

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA Y
ELECTRONICA



ANALISIS Y DISEÑO
DE ANTENAS YAGI
REALIZACION DE UN YAGI CAD

TESIS

PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE

INGENIERO ELECTRONICO

GABRIEL LUCIO ABARCA TORRES

PROMOCION 1992-1

LIMA - PERU

1994

SUMARIO

El problema del diseño de antenas, y de antenas Yagi en particular, ha sido resuelto tradicionalmente en forma experimental o empírica debido a la complejidad de las ecuaciones matemáticas que modelan su comportamiento, basadas en la teoría electromagnética. Es necesario entonces implementar un paquete computacional amigable con el usuario (YAGICAD) que sea una herramienta válida para análisis y diseño de antenas Yagi.

El procedimiento adoptado usa el método de momentos, en el cual las ecuaciones integrodiferenciales para la distribución de corriente sobre la antena se convierten en ecuaciones matriciales al desarrollar la distribución de corriente en funciones de base.

El programa permite obtener la distribución de corriente sobre la superficie de los elementos de la antena, la impedancia y entrada, los patrones de radiación E y H y la ganancia de una antena Yagi cuyas diferentes dimensiones (diámetro, longitud y posición de cada elemento) son ingresadas.

Se explica a continuación la construcción de antenas Yagi comerciales y luego se complementa el trabajo con mediciones experimentales.

TITULO: ANALISIS Y DISEÑO DE ANTENAS YAGI
REALIZACION DE UN YAGI-CAD
AUTOR: GABRIEL LUCIO ABARCA TORRES
OPTA A: TITULO PROFESIONAL DE INGENIERO ELECTRONICO
PROGRAMA: INGENIERIA ELECTRONICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA LIMA 1994

EXTRACTO

Se implementa un paquete computacional amigable con el usuario (**YAGICAD**) que es una herramienta válida para análisis y diseño de antenas Yagi y se describe su aplicación práctica.

El programa se basa en el método de momentos con funciones de base y de prueba en forma de pulsos sinusoidales para obtener primero la distribución de corriente sobre la antena y a partir de ella los demás parámetros de la misma. Se comparan los resultados obtenidos con las diferentes formas de realizar dicho procedimiento (uso de los kernel "reducido" y "exacto")..

Se realizan las validaciones de convergencia, estabilidad y precisión del programa.

El programa permite obtener la distribución de corriente sobre la superficie de los elementos de la antena, la impedancia y entrada, los patrones de radia-

ción E y H y la ganancia de una antena Yagi cuyas diferentes dimensiones (diámetro, longitud y posición de cada elemento) son ingresadas.

Además se explica la construcción profesional de antenas Yagi y la realización de las mediciones más importantes.

Se realizan mediciones de antenas comerciales y mediante el programa se obtiene una explicación de sus características y se proponen correcciones de ser necesario. Como referencia, también se incluyen y analizan a la luz del programa realizado resultados de mediciones de la ganancia y patrón de radiación de antenas Yagi llevadas a cabo por el National Bureau of Standards de los Estados Unidos.

INDICE

INTRODUCCION	1
CAPITULO I: METODOS COMPUTACIONALES PARA EL CALCULO DE LA RADIACION DE ANTENAS LINEALES	
1.1 Ecuaciones de Maxwell	
1.1.1 Ecuaciones de Maxwell para el vacio	7
1.1.2 Ecuaciones de Maxwell para un medio de gran conductividad y condiciones de frontera	11
1.1.3 Consideraciones cuasiestáticas	13
1.2 Métodos computacionales para el cálculo de los campos electromagnéticos	16
1.2.1 Criterios de unicidad	17
1.2.2 Métodos aplicados en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia	18
1.2.3 Planteamiento de las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial y el método de diferencias finitas	21
1.2.4 Planteamiento variacional de las	

VIII

ecuaciones de Maxwell y el método de elementos finitos	24
1.2.5 Planteamiento de las ecuaciones de Maxwell como integrales de las fuentes y método de elementos de frontera	29
1.2.6 Desarrollo actual de los métodos computacionales en electromagnetismo y el problema de la modelación correcta de la radiación	36
CAPITULO II: ASPECTOS COMPUTACIONALES PARA LA SOLUCION DE LA ECUACION DE DISTRIBUCION DE CORRIENTE	
2.1. Métodos de solución de las ecuaciones integrodiferenciales de frontera	
2.1.1 Método iterativo	43
2.1.2 Método variacional	44
2.1.3 Método de Momentos o de Colocación	44
2.2. Características numéricas del método de momentos	45
2.2.1 Planteamiento de la ecuación matricial	46
2.2.2 Condiciones en los límites	55
2.2.3 Funciones de base y funciones de prueba usuales	56
2.2.4 Evaluación de los productos internos para el cálculo de los elementos de la matriz	58

2.2.5	Conclusiones sobre la selección de funciones de base y de prueba	64
2.2.6	Condicionamiento de la ecuación matricial, métodos de resolución y estimación del error.	65
CAPITULO III: FORMULACION DEL METODO DE MOMENTOS EN EL ANALISIS Y DISEÑO DE ANTENAS YAGI		
3.1	Planteamiento de la ecuación integrodiferencial para un elemento conductor recto cilíndrico	74
3.1.1	Antecedentes del problema y objetivos para evaluar un modelo matemático del mismo	74
3.1.2	Modelamiento del campo eléctrico generado por la corriente en la superficie del elemento	77
3.1.3	Modelamiento de la región de alimentación	
3.1.4	Ecuación integral bidimensional casos en que se puede llevar a forma unidimensional	84
3.2.	Planteamiento de la ecuación integrodiferencial unidimensional para la corriente axial total de un elemento conductor delgado	85
3.2.1	Definición de la corriente axial total	86

3.2.2	Condiciones límites para la corriente axial total en los extremos del elemento.	87
3.2.3	Obtención de una ecuación integrodiferencial unidimensional para la corriente axial total	88
3.2.4	Caso del elemento cilíndrico hueco	
3.3.	Planteamiento de la ecuación integrodiferencial para el segmento cilíndrico recto con simetría azimutal	95
3.3.1	Evaluación numérica del kernel "exacto" y separación de la singularidad logarítmica	98
3.4.	Comparación entre las versiones "exacta" y "reducida"	101
3.5	Ecuación integrodiferencial de Pocklington y ecuación integral de Hallen	102
3.5.1	Ecuación de Pocklington	102
3.5.2	Ecuación de Hallen	103
3.6	Interpretación de la ecuación de Pocklington para los kernel "reducido" y "exacto" en base a filamentos de corriente	105
3.6.1	Planteamiento de la versión "reducida" en forma de filamentos de corriente	105
3.6.2	Planteamiento de la versión "exacta" en forma de filamentos de corriente	106

3.7	Aplicación de la teoría diaóptica de antenas para la selección de funciones de base y de prueba adecuadas a nuestro problema	108
3.7.1	Planteamiento del método de momentos desde el punto de vista de la teoría diaóptica de antenas y análisis de la convergencia	108
3.7.2	Obtención de las funciones de base y prueba e impedancias mutuas para filamentos de corriente	111
3.8	Planteamiento matricial del método de momentos para la ecuación de Pocklington para un elemento (dipolo) conductor cilíndrico recto	121
3.8.1	Forma "reducida"	122
3.8.2	Forma "exacta"	124
3.8.2.1	Método del radio equivalente	125
3.8.2.2	Método de la separación de la singularidad logarítmica de la impedancia mutua entre filamentos de corriente	131
3.9	Planteamiento matricial del método de momentos para la ecuación de Pocklington para un arreglo de elementos conductores cilíndricos rectos	137

CAPITULO IV: ELABORACION Y ANALISIS DE UN PROGRAMA PARA EL DISEÑO DE ANTENAS YAGI	146
4.1. Descripción global del YAGI-CAD	147
4.1.1 Configuración de las opciones de trabajo	147
4.1.2 Menú principal de trabajo	150
4.1.3 Manejador de archivos de entrada	153
4.1.4 Opcion de Simulación	155
4.1.5 Manejador de archivos de salida	158
4.1.6 Menú de resultados	160
4.1.7 Obtención de la directividad o ganancia	162
4.1.8 Obtención del factor de direccionalidad y variación de fase	165
4.1.9 Obtención de los patrones de radiación	168
4.2 Descripción detallada de las rutinas básicas	172
4.2.1 Llenado de la matriz y solución de la ecuación matricial.	172
4.2.2 Unidad COMPLEJ	173
4.2.2.1 Definición de constantes globales	173
4.2.2.2 Definición de tipos globales de variables	174
4.2.2.3 Definición de procedimientos y funciones	175

4.2.3	Unidad RESOLV	192
4.2.3.1	Definición de variables globales	192
4.2.3.2	Definición de tipos de variables locales	194
4.2.3.3	Definición de procedimientos y funciones locales	194
4.2.3.4	Definición de la rutina externa Halloinzin	210
4.2.4	Rutina para el cálculo del campo lejano (Elejano)	211
4.3	Prueba de estabilidad de la solución	215
4.4	Prueba de precisión de la solución	226
4.5	Prueba de convergencia	234
CAPITULO V: REALIZACION PRACTICA DE ANTENAS YAGI.		
	METODOS EXPERIMENTALES Y RESULTADOS ALCANZADOS.	252
5.1	Antena yagi - definiciones	253
5.2	Sistemas de adaptación v balunes: diseño y construcción	257
5.2.1	El dipolo doblado	261
5.2.2	El balún "Bazooka"	263
5.2.3	Otros tipos de balunes y adaptadores	267
5.3	Construcción de Antenas Yagi	270
5.4	Medición del coeficiente de onda reflejada y del ancho de banda de la antena	283

5.5	Medición de la impedancia de entrada	291
	5.5.1 Medición con puente	291
	5.5.2 Medición con línea ranurada	292
5.6	Medición del patrón de radiación y ancho del haz	297
5.7	Medición de la ganancia	307
5.8	Otras mediciones	312
5.9	Instalación de las antenas en el campo	315
CAPITULO VI: ANALISIS DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES		319
6.1.	Elemento cilíndrico	319
6.2	Datos experimentales sobre antenas Yagi del NBS.	326
6.3	Análisis de las antenas Yagi de VHF para transmisión de televisión	344
6.4	Análisis del patrón de radiación para antena Yagi de UHF (407 - 408 MHz)	355
CAPITULO VII: DESCRIPCION Y APLICABILIDAD DEL YAGI CAD		361
7.1	Configuración de las opciones de trabajo	361
7.2	Selección de una antena tipo	362
7.3	Simulación	364
	7.3.1 Opción ENTRADA	366
	7.3.1.1 DIRECTORIO	366
	7.3.1.2 INGRESO DE DATOS	366

7.3.1.3	CARGAR	367
7.3.1.4	VER/MODIFICAR	367
7.3.1.5	GRABAR	368
7.3.1.6	BORRAR	368
7.3.1.7	SALIR	368
7.3.2	Opción ESQUEMA	368
7.3.3	Opción SIMULACION	368
7.3.4	Opción SALIDA	369
7.3.4.1	DIRECTORIO	369
7.3.4.2	CARGAR	369
7.3.4.3	BORRAR	369
7.3.5	Opción RESULTADOS	370
7.3.5.1	GANANCIA	370
7.3.5.2	IMPEDANCIA DE ENTRADA	370
7.3.5.3	TABLA DE DISTRIBUCION DE FASE	370
7.3.5.4	DISTRIBUCION DE CORRIEN- TE	371
7.3.5.5	PATRON	371
7.3.6	Opción AYUDA	371
7.4	Selección del número de modos por elemen- to	372
	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	374
	APENDICE	380
	BIBLIOGRAFIA	416

INTRODUCCION

Aunque James Clerk Maxwell describió el comportamiento fundamental de las interacciones electromagnéticas hace más de 120 años, métodos apropiados para resolver sus ecuaciones en el diseño práctico han permanecido elusivos. Las soluciones analíticas cerradas son de proyección y aplicación muy limitada, y los métodos aproximados han tenido que esperar el desarrollo de hardware de computadoras y algoritmos numéricos.

Entretanto, el ingeniero de diseño se ha visto imposibilitado de analizar detalladamente el comportamiento electromagnético de sus productos. Hasta no hace mucho dicho ingeniero podía solamente basar su diseño en modelos de parámetros concentrados o en prototipos experimentales. El cálculo del comportamiento electromagnético del dispositivo, frecuentemente crucial para el diseño, era enormemente complejo de realizar.

Las ecuaciones de Maxwell no pueden ser resueltas y aplicadas simplemente con una fórmula de texto: requieren de un paquete de software capaz de: representar el

dispositivo en la computadora: discretizar las ecuaciones de Maxwell convirtiéndolas en ecuaciones matriciales; y resolverlas para determinar los parámetros que se requieren.

Concretamente en el campo de las antenas, los diseños en nuestro medio en general no son mejorados sino en forma empírica lo que tiene las limitaciones de no saber cómo conseguir lo que se desea. Así, la mejora de estos diseños es postergada por la razón de no tener una herramienta adecuada de análisis.

En otros medios, el uso de herramientas computarizadas esta convirtiéndose en la regla general en ingeniería de antenas, tanto que es difícil concebir un ingeniero de antenas moderno sin conocimiento de los fundamentos de los tres principales métodos computacionales en electromagnetismo: el método de elementos de frontera (método de momentos), el método de diferencias finitas y el método de elementos finitos.

Sin embargo estos métodos aun se encuentran en fase de validación y no se ha llegado a un software capaz de modelar un problema arbitrario. El problema usual es la limitación en la convergencia y la aparición de soluciones espurias. El Consorcio de Código Electromagnético (EMCC) auspicia simposiums e investigaciones en este campo y constantemente aparecen nuevos códigos sin que

alguno llegue a convertirse en el standard.

El objetivo de este trabajo es desarrollar un paquete computacional amigable con el usuario (YAGI - CAD) que sea una herramienta válida para análisis y diseño de antenas Yagi, y describir su aplicación práctica.

Se realizan las tres validaciones fundamentales que debe tener todo método de simulación computacional: estabilidad, convergencia y precisión. Luego se describen las mediciones experimentales realizadas que validan el programa y la construcción práctica de antenas Yagi profesionales; concretamente de uso para radiodifusión o enlaces punto - punto.

El paquete nos permitirá obtener la distribución de corriente sobre la superficie de los elementos de la antena, la impedancia de entrada, el patrón de radiación en los diferentes planos E y H y la ganancia de una antena Yagi y observar la influencia en ellos de las dimensiones y posición de los elementos de la antena.

Este paquete será capaz de modelar no solo Yagis sino en general arreglos de elementos lineales de modo que su aplicación como ayuda didáctica va a ser muy valiosa.

En el primer capítulo se describirán los diferentes métodos computacionales que existen para el cálculo numérico de los campos electromagnéticos.

En el segundo capítulo se describen los aspectos numéricos del método de elementos de frontera para la obtención de la distribución de corriente sobre una antena.

En el tercer capítulo se va a explicar cómo se puede plantear una ecuación matricial apropiada para la distribución de corriente en una antena Yagi.

En el cuarto capítulo se va a explicar el programa computacional que permite llevar a cabo los cálculos planteados, y cómo en base a la distribución de corriente hallada se pueden obtener los parámetros de la antena.

En el quinto capítulo se va a explicar la construcción material de una antena Yagi, incidiendo en la construcción de los adaptadores balanceado-desbalanceado (balunes) y transformadores de impedancia.

Asimismo se detallará la realización de las mediciones de los parámetros más importantes para verificar el correcto funcionamiento de la misma: **Coefficiente de onda reflejada y Patrón de radiación.**

En el sexto capítulo se van a analizar resultados de mediciones en antenas lineales y principalmente antenas Yagi, incluyendo las mediciones realizadas en el capítulo anterior, a la luz del programa realizado.

En el séptimo capítulo se va a describir el programa desde el punto de vista del usuario, incidiendo principalmente en el número de funciones de expansión que son adecuadas para cada caso particular y los pasos a seguir para obtener un resultado adecuado.

Finalmente se darán las conclusiones sobre la aplicabilidad y criterios para el uso del programa para la fabricación de Yagis con características dadas y también con fines educativos.

El método seguido es la aproximación a forma unidimensional de las ecuaciones integrodiferenciales bidimensionales que se presentan para la distribución de corriente sobre un conductor irradiante y su desarrollo en funciones de base utilizando el método de Galerkin y la Teoría Diakóptica de antenas.

Se describen e implementan las diferentes alternativas para llevar a cabo dicha aproximación, basadas en la utilización de los llamados kernel "exacto" y "reducido".

Se espera que este trabajo sea continuado por otras investigaciones en el fascinante mundo de la simulación eletromagnética aplicada a algo tan propio del ser humano como son las comunicaciones.

CAPITULO I

METODOS COMPUTACIONALES PARA EL CALCULO DE LA RADIACION DE ANTENAS LINEALES

En este capítulo, partiendo de las ecuaciones de Maxwell que nos permiten modelar los campos electromagnéticos, plantearemos métodos computacionales que nos permitan calcular numéricamente los mismos, orientándonos a los campos producidos por un objeto radiante (antena).

1.1 Ecuaciones de Maxwell

1.1.1 Ecuaciones de Maxwell para el vacío

Las ecuaciones de Maxwell para el vacío, o para un medio no conductor (dieléctrico) lineal, homogéneo e isotrópico, como es el aire, son las siguientes [ref. 1 pag. 854]:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + e \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

(1.1.1.1)

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1.1.1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.1.1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (1.1.1.4)$$

Con la ecuación de continuidad [ref. 2 pag. 256]:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.1.1.5)$$

Donde:

\vec{H} : Campo magnético.

\vec{E} : Campo eléctrico.

\vec{J} : Densidad de corriente.

ρ : Densidad volumétrica de carga.

μ : Permeabilidad del medio. (μ_0 si es el vacío)

ϵ : Permitividad del medio. (ϵ_0 si es el vacío).

Nótese que en estas ecuaciones no hacemos uso de la corriente y la carga magnética que si están en la referencia [5]. Esto se debe a que según Jackson (referencia [4]), la única utilidad de la introducción de la corriente y la carga magnética es llegar a un planteamiento simétrico de las ecuaciones de Maxwell como en [5], lo que tiene grandes ventajas pedagógicas pero sería

una dificultad para nuestros objetivos.

Pueden encontrarse interesantes discusiones sobre este tema en "IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility", pero debe despejarnos de toda duda el hecho de no encontrar en la teoría electrodinámica, de la cual se obtienen las ecuaciones de Maxwell, ninguna mención a las corrientes y cargas magnéticas. Sobre esto conviene estudiar, nos atreveríamos a decir como primer paso, la referencia [3], que partiendo del principio de mínima acción nos dará un enfoque sorprendentemente deductivo y natural de los modelos matemáticos que se usan en cálculos computacionales.

Las ecuaciones de Maxwell tienen el siguiente planteamiento alternativo [ref. 2 pag. 548]:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A} \quad (1.1.1.6)$$

$$\vec{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.1.1.7)$$

Donde:

\vec{A} : Potencial vectorial:

Φ : Potencial escalar:

Si se cumple la condición de Lorentz [ref. 2 pag. 446]:

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Tendremos para dichos potenciales [ref. 2 pag. 446]:

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad (1.1.1.9)$$

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.1.1.10)$$

O equivalentemente en forma integral [ref. 2] pag.550] la solución de Dirichlet:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{4\pi R} dv' \quad (1.1.1.11)$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{4\pi R} dv' \quad (1.1.1.12)$$

Donde se tiene:

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| \quad (1.1.1.13)$$

1.1.2 Ecuaciones de Maxwell para un medio de gran conductividad y condiciones de frontera

El caso del medio de gran conductividad se analiza considerando que \vec{E} debe ser nulo para que \vec{J} pueda ser finito.

En adelante plantearemos las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia, es decir, aplicaremos la transformada de Fourier.

De la segunda ecuación de Maxwell, la variación en el tiempo de \vec{H} es nula. Entonces en un buen conductor las ecuaciones de Maxwell se convierten en:

$$\vec{E} = \vec{0} \quad (1.1.2.1)$$

$$\vec{H} = \vec{0} \quad (1.1.2.2)$$

$$\rho = 0 \quad (1.1.2.3)$$

$$\vec{J} = \vec{0} \quad (1.1.2.4)$$

Y para los potenciales:

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{0} \quad (1.1.2.5)$$

$$\nabla \Phi + j\omega \vec{A} = \vec{0} \quad (1.1.2.6)$$

La condición de Lorentz queda igual:

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{j\omega}{c^2} \Phi \quad (1.1.2.7)$$

Tendremos para dichos potenciales:

$$\left[\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \vec{A} = \vec{0} \quad (1.1.2.8)$$

$$\left[\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \Phi = 0 \quad (1.1.2.9)$$

Al hablar de diferentes medios, debemos plantear cuáles son las condiciones de contorno entre los medios vistos (un buen conductor y un medio lineal homogéneo no conductor como el aire) que se deducen de cada una de las ecuaciones de Maxwell [ref. 2 pag. 526].

$$\vec{n} \times \vec{H} = \vec{J}_s \quad (1.1.2.10)$$

$$\vec{n} \times \vec{E} = \vec{0} \quad (1.1.2.11)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{E} = \rho_s \quad (1.1.2.12)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{H} = 0 \quad (1.1.2.13)$$

Donde tenemos:

\vec{n} : vector unitario normal a la superficie de interface dirigido hacia fuera del conductor.

\vec{J}_s : vector densidad de corriente superficial.

ρ_s : densidad de carga superficial.

Las ecuaciones anteriores se deducen mas sencillamente simplemente imponiendo la continuidad de las potenciales vectorial y escalar y aplicando con cuidado las ecuaciones (1.1.6) y (1.1.7).

1.1.3 Consideraciones cuasiestáticas

Es importante tener muy claro a qué llamamos consideraciones cuasiestáticas, y dentro del modelo que vamos a realizar dónde puede utilizarse dicha aproximación y dónde no, y en qué forma.

Desde el punto de vista de las variaciones armónicas se considera que la longitud de onda es grande respecto a las dimensiones del cuerpo.

Esta longitud de onda es $2\pi c/\omega$ donde c es la velocidad de propagación de la onda electromagnética y ω es la frecuencia angular.

Esto nos lleva a concluir que la frecuencia ω es pequeña respecto del cociente de c entre cualquier longitud dentro del cuerpo.

Esto nos puede justificar despreciar los términos que contienen ω en las ecuaciones de Maxwell en forma armónica para el caso cuasiestático, o los términos que contienen derivadas temporales de \vec{H} y \vec{E} en las ecuaciones de Maxwell en el tiempo [ref. 1 pag. 854].

Llevamos las ecuaciones de Maxwell a la forma:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (1.1.3.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0} \quad (1.1.3.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.1.3.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (1.1.3.4)$$

Con la ecuación de continuidad que se plantea a continuación:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (1.1.3.5)$$

Dichas ecuaciones tienen el siguiente planteamiento alternativo; como se puede ver en las referencias mencionadas:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \quad (1.1.3.6)$$

$$\vec{E} = -\nabla \Phi \quad (1.1.3.7)$$

La condición de Lorentz se convierte en:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (1.1.3.8)$$

Tendremos para dichos potenciales:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\frac{\vec{J}}{\mu} \quad (1.1.3.9)$$

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.1.3.10)$$

Ha sido necesario plantear las ecuaciones de Maxwell ordenadamente para tener como referencia sus formas fundamentales y poder observar como los métodos se derivan de las propias ecuaciones sin consideraciones adicionales.

Es decir, las diferentes formas de plantear las

ecuaciones fundamentales del electromagnetismo determinan los diferentes métodos computacionales que se utilizan.

Para poder comprender claramente el fundamento de dichos métodos y sus limitaciones y fuentes de error y de soluciones espurias es necesario comprender la naturaleza de las ecuaciones de las cuales se han derivado.

1.2 Métodos computacionales para el cálculo de los campos electromagnéticos

Planteadas las Ecuaciones de Maxwell, aparece la cuestión de la necesidad de su resolución y de conocer el estado del arte de los métodos que actualmente se utilizan para lograr objetivos de ingeniería, pedagógicos y de investigación, y con que éxito se han logrado dichos objetivos.

Para esto daremos una breve descripción de dichos métodos, que pueden ser derivados rigurosamente de las tres formas fundamentales de plantear las ecuaciones de Maxwell y daremos las referencias donde se encuentra mayor información.

Finalmente, seleccionaremos un método computacionalmente poco costoso, suficientemente confiable y apro-

piado para nuestro objetivo que es la simulación de antenas lineales delgadas.

1.2.1 Criterios de unicidad

Lo primero que debe plantearse es el problema de la existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones de Maxwell en una región dada.

En la referencia [7] encontramos una discusión sobre esto, que también se encuentra en la referencia [4].

No repetiremos las deducciones que están suficientemente claras en dichas referencias, y a lo largo de este estudio rogaremos al lector que se remita a las referencias que mencionamos.

El objetivo es, manteniendo la continuidad y rigurosidad del desarrollo del estudio, poder llegar al tema principal que deseamos desarrollar y a la vez dar pautas y referencias a quienes deseen continuar con este tema o estudiar desarrollos alternativos.

Es demostrable, entonces, de las ecuaciones de Maxwell que se conocen unívocamente los campos en una región R delimitada por una superficie S si se especifica

lo siguiente como condiciones de frontera:

(1) El valor del campo \vec{H} o el valor del campo \vec{E} en cada punto de S en todo t , y,

(2) El valor del campo \vec{H} y el valor del campo \vec{E} en cada punto de V cuando $t=0$.

Luego se puede considerar que en V se tiene un sistema lineal (de ecuaciones diferenciales lineales) donde (1) es la excitación y (2) da las condiciones iniciales de la salida.

De la teoría de sistemas lineales se conoce que en el estado estacionario, es decir, cuando los campos varían en forma periódica y ha "desaparecido" la respuesta "transitoria" y solo queda la "estacionaria", se obvian las condiciones iniciales y solo se aplica (1), a menos que se tengan respuestas excitadas no atenuadas (es decir, resonancias como en las cavidades resonantes), lo que no es nuestro caso.

1.2.2 Métodos aplicados en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia

Hemos planteado las diversas formas de las ecuaciones de Maxwell cuya directa aplicación a métodos

computacionales veremos en breve, pero desde ya debemos hacer la distinción entre **métodos aplicados en el dominio del tiempo** y **métodos aplicados en el dominio de la frecuencia**.

En los **métodos aplicados en el dominio del tiempo** se aplican directamente las ecuaciones de Maxwell en el tiempo como las hemos planteado mas arriba en sus diversas formas.

Esto permite obtener directamente y en un solo cálculo lo siguiente:

(1) La respuesta a un estímulo transitorio dado tal como un pulso electromagnético (sobre lo que están desarrollándose aplicaciones en alta potencia), y:

(2) La respuesta para cualquier estímulo y la respuesta para cualquier frecuencia mediante una convolución o una transformada de Fourier (FFT).

Las desventajas son:

(1) La relativa complejidad de manejar cuatro variables,

(2) La complejidad y el volumen de datos generados al discretizar para dichas cuatro variables,

- (3) La cantidad de tiempo computacional que se requiere,
- (4) La dificultad de la selección de intervalos adecuados en el tiempo, ya que no se puede tomar como referencia ningún "periodo" de la señal, y:
- (5) La posibilidad de que en realidad solo necesitemos la respuesta para un rango de frecuencias dado, incluso relativamente pequeño, de modo que se desperdicia esfuerzo computacional que puede haber sido aprovechado para aumentar la precisión en las frecuencias deseadas.

Esta última circunstancia es lo que generalmente ocurre en comunicaciones, por lo que nosotros finalmente para nuestro objetivo no elegiremos este método.

En los métodos aplicados en el dominio de la frecuencia, al plantear las ecuaciones (1.1.1) a (1.3.10) se aplica a ambos miembros la transformada de Fourier.

Entonces las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia, que se pueden resolver para diferentes frecuencias discretas o tal vez solamente para una frecuencia de interés.

En todo caso, se ha logrado disminuir en uno el número de variables a costa de tener que resolver el problema una vez para cada frecuencia de interés.

Es posible incluso resolver el problema para una serie apropiada de frecuencias y luego a los resultados aplicarles la transformada inversa de Fourier (IFFT) para tener la respuesta en el tiempo que se obtuvo directamente en el caso anterior.

Esto computacionalmente podría requerir un esfuerzo comparable a resolver el problema en el tiempo y llevar el resultado al dominio de la frecuencia.

Por eso, más que métodos se habla de **discretización en el dominio del tiempo y discretización en el dominio de la frecuencia**, como métodos alternativos e incluso combinables como se ve en la referencia [10].

Más información sobre dichas formas alternativas se encuentra en los artículos citados para cada método específico que veremos a continuación, por lo que se ruega al lector referirse a ellos.

1.2.3 Planteamiento de las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial y el método de diferencias finitas

Las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial son las que tenemos en (1.1.1) a (1.1.10), aplicadas a un volumen V .

Las condiciones de frontera que se plantean de acuerdo al criterio de unicidad que hemos visto pueden entonces plantearse como condiciones de frontera de Dirichlet para los campos o de Neumann para los potenciales.

En la referencia [11] encontramos un análisis matemático de dicho tipo de ecuaciones en derivadas parciales.

Ejemplos sencillos de este método y su aplicación son fácilmente comprensibles y se encuentran en la referencia [12].

La idea central es la discretización de las ecuaciones de Maxwell que se encuentra en la tabla de fórmulas de la referencia [13], que podría hacerse también en el dominio de la frecuencia.

En dicho artículo se muestra también como adaptar las ecuaciones a fronteras curvas.

El método de diferencias finitas conduce entonces a sistemas de ecuaciones lineales esparcidos donde las incógnitas son los valores de los campos o los potenciales en una malla regular de puntos sobre una región delimitada.

Inmediatamente se nota entonces que su gran desventaja es la dificultad para modelar casos en que los campos se extienden en una región infinita sin atenuarse, o cuando se propagan, aparte del hecho de requerir una gran cantidad de memoria para una precisión adecuada en geometrías regularmente complejas.

Sin embargo, su ventaja es que conduce a ecuaciones tan sencillas que incluso pueden ser resueltas fácilmente en hojas de cálculo comerciales para computadoras [ref. 14], de modo que una propuesta interesante sería implementar dichas aplicaciones para los cursos básicos de electromagnetismo, lo que no requiere casi esfuerzo ni dinero.

En la referencia [15] encontramos un método de aplicación de diferencias finitas para cavidades resonantes de forma arbitraria y en la referencia [17] para conductores delgados dentro de dichas cavidades.

En la referencia [16] se encuentra un método para el cálculo de la matriz de dispersión de estructuras tridimensionales arbitrarias incluyendo guías de onda, microcintas u otros dispositivos pasivos de microondas.

La aplicación del método de diferencias finitas para problemas de antenas y radiación se logra mediante la implementación de "fronteras absorbentes" que permiten

delimitar el problema.

Esto es obviamente necesario para trabajar con un número finito de datos.

Se implementan en la frontera operadores diferenciales que condicionan a la onda a propagarse en un solo sentido (hacia fuera de la región).

En la referencia [8] se encuentra la aplicación a un caso sencillo de acoplamiento mutuo entre dos dipolos delgados.

Se observa la cantidad de tiempo de computación requerida (7 horas en una computadora personal AT 486), lo que hace este método prohibitivo para nuestras aplicaciones.

1.2.4 Planteamiento variacional de las ecuaciones de Maxwell y el método de elementos finitos

En la referencia [3], concretamente en las pág. 175 a 180 se encuentra que la acción de un campo electromagnético en un volumen V desde t_1 hasta t_2 está dada por la fórmula (54,5) de dicho texto, que anotamos a continuación acomodada a nuestra notación y en coordenadas tridimensionales y en donde hemos suprimido las cargas

discretas:

$$S = 4\pi\epsilon \int_{t_1}^{t_2} \int_V [\mu \vec{A} \cdot \vec{J} - \phi \rho + \frac{\epsilon}{2} |\vec{E}|^2 - \frac{\mu}{2} |\vec{H}|^2] dV dt \quad (1.2.4.1)$$

En el estado estacionario, minimizar la acción equivale a minimizar la integral de volumen (que se conoce como lagrangiano del campo) dado que t_1 y t_2 son fijos.

En dicha referencia se demuestra como las ecuaciones de Maxwell se obtienen de la minimización de dicha acción mediante el cálculo variacional.

En el método de elementos finitos la minimización de la acción se lleva a cabo computacionalmente en forma directa.

No se llega a la forma de diferencial de las ecuaciones de Maxwell.

Se hace una partición de la región V en **elementos finitos** en los cuales se aproximan los campos y/o potenciales y/o corrientes y/o cargas como una suma de funciones conocidas multiplicadas por coeficientes desconocidos.

Al efectuar la integración sobre V se tendrá que la acción que desea minimizarse estará expresada como una función polinomial de dichos coeficientes desconocidos.

Si son n coeficientes desconocidos, se tendrán para ellos n ecuaciones resultantes de igualar a cero la derivada parcial de dicho polinomial respecto de cada coeficiente desconocido, ya que lo que se desea es minimizar el polinomio.

Entonces pueden hallarse dichos coeficientes desconocidos mediante dichas ecuaciones.

Las ecuaciones (1.1.1.1) a (1.1.1.10) en una región V pueden entonces plantearse en forma "débil" o variacional, lo que quiere decir que se puede hallar un funcional (una integral sobre V de una expresión que es función de los campos y/o de los potenciales y/o de la corriente y/o de la carga) tal que minimizarlo equivale a forzar el cumplimiento de las ecuaciones (1.1.1.1) a (1.1.1.10) y de condiciones de frontera que coinciden con 1.1.2.

El problema es entonces hallar dicho funcional, que no es mas que una forma de la ecuación 1.2.4.1.

En la referencia [18], capítulos 1,2,3,4 y 7, los autores muestran formas variacionales que son casos

particulares de la ecuación anterior, y que efectivamente verifican las ecuaciones (1.1.1.1) a (1.1.1.10) y a la vez plantean condiciones de frontera para la unicidad de la solución que coinciden con las que hemos visto en 1.1.2.

Así vemos como el método de elementos finitos aparece como algo natural en electromagnetismo.

El método de elementos finitos ha interesado a muchos investigadores que proponen diferentes alternativas para su aplicación:

Aunque en [18] se tiene una guía bastante completa e incluso programas Fortran, en [19] se puede tener una rápida introducción al tema.

En [20] se discuten las condiciones de frontera que determinan la unicidad de la solución y cómo aparecen naturalmente del planteamiento de minimización del funcional.

Esto se encuentra en [18] desde otro punto de vista.

En [21] se estudia la eliminación de modos espúreos que aparecen al aplicar el método de elementos finitos directamente a los campos eléctrico y/o magnético.

co, y en [9] se propone la aplicación del método a los potenciales.

En [22] se propone un método en el dominio del tiempo, en [23] se propone la solución por procedimientos iterativos de las ecuaciones lineales resultantes de aplicar este método.

En [24] se describen programas educacionales muy interesantes.

El método de elementos finitos tiene las mismas desventajas de tiempo de procesamiento y capacidad de almacenamiento a veces excesivas que tiene el método de diferencias finitas, además de la desventaja de tener que modelar una malla de elementos finitos apropiada para cada geometría.

Esto lo compensa con su mayor exactitud y generalidad, ya que obtiene los campos o potenciales que desea calcular en **toda la región** (pues se han usado funciones de aproximación cuyos coeficientes se han hallado) y no solo en puntos discretos de ella como en el método de diferencias finitas.

Las derivadas de dichos campos o potenciales, por ejemplo, pueden obtenerse simplemente derivando dichas funciones.

Además la forma arbitraria de los elementos finitos permite acomodarse fácilmente a cualquier geometría, característica en la que supera a los demás métodos.

Nótese que tanto el método de diferencias finitas como el método de elementos finitos tienen la desventaja de que trabajan con una gran cantidad de memoria y sólo pueden modelar casos en que los campos se limitan a una región finita del espacio y la energía no se radia, a menos que se usen condiciones especiales de frontera que simulen dicha radiación.

1.2.5 Planteamiento de las ecuaciones de Maxwell como integrales de las fuentes y método de elementos de frontera

Las ecuaciones de Maxwell planteadas como integrales de las fuentes son las ecuaciones (1.1.1.11) y (1.1.1.12) y las que se derivan de reemplazar dichas integrales en (1.1.1.6) y (1.1.1.7) para hallar los campos en función de las fuentes, expresiones que no utilizaremos pero se encuentran en el dominio de la frecuencia en la referencia [25], y donde anularíamos las cargas y corrientes magnéticas.

El método de elementos de frontera consiste en

resolver el problema de hallar los campos electromagnéticos en una región conociendo los valores de algunos campos y/o potenciales en la frontera (condiciones de frontera de Neumann y/o Dirichlet), no mediante la resolución directa de las ecuaciones de Maxwell (como en el método de diferencias finitas), ni mediante la minimización de un funcional (como en el método de elementos finitos), sino mediante el planteamiento directo de la expresión integral que relaciona la fuente con el campo (o potencial) que se conoce en la frontera.

Cuando la frontera en que se encuentran las fuentes es un conductor de alta conductividad, los campos que se conocen en la frontera son \vec{H} normal o \vec{E} tangencial a ella, pues de las condiciones de frontera vistas se sabe que son nulos.

Como por fuente se entiende la corriente o la carga en la superficie de frontera, se planteará una **ecuación integral** en la frontera (por lo que el método se conoce con ese nombre) donde la incógnita es la fuente como una función de la posición sobre la frontera y del tiempo.

Una guía sobre este tema se encuentra en la referencia [26] y en [18] capítulo 4.

Si bien se pueden plantear diversas ecuaciones

integrales para diversos casos, como se ve en dichas dos referencias, para los casos no estáticos como son los que nos interesan, se suelen plantear las ecuaciones que relacionan la corriente superficial sobre la superficie de frontera con los campos \vec{H} y \vec{E} del siguiente modo:

Al derivar respecto del tiempo ambos miembros de (1.1.1.7) y utilizando (1.1.1.8) para eliminar la derivada respecto del tiempo del potencial escalar, tenemos:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \left[\nabla \cdot - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{A} \quad (1.2.5.1)$$

Aquí, el potencial vectorial \vec{A} representa el generado por todas las corrientes del universo de acuerdo a (1.1.1.11).

Como eso resulta impráctico e ideal, separamos \vec{A} como la suma del generado por todas las corrientes fuera de la superficie de frontera a considerar (que llamaremos \vec{A} incidente) mas el generado por las corrientes sobre dicha superficie de frontera, que consideraremos superficiales.

Luego de plantear la ecuación (1.1.1.11) para el primer término de dicha suma tendremos:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_i(\vec{r}, t) + \frac{\mu}{4\pi} \iint_{s'} \frac{\vec{J}_s(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{4\pi R} ds' \quad (1.2.5.2)$$

Siendo:

\vec{A}_i : Potencial vectorial incidente.

S' : Superficie de frontera.

\vec{J}_s : Densidad superficial de corriente en la frontera.

Donde hemos expresado el potencial vectorial en función de la distribución de corriente sobre el elemento, de modo que como se verá más adelante se podrá plantear una ecuación integrodiferencial cuya incógnita sea la distribución de corriente.

Esta corriente incógnita es en realidad una función, de modo que para poder representarla es preciso expandirla en un conjunto de funciones de base con coeficientes desconocidos, como veremos.

La ecuación integral resultante posee una respuesta que es la suma de funciones conocidas que pueden ser elegidas de diferentes tipos.

Entre los más usados está la expansión de la corriente en funciones tipo pulsos de dominios diferentes.

De este modo la ecuación integrodiferencial resultante es llevada a la forma de una ecuación alge-

braica lineal, o en otras palabras de una ecuación matricial.

A este método se le conoce como **Método de momentos** y requiere entonces la solución de una ecuación matricial

Si definimos \vec{J}_s como el campo eléctrico generado por dicha distribución de corriente fuera de la superficie de frontera; tendremos análogamente a (1.2.5.1):

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} = \left[\nabla \nabla \cdot - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{A}_1 \quad (1.2.5.3)$$

Substrayendo (1.2.5.3) de (1.2.5.1) y utilizando (1.2.5.2) para eliminar los potenciales vectoriales tendremos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} \\ &= \left[\nabla \nabla \cdot - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \frac{\mu}{4\pi} \iint_{s'} \frac{\vec{J}_s(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} ds' \end{aligned} \quad (1.2.5.4)$$

Como los operadores son independientes de la variable de integración:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \iint_{s'} \left[\nabla \nabla \cdot - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \frac{\vec{J}_s(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} ds' \end{aligned} \quad (1.2.5.5)$$

Si ahora aplicamos la condición de que en la superficie de la frontera, siendo esta de gran conductividad, se cumple (1.1.2.11), tendremos que al multiplicar vectorialmente por \vec{n} ambos miembros de la ecuación anterior y evaluarla para \vec{r} sobre la superficie de frontera se cumplirá:

$$-\frac{1}{c^2} \vec{n} \times \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} = \frac{\mu}{4\pi} \vec{n} \times \iint_{s'} \left[\nabla \nabla \cdot - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \frac{\vec{J}_s(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} ds' \quad (1.2.5.6)$$

Lo que se cumple para la superficie de frontera y se conoce como ecuación integral de campo eléctrico (EFIE). Nótese que esta ecuación puede ser válida, incluso sin necesidad del producto vectorial por \vec{n} , para \vec{r} en el interior del conductor cuya superficie sirve de frontera, y en un momento dado la plantearemos así

Si se aplica lo anterior para el campo magnético se tendrá en forma análoga:

$$-\vec{n} \cdot \vec{H}_1 = \vec{n} \cdot \iint_{s'} \nabla \times \frac{\vec{J}_s(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{4\pi R} ds' \quad (1.2.5.7)$$

Lo que se cumple para la superficie de frontera y se conoce como ecuación integral de campo magnético (MFIE). Nótese que esta ecuación puede valer, incluso sin necesidad del producto escalar por \vec{n} , para \vec{r} en el

interior del conductor cuya superficie sirve de frontera.

Como para conductores delgados o rotacionalmente simétricos la dimensión predominante es axial tangencial a la superficie, se suele preferir plantear la **EFIE** para modelarlos; mientras que para conductores planos o curvos de superficies relativamente grandes, habiendo muchas direcciones tangenciales se prefiere la normal en cada punto, planteándose la **MFIE**.

Para la resolución de este tipo de ecuaciones integrales, o más propiamente integrodiferenciales, se tienen a la vez condiciones que debe cumplir la fuente, en este caso la densidad superficial de corriente, en los límites de la superficie a considerarse.

Si se definen dos coordenadas sobre la superficie para la resolución matemática del problema, se tendrá que la continuidad de la densidad superficial de corriente determinará que esta sea cero en los extremos de la superficie, si es abierta, o que sea igual en los extremos donde corresponda a puntos físicamente iguales si es cerrada. Dichas condiciones serán entonces las que determinarán la unicidad de la solución.

Plantear correctamente lo descrito en el párrafo anterior es un paso de capital importancia que generalmente involucra realizar aproximaciones en la geometría

del problema para obtener ecuaciones integrodiferenciales bidimensionales o unidimensionales que expresen con suficiente precisión el problema a resolver y que a la vez estén bien planteadas, es decir, que tengan matemáticamente soluciones únicas.

El método de valores de frontera tiene la ventaja decisiva de que a diferencia del método de diferencias finitas o de elementos finitos, puede modelar fácilmente casos en los cuales los campos radiados se prolongan hasta el infinito, como es el caso de la radiación, ya que las ecuaciones se plantean solamente en las superficies de frontera donde existen las fuentes, y estas regiones son finitas.

Esto ha determinado que sea el método preferido para problemas de radiación, a pesar de la desventaja es el engorroso procedimiento matemático de planteamiento de las ecuaciones integrodiferenciales (que en sí mismo lleva aproximaciones) que lleva al cálculo de funciones complejas y que incluso en algunos casos puede diverger.

1.2.6 Desarrollo actual de los métodos computacionales en electromagnetismo y el problema de la modelación correcta de la radiación.

En el medio electromagnético internacional, como

se refleja en las publicaciones de la IEEE Antennas and Propagation Society, IEEE Microwave Theory and Techniques Society, IEEE Electromagnetic Compatibility Society, etc., se vive una emocionante carrera entre los investigadores de los métodos de Diferencias finitas, Elementos finitos y Elementos de frontera en pos de extender los campos de aplicación y mejorar la eficiencia de cada método.

Revisando publicaciones recientes uno observa que mientras unos investigadores tratan de encontrar formas más adecuadas de plantear métodos de fronteras de absorción para tratar cada vez más eficientemente el problema de la radiación y antenas con los métodos de diferencias finitas [ref. 8], otros buscan métodos matemáticamente más consistentes para eliminar los modos espúreos en el método de elementos finitos [ref. 9], y otros tratan de aumentar la eficiencia computacional del método de elementos de frontera [ref. 10], de modo que todavía queda mucho por decir y hacer en este interesante campo en el cual estudiosos de países como el nuestro pueden hacer mucho ya que no se necesita más que una computadora y mucho esfuerzo mental.

Debe decirse que recientemente se han planteado también alternativas interesantes a los métodos clásicos arriba mencionados, sobretodo enfatizando el contenido físico del problema.

Por ejemplo el **Método de Simulación de Carga** es una extensión del método de imágenes que plantea el campo en una región como si fuera generado por elementos de cargas desconocidas (incógnitas) en posiciones dadas fuera de ella, bien sean cargas puntuales, rectilíneas, anillos u otras, para entonces al igual que el método de imágenes plantear las condiciones de frontera en las interfases, lo que nos dará las ecuaciones necesarias para hallar nuestras incógnitas. Una referencia se encuentra en [28] y [29].

Asimismo la **Teoría Diakóptica de Antenas** (referencia [31], [32]) es un planteamiento reciente que se basa en subdividir estructuras complejas de antenas en elementos mas pequeños. La distribución de corriente de cada elemento es determinada bajo condiciones de circuito abierto (con todos los otros elementos retirados) y con esta suposición se determina la impedancia mutua (acoplamiento) entre los elementos. Resolviendo el sistema de ecuaciones que se forma se puede analizar estructuras muy complejas. Nosotros aprovecharemos este método como se verá mas adelante.

Desde el punto de vista académico, en [12] se muestra ya el syllabus y contenidos de un curso de métodos computacionales en electromagnetismo para pregrado, donde se enfatiza en el método de diferencias finitas para casos de campos limitados a una región dada y el

método de elementos de frontera, usualmente visto en postgrado, para antenas y radiación.

Para tener una crítica a los métodos vistos desde el punto de vista de ingeniería, en la referencia [30], cuya lectura recomendamos, encontramos una interesante comparación de las ventajas de cada método y una muestra de los programas comercialmente disponibles, donde se enfatiza el gran desarrollo que ha alcanzado la técnica de elementos finitos.

Para el problema de la radiación, se plantea el encerrar la estructura dentro de un marco y crear un método híbrido donde dentro del marco se aplica el método de elementos finitos y en la superficie de dicho marco se aplica el método de elementos de frontera, sin embargo se mantiene la complejidad del modelado tridimensional en elementos finitos que para una aplicación típica en una estación de trabajo puede requerir como en el método de diferencias finitas horas de procesamiento, mientras que lo que requerimos es una aplicación relativamente rápida para diseño de antenas lineales delgadas.

Se sigue investigando sobre las fronteras absorbentes de energía para poder aplicar los métodos de diferencias o elementos finitos al problema de la radiación mediante el uso de **Operadores de superficie de Radiación**. Un análisis detallado e interesante se encuen-

tra en la referencia [33], donde se aborda la aplicación de dichos operadores en un marco alrededor de un objeto radiante.

Algunos de dichos operadores se obtienen de plantear el campo lejano (sea U) en coordenadas esféricas como:

$$U = \frac{e^{-jkR}}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f_l(\theta, \phi)}{R^l}$$

Esta serie en R con infinitos parámetros constantes f_l puede truncarse en n términos y según la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias la serie truncada es solución de una ecuación diferencial de orden n aplicada a dicho campo en la frontera. Estas ecuaciones son obtenidas en [33] y este tipo de operadores se denominan **Aniquiladores de Modo** pues "aniquilan" los n primeros modos o términos de la expansión del campo.

Otros operadores provienen de la factorización de la ecuación de onda bidimensional escrita del siguiente modo:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] U = 0$$

Tratando el operador como una diferencia de cuadrados donde se extraerá la raíz cuadrada a lo contenido en el paréntesis, cada factor representará la propa-

gación en un sentido, luego tomando un factor y expandiendo la raíz cuadrada en forma racional se tendrá lo que se conoce como operador de onda unidireccional.

Durante la investigación de estas condiciones de radiación surge la idea de aplicarlas no a un marco alrededor del objeto radiante, sino sobre la propia superficie del mismo, utilizando los radios de curvatura de la superficie.

A este método, que no puede clasificarse dentro de ninguno de los anteriores se denomina **Método de condición de frontera radiante en la superficie**. Detalles del mismo se encuentran en [34].

Sin embargo, revisando los reportes de dichas investigaciones se dilucida que se acomodan a casos de superficies sencillas, siendo extremadamente complicado adaptarlos a formas complejas como la de un sistema radiante de antenas.

Luego de esta revisión de los modos usados actualmente aparece entonces que el método de elementos de frontera es el más apropiado para el análisis de sistemas de antenas lineales, que es nuestro objetivo.

Las ventajas del método de elementos de frontera para el problema de la radiación, vistos los demás méto-

dos, se pueden resumir en:

Menor consumo de tiempo de computación.

Menor consumo de memoria de almacenamiento.

Mayor facilidad de introducción de la geometría del problema.

- Suficiente precisión.

Siendo estos los considerandos centrales de todo método computacional, se justifica ampliamente la elección de dicho método, cuyos aspectos centrales se desarrollarán en el siguiente capítulo.

CAPITULO II

ASPECTOS COMPUTACIONALES PARA LA SOLUCION DE LA ECUACION DE DISTRIBUCION DE CORRIENTE

En este capítulo vamos a analizar los aspectos computacionales del método de elementos de frontera orientándonos a su aplicación en el cálculo de la distribución de corriente en las antenas lineales.

2.1. Métodos de solución de las ecuaciones integro- diferenciales de frontera

Planteada la ecuación integrodiferencial, que en nuestro caso se llevará a forma unidimensional, con ciertas condiciones en los límites, se tienen las siguientes opciones para resolverla:

2.1.1 Método iterativo

Consiste en intentar obtener una solución "cerra-

da" (es decir, analítica o como una serie infinita) para la corriente, mediante manipulaciones matemáticas de la ecuación integral. Esto sólo puede lograrse para los casos más simples y conduce a expresiones complicadas y trabajosas que se vuelven muchas veces innecesarias cuando se pueden utilizar métodos computacionales más precisos y sencillos.

De todos modos, las primeras soluciones a las ecuaciones integrales del electromagnetismo fueron obtenidas mediante este método, que es el que como veremos proporciona las funciones de base a utilizarse en las técnicas computacionales posteriores.

2.1.2 Método variacional

Consiste en buscar un funcional cuya minimización equivalga a la resolución de la ecuación integrodiferencial. Se encuentra alguna información sobre esto en [18] cap. 4 y en [27].

2.1.3 Método de Momentos o de Colocación

Consiste en desarrollar la función desconocida de fuente en una suma de funciones conocidas de base multiplicadas por coeficientes desconocidos que van a hallar-

se. Se reemplaza dicho desarrollo en la ecuación integro-diferencial y se evalúa en puntos de prueba (o, como veremos, se usan funciones de prueba) para tener las ecuaciones necesarias para hallar dichos coeficientes.

Una correcta elección de funciones de prueba y de base permite como veremos tener soluciones con un gran grado de aproximación para geometrias bastante variadas, por lo que este método ha sido el más usado para la resolución de las ecuaciones integrodiferenciales del método de elementos de frontera. Por su flexibilidad será el método que usaremos y a continuación analizaremos sus características desde el punto de vista de la aplicación que deseamos darle.

2.2. Características numéricas del método de momentos

Se encuentra una descripción breve general de este método de resolución de ecuaciones integrales en [18] cap. 4, en [26] de forma más completa, aunque solo se aborda problemas de electrostática, y una introducción concisa y con ejemplos en [12].

Nosotros para mayor comodidad y referencia repetiremos dichos planteamientos aquí, pero los generaliza-

remos para la resolución de ecuaciones integrodiferenciales.

A continuación desarrollaremos con cierto detenimiento los aspectos numéricos generales de este método que nos servirán de herramienta matemática para la selección de un procedimiento apropiado a nuestro problema. Consideramos que esto es necesario pues deseamos en el próximo capítulo centrarnos en el aspecto físico del mismo sin tener que repetir desarrollos matemáticos que nos harían perder la continuidad de la exposición.

2.2.1 Planteamiento de la ecuación matricial

Para lograr una comprensión rápida de los fundamentos de este método, supondremos que el problema ya ha sido llevado a una forma de ecuación integrodiferencial unidimensional:

$$v(x) = \int K(x, x') I(x') dx'$$

O usando la notación $\langle \ , \ \rangle$ para el producto interno (integral del producto de dos funciones) desde a hasta b :

$$v(x) = \langle K(x, x'), I(x') \rangle$$

Siendo K un operador diferencial en general al que se le llama **kernel** de la ecuación integrodiferencial (que puede por ejemplo obtenerse de 2.5.6), v una función conocida (que representa la excitación y puede ser el campo incidente), I la función incógnita (que representa la fuente que puede ser la corriente), y $[a,b]$ el dominio del problema. Nótese que no se hace ninguna restricción a que K , v o I sean reales.

Esta ecuación la podemos plantear como:

$$v=LI$$

Siendo L un operador integrodiferencial definido por:

$$\begin{aligned} [Lu] (x) &= \int dx' K(x, x') u(x') \\ &= \langle K(x, x'), u(x') \rangle \end{aligned}$$

La ecuación planteada tiene por incógnita a una función. Para discretizarla de algún modo se debe recurrir a métodos numéricos, y podríamos suponer como n incógnitas numéricas los valores de dicha función en una cantidad suficiente n de puntos que la representen apropiadamente, sin embargo quedaria el problema de cómo evaluar la integral para el producto interno.

El problema es similar al de la integración

numérica y entonces es necesario adicionalmente hacer una suposición sobre el **comportamiento** de la función en **todo el dominio** desde a hasta b para poder integrar.

Por ejemplo, suponer a la función constante por tramos, lo que se puede entender como desarrollarla como una suma de pulsos rectangulares de amplitudes desconocidas, o suponerla lineal por tramos, lo que se puede entender como desarrollarla en una suma de pulsos triangulares traslapados de amplitudes desconocidas, o incluso aproximarla como una serie o sumatoria polinomial o de otras funciones conocidas, como se hace en procedimientos numéricos de interpolación de funciones, que se asemejan a este problema en que la incógnita es una función.

Desde un punto de vista general, notamos entonces que los procedimientos anteriores no son sino casos particulares del desarrollo de la función I como una suma de n funciones conocidas linealmente independientes f_j , que se suelen llamar **funciones de expansión** o **funciones de base**, afectadas de coeficientes desconocidos I_j , que son los que desean hallarse y van a ser las incógnitas.

Tendremos:

$$\begin{aligned}
 I(x') &= I_1 f_1(x') + I_2 f_2(x') + \dots + I_n f_n(x') \\
 &= \sum_{j=1}^n I_j f_j(x')
 \end{aligned}$$

Nótese que la única condición que deben cumplir dichas funciones es que sean linealmente independientes. Luego, pueden ser tanto funciones que estén extendidas a todo el dominio $[a,b]$ como funciones cuyos dominios formen una partición de $[a,b]$ y cada una sea no nula solamente dentro de determinado intervalo (es decir, pulsos)

Incluso como hemos visto dichos intervalos pueden yuxtaponerse.

Como se trata de que exista una combinación lineal de dichas funciones de base (dada por la ecuación anterior) que represente en forma suficientemente precisa a la función que se desea hallar, es normalmente necesario que los dominios de las funciones de base cubran todo $[a,b]$.

Cuando se hace una partición de $[a,b]$ en intervalos que no se yuxtaponen se puede decir que lo que se ha hecho es dividir dicho intervalo en elementos finitos, aunque no se use el método variacional. Este es el enfoque desde el cual en [18] cap. 4 se abordan las ecuaciones integrales. Sin embargo, nosotros llamaremos, como es común, al método que estamos viendo **método de momentos**.

Reemplazando en la ecuación integral original tenemos:

$$\begin{aligned}
v(x) &= \int_a^b K(x, x') [I_1 f_1(x') + I_2 f_2(x') + \dots \\
&\qquad\qquad\qquad + I_n f_n(x')] \\
&= I_1 \int_a^b K(x, x') f_1(x') dx' + I_2 \int_a^b K(x, x') f_2(x') dx' \\
&\qquad\qquad\qquad + \dots + I_n \int_a^b K(x, x') f_n(x') dx' \\
&= \sum_{j=1}^n I_j \int_a^b K(x, x') f_j(x') dx' \\
&= \sum_{j=1}^n I_j \langle K(x, x'), f_j(x') \rangle \\
&= \sum_{j=1}^n I_j [L f_j](x)
\end{aligned}$$

Sin embargo, a pesar de que ahora la incógnita no es el valor de la función en infinitos puntos, sino se tienen n incógnitas discretas I_1 a I_n , esta sigue siendo una ecuación "continua", vale decir, que debe cumplirse en infinitos puntos.

De esos infinitos puntos, para obtener las n ecuaciones necesarias para hallar n incógnitas se pueden tomar n puntos diferentes para evaluar en ambos miembros de la ecuación e igualar, procedimiento que se denomina **ajuste por puntos (point matching)**. Se puede notar que esto equivale a realizar separadamente el producto interno de ambos miembros de la ecuación anterior con funciones impulso $\delta(x-x_i)$ siendo x_1 a x_n n puntos en $[a, b]$.

Para mayor generalidad, realizaremos separadamente el producto interno de la ecuación anterior con n funciones linealmente independientes entre sí g_1 a g_n que llamaremos funciones de prueba de modo de obtener las n ecuaciones necesarias. Dichas funciones deben estar distribuidas apropiadamente sobre el intervalo $[a,b]$ (aunque no necesariamente lo deben cubrir de modo uniforme). Como veremos mas adelante, la elección de funciones de prueba adecuadas a las funciones de base es un tema complicado cuyo enfoque se realiza sobre todo experimentalmente. La elección inadecuada de funciones de prueba puede determinar soluciones sorprendentemente divergentes.

Efectuando dichos productos internos tendremos el sistema de n ecuaciones con n incógnitas:

$$\int_a^b g_1(x) v(x) dx = I_1 \int_a^b g_1(x) \left[\int_a^b K(x, x') f_1(x') dx' \right] dx$$

$$+ I_2 \int_a^b g_1(x) \left[\int_a^b K(x, x') f_2(x') dx' \right] dx$$

$$+ \dots +$$

$$+ I_n \int_a^b g_1(x) \left[\int_a^b K(x, x') f_n(x') dx' \right] dx$$

$$\int_a^b g_2(x) v(x) dx = I_1 \int_a^b g_2(x) \left[\int_a^b K(x, x') f_1(x') dx' \right] dx$$

$$+ I_2 \int_a^b g_2(x) \left[\int_a^b K(x, x') f_2(x') dx' \right] dx$$

+ . . . +

$$+ I_n \int_a^b g_2(x) \left[\int_a^b K(x, x') f_n(x') dx' \right] dx$$

. . .

. . .

. . .

$$\begin{aligned}
\int_a^b g_n(x) v(x) dx &= I_1 \int_a^b g_n(x) \left[\int_a^b K(x, x') f_1(x') dx' \right] dx \\
&+ I_2 \int_a^b g_n(x) \left[\int_a^b K(x, x') f_2(x') dx' \right] dx \\
&+ \dots + \\
&+ I_n \int_a^b g_n(x) \left[\int_a^b K(x, x') f_n(x') dx' \right] dx
\end{aligned}$$

Las integrales, si bien aparentemente complicadas, son totalmente conocidas.

Las funciones de base y de prueba son conocidas, así como el operador diferencial K .

El sistema anterior se puede expresar en forma más compacta como una sumatoria, de modo que se pueden obtener las siguientes dos formas alternativas para expresar brevemente las ecuaciones anteriores:

$$\int_a^b g_i(x) v(x) dx = \sum_{j=1}^n I_j \int_a^b g_i(x) \left[\int_a^b K(x, x') f_j(x') dx' \right] dx$$

$$i=1, 2, \dots, n$$

0:

$$V_i = \sum_{j=1}^n Z_{ij} I_j ; i=1,2,\dots,n$$

Siendo:

$$\begin{aligned} V_i &= \int_a^b g_i(x) v(x) dx \\ Z_{ij} &= \int_a^b g_i(x) \left[\int_a^b K(x, x') f_j(x') dx' \right] dx \\ &= \langle g_i(x) , \langle K(x, x') , f_j(x') \rangle \rangle \\ &= \langle g_i(x) , [L f_j] (x) \rangle \end{aligned}$$

(1.2.1.1)

En forma matricial tenemos la siguiente ecuación que en lo siguiente usaremos para representar todas las ecuaciones anteriores:

$$V=ZI$$

Deben utilizarse métodos de resolución de esta ecuación matricial para hallar el vector de corrientes I de forma eficiente. Eso es lo que realizaremos en el programa.

Se tiene:

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_n \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_n \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{2n} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Z_{n1} & Z_{n2} & Z_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{nn} \end{bmatrix}$$

Esta ecuación se resuelve sencillamente por métodos directos o iterativos, provista una prueba del condicionamiento de la matriz Z . Conociéndose entonces una expansión de $I(x')$, se aplica la ecuación (1.1.1.11) para hallar el potencial vectorial y las ecuaciones (1.1.1.6) a (1.1.1.8) para hallar los campos, resolviéndose de esta manera el problema.

2.2.2 Condiciones en los límites

Las condiciones que debe cumplir la función incógnita I en los límites de $[a,b]$ (lo que interpretaremos como que $I(a)$ e $I(b)$ son conocidos) pueden aplicarse

en forma explícita o implícita.

Plantearlas en forma explícita significaría plantear un par mas de ecuaciones de la forma:

$$I_1 f_1(a) + I_2 f_2(a) + \dots + I_n f_n(a) = I(a)$$

$$I_1 f_1(b) + I_2 f_2(b) + \dots + I_n f_n(b) = I(b)$$

lo que implicaría que se necesitarían solamente $n-2$ funciones de prueba.

Es mas apropiado aplicar estas condiciones en forma implícita eligiendo funciones de base o expansión tales que cumplan las ecuaciones anteriores para cualquier conjunto de valores de I , de modo que no habrá necesidad de plantear las ecuaciones anteriores y se obtendrán las n ecuaciones necesarias utilizando n funciones de prueba como se explicó originalmente. Por ejemplo, si las condiciones en los límites son que $I(x)$ se anule en a y b ($I(a)=0$ e $I(b)=0$), pueden tomarse funciones de base que se anulen en dichos puntos.

2.2.3 Funciones de base y funciones de prueba usuales

La precisión de la solución dependerá tanto de la elección de funciones de base que se acerquen a la forma de la solución correcta como de la cantidad de funciones

de base que se tomen. También como veremos deberán elegirse funciones de prueba adecuadas a las funciones de expansión que se han usado. Sin embargo, y esto es debido a las aproximaciones que se deben realizar en el problema original para llegar a una ecuación integral matemáticamente apropiada para el cálculo, suele existir un límite de convergencia y puede llegarse a un punto donde incrementar n no necesariamente incrementa la precisión de la solución y mas bien incrementa el error. Se requiere entonces un buen conocimiento del problema para seleccionar funciones de expansión y de prueba apropiadas, y una vez elegidas, elegir un correcto número de ellas para una solución dentro del rango de precisión requerido.

Nótese que si bien se ha visto el caso unidimensional, este incluirá cuerpos con simetría rotacional y la generalización al caso bidimensional es directa siendo las funciones de base y de prueba de dos variables, como se ve en [12] para el caso de un condensador plano.

Las funciones de base mas usadas son los pulsos triangulares, rectangulares y sinusoidales, o también funciones extendidas a todo $[a,b]$ como son las series polinomiales o de Fourier. Las funciones de prueba suelen ser impulsos (point matching), pulsos rectangulares, o funciones iguales a las de base, como veremos a continuación.

Una técnica común es tomar las funciones de prueba iguales a las funciones de base. A esto se le conoce como **Método de Galerkin**. En ese caso, se tendrá $\mathbf{g}_1 = \mathbf{f}_1$ y entonces:

$$Z_{1j} = \langle f_1, Lf_j \rangle$$

Si L es un operador adjunto propio, como los que se presentan en electromagnetismo, (referencia [27]); se tendrá:

$$\langle f_1, Lf_j \rangle = \langle f_j, Lf_1 \rangle$$

Lo que implica:

$$Z_{1j} = Z_{j1}$$

Es decir, con el método de Galerkin se genera una matriz simétrica. Esto tiene la ventaja de reducir a la mitad el almacenamiento necesario y el tiempo para llenar y resolver la matriz, características que aprovecharemos nosotros.

2.2.4 Evaluación de los productos internos para el cálculo de los elementos de la matriz

La evaluación de los productos internos necesarios para el llenado de la matriz puede hacerse numéricamente aunque de ser posible siempre es preferible hacerlo

analíticamente, o buscar un desarrollo en serie de la integral para acelerar su evaluación y a la vez poder aproximarla dentro de un rango especificado de error, procedimiento que utilizaremos nosotros.

Es muy importante efectuar correctamente la integración numérica, de ser esta necesaria. Aumentar arbitrariamente el número de subintervalos para la integración no es conveniente, pues se incrementa el tiempo de cálculo, se sigue desconociendo cuál es el margen de error, y además no se puede asegurar que se está mejorando de este modo la solución pues con un excesivo número de subintervalos los errores de redondeo pueden incluso empeorarla.

En la referencia [35], en los capítulos 13, 14 y 15, se muestran diversas técnicas de integración con estimaciones de los errores cometidos, y su consulta sería realmente importante antes de ensayar un método. Cualquier técnica es en realidad aplicable, pero en dicha referencia encontramos dos métodos que nos permiten aproximar la integral dentro de un margen de error previamente especificado, lo que es siempre deseable cuando se prefiere asegurar la exactitud de la integral dentro de ciertos límites, aunque se consuma mayor tiempo computacional.

Por ejemplo, la Integración de Romberg es un

método altamente eficiente en el cual primero se calcula la integral con dos segmentos, luego con cuatro y se combina esto con el resultado anterior para obtener una solución de mayor precisión, luego se calcula la integral con ocho segmentos y se combina este resultado con los anteriores para obtener una tercera iteración aún más exacta, y se repite sucesivamente el procedimiento hasta que la diferencia entre las últimas iteraciones sea menor que un error predefinido.

Cuando existen regiones donde la función tiene variaciones de bajo y alto orden, es conveniente usar la **Integración Adaptiva de Simpson** que consiste en dividir el dominio de integración en subintervalos de ancho h y en cada uno separadamente aplicar sucesivamente la regla de Simpson de $1/3$ (interpolación cuadrática) para $h/2$, $h/4$, etc., hasta llegar a la convergencia dentro de cierto margen de error predeterminado. La integral total será la suma de las integrales en cada subintervalo.

El costo en tiempo computacional de métodos de integración seguros nos lleva a preguntarnos si es realmente importante tanta precisión y si podemos calcular la integral con una aproximación relativamente baja, y de ser esto posible, hasta donde podemos disminuir el número de puntos para evaluarla y cual es la influencia de dicho procedimiento en la solución.

Debido a la importancia de interpretar correctamente la verdadera naturaleza de las funciones de prueba en el método de momentos para una correcta y selección de las mismas y de tener una herramienta para analizarlas como haremos a continuación, y para mejor referencia, es que a continuación analizamos con algún detalle un teorema importante de este método.

Considerando que con funciones de prueba impulsivas (point matching o concordancia de puntos) se obtienen resultados válidos a pesar de que se está evaluando las integrales aparentemente en un solo punto, y que todas las integraciones numéricas no consisten mas que en sumas ponderadas del integrando evaluado en diferentes puntos, lo que no es sino considerar como funciones de prueba series de impulsos de diferentes amplitudes y posiciones, y siguiendo la idea de la referencia [36] que es bastante orientadora al respecto, tenemos que para cada elemento de la matriz Z se tiene:

$$\begin{aligned} z_{ij} &= \langle g_i, Lf_j \rangle \\ &= \int_a^b g_i(x) Lf_j(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^{m_i} b_{ik} g_i(x_{ik}) Lf_j(x_{ik}) \end{aligned}$$

donde para integrar se toman m_i puntos x_{ik} para $k=1,2, \dots, m_i$ y b_{ik} son los pesos que se da a cada evaluación y dependen de método de integración numérica utilizado.

Si todos los puntos x_{1k} se reúnen en un solo conjunto $x_1 \dots x_m$ podremos escribir:

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ik} g_i(x_k) Lf_j(x_k)$$

y análogamente para el vector v :

$$v_i = \sum_{k=1}^m b_{ik} g_i(x_k) v(x_k)$$

donde algunos b_{ik} serán cero.

Debe ser ya claro que la única finalidad de las funciones de prueba es encontrar mejores formas de dar peso o ponderar las m evaluaciones de la ecuación "continua":

$$\sum_{j=1}^n I_j Lf_j(x) = v(x)$$

en los m puntos x_k para obtener solamente n ecuaciones con n incógnitas, que son los coeficientes del desarrollo de $i(x)$ en n funciones de base.

Esto se explica porque si utilizando las expresiones de z_{ij} y de v_i factorizamos Z y V , podemos escribir la ecuación $Z I = V$ como:

$$W_{n \times m} Lf_{m \times n} I_{n \times 1} = W_{n \times m} V_{m \times 1}$$

donde:

$$W_{ik} = b_{ik} g_i(x_k)$$

$$Lf_{kj} = Lf_j(x_k)$$

$$V_k = v(x_k)$$

Y así se observa que la matriz W convierte el sistema sobredeterminado de m ecuaciones con n incógnitas obtenido por concordancia de puntos en un sistema de n ecuaciones con n incógnitas como habíamos indicado. Como para resolver el sistema la matriz $Z = W Lf$ debe ser no singular, es decir, debe tener rango n , y el rango de un producto matricial es menor o igual que el rango de los factores, W y Lf deben tener rango n .

Considerando las fórmulas de sus elementos se asegura esto cuando se cumplen las siguientes condiciones:

- 1) Se tiene $m > n$, lo que quiere decir que el número total de puntos donde se evalúa para calcular las integrales debe ser mayor o igual que n . En el método de concordancia de puntos simple o point matching, $m=n$.
- 2) Las funciones de base y de prueba son linealmente independientes entre sí, condición que coincide con lo que habíamos asumido inicialmente.
- 3) El muestreo de dichas funciones no es demasiado espa-

ciado, de modo que las series de valores que las representan son independientes entre si. Esto equivale a decir que cuando se usan funciones de prueba extendidas a todo $[a,b]$ no debe disminuirse demasiado el número de muestras, lo que hace que sean preferibles las funciones de prueba tipo pulsos.

2.2.5 Conclusiones sobre la selección de funciones de base y de prueba

Considerando todo lo visto hasta el momento, se tienen las siguientes conclusiones para la selección de funciones de base y prueba:

La primera alternativa para asegurar la precisión es hacer el número de funciones de base relativamente alto de modo que podrían obtenerse coeficientes que sigan con apropiadamente cualquier función matemática que no varíe demasiado. En ese caso, si bien se aumentan las dimensiones de la matriz Z a invertirse, pueden usarse funciones de base simples y bastaría incluso el método de concordancia de puntos.

Cuando el problema a tratar es pequeño, de modo que la dimensión de la matriz es manejable y su resolución no es costosa en tiempo ni está afectada de demasiados errores de redondeo ($n < 100$) este procedimiento es el más rápido y por lo tanto el indicado.

Conforme crece el problema a resolver, debe tratarse de reducir el número de funciones de base de modo de tener matrices de tamaño mas manejable. Esto implica dos cosas: Primero, las funciones de base deben ser de la forma mas apropiada. Para el caso de las antenas, esto ha sido resuelto por la teoría diakóptica de antenas como hemos visto en la sección 1.2.6. Segundo, las integrales a evaluarse deben ser más precisas y esto lleva a buscar mejores métodos de integración como hemos visto en 2.2.4 o un desarrollo en serie de la integral que es lo que haremos nosotros. Pero esto tiene un costo usualmente grande en tiempo de cómputo.

Es entonces notorio como se repite el dilema usual que se tiene en métodos computacionales: encontrar un compromiso entre memoria requerida y tiempo de procesamiento.

2.2.6 Condicionamiento de la Ecuación matricial, métodos de resolución y estimación del error

El último punto a considerar es la óptima resolución numérica de la ecuación matricial y una estimación del error cometido. Es importante pues debemos recordar que los coeficientes que van a obtenerse son para las fuentes (en este caso corrientes) y los errores cometidos se propagarán aún mas para el cálculo de los otros parámetros en función de estos coeficientes.

Una reseña de la importancia del tema está en [12]. La referencia [35] cap. 7, 8 y 9 es orientadora al respecto, pero un texto interesante y que se cita en otros libros pues trata este tema en profundidad es [37]. El tema es extenso pero para evitar tener que referirnos a un libro que trata contenidos tan amplios, y para mejor referencia, explicaremos aquí sintéticamente las herramientas matemáticas que vamos a utilizar. El tema además es de importancia central en todos los métodos de simulación computacional.

Posteriormente nos basaremos en dichas herramientas matemáticas para realizar los cálculos de condicionamiento de la matriz, y luego estimaremos el error cometido debido tanto al margen dado en el cálculo de los elementos de la matriz como al redondeo de punto flotante cometido en la resolución del sistema, márgenes de error que deben sumarse.

Si tenemos las siguientes definiciones para la norma de un vector X de $n \times 1$:

$$\|X\|_{\text{euc}} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$$

$$\|X\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$$

$$\|X\|_{\infty} = \max |x_j|$$

y definimos la norma de una matriz A de $n \times n$ correspon-

diente a cualquiera de las normas anteriores como:

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

tendremos por esta definición:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

y se encuentran en [37] las demostraciones de las siguientes fórmulas, que no reproduciremos aquí:

$$\|A\|_{\infty} = \max_i |\mu_i|$$

$$\|A\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

Donde μ_1 a μ_n son los valores propios de A.

Ahora veremos como influye un error δZ en el cálculo del vector de coeficientes I de la ecuación $Z I = V$. Consideraremos, como será nuestro caso, que V se toma como referencia, luego no contiene error. Las ecuaciones exacta y aproximada serán:

$$\begin{aligned} Z I &= V \\ (Z + \delta Z) (I + \delta I) &= V \end{aligned}$$

restando y despejando δI tendremos:

$$\delta I = -Z^{-1} \delta Z (I + \delta I)$$

y tomando la norma de ambos miembros, por la propiedad vista:

$$\|\delta I\| \leq \|Z^{-1}\| \|\delta Z\| \|I + \delta I\|$$

que se puede expresar en función de los errores relativos de Z e I como:

$$\frac{\|\delta I\|}{\|I + \delta I\|} \leq \text{cond}(Z) \frac{\|\delta Z\|}{\|Z\|}$$

definiéndose la condición de Z como:

$$\text{cond}(Z) = \|Z^{-1}\| \|Z\|$$

expresión que es válida para cualquier tipo de norma definido.

Entonces determinada la condición de Z, podemos saber el margen de error relativo que existe en los coeficientes de I debido a un margen de error relativo con que se calculan los elementos de Z, simplemente multiplicando por dicha condición. Esta es la primera fuente de error.

A este margen se le debe añadir la segunda fuente de error que es el propio procedimiento de solución (redondeo). En [35] y [37] se encuentran diversos métodos

de solución, que se clasifican en directos e iterativos.

De los métodos directos es para nosotros de interés la **eliminación de Gauss** y la **descomposición LU**, que es equivalente, como métodos directos. La eliminación de Gauss permite reducir fácilmente el tiempo de cálculo a la mitad para matrices simétricas, por lo que la preferiremos.

El método iterativo más conocido es el **método de Gauss Seidel**.

Los métodos directos suelen requerir de **pivoteo** (ver) o intercambio de filas y columnas para que los elementos mayores se encuentren en la diagonal y disminuir así el error de redondeo. Como veremos, un examen de la matriz formada (o una previsión de las características de la misma basada en las funciones de base y prueba que se utilizan) permite decidir si el pivoteo es realmente requerido.

Cuando las funciones de base y prueba son pulsos, se generan matrices diagonalmente dominantes, es decir, cuyos elementos diagonales tienen mayor módulo que los del resto de la fila o columna, y de este modo tendremos, como se verá, matrices mejor condicionadas que cuando las funciones se extienden a todo $[a,b]$. Esto hace el pivoteo innecesario para este caso, característica que aprovecha-

remos.

Los métodos directos además generan un error de redondeo que debe estimarse antes de decidir su uso, y que como veremos aumenta con la dimensión de la matriz. Los métodos iterativos no generan error de redondeo pero requieren de una buena aproximación inicial, que es difícil de obtener y dificultan el uso de un programa que sea regularmente interactivo con el usuario, lo que es nuestro objetivo.

En [26] y [37] se recomienda para reducir los errores de redondeo, usar la eliminación de Gauss con **mejoramiento iterativo** (ver), método en el que resuelta una vez la ecuación $Z I = V$ y calculada una solución \bar{I} , se halla el residuo de esta solución $r = V - Z \bar{I}$, y luego se resuelve $Z y = r$ para hallado un y , tener una mejor aproximación $I = \bar{I} + y$. Sin embargo, como se menciona en [26], se consume tiempo y memoria por lo que es preferible restringir su uso a casos en que se sospecha que el error de redondeo cometido no es tolerable.

Se entiende entonces que lo más razonable es primero tratar de acotar el error de redondeo para ver si es significativo, lo que nos obligaría a reducirlo con el mejoramiento iterativo o usando Gauss-Seidel. Si no lo es, para economizar tiempo y almacenamiento podremos usar

la eliminación Gaussiana.

De la definición que se acaba de ver del residuo, se deduce fácilmente:

$$I - \bar{I} = Z^{-1}r$$

de donde:

$$\|I - \bar{I}\| \leq \|Z^{-1}\| \|r\|$$

y como:

$$\|V\| \leq \|Z\| \|I\|$$

tendremos, trabajando con ambas desigualdades, que una cota para el error relativo en I debido al redondeo es:

$$\frac{\|I - \bar{I}\|}{\|I\|} \leq \text{cond}(Z) \frac{\|r\|}{\|V\|}$$

Se recomienda en los textos que cuando se realiza la eliminación Gaussiana con mejoramiento iterativo, se haga el cálculo de r con doble precisión para reducir el error de redondeo. Sin embargo, todavía no conocemos si es necesario o no hacer el mejoramiento iterativo, y lo que deseamos en principio es primero acotar el error de redondeo para en base a esto tomar una decisión. Nótese que para esto no se desea un valor exacto de r , sino que nos basta su norma.

Luego, lo más sencillo es calcular r con precisión simple y luego comprobar el orden de su norma de acuerdo a la siguiente propiedad:

$$\|r\| = 10^{-t} \|Z\| \|Z\|$$

siendo t el número de cifras significativas.

Tomando el peor caso de ambos cálculos, podemos reemplazar en la fórmula anterior para acotar el error de redondeo.

Si la suma de este error más el calculado previamente debido al margen dado en el cálculo de los elementos de Z está dentro de la precisión deseada, podemos usar la eliminación de Gauss con seguridad.

Otra cota alternativa para el error relativo debido al redondeo, que usa la norma infinita y que nos permite prever su comportamiento al aumentar n , se encuentra en [37] y estipula que este error es equivalente al generado por un δZ tal que:

$$\|\delta Z\| \leq f(n) 10^{1-t} \max |a_{ij}^{(k)}|$$

donde $a_{ij}^{(k)}$ son los multiplicadores del método LU, siendo generalmente su valor para matrices presentadas en la práctica no mayor que 8, y $f(n) \approx n$, y como más $f(n) \leq 1.01(n^3 + 3n^2)$. de aquí, una cota práctica para el error de

redondeo es:

$$\|Z^{-1}\| \approx 10^{1-t}$$

Donde se ve que aumenta con la dimensión de la matriz.

En el siguiente capítulo plantearemos las ecuaciones integrodiferenciales del método de elementos de frontera para elementos cilíndricos (antenas lineales) y usaremos el método de momentos para resolverlas numéricamente, utilizando las herramientas matemáticas que se han mostrado arriba para cuantificar en lo posible el error que se comete en cada alternativa que veremos.

CAPITULO III

FORMULACION DEL METODO DE MOMENTOS EN EL ANALISIS Y DISEÑO DE ANTENAS YAGI

En este capítulo vamos a plantear las ecuaciones del método de momentos a las antenas lineales en general, analizando primero el caso del dipolo cilíndrico recto y luego el caso del arreglo de elementos cilíndricos rectos paralelos, orientándonos a buscar modelos apropiados para las antenas Yagi.

3.1 Planteamiento de la ecuación integrodiferencial para un elemento conductor recto cilíndrico

3.1.1 Antecedentes del problema y objetivos para evaluar un modelo matemático del mismo

El planteamiento y resolución por métodos primero cerrados (analíticos o por series) y luego numéricos del problema de la radiación y dispersión de ondas electromagnéticas por un elemento cilíndrico es un problema muy

antiguo, ya que fue planteado por Pocklington hace casi un siglo, y a la vez muy actual ya que todavía los investigadores están a la busca de un técnica que sea a la vez eficiente y computacionalmente no demasiado onerosa.

Veamos entonces cuales son nuestros objetivos.

Se entiende (ver referencia [38]) que un buen algoritmo de simulación será el que tenga las siguientes características, aparte de su consumo no excesivo de tiempo y memoria:

Estabilidad: es decir, que a una pequeña variación relativa de los datos de entrada (frecuencias y longitudes), que puede deberse a márgenes de error en las mediciones, el algoritmo responda con una pequeña variación relativa de los parámetros que calcula, en este caso, de la distribución de corriente. Esto implicará que no haya una excesiva propagación de errores.

Convergencia: es decir, que al menos hasta cierto punto conocido se tenga la certeza que aumentando el orden de aproximación del algoritmo se va a aumentar la precisión de los resultados.

Precisión: es decir, que los resultados se contrasten favorablemente con los datos experimentales en condiciones ideales, ya que en electromagnetismo las

fuentes de error, interferencia y distorsión de los resultados son innumerables.

Es en base a estos tres puntos esenciales a evaluar que aprovecharemos las herramientas matemáticas desarrolladas en el capítulo anterior para evaluar la eficiencia de nuestros algoritmos.

Comentarios y críticas a programas de simulación y optimización de antenas desarrollados y puestos en el mercado recientemente pueden encontrarse en las revistas "IEEE Antennas and Propagation Magazine".

Como la mayoría de los métodos computacionales de simulación, se busca la discretización del problema continuo y su resolución aproximada por métodos matriciales. Es convicción nuestra que la precisión, convergencia y estabilidad de un algoritmo de simulación depende estrecha y principalmente de la **exactitud del modelo matemático** y de la **consistencia y unicidad de la solución del problema matemático** que se plantea, y es por eso que dedicamos esta primera parte del estudio a dilucidar un modelo correcto y apropiado de los que se encuentran disponibles usando los criterios que se acaban de mencionar para lograr los objetivos arriba planteados de precisión, convergencia y estabilidad.

El modelo matemáticamente mas consistente, claro

y bello será el que preferiremos, ya que desde el punto de vista formal todos son métodos aproximados aunque estén basados en las ecuaciones de Maxwell que provienen de la Electrodinámica Clásica (al final, esta última no es también sino un modelo aproximado [ref. 3 y 4]).

Existe disponible variada bibliografía que aporta diferentes enfoques sobre el problema del modelamiento matemático de la corriente por un elemento conductor cilíndrico, de la cual hemos tratado de anotar los enfoques centrales.

Mostraremos también como la aplicación de las **consideraciones cuasiestáticas** es el corazón de la formulación de la ecuación integrodiferencial de distribución de corriente sobre un elemento cilíndrico y cómo la aplicación de estas consideraciones en diferente forma conduce a diferentes formulaciones de dicha ecuación integrodiferencial, de las cuales seleccionaremos para cada caso la mas adecuada como aquella que las aplica realizando aproximaciones mas cercanas a dicho caso en particular.

3.1.2 Modelamiento del campo eléctrico generado por la corriente en la superficie del elemento

Por lo considerado en 1.2.2, ya que el interés es

un rango estrecho de frecuencia, nos bastará plantear el problema en el dominio de la frecuencia y repetir el procedimiento para las frecuencias que sean de interés

El elemento considerado (figura 3.1.2.1) está sometido a un campo incidente generado por otros elementos lejanos o cercanos. Por ahora consideraremos que es

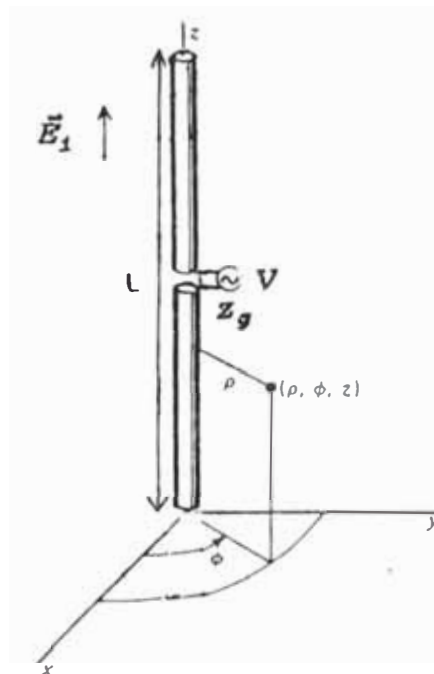


Fig. 3.1.2.1.- Elemento cilíndrico recto

sólido, es decir, no hueco.

En la figura 3.1.2.1 tenemos:

ρ, ϕ, z : coordenadas polares

a : radio del elemento

L : longitud del elemento

- \vec{r} : posición de la región de alimentación
- $2b$: longitud de la región de alimentación
- V : diferencia de potencial escalar en la región de alimentación
- \vec{E}_1 : Campo eléctrico incidente

La ecuación integrodiferencial que gobierna su distribución de corriente superficial es (1.2.5.4) del capítulo I; que plantearemos ahora en el dominio de la frecuencia:

$$j\omega\epsilon\vec{E} - j\omega\epsilon\vec{E}_1 = \left[\nabla\nabla \cdot + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \iint_{s'} \frac{\vec{J}_s(\vec{r}') e^{-j\frac{\omega}{c}R}}{4\pi R} ds' \quad (3.1.2.1)$$

La ecuación anterior es válida en todo \vec{r} , y S' es la superficie conductora, que desde el punto de vista general debería incluir a las caras internas de la región de alimentación y a la propia línea de alimentación.

Ahora intentaremos demostrar que si la región de alimentación es pequeña se puede reemplazar el efecto de la corriente sobre las caras internas de la región de alimentación y en la línea por una corriente ficticia sobre la prolongación de la superficie cilíndrica por sobre la región de alimentación, de modo de poder consi-

derar S' como una superficie cilíndrica cerrada y continua.

Supongamos conocidos \vec{H} en la región de alimentación: Si definimos una corriente superficial ficticia en la prolongación de la superficie cilíndrica que pasa por la región de alimentación:

$$\vec{J}_{s\text{ ficto}}(\vec{r}') = \vec{n}(\vec{r}') \times \vec{H}(\vec{r}')$$

aplicando el principio de superposición, podemos separar las corrientes en dos capas, una de ellas alrededor de la región de alimentación y la línea y la otra alrededor de todo el elemento, como indica la figura 3.1.2.1, de modo que considerando las densidades de corriente ficticias en ambos sentidos el efecto debe ser cancelatorio.

Vemos entonces que la corriente ficticia cierra o cortocircuita la línea de alimentación. Una línea genera campos que prácticamente no radian (en realidad las pérdidas por radiación son pequeñas) y se limitan al interior de la misma, y en la terminación de una línea cortocircuitada se anula el campo eléctrico. Por lo tanto, la contribución de la superficie interna al campo eléctrico puede despreciarse, provisto que la región de alimentación es pequeña. Debe entenderse que si bien se ha graficado una alimentación con cable coaxial, lo que se dice es válido para los diferentes tipos de alimenta-

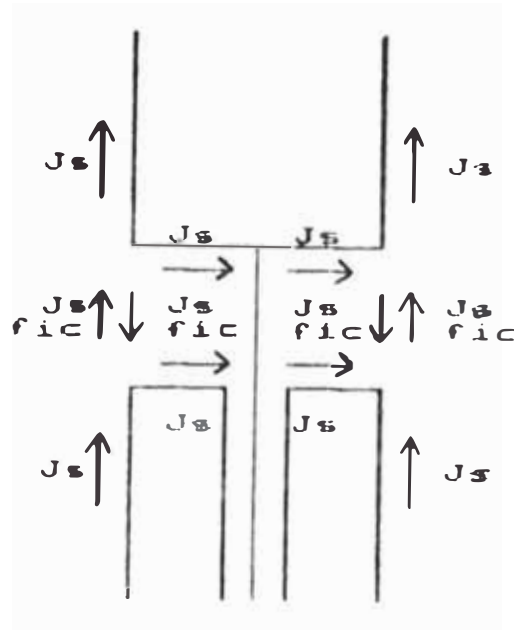


Fig. 3.1.2.2.- Modelación de las densidades de corriente superficial para un elemento cilindrico recto alimentado

ción posibles.

El razonamiento anterior es válido porque las dimensiones de dicha carga son mucho menores que la longitud de onda, de acuerdo a las hipótesis iniciales, y por lo tanto no hay radiación.

Luego la corriente que contribuye al campo es la

de la superficie exterior y si extendemos la definición del modelo de densidad de corriente superficial \vec{J}_s a la densidad de corriente efectiva sobre la superficie conductora (cuando estamos sobre el conductor) y a la densidad de corriente ficticia sobre la superficie que cubre la región de alimentación (cuando estamos sobre ella), podemos hacer a la ecuación (3.1.2.1) válida siendo ahora S' la superficie externa que cubre todo el elemento conductor.

3.1.3 Modelamiento de la región de alimentación

Veremos que para resolver correctamente (3.1.2.1) necesitamos conocer la forma de \vec{E} en la región de alimentación. Esto, dado un voltaje de alimentación, se obtiene mediante las aproximaciones cuasiestáticas que se han visto en el capítulo I; y como depende de la geometría de dicha región lo más adecuado es resolverlo por elementos finitos o diferencias finitas de ser posible, aunque el efecto de borde hace que el campo eléctrico diverja en sus cercanías. Un intento analítico de obtener el campo eléctrico en la región de alimentación de un elemento cilíndrico circular está en las referencias [42] y [43], pero se resuelve solamente el caso del dipolo infinito alimentado por una línea coaxial.

Como en la práctica el modelamiento de la región de alimentación es muy difícil y necesariamente impreciso, y nosotros no usaremos a fin de cuentas el valor del campo sino para hallar su integral por una función de prueba, consideramos que la **región de alimentación tiene dimensiones menores que la función de prueba que se usa para evaluarla** de modo que si el valor central de la función de prueba es unitario, consideraremos que dicha integral es igual a la integral del campo, es decir, al voltaje de alimentación de la antena.

Esta aproximación no introduce demasiado error, sobre todo si las otras funciones de prueba no pasan por la región de alimentación o tienen valores pequeños, como las funciones triangulares sinusoidales traslapadas que usaremos, como se verá. En la literatura se suele indicar que se considera a la función impulso para modelar el campo eléctrico, y esta efectivamente da el resultado que acabamos de explicar, pero no es la única función que da dicho resultado.

Finalmente, la forma de saber qué modelo de campo eléctrico estamos usando realmente en la región de alimentación es reconstruyéndolo a partir de los resultados obtenidos para la corriente, que es lo que haremos mas adelante.

3.1.4 Ecuación integral bidimensional y casos en que se puede llevar a forma unidimensional

Se tiene un problema de dos coordenadas sobre la superficie, y se debe plantear la ecuación integrodiferencial bidimensional de campo eléctrico (EFIE) que proviene de multiplicar vectorialmente ambos miembros de (3.1.2.1) por el vector unitario normal a la superficie y evaluar en la misma superficie de modo que se anule el primer término.

Seria deseable, **sin** embargo, poder llevar el problema a forma unidimensional. Para eso es necesario que se cumpla una por lo menos de las siguientes dos condiciones:

a) El elemento es delgado (es decir, **su radio es mucho menor que la longitud de onda**) de modo que se pueden realizar una serie de consideraciones que nos llevarán a plantear una ecuación integrodiferencial unidimensional para la **corriente axial total** en cada sección del elemento, a pesar de que esta corriente pueda no ser rotacionalmente simétrica. Se obtendrá la ecuación integrodiferencial en forma "reducida".

b) El elemento puede no ser delgado, pero existe simetría rotacional, para lo cual es necesario que el campo incidente externo sea rotacionalmente simétrico, o

uniforme. Esto ocurre si el elemento está aislado irradiando o lo que es equivalente por **el principio de reciprocidad**, está aislado recibiendo una onda lejana que puede considerarse uniforme, o ambas cosas. Para este caso se considera la corriente rotacionalmente simétrica y veremos que se usa la forma de la ecuación integrodiferencial llamada "exacta".

el elemento no es delgado y tiene otros elementos cercanos, puede ser necesario plantear la EFIE en forma bidimensional, pues dichos elementos pueden generar grandes perturbaciones sobre la distribución de corriente.

3.2. Planteamiento de la ecuación integrodiferencial unidimensional para la corriente axial total de un elemento conductor delgado

Las siguientes formulaciones pueden extenderse, si bien usando planteamientos vectoriales que aparentemente complican un poco la notación, a elementos conductores delgados curvos y de forma arbitraria, como está explicado en [39] y [40]. Sin embargo, nuestro trabajo lo limitaremos a elementos rectos que bastan para nuestros objetivos.

El problema es plantear una ecuación integrodiferencial unidimensional para el elemento mostrado en la figura 1, considerando que su radio es mucho menor que la longitud de onda, usando el mínimo número de aproximaciones.

Usaremos la idea de la referencia [41] (octubre 1992), que es la revisión teórica más reciente que hemos encontrado de un problema que como hemos visto tiene casi cien años de antigüedad.

3.2.1 Definición de la corriente axial total

Debemos recordar en todo momento que debido a que consideramos la posibilidad de tener otros elementos cercanos que generen campos incidentes que no sean rotacionalmente simétricos para el elemento en consideración, no podemos considerar que la corriente es solo axial ni que es rotacionalmente simétrica. Eso nos lleva a definir, de acuerdo al sistema de coordenadas de la figura 1, la corriente axial total en una sección recta como:

$$I_z(z') = \int_0^{2\pi} \vec{J}_z(\vec{r}') \cdot \vec{a}_z \, d\phi'$$

siendo:

$$\vec{r}' = z' \vec{a}_z + a \cos\phi' \vec{a}_x + a \sin\phi' \vec{a}_y$$

3.2.2 Condiciones límites para la corriente axial total en los extremos del elemento.

El valor de dicha corriente total en los extremos del elemento debe ser por continuidad igual a la corriente radial total en los bordes de cada una de las superficies circulares extremas. De acuerdo a la notación de la figura 3.1.2.1 escribiremos:

$$I_z(0, L) = I_\rho(a) = \pm \oint_{\text{bordo}} \vec{J}_s(a, \phi') \cdot a \vec{a}_\rho d\phi'$$

que llevando a una integral en la superficie de las caras extremas será :

$$\pm \int \int_{\text{caras}} \nabla_t \cdot \vec{J}_s(\rho', \phi') ds'$$

y como a es mucho menor que la longitud de onda podemos usar la aproximación cuasiestática (1.1.3.5) que anula la divergencia de \vec{J}_s (esta va a ser prácticamente la única aproximación que vamos a realizar y luego vamos a ver como cuantificarla).

Hacemos que las condiciones en los extremos para la corriente axial total sean:

$$I_z(0) = I_z(L) = 0$$

Otra demostración diferente de lo mismo se encuentra en [41].

3.2.3 Obtención de una ecuación integrodiferencial unidimensional para la corriente axial total

Debemos primero observar con detenimiento la ecuación (3.1.2.1) que da una relación para el campo eléctrico. Obviamente para anularlo tendremos que evaluar dicha ecuación en el interior o en la superficie de S' , pero va a quedar el problema de la presencia del gradiente de la divergencia del potencial vectorial, que involucre tres coordenadas.

Si multiplicamos escalarmente ambos miembros por el vector unitario en z , tendremos aún la derivada en z de la divergencia del potencial vectorial.

Hallemos previamente entonces una expresión para dicha divergencia. Es interesante notar que por la condición de Lorentz:

$$\nabla \cdot \vec{A} = -j \frac{\omega}{c^2} \phi$$

(nótese que \vec{A} no depende solo de I_z):

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iint_{S'} \nabla \cdot \left[\frac{\vec{J}_z(\vec{r}') e^{-j\frac{\omega}{c}R}}{R} \right] ds'$$

lo que equivale a:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iint_{s'} \left[\vec{J}_s(\vec{r}') \cdot \nabla \frac{e^{-j\frac{\omega}{c}R}}{R} \right] ds'$$

o desarrollando el gradiente:

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\mu}{4\pi} \iint_{s'} \vec{J}_s(\vec{r}') \cdot \vec{R} \frac{e^{-j\frac{\omega}{c}R}}{R^3} (1 + jR\frac{\omega}{c}) ds'$$

Por otro lado, de manera análoga se demuestra:

$$\frac{\partial}{\partial z} \vec{A} \cdot \vec{a}_z = -\frac{\mu}{4\pi} \iint_{s'} \vec{J}_s(\vec{r}') \cdot \vec{a}_z (z-z') \frac{e^{-j\frac{\omega}{c}R}}{R^3} (1 + jR\frac{\omega}{c}) ds'$$

Si se desea entonces que la divergencia del potencial vectorial sea igual a la derivada parcial respecto a z de su componente z para tener una ecuación unidimensional en z , debemos asegurar que la diferencia de ambas expresiones evaluada en toda la superficie sea nula. Si denotamos:

$$\begin{aligned} \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' &= (z\vec{a}_z + \vec{\rho}) - (z'\vec{a}_z + \vec{\rho}') \\ &= (z-z')\vec{a}_z + (\vec{\rho} - \vec{\rho}') \end{aligned}$$

tendremos:

$$\nabla \cdot \vec{A} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = -\frac{\mu}{4\pi} \iint_{S'} \vec{J}_s(\vec{r}') \cdot (\vec{\rho} - \vec{\rho}') e^{-j\frac{\omega}{c}R} (1 + jR\frac{\omega}{c}) ds'$$

Para anular esta expresión en la superficie lateral del elemento, ya que en dicha superficie se cumple :

$$\vec{\rho}' \cdot \vec{J}_s(\vec{r}') = 0$$

es suficiente anular $\vec{\rho}$, es decir, tomar los puntos de prueba en el eje del cilindro, en el cual también se anula el campo eléctrico. Eso además nos permitirá tener expresiones únicas para el campo incidente.

Sin embargo, es necesario que la expresión que da la diferencia entre la divergencia del potencial vectorial y la derivada parcial en z de su componente z se anule también en las superficies circulares terminales del elemento. Para ese caso tendremos:

$$\nabla \cdot \vec{A} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \cdot \vec{a}_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{e^{-j\frac{\omega}{c}R}}{R^3} (1 + jR\frac{\omega}{c}) \rho' \left(\int_0^{2\pi} \vec{J}_s(\vec{r}') \cdot \vec{\rho}' d\phi' \right) d\rho'$$

La integral entre paréntesis equivale a la inte-

gral de superficie en un circulo de radio ρ' de la divergencia de la densidad de corriente superficial.

De acuerdo a nuestra única suposición inicial de que dicha divergencia en las caras de los extremos del elemento es nula, queda demostrado que en el eje del elemento la divergencia del potencial vectorial y la derivada parcial en z de su componente z son aproximadamente iguales.

La última expresión también nos da un margen cuantitativo del error que estamos cometiendo y explicará que haya más error en el modelo mientras nos acerquemos más a los extremos del elemento, ya que en una primera aproximación se observa que dicho error es proporcional a la corriente radial total en las caras extremas (la integral entre paréntesis) y al radio de dichas caras, e inversamente proporcional a la distancia a los extremos.

La ecuación (1.2.1) queda:

$$j\omega\epsilon\vec{E} - j\omega\epsilon\vec{E}_1 = \left[\nabla \frac{\partial}{\partial z} \vec{a}_z \cdot + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \iint_{s'} \frac{\vec{J}_s(\vec{r}') e^{-j\frac{\omega}{c}R}}{4\pi R} ds'$$

y ahora multiplicando escalarmente por el vector unitario en la dirección de z :

$$j\omega\epsilon E_z - j\omega\epsilon E_{1z} = \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \iint_{S'} \frac{J_{sz}(\vec{r}') e^{-j\frac{\omega}{c}R}}{4\pi R} dS'$$

La integral es no nula solo en la superficie lateral elemento.

Colocando los límites de integración y reemplazando:

$$\vec{r} = z\vec{a}_z$$

tendremos:

$$j\omega\epsilon E_z - j\omega\epsilon E_{1z} = \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{J_{sz}(\vec{r}') e^{-j\frac{\omega}{c}R}}{4\pi R} d\phi' dz'$$

donde

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = |z\vec{a}_z - (z'\vec{a}_z + \rho'\vec{a}_\rho)| \\ = \sqrt{(z - z')^2 + \rho'^2}$$

por lo que podemos escribir:

$$j\omega\epsilon E_z - j\omega\epsilon E_{1z} = \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \int_0^L \frac{e^{-j\frac{\omega}{c}R}}{4\pi R} \int_0^{2\pi} J_{az}(z', \phi') d\phi' dz'$$

donde identificando la definición de corriente axial total tenemos la ecuación integrodiferencial de la forma conocida como "reducida"; que se suele escribir:

$$4\pi j\omega\epsilon E_z - 4\pi j\omega\epsilon E_{1z} = \int_0^L \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \left[\frac{e^{-j\frac{\omega}{c}R_a}}{R_a} \right] I(z') dz' \quad (3.2.3.1)$$

donde se identifica el "kernel reducido":

$$K_a(z, z') = \frac{e^{-j\frac{\omega}{c}R_a}}{R_a}$$

y:

$$R_a = \sqrt{(z-z')^2 + a^2}$$

3.2.4 Caso del elemento cilíndrico hueco

bien la ecuación integrodiferencial se ha deducido para un cilindro delgado sólido, todas las

consideraciones anteriores son también válidas para un cilindro hueco, ya que el interior del mismo no es más que una guía de onda circular muy estrecha.

El modo dominante de la guía de onda circular es $TE_{1,1}$ con longitud de onda de corte de 3.412 a (ref. [44] pag. 42-31), es decir, mucho menor que la longitud de onda usada.

Por esto; la teoría de guías de onda basta para demostrar que los campos al interior del elemento son prácticamente nulos, comportándose este como un conductor sólido.

En cierto modo el elemento delgado hueco es incluso más cercano al modelo usado.

La única aproximación que hemos usado, es decir, que la divergencia de la corriente superficial en las caras extremas es nula, se cumple más exactamente ya que no hay corriente superficial sobre los extremos.

Por esta razón colocar las funciones de prueba en el eje del cilindro es perfectamente válido ya que los campos al interior son prácticamente nulos, no importando si el elemento está alimentado o no, excepto tal vez en las cercanías de sus extremos abiertos.

3.3. Planteamiento de la ecuación integrodiferencial para el segmento cilíndrico recto con simetría azimutal

Cuando el campo incidente sobre el elemento se puede considerar hasta cierto punto uniforme o rotacionalmente simétrico, lo que ocurre cuando el elemento no tiene otros objetos conductores, puede asumir el problema en una única coordenada z , de forma semejante a la que se analiza un cuerpo de revolución.

se hacen las mismas consideraciones que en 3.2.2 se puede despreciar la corriente en los extremos, y en la ecuación (3.1.2.1) podemos considerar la densidad de corriente superficial solo en la dirección de z . Esto hace que la divergencia del potencial vectorial sea igual a la componente en z (única) de su derivada parcial en z . multiplicamos ambos miembros escalarmente por el vector unitario en z y colocamos los límites tendremos:

$$j\omega\epsilon E_z - j\omega\epsilon E_{iz}$$

$$= \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{J_{sz}(z') e^{-j\frac{\omega}{c}R}}{4\pi R} a d\phi' dz'$$

y luego de extraer la densidad de corriente superficial de la integral y reemplazar la corriente axial total:

$$4\pi j\omega\epsilon E_z - 4\pi j\omega\epsilon E_{1z}$$

$$= \int_0^L \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-j\frac{\omega}{c}R}}{R} d\phi' \right] I(z') dz' \quad (3.3.1)$$

Si evaluamos esta ecuación en el eje del elemento tenemos el modelo anterior. Si el elemento es sólido esto es válido siempre, pero las caras extremas darán un error grande si el elemento no es delgado. Si el elemento es hueco, se evita el error de las caras extremas, pero si el elemento no es delgado ya no se va a poder modelar el interior del elemento como el de una guía de onda estrecha.

Por eso es preferible, dada la simetría que se ha supuesto, evaluar el campo en la misma superficie del elemento, obteniendo mayor exactitud si es que el campo incidente es cercanamente uniforme o simétrico.

Se tendrá:

$$4\pi j\omega\epsilon E_z - 4\pi j\omega\epsilon E_{1z}$$

$$= \int_0^L \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-j\frac{\omega}{c}R}}{R} d\phi' \right] I(z') dz' \quad (3.3.2)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 R &= |\vec{r} - \vec{r}'| = |(z\vec{a}_z + a\vec{a}_\rho) - (z'\vec{a}_z + a\vec{a}'_\rho)| \\
 &= \sqrt{(z-z')^2 + a^2(2-2\cos(\phi-\phi'))} \\
 &= \sqrt{(z-z')^2 + 4a^2 \sin^2\left(\frac{\phi-\phi'}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

Mediante manipulaciones de la integral, o mediante la simple consideración de la simetría del problema, puede eliminarse ϕ de la expresión para R , teniéndose entonces:

$$\begin{aligned}
 R &= \sqrt{(z-z')^2 + a^2(2-2\cos(\phi'))} \\
 &= \sqrt{(z-z')^2 + 4a^2 \sin^2\left(\frac{\phi'}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

La ecuación es similar a la "reducida" con la diferencia de que tenemos ahora el kernel "exacto":

$$K(z, z') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-j\frac{\omega}{c}R}}{R}$$

Esta forma ha recibido el nombre de "exacta"; aunque lo es solo para casos simétricos.

En el siguiente apartado analizaremos el caso del kernel "exacto".

3.3.1 Evaluación numérica del kernel "exacto" y separación de la singularidad logarítmica

Se observa que el kernel "exacto", que es una función de $z-z'$, da un resultado divergente cuando z' se acerca a z , por lo que en su forma original es poco apropiado para métodos computacionales.

Un método de uso común es separarlo en dos partes, una que no diverge cuando z' se acerca a z y es por lo tanto fácil de calcular numéricamente, y otra que puede expresarse analíticamente en función de $z-z'$. A este método se le llama separación de la singularidad logarítmica y consiste en escribir:

$$K(z, z') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{R} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[1 - e^{-j\frac{\omega}{c}R}] d\phi'}{R}$$

la segunda integral es numéricamente fácil de evaluar, y la primera; haciendo la sustitución:

$$\beta = \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + (z-z')^2}}$$

$$\beta' = \sqrt{1-\beta^2} = \frac{|z-z'|}{\sqrt{4a^2 + (z-z')^2}}$$

se puede expresar en la forma de integral elíptica.

En concreto se tiene una integral elíptica com-

pleta de primer orden:

$$\frac{\beta}{\pi a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi'}{\sqrt{1-\beta^2 \cos^2 \phi'}}$$

$$= \frac{\beta}{\pi a} F\left(\frac{\pi}{2}, \beta\right)$$

siendo F la notación de la integral elíptica de primer orden, en este caso completa por tener argumento $\pi/2$.

Sobre el tema de integrales elípticas, la referencia [47] es de consulta rápida (pero usa la notación $K(k)$ para la integral elíptica completa de primer orden de módulo k). Allí encontramos expansiones para esta función y sus derivadas, que pueden ser de utilidad. La fórmula 900.5 de este libro es usada en [46] para desarrollar la integral que nos interesa como:

$$\frac{\beta}{\pi a} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{m} (\ln\left(\frac{4}{\beta'}\right) - b_m) \beta^{2m}$$

donde:

$$b_0 = 0$$

$$b_m = b_{m-1} + \frac{2}{2m(2m-1)}$$

Finalmente, desarrollando el primer término de la sumatoria (que es donde se encuentra la singularidad

logarítmica para separarla), podemos plantear una expansión de $K(z, z')$:

$$\begin{aligned}
 K(z, z') = & -\frac{1}{\pi a} \ln|z-z'| \\
 & - \frac{1}{\pi a} \ln|z-z'| \sum_{m=1}^{\infty} \binom{1/2}{m} (-1)^m \beta'^{2m} \\
 & + \frac{\beta}{\pi a} (\ln 8a - \ln \beta) \\
 & + \frac{\beta}{\pi a} \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-1/2}{m}^2 \left[\ln\left(\frac{4}{\beta'}\right) - b_m \right] \beta^{2m} \\
 & - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[1 - e^{-jkR}]}{R} d\psi'
 \end{aligned}$$

Esta expresión es similar a la obtenida en [46] pero en dicha referencia hay un error en el segundo término de la ecuación (7), que debe corregirse de la forma que se indica arriba.

Si bien la expresión anterior es adecuada para el cálculo y separa el único término que diverge cuando z se acerca a z' (el primer término logarítmico) para tratarlo analíticamente y no tener problemas computacionales, otra forma usual y simple es usar esta expresión solamente cuando $z-z'$ es mucho menor que a y en los demás casos tratar el problema solo numéricamente. Cuando se cumple dicha condición, el único término importante real de la serie es el logarítmico y como jkR es pequeño la integral del desarrollo del kernel se aproxima a jk ,

teniéndose:

$$K(z, z') = \begin{cases} \frac{1}{\pi a} \ln \left(\frac{8a}{|z-z'|} \right) + jkR \dots \dots |z-z'|ka \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} d\phi' \dots \dots \dots \text{sino} \end{cases}$$

Esta ultima opción es usada en [39].

3.4. Comparación entre las versiones "exacta" y "reducida"

Debe entenderse que para una elección entre ambas formas debe evaluarse que tan gruesos pueden ser los elementos y que tanta distorsión puede haber de la simetría. No puede decirse que ninguno de los planteamientos es superior al otro, pero (ver [41]) independientemente del tiempo de computación **que requiera** cada una, la versión "reducida" es preferible para arreglos generales de elementos delgados mientras que para elementos gruesos y regularmente aislados lo es la versión "exacta".

Obviamente para elementos delgados y aislados los resultados deben ser iguales, como se muestra en [45]. Esto y el hecho de ser mas apropiada para elementos delgados ha hecho que se considere a la versión "reducida"

da" como una aproximación de la "exacta" (como en [46]), cuando en realidad parten de bases y supuestos diferentes.

3.5 Ecuación integro-diferencial de Pocklington y ecuación integral de Hallen

3.5.1 Ecuación de Pocklington

Las ecuaciones integro-diferenciales anteriores pueden expresarse en la forma:

$$E_s(z) - E_{1s}(z) = \int_0^L \left[\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \frac{G(z-z')}{4\pi j \omega \epsilon} I(z') dz' \quad (3.5.1.1)$$

donde $G(z-z')$ puede representar cualquiera de los dos kernel vistos (a G se la conoce también como la función de Green del problema a resolver).

Se dice entonces que se ha planteado la Ecuación de Pocklington para el kernel de que se trate.

Hecha la elección de las funciones de base, de prueba, la expresión para los elementos de la matriz del método de momentos será la dada por (2.2.1.1), adaptada a

la notación que hemos usado ahora:

$$\begin{aligned}
 V_i &= \int_0^L g_1(z) E_x(z) dz \\
 &+ \int_0^L g_1(z) (-E_{1z}(z)) dz \\
 z_{1j} &= \int_0^L g_1(z) \left[\int_0^L \left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \frac{G(z, z')}{4\pi j \omega \epsilon} f_j(z') dz' \right] dz \quad (3.5.1.2)
 \end{aligned}$$

3.5.2 Ecuación de Hallen

En las ecuaciones integrodiferenciales anteriores podemos extraer el operador diferencial:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}$$

de modo que se tenga una ecuación diferencial ordinaria para el resto de la expresión integral:

$$E_x(z) - E_{1x}(z) = \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \int_0^L \frac{G(z-z')}{4\pi j \omega \epsilon} I(z') dz'$$

donde $G(z-z')$ puede representar cualquiera de los dos kernel vistos.

La resolución de la ecuación diferencial en z se encuentra en [5], pero solo para un campo incidente en forma de impulso. En realidad, es más fácil de obtener

recurriendo simplemente a alguna tabla o texto sobre solución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Nosotros solo vamos a colocar el resultado, pero en la forma mas general que se encuentra en [46]:

$$\begin{aligned}
 & C_1 \cos\left(\frac{\omega z}{c}\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega z}{c}\right) \\
 & + \frac{c}{\omega} \int_0^L [E_2(\zeta) - E_{12}(\zeta)] \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{c}(z-\zeta)\right) d\zeta \\
 & = \int_0^L \frac{G(z-z')}{4\pi j \omega \epsilon} I(z') dz'
 \end{aligned}$$

Se dice entonces que se ha planteado la Ecuación de Hallen para el kernel de que se trate.

Las constantes C_1 y C_2 son parte inherente de la solución de la ecuación diferencial ordinaria y por lo tanto son también parte de la ecuación integral que resulta.

Luego, son dos incógnitas más en el sistema de ecuaciones lineales y se requieren $n+2$ funciones de prueba.

Esto obliga a que el sistema ya no sea simétrico y es por eso que preferiremos plantear la ecuación de Pocklington.

3.6 Interpretación de la ecuación de Pocklington para los kernel "reducido" y "exacto" en base a filamentos de corriente

Es clave para el siguiente desarrollo entender que los planteamientos "reducido" y "exacto" de la ecuación integrodiferencial de Pocklington pueden expresarse en base a filamentos de corriente, lo que no es sino formalmente expresar que las **funciones de base y prueba** que tomaremos tienen una sola dimensión, como deseamos.

3.6.1 Planteamiento de la versión "reducida" en forma de filamentos de corriente

Es fácilmente observable que (3.2.3.1), como se indica en [1], equivale a considerar a toda la corriente concentrada en un filamento sobre una de las generatrices del cilindro, sobre el cual se van a colocar las funciones de base.

El campo es entonces evaluado sobre otro filamento que es el eje del cilindro, sobre el cual se van a colocar las funciones de prueba.

Esto está graficado en la figura 3.6.1.1

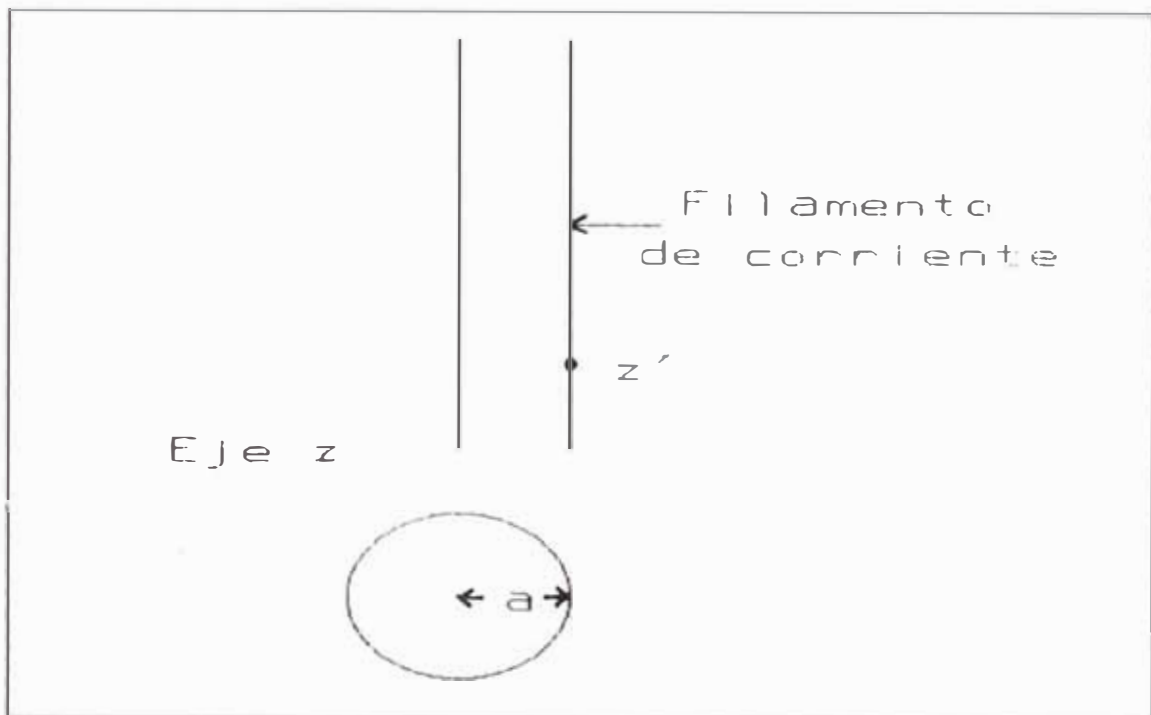


Fig. 3.6 1.1.- Conductor reemplazado por un filamento de corriente a distancia "a" del eje

3.6.2 Planteamiento de la versión "exacta" en forma de filamentos de corriente

En la ecuación (3.3.2) podemos cambiar el orden de integración del siguiente modo:

$$4\pi j\omega\epsilon E_z - 4\pi j\omega\epsilon E_{1z}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \frac{e^{-j\frac{\omega}{c}R}}{R} I(z') dz' d\phi' \quad (3.6.2.1)$$

Luego, si elegimos una generatriz determinada del cilindro para evaluar el campo, tendremos que esto corresponde a considerar la corriente distribuida uniformemente en todas las generatrices del cilindro y el campo evaluado en una de estas directrices. Esto se puede

ilustrar gráficamente, como se indica en la figura 3.6.2.1.

El campo evaluado en la generatriz donde se colocarán las funciones de prueba será el valor medio del campo generado por todas las generatrices de la superficie.

Al discretizar la superficie en un número finito de filamentos para evaluar numéricamente dicho valor medio, este se convertirá en un simple promedio.

Lo que se tendrá entonces será que las impedancias mutuas o términos de la matriz del método de momentos no serán mas que el promedio de los que se obtendrían

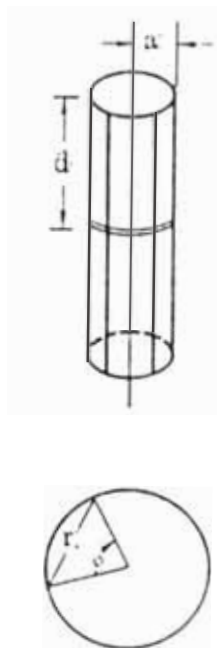


Fig. 3.6.2.1.- Filamentos de corriente en la versión "exacta" de la ecuación de Pocklington

al considerar la directriz de evaluación de campo y la corriente concentrada en cada directriz o filamento de corriente en que se discretizó la superficie, de acuerdo a la figura 1.6.2.1.

Esto no es entonces otra cosa que plantear el método de momentos en dos dimensiones y aprovechar luego la simetría para reducir el planteamiento a una dimensión.

3.7. Aplicación de la teoría diakóptica de antenas para la selección de funciones de base y de prueba adecuadas a nuestro problema

3.7.1 Planteamiento del método de momentos desde el punto de vista de la teoría diakóptica de antenas y análisis de la convergencia

El único punto de partida que tenemos para una selección físicamente significativa de funciones de base y de prueba sobre nuestros filamentos de corriente de la sección anterior es la teoría diakóptica de antenas (referencia [31], [32]) que esbozamos en 1.2.6.

Esta teoría sostiene que se pueden obtener solu-

ciones adecuadas al problema de la obtención de la distribución de corrientes sobre un sistema radiante mediante la subdivisión del mismo en subsecciones mas pequeñas.

De acuerdo a esta teoría, dichas soluciones serán rápidamente convergentes, es decir, no se necesitarán muchas subsecciones para una solución adecuada, y esto es justamente lo que deseamos para obtener una solución eficiente y rápida.

La forma de la distribución de corriente de cada par de subsecciones contiguas (a lo que llamaremos subelemento) es determinada bajo condiciones de circuito abierto (con todas las otras subsecciones retiradas) y aplicando una excitación en forma de impulso entre las mismas.

Luego, con esta suposición de la forma de la distribución de corriente se determina la impedancia propia de cada subelemento (par de subsecciones) y las impedancias mutuas (acoplamiento) entre cada dos subelementos, de modo que se tendrá una matriz de impedancias que finalmente se resolverá para las excitaciones reales.

Esta matriz será obviamente simétrica, lo que reducirá a la mitad el tiempo del llenado de la misma, la cantidad de almacenamiento requerida, y el tiempo de

solución del sistema resultante, ventaja que es muy deseable para nosotros.

Se notará que este planteamiento es similar a aplicar el método de momentos a la ecuación de Pocklington, separando el elemento en subsecciones y aplicando funciones de base y de prueba que son pulsos que involucran cada dos subsecciones contiguas (subelemento).

La condición que añade esta teoría es que dichas funciones de base y prueba deben ser iguales a la distribución de corriente que tendría cada subelemento (par de subsecciones contiguas) aislado.

Esto significa que teóricamente hay que variar las funciones conforme se aumenta el número de subelementos, a menos que se trate de hacer subseccionamientos que mantengan la forma de los subelementos dentro de ciertos límites.

Esta idea es muy importante, y nos explica por qué las diferentes funciones de base del tipo de pulsos que se pueden aplicar en el método de momentos aparecen con un **límite de convergencia** a **partir** del cual las soluciones calculadas de la distribución de corriente comienzan a diverger.

Lo que ocurre es que cada subelemento ya no

corresponde a la función de base que se ha tomado inicialmente.

3.7.2 Obtención de las funciones de base y prueba e impedancias mutuas para filamentos de corriente

Visto lo anterior, consideremos entonces de acuerdo a la teoría diakóptica un subelemento centrado en el eje z , formado por dos subsecciones iguales de longitud d_1 y radio a , delgadas de modo de poder usar el kernel reducido, y apliquemos una excitación en forma de impulso de voltaje entre ambas subsecciones.

Este impulso representa todos los campos incidentes que llegan a dicho subelemento.

La solución de este problema en forma iterativa es conocida y está bien detallada en [1] y en [48].

Como deseamos una función sencilla, tomaremos la aproximación de orden cero, que tomamos de [1] o de [48], fórmula (4.56):

$$I(z) = \frac{jV}{60Q'} \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega}{c}(d_1 - |z|)\right)}{\cos\left(\frac{\omega}{c}d_1\right)}$$

Donde d_1 es la semilongitud del elemento, V el voltaje de alimentación y:

$$Q' = 2 \ln \left(\frac{2d_1}{a} \right)$$

Esta solución es semejante a la que se obtiene en [5].

En [1] sección 9-6 se explica que la serie converge (lo que es necesario para que esta aproximación de orden cero sea correcta) cuando la relación longitud total/diámetro es grande.

Se propone arbitrariamente un orden mínimo de 60.

Normalizando dicha distribución de corriente tendremos nuestra función de base para el subelemento centrado en $z=0$:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\text{sen} \left(\frac{\omega}{c} (d_1 - |z|) \right)}{\text{sen} \left(\frac{\omega}{c} d_1 \right)} \dots\dots\dots |z| < d_1 \\ 0 \dots\dots\dots \text{si } 0 \end{cases} \quad (3.7.2.1)$$

El campo eléctrico generado por la distribución

de corriente de un subfilamento de corriente como el visto anteriormente es:

$$E_x(\vec{r}) = \int_{-d}^d \left[\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \frac{G(R)}{4\pi j \omega \epsilon} f(z') dz' \quad (3.7.2.2)$$

Siendo:

$$G(R) = \frac{e^{-j\frac{\omega}{c}R}}{R}$$

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$$

En [5] (ver) se deduce que:

$$E_x(\vec{r}) = -j \frac{Z_0}{4\pi \text{sen}(kd_1)} \left[\frac{e^{-jk\sqrt{\rho^2 + (z+d_1)^2}}}{\sqrt{\rho^2 + (z+d_1)^2}} + \frac{e^{-jk\sqrt{\rho^2 + (z-d_1)^2}}}{\sqrt{\rho^2 + (z-d_1)^2}} - 2\cos(kd_1) \frac{e^{-jk\sqrt{\rho^2 + z^2}}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right]$$

Donde:

$$Z_0 = \frac{1}{\epsilon}, \quad k = \frac{\omega}{c}$$

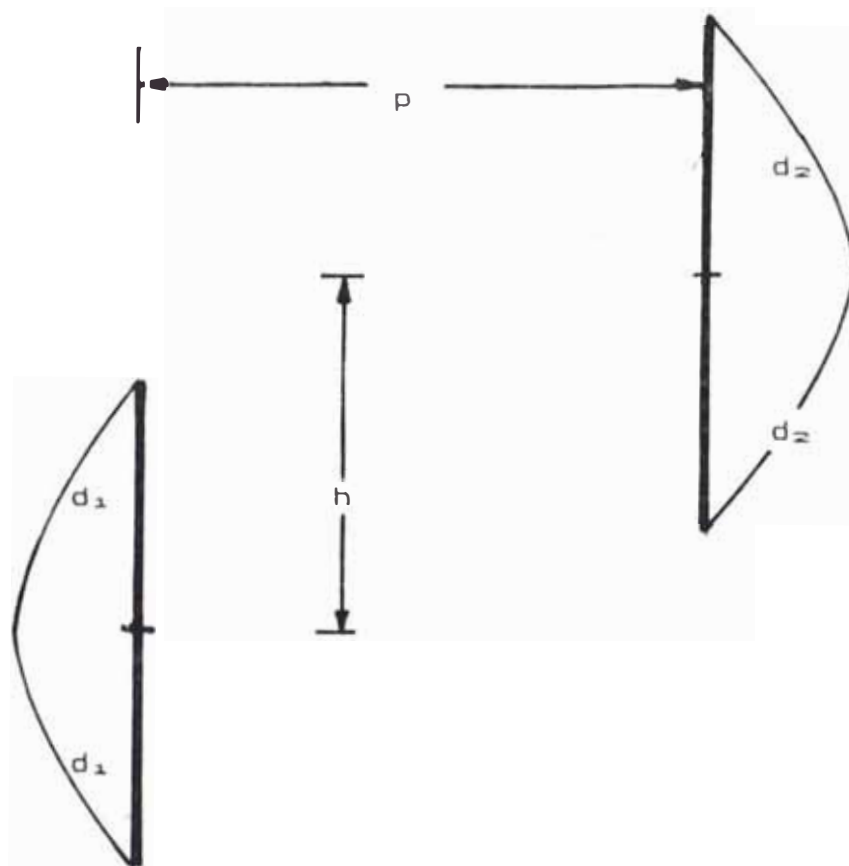


Fig 3.7.2.1.- Impedancia mutua entre dos filamentos de corriente

Consideremos ahora que la función de prueba esta ubicada en un subelemento de semilongitud d_2 .

Este subelemento es paralelo al anterior y

ubicado en $z=h$ y, $p = p$ de acuerdo a la figura 3.7.2.1

La función de prueba será entonces de acuerdo a la teoría diakóptica de la misma forma que la función de base.

Nosotros tomaremos el opuesto como en [45] y [49], para que nuestro elemento de la matriz coincida con la definición de impedancia mutua vista en [5].

$$g(z) = \begin{cases} -\frac{\text{sen}(k(d_2 - |z-h|))}{\text{sen}(kd_2)} \dots\dots\dots |z-h| < d_2 \\ 0 \dots\dots\dots \text{sino} \end{cases} \tag{3.7.2.3}$$

Y el elemento de la matriz del método de momentos correspondiente a f y g será el producto interno de esta función con el valor del campo eléctrico generado por f :

$$\begin{aligned} Z_{fg} &= \int_{-d_2}^{d_2} E_z(p, z) g(z) dz \\ &= j \frac{Z_0}{4\pi \text{sen}(kd_1) \text{sen}(kd_2)} \int_{h-d_2}^{h+d_2} \left[\frac{e^{-jk\sqrt{p^2+(z+d_1)^2}}}{\sqrt{p^2+(z+d_1)^2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-jk\sqrt{p^2+(z-d_1)^2}}}{\sqrt{p^2+(z-d_1)^2}} - 2\cos(kd_1) \frac{e^{-jk\sqrt{p^2+z^2}}}{\sqrt{p^2+z^2}} \right] \text{sen}(k(d_2 - |z-h|)) dz \end{aligned}$$

La integral anterior se puede evaluar numéricamente; pero como hemos visto en el capítulo II es preferible expresarla con funciones que tienen desarrollos en serie conocidos.

Utilizaremos las siguientes funciones seno, coseno y exponencial integrales; cuyas tablas se encuentran en [1] primera edición o en general en muchas fuentes.

Expresaremos esta impedancia mutua utilizando la función exponencial integral E_i .

$$\begin{aligned}
 S_1(u) &= \int_0^u \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} d\theta \\
 &= u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots \\
 C_1(u) &= \int_0^u \frac{\operatorname{cos}\theta}{\theta} d\theta \\
 &= -\ln(\gamma u) - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots \quad (\ln\gamma \approx 0.5772156) \\
 E_1(ju) &= C_1(u) + jS_1(u) \\
 E_1(ju_2) - E_1(ju_1) &= \int_{u_1}^{u_2} \frac{e^{j\theta}}{\theta} d\theta
 \end{aligned}$$

(3.7.2.4)

Para la transformación respectiva; utilizamos la siguiente integral aparece en la evaluación de la impe-

dancia mutua:

$$\int_h^{h+d_2} \frac{e^{-jk(\sqrt{p^2+z^2}+z)}{\sqrt{p^2+z^2}} dz$$

$$= E_1(-ju) \left| \begin{array}{l} k(\sqrt{(h+d_2)^2+p^2}+h+d_2) \\ k(\sqrt{h^2+p^2}+h) \end{array} \right.$$

Donde se ha utilizado la sustitución:

$$z = kp \exp\left(\sinh^{-1}\left(\frac{h}{p}\right)\right)$$

Y cambiando z por $-z$ y haciendo algunas operaciones tendremos:

$$\int_h^{h+d_2} \frac{e^{-jk(\sqrt{p^2+z^2}-z)}{\sqrt{p^2+z^2}} dz$$

$$= E_1(-ju) \left| \begin{array}{l} k(\sqrt{h^2+p^2}-h) \\ k(\sqrt{(h+d_2)^2+p^2}-(h+d_2)) \end{array} \right.$$

Mediante la sustitución de z por $(z \pm d_1)$ llegamos a las siguientes relaciones:

$$\int_h^{h+d_2} \frac{e^{-jk(\sqrt{p^2+(z\pm d_1)^2}+z)}{\sqrt{p^2+(z\pm d_1)^2}} dz$$

$$= e^{jk(\pm d_1)} E_1(-ju) \left| \begin{array}{l} k(\sqrt{(h\pm d_1+d_2)^2+p^2}+h\pm d_1+d_2) \\ k(\sqrt{(h\pm d_1)^2+p^2}+h\pm d_1) \end{array} \right.$$

$$\int_h^{h+d_2} \frac{e^{-jk(\sqrt{p^2+(z+d_1)^2}-z)}}{\sqrt{p^2+(z+d_1)^2}} dz$$

$$= e^{-jk(h+d_1)} E_1(-ju) \left[\begin{array}{l} k(\sqrt{(h+d_1)^2+p^2} - (h+d_1)) \\ k(\sqrt{(h+d_1+d_2)^2+p^2} - (h+d_1+d_2)) \end{array} \right]$$

El símbolo \int indica que la expresión se evalúa entre los límites superior e inferior que se indican.

Con estas consideraciones, se desarrolla la expresión integral para la impedancia mutua.

Primero se desdobra el valor absoluto que aparece en la función de prueba en dos partes (separando la integral como la suma de dos integrales).

Luego se desdobra cada seno como dos funciones exponenciales complejas.

Se tendrán 12 integrales que coinciden justamente con los casos vistos arriba, de modo que cada una se expresará como una exponencial integral.

Luego de efectuarse lo indicado, se obtiene la expresión general para las impedancias de interacción de los subelementos; que serán los elementos de la matriz de

impedancias del programa:

$$\begin{aligned}
 Z(d_1, d_2, p, h) = & \frac{15}{\operatorname{sen}(kd_1) \operatorname{sen}(kd_2)} \cdot \\
 & \cdot \left[e^{jk(d_2-h)} (e^{jkd_1} I_1 + e^{-jkd_1} I_3 - 2\cos(kd_1) I_5) \right. \\
 & - e^{-jk(d_2-h)} (e^{jkd_1} I_4 + e^{-jkd_1} I_2 - 2\cos(kd_1) I_6) \\
 & + e^{jk(d_2+h)} (e^{jkd_1} I_9 + e^{-jkd_1} I_7 - 2\cos(kd_1) I_{11}) \\
 & \left. - e^{-jk(d_2+h)} (e^{jkd_1} I_8 + e^{-jkd_1} I_{10} - 2\cos(kd_1) I_{12}) \right]
 \end{aligned}$$

(3.7.2.5)

Donde:

$$I_1 = E_1(-ju) \left[\begin{array}{l} k (\sqrt{(h-d_1-d_2)^2 + p^2} - (h-d_1-d_2)) \\ k (\sqrt{(h-d_1)^2 + p^2} - (h-d_1)) \end{array} \right]$$

$$I_2 = E_1(-ju) \left[\begin{array}{l} k (\sqrt{(h-d_1)^2 + p^2} + (h-d_1)) \\ k (\sqrt{(h-d_1-d_2)^2 + p^2} + (h-d_1-d_2)) \end{array} \right]$$

$$I_3 = E_1(-ju) \left[\begin{array}{l} k (\sqrt{(h+d_1-d_2)^2 + p^2} - (h+d_1-d_2)) \\ k (\sqrt{(h+d_1)^2 + p^2} - (h+d_1)) \end{array} \right]$$

$$I_4 = E_1(-ju) \left\{ \begin{array}{l} k (\sqrt{(h+d_1)^2+p^2} + (h+d_1)) \\ k (\sqrt{(h+d_1-d_2)^2+p^2} + (h+d_1-d_2)) \end{array} \right.$$

$$I_5 = E_1(-ju) \left\{ \begin{array}{l} k (\sqrt{(h-d_2)^2+p^2} - (h-d_2)) \\ k (\sqrt{h^2+p^2} - h) \end{array} \right.$$

$$I_6 = E_1(-ju) \left\{ \begin{array}{l} k (\sqrt{h^2+p^2} + h) \\ k (\sqrt{(h-d_2)^2+p^2} + (h-d_2)) \end{array} \right.$$

$$I_7 = E_1(-ju) \left\{ \begin{array}{l} k (\sqrt{(h-d_1+d_2)^2+p^2} + (h-d_1+d_2)) \\ k (\sqrt{(h-d_1)^2+p^2} + (h-d_1)) \end{array} \right.$$

$$I_8 = E_1(-ju) \left\{ \begin{array}{l} k (\sqrt{(h-d_1)^2+p^2} - (h-d_1)) \\ k (\sqrt{(h-d_1+d_2)^2+p^2} - (h-d_1+d_2)) \end{array} \right.$$

$$I_9 = E_1(-ju) \left\{ \begin{array}{l} k (\sqrt{(h+d_1+d_2)^2+p^2} + (h+d_1+d_2)) \\ k (\sqrt{(h+d_1)^2+p^2} + (h+d_1)) \end{array} \right.$$

$$I_{10} = E_1(-ju) \left\{ \begin{array}{l} k (\sqrt{(h+d_1)^2+p^2} - (h+d_1)) \\ k (\sqrt{(h+d_1+d_2)^2+p^2} - (h+d_1+d_2)) \end{array} \right.$$

$$I_{11} = E_1(-ju) \left\{ \begin{array}{l} k(\sqrt{(h+d_2)^2+p^2}+(h+d_2)) \\ k(\sqrt{h^2+p^2}+h) \end{array} \right.$$

$$I_{12} = E_1(-ju) \left\{ \begin{array}{l} k(\sqrt{h^2+p^2}-h) \\ k(\sqrt{(h+d_2)^2+p^2}-(h+d_2)) \end{array} \right.$$

Debe notarse que no se considera un límite superior para la longitud del subelemento.

La fórmula anterior no es sino el caso general de todas las fórmulas de impedancias mutuas (y propias, haciendo $d_1=d_2=L/2$ y $p \rightarrow 0$) que aparecen en el capítulo 10 de la referencia [1].

3.8 Planteamiento matricial del método de momentos para la ecuación de Pocklington para un elemento (dipolo) conductor cilíndrico recto

En lo siguiente para mantener la generalidad mencionamos que el análisis de hace para un "elemento" cilíndrico recto. Este término incluye a los dipolos o monopolos cilíndricos y en general a cualquier elemento cilíndrico activo o pasivo que pueda formar parte de una antena.

3.8.1 Forma "reducida"

De acuerdo a la figura 6, subdividimos los filamentos de la superficie y del eje en $n+1$ subsecciones de longitud d de modo de tener n subelementos donde se asumirán funciones de distribución de corriente de base y prueba respectivamente de acuerdo a lo visto en la sec-

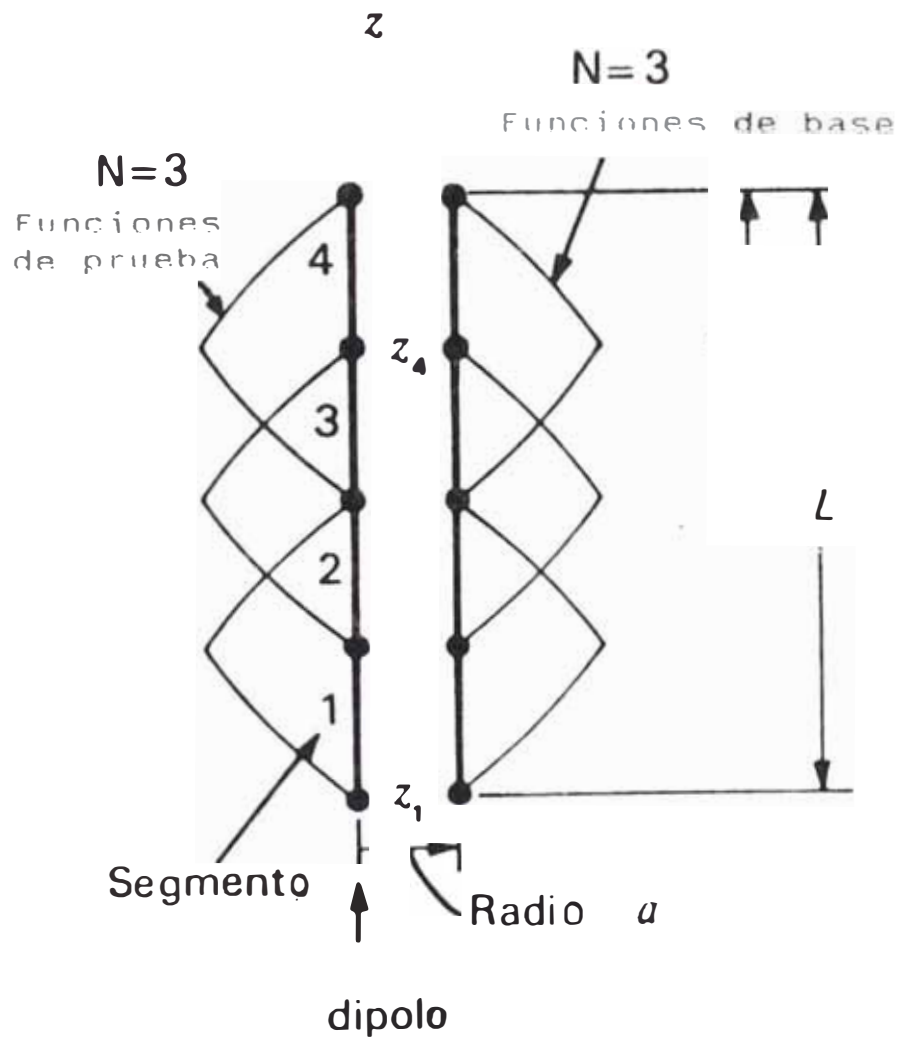


Fig. 3.8.1.1.- Filamentos de corriente equivalente de un elemento cilíndrico dividido en tres subelementos (4 subsecciones)

ción 3.7, ecuaciones (3.7.2.1) y (3.7.2.3). Esto está graficado en la figura 6.

Si tomamos la ecuación (3.5.1.2) con $G=Ka$, y reemplazamos (3.7.2.1) y (3.7.2.3) en dicha ecuación cuidando de respetar las coordenadas relativas, podemos volver a verificar que los elementos de la matriz son las impedancias mutuas de la ecuación (3.7.2.5). Luego de reemplazar las definiciones de las funciones de base y de prueba de las ecuaciones (3.7.2.1) y (3.7.2.3) teniendo en consideración que de acuerdo a la figura 3.8.1.1:

$$d_1=d_2=d=\frac{L}{n+1}$$

$$h=|i-j|d$$

$$p=a$$

tendremos:

$$Z_{ij}=Z(d, d, a, |i-j|d)$$

$$V_i = \int_{(i-1)d}^{(i+1)d} [E_s(z)] \left[-\frac{\text{sen}(k(d-|z-id|))}{\text{sen}(kd)} \right] dz$$

$$+ \int_{(i-1)d}^{(i+1)d} [-E_{1s}(z)] \left[-\frac{\text{sen}(k(d-|z-id|))}{\text{sen}(kd)} \right] dz$$

En adelante, para simplificar el modelo consideraremos que como ocurre en la práctica usual los elementos están alimentados en el centro. Como a lo largo de este análisis hemos considerado desconocida la forma del

campo de alimentación, ahora debemos analizar mediante qué restricciones puede esta forma dejar de tener importancia. Encontramos que podemos considerar que si el número de subelementos n es impar habrá uno centrado en la región de alimentación, y que si la longitud de la región de alimentación es mucho menor que la longitud de las subsecciones $2d$ podemos decir que E_z influye solo en el centro del subelemento central, donde la función de prueba vale uno. Luego vamos a escribir:

$$z_{ij} = Z(d, d, a, |i-j|d)$$

$$V_i = V \delta(i, \frac{n+1}{2}) - \int_{(i-1)d}^{(i+1)d} E_{1z}(z) \left[-\frac{\text{sen}(k(d-z-1d))}{\text{sen}(kd)} \right] dz$$

Donde V es el voltaje de alimentación del elemento y:

$$\delta(r, s) = \begin{cases} 1 & \dots \dots \dots r=s \\ 0 & \dots \dots \dots r \neq s \end{cases}$$

3.8.2 Forma "exacta"

Análogamente al caso anterior, considerar el kernel "exacto" en (3.5.1.2) y reemplazar (3.7.2.1) y (3.7.2.3) (respetando las coordenadas relativas) nos lleva a la siguiente ecuación para la matriz de impedan-

cias y el vector de voltajes:

$$\begin{aligned}
 V_i &= V_0 \left(i, \frac{n+1}{2} \right) - \int_{(i-1)d}^{(i+1)d} E_{1z}(z) \left[-\frac{\text{sen}(k(d-z-id))}{\text{sen}(kd)} \right] dz \\
 Z_{ij} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^L g_i(z) \left[\int_0^L \left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \frac{e^{-jkz}}{4\pi j\omega\epsilon R} f_j(z') dz' \right] dz \right] d\phi' \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z(d, d, 2a \text{sen}(\frac{\phi'}{2}), |i-j|d) d\phi' \quad (3.8.2.1)
 \end{aligned}$$

donde debe notarse que no hemos separado la singularidad logarítmica en la integral en z como en la sección 3.3.1, por lo que la integral es impropia y deberemos separar la singularidad en el integrando de la integral en ϕ' . La alternativa a esto es utilizar el teorema del valor medio, como veremos a continuación.

3.8.2.1 Método del radio equivalente

Intentaremos evitar la integración numérica y buscar una solución "cerrada", siguiendo la idea de [45].

Si definimos:

$$Z_q(p) = Z(d, d, p, qd) = R_q(p) + jX_q(p)$$

podemos escribir:

$$Z_{ij} = \langle Z_{|i-j|}(p) \rangle$$

$$R_{ij} = \langle R_{|i-j|}(p) \rangle$$

$$X_{ij} = \langle X_{|i-j|}(p) \rangle$$

donde se usa la notación $\langle \quad \rangle$ para el valor medio y siendo:

$$p = 2a \operatorname{sen}\left(\frac{\phi'}{2}\right)$$

Como se tomará dicho valor medio para ϕ' de 0 a 2π , estando p entre 0 y $2a$, podremos escribir usando el teorema del valor medio:

$$R_{ij} = R_{i-j}(p_{e_{R_{i-j}}})$$

$$X_{ij} = X_{i-j}(p_{e_{X_{i-j}}})$$

siendo p_e un radio equivalente entre 0 y $2a$.

Debe entenderse primero que nada que no hay ninguna razón a priori para asumir que el radio equivalente para ningún R_{ij} o X_{ij} sea a , como efectivamente veremos que no lo es, y segundo que dicho radio equivalente es importante solamente cuando R o X varían apreciablemente dentro del rango de integración, es decir, cuando los subelementos de base y de prueba son cercanos. Si no lo son, el valor medio de R o X es aproximadamente igual a la función R o X evaluada en cualquier punto de su dominio y es indiferente usar cualquier radio equivalente.

Luego, para simplificar, nosotros buscaremos un

radio equivalente para el término propio ($i=j$) y para el primer término adyacente ($|i-j|=1$) y lo usaremos para toda la matriz, pues como hemos visto no es importante el cálculo preciso del radio equivalente entre subelementos alejados.

Expandiendo la función exponencial integral en la forma:

$$\begin{aligned} E_1(-ju) &= C_1(u) - jS_1(u) \\ &= \left[\text{Ln}(\gamma u) - \frac{u^2}{2} + \dots \right] - j \left[u - \frac{u^3}{18} + \dots \right] \end{aligned}$$

y desarrollando las expresiones resultantes de Z_0 y Z_1 en serie de potencias de p/d , obtenemos:

$$R_0(p) = A_0 + B_0 \left(\frac{p}{d} \right)^2 + \dots$$

$$X_0(p) = C_0 + D_0 \left[\text{Ln} \left(\frac{p}{d} \right)^2 - 3 \frac{p}{d} + \dots \right]$$

y:

$$R_1(p) = A_1 + B_1 \left(\frac{p}{d} \right)^2 + \dots$$

$$X_1(p) = C_1 + D_1 \left[\text{Ln} \left(\frac{p}{d} \right)^2 - 4 \frac{p}{d} + \dots \right]$$

El caso del término propio coincide con lo que aparece en [45], pero en dicha referencia no se considera el caso del primer término adyacente, que como vemos es también importante. Estos resultados, además, tienen un término más que los obtenidos en [49], que es necesario para hallar el radio equivalente.

Ahora para hallar los valores medios reemplazare-

mos p por su expresión en función de ϕ' de 0 a 2π y efectuaremos las integraciones de 0 a 2π que involucran dichos valores medios, obteniendo los siguientes desarrollos:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \langle R_0(p) \rangle = \langle A_0 + B_0 \frac{4a^2}{d^2} \text{sen}^2\left(\frac{\phi'}{2}\right) + \dots \rangle \\ &= A_0 + B_0 \frac{2a^2}{d^2} + \dots \\ &= R_0(p_e) = A_0 + B_0 \left(\frac{p_e}{d}\right)^2 + \dots \end{aligned}$$

de donde:

$$p_e = \sqrt{2}a$$

y:

$$\begin{aligned} X_{11} &= \langle X_0(p) \rangle = \langle C_0 + D_0 \left[\text{Ln}\left(\frac{4a^2}{d^2} \text{sen}^2\left(\frac{\phi'}{2}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. - 3 \frac{2a}{d} \text{sen}\left(\frac{\phi'}{2}\right) + \dots \right] \rangle \\ &= C_0 + D_0 \left[\text{Ln}\left(\frac{a}{d}\right)^2 - \frac{12}{\pi} \left(\frac{a}{d}\right) + \dots \right] \\ &= X_0(p_e) = C_0 + D_0 \left[\text{Ln}\left(\frac{p_e}{d}\right)^2 - 3 \left(\frac{p_e}{d}\right) + \dots \right] \end{aligned}$$

expandiendo el logaritmo en dos términos para p_e alrededor de a tendremos:

$$= X_0(p_e) = C_0 + D_0 \left[\text{Ln}\left(\frac{a}{d}\right)^2 + 2\left(\frac{p_e}{a} - 1\right) - 3\left(\frac{p_e}{d}\right) + \dots \right]$$

de donde:

$$p_{x_0} = a \frac{2 - \frac{12}{\pi} \frac{a}{d}}{2 - 3 \frac{a}{d}} = a \left[1 - \left(\frac{6}{\pi} - \frac{3}{2} \right) \frac{a}{d} \right]$$

$$= a \left[1 - 0.4098 \frac{a}{d} \right]$$

En forma idéntica podemos hallar para el primer término adyacente:

$$p_{x_1} = \sqrt{2} a$$

$$p_{x_1} = a \frac{2 - \frac{16}{\pi} \frac{a}{d}}{2 - 4 \frac{a}{d}} = a \left[1 - \left(\frac{8}{\pi} - \frac{4}{2} \right) \frac{a}{d} \right]$$

$$= a \left[1 - 0.5465 \frac{a}{d} \right]$$

Se observa que los radios equivalentes no dependen de los coeficientes A, B, C, D pero si mas bien el radio equivalente para la reactancia disminuye conforme el subsegmento de hace mas corto o relativamente mas grueso. Eso es lógico pues de acuerdo a la teoría diakóptica no se puede esperar que las soluciones por subseccionamientos sean uniformemente convergentes si no se tiene en consideración el efecto de la variación de las dimensiones de los subelementos que se están generando en las impedancias propias y mutuas.

En [45] se analiza el término propio, obteniéndolo-

se resultados similares a los vistos, pero no se analiza el primer término adyacente, y se comete el error de indicar que basta considerar el radio equivalente para el término propio. Comprobando los resultados que hemos obtenido, las gráficas que se muestran en [45] corresponden efectivamente a considerar el radio equivalente también para el primer término adyacente, aunque los autores no lo manifiestan así.

El objetivo de este acápite, que debe quedar claro, es entender que la aproximación correcta para elementos delgados o no muy gruesos de la forma "exacta" de la solución por el método de momentos del problema del elemento cilíndrico conductor es aplicar los radios equivalentes que se muestran arriba y no usar el radio a de la forma reducida, a pesar de que para antenas muy delgadas ambos métodos coinciden.

Para simplificar, nosotros hemos utilizado para todos los términos los mismos radios equivalentes que para el término propio, lo que sabemos no va a dar error apreciable pues para el primer término adyacente los radios son muy cercanos y para los otros términos es indiferente, y hemos obtenido resultados similares a los mostrados en las gráficas de [45].

Sin embargo, cuando se sigue la sugerencia de considerar el radio equivalente solo para el término

propio, se obtienen resultados catastróficamente divergentes para la impedancia de entrada del elemento, por ejemplo una resistencia de 6 ohm para un elemento de longitud $\lambda/2$ y radio $\lambda/100$ analizado con 24 subsecciones (23 subelementos), cuando aplicar el radio equivalente a todos los términos da un resultado de 118.9 ohm y la forma "reducida" da 89.27 ohm.

3.8.2.2 Método de la separación de la singularidad logarítmica de la impedancia mutua entre filamentos de corriente

La alternativa a aproximar un radio equivalente para hallar un término de la matriz usando el kernel "exacto" es efectuar efectivamente la integración de la ecuación (3.8.2.1). Al ser una integración impropia es necesario separar la singularidad logarítmica del integrando de la misma, que es preciso hallar. Este método se diferencia del visto en (3.3.1) en que se ha cambiado el orden de integración.

Lo que en realidad se tiene para el término de la matriz es una integral doble en z y en ϕ' , y en dicho acápite (3.3.1) lo que se hace es realizar primero la integración del kernel exacto en ϕ' y separar la singula-

ridad logarítmica de dicho resultado para poder realizar la integración en z con las funciones de base y prueba que se desee.

En este acápite lo que se va a aprovechar es que ya se conocen las funciones de base y prueba que vamos a utilizar y que podemos entonces cambiar el orden de integración de modo de integrar primero en z (resultado dado por la ecuación (3.7.2.5)) y hallar la singularidad logarítmica de dicho resultado (que es el integrando de la siguiente integral impropia en ϕ') cuando ϕ' tiende a cero, y conocida esta, separarla para integrar en ϕ' . Geométricamente se puede relacionar esto con considerar un subelemento cilíndrico como un conjunto de filamentos delgados paralelos en sus generatrices y realizar la integración de dichas impedancias para ϕ' desde 0 hasta 2π .

Hallemos entonces la singularidad logarítmica del integrando de (3.8.2.1), que está dado por la ecuación (3.7.2.5) con

$$p=2a \operatorname{sen}\left(\frac{\phi'}{2}\right)$$

Observando las integrales I_1 a I_{12} , de (3.7.2.5) vemos que se producirán términos logarítmicos singulares para $p \rightarrow 0$ cuando tienda a cero o infinito el cociente de los límites entre los que se evalúa la función exponencial integral en dicha ecuación, y que estos términos

serán según (3.7.2.4) iguales al logaritmo neperiano de dicho cociente.

Como se está haciendo el análisis para un solo elemento cilíndrico, $d_1=d_2=d$ y $h=|m-n|d$, y se observa que solo ocurren los límites cero o infinito requeridos cuando se puede anular el término que acompaña a p^2 en el radical de los límites de evaluación, es decir, en el término propio ($m=n$), en el primer término adyacente ($|m-n|=1$) o tal vez en el segundo término adyacente ($|m-n|=2$).

Para el término propio, $h=0$ y los términos singulares para $p \rightarrow 0$ son:

$$I_3 \rightarrow \text{Ln}(2d/p)$$

$$I_4 \rightarrow \text{Ln}(2d/p)$$

$$I_5 \rightarrow \text{Ln}(2d/p)$$

$$I_6 \rightarrow \text{Ln}(2d/p)$$

$$I_7 \rightarrow \text{Ln}(2d/p)$$

$$I_8 \rightarrow \text{Ln}(2d/p)$$

$$I_{11} \rightarrow \text{Ln}(2d/p)$$

$$I_{12} \rightarrow \text{Ln}(2d/p)$$

de modo que tendremos:

$$Z(d, d, p, 0) \rightarrow -j120ctg(kd) \text{Ln}(2d/p)$$

Para el primer término adyacente, $h=d$ y los

términos singulares para $p \rightarrow 0$ son solamente los siguientes:

$$I_1 \rightarrow \text{Ln}(2d/p)$$

$$I_2 \rightarrow \text{Ln}(2d/p)$$

$$I_3 \rightarrow \text{Ln}(2d/p)$$

$$I_4 \rightarrow \text{Ln}(2d/p)$$

$$I_5 \rightarrow \text{Ln}(2d/p)$$

$$I_6 \rightarrow \text{Ln}(2d/p)$$

de modo que tendremos:

$$Z(d, d, p, \pm d) \rightarrow j60csc(kd) \text{Ln}(2d/p)$$

Para el segundo término adyacente, $h=2d$ y los términos singulares para $p \rightarrow 0$ son:

$$I_1 \rightarrow \text{Ln}(2d/p)$$

$$I_2 \rightarrow \text{Ln}(2d/p)$$

pero dichos términos se anulan al reemplazar en la ecuación (3.7.2.5), de modo que la singularidad logarítmica substraída a las impedancias mutuas es:

$$\begin{array}{ll} -j120ctg(kd) \text{Ln}(2d/p) & \text{si } m=n \\ j60csec(kd) \text{Ln}(2d/p) & \text{si } |m-n|=1 \end{array}$$

Esta singularidad debe substraerse de las impe-

dancias mutuas calculadas computacionalmente en base a la ecuación (3.7.2.5); y la diferencia calculada debe integrarse por un método de integración abierto como puede ser el método del punto medio, que es el que elegimos por su sencillez. Al resultado debe añadirse el valor de la integral de la singularidad extraída, que se obtiene analíticamente. Tendremos:

$$\begin{aligned}
 Z_{ij} = & \left\{ \begin{aligned}
 & \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[Z(d, d, 2a \operatorname{sen}(\frac{\phi'}{2}), 0) \right. \\
 & \left. + 120jctg(kd) \operatorname{Ln}\left(\frac{2d}{2a \operatorname{sen}(\frac{\phi'}{2})}\right) \right] d\phi' \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [-120jctg(kd) \operatorname{Ln}\left(\frac{2d}{2a \operatorname{sen}(\frac{\phi'}{2})}\right)] d\phi' \\
 & \dots\dots (si \ i=j) \\
 & \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[Z(d, d, 2a \operatorname{sen}(\frac{\phi'}{2}), d) \right. \\
 & \left. - 60jcsec(kd) \operatorname{Ln}\left(\frac{2d}{2a \operatorname{sen}(\frac{\phi'}{2})}\right) \right] d\phi' \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [60jcsec(kd) \operatorname{Ln}\left(\frac{2d}{2a \operatorname{sen}(\frac{\phi'}{2})}\right)] d\phi' \\
 & \dots\dots (si \ |i-j| = 1) \\
 & \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} Z(d, d, 2a \operatorname{sen}(\frac{\phi'}{2}), |i-j|d) d\phi' \\
 & \dots\dots (si \ |i-j| > 1)
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Que se ha obtenido replanteando la segunda parte de la ecuación (3.8.2.1) que nos da la expresión de Z_{ij} con el kernel exacto para un elemento cilindrico.

Efectuando analíticamente las integrales impropias de la singularidad logarítmica, tendremos:

$$Z_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[Z(d, d, 2a \operatorname{sen}(\frac{\phi'}{2}), 0) \right. \\ \left. + 120jctg(kd) \operatorname{Ln}\left(\frac{2d}{2a \operatorname{sen}(\frac{\phi'}{2})}\right) \right] d\phi' \\ - 120jctg(kd) \operatorname{Ln}\left(\frac{2d}{a}\right) \\ \dots\dots (si \ i=j) \\ \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[Z(d, d, 2a \operatorname{sen}(\frac{\phi'}{2}), d) \right. \\ \left. - 60jcsec(kd) \operatorname{Ln}\left(\frac{2d}{2a \operatorname{sen}(\frac{\phi'}{2})}\right) \right] d\phi' \\ + 60jcsec(kd) \operatorname{Ln}\left(\frac{2d}{a}\right) \\ \dots\dots (si \ |i-j|=1) \\ \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} Z(d, d, 2a \operatorname{sen}(\frac{\phi'}{2}), |i-j|d) d\phi' \\ \dots\dots (si \ |i-j|>1) \end{array} \right. \quad (3.8.2.2.1)$$

Las integrales que contiene la ecuación anterior son propias y pueden ser evaluadas numéricamente con

pocos subintervalos mediante un método de integración abierta (que no evalúe los extremos). Posteriormente se demuestra que en la práctica basta aplicar para ellas el método del punto medio (ver) con 10 subintervalos.

3.9 Planteamiento matricial del método de momentos para la ecuación de Pocklington para un arreglo de elementos conductores cilíndricos rectos

En lo siguiente para mantener la generalidad se menciona que el análisis se hace para un "arreglo de elementos cilíndricos conductores". Este término incluye a las antenas lineales (es decir, formadas por elementos considerados lineales sin incluir superficies conductoras) así como los arreglos de dichas antenas.

Supongamos que se tiene un arreglo de M elementos conductores paralelos al eje z . Por simplicidad, consideraremos como es en la práctica usual que los elementos están centrados y son coplanares, como indica la figura 3.9.1, aunque lo obtenido puede ser rápidamente generalizado para arreglos no simétricos ni coplanares.

Todo el arreglo está en el plano $y=0$. Cada ele-

mento m es paralelo al eje z , tiene longitud L_m y radio a_m , está centrado en $x=x_m$, $y=0$, $z=0$; y por él pasa una corriente $I_m(z')$.

Debe tenerse claro desde el inicio que cuando los elementos del arreglo son relativamente gruesos (de modo que al elegirse un número de subelementos la relación d/a -semilongitud sobre radio- en ellos llega a ser menor que 10) la utilización del kernel "reducido" comienza a diverger debido a que como se ha visto al inicio de este capítulo su uso está planteado con la suposición inicial de que los elementos son delgados. Afortunadamente, las funciones de base y prueba se han elegido para la más rápida convergencia y esto nos lleva a proponer que debe iniciarse al análisis de un arreglo de este tipo tratando

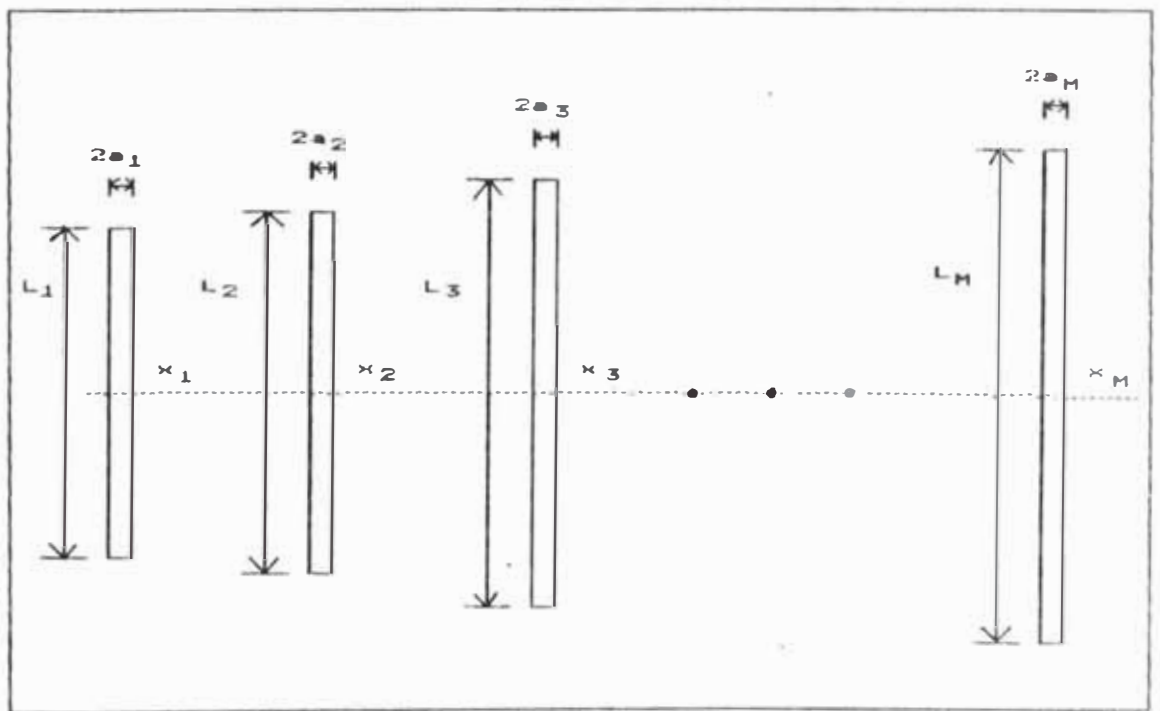


Fig. 3.9.1.- Arreglo de M conductores paralelos coplanarios.

de usar el máximo número de subelementos tal que en ellos $d/a > 10$. Incluso si este número de subelementos con esta consideración no es más que 1, el resultado obtenido de este modo es una buena primera aproximación. El progresivo aumento del número de subelementos a partir de este límite debe tomarse con cuidado y debe verificarse que los resultados se mantengan en el orden de magnitud de la primera aproximación calculada, caso contrario deben considerarse sospechosos de divergencia.

Se ha demostrado al inicio de este capítulo que el kernel "reducido" es el más apropiado para elementos delgados.

Esto nos podría inducir a creer que usando el kernel "exacto" obtendremos mejores soluciones para arreglos de elementos relativamente gruesos. Sin embargo, debemos recordar que así como el kernel "reducido" se plantea en base a la suposición de un elemento delgado, el kernel "exacto" se plantea en base a la suposición de la simetría rotacional de la corriente, lo que es cierto para elementos cilíndricos aislados o para arreglos de elementos alejados, pero no para arreglos de elementos cercanos.

Luego, el kernel "exacto" no es útil para arreglos de elementos cercanos relativamente gruesos, y la solución para estos casos es, como se plantea arriba,

utilizar el mayor número de subelementos que permita que su semilongitud no disminuya de 10 o 5 veces el radio como una buena primera aproximación.

Por otro lado no suele ser necesario aumentar el número de subseccionamientos a más de 9 por longitud de onda para elementos no resonantes y 13 para elementos resonantes.

Es posible un empeoramiento de la aproximación al usar el kernel "exacto" para analizar arreglos de este tipo, donde el problema no tiene simetría rotacional, a menos que los elementos puedan considerarse alejados entre sí.

Aplicando entonces la solución por el método de momentos para el kernel "reducido" de la ecuación de Pocklington vista en la sección (3.8.1), dividimos el elemento m de acuerdo a la figura 3.8.1.1 en un número impar n_m de subelementos de semilongitud $d_m=L_m/(n_m+1)$.

Si ahora planteamos las ecuaciones de (3.8.1) para cada elemento m tendremos:

$$[V_m] = [Z_{mm}] [I_m] \quad (3.9.1)$$

donde hemos usado la notación [] para vectores y matrices.

Como los elementos están centrados de acuerdo a la figura 6 tendremos:

$$[Z_{mn}]_{ij} = Z(d_m, d_n, a_m, |i-j|d_m)$$

$$[V_m]_i = [Val_m]_i - \int_{-\frac{L_m}{2}}^{\frac{L_m}{2}} E_{i, z_m}(z) [g_m]_i(z) dz \quad (3.9.2)$$

donde:

$[Val_m]$:vector de voltajes de alimentación del elemento m.

$[Val_m]_i$:voltaje de alimentación del subelemento i del elemento m.

$[g_m]$:vector de funciones de prueba del elemento m.

$[g_m]_i$:función de prueba i del elemento m: pulso en z sinusoidal negativo de semilongitud d_m centrado en $x=x_m$, $y=0$, $z=(-L_m/2 + i d_m)$.

E_{i, z_m} :campo incidente en z que llega al elemento m.

El campo eléctrico incidente que llega al elemento m es el producido por todos los otros elementos.

Como el radio es pequeño podemos para el propósito de obtener las interacciones entre elementos diferentes suponer los filamentos de corriente en los propios ejes, obteniendo la siguiente expresión para dicho campo en función de las corrientes; de acuerdo a las ecuaciones

del capítulo I:

$$E_{ix_n}(z) = \sum_{q=1}^M \int_{-\frac{L_q}{2}}^{\frac{L_q}{2}} \left[\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \frac{G(R)}{4\pi j \omega \epsilon} I_q(z') dz' \quad (3.9.3)$$

siendo:

$$G(R) = \frac{e^{-j\frac{\omega}{c}R}}{R} \quad (3.9.4)$$

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (z-z')^2}$$

$I_q(z')$ es la corriente por el elemento q y se ha desarrollado como:

$$I_q(z') = \sum_{j=1}^{n_q} [I_q]_j [f_q]_j(z') \quad (3.9.5)$$

donde:

$[f_q]$:vector de funciones de base del elemento q .

$[f_q]_j$:función de base j del elemento q : pulso en z sinusoidal positivo de semilongitud d_q centrado en $x=x_q$, $y=0$, $z=(-L_q/2 + i d_q)$.

$[I_q]$:vector de corrientes del elemento q .

$[I_q]_j$:corriente del subelemento j del elemento q .

Reemplazando (9.5) en (9.3):

$$E_{ix_n}(z) = \sum_{q=1}^M \sum_{j=1}^{n_q} [I_q]_j \int_{-\frac{L_q}{2}}^{\frac{L_q}{2}} \left[\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \frac{G(R)}{4\pi j \omega \epsilon} [f_q]_j(z') dz' \quad (3.9.6)$$

y reemplazando esto en (3.9.2):

$$[V_m]_i = [Val_m]_i - \sum_{q=1}^N \sum_{j=1}^{n_q} [I_q]_j \int_{-\frac{L_q}{2}}^{\frac{L_q}{2}} \int_{-\frac{L_q}{2}}^{\frac{L_q}{2}} [g_m]_i(z) \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \frac{G(R)}{4\pi j \omega \epsilon} [f_q]_j(z') dz' dz \quad (3.9.7)$$

donde la doble integral se ha obtenido ya en el acápite (3.7.2) y está dada por la fórmula (3.7.2.5). Esta doble integral entonces la representaremos por:

$$[Z_{mq}]_{ij} = Z(d_q, d_m, |x_m - x_q|, |(-\frac{L_m}{2} + i d_m) - (-\frac{L_q}{2} + j d_q)|) \quad (3.9.8)$$

Entonces (3.9.7) queda:

$$[V_m]_i = [Val_m]_i - \sum_{q=1}^N \sum_{j=1}^{n_q} [Z_{mq}]_{ij} [I_q]_j$$

lo que considerando $i=1,2,\dots,n_m$ puede expresarse matricialmente como:

$$[V_m] = [Val_m] - \left[\begin{array}{c} [Z_{m1}] \dots [Z_{mN}] \\ \vdots \\ [Z_{mN}] \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} [I_1] \\ \vdots \\ [I_N] \end{array} \right] - [Z_m] [I_m]$$

Reemplazando en (3.9.1) y despejando $[Val_m]$

tendremos:

$$[Val_m] = [[Z_{m1}] \dots [Z_{mM}]] \begin{bmatrix} [I_1] \\ \vdots \\ [I_M] \end{bmatrix}$$

lo que considerando que $m=1,2,\dots,M$ nos da la ecuación del arreglo que involucra una matriz de matrices:

$$\begin{bmatrix} [Val_1] \\ \vdots \\ [Val_M] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [Z_{11}] \dots [Z_{1M}] \\ \dots \dots \dots \\ [Z_{M1}] \dots [Z_{MM}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I_1] \\ \vdots \\ [I_M] \end{bmatrix} \quad (3.9.9)$$

En (3.9.9) $[I_q]$ es un vector de $n_q \times 1$ de corrientes del elemento q . Su término $[I_q]_j$ es la corriente por el subelemento j de dicho elemento.

$[Val_m]$ es un vector de $n_m \times 1$ de voltaje de alimentación del elemento m . Su término $[Val_m]_i$ es el voltaje de alimentación del subelemento i de dicho elemento. Si la alimentación del elemento m es únicamente Val_m en el centro, como suele darse en la práctica, tendremos:

$$[Val_m]_i = Val_m \delta \left(i, \frac{n_m+1}{2} \right) \quad (3.9.10)$$

$[Z_{mq}]$ es una matriz de $n_m \times n_q$ de impedancias de interacción entre los subelementos del elemento m y el elemento q , o de interacciones internas dentro del propio elemento m si $m=q$. Su término $[Z_{mq}]_{ij}$ es la impedancia mutua entre el subelemento i del elemento m y el subelemento j del elemento q , o es la impedancia propia del subelemento i del elemento m si $q=m$ y $j=1$. Como se ha visto, se tiene:

$$[Z_{mq}]_{ij} = \begin{cases} z(d_q, d_m, |x_m - x_q|, |(-\frac{L_m}{2} + id_m) - (-\frac{L_q}{2} + jd_q)|) \dots q \neq m \\ z(d_m, d_m, a_m, |i - j|d_m) \dots \dots \dots q = m \end{cases}$$

(3.9.11)

Se plantea entonces una única ecuación matricial para el arreglo, que corresponde a subdividir cada uno de sus elementos en subelementos de forma de pulsos triangulares sinusoidales y considerar la impedancia de interacción entre todos ellos.

CAPITULO IV

ELABORACION Y ANALISIS DE UN PROGRAMA PARA EL DISEÑO DE ANTENAS YAGI

En este capítulo vamos a explicar la realización de un YAGI-CAD, es decir, de un programa interactivo con el usuario que permita hacer análisis y diseño de antenas Yagi, y en general de arreglos paralelos coplanares simétricos de elementos delgados, si se conocen los voltajes de alimentación.

La antena Yagi es un caso particular de este arreglo, en el cual los voltajes de alimentación son nulos excepto en el segundo elemento (elemento activo), conociéndose a los demás elementos como **elementos parásitos**. El primer elemento se conoce como **reflector** y los elementos a partir del tercero como se conocen como **directores**.

Las longitudes y posiciones de los elementos se optimizan para según sea el caso obtener una máxima ganancia o un ancho del lóbulo dado o una forma determinada del patrón de radiación. Este YAGI-CAD va a permitir obtener dichos parámetros para una geometría dada de la

antena antes de su construcción, facilitando el proceso de prefabricación.

4.1. Descripción global del YAGI-CAD

Describiremos un enfoque de arriba hacia abajo del programa realizado.

4.1.1 Configuración de las opciones de trabajo

En este nivel del programa se tienen las variables que se indican en el diagrama de flujo de la figura 4.1.1. Son variables globales del programa y este menu inicial permite elegir los limites de los radios para usar cada una de las tres formas de los kernel posibles para trabajar durante la ejecución del algoritmo.

Dichas variables son las siguientes:

- *UsarCoseno_y_SenoIntegral,
- *Radio_maximo_para_kernel_reducido,
- *Radio_maximo_para_termino_doble,
- *nint
- *ndip.

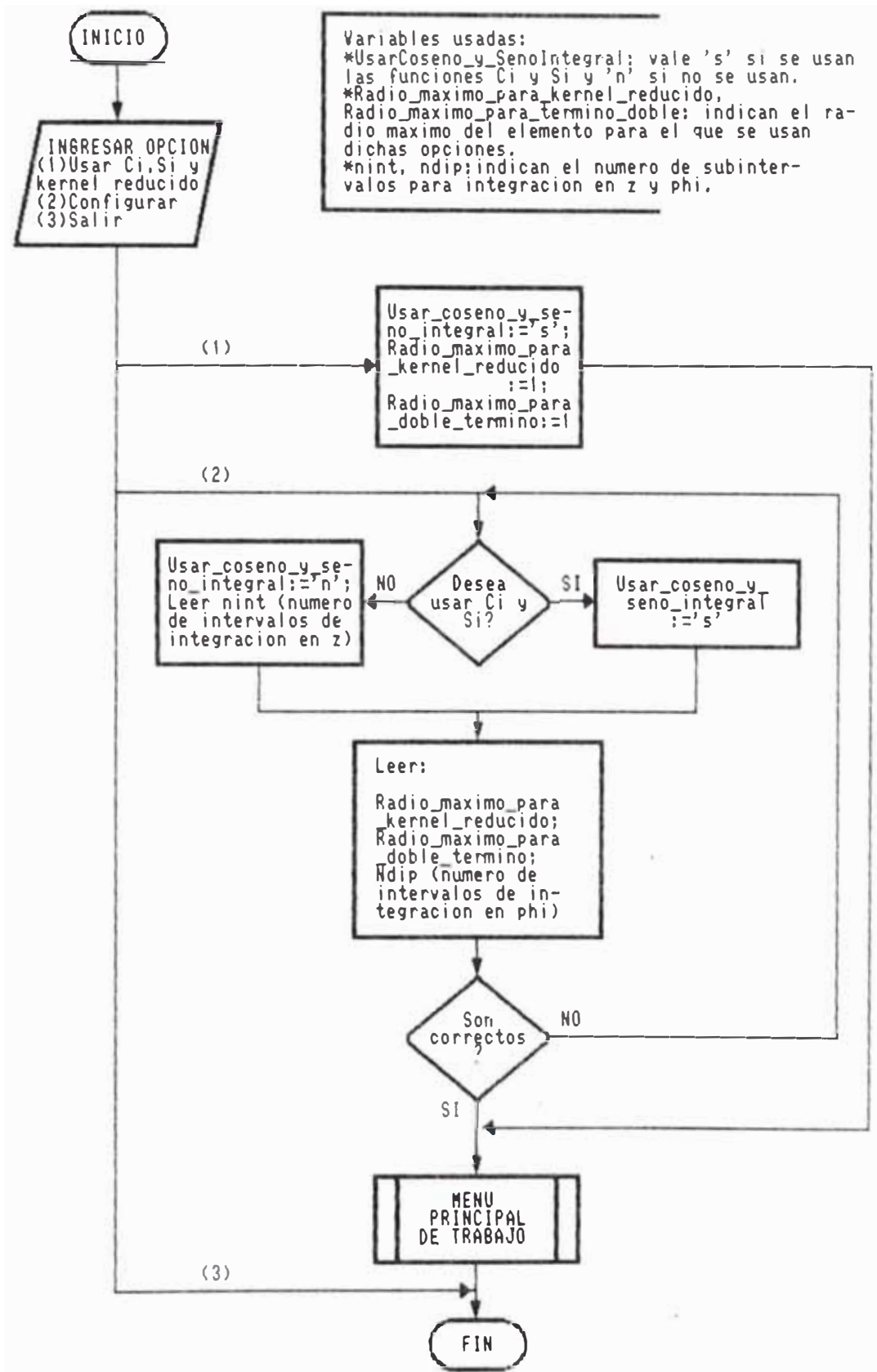


FIG. 4.1.1.- DIAGRAMA DE FLUJO DEL YAGI-CAD.
 CONFIGURACION DE LAS OPCIONES DE TRABAJO

La variable `UsarCoseno_y_SenoIntegral` indica si vamos a usar estas funciones especiales o si vamos a hacer integración con la regla del trapecio en z para hallar las impedancias mutuas.

Sabemos que integrar numéricamente puede ser útil si se quiere acelerar la velocidad del llenado de la matriz a costa de la precisión (hasta 10 o tal vez mas intervalos). Sin embargo, si se desea mayor precisión, utilizar las funciones especiales es mucho más rápido y preciso que hacer integraciones con 500 o mil subintervalos.

Las variables `Radio_maximo_para_kernel_reducido` y `Radio_maximo_para_termino_doble` indican los límites para los cuales el programa va a tomar una decisión para calcular las impedancias de interacción entre los modos de un mismo elemento (pues las impedancias de interacción entre modos pertenecientes a elementos diferentes las calcula siempre usando el kernel "reducido").

Si `Radio_maximo_para_kernel_reducido` es mayor que el radio, utiliza el kernel reducido para el calculo de dichas impedancias ; si el radio del elemento es mayor que `Radio_máximo_para_kernel_reducido` pero es menor que `Radio_máximo_para_termino_doble`, utiliza la aproximación de dos términos para el radio equivalente, y si el radio es mayor que `Radio_máximo_para_termino_doble`, entonces

utiliza la integración del kernel exacto mediante la separación de la singularidad logarítmica y la regla del punto medio.

La variable global `nint` indica el número de subintervalos que se tomarán para la integración en z mediante la regla del trapecio en caso de que se elija la opción de no utilizar las funciones especiales.

La variable global `ndip` indica la cantidad de subintervalos que se van a usar de 0 a π para realizar la integración de las impedancias mutuas obtenidas con el uso del kernel exacto, mediante la separación de la singularidad logarítmica y la integración por el método del punto medio de la parte no singular.

4.1.2 Menú principal de trabajo

La forma de trabajo del menú principal se detalla en el diagrama de flujo de la figura 4.1.2. Las variables a ser usadas en este nivel del programa son básicamente un **indicador de datos por procesar**, que está activado si se han cargado en memoria o se han ingresado datos de una antena que están listos para procesarse, y un **indicador de resultados listos** que nos permite conocer si ya se ha calculado la distribución de corriente sobre una antena o arreglo de elementos (expresiones que usaremos como

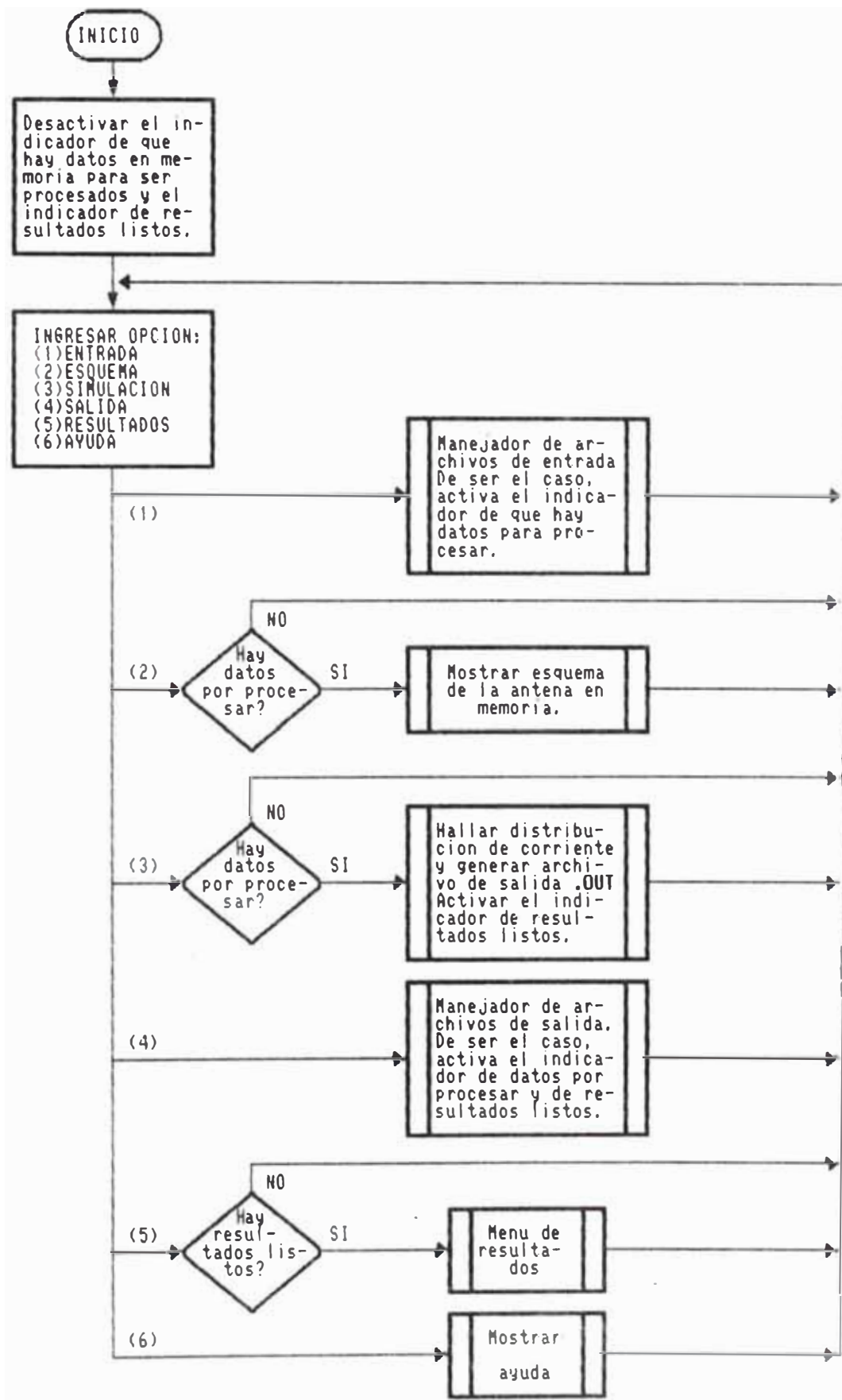


FIG. 4.1.2.- DIAGRAMA DE FLUJO DEL MENU PRINCIPAL DE TRABAJO

sinónimos) de modo que pueden obtenerse la impedancia de entrada, la ganancia y los patrones de radiación de la antena.

De acuerdo a estos indicadores, que como se ve en el diagrama de flujo de la figura 4.1.2 son inicialmente desactivados, el usuario puede elegir las siguientes opciones que forman un menú con las siguientes subrutinas:

(1) ENTRADA: Rutina que maneja los archivos de entrada que contienen las características de la antena a ser simulada. Esta rutina se detallará mas adelante.

(2) ESQUEMA: Rutina que si está activado el indicador de datos por procesar muestra el esquema físico de la antena en metros.

(3) SIMULACION: Rutina que si está activado el indicador de datos por procesar realiza primero el llenado de la matriz de impedancias mutuas y luego la resolución de la ecuación matricial, como se ha visto en los capítulos anteriores, para hallar la distribución de corriente. Genera además un archivo de salida. Esta rutina se detalla posteriormente.

(4) SALIDA: Es un manejador de los archivos de salida que se generan con la opción anterior. Esta rutina

será detallada posteriormente.

(5) RESULTADOS: Esta rutina trabaja en base a la distribución de corriente hallada y que se guarda en memoria. Si el indicador de resultados listos está activo, permite obtener la ganancia, la impedancia de entrada, la distribución de corriente, la variación de fase y los patrones de radiación E y H de la antena dada. Esta rutina será detallada posteriormente.

(6) AYUDA: Da una explicación general de las funciones del YAGI-CAD. Además, se puede tener ayuda on-line presionando F1 en cualquier opción en que se encuentre en los menús o submenús mediante una unidad especial para dicho fin.

4.1.3 Manejador de archivos de entrada

El diagrama de flujo se muestra en la figura 4.1.3.

El manejador de archivos de entrada genera archivos .ANT que permiten guardar en disco los datos de una antena dada para no repetir constantemente el proceso de ingreso de datos. Está basado en las opciones fundamentales de cualquier manejador de archivos de entrada y su diagrama de flujo, que es suficientemente explicativo, se

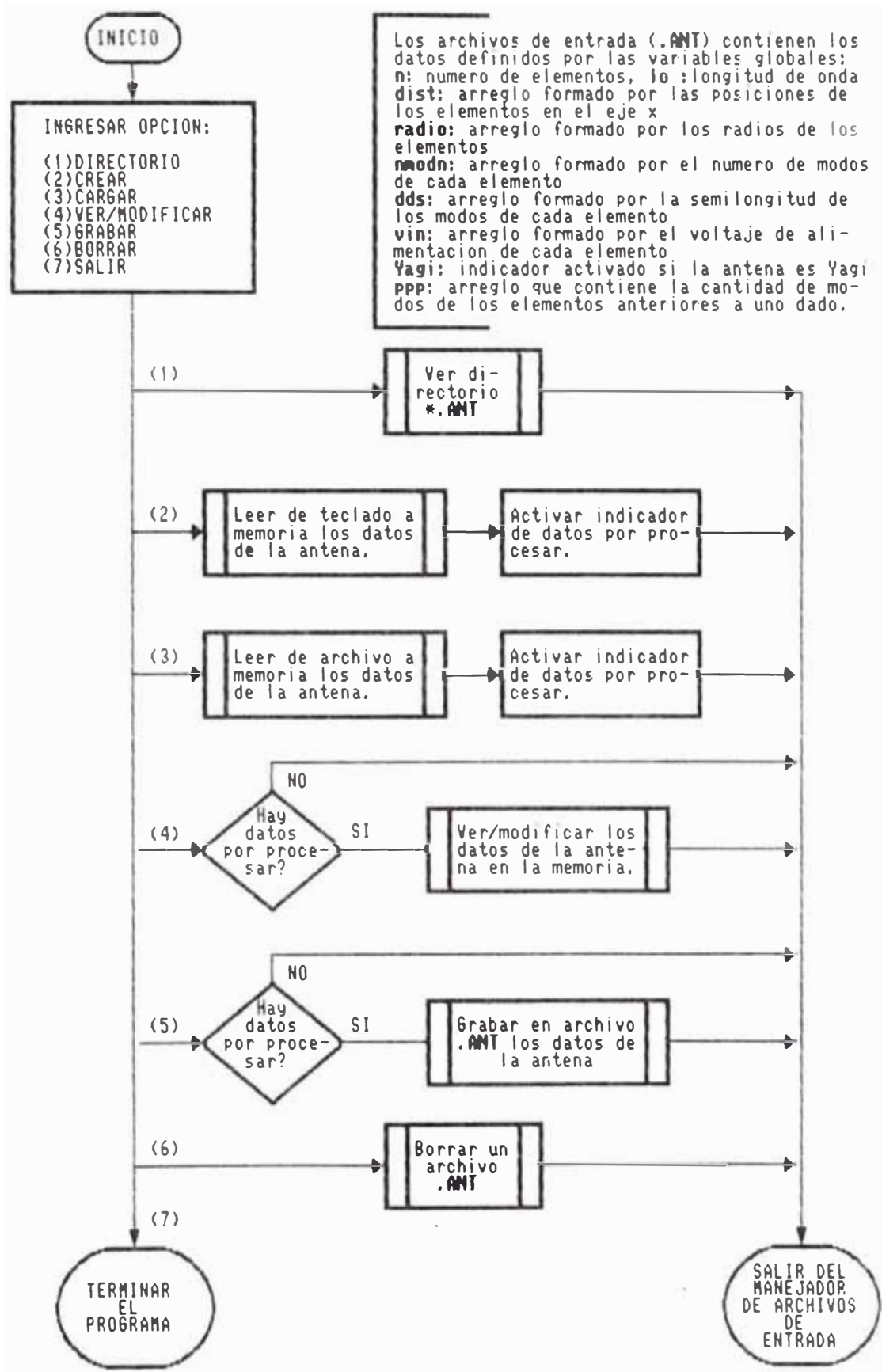


FIG. 4.1.3.- DIAGRAMA DE FLUJO DEL MANEJADOR DE ARCHIVOS DE ENTRADA

muestra en la figura 4.1.3.

Los archivos `.ANT` contienen los datos definidos por las variables siguientes, que son variables globales para el programa

`n`: Número de elementos de la antena.

`dist`: arreglo formado por las posiciones de los elementos en el eje `x`.

`radio`: arreglo formado por las longitudes de los radios de cada elemento.

`nmodn`: arreglo formado por los números de modos de cada elemento.

`dds`: arreglo formado por las semilongitudes de los modos de cada elemento.

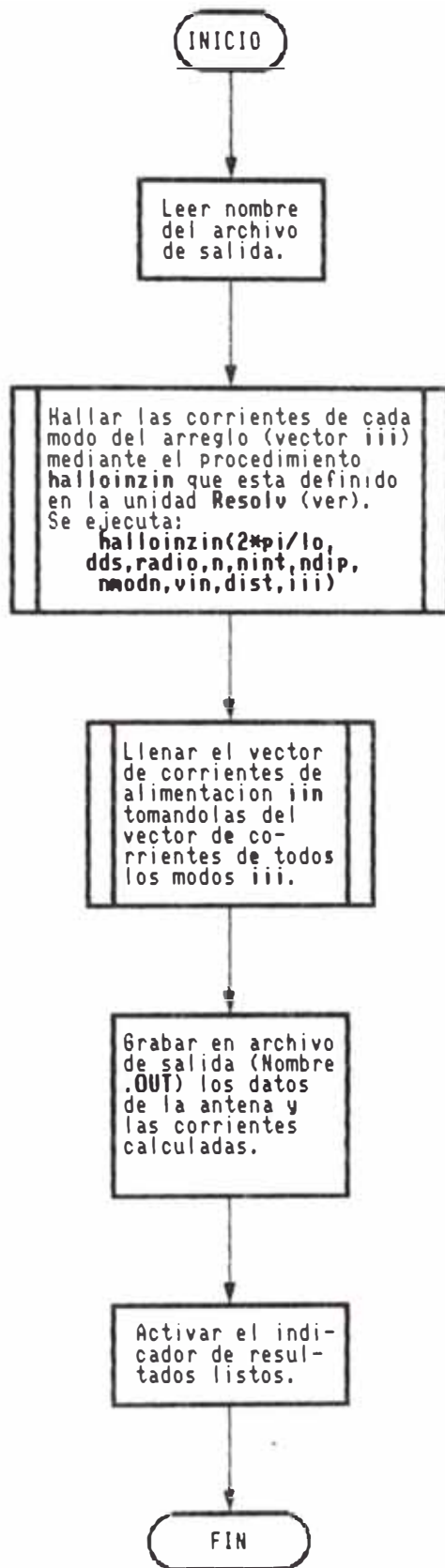
`vin`: arreglo formado por los voltajes de alimentación de cada elemento.

`Yagi`: indicador que se activa si la antena que se trata es una antena Yagi.

4.1.4 Opción de Simulación

Se indica el diagrama de flujo en la figura 4.1.4.

Si está activado el indicador de datos por procesar se realiza primero el llenado de la matriz de impedancias mutuas con la siguiente llamada a procedimiento o



Los archivos de salida (.OUT) contienen los datos de una antena dada, (que estan tambien en el archivo .ANT) y las corrientes calculadas, que tambien son variables globales:
 iii: vector que contiene las corrientes de todos los modos del arreglo.
 iin: vector que contiene las corrientes de alimentacion de los elementos del arreglo.

FIG. 4.1.4.- DIAGRAMA DE FLUJO DE LA OPCION DE SIMULACION

subrutina:

Halloinzin(2*pi/lo,dds,radio,n,nint,ndip,nmodn,dist,iii)

Las variables de entrada a este procedimiento son las variables globales que fueron ya definidas mediante el procesador de archivos de entrada y que hemos descrito arriba. La variable global de salida **iii** es un arreglo o vector de dimensión igual al número total de modos en el arreglo de elementos (antena) y contiene los valores de las corrientes en el centro de dichos modos.

La rutina **Halloinzin** está definida en la unidad **RESOLV** que se describe detalladamente en el apéndice.

Este procedimiento contiene primero la rutina **CalculaMatriz** de llenado de la matriz de acuerdo a las opciones (kernel usados) elegidas anteriormente mediante las variables globales de configuración:

***UsarCoseno_y_SenoIntegral, *Radio_máximo_para_kernel_re-**
ducido, *Radio_máximo_para_termino_doble,

***nint**

***ndip.**

y utilizando las variables globales de entrada: **lo, dds,**
radio, n, nmodn y **dist.**

A continuación, la rutina **ResolverEcuacion** halla el vector de corrientes **iii** deseado mediante la resolución por eliminación de Gauss simple (aprovechando la

simetría).

Las funciones y procedimientos de manejo de complejos usados en la unidad **RESOLV** se encuentran en la unidad **COMPLEJ** que se detalla en el apéndice.

La opción de simulación utiliza además dos variables globales adicionales cuyos valores calcula:

111: el vector de corrientes de los modos que hemos visto.

11n: vector de las corrientes de entrada de cada elemento.

Estas variables, así como las variables referidas a los datos físicos de la antena son guardadas en un archivo **.OUT** cuyo nombre se pide al usuario, lo que permite guardar los resultados calculados y no tener necesidad de repetir la simulación.

4.1.5 Manejador de archivos de salida

Su diagrama de flujo se encuentra en la figura 4.1.5

Solo tiene las opciones de ver directorio de archivos de salida (**.OUT**), de cargar un archivo de salida

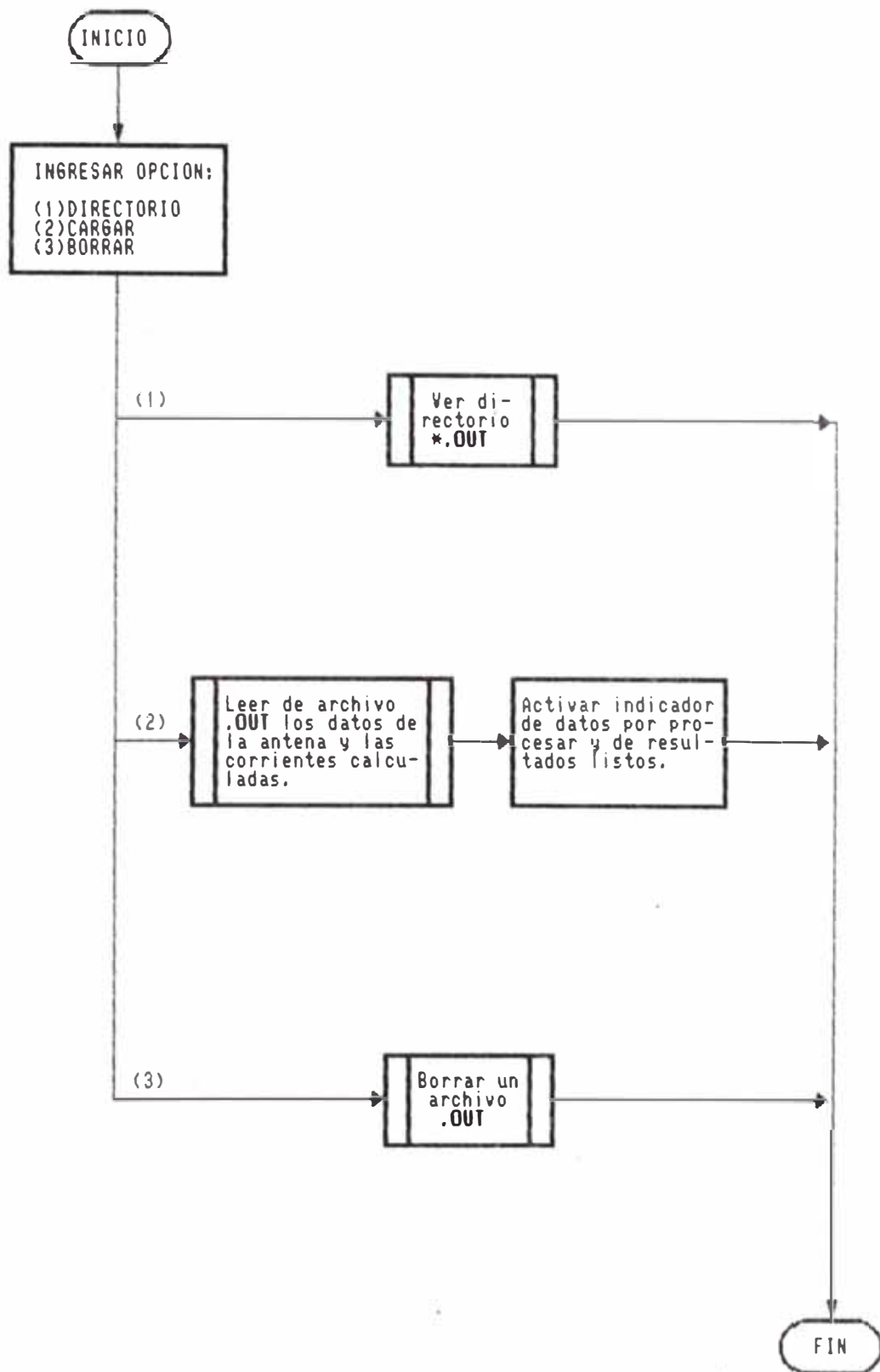


FIG. 4.1.5.- DIAGRAMA DE FLUJO DEL MANEJADOR DE ARCHIVOS DE SALIDA

en memoria, y de borrar un archivo de salida, sin embargo esas funciones son suficientes para trabajar con dichos archivos.

4.1.6 Menú de resultados

El diagrama de flujo se ve en la figura 4.1.6. Contiene subrutinas para las siguientes opciones:

(1) **GANANCIA:** Muestra la ganancia de la antena mediante el procedimiento **Directividad**, que se detallará mas adelante.

(2) **IMPEDANCIA DE ENTRADA:** Muestra las impedancias y admitancias de entrada de cada elemento de la antena según:

$$Z[i]=v_{in}[i]/i_{in}[i]$$

$$Y[i]=i_{in}[i]/v_{in}[i]$$

para $i=1,2,\dots,n$; puesto que v_{in} e i_{in} son vectores que ya han sido definidos.

En el caso de una antena Yagi, solo muestra la impedancia y admitancia de entrada en el segundo elemento, pues al estar los otros con voltaje de alimentación cero sus impedancias de entrada son nulas.

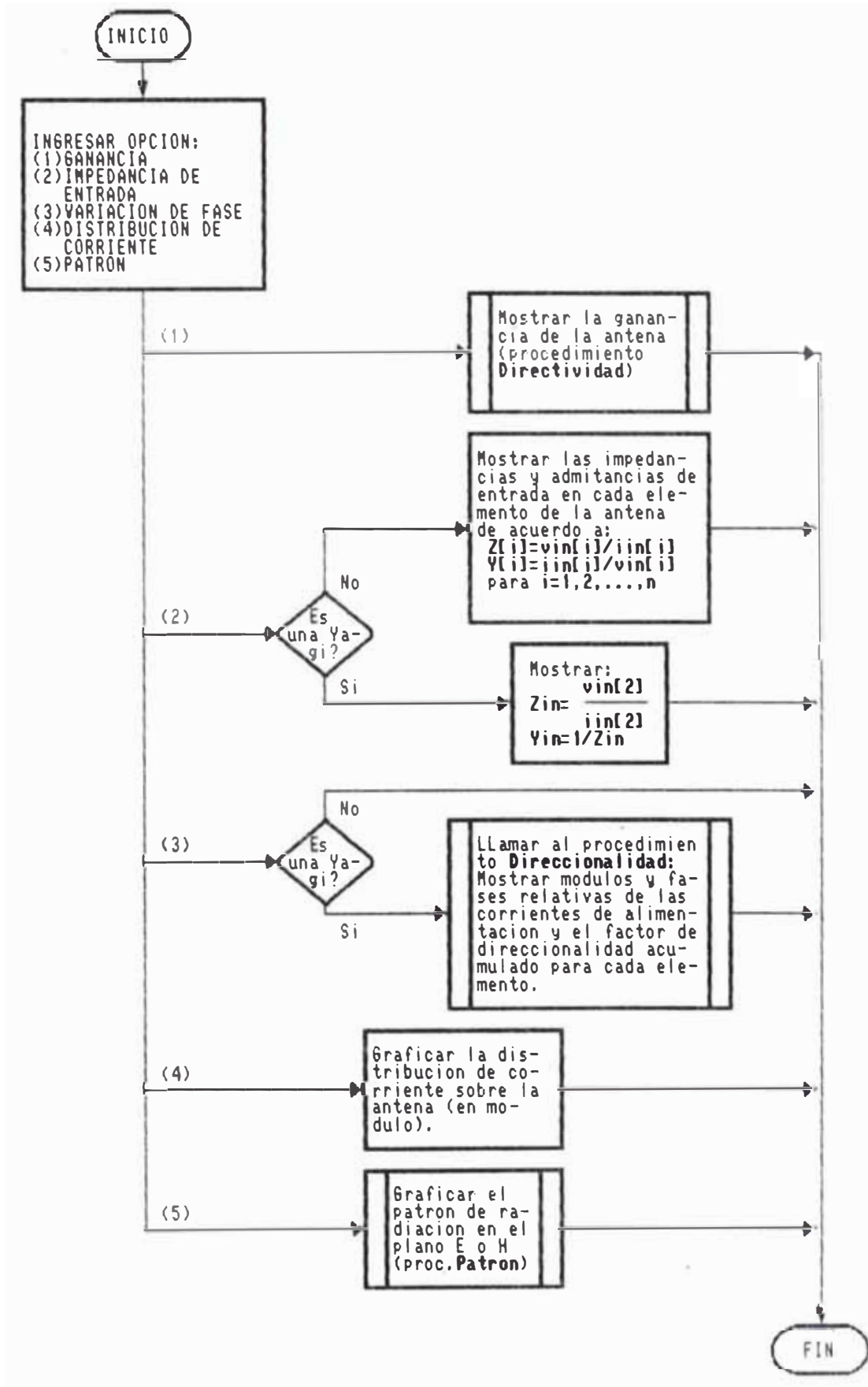


FIG. 4.1.6.- DIAGRAMA DE FLUJO DEL MENU DE RESULTADOS

(3) **VARIACION DE FASE:** Muestra los módulos y fases relativos de las corrientes en una tabla y el factor de direccionalidad acumulado para cada elemento; para la cual usa el procedimiento o subrutina **Direccionalidad**, que se detallará más adelante.

(4) **DISTRIBUCION DE CORRIENTE:** Grafica la distribución de corriente sobre los elementos de la antena en el mismo esquema que se muestra en la opción **ESQUEMA** del menú principal de trabajo.

(5) **PATRON:** Grafica el patrón de radiación en el plano E o H a solicitud del usuario, mediante la subrutina **Patrón**. Esta opción será detallada posteriormente.

4.1.7 Obtención de la directividad o ganancia

El diagrama de flujo se muestra en la figura 4.1.7.

Esta rutina debe calcular primero el campo lejano en la dirección de endfire ($\theta=\pi/2$, $\phi=0$, donde se considera que XZ es el plano de la antena, que todos los elementos son paralelos al eje Z y que de este modo θ es el ángulo que forma una dirección dada con el eje Z y ϕ es el ángulo que forma esta dirección con el plano XZ de la antena).

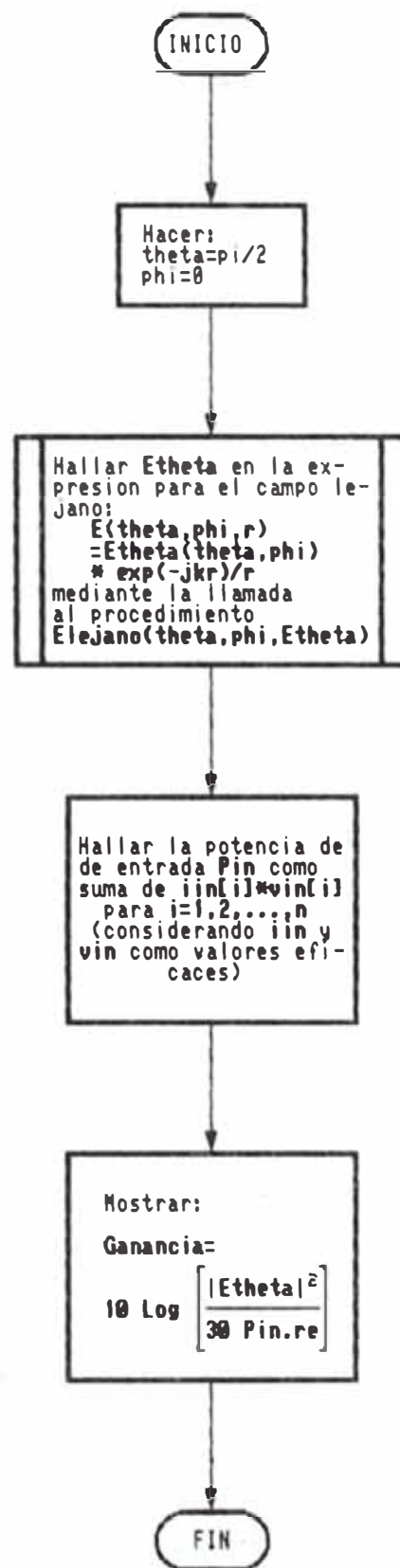


FIG. 4.1.7 DIAGRAMA DE FLUJO PARA LA OBTENCION DE LA DIRECTIVIDAD O GANANCIA

Para realizar este cálculo se utiliza la llamada al procedimiento Elejano(theta,phi,Etheta) donde theta y phi representan a θ y ϕ respectivamente, y Etheta es la variable de salida que representa al campo mediante la siguiente ecuación que es conocida para el campo lejano:

$$\vec{E}_{lejano} = E_{\theta}(\theta, \phi) \frac{e^{-jkr}}{r}$$

donde Etheta representa a E_{θ} .

A continuación se calcula la potencia de entrada a la antena mediante la fórmula:

$$P_{in} = \sum_{i=1}^n iin[i] vin[i]$$

considerando iin y vin valores eficaces.

De la potencia compleja de entrada P_{in} debe tomarse la parte real para conocer la potencia radiada:

La ganancia G en dBi (decibelios respecto a la antena isotrópica) se obtiene mediante la fórmula:

$$G = 10 \text{Log} \left[\frac{|E_{\theta}|^2}{30 \text{Re} [P_{in}]} \right]$$

4.1.8 Obtención del factor de direccionalidad y variación de fase

Una primera aproximación simple a la evaluación de la directividad de un arreglo lineal plano de elementos cilíndricos rectos de media onda (lo que ocurre usualmente en una Yagi) es considerarlo como un conjunto de fuentes isotrópicas alineadas. Luego el factor de **direccionalidad** según Markov [ref. 5] es la suma de las corrientes de entrada de cada elemento respecto a la corriente de entrada del elemento activo agregándole una fase correspondiente a su posición en el eje de la antena, de acuerdo a las siguientes relaciones:

$$A_{\text{con reflector}} = \sum_{i=1}^n \frac{i I_n[i]}{i I_n[2]} e^{-j k \text{dist}[i]}$$

$$A_{\text{sin reflector}} = \sum_{i=2}^n \frac{i I_n[i]}{i I_n[2]} e^{-j k \text{dist}[i]}$$

Donde $A_{\text{sin reflector}}$ es el factor de direccionalidad calculado sin considerar el reflector y $A_{\text{con reflector}}$ es el factor de direccionalidad calculado considerando el reflector.

Para obtener una primera aproximación de la ganancia, el cuadrado del módulo de este factor de direc-

cionalidad (considerando el reflector) se multiplica por la PIRE de un dipolo delgado de media onda alimentado por una corriente eficaz unitaria y se divide entre la potencia de entrada ante una corriente de alimentación eficaz unitaria, si se trata de una antena Yagi. Como puede verse, este procedimiento no es el exacto, pues no todas las distribuciones de corriente corresponden a la de un dipolo delgado de media onda.

El objetivo del cálculo sucesivo del factor de directividad es verificar que cada elemento contribuya positivamente a esta. Un elemento que contribuye negativamente al módulo del factor de direccionalidad, es decir, cuyo término en la sumatoria disminuye el módulo de la sumatoria total, no se comporta efectivamente como un director y mas bien sí como un reflector, a pesar de que pueda estar ubicado en la posición correcta.

Sin embargo, para lograr el ensanchamiento del haz, puede ser necesario (y esto se demuestra con la ejecución del programa) que ocurra este fenómeno. De todos modos, estos casos generan una disminución en la ganancia resultante de la antena.

Una explicación más detallada de esto se tiene en la referencia [52]. El factor de direccionalidad sucesivo suele hacerse sin considerar el reflector, pero puede hacerse de ambas formas.

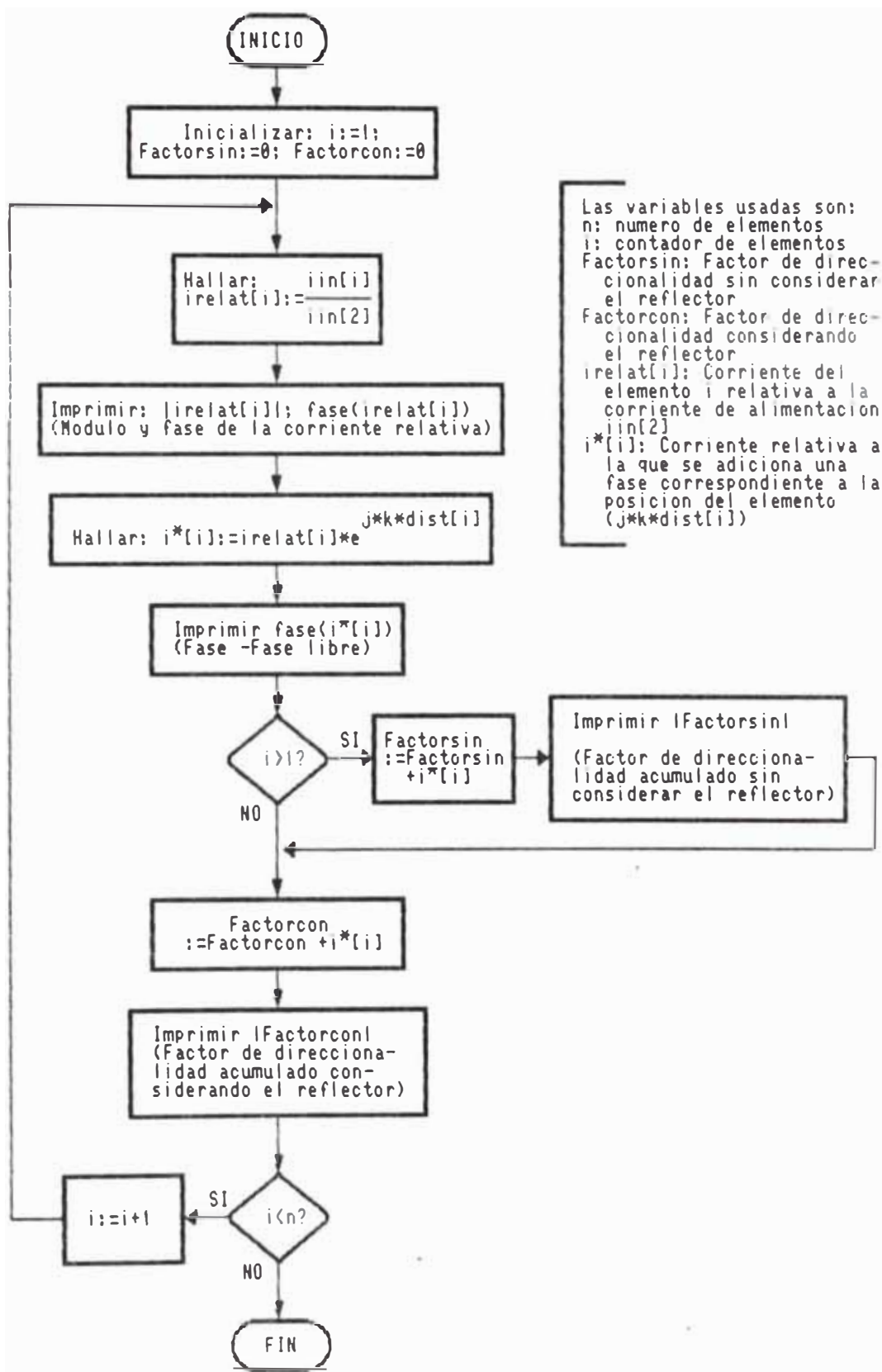


FIG. 4.1.8 DIAGRAMA DE FLUJO PARA LA OBTENCION DEL FACTOR DE DIRECCIONALIDAD Y VARIACION DE FASE

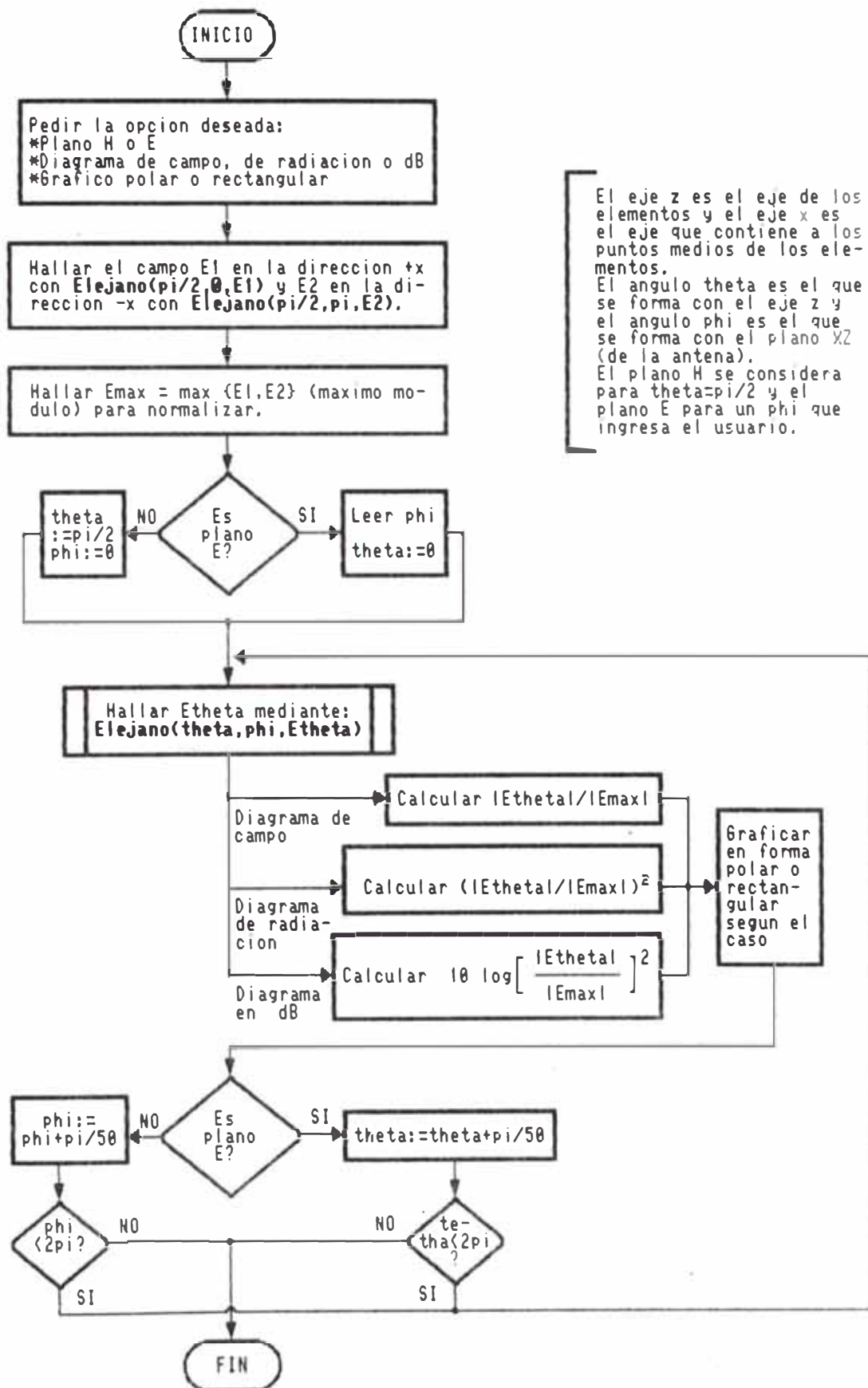
Esta opción del programa como se indica en el diagrama de flujo de la figura 4.1.8 realiza el cálculo sucesivo de ambos factores de direccionalidad obteniendo primero las corrientes relativas de los elementos parásitos respecto a la del elemento alimentado ($i_{in}[i]/i_{in}[2]$) en módulo y en fase, luego muestra las fases añadiéndoles el factor $e^{jk \cdot dist[i]}$ siendo $dist[i]$ la posición de cada elemento i respecto al dipolo alimentado, fase a la que llamamos F -Fibre, para finalmente mostrar el módulo del factor de direccionalidad acumulado hasta el elemento de que se trate.

Cuando se note una disminución en el módulo del factor de direccionalidad, se está identificando un director que en realidad desempeña funciones de reflector pues genera una onda reflejada.

4.1.9 Obtención de los patrones de radiación

La disposición geométrica es la que se ha definido con anterioridad. El eje Z es el eje de los elementos y el eje Y es el eje que contiene a los puntos medios de los elementos.

El ángulo θ es el ángulo que una dirección dada forma con el eje z y el ángulo ϕ es el ángulo que dicha dirección forma con el eje de la antena.



El eje z es el eje de los elementos y el eje x es el eje que contiene a los puntos medios de los elementos.
El angulo theta es el que se forma con el eje z y el angulo phi es el que se forma con el plano xz (de la antena).
El plano H se considera para theta=pi/2 y el plano E para un phi que ingresa el usuario.

FIG. 4.1.9.- DIAGRAMA DE BLOQUES DE LA OPCION PATRON DE RADIACION

De acuerdo al diagrama de flujo de la figura 4.1.9, lo primero que se hace es pedir la opción deseada entre las siguientes:

Plano H, Campo,	Rectangular
Plano H, Campo,	Polar
Plano H, Radiación,	Rectangular
Plano H, Radiación,	Polar
Plano H, Decibelios,	Rectangular
Plano E, Campo,	Rectangular
Plano E, Campo,	Polar
Plano E, Radiación,	Rectangular
Plano E, Radiación,	Polar
Plano E, Decibelios,	Rectangular

Luego se halla el campo E_1 en la dirección $+X$ y el campo E_2 en la dirección $-X$; tomándose E_{max} como aquel de ambos que tiene el mayor módulo.

Esto es normalmente suficiente para determinar el mayor campo lejano para normalizar.

A continuación, si se trata del plano H se inicializa θ a $\pi/2$ y ϕ a 0, pero si se trata del plano E, se solicita al usuario que ingrese un valor de ϕ y se inicializa θ a 0.

Se calcula el valor del campo eléctrico lejano

utilizando la llamada al procedimiento Elejano(theta,phi,Etheta), como se vio en la opción ganancia y luego se calcula

$$\frac{|E_{theta}|}{|E_{max}|}$$

si se trata de un diagrama de campo, o

$$\frac{|E_{theta}|^2}{|E_{max}|^2}$$

si se trata de un diagrama de radiación, o

$$10\text{Log}_{10} \left[\frac{|E_{theta}|^2}{|E_{max}|^2} \right]$$

si se trata de un diagrama en decibelios respecto a la antena isotrópica (dBi).

Estos valores se grafican en forma rectangular o polar de acuerdo a la opción elegida.

Se aumenta sucesivamente el valor del ángulo θ (si se trata del plano E) o el valor del ángulo ϕ (si se trata del plano H) en pasos de 3.6 grados y se repite el procedimiento anterior hasta los 360 grados.

La velocidad de ejecución de esta tarea depende de este número de puntos (100).

4.2 Descripción detallada de las rutinas básicas

En la descripción global anterior se utilizan rutinas para el llenado de la matriz y para la resolución de la ecuación matricial de modo de obtener la distribución de corrientes, y posteriormente se usa otra rutina para a partir de la distribución de corrientes obtener el campo lejano en función de θ y ϕ . Describiremos a continuación estas rutinas que son fundamentales para el programa.

4.2.1 Llenado de la matriz y solución de la ecuación matricial.

Como se ha explicado mas arriba, la llamada al procedimiento

```
Halloinzi(2*pi/lo,dds,radio,n,nint,ndip,nmodn,dist,iii)
```

permite a la rutina de **SIMULACION** obtener las corrientes en cada modo. Las unidades precompiladas **COMPLEJ** y **RESOLV** contienen las surutinas necesarias para esto. La unidad **COMPLEJ** contiene los procedimientos para manejar complejos y calcular ciertas funciones básicas como las funciones especiales y las funciones que calculan las impedancias mutuas de acuerdo a los diferentes kernel, mientras que la unidad **RESOLV** contiene los procedimientos

de llenado de la matriz y de resolución de la ecuación matricial.

Estas unidades se encuentran detalladas en el apéndice. A continuación describiremos sus subrutinas principales, que pueden consultarse en dicho apéndice para mayor referencia.

4.2.2 Unidad COMPLEJ

Contiene los procedimientos para manejar complejos y calcular ciertas funciones básicas como las funciones especiales y las funciones que calculan las impedancias mutuas de acuerdo a los diferentes kernel.

4.2.2.1 Definición de constantes globales

Se definen las siguientes constantes globales:

numero_máximo_de_modos = 97: Es la dimensión máxima de la matriz compleja. La matriz formada junto con las otras variables temporales son almacenadas en un único segmento de pila (stack) de 64 kbytes, y por ende no debe excederse este valor, como se verá.

numero_máximo_de_elementos = 15: Es el número máximo de elementos que arbitrariamente se ha fijado en

15. Puede ser cambiado fácilmente con solo cambiar el valor de esta constante, siempre y cuando no se exceda el número máximo total de modos o subsegmentos en que se divide el arreglo.

4.2.2.2 Definición de tipos globales de variables

Se definen los siguientes tipos globales de variables:

complejo record re,im:real end: El tipo de variable "complejo" es un registro de dos campos: "re" (real) e "im" (imaginario). Son números de tipo "real" (punto flotante de 6 bytes y 11 cifras significativas desde $10E-38$ hasta $10E+38$). Como almacenaremos solamente los elementos en la diagonal o por encima de ella, tendremos $(97)(98)/2$ números complejos de 12 bytes lo que hacen 57036 bytes. Usaremos como se verá la máxima extensión de pila que ofrece el compilador Turbo Pascal en Modo Real de trabajo del Microprocesador, que es 65520. El resto de espacio queda para las otras variables temporales de los procedimientos usados.

vector_complejo_de_modos = array [1 .. numero máximo de_modos] of complejo: Este tipo de variable es un vector complejo de dimensión igual al número máximo de modos, de modo que puede contener las corrientes o los voltajes de cada uno

vector_real_de_elementos = array [1 .. numero máximo de_elementos] of real: Este tipo de variable es un vector real de dimensión igual al número máximo de elementos, de modo que puede contener las posiciones, las longitudes o los radios de cada uno.

vector_entero_de_elementos = array [1 .. numero_máximo_de_elementos] of integer: Este tipo de variable es un vector entero de dimensión igual al número máximo de elementos, de modo que puede contener el número de modos en que se ha dividido cada uno.

vector_complejo_de_elementos = array [1 .. numero_máximo_de_elementos] of complejo: Este tipo de variable es un vector complejo de dimensión igual al número máximo de elementos, de modo que puede contener los voltajes de alimentación de cada uno.

4.2.2.3 Definición de procedimientos y funciones

function modulo(z:complejo):real: Función que calcula el módulo de un complejo.

function fase(z:complejo):real: Función que calcula la fase de un complejo entre $-\pi$ y π .

procedure conjugado(z : complejo ; var zconj : complejo): Función que calcula el conjugado de un com-

plejo.

```
procedure suma3complejos(z1,z2,z3:complejo; var
zsum:complejo): Suma tres complejos.
```

```
procedure suma2complejos(z1,z2:complejo; var
zsum:complejo): Suma dos complejos.
```

```
procedure resta_complejos(z1,z2:complejo; var
zrest:complejo): Resta dos complejos.
```

```
procedure multiplica_real_por_complejo (r:real;
z:complejo; var zprodre:complejo): Multiplica un real por
un complejo.
```

```
procedure multiplica_complejo_por_jota (z: com-
plejo; var zjota:complejo): Multiplica un complejo por la
unidad imaginaria.
```

```
procedure ExponencialCompleja(r:real; var zcis:
complejo): Efectúa  $zcis = \exp(j*r) = \cos(r) + j \sin(r)$ .
```

```
procedure invierte_complejo(z:complejo; var
zinv:complejo): Invierte un complejo.
```

```
procedure multiplica_complejos(z1,z2:complejo;
var zprod:complejo): Multiplica dos complejos.
```

```

procedure divide_complejos(z1,z2:complejo; var
zdivi:complejo): Divide dos complejos.

```

Estos procedimientos realizan las operaciones que sus nombres indican con los parámetros de entrada dando el resultado en la variable de salida (final).

```

procedure multiplica_ExponencialCompleja_por_
complejo (r:real;var z:complejo): Este procedimiento
recibe una variable compleja y la multiplica por la
exponencial compleja del real que recibe. El complejo es
a la vez parámetro de entrada y de salida.

```

```

procedure calcula_campo_electrico_en_z (r,z,k,d:
real; var Ez:complejo): Este procedimiento utiliza la
fórmula 3.7.2.2 (ver) para calcular  $E_z(r,z)$ ; es decir, la
componente  $z$  del campo eléctrico evaluado en un punto de
coordenadas cilíndricas  $r,z$  generado por un filamento de
corriente centrado en el origen de la forma dada por
 $I(z') = \frac{\text{sen}(k(d - |z'|))}{\text{sen}(kd)}$  donde "d" es la semilongitud
del filamento y  $k$  es la constante de propagación:
 $k = 2\pi/\text{longitud de onda}$ . Este filamento representa a un
modo (corriente unitaria).

```

```

function Iz(z,k,d:real):real: Esta función repre-
senta la corriente de un filamento:  $I(z) = \frac{\text{sen}(k(d - |z|))}{\text{sen}(kd)}$  donde "d" es la semilongitud del filamento y  $k$  es
la constante de propagación:  $k = 2\pi/\text{longitud de onda}$ . Este

```

filamento representa a un modo (corriente unitaria).

```

procedure integra_Ez_por_Iz(r,h,k,d1,d2:real;
numero_de_subintervalos_en_z:integer;var      integral_Ez_
por_Iz :complejo): Encontramos su implementación en la
figura 4.2.3.1. Este procedimiento recibe como valores
de entrada la distancia horizontal r y vertical h entre
los centros de dos filamentos verticales de semilon-
gitudes d1 y d2, así como la constante de propagación k y
el número de subintervalos para efectuar la integración
numérica, y, considerando en el filamento 1 una corriente
 $I_1(z') = \frac{\text{sen}(k(d_1 - |z'|))}{\text{sen}(kd_1)}$ ; que genera un campo
eléctrico  $E_z(z)$  como el que se calcula en el procedi-
miento calcula_campo_electrico_en_z, integra el producto
de dicho campo  $E_z(z)$  observado en el filamento 2 por la
distribución de corriente unitaria sobre el filamento 2.
 $I_2(z) = \frac{\text{sen}(k(d_2 - |z|))}{\text{sen}(kd_2)}$ .

```

Utiliza la regla del trapecio y divide el fila-
mento 2 en un número de subintervalos dado por el paráme-
tro de entrada `numero_de_subintervalos`. El resultado es
el negativo de la impedancia mutua entre dichos filamen-
tos de corriente y es asignado a la variable compleja
`integral_Ez_por_Iz`.

```

procedure CalcZmutuaReducidaPorTrapecio (m,n,
nmod1, nmod2, numero_de_subintervalos_en_z:integer; I1,
I2, k,r:real; var zmn:complejo): La implementación de

```



```

procedure integra_Ez_por_Iz(r,h,k,d1,d2:real;
      numero_de_subintervalos_en_z:integer;
      var integral_Ez_por_Iz:complejo);
  (* Para efectuar la integración se toma como origen *)
  (* de coordenadas el centro del filamento 1. *)
var delta:real; (* delta es la longitud de los subintervalos en el filamento 2. *)
  z:real; (* z va a ser la variable de integración que varía *)
  (* desde h-d2 hasta h+d2 a intervalos de delta en delta. *)
  (* z varía desde h-d2 hasta h+d2, pero como Iz es nulo *)
  (* en los extremos, los valores del integrando correspondiente *)
  (* lo son y no se toman en consideración para la sumatoria. Entonces la fórmula de *)
  (* integración es: delta * Σ Ez(z) * Iz(z) para *)
  (* z=h-d2+1*delta variando i desde 1 hasta *)
  (* numero_de_subintervalos-1. *)
  (* Como la función Iz toma como punto de referencia *)
  (* el centro del filamento en que se calcula, para *)
  (* Iz(z) se hará la llamada a función Iz(z-h,k,d2) *)
  i:integer; (* i es el contador que se usa para la sumatoria *)
  Ez: complejo;
  Ez_por_Iz:complejo;
begin
  delta:=2*d2/numero_de_subintervalos_en_z;
  (* la longitud de los subintervalos delta es igual a *)
  (* la longitud total del filamento 2 (2*d2) entre el *)
  (* numero total de subintervalos *)
  z:=h-d2; (* El valor de z para i=0 es h-d2 *)
  integral_Ez_por_Iz.re:=0;
  integral_Ez_por_Iz.im:=0;
  (* Inicializo a cero el valor de la sumatoria *)
  for i:=1 to numero_de_subintervalos_en_z-1 do
    begin
      z:=z+delta;
      calcula_campo_electrico_en_z(r,z,k,d1,Ez); (* calculo Ez(z) *)
      multiplica_real_por_complejo(Iz(z-h,k,d2),Ez,Ez_por_Iz);
      (* multiplico por Iz(z-h,k,d2) (corriente en el filamento 2 *)
      (* en dicho punto) y llevo el resultado a la *)
      (* variable Ez_por_Iz *)
      integral_Ez_por_Iz.re:=integral_Ez_por_Iz.re+Ez_por_Iz.re;
      integral_Ez_por_Iz.im:=integral_Ez_por_Iz.im+Ez_por_Iz.im;
      (* Adiciono este término a la sumatoria *)
    end;
  multiplica_real_por_complejo(delta,integral_Ez_por_Iz,integral_Ez_por_Iz);
  (* Calculada la sumatoria, la multiplico por delta *)
end;

```

Fig. 4.2.2.3.1.- Rutina Integra_Ez_por_Iz

este procedimiento se muestra en la figura 4.2.2.3.2.

```

procedure CalcZmutuaReducidaPorTrapezio
  (m,n,nmod1,nmod2,numero_de_subintervalos_en_z:integer;
   l1,l2,k,r:real;
   var zmn:complejo);
var d1,d2,h:real;(* calcula d1,d2 y h para usar el procedimiento *)
                (* multiplica_real_por_complejo(-1,zmn,zmn) como se *)
                (* explica en el encabezado de interface *)
begin
  d1:=l1/(nmod1+1);
  d2:=l2/(nmod2+1);
  h:=(-l2/2+n*d2)-(-l1/2+m*d1);
                (* Calcula d1,d2 y h *)
  integra_Ez_por_Iz(r,h,k,d1,d2,numero_de_subintervalos_en_z,zmn);
                (* Efectúa la integración *)
  multiplica_real_por_complejo(-1,zmn,zmn)
                (* Cambia de signo *)
end;

```

Fig. 4.2.2.3.2- Rutina CalcZmutuaReducidaPorTrapezio

Calcula la impedancia mutua entre dos subelementos de lugares m y n pertenecientes a filamentos de longitudes $l1$ y $l2$ respectivamente, estando el primero dividido en $nmod1$ subelementos o modos ($nmod1+1$ subsegmentos) y el segundo en $nmod2$ subelementos ($nmod2+1$ subsegmentos). El parámetro de entrada $nint$ nos indica el número de subintervalos para aplicar la regla del trapecio.

Se utiliza el kernel reducido y el procedimiento ya visto `integra_Ez_por_Iz` calculando previamente la semilongitud de los subelementos o modos (longitud de los subsegmentos) $d1=l1/(nmod1+1)$ y $d2=l2/(nmod2+1)$. Se cambia el signo del resultado final pues dicha integral

es el opuesto de la impedancia mutua.

Tenemos que k es la constante de propagación, r es la distancia horizontal entre los filamentos, la distancia vertical entre los centros de acuerdo a la ecuación 3.9.11 es: $h = (-l_1/2 + m*d_1) - (-l_2/2 + n*d_2)$ y z_{mn} es la variable de salida.

`procedure CalcZmutuaExactaPorTrapezio(separacion_entre_modos, numero_de_modos, numero_de_subintervalos en z :integer; l,k,a:real; var zmn:complejo; numero_de_subintervalos_en_phi:integer):` Este procedimiento se aplica para hallar la impedancia mutua entre subelementos del mismo elemento de posiciones m y n , usando el kernel exacto.

La variable `separacion_entre_modos` se define como $|m-n|$ y l es la longitud del elemento, k es la constante de propagación, a es el radio y `numero_de_modos` es el número de modos del elemento. La implementación del mismo se muestra en la figura 4.2.2.3.3.

Efectuamos la integración vista en la sección 3.8.2 para obtener la impedancia mutua con el kernel exacto como el valor medio de las impedancias mutuas obtenidas usando el kernel reducido con el procedimiento `CalcZmutuaReducidaPorTrapezio` (usando una partición en z dada por la variable `numero_de_subintervalos_en z` e

```

procedure CalcZmutuaExactaPorTrapecio
  (separacion_entre_modos,numero_de_modos,numero_de_subintervalos_en_z:integer;
  l,k,a:real;var zmn:complejo;numero_de_subintervalos_en_phi:integer);
var phi,delta,p,d:real; i:integer; zmutua_en_funcion_de_phi:complejo;
  (§ phi: variable de integración (ángulo azimutal  $\phi$ ) que varía de 0 a  $\pi$       §)
  (§ delta: longitud de los intervalos de integración en  $\phi$                       §)
  (§ p: distancia entre dos generatrices del cilindro de radio a separadas un ángulo phi:  $p=2a\sin(\phi/2)$  §)
  (§ d: semilongitud de los subelementos                                         §)
  (§ i: contador de subintervalos en  $\phi$  de 0 a  $\pi$                                §)
  (§ zmutua_en_funcion_de_phi: impedancia mutua cuyo valor medio va a hallarse §)
begin
  d:=1/(1+numero_de_modos); (§ semilongitud de los subelementos                §)
  delta:= $\pi$ /numero_de_subintervalos_en_phi;
  (§ hallamos la longitud de los intervalos de integración en  $\phi$                 §)
  (§ La fórmula del valor medio es:                                              §)
  (§  $\int zmutua\_en\_funcion\_de\_phi(p(\phi)=2a\sin(\phi/2))$                         §)
  (§  $zmn=$ -----                                                                    §)
  (§ numero_de_subintervalos_en_phi                                             §)
  (§ para  $\phi=1\delta-\delta/2$  (punto medio del intervalo i); variando i       §)
  (§ desde 1 hasta numero_de_subintervalos_en_phi                              §)
  phi:=-delta/2; (§ El valor de phi para i=0 es -delta/2                          §)
  zmn.re:=0; zmn.im:=0; (§ Inicializo a cero el valor de la sumatoria          §)
  for i:=1 to numero_de_subintervalos_en_phi do
    begin
      phi:=phi+delta; (§ actualizo el valor de z, que cumplirá  $\phi=1\delta-\delta/2$  §)
      p:= $2a\sin(\phi/2)$ ; (§ hallo p en función de phi                            §)
      CalcZmutuaReducidaPorTrapecio(1,1+separacion_entre_modos,
        numero_de_modos,numero_de_modos,numero_de_subintervalos_en_z,
        l,l,k,p,zmutua_en_funcion_de_phi);
        (§ halla zmutua_en_funcion_de_phi( $p(\phi)=2a\sin(\phi/2)$ ) §)
      case separacion_entre_modos of
        0: zmutua_en_funcion_de_phi.im:=zmutua_en_funcion_de_phi.im
          + $120\cos(kd)/\sin(kd)\ln(2d/p)$ ;
        1: zmutua_en_funcion_de_phi.im:=zmutua_en_funcion_de_phi.im - $60/\sin(kd)\ln(2d/p)$ 
      end; (§ sustrae la singularidad logarítmica del integrando §)
        (§ de acuerdo a lo visto en la sección 3.8.2 §)
      suma2complejos(zmn,zmutua_en_funcion_de_phi,zmn)
        (§ Adiciono el término hallado a la sumatoria
    end;
  multiplica_real_por_complejo(1/numero_de_subintervalos_en_phi,zmn,zmn);
  case separacion_entre_modos of
    0: zmn.im:=zmn.im- $120\cos(kd)/\sin(kd)\ln(2d/a)$ ;
    1: zmn.im:=zmn.im+ $60/\sin(kd)\ln(2d/a)$ 
  end; (§ Sumo el resultado del valor medio de la singularidad, obtenido analíticamente §)
end;

```

Fig. 4.2.2.3.3.- Rutina CalcZmutuaExactaPorTrapecio

ingresando como r la distancia entre generatrices (filamentos de corriente) del subelemento cilíndrico separados un ángulo central ϕ , que denotaremos como p :

$$r=p(\phi)=2a \operatorname{sen}(\phi/2) \text{ para } \phi \text{ entre } -\pi \text{ y } \pi.$$

Por simetría podemos tomar el valor medio cuando ϕ varía de 0 a π en lugar de $-\pi$ a π .

Para efectuar la integración impropia, restamos del integrando el término que contiene la singularidad logarítmica de modo de poder tener una integral cuyo integrando es logarítmico y puede ser hallado analíticamente, y otra integral propia cuyo integrando no posee singularidades y puede hallarse numéricamente mediante el método del punto medio haciendo una partición en ϕ de 0 a π dada por `numero_de_subintervalos_en_phi`.

La singularidad del término propio ($m=n$, es decir, `separacion_entre_modos=0`), es $-120j \operatorname{ctg}(kd) \operatorname{Ln}(2d/p)$ y la del primer término adyacente ($|m-n|=1$; es decir `separacion_entre_modos=1`) es $60j \operatorname{csec}(kd) \operatorname{Ln}(2d/p)$.

`procedure Calcula_Ci_y_Si_Negativo(x:real; var Coseno_integral_de_x,Seno_integral_negativo_de_x:real):`

Este procedimiento calcula las funciones Coseno y Seno integrales de x de acuerdo a las expansiones de la fórmula 3.7.2.4 verificando al calcular cada término si no se ha llegado a una precisión que se ha fijado en $1E-6$, de

acuerdo al peor caso de condicionamiento de la matriz y de error de redondeo (Se verá en el apartado 4.3).

Cuando x es mayor que 16.5 (distancias mayores que 2.6 longitudes de onda) se usa la aproximación para x grande: $Ci(x) = \sin(x) * (1 - 2/x/x)/x + \cos(x) * (6/x/x - 1)/x/x$;
 $Si(x) = \pi/2 - \cos(x) * (1 - 2/x/x)/x + \sin(x) * (6/x/x - 1)/x/x$.

Estas aproximaciones tienen un error en el peor caso (obtenido calculando el siguiente término) de $24/(16.5)^4 = 0.000324$ que es suficiente considerando que las impedancias mutuas entre elementos alejados son de menor importancia para el arreglo en general.

En la figura 4.2.2.3.4 se encuentra la implementación de dicha subrutina.

La variable n es un contador que indica el grado del término que está calculándose, que denotaremos por `termino_de_grado_n`.

Los términos de grado impar contribuirán a `Seno_integral_negativo_de_x` y los de grado par a `Coseno_integral_de_x`.

El término logarítmico de `Coseno_integral_de_x` lo consideramos de grado cero y lo calculamos al inicio.

```

procedure Calcula_Ci_y_Si_Negativo(x:real;
    var Coseno_integral_de_x,Seno_integral_negativo_de_x:real);
const Ln_gamma=0.5772156; (* Ln_gamma es Ln  $\gamma$  en la fórmula 3.7.2.4 *)
var n:integer;termino_de_grado_n:real;
begin
if abs(x)>16.5
then
begin
Coseno_integral_de_x:=sin(x)*(1-2/x)/x+cos(x)*(6/x-1)/x;
Seno_integral_negativo_de_x:=-pi/2+cos(x)*(1-2/x)/x-sin(x)*(6/x-1)/x
end (* Si  $|x| > 16.5$  realizo la aproximación para x grande con dos términos*)
else (* Caso contrario se efectúa el desarrollo de (3.7.2.4) *)
begin (* Obtendremos los términos de grado 0 y 1 y los adicio-*)
(* naremos al Coseno y seno integral negativo respecti- *)
(* vamente. *)
Coseno_integral_de_x:=Ln_gamma+ln(x);
(* término de grado 0 (lo agregamos directamente al Co- *)
(* seno integral). *)
n:=1; (* A continuación calcularemos el término de grado 1 *)
termino_de_grado_n:=-x;
Seno_integral_negativo_de_x:=termino_de_grado_n;
(* Lo adicionamos al Seno integral negativo *)
repeat (* En este lazo repetitivo sucesivamente *)
(* se calculan y adicionan los siguientes dos términos *)
(* (de grado par e impar) hasta que se tiene el margen *)
(* de error deseado. *)
n:=n+1; (* El grado del siguiente término es par *)
termino_de_grado_n:=termino_de_grado_n*x*(n-1)/sqr(n);
(* Aplicamos la fórmula recursiva para la obtención del *)
(* término de grado par a partir del término de grado *)
(* anterior *)
Coseno_integral_de_x:=Coseno_integral_de_x+termino_de_grado_n;
(* Adicionamos este término de grado par al Coseno integral*)
n:=n+1; (* El grado del siguiente término es impar *)
termino_de_grado_n:=-termino_de_grado_n*x*(n-1)/sqr(n);
(* Aplicamos la fórmula recursiva para la obtención del tér-*)
(* mino de grado impar a partir del término de grado anterior*)
Seno_integral_negativo_de_x:=
Seno_integral_negativo_de_x+termino_de_grado_n
(* Adicionamos este término de grado impar al Seno inte-*)
(* gral negativo. *)
until ((abs(termino_de_grado_n/Seno_integral_negativo_de_x)<1e-6)
and (abs(termino_de_grado_n/Coseno_integral_de_x)<1e-6))
(* Esto se repite hasta que el último término calculado *)
(* sea menor que 1e-6 veces el valor acumulado del Cose-*)
(* no integral y del seno integral negativo. *)
end
end;

```

Fig. 4.2.2.2.4.- Rutina Calcula_Ci_y_Si_Negativo

Luego, haciendo que n parta de cero, observando la ecuación 3.7.2.4, tendremos:

$$T_n = \begin{cases} \ln(\gamma) + \ln(x) & \text{si } n=0 \\ \frac{(-1)^{(n-1) \text{ div } 2} x^2}{n!n} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

donde T_n es el término de grado n y div indica división entera.

Expresando esta relación en forma recursiva:

$$T_0 = \ln(\gamma) + \ln(x)$$

$$T_1 = -x$$

$$T_n = \begin{cases} \frac{(n-1) T_{n-1}}{n^2} & (n \text{ par}) \\ -\frac{(n-1) T_{n-1}}{n^2} & (n \text{ impar}) \end{cases}$$

donde los términos pares se adicionarán al coseno integral y los términos impares al seno integral.

procedure CalcZmutuaReducidaConCi_y_Si(m,n,nmod1, nmod2:integer;l1,l2,k,p:real; var zmn:complejo): Este procedimiento calcula la impedancia mutua entre dos subelementos pertenecientes a filamentos de longitudes $l1$ y $l2$ respectivamente, estando el primero dividido en $nmod1$ subelementos o modos ($nmod1+1$ subsegmentos) y el

segundo en n_{mod2} subelementos o modos ($n_{mod2}+1$ subsegmentos), usando las funciones Ci y Si (Coseno y Seno integral), que calcula de acuerdo al procedimiento **Calcula_Ci_y_Si_Negativo**, y reemplazándolas en la fórmula 3.7.2.5.

La semilongitud de los subelementos o modos (longitud de los subsegmentos) se halla efectuando: $d1=l1/(n_{mod1}+1)$ y $d2=l2/(n_{mod2}+1)$; y k es la constante de propagación, r es la distancia horizontal entre los filamentos, la distancia vertical entre los centros es de según 3.9.11 es: $h=|(-l1/2+m*d1)-(-l2/2+n*d2)|$ y z_{mn} es la variable de salida.

La implementación de esta rutina se muestra en la figura 4.2.2.3.5.

Expresamos la fórmula 3.7.2.5 del siguiente modo:

$$z_{mn}=[15/\sin(k*d1)/\sin(k*d2)][w1*acc_a-w2*acc_b \\ +w3*acc_c-w4*acc_d]$$

donde: $w1=\exp(jk(d2-h))$;

$w2=\exp(-jk(d2-h))$;

$w3=\exp(jk(d2+h))$;

$w4=\exp(-jk(d2+h))$

```

procedure CalcZmutuaReducidaConCi_y_Si(m,n,nmod1,nmod2:integer;l1,l2,k,p:real;
    var zmn:complejo);
    var d1,d2,h:real;
    I1,I2,I3,I4,I5,I6,I7,I8,I9,I10,I11,I12,acca,accb,accc,accd,w1,w2,w3,w4,wa,wb:complejo;
procedure ExponencialIntegralde_ju(p,z1,z2:real; var Im:complejo);
    var Im1,Im2:complejo;
begin
    Calcula_Ci_y_Si_Negativo(k*(sqrt(sqr(p)+sqr(z1))+z1),Im1.re,Im1.im);
    Calcula_Ci_y_Si_Negativo(k*(sqrt(sqr(p)+sqr(z2))+z2),Im2.re,Im2.im);
    resta_complejos(Im2,Im1,Im)
end;
(* Este procedimiento permite evaluar I1 a I12, ingresando z1 y z2 apropiados para cada caso *)
begin
    d1:=l1/(nmod1+1);d2:=l2/(nmod2+1);
    h:=(-l2/2+n*d2)-(-l1/2+m*d1);(* Evaluamos d1,d2 y h de la forma indicada *)
ExponencialCompleja(k*(d2-h),w1);ExponencialCompleja(-k*(d2-h),w2);
ExponencialCompleja(k*(d2+h),w3);ExponencialCompleja(-k*(d2+h),w4);
ExponencialCompleja(k*d1,wa);ExponencialCompleja(-k*d1,wb);
    (* Evaluamos w1,w2,w3,w4,wa y wb de la forma ya indicada *) ExponencialInte-
    gralde_ju(p,-(h-d1),-(h-d1-d2),I1);ExponencialIntegralde_ju(p,h-d1-d2,h-d1,I2);
ExponencialIntegralde_ju(p,-(h+d1),-(h+d1-d2),I3);ExponencialIntegralde_ju(p,h+d1-d2,h+d1,I
4);
ExponencialIntegralde_ju(p,-h,-(h-d2),I5);ExponencialIntegralde_ju(p,h-d2,h,I6);
ExponencialIntegralde_ju(p,h-d1,h-d1+d2,I7);ExponencialIntegralde_ju(p,-(h-d1+d2),-(h-d1),I
8);
ExponencialIntegralde_ju(p,h+d1,h+d1+d2,I9);ExponencialIntegralde_ju(p,-(h+d1+d2),-(h+d1),I
10);
ExponencialIntegralde_ju(p,h,h+d2,I11);ExponencialIntegralde_ju(p,-(h+d2),-h,I12);
    (* Evaluamos I1 a I12 de la forma ya indicada arriba *)
    multiplica_complejos(wa,I1,I1);multiplica_complejos(wb,I3,I3);
    multiplica_real_por_complejo(-2*cos(k*d1),I5,I5);suma3complejos(I1,I3,I5,acca);
    (* evaluamos acca=wa*I1+wb*I3 -2cos(kd1)*I5 *)
    multiplica_complejos(wa,I4,I4);multiplica_complejos(wb,I2,I2);
    multiplica_real_por_complejo(-2*cos(k*d1),I6,I6);suma3complejos(I4,I2,I6,accb);
    (* evaluamos accb=wa*I4+wb*I2 -2cos(kd1)*I6 *)
    multiplica_complejos(wa,I9,I9);multiplica_complejos(wb,I7,I7);
    multiplica_real_por_complejo(-2*cos(k*d1),I11,I11);suma3complejos(I9,I7,I11,accc);
    (* evaluamos accc=wa*I9+wb*I7 -2cos(kd1)*I11 *)
    multiplica_complejos(wa,I8,I8);multiplica_complejos(wb,I10,I10);
    multiplica_real_por_complejo(-2*cos(k*d1),I12,I12);suma3complejos(I8,I10,I12,accd);
    (* evaluamos accd=wa*I8+wb*I10 -2cos(kd1)*I12 *)
    multiplica_complejos(w1,acca,acca);multiplica_complejos(w2,accb,accb);
    multiplica_complejos(w3,accc,accc);multiplica_complejos(w4,accd,accd);
    resta_complejos(acca,accb,accb);resta_complejos(accc,accd,accd);
    suma2complejos(accb,accd,zmn);
    (* evaluamos w1*acca-w2*accb+w3*accc-w4*accd *)
    multiplica_real_por_complejo(I5/sin(k*d1)/sin(k*d2),zmn,zmn)
    (* multiplicamos por I5/sin(k*d1)/sin(k*d2) para hallar zmn *)
end;

```

Fig. 4.2.2.3.5.- Rutina CalcZmutuaReducidaConCi_y_Si

Y:

$$\begin{aligned} \text{acca} &= \text{wa} * \text{I1} + \text{wb} * \text{I3} - 2\cos(\text{kd1}) * \text{I5} \\ \text{accb} &= \text{wa} * \text{I4} + \text{wb} * \text{I2} - 2\cos(\text{kd1}) * \text{I6} \\ \text{acco} &= \text{wa} * \text{I9} + \text{wb} * \text{I7} - 2\cos(\text{kd1}) * \text{I11} \\ \text{accd} &= \text{wa} * \text{I8} + \text{wb} * \text{I10} - 2\cos(\text{kd1}) * \text{I12} \end{aligned}$$

Siendo: $\text{wa} = \exp(j\text{kd1})$

$\text{wb} = \exp(-j\text{kd1})$

I1 a I12 son las integrales de la ecuación 3.7.2.5 y las expresamos en la forma:

$$I_n = \text{ExponencialIntegral}(-ju) \left[\begin{array}{l} k(\sqrt{p^2 + z_2^2} + z_2) \\ k(\sqrt{p^2 + z_1^2} + z_1) \end{array} \right]$$

donde z_1 y z_2 dependen de m (que varía de 1 a 12) y se encuentran en (3.7.2.5).

`procedure CalcZmutuaExactaConCi_y_Si (separacion_entre_modos, numero_de_modos:integer;l,k,a:real; var zmn:complejo;numero_de_subintervalos_en_phi:integer):`
 Este procedimiento se aplica para hallar la impedancia mutua entre subelementos del mismo elemento de posiciones m y n , usando el kernel exacto. Su implementación se muestra en la figura 4.2.2.3.6. La variable `separacion_entre_modos` se define como $|m-n|$; l es la longitud del elemento, k es la constante de propagación, a es el radio del elemento y `numero_de_modos` es el número de modos del elemento.

```

procedure CalcZmutuaExactaConCi_y_Si(separacion_entre_modos,numero_de_modos:integer;
    l,k,a:real;var z0n:complejo;numero_de_subintervalos_en_phi:integer);
(* separa la singularidad logaritmica y usa la regla del punto medio *)
var phi,delta,p,d:real; i:integer; zmutua_en_funcion_de_phi:complejo;
    i: phi: variable de integraci3n (3ngulo azimutal  $\phi$ ) que varía de 0 a  $\pi$ )
    i: delta: longitud de los intervalos de integraci3n en  $\phi$ )
    i: p: distancia entre dos generatrices del cilin-
    i: dro de radio a separadas un 3ngulo phi:  $p=2a\sin(\phi/2)$ )
    i: d: semilongitud de los subelementos
    i: i: contador de subintervalos en  $\phi$  de 0 a  $\pi$ 
    i: zmutua_en_funcion_de_phi: impedancia mutua cuyo valor medio va a hallarse)
begin
    d:=1/(1+numero_de_modos);
        (* hallamos la semilongitud de los subelementos *)
    delta:=pi/numero_de_subintervalos_en_phi;
        (* hallamos la longitud de los intervalos de integraci3n en  $\phi$  *)
    (* La f3rmula del valor medio es: *)
    (*  $\sum z_{mutua\_en\_funcion\_de\_phi}(p(\phi)=2a\sin(\phi/2))$  *)
    (*  $z_{0n}=\frac{\sum z_{mutua\_en\_funcion\_de\_phi}(p(\phi)=2a\sin(\phi/2))}{numero\_de\_subintervalos\_en\_phi}$  *)
    (* para  $\phi_i=1\delta-\delta/2$  (punto medio del intervalo i); variando i *)
    (* desde 1 hasta numero_de_subintervalos_en_phi *)
    phi:=-delta/2; (* El valor de phi para i=0 es -delta/2 *)
    z0n.re:=0; z0n.im:=0; (* Inicializo a cero el valor de la sumatoria *)
    for i:=1 to numero_de_subintervalos_en_phi do
        begin
            phi:=phi+delta;(* actualizo el valor de z, que cumplir3 el  $\phi_i=1\delta-\delta/2$  *)
            p:=2*a*sin(phi/2); (* hallo p en funci3n de phi *)
            CalcZmutuaReducidaConCi_y_Si(1,1+separacion_entre_modos,numero_de_modos,numero_de_mo-
dos,
                l,l,k,p,zmutua_en_funcion_de_phi);
                (* halla  $z_{mutua\_en\_funcion\_de\_phi}(p(\phi)=2a\sin(\phi/2))$  *)
            case separacion_entre_modos of
                0: zmutua_en_funcion_de_phi.im:=zmutua_en_funcion_de_phi.im
                    +120*cos(k*d)/sin(k*d)*ln(2*d/p);
                1: zmutua_en_funcion_de_phi.im:=zmutua_en_funcion_de_phi.im-60/sin(k*d)*ln(2*d/p)
            end; (* sustrae la singularidad logaritmica del integrando *)
                (* de acuerdo a lo visto en la secci3n 3.8.2 *)
            suma2complejos(z0n,zmutua_en_funcion_de_phi,z0n)
            end; (* Adiciono el t3rmino hallado a la sumatoria *)
            multiplica_real_por_complejo(1/numero_de_subintervalos_en_phi,z0n,z0n);
                (* Calculada la sumatoria, la divido entre el n3mero de subintervalos obteniendo *)
                (* el resultado de la parte num3rica (sin la singularidad) *)
            case separacion_entre_modos of
                0: z0n.im:=z0n.im-120*cos(k*d)/sin(k*d)*ln(2*d/a);
                1: z0n.im:=z0n.im+60/sin(k*d)*ln(2*d/a)
            end; (* Sumo el resultado del valor medio de la singularidad, obtenido analiticamente *)
        end;
    end;
end;

```

Fig. 4.2.2.3.6.- Rutina CalcZmutuaExactaConCi_y_Si

Efectuamos la integración vista en la sección 3.8.2 para obtener la impedancia mutua con el kernel exacto como el valor medio de las impedancias mutuas obtenidas usando el kernel reducido.

Utilizamos el procedimiento `CalcZmutuaReducidaConCi_y_Si` (haciendo r =distancia entre generatrices-filamentos de corriente- del subelemento cilíndrico separados un ángulo central ϕ , que denotaremos como p : $r=p(\phi)=2a \text{ sen}(\phi/2)$) para ϕ entre $-\pi$ y π .

Por simetría podemos tomar el valor medio cuando ϕ varía de 0 a π en lugar de $-\pi$ a π .

Para efectuar la integración impropia, restamos del integrando el término que contiene la singularidad logarítmica de modo de poder tener una integral cuyo integrando es logarítmico y puede ser hallado analíticamente, y otra integral propia cuyo integrando no posee singularidades y puede hallarse numéricamente mediante el método del punto medio haciendo una partición en ϕ de 0 a π dada por `numero_de_subintervalos_en_phi`.

Del mismo modo que se vio anteriormente, la singularidad del término propio ($m=n$, es decir, `separacion_entre_modos=0`), es $-120j \text{ ctg}(kd)\text{Ln}(2d/p)$ y la del primer término adyacente ($|m-n|=1$; es decir `separacion_entre_modos=1`) es $60j \text{ csec}(kd)\text{Ln}(2d/p)$.

4.2.3 Unidad RESOLV

Esta unidad contiene el procedimiento para hallar la distribución de corrientes sobre un arreglo de dipolos cilíndricos rectos simétricos coplanares. **Utiliza las** constantes, variables, tipos de datos, procedimientos y funciones para complejos de la unidad COMPLEJ.

4.2.3.1 Definición de variables globales

Usar_coseno_y_seno_integral:char: Esta variable indica si se van a usar funciones Coseno y Seno Integrales para el cálculo de los términos de la matriz. Usar `coseno_y_seno_integral = 's'` o `'S'` indica usar dichas funciones, y de lo contrario, `Usar_coseno_y_seno_integral = 'n'` o `'N'` indica efectuar la integración en z mediante la regla del trapecio. Nosotros vamos a usar estas funciones especiales, para acelerar el cálculo de los elementos de la matriz y a la vez aumentar la precisión.

Forma_del_Kernel:char: Esta variable indica si se va a usar la forma reducida o exacta (mediante la aproximación de dos términos o mediante integración) para los términos de la matriz que corresponden a las interacciones dentro de un mismo dipolo, es decir, los términos de las submatrices que se encuentran en la diagonal (para las interacciones entre subelementos de dipolos diferentes por estar alejados mutuamente usamos la forma reduci-

da)

Forma del_Kernel='a' indica usar la forma reducida.

Forma del_Kernel='d' indica usar la forma exacta mediante radio equivalente de dos términos que se ha visto en las ecuaciones (3.8.2.1) y (3.8.2.2), es decir, si a es el radio, $p=a*\sqrt{2}$ para la parte resistiva ($z_{mn.re}$, siendo z_{mn} la impedancia que se está calculando) y siendo $p=a*(1-0.4098a/d)$ para la parte reactiva ($z_{mn.im}$).

Forma del_Kernel='i' indica usar integración mediante la separación de la singularidad logarítmica como se ve en la unidad COMPLEJ.

radio_máximo_para_forma_reducida,radio_maximo_para_termino_doble :real: Indican el radio máximo para utilizar la forma reducida y para la aproximación de doble término respectivamente. Estos valores se fijan al inicio del programa y nos permiten tener un procedimiento automático de selección de la forma del kernel a usar, del siguiente modo: si el radio es menor que **radio_maximo_para_forma_reducida**, se usa la forma reducida, si no lo es, pero es menor que **radio_máximo_para_termino_doble**, se usa la aproximación de dos términos del radio equivalente, y si es mayor que ambos, se usa la integración mediante la separación de la singularidad logarít-

mica.

4.2.3.2 Definición de tipos de variables locales

MatrizCompleja=array[1..((1+numero_máximo_de_modos)*numero_máximo_de_modos) div 2] of complejo: Es un tipo de arreglo unidimensional de complejos que representa a la matriz compleja Z de la ecuación a resolver, pues lo que se ha hecho es, como la matriz es simétrica, almacenar en este arreglo unidimensional solo los elementos que están en y por sobre la diagonal y numerarlos horizontalmente, de modo que el número de elementos del arreglo está dado por la ecuación: $((1+numero_máximo_de_modos)*numero_máximo_de_modos) \div 2$

4.2.3.3 Definición de procedimientos y funciones locales

Para lograr la implementación de la rutina **Halloinzin** que es una rutina para obtener la distribución de corrientes sobre el arreglo o antena y va a tener uso externo a la unidad, se necesitan algunas funciones y procedimientos de uso interno a esta unidad y que se describen a continuación.

function OrdenamientoTriangular(i,j,n:integer) :integer: Mediante esta función (cuya implementación se muestra en la figura 4.2.3.3.1)


```

function OrdenamientoTriangular(i,j,n:integer):integer;
begin
  if j>=1 then OrdenamientoTriangular:=((i-1)*(2*n+2-1)) div 2+j-1+1
  else OrdenamientoTriangular:=((j-1)*(2*n+2-j)) div 2+1-j+1
  (* Si j<1, el elemento ij está representado por su simétrico *)
  (* ji. *)
end;

```

Fig. 4.2.3.3.1 Función OrdenamientoTriangular

se logra el ordenamiento horizontal, obteniéndose el valor del subíndice del arreglo unidimensional descrito arriba correspondiente al elemento de subíndices i, j de la matriz cuadrada, siendo $n \times n$ la dimensión de dicha matriz.

procedure ResolverEcuacion(Numero_de_modos: integer; var Z:MatrizCompleja; var V:vector_complejo_de_modos): Este procedimiento simplemente recibe una matriz compleja Z y un vector complejo V y da la respuesta I del sistema de ecuaciones $ZI=V$ asignándola a V que es a la vez variable de entrada y de salida. Su implementación se muestra en la figura 4.2.3.3.2.

Para esto usa el método de eliminación de Gauss simple (de eliminación hacia adelante y sustitución hacia atrás) aprovechando la simetría.

Se cumple que para una matriz simétrica dicho método al eliminar las primeras columnas de la parte

```

procedure ResolverEcuacion(Numero_de_modos:integer;
    var Z:MatrizCompleja; var V:vector_complejo_de_modos);
var z0,z1:complejo;
    (* variables de almacenamiento temporal *)
    i,j,k:integer;
    (* k: contador de eliminación hacia adelante (número de la variable *)
    (* eliminada) *)
    (* i: contador de filas *)
    (* j: contador del orden dentro de la fila (columna) *)
begin
    (* ELIMINACION HACIA ADELANTE: *)

    for k:=1 to Numero_de_modos do

        (* el siguiente es el procedimiento de eliminación de la variable k *)
        (* en las ecuaciones k+1 a Numero_de_modos *)
        begin
            writeln;
            write( Resolviendo ',k);
            for i:=k+1 to Numero_de_modos do
                begin

                    (* el siguiente es el procedimiento de eliminación de la variable k *)
                    (* en la ecuación i *)
                    divide_complejos(Z[OrdenamientoTriangular(k,i,Numero_de_modos)],
                        Z[OrdenamientoTriangular(k,k,Numero_de_modos)],z0);
                    (* z0 es el "número de veces" que debe restarse la fila k de la fila i *)
                    (* i para eliminar la variable k de la fila i (elemento Zik=0) *)

                    for j:=i to Numero_de_modos do
                        begin

                            (* A continuación se resta del elemento j de la fila i z0 veces *)
                            (* el elemento j de la fila k. Nótese que sólo es necesario hacer *)
                            (* esto para j>i, pues los otros elementos pertenecen a la parte *)
                            (* triangular inferior. Esta pequeña modificación al algoritmo *)
                            (* conocido de la eliminación de Gauss Simple es la que permite *)
                            (* reducir casi a la mitad el tiempo de resolución de la ecuación *)
                            (* matricial. *)
                            multiplica_complejos(z0,Z[OrdenamientoTriangular
                                (k,j,Numero_de_modos)],z1);
                            resta_complejos(Z[OrdenamientoTriangular(i,j,Numero_de_modos)],
                                z1,Z[OrdenamientoTriangular(i,j,Numero_de_modos)])
                        end;
                    (* Se aplica lo anterior a V (matriz extendida en una columna) *)
                    multiplica_complejos(z0,V[k],z1);
                    resta_complejos(V[i],z1,V[i])
                end
            end;
        end;
    end;
end;

```

Fig. 4.2.3.3.2.- Rutina ResolverEcuacion

triangular inferior en la eliminación hacia adelante, deja en la parte inferior derecha, con las columnas que no son ceros y las filas correspondientes, una matriz cuadrada simétrica. Entonces los elementos de la parte triangular inferior nunca necesitan ser almacenados (lo que permite utilizar el arreglo unidimensional `Z:MatrizCompleja`, reduciendo a la mitad el espacio de almacenamiento) y además tampoco necesitan ser calculados, reduciendo de este modo casi a la mitad el tiempo de cómputo pues la sustitución hacia atrás es mucho más rápida.

```

procedure CalculaMatriz(k:real;var semilongitud_
del_modo:vector_real_de_elementos;var radio :vector real
de_elementos;numero_de_elementos: integer;numero_de_sub-
intervalos_de_integracion_en_z:integer; numero de subin-
tervalos_de_integracion_en_phi: integer;var numero_de_mo-
dos:vector_entero_de_elementos;var posicion_en_x:vector_
real_de_elementos;var Z:MatrizCompleja): Este procedi-
miento realiza el llenado de la matriz en base a los
datos que se tienen del arreglo y las opciones de los
kernel que se han configurado.

```

Los parámetros usados tienen el siguiente significado: **k**: constante de propagación; **semilongitud_ del modo**: semilongitudes de los modos de cada elemento; **radio**: radios de los elementos; **numero de_elementos**: número de elementos que tiene el arreglo; **numero de subin-**

intervalos de integracion en z y **numero de subintervalos de integracion en phi**: números de intervalos de integración en z y ϕ ; **numero de modos**: número de modos de los elementos; **posicion en x**: posiciones en x de los elementos; **Z**: Matriz formada del arreglo.

Además, esta subrutina define las siguientes variables internas: **u,v,p:integer**: contadores para los subíndices; **numero_total_de_modos:integer**: asignado al número total de modos en el arreglo, que debe calcularse; **zz: complejo**: variable intermedia para algunas operaciones; **posicion_inicial_de_la_submatriz: vector_entero_de_elementos**: indicará el número total de modos que tienen todos los elementos anteriores a un elemento dado y permite tener una posición relativa de la submatriz que se está calculando dentro de la matriz total.

También se definen los siguientes dos subprocedimientos, que se explicarán posteriormente: **Calcula_Submatriz_en_un_mismo_elemento_del_arreglo** (**posicion_inicial, num_de_modos:integer; r,d:real**): calcula los elementos de una submatriz de impedancias mutuas entre los modos de un mismo elemento y las coloca en la matriz general; **procedura Calcula_Submatriz_entre elementos diferentes del arreglo** (**posicion_inicial_1, posicion_inicial_2: integer; numero_de_modos_1, numero_de_modos_2:integer; distancia_horizontal, semilongitud_del_modos1, semilongitud_del_modos2:real**): calcula los elementos de una submatriz

de impedancias mutuas entre los modos de elementos diferentes y las coloca en la matriz general.

Entonces, podemos ver la implementación del algoritmo de llenado de la matriz general `CalculaMatriz` en la figura 4.2.3.3.3., donde se encuentra suficientemente comentada (se muestra solamente el algoritmo principal)

A continuación se detallan los dos subprocedimientos mencionados anteriormente:

`Calcula_Submatriz en_un_mismo_elemento_del_arreglo (posicion_inicial, num_de_modos:integer;r,d:real):` Este procedimiento calcula los elementos de una submatriz de impedancias mutuas entre los modos de un mismo elemento y las coloca en la matriz general.

Su implementación se encuentra en la figura 4.2.3.3.4.

Las variables de entrada son: `posicion_inicial` : indica el valor que debe sumarse a los subíndices de los elementos de la submatriz para tener los subíndices correspondientes en la matriz general (esta submatriz cuadrada será entonces colocada sobre la diagonal de la matriz general); `Num_de_modos`: indica el número de modos del elemento; `r`: indica el radio del elemento; `d`: indica la semilongitud de los modos o subelementos.

```

($ Una vez definidos los procedimientos para llenar las submatrices,      $)
($ escribimos el algoritmo de llenado de la matriz general:              $)
begin
  ($ Usando a p como contador, llenaremos los valores del vector        $)
  ($ posicion_inicial_de_la_submatriz[u] con los valores que hay que sumar $)
  ($ a los subíndices de la submatriz cuadrada formada por las impedancias $)
  ($ entre los modos del elemento u del arreglo para colocar esta submatriz $)
  ($ en la matriz general del arreglo. Para las submatrices rectangulares, $)
  ($ formadas por las impedancias mutuas entre los modos del elemento u y v, $)
  ($ debe sumarse posicion_inicial_de_la_submatriz[u] a los subíndices co- $)
  ($ respondientes al elemento u, y posicion_inicial_de_la_submatriz[v] a $)
  ($ los subíndices correspondientes al elemento v.                      $)
  p:=0;
  for u:=1 to numero_de_elementos do
    begin
      posicion_inicial_de_la_submatriz[u]:=p;
      p:=p+numero_de_modos[u]
    end;
  ($ posicion_inicial_de_la_submatriz[u] es igual al número total de modos $)
  ($ de los elementos anteriores.                                         $)
  numero_total_de_modos:=p;
  ($ De este modo se obtiene también la dimensión o número total de modos $)
  ($ de la matriz general.                                                $)
  for u:=1 to numero_de_elementos do
    Calcula_Submatriz_en_un_mismo_elemento_del_arreglo
      (posicion_inicial_de_la_submatriz[u],
       numero_de_modos[u],
       radio[u],
       semilongitud_del_modo[u]);
  ($ Calcula cada submatriz cuadrada con los datos correspondientes de posi- $)
  ($ ción relativa en la matriz, número de modos de elemento, radio del ele- $)
  ($ mento y semilongitud de los modos.                                    $)
  for u:=1 to numero_de_elementos-1 do for v:=u+1 to numero_de_elementos do
    Calcula_Submatriz_entre_elementos_diferentes_del_arreglo
      (posicion_inicial_de_la_submatriz[u],
       posicion_inicial_de_la_submatriz[v],
       numero_de_modos[u],numero_de_modos[v],
       abs(posicion_en_x[u]-posicion_en_x[v]),
       semilongitud_del_modo[u],
       semilongitud_del_modo[v]);
  ($ Calcula cada submatriz rectangular con los datos correspondientes de $)
  ($ posiciones relativas en la matriz, número de modos de cada elemento, $)
  ($ semilongitudes de los modos y haciendo distancia_horizontal = $)
  ($ abs(posicion_en_x[u]-posicion_en_x[v]) $)
end;

```

Fig. 4.2.3.3.3.- Rutina CalculaMatriz

```

procedure Calcula_Submatriz_en_un_mismo_elemento_del_arreglo
  (posicion_inicial,num_de_modos:integer;r,d:real);
  var u,v,w:integer (§ contadores §);zt:complejo; (§ para valores intermedios §)
  begin (§ Primero se selecciona el tipo de kernel usado de acuerdo al radio §)
    if (r/(2*pi/k)) <= radio_maximo_para_forma_reducida
      then Forma_del_kernel:='a'
      else if (r/(2*pi/k)) <= radio_maximo_para_termino_doble
          then Forma_del_kernel:='d'
          else Forma_del_kernel:='i'
  (§ A continuación se obtienen los elementos de la submatriz Toeplitz. Primero se §)
  (§ calcula la primera fila y se colocan los valores en el arreglo triangular Z §)
  for u:=1 to num_de_modos do (§ u es el segundo subíndice o número de la columna §)
  begin
  writeln:write('Calculando impedancia ',posicion_inicial+1,' ',posicion_inicial+u);
  case Forma_del_kernel of (§ Si es 'i' (integrado); 'a' (reducido) o 'd' (doble term.)
    'i','I': if Usar_coseno_y_seno_integral in ['s','S']
      then CalcZmutuaExactaConCi_y_Si(abs(u-1),num_de_modos,
        (1+num_de_modos)*d,k,r,zz,numero_de_subintervalos_de_integracion_en_phi)
      else CalcZmutuaExactaPorTrapeccio(abs(u-1),num_de_modos,
        numero_de_subintervalos_de_integracion_en_z,(1+num_de_modos)*d,k,r,zz,
        numero_de_subintervalos_de_integracion_en_phi);
    'a','A': if Usar_coseno_y_seno_integral in ['s','S']
      then CalcZmutuaReducidaConCi_y_Si(1,u,num_de_modos,num_de_modos,
        (1+num_de_modos)*d,(1+num_de_modos)*d,k,r,zz)
      else CalcZmutuaReducidaPorTrapeccio(1,u,num_de_modos,num_de_modos,
        numero_de_subintervalos_de_integracion_en_z,(1+num_de_modos)*d,
        (1+num_de_modos)*d,k,r,zz);
    'd','D': if Usar_coseno_y_seno_integral in ['s','S']
      then begin
        CalcZmutuaReducidaConCi_y_Si(1,u,num_de_modos,num_de_modos,
          (1+num_de_modos)*d,(1+num_de_modos)*d,k,r*sqrt(2),zt);zz.re:=zt.re;
        CalcZmutuaReducidaConCi_y_Si(1,u,num_de_modos,num_de_modos,
          (1+num_de_modos)*d,(1+num_de_modos)*d,k,r*(1-0.40976*r/d),zt);
          zz.im:=zt.im
        end
      else begin
        CalcZmutuaReducidaPorTrapeccio(1,u,num_de_modos,num_de_modos,
          numero_de_subintervalos_de_integracion_en_z,(1+num_de_modos)*d,
          (1+num_de_modos)*d,k,r*sqrt(2),zt);zz.re:=zt.re;
        CalcZmutuaReducidaPorTrapeccio(1,u,num_de_modos,num_de_modos,
          numero_de_subintervalos_de_integracion_en_z,
          (1+num_de_modos)*d,(1+num_de_modos)*d,k,r*(1-0.40976*r/d),zt);
          zz.im:=zt.im
        end;
  end;
  Z[OrdenamientoTriangular(posicion_inicial+1,posicion_inicial+u,
    numero_total_de_modos)]:=zz (§ coloca la impedancia Zlu=zz en la matriz general §)
  end;
  for u:=2 to num_de_modos do for v:=u to num_de_modos do
  Z[OrdenamientoTriangular(posicion_inicial+u,posicion_inicial+v,numero_total_de_modos)]
    :=Z[OrdenamientoTriangular(posicion_inicial+1,
      posicion_inicial+1+abs(u-v),numero_total_de_modos)];
  end; (§ Se termina llenando las otras filas en base a la primera §)

```

Fig. 4.2.3.3.4.- Llenado de submatrices en la diagonal

Primero se selecciona el tipo de kernel usado de acuerdo al radio del elemento; dándole el valor correspondiente a la variable caracter Forma_del_Kernel.

A continuación se obtienen los elementos de la submatriz (que es Toeplitz, de modo que solo es necesario calcular una fila y luego hacer que todos los elementos equidistantes de la diagonal sean iguales, o en otras palabras, cada elemento es función solo del valor absoluto de la diferencia entre sus subíndices).

Lo primero es entonces calcular la primera fila y colocar los valores obtenidos en los lugares correspondientes del arreglo triangular Z. Se va a calcular el elemento Z_{1u} , correspondiente a la impedancia mutua entre el modo 1 y el mod u en el elemento de que se trata.

Si se usa integración del kernel exacto, usamos las funciones CalcZmutuaExactaConCi_y_Si o según el caso CalcZmutuaExactaPorTrapezio, con los parámetros de entrada:

```

separacion_entre_modos = abs(u-1);
numero_de_modos = num_de_modos
l (longitud del elemento) = (1+num_de_modos)*d ;
a (radio del elemento) = r ;
k (constante de propagación) = k

```


y los números de subintervalos para integración en ϕ_1 (y z para el segundo caso) correspondientes.

La variable de salida es zz , que contendrá a la impedancia calculada.

Si se usa el kernel reducido, usamos según el caso la función `CalcZmutuaReducidaConCi_y_S1` o la función `CalcZmutuaReducidaPorTrapecio`, con los parámetros de entrada:

`m=1, n=u` (subíndices de los modos entre los cuales se va a calcular la impedancia mutua)

`nmod1 = nmod2 = num_de_modos` (número de modos del elemento = número de subelementos de los filamentos de corriente)

`l1 = l2` (longitudes de los elementos a que pertenecen cada uno de los modos - longitudes de los filamentos de corriente) - `(1+num_de_modos)*d`

`p` (distancia entre los filamentos de corriente)

`r` (radio del elemento)

`k` (constante de propagación) - `k`

Y el número de subintervalos para integración en z (para el segundo caso) correspondiente.

La variable de salida es zz , que contendrá a la impedancia calculada.

Si se usa la aproximación de dos términos del radio equivalente del elemento para el kernel exacto, tendremos que si usamos las funciones Seno y Coseno Integral, se realizan los cálculos del caso del kernel reducido con el procedimiento `CalcZmutuaReducidaConCi_y_Si` pero usando $p=r*\sqrt{2}$ para la parte real de la impedancia, y $p=r*(1-0.40976*r/d)$ para la parte imaginaria; y si no usamos estas funciones, se realizan dichos cálculos con el procedimiento `CalcZmutuaReducidaPorTrapecio`.

Una vez llenada la primera fila de la submatriz, se llenan las siguientes filas recordando que como la submatriz es toeplitz, $Z[u,v] = Z[1,|u-v|+1]$.

```
procedure  Calcula_Submatriz_entre_elementos_diferentes_del_arreglo (posicion_inicial_1, posicion_inicial_2:integer; numero_de_modos_1, numero_de_modos_2:integer; distancia_horizontal,semilongitud_del_modos1, semilongitud_del_modos2:real):
```

A los elementos entre los que se calcula la submatriz los denominamos 1 y 2, entonces las variables `posicion_inicial_1` y `posicion_inicial_2` indican la posición inicial que se suma al primer y segundo subíndices de un elemento de la submatriz rectangular (que son las impedancias mutuas entre los modos de los elementos que llamamos 1 y 2 del arreglo) respectivamente para poder colocarlos en la matriz general del arreglo.

Los parámetros `numero_de_modos_1` y `numero_de_modos_2` indican el número de modos de los elementos 1 y 2.

El parámetro `distancia horizontal` indica la distancia horizontal entre los elementos y los parámetros `semilongitud_del_modos1` y `semilongitud_del_modos2` indican la semilongitud de los modos del elemento 1 y 2 respectivamente.

Este procedimiento calcula los elementos correspondientes a las impedancias mutuas entre elementos diferentes del arreglo y los coloca en sus posiciones correspondientes en la matriz general del arreglo. Usa el kernel reducido.

Utiliza las variables internas `i,j:integer;` (que indican respectivamente el primer y segundo subíndice de los elementos que se van calculando).

Observemos atentamente la figura 4.2.3.3.5, donde se indican dos impedancias mutuas que por simetría y reciprocidad deben ser iguales en la matriz de impedancias mutuas entre dos elementos 1 y 2 con `m` y `n` elementos en total cada uno.

Podemos afirmar que se cumple que en la submatriz rectangular de impedancias mutuas:

$$Z[i,j]=Z[\text{numero_de_modos_1}+1-i,\text{numero_de_modos_2}+1-j]$$

esta propiedad es muy importante y es independiente de las longitudes de los modos. La usaremos para reducir aún más el tiempo de cálculo de los elementos de la matriz, pues esto nos permite calcular solo prácticamente la mitad de los elementos de cada submatriz rectangular, que aparece con simetría respecto al centro.

En realidad, se calcularán efectivamente solo menos de la cuarta parte de los elementos de la matriz general, si consideramos que se está aprovechando su simetría y que también se aprovecha el hecho de que en las submatrices cuadradas que están en la diagonal (que contienen las impedancias entre modos de un mismo elemento) se calcula solo la primera fila pues son Toeplitz, y en las submatrices rectangulares que no están sobre la diagonal calcularemos solo la mitad más uno de los elementos.

Como se ve en la implementación del programa, mostrada en la figuras 4.2.3.3.6 y 4.2.3.3.7, calculamos primero las $(\text{numero_de_modos_1}-1)/2$ primeras filas de la submatriz rectangular de $\text{numero_de_modos_1} \times \text{numero de modos 2}$

Calculamos $zz=Z[i,j]$ en la submatriz rectangular. Se usa el kernel reducido, y, según el caso, las funciones `CalcZmutuaReducidaConCi_y_Si` o `CalcZmutuaReducidaPorTrapezio`, con los parámetros de entrada que se

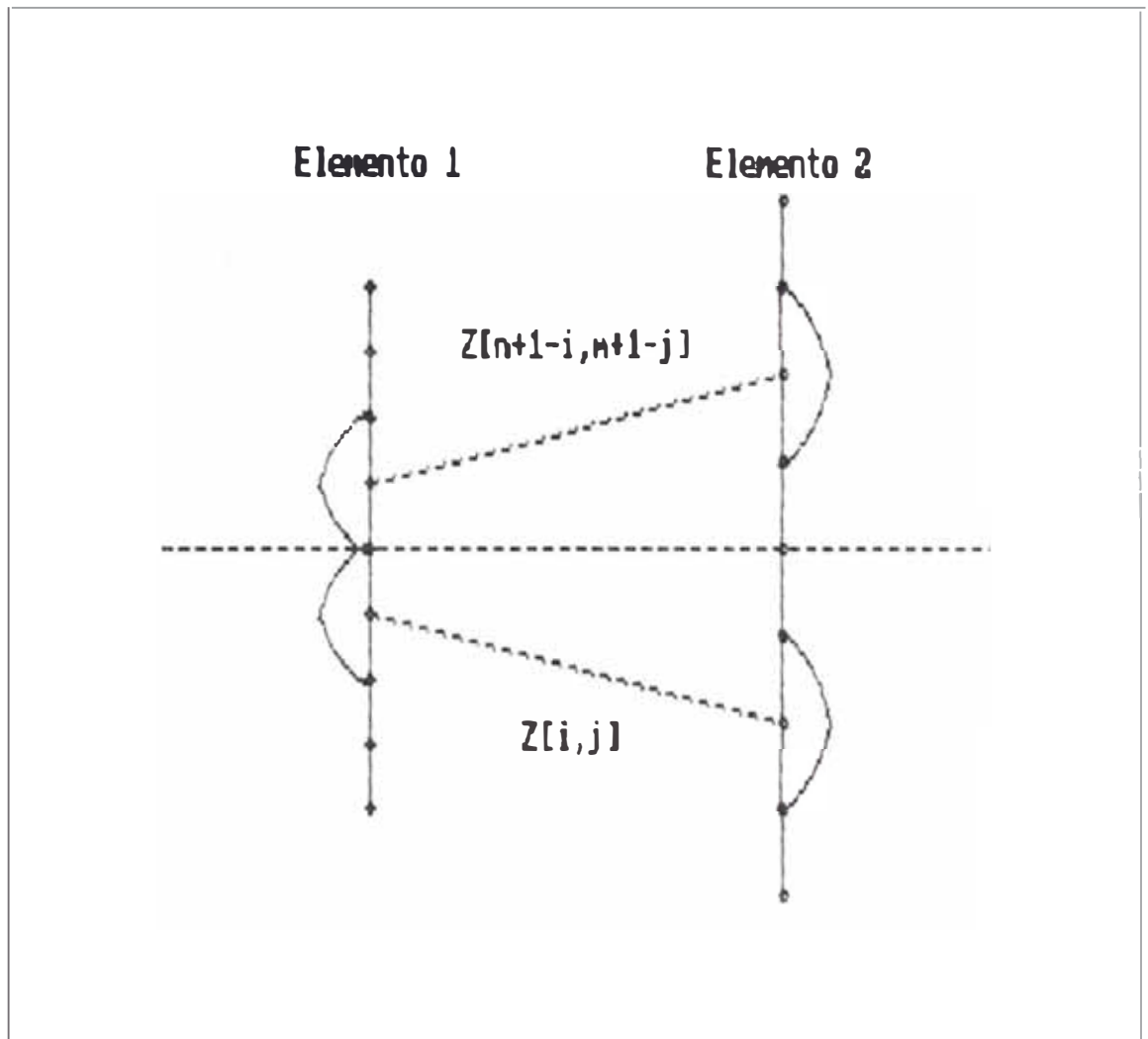


Fig. 4.2.3.3.5.- Simetría en las impedancias mutuas entre dos elementos de m y n modos

anotan a continuación:

$m=1, n=j$ (subíndices de los modos entre los cuales se va a calcular la impedancia mutua);
 n_{mod1} - numero_de_modos_1;
 n_{mod2} - numero_de_modos_2;
 $l1=(1+numero_de_modos_1)*semilongitud_del_modo_1$;
 $l2=(1+numero_de_modos_2)*semilongitud_del_modo_2$;
 p - distancia_horizontal;
 k (constante de propagación) - k ;

```

procedure Calcula_Submatriz_entre_elementos_diferentes_del_arreglo
(posicion_inicial_1,posicion_inicial_2:integer;
 numero_de_modos_1,numero_de_modos_2:integer;
      ($ Indican el número de modos de los elementos 1 y 2      $)
 distancia_horizontal,semilongitud_del_modol,semilongitud_del_modol2:real);
      ($ Indican la distancia horizontal entre los elementos y $)
      ($ la semilongitud de los modos del elemento 1 y 2 respec-$)
      ($ tivamente. $)
($ Este procedimiento calcula los elementos correspondientes a las impedan-$)
($ cías mutuas entre elementos diferentes del arreglo y los coloca en sus $)
($ posiciones correspondientes en la matriz general del arreglo. $)
($ Usa el kernel reducido. $)
var i,j:integer; ($ indican respectivamente el primer y segundo subíndice $)
      ($ de los elementos que se van calculando $)
begin
($ Calcularemos primero las (numero_de_modos_1-1)/2 primeras filas de la $)
($ la submatriz rectangular de numero_de_modos_1 x numero_de_modos_2: $)
for i:=1 to (numero_de_modos_1-1) div 2 do for j:=1 to numero_de_modos_2 do
begin
($ Calcularemos zz=Z[i,j] en la submatriz rectangular $)
if Usar_coseno_y_seno_integral in ['s','S']
then
begin
writeln;
write('Calculando impedancia ',posicion_inicial_1+i,' ',
      posicion_inicial_2+j);
CalcZmutuaReducidaConCi_y_Si(i,j,numero_de_modos_1,numero_de_modos_2,
      (1+numero_de_modos_1)%semilongitud_del_modol,
      (1+numero_de_modos_2)%semilongitud_del_modol2,
      k,distancia_horizontal,zz)
end
else
begin
writeln;
write('Calculando impedancia ',posicion_inicial_1+i,' ',
      posicion_inicial_2+j);
CalcZmutuaReducidaPorTrapezio(i,j,numero_de_modos_1,numero_de_modos_2,
      numero_de_subintervalos_de_integracion_en_z,
      (1+numero_de_modos_1)%semilongitud_del_modol,
      (1+numero_de_modos_2)%semilongitud_del_modol2,k,
      distancia_horizontal,zz)
end;
Z[OrdenamientoTriangular(posicion_inicial_1+i,posicion_inicial_2+j,
      numero_total_de_modos)]:=zz;
Z[OrdenamientoTriangular(posicion_inicial_1+numero_de_modos_1+1-i,
      posicion_inicial_2+numero_de_modos_2+1-j,numero_total_de_modos)]:=zz;
end;
end;

```

Fig. 4.2.3.3.6.- Rutina Calcula_Submatriz_entre_elementos_diferentes_del_arreglo (primera parte)

```

(* Calcularemos la primera mitad -1 de los elementos de la fila central*)
i:=(numero_de_modos_1+1) div 2;          (* numero de la fila *)
for j:=1 to (numero_de_modos_2-1) div 2 do
begin
  if Usar_coseno_y_seno_integral in ['s', 'S']
  then
    begin
      writeln;
      write('Calculando impedancia ', posicion_inicial_1 +1, ' ',
            posicion_inicial_2+j);

      CalcZmutuaReducidaConCi_y_Si(1,j,numero_de_modos_1,
            numero_de_modos_2,(1+numero_de_modos_1)*semilongitud_del_mod01,
            (1+numero_de_modos_2)*semilongitud_del_mod02,k,
            distancia_horizontal,zz);
    end
  else CalcZmutuaReducidaPorTrapezio(1,j,(numero_de_modos_1+1) div 2,
            numero_de_modos_2,numero_de_subintervalos_de_integracion_en_z,
            (1+numero_de_modos_1)*semilongitud_del_mod01,
            (1+numero_de_modos_2)*semilongitud_del_mod02,k,
            distancia_horizontal,zz);
  (* Finalmente colocamos la impedancia calculada en su lugar *)
  Z[OrdenamientoTriangular(posicion_inicial_1+1,posicion_inicial_2+j,
            numero_total_de_modos)]:=zz;
  Z[OrdenamientoTriangular(posicion_inicial_1+1,
            posicion_inicial_2+numero_de_modos_2+1-j,numero_total_de_modos)]:=zz;
end;
(* Y finalmente calculamos el elemento central de la submatriz rectangular*)
j:=(numero_de_modos_2+1) div 2;
if Usar_coseno_y_seno_integral in ['s', 'S']
then
  begin
    writeln;
    write('Calculando impedancia ', posicion_inicial_1 +1, ' ',
          posicion_inicial_2+j);

    CalcZmutuaReducidaConCi_y_Si(1,j,posicion_inicial_1,
          numero_de_modos_2,(1+numero_de_modos_1)*semilongitud_del_mod01,
          (1+numero_de_modos_2)*semilongitud_del_mod02,k,
          distancia_horizontal,zz);
  end
  else CalcZmutuaReducidaPorTrapezio(1,j,(posicion_inicial_1+1) div 2,
            numero_de_modos_2,numero_de_subintervalos_de_integracion_en_z,
            (1+numero_de_modos_1)*semilongitud_del_mod01,
            (1+numero_de_modos_2)*semilongitud_del_mod02,k,
            distancia_horizontal,zz);
  (* Colocamos la impedancia calculada en el lugar correspondiente en la *)
  (* matriz general del arreglo: *)
  Z[OrdenamientoTriangular(posicion_inicial_1+i,posicion_inicial_2+j,
            numero_total_de_modos)]:=zz;
end;
end;

```

Fig. 4.2.3.3.7.- Rutina Calcula_Submatriz_entre_elementos_diferentes_del_arreglo (segunda parte)

Y el número de subintervalos para integración en z correspondiente (para el segundo caso).

La variable de salida es zz , que contendrá a la impedancia calculada.

Finalmente colocamos la impedancia calculada en el lugar correspondiente a $Z[i,j]$ y a $Z[\text{numero_de_modos_1+1-i}, \text{numero_de_modos_2+1-j}]$; (es decir, el elemento de la parte de la submatriz rectangular que está por encima de su fila central y el elemento simétrico correspondiente respecto al centro, que se encuentra en la parte inferior de la submatriz).

Luego calcularemos la primera mitad -1 de los elementos de la fila central de la submatriz rectangular, del mismo modo que en el paso anterior, y colocaremos la impedancia calculada en el lugar correspondiente a $Z[i,j]$ y a $Z[i, \text{numero_de_modos_2+1-j}]$.

Al final se calcula el elemento central de la submatriz rectangular.

4.2.3.4 Definición de la rutina externa Halloinzin

El encabezamiento de este procedimiento es `procedure halloinzin(k:real; var semilongitud_del_modo,radio:vector_real_de_elementos; numero_de_elementos, numero_`


```

de_subintervalos_de_integracion_en_z, numero de_subin-
tervalos_de_integracion_en_phi:integer; var numero de
modos:vector_entero_de_elementos; var voltaje de entra-
da:vector_complejo_de_elementos;var posicion_en_x:vec-
tor_real_de_elementos; var corriente_del_modo: vector
complejo_de_modos).

```

Este es el procedimiento principal de esta unidad, y su implementación se puede ver suficientemente explicada en la figura 4.2.3.4.1. Pide los datos del arreglo (número de elementos y número de modos, semilongitudes de dichos modos, posición en x y radio para cada elemento, así como de ser necesario el número de subintervalos de integración en z y en phi), para dado el vector de voltajes de entrada a los elementos `voltaje_de_entrada[v]`, que en el caso de una Yagi es nulo excepto para el segundo elemento, calcular el vector de corrientes de cada modo de cada elemento: corriente del modo.

4.2.4 Rutina para el cálculo del campo lejano (Elejano)

La implementación del algoritmo `Elejano(theta,fi:real;var etheta:complejo)` se muestra en la figura 4.2.4.1 y se encuentra suficientemente explicado.

El campo eléctrico lejano producido por el modo j del elemento i , que tiene corriente $I_{i,j}$, de acuerdo a la

```

procedure halloinzin(k:real;
    var semilongitud_del_modo,radio:vector_real_de_elementos;
    numero_de_elementos,
    numero_de_subintervalos_de_integracion_en_z,
    numero_de_subintervalos_de_integracion_en_phi:integer;
    var numero_de_modos:vector_entero_de_elementos;
    var voltaje_de_entrada:vector_complejo_de_elementos;
    var posicion_en_x:vector_real_de_elementos;
    var corriente_del_modo:vector_complejo_de_modos);
var zmn:MatrizCompleja; (* Genera temporalmente la matriz general del arreglo *)
    (* glo, para luego resolver la ecuación  $Z I = V$ , *)
    (* donde el valor de I lo asigna al vector *)
    (* corriente_del_modo *)
    (* Contadores *)
c,v:integer;
numero_total_de_modos:integer;
    (* necesita calcular el numero total de modos *)

begin
    (* Calcularemos el número total de modos: *)
numero_total_de_modos:=0;
    for v:=1 to numero_de_elementos do
        numero_total_de_modos:=numero_total_de_modos+numero_de_modos[v];
    (* Luego, formaremos la matriz general del arreglo: *)
CalculaMatriz(k,semilongitud_del_modo,radio,numero_de_elementos,
    numero_de_subintervalos_de_integracion_en_z,
    numero_de_subintervalos_de_integracion_en_phi,
    numero_de_modos,posicion_en_x,zmn);
    (* Una vez formada la matriz del arreglo, necesitamos formar el vector de *)
    (* los voltajes aplicados a cada modo. Ambos ingresarán al procedimiento *)
    (* ResolverEcuacion, que dará el resultado I de  $Z I = V$  en el mismo vector *)
    (* que usamos como entrada. *)
    (* Entonces, asignamos al vector corriente_del_modo los valores de los vol- *)
    (* tajes de los modos; que son nulos excepto en los modos centrales de ali- *)
    (* mentación de los elementos: *)
    for v:=1 to numero_total_de_modos do
        begin
            corriente_del_modo[v].re:=0;
            corriente_del_modo[v].im:=0
        end;
    c:=0;
    corriente_del_modo[(1+numero_de_modos[1]) div 2]:=voltaje_de_entrada[1];
    for v:=2 to numero_de_elementos do
        begin
            c:=c+numero_de_modos[v-1];
            corriente_del_modo[c+(1+numero_de_modos[v]) div 2]:=voltaje_de_entrada[v]
        end;
    (* Entonces, resolvemos la ecuación del arreglo: *)
    ResolverEcuacion(numero_total_de_modos,zmn,corriente_del_modo);
end;
    (* Así, los valores de corriente_del_modo tendrán las corrientes de los *)
    (* modos del arreglo. *)

```

Fig. 4.2.3.4.1.- Procedimiento Halloinzin

```

procedure elejano(theta,fi:real;var etheta:complejo);
  (* Este procedimiento obtiene el valor de etheta en la expresi3n del *)
  (* campo lejano  $E \approx \text{etheta} \exp(-jkr)/r$  en coordenadas esféricas *)
  var zz:complejo ;      (* ser3  la variable donde se acumule la sumatoria *)
      w1,w2:complejo;    (* acumuladores para valores intermedios *)
      iin,jjn:integer;  (* iin ser3  el contador de elementos y jjn el de modos *)
      ka:real;          (* constante de propagaci3n *)
function zeta(iin,jjn:integer):real;
  (* Esta funci3n calcula la posici3n en z del centro del modo jj *)
  (* del elemento iin. Utiliza la variable global dds que es un vector *)
  (* que como se ha visto contiene los valores de las semilongitudes *)
  (* de los modos de cada elemento, y nmodn, que contiene el n3mero de *)
  (* modos de cada elemento *)
  var longg:real; (* variable usada para recalculr la longitud del elemento *)
begin
  longg:=dds[iin]*(1+nmodn[iin]);
  zeta:=-longg/2+dds[iin];
end;
begin
ka:=2*pi/lo; (* Calcula la constante de propagaci3n usando la longitud de onda *)
zz.re:=0; zz.im:=0;      (* inicializa zz a cero *)
for iin:=1 to n do      (* para los elementos de 1 a n *)
  for jjn:=1 to nmodn[iin] do (* para todos los modos de cada elemento iin *)
    begin
      (* Calcula cada t3rmino de la sumatoria de acuerdo a la ecuaci3n *)
      (* 4.2.4.1 *)
      ExponencialCompleja(ka*sin(theta)*cos(fi)*dist[iin],w1);
      ExponencialCompleja(ka*zeta(iin,jjn)*cos(theta),w2);
      multiplica_complejos(w1,w2,w1);
      multiplica_complejos(iin*(ppp[iin]+jjn),w1,w1);
      (* para obtener la corriente en el modo jjn del ele- *)
      (* mento iin utiliza la variable global ppp que es *)
      (* un vector que contiene la cantidad de modos de to- *)
      (* los elementos anteriores. *)
      multiplica_real_por_complejo((cos(ka*dds[iin])*cos(theta))-cos(ka*dds[iin]))
        /(sin(ka*dds[iin])*sin(theta)),w1,w1);
      suma2complejos(zz,w1,zz)
      (* se agrega el t3rmino calculado a la sumatoria *)
    end;
    multiplica_real_por_complejo(60,zz,zz);
    multiplica_complejo_por_jota(zz,zz);
    etheta:=zz      (* finalmente se asigna la sumatoria acunulada a la *)
      (* variable etheta. *)
  end;
end;

```

Fig. 4.2.4.1. – Rutina Elejano

distribuci3n en pulso sinusoidal en este modo que ha sido elegida; y que ha sido estudiada en el capitulo III; est3 dado por la siguiente ecuaci3n; que tambi3n se observa en

la referencia [5]:

$$E_0 = \frac{60j\pi}{\lambda} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \text{sen}\theta \int_{z_{1j}-d_1}^{z_{1j}+d_1} I_{1j}(z') e^{jkz' \cos\theta} dz'$$

donde se deben reemplazar los siguientes valores por sus equivalentes para llegar a un desarrollo en función de z' e integrar:

$$\vec{r}' = x_1 \vec{a}_x + z' \vec{a}_z$$

$$\vec{a}_r = \text{sen}\theta \cos\phi \vec{a}_x + \text{sen}\theta \text{sen}\phi \vec{a}_y + \cos\theta \vec{a}_z$$

$$\vec{r}' \cdot \vec{a}_r = x_1 \text{sen}\theta \cos\phi + z' \cos\theta$$

$$I_{1j}(z') = I_{1j} \frac{\text{sen}(d_1 - |z - z_{1j}|)}{\text{sen}kd_1}$$

siendo:

r, θ, ϕ : coordenadas esféricas.

k : constante de propagación = $2\pi/\lambda$.

x_1 : posición en x del elemento = $\text{dist}[i]$.

d_1 : semilongitud del modo = $\text{dds}[i]$.

z_1 : posición en z del centro del modo.

Efectuando dichos reemplazos::

$$E_0 = 60j I_{1j} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) e^{jkx_1 \text{sen}\theta \cos\phi} e^{jkz_1 \cos\theta} \cdot \left[\frac{\cos(kd \cos\theta) - \cos(kd)}{\text{sen}(kd) \text{sen}(\theta)} \right]$$

El campo eléctrico lejano total se obtiene sumando el producido por todos los modos:

$$E_0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n\text{modn}[i]} \left[60 j I_{ij} \left(\frac{e^{-jkz}}{r} \right) \cdot e^{jkx_i \text{sen}\theta \text{cos}\phi} e^{jkz_i \text{cos}\theta} \left(\frac{\cos(kd_i \text{cos}\theta) - \cos(kd_i)}{\text{sen}(kd_i) \text{sen}(\theta)} \right) \right]$$

(4.2.4.1)

donde n es el número total de elementos y $n\text{modn}[i]$ es el número de modos del elemento i .

El valor de z_i puede obtenerse como:

$$z_{i,j} = -\text{dds}[i](1+n\text{modn}[i])/2 + j(\text{dds}[i])$$

donde dds es un vector que contiene las semilongitudes de los modos de cada elemento y $n\text{modn}$ contiene el número de modos de cada uno.

4.3 Prueba de estabilidad de la solución

De acuerdo a lo visto en el apartado 2.2.5., una vez explicado el programa se va a analizar la solución numérica de la ecuación matricial, haciendo hincapié en

la obtención de una cota para el error de la solución de la misma. Nos basaremos en la norma infinita (ver dicho acápite) para obtener un acotamiento para las normas de los errores.

Para cubrir con amplitud los casos que pueden presentarse, consideraremos dipolos de relaciones longitudinales de 400, 40 y 40; y realizaremos el análisis a las frecuencias correspondientes al primer máximo de la componente resistiva de la impedancia de entrada y al primer máximo de la componente reactiva de la impedancia de entrada; para los cuales se tiene una longitud del dipolo ligeramente menor que la longitud de onda; y también a la frecuencia correspondiente a la primera anulación de la parte reactiva de la impedancia de entrada (primera resonancia) que ocurre con una longitud del dipolo ligeramente menor que media longitud de onda. Posteriormente se analizará el comportamiento de un dipolo en la gama completa de frecuencias a la luz del programa realizado.

Como una forma de observar el cumplimiento de las propiedades esperadas de la matriz de impedancias (Matriz toeplitz con términos de mayor módulo sobre la diagonal); mostramos en la figura 4.3.1 los elementos de la matriz de impedancias para un elemento de relación $l/a=4000$ y $l/\lambda=0.9276$ (para máxima componente resistiva de la impedancia de entrada); obtenida con modos y usando el

kernel reducido y las funciones coseno y seno integral; donde se han redondeado los elementos a 2 cifras.

11.4-j690	10.8+j459	9.2+j 40	6.9+j 5.6	4.4+j0.072	2.1-j0.16	0.35-j1.7
10.8+j459	11.4-j690	10.8+j459	9.2+j40	6.9+j5.6	4.4+j0.072	2.1-j0.16
9.2+j 40	10.8+j459	11.4-j690	10.8+j459	9.2+j40	6.9+j5.6	4.4+j0.072
6.9+j 5.6	9.2+j 40	10.8+j459	11.4-j690	10.8+j459	9.2+j40	6.9+j5.6
4.4+j0.072	6.9+j 5.6	9.2+j 40	10.8+j459	11.4-j690	10.8+j459	9.2+j40
2.1-j0.16	4.4+j0.072	6.9+j 5.6	9.2+j 40	10.8+j459	11.4-j690	10.8+j459
0.35-j1.7	2.1-j0.16	4.4+j0.072	6.9+j5.6	9.2+j 40	10.8+j459	11.4-j690

Fig.- 4.3.1.- Elementos de la matriz de impedancias para un elemento de $1/a=4000$ y $1/\lambda=0.9276$ calculada con 7 modos

Las tablas 4.3.1 a 4.3.3 muestran cálculos del residuo de la solución, de acuerdo al acápite 2.2.5, para 7, 13 y 21 modos y para relaciones $1/\lambda$ correspondientes al primer máximo de la componente resistiva de la impedancia de entrada, al primer máximo de la componente reactiva de la impedancia de entrada y a la primera resonancia; en ese orden.

Estos valores fueron obtenidos ejecutando repetidamente el programa hasta obtener el resultado deseado para la impedancia de entrada.

TABLA 4.3.1.- Análisis del residuo de la solución de la ecuación matricial para un dipolo de $l/a=4000$

l/λ	número de modos	$\ Z \ $	$\ I \ $	$\ r \ $ (calculado)	$\ r \ $ (previsto)
0.9276	7	1207	0.00125	2.7×10^{-12}	1.5×10^{-11}
0.8513	7	1330	0.00131	3.0×10^{-12}	1.7×10^{-11}
0.4840	7	2430	0.00139	5.3×10^{-11}	3.4×10^{-10}
0.9240	13	1992	0.00124	5.8×10^{-12}	2.5×10^{-11}
0.8467	13	2180	0.00133	8.5×10^{-12}	2.9×10^{-11}
0.4840	13	3847	0.00139	5.8×10^{-11}	5.3×10^{-10}
0.9220	21	2866	0.00125	1.7×10^{-11}	3.6×10^{-11}
0.8440	21	3134	0.00133	1.4×10^{-11}	4.2×10^{-11}
0.4840	21	5479	0.00138	1.5×10^{-10}	7.6×10^{-10}

En la primera columna se tiene la relación l/λ , en la segunda, el número de modos, en la tercera, la norma de la matriz de impedancias, en la cuarta, la norma del vector de corrientes obtenido mediante el método de eliminación de Gauss simple; en la quinta se calcula la norma del residuo $r=V-ZI$ con precisión simple; y la sexta columna permite contrastar el resultado de este cálculo con el orden de la norma que se espera de acuerdo a la

fórmula $10^{-t} \| Z \| \| I \|$; (con t =número de cifras decimales de punto flotante=11 en este caso) que nos da una aproximación del orden de la cota máxima teórica esperada para dicho residuo.

TABLA 4.3.2.- Análisis del residuo de la solución de la ecuación matricial para un dipolo de $l/a=400$

l/λ	número de modos	$\ Z \ $	$\ I \ $	$\ r \ $ (calculado)	$\ r \ $ (previsto)
0.8747	7	743	0.00189	2.2×10^{-12}	1.4×10^{-11}
0.7707	7	851	0.00210	5.6×10^{-12}	1.8×10^{-11}
0.4760	7	1404	0.01403	1.5×10^{-11}	2.0×10^{-10}
0.8653	13	1112	0.00190	9.6×10^{-12}	2.1×10^{-11}
0.7600	13	1268	0.00220	9.4×10^{-12}	2.8×10^{-11}
0.4760	13	2026	0.01389	3.8×10^{-11}	2.8×10^{-10}
0.8573	21	1460	0.00192	7.5×10^{-12}	2.8×10^{-11}
0.7533	21	1660	0.00222	2.0×10^{-11}	3.7×10^{-11}
0.4760	21	2627	0.01380	6.5×10^{-11}	3.6×10^{-10}

Observamos que en todos los casos para la resonancia aumenta tanto la norma de Z como la norma de I y

la del residuo. Esto es un caso típico que se repite siempre, y que se va a notar a continuación: que la solución se vuelve más crítica para el caso de resonancia.

TABLA 4.3.3.- Análisis del residuo de la solución de la ecuación matricial para un dipolo de $l/a=40$

$1/\lambda$	número de modos	$\ Z \ $	$\ I \ $	$\ r \ $ (calculado)	$\ r \ $ (previsto)
0.7067	7	300	0.00411	1.5×10^{-12}	1.2×10^{-11}
0.5840	7	359	0.00611	6.1×10^{-12}	2.2×10^{-11}
0.4640	7	448	0.01320	5.7×10^{-12}	5.9×10^{-11}
0.6613	13	330	0.00439	4.3×10^{-12}	1.4×10^{-11}
0.5520	13	391	0.00689	5.0×10^{-12}	2.7×10^{-11}
0.4640	13	461	0.01272	1.6×10^{-11}	5.9×10^{-10}

De todos modos no debe perderse de vista que el residuo se compara con la norma (infinita) del vector V en la ecuación $Z I = V$ de modo que, como la norma infinita de V es 1, los valores del residuo son realmente despreciables, de modo que la solución numérica es suficientemente precisa. Nótese que en la tabla 4.3.3 no se incluye el caso de 21 modos. Esto se debe a que en dicho caso la relación de la semilongitud de los modos respecto

del radio será $40/22=1.8$; valor muy bajo que hace impreciso el kernel reducido. A esto se debe, como aclararemos más adelante, el límite de convergencia de la solución al aumentar el número de modos.

Si bien se muestran los resultados obtenidos con el uso del kernel reducido y utilizando las funciones coseno y seno integral, los resultados de acuerdo a los otros casos (término doble, kernel exacto, o usar regla del trapecio con dos subdivisiones para integrar las impedancias en z , lo que equivale a point-matching) son similares.

A continuación realizaremos el cálculo de las cotas para el error de redondeo y los consignaremos en las tablas 4.3.4 a 4.3.6. Encontramos de acuerdo a 2.2.5 que la primera cota está dada por:

$$\frac{\text{Cond}(Z) \|r\|}{\|v\|}$$

Luego, en las tablas siguientes se realizarán los análisis de cota de error de redondeo para los mismos casos anteriores, colocando en la primera columna la relación l/λ ; en la segunda columna el número de modos con que se hace el cálculo, en la tercera columna el condicionamiento de la matriz obtenida y en la cuarta

columna la cota de error de redondeo relativo obtenida mediante la fórmula anterior (que designaremos como Cota basada en r) y que como vemos es siempre del orden de 10^{-7} en el peor caso.

TA 4. - Análisis de la cota de error relativo de redondeo para un dipolo de $l/a=4000$

l/λ	núm. de modos	Cond (Z)	Cota basada en	Wilkinson promedio	Wilkinson peor caso
0.9276	7	39.0	1.0×10^{-10}	1.8×10^{-10}	1.3×10^{-08}
0.8513		20.2	6.0×10^{-11}	8.6×10^{-11}	6.0×10^{-09}
0.4840	7	174	9.2×10^{-09}	4.1×10^{-10}	2.8×10^{-08}
0.9240	13	108	6.3×10^{-10}	5.7×10^{-10}	1.2×10^{-07}
0.8467	13	55	4.7×10^{-10}	2.7×10^{-10}	5.5×10^{-08}
0.4840	13	485	2.8×10^{-08}	1.3×10^{-09}	2.7×10^{-07}
0.9220	21	243	4.1×10^{-09}	1.4×10^{-09}	7.2×10^{-07}
0.8440	21	125	1.8×10^{-09}	6.8×10^{-10}	3.4×10^{-07}
0.4840	21	1088	1.6×10^{-07}	3.4×10^{-09}	1.7×10^{-06}

Con fines de comparación; escribimos en la quinta columna la cota de error relativo de redondeo obtenida mediante la siguiente fórmula dada por Wilkinson para la solución de un sistema lineal por el método de Gauss

simple (Wilkinson promedio)

$$\|Z^{-1}\| \approx 8n \cdot 10^{1-t}$$

que nos da una cota promedio para el error relativo de redondeo; donde n es el orden de la matriz de que se trata y t es el número de cifras significativas con que se realizan las operaciones.

TABLA 4.3.5.- Análisis de la cota de error relativo de redondeo para un dipolo de $l/a=400$

l/λ	núm. de modos	Cond (Z)	Cota basada en r	Wilkinson promedio	Wilkinson peor caso
0.8747	7	22.0	4.8×10^{-11}	1.7×10^{-10}	1.2×10^{-08}
0.7707	7	13.6	7.7×10^{-11}	9.0×10^{-11}	6.3×10^{-09}
0.4760	7	103	1.5×10^{-09}	4.1×10^{-10}	2.9×10^{-08}
0.8653	13	53.7	5.2×10^{-10}	5.1×10^{-10}	1.1×10^{-07}
0.7600	13	34.0	3.2×10^{-10}	2.8×10^{-10}	5.9×10^{-08}
0.4760	13	260	9.8×10^{-09}	1.3×10^{-09}	2.8×10^{-07}
0.8573	21	106	8.0×10^{-10}	1.2×10^{-09}	6.2×10^{-07}
0.7533	21	69.8	1.4×10^{-09}	7.1×10^{-10}	3.6×10^{-07}
0.4760	21	530	3.4×10^{-08}	3.4×10^{-09}	1.7×10^{-06}

En la sexta columna ponemos los valores del error relativo en el peor caso; obtenido según Wilkinson de la forma:

$$\|Z^{-1}\| \approx 8 [1.01 (n^3 + 3n^2)] 10^{1-t}$$

(Wilkinson peor caso)

TABLA 4.3.6.- Análisis de la cota de error relativo de redondeo para un dipolo de $l/a=40$

l/λ	núm. de modos	Cond (Z)	Cota basada en r	Wilkinson promedio	Wilkinson peor caso
0.7067	7	8.8	1.3×10^{-11}	1.7×10^{-10}	1.2×10^{-08}
0.5840	7	12.6	7.6×10^{-11}	2.0×10^{-10}	1.4×10^{-08}
0.4640	7	32.8	1.9×10^{-10}	4.1×10^{-10}	2.9×10^{-08}
0.6613	13	16.1	6.9×10^{-11}	5.1×10^{-10}	1.1×10^{-07}
0.5520	13	27.8	1.4×10^{-10}	7.5×10^{-10}	1.6×10^{-07}
0.4640	13	58.3	6.8×10^{-10}	1.3×10^{-09}	2.8×10^{-07}

El error de redondeo no es entonces significativo para ninguno de los casos que hemos visto, por lo tanto el método usado de solución de la matriz es suficiente.

A continuación analizaremos el error debido a imprecisiones en el cálculo de los elementos de la matriz Z ; que nos dará todo el margen de error de la solución numérica puesto que el error de redondeo es despreciable como hemos mostrado. Vemos que en el peor caso el condicionamiento de la matriz (que aumenta en el caso de resonancia) llega a ser superior a 1000.

Sabemos (acápite 2.2.5) que el margen de error relativo de las corrientes calculadas debido a la imprecisión en el cálculo de los elementos de la matriz es igual a dicha imprecisión relativa de los elementos de la matriz multiplicada por el condicionamiento de la misma.

Entonces si deseamos un margen de error relativo en la distribución de corrientes de alrededor de 0.1%; que nos permita asegurar que las ganancias, los patrones de radiación y las impedancias de entrada no van a exceder de un error de digamos tal vez un orden superior (1%) -pues son calculadas en base a la distribución de corrientes-, tendremos que calcular los elementos de la matriz con una precisión de $0.001/1000 = 10^{-6}$, que es lo que se ha realizado.

Es posible afirmar que esto es demasiado conservador. Si se desea un margen de error dentro de lo que suele llamarse "de ingeniería"; se puede tomar una preci-

sión en el cálculo de los elementos de 10^{-3} ; lo que nos asegura que en casos extremos el error de los parámetros resultantes sea del 10%. Debemos recordar que hablamos de errores numéricos de la solución. Los errores de modelamiento (debidos a las funciones de base y prueba, a la discretización debida a los subseccionamientos y al hecho de que se han despreciado las corrientes terminales sobre las tapas del elemento cilíndrico no son considerados en este punto.

4.4 Prueba de precisión de la solución

Realizaremos la prueba de precisión de la solución recalculando el campo eléctrico tangencial para las soluciones a las que hemos llegado, con diferente número de modos de aproximación. Nos basaremos en el primer caso (antena delgada). En un siguiente capítulo se presentarán resultados experimentales.

Tomaremos de referencia a la antena delgada de $l/\lambda=0.9276$ y $l/a=4000$; y obtendremos la distribución de corriente; campo eléctrico tangencial recalculado e impedancia de entrada utilizando el kernel reducido (que es el apropiado para este caso; pues el kernel exacto consume mayor tiempo y debe dar resultados similares).

Usaremos primero las funciones Seno y Coseno y luego la integración con la regla del trapecio y dos subintervalos, lo que equivale al método de point matching y compararemos resultados.

A continuación detallaremos la solución completa obtenida mediante el programa, utilizando las funciones Si y Ci.

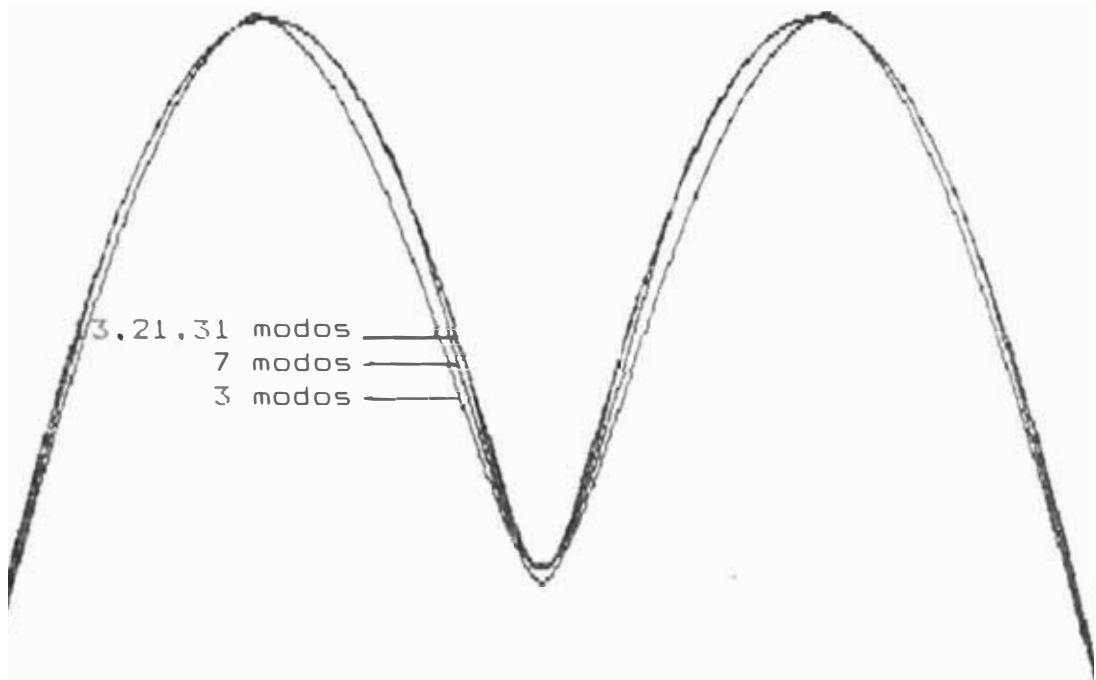


Fig. 4.4.1.- Distribución de corriente en módulo para un dipolo de $l/\lambda=0.9276$ y $l/a=4000$ obtenida usando las funciones Ci y Si

En la figura 4.4.1 se muestra la distribución de corriente en módulo relativo para un dipolo alimentado en el centro con $l/\lambda=0.9276$ y $l/a=4000$; calculada con 3, 7,

13, 21 y 31 modos; y en la figura 4.4.2 se muestra la distribución de fase de la corriente relativa al voltaje de alimentación. Se observa la sorprendente rapidez de convergencia de la solución: 3 modos parecen bastantes para una solución dentro del rango de error de **ingeniería** (que son tres modos por longitud de onda) Sin embargo, como se muestra en la tabla 4.4.1; son necesarios más modos para obtener una impedancia de entrada precisa: sobre todo si se desea un valor correcto para la parte reactiva de dicha impedancia. (suelen considerarse 10 por longitud de onda y vemos que dicha estimación se cumple).

180°

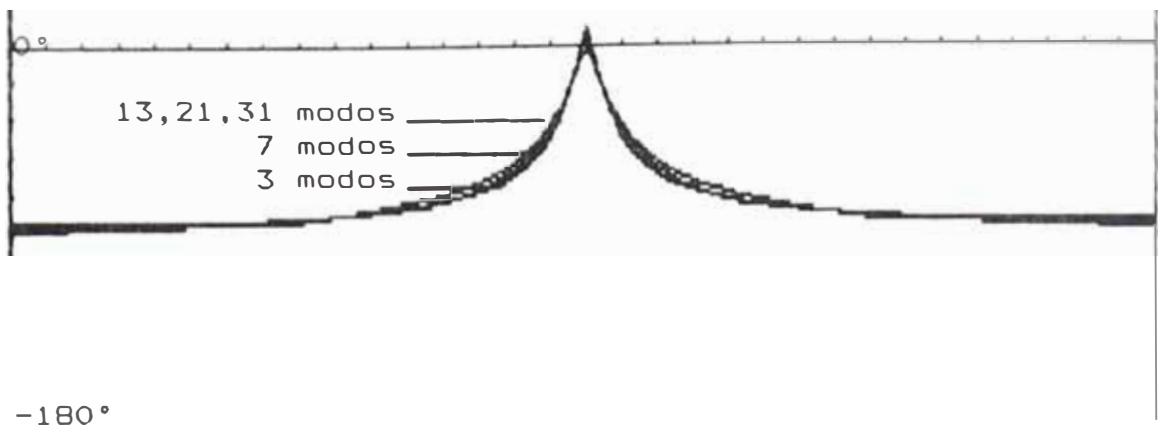


Fig. 4.4.2.- Fase de la corriente por un dipolo de $l/\lambda=0.9276$ y $l/a=4000$

TABLA 4.4.1.- Impedancias de entrada calculadas para un dipolo simétrico de $l/\lambda=0.9276$ y $l/a=4000$ utilizando el kernel "reducido" y funciones seno y coseno integral para diferentes números de modos

Número de modos	Impedancia de entrada
1	1158 +j 5885
3	3572 +j 28.57
5	3356 -j 94.99
7	3280 -j 177
11	3215 -j 278.3
13	3198 -j 312.48
15	3185 -j 340
21	3160 -j 400
25	3148 -j 429
31	3135 -j 462
41	3120 -j 502

Por la importancia de la parte resistiva, nos basaremos en ésta para evaluar la precisión de cada cálculo. La mejor manera de evaluar la precisión de cada simulación es recalcular el campo eléctrico tangencial. En las figuras 4.4.3 a 4.4.7 se muestran los campos

eléctricos tangenciales recalculados: que deben anularse teóricamente excepto para la región de alimentación. La forma del campo eléctrico en la región de alimentación nos dice cuál es realmente el modelo de alimentación que se está usando, que como recordamos, es una entrada implícita al programa.

Observamos que el campo eléctrico **tangencial** recalculado, que nos da una medida de la precisión de las soluciones obtenidas, pues representa la excitación que está aplicándose efectivamente, posee picos en los puntos que delimitan los diferentes modos y en los extremos.

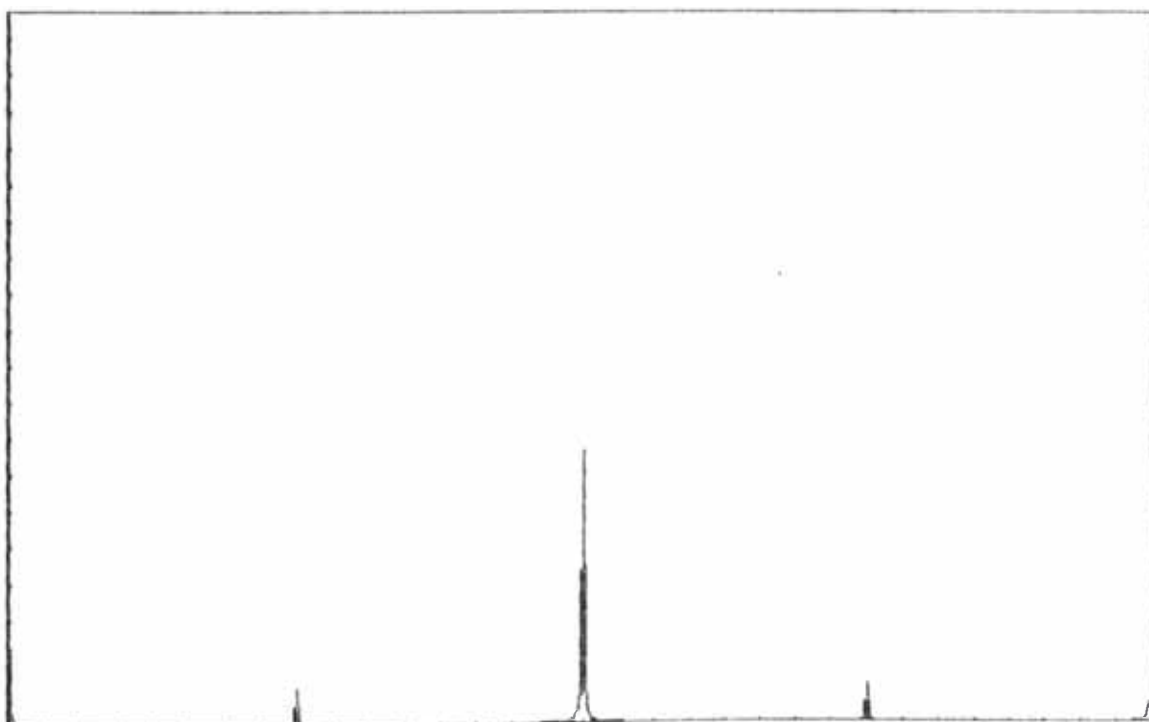


Fig. 4.4.3.- Campo eléctrico tangencial recalculado para un dipolo de $1/\lambda=0.9276$ y $1/a=4000$ con 3 modos de expansión usando C_i y S_i

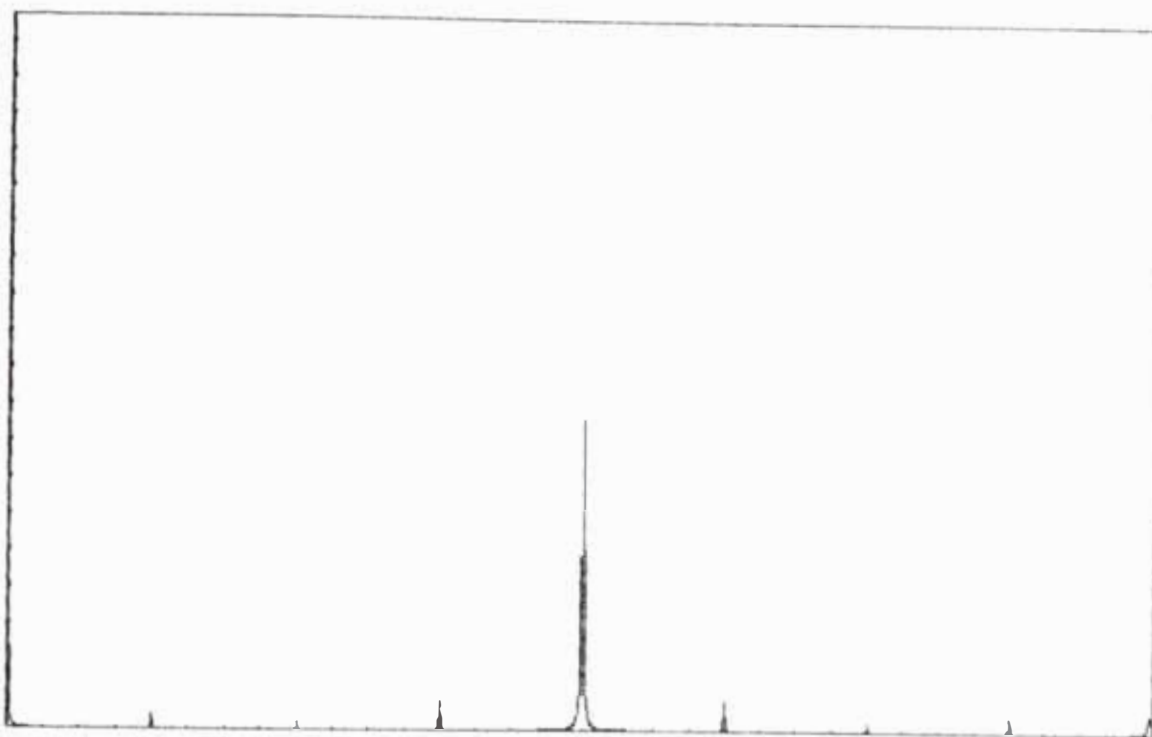


Fig. 4.4.4.- Campo eléctrico tangencial recalculado para un dipolo de $1/\lambda=0.9276$ y $1/a=4000$ con 7 modos de expansión usando C_i y S_i

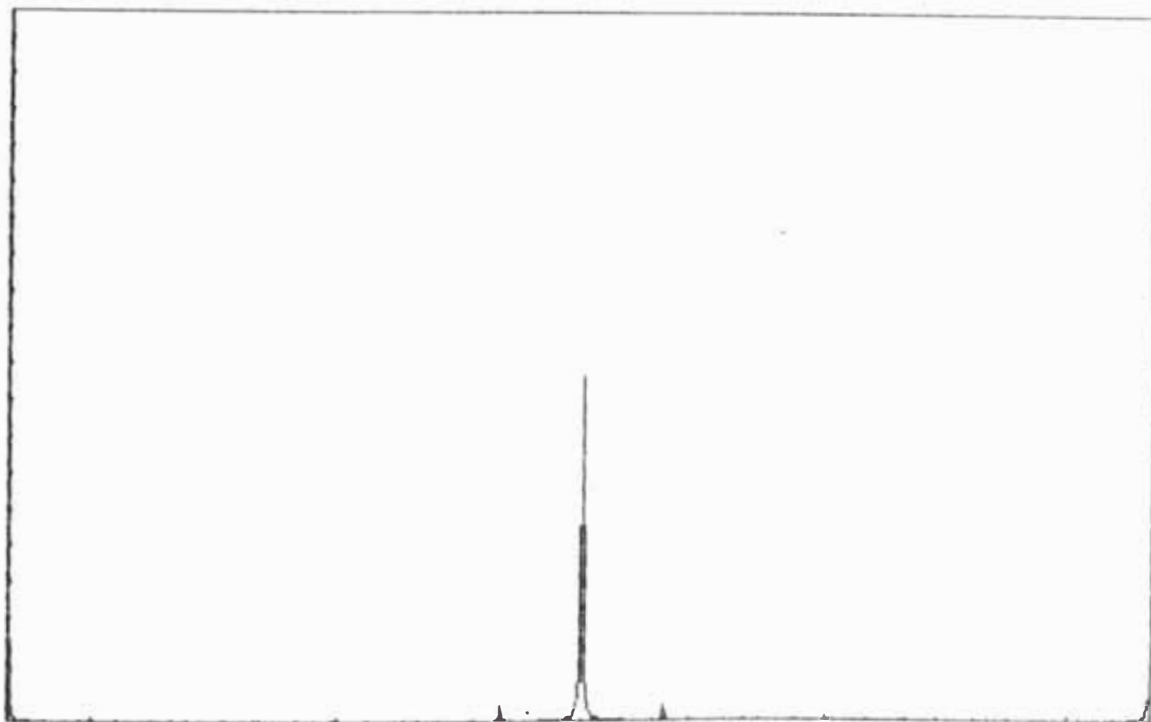


Fig. 4.4.5.- Campo eléctrico tangencial recalculado para un dipolo de $1/\lambda=0.9276$ y $1/a=4000$ con 13 modos de expansión usando C_i y S_i

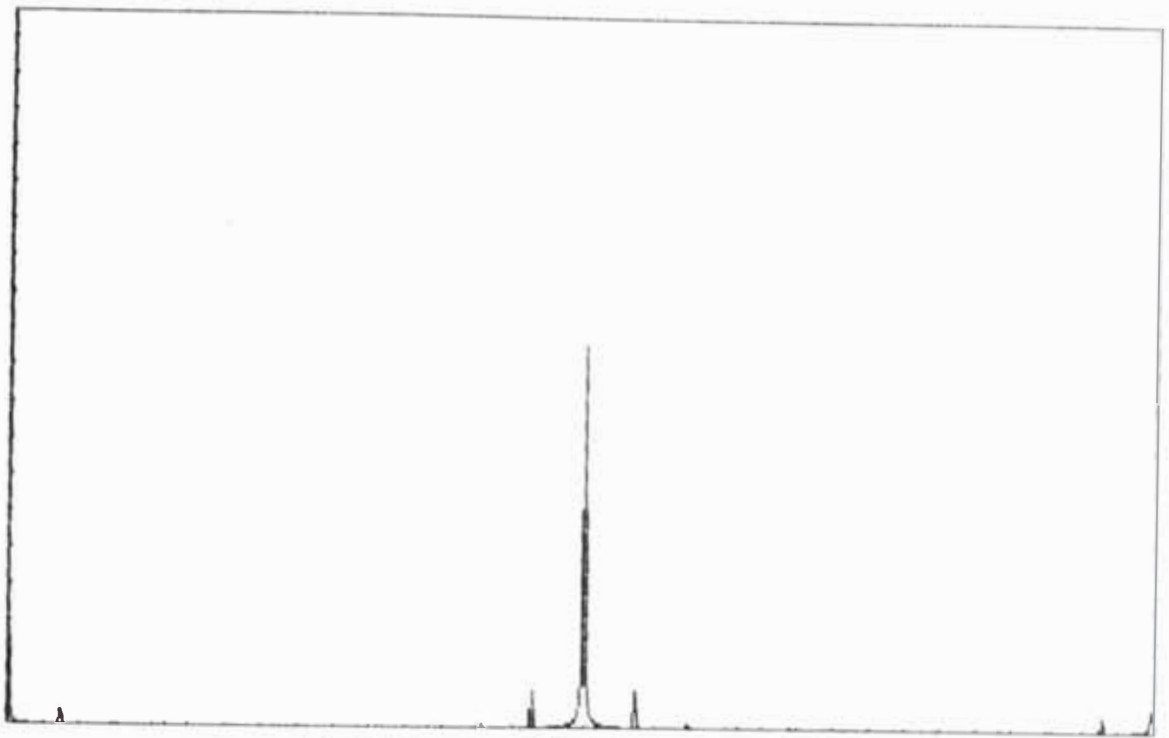


Fig. 4.4.6.- Campo eléctrico tangencial recalculado para un dipolo de $l/\lambda=0.9276$ y $l/a=4000$ con 21 modos de expansión usando Ci y Si

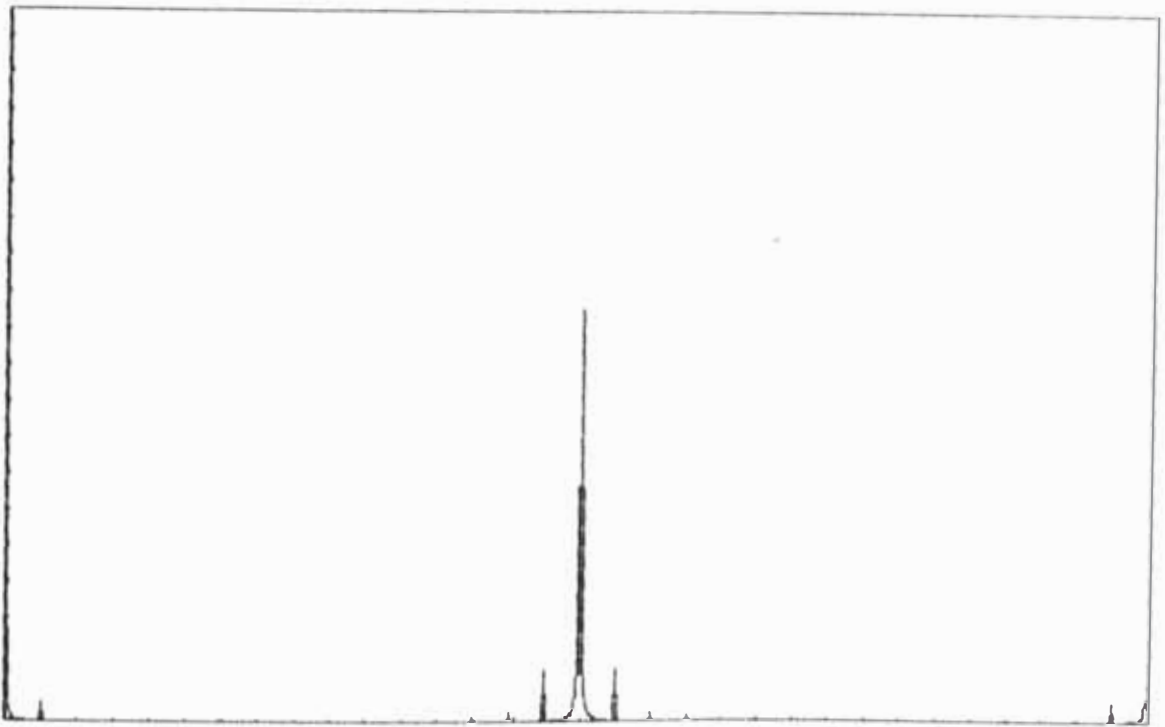


Fig. 4.4.7.- Campo eléctrico tangencial recalculado para un dipolo de $l/\lambda=0.9276$ y $l/a=4000$ con 31 modos de expansión usando Ci y Si

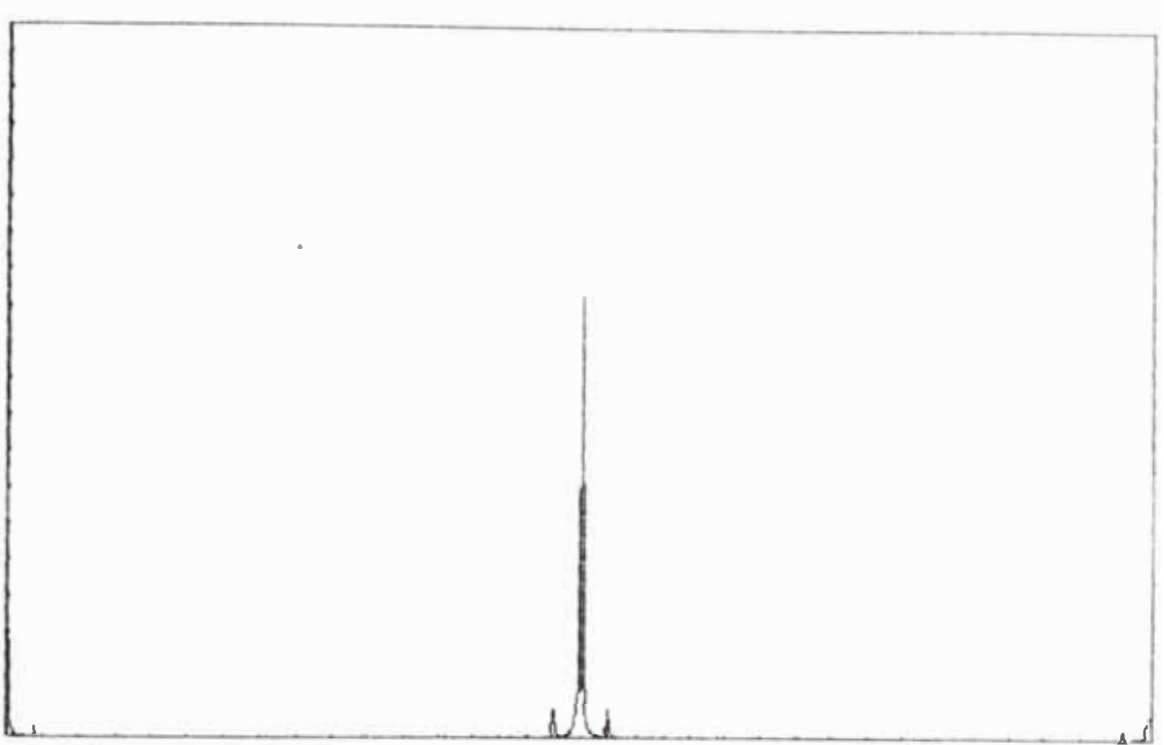


Fig. 4.4.8.- Campo eléctrico tangencial recalculado para un dipolo de $l/\lambda=0.9276$ y $l/a=4000$ con 41 modos de expansión usando C_i y S_i

Esto se debe a que se han elegido funciones de base que no tienen derivada continua. La carga es proporcional a la derivada en z de la corriente.

Sin embargo esto se compensa con una rápida convergencia como la que se observa y una rápida anulación del campo tangencial a lo largo del dipolo que se hace incluso inapreciable excepto en dichas discontinuidades.

El campo eléctrico se concentra más en el centro conforme aumenta el número de modos; asemejándose cada vez más a la función impulso. Aunque el campo en los extremos no disminuye al aumentar el número de modos de

expansión, si lo hace relativamente, es decir, respecto del campo en la región de alimentación; por lo que se puede decir que el método es cada vez más preciso y rápidamente convergente.

4.5 Prueba de convergencia

Obtendremos el límite de convergencia de los modelos usados, principalmente para el kernel reducido.

Desde el punto de vista teórico, todos los métodos están limitados por el hecho de que desprecian la corrientes sobre las tapas de los extremos de los dipolos, pero esto no es claro de establecer ya que en la mayoría de los casos los dipolos son huecos, es decir, no macizos.

Para el kernel reducido, una de las restricciones más importantes es el hecho de que se supone un radio pequeño de modo que se puede utilizar la corriente axial total. De este modo lo primero que puede hacerse es usar las ecuaciones 3.8.2.3 y las siguientes para establecer que para usar a como radio equivalente (lo que daría un resultado para el kernel reducido similar al resultado para la aproximación de dos términos del radio equivalente

te) debe tenerse $0.4098 a/d \ll 1$, lo que quiere decir que el radio debe ser menor que la cuarta parte de la semilongitud de los modos.

Estudios realizados por Poggio y Adams indican que el radio debe bajar incluso a por lo menos la octava parte de la semilongitud de los modos para tener un error de 1% en la distribución de corriente. Radios mas grandes relativamente impiden usar la corriente axial total con buena aproximación, que es lo que hace el método basado en el kernel reducido.

El siguiente factor para la precisión de la solución basada en el kernel reducido es la relación entre el radio y la longitud de onda. Observaremos a continuación que radios mas gruesos para el uso del kernel reducido hacen que los picos que aparecen en la distribución de campo tangencial se ensanchen, disminuyendo la precisión de la solución.

También observaremos que si bien aparece como un requisito razonable que el radio no exceda la cuarta parte de la semilongitud de los subsegmentos, aparecen distorsiones apreciables en la distribución de corriente y la impedancia de entrada comienza a diverger cuando el radio llega a ser la mitad de la semilongitud del modo, lo que es una condición extrema que debe evitarse.

Lo ideal para estos casos, si los dipolos están alejados entre sí, es aplicar el radio equivalente de dos términos o, si el dipolo es muy grueso (lo que se delimitará con ejemplos y datos experimentales en un capítulo subsecuente) utilizar la integración con extracción de la singularidad logarítmica.

Para el caso de la expansión de dos términos del radio equivalente, se puede esperar que el error en la distribución de corriente sea de un 1% cuando el radio es la mitad o menos que la semilongitud de los subsegmentos, pero en forma similar a lo visto arriba para el kernel reducido, las distorsiones en la distribución de corrientes y la divergencia en el valor de la impedancia de entrada empieza a aparecer cuando el radio llega a ser igual a la semilongitud de los subsegmentos.

En la tabla 4.5.1 mostraremos para un dipolo de $l/\lambda=40$ en la primera resonancia (sabemos que la resonancia aumenta la exigencia del método) los valores de impedancia resistiva y reactiva para los tres métodos.

También se observa en los gráficos siguientes que las soluciones para doble término e integración son más precisas que el caso del kernel reducido; pues los picos en las uniones de los subelementos que aparecen en el campo eléctrico tangencial recalculado; que son los que finalmente generan las distorsiones de la corriente y la

impedancia de entrada; son menos pronunciados (ver figuras 4.5.13 a 4.5.18).

Estos campos dan la forma de la excitación que realmente se está usando.

Sin embargo; no siempre se tiene la salida de utilizar el método de doble término o el de integración. Cuando los dipolos no están alejados, sino que son cercanos entre sí, no podemos asumir ningún tipo de simetría, lo que hace que solo nos quede usar el kernel reducido, con toda su limitación de convergencia.

En ese caso, lo más saludable es comenzar con una segmentación que respete la exigencia más extrema, es decir, que mantenga el radio a menos de la octava parte de la semilongitud de los subsegmentos; lo que incluso puede dar número de modos tan pequeño como 1 o 3 -que como hemos visto no son malas aproximaciones debido a la rapidez de convergencia de este método, y como veremos son mejores incluso para el caso de la primera resonancia (dipolos de media onda)- y luego aumentar poco a poco el número de modos verificando que no aparezcan distorsiones en la distribución de corriente que pueden (como efectivamente ocurre) perjudicar en lugar de contribuir a la solución.

El caso que suele ocurrir es el del dipolo dobla-

do; que se describe en [1] y [44]. Consiste en un dipolo activo (alimentado) unido por los extremos a un dipolo pasivo.

En la referencia [53] se reemplaza este dipolo doblado por un dipolo simple de radio equivalente igual a la media geométrica entre la separación de los ejes de los elementos que conforman el dipolo doblado y el radio de cada uno (suponiendo que son iguales).

Mediante nuestro programa hemos demostrado numéricamente que efectivamente esto se cumple para los ejemplos que se dan en dicho paper, comparando la impedancia de entrada para los dipolos separados y para el dipolo equivalente mediante el método de superposición.

Más información sobre cómo se usa el método de superposición para un equivalente en dipolos separados para el dipolo doblado se encuentra en [44] y en el siguiente capítulo.

Lo que debe notarse es que el dipolo simple equivalente del dipolo doblado se ha obtenido en [53] mediante la suposición de que **la separación entre sus ejes es pequeña.**

Cuando esto no se cumple, el método va a diverger, del mismo modo que diverge para cualquier elemento.

Luego, para trabajar con dipolos doblados, debemos verificar que la distancia entre los ejes sea menor que la octava parte de la semilongitud de los subdipolos que se van a utilizar y luego reemplazar por el dipolo equivalente.

Posteriormente puede aumentarse progresivamente el número de subdivisiones, pero esto no da una convergencia segura.

Finalmente debemos recordar que condiciones de convergencia que aparecen exigentes como las mostradas son necesarias y que incluso si estas llevan a necesitar que un elemento se modele con un solo modo, esto nos ha llevado a resultados suficientemente precisos, sobre todo si hay varios elementos, como es en una antena Yagi,

Esto es **gracias** a la acelerada convergencia inicial de la expansión usada, que hemos podido observar, y de la que no gozan otros métodos que usan diferentes funciones de base y prueba.

Los gráficos del campo eléctrico tangencial para el método de radio equivalente de dos términos y de integración del kernel exacto están aumentados 6 veces con respecto a los gráficos correspondientes para el kernel reducido. Todos los demás gráficos están a la misma escala.

TABLA 4.5.1.- Impedancias de entrada calculadas para un dipolo simétrico de $l/\lambda=0.464$ y $l/a=40$ utilizando el kernel "reducido"; el término doble y el método de integración con 10 subintervalos de 0 a π

mo- dos	Kernel Reducido	Doble término	Integración
1	59.02 +j 3.85	58.95 +j 3.6	58.96 +j 2.633
3	71.7 -j 0.64	71.34 -j 0.78	70.71 -j 1.86
5	73.8 +j 0.035	73.26 -j 0.097	72.66 -j 1.31
7	75.7 +j 0.326	74.86 +j 0.28	74.17 -j 1.00
11	78.04 +j 0.374	76.51 +j 0.7	75.86 -j 0.81
13	78.92 +j 0.113	77.02 +j 0.64	76.44 -j 0.71
15	79.69 -j 0.31	77.38 +j 0.72	76.89 -j 0.77
21	81.46 -j 2.57	77.92 +j 0.437	77.85 -j 1.13
25	82.25 -j 4.9	77.94 -j 0.16	78.29 -j 1.44
31	82.6 -j 9.87	77.64 -j 0.25	78.75 -j 1.94
41	79.09 -j 22	76.49 -j 0.823	79.21 -j 2.73
51	64.64 -j 37	74.79 -j 1.46	79.49 -j 3.4
61	38.2 -j 43.7	72.76 -j 2.8	79.66 -j 4.04
71	15.53 -j 33.8	70.55 -j 5.7	79.77 -j 4.566
81	4.98 -j 20.6	68.2 -j 11.8	79.84 -j 5.02

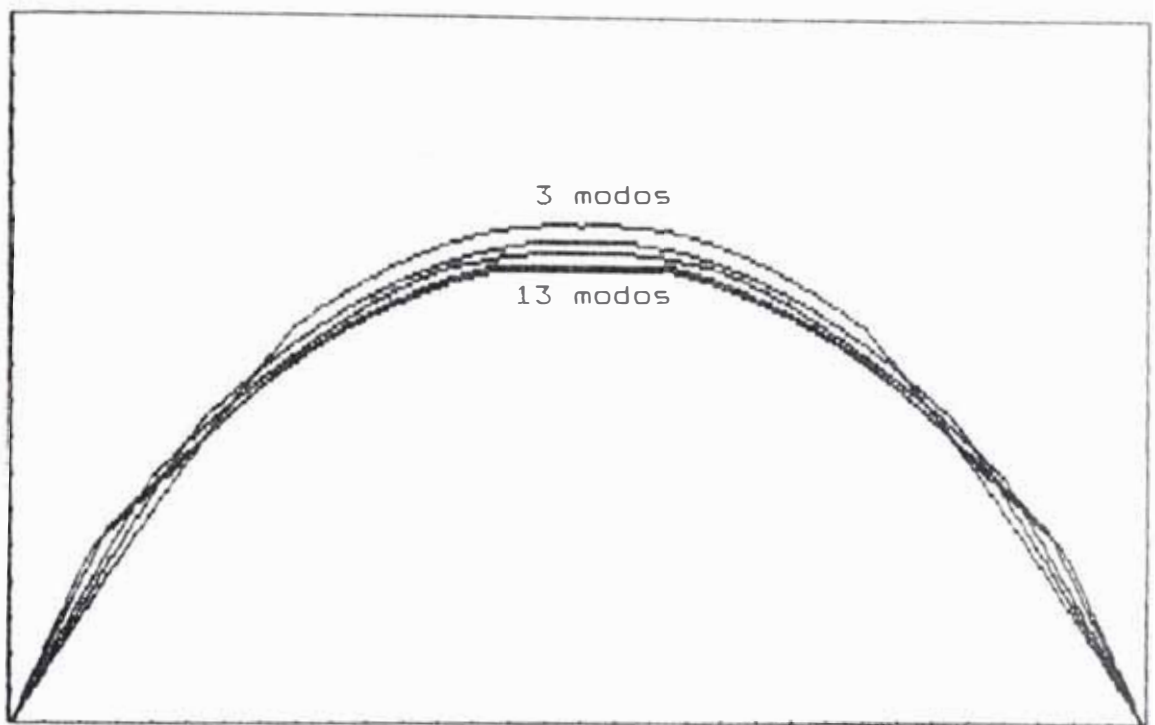


Fig. 4.5.1- Distribución de corriente en módulo usando el kernel reducido para un dipolo de $l/a=40$ y $l/\lambda=0.464$ con 3,5,7,11 y 13 modos

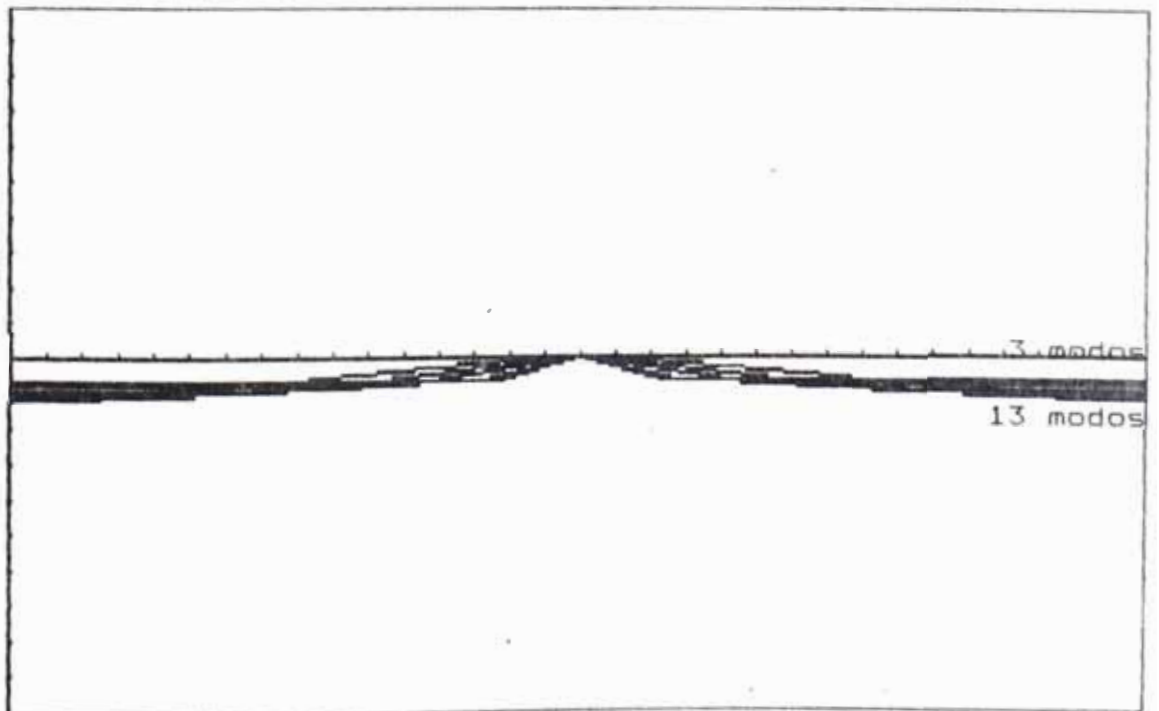


Fig. 4.5.2- Distribución de corriente en fase usando el kernel reducido para un dipolo de $l/a=40$ y $l/\lambda=0.464$ con 3,5,7,11 y 13 modos

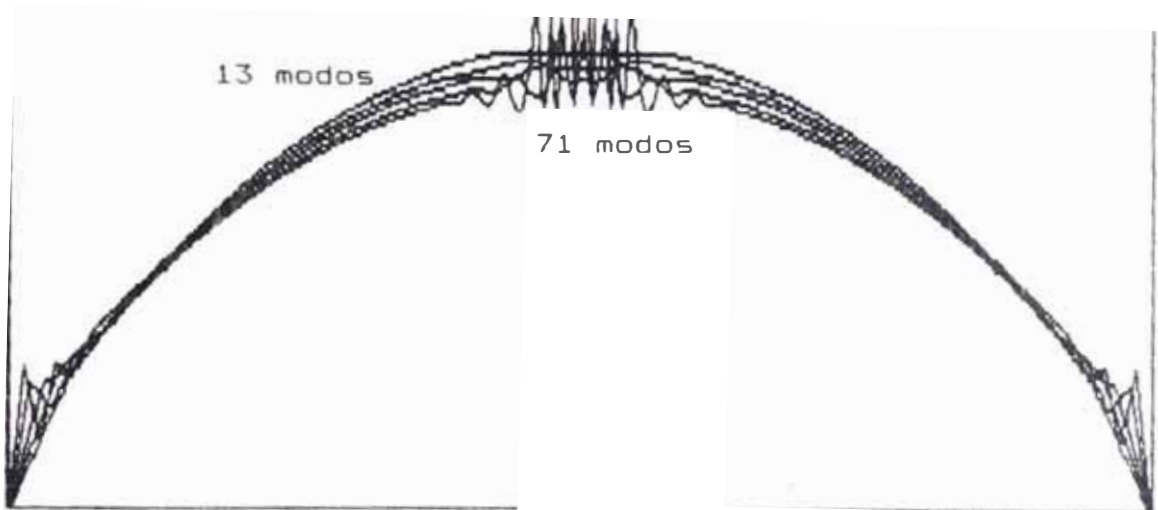


Fig. 4.5.3- Distribución de corriente en módulo usando el kernel reducido para un dipolo de $1/a=40$ y $1/\lambda=0.464$ con 13,21,31,51 y 71 modos



Fig. 4.5.4- Distribución de corriente en fase usando el kernel reducido para un dipolo de $1/a=40$ y $1/\lambda=0.464$ con 13,21,31,51 y 71 modos

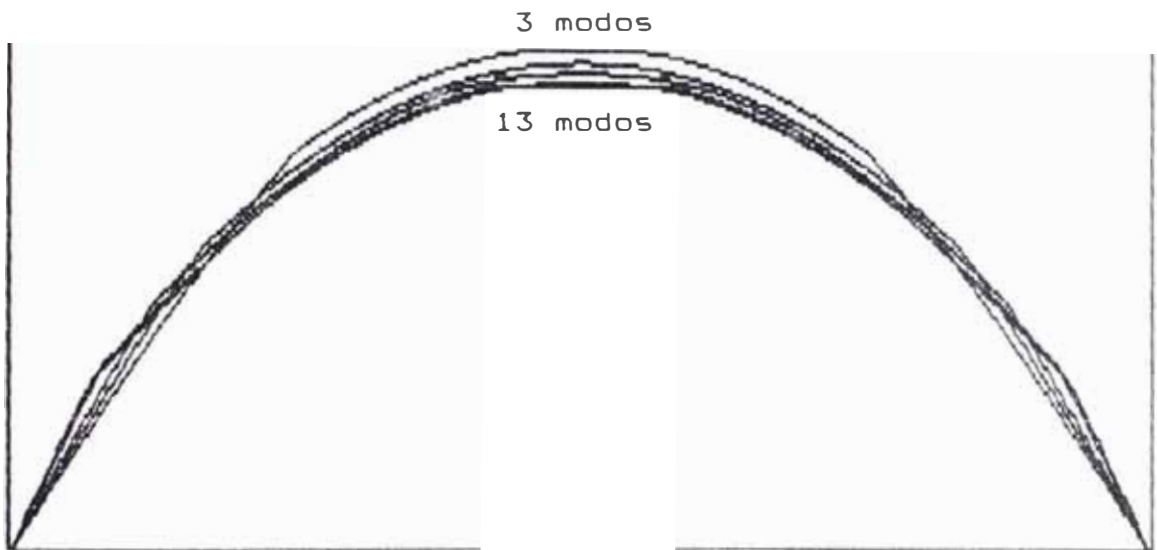


Fig. 4.5.5.- Distribución de corriente en módulo usando dos términos para el radio equivalente para un dipolo de $1/a=40$ y $1/\lambda=0.464$ con 3,5,7,11 y 13 modos

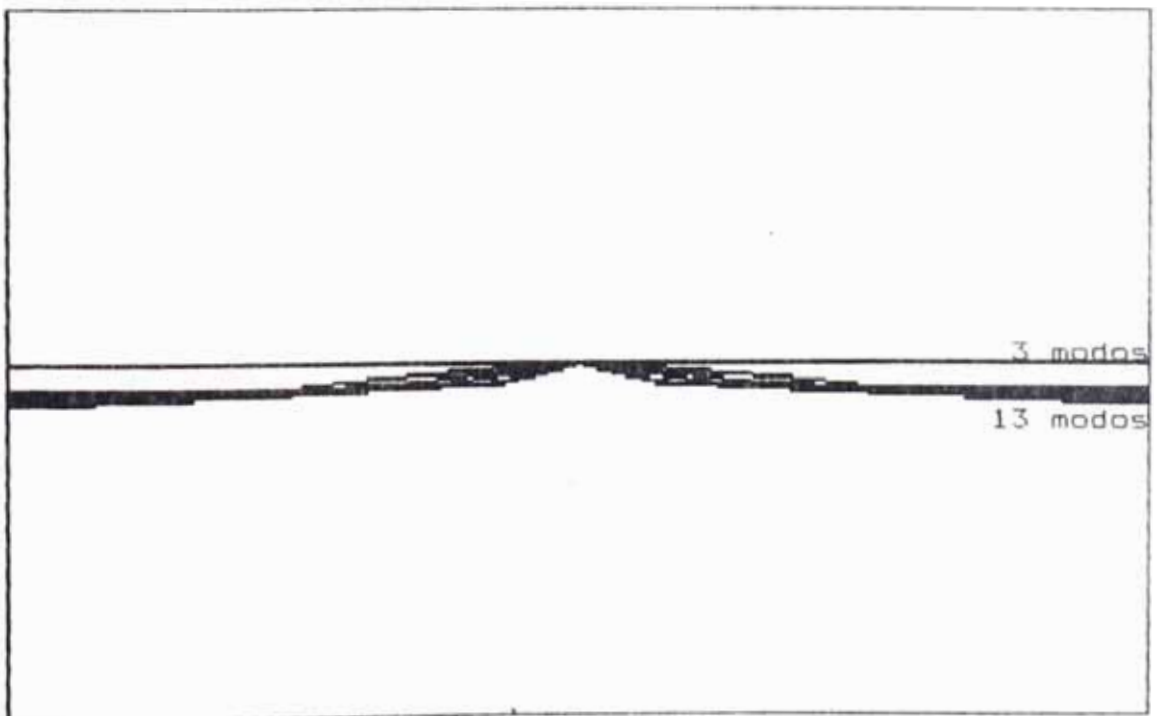


Fig. 4.5.6- Distribución de corriente en fase usando dos términos para el radio equivalente para un dipolo de $1/a=40$ y $1/\lambda=0.464$ con 3,5,7,11 y 13 modos

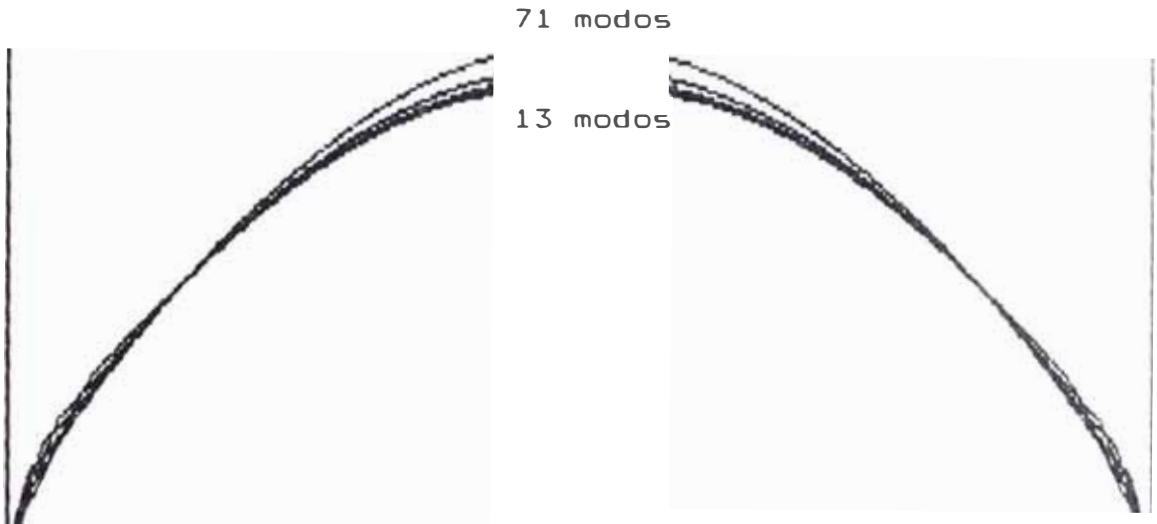


Fig. 4.5.7.- Distribución de corriente en módulo usando dos términos para el radio equivalente para un dipolo de $1/a=40$ y $1/\lambda=0.464$ con 13,21,31,51 y 71 modos

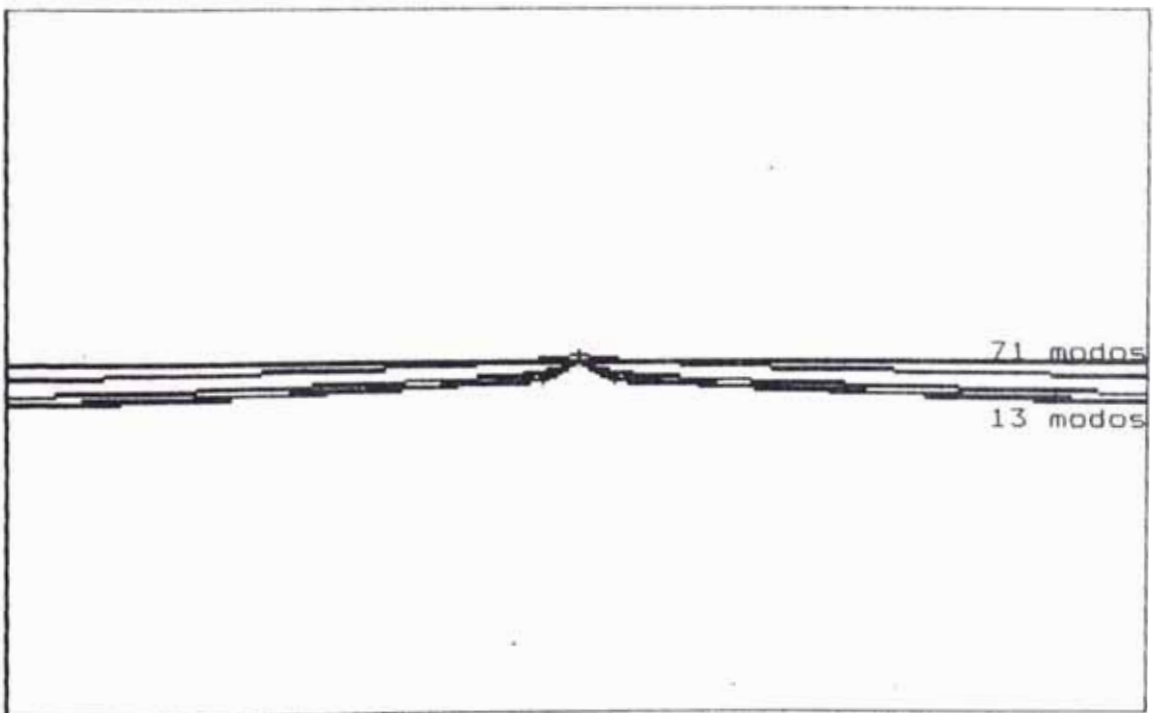


Fig. 4.5.8.- Distribución de corriente en fase usando dos términos para el radio equivalente para un dipolo de $1/a=40$ y $1/\lambda=0.464$ con 13,21,31,51 y 71 modos

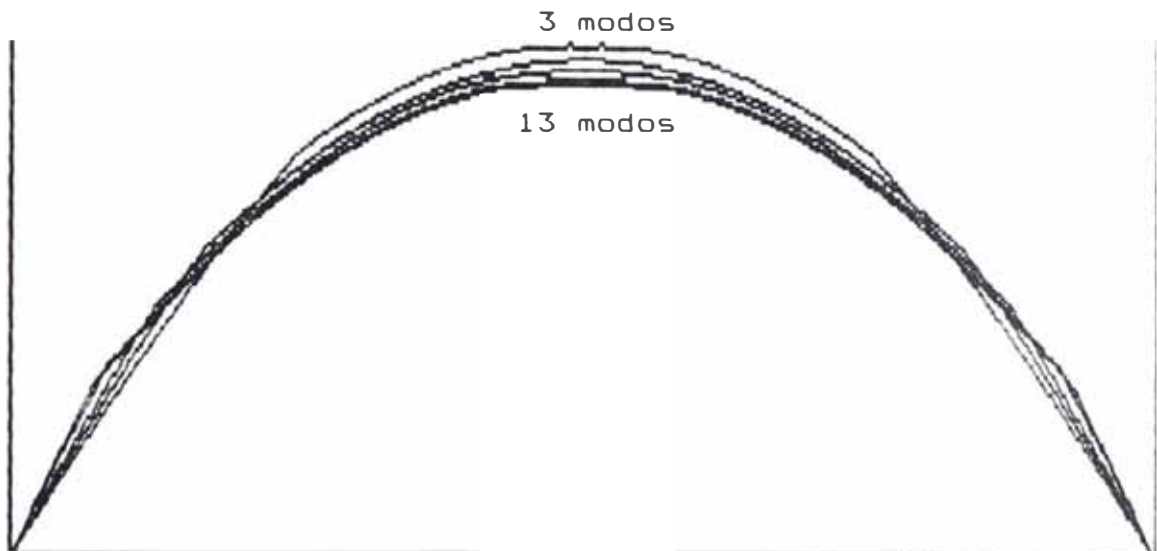


Fig. 4.5.9.- Distribución de corriente en módulo usando integración del kernel exacto para un dipolo de $l/a=40$ y $l/\lambda=0.464$ con 3,5,7,11 y 13 modos

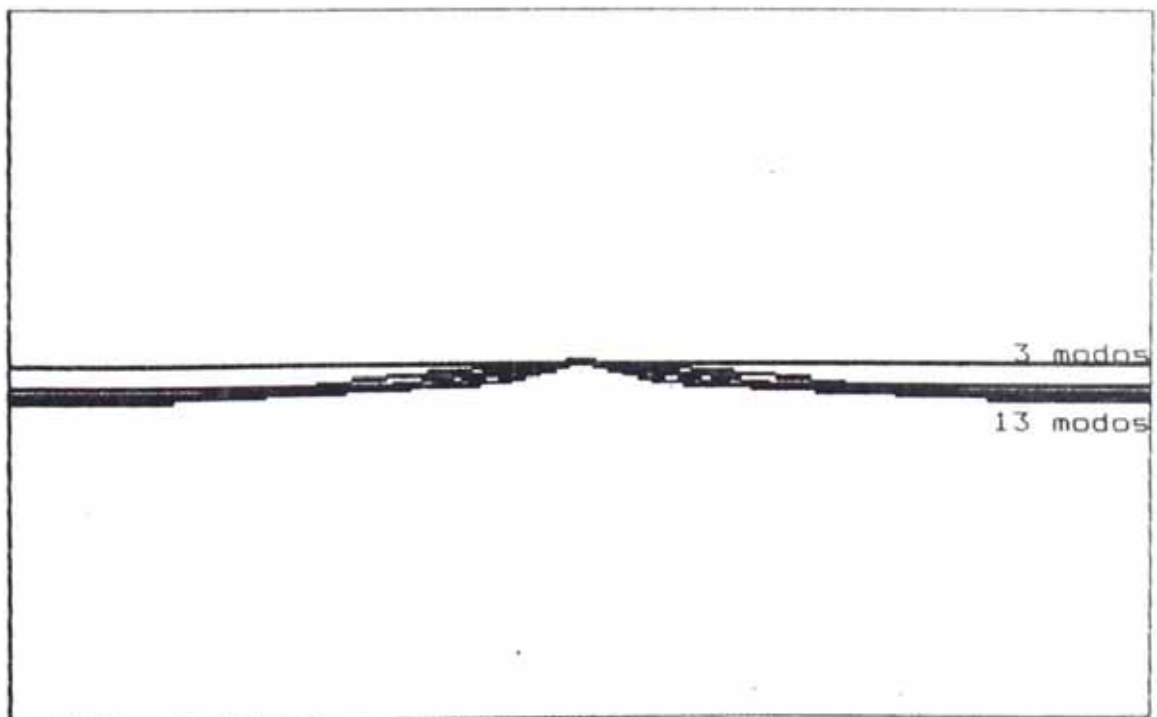


Fig. 4.5.10- Distribución de corriente en fase usando integración del kernel exacto para un dipolo de $l/a=40$ y $l/\lambda=0.464$ con 3,5,7,11 y 13 modos

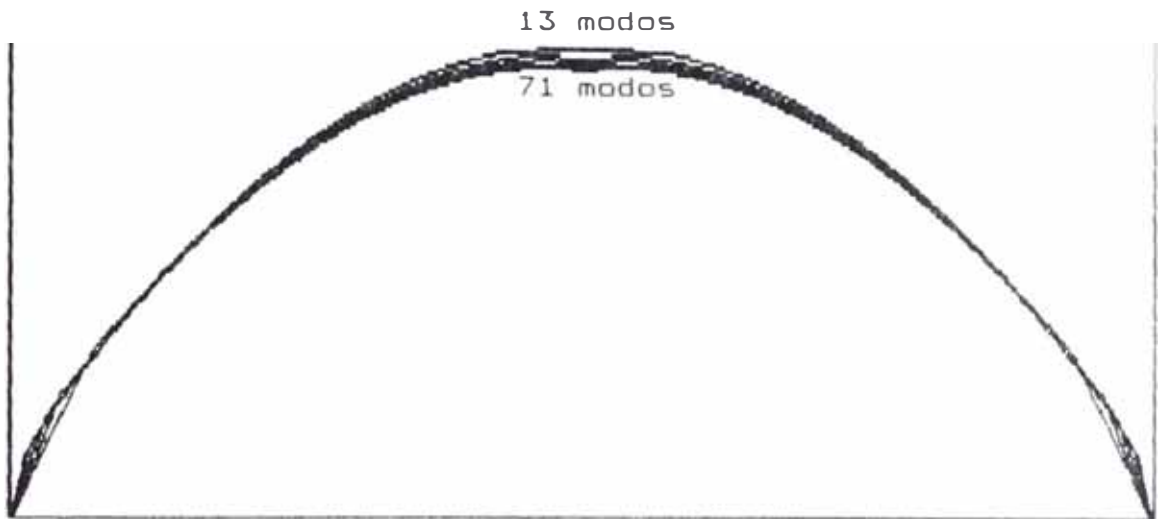


Fig. 4.5.11.- Distribución de corriente en módulo usando integración del kernel exacto para un dipolo de $1/a=40$ y $1/\lambda=0.464$ con 13,21,31,51 y 71 modos

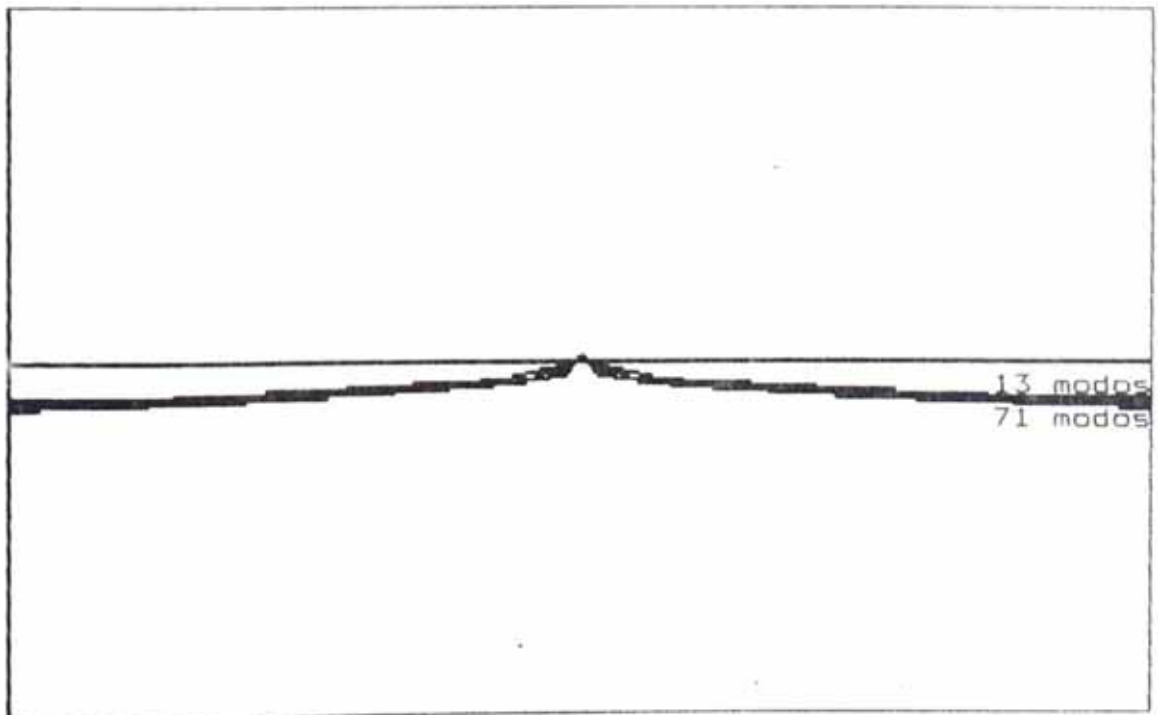


Fig. 4.5.12.- Distribución de corriente en fase usando integración del kernel exacto para un dipolo de $1/a=40$ y $1/\lambda=0.464$ con 13,21,31,51 y 71 modos

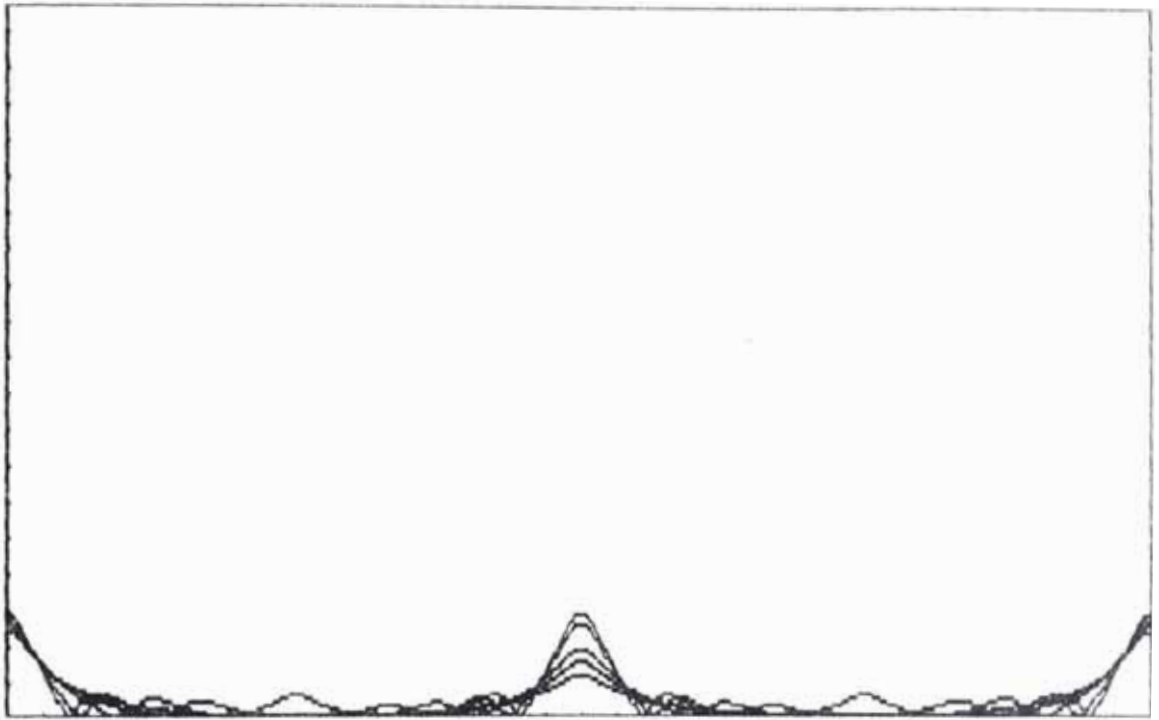


Fig. 4.5.13.- Campo electrico tangencial recalculado para la solución por el kernel reducido de un dipolo de $1/a=40$ y $1/\lambda=0.464$ con 3,5,7,11 y 13 modos

Fig. 4.5.14.- Campo eléctrico tangencial recalculado para la solución por el kernel reducido de un dipolo de $1/a=40$ y $1/\lambda=0.464$ con 71 modos

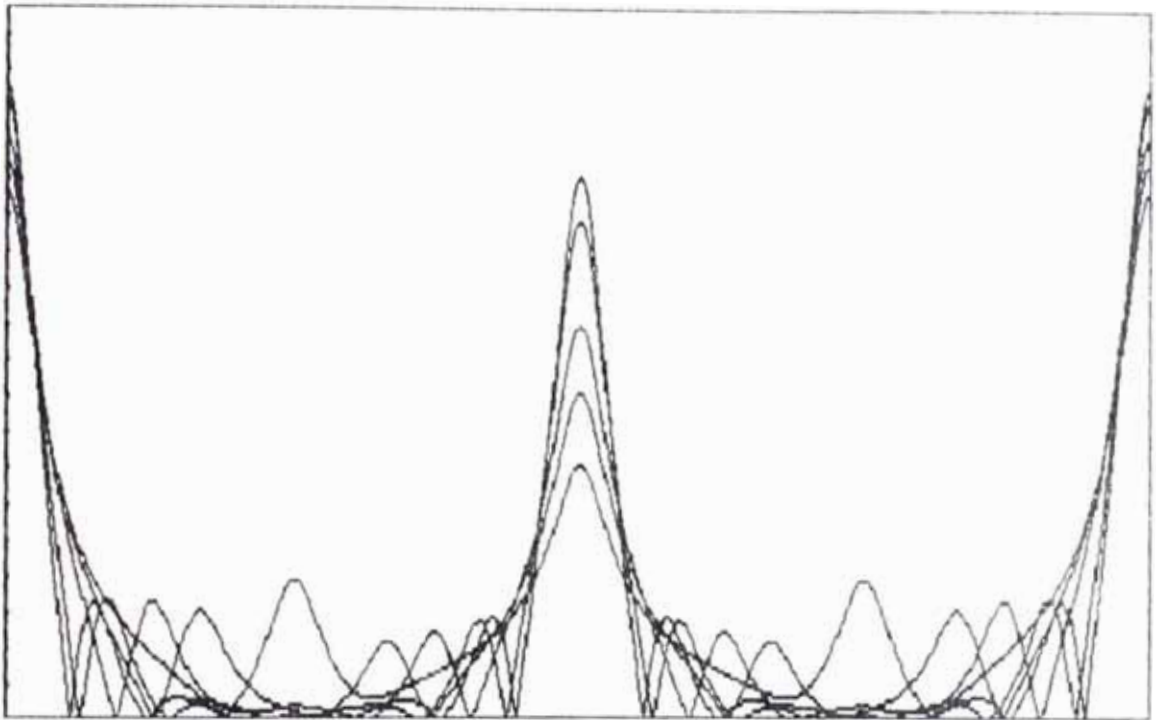


Fig. 4.5.15.- Campo electrico tangencial recalculado para la solución con radio equivalente de dos términos de un dipolo de $1/a=40$ y $1/\lambda=0.464$ con 3,5,7,11 y 13 modos

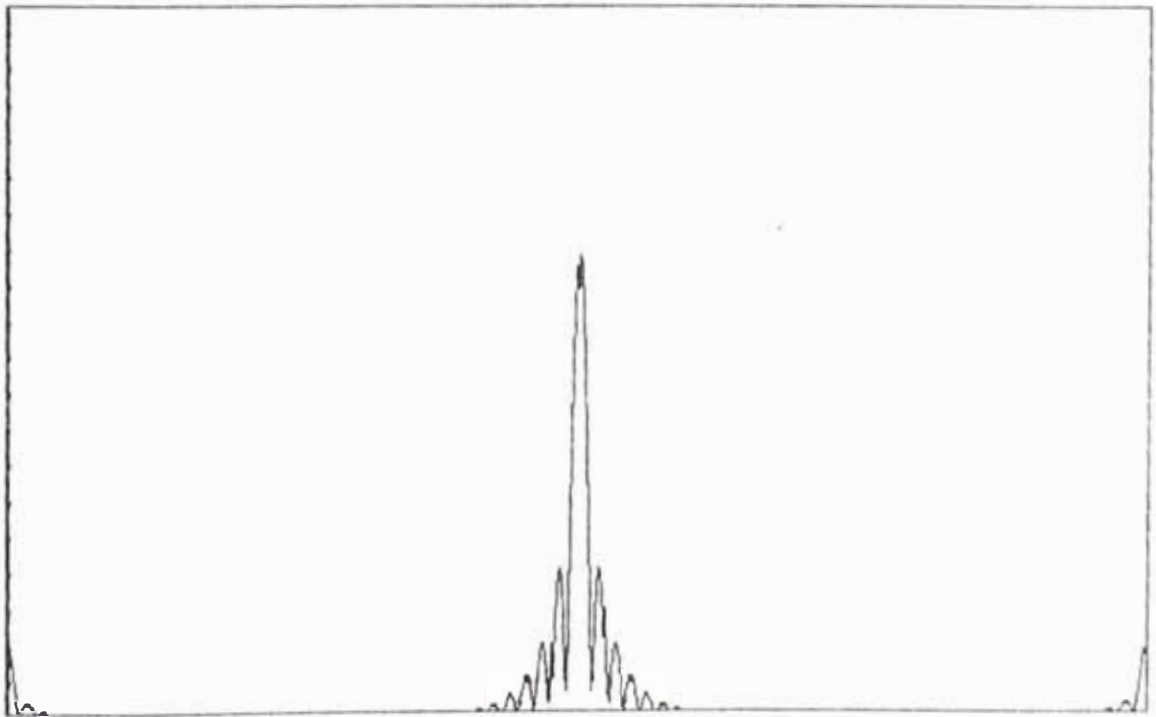


Fig. 4.5.16.- Campo eléctrico tangencial recalculado para la solución por radio equivalente de dos términos para un dipolo de $1/a=40$ y $1/\lambda=0.464$ con 71 modos

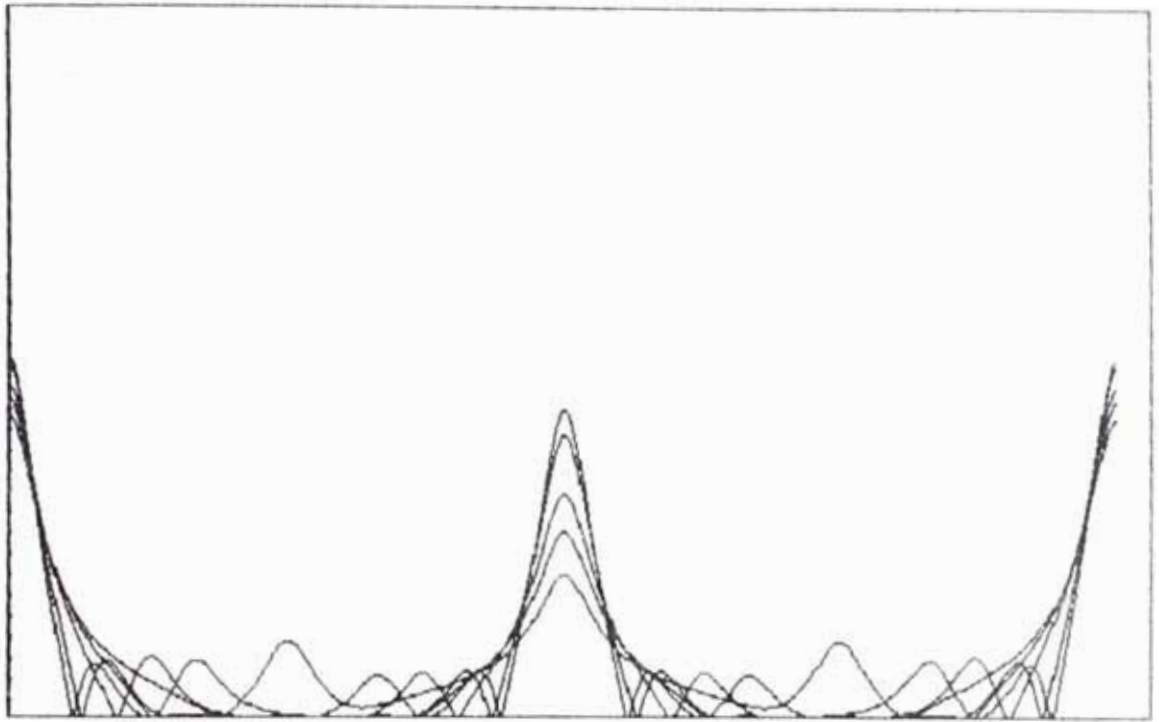


Fig. 4.5.17.- Campo electrico tangencial recalculado para la solución por integración del kernel exacto para un dipolo de $1/a=40$ y $1/\lambda=0.464$ con 3,5,7,11 y 13 modos

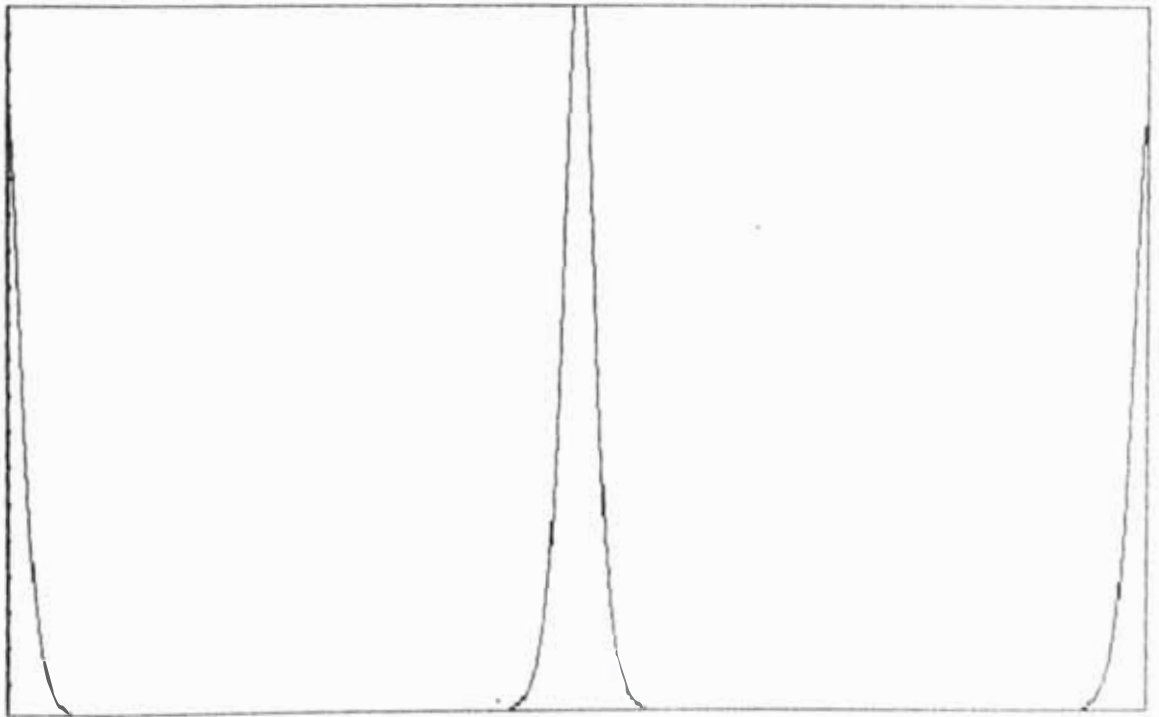


Fig. 4.5.18.- Campo eléctrico tangencial recalculado para la solución por integración del kernel exacto para un dipolo de $1/a=40$ y $1/\lambda=0.464$ con 71 modos

Como síntesis de los criterios de convergencia mostrados se tienen los siguientes puntos:

Los gráficos del campo eléctrico tangencial para el método de radio equivalente de dos términos y de integración del kernel exacto están aumentados 6 veces con respecto a los gráficos correspondientes para el kernel reducido. Todos los demás gráficos están a la misma escala.

Como síntesis de los criterios de convergencia mostrados se tienen los siguientes puntos:

a) Si se usa el kernel reducido, las soluciones convergen al aumentar el número de modos mientras que en ellos se cumpla $d/a > 8$.

b) Para el método de radio equivalente de dos términos, hay convergencia mientras $d/a > 2$.

c) Una aceptable aproximación de la corriente se obtiene con 7 o 9 modos por longitud de onda para casos no resonantes y 13 para los casos resonantes.

d) Es preferible mantener cercanas entre sí las semilongitudes de los modos a lo largo de toda la antena.

e) Una solución para los casos de elementos

gruesos es el método de integración del kernel exacto; y gracias a la extracción de la singularidad logarítmica que ha sido aplicada, se puede considerar adecuado incluso solo tener 10 intervalos de 0 a π . Sin embargo, este método solo puede ser aplicado cuando los elementos no están muy cercanos entre sí. Cuando lo son, sólo nos queda usar el kernel reducido.

f) Para dipolos de media onda, incluso un modo puede dar una aproximación aceptable de la corriente.

g) Estas restricciones nos dan las aproximaciones de convergencia segura. Se puede aumentar el número de modos progresivamente más allá de estas restricciones, pero debe verificarse que no se produzca divergencia. Esto puede realizarse verificando que no aparezcan distorsiones en la distribución de corriente.

CAPITULO V

REALIZACION PRACTICA DE ANTENAS YAGI. METODOS EXPERIMENTALES Y RESULTADOS ALCANZADOS

En este capitulo vamos a explicar el procedimiento de construcción de una antena Yagi y el sistema de adaptación necesario (balunes y adaptadores de impedancia) y los métodos de medición de sus principales características, como son, relación de onda reflejada, ancho de banda, impedancia de entrada, patrón de radiación, ancho del haz, ganancia, polarizabilidad, distribución de corriente y potencia.

Se pondrá especial atención a los procedimientos de construcción que son necesarios para conseguir una buena adaptación y una buena protección contra el medio ambiente.

Esto es importante pues los efectos de la tracción del viento y de oxidación y corrosión son sinérgicos, es decir, cada uno agudiza la gravedad del otro. Se ha llegado a decir incluso que un buen ingeniero de antenas debe ser también un ingeniero de corrosión, por la importancia de este tema.

5.1 Antena yagi - definiciones

Las definiciones y características generales de una antena Yagi se encuentran suficientemente explicadas en [1], [5], [44], [51], [52], [54], [55], [56] y [57]. De todos modos por continuidad de la explicación mostraremos la configuración básica y las definiciones usadas, así como las características que se esperan de una antena Yagi.

En la figura 5.1.1 se ilustra la configuración básica de una antena Yagi. Consiste de un dipolo activo, un elemento reflector ubicado detrás de él, y varios elementos directores delante. Los elementos parásitos (reflector y directores) tienen una longitud y posición tales que refuerzan la radiación en una dirección. De aquí vienen sus nombres de reflector y directores. Como las ondas se transmiten principalmente en el sentido de los directores, no se encuentra ventaja práctica al colocar mas reflectores.

Aumentando el número de directores debe conseguirse un mayor reforzamiento de la directividad. También se puede reemplazar el reflector por una parrilla, pero la Yagi como antena simple y económica fue concebida originalmente como un arreglo plano de elementos lineales, y nosotros nos centraremos en el estudio de la Yagi

simple.

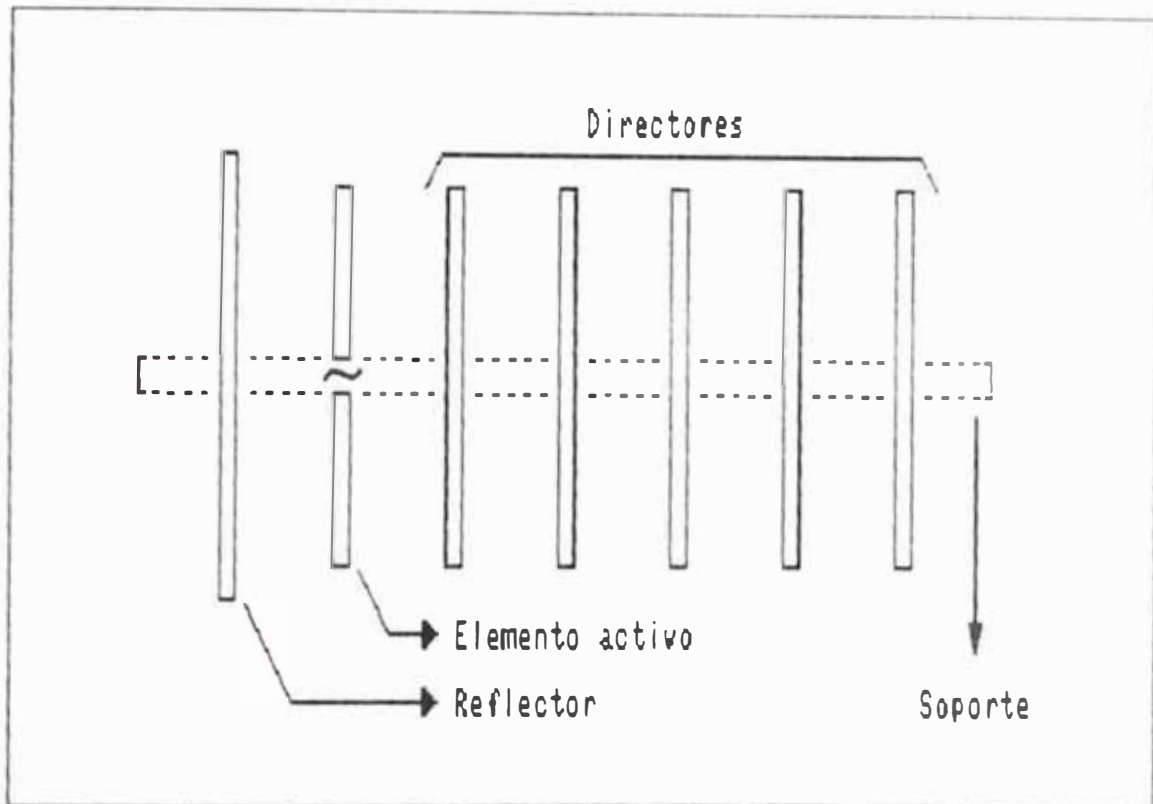


Fig. 5.1.1.- Antena Yagi

En el capítulo anterior (sección 4.1.8) se describen los fundamentos de un estudio simplificado de la antena Yagi basado en el **Factor de direccionalidad**, que se encuentra claramente explicado en [5].

Podemos empezar analizando el caso de un elemento alimentado y un elemento pasivo.

Para tener una primera aproximación al comportamiento de tal sistema, hagamos que I_1 sea la corriente por el dipolo alimentado e I_2 la corriente por el dipolo

pasivo. Entonces, se tendrá:

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$$

El factor de direccionalidad estará dado por:

$$1 - \frac{Z_{12}}{Z_{22}} e^{jkx \cos \phi}$$

donde x es la distancia entre los elementos (representa la posición del elemento 2, pasivo, respecto del elemento 1, activo).

Este factor de direccionalidad se aproxima a la forma del patrón de radiación en el plano H. Pruebas experimentales extensivas realizadas en las referencias citadas, y que pueden ser seguidas por el programa, muestran que la máxima directividad para dicho patrón se obtiene cuando x vale entre 0.1 y 0.25 longitudes de onda, coincidiendo esto con una impedancia mutua en el cuarto cuadrante. Mientras menor es x , la impedancia mutua Z_{12} se acerca más al semieje real positivo en el plano complejo, haciendo que $-Z_{12}$ se acerque al semieje real negativo.

Con estas consideraciones, como se puede observar en la figura 5.1.2 si Z_{22} tiene parte imaginaria positiva (es inductivo), el complejo $-Z_{12}/Z_{22}$ estará en el semiplano superior, lo que hará que el factor de direccionalidad

lidad sea máximo para $\phi=180^\circ$ y mínimo para $\phi=0^\circ$, lo que significará que el elemento pasivo está actuando como **reflector**, y si Z_{22} tiene parte imaginaria negativa (es **capacitivo**), el complejo $-Z_{12}/Z_{22}$ estará en el semiplano inferior, lo que hará que el factor de direccionalidad sea máximo para $\phi=0^\circ$ y mínimo para $\phi=180^\circ$, lo que significará que el elemento pasivo está actuando como **director**.

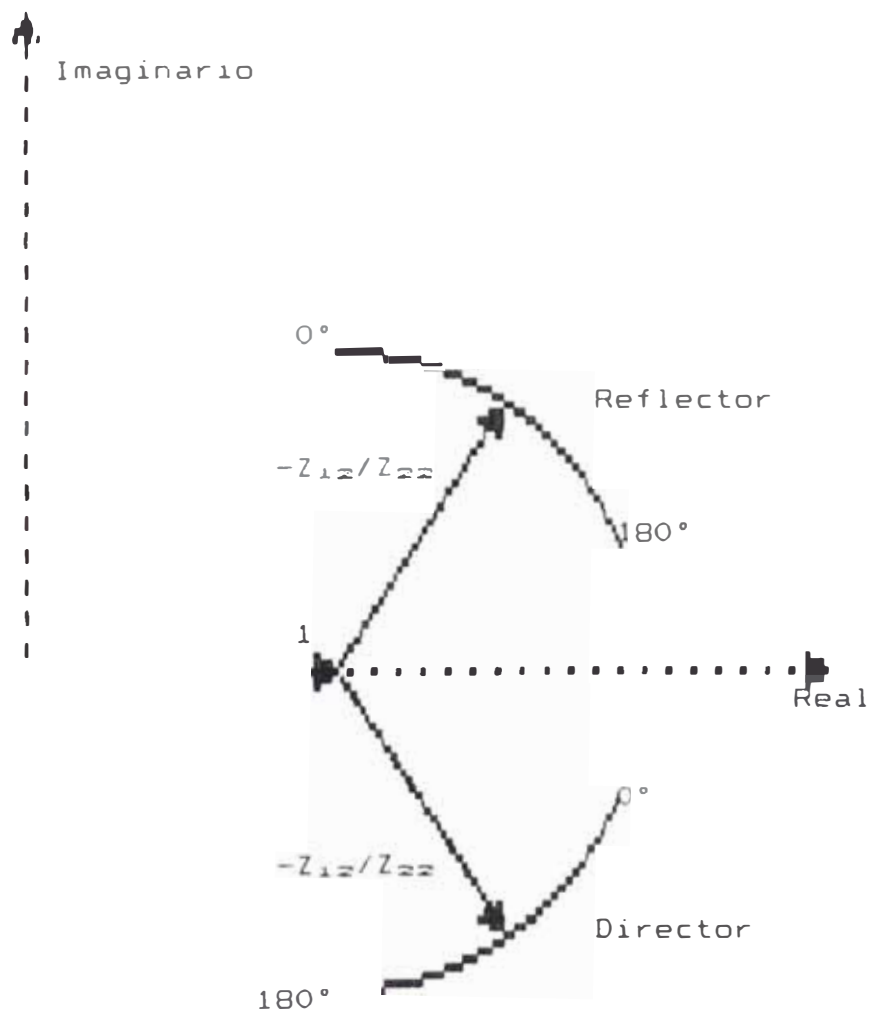


Fig. 5.1.2.- Gráfico del factor de direccionalidad $1 - Z_{12}/Z_{22} \exp(jkx \cos\phi)$ para un elemento activo y uno parásito con separación x

De este modo, como a partir de las curvas experimentales de impedancia de elementos cilindricos que se pueden observar por ejemplo en la referencia [44] páginas 4-7 y 4-8 (que reproduciremos mediante nuestro programa); un reflector debe tener una longitud ligeramente mayor que la longitud de resonancia para ser inductivo, y un director debe tener una longitud ligeramente menor que la de resonancia para ser capacitivo.

En la referencia [5] pág 363 se generaliza este análisis simplificado para el caso de varios directores; y en las demás referencias citadas se propone un enfoque del funcionamiento de la antena Yagi como una guía de onda superficial. Sin embargo, todos estos enfoques son demasiado imprecisos para Yagis de un número práctico de elementos pues no analizan la verdadera forma de la distribución de corriente. Nosotros no profundizaremos en estos enfoques simplificados que pueden verse en las referencias citadas.

5.2 Sistemas de adaptación y balunes: diseño y construcción

Un **balún** es una red que transforma una línea balanceada en desbalanceada o viceversa. Una línea balan-

ceada es aquella en que los dos conductores presentan la misma impedancia respecto de tierra. Como en una línea de transmisión, de acuerdo a la primera ley de Kirchoff, las corrientes por los conductores son opuestas, esto va a significar que los voltajes de los conductores de una línea de transmisión balanceada se encuentran a valores opuestos respecto de tierra.

Una línea de transmisión desbalanceada es aquella que no es balanceada. Una línea en que los conductores no son simétricos, como ocurre en una línea coaxial, obviamente es una línea desbalanceada. Sin embargo, la línea coaxial es muy útil porque a diferencia de las líneas simétricas abiertas, encierra el campo disminuyendo las pérdidas por radiación a lo largo de la línea. El conductor externo de la línea coaxial es normalmente conectado a la carcasa del transmisor de radiofrecuencia, y la línea coaxial se lleva hasta la antena, donde, si se trata de una antena simétrica como es la antena Yagi, es necesario el balún.

Este se comporta como un transformador donde la entrada puede ser desbalanceada (de la línea coaxial de alimentación) y la salida puede ser flotante. El tener una antena simétrica, de modo que las impedancias de ambos ramales respecto de tierra son iguales, nos asegura tener un balance adecuado.

Es preferible poder contar con una salida "todo a masa" donde se tienen en realidad tres tomas de dicho transformador simulado, donde la tercera, que está unida a la tierra de la entrada, se une a la vez a la masa de la antena (soporte).

Esto se detallará cuando analicemos los balunes mas usados.

La línea debe ser adaptada tanto por el lado del transmisor como por el lado de la carga (antena).

Por el lado del transmisor, un circuito transformador iguala la impedancia vista de la línea con la impedancia resistiva del circuito resonante de salida.

Por el lado de la carga, son necesarios adaptadores de impedancia que permitan una buena adaptación, sobre todo para que la onda reflejada no dañe el transmisor.

Los parámetros típicos con que se mide la onda reflejada son:

- ρ : Coeficiente de reflexión
- VSWR : Razón de onda estacionaria de voltaje
- S : Coeficiente de reflexión de potencia

Están dados por las siguientes ecuaciones:

$$\rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

$$VSWR = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|}$$

$$S = \left[\frac{VSWR - 1}{VSWR + 1} \right]^2$$

donde:

Z_L : Impedancia de carga (antena)

Z_0 : Impedancia de la línea

VSWR de 1.1 o incluso 1.2 son especificados como suficientes para una transmisión adecuada. Si no es transmitida mucha potencia, son aceptables VSWR mayores.

La dificultad de la adaptación consiste en el ancho de banda. En la práctica, el ancho de banda de una antena está determinado por el rango de frecuencias para el cual se encuentra adaptada a la línea dentro de un VSWR especificado. En la referencia [50] se encuentra toda una técnica para, conocida la impedancia de una antena en función de la frecuencia para un rango de frecuencias determinado de trabajo, llevar esta impedancia a valores cercanos a los de la línea dentro del VSWR especificado, mediante circuitos adaptadores de impedancia hechos de líneas de transmisión.

Lo usual es que el balún sea a la vez adaptador de impedancias. Otra forma de lograr la adaptación es mediante el uso del dipolo doblado, como se explica a continuación.

5.2.1 El dipolo doblado

En [44] pag. 4-16 se explica como un dipolo doblado como el que se ilustra en la figura 5.2.1 no es mas que un sistema de adaptación de impedancias donde se forma un dipolo equivalente, siendo la distancia entre los conductores del dipolo pequeña comparada con la longitud de onda.

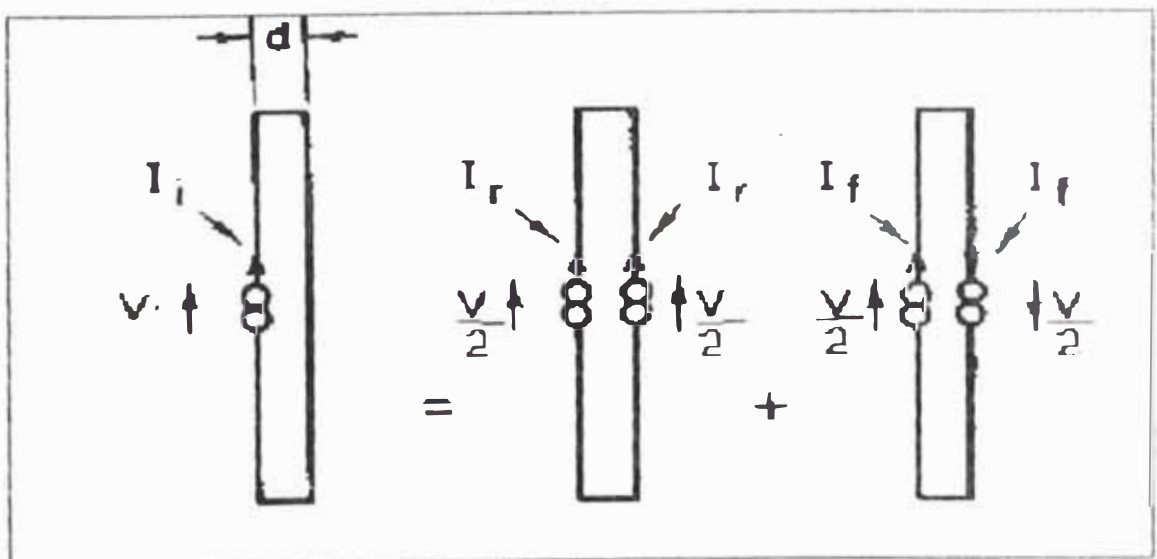


Fig 5.2.1.1.- Dipolo doblado

La configuración del dipolo doblado equivale por superposición a alimentar ambos conductores con la mitad

del voltaje aplicado, y en paralelo alimentar dos líneas de alimentación cortocircuitadas, de modo que para el dipolo simétrico de longitud l y radio de los conductores a separados una distancia d se tendrá el circuito equivalente:

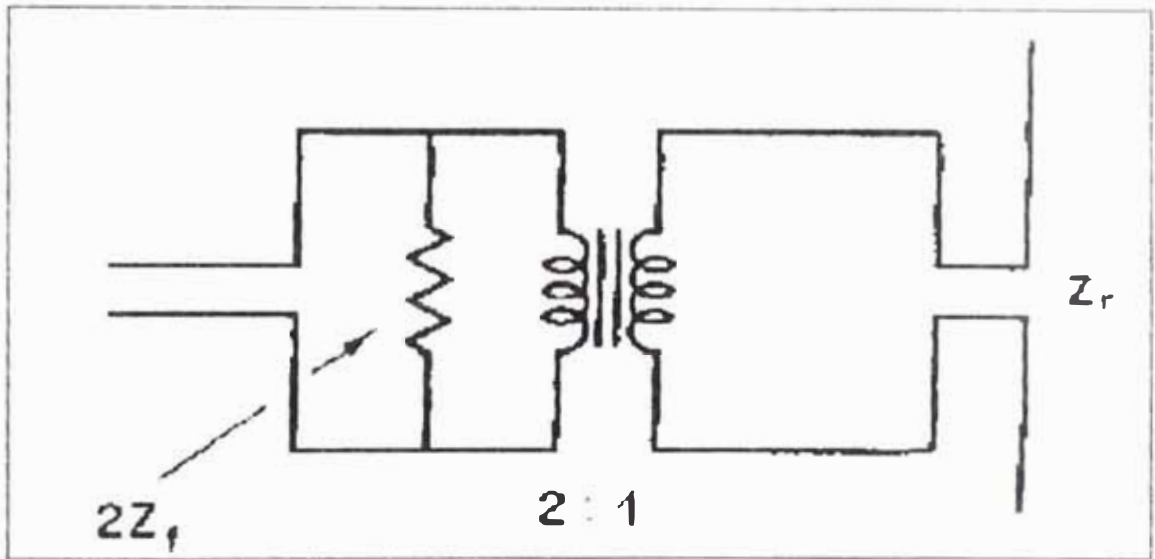


Fig 5.2.1.2.- Circuito equivalente del dipolo doblado

Donde si:

- l : longitud del dipolo doblado
- a : radio de sus conductores
- d : separación entre sus conductores
- Z_0 : impedancia de transmisión entre sus conductores
- Z_r : impedancia de una de las líneas de transmisión cortocircuitada formadas
- Z_r : impedancia equivalente de radiación de los dos conductores; que puede ser hallada suponiéndolos separados y alimentados con el mismo voltaje o utilizando como radio equivalente la media geométrica entre a y d

Esto ha sido comprobado mediante el programa.

Se tendrán las siguientes relaciones para este dipolo doblado; que nos permitirán calcular la impedancia de entrada considerando tanto las corrientes de radiación como las corrientes de transmisión que se obtuvieron mediante superposición:

$$Z_0 = 120 \ln \left[\frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{d}{2a}\right)^2 - 1} \right]$$

$$Z_f = jZ_0 \tan\left(\beta \frac{l}{2}\right)$$

$$\frac{1}{Z_e} = \frac{1}{2Z_f} + \frac{1}{4Z_r}$$

Como trabajaremos en la primera resonancia, usando dipolos de media onda, el dipolo doblado se reduce a un circuito que cuadruplica la impedancia de entrada de la antena, lo que es como veremos de una gran utilidad.

5.2.2 El balún "Bazooka"

Es uno de los más simples y usuales. Como se ilustra en la figura, se reviste el conductor externo de la línea coaxial con otro conductor que pasa a ser masa; y, puesto que su longitud se ajusta a un cuarto de la longitud de onda, la impedancia entre los dos conductores es muy grande. Esto hace que ambos conduc-

tores del cable coaxial tengan la misma impedancia (infinita) respecto de tierra, balanceando la línea.

Es preferible conectar el conductor exterior del balún al soporte o punto muerto de la antena. La limitación de este balún su poco ancho de banda: una variación de frecuencia desbalancea la antena fuertemente.

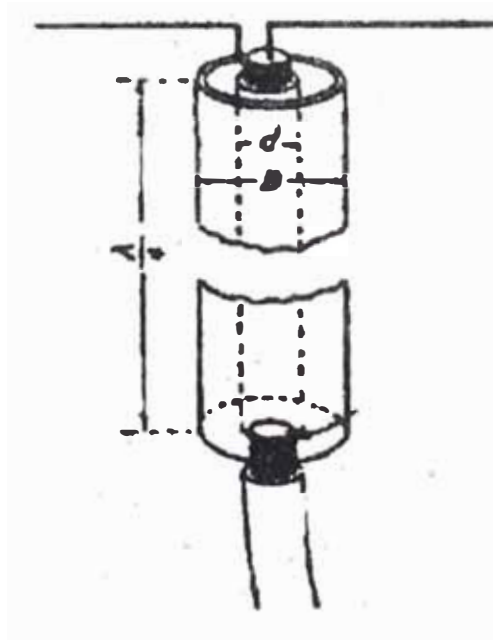


Fig. 5.2.2.1.- Balún "Bazooka"

La transformación de impedancia corresponde a un transformador de cuarto de onda: la impedancia que ve la línea coaxial que entra al balún es igual al cuadrado de

la impedancia de la línea coaxial interna al balún entre la impedancia de la antena.

La línea coaxial interna al balún no tiene necesariamente que tener la misma impedancia que la línea de alimentación y usualmente se elige para que se logre la mejor adaptación posible.

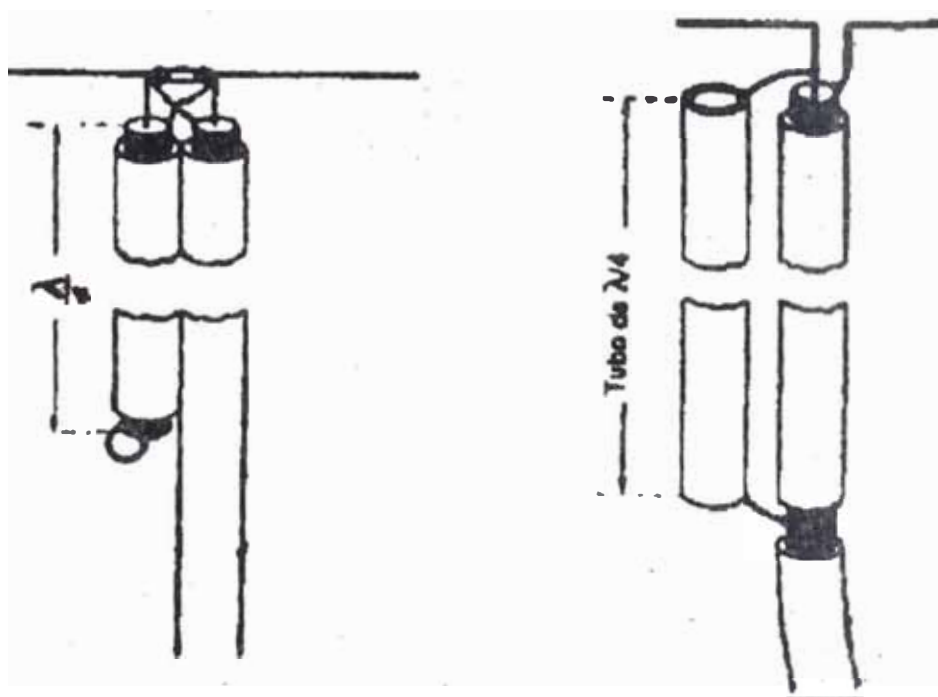


Fig. 5.2.2.2.- Otras formas del "Bazooka"

En la figura 5.1.2.2 se muestran otras formas más sencillas de implementar el balún "Bazooka" basadas en el principio de simetrizar la impedancia respecto de tierra que se tiene en los terminales de la antena, que son económicas por usar cable coaxial.

El problema será ahora determinar la longitud equivalente a un cuarto de onda en un cable coaxial. Si bien se puede ver en las especificaciones del fabricante el coeficiente de velocidad del cable (RG 58 y 59, que son los tipos de cable que más se usan para la adaptación por su flexibilidad, aunque se usa para la línea un cable más grueso y de pérdidas menores como es el RG 8), en la práctica este varía tanto como entre 0.56 y 0.83.

Las alternativas que se tienen son dos: adquirir cable de un mismo fabricante (conocido) o medir experimentalmente para cada caso. Una forma de medir el coeficiente de velocidad es mediante un puente de onda reflejada (rho bridge); equipo que se describirá más adelante (ver anexo). Para una frecuencia fija, debe tenerse la máxima onda reflejada para una longitud de cable múltiplo de un cuarto de longitud de onda. Existen métodos más elaborados en las referencias citadas (como la medición directa de la impedancia) pero este es sencillo.

El cable Pirelli posee buenas características y no es muy costoso por lo que es preferido para este tipo de conexiones. Su coeficiente de velocidad de propagación es 0.665.

En la figura 5.1.2.3 se muestra la construcción física de los balunes "Bazooka". Se construyen de aluminio con el conector para el coaxial de bronce (pues el

aluminio es difícil de soldar y el cobre se corroe con el ambiente).

La soldadura es un proceso importante en la construcción de antenas. Deben unirse entre sí materiales que no tengan una gran diferencia de potencial electroquímico para evitar la corrosión.

En general, es siempre preferible la soldadura al remachado, en toda construcción de antenas. Para aluminio se utiliza un soldador TIG tipo arco, que recibe alimentación de 250 volt y gas argón (usa la fuente de potencia para soldadura IDEALARC TIG 250/250). La soldadura de aluminio contra aluminio es un proceso especial y se utilizan barras para soldadura de aporte con aluminio con este equipo.

Otro tipo de soldaduras (con otros materiales como son bronce, hierro, etc) son más sencillas.

El proceso de soldadura genera perturbaciones electromagnéticas que interfieren con las mediciones que se realizan.

5.2.3 Otros tipos de balunes y adaptadores

En la figura 5.2.3.1 tenemos un balún muy usado que reduce la impedancia efectiva que observa el coaxial

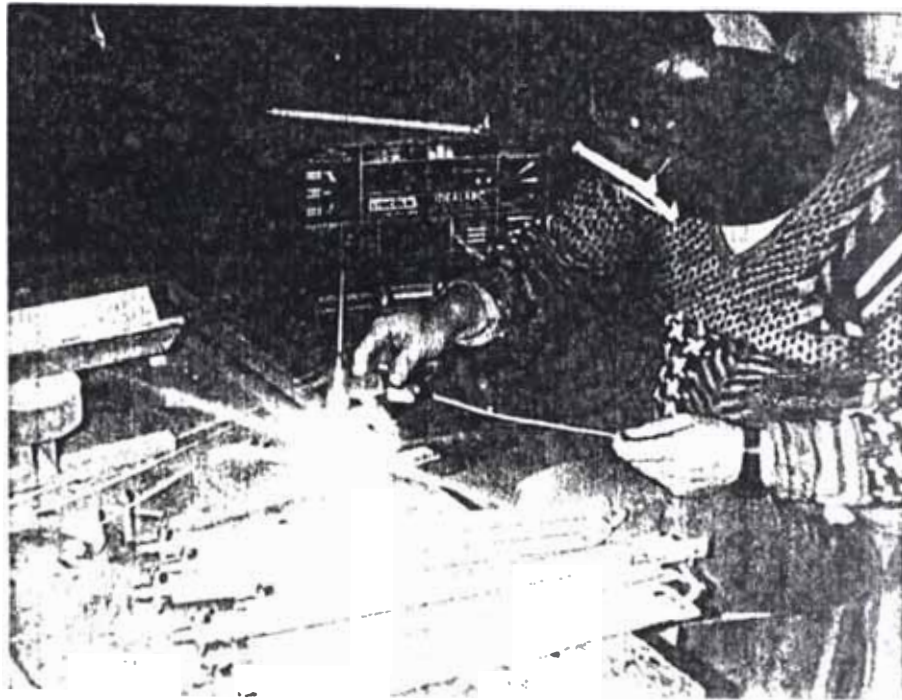


Fig. 5.2.2.3.- Soldadura de los balunes "Bazooka"

a un cuarto de la que presenta la antena. La separación de media longitud de onda entre los puntos de alimentación a la antena logra que dichas tensiones sean opuestas.

Siempre es preferible conectar el punto de tierra al soporte de la antena.

Otra forma de lograr un efecto semejante es mediante ramales de $\lambda/4$ y $3\lambda/4$.

Sin embargo, todos los balunes que hemos visto tienen la restricción de la estrechez de la banda.

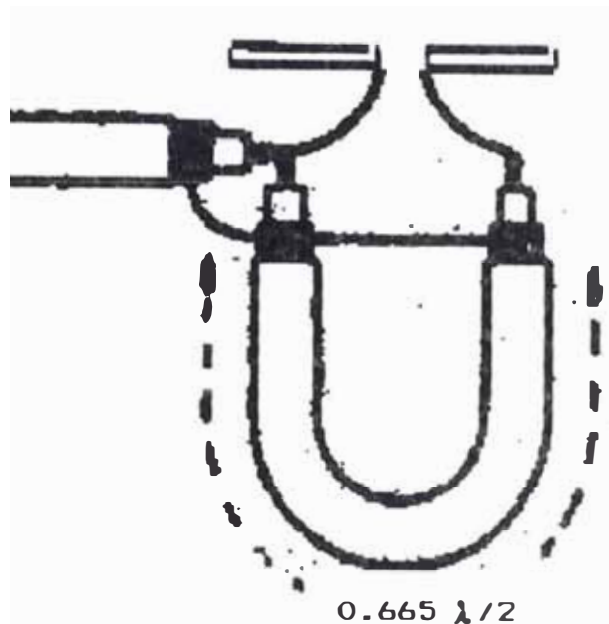


Fig. 5.2.3.1.- Balún de $\lambda/2$

En la figura 5.2.3.2 se muestra un balún de banda ancha con núcleo de ferrita que es sencillo de construir, aplicando el mismo principio de los balunes para recepción de televisión.

En la figura 5.2.3.3 se muestran otras formas de adaptación con contactos móviles para sintonizar. La adaptación en T requiere de un balún previo, mientras que la adaptación en gamma tiene la ventaja de no requerirlo. Por esta característica, la adaptación en gamma es ampliamente usada como un sistema sencillo de simetrización que no requiere construcciones especiales; además de proporcionar adaptación de impedancias ajustable.

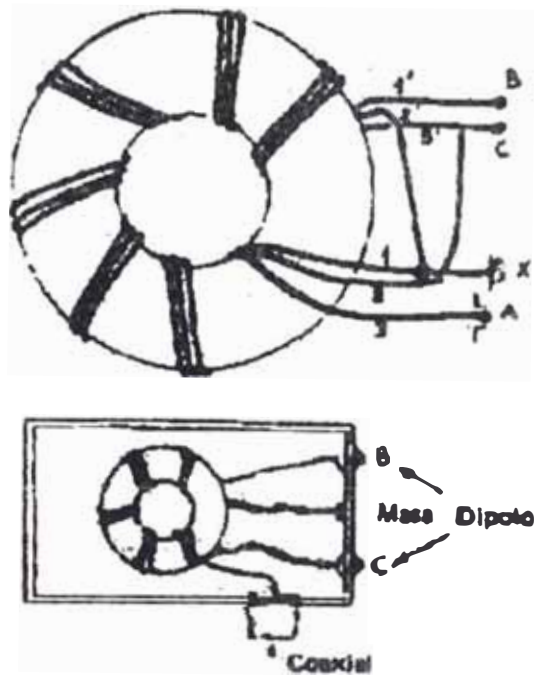


Fig. 5.2.3.2.- Balún de banda ancha

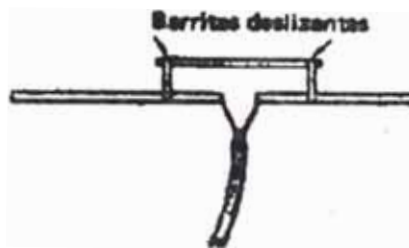
La desventaja aparente es la poca rigidez de la construcción de estos adaptadores y su exposición al medio ambiente.

5.3 Construcción de antenas Yagi.

Detallaremos el procedimiento de construcción de antenas Yagi para transmisión de televisión alimentadas por un dipolo doblado con 5 elementos (un reflector y tres directores).



Adaptación en T



Variante de la adaptación en T



Adaptación en gamma

Fig. 5.2.3.3.- Adaptación en T y en gamma

Las Yagis serán construidas para los canales 2, 4, 5, 7, 9, 11 y 13. También se construyeron Yagis con parrilla (screen yagi) con 5 directores para los canales 7, 8, 9, 11 y 13. Esto fue realizado en la empresa Valtron en la planta ubicada en Santa Lucía Mz. E lote 6 urbanización Industria Aurora, Ate. en agosto de 1993.

Se construyen en base a dipolos de longitud alrededor de media longitud de onda. En la tabla 5.3.1 se indica el rango de frecuencias; la frecuencia central y la longitud de onda correspondiente a dicha frecuencia; para cada uno de los canales de televisión de VHF.

Para la banda I se utiliza soporte (boom) de aluminio de sección rectangular de 2 por 1.5 pulgadas (el lado menor en el sentido de los dipolos), mientras que para la banda III se utiliza un soporte de sección cuadrada de una pulgada. Estas medidas se mantienen dentro de cada banda.

Se **inicia** el trabajo construyendo el dipolo doblado en base al esquema de la figura 5.3.1.

El dipolo doblado se forma doblando en forma de U larga dos tubos de aluminio mediante una máquina dobladora en frío.

Puede llenarse de arena el tubo para mejor uniformidad del doblado, aunque no es necesario con un doblado cuidadoso.

Para la banda I se usa tubo de 3/4 de pulgada de diámetro y para la banda III se usa tubo de 1/2 pulgada de diámetro.

El doblado deja 6 centímetros entre los ejes para la banda III o 10.6 cm para la banda I.

Se fija a una distancia de un extremo del soporte o boom que sea suficiente para colocar el director o el panel, un bloque de material aislante rígido (adiprene).

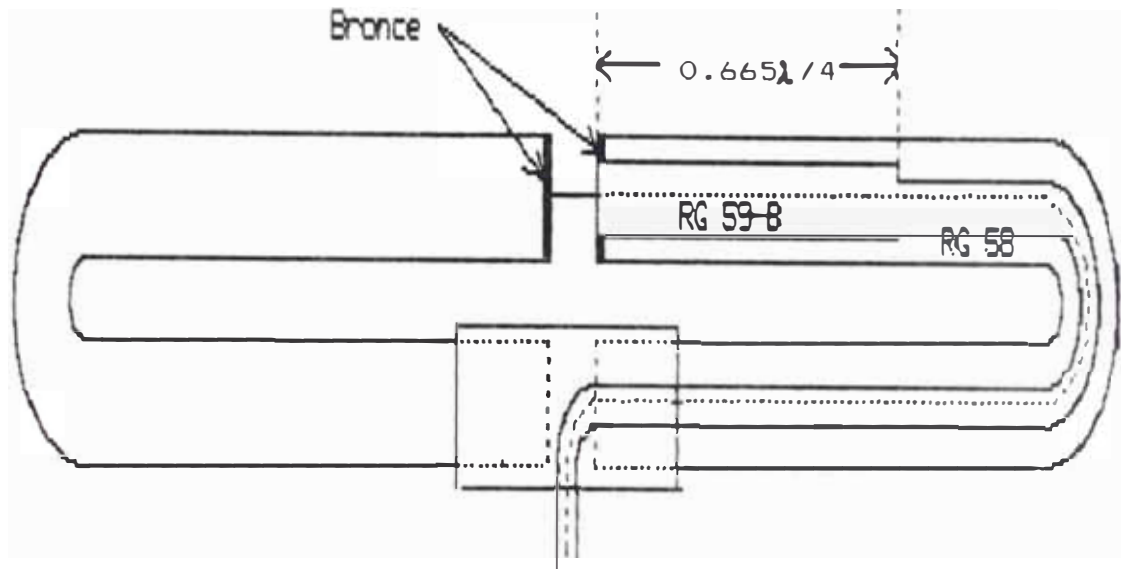


Fig. 5.3.1.- Alimentación del dipolo doblado

Un extremo de uno de los tubos doblados en U se remacha a otro tubo que va a servir para unir ambos tubos en U, calzando su diámetro interno con el diámetro externo de estos tubos.

El otro extremo de este tubo es sellado con un pequeño disco de bronce, con el objetivo de facilitar la unión.

El otro tubo es recorrido interiormente por la línea de alimentación formando el balún, como se ve en la figura 5.3.1. Esta configuración resulta en un transformador de impedancia de un cuarto de longitud de onda, pero debe tenerse en cuenta que es necesario considerar

el coeficiente de velocidad del cable para realizar correctamente la adaptación y esto va a restringir el ancho de banda.

Se corta una longitud de cable RG 59-B (75 ohm) igual a 0.665 veces (si es Pirelli) un cuarto de la longitud de onda correspondiente a la frecuencia central del canal a que se desea hacer trabajar la antena (con unos 4 centímetros para las uniones).

Esta longitud es importante y si no se desea tener que ajustarla debe comprarse cable de fabricantes conocidos.

Se une este cable por un extremo (uniendo entre sí los conductores centrales y los externos) con una longitud de cable RG 58 (50 ohm) adecuada para tener una longitud total igual a la de este segundo tubo en U (media longitud de onda).

Esta longitud no es crítica pues este cable va a ser simplemente continuación de la línea de alimentación.

De este modo, se logra una adaptación sencilla mediante cable que evita las construcciones metálicas complicadas. Como el canal en que va a trabajar cada antena es solamente 6 MHz, se espera obtener un ancho de banda que lo cubra.

Tabla 5.3.1.- Frecuencias de los canales de televisión de VHF

Banda	Canal	Rango de frecuencia (MHz)	Frecuencia central f_0	λ_0 (m)
I	2	54 - 60	57	5.26
	3	60 - 66	63	4.76
	4	66 - 72	69	4.35
	5	76 - 82	79	3.80
	6	82 - 88	85	3.53
	7	174 - 180	177	1.69
	8	180 - 186	183	1.64
	9	186 - 192	189	1.59
	III	10	192 - 198	195
11		198 - 204	201	1.49
12		204 - 210	207	1.45
13		210 - 216	213	1.41

El cable se introduce por el segundo tubo en U y en un extremo se fija el conductor externo del RG 59-B con el tubo de aluminio mediante un pequeño anillo de bronce, quedando sobresaliendo un par de centímetros del

conductor central; mientras que por el otro lado sobresalen unos centímetros de cable RG 58.

Luego se unen ambos tubos en U. Se introduce el extremo sellado con un disco de bronce del primer tubo en un orificio del bloque de adiprene que esta fijo al soporte, y luego se coloca el segundo tubo doblado introduciendo el extremo por donde sobresale el conductor interno del RG 59-B al orificio opuesto del bloque aislante y el otro extremo, por donde sobresalen unos centímetros de cable RG 58, se introduce en el tubo de unión que está remachado al primer tubo doblado.

Este tubo de unión posee un orificio central, y por el extraemos la terminación de cable RG 58.

Luego vienen las soldaduras y remaches finales del dipolo alimentado: por el lado del bloque dieléctrico, que es el lado real de la alimentación, se suelda el conductor interno que sobresale del RG 59-B al disco de bronce (cuya finalidad es justamente poder realizar dicha soldadura, pues el aluminio es difícil de soldar) del primer tubo doblado, de modo que cada conductor de este cable de 75 ohm está unido a un extremo del dipolo doblado que se construye, formándose así la alimentación. El otro extremo del segundo tubo es remachado también al tubo de unión, y cubriendo en orificio de este tubo de unión se coloca un bloque hueco de aluminio donde se fija

un conector N hembra uniendo la masa al conductor externo del RG 58 y el conductor interno al conductor interno del cable.

El bloque metálico hueco es relleno con resina combinada con peróxido de cobalto para lograr el endurecimiento. El objetivo de este sellado con resina es evitar las filtraciones de humedad en el interior del dipolo doblado debido al medio ambiente.

En las figuras 5.3.2 y 5.3.3 se muestran dos etapas de la construcción de estos dipolos doblados.

La antena será alimentada por cable RG 8 de 50 ohm y baja pérdida (que es mas grueso que el RG 58); teniéndose de este modo una conexión "todo a masa" donde luego de la unión de la línea externa de la alimentación a la masa o soporte ambas líneas continúan su camino por el interior del dipolo hacia la alimentación, estando ambas (tanto la línea interna como la externa) totalmente aisladas (blindadas) de la tierra por el conductor de la misma antena. Esto asegura que la alimentación sea balanceada.

La relación de impedancias estará determinada por la transformación de impedancias que ocurre inherentemente en el dipolo doblado y que ya hemos explicado; y por el efecto del transformador de un cuarto de longitud de



Fig. 5.3.2.- Ensamblado del dipolo doblado

onda de 75 ohm que forma el RG 59-B, y se espera que en el rango de frecuencias de trabajo la impedancia que presenta la antena sea cercana a la de la línea que es 50 ohm, para dar un bajo VSWR.

Se usan cables delgados en este balún-adaptador porque la longitud no es mucha lo que hace que las pérdidas sean despreciables.

Fijado el dipolo doblado; a continuación se cortan y fijan los directores excepto el primer director, cuya posición se ajustará para mejorar la adaptación de impedancia como se verá a continuación. Se perfora el boom o soporte con una broca (el aluminio es sencillo de trabajar) y se remachan los tubos que forman los directo-

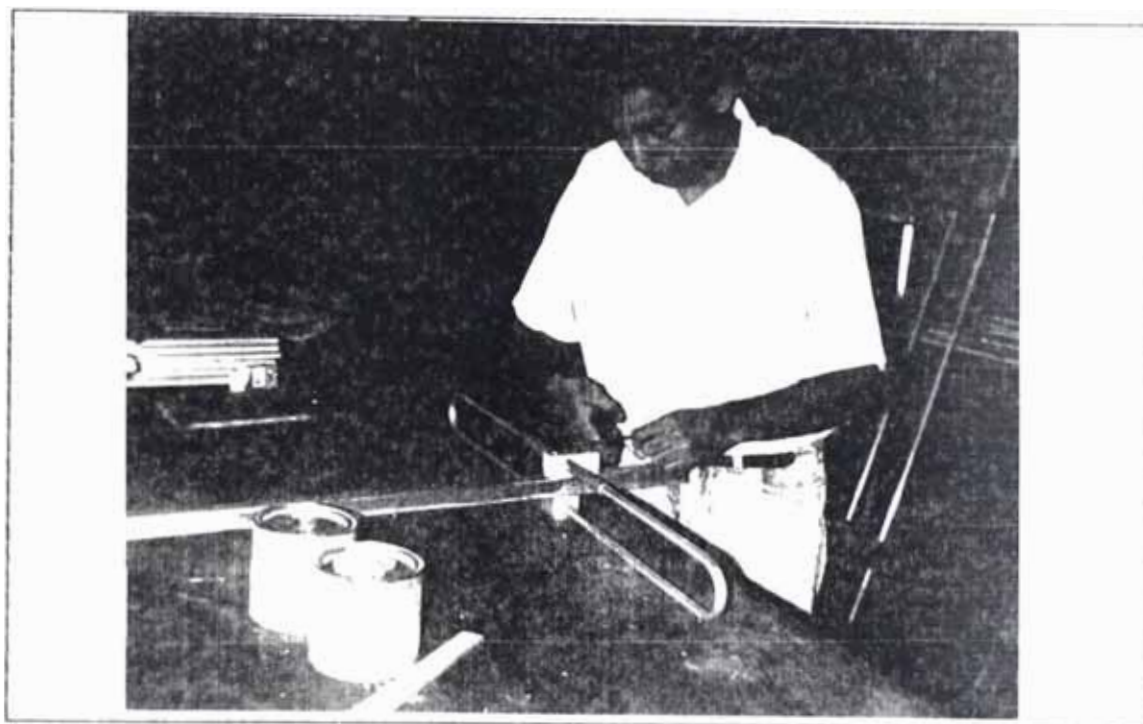


Fig. 5.3.3.- Cortado del cable sobrante para la colocación del conector N hembra

res. Para la banda I se utiliza tubo de aluminio de $7/8$ de pulgada de diámetro y para la banda III se usa tubo de $5/8$ de pulgada de diámetro.

Las Yagi con parrilla no utilizan reflector. Luego, la parrilla se construye separadamente de barras rectangulares huecas de aluminio de la misma sección que el boom y tubos remachados a las mismas del mismo diámetro del que se han construido los directores; como se observará en las figuras posteriores. La separación entre las barras de la parrilla es menor que 0.1 longitudes de onda; y basta colocar barras en el mismo sentido de la polarización, es decir, en el mismo sentido que los elementos de la antena. La parrilla es de alrededor de 0.6 por 0.3 longitudes de onda.

Tabla 5.3.2.- Medidas en milímetros y longitudes de onda (en paréntesis) de los elementos de antenas Yagi para los canales de la banda I; de acuerdo a la figura 5.3.4

	Canal 2	Canal 4	Canal 5
R	2765 (0.526)	2284 (0.525)	1995 (0.525)
A	2559 (0.487)	2089 (0.480)	1825 (0.480)
D1	2392 (0.455)	1976 (0.454)	1726 (0.454)
D2	2109 (0.401)	1743 (0.401)	1522 (0.401)
D3	1965 (0.374)	1624 (0.373)	1418 (0.373)
XR	988 (0.188)	816 (0.188)	713 (0.188)
X1	493 (0.094)	408 (0.094)	356 (0.094)
X2	748 (0.142)	618 (0.142)	540 (0.142)
X3	743 (0.141)	614 (0.141)	536 (0.141)
d	106	106	106
r _{paras.}	11	11	11
r _{activo}	9.5	9.5	9.5
a	38	38	38
b	51	51	51

Tabla 5.3.3.- Medidas en milímetros y longitudes de onda (en paréntesis) de los elementos de antenas Yagi para los canales de la banda III; de acuerdo a la figura 5.3.4

	Canal 7	Canal 9	Canal 11	Canal 13
R	900 (0.532)	840 (0.528)	801 (0.538)	760 (0.538)
A	792 (0.469)	752 (0.473)	699 (0.469)	657 (0.466)
D1	721 (0.427)	696 (0.438)	678 (0.455)	652 (0.462)
D2	679 (0.402)	599 (0.377)	608 (0.408)	600 (0.426)
D3	630 (0.373)	555 (0.349)	560 (0.375)	527 (0.374)
XR	316 (0.187)	298 (0.187)	279 (0.187)	263 (0.187)
X1	218 (0.129)	173 (0.109)	169 (0.113)	160 (0.113)
X2	183 (0.108)	203 (0.128)	185 (0.124)	173 (0.123)
X3	239 (0.141)	225 (0.142)	211 (0.142)	200 (0.142)
d	62	62	62	62
r par	7.9	7.9	7.9	7.9
r act	6.35	6.35	6.35	6.35
a	25.4	25.4	25.4	25.4
b	25.4	25.4	25.4	25.4

Para las Yagi "simples" (sin parrilla) se debe colocar el reflector detrás del elemento alimentado. Este es del mismo diámetro y se coloca de la misma forma que los directores, y se fija con un remache como se

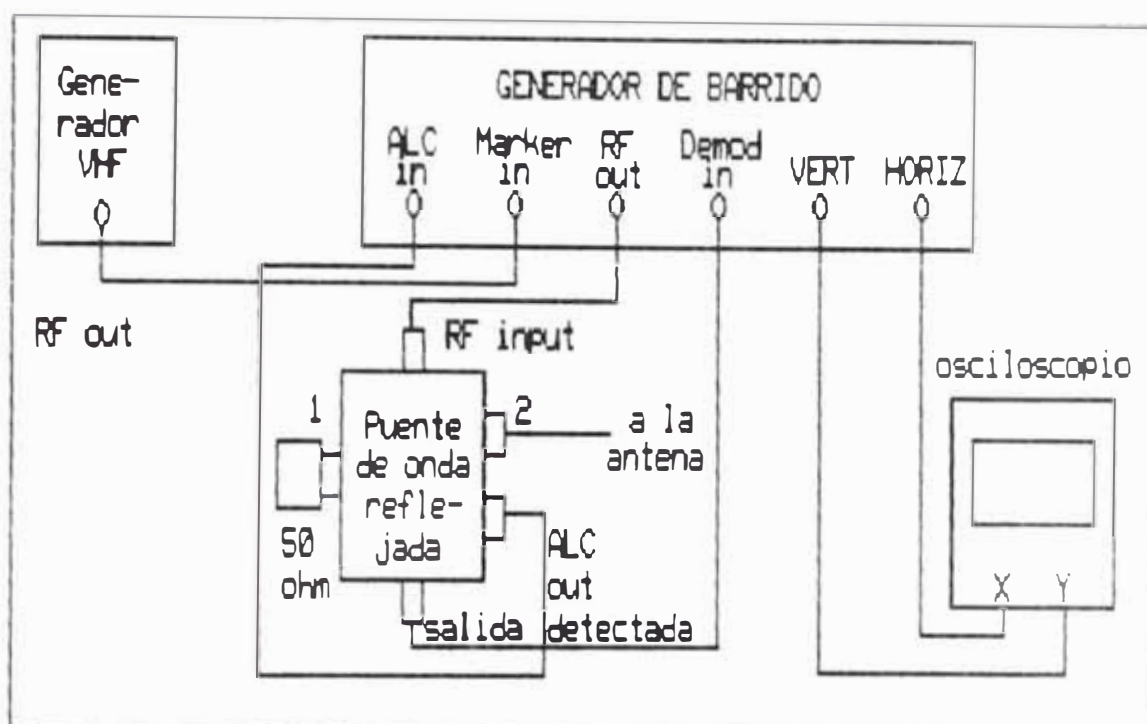


Fig. 5.4.1.- Esquema del equipo para la medición del coeficiente de onda reflejada.

puede ver en las fotografías.

Entonces se deja libre el primer director de modo de poder hacer un último ajuste de la adaptación.

En las tablas 5.3.2 y 5.3.3 se indican las medidas de Yagis "simples" de 5 elementos para la banda I y III de televisión basadas en el diagrama de la figura 5.3.4.

Como se nota con los valores en longitudes de onda, se trata del mismo modelo de Yagi sin embargo son necesarios ajustes finales principalmente en el primer y segundo director para un buen acoplamiento de impedancias.

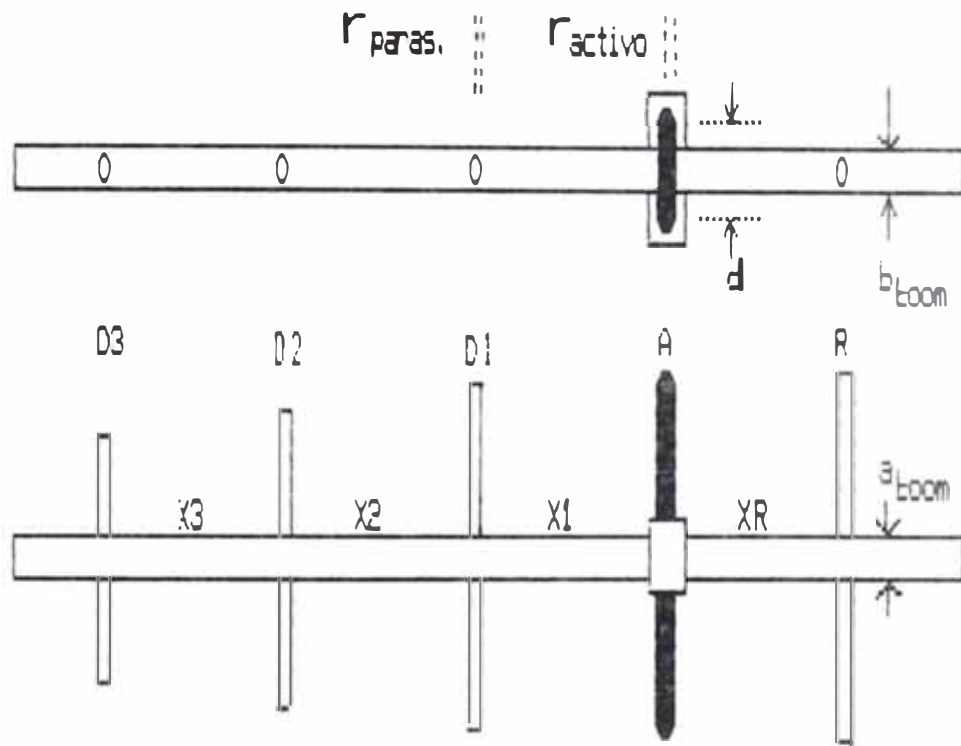


Fig. 5.3.4.- Esquema de antena Yagi de 5 elementos

5.4 Medición del coeficiente de onda reflejada y del ancho de banda de la antena

Con la antena ya construida pero el primer director solamente amarrado en su posición: se realiza la medición de la onda reflejada para hacer los ajustes finales de posición y longitud del primer director y tal vez de longitudes de los otros directores.

En la figura 5.4.1 se muestra el esquema de la medición de onda reflejada. En equipo central es el generador de barrido (usamos el WAVETEK MODEL 2001 Sweep/Signal generator; cuyas especificaciones pueden verse en el apéndice: cubre de 1 a 1400 MHz y da una potencia máxima de 10 dBm a 50 ohm).

La medición de onda reflejada es una de las características más universalmente consideradas importantes para la performance de una antena y es también lo primero que va a verificar el cliente o comprador de la antena para su servicio.

La frecuencia del generador de VHF (usamos el VHF Signal generator model 608C Ser 548-06704 de Hewlett Packard que cubre de 10 a 480 MHz) se coloca en la frecuencia central del canal de la antena que desea probarse. La salida del generador entra a la entrada de marcadores de frecuencia externos del generador de barrido. El generador de barrido también proporciona sus propios marcadores de frecuencia, que colocamos a cada 10 MHz. Esto nos permite delimitar los extremos de barrido con mayor precisión; y ajustarlos apropiadamente con el control de ancho de barrido (sweep width) del generador de barrido.

En la figura 5.4.2 se muestra la disposición física de los equipos.

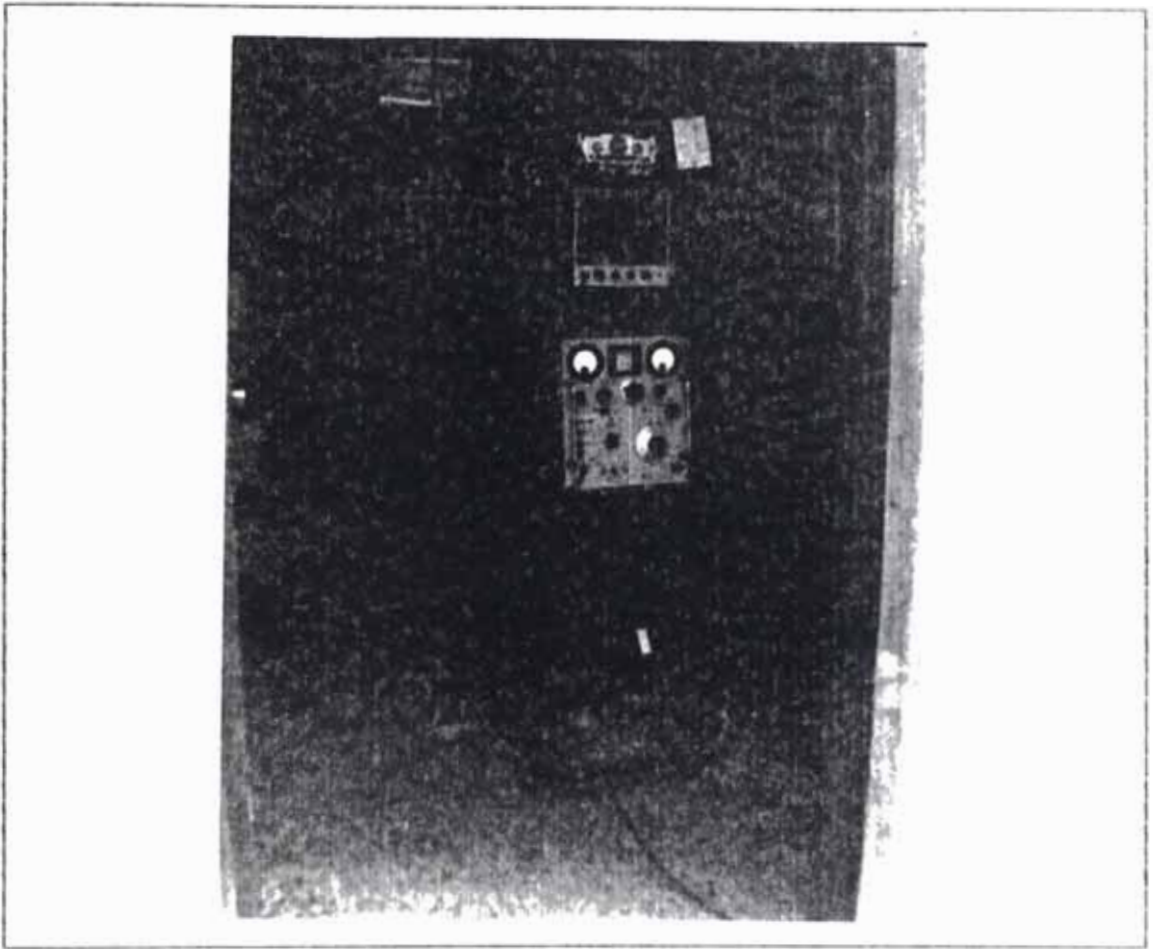


Fig. 5.4.2.- Disposición física del equipo de medición de onda reflejada

La salida RF out del generador de barrido entra al puente de onda reflejada (entrada RF in). Este puente no es más que un puente de Wheatstone de radiofrecuencia con salida rectificadora donde las impedancias conectadas a la entrada de radiofrecuencia son resistencias de 50 ohm y las impedancias conectadas entre los extremos de estas y tierra son externas (1 y 2). En el terminal 1 se coloca una terminación standard (carga fantasma) de 50 ohm y en el otro extremo el cable que va a la antena. Todos los cables son de 50 ohm.

El puente de onda reflejada usado (ver anexo) es el TM 99 53 (Rho bridge); de rango de 1 a 1000 MHz, 50 ohm de impedancia de entrada y 0,5 watt máximo de entrada (lo que equivale a 5 volt rms; que es mucho menos de lo que proporciona el generador de barrido). De las relaciones de voltaje del puente de Wheatstone, como los dos ramales superiores y uno de los inferiores se pueden considerar 50 ohm, siendo Z_L la impedancia que presenta el cable conectado a la antena en la salida 2 del puente, se tendrá que la salida detectada es proporcional a

$$\frac{|Z_L - Z_0|}{|Z_L + Z_0|}$$

y de este modo la salida es un voltaje DC proporcional a la onda reflejada.

Como el generador de barrido o el puente pueden no tener una respuesta plana en frecuencia; el puente cuenta con una salida que directamente detecta el nivel rectificado de la entrada de radiofrecuencia. Esta señal se utiliza para control automático de nivel (ALC out) y se conecta a la entrada ALC in del generador de barrido, y el circuito interno de compensación de nivel efectúa el ajuste correspondiente. Para esto es necesario colocar en EXT el conmutador de control automático de nivel (EXT/INT switch) de modo que este control no sea interno sino se use la señal externa.

La salida detectada del puente se conecta a la entrada Demod in del generador de barrido. Entonces, en las salidas VERT y HORIZ de este equipo se tendrán señales listas para ser mostradas en un osciloscopio. Usamos el osciloscopio LBO - 9C, en modo X-Y. Se tiene verticalmente una señal invertida proporcional a la onda reflejada; con los marcadores de frecuencia superpuestos; y horizontalmente una señal proporcional a la frecuencia que se está barriendo; de modo que se tiene la gráfica onda reflejada (invertida) versus frecuencia. Teóricamente; cuando la onda reflejada es nula; la gráfica vista en el osciloscopio es una línea horizontal en la parte superior.

Debe notarse que la onda reflejada medida no depende solo de la impedancia que presenta la antena en cada frecuencia, sino en realidad de la impedancia efectiva que presente el cable que la alimenta (que depende de la longitud eléctrica y la impedancia de la antena) en la terminación 2 del puente. Luego, no puede esperarse tener valores de la impedancia de la antena.

Entonces las mediciones deben hacerse comparando la onda reflejada versus frecuencia para el caso de colocar la antena y para el caso de reemplazarla por cargas fantasmas de VSWR 1.1 (55 ohm) 1.2 (60 ohm); etc. hasta 1.5 (75 ohm); para determinar entre qué valores de VSWR se encuentra la antena a la largo de su banda de

frecuencia.

Para la realización de la medición se tienen los siguiente pasos:

(1) Ajustar el ancho de barrido de modo que se muestre en el osciloscopio en rango de frecuencias del canal de la antena que se va a probar; delimitándolo con los marcadores.

(2) Dibujar en la pantalla del osciloscopio con un plumón las gráficas de onda reflejada obtenidas con cargas fantasmas de 1.1, 1.2, hasta 1.5.

(3) Colocar la antena a una distancia de varias longitudes de onda de los pisos y paredes de cemento, orientada hacia arriba. En la práctica esto no se respeta debidamente, por las restricciones de tener un espacio de planta limitado. De todos modos, colocar la antena orientada hacia arriba en el centro de un patio y alejada del piso puede dar lecturas apropiadas; aunque esto es menos preciso para Yagis simples (sin parrilla).

Tener una lectura adecuada significa que un movimiento o rotación de la antena no debe afectar el gráfico obtenido en el osciloscopio. Gracias a la directividad de la antena, esta puede incluso tomarse de la parte posterior del boom (detrás del reflector) sin que se afecte visiblemente su impedancia de entrada. De todos modos, debe evitarse el contacto y la cercanía de personas y equipos. de medición.

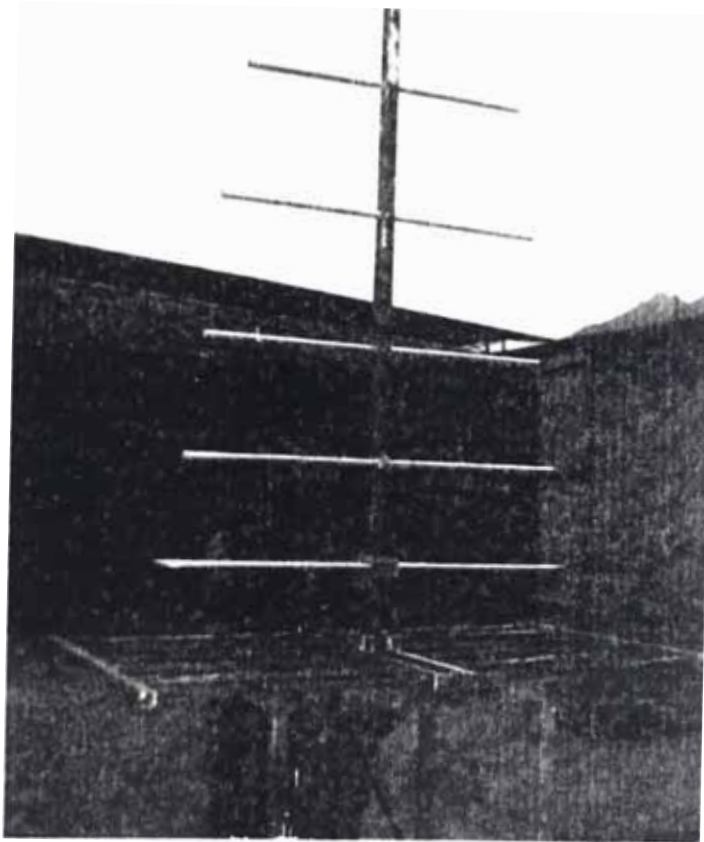


Fig. 5.4.3.- Disposición para la medición de onda estacionaria de la antena

(4) Conectar la antena y observar la curva de onda reflejada. Suele exigirse un VSWR de 1.2 o menor en todo el canal (la curva de la antena por encima de la curva correspondiente a una carga de 1.2 de VSWR en todo el rango de frecuencias del canal). Sin embargo, en Yagis de pocos elementos para transmisiones de baja potencia, un VSWR de hasta 1.4 es tolerable. En caso de no conseguirse esto, se ajusta la posición del primer director (que aún no se ha remachado como se observa en la figura 5.4.3) o en la longitud de este u otros directores cercanos al elemento alimentado.

Una vez probada la antena, se fija el primer director y se pinta con pintura anticorrosiva. En caso de proyectarse un trabajo de la antena en condiciones muy difíciles, como en las zonas cercanas al mar, se prefiere pintarlas con pintura epóxica.

Para acoplar mejor la antena (disminuir el coeficiente de onda reflejada) se suele usar doble dipolo. Esto se explica debido a que el transformador de cuarto de onda da una impedancia más grande (más cercana a 50) cuando la impedancia de la antena es menor; lo que se logra poniendo dos dipolos doblados conectados a la misma alimentación. Posteriormente se analizarán detalladamente las transformaciones de impedancia que ocurren.

Hemos medido la onda reflejada de diferentes antenas de VHF como las descritas en este capítulo en la planta de Valtron. El coeficiente de onda reflejada típico de las Yagis de dipolo simple adaptadas en la forma que se ha explicado ha sido 1.4 ó 1.3. También ocurren usualmente casos de desviaciones de las frecuencias mejor adaptadas respecto del canal para el que fueron diseñadas; como se ilustra.

Por ejemplo una antena de canal 9 cuyas medidas son las indicadas en la tabla 5.3.3 presentaba un VSWR mejor que 1.4 para frecuencias desde 193 hasta 191 MHz; y la frecuencia mejor acoplada (alrededor de 1.3 de VSWR)

se presentaba en 186 MHz. En 194 MHz ocurría un rápido aumento de la onda reflejada. El canal en que debe trabajar es desde 186 hasta 192 MHz; es decir, la frecuencia mejor adaptada está al inicio del canal.

Sin embargo, para instalaciones sencillas o temporales de baja potencia, una relación de onda reflejada tal como 1.4 es tolerable.

5.5 Medición de la impedancia de entrada

Se tienen los siguientes métodos de medición:

5.5.1 Medición con puente

El circuito puente de Wheatstone fundamental puede usarse hasta frecuencias de la parte más baja de UHF. El procedimiento general consiste en calibrar primero el puente de modo que para los valores correspondientes a impedancia cero efectivamente no pase corriente por el elemento detector al colocarse un cortocircuito en lugar de la impedancia desconocida, y que también ocurra este balance del puente cuando se está en circuito abierto para los valores de impedancia infinita que correspon-

den en el puente.

Es necesario en general que la fuente de señal tenga por lo menos una amplitud de 1 mV y que la sensibilidad del detector sea como máximo 5 μ V, estando este detector excelentemente blindado.

En la figura 5.5.1.1 se puede observar el circuito básico de medición mediante un puente de sustitución serie de Schering que se usa en el puente de RF GR 1606 de General Radio. El subíndice 1 indica balance con los terminales de carga cortocircuitados y el subíndice 2 indica balance con la carga colocada.

$$R_x = \frac{R_B}{C_N} (C_{A2} - C_{A1})$$

$$X_x = \frac{1}{\omega} \left[\frac{1}{C_{P2}} - \frac{1}{C_{P1}} \right]$$

El inconveniente de este puente es su rango de frecuencia limitado a 60 MHz. En la referencia [58] se encuentran otros puentes comerciales como el medidor de admitancia GR 1602 que cubre hasta 1500 MHz.

5.5.2 Medición con línea ranurada

Se demuestra que en una línea de transmisión en general terminada en una carga, si x_m es la distancia del

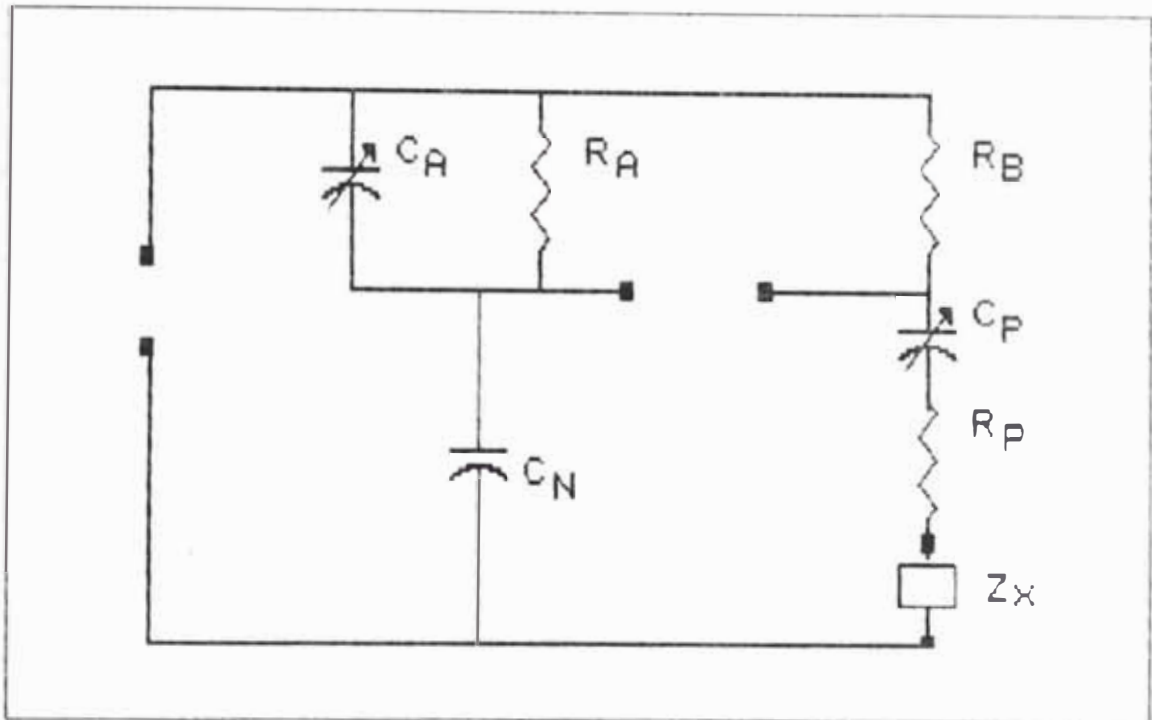


Fig. 5.5.1.1.- Puente General Radio GR 1606

primer mínimo de voltaje a la terminación y k_0 es la constante de propagación en la línea, siendo Z_0 la impedancia de la línea, la impedancia de carga Z_L puede ser expresada como:

$$Z_L = Z_0 \left[\frac{VSWR}{\cos^2 k_0 x_m + VSWR^2 \sin^2 k_0 x_m} + j \left[\frac{(VSWR^2 - 1) \sin k_0 x_m \cos k_0 x_m}{\cos^2 k_0 x_m + VSWR^2 \sin^2 k_0 x_m} \right] \right]$$

Luego, es necesario conocer la impedancia de la línea y medir la constante de propagación (mediante la distancia entre dos mínimos o dos máximos de la onda estacionaria); el VSWR y la distancia entre el primer mínimo y la carga. Para eso se usa el equipo mostrado en diagrama de bloques en la figura 5.5.2.1.

Las sondas se muestran en la figura 5.5.2.2. Las líneas ranuradas pueden ser coaxiales, guías de onda o líneas planas.

Debido a la periodicidad del patrón de onda, el primer paso es fijar un punto de referencia para medir distancias. Para eso se puede colocar un cortocircuito en lugar de la antena y buscar la posición de un nulo y la longitud de onda en la línea como la distancia entre dos nulos consecutivos.

No es necesario mencionar que las mediciones de impedancia con línea ranurada se extienden más en el rango de frecuencia que las basadas en puentes, aunque su proceso sea más complicado.

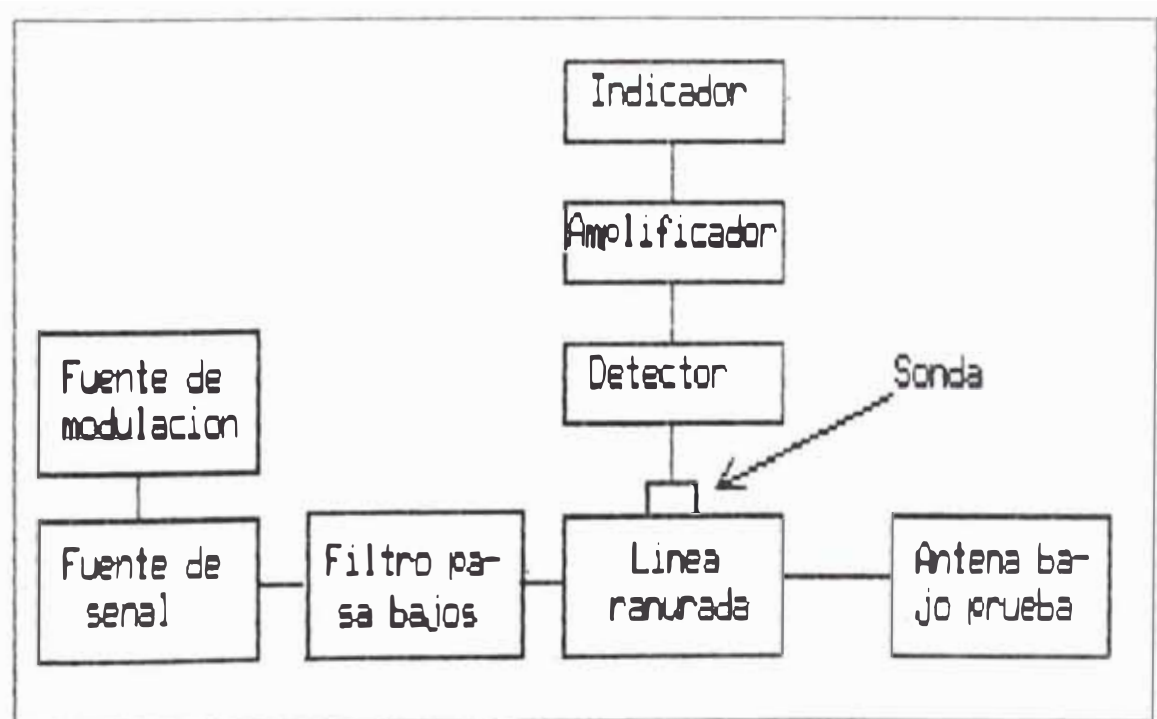


Fig. 5.5.2.1.- Equipo para medición de impedancia por línea ranurada

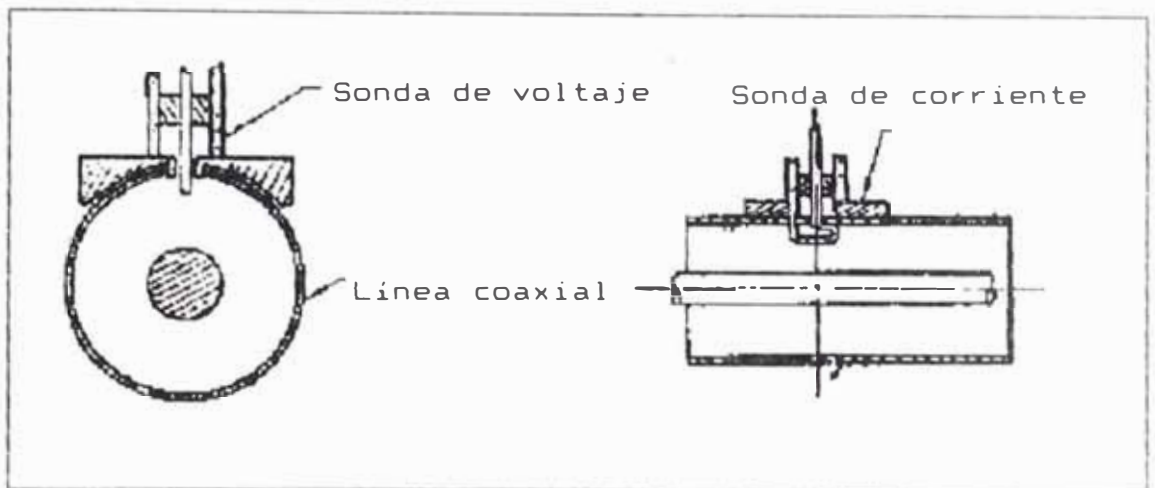


Fig. 5.5.2.2.- Sondas de voltaje y corriente en una línea coaxial ranurada

Para determinar el VSWR existen tres métodos básicos:

(1) Medir directamente la relación entre las potencias del máximo y del mínimo usando un medidor de SWR. Esto se puede realizar cuando no hay muchas fuentes de error y cuando se sabe que el valor de SWR medido no excede de 10.

(2) Usar un atenuador calibrado para igualar los niveles de potencia y dar la lectura del atenuador: esto se usa para valores de VSWR mas altos y para evitar que el exceso de potencia dañe la característica cuadrática del detector. Los detectores a cristal soportan hasta 20 μW y los barreters hasta 200 μW sin perder sus características.

(3) Otra forma de evitar lecturas muy altas y ruido que impide una buena ubicación del mínimo es determinar dos pares de niveles iguales de potencia equidistantes de

un mínimo y utilizar la fórmula:

$$V = V_{\min} \sqrt{\cos^2(k_g(x-x_m)) + VSWR^2 \sin^2 k_g x}$$

donde x es la distancia medida respecto a la terminación de la línea.

Las fuentes principales de error son:

- (1) Que la sonda cargue a la línea ranurada: para evitar esto debe usarse la mínima penetración posible que permita realizar la medición.
- (2) Que la fuente esté desacoplada: debe usarse un acoplador por ejemplo de ferrita para que la señal que se refleja en la carga no vuelva a reflejarse en la fuente.
- (3) Que la característica del detector no sea uniforme: debe dársele bajos niveles de potencia.
- (4) Que se presenten armónicos o modulación en frecuencia (esto puede detertarse con un analizador de espectros) o que existan fuentes de señales espurias, acoplamiento entre la antena y el detector o reflexiones: para evitarlo deben usarse filtros pasaaltos y pasabajos y materiales que absorben microondas para evitar las reflexiones.

Para evitar cálculos engorrosos de transformación de impedancias se usa la carta de Smith o la carta de Carter.

5.6 Medición del patrón de radiación y ancho del haz

Como se muestra en la figura 5.6.1; el equipo mínimo consta de una antena bajo prueba como receptora; una montura para girarla; un detector conectado a ella con un indicador; lo que puede ser un medidor de intensidad de campo o un analizador de espectros; y una antena transmisora como fuente.

Los requerimientos básicos para una medición del patrón de radiación son campo lejano, cancelación de las reflexiones e iluminación uniforme.

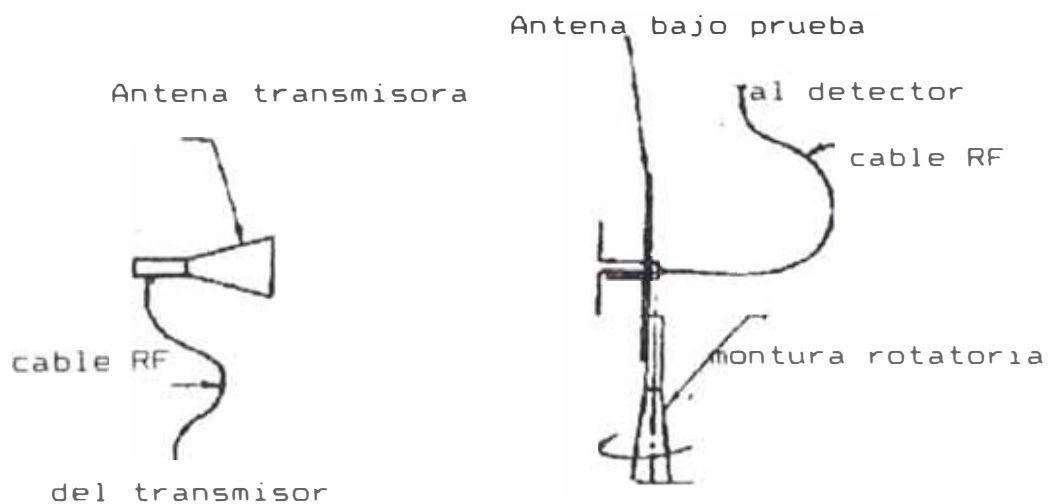


Fig. 5.6.1.- Disposición para la medición del patrón de radiación

Para lograr que la radiación recibida por la antena bajo prueba sea de **campo lejano** es necesario que se cumpla:

$$R > \frac{d^2 + D^2}{8\delta}$$

donde R es la distancia entre las antenas; d y D son las mayores dimensiones de la antena receptora y transmisora en el sentido de la perpendicular a la recta que une las antenas y δ es el error de fase tolerable (en longitud). Para antenas de media longitud de onda (que es nuestro caso) y un error de fase de $\lambda/16$ (22.5°) se requiere una distancia de $\lambda/2$. Si el error de fase quiere reducirse a 5° se debe tener una distancia de $9\lambda/4$.

Para lograr la **cancelación de las reflexiones** se suele hacer la antena transmisora mas direccional; o colocarla a una altura mas grande, o usar cercas conductoras (con vallas) en el terreno entre ambas antenas para que las ondas no se reflejen hacia la antena receptora sino en la dirección contraria. Los bordes superiores de estas vallas deben ser cubiertos por materiales absorbentes de microondas.

Otra forma, por el contrario, es aprovechar el terreno y hacerlo mas uniforme, cubriéndolo de pasto cortado pequeño; y considerar la reflexión en los cálculos.

Para longitudes de onda que permitan que el sistema esté dentro de un edificio; lo mejor es usar "cuartos oscuros" es decir, cuartos con las paredes y el techo cubiertos de material que absorbe microondas.

La **iluminación uniforme** implica que la antena transmisora debe presentar un frente de fase tan uniforme como sea posible para minimizar los errores de fase. La polarización debe ser lineal y deben tenerse el mínimo número y magnitud de lóbulos laterales. Basta que sean unos 20 dB menores. Además, el ancho del haz debe ser suficientemente grande y uniforme para cubrir la antena receptora. La variación debe ser menor que el 5%.

También existen servomecanismos a base de rectificadores y motores DC que al girar la antena grafican simultáneamente el patrón de radiación.

Se han realizado mediciones de patrón de radiación de dos antenas Yagi en la azotea de Inictel.

Como fuente de señal se ha utilizado el generador UHF HP 8654A (ver en el anexo) que proporciona un máximo de potencia de 10 dBm sobre 50 ohm en un rango de 10 a 520 MHz. Este equipo posee una salida posterior para un contador de frecuencia de microondas que es necesaria, pues ocurren desviaciones de frecuencia que deben ser notadas.

Como contador de frecuencia utilizamos el Microwave Frequency Counter MF74A (ver en el anexo) que posee tres entradas para medición de frecuencia de 10 Hz a 100 MHz; de 1 a 500 Mhz y de 0.5 a 1.6 GHz.

En la figura 5.6.2 se muestra la conexión de ambos equipos para la transmisión.

En el lado del receptor se utiliza como detector un medidor de intensidad de campo. Utilizamos el Field Strength Meter ML57A de Anritsu (ver especificaciones en el anexo). Este instrumento consiste de una unidad de medición de intensidad de campo de banda de 230 a 470 MHz (solo UHF), que en realidad es simplemente un detector de

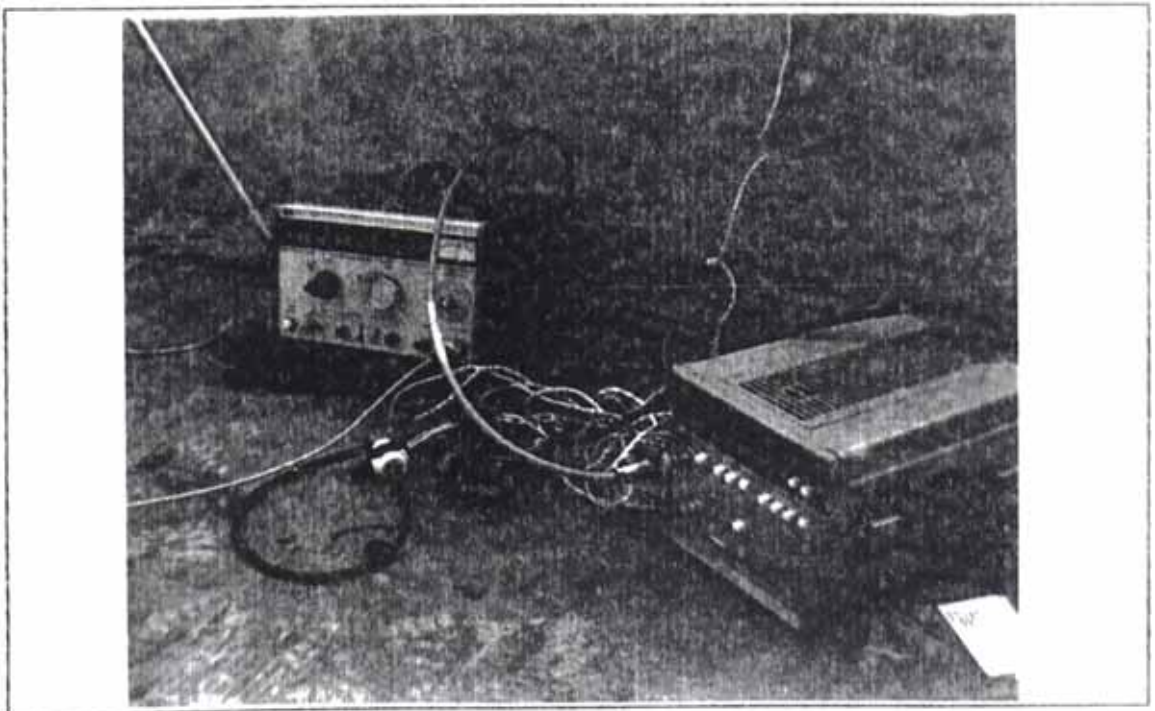


Fig. 5.6.2.- Disposición del generador de UHF y el contador de frecuencia para la transmisión en la medición del patrón de radiación

voltaje superheterodino sin control automático de ganancia, que toma las lecturas por comparación con una referencia interna de 0 dB en base a atenuadores calibrados. Posee impedancia de entrada de 50 ohm y conector N hembra para la entrada RF. Se muestra la unidad en la figura 5.6.3.

El conmutador giratorio "input select" permite elegir la entrada al detector superheterodino. Esta entrada puede ser la señal recibida por la entrada RF input directamente (0dB); para medición entre 5 y 45 dB μ (decibelios sobre microvoltio; tomando el decibelio como 20 veces el logaritmo del voltaje entre 1 μ V.

Es decir, la lectura relativa es equivalente también a la potencia relativa) o atenuada por un atenuador en cascada de 30 dB (medida entre 35 y 75 dB μ) o 60 dB (medida entre 65 y 105 dB μ); o también la salida de un oscilador interno a la frecuencia especificada (Cal) para calibración.

La frecuencia puede ajustarse con un control de ajuste grueso y fino.

La etapa de frecuencia intermedia posee un atenuador variable que se ajusta externamente mediante el control **Attenuator dial**; así como un control de ganancia **Gain**.

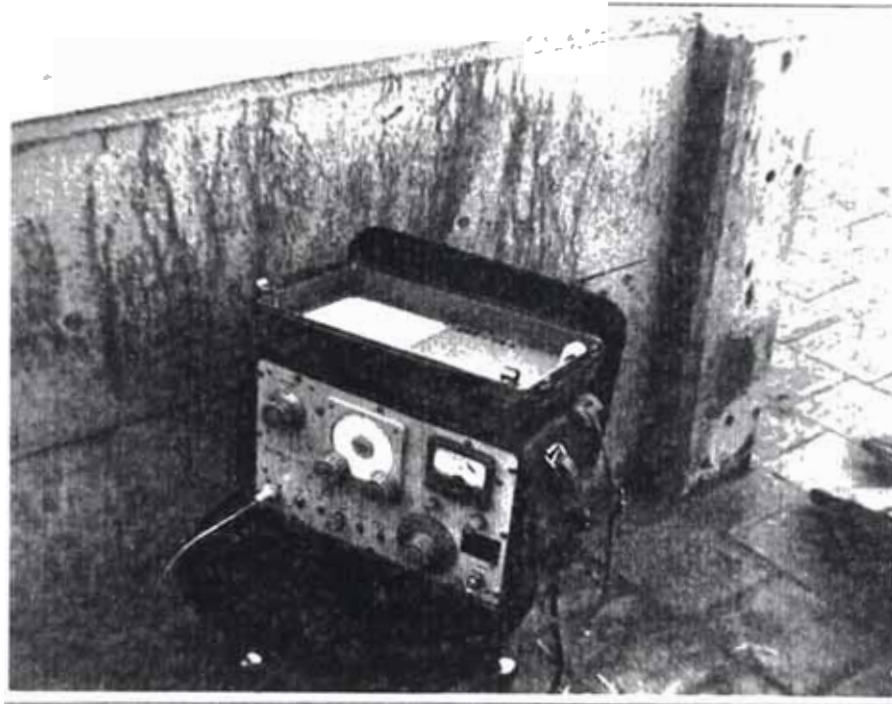


Fig. 5.6.3.- Medidor de intensidad de campo conectado a la antena receptora de prueba

El voltaje resultante de frecuencia intermedia es reducido en frecuencia y pasa por un filtro pasabanda conmutable entre 20 u 80 kHz.

Finalmente es rectificado y el valor se conecta a un indicador.

Los pasos para usar este instrumento son los siguientes:

- (1) Conectar la fuente de poder AC o DC.
- (2) Ajustar la frecuencia deseada.
- (3) Seleccionar con el conmutador giratorio de entrada un atenuación de 0, 30 o 60 dB según lo esperado.
- (4) Girar el dial del atenuador de frecuencia intermedia totalmente hacia la derecha y ajustar la perilla de

ganancia de modo de que el indicador esté señalando -6dB . De este modo, el atenuador de entrada es compensado por la ganancia de frecuencia intermedia para dar una lectura medible en el indicador. Esta perilla no debe ya moverse. El objetivo de este paso es solamente que las lecturas estén dentro del rango de medición del indicador.

(5) Colocar la entrada en Cal y girar el dial del atenuador de frecuencia intermedia de modo que el indicador señale 0 dB .

(6) Mover la marca variable del dial exterior al dial del atenuador de frecuencia intermedia de modo que coincidan las marcas rojas de ambos. Esta marca roja nos indica la posición inicial calibrada del atenuador que permite que el oscilador interno de 0 dB aparezca con su magnitud verdadera.

(7) Seleccionar la posición deseada del conmutador de entrada (0 , 30 o 60 dB); ajustar la frecuencia y el ancho de banda deseados y conecte la señal. Luego, mover el atenuador para que el indicador vuelva a 0 dB . La atenuación agregada nos indica la diferencia de esta nueva señal con 0 dB y es entonces el valor de esta señal. Esta atenuación agregada aparece indicada por la lectura en la marca roja externa. A este valor se le agrega el del atenuador de entrada elegido y nos da la lectura deseada.

La disposición de la medición de patrón de radiación que fue efectuada se muestra en la figura 5.6.4;

donde se indican las distancias que se respetaron; de modo que se cumplió sobradamente las especificaciones de campo lejano.

Estas mediciones se realizaron en la azotea de INICTEL con una antena Yagi de UHF de 407-408 MHz. Las dimensiones de la antena se indican en la tabla 5.6.1.

La antena es de 8 elementos tipo V(H)8F-4501 numero serial 775 manufacturada en enero de 1975 por Antenna Co LTD. Posee un dipolo activo doblado coplanar con los directores.

Los inconvenientes tenidos en la medición provienen de la reflexión de algunos elementos metálicos y de concreto en la azotea del edificio donde se realizaron las mediciones; de un nivel de ruido detectado de 30 dB por debajo del lóbulo principal (que vuelve no significativas las mediciones fuera de la zona principal de irradiación);

También de la inclinación de la antena receptora cuyo plano es difícil por razones mecánicas hacerse coincidir con el plano de tierra de modo que la antena transmisora y receptora estén en el mismo plano.

Las reflexiones presentes en los ángulos azimutales positivos debido a paredes y otras antenas en dichas

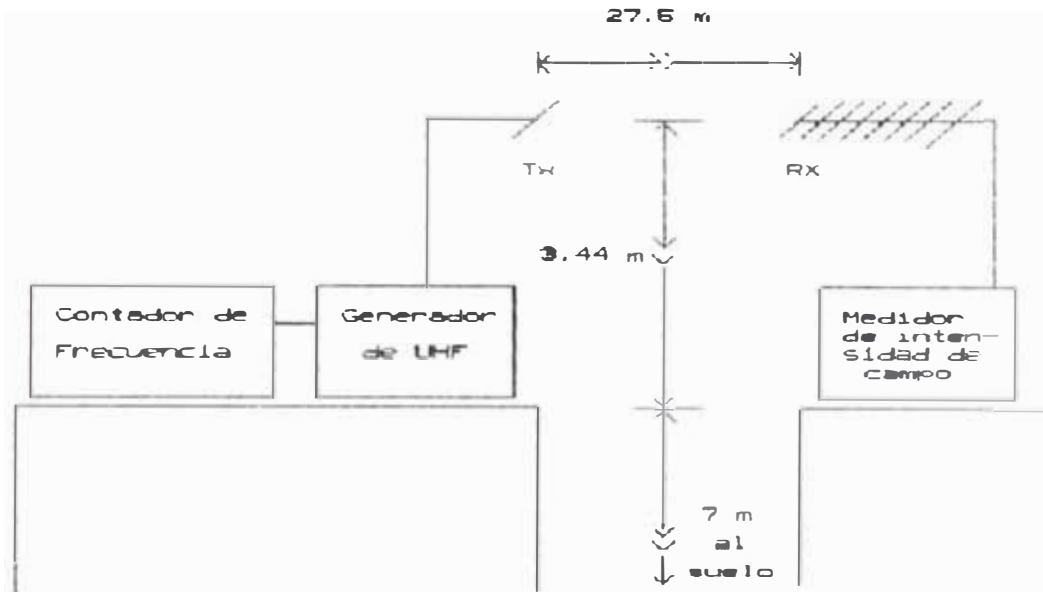


Fig. 5.6.4.- Disposición para la medición del patrón de radiación

direcciones en la azotea donde se realizaron las mediciones hacen que estas sean más significativas para ángulos azimutales negativos.

Además, la frecuencia del transmisor no es muy estable de modo que el medidor de campo debía ser vuelto a calibrar en frecuencia repetidas veces.

Esto es sencillo de observar gracias a la presencia del contador de frecuencia de microondas Anritsu.

En la medición realizada el área correspondiente a ángulos azimutales negativos estaba más despejada de modo que sus valores son más significativos que los obtenidos para ángulos azimutales positivos.

Tabla 5.6.1.- Medidas en milímetros y longitudes de onda (en paréntesis) de una Yagi de UHF de 8 elementos (407 408 MHz) para medición del patrón de radiación.

Frecuencia	407 - 408 MHz	
R	384.5	(0.522)
A	315	(0.428)
D1	340	(0.462)
D2	333	(0.452)
D3	316	(0.429)
D4	301	(0.409)
D5	286	(0.388)
D6	273	(0.371)
XR	127	(0.173)
X1	137	(0.186)
X2	132.5	(0.180)
X3	133	(0.181)
X4	133	(0.181)
X5	132.5	(0.180)
X6	133	(0.181)
d	40	(0.0543)
Receptor	5	(0.00679)
Receptor	5	(0.00679)

En la figura 5.6.5 se muestra la disposición inicial del generador usado como transmisor y el mástil para sostener la antena transmisora, que fue un dipolo simple sintonizado a la frecuencia de transmisión. Posteriormente se conecta el contador de frecuencia para verificar la frecuencia de transmisión.

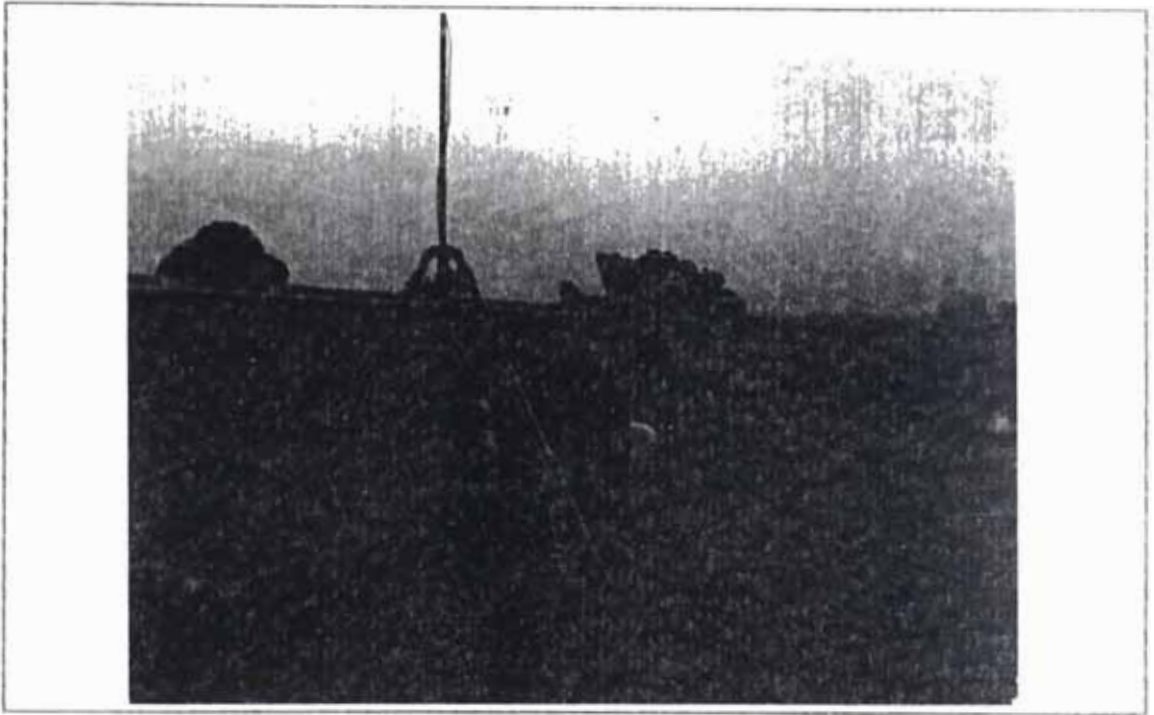


Fig. 5.6.5.- Conexión del generador de UHF a la antena transmisora

En la figura 5.6.6 se muestra la disposición de la antena receptora.

Los resultados normalizados respecto a la máxima potencia recibida (en la dirección principal) se muestran en el recuadro de la figura 5.6.7.

5.7 Medición de la ganancia

El valor de la ganancia puede ser obtenido a partir del patrón de radiación por integración aplicando formulas conocidas.

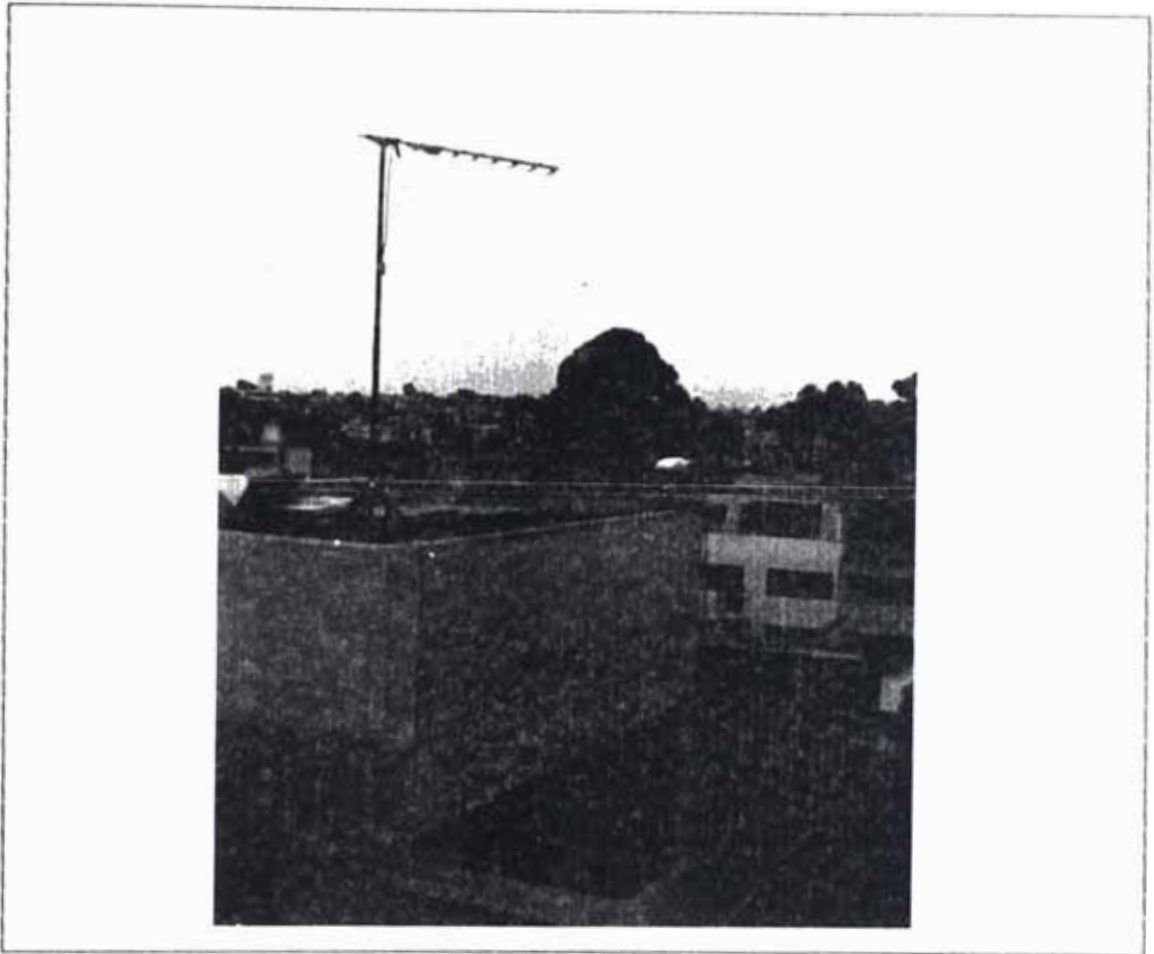


Fig. 5.6.6.- Disposición de la antena de prueba para medición de su patrón de radiación

Una aproximación para antenas directivas está dada por la fórmula:

$$G = \frac{41000}{\theta_H \theta_V}$$

donde θ_H y θ_V son los ángulos de media potencia en el plano vertical y horizontal.

Para la medición de la ganancia se debe usar una antena de referencia ya calibrada y comparar los niveles

Grados	Db	Grados	Db
0°	0	180°	-20
10°	-0.4	190°	-19
20°	-1.9	200°	-20
30°	-4.9	210°	-21.5
40°	-10.5	220°	-20.5
50°	-17.9	230°	-21
60°	-24.9	240°	-21.5
70°	-30.9	250°	-20.9
80°	-22.9	260°	-24.5
90°	-23.2	270°	-26.9
100°	-23.2	280°	-23
110°	-23.3	290°	-23
120°	-20.8	300°	-19
130°	-20.3	310°	-14.2
140°	-22.3	320°	-11
150°	-19	330°	-8.5
160°	-20.9	340°	-4
170°	-20	350°	-1.2

Fig. 5.6.7.- Valores relativos medidos de potencia recibida para diagrama de patrón de radiación en el plano E de antena Yagi de UHF de 8 elementos

de potencia recibidos.

La relación entre los niveles de potencia detectados en el receptor nos da la relación entre las ganancias.

Para calibrar las antenas standard usadas en la medición de la ganancia usamos la siguiente ecuación de Friis:

$$\frac{W_R}{W_T} = \frac{G_R G_T \lambda^2}{(4\pi R)^2}$$

donde:

W_R : Potencia recibida.

W_T : Potencia transmitida.

G_R : Ganancia de la antena receptora.

G_T : Ganancia de la antena transmisora.

Esta ecuación nos permite calibrar dos antenas idénticas midiendo la potencia transmitida y la recibida y aplicando:

$$G_0 = \frac{4\pi R}{\lambda} \sqrt{\frac{W_R}{W_T}}$$

donde G_0 es la ganancia de ambas antenas; suponiendo que son realmente idénticas y usando una como transmisora y otra como receptora.

Si no se sabe que son idénticas, es necesario usar tres antenas y aplicar entre ellas dos a dos la ecuación de Friis:

$$G_1 G_2 = \left[\frac{4\pi R}{\lambda} \right]^2 \frac{W_{R12}}{W_{T12}}$$

$$G_2 G_3 = \left[\frac{4\pi R}{\lambda} \right]^2 \frac{W_{R23}}{W_{T23}}$$

$$G_3 G_1 = \left[\frac{4\pi R}{\lambda} \right]^2 \frac{W_{R31}}{W_{T31}}$$

resolviendo el sistema resultante.

Es necesario compensar las pérdidas en los cables que pueden hallarse uniendo directamente el transmisor con el receptor.

La configuración de los equipos para la medición de ganancia se muestra en la figura 5.7.1.

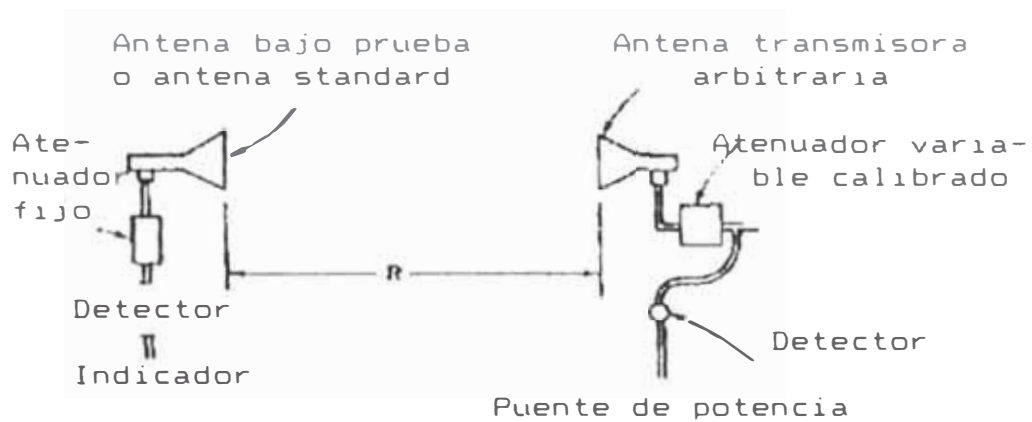


Fig. 5.7.1.- Configuración de los equipos para la medición de ganancia

Para medir la ganancia de una antena por comparación, una vez medida la de la antena standard o patrón, se halla la relación entre las potencias recibidas con esta antena patrón y con la que se desea medir.

En el siguiente acápite trataremos de otras mediciones que se realizan con las antenas; como son la medición de la polarizabilidad, la obtención de la distribución de corriente y la determinación de la capacidad de manejo de potencia.

5.8 Otras mediciones

La **polarizabilidad** de una antena se puede medir rotándola en un eje paralelo colineal con la dirección principal de transmisión de la onda y midiendo el campo recibido.

La fuente transmisora debe estar polarizada linealmente.

De este modo se obtiene el patrón de polarización de la antena. A partir de él es sencillo obtener la elipse de polarización: simplemente se trazan rectas perpendiculares a los radios vectores que van desde el origen de coordenadas a los puntos de la gráfica del patrón de polarización. La elipse de polarización es tangente a dichas rectas. En la figura 5.7.1 se ilustra la obtención de la elipse de polarización a partir del patrón de polarización.

Para la medición de la **distribución de corriente** sobre la antena se usan anillos de ferrita que se deslizan a lo largo de los elementos.

El anillo de ferrita posee un bobinado al cual se le conecta un detector (rectificador). Sin embargo, debe tenerse especial cuidado en que el sensor no cargue a la

antena, lo que hace que esta prueba sea difícil de realizar con precisión. En la referencia [1] se propone un método donde se ranura el dipolo y la sonda se conecta al cable y al detector por el interior del dipolo cuya distribución de corriente se desea hallar; pero este método es obviamente impráctico y costoso para antenas comerciales.

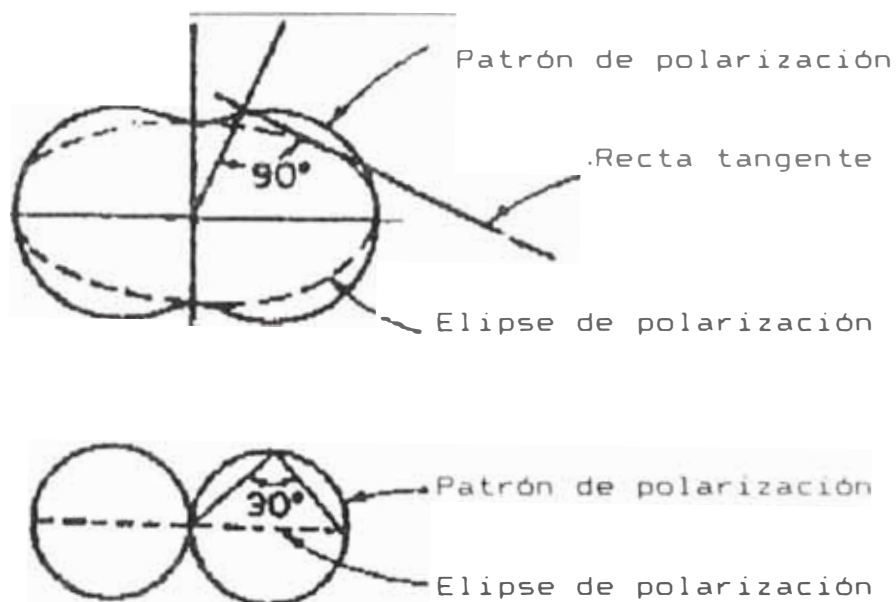


Fig. 5.8.1.- Patrón y elipse de polarización de una antena

Para la medición de la **Potencia** los puentes de medición de potencia (power bridges) deben acoplarse a la línea de transmisión de potencia mediante acopladores direccionales o transformadores de cable.

Sin embargo, conocer la potencia del transmisor y el coeficiente o la potencia de la onda reflejada nos

permite obtener la potencia que está ingresando a la antena.

De no estar disponible un medidor de potencia, a la salida del acoplador direccional o transformador de cable, en el sentido de la onda incidente (o reflejada si se desea) puede conectarse un medidor de intensidad de campo o un analizador de espectros; cuidando de que se encuentre correctamente acoplado y de transformar la lectura a potencia si no se puede hacer directamente.

Los puentes medidores de potencia pueden ser a base de termistores, barreeters o termocuplas.

La **máxima capacidad de potencia** de una antena está determinada básicamente por los cables, conectores y dieléctricos.

En este caso; el límite de potencia está dado por el cable. En la tabla 5.8.1 se indican los límites de potencia para cables usuales Pirelli (ver también anexo) en el rango de frecuencia de VHF.

El menor de dichos valores para un cable dado usado para alimentación o en la adaptación es el que determina la capacidad de potencia de la antena.

En este caso, el más crítico es el RG 59 y el RG

58; concretamente este último; que es el más delgado.

Tabla 5.8.1.- Límites de potencia de cables de dieléctrico de polietileno para VHF (Pirelli)

Cable	Z_0 (ohm)	Potencia máxima (W)	
		54 MHz	216 MHz
RG 58	50	400	170
RG 213	50	1400	600
RG 8	52	1400	600
RG 59	75	500	220
RG 11	75	1050	480

5.9 Instalación de las antenas en el campo

La instalación de antenas en el campo requiere de la puesta a tierra del generador; para la cual es necesario utilizar pozos de puesta a tierra.

Como la impedancia base es 50 ohm; la impedancia de puesta a tierra debe ser muy inferior a este valor; concretamente se puede considerar 4ohm como límite máximo.

Para televisión la norma es usar polarización horizontal o circular. Al potencial cliente se le solicita un mapa con las dimensiones de la localidad geográfica que desea iluminarse. La intención es colocar el transmisor en un extremo de la localidad e intentar iluminar el área para tener un campo mínimo detectable adecuadamente con una relación señal a ruido dentro de lo normado para radiodifusión; con la mínima potencia de transmisión pues el costo del sistema está fuertemente dominado por el costo del transmisor; de modo que es un trabajo rentable de ingeniería invertir en el diseño de un buen arreglo de antenas.

Para localidades pequeñas (hasta 10 km del transmisor) se suele utilizar un transmisor de 10 watt; para localidades grandes como Pucallpa; Chimbote o Huancayo se puede requerir hasta 200 Watt; para algunas capitales de provincia se llega a 5 kW y en algunas emisoras de Lima se usan transmisores de hasta 30 kW.

En base a la forma de la región (que puede ser un pueblo; un valle alargado; etc.) y al patrón de las antenas Yagi; se decide si basta una antena o si deben colocarse dos o cuatro en arreglo. El procedimiento es utilizar un mástil para colocarlas en columna en planos paralelos (polarización horizontal); separadas una distancia de $\lambda/2$. Para ensanchar el haz; las antenas deben colocarse en ángulos azimutales espaciados entre sí.

Siendo la línea de alimentación de 50 ohm y las antenas diseñadas para la misma impedancia; son necesarios los **distribuidores** (ver anexo) que no son más que transformadores de un cuarto de longitud de onda contruidos de la misma forma que los balunes bazooka (ver al inicio de este capítulo). Por ejemplo; para alimentar cuatro antenas en paralelo se requiere transformar la impedancia de $50/4$ a 50; de modo que la impedancia del transformador de cuarto de longitud de onda es de 25 ohm (la media geométrica).

Las antenas deben colocarse en la misma fase; de modo que los cables que salen del distribuidor a cada una de ellas deben tener longitudes similares o que se difereñen en un número entero de longitudes de onda del cable (0.665 λ para Pirelli).

Los cables de las salidas del distribuidor a las antenas son usualmente RG 8 (ver arriba la capacidad de potencia).

Para torres pequeñas de localidades para transmisiones de unos 10 Watt la sección de la torre es de unos 30 cm y las secciones a ensamblar son de unos 3 metros (en colores alternados). No suele bajarse en ningún caso de los 18 metros; que son siempre más de 10 longitudes de onda de modo que la influencia del terreno es minimizada. En estos casos puede usarse también RG 8 para no incre-

mentar los costos; pues a pesar de la atenuación de dicho cable (ver especificaciones) el aumento de costo de usar cable de menores pérdidas de dieléctrico de aire en lugar de polietileno (cable HELIAX) no se justifica.

Para instalaciones de media potencia (a partir de 100 watt) y potencia alta (a partir de 1 kW) se incrementa el costo del transmisor; de modo que pasa a ser el determinante en el costo de la instalación y se justifica ampliamente la utilización de cable HELIAX entre el transmisor y el distribuidor; más aún porque la altura de la torre suele ser más grande (30 o 50 metros); que se instala por secciones de 6 metros. Entre el distribuidor y las antenas se usa RG 58 pues la longitud es pequeña; de modo que se reducen las pérdidas.

CAPITULO VI

ANALISIS DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES

En este capítulo se analizará a la luz del programa realizado resultados experimentales de mediciones provenientes de fuentes reconocidas y también las mediciones realizadas en este trabajo.

6.1. Elemento cilíndrico

El estudio del dipolo cilíndrico es un tema standard en electromagnetismo. Explicación sobre su comportamiento se encuentra en la referencia [44].

La impedancia de entrada de un dipolo cilíndrico está fuertemente afectada por la forma de la alimentación.

En la figura 6.1.1 (para la componente resistiva) y 6.1.2 (para la componente reactiva) se muestran los resultados de mediciones efectuadas por Brown y Woodward

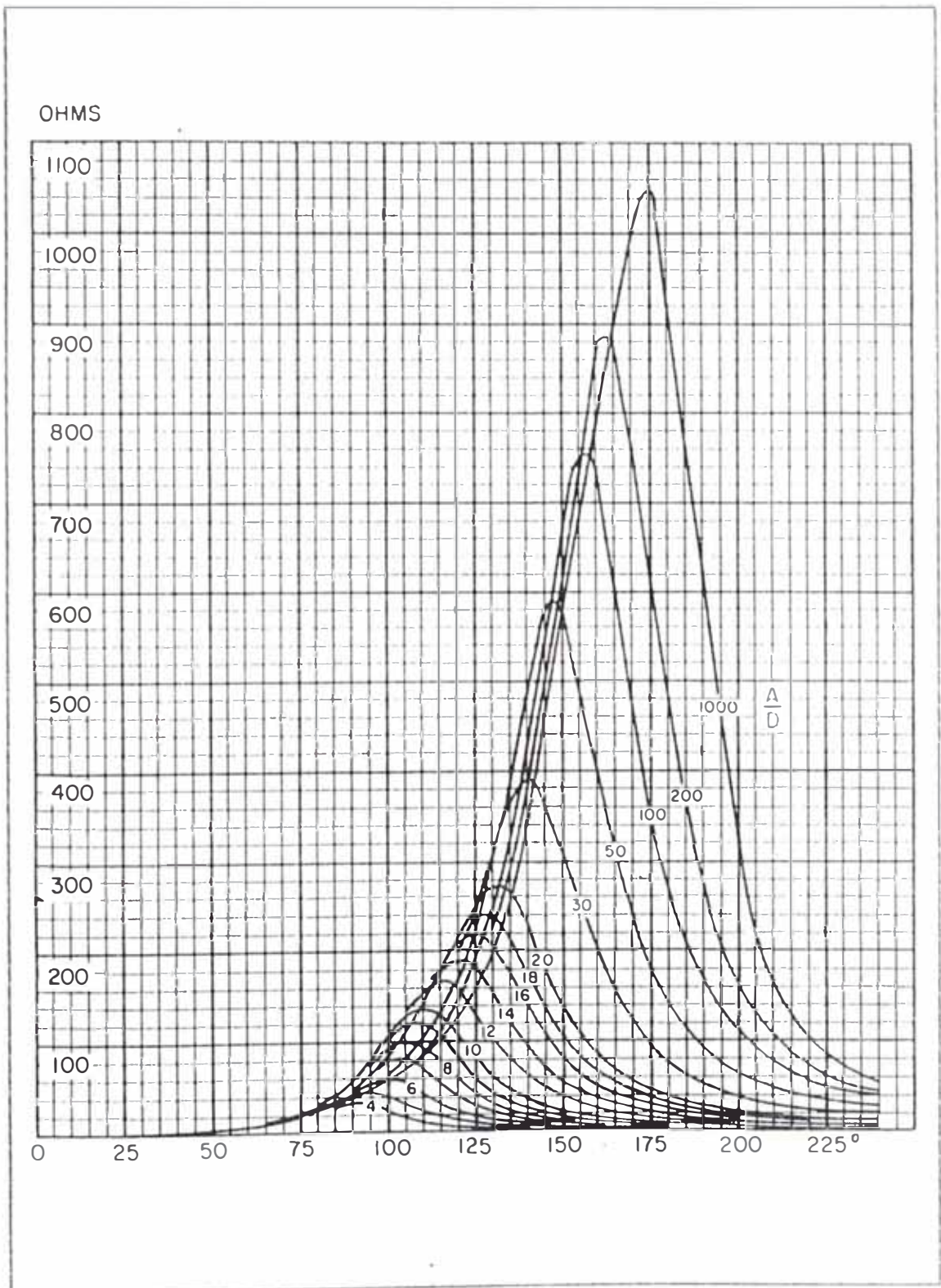


Fig. 6.1.1. Resultados experimentales para la resistencia de entrada de un monopolo cilindrico

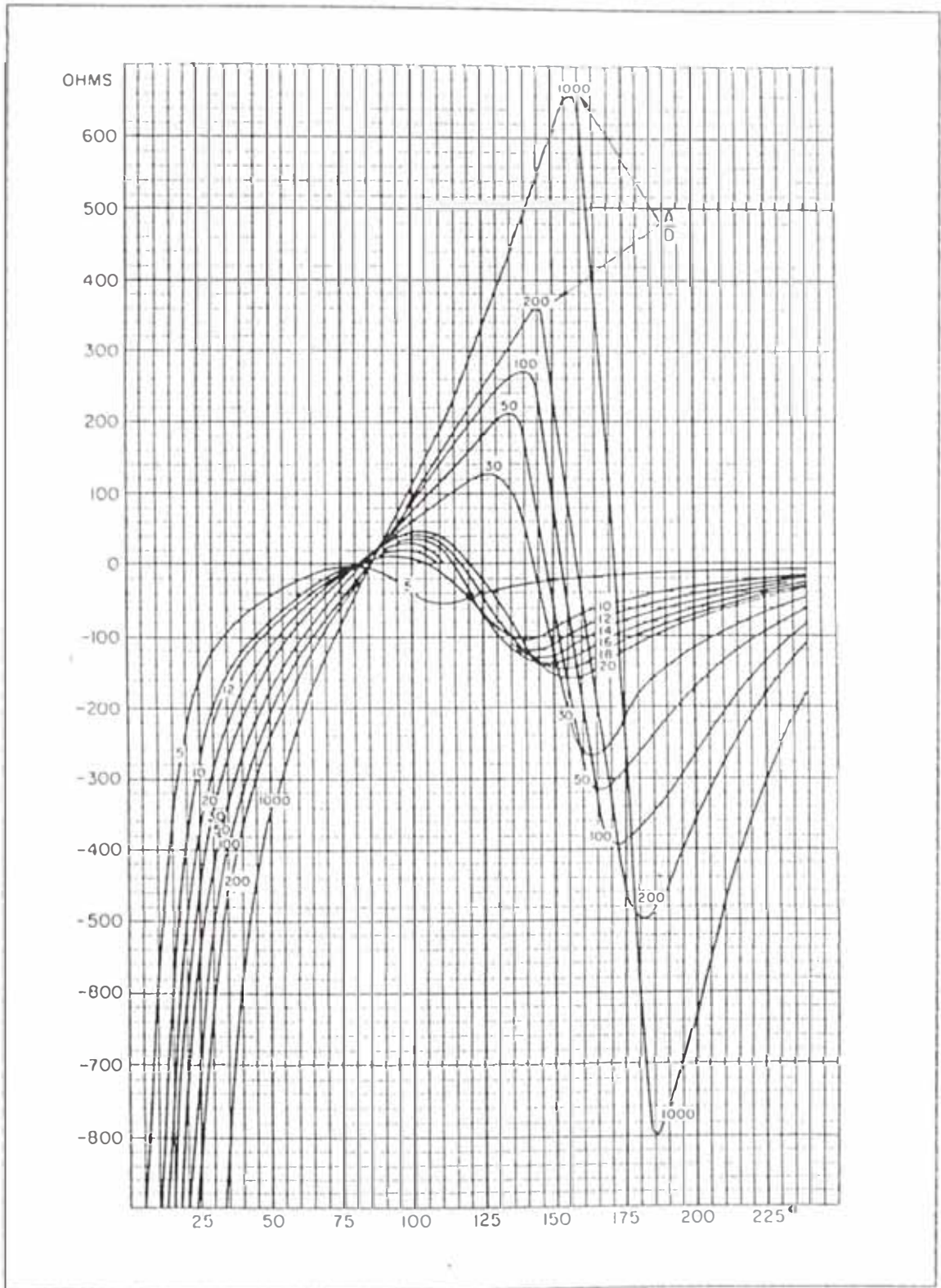


Fig. 6.1.2. Resultados experimentales para la reactancia de entrada de un monopolo cilindrico

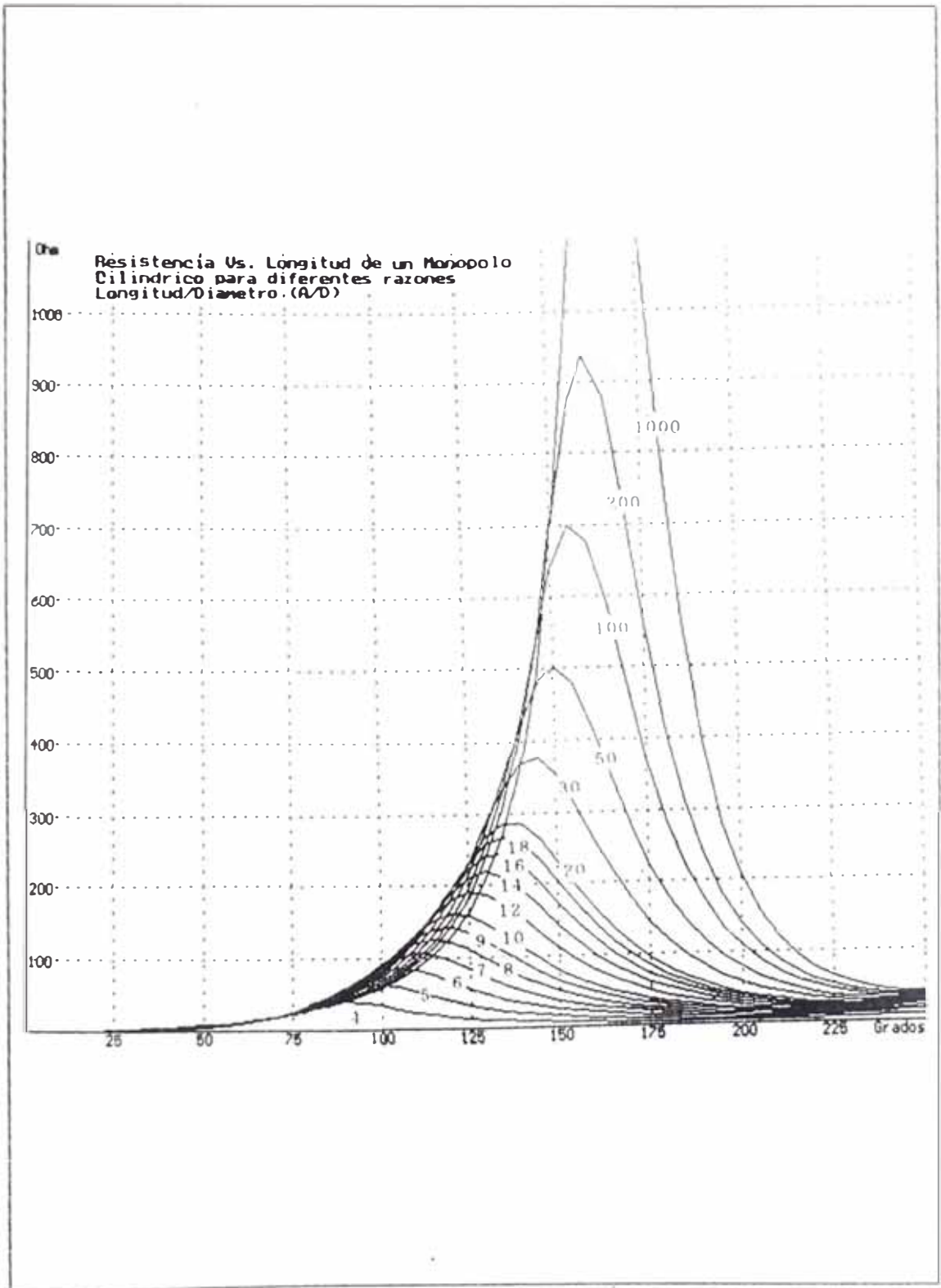


Fig. 6.1.3. Resultados obtenidos por el programa para la resistencia de entrada de un monopolo cilindrico

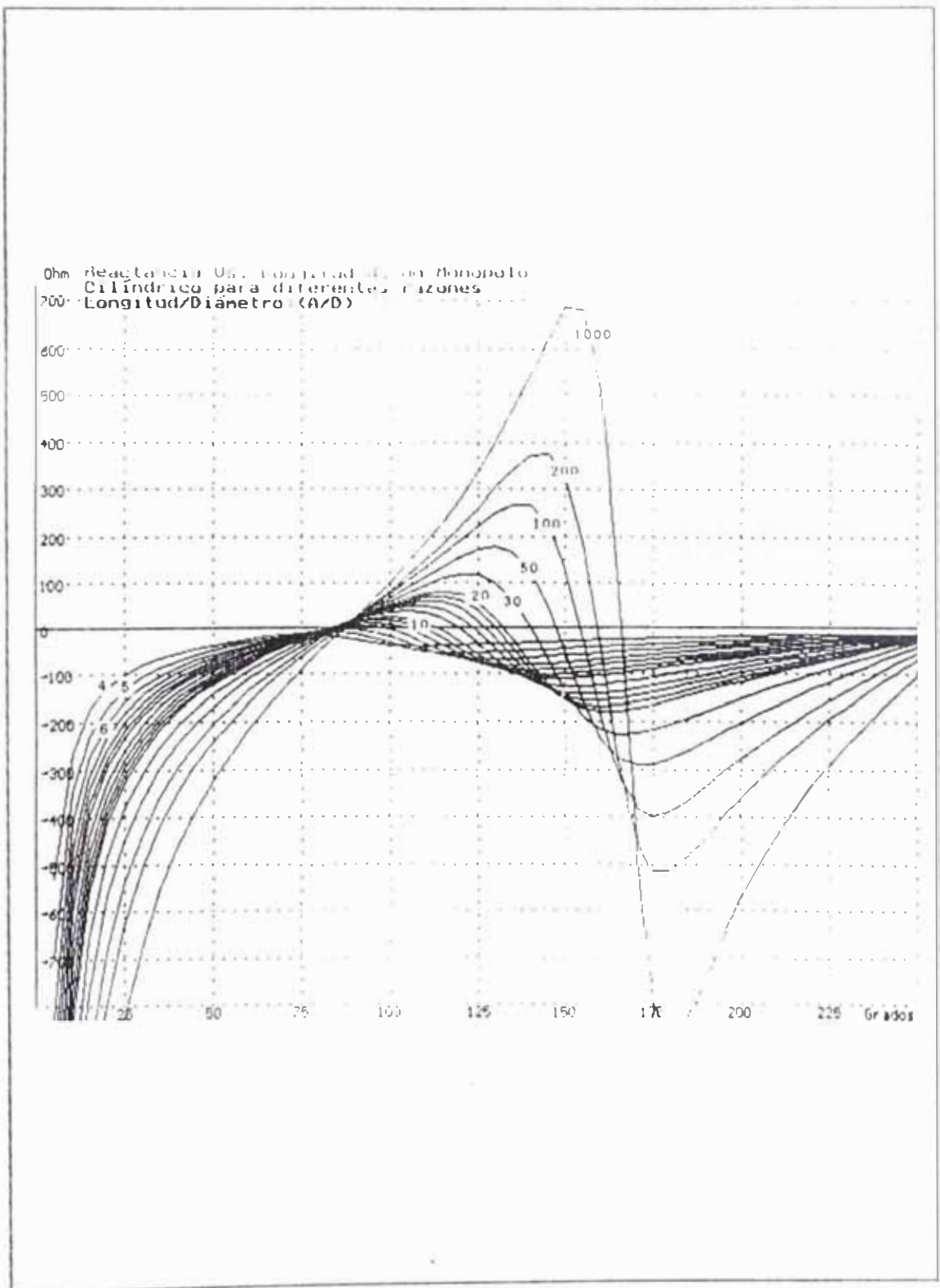


Fig. 6.1.4. Resultados obtenidos por el programa para la reactancia de entrada de un monopolo cilindrico

en 1945; obtenidas utilizando un monopolo alimentado por línea coaxial. Duplicando los resultados se obtienen los valores correspondientes al dipolo.

En las figuras 6.1.3 y 6.1.4 se muestran los resultados obtenidos por el programa utilizando simplemente el kernel reducido y 11 modos de expansión para todos los casos.

Se puede observar la coincidencia de las tendencias del comportamiento del dipolo en las diferentes resonancias, aunque se presentan los efectos conocidos de corrimiento de las frecuencias de los puntos de resonancia debidos a las características de alimentación.

Esto se ha atribuido a las capacidades parásitas cuya presencia es inevitable en la alimentación del elemento.

Estas son las que reducen el valor de la componente resistiva máxima de la impedancia para el caso del elemento más delgado.

Para eliminar el efecto de dichas capacidades, sobre todo para dipolos relativamente gruesos que son los casos más críticos, tomamos la opción de analizar no la impedancia sino la admitancia de entrada y considerar solamente la componente conductiva de modo de no conside-

rar los efectos de dicha capacidad parásita. Resultados de mediciones se encuentran en la referencia [46] y se muestran en las figuras 6.1.5 a 6.1.7.

En la figura 6.1.5 se muestran los valores experimentales de conductancia para un dipolo delgado (radio 0.007022λ) con resultados del programa para 1 y 9 modos de expansión.

Se han graficado las curvas para los tres métodos (kernel reducido, kernel exacto con aproximación de dos términos para el radio equivalente y kernel exacto integrado con separación de la singularidad logarítmica) pero se hace obvio que para un dipolo tan delgado deben coincidir.

En la figura 6.1.6 se muestran los resultados experimentales para un dipolo relativamente grueso (radio 0.1074λ) junto con los obtenidos con diferentes opciones del programa, para poner nuevamente de manifiesto la necesidad de utilizar el kernel exacto con un número adecuado de subdivisiones para dipolos gruesos, pues se nota incluso la divergencia del método de radio equivalente de dos términos para los casos mas gruesos.

En la figura 6.1.7 se muestran estos datos experimentales nuevamente junto con los resultados de integración, y se pone de manifiesto que es suficiente utili-

zar 10 subintervalos para la integración a lo largo de ϕ gracias a la aplicación de la separación de la singularidad logarítmica y que el método es convergente.

6.2 Datos experimentales sobre antenas Yagi del NBS.

Debido a las dificultades inherentes a la medición de los parámetros de antenas; usaremos como referencia los resultados experimentales para diseño propuestos por el National Bureau of Standards de los Estados Unidos (ref. [55]). El informe puede verse en el apéndice; y es tomado como referencia en la literatura sobre antenas en general.

Este método tiene la limitación de que solamente presenta cinco tipos de antenas y está orientado a maximizar la ganancia.

No siempre se desea maximizar la ganancia. Cuando se usa Yagis para iluminar una localidad rural se desea un ancho de haz generalmente grande y mínimo lóbulo trasero.

En este caso; es recomendable un diseño especial para lograr la cobertura deseada.

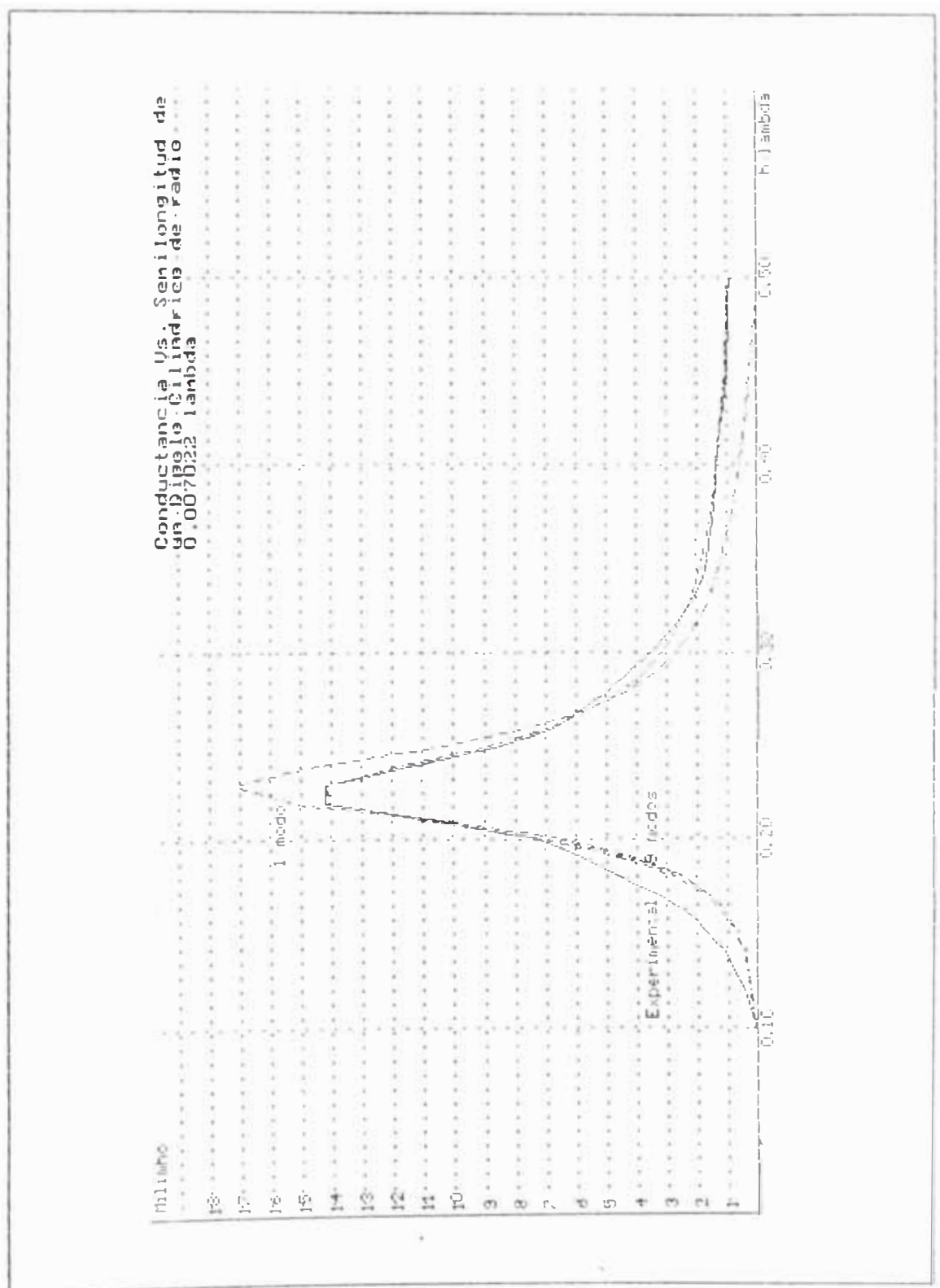


Fig. 6.1.5. Conductancia versus semilongitud de un dipolo cilindrico de radio 0.007022λ

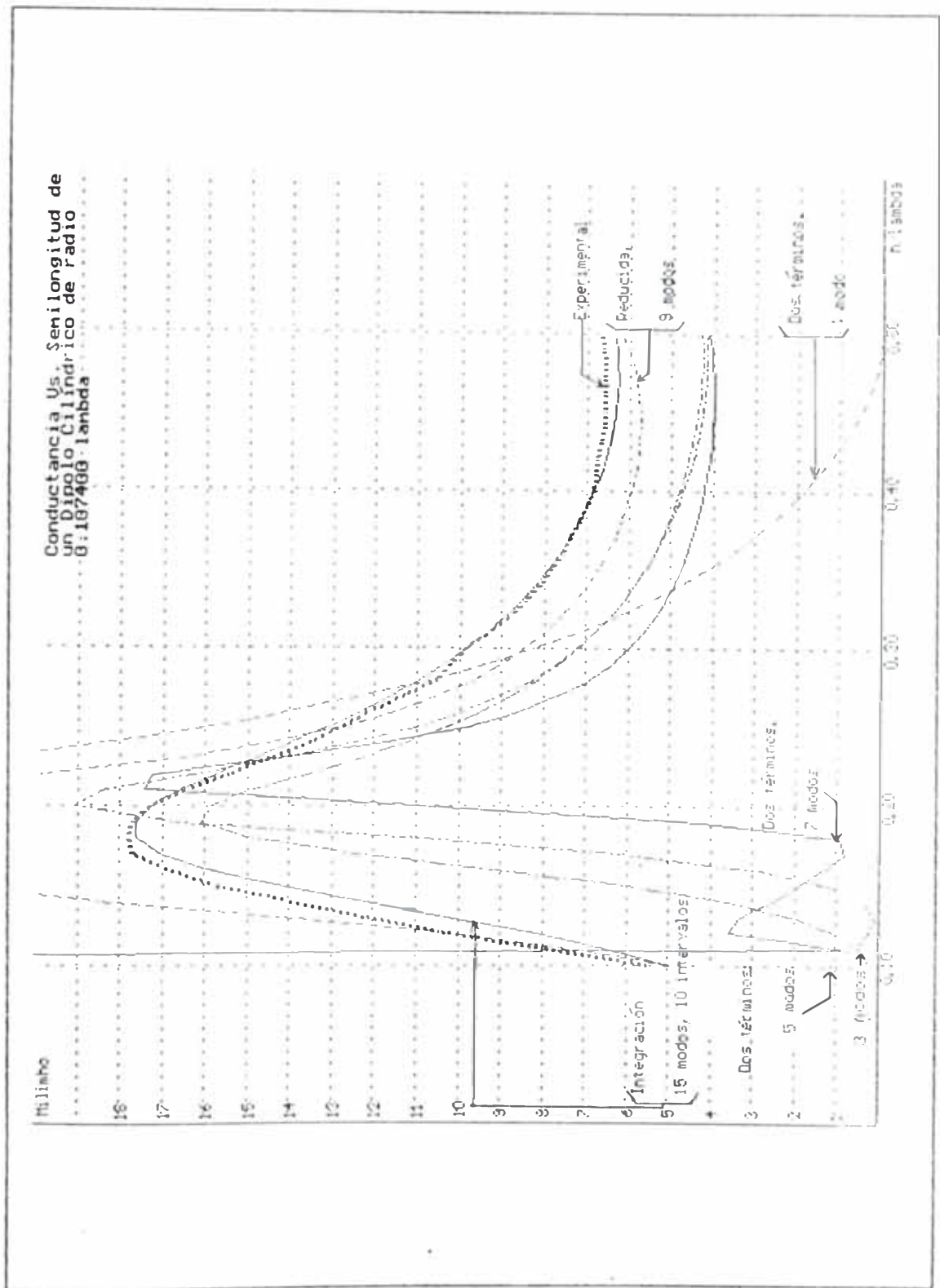


Fig. 6.1.6. Conductancia versus semilongitud de un dipolo cilindrico de radio 0.1074λ (valores experimentales vs. diversos métodos)

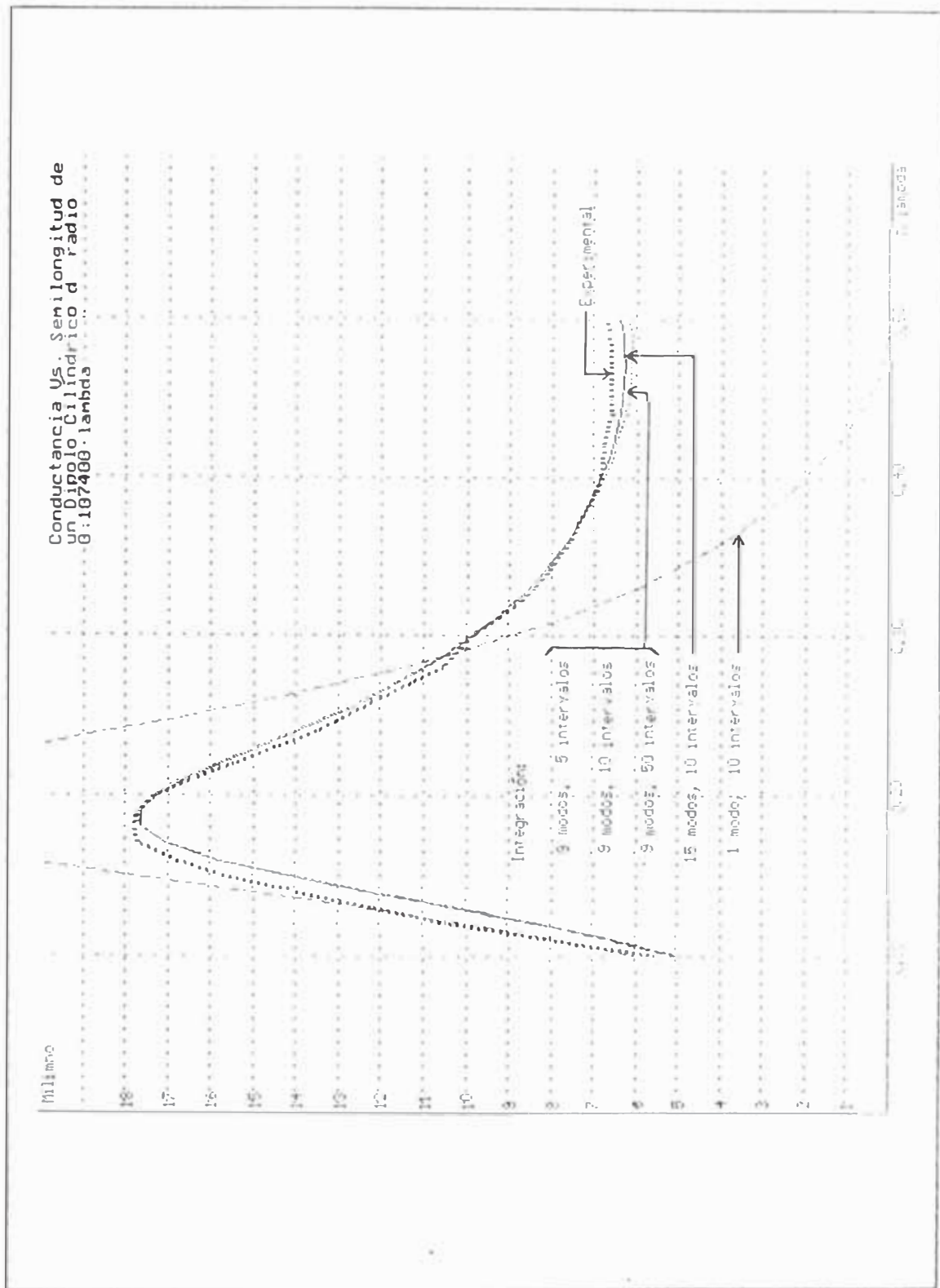


Fig. 6.1.7. Conductancia versus semilongitud de un dipolo cilíndrico de radio 0.0174λ (valores experimentales vs. método de integración del kernel exacto)

El equipo de trabajo del NBS tuvo especial cuidado en realizar las mediciones con todas las condiciones de precisión; muy difíciles de lograr en nuestro medio.

Se usó una frecuencia de 400 MHz y una fuente transmisora ubicada a una distancia de 320 metros. De este modo el error de fase fue mucho menos de un grado.

Se tomó como referencia para la ganancia un dipolo doblado (2.16 dB) de modo que las ganancias medidas se les debe sumar 2.16 dB para tener ganancias referidas a la antena isotrópica.

En dicho informe no aparecen los datos del dipolo doblado, que ha sido sintonizado a la impedancia de la línea.

Sin embargo, la influencia de su forma no influye mucho en la ganancia.

Nosotros para aplicar el programa hemos hecho estimaciones de estos valores; y hemos comprobado que efectivamente su variación no cambia sensiblemente la ganancia hallada.

En el informe se indica que los datos medidos son estimados precisos dentro de un margen de 0.5 dB, es decir, éste es el margen de error.

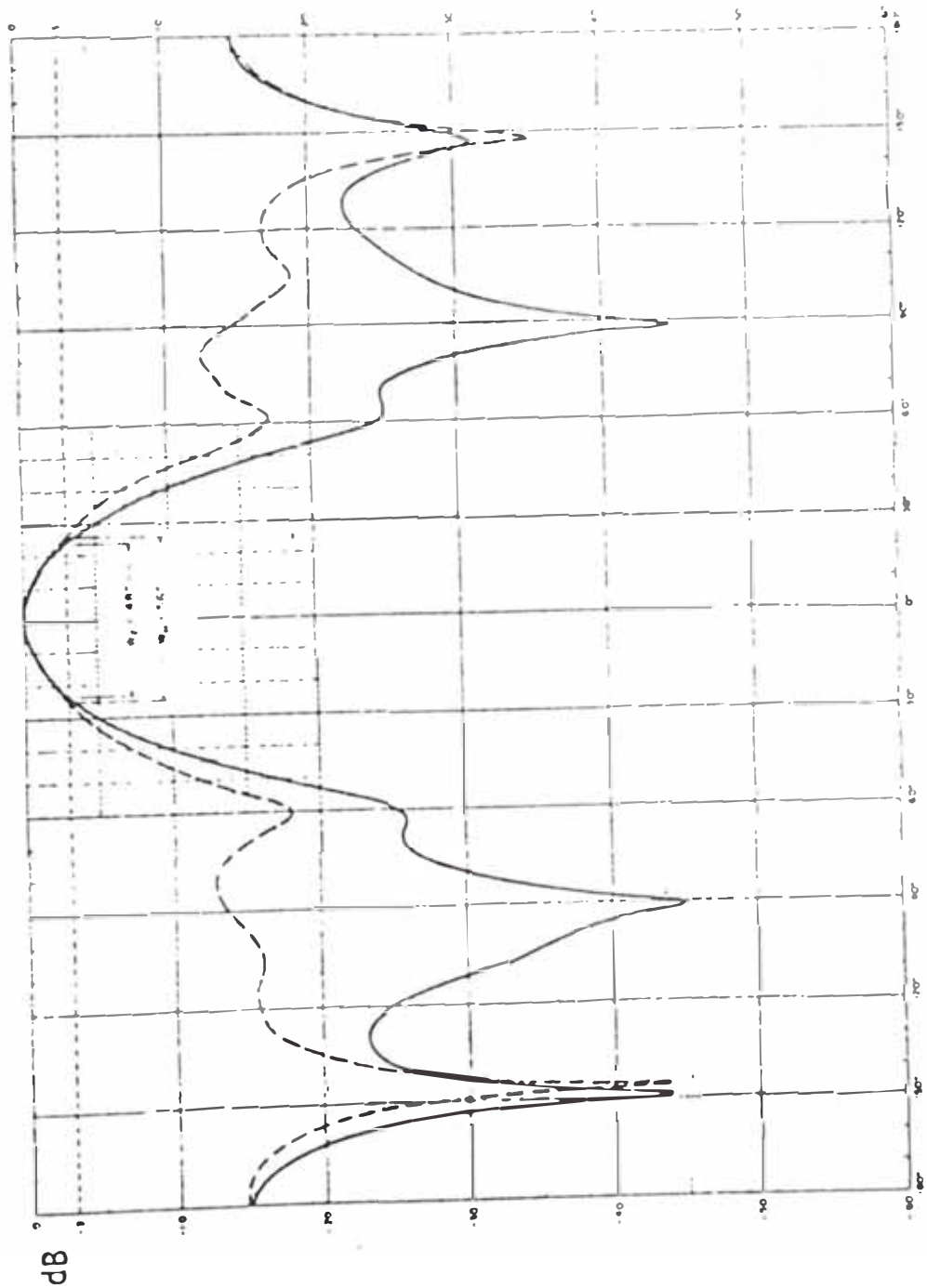


Fig. 6.2.4
 Patrones de radiación E y H experimentales de la Yagi
 de 5 elementos de 0.8λ de longitud recomendada por el
 NBS

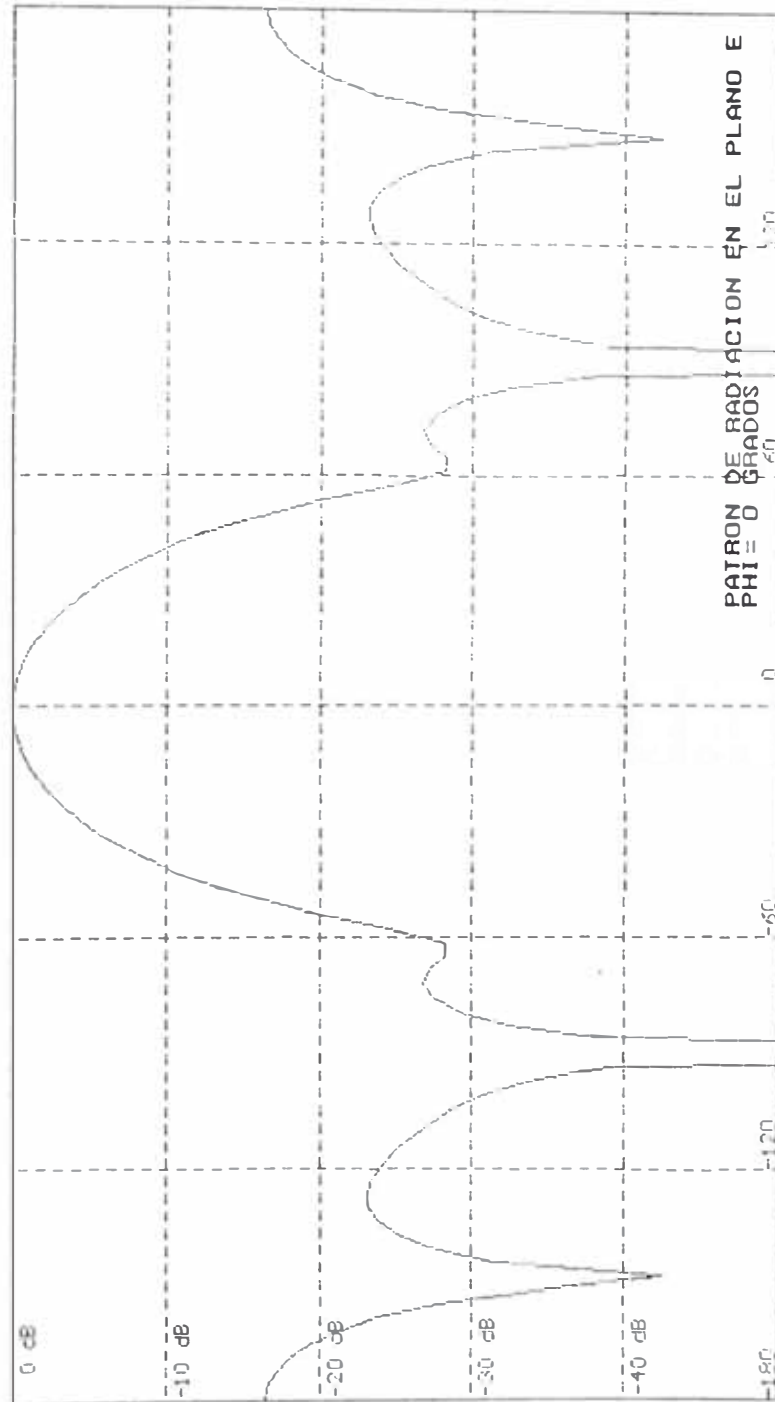


Fig. 6.2.5. Patrón de radiación en el plano E de la Yagi de 5 elementos recomendada por el NBS obtenido por el programa

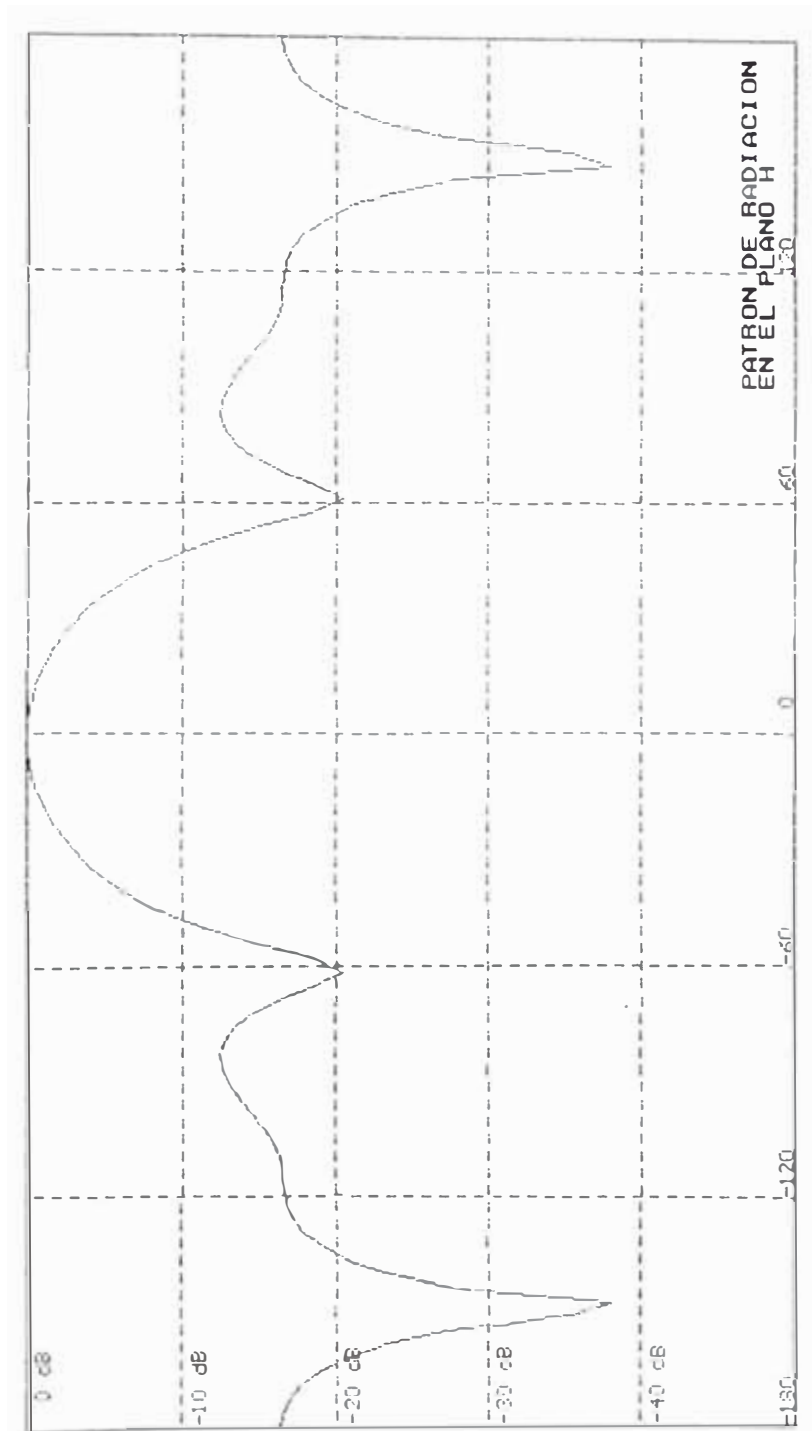


Fig. 6.2.6.- Patrón de radiación en el plano H de la Yagi de 5 elementos recomendada por el NBS obtenido por el programa.

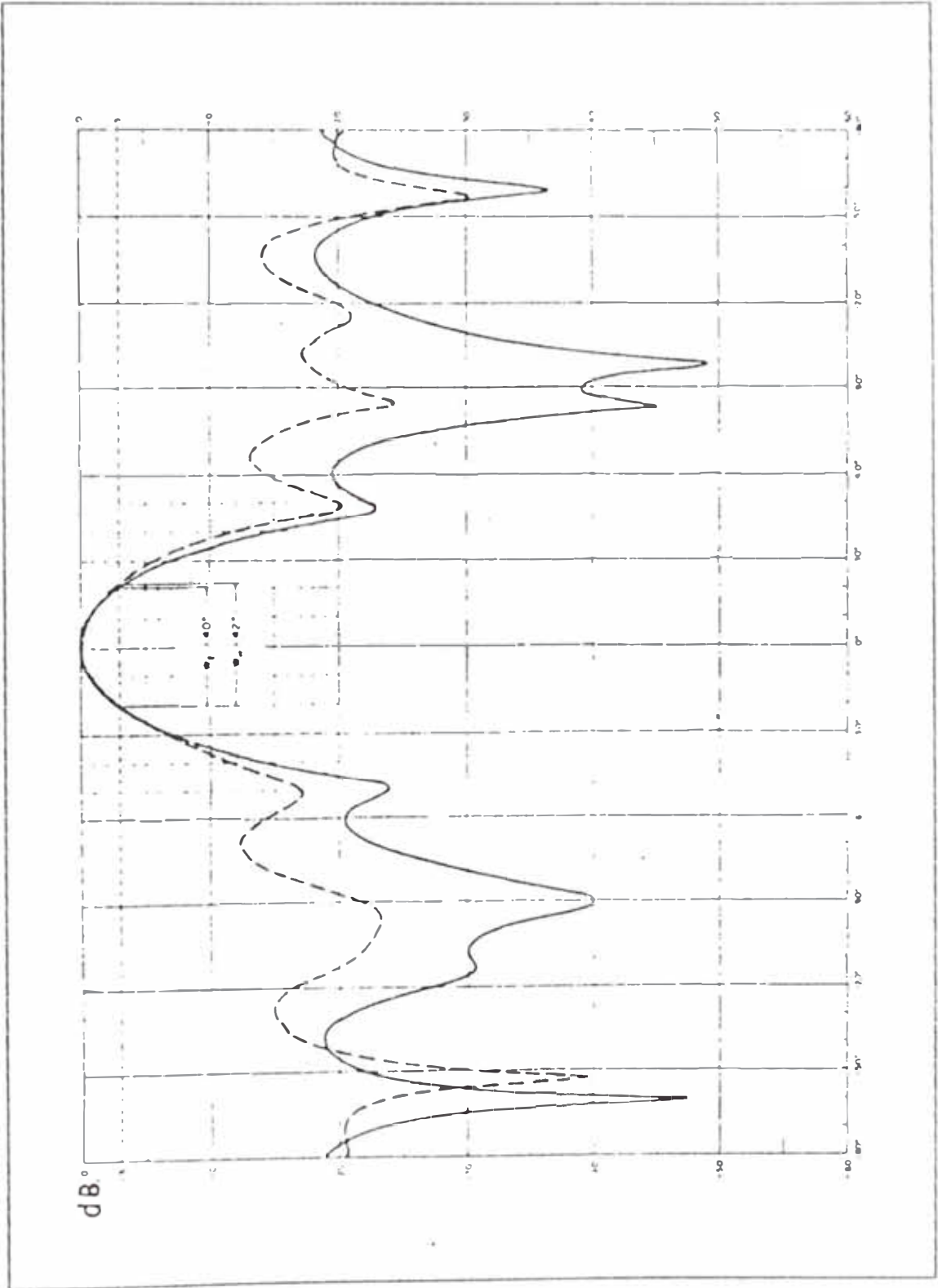


Fig. 6.2.7.- Patrones de radiación E y H experimentales de la Yagi de 6 elementos de 1.2λ de longitud recomendada por el NBS

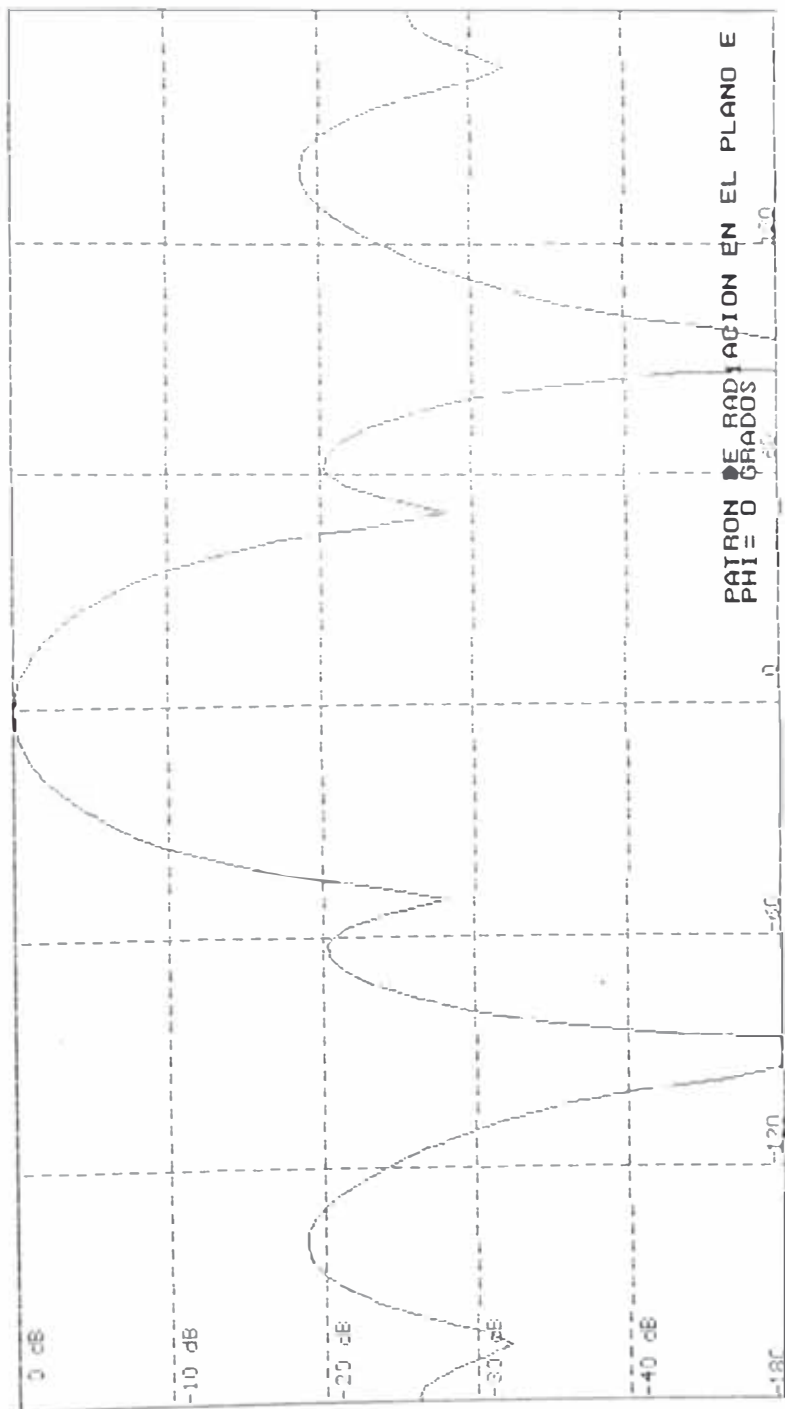


Fig. 6.2.8.- Patrón de radiación en el plano E de la Yagi de 6 elementos recomendada por el NBS obtenida por el programa

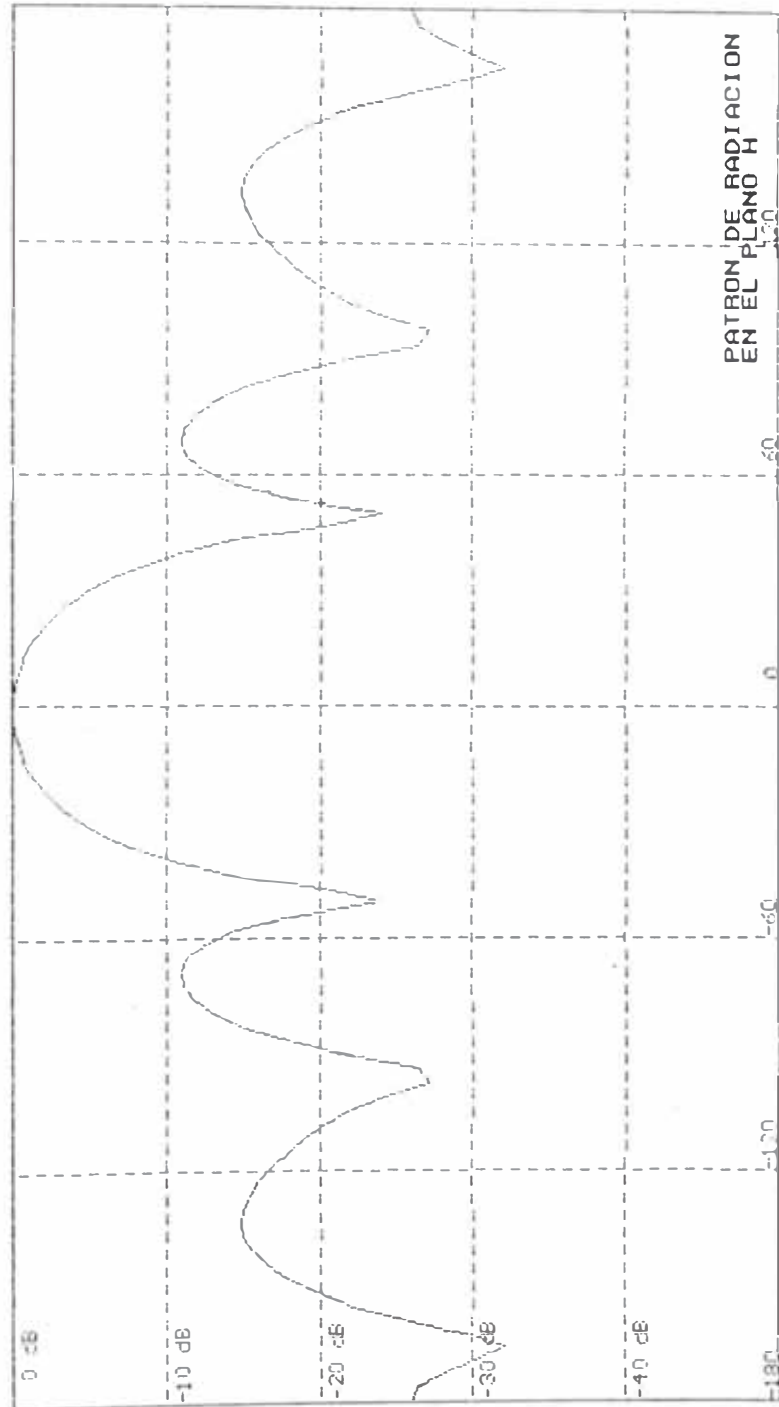


Fig. 6.2.9.- Patrón de radiación en el plano H de la Yagi de 6 elementos recomendada por el NBS obtenida por el programa

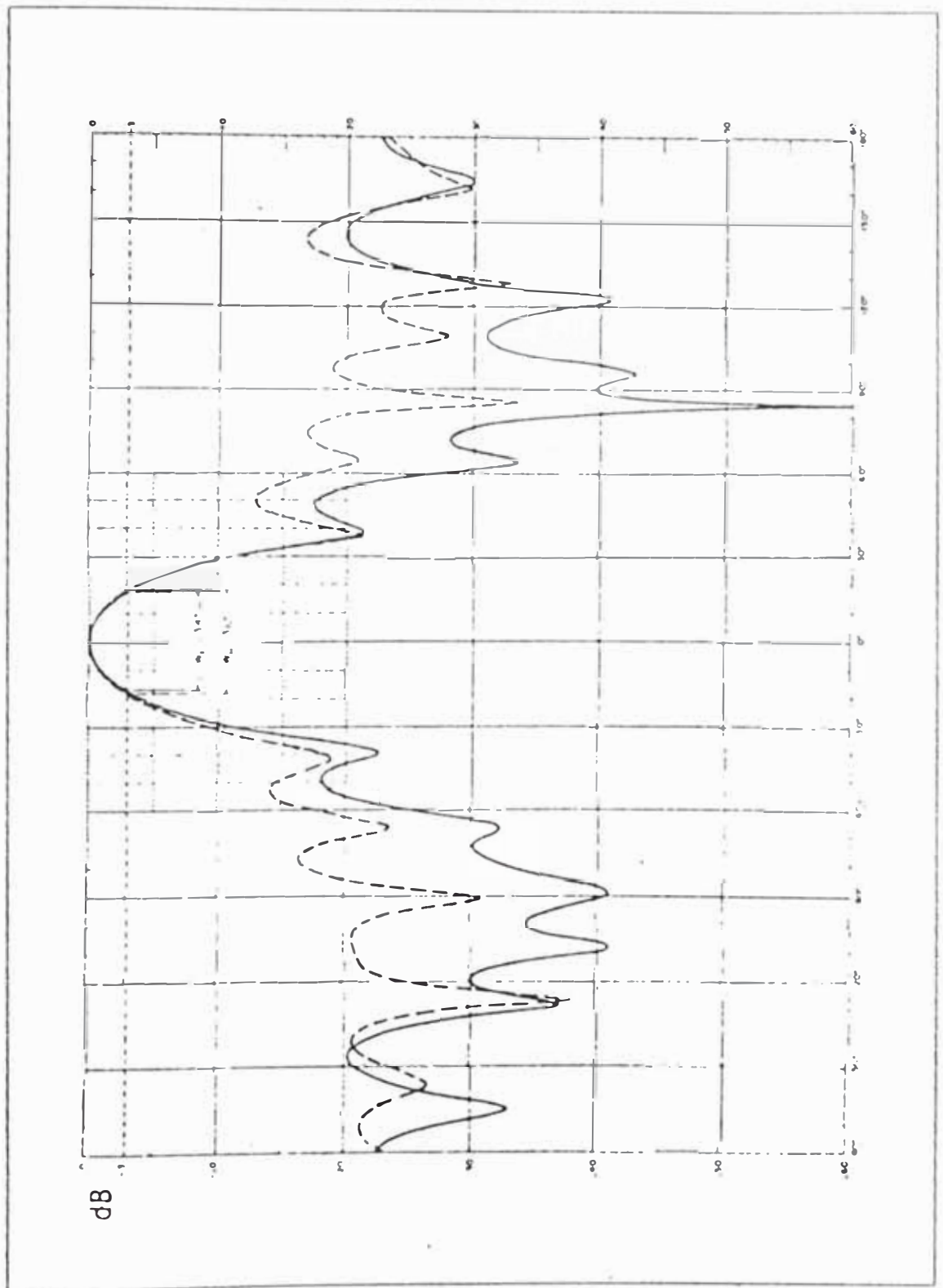


Fig. 6.2.10.- Patrones de radiación E y H experimentales de la Yagi de 12 elementos de 2.2λ de longitud recomendada por el NBS

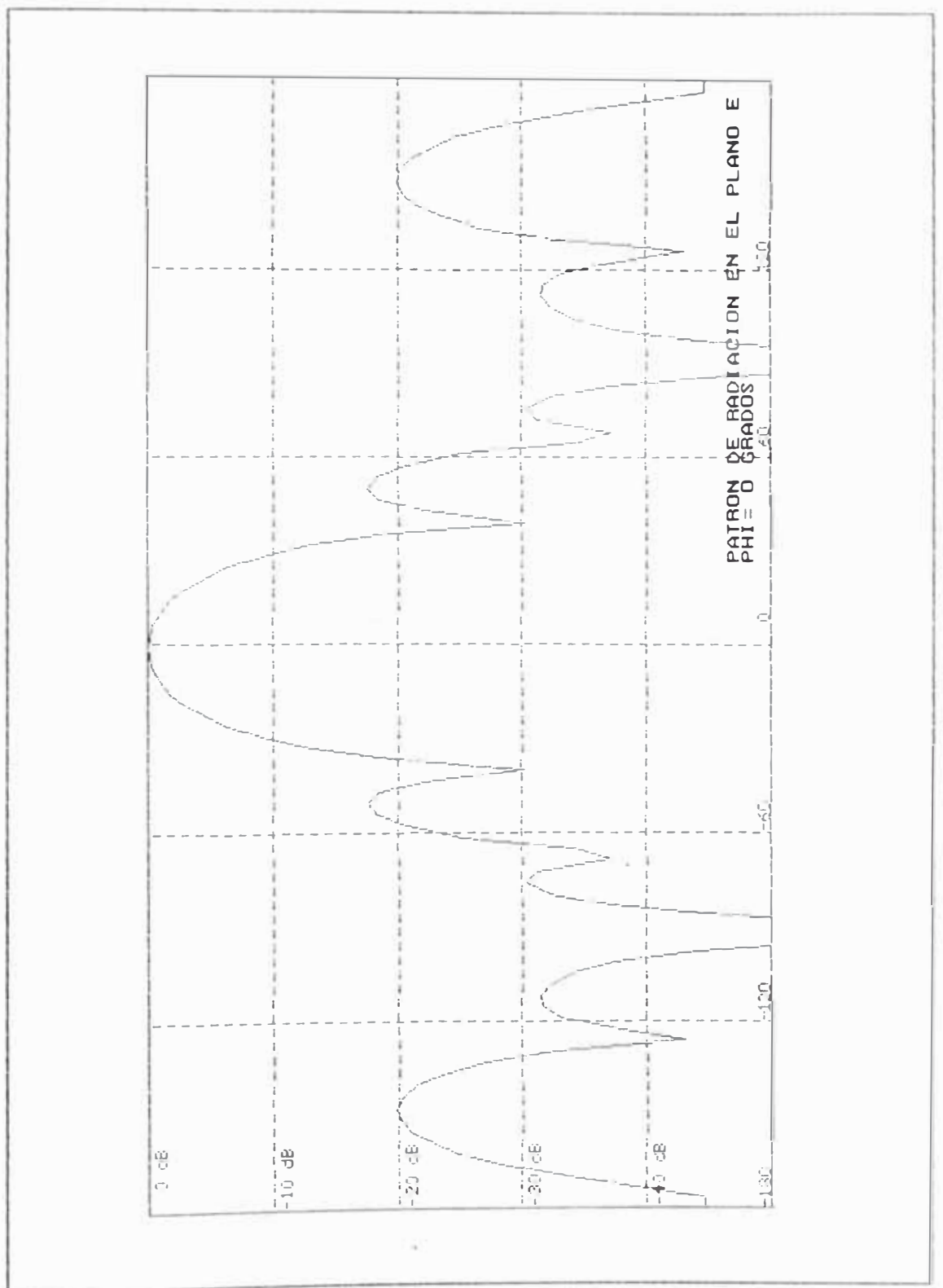


Fig. 6.2.11.- Patrón de radiación en el plano E de la Yagi de 12 elementos recomendada por el NBS obtenido por el programa

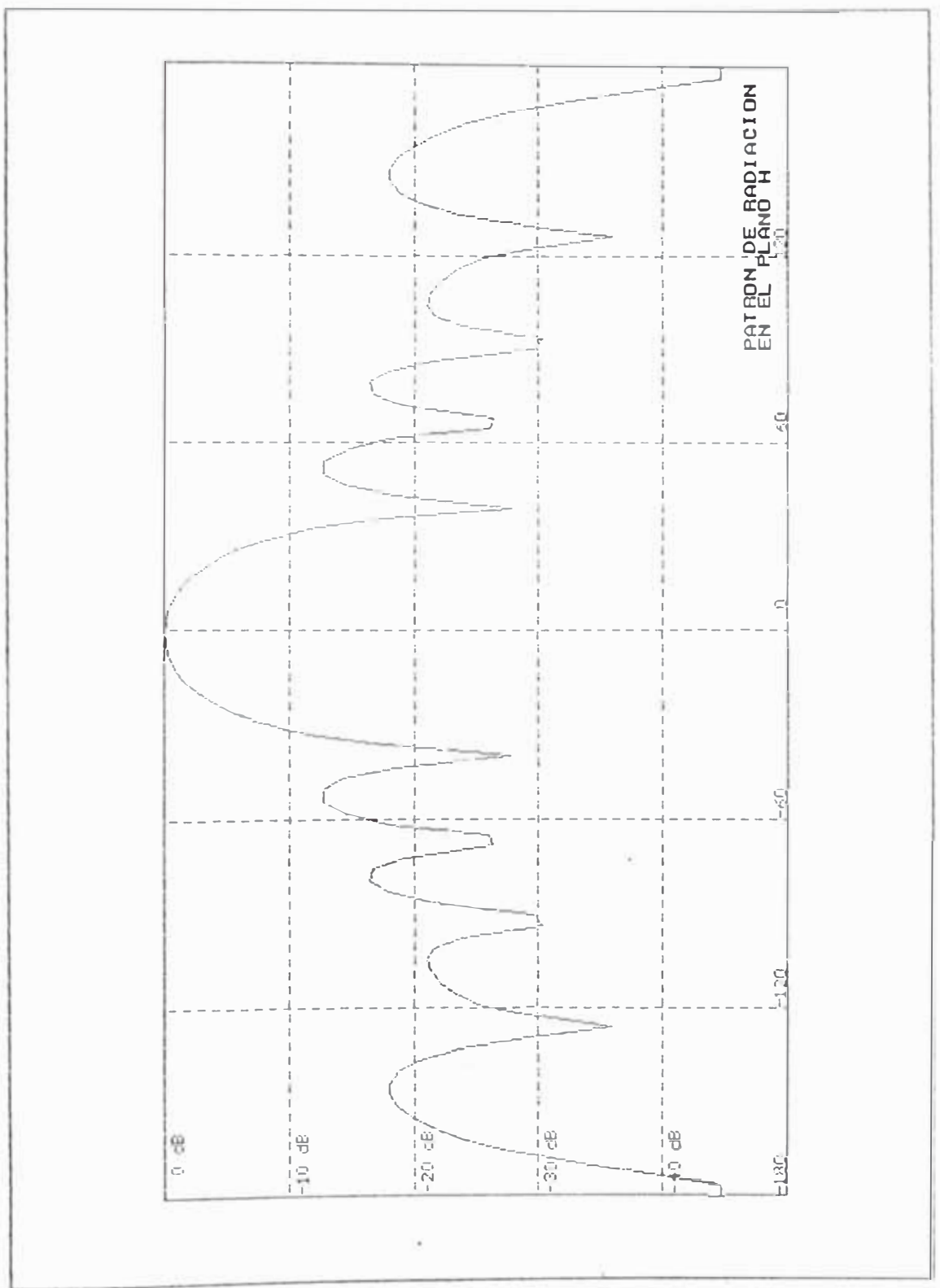


Fig. 6.2.12.- Patrón de radiación en el plano H de la Yagi de 12 elementos recomendada por el NBS obtenido por el programa

ancho del haz tanto en el plano E como en el plano H, lo que es lo más importante en un patrón de radiación para analizar la cobertura y evitar las posibles interferencias de otras comunicaciones.

Tabla 6.2.1.- Ganancias experimentales comparadas con las obtenidas por el programa para antenas Yagi optimizadas en ganancia de 5, 6 y 12 elementos.

Numero de elementos	Longitud	Ganancia en dBi (exper.)	Ganancia en dBi (prog.)	Diferencia
5	0.8 λ	11.36	11.14	0.22
6	1.2 λ	12.36	12.22	0.14
12	2.2 λ		14.06	0.35

Dados los grandes márgenes de diferencia entre valores teóricos y experimentales que suelen reportarse como adecuados en publicaciones sobre simulación electromagnética y la sorprendente coincidencia obtenida en este caso con una fuente de datos experimentales tan respetable e importante como el National Bureau of Standards de los Estados Unidos; podemos decir que el programa realizado se contrasta excelentemente con el experimento cuando este experimento se realiza en condiciones que eliminan las fuentes espurias de error, lo que no es sencillo de realizar si no se posee el equipamiento adecuado.

6.3 Análisis de las antenas Yagi de VHF para transmisión de televisión

Se ha analizado el comportamiento de las antenas yagi de VHF para transmisión de televisión cuya construcción se ha detallado en el capítulo anterior. En concreto, y por razones de extensión, mostramos como ejemplo la yagi de canal 9 dada en la tabla 5.3.3. Se recordará que como consta en el capítulo 5 esta antena presentaba un VSWR mejor que 1.4 para frecuencias desde 193 hasta 191 MHz; y la frecuencia mejor acoplada (alrededor de 1.3 de VSWR) se presentaba en 186 MHz. En 194 MHz ocurría un rápido aumento de la onda reflejada. El canal en que debe trabajar es desde 186 hasta 192 MHz; es decir, la frecuencia mejor adaptada está al inicio del canal.

En la tabla de la figura 6.3.2 se muestra un análisis completo de acoplamiento (onda reflejada) de esta antena mediante el programa realizado.

Hacemos **primero un análisis** de dicha antena con el programa propuesto para hallar la impedancia de entrada de radiación (que hemos llamado Z_r) con 7 modos de aproximación, con los datos de la figura 6.3.1 y haciendo uso de la integración del kernel exacto con separación de la singularidad logarítmica y 10 subintervalos para integración en ϕ de modo de lograr precisión en el cálculo.

de estas impedancias junto con los valores correspondientes del VSWR y la ganancia para dar una muestra del comportamiento de la antena a lo largo y fuera de la banda en que debe trabajar y tener una idea de su ancho de banda efectivo.

La correspondencia de estos valores calculados con el modelo usado con las mediciones indicadas al final del acápite 5.4 y repetidas al inicio de este acápite es nuevamente sorprendente.

Las conclusiones que se pueden sacar de esto son extensas:

(1) El método de momentos en el dominio de la frecuencia con funciones de base y prueba basadas en la teoría diakóptica de antenas (pulsos es forma de triángulos sinusoidales); y que toma la opción de calcular los términos de interacción dentro del mismo elemento realizando la integración en ϕ con 10 subintervalos haciendo uso del kernel exacto con separación de la singularidad logarítmica para el término propio y los primeros términos adyacentes; es un método adecuado y preciso para realizar el análisis y predicción de la calidad de la adaptación de las antenas Yagi de VHF, que son utilizadas comúnmente como antenas de poco costo para transmisión de televisión y radiodifusión de FM de baja potencia en localidades pequeñas.

Frec. (MHz)	Z_r (ohm)	Z_e (ohm)	Z_t (ohm)	VSWR	Ganancia (dB _i)
183	38.82 - j 3.93	156.22 - j 10.08	35.81 - j 0.58	1.40	8.48
184	38.68 - j 2.48	155.22 - j 4.63	36.21 - j 1.32	1.38	8.57
185	38.40 - j 0.96	153.68 + j 1.04	36.64 - j 2.15	1.37	8.57
186	37.99 + j 0.65	151.68 + j 7.01	37.07 - j 3.13	1.36	8.62
187	37.44 + j 2.34	149.16 + j 13.29	37.48 - j 4.28	1.36	8.68
188	36.76 + j 4.15	146.17 + j 20.04	37.82 - j 5.65	1.36	8.74
189	35.94 + j 6.06	142.66 + j 27.26	38.04 - j 7.27	1.36	8.89
190	34.98 + j 8.17	138.65 + j 35.12	38.04 - j 9.19	1.41	8.86
191	33.88 + j 10.42	134.14 + j 43.64	37.72 - j 11.38	1.47	8.92
192	32.65 + j 12.89	129.17 + j 53.05	36.90 - j 13.82	1.55	8.98
193	31.30 + j 15.57	123.77 + j 63.33	35.46 - j 16.37	1.67	9.03
194	29.85 + j 18.51	118.04 + j 74.69	33.28 - j 18.82	1.84	9.10

Fig. 6.3.2.- Impedancias de radiación (Z_r); de entrada al dipolo doblado (Z_e); de entrada al transformador-balún de $\lambda/4$ (Z_t); VSWR y ganancia de la antena yagi de canal 9

(2) La antena Yagi se comporta en frecuencia alrededor de la primera resonancia de forma similar al dipolo simple: al aumentar la frecuencia la resistencia varía en forma bastante lenta y la parte reactiva pasa en forma relativamente más rápida de capacitiva a inductiva. frecuencia de resonancia de la antena determina la frecuencia mejor adaptada si el balún y adaptador está correctamente construido. Su alejamiento de esta frecuencia es con mucho el factor principal de la estrechez de banda.

(3) Se comprueba que las características de transmisión de una antena (ganancia, ancho del haz) no varían mucho a través del canal; a pesar de que la ganancia aumenta con la frecuencia; y como se ha visto el ancho de

banda esta limitado por la impedancia de entrada de la antena; mucho más afectada incluso por el relativamente rápido alejamiento de la impedancia de radiación de la antena respecto a la resonancia que por la estrechez de banda del adaptador; de modo que es en la propia antena donde se debe buscar un ensanchamiento de la banda.

(4) La impedancia del transformador de $\lambda/4$ escogida (75 ohm) junto con la impedancia de radiación en resonancia de la antena (alrededor de 38.2 ohm) son las que determinan el mejor VSWR.

La mejora de éste pasa por el cambio de alguna de ellas para lograr que la impedancia de la línea transformadora de $\lambda/4$ en resonancia sea cercanamente la media geométrica entre cuatro veces (por ser dipolo doblado) la resistencia de radiación de la antena en resonancia y la impedancia de la línea de alimentación (50 ohm). Es más sencillo **variar el** espaciamiento en el dipolo doblado pues en nuestro medio no es fácil obtener cable coaxial de otras impedancias que no sean 50 o 75 ohm. Además, el corrimiento de frecuencia puede corregirse sencillamente acortando ligeramente este dipolo.

En la figura 6.3.3 se muestra el cálculo sucesivo del factor de direccionalidad para los elementos de esta antena en la frecuencia central de su canal; observándose que todos los elementos contribuyen a la ganancia.

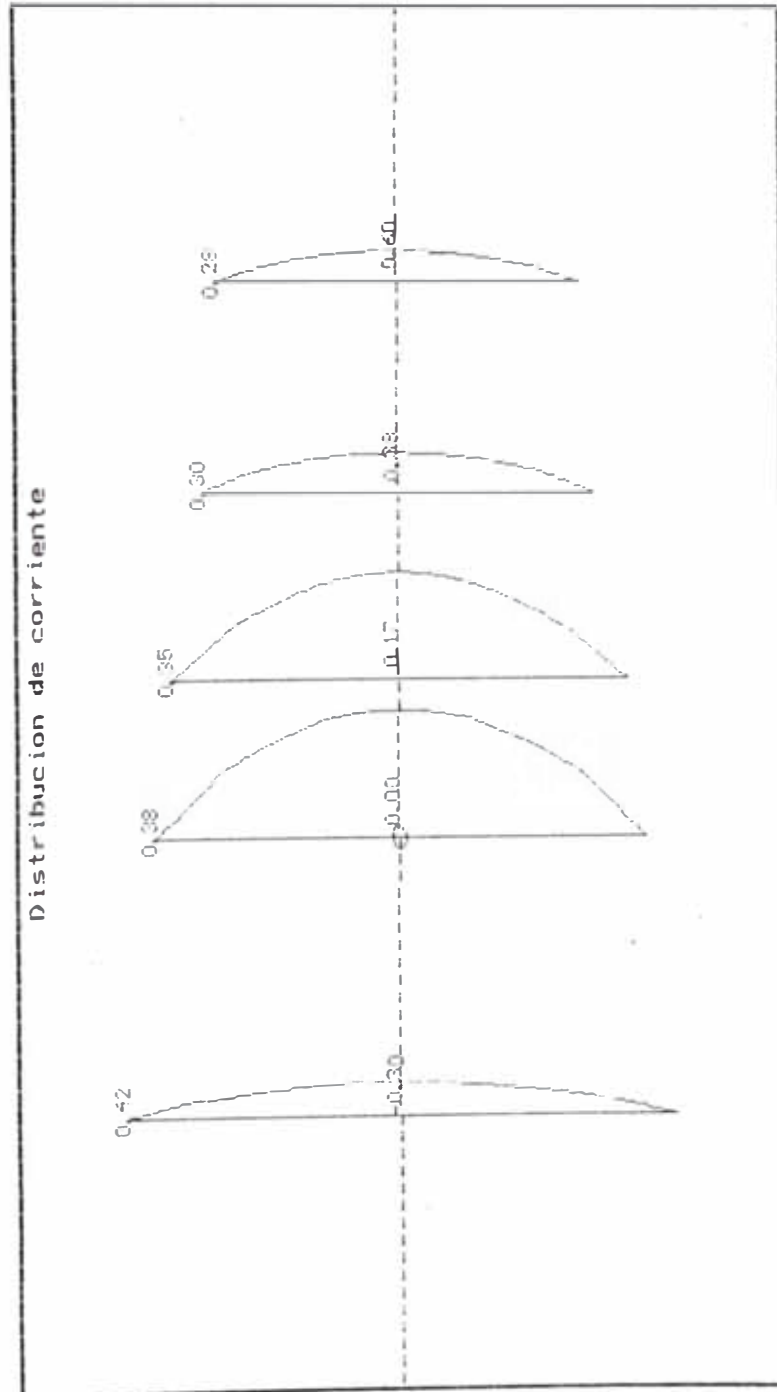


Fig. 6.3.4.- Gráfica de la distribución de corrientes sobre los elementos de la Yagi de 5 elementos de canal 9

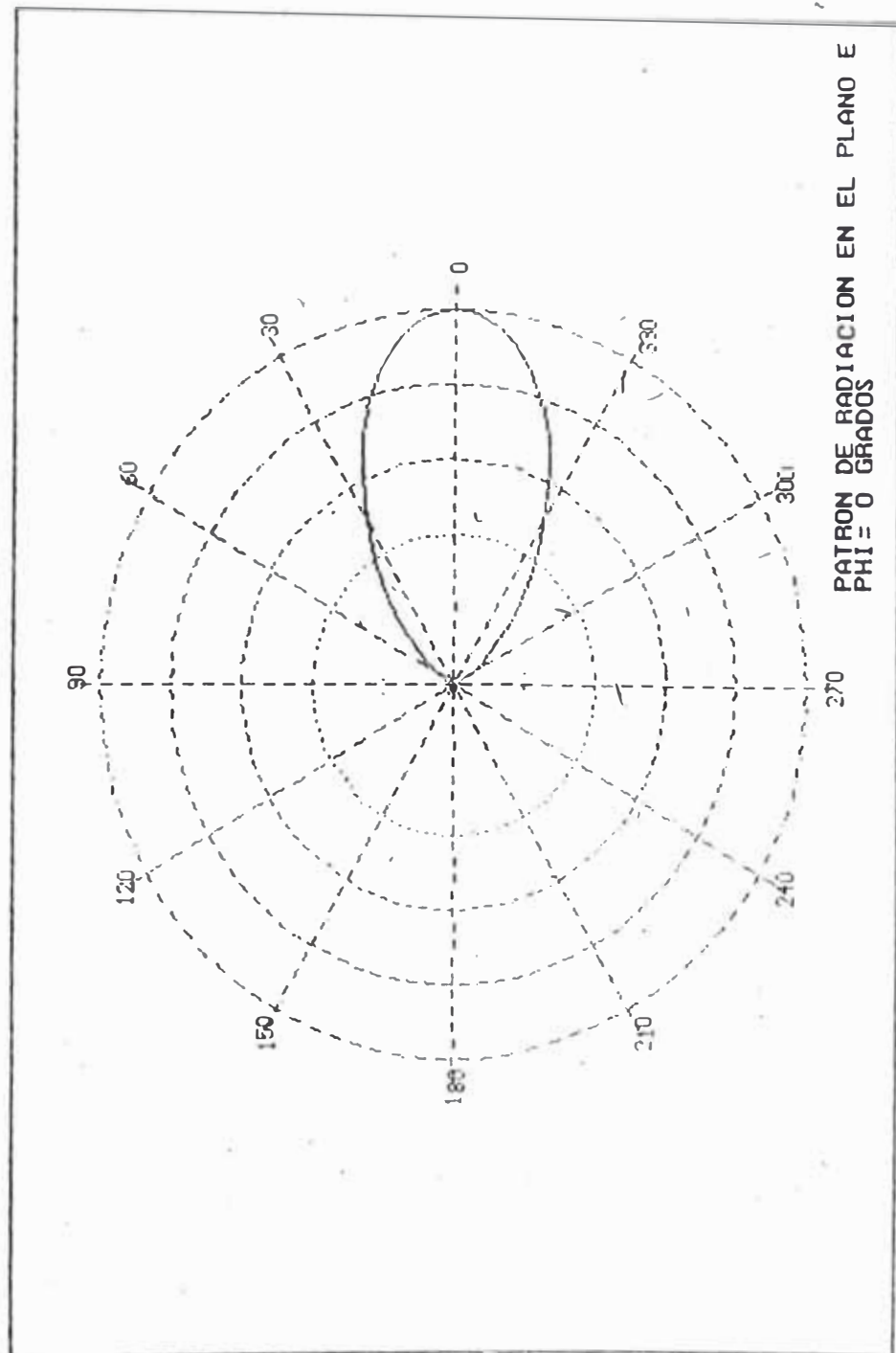


Fig. 6.3.5.- Gráfica polar del patrón de radiación en plano E de la Yagi de 5 elementos de canal 9

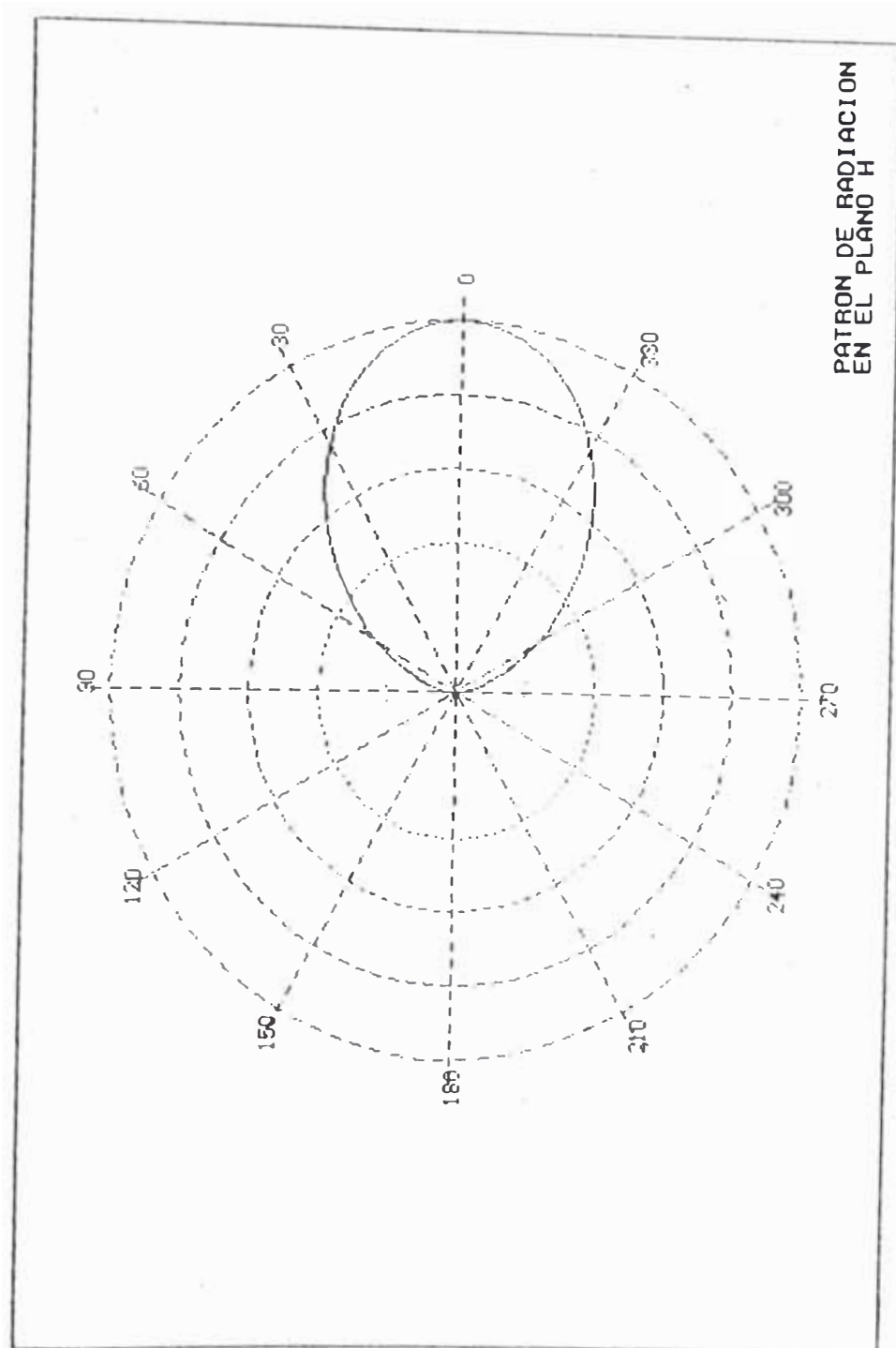


Fig. 6.3.6.- Gráfica polar del patrón de radiación en plano H de la Yagi de 5 elementos de canal 9

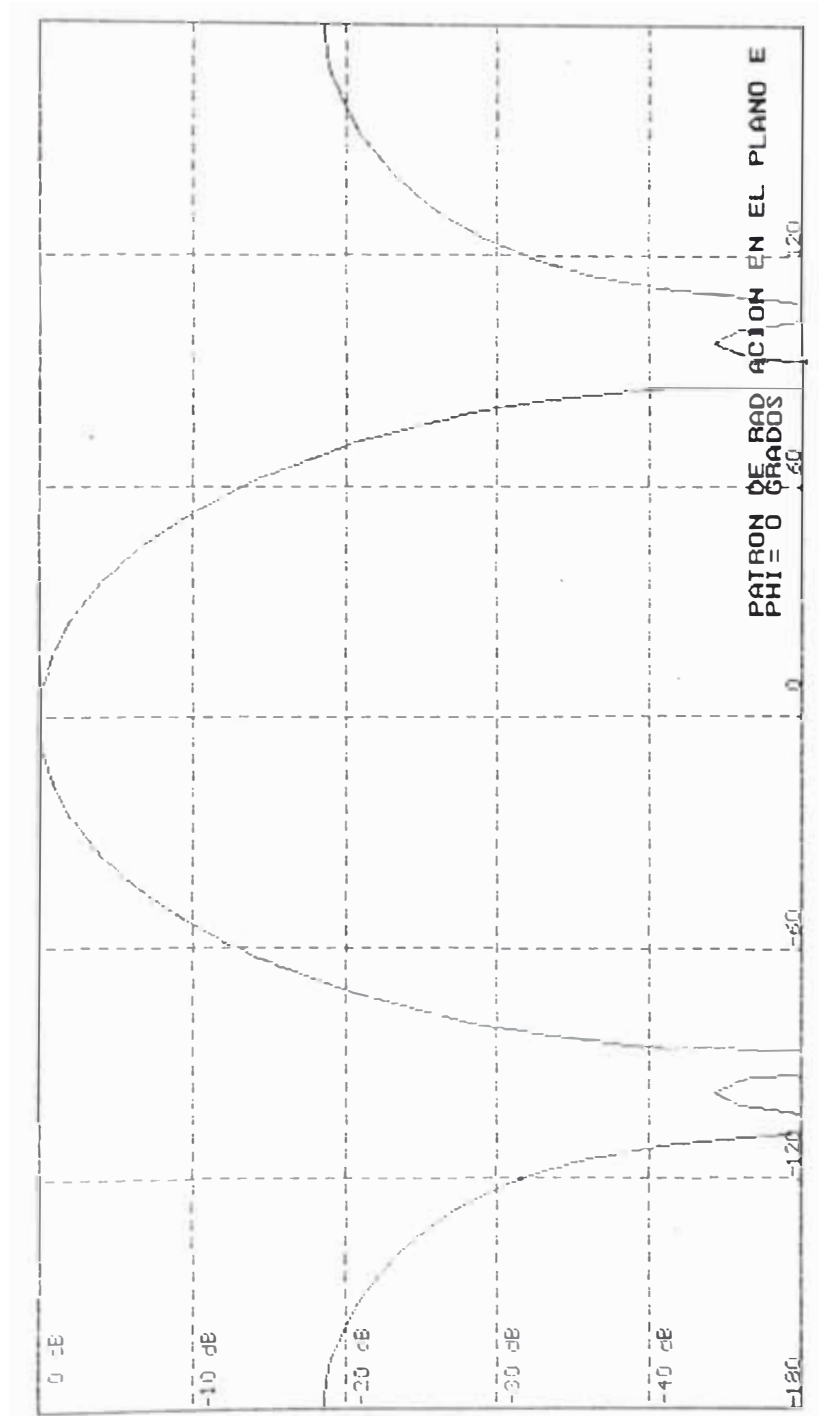


Fig. 6.3.7.- Gráfica rectangular del patrón de radiación en decibelios plano E de la Yagi de canal 9 de 5 elementos

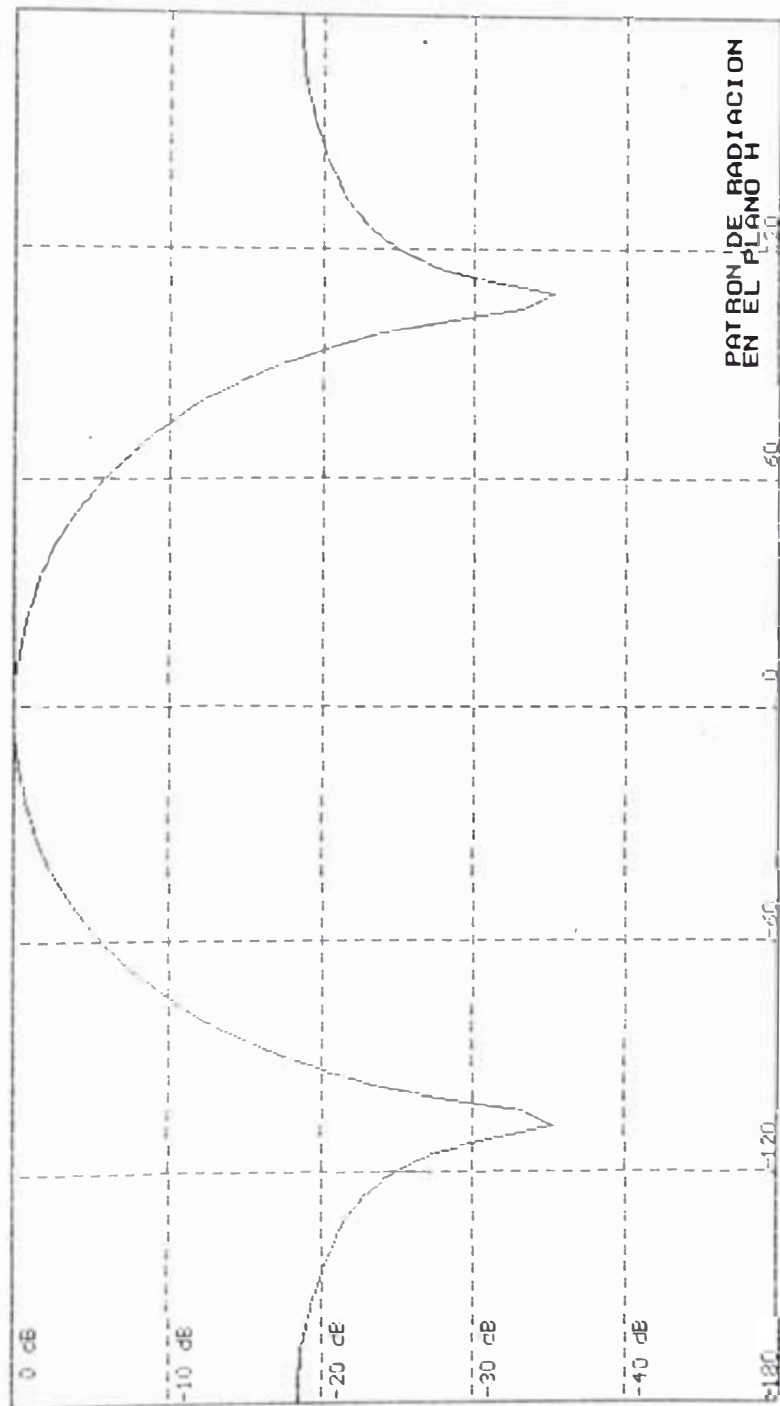


Fig. 6.3.8.- Gráfica rectangular del patrón de radiación en decibelios en el plano H de la Yagi de 5 elementos de canal 9

lóbulo (para media potencia) es 60° en el plano E y 92° en el plano H.

Aplicando la aproximación de la ganancia para antenas directivas (41000 entre dichos ángulos en grados) se llega a una coincidencia apreciable (8.7 dB).

6.4 Análisis del patrón de radiación para antena Yagi de UHF (407 - 408 MHz)

A continuación se analizarán con el programa los resultados de la medición del patrón de radiación de la antena Yagi de frecuencias 407 - 408 MHz cuyos datos se consignan en la tabla 5.6.1.

Los resultados de las mediciones se encuentran en la tabla de la figura 5.6.7. Debemos recordar que estas mediciones debido a las señales espurias y ruido presentes a unos 30 dB por debajo del campo recibido en la dirección principal son significativas sólo en el lóbulo principal.

También recordemos que las reflexiones presentes en los ángulos azimutales positivos debido a paredes otras antenas en dichas direcciones en la azotea donde se

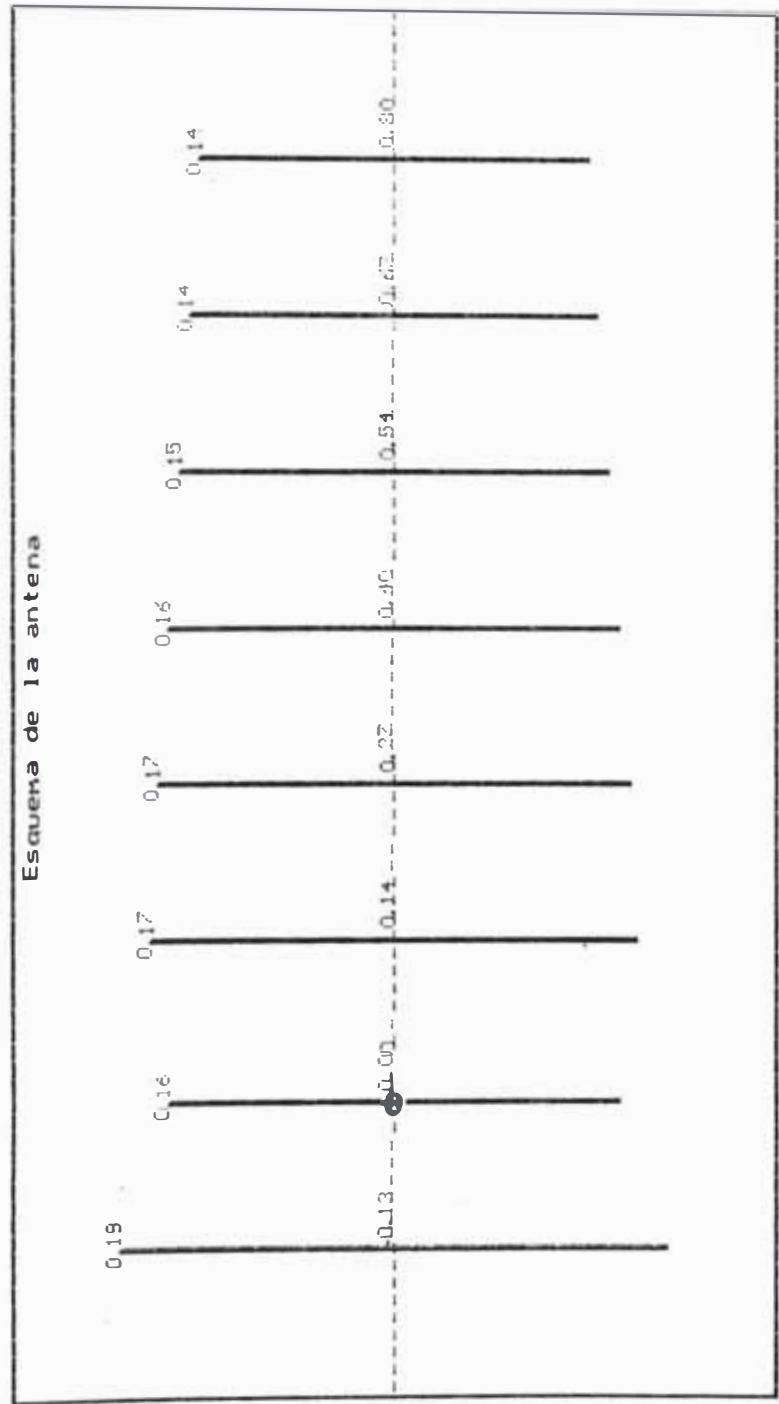


Fig. 6.4.2.- Esquema de la antena Yagi de 407 - 408 MHz

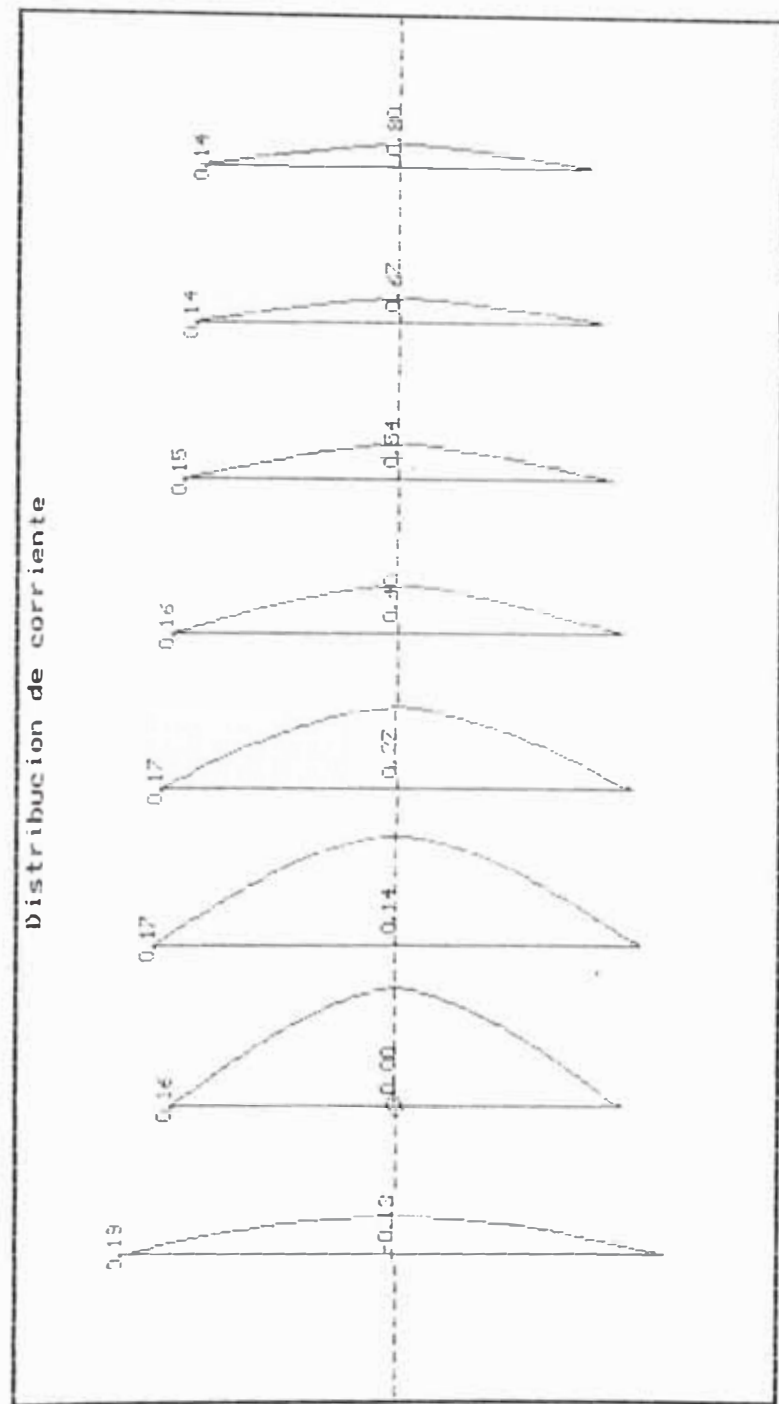


Fig. 6.4.3.- Gráfico de la distribución de corriente sobre los elementos de la antena Yagi de 407 408 MHz

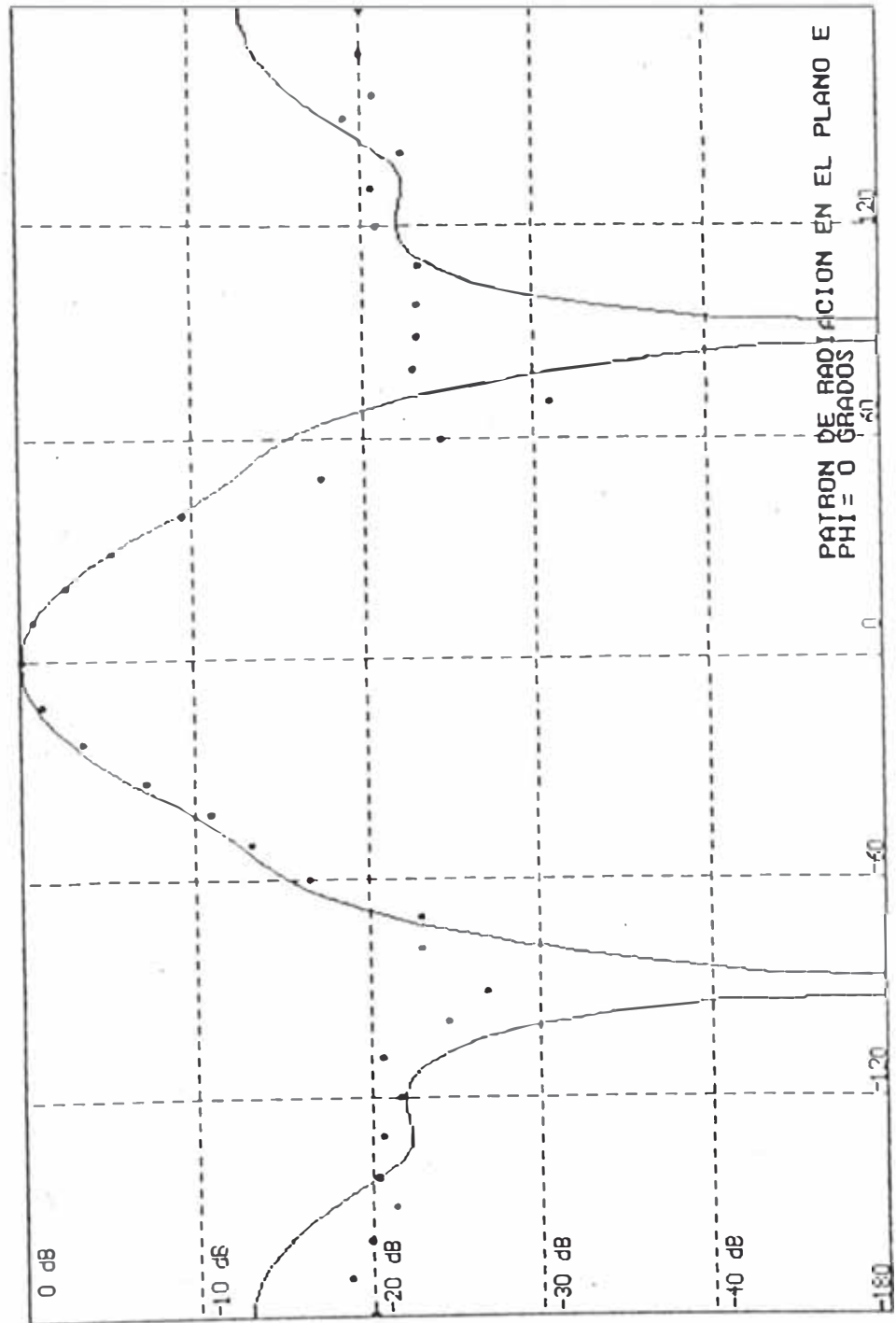


Fig. 6.4.4.- Gráfico del patrón de radiación en el plano E de la antena Yagi de 407 408 MHz: línea continua: obtenido por el programa; puntos: experimental.

de la semilongitud del modo). Se comprueba que este es el límite de convergencia.

En la figura 6.5.4 se muestra el patrón de radiación en el plano E donde se han graficado puntos los valores experimentales obtenidos en el apartado 5.6.

Se observa una favorable coincidencia en dicho patrón sobre todo para los ángulos azimutales negativos que sabemos dan las mediciones más significativas. Debido al nivel espurio del que hemos hablado; no se pueden obtener valores significativos menores que -30 dB.

CAPITULO VII

DESCRIPCION Y APLICABILIDAD DEL YAGI CAD

En este capitulo se describirá el programa desde el punto de vista del usuario; incidiendo principalmente en el uso del mismo y el número de funciones de expansión que son adecuadas para cada caso.

También explicaremos los pasos a seguir para obtener un resultado adecuado.

7.1 Configuración de las opciones de trabajo

Al inicio del programa se solicita al usuario que indique si desea utilizar funciones especiales (funciones Seno y Coseno integral) en lugar de la integración numérica directa para el cálculo de los elementos de la matriz y el kernel reducido (primera opción) o la aproximación de dos términos del radio equivalente del kernel exacto (segunda opción) o integración directa del kernel exacto (tercera opción).

Prácticamente siempre conviene elegir utilizar funciones especiales. Si se desean cálculos rápidos; se utiliza el kernel reducido (primera opción). Para cálculos de impedancia más precisos suele ser necesaria la segunda o incluso (para confirmar) la tercera opción.

Se demostró en el desarrollo del presente estudio que gracias a la separación de la singularidad logarítmica 10 subintervalos en ϕ es suficiente para un buen resultado.

El kernel exacto puede deteriorar su precisión para dipolos doblados gruesos donde los conductores están a una distancia entre sí comparable con su radio; por lo que hay que verificar la convergencia, como se verá a continuación

7.2 Selección de una antena tipo

Partiendo del valor de la ganancia estimado o deseado y del número de dipolos que se desea tener; se selecciona uno de los archivos de medidas de antenas del DIRECTORIO de ENTRADA o mejor aún del de SALIDA (ver el siguiente apartado) porque éste posee los valores de los parámetros de la antena ya calculados.

Estos archivos tienen la codificación N##G## donde la cifra después de N es el número de elementos y la cifra después de G es la ganancia en dBi. Por ejemplo; N05G11 es una antena Yagi de 5 elementos y ganancia 11 dBi aproximadamente.

Las medidas de la antena están referidas a la longitud de onda.

Si no se obtiene tubo del radio que se indica en el archivo; es necesaria una modificación. Para ello se corrige el radio de los tubos que es el verdadero que se tiene disponible (para los elementos parásitos especialmente). La longitud de los elementos debe disminuirse ligeramente si aumenta el radio de estos..

Luego se vuelve a realizar la simulación. La ganancia y el patrón deben ser aproximadamente los deseados.

Luego debe buscarse la frecuencia de resonancia de la antena y verificar que sea efectivamente a 300 MHz (recordemos que al final se va a multiplicar todas las medidas por la longitud de onda).

Para estos cálculos es conveniente usar el kernel exacto.

Para subir la frecuencia de resonancia de la antena es necesario acortar ligeramente el dipolo alimentado y para bajarla se aumenta la longitud.

Logrado esto; se verifica que la impedancia logre una buena adaptación; es decir; que la impedancia que entra al transformador de $\lambda/4$ sea cercana a $75^2/50$: esto es unos 110 ohm.

De no cumplirse esto; debe aumentarse o disminuirse el radio equivalente del dipolo doblado para bajar o subir la impedancia respectivamente.

Lograda la adaptación correcta; se debe calcular las verdaderas medidas multiplicando por la longitud de onda.

7.3 Simulación

El programa está organizado en base a menús desplegables (pop up menús).

Para realizar la simulación del comportamiento de una antena Yagi (o un arreglo plano de elementos excitados) debe llevarse a cabo la siguiente secuencia de

acciones, que a continuación se menciona con una breve explicación de cada paso u opción; que será detallada posteriormente.

La secuencia de trabajo de estas opciones también puede verse en el capítulo IV.

- 1) **ENTRADA:** Permite ingresar, modificar, grabar en archivo y cargar las dimensiones y frecuencia de trabajo de la antena.
- 2) **ESQUEMA:** Permite observar las medidas de la antena (en metros)
- 3) **SIMULACION:** Realiza la simulación de la antena mediante el cálculo e inversión de una matriz de impedancias, generando un archivo de salida.
- 4) **SALIDA:** Permite observar y cargar los archivos de salida.
- 5) **RESULTADOS:** Permite observar la ganancia, distribución de corriente, fase, impedancia y diagramas de radiación de la antena.
- 6) **AYUDA:** Describe las acciones para llevar a cabo una simulación. F1 en cualquier posición del menú da una descripción de la opción específica

7.3.1 Opción ENTRADA

Se trabaja con las siguientes subopciones:

7.3.1.1 DIRECTORIO

Permite ver la lista de archivos de entrada con datos de medidas de diferentes antenas y que pueden cargarse para ser simuladas.

7.3.1.2 INGRESO DE DATOS:

Debe ingresarse la frecuencia de trabajo y el número de dipolos que forman la antena.

Para cada dipolo se pedirá la longitud, el radio, el orden de aproximación (impar) para la obtención de la corriente, la posición en el eje horizontal y la parte real e imaginaria del voltaje de alimentación.

Las medidas deben ingresarse en metros pero si se desea ingresarlas en longitudes de onda puede elegirse una frecuencia de referencia de 300 MHz. Aumentar el orden de aproximación aumenta la precisión de los resultados pero también aumenta el tiempo de procesamiento.

Si bien con aproximaciones de primer orden se obtienen valores suficientemente precisos de ganancia,

para alcanzar una mayor precisión en la impedancia y la forma de los lóbulos menores del patrón de radiación pueden necesitarse aproximaciones del noveno orden.

En el caso de una antena Yagi (formada por un elemento activo -alimentado-, un reflector detrás de él y una serie de directores delante de él, siendo el reflector y los directores elementos pasivos o parásitos -no alimentados-); sólo se pedirá el voltaje de alimentación del elemento activo, y los espaciamientos de los directores se tomarán con respecto al director anterior.

7.3.1.3 CARGAR

Permite cargar un archivo de entrada con datos de medidas de una antena para ser simulada. La lista de archivos de entrada existentes puede verse con la opción DIRECTORIO. El nombre del archivo debe ingresarse sin extensión.

7.3.1.4 VER/MODIFICAR

Permite observar los datos de la antena que se encuentra cargada en memoria, y permite modificarlos ingresando la opción deseada y luego presionando ENTER.

Luego de esto se ingresa nuevo valor del dato que se desea modificar.

7.3.1.5 GRABAR

Permite grabar en un archivo los datos de la antena que se encuentra cargada en memoria. Pide un nombre para dicho archivo y le coloca la extensión .ANT

7.3.1.6 BORRAR

Permite borrar un archivo de entrada. El nombre del archivo que se desea borrar debe ingresarse sin extensión.

7.3.1.7 SALIR

Permite terminar el programa y salir al sistema operativo.

7.3.2 Opción ESQUEMA

Permite observar el esquema de las medidas en metros de la antena que se encuentra cargada en memoria.

7.3.3 Opción SIMULACION

Realiza la simulación de la antena que se encuentra cargada en memoria. Pide un nombre para el archivo de salida donde coloca los resultados, y a este nombre le agrega la extensión .OUT.

7.3.4 Opción SALIDA

Trabaja con los archivos de salida .OUT, de modo que permite grabar y recuperar los datos de la antena y los resultados obtenidos.

La opción SALIDA incluye las siguientes subopciones:

7.3.4.1 DIRECTORIO

Permite ver la lista de archivos de salida con resultados simulados de diferentes antenas y que pueden cargarse para ser observados.

7.3.4.2 CARGAR

Permite cargar un archivo de salida con resultados simulados de diferentes antenas para ser observados. La lista de archivos de salida existentes puede verse con la opción DIRECTORIO. El nombre del archivo debe ingresarse sin extensión.

7.3.4.3 BORRAR

Permite borrar un archivo de salida. El nombre del archivo que se desea borrar debe ingresarse sin extensión.

7.3.5 Opción RESULTADOS

Muestra los resultados de la simulación. Tiene las siguientes subopciones:

7.3.5.1 GANANCIA

Muestra la ganancia de la antena cargada en memoria en dBi. (decibelio respecto al irradiador isotrópico).

7.3.5.2 IMPEDANCIA DE ENTRADA

Muestra las impedancias de entrada de la antena cargada en memoria, en los puntos centrales de cada dipolo. Los dipolos no alimentados tendrán impedancia cero. En el caso de una antena Yagi, solo se da la impedancia del dipolo activo o alimentado [2].

7.3.5.3 TABLA DE DISTRIBUCION DE FASE

Una primera aproximación simple a la evaluación de la directividad de una antena Yagi es considerarla como un conjunto de fuentes isotrópicas alineadas. Luego el factor de directividad es la suma de las corrientes de entrada de cada elemento respecto a la corriente de entrada del elemento activo agregándole una fase correspondiente a su posición en el eje de la antena.

Esta consideración coincide con el concepto de velocidad de fase relativa de una onda superficial sobre la antena. El reflector suele no considerarse cuando se evalúa dicho factor. El objetivo del calculo sucesivo del factor de direccionalidad es verificar que cada dipolo contribuya positivamente a esta.

7.3.5.4 DISTRIBUCION DE CORRIENTE

Muestra gráficamente la distribución de corriente sobre la superficie de los dipolos (en módulo).

La distribución de carga (o tensión) es proporcional al gradiente de la distribución de corriente.

7.3.5.5 PATRON

Muestra el patrón de campo, y radiación lineal o en decibelios de la antena cargada en memoria, en el plano E o H; en forma rectangular o polar. En el caso del plano E se pide el ángulo ϕ que forma dicho plano con el plano de la antena.

7.3.6 Opción AYUDA

Da una descripción de las opciones del programa y su utilización.

Selección del número de modos por elemento

Como síntesis de los criterios de convergencia mostrados se tienen los siguientes puntos:

a) Si se usa el kernel reducido, las soluciones convergen al aumentar el número de modos mientras que en ellos se cumpla $d/a > 8$.

b) Para el método de radio equivalente de dos términos, hay convergencia mientras $d/a > 2$.

c) Una aceptable aproximación de la corriente se obtiene con 7 o 9 modos por longitud de onda para casos no resonantes y 13 para los casos resonantes.

d) Es preferible mantener cercanas entre sí las semilongitudes de los modos a través de toda la antena.

e) Una solución para los casos de elementos gruesos es el método de integración del kernel exacto; y gracias a la extracción de la singularidad logarítmica que ha sido aplicada, se puede considerar adecuado incluso solo tener 10 intervalos de 0 a π . Sin embargo, este método solo puede ser aplicado cuando los elementos no están muy cercanos entre sí (como cuando los conductores en un dipolo doblado están a una distancia entre sí comparable con su radio). Cuando lo son, sólo nos queda

usar el kernel reducido.

f) Para dipolos de media onda, incluso un modo puede dar una aproximación aceptable de la corriente.

g) Estas restricciones nos dan las aproximaciones de convergencia segura. Se puede aumentar el número de modos progresivamente más allá de estas restricciones, pero debe verificarse que no se produzca divergencia. Esto puede realizarse verificando que no aparezcan distorsiones en la distribución de corriente.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Hemos llegado a las siguientes conclusiones:

1) Se ha comprobado que las antenas lineales en general; y en particular las antenas Yagi; son susceptibles de ser analizadas mediante el Método de Momentos en el dominio de la frecuencia y los resultados alcanzados para ganancia; distribución de corriente, adaptación (onda reflejada) y patrón de radiación son confiables desde el punto de vista de ingeniería; lo que permitirá realizar mejoras en dichas antenas dejando de lado el método empírico y utilizando el programa como herramienta válida.

2) Se ha observado la rápida convergencia obtenida gracias a la selección de funciones de base para la distribución de corriente basada en la teoría diakóptica de antenas (que nos lleva a utilizar pulsos triangulares sinusoidales). Llegamos incluso a tener buenas respuestas con un solo modo por elemento. Esto es una ventaja sobre otras técnicas también basadas en el Método de Momentos.

3) Se ha comprobado que la introducción en este método de la separación de la singularidad logarítmica para integrar el término propio y el primer término adyacente (es decir; la impedancia propia de cada subelemento en que se divide la antena y la impedancia entre dos subelementos contiguos) incrementa ampliamente el rango de convergencia.

4) Hemos comprobado que la integración en el ángulo azimutal ϕ con solamente 10 subintervalos de 0 a π del kernel exacto con separación de la singularidad logarítmica para el término propio y los primeros términos adyacentes; es un método adecuado, suficiente y preciso para un problema práctico y complejo como es realizar el análisis y predicción de la calidad de la adaptación de las antenas yagi de VHF, utilizadas comúnmente como antenas de poco costo para transmisión de televisión.

5) La implementación de este método en un programa de diseño asistido por computadora (YAGI-CAD) permite el diseño computacional rápido de antenas Yagi y la predicción de su performance. Al aplicar este paquete se debe tener en consideración el límite de convergencia de cada opción; para lo cual se recomienda seguir los pasos indicados en el capítulo VII.

6) Se predice mediante el programa la razón de los eventuales problemas en la adaptación (y se comprueban

experimentalmente los efectos de esto en el VSWR de la antena): la Yagi se comporta en frecuencia alrededor de la primera resonancia de forma similar al dipolo simple: al aumentar la frecuencia la parte resistiva varía en forma bastante lenta y la parte reactiva pasa en forma relativamente más rápida de capacitiva a inductiva. La frecuencia de resonancia de la antena determina la frecuencia mejor adaptada si el balún y adaptador está correctamente construido. Su alejamiento de esta frecuencia es con mucho el factor principal de la estrechez de banda.

7) Se comprueba que las características de transmisión de una antena (ganancia, ancho del haz) no varían mucho a través del canal (6MHz); a pesar de que la ganancia aumenta con la frecuencia; y como se ha visto el ancho de banda está limitado por la impedancia de entrada de la antena; mucho más afectada incluso por el relativamente rápido alejamiento de la impedancia de radiación de la antena respecto a la resonancia que por la estrechez de banda del adaptador; de modo que es en la propia antena donde se debe buscar un ensanchamiento o corrimiento de banda si no se llega a cubrir el canal deseado.

8) La impedancia del transformador de $\lambda/4$ escogida junto con la impedancia de radiación en resonancia de la antena son las que determinan el mejor VSWR.

La mejora de éste pasa por el cambio de alguna de ellas para lograr que la impedancia de la línea transformadora de $\lambda/4$ en resonancia sea cercanamente la media geométrica entre cuatro veces (por ser dipolo doblado) la resistencia de radiación de la antena en resonancia y la impedancia de la línea de alimentación (50 ohm).

Trabajar en la antena es mas sencillo pues en nuestro medio no es fácil obtener cable coaxial de otras impedancias que no sean 50 o 75 ohm.

Planteamos asimismo las siguientes recomendaciones:

1) La mejora de la adaptación de impedancias en las antenas Yagi de VHF y la modificación de los diseños en los casos en que se desea mayor o menor ancho del haz en lugar de usar solo diseños standard para cada canal; mediante la utilización del programa como paso previo a la construcción de la antena.

2) La enseñanza de los fundamentos de los métodos computacionales en lugar de los empíricos y la utilización de paquetes de poco costo como éste para ilustrar en forma sencilla la distribución de corrientes; impedancia propia y acoplamiento mutuo así como el patrón de radiación de dipolos simples y arreglos de los mismos.

En realidad: como se lee en las publicaciones de la IEEE Antennas and Propagation Society, IEEE Microwave Theory and Techniques Society, IEEE Electromagnetic Compatibility Society, etc., las técnicas computacionales optimizan el rápida y eficientemente el diseño de irradiadores de modo que ya no se puede tener un ingeniero de antenas que desconozca los fundamentos de los métodos computacionales en su área. Sin embargo, en nuestro medio estos recién se están implementando y mas bien se mantienen los métodos empíricos que han sido empleados largo tiempo.

3) La implementación en los ambientes universitarios de un laboratorio de antenas. El equipo mínimo consiste de un generador de UHF; un contador de frecuencia de microondas; un par de mástiles para las antenas; un detector de campo o un analizador de espectros; varias antenas y un ambiente despejado; así como un pequeño taller para la construcción de estas antenas; un barredor de frecuencia y un puente de impedancias con un osciloscopio para la medición de la onda reflejada. Deseables serían un medidor de potencia; acopladores direccionales; atenuadores y muy interesante sería contar con un medidor de impedancia de radiofrecuencia o incluso -lo que sería ideal para investigación- un analizador de redes de radiofrecuencia.

La construcción de una cámara anecoica (con

material absorbente de microondas) es obviamente un objetivo costoso; sin embargo sería interesante contar con dicho material para eliminar las reflexiones más dañinas.

4) Finalmente sería gratificante que este trabajo sea acogido; ampliado y extendido a otros campos como HF (para el diseño de impedancias de carga adecuadas para construir las llamadas "Yagis cortas" que permiten tener longitudes de los elementos mucho menores que media longitud de onda); o para otros tipos de irradiadores lineales como antenas en anillo o espiral para polarización circular; o para el estudio de parrillas; reflectores (mediante el método de momentos aplicado en forma bidimensional) o arreglos óptimos de antenas.

BIBLIOGRAFIA

1. J. D. Kraus, "Antennas", Primera y Segunda edición, McGraw-Hill Book Company, 1988.
2. R. K. Wangsness, "Campos Electromagnéticos", Limusa, 1991.
3. L. Landau, E. Lifshitz, "Curso abreviado de Física Teórica", libro 1, capítulos I,II,X,XI y pags. 240 a 243, editorial Mir, 1971.
4. J. D. Jackson "Classical Electrodynamics", John Wiley and Sons, 1962.
5. G. T. Markov, D. M. Sazónov "Antenas", Mir. 1975.
6. J. R. Reitz, F. J. Milford, "Fundamentos de la Teoría electromagnética", 1981.
7. B. Zwiebach. "Estudio de los patrones de radiación de antenas de abertura a corta y larga distancia. Aplicación a reflectores parabólicos", Tesis de grado, UNI 1977.
8. R. Luebbers and Karl Kunz, "Finite Difference Time Domain Calculations of Antenna Mutual Coupling", IEEE Trans. on Antennas and Prop., agosto 1992, pag. 357.
9. W. E. Boyse et al., "Nodal-Based Finite-Element Modeling of Maxwell Equations", IEEE Trans. on Antennas and Prop., Junio 1992 pag 642.
10. A. G. Tijhuis et al., "Transient Excitation of a Straight Thin-Wire Segment: a new Look at an Old Problem", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, octubre 1992, pag 1132.
11. Jaak Peetre "Introduction to Hilbert Spacial Methods in Partial Differential Ecuations". Universidad de Brasilia, Instituto Central de Matemática, 1965.

12. M. F. Iskander et al., "A New Course on Computational Methods in Electromagnetics", IEEE Transactions on Education, mayo 1988 pag. 101.
13. T. G. Jurgens et al., "Finite Difference Time-Domain Modeling of Curved Surfaces", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, abril 1992 pag. 357.
14. M. Hagler, "Spreadsheet Solution of Partial Differential Ecuations", IEEE Transactions on Education, agosto 1987 pag. 130.
15. D. H. Choi y W. J. R. Hoefer, "The Finite-Difference Time-Domain Method and its application to Eigenvalue Problems", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, diciembre 1986 pag. 1464.
16. S. Haffa et al., "The Finite Difference Method for S-Parameter Calculation of arbitrary three dimensional structures", IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques, agosto 1992 pag. 1602.
17. K. R. Umashankar, "Calculation and Experimental Validation of Induced Currents on Coupled Wires in an Arbitrary Shaped Cavity", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, noviembre 1987 pag. 1248.
18. P.P Silvester, R.L. Ferrari, "Elementos finitos para ingenieria eléctrica", Editorial Limusa, 1989.
19. M. N. O. Sadiku et al., "A Further Introduction to Finite Element Analysis of Electromagnetic Problems", IEEE Transactions on Education, noviembre 1991 pag. 322.
20. S. R. H. Hoole, "A Novel Proof of Natural Boundary Conditions for the Poisson Equation", IEEE Transactions on Education, febrero 1988 pag. 4.
21. T. Angkaew, "Finite element Analysis of Waveguide Modes: A Novel Approach That Eliminates Spurious Modes", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, febrero 1987 pag. 117.
22. A. C. Cangellaris, "Point-Matched Time Domain Finite Element Methods for Electromagnetic Radiation and Scattering", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, octubre 1987 pag. 1160.
23. W. Kinsner y E. Della Torre, "An Iterative Approach to the Finite-Element Method in Field Problems", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, marzo 1974 pag. 221.

24. S. R. H. Hoole y P. R. P. Hoole, "Finite Element Programs for Teaching Electromagnetics", IEEE Transactions on Education, febrero 1986 pag. 21.
25. Samuel Silver, "Microwave Antenna Theory and Design", Mc. Graw Hill 1949.
26. M. A. Jawson, "Integral equation Methods in Potential Theory and Electrostatics", London Academic Press, 1977.
27. B. H. McDonald et al., "Variational Solution of Integral Ecuations", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, marzo 1974, pag 237.
28. Malik, "A review of the charge simulation method and its applications", IEEE Transactions on Electrical Insulation, febrero 1989.
29. M. Z. Delgado L. "Aplicación del método de simulación de carga al diseño de electrodos de campo eléctrico uniforme", Tesis de Grado, UNI agosto 1991.
30. Z. J. Cendes "Unlocking the magic of Maxwell equations", IEEE Spectrum abril 1989 pag. 29.
31. F. Schwering et al. "Modified Diakoptic Theory of Antennas", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, noviembre 1986 pag. 1273.
32. E. Niver et al. "Frecuency Characterization of a thin Linear Antenna Using Diakoptic Antenna Theory", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, marzo 1992 pag. 245.
33. T. G. Moore et al. "Theory and Application of Radiation Boundary Operators", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, diciembre 1988 pag. 1797.
34. G. A. Kriegsmann et al. "A New Formulation of Electromagnetic Wave Scattering Using an On-Surface Radiation Boundary Condition Approach", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, febrero 1987 pag. 153.
35. S. C. Chapra y R. P. Canale, "Métodos Numéricos Para Ingenieros", Editorial Mc. Graw Hill, 1991.
36. A. R. Djordjevic y T. K. Sarkar, "A theorem on the Moments Method", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, marzo 1987, pag. 353.
37. G. E. Forsythe, "Computer Solution of Linear Algebraic Systems", Ed. Universitaria, Buenos Aires,

- 1973.
38. A. K. Bhattacharya, critica publicada en IEEE Antennas and Propagation Magazine, diciembre 1992, pag. 45.
 39. R. Pérez Leal y M. F. Cátedra "Input Impedance of Wire Antennas Attached On-Axis to Conducting Bodies of Revolution", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, setiembre 1988 pag. 1236.
 40. H. Nakano et al. "The Moment Method Solution for Printed Wire Antennas of Arbitrary Configuration", IEEE transactions on Antennas and Propagation, diciembre 1988 pag. 1667.
 41. A. G. Tijhuis et al., "Transient Excitation of a Straight Thin-Wire Segment: a new Look at an Old Problem", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Octubre 1992, pag. 1132.
 42. T. Dho Nhat y R. H. MacPhie, "On the Electric Field Distribution in the gap of a dipole Antenna", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, noviembre 1987 pag. 1273.
 43. T. Dho Nhat y R. H. MacPhie, "Effect of Gap Length on the input admittance of Center fed Coaxial Waveguides and Infinite Dipoles", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, noviembre 1987 pag. 1273.
 44. R. C. Johnson y H. Jasik, "Antenna Engineering Handbook", Segunda y Tercera edición, Mc Graw Hill, 1987.
 45. W. A. Imbriale y P. G. Ingerson, "On Numerical Convergence of Moment Solutions to Moderately Thick Wire Antennas Using Sinusoidal Basis Functions", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, mayo 1973 pag. 363.
 46. I. W. Pearson, "A Separation of the Logarithmic Singularity in the Exact Kernel of the Cylindrical Antenna integral equation", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, marzo 1975, pag.256.
 47. P. F. Byrd y M. D. Friedman, "Handbook Elliptic Integrals for Engineers and Scientists", Segunda Edición, Berlin, Springer, 1971.
 48. J. Alvarez y J. Heredia, "Las Antenas Lineales", Conimera IV, 1977.

49. E. H. Man, "Simple examples of the Method of Moments Electromagnetics", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Agosto 1988, pag. 193.
50. Radio Arch Laboratory, Harvard University, "Very High Frequency Techniques, Mc. Graw Hill 1947.
51. R. Br. R. Piat, "Las antenas". Editorial Paraní 1991.
52. G. A. Ele "Analysis of Yagi-Uda-Type Antennas", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Enero 1969, 124.
53. H. Alhor y A. R. Mallahzadeh "Analysis of a Folded Dipole Mounted on a Cylindrical Metallic Mast" IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Enero 1986 pag. 99.
54. Liang Shen "Directivity and Bandwidth of Single-Band Double-Band Yagi Arrays", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, noviembre 1972 pag. 778.
55. P. Pizbicke "Yagi Antenna Design" NBS Technical note National Bureau of Standards, Washington, 1976
56. D. Keng y C. A. Chen "Optimum Element Spacings for Yagi-Uda Arrays" , IEEE Transactions on Antennas and Propagation, septiembre 1973, pag. 615.
57. D. Keng y C. A. Chen "Optimum Element Lengths for Yagi-Uda Arrays" , IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Enero 1975, pag. 8.
58. B. River y J. M. Cage "Electronic Measurements and Instrumentation", McGraw-Hill, 1971 pag 303 a 310