

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

PROGRAMA ACADÉMICO DE INGENIERIA

MECANICA Y ELECTRICA



**TORQUE MAXIMO EN UN MOTOR
MONOFASICO DE INDUCCION**

TRABAJO MONOGRAFICO

PARA OPTAR EL GRADO DE BACHILLER EN CIENCIAS CON MENCION

EN INGENIERIA ELECTRICA

JOSE VIDAL GAITAN ROCHA

PROMOCION 1974 - 2

Lima - Perú 1977

A MIS PADRES

INDICE

	Pág.
1. Introducción	3
2. Modelo de la máquina monofásica	4
2.1. Disposición física	4
2.2. Modelo de la máquina de inducción monofásica	4
2.3. Cálculo de parámetros	9
2.4. Teoría de los campos giratorios	23
2.5. Ecuaciones fasoriales	26
2.6. Circuito equivalente	29
3. Cálculo del torque	33
3.1. Formulación de la ecuación	33
3.2. Cálculo de las corrientes I_+ , I	34
3.3. Cálculo de la expresión del torque	41
3.4. Deducción de la ecuación del torque máximo	42
4. Conclusiones	53
5. Bibliografía	55

INTRODUCCION

De todas las máquinas eléctricas giratorias la de inducción es la que se usa más a menudo. En raras oportunidades es usada como generador pero muchos tipos se usan en una gran variedad de aplicaciones.

Las razones que justifican esta gran aceptación se deben en su mayoría a razones económicas. El motor de inducción resulta sencillo desde el punto de vista mecánico y por tanto económico además de ser bastante resistente y su comportamiento puede ajustarse a las diferentes condiciones de operación por medio de diseños bastante sencillos.

2. MODFLO DE LA MAQUINA MONOFASICA.

2.1. Disposición Física.

La máquina monofásica de inducción consta de un rotor en jaula de ardilla de estructura - simétrica, y el devanado estatórico está alojado en las ranuras para producir una distribución de flujo senoidal. El entrehierro es uniforme.

La figura siguiente muestra esquemáticamente la máquina monofásica de inducción (Fig. 1).

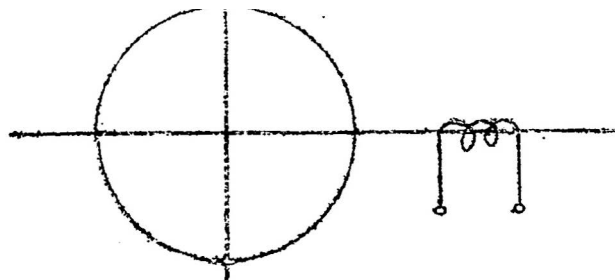
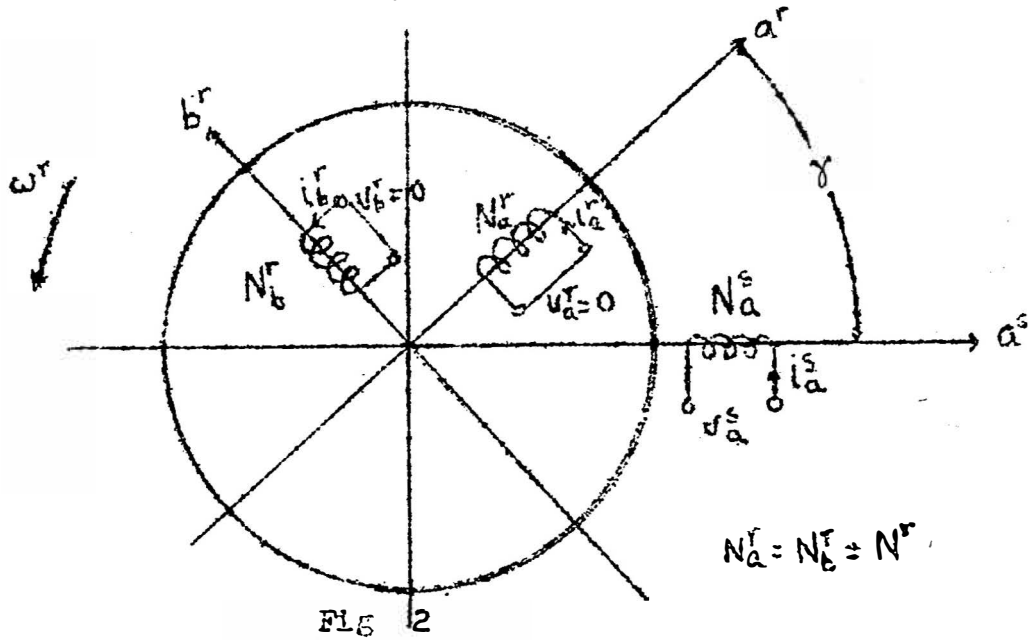


Fig. 1: Disposición esquemática de la máquina de inducción.

2.2. Modelo de la máquina de inducción monofásica.

Como la máquina tiene el rotor en jaula de ardilla, podemos considerar que en el rotor existen dos devanados distribuidos simétricamente con un factor de distribución de K^r espiras/m. El devanado estatórico que es único, tendrá un factor de distribución K^s espiras/m.

Considerando la representación esquemática mostrada en la figura:



Siendo las variables: las tensiones y corrientes

$$\boxed{i_{ab}^{sr}} = \begin{bmatrix} i_a^s \\ i_a^r \\ i_b^r \end{bmatrix} \quad \boxed{v_{ab}^{sr}} = \begin{bmatrix} v_a^s \\ v_a^r \\ v_b^r \end{bmatrix} \quad (1)$$

estando relacionados ambas variables por la matriz de impedancias de la forma siguiente:

$$\boxed{v_{ab}^{sr}} = \boxed{Z_{ab}^{sr}} \boxed{i_{ab}^{sr}} = \boxed{R_{ab}^{sr}} \boxed{i_{ab}^{sr}} + p \boxed{L_{ab}^{sr}} \boxed{i_{ab}^{sr}}$$

Desarrollando esta ecuación, obtenemos la sqte:

$$\begin{bmatrix} v_a^s \\ v_a^r \\ v_b^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a^s & 0 & 0 \\ 0 & R_a^r & 0 \\ 0 & 0 & R_b^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a^s \\ i_a^r \\ i_b^r \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} L_{aa}^{ss} & L_{aa}^{sr} & L_{ab}^{sr} \\ L_{aa}^{rs} & L_{aa}^{rr} & L_{ab}^{rr} \\ L_{ba}^{rs} & L_{ba}^{rr} & L_{bb}^{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a^s \\ i_a^r \\ i_b^r \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde $p = \frac{d}{dt}$

Además, los parámetros del modelo a-b de la máquina de inducción monofásica, pueden resumirse como sigue:

Resistencia estática: $R_a^s = R^s$
 Resistencia rotórica: $R_a^r = R_b^r = R^r$
 Autoinductancia del estator: $L_{aa}^{ss} = L^s$
 Autoinductancia del rotor: $L_{aa}^{rr} = L_{bb}^{rr} = L^r$
 Coeficiente de inductancia mutua entre el rotor y estator: $M_{aa}^{sr} = M_{ab}^{sr} = M$

(4)

Los valores de las inductancias mutuas serán:

$$\begin{aligned}
 L_{aa}^{sr} &= M \cos \theta \\
 L_{ab}^{sr} &= M \cos (\theta + 90) = -M \sin \theta \\
 L_{aa}^{rs} &= M \cos \theta \\
 L_{ab}^{rr} &= M_{ab}^{rr} \cos 90 = 0 \\
 L_{ba}^{rs} &= M \cos (\theta + 90) = -M \sin \theta \\
 L_{ba}^{rr} &= M_{ba}^{rr} \cos 90 = 0.
 \end{aligned} \quad (5)$$

En este caso el análisis de la máquina de inducción se simplifica grandemente transformando

mando el modelo "a-b", a un modelo "d-q" equivalente, como se muestra en la figura siguiente:

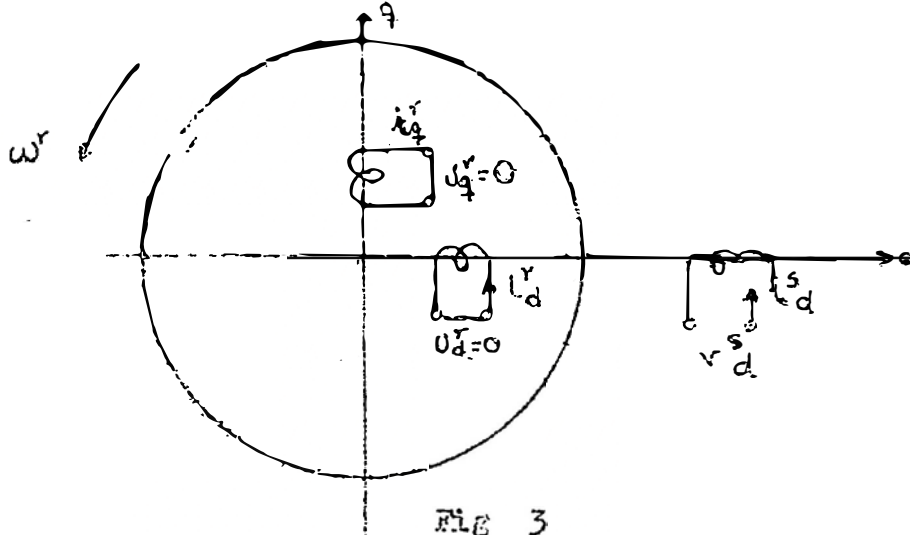


Fig 3

Las variables del modelo "d-q" se obtienen a partir de las variables "a-b", de acuerdo a la ecuación matricial siguiente:

$$\begin{bmatrix} i_{dq}^{sr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{dq, ab}^{sr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ab}^{sr} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} v_{dq}^{sr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{dq, ab}^{sr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ab}^{sr} \end{bmatrix}$$

en donde:

$$\begin{bmatrix} i_{dq}^{sr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_s^d \\ i_r^d \\ i_s^q \\ i_r^q \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} v_{dq}^{sr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s^d \\ v_r^d \\ v_s^q \\ v_r^q \end{bmatrix} \quad (7)$$

Los valores estadísticos, en los modelos "d-q" y "a-b" son idénticos. - Los valores de las ecuaciones retóricas son transformados en una máquina "d-q" que usa un mecanismo de conmutador y escobillas, cuya densidad de corriente

en la superficie del rotor es la misma que la densidad de la corriente total en la máquina "a-b" que usa anillos deslizantes.

La matriz de transformación $C_{ab,dq}^{sr}$, puede definirse:

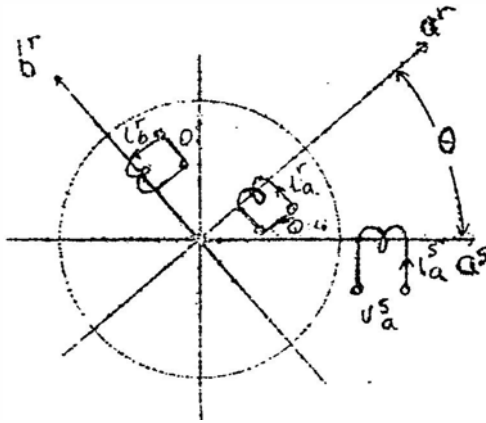


FIG 4

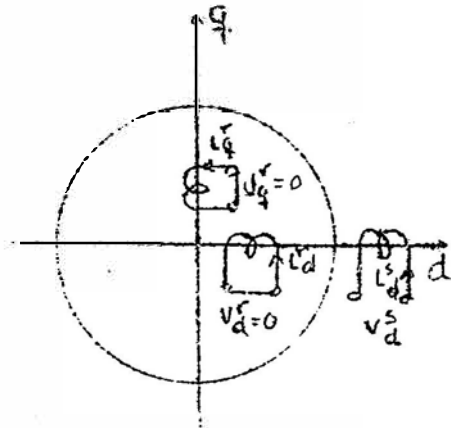


FIG 5

$$C_{ab,dq}^{sr} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (8)$$

En su construcción los devanados rotóricos y estatóricos de la máquina "d-q" son respectivamente idénticos con los devanados rotóricos y estatóricos de la máquina "a-b".

Las ecuaciones de equilibrio para el modelo "d-q" de la máquina primitiva, son dadas en general por:

$$\begin{bmatrix} v^s \\ v_d^r \\ v_q^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^s + L^s p & M_d^{sr} p & 0 \\ M_{dd}^{rs} p & R_d^r + L_d^r p & G_{dq}^{rr} w^r \\ -G_{qd}^{rr} w^r & -G_{qd}^{rr} w^r & R_q^r + L_q^r p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a^s \\ i_d^r \\ i_q^r \end{bmatrix} \quad (9)$$

Considerando el sentido de giro antihorario -
rio del rotor calculamos ahora, los valores de
las inductancias propias, mutuas y rotaciona -
les, para lo cual recurrimos a la máquina básic -
ca con devanado rotórico cerrado y de conmuta -
dor. suponemos para simplificar el análisis que
que el devanado estatórico es concentrado.

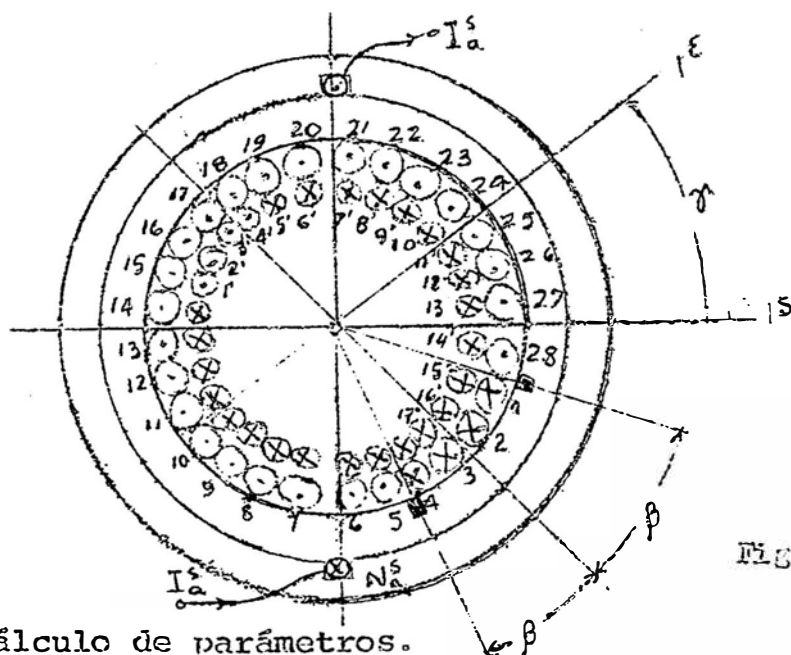


FIG 6

2.2. Cálculo de parámetros.

2.3.1. Cálculo de inductancia propia del devanado estatórico.

Suponemos una máquina bipolar:

La corriente I_a^s de excitación crea dos campos magnéticos:

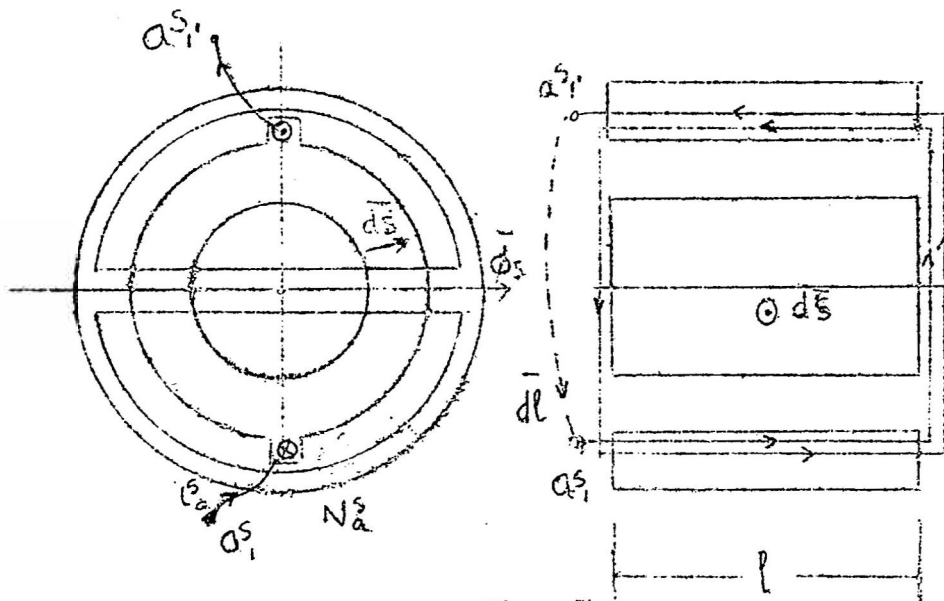


Fig 7

Un campo cuyo camino comprende el rotor, y es radial.

El otro cuyo medio sólo es el aire, actuando en las cabezas de las bobinas.

El campo de magnetización creado es:

$$\vec{B}_{am}^s(\phi_s) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\mu_0}{2g} N_a^s I_a^s \right) \cos \phi_s \vec{a}_r. \quad (10)$$

$$\vec{B}_{an}^s(\phi_s) = B_{max} \cos \phi_s \vec{a}_r. \quad (11)$$

$$\phi_a^s = \int \vec{B}_{an}^s \cdot d\vec{s} \quad (12)$$

$d\vec{s}$: escogemos un diferencial de superficie semicilíndrico y cogiendo un contorno cerrado que vaya a través del conductor y se cierre a través del aire:

$$d\vec{s} = l \cdot d\phi_s \cdot \vec{a}_r \quad (13)$$

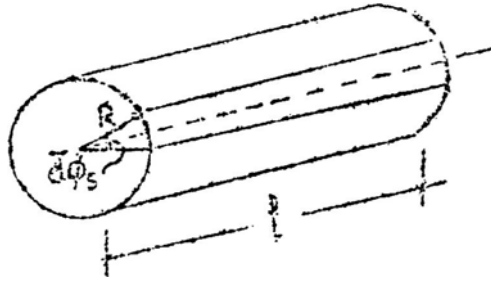


FIG. 8

$$\phi_{am}^S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4}{\pi} \frac{U_0}{2g} \frac{N_a^S}{n} I_a^S \cos \phi_s' l R d\phi_s' \quad (14)$$

$$\phi_s' = n \theta_s \quad (15)$$

$$= \frac{4}{\pi} \frac{U_0}{2g} \frac{N_a^S}{n} I_a^S l R \sin \phi_s' \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \quad (16)$$

$$\phi_{am}^S = 2 \times \frac{4}{\pi} \frac{U_0}{2g} \frac{N_a^S}{n} I_a^S l R. \quad (17)$$

esto nos representa la cantidad de líneas de fuerza de magnetización (flujo de magnetización), y que se puede representar así:

$$\phi_{am}^S = \frac{4}{\pi} \left(\frac{U_0}{g} l R \right) \frac{N_a^S}{n} I_a^S \quad (18)$$

$$\phi_{am}^S = P_m \times FMM. \quad (19)$$

$$\text{donde } P_m = \frac{4}{\pi} \left(\frac{U_0}{g} l R \right) \quad (20)$$

$$FMM = \frac{N_a^S}{n} I_a^S \quad (21)$$

El flujo concatenado de magnetización λ_{am}^S

$$\lambda_{am}^S = N_a^S \phi_{am}^S = \frac{N_a^S}{n} P_m \times FMM \quad (22)$$

$$= \frac{N_a^S}{n} \times P_m \times \frac{N_a^S}{n} \times I_a^S$$

$$= \left(\frac{N_a^S}{n} \right)^2 \times P_m \cdot I_a^S \quad (23)$$

Definimos la inductancia propia de magnetización, con la siguiente nomenclatura:

L_{aa}^{ss} devanado en que se crea el campo magnético
 L_{aa}^{ss} devanado con el cual se concatena.

$$L_{aa}^{ss} = \frac{\partial \lambda_{aa}^{ss}}{\partial I_a^s} = \frac{N_a^s}{n} P_m \quad (24)$$

Análogamente: el flujo de dispersión, lo podemos escribir:

$$\phi_a^s = \int \vec{P}_a^s \cdot d\vec{s} = P_d \times FMM. \quad (25)$$

$$= P_d \frac{N_a^s}{n} I_a^s \quad (26)$$

El flujo concatenado de dispersión:

$$\lambda_a^s = \frac{N_a^s}{n} P_d \frac{N_a^s}{n} I_a^s = \left(\frac{N_a^s}{n}\right)^2 P_d I_a^s \quad (27)$$

Por lo que la inductancia propia de dispersión será:

$$L_{aa}^{ss} \text{disp} = \left[\frac{N_a^s}{n}\right]^2 P_d \quad (28)$$

De las ecuaciones anteriores podemos escribir:

$$\begin{aligned} \lambda_{aa}^{ss} &= \frac{N_a^s}{n} (\phi_{am}^s + \phi_{al}^s), \\ &= \left[\frac{N_a^s}{n}\right]^2 (P_m + P_d) I_a^s. \end{aligned} \quad (29)$$

y la inductancia propia total:

$$L_{aa}^{ss} = \frac{\partial \lambda_{aa}^{ss}}{\partial I_a^s}$$

$$= \left(\frac{N_a^s}{n} \right)^2 (P_{ms} + P_{ls}) \quad (30)$$

2.3.2. Cálculo de la inductancia propia del devanado rotórico.

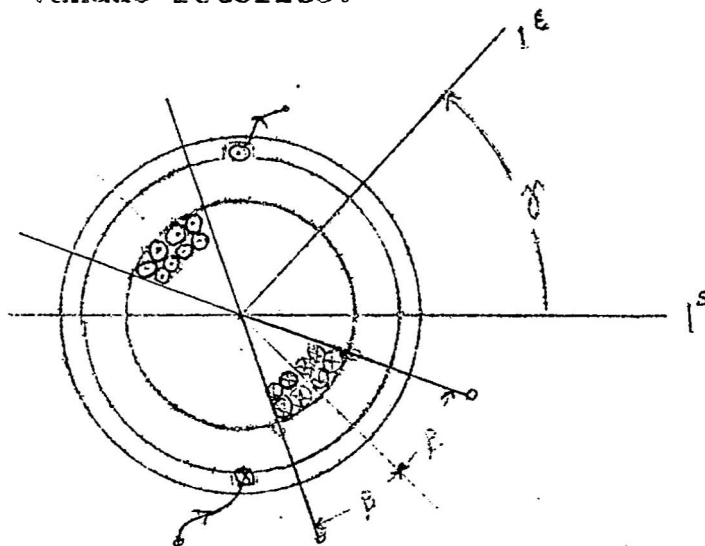


Fig 9

Siguiendo el mismo camino, que para los devanados estáticos, obtenemos por analogía lo siguiente:

$$L_{aa}^{rr} = \frac{N^{E''}}{n} \times \frac{N^{E''}}{n} (P_{ms} + P_{ls}) \quad (31)$$

$N^{E''}$: N° de espiras efectivas.

$$N^{E''} = N^{E'} \times K_d \quad (32)$$

K_d : factor de distribución.

$$N^{E''} = N^{E'} \times \frac{\text{sen} \beta}{\beta} \quad (33)$$

$N^{E'}$: N° espiras distribuidas entre las escobillas (en 2β), y se calcula con la relación siguiente:

$$\begin{aligned} N^{E'} &= \frac{2\pi}{2\beta} \end{aligned}$$

$$N^{E'} = N^E \times \frac{2\beta}{2\pi} \quad (34)$$

Por lo que la inductancia propia rotórica total es:

$$L_{aa}^{rr} = \left[\frac{N^E}{n} \frac{\beta}{\pi} \times \frac{\sin \beta}{\beta} \right]^2 (P_m + P_{af}) \quad (35)$$

2.3.3. Cálculo de la inductancia mutua de los arrollamientos estatórico y rotórico.

Para esto podemos escoger el siguiente camino:

Excitamos el estator y calculamos el flujo concatenado λ , en el devanado rotórico.

El campo estatórico formado está dado por: Considerando el efecto de las armónicas.

$$\begin{aligned} B_a^s(\theta_s^1) &= \frac{U_0}{2g} \frac{N_a^s}{n} I_a^s \quad 0 < \theta_s^1 < \pi/2. \\ B_a^s(\theta_s^2) &= \frac{U_0}{2g} \frac{N_a^s}{n} I_a^s \quad \pi/2 < \theta_s^1 < 3\pi/2. \\ B_a^s(\theta_s^3) &= \frac{U_0}{2g} \frac{N_a^s}{n} I_a^s \quad \frac{3\pi}{2} < \theta_s^1 < 2\pi. \end{aligned} \quad (36)$$

Sin considerar el efecto de los armónicos, tenemos:

$$B_a^s(\theta_s) = \frac{4}{\pi} \frac{U_0}{2g} \frac{N_a^s}{n} I_a^s \cos(n\theta_s) \quad (37)$$

El flujo estatórico será:

$$\varphi_a^s = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left(\frac{4}{\pi} \frac{U_0}{2g} \frac{N_a^s}{n} I_a^s \cos \theta_s^1 \right) R \cdot l \, d\theta_s^1 \quad (38)$$

$$= 2 \times \frac{4}{\pi} \frac{U_0}{2g} \frac{N_a^S}{n} I_a^S Rl \cos \gamma.$$

$$\phi_a^S = \left(\frac{4}{\pi} \frac{U_0}{g} \times Rl \right) \times \frac{N_a^S}{n} I_a^S \cos \gamma. \quad (40)$$

El flujo concatenado con el devanado rotórico es:

λ_{aa}^{rs} , que vendrá calculado por:

$$\lambda_{aa}^{ss} = \frac{N_a^r}{n} \phi_a^S; \quad N_a^r = N_a^{E''} \quad (41)$$

$$\lambda_{aa}^{SE} = \frac{N_a^{E''}}{n} \times \left(\frac{4}{\pi} \frac{U_0}{g} \times Rl \right) \times \frac{N_a^S}{n} I_a^S \quad (42)$$

Siendo $N_a^{E''} = N_a^E \times \frac{\text{sen} \beta}{\beta} \times \frac{\beta}{\pi}$ (43)

y la inductancia L_{aa}^{SE} es: $\frac{\partial \lambda_{aa}^{SE}}{\partial I_a^S}$

$$L_{aa}^{SE} = \frac{N_a^S}{n} \frac{N_a^E}{n} \times \frac{\text{sen} \beta}{\pi} \times \left(\frac{4}{\pi} \frac{U_0}{g} Rl \right) \cos \gamma. \quad (44)$$

$$L_{aa}^{SE} = \frac{N_a^S}{n} \frac{N_a^E}{n} \frac{F_m}{\pi} \text{sen} \beta \cos \gamma. \quad (45)$$

2.3.4. Cálculo de las inductancias rotacionales.

Con la misma máquina bipolar:

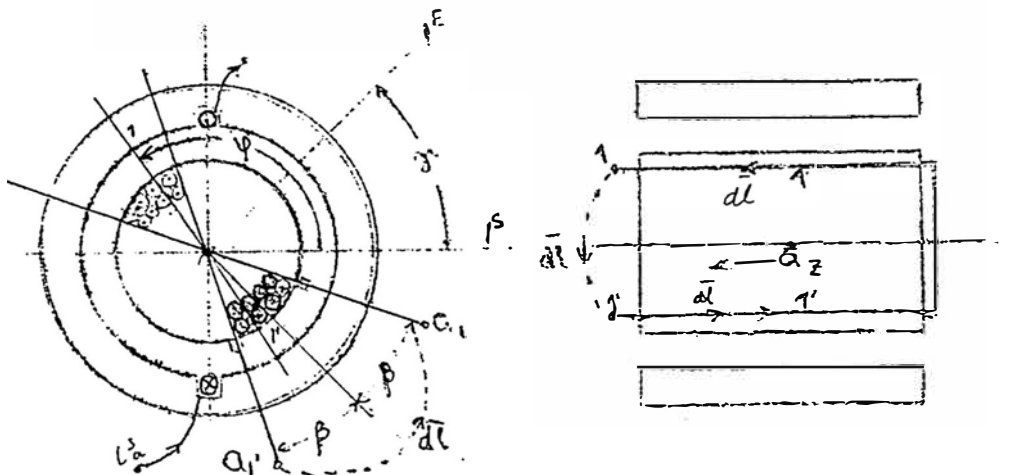


Fig 10

En general, la Ley de Faraday:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (46)$$

caída de tensión = fem inducida.

$$\oint_{c'} \vec{E}' \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{s'} \vec{B} \cdot d\vec{s} + \oint_{c'} \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (47)$$

en donde: c' : contorno en movimiento.

s' : superficie en movimiento

por el contorno c' .

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ = caída de tensión.

$-\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$ = fem inducida de transformación,
originada por la variación de
la concatenación de las líneas
de fuerza. Ligada a inductan-
cias mutuas y propias.

$\oint_{c'} \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$ = fem. inducida de movimien-
to (rotación en el caso presen-
te) originada por el corte de -
las líneas de fuerza por los -
conductores. Ligada a la indug-
tancia rotacional.

Suponiendo ahora que el devanado rotórico está
abierto. Escogemos un contorno cerrado que se -
cierra a travez del aire.

La corriente estatórica I_a^S forma un campo
magnético cortado por los conductores del rotor
originandose una fem. de movimiento recogiendo-

se a travéz de las escobillas.

$$\vec{E}_a^s \equiv \frac{4}{\pi} \frac{N_a^s I_a^s}{n \times 2g} \times U_0 \times \cos \psi_s' \bar{a}_r \quad (48)$$

La caída de tensión eléctrica $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ en el con-
torno cerrado:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{a_1}^{a_1'} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} + \int_{a_1'}^{a_1} \vec{E}_{ex} \cdot d\vec{l} \quad (49)$$

formada por la caída interna del conductor y a
través del aire:

El campo en la región de los conductores -
es proporcional a:

$$\vec{E}_i = f \vec{J}_a \quad (50)$$

Como el devanado está abierto: $\vec{J}_a^E = 0$

por lo que:

$$\int_{a_1}^{a_1'} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = 0 \quad (51)$$

El campo \vec{E}_{ex} es conservativo:

$$\vec{E}_{ex} = - \vec{\nabla} v \quad (52)$$

$$\int_{a_1'}^{a_1} \vec{E}_{ext} \cdot d\vec{l} = - \int_{a_1'}^{a_1} dv = - (v_{a_1} - v_{a_1'}) \quad (53)$$

De las ecuaciones anteriores resulta que -
la caída de tensión es igual a:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - (v_{a_1} - v_{a_1'}) \quad (54)$$

la fem. inducida será:

$$\text{fem.} = - p [\lambda_{aa}^{ES}] + e \text{ movimiento.} \quad (55)$$

$$\text{Siendo } \lambda_{aa}^{ES} = L_{aa}^{ES} I_a^s.$$

$$\gamma: \quad L_{aa}^{ES} = \frac{N_a^S N_a^E}{n^2} \frac{p m}{\pi} \text{sen} \beta \cos \gamma. \quad (56)$$

para una máquina de conmutador:

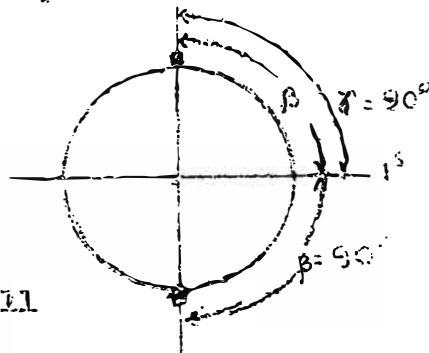


FIG 11

$$\gamma = 90^\circ \text{ y } \cos \gamma = 0$$

por lo que: $L_{aa}^{ES} = 0$ y por que además el campo creado es estacionario;

$$\text{fem}_i = - p L_{aa}^{ES} I_a^s + e \text{ movimiento.} \quad (57)$$

La fem_i de transformación será cero.

Para este caso particular: la fem_i =

$$= e_{\text{movi.}} = \int_C \bar{v} \times \bar{B} \cdot d\bar{l}$$

Para calcular la fem_i de movimiento en la Fig. anterior una espira genérica 1-1', definiendo previamente las coordenadas cilíndricas;

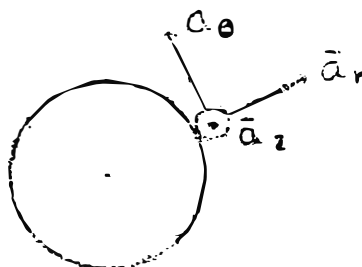


Fig 12

$$- (v_{a_1} - v_{a_1'}) = e \text{ movim.} \quad (58)$$

- Campo que actúa sobre el conductor 1.

$$\vec{B}_1^S = B \max \cos \psi' \vec{a}_r. \quad (59)$$

- Campo que actúa sobre el conductor 1'.

$$\vec{B}_{1'}^S = B \max \cos (\psi' + \pi) \vec{a}_r \quad (60)$$

- Velocidad en el conductor 1:

$$\vec{v}_1 = R w_m^r \vec{a}_\theta = R n a w_m^r \vec{a}_\theta \quad (61)$$

- En el conductor 1':

$$\vec{v}_{1'} = R w_m^{r'} \vec{a}_\theta = R n a w_m^{r'} \vec{a}_\theta \quad (62)$$

- En el conductor 1:

$$dl_1 = + dl (\vec{a}_z) ; \text{ en la dirección } \vec{a}_z \text{ (de la Fig. 10)} \quad (63)$$

- En el conductor 1':

$$d\vec{l}_{1'} = - dl (\vec{a}_z) \text{ (en dirección contraria a } \vec{a}_z \text{ de la Fig. 10).} \quad (64)$$

Por lo que resulta:

$$\begin{aligned} \text{fem}_1 = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} &= \int_0^l (\vec{v}_1 \times \vec{B}_1^S) \cdot d\vec{l}_1 + \\ &+ \int_0^l (\vec{v}_{1'} \times \vec{B}_{1'}^S) \cdot d\vec{l}_{1'} \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^l R \times n w_m^r \times \vec{a}_\theta \times B \max \cos \psi' \vec{a}_r \cdot dl \vec{a}_z + \\ &+ \int_0^l R \times n w_m^{r'} \vec{a}_\theta \times B \max \cos (\psi' + \pi) \vec{a}_r \cdot (-dl \vec{a}_z) \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^l R \times n w_m^r B \max \cos \psi' dl (\vec{a}_\theta \times \vec{a}_r) \cdot \vec{a}_z + \\ &+ \int_0^l R \times n w_m^{r'} B \max \cos (\psi' + \pi) dl (\vec{a}_\theta \times \vec{a}_r) \cdot (-\vec{a}_z) \end{aligned} \quad (67)$$

en donde: $\bar{a}_\theta \times \bar{a}_z = -\bar{a}_r$. (68)

$$f_{emi} = R \times n w_m^r B_{max} \left[\int_0^l \cos \psi' dl (-1) + \int_0^l \cos (\psi' + \pi) dl (1) \right] \quad (69)$$

$$e_1 = R \times n w_m^r B_{max} \left[- \int_0^l \cos \psi' dl - \int_0^l \cos \psi' dl \right] \quad (70)$$

$$e_1 = - 2 R l n w_m^r B_{max} \cos \psi'.$$

$$e_1 = - 2 \times \frac{4}{\pi} \frac{U_0}{2g} R l n w_m^r \times \frac{N^S}{n} I_a^S \cos \psi' \quad (71)$$

En la misma posición de la espira se encuentran otras espiras en la profundidad de la ranura (d N).

$$d e_{am}^E = e_1 \times d N \quad (72)$$

$$\text{Si } N^E \text{ ----- } 2 \text{ geom} = 2n\pi \text{ mag}$$

$$dN \text{ ----- } d\psi \text{ mag}$$

$$d e_{am}^E = \frac{N^E}{2n\pi} e_1 d\psi'. \quad (73)$$

integrando entre terminales de espesor útiles:

$$e_{am}^E = - \frac{N^E}{2n\pi} \times \frac{8}{\pi} \frac{U_0}{2g} l R n w_m^r B_{max} I_a^S \int_{\gamma+\pi/2-\beta}^{\gamma+\pi/2+\beta} \cos \psi' d\psi'.$$

$$e_{am}^E = + \frac{4}{\pi^2} \frac{N^E N^S}{n} \frac{U_0}{2g} R l w_m I_a^S \times 2 \text{sen} \beta \text{sen } \gamma. \quad (74)$$

$$e_{aa}^{ES} = G_{aa}^{ES} w_m \times I_a^S \quad (75)$$

↑ devanado donde se crea el campo.

— devanado donde se induce la tensión.

$$G_{aa}^{ES} = \frac{N^E N^S}{n} \times \frac{4}{\pi^2} \frac{U_0}{2g} Rl \times 2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma. \quad (76)$$

$$G_{aa}^{ES} = \frac{N^E N^S}{n} \frac{P_m}{\pi} \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma. \quad (77)$$

De las ecuaciones:

$$L_{aa}^{SS} = (N_a^S)^2 (P_m + P_{ls}) / n^2 \quad (78)$$

$$L_{aa}^{rr} = \left(N_a^E \frac{\operatorname{sen} \beta}{\pi} \right)^2 (P_m + P_{lr}) / n^2 \quad (79)$$

$$L_{aa}^{SE} = N_a^S N_a^E \frac{\operatorname{sen} \beta}{\pi} P_m \cos \gamma / n^2 \quad (80)$$

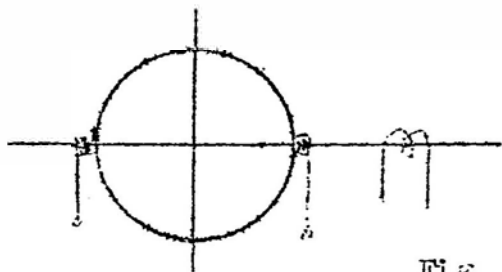
$$G_{aa}^{ES} = N_a^E N_a^S \frac{P_m}{\pi} \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma / n. \quad (81)$$

obtenemos los valores de los parámetros de la máquina:

$$a) \quad L_{aa}^{SS} = L_d^S = (N^S)^2 P_s / n^2 \quad (82)$$

$$b) \quad L_{aa}^{rr} = L_d^r = L_q^r = (N^r)^2 P_r / n^2 \quad (83)$$

$$c1) \quad L_{dd}^{sr} = N^S N^r P_m \cos \gamma' = \frac{N^S N^r P_m}{n^2} = M. \quad (84)$$



$$\beta = 90$$

$$\gamma = 0$$

Fig 13

$$c2) \quad L_{dgc}^{sr} = N^S N^r P_m \cos \gamma = 0 ; \quad \gamma = 90^\circ \quad (85)$$

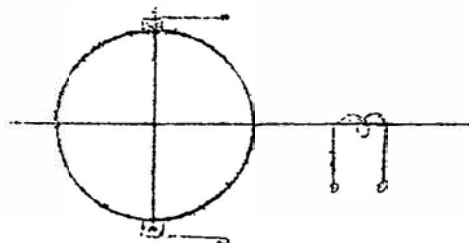


Fig 14

$$d. \quad G_{dd}^{rr} = \frac{N^r N^s P_m \sin \gamma'}{n}, = 0 ; \quad \gamma' = 0 \text{ (ver Fig 13)} \quad (86)$$

$$d_1) \quad G_{qd}^{rs} = \frac{N^r N^s P_m \sin \gamma'}{n} = \frac{N^r N^s m}{n}; \quad \gamma' = 90^\circ \\ \text{(ver Fig. 14)} \quad (87)$$

$$c \quad G_{dq}^{rr} = \frac{N^r N^r P_r \sin \gamma'}{n} = \frac{(L^r)^2 P_m}{n}; \quad \gamma' = 90^\circ \quad (88)$$

de las ecuaciones anteriores se deduce lo sgte:

$$a) \quad \frac{G_{qd}^{rs}}{M_{dd}^{sr}} = \frac{\frac{N^r N^s P_m}{n}}{\frac{N^r N^s P_m}{n^2}} = n \\ G_{qd}^{rs} = nM \quad (89)$$

$$b) \quad \frac{G_{dq}^{rr}}{L_q^r} = \frac{\frac{(N^r)^2 P_r}{n}}{\frac{(N^r)^2 P_r}{n^2}} = n. \\ G_{dq}^{rr} = n L^r \quad (90)$$

De modo que podemos escribir la ecuación de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} v^s \\ v_d^r \\ v_q^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^s + L^s p & M p & 0 \\ M p & R^r + L^r p & n L^r w^r \\ -n M w^r & -n L^r w^r & R^r + L^r p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^s \\ i_d^r \\ i_q^r \end{bmatrix} \quad (91)$$

La ecuación del torque está dada por:

$$T = \begin{bmatrix} I_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} \quad (92)$$

$$= \begin{bmatrix} I^s & I_d^r & I_q^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & nL^r \\ -nM^r & -nL^r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^s \\ I_d^r \\ I_q^r \end{bmatrix} \quad (93)$$

$$= \begin{bmatrix} I^s & I_d^r & I_q^r \\ 0 & nL^r & I_q^r \\ -nM^r I^s & -nL^r I_d^r & \end{bmatrix} \quad (94)$$

$$= nL^r I_d^r I_q^r + I_q^r (-nM I^s - nL_q^r I_d^r) \quad (95)$$

$$= n M I_q^r I^s \quad (96)$$

también podemos escribir la ecuación como:

$$T = \begin{bmatrix} I_t \end{bmatrix} \times n \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} \quad (97)$$

$$= n \begin{bmatrix} I_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \end{bmatrix} \quad (98)$$

2.4. Teoría de los Campos Giratorios.

El devanado estático energizado por una fuente de corriente alterna monofásica produce un campo magnético pulsante, que puede descomponerse en dos campos magnéticos giratorios, cada uno de los cuales tiene la mitad de la amplitud del campo alterno sencillo y giran en sentidos opuestos a lo largo del entrehierro, pero a velocidad de sincronismo.

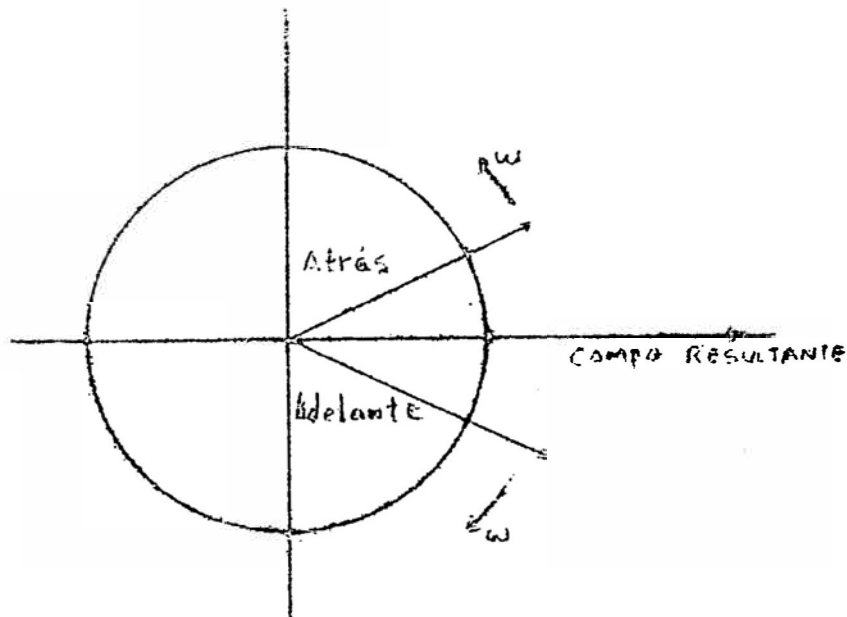


Fig. 15. Campos giratorios contrarios.

Si el rotor es fijo, puede considerarse sometido simultáneamente al efecto inductivo de los campos debidos a estos campos iguales y de movimientos opuestos, por lo que las dos series de corrientes inducidos en el rotor desarrollarán pares iguales y opuestos.

Pero si al rotor se le da un impulso inicial en cualquier sentido su deslizamiento con respecto al campo que gira en el mismo sentido, será menor que la unidad; mientras que al mismo tiempo, su deslizamiento con respecto al campo que gira en sentido opuesto será mayor que la unidad. Por consiguiente se desarrollará un par positivo en el mismo sentido que el impulso inicial y otro negativo de sentido contrario, pero el primero será mayor que el segundo, a causa de

la diferencia de los deslizamientos.

No obstante, es preciso señalar una característica de la teoría de los campos giratorios; que al descomponer el campo primitivo alterno del estator en dos componentes giratorios iguales, los flujos correspondientes en la máquina real serán iguales sólo cuando el rotor esté fijo, lo que significa que en condiciones de funcionamiento, que la verdadera magnitud del campo que gira en sentido negativo es pequeña en comparación con la del campo que gira en sentido positivo. Esto explica el hecho, que se puede comprobar experimentalmente, de que el campo del entrehierro de un motor monofásico cuando funciona en las proximidades del sincronismo, gira realmente en el mismo sentido que el propio rotor.

Luego, cada campo giratorio induce tensiones balanceadas en el devanado del rotor y las corrientes rotóricas resultantes es la suma de las corrientes que van por los devanados cortocircuitados del rotor, exactamente para cada tensión.

Ahora, si nosotros representamos el rotor - en jaula equivalente, como dos bobinas ortogonales y definiendo las corrientes bifásicas rotóricas balanceadas hacia adelante y hacia atrás co-

I_+ y I_- respectivamente, el campo giratorio hacia adelante induce corrientes balanceadas.

\bar{I}_+ en la bobina "d"
y $j\bar{I}_+$ en la bobina "q".

El campo giratorio hacia atrás induce corrientes balanceadas:

\bar{I}_- en la bobina "d"
y $-j\bar{I}_-$ en la bobina "q"

Los circuitos resultantes en las bobinas "d" y "q" son:

$$\bar{I}_d = \bar{I}_+ + \bar{I}_- \quad (99)$$

$$\bar{I}_q = j (\bar{I}_+ - \bar{I}_-) \quad (100)$$

Aquí: $\bar{I}_+ = \frac{1}{2} (\bar{I}_d - j\bar{I}_q) \quad (101)$

$$\bar{I}_- = \frac{1}{2} (\bar{I}_d + j\bar{I}_q) \quad (102)$$

2.3. Ecuaciones fasoriales.

La máquina primitiva equivalente para la máquina monofásica de inducción, mostrada en la Fig. 16 tiene las siguientes ecuaciones, considerando el sentido de giro horario del rotor.

De la ecuación (91); se hace:

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^s + L^s p & M_p & 0 \\ M_p & R^r + L^r p & -nL^r W^r \\ +nM W^r & +nL^r W^r & R^r + L^r p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}^s \\ \bar{I}_d^r \\ \bar{I}_q^r \end{bmatrix} \quad (103)$$

Los parámetros de los ejes "d" y "q" son idénticos como la máquina de entrehierro uniforme.

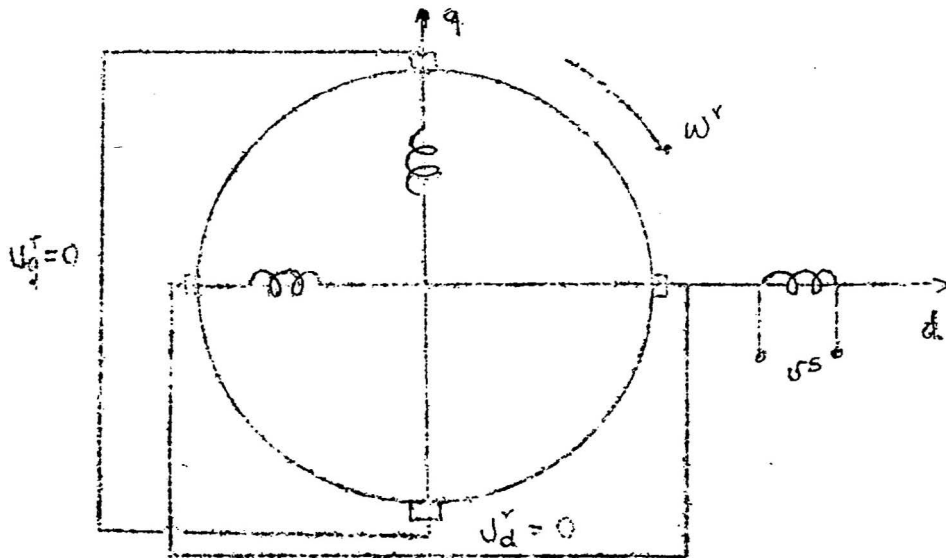


Fig. 16. Motor monofásico de inducción: máquina equivalente primitiva.

Para operación en estado estable, las ecuaciones fasoriales son obtenidas por sustitución de la derivada de tiempo "p" por "jw"; así se tiene:

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + j\omega L_s & j\omega M & 0 \\ j\omega M & R_d + j\omega L_d & -n\omega_r L_d \\ n\omega_r M & n\omega_r L_d & R_d + j\omega L_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_s \\ \bar{I}_d \\ \bar{I}_q \end{bmatrix} \quad (104)$$

Sustituyendo \bar{I}_d , \bar{I}_q por los valores dados en las ecuaciones (99) y (100); tenemos:

$$\bar{V}_s = (R_s + j\omega L_s) \bar{I}_s + (j\omega M) (\bar{I}_+ + \bar{I}_-) \quad (105)$$

$$0 = (j\omega M) \bar{I}_s + (R_d + j\omega L_d) (\bar{I}_+ + \bar{I}_-) - jn\omega_r L_d (\bar{I}_+ - \bar{I}_-) \quad (106)$$

$$0 = n\omega_r M \bar{I}_s + n\omega_r L_d (\bar{I}_+ + \bar{I}_-) + j(R_d + j\omega L_d) (\bar{I}_+ - \bar{I}_-) \quad (107)$$

Haciendo uso de las relaciones siguientes para una máquina multipolar:

$$w_s = \frac{w}{n} ; \quad s = \frac{w^s - w^r}{w_s}$$

$$w^r = (1-s) w_s = (1-s) \frac{w}{n}$$

donde w , viene dada por la frecuencia de la máquina (e/s).

w^r = velocidad rotórica

w^s = velocidad síncrona,

en las ecuaciones (106) y (107), tenemos:

$$0 = jwM\bar{I}_s + (R_d + jwL_d)(\bar{I}_+ + \bar{I}_-) - jn(1-s)\frac{w}{n}L_d(\bar{I}_+ - \bar{I}_-) \quad (106)$$

$$0 = n(1-s)\frac{w}{n}M\bar{I}_s + N(1-s)\frac{w}{n}L_d(\bar{I}_+ + \bar{I}_-) + j(R_d + jwL_d)$$

simplificando: $(\bar{I}_+ - \bar{I}_-) \quad (107)$

$$0 = jwM\bar{I}_s + R_d(\bar{I}_+ + \bar{I}_-) + jwL_d \left[\bar{I}_+ + \bar{I}_- - (1-s)(\bar{I}_+ - \bar{I}_-) \right] \quad (105)$$

$$0 = (1-s)wM\bar{I}_s + (1-s)wL_d(\bar{I}_+ + \bar{I}_-) - jR_d(\bar{I}_+ - \bar{I}_-) - wL_d(\bar{I}_+ - \bar{I}_-) \quad (107)$$

luego, multiplicando la ecuación (107) por "j", tenemos:

$$0 = jwM\bar{I}_s + R_d(\bar{I}_+ + \bar{I}_-) + jwL_d(s\bar{I}_+ + (2-s)\bar{I}_-) \quad (108)$$

$$0 = jwM(1-s)\bar{I}_s - R_d(\bar{I}_+ - \bar{I}_-) - jwL_d(s\bar{I}_+ - (2-s)\bar{I}_-) \quad (109)$$

Sumando (108) y (109) y dividiendo por (2-s):

$$0 = jwM\bar{I}_s + \left(\frac{R_d}{2-s} + jwL_d \right) 2\bar{I}_- \quad (110)$$

Restando (109) de (108) y dividiendo por (s):

$$0 = j\omega M \bar{I}_s + \left(\frac{R_d}{s} + j\omega L_d \right) 2\bar{I}_+ \quad (113)$$

Reescribiendo (105), (110) y (111),

$$\begin{aligned} \bar{V}_s &= R_s + j\omega(L_s - M) \bar{I}_s + j\frac{\omega M}{2}(\bar{I}_s + 2\bar{I}_+) + j\frac{\omega M}{2}(\bar{I}_s + 2\bar{I}_-) \\ 0 &= j\frac{\omega M}{2}(\bar{I}_s + 2\bar{I}_+) + \frac{R_d}{2s} + j\frac{\omega(L_d - M)}{2} 2\bar{I}_+ \\ 0 &= j\frac{\omega M}{2}(\bar{I}_s + 2\bar{I}_-) + \frac{R_d}{2(2-s)} + j\frac{\omega(L_d - M)}{2} 2\bar{I}_- \end{aligned} \quad (112)$$

2.6. Circuito equivalente.

El circuito equivalente para la máquina es mostrada en la Fig. 4. y ha sido deducida de las ecuaciones 112.

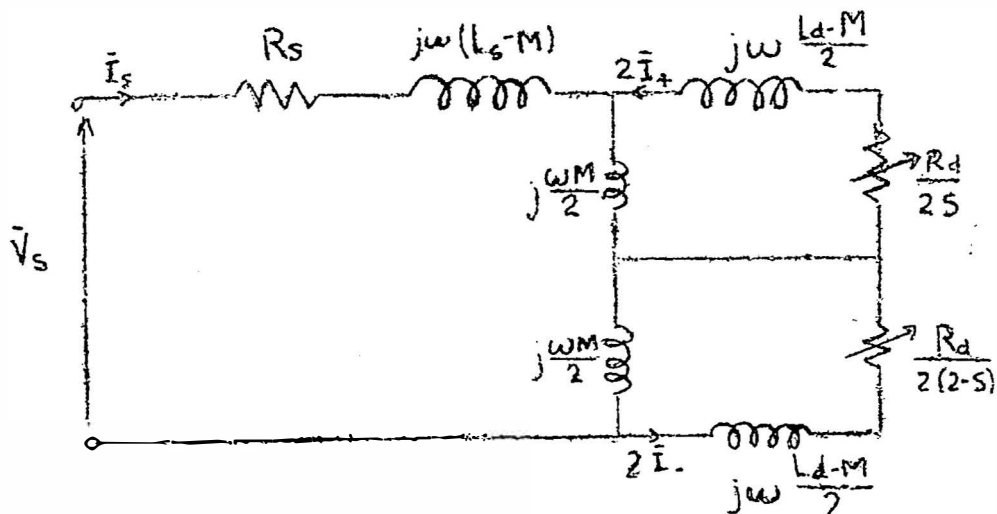


Fig. 17.

Los valores estatóricos y rotóricos son denotados por los subíndices 1 y 2 respectivamente.

El circuito de la Fig. 17, puede colocarse como:

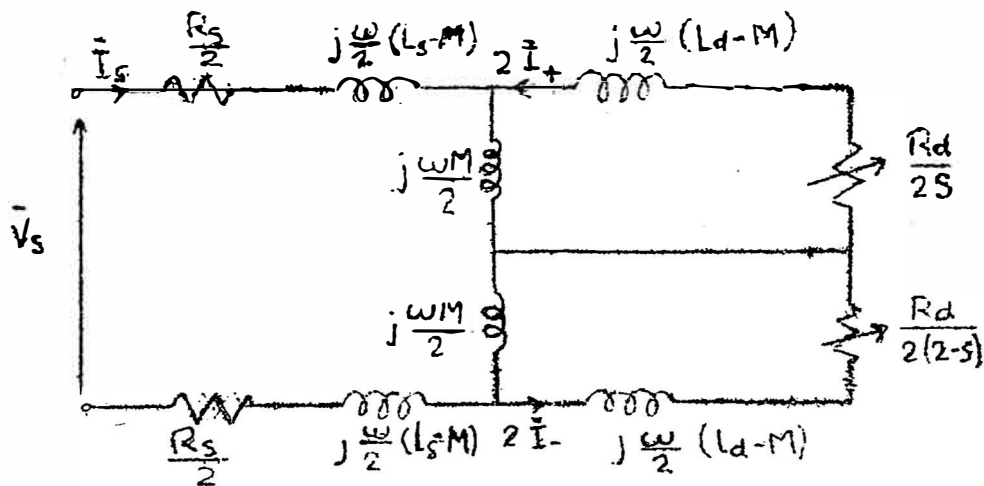


Fig. 18.

El circuito equivalente representado por la figura exterior, no es el más representativo de la máquina monofásica de inducción por que una parte de la potencia de entrada se pierde por los efectos de histéresis y corrientes parásitas en la estructura del hierro del estator y del rotor. Haciendo una modificación en el circuito equivalente de la fig. 18, esas pérdidas eléctricas adicionales que han sido despreciados, pueden ser incluidas en nuestro análisis de una manera aproximada.

La máquina de inducción tiene, ciertamente, similitudes con un transformador ordinario con el devanado secundario cortocircuitado. De modo que la modificación antes indicada lo hacemos brevemente estudiando el transformador de dos devanados.

Luego, refiriendo los parámetros del circuito equivalente al estator, obtenemos el cir-

cuito siguiente:

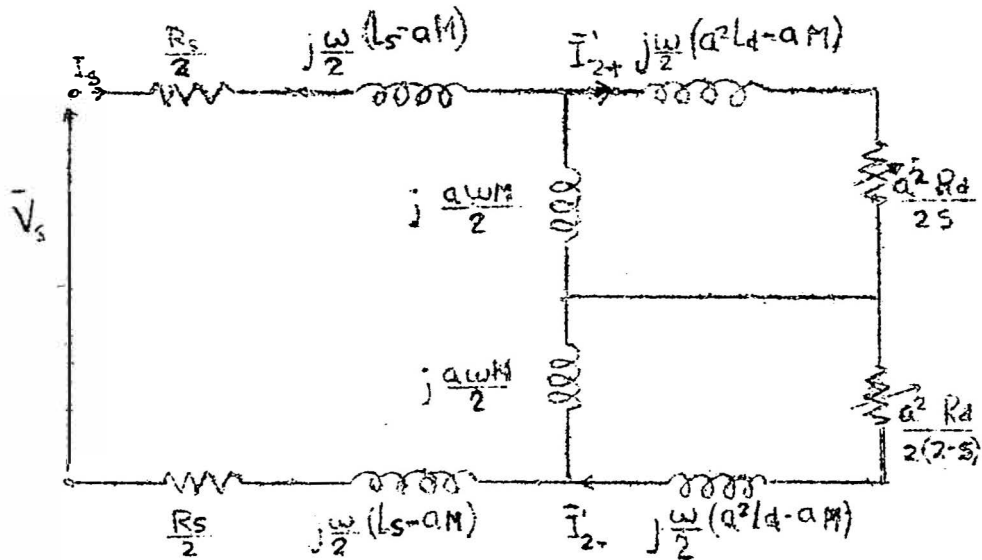


Fig. 19.

donde: las corrientes rotóricas referidos al estator están redefinidas como:

$$\text{COMPONENTE EN ADELANTO: } \bar{I}_{2+}' = -2\bar{I}_{+}/a$$

$$\text{COMPONENTE EN ATRAZO : } \bar{I}_{2-}' = -2\bar{I}_{-}/a$$

El circuito de la fig. 19, lo re-dibujamos como la de la fig. 20 en la que se incluye la resistencia R_{ht} , que nos representará las pérdidas en el hierro (efectos de histéresis, más las de corriente parásitas).

donde:

Reactancia de magnetización referida

al estator:

$$X_{m1} = a\omega M$$

Reactancia de dispersión del

estator:

$$X_1 = (\omega L_s - X_{m1})$$

Reactancia de dispersión del

rotor referida al estator: $X_2^1 = wa^2 L_d - X_{m1}$

Resist. del rotor referida

al estator: $R_2^1 = a^2 R_d.$

Tensión del estator: $\bar{V}_1 = \bar{V}_s$

Corriente del estator: $\bar{I}_1 = \bar{I}_s.$

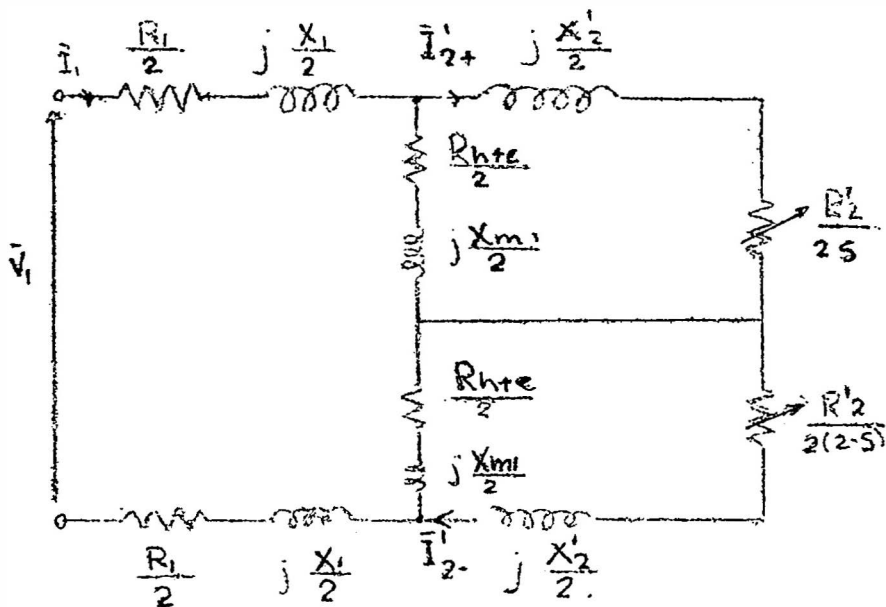


Fig. 20.

3. CALCULO DEL TORQUE

3.1. Formulación de la ecuación.

El torque electromagnético es obtenido de la relación:

$$T_e = \text{Re} \left\{ (\text{pares-polos}) \left[\bar{I}_t^* \right] \left[G \right] \left[\bar{I} \right] \right\} \quad (113)$$

Sustituyendo para:

$$\left[\bar{I}_t^* \right], \left[G \right], \left[I \right] \text{ de las ecuac.} \quad (103)$$

$$T_e = \text{Re} \left\{ (\text{pares de polos}) \begin{bmatrix} \hat{I}_s \hat{I}_d & \hat{I}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +L_d \\ M & L_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_s \\ \hat{I}_d \\ \hat{I}_q \end{bmatrix} \right\} \quad (114)$$

$$T_e = \text{Re} \left\{ (\text{pares de polos}) (-L_d \hat{I}_d \hat{I}_q + M \hat{I}_q \bar{I}_s + L_d \hat{I}_q \hat{I}_d) \right\} \quad (115)$$

Aquí $L_d (-\hat{I}_d \hat{I}_q + \hat{I}_q \hat{I}_d)$, es un término imaginario que no tiene componente real.

Luego:

$$T_e = \text{Re} \quad (\text{pares de polos}) M \hat{I}_q I_s \quad (116)$$

Sustituyendo por \hat{I}_q de la ec. (110)

$$\begin{aligned} \bar{I}_q &= j (\bar{I}_+ - \bar{I}_-) \\ \hat{I}_q &= -j (\hat{I}_+ - \hat{I}_-) \end{aligned} \quad (117)$$

$$T_e = \text{Re} \left\{ (\text{pares de polos}) (-jM\bar{I}_s (\hat{I}_+ - \hat{I}_-)) \right\} \quad (118)$$

Multiplicando ahora, las ecuaciones (116) por \hat{I}_- y la ec. (117) por \hat{I}_+ , en la que no se ha concluido la resistencia de pérdidas; tenemos:

$$0 = j w M \bar{I}_s \hat{I}_- + \left[\frac{R_d}{(2-s)} + j w L_d \right] 2 \bar{I}_- \hat{I}_- \quad (119)$$

$$0 = j w M \bar{I}_s \hat{I}_+ + \left[\frac{R_d}{s} + j w L_d \right] 2 \bar{I}_+ \hat{I}_+ \quad (120)$$

ahora de (119) y (120)

$$\text{Re} \left\{ -j M \bar{I}_s \hat{I}_+ \right\} = \text{Re} \left\{ \left[\frac{R_d}{s w} + j L_d \right] 2 \bar{I}_+ \hat{I}_+ \right\} \quad (121)$$

$$\text{Re} \left\{ j M \bar{I}_s \hat{I}_- \right\} = \text{Re} \left\{ \left[\frac{R_d}{w(2-s)} + j L_d \right] 2 \bar{I}_- \hat{I}_- \right\} \quad (122)$$

3.2. Cálculo de las corrientes. \bar{I}_+ y \bar{I}_-

En términos de los valores referidos al estator tenemos: de las Fig. 19 y 20:

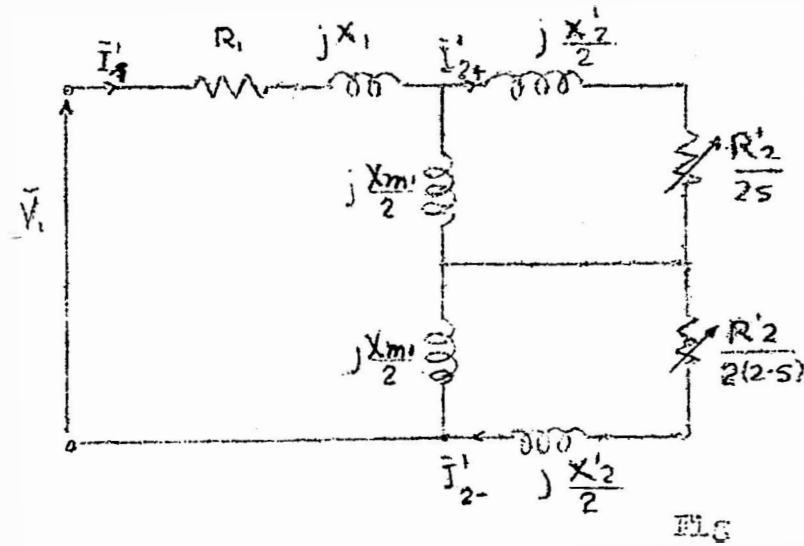
$$\begin{aligned} \text{Re} \left\{ -j M \bar{I}_s \hat{I}_+ \right\} &= \text{Re} \left\{ \left[\frac{R_d}{s w} + j L_d \right] \left[2 \bar{I}_+ \hat{I}_+ \right] \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ \left[\frac{R'_2}{a^2 s w} + j \frac{X'_2 + X_{m1}}{w a^2} \right] \left[2 \times \left(-\frac{a}{2} \bar{I}'_{2+} \right) \left(-\frac{a}{2} \hat{I}'_{2+} \right) \right] \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ \left[\frac{R'_2}{s w} + j \frac{X'_2 + X_{m1}}{w} \right] \frac{1}{2} (I'_{2+})^2 \right\} \quad (123) \end{aligned}$$

y luego:

$$\begin{aligned} \text{Re} \left\{ j M \bar{I}_s \hat{I}_- \right\} &= -\text{Re} \left[\frac{R_d}{(2-s)} + j w L_d \right] (2 \bar{I}_- \hat{I}_-) \\ &= -\text{Re} \left\{ \left[\frac{R'_2}{a^2 (2-s) w} + j \frac{X'_2 + X_{m1}}{w a^2} \right] \left(2 \left(\frac{a}{2} \bar{I}'_{2-} \right) \left(-\frac{a}{2} \hat{I}'_{2-} \right) \right) \right\} \\ &= -\text{Re} \left\{ \left[\frac{R'_2}{(2-s) w} + j \frac{X'_2 + X_{m1}}{w} \right] \frac{1}{2} (I'_{2-})^2 \right\} \quad (124) \end{aligned}$$

CALCULO DE LAS CORRIENTES: I'_{2+} , \bar{I}'_{2-}

del C.E. referido al estator:



FIG

reactancia rotórica de dispersión referida al -
estator: $X'_2 = \omega a^2 L_d - X_{m1}$

y donde $L_d = \frac{X'_2 + X_{m1}}{\omega a^2}$ ($X'_2 = \omega a^2 L_d - \omega a M$).

$$\bar{V}_1 = (R_1 + jX_1 + jX_{m1}) \bar{I}'_{2+} - j\frac{X_{m1}}{2} \bar{I}'_{2-} \quad (125)$$

$$0 = -j\frac{X_{m1}}{2} \bar{I}'_1 + \left[\frac{R'_2}{2s} + j\left(\frac{X_{m1}}{2} + \frac{X'_2}{2}\right) \right] \bar{I}'_{2+} + 0 \bar{I}'_{2-} \quad (126)$$

$$0 = -j\frac{X_{m1}}{2} \bar{I}'_1 + 0 \bar{I}'_{2+} + \left[\frac{R'_2}{2(2-s)} + j\left(\frac{X_{m1}}{2} + \frac{X'_2}{2}\right) \right] \bar{I}'_{2-} \quad (127)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + j(X_1 + X_{m1}) & -j\frac{X_{m1}}{2} & -j\frac{X_{m1}}{2} \\ -j\frac{X_{m1}}{2} & \frac{R'_2}{2s} + j\frac{1}{2}(X_{m1} + X'_2) & 0 \\ -j\frac{X_{m1}}{2} & 0 & \frac{R'_2}{2(2-s)} + j\frac{1}{2}(X_{m1} + X'_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}'_1 \\ \bar{I}'_{2+} \\ \bar{I}'_{2-} \end{bmatrix}$$

CALCULO DE \bar{I}'_{2+}

$R_1 + j(X_1 + X_{m1})$	V_1	$- j X_{m1}/2$
$- j X_{m1}/2$	0	0
$- j X_{m1}/2$	0	$R'_2/2(2-s) + j(X_{m1}/2 + X'_2/2)$
$R_1 + j(X_1 + X_{m1})$	V_1	$- j X_{m1}/2$
$- j X_{m1}/2$	0	0

$$\bar{I}'_{2+} = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + j(X_1 + X_{m1}) & - j X_{m1}/2 & - j X_{m1}/2 \\ - j X_{m1}/2 & \frac{R'_2}{2s} + j(X_{m1} + X'_2)/2 & 0 \\ - j X_{m1}/2 & 0 & \frac{R'_2}{2(2-s)} + j \frac{(X_{m1} + X'_2)}{2} \\ R_1 + j(X_1 + X_{m1}) & - j X_{m1}/2 & - j X_{m1}/2 \\ - j X_{m1}/2 & \frac{R'_2}{2s} + j(X_{m1} + X'_2)/2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + j(X_1 + X_{m1}) & - j X_{m1}/2 & - j X_{m1}/2 \\ - j X_{m1}/2 & \frac{R'_2}{2s} + j(X_{m1} + X'_2)/2 & 0 \\ - j X_{m1}/2 & 0 & \frac{R'_2}{2(2-s)} + j \frac{(X_{m1} + X'_2)}{2} \\ R_1 + j(X_1 + X_{m1}) & - j X_{m1}/2 & - j X_{m1}/2 \\ - j X_{m1}/2 & \frac{R'_2}{2s} + j(X_{m1} + X'_2)/2 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{0+0+0-0-0 - (-j \frac{X_{m1}}{2}) V_1 \frac{R'_2}{2(2-s)} + j \frac{X_{m1} + X'_2}{2}}{\begin{vmatrix} R_1 + j(X_1 + X_{m1}) & - j X_{m1}/2 & - j X_{m1}/2 \\ - j X_{m1}/2 & \frac{R'_2}{2s} + j \frac{(X_{m1} + X'_2)}{2} & 0 \\ - j X_{m1}/2 & 0 & \frac{R'_2}{2(2-s)} + j \frac{(X_{m1} + X'_2)}{2} \\ R_1 + j(X_1 + X_{m1}) & - j X_{m1}/2 & - j X_{m1}/2 \\ - j X_{m1}/2 & \frac{R'_2}{2s} + j \frac{(X_{m1} + X'_2)}{2} & 0 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{j \frac{X_{m1}}{2} \times V_1 \left[\frac{R'_2}{2(2-s)} + j \frac{X_{m1} + X'_2}{2} \right]}{\begin{vmatrix} R_1 + j(X_1 + X_{m1}) & - j X_{m1}/2 & - j X_{m1}/2 \\ - j X_{m1}/2 & \frac{(R'_2)^2}{4s(2-s)} - \frac{(X_{m1} + X'_2)^2}{4} + j \frac{R'_2}{4s} (X_{m1} + X'_2) + \frac{R'_2}{4(2-s)} (X_{m1} + X'_2) \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned}
& - (-j)^2 \left(\frac{X_{m1}}{2}\right)^2 \left[\frac{(R'_2 + j(X_{m1} + X'_2))}{2} \right] - (-j \frac{X_{m1}}{2})^2 \left(\frac{R'_2}{2(2-s)} \right) \\
& + j \frac{X_{m1} + X'_2}{2} \\
& = \frac{j \frac{X_{m1}}{4} V_1 \left[\frac{R'_2}{(2-s)} + j(X_{m1} + X'_2) \right]}{\left[R_1 + j(X_1 + X_{m1}) \right] \times \frac{1}{4} \left[\frac{(R'_2)^2}{s(2-s)} - (X_{m1} + X'_2)^2 + j \frac{(X_{m1} + X'_2)}{1} \right]} \\
& \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{2-s} \right) \left[+ \left(\frac{X_{m1}}{2} \right)^2 \left[\frac{R'_2}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{2-s} \right) + j2 \left(\frac{X_{m1} + X'_2}{2} \right) \right] \right] \\
& = \frac{V_1 X_{m1} \left[- (X_{m1} + X'_2) + j \frac{R'_2}{2-s} \right]}{\left[R_1 + j(X_1 + X_{m1}) \right] \times \left[\frac{(R'_2)^2}{s(2-s)} - (X_{m1} + X'_2)^2 + j R'_2 (X_{m1} + X'_2) \left(\frac{2}{s(2-s)} \right) + \left(\frac{X_{m1}}{2} \right)^2 \left[\frac{R'_2}{2} \times \frac{2}{s(2-s)} + j(X_{m1} + X'_2) \right] \right]} \\
& = \frac{V_1 X_{m1} \left[- (X_{m1} + X'_2) + j \frac{R'_2}{2-s} \right]}{\left[\frac{R_1 (R'_2)^2}{s(2-s)} - R_1 (X_{m1} + X'_2)^2 - (X_1 + X_{m1}) (X_{m1} + X'_2) \left(\frac{R'_2}{2} \times \frac{2}{s(2-s)} + (X_{m1})^2 (X_{m1} + X'_2) \right) \right]} \\
& \times \frac{2}{s(2-s)} + (X_{m1})^2 \frac{R'_2}{s(2-s)} \left. \right] + j \left[R_1 \frac{R'_2 (X_{m1} + X'_2) \times 2}{s(2-s)} \right. \\
& \left. + (X_1 + X_{m1}) \left(\frac{(R'_2)^2}{s(2-s)} - (X_{m1} + X'_2)^2 \right) + (X_{m1})^2 (X_{m1} + X'_2) \right] \\
& = \frac{V_1 X_{m1} \left[- (X_{m1} + X'_2) + j \frac{R'_2}{2-s} \right]}{\left\{ R_1 \left[\frac{(R'_2)^2}{s(2-s)} - (X_{m1} + X'_2)^2 \right] + \frac{R'_2}{s(2-s)} \left[X_{m1}^2 - 2(X_{m1} + X'_2) \right] \right\}}
\end{aligned}$$

$$+X_{m1}(X_1+X'_2)+X_1X'_2) \Big] + j \left[\frac{2R_1R'_2(X_{m1}+X'_2)}{s(2-s)} + (X_1+X_{m1}) \left(\frac{(R'_2)^2}{s(2-s)} - (X_{m1}+X'_2)^2 \right) + (X_{m1})^2(X_{m1}+X'_2) \right]$$

$$= \frac{V_1 X_{m1} - (X_{m1}+X'_2) + j \frac{R'_2}{2-s}}{A + j B}$$

donde:

$$A = R_1 \left[\frac{(R'_2)^2}{s(2-s)} - (X_{m1}+X'_2)^2 \right] + \frac{R'_2}{s(2-s)} \left[-X_{m1}^2 - 2X_{m1}(X_1+X_2) - 2X_1X_2 \right] \quad (128)$$

$$B = \frac{2R_1R'_2(X_{m1}+X'_2)}{s(2-s)} + (X_1+X_{m1}) \left[\frac{(R'_2)^2}{s(2-s)} - (X_{m1}+X'_2)^2 \right] + X_{m1}^2(X_{m1}+X'_2) \quad (129)$$

$$\bar{I}'_{2-} = \frac{V_1 X_{m1} \left[-A(X_{m1}+X'_2) + B \frac{R'_2}{2-s} + j(B(X_{m1}+X_2) + A \frac{R'_2}{2-s}) \right]}{A^2 + B^2} \quad (130)$$

CALCULO DE LA CORRIENTE \bar{I}'_{2-}

$R_1 + j(X_1 + X_m)$	$-j X_m/2$	V_1
$-j X_m/2$	$R'_2/2s + j(X_m + X'_2)/2$	0
$-j X_m/2$	0	0
$R_1 + j(X_1 + X_m)$	$-j X_m/2$	V_1
$-j X_m/2$	$R'_2/(2s) + j(X_m + X'_2)/2$	0

$$\bar{I}'_{2-} = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$Y = \begin{vmatrix} R_1 + j(X_1 + X_m) & -j X_m/2 & -j \frac{X_m}{2} \\ -j \frac{X_m}{2} & R'_2/2s + j(X_m + X'_2)/2 & 0 \\ -\frac{X_m}{2} & 0 & R'_2/2(2-s) + j(X_{m1} + X'_2)/2 \\ R_1 + j(X_1 + X_m) & -j X_m/2 & -j \frac{X_m}{2} \\ -j \frac{X_m}{2} & \frac{R'_2}{2s} + j \frac{X_m + X'_2}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\bar{I}'_2 = \frac{0+0+0 - (-j \frac{X_m}{2}) (\frac{R'_2}{2s} + j \frac{X_m + X'_2}{2}) V_1 - 0 - 0}{\begin{vmatrix} R_1 + j(X_1 + X_m) & -j \frac{X_m}{2} & -j \frac{X_m}{2} \\ -j \frac{X_m}{2} & \frac{R'_2}{2s} + j \frac{X_m + X'_2}{2} & 0 \\ -\frac{X_m}{2} & 0 & R'_2/2(2-s) + j(X_{m1} + X'_2)/2 \end{vmatrix} + 0 + 0}$$

$$= \frac{(-j \frac{X_m}{2}) (\frac{R'_2}{2s} + j \frac{X_m + X'_2}{2}) - 0 - (-j \frac{X_m}{2}) \left[\frac{R'_2}{2(2-s)} + j \frac{X_{m1} + X'_2}{2} \right]}{0 + 0 + 0 - (-j \frac{X_m}{2}) (\frac{R'_2}{2s} + j \frac{X_m + X'_2}{2}) V_1 - 0 - 0}$$

$$= \frac{5V_1 \frac{X_m}{2} \left[\frac{R'_2}{s} + j(X_m + X'_2) \right]}{\begin{vmatrix} R_1 + j(X_1 + X_m) & -j \frac{X_m}{2} & -j \frac{X_m}{2} \\ -j \frac{X_m}{2} & \frac{R'_2}{2s} + j \frac{X_m + X'_2}{2} & 0 \\ -\frac{X_m}{2} & 0 & R'_2/2(2-s) + j(X_{m1} + X'_2)/2 \end{vmatrix} + 0 + 0}$$

$$= \frac{j V_1 X_m \left(\frac{R'_2}{s} + j(X_m + X'_2) \right)}{\begin{vmatrix} R_1 + j(X_1 + X_m) & -j \frac{X_m}{2} & -j \frac{X_m}{2} \\ -j \frac{X_m}{2} & \frac{R'_2}{2s} + j \frac{X_m + X'_2}{2} & 0 \\ -\frac{X_m}{2} & 0 & R'_2/2(2-s) + j(X_{m1} + X'_2)/2 \end{vmatrix} + 0 + 0}$$

$$= \frac{j V_1 X_m \left(\frac{R'_2}{s} + j(X_m + X'_2) \right)}{\begin{vmatrix} R_1 + j(X_1 + X_m) & -j \frac{X_m}{2} & -j \frac{X_m}{2} \\ -j \frac{X_m}{2} & \frac{R'_2}{2s} + j \frac{X_m + X'_2}{2} & 0 \\ -\frac{X_m}{2} & 0 & R'_2/2(2-s) + j(X_{m1} + X'_2)/2 \end{vmatrix} + 0 + 0}$$

$$= \frac{j V_1 X_m \left(\frac{R'_2}{s} + j(X_m + X'_2) \right)}{\begin{vmatrix} R_1 + j(X_1 + X_m) & -j \frac{X_m}{2} & -j \frac{X_m}{2} \\ -j \frac{X_m}{2} & \frac{R'_2}{2s} + j \frac{X_m + X'_2}{2} & 0 \\ -\frac{X_m}{2} & 0 & R'_2/2(2-s) + j(X_{m1} + X'_2)/2 \end{vmatrix} + 0 + 0}$$

$$= \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{2-s} \right) \left[\frac{X_m}{2} \left(\frac{R'_2}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{2-s} \right) + j(X_m + X'_2) \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{j V_1 X_m \left(\frac{R'_2}{s} + j (X_m + X'_2) \right)}{R_1 \frac{(R'_2)^2}{s(2-s)} - R_1 (X_m + X'_2)^2 - (X_1 + X_m) R'_2 (X_m + X'_2) \left(\frac{2}{s(2-s)} \right)} \\
&\quad + (X_m)^2 \frac{R'_2}{s(2-s)} + \\
&\quad + j \left\{ (X_1 + X_m) \left[\frac{(R'_2)^2}{s(2-s)} - (X_m + X'_2)^2 \right] + R_1 R'_2 (X_m + X'_2) \right. \\
&\quad \left. \frac{2}{s(2-s)} + (X_m)^2 (X_m + X'_2) \right\} \\
&= \frac{j V_1 X_m \left[\frac{R'_2}{s} + j (X_m + X'_2) \right]}{A + j B}.
\end{aligned}$$

donde:

$$A = R_1 \left[\frac{(R'_2)^2}{2(2-s)} - (X_m + X'_2)^2 \right] + \frac{R'_2}{s(2-s)} \left[-X_m^2 - 2X_m(X_1 + X'_2) - 2X_1 X'_2 \right]$$

$$B = \frac{2R_1 R'_2 (X_m + X'_2)}{s(2-s)} + (X_1 + X_m) \left[\frac{(R'_2)^2}{s(2-s)} - (X_m + X'_2)^2 \right] + X_m^2 (X_m + X'_2)$$

$$\bar{I}'_{2-} = \frac{V_1 X_m \left[- (X_m + X'_2) + j \frac{R'_2}{s} \right] (A - j B)}{A^2 + B^2}$$

$$\bar{I}'_{2-} = \frac{V_1 X_m \left[- A(X_m + X'_2) + B \frac{R'_2}{s} + j \left[A \frac{R'_2}{s} + B (X_m + X'_2) \right] \right]}{A^2 + B^2}$$

3.3. Cálculo de la expresión del torque.

Luego en la ecuación (123):

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Re} \left\{ \left[\frac{R'_2}{s\omega} + j \frac{X'_2 + X_m}{\omega} \right] \left[\frac{1}{2} (\bar{I}'_2)^2 \right] \right\} \\
 = & \operatorname{Re} \left\{ \left[\frac{R'_2}{s\omega} + j \frac{X'_2 + X_m}{\omega} \right] \left[\frac{1}{2} \frac{V_1 V_m}{A^2 + B^2} \right]^2 \left[\frac{-A(X_m + X'_2) + BR'_2}{2-s} \right]^2 \right. \\
 & \left. + \left[\frac{B(X_m + X'_2) + AR'_2}{2-s} \right]^2 \right\} \\
 = & \frac{R'_2}{s\omega} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{V_1 X_m}{A^2 + B^2} \right)^2 \left[\left(\frac{-A(X_m + X'_2) + BR'_2}{2-s} \right)^2 + \left(\frac{B(X_m + X'_2) + AR'_2}{2-s} \right)^2 \right] \right. \\
 & \left. + A \frac{R'_2}{2-s} \right\}
 \end{aligned}$$

En la ecuación (124):

$$\begin{aligned}
 & - \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{R'_2}{(2-s)\omega} + j \frac{X'_2}{\omega} \right) 2 (\bar{I}'_2)^2 \right\} \\
 = & - \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{R'_2}{(2-s)\omega} + j \frac{X'_2 + X_m}{\omega} \right) \left[\frac{1}{2} \frac{V_1 X_m}{A^2 + B^2} \right]^2 \left[\left(\frac{-A(X_m + X'_2) + BR'_2}{2-s} \right)^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(\frac{B(X_m + X'_2) + AR'_2}{2-s} \right)^2 \right] \right\} \\
 = & - \frac{R'_2}{(2-s)\omega} \times \frac{1}{2} \left(\frac{V_1 X_m}{A^2 + B^2} \right)^2 \left[\left(\frac{-A(X_m + X'_2) + BR'_2}{2-s} \right)^2 + \left(\frac{B(X_m + X'_2) + AR'_2}{2-s} \right)^2 \right] \\
 & + \frac{R'_2}{2-s}
 \end{aligned}$$

Luego el torque será:

$$\begin{aligned}
 T_e = & (\text{pares de polos}) \frac{R'_2}{2\omega} \frac{V_1 X_m}{A^2 + B^2} \left[\frac{1}{s} \left[\left(\frac{-A(X_m + X'_2) + BR'_2}{2-s} \right)^2 + \left(\frac{B(X_m + X'_2) + AR'_2}{2-s} \right)^2 \right] \right. \\
 & \left. + \frac{BR'_2}{2-s} \right]
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2-s} \left\{ (-A(X_m + X'_2) + \frac{BR'_2}{s})^2 + (B(X_m + X'_2) + AR'_2)^2 \right\}$$

La ecuación encontrada (132), como se ve es muy complicada ya que para calcular el torque máximo analíticamente implicaría laboriosas operaciones algebraicas por lo que trataremos de simplificar nuestro estudio.

3.4. Deducción de la ecuación de torque máximo (Simplificada).

Del análisis anteriormente hecho deducimos que una fuerza electromotriz alterna de dirección fija en el espacio puede descomponerse en dos fmm giratorios cuya amplitud es la mitad de la amplitud de la fmm alterna. Estos dos fmm giran en sentido contrario con una velocidad angular igual a $\frac{\omega}{p}$, coincidiendo en magnitud y dirección en el instante en que pasan por el eje de la fase.

Designaremos estos dos fmm. por las letras A y B respectivamente y por convenio elegimos sentido positivo, el de A.

Vemos así pues que un motor asíncrono mono-fásico no tiene par en el arranque.

Ahora si nosotros hacemos girar el rotor a la velocidad angular Ω ó a la velocidad n en rpm (tomados como positivos o sea en el sentido de rotación de la fmm A). Su deslizamiento con respecto a la fmm A será:

$$S_A = \frac{p - \Omega}{\frac{W}{p}} = \frac{n_s - n}{n_s} = s. \quad (133)$$

$$\Omega = \frac{W}{p} (1-s) \quad \text{ó} \quad n = n_s (1-s)$$

y su deslizamiento con respecto a la fmm B:

$$S_B = \frac{\frac{W}{p} - \Omega}{-\frac{W}{p}} = \frac{-n_s - n}{-n_s} = 1 + (1-s)$$

$$S_B = 2-s. \quad (134)$$

El campo giratorio A induce pues en el secundario o corrientes de frecuencia

$$f_A = sf.$$

y el campo giratorio B, corrientes de frecuencia:

$$f_B = (2-s) f.$$

En particular en el sincronismo con A.

$$s=0 \quad \text{y} \quad S_B=2$$

$$f_A=0 \quad f_B=2f$$

De modo que:

- El campo giratorio A y el secundario constituyen un motor asíncrono ($0 < S_A < 1$)

- El campo giratorio B y el secundario constituyen un freno ($1 \leq s \leq 2$)

De lo que se deduce que el par resultante es la diferencia entre los pares de estas dos máquinas.

El motor asíncrono monofásico es pues, e - quivalente al conjunto de dos máquinas polifási cas:

- a) Cuyos ejes acoplados directamente giran a la misma velocidad.
- b) Cuyos primarios estan en serie bajo la ten - sión monofásica \bar{V} , pero cuyos campos corres - pondientes a la corriente I , giran en sentido inverso en las dos máquinas.

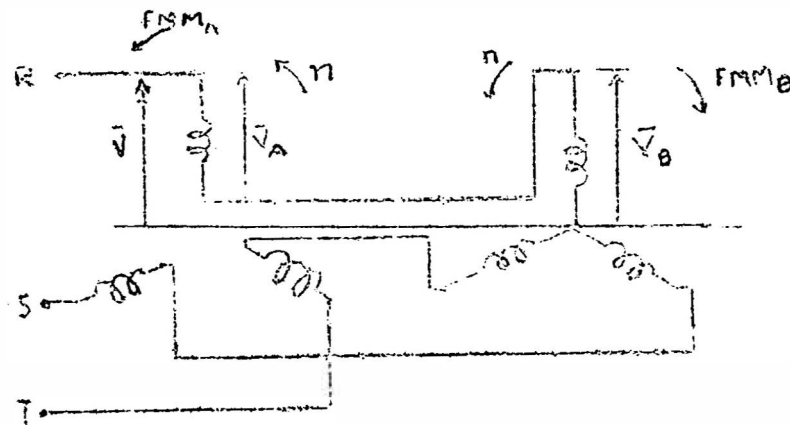


Fig. 21. Montaje de dos máquinas asíncronas 3 ϕ equivalentes a una máquina asínc. 1 ϕ .

Se trata del esquema desarrollado de la fig. si - guiente. Son dos máquinas ϕ están montadas en se - rie.

$$\bar{V} = \bar{V}_A + \bar{V}_B$$

Si B funciona como freno, $\bar{V}_B < \bar{V}_A$

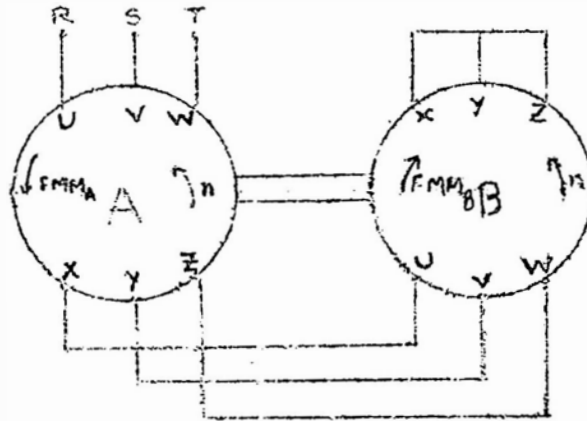


Fig. 22. Representación de una máquina asíncrona 1ϕ por dos máq. asínc. 3ϕ a coplados, de las cuales una funciona como motor y la otra como freno.

- c) Las dos máquinas son tales que sus arrollamientos secundarios crean la misma EMM.

Como se vio anteriormente la máquina asíncrona monofásica tiene por circuito equivalente:

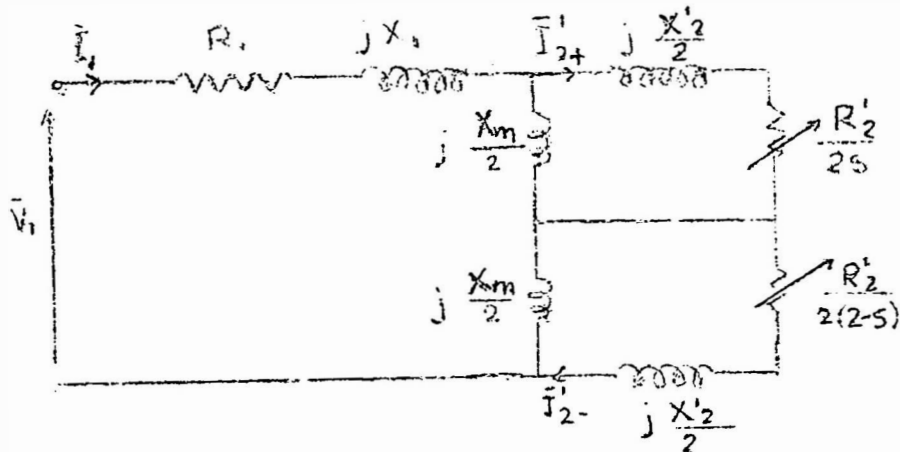


FIG 23

Si nosotros admitimos la igualdad de corrientes en el secundario, debidos por separado a los campos A, B: llegamos al circuito equivalente modificado:

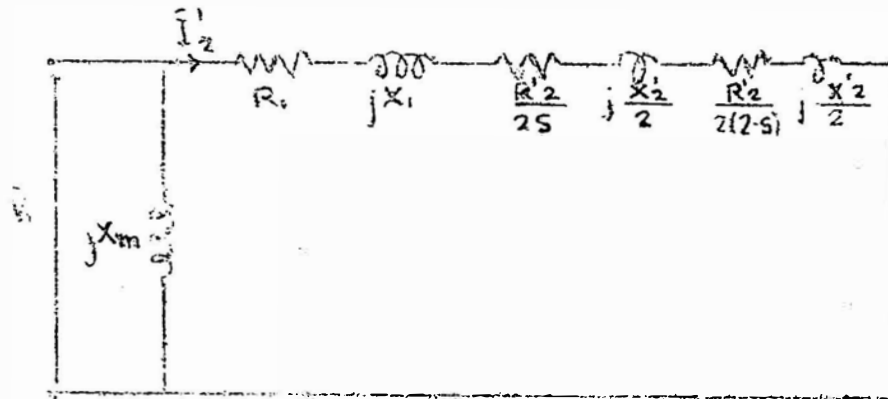


Fig. 24. Circuito equivalente modificado

en donde la resistencia y reactancia de dispersión secundarios de cada una de las bobinas son $R_2/2$ y $jX_2/2$ respectivamente.

Del circuito equivalente de la fig. anterior obtenemos:

$$\bar{I}_2' = \frac{V_1}{\left(R_1 + \frac{R_2}{2s} + \frac{R_2}{2(2-s)} \right) + j(X_1 + X_2)} \quad (135)$$

Luego:

$$I_2'^2 = \frac{V_1^2}{\left[R_1 + \frac{R_2}{2s} + \frac{R_2}{2(2-s)} \right]^2 + (X_1 + X_2)^2} \quad (136)$$

lo cual nos da:

$$\frac{W}{2} T = \left[\frac{R'_2}{2s} - \frac{R'_2}{2(2-s)} \right] I'^2_2 \quad (137)$$

$$= \frac{2(1-s)}{s(2-s)} \frac{R'_2}{2} I'^2_2 \quad (138)$$

$$= \frac{2(1-s)}{s(2-s)} \frac{R'^2_2}{2} \times \frac{V_1^2}{\left[\frac{R_1 + R'_2}{2s} + \frac{R'_2}{2(2-s)} \right]^2 + (X_1 + X'_2)^2} \quad (139)$$

$$= \frac{(1-s) R'^2_2 \times V_1^2}{s(2-s) \left\{ \frac{R_1 + R'_2}{2s} + \frac{R'_2}{2(2-s)} + (X_1 + X'_2)^2 \right\}} \quad (140)$$

$$= \frac{V_1^2 \times R'^2_2 (1-s)}{s(2-s) \left[\left(\frac{R_1 + R'_2}{2s} + \frac{R'_2}{2(2-s)} \right) + (X_1 + X'_2)^2 \right]} \quad (141)$$

Si nosotros tenemos ahora:

$$B = s(2-s) \quad (142)$$

lo que gráficamente nos da:

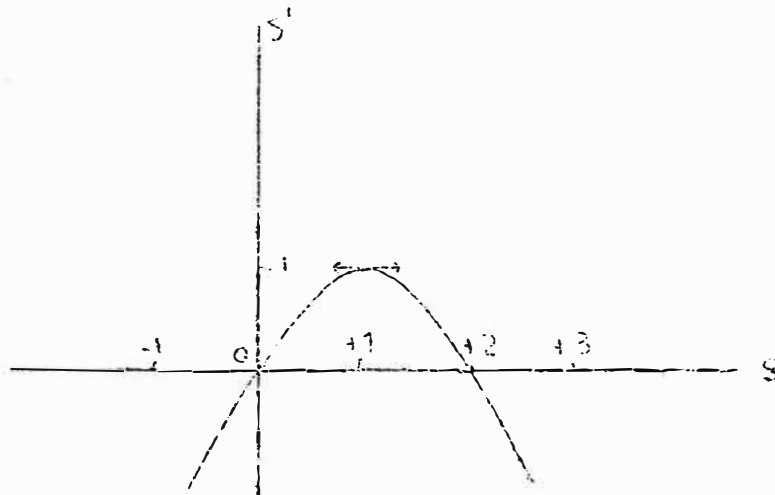


Fig. 25

Observemos que si s varía de $-\infty$ a $+\infty$, no ocurre lo mismo que s' que solo varía de $-\infty$ a 1.

s	$-\infty$	-	0	1	2	-	$+\infty$
s'	$-\infty$	-	0	+1	+0	-	$-\infty$

entonces:

$$(1-s)^2 = 1-2s-s^2 = 1-s(2-s) = 1-s' \quad (143)$$

y como solo estudiando la máquina para $g = 1$ pasado este valor ocurriría lo mismo, pero el campo B que jugaría el papel de A):

$$(1-s) = \sqrt{1-s'}$$

y la expresión se convertirá en:

$$\frac{w}{n} T = \frac{V_1^2 \sqrt{1-s'} R_2'/s'}{\left[R_1 + \frac{R_2}{s} \right]^2 + \left[X_1 + X_2' \right]^2} \quad (144)$$

$$T = \frac{n}{w} \frac{V_1^2 R_2'/s' \sqrt{1-s'}}{\left[R_1 + \frac{R_2}{s} \right]^2 + \left[X_1 + X_2 \right]^2} \quad (145)$$

la que es una expresión de torque de la máquina polifásica (sustituyendo s por s'), pero multiplicada por el factor $\sqrt{1-s'}$.

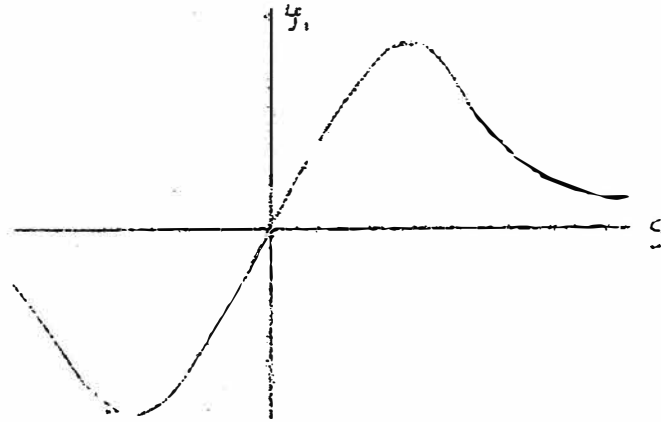
Ahora estudiando esta ecuación como un producto de las funciones de s'

$$T = Y_1 \times Y_2$$

$$\text{Con } Y_1 = \frac{n}{w} \frac{V_1^2 R_2'/s'}{\left[R_1 + \frac{R_2}{s} \right]^2 + (X_1 + X_2')^2} \quad (146)$$

$$Y_2 = \sqrt{1-s^2}$$

la función y_1 está representada por:



y la función y_2 :

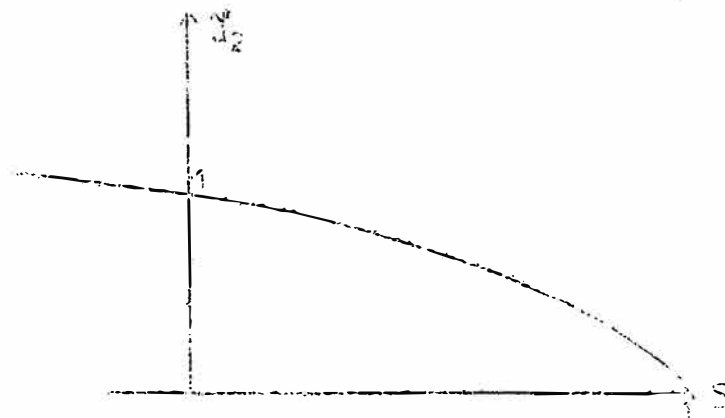


Fig. 26

Luego, para el caso de una máquina 3 ϕ se sabe que:

$$T = 3 \frac{\text{Pares-polos}}{w} \frac{V_1^2 R'_2 / s^2}{(R_1 + \frac{R'_2}{s})^2 + (X'_2 + X_1)^2} \quad (147)$$

$$S_{TMX} = \frac{R'_2}{X'_2 + X_1} \quad (148)$$

por cada fase:

$$T = \frac{\text{pares-polos}}{w} \frac{V_1^2 R'_2 / s'}{(R_1 + \frac{R'_2}{s'})^2 + X'_2 + X_1} \quad (149)$$

$$s'_{TMX} = \frac{R'_2}{X'_2 + X_1} \quad (150)$$

Para el caso de una máquina monofásica; -
calculamos el deslizamiento correspondiente

$$s'_{TMX} = \frac{R'_2}{X'_2 + X_1}$$

con los parámetros dados de la máquina 1Ø en la
fórmula de s'_{TMX} para una 3Ø.

$$1-s = \sqrt{1-s'^2}$$

$$1 - \sqrt{1-s'^2} = s \quad s = 1 - \sqrt{1 - \frac{R'_2}{X'_2 + X_1}}$$

que es el deslizamiento para la máquina monofásica, y es la fórmula:

$$T_{MX} = \frac{\text{pares-polos}}{w} \times \frac{V_1^2 R'_2 / s_{TM} (1-s_{TM})}{(R_1 + \frac{R'_2}{s_{TM}})^2 + (X_1 + X'_2)} \quad (151)$$

Como ejemplo tenemos las dos máquinas si -
guientes:

a) $V = 220 \text{ v}$

pares-polos : 2

$w = 377 \text{ rad/seg (60 cic)}$

$X_M = 200.38 \text{ } \Omega$

$X_1 = 12.43 \text{ } \Omega$

$R_1 = 11.07 \text{ } \Omega$

$$R'_2 = 6.13$$

$$X'_2 = 8.68$$

CALCULO DE S_{TM}

$$S'_{TM} = \frac{R'_2}{X'_2 + X_1} = \frac{6.13}{8.68 + 12.43} = \underline{0.291}$$

$$\sqrt{1 - S'_{TM}} = \sqrt{1 - 0.291} = \sqrt{0.709} = 0.845.$$

$$S_{TM} = (1 - 0.845) = \underline{0.155}$$

$$1 - s = 0.845.$$

$$S_{TM} = (1 - \sqrt{1 - S'_{TM}}).$$

$$T_{MX} = \frac{2}{377.7} \times \frac{(220)^2 \times 6.13 / 0.155 (0.845)}{(11.07 + \frac{6.13}{0.155})^2 + (12.43 + 8.68)^2}$$

$$T_{MX} = \underline{2.82 \text{ Mw-m}} \quad (2.8022 \text{ calculado exactal}).$$

b) $V = 220$

pares-polos = 2.

$$\omega = 377.7 \text{ rad / seg}$$

$$X_M = 227$$

$$X_1 = 13.26$$

$$R_1 = 11.02$$

$$R'_2 = 9.42$$

$$X_2 = 8.8$$

$$S'_{TM} = \frac{R'_2}{X'_2 + X_1} = \frac{9.42}{8.8 + 13.26} = \frac{9.42}{22.06} = 0.427$$

$$\sqrt{1-s^2} = \sqrt{1-0.427} = \sqrt{0.572} = 0.759.$$

$$S_{TM} = (1-0.759) = \underline{0.241}$$

$$1-S_{TM} = 0.759.$$

$$T_{MX} = \frac{2}{377.7} \times \frac{(229)^2 \cdot 9.42 / 0.241 \cdot (0.759)}{\left(\frac{11.02 + 9.42}{0.241}\right)^2 + (13.26 + 8.8)^2}$$

$$= 2.54 \text{ Norm (2.58 exacto: 1.55/.)}$$

CONCLUSIONES

- 1) Una máquina monofásica de inducción, en el arranque la cantidad $(2-s) - s$, con el valor $s=1.0$ las mitades superior e inferior del C.E de la máquina de la fig. 7 son idénticas si las resistencias externas son cero. Al arranque, de inmediato luego tenemos que $I'_{2+} = I'_{2-}$ y el torque promedio generado es cero. Una vez que la máquina está girando en uno de los sentidos, $I'_{2+} = -I'_{2-}$, se genera un torque neto y la máquina puede operar sucesivamente con un motor.

De la cual deducimos que para desarrollar un torque de arranque se coloca un 2º devanado en el estator. Su cuadratura con los devanados principales monofásicos. Una máquina de este tipo es conocida como el motor de fase partida, en que las corrientes de los devanados colocados a través de la misma fuente monofásica estarán fuera de fase.

- 2) Del análisis anterior se desprende que si aumentamos la resistencia secundaria, el valor máximo de :

$$Y_1 = \frac{\frac{R'_2}{s} V_1^2}{\left[R_1 + \frac{R'_2}{s} \right]^2 + \left[X_1 + X'_2 \right]^2}$$

conservará el mismo módulo, pero que se desplaza

hacia la derecha y resultará multiplicado por una cantidad Y_2 cada vez mayor a medida que R'_2 aumenta.

Haciendo la aproximación tal que $Y_2 = \sqrt{1-s}$ varía como una recta de pendiente negativa:

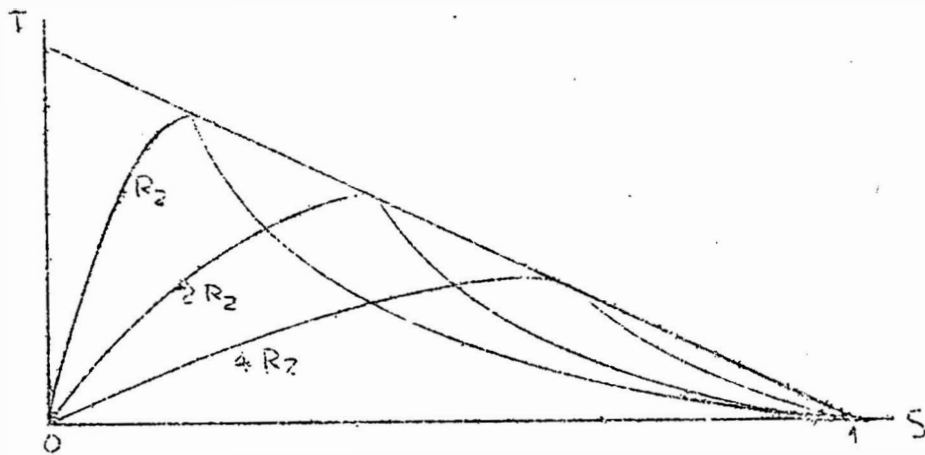


Fig. 28.

Se ve que al contrario de lo que sucede con el par máximo de una máquina 3ϕ de inducción (polifásica), el par máximo de una máquina monofásica depende de la resistencia del secundario.

PROGRAMA PARA EVALUAR EL TORQUE EN UN MOTOR MONOFASICO DE INDUCCION

DATA V,N,OMEG,XM,X1,R1,R2,X2/220.0,2,377.7,130.14,3.3307,

19.61,4.1970,5.7192/

S=0.00001

12 A=R1*(R2*R2/(S*(2.-S))-(XM+X2)**2)+(R2/(S*(2.-S)))*

1(-XM*XM-2.*XM*(X1+X2)-2.*X1*X2)

B=2.*R1*R2*(XM+X2)/(S*(2.-S))+(X1+XM)*(R2*R2/(S*(2.-S)))

5-(XM+X2)**2)+XM*XM*(XM+X2)

C=R2*(V*XM)**2/(2.*OMEG*(A*A+B*B)**2)

D=(1./S)*((-A*(XM+X2)+B*R2/(2.-S))**2+(B*(XM+X2)+A*R2/(2.-S))**2)

F=(1./(2.-S))*((-A*(XM+X2)+B*R2/S)**2+(B*(XM+X2)+A*R2/S)**2)

TAD=N*C*D

TAT=N*C*F

T=TAD-TAT

PRINT 11, TAD,TAT,T,S

11 FORMAT(1H,1PE12.6,3X,1PE12.6,3X,1PE12.6,3X,1PE12.6)

S=S+0.005

IF (S.LT.1.0) GO TO 12

STOP

END

BIBLIOGRAFIA

- 1.- Copias del curso de Máquinas Eléctricas III
Autor: Ing. Juan Núñez Chávez.
- 2.- Introduction to Generalized Electrical Machine
Theory Autor: D. O'Kelly and S. Simmons.
- 3.- Máquinas de Corriente Alterna
Autor: Alexander Langsdorf.
- 4.- Máquinas Eléctricas Asíncronas
Autor: J. Pichoir.
- 5.- Introduction to Energy Conversion
Autor: J. Meisel.
- 6.- Máquinas Eléctricas
Autor: W. Thaler.