05	03.95	41.88	43.76	- 0.274383	0.007722
D	29' 27"	51.6	3.83	55.43	22.82	0.05	22.87	43.48	48.05	- 0.275294	0.012360
I	27' 30"	75.7	2.94	68.64	33.10	0.05	33.15	44.81	36.17	- 0.275789	0.008847
I	10' 12"	78.5	2.96	71.46	23 ^m 04.19	0.05	04.24	59.30	47.84	- 0.280184	-

Posición	- POSICION DIRECTA				POSICION INVERTIDA			
	$\text{sen } A \cot z$	$A_C - A_O$	$\text{sen} A \cot z (A_C - A_O)$	$\text{sen}^2 A \cot^2 z$	$\text{sen } A \cot z$	$A_C - A_O$	$\text{sen} A \cot z (A_C - A_O)$	$\text{sen}^2 A \cot^2 z$
I					- 8.451378	34.39	- 15.522889	0.2037420
10 I					- 0.456169	36.83	- 16.800700	0.2080901
D	- 0.464184	45.47	- 21.10645	0.2154667				
D	- 0.466131	47.59	- 22.18317	0.2172781				
D	- 0.469088	46.52	- 21.82197	0.2200435				
D	- 0.470698	50.92	- 23.96794	0.2215566				
15 I					- 0.477100	39.46	- 18.826366	0.2276244
I					- 0.479020	40.23	- 19.270970	0.2294601
I					- 0.481506	38.14	- 19.626180	0.2318480
I					- 0.483221	40.76	- 19.696087	0.2335025
D	- 0.488770	47.32	- 23.12859	0.2388961				
20 D	- 0.490349	48.95	- 24.00258	0.2404421				
D	- 0.492674	46.36	- 22.84037	0.2427276				
D	- 0.494155	49.25	- 24.33713	0.2441891				
I					- 0.500607	41.11	- 20.579950	0.2506073
I					- 0.502670	37.00	- 18.598790	0.2526771
25 I					- 0.503983	42.51	- 21.424310	0.2539988
I					- 0.505689	38.46	- 19.448798	0.2557213
D	- 0.512078	46.94	- 24.03694	0.2622238				
D	- 0.516283	46.20	- 23.85224	0.2665481				
[]	- 4.864410	475.52	-231.27741	2.3693717	- 4.841343	388.89	-189.79504	2.3472716
25 D	- 0.247900	44.12	- 10.937348	0.0614544				
D	- 0.248647	41.27	- 10.261660	0.0618253	- 0.252249	34.76	- 8.7601750	0.0636295
I					- 0.253142	34.62	- 8.7637760	0.0640808
I					- 0.254308	32.27	- 8.2065190	0.0646725
I					- 0.255148	35.03	- 8.9378300	0.0651005
30 I								
D	- 0.258265	42.59	- 10.999506	0.0667008	- 0.265749	34.84	- 9.2586950	0.0706225
D	- 0.259619	43.84	- 11.381690	0.0674020	- 0.266923	35.98	- 9.6038890	0.0712478
D	- 0.260555	44.76	- 11.662441	0.0678889	- 0.268042	36.49	- 9.7808500	0.0718465
D	- 0.261677	45.46	- 11.895836	0.0684748	- 0.268979	38.66	-10.3987280	0.0723497
35 I								
I								
I								
I								
D	- 0.272170	45.03	- 12.255810	0.0740765				
40 D	- 0.272893	47.07	- 12.845073	0.0744705				
D	- 0.274383	43.76	- 12.007000	0.0752860	- 0.275789	36.17	- 9.9752880	0.0760595
D	- 0.275294	48.05	- 13.227875	0.0757867	- 0.280184	47.84	-13.4040000	0.0785030
I								
I								
[]	- 2.631403	445.95	-117.474240	0.6933659	- 2.640513	366.66	-97.0977500	0.6981123

Posición	POSICION DIRECTA				POSICION INVERTIDA			
	$\text{sen } A \cot z$	$A_a - A_o$	$\text{sen } A \cot z (A_a - A_o)$	$\text{sen}^2 A \cot^2 z$	$\text{sen } A \cot z$	$A_o - A_a$	$\text{sen } A \cot z (A_o - A_a)$	$\text{sen}^2 A \cot^2 z$
I					0.341113	20.05	6.8393156	0.1163580
I					0.338890	23.87	8.0893043	0.1148464
15 D	0.334944	28.53	9.5559523	0.1121874				
D	0.333935	28.58	9.5438623	0.1115125				
D	0.333059	29.59	9.8552158	0.1109282				
D	0.332171	30.27	10.0548161	0.1103375				
I					0.328409	23.81	7.8194180	0.1078524
20 I					0.327198	22.47	7.3521380	0.1070585
I					0.326266	22.02	7.1843773	0.1064495
I					0.325189	23.06	7.4988583	0.1057478
D	0.320912	30.79	9.8808804	0.1029845				
D	0.319753	31.29	10.0050710	0.1022419				
25 D	0.317960	31.34	9.6486631	0.1010985				
D	0.316975	31.17	9.8801107	0.1004731				
I					0.313329	27.00	8.4598820	0.0981750
I					0.312112	23.02	7.8481820	0.0974139
I					0.311128	24.11	7.5012960	0.0968006
30 I					0.310209	23.06	7.1534195	0.0968006
D	0.306084	32.42	9.9232423	0.0936874				
D	0.305009	34.05	10.3855560	0.0930304				
[]	3.220802	308.03	98.7333700	1.0384814	3.233843	232.47	75.7461910	1.0469317
5 I					0.342114	20.56	7.033864	0.1170419
I					0.341144	21.15	7.215195	0.1163792
D	0.336710	31.52	10.612099	0.1133736				
D	0.335343	30.54	10.241375	0.1124549				
D	0.334182	28.48	9.517500	0.1116776				
10 D	0.333296	31.90	10.632142	0.1110862				
I					0.328174	24.84	8.151842	0.1076981
I					0.327077	22.59	7.388669	0.1069793
I					0.326074	23.20	7.564916	0.1063242
I					0.324534	20.36	6.607512	0.1053223
15 D	0.320451	32.44	10.395430	0.1026888				
D	0.319556	31.48	10.059620	0.1021160				
D	0.318772	30.75	9.802239	0.1016155				
D	0.317640	30.80	9.783312	0.1008951				
I					0.313873	21.86	6.861263	0.0985162
20 I					0.312714	24.08	7.530153	0.0977900
I					0.310098	25.99	8.059447	0.0961607
I					0.309206	25.14	7.773438	0.0956083
D	0.305182	30.73	9.378242	0.0931360				
D	0.304266	30.57	9.301411	0.0925777				
[]	3.225398	309.21	99.724370	1.0416214	3.235008	229.77	74.186299	1.0478202

POSICION DIRECTA

Estrella	sen A cot z	A - A	sen A cot z(A - A)	sen ² A cot ² z
238	3.220802	308.03	98.733370	1.0384814
223	3.225398	309.21	99.724370	1.0416214
519	- 4.864410	475.52	-231.277410	2.3693717
1402	- 2.631403	445.95	-117.474240	0.6933659
[]	- 1.049613	1538.71	-150.293910	5.1428409

POSICION INVERTIDA

Estrella	sen A cot z	A - A ₀	sen A cot z(A - A ₀)	sen ² A cot ² z
238	3.233843	232.47	75.746191	1.0469317
223	3.235008	229.77	74.186299	1.0478202
519	- 4.841343	388.89	-189.795040	2.3472716
1402	- 2.640513	366.66	- 97.097750	0.6981123
[]	- 1.013005	1217.79	-136.960300	5.1401358

$$n \Delta A + \left[\text{sen } A \cot z \right] \Delta \rho - \left[A_C - A_0 \right] = 0$$
$$\left[\text{sen}^2 A \cot^2 z \right] \Delta \rho - \left[\text{sen } A \cot z (A_C - A_0) \right] = 0$$

Aplicándolas a las dos posiciones tendremos:

Posición Directa

$$40 \Delta A - 1.049613 \Delta \rho - 1538.71 = 0$$
$$5.1428404 \Delta \rho + 150.29391 = 0$$

Las soluciones correspondientes son:

$$\Delta A = 37.903896$$
$$\Delta \rho = -21.488025$$

Posición Invertida

$$40 \Delta A - 1.013005 \Delta \rho - 1217.79 = 0$$
$$5.1401358 \Delta \rho + 136.9603 = 0$$

$$\Delta A = 29.919281$$
$$\Delta \rho = -20.67043$$

Teniendo en cuenta estos valores y calculando los vectores correspondientes a cada observación mediante la expresión:

$$v = \Delta A + (\text{sen } A \cot z) \Delta \rho - (A_C - A_0)$$

y tamizando los resultados encontramos las 27 mejores observaciones en posición directa y las 26 mejores observaciones en posición invertida, según aparecen en los cuadros siguientes, constituyendo así los dos sistemas que serán resueltos por el método de mínimos cuadrados aplicando el "algoritmo K".

POSICION DIRECTA

Estrella y Posición	$\Delta A + (\text{sen} A \cot z) \Delta \phi$	$-\cos \phi (\text{tg } \phi + \cos A \cot z) \Delta t$	$-(A_c - A_0)$	$= V_i$
238	17 1 0.333059	- 0.003819	- 29.59	V ₁
	18 1 0.332171	- 0.003245	- 30.27	V ₂
	23 1 0.320912	0.003467	- 30.79	V ₃
	24 1 0.319753	0.004707	- 31.29	V ₄
	25 1 0.317960	0.005849	- 31.34	V ₅
	26 1 0.316975	0.006477	- 31.17	V ₆
	31 1 0.306084	0.013399	- 32.42	V ₇
223	7 1 0.336710	- 0.012000	- 31.52	V ₈
	8 1 0.335343	- 0.011050	- 30.54	V ₉
	10 1 0.333296	- 0.009668	- 31.90	V ₁₀
	15 1 0.320451	- 0.001169	- 32.44	V ₁₁
	16 1 0.319556	- 0.000569	- 31.48	V ₁₂
	17 1 0.318772	- 0.000078	- 30.75	V ₁₃
	18 1 0.317640	0.000656	- 30.80	V ₁₄
	23 1 0.305182	0.008817	- 30.73	V ₁₅
	24 1 0.304266	0.009211	- 30.57	V ₁₆
519	12 1 - 0.466131	0.008354	- 47.59	V ₁₇
	13 1 - 0.469088	0.007083	- 46.52	V ₁₈
	19 1 - 0.488770	- 0.001383	- 47.32	V ₁₉
	20 1 - 0.490349	- 0.002065	- 48.95	V ₂₀
	22 1 - 0.494155	- 0.003716	- 49.25	V ₂₁
1402	25 1 - 0.247909	0.013197	- 44.12	V ₂₂
	31 1 - 0.258265	0.005056	- 42.59	V ₂₃
	32 1 - 0.259619	0.003845	- 43.84	V ₂₄
	33 1 - 0.260555	0.003244	- 44.76	V ₂₅
	39 1 - 0.272170	- 0.005969	- 45.03	V ₂₆
	41 1 - 0.2743383	- 0.007722	- 43.76	V ₂₇
		0	0	
	0	1	0	
	0	0	0	

POSICION INVERTIDA

Estrella y Posición	$\Delta A + (\text{sen} A \cot z)$	$\Delta \phi$	$-\cos \phi (\text{tg} \phi + \cos A \cot z)$	$\Delta t - (A_c - A_o)$	= Vi
238	14	1 0.	- 0.007573	- 23.87	Vi
	19	1 0.328409	- 0.000936	- 23.81	V2
	20	1 0.327198	- 0.000059	- 22.47	V3
	21	1 0.	0.000544	- 22.02	V4
	22	1 0.	0.001228	- 23.06	V5
	28	0.312112	0.009577	- 23.02	V6
	29	1 0.	0.010197	- 24.11	V7
	30	1 0.	0.010784	- 23.06	V8
223	6	1 0.	- 1.016959	- 21.15	V9
	12	1 0.	- 0.005568	- 22.59	V10
	13	1 0.	- 0.004907	- 23.20	V11
	19	1 0.	0.003125	- 21.86	V12
	20	1 0.	0.003886	- 24.08	V13
519	15	1 - 0.477100	0.003647	- 39.46	V14
	16	1 - 0.479020	0.002819	- 40.23	V15
	17	1 - 0.481506	0.001752	- 38.14	V16
	18	1 - 0.483221	0.001020	- 40.76	V17
	23	1 - 0.500607	- 0.006519	- 41.11	V18
	26	1 - 0.505689	- 0.008732	- 38.46	V19
1402	27	1 - 0.252249	0.009792	- 34.76	V20
	28	1 0.253142	0.009088	- 34.62	V21
	30	1 - 0.255148	0.007516	- 35.03	V22
	35	1 - 0.265744	- 0.000865	- 34.84	V23
	36	1 - 0.266923	- 0.001788	- 35.98	V24
	37	1 - 0.268042	- 0.002678	- 36.49	V25
	43	1 - 0.275789	- 0.008847	- 36.17	V26
		1 0	0	0	
		0 1	0	0	
		0 0	1	0	

4.5. Resolución por el método de mínimos cuadrados aplicando el algoritmo K

4.5.1. Considerando los sistemas de ecuaciones planteados para las posiciones directa (27 observaciones tamizadas) e invertida (26 observaciones tamizadas) nos vemos en la necesidad de calcular el mejor valor para $\Delta \phi$ aplicando el método de mínimos cuadrados.

Para la compensación correspondiente aplicamos el "algoritmo K" debido al Dr. GAZDZICKI, del Instituto de Geodesia y Cartografía de Varsovia.

Este algoritmo se aplica a una matriz cuadrangular de $(n + p)$ filas y $(m + r)$ columnas constituida principalmente por coeficientes, (en nuestro caso los coeficientes de ΔA , $\Delta \phi$, Δt), términos absolutos (valor de $A_c - A_o$) y demás datos de entrada, y en la cual realizaremos m transformaciones homogéneas.

Después de las transformaciones respectivas obtendremos: valores residuales, de incógnitas, etc., ocupando las posiciones de los datos de entrada.

4.5.2. Fundamento del algoritmo K

En las fórmulas que presentaremos a continuación el término $C_{j,i}^h$ representa el elemento de la fila j , columna i perteneciente a la matriz obtenida después de la h -ava transformación.

Suponiendo que son conocidos los elementos $C_{j,i}^0$ de la matriz que contiene $(m + r)$ columnas y $(n + p)$ filas para $r \geq 0$, y $p \geq 0$ el "algoritmo K" queda definido por:

$$C_{j,h}^h = \frac{C_{j,h}^{h-1}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (C_{j,h}^{h-1})^2}} \quad (4.5)$$

$$C_{j,i}^h = C_{j,i}^{h-1} - C_{j,h}^h \left(\sum_{j=1}^n C_{j,h}^h \cdot C_{j,i}^{h-1} \right) \quad (4.6)$$

donde

- $j = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+p$
- $i = h+1, h+2, \dots, m+r$
- $h = 1, 2, \dots, m$

En la primera transformación aplicamos la fórmula(4.5) para la primera columna ($h = 1$) y la fórmula (4.6) para las columnas restantes ($i = 2, 3, \dots, m+r$). En la segunda transformación aplicamos(4.5) para la segunda columna ($h = 2$) y la(4.6) para las columnas siguientes ($i = 3, 4, \dots, m+r$) continuando así sucesivamente hasta que en la m -ava transformación aplicaremos (4.5) a la m -ava columna y la (4.6) a las columnas restantes ($i=m+1, m+2, \dots, m+r$).

Si esta tabla la transformamos "m veces" de acuerdo a las fórmulas del algoritmo K obtendremos otra tabla que contendrá los residuales y en la última de las columnas los valores de las funciones de las incógnitas.

a_1	b_1	m_1	v_1
a_2	b_2	m_2	v_2
.
.
a_n	b_n	m_n	v_n
α_1	β_1	μ_1	f_1
α_2	β_2	μ_2	f_2
.
.
α_p	β_p	μ_p	f_p

El error medio de i-ava función de incógnitas, en función de los coeficientes transformados de la función queda expresado por:

$$m_{fi} = m_0 \cdot \sqrt{(a_i^m)^2 + (b_i^m)^2 + \dots + (\mu_i^m)^2}$$

para $i = 1, 2, \dots, p$.

El error medio de la j -ava observación compensada, en función de los coeficientes transformados de la j -ava ecuación residual queda expresado por:

$$m_{Lj} = m_0 \cdot \sqrt{(a_j^m)^2 + (b_j^m)^2 + \dots + (m_j^m)^2}$$

para $j = 1, 2, 3, \dots, n$

donde:

$$m_0 = \sqrt{\frac{[v.v]}{n - m}}$$

Si las observaciones no fueron todas del mismo peso, se les deberá reducir al mismo peso multiplicando cada una de ellas por la raíz cuadrada de su peso.

POSICION DIRECTA

Vector V_i	ΔA	$\Delta \phi$	Δt	L
1	0.19245	0.16268	- 0.12715	1.38178
2	0.19245	0.16236	- 0.11106	0.70998
3	0.19245	0.15604	0.09163	0.29414
4	0.19245	0.15539	0.11399	- 0.19511
5	0.19245	0.15438	0.14463	- 0.22849
6	0.19245	0.15383	0.16211	- 0.04911
7	0.19245	0.14772	0.35692	- 1.19755
8	0.19245	0.16490	- 0.35777	- 0.47103
9	0.19245	0.16413	- 0.33098	0.52022
10	0.19245	0.16298	- 0.29208	- 0.82215
11	0.19245	0.15578	- 0.05300	- 1.24872
12	0.19245	0.15527	- 0.03609	- 0.28087
13	0.19245	0.15484	- 0.02255	0.45669
14	0.19245	0.15420	- 0.00197	0.41698
15	0.19245	0.14721	0.22752	0.59876
16	0.19245	0.14669	0.23879	0.77082
17	0.19245	- 0.28561	0.17959	0.24876
18	0.19245	- 0.28727	- 0.14378	1.40609
19	0.19245	- 0.29831	- 0.09614	1.18796
20	0.19245	- 0.29920	- 0.11531	- 0.39539
21	0.19245	- 0.30133	- 0.16183	- 0.58269
22	0.19245	- 0.16315	0.32591	- 1.04160
23	0.19245	- 0.16897	0.09614	0.86433
24	0.19245	- 0.16972	0.06174	- 0.33368
25	0.19245	- 0.17025	0.04511	- 1.22241
26	0.19245	- 0.17677	- 0.21539	- 1.06910
27	0.19245	- 0.17801	- 0.26501	0.28170
	0.19245	- 0.02404	- 0.03468	38.02484
	0	0.56114	0.04539	- 21.39389
	0	0	28.19289	- 18.96962

MATRICES TRANSFORMADAS

POSICION INVERTIDA

Vector Vi	ΔA	$\Delta \phi$	Δt	L
2	0.19612	0.19978	0.05456	- 1.12901
3	0.19612	0.19398	0.37673	- 0.30791
4	0.19612	0.19331	0.06085	0.52532
5	0.19612	0.19279	0.06135	0.99576
6	0.19612	0.19219	0.06192	- 0.02097
7	0.19612	0.18495	0.06889	0.30350
8	0.19612	0.18448	0.06941	- 0.76520
9	0.19612	0.18389	0.06990	0.30481
10	0.19612	0.20103	- 0.90090	- 0.06509
11	0.19612	0.19324	0.05562	0.39902
12	0.19612	0.19268	0.05618	- 0.18898
13	0.19612	0.18592	0.06291	1.41673
14	0.19612	0.18528	0.06355	- 0.77802
15	0.19612	- 0.25232	0.00710	0.21471
16	0.19612	- 0.25339	0.00617	- 0.51681
17	0.19612	- 0.25477	0.00500	1.62312
18	0.19612	- 0.25572	0.00418	- 0.96261
19	0.19612	- 0.26535	- 0.00419	- 0.96411
20	0.19612	- 0.26817	- 0.00666	1.78765
21	0.19612	- 0.12774	0.02892	- 0.26327
22	0.19612	- 0.12824	0.02819	0.42060
23	0.19612	- 0.12935	0.02657	0.04977
24	0.19612	- 0.13522	0.01787	0.44612
25	0.19612	- 0.13587	0.01692	- 0.67108
26	0.19612	- 0.13649	0.01600	- 1.15926
	0.19612	- 0.14079	0.00960	- 0.68845
	0.19612	0.01202	0.03760	29.77840
	0	0.55406	0.07119	20.73043
	0	0	0.94674	1.59448

Cálculo de erroresa) Error medio cuadrático

$$m_o = \sqrt{\frac{[L \cdot L]}{n - 3}}$$

Posición directa

$$m_{o,D} = \sqrt{\frac{16.7745}{24}}$$

$$m_{o,D} = 0.835$$

Posición invertida

$$m_{o,I} = \sqrt{\frac{14.2976}{23}}$$

$$m_{o,I} = 0.7889$$

b) Error medio

$$m = m_o \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \sigma^2}$$

Posición directa

$$m_{\Delta\phi,D} = 0.836 \sqrt{(0.56114)^2 + (0.04539)^2}$$

$$m_{\Delta\phi,D} = 0.4706$$

Posición invertida

$$m_{\Delta\phi,I} = 0.7889 \cdot \sqrt{(0.55406)^2 + (0.07119)^2} = 0.4404$$

c) Media ponderada

$$\Delta \phi_m = \frac{\Delta \phi_D P_D + \Delta \phi_I P_I}{P_D + P_I}$$

Teniendo en cuenta que los pesos de los valores son inversamente proporcionales a los cuadrados de los errores, establecemos que para $\Delta \phi$ se cumple:

$$\frac{P_D}{P_I} = \frac{m^2 \Delta \phi_{,I}}{m^2 \Delta \phi_{,D}} \quad \text{es decir}$$

$$\frac{P_D}{P_I} = \frac{0.4402^2}{0.4706^2} = 0.8758$$

asumiendo: $P_I = 1$, se tiene $P_D = 0.8758$, de donde:

$$\Delta \phi_m = \frac{-20.73843 + 0.8758 (-21.39389)}{1 + 0.8758}$$

$$\Delta \phi_m = -21.0402$$

d) Error de la media ponderada

Considerando los vectores respectivos se tiene:

$$v_D = -21.0402 - (-21.39389) = 0.35369$$

$$v_I = -21.0402 - (-20.73043) = -0.30977$$

$$e_m = \pm \sqrt{\frac{[(\Delta v_i)^2 \cdot p_i]}{(n-1) \cdot p}}$$

$$e_m = \pm \sqrt{\frac{0.35369^2 (0.8758) + (0.30977)^2}{(2-1) (1.8758)}}$$

$$e_m = \pm 0.3310$$

por tanto el mejor valor de $\Delta \phi_m$ será

$$\Delta \phi_m = -21.0402 \pm 0.3310$$

es decir:

$$\phi = -12^\circ 06' 21.0402 \pm 0.3310$$

C A P I T U L O 5

Conclusiones y recomendaciones

1. La determinación de latitudes de primero y segundo órdenes puede llevarse a cabo mediante los métodos tradicionales de HORREBOW TALCOT y de STERNECK analizados brevemente en el capítulo 2.
2. Adicionalmente se puede realizar la determinación mediante el método que emplea la medición de ángulos horizontales y que se analiza en el capítulo 3.
Este método es conveniente porque:
 - a) Permite eliminar la refracción atmosférica en el proceso de cálculo ya que no se miden distancias zenitales, eliminando así una de las fuentes de error.
 - b) En los teodolitos, usualmente, se encuentra mayor precisión en los limbos horizontales que en los verticales.
3. Con relación a los sistemas tradicionales, el sistema de lectura de ángulos horizontales tiene la ventaja de que la programación de las observaciones en la cercanía de la máxima elongación no ofrece mayor dificultad dado que las ecuaciones a utilizar son sencillas y aplicables fácilmente a las coordenadas de las estrellas contenidas en el F.K.4.

4. El empleo del algoritmo K permite una solución integral para el cálculo simultáneo de las coordenadas y de sus errores respectivos.
5. El proceso operativo del algoritmo K es fácilmente realizable al disponer de una computadora.
Debe tenerse en cuenta que en el caso presentado en el capítulo 4 se utilizó una calculadora HP-33A, en vista de que sólo se estaban considerando tres incógnitas en las ecuaciones de los sistemas formados.

B I B L I O G R A F I A

BONFORD Geodesia

LEON PORTOCARRERO, Luis.

Métodos astronómicos para el cálculo simultáneo
de latitud, longitud, azimut (Tesis de Grado UNI)

MUELLER, Iván

Spherical and Practical astronomy as Applied to
Geodesy

ROELOFS, R.

Astronomy Applied to Land Survey

VIVES, Teodoro

Astronomía de Posición

BOLETINES GEODESICOS.

I N D I C E

CAPITULO I - <u>Sistemas de coordenadas</u>	7
1.1. Definiciones fundamentales.....	7
1.1.1. Esfera celeste.....	7
1.1.2. Vertical, cenit y Nadir-Horizonte celeste.....	7
1.1.3. Polos celestes - Meridiano.....	9
1.1.4. Triángulo astronómico.....	9
1.1.5. Eclíptica - Polo - Equicoccios y solsticios.....	9
1.2. Sistemas de Coordenadas	10
1.2.1. Sistema del Horizonte.....	11
1.2.2. Sistema del ángulo horario.....	13
1.2.3. Sistema de ascensión recta	13
1.2.4. Sistema de la eclíptica	15
1.2.5. Sistema del observador.....	18
1.3. Transformación de coordenadas.....	18
1.3.1. Relaciones entre el sistema del horizonte y el del ángulo horario.....	20
1.3.2. Relaciones entre el sistema del ángulo horario y el de ascensión recta.....	22
1.3.3. Relaciones entre el sistema de la ascensión recta y el de la eclíptica.....	22

1.3.4. Transformación por medio	26
de matrices.....	
1.3.5. Ejemplo numérico.....	32
CAPITULO 2 - <u>Cálculo de latitud : métodos tradicionales</u>	34
2.1.Método de Horrebow-Talcott.....	35
2.2.Método de Sterneck.....	37
CAPITULO 3 - Latitud <u>por ángulos horizontales</u>	
3.1.Deducción de la fórmula del azimut.....	39
3.2.Precisión del método: errores sistemáticos - Error estandar.....	42
3.3.Posiciones más convenientes de observación - Estrellas en máxima elongación...	50
3.4.Programa de estrellas.....	53
3.5.Medición de ángulos horizontales.....	53
3.5.1. Inclinación del eje horizontal del anteojo-Sensibilidad del nivel mordante.....	53
CAPITULO 4 - <u>Trabajo práctico</u>	
4.1.Estrellas a observar- Programa de estrellas.....	55
4.2.Instrucciones de observación.....	60
4.3.Linealización del método.....	61
4.4.Datos de campo.....	62

	Pág.
4.5. Resolución por el método de mínimos cuadrados aplicando el algoritmo K.	73
CAPITULO 5 - Conclusiones <u>y</u> recomendaciones	84
Bibliografía.....	86