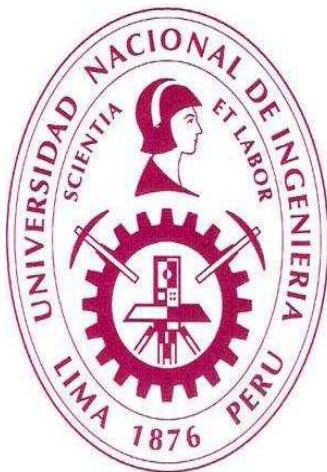


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS



UTILIZACIÓN DE LA TEORÍA DE DUALIDAD EN LA
SOLUCIÓN DE INECUACIONES VARIACIONALES Y
QUASIVARIACIONALES MEDIANTE EL MÉTODO DE
ELEMENTOS FINITOS

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO
EN MATEMÁTICA

PRESENTADA POR:
LUIS RODOLFO ROCA GALINDO

ASESOR: MSC. IRLA MANTILLA NÚÑEZ

LIMA-PERÚ
2004

Agradecimientos

- Mi especial agradecimiento a mi asesora la profesora Irla Mantilla N. por su generosa disposición en la conducción de mi labor científica desarrollada en el Laboratorio de Simulación e Investigación Numérica de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería.
- También agradezco el paciente aliento de personas cercanas sin cuya confianza y sacrificio no hubiera culminado con satisfacción esta tesis.

*Dedicado con amor a mis padres
de quienes he recibido todo.*

Tabla de Contenidos

| | |
|---|----|
| <i>Agradecimientos</i> | ii |
| <i>Introducción</i> | 1 |
| Capítulo 1: Preliminares | 3 |
| 1.1 <i>Notaciones</i> | 3 |
| 1.2 <i>Inecuaciones variacionales elípticas (IVE)</i> | 7 |
| 1.3 <i>Derivadas débiles</i> | 17 |
| 1.4 <i>Espacios de Sobolev</i> | 20 |
| Capítulo 2: Teoría de la Dualidad y su aplicación en la resolución de las IVE's | 27 |
| 2.1 <i>Operadores Multivaluados y la subdiferenciabilidad</i> | 27 |
| 2.2 <i>Aplicación de la teoría de la dualidad en el caso de una forma bilineal simétrica</i> | 33 |
| 2.3 <i>Aplicación de la teoría de la dualidad en el caso de una forma bilineal no simétrica</i> | 46 |
| Capítulo 3: Formulación variacional y quasivariacional del Problema del Dique | 49 |
| 3.1 <i>Problema del Dique de sección transversal rectangular.</i> | 50 |
| 3.2 <i>Aplicación de la teoría de dualidad al problema variacional.</i> | 59 |
| 3.3 <i>Formulación quasivariacional del problema del Dique de sección transversal generalizada.</i> | 63 |
| 3.4 <i>Aplicación de la teoría de dualidad para resolver el problema quasivariacional</i> | 85 |

| | |
|---|-----|
| Capítulo 4: Aplicación del Método de Elementos Finitos para hallar la solución aproximada del Problema Variacional y Quasivariacional del Dique. | 97 |
| 4.1 <i>Conceptos generales de la Teoría de Elementos Finitos</i> | 98 |
| 4.2 <i>Discretización con el MEF del problema del dique de sección transversal rectangular</i> | 101 |
| 4.3 <i>Discretización con el MEF del problema del dique de sección transversal generalizada</i> | 107 |
| 4.4 <i>Implementación y resultados numéricos</i> | 116 |
| 4.5 <i>Conclusiones</i> | 129 |
| Apéndice A: Código fuente de los programas utilizados | 131 |
| A.1 <i>Problema variacional del dique</i> | 131 |
| A.2 <i>Problema quasivariacional del dique</i> | 141 |
| Referencias Bibliográficas | 149 |

Índice de Figuras

| | | |
|---------------------|---|-----|
| <i>Figura 3.1:</i> | Geometría del dique rectangular | 50 |
| <i>Figura 3.2:</i> | Geometría de un dique con base plana | 63 |
| <i>Figura 4.1:</i> | Discretización del medio poroso con 768 elementos | 116 |
| <i>Figura 4.2:</i> | Patrón de dispersión de los elementos no nulos de la matriz $[K]$ asociada a la forma bilineal. | 118 |
| <i>Figura 4.3:</i> | Influencia del parámetro λ en la velocidad de la convergencia. | 119 |
| <i>Figura 4.4:</i> | Comportamiento de la estimación del error en cada iteración. (Escala log-lineal). | 119 |
| <i>Figura 4.5:</i> | Zona húmeda y zona seca respectivamente, la frontera que las separa es la frontera libre. | 120 |
| <i>Figura 4.6:</i> | Curvas de nivel para la presión al interior del dique. | 120 |
| <i>Figura 4.7:</i> | Campo de velocidades | 121 |
| <i>Figura 4.8:</i> | Aproximación de la frontera libre. | 121 |
| <i>Figura 4.9:</i> | Líneas de flujo del campo de velocidades. | 123 |
| <i>Figura 4.10:</i> | Discretización del dominio utilizando 924 elementos triangulares | 123 |
| <i>Figura 4.11:</i> | Patrón de dispersión de la matriz $[M]$ asociada al producto interno en V | 125 |
| <i>Figura 4.12:</i> | Patrón de dispersión de la matriz $[M]$, tratada con el reordenamiento de Cuthill-McKee | 125 |
| <i>Figura 4.13:</i> | Solución aproximada del problema quasivariacional. | 126 |
| <i>Figura 4.14:</i> | Representación aproximada de q^n asociado a la solución del problema quasivariacional | 127 |
| <i>Figura 4.15:</i> | Aproximación de la frontera libre y la zona de resaca | 127 |

Figura 4.16: Curvas de nivel para la presión al interior del dique de sección transversal generalizada. 128

Figura 4.17: Campo de velocidades asociado a la presión al interior del dique. . . 128

Índice de Tablas

| | | |
|-------------------|---|-----|
| <i>Tabla 4.1:</i> | Parámetros utilizados para describir la geometría del dique considerando 5 diferentes triangulaciones | 117 |
| <i>Tabla 4.2:</i> | Influencia del parámetro h en la convergencia | 122 |
| <i>Tabla 4.3:</i> | Ordenadas de la frontera libre | 124 |

Introducción

Los problemas con inecuaciones variacionales se presentan con frecuencia en diversos modelos matemáticos originados en la Mecánica de fluidos, Elasticidad y la Teoría de control. Usualmente se enfrenta el problema de minimizar una cierta funcional definida sobre un espacio de Hilbert, que puede representar la energía total del sistema, o la velocidad del flujo de un fluido. En los últimos 50 años se viene realizando un intenso proceso de investigación relacionado a estos problemas que involucran Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP's).

Parte importante de los logros obtenidos en la investigación de estos temas se deben al matemático Jacques-Louis Lions (1928-2001) quien en colaboración con otro matemático importante en este tema, Guido Stampacchia, publicó en 1965 un trabajo titulado "Inéquations variationnelles non coercives", ellos además son autores del teorema Lions-Stampacchia, que nos permite demostrar la existencia y unicidad de solución de los problemas que involucran inecuaciones variacionales (IVE's); así mismo es relevante la investigación de los modelos físicos que involucran IVE's llevada a cabo por Lions y Duvaut entre 1969 y 1970, y que se encuentra condensada en el libro "Les inéquations en Mécanique et en Physique". Es finalmente en colaboración con Alain Bensoussan, que aparece la publicación "Contrôle impulsif et inéquations variationnelles" donde se plantean problemas originados en la economía mediante inecuaciones quasivariacionales (IQV).

El presente trabajo consiste en buscar una solución numérica de un problema de frontera con EDP's, mediante el tratamiento de los problemas variacionales y quasivariacionales originados; existen muchas alternativas al momento de aproximar la solución de un problema con IVE's, como son: el método de relajación, el método del gradiente y el método de penalización, que junto con otras variantes tienen como principal ventaja la sencillez teórica y la facilidad para codificar los algoritmos correspondientes, pero al mismo tiempo tienen como desventaja la dificultad en el tratamiento de funcionales no diferenciables. En el presente trabajo se utiliza el método de dualidad para la resolución de problemas que involucren (IVE's), mediante la optimización de funcionales convexos que permitan formular el problema variacional como dos problemas: *problema primal* y *problema dual*, de los cuales se elige el problema dual para facilitar la búsqueda de la solución aproximada utilizando el Método de Elementos Finitos (MEF). Además la introducción de la dualidad permite el tratamiento de los funcionales no diferenciables mediante la búsqueda del punto de silla del lagrangiano asociado al problema de optimización dual; para esto utilizamos un algoritmo de tipo Uzawa. Este algoritmo puede usarse tanto para las IVE's de primera especie como para las de segunda especie. La no diferenciable se salva mediante la introducción de j^* el funcional conjugado de j , haciendo uso de la aproximación Yosida para el caso de los operadores monótonos maximales.

El contenido del trabajo está descrito en cuatro capítulos. En el primero se exponen los conceptos básicos y resultados necesarios para sustentar el desarrollo que realizaremos a lo largo del presente estudio. En el segundo capítulo se desarrolla la formulación de la teoría de dualidad y su aplicación en la resolución de las IVE's. En el tercer capítulo se toma como problema test un problema de filtración de un fluido en un medio poroso que conduce a formulaciones débiles asociadas a funcionales no diferenciables. En el cuarto capítulo se realiza la resolución numérica mediante del Método de Elementos Finitos para el problema variacional y quasivariacional obteniéndose los resultados numéricos correspondientes.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Notaciones

- Ω : un conjunto abierto en \mathbb{R}^d con frontera Γ
- $|\Omega|$: medida de Lebesgue del conjunto Ω
- $[f = \alpha] = \{x \in \Omega : f(x) = \alpha\}$, de forma análoga se entiende $[f < \alpha]$, $[f \leq \alpha]$, $[f > \alpha]$ y $[f \geq \alpha]$. Si f es una funcional lineal $[f = \alpha]$ denota un hiperplano.
- $\text{sop}(f)$: soporte de la función f
- \mathbf{V} : Espacio real de Hilbert con producto escalar $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{V}}$ y una norma asociada $\|\cdot\|_{\mathbf{V}}$.
- \mathbf{V}' : Espacio dual topológico de \mathbf{V} , es decir el espacio de las funcionales lineales continuas de \mathbf{V} en \mathbb{R} ; la notación $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}}$ representa la relación en dualidad entre \mathbf{V} y \mathbf{V}' .
- $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ denota el espacio de los operadores lineales **continuos** de \mathbf{V} en \mathbf{W} .
- $a(\cdot, \cdot) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal, continua y \mathbf{V} -elíptica en $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$.
- Una forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ se dice ser \mathbf{V} -elíptica si existe una constante positiva α tal que $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{\mathbf{V}}^2, \forall v \in \mathbf{V}$. Se dice continua si existe $C > 0$ tal que $|a(u, v)| \leq C \|u\|_{\mathbf{V}} \|v\|_{\mathbf{V}}, \forall u, v \in \mathbf{V}$
- En general no asumimos que $a(\cdot, \cdot)$ sea simétrica, desde que en algunas aplicaciones las formas bilineales no simétricas suelen surgir naturalmente.
- $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ es una funcional lineal continua.
- K es un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de \mathbf{V} .
- $j(\cdot) : \mathbf{V} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función propia, convexa y semicontinua inferiormente (s.c.i.).
- $\text{dom}(j) = \{v \in \mathbf{V} : j(v) < +\infty\}$, decimos que j es propia si $\text{dom}(j) \neq \emptyset$
- $\text{epi}(j) = \{(u, \xi) \in \mathbf{V} \times \mathbb{R} : j(v) \leq \xi\}$

Definición 1.1.1 (Espacio Normado) *Un espacio normado es una dupla $(\mathbf{V}, \|\cdot\|_{\mathbf{V}})$ donde \mathbf{V} es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_{\mathbf{V}}$ es una función de \mathbf{V} a \mathbb{R} llamada **norma** con las propiedades siguientes:*

- (i) $\|v\|_{\mathbf{V}} \geq 0$ para todo $v \in \mathbf{V}$, $\|v\|_{\mathbf{V}} = 0$ si y sólo si $v = 0$.
- (ii) $\|\alpha v\|_{\mathbf{V}} = |\alpha| \|v\|_{\mathbf{V}}$ para todo $v \in \mathbf{V}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (iii) $\|u + v\|_{\mathbf{V}} \leq \|u\|_{\mathbf{V}} + \|v\|_{\mathbf{V}}$ para todo $(u, v) \in \mathbf{V} \times \mathbf{V}$

La definición de espacio normado nos permite utilizar la cantidad $\|u - v\|_{\mathbf{V}}$ como una medida de la distancia entre u y v .

Definición 1.1.2 (Espacio Completo) *Un espacio normado \mathbf{V} se dice completo o de Banach si toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Definición 1.1.3 (Espacio de Producto Interno) *Un espacio de producto interno es una dupla $(\mathbf{V}, (\cdot, \cdot)_{\mathbf{V}})$ donde \mathbf{V} es un espacio vectorial y $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{V}}$ es una función de $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ a \mathbb{R} llamada **producto interno** con las propiedades siguientes:*

- (i) $(v, v)_{\mathbf{V}} \geq 0$ para todo $v \in \mathbf{V}$ y $(v, v)_{\mathbf{V}} = 0$ si y sólo si $v = 0$.
- (ii) $(u, v)_{\mathbf{V}} = (v, u)_{\mathbf{V}}$ para todo $u, v \in \mathbf{V}$
- (iii) $(u + v, w)_{\mathbf{V}} = (u, w)_{\mathbf{V}} + (v, w)_{\mathbf{V}}$ si $u, v, w \in \mathbf{V}$
- (iv) $(\xi u, v)_{\mathbf{V}} = \xi (u, v)_{\mathbf{V}}$ si $u, v \in \mathbf{V}$ y $\xi \in \mathbb{R}$

Observación 1.1.4 *El producto interno define una norma de la siguiente manera: $\|x\|_{\mathbf{H}} := \sqrt{(x, x)_{\mathbf{H}}}$. El espacio de producto interno \mathbf{V} se llamará **de Hilbert** si es completo con esta norma. Además se denotará simplemente (x, y) y $\|x\|$ al producto interno y norma cuando sea evidente el espacio en el que están definidos. En lo que sigue todos los espacios vectoriales empleados serán espacios vectoriales reales.*

Definición 1.1.5 (Forma bilineal) *Una forma bilineal $b(\cdot, \cdot)$ en un espacio vectorial \mathbf{V} es una función $b : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que cada mapeo $v \mapsto b(v, w)$ y $w \mapsto b(v, w)$ es una forma lineal en \mathbf{V} . Es simétrica si $b(v, w) = b(w, v)$ para todo $v, w \in \mathbf{V}$.*

Definición 1.1.6 (Forma bilineal \mathbf{V} -elíptica) *Sea \mathbf{V} un espacio vectorial normado, una forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ se dice que es \mathbf{V} -elíptica si existe una constante positiva α tal que*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{\mathbf{V}}^2 \quad \forall v \in \mathbf{V}.$$

Teorema 1.1.7 Si M es un conjunto no vacío, convexo y cerrado de un espacio de Hilbert \mathbf{V} , entonces para cada $u \in \mathbf{V}$ existe un único elemento, $u_0 \in M$ tal que $\|u - u_0\| = \inf_{v \in M} \|u - v\|$, y se le conoce como la proyección de u sobre M ,

$$u_0 = \text{Pr}_M(u)$$

Demostración: Ver [2]. ■

Definición 1.1.8 Una funcional p en un espacio vectorial \mathbf{V} se dice que es sublineal si

- (i) $p(u + v) \leq p(u) + p(v) \quad \forall u, v \in \mathbf{V}$
- (ii) $p(\alpha u) = \alpha p(u) \quad \forall u \in \mathbf{V} \quad \text{y} \quad \forall \alpha \geq 0$

El siguiente teorema nos permite extender una funcional lineal definida sobre un subespacio a todo el espacio.

Teorema 1.1.9 (Hahn-Banach) Sea \mathbf{V} un espacio vectorial, y $\mathbf{V}_0 \subset \mathbf{V}$ un subespacio. Suponiendo que $p : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ es una funcional sublineal y $l : \mathbf{V}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ una funcional lineal tal que $l(v) \leq p(v)$ para todo $v \in \mathbf{V}_0$. Entonces l puede ser extendida a \mathbf{V} tal que $l(v) \leq p(v)$ para todo $v \in \mathbf{V}$.

Demostración: Ver [2]. ■

Definición 1.1.10 Un hiperplano (afín) es un conjunto de la forma

$$\mathcal{H} = \{u \in \mathbf{V} : l(u) = \xi\}$$

donde l es una funcional lineal sobre \mathbf{V} , no idénticamente nula y $\xi \in \mathbb{R}$. Se dice que \mathcal{H} es un hiperplano de ecuación $[l = \xi]$.

Definición 1.1.11 Sean $A \subset \mathbf{V}$, $B \subset \mathbf{V}$. Se dice que el hiperplano \mathcal{H} de ecuación $[l = \xi]$ separa A de B en sentido amplio si

$$l(u) \leq \xi \quad \forall u \in A \quad \text{y} \quad l(u) \geq \xi \quad \forall u \in B.$$

Se dice que \mathcal{H} separa A de B en sentido estricto si existe $\delta > 0$ tal que

$$l(u) \leq \xi - \delta \quad \forall u \in A \quad \text{y} \quad l(u) \geq \xi + \delta \quad \forall u \in B.$$

Definición 1.1.12 (Conjunto convexo) Un subconjunto M de un espacio vectorial V , es convexo si

$$\lambda u + (1 - \lambda)v \in M, \quad \forall (u, v, \lambda) \in M \times M \times]0, 1[.$$

Definición 1.1.13 (Convergencia débil) Sea E un espacio vectorial, se dice que una sucesión $\{x_n\} \subset E$ converge débilmente a $x \in E$ si

$$l(x_n) \rightarrow l(x) \quad \forall l \in E'.$$

Teorema 1.1.14 Sean $A \subset V$, $B \subset V$ conjuntos convexos, no vacíos, disjuntos. Si A es cerrado y B es compacto, entonces existe un hiperplano cerrado que separa A y B en forma estricta.

Demostración: Ver [2]. ■

El teorema anterior nos permite examinar si un subespacio es denso mediante el siguiente

Corolario 1.1.15 Sea $W \subset V$ un subespacio vectorial tal que $\overline{W} \neq V$. Entonces existe $l \in V'$, $l \neq 0$ tal que

$$\langle l, u \rangle = 0 \quad \forall u \in W$$

Prueba: Como $\overline{W} \neq V$, entonces existe $a \in V$ que no pertenece a \overline{W} , por tanto $\{a\}$ es un conjunto compacto, convexo no vacío que puede ser separado en forma estricta de \overline{W} mediante un hiperplano cerrado \mathcal{H} de ecuación $[l = \xi]$. Ello implica que existe $\delta > 0$ tal que

$$l(u) \leq \xi - \delta \quad \forall u \in \overline{W}$$

y

$$l(a) \geq \xi + \delta.$$

de donde

$$l(u) < \xi < l(a) \quad \forall u \in \overline{W}$$

en especial si $u \in W$ entonces $\lambda u \in W$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, y por tanto

$$\lambda l(u) < \xi \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

de donde concluimos necesariamente que $l(u) = 0$ para todo $u \in W$. ■

El uso del corolario 1.1.15 es el siguiente: Consideramos $l \in V'$, escogida de forma arbitraria, tal que

$$l(u) = 0 \quad \forall u \in W$$

luego probamos que l es idénticamente nula en V' , y concluimos que $\overline{W} = V$, es decir W será denso en V .

Corolario 1.1.16 Sea $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ un subespacio vectorial. Si para toda $l \in \mathbf{V}'$ tal que

$$l(u) = 0 \quad \forall u \in \mathbf{W}$$

tenemos que $l \equiv 0$, entonces \mathbf{W} es denso en \mathbf{V} .

Prueba: Basta suponer que $\overline{\mathbf{W}} \neq \mathbf{V}$ para llegar a una contradicción pues en virtud al corolario 1.1.15 sabemos que existe $l \in \mathbf{V}'$, tal que

$$l(u) = 0 \quad \forall u \in \mathbf{W}$$

y que no es idénticamente nula en \mathbf{V}' . ■

Definición 1.1.17 (Semicontinuidad inferior) Sea \mathbf{V} un espacio normado, $A \subset \mathbf{V}$. Una función $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ será **semicontinua inferiormente (s.c.i.)** si para toda $\{u_n\} \subset A$ con $\{u_n\} \rightarrow u \in A$ se verifica siempre que

$$f(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n)$$

Definición 1.1.18 (Función convexa) Sea \mathbf{V} un espacio vectorial, $K \subset \mathbf{V}$ un conjunto convexo. Una función $f : K \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, se llamará convexa si

$$f(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v) \quad \forall (u, v, \lambda) \in K \times K \times]0, 1[.$$

La función f se llamará estrictamente convexa si la desigualdad anterior es estricta para $u \neq v$ y $\lambda \in]0, 1[$.

Definición 1.1.19 (Función propia) Sea \mathbf{V} un espacio vectorial y $K \subset \mathbf{V}$, una función $j : K \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, se dirá propia si

$$\text{dom}(j) \triangleq \{v \in \mathbf{V} : j(v) < +\infty\} \neq \emptyset$$

1.2 Inecuaciones variacionales elípticas (IVE)

Definición 1.2.20 (Inecuación Variacional Elíptica de primera especie) Sea \mathbf{V} un espacio de Hilbert, $a(\cdot, \cdot) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua y \mathbf{V} -elíptica en $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$, $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ una funcional lineal continua, K un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de \mathbf{V} .

Entonces el problema variacional de primera especie está definido como:

$$(P_1) \begin{cases} \text{Encontrar } u \in K, \text{ tal que:} \\ a(u, v - u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in K \end{cases}$$

Definición 1.2.21 (Inecuación Variacional Elíptica de segunda especie) Sea \mathbf{V} un espacio de Hilbert, $a(\cdot, \cdot) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua y \mathbf{V} -elíptica en $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$, $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ una funcional lineal continua, y $j : \mathbf{V} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa, propia y s.c.i.

Entonces el problema variacional de segunda especie está definido como:

$$(P_2) \begin{cases} \text{Encontrar } u \in \mathbf{V}, \text{ tal que:} \\ a(u, v - u) + J(v) - J(u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in \mathbf{V} \end{cases}$$

Definición 1.2.22 (Inecuación Quasi-variacional) Sea \mathbf{V} un espacio de Hilbert, $a(\cdot, \cdot) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua y \mathbf{V} -elíptica en $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$, $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ una funcional lineal continua, y $j : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que las aplicaciones $u \mapsto j(u, \cdot)$ y $v \mapsto j(\cdot, v)$ son funciones convexas, propias y s.c.i.

Entonces el problema quasi-variacional está definido como:

$$(P_3) \begin{cases} \text{Encontrar } u \in \mathbf{V}, \text{ tal que:} \\ a(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in \mathbf{V} \end{cases}$$

Observación 1.2.23 La distinción entre (P_1) y (P_2) es artificial, (P_1) puede ser considerado como un caso particular de (P_2) , reemplazando $j(\cdot)$ en (P_2) por la función indicatriz I_K de K definida por

$$I_K(v) = \begin{cases} 0, & \text{si } v \in K, \\ +\infty, & \text{si } v \notin K \end{cases}$$

que al ser K no vacío, convexo y cerrado, es propia, convexa y s.c.i.

Prueba:

(►) En efecto, si u_0 es solución de (P_1) , entonces $I_K(u_0) = 0$, $u_0 \in K$, y satisface (P_2) , pues:

(i) Si $v \in K$, entonces $I_K(v) = 0$ y

$$a(u_0, v - u_0) + I_K(v) - I_K(u_0) \geq L(v - u_0).$$

(ii) Si $v \notin K$, entonces $I_K(v) = +\infty$ y el resultado se obtiene de manera inmediata.

(◀) De igual, manera si u_0 es solución de (P_2) , debe satisfacer que:

$$a(u_0, v - u_0) + I_K(v) - I_K(u_0) \geq L(v - u_0), \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

Por tanto u_0 debe de pertenecer a K , pues si $u_0 \notin K$ entonces $I_K(u_0) = +\infty$ y si escogemos $v \in K \subset \mathbf{V}$, tenemos que $I_K(v) = 0$ y

$$a(u_0, v - u_0) - L(v - u_0) \geq I_K(u_0) = +\infty$$

Como esto no puede darse tenemos que $u_0 \in K$, luego $I_K(u_0) = 0$. De igual modo escogemos v cualquiera en K y como $I_K(v) = 0$

$$\Rightarrow a(u_0, v - u_0) - L(v - u_0) \geq I_K(u_0) = 0$$

$$\Rightarrow a(u, v - u_0) \geq L(v - u_0), \quad \forall v \in K.$$

$\therefore (P_1)$ es un caso particular de (P_2) . ■

Observación 1.2.24 *La existencia y unicidad de solución para el caso de las IQV está asegurada en algunos casos, además es posible dar otras definiciones de las inecuaciones quasi-variacionales como puede verse en [8] y en [3], donde además se dan las condiciones necesarias para la buena definición de problemas que involucran IQV. El problema que será objeto de la sección 3.3 no satisface algunas de las condiciones que aseguran su buena definición por lo que se analizará en forma particular.*

1.2.1 Existencia y unicidad de solución para las IVE

El estudio de la existencia y unicidad de la solución para la IVE's se realizará para las de segunda especie por ser un caso más general, pero antes mencionaremos algunos resultados necesarios.

Definición 1.2.25 (Espacio reflexivo) *Sea \mathbf{V} un espacio de Banach y J la inyección canónica de \mathbf{V} en \mathbf{V}'' definida como*

$$\langle Jv, f \rangle_{\mathbf{V}'', \mathbf{V}'} = \langle f, v \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} \quad \forall v \in \mathbf{V}, \forall f \in \mathbf{V}'$$

Se dice que \mathbf{V} es un espacio reflexivo si $J(\mathbf{V}) = \mathbf{V}''$.

Observación 1.2.26 *Nuestro trabajo se desarrolla principalmente en espacios de Hilbert los cuales son siempre reflexivos (ver [2]).*

Proposición 1.2.27 Sea \mathbf{V} un espacio de Banach, $K \subset \mathbf{V}$ un conjunto convexo, entonces K es cerrado si y solamente si toda sucesión $\{u_n\} \subset K$, débilmente convergente en \mathbf{V} converge a algún elemento de K .

Prueba:

- (i) Suponemos K es cerrado. Sea $\{u_n\} \subset K$, débilmente convergente a u en \mathbf{V} , razonando por el absurdo suponemos además que $u \notin K$ entonces existe según el teorema 1.1.14 un hiperplano cerrado que separa estrictamente K y $\{u\}$. Es decir existe $l \in \mathbf{V}'$ y $\xi \in \mathbb{R}$ tal que

$$l(v) < \xi < l(u) \quad , \forall v \in K$$

en especial

$$(1.1) \quad l(u_n) < \xi < l(u) \quad , \forall n$$

de aquí que

$$0 < l(u) - \xi < |l(u_n) - l(u)| \quad , \forall n$$

como $\{u_n\}$ converge débilmente a u entonces para $l(u) - \xi > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$l(u) - l(u_n) < l(u) - \xi \quad , \forall n > n_1$$

y por tanto

$$\xi < l(u_n) \quad , \forall n > n_1$$

lo cual es absurdo pues tenemos (1.1).

- (ii) Sea $\{u_n\} \subset K$ convergente en \mathbf{V} , como toda sucesión convergente es débilmente convergente y converge al mismo límite entonces $u \in K$ y por tanto K es cerrado. ■

Teorema 1.2.28 Sea \mathbf{V} un espacio de Banach, $A \subset \mathbf{V}$ y $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa y s.c.i. entonces para toda sucesión $\{u_n\} \subset A$ débilmente convergente a $u \in A$ se tiene que:

$$f(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n)$$

Prueba: Ver [2]. ■

Definición 1.2.29 Sea \mathbf{V} un espacio normado, y $A \subset \mathbf{V}$. Una función $f : \mathbf{V} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ se dice **coerciva** sobre A si

$$\lim_{\substack{v \in A \\ \|v\| \rightarrow +\infty}} f(v) = +\infty$$

Teorema 1.2.30 Sea \mathbf{V} un espacio normado y j una función convexa, s.c.i. y propia, sobre \mathbf{V} , entonces existe $l_j \in \mathbf{V}'$ y $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$j(v) \geq l_j(v) + c_0 \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

Prueba: Elegimos $v_0 \in \mathbf{V}$ tal que $j(v_0) < +\infty$ (v_0 existe pues j es propia) y $a_0 \in \mathbb{R}$ de manera que $a_0 < j(v_0)$, entonces $(v_0, a_0) \notin \text{epi}(j)$, $\text{epi}(j)$ es cerrado y convexo; siendo j s.c.i y convexa (ver [2]).

En virtud del teorema 1.1.14, existe un hiperplano \mathcal{H} que separa estrictamente $\text{epi}(j)$ y (v_0, a_0) , donde

$$\mathcal{H} = \{(v, a) \in \mathbf{V} \times \mathbb{R} : \Psi(v, a) = \beta\}$$

y Ψ es una funcional lineal continua no nula en $\mathbf{V} \times \mathbb{R}$ (ver [2]).

Ahora expresaremos Ψ como una descomposición de funcionales lineales en \mathbf{V} y en \mathbb{R} .

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbf{V}$, como $(0_{\mathbf{V}}, a)$ y $(v, 0_{\mathbb{R}}) \in \mathbf{V} \times \mathbb{R}$, entonces

$$\Psi(v, a) = \Psi((0_{\mathbf{V}}, a) + (v, 0_{\mathbb{R}})) = \Psi(0_{\mathbf{V}}, a) + \Psi(v, 0_{\mathbb{R}})$$

si definimos: $l(v) = \Psi(v, 0_{\mathbb{R}})$, y $g(a) = \Psi(0_{\mathbf{V}}, a)$, es inmediato ver que $l(v)$ es lineal en \mathbf{V} y g es lineal en \mathbb{R} . Además haciendo $\alpha = g(1)$ obtenemos que $g(a) = g(1 \cdot a) = \alpha a$, podemos expresar \mathcal{H} , como:

$$\mathcal{H} = \{(v, a) \in \mathbf{V} \times \mathbb{R} : l(v) + \alpha a = \beta\}$$

Según la definición de separación estricta, (v_0, a_0) y $\text{epi}(j)$ son separados por \mathcal{H} . Luego tenemos que:

$$(1.2) \quad l(v_0) + \alpha a_0 < \beta$$

$$(1.3) \quad l(v) + \alpha a > \beta, \quad \forall (v, a) \in \text{epi}(j)$$

En particular para $(v_0, j(v_0)) \in \text{epi}(j)$

$$(1.4) \quad l(v_0) + \alpha j(v_0) > \beta.$$

Así de (1.2) y (1.4) obtenemos que $\alpha(a_0 - j(v_0)) < 0$. Como $a_0 - j(v_0) < 0$ entonces $\alpha > 0$.

Por tanto en (1.3) podemos dividir por α , y como $(v, j(v)) \in \text{epi}(j)$ se obtiene que

$$\frac{l(v)}{\alpha} + j(v) > \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall v \in \mathbf{V}.$$

(Es inmediato que $l_j = -\frac{l(v)}{\alpha} \in \mathbf{V}'$ y $c_0 = \frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{R}$). ■

Teorema 1.2.31 Sea \mathbf{V} un espacio de Banach reflexivo, $K \subset \mathbf{V}$ un convexo, cerrado, no vacío, y $j : K \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funcional propia, convexa y s.c.i. Si además se tiene alguna de las dos condiciones siguientes:

- (i) K es acotado
- (ii) j es coerciva en K

entonces el problema de minimización

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in K, \text{ tal que} \\ j(u) = \inf_{v \in K} j(v) \end{array} \right.$$

tiene solución. Y si j es estrictamente convexa, entonces la solución es única.

Prueba: Ver [1] ó [2]. ■

Teorema 1.2.32 (Lions-Stampacchia) Sea \mathbf{V} un espacio de Hilbert, $a(\cdot, \cdot) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua y \mathbf{V} -elíptica en $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$, $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ una funcional lineal continua, y $j(\cdot) : \mathbf{V} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función propia convexa y s.c.i.

Entonces el problema variacional de segunda especie definido por:

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in \mathbf{V}, \text{ tal que:} \\ a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in \mathbf{V} \end{array} \right.$$

tiene solución única.

Demostración:

- (i) **Unicidad** Sean u_1, u_2 dos soluciones de (P_2) . Entonces:

$$(1.5) \quad a(u_1, v - u_1) + j(v) - j(u_1) \geq L(v - u_1) \quad \forall v \in \mathbf{V}, u_1 \in \mathbf{V}$$

$$(1.6) \quad a(u_2, v - u_2) + j(v) - j(u_2) \geq L(v - u_2) \quad \forall v \in \mathbf{V}, u_2 \in \mathbf{V}$$

Como $j(\cdot)$ es una funcional propia existe $v_0 \in \mathbf{V}$, tal que $-\infty < j(v_0) < \infty$.

Para $i = 1, 2$ se tiene

$$(1.7) \quad -\infty < j(u_i) \leq j(v_0) - L(v_0 - u_i) + a(u_i, v_0 - u_i)$$

esto muestra que $j(u_i) \in \mathbb{R}$. Luego substituyendo u_2 por v en (1.5), u_1 por v en (1.6) y sumando ambas ecuaciones, se obtiene:

$$(1.8) \quad a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0$$

De (1.8) y la hipótesis de \mathbf{V} -elipticidad de $a(\cdot, \cdot)$ se tiene el siguiente resultado:

$$0 \leq \alpha \|u_2 - u_1\|^2 \leq a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0$$

$\therefore u_2 = u_1$.

- (ii) **Existencia** Para probar la existencia de solución de (P_2) utilizaremos el siguiente problema (π_ρ^u) definido como:

$$(\pi_\rho^u) \left\{ \begin{array}{l} \text{Para cada } u \in \mathbf{V} \text{ y } \rho > 0, \text{ encontrar } w \in \mathbf{V}: \\ (w, v - w) + \rho j(v) - \rho j(w) \geq (u, v - w) + \rho L(v - w) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad -\rho a(u, v - w) \quad \forall v \in \mathbf{V} \end{array} \right.$$

La ventaja de considerar este problema frente al problema (P_2) es que la forma bilineal asociada con (π_ρ^u) es el producto interno de \mathbf{V} , el cual es simétrico.

Supongamos que (π_ρ^u) tiene una solución única para todo $u \in \mathbf{V}$ y $\rho > 0$.

Entonces para cada ρ definimos la función $f_\rho : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ por $f_\rho(u) = w$ donde w es la solución única de (π_ρ^u) .

Ahora mostraremos que f_ρ es una contracción estricta para valores apropiados de ρ .

En efecto, sean $u_1, u_2 \in \mathbf{V}$, y $w_i = f_\rho(u_i)$, $i = 1, 2$. Desde que j es propia tenemos que $j(w_i) \in \mathbb{R}$ (ver (1.7)). Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} (w_1, w_2 - w_1) + \rho j(w_2) - \rho j(w_1) &\geq (u_1, w_2 - w_1) + \rho L(w_2 - w_1) \\ &\quad \quad \quad -\rho a(u_1, w_2 - w_1) \\ (w_2, w_1 - w_2) + \rho j(w_1) - \rho j(w_2) &\geq (u_2, w_1 - w_2) + \rho L(w_1 - w_2) \\ &\quad \quad \quad -\rho a(u_2, w_1 - w_2) \end{aligned}$$

sumando obtenemos:

$$(w_1 - w_2, w_2 - w_1) \geq (u_1 - u_2, w_2 - w_1) + \rho a(u_2 - u_1, w_2 - w_1)$$

y reordenando términos:

$$\|w_1 - w_2\|^2 \leq (u_2 - u_1, w_2 - w_1) - \rho a(u_2 - u_1, w_2 - w_1)$$

De acuerdo al Teorema de Representación de Riesz (ver [2]) para espacios de Hilbert existe $A \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ tal que

$$(Au, v) = a(u, v) \quad \forall u, v \in \mathbf{V}$$

reemplazando tenemos que:

$$(u_2 - u_1, w_2 - w_1) - \rho a(u_2 - u_1, w_2 - w_1) = ((\mathbb{I} - \rho A)(u_2 - u_1), w_2 - w_1),$$

por tanto

$$\begin{aligned} \|f_\rho(u_1) - f_\rho(u_2)\|_{\mathbf{V}}^2 &= \|w_1 - w_2\|^2 \leq \\ &\leq ((\mathbb{I} - \rho A)(u_2 - u_1), w_2 - w_1) \leq \\ &\leq \|(\mathbb{I} - \rho A)(u_2 - u_1)\| \|w_2 - w_1\| \end{aligned}$$

como la forma bilineal es coerciva (por hipótesis) se puede obtener

$$\begin{aligned} \|(\mathbb{I} - \rho A)u\|^2 &= \|u\|^2 + \rho^2 \|Au\|^2 - 2\rho(Au, u) \\ &\leq \|u\|^2 + \rho^2 \|Au\|^2 - 2\rho\alpha \|u\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + \rho^2 \|A\|_{\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V})}^2 \|u\|^2 - 2\rho\alpha \|u\|^2 \\ &\leq \left(1 - 2\rho\alpha + \rho^2 \|A\|_{\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V})}^2\right) \|u\|^2 \end{aligned}$$

y por tanto si $1 - 2\rho\alpha + \rho^2 \|A\|_{\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V})}^2 < 1$ es decir si $\rho < \frac{2\alpha}{\|A\|^2}$

$$\|f_\rho(u_1) - f_\rho(u_2)\| < \|u_2 - u_1\|$$

por tanto f_ρ resulta ser una aplicación contractiva, y de acuerdo con el teorema del punto fijo de Banach (ver [4]) $\exists u^* \in \mathbf{V}$ tales que $f_\rho(u^*) = u^*$ y u^* satisface

$$(u^*, v - u^*) + \rho J(v) - \rho j(u^*) \geq (u^*, v - u^*) + \rho L(v - u^*) - \rho a(u^*, v - u^*)$$

por tanto

$$a(u^*, v - u^*) + J(v) - j(u^*) \geq L(v - u^*) \quad \forall v \in \mathbf{V} \quad \blacksquare$$

Ahora verificaremos que la existencia y unicidad de solución del problema (π_ρ^u) está garantizada por el siguiente lema:

Lema 1.2.33 *Sea $b : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ sea un forma bilineal \mathbf{V} -elíptica, simétrica y continua con constante \mathbf{V} -elíptica β . Sea $L \in \mathbf{V}'$ y $j : \mathbf{V} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa, propia y s.c.i. Si definimos J como*

$$J(v) = \frac{1}{2}b(v, v) + J(v) - L(v)$$

entonces el problema de minimización:

$$(1.9) \quad (\pi) \begin{cases} \text{Encontrar } u \in \mathbf{V} \text{ tal que} \\ J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in \mathbf{V} \end{cases}$$

Tiene solución única equivalente a la solución del problema dado por

$$(1.10) \quad (P_{2b}) \begin{cases} \text{Encontrar } u \in \mathbf{V} \text{ tal que} \\ b(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in \mathbf{V} \end{cases}$$

Prueba: Desde que la funcional $v \mapsto b(v, v)$, es estrictamente convexa, j es convexa y L lineal, tenemos que J estrictamente convexa. J es s.c.i., pues j es s.c.i, b y L son continuas.

Desde que j es convexa, s.c.i. y propia, existen de acuerdo al lema 1.2.30, $l \in \mathbf{V}'$ y $\xi \in \mathbb{R}$ tal que

$$J(v) \geq l(v) + \xi$$

entonces

$$\begin{aligned} J(v) &\geq \frac{1}{2}\beta \|v\|^2 - (L - l)(v) + \xi \geq \\ &\geq \frac{1}{2}\beta \|v\|^2 - \|L - l\| \|v\| + \xi \end{aligned}$$

y de aquí:

$$J(v) \geq \frac{\beta}{2} \left(\|v\| - \frac{\|L - l\|}{\beta} \right)^2 + \xi - \frac{\|L - l\|^2}{2\beta}$$

entonces:

$$J(v) \rightarrow +\infty \quad \text{cuando} \quad \|v\| \rightarrow \infty$$

y por tanto de acuerdo al lema 1.2.31 existe única solución para el problema de optimización (π)

Caracterización de u : Ahora mostraremos que el problema (π) es equivalente a (1.10)

(i) Sean $0 \leq t \leq 1$ y u solución de (π) , entonces para todo $v \in \mathbf{V}$ tenemos que:

$$(1.11) \quad J(u) \leq J(u + t(v - u))$$

Sea $J_0(v) = \frac{1}{2}b(v, v) - L(v)$, luego (1.11) llega a ser:

$$(1.12) \quad \begin{cases} 0 \leq J_0(u + t(v - u)) - J_0(u) + j(u + t(v - u)) - j(u) \\ \leq J_0(u + t(v - u)) - J_0(u) + t(j(v) - j(u)) \quad \forall v \in \mathbf{V} \end{cases}$$

usando la convexidad de J .

Dividiendo por t en (1.12) y tomando el límite cuando $t \rightarrow 0$ obtenemos

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{J_0(u + t(v - u)) - J_0(u)}{t} \right] + (J(v) - J(u))$$

$$(1.13) \quad 0 \leq \left(J'_0(u), v - u \right) + J(v) - J(u) \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

de acuerdo con la definición de diferencial de Gateaux.

Como $b(\cdot, \cdot)$ es simétrica tenemos:

$$(1.14) \quad \left(J'_0(u), w \right) = b(v, w) + L(w) \quad \forall v, w \in \mathbf{V}$$

Por lo tanto de (1.13) y de (1.14) se obtiene:

$$b(u, v - u) + J(v) - J(u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

con lo que se prueba la condición necesaria.

(ii) Sea u solución de (1.10) y $v \in \mathbf{V}$, entonces:

$$J(v) - J(u) = \frac{1}{2} [b(v, v) - b(u, u)] + J(v) - J(u) - L(v - u)$$

pero

$$\begin{aligned} b(v, v) &= b(u + v - u, u + v - u) \\ &= b(u, u) + 2b(v, v - u) + b(u - v, u - v) \end{aligned}$$

por tanto

$$J(v) - J(u) = b(v, v - u) + J(v) - J(u) - L(v - u) + \frac{1}{2}b(u - v, u - v)$$

como u es solución de (1.10) y $b(u - v, u - v) \geq 0$ obtenemos

$$J(v) - J(u) \geq 0$$

En conclusión u es solución del problema (π) . ■

Observación 1.2.34 *En el lema anterior, tomando $b(\cdot, \cdot)$ como el producto interno de \mathbf{V} y reemplazando $J(v)$ y $L(v)$ por $J(v)$ y $(u, v) + \rho L(v) - \rho a(u, v)$ respectivamente, se obtiene la existencia de solución para (π_ρ^u) .*

1.3 Derivadas débiles

Introducimos la notación de multi-índice para el cálculo de derivadas parciales. Un multi-índice, α , es una d -dupla de enteros no-negativos, α_i . La “longitud” de α está dada por $|\alpha| := \sum_{i=1}^d \alpha_i$. Con esta notación si $v \in C^m(\Omega)$ entonces para cualquier α con $|\alpha| \leq m$,

$$D^\alpha v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} v(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

es la derivada parcial de α^{th} orden. Por ejemplo

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = D^\alpha v \text{ para } \alpha = (1, 0, \dots, 0)$$

$$\frac{\partial^d v}{\partial x_1 \cdots \partial x_d} = D^\alpha v \text{ para } \alpha = (1, 1, \dots, 1)$$

En lo que sigue Ω designa un conjunto abierto en \mathbb{R}^d con frontera Γ y se consideran los espacios $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, dotados de la medida de Lebesgue d -dimensional.

Definición 1.3.35 Definimos el conjunto $L_{loc}^p(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ como el conjunto de funciones f tales que:

$$f \in L^p(K) \quad \forall \text{ compacto } K \subset \Omega$$

Un ejemplo de función localmente p -integrable es

$$f(x) = \exp(d(x, \Gamma)^{-1}) \operatorname{sen}(d(x, \Gamma)^{-1})$$

Así tomando $K \subset \Omega$, K compacto tenemos que existe $\delta > 0$ tal que $d(x, \Gamma) \geq \delta$ para todo $x \in K$ por tanto $f(x)$ es continua en K y en consecuencia p -integrable en K . Pero claro $f(x) \rightarrow +\infty$ cuando $d(x, \Gamma) \rightarrow 0$.

Teorema 1.3.36 (Urysohn) Sea $G \subset \mathbb{R}^d$ un abierto y $K \subset G$ un conjunto compacto, entonces existe $f \in C_c(G)$ tal que

- (i) $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in G$
- (ii) $f(x) = 1$ para todo $x \in K$

Demostración: Ver [2]. ■

Teorema 1.3.37 El espacio $C_c(\Omega)$ es denso en $L^1(\Omega)$

Demostración: Ver [2]. ■

Lema 1.3.38 Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$(1.15) \quad \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega)$$

entonces $f = 0$ c.t.p. en Ω

Demostración:

- (i) Suponemos primero que además $f \in L^1(\Omega)$ y $|\Omega| < \infty$. Entonces para $\varepsilon > 0$ existe por el teorema 1.3.37, $f_1 \in C_c(\Omega)$ tal que $\|f - f_1\|_{L^1} < \varepsilon$. Entonces de (1.15)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f_1(x) \varphi(x) \, dx \right| &= \left| \int_{\Omega} (f_1 - f)(x) \varphi(x) \, dx \right| \leq \\ &\leq \|f - f_1\|_{L^1} \|\varphi\|_{L^\infty} < \varepsilon \|\varphi\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

Sean $[f_1 \geq \varepsilon]$, $[f_1 \leq -\varepsilon]$ compactos disjuntos (f_1 es continua y Ω acotado). Entonces es posible construir gracias al teorema 1.3.36 una función $u_0 \in C_c(\Omega)$ tal que

$$u_0(x) = \begin{cases} +1 & : x \in [f_1 \geq \varepsilon] \\ -1 & : x \in [f_1 \leq -\varepsilon] \end{cases}$$

y

$$|u_0(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \Omega$$

haciendo $K = [f_1 \geq \varepsilon] \cup [f_1 \leq -\varepsilon]$ tenemos

$$\int_{\Omega} f_1(x) u_0(x) \, dx = \int_{\Omega \setminus K} f_1(x) u_0(x) \, dx + \int_K f_1(x) u_0(x) \, dx$$

además

$$\begin{aligned} \int_K |f_1(x)| \, dx &= \int_K f_1(x) u_0(x) \, dx < \varepsilon - \int_{\Omega \setminus K} f_1(x) u_0(x) \, dx < \\ &< \varepsilon + \int_{\Omega \setminus K} |f_1(x)| \, dx \end{aligned}$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f_1(x)| \, dx &= \int_{\Omega \setminus K} |f_1(x)| \, dx + \int_K |f_1(x)| \, dx < \\ &< \varepsilon + 2 \int_{\Omega \setminus K} |f_1(x)| \, dx < \\ &< \varepsilon + \int_{\Omega \setminus K} |f_1(x)| \, dx < \varepsilon + |\Omega| \varepsilon \end{aligned}$$

pues $|f_1(x)| < \varepsilon$ en $\Omega \setminus K$. Así que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x)| \, dx &\leq \int_{\Omega} |f_1(x) - f(x)| \, dx + \int_{\Omega} |f_1(x)| \, dx \\ &\leq 2\varepsilon + |\Omega| \varepsilon \end{aligned}$$

y como ε es arbitrario concluimos que $f = 0$ c.t.p. en Ω

(ii) Consideremos ahora el caso general. Escogemos

$$\Omega_n = \left\{ x \in \Omega : \inf_{y \in \mathbb{C}\Omega} \{\|x - y\|\} > \frac{1}{n} \text{ y } \|x\| < n \right\}$$

y a continuación probaremos que $\Omega = \bigsqcup_n \Omega_n$

1. Sea $x \in \Omega$, entonces existe una vecindad de x de radio δ incluida en Ω , de modo que si $y \in \mathbb{C}\Omega$ entonces $\|x - y\| \geq \delta$ y por tanto $\inf_{y \in \mathbb{C}\Omega} \{\|x - y\|\} \geq \delta$. Bastará escoger $n_0 \in \mathbb{N}$ como

$$n_0 > \max \left\{ \frac{1}{\delta}, \|x\| \right\}$$

para asegurar que $x \in \Omega_{n_0} \subset \bigsqcup_n \Omega_n$ y por consecuencia obtener que

$$\Omega \subset \bigsqcup_n \Omega_n$$

2. Sea $x \in \bigsqcup_n \Omega_n$, entonces existe al menos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \Omega_{n_0}$, y por definición del conjunto Ω_{n_0} sabemos que $x \in \Omega$, es decir

$$\bigsqcup_n \Omega_n \subset \Omega$$

Como $\overline{\Omega}_n$ es compacto y $\overline{\Omega}_n \subset \Omega$ entonces $f \in \mathbf{L}^1(\Omega_n)$ y podemos aplicar la conclusión precedente y obtener que

$$f = 0 \text{ c.t.p. en } \Omega_n$$

y como $\Omega = \bigsqcup_n \Omega_n$ entonces

$$f = 0 \text{ c.t.p. en } \Omega. \quad \blacksquare$$

Definición 1.3.39 (Derivada débil) Decimos que una función $f \in \mathbf{L}^1_{loc}(\Omega)$ tiene derivada débil, $D^\alpha f$, cuando exista una función $g \in \mathbf{L}^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} g(x) \phi(x) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) D^\alpha \phi(x) \, dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

y la denotamos por $D^\alpha f = g$

Notemos que si $v \in \mathbf{C}^m(\Omega)$, entonces para cada α con $|\alpha| \leq m$, la derivada parcial “clásica” coincide con $D^\alpha v$. Además la derivada débil está definida de manera única salvo en un conjunto de medida nula. Usando la noción de derivada débil, podemos generalizar las normas y espacios de Lebesgue para que incluyan derivadas.

Definición 1.3.40 Dado $x \in \mathbb{R}^d$ escribiremos

$$x = (x', x_d) \text{ con } x' \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad x' = (x_1, x_2, \dots, x_{d-1})$$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un abierto acotado y F un espacio de funciones de \mathbb{R}^{d-1} a \mathbb{R} . Se dice que $\partial\Omega$ es de clase \mathbf{F} , o que Ω es un dominio \mathbf{F} , si para todo $x \in \partial\Omega$ existe una vecindad U de x en \mathbb{R}^d y una aplicación $H \in \mathbf{F}$ tal que tal que:

$$U \cap \Omega = \{y \in U : y_d > H(y')\}$$

1.4 Espacios de Sobolev

Definición 1.4.41 (Espacios de Sobolev de orden entero) Sea k un entero no negativo, y sea $v \in \mathbf{L}^1_{loc}(\Omega)$. Supongamos que $D^\alpha v$ exista para todo $|\alpha| \leq k$. Definimos entonces la norma de Sobolev como:

$$\|v\|_{\mathbf{W}^k_p(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

en el caso $1 \leq p < \infty$, y como

$$\|v\|_{\mathbf{W}_\infty^k(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}$$

en el caso $p = \infty$

En cada caso, definimos los espacios de Sobolev como

$$\mathbf{W}_p^k(\Omega) = \left\{ v \in \mathbf{L}_{loc}^1(\Omega) : \|v\|_{\mathbf{W}_p^k(\Omega)} < \infty \right\}.$$

También definimos una seminorma en $\mathbf{W}_p^k(\Omega)$ como

$$|v|_{\mathbf{W}_p^k(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha v\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} & : 1 \leq p < \infty \\ \max_{|\alpha|=k} \|D^\alpha v\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} & : p = \infty \end{cases}$$

En los sucesivos denotaremos $\mathbf{W}^{k,2}(\Omega)$ como $\mathbf{H}^k(\Omega)$, que son los espacios en que comúnmente se analizan los operadores diferenciales.

Teorema 1.4.42 *Los espacios de Sobolev $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$ son espacios de Banach y por tanto los espacios $\mathbf{H}^k(\Omega)$ son espacios de Hilbert con el producto interno*

$$(u, v)_{\mathbf{H}^k} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) \, dx \quad \forall u, v \in \mathbf{H}^k(\Omega)$$

Demostración: Ver [1]. ■

Observación 1.4.43 *Si Ω es suficientemente regular entonces la norma $\mathbf{W}_p^k(\Omega)$ es equivalente a la norma*

$$\|u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}$$

Ver [2].

Los siguientes son teoremas de densidad que nos permiten aproximar funciones en espacios de Sobolev por funciones suficientemente suaves bajo algunas condiciones respecto a la región Ω

Teorema 1.4.44 Si $v \in \mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$, con $1 \leq p < +\infty$ entonces existe una sucesión $\{v_n\} \subset \mathbf{C}^\infty(\Omega) \cap \mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_{\mathbf{W}^{k,p}} = 0$$

Demostración: Ver [1]. ■

Teorema 1.4.45 Si $v \in \mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ y además Ω es un dominio Lipschitz, entonces existe una sucesión $\{v_n\} \subset \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega})$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_{\mathbf{W}^{k,p}} = 0$$

Demostración: Ver [1]. ■

Teorema 1.4.46 Si $v \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ y además Ω es de clase \mathbf{C}^1 , entonces existe una sucesión $\{v_n\} \subset \mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tal que $v_n|_\Omega \rightarrow v$ en $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$.

Demostración: Ver [2]. ■

Teorema 1.4.47 Si $k \geq 0$ y $1 \leq p < +\infty$; entonces $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ es denso en $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$.

Demostración: Ver [1]. ■

Teorema 1.4.48 Suponemos $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio Lipschitz abierto, no vacío con frontera acotada. Entonces para $k \geq 1$ entero y $1 \leq p < \infty$:

$$\begin{aligned} \text{si } \frac{1}{p} - \frac{k}{d} > 0, \text{ tenemos que } \mathbf{W}^{k,p}(\Omega) &\subset \mathbf{L}^q(\Omega) & \forall q \leq p^*, \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{k}{d}, \\ \text{si } \frac{1}{p} - \frac{k}{d} = 0, \text{ tenemos que } \mathbf{W}^{k,p}(\Omega) &\subset \mathbf{L}^q(\Omega) & \forall q < +\infty, \\ \text{si } \frac{1}{p} - \frac{k}{d} < 0, \text{ tenemos que } \mathbf{W}^{k,p}(\Omega) &\subset \mathbf{L}^\infty(\Omega), \end{aligned}$$

con inyección continua.

Además si $k - \frac{d}{p} > 0$ no es un entero, hacemos

$$l = \left[k - \frac{d}{p} \right] \quad \text{y} \quad \theta = k - \frac{d}{p} - l \quad (0 < \theta < 1).$$

luego para todo $u \in \mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$ se tiene las siguientes desigualdades

$$\|D^\alpha u\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \|u\|_{\mathbf{W}^{k,p}} \quad \forall |\alpha| \leq l$$

y

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C |x - y|^\theta \|u\|_{\mathbf{W}^{k,p}} \quad \text{c.t.p. de } \Omega, \forall \alpha, |\alpha| \leq l.$$

donde C es una constante (que sólo depende de p, k y d).

Demostración: Ver [2]. ■

Corolario 1.4.49 Bajo las condiciones del teorema 1.4.48 se puede probar que

$$(1.16) \quad \mathbf{W}^{m,p}(\Omega) \subset \mathbf{C}^l(\overline{\Omega}).$$

Demostración: Ver [2]. ■

Observación 1.4.50 El corolario 1.4.49 implica la existencia de una función continua \tilde{u} , tal que $u = \tilde{u}$ c.t.p. en $\overline{\Omega}$.

Es decir toda función $u \in \mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$, $k > \frac{d}{p}$ admite un representante de clase $\mathbf{C}^{[k-\frac{d}{p}]}(\overline{\Omega})$, esto es importante cuando se trata con funciones de \mathbf{H}^2 con $(\Omega) \Omega \subset \mathbb{R}^2$ ya que utilizando el teorema anterior con $k = 2, p = 2$ y $d = 2$; se tiene que $k - \frac{d}{p} = 1$ y por tanto obtenemos que $\mathbf{H}^2(\Omega) \subset \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$ lo que permite usar las propiedades conocidas de las funciones continuas.

Observación 1.4.51 Si se considera que Ω es acotado en \mathbb{R}^d , entonces las inyecciones enunciadas en el teorema 1.4.48 son compactas. La verificación se puede ver en [2].

Definición 1.4.52 Se define como la cerradura de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$, al espacio funcional $\mathbf{W}_0^{k,p}(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$. En particular para $p = 2$

$$\mathbf{H}_0^k(\Omega) \equiv \mathbf{W}_0^{k,2}(\Omega)$$

Teorema 1.4.53 (Desigualdad de Poincaré) Suponemos Ω un abierto acotado en al menos una dirección. Entonces existe una constante C (dependiendo sólo de Ω y p) tal que

$$\|u\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^p} \quad \forall u \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty).$$

En particular la expresión $\|\nabla u\|_{\mathbf{L}^p}$ es una norma de $\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente a la norma $\|u\|_{\mathbf{W}^{1,p}}$ del espacio $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

La expresión $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ es un producto interno que induce a la norma $\|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2}$ equivalente a $\|u\|_{\mathbf{H}^1}$

Demostración: Ver [2]. ■

Teorema 1.4.54 Sea Ω un conjunto abierto, acotado y conexo en \mathbb{R}^d con frontera Lipschitz. Asumiendo que: $\Gamma_0 \subset \Gamma$ (frontera de Ω), $\Gamma_0 \neq \emptyset$, $|\Gamma_0| > 0$. Entonces existe una constante $C > 0$ (dependiendo sólo de Ω y p), tal que

$$\|u\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} \leq C \left(\|u\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} + \|\gamma_0 u\|_{\mathbf{L}^p(\Gamma_0)} \right) \quad \forall u \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega).$$

En particular

$$\|u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \quad \forall u \in \mathbf{H}_{\Gamma_0}^1(\Omega).$$

donde

$$\mathbf{H}_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \gamma_0 v = 0 \text{ en } \Gamma_0\}$$

Demostración: Ver [1]. ■

Definición 1.4.55 (Espacios de Sobolev de orden real) Sea $s = k + \delta$ con $k \geq 0$ y $\delta \in]0, 1[$. Definimos el espacio de Sobolev de orden real positivo para $p \in [0, \infty[$ como

$$\mathbf{W}_p^s(\Omega) := \left\{ v \in \mathbf{W}_p^k(\Omega) : \frac{|D^\alpha v(x) - D^\alpha v(y)|}{\|x - y\|^{\delta + \frac{N}{p}}} \in \mathbf{L}^p(\Omega \times \Omega) : \forall \alpha : |\alpha| = k \right\}$$

dotado de la norma

$$\|v\|_{\mathbf{W}_p^s(\Omega)} = \left\{ \|v\|_{\mathbf{W}_p^k(\Omega)}^p + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|D^\alpha v(x) - D^\alpha v(y)|^p}{\|x - y\|^{\delta p + N}} dx dy \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema 1.4.56 Los espacios de Sobolev $\mathbf{W}^{s,p}(\Omega)$ son espacios de Banach. Son reflexivos si y sólo si $p \in]1, \infty[$.

Demostración: Ver [1]. ■

Definición 1.4.57 (Espacios de Sobolev de orden negativo) Sean $s \geq 0$ real, $p \in]1, \infty[$ y p' (exponente conjugado de p) tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, se define como el dual de $\mathbf{W}^{s,p}(\Omega)$ al espacio funcional de orden negativo $\mathbf{W}^{-s,p'}(\Omega)$.

En particular para $p = 2$, el dual de $\mathbf{W}^{s,2}(\Omega)$ está definido por $\mathbf{W}^{-s,2}(\Omega)$ tal que

$$\mathbf{H}^{-s}(\Omega) \equiv \mathbf{W}^{-s,2}(\Omega).$$

Los siguientes teoremas nos permiten estudiar el comportamiento de las funciones que admiten derivada débil en la frontera de Ω .

Teorema 1.4.58 *Sea Ω un conjunto abierto, acotado y de Lipschitz. Entonces existe un operador lineal continuo $\gamma_0 : \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}^p(\Gamma)$, $1 \leq p < \infty$, tal que:*

(i) $\gamma_0 v = v|_{\Gamma}$ si $v \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathbf{C}(\overline{\Omega})$.

(ii) Existe $c_1 > 0$, de manera que:

$$\|\gamma_0 v\|_{\mathbf{L}^p(\Gamma)} \leq c_1 \|v\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} \quad \forall v \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$$

(iii) Existe $c_2 > 0$, de manera que:

$$\|\gamma_0 v\|_{\mathbf{W}^{1-1/p,p}(\Gamma)} \leq c_2 \|v\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} \quad \forall v \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$$

además el operador traza γ_0 es sobreyectivo, es decir $\gamma_0(\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)) = \mathbf{W}^{1-1/p,p}(\Gamma)$

(iv) El núcleo del operador traza es $\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$, es decir

$$\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega) = \{v \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) : \gamma_0 v = 0\}$$

(v) La aplicación $\gamma_0 : \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}^p(\Gamma)$ es compacta, es decir para cualquier sucesión acotada $\{v_n\}$ en $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$, existe una subsucesión $\{v'_n\} \subset \{v_n\}$ tal que $\{\gamma_0 v'_n\}$ es convergente $\mathbf{L}^p(\Gamma)$

De igual modo asumamos Ω un conjunto abierto y acotado de clase $\mathbf{C}^{1,1}$ con frontera Γ . Si $1 \leq p < \infty$ y $m > 1 + \frac{1}{p}$. Entonces existen únicos operadores lineales continuos y sobreyectivos $\gamma_0 : \mathbf{W}^{m,p}(\Omega) \rightarrow \mathbf{W}^{m-1/p,p}(\Gamma)$ y $\gamma_1 : \mathbf{W}^{m,p}(\Omega) \rightarrow \mathbf{W}^{m-1-1/p,p}(\Gamma)$ tal que $\gamma_0 v = v|_{\Gamma}$ y $\gamma_1 v = \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)|_{\Gamma}$ si $v \in \mathbf{W}^{m,p}(\Omega) \cap \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$

Demostración: Ver [1]. ■

Teorema 1.4.59 (Fórmulas de Green) *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio Lipschitz abierto y acotado. Entonces*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Gamma} u v n_i \, d\Gamma \quad \forall u, v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$$

donde $n = (n_1, \dots, n_d)$ es el vector normal unitario exterior a Γ . También se tiene

$$- \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma \quad \forall u \in \mathbf{H}^2(\Omega), v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$$

y

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}) v \, \mathbf{d}x = - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla v \, \mathbf{d}x + \int_{\Gamma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) v \, \mathbf{d}\Gamma \quad \forall \mathbf{u} \in (\mathbf{H}^1(\Omega))^d, v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$$

para $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$ y donde

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

es la divergencia de \mathbf{u} ; $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ es la componente normal de \mathbf{u} en Γ

Demostración: Ver [1]. ■

Capítulo 2

Teoría de la Dualidad y su aplicación en la resolución de las IVE's

En este capítulo introduciremos la teoría de dualidad como un medio que nos permita plantear un algoritmo de aproximación para la solución del problema de minimización visto en el lema 1.2.33. En esa dirección haremos uso de la subdiferencial asociada a j , un funcional no diferenciable, entendiéndola en el contexto de los operadores multivaluados monótonos. Estos conceptos nos facilitan formular un problema dual equivalente al problema planteado y apropiado para aplicar el Método de Elementos Finitos y así poder obtener una solución numérica.

2.1 Operadores Multivaluados y la subdiferenciabilidad

Como siempre \mathbf{V} denota un espacio de Hilbert con producto interno (\cdot, \cdot) y norma asociada $\|\cdot\|$, \mathbf{V}' denota el dual de \mathbf{V} , es decir el espacio de las funcionales lineales y continuas de \mathbf{V} en \mathbb{R} , y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}}$ la relación de dualidad entre \mathbf{V}' y \mathbf{V} , además denotaremos por $\mathcal{P}(\mathbf{V})$ a la colección de partes de \mathbf{V} . Un operador $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{V})$, $T : x \mapsto Tx$ se dirá multivaluado. La estructura algebraica de $\mathcal{P}(\mathbf{V})$ está dada por las siguientes operaciones:

- Para $z \in \mathcal{P}(\mathbf{V})$, $w \in \mathcal{P}(\mathbf{V})$ se define $z + w$ como el conjunto

$$z + w = \{z_1 + w_1 : z_1 \in z \quad \wedge \quad w_1 \in w\} \in \mathcal{P}(\mathbf{V})$$

- Si $v \in \mathbf{V}$ y $z \in \mathcal{P}(\mathbf{V})$ se define $v + z$ como el conjunto

$$v + z = \{v + z_1 : z_1 \in z\} \in \mathcal{P}(\mathbf{V})$$

- Para $z \in \mathcal{P}(\mathbf{V})$, $w \in \mathcal{P}(\mathbf{V})$ se define $z.w$ como el conjunto

$$z.w = \{z_1 w_1 : z_1 \in z \quad \wedge \quad w_1 \in w\} \in \mathcal{P}(\mathbf{V})$$

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathcal{P}(\mathbf{V})$ se define λz como el conjunto

$$\lambda z = \{\lambda z_1 : z_1 \in z\} \in \mathcal{P}(\mathbf{V})$$

Daremos además algunas otras definiciones que nos servirán en la teoría que desarrollaremos mas adelante:

Definición 2.1.1 *El Grafo de un operador multivaluado T , se define como el conjunto*

$$Gr(T) = \{(x, y) \in \mathbf{V} \times \mathbf{V} : y \in Tx\}$$

Definición 2.1.2 *El Dominio de un operador multivaluado T se define como:*

$$Dom(T) = \{x \in \mathbf{V} : Tx \neq \emptyset\}$$

Definición 2.1.3 *El operador T es monótono en un subconjunto $C \subset \mathbf{V}$ si*

$$(x - y, u - v) \geq 0, \quad \forall x, y \in C, \forall u \in Tx, \forall v \in Ty$$

Definición 2.1.4 *El operador monótono T se dice maximal si su grafo no está contenido propiamente en el grafo de cualquier otro operador monótono de \mathbf{V} en $\mathcal{P}(\mathbf{V})$*

Es bien conocido (ver [6]) que para cada $u \in \mathbf{V}$ y $\lambda > 0$ existe un único $z \in \mathbf{V}$ tal que

$$u \in (\mathbb{I} + \lambda T)(z)$$

esto motiva la siguiente definición:

Definición 2.1.5 *Se define el operador Resolvente de T de orden λ , $J_\lambda^T : \mathbf{V} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{V})$ como*

$$J_\lambda^T(v) = (\mathbb{I} + \lambda T)^{-1}(v) \quad \forall v \in \mathbf{V},$$

donde \mathbb{I} denota el operador identidad $\mathbb{I} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, $\mathbb{I}(v) = v$, y $\lambda > 0$.

Definición 2.1.6 *La Aproximación Yosida de T de orden λ , $T_\lambda : \mathbf{V} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{V})$ se define como*

$$T_\lambda(v) = \frac{1}{\lambda} (\mathbb{I} - J_\lambda^T)(v), \quad \lambda > 0.$$

Definición 2.1.7 *Un operador $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ es lipschitziano de orden λ , si existe $\lambda > 0$, de modo que:*

$$\|Tu - Tv\| \leq \lambda \|u - v\| \quad \forall u, v \in \mathbf{V}.$$

se dirá contractivo si $\lambda < 1$.

Definición 2.1.8 Para una funcional $j : \mathbf{V} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ se define la subdiferencial en $u \in \mathbf{V}$, $\partial j(u)$, como:

$$\partial j(u) = \left\{ z \in \mathbf{V}' : j(v) - j(u) \geq \langle z, v - u \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} \quad \forall v \in \mathbf{V} \right\}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}}$ denota la relación de dualidad entre \mathbf{V}' y \mathbf{V} .

Proposición 2.1.9 Sea T un operador monótono maximal multivaluado, $\lambda > 0$ y $w \in \mathbb{R}$ con $\lambda w < 1$ entonces:

$$q \in Tu - wu \quad \text{si y sólo si} \quad q = (T - w\mathbb{I})_\lambda(u + \lambda q)$$

donde $(T - w\mathbb{I})_\lambda$ denota la aproximación Yosida de orden λ del operador $T - w\mathbb{I}$.

Prueba:

- Definamos $\widehat{T} = T - \omega\mathbb{I}$, y veamos si $(\mathbb{I} + \lambda\widehat{T})^{-1}$, es monovaluado. Para esto escogemos dos elementos, x_1 y x_2 , de $(\mathbb{I} + \lambda\widehat{T})^{-1}(y)$, para y cualquiera en \mathbf{V} .

Como $x_1 \in (\mathbb{I} + \lambda\widehat{T})^{-1}(y)$, entonces $y \in (\mathbb{I} + \lambda\widehat{T})(x_1)$, es decir, $y = x_1 + \lambda z_1$, con $z_1 \in \widehat{T}(x_1) = (T - \omega\mathbb{I})(x_1)$, de igual manera z_1 puede expresarse como: $z_1 = w_1 - \omega x_1$, $w_1 \in T(x_1)$.

Sintetizando tenemos que:

$$y = x_1 + \lambda(w_1 - \omega x_1), \quad w_1 \in T(x_1)$$

De manera parecida para x_2

$$y = x_2 + \lambda(w_2 - \omega x_2), \quad w_2 \in T(x_2)$$

Haciendo la diferencia entre estas dos expresiones tenemos que:

$$(2.1) \quad (1 - \lambda\omega)(x_2 - x_1) = \lambda(w_1 - w_2), \quad w_1 \in T(x_1), \quad w_2 \in T(x_2)$$

Debido a que el operador T es monótono tenemos que:

$$(x_2 - x_1, w_2 - w_1) \geq 0$$

y de acuerdo con la relación (2.1) (con $\lambda > 0$):

$$(x_2 - x_1, (\lambda\omega - 1)(x_2 - x_1)) \geq 0$$

$$(\lambda\omega - 1)(x_2 - x_1, x_2 - x_1) \geq 0$$

$$(\lambda\omega - 1)\|x_2 - x_1\|^2 \geq 0$$

Si escogemos $\lambda\omega - 1 < 0$, entonces $0 \leq \|x_2 - x_1\|^2 \leq 0$, es decir: $x_2 = x_1$.

- Sea $q \in \widehat{T}u$, entonces $u + \lambda q \in (\mathbb{I} + \lambda \widehat{T})(u)$ si y sólo si $u = J_\lambda^{\widehat{T}}(u + \lambda q)$

$$\begin{aligned} (u + \lambda q) - u &= (\mathbb{I} - J_\lambda^{\widehat{T}})(u + \lambda q) \\ \Leftrightarrow \lambda q &= (\mathbb{I} - J_\lambda^{\widehat{T}})(u + \lambda q) \\ \Leftrightarrow q &= \frac{1}{\lambda} (\mathbb{I} - J_\lambda^{\widehat{T}})(u + \lambda q) = (T - w\mathbb{I})_\lambda(u + \lambda q) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición 2.1.10 *El operador resolvente J_λ^T asociado a un operador T monótono, es lipschitziano de orden 1, y la aproximación Yosida T_λ es un operador lipschitziano de orden $\frac{1}{\lambda}$, $\lambda > 0$.*

Prueba: Sean $u, v \in \mathbf{V}$ y $x = J_\lambda^T(u)$ e $y = J_\lambda^T(v)$, entonces

$$(2.2) \quad T_\lambda(u) - T_\lambda(v) = \frac{1}{\lambda}(u - x - v + y)$$

como $x = J_\lambda^T(u) \Rightarrow u \in (\mathbb{I} + \lambda T)(x)$, es decir

$$(2.3) \quad u = x + \lambda u_1 \quad u_1 \in Tx,$$

como $y = J_\lambda^T(v) \Rightarrow v \in (\mathbb{I} + \lambda T)(y)$, es decir

$$(2.4) \quad v = y + \lambda v_1 \quad v_1 \in Ty$$

Reemplazando estas expresiones en la relación (2.2) obtenemos lo siguiente:

$$T_\lambda(u) - T_\lambda(v) = u_1 - v_1,$$

como T es monótono entonces para $u_1 \in Tx$, y $v_1 \in Ty$

$$\begin{aligned} 0 &\leq (u_1 - v_1, x - y) \leq (u_1 - v_1, u - v - \lambda u_1 + \lambda v_1) \\ &\leq (u_1 - v_1, u - v) - \lambda (u_1 - v_1, u_1 - v_1) \end{aligned}$$

de aquí que

$$\lambda \|u_1 - v_1\|^2 \leq (u_1 - v_1, u - v)$$

y por otra parte, siguiendo las relaciones (2.3) y (2.4) obtenemos:

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|u - v - \lambda u_1 + \lambda v_1\|^2 = \|u - v\|^2 - 2\lambda (u - v, u_1 - v_1) + \lambda^2 \|u_1 - v_1\|^2 \\ &\leq \|u - v\|^2 - \lambda^2 \|u_1 - v_1\|^2 \end{aligned}$$

lo que nos permite escribir

$$\lambda^2 \|u_1 - v_1\|^2 \leq \|u - v\|^2$$

y por tanto

$$(2.5) \quad \|T_\lambda(u) - T_\lambda(v)\| = \|u_1 - v_1\| \leq \frac{1}{\lambda} \|u - v\|$$

y como

$$\|x - y\|^2 \leq \|u - v\|^2 - \lambda^2 \|u_1 - v_1\|^2$$

entonces

$$(2.6) \quad \|J_\lambda^T(u) - J_\lambda^T(v)\|^2 \leq \|u - v\|^2 - \lambda^2 \|u_1 - v_1\|^2 \leq \|u - v\|^2$$

De las ecuaciones (2.5) y (2.6) se verifica la proposición. ■

Observación 2.1.11 Como \mathbf{V} es un espacio de Hilbert tenemos que para cada $u^* \in \mathbf{V}'$ existe un único $u \in \mathbf{V}$:

$$\langle u^*, v \rangle = (u, v) \quad \forall v \in \mathbf{V} \quad \text{y} \quad \|u^*\|_{\mathbf{V}'} = \|u\|_{\mathbf{V}}$$

Teniendo esto es cuenta podemos considerar la subdiferencial como un operador multivaluado en \mathbf{V} , es decir no haremos diferencia entre un elemento del espacio dual y su representante en el espacio primal.

Ejemplo: Recordemos la definición del funcional indicatriz I_k para un conjunto convexo K . De la definición de subdiferencial tenemos que:

$$\partial I_k(u) = \{z \in \mathbf{V} : I_k(v) - I_k(u) \geq (z, v - u), \quad \forall v \in \mathbf{V}\}$$

veamos ahora la expresión para la Aproximación Yosida.

Así haciendo $w = J_\lambda^{\partial I_k}(u)$, tenemos que $u \in (\mathbb{I} + \lambda \partial I_k)(w)$, es decir

$$\frac{u - w}{\lambda} \in \partial I_k(w)$$

o equivalentemente

$$I_k(v) - I_k(w) \geq \left(\frac{u - w}{\lambda}, v - w \right), \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

reordenando términos

$$(w, v - w) + \lambda I_k(v) - \lambda I_k(w) \geq (u, v - w), \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

de donde

$$(w, v - w) \geq (u, v - w), \quad \forall v \in K$$

Es decir $w = \text{Pr}_K(u)$ o en términos de la resolvente:

$$(2.7) \quad J_\lambda^{\partial I_k}(u) = \text{Pr}_K(u)$$

y por último la expresión para la Aproximación Yosida es:

$$(\partial I_k)_\lambda (u) = \frac{1}{\lambda} (u - \text{Pr}_K (u))$$

Además si recordamos la proposición 2.1.9 llegamos a la siguiente identidad:

$$z \in \partial I_k (u) \quad \text{si y sólo si} \quad u = \text{Pr}_K (u + \lambda z) \quad \lambda > 0$$

Definición 2.1.12 (Conjugada de un función convexa) Si j es una función convexa propia, definimos la función conjugada $j^* : \mathbf{V}' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ en el espacio \mathbf{V}' como:

$$j^* (v^*) = \sup_{v \in \mathbf{V}} \{ \langle v^*, v \rangle - j (v) \}.$$

Definición 2.1.13 (Conjugada de j^*) La conjugada de j^* se define, en el espacio \mathbf{V} , como:

$$(j^*)^* (v) = \sup_{v^* \in \mathbf{V}'} \{ \langle v^*, v \rangle - j^* (v^*) \}.$$

Proposición 2.1.14 Si j es una función convexa propia y s.c.i entonces j^* es una función convexa propia, s.c.i y $(j^*)^* = j$.

Prueba: Ver [2]. ■

Recordemos que la IVE de segunda especie asociada una forma bilineal simétrica:

$$(2.8) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } u \in \mathbf{V} \text{ tal que} \\ a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in \mathbf{V} \end{cases}$$

donde: \mathbf{V} es un espacio de Hilbert,

$a : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal simétrica,

L un elemento del dual de \mathbf{V} ,

j una funcional convexa, propia y s.c.i.

Es equivalente a:

$$(2.9) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } u \in \mathbf{V}, \text{ tal que} \\ J(u) = \inf_{v \in \mathbf{V}} J(v) \end{cases}$$

para $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) + j(v)$

Sin embargo si la bilineal involucrada en (2.8) no es simétrica la correspondencia con (2.9) no puede realizarse. Por ello propondremos algoritmos de solución haciendo diferencia entre el caso simétrico (sección 2.2) y el no simétrico (sección 2.3).

Observación 2.1.15 Gracias al teorema 1.2.32 el problema (2.8) tiene solución única con las hipótesis dadas, aún si $a(\cdot, \cdot)$ no es una forma bilineal simétrica.

2.2 Aplicación de la teoría de la dualidad en el caso de una forma bilineal simétrica

Asumiendo las siguientes consideraciones

(2.10) Sean \mathbf{V} y \mathbf{W} espacios de Hilbert,

y

(2.11) J una funcional convexa propia y s.c.i., en \mathbf{V} no necesariamente diferenciable.

Se plantea el siguiente problema de minimización:

(2.12)
$$\inf_{v \in \mathbf{V}} J(v)$$

Asumamos que podemos escribir $J(v)$ como un *supremo* en p de una función $\mathcal{L}(v, p)$

(2.13)
$$J(v) = \sup_{p \in \mathbf{W}} \mathcal{L}(v, p), \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

y así el problema (2.12) toma la forma

(2.14)
$$\inf_{v \in \mathbf{V}} \sup_{p \in \mathbf{W}} \mathcal{L}(v, p)$$

Es conveniente llamar al problema

(2.15)
$$\sup_{p \in \mathbf{W}} \inf_{v \in \mathbf{V}} \mathcal{L}(v, p)$$

el *problema dual* de (2.12)

Definición 2.2.16 Diremos que el par $(u, q) \in \mathbf{V} \times \mathbf{W}$ es el punto silla de \mathcal{L} en $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$ si

$$\mathcal{L}(u, p) \leq \mathcal{L}(u, q) \leq \mathcal{L}(v, q), \quad \forall v \in \mathbf{V}, \forall p \in \mathbf{W}$$

Proposición 2.2.17 Si existe $u_0 \in \mathbf{V}$, $p_0 \in \mathbf{W}$, y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\mathcal{L}(u_0, p) \leq \alpha \quad \forall p \in \mathbf{W}$$

$$\mathcal{L}(v, p_0) \geq \alpha \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

entonces (u_0, p_0) es un punto de silla de \mathcal{L} y

$$\alpha = \inf_{v \in \mathbf{V}} \sup_{p \in \mathbf{W}} \mathcal{L}(v, p) = \sup_{p \in \mathbf{W}} \inf_{v \in \mathbf{V}} \mathcal{L}(v, p)$$

Prueba: Obviamente tenemos que $\alpha = \mathcal{L}(u_0, p_0)$, y

$$\mathcal{L}(u_0, p) \leq \mathcal{L}(u_0, p_0) \leq \mathcal{L}(v, p_0) \quad \forall v \in \mathbf{V}, \forall p \in \mathbf{W}. \quad \blacksquare$$

La ventaja al introducir una forma lagrangiana se encuentra en la posibilidad de encontrar algún punto de silla, que de ser único nos dará la solución del problema primal que se toma como punto de partida al proponer el lagrangiano.

2.2.1 Hipótesis de trabajo

En lo que sigue trabajaremos con

$$(2.16) \quad \begin{aligned} &\Phi : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W} \text{ una función lipschitz de orden } c, \text{ con la propiedad} \\ &\text{de que para } p_0 \in \mathbf{W} \text{ fijo la aplicación } u \mapsto (p_0, \Phi(u))_{\mathbf{W}} \\ &\text{es convexa, propia, y s.c.i.} \end{aligned}$$

como antes

$$(2.17) \quad \begin{aligned} &j : \mathbf{W} \rightarrow \mathbb{R} \text{ es una funcional convexa, propia, y s.c.i,} \\ &\text{además } j \circ \Phi \text{ es convexa} \end{aligned}$$

en lo sucesivo consideramos

$$(2.18) \quad J_0(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v).$$

Entonces planteamos el siguiente problema:

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in \mathbf{V}, \text{ tal que:} \\ a(u, v - u) + j(\Phi(v)) - j(\Phi(u)) \geq L(v - u), \quad \forall v \in \mathbf{V}, \end{array} \right.$$

es decir “descomponemos” la funcional j como una composición $j \circ \Phi$ que al ser Φ continua es s.c.i. y por tanto puede estudiarse dentro de la definición de IVE ya dada.

Como hemos visto, anteriormente este problema es equivalente al problema de minimización:

$$(2.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in \mathbf{V}, \text{ tal que:} \\ J(u) = \inf_{v \in \mathbf{V}} J(v) \end{array} \right.$$

donde $J : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ está definido como

$$(2.21) \quad J(v) = J_0(v) + j(\Phi(v)).$$

Usando la proposición 2.1.14 obtenemos que:

$$\begin{aligned} J(v) &= J_0(v) + j(\Phi(v)) \\ &= J_0(v) + (j^*)^*(\Phi(v)) \\ &= J_0(v) + \sup_{p \in \mathbf{W}} [(p, \Phi(v))_{\mathbf{W}} - j^*(p)] \\ &= \sup_{p \in \mathbf{W}} [J_0(v) + (p, \Phi(v))_{\mathbf{W}} - j^*(p)] \end{aligned}$$

Escogemos naturalmente:

$$(2.22) \quad \mathcal{L}(v, p) = J_0(v) + (p, \Phi(v))_{\mathbf{W}} - j^*(p) \quad v \in \mathbf{V}, p \in \mathbf{W}$$

de modo que:

$$(2.23) \quad \inf_{v \in \mathbf{V}} J(v) = \inf_{v \in \mathbf{V}} \sup_{p \in \mathbf{W}} \mathcal{L}(v, p)$$

Asumimos también que

$$(2.24) \quad \mathcal{L} \text{ admite un punto de silla en } \mathbf{V} \times \mathbf{W}$$

Veamos ahora algunas relaciones importantes y que serán de gran utilidad:

Proposición 2.2.18 Si $q \in \partial j(v)$ entonces $(q, v)_{\mathbf{W}} - j(v) = j^*(q)$

Prueba: Si $q \in \partial j(v)$ de acuerdo con la definición de subdiferencial tenemos que para z arbitrario, $z \in \mathbf{W} \cap \text{dom}(j)$:

$$j(z) - j(v) \geq (q, z - v)_{\mathbf{W}}$$

transponiendo términos,

$$(q, v)_{\mathbf{W}} - j(v) \geq (q, z)_{\mathbf{W}} - j(z)$$

es decir:

$$\begin{aligned} (q, v)_{\mathbf{W}} - j(v) &= \sup_{z \in \mathbf{W}} [(q, z)_{\mathbf{W}} - j(z)] \\ &= j^*(q) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición 2.2.19 Para $v \in \mathbf{W}$ y $q \in \mathbf{W}'$, tenemos la siguiente relación:

$$q \in \partial j(v) \Leftrightarrow v \in \partial j^*(q).$$

Prueba:

- (i) Si $q \in \partial j(v)$ entonces usamos la proposición 2.2.18 de modo que $(q, v)_{\mathbf{W}} - j^*(q) = j(v)$ y como $(j^*)^* = j$, entonces

$$j(v) = \sup_{\hat{q} \in \mathbf{W}} [(\hat{q}, v)_{\mathbf{W}} - j^*(\hat{q})]$$

o lo que es equivalente:

$$(q, v)_{\mathbf{W}} - j^*(q) \geq (\hat{q}, v)_{\mathbf{W}} - j^*(\hat{q}) \quad \forall \hat{q} \in \mathbf{W}$$

y por tanto

$$j^*(\hat{q}) - j^*(q) \geq (v, \hat{q} - q)_{\mathbf{W}} \quad \forall \hat{q} \in \mathbf{W}$$

es inmediato que

$$v \in \partial j^*(q)$$

- (ii) De igual modo si $v \in \partial j^*(q)$ entonces por lo anterior $q \in \partial (j^*)^*(v)$ de donde se sigue la conclusión. \blacksquare

Proposición 2.2.20 Los posibles puntos de silla $(u, q) \in \mathbf{V} \times \mathbf{W}$ de (2.22) satisfacen que:

- (i) u es solución de (2.20)

- (ii) $q \in \partial j(\Phi(u))$

$$(iii) \quad J_0(u) + (q, \Phi(u))_{\mathbf{W}} = \inf_{v \in \mathbf{V}} \{J_0(v) + (q, \Phi(v))_{\mathbf{W}}\}$$

y con tales supuestos

$$(2.25) \quad J(u) = \sup_{p \in \mathbf{W}} \inf_{v \in \mathbf{V}} \mathcal{L}(v, p)$$

Prueba: El par (u, q) será un punto de silla de (2.22) en $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$ si y sólo si

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(u, p) \leq \mathcal{L}(u, q) \leq \mathcal{L}(v, q), \quad \forall v \in \mathbf{V}, \forall p \in \mathbf{W} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} J_0(u) + (q, \Phi(u))_{\mathbf{W}} - j^*(q) \leq J_0(v) + (q, \Phi(v))_{\mathbf{W}} - j^*(q) & \forall v \in \mathbf{V} \\ J_0(u) + (p, \Phi(u))_{\mathbf{W}} - j^*(p) \leq J_0(u) + (q, \Phi(u))_{\mathbf{W}} - j^*(q) & \forall p \in \mathbf{W} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} J_0(u) + (q, \Phi(u))_{\mathbf{W}} \leq J_0(v) + (q, \Phi(v))_{\mathbf{W}} & \forall v \in \mathbf{V} \\ (p, \Phi(u))_{\mathbf{W}} - j^*(p) \leq (q, \Phi(u))_{\mathbf{W}} - j^*(q) & \forall p \in \mathbf{W} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} J_0(u) + (q, \Phi(u))_{\mathbf{W}} = \inf_{v \in \mathbf{V}} \{J_0(v) + (q, \Phi(v))_{\mathbf{W}}\} \\ \Phi(u) \in \partial j^*(q) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} J_0(u) + (q, \Phi(u))_{\mathbf{W}} = \inf_{v \in \mathbf{V}} \{J_0(v) + (q, \Phi(v))_{\mathbf{W}}\} \\ q \in \partial j(\Phi(u)) \end{cases} \end{aligned}$$

esta última equivalencia en virtud de la proposición 2.2.19. Con esto caracterizamos los posibles puntos de silla. Ahora veremos la unicidad de u .

Sean (u_1, q_1) y (u_2, q_2) dos puntos de silla de (2.22) entonces

$$\begin{cases} \langle J'_0(u_1), v - u_1 \rangle_{\mathbf{V}, \mathbf{V}'} + (q_1, \Phi(v) - \Phi(u_1))_{\mathbf{W}} \geq 0 & \forall v \in \mathbf{V} \\ (p, \Phi(u_1))_{\mathbf{W}} - j^*(p) \leq (q_1, \Phi(u_1))_{\mathbf{W}} - j^*(q_1) & \forall p \in \mathbf{W} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle J'_0(u_2), v - u_2 \rangle_{\mathbf{V}, \mathbf{V}'} + (q_2, \Phi(v) - \Phi(u_2))_{\mathbf{W}} \geq 0 & \forall v \in \mathbf{V} \\ (p, \Phi(u_2))_{\mathbf{W}} - j^*(p) \leq (q_2, \Phi(u_2))_{\mathbf{W}} - j^*(q_2) & \forall p \in \mathbf{W} \end{cases}$$

de estas relaciones obtenemos

$$\begin{cases} \langle J'_0(u_2) - J'_0(u_1), u_1 - u_2 \rangle_{\mathbf{V}, \mathbf{V}'} + (q_2 - q_1, \Phi(u_1) - \Phi(u_2))_{\mathbf{W}} \geq 0 \\ (q_2 - q_1, \Phi(u_1) - \Phi(u_2))_{\mathbf{W}} \leq 0 \end{cases}$$

como además

$$\langle J'_0(u_2) - J'_0(u_1), u_2 - u_1 \rangle_{\mathbf{V}, \mathbf{V}'} = a(u_2 - u_1, u_2 - u_1)$$

y la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es coerciva, podemos concluir lo siguiente

$$\begin{aligned} 0 &\geq (q_2 - q_1, \Phi(u_1) - \Phi(u_2))_{\mathbf{W}} \\ &\geq \langle J'_0(u_2) - J'_0(u_1), u_2 - u_1 \rangle_{\mathbf{V}, \mathbf{V}'} \\ &\geq \alpha \|u_2 - u_1\|_{\mathbf{V}}^2 \end{aligned}$$

es decir

$$u_2 = u_1$$

y por la caracterización anterior $q_i \in \partial j(\Phi(u))$, $i = 1, 2$ de donde en especial para todo $v \in \mathbf{V}$

$$j(\Phi(v)) - j(\Phi(u)) \geq (q_i, \Phi(v) - \Phi(u))_{\mathbf{W}} \quad \forall p \in \mathbf{W}$$

como $\langle J'_0(u), v - u \rangle_{\mathbf{V}, \mathbf{V}'} + (q_i, \Phi(v) - \Phi(u))_{\mathbf{W}} \geq 0$ obtenemos que

$$\langle J'_0(u), v - u \rangle_{\mathbf{V}, \mathbf{V}'} + j(\Phi(v)) - j(\Phi(u)) \geq 0$$

es decir u resuelve (2.20). ■

Observación 2.2.21 *La unicidad del punto de silla (u, q) está vinculada a la unicidad de solución para el problema*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dado } u \text{ solución de (2.20), hallar } q \in \partial j(\Phi(u)) : \\ J_0(u) + (q, \Phi(u))_{\mathbf{W}} = \inf_{v \in \mathbf{V}} \{J_0(v) + (q, \Phi(v))_{\mathbf{W}}\} \end{array} \right.$$

2.2.2 Algoritmo para encontrar el punto de silla

Volviendo a nuestro problema inicial.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in \mathbf{V} : \\ a(u, v - u) + j(\Phi(v)) - j(\Phi(u)) \geq L(v - u) \quad \forall v \in \mathbf{V} \end{array} \right.$$

El lagrangiano asociado puede escribirse como:

$$\mathcal{L}(v, p) = J_0(v) + (p, \Phi(v))_{\mathbf{W}} - j^*(p) \quad \forall v \in \mathbf{V}, \forall p \in \mathbf{W}$$

Si (u, q) es un punto de silla, entonces tenemos lo siguiente:

$$\mathcal{L}(u, p) \leq \mathcal{L}(u, q) \leq \mathcal{L}(v, q) \quad \forall v \in \mathbf{V}, \forall p \in \mathbf{W}$$

Desarrollando el término derecho:

$$\mathcal{L}(u, q) \leq \mathcal{L}(v, q)$$

$$J_0(u) + (q, \Phi(u))_{\mathbf{W}} - j^*(q) \leq J_0(v) + (q, \Phi(v))_{\mathbf{W}} - j^*(q)$$

$$J_0(u) + (q, \Phi(u))_{\mathbf{W}} \leq J_0(v) + (q, \Phi(v))_{\mathbf{W}} \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

o lo que es equivalente:

$$(2.26) \quad J_0(u) + (q, \Phi(u))_{\mathbf{W}} = \min_{v \in \mathbf{V}} \{J_0(v) + (q, \Phi(v))_{\mathbf{W}}\}$$

Desarrollando el término izquierdo:

$$J_0(u) + (q, \Phi(u))_{\mathbf{W}} - j^*(q) \geq J_0(u) + (q, \Phi(u))_{\mathbf{W}} - j^*(q)$$

$$(q - p, \Phi(u))_{\mathbf{W}} \geq j^*(q) - j^*(p)$$

$$j^*(p) - j^*(q) \geq (\Phi(u), p - q)_{\mathbf{W}} \quad \forall p \in \mathbf{W}$$

es decir: $\Phi(u) \in \partial(j^*)(q)$, escogiendo $\lambda > 0$ tenemos $q + \lambda\Phi(u) \in q + \lambda\partial(j^*)(q)$, y por tanto

$$(2.27) \quad q = J_{\lambda}^{\partial(j^*)}(q + \lambda\Phi(u))$$

Las caracterizaciones (2.26) y (2.27) nos dan una pista de un método iterativo para hallar el punto de silla de (2.22). En base estas propiedades definimos el siguiente algoritmo, donde formamos dos sucesiones $\{u_n\} \subset \mathbf{V}$, $\{q_n\} \subset \mathbf{W}$, para ello comenzamos con $q_0 \in \mathbf{W}$, para luego calcular u_0 y después q_1 , etc. La regla de formación es

$$(2.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Conocido } q_n, \text{ escogemos } u_n \text{ de tal manera que:} \\ J_0(u_n) + (q_n, \Phi(u_n))_{\mathbf{W}} = \min_{v \in \mathbf{V}} \{J_0(v) + (q_n, \Phi(v))_{\mathbf{W}}\} \end{array} \right.$$

Luego escogemos q_{n+1} de la siguiente forma:

$$(2.29) \quad q_{n+1} = J_{\lambda}^{\partial(j^*)}(q_n + \lambda \Phi(u_n))$$

Teorema 2.2.22 *El algoritmo definido por (2.28), (2.29) es convergente en el sentido de que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_{\mathbf{V}} = 0.$$

para λ adecuado.

Prueba: La propiedades (2.26), (2.29) son equivalentes a:

$$(2.30) \quad \langle J'_0(u_n), v - u_{n+1} \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} + (q_n, \Phi(v) - \Phi(u_{n+1}))_{\mathbf{W}} \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

$$(2.31) \quad \langle J'_0(u), v - u \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} + (q, \Phi(v) - \Phi(u))_{\mathbf{W}} \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

tomando $v = u$ en (2.30) y $v = u_n$ en (2.31) deducimos que

$$(2.32) \quad \langle J'_0(u) - J'_0(u_n), u_n - u \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} + (q_n - q, \Phi(u) - \Phi(u_n))_{\mathbf{W}} \geq 0$$

y gracias a que $a(\cdot, \cdot)$ es elíptica obtenemos:

$$\begin{aligned} (q_n - q, \Phi(u) - \Phi(u_n))_{\mathbf{W}} &\geq \langle J'_0(u) - J'_0(u_n), u - u_n \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} \\ &\geq \alpha \|u - u_n\|_{\mathbf{V}}^2 \end{aligned}$$

Ahora hacemos $r_n = q_n - q$ de modo que, como el resolvente Yosida es un operador lipchitziano de orden 1, podamos obtener:

$$\begin{aligned}
\|r_{n+1}\|_{\mathbf{W}}^2 &= \|q_{n+1} - q\|_{\mathbf{W}}^2 \\
&= \left\| J_{\lambda}^{\partial(j^*)}(q_n + \lambda\Phi(u_n)) - J_{\lambda}^{\partial(j^*)}(q + \lambda\Phi(u)) \right\|_{\mathbf{W}}^2 \\
&\leq \|q_n - q + \lambda(\Phi(u_n) - \Phi(u))\|_{\mathbf{W}}^2 \\
&\leq \|q_n - q\|_{\mathbf{W}}^2 + \lambda^2 \|\Phi(u_n) - \Phi(u)\|_{\mathbf{W}}^2 + 2(q_n - q, \lambda(\Phi(u_n) - \Phi(u)))_{\mathbf{W}} \\
&\leq \|r_n\|_{\mathbf{W}}^2 + \lambda^2 c^2 \|u_n - u\|_{\mathbf{V}}^2 + 2\lambda(q_n - q, \Phi(u_n) - \Phi(u))_{\mathbf{W}} \\
&\leq \|r_n\|_{\mathbf{W}}^2 + \lambda^2 c^2 \|u_n - u\|_{\mathbf{V}}^2 - 2\alpha\lambda \|u - u_n\|_{\mathbf{V}}^2 \\
&= \|r_n\|_{\mathbf{W}}^2 + (\lambda^2 c^2 - 2\alpha\lambda) \|u - u_n\|_{\mathbf{V}}^2
\end{aligned}$$

Escogemos λ de tal manera que

$$2\alpha\lambda - \lambda^2 c^2 = \beta > 0$$

es decir

$$2\alpha - \lambda c^2 > 0$$

de modo que

$$(2.33) \quad \lambda < \frac{2\alpha}{c^2},$$

y por tanto

$$\|r_{n+1}\|_{\mathbf{W}}^2 + \beta \|u_n - u\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \|r_n\|_{\mathbf{W}}^2$$

Como $\beta > 0$, entonces $\{\|r_n\|^2\}$ es una sucesión decreciente acotada inferiormente por tanto converge a un límite l cuando $n \rightarrow \infty$, por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{\mathbf{V}} = 0$. ■

Antes de proseguir con el estudio de la sucesión $\{(u^n, q^n)\}_n$ consideramos el siguiente lema como puede verse en [8], que nos permitirá conocer el comportamiento de la sucesión $\{q^n\}_n$

Lema 2.2.23 (de Opial) Sea \mathbf{W} un espacio de Hilbert, X un subconjunto de \mathbf{W} no vacío y $\{q^n\}_n$ una sucesión en \mathbf{W} tal que para todo $q \in X$ la sucesión $\{\|q^n - q\|_{\mathbf{W}}\}_n$ es convergente. Si cada subsucesión $\{q^{n_k}\}_k$ que converge débilmente en \mathbf{W} lo hace a un elemento de X entonces $\{q^n\}_n$ converge débilmente a un elemento de X .

Prueba: Sean $q_1, q_2 \in X$ tales que la sucesiones $\{\|q^n - q_1\|_{\mathbf{W}}^2\}_n$ y $\{\|q^n - q_2\|_{\mathbf{W}}^2\}_n$ son convergentes. Hacemos $l_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \|q^n - q_i\|_{\mathbf{W}}$ para $i = 1, 2$. Tomamos una subsucesión $n_k \rightarrow \infty$ tal que $q^{n_k} \rightarrow \hat{q}_1$ débilmente en \mathbf{W} . De la identidad

$$\|q^n - \hat{q}_1\|_{\mathbf{W}}^2 - \|q^n - \hat{q}_2\|_{\mathbf{W}}^2 = \|\hat{q}_1 - \hat{q}_2\|_{\mathbf{W}}^2 + 2 \langle \hat{q}_1 - \hat{q}_2, \hat{q}_2 - q^n \rangle$$

deducimos que $l_1 - l_2 = -\|\hat{q}_1 - \hat{q}_2\|_{\mathbf{W}}^2$. De igual manera tomando ahora una subsucesión $n_k \rightarrow \infty$ tal que $q^{n_k} \rightarrow \hat{q}_2$ débilmente en \mathbf{W} tenemos que $l_1 - l_2 = \|\hat{q}_1 - \hat{q}_2\|_{\mathbf{W}}^2$. En consecuencia $\|\hat{q}_1 - \hat{q}_2\|_{\mathbf{W}} = 0$. Esto demuestra la unicidad de los puntos de adherencia asociados a la convergencia débil, por lo tanto $q^n \rightarrow \hat{q}$ débilmente en \mathbf{W} para algún $\hat{q} \in X$. ■

Teorema 2.2.24 Asumimos que el teorema 2.2.22 puede aplicarse; si la condición (2.33) es satisfecha entonces la sucesión $\{q^n\}_n$ definida en (2.28)-(2.29) satisface:

$$(2.34) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|q^{n+1} - q^n\|_{\mathbf{W}} = 0$$

$$(2.35) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = q \quad \text{débilmente en } \mathbf{W}$$

donde q es tal que (u, q) es un punto de silla de \mathcal{L} en $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$

Prueba:

Con el lagrangiano definido como

$$\mathcal{L}(v, p) = J_0(v) + (p, \Phi(v))_{\mathbf{W}} - j^*(p) \quad \forall v \in \mathbf{V}, \forall p \in \mathbf{W}$$

consideramos las diferencias

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u^{n+1}, q^{n+1}) - \mathcal{L}(u^n, q^n) &= J_0(u^{n+1}) - J_0(u^n) + (q^{n+1}, \Phi(u^{n+1}))_{\mathbf{W}} \\ &\quad - (q^n, \Phi(u^n))_{\mathbf{W}} + j^*(q^n) - j^*(q^{n+1}) \end{aligned}$$

como J_0 es convexa entonces

$$J_0(v) - J_0(u) \geq \langle J'_0(u), v - u \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u^{n+1}, q^{n+1}) - \mathcal{L}(u^n, q^n) &\geq \langle J'_0(u^n), u^{n+1} - u^n \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} + (q^{n+1}, \Phi(u^{n+1}))_{\mathbf{W}} \\ &\quad - (q^n, \Phi(u^n))_{\mathbf{W}} + j^*(q^n) - j^*(q^{n+1}) \end{aligned}$$

como u^n es solución de $\min_{v \in \mathbf{V}} \{J_0(v) + (q^n, \Phi(v))_{\mathbf{W}}\}$ entonces

$$\langle J'_0(u^n), v - u^n \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} + (q^n, \Phi(v) - \Phi(u^n))_{\mathbf{W}} \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

y de aquí que

$$\langle J'_0(u^n), u^{n+1} - u^n \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} + (q^n, \Phi(u^{n+1}) - \Phi(u^n))_{\mathbf{W}} \geq 0$$

entonces

$$\mathcal{L}(u^{n+1}, q^{n+1}) - \mathcal{L}(u^n, q^n) \geq (q^{n+1} - q^n, \Phi(u^{n+1}))_{\mathbf{W}} + j^*(q^n) - j^*(q^{n+1})$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u^{n+1}, q^{n+1}) - \mathcal{L}(u^n, q^n) &\geq (q^{n+1} - q^n, \Phi(u^{n+1}) - \Phi(u^n))_{\mathbf{W}} \\ &\quad + (q^{n+1} - q^n, \Phi(u^n))_{\mathbf{W}} + j^*(q^n) - j^*(q^{n+1}) \end{aligned}$$

como $q^{n+1} = J_\lambda^{\partial(j^*)}(q^n + \lambda\Phi(u^n))$ entonces

$$q^n - q^{n+1} + \lambda\Phi(u^n) \in \lambda\partial(j^*)(q^{n+1})$$

es decir que

$$\lambda j^*(p) - \lambda j^*(q^{n+1}) \geq (q^n - q^{n+1} + \lambda\Phi(u^n), p - q^{n+1})_{\mathbf{W}}$$

y en particular para $p = q^n$

$$\lambda j^*(q^n) - \lambda j^*(q^{n+1}) \geq (q^n - q^{n+1} + \lambda\Phi(u^n), q^n - q^{n+1})_{\mathbf{W}}$$

de donde

$$j^*(q^n) - j^*(q^{n+1}) \geq \frac{1}{\lambda} \|q^n - q^{n+1}\|_{\mathbf{W}}^2 + (q^n - q^{n+1}, \Phi(u^n))_{\mathbf{W}}$$

esto implica que

$$\mathcal{L}(u^{n+1}, q^{n+1}) - \mathcal{L}(u^n, q^n) \geq (q^{n+1} - q^n, \Phi(u^{n+1}) - \Phi(u^n))_{\mathbf{W}} + \frac{1}{\lambda} \|q^n - q^{n+1}\|_{\mathbf{W}}^2$$

Resta estimar $(q^{n+1} - q^n, \Phi(u^{n+1}) - \Phi(u^n))_{\mathbf{W}}$ para esto sabemos que

$$q^{n+1} = J_\lambda^{\partial(j^*)}(q^n + \lambda\Phi(u^n))$$

$$q^{n+2} = J_\lambda^{\partial(j^*)} (q^{n+1} + \lambda \Phi(u^{n+1}))$$

y gracias a que $J_\lambda^{\partial(j^*)}$ es Lipschitz de orden 1

$$(2.36) \quad \begin{aligned} \|q^{n+2} - q^{n+1}\|_{\mathbf{W}}^2 &\leq \|q^{n+1} - q^n + \lambda(\Phi(u^{n+1}) - \Phi(u^n))\|_{\mathbf{W}}^2 \\ &\leq \|q^{n+1} - q^n\|_{\mathbf{W}}^2 + 2\lambda(q^{n+1} - q^n, \Phi(u^{n+1}) - \Phi(u^n))_{\mathbf{W}} \\ &\quad + \lambda^2 \|\Phi(u^{n+1}) - \Phi(u^n)\|_{\mathbf{W}} \end{aligned}$$

y también como Φ es Lipschitz de orden c

$$(q^{n+1} - q^n, \Phi(u^{n+1}) - \Phi(u^n))_{\mathbf{W}} \geq \frac{1}{2\lambda} \left(\|q^{n+2} - q^{n+1}\|_{\mathbf{W}}^2 - \|q^{n+1} - q^n\|_{\mathbf{W}}^2 \right) - \frac{\lambda}{2} c^2 \|u^{n+1} - u^n\|_{\mathbf{V}}^2$$

lo que nos lleva a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u^{n+1}, q^{n+1}) - \mathcal{L}(u^n, q^n) &\geq \frac{1}{2\lambda} \|q^{n+2} - q^{n+1}\|_{\mathbf{W}}^2 + \frac{1}{2\lambda} \|q^{n+1} - q^n\|_{\mathbf{W}}^2 \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} c^2 \|u^{n+1} - u^n\|_{\mathbf{V}}^2 \end{aligned}$$

como $\|\cdot\|_{\mathbf{W}}^2 \geq 0$ entonces

$$\mathcal{L}(u^{n+1}, q^{n+1}) - \mathcal{L}(u^n, q^n) \geq \frac{1}{2\lambda} \|q^{n+1} - q^n\|_{\mathbf{W}}^2 - \frac{\lambda}{2} c^2 \|u^{n+1} - u^n\|_{\mathbf{V}}^2$$

y sumando todos los términos de la sucesión

$$(2.37) \quad \mathcal{L}(u^{n+1}, q^{n+1}) - \mathcal{L}(u^0, q^0) \geq \frac{1}{2\lambda} \sum_{j=0}^n \|q^{j+1} - q^j\|_{\mathbf{W}}^2 - \frac{\lambda}{2} c^2 \sum_{j=0}^n \|u^{j+1} - u^j\|_{\mathbf{V}}^2$$

Mostraremos que la sucesión $\left\{ \sum_{j=0}^n \|u^{j+1} - u^j\|_{\mathbf{V}}^2 \right\}_n$ es convergente: en efecto tenemos que

$$\begin{aligned} \langle J'_0(u^n), u^{n+1} - u^n \rangle_{\mathbf{V}, \mathbf{V}} + (q^n, \Phi(u^{n+1}) - \Phi(u^n))_{\mathbf{W}} &\geq 0 \\ \langle J'_0(u^{n+1}), u^n - u^{n+1} \rangle_{\mathbf{V}, \mathbf{V}} + (q^{n+1}, \Phi(u^n) - \Phi(u^{n+1}))_{\mathbf{W}} &\geq 0 \end{aligned}$$

sumando obtenemos

$$\begin{aligned} (q^n - q^{n+1}, \Phi(u^{n+1}) - \Phi(u^n))_{\mathbf{W}} &\geq \langle J'_0(u^{n+1}) - J'_0(u^n), u^{n+1} - u^n \rangle_{\mathbf{V}, \mathbf{V}} \\ &\geq \alpha \|u^{n+1} - u^n\|_{\mathbf{V}}^2 \end{aligned}$$

y utilizando (2.36)

$$\|q^{n+1} - q^n\|_{\mathbf{W}}^2 - \|q^{n+2} - q^{n+1}\|_{\mathbf{W}}^2 \geq \lambda(2\alpha - \lambda c^2) \|u^{n+1} - u^n\|_{\mathbf{V}}^2$$

de donde por sumatoria en n

$$(2.38) \quad \|q^1 - q^0\|_{\mathbf{W}}^2 - \|q^{n+2} - q^{n+1}\|_{\mathbf{W}}^2 \geq \lambda (2\alpha - \lambda c^2) \sum_{j=0}^n \|u^{n+1} - u^n\|_{\mathbf{V}}^2$$

sabemos que si $\lambda < \frac{2\alpha}{c}$ (ver (2.33)) entonces la sucesión $\{q^n\}_n$ está acotada en \mathbf{W} , por lo que (2.38) implica que la sucesión $\left\{ \sum_{j=0}^n \|u^{n+1} - u^n\|_{\mathbf{V}}^2 \right\}_n$ es convergente, pues es una sucesión en \mathbb{R} creciente y acotada superiormente. De (2.37)

$$(2.39) \quad \mathcal{L}(u^{n+1}, q^{n+1}) - \mathcal{L}(u^0, q^0) \geq \frac{1}{2\lambda} \sum_{j=0}^n \|q^{j+1} - q^j\|_{\mathbf{W}}^2 - \frac{\lambda}{2} c^2 \sum_{j=0}^n \|u^{j+1} - u^j\|_{\mathbf{V}}^2$$

y como

$$j^*(q^{n+1}) = \sup_{w \in \mathbf{W}} \{ (q^{n+1}, w)_{\mathbf{W}} - j(w) \}$$

en especial para $w = \Phi(u)$ tenemos

$$j^*(q^{n+1}) \geq (q^{n+1}, \Phi(u))_{\mathbf{W}} - j(\Phi(u))$$

así que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u^{n+1}, q^{n+1}) &\leq J_0(u^{n+1}) + (q^{n+1}, \Phi(u^{n+1}))_{\mathbf{W}} + j(\Phi(u)) - (q^{n+1}, \Phi(u))_{\mathbf{W}} \\ &\leq J_0(u^{n+1}) + (q^{n+1}, \Phi(u^{n+1}) - \Phi(u))_{\mathbf{W}} + j(\Phi(u)) \\ &\leq J_0(u^{n+1}) + \|q^{n+1}\|_{\mathbf{W}} \|\Phi(u^{n+1}) - \Phi(u)\|_{\mathbf{W}} + j(\Phi(u)) \\ &\leq J_0(u^{n+1}) + c \|q^0\|_{\mathbf{W}} \|u^{n+1} - u\|_{\mathbf{V}} + j(\Phi(u)) \end{aligned}$$

pues $\{\|q^n\|_{\mathbf{W}}\}_n$ es decreciente, además como $\{u^n\}_n$ es convergente en \mathbf{V} y J_0 es continua la sucesión $\{J_0(u^{n+1})\}_n$ es convergente y está acotada. Así hemos probado que $\{\mathcal{L}(u^{n+1}, q^{n+1})\}_n$ es una sucesión acotada superiormente y de (2.39) vemos que $\left\{ \sum_{j=0}^n \|q^{j+1} - q^j\|_{\mathbf{W}}^2 \right\}_n$ es su sucesión acotada superiormente y como es creciente entonces converge en \mathbf{W} , lo que implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|q^{n+1} - q^n\|_{\mathbf{W}} = 0$$

Sea

$$X = \{q \in \mathbf{W} : (u, q) \text{ es un punto de silla de } \mathcal{L} \text{ en } \mathbf{V} \times \mathbf{W}\}$$

y $\{q^{n_k}\}_k$ una subsucesión extraída de $\{q^n\}_n$ que converge débilmente en \mathbf{W} . Entonces $u^{n_k}, q^{n_k}, q^{n_k+1}$ satisfacen

$$\langle J'_0(u^{n_k}), v - u^{n_k} \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} + (q^{n_k}, \Phi(v) - \Phi(u^{n_k}))_{\mathbf{W}} \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

$$\lambda j^*(p) - \lambda j^*(q^{n_k+1}) \geq (q^{n_k} - q^{n_k+1} + \lambda \Phi(u^{n_k}), p - q^{n_k+1})_{\mathbf{W}} \quad \forall p \in \mathbf{W}$$

bajo la condición (2.33) sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} u^{n_k} = u$ fuertemente en \mathbf{V} y también que $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n_k} = q^*$ débilmente en \mathbf{W} , $\lim_{n \rightarrow \infty} \|q^{n_k+1} - q^{n_k}\|_{\mathbf{W}} = 0$ fuertemente en \mathbf{W} , entonces en el límite obtenemos:

$$\langle J'_0(u), v - u \rangle_{\mathbf{V}, \mathbf{V}} + (q^*, \Phi(v) - \Phi(u))_{\mathbf{W}} \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

$$j^*(p) - j^*(q^*) \geq (\Phi(u), p - q^*)_{\mathbf{W}} \quad \forall p \in \mathbf{W}$$

como j^* es convexa y s.c.i. entonces $j^*(q^*) \leq \liminf j^*(q^{n_k})$ lo cual muestra que (u, q^*) es un punto de silla de \mathcal{L} en $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$ es decir $q^* \in X$. Del lema de Opial tenemos que $\{q^n\}_n$ converge débilmente a un elemento de X . ■

2.3 Aplicación de la teoría de la dualidad en el caso de una forma bilineal no simétrica

Analicemos el problema variacional de segunda especie:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u \in \mathbf{V}, \text{ tal que} \\ a(u, v - u) + (j \circ \Phi)(v) - (j \circ \Phi)(u) \geq L(v - u), \quad \forall v \in \mathbf{V} \end{cases}$$

como existen $A \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$, y $l \in \mathbf{V}$ tal que

$$\begin{cases} a(u, v) = (Au, v) \quad \forall v \in \mathbf{V} \\ L(v) = (l, v) \quad \forall v \in \mathbf{V} \end{cases}$$

podemos escribir:

$$(j \circ \Phi)(v) - (j \circ \Phi)(u) \geq (l - Au, v - u), \quad \forall v \in \mathbf{V},$$

es decir:

$$(2.40) \quad l - A(u) \in \partial(j \circ \Phi)(u)$$

es fácil notar que:

$$u + \lambda(l - A(u)) \in (\mathbb{I} + \lambda\partial(j \circ \Phi))(u) \quad \lambda > 0,$$

y si introducimos la aproximación de Yosida de orden λ obtenemos:

$$(2.41) \quad u = J_{\lambda}^{\partial(j \circ \Phi)}(u + \lambda(l - A(u)))$$

lo cual es el punto de partida para el algoritmo que buscamos.

2.3.1 Algoritmo de aproximación de la solución del problema no simétrico

- (i) Elegimos $u^0 \in \mathbf{V}$
- (ii) Conocido u^n , calculamos u^{n+1} , por :

$$(2.42) \quad u^{n+1} = J_{\lambda}^{\partial(j \circ \Phi)}(u^n + \lambda(l - A(u^n)))$$

Proposición 2.3.25 *La sucesión u^n , generada por (2.42) converge a la solución del problema (2.8), para λ adecuado.*

Prueba: Sea $r^n = u^n - u$ entonces

$$\begin{aligned} \|r^{n+1}\|^2 &= \|u^{n+1} - u\|^2 \\ &= \left\| J_{\lambda}^{\partial(j \circ \Phi)}(u^n + \lambda(l - A(u^n))) - J_{\lambda}^{\partial(j \circ \Phi)}(u + \lambda(l - A(u))) \right\|^2 \\ &\leq \|u^n + \lambda(l - A(u^n)) - u - \lambda(l - A(u))\|^2 \\ &\leq \|(\mathbb{I} - \lambda A)r^n\|^2 + \lambda^2 \|Ar^n\|^2 - 2\lambda(Ar^n, r^n) \\ &\leq \|r^n\|^2 + \lambda^2 \|A\|_{\mathfrak{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V})}^2 \|r^n\|^2 - 2\lambda\alpha \|r^n\|^2 \\ &= \left(1 + \lambda^2 \|A\|_{\mathfrak{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V})}^2 - 2\lambda\alpha\right) \|r^n\|^2 \end{aligned}$$

Escogemos λ de modo que $1 + \lambda^2 \|A\|_{\mathfrak{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V})}^2 - 2\lambda\alpha < 1$, es decir

$$(2.43) \quad 0 < \lambda < \frac{2\alpha}{\|A\|_{\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V})}^2}$$

Y obtenemos:

$$\|r^{n+1}\|_{\mathbf{V}} = \gamma \|r^n\|_{\mathbf{V}}, \quad \text{con } \gamma < 1$$

entonces:

$$\|r^{n+1}\|_{\mathbf{V}} = \gamma^{n+1} \|r^0\|_{\mathbf{V}}$$

por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u^n - u\|_{\mathbf{V}} = 0 \quad \blacksquare$$

Observación 2.3.26 Analicemos que implica la expresión (2.42):

$$u^{n+1} = J_{\lambda}^{\partial(j \circ \Phi)}(u^n + \lambda(l - A(u^n)))$$

$$\Leftrightarrow u^n + \lambda(l - A(u^n)) \in (\mathbb{I} + \lambda\partial(j \circ \Phi))(u^{n+1})$$

$$\Leftrightarrow u^n - u^{n+1} + \lambda(l - A(u^n)) \in \lambda\partial(j \circ \Phi)(u^{n+1})$$

$$\Leftrightarrow \lambda j(\Phi(v)) - \lambda j(\Phi(u^{n+1})) \geq (u^n - u^{n+1} + \lambda(l - A(u^n)), v - u^{n+1})$$

$$\Leftrightarrow (u^{n+1}, v - u^{n+1}) + \lambda j(\Phi(v)) - \lambda j(\Phi(u^{n+1})) \geq (u^n, v - u^{n+1}) \\ + \lambda(l - A(u^n), v - u^{n+1})$$

$$\Leftrightarrow (u^{n+1}, v - u^{n+1}) + \lambda j(\Phi(v)) - \lambda j(\Phi(u^{n+1})) \geq (u^n, v - u^{n+1}) + \lambda L(v - u^{n+1}) \\ - \lambda a(u^n, v - u^{n+1}) \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

y esta última expresión es una IVE donde la forma bilineal es simétrica. Es decir podemos hacer

$$b(u, v) = (u, v)_{\mathbf{V}}$$

$$m(v) = \lambda j(\Phi(v))$$

$$F(v) = (u^n, v) + \lambda \{L(v) - a(u^n, v)\}$$

y considerar que conocido u^n , escogemos u^{n+1} solución de

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in \mathbf{V} \text{ tal que} \\ b(u, v - u) + m(v) - m(u) \geq F(v - u) \quad \forall v \in \mathbf{V} \end{array} \right.$$

y así poder emplear los resultados de la sección 2.2.

Capítulo 3

Formulación variacional y quasivariacional del Problema del Dique

En el presente capítulo se considera una sección transversal de un medio poroso en la que se trata de analizar el comportamiento del flujo laminar de un líquido que se filtra a través de este medio.

A continuación proponemos algunas etapas de trabajo que tienen como meta plantear el algoritmo descrito en (2.28)–(2.29) y pueden servir como guía al momento de tratar otros problemas relacionados a las IVE's.

Encontrar la formulación variacional del problema:

$$(i) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in \mathbf{V}, \text{ tal que:} \\ a(u, v - u) + j(\Phi(v)) - j(\Phi(u)) \geq L(v - u), \quad \forall v \in \mathbf{V} \end{array} \right.$$

definiendo un apropiado espacio funcional \mathbf{V} y \mathbf{W} de modo que se satisfagan los supuestos (2.10), (2.16), (2.17), (2.18), (2.21) y (2.24).

Llevar la formulación a un problema de minimización convexa

$$(ii) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in \mathbf{V}, \text{ tal que:} \\ J_0(u) + j(\Phi(u)) = \inf_{v \in \mathbf{V}} \{J(v) + j(\Phi(v))\} \end{array} \right.$$

Proponer la forma lagrangiana de la forma

$$(iii) \quad \mathcal{L}(v, p) = J_0(v) + (p, \Phi(v))_{\mathbf{W}} - j^*(p) \quad \forall v \in \mathbf{V}, \forall p \in \mathbf{W}$$

(iv) Caracterizar los puntos de silla de \mathcal{L}

(v) Probar que existen puntos de silla y verificar su unicidad

- (vi) Utilizando la caracterización de los puntos de silla y con el cálculo de $J_\lambda^{\partial(j^*)}$ establecemos explícitamente el desarrollo del algoritmo (2.28)–(2.29)

3.1 Problema del Dique de sección transversal rectangular.

3.1.1 Modelización matemática

La región ocupada por el medio poroso se representa por un conjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^2$, el mismo que se descompone en dos regiones, una llamada Ω que representa a la zona húmeda (concentración del fluido) y otra llamada Ω_{ext} y que representa la zona seca (no tenemos la presencia de fluido). Sean y_1 y y_2 las alturas que representan el nivel del líquido con $y_1 > y_2$.

La frontera de D , $\partial D = \overline{AF} \cup \overline{FE} \cup \overline{ED} \cup \overline{DC} \cup \overline{CB} \cup \overline{BA}$, es considerada suficientemente regular.

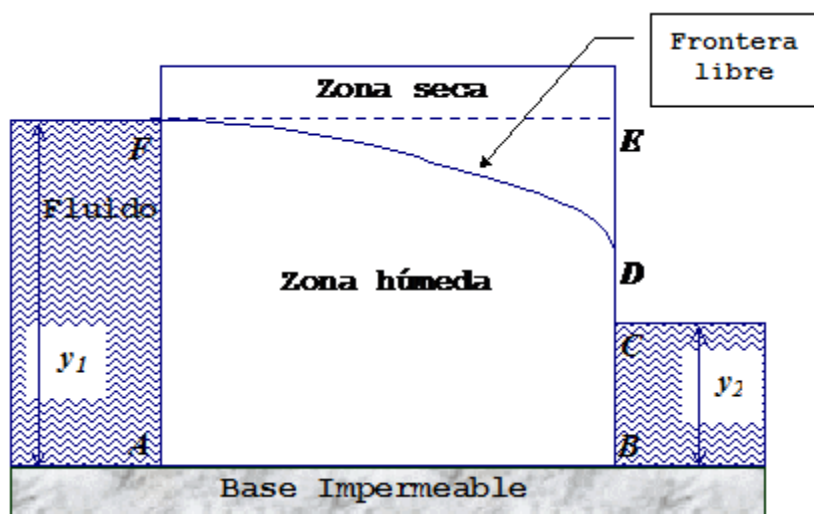


Figura 3.1: Geometría del dique rectangular

La ecuación que gobierna el desplazamiento del fluido (flujo laminar) viene dada por la ley de Darcy:

$$(3.1) \quad q = -\frac{k}{\mu} \nabla(p + \rho gy)$$

donde q es el campo de velocidades, p es la presión, ρ es la densidad del fluido (constante), μ es la viscosidad dinámica (constante), k es el coeficiente de permeabilidad (constante) del medio poroso, g representa la gravedad y asumimos que la función $y = f(x)$ que

representa una parte de la frontera es positiva (la cual es considerada una incógnita más del problema).

El potencial de velocidad está definido por la función escalar

$$(3.2) \quad \phi = \frac{k}{\mu}(p + \rho gy)$$

y obedeciendo el principio de conservación de la cantidad de masa (ecuación de continuidad) se requiere que q satisfaga la siguiente condición:

$$(3.3) \quad \nabla \cdot q = \nabla \cdot \nabla \phi = \Delta \phi = 0$$

es decir, se obtiene la ecuación de Laplace para ϕ en la zona húmeda Ω .

Haciendo un adecuado cambio en las unidades de medida de la presión y de la altura, y sin cambio en la notación escribimos:

$$(3.4) \quad \phi = p + y$$

y por tanto

$$(3.5) \quad \Delta \phi = 0 \quad \text{en } \Omega$$

3.1.2 Caracterización como un problema de frontera libre

La zona húmeda del problema está acotada por algunas paredes del dique \overline{AF} y \overline{BD} , pero también por la *Frontera Libre* \overline{FD} , cuya forma y posición es desconocida y debe ser determinada. La parte de la frontera \overline{CD} se conoce como zona de drenaje.

Las condiciones de contorno que debe de satisfacer ϕ en la frontera de Ω , son las siguientes:

- (i) Considerando que el flujo a través de la superficie impermeable \overline{AB} es aislado se tiene la condición de frontera Neumann expresada por:

$$(3.6) \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{en } \overline{AB}$$

- (ii) Por otra parte, en la frontera \overline{FD} que separa la zona húmeda de la zona seca, denominada *Frontera Libre*, en la cual el flujo se asume que debe ser impenetrable, entonces se considera:

$$(3.7) \quad \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0 \quad \text{en } \overline{FD}$$

- (iii) Otra condición que se atribuye a la frontera de Ω es la continuidad de la presión a través de ella, y fuera de la región, es decir en \overline{AF} y \overline{BC} , $p = y_i - y$, para $i = 1, 2$. Sustituyendo ésta condición en la ecuación (3.4) se tiene que: $\phi = y_i$ para $i = 1, 2$.
- (iv) Por último, el hecho de que el fluido abandone el medio poroso también por la zona de drenaje \overline{CD} y considerando en esta zona la salida del flujo en sentido vertical, nos lleva a la condición de contorno negativa en la dirección x .

$$(3.8) \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} \leq 0 \quad \text{en } \overline{CD}$$

En resumen, el modelo matemático para el denominado problema del dique es formulado de la siguiente manera:

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta \phi = 0 & \text{en } \Omega \\ \phi = y_1, & \text{en } \overline{AF}, \\ \phi = y_2, & \text{en } \overline{BC}, \\ \phi = y, & \text{en } \overline{FD}, \\ \phi = y, & \text{en } \overline{CD}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, & \text{en } \overline{FD}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} \leq 0, & \text{en } \overline{CD}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, & \text{en } \overline{AB}. \end{array} \right.$$

La solución completa del problema incluye la determinación de la frontera libre $f(x)$ tal que la siguientes condiciones se satisfagan:

$$f(0) = y_1, \quad f(x_1) > y_2, \quad \frac{df}{dx}(0) = 0, \quad \frac{df}{dx}(x_1) = +\infty$$

Para un análisis mas extenso sobre la necesidad de estas restricciones se puede consultar [3]

3.1.3 Formulación variacional mediante la Transformación de Baiocchi

La idea clásica de resolver el problema se debe a Baiocchi y consiste en reformularlo en un dominio fijo, mediante la extensión del dominio Ω , a un dominio con fronteras fijas (en

la Figura 3.1, el rectángulo \overline{ABEF}). La variable dependiente se prolonga continuamente a través de la frontera libre, esto es $D = \Omega \cup \Omega_{ext} \cup \Gamma$, donde $\Gamma = \widehat{FD}$, incluyendo los puntos F y D , y se define la nueva variable ϕ_D en la forma:

$$(3.10) \quad \phi_D(x, y) = \begin{cases} \phi(x, y) & \text{en } \overline{\Omega} \\ y & \text{en } \overline{D} \setminus \overline{\Omega} \end{cases}$$

Ahora se utiliza la *Transformación de Baiocchi*, que permitirá más adelante formular el problema mediante una inecuación variacional. Esta transformación consiste en definir una nueva función w , continua en \overline{D} tal que:

$$(3.11) \quad w(x, y) = \int_y^{y_1} (\phi_D(x, \eta) - \eta) \, d\eta$$

A continuación haremos algunas operaciones de modo que obtengamos información suficiente sobre w .

Para $\varphi \in C^\infty(D)$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \phi_D \cdot \nabla \varphi &= \int_D \nabla \phi_D \cdot \nabla \varphi - \int_{D \setminus \Omega} \nabla \phi_D \cdot \nabla \varphi \\ &= \int_D \nabla \phi_D \cdot \nabla \varphi - \int_{D \setminus \Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ &= \int_D \nabla \phi_D \cdot \nabla \varphi - \int_D \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ &= \int_D \nabla (\phi_D - y) \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned}$$

como además

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \phi_D \cdot \nabla \varphi &= - \int_{\Omega} \varphi \Delta \phi + \int_{\partial \Omega} \varphi \frac{\partial \phi}{\partial n} \\ &= - \int_A^F \varphi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \int_B^D \varphi \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned}$$

concluimos que

$$(3.12) \quad \int_D \nabla (\phi_D - y) \cdot \nabla \varphi = - \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \int_A^F \varphi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \int_B^D \varphi \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

En particular si $\varphi \in \mathcal{D}(D)$

$$(3.13) \quad \int_D \nabla(\phi_D - y) \cdot \nabla \varphi = - \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \int_D \chi_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

es decir

$$(3.14) \quad -\Delta(\phi_D - y) = \frac{\partial \chi_{\Omega}}{\partial y} \quad \text{en } \mathcal{D}'(D)$$

en particular como $-\frac{\partial w}{\partial y} = \phi_D - y$

$$D_y(\Delta w - \chi_{\Omega}) = 0 \quad \text{en } \mathcal{D}'(D)$$

Sea $x^* \in (0, x_1)$ y G una vecindad de (x^*, y_1) suficientemente pequeña de modo que para cualquier $(x, y) \in D \cap G$ tengamos que $(x, y) \notin \Omega$ y por tanto $w \equiv 0$ en $D \cap G$, de modo que

$$\Delta w(x, y) - \chi_{\Omega} = 0 \quad \text{en } D \cap G$$

y por tanto

$$\Delta w - \chi_{\Omega} = 0 \quad \text{en } \mathcal{D}'(D)$$

o

$$(3.15) \quad \Delta w - \chi_{\Omega} = 0 \quad \text{c.t.p en } D$$

También de (3.12) para $\varphi \in C^{\infty}(D)$, con $\varphi(x, y) = \varphi_1(x) \varphi_2(y)$, con $\varphi_1 \in \mathcal{D}(]0, x_1[)$, $\varphi_2 \equiv 1$ en $[0, y_1]$, tenemos:

$$\int_D \left\{ \varphi_2 \frac{\partial(\phi_D - y)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \varphi_1 \frac{\partial(\phi_D - y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right\} = - \int_{\Omega} \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}$$

como en este caso $D =]0, x_1[\times]0, y_1[$ entonces

$$\int_0^{x_1} \int_0^{y_1} \frac{\partial(\phi_D - y)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0$$

como φ_1 no depende de y :

$$\int_0^{x_1} \left\{ \int_0^{y_1} \frac{\partial(\phi_D - y)}{\partial x} \right\} \frac{d\varphi_1}{dx} = 0 \quad \forall \varphi_1 \in \mathcal{D}(]0, x_1[)$$

de donde

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int_0^{y_1} \frac{\partial}{\partial x} (\phi_D(x, t) - t) dt \right\} = 0$$

es decir existe una constante c tal que

$$\int_0^{y_1} \frac{\partial}{\partial x} (\phi_D(x, t) - t) dt = c$$

y de la definición de w

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x, 0) = c$$

y por tanto w es de la forma $cx + m$ en la base del dique (m constante)

En base a estas propiedades damos la siguientes condiciones para w

3.1.4 Condiciones de frontera

- (i) Sobre la frontera libre \overline{FD} y toda la zona seca, $w(x, y) = 0$ además, sustituyendo (3.4) en (3.11) se tiene:

$$(3.16) \quad w(x, y) = \int_y^{f(x)} p(x, \eta) d\eta \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

y en consecuencia, $w > 0$ en Ω .

- (ii) $w_x = \frac{\partial w}{\partial x} = w_y = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$ en Γ y en $\bar{D} \setminus \bar{\Omega}$

- (iii) $\Delta w = 1$ en Ω , donde $w > 0$

$$\Delta w = 0 \quad \text{en } D \setminus \bar{\Omega}, \text{ donde } w = 0$$

- (iv) Además a partir de las condiciones de contorno ϕ deducimos:

$$w(0, y) = \frac{1}{2}(y_1 - y)^2 \quad \text{en } \overline{AF}$$

$$w(x_1, y) = \frac{1}{2}(y_2 - y)^2 \quad \text{en } \overline{BC}$$

$$w(x_1, y) = 0 \quad \text{en } \overline{CD}$$

$$w(x_1, y) = 0 \quad \text{en } \overline{DE}$$

$$w(x, y_1) = 0 \quad \text{en } \overline{EF}$$

$$w(x, 0) = \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2) \frac{x}{x_1} \quad \text{en } \overline{AB}$$

lo que nos permite definir

$$(3.17) \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} (y_1 - y)^2 & \text{en } \overline{AF} \\ \frac{1}{2} (y_2 - y)^2 & \text{en } \overline{BC} \\ 0 & \text{en } \overline{CD} \\ 0 & \text{en } \overline{DE} \\ 0 & \text{en } \overline{EF} \\ \frac{1}{2} y_1^2 - \frac{1}{2} (y_1^2 - y_2^2) \frac{x}{x_1} & \text{en } \overline{AB} \end{cases}$$

Observación 3.1.1 *La función definida en (3.17) puede ser extendida del modo siguiente:*

$$\tilde{g}(x, y) = \frac{1}{16} \left\{ (y_1 - y)^2 \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) + (y_2 - y)^2 \frac{x}{x_1} + (y_1 - y) |y_1 - y| \frac{x}{x_1} + (y_2 - y) |y_2 - y| \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) \right\}$$

de modo que $\tilde{g} \in \mathbf{C}^1(\overline{D}) \subset \mathbf{H}^2(D)$.

Con las notaciones y resultados anteriores el modelo matemático en el caso del dique de sección transversal rectangular se reduce al siguiente problema de frontera libre:

$$(3.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } w \in \mathbf{H}^1(D) \cap \mathbf{C}(\overline{D}) : \\ (\Delta w - 1) w = 0 \text{ en } D, \\ w \geq 0 \text{ en } D \\ \text{además } w|_{\partial D} = g \end{array} \right.$$

La formulación variacional definida sobre el espacio $\mathbf{V} = \mathbf{H}_0^1(D)$ queda formulado del siguiente modo

$$(3.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \tilde{w} \in K \text{ tal que:} \\ a(\tilde{w}, v - \tilde{w}) \geq L(v - \tilde{w}) \quad \forall v \in K \end{array} \right.$$

donde: $a(u, v) = \int_D \nabla u \cdot \nabla v$

$$L(v) = - \left\{ a(\tilde{g}, v) + \int_D v \right\}$$

$$K = \{v \in \mathbf{V} : v + \tilde{g} \geq 0 \text{ c.t.p en } D\}$$

Proposición 3.1.2 Si w es solución del problema (3.18) entonces $\tilde{w} = w - \tilde{g}$, donde $\tilde{g} \geq 0$, $\tilde{g} \in \mathbf{H}^1(D)$, y $\gamma_0 \tilde{g} = g$, es solución del problema variacional (3.19). Y además, por ser $a(\cdot, \cdot)$ simétrica, \tilde{w} es solución de:

$$(3.20) \quad J(\tilde{w}) = \inf_{v \in K} J(v) = \inf_{v \in \mathbf{V}} \{J(v) + I_K(v)\}$$

donde: $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$ e $I_K(\cdot)$ es la funcional indicatriz asociada a K

Recíprocamente si \tilde{w} es solución de (3.19) y $\tilde{w}, \tilde{g} \in \mathbf{H}^2(D)$ entonces $\tilde{w} + \tilde{g}$ es solución de (3.18).

Prueba:

(i) Sea w solución de (3.18), entonces para $v \in K$ tenemos:

$$\begin{aligned} a(\tilde{w}, v - \tilde{w}) + a(\tilde{g}, v - \tilde{w}) &= a(w, v - \tilde{w}) = \int_D \nabla w \cdot \nabla (v - \tilde{w}) \\ &= - \int_D (v - \tilde{w}) \Delta w + \int_{\partial D} (v - \tilde{w}) \frac{\partial w}{\partial \eta} \mathbf{d}\Gamma \\ &= - \int_D (v - \tilde{w}) \Delta w \\ &= - \int_{D \setminus \Omega} (v - \tilde{w}) \Delta w - \int_{\Omega} (v - \tilde{w}) \Delta w \\ &= - \int_{\Omega} (v - \tilde{w}) = - \int_D (v - \tilde{w}) + \int_{D \setminus \Omega} (v - \tilde{w}) \\ &= - \int_D (v - \tilde{w}) + \int_{D \setminus \Omega} (v - \tilde{g}) \end{aligned}$$

como $v - \tilde{g} \geq 0$, entonces $\int_{D \setminus \Omega} (v - \tilde{g}) \geq 0$, por tanto:

$$a(\tilde{w}, v - \tilde{w}) \geq - \int_D (v - \tilde{w}) - a(\tilde{g}, v - \tilde{w})$$

(ii) Sea \tilde{w} es solución de (3.19), y $\varphi \in \mathcal{D}(D)$, $\varphi \geq 0$ entonces $v = \varphi + \tilde{w} \in K$ y de acuerdo con (3.19):

$$a(\tilde{w} + \tilde{g}, \varphi) \geq - \int_D \varphi$$

pero

$$\begin{aligned} a(\tilde{w} + \tilde{g}, \varphi) &= \int_D \nabla(\tilde{w} + \tilde{g}) \cdot \nabla \varphi \\ &= - \int_D \varphi \Delta(\tilde{w} + \tilde{g}) + \int_{\partial D} \varphi \frac{\partial(\tilde{w} + \tilde{g})}{\partial n} \\ &= - \int_D \varphi \Delta(\tilde{w} + \tilde{g}) \end{aligned}$$

entonces

$$\int_D \varphi [1 - \Delta(\tilde{w} + \tilde{g})] \geq 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(D), \varphi \geq 0$$

es decir que

$$(3.21) \quad \Delta(\tilde{w} + \tilde{g}) \leq 1 \quad \text{c.t.p. en } D$$

haciendo $w = \tilde{w} - \tilde{g}$ obtenemos

$$\Delta w \leq 1 \quad \text{en } D$$

Ahora escojamos $(x_0, y_0) \in \{w > 0\}$, entonces existe $\delta > 0 : w(x_0, y_0) > \delta > 0$; por ser w continua $\mathbf{H}^2(D) \subset \mathbf{C}^1(\bar{D})$ existe una vecindad $U_{\{(x_0, y_0)\}} \subset D$ de modo que $w(x, y) > \delta$ para $(x, y) \in U_{\{(x_0, y_0)\}}$.

Escogemos $v = w \pm \delta \varphi$ con $\varphi \in \mathcal{D}(U_{\{(x_0, y_0)\}})$, satisfaciendo que $\|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty}(D) \leq 1$, entonces $v \in K$ y podemos utilizar (3.19) obteniendo

$$\pm \int_D \varphi (1 - \Delta w) \geq 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(U_{\{(x_0, y_0)\}}), \|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty}(D) \leq 1$$

es decir que para $(x_0, y_0) \in \{w > 0\} : (\Delta w - 1)(x_0, y_0) = 0$, por tanto

$$(3.22) \quad \Delta w = 1 \quad \text{en } \{w > 0\}. \quad \blacksquare$$

Observación 3.1.3 También se puede verificar que si $\tilde{g} \in \mathbf{H}^2(D)$ la solución w del problema variacional (3.19) también pertenece a $\mathbf{H}^2(D)$, (ver [8]).

3.2 Aplicación de la teoría de dualidad al problema variacional.

En esta sección aplicaremos el algoritmo descrito en el capítulo anterior. Recordemos que la solución del problema del dique rectangular, $D \subset \mathbb{R}^2$ está asociado a la solución de la siguiente IVE.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \tilde{w} \in K, \text{ tal que:} \\ a(\tilde{w}, v - \tilde{w}) \geq L(v - \tilde{w}), \forall v \in K \end{array} \right.$$

donde: $a(u, v) = \int_D \nabla u \cdot \nabla v$

$$L(v) = - \left\{ a(\tilde{g}, v) + \int_D v \right\}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{H}_0^1(D)$$

$$K = \{v \in \mathbf{V} : v + \tilde{g} \geq 0 \text{ c.t.p en } D\}$$

$$\tilde{g} \in \mathbf{H}^2(D), \tilde{g} \geq 0 \text{ y } \gamma_0 \tilde{g} = g \quad (\text{ver (3.17)})$$

además \tilde{w} satisface:

$$(3.23) \quad J(\tilde{w}) = \inf_{v \in K} J(v)$$

para: $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$

3.2.1 Formulación Lagrangiana

Como $\mathbf{H}_0^1(D) \subset \mathbf{L}^2(D)$, entonces podemos expresar el conjunto K como:

$$K = \mathbf{V} \cap M$$

donde M está dado por

$$M = \{v \in \mathbf{L}^2(D) : v + \tilde{g} \geq 0 \text{ c.t.p en } D\}$$

Sea $I_M : \mathbf{W} = \mathbf{L}^2(D) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ la funcional indicatriz asociada a M , que al ser éste no vacío convexo y cerrado es propia, s.c.i, y convexa, entonces \tilde{w} también satisface en base a (3.23) el siguiente problema:

$$(3.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } w \in \mathbf{V} \\ J(w) + I_M(\Phi(w)) \leq J(v) + I_M(\Phi(v)) \quad \forall v \in \mathbf{V} \end{array} \right.$$

donde $\Phi : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}, \Phi(v) = v$.

Ahora probaremos que Φ es una aplicación Lipschitz.

En efecto:

$$\begin{aligned} \|\Phi(v) - \Phi(w)\|_{\mathbf{W}}^2 &= \|v - w\|_{\mathbf{W}}^2 \\ &\leq \|v - w\|_{\mathbf{W}}^2 + \|\nabla v - \nabla w\|_{\mathbf{W}}^2 \\ &= \|v - w\|_{\mathbf{H}^1(D)}^2 \end{aligned}$$

luego por el teorema 1.4.53 existe $c > 0$ tal que

$$\|v - w\|_{\mathbf{H}^1(D)} \leq c \|v - w\|_{\mathbf{V}}$$

Se define el operador lagrangiano como:

$$(3.25) \quad \mathcal{L}(v, p) = J(v) + (p, \Phi(v))_{\mathbf{W}} - (I_M)^*(p)$$

y el problema dual como:

$$\sup_{p \in \mathbf{W}} \inf_{v \in \mathbf{V}} \{J(v) + (p, \Phi(v))_{\mathbf{W}} - (I_M)^*(p)\}$$

Proposición 3.2.4 *El par (\tilde{w}, q) es el único punto de silla de (3.25) donde*

(i)

$$\tilde{w} \text{ resuelve (3.23)}$$

(ii)

$$\Delta(\tilde{w} + \tilde{g}) = 1 + q \quad \text{c.t.p. en } D$$

Prueba: Si \tilde{w} resuelve (3.23) entonces

$$(3.26) \quad \Delta(\tilde{w} + \tilde{g}) \leq 1 \quad \text{c.t.p. en } D$$

y por tanto

$$(3.27) \quad \int_D [\Delta(\tilde{w} + \tilde{g}) - 1](v + \tilde{g}) \leq 0 \quad \forall v \in M$$

utilizando la funcional indicatriz

$$(3.28) \quad \int_D [\Delta(\tilde{w} + \tilde{g}) - 1](v + \tilde{g}) \leq I_M(v) - I_M(\tilde{w}) \quad \forall v \in \mathbf{L}^2(D)$$

además como

$$\int_D [\Delta(\tilde{w} + \tilde{g}) - 1] (\tilde{w} + \tilde{g}) = 0$$

entonces

$$(3.29) \quad \int_D [\Delta(\tilde{w} + \tilde{g}) - 1] (v - \tilde{w}) \leq I_M(v) - I_M(\tilde{w}) \quad \forall v \in \mathbf{L}^2(D)$$

es decir

$$\Delta(\tilde{w} + \tilde{g}) - 1 \in \partial I_M(\tilde{w})$$

basta hacer

$$\Delta(\tilde{w} + \tilde{g}) - 1 = q \in \partial I_M(\tilde{w})$$

y aplicar la proposición (2.2.20) pues

$$\int_D [\Delta(\tilde{w} + \tilde{g}) - 1] v = \int_D qv \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

y.

$$-a(\tilde{w} + \tilde{g}, v) - \int_D v = \int_D qv \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

por tanto

$$a(\tilde{w}, v) - L(v) = -(q, \Phi(v))_{\mathbf{W}} \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

o equivalentemente

$$J_0(\tilde{w}) + (q, \Phi(\tilde{w}))_{\mathbf{W}} = \min_{v \in \mathbf{V}} \{J_0(v) + (q, \Phi(v))_{\mathbf{W}}\}. \quad \blacksquare$$

$$\text{Ahora bien: } (I_M)^*(q) = \sup_{\hat{q} \in \mathbf{W}} \{(q, \hat{q})_{\mathbf{W}} - I_M(\hat{q})\}$$

$$= \sup_{\hat{q} \in K} \{(q, \hat{q})_{\mathbf{W}}\}$$

$$\text{Sea } K^* = \{q \in \mathbf{W} : (q, \hat{q} + \tilde{g})_{\mathbf{W}} \leq 0 \quad \forall \hat{q} \in M\}$$

(i) Si $q \in K^* \Rightarrow \sup_{\hat{q} \in M} \{(q, \hat{q})_{\mathbf{W}}\} \leq -(q, \tilde{g})_{\mathbf{W}}$. Podemos escoger $\hat{q} = -\tilde{g}$ y por tanto

$$-(q, \tilde{g})_{\mathbf{W}} \leq \sup_{\hat{q} \in M} \{(q, \hat{q})_{\mathbf{W}}\} \leq -(q, \tilde{g})_{\mathbf{W}}$$

es decir

$$\sup_{\hat{q} \in M} \{(q, \hat{q})_{\mathbf{W}}\} = -(q, \tilde{g})_{\mathbf{W}}$$

(ii) Si $q \notin K^* \Rightarrow (q, \hat{q} + \tilde{g})_{\mathbf{W}} > 0$ para algún $\hat{q} \in K$, en base a esto se puede construir una sucesión $\{\hat{q}_n\} \subset M, \hat{q}_n = n(\hat{q} + \tilde{g})$ de modo que:

$$(q, \hat{q}_n + \tilde{g})_{\mathbf{W}} = (q, n(\hat{q} + \tilde{g}))_{\mathbf{W}} = n(q, (\hat{q} + \tilde{g}))_{\mathbf{W}}$$

por tanto:

$$\begin{aligned} \sup_{\hat{q} \in M} \{(q, \hat{q} + \tilde{g})_{\mathbf{W}}\} &\geq (q, \hat{q}_n)_{\mathbf{W}} \\ &= n(q, \hat{q} + \tilde{g})_{\mathbf{W}} \end{aligned}$$

Con lo que concluimos:

$$\sup_{\hat{q} \in M} \{(q, \hat{q})_{\mathbf{W}}\} = +\infty$$

Resumiendo

$$(I_M)^*(q) = \begin{cases} -(q, \tilde{g})_{\mathbf{W}} & : q \in K^* \\ +\infty & : q \notin K^* \end{cases}$$

Ahora haremos el cálculo de $J_{\lambda}^{\partial(I_M)^*}$, sea $q = J_{\lambda}^{\partial(I_M)^*}(z)$ entonces $z \in (\mathbb{I} + \lambda\partial(I_M)^*)(q)$ es decir

$$\frac{z - q}{\lambda} \in \partial(I_M)^*(q)$$

o equivalentemente

$$(I_M)^*(p) - (I_M)^*(q) \geq \left(\frac{z - q}{\lambda}, p - q \right)_{\mathbf{W}}, \forall p \in \mathbf{W}$$

que es equivalente a decir:

$$(I_M)^*(p) - (I_M)^*(q) \geq \left(\frac{z - q}{\lambda}, p - q \right)_{\mathbf{W}}, \forall p \in K^*$$

y como

$$\begin{aligned} (I_M)^*(p) - (I_M)^*(q) &= (q, \tilde{g})_{\mathbf{W}} - (p, \tilde{g})_{\mathbf{W}} \\ &= (q - p, \tilde{g})_{\mathbf{W}} \end{aligned}$$

entonces

$$0 \geq \left(\frac{z - q}{\lambda} + \tilde{g}, p - q \right)_{\mathbf{W}}, \forall p \in K^*$$

y ya que $\lambda > 0$ tenemos que

$$q = \text{Pr}_{K^*}(z + \lambda\tilde{g})$$

o en términos de la resolvente:

$$J_{\lambda}^{\partial(I_M)^*}(z) = \text{Pr}_{K^*}(z + \lambda\tilde{g})$$

Entonces el esquema de solución (2.28)–(2.29) es el siguiente:

- (i) Comenzamos con $q^0 \in \mathbf{W}$
- (ii) Conocido q^n escoger u^n que resuelva:

$$(3.30) \quad \begin{cases} \Delta (u^n + \tilde{g}) = 1 + q^n \text{ c.t.p. en } \Omega \\ u^n = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

- (iii) Se elige q^{n+1} de acuerdo a:

$$(3.31) \quad q^{n+1} = \text{Pr}_{K^*} (q^n + \lambda (u^n + \tilde{g}))$$

3.3 Formulación quasivariacional del problema del Dique de sección transversal generalizada.

3.3.1 Planteamiento

Sea D un conjunto conexo y acotado en \mathbb{R}^2 que representa un medio poroso isotrópico. El contorno ∂D está dividido en tres conjuntos medibles: Γ_0 es la base del dique, que está en contacto con la roca y es impermeable; Γ_3 es la parte de ∂D que está en contacto con la atmósfera; y Γ_1 y Γ_2 son las partes que están en contacto con los reservorios del fluido.

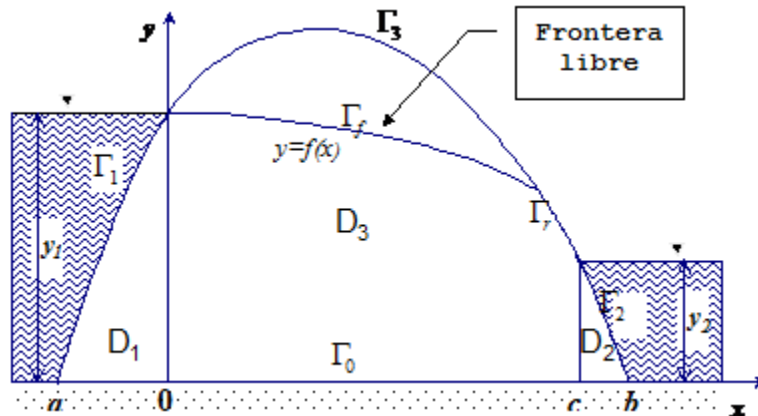


Figura 3.2: Geometría de un dique con base plana

El fluido fluye a través del dique poroso D , siendo el problema encontrar Ω el subconjunto seco de D , y p la función presión del fluido. En otras palabras, necesitamos conocer la frontera libre Γ_f que divide D en dos partes: la parte húmeda y la parte seca; y la presión interna p en D

En la Figura 3.2, Γ_r denota la parte de Γ que está en contacto con el aire y que es llamada la zona de filtración o de drenaje. Por otro lado, y_1 y y_2 son los niveles del fluido en los reservorios.

La ecuación que gobierna el desplazamiento del fluido viene dada por la ley de Darcy:

$$(3.32) \quad v = -\frac{k}{\mu} \nabla(p + \rho gy)$$

Donde v es el vector velocidad del fluido, p es la presión, ρ es la densidad (considerada constante), μ es la viscosidad, k es el coeficiente de permeabilidad del medio y suponemos que la ordenada y es positiva. Si hacemos el cambio de unidades de presión y altura

$$(3.33) \quad \begin{aligned} \bar{p} &= \frac{k}{\mu} p \\ \bar{y} &= \frac{k}{\mu} \rho gy \end{aligned}$$

tenemos, sin cambio en la notación

$$(3.34) \quad v = -\nabla(p + y)$$

entonces la ecuación de continuidad que debe de satisfacer el fluido es:

$$(3.35) \quad \nabla \cdot v = -\nabla \cdot \nabla(p + y) = -\Delta(p + y) = -\Delta p = 0$$

es decir, el potencial de velocidad satisface la ecuación de Laplace.

Denotemos por Ω a la zona húmeda, entonces la ecuación de Laplace $-\Delta p = 0$ se satisface para todo $(x, y) \in \Omega$, siendo Ω definido como el conjunto:

$$(3.36) \quad \Omega = \{(x, y) \in D : p(x, y) > 0\}$$

La parte superior del dique se puede identificar con el grafo de una función cóncava $Y \in C^3([a, b])$, que satisface $Y(a) = Y(b) = 0$. De acuerdo a esto:

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in]a, b[\times \{0\}\}$$

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]a, 0[, y = Y(x)\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]c, b[, y = Y(x)\}$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0, c[, y = Y(x)\}$$

y el conjunto al que nos referimos como dique estará definido como:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]a, b[, y \in]0, Y(x)[\}$$

$$\partial D = \overline{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3}$$

Definimos en D tres subconjuntos:

$$D_1 = \{(x, y) \in D : x \in]a, 0[\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \in D : x \in]c, b[\}$$

$$D_3 = \{(x, y) \in D : x \in]0, c[\}$$

Por último podemos exigir, de acuerdo a la realidad física, que:

(3.37) La presión sea cero en la parte seca del dique, positiva en la parte húmeda, y que cerca a la base también sea positiva.

(3.38) El líquido pueda salir a través de la línea de drenaje pero no pueda entrar.

Considerando el material del dique como homogéneo, la parte húmeda debe de ser un subgrafo:

$$(3.39) \quad \text{si } (\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega \quad \text{y} \quad 0 < y < \bar{y} \Rightarrow (\bar{x}, y) \in \Omega.$$

3.3.2 Condiciones de frontera

Si asumimos que la presión atmosférica es igual a cero y pasamos por alto los efectos de la evaporación, las condiciones de contorno que debe de satisfacer p en la frontera de Ω , son las siguientes:

Como la presión debe de ser continua cuando el flujo atraviesa las fronteras Γ_i entonces:

$$(3.40) \quad p = \begin{cases} y_i - y & \text{en } \Gamma_i \\ 0 & \text{en } \Gamma_f \cup \Gamma_r \end{cases} \quad (\text{condiciones Dirichlet})$$

donde y_i ($i = 1, 2$) es el nivel del fluido en los reservorios de fronteras Γ_i

Como no puede haber flujo a través de una superficie impermeable tenemos que:

$$(3.41) \quad v \cdot n = -\nabla(p + y) \cdot n = -\frac{\partial}{\partial n}(p + y) = 0, \quad \text{en } \Gamma_f \text{ y } \Gamma_0$$

Por último, el hecho de que el fluido abandone el medio poroso, por la zona de resaca Γ_r , nos lleva a la siguiente condición de flujo respecto a la normal:

$$(3.42) \quad v \cdot n \geq 0 \Rightarrow \nabla(p + y) \cdot n = \frac{\partial}{\partial n}(p + y) \leq 0, \quad \text{en } \Gamma_r$$

Para plantear formulación quasivariacional se siguen las siguientes etapas que son descritas como distintos tipos de problemas:

Problema 1. Encontrar (p, Ω) tal que

$$(3.43) \quad p \in \mathbf{C}(\bar{D}) \cap \mathbf{H}^1(D)$$

$$(3.44) \quad x \mapsto \int_0^{Y(x)} \frac{\partial p}{\partial x} \text{ es no decreciente en } [0, c],$$

$$(3.45) \quad p \geq 0 \text{ en } \bar{D},$$

$$(3.46) \quad p > 0 \text{ en } \Gamma_0,$$

$$(3.47) \quad p = y_1 - y \text{ en } \Gamma_1,$$

$$(3.48) \quad p = y_2 - y \text{ en } \Gamma_2,$$

$$(3.49) \quad p = 0 \text{ en } \Gamma_3,$$

siendo Ω un conjunto abierto y acotado y definido por (3.36)

$$(3.50) \quad \mathbf{C}_\Gamma = \{ \psi \in C^\infty(\bar{D}) : \psi = 0 \text{ en una vecindad de } \Gamma \},$$

entonces

$$(3.51) \quad \forall \psi \in \mathbf{C}_\Gamma : \int_{\Omega} \nabla(p + y) \cdot \nabla \psi \, dx \, dy = 0.$$

Veremos ahora las razones que nos llevan a considerar este modelo:

La condición (3.43) junto a (3.36) permite considerar la parte húmeda como un subconjunto abierto de D , las condiciones (3.36),(3.46) reflejan (3.37). (3.47)–(3.49) junto con la definición (3.36) conducen a las condiciones Dirichlet.

De (3.51) y con $\psi \in \mathfrak{D}(\Omega) \subset \mathbf{C}_\Gamma$ se desprende que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \nabla(p + y) \cdot \nabla \psi \\ &= - \int_{\Omega} \Delta(p + y) \psi + \int_{\partial\Omega} \psi \frac{\partial}{\partial n} (p + y) \\ &= - \int_{\Omega} \Delta(p + y) \psi \quad \forall \psi \in \mathfrak{D}(\Omega) \end{aligned}$$

lo que nos da (3.35).

Si escogemos $\psi \in C_\Gamma$

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\Omega} \nabla (p + y) \cdot \nabla \psi \\
 &= - \int_{\Omega} \Delta (p + y) \psi + \int_{\partial\Omega} \psi \frac{\partial}{\partial n} (p + y) \\
 &= \int_{\partial\Omega} \psi \frac{\partial}{\partial n} (p + y) = \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} \psi \frac{\partial}{\partial n} (p + y) \quad \forall \psi \in C_\Gamma
 \end{aligned}$$

y por tanto

$$\frac{\partial}{\partial n} (p + y) = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \setminus \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_\lambda$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \int_0^{Y(x)} \frac{\partial p}{\partial x} dy &= \int_0^{Y(x)} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} dy + \frac{\partial p}{\partial x} (x, Y(x)) Y'(x) \\
 &= - \int_0^{Y(x)} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} dy + \frac{\partial p}{\partial x} (x, Y(x)) Y'(x) \\
 &= \frac{\partial p}{\partial y} (x, Y(x)) + \frac{\partial p}{\partial y} (x, 0) + \frac{\partial p}{\partial x} (x, Y(x)) Y'(x) \\
 &= \nabla (p + y) (x, Y(x)) \cdot (Y'(x), -1) \\
 &= -\sqrt{Y'(x)^2 + 1} \frac{\partial}{\partial n} (p + y) (x, Y(x))
 \end{aligned}$$

y de acuerdo a (3.44)

$$\frac{\partial}{\partial n} (p + y) \leq 0$$

lo cual que concuerda con (3.42)

3.3.3 Transformación del problema de frontera libre

La transformación integral

Ahora introducimos la función de transformación que será de ayuda para formular el problema de frontera libre.

Definición 3.3.5 Sea $p \in \mathbf{C}(\bar{D}) \cap \mathbf{H}^1(D)$ y $(x, y) \in \bar{\Omega}$, definimos $U : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$(3.52) \quad U(x, y) = \int_0^y p(x, t) dt$$

definiendo la presión como cero fuera de Ω

Observación 3.3.6 Esta definición de U es claramente equivalente a: $\frac{\partial U}{\partial y} = p$ en D y $U = 0$ en Γ_0 . Además se puede probar (ver [3]) que en virtud a la regularidad de la solución del **Problema 1**:

$$(3.53) \quad U \in \mathbf{W}^{2,r}(D), \quad \forall r < +\infty$$

Por otra parte veremos que $\Delta p = -\frac{\partial}{\partial y}\chi_\Omega$ en el sentido de las distribuciones.

En efecto si $\varphi \in \mathcal{D}(D)$

$$\begin{aligned} \int_D \left(\Delta p + \frac{\partial}{\partial y}\chi_\Omega \right) \varphi &= \int_D \Delta p \varphi + \int_D \frac{\partial}{\partial y}\chi_\Omega \varphi = \int_\Omega \Delta p \varphi + \int_{D \setminus \Omega} \Delta p \varphi - \int_D \chi_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ &= - \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla \varphi + \int_{\partial \Omega} \varphi \frac{\partial p}{\partial n} - \int_{D \setminus \Omega} \nabla p \cdot \nabla \varphi + \int_{\partial(D \setminus \Omega)} \varphi \frac{\partial p}{\partial n} - \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ &= - \int_\Omega \left[\nabla p \cdot \nabla \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] + \int_{\partial \Omega} \varphi \frac{\partial p}{\partial n} + \int_{\partial(D \setminus \Omega)} \varphi \frac{\partial p}{\partial n} \\ &= - \int_\Omega \nabla(p+y) \cdot \nabla \varphi + \int_{\partial \Omega} \varphi \frac{\partial p}{\partial n} + \int_{\partial(D \setminus \Omega)} \varphi \frac{\partial p}{\partial n} \\ &= \int_\Omega \Delta(p+y) \varphi - \int_{\partial \Omega} \varphi \frac{\partial}{\partial n}(p+y) + \int_{\partial \Omega} \varphi \frac{\partial p}{\partial n} + \int_{\partial(D \setminus \Omega)} \varphi \frac{\partial p}{\partial n} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_D \left(\Delta p + \frac{\partial}{\partial y}\chi_\Omega \right) \varphi &= - \int_{\partial \Omega} \varphi \frac{\partial y}{\partial n} + \int_{\partial(D \setminus \Omega)} \varphi \frac{\partial p}{\partial n} = - \int_{\Gamma_f} \varphi \frac{\partial y}{\partial n} - \int_{\Gamma_f} \varphi \frac{\partial p}{\partial n} \\ &= - \int_{\Gamma_f} \varphi \frac{\partial}{\partial n}(p+y) = 0 \end{aligned}$$

Ahora veremos que ecuación diferencial satisface U :

$$D_y(\Delta U + \chi_\Omega) = \Delta D_y U + D_y \chi_\Omega = 0 \quad \text{en } \mathfrak{D}'(D)$$

de donde vemos que $\Delta U + \chi_\Omega$ es una distribución independiente de la variable y .

Además de (3.37), (3.46), y (3.36) tenemos que existe un conjunto abierto θ en \mathbb{R}^2 tal que $\Gamma_0 \subset \theta$ y $\theta \cap D \subset \Omega$; sea $\theta' = \theta \cap D$ y $\theta'' = \theta' \cup \Gamma_0$. En θ' tenemos $\chi_\Omega \equiv 1$, y $\Delta p = 0$:

$$\begin{aligned} (\Delta U + \chi_\Omega)(x, y) &= D_x^2 \int_0^y p(x, t) \, dt + D_y^2 \int_0^y p(x, t) \, dt + \chi_\Omega(x, y) \\ &= \int_0^y p_{xx}(x, t) \, dt + p_y p(x, y) + 1 \end{aligned}$$

y junto con (3.41) tenemos,

$$(\Delta U + \chi_\Omega)(x, 0) = p_y(x, 0) + 1 = 0$$

Como $\Delta U + \chi_\Omega$ es independiente de la variable y , tenemos que

$$\Delta U + \chi_\Omega = 0 \quad \text{en } \mathfrak{D}'(D)$$

es decir

$$\Delta U + \chi_\Omega = 0 \quad \text{c.t.p. en } D.$$

Condiciones de frontera para U

Partiendo del hecho de que $\frac{\partial U}{\partial y} = p$ en \bar{D} obtenemos de inmediato lo siguiente:

$$U_y \geq 0 \quad \text{en } \bar{D}$$

$$U_y = h_1 - y \quad \text{en } \Gamma_1$$

$$U_y = h_2 - y \quad \text{en } \Gamma_2$$

$$U_y = 0 \quad \text{en } \Gamma_3$$

Añadimos la condición anterior

$$U = 0 \quad \text{en } \Gamma_0$$

La información contenida en (3.44) permite expresarla en término de U como

$$x \mapsto U(x, Y(x)) \quad \text{es convexa en } [0, c],$$

debido a que:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dx}(x, Y(x)) &= U_x(x, Y(x)) + Y'(x)U_y(x, Y(x)) \\ &= U_x(x, Y(x)) = \left[D_x \int_0^y p(x, t) dt \right]_{y=Y(x)} \\ &= \int_0^{Y(x)} p_x(x, t) dt \end{aligned}$$

en el contexto de las funciones de clase $C^1(\overline{D})$, ya que $U \in \mathbf{H}^2(D)$ y $Y \in C^3([a, b])$. Lo cual de acuerdo a (3.44) indica que $\frac{d^2U}{dx^2}(x, Y(x)) \geq 0$ en $]0, C[$.

Ahora queremos describir Ω , en términos de U . Como p es continua y positiva en Ω , entonces para $(x, y) \in \Omega$

$$\int_0^{Y(x)} p(x, t) dt - \int_0^y p(x, t) dt = \int_y^{Y(x)} p(x, t) dt > 0$$

o de acuerdo al definición de U ,

$$U(x, Y(x)) - U(x, y) > 0,$$

por otro lado si $(x, y) \in D$, son tal que $\int_y^{Y(x)} p(x, t) dt > 0$, entonces $\exists]\alpha, \beta[\subset [y, Y(x)]$

con $p(x, t) > 0$ para $t \in]\alpha, \beta[$, es decir $\{x\} \times]\alpha, \beta[\subset \Omega$, como $y \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$, tenemos que, según (3.39), $p(x, y) > 0$.

Por tanto tenemos que:

$$(3.54) \quad \Omega = \left\{ (x, y) \in D : \int_y^{Y(x)} p(x, t) dt > 0 \right\}$$

y luego, de la definición de U ,

$$(3.55) \quad \Omega = \{(x, y) \in D : U(x, y) < U(x, Y(x))\}$$

En suma, podemos decir que U resuelve el siguiente problema con valores en la frontera

Problema 2. Encuentre U tal que

$$(3.56) \quad U \in \mathbf{W}^{2,r}(D), \forall r < +\infty$$

$$(3.57) \quad x \mapsto U(x, Y(x)) \text{ es convexa en } [0, c],$$

$$(3.58) \quad U_y \geq 0 \quad \text{en } \bar{D}$$

$$(3.59) \quad U = 0 \text{ en } \Gamma_0$$

$$(3.60) \quad U_y = h_1 - y \text{ en } \Gamma_1$$

$$(3.61) \quad U_y = h_2 - y \text{ en } \Gamma_2$$

$$(3.62) \quad U_y = 0 \text{ en } \Gamma_3$$

y definiendo

$$(3.63) \quad \Omega = \{(x, y) \in D : U(x, y) < U(x, Y(x))\}$$

tenemos que satisface que

$$(3.64) \quad \Omega \text{ contiene una vecindad de } \Gamma_0$$

$$(3.65) \quad -\Delta U = \chi_\Omega \quad \text{c.t.p. en } D.$$

Este problema genera el planteamiento de tres subproblemas (**Problema 3, 4 y 5**).

Pero previamente daremos los siguientes resultados

Teorema 3.3.7 Sea $M : L^1(D) \rightarrow L^1(D)$ el operador definido por

$$(3.66) \quad M(u)(x, y) = \begin{cases} u(x, y) + 1 & \text{si } (x, y) \in D_1 \cup D_2 \\ \text{conv}[u(x, Y(x))]^+ & \text{si } (x, y) \in D_3 \end{cases}$$

y sea $\beta : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ un operador maximal monótono tal que:

$$\beta(t) = 1 \text{ si } t > 0, \beta(0) \ni 0$$

y si U es solución del **Problema 2** entonces

$$(3.67) \quad -\Delta U \in \beta(M(u) - U) \quad \text{c.t.p en } D$$

Prueba: Sea U es solución del **Problema 2**. De (3.58) tenemos que U es creciente en y , de (3.59) sabemos que toma un mínimo en $y = 0$, entonces

$$U(x, Y(x)) \geq U(x, y) \geq 0 \text{ en } \overline{D}$$

(3.63) nos dice que

$$U(x, Y(x)) > U(x, y) \quad \text{en } \Omega$$

y

$$U(x, Y(x)) = U(x, y) \quad \text{en } D \setminus \Omega$$

de (3.57) tenemos que $x \mapsto U(x, Y(x))$ es convexa en $[0, c]$, por tanto

$$M(u) > U \quad \text{c.t.p. en } \Omega$$

$$M(u) = U \quad \text{en } D \setminus \Omega$$

Usando el hecho de que según (3.65), $0 \leq -\Delta U \leq 1$ en D , concluimos que:

$$-\Delta U \in \beta(M(u) - U) \quad \text{c.t.p. en } D. \blacksquare$$

Para nuestro desarrollo escogemos como β al operador monótono maximal asociado con la función de Heaviside:

$$(3.68) \quad \beta = H \triangleq \begin{cases} H(t) = \{1\} & : t > 0 \\ H(t) = [0, 1] & : t = 0 \\ H(t) = \{0\} & : t < 0 \end{cases}$$

con lo cual la ecuación (3.67) puede ser escrita como

$$(3.69) \quad -\Delta U \in \chi_{D_1} + \chi_{D_2} + \chi_{D_3} H(\text{conv}[U(x, Y(x))]^+ - U(x, Y(x))) \quad \text{c.t.p. en } D$$

Observación 3.3.8 Consideraremos una función $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$(3.70) \quad h(x) = \begin{cases} x & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0 \end{cases}$$

que puede verse también como $h(x) = \frac{|x| + x}{2}$, y ya que $x \leq |x|$ entonces $x \leq h(x)$; con esta consideración calculemos la subdiferencial de h :

$$(3.71) \quad \partial h(x) = \{z \in \mathbb{R} : h(y) - h(x) \geq z(y - x), \forall y \in \mathbb{R}\}$$

(i) Si $x > 0$ entonces $h(y) - h(x) = h(y) - x \geq y - x, \forall y \in \mathbb{R}$ entonces

$$(3.72) \quad \{1\} \subset \partial h(x), \text{ para } x > 0$$

por otra parte si $z \in \partial h(x)$ entonces $h(y) - x \geq z(y - x), \forall y \in \mathbb{R}$ y por tanto para $y = 2x > 0$, tenemos que $x(1 - z) \geq 0$, de igual manera para $y = 0$, $0 \geq (1 - z)x$ y por lo tanto $z = 1$,

$$(3.73) \quad \partial h(x) \subset \{1\} \text{ para } x > 0$$

(ii) Si $x < 0$, entonces $h(y) - h(x) = h(y) \geq 0(x - y), \forall y \in \mathbb{R}$ entonces

$$(3.74) \quad \{0\} \subset \partial h(x), \text{ para } x < 0$$

por otra parte si $z \in \partial h(x)$ entonces $h(y) - x \geq z(y - x), \forall y \in \mathbb{R}$ y por tanto para $y = 2x < 0$, tenemos que $x(1 - z) \geq 0$, de igual manera para $y = 0$, $0 \geq (1 - z)x$ y por lo tanto $z = 1$,

$$(3.75) \quad \partial h(x) \subset \{1\} \text{ para } x > 0$$

(iii) Si $x = 0$, entonces para cualquier $t \in [0, 1]$ tenemos que

$$(3.76) \quad h(y) - h(x) = h(y) \geq th(y) \geq ty = t(y - x), \forall y \in \mathbb{R}$$

entonces

$$(3.77) \quad [0, 1] \subset \partial h(x) \text{ para } x = 0$$

por otra parte si $z \in \partial h(x)$ entonces $h(y) \geq zy, \forall y \in \mathbb{R}$ escogiendo sucesivamente $y > 0$ y $y < 0$ vemos que $0 \leq z \leq 1$ es decir

$$(3.78) \quad [0, 1] \subset \partial h(x) \text{ para } x = 0$$

Por lo tanto podemos concluir que $\partial h = H$ definido en (3.68), y al ser h convexa, propia y s.c.i. tenemos que H es un operador maximal monótono.

El desarrollo del trabajo sera dividido en tres partes

- (i) La primera parte consiste en asumir que el lado derecho de (3.69) es conocido, es decir estudiaremos $-\Delta U = F$, para un F dado.
- (ii) En el segundo paso asumimos que $f = \text{conv}[U(x, Y(x))]^+$ es conocido y estudiaremos el problema asociado a la ecuación diferencial multivaluada $-\Delta U \in \chi_{D_1} + \chi_{D_2} + \chi_{D_3} H(f - U)$

(iii) Finalmente estudiaremos la solución de (3.69) como el punto fijo de una transformación asociada a la solución hallada en el segundo paso.

Problema 3. Problema de contorno lineal mixto Dirichlet-Newmann

Dado $g \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ y $F \in \mathbf{L}^2(D)$, encontrar $u \in \mathbf{H}^1(D)$ de manera que:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= F \text{ en } \mathcal{D}'(D) \\ \gamma_0 u &= 0 \text{ en } \Gamma_0 \\ (1 + Y'^2) u_y &= g \text{ en } \Gamma \end{aligned}$$

La forma bilineal.

Para $(u, v) \in \mathbf{H}^1(D) \times \mathbf{H}^1(D)$ definimos

$$a(u, v) = \int_D [\nabla u \cdot \nabla v + Y'(u_x v_y - u_y v_x) - Y'' u_y v] \, dx \, dy$$

El espacio V

Estamos interesados en el subespacio definido como

$$(3.79) \quad \mathbf{V} = \{v \in \mathbf{H}^1(D) : \gamma_0 v = 0 \text{ en } \Gamma_0\}$$

y con $(u, v)_{\mathbf{V}} = \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy$. En este subespacio $a(\cdot, \cdot)$ es continua y coerciva pues:

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_D [|\nabla u|^2 - Y'' u_y u] \, dx \, dy = \int_D |\nabla u|^2 \, dx \, dy - \frac{1}{2} \int_D \frac{\partial}{\partial y} (Y'' u^2) \, dx \, dy \\ &= \|u\|_{\mathbf{V}}^2 - \frac{1}{2} \int_{\partial D} Y'' u^2 n_2 \, d\Gamma = \|u\|_{\mathbf{V}}^2 - \frac{1}{2} \int_a^b Y''(x) u^2(x, Y(x)) \, dx \end{aligned}$$

como Y es cóncava entonces $Y''(x) \leq 0$ en $[a, b]$ por tanto:

$$a(u, u) \geq \|u\|_{\mathbf{V}}^2$$

La elección de la forma bilineal se basa en la siguiente identidad para funciones suaves:

$$\begin{aligned}
 a(u, v) &= - \int_D v \Delta u + \int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial n} + \int_D [Y' (u_x v_y - u_y v_x) - Y'' u_y v] \\
 &= - \int_D v \Delta u + \int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial n} + \int_D \left[\frac{\partial}{\partial y} (v Y' u_x) - \frac{\partial}{\partial x} (v Y' u_y) \right] \\
 &= - \int_D v \Delta u + \int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial n} - \int_{\partial D} v Y' u_y n_1 + \int_{\partial D} v Y' u_x n_2 \quad n = (n_1, n_2)
 \end{aligned}$$

y si $v = 0$ en Γ_0 :

$$\begin{aligned}
 a(u, v) &= - \int_D v \Delta u + \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} - \int_{\Gamma} v Y' u_y n_1 + \int_{\Gamma} v Y' u_x n_2 \\
 &= - \int_D v \Delta u + \int_{\Gamma} v [u_x (n_1 + Y' n_2) + u_y (n_2 - Y' n_1)]
 \end{aligned}$$

Parametrizamos $\Gamma : \{(x, Y(x)) : x \in]a, b[\}$, entonces

$$n = \left(\frac{-Y'(x)}{\sqrt{[Y'(x)]^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{[Y'(x)]^2 + 1}} \right)$$

por tanto:

$$\begin{aligned}
 n_1 + Y' n_2 &= 0 \\
 n_2 - Y' n_1 &= \sqrt{[Y'(x)]^2 + 1}
 \end{aligned}$$

y finalmente

$$(3.80) \quad a(u, v) = - \int_D v \Delta u \, dx \, dy + \int_{\Gamma} v \sqrt{Y'^2 + 1} u_y \, d\Gamma$$

esto nos servirá para plantear un problema variacional, pues son conocidos Δu , y $u_y|_{\Gamma}$.

Problema 3b (Formulación variacional del problema 3)

Dado $g \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ y $F \in \mathbf{L}^2(D)$, encontrar

$$(3.81) \quad u \in \mathbf{V}; \forall v \in \mathbf{V} \quad a(u, v) = \int_D Fv + \langle g, \gamma_0 v \rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

De acuerdo con el teorema de Lax Milgram sabemos que el **Problema 3b** tiene solución única.

La función g

Como $\sqrt{1 + Y'^2}u_y = g$, y queremos relacionarlo con (3.41)–(3.62), elegimos g de la siguiente manera:

$$(3.82) \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + Y'(x)^2}(h_1 - Y(x)) & \text{si } a < x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq c \\ \sqrt{1 + Y'(x)^2}(h_2 - Y(x)) & \text{si } c < x < b \end{cases}$$

Observación 3.3.9 Si g está dada por (3.82) y F en el **Problema 3** satisface:

$$\begin{aligned} F &\in \mathbf{L}^\infty(D), \\ F &\equiv 1 \quad \text{en } D_1 \cup D_2, \\ F &\geq 0 \quad \text{c.t.p. en } D. \end{aligned}$$

entonces la solución del **Problema 3**:

$$(3.83) \quad u \in \mathbf{W}^{2,r}(D), \quad \forall r < +\infty$$

en particular $u \in \mathbf{H}^2(D)$ y por tanto $u \in \mathbf{C}^1(\bar{D})$ (ver[3]).

Problema 4 Problema de contorno no lineal mixto Dirichlet-Newmann

Dado $f \in \mathbf{C}([0, c])$ y definiendo

$$D^0 = \{(x, y) \in D_3 : f(x) = u(x, y)\}$$

$$D^+ = \{(x, y) \in D_3 : f(x) > u(x, y)\}$$

$$D^- = \{(x, y) \in D_3 : f(x) < u(x, y)\}$$

encuentre u tal que

$$u \in \mathbf{W}^{2,r}(D), \quad \forall r < +\infty$$

$$u|_{\Gamma_0} = 0$$

$$u_y|_{\Gamma_1} = h_1 - y$$

$$u_y|_{\Gamma_2} = h_2 - y$$

$$u_y|_{\Gamma_3} = 0$$

$$0 \leq -\Delta u \leq 1 \quad \text{c.t.p. en } D.$$

$$-\Delta u = 1 \quad \text{en } D^+.$$

$$-\Delta u = 0 \quad \text{en } D^-.$$

$$-\Delta u = 1 \quad \text{en } D_1 \cup D_2$$

sean satisfechas.

Este problema puede ser reformulado como sigue:

Problema 4b (Forma variacional del problema 4)

Dado $f \in C([0, c])$ encuentre $u \in \mathbf{V}$:

$$(3.84) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(u, v - u) + \int_{D_3} [f(x) - v(x, y)]^+ \mathbf{d}x \mathbf{d}y \geq \int_{D_3} [f(x) - u(x, y)]^+ \mathbf{d}x \mathbf{d}y \\ \quad + \int_{D_1 \cup D_2} (v - u) \mathbf{d}x \mathbf{d}y \\ \quad + \int_{\Gamma} g(v - u) \mathbf{d}\Gamma \quad \forall v \in \mathbf{V} \end{array} \right.$$

Afirmación 3.3.10 *El problema 4b tiene solución única.*

Prueba: Definimos $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ una funcional lineal continua como:

$$(3.85) \quad L(v) = \int_{\Gamma} gv \mathbf{d}\Gamma + \int_{D_1 \cup D_2} v \mathbf{d}x \mathbf{d}y$$

y $j : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ una funcional convexa continua como:

$$j(v) = \int_{D_3} [f(x) - v(x, y)]^+ \mathbf{d}x \mathbf{d}y,$$

luego el **problema 4b** queda como:

$$(3.86) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Dado } f \in C([0, c]), \text{ encuentre } u \in \mathbf{V} \text{ tal que} \\ a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in \mathbf{V} \end{array} \right.$$

que de acuerdo al teorema 1.2.32 admite solución única para cada $f \in C([0, c])$. ■

Afirmación 3.3.11 Los **problemas 4 y 4b** son equivalentes y por tanto el **problema 4** admite solución.

Prueba: En efecto sea u solución del **problema 4**, entonces para $v \in \mathbf{V}$ tenemos,

$$\begin{aligned}
a(u, v - u) - L(v - u) &= - \int_D (v - u) \Delta u - \int_{D_1 \cup D_2} (v - u) - \int_{\Gamma} (v - u) (\sqrt{Y'^2 + 1} u_y - g) \\
&= - \int_D (v - u) \Delta u - \int_{D_1 \cup D_2} (v - u) \\
&= - \int_{D_3} (v - u) \Delta u \\
&= - \int_{D_0} (v - u) \Delta u - \int_{D^+} (v - u) \Delta u - \int_{D^-} (v - u) \Delta u \\
&= \int_{D^0} (f - v) \Delta u - \int_{D^+} (f - v) + \int_{D^+} (f - u) \\
&= \int_{(D^0 \cup D^+) \cap [f > v]} (f - v) \Delta u + \int_{(D^0 \cup D^+) \cap [f \leq v]} (f - v) \Delta u + \int_D [f - u]^+
\end{aligned}$$

como

$$0 \leq -\Delta u \leq 1 \quad \text{c.t.p. en } D$$

entonces

$$-(f - v) \leq (f - v) \Delta u \leq 0 \quad \text{c.t.p. en } (D^0 \cup D^+) \cap [f > v]$$

y

$$0 \leq (f - v) \Delta u \leq -(f - v) \quad \text{c.t.p. en } (D^0 \cup D^+) \cap [f \leq v]$$

integrando y sumando obtenemos

$$\int_{(D^0 \cup D^+) \cap [f > v]} \Delta u + \int_{(D^0 \cup D^+) \cap [f \leq v]} \Delta u \geq - \int_{(D^0 \cup D^+) \cap [f > v]} (f - v)$$

por tanto

$$a(u, v - u) - L(u - v) \geq - \int_{(D^0 \cup D^+) \cap [f > v]} (f - v) + \int_D [f - u]^+$$

pero además

$$\begin{aligned} - \int_{(D^0 \cup D^+) \cap [f > v]} (f - v) &= - \int_{(D^0 \cup D^+) \cap [f > v]} [f - v]^+ \\ &\geq - \int_{[f > v]} [f - v]^+ \end{aligned}$$

y de aquí

$$a(u, v - u) - L(u - v) \geq - \int_D [f - v]^+ + \int_D [f - u]^+$$

De igual manera si es u solución del **problema 4b**, entonces para $v = u - \psi$ con $\psi \in \mathfrak{D}(D)$, tenemos:

$$a(u, \psi) + \int_{D_3} [f - u]^+ \leq \int_{D_3} [f - u + \psi]^+ + \int_{D_1 \cup D_2} \psi,$$

como $\psi \in \mathfrak{D}(D)$, entonces

$$a(u, \psi) = - \int_D \psi \Delta u,$$

y finalmente trabajamos con

$$\begin{aligned} (3.87) \quad - \int_D \psi \Delta u &\leq \int_{D_3} ([f - u + \psi]^+ - [f - u]^+) \\ &+ \int_{D_1 \cup D_2} \psi \quad \forall \psi \in \mathfrak{D}(D) \end{aligned}$$

Ahora consideramos dos casos

- (i) Tomamos $\psi \leq 0$ en (3.87), entonces $[f - u + \psi]^+ \leq [f - u]^+$ lo que permite que:

$$- \int_D \psi \Delta u \leq 0 \quad \forall \psi \in \mathfrak{D}(D), \psi \leq 0$$

es decir:

$$-\Delta u \geq 0 \quad \text{en } \mathfrak{D}'(D),$$

- (ii) Por otra parte, tomando $\psi \geq 0$ en (3.87) y gracias a

$$[f - u + \psi]^+ \leq [f - u]^+ + [\psi]^+$$

obtenemos

$$- \int_D \psi \Delta u \leq \int_D \psi \quad \forall \psi \in \mathfrak{D}(D), \psi \geq 0,$$

es decir:

$$-\Delta u \leq 1 \quad \text{en } \mathfrak{D}'(D),$$

Y así hemos probado que:

$$0 \leq -\Delta u \leq 1 \quad \text{c.t.p. en } D$$

Ahora si tomamos $\psi = \pm\chi$ en (3.87), con $\chi \in \mathfrak{D}(D)$ y $\text{sop}(\chi) \subset D_1 \cup D_2$, tenemos:

$$-\int_{D_1 \cup D_2} \chi \Delta u \leq \int_{D_1 \cup D_2} \chi \quad \text{para } \psi = +\chi$$

y:

$$\int_{D_1 \cup D_2} \chi \Delta u \leq -\int_{D_1 \cup D_2} \chi \quad \text{para } \psi = -\chi,$$

entonces:

$$-\int_{D_1 \cup D_2} \chi \Delta u = \int_{D_1 \cup D_2} \chi \quad \forall \chi \in \mathfrak{D}(D), \text{ sop}(\chi) \subset D_1 \cup D_2,$$

o:

$$-\Delta u = 1 \quad \text{c.t.p. en } D_1 \cup D_2$$

Ahora escogemos $\phi \in \mathfrak{D}(D)$, $\text{sop}(\phi) \subset D^+$, existe λ_ϕ tal que si $|\lambda| \leq \lambda_\phi \Rightarrow f + \lambda\phi \geq u$ en D^+ , y además poniendo $\psi = \lambda\phi$ en (3.87), podemos escribir:

$$-\int_D \lambda\phi \Delta u \leq \int_{D_3} ([f - u + \lambda\phi]^+ - [f - u]^+) + \int_{D_1 \cup D_2} \lambda\phi$$

examinamos la siguiente integral:

$$\begin{aligned} & \int_{D_3} ([f - u + \lambda\phi]^+ - [f - u]^+) = \\ & \int_{D^+} ([f - u + \lambda\phi]^+ - [f - u]^+) + \int_{D^0 \cup D^-} ([f - u + \lambda\phi]^+ - [f - u]^+) = \\ & \int_{D^+} \lambda\phi + \int_{D^0} [\lambda\phi]^+ + \int_{D^-} [f - u + \lambda\phi]^+ = \\ & \int_{D^+} \lambda\phi = \int_{D_3} \lambda\phi \end{aligned}$$

entonces

$$-\int_D \lambda\phi \Delta u \leq \int_{D_3} \lambda\phi + \int_{D_1 \cup D_2} \lambda\phi = \int_D \lambda\phi,$$

o ya que $\lambda \geq 0$:

$$-\int_D \lambda \phi \Delta u = \int_D \lambda \phi \quad \forall \phi \in \mathfrak{D}(D), \text{ sop}(\phi) \subset D^+, \text{ con } |\lambda| \leq \lambda_\phi$$

por tanto

$$-\Delta u = 1 \quad \text{en } \mathfrak{D}'(D^+)$$

De la misma manera si escogemos $\phi \in \mathfrak{D}(D)$, $\text{sop}(\phi) \subset D^-$, tenemos que existe λ_ϕ tal que $|\lambda| \leq \lambda_\phi \Rightarrow f + \lambda \phi \leq u$ en D^- , y poniendo $\psi = \lambda \phi$ en (3.87), podemos escribir:

$$-\int_D \lambda \phi \Delta u \leq \int_{D_3} ([f - u + \lambda \phi]^+ - [f - u]^+) + \int_{D_1 \cup D_2} \lambda \phi$$

siguiendo el procedimiento anterior:

$$\begin{aligned} & \int_{D_3} ([f - u + \lambda \phi]^+ - [f - u]^+) = \\ & \int_{D_3 \setminus D^-} ([f - u + \lambda \phi]^+ - [f - u]^+) + \int_{D^-} ([f - u + \lambda \phi]^+ - [f - u]^+) = \\ & \int_{D_3 \setminus D^-} ([f - u]^+ - [f - u]^+) + \int_{D^-} ([f - u + \lambda \phi]^+ - [f - u]^+) = 0 \end{aligned}$$

por tanto:

$$-\int_D \lambda \phi \Delta u \leq \int_{D_1 \cup D_2} \lambda \phi = 0$$

finalmente

$$-\int_D \lambda \phi \Delta u \leq 0 \quad \text{con } |\lambda| \leq \lambda_\phi$$

como $\lambda \geq 0$

$$-\int_D \phi \Delta u = 0 \quad \forall \phi \in \mathfrak{D}(D), \text{ sop}(\phi) \subset D^+$$

es decir que

$$-\Delta u = 0 \quad \text{en } \mathfrak{D}'(D^-) \quad \blacksquare$$

Esta caracterización nos permite formular el **problema 4b** como

Problema 4c (Forma multivaluada del problema 4)

Dado $f \in C^0([0, c])$ encuentre u tal que las condiciones siguientes sean satisfechas:

$$u \in \mathbf{H}^1(D)$$

$$\begin{aligned}
u|_{\Gamma_0} &= 0 \\
u_y|_{\Gamma_1} &= h_1 - y \\
u_y|_{\Gamma_2} &= h_2 - y \\
u_y|_{\Gamma_3} &= 0 \\
(3.88) \quad -\Delta u &\in \chi_{D_1} + \chi_{D_2} + \chi_{D_3} H(f - u)
\end{aligned}$$

Observación 3.3.12 *El problema 4 en su forma variacional (3.86) puede interpretarse como la ecuación diferencial multivaluada (3.88) sujeta a las mismas condiciones de contorno. Y comparada con (3.69) puede decirse que necesitamos plantear una forma variacional donde el “obstáculo” f dependa de la solución, esto será la motivación del siguiente desarrollo.*

Aplicación del teorema del punto fijo para determinar la existencia y unicidad de la solución del problema Quasivariacional

Denotamos por τ el operador definido en $L^1(]0, c[)$ y con valores en \mathbf{V} , el cual a cada $f \in L^1(]0, c[)$ asocia una única solución del **problema 4b** ($\tau(f) \triangleq u$), además de esto definimos el operador γ_{03} como el que a cada $v \in \mathbf{V}$ asocia la restricción de v a Γ_3 :

$$(3.89) \quad [\gamma_{03}v](x) \triangleq v(x, Y(x)), \quad x \in]0, c[.$$

Construimos el operador $\Theta : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ como:

$$(3.90) \quad \Theta(v) \triangleq \tau(\text{conv}[\gamma_{03}v]^+)$$

y consideramos el problema de punto fijo:

Problema 5 Encontrar $U \in \mathbf{V}$, tal que:

$$\Theta(u) = U$$

El **problema 5** puede escribirse también explícitamente de acuerdo a la definición de Θ como:

Problema 5b (Forma quasivariacional del problema 5)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } U \in \mathbf{V}, \text{ tal que:} \\ a(U, v - U) + j(U, v) - j(U, U) \geq L(v - U) \quad \forall v \in \mathbf{V} \end{array} \right.$$

donde:

$$j(u, v) = \int_{D_3} [\text{conv}[\gamma_{03}u]^+ - v]^+$$

El operador τ

Lema 3.3.13 τ es un operador holder continuo y monótono en el sentido de que $\forall f_1, f_2 \in \mathbf{L}^1(]0, c[)$

$$\|\tau(f_1) - \tau(f_2)\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \|f_1 - f_2\|_{\mathbf{L}^1(]0, c[)}$$

y si $f_1 \leq f_2$ c.t.p. en $[0, c] \Rightarrow \tau(f_1)(x, y) \leq \tau(f_2)(x, y)$ en \bar{D}

Prueba: Ver [3]. ■

Lema 3.3.14 Para cada $f \in \mathbf{L}^1(]0, c[)$ se tiene que:

$$(\tau(f))(x, Y(x)) > 0 \quad \text{para } a < x < b:$$

$$(\tau(f))(x, y) \geq 0 \quad \text{en } \bar{D}:$$

$$D_y(\tau(f))(x, y) \geq 0 \quad \text{en } \bar{D}$$

Prueba: Ver [3]. ■

Un resultado de existencia

Definición 3.3.15 Denotamos por $\{U_n\}_n$ la sucesión dada por la fórmula de recurrencia:

$$(3.91) \quad U_{n+1} = \tau(\text{conv}[\gamma_{03}U_n]) \quad n \geq 0,$$

donde U_0 es la solución del **problema 3** con g dado por (3.82) y $F = \chi_{D_1} + \chi_{D_2}$

Denotamos por $\{U^n\}_n$ la sucesión dada por la fórmula de recurrencia:

$$(3.92) \quad U^{n+1} = \tau(\text{conv}[\gamma_{03}U^n]) \quad n \geq 0,$$

donde U^0 es la solución del **problema 3** con g dado por (3.82) y $F = 1$.

Lema 3.3.16 Para cada $f \in L^1(]0, c])$ tenemos que:

$$(3.93) \quad U_0(x, y) \leq (\tau(f))(x, y) \leq U^0(x, y) \quad \forall (x, y) \in \overline{D}$$

$$(3.94) \quad U_0 = \tau(0)$$

$$(3.95) \quad U^0 = \tau(M)$$

donde $M \in \mathbb{R}$ tal que $U^0(x, y) \leq M \quad \forall (x, y) \in \overline{D}$

Prueba: Como U_0 y U^0 son soluciones del **problema 3** para $F = \chi_{D_1} + \chi_{D_2}$ y $F = 1$ respectivamente, entonces:

$$-\Delta U_0 = \chi_{D_1} + \chi_{D_2}$$

y

$$-\Delta U^0 = 1$$

y como $\tau(f)$ es solución del **problema 4b**, tenemos:

$$-\Delta \tau(f) \in \chi_{D_1} + \chi_{D_2} + \chi_{D_3} H(f - \tau(f))$$

o dicho de otra manera:

$$-\Delta U_0 \leq -\Delta \tau(f) \leq -\Delta U^0$$

como U_0 , $\tau(f)$ y U^0 satisfacen las mismas condiciones de contorno podemos aplicar el principio del máximo de Hopf y obtenemos (3.93). Sea $\epsilon > 0$ cualquiera, de (3.88) y de la definición de U_0 podemos escribir (ya que $H(-\epsilon - U_0) = \{0\}$, pues $U_0 \geq 0$)

$$(3.96) \quad -\Delta U_0 = \chi_{D_1} + \chi_{D_2} \in \chi_{D_1} + \chi_{D_2} + \chi_{D_3} H(-\epsilon - U_0)$$

de nuevo de (3.88) y de la definición de U^0 (ya que $H(M + \epsilon - U^0) = \{1\}$, pues $M \geq U^0$) tenemos:

$$(3.97) \quad -\Delta U^0 = 1 \in \chi_{D_1} + \chi_{D_2} + \chi_{D_3} H(M + \epsilon - U^0)$$

De (3.96) tenemos que:

$$\forall \epsilon > 0 \quad U_0 = \tau(-\epsilon)$$

y de (3.97)

$$\forall \epsilon > 0 \quad U^0 = \tau(M + \epsilon)$$

y tomando límite cuando $\epsilon \rightarrow 0^+$ lo cual podemos hacer ya que τ es continua obtenemos (3.94) y (3.95).

Lema 3.3.17 *Tenemos que:*

$$U_n(x, y) \leq U_{n+1}(x, y) \leq U^0(x, y) \quad \forall (x, y) \in \bar{D} \quad n \in \mathbb{N}$$

y

$$U^n(x, y) \geq U^{n+1}(x, y) \geq U_0(x, y) \quad \forall (x, y) \in \bar{D} \quad n \in \mathbb{N}$$

Además si U es cualquier solución del **problema 5** tenemos lo siguiente:

$$U_n(x, y) \leq U(x, y) \leq U^n(x, y) \quad \forall (x, y) \in \bar{D} \quad n \in \mathbb{N}$$

Prueba: Ver [3]. ■

Definición 3.3.18 *Definimos:*

$$U_\infty(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x, y) \quad \forall (x, y) \in \bar{D}$$

y

$$U^\infty(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} U^n(x, y) \quad \forall (x, y) \in \bar{D}$$

Teorema 3.3.19 *El problema 5 tiene al menos una solución. De hecho U_∞ y U^∞ son soluciones del problema 5, siendo respectivamente la solución mínima y máxima en el sentido de que:*

$$U_\infty(x, y) \leq U(x, y) \leq U^\infty(x, y) \quad \forall (x, y) \in \bar{D}$$

para cada solución U del problema 5.

Teorema 3.3.20 *El problema 2 tiene también solución única.*

Demostración: Ver [3]. ■

3.4 Aplicación de la teoría de dualidad para resolver el problema quasivariacional

Después de haber asegurado existencia única de solución, se procederá a la búsqueda de una aproximación para dicha solución.

Recordemos que la solución del problema del dique de sección transversal generalizada puede obtenerse resolviendo iterativamente la siguiente inecuación variacional:

$$(3.98) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Dado } f \in C([0, c]) \text{ encuentre } u \in \mathbf{V}, \text{ tal que} \\ a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in \mathbf{V} \end{array} \right.$$

$$\text{donde: } L(v) = \int_{\Gamma} gv \, d\Gamma + \int_{D_1 \cup D_2} v \, dx \, dy$$

$$j(v) = \int_{D_3} [f(x) - v(x, y)]^+ \, dx \, dy$$

Denotamos por $\tau(f)$ la solución de (3.98) y utilizamos las sucesiones consideradas en (3.91), (3.92), estas dos sucesiones aproximan la solución del problema del dique de base plana. Aplicando (2.42) resolveremos (3.98), que es una IVE asociada a una forma bilineal no simétrica y proponemos el siguiente algoritmo:

Algoritmo de aproximación de 1a solución del problema quasivariacional

- (i) Escogemos $u^0 \in \mathbf{V}$
- (ii) Conocido u^k , calculamos u^{k+1} , por:

$$(3.99) \quad u^{k+1} = J_{\lambda}^{\partial j} (u^k + \lambda (l - a(u^k)))$$

para λ adecuado.

Donde $(Au, v)_{\mathbf{V}} = a(u, v)$,

$$(l, v)_{\mathbf{V}} = L(v).$$

Y siguiendo lo expuesto en la observación (2.3.26) calcular u^{k+1} en (3.99) es equivalente a:

$$(3.100) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in \mathbf{V}, \text{ tal que} \\ b(u, v - u) + \lambda j(v) - \lambda j(u) \geq F(v - u) \quad \forall v \in \mathbf{V} \end{array} \right.$$

para $b(u, v) = (u, v)_{\mathbf{V}}$

$$F(v) = (u^n, v)_{\mathbf{V}} + \lambda \{L(v) - a(u^n, v)\}$$

Ahora hacemos $j = m \circ \Phi$ donde $m : \mathbf{L}^2(D_3) \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$m(u) = \int_{D_3} [f - u]^+$$

y $\Phi : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W} = \mathbf{L}^2(D_3)$ como

$$\Phi(v) = v|_{D_3}$$

Por tanto podemos escribir el lagrangiano asociado como

$$(3.101) \quad \mathcal{L}(v, p) = \frac{1}{2} (v, v)_{\mathbf{V}} - F(v) + \lambda (p, \Phi(v))_{\mathbf{W}} - \lambda m^*(p) \quad \forall v \in \mathbf{V}, \forall p \in \mathbf{W}$$

3.4.1 Existencia y unicidad del punto de silla

Ahora haremos un breve análisis de (3.100), de modo que podamos establecer la existencia del punto de silla de (3.101):

Para $v = u + \varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(D)$

$$(u, \varphi) + \lambda m(u + \varphi) - \lambda m(u) \geq (u^n, \varphi) + \lambda \{L(\varphi) - a(u^n, \varphi)\}$$

entonces

$$- \int_D \Delta u \varphi + \lambda \int_{D_3} [f - u - \varphi]^+ - \lambda \int_{D_3} [f - u]^+ \geq - \int_D \Delta u^n \varphi + \lambda \left\{ \int_{D_1 \cup D_2} \varphi + \int_D \Delta u^n \varphi \right\}$$

agrupando

$$- \int_D \Delta u \varphi + \lambda \int_{D_3} [f - u - \varphi]^+ - \lambda \int_{D_3} [f - u]^+ \geq \int_D (-\Delta u^n + \lambda \chi_{D_1 \cup D_2} + \lambda \Delta u^n) \varphi$$

y como

$$[f - u - \varphi]^+ - [f - u]^+ \leq [\varphi]^+ - \varphi$$

entonces para $\varphi \geq 0$

$$- \int_D \Delta u \varphi \geq \int_D (-\Delta u^n + \lambda \chi_{D_1 \cup D_2} + \lambda \Delta u^n) \varphi$$

obteniendo que

$$(3.102) \quad -\Delta u + \Delta u^n - \lambda \Delta u^n \geq 0 \quad \text{en } D$$

Ahora si $\varphi \leq 0$

$$-\int_D \Delta u \varphi - \lambda \int_{D_3} \varphi \geq \int_D (-\Delta u^n + \lambda \chi_{D_1 \cup D_2} + \lambda \Delta u^n) \varphi$$

de modo que

$$(3.103) \quad -\Delta u + \Delta u^n - \lambda \Delta u^n \leq \lambda \quad \text{en } D$$

Si $v = u \pm \varphi$, con $\text{sop}(\varphi) \subset D_1 \cup D_2$ entonces

$$\pm \int_{D_1 \cup D_2} (-\Delta u + \Delta u^n - \lambda - \lambda \Delta u^n) \varphi \geq 0$$

y por tanto

$$(3.104) \quad -\Delta u + \Delta u^n - \lambda \Delta u^n = \lambda \quad \text{en } D_1 \cup D_2$$

Además para $\varphi \in \mathcal{D}(\{f > u\})$, existe $\gamma_\varphi > 0$ tal que si $|\gamma| < \gamma_\varphi$ entonces $f > u + \gamma\varphi$. Escogiendo $v = u + \gamma\varphi$, para $|\gamma| < \gamma_\varphi$ tenemos

$$-\gamma \int_D \Delta u \varphi + \lambda \int_{D_3} [f - u - \gamma\varphi]^+ - \lambda \int_{D_3} [f - u]^+ \geq \gamma \int_D (-\Delta u^n + \lambda \chi_{D_1 \cup D_2} + \lambda \Delta u^n) \varphi$$

y de aquí que

$$-\gamma \int_D \Delta u \varphi - \gamma \lambda \int_{D_3} \varphi \geq \gamma \int_D (-\Delta u^n + \lambda \chi_{D_1 \cup D_2} + \lambda \Delta u^n) \varphi$$

escogiendo $\gamma \leq 0$ concluimos que

$$(3.105) \quad -\Delta u + \Delta u^n - \lambda \Delta u^n = \lambda \quad \text{en } \{f > u\}$$

de igual manera

$$(3.106) \quad -\Delta u + \Delta u^n - \lambda \Delta u^n = 0 \quad \text{en } \{f < u\}$$

Estas condiciones implican que:

$$\begin{aligned} \lambda \int_{D_3} [f - u]^+ &= \int_{\{f > u\}} \lambda (f - u) = \int_{\{f > u\}} (-\Delta u + \Delta u^n - \lambda \Delta u^n) (f - u) \\ &= \int_{D_3} (-\Delta u + \Delta u^n - \lambda \Delta u^n) (f - u) \\ &= \int_{D_3} (-\Delta u + \Delta u^n - \lambda \Delta u^n) (f - v) + \int_{D_3} (-\Delta u + \Delta u^n - \lambda \Delta u^n) (v - u) \end{aligned}$$

por (3.105) y con $v \in L^2(D_3)$. Además por (3.105)

$$\int_{D_3} \{ \lambda [f - v]^+ - (-\Delta u + \Delta u^n - \lambda \Delta u^n) (f - v) \} = \\ \int_{\{f > v\}} (\lambda + \Delta u - \Delta u^n + \lambda \Delta u^n) (f - v) + \int_{D_3 \setminus \{f > v\}} (-\Delta u + \Delta u^n - \lambda \Delta u^n) (v - f) \geq 0$$

En conclusión

$$\lambda \int_{D_3} [f - u]^+ = \int_{D_3} (-\Delta u + \Delta u^n - \lambda \Delta u^n) (f - v) + \int_{D_3} (-\Delta u + \Delta u^n - \lambda \Delta u^n) (v - u)$$

y

$$\lambda \int_{D_3} [f - v]^+ \geq \int_{D_3} (-\Delta u + \Delta u^n - \lambda \Delta u^n) (f - v)$$

de donde $\forall v \in \mathbf{W}$

$$(3.107) \quad \int_{D_3} (-\Delta u + \Delta u^n - \lambda \Delta u^n) (v - u) + \lambda \int_{D_3} [f - v]^+ - \lambda \int_{D_3} [f - u]^+ \geq 0$$

Es decir

$$(3.108) \quad \Delta u - \Delta u^n + \lambda \Delta u^n \in \lambda \partial m(u)$$

ahora haciendo

$$(3.109) \quad \lambda q = \Delta u - \Delta u^n + \lambda \Delta u^n$$

e integrando por partes

$$\int_{D_3} \lambda q v = \lambda \int_D q v + \int_{D_1 \cup D_2} \lambda v = \int_D (\Delta u - \Delta u^n + \lambda \Delta u^n) v + \int_{D_1 \cup D_2} \lambda v \\ = - \int_D \nabla u \cdot \nabla v + \int_D \nabla u^n \cdot \nabla v + \int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial n} - \int_{\partial D} v \frac{\partial u^n}{\partial n} + \lambda \int_D \Delta u^n v + \lambda \int_{D_1 \cup D_2} v$$

$$\int_{D_3} \lambda q v = - (u, v)_{\mathbf{V}} + (u^n, v)_{\mathbf{V}} + \lambda \int_{\partial D} v \left(g - \sqrt{Y'^2 + 1} u_y^n \right) + \lambda \int_D \Delta u^n v + \lambda \int_{D_1 \cup D_2} v \\ = - (u, v)_{\mathbf{V}} + (u^n, v)_{\mathbf{V}} + \lambda \int_{\partial D} v g - \lambda a(u^n, v) + \lambda \int_{D_1 \cup D_2} v \\ = - (u, v)_{\mathbf{V}} + (u^n, v)_{\mathbf{V}} + \lambda \{ L(v) - a(u^n, v) \}$$

de aquí que

$$(3.110) \quad (u, v)_{\mathbf{V}} - F(v) + \lambda (q, \Phi(v))_{\mathbf{W}} = 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

Gracias a (3.108), (3.109), (3.110) y la proposición (2.2.20) tenemos que el par (u, q) donde u es solución de $\inf_{v \in \mathbf{V}} \left\{ \frac{1}{2} b(v, v) - F(v) + \lambda m(\Phi(v)) \right\}$, es el único punto de silla de (3.101).

Falta calcular la forma explícita de ∂m , esto será el cometido de la siguiente

Proposición 3.4.21 Si $m(u) = \int_{D_3} [f - u]^+$, entonces $\partial m(u)$ está dada por:

$$(3.111) \quad \partial m(u) = \left\{ q \in \mathbf{L}^2(D_3) : \begin{array}{l} q = -1 \quad \text{c.t.p. en } \{f > u\} \\ -1 \leq q \leq 0 \quad \text{c.t.p. en } \{f = u\} \\ q = 0 \quad \text{c.t.p. en } \{f < u\} \end{array} \right\}$$

Prueba: Definimos para $u \in \mathbf{L}^2(D_3)$

$$(3.112) \quad K(u) = \left\{ q \in \mathbf{L}^2(D_3) : \begin{array}{l} q = -1 \quad \text{c.t.p. en } \{f < u\} \\ -1 \leq q \leq 0 \quad \text{c.t.p. en } \{f = u\} \\ q = 0 \quad \text{c.t.p. en } \{f > u\} \end{array} \right\}$$

Probaremos que $K(u) \subset \partial j(u)$

(i) Sea $q \in K(u)$. Entonces para todo $v \in \mathbf{L}^2(D_3)$:

$$\begin{aligned} & \int_{D_3} (v - u) q + \int_{D_3} [f - u]^+ = \\ & \int_{\{f=u\}} (v - f) q + \int_{\{f>u\}} (u - v) \lambda + \int_{\{f>u\}} \lambda (f - u) = \\ & \int_{\{f=u\}} (f - v) (-q) + \int_{\{f>u\}} \lambda (f - v) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\{f \geq u\}} \lambda(f-v) = \\
& \int_{\{f \geq v\} \cap \{f \geq u\}} (f-v) + \int_{\{f < v\} \cap \{f \geq u\}} (f-v) \leq \\
& \int_{\{f \geq v\} \cap \{f \geq u\}} (f-v) + \int_{\{f \geq v\} \cap \{f < u\}} (f-v) = \\
& \int_{\{f \geq u\}} [f-v]^+ + \int_{\{f < u\}} [f-v]^+ = \int_{D_3} [f-v]^+
\end{aligned}$$

lo cual implica que:

$$(3.113) \quad \int_{D_3} (v-u)q + \int_{D_3} [f-u]^+ \leq \int_{D_3} [f-v]^+$$

o lo que es lo mismo

$$(3.114) \quad m(v) - m(u) \geq (q, v-u)_{\mathbf{W}}$$

es decir $q \in \partial m(u)$ y por tanto

$$K(u) \subset \partial m(u)$$

(ii) Ahora veamos que: $\partial m(u) \subset K(u)$ Sea $q \in \partial m(u)$, esto equivale a afirmar que

$$(3.115) \quad \int_{D_3} (v-u)q + \int_{D_3} [f-u]^+ \leq \int_{D_3} [f-v]^+$$

mediante elecciones apropiadas de v probaremos la inclusión. Así si $v = u + th, h \geq 0, |t| > 0$ entonces

$$(3.116) \quad t \int_{D_3} hq + \int_{D_3} [f-u]^+ \leq \int_{D_3} [f-u-th]^+$$

como $[f-u-th]^+ \leq [f-u]^+ + [t]^+ h - th$

$$(3.117) \quad t \int_{D_3} hq \leq [t]^+ \int_{D_3} h - t \int_{D_3} h$$

de donde

$$(3.118) \quad \int_{D_3} h \{tq - [t]^+ + t\} \leq 0 \quad \forall h \geq 0, h \in \mathbf{L}^2(D_3)$$

entonces

$$[t]^+ - t - tq \geq 0 \quad \text{c.t.p. en } D_3$$

de aquí que

$$(3.119) \quad -1 \leq q \leq 0 \quad \text{c.t.p. en } D_3$$

1. Examinemos el comportamiento de q en $\{f > u\}$

i. Definamos $E_1 = \{x \in \{f > u\} : q(x) \geq -1\}$ escogemos $v = \frac{f+u}{2} \cdot \chi_{E_1} + u \chi_{D_3 \setminus E_1}$ y tenemos

$$\int_{E_1} q \left(\frac{f-u}{2} \right) + \int_{D_3} [f-u]^+ \leq \int_{D_3 \setminus E_1} [f-u]^+ + \int_{E_1} \left(\frac{f-u}{2} \right)$$

desarrollando los términos obtenemos

$$\int_{E_1} (q+1) \left(\frac{f-u}{2} \right) \leq 0$$

de donde concluimos que

$$(3.120) \quad q = -1 \quad \text{c.t.p. en } E_1$$

ii. Definamos ahora $E_2 = \{x \in \{f > u\} : q(x) \leq -1\}$ escogemos $v = \left(u + \frac{1}{q} \right) \chi_{E_2} + u \chi_{D_3 \setminus E_2}$ y tenemos

$$\int_{E_2} 1 + \int_{D_3} [f-u]^+ \leq \int_{D_3 \setminus E_2} [f-u]^+ + \int_{E_2} \left[f - u - \frac{1}{q} \right]^+$$

operando podemos ver que

$$\int_{E_2} \left(1 + \frac{1}{q} \right) \leq 0$$

y como $\frac{1}{q(x)} + 1 \leq 0$ concluimos que

$$(3.121) \quad q = -1 \quad \text{c.t.p. en } E_2$$

Y por tanto

$$(3.122) \quad q = -1 \quad \text{c.t.p. en } \{f > u\} = E_1 \cup E_2.$$

2. Veremos que $q = 0$ en $\{f < u\}$

i. Llamemos

$$(3.123) \quad E_3 = \{x \in \{f < u\} : q(x) \geq 0\}$$

tomando

$$(3.124) \quad v = (u + 1) \chi_{E_3} + u \chi_{D_3 \setminus E_3}$$

tenemos

$$\int_{E_3} q + \int_{D_3} [f - u]^+ \leq \int_{D_3 \setminus E_3} [f - u]^+ + \int_{E_3} [f - u - 1]^+$$

de aquí que

$$\int_{E_3} q \leq 0$$

y por tanto $z = 0$ c.t.p. en E_3 .

ii. Definimos

$$(3.125) \quad E_4 = \{x \in \{f < u\} : q(x) \leq 0\}$$

tomando

$$(3.126) \quad v = \left(\frac{f + u}{2} \right) \chi_{E_4} + u \chi_{D \setminus E_4}$$

tenemos

$$\int_{E_4} q \left(\frac{f - u}{2} \right) + \int_{D_3} [f - u]^+ \leq \int_{D_3 \setminus E_4} [f - u]^+ + \int_{E_4} \left[\frac{f - u}{2} \right]^+$$

y

$$\int_{E_4} q \left(\frac{f - u}{2} \right) \leq 0$$

entonces $z = 0$ c.t.p. en E_4 .

y por tanto

$$(3.127) \quad q = 0 \text{ c.t.p. en } \{f < u\} = E_3 \cup E_4.$$

De (3.119), (3.122), (3.127) $z \in K(u)$ y luego

$$\partial j(u) \subset K(u) \quad \blacksquare$$

Definimos ahora

$$(3.128) \quad K^* = \{q \in \mathbf{L}^2(D_3) : -1 \leq q \leq 0 \text{ c.t.p. en } D_3\}$$

entonces si $q \in K^*$ tenemos que

$$(3.129) \quad \begin{aligned} m^*(q) &= \int_{D_3} qv \, \mathbf{d}x\mathbf{d}y - \int_{D_3} [f - v]^+ \, \mathbf{d}x\mathbf{d}y \\ &= \int_{D_3 \setminus \{f < v\}} qv \, \mathbf{d}x\mathbf{d}y - \int_{D_3 \setminus \{f < v\} \setminus \{f - v\}} \mathbf{d}x\mathbf{d}y \\ &= \int_{D_3 \setminus \{f < v\}} \{(1 + q)v - f\} \, \mathbf{d}x\mathbf{d}y \\ &= \int_{D_3 \setminus \{f < v\}} \{(1 + q)(v - f) + qf\} \, \mathbf{d}x\mathbf{d}y \\ &= \int_{\{f > v\}} qf \, \mathbf{d}x\mathbf{d}y = \int_{D_3} qf \, \mathbf{d}x\mathbf{d}y \end{aligned}$$

Y si $q \notin K^*$

$$\begin{aligned} (q, v)_{\mathbf{W}} - m(v) &= \int_{D_3} qv - \int_{D_3} [f - v]^+ \\ &= \int_{D_3 \setminus \{f < v\}} qv - \int_{D_3 \setminus \{f < v\}} [f - v]^+ + \int_{\{f < v\}} qv \\ &= \int_{D_3 \setminus \{f < v\}} \{qv - f + v\} + \int_{\{f < v\}} qv \\ &= \int_{D_3 \setminus \{f < v\}} \{(q + 1)(v - f) + qf\} + \int_{\{f < v\}} qv \end{aligned}$$

Escogemos $v_n \in \mathbf{W}$ definida por:

$$v_n(x, y) = \begin{cases} f(x) - n & : (x, y) \in \{q < -1\} \\ f(x) + n & : (x, y) \in \{q > 0\} \\ f(x) & : (x, y) \notin A \end{cases}$$

para $n \in \mathbb{N}$ y A definido por

$$A = \{q < -1\} \cup \{q > 0\}$$

como $q \notin K^*$ tenemos que $|A| > 0$.

Entonces $\{f < v_n\} = \{q > 0\}$ y con estas consideraciones,

$$\{f > v_n\} = \{q < -1\}$$

$$\begin{aligned} (q, v_n)_{\mathbf{W}} - m(v_n) &= \int_{\{q < -1\}} \{-n(q+1) + qf\} + \int_{D_3 \setminus A} qf + \int_{\{q > 0\}} qf + \int_{\{q > 0\}} nq \\ &= \int_{D_3} qf + n \left\{ \int_{\{q < -1\}} (-q-1) + \int_{\{q > 0\}} q \right\} \\ &= \int_{D_3} qf + n \int_A \{(-q-1)\chi_{\{q < -1\}} + q\chi_{\{q > 0\}}\} \end{aligned}$$

como $(-q-1)\chi_{\{q < -1\}} + q\chi_{\{q > 0\}} > 0$ y $|A| > 0$ entonces

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \{(q, v_n)_{\mathbf{W}} - m(v_n)\} = +\infty$$

al ser $\{v_n\} \subset \mathbf{W}$ obtenemos

$$(3.130) \quad m^*(q) = \sup_{v \in \mathbf{W}} \{(q, v)_{\mathbf{W}} - m(v)\} = +\infty, \forall q \notin K^*$$

De (3.129) y (3.130) vemos que

$$(3.131) \quad m^*(q) = \begin{cases} (q, f)_{\mathbf{L}^2(D_3)} & : q \in K^* \\ +\infty & : q \notin K^* \end{cases}$$

Será de importancia para el desarrollo posterior de la formulación dual del problema del dique, el cálculo de $J_\rho^{\partial(m^*)}$, así si $z = J_\rho^{\partial(m^*)}(q)$ entonces $q \in (\mathbb{I} + \rho\partial(m^*))(z)$, es decir

$$\frac{q-z}{\rho} \in \partial(m^*)(z)$$

o equivalentemente

$$m^*(w) - m^*(z) \geq \left(\frac{q-z}{\rho}, w-z \right)_{\mathbf{W}} \quad \forall w \in \mathbf{W}$$

Como $m^*(w) = \begin{cases} (w, f)_{\mathbf{W}} & : w \in K^* \\ +\infty & : w \notin K^* \end{cases}$, entonces:

$$(w-z, f)_{\mathbf{W}} \geq \left(\frac{q-z}{\rho}, w-z \right)_{\mathbf{W}} \quad \forall w \in K^*$$

y por tanto

$$0 \geq (q - z - \rho f, w - z)_{\mathbf{W}} \quad \forall w \in K^*$$

lo cual es equivalente a decir que $z = \text{Pr}_{K^*}(q - \rho f)$. Finalmente concluimos que:

$$(3.132) \quad J_{\rho}^{\partial(m^*)}(q) = \text{Pr}_{K^*}(q - \rho f)$$

Finalmente recordando (3.108), (3.109) tenemos que $q \in \partial m(\Phi(u))$ y por tanto $\Phi(u) \in \partial m^*(q)$ o mejor aún $q = J_{\rho}^{\partial m^*}(q + \rho\Phi(u))$ y por (3.132)

$$(3.133) \quad q = \text{Pr}_{K^*}(q + \rho(\Phi(u) - f)).$$

También de (3.110)

$$(3.134) \quad (u, v)_{\mathbf{V}} - F(v) + \lambda(q, \Phi(v))_{\mathbf{W}} = 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

Algoritmo de búsqueda del punto de silla

De modo que podamos utilizar el siguiente esquema iterativo para la aproximación del punto de silla (u, q)

- (i) Empezamos con $q^0 \in \mathbf{W}$
- (ii) Conocido q^i , escogemos $v^i \in \mathbf{V}$ de tal manera que

$$(3.135) \quad J_0(v^i) + \lambda(q^i, \Phi(v^i))_{\mathbf{W}} = \min_{v \in \mathbf{V}} \{J_0(v) + \lambda(q^i, \Phi(v))_{\mathbf{W}}\}$$

- (iii) Luego escogemos $q^{i+1} \in \mathbf{W}$ de la siguiente forma:

$$(3.136) \quad q^{i+1} = J_{\rho}^{\partial(m^*)}(q^i + \rho\Phi(v^i))$$

para $\rho > 0$ adecuado.

Este esquema aproxima u^{k+1} que nos servirá para establecer la siguiente iteración en (3.99) la cual aproxima la solución de una IVE con bilineal asociada no simétrica.

Capítulo 4

Aplicación del Método de Elementos Finitos para hallar la solución aproximada del Problema Variacional y Quasivariacional del Dique.

Ahora procederemos a calcular la solución aproximada del problema del dique, tanto para el problema variacional como también para el caso quasivariacional, para ello aplicaremos la teoría del Método de Elementos Finitos considerando para los resultados numéricos los problemas test de un dique de sección transversal rectangular y de un dique de sección transversal generalizada.

En lo que sigue se aplican las siguientes etapas:

- (i) Discretización del dominio computacional (generación de la malla de elementos.
- (ii) Construcción de los espacios de aproximación $V_h \subset V$, y $W_h \subset W$ de dimensión finita.
- (iii) Discretización de problema variacional y quasivariacional y prueba de la convergencia de la solución aproximada en V_h cuando el parámetro $h \rightarrow 0$.
- (iv) Aplicación del Método de Elementos Finitos en el algoritmo (2.28)–(2.29).
- (v) Convergencia del método propuesto respecto al parámetro de discretización espacial h y otras variables en la aplicación del algoritmo (2.28)–(2.29).
- (vi) Visualización de los resultados numéricos.

4.1 Conceptos generales de la Teoría de Elementos Finitos

4.1.1 El Método de Elementos Finitos

Ahora introduciremos la teoría del método de elementos finitos, necesarios en la estimación del error y la determinación de la convergencia de las soluciones aproximadas, en su forma variacional como quasivariacional. En lo que sigue consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio poligonal, y $\mathbf{P}_k(F)$ como el espacio de polinomios en un conjunto F , de grado menor o igual que k .

Definición 4.1.1 (Triangulación) Una triangulación o malla es una partición $\mathcal{T}_h(\Omega)$ del dominio Ω en un número finito de triángulos T , llamados elementos, con la siguientes propiedades

- (i) $T \subset \bar{\Omega} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h(\Omega)$
- (ii) $\bar{\Omega} = \bigsqcup_{T \in \mathcal{T}_h(\Omega)} T$
- (iii) $T_1^\circ \cap T_2^\circ = \emptyset \quad \forall T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h(\Omega)$ con $T_1 \neq T_2$.

Además $\forall T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h(\Omega)$ con $T_1 \neq T_2$, se satisface sólo una de las siguientes condiciones

- (i) $T_1 \cap T_2 = \emptyset$.
- (ii) T_1 y T_2 tienen sólo un vértice común.
- (iii) T_1 y T_2 tienen sólo un lado común.

Además h denota la mayor longitud de los lados de los elementos de la triangulación.

$$h = \max_{T \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \left\{ \max_{p, q \in T} \{ \|p - q\| \} \right\}$$

Definición 4.1.2 (Espacio de elementos finitos) Definimos el espacio de elementos finitos correspondiente a la triangulación $\mathcal{T}_h(\Omega)$ como el conjunto

$$\mathbf{X}_h = \{v_h \in \mathbf{C}(\bar{\Omega}) : v_h|_T \in \mathbf{P}_k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h(\Omega)\}$$

Y escogemos sobre cada triángulo T un conjunto de puntos (nodos) $\{p_i\}_{i=1}^I$ con $I = \dim(\mathbf{P}_k(T))$ de tal manera que cualquier $v \in \mathbf{P}_k(T)$ este únicamente determinada por sus valores en los nodos.

En las aplicaciones haremos uso de los vértices de los triángulos como nodos y de polinomios grado menor o igual a 1 sobre cada elemento triangular.

Definición 4.1.3 (Interpolación) Sea $\{p_i\}_{i=1}^{N_h}$ el conjunto de nodos de $\mathcal{T}_h(\Omega)$, y \mathbf{X}_h un espacio de elementos finitos, definimos el operador Π_h de interpolación para $v \in \mathbf{C}(\overline{\Omega})$ como

$$\begin{cases} \Pi_h : \mathbf{C}(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbf{X}_h, \\ \forall v \in \mathbf{C}(\overline{\Omega}), \quad \text{tenemos que } \Pi_h v(p_i) = v(p_i), \forall i \in \{1, \dots, N_h\} \end{cases}$$

Teorema 4.1.4 Sea \mathbf{X}_h un espacio de elementos finitos, y $k > 0$, tal que $\mathbf{P}_k(T) \subset \mathbf{X}_h$ $\forall T \in \mathcal{T}_h(\Omega)$. Si los ángulos de $\mathcal{T}_h(\Omega)$ están acotados inferiormente por $\theta_0 > 0$, independiente de h entonces existe una constante c independiente de h tal que $\forall v \in \mathbf{H}^{k+1}(\Omega)$:

$$\|v - \Pi_h v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq ch^{k+1} |v|_{\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)} \quad \text{y} \quad \|v - \Pi_h v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq ch^k |v|_{\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)}$$

Demostración: Ver [1]. ■

Definimos ahora

$$\sum_h = \{p \in \overline{\Omega} : p \text{ es vértice de algún } T \in \mathcal{T}_h(\Omega)\}$$

con $N_h = \text{card}(\sum_h)$ y el conjunto $\{b_1, \dots, b_{N_h}\}$ que satisface

- (i) $b_i|_T \in \mathbf{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h(\Omega)$
- (ii) $b_i(p_j) = \delta_{ij} \quad i, j \in \{1, \dots, N_h\}$

Se puede probar que $\{b_1, \dots, b_{N_h}\}$ es linealmente independiente y

$$\mathbf{X}_h = \text{el espacio generado por } \{b_1, \dots, b_{N_h}\}$$

(ver [1]).

Lema 4.1.5 Sea Ω un dominio poligonal en \mathbb{R}^2 con frontera $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \neq \emptyset$, $|\Gamma_1| > 0$

$$\mathbf{V} = \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \gamma_0 v = 0 \text{ en } \Gamma_1\}$$

y \mathbf{V}_h una familia de espacios vectoriales finito-dimensionales

$$\mathbf{V}_h = \{v_h \in \mathbf{X}_h : v_h = 0 \text{ en } \Gamma_1\}$$

entonces para todo $v \in \mathbf{V}$ existe $v_h \in \mathbf{V}_h$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v_h - v\|_{\mathbf{V}} = 0$$

Prueba: Utilizaremos el hecho de que $\mathbf{C}_{\Gamma_1} = \{\varphi \in \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega}) : \varphi = 0 \text{ en una vecindad de } \Gamma_1\}$ es denso en \mathbf{V} (ver [8]).

Sea $v \in \mathbf{V}$ y $\varepsilon > 0$ como \mathbf{C}_{Γ_1} es denso en \mathbf{V} existe $\varphi \in \mathbf{C}_{\Gamma_1}$ tal que

$$\|\varphi - v\|_{\mathbf{V}} < \varepsilon$$

entonces para $h < \frac{\varepsilon}{|\varphi|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}}$ definimos,

$$v_h = \Pi_h \varphi$$

es claro que $v_h \in \mathbf{V}_h$. Además

$$\|\varphi - v_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq ch |\varphi|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}$$

con c independiente de h y de φ . Entonces

$$\begin{aligned} \|v_h - v\|_{\mathbf{V}} &\leq \|v_h - \varphi\|_{\mathbf{V}} + \|\varphi - v\|_{\mathbf{V}} \\ &< \varepsilon(c + 1) \end{aligned}$$

y en conclusión

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v_h - v\|_{\mathbf{V}} = 0 \quad \blacksquare$$

Lema 4.1.6 Sea Ω un dominio poligonal en \mathbb{R}^2 con frontera $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \neq \emptyset$

$$\mathbf{V} = \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \gamma_0 v = 0 \text{ en } \Gamma_1\}$$

y \mathbf{V}_h una familia de espacios vectoriales finito-dimensionales

$$\mathbf{V}_h = \{v_h \in \mathbf{X}_h : v_h = 0 \text{ en } \Gamma_1\}$$

$a(\cdot, \cdot)$ una forma bilineal simétrica \mathbf{V} -elíptica y continua con

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \quad \forall u, v \in \mathbf{V}$$

r_h el operador proyección de \mathbf{V} en \mathbf{V}_h para la norma $v \rightarrow \sqrt{a(v, v)}$

Entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|r_h v - v\|_{\mathbf{V}} = 0$$

Prueba: Para $v \in \mathbf{V}$ tenemos $r_h v$ satisface

$$a(v - r_h v, v - r_h v) = \inf_{z_h \in \mathbf{V}_h} a(v - z_h, v - z_h)$$

entonces se obtiene la siguiente relación

$$a(v - r_h v, v - r_h v) \leq a(v - v_h, v - v_h)$$

con v_h definido como en el lema (4.1.5). De modo que

$$\alpha \|r_h v - v\|_{\mathbf{V}}^2 \leq C \|v - v_h\|_{\mathbf{V}}^2$$

donde α es la constante de \mathbf{V} -elipticidad y C la constante de continuidad. ■

4.2 Discretización con el MEF del problema del dique de sección transversal rectangular

4.2.1 Formulación del problema continuo

Consideremos la formulación variacional para el problema del dique rectangular:

$$(4.1) \quad \begin{cases} \text{Hallar } \tilde{w} \in K, \text{ tal que:} \\ a(\tilde{w}, v - \tilde{w}) \geq L(v - \tilde{w}) \quad \forall v \in K \end{cases}$$

donde:
$$a(u, v) = \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy$$

$$L(v) = - \left\{ a(\tilde{g}, v) + \int_D v \, dx dy \right\}$$

$$K = \{v \in \mathbf{V} : v + \tilde{g} \geq 0 \quad \text{c.t.p. en } D\}$$

4.2.2 Formulación discreta

Primero haremos una aproximación discreta del dominio D . Consideremos una triangulación $\mathcal{T}_h(D)$.

Aproximación de \mathbf{V} y K

- $\sum_h = \{p \in \bar{D} : p \text{ es vértice de algún } T \in \mathcal{T}_h(D)\}$
- $\overset{\circ}{\sum}_h = \{p \in \sum_h : p \in D\}$
 En este conjunto establecemos una numeración: $\overset{\circ}{\sum}_h = \{p_1, \dots, p_N\}$ con $N = \text{card}\left(\overset{\circ}{\sum}_h\right)$
- $\sum_h^\Gamma = \{p \in \sum_h : p \in \Gamma\}$
 en este conjunto establecemos una numeración: $\sum_h^\Gamma = \{p_{N+1}, \dots, p_{N+M}\}$ con $M = \text{card}\left(\sum_h^\Gamma\right)$

Es claro que $\sum_h = \{p_1, \dots, p_N, \dots, p_{N+M}\}$.

El espacio $\mathbf{V} = \mathbf{H}_0^1(D)$ es aproximado por la familia de subespacios $(\mathbf{V}_h)_h$ donde

$$\mathbf{V}_h = \{v \in \mathbf{X}_h : v = 0 \text{ en } \Gamma\}$$

con $(u_h, v_h)_{\mathbf{V}_h} = (u_h, v_h)_{\mathbf{V}}$

El espacio $\mathbf{W} = \mathbf{L}^2(D)$ es aproximado por la familia de subespacios $(\mathbf{W}_h)_h$ donde

$$\mathbf{W}_h = \mathbf{X}_h$$

con $(u_h, v_h)_{\mathbf{W}_h} = (u_h, v_h)_{\mathbf{W}}$

Es natural aproximar M por

$$M_h = \left\{ v_h \in \mathbf{W}_h : v_h(p) + \tilde{g}(p) \geq 0 \quad \forall p \in \sum_h \right\}$$

4.2.3 El problema discreto en el caso del dique de sección transversal rectangular

Con estas notaciones proponemos la siguiente formulación variacional discreta.

$$(4.2) \quad \begin{cases} \text{Hallar } \tilde{w}_h \in \mathbf{V}_h \text{ tal que :} \\ a(\tilde{w}_h, v_h - \tilde{w}_h) + I_{M_h}(\Phi(v_h)) - I_{M_h}(\Phi(\tilde{w}_h)) \geq L(v_h - \tilde{w}_h) \quad \forall v_h \in \mathbf{V}_h \end{cases}$$

donde:

$$a(u_h, v_h) = \int_D \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx dy$$

$$L(v_h) = - \left\{ a(\tilde{g}, v_h) + \int_D v_h \, dx dy \right\}$$

$$\Phi : \mathbf{V}_h \rightarrow \mathbf{W}_h : \Phi(v_h) = v_h$$

I_{M_h} : funcional indicatriz de M_h

que gracias a que $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{W}_h$ y con $K_h = \mathbf{V}_h \cap M_h$ es equivalente a

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \tilde{w}_h \in K_h \text{ tal que :} \\ a(\tilde{w}_h, v_h - \tilde{w}_h) \geq L(v_h - \tilde{w}_h) \quad \forall v_h \in K_h \end{array} \right.$$

La formulación (4.2) nos conduce al siguiente problema de minimización

$$(4.4) \quad J_0(\tilde{w}_h) + I_{M_h}(\Phi(\tilde{w}_h)) = \inf_{v_h \in \mathbf{V}_h} \{J_0(v_h) + I_{M_h}(\Phi(v_h))\}$$

donde: $J_0(v_h) = \frac{1}{2}a(v_h, v_h) - L(v_h)$

Lo permite proponer el siguiente lagrangiano

$$(4.5) \quad \mathcal{L}(v_h, q_h) = J_0(v_h) + (p_h, v_h)_{\mathbf{W}_h} - (I_{M_h})^*(p_h) \quad \forall v_h \in \mathbf{V}_h, \forall p_h \in \mathbf{W}_h$$

El siguiente teorema muestra que la solución aproximada converge a la solución del problema continuo cuando h se hace arbitrariamente pequeño.

Teorema 4.2.7 *Si los ángulos de $\mathcal{T}_h(D)$ están acotados inferiormente por $\theta_0 > 0$, independiente de h , entonces existe una constante $c > 0$ independiente de h tal que:*

$$\|\tilde{w}_h - \tilde{w}\|_{\mathbf{V}} \leq ch$$

donde \tilde{w} y \tilde{w}_h son las respectivas soluciones de (4.1) y (4.3).

Demostración: Sea Π_h el operador de interpolación de \mathbf{V} en \mathbf{V}_h . Como $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tenemos que $\mathbf{H}^2(D) \subset \mathbf{C}(\overline{D})$ con inyección continua; las condiciones $\tilde{w} \in \mathbf{H}^2(D)$, $\tilde{w} +$

$\tilde{g} \geq 0$, $\tilde{w} = 0$ en Γ implican que $\Pi_h \tilde{w} \in K_h$. Por tanto

$$\begin{aligned} a(\tilde{w}_h - \tilde{w}, \tilde{w}_h - \tilde{w}) &= a(\tilde{w}_h - \tilde{w}, \Pi_h \tilde{w} - \tilde{w}) + a(\tilde{w}_h - \tilde{w}, \tilde{w}_h - \Pi_h \tilde{w}) \\ &= a(\tilde{w}_h - \tilde{w}, \Pi_h \tilde{w} - \tilde{w}) + a(\tilde{w}_h, \tilde{w}_h - \Pi_h \tilde{w}) - a(\tilde{w}, \tilde{w}_h - \Pi_h \tilde{w}) \\ &\leq a(\tilde{w}_h - \tilde{w}, \Pi_h \tilde{w} - \tilde{w}) + L(\tilde{w}_h - \Pi_h \tilde{w}) - a(\tilde{w}, \tilde{w}_h - \Pi_h \tilde{w}) \\ &= a(\tilde{w}_h - \tilde{w}, \Pi_h \tilde{w} - \tilde{w}) + \int_D (\tilde{w}_h - \Pi_h \tilde{w})(-1 + \Delta(\tilde{w} + \tilde{g})) \end{aligned}$$

utilizamos el hecho de que $0 \leq a(u - v, u - v)$ y por tanto $2a(u, v) \leq a(u, u) + a(v, v)$ para expresar,

$$\begin{aligned} a(\tilde{w}_h - \tilde{w}, \tilde{w}_h - \tilde{w}) &\leq \frac{1}{2}a(\tilde{w}_h - \tilde{w}, \tilde{w}_h - \tilde{w}) + \frac{1}{2}a(\Pi_h \tilde{w} - \tilde{w}, \Pi_h \tilde{w} - \tilde{w}) + \\ &\quad \int_D (\tilde{w}_h - \Pi_h \tilde{w})(-1 + \Delta(\tilde{w} + \tilde{g})) \end{aligned}$$

y de aquí que,

$$\frac{1}{2}a(\tilde{w}_h - \tilde{w}, \tilde{w}_h - \tilde{w}) \leq \frac{1}{2}a(\Pi_h \tilde{w} - \tilde{w}, \Pi_h \tilde{w} - \tilde{w}) + \int_D (\tilde{w}_h - \Pi_h \tilde{w})(-1 + \Delta(\tilde{w} + \tilde{g}))$$

además si hacemos $\tilde{w}_h - \Pi_h \tilde{w} = (\tilde{w}_h + \Pi_h \tilde{g}) + (\tilde{g} - \Pi_h \tilde{g}) - (\tilde{w} + \tilde{g}) + (\tilde{w} - \Pi_h \tilde{w})$ y $z = (-1 + \Delta \tilde{w})$ entonces

$$\int_D z(\tilde{w}_h - \Pi_h \tilde{w}) = \int_D z(\tilde{w}_h + \Pi_h \tilde{g}) + \int_D z(\tilde{g} - \Pi_h \tilde{g}) - \int_D z(\tilde{g} + \tilde{w}) + \int_D z(\tilde{w} - \Pi_h \tilde{w})$$

de acuerdo a (3.21) tenemos que $z \leq 0$ c.t.p. en D y $z(\tilde{w} + \tilde{g}) = 0$ c.t.p. en D ; además como $\tilde{w}_h \in K_h$ tenemos $\tilde{w}_h + \Pi_h \tilde{g} \geq 0$. Entonces

$$\int_D z(\tilde{w}_h - \Pi_h \tilde{w}) \leq \|z\|_{\mathbf{L}^2(D)} \left(\|\Pi_h \tilde{g} - \tilde{g}\|_{\mathbf{L}^2(D)} + \|\tilde{w} - \Pi_h \tilde{w}\|_{\mathbf{L}^2(D)} \right)$$

De acuerdo a la condición sobre los ángulos de $\mathcal{T}_h(D)$ y como $\tilde{g}, \tilde{w} \in \mathbf{H}^2(D)$ tenemos

$$\|\tilde{w} - \Pi_h \tilde{w}\|_{\mathbf{H}^1(D)} \leq ch \|\tilde{w}\|_{\mathbf{H}^2(D)}, \quad \|\tilde{w} - \Pi_h \tilde{w}\|_{\mathbf{L}^2(D)} \leq ch^2 \|\tilde{w}\|_{\mathbf{H}^2(D)}$$

$$\|\Pi_h \tilde{g} - \tilde{g}\|_{\mathbf{H}^1(D)} \leq ch \|\tilde{g}\|_{\mathbf{H}^2(D)}, \quad \|\Pi_h \tilde{g} - \tilde{g}\|_{\mathbf{L}^2(D)} \leq ch^2 \|\tilde{g}\|_{\mathbf{H}^2(D)}$$

con c denotando constantes diferentes, las cuales son independientes de h, \tilde{g}, \tilde{w} , por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a(\tilde{w}_h - \tilde{w}, \tilde{w}_h - \tilde{w}) &\leq \frac{1}{2}a(\Pi_h \tilde{w} - \tilde{w}, \Pi_h \tilde{w} - \tilde{w}) + \\ &\quad \|z\|_{\mathbf{L}^2(D)} \left(\|\Pi_h \tilde{g} - \tilde{g}\|_{\mathbf{L}^2(D)} + \|\tilde{w} - \Pi_h \tilde{w}\|_{\mathbf{L}^2(D)} \right) \\ &\leq ch^2 \|\tilde{w}\|_{\mathbf{H}^2(D)}^2 + ch^2 \|z\|_{\mathbf{L}^2(D)} \left(\|\tilde{g}\|_{\mathbf{H}^2(D)} + \|\tilde{w}\|_{\mathbf{H}^2(D)} \right) \end{aligned}$$

y en virtud a la \mathbf{V} -elipticidad

$$\|\tilde{w}_h - \tilde{w}\|_{\mathbf{H}_0^1(D)}^2 \leq ch^2 \|\tilde{w}\|_{\mathbf{H}^2(D)}^2 + ch^2 \|z\|_{\mathbf{L}^2(D)} \left(\|\tilde{g}\|_{\mathbf{H}^2(D)} + \|\tilde{w}\|_{\mathbf{H}^2(D)} \right)$$

luego

$$\|\tilde{w}_h - \tilde{w}\|_{\mathbf{H}_0^1(D)} \leq ch \sqrt{\|\tilde{w}\|_{\mathbf{H}^2(D)}^2 + \|z\|_{\mathbf{L}^2(D)} \left(\|\tilde{g}\|_{\mathbf{H}^2(D)} + \|\tilde{w}\|_{\mathbf{H}^2(D)} \right)}$$

con c independiente de h . ■

Lema 4.2.8 Sea $\mathbf{N} = \text{card} \left(\overset{\circ}{\sum}_h \right)$, $\mathbf{M} = \text{card} \left(\sum_h^\Gamma \right)$, entonces el conjunto $\{b_1, \dots, b_{\mathbf{N}}\}$ constituye una base para \mathbf{V}_h y $\{b_1, \dots, b_{\mathbf{N}+\mathbf{M}}\}$ una base para \mathbf{W}_h .

El lema anterior nos permite expresar $v_h \in \mathbf{V}_h$ como $v_h = \sum_{i=1}^{\mathbf{N}} (v_h)_i b_i$, y de acuerdo a las propiedades de b_i tenemos que para $p_j \in \sum_h$:

$$v_h(p_j) = \sum_{i=1}^{\mathbf{N}} (v_h)_i b_i(p_j) = (v_h)_j$$

por este motivo llamaremos a los coeficientes $(v_h)_i$ “valores nodales de v_h ” y simplemente los denotaremos como v_i .

Ahora seguiremos los pasos dados por (2.28)–(2.29)

(i) Comenzamos con $q_h^0 \in \mathbf{W}_h$,

(ii) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Conocido } q_h^n \in \mathbf{W}_h, \text{ escogemos } u_h^n \in \mathbf{V}_h \text{ de tal manera que} \\ J_0(u_h^n) + (q_h^n, \Phi(u_h^n))_{\mathbf{W}_h} = \min_{v_h \in \mathbf{V}_h} \{ J_0(v_h) + (q_h^n, \Phi(v_h))_{\mathbf{W}_h} \} \end{array} \right.$

(iii) Luego escogemos q_h^{n+1} de la siguiente forma:

$$q_h^{n+1} = J_\lambda^{\partial(I_{M_h}^*)} (q_h^n + \lambda \Phi(u_h^n))$$

(iv) Repetimos los pasos (ii)–(iii), hasta lograr una aproximación adecuada.

Es decir, en primer lugar se trata de minimizar la expresión:

$$(4.6) \quad J_0(v_h) + (q_h^n, \Phi(v_h))_{\mathbf{W}_h}$$

para v_h .

Esto se logra sustituyendo $v_h = \sum_{i=1}^{\mathbf{N}} v_i b_i$ y $q_h^n = \sum_{i=1}^{\mathbf{N}+\mathbf{M}} q_i^n b_i$ en (4.6), entonces,

$$\begin{aligned} J_0(v_h) + (q_h^n, \Phi(v_h))_{\mathbf{W}_h} &= \frac{1}{2} a(v_h, v_h) - L(v_h) + (q_h^n, \Phi(v_h))_{\mathbf{W}_h} \\ &= \frac{1}{2} a\left(\sum_{i=1}^{\mathbf{N}} v_i b_i, \sum_{j=1}^{\mathbf{N}} v_j b_j\right) - L\left(\sum_{i=1}^{\mathbf{N}} v_i b_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{\mathbf{N}+\mathbf{M}} q_i^n b_i, \sum_{j=1}^{\mathbf{N}+\mathbf{M}} v_j^n b_j\right)_{\mathbf{W}_h} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{v}^t [\mathbf{K}] \mathbf{v} - \mathbf{v}^t \mathbf{F} + \mathbf{v}^t [\mathbf{L}] \mathbf{q}^n \end{aligned}$$

donde $[\mathbf{K}]_{i,j} = a(b_j, b_i)$

$$[\mathbf{F}]_i = L(b_i) = - \left\{ a(\tilde{g}, b_i) + \int_D b_i \right\}$$

$$[\mathbf{L}]_{i,j} = (b_j, b_i)_{\mathbf{W}_h}$$

$$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{\mathbf{N}}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{N}}$$

$$\mathbf{q}^n = (q_1^n, \dots, q_{\mathbf{N}}^n) \in \mathbb{R}^{\mathbf{M}+\mathbf{N}}$$

es decir podemos considerar el siguiente problema

$$\min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\mathbf{N}}} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{v}^t [\mathbf{K}] \mathbf{v} - \mathbf{v}^t (\mathbf{F} - [\mathbf{L}] \mathbf{q}^n) \right\}$$

lo que es equivalente a resolver:

$$[\mathbf{K}] \mathbf{v} = \mathbf{F} - [\mathbf{L}] \mathbf{q}^n$$

que puede considerar el equivalente discreto de (3.30)

Luego se resuelve $q_h^{n+1} = J_{\lambda}^{\partial(I_{K_h}^*)} (q_h^n + \lambda u_h^{n+1})$, recordemos que en este caso

$$J_{\lambda}^{\partial(I_{K_h}^*)} (z) = \text{Pr}_{K_h^*} (z + \lambda \tilde{g}),$$

donde $K_h^* = \{q_h \in \mathbf{W}_h : q_h(p) \leq 0 \quad \forall p \in \sum_h\}$

Entonces

$$q_h^{n+1} = \text{Pr}_{K_h^*} (q_h^n + \lambda (\Phi(u_h^n) + \tilde{g}))$$

Si además consideramos $\theta : \mathbb{R}^{\mathbf{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{N}+\mathbf{M}}$ definido como

$$(\theta \mathbf{v})_i = \begin{cases} v_i & : i \in \{1, \dots, \mathbf{N}\} \\ 0 & : i \in \{\mathbf{N} + 1 : \mathbf{N} + \mathbf{M}\} \end{cases} .$$

entonces podemos expresar el cálculo de los valores nodales de q_h^{n+1} como:

$$\mathbf{q}^{n+1} = \text{Pr}_{\mathbb{R}_-^M} (\mathbf{q}^n + \lambda (\theta \mathbf{u}^n + \tilde{\mathbf{g}}))$$

donde $\tilde{\mathbf{g}} = (\tilde{g}(p_1), \dots, \tilde{g}(p_{N+M})) \in \mathbb{R}^{N+M}$

$$\mathbb{R}_-^M = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^M : q_i \leq 0, \forall i \in \{1, \dots, M\}\}$$

4.2.4 Esquema de solución para el problema discreto

En la implementación del método se consideran sólo las operaciones sobre los valores nodales, es decir se trabaja con vectores en \mathbb{R}^N y \mathbb{R}^{N+M} . El siguiente diagrama resume el esquema a implementar

| | |
|---|---|
| (4.7) | Datos de entrada: $D \subset \mathbb{R}^2, \mathcal{T}_h(D), \tilde{\mathbf{g}}, tol, \mathbf{q}^0 \in \mathbb{R}^{N+M}, nmax$ |
| | Obtención de $[\mathbf{K}], [\mathbf{F}], [\mathbf{L}]$: |
| | $[\mathbf{K}]_{i,j} = a(b_j, b_i)$ (simétrica) |
| | $[\mathbf{F}]_i = L(b_i) = - \left\{ a(\tilde{g}, b_i) + \int_D b_i \right\}$ |
| | $[\mathbf{L}]_{i,j} = (b_j, b_i)_{\mathbf{w}_h}$ |
| | Para $n = 0, \dots, nmax$ hacemos |
| $\mathbf{v}^n = [\mathbf{K}]^{-1} ([\mathbf{F}] - [\mathbf{L}] \mathbf{q}^n)$ | |
| $\mathbf{q}^{n+1} = \text{Pr}_{\mathbb{R}_-^M} (\mathbf{q}^n + \lambda (\theta \mathbf{v}^n + \tilde{\mathbf{g}}))$ | |
| Si $\ \mathbf{v}^n - \mathbf{v}^{n-1}\ < tol$ | |
| entonces salir | |
| Salida: $\mathbf{v}^n, \mathbf{q}^{n+1}$ | |

4.3 Discretización con el MEF del problema del dique de sección transversal generalizada

En esta sección desarrollaremos la aproximación discreta de la solución para la IVE no simétrica (3.100).

$$(4.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in \mathbf{V}, \text{ tal que} \\ b(u, v - u) + \lambda m(\Phi(v)) - \lambda m(\Phi(u)) \geq F(v - u) \quad \forall v \in \mathbf{V} \end{array} \right.$$

para $b(u, v) = (u, v)_{\mathbf{V}}$

$$F(v) = (u^n, v)_{\mathbf{V}} + \lambda \{L(v) - a(u^n, v)\}$$

$$m(u) = \int_{D_3} [f - u]^+, \quad m : \mathbf{L}^2(D_3) \rightarrow \mathbb{R}$$

y $a(\cdot, \cdot)$ como en (3.80), L como en (3.85), g como en (3.82). y el espacio \mathbf{V} definido por

$$\mathbf{V} = \{v \in \mathbf{H}^1(D) : \gamma_0 v = 0 \quad \text{en } \Gamma_0\}$$

4.3.1 Formulación discreta

Primero haremos una aproximación discreta del dominio D . Consideremos una triangulación $\mathcal{T}_h(D)$ y exigimos que $\mathcal{T}_h(D) = \mathcal{T}_h(D_1) \cup \mathcal{T}_h(D_2) \cup \mathcal{T}_h(D_3)$ es decir que la triangulación de D también triángule a D_1, D_2 y D_3

4.3.2 Aproximación de \mathbf{V} y \mathbf{W}

- Ahora definimos

$$\sum_h^{D_3} = \{p \in D_3 : p \text{ es vértice de algún } T \in \mathcal{T}_h(D_3)\}$$

En este conjunto establecemos una numeración: $\sum_h^{D_3} = \{p_1, \dots, p_{\mathbf{L}}\}$ con $\mathbf{L} = \text{card}\left(\sum_h^{D_3}\right)$

- $\overset{\circ}{\sum}_h = \{p \in \sum_h : p \notin \Gamma_0\}$

En este conjunto establecemos una numeración: $\overset{\circ}{\sum}_h = \{p_1, \dots, p_{\mathbf{N}}\}$ con $\mathbf{N} = \text{card}\left(\overset{\circ}{\sum}_h\right)$

- $\sum_h^{\Gamma_0} = \{p \in \sum_h : p \in \Gamma_0\}$

En este conjunto establecemos una numeración: $\sum_h^{\Gamma_0} = \{p_{\mathbf{N}+1}, \dots, p_{\mathbf{N}_h}\}$

El espacio $\mathbf{V} = \{v \in \mathbf{H}^1(D) : v|_{\Gamma_0} = 0\}$ es aproximado por la familia de subespacios $(\mathbf{V}_h)_h$ donde

$$\mathbf{V}_h = \{v \in \mathbf{X}_h : v|_{\Gamma_0} = 0\}$$

con $(u_h, v_h)_{\mathbf{V}_h} = (u_h, v_h)_{\mathbf{V}}$

El espacio $\mathbf{W} = \mathbf{L}^2(D_3)$ es aproximado por la familia de subespacios $(\mathbf{W}_h)_h$ donde

$$\mathbf{W}_h = \{v \in \mathbf{C}(\overline{D_3}) : v|_T \in \mathbf{P}_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h(D_3)\}$$

con $(u_h, v_h)_{\mathbf{W}_h} = \sum_{p \in \sum_h \cap \overline{D_3}} u_h(p) v_h(p)$, observemos que \mathbf{W}_h está formado por las restricciones de funciones de \mathbf{X}_h a $\overline{D_3}$

Lema 4.3.9 Sea $\mathbf{L} = \text{card}(\sum_h^{D_3})$, y $\mathbf{N} = \text{card}(\sum_h^\circ)$ entonces el conjunto

$$\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_{\mathbf{N}}\}$$

constituye una base para \mathbf{V}_h y el conjunto

$$\mathcal{C} = \{c \in \mathbf{W}_h : c = b_j|_{\overline{D_3}} \text{ para algún } j \in \{1, \dots, N_h\}\}$$

constituye una base para \mathbf{W}_h . Además $\text{card}(\mathcal{C}) = \mathbf{L}$.

Prueba: Primero verificaremos que $\mathbf{W}_h = \text{span}(\mathcal{C})$. En efecto dado $w_h \in \mathbf{W}_h$ podemos construir $\tilde{w}_h \in \mathbf{X}_h$ de la forma siguiente

$$\tilde{w}_h(p) = \begin{cases} w_h(p) & : p \in \sum_h^{D_3} \\ 0 & : p \notin \sum_h^{D_3} \end{cases} \quad \forall p \in \sum_h$$

$$\tilde{w}_h|_T \in \mathbf{P}_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h(D)$$

entonces podemos escribir \tilde{w}_h como

$$\tilde{w}_h = \sum_{i=1}^{N_h} \tilde{w}_h(p_i) b_i \quad \text{donde } p_i \in \sum_h$$

y en virtud de la definición de \tilde{w}_h deducimos que

$$\tilde{w}_h = \sum_{i=1}^{N_h} \tilde{w}_h(p_i) b_i \quad \text{donde } p_i \in \sum_h \quad \blacksquare$$

4.3.3 El problema discreto en el caso del dique de sección transversal generalizada

Con estas notaciones proponemos la siguiente formulación quasivariacional discreta.

$$(4.9) \quad \begin{cases} \text{Hallar } u_h \in \mathbf{V}_h, \text{ tal que:} \\ a(u_h, v_h - u_h) + j(u_h, v_h) - j(u_h, u_h) \geq L(v_h - u_h) \quad \forall v_h \in \mathbf{V}_h \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{donde: } \quad a(u_h, v_h) &= \int_D \left[\nabla u_h \cdot \nabla v_h - Y' \left(\frac{\partial u_h}{\partial y} \frac{\partial v_h}{\partial x} - \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{\partial v_h}{\partial y} \right) - Y'' \frac{\partial u_h}{\partial y} v_h \right] \mathbf{d}x \mathbf{d}y \\
L(v_h) &= \int_{\Gamma} g v_h \mathbf{d}\Gamma + \int_{D_1 \cup D_2} v_h \mathbf{d}x \mathbf{d}y \\
j(u_h, v_h) &= \int_{D_3} [\text{conv} [\gamma_{03}(u_h)]^+ - v_h]^+ \mathbf{d}x \mathbf{d}y
\end{aligned}$$

Según hemos visto la solución de este problema se puede aproximar resolviendo iterativamente la siguiente IVE no simétrica:

$$(4.10) \quad \begin{cases} \text{Dado } f \in \mathbf{C}([0, c]) \text{ encuentre } u_h \in \mathbf{V}_h, \text{ tal que:} \\ a(u_h, v_h - u_h) + j(v_h) - j(u_h) \geq L(v_h - u_h) \quad \forall v_h \in \mathbf{V}_h \end{cases}$$

$$\text{donde: } \quad j(v_h) = \int_{D_3} [f(x) - v_h(x, y)]^+ \mathbf{d}x \mathbf{d}y$$

y teniendo en cuenta las sucesiones dadas por (3.91), (3.92).

El siguiente teorema muestra que la solución de (4.10) converge a la solución de (3.98).

Teorema 4.3.10 *Si los ángulos de $\mathcal{T}_h(D)$ están acotados inferiormente por $\theta_0 > 0$, independiente de h , entonces existe una constante $c > 0$ independiente de h tal que:*

$$\|u_h - u\|_{\mathbf{V}} \leq ch$$

donde u y u_h son las respectivas soluciones de (4.10) y (3.98).

Demostración: Sea Π_h el \mathbf{V}_h operador de interpolación en $\mathcal{T}_h(D)$ es decir el operador definido por:

$$\begin{cases} \Pi_h : \mathbf{H}^1(D) \cap \mathbf{C}(\overline{D}) \rightarrow \mathbf{V}_h, \\ \forall v \in \mathbf{H}^1(D) \cap \mathbf{C}(\overline{D}), \forall p \in \mathcal{T}_h(D) \text{ tenemos } \Pi_h v(p) = v(p) \end{cases}$$

Como $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tenemos que $\mathbf{H}^2(D) \subset \mathbf{C}(\overline{D})$ con inyección continua, por tanto

$\Pi_h u \in \mathbf{V}_h$ está bien definido,

$$\begin{aligned}
a(u_h - u, u_h - u) &= a(u_h - u, v_h - u + u_h - v_h) \\
&= a(u_h - u, v_h - u) + a(u_h - u, u_h - v_h) \\
&= a(u_h - u, v_h - u) - a(u_h, v_h - u_h) - a(u, u_h - u) + a(u, v_h - u) \\
&\leq a(u_h - u, v_h - u) + a(u, v_h - u) \\
&\quad -L(v_h - u) + j(\Phi(v_h)) - j(\Phi(u)) \quad \forall v_h \in \mathbf{V}_h
\end{aligned}$$

además

$$a(u, v_h - u) = - \int_D \Delta u (v_h - u) + \int_\Gamma g (v_h - u)$$

entonces

$$\begin{aligned}
a(u, v_h - u) - L(v_h - u) + j(v_h) - j(u) &= - \int_D (v_h - u) \Delta u - \int_{D_1 \cup D_2} (v_h - u) \\
&\quad + \int_{D_3} [f - v_h]^+ - \int_{D_3} [f - u]^+
\end{aligned}$$

así para $v_h = \Pi_h u \in \mathbf{V}_h$

$$\begin{aligned}
a(u_h - u, u_h - u) &\leq a(\Pi_h u - u, \Pi_h u - u) + \int_D (\Pi_h u - u) (-\Delta u - \chi_{D_1 \cup D_2}) \\
&\quad + \int_{D_3} [f - \Pi_h u]^+ - \int_{D_3} [f - u]^+
\end{aligned}$$

ahora:

$$\begin{aligned}
& - \int_{D_3} (\Pi_h u - u) \Delta u + \int_{D_3} [f - \Pi_h u]^+ - \int_{D_3} [f - u]^+ = \\
& - \int_{D_3} \{ (\Pi_h u - u) \Delta u + [f - \Pi_h u]^+ - [f - u]^+ \} \leq \\
& \quad - \int_{D_3} \{ (\Pi_h u - u) \Delta u + [u - \Pi_h u]^+ \} \leq \\
& \quad \|\Pi_h u - u\|_{\mathbf{L}^2(D_3)} \left(\|\Delta u\|_{\mathbf{L}^2(D_3)} + \sqrt{m(D_3)} \right)
\end{aligned}$$

y entonces:

$$a(u_h - u, u_h - u) \leq a(u_h - u, \Pi_h u - u) + \|\Pi_h u - u\|_{\mathbf{L}^2(D_3)} \left(\|\Delta u\|_{\mathbf{L}^2(D_3)} + \sqrt{m(D_3)} \right)$$

además gracias a la \mathbf{V} -elipticidad y la continuidad de la forma bilineal en \mathbf{V} :

$$\begin{aligned} \|u_h - u\|_{\mathbf{H}^1(D)}^2 &\leq c \|u_h - u\|_{\mathbf{H}^1(D)} \|\Pi_h u - u\|_{\mathbf{H}^1(D)} \\ &\quad + ch^2 \|u\|_{\mathbf{H}^2(D)} \left(\|\Delta u\|_{\mathbf{L}^2(D_3)} + \sqrt{m(D_3)} \right) \\ &\leq ch \|u_h - u\|_{\mathbf{H}^1(D)} \|u\|_{\mathbf{H}^2(D)} \\ &\quad + ch^2 \|u\|_{\mathbf{H}^2(D)} \left(\|\Delta u\|_{\mathbf{L}^2(D_3)} + \sqrt{m(D_3)} \right) \end{aligned}$$

de aquí que

$$\|u_h - u\|_{\mathbf{H}^1(D)} \leq ch \left[\frac{\|u\|_{\mathbf{H}^2(D)}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\|u\|_{\mathbf{H}^2(D)}}{2} \right)^2 + \|u\|_{\mathbf{H}^2(D)} \left(\|\Delta u\|_{\mathbf{L}^2(D_3)} + \sqrt{m(D_3)} \right)} \right]$$

con c independiente de h y que sólo depende de u y D_3 . ■

Como la bilineal involucrada en la IVE es no simétrica ha de usarse el siguiente esquema iterativo para su aproximación:

- (i) Escogemos $u_h^0 \in \mathbf{V}_h$
- (ii) Conocido u_h^k , calculamos u_h^{k+1} , por:

$$(4.11) \quad u_h^{k+1} = J_\lambda^{\partial j} (u_h^k + \lambda (l - A(u_h^k)))$$

para λ adecuado.

Donde $(Au_h, v_h)_{\mathbf{V}_h} = a(u_h, v_h)$,

$$(l, v_h)_{\mathbf{V}_h} = L(v_h).$$

Sabemos por la observación (2.3.26) que u_h^{k+1} resuelve la siguiente inecuación variacional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u_h^{k+1} \in \mathbf{V}_h: \\ (u_h^{k+1}, v_h - u_h^{k+1})_{\mathbf{V}_h} + \lambda m(v_h) - \lambda m(u_h^{k+1}) \geq (u_h^k, v_h - u_h^{k+1})_{\mathbf{V}_h} + \lambda L(v_h - u_h^{k+1}) \\ \quad - \lambda a(u_h^k, v_h - u_h^{k+1}) \quad \forall v_h \in \mathbf{V}_h \end{array} \right.$$

Ya que la bilineal involucrada en esta IVE es simétrica podemos usar el algoritmo (2.28)–(2.29).

Identificamos $J_0(v_h) = \frac{1}{2}(v_h, v_h)_{\mathbf{V}_h} - (u_h^k, v_h)_{\mathbf{V}_h} - \lambda L(v_h) + \lambda a(u_h^k, v_h)$, de modo que se trata el problema de minimización

$$J_0(u_h^{k+1}) + \lambda m(u_h^{k+1}) = \min_{v_h \in \mathbf{V}_h} \{J_0(v_h) + \lambda m(v_h)\}$$

que da lugar al lagrangiano:

$$\mathcal{L}(v_h, q_h) = J_0(v_h) + \lambda (q_h, \Phi(v_h))_{\mathbf{W}_h} - \lambda m^*(q_h) \quad \forall v_h \in \mathbf{V}_h, \forall q_h \in \mathbf{W}_h$$

y al siguiente esquema para aproximar el punto de silla (u_h^{k+1}, q_h^{k+1}) de \mathcal{L} :

- (i) Empezamos con $q_h^0 \in \mathbf{W}_h$
- (ii) Conocido q_h^i , escogemos $v_h^i \in \mathbf{V}_h$ de tal manera que

$$(4.12) \quad J_0(v_h^i) + \lambda (q_h^i, \Phi(v_h^i))_{\mathbf{W}_h} = \min_{v_h \in \mathbf{V}_h} \left\{ J_0(v_h) + \lambda (q_h^i, \Phi(v_h))_{\mathbf{W}_h} \right\}$$

- (iii) Luego escogemos $q_h^{i+1} \in \mathbf{W}_h$ de la siguiente forma:

$$(4.13) \quad q_h^{i+1} = J_\rho^{\partial(j^*)}(q_h^i + \rho \Phi(v_h^{i+1}))$$

para $\rho > 0$ adecuado.

En nuestro caso $J_\rho^{\partial(j^*)}(q_h) = \text{Pr}_{K_h^*}(q_h - \rho f)$ donde

$$K_h^* = \left\{ q_h \in \mathbf{W}_h : -1 \leq q_h(p) \leq 0, \forall p \in \sum_h^{D_3} \right\}$$

Teniendo en cuenta la expresión para $J_0(v_h)$ con respecto a los valores nodales de v_h y u_h^k :

$$J_0(v_h) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^t [\mathbf{M}] \mathbf{v} - \mathbf{v}^t [\mathbf{M}] \mathbf{u}^k - \lambda \mathbf{v}^t [\mathbf{F}] + \lambda \mathbf{v}^t [\mathbf{K}] \mathbf{u}^k$$

para $[\mathbf{K}]_{ij} = a(b_j, b_i)$

$$[\mathbf{M}]_{ij} = (b_j, b_i)_{\mathbf{V}_h}$$

$$[\mathbf{F}]_i = L(b_i)$$

$$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$$

y respectivamente para $(q_h, \Phi(v_h))_{\mathbf{W}_h}$:

$$(q_h, \Phi(v_h))_{\mathbf{W}_h} = \mathbf{v}^t [\mathbf{L}] \mathbf{q}$$

$$\text{donde } [\mathbf{L}]_{ij} = \begin{cases} (c_j, c_i)_{\mathbf{w}_h} & : \text{ si } i \text{ es tal que } p_{r(i)} \notin \overline{D_3} \cap \Gamma_0 \\ 0 & : \text{ en otro caso} \end{cases}$$

con $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_M) \in \mathbb{R}^M$ y $r(i)$ que relaciona la numeración en $\sum_h^{D_3}$ con la numeración en \sum_h de modo único.

Entonces podemos considerar que los valores nodales de v_h^{k+1} resolverán el problema

$$\min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{v}^t [\mathbf{M}] \mathbf{v} - \mathbf{v}^t [\mathbf{M}] \mathbf{u}^n - \lambda \mathbf{v}^t [\mathbf{F}] + \lambda \mathbf{v}^t [\mathbf{K}] \mathbf{u}^n + \lambda \mathbf{v}^t [\mathbf{L}] \mathbf{q} \right\}$$

Así tenemos que \mathbf{v}^i es solución de $[\mathbf{M}] \mathbf{v} - [\mathbf{M}] \mathbf{u}^k - \lambda [\mathbf{F}] + \lambda [\mathbf{K}] \mathbf{u}^k + \lambda [\mathbf{L}] \mathbf{q}^i = 0$, es decir:

$$(4.14) \quad [\mathbf{M}] \mathbf{v}^i = [\mathbf{M}] \mathbf{u}^k + \lambda [\mathbf{F}] - \lambda [\mathbf{K}] \mathbf{u}^k - \lambda [\mathbf{L}] \mathbf{q}^i$$

Con respecto a \mathbf{q}^{i+1} establecemos que

$$(4.15) \quad \mathbf{q}^{i+1} = \text{Pr}_{\widehat{K}_h^*} (\mathbf{q}^i + \rho (\mathbf{v}^i - \mathbf{f}))$$

para $\rho > 0$ adecuado y

$$\widehat{K}_h^* = \{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^M : -1 \leq q_i \leq 0, \forall i \in \{1, M\} \}$$

4.3.4 Esquema de solución para el problema discreto

En la implementación del método se consideran sólo las operaciones sobre los valores nodales, es decir se trabaja con vectores en \mathbb{R}^N y \mathbb{R}^M

| | |
|--|--|
| Datos de entrada: $D \subset \mathbb{R}^2, \mathcal{T}_h(D), f \in L^2(D), g \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma), tol$ | |
| $\mathbf{q}^0 \in \mathbb{R}^{N+M}, nmax, kmax, imax$ | |
| Obtención de $[\mathbf{K}], [\mathbf{M}], [\mathbf{F}], [\mathbf{L}]$ | |
| $[\mathbf{K}]_{ij} = a(b_j, b_i)$ (no simétrica) $[\mathbf{M}]_{ij} = (b_j, b_i)_{\mathbf{V}_h}$ $[\mathbf{F}]_i = L(b_i)$ $[\mathbf{L}]_{ij} = \begin{cases} (c_j, c_i)_{\mathbf{W}_h} & : \text{si } i \text{ es tal que } p_{r(i)} \notin \overline{D_3} \cap \Gamma_0 \\ 0 & : \text{en otro caso} \end{cases}$ | |
| Obtención de la solución inicial \mathbf{U}^0 | |
| $\mathbf{U}^0 = [\mathbf{K}]^{-1} [\mathbf{F}]$ | |
| Para $n = 0, \dots, nmax$ hacemos | |
| (4.16) | $\mathbf{f} = conv[\gamma_{03} \mathbf{U}^n]$ |
| | $\mathbf{u}^0 = \mathbf{U}^n$ |
| | Para $k = 0, \dots, kmax$ hacemos |
| | Para $i = 0, \dots, imax$ hacemos |
| | $\mathbf{v}^i = \mathbf{u}^k + \lambda [\mathbf{M}]^{-1} ([\mathbf{F}] - [\mathbf{K}] \mathbf{u}^k - [\mathbf{L}] \mathbf{q}^i)$ |
| | $\mathbf{q}^{i+1} = \text{Pr}_{\widehat{K}_h^*}(\mathbf{q}^i + \rho(\mathbf{v}^i - \mathbf{f}))$ |
| | Si $\ \mathbf{v}^i - \mathbf{v}^{i-1}\ < tol$ |
| | entonces salir |
| | $\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{v}^i$ |
| | $\mathbf{q}^0 = \mathbf{q}^{i+1}$ |
| | Si $\ \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\ < tol$ |
| | entonces salir |
| | $\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{u}^{k+1}$ |
| | Si $\ \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n\ < tol$ |
| entonces salir | |
| Salida: $\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{q}^{n+1}$ | |

4.4 Implementación y resultados numéricos

4.4.1 Problema del dique rectangular

Como primer paso en la discretización, representamos el medio poroso por medio una geometría rectangular $D =]0, \frac{2}{3}[\times]0, 1[$, fijamos las alturas de los depósitos de fluido

en $y_1 = 1$,

$$y_2 = \frac{1}{6}$$

La Figura 4.1 muestra la malla estándar utilizada, uniformemente espaciada donde la ubicación de los nodos es tal que

$$(x_i, y_j) = (h(i-1), h(j-1)), i \in \{1, \dots, n+1\}, j \in \{1, \dots, m+1\}$$

para $h, m, n > 0$ que satisfacen

$$hn = \frac{2}{3},$$

$$hm = 1$$

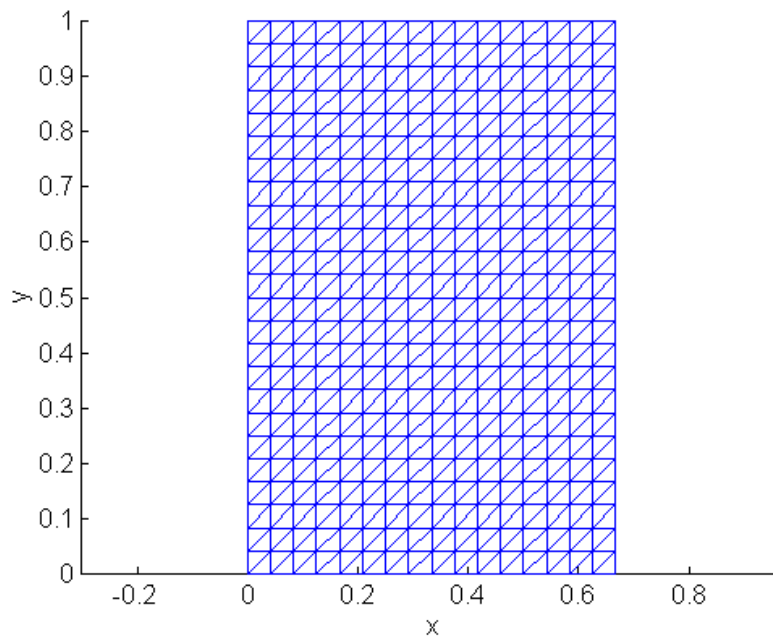


Figura 4.1: Discretización del medio poroso con 768 elementos

La Tabla 4.1 muestra los valores numéricos de los parámetros de la discretización del dominio para distintas triangulaciones. De igual manera la Figura 4.2 muestra el patrón

| Triangulación | $\mathcal{T}_{h_1}(D)$ | $\mathcal{T}_{h_2}(D)$ | $\mathcal{T}_{h_3}(D)$ | $\mathcal{T}_{h_4}(D)$ | $\mathcal{T}_{h_5}(D)$ |
|--|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| Número de vértices | 35 | 117 | 247 | 425 | 651 |
| $\mathbf{N} = \text{card} \left(\sum_h \right)$ | 25 | 99 | 221 | 391 | 609 |
| $h_i, i \in \{1, \dots, 5\}$ | 1/6 | 1/12 | 1/18 | 1/24 | 1/30 |
| $m_i, i \in \{1, \dots, 5\}$ | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 |
| $n_i, i \in \{1, \dots, 5\}$ | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 |

Tabla 4.1: Parámetros utilizados para describir la geometría del dique considerando 5 diferentes triangulaciones

de dispersión de los valores no nulos en la matriz $[\mathbf{K}]$, lo que no permite aprovechar las características de las matrices sparse (ver [7]) para la resolución del sistema de ecuaciones lineales en (4.7).

A continuación hacemos uso del algoritmo descrito en el diagrama (4.7), para lo cual escogemos $\mathbf{q}^0 = -1$ y como criterio para el término de las iteraciones la condición:

$$(4.17) \quad \sum_{i=1}^{\mathbf{N}} |u_i^{n+1} - u_i^n| < 10^{-3}$$

Para la estimación de λ consideramos lo siguiente: las funciones propias de $-\Delta$ en $\mathbf{H}_0^1(D)$ están dadas por

$$u_{nm}(x, y) = 2 \sin\left(\frac{2}{3}m\pi x\right) \sin(n\pi y) \quad n \geq 1, m \geq 1$$

y los valores propios correspondientes

$$\lambda_{nm} = \pi^2 \left[\frac{9}{4}m^2 + n^2 \right]$$

se puede probar (ver [2]) que $\lambda_0 = \min \{ \lambda_{nm} \}$ satisface:

$$\int_D |v|^2 \leq \frac{1}{\lambda_0} \int_D |\nabla v|^2 \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(D)$$

es decir la constante c en (2.33) es $\sqrt{\frac{1}{\lambda_0}}$. Como $\lambda_0 = \frac{13}{4}\pi^2$, y teniendo en cuenta que $\alpha = 1$ (constante de V-elasticidad) tenemos la siguientes estimación

$$(4.18) \quad \lambda < \frac{26}{4}\pi^2 \simeq 64.152$$

La Tabla 4.2 muestra la influencia de h en la convergencia de (2.28)–(2.29) y la Figura 4.3 la influencia de λ en la velocidad de convergencia para $h = \frac{1}{24}$. Además se observa

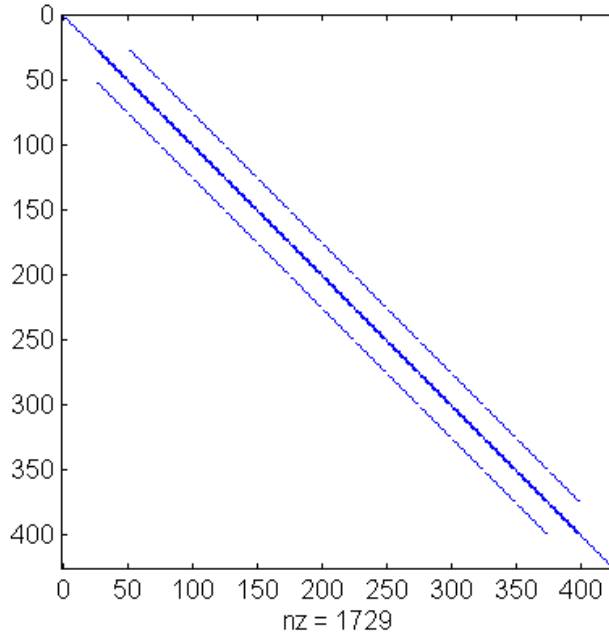


Figura 4.2: Patrón de dispersión de los elementos no nulos de la matriz $[K]$ asociada a la forma bilineal.

que la estimación (4.18) es restrictiva en cuanto a los valores posibles para λ , pues se observa la convergencia para valores fuera del intervalo estimado, es más el valor óptimo de λ (aquel que requiere menos iteraciones) está definitivamente fuera de tal intervalo.

Notamos que la estimación $\sum_{i=1}^N |u_i^{n+1} - u_i^n|$ en cada iteración obedece el comportamiento descrito en la Figura 4.4.

Para el cálculo de la presión utilizamos (3.11) para expresar que

$$p(x, y) = -\frac{\partial w}{\partial y}(x, y)$$

y para el cálculo de la derivada utilizamos una aproximación de Taylor de segundo orden utilizando los valores de p en los puntos interiores de la malla es decir

$$p(x_i, y_j) \simeq \frac{w(x_i, y_{j+1}) - w(x_i, y_{j-1}))}{y_{j+1} - y_{j-1}}$$

En la Figura 4.6 se muestran las curvas de nivel para la presión al interior del dique, utilizando una malla con $h = \frac{1}{24}$, se puede observar claramente el fluido abandona el medio poroso a un altura mayor que 0.5. La Figura 4.7 muestra el campo de velocidades y la frontera libre.

Si recordamos que la solución de (3.19) satisface

$$\Delta w = 1 + q \quad \text{c.p.d. en } D$$

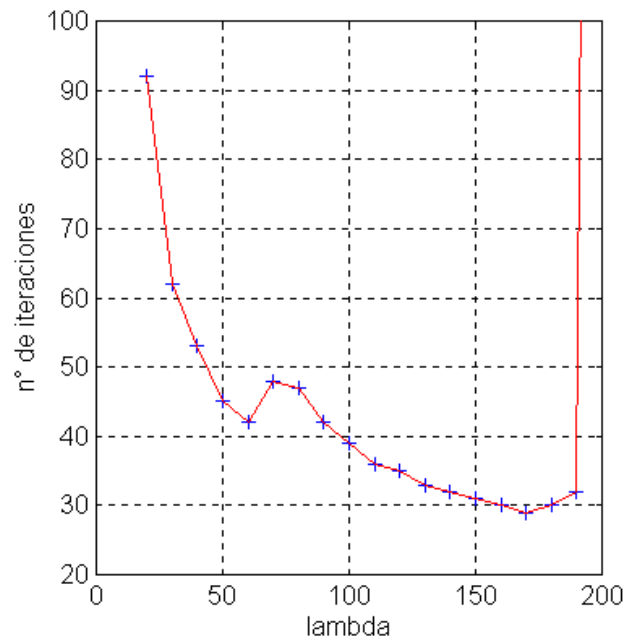


Figura 4.3: Influencia del parámetro λ en la velocidad de la convergencia.

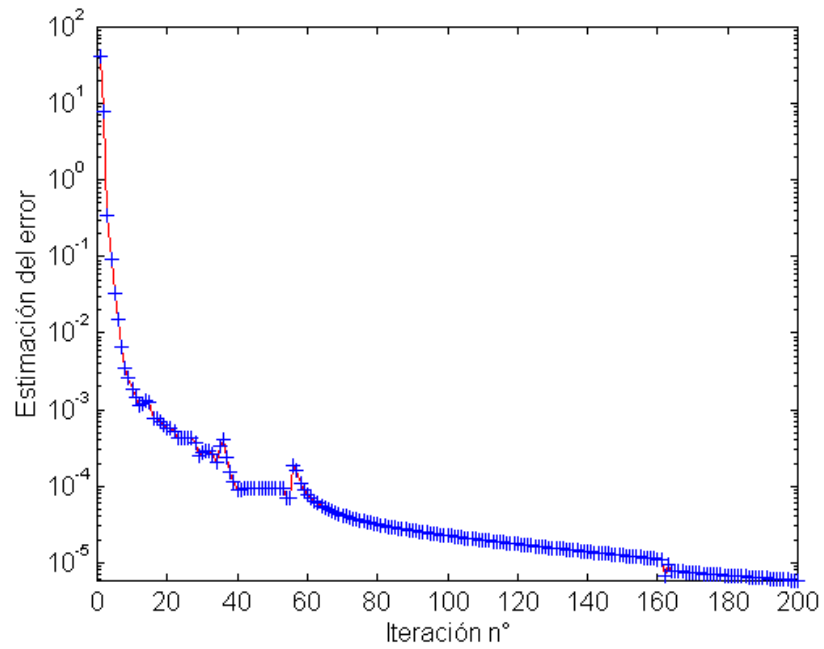


Figura 4.4: Comportamiento de la estimación del error en cada iteración. (Escala log-lineal).

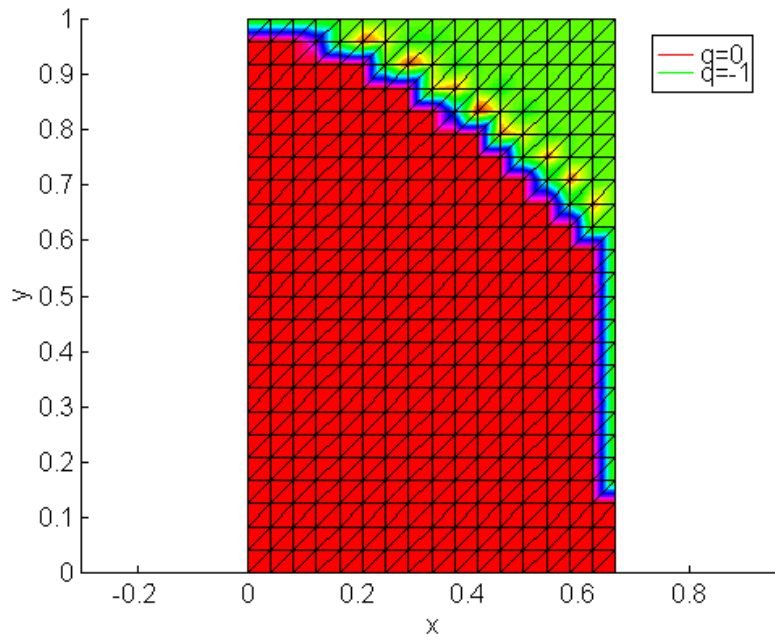


Figura 4.5: Zona húmeda y zona seca respectivamente, la frontera que las separa es la frontera libre.

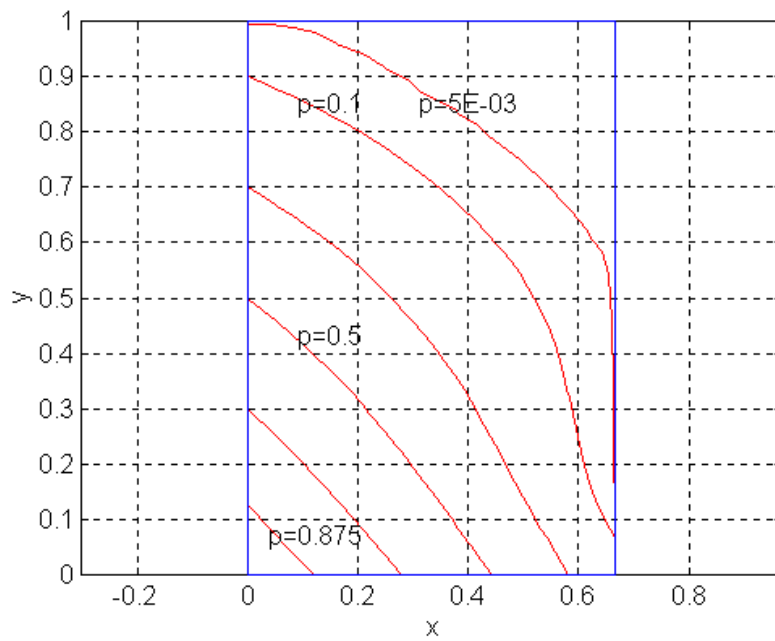


Figura 4.6: Curvas de nivel para la presión al interior del dique.

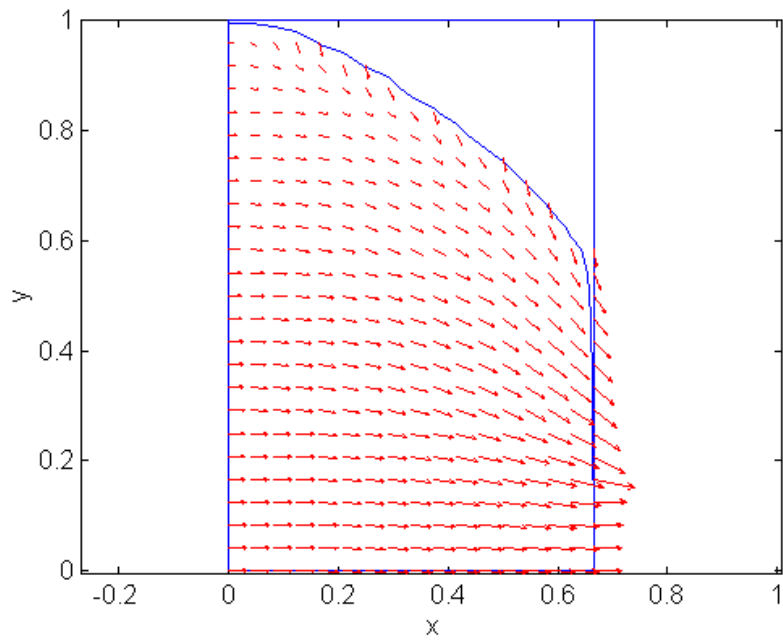


Figura 4.7: Campo de velocidades

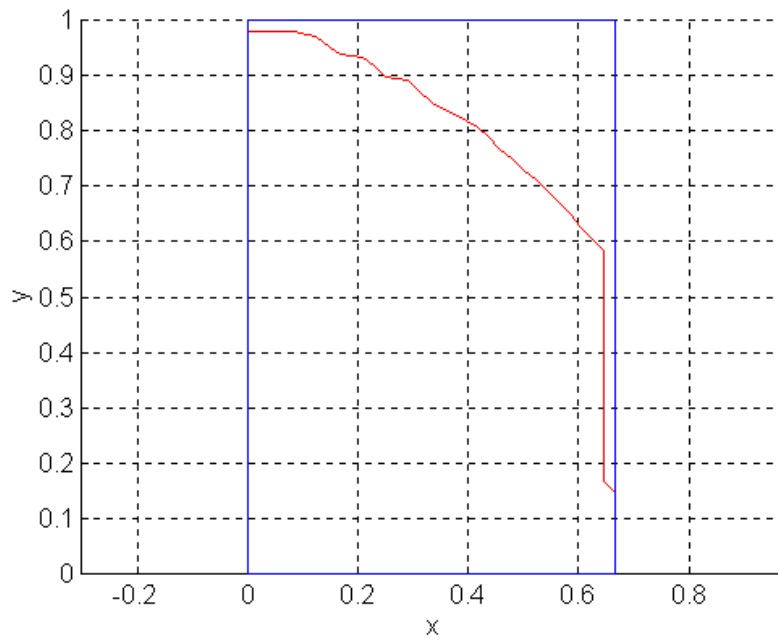


Figura 4.8: Aproximación de la frontera libre.

| | | λ | | | | | | | | | | | | |
|-----|-------------|-----------|----|----|-----|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----|-----------|-----|-----------|
| | | 20 | 40 | 80 | 120 | 160 | 170 | 180 | 190 | 200 | 210 | 220 | 250 | 260 |
| h | 1/4 | 23 | 18 | 15 | 12 | 10 | 9 | 10 | 12 | 13 | 15 | 18 | 48 | $+\infty$ |
| | 1/8 | 44 | 23 | 24 | 19 | 15 | 15 | 14 | 16 | 19 | 24 | $+\infty$ | | |
| | 1/12 | 71 | 48 | 46 | 40 | 31 | 29 | 27 | 26 | $+\infty$ | | | | |
| | 1/16 | 92 | 53 | 47 | 35 | 30 | 29 | 30 | 32 | $+\infty$ | | | | |
| | 1/20 | 88 | 66 | 41 | 53 | 39 | 37 | 36 | $+\infty$ | | | | | |

Tabla 4.2: Influencia del parámetro h en la convergencia

entonces $q = 0$ en $\Omega = \{p > 0\}$

$$q = -1 \text{ en } D \setminus \bar{\Omega}$$

La Figura 4.5 muestra la división del dominio D en dos subregiones caracterizadas por los valores que q toma en ellas. Así podemos intentar aproximar la frontera libre por los puntos (x_i, y_j) donde $q = -0.5$, esta curva es mostrada en Figura 4.8 y es comparada con los valores de una solución analítica en la Tabla 4.3.

Finalmente presentamos en la Figura 4.9 la líneas de flujo de $\bar{\Phi}$, que representarán las trayectorias de las partículas del fluido.

4.4.2 Problema del dique de base plana

Como primer paso en la discretización, representamos el medio poroso por medio la geometría mostrada en la Figura 4.10, y fijamos las alturas de los depósitos de fluido en

$$y_1 = 3,$$

$$y_2 = 2$$

Es importante el examen de las matrices provenientes de la discretización espacial en este caso llamadas $[M]$ y $[K]$. Así en la Figura 4.11 vemos el patrón de dispersión de los elementos no nulos de $[M]$, los mismos que pueden ser reordenados mediante el algoritmo de Cuthill-Mckee (ver [7]). La matriz reordenada se puede apreciar en la Figura 4.12, lográndose una reducción del ancho de banda de 454 a 34.

Emplearemos el esquema mostrado en (4.16) para lo cual primero aproximamos mediante el MEF la solución U^0 del **problema 3** para g dada por (3.82) y $F = \chi_{D_1} + \chi_{D_2}$. Además escogemos $q^0 = -1$ y como criterio para el término de las iteraciones la

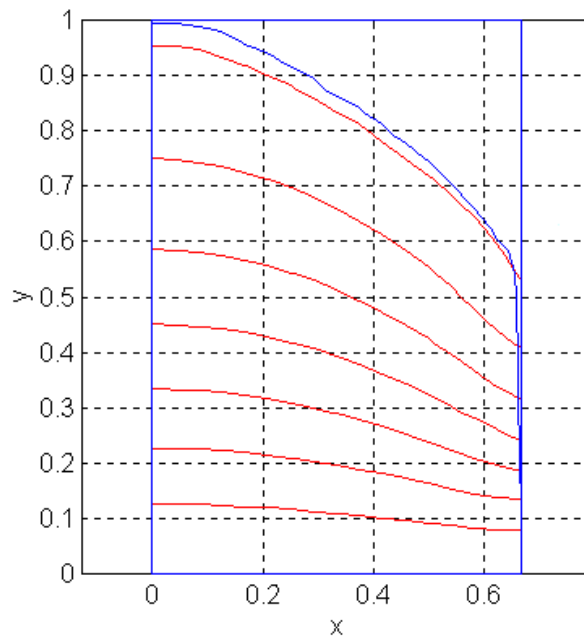


Figura 4.9: Líneas de flujo del campo de velocidades.

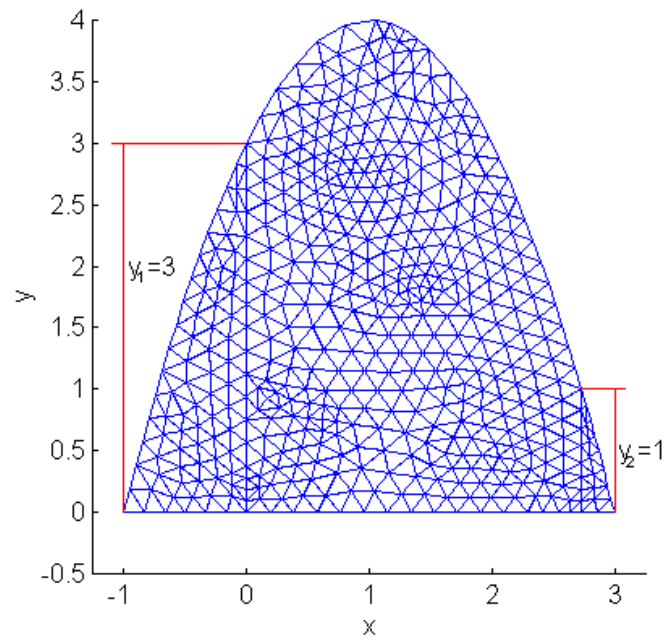


Figura 4.10: Discretización del dominio utilizando 924 elementos triangulares

$h = \frac{1}{24}$
 $i = 24x$

| | Solución analítica | Solución numérica |
|----|---------------------------|--------------------------|
| 0 | 1 | 1,0000 |
| 1 | 0,9893 | 0,9792 |
| 2 | 0,9754 | 0,9792 |
| 3 | 0,9593 | 0,9721 |
| 4 | 0,9412 | 0,9377 |
| 5 | 0,9214 | 0,9329 |
| 6 | 0,8998 | 0,8961 |
| 7 | 0,8765 | 0,8901 |
| 8 | 0,8512 | 0,8511 |
| 9 | 0,8240 | 0,8295 |
| 10 | 0,7946 | 0,8069 |
| 11 | 0,7628 | 0,7666 |
| 12 | 0,7281 | 0,7299 |
| 13 | 0,6899 | 0,6932 |
| 14 | 0,6472 | 0,6516 |
| 15 | 0,5975 | 0,6039 |
| 16 | 0,5294 | punto de separación |

Tabla 4.3: Ordenadas de la frontera libre

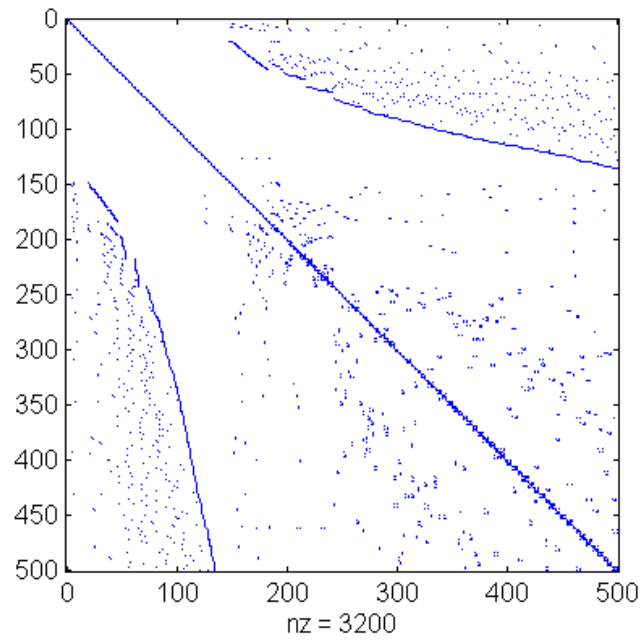


Figura 4.11: Patrón de dispersión de la matriz $[M]$ asociada al producto interno en V .

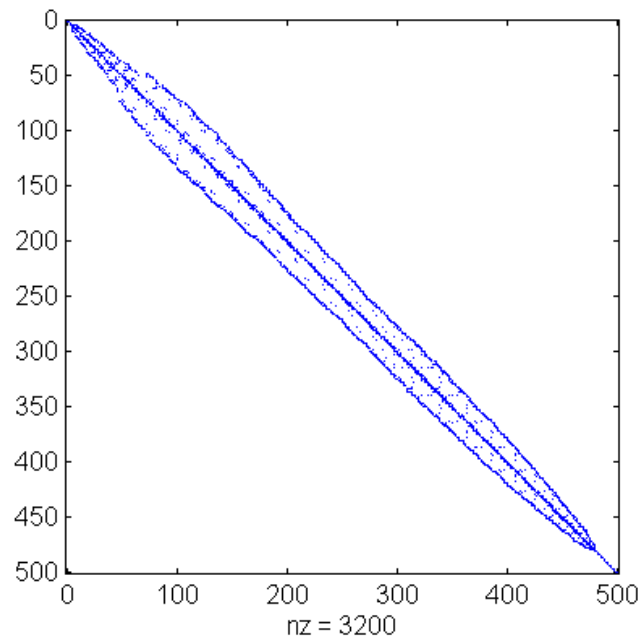


Figura 4.12: Patrón de dispersión de la matriz $[M]$, tratada con el reordenamiento de Cuthill-McKee

condición:

$$(4.19) \quad \sum_{i=1}^N |u_i^{n+1} - u_i^n| < 10^{-3}$$

con $nmax = kmax = imax = 50$, ρ y λ se escogen como

$$\lambda = 40$$

$$\rho = 1000$$

El resultado de las iteraciones se muestra en la Figura 4.13. Además la frontera libre puede encontrarse con la información proporcionada por q^n (Figura 4.14) como lo muestra la Figura 4.15.

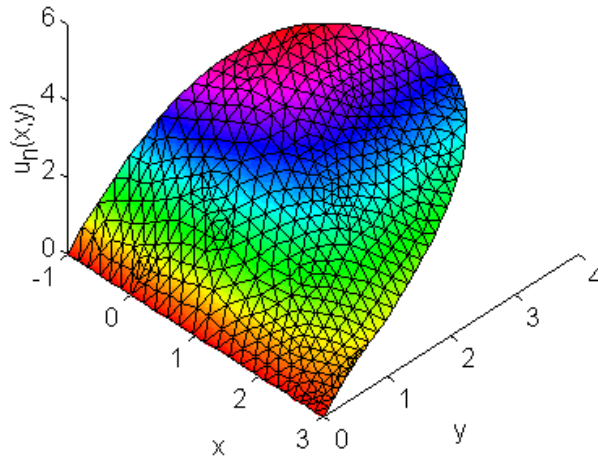


Figura 4.13: Solución aproximada del problema quasivariacional.

Podemos utilizar la expresión dada en la observación 3.3.6 para obtener el comportamiento de la presión al interior del dique, como lo muestra la Figura 4.16.

De igual manera utilizando la relación (3.34) obtenemos el campo de velocidades generado por la presión, el mismo que es mostrado en Figura 4.17 junto con las líneas de flujo.

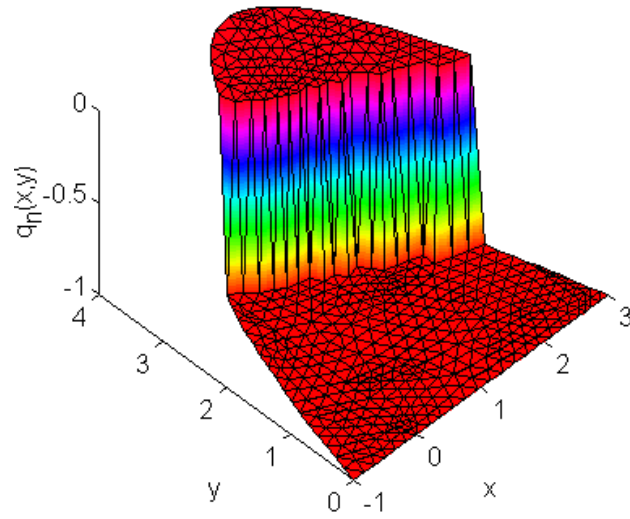


Figura 4.14: Representación aproximada de q^n asociado a la solución del problema quasivariacional

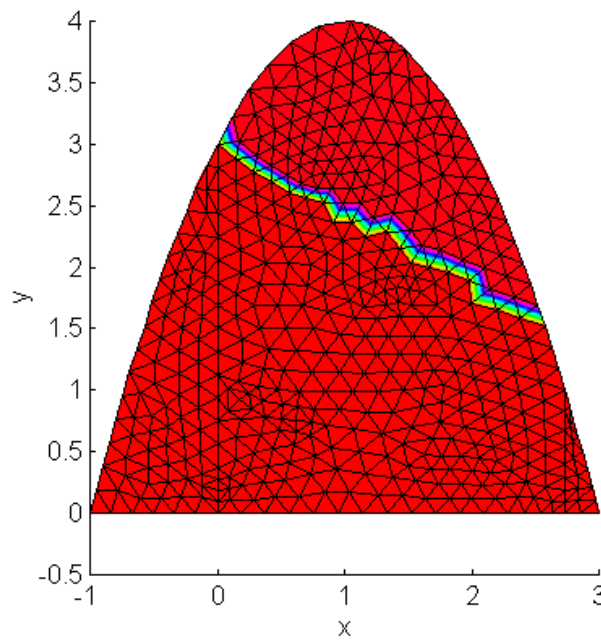


Figura 4.15: Aproximación de la frontera libre y la zona de resume

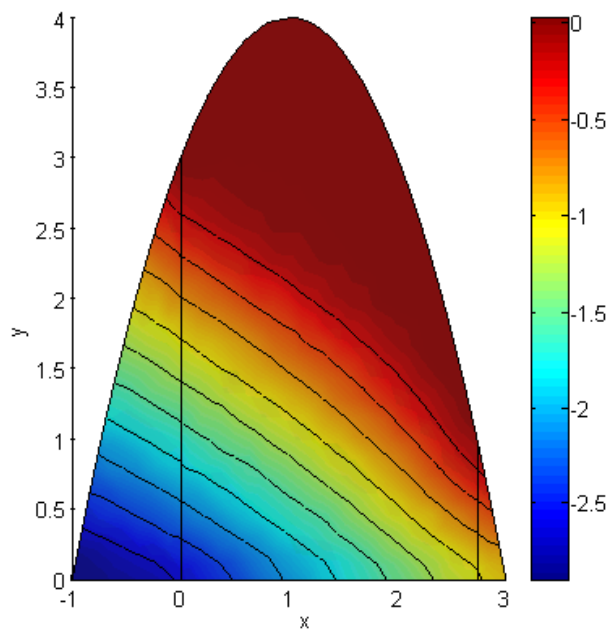


Figura 4.16: Curvas de nivel para la presión al interior del dique de sección transversal generalizada.

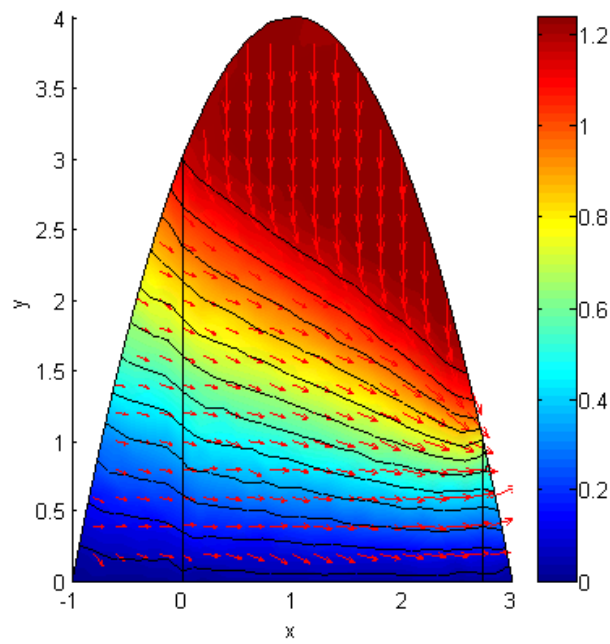


Figura 4.17: Campo de velocidades asociado a la presión al interior del dique.

4.5 Conclusiones

- El uso de la dualidad para el caso simétrico ofrece un tratamiento que puede sistematizarse y que es flexible en cuanto a la elección de los espacios funcionales requeridos. La elección de estos espacios depende tanto de la naturaleza del problema como del criterio del investigador, de modo que se haga más sencilla la formulación de su posterior discretización. Usualmente se han elegido los espacios con menos restricciones posibles y dotados de un producto interno lo más simple posible.
- Para el tratamiento de la no-diferenciabilidad y no-linealidad de las funcionales involucradas en ambos tipos de IVE, se utiliza el resolvente Yosida y la teoría de dualidad.
- Al utilizar el resolvente Yosida en el caso no simétrico, se presentan algunas dificultades en cuanto a la regularidad de las funcionales consideradas, por lo que se procede numéricamente para obtener una expresión explícita y se trata como una IVE mas.
- La utilización del Método de Elementos Finitos, es importante por que nos permite la construcción de los espacios de aproximación en dimensión finita, para luego calcular la solución aproximada de los problemas variacional y Quasivariacional.
- Para la estimación del error de los métodos de aproximación, se propone un esquema numérico particular para cada problema, así también se realiza el análisis de convergencia del método iterativo propuesto con el parámetro λ , que necesita aproximarse de manera especial en cada problema.
- Los esquemas iterativos propuestos para la forma bilineal simétrica y no simétrica, se adaptan con facilidad en el primer caso. Para el caso no simétrico se realiza un preconditionamiento de la matriz de coeficientes, antes de resolver el sistema, ilustrándose de modo general, como se debe proceder para su resolución numérica e implementación computacional.
- Es necesario comentar que los métodos iterativos propuestos necesitan una buena capacidad de memoria del computador, en comparación a los otros métodos mas usuales, como por ejemplo el de relajación o de proyección, pero esto se compensa frente a las ventajas que ofrecen, de la posibilidad de aplicar al tratamiento de las funcionales diferenciables y no diferenciables, inecuaciones variacionales con formas bilineales simétricas y no simétricas, además de obtener de forma simultanea el punto de silla (u, q) , donde usualmente el operador q tiene una relación importante con u , como por ejemplo cuando $q = \Delta u - 1$ en el caso del problema del dique rectangular, lo que permite analizar el comportamiento del Laplaciano de u sin cálculos previos, y que por su baja regularidad sería difícil de tratar en forma independiente.

- Básicamente las limitaciones de este tipo de tratamiento se centran en la dificultad de encontrar una formulación lagrangiana apropiada y de definir correctamente los pasos del algoritmo, pudiendo esto representar alguna dificultad en la práctica.
- Por último debo mencionar que la implementación computacional de los algoritmos se han desarrollado con una estructura de programación fácilmente modificable, en el caso que se requiera para futuros problemas similares al tratado.

Apéndice A

Código fuente de los programas utilizados

Todos los programas fueron implementados utilizando **MATLAB**[®]

A.1 Problema variacional del dique

- Programa principal: `diquer.m`
- Subprogramas:
 - `gdique.m`
 - `geomrect.m`
 - `mallam.m`
 - `L2P1.m`
 - `KP1S.m`
 - `FP1S.m`
 - `NMODIF_F.m`
 - `NMODIF_K.m`

diquer.m

```
clear all;
clc;
global lambda
% dominio D: rectangulo (x1,y1) (x1+a,y1+b)
global x1; % origen del rectangulo (x1,y1)
global y1;
global a; % ancho en el eje x
global b; % alto en el eje x
% altura de los depósitos de fluido h1>=h2
global h1;
global h2;
% elementos de la malla
global m; % numero de elementos en la direccion x
global n; % numero de elementos en la direccion y
global nel; % numero total de elementos
global nnod; % numero de total de nodos
% condiciones de frontera
global f_d;
global sf;
% parámetros de iteracion
max_iter =200;
tol =1E-04;
```

```

% Inicializacion de los elementos de la malla
x1 = 0;
y1 = 0;
a = 2/3;
b = 1;
h1 = 1;
h2 = 1/6;
m = 16;
n = 24;
f_d = 'feval("gdique",[x;y])';
sf = geomrect;
for tam=[8];
    m = tam*4;
    n = tam*6;
    fprintf(['\n h=', num2str(a/m), '\n']);
%-----
% se inicializa los elementos de la malla
%-----
    [p,e,t]=malla(x1,y1,a,b,m,n,sf);
    nnod = size(p,2)
    nel = size(t,2)
% fprintf(['dim(Vh)=', num2str((n-1)*(m+1))]);
%-----
% se inicializa las matrices [K],[F],[L]
%-----
    L = sparse(L2P1(p,t));
    K = KP1S(p,t);
    F = FP1S('baricentrico',p,e,t,sf,'-1','0');
    F = NMODIF_F('continuo',K,F,p,f_d);
    K = sparse(NMODIF_K('continuo',K,p));
%-----
% se inicializa lambda con un valor teórico óptimo
%-----
    lambda=2*pi^2*(b^2+a^2)/(a^2*b^2);
    for k=1:size(lambda,2),
        tic,
        q_n = -ones([nnod,1]);
        u_n_1 = zeros([nnod,1]);
        for s=1:max_iter,
            u_n = K\(F-L*q_n);
            q_n = min(q_n+lambda(k)*u_n,0);
            err_inf(s) = norm(u_n-u_n_1,inf);
            err_1(s) = norm(u_n-u_n_1,1);
            if (err_1(s)<tol) |( (s>15)&(err_1(s)>1E-01) ),
                break,
            end;
            u_n_1=u_n;
        end;
        tiempo=toc;
        fprintf(['Iteración terminada para s=', num2str(s), ' con ...
                lambda=', num2str(lambda(k)), ' con un error de ', ...
                num2str(err_inf(s)), ' y en ', num2str(tiempo), 's \n']),

```

```

        if ( (s>15)&(err_inf(s)>1E-01) ), s=max_iter; iter(k)=s;

            break,
        end;
        iter(k)=s;
    end;
    figure,plot([1:s],err_1(1:s));title('error norma 1');
    figure,plot([1:s],err_inf(1:s));title('error norma inf');
    figure,
    grid on,
    xlabel('lambda'),
    ylabel('n° de iteraciones'),hold on;
    plot(lambda,[iter(1:k),max_iter*ones([1,size(lambda,2)-k])],...
        'r',lambda,[iter(1:k),200*ones([1,size(lambda,2)-k])],'+b');
    title(['h=' ,num2str(a/m)]);
end;

```

gdique.m

```

function z=gdique(x),
% function z=g(x),
% x es un vector de 2xn
global h1 h2 x1 y1 a;
n=size(x,2);
z=zeros(1,n);
for i=1:n,
    if x(1,i)==x1,
        z(i) = 0.5*(h1-x(2,i))^2;
    elseif x(1,i)==x1+a,
        if x(2,i)<=y1+h2,
            z(i) = 0.5*(h2-x(2,i))^2;
        else
            z(i) = 0;
        end;
    elseif x(2,i)==y1,
        z(i) = 0.5*h1^2-0.5*x(1,i)*(h1^2-h2^2)/a;
    elseif x(2,i)==y1+h1,
        z(i) = 0;
    end;
end;
end;

```

geomrect.m

```

function [bs,t]=geomrect(accion,x,y,hx,hy,segm,p1,p2),
% [bs,t]=geomrect(accion,x,y,hx,hy,segm,p1,p2),
% bs=geomrect('crear'),
% P=geomrect('dibujar',x,y,hx,hy,color),
% P=geomrect('segmento',x,y,hx,hy,segm),
% P=geomrect('localizar',x,y,hx,hy,sf,p1,p2),
bs = 0;
h=0.1;

```

```

if nargin<1,
    accion='crear';
end;
if strcmp(accion,'crear'),
    if nargin==0,
        x=0; y=0; hx=1; hy=1;
    end;
    S = [ x x+hx x+hx x x
          y y y+hy y+hy y];
    n_seg = size(S,2)-1;
    t = n_seg;
    bs=ones([5,n_seg]);
% 4 lados es decir 4 columnas o 4 segmentos
    bs(1:2,:) = [0 hx hx+hy 2*hx+hy;
                 hx hx+hy 2*hx+hy 2*(hx+hy)];
% introducimos la parametrizacion para cada segmento
    bs(4,:) = zeros([1,n_seg]);
% fila 1 : valor del parámetro inicial.
% fila 2 : valor del parámetro final.
% fila 3 : etiqueta de la region a mano izquierda (con respecto
%          a la dirección dada por la fila 1 y 2).
% fila 4 : etiqueta de la region a mano derecha.
% fila 5 : tipo de frontera 0==interior, 1==dirichlet, -1==newmann
    return;
else
    S = [ x x+hx x+hx x x
          y y y+hy y+hy y];
    n_seg = size(S,2)-1;
    t = n_seg;
    if strcmp(accion,'dibujar'),
        i=1;
        X=geomrect('segmento',x,y,hx,hy,i);
        for i=2:n_seg,
            X=[X(:,1:size(X,2)-1),geomrect('segmento',x,y,hx,hy,i)];
        end;
        if nargin==5, segm='-'; end;
        plot(X(1,:),X(2,:),segm);
        bs=X;
        return;
    elseif strcmp(accion,'segmento'),
% se consideran también los extremos;
        if segm<=n_seg,
            bs = lineprmt(S(:,segm),S(:,segm+1),segm-1,segm,h);
        else
            fprintf(['Error: el rectangulo solo tiene ',num2str(n_seg),...
                    ' segmentos']);
            return;
        end;
        return;
    elseif strcmp(accion,'localizar'),
% usamos una parametrizacion del rectangulo (x1,y1,x2,y2):
% la frontera dirichlet es cerrada, por tanto la frontera newmann

```

```

% sera "abierta".
% (x,y)=(x1+t*(x2-x1),y2), 0<=t<1
% (x,y)=(x2,y2+(t-1)*(y1-y2)), 1<=t<2
% (x,y)=(x2+(t-2)*(x2-x1),y1), 2<=t<3
% (x,y)=(x1,y1+(t-4)*(y2-y1)), 3<=t<4
%localizamos en que segmento está y a que parametro corresponde.
    sf=segm;
    k=size(p1,2);
    bs=zeros(1,k);
    t=zeros(1,k);
    for i=1:k,
%suponemos dirichlet
        if (abs(p2(i)-y)/hy<=0.05)&(p1(i)>=x)&(p1(i)<=x+hx),
            bs(i) = 1; t(i) = (p1(i)-x)/hx;
%si es newmann
            if ((p1(i)==x)|(p1(i)==x+hx))&(sf(1,bs(i))==-1),
                if (p1(i)==x)&(sf(1,4)==1), bs(i) = 4; end;
                if (p1(i)==x+hx)&(sf(1,2)==1), bs(i) = 2; end;
            end;
            elseif (abs(p1(i)-hx-x)/hx<=0.05)&(p2(i)>=y)&(p2(i)<=y+hy),

                bs(i) = 2; t(i) = 1 + (p2(i)-y)/hy;
%si es newmann
                if ((p2(i)==y)|(p2(i)==y+hy))&(sf(1,bs(i))==-1),
                    if (p2(i)==y)&(sf(1,1)==1), bs(i) = 1; end;
                    if (p2(i)==y+hy)&(sf(1,3)==1), bs(i) = 3; end;
                end;
                elseif (abs(p2(i)-y-hy)<=0.05)&(p1(i)>=x)&(p1(i)<=x+hx),

                    bs(i) = 3; t(i) = 2 + (x+hx-p1(i))/hx;
%si es newmann
                    if ((p1(i)==x)|(p1(i)==x+hx))&(sf(1,bs(i))==-1),
                        if (p1(i)==x)&(sf(1,4)==1), bs(i) = 4; end;
                        if (p1(i)==x+hx)&(sf(1,2)==1), bs(i) = 2; end;
                    end;
                    elseif (abs(p1(i)-x)/hx<=0.05)&(p2(i)>=y)&(p2(i)<=y+hy),

                        bs(i) = 4; t(i) = 3+(y+hy-p2(i))/hy;
%si es newmann
                        if ((p2(i)==y)|(p2(i)==y+hy))&(sf(1,bs(i))==-1),
                            if (p2(i)==y)&(sf(1,1)==1), bs(i) = 1; end;
                            if (p2(i)==y+hy)&(sf(1,3)==1), bs(i) = 3; end;
                        end;
                    end;
                end;
            return;
        end;
    end;
end;

```

mallam

```

function [p,e,t]=malla(x1,y1,a,b,m,n,sf),
% Uso [p,e,t]=malla(x1,y1,a,b,m,n,sf),
% malla.m inicializa una malla rectangular con extremos en (x1,y1),
% (x1+a,y1+b)
% m,n : divisiones en x e y,
% sf : segmentacion de la frontera del dominio
% calcula el numero de triangulos y vertices
nel = m*n*2;
nnod = (n+1)*(m+1);
% calcula el paso de la triangulacion segun x e y
deltax=a/m;
deltay=b/n;
t=zeros(3,nel);
p=zeros(3,nnod);
% calcula la numeracion de los vertices de los triangulos
for j=1:m,
    for i=1:n,
        t(1,i+2*(j-1)*n)=i+(j-1)*(n+1);
        t(2,i+2*(j-1)*n)=(n+1)+(j-1)*(n+1)+i+1;
        t(3,i+2*(j-1)*n)=i+(j-1)*(n+1)+1;
        t(1,i+(2*j-1)*n)=i+(j-1)*(n+1);
        t(2,i+(2*j-1)*n)=i+(j-1)*(n+1)+(n+1);
        t(3,i+(2*j-1)*n)=(n+1)+(j-1)*(n+1)+(i+1);
    end
end
% Se modifica la solucion de los vertices de los triángulos superior
% izquierdo e inferior derecho para evitar que tengan tres vertices
en
% la frontera del rectángulo.
% t(2,n)=2*n+1;
% t(1,2*n)=n+1;
% t(2,2*n*(m-1)+1)=(n+1)*m+1;
% t(1,(2*m-1)*n+1)=(n+1)*(m-1)+2;

% calcula coordenadas de los vertices
for j=1:m+1,
    for i=1:n+1,
        p(1:2,i+(j-1)*(n+1))=[x1+(j-1)*deltax;y1+(i-1)*deltay];
    end
end

% se construye el vector e
e = zeros(7,2*(m+n));
%En la matriz del borde e, la primera y segunda filas contienen índices
%del punto inicial y final,
%la tercer y cuarta filas contienen el valor inicial y final del
%parámetro, la quinta fila contiene el número de segmento de borde,
%la sexta y séptima fila contienen la numeración
%de los subdominios a mano izquierda y derecha respectivamente.
%p(1:2,i+(j-1)*(n+1))=[x1+(j-1)*deltax;y1+(i-1)*deltay];
% lado izquierdo
for i=1:n,
    e(1,i) = n-i+2;

```



```

    e(2,i) = n-i+1;
    e(3,i) = (i-1)*deltay;
    e(4,i) = i*deltay;
    e(5,i) = 4;
    e(6,i) = 1;
    e(7,i) = 0;
end;
% lado inferior
for j=1:m,
    e(1,n+j) = (j-1)*(n+1)+1 ;
    e(2,n+j) = j*(n+1)+1 ;
    e(3,n+j) = b+(j-1)*deltax;
    e(4,n+j) = b+j*deltax;
    e(5,n+j) = 1;
    e(6,n+j) = 1;
    e(7,n+j) = 0;
end;
% lado derecho
for i=1:n,
    e(1,n+m+i) = m*(n+1)+i;
    e(2,n+m+i) = m*(n+1)+i+1;
    e(3,n+m+i) = a+b+(i-1)*deltay;
    e(4,n+m+i) = a+b+i*deltay;
    e(5,n+m+i) = 2;
    e(6,n+m+i) = 1;
    e(7,n+m+i) = 0;
end;
% lado superior
for j=1:m,
    e(1,2*n+m+j) = (n+1)*(m-j+2) ;
    e(2,2*n+m+j) = (n+1)*(m-j+1) ;
    e(3,2*n+m+j) = 2*b+a+(j-1)*deltax;
    e(4,2*n+m+j) = 2*b+a +j*deltax;
    e(5,2*n+m+j) = 3;
    e(6,2*n+m+j) = 1;
    e(7,2*n+m+j) = 0;
end;
for i=1:nnod,
    if ( p(1,i) == x1), p(3,i) = sf(5,4);
    elseif ( p(1,i) == x1+a), p(3,i) = sf(5,2);
    elseif ( p(2,i) == y1), p(3,i) = sf(5,1);
    elseif ( p(2,i) == y1+b), p(3,i) = sf(5,3);
    end,
end;
end;

```

KP1S.m

```

function K=KP1S(p,t),
%function [K,KS]=KP1S(p,t),
% Uso : function K=KP1S(p,t),
% calcula la matriz asociada a  $[K]_{ij} = (1, \text{grad } u \cdot \text{grad } v)$ 
K = zeros(size(p,2));

```

```

% Calculo de la matriz K
%matriz elemental asociada a la parte simétrica ( 1,grad u.grav v
)
mell = zeros(3);
for k=1:size(t,2),
    a11=p(1,t(1,k)); a21=p(1,t(2,k));
    a31=p(1,t(3,k)); a12=p(2,t(1,k));
    a22=p(2,t(2,k)); a32=p(2,t(3,k));
    r=a21-a11;%x2-x1
    s=a31-a11;%x3-x1
    q=a22-a12;%y2-y1
    v=a32-a12;%y3-y1
    div = abs(q*s-r*v);
    x = (a11+a21+a31)/3;
    y = (a12+a22+a32)/3;
    mell(1,1) = ((q-v)^2+(s-r)^2)/(2*div);
    mell(1,2) = (v*(q-v)+s*(r-s))/(2*div);
    mell(1,3) = (q*(v-q)+r*(s-r))/(2*div);
    mell(2,2) = (v^2+s^2)/(2*div) ;
    mell(2,3) = (-q*v-s*r)/(2*div);
    mell(3,3) = (q^2+r^2)/(2*div) ;
    mell(2,1) = mell(1,2);
    mell(3,1) = mell(1,3);
    mell(3,2) = mell(2,3);
    for i=1:3,
        for j=1:3,
            K(t(i,k),t(j,k)) = K(t(i,k),t(j,k)) + mell(i,j);
        end%for
    end;%for
end;%for

```

FP1S.m

```

function F=FP1S(tipo,p,e,t,sf,f_fuente,f_n),
% Uso : function F=FP1S(tipo,p,e,t,sf,f_fuente_f_n),
% tipo : 'nodal' 'baricentrico' 'discreto'
% Calcula la contribucion del vector de cargas al sistema de acuaciones
% [F]j = (f_fuente,v)+(f_n,v)n

F=zeros(size(p,2),1);
% Calculo del vector F
for k=1:size(t,2), %elemento por elemento,

    a11=p(1,t(1,k)); a21=p(1,t(2,k));
    a31=p(1,t(3,k)); a12=p(2,t(1,k));
    a22=p(2,t(2,k)); a32=p(2,t(3,k));
    r=a21-a11;%x2-x1
    s=a31-a11;%x3-x1
    q=a22-a12;%y2-y1
    v=a32-a12;%y3-y1
    div = abs(q*s-r*v);
    x = (a11+a21+a31)/3;

```

```

y = (a12+a22+a32)/3;
for i=1:3,
    if strcmp(tipo,'nodal')
        aux=0;
        for j=1:3,
% interpolación en los nodos del elemento triangular
            x=p(1,t(j,k));y=p(2,t(j,k));
            aux=aux + eval(f_fuente)/(2-(i==j));
        end%if
        F(t(i,k)) = F(t(i,k)) + aux*div/12;%
    elseif strcmp(tipo,'baricentrico'),
% interpolación en el baricentro del elemento triangular
        F(t(i,k)) = F(t(i,k)) + div*eval(f_fuente)/6;
    elseif strcmp(tipo,'discreto')
        aux=0;
        for j=1:3,
% interpolación en los nodos del elemento triangular
            aux=aux + f_fuente(t(j,k))/(2-(i==j));
        end%if
        F(t(i,k)) = F(t(i,k)) + aux*div/12;
    end%if
end;%for
end;%for
% Calculamos la contribucion del termino newmann f_n
n_seg=size(e,2);
for bs=1:n_seg, % buscamos sobre todos los segmentos de frontera
    if sf(size(sf,1),e(5,bs))== -1 % si el segmento es newmann
        nn =[ p(2,e(2,bs))-p(2,e(1,bs)) , p(1,e(1,bs)) - p(1,e(2,bs))];
        ds = norm(nn);
% fprintf(['Segmento ',num2str(bs),': longitud ',num2str(ds),'\n'])
        for j=[e(1,bs),e(2,bs)],%fprintf(['\nj=',num2str(j),'\n'])
            aux=0;
            for i=[e(1,bs),e(2,bs)],
                x = p(1,i);%fprintf([' i=',num2str(i)])
                y = p(2,i);%eval(f_n),sqrt(1+DY([x;y],div/100)^2),ds,
                aux = aux + eval(f_n)*ds/(6-3*(i==j));
            end;
            F(j) = F(j)+aux;
        end;
% if strcmp(opcion,'imprimir'),
%     fprintf('Triangulo ',num2str(k),'\n')
%     disp(mel1),disp(mel2),disp(mel3)
% end,
end;
end;

```

NMODIF_F.m

```

function F=NMODIF_F(tipo,K,F,p,f_d),
% Uso : function F=NMODIF_F(tipo,K,F,p,f_d),
% tipo = 'continuo' o 'discreto'
% Inserta las condiciones de contorno dirichlet en el vector F

```

```

if tipo=='continuo',
    for j=1:size(p,2),% buscamos entre todo los puntos
        if p(3,j)==1 % segmento dirichlet,
            x=p(1,j);
            y=p(2,j);
            val_f_d=eval(f_d);
            for i=1:size(K,1),
                F(i)=F(i)-K(i,j)*val_f_d;
            end;
        end;
    end;
    for j=1:size(p,2),
        if p(3,j)==1 % segmento dirichlet,
            x=p(1,j);
            y=p(2,j);
            F(j)=eval(f_d);
        end
    end;
elseif tipo=='discreto',
% me dan en un vector los valores conocidos f_d, y en otro
% la numeracion p
    for j=1:size(f_d,2), % buscamos entre todo los puntos
        for i=1:size(K,1),
            F(i)=F(i)-K( i,p(j) )*f_d(j);
        end;
    end;
    for j=1:size(f_d,2), % buscamos entre todo los puntos
        F( p(j) ) = f_d(j);
    end;
end;
end;

```

NMODIF_K.m

```

function K=NMODIF_K(tipo,K,p),
% Uso: K=NMODIF_K(tipo,K,p),
% Modifica el sistema de ecuaciones en la matriz K
if tipo=='continuo'
    for j=1:size(p,2), % buscamos entre todo los puntos
        if p(3,j)==1 % segmento dirichlet,
            K(j,:)=zeros(1,size(K,2));
            K(:,j)=zeros(size(K,1),1);
            K(j,j)=1;
        end;
    end;
elseif tipo=='discreto'
% me dan la numeración de los valores conocidos, p
    for j=1:size(p,2), % buscamos entre todo los puntos
        K(p(j),:)=zeros(1,size(K,2));
        K(:,p(j))=zeros(size(K,1),1);
        K(p(j),p(j))=1;
    end;
end;
end;

```

A.2 Problema quasivariacional del dique

- Programa principal: `iqv.m`
- Subprogramas: `phi.m`
`y03.m`
`convex.m`
`angxy.m`
`sol_ive.m`
`diqgeom`
`uy_g`
`D1_D2.m`

iqv.m

```
%-----  
%  
% PROGRAMA PARA LA APROXIMACION DE la SOLUCION DE UNA IQV  
%  
%-----  
% Cargamos la geometria del problema y las soluciones iniciales u0,  
v0  
diqgdata;  
lambda = 4E+01;  
rho = 1E+03;  
% Primero comenzamos las iteraciones con la solucion inicial u0  
un = u0;  
fun = phi(un,p,e,sf);  
qn = -ones(size(un));  
% El vector qn es la proyeccion de qn+rho*(un-fun) sobre [-1 0]  
for l=1:size(p,2),  
    if (0<=p(1,l)) & (p(1,l)<=c),  
        qn(l)=max(-1,min(qn(l)+rho*(un(l)-fun(l)),0));  
    end;  
end;  
% El vector per almacena la permutacion para el reordenamiento de  
% Cuthill-McKee.  
per = symrcm(M);i=1;  
fprintf(['\n Cálculos para un \n']);  
for n=1:50  
    fun = phi(un,p,e,sf);  
% a continuación resolvemos una IVE no simétrica con un numero máximo  
% de 15 iteraciones, y una tolerancia de 1E-03  
    uj_1=un;  
    qj_1=qn;  
    tic  
    for j=1:15  
        [uj,qj,err]=sol_ive(uj_1,qj_1,fun,M,K,F,L,per,p,lambda(i),...  
            rho,10,1E-03);
```

```

        errun(j)=norm(uj-uj_1,inf);
        uj_1=uj;
        qj_1=qj;
% fprintf(['Error en el paso ',num2str(j),':',num2str(err(j)),'\n']);
        if (errun(j) < 1E-03), break; end;
    end;
    tiem = toc;
    error_l(n) = norm(uj-un,1);
    error_inf(n)= norm(uj-un,inf);
    fprintf(['Error en la ive no simétrica:',num2str(error_inf(n)),...
            ' iteración ',num2str(n),' ,en ',num2str(tiem),' s \n']);
    un=uj;
    qn=qj;
end,

```

diqgdata.m

```

clear all;
global a b c h1 h2
a = -1;
b = 3;
c = sqrt(3)+1;
h1 = Y(0);
h2 = Y(c);
sf = diqgeom([1:diqgeom]);
[p,e,t]=initmesh('diqgeom');
[p,e,t]=refinemesh('diqgeom',p,e,t);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Solucion del PVM para f=1
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
f_fuente= '1';
f_n = 'feval("uy_g",[x;y])';
f_d = '0';
F=FP1NS('baricentrico',p,e,t,sf,f_fuente,f_n,"");
K=KP1NS(p,t,"");
F=NMODIF_F('continuo',K,F,p,f_d);
K=NMODIF_K('continuo',K,p);
u0=K\F;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Solucion del PVM para f=caract(D1+D2)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
f_fuente= 'feval("D1_D2",[x;y])';;
f_n = 'feval("uy_g",[x;y])';
f_d = '0';
F=FP1NS('baricentrico',p,e,t,sf,f_fuente,f_n,"");
K=KP1NS(p,t,"");
F=NMODIF_F('continuo',K,F,p,f_d);
K=NMODIF_K('continuo',K,p);
v0=K\F;
for i=1:size(p,2),
    if (p(2,i)==0),
        p(3,i)=1;
    end;
end;

```

```

elseif (abs(Y(p(1,i))-p(2,i))<1E-03),
    p(3,i)=-1;
elseif (0<p(1,i))&(p(1,i)<c)&(0<p(2,i))&(p(2,i)<Y(p(1,i))),
    p(3,i)=3;
end
end;
[K,M] = KP1NS(p,t,"");
F = FP1NS('baricentrico',p,e,t,sf,'feval("D1_D2",[x;y]'),'...
    'feval("uy_g",[x;y]'),'");
% se ponen a cero los valores en la frontera dirichlet
F = NMODIF_F('continuo',K,F,p,'0');
K = sparse(NMODIF_K('continuo',K,p));
M = sparse(NMODIF_K('continuo',M,p));
L = sparse(L2P1D3(p,t));

```

phi.m

```

function f=phi(u,p,e,sf),
% Uso: f=phi(u,p,e,sf),
% phi(u)(x,y)=conv(u(x,Y(x)))
%
% Hay que recordar que f es continua con soporte compacto en D3
global c
% Primero se calcula la restricci3n u a (x,Y(x))
[ffu,xxu]=y03(u,p,e,sf);
% Luego se calcula la c3scara convexa
[fu,xu]=convex(ffu,xxu);
% Por ultimo se interpola en cada nodo de D3
f=zeros([size(p,2),1]);
for i=1:size(p,2),
    if (p(1,i)<0),
        f(i)=convex(fu,xu,0);
    elseif (p(1,i)>c),
        f(i)=convex(fu,xu,c);
    else
        f(i)=convex(fu,xu,p(1,i));
    end;
end;
end;

```

y03.m

```

function [ff,xx,pp]=y03(f,p,e,sf),
global a b c
ff=[];
xx=[];
pp=[];
for i=1:size(e,2)-1,
    if sf(size(sf,1),e(5,i))== -1,
        if (p(1,e(1,i))<=c)&(0<=p(1,e(1,i))),
            pp=[pp,e(1,i)];
            xx=[xx,p(1,e(1,i))];
            ff=[ff,f(e(1,i))];
        end;
    end;
end;

```

```

        end;
    end
end
[xx, ind]=sort(xx);
ff=ff(ind);
pp=pp(ind);

```

convex.m

```

function [ff,xx]=convex(f,x,x0),
% Uso [ff,xx]=convex(f,x),
% f =convex(f,x,x0),
% [ff,xx] son las coordenadas de la cáscara convexa asociada a (x,f(x))
% f(x0) es el valor de convf en el punto x0, [f,x] son los puntos
% de las cáscara convexa.
% x0 puede ser un vector, con valores en [min(x),max(x)].
if nargin==2,
% El primer punto del convexo es el punto (x1,f1)
    k=1;
    i=1;
    ff(1)=f(k);
    xx(1)=x(k);
    v=[0 -1];
    while i<size(x,2)
% Buscamos el siguiente punto del convexo (x_i,f_i)
        ang=pi;
        for j=i+1:size(x,2),
            if (angxy([x(j)-xx(k),f(j)-ff(k)],v)<ang),
                ang = angxy([x(j)-xx(k),f(j)-ff(k)],v);
                i = j;
            end;
        end;
        xx(k+1)=x(i);
        ff(k+1)=f(i);
        v=[xx(k+1)-xx(k),ff(k+1)-ff(k)];
        k=k+1;
    end
elseif nargin==3,
    for i=1:size(x0,2),
        for j=1:size(x,2)-1,
            if (x(j)<=x0(i)&(x0(i)<=x(j+1)),
                ff(i)= (f(j+1)-f(j))/(x(j+1)-x(j))*(x0(i)-x(j))+f(j);
                break;
            end;
        end;
    end;
    xx=x0;
end;

```

angxy.m


```

function theta=angxy(x,y),
theta=norm(x)*norm(y);
if (theta~=0)
    theta = acos(sum(x.*y)/theta);
else
    fprintf(['Error: no es válido ingresar el vector nulo como ',....
            'parámetro de la función angxy\n'])
    return;
end;

```

sol_ive.m

```

function [uk,qk,err]=sol_ive(uj,qj,f,M,K,F,L,per,p,lambda,rho,iter,tol),
% Uso: [uk,qk,err]=sol_ive(uj,qj,f,M,K,F,L,per,p,lambda,rho,iter,tol),
% sol_ive.m resuelve ive's simétricas.
global c
uk=uj;
qk=qj;
for k=1:iter,
    uk_1 = uk;
    FF = F-K*uj-L*qk;
    uk(per)=uj(per)+lambda*M(per,per)\FF(per);
    err=norm(uk-uk_1,1);
    qk_1=qk;
    for i=1:size(p,2),
        if (0<=p(1,i)&(p(1,i)<=c),
            qk(i)=max(-1,min(qk(i)+rho*(uk(i)-f(i)),0));
        end;
    end;
    err2=norm(qk-qk_1,1);
    if err<tol,
% fprintf([' sol_ive.m terminó en iteración= ',num2str(k),'\n']);
        break,
    end,
end;

```

diqgeom.m

```

function [x,y]=diqgeom(bs,s),
%DIQGEOM define la geometria de un dique de base plana
%nbs=diqgeom,
%sf=diqgeom([1:nbs]),
global a b c;
intp_cb= quad('p',c,b);
intp_0b= quad('p',0,b);
intp_ab= quad('p',a,b);
nbs=8;
if nargin==0,
    x=nbs;
return;
end;
dl=[...

```

```

    0          -a          c-a          b-a...
intp_cb+b-a intp_0b+b-a  intp_ab+b-a  intp_ab+b-a+Y(0) ;

    -a          c-a          b-a          intp_cb+b-a...
intp_0b+b-a intp_ab+b-a intp_ab+b-a+Y(0) intp_ab+b-a+Y(0)+Y(c) ;

    1          3          2          2...
    3          1          1          3          ;
    0          0          0          0...
    0          0          3          2          ;
    1          1          1          -1...
    -1         -1          0          0];
% fila 1 : valor del parámetro inicial.
% fila 2 : valor del parámetro final.
% fila 3 : etiqueta de la region a mano izquierda (con respecto...
% a la dirección dada por la fila 1 y 2).
% fila 4 : etiqueta de la region a mano derecha.
% fila 5 : tipo de frontera 0==interior, 1==dirichlet, -1==newmann
if nargin==1
    x=dl(:,bs);
    return
end;
x=zeros(size(s));
y=zeros(size(s));
[m,n]=size(bs);
if (m==1)&(n==1),
    bs=bs*ones(size(s)); %expand bs
elseif (m~=size(s,1)|(n ~=size(s,2))),
    error('bs must be scalar or of same size as s');
end;
nth=50;
th=[ linspace(0,-a,nth), linspace(-a,-a+c,nth),...
%base plana
    linspace(-a+c,-a+b,nth), linspace(-a+b,b-a+intp_cb,nth),...
    linspace(b-a+intp_cb,b-a+intp_0b,nth),...
    linspace(b-a+intp_0b,b-a+intp_ab,nth),...
%parte concava
    linspace(b-a+intp_ab,b-a+intp_ab+Y(0),nth),...
    linspace(b-a+intp_ab+Y(0),b-a+intp_ab+Y(0)+Y(c),nth)...
%segmentos interiores
    ];
% intp_ab+b-a+Y(0)+Y(c) es el parámetro final
xt=[];yt=[];
%xt=zeros(1,nth);
%yt=zeros(1,nth);

```

```

for t=1:size(th,2),
    if t<=3*nth, %base plana
        xt(t) = a + th(t);
        yt(t) = 0;
    elseif t<=4*nth, %parte cóncava
        xt(t) = b - (th(t)-b+a)*(b-c)/intp_cb;
        yt(t) = Y(xt(t));
    elseif t<=5*nth, %parte cóncava
        xt(t) = c - (th(t)-b+a-intp_cb)*(c-0)/(intp_0b-intp_cb);
        yt(t) = Y(xt(t));
    elseif t<=6*nth, %parte cóncava
        xt(t) = 0 - (th(t)-b+a-intp_0b)*(0-a)/(intp_ab-intp_0b);
        yt(t) = Y(xt(t));
    elseif t<=7*nth, %segmento de D1
        xt(t) = 0;
        yt(t) = th(t)-intp_ab-b+a;
    elseif t<=8*nth, %segmento de D2
        xt(t) = c;
        yt(t) = th(t)-intp_ab-b+a-Y(0);
    end;
end;
%%% rastreamos todos los parametros de acuerdo al segmento al que
%%% corresponden
for j=1:size(s,1),
    for k=1:size(s,2),
        seg = bs(j,k);
        aux = pdearcl(th( (seg-1)*nth + 1: seg*nth ) ,...
            [xt((seg-1)*nth + 1: seg*nth ) ;...
            yt((seg-1)*nth + 1: seg*nth)],s(j,k),...
            [1 0 0 0 0]*diqgeom(seg),[0 1 0 0 0]*diqgeom(seg));
        if seg<4,
            x(j,k) = a + aux;
            y(j,k) = 0;
        elseif seg==4,
            x(j,k) = b - (aux-b+a)*(b-c)/intp_cb;
            y(j,k) = Y(x(j,k));
        elseif seg==5,
            x(j,k) = c - (aux-b+a-intp_cb)*(c-0)/(intp_0b-intp_cb);

            y(j,k) = Y(x(j,k));
        elseif seg==6,
            x(j,k) = 0 - (aux-b+a-intp_0b)*(0-a)/(intp_ab-intp_0b);

            y(j,k) = Y(x(j,k));
        elseif seg==7,
            x(j,k) = 0;
            y(j,k) = aux-intp_ab-b+a;
        elseif seg==8,
            x(j,k) = c;
            y(j,k) = aux-intp_ab-b+a-Y(0);
        end;
    end;
end;
end;

```

uy_g.m

```
function z=uy_g(x),
% funcion que establece la condicion newmann
% x debe ser de la forma:
% x = [x1 x2 x3 x4 ... xn
%      y1 y2 y3 y4 ... yn]
global a b c h1 h2;
z=zeros(1,size(x,2));
for i=1:size(x,2),
    if ((a<=x(1,i))&(x(1,i)<0)),
        z(i) = sqrt(1+4*(x(1,i)-1)^2)*(h1-Y(x(1,i)));
    elseif((c<x(1,i))&(x(1,i)<=b)),
        z(i) = sqrt(1+4*(x(1,i)-1)^2)*(h2-Y(x(1,i)));
    end;
end;
```

D1_D2.m

```
function z=D1_D2(x),
% Uso z=D1_D2(x),
% funcion caracteristica(D1+D2)
% x debe ser de la forma:
% x = [x1 x2 x3 x4 ... xn
%      y1 y2 y3 y4 ... yn]
global a b c h1 h2;
z=zeros(1,size(x,2));
for i=1:size(x,2),
    if ( ( (a<x(1,i))&(x(1,i)<0) ) | ( (c<x(1,i))&(x(1,i)<b) ) ) &...
        ( (0<x(2,i))&(x(2,i)<Y(x(1,i))) ),
        z(i)=1;
    end;
end;
```

Referencias Bibliográficas

- [1] Kendall Atkinson, Weimin Han. *Theoretical Numerical Analysis: a functional analysis framework*. Springer-Verlag, 2001.
- [2] Haïm Brezis. *Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, 1983.
- [3] Claudio Baiocchi. *Variational and Quasivariational Inequalities*. John Wiley & Sons, 1986.
- [4] Susan-C. Brenner. *The Mathematical Theory of Finite Element Method*. Springer Verlag, 1991.
- [5] Ivar Ekeland. *Convex Analysis and Variational Problems*. North-Holland, 1976.
- [6] G. Minty. *Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space*. Duke Math. J., 29 (1962), pp. 341-346.
- [7] George, Alan and Joseph Liu. *Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems*. Prentice-Hall, 1981.
- [8] Glowinsky R. *Finite Elements and Variational Inequalities*, technical report, INF-LAB 78010, IRIA-Laboria, Rocquencourt, 1978.
- [9] Glowinsky R, Jacques-Louis Lions, Raymond Trémolières. *Numerical Analysis of Variational Inequalities*. North-Holland, 1981.
- [10] Irla Mantilla Núñez. *Generación de un mallado óptimo para la resolución de problemas de contorno mediante elementos finitos*. TECNIA VOL 10, 15-21, 2000.
- [11] Irla Mantilla, Luis Roca. *Estudio Numérico de la Solución para el Problema del Dique*. TECNIA VOL. 13, 63-70, 2003.