UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS

EXPANSIVIDAD, POTP Y ESTABILIDAD TOPOLÓGICA RESPECTO A MEDIDAS DE BOREL

Para obtener el grado académico de Maestro en
Ciencias en Matemática Aplicada

ELABORADA POR :
LUIS ALONSO FIESTAS LLENQUE

ASESOR :
Dr. ROGER JAVIER METZGER ALVÁN

LIMA–PERÚ
2022

Dedicado

A mis padres Hipólito y Jacinta con mucho cariño.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación Tecnológica.

Al director, docentes y compañeros del IMCA que me brindaron conocimiento y consejos para poder finalizar mis estudios de posgrado en especial a mi asesor Roger Metzger y al coordinador Eladio Ocaña por su apoyo y paciencia brindada a lo largo de estos años.

A mis amigos Victor, Joseph, Giancarlo y Yosbi, por brindarme su ayuda.

Resumen

En el presente trabajo se estudian las generalidades en sistemas dinámicos discretos, definiciones y propiedades básicas más representativas, los conjuntos donde las órbitas presentan algún tipo de recurrencia, como también una visión rápida de las medidas de Borel, para luego analizar nuevas definiciones con propiedades medibles.

El primer capítulo muestra una visión general de los sistemas dinámicos discretos, dinámica en S^1 y medidas de Borel.
En el segundo capítulo se estudian las nociones de expansividad, POTP junto con algunas propiedades por ejemplo que son invariantes por conjugación. Se continúa luego mostrando el resultado siguiente de Peter Walters, todo homeomorfismo expansivo con la propiedad de sombreamiento en un espacio métrico compacto es topológicamente estable.
En el tercer capítulo se hace un estudio de las definiciones dadas por Carlos Morales sobre μ-expansividad (expansividad respecto a una medida) y μ-POTP (propiedad de sombreamiento respecto a una medida), en esta última se aportan algunas propiedades análogas a las de POTP.
Finalmente, en el cuarto capítulo se demuestra el resultado análogo al de Walters que todo homeomorfismo μ-expansivo que tiene a su vez μ-POTP es μ-topológicamente estable. De ello se obtienen consecuencias y resultados en S^1 pero analizando las medidas de Borel, Por ejemplo que los homeomorfismos μ-expansivos son los Denjoy, lo cual muestra la importancia de estas definiciones. A su vez también se prueba que no existen homeomorfismos expansivos de S^1 pero utilizando este enfoque medible.

Índice general

Introducción

En el análisis de sistemas dinámicos las órbitas periódicas tienen la característica más simple e interesante de un sistema dinámico, por esto es que analizo las pseudo órbitas, que ha sido importantes para la comprensión de la dinámica global. En [39] se muestra uno de los resultados importantes de los sistemas dinámicos dado por Walters el cual dice que todo homeomorfismo expansivo que tiene POTP es topológicamente estable. Entrando ya en la rama de dinámica medible, en [20], se define la *μ-expansividad* de un homeomorfismo respecto a una medida de Borel μ cuando la medida de la bola dinámica en cada punto es nula; y en [13], una medida de Borel μ se dice tener *POTP respecto a un homeomorfismo f* (propiedad de sombreamiento) si para todo ε positivo, existe δ positivo con un boreliano B de medida total, tal que cada δ-pseudo-orbita que pasa por B puede ser ε-sombreado en f, para mantener una notación similar a la dada en [20], se dirá que un homeomorfismo f tiene *μ-POTP*, cuando la medida μ tiene POTP respecto a un homeomorfismo f, de manera similar se dirá que un homeomorfismo f es *μ-topológicamente estable* si para todo ε positivo, existe δ positivo tal que cada g δ-cercano a f existe una semiconjugación respecto μ entre f y g que es ε-cercana a la identidad.

Siguiendo ese camino, el objetivo es mostrar un resultado análogo al teorema de estabilidad de Walters en el contexto de una medida, dada por Carlos Morales y Keonhee Lee. Así también se da una introducción a estas nuevas definiciones que de cierta manera generalizan a las usuales.

Capítulo 1

Preliminares

En esta sección se muestran algunos tópicos generales en sistemas dinámicos discretos. Formalmente, un sistema dinámico es una acción suave de los reales o de los enteros en otro objeto. Cuando se tiene una acción de los números reales, el sistema se llama *sistema dinámico continuo*, y cuando se tiene una acción de los números enteros, el sistema se llama *sistema dinámico discreto*, este trabajo se centrará en este último donde la acción será la composición enésima de un homeomorfismo definido en un espacio métrico.

1.1. Sistemas dinámicos discretos

Definición 1.1.1 (Homeomorfismo) *Sean X, Y espacios topológicos. Un mapeo biyectivo $f : X \to Y$ se llama homeomorfismo si f y f^{-1} son continuas.*

Sea X un espacio topológico y $f : X \to X$ un homeomorfismo. Naturalmente uno puede escribir

$$f^n(x) \quad = \quad \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n \text{ veces}} \quad (x).$$

Para todo $n \in \mathbb{Z}$. Cuando n es negativo, se referirá a la composición de la inversa f^{-1}, $|n|$ veces y f^0 se referirá al homeomorfismo identidad id.

Al par (f, X) se le llama **sistema dinámico discreto**. El objeto de estudio principal es un espacio métrico cuya topología es la inducida por su métrica.

Definición 1.1.2 (Espacio métrico) *Es un conjunto X con una función distancia asociada, llamada métrica, $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Lo que quiere decir que para todo $x, y, z \in X$, esta función debe satisfacer las siguientes condiciones:*

i. $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$,

ii. $d(x, y) = d(y, x)$,

iii. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,

iv. $d(x, y) \geq 0$,

Una métrica define naturalmente una topología donde los conjuntos abiertos son uniones de las bolas abiertas.

Definición 1.1.3 (Espacio métrico producto) *Sean X y Y espacios métricos con métricas d_1 y d_2 respectivamente. El espacio métrico producto es el conjunto $X \times Y$ con la métrica*

$$d((x, y), (x', y')) = \text{máx}\{d_1(x, x'), d_2(y, y')\}; \quad (x, y), (x', y') \in X \times Y.$$

Definición 1.1.4 (Espacio compacto) *Un espacio topológico X se dice compacto si, dado un cubrimiento por abiertos de X cualquiera, existe un subcubrimiento finito del mismo.*

Teorema 1.1 *Sea X un espacio métrico. X es compacto si y sólo si toda sucesión de X admite una subsucesión convergente.*

De ahora en adelante X será un espacio métrico compacto con métrica d y f un homeomorfismo de X en sí mismo, siempre que no haya confusión. De ser necesario se indicará cuando el espacio X no necesite ser compacto.

En los sistemas dinámicos el estudio se centra en conocer el comportamiento de la dinámica de los puntos del espacio, es decir su comportamiento mediante las iteraciones (interpretado como el tiempo discreto) por el homeomorfismo o por su inversa (interpretado como el futuro y pasado).

Definición 1.1.5 (Órbita) *Sea $x \in X$, se le llama órbita de x respecto a f al conjunto*

$$\vartheta(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

También llamado f-órbita de x o sólo órbita si no hay confusión.

Algunas veces es conveniente tener en cuenta sólo las iteraciones positivas $\vartheta^+(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$ (llamada órbita positiva) o sólo las iteraciones negativas (llamada órbita negativa $\vartheta^-(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}, n \leq 0\}$). Se tiene $\vartheta(x) = \vartheta^+(x) \cup \vartheta^-(x)$.

Definición 1.1.6 (Homeomorfismo minimal) *A un homeomorfismo f se le denomina minimal si para todo $x \in X$, $\vartheta(x)$ es densa en X (i.e. $\overline{\vartheta(x)} = X$).*

Esta definición da la idea de que cualquier punto llega a "cubrir" todo el espacio en el transcurso del tiempo, más adelante se observará que las rotaciones irracionales en S^1 son minimales. Otro ejemplo es el homeomorfismo $S : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, si se considera en el 2-toro $\mathbb{T}^2$, definido por $S(x, y) = (x+\alpha, y+\beta)$, donde $1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son racionalmente independientes.

Definición 1.1.7 (Homeomorfismo topológicamente transitivo) *Un homeomorfismo f es topológicamente transitivo si existe $x_0 \in X$ tal que $\vartheta(x_0)$ es denso en X (i.e. $\overline{\vartheta(x_0)} = X$).*

- Es claro que si f es minimal entonces f es topológicamente transitivo.

Proposicion 1.1 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es topológicamente transitivo.*
2. *Si U, V son conjuntos abiertos no vacíos entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Definición 1.1.8 (Conjunto invariante) *Un conjunto $A \subseteq X$ se llama invariante por f o f-invariante si $f(A) = A$.*

- Si A es invariante entonces $f^k(A) = A$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.1.9 (Conjunto minimal) *Un conjunto cerrado $E \subseteq X$ el cual es f-invariante es llamado conjunto minimal con respecto a f si $f|_E : E \to E$ es minimal.*

Un hecho básico descubierto por G. D. Birkhoff es que en todo sistema dinámico (X, f), con X compacto, existen conjuntos minimales, esto debido al lema de Zorn.

Definición 1.1.10 (Punto fijo) *Un punto $x \in X$ se llama punto fijo de f si $f(x) = x$.*

- El conjunto de puntos fijos por f es denotado por $Fix(f)$.

Definición 1.1.11 (Punto periódico) *Un punto $x \in X$ se llama punto periódico de f si existe un entero estrictamente positivo n tal que $f^n(x) = x$.*

- El conjunto de puntos periódicos por f es denotado por $Per(f)$.

Definición 1.1.12 (Punto errante) *Un punto $x \in X$ se llama punto errante de f si tiene una vecindad disjunta para todos sus iterados positivos. Es decir existe una vecindad U de x tal que $f^k(U) \cap U = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Definición 1.1.13 (Punto no errante) *Un punto $x \in X$ es no errante de f si no cumple la definición anterior, es decir si para toda vecindad U de x, existe un entero positivo k tal que $f^k(U) \cap U \neq \emptyset$.*

- El conjunto de puntos no errantes de f es denotado por $\Omega(f)$, cuando no hay confusión se escribe solo Ω.
- El conjunto Ω es cerrado e invariante, además un punto es no errante por f si y sólo si este es no errante por f^{-1}.

Definición 1.1.14 (ω-límite) *Dado un punto $x \in X$ se define el conjunto ω-límite respecto a f como*

$$\omega_f(x) = \{y \in X : \exists \text{ una sucesión } n_i \to +\infty \text{ que cumple } f^{n_i}(x) \to y\}.$$

Definición 1.1.15 (α-límite) *Dado un punto $x \in X$ se define el conjunto α-límite respecto al homeomorfismo f como*

$$\alpha_f(x) = \{y \in X : \exists \text{ una sucesión } n_i \to +\infty \text{ que cumple } f^{-n_i}(x) \to y\}.$$

Definición 1.1.16 (Punto recurrente) *Un punto $x \in X$ se llama recurrente si $x \in \omega_f(x) \cap \alpha_f(x)$.*

- El conjunto de puntos recurrentes respecto a f se denota por $R(f)$

Definición 1.1.17 (Conjunto límite) *Sean los conjuntos $L_+(f) = \overline{\bigcup_{x\in X} \omega_f(x)}$, $L_-(f) = \overline{\bigcup_{x\in X} \alpha_f(x)}$ entonces se define al conjunto límite*

$$L(f) = L_+(f) \cup L_-(f).$$

Definición 1.1.18 (δ-pseudo órbita) *Sea X un espacio métrico con métrica d. Una sucesión de puntos $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es llamado una δ-pseudo órbita de f si $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$ para $i \in \mathbb{Z}$.*

- Si $\{x_i\} = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ se llama δ-pseudo órbita finita.
- Si una δ-pseudo órbita finita $\{x_i\}_{i=0}^n$ cumple que $x_0 = x_n$ entonces se llama δ-pseudo órbita periódica.

Definición 1.1.19 *Sea $f : X \to X$. Una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \subseteq X$ se dice que es ε-sombreado por f si existe $x \in X$ tal que*

$$d(f^n(x), x_n) < \varepsilon.$$

- También se dice que $\{x_i\}$ es ε-sombreado por x respecto a f.

Definición 1.1.20 (Punto recurrente por cadena) *Sea X un espacio métrico con métrica d. Un punto $x \in X$ es recurrente por cadena de f si, para cada $\delta > 0$ existe una δ-pseudo órbita periódica $x = x_0, x_1, ..., x_n = x$.*

- El conjunto de puntos recurrentes por cadena de f se denota por $CR(f)$.

Proposicion 1.2 *Los conjuntos $\omega(x)$, $\alpha(x)$ para cualquier $x \in X$ y los conjuntos $\Omega(f)$, $CR(f)$ son cerrados e invariantes.*

Proposicion 1.3 *Se cumple*

$$Fix(f) \subseteq Per(f) \subseteq R(f) \subseteq L(f) \subseteq \Omega(f) \subseteq CR(f).$$

1.1.1. Equivalencia Dinámica

Un objetivo clásico dentro de la teoría de sistemas dinámicos, consiste en determinar las propiedades que se mantienen bajo "perturbaciones". Es decir los sistemas que tienen la característica de conservar las propiedades topológicas de su estructura de órbitas. El siguiente ejemplo dado en [35] muestra esta idea.

Ejemplo 1.1.1 *Considerando el intervalo unitario $I = [0, 1]$. Sean las funciones $f, g : I \to I$ definidas por*

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}, \\ 2(1-x) & si \quad \dfrac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases} \quad , \quad g(x) = 4x(1-x).$$

El homeomorfismo $h(x) = sen^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ lleva las órbitas de una dinámica en otra, $\vartheta_g(h(x_0)) = h(\vartheta_f(x_0))$ para cualquier punto $x_0 \in [0, 1]$.

Se puede definir una métrica sobre el espacio de homeomorfismos de X en sí mismo. Sea X un espacio métrico compacto con métrica d. $Hom(X)$ es el conjunto de todos los homeomorfismos $f : X \to X$. A este conjunto $Hom(X)$ se le puede dar una estructura de espacio métrico definiendo la métrica d, (debido a los elementos donde actúan no dará mayor confusión con la métrica del espacio X). Sea $f, g \in Hom(X)$:

$$d(f,g) = \sup_{x\in X}\{d\left(f(x), g(x)\right)\}.$$

Definición 1.1.21 (Homeomorfismo δ-cercano) *Dado un homeomorfismo $f \in Hom(X)$, se dice que $g \in Hom(X)$ es δ-cercano a f si $d(f,g) < \delta$.*

La siguiente definición da una idea de cuando dos homeomorfismos son "iguales". Indica una equivalencia entre ambos homeomorfismos puesto que muchas características se preservan bajo esta propiedad, como se muestra en el Teorema 1.2.

Definición 1.1.22 (Homeomorfismos topológicamente conjugados) *Sean X, Y espacios métricos compactos, $f \in Hom(X)$ y $g \in Hom(Y)$. Entonces f se dice topológicamente conjugado a g si existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que $h \circ f = g \circ h$.*

- También se puede decir que f y g son conjugadas o que h conjuga a g con f.
- Si, en particular, h no es inyectivo, entonces f se dice topológicamente semi-conjugado a g.
- La conjugación topológica es una relación de equivalencia.

Observación. Si f es topológicamente conjugado a g, se cumple que $g^n \circ h(x) = h \circ f^n(x)$ para todo $x \in X$.

Teorema 1.2 *Sean $f, g \in Hom(X)$. Si f y g son topológicamente conjugados por $h \in Hom(X)$, entonces:*

1. *p es periódico por f si y sólo si $h(p)$ es periódico por g.*
2. *p es recurrente por f si y sólo si $h(p)$ es recurrente por g.*

3. $h(\omega_f(x)) = \omega_g(h(x))$.

4. *G es minimal por f si y sólo si $h(G)$ es minimal por g.*

5. $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$.

6. *f es transitivo si y sólo si g es transitivo.*

La conjugación es la manera matemática de decir que un homeomorfismo es igual a otro, en resumen el Teorema 1.2 indica que las propiedades topológicas de un homeomorfismo se van a preservar en cualquier otro que sea conjugado a este.

Para finalizar, los conceptos generales sobre dinámica discreta, se dará un resultado interesante debido a Keonhee Lee y Park sobre un conjunto con una propiedad interesante. En el espacio de homeomorfismos de un espacio métrico compacto X, $Hom(X)$ se le puede equipar con la topología inducida por la C^0-métrica:

$$d_0(f, g) = \max\{d(f, g), d(f^{-1}, g^{-1})\}.$$

Definición 1.1.23 *Sea M una variedad compacta y sin borde. Dado $h \in Hom(M)$, se dice que se cumple el closing lemma para h en $x \in X$ si para cada $\delta > 0$ existe $g \in Hom(M)$ con $d_0(h, g) \leq \delta$ tal que $x \in Per(g)$.*

- *Se denotará por $CL(h)$ al conjunto de puntos que cumplen el closing lemma para h en x.*

Teorema 1.3 *Sea M una variedad compacta y sin borde. Para $h \in Hom(M)$ se cumple que $CR(h) = CL(h)$.*

Este resultado es dado por Lee y Park en [14].

1.2. Dinámica en S^1

A continuación se dará un repaso amplio sobre la bien estudiada dinámica en el círculo.

La circunferencia unitaria S^1 puede ser expresada como el cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = S^1 \approx \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. La identificación está dada por:

$$\begin{array}{rccl} \exp: & \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \to & S^1 \\ & t & \mapsto & \exp(t) \quad = e^{2\pi it}. \end{array}$$

Se dota a S^1 de la topología cociente, es decir, un conjunto U es abierto en S^1 si y sólo si la preimagen $\pi^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{R}$, donde

$$\begin{array}{rccl} \pi: & \mathbb{R} & \to & S^1 \\ & x & \mapsto & \pi(x) \quad = [x] = x + \mathbb{Z}. \end{array}$$

o

$$\begin{array}{rccl} \pi: & \mathbb{R} & \to & S^1 \\ & x & \mapsto & \pi(x) \quad = e^{2\pi ix}. \end{array}$$

Ambas nociones se podrán utilizar indistintamente.

Definición 1.2.1 (Rotación de ángulo α) *Es un mapeo* $\mathsf{R}_\alpha : S^1 \to S^1$ *definida por*

$$\mathsf{R}_\alpha([x]) = [x + \alpha]$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Equivalentemente $\mathsf{R}_\alpha(e^{2\pi it}) = e^{2\pi i(t+\alpha)}$.
- Es claro que $\mathsf{R}_\alpha \in Hom(S^1)$, la inversa es $\mathsf{R}_\alpha^{-1} = \mathsf{R}_{-\alpha}$.
- R_α es una isometría para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.2.1 *Sea una rotación* R_α*, si* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *entonces* $Per(\mathsf{R}_\alpha) = S^1$.

Demostración. Sea $[x] \in S^1$ y $\alpha = \frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{Z})$ donde p y $q > 0$ son primos relativos. Se tiene entonces

$$\mathsf{R}_{\frac{p}{q}}([x]) = \left[x + \frac{p}{q}\right]$$

$$\mathsf{R}^2_{\frac{p}{q}}([x]) = [x + 2\frac{p}{q}]$$
$$\mathsf{R}^3_{\frac{p}{q}}([x]) = [x + 3\frac{p}{q}]$$

Así de forma inductiva

$$\begin{aligned} \mathsf{R}^q_{\frac{p}{q}}([x]) &= [x + q\tfrac{p}{q}] \\ &= [x+p] \\ &= [x] \end{aligned}$$

Por tanto $[x] \in Per\left(\mathsf{R}_{\frac{p}{q}}\right) = Per\,(\mathsf{R}_\alpha)$, esto es $S^1 \subseteq Per\,(\mathsf{R}_\alpha)$. $\square$

S^1 es un espacio métrico compacto, con métrica d definida por

$$d([x],[y]) = \text{mín}\{|a-b| \in \mathbb{R} : \quad a \in [x], b \in [y]\}$$

Proposicion 1.4 *Para cada $\alpha \notin \mathbb{Q}$, la rotación $R_\alpha \in Hom(S^1)$ es topológicamente transitiva y minimal.*

Demostración. Los puntos de la órbita R_α son todos distintos para cualquier $x \in S^1$. Pues en caso contrario existirían $m, n \in \mathbb{Z}$ tal que $m \neq n$ y $\mathsf{R}^n_\alpha([x]) = \mathsf{R}^m_\alpha([x])$. Entonces $[x+n\alpha] = [x+m\alpha]$, lo que indicaría que $(n-m)\alpha \in \mathbb{Z}$ lo que es una contradicción al hecho de que $\alpha \notin \mathbb{Q}$. En particular $Per(\mathsf{R}_\alpha) = \emptyset$. Por otro lado $\vartheta^+(x)$ tiene una subsucesión convergente. Es decir dado $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, existen enteros $p > q > 0$ para los cuales se satisface

$$d(\mathsf{R}^p_\alpha(x), \mathsf{R}^q_\alpha(x)) < \varepsilon.$$

Dado que R_α es una isometría, escribiendo $k = p - q$ se tiene

$$0 < d(\mathsf{R}^k_\alpha(x), \mathsf{R}_\alpha(x)) = d(\mathsf{R}^p_\alpha(x), \mathsf{R}^q_\alpha(x)) < \varepsilon.$$

De esto se puede afirmar que $d(\mathsf{R}^{(j+1)k}_\alpha(x), \mathsf{R}^{jk}_\alpha(x)) < \varepsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$ lo que quiere decir que $\{\mathsf{R}^{jk}_\alpha(x)\}_{j=0}^{+\infty}$ es una ε-pseudo-órbita. Entonces $\{\mathsf{R}^{jk}_\alpha(x)\}_{j=0}^{+\infty}$ que es subconjunto de la órbita positiva de x, divide a S^1 en intervalos de longitud menor a ε. Así, se tiene

$$S^1 = \bigcup_{j=1}^{+\infty} (\mathsf{R}^{jk}_\alpha(x), \mathsf{R}^{jk}_\alpha(x) + \varepsilon). \tag{1.1}$$

Finalmente, como ε es arbitrario, para cualquier $y \in S^1$, habrá alguno de estos intervalos que contenga al punto y, en otras palabras $\vartheta(x)$ es denso en S^1 lo que concluye la prueba. Por otro lado, de (1.1) se puede afirmar que dado $y \in S^1$ se encuentra una sucesión $k_i \to \infty$ tal que $\mathsf{R}_\alpha^{k_i}(x) \to y$, es decir $y \in \omega(x)$. Análogamente, si se utiliza la órbita negativa $y \in \alpha(x)$, se prueba además que

$$\alpha(x) = \omega(x) = S^1.$$

$\square$

Ejemplo 1.2.2 *Sea R_α una rotación y $x \in S^1$,*
si $\alpha \in \mathbb{Q}$ se tiene

$$\omega(x) = \alpha(x) = \vartheta(x).$$

Por otro lado si $\alpha \notin \mathbb{Q}$

$$\omega(x) = \alpha(x) = S^1.$$

Demostración. Sea $x \in S^1$. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, del Ejemplo 1.2.1 existe n tal que $\mathsf{R}_\alpha^n(x) = x$, esto a su vez implica que la órbita de x tiene un número finito de elementos $\vartheta(x) = \{x = x_0, ..., x_{n-1}\}$. De este modo cualquier sucesión convergente de elementos de $\vartheta(x)$ converge en $\vartheta(x)$ esto es $\omega(x) \cup \alpha(x) \subseteq \vartheta(x)$. Por otro lado para cada $x_k \in \vartheta(x)$ se toma la sucesión $n_i = \{k, k+n, k+2n, k+3n, ...\}$ cuando $n_i \to \infty$ se tiene $\mathsf{R}_\alpha^{n_i}(x) \to x_k$ y $\mathsf{R}_\alpha^{-n_i}(x) \to x_k$ (x). Por tanto $\vartheta(x) \subseteq \omega(x) \cap \alpha(x)$. Lo que queda de la prueba es inmediato de la Proposición 1.4. $\square$

1.2.1. Número de rotación

Lema 1.1 *Sea $f : S^1 \to S^1$ una función continua. Dados $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $p \in S^1$ con $\pi(x_0) = p$, $\pi(y_0) = f(p)$, existe $\delta > 0$ (independiente de x_0 y y_0) y una función $F : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ continua que cumple:*

- $\pi \circ F = f \circ \pi$,
- $F(x_0) = y_0$.

Demostración. Como S^1 es compacto y f es continuo, implica que f es uniformemente continuo. De ello se toma $\delta > 0$, $\delta < \frac{1}{4}$, tal que

$$f([p-\delta, p+\delta]) \subseteq [f(p) - \frac{1}{4}, f(p) + \frac{1}{4}], \tag{1.2}$$

para cualquier $p \in S^1$. Dado que se cumple $\pi([x_0-\delta, x_0+\delta]) = [p-\delta, p+\delta]$, de (1.2) se tiene que

$$f \circ \pi(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \pi([y_0 - \frac{1}{4}.y_0 + \frac{1}{4}]).$$

Sea $\sigma : [f(p)-\frac{1}{4}, f(p)+\frac{1}{4}] \to [y_0-\frac{1}{4}, y_0+\frac{1}{4}]$ la función inversa de $\pi \mid_{[y_0-\frac{1}{4},y_0+\frac{1}{4}]}$. A partir de ello se define $F : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ por $F = \sigma \circ f \circ \pi$ cerca de x_0 y como f y σ son continuas, entonces F es continua. Además cumple que $\pi \circ F = f \circ \pi$ y $F(x_0) = \sigma \circ f \circ \pi(x_0) = \sigma(f(p)) = y_0$. $\square$

Proposicion 1.5 *Sean $f : S^1 \to S^1$ continua, $x_0 \in \mathbb{R}$ y $y_0 \in \pi^{-1}(f(\pi(x_0)))$. Entonces, existe un único mapeo continuo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:*

1. $F(x_0) = y_0$.
2. $\pi \circ F = f \circ \pi$.

Definición 1.2.2 (Levantamiento) *Un mapeo continuo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica $\pi \circ F = f \circ \pi$ se llama levantamiento de f.*

- Si F_1 y F_2 son dos levantamiento de f, entonces $F_1(x) = F_2(x)+k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.
- Sea F un levantamiento de f. Entonces de $\pi \circ F = f \circ \pi$ se deduce que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $F(x + 1) = F(x) + m$. Este m no depende del levantamiento.

Definición 1.2.3 (Grado) *Se llama $deg(f)$ al entero m tal que $F(x+1) = F(x)+m$, donde F es un levantamiento de f.*

Definición 1.2.4 *Se dice que $f \in Hom(S^1)$ preserva orientación si un levantamiento F de este, es una función creciente.*

- *Se denota como* $f \in Hom_+(S^1)$.

Si $f \in Hom_+(S^1)$ y F es un levantamiento de f. Entonces:

- $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un homeomorfismo creciente.
- $deg(f) = 1$.
- $F(x+m) = F(x) + m$, para todo $m \in \mathbb{Z}$.
- $F^n(x+1) = F^n(x) + 1$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- $F - id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es periódica de periodo 1.
- $F^n - id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es periódica de periodo 1 para todo $n > 0$.

Lema 1.2 *Sea* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números reales tal que*

$$|a_{m+n} - a_m - a_n| \leq C$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}$ *y alguna constante* $C \in \mathbb{R}$. *Entonces* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n}$ *existe.*

Demostración. Para $\varepsilon > 0$ escojamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{2C}{N} < \varepsilon$. Debido a la hipótesis

$$|a_{2n} - a_n - a_n| \leq C$$

$$|a_{3n} - a_{2n} - a_n| \leq C$$

$$|a_{4n} - a_{3n} - a_n| \leq C$$

$$\vdots$$

$$|a_{mn} - a_{(m-1)n} - a_n| \leq C$$

resulta

$$|a_{mn} - ma_n| \leq (m-1)C$$

Luego, para $n, m \geq N$, se obtienen las expresiones

$$\left|\frac{a_{mn}}{mn} - \frac{a_n}{n}\right| \leq \frac{(m-1)C}{mn} \leq \frac{C}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\left|\frac{a_{mn}}{mn}-\frac{a_m}{m}\right| \leq \frac{(n-1)C}{mn} \leq \frac{C}{m} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sumando estas expresiones, para $n, m \geq N$, se tiene

$$\left|\frac{a_n}{n}-\frac{a_m}{m}\right| \leq \left|\frac{a_{mn}}{mn}-\frac{a_n}{n}\right| + \left|\frac{a_{mn}}{mn}-\frac{a_m}{m}\right| < \varepsilon.$$

Es decir $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y por tanto converge. $\square$

Teorema 1.4 (Poincaré) *Sean $f \in Hom_+(S^1)$ y F un levantamiento. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$ existe*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F^n(x)}{n}$$

y es independiente de x.

Demostración. Primero se prueba la independencia de x, es decir si $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, existen $m, k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$m \leq x < y \leq m+k.$$

Si F un levantamiento de f, se tiene F^n es creciente y entonces

$$F^n(m) \leq F^n(x) < F^n(y) \leq F^n(m+k),$$

de ello se tiene

$$|F^n(x) - F^n(y)| < |F^n(m+k) - F^n(m)|.$$

Como, $F^n(m+k) = F^n(m) + k$, se tiene

$$|F^n(x) - F^n(y)| < |k|$$

y entonces

$$\frac{F^n(x)}{n} - \frac{F^n(y)}{n} = \frac{F^n(x) - F^n(y)}{n}$$

$$\left|\frac{F^n(x)}{n} - \frac{F^n(y)}{n}\right| < \frac{|k|}{n}$$

Aplicando el limite se obtiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F^n(x)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{F^n(y)}{n}$$

Ahora se prueba la existencia, sea $x \in \mathbb{R}$, se definen $a_n = F^n(x) - x$ y k_n de modo que $k_n \leq a_n < k_n + 1$. Se cumple que

$$\begin{aligned} |a_{m+n} - a_m - a_n| &= |F^{m+n}(x) - F^m(x) - F^n(x) + x| \\ &= |F^m(F^n(x)) - F^m(x) - (F^n(x) - x)| \end{aligned}$$

Luego debido a $k_n \leq a_n < k_n + 1$

$$k_n \leq F^n(x) - x < k_n + 1 \tag{1.3}$$

$$x + k_n \leq F^n(x) < x + k_n + 1$$

Como F^m es creciente

$$F^m(x + k_n) \leq F^m(F^n(x)) < F^m(x + k_n + 1)$$

y luego

$$F^m(x) + k_n \leq F^m(F^n(x)) < F^m(x) + k_n + 1$$

$$k_n \leq F^m(F^n(x)) - F^m(x) < k_n + 1$$

junto con (1.3) tenemos

$$|F^m(F^n(x)) - F^m(x) - (F^n(x) - x)| < |k_n + 1 - k_n| < 1$$

Lo que implica $|a_{m+n} - a_m - a_n| < 1$, y por el Lema 1.2 el límite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$$

existe, luego $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{F^n(0)}{n}$ también existe. □

Definición 1.2.5 (Número de traslación) *Sea F un levantamiento de $f \in Hom_+(S^1)$. Se define el número de traslación del levantamiento F como*

$$\rho(F) = \lim_{n\to+\infty} \frac{F^n(x)}{n}.$$

- Si F_1 es otro levantamiento de f, entonces $F_1(x) = F(x)+k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, e implica que $\rho(F_1) = \rho(F) + k$.
- $\rho(F^m) = m\rho(F)$.

Definición 1.2.6 (Número de rotación) *Sea $f \in Hom_+(S^1)$. Se llama número de rotación de f a $\rho(f) = \pi(\rho(F)) = \rho(F) \, mod \, 1$, donde F es un levantamiento de f.*

El número de rotación está bien definido debido al Teorema 1.4.

Número de rotación racional

Proposicion 1.6 *Sea $f \in Hom(S^1)$. Entonces*

$$\rho(f) \in \mathbb{Q} \, (mod \, 1) \textit{ si y sólo si } f \textit{ tiene puntos periódicos.}$$

En este caso, si $\rho(f) = \frac{p}{q}$, con $(p, q) = 1$, todos los puntos periódicos tienen periodo q.

Demostración. ($\Leftarrow$) Sea F levantamiento de f. Como f tiene un punto periódico $\pi(x)$ (digamos de periodo q) entonces existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $F^q(x) = x + p$. Luego, $F^{nq}(x) = x + np$ y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^{nq}(x)}{nq} = \lim_{n\to\infty} \frac{x + np}{nq} = \frac{p}{q}$$

y por lo tanto $\rho(f) = \frac{p}{q}(mod 1)$.
($\Rightarrow$) Por la propiedad del numero de rotación

$$\rho(f^m) = m\rho(f)(mod 1)$$

Si $\rho(f) = \frac{p}{q}$ entonces $\rho(f^q) = 0$. Basta demostrar que si $\rho(f) = 0$, entonces f tiene puntos fijos. Sea F tal que $\rho(F) = 0$. Si F no tiene puntos fijos, como $F - id$ es periódica, existe δ tal que $|F(x) - x| \geq \delta$. Por otra parte $F(x) > x$ para todo x o $F(x) < x$ para todo x. Si se supone lo primero $F(x) > x$ (el otro caso es análogo), entonces

$$F(0) > \delta, \, F2(0) > F(0) + \delta > 2\delta, \, \dots, \, F^n(0) > n\delta.$$

Entonces $\delta < \frac{F^n(0)}{n} \to 0$.
Finalmente si $\rho(f) = \frac{p}{q}, (p,q) = 1$ y se ve que todos los puntos periódicos tiene periodo q. Sea F un levantamiento de f tal que $\rho(F) = \frac{p}{q}$ y sea $\pi(x)$ periódico por f. Entonces, existen r, s tales que $F^r(x) = x + s$. Ahora

$$\rho(f) = \frac{p}{q} = \lim_{r\to\infty} \frac{F^{rs}(x)}{rs} = \frac{s}{r},$$

entonces, $s = mp$ y $r = mq$ para algún m. Si se supone $F^q(x) - p > x$, entonces

$$F^2q(x) - 2p = F^q(F^q(x) - p) - p \geq F^q(x) - p > x.$$

Entonces $x < F^{mq}(x) - mp = F^r(x) - s$, lo cual es absurdo. Análogamente si $F^q(x) - p < x$ se llega a una contradicción. Así $\pi(x)$ es periódico por f si y sólo si $F^q(x) = x + p$. Por consiguiente, todos los puntos periódicos de f tienen período q. $\square$

Proposicion 1.7 *El número de rotación es invariante por conjugaciones.*

Demostración. Sean $f, g \in Hom_+(S^1)$, donde $g = h^{-1} \circ f \circ h$, para algún $h \in Hom(S^1)$, para tal caso sea F levantamiento de f y H levantamiento de h, de esto H^{-1} es un levantamiento de h^{-1}, además $G = H^{-1} \circ F \circ H$ es un levantamiento de g. Luego, existe L tal que $|H^{-1}(y) - y| < L$, para todo $y \in \mathbb{R}$ lo que implica que $|G^n(x) - F^n(H(x))| < L$, para todo entero n y así

$$\rho(G) = \lim_{n\to\infty} \frac{G^n(x)}{n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{H^{-1}(F^n(H(x))) - F^n(H(x))}{n} + \frac{F^n(H(x))}{n})$$

$$\rho(G) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(H(x))}{n} = \rho(F),$$

de donde se concluye $\rho(g) = \rho(f)$. $\square$

Número de rotación irracional

Teorema 1.5 *Sea $f \in Hom_+(S^1)$ con $\rho(f) \notin \mathbb{Q}\,(mod\,1)$. Entonces $\Omega(f)$ es minimal.*

Demostración. Sea $\Lambda \subseteq \Omega(f)$ compacto e invariante no vació. Entonces $S^1 \backslash \Lambda$ es abierto. Sea $I = (a, b)$ una componente conexa de $S^1 \backslash \Lambda$. Luego $f^n(I) \cap I = \emptyset$, para todo n positivo, pues de lo contrario f tiene puntos periódicos. Luego $I \subseteq S1^{\backslash}\Omega(f)$. De esto $\Omega(f) \subseteq \Lambda$. Por tanto, $\Omega(f)$ es minimal. $\square$

Teorema 1.6 *Sea $f \in Hom_+(S^1)$ con $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$. Entonces $\Omega(f) = S^1$ o $\Omega(f)$ es perfecto con interior vació (i.e., es un conjunto de cantor).*

Demostración. $\Omega(f)$ es perfecto pues es minimal. Si $\Omega(f)$ no tuviera interior vació, entonces $\omega(f)$ será abierto y como es también cerrado, $\Omega(f) = S^1$. $\square$

Proposicion 1.8 *Sea $f \in Hom_+(S^1)$ con $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$. Sea F levantamiento tal que $\rho(F) = \alpha$. Entonces para todo n_1, n_2, m_1, $m_2 \in \mathbb{Z}$ se cumple*

$$n_1\alpha + m_1 < n_2\alpha + m_2 \Leftrightarrow F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2.$$

Demostración. Se fijan $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. Como $\rho(F) \notin \mathbb{Q}$, el signo de $p(x) = F^{n_1} + m_1 - F^{n_2}(x) + m_2$ no depende de x. Luego dados $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, si $F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$ para algún x se tiene la misma desigualdad vale para todo x. $\Leftarrow$ Para $x = 0$, esto es

$$F^{n_1}(0) - F^{n_2}(0) < m_2 - m_1$$

si se toma $y = F^{n_2}(0)$ se tiene

$$F^{n_1 - n_2}(y) - y < m_2 - m_1.$$

Luego esta relación se cumple para todo y, en particular para $y = 0$. Entonces $F^{n_1 - n_2}(0) < m_2 - m_1$, de ahí que $F^{k(n_1 - n_2)}(0) < m_2 - m_1$, entonces

$$\frac{F^{k(n_1-n_2)(0)}}{k(n_1 - n_2)} < \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2}.$$

Suponiendo que $n_1 - n_2 > 0$. Se hace tender k a $+\infty$ y se obtiene

$$\alpha \leq \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2}.$$

Como $\alpha \notin \mathbb{Q}$, se tiene

$$\alpha < \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2}.$$

De donde

$$n_1\alpha + m_1 < n_2\alpha + m_2.$$

Y Análogamente si $F^{n_1}(x) + m_1 > F^{n_2}(x) + m_2$ se tiene

$$n_1\alpha + m_1 > N_2\alpha + m_2.$$

□

Definición 1.2.7 *Dados $f, g \in Hom_+(S^1)$ se dice que f es semiconjugado a g si existe un mapeo $h : S^1 \to S^1$ continuo y sobreyectivo (de grado 1 y preservando orientación) tal que $h \circ f = g \circ h$.*

Teorema 1.7 *Sea $f \in Hom_+(S^1)$ con $\rho = \alpha \notin \mathbb{Q}$. Entonces f es semiconjugado a R_α (donde h preserva orientación). Además, si f es transitivo, f es conjugado a R_α.*

Demostración. Sea F un levantamiento de f y $x \in \mathbb{R}$. Considerando el conjunto $B = \{F^n(x) + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$. Se define una función $H : B \to \mathbb{R}$ por

$$H(F^n(x) + m) = n\alpha + m.$$

Luego H es monótona y $\overline{H(B)} = \mathbb{R}$. Entonces existe una única extensión continua de H a $\overline{B}$, monótona y además $H(\overline{B}) = \mathbb{R}$. Entonces hay una única extensión de H a $\mathbb{R}$ de forma monótona. Luego se tiene $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, monótona y sobreyectiva. Se verifica $H \circ F = T_\alpha \circ H$. Además $H(x+1) = H(x) + 1$. Luego se define $h : S^1 \to S^1$ por $h(\pi(x)) = \pi(H(x))$. h es continua, sobreyectiva y $h \circ f = \mathsf{R}_\alpha \circ h$. Por otra lado, si f es transitivo se tiene que $\overline{B} = \mathbb{R}$ y H es un homeomorfismo. □

Todo lo visto, anteriormente, es conocido como teorema de clasificación de Poincaré. Para más detalles sobre la dinámica en S^1 se puede consultar [12, 30, 33, 35].

Número de rotación $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$	**Número de rotación $\alpha \notin \mathbb{Q}$**
Órbitas periódicas con el mismo periodo que $\mathsf{R}_{\frac{p}{q}}$ y ordenado de la misma manera que una órbita de $\mathsf{R}_{\frac{p}{q}}$.	Una órbita densa en S^1 que está ordenado de la misma manera como una órbita de R_α (como son los dos casos siguientes).
Una órbita homoclínica: se acerca a una órbita periódica dada cuando $n \to +\infty$ y cuando $n \to -\infty$.	Una órbita densa en un conjunto de Cantor.
Una órbita heteroclínica: se acerca a dos diferentes órbitas periódicas cuando $n \to +\infty$ y cuando $n \to -\infty$ (esto pasa siempre y cuando existe más de una órbita periódica).	Una órbita homoclínica a un conjunto de Cantor.

Cuadro 1.1: Clasificación de Poincaré

1.2.2. Teorema de Denjoy

Los siguientes resultados pueden encontrarse en [10].

Definición 1.2.8 *Sea $f : S^1 \to S^1$, $J \subseteq S^1$. Se dice que J es un intervalo errante si*

- $J, f(J), f^2(J), \cdots$ *son disjuntos dos a dos.*
- $\omega(J) = \bigcup_{x \in J} \omega(x)$ *no es una única órbita periódica.*

Ejemplo 1.2.3 *Sea $f \in Hom(S^1)$, $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$, $\Omega(f) \subsetneq S^1$. Una componente de $S^1 \backslash \Omega(f)$ es un intervalo errante.*

Lema 1.3 (Distorsión limitada) *Sea $f : S^1 \to S^1$ un difeomorfismo de clase C^2. Entonces existe C tal que*

$$\frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} \leq exp\left(C \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(x) - f^i(y)| \right).$$

Lema 1.4 *Sea $f : S^1 \to S^1$ difeomorfismo de clase C^2. Sea $J \subseteq S^1$ intervalo tal que $\sum_{n\geq 0} |f^n(J)| < \infty$. Entonces existe $T \supsetneq J$ tal que $|f^n(T)| \leq 2|f^n(J)|$, para todo $n \geq 0$.*

Teorema 1.8 *Sea $f : S^1 \to S^1$ un difeomorfismo de clase C^2. Entonces f no tiene intervalos errantes.*

Corolario 1.1 *Sea $f : S^1 \to S^1$ un difeomorfismo de clase C^2, con $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$. Entonces f es conjugado a $\mathsf{R}_{\rho(f)}$.*

Este corolario, debido a Schwarz (en [34]) es generalizado por Denjoy y considera hipótesis mas débiles pues, no es necesario que f sea de clase C^2. En [10] Denjoy muestra que existen difeomorfismos de clase C^1 con número de rotación irracional los cuales no son conjugados a una rotación.

Teorema 1.9 (Denjoy) *Sea $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Entonces existe un difeomorfismo $f : S^1 \to S^1$ de clase C^1 con $\rho(f) = \alpha$ y f tiene un intervalo errante.*

Demostración. Sea $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $\lambda_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n = 1$ y además $\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \to 1$. Por ejemplo $\lambda_n = \dfrac{2}{3(|n|+1)(|n|+2)}$. Se coloca en S^1 intervalos I_n, $|I_n| = \lambda_n$ y se ordenan en S^1 de la misma forma que $\{x_n = \mathsf{R}_\alpha^n(0) : n \in \mathbb{Z}\}$. Se sabe que si $g : S^1 \to S^1$ es continua y $\int_{S^1} g = 1$ entonces existe $f : S^1 \to S^1$ tal que $f' = g$. Luego en $I_n = (a_n, b_n)$ se define

$$f'(x) = g(x) = 1 + k_n \frac{(a_n - x)(x - b_n)}{\lambda_n^2}.$$

$$f'(x) = 1 \text{ si } x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n,$$

Donde

$$k_n = \frac{6}{\lambda_n}(\lambda_{n+1} - \lambda_n).$$

Entonces

$$\int_{I_n} g(x) = \int_{a_n}^{b_n} g(x) = \lambda_n + \frac{k_n}{\lambda_n^2}\frac{\lambda_n^3}{6} = \lambda_{n+1}.$$

Entonces $\int_{S^1} g(x) = 1$. Así se define $f : S^1 \to S^1$ por

$$f(x) = a_1 + \int_{a_0}^{x} g(x)dx.$$

Se verifica que $f(I_n) = I_{n+1}$, en efecto

$$\begin{aligned} f(a_n) &= a_1 + \int_{a_0}^{a_n} g(x)dx \\ &= a_1 + \sum_{k:I_k \subseteq (a_0,a_n)} \int_{I_k} g(x)dx \\ &= a_1 + \sum_{k:x_k \in (x_0,x_n)} |I_{k+1}| \\ &= a_1 + \sum_{k:x_k \in (x_1,x_n)} |I_k| \qquad = a_n. \end{aligned}$$

Finalmente sea $h : \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n \to S^1$ por $h(I_n) = \mathsf{R}_\alpha^n(0) = x_n$. De esta forma h preserva orientación y tiene dominio y rango denso en S^1, por tanto h se extiende continuamente a $h : S^1 \to S^1$ sobreyectiva. Además $h \circ f = \mathsf{R}_\alpha \circ h$, es decir f es semiconjugado a R_α. Entonces $\rho(f) = \alpha$. $\square$

Definición 1.2.9 (Mapeo Denjoy) *Se llama mapeo Denjoy a $f \in Hom(S^1)$ si $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$ y no es topológicamente conjugado a $\mathsf{R}_{\rho(f)}$.*

Debido a todo lo visto en esta sección se tiene que un mapeo Denjoy es un homeomorfismo del círculo sin puntos periódicos pero que no es topológicamente conjugado a una rotación del círculo.

1.3. Conceptos Básicos de Medidas de Borel

Una medida es una función que asigna un número real positivo o cero a un subconjunto del espacio en estudio. Este concepto es importante para el análisis matemático, la geometría y para la teoría de la probabilidad. No siempre es posible asignar una medida a cualquier subconjunto por lo que estos deben cumplir ciertas condiciones.

Definición 1.3.1 (σ-álgebra) *Una familia de subconjuntos de X, Σ, es una σ-álgebra de X si cumple con las siguientes condiciones*

(i) $\emptyset \in \Sigma$.

(ii) Si $A \in \Sigma$ entonces $X \backslash A \in \Sigma$.

(iii) Si $\{A_i\}_{i\in I} \subset \Sigma$ (una familia numerable de elementos de Σ) entonces $\cup_{i\in I} A_i \in \Sigma$.

Los elementos de un σ-álgebra Σ se denominan conjuntos medibles. Un par ordenado (X, Σ), donde X es un conjunto y Σ una σ-álgebra sobre X, se denomina espacio medible.

Definición 1.3.2 (Función medible) *Una función entre dos espacios medibles se denomina medible si la preimagen de todo conjunto medible es también medible; esto es, si (X, Σ_1) y (Y, Σ_2) son dos espacios medibles, una función $f : X \to Y$ es medible si para todo $E \in \Sigma_2$ implica que $f^{-1}(E) \in \Sigma_1$.*

Definición 1.3.3 (Medida) *Una medida es una función de una σ-álgebra Σ sobre X en el intervalo extendido $[0, \infty]$*

$$\mu : \Sigma \to [0, \infty]$$

que cumple las siguientes condiciones

i. $\mu(\emptyset) = 0$.

ii. $\{A_i\}_{i\in I} \subset \Sigma$ (una familia numerable de conjuntos medibles) disjuntos dos a dos $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$) entonces $\mu(\cup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} \mu(A_i)$.

Se denomina espacio de medida a la terna (X, Σ, μ).

Definición 1.3.4 (Medida de Dirac) *Una medida m_p de un conjunto X (con cualquier σ-álgebra de subconjuntos de X) se define para un punto $p \in X$ y cualquier conjunto (medible) $A \subseteq X$ por*

$$m_p(A) = \begin{cases} 0, & p \notin A; \\ 1, & p \in A. \end{cases}$$

Definición 1.3.5 (σ-álgebra generada) *Si F es una colección de subconjuntos de X, la intersección de todas las σ-álgebras que contienen a F es también una σ-álgebra, denotada por $\sigma(\mathsf{F})$ y denominada σ-álgebra generada por F. Esta es por construcción la menor σ-álgebra posible que contiene a la colección F.*

Algunos ejemplos son los siguientes

- Si $P(X)$ es el conjunto potencia del conjunto X entonces $P(X)$ es una σ-álgebra sobre X (es la mayor σ-álgebra posible sobre X).

- Para cualquier conjunto X, el conjunto $\{\emptyset, X\}$ es una σ-álgebra sobre X (es la menor σ-álgebra posible sobre X).

- La familia de subconjuntos de X que son contables o de conjunto complementario contable (esta familia es distinta del conjunto potencia de X si y sólo si X es no numerable). Esta es la σ-álgebra generada por los conjuntos unitarios de X.

Definición 1.3.6 (σ-álgebra y medida de Borel) *Si (X, τ) es un espacio topológico, a $\sigma(\tau)$ se le denomina σ-álgebra de Borel, la cual se suele denotar como $\mathfrak{B}(X)$, y a sus elementos se les llama borelianos. Evidentemente una medida μ definida sobre $\sigma(\tau)$ se le llama medida de Borel.*

En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, cabe destacar otro σ-álgebra: la formada por los conjuntos Lebesgue-medibles. Ésta contiene más conjuntos que el álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$, y es la que se prefiere en teoría de integración. La construcción de la medida de Lebesgue, basada en medidas exteriores, se debe a Constantin Carathéodory, y se realiza de la siguiente manera:
Para cualquier subconjunto B de $\mathbb{R}^n$, se puede definir

$$\lambda^*(B) = \operatorname{ínf} \left\{ \operatorname{vol}(M) : M \supseteq B \text{ y } M = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \right\},$$

donde cada C_i es un producto cartesiano de n intervalos reales finitos. Además, $vol(M)$ es la suma de los productos de las longitudes de los intervalos que forman cada C_i. Se dice entonces que un conjunto A es Lebesgue-medible si

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(B - A) \text{ para todo conjunto B.}$$

Los conjuntos Lebesgue-medibles forman una σ-álgebra, y la medida de Lebesgue se define como $Leb(A) = \lambda^*(A)$ para todo conjunto medible A.

Definición 1.3.7 (Soporte) *El soporte de una medida de Borel μ es el conjunto de todos los puntos $x \in X$ tal que $\mu(U) > 0$ para cada vecindad U de x.*

- El soporte de una medida μ se denota por *supp*(μ).

Definición 1.3.8 (Átomo) *Sea (X, Σ, μ). Un punto $x \in X$ se le llama átomo de la medida μ si $\mu(G) > 0$ para todo $G \in \Sigma$ con $x \in G$.*

Definición 1.3.9 (Medida no atómica) *Una medida μ es no atómica si no existen átomos en X.*

- *Se llamará espacio métrico no atómico, al espacio métrico en el cual existen medidas de Borel de probabilidad no atómicas.*

Los siguientes resultados se encuentran en [27].

Teorema 1.10 *Sea X un espacio métrico separable completo sin puntos aislados entonces existe una medida no atómica sobre X.*

Corolario 1.2 *Sea X un espacio métrico separable completo con un número de puntos no numerable entonces existe una medida no atómica sobre X.*

Definición 1.3.10 (Conjunto de medida total) *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, un conjunto $B \in \Sigma$ se dice de medida total si $\mu(X \backslash B) = 0$.*

Definición 1.3.11 (Pullback) *Sean X, Y dos espacios métricos y $f : X \to Y$ un mapeo continuo. Sea μ una medida de Borel sobre X se define la medida pullback $f_*(\mu)$ sobre Y como*

$$f_*(\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A)); \text{ para todo } A \in \mathfrak{B}(Y)$$

Definición 1.3.12 (Medida invariante) *Sea $f : X \to X$un mapeo continuo de un espacio métrico X. Una medida de Borel μ de X es invariante si $f_*\mu = \mu$.*

Para finalizar este capítulo, se tendrá en cuenta lo siguiente. Todo mapeo Denjoy f tiene una única medida invariante, además el soporte de esta medida es el único conjunto minimal de f. El complemento de este conjunto minimal se le llama *gaps* de f. A mayor detalle puede leerse [2, 12].

Capítulo 2

Expansividad, POTP y Estabilidad Topológica

En este capítulo se muestran propiedades sobre expansividad, POTP y estabilidad topológica y en la última sección se evidencia el resultado de Walters referente a estas definiciones meramente topológica.

2.1. Expansividad

La propiedad de ser expansiva indica de alguna forma que las órbitas de dos puntos distintos se pueden diferenciar una de la otra en cierto tiempo en el futuro o en el pasado de estas. *"El hecho de que cada punto tenga un significado dinámico distinto, permite prever una rica interacción entre la dinámica y la topología"* [18].

Definición 2.1.1 (Expansividad) *Sea X un espacio métrico compacto. $f \in Hom(X)$ es expansivo, si existe $\varepsilon_f > 0$ tal que si $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon_f$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ entonces $x = y$.*

- ε_f es llamado constante de expansividad y puede variar respecto a la métrica pero la noción de ser expansivo es independiente de la métrica.

Este concepto fue introducido por Utz en [36].

Al conjunto $\Gamma_\varepsilon^f(x) = \{y \in X : d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon; \forall n \in \mathbb{Z}\}$ se le llama comúnmente *bola dinámica*. La definición de expansividad también podría expresarse de la siguiente forma

$$f \text{ es expansivo } \Leftrightarrow \exists > 0\, \varepsilon \text{ tal que } \Gamma_\varepsilon^f(x) = \{x\}, \forall x \in X$$

En los siguientes ejemplos vemos porque es necesario que se separen en algún n positivo o negativo, en vez de pedir una de las dos opciones.

Ejemplo 2.1.1 *Sea $A : R^n \to R^n$ una transformación lineal diagonalizable para la cual todos sus valores propios son mayores que uno (o menores).*

En efecto, dados dos puntos x y y distintos, se cumple que la distancia entre x e y para los iterados futuros es

$$\|A^n x - A^n y\| \geq \lambda^n \|x - y\|,$$

donde λ denota el menor de los valores propios. Así tomando x y y distintos, su distancia tiende a infinito para los iterados hacia el futuro.

Ejemplo 2.1.2 *Se define en S^1 (pensado como los puntos del plano complejo con $|z| = 1$) $f : S^1 \to S^1$ de forma tal que $f(z) = z^2$.*

Demostración. En efecto, dados dos puntos distintos, por ejemplo $x_1 = e^{i2\pi t_1}$ y $x_2 = e^{i2\pi t_2}$ con $t_2 - t_1 \notin \mathbb{Z}$, en algún momento futuro se separan. Se tiene

$$f^n(x_i) = e^{i2\pi 2^n t_i}; \quad i \in \{1, 2\}.$$

Basta ver que los conjuntos $2^n t_1 + \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} : x = n + 2^n t_1; \quad n \in \mathbb{Z}\}$ y $2^n t_2 + \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} : x = n + 2^n t_2; \quad n \in \mathbb{Z}\}$ están lejos para algún valor de n. Pues si $|t_1 - t_2| \leq \dfrac{1}{4}$ para algún $n > 0$ se tiene $2^n|t_1 - t_2| = |2^n t_1 - 2^n t_2| > \dfrac{1}{4}$.
$\square$

El siguiente Teorema debido a Utz [36] brinda la respuesta de que la expansividad no se debe dar solo para algún sentido.

Teorema 2.1 (Utz) *Sea $f : M \to M$ homeomorfismo expansivo y M espacio métrico compacto. Entonces, si es expansivo al futuro (i.e. existe $\alpha > 0$ de forma tal que $d(f^n(x), f^n(y)) < \alpha \quad \forall n > 0$ implica $x = y$) entonces M es un conjunto finito.*

Demostración. Se resume, a continuación, la demostración dada en [18] en la cual se muestran muchas de las ideas con las que se trabaja en el contexto de homeomorfismos expansivos.

Primero se ve que todos los puntos tienen que ser "estables" para el pasado, es decir, existe un valor $\epsilon < \alpha$ de forma tal que todo punto $x \in M$ posee un entorno U_x que cumple que si $y \in U_x$ entonces $d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \epsilon$ para todo $n \geq 0$. Esto se tiene que cumplir pues en caso contrario existirán puntos $y_n \to x$ de forma tal que para cierto valor k_n se cumple que $d(f^{-k_n}(y_n), f^{-k_n}(x_n)) > \epsilon$ (suponiendo que este valor k_n es el primero para el cual pasa lo mencionado pues y_n se encuentra a menos de ϵ de x). Se observa que k_n tiene que tender a $+\infty$ pues siendo f uniformemente continua, necesita cada vez más iterados para hacer que puntos arbitrariamente cercanos superen la distancia ϵ que se encuentra fija. Ahora, se considera los puntos $z_n = f^{-k_n}(y_n)$ y $w_n = f^{-k_n}(x)$ que cumplen que $d(z_n, w_n) > \epsilon$ y además, verifican que $d(f^l(z_n), f^l(w_n)) < \epsilon$ para todo $1 \leq l \leq k_n$. Sea $n_j \to +\infty$ de forma tal que $z_{n_j} \to z$ y $w_{n_j} \to w$ por lo cual se tiene que $d(z, w) > \epsilon$ en particular, son puntos distintos. Se ve como $f(z)$ y $f(w)$ se mantienen siempre a menos de para el futuro(3) violando la expansividad al futuro. Para eso, se utiliza que

$$d(f^m(z), f^m(w)) = \lim_{j \to \infty} d(f^m(z_{n_j}), f^m(w_{n_j})) \leq \epsilon$$

pues para n_j suficientemente grande (de forma tal que $k_{n_j} > m$) se cumple que $d(f^m(z_{n_j}), f^m(w_{n_j})) \leq \epsilon$.

Es fácil ver que si dos puntos se mantienen cerca para el pasado tienen que también acercarse. Además, se puede ver que lo hacen uniformemente. Lo que se quiere decir es que $\forall \epsilon > 0$ ($\epsilon < \alpha$) y $\forall \delta > 0$ existe un valor de N de forma tal que si $d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < \epsilon \quad \forall n \geq 0$ entonces se cumple que si$m > N$ entonces $d(f^{-m}(x), f^{-m}(y)) < \delta$.
Si esto no pasara, para todo N existirán puntos son x_N e y_N verificando que $\delta \leq d(f^{-k}(x_N), f^{-k}(y_N)) < \epsilon < \alpha$ para todo $0 \leq k \leq N$. Si se considera $N_j \to +\infty$ de forma tal que $f^{-N_j}(x_{N_j}) \to z$ e $f^{-N_j}(y_{N_j}) \to w$ se cumplirá que $d(z, w) > \delta$ pero sin embargo $d(f^n(z), f^n(w)) < \epsilon < \alpha(5)$ para todo $n \geq 0$ violando la expansividad al futuro.

Con lo obtenido se puede probar que M es un conjunto finito. Como todo punto tiene un entorno U_x para el cual los puntos se mantienen cerca para el pasado, se tiene un cubrimiento de M por estos abiertos del cual se puede seleccionar un subcubrimiento finito por la compacidad de M. Sea $U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}$ ese subcubrimiento y sea $n_k \to \infty$ de forma tal que $f^{-n_k}(x_i) \to x_i^\infty \forall i$.

Como se sabe que para n_k suficientemente grande $f^{-n_k}(U_{x_i})$ se encuentra en un entorno arbitrariamente pequeño de x_i^∞ al mismo tiempo que $f^{-n_k}(M) = M$ se concluye que $M = \{x_1^\infty, x_2^\infty, \dots x_n^\infty\}$. $\square$

En los Ejemplos 2.1.1 y 2.1.2 no se cumplen las hipótesis del teorema, en el primer caso por no ser $\mathbb{R}^n$ compacto y en el segundo por la transformación no invertible.

Ejemplo 2.1.3 (El shift de Bernoulli de dos símbolos) *Sea* $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ *dotado de la topología producto dada al poner la topología discreta en* $\{0,1\}$. *Esta topología en* $\Sigma = \{\{x_n\} : a_n \in \{0,1\} \forall n \in \mathbb{Z}\}$ *es sabido que es equivalente a la inducida por la siguiente métrica*

$$d(x,y) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}}; x = \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}, y = \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}.$$

y por ser producto de compactos es un conjunto compacto. En Σ *se puede definir la siguiente transformación* $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ *dada por* $\sigma(\{x_n\}) = \{y_n\}$, *donde* $y_n = x_{n-1}$. *En pocas palabras,* σ *mueve la sucesión* $\{x_n\}$ *un lugar para la derecha.* σ *es expansivo.*

Demostración. Tomando dos sucesiones diferentes $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$. Por ser distintas, existe n_0 tal que $x_{n_0} \neq y_{n_0}$ por lo cual $|x_{n_0} - y_{n_0}| = 1$, luego

$$d(\sigma^{n_0}(\{x_n\}), \sigma^{n_0}(\{y_n\}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|x_{n+n_0} - y_{n+n_0}|}{2^{|n|}} \geq \frac{|x_{n_0} - y_{n_0}|}{2^{|0|}} = 1.$$

Lo que prueba que 1 es una constante de expansividad. $\square$

En [12] se puede encontrar una introducción a esta transformación junto con algunas propiedades, como el que sus puntos periódicos son densos.

Ejemplo 2.1.4 (El Anosov en $\mathbb{T}^2$) *Tomando en $\mathbb{R}^2$ la transformación lineal A dada por la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz, tiene coeficientes enteros y determinante uno, por lo cual la inversa también tiene coeficientes enteros. Los valores propios son uno mayor y otro menor a uno y sus vectores propios (ortogonales) hacen con el eje Ox un ángulo irracional. Se puede por lo tanto, inducir a partir de esta transformación, un difeomorfismo en el toro $\mathbb{T}^2$ pensado como $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Diagonalizando la matriz y tomando dos puntos diferentes, se ve que alguna de sus coordenadas difieren. Por ejemplo, la asociada al valor propio mayor que uno, pero entonces, la distancia en esa dirección crecerá exponencialmente en $\mathbb{R}^2$. Para ver que en $\mathbb{T}^2$ se puede encontrar una constante de expansividad se argumenta de forma similar al Ejemplo 2.1.2 probando que si los puntos están suficientemente cerca, su distancia crece exponencialmente, por lo cual en algún momento han de encontrarse lejos. Es fácil, en este caso, encontrar puntos que se mantienen cerca para el futuro.

Observación. Para más detalles acerca del ejemplo anterior puede verse [32, 12, 33]. En este último se muestra que un difeomorfismo Anosov lineal $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ es expansivo, transitivo y además que el conjunto de puntos periódicos es denso en el conjunto no errante el cual es todo $\mathbb{T}^n$.

Ahora, se muestra una equivalencia para la expansividad, estos resultados se pueden encontrar en [16] y [18].

Definición 2.1.2 (Función de Lyapunov) *Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo donde M es un espacio métrico compacto. Se dice que $V : \{(x, y) \in M \times M : d(x, y) \leq \alpha\} \to \mathbb{R}$ continua es una función de Lyapunov para f si se verifican las siguientes propiedades:*

- $V(x, x) = 0 \quad \forall x \in M$.
- $\triangle V(x, y) = V(f(x), f(y)) - V(x, y) > 0 \quad \forall x \neq y$ *siempre que esté bien definido.*

A partir de las funciones de Lyapunov se puede caracterizar los sistemas expansivos como se ve en el siguiente teorema. En [18] se puede revisar la prueba completa.

Teorema 2.2 *$f : M \to M$ es expansivo si y sólo si f admite una función de Lyapunov.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Sean x e y en M distintos de forma tal que $V(x, y) \geq 0$ (en caso contrario se argumenta de igual forma para el pasado) y suponiendo que se mantienen a menos de para el futuro. Entonces, se sabe que se tiene definido $V(f^n(x), f^n(y))$ para todo $n > 0$ y que verificará $V(f^n(x), f^n(y)) > V(f(x), f(y)) > 0$ para todo $n > 0$ (esto es por la segunda condición para V). Como V es continua y vale cero en la diagonal, teniendo en cuenta que existe $\epsilon > 0$ de forma tal que si $d(z, w) < \epsilon$ entonces $V(z, w) < V(f(x), f(y))$ por lo tanto, se concluye que $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \epsilon$ para todo $n > 0$. Como $K = \{(z, w) \in M \times M : \epsilon \leq d(z, w) \leq \alpha\}$ es compacto y V es positiva en dicho conjunto, lo que implica que V alcanza un mínimo $\delta > 0$ en K. Juntando esto con la definición de V, se concluye que $V(f^n(x), f^n(y)) \geq (n - 1)\delta$ lo cual es absurdo pues por ser K compacto V tiene que encontrarse acotada allí. $\square$

Keynes y Robertson en [15] dan las siguientes definiciones.

Definición 2.1.3 (Generador) *Sea $f \in Hom(X)$. Un cubrimiento finito $\mathcal{A}$ de X es un generador para f si para toda bisucesión $\{A\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de miembros de $\mathcal{A}$ se tiene que*

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^{-n}(\overline{A_n}) \text{ es a lo más un punto.}$$

Definición 2.1.4 (Generador débil) *Sea $f \in Hom(X)$. Un cubrimiento finito $\mathcal{A}$ de X es un generador débil para f si para toda bisucesión $\{A\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de miembros de $\mathcal{A}$ se tiene que*

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^{-n}(A_n) \text{ es a lo más un punto.}$$

Si $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ son cubrimientos abiertos de X, escribiendo $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ al cubrimiento $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \{A \cap B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$. Un cubrimiento abierto $\mathcal{B}$ es un refinamiento del cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ si para todo B en $\mathcal{B}$ existe A en $\mathcal{A}$ que contiene a B y se denota como $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$. Si $f : X \to X$ es un mapeo sobreyectivo, entonces $f^{-1}(\mathcal{A}) := \{f^{-1}(\mathcal{A}) : A \in \mathcal{A}\}$ es un cubrimiento abierto de X y se cumple lo siguiente:

$$f^{-1}(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = f^{-1}(\mathcal{A}) \vee f^{-1}(\mathcal{B}),$$

$$f^{-1}\mathcal{A} \leq f^{-1}(\mathcal{B}) \text{ si } \mathcal{A} \leq \mathcal{B}.$$

Con ello se puede probar que tener un generador o un generador débil es equivalente a ser expansivo.

Teorema 2.3 *Sea X un espacio métrico compacto y $f \in Hom(X)$ entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(1) f es expansivo,

(2) f tiene un generador,

(3) f tiene un generador débil.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sea ε una constante de expansividad para f y por la compacidad se puede tomar un cubrimiento finito $\mathcal{A}$ de bolas abiertas de radio $\frac{\varepsilon}{2}$. Ahora, suponiendo que existen x y y tal que

$$x, y \in \bigcap_{n \in \mathcal{Z}} f^{-n}(\overline{A_n}),$$

donde $A_n \in \mathcal{A}$. Entonces $x, y \in f^{-n}(\overline{A})$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Lo que implica

$$f^n(x), f^n(y) \in \overline{A_n}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon$ para cada n que debido a la expansividad de f se tiene $x = y$. Lo que prueba que $\mathcal{A}$ es un generador de f.
(2) $\Rightarrow$ (3). Esto es claro pues para cualquier generador $\mathcal{A}$ y una sucesión A_n de este se tiene $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}(A_n) \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}(\overline{A_n})$. El mismo generador es un

generador débil.
(3) $\Rightarrow$ (1). Suponiendo que $\mathcal{A}$ es un generador débil. Sea $\varepsilon > 0$ un número de Lebesgue para $\mathcal{A}$. Si $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon$ para $n \in \mathbb{Z}$, luego para cada n existe A_n en $\mathcal{A}$ tal que $f^n(x), f^n(y) \in A_n$ y entonces $x, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(A_n)$ el cuál es a lo más un elemento significa que $x = y$. Por tanto f es expansiva. $\square$

Proposicion 2.1 *Sea $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, f es expansivo si y sólo si f^k es expansivo.*

Demostración. Si f es expansivo por el teorema anterior se tiene que existe un generador $\mathcal{A}$ para f entonces $\mathcal{A} \vee f^{-1}(\mathcal{A}) \vee f^{-2}(\mathcal{A}) \vee \cdots \vee f^{|k|-1}(\mathcal{A})$ es un generador para f^k. Si $\mathcal{A}$ es un generador para f^k también lo es para f. $\square$

En el siguiente teorema se muestra un resultado muy conocido, este muestra una equivalencia de expansividad y un conjunto aislado (puede verse en [1]). Se denota por $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ a la diagonal de $X \times X$. Recordando dado un mapeo f de un espacio métrico, se llama *aislado* a un conjunto invariante I si existe una vecindad compacta U tal que $I = \{z \in U : f^n(z) \in U, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}\}$.

Teorema 2.4 *Un homeomorfismo f de un espacio métrico X es expansivo si y solo si la diagonal Δ es un conjunto aislado de $f \times f$.*

La propiedad expansiva es invariante por conjugación.

Teorema 2.5 *Sea $f \in Hom(X)$ expansivo. Si g es topológicamente conjugado a f entonces es expansivo.*

Demostración. Sea h en $Hom(X,Y)$. Sea $g = h \circ f \circ h^{-1} \in Hom(Y)$. Por la continuidad de h^{-1} sea $x, y \in Y$ se tiene que para todo $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $d'(x,y) < \varepsilon$ implica que $d(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) < \delta$. Entonces se toma ε cuando δ es una constante de expansividad de f. Luego Si $d'(g^n(x), g^n(y)) \leq \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Fijando $n \in \mathbb{Z}$ implica que $d(h^{-1} \circ g^n(x), h^{-1}g^n(y)) < \delta$. Esto es

$$d(f^n \circ h^{-1}(x), f^n \circ h^{-1}(y)) < \delta$$

Se cumple para todo $n \in \mathbb{Z}$ por la expansividad de f se sigue que $h^{-1}(x) = h^{-1}(y)$. Por tanto $x = y$. $\square$

Definición 2.1.5 *Se dice que un punto z es un punto con semiórbitas que convergen bajo una biyección $f : X \to X$ si $\alpha(z)$ y $\omega(z)$ se reduce a un singletón.*

- *Se denota $A(f)$ el conjunto de puntos con semiórbitas que convergen bajo f.*

El siguiente teorema es dado por Jacobsen y Utz y puede revisarse con más detalle en [11]. En el siguiente capítulo se mostrará otro medio de demostrarlo según los conceptos análogos respecto a las medidas de Borel en el Corolario 3.4.

Teorema 2.6 *No existen homeomorfismos expansivos en un intervalo compacto.*

Demostración. Sea $f \in Hom([0,1])$, entonces f cumple que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$ o $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$. en ambos casos f^2 induce un homeomorfismo de $[0,1]$. Entonces $Fix(f^2)$ es cerrado. Si $Fix(f^2) = [0,1]$ entonces todos los puntos en $[0,1]$ tienen semiorbitas convergentes bajo f^2, y entonces f^2 no es expansivo. Si $Fix(f^2) \neq [0,1]$, entonces $U = [0,1] \backslash Fix(f^2)$ es un conjunto abierto no vacio, por tanto U es unión numerable de intervalos disjuntos I_i. Para $x \in U$, existe un I_j tal que $x \in I_j$.Entonces los puntos extremos de I_j son puntos fijos de f^2. Por tanto se tiene que para $x \in I_j$, $x > f^2(x) > f^4(x) > ...$, o $x < f^2(x) < f^4(x) < ....$ En cualquier caso $\{f^{2i}(x) | i \geq 0\}$ converge a un punto fijo de f^2. Como I_j es no numerable, f no es expansivo. $\square$

Teorema 2.7 *No existen homeomorfismos expansivos en S^1.*

No se da una prueba a este teorema, pues en el siguiente capítulo se muestra en el Corolario 4.4.

Para finalizar esta sección se mencionan dos resultados dados por Reddy en [31]. En el siguiente capítulo se obtienen resultados análogos.

Para todo $x, y \in X$, $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se define $A(x, y, n, m)$ como el conjunto de puntos $z \in X$ que satisface

$$A(x, y, n, m) = \{z \,:\, max\{d(f^{-i}(z), x), d(f^{i}(z), y)\} \leq \frac{1}{n}, \forall i \geq m\}.$$

La definición de este conjunto sirve para el siguiente resultado.

Lema 2.1 *Para cada mapeo biyectivo $f : X \to X$ de un espacio métrico separable X existe una sucesión $x_k \in X$ que satisface*

$$A(f) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k,k',m\in\mathbb{N}} A(x_k, x_{k'}, n, m). \tag{2.1}$$

Un resultado a consecuencia de este lema es el siguiente (se puede encontrar también una prueba en el Teorema 2.2.22 de [2]).

Teorema 2.8 *Sea $f \in Hom(X)$ expansivo. El conjunto de puntos con semiórbitas que convergen bajo f es numerable.*

Los homeomorfismos expansivos en variedades ya han sido bien estudiados. En el Ejercicio 2.1.4 se ve que $\mathbb{T}^2$ admite homeomorfismos expansivos y como se comenta en la observación de este ejercicio $\mathbb{T}^n$ también los admite. Por tanto existen homeomorfismos expansivos en variedades de cualquier dimensión. O'Brien y Reddy prueban que toda superficie de género mayor que 1 admite un homeomorfismo expansivo (ver [26]). Una pregunta común es ¿qué sucede en S^2 y dimensiones mayores? Lewowicz prueba en [17] que no existen homeomorfismos expansivos en S^2. Además, se completa la clasificación de los homeomorfismos expansivos, en $\mathbb{T}^2$ son conjugados a los Anosov lineales y las superficies de genero mayor son conjugados a los pseudo-Anosov. En dimensiones mayores se complica esta clasificación pero hay varios resultados interesantes como los dados por Vieitez en [37, 38] que utiliza la hipótesis de que el conjunto de puntos periódicos topológicamente hiperbólicos son toda la variedad, con ello Vieitez prueba que el difeomorfismo es conjugado a un difeomorfismo de Anosov lineal de $\mathbb{T}^3$.

2.2. Propiedad de sombreamiento (POTP)

Sea (X, d) un espacio métrico.

Definición 2.2.1 (POTP) *Sea $f \in Hom(X)$, se dice que f tiene la propiedad de sombreamiento (POTP: pseudo-orbit tracing property) si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda δ-pseudo órbita de f puede ser ε-sombreado por algún punto $x \in X$.*

Es claro que tener $POTP$ no depende de la elección de la métrica en X y además se conserva bajo conjugación topológica. En esta sección se hará un resumen de este concepto debido a Bowen, puede leerse muchos más resultados en [2].

La definición es en general para espacios métricos y en el caso cuando X es un espacio métrico compacto es suficiente si es válido para un lado de las δ-pseudo-órbitas es decir: $f \in Hom(X)$ tiene POTP si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda δ-pseudo órbita "positiva"$\{x_i\}_{i=0}^{+\infty}$ de f puede ser ε-sombreado por un punto de X. En efecto, si f tiene POTP entonces es claro que se cumple la afirmación anterior. Si se supone que se cumple para δ-pseudo órbitas positivas, sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ una δ-pseudo órbita para f. Para cada $n \geq 0$ se define $\{z_i^n\}_{i=0}^{+\infty}$ donde $z_i^n = x_{i-n}$ para todo $i \geq 0$, es decir son δ-pseudo órbitas positivas lo que implica que existe z^n tal que

$$d(f^i(z^n), z_i^n) \leq \varepsilon; \forall i, n \geq 0$$

Luego fijado i la sucesión $\{z^n\}_{n=0}^{+\infty}$ por la compacidad de X existe una subsucesión $n_k \to +\infty$ tal que $z^{n_k} \to z$ y por la continuidad de f^i se tiene que $f^i(z^{n_k}) \to f^i(z)$ cuando $k \to +\infty$, además $z_i^{n_k} \to x_i$ cuando $k \to +\infty$ por la forma como está definida. Por tanto

$$d(f^i(z^{n_k}), z_i^{n_k}) \leq \varepsilon; \forall\, k \geq 0$$

Aplicando el límite respecto a k se tiene $d(f^i(z), x_i) \leq \varepsilon$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, por lo que $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es ε-sombreado por f.

Ejemplo 2.2.1 *Denotando id al mapeo identidad de X. Entonces id tiene POTP si y solo si X es totalmente disconexo.*

Demostración. Si X es totalmente disconexo, para $\varepsilon > 0$ existe un recubrimiento abierto finito $\{U_0, U_1, ..., U_n\}$ de X tal que $U_i \cap U_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y $diam(U_i) < \varepsilon$ para $0 \leq i \leq n$. Escogiendo $\delta > 0$ con $\delta < \text{mín}\{d(U_i, U_j), i \neq j\}$ y se fija una δ-pseudo-órbita $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ para id. Entonces existe U_i tal que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset U_i$ y entonces se puede encontrar en U_i un punto que ε-sombrea a $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$.
Suponiendo que $diam(X) \neq 0$. Entonces existe un subconjunto $F \subset X$ cerrado conexo tal que $diam(F) > 0$. Como F es compacto, $diam(F) = d(x_0, y_0) = \varepsilon_0$ para algún $x_0, y_0 \in F$. Sea $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{3}$. Como F es conexo, para cualquier $\delta > 0$ se puede construir una δ-pseudo órbita de x_0 a y_0 en F el cual no es ε_1-sombreado. □

Lema 2.2 *Sea $f \in Hom(X)$ y $N \in \mathbb{N}$, entonces para todo ε existe $\delta > 0$ tal que cada δ-pseudo órbita finita $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ satisface que $d(f^i(x_0), x_i) \leq \varepsilon$ para $0 \leq i \leq N$ (i.e. es ε-sombreado por su primer término).*

Demostración. Suponiendo que se cumple para $N-1$. Como f es uniformemente continua, para todo $\varepsilon > 0$ existe $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$ tal que $d(x, y) < \varepsilon_1$ implica $d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$, $(x, y \in X)$.
Por la suposición existe $0 < \delta_1 \leq \varepsilon$ tal que cada δ_1-pseudo órbita finita $\{x_i\}_{i=0}^{N-1}$ es ε_1-sombreado por $x_0 \in X$.
Sea una $\frac{\delta_1}{2}$-pseudo órbita finita $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ por f. Como la $\frac{\delta_1}{2}$-pseudo órbita finita $\{x_i\}_{i=0}^{N-1}$ es una δ_1-pseudo órbita finita, entonces es ε_1-sombreado por x_0. Esto es $d(f^i(x_0), x_i) \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon$, para $0 \leq i \leq N-1$. En particular $d(f^{N-1}(x_0), x_{N-1}) \leq \varepsilon_1$ lo que implica que

$$d(f^N(x_0), f(x_{N-1})) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado como $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ es una $\frac{\delta_1}{2}$-pseudo órbita finita, se tiene $d(f(x_{N-1}), x_N) \leq \frac{\delta_1}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ lo cual implica

$$d(f^N(x_0), x_N) \leq d(f^N(x_0), f(x_{N-1})) + d(f(x_{N-1}), x_N) \leq \varepsilon.$$

Por tanto $d(f^i(x_0), x_i) \leq \varepsilon$, para $0 \leq i \leq N$. □

Teorema 2.9 *Sea $f \in Hom(X)$ y k un entero positivo. Entonces f^k tiene $POTP$ si y sólo si f tiene $POTP$.*

Demostración. Se tiene lo siguiente:

i. Sea $\varepsilon > 0$. Para $\frac{\varepsilon}{2}$ existe $0 < \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ tal que $d(x, y) < \varepsilon_1$ implica que $d(f^i(x), f^i(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ para $0 \leq i \leq k$

ii. Por el Lema 2.2 para cada ε_1-pseudo orbita-finita es $\frac{\varepsilon}{2}$-sombreado por su primer término.

iii. Para la primera parte, de ε_1 existe $\delta_1 < \varepsilon_1$ por $POTP$ de f^k.

iv. para δ_1 existe $\delta < \delta_1$ por el Lema 2.2 (respecto a f).

De esta forma dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ como antes. Ahora bien, sea $\{y_i\}_{i=0}^{+\infty}$ una δ-pseudo órbita de f, escribiendo $x_i = y_{ki}$; $i \geq 0$.
Fijando i entero positivo. $\{y_{ki+j}\}_{j=0}^{k}$ es una δ-pseudo órbita finita por f. De la parte (iv).

$$d(f^j(y_{ki}), y_{ki+j}) \leq \delta_1;\ 0 \leq j \leq k$$

Si $j = k$, $d(f^k(y_{ki}), y_{k(i+1)}) = d(f^k(x_i), x_{i+1}) \leq \delta_1$. Como se cumple para $i \geq 0$, se tiene que $\{x_i\}_{i=0}^{+\infty}$ es una δ_1-pseudo órbita por f^k. Entonces existe $y \in X$ tal que

$$(f^{ki}(y), x_i) < \varepsilon_1;\ \forall\, i \geq 0$$

Por otro lado $\{y_{ki+j}\}_{j=0}^{k}$ es una δ_1-pseudo órbita finita por f entonces

$$d(f^j(y_{ki}), y_{ki+j}) \leq \varepsilon_1 \leq \frac{\varepsilon}{2};\ 0 \leq j \leq k,\ \forall\, i \geq 0$$

Además

$$d(f^{ki+j}(y), f^j(y_{ki})) = d(f^{ki+j}(y), f^j(x_i)) \leq \frac{\varepsilon}{2};\ 0 \leq j \leq k,\ \forall\, i \geq 0.$$

Esto implica que

$$d(f^{ki+j}(y), y_{ki+j}) \leq \varepsilon;\ 0 \leq j \leq k,\ \forall\, i \geq 0$$

Por tanto

$$d(f^n(y), y_n) \leq \varepsilon;\ \forall\, n \geq 0$$

Así $\{y_i\}_{i=0}^{+\infty}$ es ε-sombreado por f. Por tanto f tiene POTP.
Para la segunda parte sea $\varepsilon > 0$ existe δ por POTP de f y sea $k \in \mathbb{N}$. Así sea $\{x_i\}_{i=0}^{+\infty}$ una δ-pseudo órbita por f^k. Entonces se construye

$$y_i = f^{i\, mod\, k}(x_m) \text{ si } km \leq i < k(m+1); \quad \forall\, m \geq 0$$

$$\{y_i\}_{i=0}^{\infty} = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), ..., f^{k-1}(x_0), x_1, f(x_1), f^2(x_1), ..., f^{k-1}(x_1), x_2, ...\}$$

$\{y_i\}_{i=0}^{+\infty}$ es una δ-pseudo órbita por f. Entonces es ε-sombreado por f, esto es existe $y \in X$ tal que

$$d(f^i(y), y_i) \leq \varepsilon;\ \forall\, i \geq 0.$$

En particular

$$d(f^k i(y), y_k i) \leq \varepsilon;\ \forall\, i \geq 0$$

$$d(f^k i(y), x_i) \leq \varepsilon;\ \forall\, i \geq 0$$

$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es ε-sombreado por f^k. Por tanto f^k tiene POTP. $\square$

Teorema 2.10 *Sea $f \in Hom(X)$. Si f tiene $POTP$ entonces f^{-1} tiene $POTP$.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ existen $\delta_1 > 0$ tal que toda δ_1-pseudo órbita es ε-sombreado por f, por la $POTP$ de f. Así, para δ_1 se toma δ tal que $d(x, y) < \delta$ implica $d(f(x), f(y)) < \delta_1$ por la continuidad uniforme y escribiendo $g = f^{-1}$. Sea $\{y_i\}_{i=0}^{+\infty}$ una δ-pseudo órbita para g entonces $d(g(y_i), y_{i+1}) \leq \delta$ para todo $i \geq 0$ lo que implica que $d(f(g(y_i)), f(y_{i+1})) \leq \delta_1$ para todo $i \geq 0$

$$d(y_i, f(y_{i+1})) \leq \delta_1; \forall i \geq 0.$$

Escribiendo $x_i = y_{-i}$ para todo $i \geq 0$ se tiene que:

$$d(x_{-i}, f(x_{-i-1})) \leq \delta_1; \forall i \geq 0$$

$$d(x_{i+1}, f(x_i)) \leq \delta_1; \quad \forall i \geq 0$$

Por tanto, $\{x_i\}_{i\geq 0}$ es una δ_1-pseudo órbita por f, entonces existe $x \in X$ tal que

$$d(f^i(x), x_i) \leq \varepsilon; \forall\, i \geq 0$$

Por cambio de índice

$$d(f^{-i}(x), x_{-i}) \leq \varepsilon; \forall i \geq 0$$

$$d(g^i(x), y_i) \leq \varepsilon; \quad \forall i \geq 0$$

Lo que implica que $\{y_i\}_{i=0}^{+\infty}$ es ε-sombreado por $g = f^{-1}$. $\square$

Corolario 2.1 *Sea $f \in Hom(X)$. Se tiene que f tiene POTP si y sólo si f^k tiene POTP para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. La prueba es evidente de 2.9 y 2.10. $\square$

Teorema 2.11 *Sean $f \in Hom(X)$ y $g \in Hom(Y)$ se define*

$$(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y)); (x, y) \in X \times Y.$$

Entonces $f \times g$ tiene POTP si y sólo si ambos f y g tienen POTP.

Demostración. Sean d_1, d_2 y d las métricas de X, Y y $X \times Y$ respectivamente. Suponiendo que $f \times g$ tiene POTP. Sea $\varepsilon > 0$ se escoge δ por la POTP de $f \times g$, luego tomando $\{x_i\}_{i=0}^{+\infty}$ y $\{y_i\}_{i=0}^{+\infty}$, δ-pseudo órbitas de f y g respectivamente. Entonces $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{+\infty}$ es una δ-pseudo órbita por $f \times g$ pues para todo $i \geq 0$.

$$\begin{aligned} d(f \times g(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})) &= d((f(x_i), g(y_i)), (x_{i+1}, y_{i+1})) \\ &= \max\{d_1(f(x_i), x_{i+1}), d_2(g(y_i), y_{i+1})\} \end{aligned}$$

Pero

$$d_1(f(x_i), x_{i+1}) \leq \delta, d_2(g(y_i), y_{i+1}) \leq \delta$$

Lo cual implica que

$$d(f \times g(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})) \leq \delta; \qquad \forall i \geq 0$$

Por tanto, debe existir $(x, y) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{aligned} d((f \times g)^i(x, y), (x_i, y_i)) \leq \varepsilon; & \qquad \forall i \geq 0 \\ d((f^i(x), g^i(y)), (x_i, y_i)) \leq \varepsilon; & \qquad \forall i \geq 0 \\ \text{máx}\{d_1(f^i(x), x_i), d_2(g^i(y), y_i)\} \leq \varepsilon; & \qquad \forall i \geq 0. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} d_1(f^i(x), x_i) \leq \varepsilon; & \quad \forall i \geq 0 \\ d_2(g^i(y), y_i) \leq \varepsilon; & \quad \forall i \geq 0 \end{aligned}$$

Lo que implica que $\{x_i\}$ y $\{y_i\}$ son ε-sombreables por f y g respectivamente. Ahora, suponiendo que f y g tienen POTP. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Para este ε existen δ_1 y δ_2 por la propiedad de sombreamiento de f y g respectivamente. Tomando $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$

Sea $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{+\infty}$ una δ-pseudo órbita por $f \times g$, entonces

$$\begin{aligned} d(f \times g(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})) &= d((f(x_i), g(y_i)), (x_{i+1}, y_{i+1})) \leq \delta \\ &= \text{máx}\{d_1((f(x_i), x_{i+1}), d_2(g(y_i), y_{i+1})\} \leq \delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1((f(x_i), x_{i+1}) \leq \delta \leq \delta_1; & \quad \forall i \geq 0 \\ d_2(g(y_i), y_{i+1}) \leq \delta \leq \delta_2; & \quad \forall i \geq 0 \end{aligned}$$

Así, existen x y y tal que

$$\begin{aligned} d_1((f^i(x), x_i) \leq \varepsilon; & \quad \forall i \geq 0 \\ d_2(g^i(y), y_i) \leq \varepsilon; & \quad \forall i \geq 0 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\text{máx}\{d_1((f^i(x), x_i), d_2(g^i(y), y_i)\} \leq \varepsilon; \forall i \geq 0$$

$$d((f^i(x), g^i(y)), (x_i, y_i)) \leq \varepsilon; \forall i \geq 0$$

$$d((f \times g)^i(x, y), (x_i, y_i)) \leq \varepsilon; \forall i \geq 0.$$

Lo que concluye la prueba. $\square$

La propiedad de sombreamiento es invariante por conjugación.

Teorema 2.12 *Sea $f \in Hom(X)$ y $h \in Hom(X, Y)$ homeomorfismo donde Y es un espacio métrico, escribiendo $g = h \circ f \circ h^{-1}$. Entonces f tiene $POTP$ si y sólo si g tiene $POTP$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $d(x,y) \leq \varepsilon_1$ implica $d'(h(x), h(y)) < \varepsilon$, donde d' es una métrica para Y; $x, y \in X$. Para ε_1 existe $\delta_1 > 0$ por POTP de f. Para δ_1 se toma $\delta > 0$ talque $d'(x,y) \leq \delta$ implica que $d(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) < \delta_1$.
Se puede tomar este $\delta > 0$ para afirmar que toda δ-pseudo órbita por g puede ser ε-sombreado. En efecto, sea $\{y_i\}_{i=0}^{+\infty}$ una δ-pseudo órbita por g, entonces para todo $i \geq 0$

$$d'(h \circ f \circ h^{-1}(y_i), y_{i+1}) \leq \delta \to d(f \circ h^{-1}(y_i), h^{-1}(y_{i+1})) < \delta_1$$

Luego escribiendo $x_i = h^{-1}(y_i)$, $\{x_i\}_{i=0}^{+\infty}$ es una δ_1-pseudo órbita por f.
Por tanto existe $y \in X$ tal que $d(f^i(y), x_i) \leq \varepsilon_1; \forall i \geq 0$. Lo que implica que $d(h(f^i(y)), h(x_i)) = d(h(f^i(y)), y_i) < \varepsilon; \forall i \geq 0$

$$d(g^i(h(y)), y_i) < \varepsilon; \forall i \geq 0$$

Es decir $\{y_i\}$ es ε-sombreado y entonces g tiene POTP. De manera contraria si g tiene POTP se puede demostrar análogamente que f tiene POTP. $\square$

Ejemplo 2.2.2 (Shift) *Sea $X^{\mathbb{Z}} = \prod_{\in \mathbb{Z}} X_i$ donde cada $X_i = X$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Una métrica d' para $X^{\mathbb{Z}}$ es definida por*

$$d'(x,y) = \sup_{i \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{d(x_i, y_i)}{2^{|i|}} \right\}; \quad x = \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}, y = \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}}.$$

$X^{\mathbb{Z}}$ es un espacio métrico compacto pues es producto numerable de espacios métricos compactos. El mapeo Shift $\sigma : X^{\mathbb{Z}} \to X^{\mathbb{Z}}$, definida usualmente por $\sigma(\{x_i\}) = \{y_i\}$ donde $y_i = x_{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$, es un homeomorfismo. Entonces σ tiene POTP.

Demostración. Para todo $\varepsilon > 0$, se escoge δ con $0 < 2\delta \leq \varepsilon$. Sea $\{x^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ una δ-pseudo órbita para σ. Entonces para $i \in \mathbb{Z}$

$$\delta \geq d'(\sigma(x^i), x^{i+1}) \geq \frac{d(\sigma(x^i)_k, x_k^{i+1})}{2^{|k|}} = \frac{d(x_{k+1}^i, x_k^{i+1})}{2^{|k|}}; \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

Así $d(x_{k+1}^i, x_k^{i+1}) \leq 2^{|k|}\delta$, para $i, k \in \mathbb{Z}$. Escribiendo $x = \{..., x_0^{-2}, x_0^{-1}, x_0^0, x_0^1, x_0^2, ...\}$. Entonces $x \in X^{\mathbb{Z}}$ se tiene $(\sigma^i(x))_k = x_0^{i+k}$ con

$i, k \in \mathbb{Z}$. Si $k \geq 0$ entonces

$$d(x_0^{i+k}, x_k^i) \leq \sum_{j=0}^{k-1} d(x_{k-j}^{i+j}, x_{k-j-1}^{i+j+1}) \leq 2^{k+1}\delta$$

y si $k < 0$ entonces

$$d(x_0^{i+k}, x_k^i) \leq 2^{|k|+1}\delta.$$

Por tanto, $d'(\sigma^i(x), x^i) \leq 2\delta \leq \varepsilon$ para $i \in \mathbb{Z}$. □

Lema 2.3 *Si f tiene POTP, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que cada δ-pseudo órbita periódica puede ser ε-sombreado por algún punto en $R(f)$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, de $\frac{\varepsilon}{2}$ se toma δ dado por la POTP de f. Sea $\{x_i\}_{i=0}^n$ una δ-pseudo órbita periódica de f. Con $x_m = x_{m \bmod n}$ entonces existe $x \in X$ tal que

$$d(f^{ni+j}(x), x_{ni+j}) = d(f^{ni+j}(x), x_j) \leq \frac{\varepsilon}{2};\ \forall\, i;\ 0 \leq j < n. \tag{2.2}$$

En particular si $j = 0$ se tiene

$$d(f^{ni}(x), x_0) \leq \frac{\varepsilon}{2};\ \forall\, i$$

$$f^{ni}(x) \in D[x_0, \frac{\varepsilon}{2}];\ \forall\, i$$

Es decir, que la órbita de x por f^n está contenida en la bola cerrada de centro x_0 y radio $\frac{\varepsilon}{2}$.

$$\overline{\vartheta_{f^n}(x)} \subseteq D[x_0, \frac{\varepsilon}{2}],$$

$\overline{\vartheta_{f^n}(x)}$ es compacto e invariante por f^n. Entonces $\overline{\vartheta_{f^n}(x)}$ contiene un conjunto minimal M para f^n. Sea $z_0 \in M$ entonces

$$\overline{\vartheta_{f^n}(z_0)} = \omega_{f^n}(z_0) = \alpha_{f^n}(z_0) = M$$

Por tanto $z_0 \in \omega_{f^n}(z_0) \cap \alpha_{f^n}(z_0) \subseteq \omega_f(z_0) \cap \alpha_f(z_0)$, es decir

$$z_0 \in R(f).$$

$M \subseteq \overline{\vartheta_{f^n}(x)}$; si $z_0 \in \vartheta_{f^n}(x)$ entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $z_0 = f^{nk}(x)$ y así se tiene $d(f^{nk+j}(x), x_j) \leq \frac{\varepsilon}{2}; 0 \leq j < n$. Luego

$$d(f^j(z_0), x_j) \leq \frac{\varepsilon}{2};\ 0 \leq j < n.$$

Así $\{x_i\}$ es ε-sombreado (respecto a f) por $z_0 \in R(f)$.

Ahora, si $z_0 \in \omega_{f^n}(x)$ y suponiendo que $\{x_i\}$ no es ε-sombreado por z_0 esto es $d(f^{j_0}(z_0), x_{j_0}) > \varepsilon$ para algún $0 \leq j_0 < n$. Por la continuidad de f, existe una vecindad G (de z_0) tal que $f^{j_0}(G) \subseteq X \backslash D(x_{j_0}, \varepsilon)$. Como $z_0 \in \omega_{f^n}(x)$ existe una sucesión $\{k_i\} \subsetneq \mathbb{N}$ tal que $f^{nk_i}(x) \to z_0$ cuando $k_i \to \infty$. Por tanto existe K suficientemente grande $K \in \{k_i\}$ satisfaciendo $f^{nK}(x) \in G$ y

$$d(f^{nK+j_0}(x), x_{j_0}) > \varepsilon$$

lo cual es una contradicción de (2.2).

Análogamente si $z_0 \in \alpha_{f^n}(x)$. Por tanto $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es ε-sombreado por z_0 (respecto a f), donde $z_0 \in R(f)$. $\square$

Teorema 2.13 *Si f tiene POTP entonces $\Omega(f) = \overline{R(f)}$.*

Demostración. Es claro que $\overline{R(f)} \subseteq \Omega(f)$. Para cada $\varepsilon > 0$, se toma $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$ como en el Lema 2.2.

Sea $x \in \Omega(f)$, existe $w \in D(x, \delta)$ y un entero m con $f^m(w) \in D(x, \delta)$ entonces se tiene

$$\{z_i\}_{i=0}^{m} = \{w, f(w), ..., f^{m-1}(w), w\}$$

es una δ-pseudo órbita periódica por f. Por el Lema 2.3 existe $z \in R(f)$ tal que $d(f^i(z), z_i) \leq \frac{\varepsilon}{2}; \forall\, 0 \leq i \leq m$. En particular $d(z, z_0) = d(z, w) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $d(z, x) \leq d(z, w) + d(w, x) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$. Como ε es arbitrario se hace $\varepsilon \to 0$, por tanto $x \in \overline{R(f)}$. $\square$

Teorema 2.14 *Si f tiene POTP, entonces $\Omega(f) = CR(f)$.*

Demostración. Es claro que $\Omega(f) \subseteq CR(f)$. Luego sea $x \in CR(f)$, entonces para todo $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $\delta \geq 0$ por la propiedad de sombreamiento. Para este δ existe una δ-pseudo órbita periódica $\{x = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = x\}$. Luego, existe $y \in X$ tal que $d(f^i(y), x_i) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para $0 \leq i \leq n$. Por tanto $f^n(D(x, \varepsilon)) \cap D(x, \varepsilon) \neq \emptyset$. Como ε es arbitrario, se tiene $x \in \Omega(f)$. $\square$

Este resultado puede verse en el Teorema 3.12 en [2].

2.3. Estabilidad topológica

Esta sección tiene por objetivo mostrar los resultados expuestos por Peter Walters en [39]. También puede leerse [7]. X será siempre un espacio métrico compacto con métrica d.

Definición 2.3.1 *Sea $f \in Hom(X)$, f topológicamente estable si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que para cada $g \in Hom(X)$ δ-cercano a f existe un mapeo continuo $h : X \to X$ con*

i. $h \circ g = f \circ h$,

ii. $d_0(h, id) < \varepsilon$.

Si $g \in Hom(X)$ es δ-cercano a f, entonces cada órbita, $(g^n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ de g es "casi" una órbita de f en el mismo sentido que $d(f(g^n(x)), g^{n+1}(x)) < \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces la estabilidad topológica indica una importante característica para el homeomorfismo pues cualquier perturbación de éste no cambiará sus propiedades topológicas.

Lema 2.4 *Sea $f \in Hom(X)$ expansivo con coeficiente de expansividad ε_f relacionado a la métrica d. Para cada $N \geq 1$ existe δ con la propiedad que $d(x, y) < \delta$ implica $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon_f$ para todo $|n| < N$. De igual forma, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \geq 1$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon_f$ para todo $|n| < N$ implica que $d(x, y) < \varepsilon$.*

Demostración. Sea N dado. Por la continuidad de f para todo ε_n existe δ_n, $0 \leq n < N$, tal que

$$\begin{array}{rcrcl} d(f^{n-1}(x), f^{n-1}(y)) < \delta_n & \to & d(f^n(x), f^n(y)) & < & \varepsilon_n = \varepsilon_f \\ d(f^{n-2}(x), f^{n-2}(y)) < \delta_{n-1} & \to & d(f^{n-1}(x), f^{n-1}(y)) & < & \varepsilon_{n-1} = \delta_n \\ & \vdots & & & \\ d(f(x), f(y)) < \delta_2 & \to & d(f^2(x), f^2(y)) & < & \varepsilon_2 = \delta_3 \\ d(x, y) < \delta_1 & \to & d(f(x), f(y)) & < & \varepsilon_1 = \delta_2 \end{array}$$

Tomando $\varepsilon_n = \varepsilon_f$ y $\varepsilon_i = \delta_{i+1}$ para $1 \leq i < n$, queda demostrado que existe tal δ_1 como se requiere. Análogamente utilizando la continuidad de f^{-1} se obtiene para $-N < n \leq 0$ cierto δ_{-1} y se toma $\delta = \text{mín}\{\delta_{-1}, \delta_1\}$.

Por otro lado sea $\varepsilon > 0$ dado. Si no pudiera escogerse $N \geq 1$ tal como se requiere entonces para cada $N \geq 1$ existe $x_n, y_n \in X$ con

$$d(f^n(x_n), f^n(y_n)) \leq \varepsilon_f; \forall n \text{ con } |n| < N \text{ y } d(x_n, y_n) \geq \varepsilon$$

Tomando N_i con $x_{n_i} \to x$ y $y_{n_i} \to y$ entonces

$$d(x, y) \geq \varepsilon \text{ y también } d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon_f; \forall n$$

Lo cual contradice la propiedad expansiva de f. □

Lema 2.5 *Sea $f \in Hom(X)$ expansivo con $POTP$ y ε_f coeficiente de expansividad. Si $\varepsilon < \dfrac{\varepsilon_f}{2}$ y δ corresponde a ε como en la definición de $POTP$ entonces existe un único $x \in X$ que ε-sombrea a una δ-pseudo órbita dada.*

Demostración. Se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda δ pseudo-órbita, $\{x_n\}$, es ε-sombreado por algún $x \in X$, es decir $d(f^n(x), x_n) < \varepsilon$.
Sea $\varepsilon < \dfrac{\varepsilon_f}{2}$. Suponiendo que $y \in X$ también ε-sombrea a $\{x_n\}$ se cumple que $d(f^n(y), x_n) < \varepsilon$, entonces

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq d(f^n(x), x_n) + d(x_n, f^n(y))$$

$$< 2\varepsilon < \varepsilon_f; \forall n \in \mathbb{Z}$$

Por la expansividad de f implica que $y = x$. □

Ahora se demostrará el teorema de Walters [39], el cual motiva el objetivo de este trabajo, al tenerse una adecuación de la misma respecto a medidas.

Teorema 2.15 *Sea $f \in Hom(X)$ expansivo con $POTP$ entonces f es topológicamente estable. Más aún, si ε_f es constante de expansividad entonces para todo $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon < \frac{\varepsilon_f}{3}$, existe $\delta > 0$ de manera que dado $g \in Hom(X)$ con $d(g, f) < \delta$ existe un único mapeo continuo $h : X \to X$ con $h \circ g = f \circ h$ y $d(h, id) < \varepsilon$.*

Demostración. Sea $\varepsilon < \frac{\varepsilon_f}{3}$ por la $POTP$ existe $\delta > 0$ tal que cada δ pseudo-órbita por f es ε-sombreado para algún punto de X.
Sea $g : X \to X$ un homeomorfismo con $d(g, f) < \delta$, sea $x \in X$ y su órbita por g, $\{g^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, es una δ-pseudo órbita por f puesto que

$$d(f \circ g^n(x), g^{n+1}(x)) = d(f \circ g^n(x), g \circ g^n(x)) \leq d(f, g) < \delta$$

Por el Lema 2.5 existe un único punto $\overline{x} \in X$ cuya órbita por f sombrea a $\{g^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. es decir

$$d(f^n(\overline{x}), g^n(x)) < \varepsilon$$

Esto define un mapeo

$$h : X \to X \text{ con } d(f^n h(x), g^n(x)) < \varepsilon; \forall n \in \mathbb{Z}; \forall x \in X \tag{2.3}$$

Poniendo $n = 0$ da $d(h, id) < \varepsilon$.
Luego de (2.3)

$$d(f^n(h(g(x))), g^{n+1}(x)) = d(f^n(h(g(x))), g^n(g(x))) < \varepsilon; \forall n \in \mathbb{Z}$$
$$d(f^n(f(h(x))), g^{n+1}(x)) = d(f^{n+1}(h(x)), g^{n+1}(x)) < \varepsilon; \forall n \in \mathbb{Z}$$

Se tiene que ambos $h(g(x))$ y $f(h(x))$ ε-sombrean a $\{g^{n+1}(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, por el Lema 2.5 y como se cumple $\forall x \in X$, implica que $h \circ g = f \circ h$.

Ahora se prueba que h es continuo. Sea $\lambda > 0$ dado. Usando el Lema 2.4 se escoge N de modo que

$$d(f^n(u), f^n(v)) < \varepsilon_f; \forall n \text{ con } |n| \leq N \to d(u, v) < \lambda$$

Luego para N se escoge $\eta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \eta \to d(g^n(x), g^n(y)) < \varepsilon < \frac{\varepsilon_f}{3}; \forall n \text{ con } |n| \leq N$$

Entonces si $d(x, y) < \eta$

$$\begin{array}{rcl} d(f^n h(x), f^n h(y)) & = & d(hg^n(x), hg^n(y)) \\ & \leq & d(hg^n(x), g^n(x)) + d(g^n(x), g^n(y)) + d(g^n(y), hg^n(y)) \\ & < & \varepsilon + \dfrac{\varepsilon_f}{3} + \varepsilon \\ d(f^n h(x), f^n h(y)) & < & \varepsilon_f; \quad \forall\, n \text{ con } |n| \leq N \end{array}$$

Por tanto $d(x,y) < \eta$ implica que $d(h(x),h(y)) < \lambda$, lo que prueba la continuidad.

Finalmente se prueba que h es único. Si l es otro homeomorfismo con la propiedad $l \circ g = f \circ l$ y $d(l,id) < \varepsilon$.

$$d(f^n l(x), f^n h(x)) = d(lg^n(x), hg^n(x)) \leq d(lg^n(x), g^n(x)) + d(g^n(x), hg^n(x))$$

$$d(f^n l(x), f^n h(x)) \leq d(lg^n(x), idg^n(x)) + d(idg^n(x), hg^n(x))$$

$$< \varepsilon + \varepsilon < 2\varepsilon$$

$$d(f^n l(x), f^n h(x)) < \varepsilon_f; \forall n \in \mathbb{Z}$$

Por la expansividad de f se concluye que $l(x) = h(x)$. $\square$

Lema 2.6 *Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo expansivo con POTP. Si la perturbación $g : X \to X$ de f (como en el teorema anterior) es también un homeomorfismo expansivo con constante ε_g mayor o igual a dos veces la contante de expansividad de f entonces el mapeo conjugado correspondiente h es inyectivo.*

Demostración. Sea $h(x) = h(y)$. Entonces

$$d(g^n(x), g^n(y)) \leq d(g^n(x), hg^n(x)) + d(hg^n(x), hg^n(y)) + d(hg^n(y), g^n(y))$$

$$\begin{aligned} &= d(id\, g^n(x), h\, g^n(x)) + d(f^n\, h(x), f^n\, h(y)) + d(h\, g^n(y), id\, g^n(y)) \\ &< \varepsilon + \varepsilon \leq \varepsilon_g \end{aligned}$$

Lo que implica por la expansividad de g que $x = y$. $\square$

Definición 2.3.2 *Un homeomorfismo $f : X \to X$ tiene la propiedad de sombreamiento finito si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda δ-pseudo órbita finita es ε sombreado por f.*

Lema 2.7 *Suponiendo que $f \in Hom(X)$ tiene la propiedad de sombreamiento finito entonces f tiene la POTP.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ dado, se escoge $\delta > 0$ por la propiedad. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una pseudo órbita para f. Luego para cada $m > 0$ existe $z^{(m)} \in X$ con $d(f^n(z^{(m)}), x_{n-m}) < \varepsilon; 0 \leq n \leq 2m$.
Escribiendo $w^{(m)} = f^m(z^{(m)})$ se tiene $d(f^j(w^{(m)}), x_j) < \varepsilon, |j| \leq m-1$. Se puede elegir una subsucesión convergente $\{w^{(m_i)}\} \to w$. Entonces $d(f^j(w), x_j) \leq \varepsilon$; para todo $j \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es 2ε-sombreado por w. □

Para finalizar este capítulo se dará resultados conocidos donde intervienen las definiciones principales dadas en este trabajo. El siguiente resultado es debido a Morimoto en [23].

Proposicion 2.2 *Todo $f \in Hom(S^1)$ topológicamente estable tiene POTP.*

Los siguientes resultados puede verse con más detalle en [29, 41, 25].

Definición 2.3.3 *Un difeomorfismo f de S^1 es llamado Morse-Smale si $Per(f) \neq \emptyset$ y además cada punto periódico es hiperbólico.*

Teorema 2.16 ([25]) *Cada Morse-Smale es topológicamente estable.*

Teorema 2.17 ([41]) *Sea $f \in Hom(S^1)$ se tiene que f es topológicamente estable si y solo si es topológicamente conjugado a algún difeomorfismo Morse-Smale.*

Como la estabilidad topológica es invariante bajo conjugación, por el Teorema 2.16, cada homeomorfismo conjugado a algún difeomorfismo Morse-Smale es topologicamente estable.
No se mostrará la prueba completa (ello puede consultarse en el libro de Pilyugin [29] o directamente en el articulo de Yano [41]). Pero sí la siguiente observación dada en la prueba.
$f \in Hom(S^1)$ es conjugado a algún difeomorfismo Morse-Smale si y solo si satisface las siguientes condiciones:

(a) $Per(f)$ es no vacío y finito.

(b) Cada elemento de $Per(f)$ es topológicamente hiperbólico.

Capítulo 3

Expansividad y POTP respecto a una medida

Nuestro trabajo es motivado por la expansividad respecto a una medida de Borel dado por Morales en [20], en [13] se dan las definiciones de medida expansiva, medida con POTP y medida topológicamente estable, pero esto puede causar confusión pues se esperaría estudiar cierto tipo de perturbación en el espacio de medidas. Por ello se cree conveniente reescribir las definiciones y mantener la notación de [20].

3.1. Expansividad respecto a una medida

Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo de un espacio métrico compacto X. Dado $B \subset X$, se dice que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *pasa por* B si $x_0 \in B$.

Definición 3.1.1 (μ-expansividad) *Un homeomorfismo $f \in Hom(X)$ es μ-expansivo si existe $\delta > 0$ tal que la medida de cualquier bola dinámica de radio δ es nula, es decir,*

$$\mu(\Gamma_\delta(x)) = 0, \forall x \in X.$$

δ es llamado constante de expansividad.

Proposicion 3.1 *Todo homeomorfismo expansivo es μ-expansivo, para toda medida μ no atómica sobre el espacio X (si existe).*

Demostración. Pues existe $\delta > 0$ tal que $\mu(\Gamma_\delta(x)) = \mu(\{x\}) = 0$. $\square$

Esta proposición nos indica que el conjunto de homeomorfismos μ-expansivos contiene al conjunto de homeomorfismos expansivos.

Definición 3.1.2 *Sea X un espacio métrico, $f \in Hom(X)$ es medible-expansivo si f es μ-expansivo para toda medida de Borel de probabilidad no atómica μ.*

Definición 3.1.3 (Isometría) *Un mapeo $f : X \to X$ de un espacio métrico X se llama isometría si $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, para todo $x, y \in X$.*

Ejemplo 3.1.1 *No hay isometrías μ-expansivas en un espacio métrico separable.*

Demostración. Suponiendo por contradicción que existe una isometría f μ-expansiva de un espacio métrico separable X para alguna medida de probabilidad de Borel μ. Como f es una isometría, se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma_\delta(x) &= \{y \in X : d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon; \forall n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon; \forall n \in \mathbb{Z}\} \qquad = \quad D[x, \delta] \end{aligned}$$

Donde $D[x, \delta]$ denota la δ-bola cerrada alrededor de x. Si δ es una constante de expansividad de f, entonces $\mu(D[x, \delta]) = \mu(\Gamma_\delta(x)) = 0$ para todo $x \in X$. Sin embargo, dado que X es separable (y por lo tanto Lindelof), se puede seleccionar una cubrimiento numerable $\{C_1, C_2, \cdots, C_n, \cdots\}$ de X de subconjuntos cerrados de modo que para todo n existe $x_n \in X$ tal que $C_n \subseteq D[x_n, \delta]$. Por lo tanto,

$$\mu(X) \leq \Sigma_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) \leq \Sigma_{n=1}^{\infty} \mu(D[x_n, \delta]) = 0,$$

lo que es una contradicción. Esto prueba el resultado. $\square$

En particular, el mapeo identidad en estos espacios o (como la definición no es solo para espacios compactos) las rotaciones en $\mathbb{R}^2$ o las traslaciones en $\mathbb{R}^n$ no pueden ser medible-expansivos.

Ejemplo 3.1.2 *Dote $\mathbb{R}^n$ con un espacio métrico con la métrica euclidiana y denote por* Leb *la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Entonces, un isomorfismo lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es Leb-expansivo si y solo si f tiene valores propios de módulo menor que 1 o mayor que 1.*

Demostración. Como f es lineal se tiene $\Gamma_\delta(x) = \Gamma_\delta(0) + x$, por lo tanto

$$Leb(\Gamma_\delta(x)) = Leb(\Gamma_\delta(0))$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$. Si f tiene valores propios de módulo menor o mayor que 1, entonces $\Gamma_\delta(0)$ está contenido en un subespacio propio de $\mathbb{R}^n$, que implica $Leb(\Gamma_\delta(0)) = 0$. Por lo tanto, f es *Leb*-expansivo. $\square$

Ejemplo 3.1.3 *Un homeomorfismo f es μ-expansivo, para alguna medida de Borel μ, si y solo si hay un boreliano invariante Y de f tal que la restricción f/Y es ν-expansiva en Y para alguna medida de Borel ν de Y.*

Demostración. La primera parte es evidente. Ahora, asumiendo que existe una medida ν tal que f/Y es ν-expansiva,fijado $\delta > 0$, Como Y es invariante, se tiene que o $\Gamma^f_{\frac{\delta}{2}}(x) \cap Y = \emptyset$ o bien $\Gamma^f_{\frac{\delta}{2}}(x) \cap Y \subseteq \Gamma^{f/Y}_\delta(y) \cap Y$ para algún $y \in Y$.
Lo que implica que o $\Gamma^f_{\frac{\delta}{2}}(x) \cap Y = \emptyset$ o bien $\mu\left(\Gamma^f_{\frac{\delta}{2}}(x)\right) \leq \mu\left(\Gamma^{f/Y}_\delta(y)\right)$ para algún $y \in Y$ donde μ es la medida de Borel de probabilidad de X definida por

$$\mu(A) = \nu(A \cap Y)$$

De esto se obtiene que para todo $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que $\mu\left(\Gamma^f_{\frac{\delta}{2}}(x)\right) \leq \nu\left(\Gamma^{f/Y}_\delta(y)\right)$. Si se toma δ como una constante de ν-expansividad de f/Y se cumple que $\mu\left(\Gamma^f_{\frac{\delta}{2}}(x)\right) \leq \nu\left(\Gamma^{f/Y}_\delta(y)\right) = 0$, para todo $x \in X$. Por tanto f es μ-expansiva con constante de expansividad $\frac{\delta}{2}$. $\square$

Proposicion 3.2 (Invarianza topológica) *Sea μ una medida de Borel en X y f sea un homeomorfismo μ-expansivo. Si $h : X \to Y$ es un homeomorfismo entre espacios métricos compactos, entonces $h \circ f \circ h^{-1}$ es $h_*(\mu)$-expansivo.*

Demostración. Claramente h es uniformemente continua, por la compacidad, así que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ implica que $d(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) < \varepsilon$.

$$\begin{array}{rcl} x \in \Gamma_\delta^{h\circ f\circ h^{-1}}(y) & \Leftrightarrow & d(h \circ f^i \circ h^{-1}(x), h \circ f^i \circ h^{-1}(y)) \leq \delta, \quad \forall i \in \mathbb{Z} \\ & \Rightarrow & d(f^i \circ h^{-1}(x), f^i \circ h^{-1}(y)) \leq \varepsilon \qquad \forall i \in \mathbb{Z} \\ & \Rightarrow & h^{-1}(x) \in \Gamma_\varepsilon^f(h^{-1}(y)) \\ & \Rightarrow & x \in h(\Gamma_\varepsilon^f(h^{-1}(y))). \end{array}$$

Es decir

$$\Gamma_\delta^{h\circ f\circ h^{-1}}(y) \subseteq h(\Gamma_\varepsilon^f(h^{-1}(y))); \quad \forall y \in Y.$$

Lo que lleva a

$$h_*(\mu)(\Gamma_\delta^{h\circ f\circ h}(y)) \leq \mu\left(h^{-1}\left(h(\Gamma_\varepsilon^f(h^{-1}(y)))\right)\right) = \mu(\Gamma_\varepsilon^f(h^{-1}(y))).$$

Se tiene $h^{-1}(y) \in X$, tomando ε como la constante de expansividad de f, se obtiene que δ es una constante de $h_*(\mu)$-expansividad para $h \circ f \circ h^{-1}$. $\square$

Lema 3.1 *Sea $f \in Hom(X)$. Si δ es constante de μ-expansividad de f entonces también es constante de $f_*\mu$-expansividad de f.*

Demostración. Tenemos que $f(\Gamma_\delta(x)) = \Gamma_\delta(f(x))$, para todo $(x, \delta) \in X \times \mathbb{R}^+$. Se puede obtener lo mismo para f^{-1}, entonces

$$f_*\mu(\Gamma_\delta(x)) = \mu(f^{-1}(\Gamma_\delta(x))) = \mu(\Gamma_\delta(f^{-1}(x))) = 0,$$

para todo $x \in X$. $\square$

La definición de expansividad respecto a una medida se podría cambiar a una definición más débil cuando se cumpla para casi todo punto $x \in X$. Pero el siguiente lema muestra que es equivalente.

Lema 3.2 *Sea $f \in Hom(X)$, μ medida de probabilidad de Borel sobre X. f es μ-expansivo si y sólo si existe $\delta > 0$ tal que $\mu(\Gamma_\delta(x)) = 0$ para μ-c.t.p. $x \in X$.*

Demostración. La primera parte obvio. Ahora, sea δ tal que $\mu(\Gamma_\delta(x)) = 0$ para $\mu - a.e, x \in X$. Supongamos que $\frac{\delta}{2}$ no es una constante de μ-expansividad de f. Entonces existe $x_0 \in X$ tal que $\mu(\Gamma_{\frac{\delta}{2}}(x_0)) > 0$.
Sea $A = \{x \in X : \mu(\Gamma_\delta(x)) = 0\}$. Por hipótesis A es de medida total entonces $\mu(A) = 1$. De esto se obtiene que $A \cap \Gamma_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \neq \emptyset$. Pues de lo contrario $\Gamma_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \subseteq X \backslash A$ lo que significaría que $\Gamma_{\frac{\delta}{2}}(x_0) = 0$. Así existe $y_0 \in A \cap \Gamma_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$, es decir $\mu(\Gamma_\delta(y_0)) = 0$ y

$$y_0 \in \Gamma_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \Rightarrow d(f^i(y_0), f^i(x_0)) \leq \frac{\delta}{2},\ i \in \mathbb{Z}.$$

Por otro lado se tiene

$$\begin{array}{rrcl} x \in \Gamma_{\frac{\delta}{2}}(x_0) & \Leftrightarrow\ d(f^i(x), f^i(x_0)) & \leq & \dfrac{\delta}{2},\ i \in \mathbb{Z} \\ & \Rightarrow\ d(f^i(x), f^i(y_0)) & \leq & d(f^i(x), f^i(x_0)) + d(f^i(x_0), f^i(y_0)) \\ & & \leq & \dfrac{\delta}{2} + \dfrac{\delta}{2} = \delta,\ i \in \mathbb{Z} \\ & \Rightarrow\quad x \in \Gamma_\delta(y_0) & & \end{array}$$

Esto es $\Gamma_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \subseteq \Gamma_\delta(y_0)$, por tanto $\mu(\Gamma_{\frac{\delta}{2}}(x_0)) \leq \mu(\Gamma_\delta(y_0)) = 0$ lo cual es una contradicción de la suposición inicial. □

Corolario 3.1 *Sea $f \in Hom(X)$. Entonces f es μ-expansiva si y solo si existe $\delta > 0$ tal que $\mu(\Gamma_\delta(x)) = 0$ para todo $x \in supp(\mu)$.*

La siguiente propiedad es análoga a los homeomorfismos expansivos (Proposición 2.1).

Proposicion 3.3 *Sea $f \in Hom(X)$, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. μ una medida de Borel. f es μ-expansivo si y sólo si f^n es μ-expansivo.*

Demostración. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, se define el conjunto $D_i^f[x, \varepsilon] = \{y \in X : d(f^i(x), f^i(y)) \leq \varepsilon\}$. De esto se tiene que

$$\Gamma_\varepsilon^f(x) = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} D_i^f[x, \varepsilon].$$

Si f es μ-expansivo y $n \in \mathbb{N}$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mu(\Gamma_\varepsilon^f(x)) = 0$, para todo $x \in X$. para $\frac{\varepsilon}{2}$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x, y \in X$ con $d(x,y) < \delta$ implica $d(f^k(x), f^k(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$, para cada $0 \leq k \leq n$. Sea $i \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
y \in D_i^{f^n}[x, \tfrac{\delta}{2}] &\Rightarrow d(f^{ni}(x), f^{ni}(y)) \leq \tfrac{\delta}{2} \\
&\Rightarrow d(f^{k+ni}(x), f^{k+ni}(y)) < \tfrac{\varepsilon}{2};\ 0 \leq k \leq n \\
&\Rightarrow d(f^k(x), f^k(y)) < \tfrac{\varepsilon}{2};\ ni \leq k \leq n(i+1) \\
&\Rightarrow y \in D_k^f[x, \varepsilon];\ ni \leq k \leq n(i+1) \\
&\Rightarrow y \in \textstyle\bigcap_{k=ni}^{n(i+1)} D_k^f[x, \varepsilon].
\end{aligned}$$

Por tanto

$$D_i^{f^n}[x, \frac{\delta}{2}] \subseteq \bigcap_{k=ni}^{n(i+1)} D_k^f[x, \varepsilon];\ \forall\, i \in \mathbb{Z}.$$

Luego

$$\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} D_i^{f^n}[x, \frac{\delta}{2}] \subseteq \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} \bigcap_{k=ni}^{n(i+1)} D_k^f[x, \varepsilon] = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} D_i^f[x, \varepsilon],$$

de donde $\Gamma_{\frac{\delta}{2}}^{f^n}(x) \subseteq \Gamma_\varepsilon^f(x)$, por tanto $\frac{\delta}{2}$ es una constante de μ-expansividad para f^n.

Además

$$\begin{aligned}
\Gamma_\epsilon^g(x) &= \{y : d(g^i(x), g^i(y)) \leq \epsilon;\ \forall\, i \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{y : d(g^{-i}(x), g^{-i}(y)) \leq \epsilon;\ \forall\, i \in \mathbb{Z}\} = \Gamma_\epsilon^{g^{-1}}(x),
\end{aligned}$$

de esto se tiene que si f^n es μ-expansivo entonces f^{-n} es μ-expansivo (con las mismas constantes de expansividad). Lo que implica que f^n es μ-expansivo, para cualquier $n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.

De manera contraria, si para algún $n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, f^n es μ-expansivo, se tiene

$$\begin{aligned}
y \in \Gamma_\varepsilon^f(x) &\Rightarrow d(f^i(x), f^i(y)) \leq \varepsilon;\ \forall\, i \in \mathbb{Z} \\
&\Rightarrow d(f^{ni}(x), f^{ni}(y)) \leq \varepsilon;\ \forall\, i \in \mathbb{Z} \\
&\Rightarrow y \in \Gamma_\varepsilon^{f^n}(x),
\end{aligned}$$

entonces $\Gamma_\varepsilon^f(x) \subseteq \Gamma_\varepsilon^{f^n}(x)$. Si ε es una constante de μ-expansividad de f^n implica que f es μ-expansivo (con la misma constante). $\square$

A continuación se mostrará un resultado equivalente del Teorema 2.4, desde un punto de vista medible.

Definición 3.1.4 *Sea g un homeomorfismo de un espacio métrico X y sea ν una medida de Borel de probabilidad de X. Un conjunto invariante I respecto a g, se llama ν-aislado si existe una vecindad compacta U de I tal que*

$$\nu(\{z \in X \,:\, g^n(z) \in U, \forall n \in \mathbb{Z}\}) = 0$$

Teorema 3.1 *Sea $f \in Hom(X)$ y sea μ una medida de Borel de probabilidad sobre X, f es μ-expansivo si y sólo si la diagonal Δ es un conjunto μ^2-aislado de $f \times f$. Donde $\mu^2 = \mu \times \mu$.*

Demostración. Fijando $\delta > 0$ y una δ-vecindad de Δ i.e. $U_\delta = \{z \in X \times X \,:\, d(z, \Delta) \leq \delta\}$. Sea $g = f \times f$ entonces se afirma lo siguiente

$$\{z \in X \times X \,:\, g^n(z) \in U_\delta, \forall n \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \Gamma_\delta(x). \tag{3.1}$$

En efecto, sea $z = (x, y) \in \{z \in X \times X \,:\, g^n(z) \in U_\delta, \forall n \in \mathbb{Z}\}$, así $g^n(x, y) \in U_\delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ es decir $d(g^n(x, y), \Delta) \leq \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, de donde existe $p_n \in X$ tal que $d(f^n(x), p_n) + d(f^n(y), p_n) \leq \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, por tanto

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \delta, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}$$

Lo que quiere decir que $y \in \Gamma_\delta(x)$ y por ende $z = (x, y) \in \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \Gamma_\delta(x)$. Inversamente si $z = (x, y) \in \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \Gamma_\delta(x)$ implica que $(x, y) \in \{x\} \times \Gamma_\delta(x)$ entonces $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ en tanto $d(g^n(x, y), (f^n(x), f^n(x))) = d(f^n(y), f^n(x)) \leq \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ lo cual implica $g^n(x, y) \in U_\delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ es decir $z = (x, y) \in \{z \in X \times X \,:\, g^n(z) \in U_\delta, \forall n \in \mathbb{Z}\}$. Esto prueba (3.1).
Sea F la función característica del lado izquierdo de (3.1).

$$F(x, y) = \chi_{\Gamma_\delta(x)}(y), \forall (x, y) \in X \times X,$$

de donde se tiene

$$\mu^2(\{z \in X \times X : g^n(z) \in U_\delta, \forall n \in \mathbb{Z}\}) = \int_X \int_X \chi_{\Gamma_\delta(x)}(y)\, d\mu(y)\, d\mu(x). \quad (3.2)$$

Ahora, suponiendo que f es μ-expansivo, con constante δ. Se obtiene

$$\int_X \chi_{\Gamma_\delta(x)}(y)\, d\mu(y) = 0, \quad \forall x \in X.$$

Debido a (3.2) se implica $\mu^2(\{z \in X \times X : g^n(z) \in U_\delta, \forall n \in \mathbb{Z}\}) = 0$, que significa que la diagonal Δ es μ^2-aislado.
Inversamente si $\mu^2(\{z \in X \times X : g^n(z) \in U_\delta, \forall n \in \mathbb{Z}\}) = 0$ para algún $\delta > 0$, y de (3.2) se tiene

$$\int_X \int_X \chi_{\Gamma_\delta(x)}(y)\, d\mu(y)\, d\mu(x) = 0,$$

esto implica $\mu(\Gamma_\delta(x)) = 0$ para μ-c.t.p. $x \in X$. Y usando el Lema 3.2 se concluye que f es μ-expansivo. □

Continuando con las equivalencias, en las Definiciones 2.1.3 y 2.1.4 se vio las nociones sobre generador que sirvieron para obtener propiedades de expansividad. De esa misma forma se puede definir una noción equivalente.

Definición 3.1.5 *A un cubrimiento $\mathcal{A}$ de X se le llama μ-generador de un homeomorfismo f si para toda sucesión $\{A_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{A}$ se tiene*

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(\overline{A_n})\right) = 0.$$

Teorema 3.2 *Sea $f \in Hom(X)$ y μ una medida de Borel de probabilidad. Un homeomorfismo es μ-expansivo si y sólo si tiene un μ-generador.*

Demostración. Primero si f es μ-expansivo con constante δ. Si se toma $\mathcal{A}$ como la colección de bolas abiertas de radio δ y centrada en cada $x \in X$. Entonces cualquier sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathcal{A}$ cumple

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(\overline{A_n}) \subset \Gamma_\delta(x_n),$$

por tanto

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(\overline{A_n})\right) \leq \mu(\Gamma_\delta(x_n)) = 0$$

Es decir, $\mathcal{A}$ es un μ-generador de f.
De forma contraria si f tiene un μ-generador $\mathcal{A}$ y sea δ un numero de Lebesgue de $\mathcal{A}$. Si $x \in X$, entonces para cada $n \in \mathbb{Z}$ existe $A_n \in A$ tal que la δ-bola centrado en $f^n(x)$ pertenece a $\overline{A_n}$. De ello se tiene

$$\Gamma_\delta(x) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(\overline{A_n}),$$

de donde

$$\mu(\Gamma_\delta(x)) \leq \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(\overline{A_n})\right) = 0.$$

Esto significa que f es μ-expansivo, lo que termina la prueba. □

En el Teorema 2.8 se menciona que el conjunto de puntos con semiórbitas que convergen bajo un homeomorfismo expansivo es contable, entonces se puede obtener un resultado similar referente a una medida.

Teorema 3.3 *Sea f un homeomorfismo de un espacio métrico separable. Si f es μ-expansivo entonces el conjunto de puntos con semiórbitas que convergen bajo f tiene medida nula respecto a μ.*

Demostración. Sea $f \in Hom(X)$ y sea x_k una sucesión como en el Lema 2.1. Suponiendo por contradicción que existe una medida μ tal que f es μ-expansivo y $\mu(A(f)) > 0$. Aplicando la ecuación (2.1) se obtiene

$$\mu\left(\bigcup_{k,k',m\in\mathbb{N}} A(x_k, x_{k'}, n, m)\right) > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fijando una constante de μ-expansividad ε y un entero positivo $\frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo anterior existen $k, k', m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(A(x_k, x_{k'}, n, m)) > 0.$$

Afirmación: Existe $z \in A(x_k, x_{k'}, n, m)$ y $\delta_0 > 0$ satisfaciendo

$$\mu(A(x_k, x_{k'}, n, m) \cap D[z, \delta]) > 0, \quad \forall\, 0 < \delta < \delta_0. \tag{3.3}$$

En efecto, si fuese lo contrario, para cada $z \in A(x_k, x_{k'}, n, m)$ se puede encontrar $\delta_z > 0$ tal que

$$\mu(A(x_k, x_{k'}, n, m) \cap D[z, \delta_z]) = 0.$$

Se puede ver que

$$\{D(z, \frac{\delta_z}{2}) : z \in A(x_k, x_{k'}, n, m)\}$$

es un cubrimiento abierto de $A(x_k, x_{k'}, n, m)$. Como X es un espacio métrico separable, se tiene que $A(x_k, x_{k'}, n, m)$ también lo es, y, X es Lindelof, de ello el cubrimiento abierto tiene un subcubrimiento numerable que denotaremos como $\{D_i : i \in \mathbb{N}\}$. Por tanto

$$\mu(A(x_k, x_{k'}, n, m)) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A(x_k, x_{k'}, n, m) \cap D_i) = 0$$

Lo cual es absurdo. Debido a esto de prueba la afirmación en (3.3).
Por otro lado, como f es continuo, fijando z y m. Se puede encontrar $0 < \delta_1 < \delta_0$ tal que

$$d(f^i(z), f^i(w)) \leq \frac{\varepsilon}{2};$$

siempre que $|i| \leq m$ y $d(z, w) < \delta_1$.
Afirmación:

$$A(x_k, x_{k'}, n, m) \cap D[z, \delta_1] \subseteq \Gamma_\varepsilon(z).$$

En efecto, tomando $w \in A(x_k, x_{k'}, n, m) \cap D[z, \delta_1]$.Como $w \in D[z, \delta_1]$ uno tiene $d(z, w) < \delta_1$ entonces

$$d(f^i(w), f^i(z)) \leq \varepsilon, \quad \forall -m \leq i \leq m.$$

Como $z, w \in A(x_k, x_{k'}, n, m)$ y $\frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ se tiene

$$d(f^{-i}(w), f^{-i}(z)) \leq d(f^{-i}(w), x_k) + d(f^{-i}(z), x_k) \leq \varepsilon$$

y también

$$d(f^i(w), f^i(z)) \leq d(f^i(w), x_{k'}) + d(f^i(z), x_{k'}) \leq \varepsilon, \, \forall |i| \geq m.$$

Todo esto junto prueba que $w \in \Gamma_\varepsilon(z)$ y por ende la afirmación.
Por tanto

$$0 < \mu(A(x_k, x_{k'}, n, m) \cap D[z, \delta_1]) \leq \mu(\Gamma_\varepsilon(z))$$

Lo cual es absurdo pues ε es una constante de μ-expansividad, es decir $\mu(\Gamma_\varepsilon(z)) = 0$. □

Lema 3.3 (Lema 4 en [6]) *Si $f : X \to X$ es un mapeo continuo y $\omega(x)$ es finito para algún $x \in X$, entonces existe un punto periódico $z \in X$ de f tal que $d(f^n(x), f^n(z)) \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración. Tomando cualquier subconjunto cerrado propio $F \subsetneq \omega(x)$. Se puede afirmar que $F \cap \overline{\omega \backslash F} \neq \emptyset$. De lo contrario existen conjuntos abiertos O_1, O_2 tal que $\omega(x) \backslash F \subseteq O_1$, $F \subsetneq O_2$ y $\overline{O_2} \cap f(\overline{O_1}) = \emptyset$. Para n suficiente grande $f^n(x)$ pertenece a O_1 o bien a O_2 y en ambos para infinitas "n". Entonces, existe un sucesión infinita n_k con $f^{n_k}(x) \in O_1$ y también $f^{n_k+1}(x) \in O_2$. Cualquier punto limite y de $f^{n_k}(x)$ satisface que $y \in \overline{O_1} \cap f^{-1}\overline{O_2}$ entonces $\overline{O_2} \cap f(\overline{O_1}) \neq \emptyset$ lo cual es absurdo. Lo que prueba la afirmación.
Luego como $\omega(x)$ es finito existe una órbita periódica $P \subset \omega(x)$. Si $P \neq \omega(x)$ podemos aplicar la afirmación inicial al subconjunto cerrado $F = \omega(x) \backslash P$ que cumple $(\omega(x) \backslash P) \cap P \neq \emptyset$ lo cual es absurdo. Por lo tanto $P = \omega(x)$, de donde se obtiene lo necesario. □

Definición 3.1.6 *Sea $f : X \to X$ un biyección sobre el espacio métrico X. Se llama punto heteroclínico al punto para el cual sus conjuntos α y ω-limite (respecto a f) se reduce a órbitas periódicas.*

- *Se denota $Het(f)$ al conjunto de puntos heteroclínicos respecto a f.*

Lema 3.4 *Si $f \in Hom(X)$, entonces*

$$Het(f) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A(f^n).$$

Demostración. Si $x \in Het(f)$, entonces $\alpha(x)$ y $\omega(x)$ son conjuntos finitos. Aplicando el Lema 3.3 se obtiene un punto periódico y tal que $d(f^n(x), f^n(y)) \to o$ cuando $n \to \infty$.
Denotando n_y el periodo de y se obtiene $d(f^{kn_y}(x), y) \to 0$ cuando $k \to \infty$ y entonces $\omega_{f^{n_Y}}(x) = \{y\}$. Análogamente, $\alpha_{f^{n_z}}(x) = \{z\}$ para algún punto periódico z de periodo n_Z.
Tomando $n = n_y n_z$ se obtiene $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_{f^n}(x) = z$ y $\omega_{f^n}(x) = y$ entonces $x \in A(f^n)$ y con ello se prueba el lema. $\square$

Teorema 3.4 *Sea $f \in Hom(X)$ μ-expansivo. El conjunto de puntos heteroclínicos de f tiene medida nula respecto a μ.*

Demostración. Sea $f \in Hom(X)$. debido al Lema 3.4 se obtiene

$$Het(f) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A(f^n).$$

Ahora, sea una medida μ tal que f es μ-expansivo. Por la Proposición 3.3 se tiene que f^n es μ-expansivo y por tanto $\mu(A(f^n)) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ debido al Teorema 3.3. Por tanto

$$\mu(Het(f)) \leq \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A(f^n)\right) = 0$$

lo que prueba el resultado. $\square$

Corolario 3.2 *Sea $f \in Hom(X)$. Si f es μ-expansiva entonces el conjunto de puntos periódicos de f tiene medida nula respecto a μ.*

Demostración. Sea $Fix(f) = \{x \in X \, : \, f(x) = x\}$ el conjunto de puntos fijos de un mapeo f. De ello se tiene

$$Per(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Fix(f^n).$$

De la Proposición 3.3 se tiene que f^n es μ-expansivo para todo n, además cada elemento de $Fix(f^n)$ es un punto heteroclínico de f^n por tanto $\mu(Fix(f^n)) = 0$ para todo n debido al Teorema 3.3. Por lo tanto $\mu(Per(f)) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(Fix(f^n)) = 0$. $\square$

Teorema 3.5 *Sea $f \in Hom(I)$, I un intervalo compacto. f no es μ-expansivo para cualquier medida de probabilidad μ de I.*

Demostración. Supongamos por contradicción que existe una medida μ de I tal que f es μ-expansivo. Tenemos que $Fix(f) \neq \emptyset$ y es cerrado por la continuidad de f. Su complemento $I \backslash Fix(f)$ consiste en una cantidad numerable de intervalos abiertos J. Luego cada punto en J es un punto con semiórbitas convergentes, por tanto $\mu(I \backslash Fix(f)) = 0$ debido al Teorema 3.3. Pero también se tiene $\mu(Fix(f)) = 0$ por el Corolario 3.2 entonces $\mu(I) = \mu(Fix(f)) + \mu(I \backslash Fix(f)) = 0$ lo cual es absurdo. $\square$

Proposicion 3.4 *Sea $f \in Hom(X)$ medible-expansivo. El conjunto de puntos periódicos es numerable.*

Demostración. Como $Per(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Fix(f^n)$ es suficiente probar que $Fix(f^n)$ es numerable para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que no es numerable para algún n. Como f es continuo se tiene que $Fix(f^n)$ es también cerrado, por lo que es completo y separable respecto a la topología inducida. Así (por el corolario 6.1 en [27]) existe una medida de Borel de probabilidad no atómica ν sobre $Fix(f^n)$. Tomando

$$\mu(A) = \nu(Fix(f^n) \cap A), \forall A \in \mathfrak{B}(X)$$

se obtiene una medida μ de Borel de probabilidad no atómica de X, donde $\mu(Fix(f^n)) = 1$. Luego $Fix(f^n) \subseteq Fix(f)$ se concluye que $\mu(Per(f)) = 1$. Sin embargo, como f es μ-expansivo y por el Corolario 3.2 se tiene $\mu(Per(f)) = 0$, que es una contradicción. Con ello se prueba el resultado. $\square$

Como cada homeomorfismo expansivo de un espacio métrico compacto es medible-expansivo, la Proposición 3.4 también se puede utilizar para demostrar el siguiente resultado de Utz (Teorema 3.1 en [36]).

Corolario 3.3 *El conjunto de puntos periódicos de un homeomorfismo expansivo de un espacio métrico compacto es numerable.*

Proposicion 3.5 *No existen homeomorfismos medible-expansivo de intervalos compactos.*

Demostración. Supongamos por contradicción que existe $f \in Hom(I)$ que es medible-expansivo. Como la medida de Lebesgue *Leb* de I es no atómica, se obtiene que f es *Leb*-expansivo. Sin embargo debido al Teorema 3.5 no existen tales medidas sobre un intervalo I. $\square$

De esta última proposición se puede obtener como consecuencia un resultado muy conocido debido a Jacobson y Utz en [11], demostrado desde el punto de vista medible (Corolario 2.6, también puede encontrarse en [8]).

Corolario 3.4 *No existen homeomorfismos expansivos de un intervalo compacto.*

Demostración. Suponiendo por contradicción que existe $f \in Hom(I)$ expansivo. Como la medida de Lebesgue *Leb* en I es no atómica, esto implica que f es *Leb*-expansivo. Pero ello entra en contradicción con el Teorema 3.5. Lo que prueba este resultado muy conocido. $\square$

Se pueden obtener ejemplos adicionales de homeomorfismos que no son μ expansivos para todas las medidas de probabilidad de Borel μ de la siguiente manera.

Ejemplo 3.1.4 *Existen homeomorfismos expansivos en ciertos espacios métricos compactos que no son μ-expansivos.*

Demostración. Considere el mapa $p(x) = x^3$ en $\mathbb{R}$ y defina $X = \{0, 1, -1\} \cup \{p^n(c) : n \in \mathbb{N}, c \in \{\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\}\}$. Se tiene que X es un espacio métrico compacto infinito (pero contable) con la métrica inducida $d(x, y) = |x - y|$. Observe que no hay medidas de probabilidad de Borel no atómicas en X, como cada conjunto no aislado de X debe estar contenido en $\{0, 1, -1\}$. Definiendo $f(x) = p(x)$ para $x \in X$ se obtiene un homeomorfismo expansivo f que no es μ-expansivo para cada medida de probabilidad de Borel. $\square$

Si $X = M$ es una variedad cerrada (es decir, compacta y sin borde) y f es un difeomorfismo, se dice que un conjunto invariante H es hiperbólico si hay una descomposición constante de haces tangentes invariantes $T_H M = E^s_H \oplus E^u_H$ y constantes positivas $K, \lambda > 1$ tal que

$$\|Df^n(x)/E^s_x\| \leq K\lambda^{-n} \quad y \quad m(Df^n(x)/E^s_x) \geq K^{-1}\lambda^n$$

para todo $x \in H$ y $n \in \mathbb{N}$ (m denota la operación conorma en M). Se dice que f es el Axioma A si $\Omega(f)$ es hiperbólico y el cierre del conjunto de puntos periódicos.

Ejemplo 3.1.5 *Cada difeomorfismo Axioma A con conjunto no errante infinito de una variedad compacta sin borde es μ-expansivo para alguna medida de Borel de probabilidad μ.*

Demostración. Considere un difeomorfismo Axioma A de una variedad cerrada. Sabemos que existe una descomposición espectral $\Omega(f) = H_1 \cup \cdots \cup H_k$ que consiste en un número finito de clases homoclínicas disjuntas $H_1, \cdots, H_k$ de f (estos conceptos pueden leerse a detalle en [12]). Como $\Omega(f)$ es infinito, se tiene que $H = H_i$ es infinito para algunos $1 \leq i \leq k$. También, f/H es expansivo. Por otro lado, H es compacto sin puntos aislados debido a que es una clase homoclínica. Se deduce que f/H es ν-expansivo para alguna medida de probabilidad de Borel ν de H, entonces, f es μ-expansivo para algunos μ. $\square$

3.2. POTP respecto a una medida de Borel

Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo de un espacio métrico compacto X.

Definición 3.2.1 (μ-POTP) *Un homeomorfismo $f \in Hom(X)$ tiene la propiedad de sombreamiento para una medida de Borel μ de X (se dirá que tiene μ-POTP), si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ y un boreliano $B \subset X$ de medida total tal que toda δ pseudo-órbita $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ que pasa por B puede ser ε-sombreado por f.*

Evidentemente la propiedad de sombreamiento puede restringirse a un conjunto invariante. Pero esta definición de sombreamiento respecto a una medida de Borel no se trata de solo restringirlo para casi todo punto $x \in X$, pues no necesariamente la pseudo órbita está totalmente contenida en el Boreliano, basta con que un elemento este dentro. Continuando con el análisis se darán resultados equivalentes a los vistos en la sección 2.2.

Teorema 3.6 *Sea $f \in Hom(X)$, k un entero positivo y sea μ una medida de Borel de X. f^k tiene $\mu - POTP$ si y sólo si f tiene $\mu - POTP$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Se tiene lo siguiente:

- Sea $\varepsilon > 0$. Para $\frac{\varepsilon}{2}$ existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $d(x, y) < \varepsilon_1$ implica que $d(f^i(x), f^i(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ para $0 \leq i \leq k$.
  y además por el Lema 2.2 para cada ε_1-pseudo órbita finita es $\frac{\varepsilon}{2}$-sombreado por su primer término.

- para ε_1 existe δ_1 y un boreliano $B \subset X$ por $\mu - POTP$ de f^k.

- para δ_1 existe $\delta < \varepsilon_1$ por el Lema 2.2 (respecto a f).

De esta forma sea $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ como antes y $B = B(\varepsilon_1)$ por $\mu - POTP$ de f^k. Ahora bien, sea $\{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ una δ-pseudo órbita de f que pasa por B. Luego se escribe $x_i = y_{ki}; i \in \mathbb{Z}$. Fijando $i \in \mathbb{Z}$. $\{y_{ki+j}\}_{j=0}^{k}$ es una δ-pseudo órbita finita por f.

$$d(f^j(y_{ki}), y_{ki+j}) \leq \delta_1; 0 \leq j \leq k$$

Si $j = k$, $d(f^k(y_{ki}), y_{k(i+1)}) = d(f^k(x_i), x_{i+1}) \leq \delta_1$
Como se cumple para $i \in \mathbb{Z}$, se tiene que $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es una δ_1-pseudo órbita por f^k. $x_0 = y_0 \in B$ entonces $\exists y \in X$ tal que

$$(f^{ki}(y), x_i) < \varepsilon_1; \forall i \in \mathbb{Z}$$

Por otro lado $\{y_{ki+j}\}_{j=0}^{k}$ es una δ_1-pseudo órbita finita por f entonces

$$d(f^j(y_{ki}), y_{ki+j}) \leq \varepsilon; 0 \leq j \leq k, \forall i \in \mathbb{Z}$$

Además

$$d(f^{ki+j}(y), f^j(y_{ki})) \leq d(f^{ki+j}(y), f^j(x_i)) \leq \varepsilon_2; 0 \leq j \leq k, \forall i \in \mathbb{Z}$$

Esto implica que

$$d(f^{ki+j}(y), y_{ki+j}) \leq \varepsilon; 0 \leq j \leq k, \forall i \in \mathbb{Z}$$

Por tanto

$$d(f^n(y), y_n) \leq \varepsilon; \forall n \in Z$$

Asi $\{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es ε-sombreado por f. f tiene $\mu - POTP$.

($\Leftarrow$) sea $\varepsilon > 0$ existe δ y el Boreliano de medida total B por $\mu - POTP$ de f y sea $k \in \mathbb{N}$. Así sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ una δ-pseudo órbita por f^k que pasa por B. Entonces construimos

$$\{..., x_0, f(x_0), f^2(x_0), ..., f^{k-1}(x_0), x_1, f(x_1), f^2(x_1), ..., f^{k-1}(x_1), x_2, ...\}$$

$$y_i = f^{i \, mod \, k}(x_m) \text{ si } km \leq i < k(m+1); \forall m \in \mathbb{Z}$$

$\{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es una δ-pseudo órbita por f, que pasa por B pues $y_0 = x_0 \in B$. Entonces es ε-sombreado por f, esto es existe $y \in X$ tal que

$$d(f^i(y), y_i) \leq \varepsilon; \forall i \in \mathbb{Z}$$

En particular

$$d(f^{ki}(y), y_{ki}) \leq \varepsilon; \forall i \in \mathbb{Z}$$

$$d(f^{ki}(y), x_i) \leq \varepsilon; \forall i \in \mathbb{Z}$$

$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es ε-sombreado por f^k. Por tanto f^k tiene $\mu - POTP$. $\square$

Teorema 3.7 *Sea $f \in Hom(X)$. Si f tiene μ-POTP entonces f^{-1} tiene μ-POTP.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ existen $\delta_1 > 0$ y el Boreliano de medida total $B \subset X$ tal que toda δ_1-pseudo órbita es ε-sombreado por f por la $\mu - POTP$ de f. Así para δ_1 se toma δ tal que $d(x, y) < \delta$ implica $d(f(x), f(y)) < \delta_1$.

Sea $\{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ una δ-pseudo-órbita para f^{-1} que pasa por B ($y_0 \in B$) entonces $d(f^{-1}(y_i), y_{i+1}) \leq \delta; \forall i \in \mathbb{Z}$ lo que implica que

$$d(y_i, f(y_{i+1})) \leq \delta_1; \forall i \in \mathbb{Z}$$

Si se escribe $x_i = y_{-i}; \forall i \in \mathbb{Z}$ se tiene que:

$$d(x_{-i}, f(x_{-i-1})) \leq \delta_1; \forall i \in \mathbb{Z}$$

Haciendo un cambio de índice.

$$d(x_{i+1}, f(x_i)) \leq \delta_1; \forall i \in \mathbb{Z}$$

Por tanto $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es una δ_1-pseudo órbita por f que pasa por B, $x_0 = y_0 \in b$, entonces existe $x \in X$ tal que

$$d(f^i(x), x_i) \leq \varepsilon; \forall i \in \mathbb{Z}$$

Por cambio de índice

$$d(f^{-i}(x), x_{-i}) \leq \varepsilon; \forall i \in \mathbb{Z}$$

$$d((f^{-1})^i(x), y_i) \leq \varepsilon; \forall i \in \mathbb{Z}$$

Lo que implica que $\{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es ε-sombreado por f^{-1}. □

De este modo obtenemos el equivalente al Corolario 2.1.

Corolario 3.5 *Sea $f \in Hom(X)$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ y sea μ una medida de Borel de X. f^k tiene $\mu - POTP$ si y sólo si f tiene $\mu - POTP$.*

Proposicion 3.6 *Sea $f \in Hom(X)$ que tiene μ-POTP y $g \in Hom(Y)$ que tiene ν-POTP, entonces si μ, ν son medidas de Borel finitas $f \times g$ tiene $\mu \otimes \nu$-POTP.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existen δ_1, $B_1 \subseteq X$ por μ-POTP de f y δ_2, $B_2 \subseteq X$ por ν-POTP de g. Tomando $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ y $B = B_1 \times B_2$ se cumplirá lo que se pide. En efecto, $X \times Y\backslash B \subseteq (X\backslash B_1) \times B_2 \cup (Y\backslash B_2) \times B_1$ lo que implica

$$\mu \otimes \nu(X \times Y\backslash B) \leq \mu \otimes \nu((X\backslash B_1) \times B_2) + \mu \otimes \nu((Y\backslash B_2) \times B_1)$$

$$\mu \otimes \nu(X \times Y\backslash B) \leq \mu(X\backslash B_1)\nu(B_2) + \nu(Y\backslash B_2)\mu(B_1) = 0.$$

□

Definición 3.2.2 *Se dice que un homeomorfismo $h \in Hom(X)$ preserva borelianos de medida total respecto a la medida de Borel μ, si dado cualquier boreliano B de X de medida total se cumple $\mu(X\backslash h(B)) = 0 = \mu(X\backslash h^{-1}(B))$.*

Observación. Si μ es una medida de Borel, finita e invariante en X entonces todo homeomorfismo $\phi \in Hom(X)$ preserva borelianos de medida total respecto a μ, en efecto sea $B \subset X$ un boreliano se tiene que $\mu(B) = \mu(\phi^{-1}(B))$. Además $\mu(\phi(B)) = \mu(B)$ pues $\phi(B)$ también es un boreliano.

$$\mu(\phi(B)) = \mu(B) = \mu(\phi^{-1}(B)); \forall\phi \in Hom(X). \tag{3.4}$$

Por otro lado se tiene

$$\begin{aligned} \mu(X) &= \mu(B) + \mu(X\backslash B) \\ &= \mu(\phi(B)) + \mu(X\backslash \phi(B)) \qquad ;\forall\phi \in Hom(X). \\ &= \mu(\phi^{-1}(B)) + \mu(X\backslash \phi^{-1}(B)) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Lo que implica que:

$$\begin{aligned} \mu(X) &= \mu(B) + \mu(X\backslash B) \\ &= \mu(B) + \mu(X\backslash \phi(B)) \qquad ;\forall\phi \in Hom(X). \\ &= \mu(B) + \mu(X\backslash \phi^{-1}(B)) \end{aligned}$$

$$\mu(X) - \mu(B) = \mu(X\backslash B) = \mu(X\backslash \phi(B)) = \mu(X\backslash \phi^{-1}(B)) \tag{3.6}$$

Para todo boreliano B de X. En particular si B es de medida total

$$0 = \mu(X\backslash B) = \mu(X\backslash \phi(B)) = \mu(X\backslash \phi^{-1}(B)); \forall\phi \in Hom(X)$$

Lo que prueba que ϕ preserva borelianos de medida total respecto a μ.

Teorema 3.8 *Sean $g, h \in Hom(X)$, μ una medida de Borel de probabilidad. Si g tiene $\mu - POTP$ entonces $h \circ g \circ h^{-1}$ tiene $h_*\mu - POTP$.*

Demostración. Escribiendo $f = h \circ g \circ h^{-1}$. Sea $\varepsilon > 0$ existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $d(x, y) \leq \varepsilon_1$ implica $d(h(x), h(y)) < \varepsilon$ con $x, y \in X$. Para ε_1 existe $\delta_1 > 0$ y $B \subset X$ por $\mu - POTP$ de g. Para δ_1 se toma $\delta > 0$ talque $d(x, y) \leq \delta$ implica que $d(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) < \delta_1$.

Tomando este $\delta > 0$ y $h(B)$ (Boreliano de medida total). Sea $\{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ una δ-pseudo-órbita por f que pasa por $h(B)$,

$$d(h \circ g \circ h^{-1}(y_i), y_{i+1}) \leq \delta \rightarrow d(g \circ h^{-1}(y_i), h^{-1}(y_{i+1})) < \delta_1$$

Entonces $\{h^{-1}(y_i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es una δ_1-pseudo-órbita por f que pasa por B pues $y_0 \in h(B)$ entonces $x_0 = h^{-1}(y_0) \in B$. Por tanto existe $y \in X$ tal que $d(g^i(y), h^{-1}(y_i)) \leq \varepsilon_1$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Lo que implica que $d(h(g^i(y)), y_i) < \varepsilon$ para todo $i \in \mathbb{Z}$

$$d(f^i(h(y)), y_i) < \varepsilon; \forall i \in \mathbb{Z}$$

Es decir $\{y_i\}$ es ε-sombreado por f. Por tanto f tiene $\mu - POTP$. $\square$

La propiedad de sombreamiento respecto a una medida invariante es invariante por conjugación.

Corolario 3.6 *Sea μ una medida finita invariante, $g, h \in Hom(X)$ y $f = h \circ g \circ h^{-1}$.Entonces g tiene $\mu - POTP$ si y sólo si f tiene $\mu - POTP$.*

Demostración. Debido a la observación de la Definición 3.2.2, cada homeomorfismo $h \in Hom(X)$ preserva borelianos de medida total. Y por el Teorema 3.8 queda demostrado. $\square$

Lema 3.5 *Sea $f \in Hom(X)$ y μ una medida de Borel. Si f tiene $\mu - POTP$ Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ y un boreliano $B \subset X$, de medida total, tal que cada δ-pseudo órbita periódica que pasa por B puede ser ε-sombreado por algún punto en $R(f)$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. De $\frac{\varepsilon}{2}$ se toma δ y B dados por la μ-POTP de f. Sea $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ una δ-pseudo órbita periódica de f que pasa por B, esto es $x_0 \in B$. Escribiendo $y_m = x_{m \bmod n}$ para $m \in \mathbb{Z}$. Entonces existe $x \in X$ tal que

$$d(f^m(x), y_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}; \forall m \in \mathbb{Z}$$

Que es lo mismo que escribir

$$d(f^{ni+j}(x), x_{ni+j \bmod n}) = d(f^{ni+j}(x), x_j) \leq \frac{\varepsilon}{2}; \forall i \in \mathbb{Z} \text{ y } 0 \leq j < n \qquad (3.7)$$

En particular si $j=0$ se tiene

$$d(f^{ni}(x),x_0)\leq\frac{\varepsilon}{2};\forall i\in\mathbb{Z}$$

$$f^{ni}(x)\in D[x_0,\frac{\varepsilon}{2}];\forall i\in\mathbb{Z}$$

Es decir que la órbita de x por f^n está contenida en la bola cerrada de centro x_0 y radio $\frac{\varepsilon}{2}$.

$$\overline{\vartheta_{f^n}(x)}\subseteq D[x_0,\frac{\varepsilon}{2}]$$

$\overline{\vartheta_{f^n}(x)}$ es compacto e invariante por f^n.
Entonces $\overline{\vartheta_{f^n}(x)}$ contiene un conjunto minimal M para f^n. Sea $z\in M$ entonces

$$\overline{\vartheta_{f^n}(z)}=\omega_{f^n}(z)=\alpha_{f^n}(z)=M$$

Por lo tanto $z\in\omega_{f^n}(z)\cap\alpha_{f^n}(z)\subset\omega_f(z)\cap\alpha_f(z)$

$$z\in R(f)$$

$M\subseteq\overline{\vartheta_{f^n}(x)}$; si $z\in\vartheta_{f^n}(x)$ entonces existe $k\in\mathbb{Z}$ tal que $z=f^{nk}(x)$ Luego de (3.7) se obtiene que

$$d(f^j(z),x_j)\leq\frac{\varepsilon}{2};0\leq j<n$$

Así $\{x_i\}$ es ε-sombreado por z en f. Ahora suponiendo que $z\in\omega_{f^n}(x)$ y $\{x_i\}$ no es ε-sombreado por z. Esto es $d(f^{j_0}(z),x_{j_0})>\varepsilon$ para algún $0\leq j_0<n$
Por la continuidad de f, existe una vecindad G que contiene a z tal que $f^{j_0}(G)\subset X\backslash D(x_{j_0},\varepsilon)$ como $z\in\omega_{f^n}(x)$ existe una sucesión $\{k_i\}\subset N$ tal que $f^{nk_i}(x)\to z$ cuando $i\to\infty$.

Por lo tanto existe K suficientemente grande, $K\in\{k_i\}$, satisfaciendo $f^{nK}(x)\in G$ y $d(f^{nK+j_0}(x),x_{j_0})>\varepsilon$ lo cual es una contradicción de (3.7). Análogamente si $z\in\alpha_{f^n}(x)$. Por tanto $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es ε-sombreado por z para f, donde $z\in R(f)$. □

En los Teoremas 2.13 y 2.14 se demostró que un homeomorfismo f con POTP en un espacio métrico compacto cumple que $CR(f)=\Omega(f)=\overline{R(f)}$. A continuación se probarán resultados similares desde el punto de vista medible.

Teorema 3.9 *Si f tiene $\mu - POTP$ entonces existe un boreliano de medida total $B \subset X$ tal que*

$$\Omega(f) \cap B \subseteq \overline{R(f)}$$

Demostración. Sea $\frac{1}{n} > 0$ ($n \in \mathbb{N}$). Para $\frac{1}{2n}$ existe $\delta_n > 0$ y un boreliano de medida total $B_n \subseteq X$ por $\mu - POTP$ de f. Tomemos

$$B = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i.$$

Sea $x \in \Omega(f) \cap B$. Fijado $n \in \mathbb{N}$, para δ_n existe $\delta < \delta_n$ tal que $d(x, y) < \delta$ implica $d(f(x), f(y)) < \delta_n$ para $x, y \in X$. Como $x \in \Omega(f)$ existe $w \in D(x, \delta)$ y un entero m con $f^m(w) \in D(x, \delta)$ entonces se tiene

$$\{z_i\}_{i=0}^{m} = \{x, f(w), ..., f^{m-1}(w), x\}$$

es una δ_n-pseudo órbita periódica por f que pasa por B_n puesto que $z_0 = x \in B \subseteq B_n$, por el Lema 3.5 existe $z \in R(f)$ tal que $d(f^i(z), z_i) \leq \frac{1}{2n}$; para todo $0 \leq i \leq m$. En particular

$$d(z, z_0) = d(z, x) < \frac{1}{n}.$$

Como n es arbitrario se concluye que $x \in \overline{R(f)}$. □

Teorema 3.10 *Si f tiene μ-POTP, entonces existe un boreliano de medida total $B \subseteq X$ respecto a μ tal que*

$$CR(f) \cap B \subseteq \Omega(f).$$

Demostración. Para cada $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, existe δ_n y B_n (boreliano de medida total de X) por la μ-POTP de f. Sea $x \in CR(f) \cap B$ donde

$$B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \tag{3.8}$$

Entonces para todo $\frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, existe una δ_n-pseudo órbita periódica $\{x = x_0, x_1, x_2, ..., x_k = x\}$ y por μ-POTP de f, existe $y \in X$ tal que

$$d(f^i(y), x_i) \leq \frac{1}{n+1} \text{ para } 0 \leq i \leq k.$$

$$\begin{array}{rcll} d(y,x_0) & = & d(y,x) & \leq \frac{1}{n+1} \\ d(f^k(y),x_k) & = & d(f^k(y),x) & \leq \frac{1}{n+1} \end{array} \tag{3.9}$$

De (3.9) $y \in D(x, \frac{1}{n})$ entonces $f^k(y) \in f^k\left(D\left(x, \frac{1}{n}\right)\right)$ y $f^k(y) \in D\left(x, \frac{1}{n}\right)$. Por tanto

$$f^k\left(D\left(x, \frac{1}{n}\right)\right) \cap D\left(x, \frac{1}{n}\right) \neq \emptyset,$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$, así $x \in \Omega(f)$. $\square$

Corolario 3.7 *Si $f \in Hom(X)$ tiene μ-POTP, para alguna medida de Borel μ, entonces*

$$\begin{array}{rcl} \mu(CR(f)\backslash\Omega(f)) & = & 0 \\ \mu(\Omega(f)\backslash R(f)) & = & 0 \end{array}.$$

Ejemplo 3.2.1 *Sea $f \in Hom(S^1)$ topológicamente estable. Se construye $g \in Hom(M)$, donde*

$$M = S^1 \cup \{0\} \approx \{p \in \mathbb{C} : |p| = 1 \vee p = 0\},$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in S^1 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Entonces de la Proposición 2.2 f tiene POTP, g tiene leb-POTP, pero además g tiene POTP.

El estudio de la propiedad de sombreamiento en un conjunto de medida total surgió del análisis de la propiedad de sombreamiento cuando todas las pseudo órbitas pasan por algún mismo punto, a estos puntos Morales les llamó sombreables [22].

Definición 3.2.3 (Punto sombreable) *Un punto $x \in X$ se llama sombreable (respecto a $f \in Hom(X)$) si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda δ pseudo-órbita (de f) que pasa por $\{x\}$ es ε-sombreable.*

- El conjunto de puntos sombreables de f se denota por $Sh(f)$.

Observaciones. Si $Sh(f) \subseteq X$ es un boreliano de medida total respecto a μ entonces f tiene μ-POTP. Si $Sh(f) = X$ entonces f tiene POTP.

Ejemplo 3.2.2 *Tomando* $X = \{2, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\}$ *con la métrica inducida y definiendo el homeomorfismo* f *como:*

$$f(0) = 0,\ f(2) = 2,\ f(1) = \frac{1}{2},\ f(\frac{1}{2^n}) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-2}} & ,\ si\ n\ es\ par \\ \frac{1}{2^{n+2}} & ,\ si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

1. f *es expansivo.*

2. f *no tiene POTP.*

3. $Sh(f) = \{2\}$.

Demostración.

(1) En efecto, sea $\varepsilon = \frac{1}{3}$ se toma dos elementos distintos $x, y \in X$, para cualquiera que sea de la forma $\frac{1}{2^p}$ con $p \leq 1$, para algún k se tendrá $d(f^k(x), f^k(y)) > \varepsilon$.

(2) Para cualquier $\frac{1}{2^{m+1}} \leq \delta < \frac{1}{2^m}$ se puede construir una δ pseudo-órbita $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, donde $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ está formado por 0 continuando con parte de la órbita de $\frac{1}{2^{m+1}}$ (desde $\frac{1}{2^{m+1}}$ hasta $\frac{1}{2^{m+2}}$) luego volver a 0, y así sucesivamente. Esta pseudo órbita no puede ser ε-sombreado.

(3) Siguiendo la idea del item (2), cualquier punto distinto a 2 tiene δ-pseudo órbitas que no pueden ser sombreados. $\square$

Ejemplo 3.2.3 *Sea la aplicación identidad* $id \in Hom(N)$. *Donde* $N = C \cup [1, 2]$ *y* C *es el conjunto clásico de Cantor. Entonces* id *tiene* μ*-POTP, donde* $\mu : \mathfrak{B}(N) \to [0, \infty]$ *está definida por*

$$\mu(A) = \nu(A \cap C),$$

ν *es la medida de probabilidad no atómica que existe en todo espacio metrico completo separable sin puntos aislados [27]. Como la identidad solo tiene POTP si está definida sobre un espacio totalmente disconexo por el ejemplo 2.2.1, entonces se tiene que para todo* $\varepsilon > 0$ *se escoge el boreliano de medida total* $B = C\backslash\{1\} = Sh(id)$.

Lema 3.6 *Sea $f \in Hom(X)$. f tiene POTP a través del subconjunto K si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que cada δ-pseudo órbita de f que pasa por $D[K, \delta]$ puede ser ε-sombreado.*

Demostración. Supongamos, por contradicción, que $f \in Hom(X)$ tiene POTP a través de K pero existe $\varepsilon > 0$ y una sucesión de $\frac{1}{k}$-pseudo órbitas $\{x_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ que pasan por $D[K, \frac{1}{k}]$ los cuales no puede ser 2ε-sombreables ($k \in \mathbb{N}$).
Para este ε se toma δ de la POTP a través de K. Se puede asumir $\delta < \varepsilon$. Luego existe una sucesión $y^{(k)} \in K$ tal que $d(x_0^{(k)}, y^{(0)}) \leq \frac{1}{k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como X es compacto, f es uniformemente continua entonces se puede fijar k suficientemente grande tal que $max\{d(f(x_0^{(k)}), f(y^{(k)})), \frac{1}{k}\} \leq \frac{\delta}{2}$. Teniendo este k se puede definir $\widehat{x} = \{\widehat{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ por

$$\widehat{x}_n = \begin{cases} x_n^{(k)}, & si \quad n \neq 0 \\ y^{(k)}, & si \quad n = 0 \end{cases}$$

De ahí es claro $d(f(\widehat{x}_n), \widehat{x}_{n+1}) \leq \frac{1}{k} \leq \delta$ para $n \neq -1, 0$. Luego de

$$d(f(\widehat{x}_{-1}), \widehat{x}_0) = d(f(\widehat{x}_{-1}^{(k)}), y^{(k)}) \leq d(f(\widehat{x}_{-1}^{(k)}), \widehat{x}_0^{(k)}) + d(\widehat{x}_0^{(k)}, y^{(k)}) \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k} \leq \delta$$

junto con

$$d(f(\widehat{x}_0), \widehat{x}_1) = d(f(y^{(k)}), x_1^{(k)}) \leq d(f(y^{(k)}), f(x_0^{(k)})) + d(f(x_0^{(k)}), x_1^{(k)}) \leq \frac{\delta}{k} + \frac{\delta}{k} = \delta,$$

se obtiene que $\widehat{x}$ es una δ-pseudo órbita. Tenemos $\widehat{x}_0 = y^{(k)} \in X$ por la definición se obtiene que $\widehat{x}$ puede ser ε-sombreado, es decir existe $z \in X$ tal que $d(f^n(z), \widehat{x}_n) \leq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
De forma similar $d(f^n(z), x_n^{(k)}) = d(f^n(z), \widehat{x}_n) \leq \varepsilon \leq 2\varepsilon$ para $n \neq 0$. Luego para $n = 0$, se obtiene de

$$d(f^n(z), x_n^{(k)}) = d(z, x_0^{(k)}) \leq d(z, y^{(k)}) + d(y^{(k)}, x_0^{(k)}) = d(z, \widehat{x}_0) + \frac{1}{k} \leq \varepsilon + \frac{\delta}{2} \leq 2\varepsilon$$

Por lo tanto $d(f^n(z), x_n^{(k)}) \leq 2\varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Esto es $\{x_n^k\}$ puede ser 2ε-sombreado, lo cual es absurdo. El recíproco es obvio tomando en particular las δ-pseudo orbitas que pasan por K. $\square$

Lema 3.7 *Sea $f \in Hom(X)$. Entonces para todo $z \in \Omega(f) \cap Sh(f)$ y cada $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ y $y \in X$ tal que $f^{pk}(y) \in D[z, \varepsilon]$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Fijando $z \in \Omega(f) \cap Sh(f)$ y $\varepsilon > 0$. Sea $\delta > 0$ dado por el Lema 3.6 para $\frac{\varepsilon}{2}$ con $K = \{z\}$. Se puede asumir que $\delta < \varepsilon$. Como $z \in \Omega(f)$, existe $x \in X$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $x, f^k(x) \in D[z, \frac{\delta}{2}]$.
Considerando la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ definido por $x_{pk+r} = f^r(x)$ con $p \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq r < k$. No es complicado notar que esta es un δ-pseudo órbita con $x_0 \in D[z, \delta]$, y entonces del Lema 3.6 existe $y \in X$ tal que $d(f^n(y), x_n) \leq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. tomando $n = pk$ con $p \in \mathbb{Z}$ se obtiene $d(f^{pk}(y), x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ y por tanto $d(f^{pk}(y), z) \leq d(f^{pk}(y), x) + d(x, z) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.
□

Si f tiene POTP a través de K, entonces cada punto de K es sombreable. El siguiente resultado muestra el recíproco de esta afirmación cuando K es compacto.

Lema 3.8 *Sea $f \in Hom(X)$. f tiene POTP a través de un subconjunto compacto K si y solo si todo punto en K es sombreable.*

Demostración. La primera parte es obvia por la misma definición de POTP a través de un conjunto. Ahora, sea $f \in Hom(X)$, supongamos por contradicción que existe un subconjunto $K \subseteq Sh(f)$ y sin embargo que f no tenga POTP a través de K. Entonces existe $\varepsilon > 0$ y sucesiones $\{x_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ que son $\frac{1}{k}$-pseudo órbitas que pasan por K las cuales no pueden ser 2ε-sombreados. $k \in \mathbb{N}$.
Como K es compacto, se puede asumir que $x(k)_0$ converge a p para algún $p \in K$, de donde $p \in Sh(f)$. Así pues se toma $\delta > 0$ de la propiedad de sombreamiento de p para ε. Luego se define la sucesión $\widehat{x}^{(k)} = \{\widehat{x}_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ por

$$\widehat{x}_n^{(k)} = \begin{cases} x_n^{(k)}, & si \quad n \neq 0 \\ p, & si \quad n = 0, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Se nota que cada sucesión pasa por $\{p\}$ y además

$$d(f(\widehat{x}_{n-1}^{(k)}), \widehat{x}_n^{(k)}) = \begin{cases} d(f(x_{n-1}^{(k)}), x_n^{(k)}), & si \quad n \neq 0, 1 \\ d(f(p), x_1^{(k)}), & si \quad n = 1 \\ d(f(x_{-1}^{(k)}), p), & si \quad n = 0 \end{cases}$$

entonces

$$d(f(\widehat{x}_{n-1}^{(k)}), \widehat{x}_n^{(k)}) \leq \begin{cases} \frac{1}{k}, & si \quad n \neq 0, 1 \\ d(f(p), f(x_0^{(k)})) + \frac{1}{k}, & si \quad n = 1 \\ d(x_0^{(k)}, p) + \frac{1}{k}, & si \quad n = 0. \end{cases}$$

Como f es continuo y $x_0^{(k)} \to p$, se obtiene que $\widehat{x}^{(k)}$ es una δ-pseudo órbita para k suficientemente grande. De este modo, para este k suficientemente grande existe $x_k \in X$ tal que $d(f^n(x_k), \widehat{x}_n^{(k)}) \leq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. De ello $d(f^n(x_k), x_n^{(k)}) \leq \varepsilon$ para $n \neq 0$. Y como

$$d(x_k, x_0^{(k)}) \leq d(x_k, p) + d(p, x_0^{(k)}) \leq \varepsilon + d(p, x_0^{(k)}),$$

se tiene $d(f^n(x_k), x_n^{(k)}) \leq 2\varepsilon$ también para $n = 0$ con k suficientemente grande. De todo esto se puede concluir que $x^{(k)}$ puede ser 2ε-sombreado, para k grande. Lo que es una contradicción. $\square$

Teorema 3.11 *Sea $f \in Hom(X)$. EL conjunto de puntos sombreables es invariante.*

Demostración. Sea $x \in Sh(f)$. Sea $\varepsilon > 0$ fijo, como X es compacto, f es uniformemente continuo y por tanto existe $\varepsilon' > 0$ tal que para $y, z \in X$ con $d(y, z) \leq \varepsilon'$, implica $d(f(y), f(z)) \leq \varepsilon$. Para este ε', se toma $\delta' > 0$ dado por la propiedad de sombreamiento de x. De este δ' existe $\delta > 0$ tal que para $y, z \in X$ con $d(x, y) \leq \delta$ implica que $d(f^{-1}(y), f^{-1}(z)) \leq \delta'$. Pues f^{-1} también es uniformemente continua.

Ahora tomando una δ-pseudo órbita $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ que pasa por $\{f(x)\}$. De la forma como se escogió δ se tiene que $d(f(x_n), x_{n+1}) \leq \delta$ implica

$$d(f^{-1}(f(x_n)), f^{-1}(x_{n+1})) = d(f(f^{-1}(x_n)), f^{-1}(x_{n+1})) \leq \delta'.$$

Esto significa que $\{f^{-1}(x_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una δ'-pseudo órbita que pasa por $\{x\}$. Por la forma como se escogió δ' se sigue que $\{f^{-1}(x_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ puede ser ε'-sombreado, esto es, $d(f^n(z), f^{-1}(x_n)) \leq \varepsilon'$ (para algún z), lo que a su vez implica que $d(f^n(f(z)), x_n) \leq \varepsilon$, todo ello para $n \in \mathbb{Z}$, y prueba que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es ε-sombreado. Por tanto, $f(x) \in Sh(f)$, entonces $f(Sh(f)) \subseteq sh(f)$.

De forma similar se prueba $f^{-1}(Sh(f)) \subseteq Sh(f)$ y se concluye que $f(Sh(f)) = Sh(f)$. $\square$

Lema 3.9 *Sea $f \in Hom(X)$. Si un punto recurrente por cadenas es sombreable, entonces es no errante. Es decir,*

$$CR(f) \cap Sh(f) \subseteq \Omega(f).$$

Demostración. Fijado $x \in CR(f) \cap Sh(f)$ y $\varepsilon > 0$, se toma $\delta > 0$ de ε según la propiedad de sombreamiento de x, como x es recurrente por cadenas, luego existe una δ-cadena $\{x_i : 0 \leq i \leq k\}$ de x en si mismo. Se define la sucesión $\xi = \{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ por $z_{pk+i} = x_i$ para $p \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq i < k$. ξ es una δ-pseudo órbita que pasa por x, entonces existe $y \in X$ tal que $d(f^n(y), z_n) \leq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. En particular $d(y, x) \leq \varepsilon$ y entonces

$$f^k(D[x, \varepsilon])D[x, \varepsilon] \neq \emptyset.$$

Dado que ε es arbitrario, se obtiene $x \in \Omega(f)$. $\square$

Ahora se podrá probar el resultado del Teorema 2.14 utilizando los resultados vistos sobre el conjunto sombreable, sin que f tenga la propiedad de sombreamiento.

Teorema 3.12 *Sea $f \in Hom(X)$. Si todos los puntos recurrentes por cadena son sombreables, entonces $CR(f) = \Omega(f)$.*

Demostración. Se sabe que $\Omega(f) \subseteq CR(f)$ de la Proposición 1.3. Si $CR(f) \subseteq Sh(f)$, debido al lema 3.9 se tendría $CR(f) \subseteq \Omega(f)$, lo que prueba el teorema. $\square$

Es claro que si un homeomorfismo tiene POTP también tendrá μ-POTP pues se tomaría X como el boreliano de medida total, esto nos indica que de forma similar en un espacio métrico compacto el conjunto de homeomorfismos con μ-POTP contiene al conjunto de homeomorfismos con POTP. Actualmente se estudia estos conjuntos para una medida fija y se intenta encontrar resultados sobre $Hom(X)$.

Capítulo 4

Estabilidad topológica respecto a una medida de Borel

Antes de mostrar la definición de Morales sobre la estabilidad topológica respecto a una medida, mencionaremos definiciones básicas sobre mapeos multivaluados (ver [5]). Se denota 2^X al conjunto formado por los subconjuntos de X.

Definición 4.0.1 (Mapeo multivaluado) *Sean X y Y espacios topológicos. Si para cada $x \in X$ existe un conjunto $F(x) \subseteq Y$ correspondiente, Entonces $F(\cdot)$ se llama mapeo multivaluado de X a Y. Y se denota por $F : X \rightrightarrows Y$.*

Un ejemplo de este tipo de funciones es el Subdiferencial utilizado en análisis convexo. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces, para $x \in \mathbb{R}^n$, el mapeo $\partial f : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ definido por

$$\partial f(x) = \{s \in \mathbb{R}^n : \quad s^\top (y - x) \leq f(y) - f(x), \forall y \in Dom(f)\}$$

es llamado el mapeo subdiferencial de f en x. Una función $f : X \to Y$ también puede ser visto como un mapeo multivaluado si se define $F(x) = \{f(x)\}$ (el conjunto correspondiente a cada x es unitario). Para este trabajo se consideran mapeos multivaluados sobre un espacio métrico compacto X en sí mismo.

Sea un mapeo multivaluado $H : X \rightrightarrows X$, el dominio de H es el conjunto de elementos de X tal que su conjunto correspondiente en 2^X es distinto del vacío, es decir

$$Dom(H) = \{x \in X : H(x) \neq \emptyset\}.$$

Se dirá que H es multivaluado compacto si $H(x)$ es compacto para cada $x \in X$. Se escribe $d(H, id) \leq \varepsilon$ si para algún $\varepsilon > 0$ se cumple $H(x) \subseteq D[x, \varepsilon]$, es claro que esta inclusión es valida para cualquier $x \notin Dom(H)$.

Definición 4.0.2 *Un mapeo multivaluado H de X es inyectivo si para todo $x, y \in Dom(H)$ distintos ($x \neq y$) entonces $H(x) \cap H(y) = \emptyset$.*

Definición 4.0.3 *Un mapeo multivaluado H de X es semicontinuo superior (scs) si para cada $x \in Dom(H)$ y cada vecindad U de $H(x)$ existe $\eta > 0$ tal que si $y \in X$ satisface $d(x, y) < \eta$ implica que $H(y) \subseteq U$.*

Habiéndose dado una introducción en el capitulo anterior de los conceptos medibles dados por Morales se procede a mostrar también el concepto medible sobre la estabilidad topológica, para ello se tiene la siguiente definición.

Definición 4.0.4 (μ-semiconjugación) *Dada una medida de Borel μ se dice que H es una μ-semiconjugación entre homeomorfismo $f, g : X \to X$, si H es un mapeo multivaluado compacto de X con dominio medible tal que*

i. $\mu(X \backslash Dom(H)) = 0$,

ii. $\mu \circ H = 0$ ($\mu(H(x)) = 0, \forall x \in X$),

iii. $f \circ H = H \circ g$.

Definición 4.0.5 (Estabilidad topológica respecto a una medida) *Un homeomorfismo f es topológicamente estable respecto a una medida de Borel μ (o es μ-topológicamente estable), si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada homeomorfismo g que es δ-cercano a f existe una μ-semiconjugación H entre f y g tal que $d(H, Id) \leq \varepsilon$.*

A continuación se prueba el resultado análogo del teorema de Walters, Teorema 2.15, respecto a una medida de Borel. Esta es la respuesta afirmativa de la cuestión principal de este trabajo. Este teorema es obtenido por Morales en [13] con las definiciones reescritas aquí.

Teorema 4.1 *Todo homeomorfismo μ-expansivo con μ-POTP, sobre un espacio métrico compacto, es μ-topológicamente estable.*

Demostración. Sea μ una medida de Borel y f μ-expansivo con μ-POTP, en un espacio métrico compacto X. Sea e constante de expansividad de f. Tomando $\varepsilon > 0$ cualquiera y $0 < \varepsilon' < \text{mín}\{\frac{e}{2}, \varepsilon\}$. Para este ε' se toma δ y B dados por la $\mu - POTP$ de f, fijando un homeomorfismo g con $d(f, g) < \delta$, Entonces se define el mapeo multivaluado H de X mediante

$$H(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(D[g^n(x), \varepsilon']), x \in X. \tag{4.1}$$

Es claro que se trata de un mapeo multivaluado compacto de X. Además se tiene lo siguiente:

$$y \in H(x) \Leftrightarrow d(f^n(y), g^n(x)) \leq \varepsilon', \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Para demostrar este teorema se debe probar lo siguiente:

(1). $Dom(H)$ es medible.

(2). H es semicontinua superior.

(3). $\mu(X \backslash Dom(H)) = 0$.

(4). $\mu \circ H = 0$.

(5). $d(H, id) \leq \varepsilon$.

(6). $f \circ H = H \circ g$.

(1) Tomando la sucesión $x_k \in Dom(H)$ que converge para algún $x \in X$. Como $x_k \in Dom(H)$, se puede escoger una sucesión $y_k \in X$ tal que

$$d(f^n(y_k), g^n(x_k)) \leq \varepsilon', \forall k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}.$$

Por la definición de H se tiene que:

$$H(x_k) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(D[g^n(x_k), \varepsilon']) \neq \emptyset, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ se toma $y_k \in H(x_k)$,

$$\Leftrightarrow d(f^n(y_k), g^n(x_k)) \leq \varepsilon', \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Como X es compacto, se puede asumir que $y_k \to y$ para algún $y \in X$, (esto pues cualquier sucesión contiene una subsucesión convergente en este caso $y_{k_i} \to y$ pero la subsucesión $x_{k_i} \to x$ por tanto se puede renombrar a estos como las sucesiones iniciales). Ahora fijando $n \in \mathbb{Z}$ y haciendo $k \to \infty$ se obtiene

$$d(f^n(y), g^n(x)) \leq \varepsilon', \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow y \in H(x).$$

Lo que quiere decir que $H(x) \neq \emptyset$. Entonces $x \in Dom(H)$ y por tanto $Dom(H)$ es cerrado y por ende medible.

(2) Fijado $x \in Dom(H)$ y sea O una vecindad de $H(x)$ arbitraria. Definiendo para cualquier $y \in X$

$$H_m(y) = \bigcap_{n=-m}^{m} f^{-n}(D[g^n(y), \varepsilon']).$$

$$H(y) = \bigcap_{m=0}^{\infty} H_m(y)$$

$\{H_i(y)\}$ es una familia de compactos encajados, $H(y) \subset H_{m+1}(y) \subset H_m(y)$ para todo $m \in N$ y $y \in X$. Tomando $y = x$ se obtiene $m \in \mathbb{Z}$ tal que $H_m(x) \subset O$. Se afirma que existe $\eta > 0$ tal que $H_m(y) \subset O$ siempre que $d(x, y) < \eta$ pues de lo contrario existirán sucesiones $y_k \to y$ y $z_k \in H_m(y_k) \backslash O$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ($z_k \in H_m(y_k) \wedge z_k \notin O$). Luego, como X es compacto, se puede asumir que $z_k \to z \in X$. Se tiene que $H_m(y_k) \backslash O$ es cerrado, entonces

$z \notin O$. Sin embargo $z_k \in H_m(y_k) \leftrightarrow d(f^n(z_k), g^n(y_k)) \leq \varepsilon'$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $-m \leq n \leq m$. Entonces

$$d(f^n(z), g^n(x)) \leq d(f^n(z), f^n(z_k)) + d(f^n(z_k), g^n(y_k)) + d(g^n(y_k), g^n(x))$$

$$d(f^n(z), g^n(x)) \leq d(f^n(z), f^n(z_k)) + \varepsilon' + d(g^n(y_k), g^n(x)), \forall -m \leq n \leq m$$

Haciendo $k \to \infty$ se obtiene $d(f^n(z), g^n(x)) \leq \varepsilon'$ para $-m \leq n \leq m$ por tanto $z \in H_m(x)$, como $H_m(x) \subset O$ lo que implicaría que $z \in O$ lo que es una contradicción. Por tanto $H(y) \subset H_m(y) \subset O$ siempre que $d(x, y) < \eta$, H es semicontinuo superior.

(3) En efecto, Como $d(f, g) \leq \delta$, la g-órbita de cualquier punto $x \in X$, $\{g^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, es una δ-pseudo órbita de f. Tomando $x \in B$, la δ-pseudo órbita (respecto a f) $\{g^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ pasa por B, entonces (por la $\mu - POTP$) puede ser ε'-sombreado en f, es decir, existe $y \in X$ tal que

$$d(f^n(y), g^n(x)) \leq \varepsilon', \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow y \in H(x).$$

De esto se tiene que $H(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in B$. Entonces $B \subset Dom(H)$ y por tanto $\mu(X \backslash Dom(H)) \leq \mu(X \backslash B) = 0$.

(4) Esto es $\mu(H(x)) = 0$ para cada $x \in X$. Se toma $x \in X$ y $y \in H(x)$. Si $z \in H(x)$ se tiene $d(f^n(z), g^n(x)) \leq \varepsilon'$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Como $y \in H(x)$, se tiene $d(f^n(y), g^n(x)) \leq \varepsilon'$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Todo esto implica que $d(f^n(y), f^n(z)) \leq 2\varepsilon', \forall n \in \mathbb{Z}$. y como $2\varepsilon' < e$, se concluye que $z \in \Gamma_e(y)$, se probó que $H(x) \subset \Gamma_e(y)$. Y por tanto $\mu(H(x)) \leq \mu(\Gamma_e(y)) = 0$.

(5) Debido a la definición de H se tiene $H(x) \subset D[x, \varepsilon']$ para $x \in X$, entonces $d(H(x), id(x)) \leq \varepsilon' < \varepsilon$. Por tanto, $d(H, id) \leq \varepsilon$.

(6) En efecto, si $x \in Dom(H)$ se tiene que $H(x) \neq \emptyset$ satisfaciendo

$$f(H(x)) = f\left(\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(D[g^n(x), \varepsilon'])\right)$$

$$f(H(x)) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n+1}(D[g^n(x), \varepsilon'])$$
$$f(H(x)) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(D[g^{n+1}(x), \varepsilon'])$$
$$f(H(x)) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(D[g^n(g(x)), \varepsilon'])$$
$$f(H(x)) = H(g(x)).$$

Además $g(x) \in Dom(H)$ entonces $x \in Dom(H)$ lo que implica que si $x \notin Dom(H) \to g(x) \notin Dom(H)$. Por tanto $f(H(x)) = \emptyset = H(g(x))$ cuando $x \in X \backslash Dom(H)$. $\square$

De forma similar al Lema 2.6 podemos obtener una μ-semiconjugación inyectiva.

Teorema 4.2 *Sea f un homeomorfismo μ-expansivo con μ-POTP entonces es μ-topológicamente estable, como el teorema anterior, si la perturbación g de f es expansivo con constante de expansividad $\varepsilon_g \geq e$, entonces el mapeo multivaluado correspondiente H es inyectivo.*

Demostración. Si $H(x) \cap H(y) \neq \emptyset$ para algunos $x, y \in X$. Sea $z \in H(x) \cap H(y)$ es decir $z \in H(x) \wedge z \in H(y)$ si y sólo si

$$d(f^n(z), g^n(x)) \leq \varepsilon' \wedge d(f^n(z), g^n(y)) \leq \varepsilon'; \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
d(g^n(x), g^n(y)) &\leq d(g^n(x), f^n(z)) + d(f^n(z), g^n(y)); \forall n \in \mathbb{Z} \\
d(g^n(x), g^n(y)) &\leq 2\varepsilon' \leq e \leq \varepsilon_g; \forall n \in \mathbb{Z} \\
d(g^n(x), g^n(y)) &\leq \varepsilon_g; \forall n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Lo que implica, por la expansividad de g, que $x = y$. $\square$

Proposicion 4.1 *Sea μ una medida de Borel en X. Si $f, h \in Hom(X)$, f es μ-topológicamente estable entonces $h^{-1} \circ f \circ h$ es $h_*^{-1}(\mu)$-topológicamente estable.*

Demostración. Fijando $\varepsilon > 0$. Por la compacidad de X se tiene que h^{-1} es uniformemente continua por lo que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$d(x, y) \leq \varepsilon_0 \to d(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) \leq \varepsilon; \quad \forall x, y \in X. \tag{4.2}$$

Para este ε_0 se obtiene $\delta_0 > 0$ dado por la μ-estabilidad topológica de f. Nuevamente por la compacidad de X, h es uniformemente continua. Así existe $\delta > 0$ cumpliendo que

$$d(x, y) \leq \delta \to d(h(x), h(y)) \leq \varepsilon_0; \quad \forall x, y \in X. \tag{4.3}$$

Luego se toma un homeomorfismo $\overline{g} \in Hom(X)$ que sea δ-cercano a $h^{-1} \circ f \circ h$, esto es

$$d_0(\overline{g}, h^{-1} \circ f \circ h) \leq \delta.$$

Entonces para todo $y \in X$

$$d(\overline{g}(y), h^{-1} \circ f \circ h(y)) \leq \delta.$$

Debido a (4.2) se sigue

$$d(h \circ \overline{g}(y), f \circ h(y)) \leq \delta_0.$$

Escribiendo $g = h \circ \overline{g} \circ h^{-1}$, y $y = h^{-1}(x)$.

$$d(g(x), f(x)) \leq \delta_0,$$

y esto para todo $x \in X$. Por tanto, $d_0(g, f) \leq \delta_0$ y esto implica decir que g es δ_0-cercano a f. Luego por la μ-estabilidad topológica existe una μ-semiconjugación H entre f y g. A partir de este mapeo multivaluado se define

$$\overline{H} = h^{-1} \circ H \circ h. \tag{4.4}$$

Primero $\overline{H}$ es claro que es un mapeo multivaluado por como lo se definió. $\overline{H}$ es multivaluado compacto pues para cada $x \in X$, $H \circ h(x)$ es compacto y por tanto $\overline{H}(x) = h^{-1} \circ H \circ h(x)$ es compacto. Así también, se tiene que para cada $x \in Dom(H)$ y cualquier vecindad U de $H(x)$ existe $\eta > 0$ tal que si $d(x, y) < \eta$ implica $H(y) \subseteq U$. Sea $x \in Dom(H)$ y O una vecindad de $\overline{H}(x)$, entonces $h(O)$ es una vecindad de $H \circ h(x)$ de esta forma existe $\eta_0 > 0$ tal que si $d(h(x), h(y)) < \eta_0$ implica $H(h(y)) \subseteq H(O)$. Tomando η respectivo a η_0 según (4.2) de esta forma si $d(x, y) < \eta$ implica $H(h(y)) \subseteq H(O)$ y luego $\overline{H}(y) \subset O$, por tanto $\overline{H}$ es semicontinuo superior.

Ahora, se probará que $\overline{H}$ es una $h_*^{-1}(\mu)$-semiconjugación entre $\overline{g}$ y $h^{-1} \circ f \circ h$. Teniendo en cuenta que $h_*^{-1}(\mu)(A) = \mu(h(A))$ para todo $A \in \mathfrak{B}(X)$. $Dom(\overline{H}) = \{x \in X : \quad \overline{H}(x) \neq \emptyset\}$, entonces se obtiene las siguientes equivalencias

$$
\begin{aligned}
x \in Dom(\overline{H}) & \Leftrightarrow \overline{H}(x) \neq \emptyset \\
& \Leftrightarrow h^{-1}(H(h(x))) \neq \emptyset \\
& \Leftrightarrow H(h(x)) \neq \emptyset \\
& \Leftrightarrow h(x) \in Dom(H) \\
& \Leftrightarrow x \in h^{-1}(Dom(H)).
\end{aligned}
$$

Lo que significa que $Dom(\overline{H}) = h^{-1}(Dom(H))$, es decir

$$
h(Dom(\overline{H})) = Dom(H) \tag{4.5}
$$

y como $Dom(H)$ es medible entonces $Dom(\overline{H})$ también lo es. Además $h_*^{-1}(\mu)(X \backslash Dom(\overline{H})) = \mu(h(X \backslash Dom(\overline{H})))$ como h es un homeomorfismo $h(X \backslash Dom(\overline{H})) = X \backslash h(Dom(\overline{H}))$ y debido a (4.4)

$$
h_*^{-1}(\mu)(X \backslash Dom(\overline{H})) = \mu(X \backslash Dom(H)) = 0.
$$

En adición si $h_*^{-1}(\mu)(\overline{H}(x)) = \mu(h(\overline{H}(x))) = \mu(H(h(x)))$ para todo $x \in X$, dado H es una μ-semiconjugación $h_*^{-1}(\mu)(\overline{H}(x)) = \mu(H(h(x))) = 0$ para todo $x \in X$. Por otro lado $d(H, id) \leq \varepsilon_0$, esto es $d(x, y) \leq \varepsilon_0$ para todo $x \in X$, $y \in H(x)$ luego de (4.1) se obtiene $d(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) \leq \varepsilon$ para todo $x \in X$, $y \in H(x)$, es decir $d(h^{-1}, h^{-1} \circ H) \leq \varepsilon$ y por tanto

$$
\begin{aligned}
d(\overline{H}, id) &= d(h^{-1} \circ H \circ h, id) \\
&= d(h^{-1} \circ H, h^{-1}) \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Finalmente, se tiene

$$\begin{aligned}
(h^{-1} \circ f \circ h) \circ \overline{H} &= h^{-1} \circ f \circ H \circ h \\
&= h^{-1} \circ H \circ g \circ h \\
&= h^{-1} \circ H \circ h \circ \overline{g} \\
&= \overline{H} \circ \overline{g}.
\end{aligned}$$

Con lo cual se concluye la prueba. $\square$

Teorema 4.3 *Para todo homeomorfismo μ-topológicamente estable f y $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo homeomorfismo g que es δ-cercano a f se tiene que la g-órbita de x puede ser ε-sombreado por f para $\mu - c.t.p.\, x \in X$.*

Demostración. Fijando $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ por la μ-estabilidad topológica de f.
Tomando g, δ-cercano a f, para este g sea H de igual forma por la estabilidad topológica de f respecto a μ. De esto, sigue que existe $y \in H(x)$ para casi todo punto $x \in X$, por hipótesis.
Entonces, $f^n(y) \in f^n(H(x)) = H(g^n(x)) \subset D[g^n(x), \varepsilon]$ y entonces $d(f^n(y), g^n(x)) \leq \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Un homeomorfismo se dice que es periódico si cada punto es un punto periódico.

Teorema 4.4 *Un homeomorfismo minimal aproximado por homeomorfismos periódicos de un espacio métrico compacto no es μ-topológicamente estable para cualquier medida.*

Demostración. Supongamos, por contradicción, que existe $f \in Hom(X)$ que es μ-topológicamente estable y puede ser aproximado por homeomorfismos periódicos.
Sea $\delta > 0$ la constante que nos da la propiedad μ-topológicamente estable de f con $\varepsilon = 1$.
Se puede afirmar que cada $g \in Hom(X)$ δ-cercano a f se tiene $\mu(Per(g)) = 0$.
En efecto, si fuese de otra forma que $\mu(Per(g)) > 0$ para algún g δ-cercano a f. Por hipótesis, existe un mapeo multivaluado semicontinuo superior H tal que

(1) $Dom(H)$ es medible,

(2) $\mu(X\backslash Dom(H)) = \mu \circ H = 0$,

(3) $f \circ H = H \circ g$.

Como $\mu(Per(g)) > 0$ y de (2) se tiene que $Per(g) \not\subseteq X\backslash Dom(H)$ por tanto existe $x \in Per(g) \cap Dom(H)$. En particular $H(x) \neq \emptyset$. Sea n en periodo de x respecto a g. Se define

$$\Lambda = \bigcup_{i=0}^{n-1} H(g^i(x)).$$

Claramente Λ es compacto. Además

$$f\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} H(g^i(x))\right) = \bigcup_{i=0}^{n-1} f\left(H(g^i(x))\right) = \bigcup_{i=0}^{n-1} H(g^{i+1}(x)) = \bigcup_{i=0}^{n-1} H(g^i(x))$$

$$f(\Lambda) = \Lambda$$

es decir Λ es invariante, luego de (2)

$$\mu(\Lambda) = \mu\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} H(g^i(x))\right) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \mu(H(g^i(x))) = 0.$$

Escogiendo $y \in H(x)$. Ya que $(x) \subseteq \Lambda$. Pero f es minimal entonces la f-órbita de y es denso en X. Como Λ es compacto e invariante se obtiene que la cerradura de esta f-órbita está contenida en Λ. Así se concluye que $X = \Lambda$ y entonces $\mu(X) = \mu(\Lambda) = 0$ que es una contradicción. Esto prueba la afirmación.
Continuando la prueba, de la hipótesis se deduce que existe un homeomorfismo periódico g tal que $d(f, g) \leq \delta$. Como g es periódico, se tiene $Per(g) = X$ y por la afirmación $\mu(X) = \mu(Per(g)) = 0$. Esto es una contradicción lo cual prueba el resultado. □

Definición 4.0.6 *Un punto periódico x es un sumidero si existe una vecindad U de x tal que $\omega(y)$ es la órbita de x (por f) para todo $y \in U$.*

Definición 4.0.7 *Una fuente es un sumidero para el tiempo en reversa, es decir en el sistema* f^{-1}.

Teorema 4.5 *Sea* $f \in Hom(X)$ μ*-topológicamente estable, entonces no existen puntos aislados de* X *en* $supp(\mu)$ *ni átomos de* μ *entre los sumideros o fuentes de* f.

Demostración. Asumiendo por contradicción que existe un punto aislado $x \in supp(\mu)$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $D[x, \varepsilon] = \{x\}$. Como $x \in supp(\mu)$, también se tiene $\mu(D[x, \varepsilon]) > 0$ entonces $\mu(\{x\}) = \mu(D[x, \varepsilon]) > 0$ por tanto x es un átomo.
Para este ε, sea $\delta > 0$ de la estabilidad topológica respecto a μ, y el correspondiente mapeo multivaluado (de $g = f$) semicontinuo superior y compacto H con dominio medible de X satisfaciendo $\mu(X \backslash Dom(H)) = \mu \circ H = 0$ y $d(H, id) \leq \varepsilon$. Como $\mu(\{x\}) > 0$ y $\mu(X \backslash Dom(H)) = 0$, se tiene que $\{x\} \nsubseteq X \backslash Dom(H)$. Por lo tanto $x \in Dom(H)$.
Así, se puede escoger $y \in H(x)$. Como $d(H, id) \leq \varepsilon$, se obtiene $d(x, y) \leq \varepsilon$ entonces $y \in D[x, \varepsilon] = \{x\}$ probando que $y = x$. De esto se sigue que $x \in H(x)$ (de hecho $H(x) = \{x\}$) así se tendría

$$0 < \mu(\{x\}) \leq \mu(H(x)) = (\mu \circ H)(x) = 0,$$

lo cual es absurdo. Esto prueba que no existen puntos aislados de X en $supp(\mu)$.
Ahora, se probará que no existen átomos de μ entre los sumideros y fuentes, por contradicción, asumiendo que existe un átomo x de μ entre los sumideros. Como x es un sumidero, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\omega(y)$ es la f-órbita de x para todo $y \in D[x, \varepsilon]$. Para este ε se escoge δ de la estabilidad topológica de μ. Entonces, la definición correspondiente con $g = f$ produce un mapeo multivaluado semicontinuo superior y compacto H con dominio medible de X satisfaciendo $\mu(X \backslash Dom(H)) = \mu \circ H = 0$, $d(H, id) \leq \varepsilon$ y $f \circ H = H \circ f$. Como x es por tanto un átomo de μ y $\mu(X \backslash Dom(H)) = 0$, se obtiene igual que antes que $x \in Dom(H)$. Sea n el periodo de x y

$$\Lambda = \bigcup_{i=0}^{n-1} H(f^i(x)).$$

Desde que $x \in Dom(H)$, se tiene que $H(x)$ y Λ son conjuntos no vacíos. De $f \circ H = H \circ f$, se obtiene que Λ es un conjunto invariante de f. Además, Λ es compacto y como $\mu \circ H = 0$ se obtiene $\mu(\Lambda) = 0$.
Ahora, tomando $y \in H(x)$. Como $d(H, id) \leq \varepsilon$, se obtiene $d(y, x) \leq \varepsilon$, esto es $y \in D[x, \varepsilon]$. Luego, se deduce de la elección de ε que $\omega(y)$ es la f-órbita de x. Dado $y \in \Lambda$, el cual es un conjunto compacto invariante de f, entonces $\omega(y)$ está también contenida en Λ. De esto se concluye que la f-órbita de x está contenida en Λ. En particular, $x \in \Lambda$ y entonces $0 < \mu(\{x\}) \leq \mu(\Lambda) = 0$ lo cual es absurdo. $\square$

Teorema 4.6 *Sea $f \in Hom(X)$ y μ una medida de Borel no atómica sobre X. Si f es topológicamente estable entonces es μ-topológicamente estable.*

Demostración. Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo topológicamente estable de un espacio métrico compacto X y sea μ una medida de Borel no atómica sobre X. Fijado $\varepsilon > 0$ y δ como en la definición de estabilidad topológica para f. Tomando g un homeomorfismo δ-cercano a f. Entonces, existe un mapeo continuo $h : X \to X$ tal que $d(h, id) < \varepsilon$ y $f \circ h = h \circ g$. Definiendo un mapeo multivaluado H de X por $H(x) = \{h(x)\}$ para todo $x \in X$. De aquí es obvio que H es estricta (o sea que $Dom(H) = X$) y compacto. Además, como h es continuo, entonces H es semicontinuo superior. Se puede tomar al boreliano $B = X$, y cumplirá las condiciones $\mu(X \backslash Dom(X)) = 0$. Luego por la propiedad no atómica, $\mu(H(x)) = \mu(\{h(x)\}) = 0$ para todo $x \in X$. Finalmente, $d(H(x), x) = d(h(x), x) \leq \varepsilon$ para todo $x \in X$. Además, $f \circ H = H \circ g$. $\square$

Según este último teorema se deduce que este nuevo tipo de estabilidad es un concepto más general al usual, hablando sobre $Hom(X)$, de esta forma se amplia los conceptos de expansividad y POTP para abarcar más homeomorfismos pero teniendo un tipo distinto, pero interesante, de estabilidad.

En [28] se prueba que en todo espacio métrico completo separable no numerable existe una medida de Borel no atómica. De esto se puede verificar el siguiente corolario.

Corolario 4.1 *Todo espacio métrico compacto que admite homeomorfismos topológicamente estables los cuales no son μ-topológicamente estables es numerable.*

Demostración. Por el Teorema 4.6 se tiene que ese espacio no tiene medidas de Borel de probabilidad no atómicas, y finalmente el espacio es numerable por el resultado en [28] descrito antes. □

Definición 4.0.8 *Se dice que un homeomorfismo f de un espacio métrico compacto no numerable X es topológicamente medible-estable si es μ-topológicamente estable para toda medida de Borel no atómica.*

El último Teorema 4.6 puede ser re expresado diciendo que todo homeomorfismo topológicamente estable de un espacio métrico compacto no numerable es topológicamente medible-estable.

4.1. Resultados en S^1

Teorema 4.7 *Sea $f \in Hom(S^1)$, entonces existe una medida μ tal que f es μ-expansivo si y solo si f es Denjoy.*

Demostración. Sea $f \in Hom(S^1)$ Denjoy. f no tiene puntos periódicos y muestra un conjunto minimal único C el cual es un conjunto de Cantor (Tabla 1.1, también puede leerse la observación después del Lema 11.2.8 en [12]).
En particular, C es compacto sin puntos aislados, debido al Corolario 1.2, se tiene una medida de Borel de probabilidad ν no atómica, como f/C es expansivo y entonces f/C es ν-expansivo. Así, debido al Ejemplo 3.1.3, f es ν-expansivo.

Ahora, si $f \in Hom(S^1)$ es μ-expansivo. Suponiendo que f no es Denjoy. Se tiene que o bien f tiene puntos periódicos o bien es conjugado a una rotación.
En el primer caso se puede asumir por la Proposición 3.3 que f^k tiene un

punto fijo para algún entero k. Entonces se puede abrir S^1 a lo largo del punto fijo para obtener una medida ν de tal forma que $g \in Hom(I)$ sea ν-expansiva pero esto contradice el Teorema 3.5.

Para la otra opción se tendría f conjugado a una rotación, como es μ-expansivo en consecuencia de la Proposición 3.2 existen una rotaciones del círculo $h_*\mu$-expansivos. Sin embargo debido al Ejemplo 3.1.1 tal rotación no existe pues son isometrías. Se ha obtenido una contradicción, lo cual finaliza la demostración. $\square$

Lema 4.1 *Sea $f \in Hom(S^1)$. Para toda medida μ tal que f es μ-expansivo se tiene que $supp(\mu) \subseteq \Omega(f)$.*

Demostración. Supongamos que existe $x \in supp(\mu) \backslash \Omega(f)$ para alguna medida μ. Sea δ una constante de μ-expansividad. Como $x \notin \Omega(f)$ se puede asumir que la colección de intervalos abiertos $f^n(D(x, \delta))$ cuando n avanza en $\mathbb{Z}$ es disjunta. Por tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que la longitud de $f^n(D(x, \delta))$ es menor que δ para $|n| \geq N$.
Luego por la continuidad de f, usando el camino de la prueba del Lema 2.4, se puede obtener $\varepsilon > 0$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$ implica que $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \delta$ para todo $|n| \leq N$.
Por tanto $D(x, \varepsilon) \subseteq \Gamma_\delta(x)$ de esto $\mu(\Gamma_\delta(x)) \geq \mu(D(x, \varepsilon)) > 0$ pues $x \in supp(\mu)$. Lo que contradice la propiedad de μ-expansividad. $\square$

Corolario 4.2 *Sea $f \in Hom(S^1)$. No existe μ tal que f sea μ-expansivo y $supp(\mu) = S^1$.*

Demostración. Por contradicción, suponiendo que existe tal homeomorfismo f y la medida μ. Por el Teorema 4.7 f es un mapeo Denjoy, y entonces, $\Omega(f)$ es denso en ninguna parte. Sin embargo del Lema 4.1, $supp(\mu) \subset \Omega(f)$ que significaría que S^1 es denso en ninguna parte lo cual es absurdo. $\square$

Corolario 4.3 *No existe $f \in Hom(S^1)$ medible-expansivo.*

Demostración. Si existiese tal homeomorfismo f en S^1. Entonces f seria *Leb*-expansivo, contradiciendo el Corolario 4.2 pues $supp(Leb) = S^1$. $\square$

Corolario 4.4 *No existen homeomorfismos expansivos de S^1.*

Demostración. Suponiendo que existe $f \in Hom(S^1)$ siendo expansivo, debido a la Proposición 3.1, f es μ-expansivo para cualquier medida μ no atómica sobre S^1 es decir f es medible-expansivo lo que contradice el Corolario 4.3. $\square$

El Corolario 4.4 es un resultado conocido debido a Jacobsen y Utz [11], y se ha probado mediante los nuevos resultados con un enfoque medible. Las pruebas clásicas se pueden encontrar en el Teorema 2.2.26 en [2], Subsección 2.2 de [19], Corolario 2 en [31] y en el Teorema 5.27 de [40].

Ahora se demostrarán algunos lemas que permitan resumir al final un teorema con los casos más relevantes que caracterizan los homeomorfismos topológicamente estables respecto a una medida.

Lema 4.2 *Sea M una variedad compacta sin borde, y sea $f \in Hom(M)$. Si $p \notin CR(f)$, entonces existe $\delta_0 > 0$ tal que $p \notin CR(g)$ para todo $g \in Hom(M)$ que es δ_0-cercano a f.*

Demostración. Sea $Hom(M)$ equipado con la C^0-métrica. Suponiendo por contradicción que no se cumple el lema, entonces existe una sucesión de homeomorfismos $g_k \in Hom(M)$ con $d(g_k, f) \to 0$ cuando $k \to \infty$ tal que $p \in CR(g_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

M es una variedad compacta y sin borde, implica que $CR(h) = CL(h)$ del Teorema 1.3 para cada $h \in H(M)$. Entonces, reemplazando h por g_k se obtiene $p \in CL(g_k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Para todo $k \in \mathbb{N}$, ambos g_k y f son homeomorfismos, y $d(g_k, f) \to 0$ cuando $k \to \infty$, se tiene que $d_0(g_k, f) \to 0$ cuando $k \to \infty$ también.

$p \in CL(g_k)$, se puede escoger una sucesión $\widehat{g}_k \in Hom(M)$ con $d_0(\widehat{g}_k, g_k) \leq \frac{1}{k}$ tal que $p \in Per(\widehat{g}_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Pero

$$d_0(\widehat{g}_k, f) \leq d_0(\widehat{g}_k, g_k) + d_0(g_k, f) \leq \frac{1}{k} + d_0(g_k, f)$$

Y $d_0(g_k, f) \to 0$ cuando $k \to \infty$ también $d(\widehat{g}_k, f) \to 0$ cuando $k \to \infty$. Debido a que $p \in Per(\widehat{g}_k)$ para todo k, así se concluye que $p \in CL(f)$. También por el Teorema 1.3 $p \in CR(f)$. Esta contradicción finaliza la prueba. $\square$

Lema 4.3 *Sea $f \in Hom(S^1)$ y $p \notin CR(f)$. Si f tiene m_p-POTP, entonces es m_p-topológicamente estable.*

Demostración. Fijo $p \notin CR(f)$ tal que f tiene m_p-POTP (medida de Dirac, Definición 1.3.4). $p \notin CR(f)$ se tiene que $p \notin \Omega(f)$ (Proposición 1.3). Entonces, existe una vecindad U de p tal que los iterados $f^n(U)$, $n \in \mathbb{Z}$, son disjuntos dos a dos. De esto se obtiene que $\Delta > 0$ tal que

$$f^n(\xi) \notin [p-\Delta, p+\Delta] \quad \forall \xi \in [p-\Delta, p+\Delta], n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{4.6}$$

Luego se fija $0 < \varepsilon < 1$. El espacio es el círculo S^1, al reducir Δ arriba si es necesario, se puede asumir

$$d(f^n(\xi), f^n(p)) \leq \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \forall \xi \in [p-\Delta, p+\Delta], n \in \mathbb{Z}. \tag{4.7}$$

$p \notin CR(f)$, se puede aplicar el Lema 4.2 a $M = S^1$ obteniendo $\delta_0 > 0$ tal que $p \notin CR(g)$ para cada $g \in Hom(S^1)$ que es δ_0-cercano a f. En particular, todo $g \in Hom(S^1)$ que es δ_0-cercano a f satisface

$$g^n(p) \neq g^m(p) \quad \text{para distintos} \quad n, m \in \mathbb{Z}. \tag{4.8}$$

Ahora, se toma $\delta_1 > 0$ y el boreliano B_1 de la m_p-POTP de f correspondiente a $\frac{\text{mín}(\varepsilon,\Delta)}{2}$.
Note que $m_p(X\backslash B_1) \leq \varepsilon < 1$. De esto sigue de la definición de m_p que $m_p(X\backslash B_1) = 0$ pues $p \notin X\backslash$ como p debe estar en el boreliano de medida total B_1.
Definiendo $\delta = \text{mín}\{\delta_0, \delta_1\}$. Se toma un homeomorfismo g que es δ-cercano a f. Se puede afirmar que

$$\exists \xi \neq p \text{ en } [p-\Delta, p+\Delta] \quad \text{tal que} \quad d(f^n(\xi), g^n(p)) \leq \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{4.9}$$

En efecto, pues g está δ-cercano a f, implica que $\{g^n(p)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una δ-pseudo-órbita de f que pasa por $\{p\}$. Como $p \in B_1$, se tiene que $\{g^n(p)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una δ-pseudo órbita que pasa por B_1. Entonces de la propiedad de sombreamiento respecto a m_p y la elección de δ se obtiene $y \in S^1$ tal que

$$d(f^n(y), g^n(p)) \leq \frac{\text{mín}\{\varepsilon, \Delta\}}{2} \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{4.10}$$

Si $y \neq p$, se puede escoger $\xi = y$ y entonces (4.9) se prueba de (4.10). Luego si $y = p$ de (4.10) implica

$$d(f^n(p), g^n(p)) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

Escogiendo $\xi \neq p$ en $[p - \Delta, p + \Delta]$ se tiene de (4.7) que

$$d(f^n(\xi), g^n(p)) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Y con eso se prueba la afirmación (4.9).
Ahora, definiendo el mapeo multivaluado H de S^1 por

$$H(x) = \begin{cases} \emptyset, & x \notin g - \text{orbit of } p. \\ \{f^n(\xi)\}, & x = g^n(p) \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Este mapeo está bien definido por (4.8) y está claro que es un mapeo multivaluado compacto. Con este mapeo multivaluado para terminar a prueba se debe demostrar que

(i) $\mu(X \backslash Dom(H)) = 0$,

(ii) $\mu \circ H = 0$,

(iii) H es scs,

(iv) $f \circ H = H \circ g$,

(v) $d(H, id) \leq \varepsilon$.

(i) Debido a que $H(p) = \{\xi\} \neq \emptyset$ se obtiene $p \in Dom(H)$. Que implica que $p \notin S^1 \backslash Dom(H)$ y con ello

$$m_p(S^1 \backslash Dom(H)) = 0.$$

(ii)Lo que equivale mostrar que $p \notin H(x)$ para cada $x \in S^1$. Suponiendo, por contradicción, que $p \in H(x)$ para algún $x \in S^1$. En particular $H(x) \neq \emptyset$ entonces $x = g^n(p)$ y por tanto $p = f^n(\xi)$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Como

$\xi \in [p-\Delta, p+\Delta]$ se concluye de (4.6) que $n = 0$. De esto se tiene $p = \xi$ lo que contradice la elección de ξ en (4.9). Así $m_p \circ H = 0$.

(iii)Fijo $x \in Dom(H)$ y una vecindad O de $H(x)$. Se sigue de la definición que $x = g^n(p)$ para algún (único) $n \in \mathbb{Z}$ y que $\{f^n(\xi)\} \subseteq O$. Sea x_k una sucesión que converge a x. Se tiene que probar que $H(x_k) \subseteq O$ para k suficiente grande. Se puede asumir que $x_k \in Dom(H)$ para cada k. Por tanto, $x_k = g^{n_k}(p)$ y $H(x_k) = \{f^{n_k}(\xi)\}$ para alguna sucesión $n_k \in \mathbb{Z}$. Como n es fijo y g continuo, se obtiene $g^{-n}(x_k) \to g^{-n}(x) = p$. Luego $g^{n_k - n}(p) \to p$ como $k \to \infty$. Pero g es δ_0-cercano a f entonces $p \notin CR(g)$ por la elección de δ_0 de la afirmación anterior. De eso se concluye $n_k = n$ y por tanto $H(x_k) = \{f^{n_k}(\xi)\} = \{f^n(\xi)\} \subseteq O$ para k suficientemente grande. Por tanto, H es semicontinuo superior.

(iv) Si x no está en la g-órbita de p, entonces $f(H(x)) = f(\emptyset) = \emptyset$. Es más $g(x)$ no está en la g-órbita de p también implicando $H(g(x)) = \emptyset$. En este caso se obtiene $f(H(x)) = \emptyset = H(g(x))$. Ahora, en el caso que $x = g^n(p)$ para algún entero n se tiene $f(H(x)) = f(\{f^n(\xi)\}) = \{f^{n+1}(\xi)\}$ y $H(g(x)) = H(g^{n+1}(p)) = \{f^{n+1}(\xi)\}$ implicando de igual forma $f(H(x)) = H(g(x))$. Por tanto $f \circ H = H \circ g$.

(v) Finalmente, si $x = g^n(p)$ para algún entero n se obtiene $H(x) = \{f^n(\xi)\}$. Esto implica $H(x) \subseteq B[g^n(p), \varepsilon]$ por (4.9). De esto se obtiene $d(H, id) \leq \varepsilon$ con lo que finaliza la demostración. $\square$

Corolario 4.5 *Si $f \in Hom(S^1)$ tiene POTP, entonces f es m_p-topológicamente estable para cada $p \notin \Omega(f)$.*

Demostración. Si f tiene POTP, se tiene $\Omega(f) = CR(f)$ del Teorema 2.14. Luego, f tiene m_p-POTP. Entonces, el resultado se obtiene aplicando el Lema 4.3 pues $p \notin CR(f)$. $\square$

Corolario 4.6 *Si $f \in Hom(S^1)$ es topológicamente estable, entonces f es m_p-topológicamente estable para cada $p \notin \Omega(f)$.*

Demostración. Como se ve en la Proposición 2.2 todo homeomorfismo topológicamente estable en S^1 tiene POTP y por el corolario anterior se obtiene el resultado. $\square$

En la parte final (el Teorema 4.8) se completara con el recíproco de este corolario.

Lema 4.4 *Las rotaciones del círculo no son μ-topológicamente estables para cualquier medida μ.*

Demostración. Sea R_α una rotación de ángulo α del círculo. Si α es irracional entonces R_α es minimal. Tomando una sucesión de números racionales convergiendo a α se obtiene que R_α puede ser aproximado por rotaciones racionales. Debido a que las rotaciones racionales son homeomorfismos periódicos, del Teorema 4.4 se concluye que no existen medidas para las cuales f pueda ser μ-topológicamente estable.

Entonces, queda asumir que α es racional. De esto se puede escoger $\varepsilon > 0$ tal que la unión $\cup_{m\in\mathbb{Z}}\mathsf{R}_\alpha^m([y-\varepsilon, y+\varepsilon])$, invariante bajo R_α, es un subconjunto propio de S^1, para cada $y \in S^1$.

Se puede afirmar que si g es una rotación irracional, entonces una g-órbita puede ser ε-sombreado por R_α. Ahora, suponiendo por contradicción que R_α es μ-topológicamente estable para alguna medida. Para la elección de antes de ε se escoge $\delta > 0$ como en el Teorema 4.3.

Tomando un número irracional α' cercano a α se obtiene una rotación irracional $g = \mathsf{R}_{\alpha'}$ satisfaciendo $d(\mathsf{R}_\alpha, g) \leq \delta$. Entonces, del Teorema 4.3 se obtiene un boreliano $X \subseteq S^1$ con $\mu(S^1 \backslash X) = 0$ tal que la g-órbita de cada $x \in X$ puede ser ε-sombreado en R_α. Sin embargo, la afirmación dice que cada g-órbita no puede ser ε-sombreado por R_α. De esto se concluye que $X = \emptyset$ por tanto $\mu(S^1) = \mu(S^1 \backslash X) = 0$ contradiciendo que $\mu(S^1) > 0$. $\square$

Lema 4.5 *Sea $f \in Hom(S^1)$ un mapeo Denjoy. Si existe μ tal que f es μ-topológicamente estable su soporte está contenido en el gaps de f.*

Demostración. El gaps es el complemento del único conjunto minimal de f como se mencionó al final del primer capítulo. Entonces $supp(\mu) \cap M_f \neq \emptyset$ donde M_f denota el conjunto minimal de f. Verificando primero la siguiente afirmación.

Existe $\delta > 0$ tal que cada homeomorfismo g que es δ-cercano a f se cumple que $\mu(Per(g)) = 0$.
En efecto, fijado $\varepsilon > 0$ tal que $D[x, \varepsilon]$ es un intervalo para cada $x \in S^1$. Para este ε se toma δ de la μ-estabilidad topológica. De esta forma se escoge $g \in Hom(S^1)$ que es δ-cercano a f. Entonces existe un mapeo multivaluado compacto H de S^1 satisfaciendo $\mu(S^1 \backslash Dom(H)) = \mu \circ H = 0$, $d(H, id) \leq \varepsilon$ y $f \circ H = H \circ g$.
Ahora, suponiendo que $\mu(Per(g)) > 0$ ello implica $Per(g) \nsubseteq X \backslash Dom(H)$ por tanto existe un punto periódico $x \in Dom(H)$, de d de periodo n. Se obtiene que $H(x)$ es un conjunto compacto invariante no vacío de f^n el cual está contenido en $D[x, \varepsilon]$. Ya que la última bola es un intervalo por la forma como se escogió a ε, se obtiene que los números $a = \text{mín}\, H(x)$ y $b = \text{máx}\, H(x)$ están bien definidos. Del hecho que $H(x)$ es invariante para f^n que a su vez preserva el orden para f, se obtiene que a y b son puntos periódicos. Y como el mapeo Denjoy no tiene puntos periódicos se llega a una contradicción. Lo que prueba la afirmación.

Suponiendo por contradicción que f es μ-topológicamente estable tal que $supp(\mu) \cap M_f \neq \emptyset$ donde M_f es el conjunto minimal de f. Se escoge $x \in supp(\mu) \cap M_f$. Debido a que M_f es minimal y también implica que está contenida en $CR(f)$, debido al Teorema 1.3. Del Lema 4.2 implica que existe $g_0 \in Hom(S^1)$ que es $\frac{\delta}{2}$ cercano a g tal que todo punto en un intervalo abierto I que contiene x pertenece a $Per(g)$. Y como $x \in supp(\mu)$, se tiene $\mu(I) > 0$. Así se tendrá que existe $g \in Hom(S^1)$ con $d(f, g) \leq d(f, g_0) + d(g_0, g) \leq \delta$ satisfaciendo $\mu(Per(g)) \geq \mu(I) > 0$ contradiciendo la afirmación. $\square$

Teorema 4.8 *Sea $f \in Hom(S^1)$, se cumple:*

(1) Si f es topológicamente estable, entonces f es m_p - topológicamente estable si y solo si $p \notin \Omega(f)$.

(2) Si $\Omega(f) = S^1$, entonces f no es μ - topológicamente estable para cualquier medida μ.

(3) Si f tiene un número finito de puntos periódicos, entonces f es Leb-topológicamente estable si y sólo si f es topológicamente estable.

Demostración. (1) Si f es m_p-topológicamente estable, p no es ni un sumidero ni una fuente por el Teorema 4.5. Pero f es topológicamente estable entonces los sumideros y las fuentes constituyen $\Omega(f)$. Y por tanto obtenemos $p \notin \Omega(f)$. El reciproco es dado por el Corolario 4.6.

(2) Esto es inmediato de la Proposición 4.1 tomando como conjugación una rotación.

(3) Si f es topológicamente estable, entonces es *Leb*-topológicamente estable por el Teorema 4.6. Inversamente asumiendo que f es *Leb*-topológicamente estable.Por otra parte como $supp(f) = S^1$, se tiene que cada punto periódico es topológicamente hiperbólico. Entonces se satisfacen los ítems (a) y (b) del Teorema 2.17, entonces f es topológicamente estable. $\square$

Capítulo 5

Conclusiones

Se ha dado un resumido estudio de conceptos nuevos en dinámica discreta con características medibles, que generalizan a los conceptos topológicos. Particularmente es interesante el concepto de μ-estabilidad topológica, que amplia la conjugación como una función multivaluada. Así el resultado principal fue probar que todo homeomorfismo expansivo con propiedad de sombreamiento también será topológicamente estable respecto a una medida de Borel en cada caso, es decir se amplia la cantidad de homeomorfismos en las que se cumple este resultado a comparación del caso de teorema de Walters, pero teniendo este singular concepto medible de estabilidad.
Entre otras cosas, se probó también lo siguiente.

- La expansividad respecto a una medida de Borel es invariante bajo conjugación topológica.
- En un homeomorfismo expansivo respecto a una medida:
  El conjunto de puntos heteroclínicos tiene medida nula.
  El conjunto de puntos periódicos tiene medida nula.
- No existen homeomorfismos expansivos en el intervalo compacto.
- La propiedad de sombreamiento respecto a una medida invariante, es invariante bajo conjugación.

- En un homeomorfismo con la propiedad de sombreamiento respecto a una medida de Borel:
  El complemento del conjunto recurrente respecto al conjunto no errante tiene medida nula.
  El complemento del conjunto no errante respecto al conjunto recurrente por cadenas tiene medida nula.

- La estabilidad topológica respecto a una medida es invariante bajo conjugación.

- En la circunferencia unitaria:
  Los homeomorfismos expansivos respecto a una medida son los Denjoy.
  No existen homeomorfismos expansivos en la circunferencia.
  Un homeomorfismo topológicamente estable será topológicamente estable respecto a la medida de Dirac sobre un punto si solo si dicho punto es errante.

Recomendaciones

En el transcurso de este trabajo se mostraron resultados respecto a homeomorfismos en espacios métricos compactos, podría seguirse revisando los artículos de C. Morales, K. Lee, H. Villavicencio, N. Kawaguchi A. Artigue, etc. En los cuales se analiza en condiciones más débiles. Por ejemplo en [24] se analiza los puntos sombreables fijando una precisión en el sombreado, en [13] se hace aproximaciones por homeomorfismos minimales o periódicos. Este trabajo puede completarse con ejemplos que muestren la diferencia entre los conceptos dados. Encontrar ejemplos interesantes también contribuye fuertemente, como en [9] donde se muestra un homeomorfismo n-expansivo el cual no es $(n-1)$-expansivo. También se puede seguir el estudio sobre conceptos como de finito-expansivo, numerable-expansivo [21], cw-expansivo [3, 4], etc. Son extensos los caminos que se pueden tomar para continuar la investigación científica relacionada al área abarcada en este trabajo.

Bibliografía

[1] Akin, E., The general topology of dynamical systems. Graduate Studies in Mathematics, *1. American Mathematical Society, Providence*, RI, 1993. 34

[2] Aoki, N., Hiraide, K., Topological theory of dynamical systems, *Recent advances. North-Holland Mathematical Library, 52.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1994. 26, 36, 37, 45, 93

[3] A. Artigue, Singular cw-expansive flows, *Discrete and Continuous Dynamical Systems 37*(6):2945-2956 (2017) 101

[4] A. Artigue, Countably and entropy expansive homeomorphisms with the shadowing property (2019) 101

[5] J-P. Aubin. H. Frankowska, Set-Valued Analysis, *Moder Birkhauser Classics, Birkhauser Boston. Inc., Boston. MA*, 2009. 79

[6] Block, L., S., Coppel, W., A., Dynamics in one dimension, *Lecture Notes in Math., 1513, Springer-Verlag,* Berlin, 1992. 61

[7] R. Bowen, ω-Limit sets for axiom A diffeomorphisms, *J. Differential Equations 18 (2)* (1975) 333-339. 46

[8] Bryant, B., F., Expansive Self-Homeomorphisms of a Compact Metric Space, *Amer. Math. Monthly 69* (1962), no. 5, 386-391. 64

[9] B. Carvalho, W. Cordeiro, N-expansive homeomorphisms with the shadowing property, *Journal of Differential Equations 261(6)*, 2016. 101

[10] Denjoy, A. Sur les Courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. *J. de Math. Pures et Appliquées (9 série),* 11 (1932), 333-375. 21, 22

[11] J.Jacobsen and W.Utz, The nonexistence of expansive homeomorphisms of a closed 2-cell, *Pacific J. Math.* 10 (1960), 1319-1321. 35, 64, 93

[12] A. Katok y B. Hasselblatt, Introduction to the modern theory of Dynamical Systems, *Cambridge University Press* (1995). 20, 26, 30, 31, 65, 91

[13] Keonhee Lee, C. A. Morales, Topological Stability and Pseudo-Orbit Tracing Property for Expansive Measures. *Journal of Differential Equiations, Elsevier Inc.* (2016), 3467-3487. 1, 51, 81, 101

[14] K. Lee, J. Park, Points which satisfy the closing lemma, *Far East J. Math. Sci. 3 (2)* (1995) 171-177. 9

[15] H.Keynes and J. Robertson, Generators for topological entropy and expansiveness, *Math. Systems Theory* 3 (1969), 51-59. 32

[16] J. Lewowicz, Lyapunov functions and topological stability, *J. of Diff. Equations.* 38 (1980), 192-209. 31

[17] J. Lewowicz, Expansive Homemorphisms of Surfaces, *Bol. Soc. Bras. de Mat.* 20 (1989), 113-133. 36

[18] J. Lewowicz, Dinámica de los homeomorphismos expansivos, *Monografias del IMCA* 36 (2003). 27, 29, 31, 32

[19] J. Lewowicz and M. Cerminara, Some open problems concerning expansive systems. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste* 42 (2010), 129-141. 93

[20] C. A. Morales, Measure-expansive systems, preprint. Instituto de Matematica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, P. O. Box 68530, Rio de Janeiro, Brazil, 21945-970. 1, 51

[21] C.A. Morales, V.F. Sirvent, Expasive Measures, *Publicacoes Matemáticas do IMPA (IMPA Mathematical Publications), vol.29o, Colóquio Brasileiro de Matemática, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro*, 2013. 101

[22] C.A. Morales Shadowable points, *Dynamical Systems, 31:3* (2016), 347-356 73

[23] A. Morimoto, Stochastic stable diffeomorphisms and Takens' conjecture, to appear. 50

[24] Noriaki Kawaguchi (2017) Quantitative shadowable points, *Dynamical Systems, 32:4* (2017), 504-518 101

[25] Z. Nitecki, On semi-stability for diffeomorphisms, *Inv. Math., 14* (1971), 81-122. 50

[26] O'Brien y W. Reddy, Each compact orientable surface of positive genus admits an expansive homeomorphism. *Pacific Journal of Math.* 35 (1970), 737-741. 36

[27] Parthasarathy, K., R., Ranga Rao, R., Varadhan, S., R., S., On the category of indecomposable distributions on topological groups, Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962), 200-217. 26, 63, 74

[28] K. R. Parthasarathy, Probability Measures on Metric Spaces, *Probability and Mathematical Statstic, vol. 3. Academic Press, Inc.* New York - London. 1967. 90, 91

[29] Pilyugin, Sergei Yu. The space of dynamical systems with the C0-topology. *Springer*, 2006. 50

[30] Quispe Condori, Ruth. Dinámica Unidimensional Y El Teorema De Denjoy. 2003. 20

[31] Reddy, W., The existence of expansive homeomorphisms on manifolds, *Duke Math. J. 32 (1965)*, 627-632. 35, 93

[32] C. Robinson, Dynamical Systems, *CRS Press* (1995). 31

[33] M. Sambarino, Tópicos de Sistemas Dinámicos, *Curso EMALCA-Costa Rica* (2005). 20, 31

[34] A. J. Schwartz, A generalization of a Poincaré-Bendixon Theorem to closed two-dimensional manifolds, *Amer. J. Math.* 85 (1963), 453 - 458. 22

[35] Suárez Navarro, Pedro Iván. Aspectos dinámicos de los homeomorfismos y difeomorfismos del círculo. 2014. 7, 20

[36] W.R. Utz. Unstable homeomorphisms. *Proc. Am. Math. Soc. 1* (1950). 27, 28, 63

[37] J.L. Vieitez, Expansive homeomorphisms and hyperbolic diffeomorphisms on three manifolds. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 16 (1996), 591- 622. 36

[38] J.L. Vieitez, Lyapunov functions and expansive diffeomorphisms on 3D manifolds. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 22 (2002), 601-632. 36

[39] Walters, P., On the pseudo-orbit tracing property and its relationship to stability. *The structure of attractors in dynamical systems (Proc. Conf., North Dakota State Univ., Fargo, N.D., 1977), Lecture Notes in Math., Springer, Berlin*, 668 (1978), 231-244. 1, 46, 47

[40] Walters, P., An introduction to ergodic theory, *Graduate Texts in Mathematics, 79. Springer-Verlag*, New York-Berlin, 1982. 93

[41] K. Yano, Topologically stable homeomorphisms of the circle, *Nagoya Math. J. 79* (1980) 145-149. 50