

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS



TESIS

“Extensiones en álgebras Jacobianas”

PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

ELABORADA POR:

JUAN DANIEL VALDIVIA FUENTES

ASESOR:

Mg. RONALD JESÚS MAS HUAMÁN

LIMA - PERÚ  
2023

*Dedicado a Dios y a mis padres,  
quienes gracias a su ejemplo, esfuerzo y consejos  
han sido guía para poder llegar a este punto de mi carrera.  
Al Vicerrectorado de Investigación de la UNI  
quienes apoyaron esta tesis e hicieron posible su publicación.  
A mi asesor, por su apoyo durante toda la preparación de esta tesis.  
Al profesor Jack Arce,  
quien estuvo asesorando y complementando esta tesis  
durante todo el proceso de preparación.*

# Resumen

El objetivo del presente trabajo es poder construir secuencias exactas cortas no separadas dentro del álgebra Jacobiana asociada a una superficie.

En el capítulo I introducimos el concepto de carcajes con potenciales, estos nos permitirán definir el concepto del álgebra Jacobiana. En el capítulo II repasamos el concepto de superficies marcadas, así como el de triangulaciones y los carcajes asociados a estas. Definimos un potencial para los carcajes de este tipo y presentamos algunos resultados referentes al álgebra Jacobiana asociada a este tipo de carcajes.

En el capítulo III introducimos la herramienta combinatoria que nos ayudará durante todo el trabajo: grafos serpientes. Se presenta la definición general de este tipos de grafos y además como podemos asociar a una triangulación un grafo serpiente. Se define la superposición y cruce de estos grafos y se muestra la relación que estas operaciones tienen con nuestros arcos en la superficie.

En el capítulo IV definimos el concepto de cadenas y módulo cadenas. Estos serán elementos del álgebra Jacobiana que nos permitirán encontrar las secuencias exactas mencionadas al inicio. Además, establecemos una biyección entre los arcos y las cadenas.

En el capítulo V establecemos la relación que hay entre suavizar curvas y los módulos cadena, así como la caracterización de secuencias exactas cortas usando el cruce de módulos cadena.

Finalmente, en el capítulo VI definimos la categoría de conglomerado asociada a una superficie marcada, así como la relación que existe entre el cruce de arcos y los triángulos en la categoría.

# Abstract

The objective of the present work is to be able to construct non-separable short exact sequences within the Jacobian algebra associated to a surface.

In chapter I we introduce the concept of quivers with potentials. These will allow us to define the concept of Jacobian algebra. In Chapter II we review the concept of marked surfaces, as well as that of triangulations and the quivers associated with them. We define a potential for the quivers of this type and present some results concerning the Jacobian algebra associated to this type of quivers.

In chapter III we introduce the combinatorial tool that will help us throughout the work: snake graphs. We present the general definition of this type of graphs and also how we can associate a snake graph to a triangulation. We define the superposition and crossing of these graphs and show the relationship that these operations have with our arcs on the surface.

In chapter IV we define the concept of string and string modules. These will be elements of the Jacobian algebra that will allow us to find the exact sequences mentioned at the beginning. We also establish a bijection between arcs and strings.

In Chapter V we establish the relationship between smoothing curves and string modules, as well as the characterization of short exact sequences using the cross of string modules.

Finally, in Chapter VI we define the cluster category associated with a marked surface, as well as the relationship between the crossing of arcs and triangles in the category.

# Índice general

Resumen	III
Abstract	IV
Índice de figuras	VII
Índice de símbolos	X
Introducción	XI
<b>1 Carcajes con potenciales</b>	<b>1</b>
1.1 Carcajes y álgebra de caminos . . . . .	1
1.2 Potenciales e Ideales jacobianos . . . . .	8
1.3 Carcajes con potenciales . . . . .	13
1.4 Mutación de carcajes QP . . . . .	15
<b>2 Triangulaciones y potenciales</b>	<b>20</b>
2.1 Triangulaciones en superficies marcadas . . . . .	20
2.2 Potenciales en superficies . . . . .	27
<b>3 Grafos serpientes</b>	<b>32</b>
3.1 Definición y grafo de banda . . . . .	32
3.2 De triangulaciones a grafos serpiente . . . . .	34
3.3 Superposición y cruces . . . . .	38
3.4 Resolución de cruce . . . . .	44
3.5 Grafting . . . . .	48
3.6 Intersectando arcos . . . . .	50
<b>4 Módulos cadena</b>	<b>54</b>
4.1 Definiciones principales . . . . .	54
4.2 Cadenas vs arcos . . . . .	59
<b>5 Extensiones para el álgebra Jacobiana</b>	<b>60</b>
5.1 Cruce de módulos . . . . .	60
5.2 Suavizando módulos cadena . . . . .	65
5.3 Extensiones . . . . .	67
<b>6 Categorías de conglomerado</b>	<b>69</b>

6.1	DG Categorías . . . . .	69
6.2	La dg álgebra de Ginzburg . . . . .	73
6.3	Extensiones en la categoría de conglomerado . . . . .	74
<b>Conclusiones</b>		<b>80</b>
<b>A Teoría de módulos</b>		<b>81</b>
A.1	Definiciones básicas . . . . .	81
A.2	Productos directos y sumas directas . . . . .	83
A.3	Producto tensorial . . . . .	85
<b>B Teoría de álgebras</b>		<b>89</b>
B.1	Álgebras y módulos sobre álgebras . . . . .	89
B.2	Producto tensorial . . . . .	92
B.3	Módulos proyectivos e inyectivos . . . . .	95
B.4	El espacio de extensiones . . . . .	96
<b>C Carcajes y sus representaciones</b>		<b>100</b>
<b>D Teoría de Categorías</b>		<b>104</b>
D.1	Conceptos básicos . . . . .	104
D.2	Categorías de complejos . . . . .	113
D.3	Categoría de complejos homotópica . . . . .	118
D.4	Categorías trianguladas . . . . .	123
D.5	Categorías derivadas . . . . .	125
<b>Bibliografía</b>		<b>129</b>

# Índice de figuras

Figura 1	Carcaj $Q$ . . . . .	4
Figura 2	Carcaj $Q$ formado por dos flechas . . . . .	9
Figura 3	Carcaj con potencial $Q$ . . . . .	13
Figura 4	Carcaj $Q$ . . . . .	16
Figura 5	Premutación $\tilde{u}_3(Q)$ . . . . .	16
Figura 6	Mutación $u_3(Q)$ . . . . .	16
Figura 7	Carcaj con potencial $Q$ . . . . .	17
Figura 8	Premutación $\tilde{u}_2(Q)$ . . . . .	17
Figura 9	Carcaj con espacio de flechas $\bar{A}$ . . . . .	18
Figura 10	Carcaj $Q$ . . . . .	18
Figura 11	Premutación $\tilde{u}_2(Q)$ . . . . .	18
Figura 12	Premutación de $\tilde{u}_2(Q)$ en la dirección 3 . . . . .	19
Figura 13	Carcaj con espacio de flechas $\bar{A}$ . . . . .	19
Figura 14	Esfera con cuatro pinchaduras . . . . .	21
Figura 15	Bitoro con un hueco . . . . .	21
Figura 16	Curvas en el toro con un hueco . . . . .	22
Figura 17	Triangulación en el anillo . . . . .	23
Figura 18	Triángulo auto-plegado . . . . .	23
Figura 19	Caso b) en la definición de $Q(T)$ . . . . .	24
Figura 20	Caso c) en la definición de $Q(T)$ . . . . .	24
Figura 21	Caso d) en la definición de $Q(T)$ . . . . .	24
Figura 22	Triangulación del monogon . . . . .	25
Figura 23	Carcaj y matriz de adyacencia . . . . .	26
Figura 24	Carcaj y matriz de adyacencia . . . . .	26
Figura 25	Carcaj de adyacencia reducido y no reducido . . . . .	26
Figura 26	Triángulo ideal incidente a dos triángulos autoplegados . . . . .	27
Figura 27	Pinchadura adyacente a exactamente un arco $i$ . . . . .	28
Figura 28	Triangulación de un hexágono con dos pinchaduras . . . . .	29
Figura 29	Carcaj de adyacencia . . . . .	29
Figura 30	Triangulación del hexágono obtenida tras un flip . . . . .	30
Figura 31	Carcaj de adyacencia . . . . .	30
Figura 32	Configuración local alrededor de un punto marcado . . . . .	31
Figura 33	Tesela $G$ . . . . .	32
Figura 34	Ejemplos de grafos serpiente . . . . .	33
Figura 35	Funciones signo para un grafo serpiente . . . . .	34
Figura 36	Arco $\gamma$ cortando a una triangulación . . . . .	34

Figura 37	Teselas $G_1$ y $G_2$ . . . . .	35
Figura 38	Anillo con dos pinchaduras . . . . .	36
Figura 39	Grafo serpiente asociado al anillo . . . . .	36
Figura 40	Hexágono (6-gon) . . . . .	36
Figura 41	Grafo serpiente asociado a $\gamma$ en el hexágono . . . . .	37
Figura 42	Anillo con 4 puntos marcados . . . . .	37
Figura 43	Grafo serpiente asociado a $\gamma$ en el anillo . . . . .	37
Figura 44	Grafos $\mathcal{G} \setminus \text{pred}(e_2)$ y $\mathcal{G} \setminus \text{succ}(e_2)$ . . . . .	38
Figura 45	Superposición $\mathcal{G}$ caso a) . . . . .	39
Figura 46	Superposición $\mathcal{G}$ caso b) . . . . .	39
Figura 47	Auto-superposición $\mathcal{G}$ en la misma dirección . . . . .	40
Figura 48	Auto-superposición $\mathcal{G}$ en dirección opuesta . . . . .	41
Figura 49	Auto-superposición $\mathcal{G}$ con intersección . . . . .	41
Figura 50	Cruce en $\mathcal{G}$ . . . . .	42
Figura 51	Auto-cruce en $\mathcal{G}$ . . . . .	43
Figura 52	Auto-cruce en $\mathcal{G}$ . . . . .	43
Figura 53	Grafos $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ . . . . .	45
Figura 54	Grafo $\mathcal{G}_3$ . . . . .	45
Figura 55	Grafo $\mathcal{G}_4$ . . . . .	46
Figura 56	Grafos $\mathcal{G}'_5$ y $\mathcal{G}'_6$ . . . . .	46
Figura 57	Grafos $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ . . . . .	46
Figura 58	Grafos $\mathcal{G}_3$ y $\mathcal{G}_4$ . . . . .	47
Figura 59	Grafos $\mathcal{G}'_5$ y $\mathcal{G}'_6$ . . . . .	47
Figura 60	Grafos $\mathcal{G}_5$ y $\mathcal{G}_6$ . . . . .	47
Figura 61	Grafos $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ . . . . .	48
Figura 62	Grafos $\mathcal{G}_3$ y $\mathcal{G}_4$ . . . . .	48
Figura 63	Grafos $\mathcal{G}_5$ y $\mathcal{G}_6$ . . . . .	49
Figura 64	Posibles casos para Grafting . . . . .	49
Figura 65	Grafos $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ . . . . .	50
Figura 66	Grafting . . . . .	50
Figura 67	Curva $\gamma_1$ . . . . .	51
Figura 68	Cruce con superposición . . . . .	52
Figura 69	Cruce sin superposición . . . . .	52
Figura 70	Carcaj $Q$ . . . . .	55
Figura 71	Carcaj $Q(T)$ . . . . .	58
Figura 72	Triángulo $i, j, k$ . . . . .	58
Figura 73	Curva $\gamma(w)$ . . . . .	59
Figura 74	Curva $\gamma(w)$ . . . . .	61
Figura 75	Cruce en flecha . . . . .	62
Figura 76	Cruce en 3-ciclo . . . . .	62
Figura 77	Cinco posibles casos para el cruce de arcos . . . . .	63
Figura 78	Casos 2 y 3 . . . . .	63
Figura 79	Primer caso del teorema 5.5 . . . . .	67
Figura 80	Segundo y tercer caso del teorema 5.5 . . . . .	68

Figura 81	Configuración local de 1), extraída de [4], pág. 28 . . . . .	76
Figura 82	Triangulación $T'$ , extraída de [4], página 29 . . . . .	77
Figura 83	Configuración local de 2), extraída de [4], página 29 . . . . .	77
Figura 84	Casos i) y ii), extraída de [4], página 29. . . . .	78
Figura 85	Cruce en flecha, extraída de [4], página 33. . . . .	79
Figura 86	Diagrama conmutativo de una secuencia partida . . . . .	96
Figura 87	Propiedad universal de $\text{Ker}(\text{Coker } \varphi)$ . . . . .	121
Figura 88	Propiedad universal de $\text{Coker}(\text{Ker } \varphi)$ . . . . .	121
Figura 89	Propiedad universal de $\text{Ker}f_{n-1}$ . . . . .	122
Figura 90	Morfismo $f$ . . . . .	123

# Índice de símbolos

$A$	espacio de flechas asociado a un carcaj $Q$
$R\langle A \rangle$	álgebra de caminos de un carcaj $Q$ con espacio de flechas $A$
$R\langle\langle A \rangle\rangle$	álgebra de caminos completa de un carcaj $Q$ con espacio de flechas $A$
$\partial_\xi$	derivada cíclica de $\xi \in A^*$
$J(S)$	ideal Jacobiano de un potencial $S$
$u_j(Q)$	mutación del carcaj $Q$
$(A, S)$	carcaj $Q$ con potencial $S$
$Q(T)$	carcaj asociado a una triangulación $T$
$\hat{S}(T)$	potencial no reducido asociado a una triangulación $T$
$S(T)$	potencial asociado a una triangulación $T$
$G_\gamma$	grafo serpiente asociado a un arco $\gamma$
$M(\mu)$	módulo cadena asociado a una palabra $\mu$
$\Gamma(Q, W)$	dg - álgebra de Ginzburg asociada a $(Q, W)$
$\mathcal{C}(Q, W)$	categoría de conglomerado asociada a $(Q, W)$

# Introducción

Las Álgebras de Conglomerado fueron definidas por Fomin y Zelevinsky en el artículo [12] como herramienta para el estudio de la positividad total y las bases canónicas duales en la teoría de Lie. Sin embargo, este tipo de álgebras han ido apareciendo en distintas ramas de la matemática a lo largo de los años. Por ejemplo, en el artículo [28] se asocia un Álgebra de Conglomerado a una superficie de Riemann marcada, complementando este estudio en el artículo [40], donde se define de manera explícita una base para el Álgebra de Conglomerado en el caso en que la superficie no tuviera pinchaduras.

La categoría de conglomerado fue definida en el artículo [36], dando pie a la categorificación de las álgebras de conglomerado. Este trabajo se fundamentó en el estudio de las álgebras Jacobianas, las cuales fueron definidas en los artículos [3] y [41], definiendo los carcajes con potenciales y sus respectivas mutaciones.

En el caso de las superficies de Riemann marcadas sin pinchaduras, las álgebras Jacobianas son álgebras gentiles, las cuales fueron estudiadas en el artículo [1]. Este tipo de álgebras, así como la respectiva categoría de módulos, han sido estudiadas a lo largo de los años en numerosos trabajos de investigación. Gracias a estos trabajos, en [4] se estudiaron las secuencias exactas cortas no partidas en las álgebras gentiles que provienen de superficies, encontrando así triángulos en la respectiva categoría de conglomerado.

En el presente trabajo vamos a seguir [4], haciendo un recuento de los resultados necesarios con referencia a las álgebras Jacobianas, así como también de los módulos cadena asociados a estas. Aprovecharemos la geometría de nuestra superficie para entender los cruces de curvas como módulos cadenas, y así poder encontrar las secuencias exactas cortas mencionadas anteriormente; todo esto expuesto en el teorema 5.5, el cuál nos permitirá encontrar dos resultados más (corolario 6.2): definir una base para el espacio  $\text{Ext}(M, N)$ , así como también encontrar una fórmula para su dimensión, resultados sumamente importantes dentro del estudio de las álgebras gentiles.

Cabe recalcar que durante la mayoría del trabajo estaremos trabajando con superficies sin pinchaduras; sin embargo, los conceptos mencionados aquí son de vital importancia para poder entender trabajos posteriores que abordan el caso de las superficies con pinchaduras, como por ejemplo, el artículo [42], donde se analiza el caso en el que haya una pinchadura usando las relaciones de Skein.

# Capítulo 1

## Carcajes con potenciales

En este capítulo estudiaremos los carcajes con potenciales y sus respectivas mutaciones. Vamos a utilizar una notación distinta a la expuesta en el apéndice. Seguiremos, principalmente, las referencias [3] y [23].

### 1.1 Carcajes y álgebra de caminos

**Definición 1.1** ([3], Sección 2.1). Un carcaj es una cuarteta  $Q = (Q_0, Q_1, h, t)$  donde:

- $Q_0$  es un conjunto finito denominado el conjunto de vértices de  $Q$ .
- $Q_1$  es conjunto finito denominado el conjunto de flechas de  $Q$ .
- $h : Q_1 \rightarrow Q_0$  es una función denominada head function.
- $t : Q_1 \rightarrow Q_0$  es una función denominada tail function.

Una flecha  $\alpha \in Q_1$  con  $h(\alpha) = j$  e  $t(\alpha) = i$  la representaremos por  $\alpha : i \rightarrow j$ .

Un carcaj se representa como un grafo multidirigido, esto quiere decir que pueden haber varias flechas uniendo dos vértices. El grafo subyacente de un carcaj, es aquel grafo que se obtiene de  $Q$  eliminando las orientaciones de sus flechas.

**Definición 1.2** ([3], Sección 2.1). Un camino de longitud  $d > 0$  en un carcaj  $Q$ , es una secuencia de flechas  $a_1, \dots, a_d$  tales que  $t(a_j) = h(a_{j+1})$  para todo  $j \in \{1, \dots, d-1\}$ . Gráficamente, un camino lo podemos ver como:

$$i = t(a_d) \xrightarrow{a_d} h(a_d) \rightarrow \dots \rightarrow t(a_2) \xrightarrow{a_2} h(a_2) = t(a_1) \xrightarrow{a_1} h(a_1) = j$$

y lo denotaremos por  $(i|a_1, \dots, a_d|j) = \alpha$ . Un camino será un  $d$ -ciclo si es un camino de longitud  $d$  que satisface  $h(a_1) = t(a_d)$ . Un carcaj será acíclico si no tienen ningún ciclo de cualquier longitud.

**Definición 1.3** ([3], Sección 2.1). Dado un carcaj  $Q$  y dos caminos  $\alpha = (j_2|a_d, \dots, a_1|k)$  y  $\beta = (i|b_r, \dots, b_1|j_1)$ . El producto de estos caminos, denominado muchas veces la concatenación, se define como:

$$ab = \delta_{j_1 j_2} (i|b_r, \dots, b_1, a_d, \dots, a_1|k)$$

Note que el producto de caminos, nos da 0 si  $j_1 \neq j_2$ . Caso contrario tenemos:

$$i \xrightarrow{b_r} \dots \xrightarrow{b_1} j \xrightarrow{a_d} \dots \xrightarrow{a_1} k$$

Dado un carcaj  $Q$  y  $K$  un cuerpo, denotamos por:

$$R = K^{Q_0} = \{f : Q_0 \rightarrow K \mid f \text{ es función}\}$$

$$A = K^{Q_1} = \{f : Q_1 \rightarrow K \mid f \text{ es función}\}$$

$R$  es un  $K$ -álgebra conmutativa con las operaciones puntuales usuales, esta álgebra recibe el nombre de álgebra de vértices. Por otro lado  $A$  es un  $(R, R)$ -bimódulo, denominado el espacio de flechas, con las acciones:

$$(e \cdot f)(a) = e(ha)f(a) \quad (f \cdot e)(a) = f(a)e(ta), \quad \forall e \in R, \forall f \in A$$

Vamos a ver nuestros vértices como elementos de  $R$  y nuestras aristas como elementos de  $A$ . Para esto, dados  $i \in Q_0$  y  $\alpha \in Q_1$  vamos a definir:

$$e_i : Q_0 \rightarrow K, \quad e_i(j) = \delta_{ij}$$

$$1_\alpha : Q_1 \rightarrow K, \quad 1_\alpha(\beta) = \delta_{\alpha\beta}$$

Un cálculo inmediato muestra que  $\{e_i\}_{i \in Q_0}$  y  $\{1_\alpha\}_{\alpha \in Q_1}$  son bases para  $R$  y  $A$  respectivamente. La siguiente proposición nos dice que cualquier  $(R, R, -)$ -bimódulo, tiene la forma de  $A$  para cierto carcaj.

**Lema 1.1** ([23], Páginas 5 y 6). *Dado  $Q_0$  un conjunto finito y  $R = K^{Q_0}$ . Entonces todo  $(R, R)$ -bimódulo  $B$  de dimensión finita  $B$  tiene la forma  $B = K^{Q_1}$  para cierto carcaj  $Q = (Q_0, Q_1)$ .*

*Demostración.* La base  $\{e_i\}$  es una base de idempotentes. Luego podemos expresar:

$$B = \bigoplus_{i,j \in Q_0} B_{i,j}$$

donde  $B_{i,j} = e_i B e_j \subseteq B$  para cada  $i, j \in Q_0$ . Como  $B$  es de dimensión finita cada subespacio  $B_{i,j}$  lo es, definimos así  $Q_1$  como la unión de todas las bases de cada  $B_{i,j}$ . Note que  $Q_1$  es un conjunto finito pues  $B$  es de dimensión finita. Así para  $\alpha \in Q_1 \cap B_{i,j}$  definimos  $h(\alpha) = i$  y  $t(\alpha) = j$ . Tenemos así un carcaj  $Q = (Q_0, Q_1, h, t)$  tal que  $B = K^{Q_1}$ .  $\square$

**Observación.** Vamos a representar un  $(R, R)$ -bimódulo  $B$  por una matriz  $(B_{i,j})$ , donde la entrada  $(i, j)$  es el subespacio  $B_{i,j}$ . En este caso, la acción a izquierda (resp. derecha) de un elemento  $c = \sum c_i e_i \in R$  se traduce en multiplicar a izquierda (resp. derecha) la matriz diagonal cuyas entradas no nulas son exactamente las  $c_i$ . Con esto, el producto tensorial resulta en el producto usual de matrices, siendo explícitos:

$$(B \otimes_R C)_{ij} = \bigoplus_k B_{i,k} \otimes C_{k,j}$$

Para un carcaj  $Q$  con espacio de flechas  $A$  y  $d \geq 0$  definimos:

$$A^0 = R$$

$$A^d = A \otimes_R A \otimes_R \cdots \otimes_R A \text{ (} d \text{ veces)}$$

**Observación.** Notemos algunos hechos importantes del bimódulo  $A^d$ :

- Podemos expresar  $A = \bigoplus_{i,j} A_{i,j}$  donde  $A_{i,j} = e_i A e_j$ .
- Sea  $\alpha \in Q_1$ , entonces  $1_\alpha \in A_{i,j}$  si y solo si  $h(\alpha) = i$  y  $t(\alpha) = j$ . Para ver esto, solo es necesario usar la definición de las acciones:

$$1_\alpha \in A_{i,j} \Leftrightarrow 1_\alpha(\alpha) = e_i(h(\alpha))f(\alpha)e_j(t(\alpha)), \quad f \in A$$

Entonces, una flecha  $\alpha$  está en  $A_{i,j}$  si esta va de  $j$  a  $i$ .

- Tenemos que  $(A \otimes A)_{ij} = \bigoplus_{k \in Q_0} A_{i,k} \otimes A_{k,j}$ . Luego

$$A \otimes_R A = \bigoplus_{i,j \in Q_0} \bigoplus_k (A_{i,k} \otimes A_{k,j})$$

Luego  $\{1_\alpha \otimes 1_\beta \mid \alpha, \beta \in Q_1, h(\beta) = t(\alpha)\}$  es una base para  $A \otimes_R A$ . Note que si  $h(\beta) \neq t(\alpha)$   $1_\alpha \otimes 1_\beta = 0$ , por esta razón podemos pensar en el producto tensorial como el producto de caminos. A partir de ahora consideraremos  $\alpha\beta$  en vez de  $1_\alpha \otimes 1_\beta$  sin confusión.

- De manera general,  $\{1_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes 1_{\alpha_d} \mid \alpha_i \in Q_1, h(\alpha_{i+1}) = t(\alpha_i), \forall i \in [1, d-1]\}$  es una base para  $A^d$ . Resumiendo todo lo anterior,  $A^d$  es un espacio vectorial generado por los caminos de longitud  $d \geq 0$ .

**Definición 1.4** ([23], Definiciones 2.1 y 2.2). Dado un carcaj  $Q$ :

- a) El álgebra de caminos de  $Q$  se define como el álgebra tensorial:

$$R\langle A \rangle = \bigoplus_{d=0}^{\infty} A^d$$

- b) El álgebra de caminos completa de  $Q$  se define como:

$$R\langle\langle A \rangle\rangle = \prod_{d=0}^{\infty} A^d$$

Las componentes  $R\langle A \rangle_{i,j} = e_i R\langle A \rangle e_j$  se denominan el espacio de caminos de  $j$  a  $i$ . La unión de todas las base de  $A^d$  se denomina **la base de caminos de  $R\langle A \rangle$** . Los elementos de  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  son combinaciones lineales (posiblemente infinitas) de elementos de la base de caminos de  $R\langle A \rangle$ . La multiplicación en  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  extiende naturalmente la multiplicación en  $R\langle A \rangle$ .

**Observación.** Los elementos de  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  los denotaremos por  $x = (x^d)_{d \geq 0}$ , donde  $x^d \in A^d$  para cada  $d \geq 0$ .

**Ejemplo 1.** Consideremos el carcaj que se muestra en la Figura 1:



Figura 1: Carcaj  $Q$

En este caso  $R = K^{Q_0} \cong K$  y  $A = K^{Q_1} = \langle 1_a \rangle \cong Ka$ . Así el álgebra de caminos es  $R\langle A \rangle = K[a]$  y el álgebra de caminos completa es  $R\langle\langle A \rangle\rangle = K[[a]]$ .

Ahora consideremos  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(A)$  el ideal bilátero maximal de  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  dado por:

$$\mathfrak{m}(A) = \prod_{d=1}^{\infty} A^d$$

Los elementos de  $\mathfrak{m}(A)$  son de la forma  $(x^d)_{d \geq 0}$  con  $x^0 = 0$ . Como tenemos que  $A^i A^j \subseteq A^{i+j}$ , la potencia  $n$ -ésima de  $\mathfrak{m}$  resulta ser:

$$\mathfrak{m}(A)^n = \prod_{d=n}^{\infty} A^d$$

De manera general, a partir de un ideal podemos construir una topología sobre nuestro anillo. Lo mostramos a continuación:

**Proposición 1.2.** *Sea  $A$  un anillo e  $I$  un ideal. El conjunto:*

$$\{x + I^n \mid n \in \mathbb{N}, x \in A\}$$

*es una base para una topología, denominada la topología  $I$ -ádica. En esta topología se tienen las siguientes propiedades:*

- a) *Un conjunto  $U$  es abierto si y solo si para cada  $x \in U$ , existe  $n \geq 0$  tal que  $x + I^n \subseteq U$ .*
- b) *Para  $U \subseteq A$  se tiene que:*

$$\bar{U} = \bigcap_{n=0}^{\infty} (U + I^n)$$

*Demostración.* La unión de todos los elementos del conjuntos no da  $A$  claramente. Ahora, consideremos  $x + I^n$  e  $y + I^m$  tal que  $z \in (x + I^n) \cap (y + I^m)$ . Debemos encontrar  $u + I^k$  conteniendo a  $z$  y contenido en la intersección. Supongamos sin pérdida de generalidad que  $n \geq m$ , en este caso tenemos que  $I^n \subseteq I^m$ . Pongamos que  $z = x + a = y + b$  donde  $a \in I^n$  e  $b \in I^m$ , tenemos que  $x - y = b - a \in I^m$  y así  $x \in y + I^m$ . Tenemos que  $z \in x + I^n \subseteq (x + I^n) \cap (y + I^m)$  probando que  $\{x + I^n\}$  forma una base.

a) Sea  $U$  abierto y  $x \in U$ , tenemos que  $U$  es una unión de elementos de la base por lo que  $x \in y + I^n$  para algún  $y \in A$  y  $n \geq 0$ . Así, se tiene que  $x = y + p$  con  $p \in I^n$  por lo que  $x + I^n \subseteq y + I^n \subseteq U$ . El recíproco es evidente, pues cada  $x + I^n \subseteq U$  es abierto.

b) Procedemos por doble inclusión.

( $\subseteq$ ) Sea  $x \in \bar{U}$  y  $n \in \mathbb{N}$ . El conjunto  $x + I^n$  contiene a  $x$  por lo que intersecta a  $U$  digamos en  $z$ . Se tiene entonces que  $z = x + p$  donde  $p \in I^n$ , luego  $x = z - p \in U + I^n$ . Como el  $n$  fue arbitrario se tiene la primera inclusión.

( $\supseteq$ ) Sea  $x \in \bigcap_n (U + I^n)$ , si suponemos que  $x \notin \bar{U}$  entonces existe algún abierto  $B$  conteniendo a  $x$  tal que  $B \cap U = \emptyset$ . Por la parte a) existe algún  $n$  tal que  $x + I^n \subseteq B$ , así  $x + I^n \cap U = \emptyset$  algo imposible.

□

Por la proposición anterior,  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  junto con la topología  $\mathfrak{m}$ -ádica es un espacio topológico. Veamos algunas propiedades de este espacio.

**Proposición 1.3** ([23], Página 7). *El único ideal maximal de  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  que tiene intersección nula con  $R$  es  $\mathfrak{m}$ .*

*Demostración.* Sea  $x \in R\langle\langle A \rangle\rangle \setminus \mathfrak{m}$ . Si probamos que  $\langle x \rangle \cap R$  es no vacío se tendría lo pedido. Así, pongamos  $X = (x^{(d)})_{d \geq 0}$ , como  $x \notin \mathfrak{m}$  podemos escribir:

$$x = x^{(0)} + y$$

donde  $x^{(0)} \in R$  es no nulo e  $y \in \mathfrak{m}$ . Si multiplicamos por izquierda y derecha a  $x$  podemos suponer que  $x^{(0)} = e_i$  y que  $e_i y = y = y e_i$ . Definimos:

$$z = e_i - y + y^2 - y^3 + \dots \in R\langle\langle A \rangle\rangle$$

Haciendo cálculos obtenemos que:  $x e_i = x, x y = y + y^2, x y^2 = y^2 + y^3, \dots$ , entonces  $x z = x - y = e_i \in R \cap \langle x \rangle$  probando lo pedido.

□

**Proposición 1.4.** *Sea  $A$  y  $A'$  dos  $(R, R)$ -bimódulos de dimensión finita. Consideremos  $\varphi : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A' \rangle\rangle$  un homomorfismo de álgebras tal que  $\varphi|_R = id$ .*

a)  $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}(A')) = \mathfrak{m}(A)$ , así  $\varphi$  es continua.

b) Si  $\varphi$  es un automorfismo de álgebras, entonces lo es como espacios topológicos también. Además  $\varphi$  es abierta y cerrada.

c) Sea  $\phi : A \rightarrow \mathfrak{m}(A')$  un homomorfismo de  $(R, R)$ -bimódulos, entonces se puede extender a un homomorfismo de álgebras topológicas  $\tilde{\phi} : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A' \rangle\rangle$  tal que  $\tilde{\phi}|_R = id$  y  $\tilde{\phi}|_A = \phi$ .

d)  $\varphi$  está determinado únicamente por  $\varphi|_A : A \rightarrow \mathfrak{m}(A')$ .

*Demostración.* Veamos cada caso:

a) Procedemos por doble inclusión.

- ( $\subseteq$ ) Consideramos  $x \in \varphi^{-1}(\mathfrak{m}(A'))$ , entonces  $\varphi(x) \in \mathfrak{m}(A')$ . Supongamos que  $x \notin \mathfrak{m}(A)$ , al igual que en la proposición anterior podemos encontrar  $z \in R\langle\langle A \rangle\rangle$  tal que  $xz = e_i$ . Luego  $\varphi(x)\varphi(z) = e_i \in \mathfrak{m}(A')$  algo imposible.
- ( $\supseteq$ ) Sea  $y \in \mathfrak{m}(A)$ , supongamos que  $\varphi(y) \notin \mathfrak{m}(A')$ . Luego  $y - \varphi(y)^{(0)} \notin \mathfrak{m}(A)$ , sin embargo  $\varphi(y - \varphi(y)^{(0)}) \in \mathfrak{m}(A')$  algo imposible por lo anterior.

Luego para cada  $n$  y para cada  $x$  se tiene que  $\varphi^{-1}(x + \mathfrak{m}(A')^n) = \varphi^{-1}(x) + \mathfrak{m}(A)^n$ , por lo que  $\varphi$  es continua.

b) Si  $\varphi$  es un automorfismo, por a) (aplicado a  $\varphi^{-1}$ ) se tendría que  $\varphi^{-1}$  es continua y así  $\varphi$  sería un automorfismo como espacios topológicos. Para lo segundo probemos que  $\varphi$  es cerrado, así como es biyectivo tendríamos que también es abierto. Dado  $U \subseteq R\langle\langle A \rangle\rangle$ , entonces:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi(U)} &= \bigcap_{n=0}^{\infty} (\varphi(U) + \mathfrak{m}(A')^n) \\ &= \bigcap_{n=0}^{\infty} (\varphi(U) + \varphi(\mathfrak{m}(A)^n)) \\ &= \varphi \left( \bigcap_{n=0}^{\infty} (U + \mathfrak{m}(A)^n) \right) \\ &= \varphi(\overline{U}) \end{aligned}$$

Esto prueba que  $\varphi$  es cerrada.

c) Como  $\varphi$  es un homomorfismo de bimódulos, podemos extender  $\varphi$  linealmente a  $\hat{\phi} : R\langle A \rangle \rightarrow R\langle\langle A' \rangle\rangle$  haciendo:

$$\hat{\phi}(a_1 \dots a_d) = \phi(a_1) \dots \phi(a_d)$$

Afirmamos que  $\overline{R\langle A \rangle} = R\langle\langle A \rangle\rangle$ . En efecto, sea  $x = (x^{(d)})_{d \geq 0} \in R\langle\langle A \rangle\rangle$  y  $U$  un abierto conteniendo a  $x$ . Luego existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $x + \mathfrak{m}^n \subseteq U$ , entonces definimos  $z = (x^{(d)})_{d \geq 0} - (x^{(d)})_{d \geq n} \in R\langle A \rangle \cap U$  por lo que  $x \in \overline{R\langle A \rangle}$ .

Por lo anterior, podemos extender (continuamente)  $\hat{\phi}$  a un único homomorfismo de álgebras topológicas  $\tilde{\phi} : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A' \rangle\rangle$  como se quería.

d) La restricción  $\varphi|_A$  va de  $A$  a  $\mathfrak{m}(A')$ , usando c) podemos extender a  $\phi$  de manera única por lo que  $\phi = \varphi$  y así  $\varphi$  queda determinada por su restricción.

□

Como  $\mathfrak{m}(A') = A' \oplus \mathfrak{m}(A')^2$ , podemos expresar  $\varphi|_A = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$  donde  $\varphi^{(1)} : A \rightarrow A'$  y  $\varphi^{(2)} : A \rightarrow \mathfrak{m}(A')^2$ . Una aplicación de la proposición 1.4 nos da lo siguiente.

**Proposición 1.5** ([23], Proposición 2.4). *El par  $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$  de homomorfismos de  $(R, R)$ -bimódulos da lugar a un único homomorfismo de álgebras topológicas  $\varphi : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A' \rangle\rangle$  tal que  $\varphi|_R = id$  y  $\varphi|_A = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$ . Además  $\varphi$  es un isomorfismo si y solo si  $\varphi^{(1)}$  es un isomorfismo.*

*Demostración.* La primera parte de la proposición ya lo probamos en la proposición 1.4. Para la segunda parte:

( $\Rightarrow$ ) Tenemos que  $\varphi$  es un isomorfismo, entonces:

- $\varphi$  es **sobreyectivo**. En efecto, sea  $y = (y^{(d)})_{d \geq 0} \in A'$ , luego existe  $x \in R\langle\langle A \rangle\rangle$  tal que  $\varphi(x) = y$ . Tenemos:

$$y = \varphi(x) = x^{(0)} + \varphi(x^{(1)}) + \varphi(x - x^{(0)} - x^{(1)})$$

Así necesariamente  $x^{(0)} = 0$ . Despejando:

$$\varphi(x^{(1)}) = y - \varphi(x - x^{(0)} - x^{(1)})$$

Como  $x - x^{(0)} - x^{(1)} \in \mathfrak{m}(A)^2$ , entonces  $\varphi(x - x^{(0)} - x^{(1)}) \in \mathfrak{m}(A')^2$ . Así, por la relación anterior tendríamos que  $\varphi^{(1)}(x^{(1)}) = y$  probando la sobreyectividad.

- $\varphi$  es **inyectivo**. Sean  $a, b \in A$  tales que  $\varphi^{(1)}(a) = \varphi^{(1)}(b)$ . Tenemos:

$$\begin{aligned} \varphi(a) + \varphi^{(2)}(b) &= \varphi^{(1)}(a) + \varphi^{(2)}(a) + \varphi^{(2)}(b) \\ &= \varphi^{(1)}(b) + \varphi^{(2)}(a) + \varphi^{(2)}(b) \\ &= \varphi(b) + \varphi^{(2)}(a) \end{aligned}$$

Ahora, existe  $x_1 \in R\langle\langle A \rangle\rangle$  tal que  $\varphi(x_1) = \varphi^{(2)}(b) \in \mathfrak{m}(A')^2$ . Entonces  $x_1 \in \varphi^{-1}(\mathfrak{m}(A')^2) = \mathfrak{m}(A)^2$ . Análogamente existe  $x_2 \in \mathfrak{m}(A)^2$  tal que  $\varphi(x_2) = \varphi^{(2)}(a)$ . Reemplazando:

$$\varphi(a) + \varphi(x_1) = \varphi(b) + \varphi(x_2) \implies a + x_1 = b + x_2$$

Así  $a = b$  y tenemos la inyectividad.

( $\Leftarrow$ ) Como  $\varphi^{(1)}$  es un isomorfismo, podemos identificar  $A$  con  $A'$  y asumir que el isomorfismo es la identidad. La matriz infinita que expresa  $\varphi$  como un mapa  $K$ -lineal en la base de caminos, es triangular inferior con entradas 1 en la diagonal (ordenamos los elementos de la base tal que sus grados estén de manera creciente). Esta matriz es invertible, por lo que  $\varphi$  es invertible.

□

## 1.2 Potenciales e Ideales jacobianos

Recordar que para  $d \geq 0$ :

$$A^d = \bigoplus_{i,j \in Q_0} A_{i,j}^d$$

donde  $A_{i,j}^d = e_i A^d e_j$ . Este espacio está generado por los caminos  $a_1 \dots a_d$  tales que  $t(a_d) = j$  y  $h(a_1) = i$ .

**Definición 1.5** ([23], Definición 3.1). Para un carcaj  $Q = (Q_0, Q_1, h, t)$  definimos:

- a) La parte cíclica de  $A^d$  como el sub  $(R, R)$ -bimódulo generado por los  $d$ -ciclos.

$$A_{\text{cyc}}^d = \bigoplus_{i \in Q_0} A_{i,i}^d$$

- b) Un potencial  $S$  como cualquier elemento de  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  que es una combinación lineal (posiblemente infinita) de ciclos, esto es, si pertenece al sub-espacio vectorial cerrado:

$$R\langle\langle A \rangle\rangle_{\text{cyc}} = \prod_{d=1}^{\infty} A_{\text{cyc}}^d$$

- c) La derivada cíclica de  $\xi \in A^*$  se define como el mapa  $K$ -lineal y continuo  $\partial_\xi : R\langle\langle A \rangle\rangle_{\text{cyc}} \rightarrow R\langle\langle A \rangle\rangle$  definido en caminos como:

$$\partial_\xi(a_1 \dots a_d) = \sum_{k=1}^d \xi(a_k) a_{k+1} \dots a_d a_1 \dots a_{k-1}$$

y extendiendo linealmente a todo  $R\langle\langle A \rangle\rangle_{\text{cyc}}$ .

- d) El ideal Jacobiano de un potencial  $S$  como:

$$J(S) = \overline{R\langle\langle A \rangle\rangle \{ \partial_\xi(S) \mid \xi \in A^* \} R\langle\langle A \rangle\rangle}$$

es decir, como la clausura del ideal bilátero en  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  generado por los elementos  $\partial_\xi(S)$  con  $\xi \in A^*$ .

- e) El álgebra Jacobiana de  $S$  como el cociente  $R\langle\langle A \rangle\rangle / J(S)$ . Denotamos a esta álgebra como  $\mathcal{P}(Q, S)$  o  $\mathcal{P}(A, S)$ .

**Observaciones.** De las definiciones anteriores, notar que:

- 1)  $R\langle\langle A \rangle\rangle_{\text{cyc}}$  es cerrado, en efecto, sea  $y \in \overline{R\langle\langle A \rangle\rangle_{\text{cyc}}}$ , entonces para cada  $n \geq 0$ :

$$y \in (R\langle\langle A \rangle\rangle_{\text{cyc}} + \mathfrak{m}^n)$$

Supongamos que  $y = (y^{(d)})_{d \geq 0} \notin R\langle\langle A \rangle\rangle_{\text{cyc}}$ , entonces existe algún  $d \geq 0$  tal que  $y^{(d)} \notin A_{\text{cyc}}^d$ . Luego por lo anterior se tiene que:

$$y \in (R\langle\langle A \rangle\rangle_{\text{cyc}} + \mathfrak{m}^{d+1})$$

Así  $y = (x^{(k)})_{k \geq 0} + (z^{(k)})_{k \geq d+1}$  por lo que  $y^{(d)} = x^{(d)} \in A_{\text{cyc}}^d$  algo imposible.

- 2) Si denotamos  $Q^*$  el carcaj obtenido de  $Q$  al invertir las orientaciones de sus flechas tenemos que  $A^*$  se identifica con el espacio de flechas de  $Q^*$ .
- 3) Recordar que  $Q_1$  es una base de  $A$ , denotamos  $Q_1^* = \{a^* : a \in Q_1\}$  la base dual asociada. Para una flecha  $a \in Q_1$  definimos  $\partial_a = \partial_{a^*}$  y así:

$$\partial_a(a_1 \dots a_d) = \sum_{k=1}^d \delta_{a, a_k} a_{k+1} \dots a_d a_1 \dots a_{k-1}$$

- 4) La derivada cíclica  $\partial_\xi$  no depende de la elección de la base de caminos.

**Definición 1.6** ([23], Definición 3.2). Diremos que dos potenciales  $S$  y  $S'$  son cíclicamente equivalentes si  $S - S'$  está en la clausura del espacio generado por los elementos de la forma  $a_1 \dots a_d - a_2 \dots a_d a_1$ , donde  $a_1 \dots a_d$  son  $d$ -ciclos.

**Proposición 1.6** ([23], Proposición 3.3). Si los potenciales  $S$  y  $S'$  son cíclicamente equivalentes entonces  $\partial_\xi(S) = \partial_\xi(S')$ , para todo  $\xi \in A^*$ .

**Ejemplo 2.** Consideremos el carcaj  $Q$  mostrado en la Figura 2:

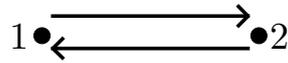


Figura 2: Carcaj  $Q$  formado por dos flechas

Tenemos que  $R = K^{Q_0} = Ke_1 \oplus Ke_2$  y  $A = K^{Q_1} = Ka \oplus Kb$ . Notar que los ciclos en  $Q$  son de la forma  $(ab)^n$  o  $(ba)^n$  para  $n \geq 1$ . Siendo más específicos si  $d$  es impar  $A_{\text{cyc}}^d = \{0\}$  y si  $d = 2k$  es par tenemos que  $A_{\text{cyc}}^d$  está generado por  $(ab)^k$  y  $(ba)^k$ . Los potenciales (salvo equivalencia cíclica) son de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (ab)^n, \quad \alpha_n \in K$$

Ahora calculemos las derivadas cíclicas, para  $(ab)^n$  consideremos la siguiente notación: pongamos  $a_i = a$  si es que  $i$  es impar y  $a_i = b$  si es que  $i$  es par, luego:

$$\begin{aligned}\partial_a((ab)^n) &= \partial_a((ab)(ab)\dots(ab)) = \sum_{k=1}^{2n} \delta_{a,a_k} a_{k+1} \dots a_{2n} a_1 \dots a_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{2k} \dots a_{2n} a_1 \dots a_{2k-2} = \sum_{k=1}^n b(ab)^{n-1} = nb(ab)^{n-1}\end{aligned}$$

Siguiendo la misma idea que en el cálculo anterior, se obtiene que:

$$\partial_a((ab)^n) = nb(ab)^{n-1} = \partial_a((ba)^n) \quad \text{y} \quad \partial_b((ba)^n) = na(ab)^{n-1} = \partial_b((ba)^n)$$

Introducimos ahora un “cálculo diferencial” con las derivadas cíclicas, consideremos:

$$R\langle\langle A \rangle\rangle \hat{\otimes} R\langle\langle A \rangle\rangle = \prod_{d,e \geq 0} A^d \otimes_K A^e$$

Dotamos a este espacio de una topología que tiene como sistema básico de entornos alrededor del 0 a los conjuntos de la forma:

$$\prod_{d+e \geq n} A^d \otimes_K A^e, \quad n \geq 0$$

Con esta topología  $R\langle\langle A \rangle\rangle \otimes_K R\langle\langle A \rangle\rangle$  es denso en  $R\langle\langle A \rangle\rangle \hat{\otimes} R\langle\langle A \rangle\rangle$  ([23], Prop. 3.7). Luego, para  $\xi \in A^*$  definimos el mapa  $K$ -lineal y continuo:

$$\Delta_\xi : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A \rangle\rangle \hat{\otimes} R\langle\langle A \rangle\rangle$$

haciendo  $\Delta_\xi(e) = 0$  para todo  $e \in R$  y para caminos:

$$\Delta_\xi(a_1 \dots a_d) = \sum_{k=1}^d \xi(a_k) a_1 \dots a_{k-1} \otimes a_{k+1} \dots a_d$$

**Observación.** Al igual que en el caso de la derivada cíclica, para  $a \in Q_1$  definimos  $\Delta_a = \Delta a^*$ . Luego por la definición, para un camino  $a_1 \dots a_d$  tenemos que:

$$\Delta_a(a_1 \dots a_d) = \sum_{k=1}^d \delta_{a,a_k} a_1 \dots a_{k-1} \otimes a_{k+1} \dots a_d$$

**Ejemplo 3.** Consideremos el mismo carcaj del ejemplo 2, en este caso:

$$\begin{aligned}\Delta_a((ab)^n) &= \Delta_a((ab)(ab)\dots(ab)) = \sum_{k=1}^{2n} \delta_{a,a_k} a_1 \dots a_{k-1} \otimes a_{k+1} \dots a_{2n} \\ &= \sum_{k=1}^n a_1 \dots a_{2k-2} \otimes a_{2k} \dots a_{2n} = \sum_{k=1}^n (ab)^{k-1} \otimes b(ab)^{n-k}\end{aligned}$$

Realizando un cálculo similar tenemos que:  $\Delta_b((ab)^n) = \sum_{k=1}^n (ab)^{k-1} a \otimes (ab)^{n-k}$ .

Definimos ahora el mapa  $K$ -bilineal continuo:

$$\square : (R\langle\langle A \rangle\rangle \hat{\otimes} R\langle\langle A \rangle\rangle) \times R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A \rangle\rangle$$

determinado por  $(u \otimes v)\square g = vgu$  para todo  $u, v \in R\langle A \rangle$  ([23], Pág. 11).

**Proposición 1.7** (Regla cíclica de Leibniz, [23], Lema 3.8). *Sea  $f \in R\langle\langle A \rangle\rangle_{ij}$  y  $g \in R\langle\langle A \rangle\rangle_{ji}$  para  $i, j$ . Entonces para  $\xi \in A^*$ :*

$$\partial_\xi(fg) = \Delta_\xi(f)\square g + \Delta_\xi(g)\square f$$

*De manera general para cualquier sucesión finita de vértices en  $Q$   $i_1, \dots, i_d, i_{d+1} = i_1$  y cualquier sucesión de elementos de  $R\langle\langle A \rangle\rangle$   $f_1, \dots, f_d$  tales que  $f_k \in R\langle\langle A \rangle\rangle_{i_k, i_{k+1}}$  para todo  $k$ , se tiene que:*

$$\partial_\xi(f_1 \dots f_d) = \sum_{k=1}^d \Delta_\xi(f_k)\square(f_{k+1} \dots f_d f_1 \dots f_{k-1})$$

*Demostración.* Como  $\Delta_\xi$  y  $\partial_\xi$  son bilineales y lineales respectivamente, basta probar para  $f = a_1, \dots, a_d$  y  $g = a_{d+1}, \dots, a_{d+s}$  dos caminos tales que  $h(a_1) = t(a_{d+s})$  y  $t(a_d) = h(a_{d+1})$ . Aplicando la definición tenemos:

$$\begin{aligned} \partial_\xi(fg) &= \sum_{k=1}^{d+s} \xi(a_k) a_{k+1} \dots a_{d+s} a_1 \dots a_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^d \xi(a_k) (a_{k+1} \dots a_d) g(a_1 \dots a_{k-1}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^s \xi(a_{k+d}) (a_{k+d+1} \dots a_{d+s}) f(a_{d+1} \dots a_{d+k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^d \xi(a_k) (a_1 \dots a_{k-1} \otimes a_{k+1} \dots a_d) \square g \\ &\quad + \sum_{k=1}^s \xi(a_{k+d}) (a_{d+1} \dots a_{d+k-1} \otimes a_{d+k+1} \dots a_{d+s}) \square f \\ &= \Delta_\xi(f)\square g + \Delta_\xi(g)\square f \end{aligned}$$

Para probar el caso general, simplemente se realiza inducción sobre  $d$ . □

**Proposición 1.8** (Regla cíclica de la cadena, [23], Lema 3.9). *Sea  $\varphi : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A \rangle\rangle$  tal que  $\varphi|_R = id$ , para cada potencial  $S$  y  $\xi \in A^*$  se tiene que:*

$$\partial_\xi(\varphi(S)) = \sum_{a \in Q_1} \Delta_\xi(\varphi(a)) \square \varphi(\partial_a(S))$$

*Demostración.* Al igual que en la prueba de la proposición anterior, basta probar la igualdad para un  $d$ -diclo  $S = a_1 \dots a_d \in A_{cyc}^d$ . Por el caso general de la proposición 1.7, aplicado a  $\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_d)$ , tenemos que:

$$\partial_\xi(\varphi(S)) = \sum_{k=1}^d \Delta_\xi(\varphi(a_k)) \square(\varphi(a_{k+1} \dots a_d a_1 \dots a_{k-1}))$$

Esta suma la podemos expresar de otra manera, note que como  $\varphi$  es un homomorfismo, entonces  $\varphi(0) = 0$ . Ahora dada cualquier flecha  $a \in Q_1$  puede ser que  $a \neq a_k$  para todo  $k \in \{1, \dots, n\}$ , en este caso la suma:

$$\sum_{k, a_k=a} a_{k+1} \dots a_d a_1 \dots a_{k-1} = 0$$

Por lo tanto podemos expresar  $\partial_\xi(\varphi(S))$  como una suma sobre todas las flechas, ya que si  $a \neq a_k$  el sumando nos dará 0. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} \partial_\xi(\varphi(S)) &= \sum_{a \in Q_1} \Delta_\xi(\varphi(a)) \square \varphi \left( \sum_{k, a_k=a} a_{k+1} \dots a_d a_1 \dots a_{k-1} \right) \\ &= \sum_{a \in Q_1} \Delta_\xi(\varphi(a)) \square \varphi(\partial_a(S)) \end{aligned}$$

□

Las dos proposiciones anteriores nos permitirán encontrar una forma de encontrar isomorfismo entre álgebras Jacobianas asociadas a dos quiver.

**Teorema 1.9** ([23], Proposición 3.7). *Todo isomorfismo de álgebras  $\varphi : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A' \rangle\rangle$  cumpliendo  $\varphi|_R = \text{id}$ , envía  $J(S)$  en  $J(\varphi(S))$  e induce un isomorfismo  $\mathcal{P}(Q, S) \cong \mathcal{P}(A', \varphi(S))$ .*

*Demostración.* Procederemos por doble inclusión que  $\varphi(J(S)) = J(\varphi(S))$ .

( $\supseteq$ ) Sea  $\xi \in A'^*$ , por la proposición 1.8 se tiene que  $\partial_\xi(\varphi(S))$  está en el ideal generado por  $\{\varphi(\partial_a(S)) : a \in Q_1\} \subseteq \{\varphi(\partial_\xi(S)) : \xi \in A'^*\}$ . Como  $J(S)$  es generado por  $\{\partial_\xi(S) : \xi \in A'^*\}$  esto prueba lo pedido.

( $\subseteq$ ) Aplicamos lo anterior para el caso de  $\varphi^{-1}$ , en efecto:

$$\begin{aligned} J(S) &= J(\varphi^{-1}(\varphi(S))) \subseteq \varphi^{-1}(J(\varphi(S))) \\ &\implies \varphi(J(S)) \subseteq J(\varphi(S)) \end{aligned}$$

□

El teorema anterior nos da una forma de encontrar isomorfismos entre álgebras Jacobianas. Comenzamos con un par de homomorfismos de bimódulos  $\varphi^{(1)}$  y  $\varphi^{(2)}$  tal que  $\varphi^{(1)}$  es isomorfismo. Luego, este par determina de manera única un isomorfismo  $\varphi : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A' \rangle\rangle$  tal que  $\varphi|_R = \text{id}$  y así tendríamos el isomorfismo buscado. Note que no siempre debe existir tal  $\varphi^{(1)}$  y a priori no tenemos una forma clara de construirlo.

### 1.3 Carcajes con potenciales

**Definición 1.7** ([23], Definición 4.1). Sea  $Q$  un carcaj con espacio de flechas  $A = K^{Q_1}$  y  $S \in R\langle\langle A \rangle\rangle_{\text{cyc}}$  un potencial. Decimos que  $(A, S)$  es un carcaj con potencial, abreviado simplemente QP, si cumple las siguientes condiciones:

- 1)  $Q$  no tiene lazos, es decir  $A_{i,i} = 0$  para todo  $i \in Q_0$ .
- 2) Ningún par de ciclos que aparecen en  $S$  son cíclicamente equivalentes.

**Ejemplo 4.** Consideremos el carcaj  $Q$  mostrado en la Figura 3. Podemos considerar dos potenciales  $S_1 = 0$  y  $S_2 = abc$ .

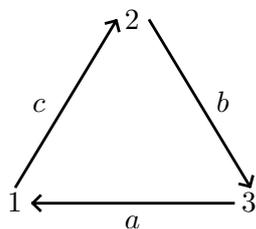


Figura 3: Carcaj con potencial  $Q$

**Observación.** Cuando nos referimos a un QP  $(A, S)$  está tácito que este está determinado por un carcaj  $Q$  tal que  $K^{Q_1} = A$ .

**Definición 1.8** ([23], Definición 4.2). Sean  $(A, S)$  y  $(A', S')$  dos QP con el mismo espacio de vértices  $Q_0$ . Una equivalencia a derecha es un isomorfismo de álgebras:

$$\varphi : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A' \rangle\rangle$$

tal que  $\varphi|_R = \text{id}$  y  $\varphi(S)$  es cíclicamente equivalente a  $S'$ . Denotaremos en este caso  $(A, S) \cong (A', S')$  y diremos que son equivalentes a derecha.

Se puede ver que un homomorfismo de álgebras  $\varphi$  como en la definición anterior, lleva potenciales cíclicamente equivalentes en potenciales cíclicamente equivalentes (ver [23], Pág. 12). Por esta razón si tenemos dos equivalencias a derecha su composición sigue siendo equivalencia a derecha y así también la inversa de una equivalencia a derecha sigue siéndolo. Así ser equivalente a derecha nos define una relación de equivalencia, a sus clases las denominaremos clases de equivalencia a derecha.

Por la proposición 1.5 un isomorfismo de álgebras  $\varphi : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A' \rangle\rangle$  induce un isomorfismo  $\varphi^{(1)} : A \rightarrow A'$ , así que al trabajar con QP equivalentes a derecha podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $A = A'$ . Además por las proposiciones 1.6 y 1.9 tenemos que si  $(A, S) \cong (A', S')$  entonces  $\mathcal{P}(A, S) \cong \mathcal{P}(A', S')$ .

**Definición 1.9** ([23], Página 12). Para  $(A, S)$  y  $(A', S')$  dos QP con el mismo espacio de vértices  $Q_0$ , definimos la suma directa como:  $(A, S) \oplus (A', S') = (A \oplus A', S + S')$

**Observación.** Lo anterior está bien definido pues hay encajes canónicos de  $R\langle\langle A \rangle\rangle$  y  $R\langle\langle A' \rangle\rangle$  en  $R\langle\langle A \oplus A' \rangle\rangle$ .

Consideremos un carcaj con potencial  $(A, S)$  donde  $S \in A^2$ , en este caso tenemos que  $\partial(S) = \{\partial_\xi(S) : \xi \in A^*\} \subseteq A$ . Si se cumple la igualdad es claro que el álgebra Jacobiana  $\mathcal{P}(A, S)$  es isomorfa a  $R$ .

**Definición 1.10** ([23], Definición 4.3). Diremos que un QP  $(A, S)$  es trivial si  $S \in A^2$  y  $\partial(S) = A$ , equivalentemente si  $\mathcal{P}(A, S) = R$ .

**Definición 1.11** ([23], Definición 2.5). Sea  $\varphi : R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A \rangle\rangle$  un automorfismo con  $\varphi|_A = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$ . Si  $\varphi^{(2)} = 0$  diremos que  $\varphi$  es un cambio de flechas.

**Proposición 1.10** ([23], Proposición 4.4). *Sea  $(A, S)$  un QP con  $S \in A^2$ , entonces el carcaj es trivial si y solo si consiste de  $2N$  flechas distintas  $a_1, b_1, \dots, a_N, b_N$  tal que para cada  $k \in \{1, \dots, N\}$  se tiene que  $a_k b_k$  es un 2-ciclo y existe  $\varphi$  un cambio de flechas tal que  $\varphi(S)$  es cíclicamente equivalente a  $a_1 b_1 + \dots + a_N b_N$ .*

**Proposición 1.11** ([23], Proposición 4.5). *Sea los QP  $(A, S)$  y  $(C, T)$  donde el segundo es trivial. Entonces el encaje canónico  $R\langle\langle A \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle A \oplus C \rangle\rangle$  induce un isomorfismo de álgebras Jacobianas  $\mathcal{P}(A, S) \cong \mathcal{P}(A \oplus C, S + T)$ .*

*Demostración.* Sea  $L$  la cerradura del ideal en  $R\langle\langle A \oplus C \rangle\rangle$  generado por  $C$ , entonces  $L$  contiene combinaciones lineales (posiblemente infinitas) de caminos donde cada uno de ellos contienen al menos una flecha de  $C$ . Luego se tiene que:

$$R\langle\langle A \oplus C \rangle\rangle = R\langle\langle A \rangle\rangle \oplus L$$

Sea  $S = (a_1, \dots, a_s)$  y  $T = (c_1, \dots, c_s)$  se tiene que para  $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in (A \oplus C)^* = A^* \oplus C^*$ :

$$\begin{aligned} \partial_\xi(S + T) &= \sum_{k=1}^s \xi(a_k, c_k)(a_{k+1}, c_{k+1}) \dots (a_s, c_s)(a_1, c_1) \dots (a_{k-1}, c_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^s \xi_1(a_k)(a_{k+1}, c_{k+1}) \dots (a_s, c_s)(a_1, c_1) \dots (a_{k-1}, c_{k-1}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^s \xi_2(c_k)(a_{k+1}, c_{k+1}) \dots (a_s, c_s)(a_1, c_1) \dots (a_{k-1}, c_{k-1}) \\ &= (\partial_{\xi_1}(S) + \sum_{k=1}^s \partial_{a_k}(S), \partial_{\xi_2}(S) + \sum_{k=1}^s \partial_{c_k}(S)) \end{aligned}$$

Por lo anterior se concluye que  $J(S + T) = J(S) \oplus L$  y así:

$$\mathcal{P}(A \oplus C, S + T) = \frac{R\langle\langle A \oplus C \rangle\rangle}{J(S + T)} = \frac{R\langle\langle A \rangle\rangle \oplus L}{J(S) \oplus L} \cong \frac{R\langle\langle A \rangle\rangle}{J(S)} = \mathcal{P}(A, S)$$

□

**Definición 1.12** ([23], Página 13). Para un QP  $(A, S)$  denotamos por  $S^{(2)} \in A^2$  la componente de grado 2 de  $S$ . Si  $S^{(2)} = 0$  entonces  $(A, S)$  se denomina reducido.

**Definición 1.13** ([23], Página 13). Para un QP  $(A, S)$  definimos:

- $A_{\text{triv}} = A_{\text{triv}}(S) = \partial S^{(2)}$  el espacio de flechas trivial.
- $A_{\text{red}} = A_{\text{red}}(S) = A/\partial S^{(2)}$  el espacio de flechas reducido.

**Teorema 1.12** (Splitting theorem, [3], Teorema 10). *Para un QP  $(A, S)$  existen:*

- Un QP trivial  $(A_{\text{triv}}, S_{\text{triv}})$ .
- Un QP reducido  $(A_{\text{red}}, S_{\text{red}})$ .

tales que  $(A, S) \cong (A_{\text{triv}}, S_{\text{triv}}) \oplus (A_{\text{red}}, S_{\text{red}})$ . Más aun, la clase de equivalencia a derecha de cada uno de los QP  $(A_{\text{triv}}, S_{\text{triv}})$  y  $(A_{\text{red}}, S_{\text{red}})$  está determinada por la clase de equivalencia a derecha de  $(A, S)$ .

*Demostración.* Ver en [3]. □

Denominaremos a los QP  $(A_{\text{red}}, S_{\text{red}})$  y  $(A_{\text{triv}}, S_{\text{triv}})$  la parte reducida y la parte trivial de  $(A, S)$  respectivamente. Esta definición está bien definida salvo equivalencia a derecha.

## 1.4 Mutación de carcajes QP

Sea  $Q$  un carcaj e  $i \in Q_0$  un vértice, un  $i$ -gancho es un camino  $ab$  donde se tiene  $t(a) = i = h(b)$ ; en otras palabras es de la forma  $\cdot \xrightarrow{b} i \xrightarrow{a} \cdot$ . Vamos a definir una operación en un carcaj, denominada mutación, en [3] no se pide que  $Q$  sea 2-acíclico; sin embargo para el propósito del presente trabajo pediremos esta condición.

**Definición 1.14** ([3], Definición 1). Dado un carcaj  $Q$  sin 2-ciclos ni lazos e  $i \in Q_0$  un vértice, la premutación de  $Q$  en la dirección  $i$  es el carcaj  $\tilde{u}_i(Q)$  obtenido de  $Q$  siguiendo los pasos:

- i) Para un  $i$ -gancho  $ab$  introducimos la flecha  $[ab] : t(b) \rightarrow h(a)$ .
- ii) Para cualquier flecha  $a$  que contiene a  $i$  se invierte su orientación obteniendo  $a^*$ . Siendo específicos, si  $a : i \rightarrow h(a)$  entonces  $a^* : h(a) \rightarrow i$  y si  $b : t(b) \rightarrow i$  entonces  $b^* : i \rightarrow t(b)$ .

La mutación de  $Q$  en la dirección  $i$  es el carcaj  $u_i(Q)$  que se obtiene de la premutación  $\tilde{u}_i(Q)$  eliminando los posibles 2-ciclos que se pudieron haber obtenido en el paso i).

**Observación.** En [12] se define la mutación sobre vértices mutables, haciendo una clasificación de los vértices en mutables y congelados. En la definición 1.14 no estamos considerando vértices congelados por lo que podemos mutar en cualquier dirección.

**Ejemplo 5.** Consideremos el carcaj  $Q$  mostrado en la Figura 4.

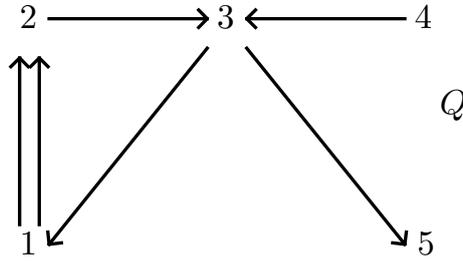


Figura 4: Carcaj  $Q$

Consideramos  $3 \in Q_0$ , la permutación  $\tilde{u}_3(Q)$  contiene un 2-ciclo como se muestra en la Figura 5:

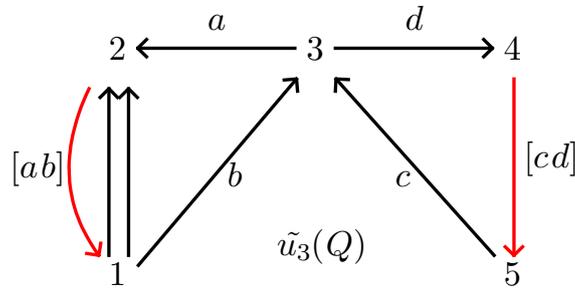


Figura 5: Permutación  $\tilde{u}_3(Q)$

Eliminando el 2-ciclo obtenemos la mutación  $u_3(Q)$ :

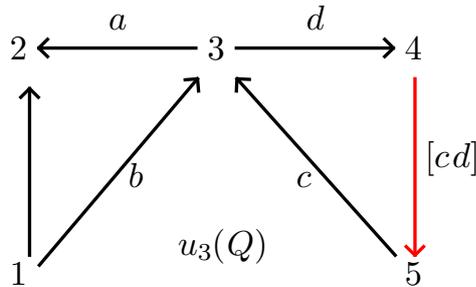


Figura 6: Mutación  $u_3(Q)$

**Proposición 1.13.** La mutación de carcajes satisface las siguientes propiedades:

- 1) Para todo  $i \in Q_0$  se tiene que  $u_i(u_i(Q)) = Q$ , es una involución.
- 2) Sean  $j, k \in Q_0$  tal que no existan flechas entre si, entonces  $u_j(u_k(Q)) = u_k(u_j(Q))$ .
- 3) Sea  $r(Q) = Q^*$  el quiver opuesto de  $Q$ , entonces para  $i \in Q_0$  se tiene que  $u_i(r(Q)) = r(u_i(Q))$ .

Ahora extenderemos la noción de mutación para el caso de carcajes con potenciales (seguiremos [3]). Fijemos un QP  $(A, S)$  e  $i \in Q_0$ , podemos suponer que  $S$  no contiene ningún ciclo empezando en  $i$  (si fuera el caso, podemos reemplazar  $S$  por otro potencial cíclicamente equivalente). Denotamos  $\tilde{A}$  el espacio de flechas de la premutación  $\tilde{u}_i(Q)$ . Definimos:

- $[S]$  el potencial en  $\tilde{A}$  que se obtiene al reemplazar todo  $i$ -gancho  $ab$  por  $[ab]$ .
- $\Delta_i(Q) = \sum b^*a^*[ab]$  donde la suma se toma sobre todos los  $i$ -ganchos.

Note que  $\Delta_i(Q)$  es la suma de todos los nuevos 3-ciclos tras la premutación.

**Definición 1.15** ([3], Definición 11). Definimos la premutación de  $(A, S)$  en la dirección  $i$  como el QP  $\tilde{u}_i(A, S) = (\tilde{u}_i(A), \tilde{u}_i(S)) = (\tilde{A}, \tilde{S})$  donde:

- $\tilde{A}$  es el espacio de flechas de  $\tilde{u}_i(Q)$ .
- $\tilde{S} = [S] + \Delta_i(Q)$ .

La mutación de  $(A, S)$  en la dirección  $i$  se define como la parte reducida de  $\tilde{u}_i(A, S)$ , es decir  $u_i(A, S) = (\tilde{u}_i(A)_{\text{red}}, \tilde{u}_i(S)_{\text{red}})$

**Ejemplo 6.** Consideremos los potenciales  $S_1 = 0$  y  $S_2 = abc$  en el carcaj  $Q$  mostrado en la Figura 7. Calculemos las premutaciones  $\tilde{u}_2(A, S_1)$  y  $\tilde{u}_2(A, S_2)$ .

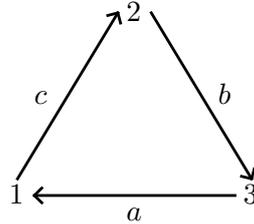


Figura 7: Carcaj con potencial  $Q$

En ambos casos debemos encontrar la premutación de  $Q$ , note que solo hay un 2-gancho  $bc$  por lo que debemos agregar una flecha  $[bc]$ .

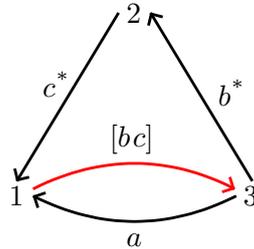


Figura 8: Premutación  $\tilde{u}_2(Q)$

Denotamos por  $\tilde{A}$  al espacio de flechas de la premutación obtenida. Para el primer potencial tenemos  $\tilde{S}_1 = c^*b^*[bc]$ , note que  $(\tilde{A}, \tilde{S}_1)$  es reducido por lo que la mutación es  $u_2(A, S_1) = (\tilde{A}, \tilde{S}_1)$ .

Ahora  $\tilde{S}_2 = a[bc] + c^*b^*[bc]$ , la parte reducida de  $(\tilde{A}, \tilde{S}_2)$  es  $u_2(A, S_2) = (\bar{A}, 0)$  donde  $\bar{A}$  es el espacio de flechas del carcaj:

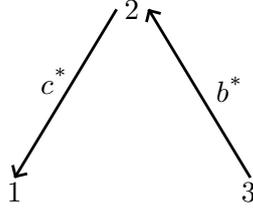


Figura 9: Carcaj con espacio de flechas  $\bar{A}$

**Ejemplo 7.** Consideremos el carcaj mostrado en la Figura 10 y el potencial  $S = dcba$ . Vamos a realizar primero la mutación en la dirección 2.

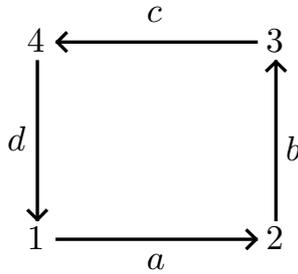


Figura 10: Carcaj  $Q$

La premutación  $\tilde{u}_2(Q)$  se muestra en la Figura 11, note que solo hay un 2-gancho. El espacio de flechas de este carcaj lo denotamos por  $\tilde{A}$ .

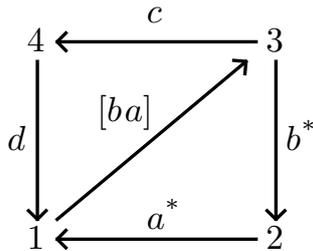


Figura 11: Premutación  $\tilde{u}_2(Q)$

El potencial en este caso es  $\tilde{S} = dc[ba] + a^*b^*[ba]$ , note que  $(\tilde{A}, \tilde{S})$  es reducido por lo que  $u_2(A, S) = (\tilde{A}, \tilde{S})$ . Ahora vamos a mutar  $(\tilde{A}, \tilde{S})$  en la dirección 3, realizando la premutación de  $\tilde{u}_2(Q)$  obtenemos el carcaj de la Figura 12 (hemos puesto que  $f = b^*, g = [ba]$  y  $e = a^*$ ). Denotamos por  $A'$  al espacio de flechas de este carcaj.

El potencial  $S' = \tilde{u}_3(\tilde{S})$  es  $e[fg] + d[cg] + g^*f^*[fg] + g^*c^*[cg]$ , luego el QP  $(A', S')$  no es reducido. Su parte reducida resulta  $(\bar{A}, 0)$  donde  $\bar{A}$  es el espacio de flechas del carcaj mostrado en la Figura 13.

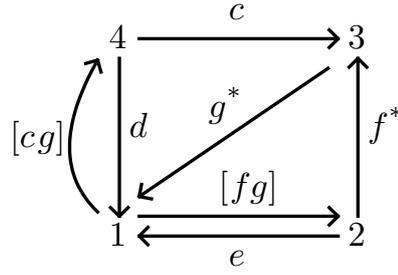


Figura 12: Premutación de  $\tilde{u}_2(Q)$  en la dirección 3

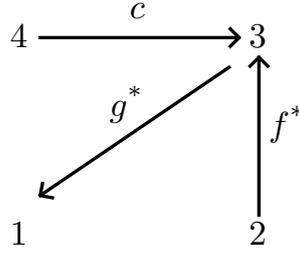


Figura 13: Carcaj con espacio de flechas  $\bar{A}$

**Proposición 1.14** ([23], Teorema 5.2). *La clase de equivalencia a derecha del QP  $(\tilde{A}, \tilde{S}) = \tilde{u}_k(A, S)$  está determinada por la clase de equivalencia a derecha de  $(A, S)$ .*

**Corolario 1.15** ([23], Corolario 5.4). *Sea un QP  $(A, S)$  y  $\tilde{u}_k(A, S) = (\tilde{A}, \tilde{S})$ . Si  $(\bar{A}, \bar{S})$  es un QP reducido tal que:*

$$(\tilde{A}, \tilde{S}) \cong (\tilde{A}_{triv}, \tilde{S}^{(2)}) \oplus (\bar{A}, \bar{S})$$

*Entonces la clase de equivalencia a derecha de  $(\bar{A}, \bar{S})$  está determinada por la clase de equivalencia a derecha de  $(A, S)$ .*

*Demostración.* Ver en [23]. □

La proposición 1.14 y el corolario 1.15 nos dicen que las premutaciones y mutaciones están bien definidas bajo equivalencia a derecha. Además, al igual que en la mutación usual, tenemos que la mutación es una involución.

**Proposición 1.16** ([23], Teorema 5.7). *Sea  $(A, S)$  un QP tal que  $A$  es el espacio de flechas de un carcaj  $Q$  (sin lazos ni 2-ciclos), entonces  $u_i^2(A, S)$  es equivalente a derecha a  $(A, S)$ .*

*Demostración.* Ver en [23]. □

# Capítulo 2

## Triangulaciones y potenciales

En este capítulo haremos un breve repaso sobre la teoría de superficies marcadas para luego asociar un carcaj con potencial a una triangulación de estas.

Nos centraremos en el caso de superficies marcadas sin pinchaduras. No abordaremos el caso en que la superficie las tenga. El lector puede consultar el capítulo 7 de [28] para una referencia más amplia sobre este tema.

### 2.1 Triangulaciones en superficies marcadas

**Definición 2.1** ([28], Definición 2.1). Una superficie marcada es un par  $(S, M)$  donde:

- a)  $S$  es una superficie de Riemann conexa con borde  $\partial S$  posiblemente vacío.
- b)  $M \subseteq S$  es un conjunto finito de puntos que se denominan **puntos marcados**. Este conjunto cumple la propiedad de que en cada componente conexa del borde existe por lo menos algún punto marcado.

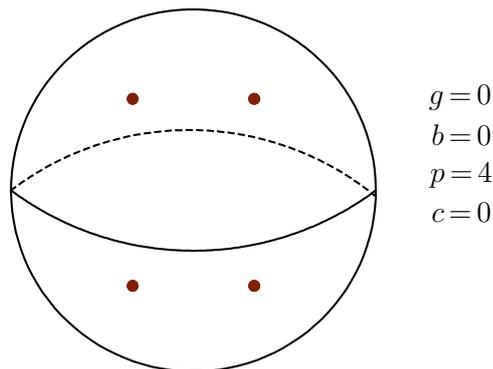
Usualmente denotaremos por  $S$  a una superficie marcada, obviando el conjunto de puntos marcados (salvo se diga lo contrario).

**Definición 2.2** ([28], Definición 2.1). Sea  $S$  una superficie marcada, a los puntos marcados que se encuentran en el interior de  $S$  se les denominan **pinchaduras**.

A partir de ahora  $p$  denotará el número de pinchaduras y  $c$  el número de puntos marcados que están en el borde de  $S$ .

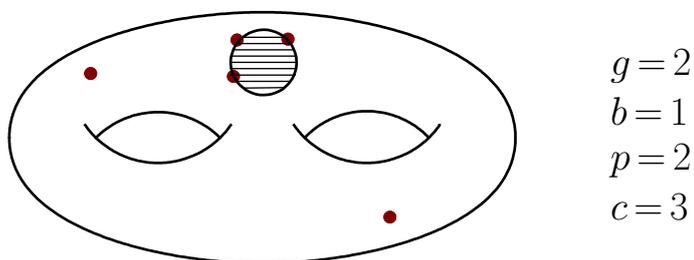
**Ejemplo 8.** La Figura 14 muestra una esfera con 4 puntos marcados. Nuestra superficie tiene género  $g = 0$ , el borde es vacío y no tiene componentes conexas (aquí  $b$  denota el número de componentes conexas del borde).

**Ejemplo 9.** La Figura 15 muestra un bitoro con un hueco y con 5 puntos marcados. Nuestra superficie tiene género  $g = 2$  y el borde tiene una componente conexa.



$$\begin{aligned} g &= 0 \\ b &= 0 \\ p &= 4 \\ c &= 0 \end{aligned}$$

Figura 14: Esfera con cuatro pinchaduras



$$\begin{aligned} g &= 2 \\ b &= 1 \\ p &= 2 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

Figura 15: Bitoro con un hueco

Nuestras triangulaciones tomarán como vértices a los puntos marcados de nuestra superficie. Por esta razón, por lo menos en el presente trabajo, solo trabajaremos con superficies con algún punto marcado. Además, queremos obviar el hecho que una superficie no pueda tener una triangulación o esta sea única. Por esta razón asumiremos que  $(S, M)$  no puede ser:

- Una esfera con  $p = 1, 2, 3$ .
- Un  $m$ -gon con  $p = 0, 1$  y  $m = 1$ .
- Un  $m$ -gon con  $p = 0$  y  $m = 2, 3$ .

**Definición 2.3** ([28], Definición 2.2). Sea  $(S, M)$  una superficie marcada, un arco  $\gamma$  en  $S$  es una curva (considerada bajo isotopía) que satisface las siguientes condiciones:

- a) Sus extremos son puntos marcados.
- b) No tiene autointersecciones, salvo posiblemente en sus extremos.
- c)  $\gamma$  es disjunto de  $M$  y  $\partial S$ , salvo posiblemente en sus extremos.
- d)  $\gamma$  no corta a un monogon ni un digon, ambos sin pinchaduras.

Las curvas que unen dos puntos marcados y caen íntegramente en el borde sin pasar por un tercer punto marcado, se denominan **segmentos de borde**. Por la condición d) este tipo de curvas no se consideran arcos de una superficie marcada pues cortan a un monogon o digon (el corte se debe a que forman parte del borde de estos). A una curva cuyos extremos coinciden se le denomina **lazo**.

**Ejemplo 10.** Consideremos el toro con un hueco y 5 puntos marcados como muestra la Figura 16. En este caso  $\gamma_1$  no es un arco, efectivamente es un segmento de borde (bajo isotopía). Por el contrario  $\gamma_2$  y  $\gamma_3$  si son arcos del toro.

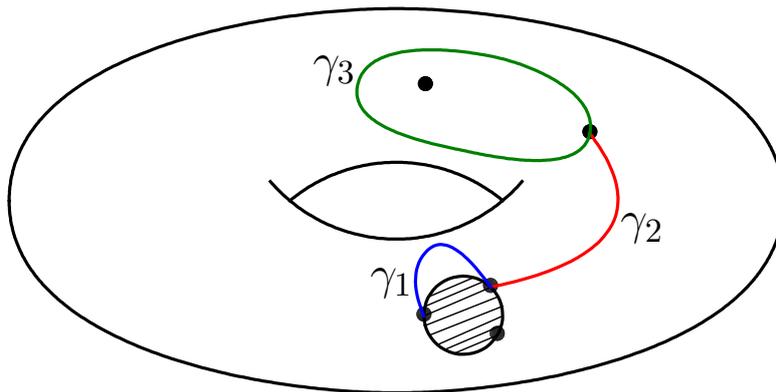


Figura 16: Curvas en el toro con un hueco

**Definición 2.4** ([28], Definición 2.4). Sean  $\gamma$  y  $\gamma'$  dos arcos en una superficie marcada  $S$ . El número de intersecciones de estos arcos, denotado por  $e(\gamma, \gamma')$ , se define como el número entero:

$$e(\gamma, \gamma') = \min\{\text{número de intersecciones de } \alpha, \alpha' \mid \alpha \simeq \gamma, \alpha' \simeq \gamma'\}$$

Dos arcos serán compatibles si  $e(\gamma, \gamma') = 0$ . Cabe decir que las intersecciones siempre se toman en el interior de la superficie.

**Definición 2.5** ([28], Definición 2.6). Dada  $(S, M)$  una superficie marcada, una triangulación ideal de  $S$  es una colección maximal de arcos compatibles dos a dos junto con los (posibles) segmentos del borde.

**Ejemplo 11.** La Figura 17 nos muestra una triangulación del anillo con 4 puntos marcados, de los cuáles uno es una pinchadura.

Las triangulaciones cortan a la superficie en triángulos, denominados **triángulos ideales**. Un triángulo ideal se denomina interior si es que las posibles intersecciones con el borde son puntos marcados. Un triángulo ideal interior que tiene solo dos arcos como lados se denomina triángulo auto-plegado, este tipo de triángulo consiste en un lazo y un arco que une una pinchadura.

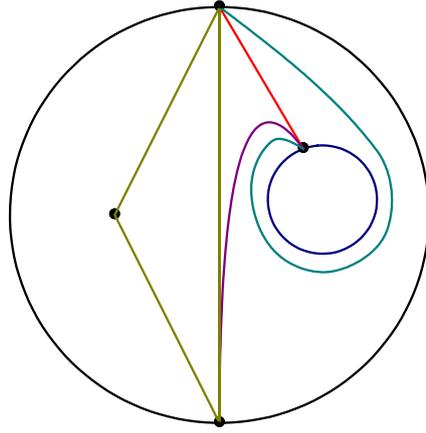


Figura 17: Triangulación en el anillo

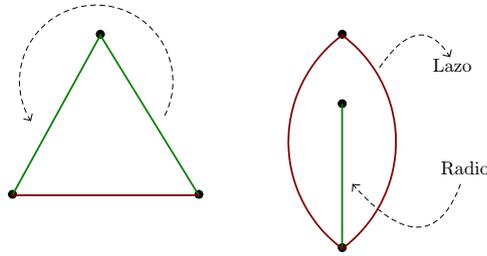


Figura 18: Triángulo auto-plegado

**Teorema 2.1** ([28], Proposición 2.10). *Sea  $(S, M)$  una superficie marcada y  $T$  una triangulación ideal. El número de arcos de  $T$  viene dado por:*

$$n = 6g + 3b + 3p + c - 6$$

El número  $n$  se le llama el rango de  $(S, M)$ .

*Demostración.* Ver en [28]. □

Ahora asociaremos un quiver a una triangulación de nuestra superficie. Sea  $T = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$  una triangulación en una superficie marcada de rango  $n$ , es decir tiene  $n$  arcos. Vamos a suponer que  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  son los arcos y los restantes los (posibles) segmentos de borde. Los vértices de nuestro quiver  $Q(T)$  van a estar en relación bi-unívoca con los arcos de  $T$  y denotaremos simplemente por  $i$  al vértice asociado a  $\gamma_i$ .

Las flechas en nuestro quiver  $Q(T)$  se definen como sigue. Para cualquier triángulo ideal  $\Delta$  en  $T$  que no sea auto-plegado, añadiremos una flecha  $i \rightarrow j$  siempre que se cumpla alguna de las siguientes condiciones:

- a)  $\gamma_i, \gamma_j$  son lados de  $\Delta$ , además  $\gamma_j$  sigue a  $\gamma_i$  en sentido horario.
- b)  $\gamma_j$  es el radio de algún triángulo auto-plegado con lazo  $\gamma_l$  y  $\gamma_i, \gamma_l$  son lados de  $\Delta$  tal que  $\gamma_l$  sigue a  $\gamma_i$  en sentido horario.

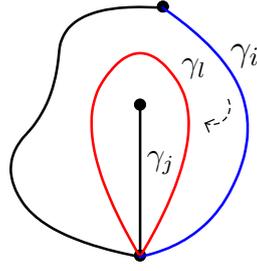


Figura 19: Caso b) en la definición de  $Q(T)$

- c)  $\gamma_i$  es el radio de algún triángulo autoplegado con lazo  $\gamma_l$  y  $\gamma_j$ ,  $\gamma_l$  son lados de  $\Delta$  tal que  $\gamma_j$  sigue a  $\gamma_l$  en sentido horario.

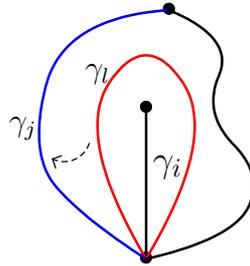


Figura 20: Caso c) en la definición de  $Q(T)$

- d)  $\gamma_i$  y  $\gamma_j$  son radios de triángulos autoplegados con lazos  $\gamma_{l_1}$  y  $\gamma_{l_2}$  tal que  $\gamma_{l_2}$  sigue a  $\gamma_{l_1}$  en sentido horario.

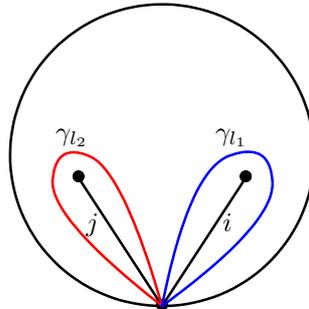


Figura 21: Caso d) en la definición de  $Q(T)$

**Definición 2.6.** Al quiver  $Q(T)$  construido se le denomina el carcaj de adyacencia asociado a la triangulación  $T$ . A la matriz de intercambio (no estamos considerando vértices congelados) se le denomina la matriz de adyacencia de  $T$  y se denota por  $B(T)$ .

**Observación.** En [9] se define la matriz de adyacencia sin el uso de carcajes; sin embargo, la definición que hemos dado coincide. Para ver esto, dada  $T$  una triangulación e  $i$  un arco, defina  $\pi_T(i) = r$  si es que  $i$  es el radio de un triángulo auto-plegado y  $r$  el lazo de este o  $\pi_T(i) = i$  caso contrario.

Dado  $\Delta$  un triángulo ideal no auto-plegado, definimos la matriz entera  $B_{ij}^\Delta$  por:

$$B_{ij}^\Delta = \begin{cases} 1; & \text{si } \Delta \text{ tiene como lados a } \pi_T(i), \pi_T(j) \text{ y} \\ & \pi_T(i) \text{ sigue a } \pi_T(j) \text{ en sentido horario} \\ -1; & \text{si } \Delta \text{ tiene como lados a } \pi_T(i), \pi_T(j) \text{ y} \\ & \pi_T(i) \text{ sigue a } \pi_T(j) \text{ en sentido antihorario} \\ 0; & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Luego la matriz de adyacencia es:

$$B(T) = \sum_{\Delta} B^\Delta$$

donde la suma se toma sobre todos los triángulos que no son auto-plegados. De la misma definición se nota que  $B(T)$  es antisimétrica.

**Definición 2.7** ([3], Definición 8). Sea  $T$  una triangulación de  $(S, M)$ . Si una pinchadura  $p$  es incidente a exactamente solo dos arcos  $i_1$  y  $i_2$ , añadimos en  $Q(T)$  las flechas  $i_1 \rightarrow i_2$  y  $i_2 \rightarrow i_1$ . El carcaj resultante se denota por  $\widehat{Q}(T)$  y se denomina el carcaj de adyacencia no reducido.

Note que en  $\widehat{Q}(T)$  tenemos un potencial  $S \in A^2$  formado por el 2-ciclo que añadimos. A continuación vemos algunos ejemplos de triangulaciones con sus respectivos carcajes.

**Ejemplo 12.** Consideremos la triangulación ideal  $T$  del monogon con dos pinchaduras mostrada en la Figura 22. Note que existe un triángulo auto-plegado por lo que debemos usar b) y c) para poder encontrar el carcaj asociado.

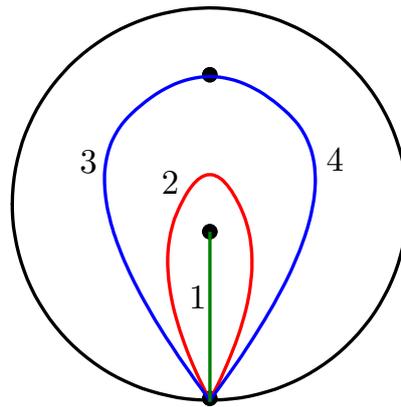


Figura 22: Triangulación del monogon

Hemos asignado una numeración a los arcos de  $T$ , con esta, el carcaj asociado  $Q(T)$  se muestra en la Figura 23 junto con su respectiva matriz de adyacencia.

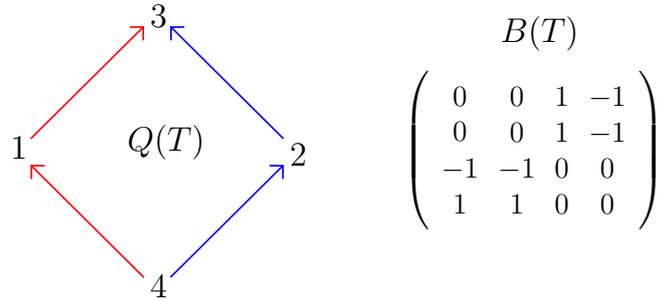


Figura 23: Carcaj y matriz de adyacencia

**Ejemplo 13.** Consideremos la triangulación ideal  $T$  del anillo con dos puntos marcados mostrada en la Figura 24. En este caso el carcaj asociado es el quiver de Kronecker.

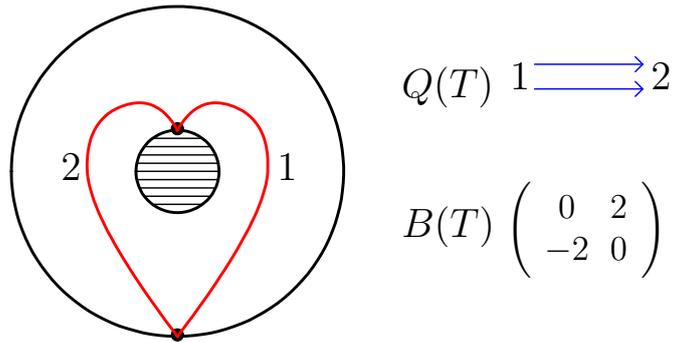


Figura 24: Carcaj y matriz de adyacencia

**Ejemplo 14.** En la Figura 25 se ve una triangulación de un cuadrado con una pinchadura, así como  $Q(T)$  y  $\widehat{Q}(T)$ .

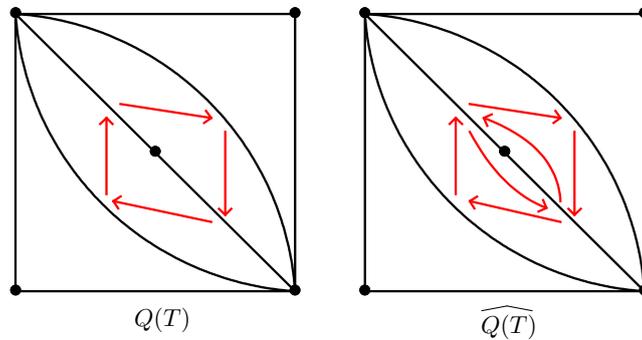


Figura 25: Carcaj de adyacencia reducido y no reducido

## 2.2 Potenciales en superficies

En esta sección definiremos un carcaj con potencial para una triangulación siguiendo el capítulo 3 de [3]. Consideremos una superficie marcada  $(S, M)$  y para cada pinchadura  $p \in P$  escogemos  $x_p \in K$  arbitrario. Vamos a fijar las elecciones  $(x_p)_{p \in P}$ .

**Definición 2.8** ([3], Definición 23). Sea  $T$  una triangulación ideal de  $(S, M)$ , asociaremos un potencial  $S(T) \in R\langle\langle A(T) \rangle\rangle$  donde  $A(T)$  es el espacio de flechas de  $Q(T)$ . Denotaremos por  $\widehat{A}(T)$  el espacio de flechas de  $\widehat{Q}(T)$ .

- Todo triángulo interior no autoplegado  $\Delta$  induce un triángulo orientado  $\widehat{S}^\Delta$  en  $\widehat{Q}(T)$  salvo equivalencia cíclica.
- Si el triángulo interior no autoplegado  $\Delta$  con lados  $j, k, l$  es adyacente a dos triángulos autoplegados como muestra la Figura 26 definimos (bajo equivalencia cíclica)  $\widehat{T}^\Delta = b_2 b_3 b_4 / x_p x_q$  donde  $p, q$  son las pinchaduras de los triángulos autoplegados. En cualquier otro caso ponemos  $\widehat{T}^\Delta = 0$ .

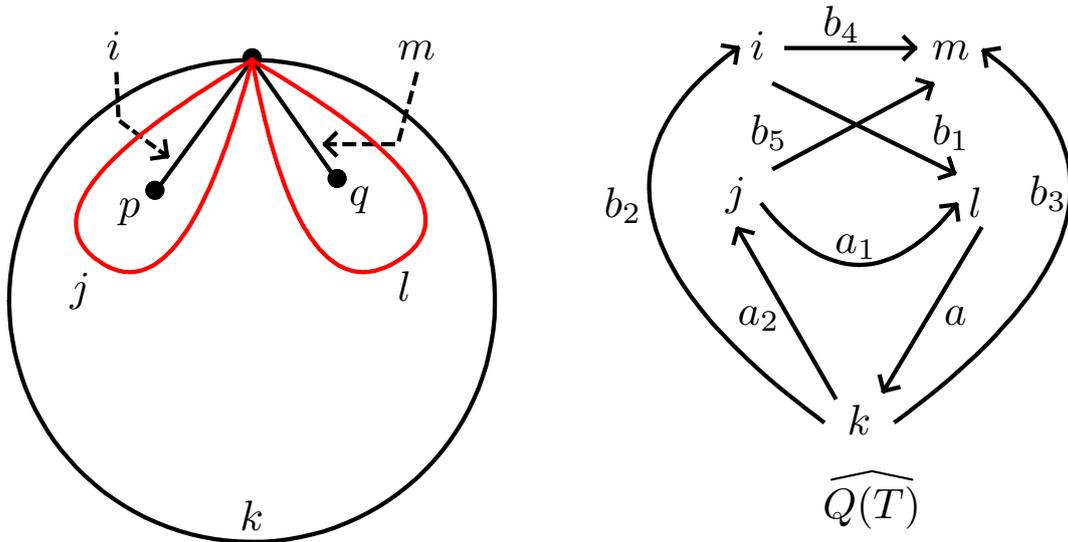


Figura 26: Triángulo ideal incidente a dos triángulos autoplegados

- Si una pinchadura  $p \in P$  es adyacente a exactamente un arco  $i$  de  $T$ , entonces  $i$  es radio de algún triángulo autoplegado y se tendría la configuración que se muestra en la Figura 27. Si  $k$  y  $l$  son arcos de  $T$  y no forman parte del borde de  $S$ , definimos (bajo equivalencia cíclica)  $\widehat{S}^p = -ab_1 b_2 / x_p$ .
- Si una pinchadura  $p \in P$  es adyacente a más de un arco de  $T$ , borramos todos los lazos adyacentes a  $p$  que son lazos de algún triángulo autoplegado. Las flechas entre los demás arcos adyacentes a  $p$  forman un único ciclo  $a_1^p \dots a_d^p$  que da una vuelta alrededor de  $p$  en sentido anti-horario. Definimos (bajo equivalencia cíclica)  $\widehat{S}^p = x_p a_1^p \dots a_d^p$ .

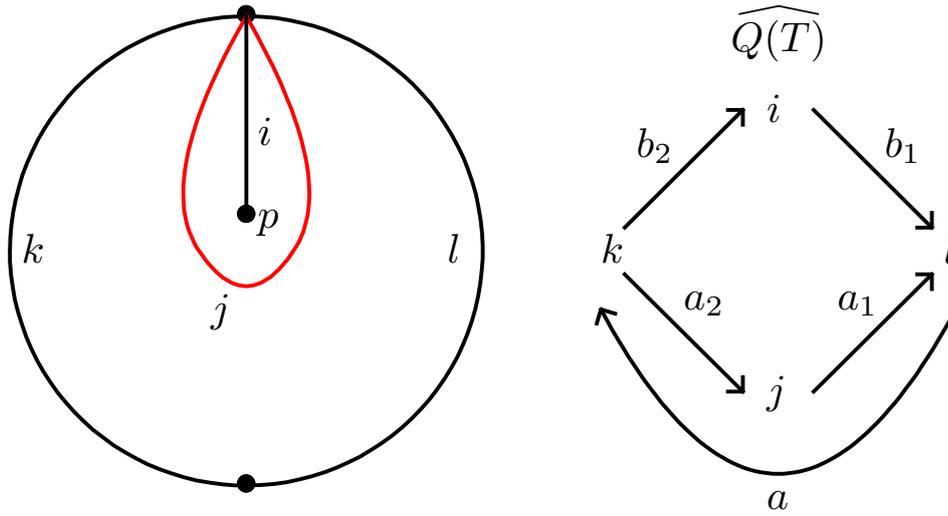


Figura 27: Pinchadura adyacente a exactamente un arco  $i$

**Definición 2.9** ([3], Pág. 13). El potencial no reducido  $\widehat{S}(T) \in R\langle\langle\widehat{A}(T)\rangle\rangle$  se define como:

$$\widehat{S}(T) = \sum_{\Delta} (\widehat{S}^{\Delta} + \widehat{T}^{\Delta}) + \sum_{p \in P} \widehat{S}^p$$

donde la primera suma se toma sobre todos los triángulos interiores no autoplegados.

**Definición 2.10** ([3], Pág. 13). Definimos el carcaj con potencial asociado a la triangulación  $T$ , denotado por  $(A(T), S(T))$ , como la parte reducida de  $(\widehat{A}(T), \widehat{S}(T))$ .

**Ejemplo 15.** Si la superficie no tiene pinchaduras, es decir todos los puntos marcados caen en el borde, entonces para cada triangulación  $T$  de  $(S, M)$  se tiene que  $(A(T), S(T)) = (\widehat{A}(T), \widehat{S}(T))$ , donde  $S(T)$  es suma de triángulos orientados de  $Q(T)$  provenientes de triángulos ideales interiores. En este caso resulta que el álgebra Jacobiana cumple:

$$J(Q, W) \cong \frac{R\langle A \rangle}{I(T)}$$

donde  $I(T)$  es el ideal generado por todos los 2-caminos determinados por los 3-ciclos de triángulos interiores de la triangulación.

**Ejemplo 16** ([3], Ejemplo 25). Si la triangulación ideal  $T$  de  $(S, M)$  no tiene triángulos autoplegados y cada pinchadura es incidente a al menos 3 arcos de  $T$ . En este caso  $(\widehat{A}(T), \widehat{S}(T)) = (A(T), S(T))$  donde:

$$S(T) = \sum_{\Delta} \widehat{S}^{\Delta} + \sum_{p \in P} x_p a_1^p \dots a_d^p$$

es la suma de los triángulos orientados de  $Q(T)$  provenientes de triángulos ideales interiores y múltiplos de ciclos alrededor de la pinchadura.

**Ejemplo 17.** Consideremos la triangulación ideal  $T$  del hexágono con dos pinchaduras como se muestra en la Figura 28.

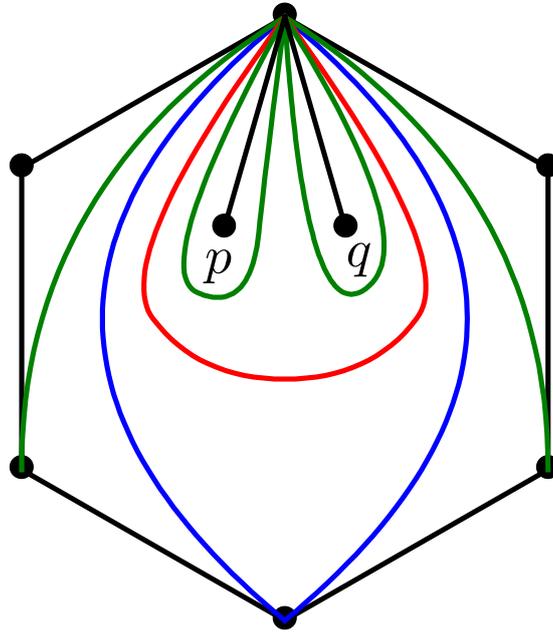


Figura 28: Triangulación de un hexágono con dos pinchaduras

El carcaj de adyacencia asociado se muestra en la Figura 29.

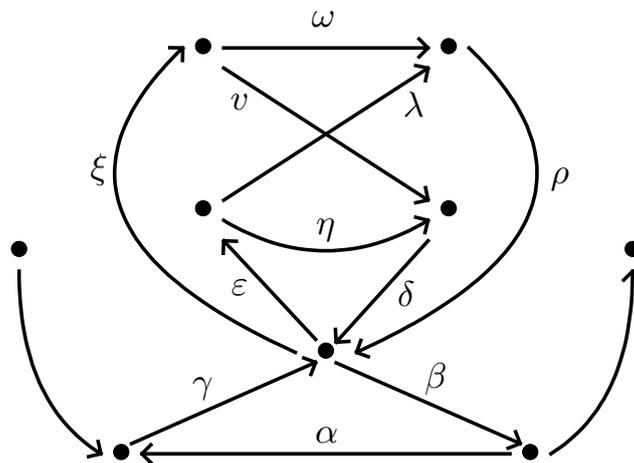


Figura 29: Carcaj de adyacencia

En este caso tenemos que  $\widehat{S}(T) = \alpha\beta\gamma + \delta\eta\varepsilon + (\rho\omega\xi/x_p x_q) - (\delta v\xi/x_p) - (\varepsilon\rho\lambda/x_q)$ . Así  $(\widehat{A}(T), \widehat{S}(T))$  es reducido, por lo que  $(A(T), S(T)) = (\widehat{A}(T), \widehat{S}(T))$ .

**Ejemplo 18.** Podemos realizar un flip a la triangulación anterior sobre uno de los lazos de los triángulos autoplegados, obteniendo la Figura 30.

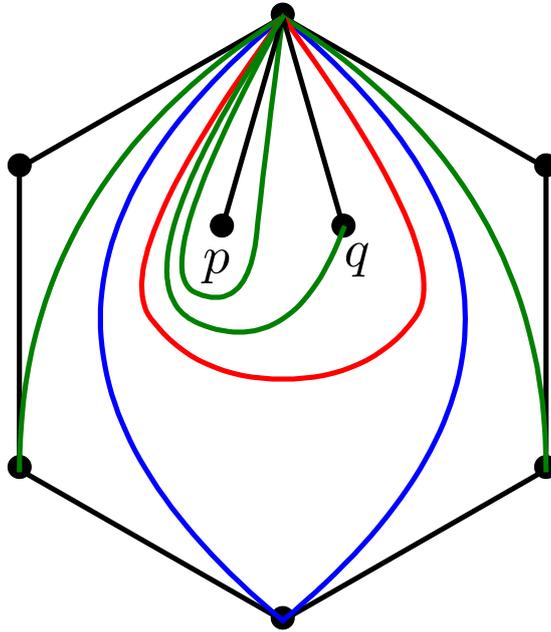


Figura 30: Triangulación del hexágono obtenida tras un flip

El carcaj de adyacencia asociado se muestra en la Figura 31 (note que en  $q$  hay exactamente dos arcos incidentes por lo que añadimos  $a$  y  $b$ ).

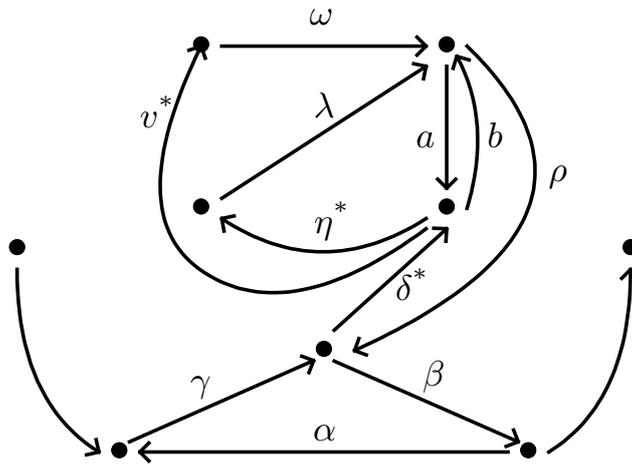


Figura 31: Carcaj de adyacencia

En este caso tenemos que  $\widehat{S}(T) = \alpha\beta\gamma + \delta^*\rho b + a\lambda\eta^* - (a\omega v^*/x_p) + x_q ab$ . En este caso  $(\widehat{Q}(T), \widehat{S}(T))$  no es reducido. Consideremos el isomorfismo de  $R$ -álgebras  $\varphi : R\langle\langle\widehat{A}(T)\rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle\widehat{A}(T)\rangle\rangle$  definido en las flechas por  $a \mapsto a - (\delta^*\rho/x_q)$ ,  $b \mapsto b - (\lambda\eta^*/x_q) + (\omega v^*/x_p x_q)$  y la identidad en el resto de las flechas.

Este resulta ser un equivalencia a derecha entre  $(\widehat{A}(T), \widehat{S}(T))$  y  $(\widehat{A}(T), x_q ab + \alpha\beta\gamma - (\delta^*\rho\lambda\eta^*/x_q) + (\delta^*\rho\omega v^*/x_p x_q))$ . Luego el QP asociado a  $T$ , salvo equivalencia a derecha, es  $(Q(T), S(T))$  donde  $S(T) = \alpha\beta\gamma - (\delta^*\rho\lambda\eta^*/x_q) + (\delta^*\rho\omega v^*/x_p x_q)$ .

**Teorema 2.2** ([3], Teorema 30). *Sea  $T$  y  $T'$  dos triangulaciones ideales de  $(S, M)$  tal que  $T' = u_i(T)$ . Entonces  $u_i(A(T), S(T))$  y  $(A(T'), S(T'))$  son QP equivalentes a derecha.*

Finalizamos este capítulo con un resultado sobre la dimensión del álgebra Jacobiano. Denotaremos al álgebra Jacobiana asociada a una triangulación  $T$  (más precisamente a su quiver asociado  $(Q(T), S(T)) = (Q(T), W(T))$ ) como  $J(Q, W)$ .

**Teorema 2.3** ([3], Teorema 36). *Sea  $(S, M)$  una superficie con borde no vacío. Para una triangulación  $T$  de  $(S, M)$  el álgebra Jacobiana  $J(Q, W)$  es de dimensión finita.*

*Demostración.* Supongamos que  $(S, M)$  no tenga pinchaduras y sea  $T$  una triangulación de  $(S, M)$ . Para cada punto marcado  $m$  tenemos una configuración local como muestra la Figura 32.

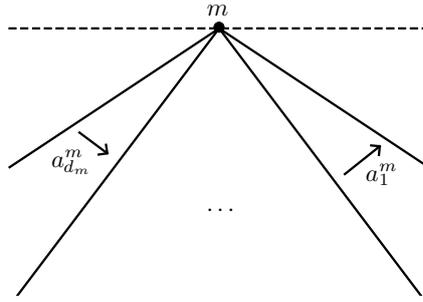


Figura 32: Configuración local alrededor de un punto marcado

Las flechas  $a_1^m, \dots, a_{d_m}^m$  están determinados únicamente por  $m$ . Sea:

$$N = \max\{d_m \mid m \in M\}$$

Luego, cada camino en  $Q(T)$  que tiene longitud mayor que  $N$  debe tener como factor a  $ab = \partial_c(S(T))$ , para algún triángulo orientado  $abc$  que aparece en  $S(T)$ .

Sea  $T_1$  la triangulación de  $(S, M \cup P_1)$  obtenida al agregar una pinchadura dentro de algún triángulo y añadir tres aristas conectando  $P_1$  con los vértices del triángulo. Tenemos que  $J(T) \subseteq J(T_1)$  y así todo camino en  $Q(T_1)$  de longitud mayor que  $N + 2$  está en  $J(T)$ . Esto prueba lo pedido para este caso.

Para ver la prueba en el caso de pinchaduras, el lector puede consultar [3]. □

# Capítulo 3

## Grafos serpientes

### 3.1 Definición y grafo de banda

En este capítulo introducimos el concepto de grafos serpiente. Asociaremos un grafo serpiente a las triangulaciones de superficies e interpretaremos la intersección de arcos en términos de estos. Principalmente seguiremos las referencias [9], [16], [17] y [18]. El lector interesado en el cálculo de grafos serpiente puede revisar [16] con más detalle.

**Definición 3.1** ([16], Página 2). Una tesela  $G$  es un cuadrado (de longitud fija) en el plano cuyos lados son paralelos a la base canónica.

Entenderemos una tesela  $G$  como un grafo de 4 vértices y cuatro aristas como se muestra en la Figura 33. En una tesela distinguiremos sus cuatro lados por los puntos cardinales: norte, sur, este y oeste.

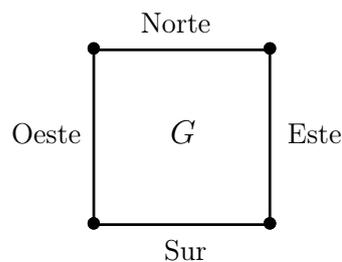


Figura 33: Tesela  $G$

**Definición 3.2** ([16], Página 2). Una grafo serpiente es un grafo plano conexo conformado por una secuencia de teselas  $G_1, \dots, G_d$  con  $d \geq 1$  satisfaciendo la siguiente condición:

- Las teselas  $G_i$  y  $G_{i+1}$  comparten una arista en común  $e_i$ , donde o bien  $e_i$  es el norte de  $G_i$  y el sur de  $G_{i+1}$  o bien  $e_i$  es el este de  $G_i$  y oeste de  $G_{i+1}$ .

**Ejemplo 19.** Por convención asumiremos que si  $d = 0$ , el grafo de serpiente será dos vértices unidos con una sola arista. En la Figura 34 se muestran grafos serpiente para  $d = 4, 9$ .

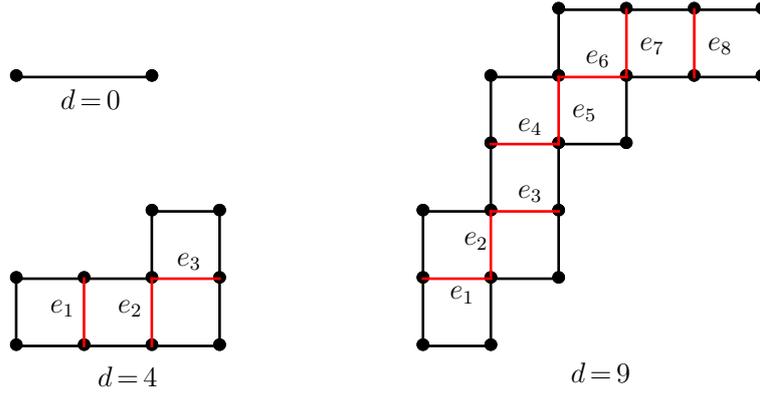


Figura 34: Ejemplos de grafos serpiente

Denotaremos un grafo serpiente por  $\mathcal{G} = (G_1, \dots, G_d)$  indicando las teselas que la definen. Note que estas no definen un único grafo, podemos pegarlas de distinta forma y obtener dos grafos no isomorfos.

**Definición 3.3** ([16], Página 2). Sea  $\mathcal{G} = (G_1, \dots, G_d)$  un grafo serpiente, entonces:

- Las aristas  $e_1, \dots, e_{d-1}$  se denominan aristas interiores y las restantes aristas de borde.
- El interior de  $\mathcal{G}$  se define como:  $\text{int}(\mathcal{G}) = \{e_1, \dots, e_{d-1}\}$ .
- El sur-oeste de  $\mathcal{G}$  se define como:  $_{SW}\mathcal{G} = \{\text{sur de } G_1, \text{oeste de } G_1\}$ .
- El nor-este de  $\mathcal{G}$  se define como:  $\mathcal{G}^{NE} = \{\text{norte de } G_d, \text{este de } G_d\}$ .

**Observación.** Si  $d = 0$  entonces los conjuntos  $_{SW}\mathcal{G}$  y  $\mathcal{G}^{NE}$  son vacíos. Un grafo serpiente se denomina **recto** si sus teselas se encuentran en una misma fila o columna y se denomina **zig-zag** si no hay tres teselas consecutivas rectas.

**Definición 3.4** ([16], Sección 2.1). Sea  $\mathcal{G} = (G_1, \dots, G_d)$  un grafo serpiente, una función signo en  $\mathcal{G}$  es una función  $\varphi : \{\text{aristas de } \mathcal{G}\} \rightarrow \{\pm\}$  que satisface:

- Para todo  $i$ , el norte y oeste de  $G_i$  tienen el mismo signo.
- Para todo  $i$ , el sur y este de  $G_i$  tienen el mismo signo.
- Para todo  $i$ , el norte y el sur de  $G_i$  tienen signos opuestos.

Si fijamos el signo de una arista, definimos toda la función signo haciendo cumplir cada una de las condiciones de la definición. Así solo existen dos funciones signo para un grafo serpiente.

**Ejemplo 20.** En la Figura 35 se muestran las dos funciones signos asociadas al grafo serpiente  $\mathcal{G}$  con 9 teselas.

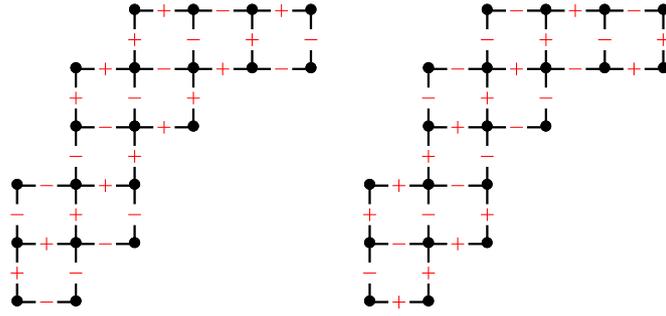


Figura 35: Funciones signo para un grafo serpiente

## 3.2 De triangulaciones a grafos serpiente

En esta sección trabajaremos con superficies sin pinchaduras, la principal razón es que queremos evitar los triángulos auto-plegados en nuestras triangulaciones ideales. Consideremos una triangulación ideal  $T$  de  $(S, M)$ , el objetivo de esta sección es asignar un grafo serpiente a  $T$ . Sea  $\gamma$  un arco en  $S$  que no está en  $T$ , fijemos una orientación en  $\gamma$ ,  $s \in M$  su punto inicial y  $t \in M$  su punto final. Denotaremos por:

$$s = p_0, p_1, p_2, \dots, p_{d+1} = t$$

a todos los puntos de intersección de  $\gamma$  con  $T$  (en orden con la orientación fijada). Para cada  $j \in \{1, \dots, d\}$  consideramos las siguientes notaciones:

- $\tau_{i_j}$  el arco de  $T$  que contiene a  $p_j$ .
- $\Delta_{j-1}, \Delta_j$  los dos triángulos ideales en  $T$  que están a cada lado de  $\tau_{i_j}$ .
- Con lo anterior tenemos que  $\tau_{i_j}$  y  $\tau_{i_{j+1}}$  son arcos de  $\Delta_j$ , denotamos por  $e_j$  al tercer arco de  $\Delta_j$ .

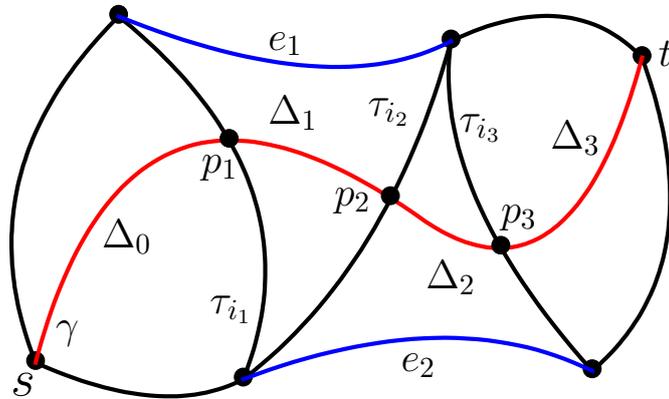


Figura 36: Arco  $\gamma$  cortando a una triangulación

Ahora, sea  $G_j$  el cuadrilátero en  $T$  que tiene a  $\tau_{i_j}$  como diagonal, vamos a pensar en este cuadrilátero como una tesela etiquetada por los arcos de  $S$ . Por ejemplo, en la Figura 36 tenemos  $G_1$  y  $G_2$  como muestra la Figura 37. Note que pueden haber dos formas de obtener la tesela respetando o no la orientación de nuestra superficie.

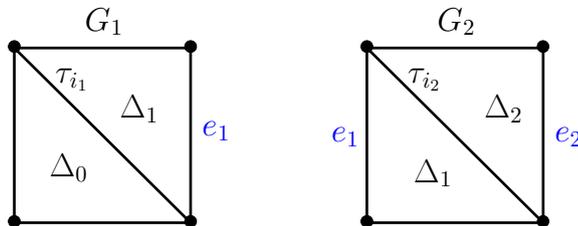


Figura 37: Teselas  $G_1$  y  $G_2$

**Definición 3.5** ([9], Definición 4.1). Diremos que la tesela  $G_i$  tiene orientación relativa  $+1$  si es que respeta la orientación de  $S$  y  $-1$  si no la respeta. Denotaremos a esta por  $\text{rel}(G_i, T)$ .

Para obtener el grafo serpiente seguiremos los siguientes pasos:

- Fijar una orientación relativa en la primera tesela  $G_1$ , o bien  $+1$  o bien  $-1$ .
- Para  $i > 1$  las teselas  $G_{i-1}$  y  $G_i$  cumplen que  $\text{rel}(G_{i-1}, T) \neq \text{rel}(G_i, T)$ . En otras palabras, alternamos las orientaciones.
- Pegar  $G_i$  y  $G_{i+1}$  a lo largo de  $e_i$ . Obtenemos un grafo  $\overline{G}_\gamma$ .
- Por último, eliminar todas las diagonales de cada tesela.

**Definición 3.6** ([9], Sección 4.2). Dado  $\gamma \notin T$ , el grafo serpiente que acabamos de construir lo denotaremos por  $G_{T,\gamma}$  o simplemente  $G_\gamma$  y lo denominaremos el grafo serpiente asociado a  $\gamma$ .

A este grafo serpiente podemos asignarle una función signo  $f$  como sigue:

- a)  $f(e_j) = +$  si  $e_j$  cae a la derecha de  $\gamma$  cuando pasa a travéz de  $\Delta_j$ .
- b)  $f(e_j) = -$  cualquier otro caso.

**Observación.** La orientación de la primera tesela siempre se considerará  $+1$  salvo se diga lo contrario. Cuando nos refiramos al grafo serpiente asociado a una arco, siempre consideraremos la función signo mencionada anteriormente.

**Ejemplo 21.** Consideremos el anillo con dos pinchaduras junto con la triangulación  $T$  mostrada en la Figura 38. Consideramos el arco  $\gamma \notin T$  con la orientación indicada, este intersecta a la triangulación en tres puntos  $p_1, p_2$  y  $p_3$ .

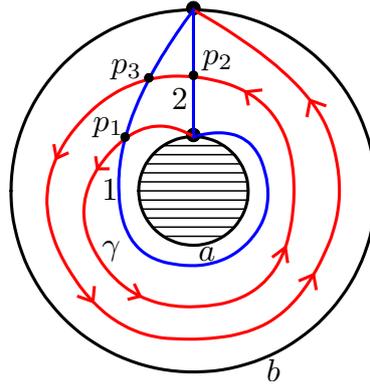


Figura 38: Anillo con dos pinchaduras

En este caso solo hay tres triángulos ideales, el grafo serpiente asociado a  $\gamma$  se muestra en la Figura 39 (parte de arriba). Si hubiéramos considerado la otra orientación en  $\gamma$  se hubiera obtenido el grafo serpiente de abajo.

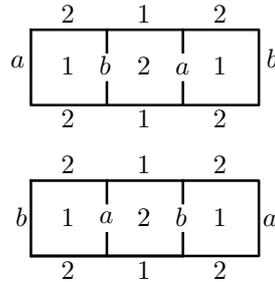


Figura 39: Grafo serpiente asociado al anillo

**Ejemplo 22.** Consideremos un hexágono con la triangulación formada por las diagonales 1, 2 y 3 como muestra la Figura 40. Consideramos la orientación de  $\gamma$  de izquierda a derecha, el grafo asociado se muestra en la Figura 41.

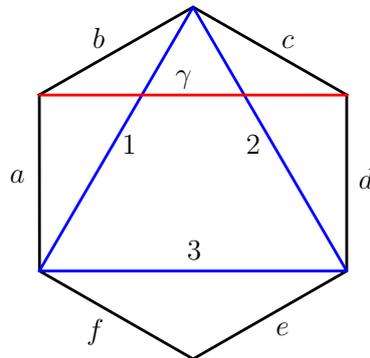


Figura 40: Hexágono (6-gon)



### 3.3 Superposición y cruces

La intersección de dos arcos se pueden interpretar en términos de sus grafos serpiente asociados. Para esto vamos a definir el concepto de superposición de dos grafos serpientes y también la noción de cuando dos grafos se cruzan.

Sea  $\mathcal{G} = (G_1, \dots, G_d)$  un grafo serpiente denotaremos por  $\mathcal{G}[i, i+t]$  al subgrafo de  $\mathcal{G}$  formado por las teselas  $G_i, \dots, G_{i+t}$  donde  $1 \leq i \leq d$  y  $0 \leq t \leq d-i$ . Similarmente para  $i \geq 2$  e  $i+t \leq d-1$  definimos  $\mathcal{G}(i, i+t)$  como  $\mathcal{G}[i, i+t] \setminus \{e_{i-1}, e_{i+t}\}$ .

**Definición 3.7** ([17], Página 4). Sea  $\mathcal{G} = (G_1, \dots, G_d)$  un grafo serpiente y  $e_i$  una arista interior. Definimos el grafo serpiente  $\mathcal{G} \setminus \text{pred}(e_i)$  como el grafo obtenido de  $\mathcal{G}$  removiendo los vértices y aristas que son predecesores de  $e_i$ , es decir:

$$\mathcal{G} \setminus \text{pred}(e_i) = \mathcal{G}[i+1, d]$$

Similarmente, si  $e \in \mathcal{G}^{\text{NE}}$  definimos  $\mathcal{G} \setminus \text{pred}(e) = \{e\}$ .

**Definición 3.8** ([17], Página 4). Sea  $\mathcal{G} = (G_1, \dots, G_d)$  un grafo serpiente y  $e_i$  una arista interior. Definimos el grafo serpiente  $\mathcal{G} \setminus \text{succ}(e_i)$  como el grafo obtenido de  $\mathcal{G}$  removiendo los vértices y aristas que son sucesores de  $e_i$ , es decir:

$$\mathcal{G} \setminus \text{succ}(e_i) = \mathcal{G}[1, i]$$

Similarmente, si  $e \in {}_{\text{SW}}\mathcal{G}$  definimos  $\mathcal{G} \setminus \text{succ}(e) = \{e\}$ .

**Ejemplo 24.** Consideremos el grafo  $\mathcal{G}$  como muestra la Figura 44. En este caso para  $e_2$  se define  $\mathcal{G} \setminus \text{pred}(e_2)$  y  $\mathcal{G} \setminus \text{succ}(e_2)$ .

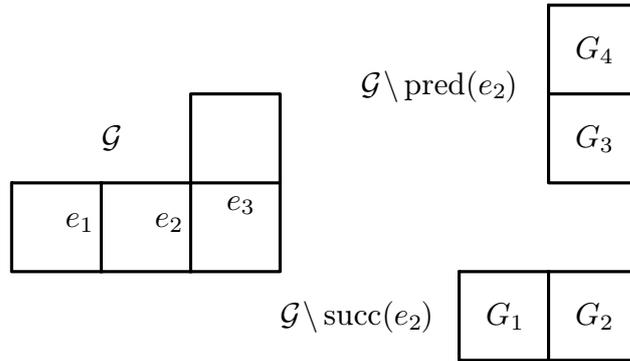


Figura 44: Grafos  $\mathcal{G} \setminus \text{pred}(e_2)$  y  $\mathcal{G} \setminus \text{succ}(e_2)$

Cuando tengamos dos grafos serpientes  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}$ , consideraremos que un encaje (embedding)  $i : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_1$  siempre cumple que  $i(\mathcal{G})$  es o bien  $\mathcal{G}$  o bien una rotación de  $180^\circ$  de  $\mathcal{G}$  o bien una reflexión respecto a  $y = x$  o  $y = -x$ . En particular siempre se mapeará el vértice sur-oeste de la primera tesela de  $\mathcal{G}$  al vértice sur-oeste de la primera tesela en  $i(\mathcal{G})$  o al nor-este de la última tesela en  $i(\mathcal{G})$

**Definición 3.9** ([17], Sección 2.5). Sean  $\mathcal{G}_1 = (G_1, G_2, \dots, G_d)$  y  $\mathcal{G}_2 = (G'_1, \dots, G'_{d'})$  dos grafos serpientes. Diremos que  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$  tiene una superposición  $\mathcal{G}$  si  $\mathcal{G}$  es un grafo serpiente con al menos una tesela y además existen dos encajes  $i_1 : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_1$  e  $i_2 : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_2$  que cumplen lo siguiente:

- a) Si  $\mathcal{G}$  tiene al menos dos teselas y existe  $\mathcal{G}'$  con encajes  $i'_1 : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}_1, i'_2 : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}_2$  tal que  $i_1(\mathcal{G}) \subseteq i'_1(\mathcal{G}')$  y  $i_2(\mathcal{G}) \subseteq i'_2(\mathcal{G}')$ , entonces  $i_1(\mathcal{G}) = i'_1(\mathcal{G}')$  y  $i_2(\mathcal{G}) = i'_2(\mathcal{G}')$ . Los encajes  $i_j, i'_j$  deben respetar el orden de las teselas ( $j = 1, 2$ ).
- b) Si  $\mathcal{G}$  tiene una tesela, ponemos  $G_k = i_1(\mathcal{G}), G'_{k'} = i_2(\mathcal{G})$ . Entonces:
  - a)  $k \in \{1, d\}$  o  $k' \in \{k', d'\}$  o
  - b)  $1 < k < d, 1 < k' < d'$  y  $(G_{k-1}, G_k, G_{k+1}), (G'_{k'-1}, G'_{k'}, G'_{k'+1})$  son ambos rectos o ambos zig-zag.

**Ejemplo 25.** En la Figura 45 se muestra dos grafos serpientes  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$  con una superposición  $\mathcal{G}$ . En este caso  $\mathcal{G}$  tiene 4 teselas.

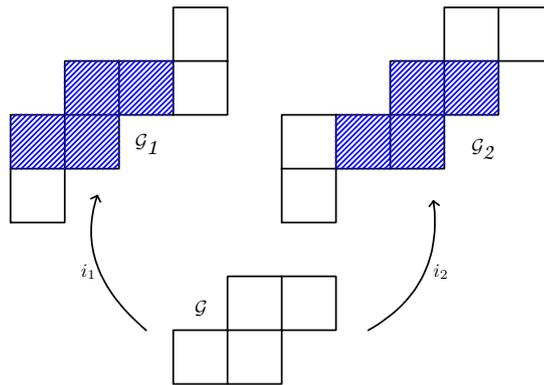


Figura 45: Superposición  $\mathcal{G}$  caso a)

**Ejemplo 26.** En la Figura 46 se muestra dos grafos serpientes  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$  con una superposición  $\mathcal{G}$ . En este caso  $\mathcal{G}$  tiene solo 1 tesela.

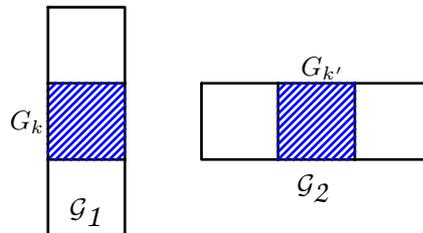


Figura 46: Superposición  $\mathcal{G}$  caso b)

Extendamos lo anterior para el caso de una superposición en el mismo grafo serpiente. Para esto consideremos  $\mathcal{G}_1$  un grafo serpiente y  $i_1 : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_1, i_2 : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_2$  dos encajes tales que  $i_1(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_1[s, t] \neq i_2(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_1[s', t']$  donde  $s < t$  y  $s' < t'$ . Asumiremos que  $i_1$  mapea el sur-oeste de la primera tesela de  $\mathcal{G}$  en el sur-oeste de  $G_s$  en  $\mathcal{G}[s, t]$ .

- Diremos que  $i_1, i_2$  están en la misma dirección si  $i_2$  mapea el sur-oeste de la primera tesela de  $\mathcal{G}$  al sur-oeste de  $G'_s$  en  $\mathcal{G}_1[s', t']$ .
- Diremos que  $i_1, i_2$  están en dirección opuesta si  $i_2$  mapea el sur-oeste de la primera tesela de  $\mathcal{G}$  al nor-este de  $G'_t$  en  $\mathcal{G}_1[s', t']$ .

**Definición 3.10** ([17], Página 7). Diremos que  $\mathcal{G}_1$  tiene una auto-superposición  $\mathcal{G}$  en la misma dirección, si  $\mathcal{G}$  es un grafo serpiente con una función signo  $f$  y además existen  $i_1 : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_1, i_2 : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_2$  encajes en la misma dirección tal que:

- $i_1(\mathcal{G}) \neq i_2(\mathcal{G})$ .
- Satisfacen a) y b) de la definición de superposición.
- Las 2 funciones signo inducidas por  $f$  son iguales.

**Definición 3.11** ([17], Página 8). Diremos que  $\mathcal{G}_1$  tiene una auto-superposición  $\mathcal{G}$  en la dirección opuesta, si  $\mathcal{G}$  es un grafo serpiente con una función signo  $f$  y además existen  $i_1 : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_1, i_2 : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_2$  encajes en la misma dirección tal que:

- $i_1(\mathcal{G}) \cap i_2(\mathcal{G}) = \emptyset$  y hay como mínimo una tesela entre ellos.
- Satisfacen a) y b) de la definición de superposición.
- Las 2 funciones signo inducidas por  $f$  son opuestas.

**Ejemplo 27.** En la Figura 47 se muestra una auto-superposición  $\mathcal{G}$  en la misma dirección. Note que las funciones signo coinciden.

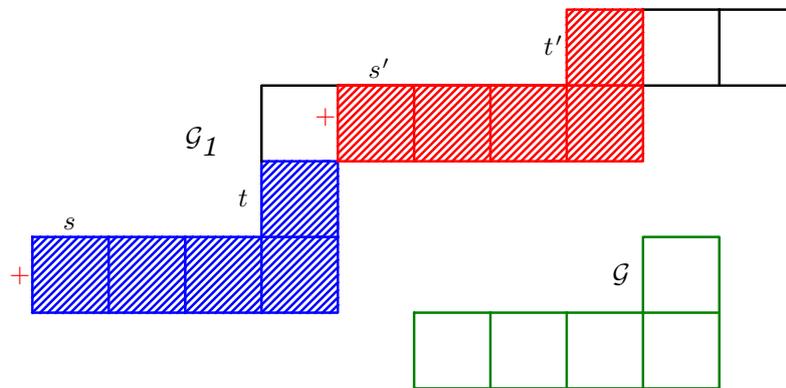


Figura 47: Auto-superposición  $\mathcal{G}$  en la misma dirección

**Ejemplo 28.** En la Figura 48 se muestra una auto-superposición  $\mathcal{G}$  en la dirección opuesta. Note que las funciones signo son opuestas.

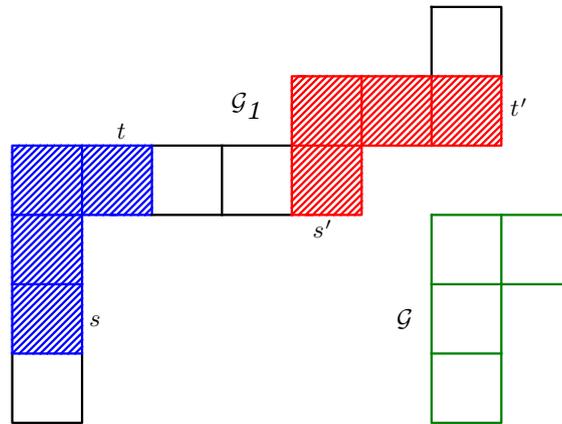


Figura 48: Auto-superposición  $\mathcal{G}$  en dirección opuesta

Diremos que una auto-superposición tiene intersección si es que  $i_1(\mathcal{G}) \cap i_2(\mathcal{G})$  contiene al menos una tesela.

**Ejemplo 29.** En la Figura 49 se muestra una auto-superposición  $\mathcal{G}$  en la misma dirección con intersección, en este caso tiene tres teselas.

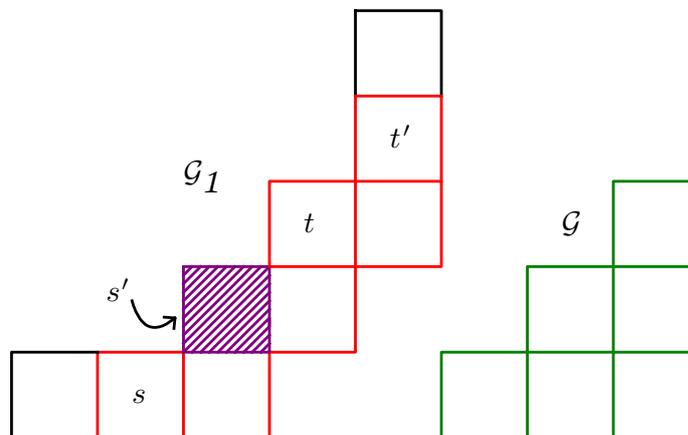


Figura 49: Auto-superposición  $\mathcal{G}$  con intersección

Sea  $\mathcal{G}_1 = (G_1, \dots, G_d), \mathcal{G}_2 = (G'_1, \dots, G'_d)$  con una superposición en  $\mathcal{G}$  con encajes  $i_1(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_1[s, t]$  y  $i_2(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_2[s', t']$ . Fijemos una función signo  $f$  en  $\mathcal{G}$ , esta induce dos funciones signo  $f_1$  y  $f_2$  en  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$  respectivamente. Por la maximalidad tenemos:

$$f_1(e_{s-1}) = -f_2(e'_{s'-1})$$

$$f_1(e_t) = -f_2(e'_t)$$

**Definición 3.12** ([16], Definición 2.4). Con las notaciones anteriores, diremos que los grafos serpientes  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$  se cruzan en  $\mathcal{G}$  si se cumple una o ambas de las siguientes condiciones:

- i) a)  $f_1(e_{s-1}) = -f_1(e_t)$ , si  $s > 1, t < d$  o bien
- b)  $f_2(e'_{s'-1}) = -f_2(e'_t)$  si  $s' > 1, t' < d'$
- ii) a)  $f_1(e_t) = f_2(e'_{s'-1})$ , si  $s = 1, t < d, s' > 1, t' = d'$  o bien
- b)  $f_1(e_{s-1}) = f_2(e'_t)$ , si  $s > 1, t = d, s' = 1, t' < d'$

La definición anterior no depende de la función signo, simplemente depende del mismo grafo serpiente. En la práctica podemos asignar  $+$  o  $-$  sin problemas a una de las aristas.

**Ejemplo 30.** Consideremos los dos grafos mostrados en la Figura 50, fijemos cualquier función signo, note entonces que:

$$f_1(e_{s-1}) = -f_1(e_t)$$

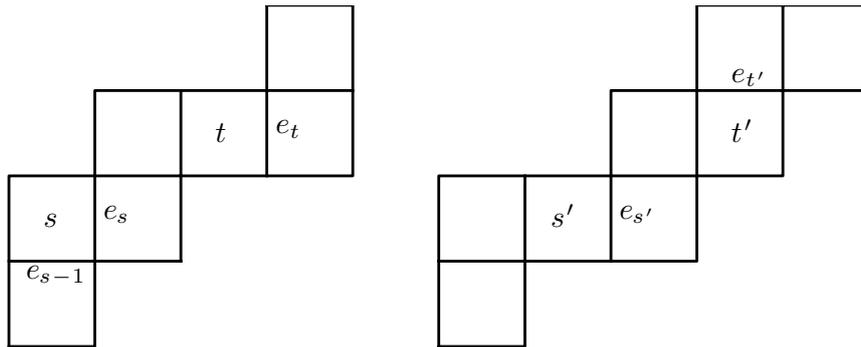


Figura 50: Cruce en  $\mathcal{G}$

Al igual que en el caso de una superposición, extendemos la definición de cruce al caso que se de en un mismo grafo. Sea  $\mathcal{G}_1 = (G_1, \dots, G_d)$  un grafo serpiente con auto-superposición en  $\mathcal{G}$  y encajes  $i_1(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_1[s, t], i_2(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_1[s', t']$  con  $s \leq s'$ . Fijamos una función signo  $f$  en  $\mathcal{G}_1$  arbitraria.

**Definición 3.13** ([16], Definición 2.6). Diremos que  $\mathcal{G}_1$  se auto-cruza en  $\mathcal{G}$  si se cumple las siguiente condiciones:

- i)  $f(e_{s-1}) = -f(e_t)$ , si  $s > 1$  o bien  $f(e'_{s'-1}) = -f(e'_t)$  si  $t' < d'$ .
- ii)  $f(e_t) = f(e_{s'-1})$

Al igual que en las auto-superposiciones, la definición anterior no depende de la función signo. Veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo 31.** Consideremos el grafo serpiente mostrado en la Figura 51. Las aristas  $e_{s'-1}$ ,  $e_{t'}$  y  $e_t$  se muestran también. Es inmediato verificar que:

$$f(e_{s'-1}) = -f(e_{t'})$$

$$f(e_t) = f(e_{s'-1})$$

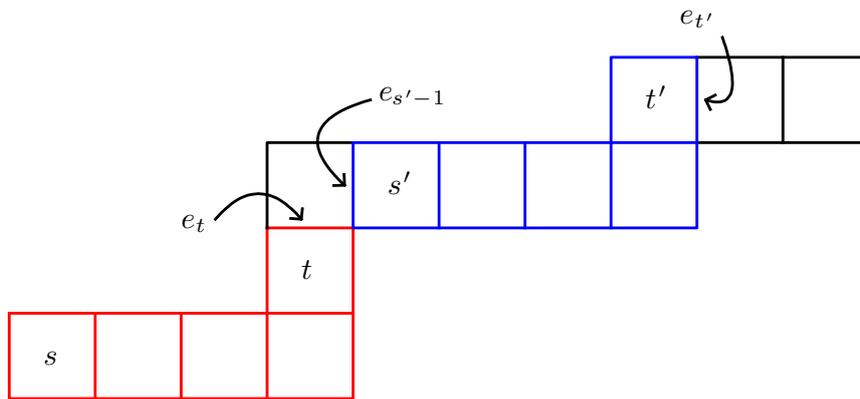


Figura 51: Auto-cruce en  $\mathcal{G}$

**Ejemplo 32.** Consideremos el grafo serpiente mostrado en la Figura 52. Las aristas  $e_{s'-1}$ ,  $e_{t'}$  y  $e_t$  se muestran también. Es inmediato verificar que:

$$f(e_{s'-1}) = -f(e_{t'})$$

$$f(e_t) = f(e_{s'-1})$$

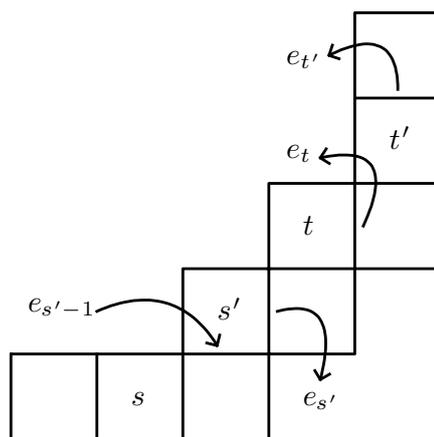


Figura 52: Auto-cruce en  $\mathcal{G}$

### 3.4 Resolución de cruce

En esta sección definiremos ciertos tipos de grafos serpientes para así poder encontrar correspondencias entra las intersecciones de arcos y nuestros grafos. Estos grafos serán elementos de un grupo abeliano libre, que nos permitirá operar grafos serpientes.

**Definición 3.14.** Definimos  $\mathcal{R}$  el grupo abeliano libre generado por todas las clases de isomorfismo de uniones disjuntas de grafos serpientes y de banda.

Recordar que  $\overline{\mathcal{G}}$  es el grafo opuesto de  $\mathcal{G}$ , que se obtiene al reflejar adecuadamente y así obtener la secuencia de teselas opuestas a la inicial.

Sean  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  dos grafos serpientes con superposición  $\mathcal{G}$ , que se cruzan en  $\mathcal{G}$  con encajes  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1[s, t] = \mathcal{G}_2[s', t']$ . Vamos a definir 2 grafos  $\mathcal{G}'_5$  y  $\mathcal{G}'_6$  como sigue:

- a)  $\mathcal{G}'_5 = \mathcal{G}_1[1, s-1] \cup \overline{\mathcal{G}}_2[s'-1, 1]$ .
- b)  $\mathcal{G}'_6 = \overline{\mathcal{G}}_2[d', t'+1] \cup \mathcal{G}_1[t+1, d]$ .

donde:

- a)  $\mathcal{G}'_5$  se pega como sigue:
  - Si  $G_s$  está al este de  $G_{s-1}$ , entonces se pega a lo largo del norte de  $G_{s-1}$  y del este de  $G'_{s'-1}$ .
  - Si  $G_s$  está al norte de  $G_{s-1}$ , entonces se pega a lo largo del este de  $G_{s-1}$  y norte de  $G'_{s'-1}$ .
- a)  $\mathcal{G}'_6$  se pega como sigue:
  - Si  $G_s$  está al este de  $G_{s-1}$ , entonces se pega a lo largo del norte de  $G_{s-1}$  y del este de  $G'_{s'-1}$ .
  - Si  $G_s$  está al norte de  $G_{s-1}$ , entonces se pega a lo largo del este de  $G_{s-1}$  y norte de  $G'_{s'-1}$ .

Fijamos  $f_5$  y  $f_6$  funciones signo en  $\mathcal{G}'_5$  y  $\mathcal{G}'_6$  respectivamente. Ahora, definimos los grafos  $\mathcal{G}_3, \mathcal{G}_4, \mathcal{G}_5$  y  $\mathcal{G}_6$  como sigue:

$$\mathcal{G}_3 = \mathcal{G}_1[1, t] \cup \mathcal{G}_2[t'+1, d']$$

donde los grafos se pegan a lo largo de  $e'_{t'} \in G_t^{\text{NE}} \cap_{\text{SW}} G'_{t'+1}$ ,

$$\mathcal{G}_4 = \mathcal{G}_2[1, t'] \cup \mathcal{G}_1[t+1, d]$$

donde los grafos se pegan a lo largo de  $e_t \in G'_t{}^{\text{NE}} \cap_{\text{SW}} G_{t+1}$ .

$$\mathcal{G}_5 = \begin{cases} \mathcal{G}'_5 & \text{si } s > 1, s' > 1 \\ \mathcal{G}'_5 \setminus \text{succ}(e) & \text{si } s' = 1 \\ \mathcal{G}'_5 \setminus \text{pred}(e) & \text{si } s = 1 \end{cases}$$

donde en el caso  $s' = 1$ ,  $e$  es la última arista en  $\text{int}(\mathcal{G}_5) \cup_{SW} \mathcal{G}'_5$  tal que  $f_5(e) = f_5(e_{s-1})$  y en el caso  $s = 1$ ,  $e$  es la primer arista en  $\text{int}(\mathcal{G}'_5) \cup \mathcal{G}_5^{NE}$  tal que  $f_5(e) = f_5(e'_{s'-1})$ ,

$$\mathcal{G}_6 = \begin{cases} \mathcal{G}'_6 & \text{si } t < d, t' < d' \\ \mathcal{G}'_6 \setminus \text{succ}(e) & \text{si } t = d \\ \mathcal{G}'_6 \setminus \text{pred}(e) & \text{si } t' = d' \end{cases}$$

donde en el caso  $t = d$ ,  $e$  es la última arista en  $\text{int}(\mathcal{G}'_6) \cup_{SW} \mathcal{G}'_6$  tal que  $f_6(e) = f_6(e'_t)$  y en el caso  $t' = d'$ ,  $e$  es la primer arista en  $\text{int}(\mathcal{G}'_6) \cup \mathcal{G}_6^{NE}$  tal que  $f_6(e) = f_6(e_t)$ .

**Definición 3.15** ([17], Definición 3.1). Con las notaciones anteriores, diremos que  $(\mathcal{G}_3 \cup \mathcal{G}_4) + (\mathcal{G}_5 \cup \mathcal{G}_6) \in R$  es la resolución de cruce de  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$  en la superposición  $\mathcal{G}$ . Lo denotaremos por  $\text{Res}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$  o simplemente  $\text{Res}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ .

**Ejemplo 33.** Consideremos los grafos mostrados en la Figura 53, estos tienen una superposición. Note además que  $s > 1, t < d, s' > 1, t' < d'$ .

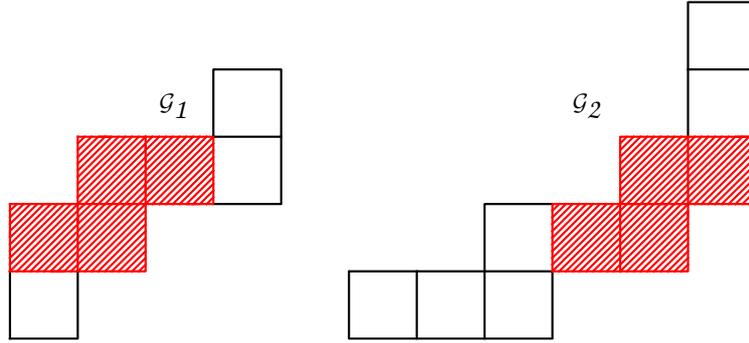


Figura 53: Grafos  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$

El grafo  $\mathcal{G}_3$  se obtiene pegando dos grafos como sigue:

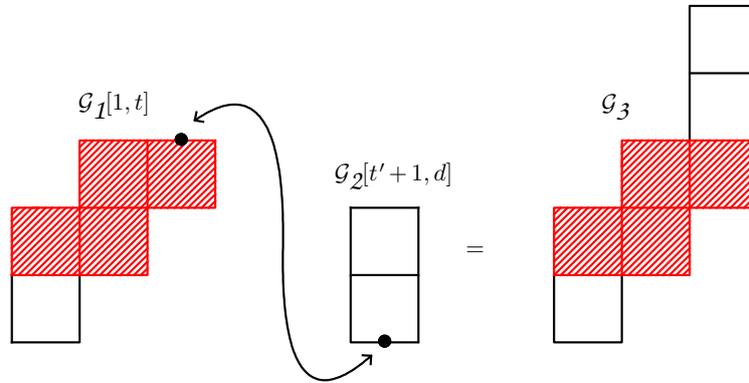


Figura 54: Grafo  $\mathcal{G}_3$

El grafo  $\mathcal{G}_4$  se obtiene pegando dos grafos como sigue:

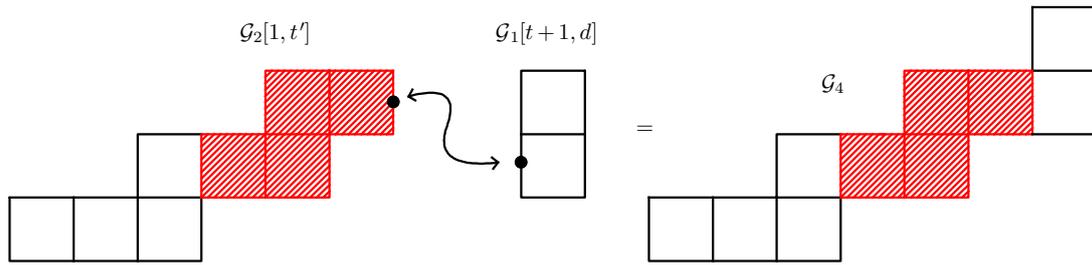


Figura 55: Grafo  $\mathcal{G}_4$

Los grafos  $\mathcal{G}'_5$  y  $\mathcal{G}'_6$  son:

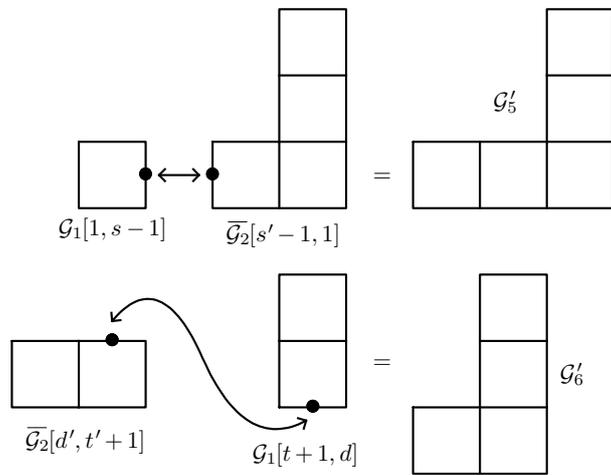


Figura 56: Grafos  $\mathcal{G}'_5$  y  $\mathcal{G}'_6$

Como  $s > 1, t < d, s' > 1, t' < d'$  entonces los grafos  $\mathcal{G}_5$  y  $\mathcal{G}_6$  coinciden.

**Ejemplo 34.** Consideremos los grafos mostrados en la Figura 57, estos tienen una superposición. Note que  $s = 1$  y  $t' = d$  por lo que  $\mathcal{G}_5$  y  $\mathcal{G}_6$  no coinciden con  $\mathcal{G}'_5$  y  $\mathcal{G}'_6$ .

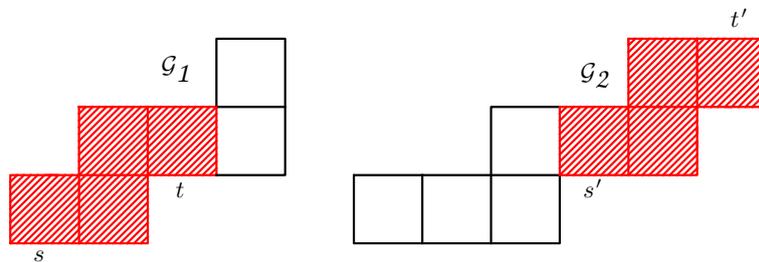


Figura 57: Grafos  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$

Los grafos  $\mathcal{G}_3$  y  $\mathcal{G}_4$  se muestran en la Figura 58:

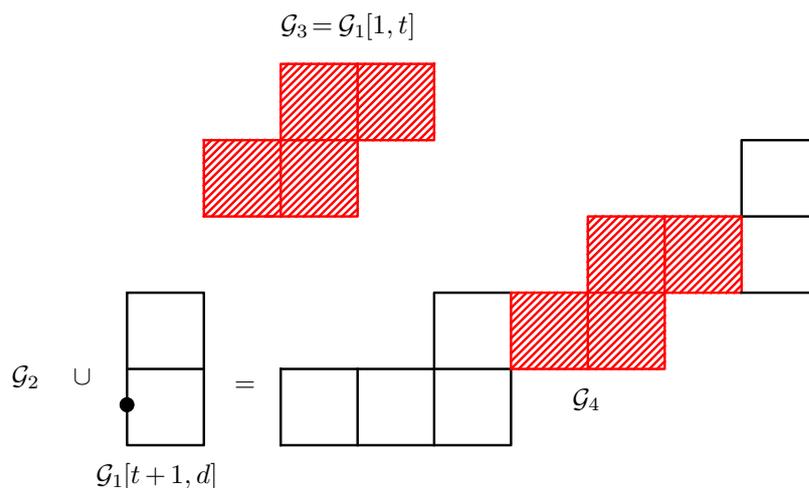


Figura 58: Grafos  $\mathcal{G}_3$  y  $\mathcal{G}_4$

Los grafos  $\mathcal{G}'_5, \mathcal{G}'_6$  se muestran en la Figura 59 y  $\mathcal{G}_5, \mathcal{G}_6$  en la Figura 60.

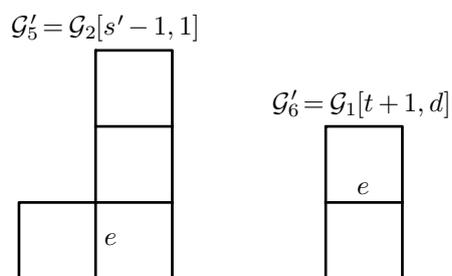


Figura 59: Grafos  $\mathcal{G}'_5$  y  $\mathcal{G}'_6$

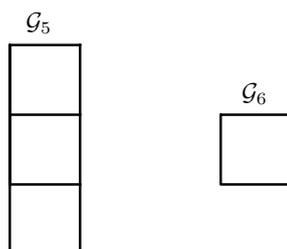


Figura 60: Grafos  $\mathcal{G}_5$  y  $\mathcal{G}_6$

**Ejemplo 35.** Consideremos los grafos mostrados en la Figura 61, estos tienen una superposición. Note que  $s = 1$  y  $t' = d$  por lo que  $\mathcal{G}_5$  y  $\mathcal{G}_6$  no coinciden con  $\mathcal{G}'_5$  y  $\mathcal{G}'_6$ .

Los grafos  $\mathcal{G}_3$  y  $\mathcal{G}_4$  se muestran en la Figura 62 y los grafos  $\mathcal{G}_5$  y  $\mathcal{G}_6$  en la Figura 63

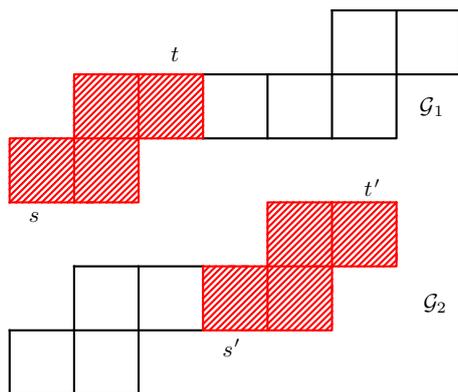


Figura 61: Grafos  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$ .

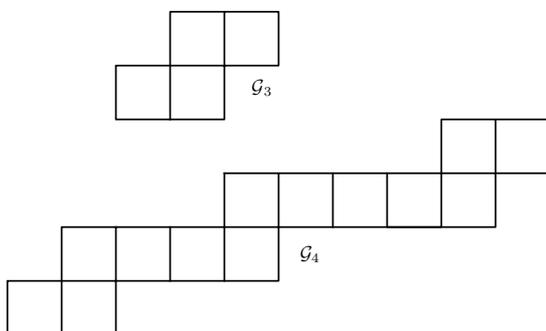


Figura 62: Grafos  $\mathcal{G}_3$  y  $\mathcal{G}_4$ .

### 3.5 Grafting

En esta sección definiremos otra operación que asigna dos pares de grafos serpientes a dos grafos. Esta operación no involucra las superposiciones estudiadas anteriormente y servirán más adelante en la prueba de algunos teoremas.

Sea  $\mathcal{G}_1 = (G_1, \dots, G_d)$ ,  $\mathcal{G}_2 = (G'_1, \dots, G'_{d'})$  dos grafos serpiente y  $f_1$  una función signo en  $\mathcal{G}_1$ . Sea  $1 \leq s \leq d$  tal que  $G_s \neq G'_1$ . Tenemos dos casos:

- Si  $s \neq d$ .
  - Si  $G_{s+1}$  está al norte de  $G_s$ , denotaremos por  $\delta_3$  la arista este de  $G_s$ , por  $\delta_5$  la arista oeste de  $G_{s+1}$ , por  $\delta'_3$  la arista oeste de  $G'_1$  y por  $\delta'_5$  la arista sur de  $G'_1$ .
  - Si  $G_{s+1}$  está al este de  $G_s$ , denotaremos por  $\delta_3$  la arista norte de  $G_s$ , por  $\delta_5$  la arista sur de  $G_{s+1}$ , por  $\delta'_3$  la arista sur de  $G'_1$  y por  $\delta'_5$  la arista oeste de  $G'_1$ .

Las notaciones anteriores se pueden observar en la Figura 64

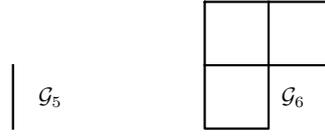


Figura 63: Grafos  $\mathcal{G}_5$  y  $\mathcal{G}_6$ .

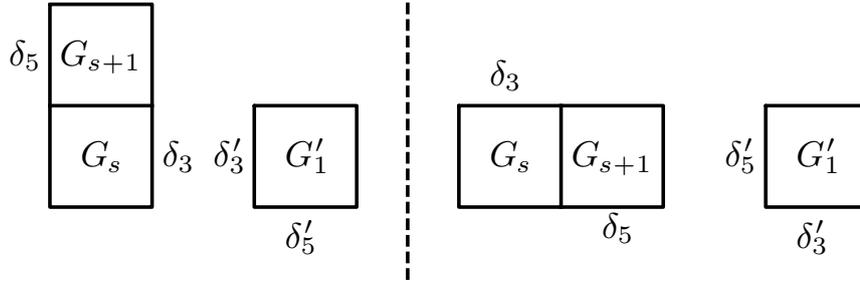


Figura 64: Posibles casos para Grafting

Definiremos cuatro grafos serpientes:

- $\mathcal{G}_3 = \mathcal{G}_1[1, s] \cup \mathcal{G}_2$ , donde los subgrafos se pegan a lo largo de  $\delta_3$  y  $\delta'_3$ .
  - $\mathcal{G}_4 = \mathcal{G}_1 \setminus \text{pred}(e)$ , donde  $e \in \text{Int}(\mathcal{G}_1[s+1, d]) \cup \mathcal{G}_1^{NE}$  es la primera arista tal que  $f_1(e) = f_1(\delta_3)$ .
  - $\mathcal{G}_5 = \mathcal{G}_1 \setminus \text{succ}(e)$ , donde  $e \in \text{Int}(\mathcal{G}_1[1, s]) \cup {}_{SW}\mathcal{G}_1$  es la última arista tal que  $f_1(e) = f_1(\delta_3)$ .
  - $\mathcal{G}_6 = \overline{\mathcal{G}_2}[d', 1] \cup \mathcal{G}_1[s+1, d]$ , donde los subgrafos se pegan a lo largo de las aristas  $\delta_5$  y  $\delta'_5$ .
- Si  $s = d$ . Escogemos un par de aristas  $(\delta_3, \delta'_3)$  tal que  $\delta_3$  sea la arista norte en  $G_s$  y  $\delta'_3$  la arista sur en  $G'_1$  o  $\delta_3$  la arista este de  $G_s$  y  $\delta'_3$  la arista oeste de  $G'_1$ . Sea  $f_2$  una función signo en  $\mathcal{G}_2$  tal que  $f_2(\delta'_3) = f_1(\delta_3)$ , definimos cuatro grafos serpientes como sigue:
    - $\mathcal{G}_3 = \mathcal{G}_1[1, s] \cup \mathcal{G}_2$ , donde los dos grafos serpientes se pegan a lo largo de las aristas  $\delta_3$  y  $\delta'_3$ .
    - $\mathcal{G}_4 = \{\delta_3\}$ .
    - $\mathcal{G}_5 = \mathcal{G}_1 \setminus \text{succ}(e)$ , donde  $e \in {}_{SW}\mathcal{G}_1 \cup \text{Int}(\mathcal{G}_1[1, 2])$  es la última arista tal que  $f_1(e) = f_1(\delta_3)$ .
    - $\mathcal{G}_6 = \mathcal{G}_2 \setminus \text{pred}(e)$ , donde  $e \in \text{Int}(\mathcal{G}_2) \cup \mathcal{G}_2^{NE}$  es la primera arista tal que  $f_2(e) = f_2(\delta'_3)$ .

**Definición 3.16** ([17], Definición 3.6). Con las notaciones anteriores, diremos que el elemento  $(\mathcal{G}_3 \cup \mathcal{G}_4) + (\mathcal{G}_5 \cup \mathcal{G}_6) \in \mathcal{R}$  es la resolución del grafting de  $\mathcal{G}_2$  en  $\mathcal{G}_1$  y lo denotaremos por  $\text{Graft}_{s, \delta_3}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ .

**Ejemplo 36.** Consideremos los grafos serpientes  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$  mostrados en la Figura 65. Siguiendo los pasos establecidos, se muestran también las aristas  $\delta_3, \delta_5, \delta'_3$  y  $\delta'_5$ .

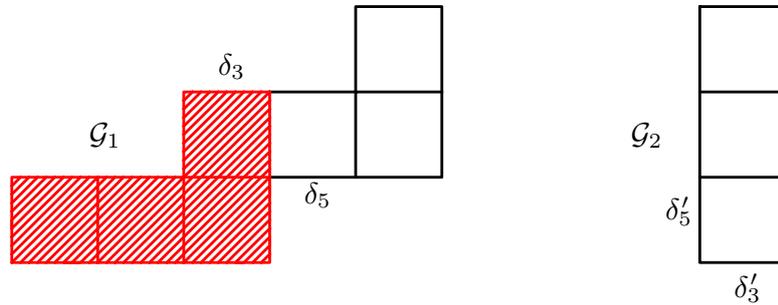


Figura 65: Grafos  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$

En la Figura 66 se muestran cada uno de los cuatro grafos que constituyen la resolución del grafting.

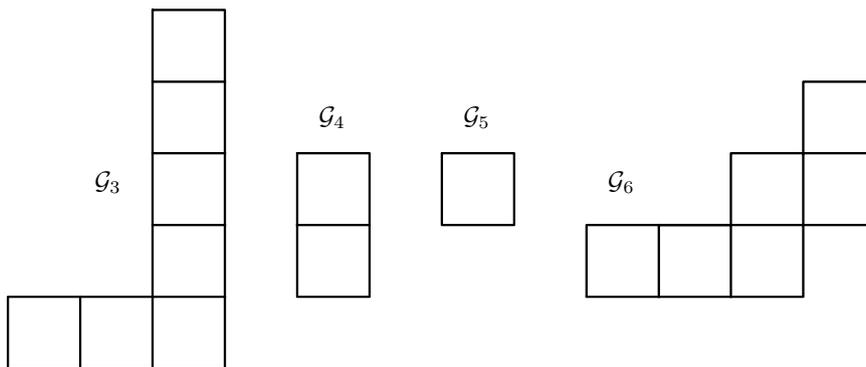


Figura 66: Grafting

### 3.6 Intersectando arcos

Las nociones definidas anteriormente tienen una razón en su complicada definición. En nuestra superficie intersectar dos arcos va a tener una noción dual con la de superponer grafos serpientes. Uno de los principales usos de la teoría que estamos desarrollando es para poder evitar la homotopía dentro de nuestra superficie, suavizar arcos puede terminar siendo un trabajo complicado, por lo que los grafos serpientes nos dan una mano en ese aspecto.

Consideremos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  dos arcos que no están en una triangulación  $T$  y que se intersectan en  $p \in S \setminus \partial S$ .

Fijemos una orientación en  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  y denotaremos por  $p_0, p_1, \dots, p_{d+1}$  (respectivamente  $p'_1, p'_2, \dots, p'_{d'+1}$ ) a los puntos de intersección de  $\gamma_1$  (respectivamente  $\gamma_2$ ) con  $T$  teniendo en cuenta sus puntos de inicio y final.

Denotaremos por  $\tau_{i_j}$  al arco de  $T$  que contiene a  $p_j$  y a  $\Delta_j$  el triángulo que contiene a  $\tau_{i_j}$  y  $\tau_{i_{j+1}}$ . Al tercer lado de  $\Delta_j$  lo denotaremos por  $e_j$  o  $\tau_{[j]}$ . Análogamente,  $\tau'_{i_{j'}}$  es el arco de  $T$  que contiene a  $p'_{j'}$  y  $\Delta'_{j'}$  el triángulo que contiene a  $\tau'_{i_{j'}}$  y  $\tau'_{i_{j'+1}}$ . Al tercer lado de  $\Delta'_{j'}$  lo denotaremos por  $e'_{j'}$  o  $\tau'_{[j']}$ .

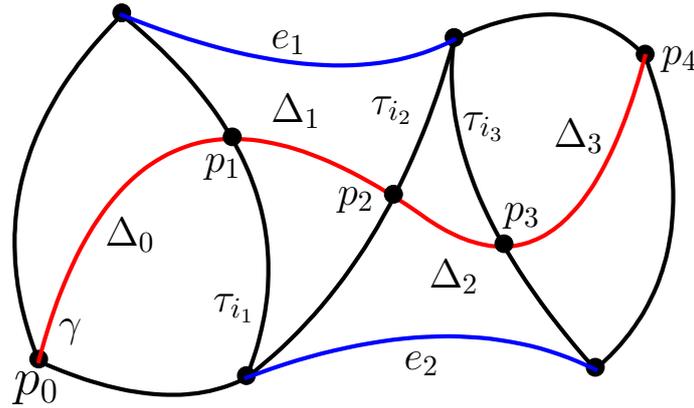


Figura 67: Curva  $\gamma_1$

Podemos asumir que  $p$  está en el interior de algún triángulo de  $T$ , este triángulo resulta ser  $\Delta_j$  para algún  $j$  y  $\Delta'_{j'}$  para algún  $j'$ . Tenemos algunos casos:

- Si  $\Delta_j$  es el primer o el último triángulo, podemos suponer que  $\Delta_j = \Delta_1$ . Análogamente si  $\Delta'_{j'}$  es el primer o el último triángulo, podemos suponer que  $\Delta'_{j'} = \Delta'_1$ .
- En otro caso, habrá por lo menos un lado de  $\Delta_j$  que es cortado por  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , en otras palabras se puede tener que  $\tau_{i_j} = \tau'_{i_{j'}}$  o  $\tau_{i_j} = \tau'_{i_{j'+1}}$  o  $\tau_{i_{j+1}} = \tau'_{i_{j'}}$  o  $\tau_{i_{j+1}} = \tau'_{i_{j'+1}}$ . Podemos asumir, intercambiando la orientación si fuera necesario, que:

$$\tau_{i_j} = \tau'_{i_{j'}} \circ \tau_{i_{j+1}} = \tau'_{i_{j'+1}}$$

Los casos expuestos anteriormente se muestran en las Figuras 68 y 69.

**Definición 3.17.** Si se cumple las condiciones de la Figura 68 diremos que los arcos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  se cruzan en  $p$  con una superposición no vacía. En el caso que se cumplan las condiciones de la Figura 69, diremos que los arcos se cruzan en  $p$  con una superposición vacía.

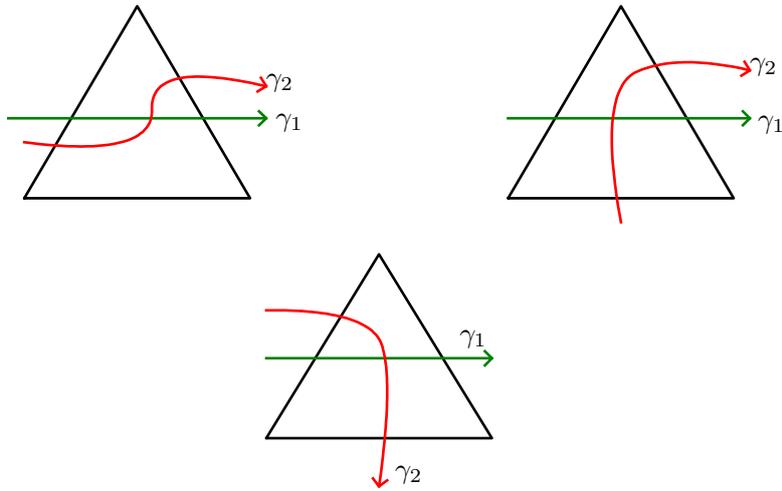


Figura 68: Cruce con superposición

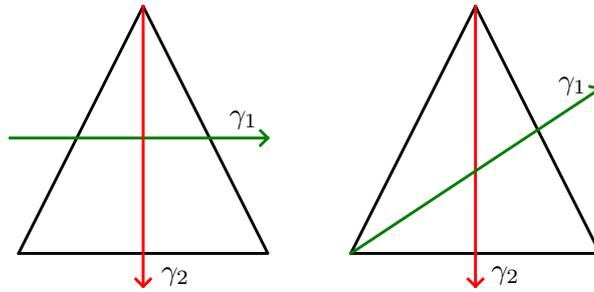


Figura 69: Cruce sin superposición

Ahora, si recordamos la noción de superposición en grafos serpiente, estaba presente una cierta maximalidad en el sentido de no poder agregar a la izquierda o derecha nuevas teselas. Esta noción de maximalidad la vamos a trasladar a las curvas.

Supongamos que los arcos se cruzan en  $p$  con una superposición no vacía. Ponemos:

$$s = \begin{cases} j + 1 & \text{si } \tau_{i_j} \neq \tau'_{i'_{j'}} \\ j - k & \text{si } \tau_{i_j} = \tau'_{i'_{j'}} \end{cases}$$

donde  $k$  es el mayor entero tal que  $\tau_{i_{j-1}} = \tau'_{i'_{j-1}}$ ,  $\dots$ ,  $\tau_{i_{j-k}} = \tau'_{i'_{j-k}}$ . Ponemos también:

$$t = \begin{cases} j & \text{si } \tau_{i_{j+1}} \neq \tau'_{i'_{j+1}} \\ j + l & \text{si } \tau_{i_{j+1}} = \tau'_{i'_{j+1}} \end{cases}$$

donde  $l$  es el mayor entero tal que  $\tau_{i_{j+1}} = \tau'_{i'_{j+1}}$ ,  $\dots$ ,  $\tau_{i_{j+l}} = \tau'_{i'_{j+l}}$ .

**Definición 3.18.** A la secuencia  $(\tau_{i_s}, \dots, \tau_{i_t}) = (\tau'_{i'_s}, \dots, \tau'_{i'_t})$  la denominaremos la superposición local de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  en  $p$ .

**Observación.** Las definiciones anteriores se pueden aplicar para el caso de un solo arco  $\gamma$ , para esto se consideran dos copias de  $\gamma$ .

La noción de superposición de arcos esta estrechamente ligada a la cruce y auto-cruce en grafos serpientes. El siguiente teorema nos da muestra de dicha relación.

**Teorema 3.1** ([17], Teorema 6.1). *Sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  arcos generalizados y  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  los correspondientes grafos serpientes asociados. Entonces:*

- a)  $\gamma_1, \gamma_2$  se cruzan con una superposición local no vacía  $(\tau_{i_s}, \dots, \tau_{i_t}) = (\tau'_{i'_s}, \dots, \tau'_{i'_t})$  si y solo si  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  se cruzan en  $\mathcal{G}_1[s, t] \cong \mathcal{G}_2[s', t']$ .
- b)  $\gamma$  se auto-cruza con una superposición local no vacía  $(\tau_{i_s}, \dots, \tau_{i_t}) = (\tau'_{i'_s}, \dots, \tau'_{i'_t})$  si y solo si  $\mathcal{G}_\gamma$  tiene un autocruce en  $\mathcal{G}_\gamma[s, t] \cong \mathcal{G}_\gamma[s', t']$ .

*Demostración.* Ver en [17]. □

La relación que existe entre las resoluciones y la intersección de arcos viene dada por los siguientes teoremas. Suavizar dos arcos que se intersectan tendrá su análogo en los grafos serpientes asociados: la resolución.

**Teorema 3.2** ([17], Teorema 6.2). *Sean  $\gamma_1, \gamma_2$  dos arcos generalizados que se cruzan con una superposición local no vacía y  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  los grafos serpientes asociados (con superposición en  $\mathcal{G}$ ). Entonces los grafos serpientes de los cuatro arcos obtenidos al suavizar los arcos se obtienen por la resolución de cruce  $\text{Res}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$  de los grafos serpiente  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$  en la superposición  $\mathcal{G}$ .*

*Demostración.* Ver en [17]. □

Similarmente tenemos un resultado análogo para el caso de Grafting, en este caso consideraremos un auto-cruce particular que no se corresponde con un cruce con superposición.

**Teorema 3.3** ([17], Teorema 6.4). *Sea  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  dos arcos que se cruzan en un triángulo  $\Delta$  con una superposición local vacía y  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  los correspondientes grafos serpientes. Supongamos que  $\Delta = \Delta'_0$  es el primer triángulo que  $\gamma_2$  corta. Entonces, los 4 grafos serpientes que se obtienen al suavizar la intersección de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  en  $\Delta$  se obtienen por la resolución  $\text{Graft}_{s, \delta_3}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$  del Grafting de  $\mathcal{G}_1$  en  $G_s$  donde  $0 \leq s \leq d$  es tal que  $\Delta = \Delta_s$  y si  $s = 0$  o  $s = d$  entonces  $\delta_3$  es el único lado de  $\Delta$  que no es intersectado ni por  $\gamma_1$  ni por  $\gamma_2$ .*

*Demostración.* Ver en [17]. □

# Capítulo 4

## Módulos cadena

### 4.1 Definiciones principales

Fijemos un carcaj  $Q = (Q_0, Q_1)$  e  $I$  un ideal admisible. Denotaremos por  $A$  al álgebra  $KQ/I$  formada al cocientar el ideal con el álgebra de caminos.

Para una flecha  $\alpha \in Q_1$  definimos la inversa formal como la flecha  $\alpha^{-1}$  que se obtiene tomando como inicio el final de  $\alpha$  y como final el inicio de  $\alpha$ , en otras palabras  $s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$  y  $t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$ . Denotaremos:

$$Q^{-1} = \{\alpha^{-1} : \alpha \in Q\}$$

el conjunto de todas las inversas formales posibles de  $Q_1$ . A los elementos de  $Q_1 \cup Q_1^{-1}$  los denominaremos letras, además diremos que:

- $u$  es directa si  $u \in Q_1$ .
- $u$  es inversa si  $u \in Q_1^{-1}$ .

**Definición 4.1.** Una palabra  $w = u_1 \cdots u_n$  es una cadena si:

- $t(u_i) = s(u_{i+1})$  para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .
- $u_i$  o  $u_i^{-1}$  son elementos de  $Q_1$ .
- $u_{i+1} \neq u_i^{-1}$ .
- Ninguna subpalabra de  $w$  o su inversa está en  $I$ .

Para una cadena  $w$  ponemos  $s(w) = s(u_1)$  y  $t(w) = t(u_n)$  su inicio y final. De manera natural definimos la inversa de  $w$  como la cadena  $w^{-1} = u_n^{-1} \cdots u_1^{-1}$ . Para un vértice  $x \in Q_0$  tenemos dos cadenas de longitud cero, que denotaremos por  $1_{(x,1)}$  y  $1_{(x,-1)}$ , en esencia son las mismas y tienen como inicio y final a  $x$ .

**Definición 4.2.** Diremos que una cada  $w$  es directa si todas las letras que la conforman son directas. Análogamente, diremos que  $w$  es inversa si todas las letras que la conforman son inversas.

Dadas dos cadenas  $u$  y  $v$ , diremos que están relacionadas si es que  $u = v$  o  $u = v^{-1}$ . Esta relación es una de equivalencia, denotaremos por  $\mathcal{S}$  al conjunto de las cadenas vía cociente esta relación.

**Definición 4.3.** Para una cadena  $u = u_1 \cdots u_n$  en  $A = KQ/I$ , definimos la función:

$$t : \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow Q_0$$

$$t(i) = \begin{cases} s(u_1) & \text{si } i = 0 \\ t(u_i) & \text{si } i \neq 0 \end{cases}$$

Para un vértice  $x \in Q_0$  ponemos:

$$I_x = \{i \mid t(i) = x\}$$

El **módulo cadena** asociado a  $u$ , denotado  $M(u)$ , se define como:

a) Para cada  $x \in Q_0$  consideramos el espacio vectorial:

$$M_x = \bigoplus_{i \in I_x} K_i$$

donde  $K_i \cong \mathbb{K}$  para cada  $i$ .

b) Para una flecha  $a : x \rightarrow y$  definimos el morfismo:

$$M_a : \bigoplus_{i \in I_x} K_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I_y} K_i$$

donde la matriz que lo define tiene entradas:

$$(M_a)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1, u_j = a \\ 1 & \text{si } i = j + 1, u_i = a^{-1} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

**Observación.** Para  $x$  se suele fijar una base para  $M_x$ , a los elementos básicos los denotaremos por  $z_i$  con  $i \in I_x$  y a  $z_i$  se denomina el elemento básico entre  $u_i$  y  $u_{i+1}$ .

**Ejemplo 37.** Consideremos el carcaj que se muestra en la Figura 70 con el ideal admisible  $I = \langle ab, a^2, b^2 \rangle$ . Note que solo existen dos flechas  $a$  y  $b$ .



Figura 70: Carcaj  $Q$

Ahora, consideremos la cadena  $u = ba^{-1}b^{-1}ab^{-1}$  (es inmediato verificar que cumple las cuatro condiciones de la definición). En este caso solo hay un vértice 1 para el cual se tiene:

$$I_1 = \{i : t(i) = 1\} = \{0, 1, \dots, 5\}$$

Lo anterior se debe a que todas las flechas de nuestro quiver inician y terminan en el vértice 1. Por esta razón, el espacio vectorial asociado sería  $M_1 = \mathbb{K}^6$ . Ahora bien el morfismo respecto a  $a$  será:

$$\varphi_a : \mathbb{K}^6 \rightarrow \mathbb{K}^6$$

con matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

esto debido a que  $u_4 = a$  y  $u_2 = a^{-1}$  por lo que las entradas 3-4 y 2-1 serán 1. El morfismo respecto a  $b$  será:

$$\varphi_b : \mathbb{K}^6 \rightarrow \mathbb{K}^6$$

con matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

esto debido a que  $u_1 = b$  y  $u_3 = b^{-1}$  por lo que las entradas 0-1 y 3-2 serán 1.

Dada una cadena  $w$  vamos a definir 4 sub-cadenas  ${}_h w, w_h, {}_c w, w_c$  que nos permitirán manipular la intersección de módulos cadena.

**Definición 4.4** ([4], Página 8). Sea  $w$  una cadena:

- a) Obtenemos  ${}_h w$  siguiendo los siguientes pasos. Si  $w$  es una cadena inversa ponemos  ${}_h w = 0$ , caso contrario  ${}_h w$  se obtiene de  $w$  eliminando la primera flecha directa en  $w$  y la cadena inversa que la precede. En este caso diremos que  ${}_h w$  se obtiene de  $w$  **eliminando un gancho** en  $s(w)$ .
- b) Obtenemos  ${}_c w$  siguiendo los siguientes pasos. Si  $w$  es una cadena directa ponemos  ${}_c w = 0$ , caso contrario  ${}_c w$  se obtiene de  $w$  eliminando la primera flecha inversa en  $w$  y la cadena directa que la precede. En este caso diremos que  ${}_c w$  se obtiene de  $w$  **eliminando un co-gancho** en  $s(w)$ .

- c) Obtenemos  $w_h$  siguiendo los siguientes pasos. Si  $w$  es una cadena directa ponemos  $w_h = 0$ , caso contrario  $w_h$  se obtiene de  $w$  eliminando la última flecha inversa en  $w$  y la cadena directa que le sigue. En este caso diremos que  $w_h$  se obtiene de  $w$  **eliminando un gancho** en  $t(w)$ .
- d) Obtenemos  $w_c$  siguiendo los siguientes pasos. Si  $w$  es una cadena inversa ponemos  $w_c = 0$ , caso contrario  $w_c$  se obtiene de  $w$  eliminando la última flecha directa en  $w$  y la cadena inversa que le sigue. En este caso diremos que  $w_c$  se obtiene de  $w$  **eliminando un co-gancho** en  $t(w)$ .

Ahora volvamos a las superficies marcadas sin pinchaduras, fijemos  $T$  una triangulación de  $(S, M)$  y  $(Q, W)$  el carcaj con potencial asociado. De los capítulos anteriores sabemos que el potencial  $W$  está formado por sumas de ciclos orientados, cada uno proveniente de los triángulos interiores de  $T$ .

Sea  $J(Q, W)$  el álgebra Jacobiana asociada, en [1] se prueba que esta álgebra coincide con el álgebra gentil que vamos a construir a continuación. Antes recordemos la definición de lo que es un álgebra gentil.

**Definición 4.5.** Sea  $Q = (Q_0, Q_1)$  un carcaj e  $I$  un ideal admisible. Un álgebra  $A$  es gentil si es que es Morita equivalente a  $KQ/I$  y cumple las siguientes condiciones:

- a) Cada vértice de  $Q$  es el punto de inicio de como máximo dos flechas y es el punto final de como máximo dos flechas.
- b) Para cada flecha  $\alpha \in Q_1$ , existe como máximo una flecha  $\beta \in Q_1$  tal que  $\alpha\beta \notin I$  y existe como máximo una flecha  $\gamma \in Q_1$  tal que  $\gamma\alpha \notin I$ .
- c)  $I$  es generado por caminos de longitud 2.
- d) Para cada flecha  $\alpha \in Q_1$  existe como máximo una flecha  $\delta \in Q_1$  tal que  $\alpha\delta \in I$  y existe como máximo una flecha  $\varepsilon \in Q_1$  tal que  $\varepsilon\alpha \in I$ .

**Observación.** Al par  $(Q, I)$  satisfaciendo las condiciones anteriores se denomina un **carcaj gentil acotado**.

**Definición 4.6.** Un álgebra  $A = KQ/I$  donde  $I$  está generado por caminos y  $(Q, I)$  satisface las condiciones a) y b) se denomina un **álgebra de cadenas**.

Los módulos cadena resultan ser módulos indescomponibles en  $A = KQ/I$  pero no son los únicos. En [5] se clasifican todos los módulos indescomponibles usando palabras  $w$  como al inicio del capítulo, definiendo el concepto de módulo de banda. Resulta que todo  $A$ -módulo indescomponible es o bien un módulo cadena o un módulo de banda.

Para una superficie  $(S, M)$  donde no existen pinchadura, se puede probar que el álgebra Jacobiana  $J(Q, W)$  es isomorfa a  $KQ/I(T)$  donde  $I(T)$  es el ideal generado por  $\alpha_\Delta\beta_\Delta, \beta_\Delta\gamma_\Delta, \gamma_\Delta\alpha_\Delta$  donde  $\Delta$  es un triángulo interior de  $T$ .

**Proposición 4.1.** *Sea  $T$  una triangulación de una superficie  $(S, M)$  sin pinchaduras. Entonces  $J(Q, W)$  es un álgebra de cadenas.*

*Demostración.* Sabemos que  $J(Q, W)$  es de dimensión finita, por lo que basta probar que el carcaj  $(Q(T), I(T))$  cumple las condiciones a) - d) de la definición.

- c) Es evidente que el ideal  $I(T)$  está generado por caminos de longitud dos.
- a) Sea  $a$  un vértice de  $Q(T)$  que corresponde a un arco  $a$  de  $T$ . En este caso,  $a$  debe ser diagonal de algún cuadrilátero en  $T$  como muestra la Figura 71.

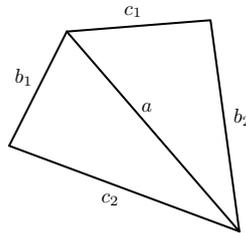


Figura 71: Carcaj  $Q(T)$

Entonces existen como máximo dos flechas que comienzan en  $a$  que serían  $a \rightarrow c_1$  y  $a \rightarrow c_2$ . Análogamente habrían como máximo dos flechas que terminan en  $a$  que serían  $b_1 \rightarrow a$  y  $b_2 \rightarrow a$ .

- b) Sea  $\alpha \in Q_1$  digamos que  $\alpha : i \rightarrow j$ , la flecha  $\alpha$  proviene de un triángulo con lados  $i, j, k$  (ver Figura 72). Si hay algún triángulo a la derecha podemos encontrar como mucho una flecha  $\beta$  tal que  $\alpha\beta \notin I$  (note que el triángulo no puede existir o que hayan segmentos de borde, pero si lo hay a lo mucho encontraremos una sola flecha). Del mismo modo analizamos para el lado izquierdo.

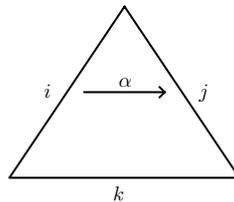


Figura 72: Triángulo  $i, j, k$

- d) Se procede de manera análoga al item b) en este caso solo tenemos que analizar en el triángulo  $i, j, k$ .

□

## 4.2 Cadenas vs arcos

En esta pequeña sección vamos a encontrar una biyección entre arcos y cadenas, por lo que los resultados obtenidos para arcos lo podemos establecer para cadenas y así para módulos cadena, esto se verá de mejor forma en el próximo capítulo.

**Proposición 4.2.** *Sea  $T$  una triangulación de una superficie marcada  $(S, M)$  sin pinchaduras. Entonces, existe una biyección  $\gamma \mapsto w(\gamma)$  entre las curvas (clases de homotopía) que no están en  $T$  y las cadenas de  $J(Q, W)$ .*

*Demostración.* Sea una cadena:

$$w = x_1 \xleftrightarrow{\alpha_1} x_2 \xleftrightarrow{\alpha_2} \cdots \xleftrightarrow{\alpha_{s-1}} x_s$$

Definiremos una curva  $\gamma(w)$  como sigue. Los arcos  $x_1$  y  $x_2$  pertenecen a un mismo triángulo que lo denotaremos por  $T_1$ , esto debido a que están unidos por una flecha en  $J(Q, W)$ . Unimos los puntos medios de  $x_1$  y  $x_2$  mediante una curva  $\gamma_1$  en el interior de  $T_1$ . Procediendo de manera análoga para los arcos restantes, obtenemos curvas  $\gamma_2, \dots, \gamma_{s-1}$  que unen los puntos medios de sus respectivos arcos.

Ahora,  $x_1$  pertenece a dos triángulos, el triángulo  $T_1$  y otro triángulo  $T_0$ . Sea  $P \in M$  el punto marcado en  $T_0$  opuesto al arco  $x_1$ . Unimos  $P$  con el punto medio de  $x_1$  por una curva  $\gamma_0$  en el interior de  $T_0$ . Análogamente para el final de la cadena, unimos el punto medio de  $x_s$  con un punto marcado  $Q$  mediante una curva  $\gamma_s$ .

Finalmente  $\gamma(w) = \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_s$ , como se muestra en la Figura 73.

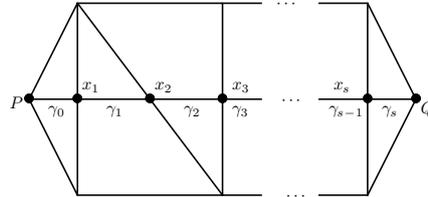


Figura 73: Curva  $\gamma(w)$

Ahora sea una curva  $\gamma$  que no está en  $T$ . Podemos asumir que la curva intersecta transversalmente a la triangulación  $T$  (si no lo es, bajo homotopía podemos obtenerlo). Sea  $P$  y  $Q$  el inicio y final respectivamente de la curva, denotamos  $\{x_1, \dots, x_s\}$  los arcos internos que  $\gamma$  corta (no todos distintos). Podemos suponer que el número de intersecciones es mínimo, así  $x_i \neq x_{i+1}$ . Así tenemos que:

$$\alpha_i : x_i \rightarrow x_{i+1} \text{ o } \alpha_i : x_{i+1} \rightarrow x_i \text{ en } Q(T)$$

La cadena que buscamos es:

$$w(\gamma) = x_1 \xleftrightarrow{\alpha_1} x_2 \xleftrightarrow{\alpha_2} \cdots \xleftrightarrow{\alpha_{s-1}} x_s$$

□

# Capítulo 5

## Extensiones para el álgebra Jacobiana

### 5.1 Cruce de módulos

Sea  $J(Q, W)$  el álgebra Jacobiana asociada a una triangulación de una superficie marcada  $(S, M)$  sin pinchaduras, tal que cada componente del borde tiene por lo menos un punto marcado. En este capítulo vamos a interpretar el cruce de arcos en términos de los correspondientes módulos cadena sobre  $J(Q, W)$ .

Denotaremos por  $\text{Pred}(\alpha)$  a la subcadena que precede una flecha o una flecha inversa  $\alpha$  en una cadena  $w$ . Similarmente, denotaremos por  $\text{Succ}(\alpha)$  la subcadena que sucede a una flecha o flecha inversa  $\alpha$  en una cadena  $w$ .

**Definición 5.1** ([4], Definición 3.1). Diremos que un módulo cadena  $M$  cruza a un módulo cadena  $N$  si existen cadenas  $w_M$  y  $w_N$  tales que  $M \cong M(w_M)$  y  $N \cong M(w_N)$  y además alguna de las siguientes tres condiciones se cumplen:

- 1) Existe una cadena  $w \in \mathcal{S}$ , que puede ser que solo tenga un vértice, tal que  $w_M, w_N$  no empiezen ambos en  $s(w)$  o no terminen ambos en  $t(w)$  y además:

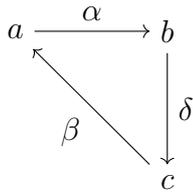
$$w_M = \text{Pred}(\alpha) \xrightarrow{\alpha} w \xleftarrow{\beta} \text{Succ}(\beta)$$

$$w_N = \text{Pred}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon} w \xleftarrow{\delta} \text{Succ}(\delta)$$

donde  $\alpha, \beta, \varepsilon, \delta$  son flechas en  $Q_1$ . Si  $\alpha$  (resp.  $\varepsilon$ ) no existe, entonces  $w_M$  (resp.  $w_N$ ) comienza con  $w$  y si  $\beta$  (resp.  $\delta$ ) no existe, entonces  $w_M$  (resp.  $w_N$ ) termina con  $w$ .

- 2) Existe una flecha  $\alpha$  en  $Q_1$  tal que  $w_M \xrightarrow{\alpha} w_N \in \mathcal{S}$ .

- 3) Existe un 3-ciclo:



en  $Q$  tal que  $\alpha\delta, \delta\beta, \beta\alpha \in I$  y tal que  $\alpha$  está en  $w_M$ ,  $s(w_N) = c$  y no empieza ni termina en  $\delta$  o  $\beta$  ni sus inversos.

Si se cumple 1) diremos que  $M$  y  $N$  se cruzan en un **módulo**, si se cumple 2) diremos que  $M$  y  $N$  se cruzan en una **arista** y si se cumple 3) diremos que  $M$  y  $N$  se cruzan en un **3-ciclo**.

**Teorema 5.1** ([4], Proposición 3.3). *Sea  $M$  y  $N$  dos módulos cadena sobre  $J(Q, W)$  con arcos asociados  $\gamma_M$  y  $\gamma_N$  en  $(S, M)$ . Entonces  $\gamma_M$  y  $\gamma_N$  se cruzan si y solo si  $M$  se cruza con  $N$  o  $N$  se cruza con  $M$ .*

*Demostración.* Primero supongamos que  $M$  y  $N$  se cruzan y que  $M \cong M(w_M)$  y  $N \cong N(w_N)$ . Veamos caso por caso:

a) Se cruzan en módulo. En este caso existe  $w \in \mathcal{S}$  tal que:

$$w_M = \text{Pred}(\alpha) \xrightarrow{\alpha} w \xleftarrow{\beta} \text{Succ}(\beta)$$

$$w_N = \text{Pred}(\varepsilon) \xleftarrow{\varepsilon} w \xrightarrow{\delta} \text{Succ}(\delta)$$

Si las aristas  $\alpha, \beta, \varepsilon$  y  $\delta$  existen, tenemos la configuración local como se muestra en la Figura 74. En este caso, es evidente que los arcos se cruzan con una superposición no vacía.

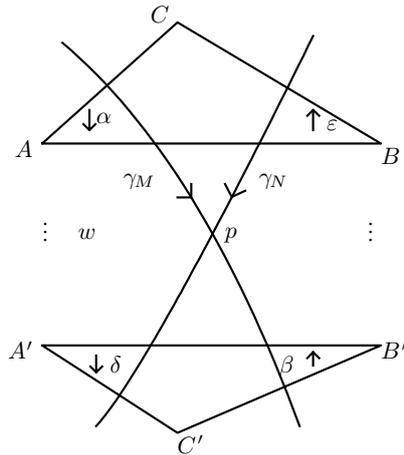


Figura 74: Curva  $\gamma(w)$

Si  $\alpha$  no existe, por ejemplo, entonces  $w_M$  tiene que comenzar en  $w$  y así  $\gamma_M$  comienza en  $C$ . Por hipótesis debemos tener necesariamente que  $\varepsilon$  si existe, por lo que  $\gamma_M$  y  $\gamma_N$  se cruzan con superposición vacía. Caso análogo sucede si no existe  $\delta$ .

b) Se cruzan en flecha. En este caso tenemos que:

$$w_M \xrightarrow{\alpha} w_N$$

Escribimos:  $x_0 \leftrightarrow x_1 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow x_s \xrightarrow{\alpha} y_1 \leftrightarrow y_1 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow y_r$ . En la Figura 75 se muestra la configuración obtenida, es claro que en este caso los arcos se cruzan con superposición vacía.

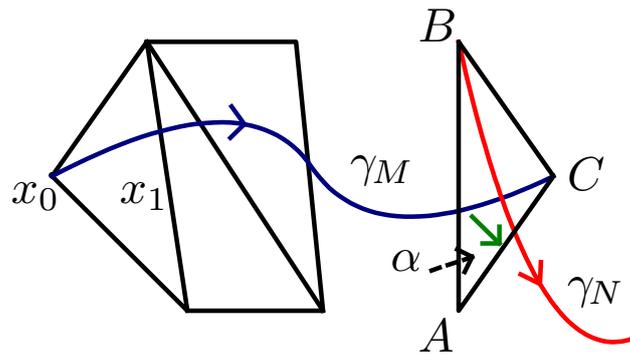
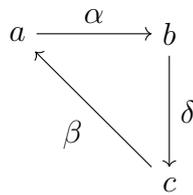


Figura 75: Cruce en flecha

c) Se cruzan en un 3-ciclo. El ciclo en cuestión es:



que cumple  $\alpha \in w_M$ ,  $s(w_N) = c$  y que  $w_N$  no empieza ni termina en  $\delta, \beta$  o sus inversas. En este caso la configuración que se obtiene se muestra en la Figura 76 y nuevamente tenemos un cruce con superposición vacía.

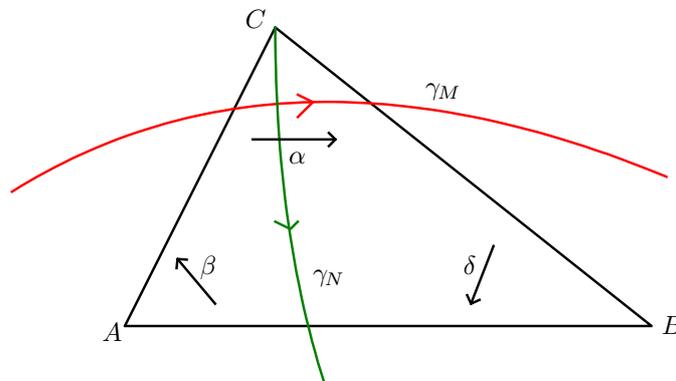


Figura 76: Cruce en 3-ciclo

Ahora recíprocamente, si  $\gamma_M$  y  $\gamma_N$  se cruzan. En este caso tenemos cinco posibilidades que se muestran en la Figura 77.

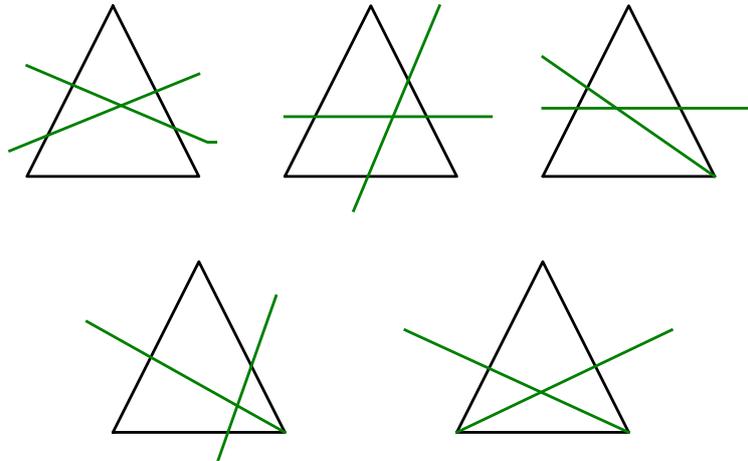


Figura 77: Cinco posibles casos para el cruce de arcos

El primer caso se reduce al segundo y los dos últimos casos corresponden a cruce en un 3-ciclo y cruce en flecha de los módulos cadena asociados como se vió en la primera parte de la prueba. Resta ver el segundo y tercer caso. En cualquiera de ellos tenemos la configuración que se muestra en la Figura 78. Los arcos  $\tau_1, \dots, \tau_n$  son los arcos que son intersectados por los arcos, donde posiblemente se repitan algunos.

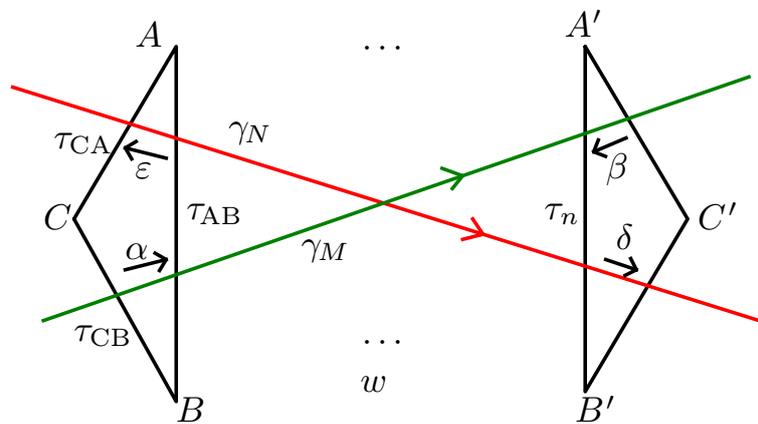


Figura 78: Casos 2 y 3

Tenemos varios casos:

- Si  $\gamma_M$  corta a  $\tau_{CB}$  ponemos  $w_M = u_M \alpha w \beta v_M$  donde  $u_M, w$  y  $v_M$  son cadenas.
- Si  $\gamma_N$  corta a  $\tau_{CA}$  ponemos  $w_N = u_N \varepsilon^{-1} w \delta v_N$  donde  $u_N, w, v_N$  son cadenas.
- Si  $\gamma_M$  inicia en  $C$  ponemos  $w_M = w \beta^{-1} v_M$ .

- Si  $\gamma_N$  inicia en  $C$  ponemos  $w_N = w\delta v_N$ .

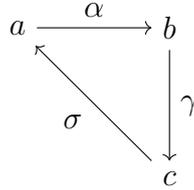
Si vamos combinando los casos, vamos a obtener todas las posibilidades. Por ejemplo si  $\gamma_M$  corta a  $\tau_{CB}$  y  $\gamma_N$  corta a  $\tau_{CA}$  entonces tenemos que los módulos  $M(w_M)$  y  $M(w_N)$  se cruzan en módulo. Análogamente con los demás casos.  $\square$

**Lema 5.2** ([4], Lema 3.4). *Sea  $Q$  un quiver asociado a una triangulación de  $(S, M)$ . Dados dos cadenas  $w$  y  $v$  de la forma:*

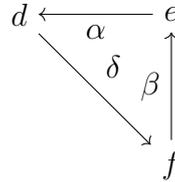
$$w = \text{Pred}(\alpha) \xrightarrow{\alpha} u \xleftarrow{\beta} \text{Succ}(\beta)$$

$$v = \text{Pred}(\gamma) \xleftarrow{\gamma} u \xrightarrow{\delta} \text{Succ}(\delta)$$

donde  $u \in \mathcal{S}$  y  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  son flechas en  $Q_1$ . Si las flechas  $\alpha$  y  $\gamma$  existen, entonces  $\alpha\gamma \in I$  y existe una flecha  $\sigma$  en  $Q$  tal que:



es un 3-ciclo en  $Q$  con  $\gamma\alpha \in I$ ,  $\sigma\alpha \in I$  y  $b = s(u)$ . Análogamente, si las flechas  $\beta$  y  $\delta$  existen, entonces  $\beta\delta \in I$  y existe una flecha  $\rho$  en  $Q$  tal que:



es un 3-ciclo en  $Q$  y  $\beta\rho \in I$ ,  $\rho\delta \in I$  y  $d = t(u)$ .

*Demostración.* Probaremos el primer caso, el segundo se procede de manera análoga. Digamos que la cadena  $u$  tiene la forma:

$$u = u_1 \xleftarrow{\mu_1} u_2 \xleftarrow{\mu_2} u_3 \xleftarrow{\mu_3} \cdots u_r \xleftarrow{\mu_r} u_r$$

Luego tenemos que  $\alpha\mu_1 \in \mathcal{S}$  y  $\gamma^{-1}\mu_1 \in \mathcal{S}$ . Debemos tener  $\mu_1 \in Q_1$  o  $\mu_1^{-1} \in Q_1$ , en el primer caso tendríamos que  $\alpha\mu_1 \in kQ$  y  $\alpha\mu_1 \notin I$  y en el segundo  $\mu_1^{-1}\gamma \in kQ$  y  $\mu_1^{-1}\gamma \notin I$ . Como  $J(Q, W)$  es gentil, debemos tener que  $\alpha\gamma \in I$ . Como  $J(Q, W)$  proviene de una superficie existe  $\sigma$  flecha que cumple la propiedad pedida.  $\square$

## 5.2 Suavizando módulos cadena

Si tenemos dos curvas que se intersectan, podemos suavizarlas y así obtener cuatro curvas más. Esta acción se puede codificar mediante grafos serpientes, como vimos en capítulos anteriores mediante el uso de la resolución y el grafting. Haremos algo análogo para el caso de módulos cadena.

Sean dos módulos cadena  $M_1 = M(w_1)$  y  $M_2 = M(w_2)$  en  $\text{mod}J(Q, W)$  tal que los arcos asociados  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  se cruzan en  $(S, M)$ . Definiremos cuatro nuevos módulos.

**Definición 5.2** ([4], Definición 3.5). Sean  $M_1$  y  $M_2$  dos módulos cadena sobre  $J(Q, W)$  con cadenas asociadas  $w_1$  y  $w_2$  respectivamente.

- 1) Supongamos que  $M_1$  y  $M_2$  se cruzan en un módulo  $M(w)$ . Por definición tenemos que:

$$w_1 = \text{Pred}(\alpha) \xrightarrow{\alpha} w \xleftarrow{\beta} \text{Succ}(\beta)$$

$$w_2 = \text{Pred}(\gamma) \xleftarrow{\gamma} w \xrightarrow{\delta} \text{Succ}(\delta)$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  son flechas en  $Q$ . Definimos:

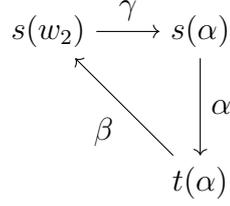
- a)  $w_3 = \text{Pred}(\alpha) \xrightarrow{\alpha} w \xrightarrow{\delta} \text{Succ}(\delta)$ .
- b)  $w_4 = \text{Pred}(\gamma) \xleftarrow{\gamma} w \xleftarrow{\beta} \text{Succ}(\beta)$ .
- c)  $w_5 = \begin{cases} \text{Pred}(\alpha) \xleftarrow{\sigma} \text{Pred}^{-1}(\gamma) & \text{si } s(w_1) \neq s(w), s(w_2) \neq s(w) \\ \text{Pred}(\alpha)_c & \text{si } s(w_2) = s(w) \\ \text{Pred}(\gamma)_h & \text{si } s(w_1) = s(w) \end{cases}$
- d)  $w_6 = \begin{cases} \text{Succ}^{-1}(\beta) \xleftarrow{\rho} \text{Succ}(\delta) & \text{si } t(w_1) \neq t(w), t(w_2) \neq t(w) \\ {}_c\text{Succ}(\beta) & \text{si } t(w_2) = t(w) \\ {}_h\text{Succ}(\delta) & \text{si } t(w_1) = t(w) \end{cases}$

donde  $\sigma, \rho$  son como en el lema 5.2.

- 2) Supongamos que  $M_1$  y  $M_2$  se cruzan en una flecha  $\alpha$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $s(\alpha) = t(w_1)$  y  $t(\alpha) = s(w_2)$ . Definimos:

- a)  $w_3 = w_1 \xrightarrow{\alpha} w_2$ .
- b)  $w_4 = 0$ .
- c)  $w_5 = (w_1)_c$ .
- d)  ${}_h w_2$ .

3) Supongamos que  $M_1$  y  $M_2$  se cruzan en un 3-ciclo:



donde  $w_1 = \text{Pred}(\alpha) \xrightarrow{\alpha} \text{Succ}(\alpha)$ . Definimos:

- a)  $w_3 = \text{Pred}(\alpha) \xleftarrow{\gamma} w_2$ .
- b)  $w_4 = {}_c(s(\alpha) \xrightarrow{\alpha} \text{Succ}(\alpha))$ .
- c)  $w_5 = (\text{Pred}(\alpha) \xrightarrow{\alpha} t(\alpha))_h$ .
- d)  $w_6 = w_2^{-1} \xleftarrow{\beta} \text{Succ}(\alpha)$ .

A los 4 módulos cadenas definidos anteriormente se les denominan el suavizamiento de  $M_1$  y  $M_2$ .

**Proposición 5.3** ([4], Proposición 3.6). *Sea  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  dos arcos que se cruzan en  $(S, M)$  con cadenas  $w_1$  y  $w_2$  respectivamente. Consideremos una intersección de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , entonces los arcos  $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$  y  $\gamma_6$  definidos por las cadenas de la definición anterior, corresponden a los arcos obtenidos al suavizar el cruce entre  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ .*

Antes de ver la prueba de esta proposición veremos una correspondencia entre los grafos serpiente y  $\mathcal{S}$ . Dado un arco  $\gamma$ , consideremos  $w_\gamma, M(w_\gamma)$  y  $\mathcal{G}_\gamma$  la cadena, módulo cadena y grafo serpiente asociados a este arco. Pongamos que:

$$w_\gamma = \epsilon_1 \cdots \epsilon_{d-1}$$

y  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{d-1})$  las aristas interiores de  $\mathcal{G}_\gamma$ . Definimos una función signo  $f_\gamma$  en  $\mathcal{G}_\gamma$  haciendo  $f_\gamma(\sigma_i) = \phi(\epsilon_i)$  donde para cada  $1 \leq i \leq d-1$ :

$$\phi(\epsilon_i) = \begin{cases} + & \text{si } \epsilon_i \in Q_1 \\ - & \text{si } \epsilon_i^{-1} \in Q_1 \end{cases}$$

Denotamos por  $\mathcal{R}$  al conjunto de pares  $(\mathcal{G}_\gamma, f_\gamma)$  donde  $\gamma$  es un arco tal que  $\gamma$  no está en la triangulación  $T$ . Tenemos la siguiente proposición que es inmediata del hecho que hay una relación biunivoca entre cadenas y arcos.

**Proposición 5.4.** *Existe una biyección entre el conjunto de cadenas  $\mathcal{S}$  sobre  $J(Q, W)$  y el conjunto  $\mathcal{R}$  dada por el mapa que asocia a  $(\mathcal{G}_\gamma, f_\gamma)$  la cadena  $w_\gamma$  para cada arco  $\gamma \notin T$ .*

*Demostración de 5.3.* Por el teorema 5.1 dos arcos se cruzarán si y solo si sus módulos cadena asociados se cruzan. Por la proposición anterior los grafos serpientes estan en relación uno a uno con las cadenas (arcos) por lo que si observamos la definición de suavizamiento de módulos veremos que estas son compatibles con la de suavizamiento de arcos terminando la prueba.  $\square$

### 5.3 Extensiones

Usando la noción de cruce de módulos cadena, vamos a caracterizar cuando tenemos una secuencia exacta corta en  $J(Q, W)$  y cuando no. En el caso que la haya, vamos a describir los términos medios en términos de los arcos obtenidos al suavizar la intersección.

**Teorema 5.5** ([4], Teorema 3.7). *Sea  $M_1$  y  $M_2$  dos módulos cadena en  $\text{mod}J(Q, W)$ .*

- 1) *Si  $M_1$  y  $M_2$  se cruzan en módulo, entonces los módulos  $M_3$  y  $M_4$  obtenidos al suavizar los módulos cadena nos dan una secuencia exacta corta no separada en  $\text{mod}J(Q, W)$  de la forma:*

$$0 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \oplus M_4 \rightarrow M_1 \rightarrow 0$$

- 2) *Si  $M_1$  y  $M_2$  se cruzan en una flecha, entonces el módulo  $M_3$  obtenido al suavizar los módulos cadena, nos da un secuencia exacta corta no separada en  $\text{mod}J(Q, W)$  de la forma:*

$$0 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow M_1 \rightarrow 0$$

- 3) *Si  $M_1$  y  $M_2$  se cruzan en un 3-ciclo, entonces los módulos  $M_3$  y  $M_4$  obtenidos al suavizar los módulos cadena, no nos dan ningún elemento de  $\text{Ext}_{J(Q, W)}^1(M_1, M_2)$ .*

*Demostración.* Ver en [4]. □

El teorema anterior tiene una interpretación geométrica. En el caso 1) el cruce de los módulos  $M_1$  y  $M_2$  se corresponde con el cruce de los arcos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  y los módulos  $M_3$  y  $M_4$  se corresponden con los arcos  $\gamma_3$  y  $\gamma_4$  de la Figura 79.

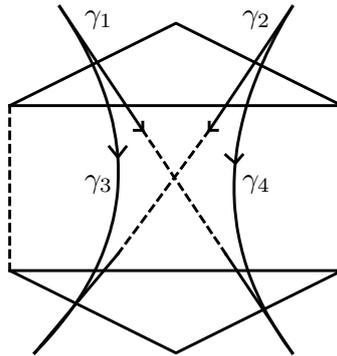


Figura 79: Primer caso del teorema 5.5

En la Figura 80 (izquierda) se muestra el caso 2), en este,  $\gamma_4$  es o bien un segmento de borde o un arco de la triangulación y el respectivo módulo  $M_4$  es el módulo cero.

En la Figura 80 (derecha) es muestra el caso 3).

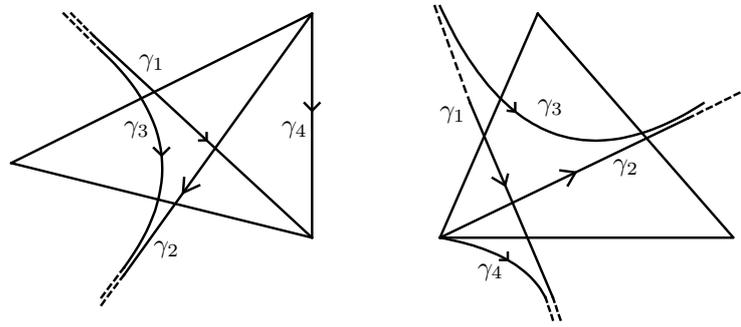


Figura 80: Segundo y tercer caso del teorema 5.5

# Capítulo 6

## Categorías de conglomerado

En este capítulo daremos una breve y no rigurosa presentación de la categoría de conglomerado, así como una extensión del teorema 5.5 para este caso. El lector interesado en conocer más sobre estas categorías puede revisar [33], [34], [35] y [36].

### 6.1 DG Categorías

Fijemos  $k$  un anillo conmutativo.

**Definición 6.1** ([34], Página 2). Una  $k$ -categoría  $\mathcal{A}$  es una categoría donde el conjunto de morfismos es un  $k$ -módulo y la composición es un mapa  $k$ -bilineal.

**Definición 6.2.** Un  $k$ -módulo graduado es un  $k$ -módulo  $V$  que tiene una descomposición como suma directa de  $k$ -módulos indexada por los enteros:

$$V = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} V^p$$

Los elementos  $v \in V^n$  se denominan homogéneos de grado  $n$  y escribiremos en este caso  $|v| = n$  o también  $\deg(v) = n$ .

**Definición 6.3.** Un morfismo de  $k$ -módulos graduados de grado  $n$  es un morfismo  $k$ -lineal  $f : V \rightarrow V'$  tal que:

$$f(V^p) \subseteq V'^{p+n} \text{ para todo } p \in \mathbb{Z}$$

El producto tensorial de los  $k$ -módulos graduados  $V$  y  $W$  es el  $k$ -módulo graduado  $V \otimes W$  que tiene como componentes:

$$(V \otimes W)^n = \bigoplus_{p+q=n} V^p \otimes W^q$$

El producto tensorial de dos morfismos de  $k$ -módulos graduados  $f : V \rightarrow V'$  y  $g : W \rightarrow W'$  se define como:

$$(f \otimes g)(v \otimes w) = (-1)^{pq} f(v) \otimes g(w)$$

donde  $g$  tiene grado  $p$  y  $v$  tiene grado  $q$ .

**Definición 6.4.** Una  $k$ -álgebra graduada es un  $k$ -módulo  $A$  junto con morfismo multiplicación  $A \otimes A \rightarrow A$  que tiene grado 0, es asociativo y admite unidad  $1 \in A^0$ .

**Definición 6.5.** Un  $k$ -módulo graduado diferencial, abreviado simplemente por dg  $k$ -módulo, es un  $k$ -módulo graduado  $V$  junto con un morfismo de grado 1  $d_V : V \rightarrow V$  que cumple  $d_V^2 = 0$ .

El producto tensorial de dos dg  $k$ -módulos es el  $k$ -módulo graduado  $V \otimes W$  junto con el diferencial:

$$d_V \otimes 1_W + 1_V \otimes d_W$$

**Definición 6.6** ([34], Sección 2.1). Una categoría graduada diferencial, abreviada simplemente por dg categoría, es una  $k$ -categoría  $\mathcal{A}$  donde el conjunto de morfismos son dg  $k$ -módulos y sus composiciones son morfismos de  $k$ -módulos graduados.

Sea  $B$  un  $k$ -álgebra y  $\mathcal{C}(B)$  la categoría de complejos de  $B$ -módulos a derecha:

$$\dots \rightarrow M^p \xrightarrow{d_M} M^{p+1} \rightarrow \dots$$

Para dos complejos  $L$  y  $M$  y un entero  $n$  definimos  $\text{Hom}(L, M)^n$  como el  $k$ -módulo formado por los morfismos de  $B$ -módulos  $f = (f^p) : L^p \rightarrow M^{p+n}, p \in \mathbb{Z}$ . Definimos  $\text{Hom}(L, M)$  como el  $k$ -módulo graduado con componentes  $\text{Hom}(L, M)^n$  y cuyo diferencial se define por:

$$d(f) = d_M \circ f - (-1)^n f \circ d_L$$

**Definición 6.7.** La dg categoría  $\mathcal{C}_{\text{dg}}(B)$  es aquella que:

- Tiene como objetos a todos los complejos.
- El conjunto de morfismos se define como:  $\mathcal{C}_{\text{dg}}(B)(L, M) = \text{Hom}(L, M)$ .

Lo anterior nos dice que si tenemos un  $k$ -álgebra podemos asociar una dg categoría.

**Definición 6.8.** Sea  $\mathcal{A}$  una dg categoría arbitraria, la dg categoría opuesta, denotada por  $\mathcal{A}^{\text{op}}$ , es aquella que:

- Tiene los mismos objetos que  $\mathcal{A}$ .
- Los morfismos se definen por:

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}^{\text{op}}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, X)$$

- Para  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}^{\text{op}}}(Y, X)^p$  y  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}^{\text{op}}}(Z, Y)^q$  se tiene que la composición es:

$$(-1)^{pq} g \circ f$$

Definiremos ahora dos categorías siguiendo [31]. La categoría  $\mathcal{Z}^0(\mathcal{A})$  es aquella que:

- Tiene los mismos objetos que  $\mathcal{A}$ .
- Los morfismos se definen por:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}^0(\mathcal{A})}(X, Y) = \mathcal{Z}^0(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y))$$

donde  $\mathcal{Z}^0$  es el kernel de  $d : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)^0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)^1$ .

La categoría  $H^0(\mathcal{A})$  es aquella que:

- Tiene los mismos objetos que  $\mathcal{A}$ .
- Los morfismos se definen por:

$$\mathrm{Hom}_{H^0(\mathcal{A})}(X, Y) = H^0(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y))$$

donde  $H^0$  es la 0-homología de  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ .

Cuando  $B$  es una  $k$ -álgebra tenemos que:

$$\mathcal{Z}^0(\mathcal{C}_{\mathrm{dg}}(B)) = \mathcal{C}(B) \text{ y } H^0(\mathcal{C}_{\mathrm{dg}}(B)) = \mathcal{H}(B)$$

donde  $\mathcal{H}(B)$  es la categoría de complejos homotópica (ver [34], página 4).

**Definición 6.9.** Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}'$  dos dg categorías. Un dg funtor  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  es un funtor entre ambas categorías donde la asignación entre morfismos es un morfismo de dg  $k$ -módulos.

**Definición 6.10.** El producto tensorial  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  de dos dg categorías es aquella categoría que tiene como objetos a  $\mathrm{Obj}(\mathcal{A}) \times \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$  y como espacio de morfismos:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}((X, Y), (X', Y')) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X') \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, Y')$$

**Definición 6.11** ([31], Sección 31). Sea  $\mathcal{A}$  una dg categoría pequeña. Un dg  $\mathcal{A}$ -módulo a izquierda es un dg funtor:

$$L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathrm{dg}}(k)$$

Análogamente un dg  $\mathcal{A}$ -módulo a derecha es un dg funtor:

$$M : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathrm{dg}}(k)$$

**Observación.** Un dg  $\mathcal{A}$ -módulo  $M$  viene dado por un conjunto de complejos  $M(X)$  de  $k$ -módulos, donde  $X$  es un objeto de  $\mathcal{A}$  y, además, morfismos de complejos:

$$M(Y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \rightarrow M(X)$$

Consideremos dos dg funtores  $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ . El complejo de morfismos graduados, denotado  $\text{Hom}(F, G)$ , tiene como componente  $n$  al módulo formado por los morfismos  $\phi_X \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(FX, GX)^n$  tal que  $(Gf)(\phi_X) = (\phi_Y)(Ff)$  para todo  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ . A los elementos de  $\text{Hom}(F, G)$  se les llama morfismos entre los funtores  $F$  y  $G$ .

**Definición 6.12** ([34], Página 5). La categoría de dg módulos, denotada por  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ , tiene como objetos a los dg  $\mathcal{A}$ -módulos y como morfismos a los morfismos  $L \rightarrow M$  entre dg funtores.

Así como para una  $k$ -álgebra asociamos una dg categoría, para una dg categoría  $\mathcal{A}$  haremos lo mismo. Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  categorías, la categoría  $\text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  es aquella que:

- Tiene como objetos a los dg funtores.
- Tiene como morfismos a  $\text{Hom}(F, G)$ .

**Definición 6.13** ([34], Sección 3.1). Sea  $\mathcal{A}$  una dg categoría, definimos la categoría  $\mathcal{C}_{\text{dg}}(\mathcal{A})$  como:

$$\mathcal{C}_{\text{dg}}(\mathcal{A}) = \text{Hom}(\mathcal{A}^{\text{op}}, \mathcal{C}_{\text{dg}}(k))$$

**Definición 6.14** ([34], Sección 3.1). Sea  $\mathcal{A}$  una dg categoría, la categoría de los dg  $\mathcal{A}$ -módulos bajo homotopía se define como:

$$\mathcal{H}(\mathcal{A}) = H^0(\mathcal{C}_{\text{dg}}(\mathcal{A}))$$

Sea  $\mathcal{A}$  una dg categoría con un solo objeto asociado a una  $k$ -álgebra  $B$ . En este caso los  $\mathcal{A}$ -módulos coinciden con los complejos de  $B$ -módulos. Tenemos entonces que  $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = \mathcal{C}(B)$  y  $\mathcal{H}(\mathcal{A}) = \mathcal{H}(B)$ .

**Definición 6.15** ([34], Sección 3.2). La categoría derivada  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  es la localización de la categoría  $\mathcal{H}(\mathcal{A})$  respecto a la clase de cuasi-isomorfismos.

**Observaciones.**

- 1) Los cuasi-morfismos en el contexto de dg categorías es análogo al visto en el apéndice D.9, con la diferencia que ahora son funtores que bajo homología ( $H^0$ ) es una equivalencia de categorías. Para más detalles ver [34], sección 2.3.
- 2) La noción de localización requiere un espectro amplio de conocimientos de teoría de categorías. En el apéndice D.9 definimos la categoría derivada sin mencionar el concepto de localización; sin embargo, de una manera informal usamos este concepto.  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  es la localización de la categoría homotópica respecto a los cuasi-isomorfismos. El lector interesado en profundizar sobre este tema puede revisar [37]
- c) En [33] partiendo de una dg algebra  $A$  definen dos categorías  $\mathcal{C}(A)$  y  $\mathcal{H}(A)$ . Estas dos categorías, junta con la categoría derivada, siguen la misma construcción que hemos dado aquí para el caso de dg categorías. El lector interesado puede revisar la sección 2.12 de [33].

## 6.2 La dg álgebra de Ginzburg

De la observación *c)* de la sección anterior, tenemos que si tenemos una dg algebra podemos construir una categoría derivada asociada. En esta sección definiremos una dg algebra que servirá para la definición de categoría de conglomerado.

**Definición 6.16.** Un carcaj graduado es un carcaj junto con una función grado sobre cada una de las flechas.

**Observación.** Los grados en un carcaj graduado son números enteros (positivos o negativos). El grado de un camino se define como la suma de grados de todas las flechas que lo involucran.

Sea  $(Q, W)$  un carcaj con potencial, construiremos un carcaj graduado  $\tilde{Q}$  como sigue:

- 1) Los vértices de  $\tilde{Q}$  son los mismos que los de  $Q$ .
- 2) Las flechas de  $\tilde{Q}$  son:
  - Las flechas de  $Q$ , estas tienen grado 0.
  - La flecha  $a^* : j \rightarrow i$  de grado  $-1$  para cada flecha  $a : i \rightarrow j$  en  $Q$ .
  - El lazo  $t_i : i \rightarrow i$  de grado  $-2$  para cada vértice  $i$  de  $Q$ .

En palabras simples estamos agregando las “inversas” de cada flecha en  $Q$  y también lazos para cada vértice.

**Definición 6.17** ([36], Definición 3.1). Sea  $(Q, W)$  un carcaj con potencial y  $\tilde{Q}$  el carcaj construido anteriormente. La dg álgebra de Ginzburg, denotada  $\Gamma(Q, W)$ , es la dg  $k$ -álgebra cuya álgebra graduada es el álgebra de caminos  $R\langle A \rangle = k\tilde{Q}$  y el diferencial es el único endomorfismo lineal homogéneo de grado 1 que satisface la regla de Leibniz

$$d(uv) = (du)v + (-1)^p u dv$$

donde  $u$  es homogéneo de grado  $p$  y  $v$  es cualquier elemento, y toma los siguientes valores en las flechas de  $\tilde{Q}$ :

- $da = 0$  para toda flecha  $a$  de  $Q$ .
- $d(a^*) = \partial_a W$  para toda flecha  $a$  de  $Q$ .
- $d(t_i) = e_i(\sum_a [a, a^*])e_i$  para todo vértice  $i$  de  $Q$ .

**Observación.** En la sección 2.6 de [33] se define la dg álgebra de Ginzburg completa  $\hat{\Gamma}(Q, W)$ . A diferencia de  $\Gamma(Q, W)$ , el álgebra graduada asociada de  $\hat{\Gamma}(Q, W)$  es el álgebra de caminos completa.

### 6.3 Extensiones en la categoría de conglomerado

**Definición 6.18** ([36], Definición 3.5). Sea  $(Q, W)$  un carcaj con potencial y  $\Gamma = \Gamma(Q, W)$  la dg álgebra de Ginzburg. Sea  $\text{Per } \Gamma$  la subcategoría triangulada más pequeña de  $\mathcal{D}(\Gamma)$  que contiene a  $\Gamma$  y que es estable tomando sumas directas. También consideremos  $\mathcal{D}^b \Gamma$  la subcategoría de  $\mathcal{D}(\Gamma)$  formada por los  $\Gamma$ -módulos cuyas homología son de dimensión finita. La categoría de conglomerado asociada a  $(Q, W)$ , denotada  $\mathcal{C}(Q, W)$ , se define como el cociente de categorías trianguladas  $\text{Per } \Gamma / \mathcal{D}^b \Gamma$ .

**Observación.** La definición anterior, al igual que en otros pasajes de este capítulo, necesita conocimientos álgidos sobre teoría de categorías que escapan al propósito de este trabajo. El lector interesado puede revisar [33], [34], [36] y [30] para obtener más información acerca de la teoría de categorías envuelta en la categoría de conglomerado, además, puede revisar [38] para encontrar la definición exacta de cociente de categorías trianguladas.

Sea  $(S, M)$  una superficie marcada y  $T, T'$  dos triangulaciones. Consideremos los carcajes con potenciales asociados  $(Q, W)$  y  $(Q', W')$  respectivamente. En [33], teorema 3.1, se prueba que  $\mathcal{C}(Q, W)$  y  $\mathcal{C}(Q', W')$  son equivalentes, por lo que la categoría de conglomerado asociada a una superficie no depende de la triangulación elegida.

**Definición 6.19.** Sea una categoría  $\mathcal{C}$  cualesquiera. Un objeto  $X$  se denominara indescomponible si es que no se puede expresar como un coproducto no trivial de objetos de  $\mathcal{C}$ .

En [5] se clasifican los módulos indescomponibles sobre una álgebra de cadenas, obteniendo que o bien son isomorfos a módulos cadena o bien a módulos de banda. En [2] se estudia los objetos indescomponibles de  $\mathcal{C}(S, M)$ , obteniendo que, por ejemplo, los objetos cadena están en relación biyectiva con las clases de homotopía de curvas no contráctiles que no son homotópicas a un segmento de borde. El resultado exacto se puede revisar en el teorema 1.1 de [2]. En el apéndice de [4] se prueba que los indescomponibles en la categoría de conglomerado se corresponden biyectivamente con los arcos en la superficie.

Sea  $M_1 = M(\gamma_1)$  y  $M_2 = M(\gamma_2)$  dos módulos cadena en  $J(Q, W)$  correspondientes a objetos cadena  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  en  $\mathcal{C}(S, M)$ . Por el teorema 5.5 tenemos que:

- Si  $M_1$  y  $M_2$  se cruzan en un módulo, entonces se encuentra una secuencia exacta corta no partida en  $\text{Mod } J(Q, W)$  de la forma:

$$0 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \oplus M_4 \rightarrow M_1 \rightarrow 0$$

- Si  $M_1$  y  $M_2$  se cruzan en una flecha, nuevamente se encuentra una secuencia exacta corta no partida en  $\text{Mod } J(Q, W)$  de la forma:

$$0 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow M_1 \rightarrow 0$$

En [34], lema 4.4, se prueba que toda secuencia exacta corta en  $\text{mod } J(Q, W)$  se levanta a un triángulo en  $\mathcal{C}(S, M)$ . Más precisamente, para una secuencia exacta corta en  $\text{mod } J(Q, W)$ , existe un triángulo en  $\mathcal{C}(S, M)$  tal que su imagen vía  $\text{Hom}_{\mathcal{C}(S, W)}(\Gamma, \cdot)$  es isomorfa a la secuencia dada. Usando lo anterior obtenemos:

- Si  $M_1$  y  $M_2$  se cruzan en un módulo y  $M_3 = M(\gamma_3)$  y  $M_4 = M(\gamma_4)$  son los módulos obtenidos al suavizar los módulos cadena, entonces existe un triángulo no partido en  $\mathcal{C}(S, M)$  dado por:

$$\gamma_2 \rightarrow \gamma_3 \oplus \gamma_4 \rightarrow \gamma_1 \rightarrow \gamma_2[1]$$

- Si  $M_1$  y  $M_2$  se cruzan en una flecha y  $M_3 = M(\gamma_3)$  es el módulo obtenido al suavizar los módulos cadena, entonces existe un triángulo no partido en  $\mathcal{C}(S, M)$  dado por:

$$\gamma_2 \rightarrow \gamma_3 \oplus \gamma_4 \rightarrow \gamma_1 \rightarrow \gamma_2[1]$$

donde  $\gamma_4 \neq 0$  si y solo si  $\gamma_4$  no es un segmento de borde.

**Teorema 6.1** ([4], Teorema 4.1). *Sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  dos objetos cadena en  $\mathcal{C}(S, M)$  tal que los arcos correspondientes se cruzan en  $(S, M)$ . Sean  $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$  y  $\gamma_6$  los objetos cadena correspondientes al suavizamiento de los arcos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ . Entonces existe un triángulo no partido en  $\mathcal{C}(S, M)$  de la forma:*

$$\gamma_2 \rightarrow \gamma_3 \oplus \gamma_4 \rightarrow \gamma_1 \rightarrow \gamma_2[1]$$

*y si el cruce de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  no es un auto-cruce son superposición en una triangulación de  $(S, M)$ , entonces se obtiene un triángulo no partido de la forma:*

$$\gamma_1 \rightarrow \gamma_5 \oplus \gamma_6 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \gamma_1[1]$$

*donde  $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$  y  $\gamma_6$  son objetos cero en  $\mathcal{C}(S, M)$  si es que se corresponden con segmentos de borde.*

**Corolario 6.2** ([4], Corolario 4.4). *Sean  $M$  y  $N$  dos módulos cadena sobre  $J(Q, W)$  y  $\gamma_M$  y  $\gamma_N$  los arcos correspondientes en  $(S, M)$  tal que  $\gamma_M$  y  $\gamma_N$  no se cruzan en un auto-cruce con superposición. Entonces:*

- 1) *Una base de  $\text{Ext}_{J(Q, W)}^1(M, N)$  viene dada por todas las secuencias cortas exactas encontradas en el teorema 5.5.*
- 2) *Se tiene la igualdad:*

$$\dim \text{Ext}_{J(Q, W)}^1(M, N) + \dim \text{Ext}_{J(Q, W)}^1(N, M) = \text{Int}(\gamma_M, \gamma_N) - k - k'$$

*donde  $k$  (resp.  $k'$ ) es el número de veces que  $M$  cruza a  $N$  (resp.  $N$  cruza a  $M$ ) en un 3-ciclo. En particular si  $M = N$  tenemos que:*

$$2\dim \text{Ext}_{J(Q, W)}^1(M, N) = \text{Int}(\gamma_M, \gamma_N) - 2k$$

En [39] se define la acción de cortar una superficie a lo largo de un arco. Siendo específicos, consideremos una triangulación  $T$  de la superficie que contiene al arco  $\alpha$ . La superficie se puede obtener pegando los triángulos de  $T$  a lo largo de cada uno de los lados emparejados (compartidos). Ahora, la superficie obtenida al cortar a lo largo de  $\alpha$ , denotada por  $(S, M)/\alpha$ , se obtiene de los mismos triángulos de  $T$  respetando el pegado, salvo por los lados que corresponden a  $\alpha$ . Esta nueva superficie tiene la propiedad de que la categorías de conglomerados asociadas son equivalentes. Para más detalles y una prueba de esto el lector puede consultar [39], teorema 5.

*Prueba del teorema 6.1 (extraída de [4]).* Realizaremos la prueba para los tres tipos de cruces que hemos definido en el capítulo anterior. Consideremos los módulos cadena asociados a  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ :  $M_1$  y  $M_2$  respectivamente.

- a) **Cruce en módulo.** Consideremos el caso en que el módulo  $M_1 = M(w_1)$  cruza a  $M_2 = M(w_2)$  en un módulo. Por el teorema 3.1, en términos de grafos serpientes este cruce se corresponde con un cruce de grafos serpientes en  $\mathcal{G}$ . Como se comentó anteriormente, usando el teorema 5.5 obtenemos el triángulo no partido:

$$\gamma_2 \rightarrow \gamma_3 \oplus \gamma_4 \rightarrow \gamma_1 \rightarrow \gamma_2[1]$$

Ponemos  $w_1 = P_1 w S_1$  y  $w_2 = P_2 w S_2$  donde  $w$  se corresponde con  $\mathcal{G}$ . Sean  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  los arcos correspondientes a  $\mathcal{G}$  (en orden). Ahora probaremos la segunda parte del teorema, es decir, los triángulos que involucran a  $\gamma_5$  y  $\gamma_6$ .

- 1) Si  $P_1 \neq 0, S_1 \neq 0, P_2 \neq 0, S_2 \neq 0$ . En este caso en la superficie tenemos la configuración que se muestra en la Figura 81

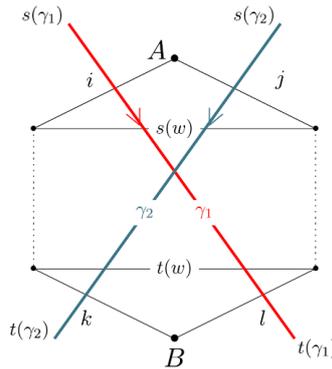


Figura 81: Configuración local de 1), extraída de [4], pág. 28

Como el cruce de los arcos no es un auto-cruce, existe un arco  $a = \tau_{AB}$  que une  $A$  y  $B$  y cruza a los arcos  $\tau_i$ . Si consideramos  $T'$  la triangulación que contiene a  $\tau_{AB}$  y que, además, cualquier flip de los arcos  $\tau_i$  que estén en  $T'$  están conectado a  $A$  pero no cortan a  $\tau_{AB}$ , entonces la configuración local de  $T'$  se vería como se muestra en la Figura 82

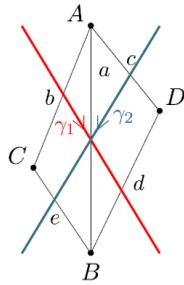


Figura 82: Triangulación  $T'$ , extraída de [4], página 29

Sea  $J(Q', W')$  el álgebra Jacobiana respecto a la triangulación  $T'$ ,  $w'_1$  la cadena asociada a  $\gamma_1$  en  $(S, M, T')$  y  $w_2$  la cadena asociada a  $\gamma_2$  en  $(S, M, T')$ . De la Figura 82 se tiene que  $w'_1$  contiene la palabra  $b \leftarrow a \rightarrow d$  y que  $w_2^{-1}$  (orientación invertida) contiene la palabra  $e \rightarrow a \leftarrow c$ . Entonces el módulo  $M'_2 = M(w'_2)$  cruza al módulo  $M'_1 = M(w'_1)$  en el módulo  $M(a)$ . Por el teorema 5.5 obtenemos una secuencia exacta corta no partida:

$$0 \rightarrow M'_1 \rightarrow M'_3 \oplus M'_4 \rightarrow M'_2 \rightarrow 0$$

donde  $M'_3$  y  $M'_4$  son los módulos cadena en  $J(Q', W')$  correspondientes a los arcos  $\gamma_5$  y  $\gamma_6$  en  $T'$ . Como la categoría no depende de la triangulación, obtenemos el triángulo:

$$\gamma_1 \rightarrow \gamma_5 \oplus \gamma_6 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \gamma_1[1]$$

- 2) Si  $P_1 = 0, S_1 \neq 0, P_2 \neq 0, S_2 \neq 0$ . Primero supongamos que  $P_2$  no es una cadena directa. Tenemos la configuración mostrada en la Figura 83

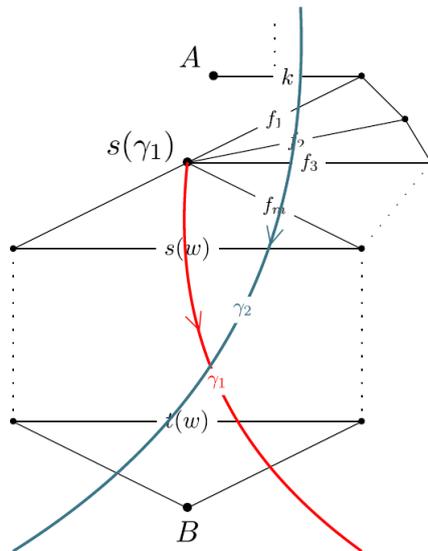


Figura 83: Configuración local de 2), extraída de [4], página 29

En la figura se tiene que  $A$  es un punto marcado, necesario para que la cadena no sea directa. Consideremos  $B$  el vértice del último triángulo. Siguiendo la misma estrategia del caso anterior (encontrar la triangulación  $T'$ ) se obtiene el mismo triángulo.

Supongamos ahora que  $P_2$  es una cadena directa. Sea  $\mathcal{B}$  la componente del borde que contiene a  $s(\gamma_1)$ . Hay algunos casos que ver:

- i) Si es que  $\mathcal{B}$  contiene otro punto marcado  $A$  diferente de  $s(\gamma_1)$  y  $s(\gamma_2)$  no está en  $\mathcal{B}$ , entonces se procede como en el caso en el que  $P_2$  no era directo (ver lado izquierdo de la figura 84)

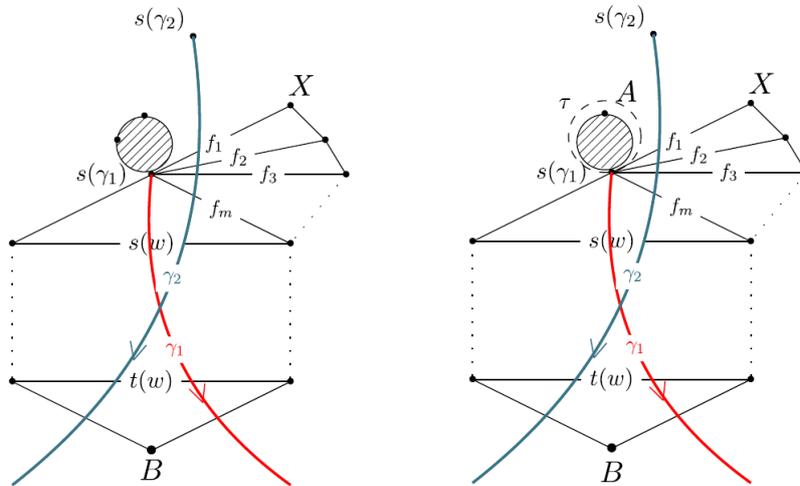


Figura 84: Casos i) y ii), extraída de [4], página 29.

- ii) Si  $s(\gamma_1)$  es el único punto marcado y  $s(\gamma_1) \neq s(\gamma_2)$ . Consideremos el conjunto  $M \subseteq M'$ , que resulta de agregar un punto marcado  $A \in \mathcal{B}$  (ver lado derecho de la figura 84) Añadimos el arco  $\tau = AX$  y completamos la triangulación  $T$  a una nueva triangulación  $T'$  de  $(S, M')$ . Usando el mismo argumento que en el caso en el que  $P_2$  no era directa, encontramos un triángulo  $\mathcal{C}(S, M')$  dado por:

$$\gamma_1 \rightarrow \gamma_5 \oplus \gamma_6 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \gamma_1[1]$$

Obtenemos ahora una triangulación  $T^*$  realizando un flip a  $T'$ , tal que  $T^*$  contiene el arco  $\tau'$  alrededor de  $\mathcal{B}$  (ver circunferencia punteada en la figura 84). Este nuevo arco forma un triángulo  $\Delta$  en  $T^*$ . Ahora cortamos la superficie a lo largo de  $\tau'$ , encontrando una superficie isotópica a  $(S, M)$ , ya que toda componente homomomorfa al triángulo  $\Delta$  la borramos. Como las categorías son equivalentes se obtiene el triángulo en  $\mathcal{C}(S, M)$ :

$$\gamma_1 \rightarrow \gamma_5 \oplus \gamma_6 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \gamma_1[1]$$

Si  $s(\gamma_2)$  está en  $\mathcal{B}$ . Este caso se reduce al caso en el que  $P_2$  no era directo y al caso ii). Análogo si  $s(\gamma_1) = s(\gamma_2)$ .

3) Los caso restantes se reducen a los anteriores (ver [4] para más detalles).

b) **Cruce en flecha.** Supongamos que  $M_1$  y  $M_2$  se cruzan en flecha.

1) Si el cruce ocurre en un triángulo interior de  $T$ . Sea  $\tau = BC$  (ver Figura 85 (a)). Realizando un flip a  $\tau$ , obtenemos  $\tau'$  que nos da una superposición y nos permite aplicar el método que se usó en el cruce de módulo para obtener el triángulo:

$$\gamma_1 \rightarrow \gamma_5 \oplus \gamma_6 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \gamma_1[1]$$

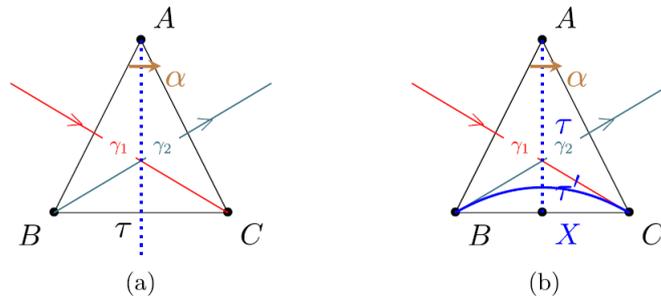


Figura 85: Cruce en flecha, extraída de [4], página 33.

2) Si el cruce ocurre en un triángulo de  $T$  donde  $BC$  es un segmento de borde. En este caso se tiene la configuración mostrada en la Figura 85 (b). Consideremos  $(S, M')$  donde  $M'$  se obtiene al agregar un punto marcado  $X$  que está en  $BC$ . Completamos la triangulación  $T$  añadiendo  $\tau = AX$ , obteniendo una superposición por este arco. Nuevamente usando los métodos de cruce de módulos obtenemos un triángulo en  $\mathcal{C}(S, M')$ :

$$\gamma_1 \rightarrow \gamma_5 \oplus \gamma_6 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \gamma_1[1]$$

Si cortamos a lo largo de  $\tau'$ , entonces  $\gamma_6$  se corresponde con un segmento de borde, por lo que el triángulo se convierte en un triángulo en  $\mathcal{C}(S, M)$  de la forma:

$$\gamma_1 \rightarrow \gamma_5 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \gamma_1[1]$$

c) **Cruce en un 3-ciclo.** Se aplican las mismas ideas que en el caso de cruce de flechas. Para ver más detalles revisar [4].

□

# Conclusiones

- Utilizando los grafos serpientes se expresó los cruces de curvas en el lenguaje de módulos cadena y así se evitó el problema de la isotopía en nuestra superficie.
- Usando el cruce de módulos cadena se encontró sucesiones exactas no partidas en la categoría  $\text{mod}J(Q, W)$ .
- Las secuencias exactas en la categoría de módulos dan lugar a triángulos en la categoría de conglomerado.
- En el corolario 6.2 se definió una base de  $\text{Ext}_{J(Q,W)}^1$  formada por las secuencias exactas cortas obtenidas al suavizar los módulos cadena; así como también se encontró una fórmula para la dimensión de este espacio.

# Apéndice A

## Teoría de módulos

### A.1 Definiciones básicas

**Definición A.1.** Sea  $R$  un anillo con  $1 \neq 0$ , un  $R$ -módulo a izquierda es un conjunto  $M$ , donde:

- a)  $(M, +)$  un grupo abeliano.
- b) Una función  $\cdot : R \times M \rightarrow M$  (denotaremos  $\cdot(r, m) = rm$ ) que cumple las siguientes condiciones:

- $(r + s)m = rm + sm, \quad \forall r, s \in R, \forall m \in M.$
- $(rs)m = r(sm), \quad \forall r, s \in R, \forall m \in M.$
- $r(m + n) = rm + rn, \quad r \in R, \forall m, n \in M.$
- $1m = m, \quad \forall m \in M.$

#### Observaciones.

- Si  $R$  es un cuerpo, entonces un  $R$ -módulo resulta ser un espacio vectorial sobre  $R$ , de ahí que se considere a estos como un caso particular de los módulos.
- Se define un  $R$ -módulo a derecha considerando una función  $\cdot : M \times R \rightarrow M$  que cumple las mismas condiciones (salvo por el orden de los factores). Salvo se diga lo contrario, siempre consideraremos que nuestros módulos son a izquierda.
- Si  $R$  es conmutativo y  $M$  es un  $R$ -módulo a izquierda, podemos considerarlo también como un  $R$ -módulo a derecha definiendo  $mr = rm$ .

**Definición A.2.** Sea  $R$  un anillo y  $M$  un  $R$ -módulo. Un subconjunto no vacío  $N \subseteq M$  es un sub  $R$ -módulo de  $M$  si para todo  $r \in R$  y  $x, y \in N$  se tiene que  $x + ry \in N$ .

Si se restringe las operaciones de  $M$  a  $N$  un sub  $R$ -módulo resulta ser un  $R$ -módulo por sí mismo.

**Definición A.3.** Sea  $R$  un anillo con  $1$ ,  $M$  y  $N$  dos  $R$ -módulos. Un homomorfismo de módulos a izquierda es un mapa  $\varphi : M \rightarrow N$  tal que para todo  $x, y \in M$  y  $r \in R$ :

$$\varphi(rx + y) = r\varphi(x) + \varphi(y)$$

De manera análoga, un homomorfismo de módulos a derecha es un mapa  $\varphi : M \rightarrow N$  que satisface  $\varphi(xr + y) = \varphi(x)r + \varphi(y)$ . Diremos que un homomorfismo de módulos es un isomorfismo de  $R$ -módulos si es biyectivo y se denotará por  $M \cong N$ .

**Definición A.4.** Dado  $\varphi : M \rightarrow N$  un homomorfismo de  $R$ -módulos, el kernel de  $\varphi$  es el conjunto:

$$\text{Ker}(\varphi) = \{m \in M \mid \varphi(m) = 0\}$$

Se puede verificar fácilmente que  $\text{Ker}(\varphi)$  es un  $R$ -módulo.

**Proposición A.1.** Sean  $R$  un anillo conmutativo con  $1$ ,  $M$  y  $N$  dos  $R$ -módulos, denotamos por  $\text{Hom}_R(M, N)$  al conjunto de todos los homomorfismos de  $R$ -módulos de  $M$  a  $N$ . Considerando la suma puntual y la acción:

$$(r\varphi)(m) = r\varphi(m), \quad \forall m \in M$$

donde  $r \in R$  y  $\varphi \in \text{Hom}_R(M, N)$ , se tiene que  $\text{Hom}_R(M, N)$  es un  $R$ -módulo.

**Definición A.5.** Sea  $M$  un  $R$ -módulo y  $N$  un sub  $R$ -módulo de  $M$ . El grupo abeliano  $(M/N, +)$  se puede convertir en un  $R$ -módulo haciendo:

$$r(x + N) = (rx) + N$$

Este módulo se denomina el módulo cociente de  $M$  por  $N$ . La proyección canónica  $\pi : M \rightarrow M/N$  definida por  $\pi(x) = x + N$  es un homomorfismo de  $R$ -módulos con kernel  $N$ .

**Teorema A.2** (Teoremas del isomorfismo). *Fijemos un anillo  $R$  con  $1 \neq 0$ .*

1) Sean  $M$  y  $N$  dos  $R$ -módulos y  $\varphi : M \rightarrow N$  un homomorfismo. Entonces:

$$\frac{M}{\text{Ker}(\varphi)} \cong \varphi(M)$$

2) Sean  $A$  y  $B$  dos submódulos de  $M$ , entonces  $A + B$  es un submódulo y:

$$\frac{A + B}{B} \cong \frac{A}{A \cap B}$$

3) Sean  $A$  y  $B$  dos submódulos de  $M$  con  $A \subseteq B$ , entonces:

$$\frac{M/A}{B/A} \cong \frac{M}{B}$$

4) Sea  $N$  un submódulo de  $M$ , entonces el conjunto de submódulos de  $M$  que contienen a  $N$  está en relación biyectiva con el conjunto de todos los submódulos de  $M/N$ . Esta relación viene dada por  $A \leftrightarrow A/N$ .

Sea  $M$  un módulo y  $N_1, \dots, N_k$  submódulos de  $M$ . Se define:

$$N_1 + \dots + N_k = \{a_1 + \dots + a_k \mid a_i \in N_i\}$$

Efectivamente, este conjunto resulta ser un submódulo de  $M$ , pues para  $r \in R$ :

$$(a_1 + \dots + a_k) + r(b_1 + \dots + b_k) = (a_1 + rb_1) + \dots + (a_k + rb_k)$$

Se puede verificar fácilmente que la intersección arbitraria de submódulos es un submódulo. Con este comentario, para un subconjunto  $A$  de  $M$  definimos el submódulo generado por  $A$  como la intersección de todos los submódulos de  $M$  que contienen a  $A$ . Al submódulo generado lo denotamos por  $\langle A \rangle$ .

**Proposición A.3.** *Sea  $M$  un  $R$ -módulo y  $A \subseteq M$  no vacío. Entonces:*

$$\langle A \rangle = RA = \{r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_m a_m \mid r_i \in R, a_i \in A, m \in \mathbb{N}\}$$

Si  $\langle A \rangle = N$ , diremos que  $N$  genera el módulo  $A$ . Si  $N$  es finito, diremos que  $N$  es finitamente generado. Note que en este caso, todo elemento de  $N$  se expresa como una combinación lineal finita de elementos de  $A$ .

**Ejemplo 38.** Sea  $R$  un anillo con  $1$  y  $n \in \mathbb{Z}$ , tenemos que  $R^n$  es un  $R$ -módulo con las operaciones:

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

$$r(a_1, \dots, a_n) = (ra_1, \dots, ra_n)$$

Si denotamos por  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  al vector entero cuya única coordenada no nula es justo la  $i$ -ésima, entonces:

$$R^n = Re_1 + \dots + Re_n$$

## A.2 Productos directos y sumas directas

Dada una colección finita o no, vamos a construir un módulo a partir de estos, en esta sección salvo se diga lo contrario consideraremos  $R$  un anillo con  $1 \neq 0$ .

**Definición A.6.** Sea  $I$  un conjunto arbitrario no vacío y  $\{A_i\}_{i \in I}$  una familia de conjuntos. El producto cartesiano de  $\{A_i\}$  se define como el conjunto de todas las funciones:

$$f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$$

que satisfacen  $f(i) \in A_i$  para todo  $i \in I$ . El producto cartesiano se denota por  $\prod_{i \in I} A_i$  y a sus elementos  $\prod_{i \in I} a_i$ , haciendo referencia que  $f(i) = a_i \in A_i$ . Para cada  $j$ , el conjunto  $A_j$  se denomina la  $j$ -ésima componente del producto cartesiano.

**Definición A.7.** Sea  $\{M_i\}_{i \in I}$  una familia arbitraria de  $R$ -módulos. El producto directo de los  $M_i$  se define como el producto directo de los  $M_i$  vistos como grupos abelianos (considerar el producto cartesiano y la operación definida componente a componente), con la acción:

$$r \left( \prod_{i \in I} a_i \right) = \prod_{i \in I} r a_i$$

Denotaremos al producto directo como  $\prod_{i \in I} M_i$ , se puede ver que es un  $R$ -módulo.

**Definición A.8.** Sea  $\{M_i\}_{i \in I}$  una familia arbitraria de  $R$ -módulos. La suma directa de los  $M_i$  es el subconjunto de  $\prod M_i$  que consiste en todos los elementos  $\prod m_i$  tal que solo una cantidad finita de componentes  $m_i$  son no nulas junto con la acción:

$$r \left( \prod_{i \in I} m_i \right) = \prod_{i \in I} r m_i$$

Denotaremos la suma directa como  $\bigoplus_{i \in I} M_i$ , se puede ver que es un sub  $R$ -módulo del producto directo.

En el caso en que  $I$  sea un conjunto finito, las nociones de producto directo y suma directa coinciden. Sin embargo, en el caso general esto no sucede.

**Proposición A.4.** Sea  $\{N_i\}_{i \in I}$  una familia de sub  $R$ -módulos de un módulo  $M$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:

- i) El submódulo de  $M$  generado por todos los  $N_i$  es isomorfo a la suma directa de los  $N_i$ .
- ii) Si  $\{i_1, \dots, i_k\}$  es cualquier subconjunto finito de  $I$ , entonces  $N_{i_1} \cap (N_{i_2} + \dots + N_{i_k}) = 0$ .
- iii) Si  $\{i_1, \dots, i_k\}$  es cualquier subconjunto finito de  $I$ , entonces  $N_1 + \dots + N_k = N_1 \oplus \dots \oplus N_k$ .
- iv) Para todo elemento  $x$  de  $M$ , el módulo generado por los  $N_i$ , existen únicos elementos  $a_i \in N_i$  tal que  $x = \sum a_i$ , donde los  $a_i$  son cero salvo un número finito de índices.

**Definición A.9.** Un  $R$ -módulo  $F$  se denomina libre sobre el subconjunto  $A$  de  $F$ , si para cada elemento no nulo  $x \in F$ , existen únicos  $r_1, \dots, r_n \in R$  y  $a_1, \dots, a_n \in A$  tales que  $x = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n a_n$ . En este caso, diremos que  $A$  es un base o conjunto de generadores libres de  $F$ . En el caso que  $R$  sea conmutativo, la cardinalidad de  $A$  se denomina el rango de  $F$ .

**Proposición A.5.** Dado  $A$  un conjunto, existe un  $R$ -módulo libre  $F(A)$  sobre  $A$  que satisface la siguiente propiedad universal: si  $M$  es cualquier  $R$ -módulo y  $\varphi : A \rightarrow M$  es cualquier mapa, entonces existe un único homomorfismo de módulos  $\psi : F(A) \rightarrow M$  tal que  $\psi(a) = \varphi(a)$  para todo  $a \in A$ , esto es, que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & F(A) \\ & \searrow \varphi & \downarrow \psi \\ & & M \end{array}$$

Si  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ , entonces se tiene que  $F(A) = Ra_1 \oplus \dots \oplus Ra_n \cong R^n$ .

### A.3 Producto tensorial

Sean  $A$  un  $R$ -módulo a derecha y  $B$  un  $R$ -módulo a izquierda. Consideremos  $F$  el grupo abeliano libre en  $A \times B$  y  $K$  el subgrupo de  $F$  generado por todos los elementos de la forma:

$$(a + a', b) - (a, b) - (a', b)$$

$$(a, b + b') - (a, b) - (a, b')$$

$$(ar, b) - (a, rb)$$

donde  $r \in R, a, a' \in A$  y  $b, b' \in B$ . Definimos el producto tensorial de  $A$  y  $B$  (bajo  $R$ ), denotado  $A \otimes_R B$ , como el cociente  $F/K$ . A las clases de  $A \otimes_R B$ , las denotaremos:

$$(a, b) + K = a \otimes b$$

y en este caso decimos que  $a \otimes b$  es el producto tensorial de  $a$  y  $b$ . Los elementos del producto tensorial son de la forma:

$$\sum_{\text{finito}} n_i (a_i \otimes b_i)$$

De la misma definición, el producto tensorial satisface las siguientes propiedades:

- $(a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b$ .
- $a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2$ .
- $(ar) \otimes b = a \otimes (rb)$ .

Tenemos el mapeo canónico  $i : A \times B \rightarrow A \otimes B$  definido por  $i(a, b) = a \otimes b$ . Reescribiendo las propiedades anteriores, podemos definir un tipo de mapa que nos permitirá caracterizar el producto tensorial.

**Definición A.10.** Sea  $M$  un  $R$ -módulo a derecha,  $N$  un  $R$ -módulo a izquierda y  $L$  un grupo abeliano (escrito aditivamente). Un mapa  $\varphi : M \times N \rightarrow L$  se denomina  $R$ -balanceado si satisface:

- 1)  $\varphi(m_1 + m_2, n) = \varphi(m_1, n) + \varphi(m_2, n)$ .
- 2)  $\varphi(m, n_1 + n_2) = \varphi(m, n_1) + \varphi(m, n_2)$ .
- 3)  $\varphi(m, rn) = \varphi(mr, n)$ .

para todo  $m, m_1, m_2 \in M$ ,  $n, n_1, n_2 \in N$  y  $r \in R$ .

Como se menciono antes,  $i$  resulta ser un mapa  $R$ -balanceado. Este tipo de mapas nos dan otra propiedad universal para el producto tensorial.

**Proposición A.6.** Sea  $R$  un anillo con 1,  $M$  un módulo a derecha y  $N$  un módulo a izquierda. Entonces:

- 1) Si  $\phi : M \otimes N \rightarrow L$  es un homomorfismo de grupos ( $L$  es un grupo abeliano) entonces  $\varphi = \phi \circ i$  es  $R$ -balanceado.
- 2) Recíprocamente, supongamos que  $L$  es un grupo abeliano y  $\varphi : M \times N \rightarrow L$  un mapa  $R$ -balanceado. Entonces existe un único homomorfismo de grupos  $\phi : M \otimes N \rightarrow L$ , tal que  $\varphi = \phi \circ i$ .

Equivalentemente, la correspondencia  $\varphi \leftrightarrow \phi$  en el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{i} & M \otimes N \\ & \searrow \varphi & \downarrow \phi \\ & & L \end{array}$$

establece una biyección entre los mapas  $R$ -balanceados  $\varphi$  y los homomorfismos de grupos  $\phi : M \otimes N \rightarrow L$ .

**Corolario A.7.** Si  $D$  es un grupo abeliano y  $i' : M \times N \rightarrow D$  es un mapa  $R$ -balanceado tal que:

- 1) La imagen de  $i'$  genera  $D$  como grupo abeliano
- 2) Para todo mapa  $R$ -balanceado  $\varphi$  definido en  $M \times N$ , existe  $\phi$  satisfaciendo:  $\varphi = \phi \circ i'$ .

Entonces existe un isomorfismo de grupos abelianos  $f : M \otimes N \rightarrow D$  tal que  $i' = f \circ i$ .

**Definición A.11.** Si  $R$  y  $S$  son anillos con 1, un grupo abeliano  $M$  se denomina un  $(S, R)$ -bimódulo si  $M$  es un  $S$ -módulo a izquierda, un  $R$ -módulo a derecha y  $s(mr) = (sm)r$  para todo  $s \in S, r \in R$  y  $m \in M$ .

**Ejemplo 39.** Sea  $R$  un anillo conmutativo, entonces un  $R$ -módulo a izquierda  $M$ , siempre se le puede dar una estructura de  $R$ -módulo a derecha, haciendo  $mr = rm$ . Entonces, podemos ver a un  $R$ -módulo a izquierda como un  $(R, R)$ -bimódulo. De manera análoga podemos hacerlo para módulos a derecha, haciendo  $rm = mr$ . Cuando dotamos de esta estructura a un  $R$ -módulo, diremos que tiene la estructura estándar.

Supongamos ahora que  $M$  es un  $(S, R)$ -bimódulo y  $N$  un  $R$ -módulo a izquierda. Podemos definir una acción en  $S$  a izquierda por:

$$s \left( \sum_{\text{finito}} m_i \otimes n_i \right) = \sum_{\text{finito}} (sm_i) \otimes n_i$$

Faltaría ver que está bien definida, en efecto, para  $s \in S$  el mapa  $(m, n) \mapsto (sm) \otimes n$  es  $R$ -balanceado de  $M \times N$  a  $M \otimes N$ . Por la proposición A.6, existe un homomorfismo de grupos (bien definido)  $\lambda_s$  de  $M \otimes N$  en sí mismo, tal que  $\lambda_s(m \otimes n) = (sm) \otimes n$ . Luego  $\lambda_s(\sum m_i \otimes n_i)$  no depende de la representación del tensor y usando el hecho que  $\lambda_s$  es un homomorfismo se llega a que coincide con  $\sum (sm_i) \otimes n_i$ .

Con esta acción  $M \otimes N$  es un  $S$ -módulo a izquierda. Análogamente, si  $M$  es un  $R$ -módulo a derecha y  $N$  es un  $(R, S)$ -bimódulo, entonces  $M \otimes N$  es un  $S$ -módulo a derecha con la acción:

$$\left( \sum_{\text{finito}} m_i \otimes n_i \right) s = \sum_{\text{finito}} m_i \otimes (n_i s)$$

Consideremos ahora que  $M$  es un  $(R, R)$ -módulo, donde  $R$  es un anillo con 1. El producto tensorial de  $M$   $n$  veces:

$$M^{\otimes n} = M \otimes M \dots \otimes M$$

por lo anterior será un  $R$ -bimódulo a izquierda y derecha, por lo que será un  $(R, R)$ -bimódulo por sí mismo.

**Proposición A.8.** Sean  $M$  un  $R$ -módulo a derecha,  $N$  un  $(R, S)$ -bimódulo y  $L$  un  $S$ -módulo a izquierda. Entonces la correspondencia  $(m \otimes n) \otimes l \mapsto m \otimes (n \otimes l)$  establece un isomorfismo de grupos abelianos :

$$(M \otimes N) \otimes L \cong M \otimes (N \otimes L)$$

Cabe decir, que si  $R$  es conmutativo y  $M, N$  son  $R$ -módulos (a izquierda y por lo tanto a derecha) entonces  $M \otimes N$  es un  $R$ -módulo con la acción:

$$r(m \otimes n) = (rm) \otimes n = m \otimes (rn)$$

En este caso el mapeo canónico  $i$  satisface  $ri(m, n) = i(rm, n) = i(m, rn)$ , este tipo de mapa los denominaremos  $R$ -bilineal.

**Definición A.12.** Sea  $R$  un anillo conmutativo con 1 y  $M, N, L$   $R$ -módulos. Un mapa  $\varphi : M \times N \rightarrow L$  se denomina  $R$ -bilineal si:

- i)  $\varphi(r_1 m_1 + r_2 m_2, n) = r_1 \varphi(m_1, n) + r_2 \varphi(m_2, n)$ .
- ii)  $\varphi(m, r_1 n_1 + r_2 n_2) = r_1 \varphi(m, n_1) + r_2 \varphi(m, n_2)$ .

**Proposición A.9.** *Supongamos que  $R$  es un anillo conmutativo con 1 y  $M, N$  dos  $R$ -módulos a izquierda (donde  $M$  tiene la estructura estándar). Entonces  $M \otimes N$  es un  $R$ -módulo a izquierda tal que:*

$$r(m \otimes n) = (rm) \otimes n = m \otimes (rn)$$

*y el mapeo canónico  $i$  es  $R$ -bilineal. Si  $L$  es cualquier otro  $R$ -módulo a izquierda hay una biyección entre los mapas  $R$ -bilineales y los homomorfismos de módulos entre  $M \otimes N$  y  $L$ .*

# Apéndice B

## Teoría de álgebras

### B.1 Álgebras y módulos sobre álgebras

Fijamos un cuerpo  $K$  arbitrario. Siempre que nos referiramos a un anillo, estamos suponiendo que es un anillo con  $1 \neq 0$ .

**Definición B.1.** Un  $K$ -álgebra  $A$ , es un anillo que tiene una estructura de  $K$ -espacio vectorial (a izquierda) satisfaciendo:

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$$

para todo  $\lambda \in K$  y  $a, b \in A$  y también que  $1_K 1_A$  donde  $1_K$  es la identidad de  $K$  y  $1_A$  es la identidad de  $A$ . Diremos que  $A$  es de dimensión finita si su dimensión como espacio vectorial es finita.

**Definición B.2.** Sean  $A$  y  $B$  dos  $R$ -álgebras, un homomorfismo (resp. isomorfismo) entre  $A$  y  $B$  es un homomorfismo (resp. isomorfismo) de anillos  $\varphi : A \rightarrow B$  que cumple:

- $\varphi(1) = 1$ .
- $\varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$  para  $\lambda \in K$  y  $a \in A$ .

Un  $K$ -espacio vectorial  $B$  de un  $K$ -álgebra  $A$  se denomina una  $K$ -subálgebra de  $A$  si es que  $1_A \in B$  y además  $bb' \in B$  para todo  $b, b' \in B$ . Un  $K$ -espacio vectorial  $I$  de  $A$  es un ideal a izquierda (resp. a derecha) si  $ax \in I$  (resp.  $xa \in I$ ) para  $x \in I$  y  $a \in A$ . Un ideal bilátero de  $A$  es un ideal a izquierda y a derecha. En este caso podemos cocientar y obtener el álgebra cociente  $A/I$  junto con la proyección canónica  $\pi : A \rightarrow A/I$  definida por  $\pi(a) = a + I$ . Esta proyección es un homomorfismo de  $K$ -álgebras.

**Ejemplo 40.** El cuerpo  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i$  es un  $\mathbb{R}$ -álgebra 2-dimensional, pero como  $\mathbb{Q}$ -álgebra es de dimensión infinita.

**Ejemplo 41.** Sea  $\mathbb{R}^{n \times n}$  el conjunto de todas las matrices de orden  $n \times n$  sobre  $\mathbb{R}$ . Este conjunto es un  $\mathbb{R}$ -álgebra de dimensión  $n^2$ . A su vez, el conjunto  $T_n(K)$  formado por las matrices triangulares inferiores es un subálgebra de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

**Ejemplo 42.** Sean  $A_1$  y  $A_2$  dos  $K$ -álgebras, el producto de  $K$ -álgebras  $A_1$  y  $A_2$  es el producto  $A = A_1 \times A_2$  como espacios vectoriales con la operación adicional  $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1, a_2b_2)$  para  $a_1, b_1 \in A_1$  y  $a_2, b_2 \in A_2$ .

**Ejemplo 43.** Sea  $A$  un  $K$ -álgebra, el álgebra opuesta de  $A$ , denotada  $A^{\text{op}}$  es el  $K$ -álgebra que como espacio vectorial es  $A$  pero su operación de multiplicación se define como  $a * b = ba$  para  $a, b \in A$ .

**Definición B.3.** Sea  $K$  un cuerpo y  $A$  una  $K$ -álgebra, un  $A$ -módulo a izquierda es un conjunto  $M$ , donde:

- a)  $(M, +)$  es un  $K$ -espacio vectorial.
- b)  $\cdot : A \times M \rightarrow M$  es una operación binaria que satisface las condiciones:
  - i)  $a(x + y) = ax + ay$ .
  - ii)  $(a + b)x = ax + bx$ .
  - iii)  $(ab)x = a(bx)$ .
  - iv)  $1_A x = x$ .
  - v)  $a(\lambda x) = (\lambda a)x = \lambda(ax)$ .

**Definición B.4.** Sea  $K$  un cuerpo y  $A$  una  $K$ -álgebra, un  $A$ -módulo a derecha es un conjunto  $M$ , donde:

- a)  $(M, +)$  es un  $K$ -espacio vectorial a derecha.
- b)  $\cdot : M \times A \rightarrow M$  es una operación binaria que satisface las condiciones:
  - i)  $(x + y)a = xa + ya$ .
  - ii)  $x(a + b) = xa + xb$ .
  - iii)  $x(ab) = (xa)b$ .
  - iv)  $x1_A = x$ .
  - v)  $(x\lambda)a = x(\lambda a) = (xa)\lambda$ .

Diremos que un  $A$ -módulo es de dimensión finita, si la dimensión como espacio vectorial es finita.

**Definición B.5.** Sean  $M, N$  dos  $A$ -módulos a izquierda (resp. a derecha). Un mapa lineal  $f : M \rightarrow N$  a izquierda (resp. a derecha) se denomina un homomorfismo de  $A$ -módulos si  $f(ax) = af(x)$  (resp.  $f(xa) = f(x)a$ ) para todo  $x \in M$  y  $a \in A$ . Si  $f$  es biyectivo, diremos que es un isomorfismo y que los módulos son isomorfos ( $M \cong N$ ).

Sea  $A$  un  $K$ -álgebra y  $M$  un  $A$ -módulo a derecha. Un subespacio  $M'$  de  $M$  se denomina un submódulo de  $M$  si  $xa \in M'$  para todo  $x \in M'$  y  $a \in A$ . El espacio vectorial cociente  $M/M'$  tiene una estructura de  $A$ -módulo a derecha definida por  $(x + M')a = xa + M'$  (de manera análoga para el caso de módulos a izquierda). Un submódulo  $M'$  de  $M$  es propio si  $M \neq M'$ .

**Definición B.6.** Para un ideal a derecha  $I$  y  $M$  un  $A$ -módulo a derecha, el conjunto:

$$MI = \{x_1a_1 + \dots + x_sa_s \mid x_i \in M, a_i \in I, s \in \mathbb{N}\}$$

es un submódulo de  $M$  denominado el submódulo generado por  $I$ .

**Definición B.7.** Un módulo  $M$  se denomina finitamente generado si existen  $x_1, \dots, x_s \in M$  tal que para cada  $x \in M$  existen  $a_i \in A$  tales que  $x = x_1a_1 + \dots + x_sa_s$ . En este caso denominamos a los  $x_i$  los generadores de  $M$ .

Para  $M_1, \dots, M_s$  submódulos de  $M$ , definimos:

$$M_1 + \dots + M_s = \{x_1 + \dots + x_s \mid x_i \in M_i\}$$

Es inmediato ver que  $M_1 + \dots + M_s$  es un submódulo de  $M$ .

**Proposición B.1.** Sea  $A$  un  $K$ -álgebra de dimensión finita y  $M$  un  $A$ -módulo a derecha. Entonces  $M$  es finitamente generado si y solo si  $M$  es de dimensión finita.

Sean  $A$  una  $K$ -álgebra y  $M, N$   $A$ -módulos a derecha. Denotaremos por  $\text{Hom}_A(M, N)$  el conjunto de todos los homomorfismo de  $M$  a  $N$ . Es inmediato ver que  $\text{Hom}_A(M, N)$  es un  $K$ -espacio vectorial con la adición y producto por un escalar usual:  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$  y  $(f\lambda)(x) = f(x\lambda) = f(x)\lambda$ . Si  $M, N$  son de dimensión finita, entonces  $\text{Hom}_A(M, N)$  también lo es pues es un subespacio de  $\text{Hom}_K(M, N)$ . El mapa composición:

$$\cdot : \text{Hom}_A(M, N) \times \text{Hom}_A(L, M) \rightarrow \text{Hom}_A(L, N)$$

es  $K$ -bilineal, como se puede verificar fácilmente. Denotaremos  $\text{End}_A(M) = \text{Hom}_A(M, M)$ , este espacio vectorial resulta ser un  $K$ -álgebra con identidad la función identidad.

**Definición B.8.** Sea  $f \in \text{Hom}_A(M, N)$ :

a) El kernel de  $f$  es el conjunto:

$$\text{Ker}(f) = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$$

b) El cokernel de  $f$  es  $\text{Coker}(f) = N/\text{Im}(f)$ .

Se verifica que  $\text{Ker}(f), \text{Im}(f)$  y  $\text{Coker}(f)$  son  $A$ -módulos a derecha. Además la correspondencia  $x + \text{Ker}(f) \mapsto f(x)$  establece un isomorfismo de  $A$ -módulos entre  $M/\text{Ker}(f)$  y  $\text{Im}(f)$ .

**Definición B.9.** La suma directa de  $A$ -módulos a derecha  $M_1, \dots, M_r$  se define como la suma directa como subespacios vectoriales  $M_1 \oplus \dots \oplus M_r$  junto con la operación:

$$(x_1, \dots, x_r)a = (x_1a, \dots, x_ra)$$

donde  $x_i \in M_i$  y  $a \in A$ . Denotaremos  $M^r$  como la suma directa  $M \oplus \dots \oplus M$   $m$  veces. Diremos que un  $A$ -módulo  $M$  es la suma directa de los  $A$ -submódulos  $M_1, \dots, M_r$  si todo elemento  $m \in M$  se expresa de manera única como  $m = m_1 + \dots + m_r$  con  $m_i \in M_i$ . Esto lo denotaremos  $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_r$ .

**Definición B.10.** Un  $A$ -módulo a derecha  $M$  se denomina indescomponible si  $M$  es no nulo y no es suma directa de dos submódulos a derecha de  $M$ .

**Proposición B.2.** Sea  $A$  una  $K$ -álgebra,  $M$  es un  $A$ -módulo a derecha y  $M_1, \dots, M_r$  submódulos a derecha de  $M$ . Entonces  $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_r$  si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

- 1)  $M = M_1 + \dots + M_r$ .
- 2)  $M_i \cap \left( \sum_{j \in \{1, \dots, r\} \setminus \{i\}} M_j \right) = 0$  para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$ .

**Definición B.11.** Sean  $A, B, C$   $K$ -álgebras. Un  $(A, B)$ -bimódulo  $M$ , es un  $K$ -espacio vectorial que es un  $A$ -módulo a izquierda y un  $B$ -módulo a derecha y además satisface:

$$a(xb) = (ax)b$$

para  $x \in M, a \in A, b \in B$ . Un  $(A, A)$ -bimódulo simplemente se denomina un  $A$ -bimódulo.

Todo  $A$ -módulo a derecha  $M$  es un  $(K, A)$ -bimódulo considerando  $\lambda m = m\lambda$  para  $m \in M, \lambda \in K$ . Análogamente todo  $A$ -módulo a izquierda  $N$  es un  $(A, K)$ -bimódulo haciendo  $n\lambda = \lambda n$  para  $n \in N, \lambda \in K$ .

## B.2 Producto tensorial

Sea  $A$  un  $K$ -álgebra,  $X$  un  $A$ -módulo a derecha e  $Y$  un  $A$ -módulo a izquierda. Consideremos  $F$  el  $K$ -espacio vectorial con base  $X \times Y$  y  $F_0$  el subespacio de  $F$  generado por los elementos de la forma:

$$\begin{aligned} (x + x', y) - (x, y) - (x', y) \\ (x, y + y') - (x, y) - (x, y') \\ (xa, y) - (x, ay) \quad \lambda(x, y) - (\lambda x, y) \end{aligned}$$

donde  $x, x' \in X, y, y' \in Y, a \in A$  y  $\lambda \in K$ . Consideramos el espacio cociente:

$$X \otimes_A Y := F/F_0$$

Denotaremos  $x \otimes y$  a la clase  $(x, y) + F_0$ . De la misma definición se tiene que:

$$(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$$

$$x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y'$$

$$(xa) \otimes y = x \otimes (ay) \quad \lambda(x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y$$

donde  $x, x' \in X, y, y' \in Y, a \in A$  y  $\lambda \in K$ . Los elementos de  $X \otimes_A Y$  son expresiones de la forma:

$$\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$$

donde  $x_i \in X, y_i \in Y$ . El  $K$ -espacio vectorial  $X \otimes_A Y$  se denomina el producto tensorial de  $X$  e  $Y$  sobre  $A$ .

**Definición B.12.** Dado  $V$  un  $K$ -espacio vectorial, un mapa  $\phi : X \times Y \rightarrow V$  es  $A$ -bilineal si para todo  $x, x_1, x_2 \in X, y, y_1, y_2 \in Y$  y  $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ :

- 1)  $\phi(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 \phi(x, y_1) + \alpha_2 \phi(x, y_2)$ .
- 2)  $\phi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 \phi(x_1, y) + \alpha_2 \phi(x_2, y)$ .
- 3)  $\phi(xa, y) = \phi(x, ay)$ .

La proyección canónica  $\pi : X \times Y \rightarrow X \otimes_A Y$  definida por  $\pi(x, y) = x \otimes y$  claramente es  $A$ -bilineal.

**Proposición B.3** (Propiedad universal). *Sea  $X$  un  $A$ -módulo a derecha,  $Y$  un  $A$ -módulo a izquierda,  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y  $\phi : X \times Y \rightarrow V$  un mapa  $A$ -bilineal. Entonces, existe un único mapa lineal  $\varphi : X \otimes_A Y \rightarrow V$  tal que  $\varphi(x \otimes y) = \phi(x, y)$  para todo  $x \in X, y \in Y$ , en otras palabras que el siguiente diagrama conmute:*

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\pi} & X \otimes_A Y \\ & \searrow \phi & \downarrow \varphi \\ & & V \end{array}$$

Sea  $M$  un  $(A, B)$ -bimódulo,  $X$  un  $A$ -módulo a derecha e  $Y$  un  $B$ -módulo a izquierda. Los productos tensoriales  $X \otimes_A M$  y  $M \otimes_B Y$  tienen una estructura de  $B$ -módulo a derecha y  $A$ -módulo a izquierda respectivamente definidas por:

$$(x \otimes m)b = x \otimes (mb) \quad a(m \otimes y) = (am) \otimes y$$

para  $x \in X, y \in Y, m \in M, a \in A, b \in B$ . Más aún si  $X$  es un  $(A, C)$ -bimódulo e  $Y$  es un  $(C, B)$ -bimódulo, se tiene que  $X \otimes_C Y$  es un  $(A, B)$ -bimódulo con la estructura:

$$a(x \otimes y)b = (ax) \otimes (yb)$$

para  $x \in X, y \in Y, a \in A, b \in B$ . La siguiente proposición nos dice que se cumple la asociatividad para el producto tensorial.

**Proposición B.4.** Sea  $X_A$  un  $A$ -módulo a derecha,  $Y$  un  $(A, B)$ -bimódulo y  $Z$  un  $B$ -módulo a izquierda. Entonces el mapa:

$$\varphi_{X,Y,Z} : (X \otimes_A Y) \otimes_B Z \rightarrow X \otimes_A (Y \otimes_B Z)$$

definido por  $\varphi_{X,Y,Z}((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z)$ , para  $x \in X, y \in Y, z \in Z$  es un isomorfismo.

Finalizamos esta sección con la definición del álgebra tensorial. Dado  $K$  un cuerpo y  $A_1, \dots, A_n$   $K$ -álgebras. Entonces el producto tensorial:

$$A_1 \otimes_K A_2 \otimes_K \cdots \otimes_K A_n$$

es una  $K$ -álgebra con multiplicación definida por:

$$(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n)(b_1 \otimes b_2 \otimes \cdots \otimes b_n) = (a_1 b_1 \otimes a_2 b_2 \otimes \cdots \otimes a_n b_n)$$

donde  $a_i, b_i \in A_i$  y:

$$1_{A_1 \otimes_K A_2 \otimes_K \cdots \otimes_K A_n} = 1_{A_1} \otimes_K 1_{A_2} \otimes_K \cdots \otimes_K 1_{A_n}$$

En el caso en que  $A_i = A$  denotaremos:

$$A^{\otimes n} = A \otimes_K A \otimes_K \cdots \otimes_K A \text{ (} n \text{ veces)}$$

Esta álgebra se denomina la  $n$ -ésima álgebra tensorial de  $A$ .

Ahora sea  $M$  un  $A$ -bimódulo, definimos:

$$T^0(M) = A$$

$$T^n(M) = M \otimes_A M \otimes_A \cdots \otimes_A M \text{ (} n \text{ veces)}$$

Entonces, el  $K$ -espacio vectorial:

$$T(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(M)$$

es un  $K$ -álgebra donde la multiplicación viene dada por:

$$(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_m)(y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_n) = (x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n)$$

para  $(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_m) \in T^m(M)$ ,  $(y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_n) \in T^n(M)$  y la identidad  $1_A$  es la misma que la identidad de  $T(A)$ .

Además  $T(A)$  también es un  $A$ -módulo, basta considerar las estructuras:

$$a(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_m) = (ax_1) \otimes \cdots \otimes x_m$$

$$(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_m)a = x_1 \otimes \cdots \otimes (x_m a)$$

para  $a \in A = T^0(M)$  y  $x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \in T^m(M)$ .

## B.3 Módulos proyectivos e inyectivos

Sea  $A$  una  $K$ -álgebra de dimensión finita. Un módulo  $F$  se denomina libre si es que  $F$  es isomorfo a una suma directa del módulo  $A$  (el álgebra vista como un módulo).

**Definición B.13.** Un módulo  $P$  se denomina proyectivo si es que para cada epimorfismo  $h : M \rightarrow N$  y  $f \in \text{Hom}_A(P, N)$ , existe  $g \in \text{Hom}_A(P, M)$  tal que  $hg = f$ . En otras palabras, si el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ g \swarrow & & \downarrow f \\ M & \xrightarrow{h} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

**Lema B.5.** Sea  $P$  un módulo, las siguientes condiciones son equivalentes:

- i)  $P$  es un módulo proyectivo.
- ii) Todo epimorfismo  $h : M \rightarrow P$  es una retracción.
- iii) Existe un módulo libre  $F$  y un módulo  $P'$  tal que  $P \oplus P' \cong F$ .

*Demostración.* Ver en [25]. □

**Definición B.14.** Sea  $A$  un álgebra de dimensión finita, un módulo  $E$  se denomina inyectivo si es que para cualquier monomorfismo  $u : M \rightarrow N$  y  $w \in \text{Hom}_A(M, E)$  existe  $v \in \text{Hom}_A(N, E)$  tal que  $w = vu$ . En otras palabras si el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{u} & N \\ \downarrow w & & \swarrow v \\ E & & \end{array}$$

**Lema B.6.** Sea  $E$  un módulo, las siguientes condiciones son equivalentes:

- i)  $E$  es un módulo inyectivo.
- ii) Todo monomorfismo  $f : E \rightarrow M$  es una sección.

*Demostración.* Ver en [25]. □

## B.4 El espacio de extensiones

**Definición B.15.** Una secuencia de homomorfismos (finita o infinita):

$$\cdots \rightarrow X_{n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} X_n \xrightarrow{h_n} X_{n+1} \rightarrow \cdots$$

se denomina exacta si  $\text{Ker}(h_n) = \text{Im}(h_{n-1})$  para todo  $n$ . En particular:

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{r} N \rightarrow 0$$

se denomina una sucesión exacta corta si  $u$  es un monomorfismo,  $r$  un epimorfismo e  $\text{Im}(u) = \text{Ker}(r)$ .

**Definición B.16.** Sea una secuencia exacta corta:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \rightarrow 0$$

Diremos que es partida si existe un isomorfismo  $f : B \rightarrow A \oplus C$  tal que  $f \circ a : A \rightarrow A \oplus C$  es la inclusión y  $p \circ f = b$ . Esto se puede representar por el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow f & & \downarrow \text{id} & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & A \oplus C & \xrightarrow{p} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Figura 86: Diagrama conmutativo de una secuencia partida

Una resolución proyectiva de un módulo  $M$  es una secuencia exacta de la forma:

$$\cdots \rightarrow P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \rightarrow 0$$

donde todos los módulos  $P_n$  son proyectivos. Diremos que una resolución proyectiva es mínima si  $P_0 \xrightarrow{d_0} M$  y  $d_n : P_n \rightarrow \text{Im } d_n$  son cubiertas proyectivas para cada  $n$ .

Dualmente, una resolución inyectiva de un módulo  $M$  es una secuencia exacta de la forma:

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{d^0} I_0 \xrightarrow{d^1} I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_{n-1} \xrightarrow{d^n} I_n \xrightarrow{d^{n+1}} I_{n+1} \rightarrow \cdots$$

donde todos los módulos  $I_n$  son inyectivos. Diremos que una resolución proyectiva es mínima si  $M \xrightarrow{d^0} I_0$  y  $\text{Im } d^n \rightarrow I_n$  son sobres inyectivos para cada  $n$ .

Vamos a estudiar a partir de ahora lo que es una extensión y el espacio de extensiones correspondiente. Fijemos  $A$  un  $K$ -álgebra de dimensión finita.

**Definición B.17.** Una secuencia exacta corta de  $A$ -módulos:

$$\mathbb{E} : 0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

se denomina extensión de  $L$  por  $N$ . Diremos que dos extensiones son equivalentes si existe  $h \in \text{Hom}_A(M, M')$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{id}_L & & \downarrow h & & \downarrow \text{id}_N & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

En este caso escribiremos  $\mathbb{E} \cong \mathbb{E}'$  y es fácil ver que  $h$  es un isomorfismo.

Para dos módulos  $L$  y  $N$  denotaremos por  $\varepsilon_A(N, L)$  el conjunto de todas las extensiones de  $L$  por  $N$ . Tenemos que ser equivalente es una relación de equivalencia y denotaremos:

$$\text{ext}_A^1(N, L) = \varepsilon_A(N, L) / \cong$$

**Lema B.7.** Sean  $L$  y  $N$  módulos sobre  $A$  y:

$$\mathbb{E} : 0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

$$\mathbb{E}' : 0 \rightarrow L \xrightarrow{f'} M' \xrightarrow{g'} N \rightarrow 0$$

dos extensiones de  $L$  por  $N$ . Entonces existe una extensión:

$$\mathbb{E}'' : 0 \rightarrow L \xrightarrow{f''} M'' \xrightarrow{g''} N \rightarrow 0$$

de  $L$  por  $N$  donde  $M'' = V/U$ ,

$$V = \{(m, m') \in M \oplus M' \mid g(m) = g'(m')\}$$

$$U = \{(f(x), -f'(x)) \in M \oplus M' \mid x \in L\}$$

$f'' : L \rightarrow M''$  viene dado por  $f''(x) = (f(x), 0) + U$  para  $x \in L$  y  $g'' : M'' \rightarrow N$  viene dado por  $g''((m, m') + U) = g(m) = g'(m')$  para  $(m, m') \in V$ .

*Demostración.* Ver en [25]. □

La extensión  $\mathbb{E}''$  del lema anterior se denota por  $\mathbb{E} + \mathbb{E}'$ . El siguiente lema nos dice que esta extensión define una operación.

**Lema B.8.** Sean  $L$  y  $N$  dos módulos y:

$$\mathbb{E} : 0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0, \quad \mathbb{E}' : 0 \rightarrow L \xrightarrow{f'} M' \xrightarrow{g'} N \rightarrow 0$$

$$\overline{\mathbb{E}} : 0 \rightarrow L \xrightarrow{\overline{f}} \overline{M} \xrightarrow{\overline{g}} N \rightarrow 0, \quad \overline{\mathbb{E}'} : 0 \rightarrow L \xrightarrow{\overline{f'}} \overline{M'} \xrightarrow{\overline{g'}} N \rightarrow 0$$

extensiones de  $L$  por  $N$  tales que  $\mathbb{E} \cong \overline{\mathbb{E}}$  y  $\mathbb{E}' \cong \overline{\mathbb{E}'}$ . Entonces  $\mathbb{E} + \mathbb{E}' \cong \overline{\mathbb{E}} + \overline{\mathbb{E}'}$ .

*Demostración.* Ver en [25]. □

Podemos definir una adición en  $\text{ext}_A^1(N, L)$  dada por la suma de clases:

$$[\mathbb{E}] + [\mathbb{E}'] = [\mathbb{E} + \mathbb{E}']$$

Ahora, sean  $L, N$  módulos sobre  $A$  y:

$$\mathbb{E} : 0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

una extensión de  $L$  por  $N$ . Para un homomorfismo  $v : V \rightarrow N$  de módulos, existe un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{i} & M \times_N V & \xrightarrow{v'} & V & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{id}_L & & \downarrow g' & & \downarrow v & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Un resultado análogo se tiene para  $u : L \rightarrow U$ . Así, tenemos dos mapas:

$$\text{ext}_A^1(N, u) : \text{ext}_A^1(N, L) \rightarrow \text{ext}_A^1(N, U)$$

$$\text{ext}_A^1(v, L) : \text{ext}_A^1(N, L) \rightarrow \text{ext}_A^1(V, L)$$

tal que  $\text{ext}_A^1(N, u)([\mathbb{E}]) = [u\mathbb{E}]$  y  $\text{ext}_A^1(v, L)([\mathbb{E}]) = [\mathbb{E}v]$ . Más aún, estos mapeos resultan ser lineales.

Sean  $L, N$  modulos, definiremos un espacio vectorial  $\text{Ext}_A^1(N, L)$ , que consistirá en una resolución proyectiva minimal y dos morfismos lineales:

$$\text{Ext}_A^1(N, u) : \text{Ext}_A^1(N, L) \rightarrow \text{Ext}_A^1(N, U)$$

$$\text{Ext}_A^1(v, L) : \text{Ext}_A^1(N, L) \rightarrow \text{Ext}_A^1(V, L)$$

Consideramos la resolución proyectiva minimal:

$$\cdots \rightarrow P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} N \rightarrow 0$$

Aplicamos el funtor contravariante  $\text{Hom}_A(-, L) : \text{mod}(A) \rightarrow \text{mod}(K)$  que nos da:

$$\text{Hom}_A(P_0, L) \xrightarrow{\text{Hom}_A(d_1, L)} \text{Hom}_A(P_1, L) \xrightarrow{\text{Hom}_A(d_2, L)} \text{Hom}_A(P_2, L)$$

donde  $\text{Hom}_A(d_2, L)\text{Hom}_A(d_1, L) = \text{Hom}_A(d_1 d_2, N) = 0$ .

**Definición B.18.** Definimos el espacio de extensiones como:

$$\text{Ext}_A^1(N, L) = \frac{\text{Ker}(\text{Hom}_A(d_2, L))}{\text{Im}(\text{Hom}_A(d_1, L))}$$

# Apéndice C

## Carcajes y sus representaciones

**Definición C.1.** Un quiver o carcaj es un cuarteto  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$  donde:

- $Q_0$  es un conjunto cuyos elementos se les denominan vértices.
- $Q_1$  es un conjunto cuyos elementos se les denominan flechas.
- $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$  que asocia una flecha  $\alpha \in Q_1$  su punto de inicio  $a = s(\alpha)$  y su punto final  $b = t(\alpha)$ . Esto lo denotaremos simplemente por  $\alpha : a \rightarrow b$ .

**Observaciones.** Diremos que un carcaj es finito si  $Q_0$  y  $Q_1$  son conjuntos finitos.

**Definición C.2.** Sea  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$  un carcaj y  $a, b \in Q_0$ . Un camino de longitud  $l \geq 1$  con inicio  $a$  y final  $b$  es una secuencia de flechas  $\alpha_k \in Q_1$  tales que  $s(\alpha_1) = a, t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$  y  $t(\alpha_l) = b$  para cada  $k \in \{1, \dots, l-1\}$ . Esto lo podemos ver como:

$$a = a_0 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \xrightarrow{\alpha_2} a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_{l-1} \xrightarrow{\alpha_l} a_l = b$$

Denotaremos por  $Q_l$  al conjunto de caminos de  $Q$  que tienen longitud  $l$ . Un camino se denominará cíclico si su inicio y final coinciden. Un quiver que no tiene ciclos se denominará acíclico.

**Observación.** Para abreviar, denotaremos a un camino como en la definición anterior simplemente por:  $(a | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l | b)$ .

Dados dos caminos  $(a | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l | b)$  y  $(c | \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k | d)$  de longitud  $l$  y  $k$  respectivamente, definimos el producto de estos como su concatenación, en otras palabras:

$$(a | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l | b)(c | \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k | d) = \delta_{bc}(a | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_k | d)$$

donde  $\delta_{bc}$  es el delta de Kronecker. Si el punto final del primer camino no coincide con el inicio del segundo, entonces su producto será el camino cero.

**Definición C.3.** Sea  $Q$  un carcaj finito y  $K$  un cuerpo. El álgebra de caminos  $KQ$  es el  $K$ -álgebra que visto como espacio vectorial es aquel que tiene como base a todos los caminos de longitud  $l \geq 0$  y como producto al producto de caminos definido anteriormente.

Tenemos que el álgebra de caminos se puede descomponer como:

$$KQ = KQ_0 \oplus KQ_1 \oplus KQ_2 \oplus \cdots \oplus KQ_l \oplus \cdots$$

donde para cada  $l \geq 0$   $KQ_l$  es el subespacio de  $KQ$  generado por todos los caminos de longitud  $l$ . Más aún, tenemos que  $(KQ_l)(KQ_m) \subseteq KQ_{l+m}$  para todo  $l, m \geq 0$  por lo que  $KQ$  es un álgebra  $n$ -graduada sobre  $K$ .

**Definición C.4.** Sea  $Q$  un carcaj finito, el ideal de flechas es el subespacio:

$$R_Q = KQ_1 \oplus KQ_2 \oplus \cdots \oplus KQ_l \oplus \cdots$$

del álgebra de caminos  $KQ$ . De manera similar, para  $l \geq 1$  definimos:

$$R_Q^l = \bigoplus_{m \geq l} KQ_m$$

**Definición C.5.** Un ideal bilátero  $I$  de  $KQ$  se denomina admisible si es que existe  $m \geq 2$  tal que:

$$R_Q^m \subseteq I \subseteq R_Q^2$$

En este caso al par  $(Q, I)$  lo denominamos carcaj acotado y al álgebra cociente  $KQ/I$  el álgebra de carcaj acotada.

**Proposición C.1.** Sea  $Q$  un carcaj finito e  $I$  un ideal admisible de  $KQ$ . Entonces  $KQ/I$  es un álgebra de dimensión finita.

*Demostración.* Ver en [25]. □

**Definición C.6.** Sea  $Q$  un carcaj, una relación en  $KQ$  es una combinación lineal de la forma:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$$

donde  $w_i$  son caminos en  $Q$  de longitud al menos 2 que tienen el mismo inicio y el mismo final.

**Proposición C.2.** Sea  $Q$  un carcaj finito,  $K$  un cuerpo e  $I$  un ideal admisible en  $KQ$ . Entonces  $I$  está generado por un número finito de relaciones.

*Demostración.* Ver en [25]. □

**Definición C.7.** Sea  $Q$  un carcaj finito, una representación de  $Q$  es una colección:

$$M = (M_a, \varphi_\alpha), a \in Q_0, \alpha \in Q_1$$

donde  $M_a$  son espacios vectoriales y  $\varphi_\alpha : M_{s(\alpha)} \rightarrow M_{t(\alpha)}$  son mapeos lineales. Diremos que la representación es finita si es que cada espacio  $M_a$  es de dimensión finita.

**Definición C.8.** Sean  $M = (M_a, \varphi_\alpha)$  y  $N = (N_a, \psi_\alpha)$  dos representaciones de  $Q$  sobre  $K$ . Un morfismo de representaciones  $f : M \rightarrow N$  es una familia  $f = (f_a)_{a \in Q_0}$  de mapas lineales  $f_a : M_a \rightarrow N_a$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M_{s(\alpha)} & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_{t(\alpha)} \\ \downarrow f_{s(\alpha)} & & \downarrow f_{t(\alpha)} \\ C & \xrightarrow{\psi_\alpha} & D \end{array}$$

Un morfismo  $f = (f_a)_{a \in Q_0}$  de representaciones se denomina isomorfismo si todos los  $f_a$  son isomorfismos. Denotaremos por  $\text{Hom}_Q(M, N)$  el conjunto de todos los morfismos de representaciones de  $M$  a  $N$ .

Sea  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$  un carcaj finito e  $I$  un ideal admisible de  $KQ$ . Consideremos una representación  $M = (M_a, \varphi_\alpha)$  y un camino  $w = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_l$  de longitud  $l \geq 1$  en  $Q$ . Definimos el siguiente mapa lineal:

$$\varphi_w = \varphi_{\alpha_l} \varphi_{\alpha_{l-1}} \cdots \varphi_{\alpha_2} \varphi_{\alpha_1} : M_{s(\alpha_1)} \rightarrow M_{t(\alpha_l)}$$

que se denomina mapa de evaluación de  $M$  en el camino  $w$ . Para una combinación lineal (relación):

$$\tau = \sum_{i=1}^r \lambda_i w_i$$

de caminos en  $Q$  teniendo el mismo inicio  $a$  y final  $b$ . Definimos:

$$\varphi_\tau = \sum_{i=1}^r \lambda_i \varphi_{w_i} : M_a \rightarrow M_b$$

**Definición C.9.** Diremos que una representación  $M$  está acotada por  $I$  o que satisface las relaciones en  $I$ , si tenemos  $\varphi_\tau = 0$  para todas las relaciones  $\tau \in I$ .

Para un carcaj acotado  $(Q, I)$  denotaremos  $\text{Rep}_K(Q, I)$  a la categoría de representaciones de  $Q$  acotadas por  $I$ . Se puede verificar que es una  $K$ -categoría.

**Teorema C.3.** Sea  $A = KQ/I$ , existe una equivalencia lineal entre categorías:

$$F : \text{Mod } A \rightarrow \text{Rep}_K(Q, I)$$

Expondremos como asociar una representación a un módulo Consideremos  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$  y para cada vértice  $a \in Q_0$  tenemos el idempotente  $\varepsilon_a = (a||a)$  de  $KQ$  que nos da el idempotente  $e_a = \varepsilon_a + I$ .

Dado un módulo  $M$ , para cada vértice  $a \in Q_0$  hacemos  $M_a = Me_a$  y para cada flecha  $\alpha \in Q_1$  definimos:

$$\varphi_\alpha : M_{s(\alpha)} \rightarrow M_{t(\alpha)}$$

por  $\varphi_\alpha(x) = x\bar{\alpha}$  donde  $x \in M_{s(\alpha)}$  y  $\bar{\alpha} = \alpha + I$ . Se puede comprobar que efectivamente  $F(M)$  definido como lo hemos hechos está acotada por  $I$ . Para poder ver más detalles sobre la prueba de este teorema el lector puede consultar [25].

# Apéndice D

## Teoría de Categorías

### D.1 Conceptos básicos

**Definición D.1** (Categoría). Una categoría  $\mathcal{C}$  consiste en la siguiente información:

- 1) Clase de objetos:  $\text{Ob}(\mathcal{C})$ .
- 2) Para  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  existe un conjunto  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  de **morfismos** que cumple las siguientes condiciones:

- Para todo  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  existe  $1_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ .
- Para  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  y  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$  existe una función:

$$\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

que asocia al par  $(f, g)$  el morfismo  $g \circ f$ . Esta operación se conoce como **composición**. Denotaremos al morfismo  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  simplemente por  $f : A \rightarrow B$ .

- 3) La composición de morfismos es asociativa, es decir:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

- 4) Para todo morfismo  $f : A \rightarrow B$  se cumple que  $f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$ .

**Definición D.2** (Isomorfismos). Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Diremos que  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  es un isomorfismo si existe  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$  tal que:

$$g \circ f = 1_A \text{ y } f \circ g = 1_B$$

Se prueba que  $g$ , si existe, es única. Denotaremos, usualmente,  $g = f^{-1}$ .

Diremos que los objetos  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  son isomorfos si y solo si existe un isomorfismo  $f : A \rightarrow B$ . A un morfismo de la forma  $f : A \rightarrow A$  lo denominaremos endomorfismo y denotaremos  $\text{End}(A) = \text{Hom}(A, A)$ . Si  $f \in \text{End}(A)$  es un isomorfismo, diremos que es un automorfismo.

**Ejemplo 44.** La categoría de grupos **Grp** donde los objetos son los grupos y los morfismos son los homomorfismos de grupos. La categoría de  $R$ -módulos **Mod** donde los objetos son los  $R$ -módulos y los morfismos son los homomorfismos de módulos. La categoría de espacios topológicos **Top** donde los objetos son los espacios topológicos y los morfismos son las funciones continuas.

**Definición D.3** (Monomorfismo). Diremos que  $f : A \rightarrow B$  es un monomorfismo si para todo objeto  $Z$  y todo par de morfismos  $\alpha', \alpha'' : Z \rightarrow A$  se cumple:

$$f \circ \alpha' = f \circ \alpha'' \implies \alpha' = \alpha''$$

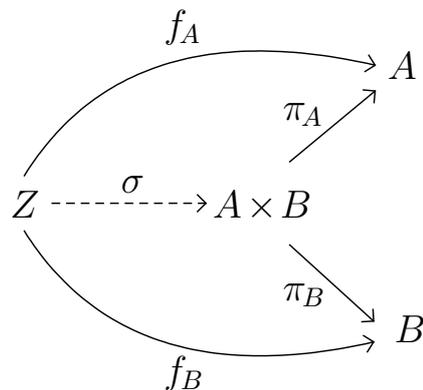
**Definición D.4** (Epimorfismo). Diremos que  $f : A \rightarrow B$  es un epimorfismo si para todo objeto  $Z$  y todo par de morfismos  $\beta', \beta'' : B \rightarrow Z$  se cumple:

$$\beta' \circ f = \beta'' \circ f \implies \beta' = \beta''$$

**Definición D.5** (Objeto inicial y final). Sea  $\mathcal{C}$  una categoría, diremos que:

- a)  $I \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  es inicial si para todo objeto  $A$  se tiene que  $\text{Hom}(I, A)$  es un singleton.
- b)  $F \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  es final si para todo objeto  $A$  se tiene que  $\text{Hom}(A, F)$  es un singleton.
- c) Si un objeto es inicial y final diremos que es un objeto cero de la categoría.

**Productos y coproductos.** Consideremos dos conjuntos  $A, B$  y su producto cartesiano  $A \times B$ . Existen dos funciones  $\pi_A : A \times B \rightarrow A$  y  $\pi_B : A \times B \rightarrow B$  definidas por  $\pi_A(a, b) = a$  y  $\pi_B(a, b) = b$ . El par  $(\pi_A, \pi_B)$  satisface una propiedad universal que detallamos a continuación. Sea  $Z$  cualquier otro conjunto y dos funciones  $f_A : Z \rightarrow A, f_B : Z \rightarrow B$ . Entonces existe una única función  $\sigma : Z \rightarrow A \times B$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

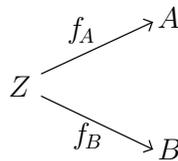


La construcción de  $\sigma$  es sencilla, basta considerar  $\sigma(z) = (f_A(z), f_B(z))$ . Podríamos haber considerado, en vez de simples conjuntos, espacios topológicos. En este caso la propiedad universal tiene sus refinamientos, encontrando que  $\sigma$  debería ser continuo por ejemplo. Con este pequeño ejemplo nos damos cuenta que podemos tener la noción de productos en un contexto totalmente general.

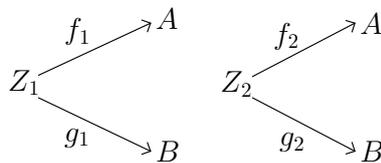
En una categoría  $\mathcal{C}$  consideremos dos objetos  $A$  y  $B$ . El producto de  $A$  y  $B$ , denotado  $A \times B$ , es un objeto equipado con morfismos  $\pi_A, \pi_B$  que cumplen la propiedad universal mencionado al inicio de la sección.

**Ejemplo 45.** Consideremos  $A$  y  $B$  dos conjuntos (o objetos de cierta categoría). Vamos a construir una categoría  $\mathcal{C}(A, B)$  como sigue.

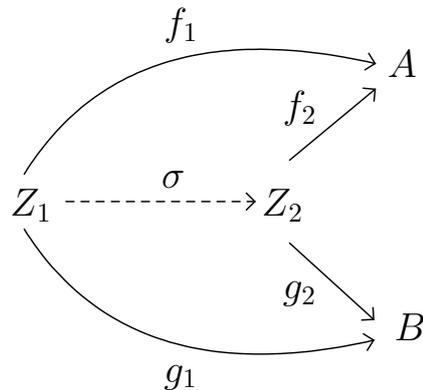
- Los objetos serán los diagramas de la forma:



- Dados dos objetos:



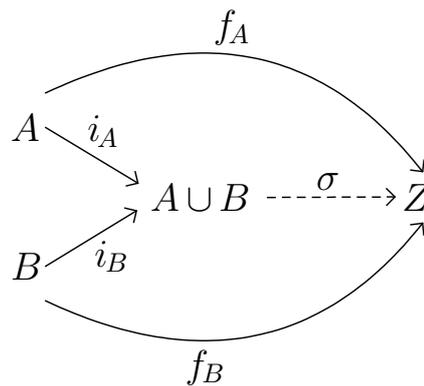
Un morfismo entre estos objetos es el diagrama conmutativo:



En esta categoría los productos son los objetos finales. Es decir, el producto de  $A$  y  $B$  existirá si es que  $\mathcal{C}(A, B)$  tiene objetos finales.

Diremos que una categoría tiene finitos productos si es que para cualquier par de objetos  $A$  y  $B$  existe el producto de ellos.

Nuevamente regresemos al caso de los conjuntos. Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos disjuntos, tenemos ahora dos funciones inclusión  $i_A : A \rightarrow A \cup B$  e  $i_B : B \rightarrow A \cup B$  definidas por  $i_A(a) = a$  e  $i_B(b) = b$ . El par  $(i_A, i_B)$  satisface una propiedad universal que detallamos a continuación. Sea  $Z$  cualquier otro conjunto y dos funciones  $f_A : A \rightarrow Z, f_B : B \rightarrow Z$ . Entonces existe una única función  $\sigma : A \cup B \rightarrow Z$  tal que el siguiente diagrama conmuta:



La función sigma se construye fácilmente, basta tomar  $\sigma(a) = f_A(a)$  para  $a \in A$  y  $\sigma(b) = f_B(b)$  para  $b \in B$ .

De manera general, sea  $\mathcal{C}$  una categoría y  $A, B$  dos objetos. El coproducto de  $A$  y  $B$  es un objeto, denotado por  $A \sqcup B$ , equipado con dos morfismos  $i_A : A \rightarrow A \sqcup B$  e  $i_B : B \rightarrow A \sqcup B$  que satisfacen la propiedad universal mencionada anteriormente.

Diremos que una categoría  $\mathcal{C}$  tiene finitos coproductos si para dos objetos  $A$  y  $B$  existe el coproducto de ambos.

Al igual que en el ejemplo 45 se puede construir una categoría donde los coproductos sean los objetos iniciales de esta.

**Ejemplo 46.** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos cualesquiera en  $\text{Set}$ , la categoría de conjuntos. Esta categoría tiene finitos coproductos, basta considerar:

$$A \sqcup B = A' \uplus B'$$

donde  $A' \cong A, B' \cong B$  y  $A' \cap B' = \emptyset$ . Por ejemplo, podemos considerar  $A' = \{0\} \times A$  y  $B' = \{1\} \times B$ . Es claro que se cumple cada una de las condiciones anteriores. Ahora, los morfismos  $i_A$  e  $i_B$  se definen por:

$$i_A(a) = (0, a) \text{ y } i_B(b) = (1, b)$$

**Definición D.6** (Categoría aditiva). Una categoría  $\mathcal{A}$  es aditiva si satisface las siguientes condiciones:

- a) Tiene un objeto cero.
- b) Tiene finitos productos.
- c) Tiene finitos coproductos.
- d)  $\text{Hom}(A, B)$  es abeliano y  $\circ$  es bilineal.

**Observación.** En algunos textos a las categorías que cumplen d) se les denomina pre-aditivas. Se puede demostrar que en este tipo de categorías si existe el producto también existirá el coproducto y viceversa.

**Ejemplo 47.** La categoría **Ab** de los grupos abelianos es aditiva, basta ver que:

- Los grupos triviales son los objetos ceros.
- Los productos y los coproductos de dos grupos  $G$  y  $H$  son  $G \times H$ .
- $\text{Hom}(A, B)$  es un grupo abeliano.

**Definición D.7** (Kernel de un morfismo). Sea  $\mathcal{A}$  una categoría aditiva y  $\varphi : A \rightarrow B$  un morfismo. Diremos que un morfismo  $k : K \rightarrow A$  es el kernel de  $\varphi$  si  $\varphi \circ k = 0$  y si para todo  $\gamma : Z \rightarrow A$  con  $\varphi \circ \gamma = 0$  se tiene que existe un único morfismo  $\tilde{\gamma} : Z \rightarrow K$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 Z & \xrightarrow{\gamma} & A & \xrightarrow{\varphi} & B \\
 \downarrow \tilde{\gamma} & \curvearrowright & \uparrow k & & \\
 & & K & & 
 \end{array}$$

**Definición D.8** (Cokernel de un morfismo). Sea  $\mathcal{A}$  una categoría aditiva y  $\varphi : A \rightarrow B$  un morfismo. Diremos que un morfismo  $\pi : B \rightarrow C$  es el cokernel de  $\varphi$  si  $\pi \circ \varphi = 0$  y si para todo  $\beta : B \rightarrow Z$  con  $\beta \circ \varphi = 0$  se tiene que existe un único morfismo  $\tilde{\beta} : C \rightarrow Z$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & C \\
 & & & \nearrow \pi & \downarrow \tilde{\beta} \\
 A & \xrightarrow{\varphi} & B & \xrightarrow{\beta} & Z
 \end{array}$$

Al kernel y cokernel lo denotaremos por  $\text{Ker}$  y  $\text{Coker}$  respectivamente.

**Lema D.1.** *Un morfismo  $\varphi : A \rightarrow B$  en una categoría aditiva:*

- a) *Es un monomorfismo si y solamente si para todo morfismo  $\gamma : Z \rightarrow A$  se tiene que  $\varphi \circ \gamma = 0 \implies \gamma = 0$ .*
- b) *Es un epimorfismo si y solamente si para todo morfismo  $\beta : B \rightarrow Z$  se tiene que  $\beta \circ \varphi = 0 \implies \beta = 0$ .*

*Demostración.* Sea  $\varphi : A \rightarrow B$  un morfismo.

- a) Si  $\varphi$  es un monomorfismo, sea  $\gamma : Z \rightarrow A$  con  $\varphi \circ \gamma = 0$ . Luego se tiene que  $\varphi \circ \gamma = 0 = \varphi \circ 0$  y así  $\gamma = 0$ . Recíprocamente, veamos ahora que  $\varphi$  es un monomorfismo. Para esto tomemos un objeto  $Z$  cualesquiera y  $\alpha', \alpha'' : Z \rightarrow A$  dos morfismos tales que  $\varphi \circ \alpha' = \varphi \circ \alpha''$ . Tenemos que:

$$\varphi \circ (\alpha' - \alpha'') = 0$$

Luego por la hipótesis obtenemos que  $\alpha' - \alpha'' = 0$  y así  $\alpha' = \alpha''$ , es decir,  $\varphi$  es un monomorfismo.

- b) Si  $\varphi$  es un epimorfismo, sea  $\beta : B \rightarrow Z$  con  $\beta \circ \varphi = 0$ . Luego se tiene que  $\beta \circ \varphi = 0 = 0 \circ \varphi$  y así  $\beta = 0$ . Recíprocamente, veamos ahora que  $\varphi$  es un epimorfismo. Para esto tomemos un objeto  $Z$  cualesquiera y  $\beta', \beta'' : B \rightarrow Z$  dos morfismos tales que  $\beta' \circ \varphi = \beta'' \circ \varphi$ . Tenemos que:

$$(\beta' - \beta'') \circ \varphi = 0$$

Luego por la hipótesis obtenemos que  $\beta' - \beta'' = 0$  y así  $\beta' = \beta''$ , es decir,  $\varphi$  es un epimorfismo.

□

**Lema D.2.** *En una categoría aditiva los kernel son monomorfismos y los cokernel son epimorfismos.*

*Demostración.* Sea  $\varphi : A \rightarrow B$  un morfismo y  $\text{coker } \varphi : B \rightarrow C$  su cokernel. Veamos que  $\text{coker } \varphi$  es un epimorfismo, para eso usaremos el lema anterior. Sea  $\gamma : C \rightarrow Z$  morfismo tal que  $\gamma \circ \text{Coker } \varphi = 0$ , queremos ver que  $\gamma = 0$ . Tenemos que:

$$(\gamma \circ \text{Coker } \varphi) \circ \varphi = 0$$

Por la propiedad del cokernel tenemos que existe un único morfismo  $\sigma : C \rightarrow Z$  tal que  $\sigma \circ \text{Coker } \varphi = \gamma \circ \text{Coker } \varphi = 0$ . Como  $\gamma$  y  $0$  cumple la relación anterior, por la unicidad tenemos que  $\gamma = 0$  necesariamente. Análogo se prueba para el caso del kernel. □

**Ejemplo 48.** Consideremos la categoría **Ab**. Dado  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  un morfismo (homomorfismo de grupos) y el grupo abeliano:

$$H = \{g \in G_1 \mid \varphi(g) = 0\}$$

Consideremos el morfismo  $i : H \rightarrow G_1$  definido por  $i(h) = h$  para todo  $h \in H$ . Se tiene que  $(\varphi \circ i)(h) = \varphi(i(h)) = \varphi(h) = 0$  para todo  $h \in H$ , así  $\varphi \circ i = 0$ .

Ahora, sea  $\xi : H' \rightarrow G_1$  morfismo tal que  $\varphi \circ \xi = 0$ . Como  $(\varphi \circ \xi)(h) = 0$  se tiene que  $\xi(h) \in H$  para todo  $h \in H'$ . Entonces  $H' \subseteq \xi^{-1}(H)$ , por lo que podemos definir  $\xi' : H' \rightarrow H$  por  $\xi'(h) = \xi(h)$ . De la misma definición se tiene que el diagrama mostrado abajo conmuta, por lo que  $\text{Ker } \varphi = i$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 H' & \xrightarrow{\xi} & G_1 & \xrightarrow{\varphi} & G_2 \\
 \downarrow \tilde{\gamma} & & \curvearrowright & & \\
 & & H & \xrightarrow{i} & 
 \end{array}$$

Lo anterior coincide con la noción que tenemos de Kernel en el álgebra abstracta. Normalmente el grupo  $H$  se denomina el Kernel de  $\varphi$ ; sin embargo, para nosotros el Kernel es el morfismo  $i$ , que no es más que una inclusión.

Consideremos ahora el grupo abeliano  $L = \frac{G_2}{\text{Im}(\varphi)}$  y el morfismo  $\pi : G_2 \rightarrow L$  definido por  $\pi(g) = \bar{g}$ . No es difícil probar que  $\text{Coker } \varphi = \pi$ .

**Definición D.9.** Una categoría aditiva  $\mathcal{A}$  es abeliana si:

- Los kernel y cokernel existen.
- Todo monomorfismo es el kernel de algún morfismo.
- Todo epimorfismo es el cokernel de un morfismo.

**Ejemplo 49.** La categoría **Ab** es una categoría abeliana. Sea  $R$  un anillo conmutativo, la categoría de  $R$ -módulos es una categoría abeliana también.

**Definición D.10** (Imagen y coimagen). Sea  $\varphi : A \rightarrow B$  un morfismo en una categoría abeliana  $\mathcal{A}$ . Definimos:

- $\beta = \text{Im } \varphi = \text{Ker}(\text{Coker } \varphi)$ .
- $\alpha = \text{Coim } \varphi = \text{Coker}(\text{Ker } \varphi)$ .

**Observación.** En [29] (sección 1.4 del capítulo IX) se prueba que para una categoría abeliana los productos y coproductos coinciden, denotándolos por  $A \oplus B$ .



**Definición D.13.** Sean  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  dos categorías y  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un funtor covariante. Diremos que:

- $\mathcal{F}$  es fiel si para todo  $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  se tiene que la función:

$$\mathcal{F} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$$

es inyectiva, es decir, si  $f : A \rightarrow B$  y  $g : A \rightarrow B$  son tales que  $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g)$  entonces necesariamente  $f = g$ .

- $\mathcal{F}$  es total si la función anterior es sobreyectiva.
- $\mathcal{F}$  es esencialmente sobreyectivo si  $\mathcal{F}$  induce una biyección y además se cumple que para todo  $Y \in \text{Obj}(\mathcal{D})$  existe  $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  tal que  $\mathcal{F}(X) \cong Y$ .

**Definición D.14** (Equivalencia de categorías). Diremos que un funtor  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  covariante es una equivalencia de categorías si es totalmente fiel y esencialmente sobreyectivo.

**Ejemplo 50.** Sea  $R$  un anillo, denotemos por  $R^*$  al grupo de unidades de  $R$ . Todo homomorfismo de anillos  $R \rightarrow S$  induce un homomorfismo de grupos  $R^* \rightarrow S^*$ . Esta operación define un funtor covariante entre Ring y Grp.

**Ejemplo 51.** Consideremos la categoría que tiene como objetos a los enteros no negativos y como  $\text{Hom}(m, n)$  al conjunto de matrices de orden  $n \times m$  sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ . En esta categoría la composición es la multiplicación usual de matrices.

La categoría construída anteriormente, que denotaremos por  $\text{Mat}_n$ , es equivalente a la categoría de los  $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales de dimensión finita. Para ver esto vamos a construir un funtor  $\mathcal{F}$  como sigue.

Al número  $n$  lo vamos a enviar al espacio vectorial  $\mathbb{K}^n$ , es decir  $\mathcal{F}(n) = \mathbb{K}^n$ . A una matriz  $A$  de cualquier orden la vamos a enviar al mapa lineal que tiene como matriz representante a  $A$  (todo con respecto a la base canónica).

El funtor anterior es fiel, pues si tomamos dos matrices que representan al mismo mapeo lineal (en la base canónica) entonces necesariamente son iguales. Además es total, pues todo mapeo lineal (sobre espacios vectoriales de dimensión finita) siempre tiene una matriz que la representa.

Finalmente, es esencialmente sobreyectivo, pues si tomamos un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita, digamos  $n$ ; entonces  $n \mapsto \mathbb{K}^n \cong V$ , por lo que  $\mathcal{F}(n) \cong V$ .

**Ejemplo 52.** Sea  $Q$  un carcaj, entonces la categoría de representaciones de  $Q$  es equivalente a la categoría de módulos sobre el álgebra de caminos de  $Q$ .

## D.2 Categorías de complejos

**Definición D.15** (Complejos). Sea  $\mathcal{A}$  una categoría aditiva, un complejo es una familia:

$$X = (X_n, d_n^X)$$

donde  $X_n \in \text{Obj}(\mathcal{A})$  y  $d_n^X : X_n \rightarrow X_{n-1}$  son morfismos que cumplen  $d_n \circ d_{n+1} = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Un complejo lo podemos representar gráficamente como se muestra a continuación:

$$\rightarrow X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \rightarrow$$

**Definición D.16** (Morfismo de complejos). Consideremos dos complejos sobre  $\mathcal{A}$   $X = (X_n, d_n^X)$  e  $Y = (Y_n, d_n^Y)$ . Un morfismo entre  $X$  e  $Y$ ,  $f : X \rightarrow Y$ , es una familia de morfismos:

$$f_n : X_n \rightarrow Y_n, n \in \mathbb{Z}$$

que cumple:  $d_n^Y \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n^X$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Esto último equivale a decir que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} X_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}^X} & X_n & \xrightarrow{d_n^X} & X_{n-1} \\ \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ Y_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}^Y} & Y_n & \xrightarrow{d_n^Y} & Y_{n-1} \end{array}$$

Si consideramos como objetos a los complejos y como morfismos a los morfismos entre complejos, se puede comprobar que, en efecto, estos forman una categoría.

**Definición D.17** (Categoría de complejos). Sea  $\mathcal{A}$  una categoría aditiva. La categoría de complejos, denotada por  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ , es aquella que:

- Tiene como objetos a los complejos sobre  $\mathcal{A}$ .
- Tiene como morfismos a los morfismos entre complejos.

**Teorema D.3.** *La categoría  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$  es aditiva.*

*Demostración.* Probaremos cada una de las condiciones necesarias.

- $\text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(A, B)$  es abeliano y  $\circ$  es bilineal. En efecto, basta ver que el conjunto de morfismos es abeliano, pues si esto se cumple la bilinealidad es una consecuencia inmediata. Sean  $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(A, B)$  morfismos cualesquiera, entonces definimos la suma de morfismos como sigue:

$$f + g := (f_n + g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

Tenemos que  $f_n, g_n : A_n \rightarrow B_n \in \text{Hom}(A_n, B_n)$ . Como  $\mathcal{A}$  es aditiva, tenemos que  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_n, B_n)$  es un grupo abeliano, por lo que la operación definida hace de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(A, B)$  un grupo abeliano también. Lo único que faltaría probar es que, en efecto,  $f + g$  también es un morfismo de complejos. Para esto debemos de probar que para  $n \in \mathbb{Z}$  se cumple:

$$d_n^B \circ (f_{n+1} + g_{n+1}) = (f_n + g_n) \circ d_n^A$$

Como  $f$  y  $g$  ya son morfismos de complejos, tenemos que:

$$d_n^B \circ f_{n+1} = f_n \circ d_n^A \text{ y } d_n^B \circ g_{n+1} = g_n \circ d_n^A$$

Como  $\circ$  es bilineal, ya que  $\mathcal{A}$  es aditiva, tenemos que:

$$\begin{aligned} d_n^B \circ (f_{n+1} + g_{n+1}) &= d_n^B \circ f_{n+1} + d_n^B \circ g_{n+1} \\ &= f_n \circ d_n^A + g_n \circ d_n^A \\ &= (f_n + g_n) \circ d_n^A \end{aligned}$$

- Tiene objeto cero. En este caso el objeto cero es  $0 = (0_A, d)$  donde  $d : 0_A \rightarrow 0_A$ . Para ver esto consideremos cualquier complejo  $A = (A_n, d_n^A)$ . Como  $0_A$  es objeto cero, en particular inicial, existen únicos morfismos  $f_n : 0_A \rightarrow A_n$ , tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} 0_A & \xrightarrow{d} & 0_A & \xrightarrow{d} & 0_A \\ \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ A_{n+1} & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & A_{n-1} \end{array}$$

Hemos encontrado un morfismo de complejos  $f : 0 \rightarrow A$  y, debido a la unicidad de los  $f_n$ , este es único. De manera análoga se razona para encontrar un morfismo  $g : A \rightarrow 0$ , por lo que  $0$ , en efecto, es un objeto cero de  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ .

- Existen productos y coproductos. Veamos la existencia de los coproductos, la idea es análoga para el caso de los productos.

Sean  $X = (X_n, d_n^X)$  e  $Y = (Y_n, d_n^Y)$  dos complejos. Definimos:

$$X \sqcup Y = (X_n \sqcup Y_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

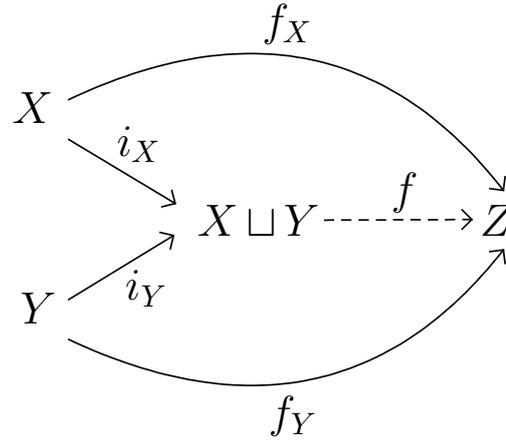
donde  $d_n$  es el único morfismo obtenido de la propiedad universal como muestra el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & & i_{X_{n-1}} \circ d_n^X \\
 & \searrow & \downarrow \\
 X_n & \xrightarrow{i_{X_n}} & X_n \sqcup Y_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \sqcup Y_{n-1} \\
 & \nearrow & \downarrow \\
 Y_n & \xrightarrow{i_{Y_n}} & X_{n-1} \sqcup Y_{n-1} \\
 & & \uparrow \\
 & & i_{X_{n-1}} \circ d_n^Y
 \end{array}$$

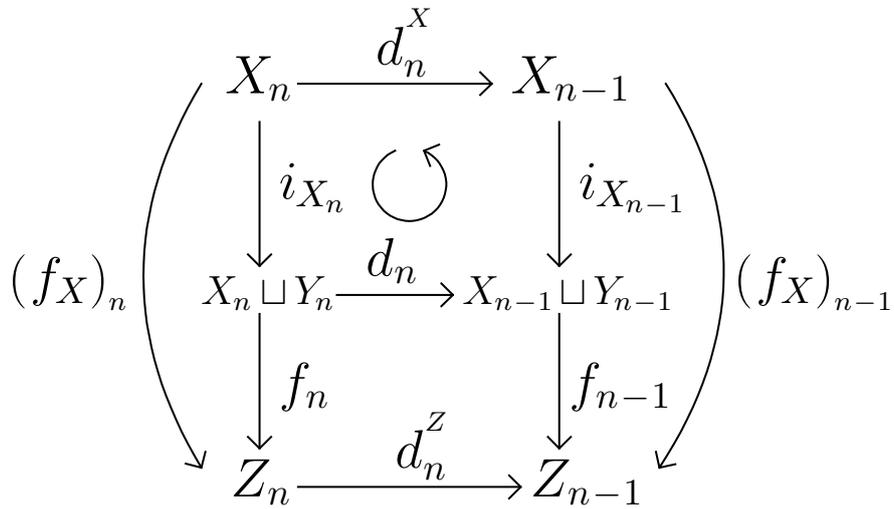
**Afirmación 1.**  $X \sqcup Y$  es el coproducto de  $X$  e  $Y$ . En efecto, veamos primero que  $d_{n-1} \circ d_n = 0$ . Consideremos el diagrama mostrado abajo, como  $X$  e  $Y$  son complejos se tiene que  $d_{n-1}^X \circ d_n^X = 0$  y  $d_{n-1}^Y \circ d_n^Y = 0$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 X_n & \xrightarrow{d_n^X} & X_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}^X} & X_{n-2} \\
 \downarrow i_{X_n} & & \downarrow & & \downarrow i_{X_{n-2}} \\
 X_n \sqcup Y_n & \xrightarrow{d_n} & X_{n-1} \sqcup Y_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & X_{n-2} \sqcup Y_{n-2} \\
 \uparrow i_{Y_n} & & \uparrow & & \uparrow i_{Y_{n-2}} \\
 Y_{n-1} & \xrightarrow{d_n^Y} & Y_n & \xrightarrow{d_{n-1}^Y} & Y_{n-2}
 \end{array}$$





Lo único que faltaría ver es que, efectivamente,  $f$  es un morfismo y también que este es el único. Consideremos el diagrama que se muestra a continuación:



Como  $i_X$  es un morfismo el cuadrado de arriba conmuta. Además, como  $f_x$  también es un morfismo el cuadrado grande también conmuta, todo esto quiere decir que:

$$f_{n-1} \circ d_n \circ i_{X_n} = d_n^Z \circ f_n \circ i_{X_n}$$

Como  $i_{X_n}$  es un epimorfismo (o usando la unicidad de la propiedad universal de los coproductos) se tiene que:

$$f_{n-1} \circ d_n = d_n^Z \circ f_n$$

Esto último prueba que  $f$  es un morfismo. La unicidad de  $f$  es consecuencia de la unicidad de los  $f_n$ ; si existe otro morfismo  $g$  que cumpla la propiedad, encontraremos otros  $g_n$  satisfaciendo la misma propiedad que los  $f_n$ .

□

### D.3 Categoría de complejos homotópica

Fijemos  $\mathcal{A}$  una categoría aditiva y  $f, g : X \rightarrow Y$  dos morfismos en  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ .

**Definición D.18** (Homotopía de morfismos). Diremos que  $f$  y  $g$  son homotópicos, denotado  $f \sim g$ , si es que existe una familia de morfismos  $s_n : X_n \rightarrow Y_{n+1}$  tales que para todo  $n \in \mathbb{Z}$  se cumple:

$$f_n - g_n = d_{n+1}^Y s_n + s_{n-1} d_n^X$$

**Lema D.4.** *La relación  $\sim$  es una relación de equivalencia.*

*Demostración.* Probaremos las tres condiciones que son necesarias.

- Como  $f_n - f_n = 0$  se sigue que  $f \sim f$ .
- Si  $f \sim g$ , existen  $s_n : X_n \rightarrow Y_{n+1}$  tales que para todo  $n \in \mathbb{Z}$  se cumple:

$$f_n - g_n = d_{n+1}^Y s_n + s_{n-1} d_n^X$$

Esto equivale a:

$$g_n - f_n = d_{n+1}^Y (-s_n) + (-s_{n-1}) d_n^X$$

Así los  $-s_n : X_n \rightarrow Y_{n+1}$  cumplen por lo que tenemos que  $g \sim f$ .

- Sean  $f, g, h : X \rightarrow Y$  tales que  $f \sim g$  y  $g \sim h$ . Entonces existen morfismos  $s_n : X_n \rightarrow Y_{n+1}$  y  $t_n : X_n \rightarrow Y_{n+1}$  tales que:

$$f_n - g_n = d_{n+1}^Y s_n + s_{n-1} d_n^X$$

$$g_n - h_n = d_{n+1}^Y t_n + t_{n-1} d_n^X$$

Sumamos ambas igualdades y obtenemos que:

$$f_n - h_n = d_{n+1}^Y (s_n + t_n) + (s_{n-1} + t_{n-1}) d_n^X$$

Así los  $s_n + t_n : X_n \rightarrow Y_{n+1}$  cumplen por lo que tenemos que  $f \sim h$ .

□

**Lema D.5.** *Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  morfismos tales que  $f \sim g$  y  $\alpha : W \rightarrow X, \beta : Y \rightarrow Z$  morfismos arbitrarios. Se tiene que:*

$$f\alpha \sim g\alpha \text{ y } \beta f \sim \beta g$$

*Demostración.* Probaremos que  $f\alpha \sim g\alpha$ , el otro caso se analiza de manera análoga. Como  $f \sim g$  existen  $s_n : X_n \rightarrow Y_{n+1}$  tales que:

$$f_n - g_n = d_{n+1}^Y s_n + s_{n-1} d_n^X$$

Multiplicando por  $\alpha_n$  y simplificando tenemos que:

$$f_n \alpha_n - g_n \alpha_n = d_{n+1}^Y (s_n \alpha_n) + s_{n-1} d_n^X \alpha_n$$

Como  $\alpha$  es un morfismo tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} W_n & \xrightarrow{d_n^W} & W_{n-1} \\ \downarrow \alpha_n & & \downarrow \alpha_{n-1} \\ X_n & \xrightarrow{d_n^X} & X_{n-1} \end{array}$$

Entonces  $d_n^X \circ \alpha_n = \alpha_{n-1} \circ d_n^W$ , por lo que tendríamos lo que queríamos:

$$f_n \alpha_n - g_n \alpha_n = d_{n+1}^Y (s_n \alpha_n) + (s_{n-1} \alpha_{n-1}) d_n^W$$

□

El lema anterior nos dice que la composición, en cualquier sentido, está bien definida sobre las clases de homotopía. Esto nos permite definir lo siguiente.

**Definición D.19** (Categoría de complejos homotópica). Sea  $\mathcal{A}$  una categoría aditiva. La categoría de complejos homotópica, denotada por  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ , es aquella que:

- Tiene como objetos a los complejos al igual que  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ .
- Los morfismos son las clases de homotopía de los morfismos de complejos:

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, Y) = \frac{\text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X, Y)}{\sim}$$

**Proposición D.6.** Sea  $\mathcal{A}$  una categoría aditiva, entonces  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$  también es aditiva.

*Demostración.* Definimos una suma en  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$  por:

$$[f] + [g] = [f + g]$$

Esta operación está bien definida, pues si  $f \sim f'$  y  $g \sim g'$  tenemos que:

$$f_n - f'_n = d_{n+1}^Y s_n + s_{n-1} d_n^X$$

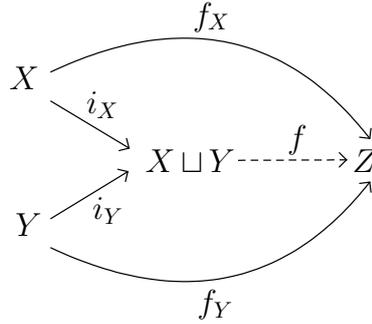
$$g_n - g'_n = d_{n+1}^Y t_n + t_{n-1} d_n^X$$

donde  $s_n, t_n : X_n \rightarrow Y_{n+1}$ . Sumando estas dos expresiones obtenemos que:

$$(f_n + g_n) - (f'_n + g'_n) = d_{n+1}^Y(s_n + t_n) + (s_{n+1} + t_{n-1})d_n^X$$

Así  $f + g \sim f' + g'$  por lo que  $[f + g] = [f' + g']$ . Con esta operación es fácil demostrar que  $\text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, Y)$  es un grupo abeliano y que  $\circ$  es bilineal. Además, el elemento cero de  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$  es el mismo que el de  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ .

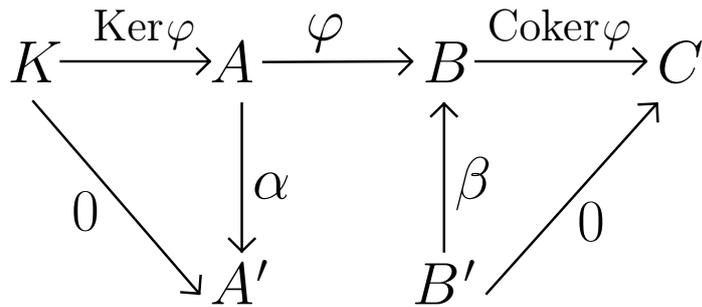
Resta ver que existen los coproductos. Recordemos el diagrama que obtuvimos en la prueba de que  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$  es aditiva:



Tomemos  $i'_X \sim i_X$ , entonces por los lemas vistos anteriormente obtendríamos que  $f \circ i'_X \sim f \circ i_X = f_x$ . Así  $[f] \circ [i'_X] = [f] \circ [i_X] = [f_x]$ , por lo que el diagrama sigue conmutando si consideramos las clases de homotopía.

□

A continuación probaremos que la categoría  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$  es abeliana, pero que  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$  no lo es, necesariamente. Consideremos un morfismo cualesquiera  $\varphi : A \rightarrow B$  y supongamos que existen  $\alpha = \text{Coim } \varphi = \text{Coker}(\text{Ker } \varphi)$  y  $\beta = \text{Im } \varphi = \text{Ker}(\text{Coker } \varphi)$ . Tenemos el siguiente diagrama:



Como  $\text{Coker } \varphi \circ \varphi = 0$ , de la definición de  $\beta = \text{Ker}(\text{Coker } \varphi)$  se tiene que existe un único morfismo  $\gamma : A \rightarrow B'$  tal que el triángulo mostrado en la Figura 87 conmuta.

Por lo anterior tenemos que  $\beta \circ \gamma \circ \text{Ker } \varphi = 0$ , por lo que  $\gamma \circ \text{Ker } \varphi = 0$ . Por la definición de  $\alpha = \text{Coker}(\text{Ker } \varphi)$ , existe un único morfismo  $\varphi' : A' \rightarrow B'$  tal que el diagrama mostrado en la Figura 88 conmuta.

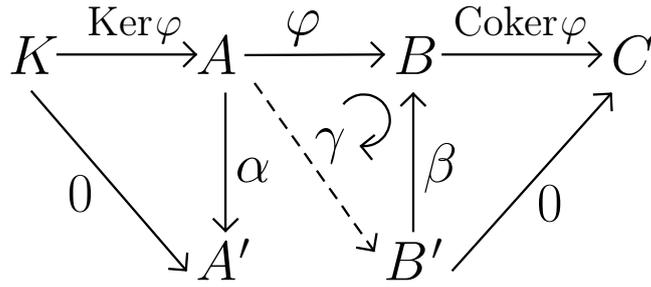


Figura 87: Propiedad universal de  $\text{Ker}(\text{Coker } \varphi)$

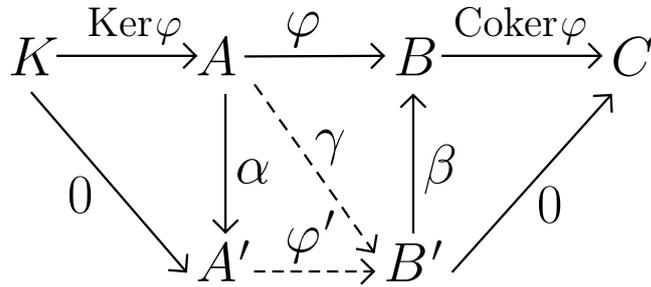


Figura 88: Propiedad universal de  $\text{Coker}(\text{Ker } \varphi)$

Entonces, si los kernel y cokernel existen, para un morfismo  $\varphi : A \rightarrow B$  hemos encontrado un único morfismo  $\varphi' : A' \rightarrow B'$  tal que el diagrama anterior conmuta.

**Definición D.20.** Una categoría aditiva  $\mathcal{A}$  es abeliana si satisface las siguientes condiciones:

- 1) Los kernel y cokernel existen.
- 2) Para todo morfismo  $\varphi : A \rightarrow B$ , el morfismo  $\varphi' : A' \rightarrow B'$  es un isomorfismo.

**Observación.** La definición anterior y la que dimos anteriormente coinciden, el lector puede ver esto en [30].

**Proposición D.7.** Sea  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana. La categoría de complejos  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$  es abeliana también.

*Demostración.* Ya probamos que  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$  es aditiva, por lo que solo resta probar las dos condiciones de la definición D.20.

- a) Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo. Como  $\mathcal{A}$  es abeliana tenemos que cada morfismo  $f_n : X_n \rightarrow Y_n$  tiene un kernel, digamos:

$$\text{Ker } f_n : K_n \rightarrow X_n$$

Usando el hecho  $f$  es un morfismo de complejos tenemos que:

$$f_{n-1} \circ d_n^X \circ \text{Ker } f_n = d_n^Y \circ f_n \circ \text{Ker } f_n = 0$$

Por la propiedad de los kernel existe un único morfismo  $d_n^K : K_n \rightarrow K_{n-1}$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 K_n & \xrightarrow{d_n^X \circ \text{Ker } f_n} & X_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & Y_{n-1} \\
 \downarrow d_n^K & & \uparrow \text{Ker } f_{n-1} & & \\
 & & K_{n-1} & & 
 \end{array}$$

Luego, usando lo anterior tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \text{Ker } f_{n-1} \circ d_n^K \circ d_{n+1}^K &= d_n^X \circ \text{Ker } f_n \circ d_{n+1}^K \\
 &= d_n^X \circ d_{n+1}^X \circ \text{Ker } f_{n+1} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Si llevamos lo anterior al diagrama 89 y usamos la unicidad de los  $d_n^K$  obtenemos que  $d_n^K \circ d_{n+1}^K = 0$ , por lo que  $K = (K_n, d_n^K)$  es un complejo. Usando las propiedades de los objetos  $K_n$  se puede probar que, en efecto,  $d = (\text{ker } f_n) : K \rightarrow X$  es el kernel buscado.

$$\begin{array}{ccccc}
 K_{n+1} & \xrightarrow{0} & X_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & Y_{n-1} \\
 \downarrow d_n^K \circ d_{n+1}^K & & \uparrow \text{Ker } f_{n-1} & & \\
 & & K_{n-1} & & 
 \end{array}$$

Figura 89: Propiedad universal de  $\text{Ker } f_{n-1}$

- b) **Afirmación.**  $f = (f_n) : X \rightarrow Y$  es un isomorfismo si y solo si cada  $f_n$  también es un isomorfismo. En efecto, si  $f$  es un isomorfismo es evidente que cada  $f_n$  lo es también. Recíprocamente, supongamos que cada  $f_n$  es un isomorfismo. En este caso existe para cada  $n$  la inversa  $g_n = f_n^{-1}$ . La inversa buscada es  $g = (g_n) : Y \rightarrow X$ . Que  $g$  sea la inversa es evidente del hecho de que cada  $g_n$  es la inversa de  $f_n$ . Lo único que resta por demostrar es que, en efecto,  $g$  es un morfismo de complejos. Esto es cierto debido a que:

$$\begin{aligned}
 d_{n+1}^X \circ g_{n+1} &= g_n \circ f_n \circ d_{n+1}^X \circ g_{n+1} \\
 &= g_n \circ d_{n+1}^Y \circ f_{n+1} \circ g_{n+1} \\
 &= g_n \circ d_{n+1}^Y
 \end{aligned}$$

Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo y  $f' : X' \rightarrow Y'$  el morfismo asociado. Como  $\mathcal{A}$  es abeliano, se tiene que cada  $f'_n$  es un isomorfismo, por lo que se concluye que  $f'$  es un isomorfismo también. □

Como se mencionó al inicio de la sección, la categoría  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$  no es abeliana. Veamos un ejemplo en donde la condición *a*) falla.

**Ejemplo 53** ([31], Ejemplo 2.6). Consideremos la categoría abeliana  $\mathbf{Ab}$  y el morfismo  $f : X \rightarrow Y$  mostrado en la Figura 90. El complejo  $X$  solo es no nulo en la entrada 0 y el complejo  $Y$  en las entradas 1 y 0 (estamos considerando un orden descendente en la indexización).

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{Id}} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Figura 90: Morfismo  $f$ .

En  $\mathcal{C}(\mathbf{Ab})$  el morfismo  $f$  es no nulo; sin embargo, en  $\mathcal{K}(\mathbf{Ab})$  es nulo ya que es homotópico al morfismo 0 vía la función identidad. Lo que vamos a ver es que  $f$  no tiene kernel en  $\mathcal{K}(\mathbf{Ab})$ . En efecto, supongamos lo contrario. Consideremos el morfismo  $\text{Ker } f : K \rightarrow X$ , como  $X$  solo es no nulo en la entrada 0 podemos considerar que  $\text{Ker } f = f_0 : K_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ , pues los demás morfismos serán 0. Como  $f_0(K_0)$  es un subgrupo de  $\mathbb{Z}$  tiene la forma de  $r\mathbb{Z}$  con  $r \in \mathbb{Z}$ .

Pongamos  $K' = X$  y definamos para cada  $i \in \mathbb{Z}$  el morfismo  $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  por  $i(x) = ix$ . Podemos considerar  $i : K' \rightarrow X$ , simplemente basta considerar  $i$  en la componente 0 y en las demás los morfismos 0. Como  $f = 0$  (bajo homotopía) tenemos que  $f \circ i = 0$ . Por la propiedad universal de los kernel existe un único morfismo  $u_i : K' \rightarrow K$  tal que  $\text{Ker } f \circ u_i = i$  bajo homotopía. Como  $u_i$  va de  $X$  a  $K$  y  $X$  solo es no nulo en la entrada 0, es imposible que exista algún morfismo no nulo homotópico a  $u_i$ , por lo que la igualdad anterior se cumple como morfismos.

Nuevamente, podemos considerar  $u_i$  como un morfismo que va de  $\mathbb{Z}$  a  $K_0$ , pues los demás morfismos serán 0. Como la imagen de  $f_0 \circ u_i$  está contenida en la imagen de  $f_0$  que es  $r\mathbb{Z}$ , entonces la igualdad  $f_0 \circ u_i = i$  es imposible para un  $i \neq r$ .

Si bien  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$  en general no es abeliana, la categoría de complejos homotópica nos da la estructura para un nuevo tipo de categorías: las categorías trianguladas.

## D.4 Categorías trianguladas

**Definición D.21** (Funtor aditivo). Un funtor  $\Sigma$  entre dos categorías aditivas  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  se denomina aditivo si es que para cualquier par de objetos  $X, Y$  en  $\mathcal{A}$  se tiene que el mapeo:

$$\Sigma : \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(\Sigma(X), \Sigma(Y))$$

es un homomorfismo de grupos abelianos. Si  $\Sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , en otras palabras si es un automorfismo, se denomina funtor de traslación.

Fijemos una categoría aditiva  $\mathcal{A}$  y  $\Sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  un funtor de traslación.

**Definición D.22** (Triángulos, [31], Página 9). Un triángulo en  $\mathcal{A}$  es una sucesión:

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

**Definición D.23** ([31], Página 9). Sean dos triángulos  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$  y  $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} \Sigma X'$ . Un morfismo de triángulos es una tripleta  $(f, g, h)$  de morfismos tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & \Sigma X \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow \Sigma f \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & \Sigma X' \end{array}$$

Diremos que el morfismo  $(f, g, h)$  es un isomorfismo de triángulos si y solo si los morfismos  $f, g$  y  $h$  lo son también.

**Definición D.24** (Categoría triangulada, [31], Definición 3.1). Una categoría triangulada es una categoría aditiva  $\mathcal{T}$  junta con un funtor de traslación  $\Sigma$  y una colección de triángulos distinguidos que satisfacen los siguientes axiomas:

- 1) Todo triángulo isomorfo a un triángulo distinguido es distinguido también.
- 2) Para todo objeto  $X$  en  $\mathcal{T}$ , el triángulo  $X \xrightarrow{\text{Id}} X \rightarrow 0 \rightarrow \Sigma X$  es distinguido.
- 3) Para todo morfismo  $f : X \rightarrow Y$  en  $\mathcal{T}$  existe un triángulo distinguido de la forma  $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z \rightarrow \Sigma X$ .
- 4) El triángulo  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$  es distinguido si y solamente si el triángulo  $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma u} \Sigma Y$  es distinguido.
- 4) Sean  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$  y  $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} \Sigma X'$  triángulos distinguidos, entonces todo diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & \Sigma X \\ \downarrow f & & \downarrow g & & & & \downarrow \Sigma f \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & \Sigma X' \end{array}$$

se puede completar a un morfismo de triángulos, es decir, encontrar un morfismo  $h : Z \rightarrow Z'$  tal que el diagrama anterior sea conmutativo.

- 5) Sean los triángulos distinguidos  $X \xrightarrow{u} Y \rightarrow Z' \rightarrow \Sigma X$ ,  $Y \xrightarrow{v} Z \rightarrow X' \rightarrow \Sigma Y$  y  $X \xrightarrow{uv} Z \rightarrow Y' \rightarrow \Sigma X$ , entonces existe  $Z' \rightarrow Y' \rightarrow X' \rightarrow \Sigma Z'$  un triángulo distinguido tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{u} & Y & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & \Sigma X \\
\downarrow \text{Id}_X & & \downarrow v & & \downarrow & & \downarrow \text{Id}_{\Sigma X} \\
X & \xrightarrow{vu} & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & \Sigma X \\
\downarrow u & & \downarrow \text{Id}_Z & & \downarrow & & \downarrow \Sigma u \\
Y & \xrightarrow{v} & Z & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & \Sigma Y \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{Id}_{X'} & & \downarrow \\
Z' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & \Sigma Z'
\end{array}$$

**Observación.** El axioma 5) se conoce como el axioma octaedral. En [31] se pueden encontrar dos equivalencias de este axioma, además de las referencias para otras equivalencias más.

**Teorema D.8** ([31], Teorema 6.7). *Sea  $\mathcal{A}$  una categoría aditiva, entonces la categoría de complejos homotópica  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$  es una categoría triangulada.*

## D.5 Categorías derivadas

En esta sección consideraremos  $\mathcal{A}$  la categoría de  $R$ -módulos sobre un anillo  $R$ .

**Definición D.25** ([31], Definición 7.1). Sea  $X = (X_n, d_n^X)$  un complejo en  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ . La  $n$ -homología de  $X$  se define como:

$$H_n(X) = \frac{\text{Ker } d_n^X}{\text{Im } d_{n+1}^X}$$

Diremos que  $X$  es exacto si  $H_n(X) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Definición D.26.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo de complejos. Definimos:

$$H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$$

por  $x + \text{Im } d_{n+1}^X \mapsto f_n(x) + \text{Im } d_{n+1}^Y$ . Esto nos permite definir los funtores de homología  $H_n : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ , donde  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Observación.** El mapa  $H_n(f)$  se denomina el mapa inducido por  $f$  en homología.

**Definición D.27** ([31], Definición 7.4). Un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  de complejos se denomina cuasi-isomorfismo si los mapas  $H_n(f)$  son isomorfismos para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Teorema D.9** ([31], Teorema 7.10). *Sea  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana. Existe una categoría  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ , denominada la categoría derivada de  $\mathcal{A}$ , y un funtor  $L : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$  que cumple las siguientes condiciones:*

- a) *Para todo cuasi-isomorfismo  $q$  en  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ ,  $L(q)$  es un isomorfismo en  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ .*
- b) *Sea  $\mathcal{D}$  cualquier categoría y un funtor  $F : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}$  que mapea cuasi-isomorfismos a isomorfismos. Entonces existe un funtor  $G : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}$  tal que  $G \circ L = F$ . Esto implica que  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ , si existe, es única salvo equivalencia de categorías.*

*Demostración.* Ver en [31]. □

**Lema D.10** ([31], Lema 7.11). *La clase  $Q$  de cuasi-isomorfismos en  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$  satisface las siguientes condiciones:*

- a) *Para todo objeto  $X$  en  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$  la identidad  $Id_X$  está en  $Q$ .*
- b)  *$Q$  es cerrado bajo composiciones.*
- c) *Dado un cuasi-isomorfismo  $q \in Q$  y un morfismo  $f$  en  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ , existe un objeto  $W$ , un morfismo  $g$  y un cuasi-isomorfismo  $t \in Q$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g} & Z \\ t \downarrow & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

*Análogamente, dado un cuasi-isomorfismo  $q \in Q$  y un morfismo  $f$  en  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ , existe un objeto  $V$ , un morfismo  $h$  y un cuasi-isomorfismo  $r \in Q$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{j} & X \\ q \downarrow & & \downarrow r \\ X & \xrightarrow{h} & V \end{array}$$

- d) *Para dos morfismos  $f, g : X \rightarrow Y$  en  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$  son equivalentes:*

- i) *Existe un cuasi-isomorfismo  $q : Y \rightarrow Y'$  en  $Q$  tal que  $q \circ f = q \circ g$ .*
- ii) *Existe un cuasi-isomorfismo  $t : X' \rightarrow X$  en  $Q$  tal que  $f \circ t = g \circ t$ .*

*Demostración.* Ver en [31]. □

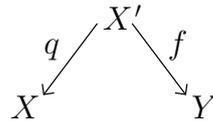
El lema D.10 nos permitirá describir los morfismos en la categoría derivada. En el teorema D.9 (ver en [31]) se establece que los morfismos en  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  son la clase de equivalencia de una expresión de la forma:

$$f_1 \circ q_1^{-1} \circ f_2 \circ q_2^{-1} \circ \dots \circ f_r \circ q_r^{-1}$$

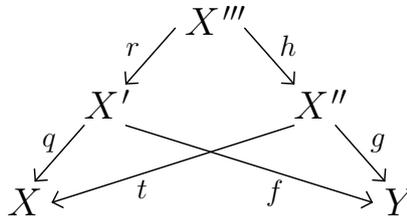
donde los  $f_i$  son morfismos en  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$  y los  $q_i$  son cuasi-isomorfismos. Usando la propiedad c) del lema anterior tenemos que para un morfismo  $f$  y un cuasimorfismo  $q$  se tiene que:

$$q^{-1} \circ f = g \circ t^{-1} \text{ y } f \circ q^{-1} = r^{-1} \circ h$$

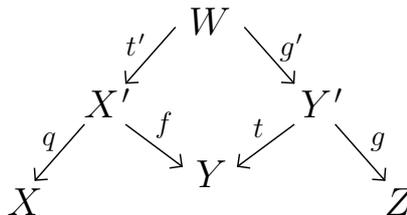
donde  $g, h$  son morfismos y  $t, r$  son cuasi-isomorfismos. Usando lo anterior podemos mover todos los cuasi-morfismos (las inversas formales) a la derecha, por lo que los morfismos en la categoría derivada se pueden representar de la forma  $f \circ q^{-1}$  donde  $f$  es un morfismo y  $q$  un cuasi-isomorfismo. Esto se representa como un “techo”:



Sean dos techos  $(q, f)$  y  $(t, g)$ . Diremos que son equivalentes si existe otro techo  $(r, h)$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:



Se puede probar que la relación anterior es de equivalencia, para ver detalles de esto el lector puede revisar [32] o [31]. Ahora vamos a definir la composición de techos. Para esto consideremos  $(q, f)$  y  $(t, g)$  techos, usando c) del lema D.10 obtenemos un techo  $(t', g')$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:



La composición de techos  $(t, g) \circ (q, f)$  se define como la clase de equivalencia representada por  $(q \circ t', g \circ g')$ . Se puede probar que esta composición no depende de las clases (ver [31]).

Definimos la categoría  $\tilde{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$  como sigue:

- Tiene los mismos objetos que  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  y por lo tanto que  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$  también.
- Los morfismos en  $\tilde{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$  se definen como la clase de equivalencias de los techos.

**Teorema D.11** ([31], Proposición 7.13). *Sea  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana. La categoría  $\tilde{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$  es equivalente a la categoría derivada  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ .*

*Demostración.* Ver en [31]. □

**Proposición D.12** ([31], Proposiciones 7.15 y 7.18). *Sea  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana. Entonces  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  es una categoría aditiva, es más, también es triangulada.*

*Demostración.* Ver en [31]. □

# Bibliografía

- [1] Assem, I., Brüstle, T., Charbonneau-Jodoin, G., & Plamondon, P. G. (2010). *Gentle algebras arising from surface triangulations*. Algebra & Number Theory, 4(2), 201-229.
- [2] Brüstle, T., & Zhang, J. (2011). *On the cluster category of a marked surface without punctures*. Algebra & Number Theory, 5(4), 529-566.
- [3] Labardini-Fragoso, D. (2009). *Quivers with potentials associated to triangulated surfaces*. Proceedings of the London Mathematical Society, 98(3), 797-839.
- [4] Canakci, I., & Schroll, S. (2017). *Extensions in Jacobian algebras and cluster categories of marked surfaces*. Advances in Mathematics, 313, 1-49.
- [5] Butler, M. C., & Michael Ringel, C. (1987). *Auslander-reiten sequences with few middle terms and applications to string algebras*. Communications in Algebra, 15(1-2), 145-179.
- [6] Labardini-Fragoso, D. (2009). *Quivers with potentials associated to triangulated surfaces, Part II: Arc representations*. arXiv preprint arXiv:0909.4100.
- [7] Irelli, G. C., & Labardini-Fragoso, D. (2012). *Quivers with potentials associated to triangulated surfaces, Part III: tagged triangulations and cluster monomials*. Compositio Mathematica, 148(6), 1833-1866.
- [8] Labardini-Fragoso, D. (2016). *Quivers with potentials associated to triangulated surfaces, part IV: removing boundary assumptions*. Selecta Mathematica, 22(1), 145-189.
- [9] Lee, K., & Schiffler, R. (2015). *Positivity for cluster algebras*. Annals of Mathematics, 73-125.
- [10] Schröer, J. (1999). *Modules without self-extensions over gentle algebras*. Journal of Algebra, 216(1), 178-189.
- [11] Dummit, D. S., & Foote, R. M. *Abstract algebra* (Vol. 3). Hoboken: Wiley (2004).
- [12] Fomin, S., & Zelevinsky, A. *Cluster algebras. I. Foundations*. J. Amer. Math. Soc. 15, 2 (2002), 497-529 (electronic).

- [13] Fomin, S., & Zelevinsky, A. *Cluster algebras. II. Finite type classification*. Invent. Math. 154, 1 (2003), 63–121.
- [14] Fomin, Sergey, & Andrei Zelevinsky. *Cluster algebras IV: coefficients*. Compositio Mathematica 143.1 (2007): 112-164.
- [15] Hungerford, T. W. *Algebra, volume 73 of. Graduate Texts in Mathematics*, (1980) 20-31.
- [16] Canakci, I., & Schiffler, R. (2013). *Snake graph calculus and cluster algebras from surfaces*. Journal of Algebra, 382, 240-281.
- [17] Canakci, I., & Schiffler, R. (2015). *Snake graph calculus and cluster algebras from surfaces II: self-crossing snake graphs*. Mathematische Zeitschrift, 281(1), 55-102.
- [18] Çanakci, İ., & Schiffler, R. (2019). *Snake graph calculus and cluster algebras from surfaces III: Band graphs and snake rings*. International Mathematics Research Notices, 2019(4), 1145-1226.
- [19] Caldero, P., Chapoton, F., & Schiffler, R. (2006). *Quivers with relations arising from clusters ( $A_n$  case)*. Transactions of the American Mathematical Society, 358(3), 1347-1364.
- [20] Musiker, G., & Williams, L. (2013). *Matrix formulae and skein relations for cluster algebras from surfaces*. International Mathematics Research Notices, 2013(13), 2891-2944.
- [21] Schiffler, R., & Thomas, H. (2009). *On cluster algebras arising from unpunctured surfaces*. International Mathematics Research Notices, 2009(17), 3160-3189.
- [22] Schiffler, R. (2010). *On cluster algebras arising from unpunctured surfaces II*. Advances in Mathematics, 223(6), 1885-1923.
- [23] Derksen, H., Weyman, J., & Zelevinsky, A. (2008). *Quivers with potentials and their representations I: Mutations*. Selecta Mathematica, 14(1), 59-119.
- [24] Musiker, G., & Schiffler, R. (2010). *Cluster expansion formulas and perfect matchings*. Journal of Algebraic Combinatorics, 32(2), 187-209.
- [25] Skowroński, A., & Yamagata, K. (2011). *Frobenius algebras* (Vol. 12). European Mathematical Society.
- [26] Serge. L. *Algebra*. Graduate texts in mathematics (2002).
- [27] Spanier, Edwin H. *Algebraic topology*. Springer Science & Business Media, 1989.
- [28] Fomin, S., Shapiro, M., & Thurston, D. (2008). *Cluster algebras and triangulated surfaces. Part I: Cluster complexes*. Acta Mathematica, 201(1), 83-146.
- [29] Aluffi, P. (2021). *Algebra: chapter 0* (Vol. 104). American Mathematical Soc.

- [30] Mac Lane, S. (2013). *Categories for the working mathematician* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.
- [31] Holm, T., & Jørgensen, P. (2010). *Triangulated categories: definitions, properties, and examples*. *Triangulated categories*, 375, 1-51.
- [32] Gelfand, S. I., & Manin, Y. I. (2013). *Methods of homological algebra*. Springer Science & Business Media.
- [33] Keller, B., & Yang, D. (2011). *Derived equivalences from mutations of quivers with potential*. *Advances in Mathematics*, 226(3), 2118-2168.
- [34] Keller, B. (2006). *On differential graded categories*. arXiv preprint math/0601185.
- [35] Keller, B. (1994). *Deriving DG categories*. In *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure* (Vol. 27, No. 1, pp. 63-102).
- [36] Amiot, C. (2009). *Cluster categories for algebras of global dimension 2 and quivers with potential*. In *Annales de l'institut Fourier* (Vol. 59, No. 6, pp. 2525-2590).
- [37] Krause, H. (2008). *Localization theory for triangulated categories*. arXiv preprint arXiv:0806.1324.
- [38] Zhou, P., & Zhu, B. (2018). *Triangulated quotient categories revisited*. *Journal of Algebra*, 502, 196-232.
- [39] Marsh, R. J., & Palu, Y. (2014). *Coloured quivers for rigid objects and partial triangulations: the unpunctured case*. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 108(2), 411-440.
- [40] Musiker, G., Schiffler, R., & Williams, L. (2013). *Bases for cluster algebras from surfaces*. *Compositio Mathematica*, 149(2), 217-263.
- [41] Derksen, H., Weyman, J., & Zelevinsky, A. (2008). *Quivers with potentials and their representations I: Mutations*. *Selecta Mathematica*, 14, 59-119.
- [42] Dominguez, S., & Elsener, A. G. (2021). *Extensions in Jacobian algebras via punctured skein relations*. arXiv preprint arXiv:2108.07844.