

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRONICA



**“SISTEMAS DE CONTROL DIGITAL MULTIVARIABLE
NOLINEAL PARA CONTROLAR LA TRAYECTORIA
ESPACIAL DE UN ROBOT DE SEIS ARTICULACIONES”**

TESIS

**PARA OPTAR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON
MENCION EN AUTOMATICA E INSTRUMENTACION**

ELABORADO POR:

JOSE AMBROSIO MACHUCA MINES

ASESOR:

NICANOR RAUL BENITES SARAVIA

LIMA-PERU

2014

DEDICATORIA

A la memoria de mi recordado y querido padre Hipólito Machuca Abanto, que su personalidad y cariño forjaron el valor y la perseverancia en la travesía de mi vida y también a la memoria de mi abnegada y adorada madre Dolores Mines Gutiérrez, cuyos recuerdos de su ternura, amor y cariño iluminan constantemente el horizonte de mi existencia.

Con mucho amor y cariño a mis hijos a quienes adoro.

El autor

AGRADECIMIENTO

Agradezco infinitamente a la Vida por pertenecer a la fracción racional de ella y tener el privilegio de tomar decisiones en el diferencial del infinito tiempo y en el diferencial de espacio del inmensurable universo que me corresponde vivir.

Agradezco de forma particular a la Universidad Nacional de Ingeniería y a las innumerables personas que han contribuido forjando mi formación profesional...

El autor

INDICE DE CONTENIDO

	Página
INTRODUCCION	1
CAPITULO 1	
GERALIDADES DE ROBOTICA	
1.1 Introducción.....	3
1.2 Definición de un Robot Industrial.....	4
1.3 Componentes de un robot.....	5
1.4 Especificaciones de un robot.....	8
1.5 Estructuras básicas de robots industriales.....	9
CAPITULO 2	
FORMULACION GEOMETRICA DEL ROBOT	
2.1 Introducción.....	13
2.2 Representación matricial de <i>Denavit-Hartenberg</i>	14
2.3 Especificaciones del efector operacional.....	20
2.4 Formulación Geométrica Directa del robot.....	24
2.5 Formulación Geometría Inversa del robot.....	26
2.6 Geometría Directa e Inversa del robot propuesto.....	26
2.7 Simulación Gráfica de la Geometría del robot propuesto.....	36
2.7.1 Simulación Gráfica de la Geometría Directa.....	36
2.7.2 Simulación Gráfica de la Geometría Inversa.....	43
CAPITULO 3	
FORMULACION CINEMATICA DEL ROBOT	
3.1 Introducción.....	48
3.2 Análisis del Espacio Operacional del robot.....	48
3.3 Formulación Cinemática Directa del robot.....	51
3.4 Formulación Cinemática Inversa del robot.....	54
3.5 Formulación de la Cinemática del robot propuesto.....	55
3.6 Simulación Gráfica de la Cinemática del robot propuesto.....	58
CAPITULO 4	
FORMULACION DINAMICA DEL ROBOT	
4.1 Introducción.....	64

4.2	Ecuación de la Dinámica de <i>Lagrange</i>	65
4.3	Energía Cinética total del robot.....	66
4.4	Energía Potencial total del robot.....	71
4.5	Efecto Friccional de la articulación.....	72
4.6	Expresión general de la dinámica del robot.....	73
4.7	Formulación y Simulación Gráfica de la dinámica del robot propuesto.....	77

CAPITULO 5

FORMULACION DINAMICA DEL MOTOR SIN ESCOBILLAS

5.1	Introducción.....	81
5.2	Modelamiento físico del motor sin escobillas.....	82

CAPITULO 6

FORMULACION DINAMICA DEL SISTEMA MOTOR-ROBOT

6.1	Sensores Internos.....	89
6.2	Formulación Dinámica del Sistema Motores-Robot.....	93
6.3	Representación del Sistema Robot en el espacio de estados.....	95
6.4	Solución de la ecuación dinámica directa del Sistema Motores-Robot.....	97
6.5	Simulación Gráfica de la dinámica del sistema propuesto.....	100

CAPITULO 7

SISTEMA DE CONTROL POR COMPENSACION NOLINEAL

7.1	Introducción.....	110
7.2	Planteamiento del método de control.....	110
7.3	Vector de control no lineal.....	113
7.4	Vector de control lineal.....	117
7.4.1	Controlador Proporcional-Diferencial con aceleración referencial.....	117
7.4.2	Controlador Proporcional-Diferencial (PD).....	118
7.4.3	Controlador mediante realimentación de estados.....	119
7.5	Simulación Gráfica del Sistema de Control propuesto.....	122
7.6	Análisis de los resultados obtenidos mediante la Simulación Gráfica.....	137

CAPITULO 8

SISTEMA DE CONTROL POR COMPENSACION ADAPTIVA

8.1	Introducción.....	139
8.2	Planteamiento del método de control.....	140

8.3	Identificación de parámetros del sistema.....	144
8.4	Vector de Control Optimo Cuadrático Residual.....	147
8.5	Simulación Gráfica del Sistema de Control propuesto.....	149
8.6	Análisis de los resultados obtenidos mediante la Simulación Gráfica.....	164

CAPITULO 9

SISTEMA DE CONTROL OPTIMO ADAPTIVO AUTO-SINTONIZABLE

9.1	Introducción.....	166
9.2	Planteamiento de método de control.....	167
9.3	Identificación de parámetros del sistema.....	170
9.4	Representación Dinámica del Sistema incluyendo Integradores.....	175
9.5	Vector de Control Optimo Cuadrático Proporcional Integral.....	176
9.6	Simulación Gráfica de Sistema de Control propuesto.....	181
9.7	Análisis de los resultados obtenidos mediante la Simulación Gráfica.....	196

CAPITULO 10

GENERACION DE TRAYECTORIAS PARA EL ROBOT

10.1	Introducción.....	198
10.2	Clasificación de las trayectorias.....	199
10.3	Generación de trayectorias en coordenadas articulares.....	200
10.3.1	Interpolación polinómica lineal.....	201
10.3.2	Interpolación polinómica cúbica.....	202
10.3.3	Interpolación polinómica de grado superior	205
10.3.4	Interpolación trigonométrica.....	207
10.4	Generación de trayectorias en coordenadas cartesianas.....	209
10.4.1	Interpolación cartesiana vectorial.....	212
10.4.2	Interpolación cartesiana de una traslación y una rotación.....	216
10.4.3	Interpolación cartesiana de una traslación y dos rotaciones.....	221

CONCLUSIONES	229
---------------------	-------	-----

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS		234
-----------------------------------	--	-----

ANEXOS

ANEXO A: CONSTANTES Y PARAMETROS DEL SISTEMA		236
ANEXO B: COMPONENTES DE LA DINAMICA DEL ROBOT		241
ANEXO C: ESLABONES DEL ROBOT UTILIZADOS EN LA SIMULACION		247

INDICE DE TABLAS

	Página
Tabla 2.1 Parámetros geométricos del robot de seis grados de libertad.....	28
Tabla 7.1 Resultados obtenidos al aplicar el método de control: Compensación Nolineal.....	138
Tabla 8.1 Resultados obtenidos al aplicar el método de control: Compensación Adaptiva.....	165
Tabla 9.1 Resultados obtenidos al aplicar el método de control: Control Adaptivo Autosintonizable.....	197
Tabla A.1 Datos de los elementos del Robot de seis grados de Libertad.....	236

INDICE DE FIGURAS

	Página
Figura 1.1 Sistema de un robot y su interacción con el entorno operacional.	4
Figura 1.2 Configuraciones básicas de manipuladores robóticos.	10
Figura 1.3 Arquitectura esférica de la muñeca de un robot.	11
Figura 1.4 Arquitectura no esférica de la muñeca de un robot.	11
Figura 1.5 Estructura mecánica del robot de seis articulaciones.	12
Figura 2.1 Relación general de la Geometría Directa e Inversa de un robot.	13
Figura 2.2 Parámetros del par elemento-articulación k de un robot.	14
Figura 2.3 Parámetros de una articulación rotacional θ_k .	17
Figura 2.4 Parámetros de una articulación traslacional d_k .	18
Figura 2.5 Posición y orientación del efector operacional de un robot.	21
Figura 2.6 Tres grados de libertad asociados con los ángulos de <i>Euler</i> .	22
Figura 2.7 Estructura mecánica y analítica del robot de seis grados de libertad con articulaciones angulares.	27
Figura 2.8 Gráficas de la posición articular $\theta(t)$ en función del tiempo t .	38
Figura 2.9 Coordenadas cartesianas del vector de posición $\bar{p}(t)$.	39
Figura 2.10 Coordenadas cartesianas del vector normal $\bar{n}(t)$.	39
Figura 2.11 Coordenadas cartesianas del vector de deslizamiento $\bar{s}(t)$.	40
Figura 2.12 Coordenadas cartesianas del vector de aproximación $\bar{a}(t)$.	40
Figura 2.13 Gráficas de los ángulos de <i>Euler</i> $[\phi(t), \varphi(t), \psi(t)]$.	41
Figura 2.14 Gráficas de los cosenos directores $\bar{\gamma}(t)$ de la trayectoria $\bar{p}(t)$.	41
Figura 2.15 Trayectoria espacial del robot de seis articulaciones.	42
Figura 2.16 Trayectoria sinusoidal esférica tridimensional.	43
Figura 2.17 Coordenadas cartesianas de la trayectoria $\bar{p}(t)$ sinusoidal esférica.	45
Figura 2.18 Coordenadas del vector $\bar{n}(t)$ al generar la curva sinusoidal esférica.	45
Figura 2.19 Coordenadas del vector $\bar{s}(t)$ al generar la curva sinusoidal esférica.	46
Figura 2.20 Coordenadas del vector $\bar{a}(t)$ al generar la curva sinusoidal esférica.	46
Figura 2.21 Gráficas articulares $\theta(t)$ que generan la curva sinusoidal esférica.	47
Figura 3.1 Esquema tridimensional que ilustra la cinemática espacial del robot.	58
Figura 3.2 Posición, velocidad y aceleración articulares: $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ y $\ddot{\theta}(t)$.	60

Figura 3.3	Posición lineal cartesiana $\bar{p}(t)$ del efector final del robot.	61
Figura 3.4	Velocidad lineal cartesiana $\bar{v}(t)$ del efector final del robot.	61
Figura 3.5	Aceleración lineal cartesiana $\bar{a}(t)$ del efector final del robot.	62
Figura 3.6	Posición angular cartesiana $\bar{g}(t)$ del efector final del robot.	62
Figura 3.7	Velocidad angular cartesiana $\bar{\omega}(t)$ del efector final del robot.	63
Figura 3.8	Aceleración angular cartesiana $\bar{\alpha}(t)$ del efector final del robot.	63
Figura 4.1	Movimiento dinámico espacial del enlace k de un robot.	66
Figura 4.2	Gráfica del efecto de fricción vs la velocidad de la articulación k .	72
Figura 4.3	Representación gráfica de la Dinámica Inversa de un robot.	76
Figura 4.4	Elemento i -ésimo para determinar la dinámica del robot propuesto.	77
Figura 4.5	Posición, velocidad y aceleración articulares: $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ y $\ddot{\theta}(t)$.	79
Figura 4.6	Componentes del vector torsión $\tau(t)$ aplicado al robot.	80
Figura 5.1	Esquema general de un motor DC sin escobillas de cuatro polos y tres fases.	82
Figura 5.2	Representación electromecánica del motor DC sin escobillas.	83
Figura 5.3	Diagrama de bloques analítico del motor DC sin escobillas.	85
Figura 5.4	Diagrama de bloques del motor DC sin escobillas con simple entrada de control y generación de PWM.	85
Figura 5.5	Diagrama de bloques simplificado y linealizado del motor DC sin escobillas.	87
Figura 6.1	Esquema de un transductor de posición angular óptico incremental.	90
Figura 6.2	Esquema general del circuito para obtener la posición angular de forma Digital.	90
Figura 6.3	Circuito detector de flancos para cuadruplicar la precisión de un codificador Digital.	91
Figura 6.4	Gráficas que describen la obtención del sentido de giro y la detección de flancos para generar pulsos con frecuencia cuadruplicada.	91
Figura 6.5	Esquema básico de un tacómetro acoplado al eje de un motor.	92
Figura 6.6	Fotografía de un tacómetro.	92
Figura 6.7	Representación gráfica de la Dinámica Inversa del sistema robot.	95
Figura 6.8	Representación gráfica de la Dinámica Directa del sistema robot.	96
Figura 6.9	Esquema de la Dinámica Inversa y Directa del Sistema motor-robot.	97
Figura 6.10	Posición, velocidad y aceleración articulares: $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ y $\ddot{\theta}(t)$.	101
Figura 6.11	Variables de Control $u(t) = v_c(t)$ aplicado a los motores.	102

Figura 6.12	Variables $\theta(t)$, y $\dot{\theta}(t)$ obtenidas con el método de <i>Euler</i> en adelante.	104
Figura 6.13	Variables $\theta(t)$, y $\dot{\theta}(t)$ obtenidas con el método <i>Runge-Kutta</i> orden 4.	105
Figura 6.14.a	Variables de la articulación $\theta_1(t)$ usando los dos métodos.	106
Figura 6.14.b	Variables de la articulación $\theta_2(t)$ usando los dos métodos.	106
Figura 6.14.c	Variables de la articulación $\theta_3(t)$ usando los dos métodos.	106
Figura 6.14.d	Variables de la articulación $\theta_4(t)$ usando los dos métodos.	107
Figura 6.14.e	Variables de la articulación $\theta_5(t)$ usando los dos métodos.	107
Figura 6.14.f	Variables de la articulación $\theta_6(t)$ usando los dos métodos.	107
Figura 6.15.a	Variables de velocidad articular $\dot{\theta}_1(t)$ usando dos métodos.	108
Figura 6.15.b	Variables de velocidad articular $\dot{\theta}_2(t)$ usando dos métodos.	108
Figura 6.15.c	Variables de velocidad articular $\dot{\theta}_3(t)$ usando dos métodos.	108
Figura 6.15.d	Variables de velocidad articular $\dot{\theta}_4(t)$ usando dos métodos.	109
Figura 6.15.e	Variables de velocidad articular $\dot{\theta}_5(t)$ usando dos métodos.	109
Figura 6.15.f	Variables de velocidad articular $\dot{\theta}_6(t)$ usando dos métodos.	109
Figura 7.1	Esquema general del Sistema de Control de Compensación No lineal.	111
Figura 7.2	Diagrama de bloques del control por realimentación no lineal.	115
Figura 7.3	Diagrama de bloques equivalente del sistema linealizado.	116
Figura 7.4	Controlador lineal Proporcional Diferencial con aceleración referencial.	118
Figura 7.5	Controlador lineal Proporcional Diferencial.	119
Figura 7.6	Controlador mediante realimentación de estados.	120
Figura 7.7	Diagrama del Sistema de Control con Compensación No lineal.	121
Figura 7.8	Variables de referencia de posición $\theta_r(t)$ y velocidad $\dot{\theta}_r(t)$ articulares.	124
Figura 7.9.a	Variables de la posición articular No 1: $\theta_{r1}(t)$, $\theta_1(t)$ y $e_{\theta_1}(t)$.	125
Figura 7.9.b	Variables de la posición articular No 2: $\theta_{r2}(t)$, $\theta_2(t)$ y $e_{\theta_2}(t)$.	125
Figura 7.9.c	Variables de la posición articular No 3: $\theta_{r3}(t)$, $\theta_3(t)$ y $e_{\theta_3}(t)$.	126
Figura 7.9.d	Variables de la posición articular No 4: $\theta_{r4}(t)$, $\theta_4(t)$ y $e_{\theta_4}(t)$.	126
Figura 7.9.e	Variables de la posición articular No 5: $\theta_{r5}(t)$, $\theta_5(t)$ y $e_{\theta_5}(t)$.	127
Figura 7.9.f	Variables de la posición articular No 6: $\theta_{r6}(t)$, $\theta_6(t)$ y $e_{\theta_6}(t)$.	127

Figura 7.10.a	Variables de la velocidad articular No 1: $\dot{\theta}_{r1}(t)$, $\dot{\theta}_1(t)$ y $\dot{e}_{\theta1}(t)$.	128
Figura 7.10.b	Variables de la velocidad articular No 2: $\dot{\theta}_{r2}(t)$, $\dot{\theta}_2(t)$ y $\dot{e}_{\theta2}(t)$.	128
Figura 7.10.c	Variables de la velocidad articular No 3: $\dot{\theta}_{r3}(t)$, $\dot{\theta}_3(t)$ y $\dot{e}_{\theta3}(t)$.	129
Figura 7.10.d	Variables de la velocidad articular No 4: $\dot{\theta}_{r4}(t)$, $\dot{\theta}_4(t)$ y $\dot{e}_{\theta4}(t)$.	129
Figura 7.10.e	Variables de la velocidad articular No 5: $\dot{\theta}_{r5}(t)$, $\dot{\theta}_5(t)$ y $\dot{e}_{\theta5}(t)$.	130
Figura 7.10.f	Variables de la velocidad articular No 6: $\dot{\theta}_{r6}(t)$, $\dot{\theta}_6(t)$ y $\dot{e}_{\theta6}(t)$.	130
Figura 7.11.a	Variables de control articular No 1: $u_{r1}(t)$, $u_1(t) = v_{c1}(t)$, $\tau_1(t)$.	131
Figura 7.11.b	Variables de control articular No 2: $u_{r2}(t)$, $u_2(t) = v_{c2}(t)$, $\tau_2(t)$.	131
Figura 7.11.c	Variables de control articular No 3: $u_{r3}(t)$, $u_3(t) = v_{c3}(t)$, $\tau_3(t)$.	132
Figura 7.11.d	Variables de control articular No 4: $u_{r4}(t)$, $u_4(t) = v_{c4}(t)$, $\tau_4(t)$.	132
Figura 7.11.e	Variables de control articular No 5: $u_{r5}(t)$, $u_5(t) = v_{c5}(t)$, $\tau_5(t)$.	133
Figura 7.11.f	Variables de control articular No 6: $u_{r6}(t)$, $u_6(t) = v_{c6}(t)$, $\tau_6(t)$.	133
Figura 7.12	Trayectoria cartesiana $\mathbf{P}(t)$ tridimensional del efector final del robot.	134
Figura 7.13	Desplazamiento lineal cartesiano $\bar{p}(t)$ del efector final del robot.	135
Figura 7.14	Velocidad lineal cartesiana $\bar{v}(t)$ del efector final del robot.	135
Figura 7.15	Velocidad angular cartesiana $\bar{\omega}(t)$ del efector final del robot.	136
Figura 7.16	Velocidades absolutas lineal $v(t)$ y angular $\omega(t)$ del efector final.	136
Figura 8.1	Esquema general del Sistema de Control de Compensación Adaptativa.	143
Figura 8.2	Diagrama del Sistema de Control con Compensación Adaptativa.	149
Figura 8.3	Variables de referencia de posición $\theta_r(t)$ y velocidad $\dot{\theta}_r(t)$ articulares.	151
Figura 8.4.a	Variables de la posición articular No 1: $\theta_{r1}(t)$, $\theta_1(t)$ y $e_{\theta1}(t)$.	152
Figura 8.4.b	Variables de la posición articular No 2: $\theta_{r2}(t)$, $\theta_2(t)$ y $e_{\theta2}(t)$.	152
Figura 8.4.c	Variables de la posición articular No 3: $\theta_{r3}(t)$, $\theta_3(t)$ y $e_{\theta3}(t)$.	153
Figura 8.4.d	Variables de la posición articular No 4: $\theta_{r4}(t)$, $\theta_4(t)$ y $e_{\theta4}(t)$.	153
Figura 8.4.e	Variables de la posición articular No 5: $\theta_{r5}(t)$, $\theta_5(t)$ y $e_{\theta5}(t)$.	154
Figura 8.4.f	Variables de la posición articular No 6: $\theta_{r6}(t)$, $\theta_6(t)$ y $e_{\theta6}(t)$.	154
Figura 8.5.a	Variables de la velocidad articular No 1: $\dot{\theta}_{r1}(t)$, $\dot{\theta}_1(t)$ y $\dot{e}_{\theta1}(t)$.	155

Figura 8.5.b	Variables de la velocidad articular No 2: $\dot{\theta}_{r2}(t)$, $\dot{\theta}_2(t)$ y $\dot{e}_{\theta2}(t)$.	155
Figura 8.5.c	Variables de la velocidad articular No 3: $\dot{\theta}_{r3}(t)$, $\dot{\theta}_3(t)$ y $\dot{e}_{\theta3}(t)$.	156
Figura 8.5.d	Variables de la velocidad articular No 4: $\dot{\theta}_{r4}(t)$, $\dot{\theta}_4(t)$ y $\dot{e}_{\theta4}(t)$.	156
Figura 8.5.e	Variables de la velocidad articular No 5: $\dot{\theta}_{r5}(t)$, $\dot{\theta}_5(t)$ y $\dot{e}_{\theta5}(t)$.	157
Figura 8.5.f	Variables de la velocidad articular No 6: $\dot{\theta}_{r6}(t)$, $\dot{\theta}_6(t)$ y $\dot{e}_{\theta6}(t)$.	157
Figura 8.6.a	Variables de control articular No 1: $u_{n1}(t)$, $u_1(t) = v_{c1}(t)$, $\tau_1(t)$.	158
Figura 8.6.b	Variables de control articular No 2: $u_{n2}(t)$, $u_2(t) = v_{c2}(t)$, $\tau_2(t)$.	158
Figura 8.6.c	Variables de control articular No 3: $u_{n3}(t)$, $u_3(t) = v_{c3}(t)$, $\tau_3(t)$.	159
Figura 8.6.d	Variables de control articular No 4: $u_{n4}(t)$, $u_4(t) = v_{c4}(t)$, $\tau_4(t)$.	159
Figura 8.6.e	Variables de control articular No 5: $u_{n5}(t)$, $u_5(t) = v_{c5}(t)$, $\tau_5(t)$.	160
Figura 8.6.f	Variables de control articular No 6: $u_{n6}(t)$, $u_6(t) = v_{c6}(t)$, $\tau_6(t)$.	160
Figura 8.7	Trayectoria cartesiana $\mathbf{P}(t)$ tridimensional del efector final del robot.	161
Figura 8.8	Desplazamiento lineal cartesiano $\bar{p}(t)$ del efector final del robot.	162
Figura 8.9	Velocidad lineal cartesiana $\bar{v}(t)$ del efector final del robot.	162
Figura 8.10	Velocidad angular cartesiana $\bar{\omega}(t)$ del efector final del robot.	163
Figura 8.11	Velocidades absolutas lineal $v(t)$ y angular $\omega(t)$ del efector final.	163
Figura 9.1	Esquema general del Sistema de Control Adaptivo Autosintonizable.	168
Figura 9.2	Diagrama del Sistema de Control Adaptivo Autosintonizable Multivariable.	181
Figura 9.3	Variables de referencia de posición $\theta_r(t)$ y velocidad $\dot{\theta}_r(t)$ articulares.	183
Figura 9.4.a	Variables de la articulación 1: $\theta_{r1}(t)$, $\theta_1(t)$, y $e_{\theta1}(t)$ y $\int e_{\theta1}(t) dt$.	184
Figura 9.4.b	Variables de la articulación 2: $\theta_{r2}(t)$, $\theta_2(t)$, $e_{\theta2}(t)$ y $\int e_{\theta2}(t) dt$.	184
Figura 9.4.c	Variables de la articulación 3: $\theta_{r3}(t)$, $\theta_3(t)$, $e_{\theta3}(t)$ y $\int e_{\theta3}(t) dt$.	185
Figura 9.4.d	Variables de la articulación 4: $\theta_{r4}(t)$, $\theta_4(t)$, $e_{\theta4}(t)$ y $\int e_{\theta4}(t) dt$.	185
Figura 9.4.e	Variables de la articulación 5: $\theta_{r5}(t)$, $\theta_5(t)$, $e_{\theta5}(t)$ y $\int e_{\theta5}(t) dt$.	186
Figura 9.4.f	Variables de la articulación 6: $\theta_{r6}(t)$, $\theta_6(t)$, $e_{\theta6}(t)$ y $\int e_{\theta6}(t) dt$.	186
Figura 9.5.a	Variables de la velocidad articular No 1: $\dot{\theta}_{r1}(t)$, $\dot{\theta}_1(t)$ y $\dot{e}_{\theta1}(t)$.	187

Figura 9.5.b	Variables de la velocidad articular No 2: $\dot{\theta}_{r2}(t)$, $\dot{\theta}_2(t)$ y $\dot{e}_{\theta2}(t)$.	187
Figura 9.5.c	Variables de la velocidad articular No 3: $\dot{\theta}_{r3}(t)$, $\dot{\theta}_3(t)$ y $\dot{e}_{\theta3}(t)$.	188
Figura 9.5.d	Variables de la velocidad articular No 4: $\dot{\theta}_{r4}(t)$, $\dot{\theta}_4(t)$ y $\dot{e}_{\theta4}(t)$.	188
Figura 9.5.e	Variables de la velocidad articular No 5: $\dot{\theta}_{r5}(t)$, $\dot{\theta}_5(t)$ y $\dot{e}_{\theta5}(t)$.	189
Figura 9.5.f	Variables de la velocidad articular No 6: $\dot{\theta}_{r6}(t)$, $\dot{\theta}_6(t)$ y $\dot{e}_{\theta6}(t)$.	189
Figura 9.6.a	Variables de control articular No 1: $u_{r1}(t)$, $u_1(t) = v_{c1}(t)$, $\tau_1(t)$.	190
Figura 9.6.b	Variables de control articular No 2: $u_{r2}(t)$, $u_2(t) = v_{c2}(t)$, $\tau_2(t)$.	190
Figura 9.6.c	Variables de control articular No 3: $u_{r3}(t)$, $u_3(t) = v_{c3}(t)$, $\tau_3(t)$.	191
Figura 9.6.d	Variables de control articular No 4: $u_{r4}(t)$, $u_4(t) = v_{c4}(t)$, $\tau_4(t)$.	191
Figura 9.6.e	Variables de control articular No 5: $u_{r5}(t)$, $u_5(t) = v_{c5}(t)$, $\tau_5(t)$.	192
Figura 9.6.f	Variables de control articular No 6: $u_{r6}(t)$, $u_6(t) = v_{c6}(t)$, $\tau_6(t)$.	192
Figura 9.7	Trayectoria cartesiana $\mathbf{P}(t)$ tridimensional del efector final del robot.	193
Figura 9.8	Desplazamiento lineal cartesiano $\bar{p}(t)$ del efector final del robot.	194
Figura 9.9.	Velocidad lineal cartesiana $\bar{v}(t)$ del efector final del robot.	194
Figura 9.10	Velocidad angular cartesiana $\bar{\omega}(t)$ del efector final del robot.	195
Figura 9.11	Velocidades absolutas lineal $v(t)$ y angular $\omega(t)$ del efector final.	195
Figura 10.1	Esquema de generación y control de trayectorias articulares.	200
Figura 10.2	Interpolación articular polinómica lineal.	201
Figura 10.3	Interpolación articular polinómica cúbica.	204
Figura 10.4	Interpolación polinómica articular de orden superior.	206
Figura 10.5	Generación de trayectoria articular trigonométrica.	208
Figura 10.6	Esquema de generación de trayectorias cartesianas y control en el espacio articular.	210
Figura 10.7	Posición y orientación inicial - final de una trayectoria cartesiana.	210
Figura 10.8.a	Vector de posición cartesiano \mathbf{P} del efector final del robot.	214
Figura 10.8.b	Vector de orientación \mathbf{O} del efector final mediante los ángulos de <i>Euler</i> .	214
Figura 10.8.c	Vector cartesiano normal \mathbf{n} del efector final del robot.	215
Figura 10.8.d	Vector cartesiano de deslizamiento s del efector final del robot.	215
Figura 10.8.e	Vector cartesiano de aproximación \mathbf{a} del efector final del robot.	215

Figura 10.9 Rotación de γ respecto del vector \mathbf{u} del efector final de \mathbf{R}_1 a \mathbf{R}_2 .	217
Figura 10.10.a Vector de posición cartesiano \mathbf{P} del efector final del robot.	219
Figura 10.10.b Vector de orientación \mathbf{O} del efector final mediante los ángulos de <i>Euler</i> .	219
Figura 10.10.c Vector cartesiano normal \mathbf{n} del efector final del robot.	220
Figura 10.10.d Vector cartesiano de deslizamiento s del efector final del robot.	220
Figura 10.10.e Vector cartesiano de aproximación \mathbf{a} del efector final del robot.	220
Figura 10.11 Rotaciones $\mathbf{R}_\alpha(\tau)$ y $\mathbf{R}_\beta(\tau)$ del efector final del robot de \mathbf{F}_1 a \mathbf{F}_2 .	224
Figura 10.12.a Vector de posición cartesiano \mathbf{P} del efector final del robot.	227
Figura 10.12.b Vector de orientación \mathbf{O} del efector final mediante los ángulos de <i>Euler</i> .	227
Figura 10.12.c Vector cartesiano normal \mathbf{n} del efector final del robot.	228
Figura 10.12.d Vector cartesiano de deslizamiento s del efector final del robot.	228
Figura 10.12.e Vector cartesiano de aproximación \mathbf{a} del efector final del robot.	228
Figura C.1 Gráfica de la forma del eslabón 0.	247
Figura C.2 Gráfica de la forma del eslabón 1.	248
Figura C.3 Gráfica de la forma del eslabón 2.	248
Figura C.4 Gráfica de la forma del eslabón 3.	249
Figura C.5 Gráfica de la forma del eslabón 4.	249
Figura C.6 Gráfica de la forma del eslabón 5.	249
Figura C.7 Gráfica de la forma del eslabón 6 con pinza de dos dedos.	250
Figura C.8 Gráfica de la forma del eslabón 6 con pinza de cuatro dedos.	250

RESUMEN

Esta *TESIS* trata del análisis, formulación, diseño, aplicación y simulación gráfica de tres *técnicas sofisticadas de control digital dinámico, no lineal multivariable*, que permiten realizar el control de la trayectoria espacial de los dispositivos de operación final de un robot de seis articulaciones angulares, respecto de un determinado sistema referencial. El objetivo principal es dotarle al robot la capacidad de operar libremente en el espacio cartesiano, con todas sus articulaciones accionadas simultáneamente por motores DC sin escobillas. Previamente se ha analizado, formulado y simulado la *Geometría del robot*, para posicionar y orientar al efector operacional, la *Cinemática del robot*, para especificar el movimiento espacial, la *Dinámica del robot*, para describir su comportamiento físico, incluyendo además, las ecuaciones de los motores y de los transductores de posición y velocidad, para obtener la formulación dinámica total del sistema *actuador-robot-sensor*.

Para lograr el objetivo se debe plantear una "*Ley de Control Dinámica Digital*" que genere las variables de voltaje de los motores para cada articulación y así controlar el vector articular del robot para que siga la trayectoria planificada en el espacio articular o cartesiano. Estas técnicas de control son: 1) *Control por Compensación No lineal*, se aplica cuando la dinámica total del sistema está formulada con precisión y no está afectada por perturbaciones ni incertidumbres. 2) *Control por Compensación Adaptiva*, se aplica cuando la dinámica del sistema está bien especificada y el efecto de las perturbaciones y variaciones estructurales existentes, se pueden identificar y atenuar con la adaptación de un controlador óptimo cuadrático residual. 3) *Control Optimo Adaptivo Autosintonizable*, se aplica cuando la dinámica del sistema carece de precisión y está expuesta a perturbaciones o incertidumbres y sujeta a variaciones estructurales, utilizando para ello, un método de identificación dinámica de parámetros del sistema y diseñando una estrategia de control óptimo cuadrático recursivo y adaptable para cualquier trayectoria espacial.

Luego de formular y analizar cada técnica de control se presenta la simulación gráfica de las variables involucradas en el tiempo y espacio utilizando el programa *MatLab* seguido de una tabla-resumen concluyente mostrando resultados satisfactorios.

ABSTRACT

This *THESIS* deals with the analysis, formulation, design, application and graphical simulation of three *sophisticated techniques of nonlinear multivariable dynamic digital control*, that allow to realize the spatial trajectory control of the end operation devices of a six angle joints robot, respecting a determined referential framework. The main proposed is to endow it the robot the capacity to operate freely in the cartesian space with all joints simultaneously driven with brushless DC motors. Previously it has been the analyzed, formulated and simulated the *Robot Geometry*, to position and orient the operational effector, *Robot Kinematics*, for specifying the spatial movement, the *Robot Dynamics* for describing the physical behavior, including besides, the motors' equations, position and speed transducers' equations, in order to obtain the total dynamic formulation of the actuator-robot-sensor system.

In order to achieve, it must be established a "*Digital Dynamic Control Law*" to generate voltage variables of motors of each joint and so, to control the robot joint vector to follow a planned trajectory in the joint or cartesian space. These control techniques are: 1) *Control by Nonlinear Compensation*, it is applied when the system total dynamics is formulated precision and is not affected by disturbances neither uncertainties. 2) *Control by Adaptive Compensation*, it is applied when the system dynamics is fully specified and the effect of extant structural variations and disturbances can identify and attenuate them by the adaptation of an optimal residual quadratic controller. 3) *Optimal Adaptive Self-tuned Control*, it is applied when the system dynamics lacks precision and it is exposed to disturbances or uncertainties and subjected to structural variations, utilizing for that, a dynamic identification method of system parameters and designing an optimal recursive and adaptable control strategy for any spatial trajectory.

Therefore to formulate and analyze each control technique it is included the graphical simulation of involved variables in time and space using the *MatLab* program followed by concluding table-summary showing satisfactory results.

INTRODUCCION

Un robot industrial es un manipulador de uso general constituido por eslabones rígidos conectados en serie mediante articulaciones, las cuales se accionan con elementos motrices utilizando dispositivos sensoriales para captar las variables mecánicas y realizar el control de trayectorias planificadas utilizando técnicas y algoritmos sofisticados de control, elaborando para este fin una arquitectura electrónica a base de microprocesadores.

Con el objetivo de formular, describir, analizar, diseñar y simular gráficamente la aplicación de tres técnicas de control de trayectorias de un robot de seis articulaciones accionado por motores DC sin escobillas, la Tesis, se organiza en diez capítulos.

En el capítulo 1 se presentan las definiciones teóricas y los conceptos generales de Robótica Industrial junto con la descripción de un robot de seis grados de libertad.

En el capítulo 2 se formulan y analizan las ecuaciones geométricas directa e inversa de la estructura física del robot utilizando la representación espacial, mediante matrices de transformación homogénea propuestas por *Denavit-Hartenberg* para determinar la posición y orientación del efector operacional del robot respecto de un marco referencial base, formulando ecuaciones articulares y relacionando con ecuaciones cartesianas.

En el capítulo 3 se determinan, analizan y simulan las formulaciones de la cinemática para describir el movimiento del robot en el espacio cartesiano relacionando con el espacio articular tanto en la trayectoria, velocidad y aceleración cartesianas y articulares usando funciones apropiadas en el tiempo.

En el capítulo 4 se determina, analiza y simula gráficamente la dinámica espacial del robot aplicando la metodología de *Lagrange*, que utiliza las energías cinética y potencial totales del robot para obtener una formulación dinámica vectorialmente estructurada.

En el capítulo 5 se realiza la formulación, la descripción, el análisis y la linealización del modelamiento dinámico de los actuadores motrices que son motores *DC* sin escobillas debido que se utilizan actualmente en el ámbito de la Robótica por presentar buena respuesta dinámica y permiten obtener una regulación óptima de posición y de velocidad.

En el capítulo 6 se elabora y analiza la formulación dinámica del robot integrando los motores y transductores de posición y de velocidad con el fin de obtener la *Formulación Dinámica* total inversa y directa del sistema actuador-robot-transductor y se realiza la simulación gráfica en el tiempo aplicando métodos de solución de ecuaciones diferenciales no lineales multivariables.

En el capítulo 7 se desarrolla, analiza, diseña y simula gráficamente la técnica de control utilizando “*Compensación No lineal*” que se aplica cuando se conoce la dinámica del robot de forma precisa considerando que no existen perturbaciones, ni incertidumbres. En esta sección se utiliza una linealización instantáneamente mediante una ley de control no lineal y un conjunto de controladores Proporcional-Diferencial (PD) para el sistema linealizado.

En el capítulo 8 se desarrolla, analiza, diseña y simula gráficamente la técnica de control utilizando “*Compensación Adaptiva*” que se aplica cuando se conoce la dinámica del robot con un cierto grado de incertidumbre o cuando existen variaciones estructurales generalmente en el efector final de forma continua e incierta o perturbaciones. Es necesario realizar la identificación del sistema mediante un método recursivo de mínimos cuadrados para controlar las variables residuales mecánicas y reducir el error producido en las trayectorias espaciales aplicando una ley vectorial de control óptima de un paso.

En el capítulo 9 se desarrolla, analiza, diseña y simula gráficamente la técnica de control utilizando “*Control Adaptivo Autosintonizable*” que se aplica cuando no se conoce la formulación dinámica del robot de forma precisa, cuando existen perturbaciones, incertidumbres y variaciones estructurales, para esto se utiliza un método de identificación dinámica de parámetros del sistema mediante el método de mínimos cuadrados recursivo para obtener de forma instantánea un sistema lineal equivalente para luego aplicar control óptimo adaptable incluyendo integradores de error para corregir errores y desviaciones que puedan aparecer en la respuesta al seguir una trayectoria referencial establecida.

Finalmente en el capítulo 10 se describen, analizan y simulan de forma gráfica los tipos de generación de trayectorias en el tiempo, tanto en el espacio articular como en el espacio cartesiano, empleando diversas técnicas. La generación de trayectorias en el espacio articular es más práctico de realizar, pero más útil es la realización de la generación de trayectorias en el espacio cartesiano.

CAPITULO 1

GENERALIDADES DE ROBOTICA

1.1 Introducción

La Robótica es una área multidisciplinaria compleja en la cual intervienen diversas áreas tecnológicas y especialidades de Ingeniería, como Ingeniería Mecánica, Ingeniería Electrónica, Ingeniería Automática, Ingeniería Informática, Procesamiento digital de señales, Inteligencia artificial, etc. haciendo uso de las ciencias básicas teóricas y aplicadas.

De forma general se puede definir en la actualidad la Robótica como el conjunto de conocimientos teóricos y prácticos que permiten concebir, realizar y automatizar sistemas basados en estructuras mecánicas poliarticuladas, dotados de un determinado grado de “inteligencia” y destinados a la producción industrial o a la sustitución del hombre en muy diversas tareas. Un sistema robótico se puede describir, como aquel que es capaz de recibir información, de comprender su entorno a través del empleo de formulaciones, de realizar y de ejecutar planes y de controlar o supervisar su operación. La noción de Robótica implica una cierta idea preconcebida de la estructura mecánica universal capaz de adaptarse, a muy diversos tipos de acciones y en la que concurren, en mayor o menor grado según los casos, las características de movilidad, gobernabilidad, autonomía y polivalencia, unida a la versatilidad y variedad de los elementos operacionales que utiliza.

Un robot manipulador es una estructura mecánica en el cual se integran una variedad de mecanismos metálicos, dispositivos eléctricos y electrónicos, elementos motrices o motores y sensoriales (transductores), se incorpora un sistema multiprocesador digital para procesar y ejecutar los algoritmos de control en tiempo real que permiten realizar el movimiento requerido, obtener la percepción del entorno y ejecutar operaciones; también se puede incluir un sistema de comunicación.

En la figura 1.1 se muestra el esquema integrado de un sistema robótico que incorpora los principales componentes con su entorno externo.

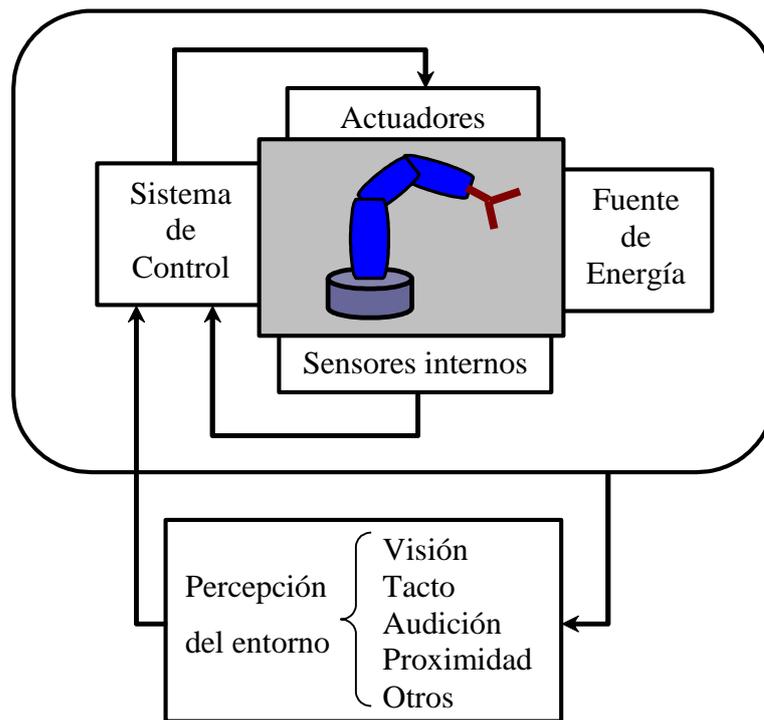


Figura 1.1 Sistema de un robot y su interacción con el entorno operacional.

Gráfica elaborada por el autor

1.2 Definición de un Robot Industrial

La mayoría de los robots industriales son esencialmente brazos articulados que se denominan robots manipuladores, constituidos por un conjunto diverso de dispositivos cuyo nexo común y fundamental es el hecho de tratarse de artificios mecánicos destinados a la manipulación de objetos o dispositivos y dotados de algún tipo de grado de libertad en sus movimientos, para uso universal a base de procedimientos de programación electrónica de sus secuencias de movimientos u operaciones en el espacio tridimensional denominado espacio operacional. En la actualidad existen diversas definiciones para un robot industrial o manipulador debido a la variedad de formas de robots que existen dependiendo sobre todo de las aplicaciones, capacidad, eficiencia, precisión, flexibilidad, etc. del robot. Cada científico, tecnólogo o técnico conocedor del área de Robótica puede dar su propia definición. La definición más aceptada por la “Comunidad Robótica” es la que da el “*ROBOT INSTITUTE OF AMERICA*” (RIA): “*Un robot industrial es un manipulador programable multifuncional diseñado para mover materiales, piezas, herramientas o dispositivos especiales, mediante movimientos variados, programados para la ejecución de tareas distintas*”.

1.3 Componentes de un robot

Un robot es un sistema complejo que generalmente está constituido por diversos componentes de distinta naturaleza que depende generalmente de la aplicación de cada robot. Los componentes más resaltantes de forma básica se describen a continuación:

- **Arquitectura mecánica**

La arquitectura o estructura mecánica de un robot se compone por diversos eslabones y articulaciones de formas variadas y de distinto tipo de material que conforman una cadena estructural abierta, cerrada o ramificada, en la mayoría de robots manipuladores está constituida por una cadena cinemática eslabonar abierta, es decir fija en un extremo y móvil en el otro. Para realizar los desplazamientos espaciales se utilizan dispositivos de transmisión de movimiento, como diversas clases de engranajes, poleas, fajas, tornillos sin fin, cremalleras, impulsores armónicos (*Harmonic Drives*), etc., para reducir los efectos friccionales se usan distintas clases de rodamientos (cónicos o esféricos). En la arquitectura mecánica normalmente se distinguen el “brazo” articulado que permite realizar el posicionamiento, la “muñeca”, que permite realizar una orientación deseada y el órgano terminal o efector operacional, el cual puede ser intercambiable o modular que pueden ser herramientas de cualquier tipo como pinzas o diversos dispositivos específicos para realizar distintas tareas. El efector final va adherido al extremo móvil del robot.

- **Elementos actuadores**

Los actuadores son elementos motrices que según el tipo de articulación, generan torsiones o fuerzas necesarias para accionar la estructura mecánica desplazando relativamente los eslabones del robot en el espacio, según la operación que se requiera realizar. Los actuadores o motores de un robot se deben seleccionar según la aplicación, eficiencia, precisión y/o potencia desarrolladas, los cuales pueden ser de tecnologías diversas como:

- Actuadores hidráulicos que pueden ser cilindros y motores, normalmente para desarrollar altas potencias.
- Actuadores neumáticos que pueden ser cilindros o motores, normalmente para desarrollar medianas potencias.
- Actuadores eléctricos que son diversos, normalmente para desarrollar bajas, medianas y altas potencias.

Los actuadores eléctricos mayormente son los más utilizados en Robótica y su clasificación es muy variada, que pueden ser motores de corriente directa DC de distinta potencia, motores de corriente alterna AC que puede ser monofásicos o trifásicos, motores de conmutación electrónica que a su vez son motores de pasos o motores sin escobillas, éstos últimos se vienen utilizando actualmente en la impulsión de las articulaciones de los robots para alcanzar altas precisiones.

- **Elementos sensores**

Los sensores o transductores transforman distintos tipos de variables físicas en variables eléctricas que permiten detectar y determinar las magnitudes de dichas variables de forma proporcional, en el mejor de los casos en magnitudes eléctricas. Los sensores que se utilizan en Robótica son diversos, de distinta clase, elaborados de distinta naturaleza, con distinta precisión según sea la aplicación del robot; pero básicamente se pueden clasificar en sensores internos y sensores externos.

Los sensores internos son dispositivos que permiten captar normalmente las magnitudes de posición, velocidad y esfuerzo de las articulaciones del robot en tiempo real para determinar y controlar la posición y orientación deseadas del efector operacional del robot en el tiempo, respecto de un determinado sistema de coordenadas espaciales, utilizadas como sistemas de referencia.

Los sensores externos se utilizan para captar las condiciones exteriores del robot y la percepción del entorno de operación del manipulador y éstos pueden ser de alcance, de proximidad, de contacto, de color, de temperatura, de sonido y hasta cámaras de adquisición de imágenes para obtener una descripción precisa de la geometría de los objetos incluidos en la escena de operación. La utilización de los sensores externos depende básicamente de las aplicaciones del robot.

- **Sistema de conversión de energía**

La unidad de conversión de energía permite transformar la forma y magnitud de la energía eléctrica en energía útil y necesaria normalmente para energizar a los elementos motrices, usando diversos dispositivos electrónicos en la elaboración de amplificadores de potencia. Esta unidad también incluye dispositivos adecuados y necesarios para adecuar la señal del controlador del sistema y convertirlo en un nivel de potencia suficientemente necesaria utilizadas como señales de control del sistema.

- **Sistema de control**

El sistema de control tiene por objetivo conducir y gobernar a las variables mecánicas del robot para realizar una trayectoria espacial en el tiempo y en el espacio a partir de la información procedente de los transductores internos y de los puntos de consigna de la trayectoria deseada a realizar, ejecutando algoritmos de técnicas de control establecidos para ser ejecutados mediante un procesador o sistema de procesadores digitales, para realizar alguna tarea determinada de forma específica reaccionando ante los cambios del entorno mediante los sensores externos, eligiendo algún tipo de decisión o autonomía. El sistema de control de un robot se puede analizar y descomponer funcionalmente en niveles según su estructura jerárquica.

En el nivel interior de control se realizan las tareas de servocontrol y supervisión de las articulaciones con la mayor precisión posible. La mayoría de robots industriales en la actualidad emplean servomecanismos con realimentación de posición y velocidad que permiten generar señales o variables de voltaje de control hacia los actuadores motrices para generar las torsiones o fuerzas sobre las articulaciones utilizando diversas estrategias de control.

El segundo nivel trata de la generación de trayectorias de la evolución del efector final normalmente en el espacio operacional al desplazarse de una posición a otra. El generador de trayectorias debe suministrar a los servomecanismos las variables de energía para conseguir la evolución requerida del efector operacional del manipulador a partir de la especificación del movimiento deseado.

Los niveles superiores de control se ocupan de la interpretación de los programas de operación, comunicación con el operador, comunicación con otros robots, percepción sensorial y planificación de tareas.

El movimiento espacial de un robot se describe mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales continuas acopladas dinámicamente. Los esquemas de control de un robot se basan en formulaciones analíticas de estrategias de control de variables físicas que determinan el desarrollo de las trayectorias espaciales. Los métodos de control deben ser suficientemente exactos para que el movimiento resultante sea lo más preciso posible, esto se consigue seleccionando la técnica de control apropiada y así se puede obtener un rendimiento eficaz, eficiente y efectivo en el control de trayectorias espaciales.

- **Arquitectura electrónica**

La arquitectura electrónica de un robot industrial consiste generalmente en un sistema multiprocesador interconectado, normalmente un microprocesador por cada articulación y para procesar los algoritmos de control de las trayectorias se suele utilizar un computador central de alta velocidad de procesamiento de información. Además de incorporar microprocesadores, la arquitectura electrónica se elabora a base de dispositivos microelectrónicos, que incorporan dispositivos de diversos tipos de memoria, dispositivos programables de control de entrada/salida de datos, dispositivos controladores de tiempos que pueden ser temporizadores, contadores, osciladores, dispositivos controladores de interrupciones y otros. El computador central de preferencia es un computador industrial (*IPC*) de alta velocidad de procesamiento numérico y gran capacidad de almacenamiento, capaz de procesar los algoritmos de control, las tareas programadas, la interpolación y generación de trayectorias con un sistema operativo de tiempo real, y permitir la simulación gráfica, además debe incorporar buses de comunicación paralela o serial de alta velocidad y fidelidad que interconecten todos los procesadores mediante protocolos de comunicación segura y efectiva.

El sistema electrónico debe incluir también conversores de señal analógica a digital de alta velocidad y de buena resolución para digitalizar todas las variables físicas captadas por los sensores internos y/o externos, digitalizar y procesar señales de video, etc. así como conversores de señal digital a señal analógica para transmitir las señales de mando a los actuadores del robot.

1.4 Especificaciones de un robot

Las especificaciones de funcionamiento y operación de los robots corresponden a las características que los robots deben cumplir para tener un buen desempeño y eficiencia, por lo general son:

Espacio de operación. El espacio o volumen de operación se constituye por todas las posiciones del espacio accesible por el extremo del efector operacional del robot. El espacio de operación depende básicamente de la configuración mecánica del robot.

Grado de libertad. Es cada uno de los movimientos independientes que una articulación del robot permite efectuar entre dos elementos adyacentes.

Resolución espacial. Se define como el incremento o decremento más pequeño de movimiento que puede ejecutar el efector final del robot en el espacio operacional.

Exactitud. Se refiere a la capacidad de un manipulador robótico para situar el extremo del efector final en un punto señalado o específico dentro del volumen o espacio de operación.

Repetibilidad. Se define como el radio de la esfera que abarcan los puntos alcanzados por el efector final del robot, tras sucesivos movimientos al situarse en el mismo punto destino programado con iguales condiciones de operación. Es una medida de la capacidad del robot para ubicar el extremo del efector final o herramienta a un punto anteriormente definido en el volumen de operación.

1.5 Estructuras básicas de Robots Industriales

La estructura típica o genérica de un manipulador robótico consiste en un brazo articulado compuesto por elementos articulares entre sí, mediante articulaciones lineales o traslacionales y angulares o rotacionales. En el último enlace se coloca el órgano terminal o efector operacional, encargado de realizar alguna tarea determinada.

El espacio operacional es el conjunto de puntos en los que se puede situar o fijar el efector final del robot. Para poder acceder a todo punto en el espacio de operación se necesitan tres articulaciones o ejes (ejes mayores para los movimientos primarios) y para orientar al efector final en cualquier dirección espacial se necesitan otras tres articulaciones o ejes (ejes menores para los movimientos secundarios).

Las estructuras generales de robots tienen diferentes propiedades en cuanto a su espacio operacional, accesibilidad y movilidad a determinadas posiciones espaciales, pero se suele precisar siempre de tres ejes en la estructura que configura el brazo, responsable del posicionamiento del elemento operacional del robot. Ciertas configuraciones se han consolidado y se han convertido en un marco obligatorio de referencia para la mayoría de clasificaciones. Las coordenadas que definen el movimiento son: coordenadas cartesianas (x, y, z) , coordenadas cilíndricas (α, z, ρ) , coordenadas esféricas (α, β, ρ) y coordenadas angulares (α, β, γ) .

En la figura 1.2 se muestran las cuatro configuraciones básicas de manipuladores de tres ejes de posicionamiento: cartesiana, cilíndrica, esférica y angular [3]. Estas estructuras a su vez se pueden clasificar en otras de distinta configuración.

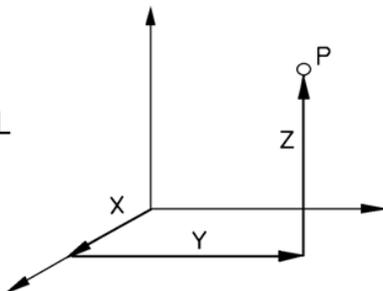
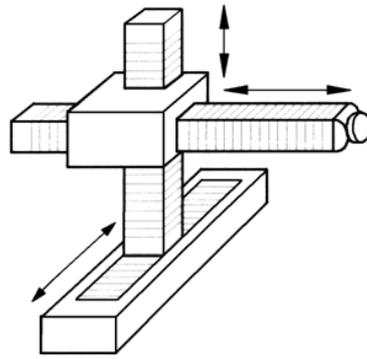
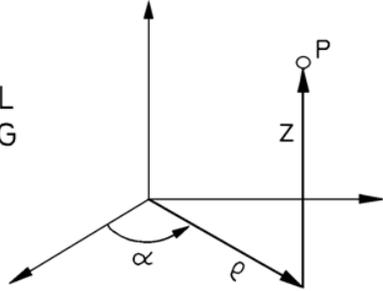
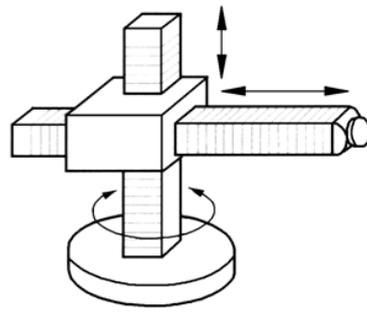
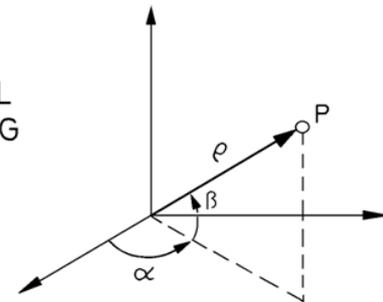
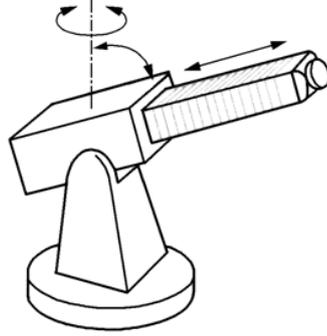
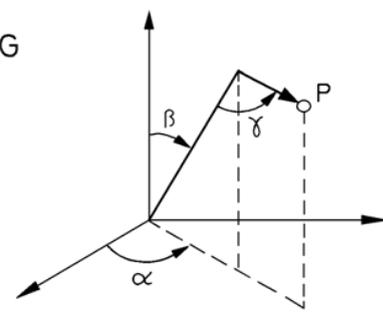
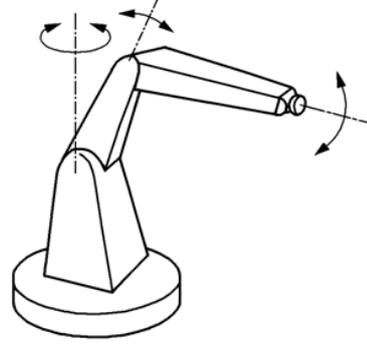
<p style="text-align: right;"><i>Cartesiana</i></p> <p>3L</p> 	
<p style="text-align: right;"><i>Cilindrica</i></p> <p>2L 1G</p> 	
<p style="text-align: right;"><i>Esférica</i></p> <p>1L 2G</p> 	
<p style="text-align: right;"><i>Angular</i></p> <p>3G</p> 	

Figura 1.2 Configuraciones básicas de manipuladores robóticos.

Gráfica elaborada por el autor en base a [3]

Para determinar y realizar la orientación completa de un robot es necesario establecer tres articulaciones para especificar la estructura de la “muñeca” en la cual va anclado o fijado el efector final [14]. En la figura 1.3 se muestra la arquitectura esférica de una muñeca cuyos ejes de giro coinciden en un mismo punto y en la figura 1.4 se muestra la arquitectura no esférica de la muñeca de un robot.

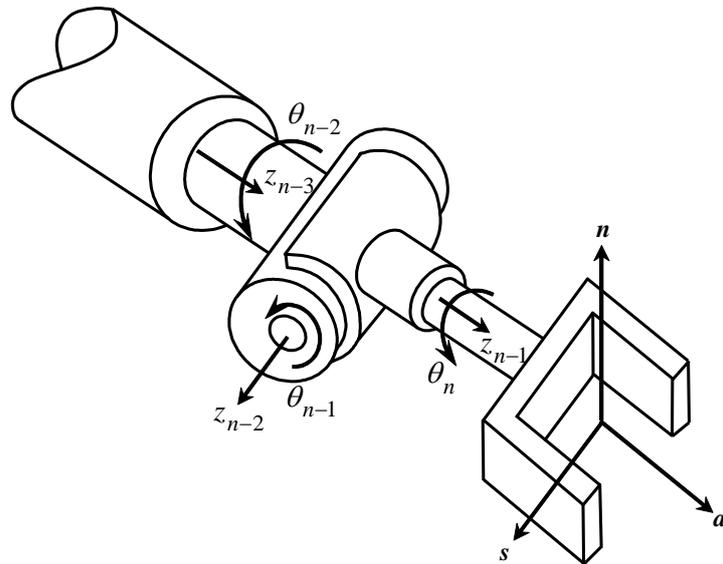


Figura 1.3 Arquitectura esférica de la muñeca de un robot.

Gráfica elaborada por el autor en base a [14]

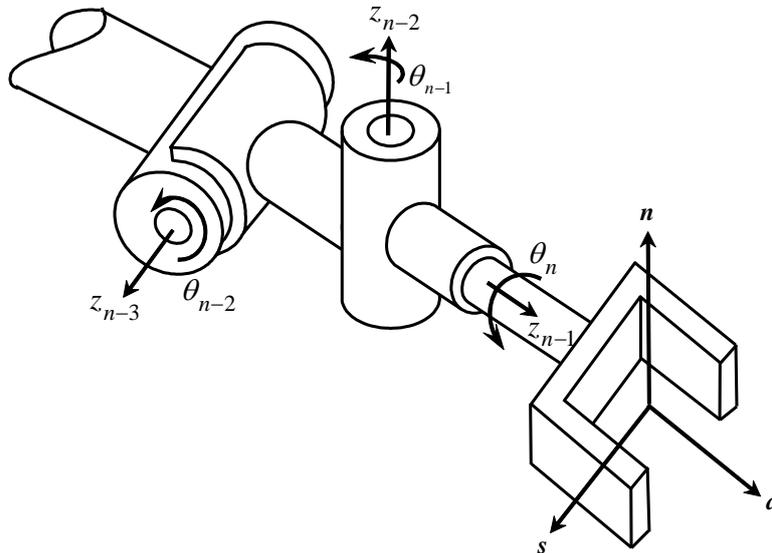


Figura 1.4 Arquitectura no esférica de la muñeca de un robot.

Gráfica elaborada por el autor en base a [14]

En la arquitectura no esférica de la muñeca se pueden establecer tres ángulos denominados también ángulo de giro, de elevación y de desviación respectivamente que permiten dar una interpretación física desde el exterior.

El robot que se ha elegido en este trabajo, es un manipulador de estructura angular para la posición, y para la orientación del efector final se ha optado por emplear la arquitectura de la “muñeca” esférica con tres articulaciones, resultando un robot de seis articulaciones angulares o rotacionales, lo que le proporciona al robot una alta flexibilidad articular y cartesiana, pero con un grado elevado de acoplabilidad intrínseca. La finalidad de haber elegido la estructura del manipulador robótico de seis grados de libertad con todas sus articulaciones angulares, es para realizar el estudio, análisis, de la geometría (directa e inversa), cinemática (directa e inversa), dinámica (directa e inversa) de forma completa y realizar el diseño de los métodos de control no lineal multivariable y así mostrar la validación de las aplicaciones mediante la simulación gráfica.

En la figura 1.5 se presenta la estructura mecánica del robot de seis articulaciones rotacionales, tres para el posicionamiento y tres para la orientación del efector final que se trata de una pinza de desplazamiento paralelo.

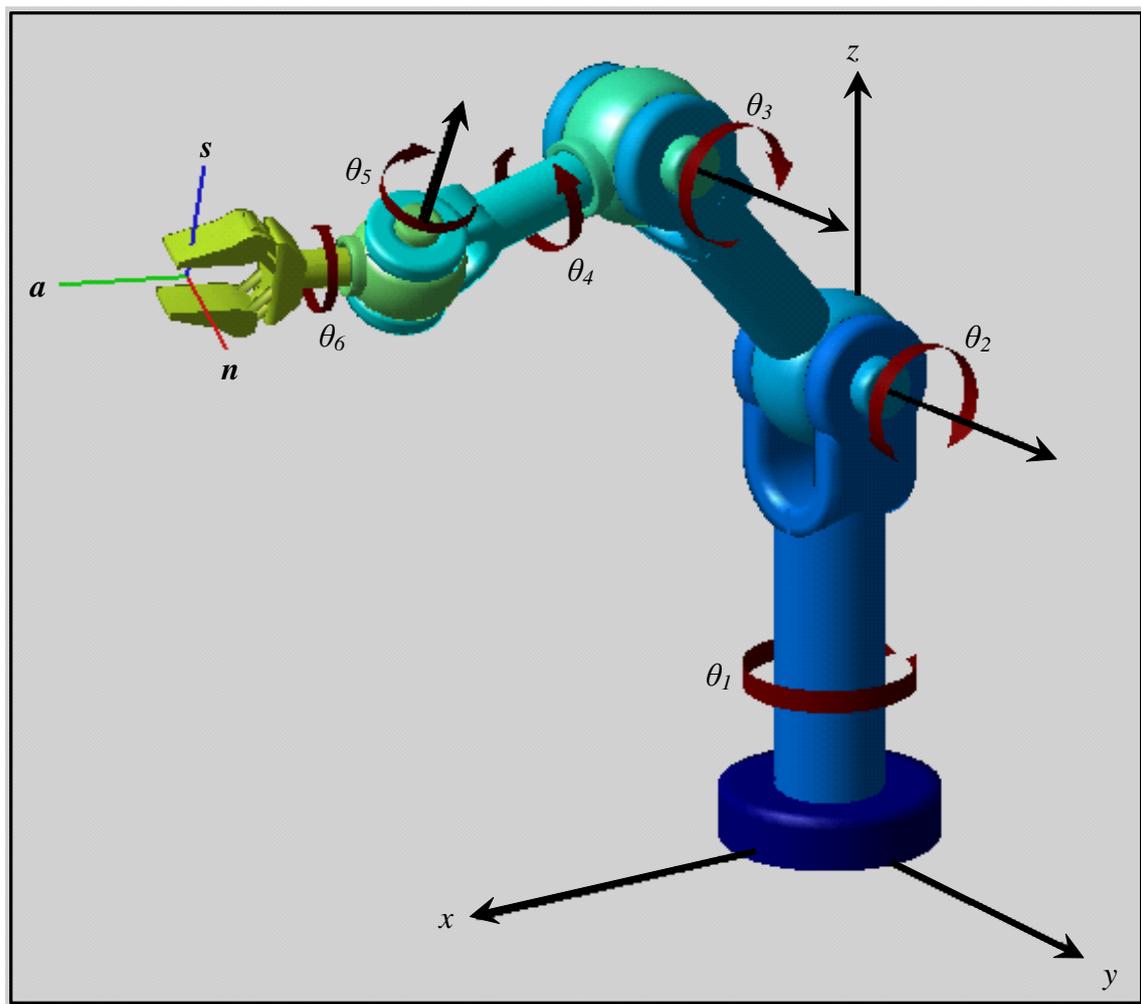


Figura 1.5 Estructura mecánica del robot de seis articulaciones.

Gráfica elaborada por el autor mediante MatLab

CAPITULO 2

FORMULACION GEOMETRICA DEL ROBOT

2.1 Introducción

La formulación geométrica o cinemática de posición de un manipulador robótico trata de la relación entre las variables asociadas a las articulaciones q del robot y la localización del efector operacional (posición P y orientación R) respecto de un determinado sistema de referencia, que se puede establecer en la base del robot y que se define teniendo en cuenta la tarea que se desea desarrollar. En un manipulador este sistema de coordenadas se suele elegir de tal manera que esté asociado al efector operacional del robot, con lo cual se estudia la relación entre las variables articulares q del robot y la posición P y orientación R con relación al marco referencial fijo en la base del robot. En la formulación geométrica de un manipulador robótico se describen y analizan la Formulación Geométrica Directa (FGD) y la Formulación Geométrica Inversa (FGI) en función de los parámetros geométricos del robot.

En la figura 2.1 se ilustra la relación general de la Geometría Directa e Inversa de un robot manipulador.

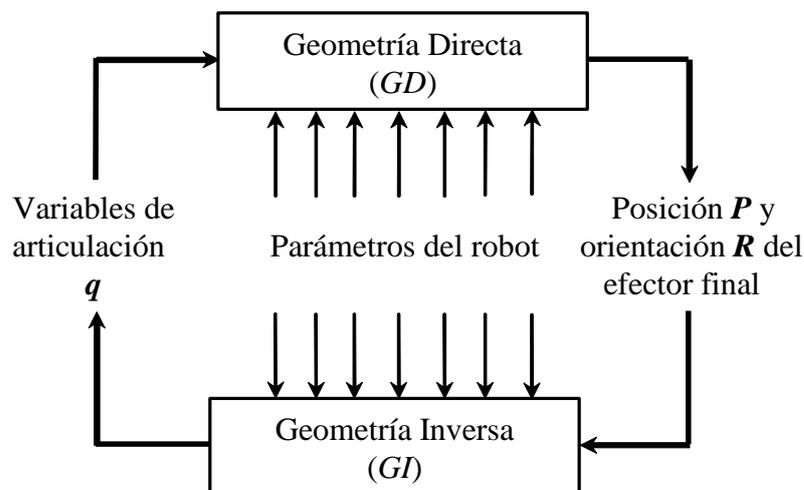


Figura 2.1 Relación general de la Geometría Directa e Inversa de un robot.

Gráfica elaborada por el autor

2.2 Representación matricial de Denavit-Hartenberg

Para describir la relación traslacional y rotacional entre elementos adyacentes, *Denavit* y *Hartenberg* (*D-H*) propusieron un método matricial para establecer de forma sistemática un sistema de coordenadas de referencia denominado referencial (ligado al cuerpo) de cada elemento de la cadena articulada del robot. La representación de *Denavit-Hartenberg* se expresa mediante una matriz de transformación homogénea T de dimensión 4×4 que representa cada uno de los sistemas referenciales de los elementos en la articulación del robot con respecto al referencial del elemento previo. Así, mediante transformaciones secuenciales, el efector final del robot expresado en las “coordenadas del objeto” se puede transformar y expresar en “coordenadas cartesianas de la base”, generalmente en un referencial fijo el cual constituye el sistema inercial del manipulador [8], [11], [13].

En la figura 2.2 se muestra el esquema geométrico de un par eslabón-articulación asociados mediante un sistema de coordenadas o referencial $x_k y_k z_k$ fijo en el elemento geométrico k que se encuentra desplazándose respecto de un sistema de coordenadas o referencial $x_{k-1} y_{k-1} z_{k-1}$. Estos dos referenciales se encuentran relacionados mediante cuatro parámetros geométricos que son a_k , α_k , d_k y θ_k .

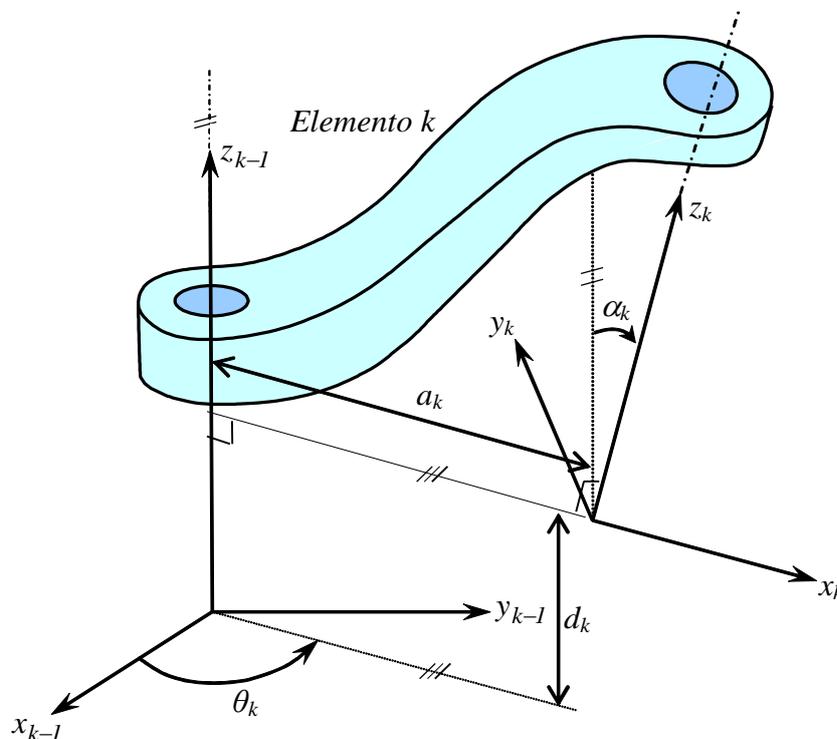


Figura 2.2 Parámetros del par elemento-articulación k de un robot.

Gráfica elaborada por el autor

Los parámetros del par eslabón-articulación a_k , α_k , d_k y θ_k se especifican como:

a_k : Distancia desde el eje z_{k-1} al eje z_k a lo largo eje x_k .

α_k : Angulo de separación desde el eje z_{k-1} al eje z_k respecto del eje x_k .

d_k : Distancia desde el eje x_{k-1} al eje x_k a lo largo del eje z_{k-1} .

θ_k : Angulo de desplazamiento desde el eje x_{k-1} al eje x_k respecto del eje z_{k-1} .

El sistema referencial $x_k y_k z_k$ se relaciona con el sistema referencial $x_{k-1} y_{k-1} z_{k-1}$ mediante rotaciones y traslaciones como el producto de matrices de transformación homogénea en función de los parámetros a_k , α_k , d_k y θ_k . La transformación del sistema $k-1$ hacia el sistema k se puede describir por una secuencia de rotaciones y traslaciones: una rotación de un ángulo de torsión α_k con respecto del eje x_k , una traslación de longitud a_k a lo largo del eje x_k , una traslación de magnitud d_k a lo largo de z_{k-1} y una rotación de un ángulo θ_k con respecto al eje z_{k-1} , obteniéndose así una matriz de transformación homogénea total $D-H$ realizando la siguiente secuencia como sigue [8]:

$${}_{k-1}\mathbf{T}^k = \text{Rot}(z, \theta_k) \text{Tras}(0, 0, d_k) \text{Tras}(a_k, 0, 0) \text{Rot}(x, \alpha_k) \quad (2.1)$$

$${}_{k-1}\mathbf{T}^k = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k & 0 & 0 \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_k & -\sin \alpha_k & 0 \\ 0 & \sin \alpha_k & \cos \alpha_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Multiplicando las matrices de transformación de la ecuación (2.2) se obtiene la matriz resultante de transformación ${}_{k-1}\mathbf{T}^k$ del sistema referencial $x_k y_k z_k$ respecto del sistema referencial $x_{k-1} y_{k-1} z_{k-1}$ que se expresa como:

$${}_{k-1}\mathbf{T}^k = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & -\cos \alpha_k \sin \theta_k & \sin \alpha_k \sin \theta_k & a_k \cos \theta_k \\ \sin \theta_k & \cos \alpha_k \cos \theta_k & -\sin \alpha_k \cos \theta_k & a_k \sin \theta_k \\ 0 & \sin \alpha_k & \cos \alpha_k & d_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

La matriz de transformación ${}_{k-1}\mathbf{T}^k$ corresponde a un grado de libertad ya sea traslacional o rotacional. La inversa de la matriz de la ecuación (2.3) representa la

transformación homogénea del referencial $x_{k-1}y_{k-1}z_{k-1}$ respecto del referencial $x_ky_kz_k$ y se expresa como:

$${}^kT_{k-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & \text{sen } \theta_k & 0 & -a_k \\ -\cos \alpha_k \text{sen } \theta_k & \cos \alpha_k \cos \theta_k & \text{sen } \alpha_k & -d_k \text{sen } \alpha_k \\ \text{sen } \alpha_k \text{sen } \theta_k & -\text{sen } \alpha_k \cos \theta_k & \cos \alpha_k & -d_k \cos \alpha_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

La estructura de un robot manipulador considerándola como una cadena articulada serial de n grados de libertad se puede formar por elementos como el que se muestra en la figura 2.2, cada uno de los enlaces o elementos k se conectan en sus extremos a otros dos elementos mecánicos para establecer dos ejes de articulación z_{k-1} y z_k y mantener una configuración fija entre sus articulaciones.

La distancia más corta a_k que viene a ser la recta normal y común entre los ejes de articulación z_{k-1} y z_k a lo largo del eje x_k se denomina longitud del eslabón k , y el ángulo α_k que se forma desde el eje z_{k-1} al eje z_k , medido en el plano perpendicular al eje x_k se denomina ángulo de torsión del elemento k ; por lo tanto, un eslabón tiene dos dimensiones o parámetros inherentes a_k y α_k (parámetros del eslabón) y son los que determinan su estructura geométrica.

Se debe establecer un eje z_{k-1} para la k -ésima articulación en la conexión de dos elementos adyacentes, el cual presenta dos normales conectadas a dicho eje, para cada uno de los elementos adyacentes a_{k-1} y a_k en las direcciones de los ejes x_{k-1} y x_k respectivamente. La posición relativa d_k de tales elementos conectados (elemento $k-1$ y elemento k) es la distancia medida a lo largo del eje de articulación z_{k-1} entre las normales a_{k-1} y a_k . El ángulo de articulación θ_k formado desde el eje x_{k-1} al eje x_k se mide en un plano normal al eje de la articulación z_{k-1} . A los parámetros d_k y θ_k se les denomina distancia y ángulo de desplazamiento respectivamente entre los elementos adyacentes (parámetros de la articulación).

Estableciendo un convenio de signos para cada parámetro, se puede determinar completamente la configuración geométrica de un robot mediante la representación de *Denavit-Hartenberg*.

Para una articulación giratoria, angular o rotacional de un robot, los literales a_k , α_k y d_k son los parámetros del elemento k y permanecen invariantes o constantes para la estructura del robot, mientras que el parámetro θ_k es la variable de articulación q_k independiente que varía cuando el elemento k gira con respecto al eje z_{k-1} asociado al elemento $k-1$. En la figura 2.3 se muestra la configuración estructural mecánica para una articulación de tipo rotacional o giratoria $q_k = \theta_k$ con los elementos adyacentes y sistemas referenciales respectivos. [6]

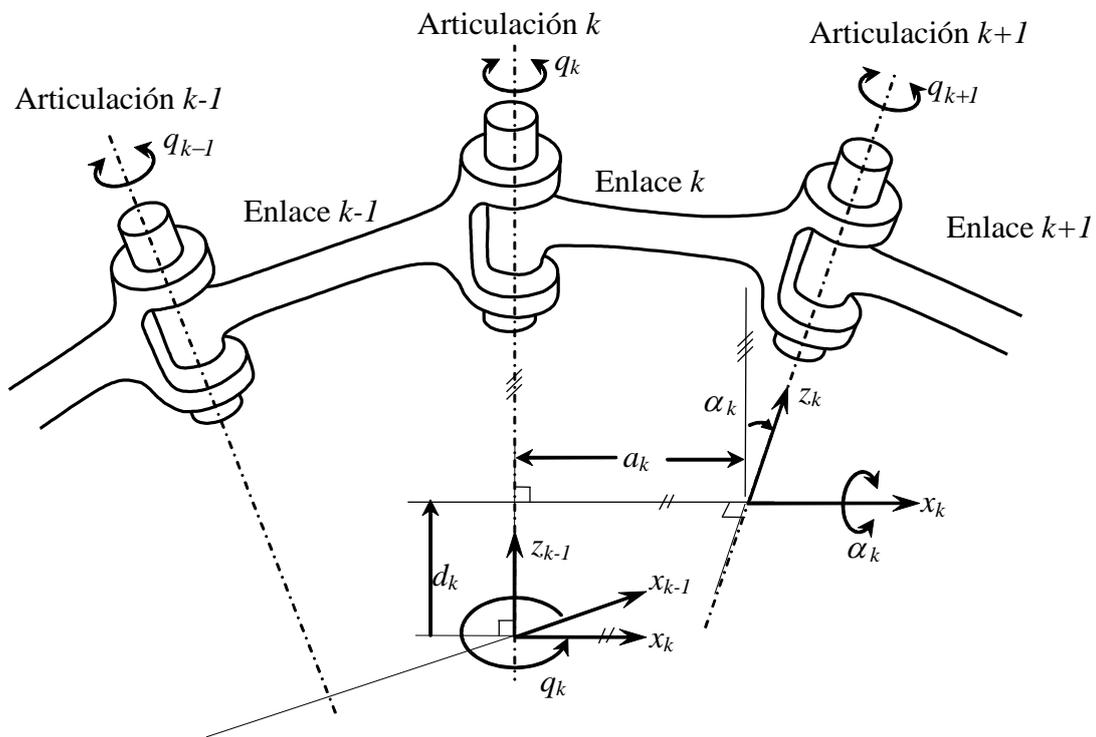


Figura 2.3 Parámetros de una articulación rotacional θ_k .

Gráfica elaborada por el autor en base a [6]

Para una articulación prismática o traslacional, los literales de un robot α_k , a_k y θ_k son los parámetros del elemento o eslabón k y permanecen invariantes o constantes, para la estructura del robot, mientras que el parámetro d_k es la variable de la articulación q_k independiente que varía cuando el elemento k se desplaza a lo largo del eje z_{k-1} relativo al elemento $k-1$. En la figura 2.4 se muestra una configuración estructural mecánica para una articulación de tipo traslacional o prismática $q_k = d_k$ con los elementos adyacentes y sistemas referenciales respectivos. [6]

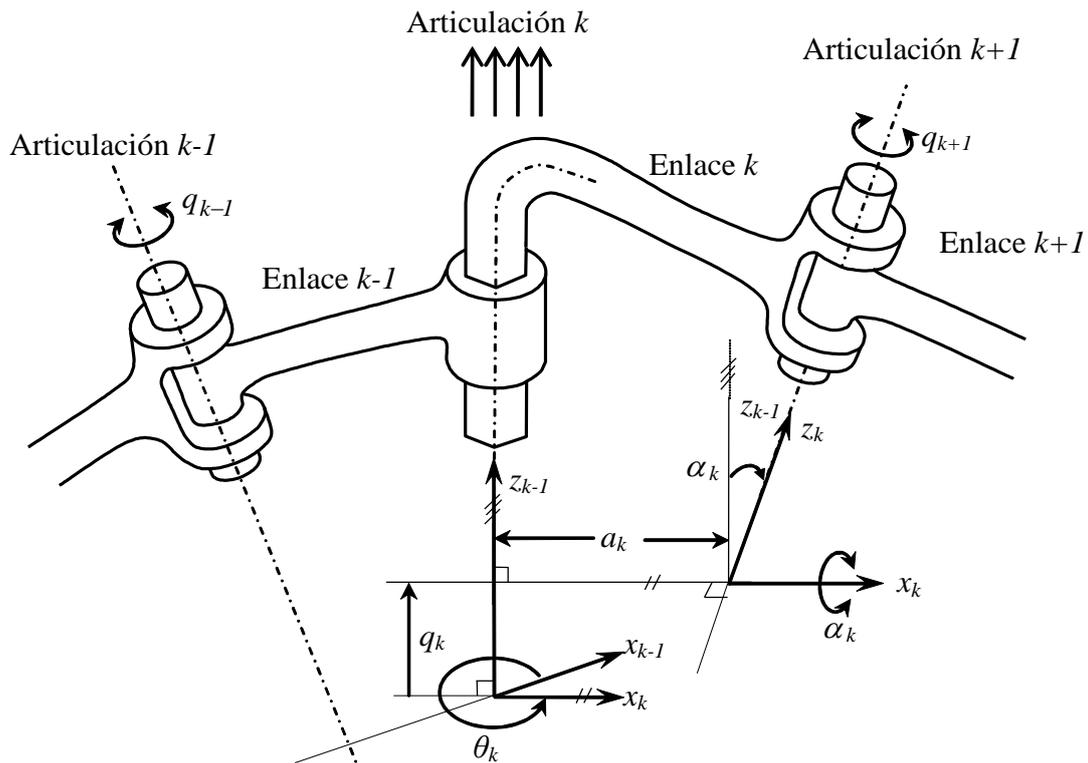


Figura 2.4 Parámetros de una articulación traslacional d_k .

Gráfica elaborada por el autor en base a [6]

Para expresar la formulación geométrica para cada par articulación - eslabón de una articulación rotacional como la que se muestra en la figura 2.3, o de una articulación traslacional como la que se muestra en la figura 2.4, se hace uso de la representación *D-H*. Una vez establecido el sistema referencial para cada grado de libertad, se desarrolla una matriz de transformación homogénea que relacione el sistema de coordenadas k -ésimo con el sistema de coordenadas $(k-1)$ -ésimo en función de sus respectivos parámetros.

Los ejes del sistema referencial $x_k y_k z_k$ se seleccionan de la siguiente manera:

1. El eje z_k del sistema k debe coincidir con el eje de la articulación $k+1$, alrededor del cual el desplazamiento o rotación q_{k+1} se está realizando.
2. El eje x_k se debe alinear con cualquier normal común que exista (usualmente la normal entre los ejes de articulación z_{k-1} y z_k) y se direcciona desde la articulación k a la articulación $k+1$. En el caso de que los ejes de las articulaciones se intercepten, el eje x_k se elige para ser paralelo o anti paralelo al producto vectorial de $z_{k-1} \times z_k$.
3. El eje y_k debe satisfacer la condición $z_k \times x_k = y_k$.

La variable de articulación rotacional $q_k = \theta_k$ se define como el ángulo formado entre los ejes x_{k-1} y x_k respecto del eje z_{k-1} .

Para la articulación rotacional o angular entre los referenciales sucesivos $k-1$ y k con $q_k = \theta_k$ según la figura (2.3) se expresa mediante la matriz de transformación homogénea como sigue:

$${}_{k-1}\mathbf{T}^k = \begin{bmatrix} \cos q_k & -\cos \alpha_k \sin q_k & \sin \alpha_k \sin q_k & a_k \cos q_k \\ \sin q_k & \cos \alpha_k \cos q_k & -\sin \alpha_k \cos q_k & a_k \sin q_k \\ 0 & \sin \alpha_k & \cos \alpha_k & d_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

La inversa de la matriz de la ecuación (2.5) se expresa como:

$${}^k\mathbf{T}_{k-1} = \begin{bmatrix} \cos q_k & \sin q_k & 0 & -a_k \\ -\cos \alpha_k \sin q_k & \cos \alpha_k \cos q_k & \sin \alpha_k & -d_k \sin \alpha_k \\ \sin \alpha_k \sin q_k & -\sin \alpha_k \cos q_k & \cos \alpha_k & -d_k \cos \alpha_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Para la articulación traslacional o lineal entre los referenciales sucesivos $k-1$ y k con $q_k = d_k$ según la figura (2.4) se expresa mediante la matriz de transformación homogénea como sigue:

$${}_{k-1}\mathbf{T}^k = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & -\cos \alpha_k \sin \theta_k & \sin \alpha_k \sin \theta_k & 0 \\ \sin \theta_k & \cos \alpha_k \cos \theta_k & -\sin \alpha_k \cos \theta_k & 0 \\ 0 & \sin \alpha_k & \cos \alpha_k & q_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

La inversa de la matriz de la ecuación (2.7) se expresa como:

$${}^k\mathbf{T}_{k-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & \sin \theta_k & 0 & 0 \\ -\cos \alpha_k \sin \alpha_k & \cos \alpha_k \cos \theta_k & \sin \alpha_k & -q_k \sin \alpha_k \\ \sin \alpha_k \sin \theta_k & -\sin \alpha_k \cos \theta_k & \cos \alpha_k & -q_k \cos \alpha_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Una vez que el sistema de coordenadas se asigna a cada eslabón de un robot determinado y se establecen los parámetros a_k , α_k , d_k y θ_k , con $k = 1, 2, 3, \dots, n$, se determinan, las matrices de transformación homogénea ${}_{k-1}\mathbf{T}^k$ de las ecuaciones (2.5) o (2.7) que dependen sólo de las coordenadas o variables articulares q_k . Luego de haber

obtenido las matrices de transformación homogénea entre los sistemas referenciales de coordenadas sucesivas, se obtiene la transformación entre los referenciales asignados al último enlace con el sistema referencial base.

Para un robot serial de n grados de libertad, el etiquetado de cada referencial comienza desde la base soporte hasta el efector final del robot. La relación entre elementos adyacentes se representa mediante una matriz de transformación homogénea ${}_{k-1}\mathbf{T}^k$. Cada sistema referencial correspondiente a un grado de libertad se determina y establece sobre tres reglas generales:

1. El eje z_{k-1} yace a lo largo del eje de la articulación.
2. El eje x_k es normal al eje z_{k-1} y apunta hacia afuera de él.
3. El eje y_k completa el sistema de coordenadas dextrógiro según se requiera.

Con las tres reglas establecidas, se aplica el algoritmo de *Denavit-Hartenberg* para establecer un sistema de coordenadas ortonormal y consistente en cada par elemento-articulación del robot.

2.3 Especificaciones del efector operacional

Para un robot de n grados de libertad existen n articulaciones accionadas libremente, con la articulación q_k conectando al enlace $k-1$ y al enlace k . Por convención el enlace 0 se fija en el referencial $x_0y_0z_0$ de la base y el enlace n se dispone para que sea móvil. En el último enlace se fija la herramienta de trabajo, pinza o efector operacional que se utiliza en la operación espacial del manipulador para la realización de diversas tareas que difieren de robot a robot. [8]

En la figura 2.5 se representa el esquema del efector final que se debe fijar en el enlace n de un determinado robot de n grados de libertad, en el cual se establecen los ejes de orientación (n, s, a) con el origen establecido en el punto $\mathbf{P}(p_x, p_y, p_z)$, extremo del efector final del robot que se pueden referenciar respecto del sistema de coordenadas base $x_0y_0z_0$ y la orientación del efector final a su vez se puede representar mediante rotaciones con ángulos generalizados $(\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z)$ respecto de los ejes principales del sistema de referencia $x_0y_0z_0$.

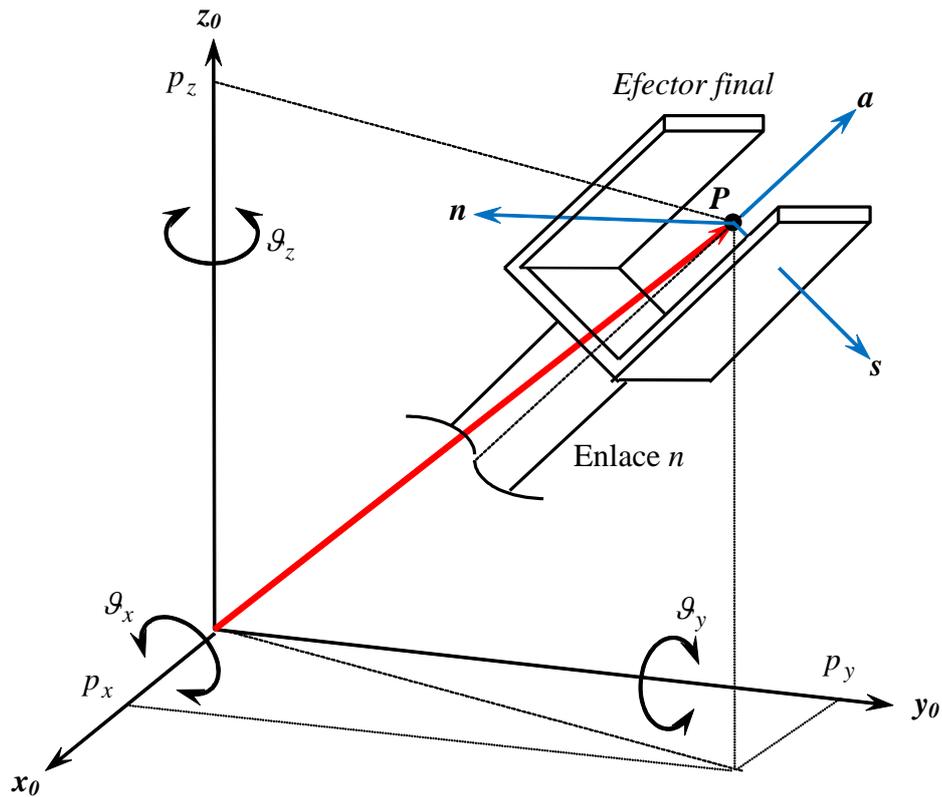


Figura 2.5 Posición y orientación del efector operacional de un robot.

Gráfica elaborada por el autor

La posición espacial del efector final se especifica por un vector \mathbf{P} respecto del referencial de la base $x_0y_0z_0$ y la orientación del efector final o de la herramienta se puede expresar en coordenadas rectangulares por medio de una matriz de rotación \mathbf{R} , donde las tres columnas de esta matriz corresponden a los vectores: normal \mathbf{n} , de deslizamiento \mathbf{s} y de aproximación \mathbf{a} respectivamente. La posición y la orientación se pueden expresar mediante una matriz de transformación homogénea como sigue:

$${}^0\mathbf{T}^n = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}^n & \mathbf{P}_n \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{s} & \mathbf{a} & \mathbf{P} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

- El vector de aproximación \mathbf{a} está alineado con el eje de giro de la herramienta y se indica hacia fuera de la muñeca. Este vector especifica la dirección en la cual está apuntando la herramienta.
- El vector de deslizamiento o de orientación \mathbf{s} , es ortogonal al vector de aproximación y está alineado con el eje de “abre-cierra” de la herramienta.
- El vector normal \mathbf{n} , es ortogonal al plano definido por los vectores de deslizamiento y de aproximación, completa las coordenadas de referencia de un sistema dextrógiro.

La localización del efector final u operacional del robot se representa por medio de una matriz de transformación homogénea ${}^0T^n$ que describe la posición P y la orientación R con respecto al sistema de coordenadas de referencia $x_0y_0z_0$ de la base. La matriz R se constituye por nueve elementos; esta matriz simplifica muchas operaciones, pero no conduce de forma directa a un conjunto completo de coordenadas generalizadas; tal conjunto se puede obtener y expresar mediante tres ángulos de rotación $(\vartheta_x \ \vartheta_y \ \vartheta_z)$ respecto de los ejes principales x_0, y_0, z_0 del sistema de coordenadas de la base respectivamente, como se aprecia en la figura 2.5. Otra forma generalizada es utilizar los ángulos de *Euler* $(\phi \ \varphi \ \psi)$ denominados también ángulos de desviación, de elevación y de giro respectivamente, son también ángulos de rotación respecto de los ejes principales del referencial base $x_0y_0z_0$, como se aprecia en la figura 2.6. En Robótica es posible utilizar diferentes configuraciones de los ángulos de *Euler*.

En la figura 2.6 se muestra el esquema de una configuración formados por los ángulos de *Euler*: de giro ψ , de elevación φ y de desviación ϕ respecto de los tres ejes principales que permite describir la orientación del efector final de un robot. [8], [9], [13]

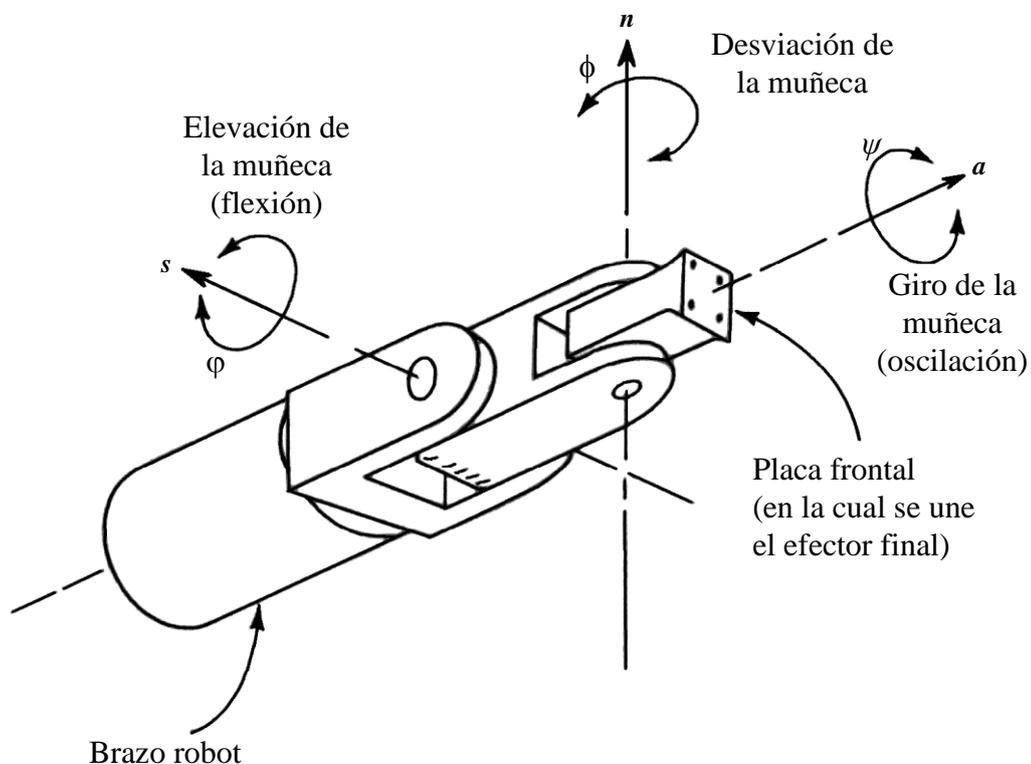


Figura 2.6 Tres grados de libertad asociados con los ángulos de *Euler*.

Gráfica elaborada por el autor en base de [9]

Realizando las respectivas rotaciones pero respecto de los ejes x_0, y_0, z_0 de la figura 2.6 se obtiene la matriz de rotación total del efector final del robot de la siguiente forma:

$${}^0\mathbf{R}^n = \text{Rot}(\psi, \varphi, \phi) = \text{Rot}(z, \psi) \text{Rot}(y, \varphi) \text{Rot}(x, \phi)$$

$${}^0\mathbf{R}^n = \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\phi & -S\phi \\ 0 & S\phi & C\phi \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Realizando la multiplicación de las matrices de rotación de la ecuación (2.10) se obtiene la matriz de rotación expresada mediante los ángulos *eulerianos* como:

$${}^0\mathbf{R}^n = \begin{bmatrix} C\psi C\phi & C\psi S\phi S\phi - S\psi C\phi & C\psi S\phi C\phi + S\psi S\phi \\ S\psi C\phi & S\psi S\phi S\phi + C\psi C\phi & S\psi S\phi C\phi - C\psi S\phi \\ -S\phi & C\phi S\phi & C\phi C\phi \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Igualando la parte de la rotación de la matriz de la ecuación (2.9) con la matriz de la ecuación (2.11) se relacionan los componentes de los ejes de orientación del robot con los ángulos de *Euler* mediante la siguiente ecuación matricial:

$${}^0\mathbf{R}^n = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\psi C\phi & C\psi S\phi S\phi - S\psi C\phi & C\psi S\phi C\phi + S\psi S\phi \\ S\psi C\phi & S\psi S\phi S\phi + C\psi C\phi & S\psi S\phi C\phi - C\psi S\phi \\ -S\phi & C\phi S\phi & C\phi C\phi \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

De la ecuación (2.12) se obtienen las expresiones de los ángulos de *Euler* de forma explícita en función de los componentes de los vectores de orientación como:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{s_z}{a_z}\right) \quad (2.13.a)$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}\right) \quad (2.13.b)$$

$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{n_y}{n_x}\right) \quad (2.13.c)$$

Con el vector $[x \ y \ z \ \phi \ \varphi \ \psi]^T$ de coordenadas cartesianas se puede obtener la matriz de transformación total ${}^0\mathbf{T}^n$ del robot, reemplazando la ecuación (2.12) en la ecuación (2.9) como sigue:

$${}^0\mathbf{T}^n = \begin{bmatrix} C\psi C\phi & C\psi S\phi S\phi - S\psi C\phi & C\psi S\phi C\phi + S\psi S\phi & P_x \\ S\psi C\phi & S\psi S\phi S\phi + C\psi C\phi & S\psi S\phi C\phi - C\psi S\phi & P_y \\ -S\phi & C\phi S\phi & C\phi C\phi & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El movimiento de la muñeca del robot permite orientar adecuadamente al efector final para realizar alguna tarea específica. Para realizar una orientación espacial, la muñeca del robot debe disponer de hasta tres grados de libertad que se definen como:

- **Giro de la muñeca ψ .** También se denomina oscilación de la muñeca, implica la rotación del mecanismo de la muñeca alrededor del eje de aproximación \mathbf{a} del efector final del robot.
- **Elevación de la muñeca ϕ .** También se denomina flexión de la muñeca, implica la rotación hacia arriba o abajo de ésta, respecto del eje de orientación o deslizamiento \mathbf{s} del efector final del robot.
- **Desviación de la muñeca ϕ .** Implica la rotación a la derecha o a la izquierda de ésta respecto del eje normal \mathbf{n} del efector final del robot.

2.4 Formulación Geométrica Directa del robot

La formulación Geométrica Directa (*FGD*) de un manipulador robótico consiste en expresar y determinar geoméricamente la localización (posición \mathbf{P} y orientación \mathbf{R}) del efector operacional con respecto a un sistema establecido de coordenadas referenciales, conociendo el vector articular \mathbf{q} de variables independientes y las magnitudes de los parámetros geométricos de los elementos o eslabones que constituyen la estructura mecánica del robot.

Para expresar la localización del efector final del robot, con respecto a un sistema de coordenadas cartesianas de referencia $x_0y_0z_0$ establecido de forma conveniente, se multiplican secuencialmente todas las matrices de transformación homogénea ${}_{k-1}\mathbf{T}^k$ correspondientes a cada par eslabón-articulación k del robot, obteniéndose una matriz total de transformación homogénea general ${}^0\mathbf{T}^n$ que especifica la posición \mathbf{P} y orientación \mathbf{R} del n -ésimo referencial con respecto al sistema referencial de coordenadas $x_0y_0z_0$ establecido normalmente en la base del robot.

La relación matemática del referencial $x_{k-1}y_{k-1}z_{k-1}$ (fijado en el elemento $k-1$) con el referencial $x_k y_k z_k$ (establecido en el elemento k), se representa mediante una matriz de transformación homogénea ${}_{k-1}\mathbf{T}^k$ de dimensión 4×4 la cual se describe en función de los parámetros de eslabón-articulación k del robot. A esta representación se denomina matriz de transformación homogénea compuesta de *Denavit-Hartenberg (D-H)* que representa el desplazamiento articular q_k del enlace k respecto del sistema referencial $x_{k-1}y_{k-1}z_{k-1}$ que se establece para cada grado de libertad del manipulador robótico.

La Formulación Geométrica Directa (FGD) del robot se obtiene multiplicando las matrices de cada grado de libertad del robot que están representadas mediante las ecuaciones (2.5) o (2.7) según sea el tipo de articulación, obteniendo la matriz de transformación homogénea total de la siguiente forma:

$${}_0\mathbf{T}^1 \mathbf{T}^2 \mathbf{T}^3 \dots \mathbf{T}^{n-1} \mathbf{T}^n = {}_0\mathbf{T}^n \quad (2.14)$$

La posición \mathbf{P} y la orientación \mathbf{R} del efector final del robot respecto del sistema referencial base $x_0 y_0 z_0$ se expresa como:

$${}_{Base}\mathbf{T}^{Efector} = {}_0\mathbf{T}^n(q) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(q) & \mathbf{P}(q) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Igualando la ecuación (2.9) con la ecuación (2.15) se obtiene la expresión del Modelamiento Geométrico Directo para el robot de n grados de libertad como sigue:

$${}_0\mathbf{T}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{n}(q) & \mathbf{s}(q) & \mathbf{a}(q) & \mathbf{P}(q) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

La Formulación Geométrica Directa o Cinemática Directa de Posición expresado mediante la ecuación (2.16) para un robot de n grados de libertad se obtiene como una única matriz ${}_0\mathbf{T}^n$ que está en función directa del vector de articulación \mathbf{q} . En general la expresión de la Geométrica Directa de un manipulador robótico también se puede definir como sigue:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \quad (2.17)$$

Las variables involucradas en la ecuación (2.17) se definen como:

\mathbf{q} : vector de variables internas de articulación $[q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dots \ q_n]^T$

\mathbf{r} : vector de coordenadas cartesianas externas $\mathbf{r} = [p_x \ p_y \ p_z \ \phi \ \varphi \ \psi]^T$.

f : vector constituido por funciones no lineales que dependen del vector articular \mathbf{q} .

2.5 Formulación Geométrica Inversa del robot

La Formulación Geométrica Inversa (FGI) para un manipulador robótico de n grados de libertad, consiste en determinar las magnitudes del vector de variables articulares \mathbf{q} con el fin de alcanzar la posición \mathbf{P} y la orientación \mathbf{R} del efector operacional del robot para lograr un objetivo en la localización establecida; es decir si se establece la localización (posición \mathbf{P} y orientación \mathbf{R}) del efector operacional del robot, conociendo los parámetros geométricos de los elementos de la estructura mecánica, es posible determinar los valores de los ángulos/desplazamiento de articulación \mathbf{q} del robot de manera que se pueda posicionar al efector operacional como se desee y analizar además si el efector operacional puede o no alcanzar dicha localización y además determinar de cuántas maneras lo puede hacer, debido que la solución de la Geometría Inversa de un manipulador robótico no es única. Como las variables independientes en un robot son las variables de articulación \mathbf{q} y una tarea determinada se suele especificar en términos del sistema de coordenadas del espacio de operación, por lo que el problema Geométrico Inverso se utiliza con mayor frecuencia cuando se trata de solucionar la geometría de un robot. En general la expresión de la Geometría Inversa de un robot manipulador se puede deducir de la ecuación (2.17) y definirla como:

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{r}) \quad (2.18)$$

2.6 Geometría Directa e Inversa del robot propuesto

El robot que se ha elegido en este trabajo representado en la figura 1.3 se vuelve a representar esquemáticamente y de forma analítica en la figura 2.7, en el cual se muestran los sistemas referenciales establecidos a cada grado de libertad y asociando las respectivas variables articulares.

En la figura 2.7 se muestra la secuencia de las articulaciones netamente rotacionales y las longitudes de los eslabones geométricos que se utilizan para poder determinar la Formulación Geométrica Directa respectiva.

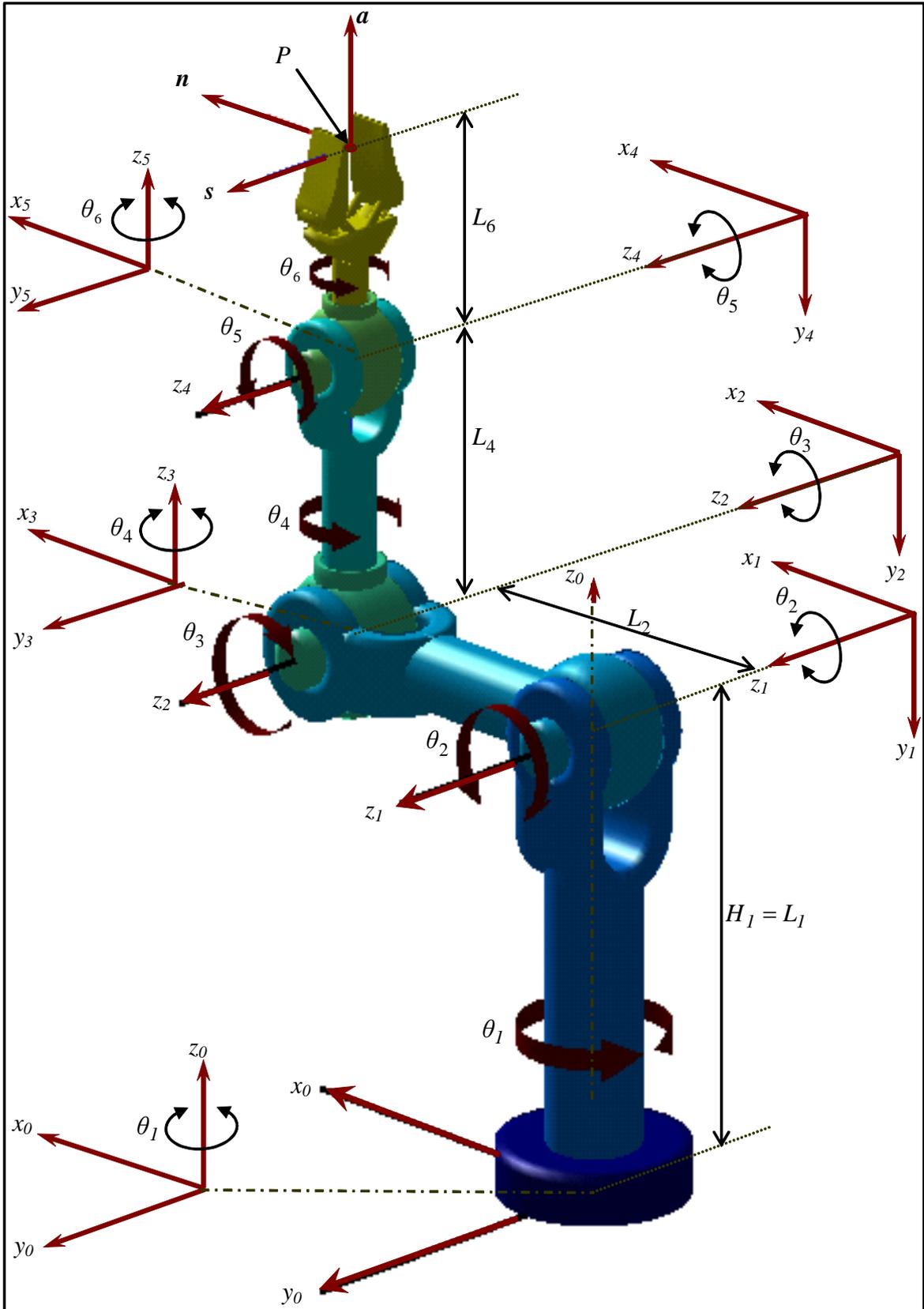


Figura 2.7 Estructura mecánica y analítica del robot de seis grados de libertad con articulaciones angulares.

Gráfica elaborada por el autor mediante MatLab

Con la estructura robótica de la figura 2.7, es posible posicionar la herramienta en cualquier punto espacial arbitrario alcanzable y orientar al efector operacional en cualquier dirección también de forma arbitraria, sólo está restringido por los rangos o límites físicos de las variables articulares y por la estructura mecánica. Las únicas ligaduras que existen, son las acotaciones físicas del vector articular \mathbf{q} del robot ya sea de forma individual o en conjunto, así como también por el espacio ocupado por los elementos del mismo robot.

La matriz de la expresión (2.3) para la articulación k del robot propuesto se vuelve a escribir de la siguiente manera:

$${}_{k-1}\mathbf{T}^k = \begin{bmatrix} \cos(\theta_k) & -\cos(\alpha_k)\sin(\theta_k) & \sin(\alpha_k)\sin(\theta_k) & a_k \cos(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\alpha_k)\cos(\theta_k) & -\sin(\alpha_k)\cos(\theta_k) & a_k \sin(\theta_k) \\ 0 & \sin(\alpha_k) & \cos(\alpha_k) & d_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Los parámetros geométricos correspondientes a cada par eslabón - articulación del robot manipulador representado en la figura 2.7 que se obtienen al aplicar directamente el algoritmo $D-H$ se muestran en la tabla 2.1. [11]

Tabla 2.1 Parámetros geométricos del robot de seis grados de libertad.

k	α_k	a_k	d_k	θ_k (variable)
1	-90°	0	L_1	$-180^\circ \leq \theta_1 \leq 180^\circ$
2	0°	L_2	0	$-225^\circ \leq \theta_2 \leq 45^\circ$
3	90°	0	0	$-45^\circ \leq \theta_3 \leq 225^\circ$
4	-90°	0	L_4	$-165^\circ \leq \theta_4 \leq 165^\circ$
5	90°	0	0	$-135^\circ \leq \theta_5 \leq 135^\circ$
6	0°	0	L_6	$-165^\circ \leq \theta_6 \leq 165^\circ$

Reemplazando los parámetros geométricos de la tabla 2.1 en la ecuación (2.19) se obtienen seis matrices de transformación homogénea ${}_{k-1}\mathbf{T}^k$ para cada grado de libertad del manipulador robótico.

Matriz de transformación homogénea para la variable articular $q_1 = \theta_1$

$${}^0\mathbf{T}^1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & 0 & -\text{sen}(\theta_1) & 0 \\ \text{sen}(\theta_1) & 0 & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & H_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20.a)$$

Matriz de transformación homogénea para la variable articular $q_2 = \theta_2$

$${}^1\mathbf{T}^2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\text{sen}(\theta_2) & 0 & L_2 \cos(\theta_2) \\ \text{sen}(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & L_2 \text{sen}(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20.b)$$

Matriz de transformación homogénea para la variable articular $q_3 = \theta_3$

$${}^2\mathbf{T}^3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & 0 & \text{sen}(\theta_3) & 0 \\ \text{sen}(\theta_3) & 0 & -\cos(\theta_3) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20.c)$$

Matriz de transformación homogénea para la variable articular $q_4 = \theta_4$

$${}^3\mathbf{T}^4 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) & 0 & -\text{sen}(\theta_4) & 0 \\ \text{sen}(\theta_4) & 0 & \cos(\theta_4) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & L_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20.d)$$

Matriz de transformación homogénea para la variable articular $q_5 = \theta_5$

$${}^4\mathbf{T}^5 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_5) & 0 & \text{sen}(\theta_5) & 0 \\ \text{sen}(\theta_5) & 0 & -\cos(\theta_5) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20.e)$$

Matriz de transformación homogénea para la variable articular $q_6 = \theta_6$

$${}^5\mathbf{T}^6 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_6) & -\text{sen}(\theta_6) & 0 & 0 \\ \text{sen}(\theta_6) & \cos(\theta_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20.f)$$

Como todas las articulaciones del robot propuesto son de tipo rotacional entonces el vector articular es $\mathbf{q} = \boldsymbol{\theta}$.

La expresión del Modelamiento Geométrico Directo para el robot de 6 grados de libertad, el cual expresa la posición \mathbf{P} y la orientación \mathbf{R} del efector final del robot respecto del sistema referencial base $x_0y_0z_0$ se formula aplicando la ecuación (2.14) como sigue:

$${}^0\mathbf{T}^1\mathbf{T}^2\mathbf{T}^3\mathbf{T}^4\mathbf{T}^5\mathbf{T}^6 = {}^0\mathbf{T}^6 = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{s} & \mathbf{a} & \mathbf{P} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Los vectores de la matriz de transformación total de la ecuación (2.21) se denominan:

\mathbf{a} : vector de aproximación del efector final respecto del referencial base $x_0y_0z_0$.

\mathbf{s} : vector de deslizamiento del efector final respecto del referencial base $x_0y_0z_0$.

\mathbf{n} : vector normal del efector final respecto del referencial base $x_0y_0z_0$.

\mathbf{P} : origen del referencial del efector final respecto del referencial base $x_0y_0z_0$.

Reemplazando las matrices de las ecuaciones (2.20) en la ecuación (2.14) operando y relacionando con la ecuación (2.21), se obtienen literalmente las expresiones para cada uno de los vectores de la matriz de transformación ${}^0\mathbf{T}^n$ del efector final como sigue:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_1C_{23}C_4C_5 - S_1S_4C_5 - C_1S_{23}S_5)C_6 - (C_1C_{23}S_4 + S_1C_4)S_6 \\ (S_1C_{23}C_4C_5 + C_1S_4C_5 - S_1S_{23}S_5)C_6 - (S_1C_{23}S_4 - C_1C_4)S_6 \\ -(S_{23}C_4C_5 + C_{23}S_5)C_6 + S_{23}S_4S_6 \end{bmatrix} \quad (2.22.a)$$

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(C_1C_{23}C_4C_5 - S_1S_4C_5 - C_1S_{23}S_5)S_6 - (C_1C_{23}S_4 + S_1C_4)C_6 \\ -(S_1C_{23}C_4C_5 + C_1S_4C_5 - S_1S_{23}S_5)S_6 - (S_1C_{23}S_4 - C_1C_4)C_6 \\ (S_{23}C_4C_5 + C_{23}S_5)S_6 + S_{23}S_4C_6 \end{bmatrix} \quad (2.22.b)$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_1C_{23}C_4 - S_1S_4)S_5 + C_1S_{23}C_5 \\ (S_1C_{23}C_4 + C_1S_4)S_5 + S_1S_{23}C_5 \\ -S_{23}C_4S_5 + C_{23}C_5 \end{bmatrix} \quad (2.22.c)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2C_1C_2 + L_4C_1S_{23} + L_6(C_1C_{23}C_4S_5 - S_1S_4S_5 + C_1S_{23}C_5) \\ L_2S_1C_2 + L_4S_1S_{23} + L_6(S_1C_{23}C_4S_5 + C_1S_4S_5 + S_1S_{23}C_5) \\ H_1 - L_2S_2 + L_4C_{23} + L_6(-S_{23}C_4S_5 + C_{23}C_5) \end{bmatrix} \quad (2.22.d)$$

La expresión de la posición cartesiana \mathbf{P} de la ecuación (2.22.d) se puede escribir de forma simplificada en función de los componentes del vector de aproximación de la siguiente manera:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2 C_1 C_2 + L_4 C_1 S_{23} + L_6 a_x \\ L_2 S_1 C_2 + L_4 S_1 S_{23} + L_6 a_y \\ H_1 - L_2 S_2 + L_4 C_{23} + L_6 a_z \end{bmatrix} \quad (2.22.e)$$

Las relaciones abreviadas de las ecuaciones consecutivas (2.22) corresponden a las funciones trigonométricas:

$$S_i = \text{sen}(\theta_i), S_{ij} = \text{sen}(\theta_i + \theta_j)$$

$$C_i = \text{cos}(\theta_i), C_{ij} = \text{cos}(\theta_i + \theta_j)$$

Para evaluar y determinar analítica y explícitamente el Modelamiento Geométrico Inverso (MGI) del robot manipulador de seis articulaciones (con el vector de articulaciones angulares $\mathbf{q} = \boldsymbol{\theta}$) se usa como base el Modelo Geométrico Directo (MGD) descrito mediante las ecuaciones (2.22).

De la ecuación (2.22.e) correspondiente a la posición cartesiana se despejan las expresiones S_{23} y C_{23} y se obtiene:

$$S_{23} = \frac{p_x - L_2 C_1 C_2 - L_6 a_x}{L_4 C_1} \quad (2.23.a)$$

$$S_{23} = \frac{p_y - L_2 S_1 C_2 - L_6 a_y}{L_4 S_1} \quad (2.23.b)$$

$$C_{23} = \frac{p_z - H_1 + L_2 S_2 - L_6 a_z}{L_4} \quad (2.23.c)$$

Si $S_1 = 0$ se usan las ecuaciones (2.23.a) y (2.23.c) y se obtiene la solución para la variable articular θ_3 como:

$$\tan(\theta_2 + \theta_3) = \frac{S_{23}}{C_{23}} = \frac{p_x - L_2 C_1 C_2 - L_6 a_x}{p_z - H_1 + L_2 S_2 - L_6 a_z} \times \frac{1}{C_1}$$

$$\theta_3 = \text{atan}\left(\frac{p_x - L_2 C_1 C_2 - L_6 a_x}{p_z - H_1 + L_2 S_2 - L_6 a_z} \times \frac{1}{C_1}\right) - \theta_2 [\pm\pi] \quad (2.24.a)$$

Si $C_1 = 0$ se usan de las ecuaciones (2.23.b) y (2.23.c) y se obtiene la solución para la variable articular θ_3 como:

$$\tan(\theta_2 + \theta_3) = \frac{S_{23}}{C_{23}} = \frac{p_y - L_2 S_1 C_2 - L_6 a_y}{p_z - H_1 + L_2 S_2 - L_6 a_z} \times \frac{1}{S_1}$$

$$\theta_3 = a \tan\left(\frac{p_y - L_2 S_1 C_2 - L_6 a_y}{p_z - H_1 + L_2 S_2 - L_6 a_z} \times \frac{1}{S_1}\right) - \theta_2 [\pm\pi] \quad (2.24.b)$$

Igualando las ecuaciones (2.23.a) y (2.23.b) se obtiene la siguiente relación:

$$S_{23} = \frac{p_x - L_2 C_1 C_2 - L_6 a_x}{L_4 C_1} = \frac{p_y - L_2 S_1 C_2 - L_6 a_y}{L_4 S_1} \quad (2.25)$$

Operando adecuadamente la ecuación (2.25) se obtiene la solución para la variable articular θ_1 como:

$$\frac{S_1}{C_1} = \frac{p_y - L_6 a_y}{p_x - L_6 a_x}$$

$$\theta_1 = a \tan\left(\frac{p_y - L_6 a_y}{p_x - L_6 a_x}\right) [\pm\pi] \quad (2.26)$$

Elevando al cuadrado las expresiones (2.23.a) y (2.23.c), luego sumando miembro a miembro y operando adecuadamente se obtiene la siguiente relación trigonométrica:

$$A \sen(\theta_2) + B \cos(\theta_2) = C \quad (2.27.a)$$

Las literales A , B , y C de la ecuación (2.27.a) se definen como:

$$A = (p_z - H_1 - L_6 a_z) C_1^2 ; \quad B = -(p_x - L_6 a_x) C_1 ;$$

$$C = \frac{(p_x - L_6 a_x)^2 + (p_z - H_1 - L_6 a_z)^2 C_1^2 + L_2^2 C_1^2 - L_4^2 C_1^2}{2L_2}$$

Elevando al cuadrado la ecuación (2.27.a) y dividiendo entre $\cos^2(\theta_2)$ se obtiene una expresión polinómica cuadrática:

$$(A^2 - C^2) \tan^2(\theta_2) + 2AB \tan(\theta_2) + (B^2 - C^2) = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática anterior se obtiene la solución para la variable articular θ_2 como sigue:

$$\tan(\theta_2) = \frac{-AB \pm C\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 - C^2}$$

$$\theta_2 = a \tan\left(\frac{-AB \pm C\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 - C^2}\right) [\pm\pi] \quad (2.28.a)$$

Elevando al cuadrado las expresiones (2.23.b) y (2.23.c), luego sumando miembro a miembro y operando adecuadamente se obtiene la siguiente relación trigonométrica:

$$A \operatorname{sen}(\theta_2) + B \operatorname{cos}(\theta_2) = C \quad (2.27.b)$$

Las literales A , B , y C de la ecuación (2.27.b) se definen como:

$$A = (p_z - H_1 - L_6 a_z) S_1^2 ; \quad B = -(p_y - L_6 a_y) S_1 ;$$

$$C = \frac{(p_y - L_6 a_y)^2 + (p_z - H_1 - L_6 a_z)^2 S_1^2 + L_2^2 S_1^2 - L_4^2 S_1^2}{2L_2}$$

Elevando al cuadrado la ecuación (2.27.b) y dividiendo entre $\operatorname{cos}^2(\theta_2)$ se obtiene una expresión polinómica cuadrática:

$$(A^2 - C^2) \tan^2(\theta_2) + 2AB \tan(\theta_2) + (B^2 - C^2) = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática anterior se obtiene la solución para la variable articular θ_2 como sigue:

$$\tan(\theta_2) = \frac{-AB \pm C\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 - C^2}$$

$$\theta_2 = a \tan\left(\frac{-AB \pm C\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 - C^2}\right) [\pm\pi] \quad (2.28.b)$$

También existen otras formas equivalentes para determinar la solución de las ecuaciones (2.27). De las ecuaciones (2.28) se deduce que existen dos soluciones distintas para la articulación θ_2 , debido al doble signo \pm siempre y cuando la expresión del radical $D = A^2 + B^2 - C^2 \geq 0$. Si el radical $D < 0$ significa que la posición y/o la orientación especificadas para el efector final no es alcanzable por el órgano terminal del manipulador.

Las ecuaciones (2.26), (2.28) y (2.24) corresponden a la solución geométrica inversa del portador del robot. Para solucionar los ángulos de la orientación del efector final se eligen los vectores de orientación \mathbf{n} , \mathbf{s} y \mathbf{a} de la matriz de rotación representados por las ecuaciones (2.22.a), (2.22.b) y (2.22.c).

Utilizando la ecuación (2.22.a) se pueden elegir las magnitudes escalares n_x y n_y con la expresión $C_{23}C_5 - S_{23}C_4S_5 \neq 0$, entonces se puede despejar las expresiones de C_6 y de S_6 como:

$$C_6 = \frac{-(S_1C_{23}S_4 - C_1C_4)n_x + (C_1C_{23}S_4 + S_1C_4)n_y}{C_{23}C_5 - S_{23}C_4S_5} \quad (2.29.a)$$

$$S_6 = \frac{(S_1S_{23}S_5 - S_1C_{23}C_4C_5 - C_1S_4C_5)n_x + (C_1C_{23}C_4C_5 - S_1S_4C_5 - C_1S_{23}S_5)n_y}{C_{23}C_5 - S_{23}C_4S_5} \quad (2.29.b)$$

Utilizando las ecuaciones (2.29) se obtiene la solución para la articulación θ_6 como:

$$\tan(\theta_6) = \frac{-(S_1C_{23}C_4C_5 + C_1S_4C_5 - S_1S_{23}S_5)n_x + (C_1C_{23}C_4C_5 - S_1S_4C_5 - C_1S_{23}S_5)n_y}{-(S_1C_{23}S_4 - C_1C_4)n_x + (C_1C_{23}S_4 + S_1C_4)n_y}$$

$$\theta_6 = a \tan \left\{ \frac{-(S_1C_{23}C_4C_5 + C_1S_4C_5 - S_1S_{23}S_5)n_x + (C_1C_{23}C_4C_5 - S_1S_4C_5 - C_1S_{23}S_5)n_y}{-(S_1C_{23}S_4 - C_1C_4)n_x + (C_1C_{23}S_4 + S_1C_4)n_y} \right\} [\pm\pi] \quad (2.30)$$

Si los valores de los componentes n_x y n_y de la ecuación (2.30) son nulos entonces se puede utilizar la ecuación (2.22.b) y elegir los escalares s_x y s_y pero con la expresión $C_{23}C_5 - S_{23}C_4S_5 \neq 0$, entonces se puede despejar las expresiones de C_6 y S_6 como:

$$S_6 = \frac{(S_1C_{23}S_4 - C_1C_4)s_x - (C_1C_{23}S_4 + S_1C_4)s_y}{C_{23}C_5 - S_{23}C_4S_5} \quad (2.31.a)$$

$$C_6 = \frac{(S_1S_{23}S_5 - S_1C_{23}C_4C_5 - C_1S_4C_5)s_x + (C_1C_{23}C_4C_5 - S_1S_4C_5 - C_1S_{23}S_5)s_y}{C_{23}C_5 - S_{23}C_4S_5} \quad (2.31.b)$$

Utilizando las ecuaciones (2.31) se obtiene la solución para la articulación θ_6 como:

$$\tan(\theta_6) = \frac{(S_1C_{23}S_4 - C_1C_4)s_x - (C_1C_{23}S_4 + S_1C_4)s_y}{-(S_1C_{23}C_4C_5 + C_1S_4C_5 - S_1S_{23}S_5)s_x + (C_1C_{23}C_4C_5 - S_1S_4C_5 - C_1S_{23}S_5)s_y}$$

$$\theta_6 = a \tan \left\{ \frac{(S_1 C_{23} S_4 - C_1 C_4) s_x - (C_1 C_{23} S_4 + S_1 C_4) s_y}{-(S_1 C_{23} C_4 C_5 + C_1 S_4 C_5 - S_1 S_{23} S_5) s_x + (C_1 C_{23} C_4 C_5 - S_1 S_4 C_5 - C_1 S_{23} S_5) s_y} \right\} [\pm\pi] \quad (2.32)$$

Utilizando la ecuación (2.22.c) eligiendo las magnitudes escalares a_x y a_y con la expresión $S_{23} S_4 \neq 0$, entonces se puede desparar las expresiones de S_5 y de C_5 como:

$$S_5 = \frac{S_1 S_{23} a_x - C_1 S_{23} a_y}{-S_{23} S_4} \quad (2.33.a)$$

$$C_5 = \frac{-(S_1 C_{23} C_4 + C_1 S_4) a_x + (C_1 C_{23} C_4 - S_1 S_4) a_y}{-S_{23} S_4} \quad (2.33.b)$$

Utilizando las ecuaciones (2.33) se obtiene la solución para la articulación θ_5 como sigue:

$$\tan(\theta_5) = \frac{S_1 S_{23} a_x - C_1 S_{23} a_y}{-(S_1 C_{23} C_4 + C_1 S_4) a_x + (C_1 C_{23} C_4 - S_1 S_4) a_y}$$

$$\theta_5 = a \tan \left\{ \frac{S_1 S_{23} a_x - C_1 S_{23} a_y}{-(S_1 C_{23} C_4 + C_1 S_4) a_x + (C_1 C_{23} C_4 - S_1 S_4) a_y} \right\} [\pm\pi] \quad (2.34)$$

Si los valores de los componentes a_x y a_y son nulos entonces se puede reemplazar las expresiones de C_6 y S_6 de las ecuaciones (2.29) en el término a_z de la ecuación (2.22.a), luego de operar, simplificar y factorizar se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{S_5}{C_5} = \frac{C_1 S_{23} n_x + S_1 S_{23} n_y + C_{23} n_z}{(S_1 S_4 - C_1 C_{23} C_4) n_x - (C_1 S_4 + S_1 C_{23} C_4) n_y + S_{23} C_4 n_z}$$

De la ecuación anterior se obtiene la solución para la articulación θ_5 de la siguiente manera:

$$\theta_5 = a \tan \left\{ \frac{C_1 S_{23} n_x + S_1 S_{23} n_y + C_{23} n_z}{(S_1 S_4 - C_1 C_{23} C_4) n_x - (C_1 S_4 + S_1 C_{23} C_4) n_y + S_{23} C_4 n_z} \right\} [\pm\pi] \quad (2.35)$$

También se pueden reemplazar las ecuaciones de C_6 y S_6 de las ecuaciones (2.31) en el término s_z de la ecuación (2.22.b), luego de operar, simplificar y factorizar se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{S_5}{C_5} = \frac{C_1 S_{23} s_x + S_1 S_{23} s_y + C_{23} s_z}{(S_1 S_4 - C_1 C_{23} C_4) s_x - (C_1 S_4 + S_1 C_{23} C_4) s_y + S_{23} C_4 s_z}$$

De la ecuación anterior también se obtiene la solución para la articulación θ_5 como sigue:

$$\theta_5 = a \tan \left\{ \frac{C_1 S_{23} s_x + S_1 S_{23} s_y + C_{23} s_z}{(S_1 S_4 - C_1 C_{23} C_4) s_x - (C_1 S_4 + S_1 C_{23} C_4) s_y + S_{23} C_4 s_z} \right\} [\pm\pi] \quad (2.36)$$

Reemplazando las expresiones C_5 y S_5 de las ecuaciones (2.33) en el término a_z de la ecuación (2.22.c), luego operando, simplificando y factorizando adecuadamente se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{S_4}{C_4} = \frac{-S_1 a_x + C_1 a_y}{C_{23}(C_1 a_x + S_1 a_y) - S_{23} a_z}$$

De la ecuación anterior se obtiene la solución para la articulación θ_4 como sigue:

$$\theta_4 = a \tan \left\{ \frac{-S_1 a_x + C_1 a_y}{C_{23}(C_1 a_x + S_1 a_y) - S_{23} a_z} \right\} [\pm\pi] \quad (2.37)$$

2.7 Simulación Gráfica de la Geometría del robot propuesto

En esta tesis se han realizado las simulaciones gráficas en función del tiempo mediante el programa *MatLab* tanto para la Geometría Directa como para la Geometría Inversa del manipulador robótico de seis articulaciones mostrado en la figura 2.7; para ello se hacen uso de los parámetros geométricos del sistema motor-robot que se encuentran definidos en el Anexo A.

2.7.1 Simulación Gráfica de la Geometría Directa

Para la realización de la simulación gráfica de la Geometría Directa o Cinemática de posición directa del robot de seis articulaciones, representado en la figura 2.7, en función del tiempo $t=kT$, se ha utilizado el programa *MatLab*. Las gráficas consecutivas mostradas en la figura 2.8 corresponden a la representación del vector de las variables de posición articular en función del tiempo $q(t) = \theta(t) = [q_1(t) \ q_2(t) \ q_3(t) \ q_4(t) \ q_5(t) \ q_6(t)]^T$, estas

trayectorias temporales están definidas mediante interpolaciones a base de funciones trigonométricas (10.10) que son curvas suaves por naturaleza, (se exponen en el capítulo 10) con magnitudes apropiadas según las limitaciones de las articulaciones del robot mostradas en la tabla 2.1 y se van a utilizar como variables referenciales para aplicar las técnicas de control en los capítulos 7, 8 y 9. Las gráficas siguientes se representan respecto del sistema referencial $x_0y_0z_0$ y son funciones que dependen de forma directa de las variables de articulación $\mathbf{q}(t)$ del robot.

La trayectoria que se origina en el espacio tridimensional es única pero no es previsible el espacio por el cual se va a desarrollar, depende de las variables articulares y de la configuración geométrica del robot y por lo tanto es posible que se presenten colisiones entre los eslabones del robot.

La gráfica de la figura 2.9 representa al vector de posición cartesiana del efector operacional $\bar{p}(t) = [p_x(t) \ p_y(t) \ p_z(t)]^T$ del manipulador robótico respecto del sistema referencial base $x_0y_0z_0$ que se obtiene aplicando la ecuación (2.22.d). La gráfica de la figura 2.10 representa al vector unitario normal $\bar{n}(t) = [n_x(t) \ n_y(t) \ n_z(t)]^T$ del efector final del robot respecto del sistema referencial base $x_0y_0z_0$ que se obtiene aplicando la ecuación (2.22.a). La gráfica de la figura 2.11 representa al vector unitario de deslizamiento $\bar{s}(t) = [s_x(t) \ s_y(t) \ s_z(t)]^T$ del efector operacional del robot respecto del sistema referencial base $x_0y_0z_0$ que se obtiene aplicando la ecuación (2.22.b). La gráfica de la figura 2.12 representa al vector unitario de aproximación $\bar{a}(t) = [a_x(t) \ a_y(t) \ a_z(t)]^T$ del efector operacional del robot respecto del sistema referencial base $x_0y_0z_0$ que se obtiene aplicando la ecuación (2.22.c). La gráfica de la figura 2.13 describe la orientación generalizada del efector final del robot descrita mediante las ecuaciones de los ángulos de Euler $[\phi(t), \varphi(t), \psi(t)]$ que se muestran en la figura 2.6 y se expresan respecto de los ejes principales del sistema referencial base $x_0y_0z_0$ y que se obtienen aplicando las ecuaciones (2.13). En la gráfica de la figura 2.14 se muestran las gráficas de los cosenos directores $\bar{\gamma}(t) = [\gamma_x(t) \ \gamma_y(t) \ \gamma_z(t)]^T$ del origen del referencial del efector final situado en el punto P de la figura 2.7 respecto del sistema referencial base $x_0y_0z_0$.

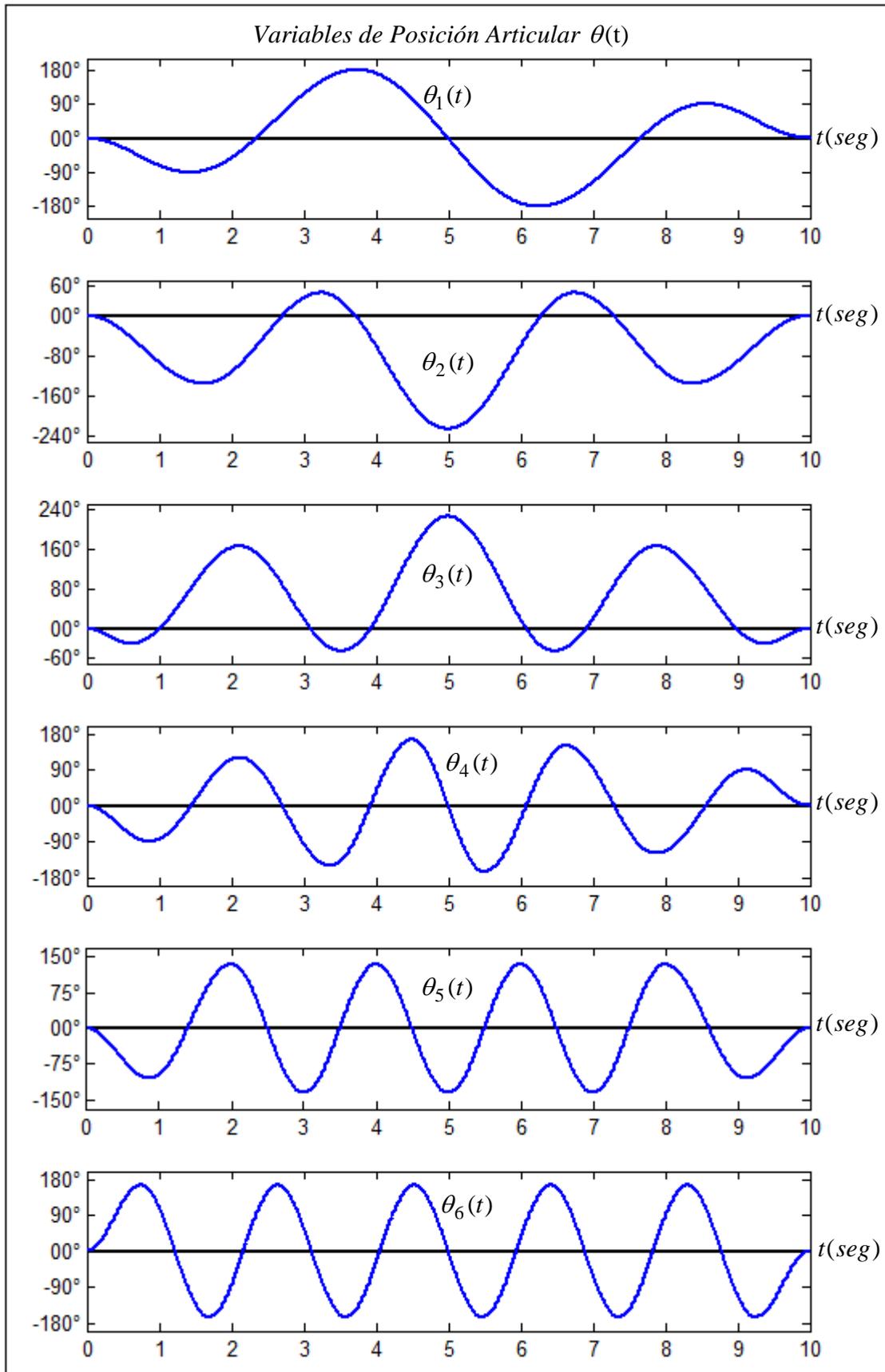


Figura 2.8 Gráficas de la posición articular $\theta(t)$ en función del tiempo t .

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

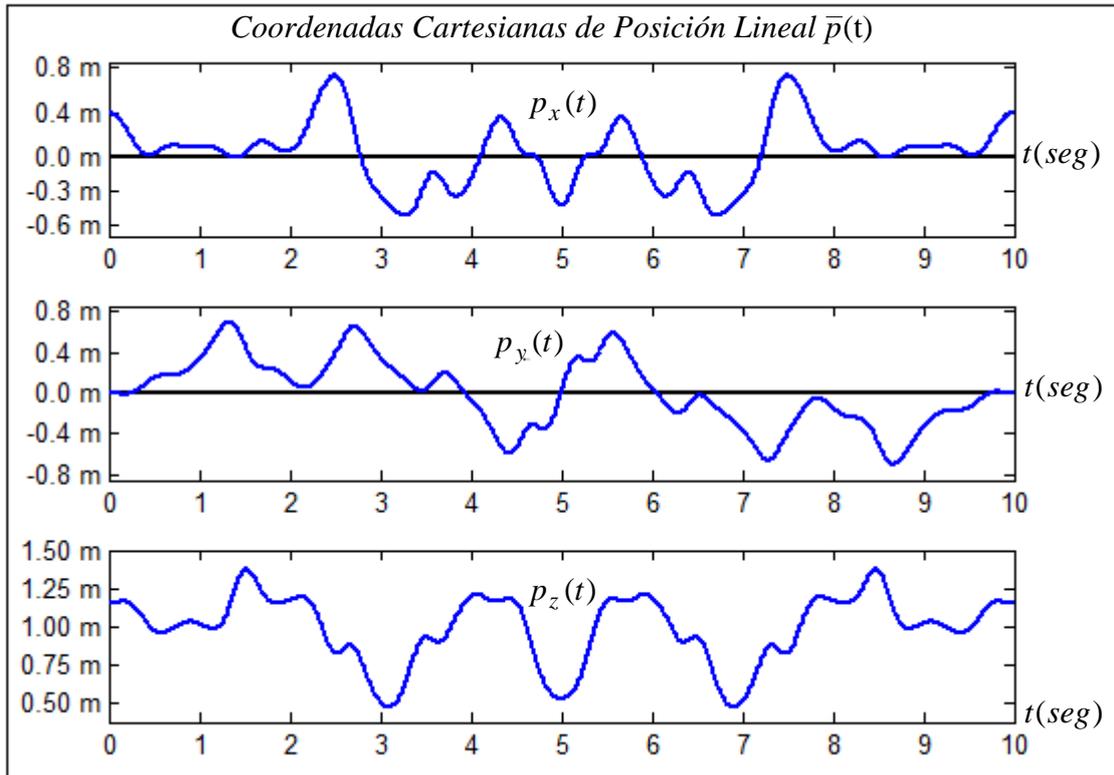


Figura 2.9 Coordenadas cartesianas del vector de posición $\bar{p}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

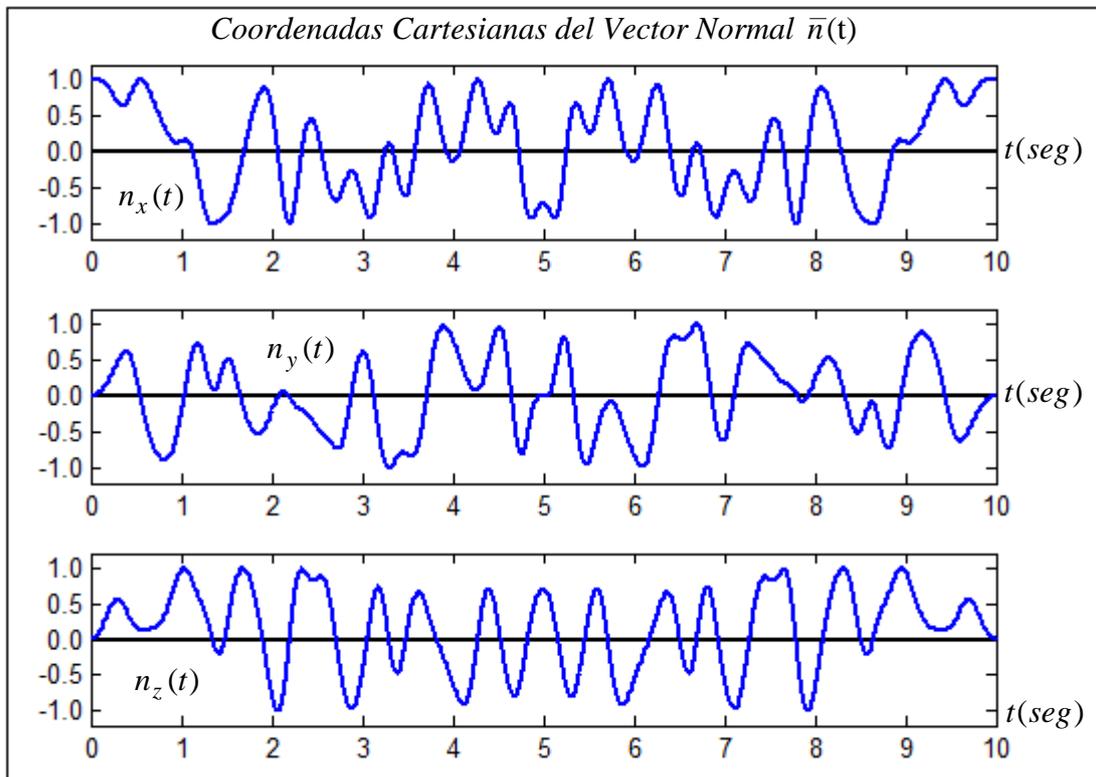


Figura 2.10 Coordenadas cartesianas del vector normal $\bar{n}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

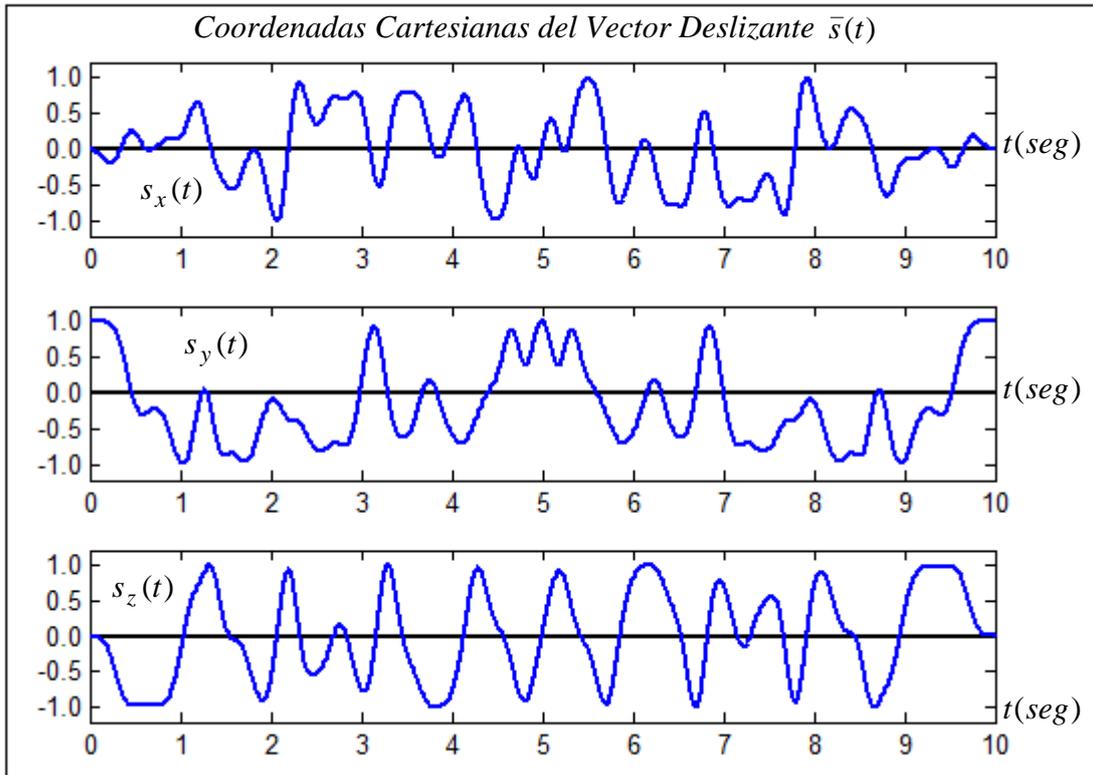


Figura 2.11 Coordenadas cartesianas del vector de deslizamiento $\bar{s}(t)$.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

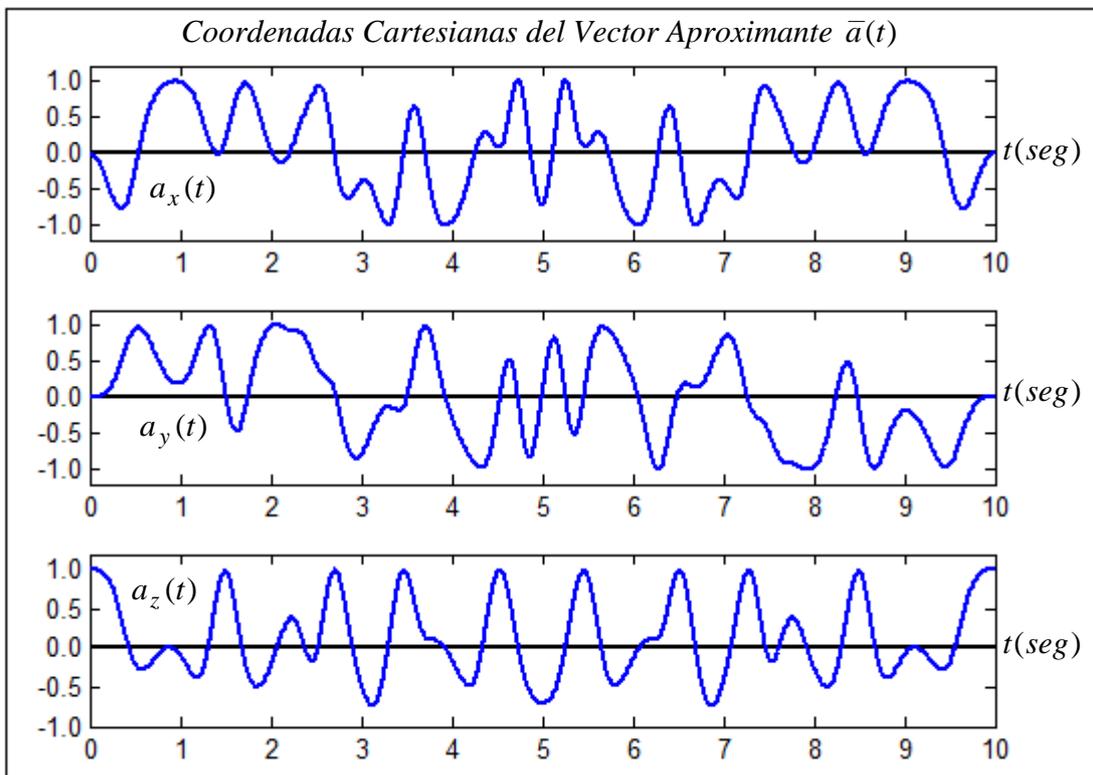


Figura 2.12 Coordenadas cartesianas del vector de aproximación $\bar{a}(t)$.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

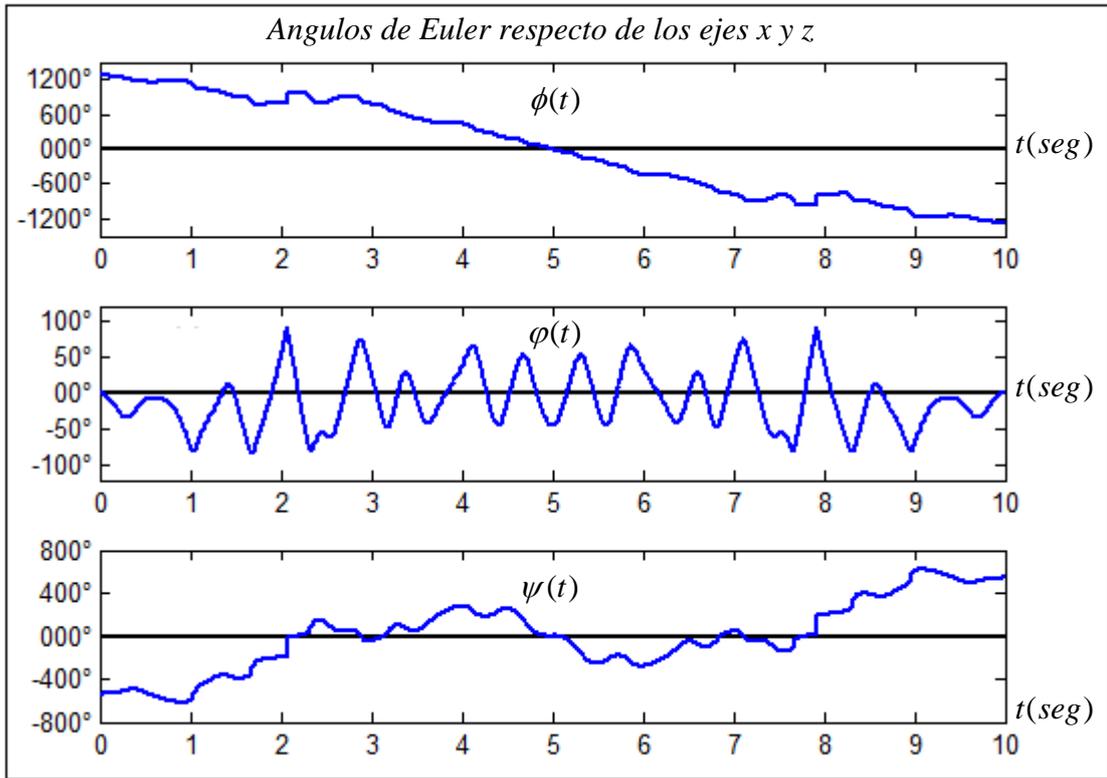


Figura 2.13 Gráficas de los ángulos de Euler [$\phi(t), \varphi(t), \psi(t)$].
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

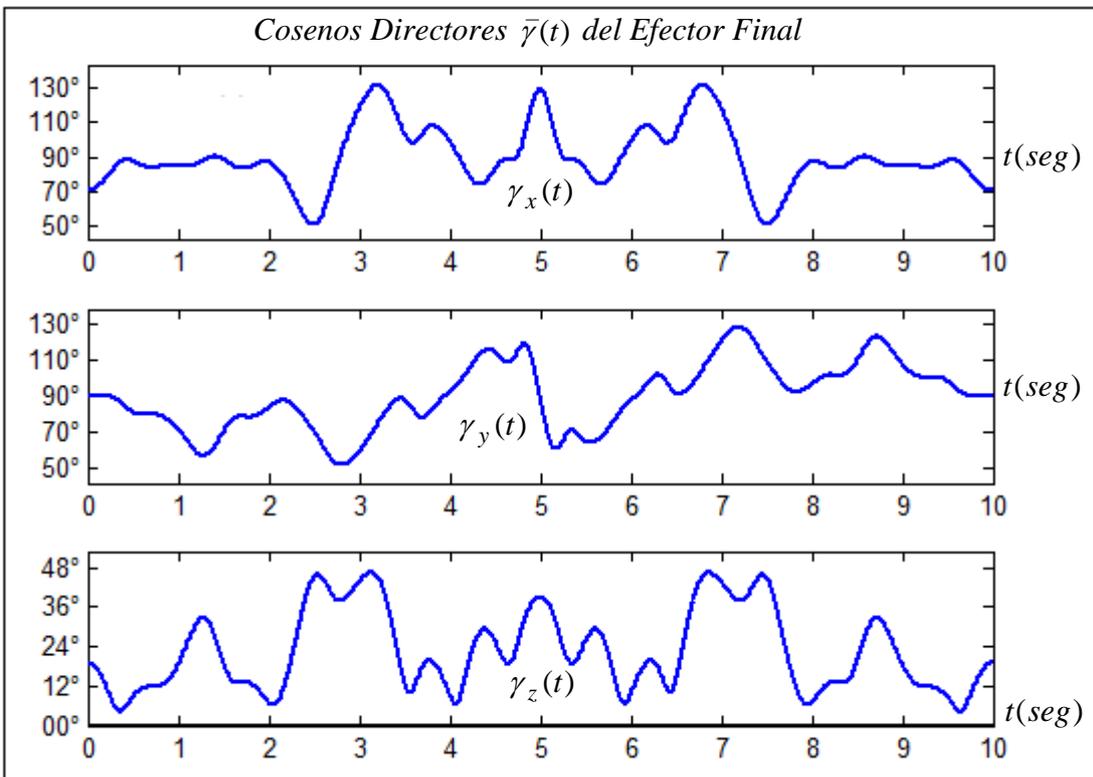


Figura 2.14 Gráficas de los cosenos directores $\bar{\gamma}(t)$ de la trayectoria $\bar{p}(t)$.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

Las funciones de las coordenadas $[p_x(t) \ p_y(t) \ p_z(t)]$ en el tiempo del vector de desplazamiento cartesiano $\bar{p}(t)$ mostradas en la figura 2.9 que a su vez dependen del vector articular $q(t)$ se pueden graficar en el espacio cartesiano que describe la trayectoria espacial respecto del referencial $x_0y_0z_0$ como una curva cartesiana tridimensional y paraméricamente temporal $\mathcal{E}(t)=[x(t) \ y(t) \ z(t)]^T$ como se muestra en la figura 2.15. Esta gráfica representa la trayectoria que realiza el efector final del robot mostrado en la figura 2.7, respecto del sistema de coordenadas cartesianas $x_0y_0z_0$ y que dependen de forma directa de las trayectorias articulares $q(t)=[q_1(t) \ q_2(t) \ q_3(t) \ q_4(t) \ q_5(t) \ q_6(t)]^T$ mostradas en la figura 2.8.

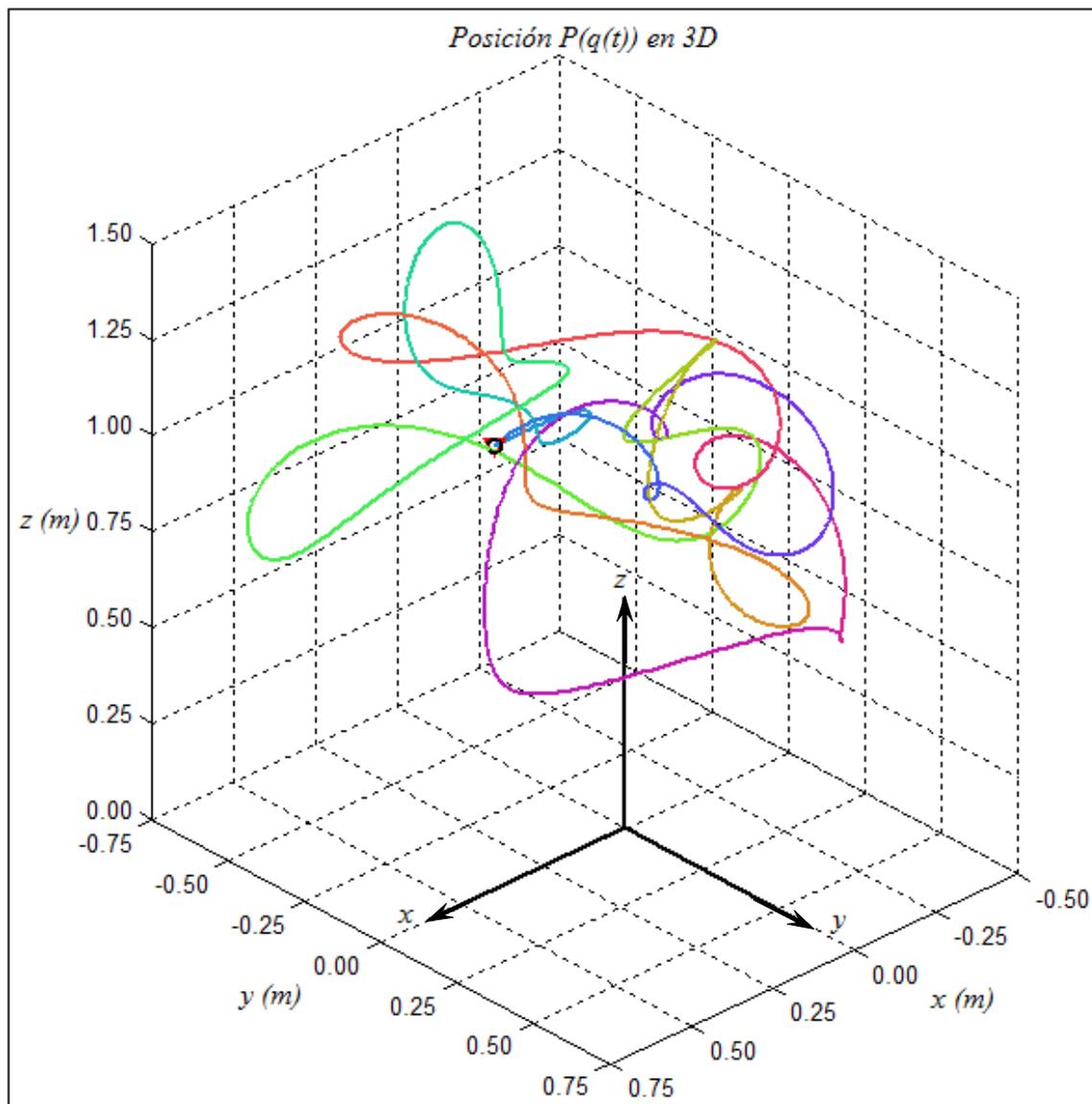


Figura 2.15 Trayectoria espacial del robot de seis articulaciones.

Gráfica elaborada por el autor mediante MatLab

2.7.2 Simulación Gráfica de la Geometría Inversa

Para realizar la simulación de la Geometría Inversa o Cinemática de Posición Inversa del robot se ha establecido una trayectoria espacial $\mathcal{E}(t)=[x(t) \ y(t) \ z(t)]^T$ respecto del sistema referencial $x_0y_0z_0$, la cual consiste en una curva sinusoidal esférica que el efector final del robot debe imprimir sobre la superficie interna de una esfera de radio R , truncada en la parte superior e inferior como se aprecia en la figura 2.16. El vector de aproximación \mathbf{a} del efector debe ser radial es decir siempre normal a la superficie y apuntando hacia el exterior de la esfera, el vector normal \mathbf{n} del efector siempre debe ser tangente a la curva apuntando hacia la dirección de avance y el vector deslizante \mathbf{s} del efector se debe deslizar sobre la esfera de forma paralela en cada punto de la trayectoria $\mathcal{E}(t)$.

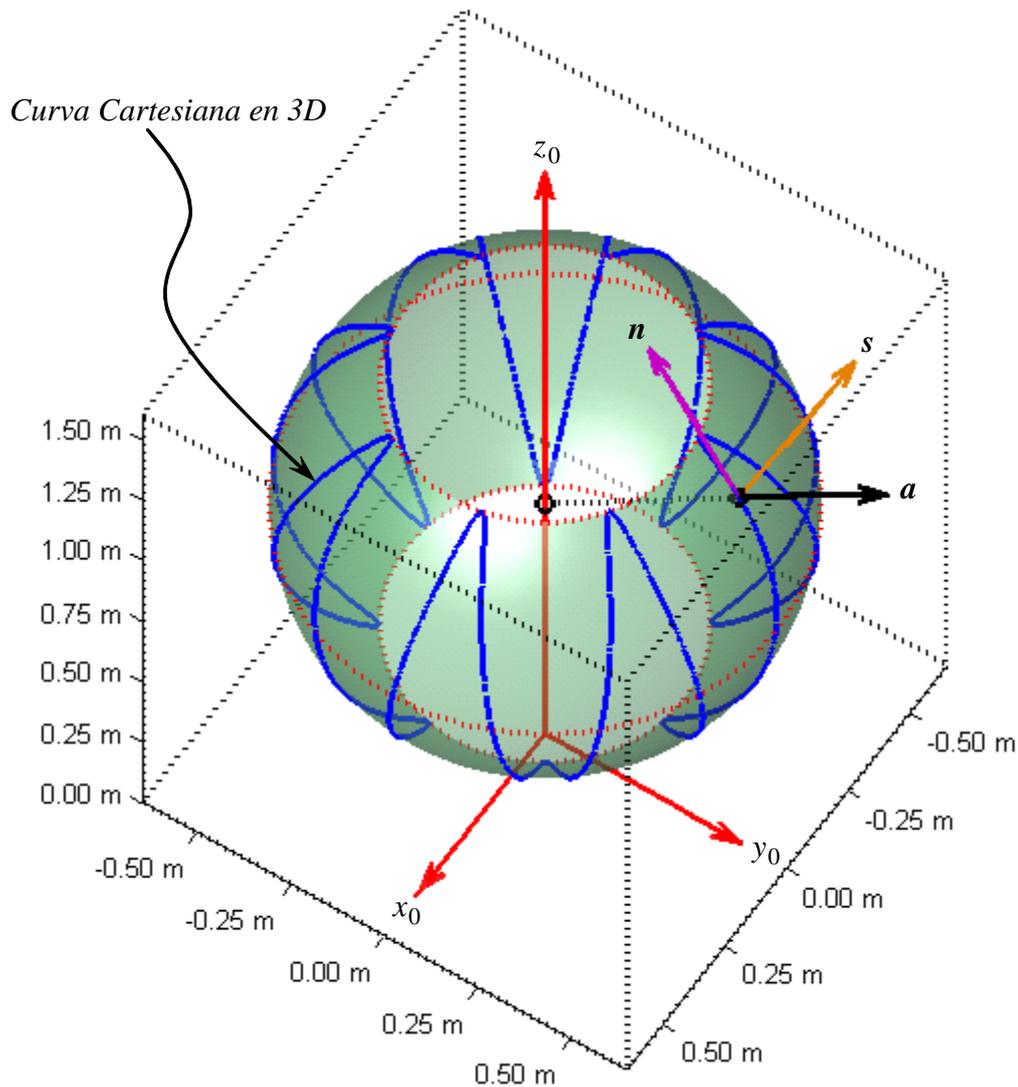


Figura 2.16 Trayectoria sinusoidal esférica tridimensional.

Gráfica elaborada por el autor mediante MatLab

En la figura 2.17 se muestran las componentes cartesianas $[p_x(t) \ p_y(t) \ p_z(t)]$ de la trayectoria tridimensional $\mathcal{C}(t)$ respecto del sistema referencial $x_0y_0z_0$.

De las condiciones del problema el vector de aproximación \mathbf{a} debe ser radial a la esfera de radio R con centro en el punto $P_c = (x_c \ y_c \ z_c)^T$, entonces este vector se obtiene y se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\left((p_x(t) - x_c) \ (p_y(t) - y_c) \ (p_z(t) - z_c) \right)^T}{\sqrt{(p_x(t) - x_c)^2 + (p_y(t) - y_c)^2 + (p_z(t) - z_c)^2}}$$

El vector normal \mathbf{n} debe ser tangente a la curva $\mathcal{C}(t)$ entonces este vector se obtiene y se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\left(\frac{d}{dt} p_x(t) \ \frac{d}{dt} p_y(t) \ \frac{d}{dt} p_z(t) \right)^T}{\sqrt{\left[\frac{d}{dt} p_x(t) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt} p_y(t) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt} p_z(t) \right]^2}}$$

El vector deslizante \mathbf{s} debe ser ortogonal a los vectores \mathbf{h} y \mathbf{n} entonces este vector se obtiene y expresa de la siguiente manera:

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{a}(t) \times \mathbf{n}(t)$$

En la figura 2.18 se muestran los componentes cartesianos de la vector normal \mathbf{n} del efector final respecto del sistema referencial $x_0y_0z_0$. En la figura 2.19 se muestran los componentes cartesianos del vector de deslizamiento \mathbf{s} del efector final respecto del sistema referencial $x_0y_0z_0$. En la figura 2.20 se muestran los componentes cartesianos del vector de aproximación \mathbf{a} del efector final respecto del sistema referencial $x_0y_0z_0$.

Las variables articulares $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $\theta_3(t)$, $\theta_4(t)$ $\theta_5(t)$ y $\theta_6(t)$ que desarrolla el robot para que el efector final pueda realizar la trayectoria espacial correspondiente a una función sinusoidal esférica de la figura 2.16 se obtienen aplicando de forma adecuada las ecuaciones (2.24), (2.26), (2.28), (2.30), (2.32), (2.34), (2.35), (2.36) y (2.37) de la cinemática inversa, obteniéndose las gráficas de las articulaciones de la figura 2.21. De todas las gráficas mostradas en la figura 2.21 la articulación $\theta_4(t)$ permanece inalterable, mientras que las otras gráficas adquieren un comportamiento singular en el tiempo.

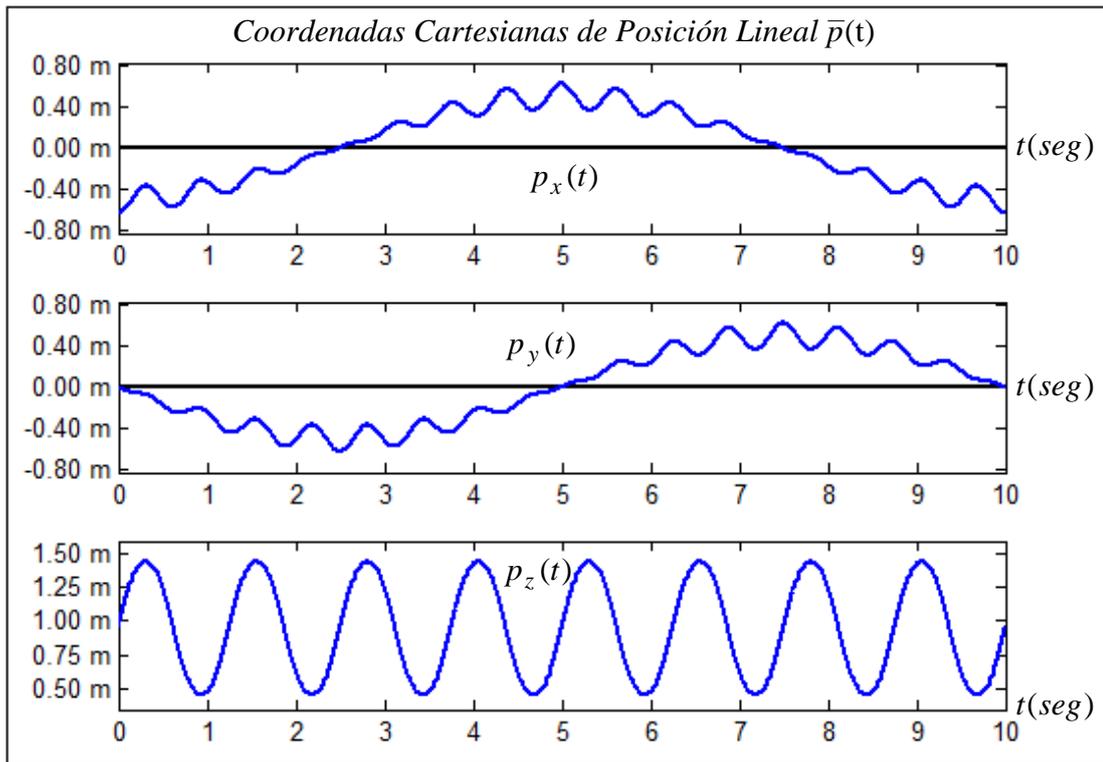


Figura 2.17 Coordenadas cartesianas de la trayectoria $\bar{p}(t)$ sinusoidal esférica.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

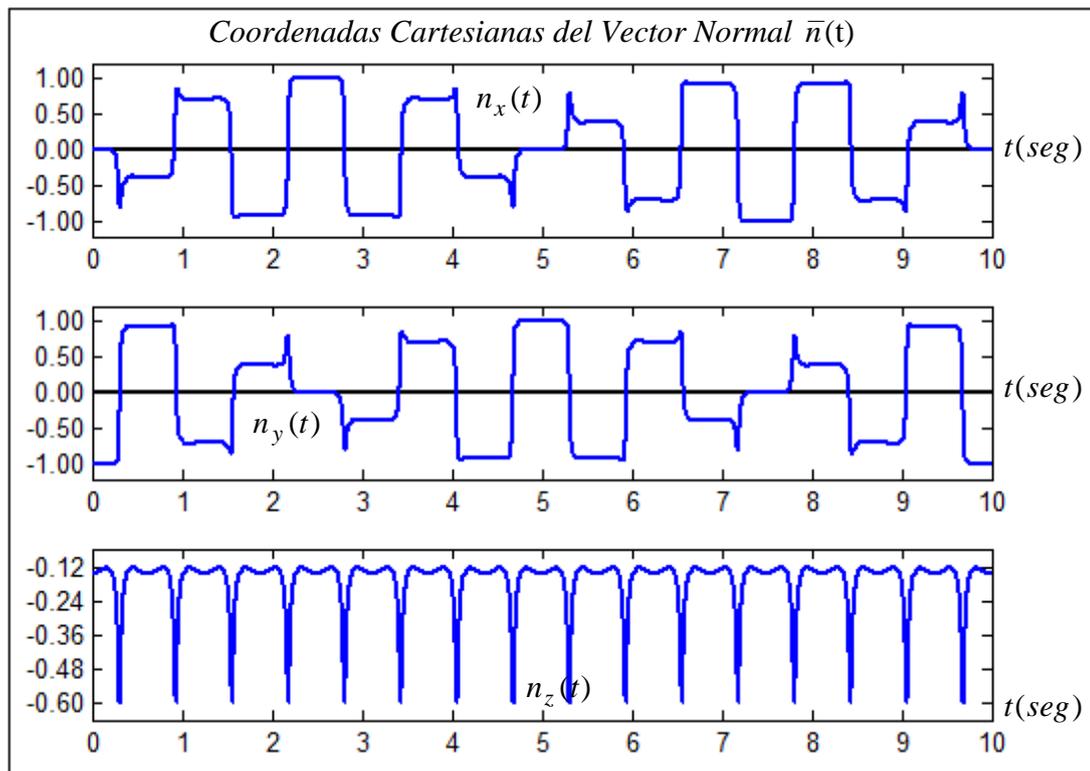


Figura 2.18 Coordenadas del vector $\bar{n}(t)$ al generar la curva sinusoidal esférica.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

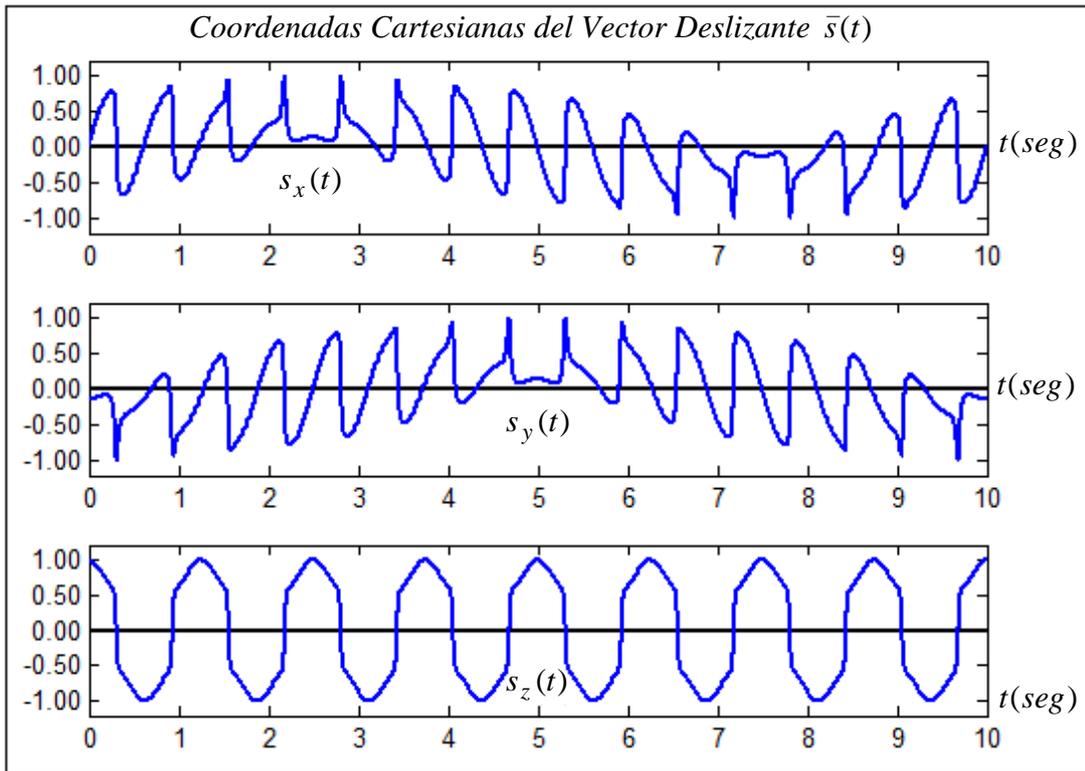


Figura 2.19 Coordenadas del vector $\bar{s}(t)$ al generar la curva sinusoidal esférica.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

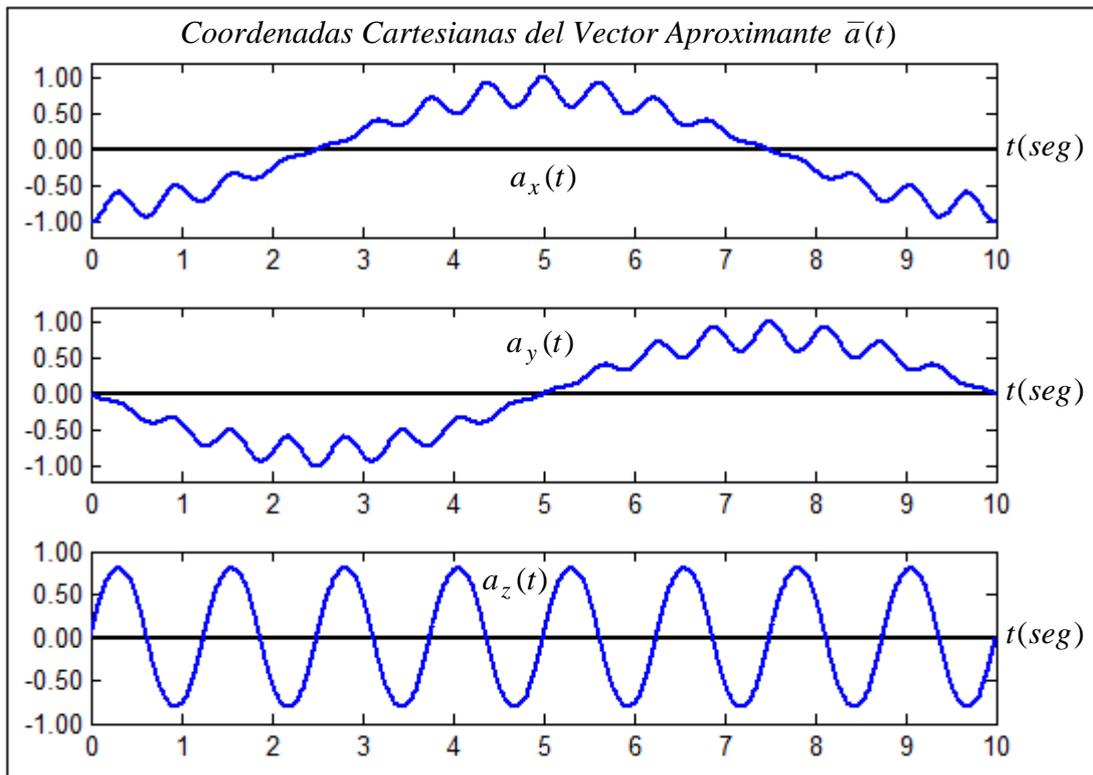


Figura 2.20 Coordenadas del vector $\bar{a}(t)$ al generar la curva sinusoidal esférica.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

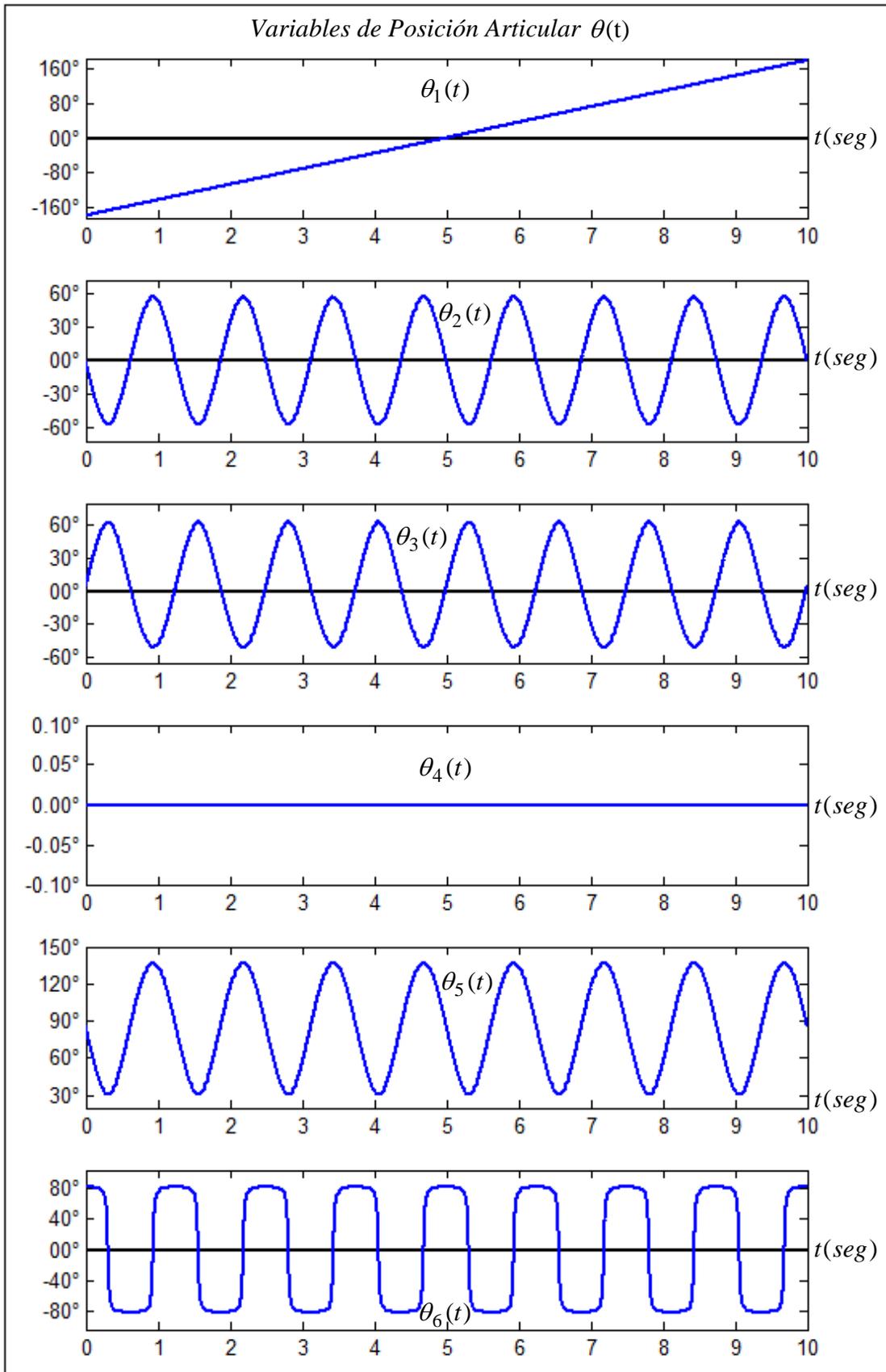


Figura 2.21 Gráficas articulares $\theta(t)$ que generan la curva sinusoidal esférica.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

CAPITULO 3

FORMULACION CINEMATICA DEL ROBOT

3.1 Introducción

En el diseño de estaciones de operación robotizadas, típicamente los temas que se estudian conciernen al esquema de componentes de la estación, la morfología del robot, la localización relativa del robot y la cinemática de la trayectoria del efector final del robot. Algunos problemas de factibilidad de tareas relacionadas con los temas de diseño de estaciones robotizadas de operación, se relacionan con la presencia o no de obstáculos en las zonas accesibles al efector final del robot, ya que éste podría colisionar con tales obstáculos presentes en la estación de operación.

La geometría de un brazo robótico proporciona una formulación matemática que se puede usar para colocar la herramienta o efector final en una posición y orientación arbitraria dentro del espacio operacional. Usando las ecuaciones de la geometría como un paso previo, un problema de más alto nivel viene a ser el movimiento en el espacio de operación, para desempeñar tareas significativas de manipulación.

La formulación cinemática de un robot trata del análisis del volumen de operación y de las expresiones que relacionan el movimiento del robot, así como de las velocidades que se desarrollan tanto en el espacio cartesiano como en el espacio articular que resultan ser útiles para las aplicaciones del robot.

3.2 Análisis del Espacio Operacional del robot

El espacio o volumen de operación se basa en el conjunto de puntos en el espacio tridimensional que se puede alcanzar por el efector final del robot [7]. Analizando el ámbito de operación basado en las posiciones alcanzables por el extremo de la herramienta como un punto de referencia, se debe incluir los efectos tanto de los ejes mayores usados para ubicar la “muñeca” como de los ejes menores usados para orientar la herramienta. La

forma o geometría del ámbito de operación varía de robot a robot; sin embargo, el ámbito de operación se puede también analizar dentro de la estructura del espacio articular n -dimensional. En el espacio articular, el ámbito de operación se caracteriza típicamente por los límites resultantes de la combinación lineal de las variables articulares del robot. Las limitaciones de esta naturaleza generan un poliedro convexo de n variables articulares, denominado “ámbito de operación del espacio articular”.

Si \mathbf{q}_{min} y $\mathbf{q}_{max} \in \mathbf{R}^n$ son vectores que denotan los límites de las articulaciones y \mathbf{C} es una matriz de acoplamiento de $m \times n$, entonces el conjunto de todos los valores que las variables de articulación \mathbf{q} pueden asumir se denomina “ámbito de operación del espacio de articulación accesible”, denotado por \mathcal{Q}_a y definido como:

$$\mathcal{Q}_a \equiv \left\{ \mathbf{q} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{q}_{min} \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{q}_{max} \right\}$$

El límite mínimo del vector articular \mathbf{q} es \mathbf{q}_{min} y el límite máximo del vector articular \mathbf{q} es \mathbf{q}_{max} . El caso especial más simple de ámbito de operación del espacio articular ocurre cuando $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, lo cual no representa acoplamiento entre ejes, en este caso, el número de limitaciones m equipara al número de variables de articulación n . En general, la matriz de acoplamiento de articulación \mathbf{C} puede ser rectangular ($m \neq n$) y puede contener términos diagonales diferentes de cero. Esto ocurre por ejemplo, cuando existen límites articulares en combinaciones lineales (sumas o diferencias) de variables articulares.

El ámbito de operación del espacio de articulación accesible \mathcal{Q}_a es relativamente fácil de caracterizar; éste es el conjunto de puntos en el espacio tridimensional que puede ser alcanzado por el extremo de la herramienta del robot. El conjunto de todos los puntos \mathbf{P} alcanzables desde una orientación específica por el extremo de la herramienta se refiere al ámbito de operación total, que se denota por \mathbf{Y} y el conjunto de los puntos alcanzables desde una orientación arbitraria de la herramienta se le denomina ámbito de operación diestro y se denota por \mathbf{Y}_d . El ámbito de operación diestro es más pequeño pero más práctico que el ámbito de operación total. El ámbito de trabajo de un manipulador se puede expresar directamente en términos del espacio articular accesible \mathcal{Q}_a y en función del extremo de la posición $\mathbf{P}(\mathbf{q})$ como sigue:

$$\mathbf{Y} = \left\{ \mathbf{p}(\mathbf{q}) \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{q} \in \mathcal{Q}_a \right\}$$

El ámbito de operación Y representa la imagen en el ámbito de operación del espacio articular accesible Q_a mediante la función de la posición cartesiana $P(q)$ de la herramienta del robot, que corresponde a la cuarta columna de la matriz de transformación homogénea ${}_{Base}T^{Efec. final}(q)$ de la geometría del brazo robótico. Alternativamente, la posición y la orientación del efector operacional de un robot se describen mediante un vector $r(t)$ de dimensión $m \times 1$. La función del posicionamiento $P(q)$ de la herramienta del robot corresponde a las tres primeras componentes del vector $r(t)$ de la configuración de la herramienta y las componentes restantes describen la orientación del efector operacional respecto de un sistema referencial. Las m componentes del vector cartesiano $r(t)$ se denominan *coordenadas operacionales* del efector final del robot ($m \leq 6$). El vector $r(t)$ se puede escribir de la siguiente forma:

$$r = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m]^T$$

La configuración articular de un robot manipulador se define mediante el vector q de dimensión $n \times 1$. La n componentes de q se denominan coordenadas generalizadas del robot, que describen la posición relativa de un eslabón del robot, respecto del eslabón que le precede. El vector articular q se representa como:

$$q = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n]^T$$

El conjunto de configuraciones libre de colisiones de un robot, es el conjunto Q_f que se expresa como:

$$Q_f \equiv \{q \in Q_a / M(q) \cap E_0 = \emptyset\}$$

La expresión $M(q)$ es la superficie del espacio cartesiano ocupado por los eslabones del robot y E_0 es la superficie del espacio cartesiano ocupado por los obstáculos en el ámbito de operación.

El espacio de operación libre W_f es la imagen en el espacio operacional del conjunto de configuraciones libre de colisiones Q_f , bajo el modelo de la posición geométrica directa o sea:

$$W_f = f(Q_f)$$

3.3 Formulación Cinemática Directa del robot

La geometría de un robot de n articulaciones se expresa mediante la ecuación matricial (2.9) que se vuelve a escribir como:

$${}^0T^n = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{s} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{P} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

La formulación geométrica de un robot o cinemática de posición también se puede expresar en función del tiempo partiendo de la ecuación (2.17) de la siguiente manera:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{q}(t)) \quad (3.2)$$

El vector $\mathbf{r}(t)$ de dimensión $m \times 1$ se conforma por las coordenadas cartesianas del efector final (posición y orientación $\mathbf{p}(q), \mathcal{G}(q)$) y el vector $\mathbf{q}(t)$ de dimensión $n \times 1$ se conforma por las coordenadas articulares de la estructura del robot. El vector generalizado $\mathbf{r}(t)$ y la vector $\mathbf{q}(t)$ se definen en el tiempo respectivamente como:

$$\mathbf{r}(t) = [x(t) \quad y(t) \quad z(t) \quad \mathcal{G}_x(t) \quad \mathcal{G}_y(t) \quad \mathcal{G}_z(t)]^T$$

$$\mathbf{q}(t) = [q_1(t) \quad q_2(t) \quad q_3(t) \quad \cdots \quad q_n(t)]^T$$

La Formulación Cinemática Directa (FCD) de velocidad $\dot{\mathbf{r}}(t)$ de un manipulador proporciona la variación del vector cartesiano del efector final $\mathbf{r}(t)$ respecto del tiempo en términos de la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}(t)$ y se expresa como:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{f}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}(t) \quad (3.3)$$

La matriz $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ de la ecuación (3.3) de dimensión $m \times n$ denota la matriz jacobiana del vector $\mathbf{r}(t)$ respecto del vector articular $\mathbf{q}(t)$ de la estructura del robot.

La matriz jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ aparece también en la ecuación diferencial directa del robot, la cual proporciona el desplazamiento diferencial del efector final $d\mathbf{r}$ en términos del desplazamiento diferencial de las variables articulares $d\mathbf{q}$ como:

$$d\mathbf{r}(t) = \mathbf{J}(\mathbf{q}) d\mathbf{q}(t) \quad (3.4)$$

La matriz jacobiana tiene múltiples aplicaciones en robótica; la más usada es el cálculo computacional de su inversa para determinar la solución de la formulación de la geometría inversa por el método numérico $\Delta\mathbf{q} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\Delta\mathbf{r}$. La transpuesta de la matriz

la jacobiana se utiliza en la formulación estática para determinar las fuerzas y torsiones articulares $\boldsymbol{\tau}$ necesaria para ejercer las fuerzas y momentos \mathbf{F} especificados en el espacio cartesiano $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}$. La matriz jacobiana se utiliza también para determinar las singularidades y para analizar el espacio operacional asequible de los robots.

La matriz jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ se obtiene mediante la diferenciación total aplicando derivadas parciales a la ecuación de la función geométrica (3.2) del robot como sigue:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{q})}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{q})}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{q})}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_m(\mathbf{q})}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

La matriz jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ para el robot de seis articulaciones en estudio se puede expresar en dos partes, con el objetivo de relacionar las velocidades cartesianas lineal $\bar{\mathbf{v}}_p(t)$ y angular $\bar{\boldsymbol{\omega}}_p(t)$ del efector final en el punto $\mathbf{P}(t)$ con respecto del sistema operacional de referencia $x_0y_0z_0$ en términos del vector articular $\mathbf{q}(t)$ como sigue:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}_p(t) \\ \bar{\boldsymbol{\omega}}_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v(\mathbf{q}(t)) \\ \mathbf{J}_\omega(\mathbf{q}(t)) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \quad (3.6)$$

De la ecuación (3.6) se puede determinar las ecuaciones de las velocidades cartesianas lineal $\bar{\mathbf{v}}_p$ y angular $\bar{\boldsymbol{\omega}}_p$ del efector final, relacionadas con el vector de velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$ de la siguiente manera:

$$\bar{\mathbf{v}}_p(t) = \mathbf{J}_v(\mathbf{q}(t))\dot{\mathbf{q}}(t) \quad (3.7.a)$$

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_p(t) = \mathbf{J}_\omega(\mathbf{q}(t))\dot{\mathbf{q}}(t) \quad (3.7.b)$$

Las matrices $\mathbf{J}_v(\mathbf{q})$ y $\mathbf{J}_\omega(\mathbf{q})$ son de dimensión $3 \times n$.

Para el manipulador de n articulaciones se utiliza el vector posición \mathbf{P} del sistema referencial del efector final de la ecuación (3.1), el cual se expresa mediante la formulación geométrica directa, por lo tanto la matriz $\mathbf{J}_v(\mathbf{q})$ de la ecuación (3.7.a) se deduce de la siguiente manera:

$$\mathbf{J}_v(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{q})}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{q})}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{q})}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

La matriz $\mathbf{J}_\omega(\mathbf{q})$ de la ecuación (3.7.b) se puede expresar del siguiente modo:

$$\mathbf{J}_\omega(\mathbf{q}) = [\xi_1 \mathbf{z}_0 \quad \xi_2 \mathbf{z}_1 \quad \dots \quad \xi_n \mathbf{z}_{n-1}]$$

El vector \mathbf{z}_{k-1} es el tercer vector unitario del sistema referencial $x_{k-1}y_{k-1}z_{k-1}$ con respecto del marco referencial base $x_0y_0z_0$ y el escalar ξ_k indica el tipo de articulación k (es 1 si la articulación es rotacional y es 0 si la articulación es prismática), si todas las articulaciones del robot son de tipo angular entonces la matriz $\mathbf{J}_\omega(\mathbf{q})$ se expresa como:

$$\mathbf{J}_\omega(\mathbf{q}) = [\mathbf{z}_0 \quad \mathbf{z}_1 \quad \dots \quad \mathbf{z}_{n-1}] \quad (3.9)$$

Usando las ecuaciones (3.6), (3.8) y (3.9) se puede obtener la expresión completa del jacobiano del efector final de la siguiente manera:

$$\mathbf{J}_p(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_\omega(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{q})}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{q})}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{q})}{\partial q_n} \\ \mathbf{z}_0(\mathbf{q}) & \mathbf{z}_1(\mathbf{q}) & \dots & \mathbf{z}_{n-1}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

La ecuación del vector aceleración lineal cartesiana $\bar{\mathbf{a}}_p(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \ddot{\mathbf{p}}(t)$ del efector final con respecto del referencial $x_0y_0z_0$ se interpreta como la variación del vector velocidad lineal $\bar{\mathbf{v}}_p(t)$ del efector final respecto del tiempo t en términos de la posición, velocidad y aceleración articulares $\mathbf{q}(t)$, $\dot{\mathbf{q}}(t)$, $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ y se expresa como:

$$\bar{\mathbf{a}}_p(t) = \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{v}}_p(t) = \ddot{\mathbf{p}}(t) = \left(\frac{d}{dt} \mathbf{J}_v(\mathbf{q}(t)) \right) \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{J}_v(\mathbf{q}(t)) \ddot{\mathbf{q}}(t) \quad (3.11)$$

La ecuación del vector aceleración angular cartesiana $\bar{\alpha}_p(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ del efector final con respecto del referencial $x_0y_0z_0$ se interpreta como la variación del vector velocidad angular $\bar{\omega}_p(t)$ del efector final respecto del tiempo en términos de la posición, velocidad y aceleración articulares $\mathbf{q}(t)$, $\dot{\mathbf{q}}(t)$, $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ y se expresa como:

$$\bar{\alpha}_p(t) = \frac{d}{dt} \bar{\omega}_p(t) = \left(\frac{d}{dt} \mathbf{J}_\omega(\mathbf{q}(t)) \right) \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{J}_\omega(\mathbf{q}(t)) \ddot{\mathbf{q}}(t) \quad (3.12)$$

La ecuación del vector rotación angular $\bar{\mathcal{G}}_p(\mathbf{q})$ del efector final con respecto del referencial base $x_0y_0z_0$ se interpreta como la integración del vector velocidad angular $\bar{\omega}_p(t)$ del efector final en el tiempo en términos de la posición articular $\mathbf{q}(t)$ y se expresa como: (*)

$$\bar{\mathcal{G}}_p(t) = \int_0^t \bar{\omega}_p(\tau) d\tau = \int_{\mathbf{q}(0)}^{\mathbf{q}(t)} \mathbf{J}_w(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \quad (3.13)$$

3.4 Formulación Cinemática Inversa del robot

La Formulación Cinemática Inversa (FCI) del robot expresa la relación entre el vector de velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$ con el vector de la velocidad cartesiana $\dot{\mathbf{r}}$ deseada del efector final. El Modelamiento Cinemático Inverso es equivalente al Modelo Diferencial Inverso del robot, que determina la variación diferencial $d\mathbf{q}$ de las variables de articulación que corresponde al desplazamiento diferencial de las coordenadas cartesianas $d\mathbf{x}$ del efector final del manipulador robótico.

Si la matriz jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ de la ecuación (3.3) es invertible, es decir no singular, entonces la Formulación Cinemática Inversa del robot se determina despejando el vector de velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$ de la ecuación (3.3) del siguiente modo:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{r}}(t) \quad (3.14)$$

El diferencial inverso $d\mathbf{q}$ se determina utilizando la ecuación (3.4) de la siguiente manera:

$$d\mathbf{q} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})d\mathbf{r} \quad (3.15)$$

Los vectores articular \mathbf{q} y cartesiano \mathbf{r} que están relacionados en las ecuaciones (3.14) y (3.15) se definen respectivamente como:

$$\mathbf{q}(t) = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \cdots \quad q_n]^T$$

$$\mathbf{r}(t) = [p_x \quad p_y \quad p_z \quad \mathcal{G}_x \quad \mathcal{G}_y \quad \mathcal{G}_z]^T$$

En el caso de que la matriz jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ no sea cuadrada se aplica el concepto de la inversión matricial pseudoinversa.

* Ecuación deducida por el autor

3.5 Formulación de la Cinemática del robot propuesto

La Formulación Geométrica Directa del robot de seis grados de libertad ($n=6$) en estudio está expresada mediante las ecuaciones (2.22) y el vector posicional \mathbf{P} está formulado mediante la ecuación (2.22.d), por lo tanto el Modelo Cinemático Directo de velocidad se puede determinar formulando las velocidades cartesianas haciendo uso de la ecuación (3.6) de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_p(t) \\ \bar{\omega}_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_\omega(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{J}_p(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}(t) \quad (3.16)$$

La matriz jacobiana $\mathbf{J}_p(\mathbf{q})$ de dimensión 6×6 que permite relacionar la velocidad cartesiana con la velocidad articular se escribe como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_v(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_\omega(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_x(\mathbf{q})}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{p}_x(\mathbf{q})}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathbf{p}_x(\mathbf{q})}{\partial q_3} & \frac{\partial \mathbf{p}_x(\mathbf{q})}{\partial q_4} & \frac{\partial \mathbf{p}_x(\mathbf{q})}{\partial q_5} & \frac{\partial \mathbf{p}_x(\mathbf{q})}{\partial q_6} \\ \frac{\partial \mathbf{p}_y(\mathbf{q})}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{p}_y(\mathbf{q})}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathbf{p}_y(\mathbf{q})}{\partial q_3} & \frac{\partial \mathbf{p}_y(\mathbf{q})}{\partial q_4} & \frac{\partial \mathbf{p}_y(\mathbf{q})}{\partial q_5} & \frac{\partial \mathbf{p}_y(\mathbf{q})}{\partial q_6} \\ \frac{\partial \mathbf{p}_z(\mathbf{q})}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{p}_z(\mathbf{q})}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathbf{p}_z(\mathbf{q})}{\partial q_3} & \frac{\partial \mathbf{p}_z(\mathbf{q})}{\partial q_4} & \frac{\partial \mathbf{p}_z(\mathbf{q})}{\partial q_5} & \frac{\partial \mathbf{p}_z(\mathbf{q})}{\partial q_6} \\ z_{0x}(\mathbf{q}) & z_{1x}(\mathbf{q}) & z_{2x}(\mathbf{q}) & z_{3x}(\mathbf{q}) & z_{4x}(\mathbf{q}) & z_{5x}(\mathbf{q}) \\ z_{0y}(\mathbf{q}) & z_{1y}(\mathbf{q}) & z_{2y}(\mathbf{q}) & z_{3y}(\mathbf{q}) & z_{4y}(\mathbf{q}) & z_{5y}(\mathbf{q}) \\ z_{0z}(\mathbf{q}) & z_{1z}(\mathbf{q}) & z_{2z}(\mathbf{q}) & z_{3z}(\mathbf{q}) & z_{4z}(\mathbf{q}) & z_{5z}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Todos los elementos de la matriz jacobiana $\mathbf{J}_p(\mathbf{q})$ de la ecuación (3.17) se expresan explícitamente a continuación:

$$\frac{\partial \mathbf{p}_x(\mathbf{q})}{\partial q_1} = -L_2 S_1 C_2 - L_4 S_1 S_{23} - L_6 (S_1 C_{23} C_4 S_5 + C_1 S_4 S_5 + S_1 S_{23} C_5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_x(\mathbf{q})}{\partial q_2} = -L_2 C_1 S_2 + L_4 C_1 C_{23} - L_6 (C_1 S_{23} C_4 S_5 - C_1 C_{23} C_5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_x(\mathbf{q})}{\partial q_3} = L_4 C_1 C_{23} - L_6 (C_1 S_{23} C_4 S_5 - C_1 C_{23} C_5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_x(\mathbf{q})}{\partial q_4} = -L_6(C_1C_{23}S_4S_5 + S_1C_4S_5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_x(\mathbf{q})}{\partial q_5} = L_6(C_1C_{23}C_4C_5 - S_1S_4C_5 - C_1S_{23}S_5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_x(\mathbf{q})}{\partial q_6} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_y(\mathbf{q})}{\partial q_1} = L_2C_1C_2 + L_4C_1S_{23} + L_6(C_1C_{23}C_4S_5 - S_1S_4S_5 + C_1S_{23}C_5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_y(\mathbf{q})}{\partial q_2} = -L_2S_1S_2 + L_4S_1C_{23} - L_6(S_1S_{23}C_4S_5 - S_1C_{23}C_5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_y(\mathbf{q})}{\partial q_3} = L_4S_1C_{23} - L_6(S_1S_{23}C_4S_5 - S_1C_{23}C_5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_x(\mathbf{q})}{\partial q_4} = -L_6(S_1C_{23}S_4S_5 - C_1S_4C_5 + S_1S_{23}S_5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_y(\mathbf{q})}{\partial q_5} = L_6(S_1C_{23}C_4C_5 + C_1S_4C_5 - S_1S_{23}S_5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_y(\mathbf{q})}{\partial q_6} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_z(\mathbf{q})}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_z(\mathbf{q})}{\partial q_2} = -L_2C_2 - L_4S_{23} - L_6(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_z(\mathbf{q})}{\partial q_3} = -L_4S_{23} - L_6(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_z(\mathbf{q})}{\partial q_4} = L_6S_{23}S_4S_5$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_z(\mathbf{q})}{\partial q_5} = -L_6(S_{23}C_4C_5 + C_{23}S_5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_z(\mathbf{q})}{\partial q_6} = 0$$

$$z_{0x}(\mathbf{q}) = 0$$

$$z_{0y}(\mathbf{q}) = 0$$

$$z_{0z}(\mathbf{q}) = 1$$

$$z_{1x}(\mathbf{q}) = -S_1$$

$$z_{1y}(\mathbf{q}) = C_1$$

$$z_{1z}(\mathbf{q}) = 0$$

$$z_{2x}(\mathbf{q}) = -S_1$$

$$z_{2y}(\mathbf{q}) = C_1$$

$$z_{2z}(\mathbf{q}) = 0$$

$$z_{3x}(\mathbf{q}) = C_1 S_{23}$$

$$z_{3y}(\mathbf{q}) = S_1 S_{23}$$

$$z_{3z}(\mathbf{q}) = -C_{23}$$

$$z_{4x}(\mathbf{q}) = -C_1 C_{23} S_4 - S_1 C_4$$

$$z_{4y}(\mathbf{q}) = -S_1 C_{23} S_4 + C_1 C_4$$

$$z_{4z}(\mathbf{q}) = S_{23} S_4$$

$$z_{5x}(\mathbf{q}) = (C_1 C_{23} C_4 - S_1 S_4) S_5 + C_1 S_{23} C_5$$

$$z_{5y}(\mathbf{q}) = (S_1 C_{23} C_4 + C_1 S_4) S_5 + S_1 S_{23} C_5$$

$$z_{5z}(\mathbf{q}) = -S_{23} C_4 S_5 + C_{23} C_5$$

3.6 Simulación Gráfica de la Cinemática del robot propuesto

Para realizar la simulación gráfica de la cinemática del robot de seis articulaciones representado en la figura 2.7, en función del tiempo $t=kT$ (durante 10 segundos), se ha elaborado un programa mediante *MatLab* de las ecuaciones cinemáticas de posición, velocidad y aceleración tanto articulares como cartesianas. Para ello se establecen todas las funciones articulares de posición angular $q(t) = \theta(t)$, como curvas suaves de tipo senoidal, con sus respectivas derivadas en el tiempo: velocidad articular $\dot{q}(t) = \dot{\theta}(t)$ y aceleración articular $\ddot{q}(t) = \ddot{\theta}(t)$. Las variables cartesianas vectoriales del efector final del robot respecto del sistema referencial base $x_0y_0z_0$: posición lineal cartesiana $\bar{p}(t)$, velocidad lineal cartesiana $\bar{v}(t)$, aceleración lineal cartesiana $\bar{a}(t)$, posición angular cartesiana $\bar{\mathcal{G}}(t)$, velocidad angular cartesiana $\bar{\omega}(t)$ y aceleración angular cartesiana $\bar{\alpha}(t)$ se obtienen en función de las variables articulares vectoriales $q(t)$, $\dot{q}(t)$ y $\ddot{q}(t)$. En la figura 3.1 se muestran todos los vectores cartesianos involucrados en la cinemática del efector final del robot, los cuales se expresan respecto del sistema referencial base $x_0y_0z_0$ al realizar una trayectoria espacial $p(q(t))$.

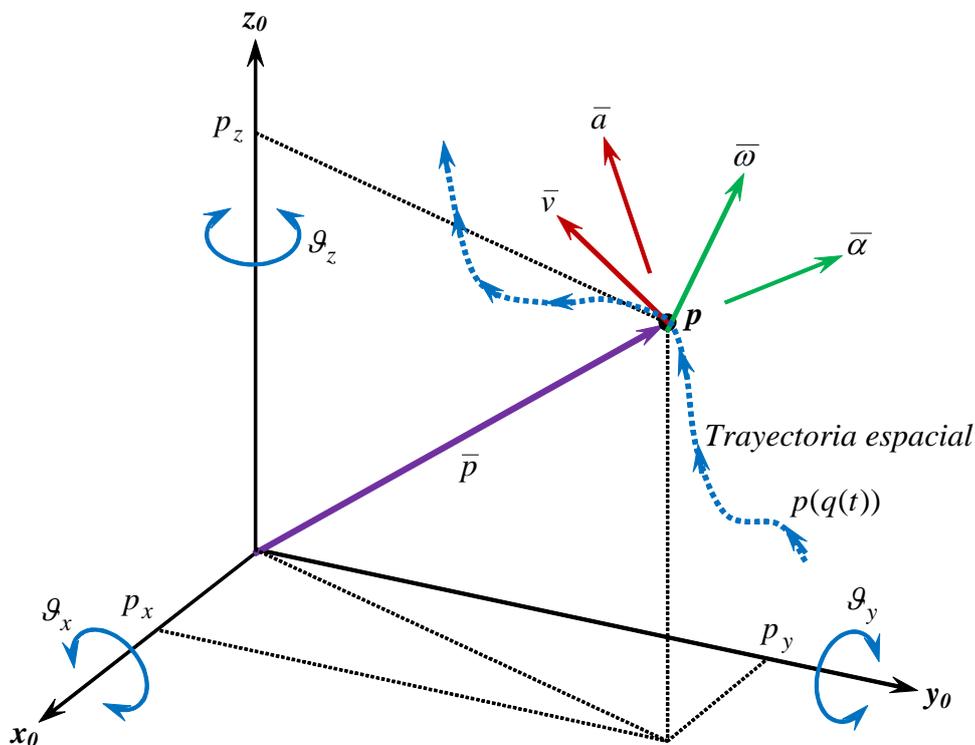


Figura 3.1 Esquema tridimensional que ilustra la cinemática espacial del robot.

Gráfica elaborada por el autor

Los vectores cartesianos del movimiento del efector final del robot: posición, velocidad y aceleración, mostrados en la figura 3.1 se obtienen matemáticamente en función de los vectores de posición articular $\mathbf{q}(t)$, velocidad $\dot{\mathbf{q}}(t)$ y aceleración $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ como:

$$\bar{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{f}_p(\mathbf{q}(t)) \quad (3.18.a)$$

$$\bar{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{J}_v(\mathbf{q}(t))\dot{\mathbf{q}}(t) \quad (3.18.b)$$

$$\bar{\mathbf{a}}(t) = \left(\frac{d}{dt}\mathbf{J}_v(\mathbf{q}(t))\right)\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{J}_v(\mathbf{q}(t))\ddot{\mathbf{q}}(t) \quad (3.18.c)$$

$$\bar{\mathcal{G}}(t) = \int_{q(0)}^{q(t)} \mathbf{J}_\omega(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \quad (3.18.d)$$

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}(t) = \mathbf{J}_\omega(\mathbf{q}(t))\dot{\mathbf{q}}(t) \quad (3.18.e)$$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \left(\frac{d}{dt}\mathbf{J}_\omega(\mathbf{q}(t))\right)\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{J}_\omega(\mathbf{q}(t))\ddot{\mathbf{q}}(t) \quad (3.18.f)$$

La forma de las variables articulares consecutivas en función del tiempo: posición $\mathbf{q}(t)$ (línea curva color azul), velocidad $\dot{\mathbf{q}}(t)$ (línea curva color verde) y aceleración $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ (línea curva color rojo) se muestran agrupadas adecuadamente en las figuras 3.2

En la figura 3.3 se muestran las gráficas correspondientes a las coordenadas cartesianas de la posición lineal $\bar{\mathbf{p}}(t) = [p_x(t) \ p_y(t) \ p_z(t)]^T$ descrita en la ecuación (3.18.a). En la figura 3.4 se muestran las gráficas correspondientes a las coordenadas cartesianas de la velocidad lineal $\bar{\mathbf{v}}(t) = [v_x(t) \ v_y(t) \ v_z(t)]^T$ descrita en la ecuación (3.18.b). En la figura 3.5 se muestran las gráficas correspondientes a las coordenadas cartesianas de la aceleración lineal $\bar{\mathbf{a}}(t) = [a_x(t) \ a_y(t) \ a_z(t)]^T$ descrita en la ecuación (3.18.c). En la figura 3.6 se muestran las gráficas correspondientes a las coordenadas cartesianas de la posición angular $\bar{\mathcal{G}}(t) = [\mathcal{G}_x(t) \ \mathcal{G}_y(t) \ \mathcal{G}_z(t)]^T$ descrita en la ecuación (3.18.d). En la figura 3.7 se muestran las gráficas correspondientes a las coordenadas cartesianas de la velocidad angular $\bar{\boldsymbol{\omega}}(t) = [\omega_x(t) \ \omega_y(t) \ \omega_z(t)]^T$ descrita en la ecuación (3.18.e). En la figura 3.8 se muestran las gráficas correspondientes a las coordenadas cartesianas de la aceleración angular $\bar{\boldsymbol{\alpha}}(t) = [\alpha_x(t) \ \alpha_y(t) \ \alpha_z(t)]^T$ descrita en la ecuación (3.18.f).

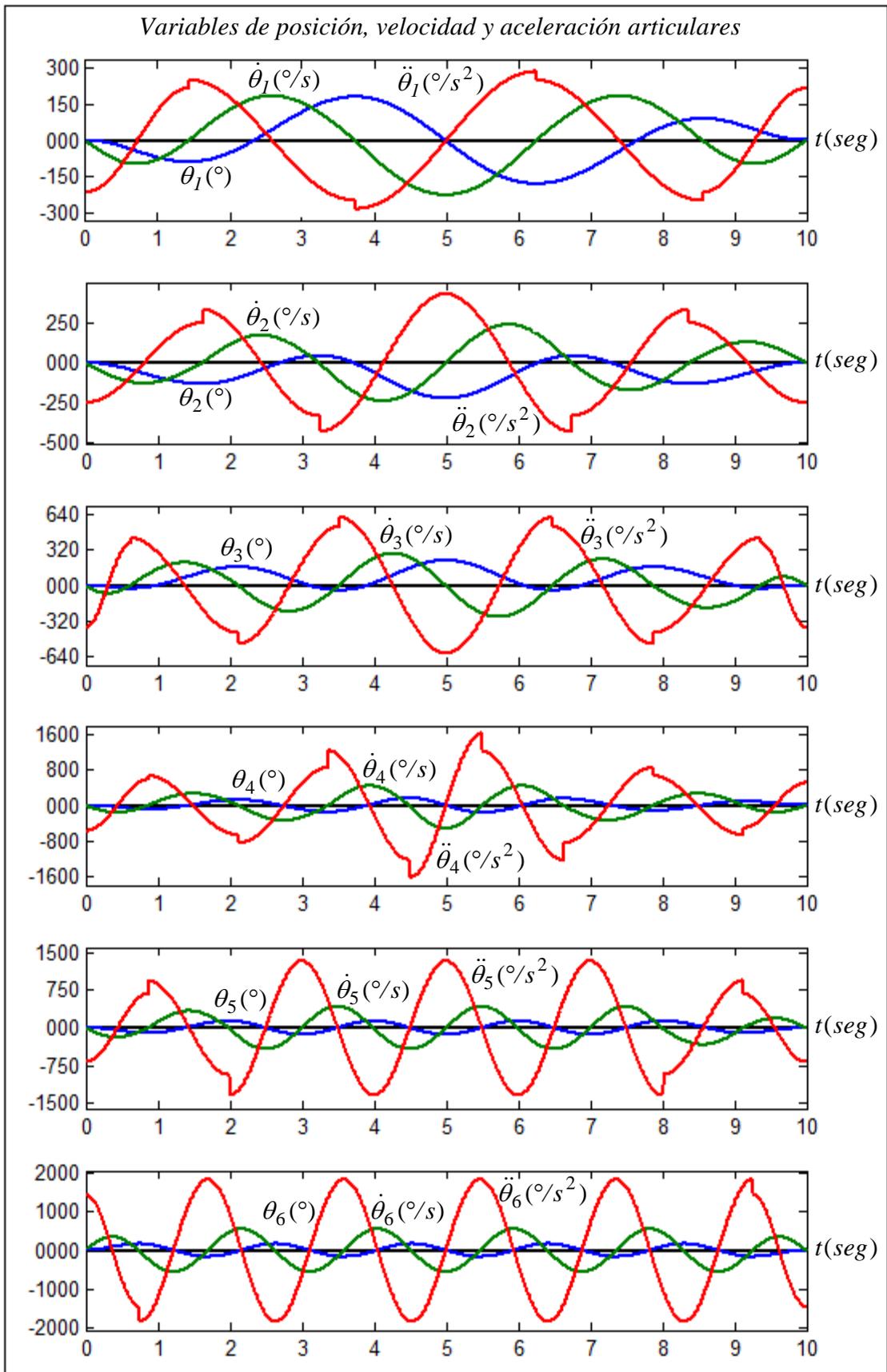


Figura 3.2 Posición, velocidad y aceleración articulares: $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ y $\ddot{\theta}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

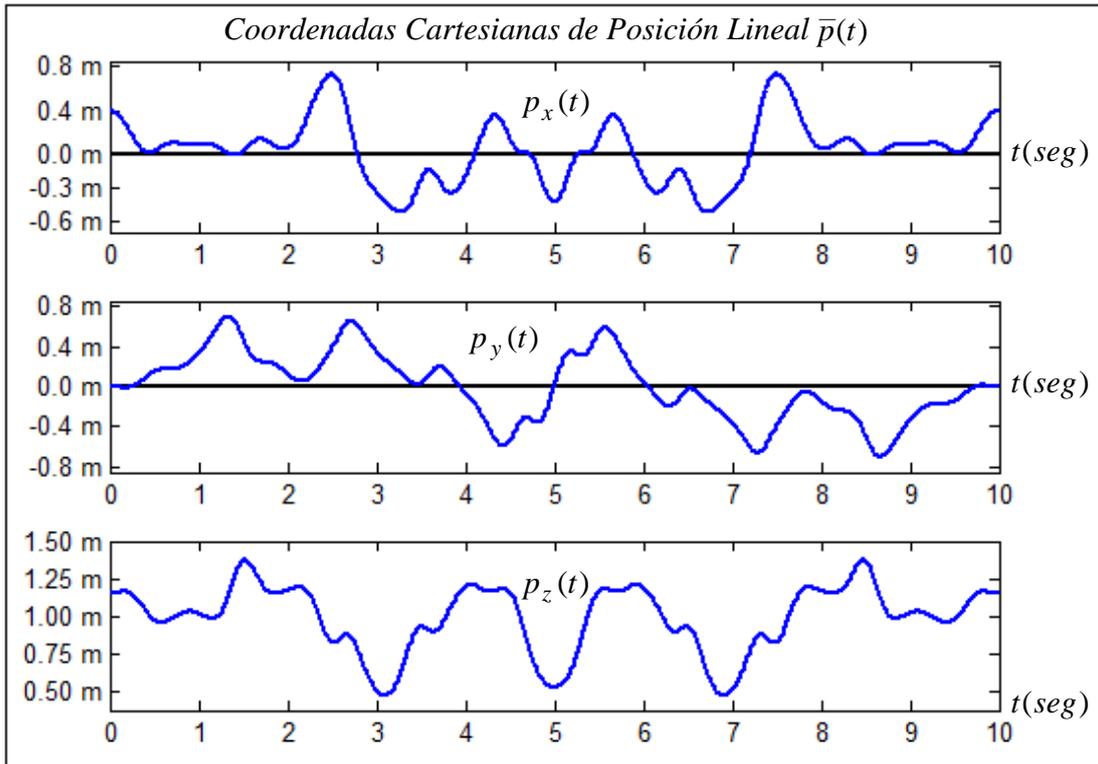


Figura 3.3 Posición lineal cartesiana $\bar{p}(t)$ del efector final del robot.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

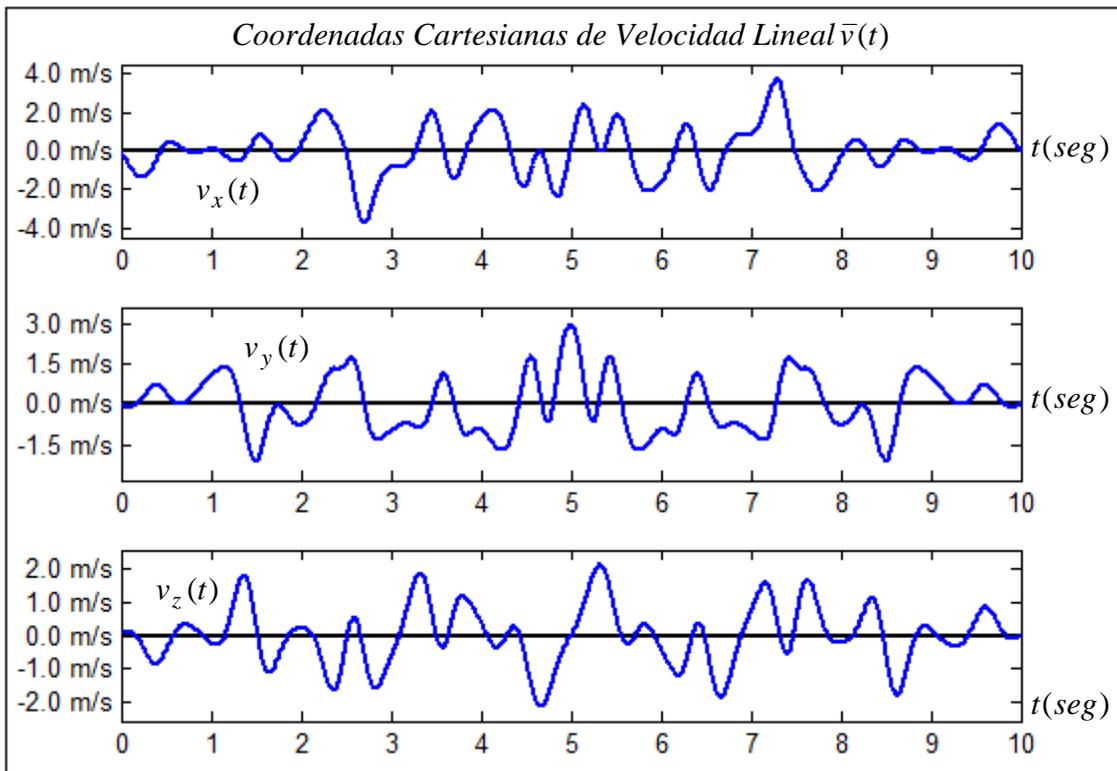


Figura 3.4 Velocidad lineal cartesiana $\bar{v}(t)$ del efector final del robot.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

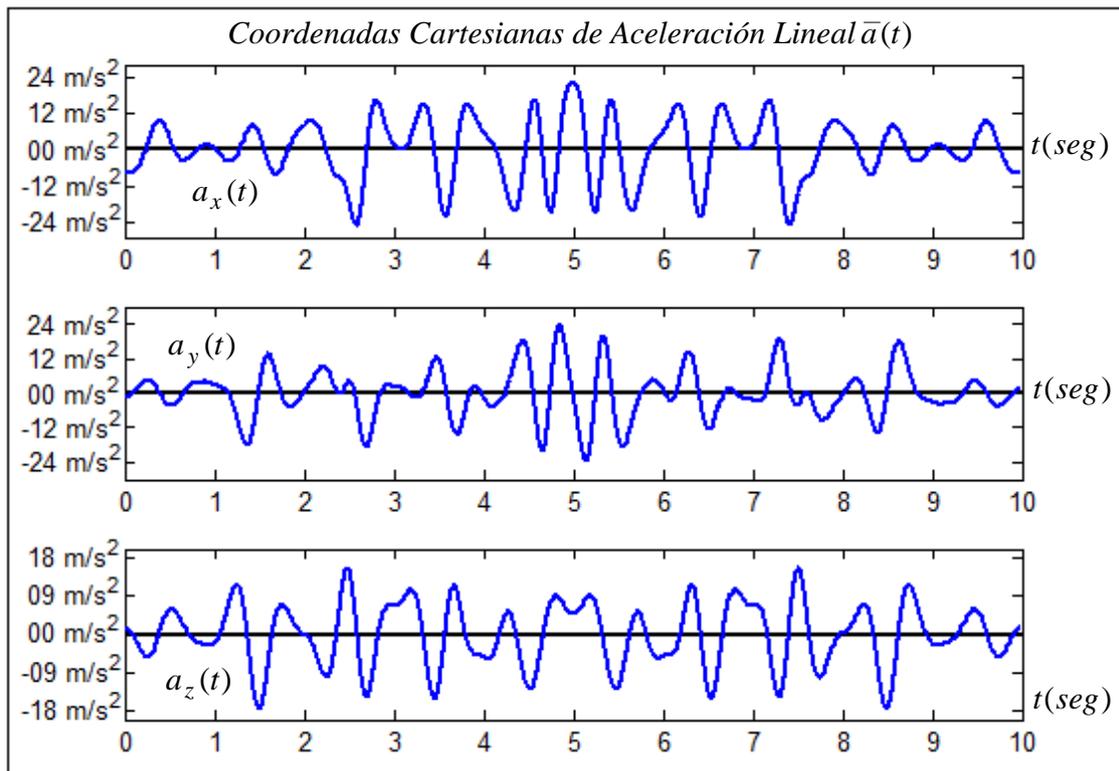


Figura 3.5 Aceleración lineal cartesiana $\bar{a}(t)$ del efector final del robot.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

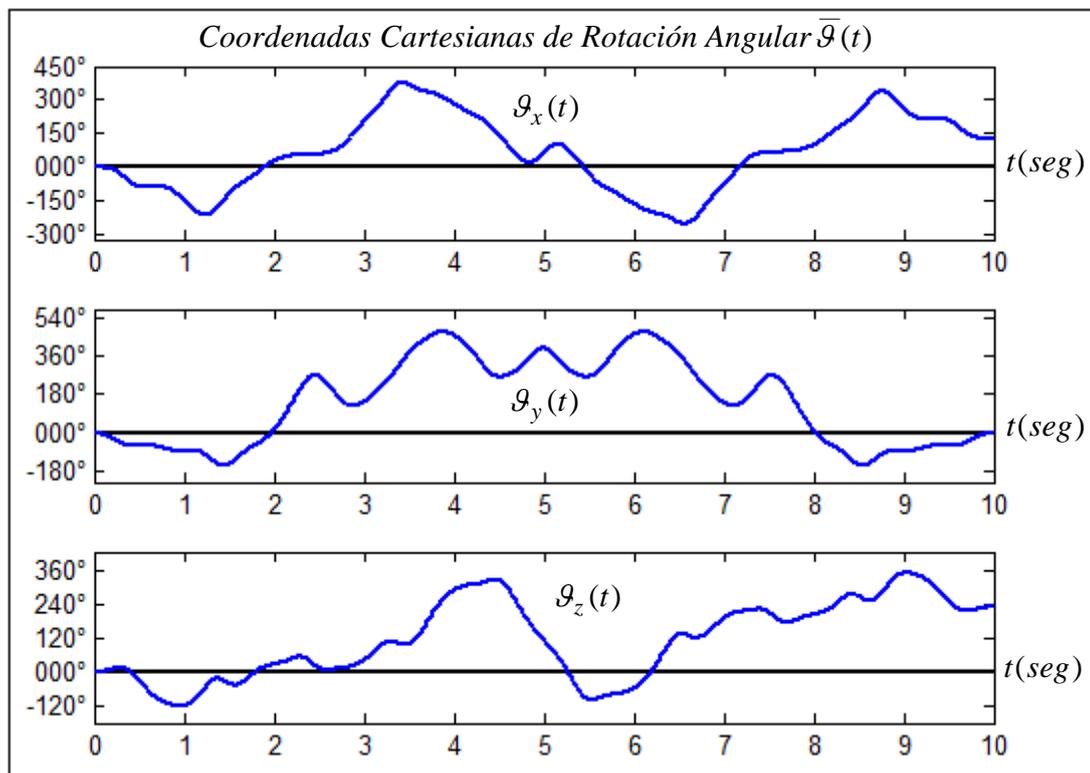


Figura 3.6 Posición angular cartesiana $\bar{g}(t)$ del efector final del robot.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

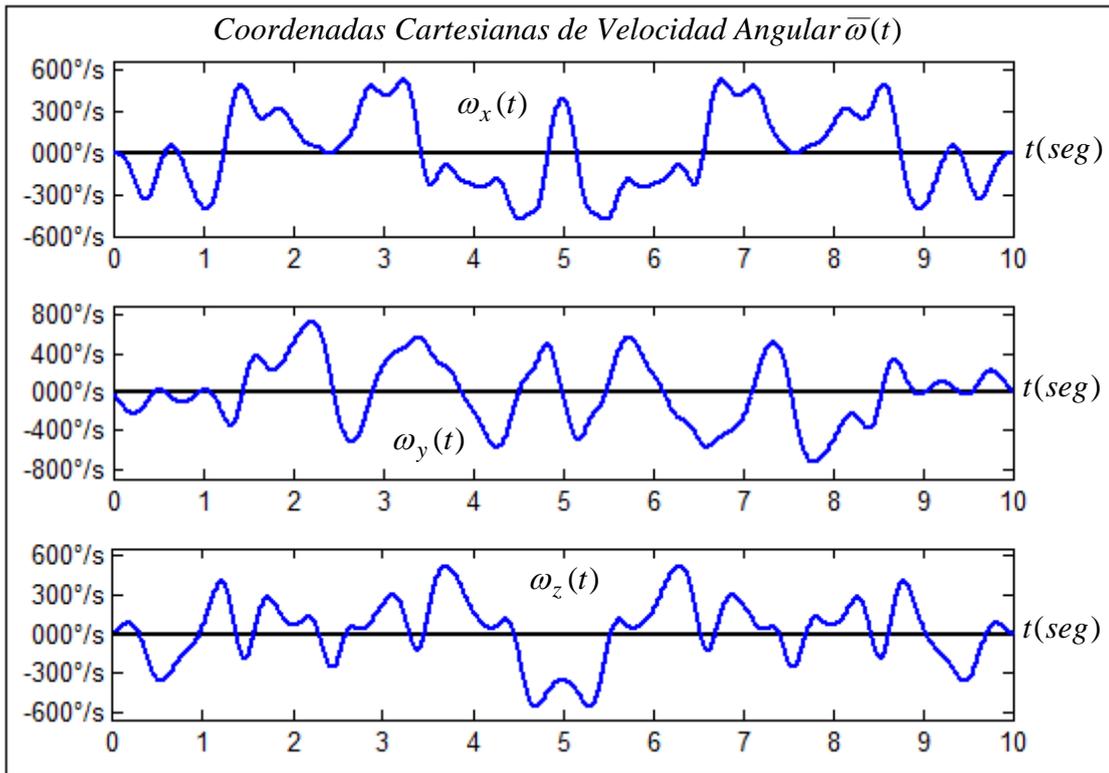


Figura 3.7 Velocidad angular cartesiana $\bar{\omega}(t)$ del efector final del robot.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

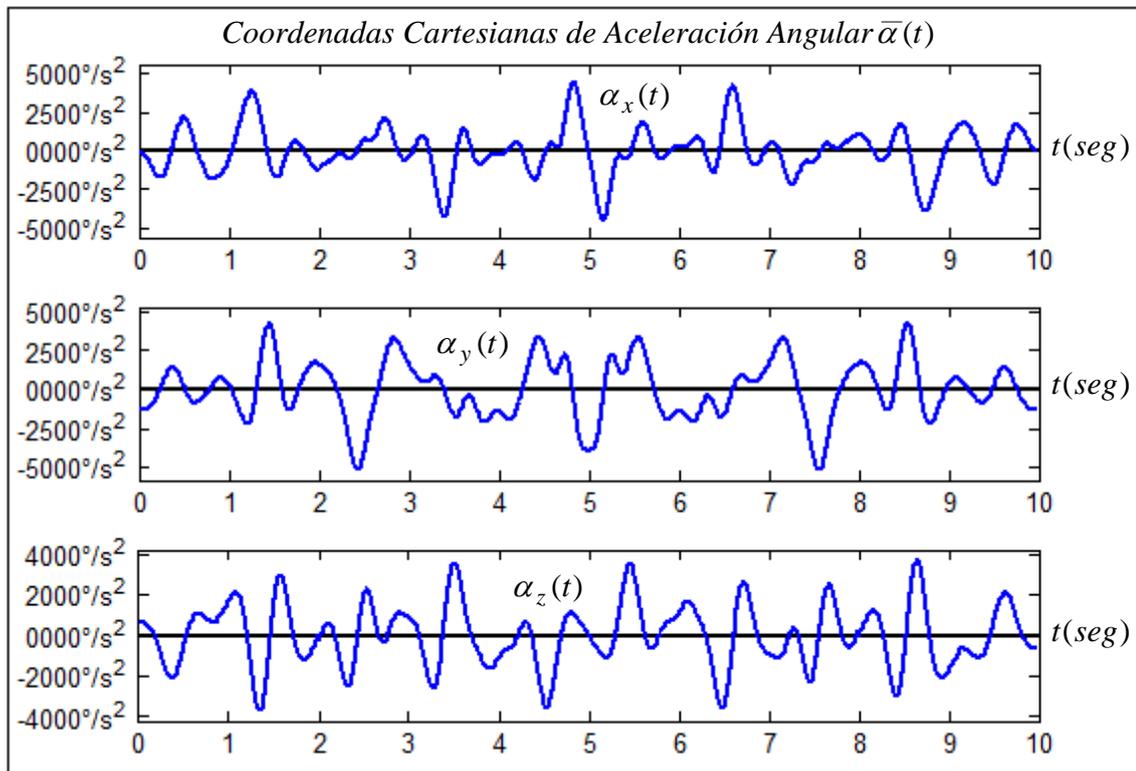


Figura 3.8 Aceleración angular cartesiana $\bar{\alpha}(t)$ del efector final del robot.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

CAPITULO 4

FORMULACION DINAMICA DEL ROBOT

4.1 Introducción

La Formulación Dinámica del robot trata de las ecuaciones físicas o diferenciales del movimiento que realiza el manipulador en el espacio tridimensional, considerando las fuerzas y torsiones externas que actúan sobre las articulaciones. Las ecuaciones físicas del manipulador describen la conducta dinámica en el tiempo y sirven para realizar el análisis, síntesis y la simulación del movimiento del robot en cualquier computador, realizar la evaluación del diseño estructural del robot, diseñar los servomecanismos que impulsan a cada articulación y para el control del movimiento en tiempo real del robot.

La formulación dinámica de un robot se puede obtener a partir de leyes físicas, tales como las de la mecánica *Newtoniana*, mecánica *Lagrangeana* y otras. Existen diversos métodos y algoritmos que permiten obtener la formulación dinámica o modelamiento físico de un manipulador robótico. Las formulaciones más utilizadas son las de *Lagrange-Euler* y las de *Newton-Euler*. La metodología de la formulación de *Lagrange-Euler* se basa en la aplicación tanto de la energía cinética total como de la energía potencial total del robot y permite obtener una ecuación diferencial dinámica vectorialmente estructurada y transparente, cuyos términos tienen una interpretación física simple como: inercia total del robot, fuerzas debido a la fricción, efecto debido a la gravedad, fuerzas centrífugas y de Coriolis o fuerzas debido al acoplo de velocidades. Por su parte, la metodología de la formulación *Newton-Euler* parte del análisis vectorial de todos los efectos físicos del robot y mediante una formulación recursiva primero hacia atrás y luego hacia adelante de las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento del manipulador, lo cual no sólo facilita su implementación del algoritmo de control en el computador, sino que representa una mayor potencia numérica y eficiencia computacional comparada con el método de *Lagrange-Euler*, particularmente cuando aumenta el número de ejes o de articulaciones del robot manipulador.

4.2 Ecuación de la Dinámica de Lagrange

Los sistemas dinámicos complejos se pueden modelar físicamente de forma directa mediante la formulación de *Lagrange*, que se basa en la noción de la energía total, en el movimiento de sus coordenadas generalizadas y en la aplicación de fuerzas generalizadas.

Para un robot de n grados de libertad, se elige al vector articular \mathbf{q} (de dimensión $n \times 1$) como el conjunto de coordenadas generalizadas, para describir físicamente la dinámica de manipuladores estructuralmente complejos, obteniendo así formulaciones dinámicas para robots multiarticulares, con una estructura matemática elegante y transparente de una forma relativamente sencilla, así como de su realización algorítmica en el computador.

La ecuación de *Lagrange* $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ se define como la diferencia de la energía cinética total $E_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y la energía potencial total $E_p(\mathbf{q})$ del robot como sigue [7], [13]:

$$L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = E_c(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) - E_p(\mathbf{q}(t)) \quad (4.1)$$

La ecuación general del movimiento dinámico de un robot manipulador de estructura cinemáticamente serial, se expresa en términos de la formulación de *Lagrange*, de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) - \frac{\partial}{\partial q_k} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = Q_k(t) ; \quad 1 \leq k \leq n \quad (4.2)$$

Las variables involucradas en la ecuación (4.2) se define como:

Q_k : Vector fuerza F_k o torsión Γ_k generalizada que actúa sobre la articulación k para mover al elemento k .

q_k : Coordenada generalizada (variable de posición articular k).

\dot{q}_k : Derivada de la coordenada generalizada (variable velocidad articular k).

n : Número de grados de libertad del manipulador.

Para obtener las expresiones literales de la formulación de *Lagrange* se determinan previamente las ecuaciones de las energías cinética $E_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y potencial $E_p(\mathbf{q})$ totales del robot, considerando una estructura mecánica constituida con todos los enlaces totalmente rígidos. Primero se determina la contribución de la energía del eslabón k , el cual se encuentra moviéndose en el espacio tridimensional respecto de un referencial fijo $x_0 y_0 z_0$, con sus respectivas velocidades lineal y angular relativo a su centro de masa.

Las variables involucradas en la ecuación (4.3) se denominan y especifican de la siguiente manera:

m_k : Masa del k -ésimo enlace.

$\bar{\mathbf{D}}_k(\mathbf{q})$: Tensor inercial variante de dimensión 3×3 del k -ésimo enlace expresado con respecto al sistema referencial base $x_0 y_0 z_0$ trasladado a su centro de masa.

$\bar{\mathbf{v}}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$: Vector espacial de velocidad lineal del centro de masa del k -ésimo eslabón moviéndose con respecto del sistema referencial base $x_0 y_0 z_0$.

$\bar{\boldsymbol{\omega}}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$: Vector de velocidad angular relativa a su centro de masa del k -ésimo eslabón girando con respecto del sistema referencial base $x_0 y_0 z_0$.

Para formular las ecuaciones de movimiento del manipulador mediante la ecuación de Lagrange (4.2), se requiere que la energía cinética del elemento k del manipulador esté expresada como una función explícita de la variable articular q_k y de la variable de velocidad articular \dot{q}_k .

En cada enlace k del robot se establece un sistema de coordenadas cartesianas denominado también sistema referencial $x_k y_k z_k$ de tal modo que el referencial $x_k y_k z_k$ y el referencial $x_0 y_0 z_0$ estén relacionados por una matriz de transformación homogénea ${}^0\mathbf{T}^k(\mathbf{q})$ de la siguiente manera:

$${}^0\mathbf{T}^k(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}^k(\mathbf{q}) & \mathbf{P}^k(\mathbf{q}) \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

La matriz ${}^0\mathbf{R}^k(\mathbf{q})$ de dimensión 3×3 representa la rotación del sistema referencial $x_k y_k z_k$ respecto del sistema referencial $x_0 y_0 z_0$.

El vector $\mathbf{P}^k(\mathbf{q})$ de dimensión 3×1 representa la posición del origen del referencial $x_k y_k z_k$ respecto al referencial $x_0 y_0 z_0$.

En la expresión (4.3) la energía cinética debido al movimiento rotacional del enlace k también se puede expresar con respecto al referencial $x_k y_k z_k$ traslado a su centro de masa mediante la siguiente relación: (*)

* Ecuación deducida por el autor

$$\bar{\omega}_k^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \bar{\mathbf{D}}_k(\mathbf{q}) \bar{\omega}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\Omega}_k^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \bar{\mathbf{I}}_k \boldsymbol{\Omega}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.5)$$

Las variables de la parte derecha de la ecuación (4.5) se definen como:

$\bar{\mathbf{I}}_k$: Tensor inercial de magnitud constante de dimensión 3×3 del k -ésimo enlace con respecto al sistema referencial $x_k y_k z_k$ trasladado a su centro de masa.

$\boldsymbol{\Omega}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$: Vector velocidad angular relativa a su centro de masa del k -ésimo eslabón expresado con respecto del sistema referencial $x_k y_k z_k$.

Con el fin de relacionar las velocidades $\bar{\omega}_k$ y $\boldsymbol{\Omega}_k$ se utiliza la inversa de la matriz ${}^0\mathbf{R}^k(\mathbf{q})$ que se representa como:

$$({}^0\mathbf{R}^k(\mathbf{q}))^{-1} = {}_k\mathbf{R}^0(\mathbf{q}) = ({}^0\mathbf{R}^k(\mathbf{q}))^T$$

La matriz de rotación ${}_k\mathbf{R}^0(\mathbf{q})$ permite realizar la transformación desde el sistema referencial $x_0 y_0 z_0$ al sistema referencial $x_k y_k z_k$, mientras que la matriz ${}^0\mathbf{R}^k(\mathbf{q})$ permite realizar la transformación desde el referencial $x_k y_k z_k$ al sistema referencial $x_0 y_0 z_0$.

Las velocidades angulares $\bar{\omega}_k$ y $\boldsymbol{\Omega}_k$ se pueden relacionar con las matrices de rotación anteriores de la siguiente forma: (*)

$$\bar{\omega}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = {}^0\mathbf{R}^k(\mathbf{q}) \boldsymbol{\Omega}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.6.a)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = {}_k\mathbf{R}^0(\mathbf{q}) \bar{\omega}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.6.b)$$

La ecuación (4.6.a) se interpreta como la transformación de la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}_k$ expresada en el sistema referencial $x_k y_k z_k$ a la velocidad angular $\bar{\omega}_k$ y la ecuación (4.6.b) se interpreta como la transformación de la velocidad $\bar{\omega}_k$ expresada en el sistema referencial $x_0 y_0 z_0$ a la velocidad $\boldsymbol{\Omega}_k$.

Reemplazando la ecuación (4.6.b) en la ecuación (4.5) se obtiene:

$$\bar{\omega}_k^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \bar{\mathbf{D}}_k(\mathbf{q}) \bar{\omega}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \bar{\omega}_k^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) [{}^0\mathbf{R}^k(\mathbf{q})] \bar{\mathbf{I}}_k [{}_k\mathbf{R}^0(\mathbf{q})] \bar{\omega}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.7)$$

De la ecuación (4.7) se deduce la relación que existe entre los tensores inerciales $\bar{\mathbf{I}}_k$ y $\bar{\mathbf{D}}_k(\mathbf{q})$ representándose mediante la siguiente ecuación:

$$\bar{\mathbf{D}}_k(\mathbf{q}) = [{}^0\mathbf{R}^k(\mathbf{q})] \bar{\mathbf{I}}_k [{}^k\mathbf{R}^0(\mathbf{q})] \quad (4.8)$$

De la figura (4.1) se aprecia que el vector $\bar{\mathbf{C}}_k(\mathbf{q})$ representa la posición del centro de masa del eslabón k , expresado con respecto al marco referencial base $x_0y_0z_0$ y el vector $\bar{\Delta\mathbf{C}}_k$ denota la posición del centro de masa del enlace k , expresado con respecto al referencial asociado $x_ky_kz_k$, el cual está fijo en el centro de masa (punto CM) del enlace k , es decir, el vector $\bar{\Delta\mathbf{C}}_k$ es de magnitud constante. Aplicando la suma vectorial, el vector posicional $\bar{\mathbf{C}}_k(\mathbf{q})$ se expresa con respecto del referencial $x_0y_0z_0$ mediante la relación siguiente: (*)

$$\bar{\mathbf{C}}_k(\mathbf{q}) = \mathbf{P}_k(\mathbf{q}) + {}^0\mathbf{R}^k(\mathbf{q}) \bar{\Delta\mathbf{C}}_k \quad (4.9)$$

El vector de velocidad traslacional cartesiana $\bar{\mathbf{v}}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ de la ecuación (4.3) se determina aplicando la diferenciación del vector posicional $\bar{\mathbf{C}}_k(\mathbf{q})$ de la ecuación (4.9) respecto del tiempo t como:

$$\bar{\mathbf{v}}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{C}}_k(\mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \bar{\mathbf{C}}_k(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.10)$$

De la ecuación (4.10) se determina la ecuación matricial siguiente:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{C}}_k(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}_k(\mathbf{q})}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}_k(\mathbf{q})}{\partial q_k} & \mathbf{0} & \dots \end{bmatrix} = \mathbf{J}_v^k(\mathbf{q}) \quad (4.11)$$

La matriz jacobiana $\mathbf{J}_v^k(\mathbf{q})$ de la ecuación (4.11) es de dimensión $3 \times n$.

Las velocidades cartesianas lineal $\bar{\mathbf{v}}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y angular $\bar{\boldsymbol{\omega}}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ de la ecuación (4.3) se pueden relacionar con el vector de velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$ de la estructura de manipulador de la siguiente manera:

$$\bar{\mathbf{v}}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{J}_v^k(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.12.a)$$

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{J}_\omega^k(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.12.b)$$

La matriz jacobiana $\mathbf{J}_\omega^k(\mathbf{q})$ de la ecuación (12.b) es de dimensión $3 \times n$ y se puede escribir de la siguiente manera:

* Ecuación propuesta por el autor

$$\mathbf{J}_\omega^k(\mathbf{q}) = [\xi_1 \mathbf{z}_0 \quad \cdots \quad \xi_k \mathbf{z}_{k-1}(\mathbf{q}) \quad \mathbf{0} \quad \cdots] \quad (4.13)$$

En la ecuación (4.13), el literal \mathbf{z}_{k-1} es el tercer vector unitario del sistema referencial $x_{k-1}y_{k-1}z_{k-1}$ con respecto del referencial base $x_0y_0z_0$ y el escalar ξ_k , indica el tipo de articulación k del robot (ξ_k es 1 si la articulación es rotacional y es 0 si la articulación es traslacional).

El vector velocidad articular es $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \cdots \quad \dot{q}_n]^T$

Usando las ecuaciones (4.11), (4.12) y (4.13) se obtiene la expresión matricial denominada *jacobiano* del eslabón k de la siguiente manera:

$$\mathbf{J}^k(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v^k(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_\omega^k(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}_k(\mathbf{q})}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}_k(\mathbf{q})}{\partial q_k} & \mathbf{0} \\ \xi_1 \mathbf{z}_0 & \cdots & \xi_k \mathbf{z}_{k-1}(\mathbf{q}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Reemplazando las ecuaciones (4.12) correspondientes a las velocidades lineal y angular con sus respectivas transpuestas y la ecuación (4.7) en la ecuación (4.3) se obtiene una expresión general para la energía cinética total del robot que involucra al vector velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$ del modo siguiente:

$$E_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\mathbf{J}_v^{kT}(\mathbf{q}) m_k \mathbf{J}_v^k(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_\omega^{kT} [{}^k \mathbf{R}^0(\mathbf{q})]^T \bar{\mathbf{I}}_k [{}^k \mathbf{R}^0(\mathbf{q})] \mathbf{J}_\omega^k(\mathbf{q}) \right] \right\} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.15)$$

Si se define la matriz $\mathbf{D}_k(\mathbf{q})$ como el tensor inercial k que permite describir el movimiento traslacional y rotacional del k -ésimo elemento del manipulador robótico de la siguiente manera:

$$\mathbf{D}_k(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_v^{kT}(\mathbf{q}) m_k \mathbf{J}_v^k(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_\omega^{kT} [{}^k \mathbf{R}^0(\mathbf{q})]^T \bar{\mathbf{I}}_k [{}^k \mathbf{R}^0(\mathbf{q})] \mathbf{J}_\omega^k(\mathbf{q}) \quad (4.16)$$

Sumando los n tensores de inercia $\mathbf{D}_k(\mathbf{q})$ de la ecuación (4.16) correspondiente a cada eslabón k se obtiene el tensor de inercia total del manipulador que depende de la posición articular \mathbf{q} y se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^n \mathbf{D}_k(\mathbf{q}) \quad (4.17)$$

De la ecuación (4.16) se deduce que si la matriz $\bar{\mathbf{I}}_k$ es simétrica entonces la matriz $\mathbf{D}(\mathbf{q})$ de dimensión $n \times n$, es una matriz simétrica y además definida positiva que se denomina *Tensor de inercia total* del manipulador.

Finalmente la expresión de la energía cinética total se puede escribir de una forma compacta en términos de los vectores \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$ de la siguiente manera:

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.18)$$

4.4 Energía Potencial total del robot

La energía potencial almacenada en cada eslabón k de un robot, se define como la cantidad de trabajo que se requiere para desplazar al enlace k hasta su centro de masa CM , desde un plano de referencia horizontal en la dirección del vector $\bar{\mathbf{C}}_k(\mathbf{q})$ en presencia del vector de la aceleración de la gravedad \mathbf{g} . La energía potencial total almacenada en los eslabones del robot se representa de la siguiente manera: [7]

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{q}) = - \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{g}^T \bar{\mathbf{C}}_k(\mathbf{q}) \quad (4.19)$$

La suma de los centros de masa vectoriales ponderados de los n eslabones por sus masas respectivas se define como:

$$\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^n m_k \bar{\mathbf{C}}_k(\mathbf{q}) \quad (4.20)$$

Utilizando la ecuación (4.20), entonces la expresión compacta de la energía potencial de la ecuación (4.19) se puede expresar de forma sintetizada como:

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{q}) = - \mathbf{g}^T \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}) \quad (4.21)$$

En base a las expresiones simplificadas (4.18) y (4.21) tanto de las energías cinética y potencial, la expresión del *Lagrangeano* para el robot manipulador se puede escribir de una forma compacta en términos del vector articular \mathbf{q} y del vector velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$ de la siguiente manera:

$$\mathbf{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}^T \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}) \quad (4.22)$$

4.5 Efecto Friccional de la articulación

La fuerza o torsión debido al efecto de la fricción en la articulación k del robot es una magnitud que se opone al movimiento y depende de la magnitud y del sentido de la velocidad articular \dot{q}_k , normalmente se presenta en los ejes z_{k-1} de articulación o de deslizamiento. En la figura 4.2 se representa la forma más elemental de la gráfica de la fuerza friccional de la articulación k [7].

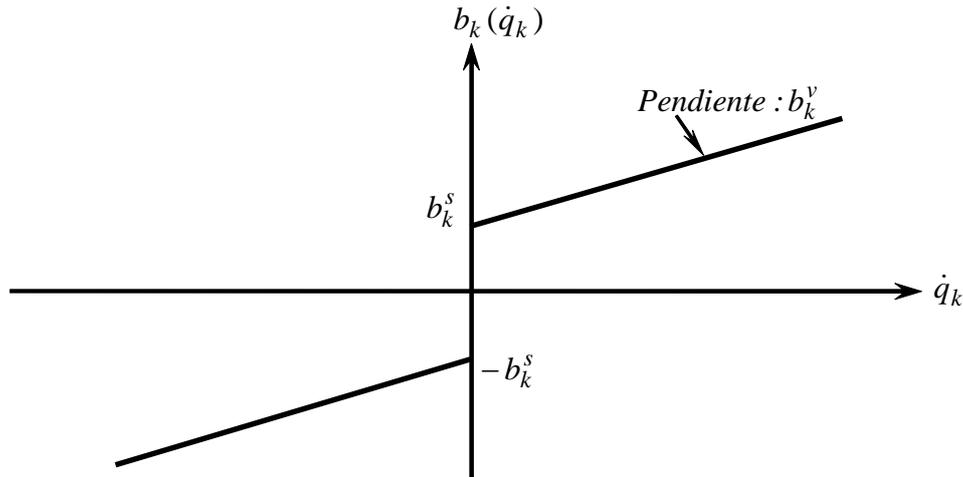


Figura 4.2 Gráfica del efecto de fricción vs la velocidad de la articulación k .
Gráfica elaborada por el autor

El efecto de la fricción articular k se puede expresar matemáticamente en función de la velocidad articular \dot{q}_k como sigue:

$$b_k(\dot{q}_k) = \text{sgn}(\dot{q}_k) b_k^s + b_k^v \dot{q}_k \quad (4.23)$$

Donde:

sgn : función signo de la velocidad articular \dot{q}_k .

b_k^s : Torsión o fuerza necesaria para anular el efecto de la fricción estática y poder iniciar el movimiento de la k -ésima articulación; cuando \dot{q}_k tienda a ser cero la fuerza de fricción tiende a $\pm b_k^s$.

b_k^v : Coeficiente de fricción viscosa de la k -ésima articulación que puede considerarse constante e independiente de la posición.

4.6 Expresión general de la dinámica del robot

La fuerza/torsión generalizada que se aplica al eslabón i -ésimo del robot se define como la diferencia entre el torque aplicado a la articulación i y las pérdidas de energía debido al efecto friccional durante el movimiento y se expresa como:

$$Q_i = \tau_i - b_i(\dot{q}_i) \quad (4.24)$$

Relacionando las ecuaciones (4.2) y (4.24) se obtiene la expresión de la dinámica para cada par eslabón-articulación i del robot en términos de la expresión de *Lagrange* del siguiente modo: [7]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial}{\partial q_i} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + b_i(\dot{q}_i) = \tau_i ; \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.25)$$

La ecuación de la energía cinética total (4.18) del robot se puede expresar también de la siguiente forma:

$$E_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n D_{kj}(\mathbf{q}) \dot{q}_k \dot{q}_j \quad (4.26)$$

La ecuación de la energía potencial total (4.21) del robot se puede expresar también de la siguiente forma:

$$E_p(\mathbf{q}) = - \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^n g_k m_j \bar{c}_k^j(\mathbf{q}) \quad (4.27)$$

La ecuación (4.22) de *Lagrange* en base de las ecuaciones (4.26) y (4.27) se puede expresar también mediante la siguiente expresión:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n D_{kj}(\mathbf{q}) \dot{q}_k \dot{q}_j + \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^n g_k m_j \bar{c}_k^j(\mathbf{q}) \quad (4.28)$$

Derivando la ecuación de Lagrange (4.28) con respecto a la velocidad articular \dot{q}_i se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n D_{kj}(\mathbf{q}) \dot{q}_k \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^n g_k m_j \bar{c}_k^j(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \sum_{j=1}^n D_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_j \end{aligned} \quad (4.29)$$

Derivando a la expresión (4.29) con respecto del tiempo t se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n D_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n D_{ij}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial D_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right] \dot{q}_k \dot{q}_j \quad (4.30)$$

Derivando la función Lagrangeana (4.28) con respecto a la posición articular q_i se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_i} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n D_{kj}(\mathbf{q}) \dot{q}_k \dot{q}_j + \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^n g_k m_j \bar{c}_k^j(\mathbf{q}) \right) \\ \frac{\partial}{\partial q_i} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial D_{kj}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \right] \dot{q}_k \dot{q}_j + \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^n g_k m_j \left[\frac{\partial \bar{c}_k^j(\mathbf{q})}{\partial q_i} \right] \\ \frac{\partial}{\partial q_i} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial D_{kj}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \right] \dot{q}_k \dot{q}_j + \sum_{k=1}^3 \sum_{j=i}^n g_k m_j \mathbf{J}_{vi}^{kj}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

La matriz $\mathbf{J}_{vi}^{kj}(\mathbf{q})$ de la ecuación (4.31) es la misma matriz $\mathbf{J}_v^k(\mathbf{q})$ de la ecuación (4.11) con fila k y columna i .

Reemplazando las ecuaciones (4.30) y (4.31) en la ecuación dinámica (4.25) se obtiene la expresión de la dinámica del movimiento para la i -ésima articulación del robot como:

$$\sum_{j=1}^n D_{ij}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial D_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right] \dot{q}_k \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial D_{kj}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \right] \dot{q}_k \dot{q}_j - \sum_{k=1}^3 \sum_{j=i}^n g_k m_j \mathbf{J}_{vi}^{kj}(\mathbf{q}) + b_i(\dot{\mathbf{q}}) = \tau_i \quad (4.32)$$

Para simplificar la expresión de movimiento (4.32) se introducen dos expresiones:

$$C_{kj}^i(\mathbf{q}) = \frac{\partial D_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{kj}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \quad 1 \leq i, j, k \leq n \quad (4.33.a)$$

$$h_i(\mathbf{q}) = - \sum_{k=1}^3 \sum_{j=i}^n g_k m_j \mathbf{J}_{vi}^{kj}(\mathbf{q}) \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.33.b)$$

La matriz $C_{kj}^i(\mathbf{q})$ de dimensión $n \times n$ de la ecuación (4.33.a) representa la base del acoplamiento de velocidades para la i -ésima articulación del robot y el vector $h(\mathbf{q})$ de dimensión $n \times 1$ representa al efecto de la gravedad. Con las expresiones $C_{kj}^i(\mathbf{q})$ y $h(\mathbf{q})$ se

puede desarrollar una formulación concisa de la expresión dinámica del robot que se encuentra moviéndose libremente en el espacio operacional como sigue:

$$\sum_{j=1}^n D_{ij}(\mathbf{q})\ddot{q}_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n C_{kj}^i(\mathbf{q})\dot{q}_k\dot{q}_j + h_i(\mathbf{q}) + b_i(\dot{\mathbf{q}}) = \tau_i; \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.34)$$

El segundo término del extremo izquierdo de la ecuación (4.34) se puede desdoblar en dos términos representativos como:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n C_{kj}^i(\mathbf{q})\dot{q}_k\dot{q}_j = \sum_{k=1}^n C_{kk}^i(\mathbf{q})\dot{q}_k^2 + \sum_{k=1}^n \sum_{j \neq k}^n C_{kj}^i(\mathbf{q})\dot{q}_k\dot{q}_j \quad (4.35)$$

El primer término de la ecuación dinámica (4.34) es un término de aceleración que representa físicamente las fuerzas y torsiones inerciales, que se generan durante el movimiento del enlace i del robot. El segundo término es el producto de velocidades asociado con la fuerza centrífuga y la fuerza de *Corioles*. El tercer término de posición representa el efecto de la gravedad que actúa sobre el enlace i . El cuarto término de velocidad representa el efecto de la fricción que se opone al movimiento del enlace i .

Con el fin de simplificar la ecuación (4.34) se puede utilizar la siguiente definición compacta:

$$c_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n C_{kj}^i(\mathbf{q})\dot{q}_k\dot{q}_j = \dot{\mathbf{q}}^T C^i(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}; \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.36)$$

La ecuación de la dinámica (4.34) del enlace i se puede expresar físicamente también mediante la ecuación siguiente:

$$\sum_{j=1}^n D_{ij}(\mathbf{q})\ddot{q}_j + c_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + h_i(\mathbf{q}) + b_i(\dot{\mathbf{q}}) = \tau_i; \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.37)$$

En base a la ecuación (4.37) se pueden obtener n ecuaciones escalares no lineales, diferenciales y simultáneas que representan y describen el comportamiento dinámico total de un manipulador robótico de n articulaciones o grados de libertad, el cual se puede desplazar libremente en su espacio operacional debido a la aplicación externa de torsiones y/o fuerzas que se aplican a cada articulación, obteniendo de esta manera la formulación dinámica inversa, de forma estructurada, compacta y no lineal para el robot mediante la expresión vectorial siguiente:

$$\tau(t) = D(q(t))\ddot{q}(t) + c(q(t), \dot{q}(t)) + h(q(t)) + b(\dot{q}(t)) \quad (4.38)$$

Los vectores y matrices involucrados en la ecuación (4.38) se definen de la siguiente manera:

$q(t)$: Vector de posición articulación del robot.

$\dot{q}(t)$: Vector de velocidad articular del robot.

$\ddot{q}(t)$: Vector de aceleración articular del robot.

$\tau(t)$: Vector fuerza o torsión que actúa sobre el vector articular del robot.

$D(q)$: Matriz no singular que relaciona el efecto inercial de los enlaces y expresa la fuerza inercial total debido al movimiento del robot.

$c(q, \dot{q})$: Vector fuerza o torsión generado por la reacción de los efectos centrífugo y de Corioles, debido al acoplo de velocidades durante el movimiento del robot.

$h(q)$: Vector fuerza o torsión, generado por la acción de la gravedad que actúa sobre los elementos del robot.

$b(\dot{q})$: Vector de fuerza o torsión de fricción, que se oponen al desplazamiento de las articulaciones del robot.

En la figura 4.3 se representa el diagrama de bloques constituido por todos los componentes que conforman la expresión matemática de la Dinámica Inversa del robot expresado mediante la ecuación (4.38).

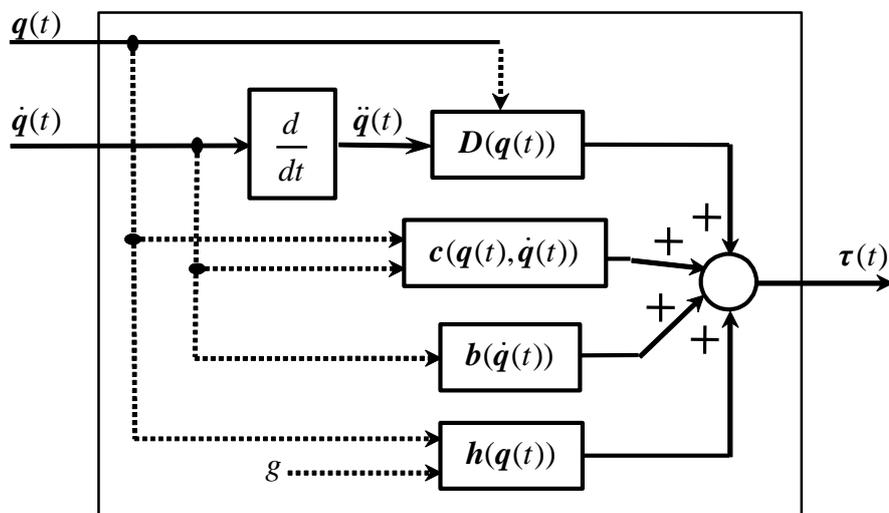


Figura 4.3 Representación gráfica de la Dinámica Inversa de un robot.

Gráfica elaborada por el autor

4.7 Formulación y Simulación Gráfica de la dinámica del robot propuesto

Con el objetivo de obtener una expresión dinámica relativamente sencilla para el robot elegido de seis articulaciones representado en la figura 2.7, cuyos eslabones se muestran en el Anexo C y así poder realizar la simulación gráfica de la formulación dinámica del sistema, se ha optado por considerar elementos mecánicos sencillos que consisten únicamente de cilindros huecos metálicos ideales de pared delgada (cascarón cilíndrico) y que se representan esquemáticamente en la figura 4.4. Cada elemento i del manipulador presenta masa M_i , longitud L_i y radio R_i cuyas magnitudes de cada eslabón se encuentran definidas en el Anexo A

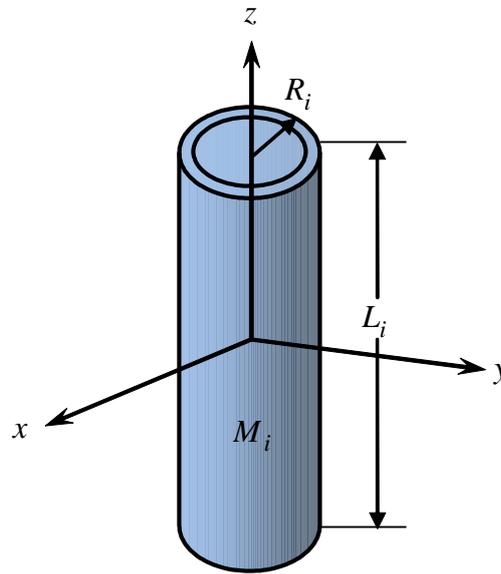


Figura 4.4 Elemento i -ésimo para determinar la dinámica del robot propuesto.

Gráfica elaborada por el autor

La masa de cada eslabón i -ésimo del manipulador que se presenta en la figura 4.4, se considera idealmente que se distribuye homogéneamente a lo largo de su longitud, por lo que el tensor de inercia de cada elemento respecto de sus ejes geométricos ubicados en el centro de masa se expresa de forma simétrica y matricial mediante la siguiente expresión:

$$\bar{\mathbf{I}}_i = \begin{bmatrix} M_i \frac{L_i^2 + 6R_i^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & M_i \frac{L_i^2 + 6R_i^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & M_i R_i^2 \end{bmatrix}$$

Las expresiones dinámicas que se obtienen como resultado de aplicar directamente la ecuación (4.38), la cual describe de forma explícita la estructura de la Dinámica Inversa del robot de seis articulaciones y que está conformada mediante los términos literales no lineales $D(\mathbf{q}(t))$, $\mathbf{c}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$, $\mathbf{h}(\mathbf{q}(t))$ y $\mathbf{b}(\dot{\mathbf{q}}(t))$, debido a su complejidad matemática (expresiones literalmente extensas), se han obtenido con ayuda del programa de *Matemática Simbólica* del *MatLab*, logrando obtenerlas en formato de texto las cuales se muestran expresadas y descritas en el Anexo B.

Para realizar la simulación en el tiempo de las ecuaciones de la Dinámica Inversa se hace uso del esquema mostrado en la figura 4.3 para lo cual es necesario establecer trayectorias articulares arbitrarias definidas adecuadamente en el tiempo $\mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\theta}(t)$, mediante dos ecuaciones polinómicas cúbicas (cuyas magnitudes deben estar dentro del rango de las variables articulares establecidas para el robot) con sus respectivas derivadas que son velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\boldsymbol{\theta}}(t)$ y aceleración articular $\ddot{\mathbf{q}}(t) = \ddot{\boldsymbol{\theta}}(t)$, (durante un tiempo $t = kT = 10 \text{ seg.}$), las cuales se muestran en las figura 4.5, en donde se grafican consecutivamente las funciones en el tiempo: $\theta_i(t)$, $\dot{\theta}_i(t)$ y $\ddot{\theta}_i(t)$, considerando que las velocidades articulares al inicio y final de cada trayectoria son nulas (funciones polinómicas cuadráticas), pero existe discontinuidad en las aceleraciones articulares (funciones polinómicas lineales). Las expresiones del desplazamiento, velocidad y aceleración se encuentran definidas en el capítulo 10 en las ecuaciones (10.6).

Las gráficas o funciones correspondientes a las torsiones externas $\tau(t)$ que se aplican a las articulaciones del robot es decir: $\tau(t) = [\tau_1(t) \ \tau_2(t) \ \tau_3(t) \ \tau_4(t) \ \tau_5(t) \ \tau_6(t)]^T$ que de forma consecutiva se obtienen aplicando directamente la ecuación (4.38) se muestran en la figura 4.6.

De las gráficas obtenidas en las figuras 4.6 se visualiza y se deduce de forma clara la alta no linealidad de las ecuaciones dinámicas del sistema, el acoplamiento interarticular que existe y el comportamiento dinámico, así como el valor relativo de las torsiones $\tau(t)$ (en *N.m*) que se deben aplicar a cada articulación, lo cual permite realizar la elección de los elementos motrices (actuadores con las debidas especificaciones), necesarios para accionar a las articulaciones del manipulador robótico y así poder aplicar las técnicas propuestas de control de trayectorias.

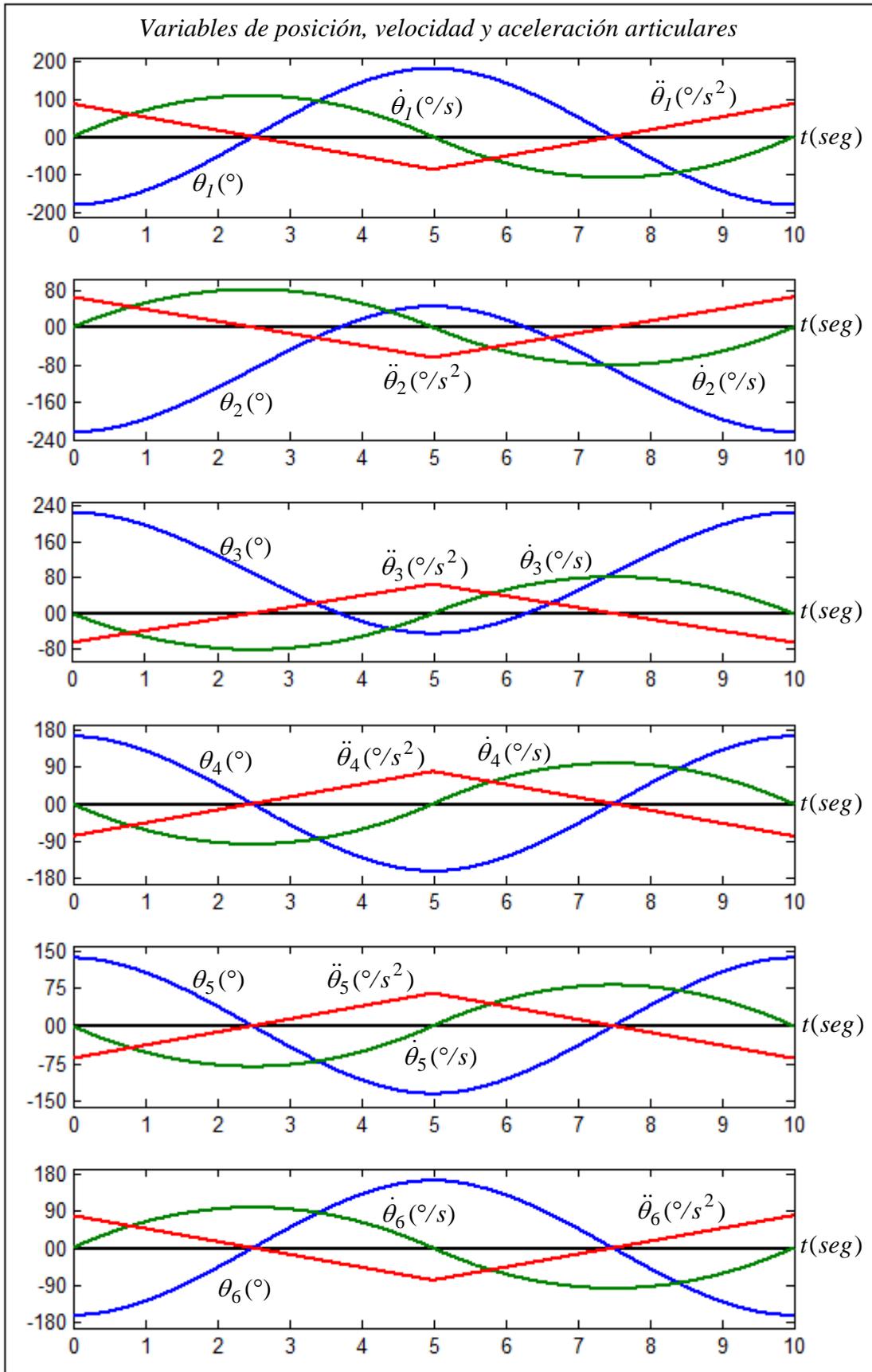


Figura 4.5 Posición, velocidad y aceleración articulares: $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ y $\ddot{\theta}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

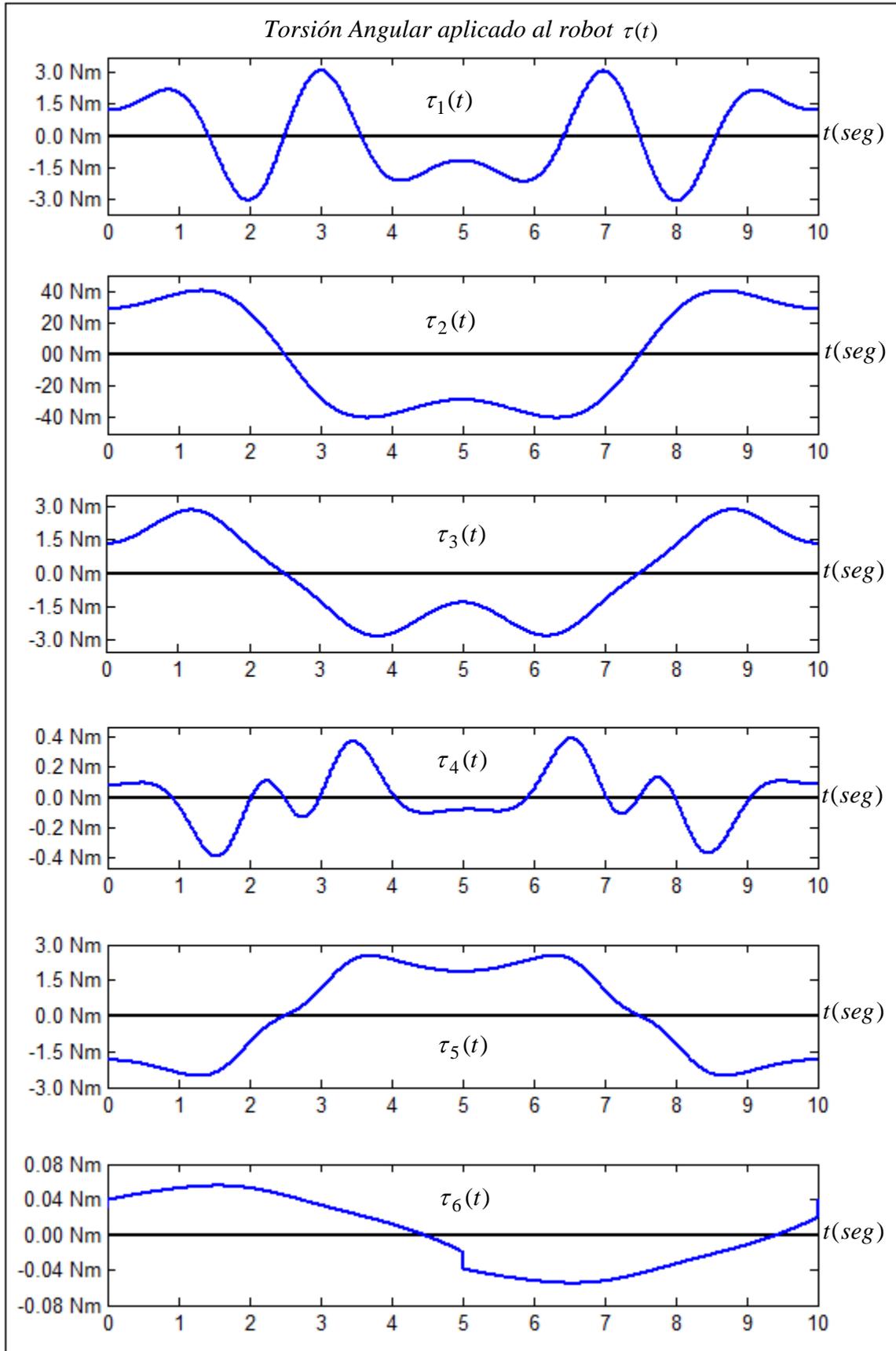


Figura 4.6 Componentes del vector torsión $\tau(t)$ aplicado al robot.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

CAPITULO 5

FORMULACION DINAMICA DEL MOTOR SIN ESCOBILLAS (BRUSHLESS MOTOR)

5.1 Introducción

Los actuadores para accionar a las articulaciones del robot propuesto son motores sin escobillas (*brushless motor*) de corriente directa (DC) de conmutación electrónica disparado por posición. La característica distintiva de estos motores, es el mecanismo inherente de la detección de posición, que se utiliza como realimentación del controlador de secuencia, que permite determinar en qué instante conmutar al siguiente paso de la secuencia, el motor efectúa el paso a la siguiente posición y luego espera en ésta. La secuencia del controlador para realizar la conmutación de los actuadores electrónicos, que incorporan dispositivos de potencia (transistores *BJT*, *MOSFETs*, *IGBTs*), permiten excitar a los devanados del motor siguiendo una determinada secuencia cíclica. A medida que los polos del rotor se acercan a la alineación con ciertos polos del estator en particular, este acercamiento se usa para disparar la energización de los siguientes polos del estator de la secuencia. Por tanto, un polo del rotor del motor sólo pasa por el polo del estator al que se está acercando, atraído por el siguiente polo o combinación de polos de la periferia del estator, incluyendo sensores de efecto de *Hall* acoplados en el interior de la carcasa del motor sin escobillas.

Para controlar la posición angular y/o velocidad angular, así como invertir el sentido de giro del motor sin escobillas, es necesario utilizar amplificadores de potencia de inversión de sentido de giro o bidireccionales (se recomiendan utilizar dispositivos *IGBTs*) de alta velocidad de conmutación, operando mediante modulación de ancho de pulso (*PWM*) para excitar a los devanados de los polos del estator por medio de una fuente de poder de tensión de doble polaridad. [23], [24]

En la figura 5.1 se ilustra el esquema general de un motor DC sin escobillas de cuatro polos y tres fases activado por *IGBT's*.

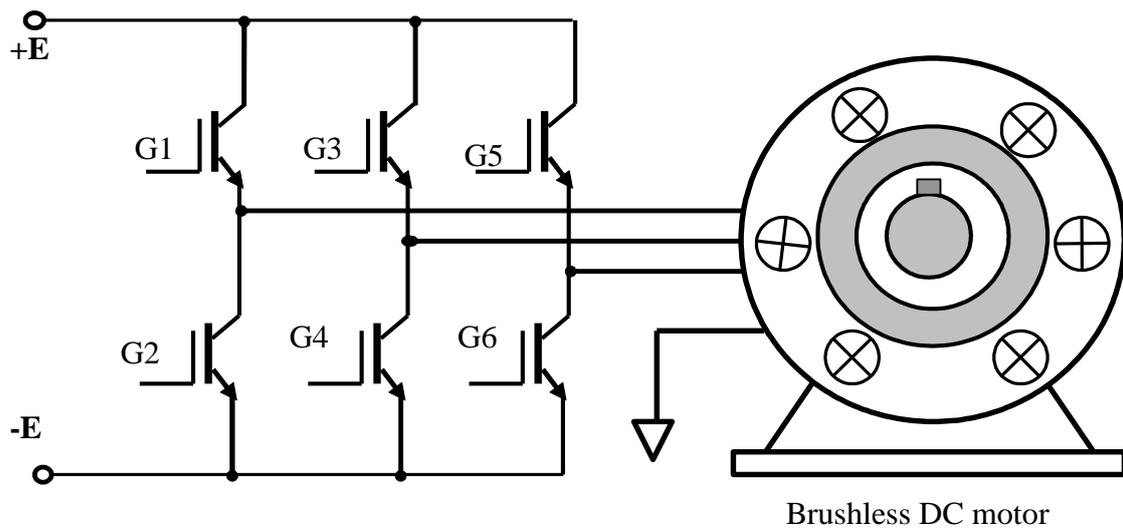


Figura 5.1 Esquema general de un motor DC sin escobillas de cuatro polos y tres fases.

Gráfica elaborada por el autor

El motor sin escobillas (*brushless motor*) desarrolla potencias y torques moderados, libres de fallas y de larga vida, presentando buena eficiencia mecánica con un buen rango de velocidades y una potencia máxima de aproximadamente de 1 *HP*. El sentido de giro de este tipo de motores es reversible mediante la conmutación electrónica de mandos digitales.

La desventaja de estos motores, es que por lo general son susceptibles a interferencias electromagnéticas del entorno debido que el sensor de efecto de *Hall* se encuentra incorporado interiormente.

5.2 Modelamiento físico del motor sin escobillas

El motor *DC* sin escobillas considerado para accionar a cada articulación del robot es un motor síncrono de imán permanente, de tres fases, cuatro polos en el rotor y con voltaje de fuerza contra electromotriz de característica sinusoidal trifásica. El sistema incluye un reductor de velocidad mediante el diseño de un conjunto de engranajes que permite obtener bajo porcentaje de desviación al cambiar de sentido de giro de la posición angular, en cuyo eje de giro de salida se ensambla o se conecta el enlace correspondiente a la *i-ésima* articulación del robot.

En la figura. 5.2 se representa el esquema electromecánico equivalente del motor *DC* sin escobillas en su conjunto.

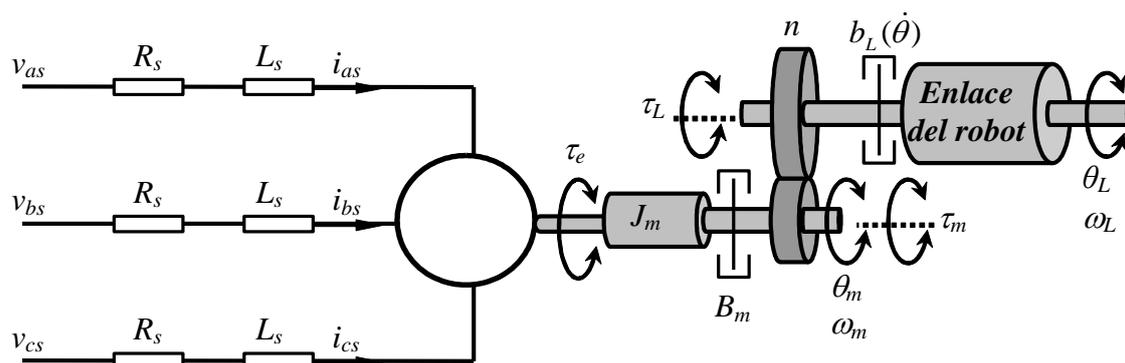


Figura 5.2 Representación electromecánica del motor *DC* sin escobillas.

Gráfica elaborada por el autor

La ecuación del voltaje del circuito equivalente para los bobinados del estator se puede expresar mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{cs} \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} + L_s \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} + K_e \omega_r \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta_r) \\ \text{sen}(\theta_r - \varphi_r) \\ \text{sen}(\theta_r + \varphi_r) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

La ecuación (5.1) con parámetros eléctricos simétricos, también se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_s & 0 & 0 \\ 0 & L_s & 0 \\ 0 & 0 & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} + K_e \omega_r \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta_r) \\ \text{sen}(\theta_r - \varphi_r) \\ \text{sen}(\theta_r + \varphi_r) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Las variables y parámetros involucrados en la ecuación (5.2) se definen como:

v_{as} , v_{bs} , v_{cs} : Voltajes aplicados al estator.

i_{as} , i_{bs} , i_{cs} : Intensidades de corriente que fluyen por el devanado del estator.

R_s : Resistencia de cada bobinado del estator.

L_s : Inductancia de cada bobinado del estator.

ω_r : Velocidad eléctrica angular en el rotor.

θ_r : Desplazamiento eléctrico angular en el rotor.

φ_r : Angulo de desfase del desplazamiento eléctrico = $\frac{2}{3}\pi$.

K_e : Constante de voltaje contra electromotriz.

El torque electromagnético que genera el motor se puede expresar como una relación proporcional con las intensidades de corriente del estator como:

$$\tau_e = K_t [i_{as} \sin(\theta_r) + i_{bs} \sin(\theta_r - \varphi_r) + i_{cs} \sin(\theta_r + \varphi_r)] \quad (5.3)$$

La literal K_t , es la constante de proporcionalidad entre las intensidades de corriente del estator y el par o torque electromagnético.

El torque electromecánico, la velocidad y la posición angular en el eje del rotor se relacionan de la siguiente manera:

$$\tau_e = \left(\frac{2}{P}\right) J_m \dot{\omega}_r + \left(\frac{2}{P}\right) B_m \omega_r + \tau_D + n \tau \quad (5.4)$$

Las velocidades mecánica y eléctrica se relacionan del siguiente modo:

$$\omega_m = \left(\frac{2}{P}\right) \omega_r$$

Las velocidades en el eje del motor y en el eje de la carga se relacionan así:

$$\frac{\omega}{\omega_m} = \frac{\theta}{\theta_m} = n < 1$$

La ecuación (5.4) del torque electromecánico también se puede expresar como:

$$\tau_e = J_m \dot{\omega}_m + B_m \omega_m + \tau_D + n \tau \quad (5.5)$$

Los parámetros involucrados en las ecuaciones (5.4) y (5.5) se definen como:

J_m : Momento de inercia del rotor.

B_m : Coeficiente de amortiguamiento friccional del rotor.

ω : Velocidad mecánica angular en el eje de la carga.

θ : Desplazamiento angular en el eje de la carga.

P : Número de polos.

τ : Torsión aplicada en el eje de la carga para impulsar a la variable articular.

τ_D : Torsión que representa a los disturbios del motor.

n : Relación mecánica de engranajes.

En la figura 5.3 se muestra el diagrama de bloques analítico del motor DC sin escobillas representado por las ecuaciones (5.1) (5.3) y (5.4)

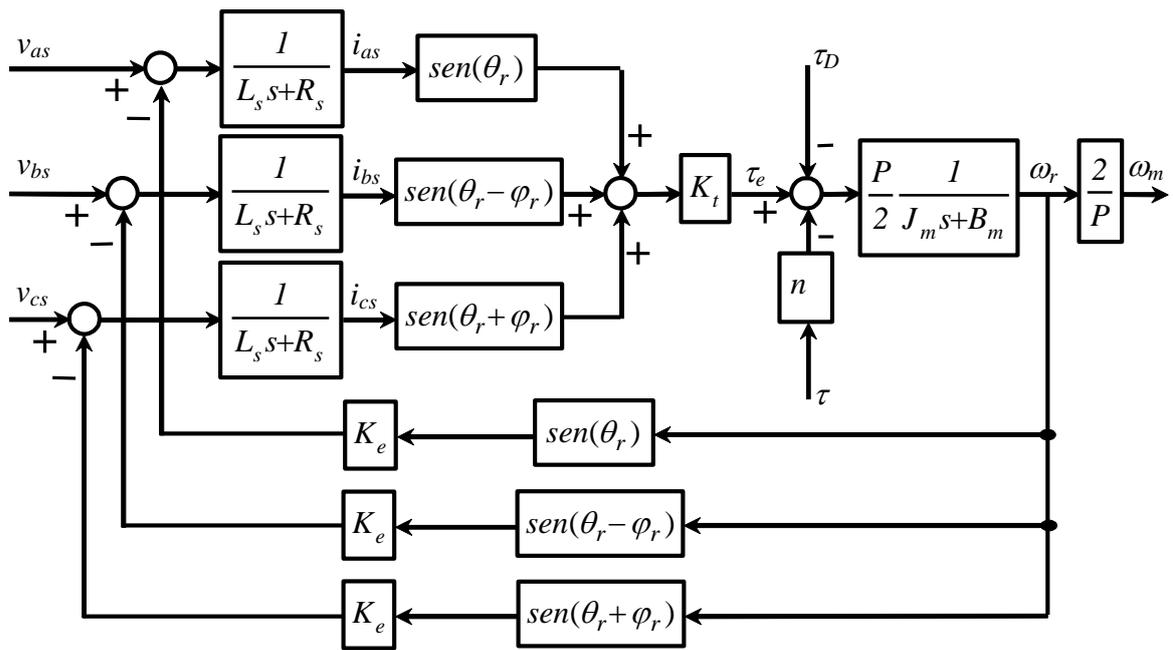


Figura 5.3 Diagrama de bloques analítico del motor DC sin escobillas.

Gráfica elaborada por el autor

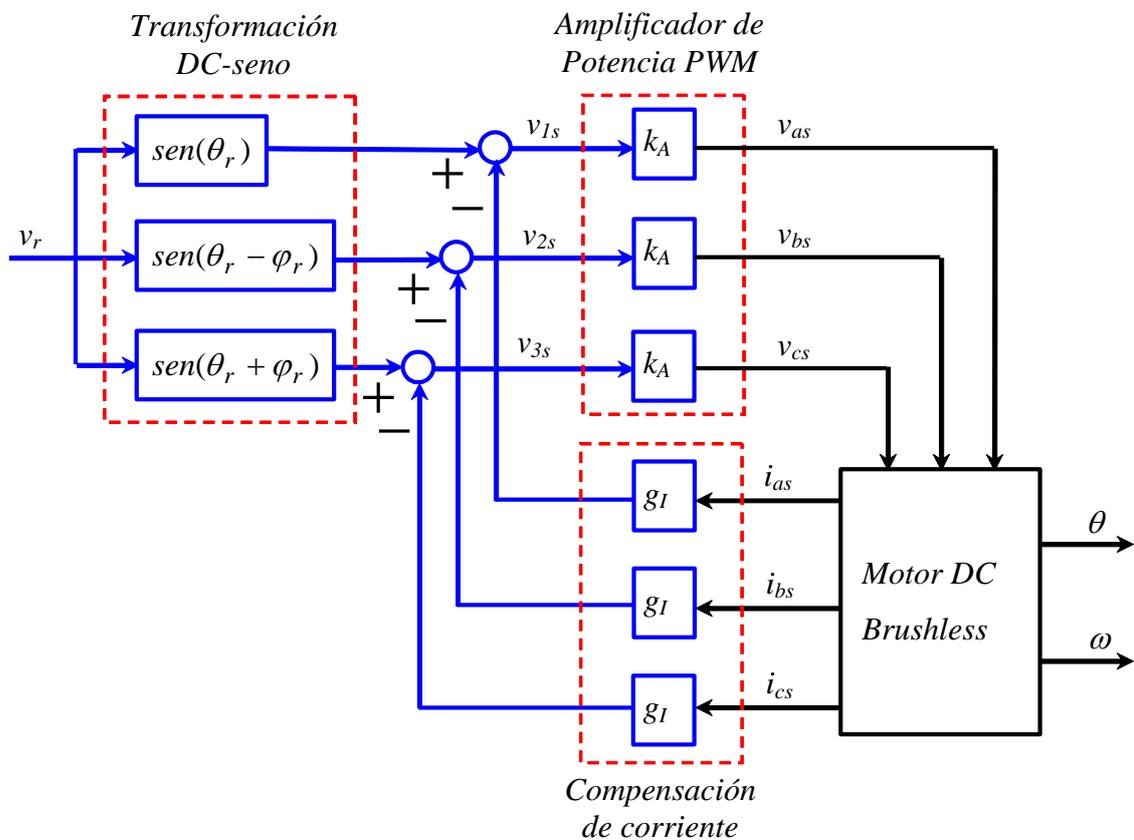


Figura 5.4 Diagrama de bloques del motor DC sin escobillas con simple entrada de control y generación de PWM.

Gráfica elaborada por el autor

El controlador de voltaje sinusoidal de modulación por ancho de pulso (*PWM*) de la estructura variable y no lineal del motor sin escobillas se puede linealizar de forma digital considerando una ganancia constante k_A , la cual representa la ganancia de los actuadores electrónicos que operan en la función de *PWM* con la realimentación de las intensidades de corriente del estator, para esto se realiza una conversión de voltaje de corriente directa *DC* a voltajes sinusoidales mediante el controlador digital obteniéndose un sistema físico de una sola entrada v_r tal como se muestra en la figura 5.4.

Del diagrama de la figura 5.4 se obtienen las expresiones de los voltajes eléctricos:

$$\begin{bmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_r \text{sen}(\theta_r) - g_I i_{as} \\ v_r \text{sen}(\theta_r - \varphi_r) - g_I i_{bs} \\ v_r \text{sen}(\theta_r + \varphi_r) - g_I i_{cs} \end{bmatrix} k_A \quad (5.6)$$

Del diagrama de la figura 5.3 se obtienen las intensidades de corrientes eléctricas:

$$\begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{as} - K_e \text{sen}(\theta_r) \omega_r \\ v_{bs} - K_e \text{sen}(\theta_r - \varphi_r) \omega_r \\ v_{cs} - K_e \text{sen}(\theta_r + \varphi_r) \omega_r \end{bmatrix} \frac{1}{L_s s + R_s} \quad (5.7)$$

Reemplazando la ecuación (5.6) en la ecuación (5.7) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta_r) \\ \text{sen}(\theta_r - \varphi_r) \\ \text{sen}(\theta_r + \varphi_r) \end{bmatrix} \frac{k_A v_r - K_e \omega_r}{L_s s + R_s + g_I k_A} \quad (5.8)$$

Reemplazando la ecuación (5.8) en la ecuación (5.3) e igualando con la ecuación (5.5) se obtiene la siguiente expresión:

$$K_t \frac{k_A v_r - K_e \omega_r}{L_s s + R_s + g_I k_A} \times \frac{3}{2} = J_m \frac{2}{P} \dot{\omega}_r + B_m \frac{2}{P} \omega_r + \tau_D + n \tau \quad (5.9)$$

La ecuación (5.9) representa la expresión de un sistema linealizado y perturbado del motor con una variable de entrada y una variable de salida, debido que matemáticamente se cumple la siguiente identidad trigonométrica:

$$\text{sen}^2(\theta_r) + \text{sen}^2(\theta_r - \varphi_r) + \text{sen}^2(\theta_r + \varphi_r) = \frac{3}{2}$$

La ecuación (5.9) también se puede escribir en función de la velocidad angular ω de la carga como:

$$J_m L_s \ddot{\omega} + \frac{1}{n} (B L_s + J_m (R_s + g_I k_A)) \dot{\omega} + \left(\frac{3}{4} P K_t K_e + B_m (R_s + g_I k_A) \right) \omega + n L_s (\dot{\tau}_D + \dot{\tau}) + n (R_s + g_I k_A) (\tau_D + n \tau) = \frac{3}{2} n K_t k_A v_r \quad (5.10)$$

La ecuación (5.10) también se puede expresar en función del desplazamiento angular θ de la carga como:

$$J_m L_s \ddot{\theta} + \frac{1}{n} (B_m L_s + J_m (R_s + g_I k_A)) \dot{\theta} + \left(\frac{3}{4} P K_t K_e + B_m (R_s + g_I k_A) \right) \theta + n L_s (\dot{\tau}_D + \dot{\tau}) + n (R_s + g_I k_A) (\tau_D + n \tau) = \frac{3}{2} n K_t k_A v_r \quad (5.11)$$

En la figura 5.5 se muestra el diagrama de bloques del motor correspondiente a las ecuaciones (5.4), (5.9) y (5.10), con variable de voltaje v_r de entrada y posición angular θ como variable de respuesta.

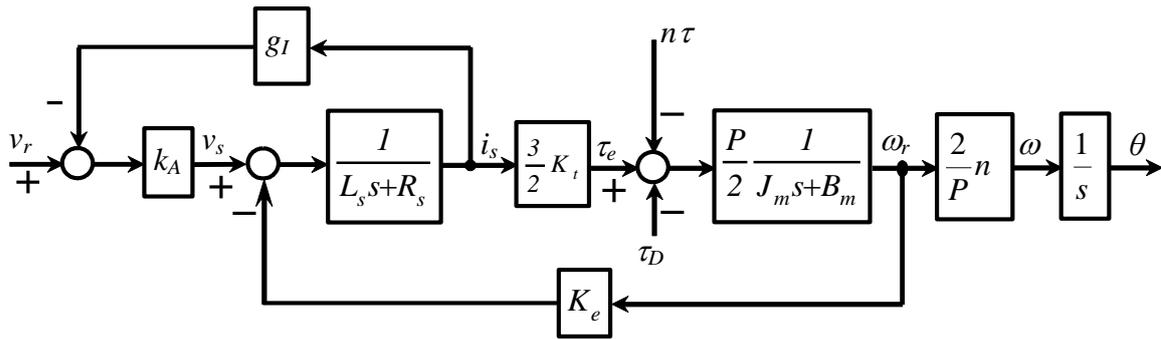


Figura 5.5 Diagrama de bloques simplificado y linealizado del motor DC sin escobillas.

Gráfica elaborada por el autor

Aplicando la transformada de *Laplace* a la ecuación (5.11) y despejando la variable $\Theta(s)$ se obtiene la expresión matemática para el desplazamiento angular del motor en términos de la transformada de *Laplace* y en función de la variable de voltaje de entrada, de la variable de torsión en el eje de giro y de todos los parámetros físicos del motor como sigue:

$$\Theta(s) = \frac{\frac{3nK_t K_a}{2J_m L_s} V_r(s) - \frac{nL_s s + n(R_s + g_I K_a)}{L_s J} (\Gamma_D(s) + n\Gamma(s))}{s \left[s^2 + \frac{B_m L_s + J_m (R_s + g_I K_a)}{L_s J_m} s + \frac{\frac{3}{4} P K_t K_e + B_m (R_s + g_I K_a)}{L_s J_m} \right]} \quad (5.12)$$

La expresión (5.12) se puede expresar de una forma simplificada como:

$$\Theta(s) = \frac{bV_r(s) - (b_2s + b_3)(\Gamma_D(s) + n\Gamma(s))}{s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3} \quad (5.13)$$

Los coeficientes de la ecuación (5.13) se relacionan con los parámetros del motor como sigue:

$$b = \frac{3nK_tK_a}{2J_mL_s} ; b_2 = \frac{n}{J_m} ; b_3 = \frac{n(R_s + g_IK_a)}{L_sJ_m}$$

$$a_1 = \frac{B_mL_s + J_m(R_s + g_IK_a)}{L_sJ_m} ; a_2 = \frac{\frac{3}{4}PK_tK_e + B_m(R_s + g_IK_a)}{L_sJ_m} ; a_3 = 0$$

Si las inductancias del motor producen un efecto imperceptible en la dinámica del motor, entonces se puede considerar que $L_s \approx 0$ por lo tanto la ecuación (5.11) se reduce a la siguiente expresión:

$$J_m(R_s + g_IK_a)\ddot{\theta} + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{4}PK_tK_e + B_m(R_s + g_IK_a)\right)\dot{\theta} + n(R_s + g_IK_a)(\tau_D + n\tau) = \frac{3}{2}nK_tK_av_r \quad (5.14)$$

La ecuación (5.14) se puede simplificar y se vuelve a escribir como:

$$u = K_\alpha\ddot{\theta} + K_\beta\dot{\theta} + K_\eta\tau_D + K_T\tau \quad (5.15)$$

Las cantidades constantes involucradas en la ecuación (5.15) se denotan como:

$$K_\alpha = \frac{1}{n} \frac{2}{3} J_m \frac{R_s + g_IK_a}{K_tK_a}$$

$$K_\beta = \frac{1}{n} \frac{2}{3} \frac{\frac{3}{4}PK_tK_e + B_m(R_s + g_IK_a)}{K_tK_a}$$

$$K_\eta = \frac{R_s + g_IK_a}{K_tK_a}$$

$$K_T = n \frac{R_s + g_IK_a}{K_tK_a}$$

$$u = v_r$$

CAPITULO 6

FORMULACION DINAMICA DEL SISTEMA MOTOR-ROBOT

6.1 Sensores Internos

Para poder realizar el control espacial de trayectorias del efector operacional del robot es necesario incorporar transductores de posición y de velocidad, normalmente estos dispositivos se incorporan y se fijan en los ejes de giro de los motores y así se puede obtener la lectura digital de la posición y la velocidad articulares de forma indirecta a través de los dispositivos de transmisión de movimiento. El sistema robot está conformado por la estructura mecánica, los motores y los sensores tanto de posición como de velocidad articulares y para realizar la simulación de las técnicas de control se deben incluir las ecuaciones físicas de los actuadores, así como las ecuaciones de los transductores de posición y velocidad articulares a las ecuaciones de la formulación dinámica del manipulador robótico.

Como transductores de posición articular para poder realizar la detección de las magnitudes (angulares) de las respectivas articulaciones para un robot generalmente se utilizan los codificadores ópticos incrementales, los cuales presentan en algunos casos dos pistas o a veces únicamente una, pero en cualquiera de los casos requiere de una lógica adicional que permita identificar los impulsos de conteo o desconteo (de incremento o decremento), según el sentido de giro o según el sistema de inicialización. En la figura 6.1 se muestra el esquema básico de un codificador óptico incremental, el cual se compone de un disco codificado que se encuentra fijado en el eje motriz, con una pista ranurada que al girar genera señales fotovoltaicas cuadradas de detección *A* y *B* y se encuentran desfasadas en 90° (configuración en cuadratura), que se captan mediante fototransistores (fotodetectores), más una señal adicional de voltaje que se puede utilizar como referencia *R*. Cuando se realiza el giro en un determinado sentido la señal *B* se adelanta respecto de la señal *A* y cuando el giro se realiza en sentido inverso la señal *B* se atrasa respecto de la señal *A*. [3]

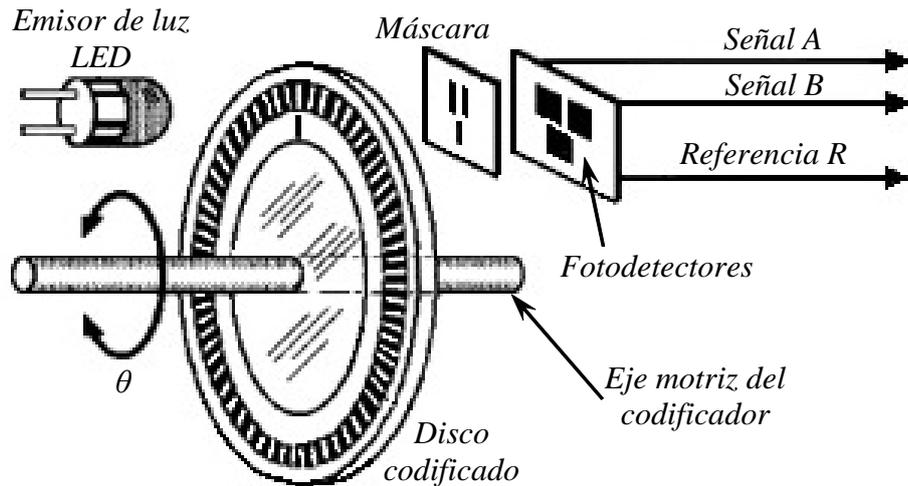


Figura 6.1 Esquema de un transductor de posición angular óptico incremental.

Fuente: Gráfica obtenida de Internet y adaptada por el autor

A partir de las señales A y B se puede cuadruplicar la precisión del sensor diseñando una lógica digital de detección de flancos ascendentes y descendentes, obteniendo la señal que indica el giro a la derecha G_D y la señal que indica el giro a la izquierda G_I . Mediante un Flip-Flop R - S se detecta también el sentido de giro D/I y finalmente utilizando un Contador Binario Reversible (ascendente/descendente) de N bits se detecta el valor digital de posición articular. El esquema de forma general se muestra en la figura 6.2.

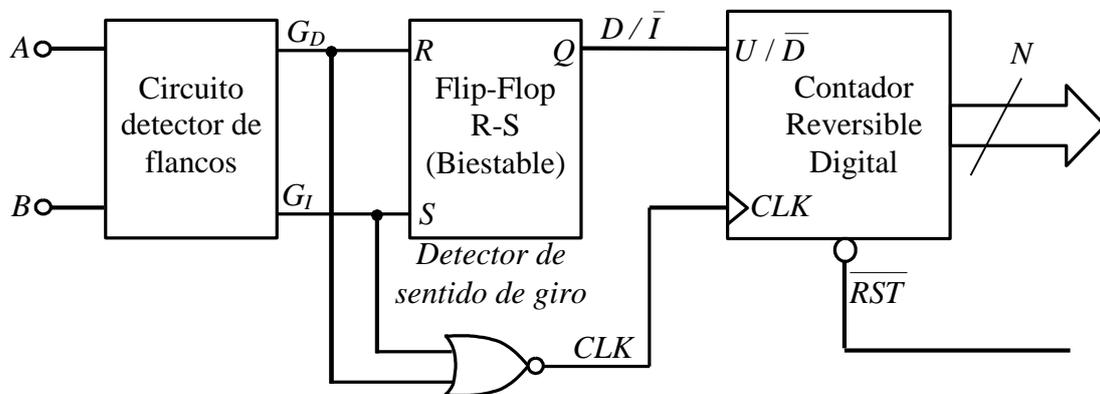


Figura 6.2 Esquema general del circuito para obtener la posición angular de forma digital.

Gráfica elaborada por el autor

En la figura 6.3 se muestra el circuito digital lógico que permite detectar los flancos ascendentes y descendentes que se convierten a impulsos de reloj para incrementar y/o decrementar la cuenta digital del contador binario reversible. En la figura 6.4 se muestran las gráficas en el tiempo del procedimiento que permite cuadruplicar la precisión del sensor obteniendo una secuencia de pulsos que se utilizan como oscilador de mayor frecuencia para el contador y la detección del sentido de giro de la articulación del robot.

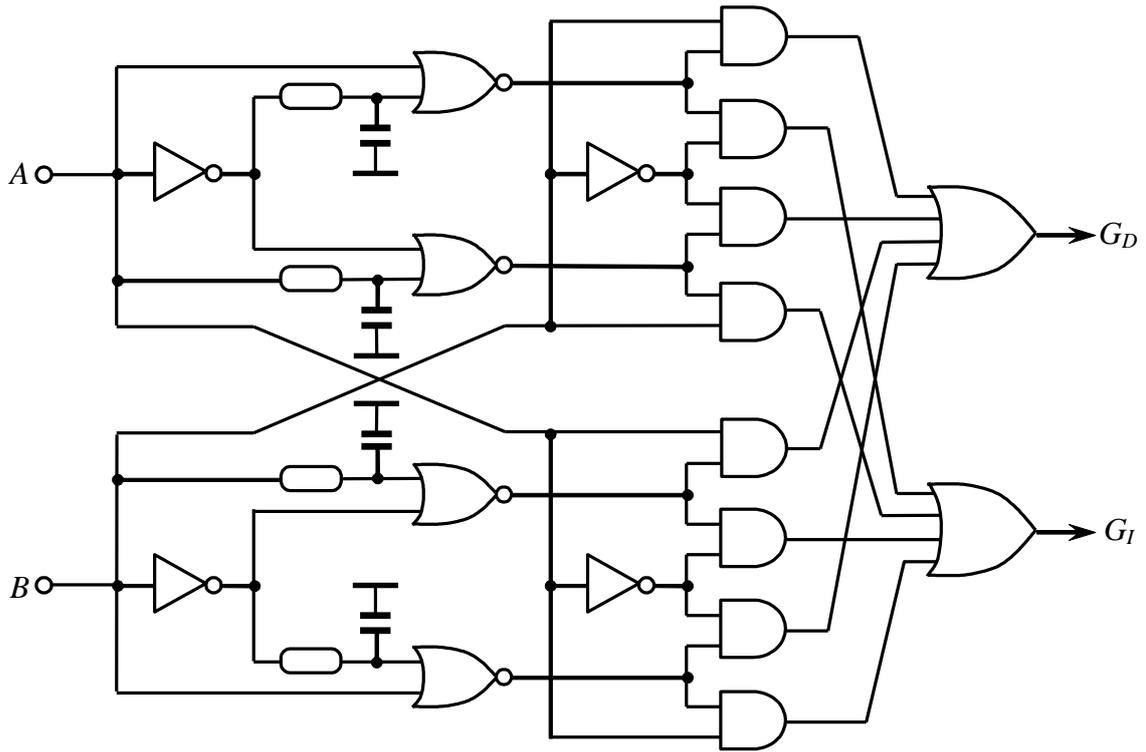


Figura 6.3 Circuito detector de flancos para cuadruplicar la precisión de un codificador incremental.

Gráfica elaborada por el autor

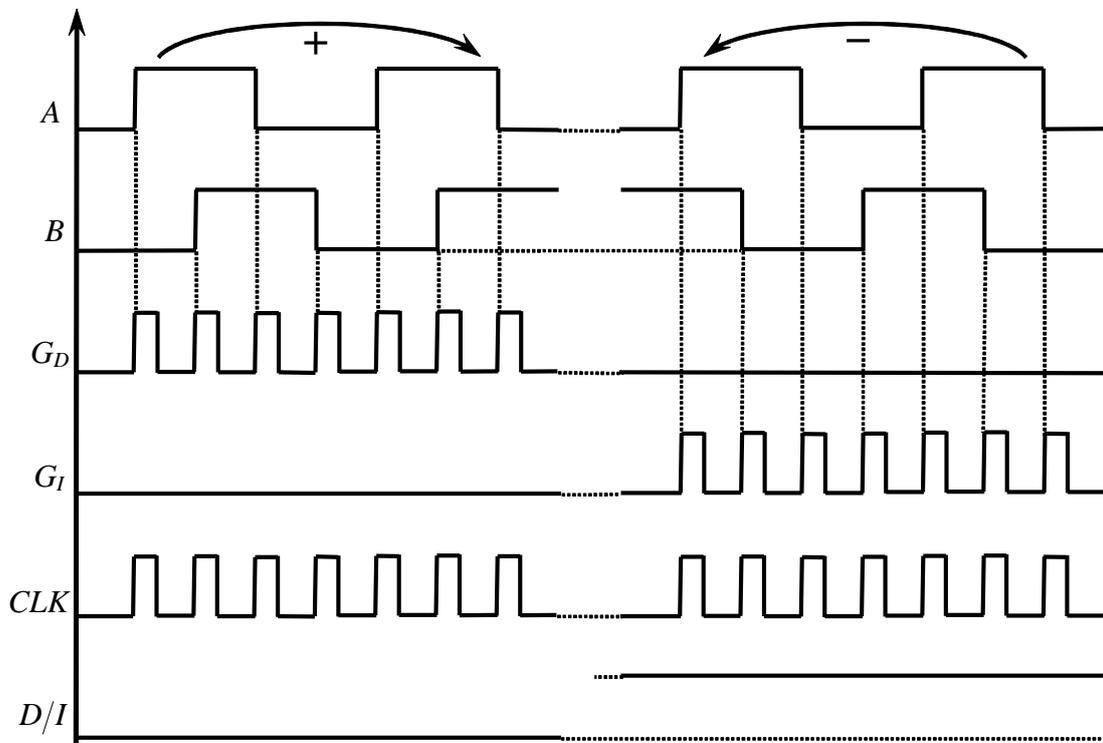


Figura 6.4 Gráficas que describen la obtención del sentido de giro y la detección de flancos para generar pulsos con frecuencia cuadruplicada.

Gráfica elaborada por el autor

La expresión matemática del transductor de posición angular θ de n_r ranuras en función del valor digital n expresado en el sistema decimal se puede expresar como:

$$\theta = \frac{360^0}{4n_r} n$$

Para realizar la detección del valor de la velocidad angular $w(t)$ de las articulaciones del robot se suelen utilizar dispositivos denominados tacogeneradores que convierten la energía rotacional del eje motriz en energía eléctrica, proporcional a la velocidad angular. Para generar el voltaje a partir del giro se acopla al motor, una serie de espiras situadas dentro de un campo magnético fijo (generado por dos imanes), al girar el motor, las espiras giran en el interior del campo, lo que genera una señal eléctrica como se muestra en la figura 6.5. En la figura 6.6 se representa una fotografía de un tacómetro. La variable de voltaje $v(t)$ del transductor proporcional a la velocidad angular $w(t)$ en el eje del motor se expresa como:

$$v(t) = K_e w(t)$$

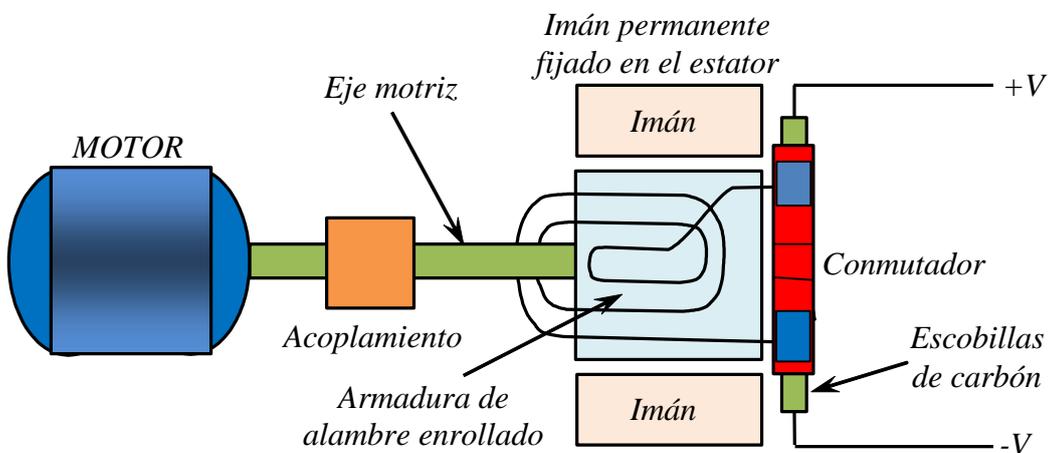


Figura 6.5 Esquema básico de un tacómetro acoplado al eje de un motor.

Gráfica elaborada por el autor

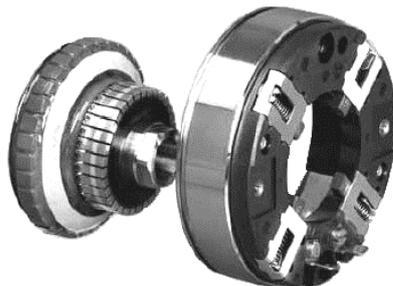


Figura 6.6 Fotografía de un tacómetro.

Fuente: Gráfica obtenida de Internet

6.2 Formulación Dinámica del Sistema Motores-Robot

La formulación dinámica del robot manipulador que se expresa mediante la ecuación (4.38) se puede combinar con la expresión dinámica del motor sin escobillas (considerando para este caso todas las inductancias del estator como nulas) que se ha expresado mediante la ecuación (5.15) para obtener una sola ecuación dinámica compacta que represente a la del sistema del manipulador robótico con elementos motrices (actuadores) en todas las articulaciones.

La ecuación (5.15) se puede particularizar para la articulación i del robot agregando el subíndice i a cada constante y variable de esta ecuación y adaptándola como variable del sistema robot se puede expresar como:

$$u_i = K_{\alpha i} \ddot{q}_i + K_{\beta i} \dot{q}_i + K_{\eta i} \tau_{Di} + K_{Ti} \tau_i \quad (6.1)$$

La torsión τ_i se aplica al eje de articulación, por lo que la ecuación (4.38) se vuelve a escribir de forma equivalente como:

$$\tau_i = \sum_{j=1}^n d_{ij}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + c_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + h_i(\mathbf{q}) + b_i(\dot{q}_i) \quad (6.2)$$

Las ecuaciones (6.1) y (6.2) se pueden combinar para formar una sola ecuación para representar la dinámica del eslabón-articulación i accionada por el motor i de la siguiente manera: (*)

$$u_i = K_{\alpha i} \ddot{q}_i + K_{\beta i} \dot{q}_i + K_{\eta i} \tau_{Di} + K_{Ti} \left(\sum_{j=1}^n d_{ij}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + c_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + h_i(\mathbf{q}) + b_i(\dot{q}_i) \right) \quad (6.3)$$

La ecuación dinámica (6.3) para la articulación i se vuelve a escribir mediante la siguiente expresión:

$$u_i = \{K_{\alpha i} \ddot{q}_i + K_{Ti} \sum_{j=1}^n d_{ij} \ddot{q}_j\} + K_{Ti} c_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \{K_{\beta i} \dot{q}_i + K_{Ti} b_i(\dot{q}_i)\} + K_{Ti} h_i(\mathbf{q}) + K_{\eta i} \tau_{Di} \quad (6.4)$$

De la ecuación (6.4) se sintetiza la formulación dinámica para la articulación i de forma compacta en una sola ecuación matricial vectorial para el sistema actuador-robot-sensor como sigue: (*)

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Omega}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{\Gamma}(\mathbf{q}) + \mathbf{\Phi}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{d}(t) \quad (6.5)$$

* Ecuación deducida por el autor

Los términos involucrados en la ecuación (6.5) se expresan como:

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_6]^T$$

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_6]^T$$

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \cdots \quad \dot{q}_6]^T$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = [\ddot{q}_1 \quad \ddot{q}_2 \quad \cdots \quad \ddot{q}_6]^T$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_{11}(\mathbf{q}) & m_{12}(\mathbf{q}) & \cdots & m_{16}(\mathbf{q}) \\ m_{21}(\mathbf{q}) & m_{22}(\mathbf{q}) & \cdots & m_{26}(\mathbf{q}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{61}(\mathbf{q}) & m_{62}(\mathbf{q}) & \cdots & m_{66}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} m_{ii}(\mathbf{q}) &= K_{\alpha i} + K_{T_i} d_{ii}(\mathbf{q}) \\ m_{ij}(\mathbf{q}) &= K_{T_i} d_{ij}(\mathbf{q}) \quad \text{con } i \neq j \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = [K_{T1} c_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad K_{T2} c_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad \cdots \quad K_{T6} c_6(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]^T$$

$$\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{q}) = [K_{T1} h_1(\mathbf{q}) \quad K_{T2} h_2(\mathbf{q}) \quad \cdots \quad K_{T6} h_6(\mathbf{q})]^T$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\dot{\mathbf{q}}) = [K_{\beta 1} \dot{q}_1 + K_{T1} b_1(\dot{q}_1) \quad K_{\beta 2} \dot{q}_2 + K_{T2} b_2(\dot{q}_2) \quad \cdots \quad K_{\beta 6} \dot{q}_6 + K_{T6} b_6(\dot{q}_6)]^T$$

$$\mathbf{d}(t) = [K_{\eta 1} \tau_{D1} \quad K_{\eta 2} \tau_{D2} \quad \cdots \quad K_{\eta 6} \tau_{D6}]^T$$

Los términos involucrados en la ecuación (6.5) se denominan como:

$\mathbf{M}(\mathbf{q})$: Matriz de dimensión 6×6 que representa el efecto inercial total del sistema.

$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$: Vector de dimensión 6×1 que representa el efecto debido a la característica del motor y a la fuerza centrífuga y de Corioles que actúan sobre el sistema.

$\boldsymbol{\Phi}(\dot{\mathbf{q}})$: Vector de dimensión 6×1 que expresa el efecto friccional sobre el sistema.

$\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{q})$: Vector de dimensión 6×1 que expresa el efecto gravitatorio sobre el sistema.

$\mathbf{u}(t)$: Vector de dimensión 6×1 que expresa el voltaje aplicado a los motores del robot.

$\mathbf{q}(t)$: Vector de posición articular del robot de dimensión 6×1 .

$\dot{\mathbf{q}}(t)$: Vector de velocidad articular del robot de dimensión 6×1 .

$\ddot{\mathbf{q}}(t)$: Vector de aceleración articular del robot de dimensión 6×1 .

$\mathbf{d}(t)$: Vector de perturbación de dimensión 6×1 .

En la figura 6.7 se representa el diagrama de bloques de la dinámica del sistema, el cual está constituido por todos los componentes que conforman la expresión matemática de la dinámica inversa del sistema actuador-robot expresado mediante la ecuación (6.5).

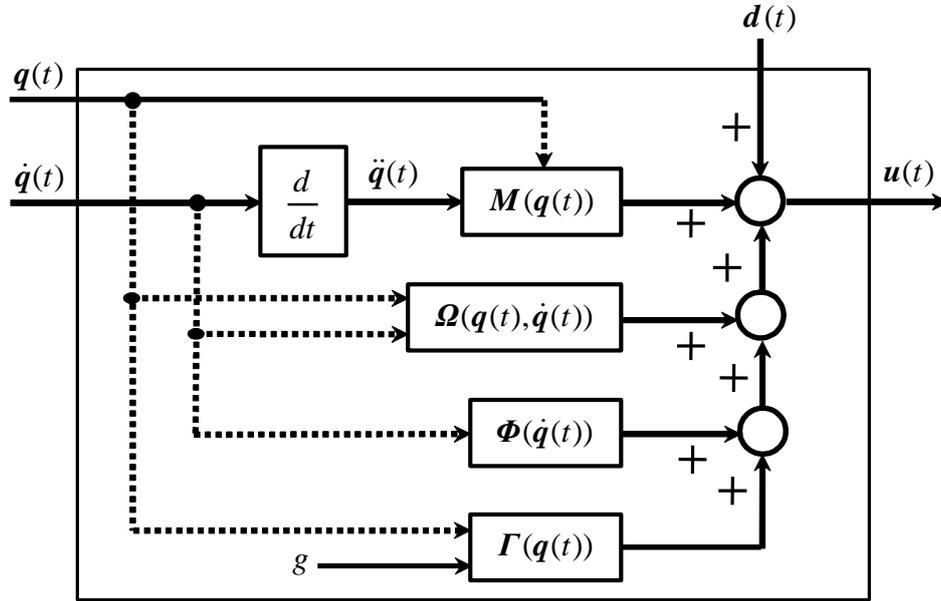


Figura 6.7 Representación gráfica de la Dinámica Inversa del sistema robot.

Gráfica elaborada por el autor

6.3 Representación del Sistema Robot en el espacio de estados

La ecuación diferencial de la dinámica del sistema motor-robot formulada por la ecuación (6.5) representada como un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden también se puede expresar como un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden mediante ecuaciones de estado. Esto es factible debido que la matriz del tensor inercial $M(q)$ del sistema motor-robot es definida positiva y siempre no singular.

De la expresión (6.5) se puede despejar el vector de la aceleración articular \ddot{q} para obtener la ecuación diferencial vectorial siguiente:

$$\ddot{q} = M^{-1}(q) [u - \Gamma(q) - \Omega(q, \dot{q}) - \Phi(\dot{q}) - d(t)] \quad (6.6)$$

Si se definen las siguientes variables:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_r(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{q}(t)$$

La formulación dinámica del sistema se representa vectorialmente en el espacio de estados mediante ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden de la siguiente manera:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ M^{-1}(x_1)[u(t) - \Omega(x) - \Gamma(x_1) - \Phi(x_2) - d(t)] \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

En la Figura 6.8 se muestra el diagrama de bloques correspondiente a la expresión dinámica directa del sistema motor-robot expresado en el espacio de estados mediante la ecuación vectorial no lineal (6.7).

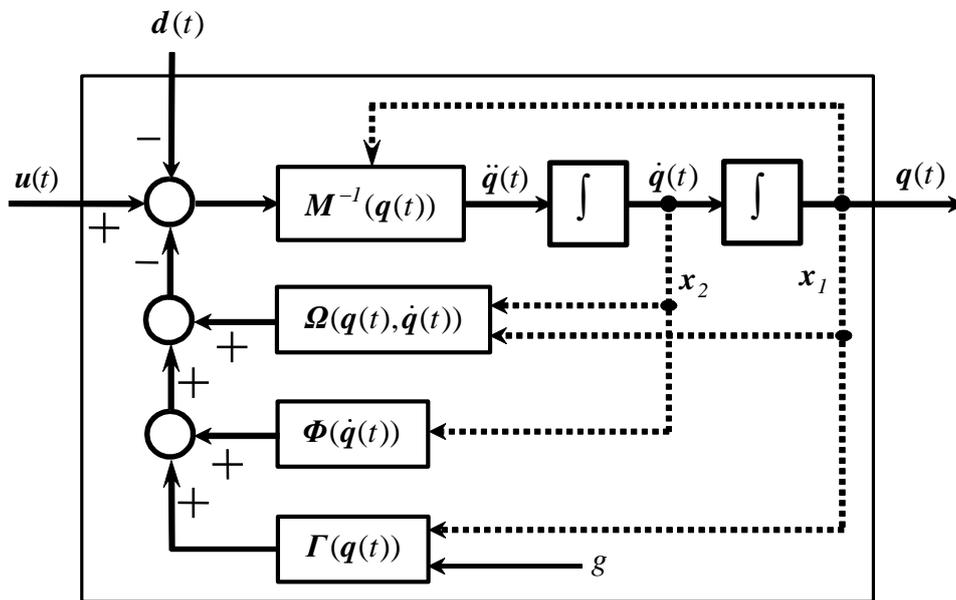


Figura 6.8 Representación gráfica de la Dinámica Directa del sistema robot.

Gráfica elaborada por el autor

Considerando que el vector de entrada al sistema $u(t)$ es n -dimensional, entonces de la ecuación (6.7) se puede obtener una ecuación vectorial no lineal en el espacio de estado como $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden como sigue:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), d(t)) \quad (6.8)$$

Si se considera al vector de posición articular $x_1 = q$ como el vector de respuesta del sistema entonces la ecuación vectorial de salida del sistema robótico se escribe de la siguiente forma:

$$y(t) = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = Cx(t) \quad (6.9)$$

6.4 Solución de la ecuación de la dinámica directa del Sistema Motores-Robot

Las ecuaciones vectoriales (6.7) o (6.8) representan un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales escalares no lineales acopladas entre sí, por lo que es imposible obtener la solución del vector de estado $\mathbf{x}(t)$ en el tiempo de forma analítica o literal, además el vector de entrada $\mathbf{u}(t)$ al sistema, está cambiando de forma no restringida en el tiempo y también el vector perturbador $\mathbf{d}(t)$ no siempre es posible determinarlo ni medirlo, entonces, para obtener la solución de los vectores $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{q}(t)$ y $\mathbf{x}_2(t) = \dot{\mathbf{q}}(t)$ se recurre a métodos de solución numérica recursiva de ecuaciones diferenciales multivariables no lineales.

La solución de la expresión (6.7) consiste en determinar el vector $\mathbf{x}(t)$ con el tiempo $t = kT$, $k \geq 0$, conociendo el vector de estado inicial $\mathbf{x}(0)$, con un vector de entrada $\mathbf{u}(t)$ no restringido y eligiendo el tiempo apropiado de muestreo T , mientras más pequeño sea T más pequeño es el error de iteración pero aumenta el cálculo computacional.

En la figura 6.9 se muestra el esquema a utilizar para la realización de la solución y simulación de la expresión de la dinámica del sistema sin considerar las perturbaciones $\mathbf{d}(t)$. Primero se determina el vector de control $\mathbf{u}(t)$ evaluando la dinámica inversa descrito por la ecuación 6.5 en función de los vectores articulares referenciales $\mathbf{q}_r(t)$, $\dot{\mathbf{q}}_r(t)$ y $\ddot{\mathbf{q}}_r(t)$ y luego se utiliza el vector $\mathbf{u}(t)$ como variable de entrada en la solución de la dinámica directa descrita por la ecuación 6.7 con la finalidad de comprobar la solución de los vectores $\mathbf{q}(t)$ y $\dot{\mathbf{q}}(t)$ con los vectores referenciales $\mathbf{q}_r(t)$ y $\dot{\mathbf{q}}_r(t)$.

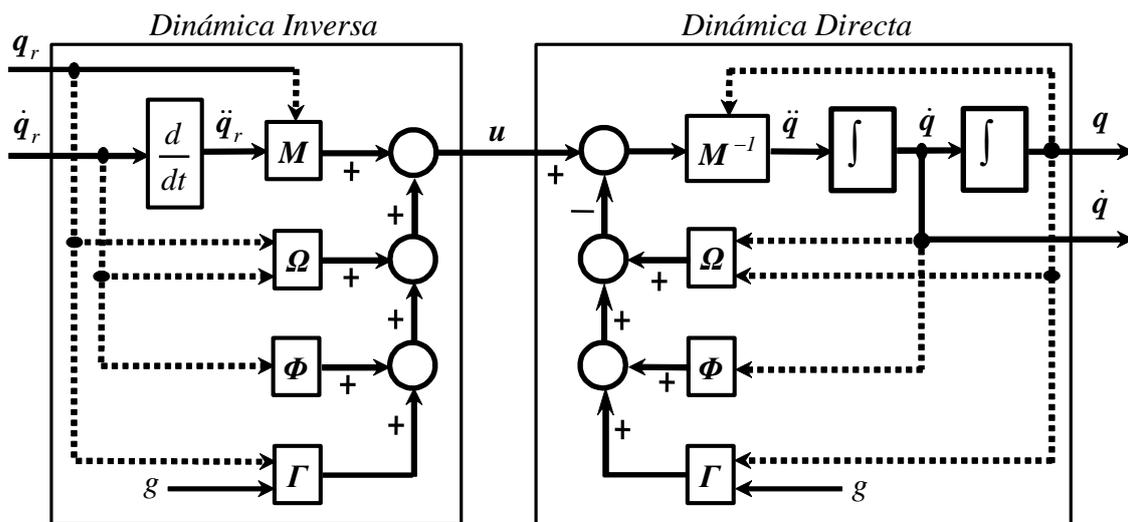


Figura 6.9 Esquema de la Dinámica Inversa y Directa del Sistema motor-robot.

Gráfica elaborada por el autor

Nota: En los diagramas de bloques, cuando la entrada es flecha sólida la respuesta es igual al producto de la ganancia por la entrada y cuando es flecha punteada, la respuesta está en función de la entrada de forma no lineal.

Para obtener la solución de la Dinámica Directa descrita mediante las ecuaciones (6.7) o (6.8) en base de la figura 6.8, de determina el vector de voltaje $\mathbf{u}(t)$ de la Dinámica Inversa expresado por la ecuación (6.5), para ello se ha optado por utilizar dos métodos de solución de ecuaciones diferenciales no lineales multivariantes: Método de *Euler* en adelante y método de *Runge Kutta* de orden 4.

Solución mediante el método de *Euler* en adelante

Esté método de solución de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, es el más sencillo de programar utilizando cualquier lenguaje de programación. Mediante este método es posible también realizar la discretización directa en tiempo discreto de cualquier sistema físico descrito en tiempo continuo. La ecuación de la Dinámica Directa (6.8) sin considerar el vector de perturbación se puede expresar de forma aproximada en tiempo discreto como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \frac{\mathbf{x}(kT+T) - \mathbf{x}(kT)}{T} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(kT), \mathbf{u}(kT)) \quad (6.10)$$

La ecuación (6.10) se puede adaptar convenientemente para expresar la ecuación general de la solución del sistema, considerando el tiempo T constante, entonces se obtiene una expresión recursiva que se utiliza en el método de *Euler* en adelante de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + T \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \quad (6.11)$$

Dadas las ecuaciones (6.7) representadas en el espacio de estados en tiempo discreto las cuales describen de la Dinámica Directa del sistema robótico, es posible obtener la solución determinando los vectores $\mathbf{x}_1(kT)$, $\mathbf{x}_2(kT)$, para $k \geq 0$ y un periodo de discretización T , utilizando el método recursivo de *Euler* en adelante identificando previamente los vectores de estado inicial $\mathbf{x}_1(0)$, $\mathbf{x}_2(0)$ con el vector de entrada $\mathbf{u}(kT)$ no restringido en un rango de voltaje determinado, formulando las siguientes ecuaciones recursivas:

$$\mathbf{x}_1(k+1) = \mathbf{x}_1(k) + T \mathbf{x}_2(k) \quad (6.12.a)$$

$$\mathbf{x}_2(k+1) = \mathbf{x}_2(k) + T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1(k)) [\mathbf{u}(k) - \mathbf{\Omega}(\mathbf{x}(k)) - \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}_1(k)) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_2(k))] \quad (6.12.b)$$

Solución mediante el método de Runge-Kutta de orden 4

Este método de solución de las ecuaciones (6.7) también es un método recursivo, es más preciso que el método anterior utilizando el mismo periodo de muestreo T pero requiere más tiempo del cálculo computacional, la precisión aumenta con la disminución del tiempo de muestreo T . Para obtener la solución del sistema de ecuaciones diferenciales no lineales (6.7) se debe conocer o establecer el vector de estado inicial $\mathbf{x}_1(0)$, $\mathbf{x}_2(0)$, para determinar los vectores $\mathbf{x}_1(kT)$, $\mathbf{x}_2(kT)$ con $t = kT$, $k \geq 0$, estableciendo el periodo de discretización T de forma apropiada. Las ecuaciones recursivas de solución del sistema en tiempo discreto utilizando este método se formulan como sigue: (*)

$$\begin{aligned}
 E_1(k) &= \mathbf{\Omega}(\mathbf{x}_1(k), \mathbf{x}_2(k)) + \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}_1(k)) + \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_2(k)) \\
 \mathbf{h}_{1A} &= \mathbf{x}_2(k) \\
 \mathbf{h}_{1B} &= \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1(k))[\mathbf{u}(k) - E_1(k)] \\
 E_2(k) &= \mathbf{\Omega}(\mathbf{x}_1(k) + \frac{T}{2}\mathbf{h}_{1A}, \mathbf{x}_2(k) + \frac{T}{2}\mathbf{h}_{1B}) + \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}_1(k) + \frac{T}{2}\mathbf{h}_{1A}) + \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_2(k) + \frac{T}{2}\mathbf{h}_{1B}) \\
 \mathbf{h}_{2A} &= \mathbf{x}_2(k) + \frac{T}{2}\mathbf{h}_{1B} \\
 \mathbf{h}_{2B} &= \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1(k) + \frac{T}{2}\mathbf{h}_{1A})[\mathbf{u}(k) - E_2(k)] \\
 E_3(k) &= \mathbf{\Omega}(\mathbf{x}_1(k) + \frac{T}{2}\mathbf{h}_{2A}, \mathbf{x}_2(k) + \frac{T}{2}\mathbf{h}_{2B}) + \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}_1(k) + \frac{T}{2}\mathbf{h}_{2A}) + \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_2(k) + \frac{T}{2}\mathbf{h}_{2B}) \\
 \mathbf{h}_{3A} &= \mathbf{x}_2(k) + \frac{T}{2}\mathbf{h}_{2B} \\
 \mathbf{h}_{3B} &= \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1(k) + \frac{T}{2}\mathbf{h}_{2A})[\mathbf{u}(k) - E_3(k)] \\
 E_4(k) &= \mathbf{\Omega}(\mathbf{x}_1(k) + T\mathbf{h}_{3A}, \mathbf{x}_2(k) + T\mathbf{h}_{3B}) + \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}_1(k) + T\mathbf{h}_{3A}) + \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_2(k) + T\mathbf{h}_{3B}) \\
 \mathbf{h}_{4A} &= \mathbf{x}_2(k) + T\mathbf{h}_{3B} \\
 \mathbf{h}_{4B} &= \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1(k) + T\mathbf{h}_{3A})[\mathbf{u}(k) - E_4(k)]
 \end{aligned}$$

Utilizando las expresiones \mathbf{h}_{iA} , \mathbf{h}_{iB} se obtienen las ecuaciones recursivas para la solución numérica de la ecuación (6.7) de la Dinámica Directa en tiempo discreto como sigue:

$$\mathbf{x}_1(k+1) = \mathbf{x}_1(k) + \frac{T}{6}(\mathbf{h}_{1A} + 2\mathbf{h}_{2A} + 2\mathbf{h}_{3A} + \mathbf{h}_{4A}) \quad (6.13.a)$$

$$\mathbf{x}_2(k+1) = \mathbf{x}_2(k) + \frac{T}{6}(\mathbf{h}_{1B} + 2\mathbf{h}_{2B} + 2\mathbf{h}_{3B} + \mathbf{h}_{4B}) \quad (6.13.b)$$

* Ecuaciones daptadas por el autor

6.5 Simulación Gráfica de la dinámica del sistema propuesto

Para realizar la simulación de la Dinámica Inversa del robot de seis articulaciones incluyendo sensores y motores que se expresa en la ecuación (6.5) y en base a los datos de los anexos A y B, se ha elaborado un programa en *MatLab*, para esto se definen funciones en el tiempo (para $0 \leq t \leq 10 \text{ seg.}$ con $t = kT$), que representan los componentes del vector de posición articular $\mathbf{q}(t) = \theta(t)$; estas funciones temporales describen el desplazamiento dinámico de cada articulación del robot, con sus respectivas derivadas, las primeras derivadas del vector $\mathbf{q}(t)$ conforman los componentes del vector velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\theta}(t)$ y las segundas derivadas del vector $\mathbf{q}(t)$ conforman los componentes del vector aceleración articular $\ddot{\mathbf{q}}(t) = \ddot{\theta}(t)$, como se muestran en las gráficas consecutivas de la figura 6.10. En estas gráficas, las velocidades articulares $\dot{\mathbf{q}}(t)$ se han establecido para ser nulas tanto al inicio como al final de cada trayectoria con la finalidad de evitar grandes efectos inerciales y sacudidas en la estructura mecánica del robot.

La ecuación de cada trayectoria articular $\theta_i(t)$ está constituida por dos funciones polinómicas cúbicas continuas en función del tiempo $t=kT$, ecuación (10.6.a), por lo que la ecuación de cada velocidad articular $\dot{\theta}_i(t)$ se constituye por dos funciones polinómicas cuadráticas continuas, ecuación (10.6.b) y la ecuación de cada aceleración articular $\ddot{\theta}_i(t)$ se constituye con dos funciones polinómicas lineales continuas, ecuación (10.6.c) con valores distintos de cero al inicio y final de las trayectorias.

Las gráficas consecutivas de la figura 6.11 representan los componentes del vector de control del sistema $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_c(t)$, que son curvas de voltaje, cuyos valores de cada componente se deben normalizar y establecer en un rango aproximado de voltaje entre $-15V \leq \mathbf{u}(t) \leq 15V$ con fines de control mediante un sistema multiprocesador digital, cada componente representa el voltaje aplicado a los amplificadores de potencia de los actuadores del robot, por lo que en base a estas gráficas se pueden elegir los motores así como diseñar los amplificadores de potencia. Estas gráficas se obtienen aplicando directamente la ecuación dinámica (6.5) utilizando los valores de los parámetros temporales del sistema con los vectores de articulación $\mathbf{q}(t)$, $\dot{\mathbf{q}}(t)$ y $\ddot{\mathbf{q}}(t)$. Los valores del vector de control varían con la forma y la velocidad de la trayectoria articular del robot y con el tipo de trayectoria cartesiana del efector final del robot.

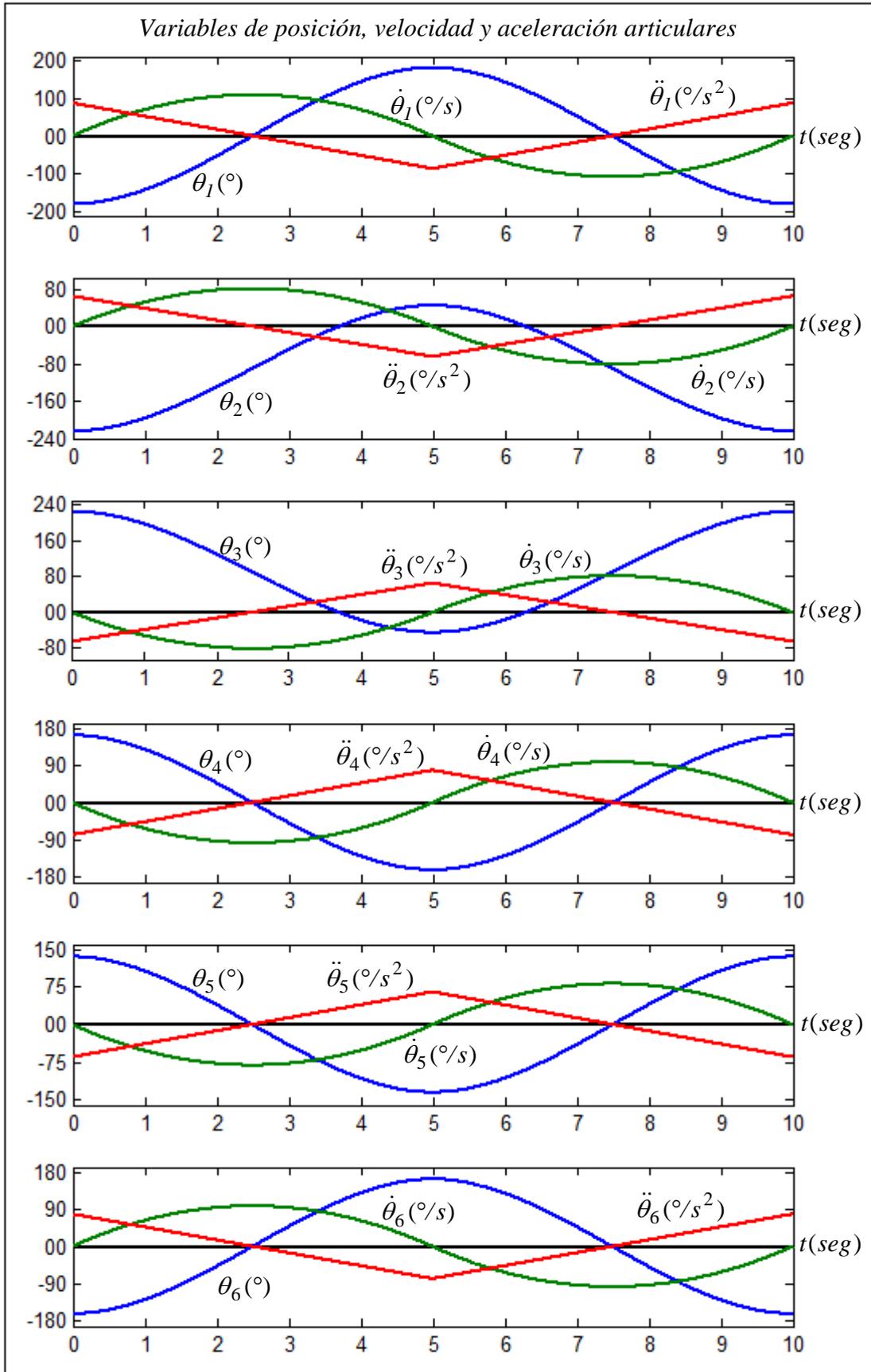


Figura 6.10 Posición, velocidad y aceleración articulares: $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ y $\ddot{\theta}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

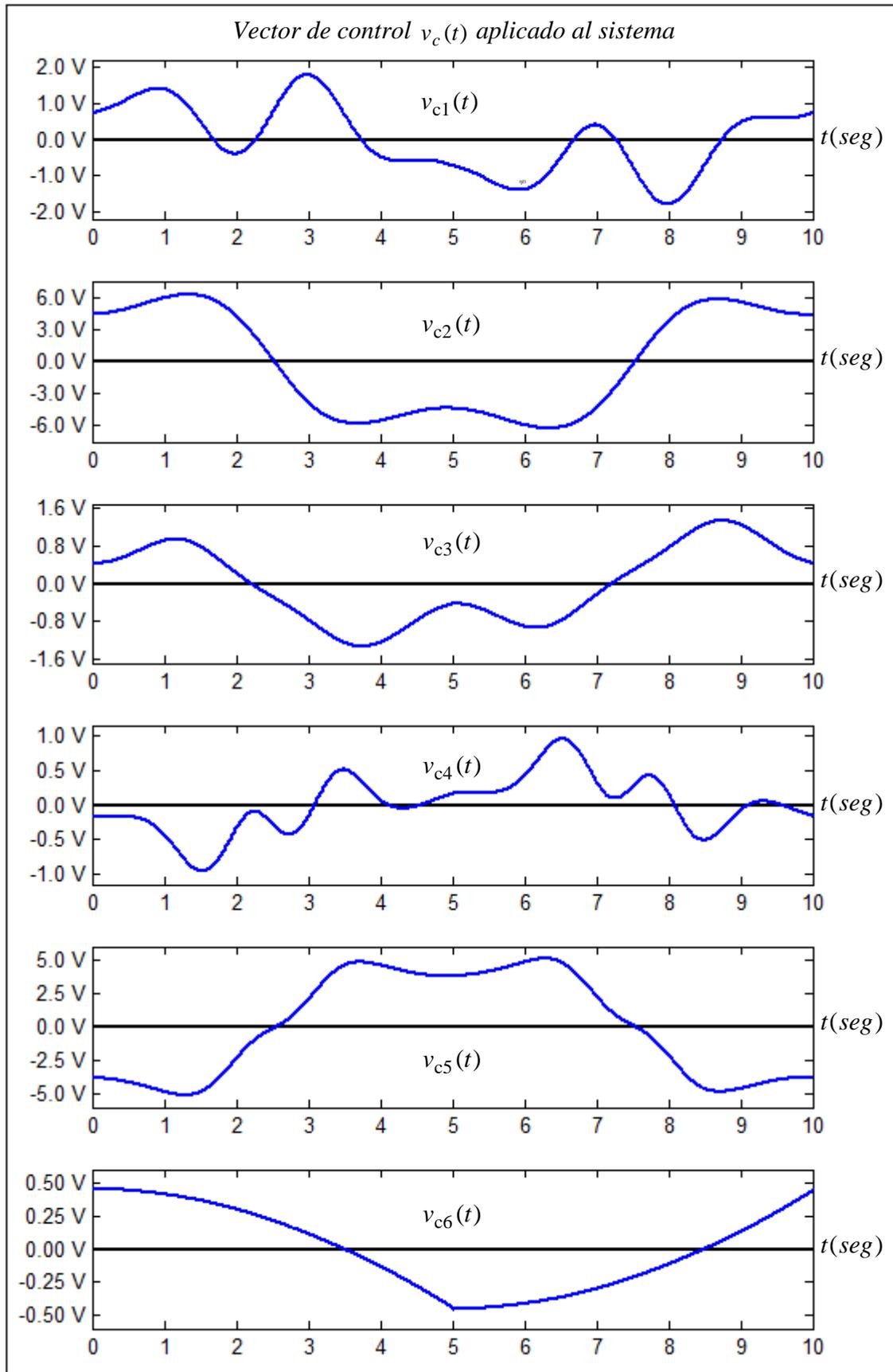


Figura 6.11 Variables de Control $u(t) = v_c(t)$ aplicado a los motores.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

Para realizar la simulación de la Dinámica Directa del robot propuesto de seis articulaciones incluyendo los sensores y los motores expresado en la ecuación (6.7), se han elegido como componentes del vector de control $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_c(t)$ a las mismas curvas obtenidas en las gráficas consecutivas de la figura 6.11 con la finalidad de compararlas con la gráficas de las figuras 6.10 y ver la eficacia y precisión del algoritmo de solución de ecuaciones diferenciales.

Las gráficas expuestas en las figuras consecutivas 6.12 conforman los componentes del vector de posición articular $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{q}(t) = \theta(t)$ y los componentes que conforman el vector de velocidad articular $\mathbf{x}_2(t) = \dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\theta}(t)$, aplicando el algoritmo recursivo de solución de ecuaciones mediante el método de *Euler* en adelante expresado en las ecuaciones (6.12).

Las gráficas expuestas en las figuras consecutivas 6.13 conforman los componentes del vector de posición articular $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{q}(t) = \theta(t)$ y los componentes que conforman el vector de velocidad articular $\mathbf{x}_2(t) = \dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\theta}(t)$, aplicando el algoritmo recursivo de solución de ecuaciones mediante el método de *Runge-Kutta* de orden 4 que se expresa en las ecuaciones (6.13).

Las gráficas de las figuras consecutivas 6.14.a – 6.14.f corresponden al vector de posición articular $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{q}(t) = \theta(t)$ obtenido mediante el método *Euler* en adelante mostrado las figuras 6.12 y al vector $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{q}(t) = \theta(t)$ obtenido mediante el método *Runge-Kutta* mostrado en las gráficas de las figuras 6.13 utilizando el mismo periodo muestreo T , con el vector de entrada $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_c(t)$ mostrado en las figuras 6.11.

Las gráficas de las figuras consecutivas 6.15.a – 6.15.f corresponden al vector velocidad articular $\mathbf{x}_2(t) = \dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\theta}(t)$ obtenido mediante el método *Euler* en adelante mostrado en las figuras 6.12 y al vector $\mathbf{x}_2(t) = \dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\theta}(t)$ obtenido mediante el método *Runge-Kutta* mostrado en las figuras 6.13 utilizando el mismo periodo muestreo T , con el vector de entrada $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_c(t)$ mostrado en las figuras 6.11.

En el conjunto de gráficas mostradas en las figuras 6.14 y 6.15 se presentan las gráficas de error de la respuesta respecto de las variables de referencia mostradas en las figuras 6.10. En ambos métodos siempre existe un arrastre final de error.

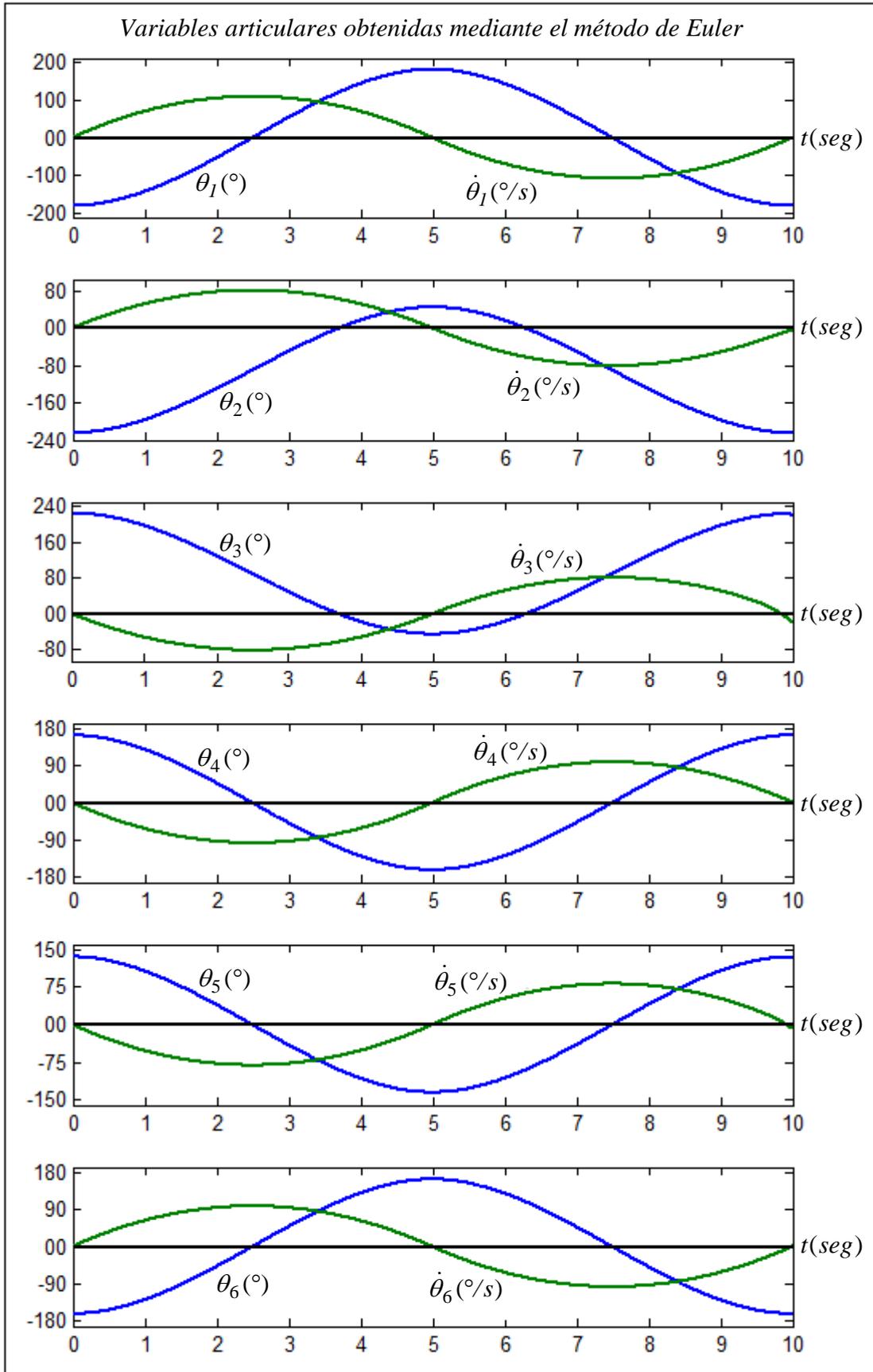


Figura 6.12 Variables $\theta(t)$, y $\dot{\theta}(t)$ obtenidas con el método de *Euler* en adelante.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

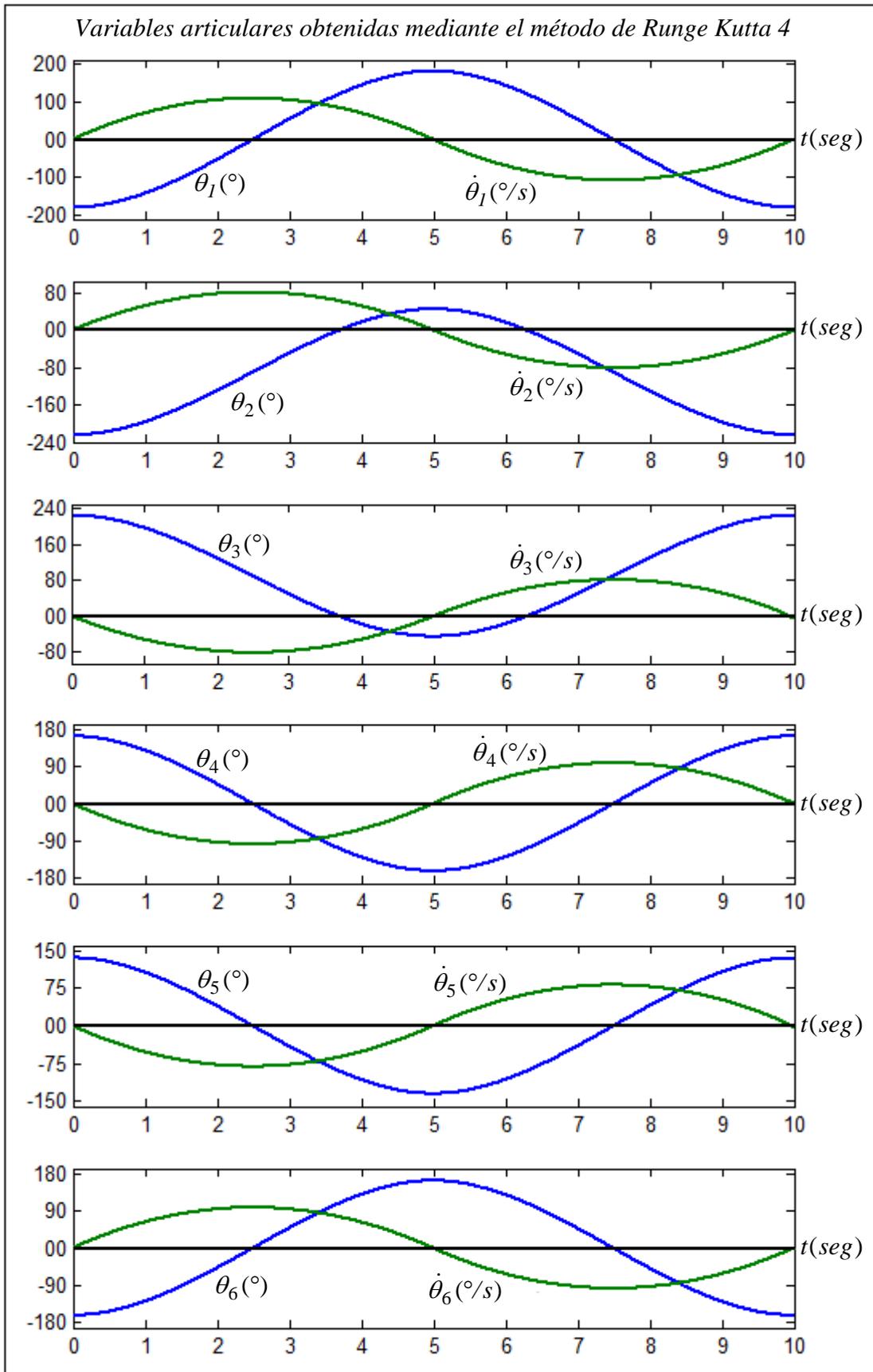


Figura 6.13 Variables $\theta(t)$, y $\dot{\theta}(t)$ obtenidas con el método *Runge-Kutta* orden 4.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

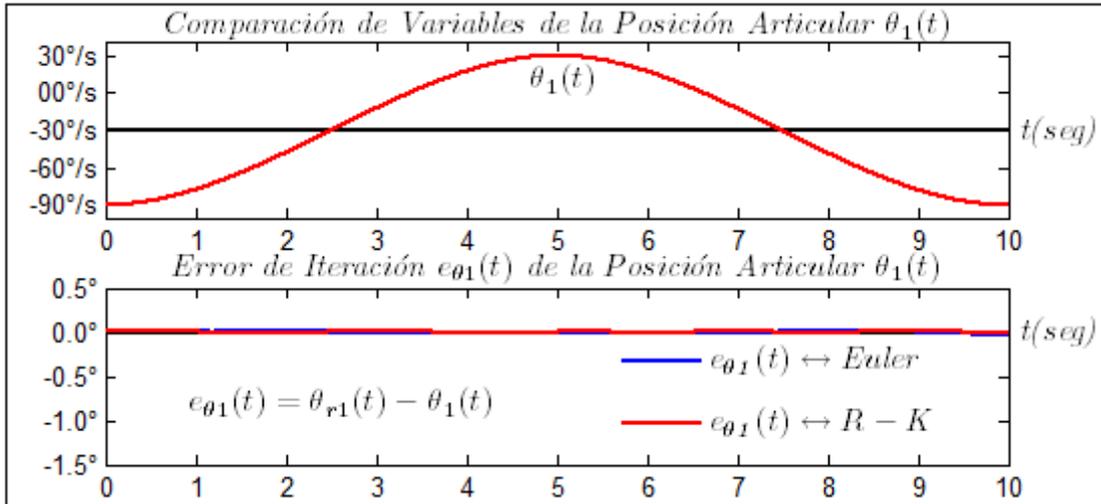


Figura 6.14.a Variables de posición articular $\theta_1(t)$ usando los dos métodos de solución.

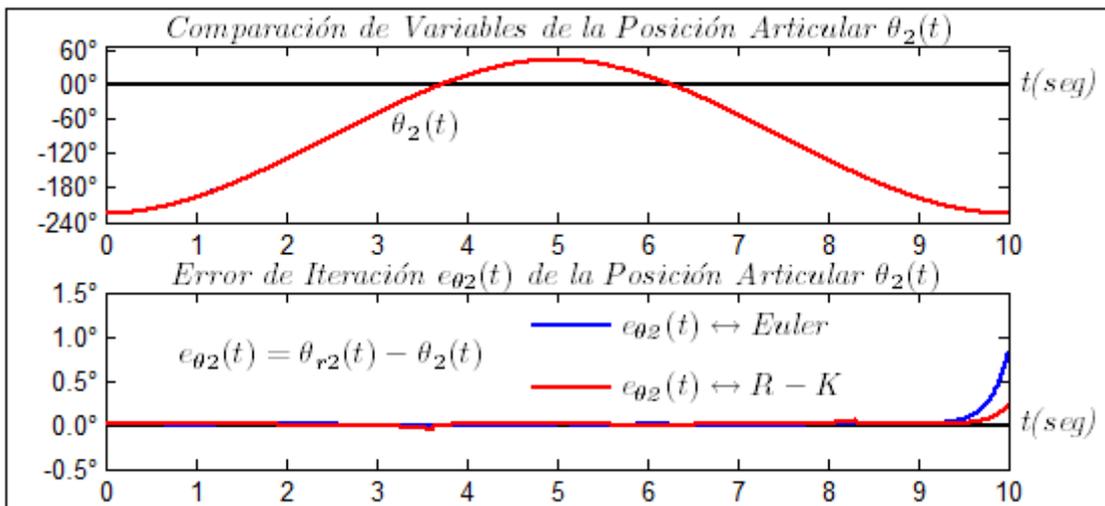


Figura 6.14.b Variables de posición articular $\theta_2(t)$ usando los dos métodos de solución.

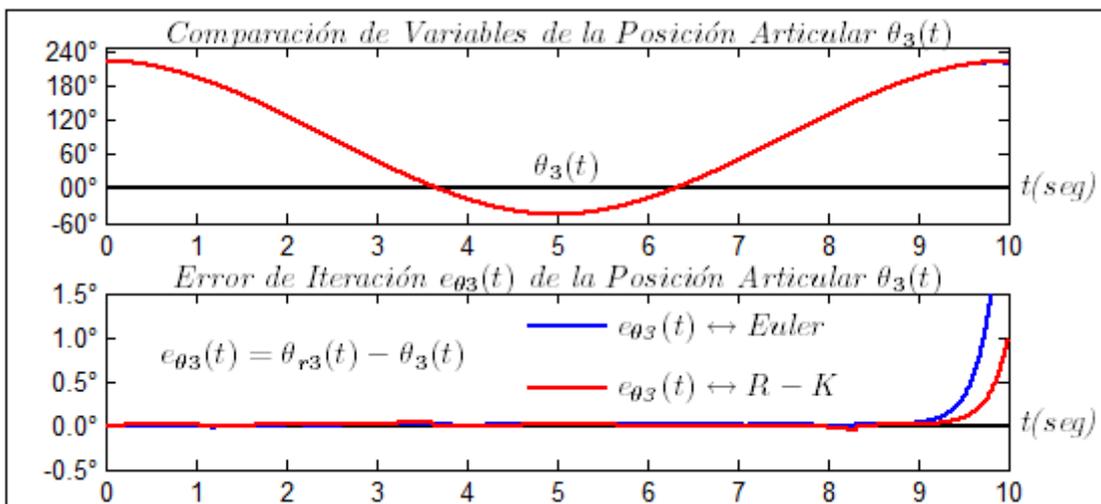


Figura 6.14.c Variables de posición articular $\theta_3(t)$ usando los dos métodos de solución.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

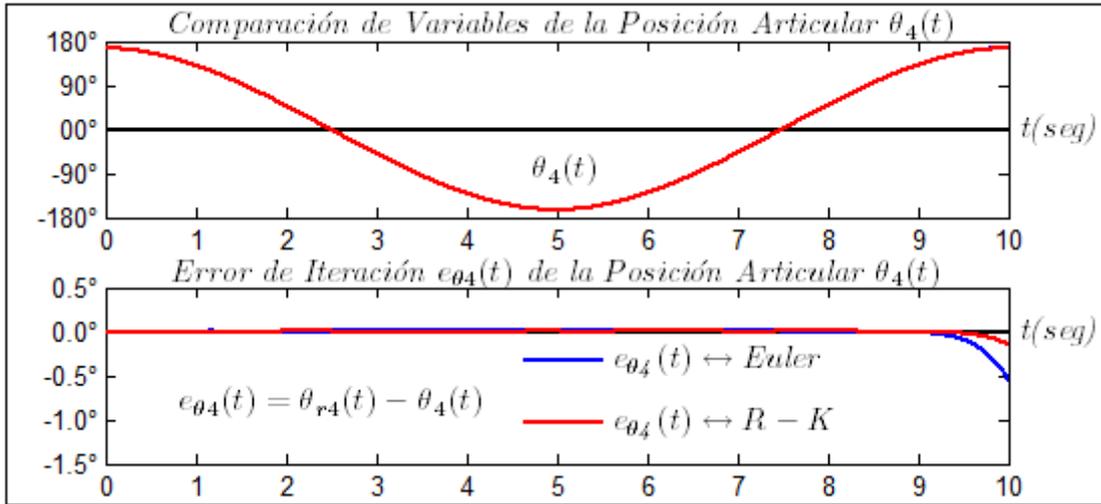


Figura 6.14.d Variables de posición articular $\theta_4(t)$ usando los dos métodos de solución.

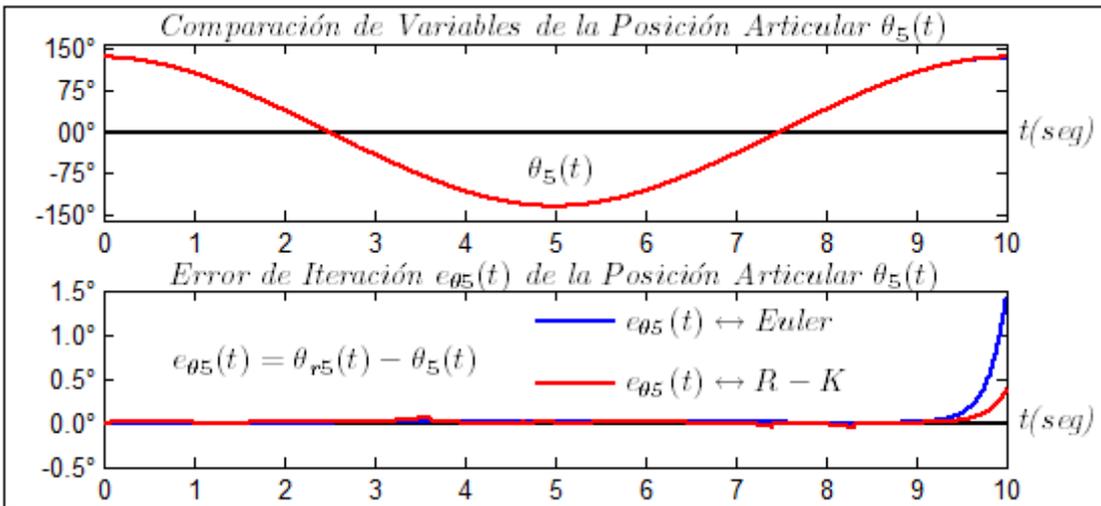


Figura 6.14.e Variables de posición articular $\theta_5(t)$ usando los dos métodos de solución.

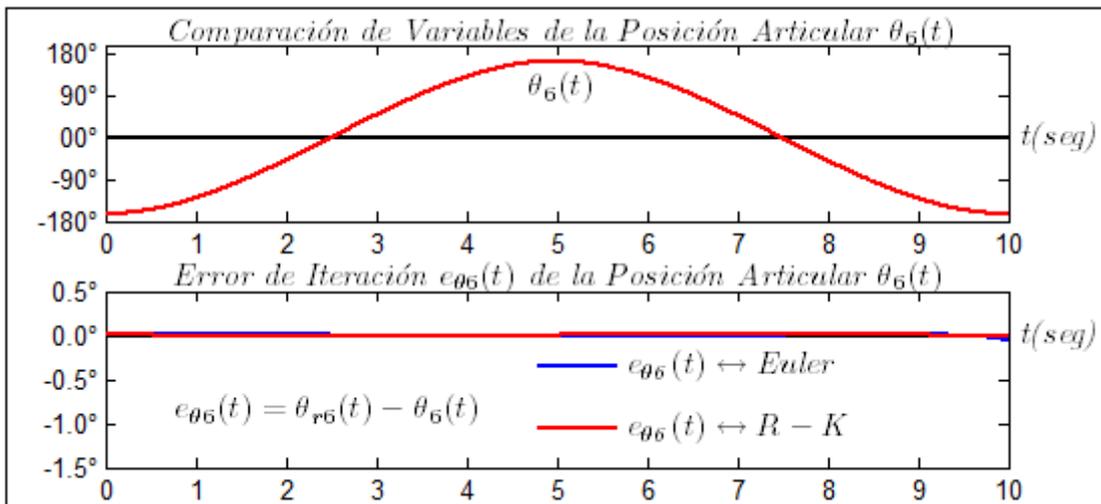


Figura 6.14.f Variables de posición articular $\theta_6(t)$ usando los dos métodos de solución.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

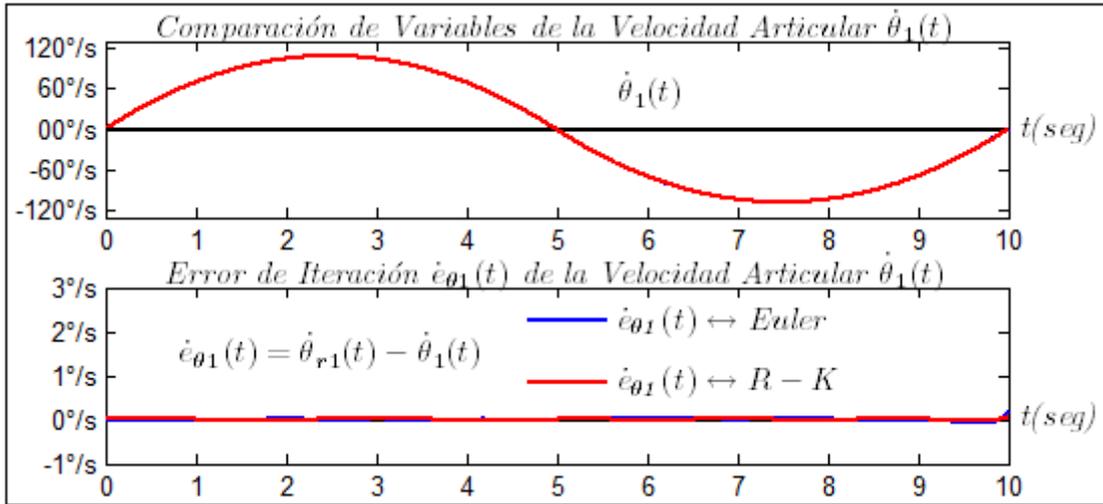


Figura 6.15.a Variables de velocidad articular $\dot{\theta}_1(t)$ usando dos métodos de solución.

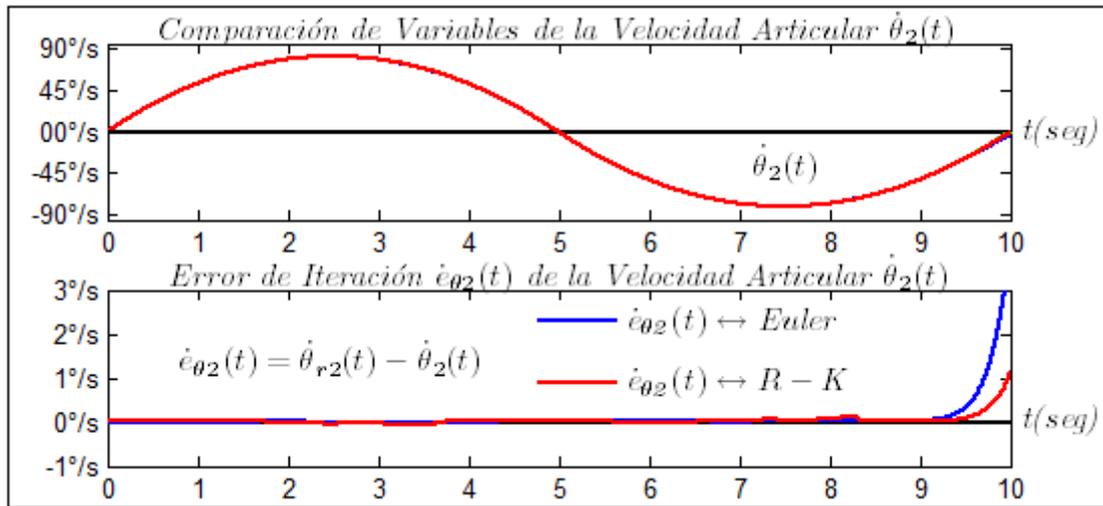


Figura 6.15.b Variables de velocidad articular $\dot{\theta}_2(t)$ usando dos métodos de solución.

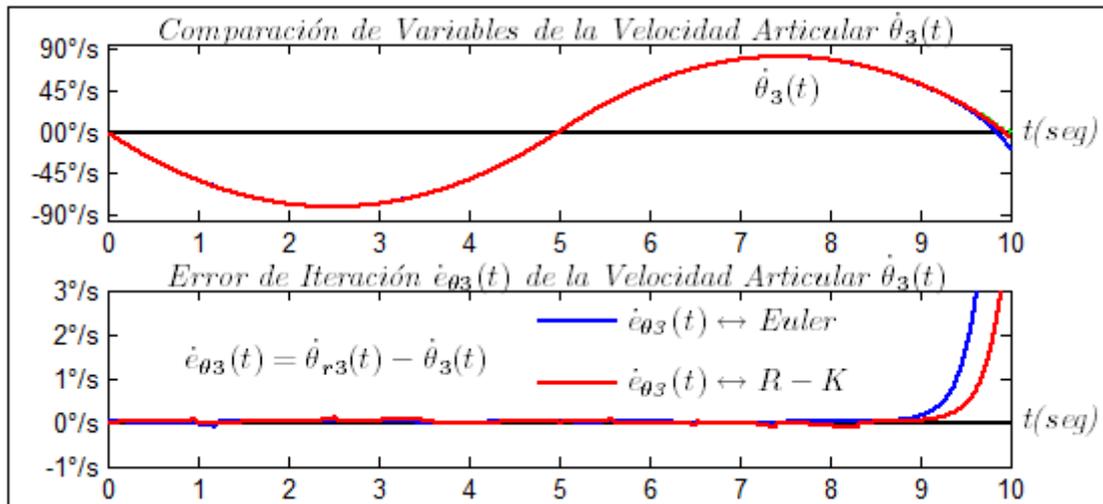


Figura 6.15.c Variables de velocidad articular $\dot{\theta}_3(t)$ usando dos métodos de solución.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

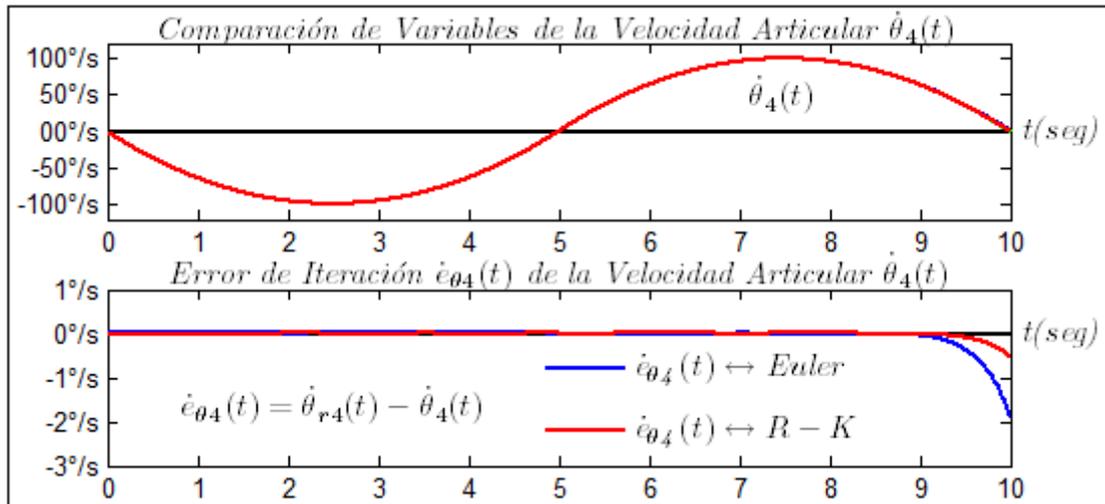


Figura 6.15.d Variables de velocidad articular $\dot{\theta}_4(t)$ usando dos métodos de solución.

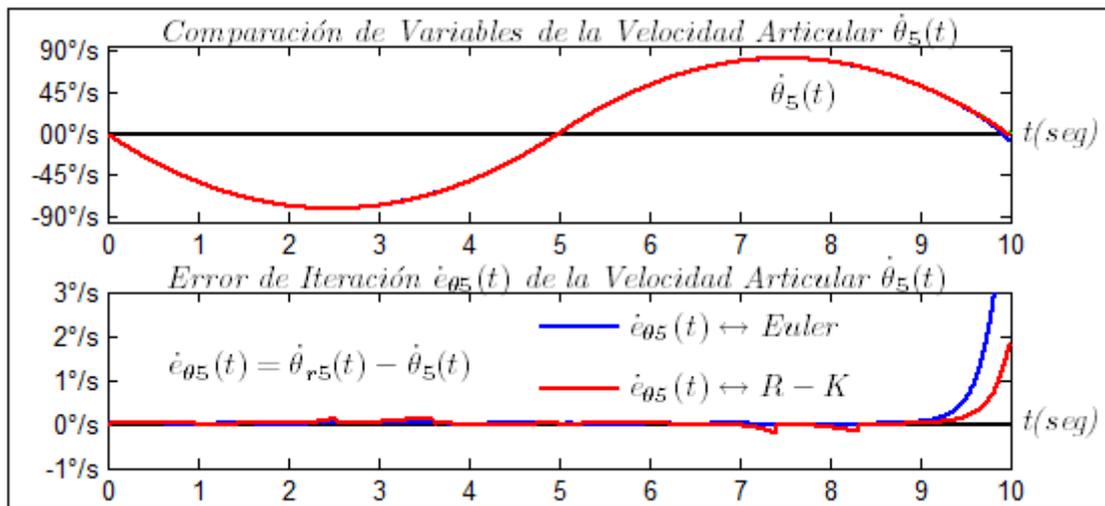


Figura 6.15.e Variables de velocidad articular $\dot{\theta}_5(t)$ usando dos métodos de solución.

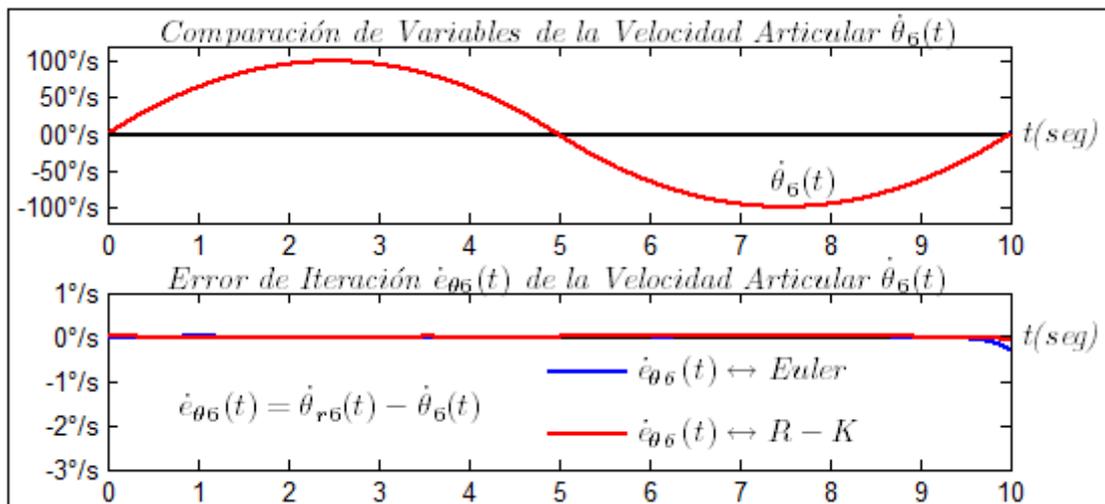


Figura 6.15.f Variables de velocidad articular $\dot{\theta}_6(t)$ usando dos métodos de solución.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

CAPITULO 7

SISTEMA DE CONTROL POR COMPENSACION NOLINEAL ††

7.1 Introducción

Para controlar la trayectoria de un manipulador robótico aplicando esta técnica de control se realiza una linealización multivariable por compensación no lineal, que también se denomina linealización por realimentación, es una técnica aproximada para el diseño del control no lineal. La idea central es transformar de forma algebraica instantáneamente la dinámica del sistema no lineal en una dinámica lineal (total o parcial), para poder aplicar cualquier técnica de control de sistemas lineales en tiempo real.

La técnica de linealización por realimentación se puede ver como una forma de la transformación del modelamiento físico del sistema original en un modelo equivalente pero de una forma más simple y con otro vector de control.

La linealización por realimentación se emplea satisfactoriamente para solucionar problemas de control de un robot conociendo completamente la formulación dinámica con toda precisión y cuando el sistema no está afectado por perturbaciones ni incertidumbres o la estructura de la carga que sujeta el efector final es constante en forma, tamaño y peso en el tiempo. Sin embargo existen una serie de inconvenientes y limitaciones asociadas con la linealización por realimentación. En robótica, cuando el vector de control es torsión o fuerza, a esta técnica también se le denominan “*Control de Torque Calculado*”.

7.2 Planteamiento del método de control

Este método de control utiliza las ecuaciones dinámicas de movimiento del sistema robot expresadas mediante el algoritmo de *Lagrange-Euler (L-E)*, que consiste en leer las variables de estado mediante los transductores de posición y velocidad, realizar el cálculo de los términos no lineales y luego determinar las magnitudes de las variables de voltaje de entrada a los motores para accionar a las articulaciones del robot en tiempo real, de tal

†† Método propuesto en [7] y adaptado por el autor

manera que se pueda obtener una trayectoria articular temporal muy cercana como sea posible a la trayectoria deseada. La variable de voltaje de cada motor requerido para controlar la trayectoria del robot, se determina evaluando continuamente la formulación Dinámica Inversa del sistema. Las características de tensión o corriente del motor también se formulan en el esquema de cálculo de la dinámica que se convierten en la señal para ser aplicada al motor de cada articulación del robot. Debido a los errores de modelamiento físico y a la variación de los parámetros de la estructura dinámica, se miden las variables de posición y velocidad y se usan como retroalimentación, para calcular los componentes de corrección, que al sumarse a los términos no lineales del vector de control, proporcionan la señal de activación correctora a las variables de control de articulación.

La técnica de compensación no lineal básicamente es un tipo de control anticipativo o estimado que contiene componentes directas y en retroalimentación. Las componentes directas compensan la dinámica de las fuerzas y torsiones de interacción de todas las articulaciones y las componentes de retroalimentación permiten la corrección necesaria para compensar cualquier desviación respecto de la trayectoria deseada.

En la figura 7.1 se ilustra la estructura general del sistema de control mediante compensación no lineal para el manipulador de seis articulaciones.

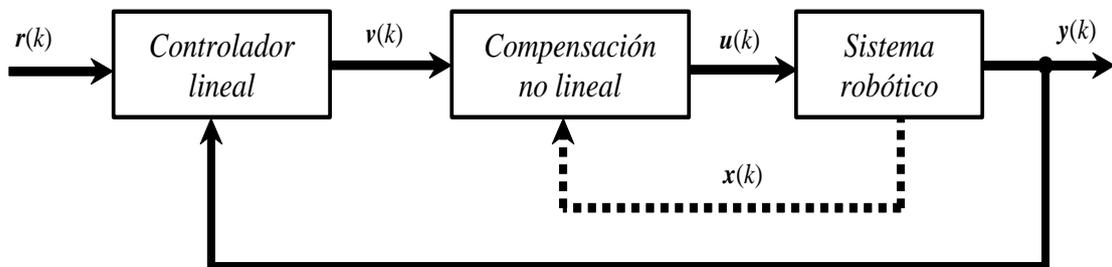


Figura 7.1 Esquema general del Sistema de Control de Compensación No lineal.

Gráfica elaborada por el autor

La formulación de la Dinámica Inversa multivariable del sistema actuadores-robot expresada mediante la ecuación (6.5) se vuelve a expresar de forma general, estructurada y vectorial de la siguiente manera:

$$u = M(q)\ddot{q} + \Omega(q, \dot{q}) + \Gamma(q) + \Phi(\dot{q}) + d(t) \quad (7.1)$$

La formulación de la Dinámica Directa multivariable del sistema actuadores-robot expresada mediante la ecuación general (6.8) se expresa como una ecuación vectorial no lineal como $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden como sigue:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{d}(t)) \quad (7.2)$$

La formulación de la Dinámica Directa del sistema motor-robot también se puede expresar mediante variables de estado como en la ecuación (6.7) que se vuelva a escribir como un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1) [\mathbf{u} - \mathbf{\Omega}(\mathbf{x}) - \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{d}(t)] \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Los términos involucrados en la ecuación (7.3) se definen como:

$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2]^T = [\mathbf{q} \ \dot{\mathbf{q}}]^T$: Vector de estado del sistema de dimensión 12×1 .

$\mathbf{x}_1(t) = \boldsymbol{\theta}(t)$: Vector de posición articular del robot, de dimensión 6×1 .

$\mathbf{x}_2(t) = \dot{\boldsymbol{\theta}}(t)$: Vector de velocidad articular del robot, de dimensión 6×1 .

$\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_c(t)$: Vector de voltaje aplicado a los actuadores, de dimensión 6×1 .

Las expresiones $\mathbf{M}(\mathbf{x}_1)$, $\mathbf{\Omega}(\mathbf{x})$, $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}_1)$, $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_2)$ de la ecuación (7.3) representan los términos no lineales totales del sistema robot que generan: el efecto inercial, el efecto debido al acoplo de velocidades y fuerza centrípeta, el efecto gravitatorio y el efecto debido a la fricción respectivamente.

Para aplicar esta técnica de control se considera que el sistema robot no presenta perturbaciones como un caso ideal, es decir $\mathbf{d}(t) = \mathbf{0}$, por lo tanto la ecuación (7.3) se puede reescribir en el espacio de estados como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1) [\mathbf{\Omega}(\mathbf{x}) + \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_2)] + \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1) \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

En la ecuación (7.4) se identifican dos expresiones generales no lineales y se pueden definir las como:

$$\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1) [\mathbf{\Omega}(\mathbf{x}) + \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_2)] = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})$$

Por lo tanto la ecuación (7.4) se vuelve a expresar de forma simplificada y compacta de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ -\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})\mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

El vector no lineal $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})$ es de dimensión 6×1 representa todos los efectos de las fuerzas y torsiones intrínsecas del sistema robot.

La matriz no lineal $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ de dimensión 6×6 es cuadrada y existente debido que la matriz $\mathbf{M}(\mathbf{x}_1)$ es no singular por lo tanto es invertible.

7.3 Vector de control no lineal

Para implementar el sistema de control del robot con los actuadores incorporados, aplicando la técnica de compensación no lineal, los términos no lineales de la dinámica real del sistema de la ecuación (7.4) o (7.5) se deben expresar mediante términos calculados digitalmente, más los términos relativos a las incertidumbres o errores que ocurren debido al modelamiento físico del robot, a la influencia de las inductancias de los motores actuadores no consideradas en las ecuaciones de la dinámica, a las perturbaciones externas o al tiempo de cálculo del procesador después de realizar la lectura del vector de estado $\mathbf{x}(t)$ del siguiente modo:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{M}_c(\mathbf{x}_1) + \Delta\mathbf{M}(\mathbf{x}_1) \quad \text{ó} \quad \Delta\mathbf{M}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{M}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{M}_c(\mathbf{x}_1) \quad (7.6.a)$$

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Omega}_c(\mathbf{x}) + \Delta\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}) \quad \text{ó} \quad \Delta\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\Omega}_c(\mathbf{x}) \quad (7.6.b)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}_1) = \boldsymbol{\Gamma}_c(\mathbf{x}_1) + \Delta\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}_1) \quad \text{ó} \quad \Delta\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}_1) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}_1) - \boldsymbol{\Gamma}_c(\mathbf{x}_1) \quad (7.6.c)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}_2) = \boldsymbol{\Phi}_c(\mathbf{x}_2) + \Delta\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}_2) \quad \text{ó} \quad \Delta\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}_2) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}_2) - \boldsymbol{\Phi}_c(\mathbf{x}_2) \quad (7.6.d)$$

Los nuevos términos involucrados en las ecuaciones (7.6) se definen literalmente como:

- $\mathbf{M}_c(\mathbf{x}_1)$, $\boldsymbol{\Omega}_c(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\Gamma}_c(\mathbf{x}_1)$, $\boldsymbol{\Phi}_c(\mathbf{x}_2)$ representan las cantidades o valores evaluados (calculados) numéricamente correspondientes a los efectos no lineales del robot: efecto inercial total del robot, efecto de acoplo de velocidades y fuerza centrífuga, efecto de gravedad y efecto de fricción respectivamente.
- $\Delta\mathbf{M}$, $\Delta\boldsymbol{\Omega}$, $\Delta\boldsymbol{\Gamma}$, $\Delta\boldsymbol{\Phi}$ denotan las incertidumbres o errores respectivos al medir y evaluar los términos de la dinámica del sistema robot.

Las ecuaciones (7.4) y (7.5) representan vectorialmente la forma normal de un sistema de control no lineal involutivo, con el vector de control $\mathbf{u}(t)$ despejable que indica físicamente la representación de un sistema controlable que permite la cancelación y eliminación directa de los términos no lineales simplificados $\boldsymbol{\alpha}(x)$ y $\boldsymbol{\beta}(x)$, mediante una compensación dinámicamente calculada en línea de forma instantánea a una velocidad suficientemente alta. Para cancelar los términos no lineales de la dinámica del sistema robot, se plantea una ecuación de control no lineal aproximada para linealizar la ecuación (7.5) la que se expresa como:

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\alpha}_c^{-1}(x) [\boldsymbol{\beta}_c(x) + \mathbf{v}(t)] \quad (7.7)$$

Las expresiones $\boldsymbol{\alpha}_c(x)$, $\boldsymbol{\beta}_c(x)$ de la ecuación (7.7) son los términos calculados que corresponden respectivamente a las expresiones no lineales $\boldsymbol{\alpha}(x)$, $\boldsymbol{\beta}(x)$ de la ecuación simplificada (7.5).

El vector $\mathbf{v}(t)$ incluido en la ecuación (7.7) con unidades de aceleración articular (rad/seg^2 .) es el nuevo vector de control pero del sistema linealizado con los términos no lineales eliminados/cancelados teóricamente en su totalidad, el cual también depende de la rapidez con la que se evalúan los términos no lineales de la dinámica del sistema, de la precisión con la que se realice la medida instantánea del vector de posición $\mathbf{q}(t)$ y velocidad $\dot{\mathbf{q}}(t)$ en tiempo real.

La ecuación de control no lineal $\mathbf{u}(t)$ que permite linealizar la expresión vectorial de la dinámica (7.5) se determina reemplazando las ecuaciones (7.6) en la ecuación de control (7.7) y se obtiene una expresión en términos de las cantidades no lineales calculados que se expresa como:

$$\mathbf{u}(t) = [\boldsymbol{\Omega}_c(x) + \boldsymbol{\Gamma}_c(x_2) + \boldsymbol{\Phi}_c(x_1)] + \mathbf{M}_c(x_1)\mathbf{v}(t) \quad (7.8)$$

La ecuación de control (7.8) en tiempo discreto considerando un periodo de muestreo T apropiado se puede expresar como sigue: (*)

$$\mathbf{u}(k) = [\boldsymbol{\Omega}_c(x(k)) + \boldsymbol{\Gamma}_c(x_1(k)) + \boldsymbol{\Phi}_c(x_2(k))] + \mathbf{M}_c(x_1(k))\mathbf{v}(k) \quad (7.9)$$

En la figura 7.2 se muestra el diagrama de bloques que representa al sistema de control del robot linealizado mediante la compensación no lineal dinámica en tiempo continuo, expresado mediante las ecuaciones (7.4) y (7.8).

* Ecuación deducida por el autor

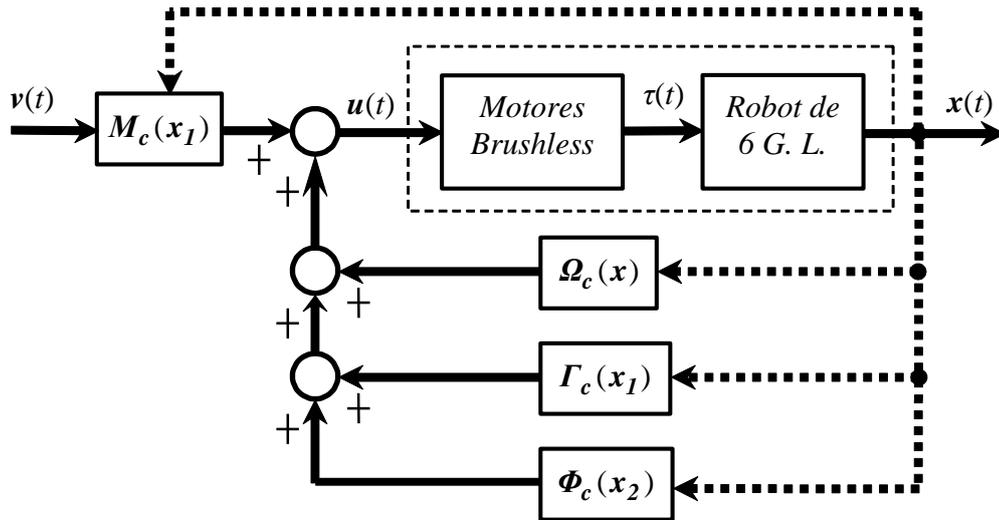


Figura 7.2 Diagrama de bloques del control por realimentación no lineal.
Gráfica elaborada por el autor

Reemplazando la expresión de control no lineal de la ecuación (7.8) en la ecuación de la dinámica del sistema (7.4) y luego ordenando se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -M^{-1}(x) [\Omega(x) - \Omega_c(x) + \Gamma(x) - \Gamma_c(x) + \Phi(x) - \Phi_c(x)] + M^{-1}(x) M_c(x) v \end{bmatrix}$$

Reemplazando la expresión de los errores de cálculo de las ecuaciones (7.6) en la última ecuación y operando adecuadamente se obtiene:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -M^{-1}(x_1) [\Delta\Omega(x) + \Delta\Gamma(x_1) + \Delta\Phi(x_2) + \Delta M(x_1)v] + v \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

La ecuación (7.10) depende de las incertidumbres intrínsecas, pero si la formulación es precisa y se realiza la evaluación de la dinámica del robot de manera exacta y a una velocidad suficientemente alta, entonces las incertidumbres de las ecuaciones (7.6) se pueden despreciar, por lo tanto la expresión interna del extremo derecho de la ecuación (7.10) en el mejor de los casos se puede aproximar a cero, es decir:

$$\Delta\Omega(x) + \Delta\Gamma(x_1) + \Delta\Phi(x_2) + \Delta M(x_1)v \approx 0 \quad (7.11)$$

Pero por lo general la ecuación (7.11) no siempre se cumple, por lo que se debe tratar como un sistema de parámetros y valores intrínsecamente inciertos, entonces el vector de incertidumbres de la ecuación (7.10) de forma instantánea se puede linealizar y expresarla mediante una ecuación matricial lineal en términos del vector de estado $x(t)$ y del vector de control $v(t)$ aproximadamente como: (*)

* Ecuación formulada por el autor

$$M^{-1}(x_1) [\Delta\Omega(x) + \Delta\Gamma(x_1) + \Delta\Phi(x_2) + \Delta M(x_1)v] \approx \Delta A_2 x_1 + \Delta A_1 x_2 + \Delta B v \quad (7.12)$$

Los términos ΔA_1 , ΔA_2 y ΔB de la ecuación (7.12) se considera que son matrices diagonales de dimensión 6×6 con parámetros cambiantes e inciertos de magnitudes pequeñas como resultado de la cancelación y eliminación en gran magnitud de los efectos no lineales de la dinámica del sistema robótico, con lo cual la ecuación (7.10) queda linealizada y desacoplada en cada instante y sintetizada con nuevos parámetros inciertos y con el vector de control $v(t)$, que junto con la ecuación de respuesta (6.9), mediante variables de estado el sistema se puede expresar linealmente como:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\Delta A_2 & -\Delta A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ (\mathbf{I} - \Delta B) \end{bmatrix} v \quad (7.13.a)$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = C x \quad (7.13.b)$$

En la figura 7.3 se representa el diagrama de bloques del sistema linealizado correspondiente a las ecuaciones (7.13).

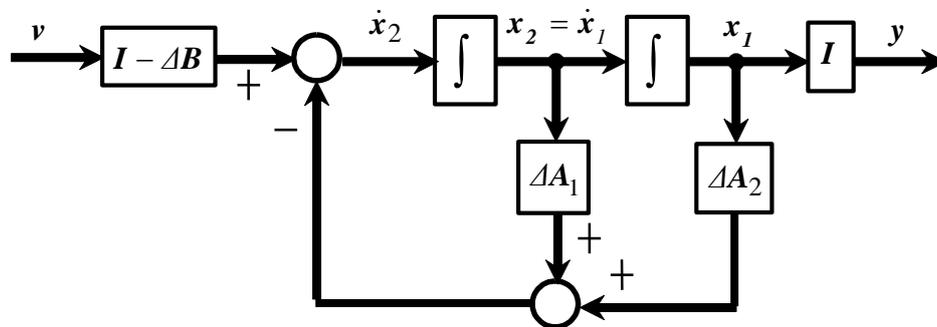


Figura 7.3 Diagrama de bloques equivalente del sistema linealizado.

Gráfica elaborada por el autor

El sistema físico linealizado representado en la figura 7.3 también se puede expresar en términos de la transformada de Laplace como sigue:

$$Y(s) = \left(I s^2 + \Delta A_1 s + \Delta A_2 \right)^{-1} (I - \Delta B) V(s) \quad (7.14)$$

La ecuación (7.14) encapsula n ecuaciones de segundo orden y de tipo cero, por lo que si no se incluyen integradores en lazo cerrado aparecerán desviaciones o errores en régimen permanente para entradas de referencia tipo constante, pero si la incertidumbre ΔA_2 es lo suficientemente pequeño se puede considerar de tipo uno.

7.4 Vector de control lineal

Para formular la ecuación de control $\mathbf{v}(t)$ del sistema linealizado que resuelve el problema de control de trayectoria del robot denotada por la ecuación (7.13), asumiendo que se especifica y planifica una trayectoria de referencia $\mathbf{r}(t)$ suficientemente suave que presente al menos dos derivadas, se puede implementar diversas formas de acciones de control. Entre éstas se describen de forma concreta las siguientes:

7.4.1 Controlador Proporcional-Diferencial con aceleración referencial

Esta ley de control consiste en una acción de control PD acelerado que permite al robot obtener una respuesta rápida especialmente cuando se trata de seguir en el tiempo a la variable de referencia $\mathbf{q}_r(t)$ pero origina valores muy grandes en el vector de control cuando el vector de referencia varía de forma rápida en el tiempo. Esta ley de control se expresa matricialmente utilizando la siguiente ecuación:

$$\mathbf{v}(t) = \ddot{\mathbf{q}}_r(t) + \mathbf{K}_D(\dot{\mathbf{q}}_r(t) - \dot{\mathbf{q}}(t)) + \mathbf{K}_P(\mathbf{q}_r(t) - \mathbf{q}(t)) \quad (7.15)$$

Los términos \mathbf{K}_P y \mathbf{K}_D de la ecuación matricial (7.15) representan las ganancias matriciales diagonales y ajustables de dimensión 6×6 que permiten el desacoplamiento del sistema para controlar a las articulaciones del robot de forma independiente. Estas matrices están asociadas con las ganancias de error de posición y de velocidad de las articulaciones del robot respectivamente. La ecuación (7.15) se puede representar en términos de la transformada de *Laplace* como:

$$\mathbf{V}(s) = (\mathbf{I}s^2 + \mathbf{K}_D s + \mathbf{K}_P)\mathbf{Q}_r(s) - (\mathbf{K}_D s + \mathbf{K}_P)\mathbf{Q}(s) \quad (7.16)$$

Reemplazando la ecuación (7.16) en la ecuación (7.14) y operando adecuadamente se obtiene la ecuación del sistema de lazo cerrado como:

$$\mathbf{Q}(s) = \boldsymbol{\Psi}(s)^{-1}(\mathbf{I} - \Delta\mathbf{B})(\mathbf{I}s^2 + \mathbf{K}_D s + \mathbf{K}_P)\mathbf{Q}_r(s) \quad (7.17)$$

La expresión $\boldsymbol{\Psi}(s)$ de la ecuación (7.17), representa el polinomio característico del sistema linealizado y desacoplado que se expresa de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\Psi}(s) = \mathbf{I}s^2 + (\Delta\mathbf{A}_1 + (\mathbf{I} - \Delta\mathbf{B})\mathbf{K}_D)s + (\Delta\mathbf{A}_2 + (\mathbf{I} - \Delta\mathbf{B})\mathbf{K}_P) \quad (7.18)$$

El polinomio matricial $\boldsymbol{\Psi}(s)$ descrito en la ecuación (7.18) es fundamental para

matricial y es el mismo que el de la ecuación (7.18), es fundamental para determinar las ganancias de las matrices \mathbf{K}_P y \mathbf{K}_D del controlador, este polinomio se expresa como:

$$\Psi(s) = \mathbf{I}s^2 + (\Delta\mathbf{A}_1 + (\mathbf{I} - \Delta\mathbf{B})\mathbf{K}_D)s + (\Delta\mathbf{A}_2 + (\mathbf{I} - \Delta\mathbf{B})\mathbf{K}_P) \quad (7.22)$$

Utilizando el diagrama de bloques del sistema linealizado de la figura 7.3 e incluyendo el controlador descrito mediante la ecuación (7.19) se representa al sistema de control completo en la figura 7.5.

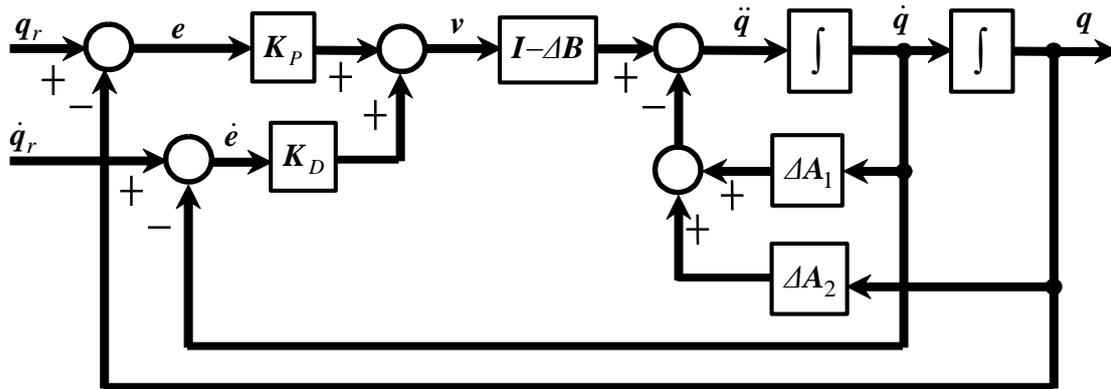


Figura 7.5 Controlador lineal Proporcional Diferencial.

Gráfica elaborada por el autor

7.4.3 Controlador mediante realimentación de estados

Para diseñar un controlador mediante realimentación de estados, las ecuaciones (7.13) se pueden escribir de una forma simplificada como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} \quad (7.23.a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (7.23.b)$$

La ley de control para el sistema linealizado expresado por las ecuaciones (7.23) permite realizar la realimentación de los estados $\mathbf{x}(t)$ para seguir a una variable de referencia q_r y se expresa mediante la siguiente ecuación: (*)

$$\mathbf{v} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{K}_0 q_r \quad (7.24)$$

La matriz de realimentación de estados $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_1 \ \mathbf{K}_2]$ de la ecuación matricial (7.24) está formada por dos matrices \mathbf{K}_1 y \mathbf{K}_2 diagonales de dimensión 6×6 cada una y la matriz \mathbf{K}_0 es la matriz de prealimentación directa también de dimensión 6×6 . El diseño de la matriz \mathbf{K} se puede realizar de forma independiente para cada articulación aplicando el

* Ecuación formulada por el autor

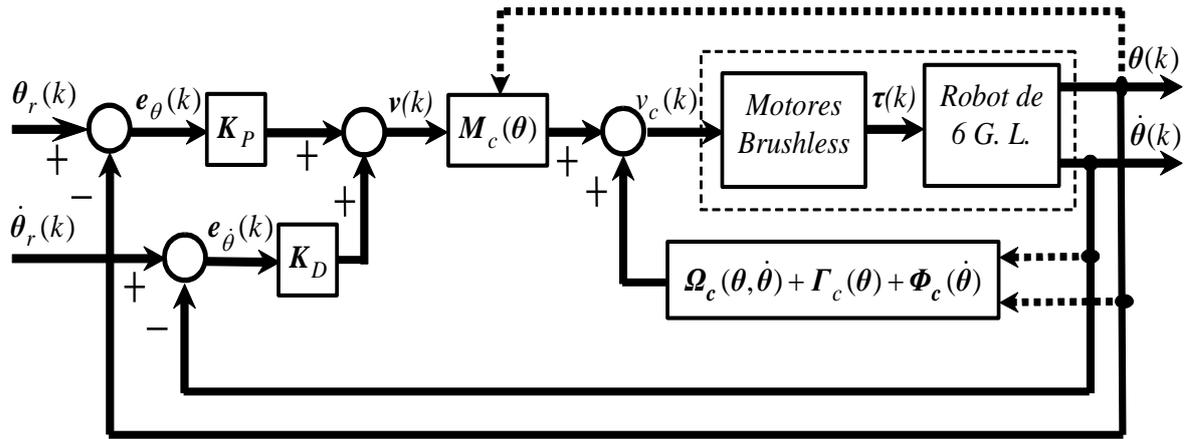


Figura 7.7 Diagrama del Sistema de Control con Compensación No lineal.

Gráfica elaborada por el autor

Para determinar las matrices K_P y K_D del sistema de control representado en la figura 7.7 se hace uso de las ecuaciones (7.18) y (7.21) pero de forma independiente para cada grado de libertad del robot puesto que el sistema de control se encuentra totalmente desacoplado por lo que cada articulación del robot se puede controlar independientemente por lo tanto se deduce para cada articulación una función de transferencia linealizada como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\Theta(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{(1 - \Delta B)(K_D s + K_P)}{s^2 + [\Delta A_1 + (1 - \Delta B)K_D]s + [\Delta A_2 + (1 - \Delta B)K_P]} \quad (7.26)$$

El cálculo de las ganancias escalares K_P y K_D se realiza considerando las incertidumbres nulas, es decir se evalúan para $\Delta A_1 \cong 0$, $\Delta A_2 \cong 0$ y $\Delta B \cong 0$; por lo tanto la expresión (7.26) se reduce simplemente a una función de transferencia de segundo orden de simple entrada y simple salida independiente de la dinámica del sistema robot de la siguiente manera:

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{K_D s + K_P}{s^2 + K_D s + K_P} \quad (7.27)$$

El polinomio de segundo grado del denominador de la expresión (7.27) se puede relacionar con el polinomio general de un sistema de segundo orden normalizado del siguiente modo:

$$s^2 + K_D s + K_P \equiv s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (7.28)$$

Por lo tanto los valores de las ganancias del controlador K_P y K_D incluidas en el polinomio característico de la ecuación (7.27) se eligen convenientemente en términos de los parámetros apropiados de funcionamiento ζ y ω_n para sistemas lineales de segundo orden, entonces igualando los coeficientes de los polinomios de la ecuación (7.28) se obtienen los valores de las ganancias del controlador Proporcional Diferencial para cada articulación del robot:

$$K_P = \omega_n^2 \quad \text{y} \quad K_D = 2 \zeta \omega_n \quad (7.29)$$

El comportamiento dinámico de un sistema de control de segundo orden está determinado por la frecuencia natural no amortiguada ω_n y por el coeficiente de amortiguamiento ζ . Por razones de seguridad, el sistema no puede presentar una respuesta subamortiguada para una entrada de posición articular tipo escalón, sino que debe presentar una respuesta sobreamortiguada o críticamente amortiguada, para evitar vibraciones o sacudidas debido a las oscilaciones, por lo que se requiere que se cumpla la condición $\zeta \geq 1$. Debido a la existencia del cero en la función de transferencia de la ecuación (7.27) se altera el régimen transitorio apareciendo normalmente sobreimpulsos, disminuyendo el tiempo de establecimiento de la respuesta y con el fin de no excitar la oscilación estructural y la resonancia de la articulación, la frecuencia natural ω_n se puede fijar en $\omega_n \leq 0.5 \omega_r$, siendo ω_r la frecuencia resonante estructural de articulación, propiedad del material utilizado en la construcción mecánica del robot.

El proceso de linealidad y desacoplabilidad por esta técnica es aceptable cuando el robot se mueve a velocidades moderadas; de lo contrario, esta técnica en tiempo real es sumamente difícil o casi imposible, por lo que es necesario contar con un sistema multiprocesador con una alta potencia numérica para procesar las operaciones matemáticas de la dinámica del robot a velocidades significativamente altas, porque al enviar el vector de mando $\mathbf{u}(t)$, la dinámica del robot ya no es la misma debido al tiempo empleado en calcular los términos de la ley de control expresada en la ecuación (7.8).

7.5 Simulación Gráfica del Sistema de Control propuesto

La programación y simulación empleando esta técnica de control se ha desarrollado utilizando el programa *MatLab*. Para esto se ha aplicado la ecuación (6.5) de la Dinámica Inversa del sistema para determinar los valores instantáneos de los componentes

vectoriales no lineales que conforman el vector de voltaje calculado $\mathbf{u}_c(t)$. Para determinar los vectores de estados $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ producto de la solución de la Dinámica Directa (6.7) del sistema se ha empleado el método de *Euler* haciendo uso de las ecuaciones (6.12) con el objetivo de emular la dinámica real del sistema (en lugar de realizar la lectura de los transductores del sistema), añadiendo además perturbaciones permanentes de tipo sinusoidal con el fin de obtener de forma más real la simulación de control de trayectorias del sistema robot. Para realizar el control de trayectorias articulares se han utilizado las leyes de control no lineal de la ecuación (7.9) y la ley de control lineal de la ecuación (7.25), utilizando los valores constantes de los parámetros del sistema mostrados en el anexo A y las ecuaciones dinámicas expresadas en forma de texto que se presentan en el anexo B.

Para realizar la simulación de este método de control se han establecido funciones temporales suaves para $0 \leq t = kT \leq 10 \text{ seg.}$ que representan los componentes del vector de posición articular referencial $\theta_r(t)$, estas curvas se conforman con segmentos de funciones trigonométricas con sus derivadas respectivas, las primeras derivadas conforman los componentes del vector velocidad articular de referencia $\dot{\theta}_r(t)$ y las segundas derivadas conforman los componentes del vector aceleración articular de referencia $\ddot{\theta}_r(t)$ que se muestran en el capítulo 10, ecuaciones (10.10). En la figura 7.8 se muestran las gráficas que conforman la trayectoria articular $\theta_r(t)$ y velocidad articular $\dot{\theta}_r(t)$ de referencia.

Las gráficas de las figuras consecutivas 7.9.a - 7.9.f conforman los componentes individuales del vector articular de referencia $\theta_r(t)$, componentes del vector articular controlado $\theta(t)$ y del error de posición articular de control entre éstos $e_\theta(t) = \theta_r(t) - \theta(t)$. Las gráficas de las figuras consecutivas 7.10.a - 7.10.f conforman los componentes individuales del vector de velocidad articular de referencia $\dot{\theta}_r(t)$, componentes del vector de velocidad articular controlado $\dot{\theta}(t)$ y error de velocidad articular de control entre éstos $\dot{e}_\theta(t) = \dot{\theta}_r(t) - \dot{\theta}(t)$. Las gráficas de las figuras consecutivas 7.11.a - 7.11.f corresponden a los componentes del vector de control de articulación referencial $\mathbf{u}_r(t)$ y real $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_c(t)$ que se aplican a los amplificadores de los motores actuadores, los cuales generan las variables de torsión articular $\boldsymbol{\tau}(t)$ para ser aplicadas a las articulaciones del robot.

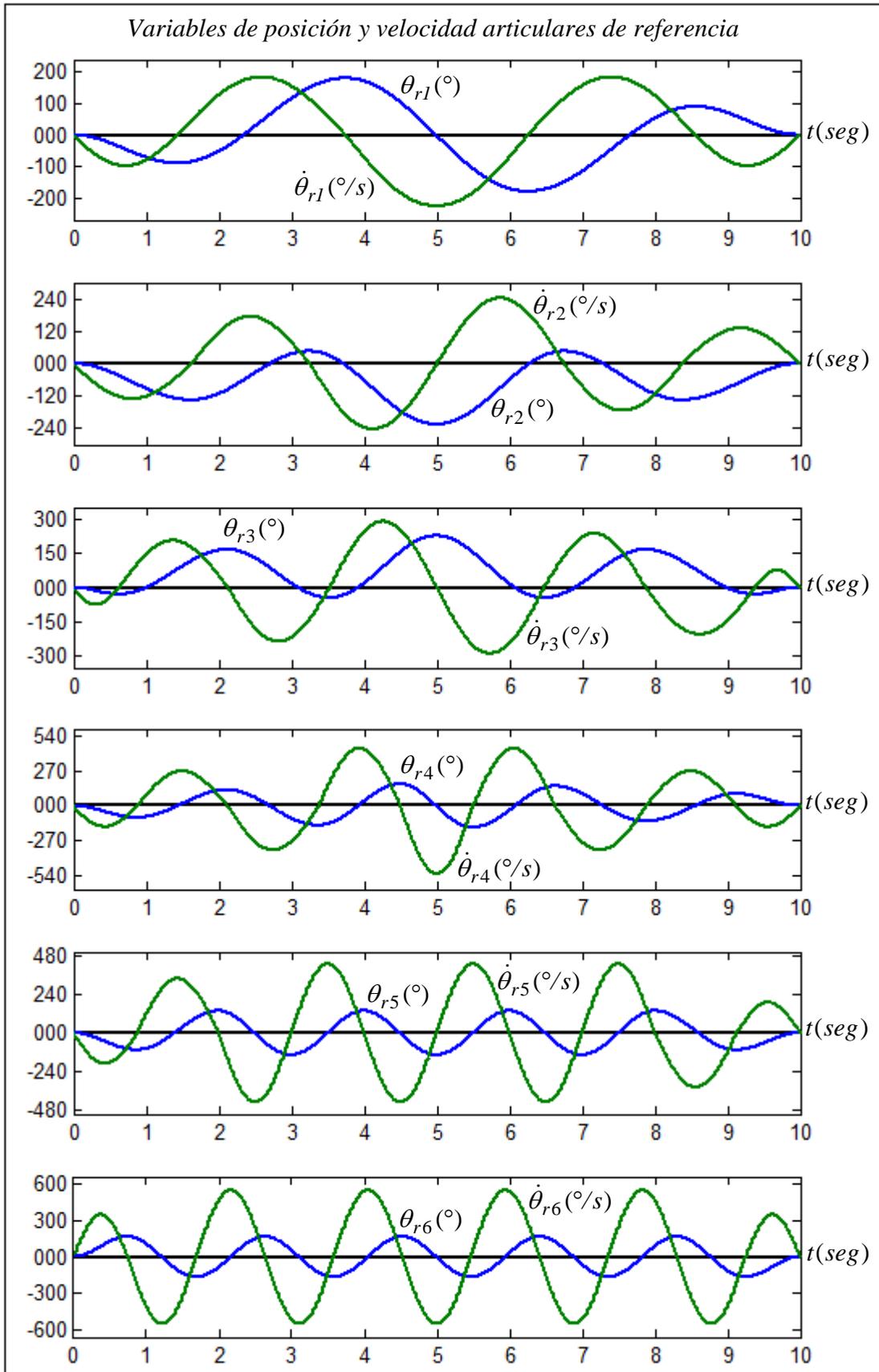


Figura 7.8 Variables de referencia de posición y velocidad articulares: $\theta_r(t)$ y $\dot{\theta}_r(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

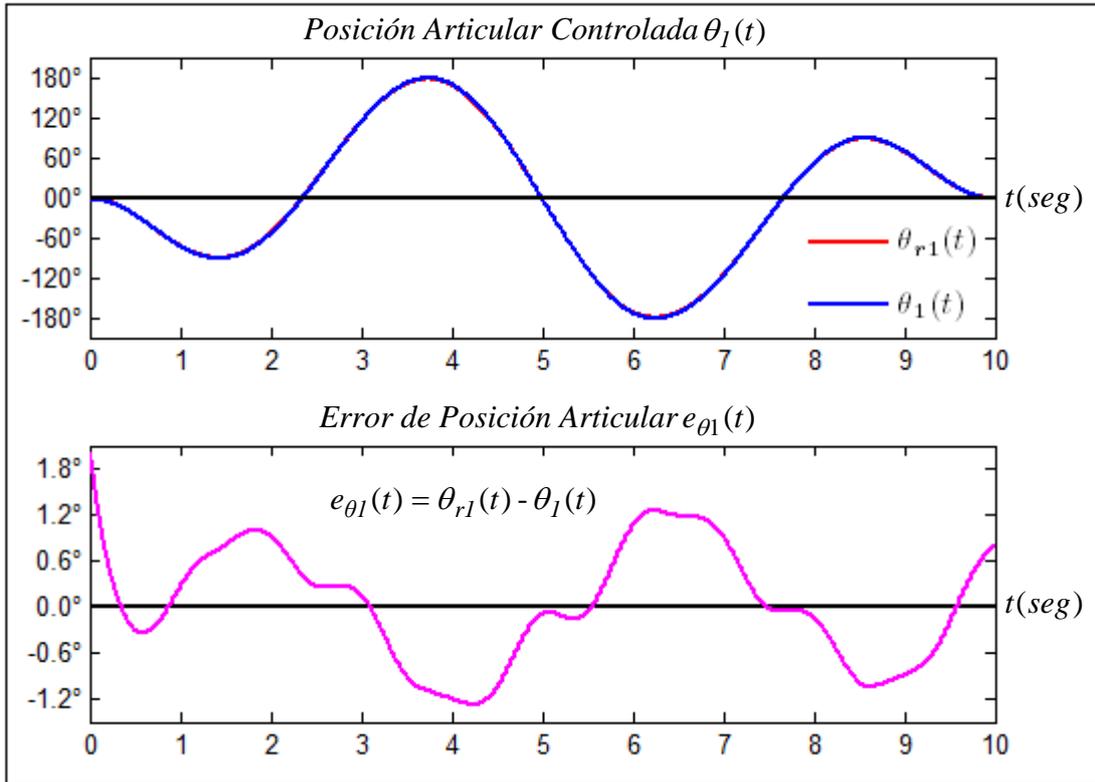


Figura 7.9.a Variables de la posición articular No 1: $\theta_{r1}(t)$, $\theta_1(t)$ y $e_{\theta_1}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

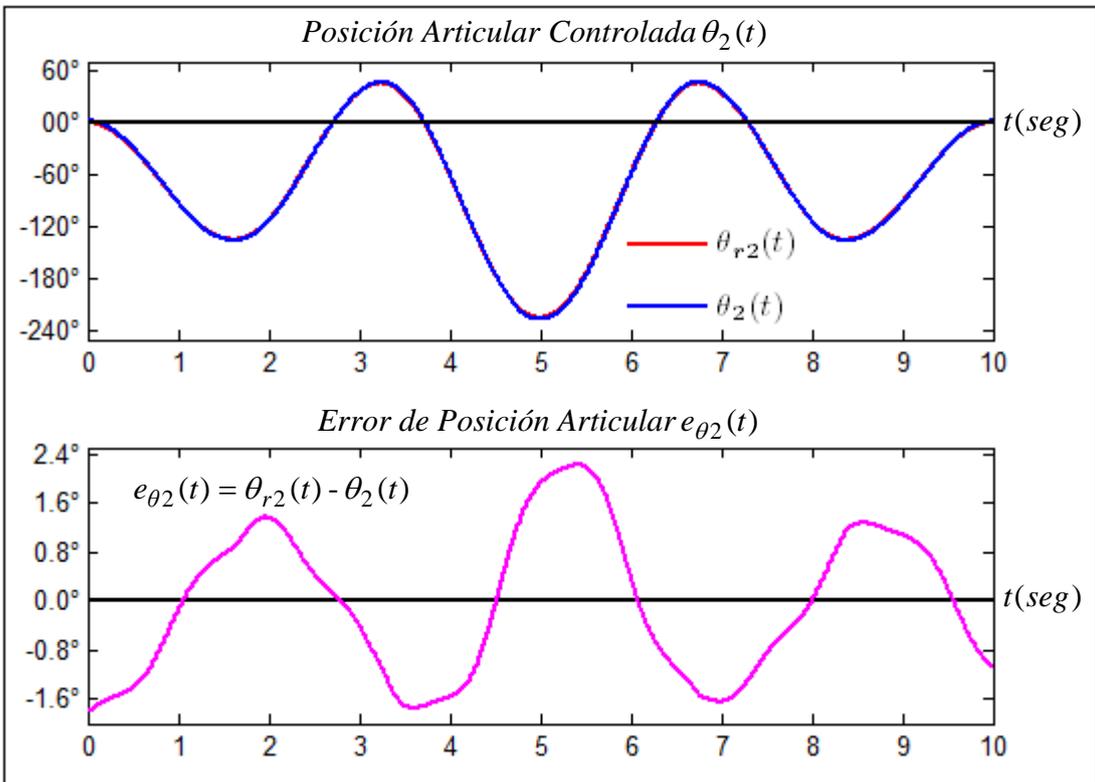


Figura 7.9.b Variables de la posición articular No 2: $\theta_{r2}(t)$, $\theta_2(t)$ y $e_{\theta_2}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

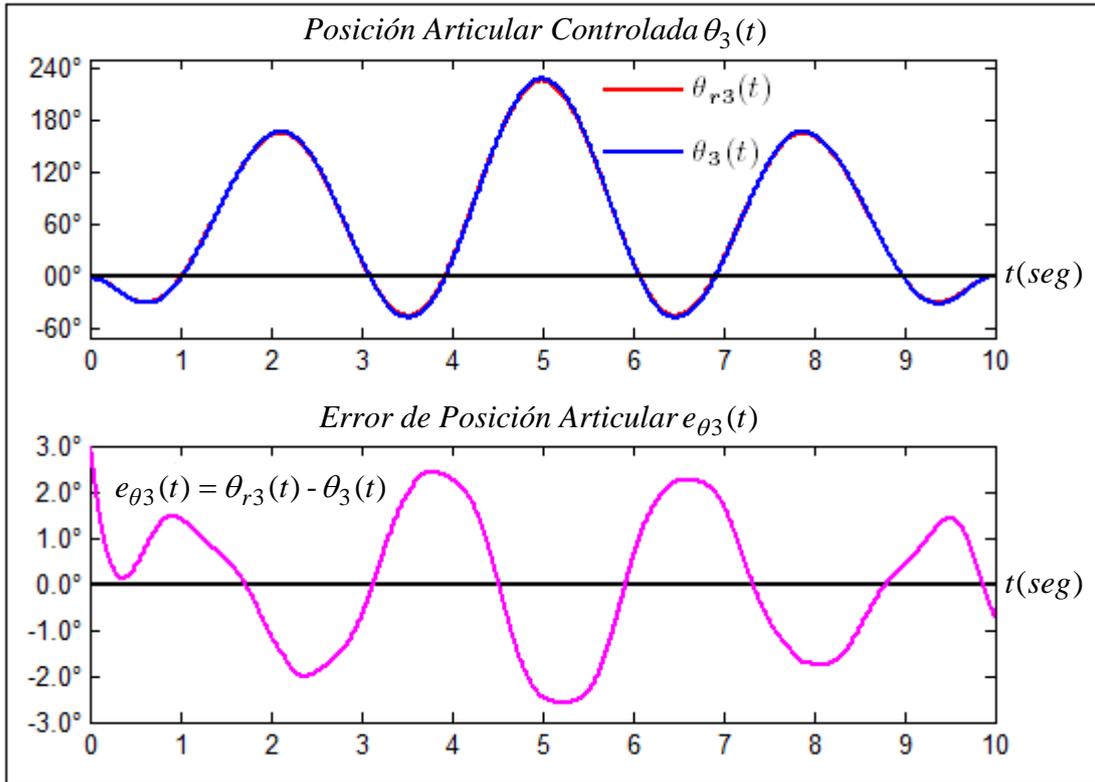


Figura 7.9.c Variables de la posición articular No 3: $\theta_{r3}(t)$, $\theta_3(t)$ y $e_{\theta_3}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

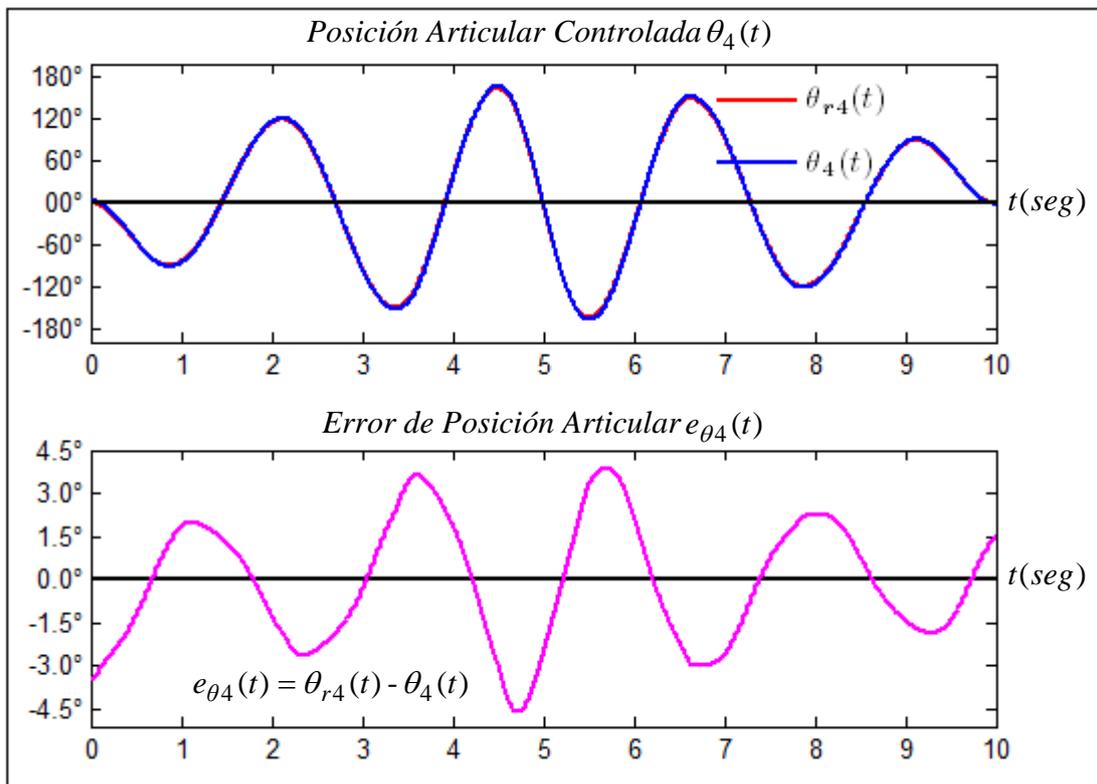


Figura 7.9.d Variables de la posición articular No 4: $\theta_{r4}(t)$, $\theta_4(t)$ y $e_{\theta_4}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

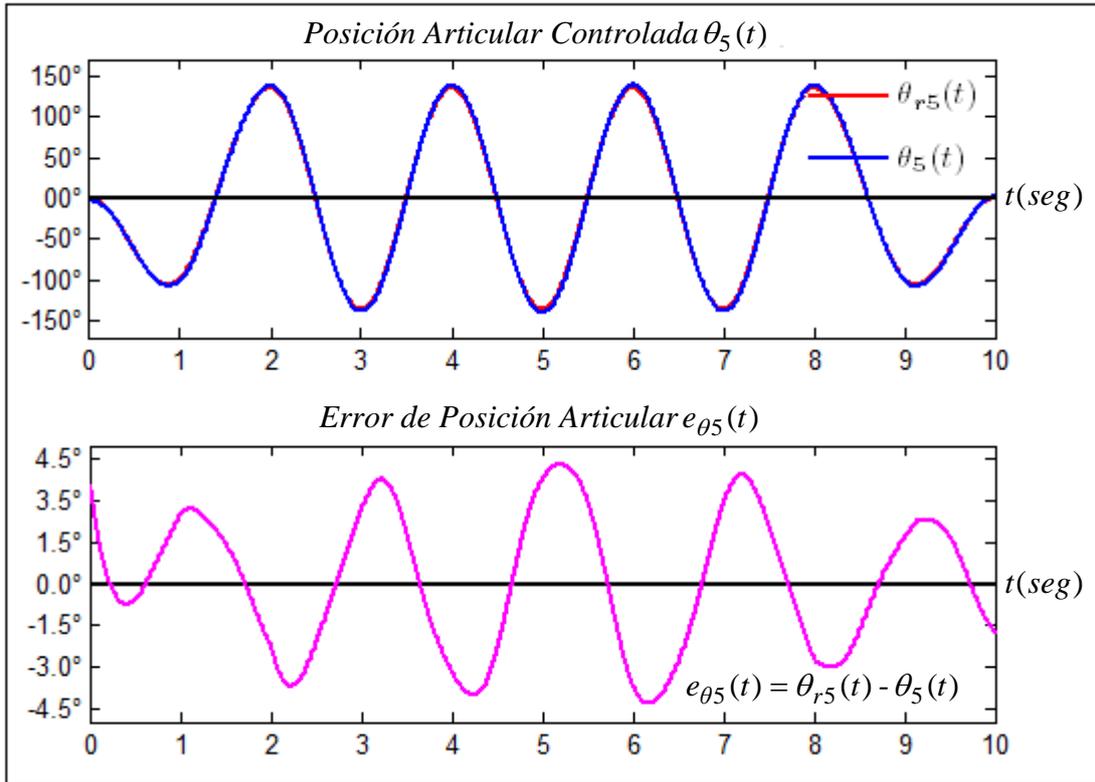


Figura 7.9.e Variables de la posición articular No 5: $\theta_{r5}(t)$, $\theta_5(t)$ y $e_{\theta_5}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

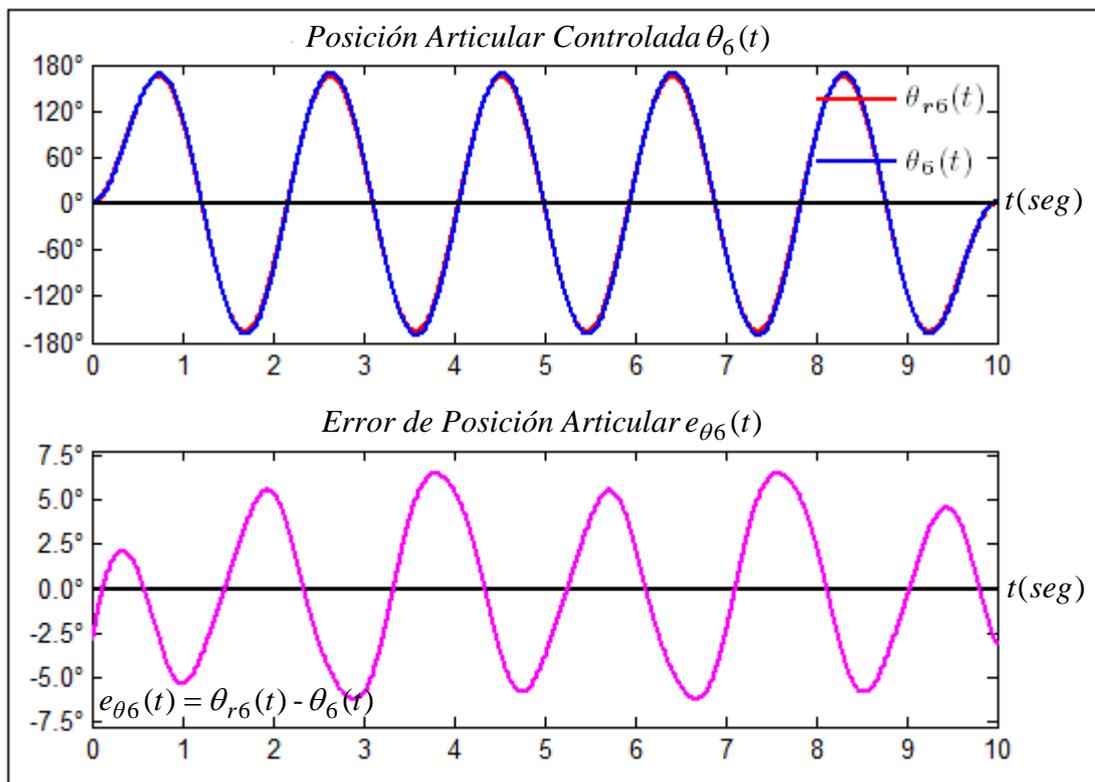


Figura 7.9.f Variables de la posición articular No 6: $\theta_{r6}(t)$, $\theta_6(t)$ y $e_{\theta_6}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

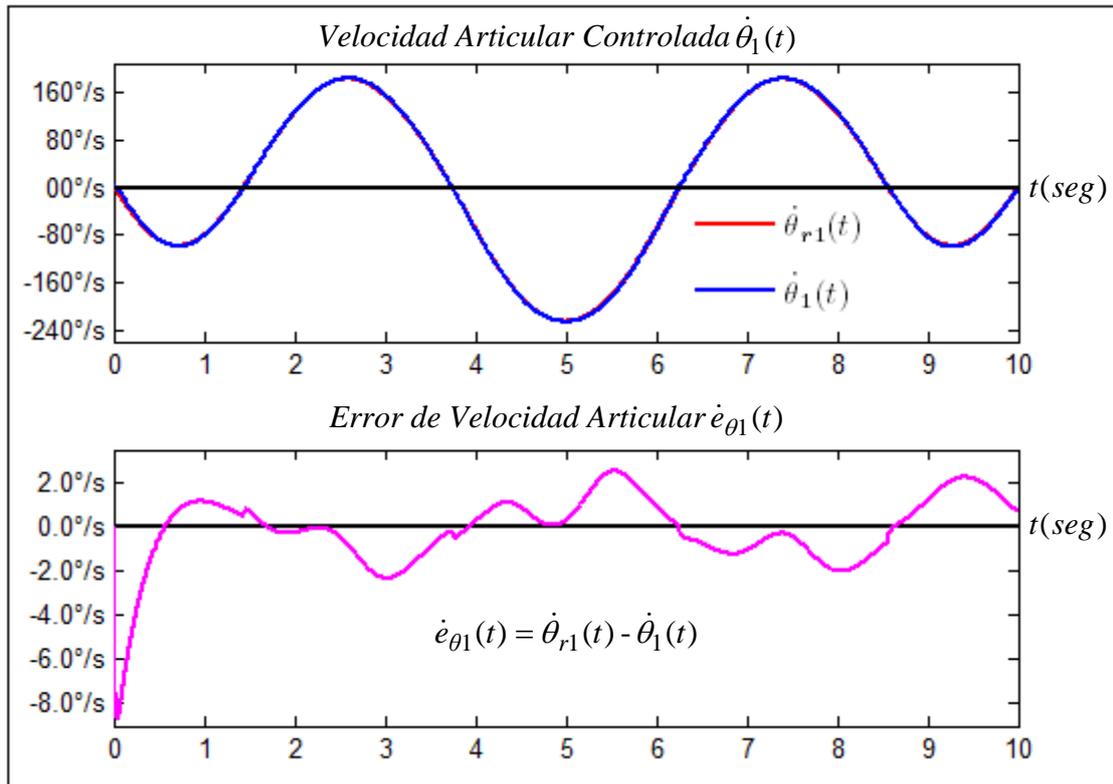


Figura 7.10.a Variables de la velocidad articular No 1: $\dot{\theta}_{r1}(t)$, $\dot{\theta}_1(t)$ y $\dot{e}_{\theta_1}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

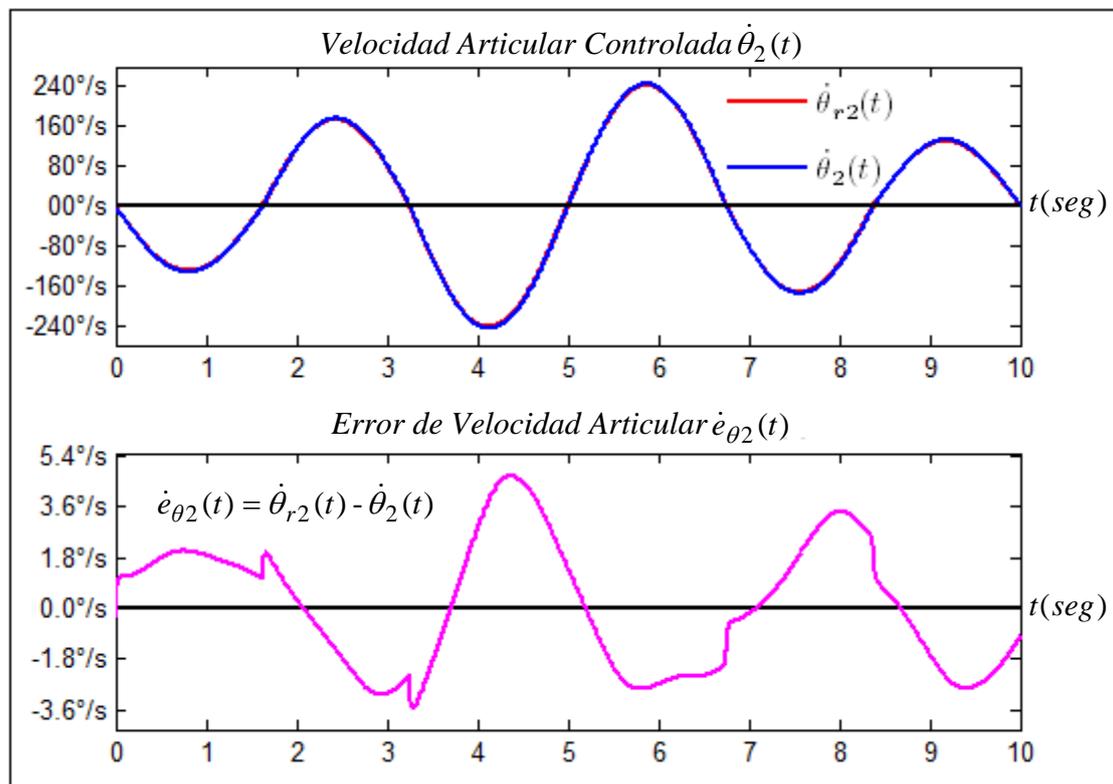


Figura 7.10.b Variables de la velocidad articular No 2: $\dot{\theta}_{r2}(t)$, $\dot{\theta}_2(t)$ y $\dot{e}_{\theta_2}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

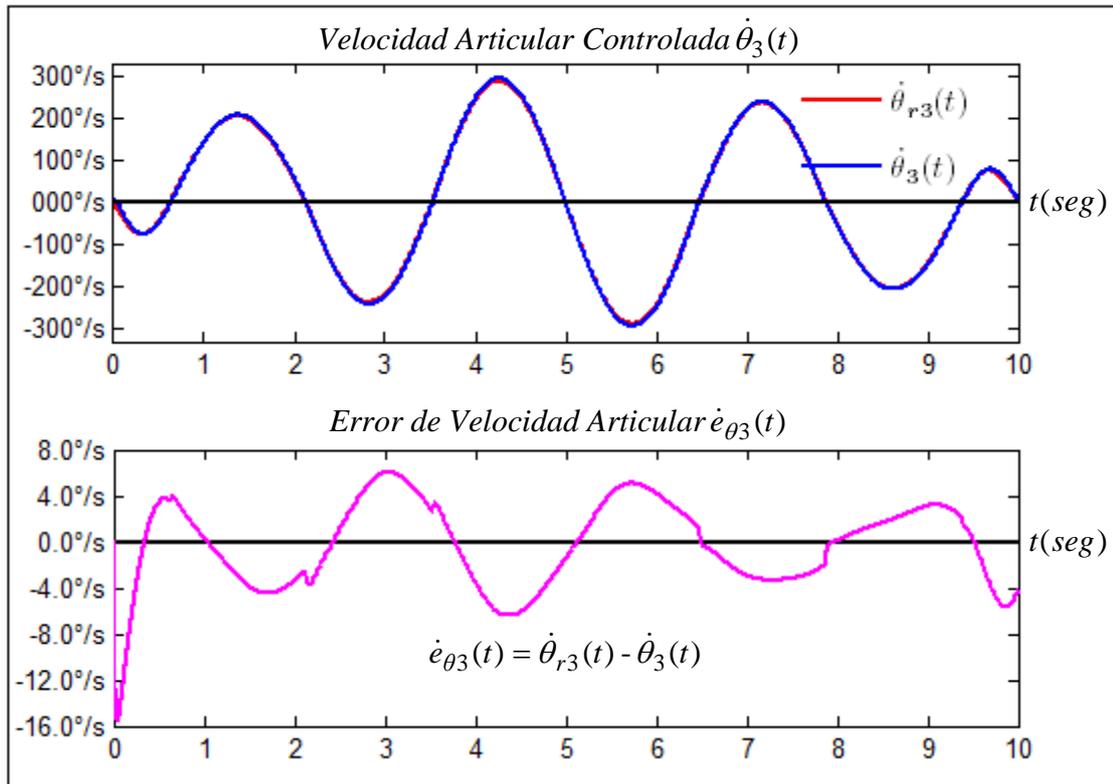


Figura 7. 10.c Variables de la velocidad articular No 3: $\dot{\theta}_{r3}(t)$, $\dot{\theta}_3(t)$ y $\dot{e}_{\theta_3}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

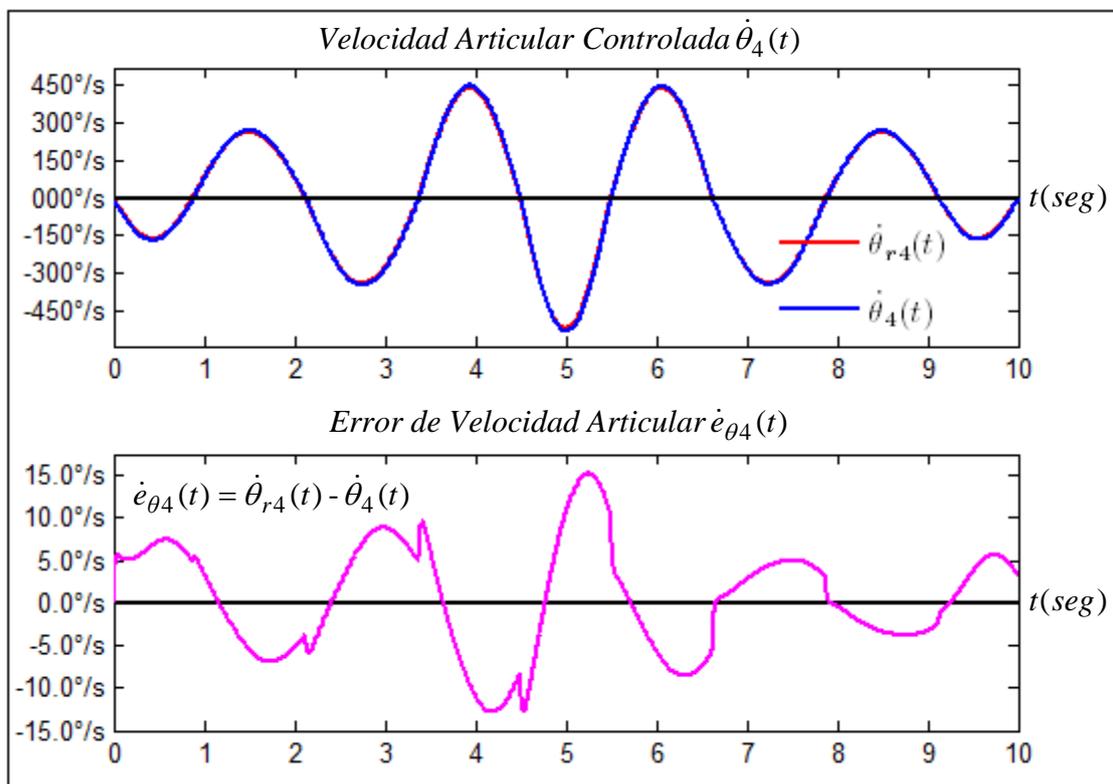


Figura 7.10.d Variables de la velocidad articular No 4: $\dot{\theta}_{r4}(t)$, $\dot{\theta}_4(t)$ y $\dot{e}_{\theta_4}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

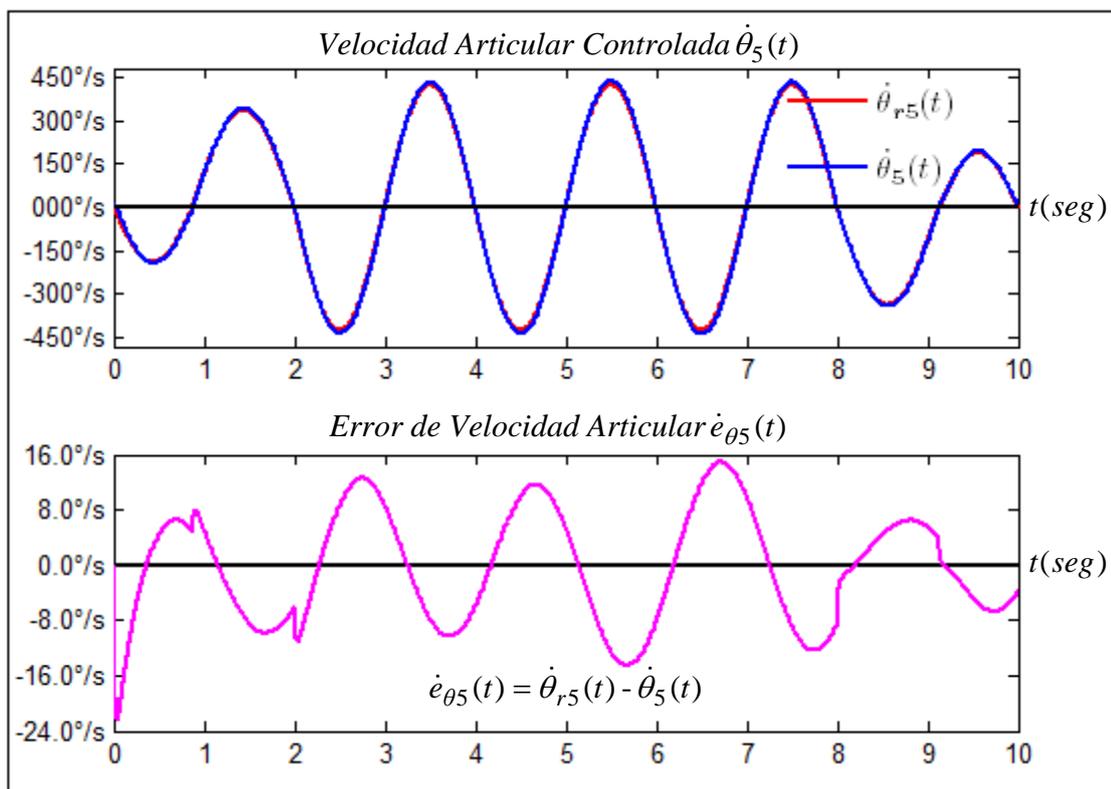


Figura 7.10.e Variables de la velocidad articular No 5: $\dot{\theta}_{r5}(t)$, $\dot{\theta}_5(t)$ y $\dot{e}_{\theta_5}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

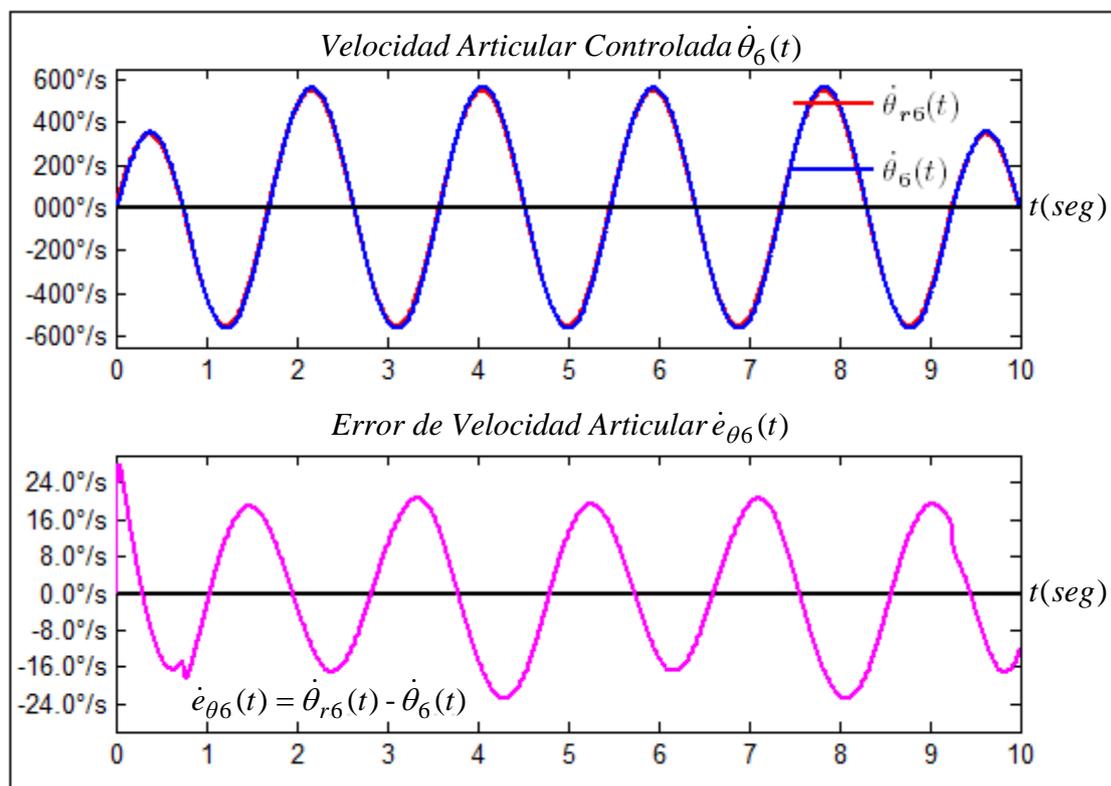


Figura 7. 10.f Variables de la velocidad articular No 6: $\dot{\theta}_{r6}(t)$, $\dot{\theta}_6(t)$ y $\dot{e}_{\theta_6}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

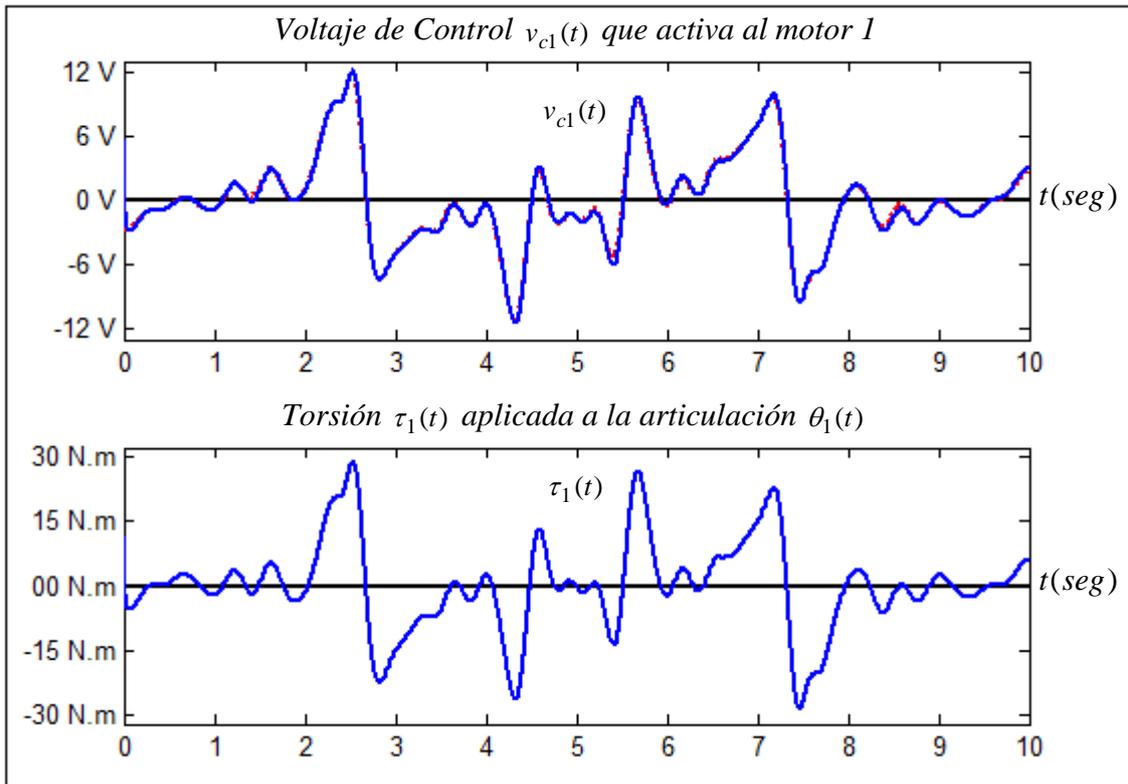


Figura 7.11.a Variables de control de la articulación No 1: $u_{r1}(t)$, $u_1(t) = v_{c1}(t)$, $\tau_1(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

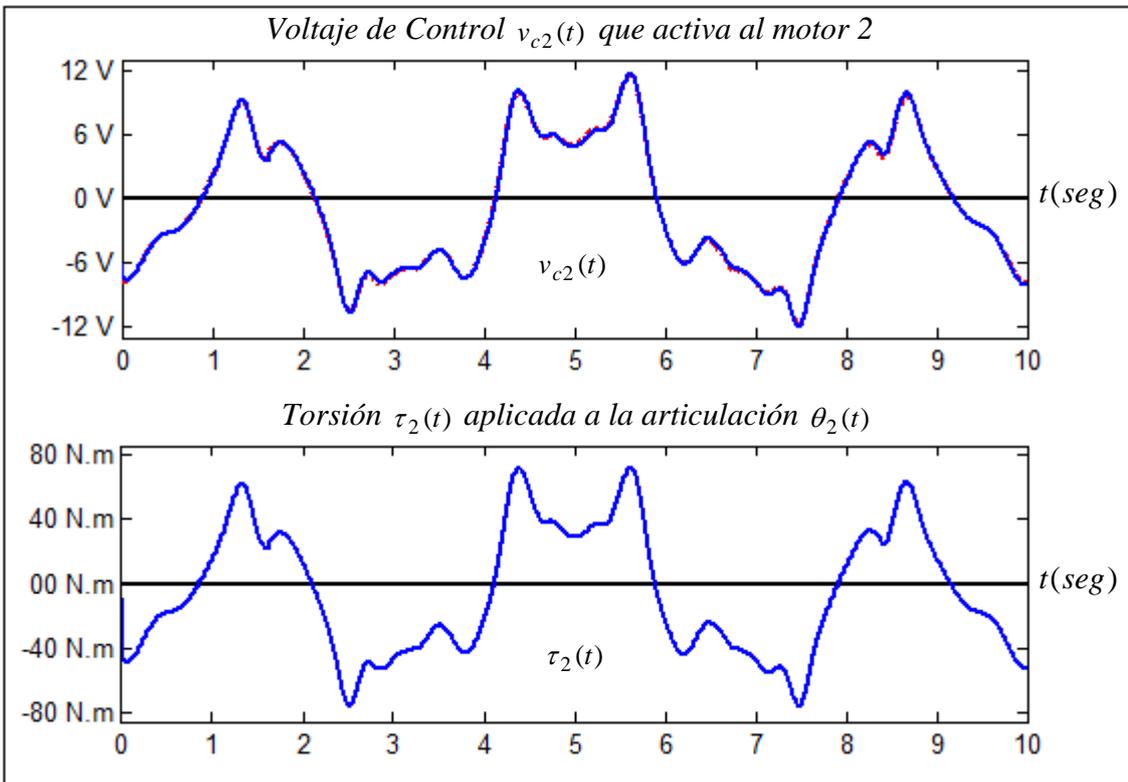


Figura 7.11.b Variables de control de la articulación No 2: $u_{r2}(t)$, $u_2(t) = v_{c2}(t)$, $\tau_2(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

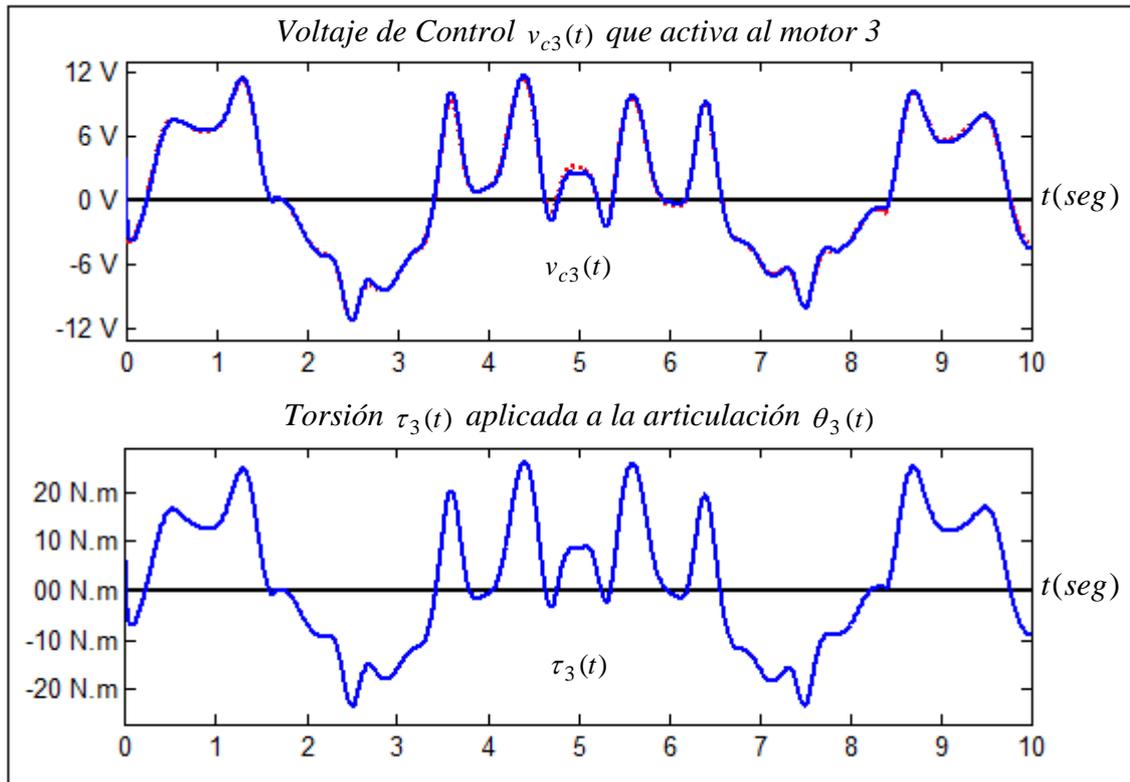


Figura 7.11.c Variables de control de la articulación No 3: $u_{r3}(t)$, $u_3(t) = v_{c3}(t)$, $\tau_3(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

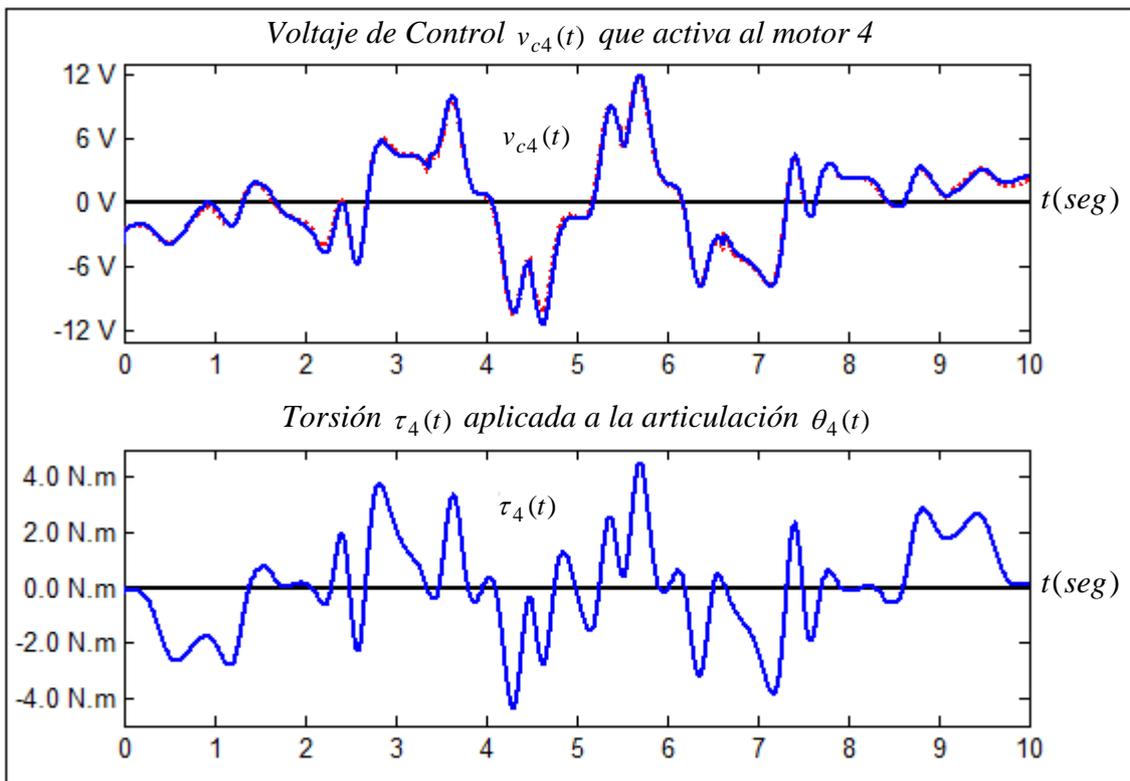


Figura 7.11.d Variables de control de la articulación No 4: $u_{r4}(t)$, $u_4(t) = v_{c4}(t)$, $\tau_4(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

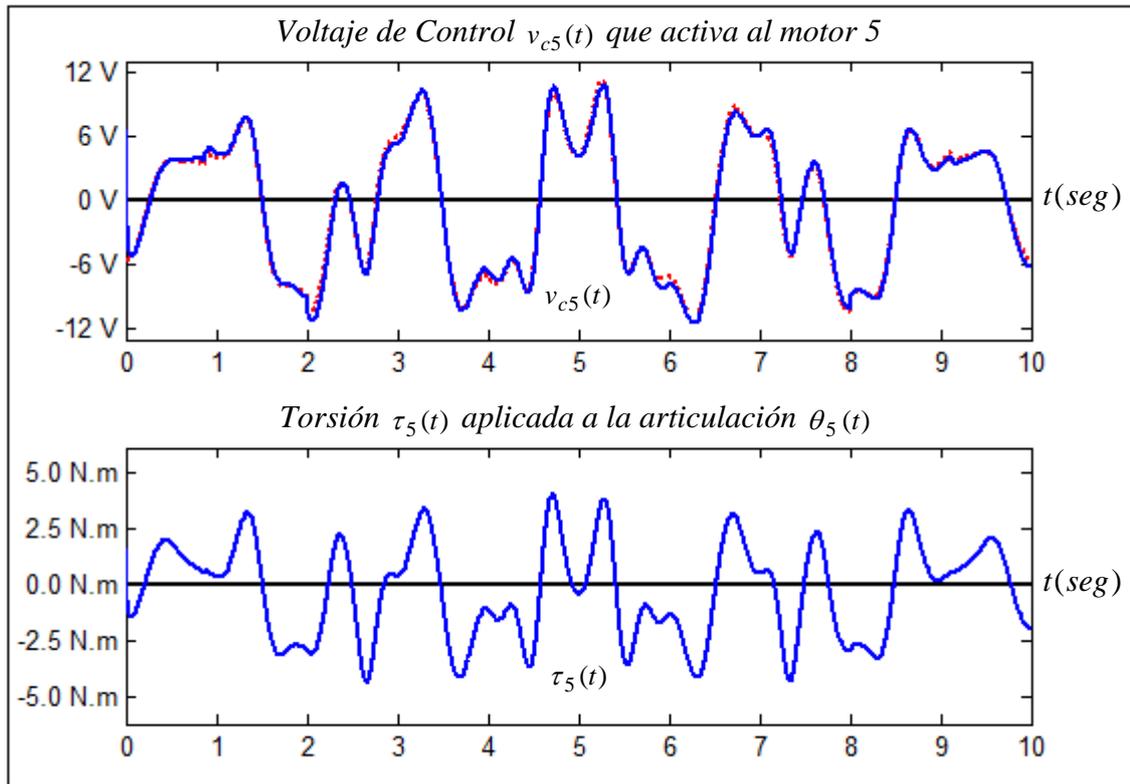


Figura 7.11.e Variables de control de la articulación No 5: $u_{r5}(t)$, $u_5(t) = v_{c5}(t)$, $\tau_5(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

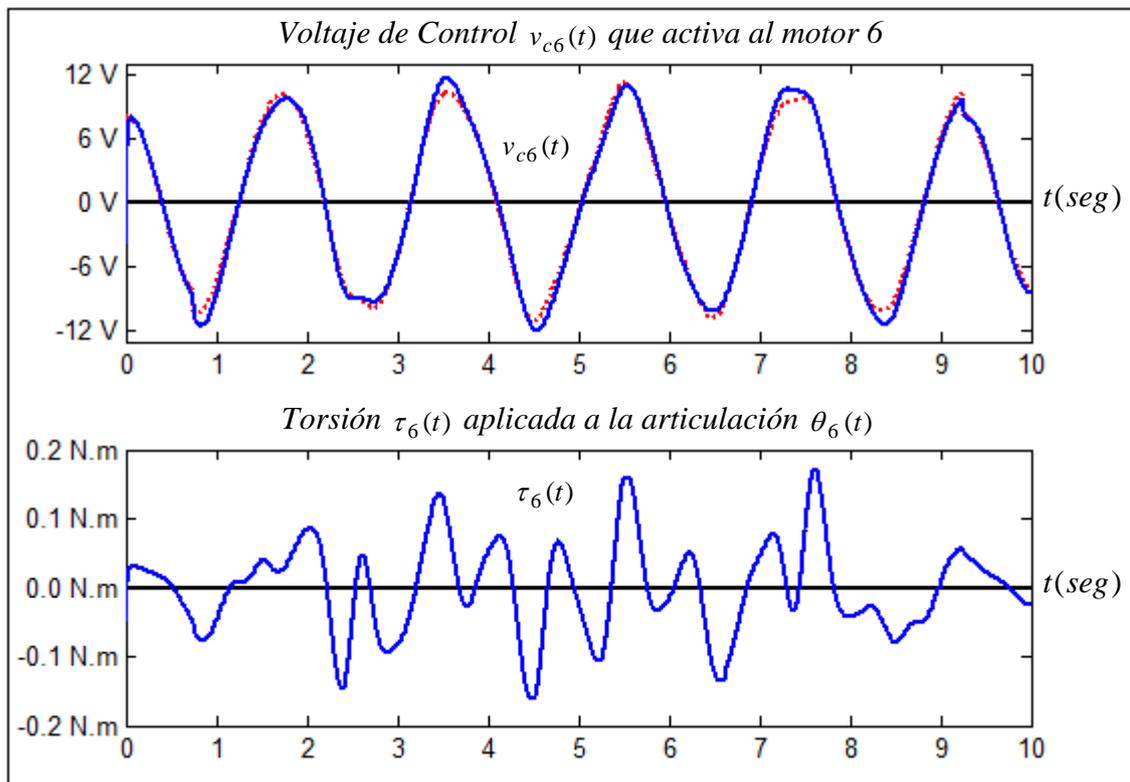


Figura 7.11.f Variables de control de la articulación No 6: $u_{r6}(t)$, $u_6(t) = v_{c6}(t)$, $\tau_6(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

En la figura 7.12 se muestran las gráficas que representan a las trayectorias cartesianas tridimensionales, referencial $\mathbf{p}_r(q(t))$ (igual que la gráfica de la figura 2.15) y controlada $\mathbf{p}(q(t))$ (de forma indirecta), que realiza el efector final del robot en el tiempo con respecto del sistema referencial $x_0y_0z_0$. En la figura 7.13 se muestran las componentes cartesianas de la trayectoria espacial $\bar{\mathbf{p}}(t)=[p_x(t) p_y(t) p_z(t)]^T$ respecto del referencial base $x_0y_0z_0$ obtenidas mediante la ecuación (2.22.d). En la figura 7.14 se muestran las componentes cartesianas de la velocidad lineal $\bar{\mathbf{v}}(t)=[v_x(t) v_y(t) v_z(t)]^T$ respecto del referencial base $x_0y_0z_0$ obtenidas mediante la ecuación (3.7.a). En la figura 7.15 se muestran las componentes cartesianas de la velocidad angular $\bar{\boldsymbol{\omega}}(t)=[\omega_x(t) \omega_y(t) \omega_z(t)]^T$ respecto del referencial base $x_0y_0z_0$ obtenidas mediante la ecuación (3.7.b). En la figura 7.16 se muestran las gráficas de las velocidades cartesianas absolutas tanto velocidad lineal $v(q(t))=\sqrt{v_x^2(t)+v_y^2(t)+v_z^2(t)}$ como velocidad angular $\omega(q(t))=\sqrt{\omega_x^2(t)+\omega_y^2(t)+\omega_z^2(t)}$ del efector operacional del robot respecto del sistema referencial base $x_0y_0z_0$.

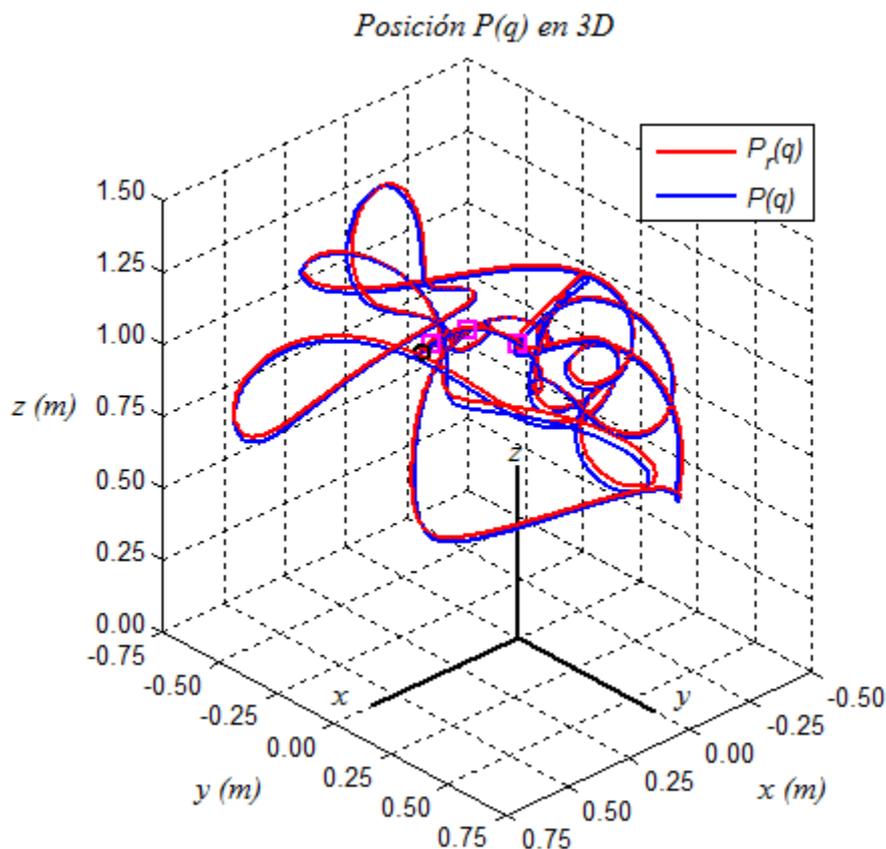


Figura 7.12 Trayectoria cartesiana $P(t)$ tridimensional del efector final del robot.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

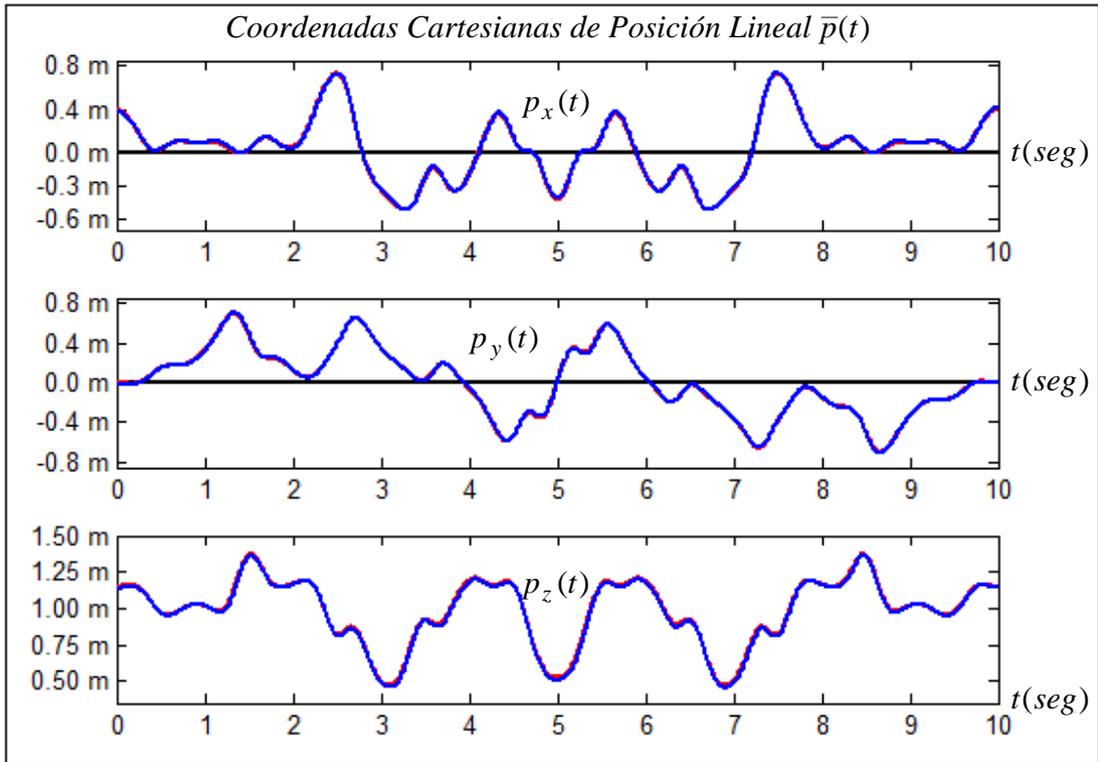


Figura 7.13 Desplazamiento lineal cartesiano $\bar{p}(t)$ del efector final del robot.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

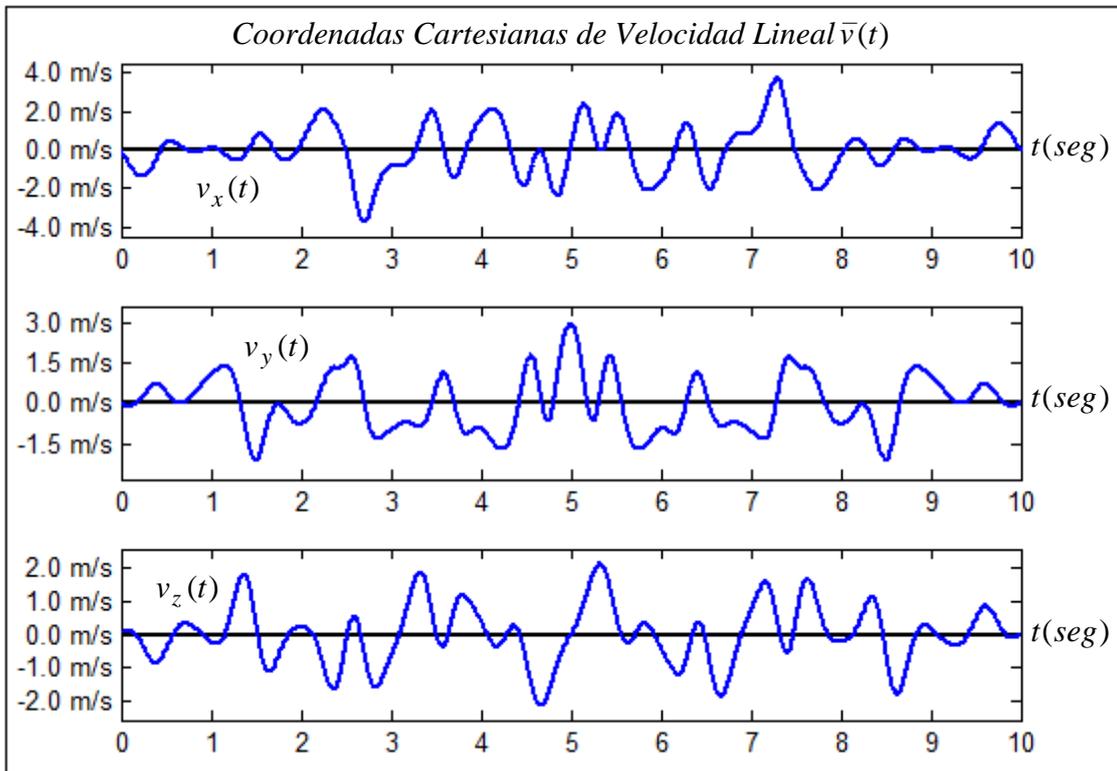


Figura 7.14 Velocidad lineal cartesiana $\bar{v}(t)$ del efector final del robot.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

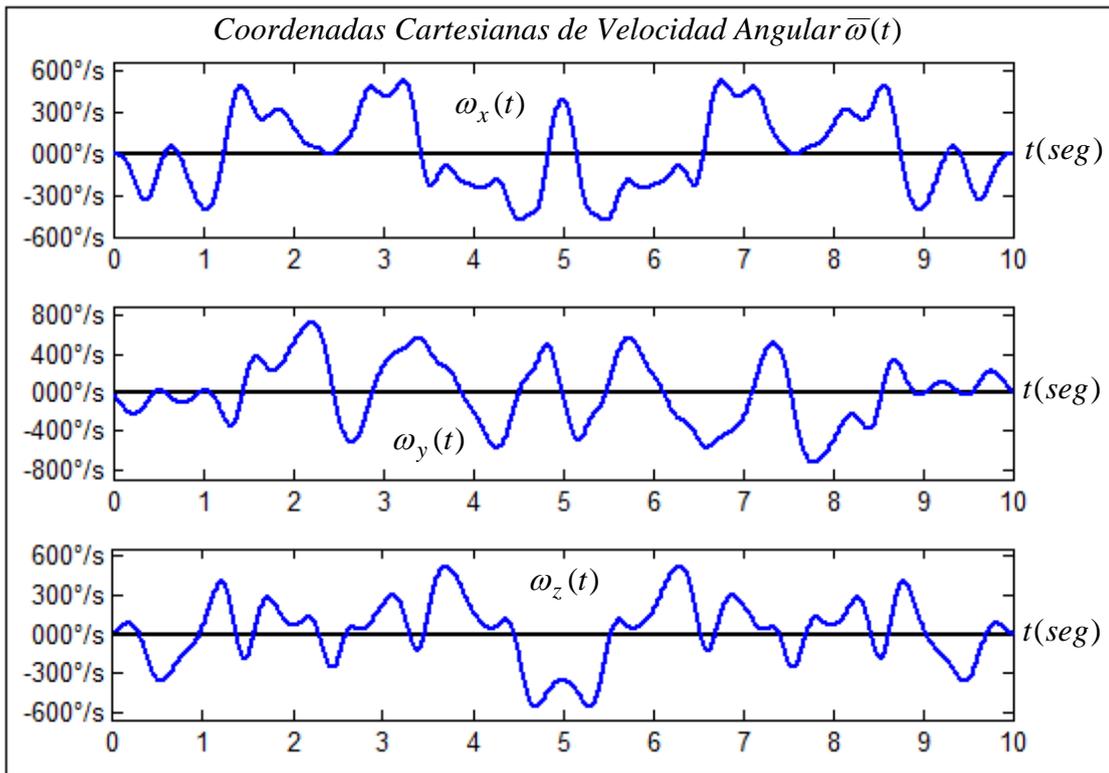


Figura 7.15 Velocidad angular cartesiana $\bar{\omega}(t)$ del efector final del robot.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

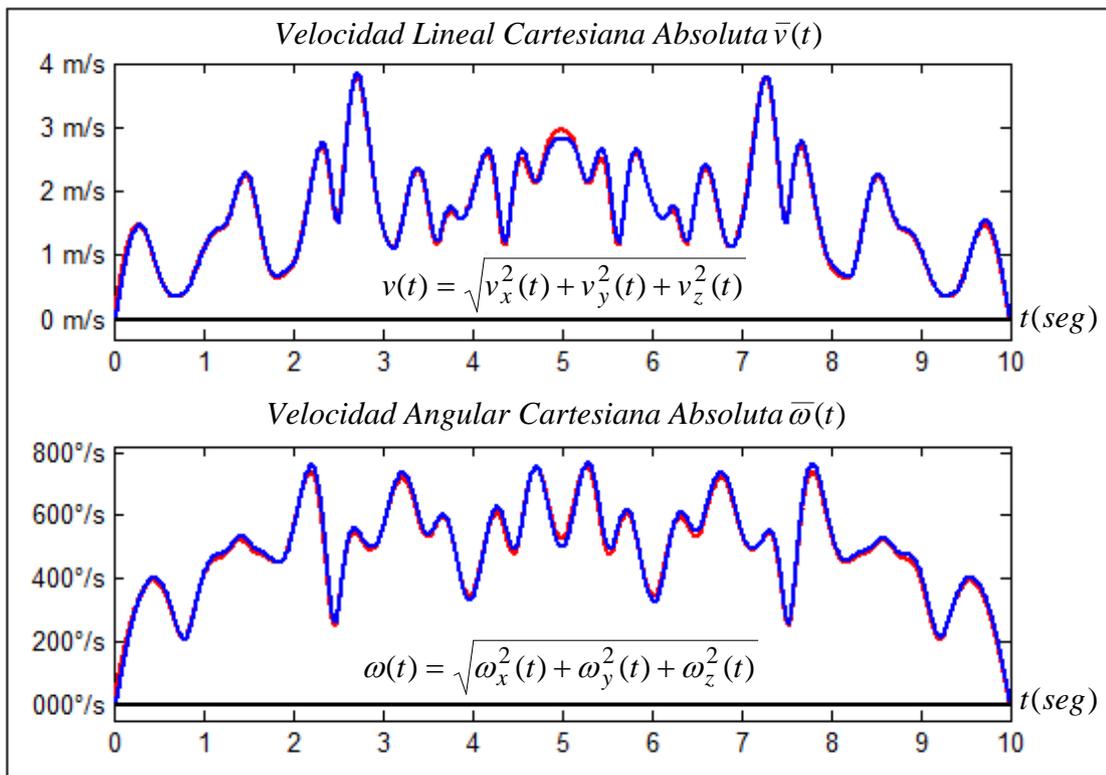


Figura 7.16 Velocidades absolutas lineal $v(t)$ y angular $\omega(t)$ del efector final del robot.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

7.6 Análisis de los resultados obtenidos mediante la Simulación Gráfica

De acuerdo a las gráficas mostradas en las figuras 7.9 se observa que las trayectorias articulares controladas en el tiempo $\theta(t)$ siguen realmente en su totalidad y de forma simultánea a las trayectorias articulares de referencia $\theta_r(t)$ presentándose variables de error de magnitud articular tanto en régimen transitorio como en régimen permanente $e_\theta(t) = \theta_r(t) - \theta(t)$ entre los márgenes pre-establecidos. La gráficas que se presentan en las figuras 7.10 consecutivas muestran también que las variables de velocidad articular $\dot{\theta}(t)$ se aproximan cercanamente a las variables de velocidad deseadas $\dot{\theta}_r(t)$ originándose el error temporal entre éstas $\dot{e}_\theta(t) = \dot{\theta}_r(t) - \dot{\theta}(t)$ dentro de un margen admitido; los errores $e_\theta(t)$ y $\dot{e}_\theta(t)$ son manejables dependiendo de las aplicaciones del robot, ajustando adecuadamente los valores de las ganancias matriciales K_P y K_D de la ley de control de la ecuación (7.19); estos errores pueden reducir de magnitud con la contraparte de que las magnitudes de las señales de control aumentan sobre todo en los cambios grandes de las variables articulares de referencia.

Las gráficas que se presentan en las figuras 7.11 muestran las variables de control $v_c(t)$ que se generan al ejecutar los algoritmos dinámicos de control en el procesador digital, estas señales se aplican a la entrada de los amplificadores de potencia de los respectivos motores con valores admitidos dentro de los márgenes establecidos, las magnitudes de estas señales se pueden ajustar también variando las ganancias de los amplificadores de potencia. En las figuras 7.11 también se muestran las gráficas que corresponden a las torsiones $\tau(t)$ generadas por los motores para accionar a las articulaciones según los efectos dinámicos del sistema y así conseguir que el efector final del robot realice estrechamente las trayectorias articulares requeridas $\theta_r(t)$ con sus respectivas velocidades articulares $\dot{\theta}_r(t)$.

En la tabla 7.1 se muestran los valores máximos y mínimos de las variables de articulación $\theta(t)$, de las velocidades articulares $\dot{\theta}(t)$, de los errores de articulación $e_\theta(t)$, de los errores de velocidad articular $\dot{e}_\theta(t)$, de las variables de control $v_c(t)$ y de las variables de torsión $\tau(t)$ correspondientes a las seis articulaciones del robot manipulador propuesto.

Tabla 7.1 Resultados obtenidos al aplicar el método de control: Compensación No lineal.

<i>Variables</i>	<i>Articulaciones</i>					
	1	2	3	4	5	6
$\theta_{max}(\text{°})$	181.0903	46.5207	227.4447	167.9284	138.6523	-138.8069
$\theta_{min}(\text{°})$	-181.2665	-226.9212	-47.2181	-168.2778	-138.8069	-170.1278
$e_{\theta} \text{ max}(\text{°})$	1.2667	2.2172	2.4243	3.8732	4.3134	6.5065
$e_{\theta} \text{ min}(\text{°})$	-1.2728	-1.7468	-2.5786	-4.5878	-4.3449	-6.2432
$\dot{\theta}_{max}(\text{°}/s)$	184.2124	245.1960	293.7125	449.3659	436.6685	565.6974
$\dot{\theta}_{min}(\text{°}/s)$	-226.4792	-246.1883	-292.5959	-528.9834	-435.9087	-564.5247
$\dot{e}_{\theta} \text{ max}(\text{°}/s)$	2.5340	4.6884	6.0504	15.1898	14.9248	20.6829
$\dot{e}_{\theta} \text{ min}(\text{°}/s)$	-2.3125	-3.5827	-6.4339	-12.8628	-14.4756	-22.7753
$v_c \text{ max}(V)$	12.0789	11.6757	11.7083	11.9269	10.8288	11.7040
$v_c \text{ min}(V)$	-11.4124	-11.9298	-11.3066	-11.3954	-11.4851	-12.0310
$\tau \text{ max}(Nm)$	28.7727	71.4551	26.0353	4.5266	4.0392	0.1713
$\tau \text{ min}(Nm)$	-28.5832	-75.5341	-23.4563	-4.3854	-4.3578	-0.1622

CAPITULO 8

SISTEMA DE CONTROL POR COMPENSACION ADAPTIVA ††

8.1 Introducción

Basándose en la teoría de perturbaciones, se propone un método de control de compensación adaptiva que permite que un robot siga una trayectoria establecida tan estrechamente como sea posible en el tiempo sobre un amplio rango de movimientos y cargas del robot. Mediante esta técnica de control se relacionan todas las interacciones entre las diversas articulaciones basándose en ecuaciones de perturbación linealizada en la vecindad de una trayectoria nominal especificada mediante alguna forma de interpolación articular con la posición, velocidad y aceleración nominales establecidas en cada instante. Las ecuaciones dinámicas no lineales, fuertemente acopladas del robot se pueden linealizar respecto de la trayectoria referencial del robot para obtener un sistema linealizado. El sistema de control presenta componentes de realimentación y componentes directas que se pueden calcular de forma separada pero que actúan simultáneamente. Utilizando la ecuación de movimiento de *Lagrange-Euler* como la dinámica inversa del robot, se calculan directamente los valores de la energía nominal que compensa todas las fuerzas de interacción entre las diversas articulaciones, a lo largo de la trayectoria nominal específica y con la componente de realimentación se calculan los valores de energía debido a las perturbaciones y errores totales que afectan la respuesta del robot, ambas componentes se suman para reducir los errores de posición y velocidad del robot en lo posible a cero, a lo largo de la trayectoria nominal. Se utiliza un algoritmo de identificación de parámetros en tiempo real para estimar los parámetros del sistema mediante la medición directa de las variables de posición y velocidad del robot. Se representa al sistema en el espacio de estados con variables residuales y se diseña una ley de control óptima normalmente de un paso, en base de los parámetros estimados del sistema para controlar las variables dinámicas del robot respecto de la trayectoria nominal. Los parámetros y las ganancias de realimentación del sistema se modifican y ajustan en cada periodo de muestreo para obtener el voltaje de control requerido. Las variables de voltaje total que se aplican a los

†† Método propuesto en [8] y adaptado por el autor

actuadores de las articulaciones, se determinan a partir de las ecuaciones de movimiento de la Dinámica Inversa y la parte residual de los componentes de perturbación mediante la ecuación de Control Optimo. Esta estrategia de control de Compensación Adaptiva reduce el problema del sistema de control no lineal del robot al control de un sistema lineal respecto de una trayectoria nominal, se aplica cuando se conocen las ecuaciones del sistema robótico para poder determinar la variable de control nominal, sin embargo la estructura de la carga que sujeta el efector final del robot puede estar variando, también existen imprecisiones de las formulaciones físicas del sistema robot o se desconocen las perturbaciones que afectan a la respuesta del robot. En robótica, a esta técnica también se le puede denominar “*Método de Control de Perturbación Adaptiva*”.

8.2 Planteamiento del método de control

Para formular el método de control se deducen las ecuaciones de perturbación linealizadas instantáneamente, con lo que se determina el controlador adaptable de realimentación de estado residual y así se obtienen los valores de los voltajes de suministro eléctrico a los motores de articulación con el fin de reducir los errores de posición y velocidad articulares a lo largo de la trayectoria nominal. La ecuación de movimiento de *Lagrange-Euler* del sistema se puede expresar vectorialmente como en la ecuación (6.5). Con esta formulación, el problema de control se reduce a encontrar una ecuación o ley de control para el vector $\mathbf{u}(t)$ de tal manera que la respuesta del sistema en lazo cerrado sea asintóticamente estable y siga una trayectoria deseada.

La formulación multivariable de la Dinámica Inversa del sistema actuadores-robot expresada mediante la ecuación (6.5) se vuelve a expresar de forma estructurada y vectorial de la siguiente manera:

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\Phi}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{d}(t) \quad (8.1)$$

De la ecuación (8.1) el vector de las perturbaciones $\mathbf{d}(t)$ no es medido por lo que no es conocido, el objetivo es diseñar un sistema de control que permita eliminar su efecto. Escribiendo la ecuación de la Dinámica Directa (6.8) como una expresión no lineal perturbada y variante en el tiempo como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{d}(t), t) \quad (8.2)$$

Conociendo el vector de estado nominal $\mathbf{x}_n(t) = [\mathbf{q}_n(t) \dot{\mathbf{q}}_n(t)]^T$ del sistema robot a partir de la trayectoria planificada, se pueden determinar las variables de voltaje de control nominal correspondientes $\mathbf{u}_n(t)$, utilizando las ecuaciones de movimiento de la Dinámica Inversa en la ecuación (8.1), ambos vectores, $\mathbf{x}_n(t)$ y $\mathbf{u}_n(t)$, satisfacen la ecuación (8.2) sin considerar el efecto de la perturbación $\mathbf{d}(t)$. Evaluando la ecuación (8.1) en los puntos nominales $\mathbf{x}_n(t)$ se obtiene el vector de control nominal $\mathbf{u}_n(t)$ como:

$$\mathbf{u}_n(t) = \mathbf{M}(\mathbf{x}_n)\ddot{\mathbf{q}}_n + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}_n) + \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}_n) + \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}_n) \quad (8.3)$$

Utilizando la expansión mediante la serie *Taylor* de la ecuación (8.2), respecto del punto vectorial $(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n)$ de la trayectoria nominal obtenida de la ecuación (8.3), el modelo del sistema de control linealizado equivalente al modelo de la ecuación (8.2) afectado no solo por las perturbaciones sino por los términos de orden superior de la expansión de Taylor en el instante t se puede expresar aproximadamente como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \cong \mathbf{f}(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{u}_n(t)) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{u}_n(t))(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_n(t)) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{u}_n(t))(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_n(t)) \quad (8.4)$$

Para expresar como una ecuación de estado se definen las siguientes relaciones residuales y las matrices correspondientes como:

$$\dot{\mathbf{x}}_n = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{u}_n(t)), \quad \delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_n(t), \quad \delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_n(t)$$

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{u}_n(t)), \quad \mathbf{B}(t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{g}(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{u}_n(t))$$

Las matrices $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ de dimensiones 12×12 y 12×6 respectivamente resultan ser las matrices jacobianas, las cuales son variantes en el tiempo y se definen como:

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{12}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{12}}{\partial x_{12}} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}(t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{g}(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_6} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_{12}}{\partial u_6} \end{bmatrix}$$

La dinámica de perturbación del sistema robot se obtiene en base de la ecuación (8.4) y se expresa en términos de los vectores residuales en el instante t como:

$$\delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \delta \mathbf{u}(t) \quad (8.5)$$

El vector de estado residual $\delta\mathbf{x}(t)$ representa el efecto de las perturbaciones, debido al posible error del modelamiento dinámico del sistema, a las incertidumbres intrínsecas, al ruido de lectura del vector de estado $\mathbf{x}(t)$ que en total afectan a la respuesta del sistema, así como también al cambio estructural del robot sobre todo el que se produce en el efector final, etc. y el vector residual $\delta\mathbf{u}(t)$ es el incremento/decremento de energía que hace que el vector de estado residual $\delta\mathbf{x}(t)$ tienda a cero o disminuya de forma significativa.

Para implementar el método de control del sistema robot en un procesador digital, es necesario discretizar la ecuación (8.5) con periodo de muestreo T , considerando al tiempo $t=kT$. La ecuación de estado linealizada se puede expresar en tiempo discreto como:

$$\delta\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(k)\delta\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\delta\mathbf{u}(k) ; k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (8.6)$$

El vector $\delta\mathbf{u}(k)$ representa el incremento o decremento de energía que hay que sumar al vector nominal $\mathbf{u}_n(k)$ para que el vector residual $\delta\mathbf{x}(k)$ tienda asintóticamente a cero o se reducen a una velocidad suficientemente alta.

Las matrices $\mathbf{G}(k)$ y $\mathbf{H}(k)$ de la ecuación de estado (8.6) de dimensiones 12×12 y 12×6 respectivamente, son variantes en el tiempo y dependen de las variables de la posición y velocidad instantánea del manipulador a lo largo de la trayectoria nominal que varían con el tiempo y se pueden obtener mediante un algoritmo de identificación de parámetros. Para esto es necesario conocer los valores iniciales de las matrices $\mathbf{G}(0)$ y $\mathbf{H}(0)$, las cuales se pueden obtener al discretizar la ecuación (8.5) en el instante $k=0$ con un periodo de muestreo T como:

$$\mathbf{G}(0) = e^{\mathbf{A}(0)T} \text{ y } \mathbf{H}(0) = \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}(0)\lambda} d\lambda \right) \mathbf{B}(0)$$

Si la matriz $\mathbf{A}(0)$ es no singular entonces la matriz $\mathbf{H}(0)$ se expresa como sigue:

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{A}^{-1}(0) [\mathbf{G}(0) - \mathbf{I}] \mathbf{B}(0)$$

En una aplicación práctica la discretización de un sistema se puede aproximar como:

$$\mathbf{G}(0) \cong \mathbf{I} + T\mathbf{A}(0) + \frac{T^2}{2}\mathbf{A}^2(0) + \frac{T^3}{3!}\mathbf{A}^3(0) + \frac{T^4}{4!}\mathbf{A}^4(0) \quad (8.7.a)$$

$$\mathbf{H}(0) \cong T\mathbf{B}(0) + \frac{T^2}{2}\mathbf{A}(0)\mathbf{B}(0) + \frac{T^3}{3!}\mathbf{A}^2(0)\mathbf{B}(0) + \frac{T^4}{4!}\mathbf{A}^3(0)\mathbf{B}(0) \quad (8.7.b)$$

Las matrices $A(0)$ y $B(0)$ se eligen de la ecuación (8.5) de tal modo que la ecuación (8.1) esté en reposo sin efecto de perturbaciones. De la ecuación (6.7) se deduce que los vectores en un punto de reposo se cumple $\dot{x}(0) = 0$ y $x_2(0) = 0$ entonces los términos que incluyan al \dot{q} son $\Phi(x_2(0)) = 0$ $\Omega(x_1(0), x_2(0)) = 0$, por lo que la ecuación (6.7) con los vectores $x(0)$ y $u(0)$ se expresa como:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(x_1(0)) [u(0) - \Gamma(x_1(0))] \end{bmatrix}$$

De la última ecuación se deduce que en el punto de reposo se cumple la relación.

$$u(0) = \Gamma(x_1(0))$$

Para realizar la regulación del vector residual $\delta x(k)$ se requiere que los elementos de las matrices $G(k)$ y $H(k)$ de la ecuación de estados (8.6) se conozcan en todo momento para establecer un método de control del sistema y obtener que $\delta u(k)$ aproxime al vector residual $\delta x(k)$ a cero en todo instante a lo largo de la trayectoria nominal, para esto se puede utilizar algún algoritmo de identificación de parámetros que permita determinar los elementos de las matrices $G(k)$ y $H(k)$.

En la figura 8.1 se ilustra la estructura general del sistema de control mediante compensación de perturbación adaptiva para el robot de seis articulaciones.

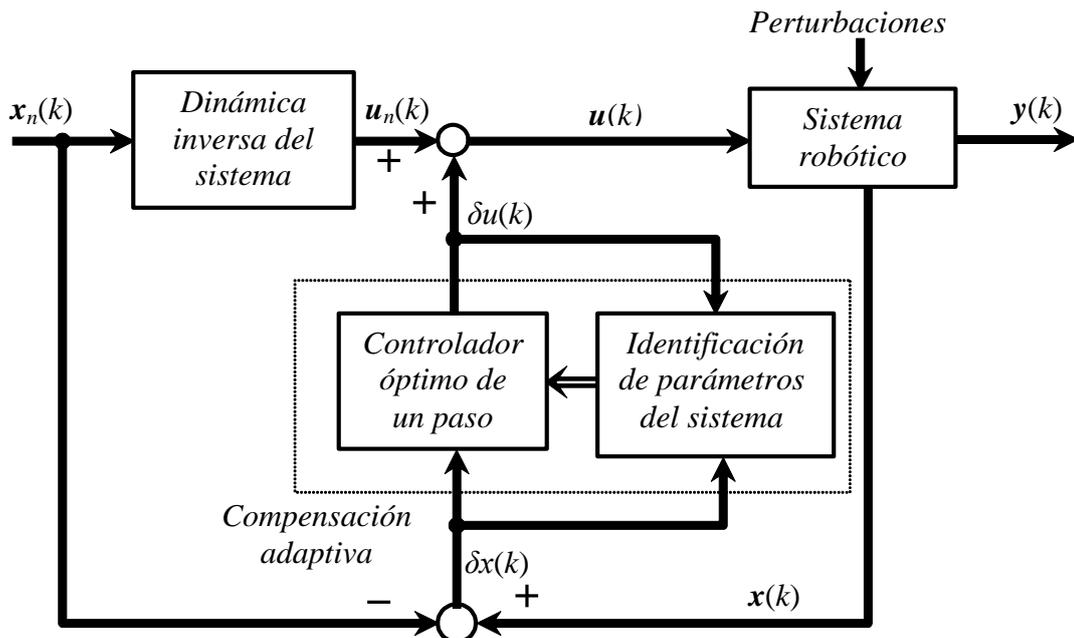


Figura 8.1 Esquema general del sistema de control de compensación adaptiva.

Gráfica elaborada por el autor en base a [8]

El vector de control $\mathbf{u}(k)$ del sistema, es de dimensión 6×1 , de entrada constante a tramos que resulta al sumar el vector nominal $\mathbf{u}_n(k)$ con el vector de estado residual $\delta\mathbf{u}(k)$ a lo largo del intervalo de tiempo entre cualquiera de dos instantes de muestreo consecutivos para $kT \leq t \leq (k+1)T$. El vector de control $\mathbf{u}(k)$ se expresa como:

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}_n(k) + \delta\mathbf{u}(k) \quad (8.8)$$

El sistema de control se caracteriza por incorporar una componente nominal directa y una componente residual en realimentación. Dados los puntos de consigna de la trayectoria planificada: de posición $\mathbf{q}_n(k)$, de velocidad $\dot{\mathbf{q}}_n(k)$ y de aceleración $\ddot{\mathbf{q}}_n(k)$ la componente directa determina los voltajes nominales $\mathbf{u}_n(k)$ correspondientes a las ecuaciones de movimiento (8.3). La componente de realimentación calcula las variables residuales de voltajes de perturbación $\delta\mathbf{u}(k)$ que proporciona el incremento o decremento de la variable de control para compensar las desviaciones de la trayectoria nominal. Mediante esta estrategia se reduce el problema de control no lineal a un problema de control lineal respecto de una trayectoria nominal y el cálculo de las variables de los voltajes nominales y las variables residuales se pueden efectuar simultáneamente de forma independiente.

El cálculo de las variables de voltajes residuales se realiza en base de la ley de control óptima de un paso que resulta de minimizar un índice de rendimiento o función de coste.

8.3 Identificación de parámetros del sistema

Para estimar los parámetros del sistema robot se pueden aplicar satisfactoriamente diversos algoritmos de identificación, tales como los métodos de mínimos cuadrados, máxima verosimilitud, variable instrumental, aproximación estocástica y correlación cruzada. Debido a su simplicidad y facilidad de implementación, se ha seleccionado el esquema de identificación paramétrica por medio del algoritmo de *Mínimos Cuadrados Recursivos (MCR)* en tiempo real para identificar los parámetros de las matrices $\mathbf{G}(k)$ y $\mathbf{H}(k)$ de la ecuación de estado (8.6).

En el esquema de identificación, se asume que los parámetros del sistema están variando lentamente cuya velocidad de variación es más lenta que la velocidad de adaptación, el ruido de medida es despreciable y las variables de estado $\mathbf{x}(k)$ del sistema son evaluadas en cada instante.

Aplicando la transpuesta a las matrices y vectores de la ecuación (8.6) y agrupando de forma conveniente se obtiene una ecuación de estado transpuesta del sistema descrito de la siguiente forma: (*)

$$\delta \mathbf{x}^T(k+1) = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}^T(k) & \delta \mathbf{u}^T(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}^T(k) \\ \mathbf{H}^T(k) \end{bmatrix}; k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (8.9)$$

La ecuación (8.9) se puede simplificar y escribir en una forma compacta de la siguiente manera:

$$\delta \mathbf{x}^T(k+1) = \boldsymbol{\psi}^T(k) \Delta(k) \quad (8.10)$$

El vector $\boldsymbol{\psi}^T(k)$ de la ecuación (8.10) involucra al vector de estado residual $\delta \mathbf{x}(t)$ y al vector de control residual $\delta \mathbf{u}(t)$ de la ecuación (8.9) en el instante k -ésimo como un vector transpuesto de dimensión 1×18 que se formula como:

$$\boldsymbol{\psi}^T(k) = [\delta x_1(k) \quad \delta x_2(k) \quad \cdots \quad \delta x_{12}(k) \quad \delta u_1(k) \quad \cdots \quad \delta u_6(k)] \quad (8.11)$$

La matriz $\Delta(k)$ de dimensión 18×12 involucra a los elementos desconocidos a ser estimados tanto de la matriz $\mathbf{G}(k)$ como de la matriz $\mathbf{H}(k)$ y se escribe explícitamente de la siguiente manera:

$$\Delta(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^T(k) \\ \mathbf{H}^T(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{1,1}(k) & \cdots & g_{12,1}(k) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{1,12}(k) & \cdots & g_{12,12}(k) \\ h_{1,1}(k) & \cdots & h_{12,1}(k) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ h_{1,6}(k) & \cdots & h_{12,6}(k) \end{bmatrix}$$

La matriz compacta $\Delta(k)$ de la última expresión también se puede expresar de forma conveniente como:

$$\Delta(k) = [\boldsymbol{\alpha}_1(k) \quad \boldsymbol{\alpha}_2(k) \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_{12}(k)] \quad (8.12)$$

El vector $\boldsymbol{\alpha}_i(k)$ de dimensión 18×1 de la i -ésima columna de la matriz $\Delta(k)$ de la ecuación (8.12) representa el vector de parámetros desconocidos de la i -ésima ecuación de la dinámica del sistema en el instante k y se define así:

$$\boldsymbol{\alpha}_i^T(k) = [g_{i,1}(k) \quad \cdots \quad g_{i,12}(k) \quad h_{i,1}(k) \quad \cdots \quad h_{i,6}(k)]; \quad i = 1, 2, \dots, 12 \quad (8.13)$$

* Ecuación propuesta por el autor

La i -ésima componente de la ecuación de estado (8.6) del sistema robot representa la i -ésima ecuación diferencial y se puede escribir también como:

$$\delta \mathbf{x}_i(k+1) = \boldsymbol{\psi}^T(k) \boldsymbol{\alpha}_i(k) ; \quad i = 1, 2, \dots, 12 \quad (8.14)$$

Con esta formulación se puede identificar los parámetros de cada columna de la matriz $\mathbf{A}(k)$ usando el vector de mediciones $\boldsymbol{\psi}^T(k)$. Para aplicar el algoritmo de estimación de parámetros por *Mínimos Cuadrados Recursivo (MCR)* la ecuación (8.14) se escribe como:

$$\delta \mathbf{x}_i(k+1) = \boldsymbol{\psi}^T(k) \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i(k) + \mathbf{e}_i(k) ; \quad i = 1, 2, \dots, 12 \quad (8.15)$$

El vector $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i(k)$ de la ecuación (8.15) representa al vector estimado del vector $\boldsymbol{\alpha}_i(k)$ de ecuación (8.14) y el valor $\mathbf{e}_i(k)$ representa el error de identificación al estimar el vector $\boldsymbol{\alpha}_i(k)$ y se puede expresar también como:

$$\mathbf{e}_i(k) = \delta \mathbf{x}_i(k+1) - \boldsymbol{\psi}^T(k) \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i(k) ; \quad i = 1, 2, \dots, 12 \quad (8.16)$$

La identificación de parámetros mediante el algoritmo de *MCR* se determina por el criterio de minimizar el error ponderado exponencialmente que coloca más peso sobre los errores al cuadrado de las medidas más recientes y se expresa como:

$$J_i(k) = \sum_{j=0}^k \rho^{k-j} e_i^2(j) = \mathbf{E}_i^T(k) \mathbf{E}_i(k) \quad (8.17)$$

El vector de error $\mathbf{E}_i(k)$ se define como:

$$\mathbf{E}_i^T(k) = \left[\sqrt{\rho^k} e_i(0) \quad \sqrt{\rho^{k-1}} e_i(1) \quad \dots \quad e_i(k) \right] \quad (8.18)$$

El escalar ρ comprendido entre $0 < \rho < 1$ es el factor de olvido y $k > 18$ es el número de medidas utilizadas para estimar los parámetros del vector $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i(k)$.

Para minimizar el error en la ecuación (8.16) incluido en la ecuación (8.17) se deriva el índice de rendimiento $J_i(k)$ con respecto al vector de parámetros desconocido $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i(k)$ y se utiliza el lema de inversión de matrices para obtener el algoritmo de identificación del sistema por el método de *Mínimos Cuadrados Recursivo* para calcular el vector desconocido $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i(k)$. Después de realizar algunas manipulaciones algebraicas y matriciales básicas se obtiene el algoritmo de *MCR* aplicando las siguientes ecuaciones recursivas: [8]

$$\tilde{\alpha}_i(k+1) = \tilde{\alpha}_i(k) + \gamma(k)\mathbf{\Pi}(k)\boldsymbol{\psi}(k)\mathbf{e}_i(k) \quad (8.19.a)$$

$$\gamma(k) = \left(\rho + \boldsymbol{\psi}^T(k)\mathbf{\Pi}(k)\boldsymbol{\psi}(k) \right)^{-1} \quad (8.19.b)$$

$$\mathbf{\Pi}(k+1) = \mathbf{\Pi}(k) - \gamma(k)\mathbf{\Pi}(k)\boldsymbol{\psi}(k)\boldsymbol{\psi}^T(k)\mathbf{\Pi}(k) \quad (8.19.c)$$

La entidad $\mathbf{\Pi}(k)$ es una matriz definida positiva simétrica de dimensión 18x18 que se denota por:

$$\mathbf{\Pi}(k) = \rho \left(\boldsymbol{\Psi}^T(k)\boldsymbol{\Psi}(k) \right)^{-1}$$

La representación $\boldsymbol{\Psi}(k) = [\boldsymbol{\psi}(0) \ \boldsymbol{\psi}(1) \ \cdots \ \boldsymbol{\psi}(k)]$ es la matriz de mediciones hasta el instante de muestreo k . Si los errores $e_i(k)$ se distribuyen idéntica e independiente con media nula y varianza σ^2 , entonces la matriz $\mathbf{\Pi}(k)$ se puede interpretar como la matriz de covarianza para la estimación de parámetros, si $\rho = \sigma^2$. La matriz $\mathbf{\Pi}(0)$ se puede iniciar escogiendo los valores de $\mathbf{\Pi}(0) = a\mathbf{I}_{18}$; el escalar a es un valor suficientemente grande.

Con la matriz de parámetros estimados $\tilde{\mathbf{A}}(k)$ y con el vector de error minimizado la ecuación de la dinámica del sistema robot (8.6) en el espacio de estados se puede expresar aproximadamente como:

$$\delta \mathbf{x}(k+1) \cong \tilde{\mathbf{G}}(k)\delta \mathbf{x}(k) + \tilde{\mathbf{H}}(k)\delta \mathbf{u}(k) \quad (8.20)$$

Las matrices $\tilde{\mathbf{G}}(k)$ y $\tilde{\mathbf{H}}(k)$ de la ecuación (8.20) son variantes en el tiempo y contienen a los parámetros del sistema robot a ser obtenidos mediante el algoritmo de identificación en el instante de muestreo k -ésimo.

8.4 Vector de Control Óptimo Cuadrático Residual

Con la estimación de los parámetros de las matrices $\tilde{\mathbf{G}}(k)$ y $\tilde{\mathbf{H}}(k)$ se puede diseñar e implementar una ley de control apropiada para establecer las variables de voltaje residual $\delta \mathbf{u}(k)$ de corrección requeridos para reducir los errores de posición y velocidad del robot a lo largo de una trayectoria nominal. Esto se puede conseguir aplicando un control óptimo $\delta \mathbf{u}(k)$ de un paso que minimice la función de coste $J(k)$ que al mismo tiempo satisfaga las ligaduras de la ecuación (8.20) que se escribe como: [8]

$$J(k) = \frac{1}{2} \left[\delta \mathbf{x}^T(k+1) \mathbf{Q} \delta \mathbf{x}(k+1) + \delta \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \delta \mathbf{u}(k) \right] \quad (8.21)$$

La matriz de ponderación estacionaria \mathbf{Q} de estados de dimensión 12×12 debe ser definida o semidefinida positiva y la matriz estacionaria \mathbf{R} de dimensión 6×6 debe ser necesariamente definida positiva.

El objetivo del control óptimo es llevar a cero los valores de estado residual $\delta \mathbf{x}(k)$ de la trayectoria nominal en un control de posición y velocidad coordinada por paso mientras que al mismo tiempo se impone un costo a la utilización del esfuerzo de control $\delta \mathbf{u}(k)$. Reemplazando la ecuación (8.20) en la ecuación (8.21) se vuelve a obtener la función de coste $J(k)$ en términos de las matrices $\tilde{\mathbf{G}}(k)$ y $\tilde{\mathbf{H}}(k)$ como:

$$J(k) = \frac{1}{2} \left\{ \left[\delta \mathbf{x}^T(k) \tilde{\mathbf{G}}^T(k) + \delta \mathbf{u}^T(k) \tilde{\mathbf{H}}^T(k) \right] \mathbf{Q} \left[\tilde{\mathbf{G}}(k) \delta \mathbf{x}(k) + \tilde{\mathbf{H}}(k) \delta \mathbf{u}(k) \right] + \delta \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \delta \mathbf{u}(k) \right\}$$

La solución de control óptimo residual $\delta \mathbf{u}(k)$ que minimiza la función de coste $J(k)$ en la última ecuación se determina derivando a la función $J(k)$ respecto del vector de control residual $\delta \mathbf{u}(k)$ con lo que se obtiene:

$$\delta \mathbf{u}(k) = - \left[\mathbf{R} + \tilde{\mathbf{H}}^T(k) \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{H}}(k) \right]^{-1} \tilde{\mathbf{H}}^T(k) \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{G}}(k) \delta \mathbf{x}(k) \quad (8.22)$$

De la ecuación (8.22) se deduce la matriz $\mathbf{K}(k)$ óptima de un paso, variante en el tiempo que representa la ganancia del vector de estado residual $\delta \mathbf{x}(k)$ y se expresa así:

$$\mathbf{K}(k) = \left[\mathbf{R} + \tilde{\mathbf{H}}^T(k) \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{H}}(k) \right]^{-1} \tilde{\mathbf{H}}^T(k) \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{G}}(k) \quad (8.23)$$

El vector de control residual $\delta \mathbf{u}(k)$ de la ecuación (8.22) se puede expresar como:

$$\delta \mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}(k) \delta \mathbf{x}(k) \quad (8.24)$$

Reemplazando la ecuación (8.24) en la ecuación (8.20) se obtiene la expresión de regulación como una ecuación de estado de la siguiente forma:

$$\delta \mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{G}(k) - \mathbf{H}(k) \mathbf{K}(k)] \delta \mathbf{x}(k) \quad (8.25)$$

La solución de la ecuación variante en tiempo discreto (8.25) para el instante k se expresa como:

$$\delta \mathbf{x}(k) = [\mathbf{G}(k) - \mathbf{H}(k) \mathbf{K}(k)]^{k-h} \delta \mathbf{x}(h) \quad (8.26)$$

De la ecuación (8.26) se deduce que el vector residual $\delta x(k)$ tiende asintóticamente a cero a una velocidad suficientemente alta para la matriz $\mathbf{K}(k)$ adaptativa calculada de forma óptima que permite regular la condición inicial $\delta x(h)$. Reemplazando la ecuación (8.24) en la ecuación (8.8) se obtiene el vector de control $\mathbf{u}(k)$ para activar a los amplificadores de potencia de los motores del sistema y se expresa como:

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}_n(k) - \mathbf{K}(k)\delta\mathbf{x}(k) \quad (8.27)$$

La ecuación de respuesta del sistema robot, considerando la relación $\mathbf{y} = \mathbf{x}_I = \mathbf{q}$ en tiempo discreto se escribe como en la ecuación (6.9) del siguiente modo:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (8.28)$$

En la figura 8.2 se muestra el diagrama de bloques de la estructura total del sistema de control del robot, mediante la técnica de compensación adaptativa en su conjunto que se expresa por las ecuaciones (8.3), (8.19), (8.23), (8.27) y (8.28).

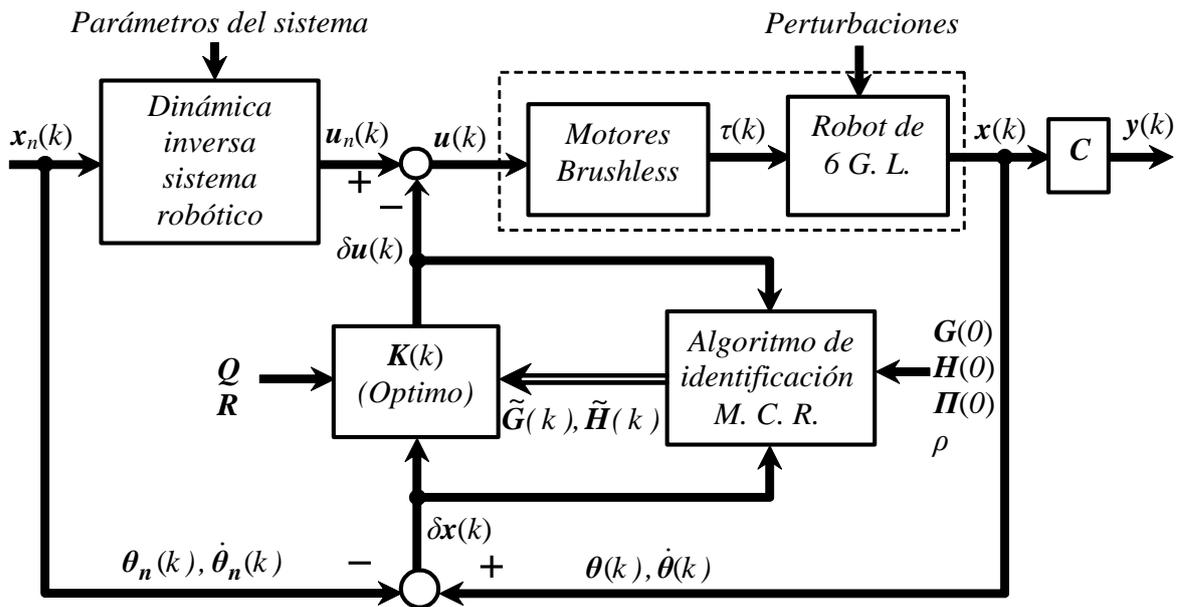


Figura 8.2 Diagrama del Sistema de Control con Compensación Adaptativa.

Gráfica elaborada por el autor

8.5 Simulación Gráfica del Sistema de Control propuesto

La programación y la simulación de esta técnica de control se ha desarrollado y elaborado utilizando el programa *MatLab*. Para esto se utiliza la ecuación (8.3) de la *Dinámica Inversa* del sistema para calcular el vector nominal $\mathbf{u}_n(t)$. Para determinar los

vectores de estados $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ producto de la solución de la *Dinámica Directa* (6.7) del sistema, se ha empleado el método de *Euler* haciendo uso de las ecuaciones (6.12) con el objetivo de emular la dinámica real del sistema (en vez de realizar la lectura de los transductores del sistema), añadiendo además perturbaciones permanentes de tipo sinusoidal con el fin de obtener de forma más real la simulación de control de trayectorias articulares del sistema robot. La identificación del sistema se obtiene procesando las ecuaciones (8.19) y luego se determina la ley de control haciendo uso de las ecuaciones (8.23), (8.24) y (8.27), además se utilizan los datos numéricos del sistema situados en el anexo A y las ecuaciones dinámicas mostradas en el anexo B.

Para realizar la simulación del método de control se han establecido funciones suaves en el tiempo para $0 \leq t \leq 10 \text{ seg.}$ que representan los componentes del vector de posición articular nominal $q_n(t) = \theta_n(t) = \theta_r(t) = x_1(t)$, conformados con segmentos de funciones trigonométricas y sus derivadas respectivas, las primeras derivadas conforman los componentes del vector velocidad articular nominal $\dot{q}_n(t) = \dot{\theta}_n(t) = \dot{\theta}_r(t) = x_2(t)$ y las segundas derivadas conforman los componentes del vector aceleración articular nominal $\ddot{\theta}_n(t)$ que se muestran en el capítulo 10, ecuaciones (10.10). En la figura 8.3 se muestran las gráficas que conforman la trayectoria articular $\theta_r(t)$ y velocidad articular $\dot{\theta}_r(t)$ de referencia.

Las gráficas de las figuras consecutivas 8.4.a - 8.4.f conforman los componentes individuales del vector articular de referencia $\theta_r(t)$, componentes del vector articular controlado $\theta(t)$ y del error de posición articular de control entre éstos $\mathbf{e}_\theta(t) = \theta_r(t) - \theta(t)$. Las gráficas de las figuras consecutivas 8.5.a - 8.5.f conforman los componentes individuales del vector de velocidad articular de referencia $\dot{\theta}_r(t)$, componentes del vector de velocidad articular controlado $\dot{\theta}(t)$ y error de velocidad articular de control entre éstos $\dot{\mathbf{e}}_\theta(t) = \dot{\theta}_r(t) - \dot{\theta}(t)$. Las gráficas de las figuras consecutivas 8.6.a - 8.6.f corresponden a los componentes del vector de control de articulación nominal $\mathbf{u}_n(t) = \mathbf{u}_r(t)$ y del vector de control real $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_c(t)$ que se aplican a los amplificadores de los motores actuadores, los cuales generan las variables de torsión articular $\boldsymbol{\tau}(t)$ para ser aplicadas a las articulaciones del manipulador robótico.

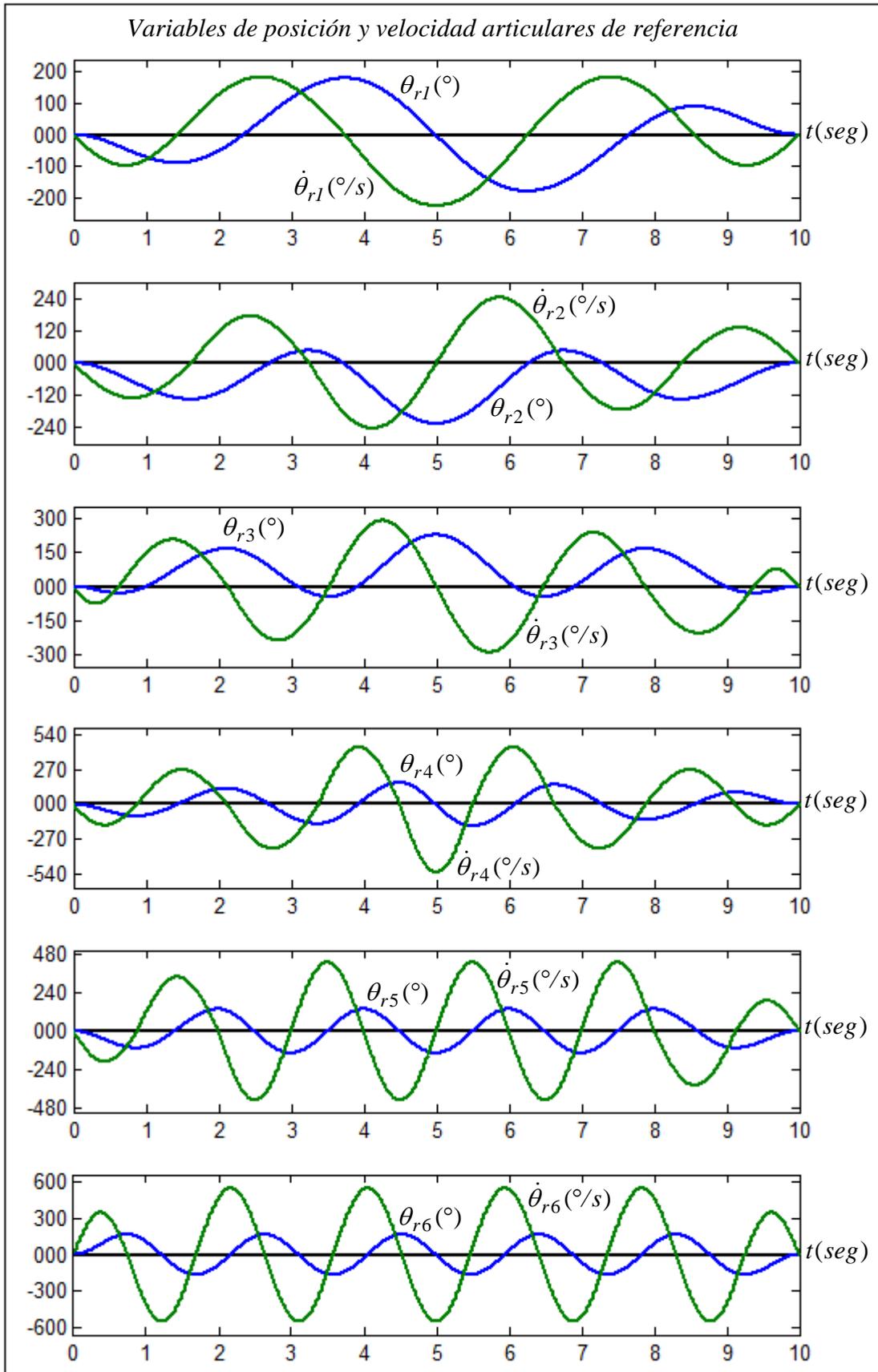


Figura 8.3 Variables de referencia de posición y velocidad articulares: $\theta_r(t)$ y $\dot{\theta}_r(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

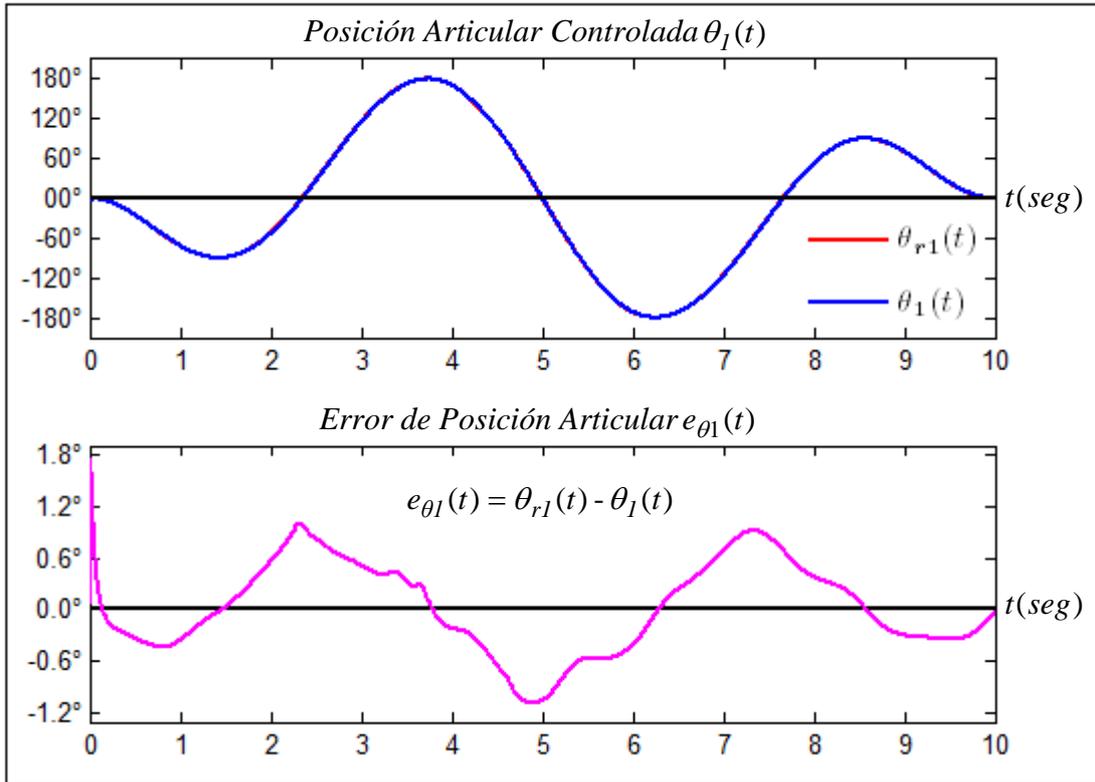


Figura 8.4.a Variables de la posición articular No 1: $\theta_{r1}(t)$, $\theta_1(t)$ y $e_{\theta_1}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

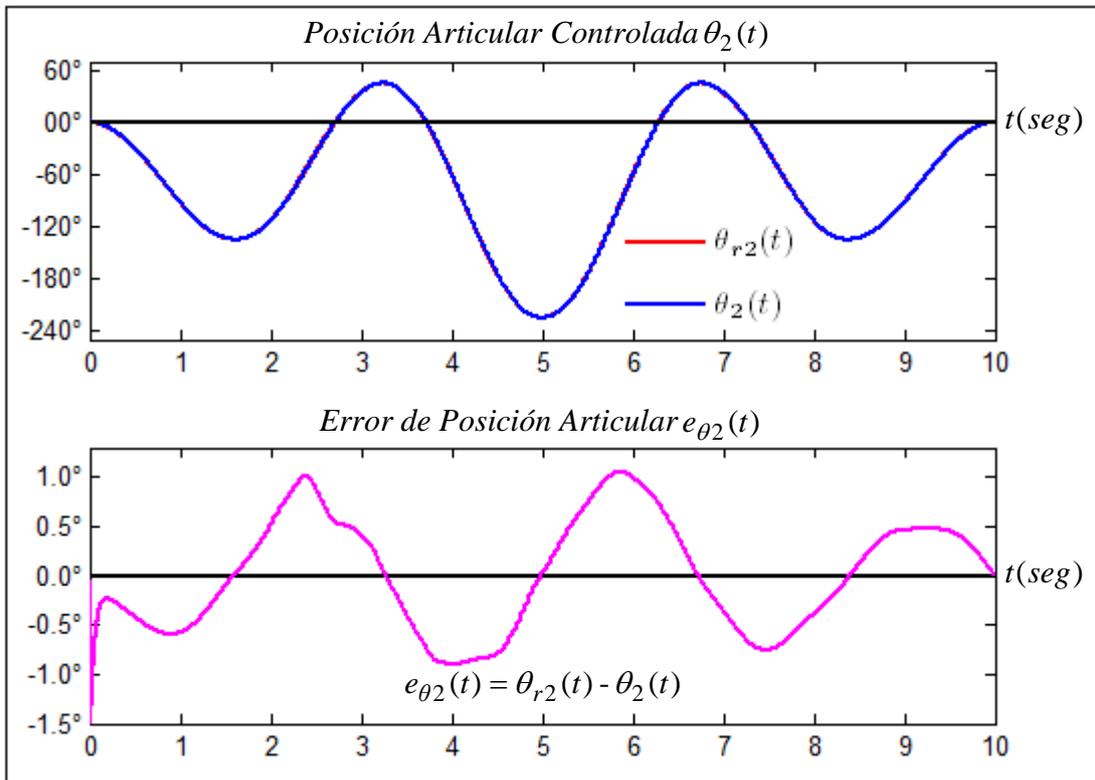


Figura 8.4.b Variables de la posición articular No 2: $\theta_{r2}(t)$, $\theta_2(t)$ y $e_{\theta_2}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

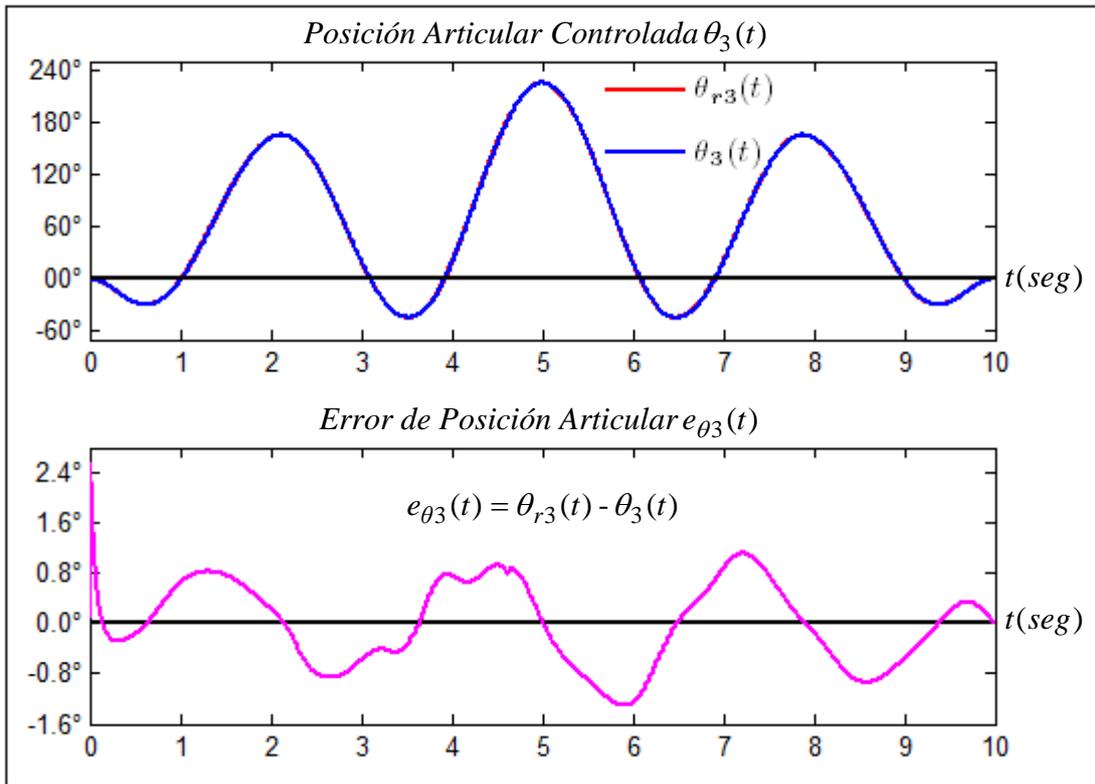


Figura 8.4.c Variables de la posición articular No 3: $\theta_{r3}(t)$, $\theta_3(t)$ y $e_{\theta_3}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

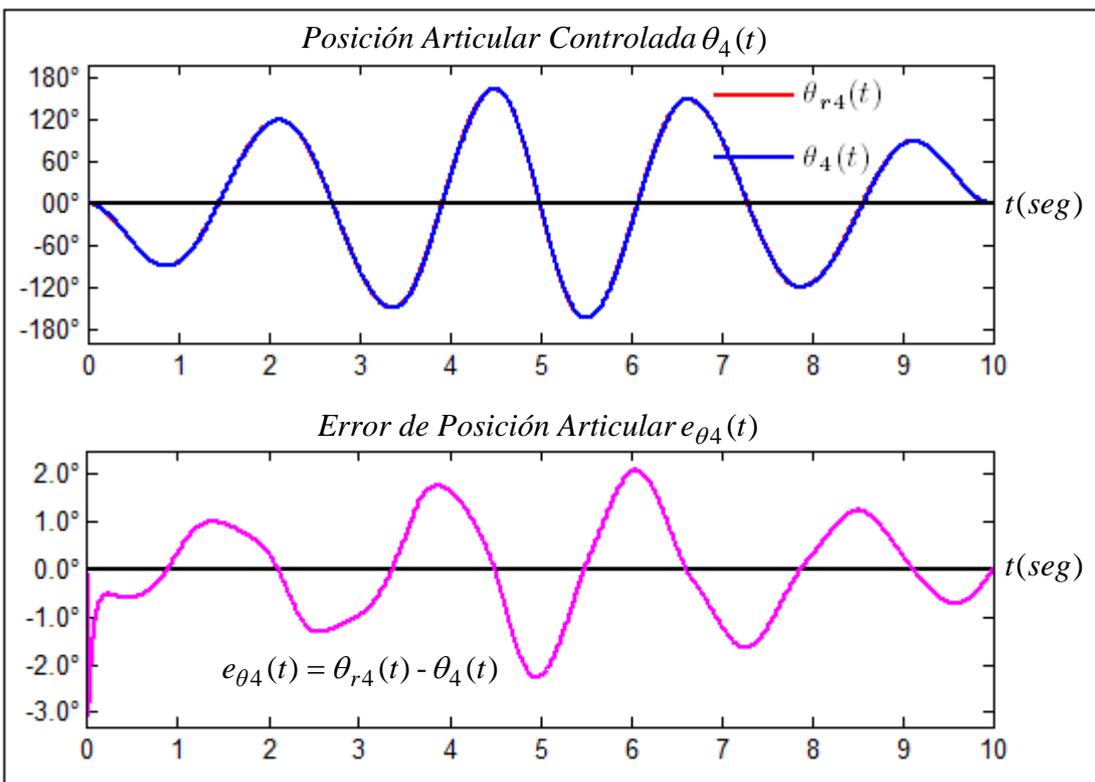


Figura 8.4.d Variables de la posición articular No 4: $\theta_{r4}(t)$, $\theta_4(t)$ y $e_{\theta_4}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

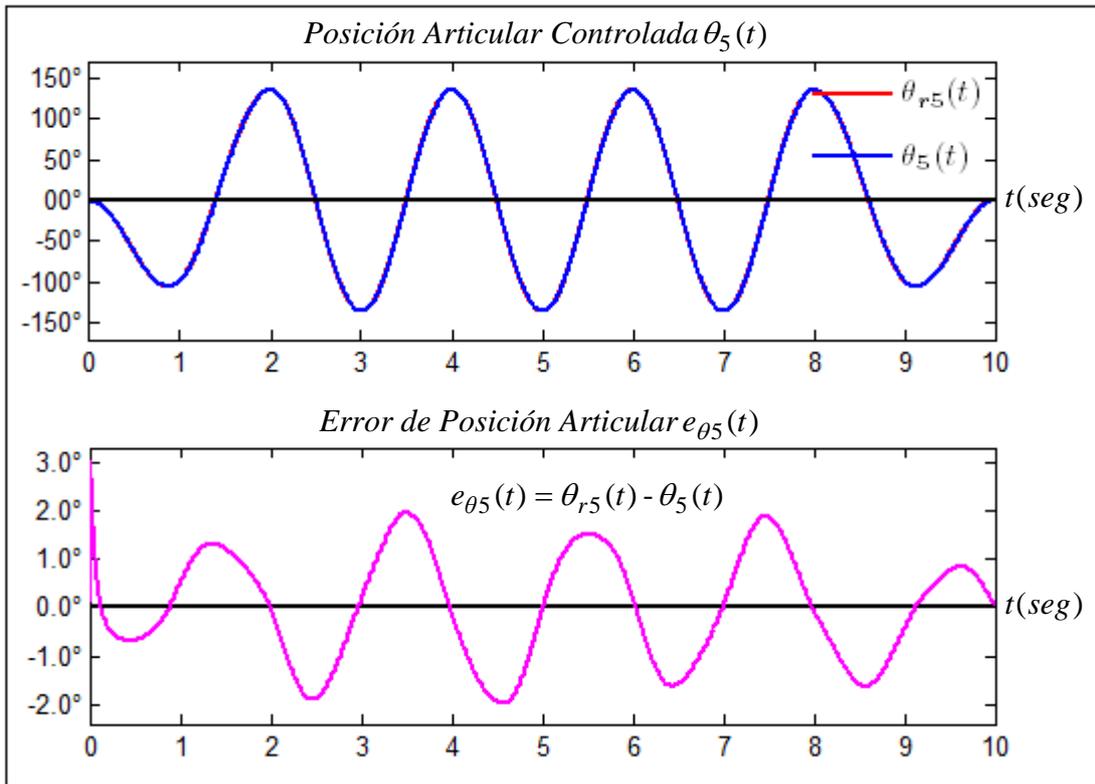


Figura 8.4.e Variables de la posición articular No 5: $\theta_{r5}(t)$, $\theta_5(t)$ y $e_{\theta_5}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

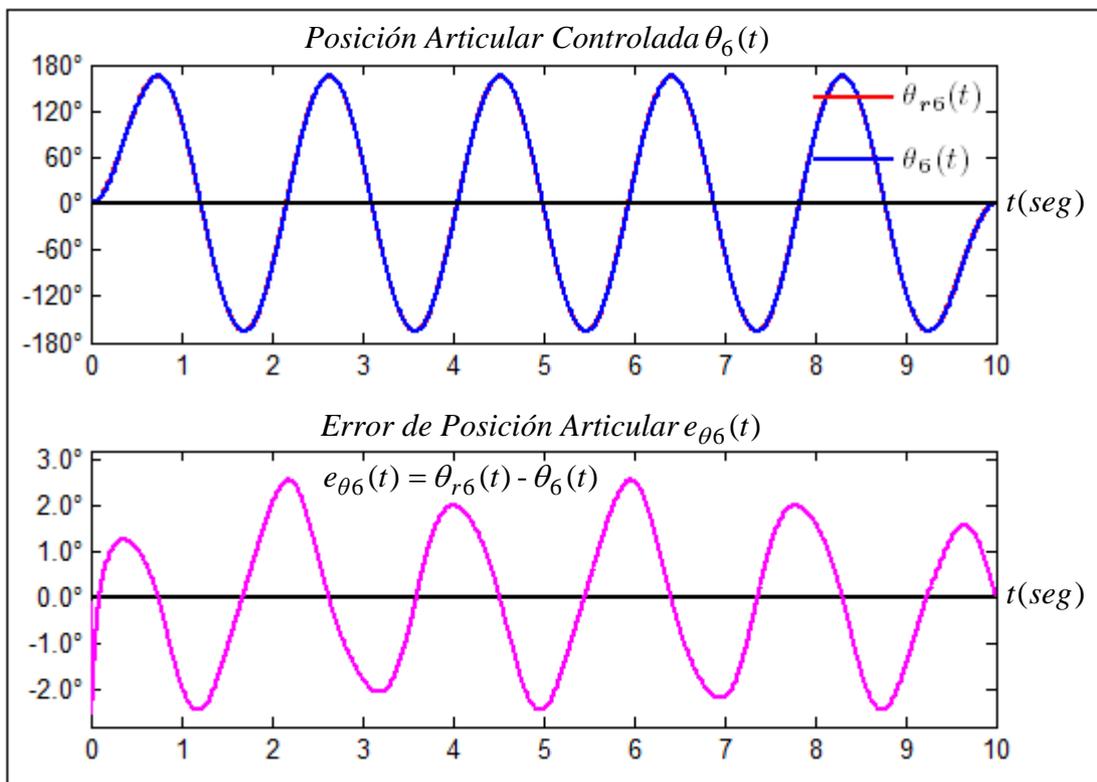


Figura 8.4.f Variables de la posición articular No 6: $\theta_{r6}(t)$, $\theta_6(t)$ y $e_{\theta_6}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

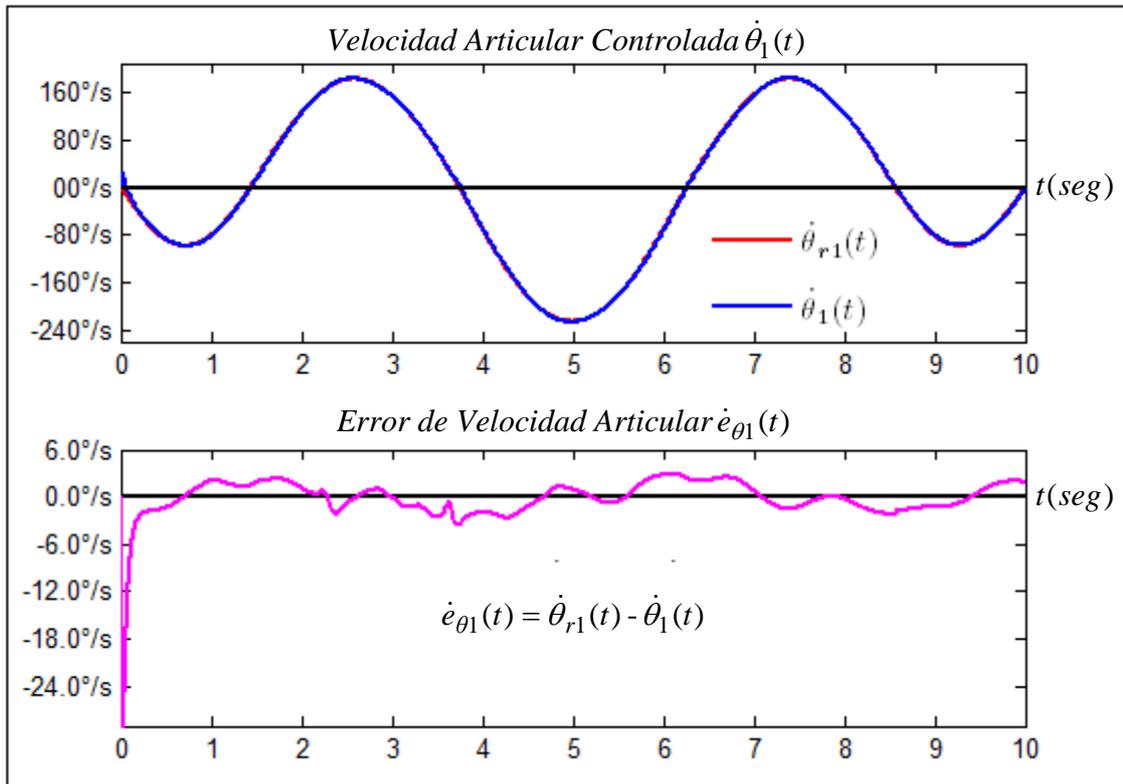


Figura 8.5.a Variables de la velocidad articular No 1: $\dot{\theta}_{r1}(t)$, $\dot{\theta}_1(t)$ y $\dot{e}_{\theta 1}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

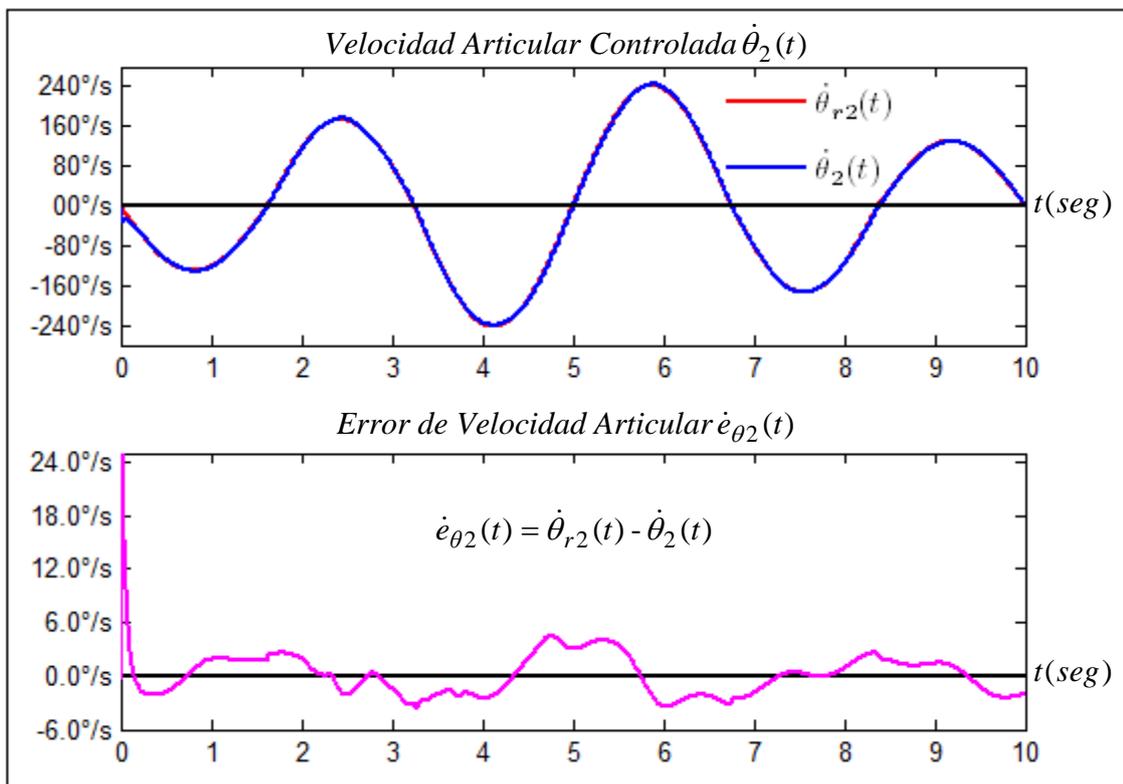


Figura 8.5.b Variables de la velocidad articular No 2: $\dot{\theta}_{r2}(t)$, $\dot{\theta}_2(t)$ y $\dot{e}_{\theta 2}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

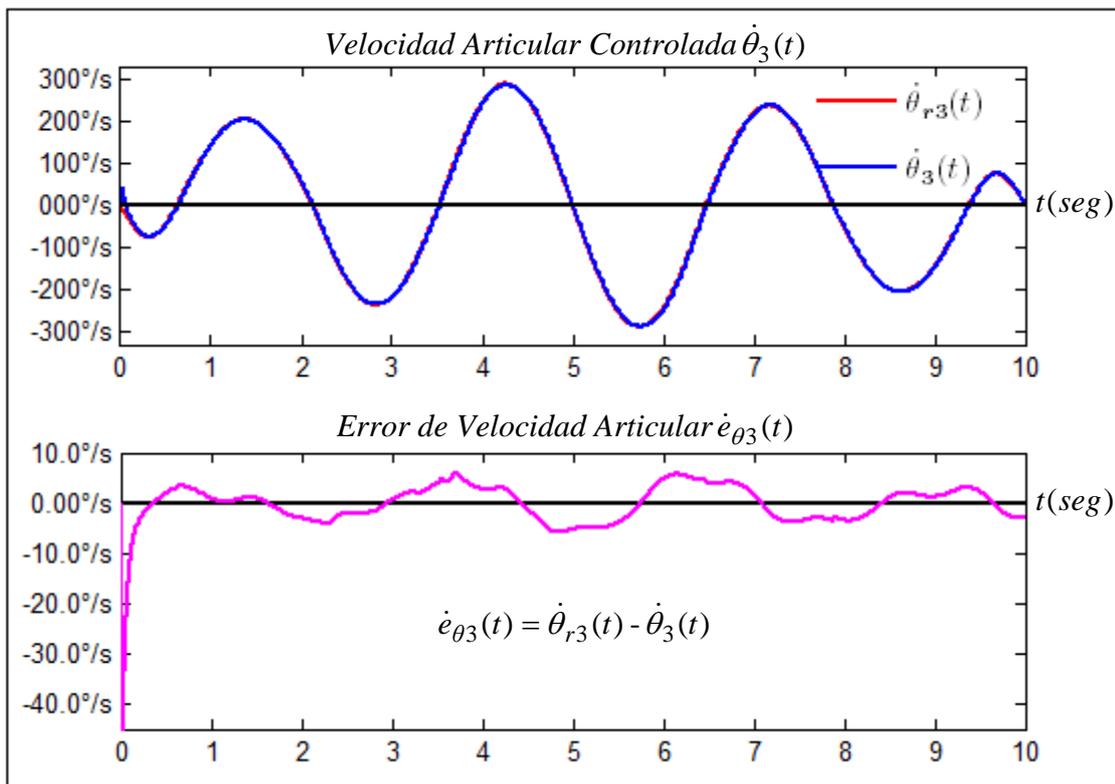


Figura 8.5.c Variables de la velocidad articular No 3: $\dot{\theta}_{r3}(t)$, $\dot{\theta}_3(t)$ y $\dot{e}_{\theta_3}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

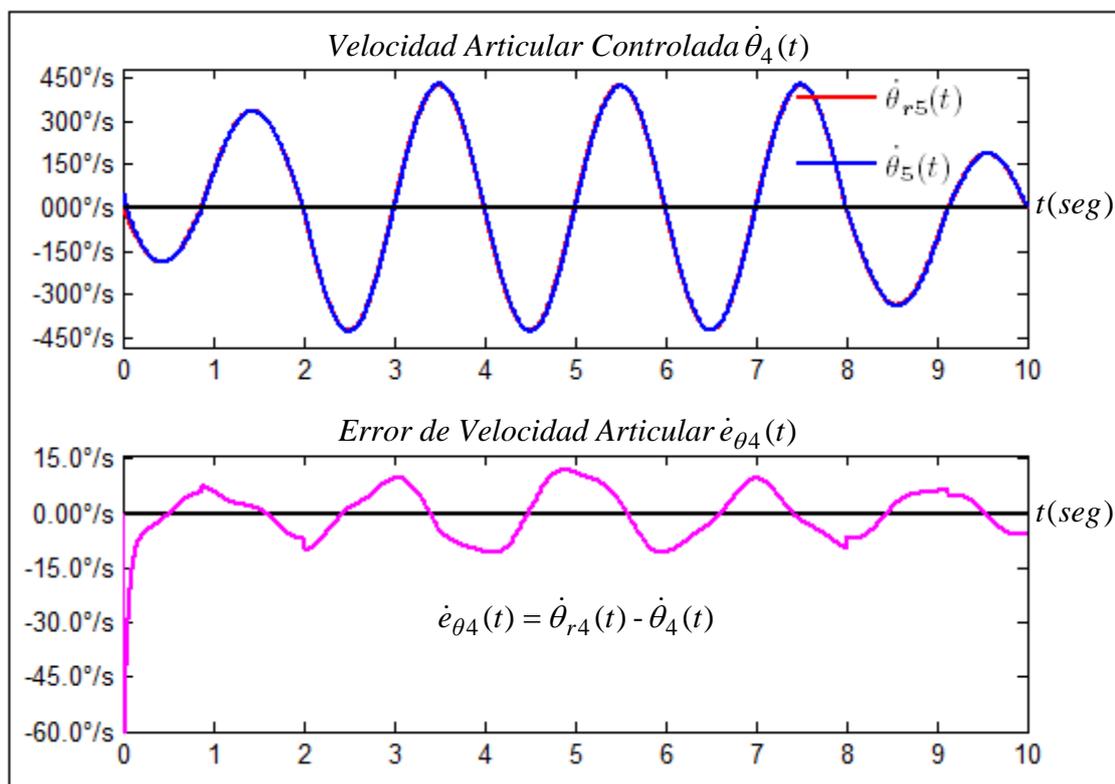


Figura 8.5.d Variables de la velocidad articular No 4: $\dot{\theta}_{r4}(t)$, $\dot{\theta}_4(t)$ y $\dot{e}_{\theta_4}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

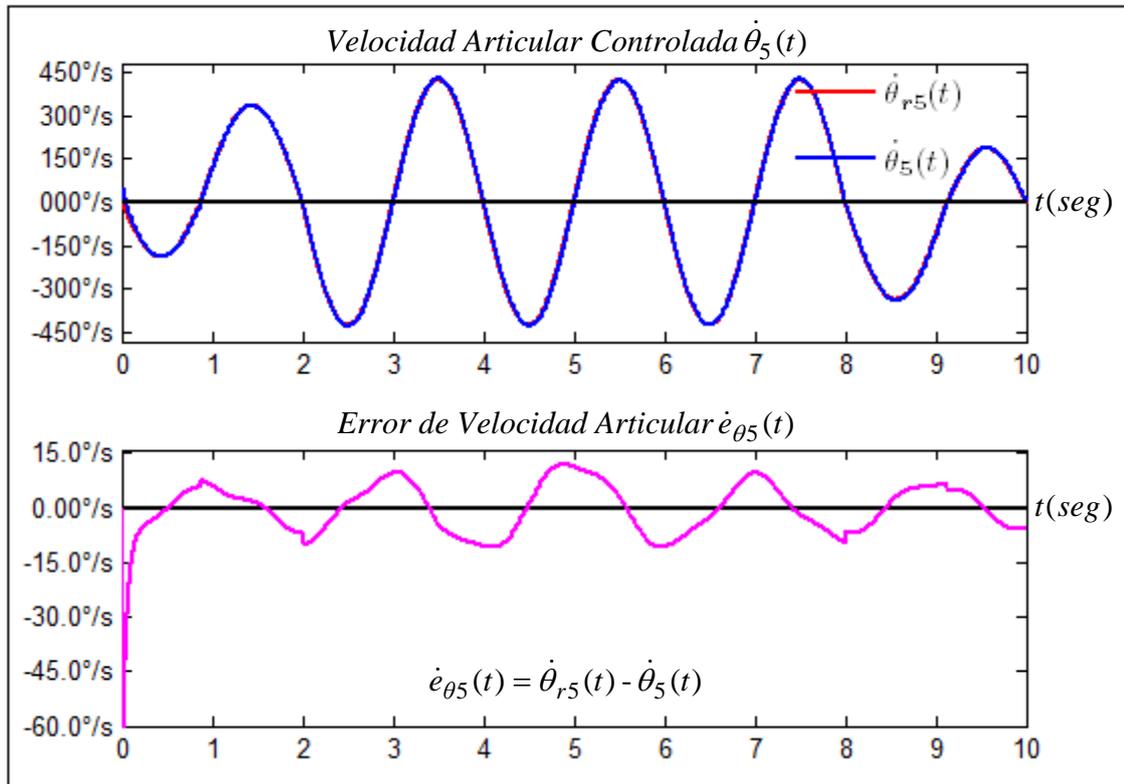


Figura 8.5.e Variables de la velocidad articular No 5: $\dot{\theta}_{r5}(t)$, $\dot{\theta}_5(t)$ y $\dot{e}_{\theta_5}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

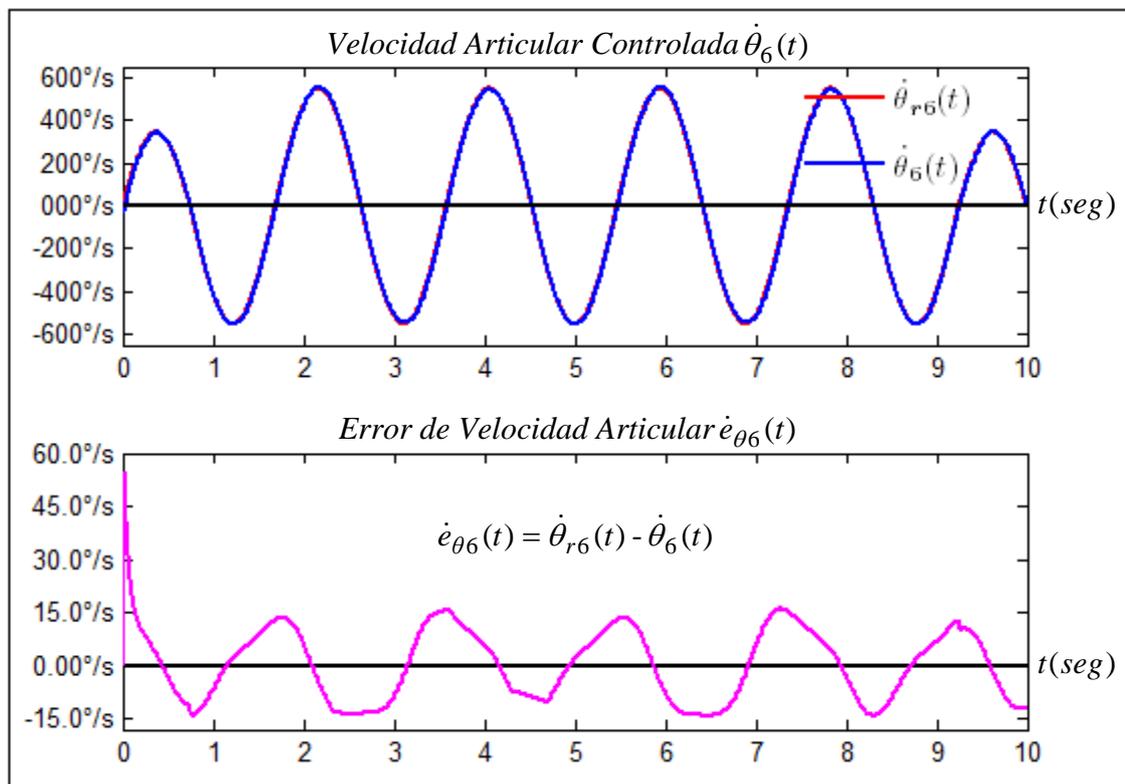


Figura 8.5.f Variables de la velocidad articular No 6: $\dot{\theta}_{r6}(t)$, $\dot{\theta}_6(t)$ y $\dot{e}_{\theta_6}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

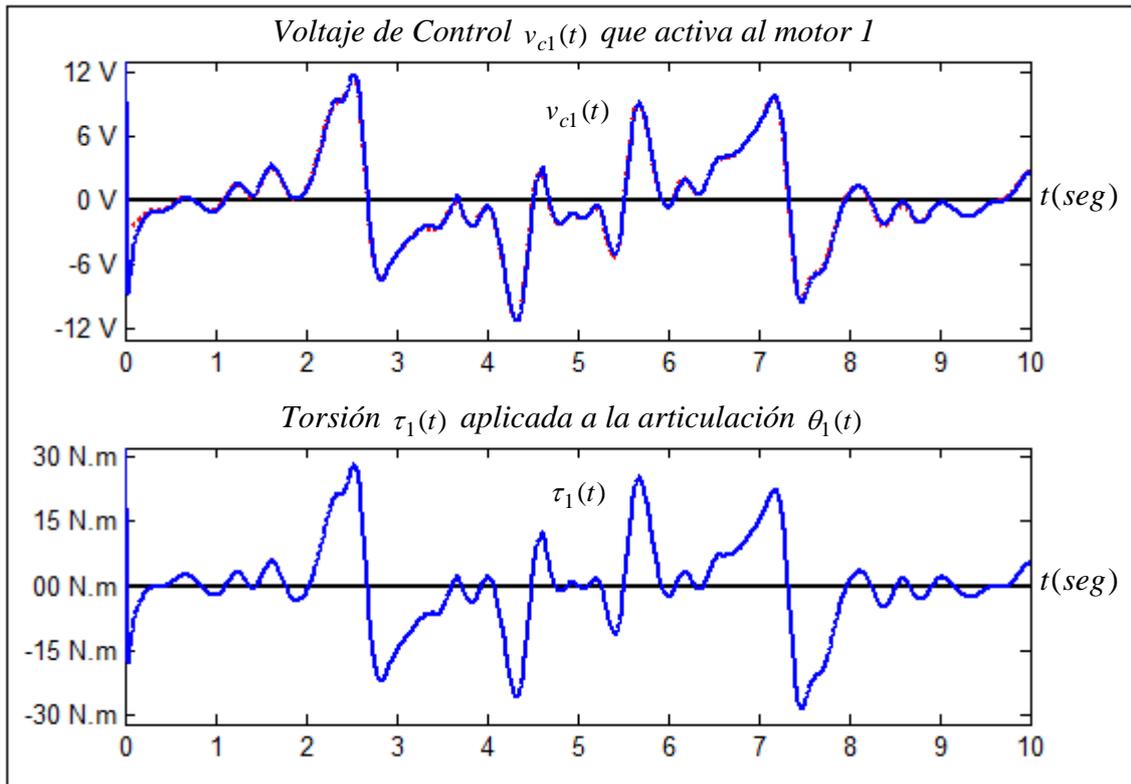


Figura 8.6.a Variables de control de la articulación No 1: $u_{n1}(t)$, $u_1(t) = v_{c1}(t)$, $\tau_1(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

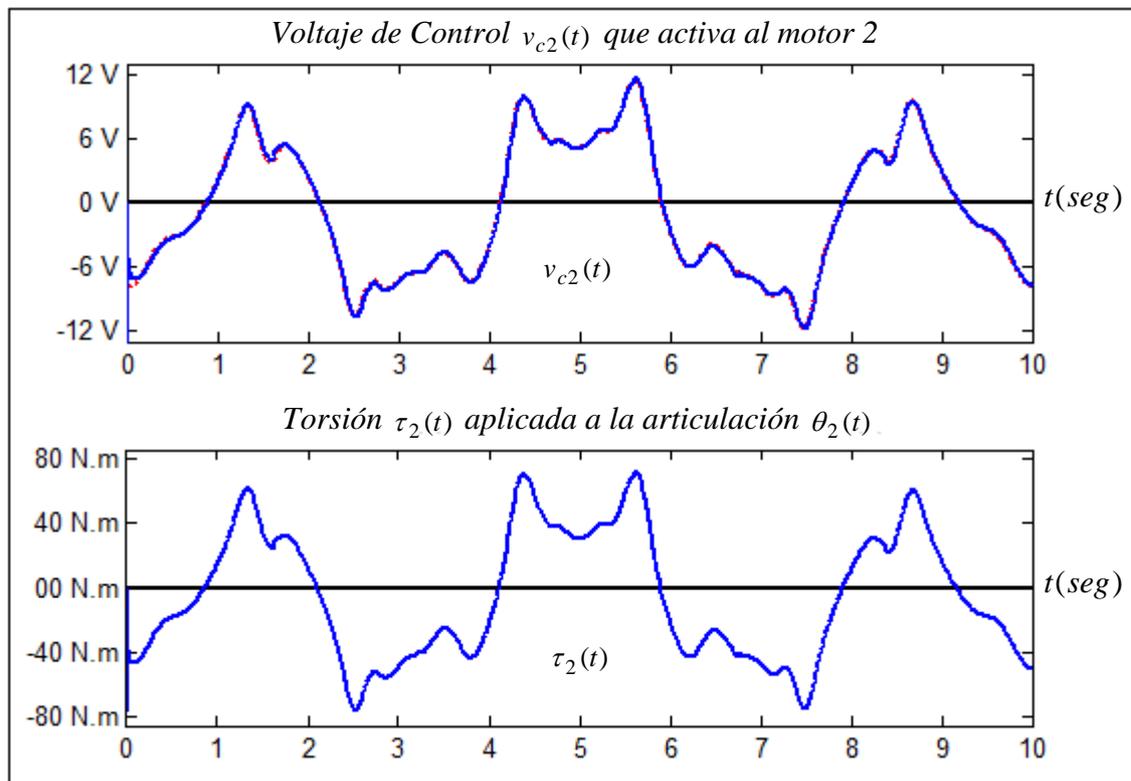


Figura 8.6.b Variables de control de la articulación No 2: $u_{n2}(t)$, $u_2(t) = v_{c2}(t)$, $\tau_2(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

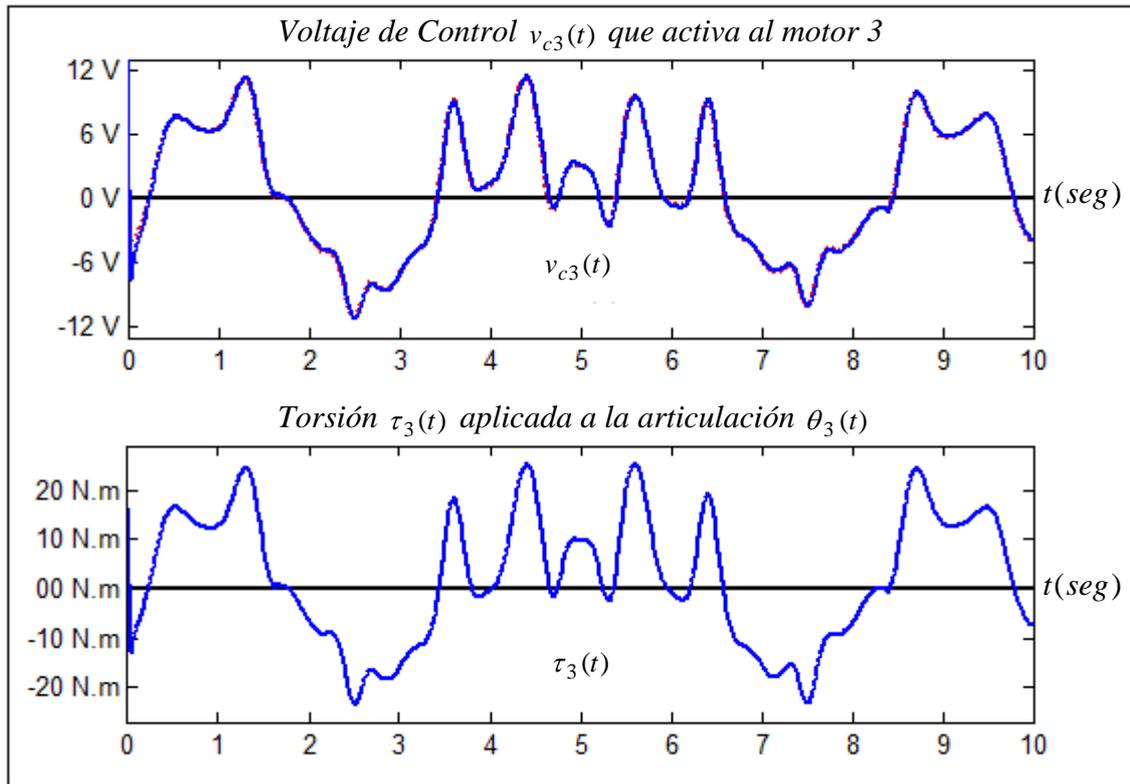


Figura 8.6.c Variables de control de la articulación No 3: $u_{n3}(t)$, $u_3(t) = v_{c3}(t)$, $\tau_3(t)$.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

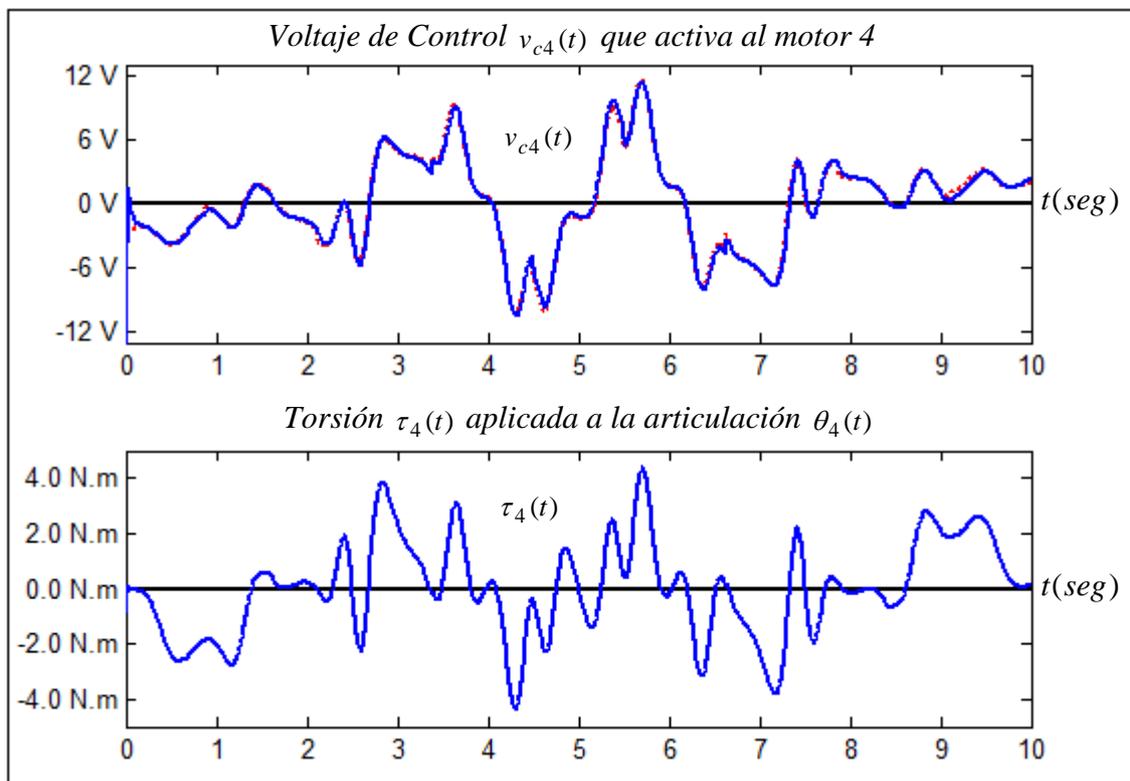


Figura 8.6.d Variables de control de la articulación No 4: $u_{n4}(t)$, $u_4(t) = v_{c4}(t)$, $\tau_4(t)$.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

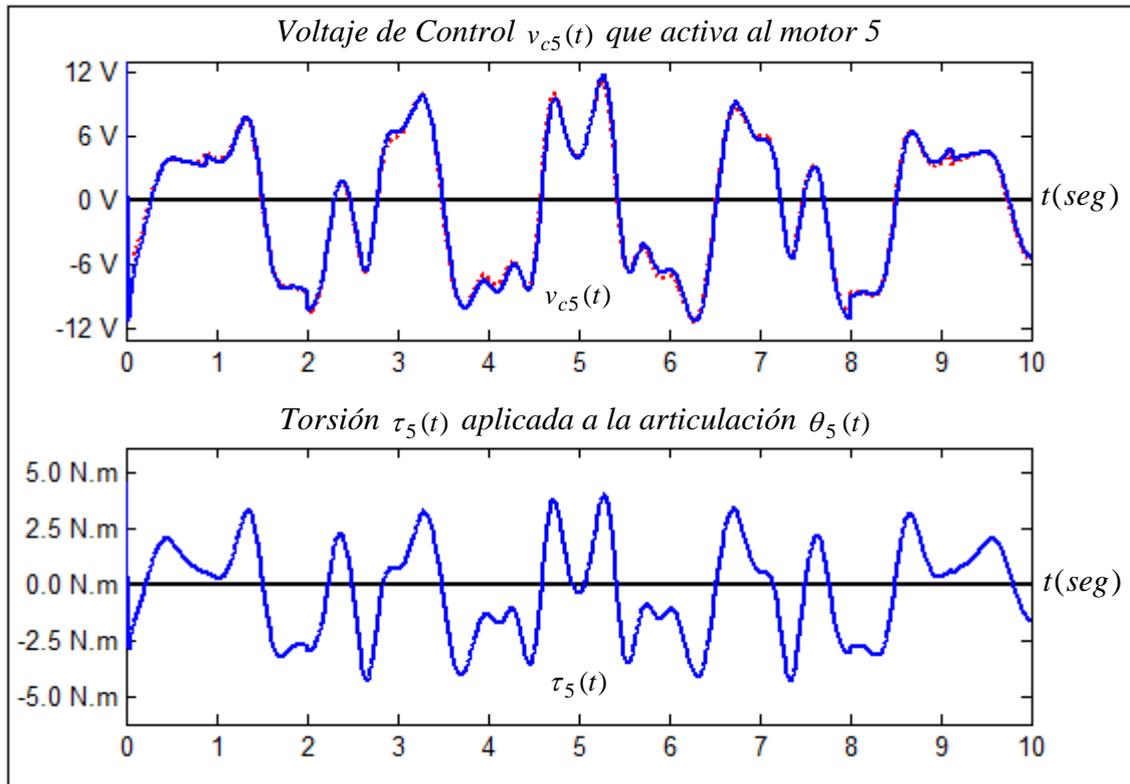


Figura 8.6.e Variables de control de la articulación No 5: $u_{n5}(t)$, $u_5(t) = v_{c5}(t)$, $\tau_5(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

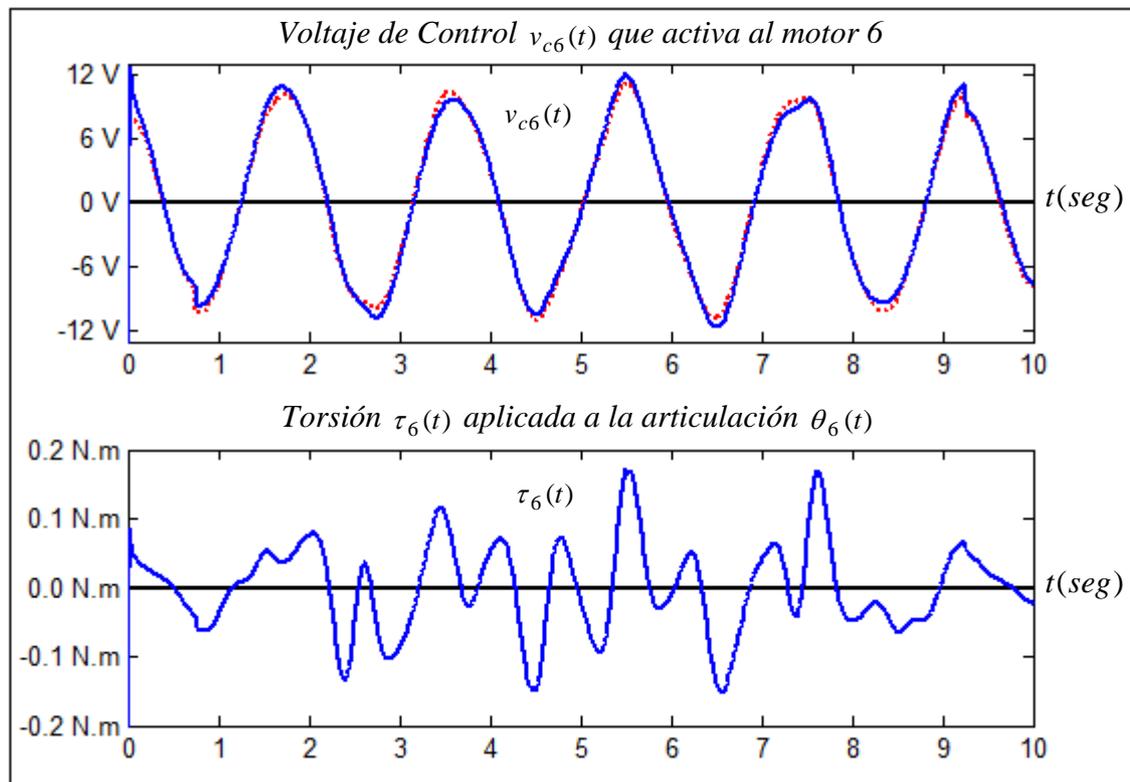


Figura 8.6.f Variables de control de la articulación No 6: $u_{n6}(t)$, $u_6(t) = v_{c6}(t)$, $\tau_6(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

En la figura 8.7 se muestran las gráficas que representan a las trayectorias cartesianas tridimensionales, referencial $\mathbf{p}_r(q(t))$ (igual que la gráfica de la figura 2.15) y controlada $\mathbf{p}(q(t))$ (de forma indirecta), que realiza el efector final del robot en el tiempo con respecto del sistema referencial $x_0y_0z_0$. En la figura 8.8 se muestran las componentes cartesianas de la trayectoria espacial $\bar{\mathbf{p}}(t)=[p_x(t) p_y(t) p_z(t)]^T$ respecto del referencial base $x_0y_0z_0$ obtenidas mediante la ecuación (2.22.d). En la figura 8.9 se muestran las componentes cartesianas de la velocidad lineal $\bar{\mathbf{v}}(t)=[v_x(t) v_y(t) v_z(t)]^T$ respecto del referencial base $x_0y_0z_0$ obtenidas mediante la ecuación (3.7.a). En la figura 8.10 se muestran las componentes cartesianas de la velocidad angular $\bar{\boldsymbol{\omega}}(t)=[\omega_x(t) \omega_y(t) \omega_z(t)]^T$ respecto del referencial base $x_0y_0z_0$ obtenidas mediante la ecuación (3.7.b). En la figura 8.11 se muestran las gráficas de las velocidades cartesianas absolutas tanto velocidad lineal $v(q(t)) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)}$ como velocidad angular $\omega(q(t)) = \sqrt{\omega_x^2(t) + \omega_y^2(t) + \omega_z^2(t)}$ del efector operacional del robot respecto del sistema referencial base $x_0y_0z_0$.

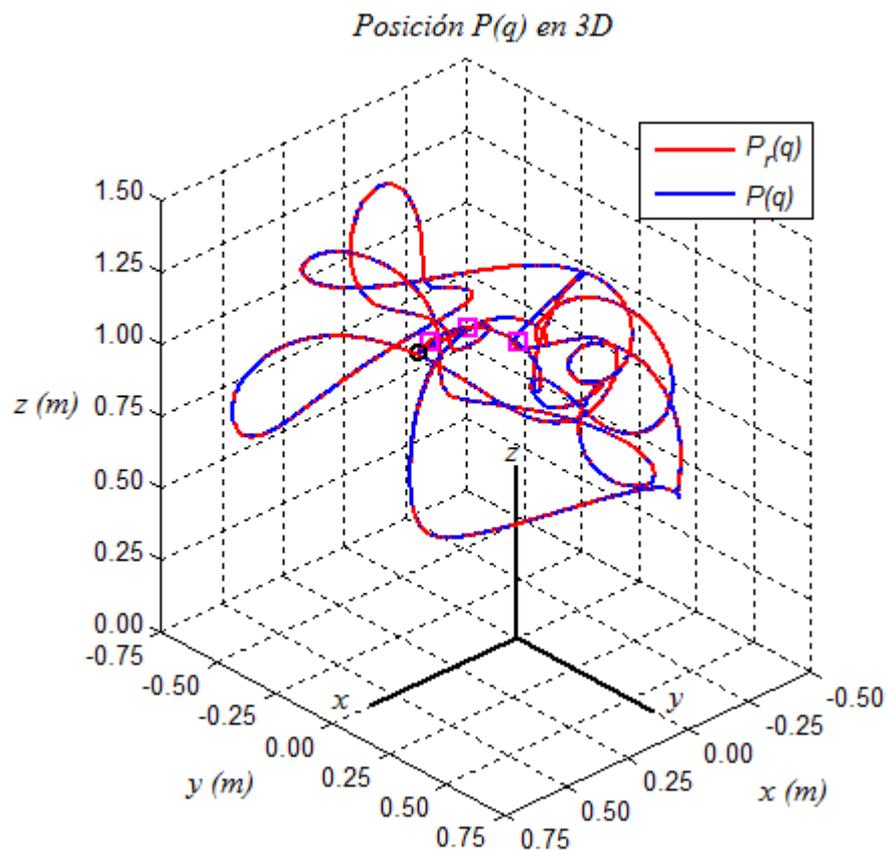


Figura 8.7 Trayectoria cartesiana $\mathbf{P}(t)$ tridimensional del efector final del robot.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

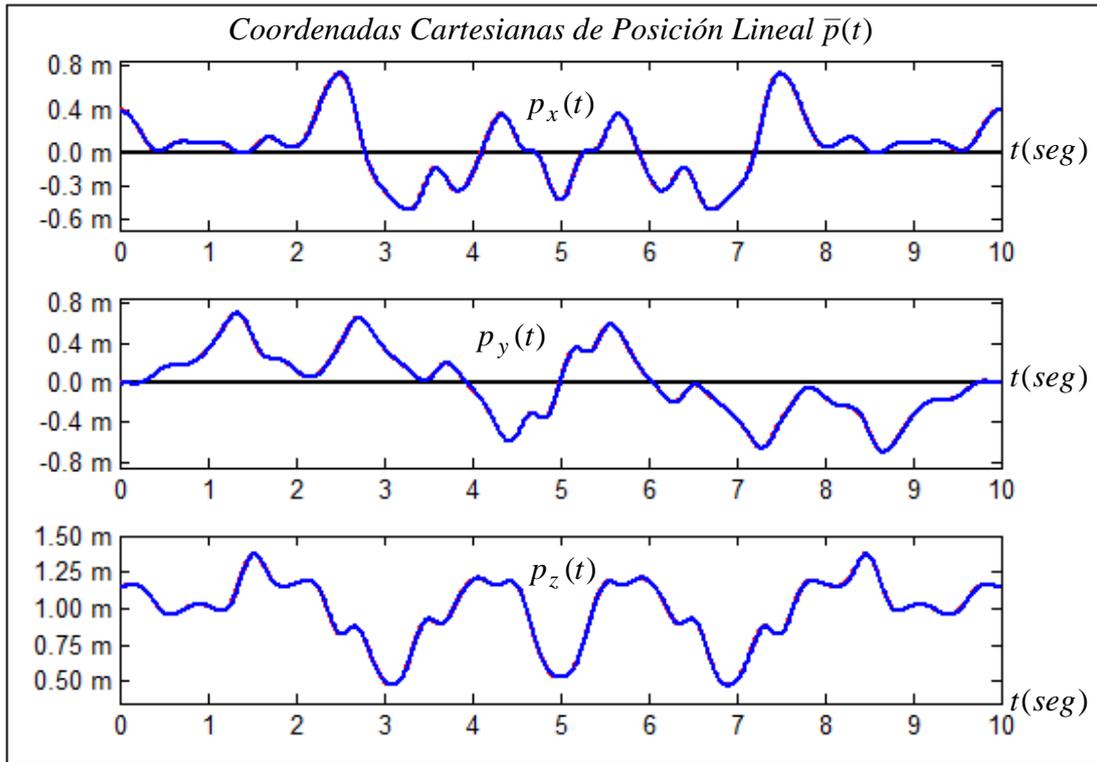


Figura 8.8 Desplazamiento lineal cartesiano $\bar{p}(t)$ del efector final del robot.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

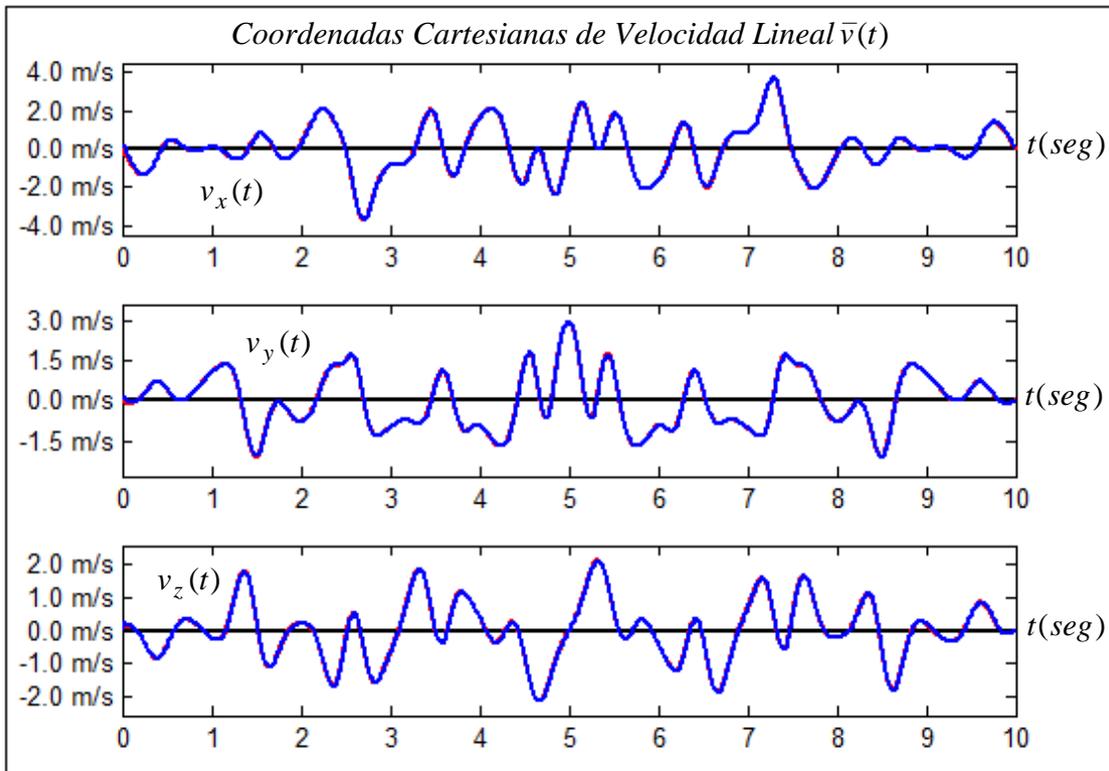


Figura 8.9 Velocidad lineal cartesiana $\bar{v}(t)$ del efector final del robot.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

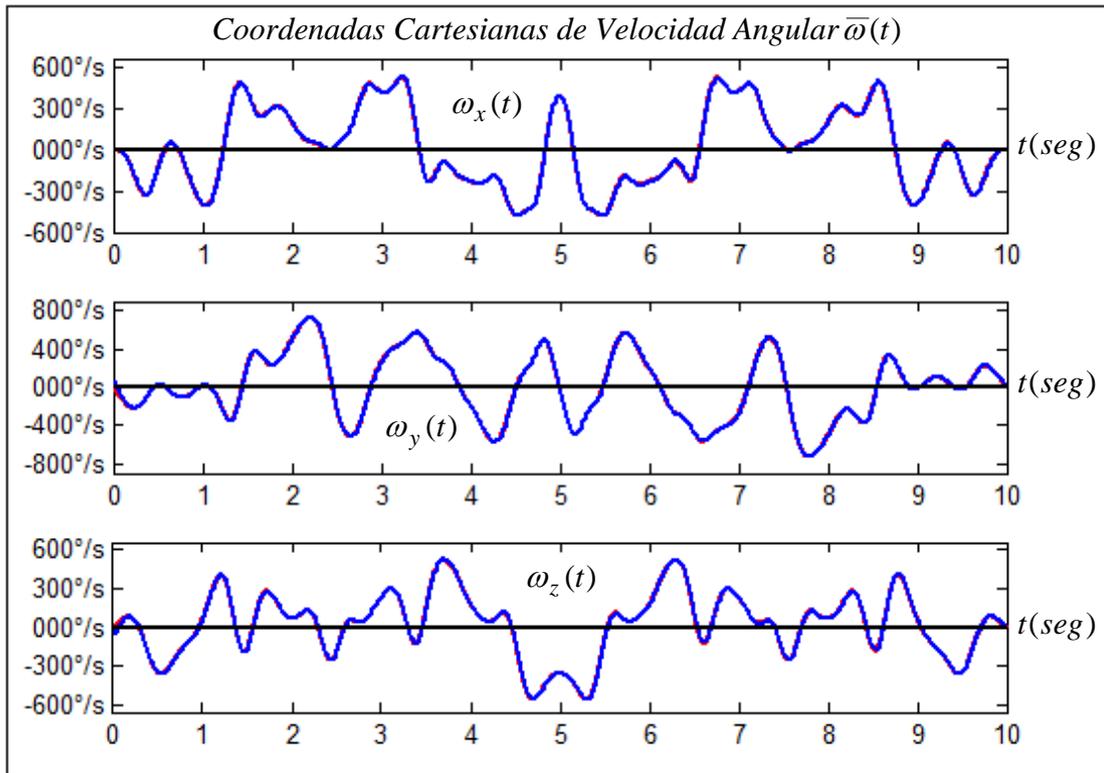


Figura 8.10 Velocidad angular cartesiana $\bar{\omega}(t)$ del efector final del robot.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

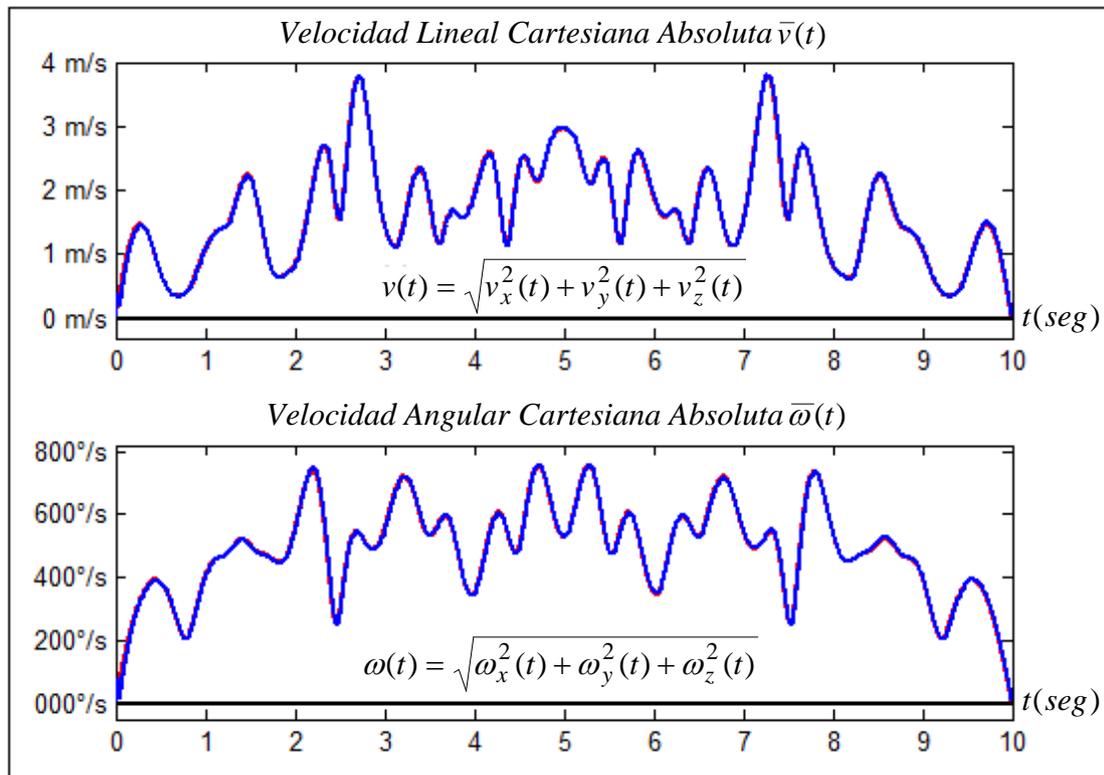


Figura 8.11 Velocidades absolutas lineal $\bar{v}(t)$ y angular $\bar{\omega}(t)$ del efector final del robot.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

8.6 Análisis de los resultados obtenidos mediante la Simulación Gráfica

De acuerdo a las gráficas mostradas en las figuras 8.4 se observa que las trayectorias articulares controladas en el tiempo $\theta(t)$ siguen realmente en su totalidad y de forma simultánea a las trayectorias articulares de referencia $\theta_r(t)$ presentándose variables de error de magnitud articular tanto en régimen transitorio como en régimen permanente $e_\theta(t) = \theta_r(t) - \theta(t)$ entre los márgenes pre-establecidos. Las gráficas que se presentan en las figuras 8.5 muestran también que las variables de velocidad articular $\dot{\theta}(t)$ se aproximan cercanamente a las variables de velocidad deseadas $\dot{\theta}_r(t)$ originándose el error temporal entre éstas $\dot{e}_\theta(t) = \dot{\theta}_r(t) - \dot{\theta}(t)$ dentro de un margen admitido; los errores $e_\theta(t)$ y $\dot{e}_\theta(t)$ son manejables dependiendo de las aplicaciones del robot, ajustando adecuadamente los valores de las matrices de ponderación Q y R de la función de costo de la ecuación (8.21); estos errores pueden reducir de magnitud con la contraparte de que las magnitudes de las señales de control aumentan sobre todo en los cambios grandes de las variables articulares de referencia.

Las gráficas que se presentan en las figuras 8.6 muestran las variables de control $v_c(t)$ que se generan al ejecutar los algoritmos dinámicos de control en el procesador digital, estas señales se aplican a la entrada de los amplificadores de potencia de los respectivos motores con valores admitidos dentro de los márgenes establecidos, las magnitudes de estas señales se pueden ajustar también variando las ganancias de los amplificadores de potencia. En las figuras 8.6 también se muestran las gráficas que corresponden a las torsiones $\tau(t)$ generadas por los motores para accionar a las articulaciones del robot según los efectos dinámicos del sistema y así conseguir que el efector final del robot realice estrechamente las trayectorias articulares requeridas $\theta_r(t)$ con sus respectivas velocidades articulares $\dot{\theta}_r(t)$.

En la tabla 8.1 se muestran los valores máximos y mínimos de las variables de articulación $\theta(t)$, de las velocidades articulares $\dot{\theta}(t)$, de los errores de articulación $e_\theta(t)$, de los errores de velocidad articular $\dot{e}_\theta(t)$, de las variables de control $v_c(t)$ y de las variables de torsión $\tau(t)$ correspondientes a las seis articulaciones del robot manipulador propuesto.

Tabla 8.1 Resultados obtenidos al aplicar el método de control: Compensación Adaptiva.

<i>Variables</i>	<i>Articulaciones</i>					
	1	2	3	4	5	6
$\theta_{max}(\text{°})$	179.9241	45.0477	224.9620	164.9870	135.1017	165.0350
$\theta_{min}(\text{°})$	-179.9652	-225.0256	-44.9893	-165.0829	-135.1697	-165.0981
$e_{\theta} \text{ max}(\text{°})$	0.9975	1.0505	1.1164	2.0858	1.9646	2.5621
$e_{\theta} \text{ min}(\text{°})$	-1.0824	-0.8970	-1.3130	-2.2625	-1.9723	-2.4517
$\dot{\theta}_{max}(\text{°}/s)$	184.9143	244.6399	284.8033	443.9376	428.5151	553.7048
$\dot{\theta}_{min}(\text{°}/s)$	-227.1361	-240.2126	-287.5022	-520.1987	-425.5860	-551.1955
$\dot{e}_{\theta} \text{ max}(\text{°}/s)$	2.8543	4.4259	6.0547	11.6761	11.8304	15.9782
$\dot{e}_{\theta} \text{ min}(\text{°}/s)$	-3.6192	-3.7500	-5.8527	-8.6716	-10.8688	-14.1184
$u_c \text{ max}(V)$	11.7909	11.5986	11.3949	11.5022	11.7064	11.9871
$u_c \text{ min}(V)$	-11.2809	-11.7975	-11.2499	-10.5663	-11.3249	-11.6841
$\tau \text{ max}(Nm)$	28.0875	70.8598	25.3527	4.3884	4.0412	0.1740
$\tau \text{ min}(Nm)$	-28.6719	-75.3584	-23.4317	-4.3902	-4.3017	-0.1524

CAPITULO 9

SISTEMA DE CONTROL OPTIMO ADAPTIVO AUTOSINTONIZABLE ††

9.1 Introducción

El control adaptivo en general ha demostrado una gran potencialidad en diversos campos de aplicación del control automático y la generalización de las aplicaciones de microprocesadores ha facilitado enormemente su utilización en el control de una gran variedad de sistemas. En Robótica, la aplicación de control adaptivo se presenta como una de las más prometedoras técnicas actuales y los resultados obtenidos tanto en simulación digital como en experimentaciones reales han demostrado la viabilidad de su utilización práctica y sus excelentes características de funcionamiento.

La gran complejidad y la naturaleza no lineal del comportamiento dinámico de la estructura mecánica articulada de un manipulador robótico, unida a la variabilidad de las condiciones de operación, ha conducido al planteamiento de estrategias de control que eviten la dependencia directa de la formulación dinámica del sistema, permitiendo, sin embargo, un comportamiento uniforme en una amplia gama de situaciones operativas del manipulador robótico.

El control adaptivo Autosintonizable o por autoajuste de parámetros aplicado a un robot asume que el sistema físico puede ser formulado en cada condición operativa por un modelo lineal autorregresivo de estructura fija y con parámetros dependientes de dicha condición. El sistema de control incluye un módulo que estima los parámetros del sistema a partir de las señales de control (voltaje aplicado a los motores actuadores) y de la lectura de posición y velocidad articulares en tiempo real mediante los transductores, denominadas variables de estado, formulando así instantáneamente un “*Modelamiento Dinámico Linealizado*” equivalente del sistema para aplicar alguna ley de control lineal multivariable que describa el funcionamiento del sistema robot. Esta técnica se puede aplicar eficaz y potencialmente para controlar la trayectoria espacial cartesiana o articular del efector operacional de un robot.

†† Método propuesto y desarrollado por el autor

9.2 Planteamiento del método de control

El sistema de control adaptivo Autosintonizable multivariable aplicado al sistema robótico realiza cíclicamente una secuencia de procedimientos que está constituida por un algoritmo que consta de la lectura de los transductores, identificación de parámetros del sistema, integración del vector de error de posición articular, síntesis de la ley de control y la acción del controlador óptimo proporcional integral. Esta secuencia se lleva a cabo en cada instante de muestreo de tal forma que los parámetros del sistema motor-robot y los coeficientes del controlador se modifiquen o se adapten iterativamente hasta que alcancen valores estacionarios en el caso de condiciones invariantes del sistema.

En consecuencia, el Sistema de Control Adaptivo Autosintonizable para el manipular propuesto está constituido por cuatro elementos fundamentales:

- La identificación de parámetros del sistema robótico, mediante el algoritmo del “*Método de Mínimos Cuadrados Recursivo*”, en función del vector de control y del vector de estado medido mediante transductores del sistema controlado en cada instante del tiempo, estima la dinámica a través de la determinación del conjunto de parámetros de un modelo estructural preestablecido.
- El uso de integradores de adelanto del vector del error entre el vector de posición de referencia y el vector de posición articular real del robot, esta acción permite anular o reducir significativamente los errores presenciales de modelamiento, incertidumbres intrínsecas, perturbaciones, ruidos de medición, etc. presentes en el sistema robot.
- El diseño del controlador digital que se realiza en cada paso de la iteración para generar la acción de control óptimo proporcional-integral (*PI*), de paso mejorado a partir del vector de la consigna y del vector de respuesta del sistema, es decir se realiza la evaluación dinámica (adaptación) de los parámetros del controlador óptimo *PI* en línea empleando el vector de estado del robot medido en cada instante de tiempo.
- La implementación del algoritmo de control, haciendo uso de los parámetros del robot suministrado por el algoritmo de estimación y los parámetros del controlador se determina la acción mediante la ley control.

El Sistema de Control Adaptivo Autosintonizable aplicado a la estructura articulada y compleja como es un manipulador, se plantea como un sistema de control no lineal único multivariable que actúa sobre todas las articulaciones de la estructura mecánica del robot

(incluyendo actuadores y transductores), considerando de esta manera el acoplamiento total de la interacción de todas las variables físicas y los efectos no lineales involucrados en el sistema motor-robot.

En la figura 9.1 se presenta mediante un diagrama de bloques general la estructura general del sistema de control adaptivo Autosintonizable.

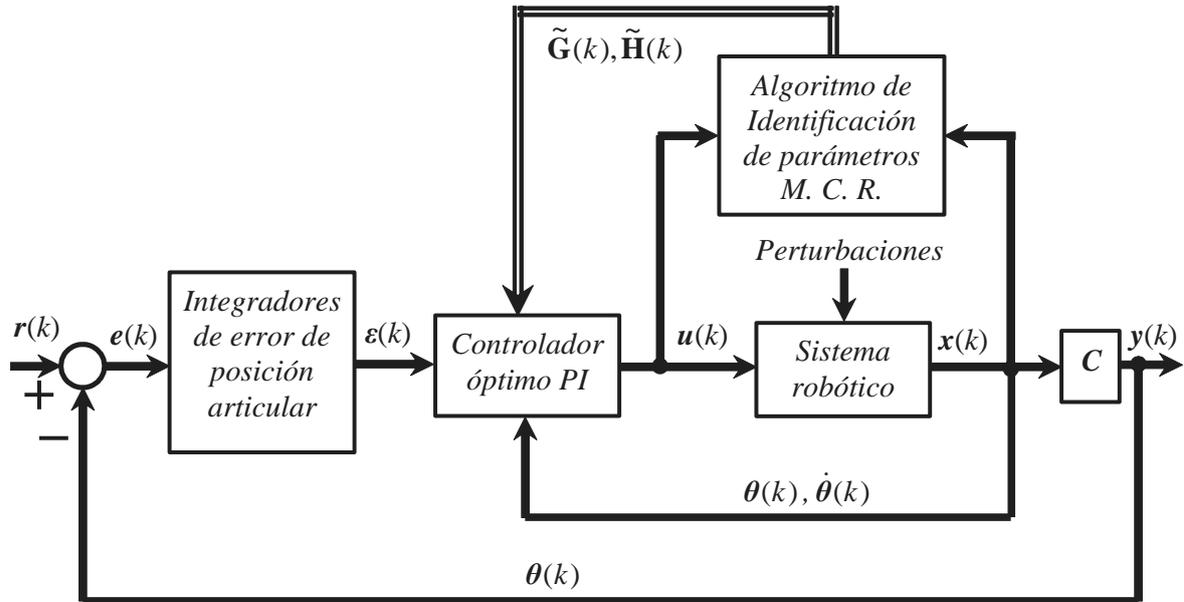


Figura 9.1 Esquema general del Sistema de Control Adaptivo Autosintonizable.

Gráfica elaborada por el autor

La formulación de la Dinámica Inversa del sistema motores-robot expresada en la ecuación (6.5) se vuelve a expresar de forma general, estructurada y vectorial como sigue:

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Omega}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{\Gamma}(\mathbf{q}) + \mathbf{\Phi}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{d}(t) \quad (9.1)$$

Considerando el modelamiento físico del sistema actuador-robot expresado mediante la ecuación (6.8) se puede escribir la Dinámica Directa del sistema como una expresión vectorial no lineal variante en el tiempo, con la acción de las perturbaciones y presencia de incertidumbres de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{d}(t)) \quad (9.2)$$

La ecuación (9.2) que expresa la Dinámica Directa del sistema también se puede expresar mediante variables de estado de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1) [\mathbf{u}(t) - \mathbf{\Omega}(\mathbf{x}) - \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{d}(t)] \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

De la ecuación dinámica (9.2) o de la ecuación de estado (9.3), el vector de estado $\mathbf{x}(t)$ se define por $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1(t) \ \mathbf{x}_2(t)]^T = [\mathbf{q}(t) \ \dot{\mathbf{q}}(t)]^T$, el vector de control $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_c(t)$ y el vector de perturbación $\mathbf{d}(t)$ del sistema, no es medido por tanto no es determinado, pero usando este método de control se incluye su efecto en el sistema a pesar que no se puede medir. La dinámica del sistema robótico se puede formular mediante un modelo lineal variante en el tiempo que sea equivalente al modelo dinámico de la ecuación (9.2) en cada instante de tiempo t , que en términos de los vectores de estado $\mathbf{x}(t)$ y de control $\mathbf{u}(t)$ se expresa en el espacio de estados como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \quad (9.4)$$

Las matrices variantes en el tiempo $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ de la ecuación (9.4) son las matrices instantáneas de estado y de control respectivamente en tiempo continuo. Para la realización del sistema de control en un procesador digital, es necesario que la dinámica del sistema de la ecuación (9.4) se expresa en tiempo discreto con un periodo de discretización T , considerando que el tiempo se define como $t = kT$, la cual se debe expresar como una ecuación lineal de estado en tiempo discreto en cada instante incluyendo inclusive el efecto perturbador de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k) \mathbf{u}(k) ; \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (9.5)$$

Las matrices $\mathbf{G}(k)$ y $\mathbf{H}(k)$ de la ecuación de estado (9.5) de dimensiones 12×12 y 12×6 respectivamente, son matrices variantes en el tiempo y dependen tanto de la posición y de la velocidad instantáneas del manipulador a lo largo de una determinada trayectoria articular, que están variando con el tiempo así como también los efectos perturbadores y de las incertidumbres presentes en el sistema. Las matrices de la ecuación de estado (9.5) se pueden estimar mediante algún método de identificación de parámetros de un sistema multivariable con comportamiento no lineal.

El vector de estado $\mathbf{x}(k)$ de dimensión 12×1 de la ecuación (9.5) se obtiene realizando mediciones en cada periodo de tiempo T mediante los transductores de posición y velocidad articulares y el vector de control $\mathbf{u}(k)$ de dimensión 6×1 , es un vector de manipulación constante a tramos que se obtiene ejecutando el algoritmo de control a lo largo del intervalo de tiempo t entre cualquiera de dos instantes de muestreo consecutivo con $kT \leq t < (k+1)T$ para accionar a los motores de las articulaciones del robot.

9.3 Identificación de parámetros del sistema

Para diseñar el controlador digital del sistema manipulador se requiere que los parámetros de la ecuación de estado (9.5) se conozcan en todo instante de tiempo $t=kT$ por lo tanto se deben conocer los elementos de las matrices $\mathbf{G}(k)$ y $\mathbf{H}(k)$ y establecer de esta forma un método de obtener el vector de control $\mathbf{u}(k)$ del sistema que permita llevar en todo instante al efector final a través de una trayectoria planificada, por lo que se debe utilizar alguna técnica de identificación de parámetros para estimar las matrices $\mathbf{G}(k)$ y $\mathbf{H}(k)$ de la dinámica del sistema.

Para identificar y estimar los parámetros de la dinámica discreta del sistema robot se puede aplicar satisfactoria y eficazmente el algoritmo de identificación paramétrica de *Mínimos Cuadrados Recursivos (MCR)*, debido a la practicidad y la sencillez de la implementación en un procesador digital, para identificar los parámetros contenidos en las matrices $\mathbf{G}(k)$ y $\mathbf{H}(k)$ que conforman la ecuación de estado (9.5).

En el esquema de identificación de parámetros, se hacen las siguientes hipótesis:

- a) Los parámetros del sistema presentan una velocidad de variación más lenta que la velocidad de adaptación.
- b) El ruido de medida del vector de estado es despreciable.
- c) Las variables del vector de estado $\mathbf{x}(k)$ del sistema son medidas en cada periodo de muestreo.

Para aplicar el algoritmo de *Mínimos Cuadrados Recursivo* en la identificación de parámetros del sistema expresado mediante la ecuación (9.5), es necesario disponer de ecuaciones apropiadas. Aplicando la transpuesta a las matrices y vectores de la ecuación (9.5) y agrupando de forma conveniente se obtiene una ecuación transpuesta de estado del sistema equivalente expresada como: (*)

$$\mathbf{x}^T(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(k) & \mathbf{u}^T(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}^T(k) \\ \mathbf{H}^T(k) \end{bmatrix}; k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (9.6)$$

La ecuación transpuesta (9.6) se puede simplificar y escribir en una forma compacta de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}^T(k+1) = \boldsymbol{\psi}^T(k)\mathbf{A}(k) \quad (9.7)$$

* Ecuación propuesta por el autor

El vector $\boldsymbol{\psi}(k)$ de dimensión 18×1 de la ecuación (9.7) involucra al vector de estado $\boldsymbol{x}(k)$ y al vector de control $\boldsymbol{u}(k)$ de la ecuación (9.6) en el instante k -ésimo y se puede definir como:

$$\boldsymbol{\psi}^T(k) = [x_1(k) \quad x_2(k) \quad \cdots \quad x_{12}(k) \quad u_1(k) \quad \cdots \quad u_6(k)] \quad (9.8)$$

La matriz $\boldsymbol{A}(k)$ de dimensión 18×12 de la ecuación (9.6) involucra a los elementos a estimar (desconocidos) del sistema tanto de la matriz $\boldsymbol{G}(k)$ como de la matriz $\boldsymbol{H}(k)$ y se escribe explícitamente como:

$$\boldsymbol{A}(k) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}^T(k) \\ \boldsymbol{H}^T(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{1,1}(k) & \cdots & g_{12,1}(k) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{1,12}(k) & \cdots & g_{12,12}(k) \\ h_{1,1}(k) & \cdots & h_{12,1}(k) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ h_{1,6}(k) & \cdots & h_{12,6}(k) \end{bmatrix}$$

La matriz de parámetros del sistema $\boldsymbol{A}(k)$ de la última expresión también se puede expresar como sigue:

$$\boldsymbol{A}(k) = [\boldsymbol{\alpha}_1(k) \quad \boldsymbol{\alpha}_2(k) \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_{12}(k)] \quad (9.9)$$

El vector $\boldsymbol{\alpha}_i(k)$ de dimensión 18×1 de la i -ésima columna de la matriz $\boldsymbol{A}(k)$ que está definida en la ecuación (9.9) representa el vector de parámetros desconocidos de la i -ésima expresión escalar de la ecuación de estado (9.5) de la dinámica del sistema en el instante $t = kT$ y se puede expresar como sigue:

$$\boldsymbol{\alpha}_i^T(k) = [g_{i,1}(k) \quad \cdots \quad g_{i,12}(k) \quad h_{i,1}(k) \quad \cdots \quad h_{i,6}(k)]; \quad i = 1, 2, \dots, 12 \quad (9.10)$$

La i -ésima fila de la ecuación de estado (9.5) del sistema expresa la i -ésima ecuación diferencial del sistema y se puede expresar en términos de $\boldsymbol{\psi}(k)$ y de $\boldsymbol{\alpha}_i(k)$ como sigue:

$$\boldsymbol{x}_i(k+1) = \boldsymbol{\psi}^T(k) \boldsymbol{\alpha}_i(k); \quad i = 1, 2, \dots, 12 \quad (9.11)$$

Con la ecuación (9.10) se desea identificar los parámetros de cada columna de la matriz $\boldsymbol{A}(k)$ basándose en el vector de medida $\boldsymbol{\psi}(k)$. Para realizar el algoritmo de estimación de parámetros por el método de *Mínimos Cuadrados Recursivo* la ecuación (9.11) se puede escribir como:

$$\mathbf{x}_i(k+1) = \boldsymbol{\psi}^T(k) \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i(k) + e_i(k); \quad i = 1, 2, \dots, 12 \quad (9.12)$$

El vector $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i(k)$ de dimensión 18×1 expresado en la ecuación (9.12) representa al vector estimado del vector $\boldsymbol{\alpha}_i(k)$ de la ecuación (9.11) y $e_i(k)$ representa el error de estimación del vector $\boldsymbol{\alpha}_i(k)$ debido al ruido, perturbaciones, incertidumbres, etc. y se deduce de la ecuación (9.12) del siguiente modo:

$$\mathbf{e}_i(k) = \mathbf{x}_i(k+1) - \boldsymbol{\psi}^T(k) \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i(k); \quad i = 1, 2, \dots, 12 \quad (9.13)$$

El algoritmo de identificación de parámetros por el método de *Mínimos Cuadrados Recursivo*, se determina minimizando el error ponderado exponencialmente, colocando más peso sobre los errores al cuadrado de las medidas más recientes, mediante la ecuación escalar siguiente:

$$J_i(k) = \sum_{j=0}^k \rho^{k-j} e_i^2(j) = \mathbf{E}_i^T(k) \mathbf{E}_i(k) \quad (9.14)$$

El vector de error $\mathbf{E}_i(k)$ se puede expresar del siguiente modo:

$$\mathbf{E}_i^T(k) = \left[\sqrt{\rho^k} e_i(0) \quad \sqrt{\rho^{k-1}} e_i(1) \quad \dots \quad e_i(k) \right] \quad (9.15)$$

El escalar ρ es el factor de olvido comprendido en el rango $0 < \rho < 1$ donde $k > 18$ es el número de medidas que se utilizan para realizar la estimación del vector de parámetros estimados $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i(k)$.

Para minimizar el error en la ecuación (9.13) se deriva la ecuación (9.14) con respecto al vector de parámetros desconocido $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i(k)$ y utilizando el lema de inversión matricial se obtiene un esquema de identificación por el método de *Mínimos Cuadrados Recursivo (MCR)* que permite calcular el vector $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i(k)$. Después de realizar algunas manipulaciones algebraicas se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i(k+1) = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i(k) + \gamma(k) \boldsymbol{\Pi}(k) \boldsymbol{\psi}(k) \mathbf{e}_i(k) \quad (9.16.a)$$

$$\gamma(k) = \left(\rho + \boldsymbol{\psi}^T(k) \boldsymbol{\Pi}(k) \boldsymbol{\psi}(k) \right)^{-1} \quad (9.16.b)$$

$$\boldsymbol{\Pi}(k+1) = \boldsymbol{\Pi}(k) - \gamma(k) \boldsymbol{\Pi}(k) \boldsymbol{\psi}(k) \boldsymbol{\psi}^T(k) \boldsymbol{\Pi}(k) \quad (9.16.c)$$

La matriz $\mathbf{\Pi}(k)$ es definida positiva simétrica de dimensión 18×18 y se denota así:

$$\mathbf{\Pi}(k) = \rho [\mathbf{\Psi}^T(k) \mathbf{\Psi}(k)]^{-1}$$

La matriz $\mathbf{\Psi}(k) = [\boldsymbol{\psi}(0) \quad \boldsymbol{\psi}(1) \quad \cdots \quad \boldsymbol{\psi}(k)]$ se compone de las mediciones vectoriales hasta el instante actual k -ésimo. Si el error $e_i(k)$ se distribuye idénticamente de forma independiente con media nula y varianza σ^2 , $\mathbf{\Pi}(k)$ se puede interpretar como una matriz de covarianza de estimación si ρ se escoge como σ^2 . La matriz $\mathbf{\Pi}(0)$ se puede iniciar escogiendo los valores de $\mathbf{\Pi}(0) = a \mathbf{I}_{18}$; el escalar a es un valor suficientemente grande.

Para inicializar la ecuación de recursión (9.16.a) es necesario conocer el vector inicial $\tilde{\mathbf{a}}_i(0)$. Esto es posible conociendo los valores de las matrices iniciales $\mathbf{G}(0)$ y $\mathbf{H}(0)$ de la ecuación (9.4) evaluadas en $k=0$, para esto se deben conocer las matrices iniciales $\mathbf{A}(0)$ y $\mathbf{B}(0)$ de la ecuación (9.4) en el tiempo $t=kT=0$ y esto es posible conseguirlo cuando el robot se encuentre detenido en un determinado punto espacial, en reposo y sin efecto de perturbaciones con los vectores de tiempo inicial $\mathbf{u}(0)$ y $\mathbf{x}(0)$ completamente conocidos. La ecuación de la dinámica del sistema expresada por la ecuación (9.2) suponiendo conocida en estos puntos, se puede linealizar aplicando la expansión de *Taylor* alrededor de los vectores $\mathbf{u}(0)$ y $\mathbf{x}(0)$ considerando únicamente los términos lineales como sigue:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0)) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0))(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0)) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0))(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(0)) \quad (9.17)$$

La ecuación (9.17) se puede simplificar y expresar mediante una ecuación de estado linealizada como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(0) + \mathbf{A}(0)(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0)) + \mathbf{B}(0)(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(0)) \quad (9.18)$$

Las matrices $\mathbf{A}(0)$ y $\mathbf{B}(0)$ de la ecuación (9.18) son matrices jacobianas que se relacionan con la ecuación (9.17) del siguiente modo:

$$\mathbf{A}(0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0)) \quad , \quad \mathbf{B}(0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0))$$

En un punto espacial donde los vectores $\mathbf{u}(0)$ y $\mathbf{x}(0)$ son conocidos y el robot está en reposo con ausencia de disturbios, se deduce que la derivada del vector de estado es $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$ y también el vector velocidad $\mathbf{x}_2(0) = \mathbf{0}$ por lo tanto los términos dinámicos de

acoplo de velocidad y de fricción en $t=0$ son $\mathbf{\Omega}(\mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0)) = \mathbf{0}$ y $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_2(0)) = \mathbf{0}$, entonces al evaluar la ecuación (9.3) con estos valores se expresa únicamente en términos del efecto gravitatorio por la presencia de energía potencial como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1(0))[\mathbf{u}(0) - \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}_1(0))] \end{bmatrix} \quad (9.19)$$

De la ecuación (9.19) se deduce que en un punto de reposo se cumple la relación:

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}_1(0))$$

Conocidas las matrices iniciales $\mathbf{A}(0)$ y $\mathbf{B}(0)$ se obtienen las matrices $\mathbf{G}(0)$ y $\mathbf{H}(0)$ empleando relaciones aproximadas de discretización como sigue:

$$\mathbf{G}(0) \cong \mathbf{I} + \mathbf{T}\mathbf{A}(0) + \frac{\mathbf{T}^2}{2!}\mathbf{A}^2(0) + \frac{\mathbf{T}^3}{3!}\mathbf{A}^3(0) + \frac{\mathbf{T}^4}{4!}\mathbf{A}^4(0) \quad (9.20.a)$$

$$\mathbf{H}(0) \cong \mathbf{T}\mathbf{B}(0) + \frac{\mathbf{T}^2}{2!}\mathbf{A}(0)\mathbf{B}(0) + \frac{\mathbf{T}^3}{3!}\mathbf{A}^2(0)\mathbf{B}(0) + \frac{\mathbf{T}^4}{4!}\mathbf{A}^3(0)\mathbf{B}(0) \quad (9.20.b)$$

Con los parámetros estimados contenidos en el vector $\tilde{\mathbf{a}}_i(k)$, se obtiene la matriz global de parámetros estimados $\tilde{\mathbf{A}}(k)$, por lo que la dinámica en el espacio de estados de la ecuación (9.7) despreciando los errores de estimación $e_i(k)$ se expresa como:

$$\mathbf{x}^T(k+1) \cong \boldsymbol{\psi}^T(k)\tilde{\mathbf{A}}(k) \quad (9.21)$$

En base de la expresión (9.21), la ecuación (9.5) se puede expresar también de forma aproximada como:

$$\mathbf{x}(k+1) \cong \tilde{\mathbf{G}}(k)\mathbf{x}(k) + \tilde{\mathbf{H}}(k)\mathbf{u}(k) \quad (9.22)$$

Las matrices estimadas $\tilde{\mathbf{G}}(k)$ y $\tilde{\mathbf{H}}(k)$ involucradas en la ecuación (9.22) son variantes en el tiempo y representan a los parámetros del sistema motores-robot que se obtienen mediante el algoritmo de identificación de parámetros en el instante de muestreo k -ésimo, considerando el vector de error de estimación $e_i(k)$ muy pequeño que se puede despreciar.

La ecuación de la respuesta del sistema de control en tiempo discreto con parámetros estimados, considerando la ecuación (6.9) se vuelve a escribir como:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (9.23)$$

9.4 Representación Dinámica del Sistema incluyendo Integradores

En vista de que el sistema motor-robot está afectado por señales de ruido, variables de perturbación, incertidumbres, así como los errores que se cometen en la estimación de parámetros que afectan a la respuesta dinámica del sistema de control de lazo cerrado, por ello, se deben incluir integradores para disminuir la desviación de la respuesta producida por estos efectos. En este caso se ha optado por elegir Integración Rectangular en adelante en tiempo discreto (acción rápida) que se puede formular de la siguiente manera: (*)

$$\boldsymbol{\varepsilon}(k) = \boldsymbol{\varepsilon}(k-1) + \boldsymbol{e}(k) = \boldsymbol{\varepsilon}(k-1) + (\boldsymbol{r}(k) - \boldsymbol{y}(k)) \quad (9.24)$$

El vector $\boldsymbol{e}(k) = \boldsymbol{r}(k) - \boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{q}_r(k) - \boldsymbol{q}(k)$ representa el error entre el vector de variables articulares de consigna $\boldsymbol{q}_r(k)$ y el vector de variables articulares de respuesta real $\boldsymbol{q}(k)$. El vector $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$ de dimensión 6×1 representa la acumulación del vector de error de posición articular $\boldsymbol{e}(k)$ a medida que transcurre el tiempo.

Adelantando un periodo de muestreo T , la ecuación (9.24) se modifica y se puede escribir de forma equivalente como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(k+1) = \boldsymbol{\varepsilon}(k) + \boldsymbol{r}(k+1) - \boldsymbol{y}(k+1) \quad (9.25)$$

Manipulando adecuadamente las ecuaciones (9.22), (9.23) y (9.25) se obtiene la ecuación de diferencias del integrador como sigue:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(k+1) &= \boldsymbol{\varepsilon}(k) - \boldsymbol{C} \boldsymbol{x}(k+1) + \boldsymbol{r}(k+1) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(k+1) &= -\boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{G}}(k) \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{\varepsilon}(k) - \boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{H}}(k) \boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{r}(k+1) \end{aligned} \quad (9.26)$$

Combinando adecuadamente las ecuaciones (9.22) y (9.26) se obtiene un sistema de control que se puede expresar en el espacio de estado, con el vector de estado ampliado mediante una ecuación dinámica matricial de la siguiente manera: [22]

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(k+1) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{G}}(k) & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{G}}(k) & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(k) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{H}}(k) \\ -\boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{H}}(k) \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(k) + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{r}(k+1) \quad (9.27)$$

Así mismo, haciendo uso de la ecuación (9.23) se obtiene la ecuación de respuesta del sistema ampliado de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{y}(k) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(k) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(k) \end{bmatrix} \quad (9.28)$$

* Ecuación propuesta por el autor

Las ecuaciones (9.27) y (9.28) se pueden simplificar y representar de forma compacta en un espacio ampliado de estados de dimensión 18, considerando que el vector $\mathbf{r}(k+1)$ de tipo escalón en adelante es la consigna y al que el vector de respuesta $\mathbf{y}(k) = \mathbf{q}(k)$ debe seguir dinámica y constantemente mediante la acción del vector de control $\mathbf{u}(k)$. Por lo tanto a las ecuaciones físicas del sistema robótico con parámetros estimados en su conjunto representa a un sistema de seguimiento a variables tipo escalón $\mathbf{r}(k+1)$ que se puede expresar mediante las siguientes ecuaciones:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{G}}(k)\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{H}}(k)\mathbf{u}(k) + \hat{\mathbf{H}}\mathbf{r}(k+1) \quad (9.29)$$

$$\mathbf{y}(k) = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(k) \quad (9.30)$$

El vector de estado $\hat{\mathbf{x}}(k)$ y las matrices involucradas en las ecuaciones compactas (9.29) y (9.30) se definen y se expresan respectivamente de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(k) \end{bmatrix}, \text{ es el vector de estado ampliado de dimensión } 18 \times 1$$

$$\hat{\mathbf{G}}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}(k) & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}\tilde{\mathbf{G}}(k) & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \text{ es la matriz de estado ampliado de dimensión } 18 \times 18$$

$$\hat{\mathbf{H}}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}(k) \\ -\mathbf{C}\tilde{\mathbf{H}}(k) \end{bmatrix}, \text{ es la matriz de control ampliado de dimensión } 18 \times 6$$

$$\hat{\mathbf{H}} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{I}]^T, \text{ es la matriz de referencia ampliada de dimensión } 18 \times 6$$

$$\hat{\mathbf{C}} = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}], \text{ es la matriz de respuesta ampliada de dimensión } 6 \times 18$$

9.5 Vector de Control Óptimo Cuadrático Proporcional Integral

La ecuación de control que permite realizar las trayectorias articulares del robot, cuya dinámica linealizada en el instante kT se expresa en la ecuación (9.29), se plantea como sigue:

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{K}_I(k)\boldsymbol{\varepsilon}(k) \quad (9.31)$$

La matriz variante en el tiempo $\mathbf{K}(k)$ de dimensión 6×12 representa la ganancia de realimentación de los estados o variables mecánicas físicas, mientras que la matriz $\mathbf{K}_I(k)$

de dimensión 6×6 también variante en el tiempo, representa la ganancia de la integración del vector de error $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$.

La ecuación (9.31) se puede escribir en forma ampliada para compatibilizar con las ecuaciones (9.27) y (9.28) de la siguiente manera:

$$\mathbf{u}(k) = -[\mathbf{K}(k) \quad -\mathbf{K}_I(k)] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(k) \end{bmatrix} \quad (9.32)$$

La ecuación de control (9.32) del sistema linealizado, para compatibilizar con las ecuaciones (9.29) y (9.30) se puede escribir como:

$$\mathbf{u}(k) = -\hat{\mathbf{K}}(k) \hat{\mathbf{x}}(k) \quad (9.33)$$

La matriz de adaptación ampliada $\hat{\mathbf{K}}(k) = [\mathbf{K}(k) \quad -\mathbf{K}_I(k)]$ de dimensión 6×18 , variante en el tiempo de la ecuación (9.33), representa la ganancia Proporcional-Integral del sistema de control y se determina de tal modo que la matriz $\hat{\mathbf{K}}(k)$ sea óptima.

La ecuación (9.29) representa la dinámica de un sistema de control de seguimiento a una señal de referencia $\mathbf{r}(k)$. Para determinar un vector de control óptimo $\mathbf{u}(k)$ según la ecuación (9.33) se puede convertir el sistema a uno de regulación anulando el vector de referencia, es decir $\mathbf{r}(k+1) = \mathbf{0}$ para obtener la solución homogénea, debido a las condiciones iniciales por lo tanto la ecuación (9.29) se expresa como.

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{G}}(k) \hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{H}}(k) \mathbf{u}(k) \quad (9.34)$$

Las ecuaciones (9.33) y (9.34) describen la dinámica de un sistema de regulación por lo que se puede diseñar una ley de control según la ecuación (9.33) para conseguir que el vector de estado $\hat{\mathbf{x}}(k)$ tienda asintóticamente a un punto de equilibrio en el espacio de estado a una velocidad suficientemente alta. Esto se puede lograr obteniendo un vector de control óptimo $\mathbf{u}(k)$ que minimice la función de coste $J(k)$ denominado también índice de rendimiento que al mismo tiempo satisfaga las ligaduras de la ecuación matricial (9.34)

$$J(k) = \frac{1}{2} \left[\hat{\mathbf{x}}^T(k+1) \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{x}}(k+1) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k) \right] \quad (9.35)$$

El objetivo del control óptimo es minimizar la función $J(k)$ para que el vector de estado $\hat{\mathbf{x}}(k)$ (posición y velocidad) tienda a un punto de equilibrio coordinado por paso

mientras que al mismo tiempo se impone un coste a la utilización del esfuerzo para la ley de control $\mathbf{u}(k)$. La matriz de ponderación ampliada y estacionaria de estados $\hat{\mathbf{Q}}$ en el tiempo de dimensión 18×18 debe ser definida positiva o semidefinida positiva y la matriz estacionaria \mathbf{R} de dimensión 6×6 debe ser necesariamente definida positiva.

Reemplazando la ecuación (9.34) en la ecuación (9.35) se vuelve a obtener la función de coste $J(k)$ en términos de las matrices de valores estimados $\hat{\mathbf{G}}(k)$ y $\hat{\mathbf{H}}(k)$ como sigue:

$$J(k) = \frac{1}{2} \left\{ \left[\hat{\mathbf{x}}^T(k) \hat{\mathbf{G}}^T(k) + \mathbf{u}^T(k) \hat{\mathbf{H}}^T(k) \right] \hat{\mathbf{Q}} \left[\hat{\mathbf{G}}(k) \hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{H}}(k) \mathbf{u}(k) \right] + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k) \right\} \quad (9.36)$$

La solución de control óptimo $\mathbf{u}(k)$ que minimice la función de coste $J(k)$ en la ecuación (9.36) se determina derivando a esta función $J(k)$ respecto del vector $\mathbf{u}(k)$ y se obtiene:

$$\mathbf{u}(k) = -[\mathbf{R} + \hat{\mathbf{H}}^T(k) \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{H}}(k)]^{-1} \hat{\mathbf{H}}^T(k) \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{G}}(k) \hat{\mathbf{x}}(k) \quad (9.37)$$

De la ecuación (9.37) se deduce la matriz $\hat{\mathbf{K}}(k)$ óptima, obtenida en un paso y variante en el tiempo que se muestra en la ecuación (9.33) la cual representa la ganancia del vector de estado $\hat{\mathbf{x}}(k)$ y se expresa como:

$$\hat{\mathbf{K}}(k) = [\mathbf{R} + \hat{\mathbf{H}}^T(k) \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{H}}(k)]^{-1} \hat{\mathbf{H}}^T(k) \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{G}}(k) \quad (9.38)$$

Las matrices $\hat{\mathbf{Q}}$ y \mathbf{R} de la función de coste de las ecuaciones (9.35) o (9.36) son estacionarias (constantes) y no garantiza la optimabilidad, adaptabilidad y estabilidad del sistema al variar la dinámica del sistema robótico en el tiempo, por lo que se opta por adaptar la matriz $\hat{\mathbf{K}}(k)$ para sea dependiente de la dinámica del movimiento del robot. Para esto se propone un *Controlador Óptimo de Paso Mejorada* que consiste en seguir los siguientes pasos: (*)

- a) Obtener la ecuación de estado en el punto de equilibrio inicial esto es para $k = 0$
- b) Proponer una función de coste o índice de rendimiento para la condición inicial.
- c) Minimizar el índice de rendimiento de condición inicial con un esfuerzo óptimo.
- d) Solucionar la ecuación de *Ricatti* para esta condición estacionaria.
- e) Calcular la matriz de ganancia óptima estacionaria para esta condición.
- f) Actualizar la solución de *Ricatti* en el tiempo en cada paso iterativo.

* Proposición del autor

Definiendo las matrices iniciales estacionarias $\hat{\mathbf{G}}_0 = \hat{\mathbf{G}}(0)$, $\hat{\mathbf{H}}_0 = \hat{\mathbf{H}}(0)$ y siguiendo los pasos anteriores se plantea la ecuación de estado alrededor del punto estacionario o de reposo a partir de la ecuación (9.34) de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{G}}_0 \hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{H}}_0 \mathbf{u}(k) \quad (9.39)$$

Teniendo en cuenta que alrededor del punto de estado estacionario del sistema, en un punto inicial determinado expresado mediante la ecuación (9.39), se debe controlar mediante un regulador óptimo cuadrático minimizando el índice de desempeño J , el cual se modifica y se expresa de la siguiente manera:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [\hat{\mathbf{x}}^T(k) \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k)] \quad (9.40)$$

Al implementar el controlador óptimo en estado estacionario (invariante en el tiempo) alrededor del punto de equilibrio se requiere minimizar la función del índice de rendimiento J y como consecuencia, se debe solucionar la siguiente ecuación de *Ricatti* en tiempo discreto: [22]

$$\hat{\mathbf{P}}_0 = \hat{\mathbf{Q}} + \hat{\mathbf{G}}_0^T \hat{\mathbf{P}}_0 \hat{\mathbf{G}}_0 - \hat{\mathbf{G}}_0^T \hat{\mathbf{P}}_0 \mathbf{H}_0 [\mathbf{R} + \mathbf{H}_0^T \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_0]^{-1} \mathbf{H}_0^T \mathbf{P}_0 \mathbf{G}_0 \quad (9.41)$$

En el estado de equilibrio inicial, la matriz de ganancia en estado estacionario $\hat{\mathbf{K}}_0$ se obtiene al solucionar la ecuación de *Ricatti* (9.41) y se expresa mediante la siguiente expresión:

$$\hat{\mathbf{K}}_0 = [\mathbf{R} + \hat{\mathbf{H}}_0^T \hat{\mathbf{P}}_0 \hat{\mathbf{H}}_0]^{-1} \hat{\mathbf{H}}_0^T \hat{\mathbf{P}}_0 \hat{\mathbf{G}}_0 \quad (9.42)$$

Definiendo como matrices iniciales $\hat{\mathbf{K}}(0) = \hat{\mathbf{K}}_0$ y $\hat{\mathbf{P}}(0) = \hat{\mathbf{P}}_0$, en base de la ecuación (9.42) se deduce que la matriz $\hat{\mathbf{K}}(k)$ óptima variante en el tiempo de paso mejorado que depende del movimiento del robot y representa la ganancia del vector de estado $\hat{\mathbf{x}}(k)$ para $k > 0$ se expresa como: [*]

$$\hat{\mathbf{K}}(k) = [\mathbf{R} + \hat{\mathbf{H}}^T(k) \hat{\mathbf{P}}(k) \hat{\mathbf{H}}(k)]^{-1} \hat{\mathbf{H}}^T(k) \hat{\mathbf{P}}(k) \hat{\mathbf{G}}(k) \quad (9.43)$$

Si se cambia la matriz constante $\hat{\mathbf{Q}}$ de la ecuación (9.38) por la matriz $\hat{\mathbf{P}}(k)$ variante en el tiempo denominada matriz de covarianza, entonces la ecuación (9.38) resulta ser la misma que la ecuación (9.43). La matriz $\hat{\mathbf{P}}(k)$ depende del tiempo con la dinámica

cambiante del sistema y la actualización se realiza recursivamente con valor inicial $\hat{\mathbf{P}}(0) = \hat{\mathbf{Q}}$ de la forma siguiente:

$$\hat{\mathbf{P}}(k+1) = \hat{\mathbf{Q}} + \hat{\mathbf{G}}^T(k)\hat{\mathbf{P}}(k)\hat{\mathbf{G}}(k) - \hat{\mathbf{G}}^T(k)\hat{\mathbf{P}}(k)\hat{\mathbf{H}}(k)[\mathbf{R} + \hat{\mathbf{H}}^T(k)\hat{\mathbf{P}}(k)\hat{\mathbf{H}}(k)]^{-1} \hat{\mathbf{H}}^T(k)\hat{\mathbf{P}}(k)\hat{\mathbf{G}}(k) \quad (9.44)$$

La ecuación recursiva de *Ricatti* (9.44) para tiempo discreto, indica que al variar la dinámica del sistema del motor-robot, la matriz $\hat{\mathbf{P}}(k)$ también varía permitiendo la mejora de la adaptabilidad y optimabilidad del sistema. En el caso que los parámetros del sistema permanezcan constantes entonces se trata de un sistema de control óptimo cuadrático en estado estacionario.

Con la matriz $\hat{\mathbf{K}}(k)$ obtenida en cada instante de tiempo y reemplazando la ecuación de control (9.33) en la ecuación de estado (9.29), se obtiene la ecuación de estado del sistema de lazo cerrado con variable de referencia tipo escalón considerando el vector $\mathbf{r}(k+1) = \mathbf{r}(k)$ la cual se puede expresar como:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = [\hat{\mathbf{G}}(k) - \hat{\mathbf{H}}(k)\hat{\mathbf{K}}(k)]\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{H}}\mathbf{r}(k+1) \quad (9.45)$$

La ecuación compacta de estado (9.45) del sistema de lazo cerrado de forma explícita y desarrollada con fines de implementación y simulación se escribe mediante la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}(k) - \tilde{\mathbf{H}}(k)\mathbf{K}(k) & \tilde{\mathbf{H}}(k)\mathbf{K}_I(k) \\ \mathbf{C}\tilde{\mathbf{H}}(k)\mathbf{K}(k) - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{G}}(k) & \mathbf{I} - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{H}}(k)\mathbf{K}_I(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{r}(k) \quad (9.46)$$

La ecuación de la respuesta del sistema de control ampliado es la misma que de la ecuación (9.28) o sea:

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(k) \end{bmatrix} \quad (9.47)$$

El vector de control real $\mathbf{u}(k)$ que se desarrolla en el controlador digital que permite activar a los motores actuadores del robot que se expresa en la ecuación (9.32) con la finalidad de realizar la implementación o la simulación se vuelve a escribir mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{u}(k) = -\begin{bmatrix} \mathbf{K}(k) & -\mathbf{K}_I(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(k) \end{bmatrix} \quad (9.48)$$

En la figura (9.2) se muestra el diagrama de bloques de la estructura completa del sistema de control de trayectoria articular del manipulador robótico de seis articulaciones propuesto, el cual es accionado por motores sin escobillas, aplicando el método propuesto de Control Optimo Adaptivo Autosintonizable Multivariable incluyendo integradores de error de posición articular e identificación de parámetros del sistema actuador-robot, el cual se encuentra expresado básicamente mediante las ecuaciones (9.16), (9.22), (9.23), (9.25) y (9.33).

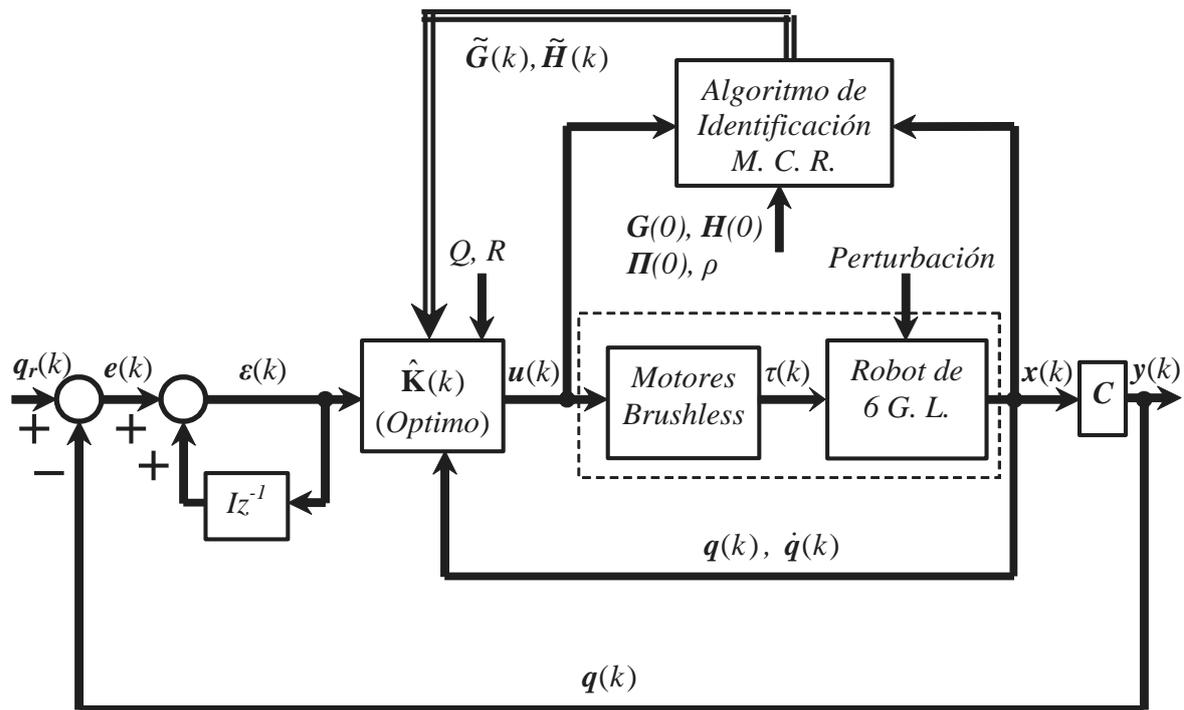


Figura 9.2 Diagrama del Sistema de Control Adaptivo Autosintonizable Multivariable.

Gráfica elaborada por el autor

9.6 Simulación Gráfica del Sistema de Control propuesto

La programación y simulación gráfica empleando la técnica o estrategia de control Adaptivo Autosintonizable se ha desarrollado utilizando el programa *MatLab*. Debido que se realiza la identificación de parámetros del sistema global actuador-robot mediante el algoritmo de *Mínimos Cuadrados Recursivo* se utilizan las ecuaciones (9.16) para obtener de esta manera, las matrices con valores estimados y poder representar dinámicamente al sistema motor-robot mediante variables de estado. Para determinar el vector de estados $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ producto de la solución de la ecuación (6.7) del sistema se ha empleado el método *Runge-Kutta* orden 4 haciendo uso de las ecuaciones (6.13) para

obtener la solución diferencial de la *Dinámica Directa* del sistema, con el objetivo de emular la dinámica real del sistema (en lugar de realizar la lectura de los transductores del sistema) y luego haciendo uso de la ecuación (9.42) se determina la matriz estacionaria óptima de realimentación de estados, mediante las ecuaciones (9.41), (9.43), (9.44), (9.46) (9.47) y (9.48) se procesa el algoritmo de control y luego se determina la ley de control óptima extendida de la ecuación (9.43) como variables de voltaje, actualizando la ecuación recursiva (9.44) de *Ricatti*, además, utilizando los datos numéricos de todo el sistema descritos en el anexo A y las ecuaciones dinámicas del sistema escritas en forma de texto presentadas en el anexo B.

Para realizar la simulación del método de control se han establecido funciones temporales suaves para $0 \leq t = kT \leq 10 \text{ seg.}$ que representan los componentes del vector posición articular referencial $\mathbf{q}_r(t) = \boldsymbol{\theta}_r(t)$, estas curvas están conformadas con segmentos de funciones trigonométricas con sus derivadas respectivas, las primeras derivadas conforman los componentes del vector velocidad articular referencial $\dot{\boldsymbol{\theta}}_r(t)$ y las segundas derivadas conforman los componentes del vector aceleración articular referencial $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_r(t)$ que se muestran en el capítulo 10, ecuaciones (10.10). En la figura 9.3 se muestran las gráficas que conforman la trayectoria articular $\boldsymbol{\theta}_r(t)$ y velocidad articular $\dot{\boldsymbol{\theta}}_r(t)$ de referencia.

Las gráficas de las figuras consecutivas 9.4.a - 9.4.f conforman los componentes individuales del vector articular de referencia $\boldsymbol{\theta}_r(t)$, componentes del vector articular controlado $\boldsymbol{\theta}(t)$, del error de posición articular de control entre éstos $\mathbf{e}_\theta(t) = \boldsymbol{\theta}_r(t) - \boldsymbol{\theta}(t)$ y de la integral del error de posición articular en el tiempo $\int \mathbf{e}_\theta(t) dt$. Las gráficas de las figuras consecutivas 9.5.a - 9.5.f conforman los componentes individuales del vector de velocidad articular de referencia $\dot{\boldsymbol{\theta}}_r(t)$, componentes del vector de velocidad articular controlado $\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)$ y error de velocidad articular de control entre éstos $\dot{\mathbf{e}}_\theta(t) = \dot{\boldsymbol{\theta}}_r(t) - \dot{\boldsymbol{\theta}}(t)$. Las gráficas de las figuras consecutivas 9.6.a - 9.6.f corresponden a los componentes del vector de control de articulación referencial $\mathbf{u}_r(t)$ y del vector de control real $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_c(t)$ que se aplican a los amplificadores de los motores actuadores, los cuales generan las variables de torsión articular $\boldsymbol{\tau}(t)$ para ser aplicadas a las articulaciones del robot.

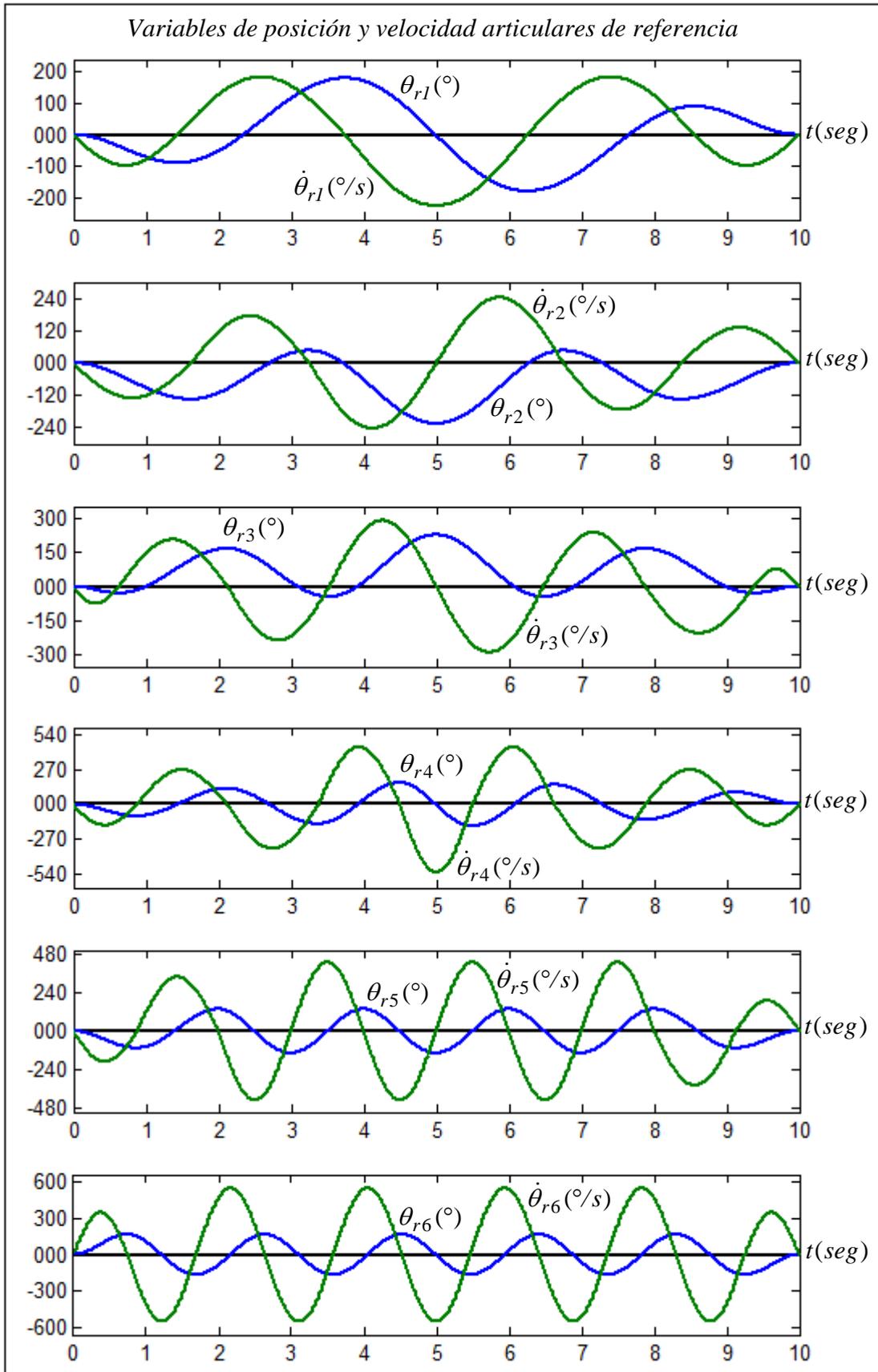


Figura 9.3 Variables de referencia de posición y velocidad articulares: $\theta_r(t)$ y $\dot{\theta}_r(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

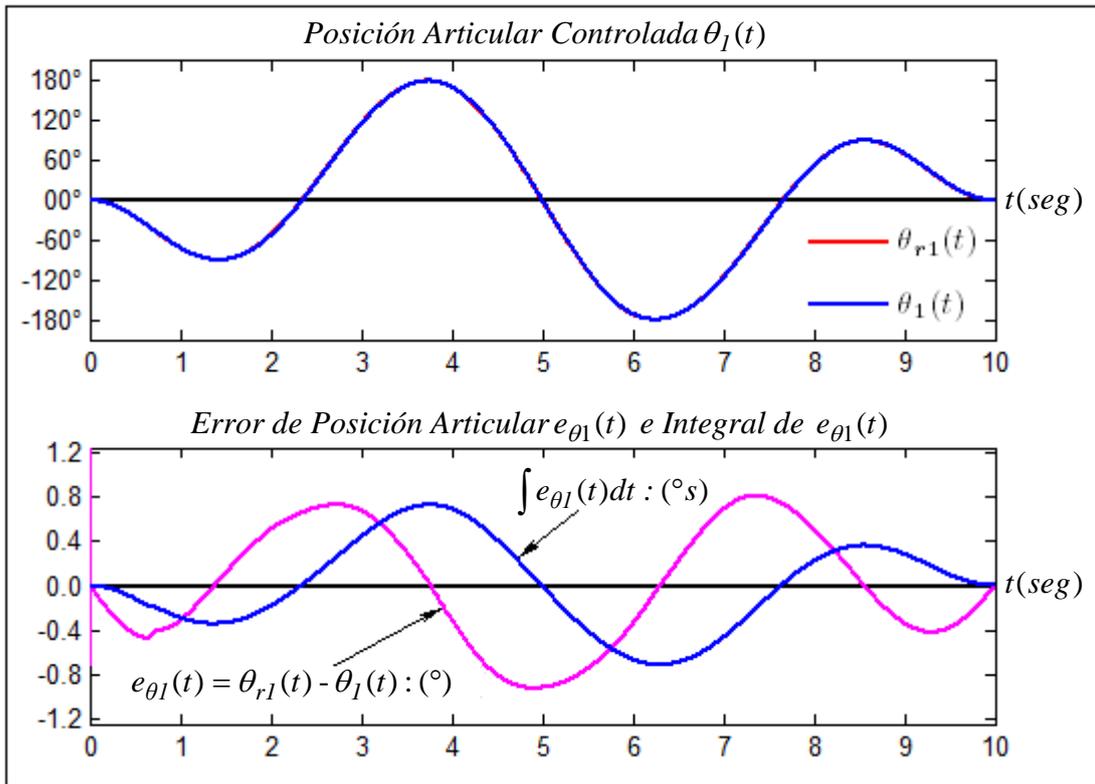


Figura 9.4.a Variables de la posición articular No 1: $\theta_{r1}(t)$, $\theta_1(t)$, $e_{\theta1}(t)$ y $\int e_{\theta1}(t) dt$.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

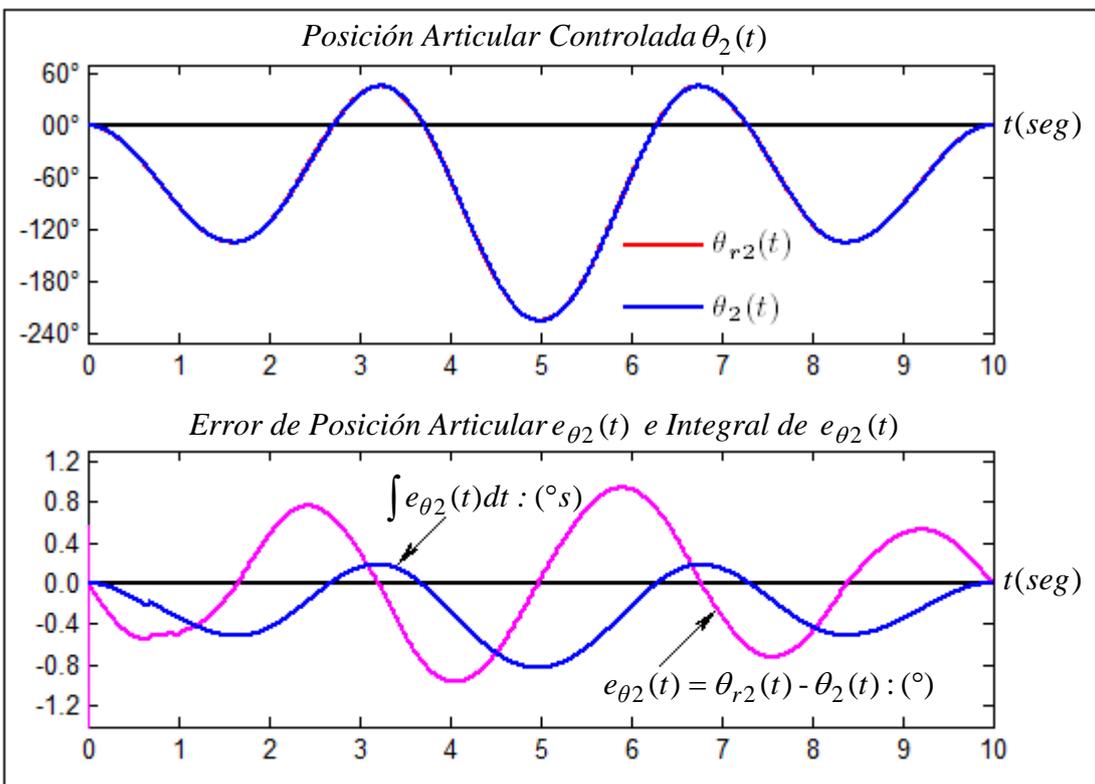


Figura 9.4.b Variables de la posición articular No 2: $\theta_{r2}(t)$, $\theta_2(t)$, $e_{\theta2}(t)$ y $\int e_{\theta2}(t) dt$.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

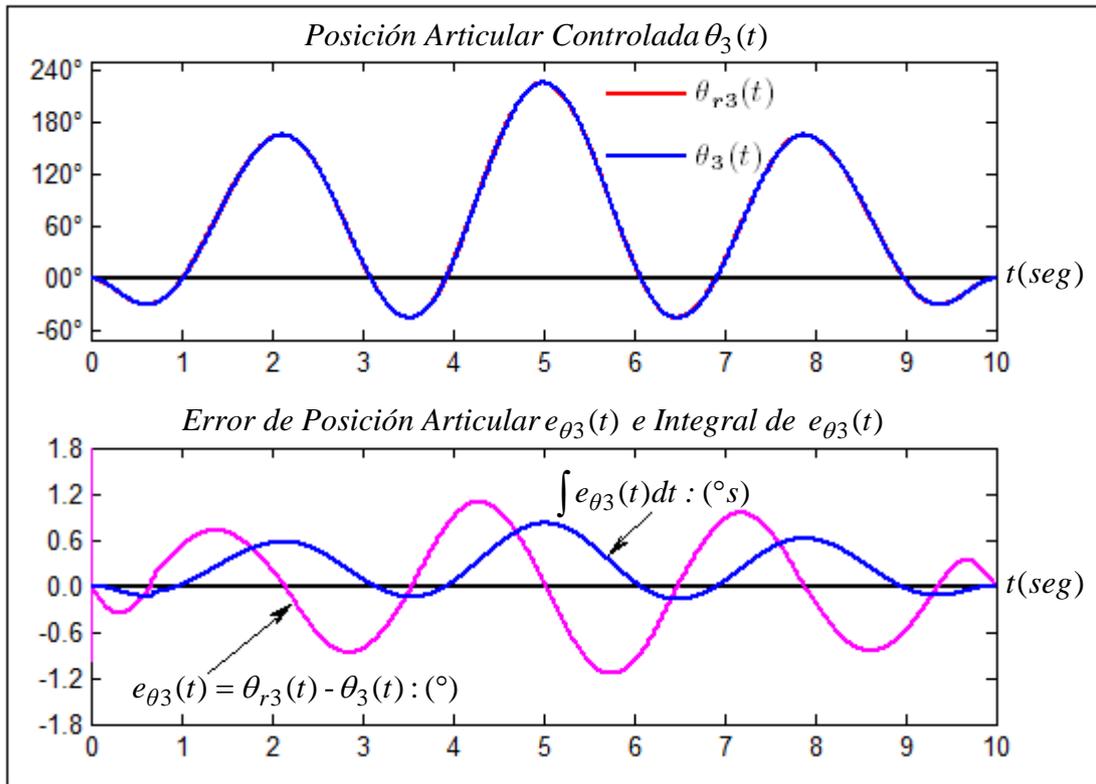


Figura 9.4.c Variables de la posición articular No 3: $\theta_{r3}(t)$, $\theta_3(t)$, $e_{\theta_3}(t)$ y $\int e_{\theta_3}(t) dt$.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

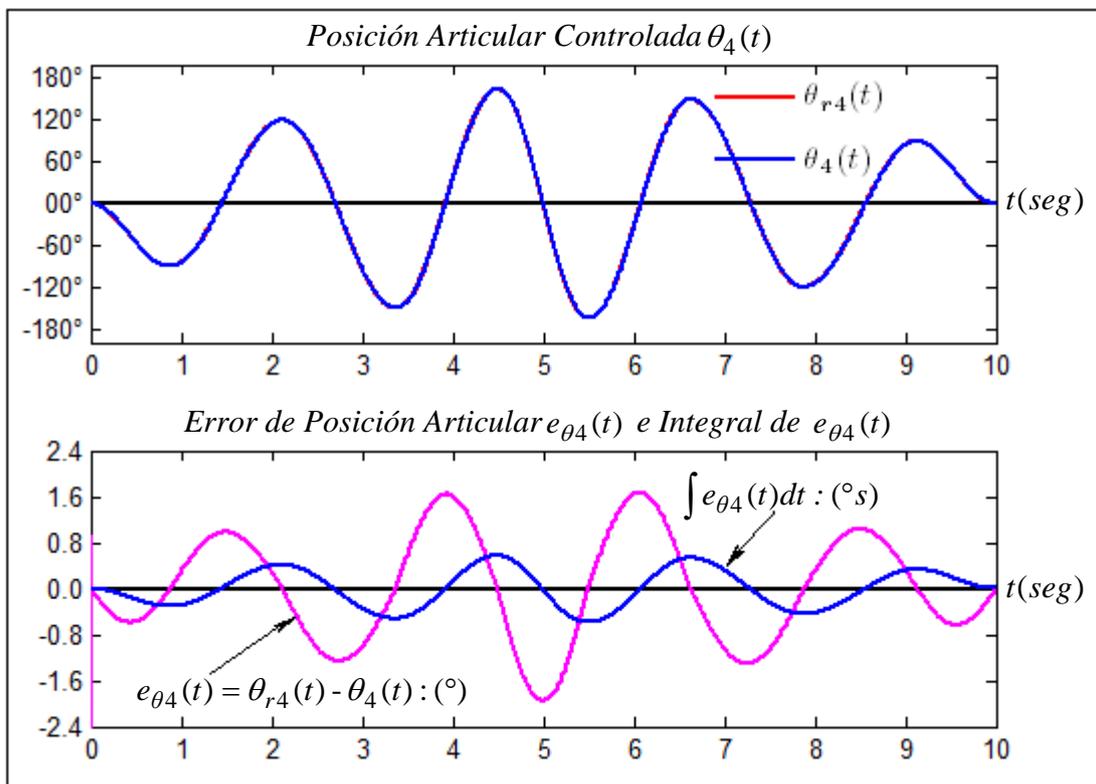


Figura 9.4.d Variables de la posición articular No 4: $\theta_{r4}(t)$, $\theta_4(t)$, $e_{\theta_4}(t)$ y $\int e_{\theta_4}(t) dt$.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

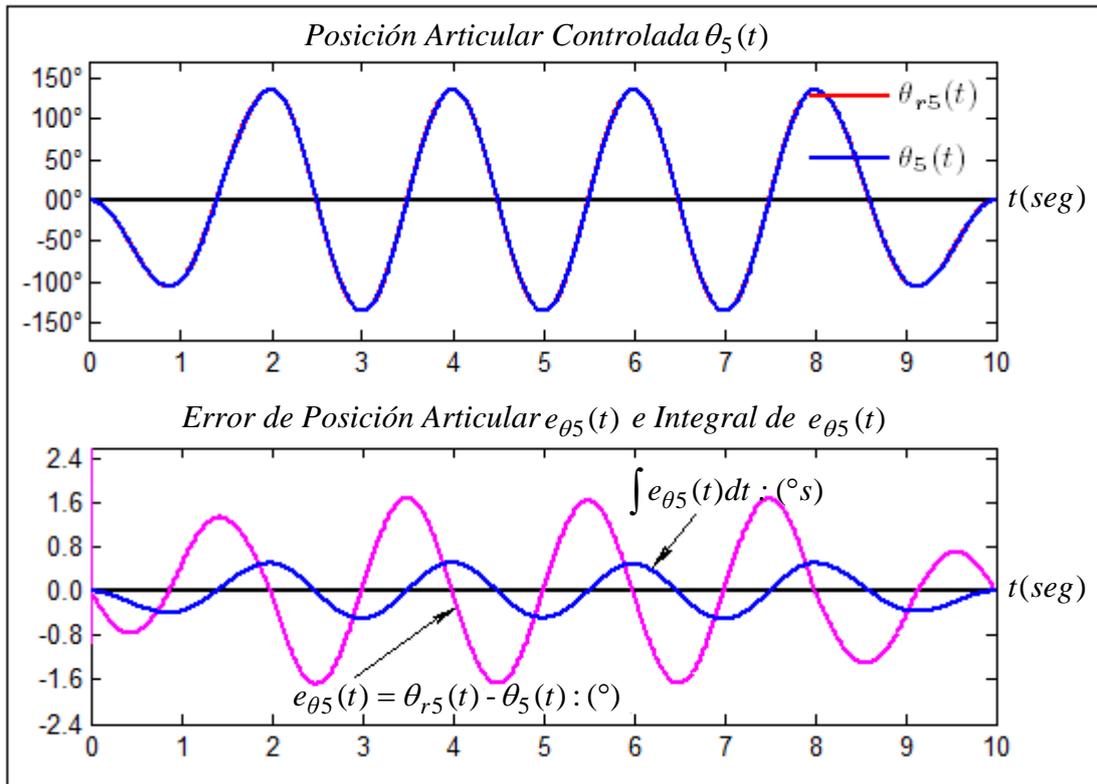


Figura 9.4.e Variables de la posición articular No 5: $\theta_{r5}(t)$, $\theta_5(t)$, $e_{\theta_5}(t)$ y $\int e_{\theta_5}(t) dt$.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

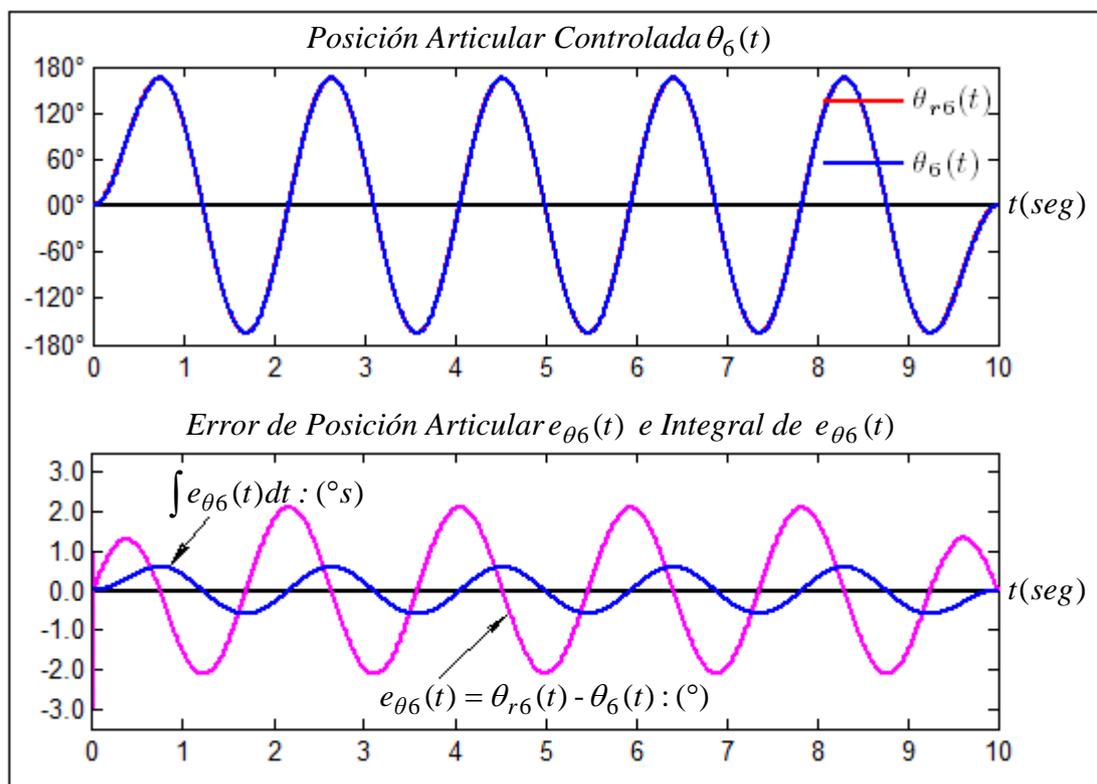


Figura 9.4.f Variables de la posición articular No 6: $\theta_{r6}(t)$, $\theta_6(t)$, $e_{\theta_6}(t)$ y $\int e_{\theta_6}(t) dt$.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

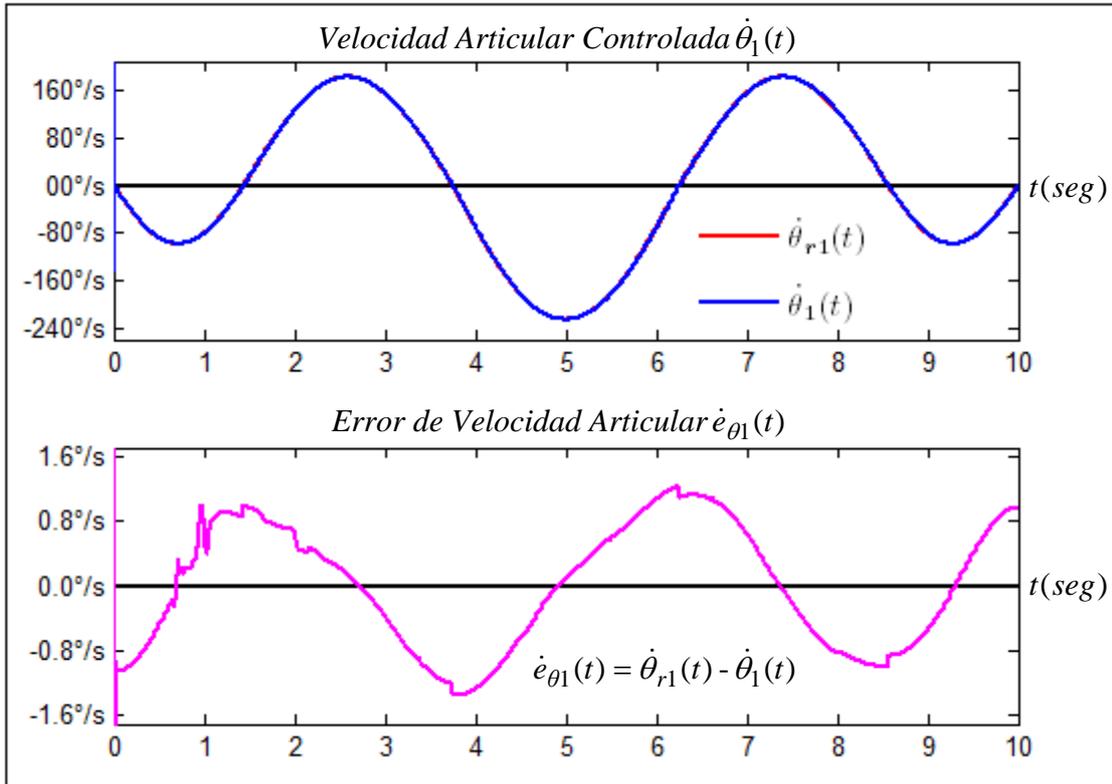


Figura 9.5.a Variables de la velocidad articular No 1: $\dot{\theta}_{r1}(t)$, $\dot{\theta}_1(t)$ y $\dot{e}_{\theta 1}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

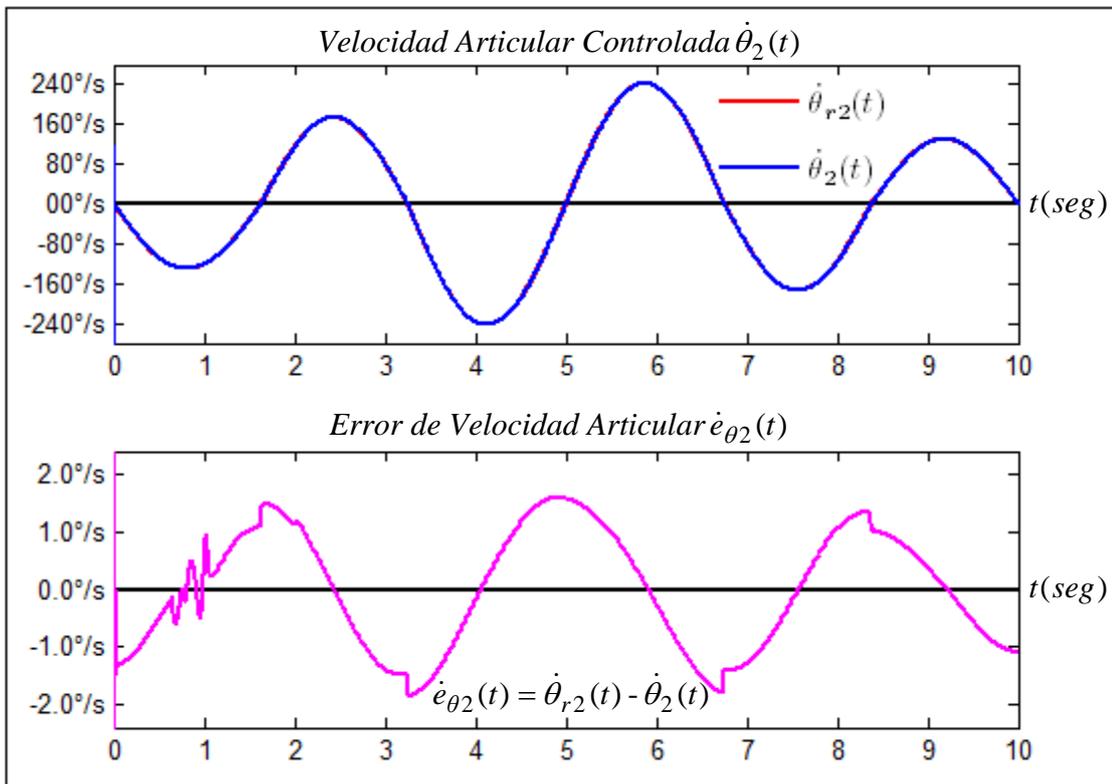


Figura 9.5.b Variables de la velocidad articular No 2: $\dot{\theta}_{r2}(t)$, $\dot{\theta}_2(t)$ y $\dot{e}_{\theta 2}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

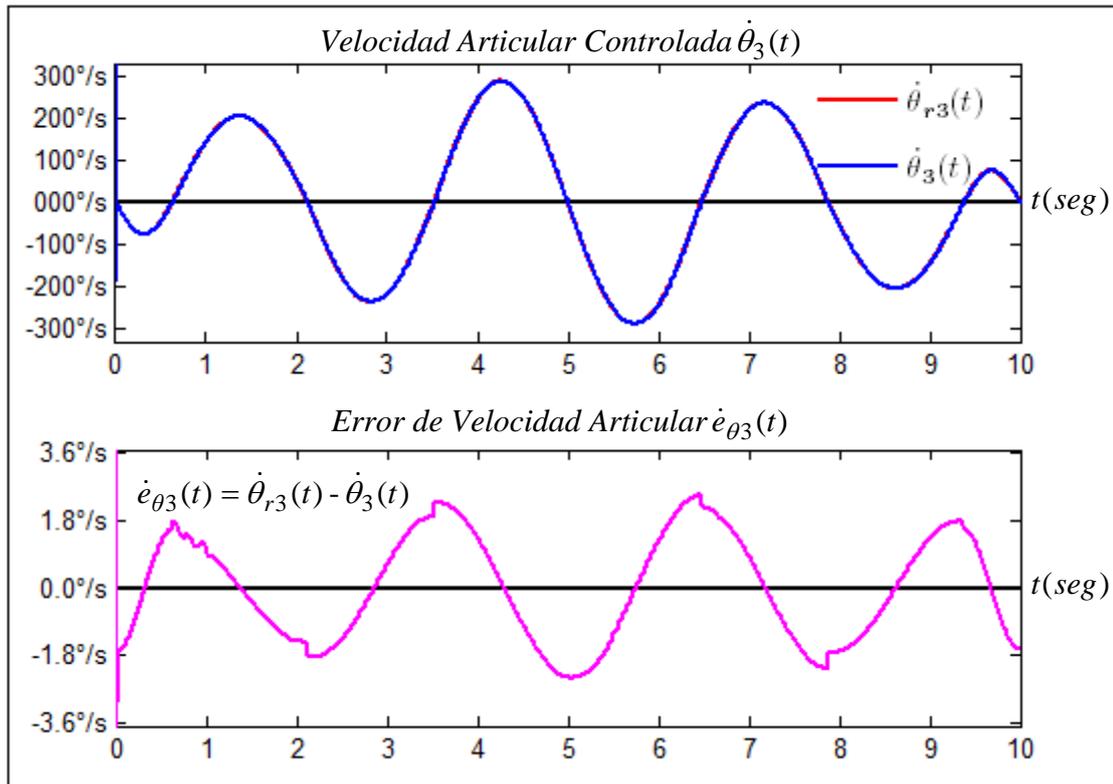


Figura 9.5.c Variables de la velocidad articular No 3: $\dot{\theta}_{r3}(t)$, $\dot{\theta}_3(t)$ y $\dot{e}_{\theta_3}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

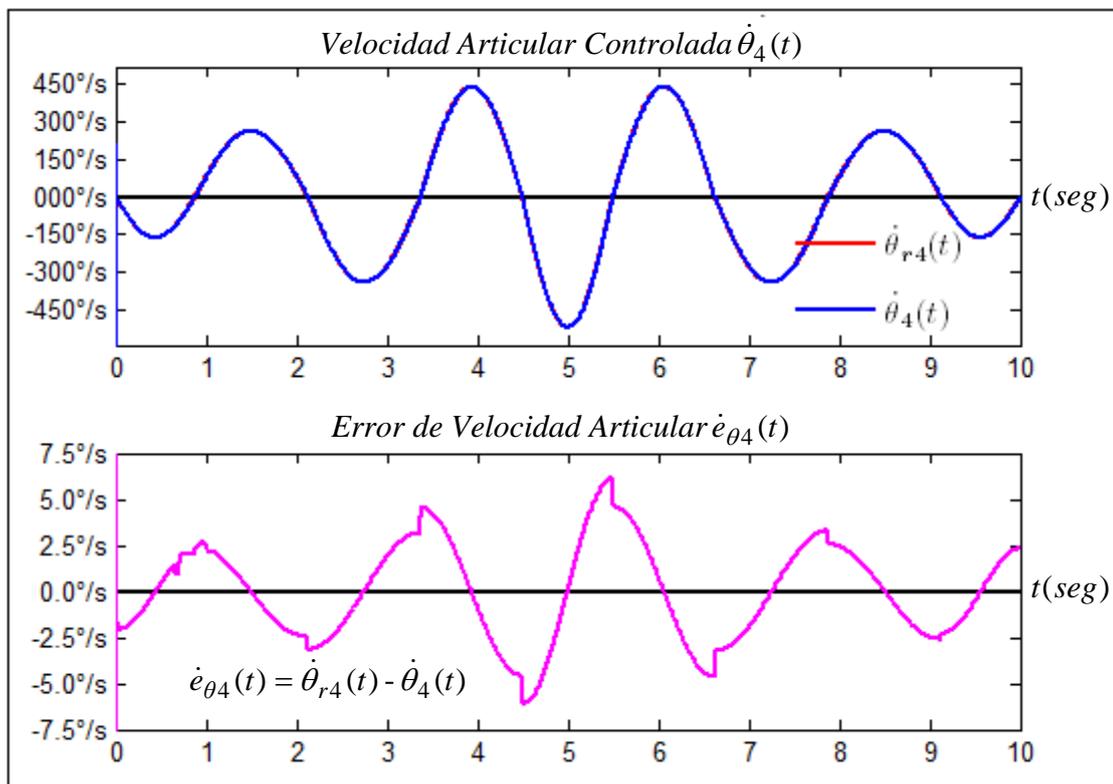


Figura 9.5.d Variables de la velocidad articular No 4: $\dot{\theta}_{r4}(t)$, $\dot{\theta}_4(t)$ y $\dot{e}_{\theta_4}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

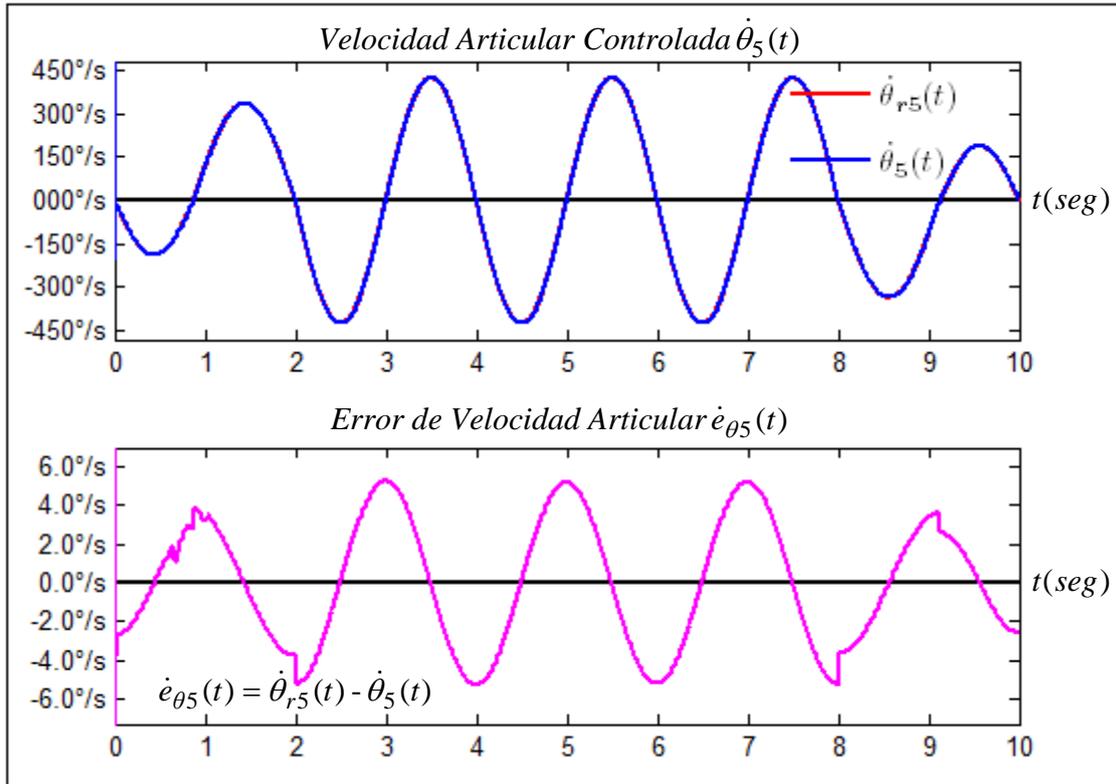


Figura 9.5.e Variables de la velocidad articular No 5: $\dot{\theta}_{r5}(t)$, $\dot{\theta}_5(t)$ y $\dot{e}_{\theta_5}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

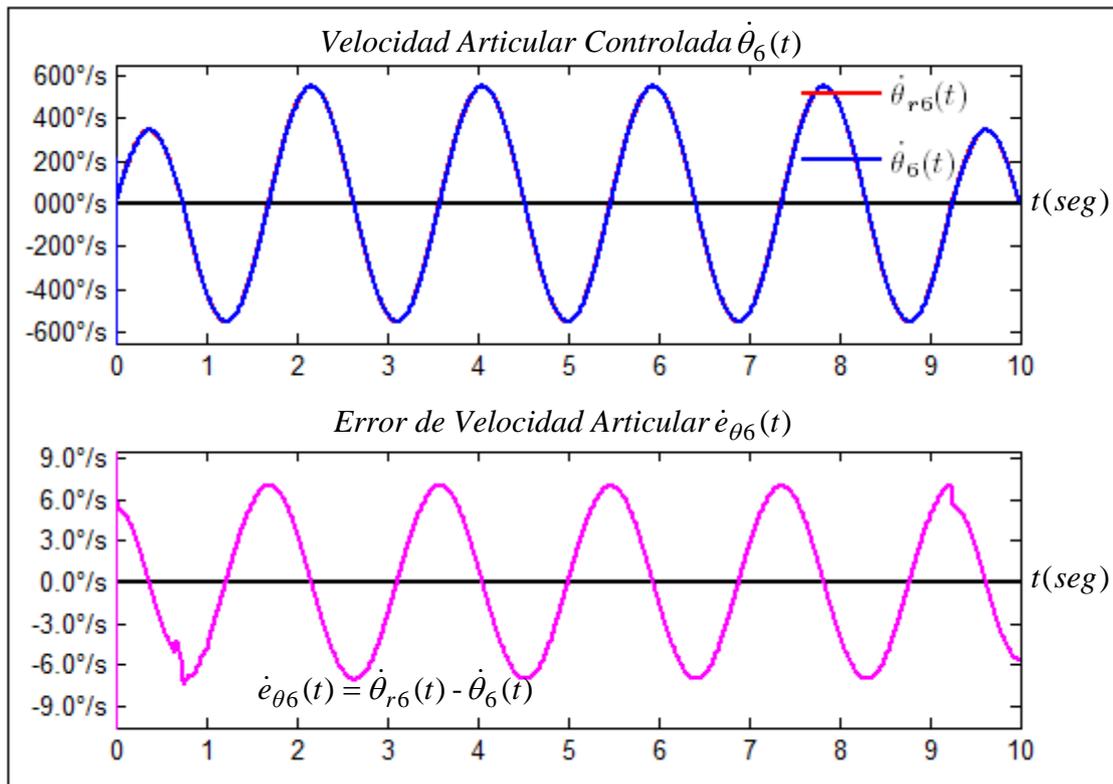


Figura 9.5.f Variables de la velocidad articular No 6: $\dot{\theta}_{r6}(t)$, $\dot{\theta}_6(t)$ y $\dot{e}_{\theta_6}(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

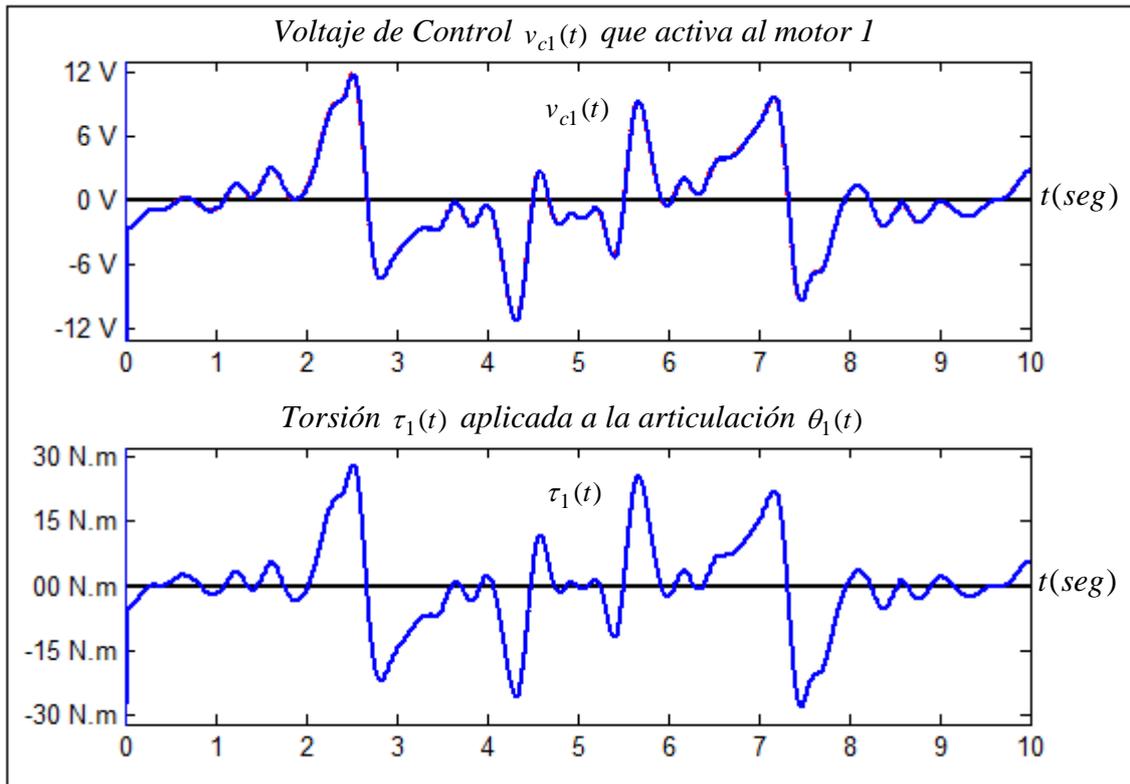


Figura 9.6.a Variables de control de la articulación No 1: $u_{r1}(t)$, $u_1(t) = v_{c1}(t)$, $\tau_1(t)$.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

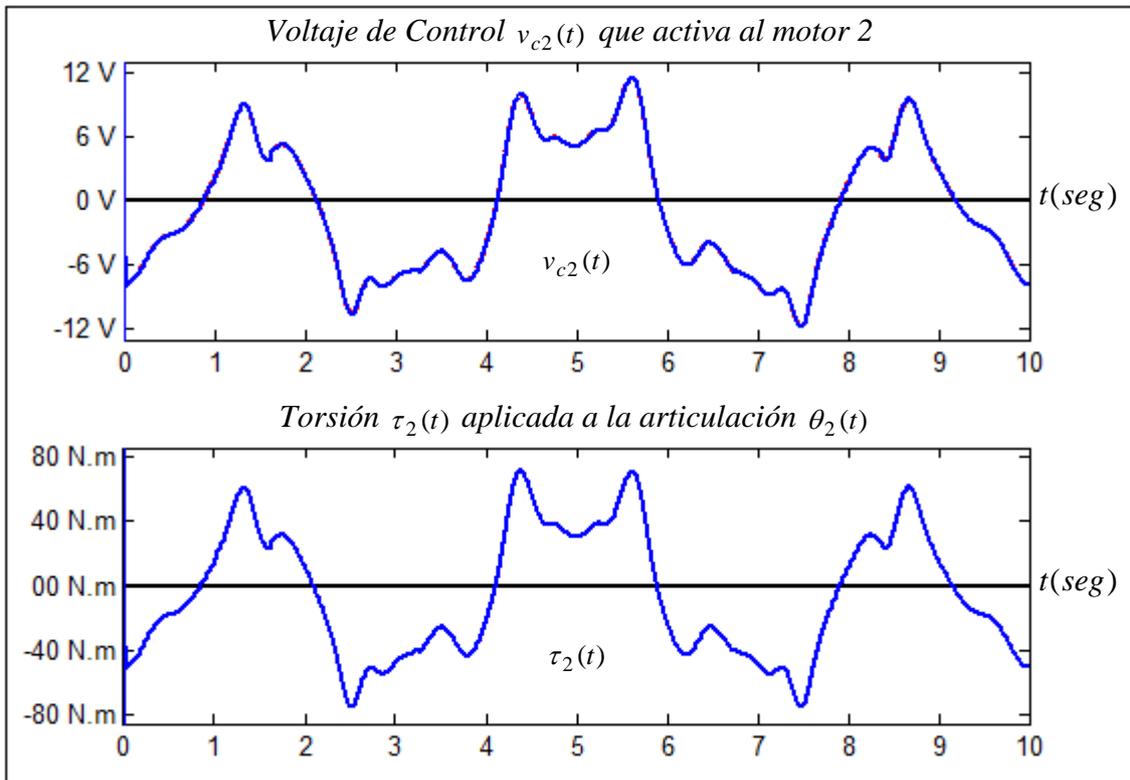


Figura 9.6.b Variables de control de la articulación No 2: $u_{r2}(t)$, $u_2(t) = v_{c2}(t)$, $\tau_2(t)$.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

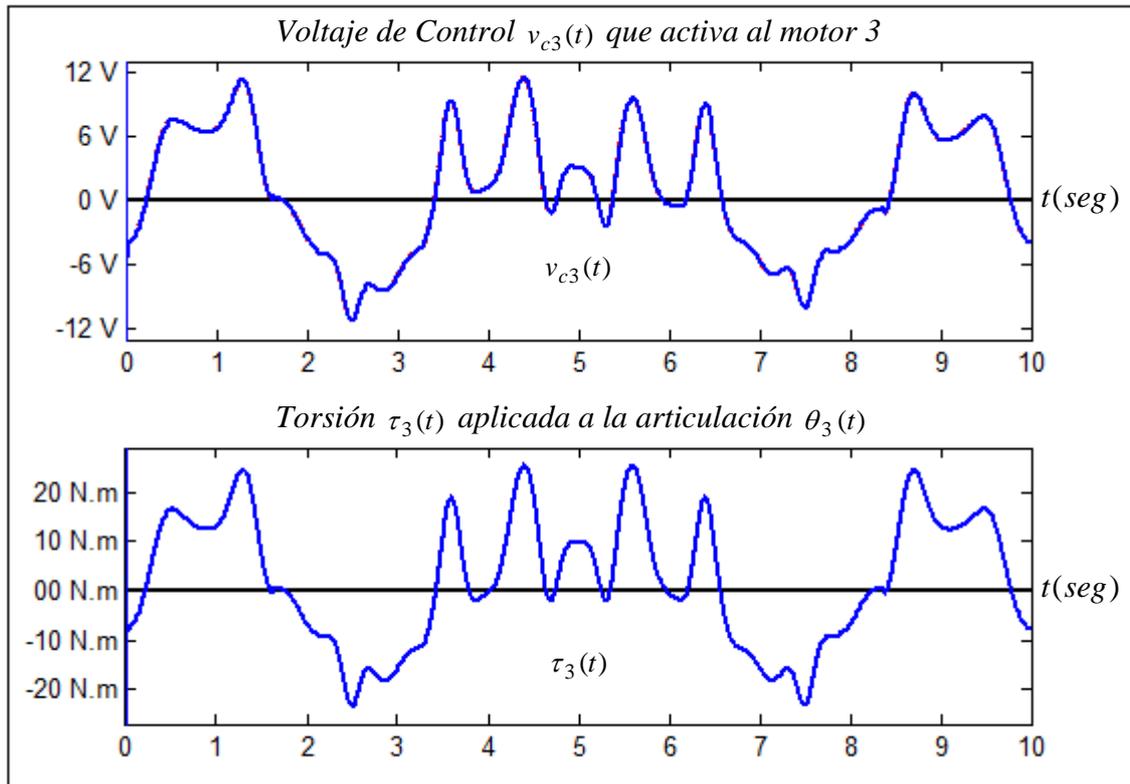


Figura 9.6.c Variables de control de la articulación No 3: $u_{r3}(t)$, $u_3(t) = v_{c3}(t)$, $\tau_3(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

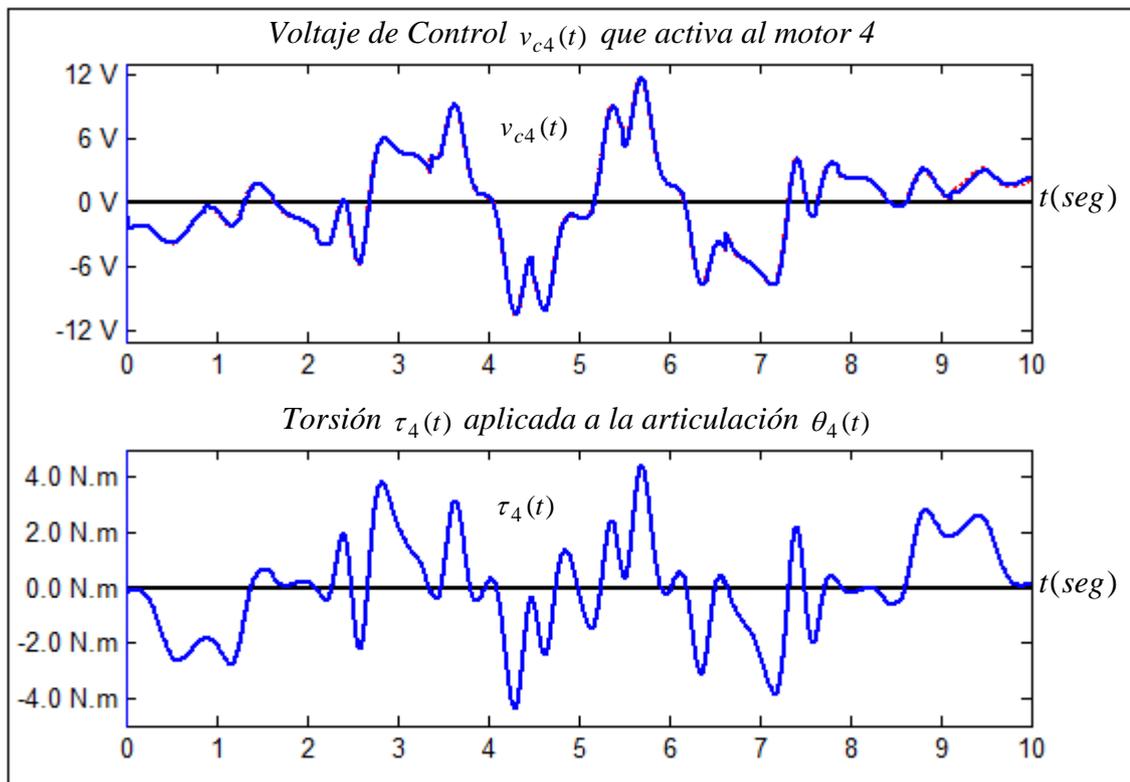


Figura 9.6.d Variables de control de la articulación No 4: $u_{r4}(t)$, $u_4(t) = v_{c4}(t)$, $\tau_4(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

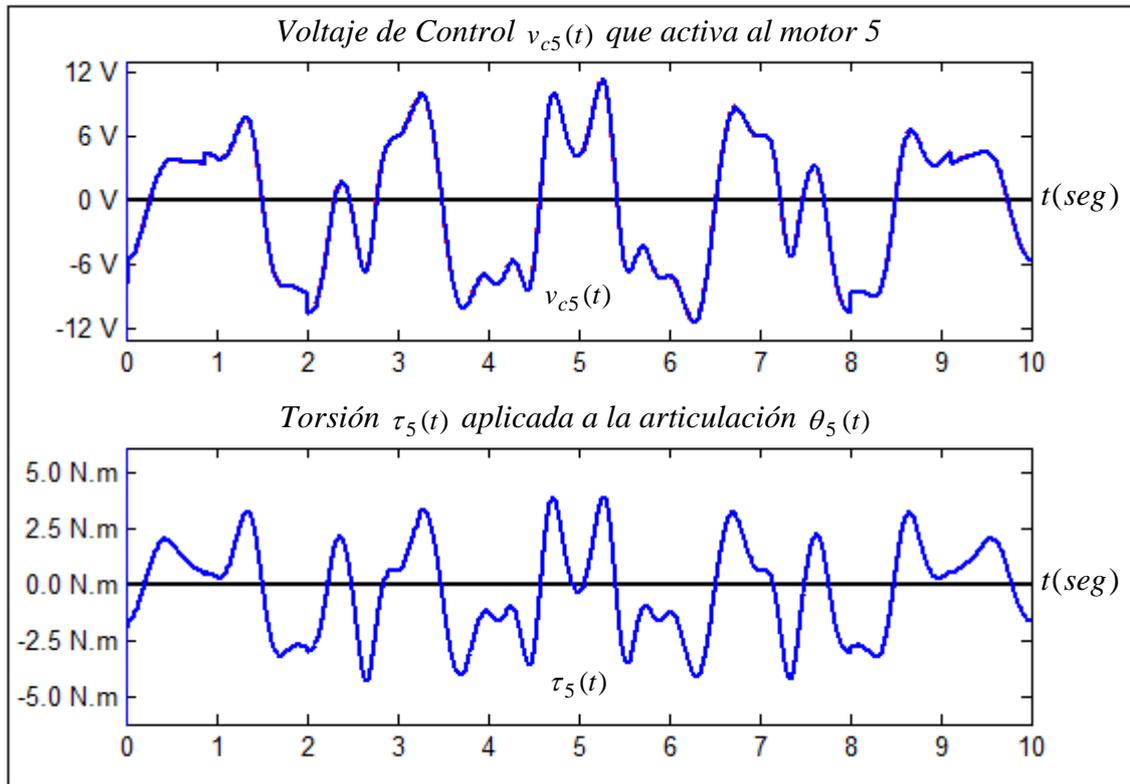


Figura 9.6.e Variables de control de la articulación No 5: $u_{r5}(t)$, $u_5(t) = v_{c5}(t)$, $\tau_5(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

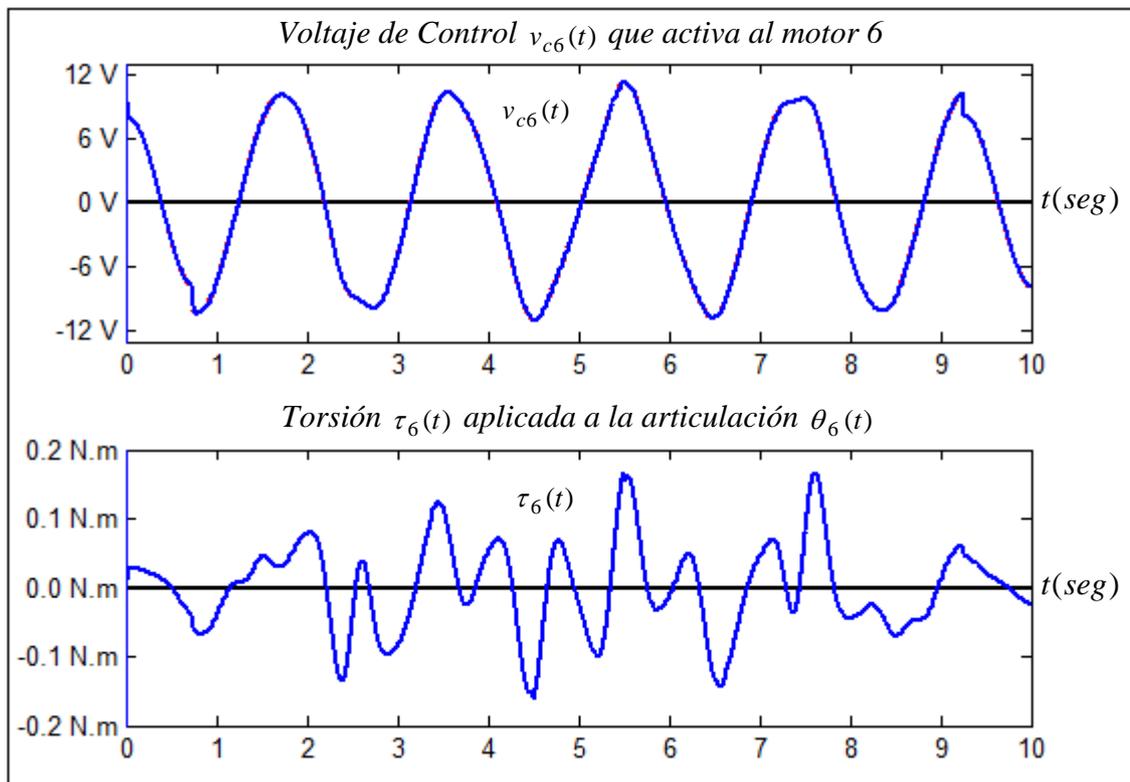


Figura 9.6.f Variables de control de la articulación No 6: $u_{r6}(t)$, $u_6(t) = v_{c6}(t)$, $\tau_6(t)$.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

En la figura 9.7 se muestran las gráficas que representan a las trayectorias cartesianas tridimensionales, referencial $\mathbf{p}_r(q(t))$ (igual que la gráfica de la figura 2.15) y controlada $\mathbf{p}(q(t))$ (de forma indirecta), que realiza el efector final del robot en el tiempo con respecto del sistema referencial $x_0y_0z_0$. En la figura 9.8 se muestran las componentes cartesianas de la trayectoria espacial $\bar{\mathbf{p}}(t)=[p_x(t) p_y(t) p_z(t)]^T$ respecto del referencial base $x_0y_0z_0$ obtenidas mediante la ecuación (2.22.d). En la figura 9.9 se muestran las componentes cartesianas de la velocidad lineal $\bar{\mathbf{v}}(t)=[v_x(t) v_y(t) v_z(t)]^T$ respecto del referencial base $x_0y_0z_0$ obtenidas mediante la ecuación (3.7.a). En la figura 9.10 se muestran las componentes cartesianas de la velocidad angular $\bar{\boldsymbol{\omega}}(t)=[\omega_x(t) \omega_y(t) \omega_z(t)]^T$ respecto del referencial base $x_0y_0z_0$ obtenidas mediante la ecuación (3.7.b). En la figura 9.11 se muestran las gráficas de las velocidades cartesianas absolutas tanto velocidad lineal $v(q(t)) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)}$ como velocidad angular $\omega(q(t)) = \sqrt{\omega_x^2(t) + \omega_y^2(t) + \omega_z^2(t)}$ del efector operacional del robot respecto del sistema referencial base $x_0y_0z_0$.

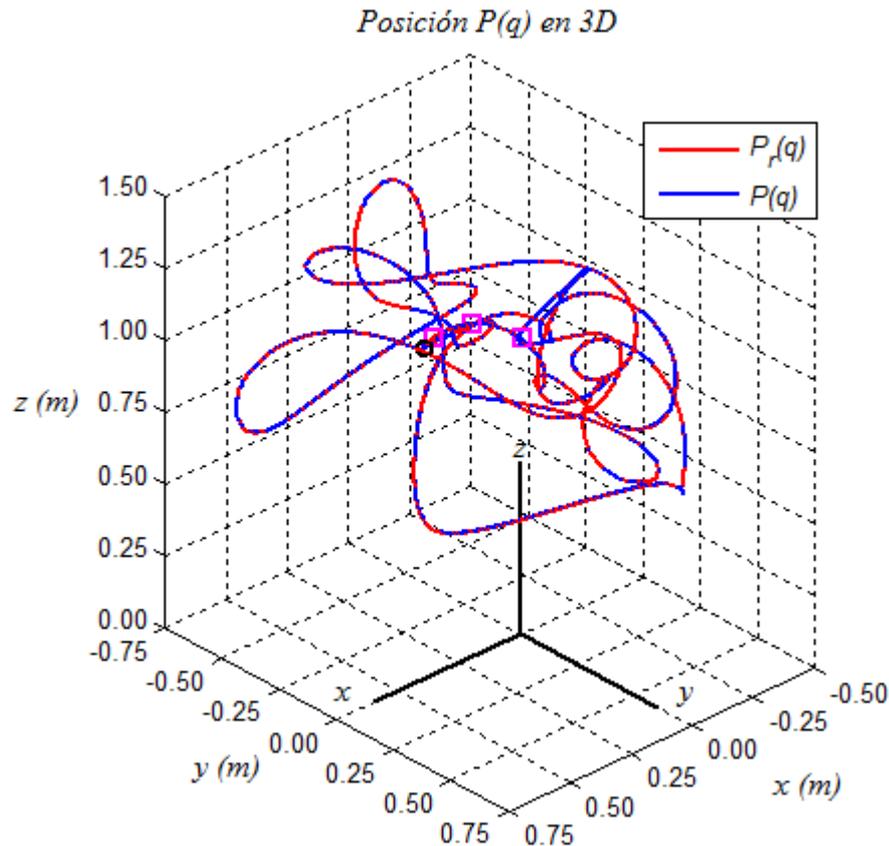


Figura 9.7 Trayectoria cartesiana $\mathbf{P}(t)$ tridimensional del efector final del robot.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

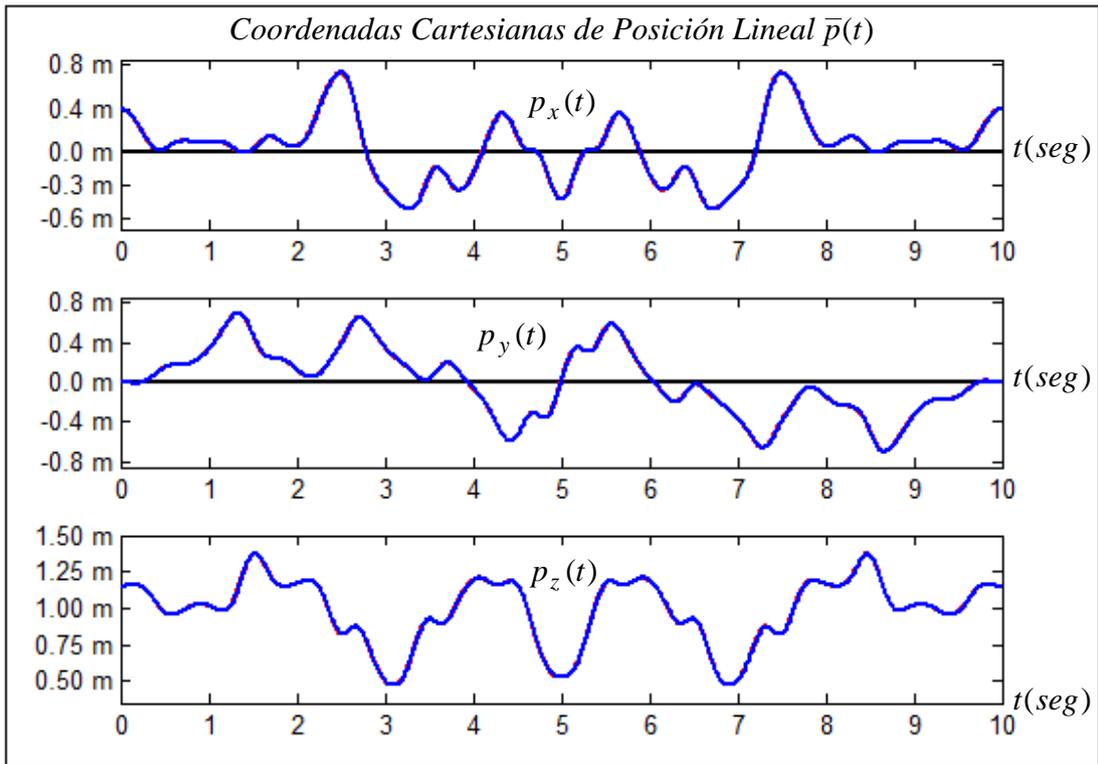


Figura 9.8 Desplazamiento lineal cartesiano $\bar{p}(t)$ del efector final del robot.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

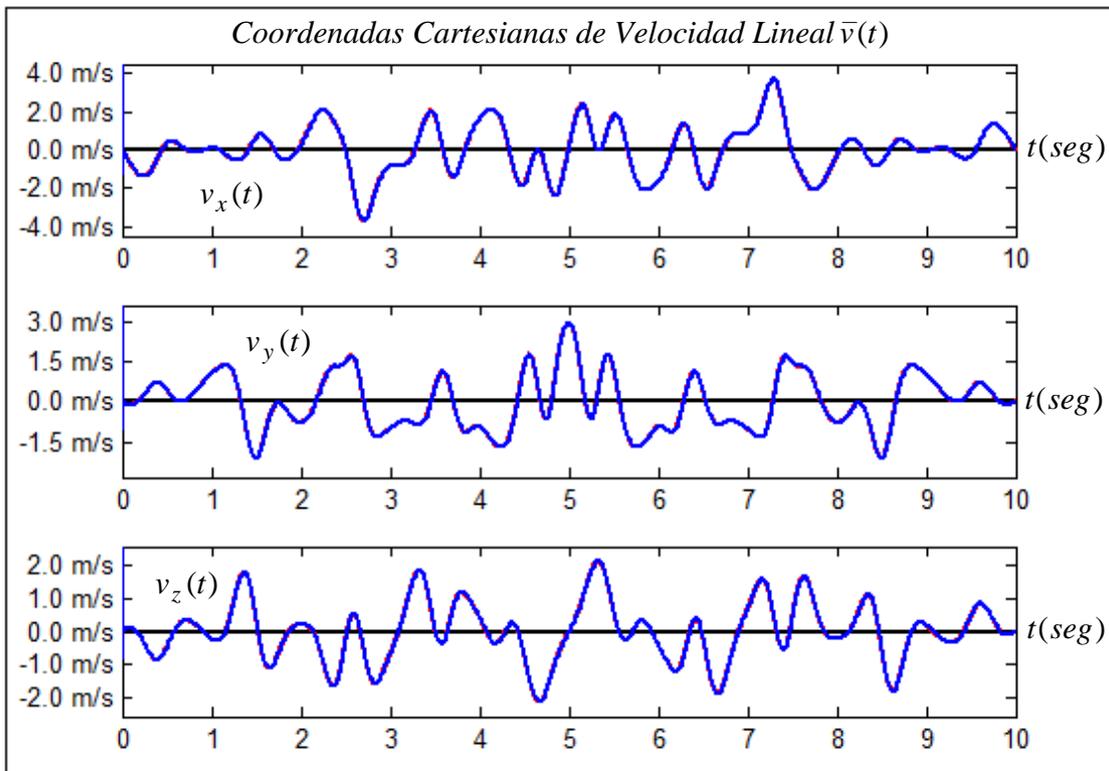


Figura 9.9 Velocidad lineal cartesiana $\bar{v}(t)$ del efector final del robot.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

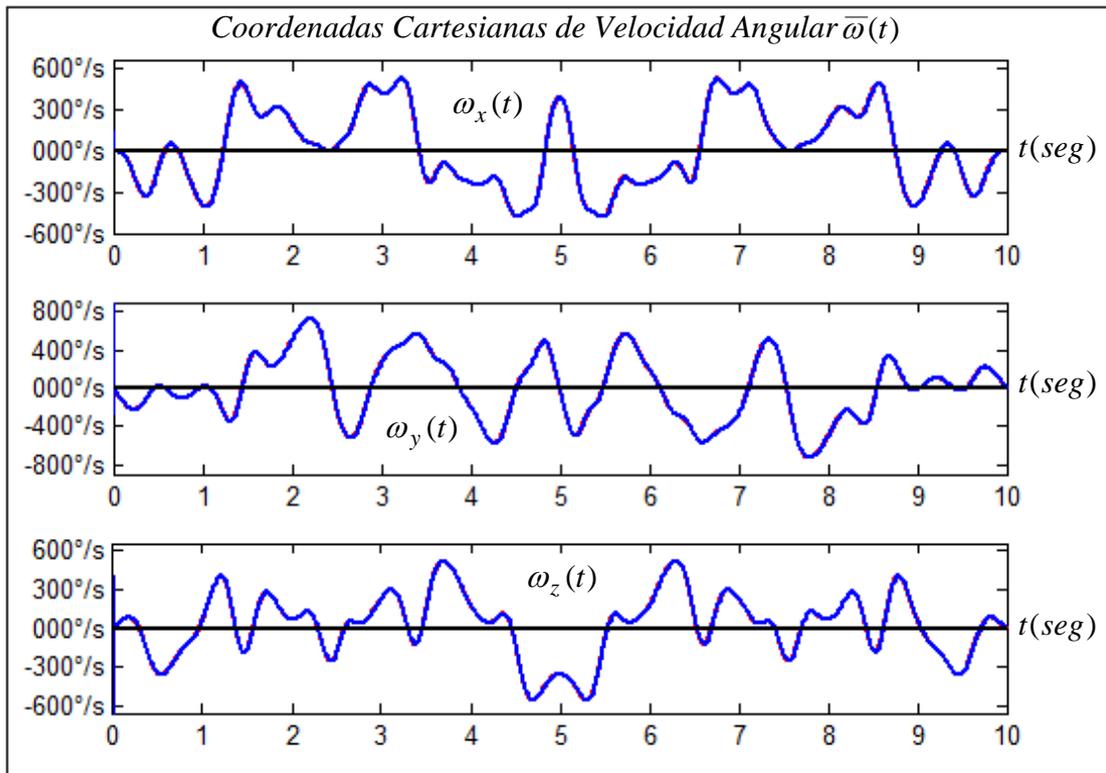


Figura 9.10 Velocidad angular cartesiana $\bar{\omega}(t)$ del efector final del robot.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

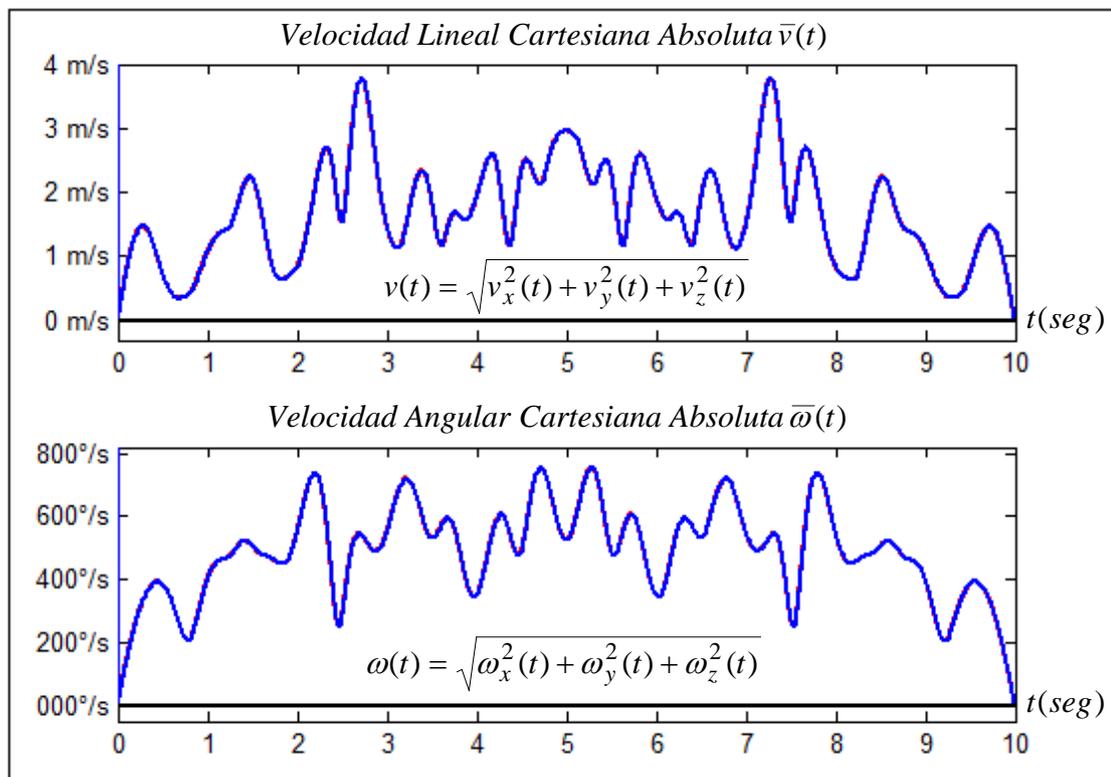


Figura 9.11 Velocidades absolutas lineal $v(t)$ y angular $\omega(t)$ del efector final del robot.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

9.6 Análisis de los resultados obtenidos mediante la Simulación Gráfica

De las gráficas mostradas en las figuras 9.4 se observa que las trayectorias articulares controladas en el tiempo $\theta(t)$ siguen realmente en su totalidad y de forma simultánea a las trayectorias articulares de referencia $\theta_r(t)$ presentándose variables de error de desfase articular tanto en régimen transitorio como en régimen permanente $e_\theta(t) = \theta_r(t) - \theta(t)$ entre los márgenes pre-establecidos, así como las gráficas de integral de error $\int e_\theta(t)dt$. Las gráficas que se presentan en las figuras 9.5 muestran también que las variables de velocidad articular $\dot{\theta}(t)$ se aproximan cercanamente a las variables de velocidad deseadas $\dot{\theta}_r(t)$ originándose el error entre éstas $\dot{e}_\theta(t) = \dot{\theta}_r(t) - \dot{\theta}(t)$ dentro de un margen admitido; los errores $e_\theta(t)$ y $\dot{e}_\theta(t)$ son manejables dependiendo de las aplicaciones del robot, ajustando adecuadamente los valores de las matrices de ponderación \hat{Q} y R del índice de rendimiento de la ecuación (9.40); estos errores se pueden reducir de magnitud a costa de que las magnitudes de las señales de control aumenten sobre todo en los cambios grandes de las variables articulares de referencia.

Las gráficas que se presentan en las figuras 9.6 muestran las variables de control $v_c(t)$ que se generan al ejecutar los algoritmos dinámicos de control en el procesador digital, estas señales se aplican a la entrada de los amplificadores de potencia de los respectivos motores con valores admitidos dentro de los márgenes establecidos, las magnitudes de estas señales se pueden ajustar también variando las ganancias de los amplificadores de potencia. En las figuras 9.6 también se muestran las gráficas correspondientes a las torsiones $\tau(t)$ generadas por los motores para accionar a las articulaciones del robot según los efectos dinámicos del sistema y así conseguir que el efector final del robot realice estrechamente las trayectorias articulares deseadas $\theta_r(t)$ con sus respectivas velocidades articulares $\dot{\theta}_r(t)$.

En la tabla 9.1 se muestran los valores máximos y mínimos de las variables de articulación $\theta(t)$, de las velocidades articulares $\dot{\theta}(t)$, de los errores de articulación $e_\theta(t)$, de los errores de velocidad articular $\dot{e}_\theta(t)$, de las variables de control $v_c(t)$ y de las variables de torsión $\tau(t)$ correspondientes a las seis articulaciones del robot manipulador propuesto.

Tabla 9.1 Resultados obtenidos al aplicar el método de control: Control Adaptivo Atosintonizable.

<i>Variables</i>	<i>Articulaciones</i>					
	1	2	3	4	5	6
$\theta_{max}(\text{°})$	179.9759	45.0532	224.9388	165.0219	135.0411	165.0050
$\theta_{min}(\text{°})$	-179.9498	-225.0420	-44.9851	-165.0152	-135.0333	-165.0019
$e_{\theta} \text{max}(\text{°})$	0.8102	0.9343	1.0923	1.6680	1.6864	2.1138
$e_{\theta} \text{min}(\text{°})$	-0.9270	-0.9644	-1.1440	-1.9496	-1.6763	-2.1193
$\dot{\theta}_{max}(\text{°}/s)$	183.4615	242.2540	287.3889	439.8786	424.1929	548.8514
$\dot{\theta}_{min}(\text{°}/s)$	-226.2832	-242.5464	-287.4669	-518.4016	-424.2239	-548.8627
$\dot{e}_{\theta} \text{max}(\text{°}/s)$	1.2270	1.5971	2.4782	6.1330	5.2772	7.0320
$\dot{e}_{\theta} \text{min}(\text{°}/s)$	-1.3496	-1.8736	-2.4141	-6.1447	-5.3286	-7.0387
$u_c \text{max}(V)$	11.8588	11.5235	11.4396	11.6076	11.2243	11.2429
$u_c \text{min}(V)$	-11.2588	-11.8347	-11.2481	-10.4260	-11.3333	-11.0462
$\tau \text{max}(Nm)$	28.2125	70.4763	25.3936	4.4209	3.9310	0.1672
$\tau \text{min}(Nm)$	-28.1149	-74.9783	-23.3997	-4.3803	-4.2781	-0.1606

CAPITULO 10

GENERACION DE TRAYECTORIAS PARA EL ROBOT

10.1 Introducción

Por generación de trayectorias se entiende, al proceso de generar una secuencia de puntos consigna, y control de trayectorias se refiere al hecho de que el efector final del robot debe seguir a los puntos de consigna lo más preciso posible mediante una ley de control utilizando algún método de control, de tal manera que la herramienta del robot siga alguna trayectoria planificada.

Para controlar una trayectoria espacial se requiere especificar la configuración del efector final del manipulador, tanto en la posición inicial como en la posición final, antes de que se planifique la trayectoria del movimiento.

La propiedad básica, con la cual todos los algoritmos de generación y control de movimiento son abastecidos por su funcionalidad, es que debe proporcionar continuidad y uniformidad al movimiento entre las posiciones y orientaciones del efector final del robot manipulador.

Los esquemas de planificación de trayectorias para robots por lo general “aproximan” o “interpolan” la trayectoria programada mediante funciones matemáticas que se expresan en el tiempo y que permiten generar una secuencia de “puntos de consigna del sistema de control” durante el tiempo, para controlar la posición y orientación del efector operacional del robot desde su posición espacial de origen hasta su destino. Los extremos de la trayectoria se pueden especificar ya sea en coordenadas articulares $q(t)$ o en coordenadas cartesianas $r(t)$ para mover a los eslabones de la estructura del robot según la tarea a realizar. Por lo general las trayectorias se suelen especificar en coordenadas cartesianas para visualizar fácilmente la configuración correcta del efector operacional, debido que las coordenadas de articulación no son adecuadas para formar un sistema de coordenadas de operación, porque los ejes de las articulaciones de la mayoría de robots no son ortogonales y no se distingue la orientación con la posición.

10.2 Clasificación de las trayectorias

Existen una variedad de trayectorias posibles para poder generar y realizar entre dos puntos extremos específicos, por los que puede pasar el efector final del manipulador para realizar alguna tarea especificada. En general las trayectorias planificadas del robot, ya sea en el dominio de variables articulares o en el espacio cartesiano se pueden clasificar de la siguiente forma:

- **Trayectorias punto a punto**

En este tipo de trayectorias el efector final del robot se mueve desde un punto inicial hasta un punto destino sin importar cómo evoluciona el efector final en el espacio que está siguiendo.

- **Trayectorias continuas**

En este tipo de trayectoria, el efector final del robot se mueve a lo largo de una trayectoria definida normalmente a través de interpolaciones en el dominio del tiempo, generando múltiples puntos intermedios en la curva que describe la trayectoria.

- **Trayectorias continuas controladas**

En este tipo de trayectoria se programa y controla el movimiento, velocidad y aceleración como funciones continuas y derivables del tiempo, así como también se pueden imponer restricciones de su realización física.

- **Trayectorias optimizadas**

En este tipo de trayectorias se usan aparte de los criterios anteriores, otros parámetros físicos que tienen como fin esencial:

- Disminuir el consumo energético del robot.
- Mejorar las rampas de aceleración y frenado de los actuadores.
- Disminuir el desgaste de las partes electromecánicas.
- Optimizar las fuerzas y torsiones aplicadas.
- Aumentar el rendimiento y eficacia de los medios de producción.

Para esto es necesario contar con métodos de control y algoritmos numéricos que operen en sincronismo con los interpoladores de posicionamiento y de velocidad en forma adelantada.

10.3 Generación de trayectorias en coordenadas articulares

La generación o planificación de trayectorias en variables articulares del robot consiste en interpolar funciones en el tiempo y cada punto de las trayectorias sirve como puntos de consigna para aplicar cualquiera de las estrategias de control estudiadas anteriormente, siguiendo a las trayectorias “consigna” lo más estrechamente como sea posible. En la figura 10.1 se muestra el esquema de planificación y control de trayectorias articulares.

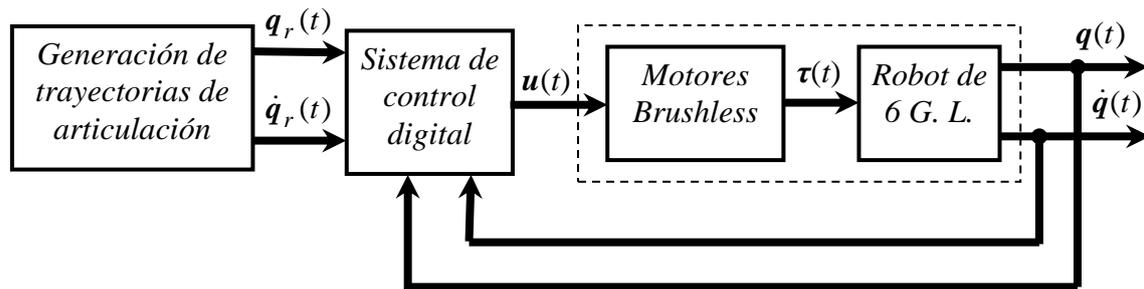


Figura 10.1 Esquema de generación y control de trayectorias articulares.

Gráfica elaborada por el autor

Para el robot en estudio todas las articulaciones son angulares por lo tanto en el dominio articular se planifica la historia temporal de todas las variables de articulación $q(t)$ y de sus dos primeras derivadas respecto del tiempo, con la finalidad de describir y controlar el movimiento deseado.

La planificación de trayectorias en el espacio articular presenta tres ventajas:

1. La trayectoria se planifica directamente en términos de las variables controladas $q(t)$ y/o $\dot{q}(t)$ durante el movimiento.
2. La planificación de la trayectoria se puede hacer casi en tiempo real.
3. Las trayectorias de la articulación son más fáciles de planificar.

La desventaja asociada es la dificultad para determinar las posiciones de los diversos elementos y del efector final durante el movimiento, condición que muchas veces se necesita para garantizar la evasión de obstáculos a lo largo de la trayectoria respecto del sistema espacial de referencia. Este tipo de interpolación generalmente se usa cuando no se requiere la especificación durante el recorrido del efector final del robot por una trayectoria total especificada.

Entre los tipos de interpolaciones más comunes se tiene: interpolación polinómica lineal, cúbica, quintica, de grado superior, trigonométricas y otras.

10.3.1 Interpolación polinómica lineal

El caso más simple de interpolación articular en un intervalo de tiempo $[q_1, q_2]$, utiliza un polinomio lineal para el vector articular $q(t)$ del robot, en el tiempo t desde un punto inicial q_1 hasta un punto final q_2 definiendo un polinomio de primer orden $q(t)$ en función del tiempo normalizado $\tau(t)$ como sigue:

$$q(t) = q_1 + \tau(t)(q_2 - q_1) \quad (10.1.a)$$

La expresión de la velocidad articular $\dot{q}(t)$ se describe mediante la siguiente ecuación:

$$\dot{q}(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d\tau(t)}{dt}(q_2 - q_1) = \frac{(q_2 - q_1)}{T} \quad (10.1.b)$$

El tiempo normalizado $\tau(t)$ con $\tau_1 = 0$ y $\tau_2 = 1$ de duración T se define como:

$$\tau(t) = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} = \frac{t - t_1}{T} \quad (10.2)$$

En la figura 10.2 se muestran las gráficas correspondientes a las expresiones (10.1) de la posición, velocidad y la aceleración angulares.

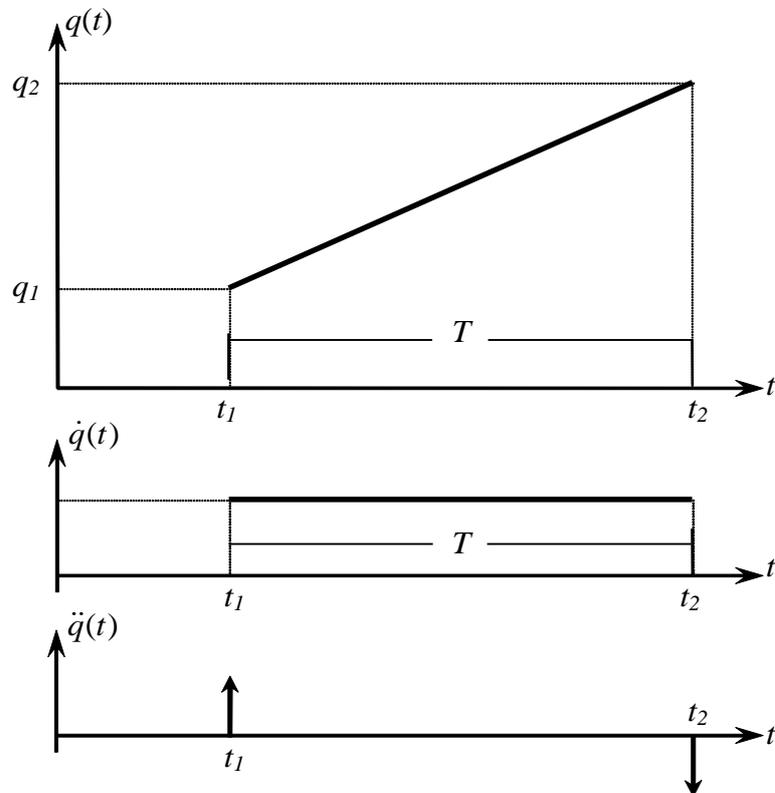


Figura 10.2 Interpolación articular polinómica lineal.

Gráfica elaborada por el autor

De la figura 10.2 se deduce que la posición articular varía de forma proporcional con el tiempo y la velocidad es constante y no existe aceleración en el intervalo abierto de tiempo $\langle t_1, t_2 \rangle$, presentando discontinuidad de la velocidad en los puntos inicial y final, esto genera vibraciones en la estructura mecánica, disminuyendo la precisión en estos puntos y perjudicando a los actuadores de las articulaciones, sobre todo cuando el robot se mueve a grandes velocidades. La ventaja principal de la trayectoria polinómica lineal radica en el mínimo costo computacional utilizado sobre todo cuando se requiere dotar de aprendizaje al robot.

10.3.2 Interpolación polinómica cúbica

En la interpolación polinómica cúbica, la trayectoria articular $q(t)$ tiende a ser suave debido que presenta dos derivadas continuas evitando de este modo aceleraciones infinitas, por lo que el movimiento articular del robot presenta esta característica, cuando éste se mueve desde un punto inicial q_1 especificado a un punto final q_2 establecido en el espacio articular en un intervalo de tiempo total $[t_1, t_2]$, desarrollando la mayor velocidad en la zona intermedia de la trayectoria. En este polinomio se pueden establecer condiciones iniciales y finales de posición (q_1, q_2) y de velocidad (\dot{q}_1, \dot{q}_2) .

El polinomio que representa una trayectoria polinomial cúbica o de tercer grado en el espacio articular en función del tiempo normalizado $\tau(t)$ se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$q(t) = q(\tau(t)) = a_3\tau^3(t) + a_2\tau^2(t) + a_1\tau(t) + a_0 \quad (10.3.a)$$

La velocidad articular $\dot{q}(t)$ en función de τ se describe en la siguiente ecuación:

$$\dot{q}(\tau(t)) = \frac{dq(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dq(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{T} (3a_3\tau^2 + 2a_2\tau + a_1) \quad (10.3.b)$$

La aceleración articular $\ddot{q}(t)$ en función de τ se describe en la siguiente ecuación:

$$\ddot{q}(\tau(t)) = \frac{d^2q(\tau)}{d\tau^2} \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \frac{1}{T^2} \frac{d^2q(\tau)}{d\tau^2} = \frac{1}{T^2} (6a_3\tau + 2a_2) \quad (10.3.c)$$

El tiempo normalizado $\tau(t) = \frac{t-t_1}{t_2-t_1} = \frac{t-t_1}{T}$ es el mismo de la ecuación (10.2)

Las ligaduras de posición en los puntos inicial y final de la trayectoria articular son respectivamente $q(t_1) = q_1$ y $q(t_2) = q_2$ y las ligaduras de velocidad articular en estos puntos son respectivamente la velocidad inicial $\dot{q}(t_1) = \dot{q}_1$ y la velocidad final $\dot{q}(t_2) = \dot{q}_2$. Evaluando las ecuaciones (10.3) en el punto inicial y final se obtienen los coeficientes del polinomio cúbico $q(t)$ como:

$$\begin{aligned} a_0 &= q_1 \\ a_1 &= \dot{q}_1 T \\ a_2 &= 3(q_2 - q_1) - (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)T \\ a_3 &= -2(q_2 - q_1) + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)T \end{aligned} \quad (10.4)$$

Reemplazando los coeficientes obtenidos de la ecuación (10.4) en la ecuación (10.3.a) se obtiene la ecuación polinómica para el desplazamiento articular cúbico como:

$$q(\tau) = [(\dot{q}_2 + \dot{q}_1)T - 2(q_2 - q_1)]\tau^3 - [(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)T - 3(q_2 - q_1)]\tau^2 + \dot{q}_1 T\tau + q_1 \quad (10.5)$$

Definiendo la velocidad media $\dot{q}_m = (q_2 - q_1)/T$ entre los puntos inicial y final en el tiempo de T y reemplazando los valores de los coeficientes a_i y \dot{q}_m en las ecuaciones (10.3) se obtienen las ecuaciones para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración articulares respectivamente como:

$$q(\tau) = [(q_2 + q_1)T - 2\dot{q}_m T]\tau^3 - [(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)T - 3(q_2 - q_1)]\tau^2 + \dot{q}_1 T\tau + q_1 \quad (10.6.a)$$

$$\dot{q}(\tau) = 3[(\dot{q}_2 + \dot{q}_1) - 2\dot{q}_m]\tau^2 + 2[3\dot{q}_m - (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)]\tau + \dot{q}_1 \quad (10.6.b)$$

$$\ddot{q}(\tau) = \frac{1}{T} \{ 6[(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - 2\dot{q}_m]\tau + 2[3\dot{q}_m - (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)] \} \quad (10.6.c)$$

Evaluando en la expresión (10.6.c) con los valores de $\tau = 0$ y $\tau = 1$ se obtiene el valor de la aceleración articular inicial \ddot{q}_1 y final \ddot{q}_2 respectivamente como:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 = \ddot{q}(0) &= 6 \frac{\dot{q}_m}{T} - 2 \frac{(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)}{T} \\ \ddot{q}_2 = \ddot{q}(1) &= -6 \frac{\dot{q}_m}{T} + 2 \frac{(\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2)}{T} \end{aligned} \quad (10.7)$$

En la figura 10.3 se muestra de forma gráfica, la trayectoria polinómica cúbica $q(t)$ para cada articulación desde un punto inicial q_1 hasta un punto final q_2 , en el intervalo de tiempo de t_1 a t_2 ; con su respectiva velocidad $\dot{q}(t)$ y aceleración $\ddot{q}(t)$

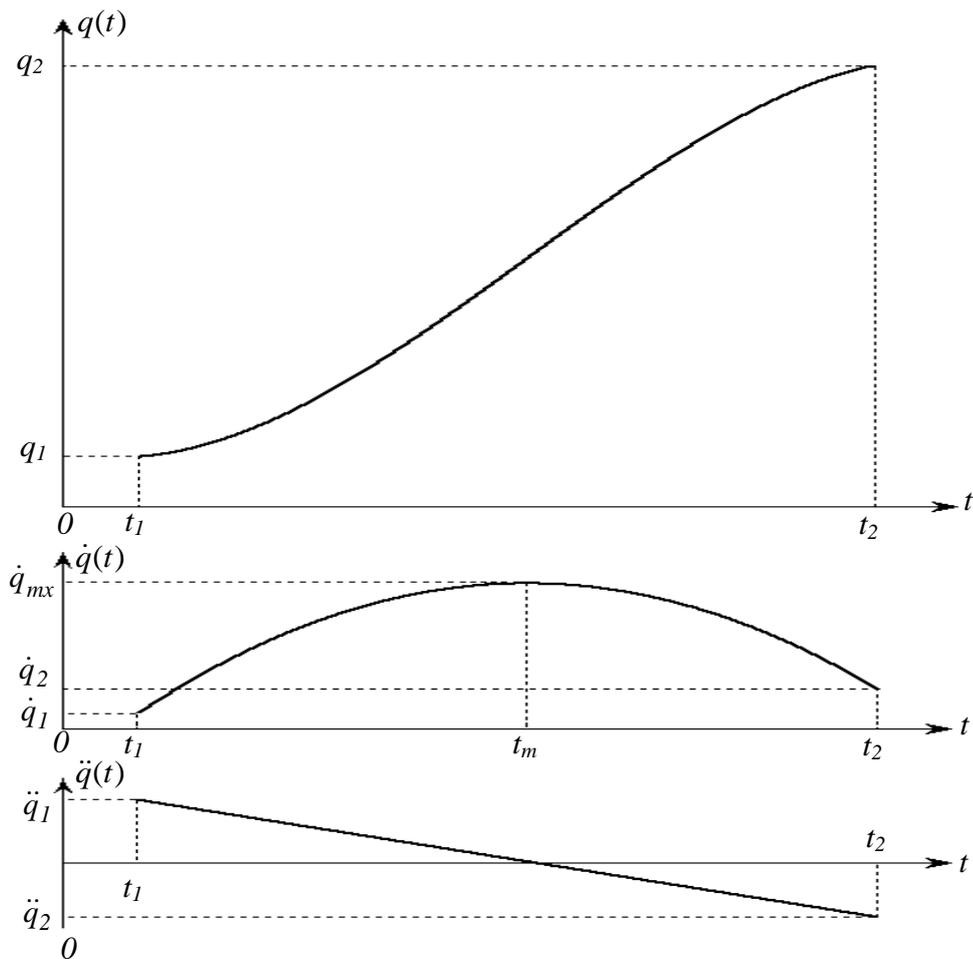


Figura 10.3 Interpolación articular polinómica cúbica.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

Para no obtener trayectorias indeseadas en el tiempo se debe limitar las velocidades inicial y final de cada articulación mediante la siguiente relación:

$$0 \leq |\dot{q}_1|, |\dot{q}_2| \leq |\dot{q}_m|$$

Si las velocidades articulares inicial \dot{q}_1 y final \dot{q}_2 son iguales a la velocidad media \dot{q}_m se obtiene un movimiento polinómico lineal en el tiempo, por lo tanto al reemplazar \dot{q}_1 y \dot{q}_2 por \dot{q}_m en la ecuación de velocidad articular (10.6.b) se obtiene una expresión para la velocidad articular igual a la ecuación (10.1).

Si la velocidad articular inicial \dot{q}_1 y final \dot{q}_2 son nulas, entonces se obtiene un movimiento de interpolación articular cúbica en función del tiempo que se expresa de la siguiente manera:

$$q(t) = q_1 + (-2\tau + 3)\tau^2 (q_2 - q_1) \quad (10.8)$$

La velocidad articular máxima (en el sentido positivo o negativo del movimiento) se obtiene igualando a cero la expresión de la aceleración en la ecuación (10.6.c), obteniéndose el valor de τ_m donde ocurre un máximo o un mínimo que es igual a:

$$\tau_m = \frac{2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 - 3\dot{q}_m}{3\dot{q}_1 + 3\dot{q}_2 - 6\dot{q}_m}$$

Reemplazando el valor de τ_m en la expresión de la velocidad (10.6.b) se obtiene la velocidad articular máxima como:

$$\dot{q}_{max/min} = \dot{q}_1 + \frac{(3\dot{q}_m - 2\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2}{3(2\dot{q}_m - \dot{q}_1 - \dot{q}_2)} \quad (10.9)$$

La ventaja principal de utilizar la interpolación cúbica para el movimiento de las articulaciones del robot, es que la velocidad de la trayectoria aumenta desde que se inicia el movimiento con la velocidad inicial especificada (normalmente nula) hasta obtener la máxima magnitud alrededor del punto intermedio de la trayectoria articular y luego comienza a disminuir la velocidad hasta finalizar el movimiento con la velocidad final especificada (normalmente nula).

Las limitaciones del polinomio cúbico radican normalmente en la presencia de discontinuidades de aceleración al inicio y al final de la trayectoria que no se tiene control y no se pueden especificar, originando vibraciones en estos puntos, sobre todo cuando se desea realizar conexiones de movimiento entre segmentos distintos de trayectorias a altas velocidades.

10.3.3 Interpolación polinómica de grado superior

Al realizar interpolaciones polinómicas lineales o cúbicas se presentan inconvenientes y limitaciones que impiden obtener una trayectoria articular totalmente deseada, tanto en posición, como en velocidad y aceleración. Para obtener trayectorias controladas y suaves con al menos dos primeras derivadas continuas se necesita utilizar polinomios de orden mayor que tres, entre las trayectorias de articulación polinómicas interpoladas de grado superior se formulan mediante los polinomios siguientes:

- Polinomio de orden cinco en los cuales se pueden establecer condiciones iniciales y finales de posición (q_1, q_2), velocidad (\dot{q}_1, \dot{q}_2) y aceleración (\ddot{q}_1, \ddot{q}_2)

- Polinomio de orden siete en los cuales se pueden establecer condiciones iniciales y finales de posición (q_1, q_2), velocidad (\dot{q}_1, \dot{q}_2) y aceleración (\ddot{q}_1, \ddot{q}_2) y posición en los puntos de despegue y de asentamiento (q_a, q_b).
- Polinómicos combinados intersegmentales de grados 4-3-4, 3-5-3, etc. para establecer puntos de inicio, de despegue, de asentamiento y final.

En la figura 10.4 se muestra la gráfica para una trayectoria articular de orden superior, en la cual se distinguen los puntos de inicio, despegue, asentamiento y final en el tiempo programado.

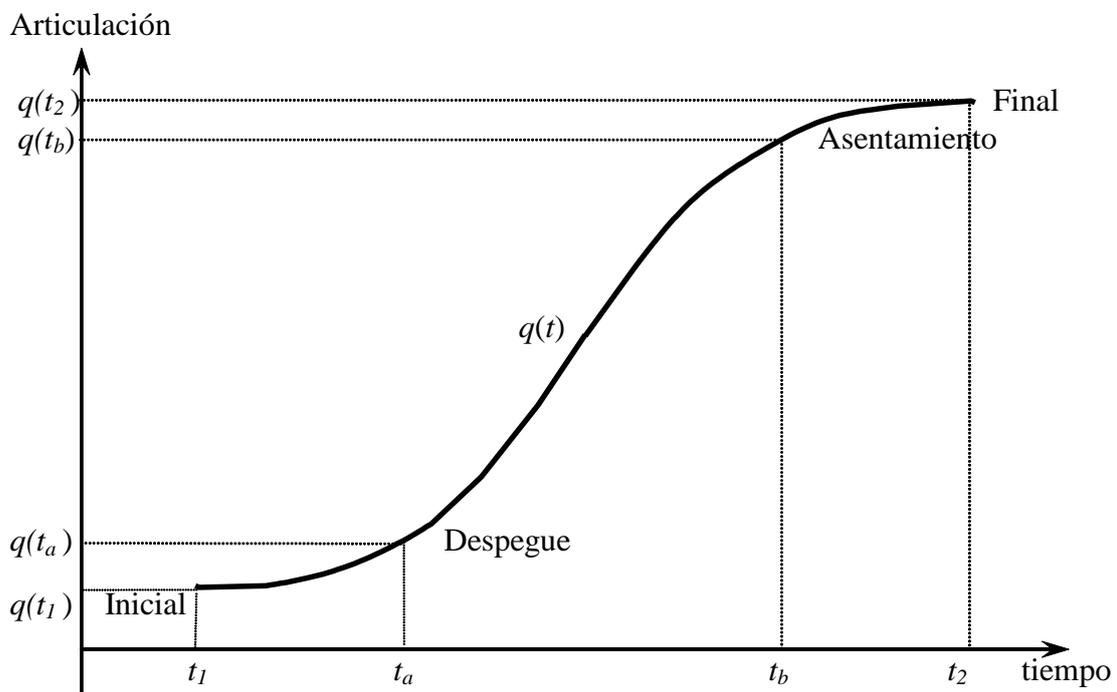


Figura 10.4 Interpolación polinómica articular de orden superior.
Gráfica elaborada por el autor

En la interpolación polinómica de grado cinco, se especifican en el punto inicial la posición q_1 , velocidad \dot{q}_1 y aceleración \ddot{q}_1 iniciales y en el punto final se especifican la posición q_2 , velocidad \dot{q}_2 y aceleración \ddot{q}_2 finales que permiten determinar los seis coeficientes del polinomio. En la interpolación polinómica de grado siete se especifican en el punto inicial la posición q_1 , velocidad \dot{q}_1 y aceleración \ddot{q}_1 iniciales, en el punto despegue se especifica la posición q_a , en el punto asentamiento se especifica la posición q_b y en el punto final se especifican la posición q_2 , velocidad \dot{q}_2 y aceleración \ddot{q}_2 finales que permiten determinar los ocho coeficientes del polinomio.

En la planificación de una trayectoria articular interpolada para un robot se deben tener en las siguientes consideraciones:

1. Cuando se coge un objeto con el efector final, el movimiento de la “muñeca” se debe dirigir hacia fuera del objeto de lo contrario la “muñeca” puede golpear la superficie soporte del objeto.
2. Si se especifica una posición de partida (punto de despegue) a lo largo del vector normal a la superficie desde la posición inicial, y si se requiere que la “muñeca” del robot pase a través de esta posición, entonces se debe generar un movimiento de partida admisible. Si se especifica más aun el tiempo necesario para alcanzar esta posición, se puede controlar la velocidad con la cual se despega el objeto.
3. El mismo conjunto de requisitos de despegue para el movimiento del robot, es también válido cuando la muñeca del robot se acerca a la posición final, de manera que se pueda obtener y controlar la dirección de aproximación de forma correcta.
4. De lo anterior, se especifica cuatro posiciones puntuales para cada movimiento de las articulaciones del manipulador. Estas son: inicial, despegue, asentamiento y final.
5. Ligaduras de posición:
 - a) *Posición inicial*: son la velocidad y aceleración (normalmente nulas).
 - b) *Posición de despegue*: movimiento continuo a puntos intermedios.
 - c) *Posición de asentamiento*: lo mismo que para la posición de despegue.
 - d) *Posición final*: son la velocidad y aceleración (normalmente nulas).

10.3.4 Interpolación trigonométrica

En este tipo de interpolación, la trayectoria articular $q(t)$ y todas sus derivadas entre dos puntos especificados son curvas suaves y continuas ya que se utilizan funciones trigonométricas para representar el movimiento. El desplazamiento interpolado de forma trigonométrica presenta esta característica, cuando el robot se mueve desde un punto inicial q_1 a un punto final q_2 , en el espacio de la configuración articular en un intervalo de tiempo total $[q_1, q_2]$.

Las ecuaciones en el tiempo correspondientes a la posición, velocidad y aceleración articulares mediante interpolación trigonométrica se expresan como sigue:

$$q(\tau) = \frac{q_1 + q_2}{2} - \frac{q_2 - q_1}{2} \cos(\pi \tau(t)) \quad (10.10.a)$$

$$\dot{q}(\tau) = \frac{q_2 - q_1}{2} \times \frac{\pi}{T} \text{sen}(\pi \tau(t)) \quad (10.10.b)$$

$$\ddot{q}(\tau) = \frac{q_2 - q_1}{2} \times \frac{\pi^2}{T^2} \cos(\pi \tau(t)) \quad (10.10.c)$$

El tiempo normalizado $\tau(t) = \frac{t-t_1}{t_2-t_1} = \frac{t-t_1}{T}$ es el mismo que el de la ecuación (10.2).

En la figura 10.5 se muestran las gráficas de la interpolación trigonométrica $q(t)$ para cada articulación desde un punto inicial q_1 hasta un punto final q_2 , en el intervalo de tiempo de t_1 a t_2 con su respectiva velocidad $\dot{q}(t)$ y aceleración $\ddot{q}(t)$ correspondientes a las ecuaciones (10.10).

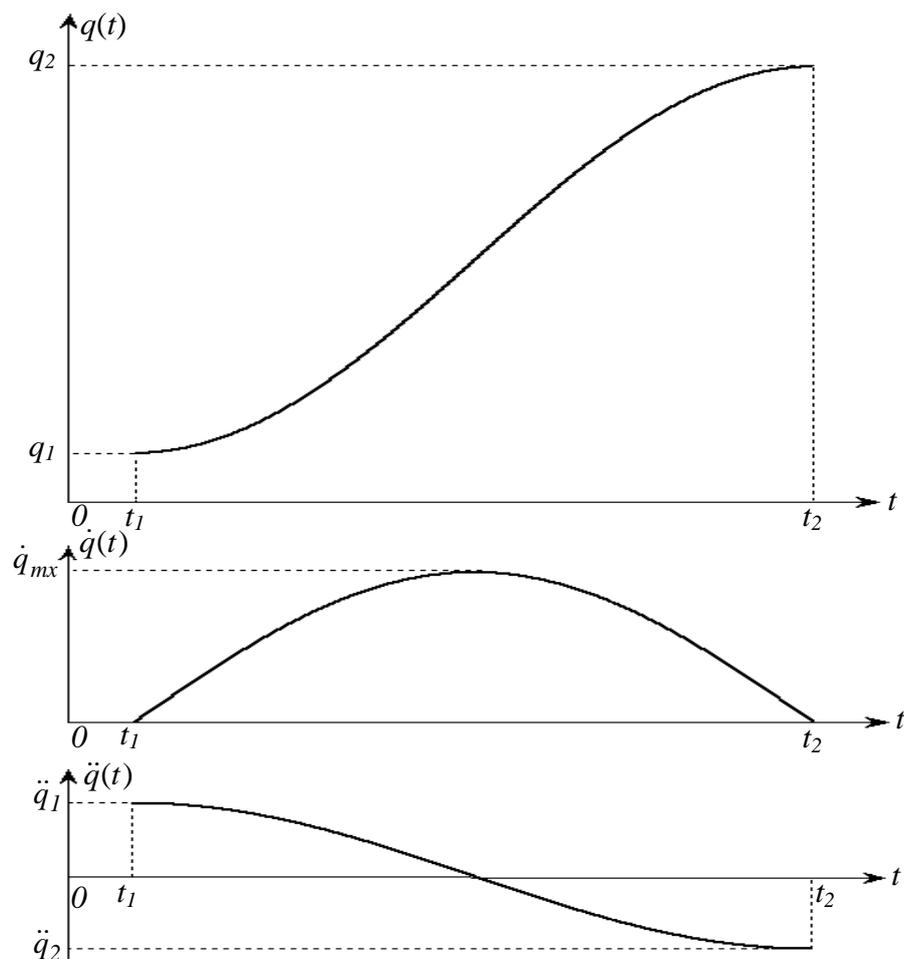


Figura 10.5 Generación de trayectoria articular trigonométrica.

Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

De la figura 10.5 y de las ecuaciones (10.10) de interpolación trigonométrica, se deduce que las velocidades articulares inicial \dot{q}_1 y final \dot{q}_2 son nulas mientras que las aceleraciones inicial \ddot{q}_1 y final \ddot{q}_2 son distintas de cero y esto se puede interpretar como una desventaja cuando se requiere que el robot realice varios tramos de movimiento en el espacio, lo que indica que si las trayectorias articulares están operando en el mismo intervalo de tiempo el manipulador se detiene al finalizar cada segmento de la trayectoria espacialmente especificada, con las inevitables discontinuidades en la aceleración articular.

En vez de utilizar funciones temporales tipo coseno, se pueden utilizar también funciones tipo seno o funciones tipo arcotangentes. A parte de las interpolaciones anteriores en el espacio articular se pueden utilizar otro tipo de interpolaciones en función del tiempo tales como: Perfil de velocidad *Bang-Bang*, perfil de velocidad *Trapezoidal*, perfil de aceleración continua con fase de velocidad constante, generación de trayectorias vía puntos, interpolación lineal combinado con aceleración continua, generación de trayectorias con segmentos de funciones polinomiales cúbicas, también se pueden utilizar funciones hiperbólicas, funciones exponenciales, sigmoides, funciones *splines*, curvas de *Bezier*, etc.

10.4 Generación de trayectorias en coordenadas cartesianas

Para realizar la generación o planificación en el espacio cartesiano se define la historia temporal de la posición del efector final del manipulador, la velocidad y la aceleración, y se deducen las correspondientes posiciones, velocidades y aceleraciones articulares a partir de la información del efector final mediante las formulaciones geométrica y cinemática inversas del robot.

Para robots sofisticados, se desarrollan algoritmos de generación de trayectorias espaciales mediante lenguajes de programación, que permiten controlar la trayectoria del manipulador, con la finalidad de realizar alguna operación específica en el sistema de coordenadas cartesianas distinguiendo claramente la posición y la orientación del efector final durante el movimiento.

En la figura 10.6 se muestra el esquema de la generación y control de trayectorias en el espacio cartesiano tridimensional de forma indirecta, esto es utilizando el control en el espacio articular y transformando al espacio cartesiano.

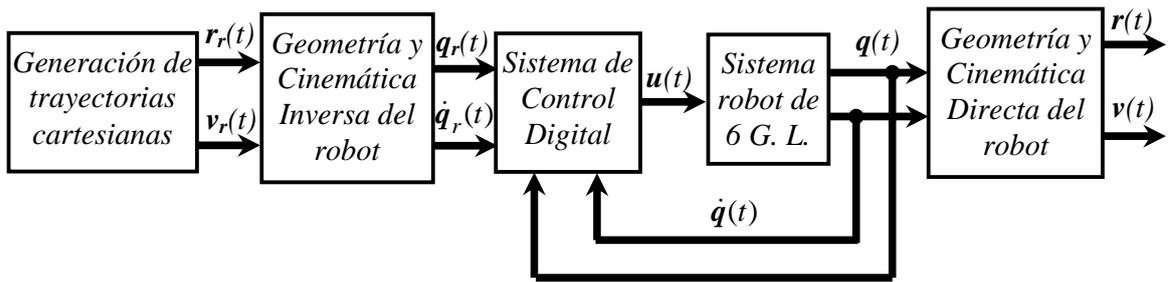


Figura 10.6 Esquema de generación de trayectorias cartesianas y control en el espacio articular.

Gráfica elaborada por el autor

En esta sección se describe la generación de trayectorias del robot por segmentos de línea recta para el movimiento espacial del efector final. La velocidad y la aceleración del efector final entre estos segmentos también se pueden controlar, convirtiéndolas en variables articulares mediante la Geometría y Cinemática Inversas y se puede suavizar mediante rutinas de interpolación cuadrática.

Las trayectorias temporales de los robots se suelen controlar en el espacio de las variables de articulación, mientras que los objetos que se manipulan se suelen expresar en el sistema de coordenadas cartesianas.

En la figura 10.7 se muestra la trayectoria de línea recta que debe realizar el efector final del robot así como los vectores de orientación tanto al inicio y final de la trayectoria.

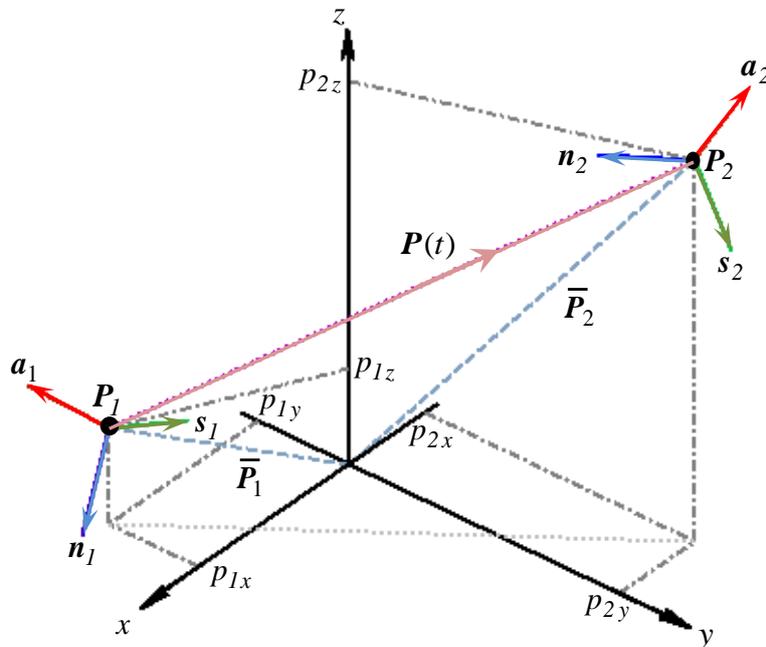


Figura 10.7 Posición y orientación inicial - final de una trayectoria cartesiana.

Gráfica elaborada por el autor

La trayectoria espacial que realizan algunos robots en el espacio cartesiano mediante una línea recta corresponde al movimiento del punto P del efector final y la rotación R a lo largo de una trayectoria espacial recta desde la posición P_1 y orientación $[n_1 s_1 a_1]$ hasta la posición P_2 y orientación $[n_2 s_2 a_2]$ como se muestra en la figura 10.7. Para muchos robots, el control del desplazamiento cartesiano depende mucho de la estructura física del robot y es factible si el control de las articulaciones individuales se puede realizar de forma simultánea transformando de forma adecuada el movimiento del espacio cartesiano al movimiento del espacio articular mediante la cinemática de posición inversa de una forma genérica, ya que se pueden presentar varias soluciones en el espacio articular y en otros casos, algunos puntos cartesianos son inalcanzables o inaccesibles, también se pueden llegar a puntos de singularidad o se encuentre con obstáculos externos o elementos del mismo robot.

La generación de trayectorias cartesianas generalmente se analizan y realizan mediante la aproximación de una trayectoria en línea recta de tal manera que cualquier trayectoria curva espacial se puede representar por curvas rectas pequeñas, registrando una secuencia apropiada de puntos específicos en el espacio articular.

Existen diversos métodos de interpolación o generación de trayectorias cartesianas para conducir al efector final de un robot en el espacio; pero los tipos que se van a desarrollar para el manipulador de seis articulaciones son tres: interpolación polinómica vectorial cartesiana, interpolación polinómica de una traslación y una rotación e interpolación polinómica de una traslación y dos rotaciones.

Para realizar los tres tipos de interpolación cartesiana en el tiempo t se considera la expresión $\tau(t)$ como una variable polinomial normalizada de tiempo tal que $\tau \in [0,1]$ y el tiempo t es el tiempo real en segundos tal que $t \in [t_1, t_2]$ de duración T segundos mediante la expresión:

$$\tau(t) = \frac{t-t_1}{t_2-t_1} = \frac{t-t_1}{T} \quad (10.11)$$

En vez de usar un polinomio lineal para generar la trayectoria $r(\tau)$ también se puede usar un polinomio de tercer grado con velocidades inicial y final nulas como sigue:

$$\tau(t) = \left(-2 \frac{t-t_1}{t_2-t_1} + 3\right) \left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right)^2 \quad (10.12)$$

10.4.1 Interpolación cartesiana vectorial †

El movimiento del robot en el espacio definido por coordenadas cartesianas, entre la localización inicial F_1 (posición P_1 y orientación $[n_1 s_1 a_1]$) y localización final F_2 (posición P_2 y orientación $[n_2 s_2 a_2]$) se aplica y se realiza sobre un segmento de línea recta espacial, cuya velocidad puede ser constante o adoptar alguna forma polinómica apropiada. Si r_1 y r_2 denotan los vectores inicial y final respectivamente, en el espacio cartesiano, la configuración del efector operacional debe seguir una trayectoria cartesiana expresada por el vector $r(t)$ que permita describir tanto la posición como la orientación expresada mediante los ángulos de *Euler*. El vector de variables cartesianas se puede escribir como:

$$r(\tau) = [x(\tau) \quad y(\tau) \quad z(\tau) \quad \phi(\tau) \quad \varphi(\tau) \quad \psi(\tau)]^T \quad (10.13)$$

Los vectores inicial y final para generar la trayectoria en el espacio cartesiano se representan por:

$$r_1 = [x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad \phi_1 \quad \varphi_1 \quad \psi_1]^T \quad (10.14.a)$$

$$r_2 = [x_2 \quad y_2 \quad z_2 \quad \phi_2 \quad \varphi_2 \quad \psi_2]^T \quad (10.14.b)$$

La trayectoria general en línea recta para la herramienta en el espacio cartesiano se puede representar en función del tiempo normalizado $\tau(t)$ como:

$$r(\tau) = r_1 + \tau(t)(r_2 - r_1) \quad (10.15)$$

La localización $F(\tau)$ del efector final respecto del referencial base según el vector de las ecuaciones (10.13) o (10.15) en función del tiempo normalizado $\tau(t)$ se expresa mediante una matriz de transformación homogénea de la siguiente manera:

$$F(\tau) = \begin{bmatrix} R(\tau) & P(\tau) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (10.16)$$

El vector de desplazamiento espacial $P(\tau)$ de la ecuación (10.16) se define como:

$$P(\tau) = [x(\tau) \quad y(\tau) \quad z(\tau)]^T$$

La matriz $R(\tau)$ que representa la orientación espacial de la ecuación (10.16) se define de la siguiente manera:

† Método desarrollado por el autor

$$\mathbf{R}(\tau) = \begin{bmatrix} C\psi(\tau)C\phi(\tau) & C\psi(\tau)S\phi(\tau)S\phi(\tau) - S\psi(\tau)C\phi(\tau) & C\psi(\tau)S\phi(\tau)C\phi(\tau) + S\psi(\tau)S\phi(\tau) \\ S\psi(\tau)C\phi(\tau) & S\psi(\tau)S\phi(\tau)S\phi(\tau) + C\psi(\tau)C\phi(\tau) & S\psi(\tau)S\phi(\tau)C\phi(\tau) - C\psi(\tau)S\phi(\tau) \\ -S\phi(\tau) & C\phi(\tau)S\phi(\tau) & C\phi(\tau)C\phi(\tau) \end{bmatrix}$$

En la localización inicial el valor de τ es cero, por tanto $\mathbf{F}(0) = \mathbf{F}_1$ y en la localización final el valor de τ es uno, por tanto $\mathbf{F}(1) = \mathbf{F}_2$.

La ecuación de la primera derivada $\dot{\mathbf{r}}(t)$ del vector que describe la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ se obtiene derivando la ecuación (10.15) expresándose como:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d\tau(t)}{dt}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (10.17)$$

A cada punto del vector $\mathbf{r}(\tau)$ de la ecuación (10.15) le corresponde un determinado valor del vector articular $\mathbf{q}(t)$; por lo que se puede aplicar la formulación geométrica inversa del manipulador robótico para determinar y evaluar las magnitudes de las variables articulares, determinando así una trayectoria en el espacio articular dependiente de la trayectoria cartesiana.

Desde que las ecuaciones de la formulación geométrica inversa se han de resolver para cada punto conocido de la trayectoria $\mathbf{r}(\tau)$ que realiza el efector final del robot, es deseable minimizar el número conocido de puntos espaciales y distribuirlos a lo largo de la trayectoria programada de una manera óptima.

Este método de interpolación cartesiana puede producir en la trayectoria desviaciones o errores significativos al ser evaluada en cada punto y está sujeto a la estructura física y a la velocidad desarrollada del robot. De exceder una tolerancia pre-establecida, se debe corregir de forma inmediata para obtener una trayectoria de la mejor manera sin desviaciones.

En las figuras 10.8.a - 10.8.b se muestran respectivamente las componentes cartesianas de la trayectoria espacial $\mathbf{P}(t)$ desde la posición \mathbf{P}_1 hasta la posición \mathbf{P}_2 y los ángulos de rotación respecto de los ejes principales desde la localización \mathbf{F}_1 hasta la localización \mathbf{F}_2 (ángulos de *Euler*) según la ecuación (10.15). En las figuras consecutivas 10.8.c - 10.8.e se muestran de forma respectiva los componentes cartesianos de los vectores de orientación $[\mathbf{n}(t) \mathbf{s}(t) \mathbf{a}(t)]$ al aplicar la ecuación (2.12) y con tiempo normalizado $\tau(t)$ según la ecuación (10.12).

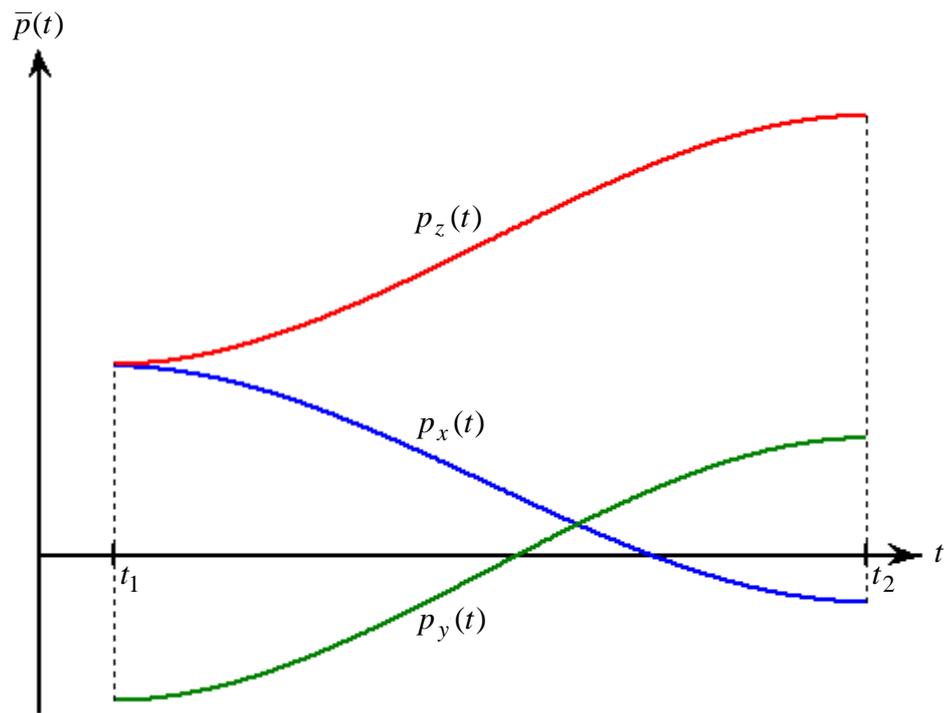


Figura 10.8.a Vector de posición cartesiano \mathbf{P} del efector final del robot.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

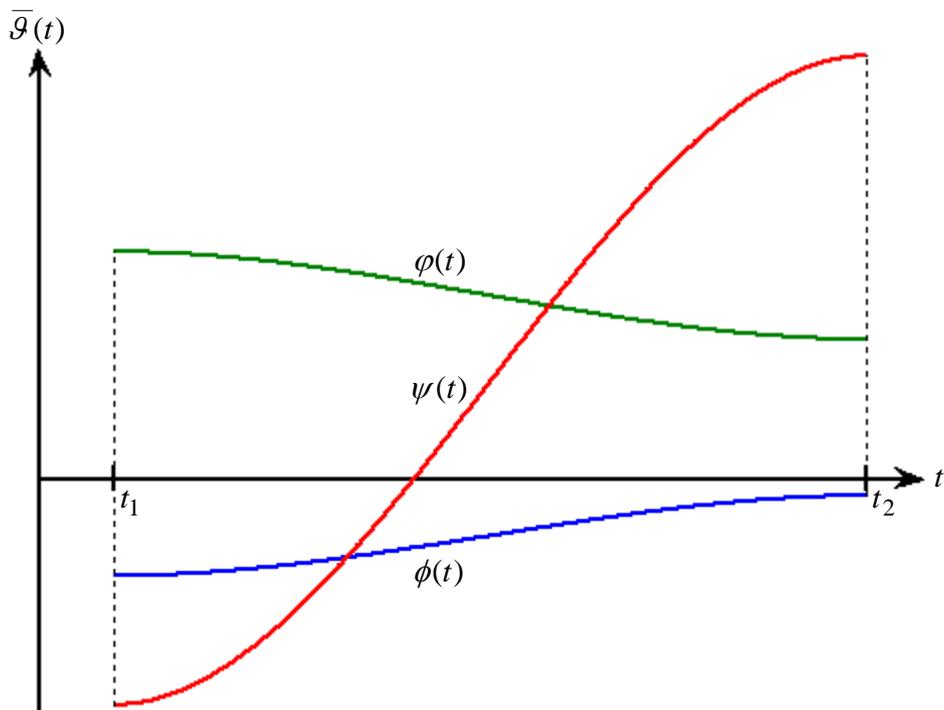


Figura 10.8.b Vector orientación \mathbf{O} del efector final mediante los ángulos de *Euler*.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

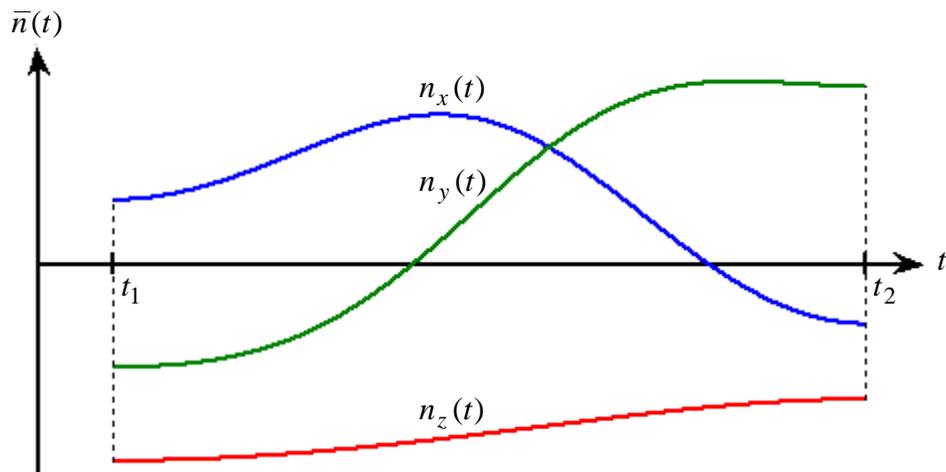


Figura 10.8.c Vector cartesiano normal \mathbf{n} del efector final respecto del robot.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

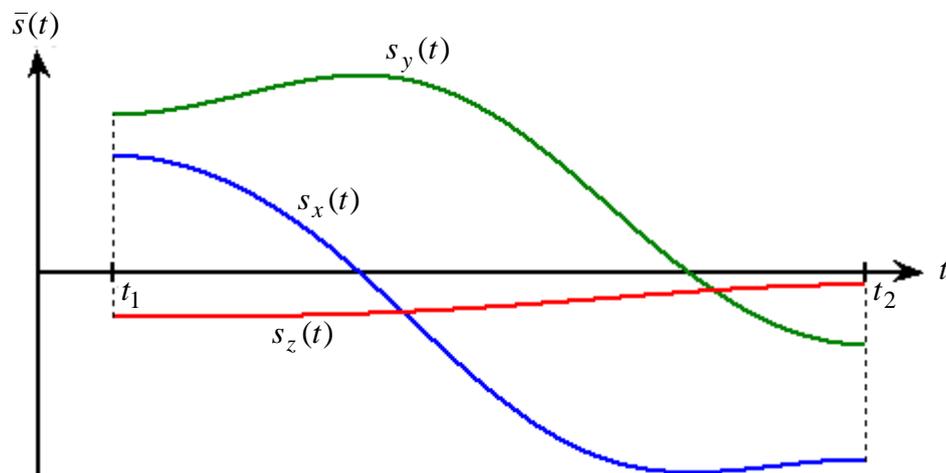


Figura 10.8.d Vector cartesiano de deslizamiento \mathbf{s} del efector final robot.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

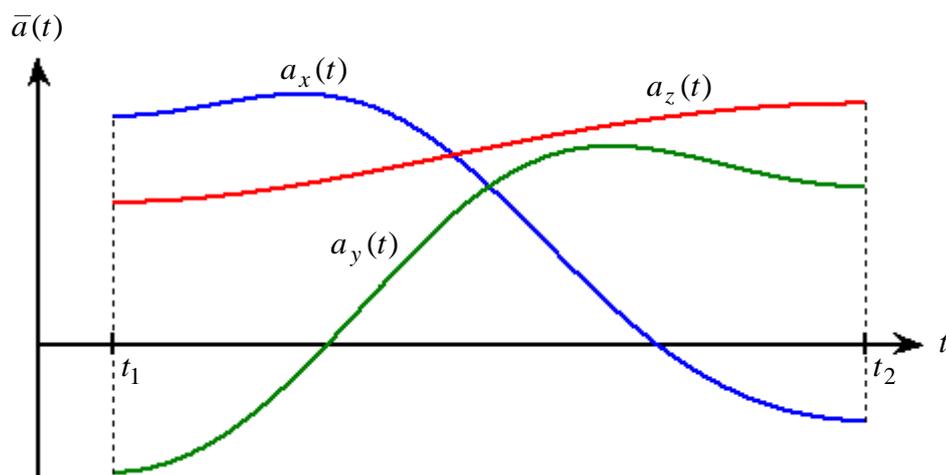


Figura 10.8.e Vector cartesiano de aproximación \mathbf{a} del efector final robot.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

10.4.2 Interpolación cartesiana de una traslación y una rotación †

El desplazamiento del efector operacional de un manipulador a lo largo de una línea recta entre dos puntos nudos especificados por las localizaciones F_1 y F_2 en el tiempo total de T segundos donde cada localización se puede representar mediante una matriz de transformación homogénea $F(\tau)$ con rotación $R(\tau)$ y traslación $P(\tau)$ que se expresa de la forma conocida siguiente:

$$F(\tau) = \begin{bmatrix} R(\tau) & P(\tau) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.18)$$

Este tipo de interpolación consiste en una traslación del punto referencial $P(\tau)$ del efector final del manipulador desde P_1 hasta P_2 junto con una rotación desde R_1 hasta R_2 . Considerando que $\tau(t)$ es la variable de tiempo normalizado de la ecuación (10.11) o de la ecuación (10.12) que representa la fracción del movimiento para ser recorrida desde el tiempo t_1 hasta el tiempo t_2 mediante un movimiento determinado. La posición $P(\tau)$ y la orientación $R(\tau)$ del efector final en función del tiempo t se expresan respectivamente de la siguiente manera:

$$P(\tau) = P_1 + \tau(t)(P_2 - P_1) \quad (10.19.a)$$

$$R(\tau) = R_1 Rot(\mathbf{u}, \tau(t)\gamma) \quad (10.19.b)$$

La localización $F(\tau)$ del efector final en función del tiempo normalizado τ respecto del sistema referencial base se expresa mediante una matriz de transformación homogénea de la siguiente manera:

$$F(\tau) = \begin{bmatrix} R(\tau) & P(\tau) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}(\tau) & s(\tau) & \mathbf{a}(\tau) & P(\tau) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.20)$$

En la localización inicial $\tau = 0$, se cumple $F(0) = F_1$ y en la localización final $\tau = 1$, se cumple $F(1) = F_2$, significa que $Rot(\mathbf{u}, \gamma)$ es la matriz total a rotar, es decir se realiza una rotación de un ángulo γ respecto de un eje o vector unitario \mathbf{u} para orientar al efector final desde R_1 hasta R_2 , entonces de la ecuación (10.19.b) para el valor de $\tau = 1$ se obtiene la expresión:

$$Rot(\mathbf{u}, \gamma) = R_1^{-1} R_2 \quad (10.21)$$

† Método adaptado por el autor

Las matrices \mathbf{R}_1 y \mathbf{R}_2 de la ecuación (10.21) se definen respectivamente como $\mathbf{R}_1 = [\mathbf{n}_A \ s_A \ \mathbf{a}_A]$ y $\mathbf{R}_2 = [\mathbf{n}_B \ s_B \ \mathbf{a}_B]$, entonces la matriz resultante se escribe como:

$$\mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_A \cdot \mathbf{n}_B & \mathbf{n}_A \cdot \mathbf{s}_B & \mathbf{n}_A \cdot \mathbf{a}_B \\ \mathbf{s}_A \cdot \mathbf{n}_B & \mathbf{s}_A \cdot \mathbf{s}_B & \mathbf{s}_A \cdot \mathbf{a}_B \\ \mathbf{a}_A \cdot \mathbf{n}_B & \mathbf{a}_A \cdot \mathbf{s}_B & \mathbf{a}_A \cdot \mathbf{a}_B \end{bmatrix} \quad (10.22)$$

Para rotar los vectores de orientación de la matriz \mathbf{R}_1 hasta los vectores de la matriz \mathbf{R}_2 se determina un vector apropiado y unitario \mathbf{u} que sirve como eje para rotar totalmente el ángulo γ , tal como se muestra en la figura 10.9.

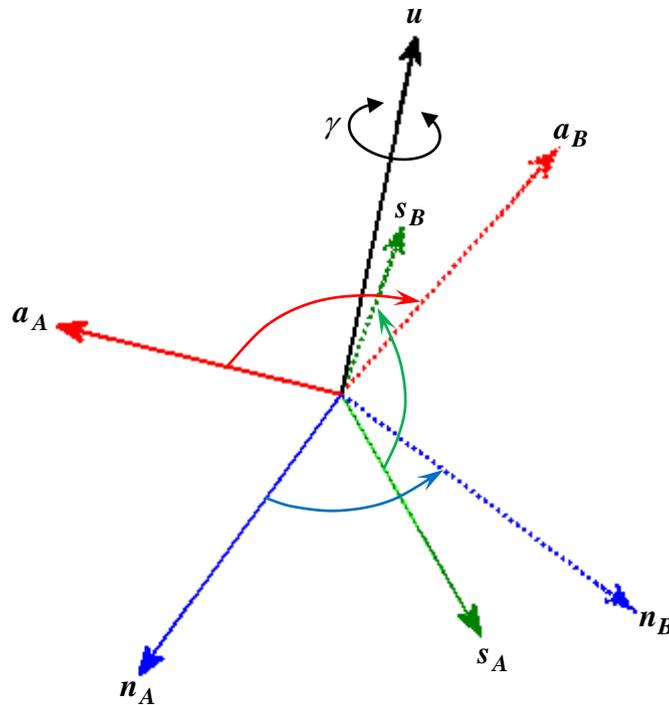


Figura 10.9 Rotación de γ respecto del vector \mathbf{u} del efector final de \mathbf{R}_1 a \mathbf{R}_2 .

Gráfica elaborada por el autor

La matriz $Rot(\mathbf{u}, \gamma)$ que representa una rotación de un ángulo γ respecto del vector unitario \mathbf{u} se expresa como:

$$Rot(\mathbf{u}, \gamma) = \begin{bmatrix} u_x^2 (1 - C\gamma) + C\gamma & u_x u_y (1 - C\gamma) - u_z S\gamma & u_x u_z (1 - C\gamma) + u_y S\gamma \\ u_x u_y (1 - C\gamma) + u_z S\gamma & u_y^2 (1 - C\gamma) + C\gamma & u_y u_z (1 - C\gamma) - u_x S\gamma \\ u_x u_z (1 - C\gamma) - u_y S\gamma & u_y u_z (1 - C\gamma) + u_x S\gamma & u_z^2 (1 - C\gamma) + C\gamma \end{bmatrix} \quad (10.23)$$

Igualando término a término las componentes de los extremos de la derecha de las expresiones (10.22) y (10.23) se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
u_x^2(1-C\gamma) + C\gamma &= \mathbf{n}_A \cdot \mathbf{n}_B \\
u_x u_y(1-C\gamma) + u_z S\gamma &= \mathbf{s}_A \cdot \mathbf{n}_B \\
u_x u_z(1-C\gamma) - u_y S\gamma &= \mathbf{a}_A \cdot \mathbf{n}_B \\
u_x u_y(1-C\gamma) - u_z S\gamma &= \mathbf{n}_A \cdot \mathbf{s}_B \\
u_y^2(1-C\gamma) + C\gamma &= \mathbf{s}_A \cdot \mathbf{s}_B \\
u_y u_z(1-C\gamma) + u_x S\gamma &= \mathbf{a}_A \cdot \mathbf{s}_B \\
u_x u_z(1-C\gamma) + u_y S\gamma &= \mathbf{n}_A \cdot \mathbf{a}_B \\
u_y u_z(1-C\gamma) - u_x S\gamma &= \mathbf{s}_A \cdot \mathbf{a}_B \\
u_z^2(1-C\gamma) + C\gamma &= \mathbf{a}_A \cdot \mathbf{a}_B
\end{aligned} \tag{10.24}$$

Realizando adecuadamente operaciones elementales en las ecuaciones (10.24) y considerando que \mathbf{u} es un vector unitario se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$S\gamma = 0.5\sqrt{(\mathbf{a}_A \mathbf{s}_B - \mathbf{s}_A \mathbf{a}_B)^2 + (\mathbf{n}_A \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A \mathbf{n}_B)^2 + (\mathbf{s}_A \mathbf{n}_B - \mathbf{n}_A \mathbf{s}_B)^2} \tag{10.25.a}$$

$$C\gamma = 0.5(\mathbf{n}_A \mathbf{n}_B + \mathbf{s}_A \mathbf{s}_B + \mathbf{a}_A \mathbf{a}_B - 1) \tag{10.25.b}$$

De las ecuaciones (10.25) se obtiene el ángulo γ que se expresa como sigue:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{S\gamma}{C\gamma}\right) \tag{10.26}$$

Manipulando las ecuaciones (10.24) el vector \mathbf{u} se obtiene como sigue:

$$\mathbf{u}^T = \left[\frac{\mathbf{a}_A \mathbf{s}_B - \mathbf{s}_A \mathbf{a}_B}{2S\gamma} \quad \frac{\mathbf{n}_A \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A \mathbf{n}_B}{2S\gamma} \quad \frac{\mathbf{s}_A \mathbf{n}_B - \mathbf{n}_A \mathbf{s}_B}{2S\gamma} \right] \tag{10.27}$$

Las ecuaciones (10.19.a) y (10.19.b) se evalúan una vez por segmento cuando el destino \mathbf{F}_2 está fijo, de lo contrario se deberán evaluar cada vez que cambie \mathbf{F}_2 .

En la figura 10.10.a se muestran las componentes cartesianas de la trayectoria espacial $\mathbf{P}(t)$ desde la posición \mathbf{P}_1 hasta la posición \mathbf{P}_2 según la ecuación (10.19.a). En las figuras consecutivas 10.10.c - 10.10.e se muestran de forma respectiva los componentes cartesianos de los vectores de orientación $[\mathbf{n}(t) \mathbf{s}(t) \mathbf{a}(t)]$ al relacionar y aplicar las ecuaciones (10.19.b) y (10.20) y la figura 10.10.b muestra los ángulos de *Euler*, para todos los casos con tiempo normalizado $\tau(t)$ según la ecuación (10.12).

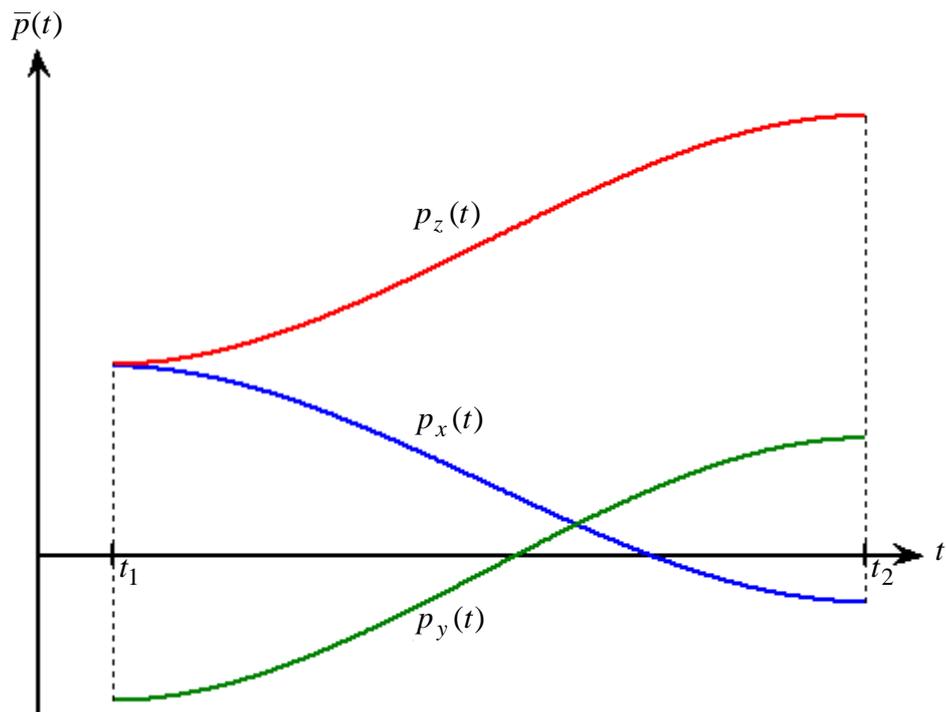


Figura 10.10.a Vector de posición cartesiano P del efector final robot.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

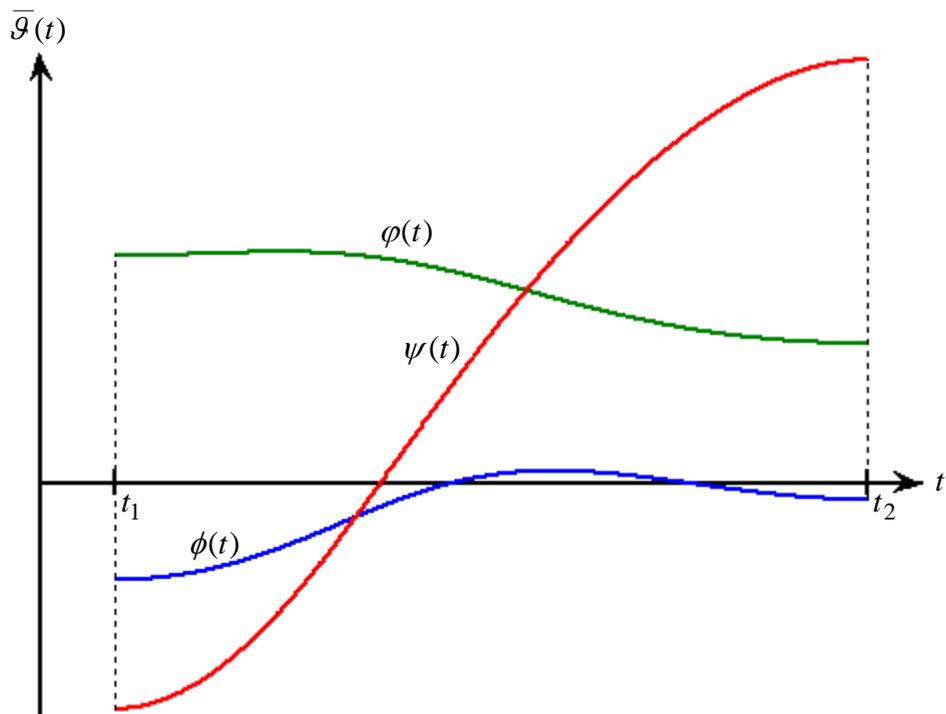


Figura 10.10.b Vector orientación O del efector final mediante los ángulos de Euler.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

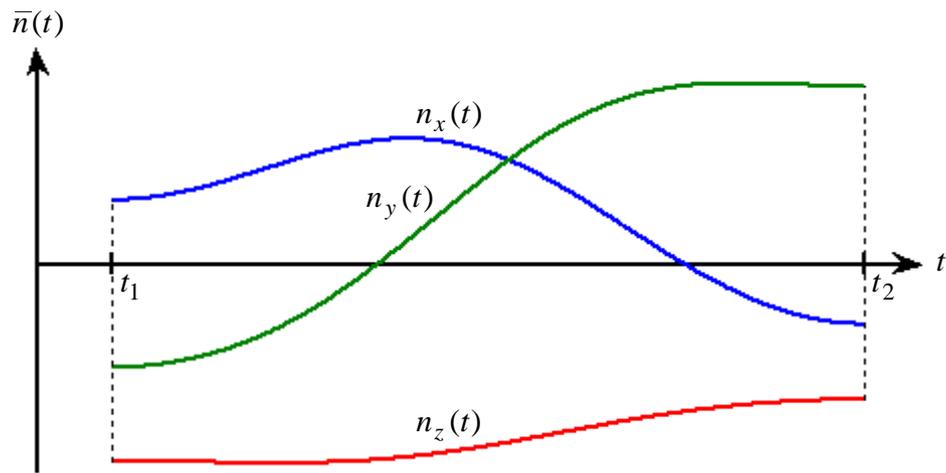


Figura 10.10.c Vector cartesiano normal \mathbf{n} del efector final robot.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

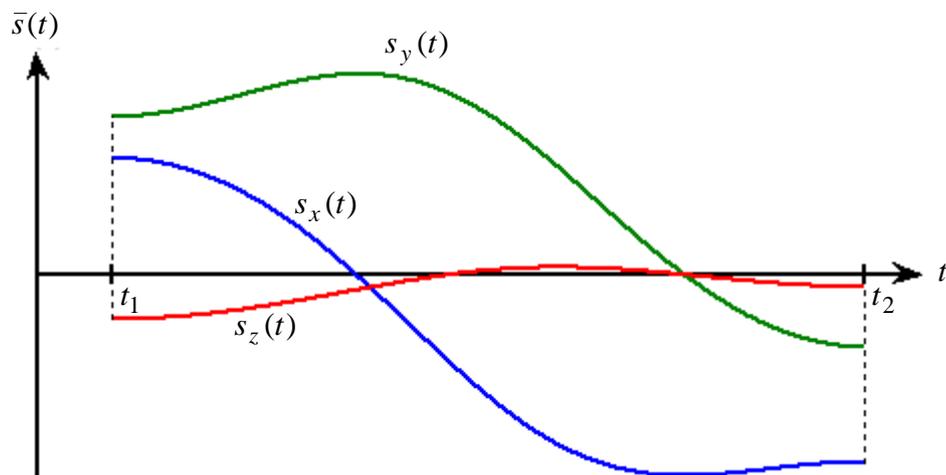


Figura 10.10.d Vector cartesiano de deslizamiento \mathbf{s} del efector final del robot.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

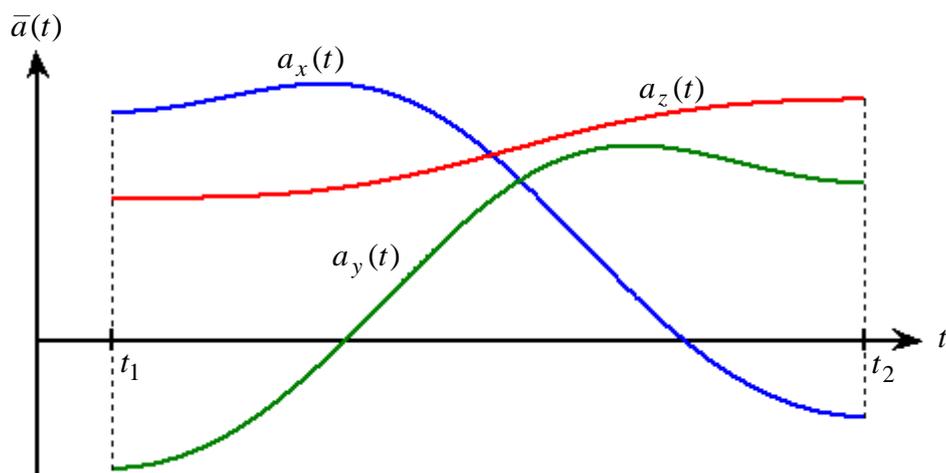


Figura 10.10.e Vector cartesiano de aproximación \mathbf{a} del efector final del robot.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

10.4.3 Interpolación cartesiana de una traslación y dos rotaciones

Cuando el movimiento deseado del efector final de un robot manipulador se especifica como una secuencia de puntos en el espacio de coordenadas cartesianas, cada uno de los cuales se puede describir en términos de transformaciones homogéneas, que relacionan el sistema de coordenadas de la muñeca del robot con el sistema de coordenadas del espacio cartesiano de operación. Las coordenadas de articulación en estos puntos cartesianos, se calculan mediante la solución del problema geométrico inverso, y se puede utilizar un polinomio cuadrático para suavizar los puntos nudos de dos articulaciones consecutivas en coordenadas de articulación. Esta técnica tiene la ventaja principal de permitir el control del efector final para seguir a objetos móviles. Para especificar cómo se mueve la “muñeca” o efector final del robot de un punto transformado a otro se utiliza una traslación en línea recta seguido de dos rotaciones para conseguir el movimiento del robot entre dos puntos cartesianos consecutivos. [8]

La expresión que relaciona la localización del efector final del manipulador en el tiempo desde una localización inicial T_1 hasta una localización final T_2 y la localización del objeto a manipular se puede expresar en la ecuación matricial siguiente:

$${}_{base}T^{herr} {}_{herr}D^{obj}(\tau) = {}_{base}P^{obj} \quad (10.28)$$

${}_{base}T^{herr}$: Matriz de transformación homogénea 4×4 que describe la posición y la orientación deseada de la herramienta en movimiento respecto del referencial base.

${}_{herr}D^{obj}(\tau)$: Matriz de transformación homogénea 4×4 en función del tiempo que se denomina “matriz de impulsión”, y describe la forma de la trayectoria temporal a seguir, con el fin de que la herramienta pueda alcanzar al objeto. Esta matriz representa la localización del objeto con respecto a la localización del punto final de la herramienta.

${}_{base}P^{obj}$: Matriz de transformación homogénea 4×4 que describe la posición y la orientación deseada del objeto en movimiento respecto del sistema referencial base.

De la ecuación (10.28) se puede despejar la matriz ${}_{base}T^{herr}$, que describe la configuración del robot para coger el objeto de forma correcta y deseada y se expresa así:

$${}_{base}T^{herr} = {}_{base}P^{obj} \left[{}_{herr}D^{obj}(\tau) \right]^{-1} \quad (10.29)$$

Si la matriz ${}_{base}T^{herr}$ se logra evaluar a una velocidad suficientemente alta y al convertirse en los correspondientes ángulos de articulación, entonces se puede controlar al robot para seguir la trayectoria planificada en la configuración cartesiana.

Si se establecen dos puntos fijos F_1 y F_2 y se especifican las velocidades lineales y angulares, entonces se puede determinar la distancia para ir de la localización F_1 a la localización F_2 en el tiempo de T segundos. El análisis se puede realizar con respecto a la base considerando el origen del sistema de referencia como referencial del robot y que el objeto se encuentra fijo. Entonces el movimiento del robot desde la localización F_1 hasta la localización F_2 se expresa mediante una matriz de transformación de “impulsión” $D(\tau)$ de dimensión 4×4 , donde τ es una forma de tiempo normalizado dependiente del tiempo t , dada por la ecuación (10.11) o por la ecuación (10.12).

La localización $F(\tau)$ del efector final en función del tiempo normalizado τ respecto del sistema referencial base se expresa mediante una matriz de transformación homogénea de la siguiente manera:

$$F(\tau) = F_1 D(\tau) \quad (10.30)$$

En la localización inicial el valor de τ es cero, por tanto, $D(0)$ es la matriz identidad por lo que $F(0) = F_1$ y en la localización final el valor de τ es uno, por tanto $F(1) = F_2$, significa que $D(1)$ es la matriz total a rotar entonces se obtiene:

$$F_2 = F_1 D(1) \quad (10.31)$$

Despejando la matriz de impulsión $D(1)$ total de la ecuación (10.31) se obtiene la siguiente relación:

$$D(1) = F_1^{-1} F_2 \quad (10.32)$$

Expresando las localizaciones inicial y final F_1 y F_2 mediante sus respectivas matrices de transformación homogénea se obtiene:

$$F_1 = F_A = \begin{bmatrix} n_A & s_A & a_A & p_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.33.a)$$

$$F_2 = F_B = \begin{bmatrix} n_B & s_B & a_B & p_B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.33.b)$$

Invirtiendo la matriz F_1 y multiplicando por F_2 entonces la ecuación (10.32) se expresa como:

$$D(I) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_A^T & -\mathbf{R}_A^T \mathbf{p}_A \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_B & \mathbf{p}_B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_A^T \mathbf{R}_B & \mathbf{R}_A^T (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.34)$$

Desarrollando la ecuación (10.34) se obtiene la matriz de impulsión total como:

$$D(I) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_A \cdot \mathbf{n}_B & \mathbf{n}_A \cdot \mathbf{s}_B & \mathbf{n}_A \cdot \mathbf{a}_B & \mathbf{n}_A \cdot (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A) \\ \mathbf{s}_A \cdot \mathbf{n}_B & \mathbf{s}_A \cdot \mathbf{s}_B & \mathbf{s}_A \cdot \mathbf{a}_B & \mathbf{s}_A \cdot (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A) \\ \mathbf{a}_A \cdot \mathbf{n}_B & \mathbf{a}_A \cdot \mathbf{s}_B & \mathbf{a}_A \cdot \mathbf{a}_B & \mathbf{a}_A \cdot (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.35)$$

Si la “función impulsión” $D(\tau)$ se representa mediante un movimiento traslacional y dos movimientos rotacionales, proporcionales a la función temporal $\tau(t)$. Si τ varia polinómicamente con el tiempo, entonces el movimiento resultante representado por la matriz impulsión $D(\tau)$ corresponde a un movimiento lineal y dos movimientos angulares, representándose como:

$$D(\tau) = L(\tau) \mathbf{R}_\alpha(\tau) \mathbf{R}_\beta(\tau) \quad (10.36)$$

El movimiento traslacional o lineal del robot se representa mediante la matriz de transformación homogénea $L(\tau)$, el cual se realiza a lo largo de la línea recta llevando al efector final del punto P_1 al punto P_2 mediante la ecuación:

$$L(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \tau(t)x \\ 0 & 1 & 0 & \tau(t)y \\ 0 & 0 & 1 & \tau(t)z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.37)$$

El primer movimiento rotacional del robot se representa mediante una matriz de transformación homogénea $\mathbf{R}_\alpha(\tau)$ y sirve para rotar el vector de aproximación de F_1 hasta el vector de aproximación en F_2 mediante la ecuación:

$$\mathbf{R}_\alpha(\tau) = \begin{bmatrix} S^2\psi (1 - C(\tau\alpha)) + C(\tau\alpha) & -S\psi C\psi (1 - C(\tau\alpha)) & C\psi S(\tau\alpha) & 0 \\ -S\psi C\psi (1 - C(\tau\alpha)) & C^2\psi (1 - C(\tau\alpha)) + C(\tau\alpha) & S\psi S(\tau\alpha) & 0 \\ -C\psi S(\tau\alpha) & -S\psi S(\tau\alpha) & C(\tau\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.38)$$

Matemáticamente, la matriz de rotación $R_\alpha(\tau)$ indica una rotación de ángulo $\tau(t)\alpha$ que realiza el efector final del robot respecto del vector de orientación o deslizamiento s de la localización F_1 , el cual gira un ángulo ψ respecto del vector de aproximación a . O sea en la matriz de rotación $R_\alpha(\tau)$, el ángulo que se gira es $\tau(t)\alpha$ y el vector unitario es el vector de deslizamiento $v = [-S\psi \quad C\psi \quad 0]^T$, alrededor del cual se realiza el giro.

El segundo movimiento rotacional del efector final del robot se representa mediante la matriz $R_\beta(\tau)$ y sirve para rotar el vector de deslizamiento s de la localización F_1 hacia el vector de deslizamiento en la localización F_2 respecto del vector de aproximación a . La matriz $R_\beta(\tau)$ matemáticamente representa una rotación de ángulo $\tau(t)\beta$ con respecto del vector de aproximación del efector final en la localización F_2 .

$$R_\beta(\tau) = \begin{bmatrix} \cos(\tau\beta) & -\sin(\tau\beta) & 0 & 0 \\ \sin(\tau\beta) & \cos(\tau\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.39)$$

En la figura 8.11 se muestra el diagrama que ilustra las rotaciones $R_\alpha(\tau)$ y $R_\beta(\tau)$ respecto de los ejes de rotación indicados anteriormente.

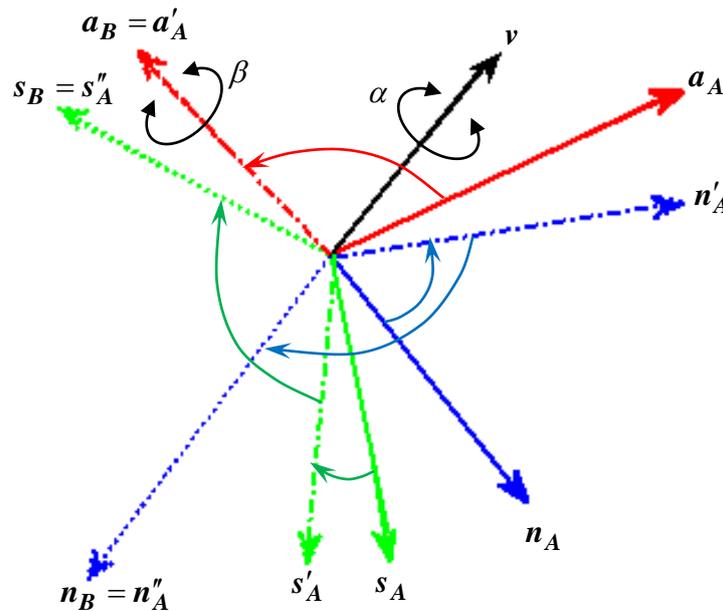


Figura 10.11 Rotaciones $R_\alpha(\tau)$ y $R_\beta(\tau)$ del efector final del robot desde F_1 hasta F_2 .
Gráfica elaborada por el autor

Multiplicando las matrices de transformación homogénea de las ecuaciones (10.37), (10.38) y (10.39) de acuerdo a la ecuación (10.36) se obtiene la matriz de impulsión sintetizada como:

$$\mathbf{D}(\tau) = \begin{bmatrix} d\mathbf{n}(\tau) & ds(\tau) & d\mathbf{a}(\tau) & d\mathbf{p}(\tau) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.40)$$

Los vectores que describen la orientación del efector final del robot: $d\mathbf{n}(\tau)$, $ds(\tau)$ y $d\mathbf{a}(\tau)$ y el vector de posición $d\mathbf{p}(\tau)$ respectivamente se denotan mediante las siguientes ecuaciones:

$$d\mathbf{n}(\tau) = \begin{bmatrix} C(\tau\beta)[S^2\psi(1-C(\tau\alpha))+C(\tau\alpha)]+S(\tau\beta)[-S\psi C\psi(1-C(\tau\alpha))] \\ C(\tau\beta)[-S\psi C\psi(1-C(\tau\alpha))] + S(\tau\beta)[C^2\psi(1-C(\tau\alpha))+C(\tau\alpha)] \\ C(\tau\beta)[-C\psi S(\tau\alpha)] + S(\tau\beta)[-S\psi S(\tau\alpha)] \end{bmatrix} \quad (10.41.a)$$

$$ds(\tau) = \begin{bmatrix} -S(\tau\beta)[S^2\psi(1-C(\tau\alpha))+C(\tau\alpha)] + C(\tau\beta)[-S\psi C\psi(1-C(\tau\alpha))] \\ -S(\tau\beta)[-S\psi C\psi(1-C(\tau\alpha))] + C(\tau\beta)[C^2\psi(1-C(\tau\alpha))+C(\tau\alpha)] \\ -S(\tau\beta)[-C\psi S(\tau\alpha)] + C(\tau\beta)[-S\psi S(\tau\alpha)] \end{bmatrix} \quad (10.41.b)$$

$$d\mathbf{a}(\tau) = \begin{bmatrix} C\psi S(\tau\alpha) \\ S\psi S(\tau\alpha) \\ C(\tau\alpha) \end{bmatrix} \quad (10.41.c)$$

$$d\mathbf{p}(\tau) = \begin{bmatrix} \tau x \\ \tau y \\ \tau z \end{bmatrix} \quad (10.41.d)$$

Utilizando la técnica de la transformada homogénea inversa sobre la ecuación (10.36) se puede obtener la solución para el punto x , y , z postmultiplicando la ecuación (10.36) por la matriz $\mathbf{R}_\beta^{-1}(\tau) \mathbf{R}_\alpha^{-1}(\tau)$ e igualando los elementos del vector posición con el vector de posición de la matriz de impulsión total $\mathbf{D}(\tau)$ de la ecuación (10.35) se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} x &= \mathbf{n}_A \cdot (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A) \\ y &= \mathbf{s}_A \cdot (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A) \\ z &= \mathbf{a}_A \cdot (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A) \end{aligned} \quad (10.42)$$

Al postmultiplicar ambos lados de la ecuación (10.36) por la matriz $\mathbf{R}_\beta^{-1}(\tau)$ y a continuación premultiplicar por la matriz $\mathbf{L}^{-1}(\tau)$, se obtienen los ángulos ψ y α al igualar los elementos de la tercera columna de la matriz resultante con los elementos de la tercera columna de la ecuación (10.35) como:

$$\psi = \text{atan}\left(\frac{\mathbf{s}_A \cdot \mathbf{a}_B}{\mathbf{n}_A \cdot \mathbf{a}_B}\right); \quad -\pi \leq \psi \leq \pi \quad (10.43)$$

$$\alpha = \text{atan}\left\{\frac{\sqrt{(\mathbf{n}_A \cdot \mathbf{a}_B)^2 + (\mathbf{s}_A \cdot \mathbf{a}_B)^2}}{\mathbf{a}_A \cdot \mathbf{a}_B}\right\}; \quad 0 \leq \alpha \leq \pi \quad (10.44)$$

Para determinar el ángulo β , se premultiplica ambos lados de la ecuación (10.36) por la matriz $\mathbf{L}^{-1}(\tau)$ y luego por la matriz $\mathbf{R}_\alpha^{-1}(\tau)$ y se igualan los elementos respectivos de la matriz resultante con los elementos de la matriz de la ecuación (10.35) para obtener la solución de forma simplificada como:

$$\beta = \text{atan}\left\{\frac{K_1(\mathbf{n}_A \cdot \mathbf{n}_B) + K_2(\mathbf{s}_A \cdot \mathbf{n}_B) + K_3(\mathbf{a}_A \cdot \mathbf{n}_B)}{K_1(\mathbf{n}_A \cdot \mathbf{s}_B) + K_2(\mathbf{s}_A \cdot \mathbf{s}_B) + K_3(\mathbf{a}_A \cdot \mathbf{s}_B)}\right\}; \quad -\pi \leq \beta \leq \pi \quad (10.45)$$

Las expresiones K_1 , K_2 y K_3 involucradas en la ecuación (10.45) están en función de los ángulos α y ψ y se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} K_1 &= -S\psi C\psi (I-C(\alpha)) \\ K_2 &= C^2\psi (I-C(\alpha)) + C(\alpha) \\ K_3 &= -S\psi S(\alpha) \end{aligned} \quad (10.46)$$

En la figura 10.12.a se muestran las componentes cartesianas de la trayectoria espacial $\mathbf{P}(t)$ desde la posición \mathbf{P}_1 hasta la posición \mathbf{P}_2 según la ecuación incremental (10.41.d). En las figuras consecutivas 10.12.c - 10.12.e se muestran de forma respectiva los componentes cartesianos de los vectores de orientación $[\mathbf{n}(t) \mathbf{s}(t) \mathbf{a}(t)]$ al aplicar las ecuaciones incrementales (10.41.a) - (10.41.c) y la figura 10.12.b muestra los ángulos de Euler a partir de la ecuación (2.12) para todos los casos con tiempo normalizado $\tau(t)$ según la ecuación (10.12).

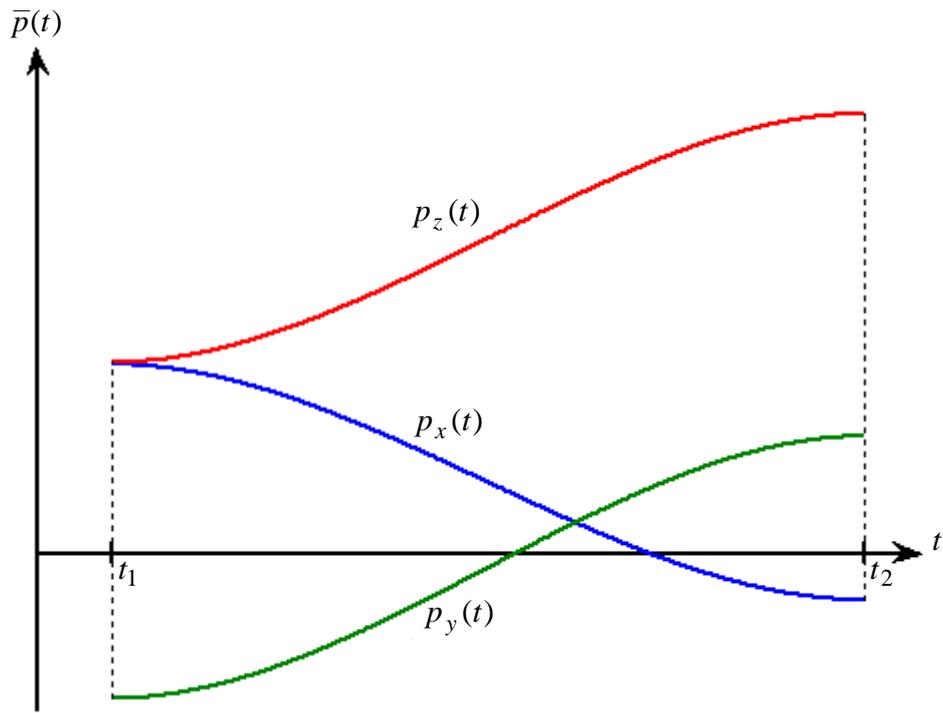


Figura 10.12.a Vector de posición cartesiano \mathbf{P} del efector final del robot.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

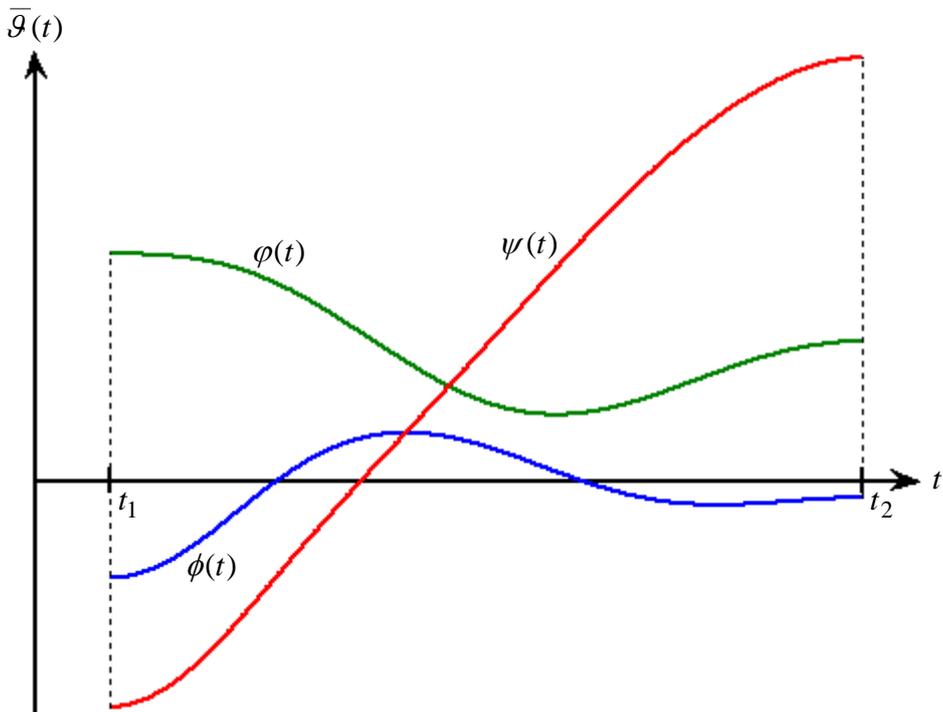


Figura 10.12.b Vector orientación \mathbf{O} del efector final mediante los ángulos de Euler.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

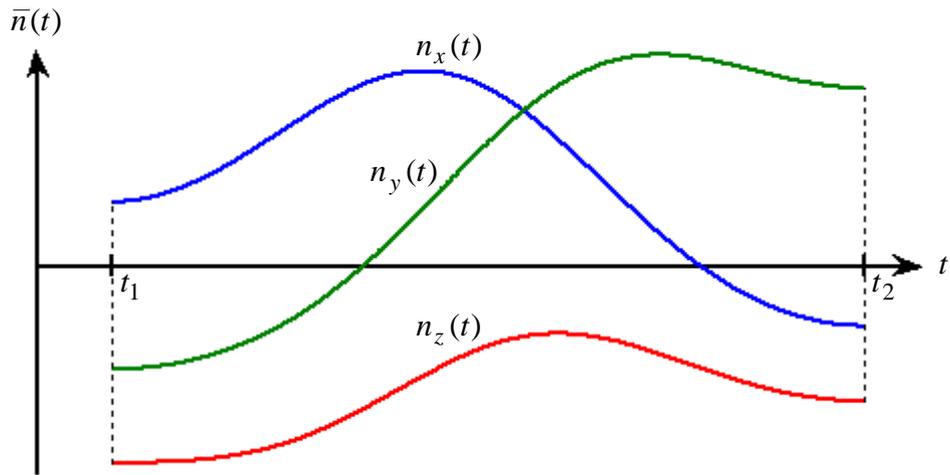


Figura 10.12.c Vector cartesiano normal \mathbf{n} del efector final del robot.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

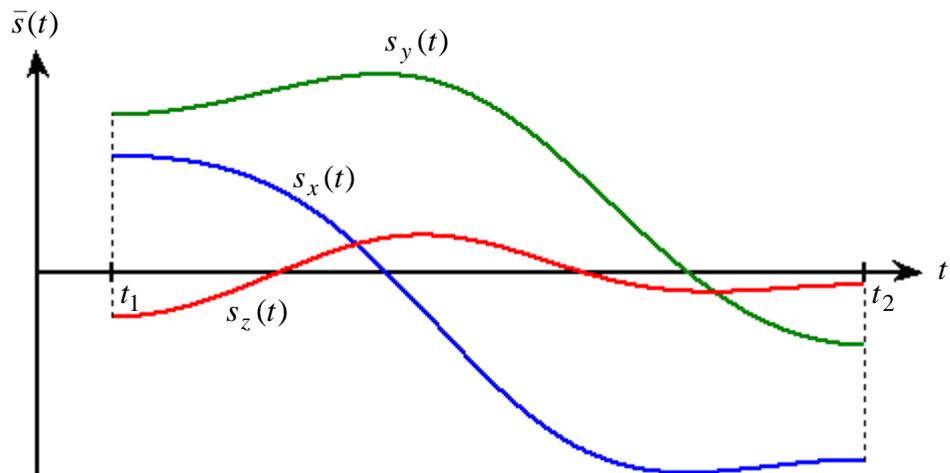


Figura 10.12.d Vector cartesiano de deslizamiento \mathbf{s} del efector final del robot.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

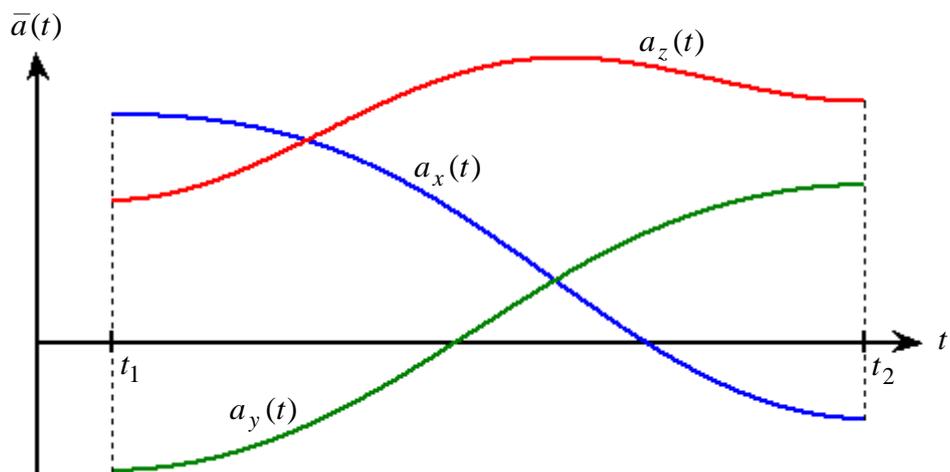


Figura 10.12.e Vector cartesiano de aproximación \mathbf{a} del efector final del robot.
Gráficas elaboradas por el autor mediante MatLab

CONCLUSIONES

- El objetivo principal de esta Tesis es el estudio, análisis, diseño, aplicación y simulación de las técnicas de control digital no lineal multivariable para controlar las trayectorias articulares de un sistema robot de seis grados de libertad que son: 1) *Control por Compensación No lineal*, 2) *Control por Compensación Adaptiva No lineal* y 3) *Control Óptimo Adaptivo Autosintonizado* y por lo tanto en base a los resultados obtenidos mediante las simulaciones realizadas en los capítulos 7, 8 y 9 se concluye que dicho objetivo se ha logrado con éxito.
- En el capítulo 2 se ha desarrollado matemáticamente la *Formulación Cinemática de Posición Directa e Inversa* del robot utilizando la representación matricial de *Denavit-Hartenberg*. En el espacio articular se han definido funciones temporales, suaves y arbitrarias y se ha obtenido en el espacio cartesiano, una trayectoria de localización del robot dependiente de las funciones articulares de forma impredecible. En la simulación gráfica se muestra que el efector final del robot sigue una trayectoria cartesiana tridimensional no predecible, así como una orientación indefinida del efector final mediante los vectores: normal, de deslizamiento y de aproximación; también la orientación realizada mediante los ángulos de *Euler*. Para validar la *Formulación Geometría Inversa* se ha definido en el espacio cartesiano una trayectoria sinusoidal esférica, con una orientación definida del efector operacional obteniendo como resultado trayectorias articulares indefinibles a simple vista con el objetivo de lograr que el efector final del robot realice la trayectoria espacialmente especificada.
- En el capítulo 3 se ha desarrollado matemática y analíticamente la *Formulación Cinemática* que permite describir el desplazamiento articular y espacial del robot con sus respectivas velocidades y aceleraciones relacionando los espacios de articulación y cartesiano. Para validar la teoría se ha realizado la simulación gráfica de la posición, la velocidad y la aceleración articulares y luego en función de las curvas articulares se obtienen las gráficas de desplazamiento, velocidad y aceleración lineales y angulares

del efector final del robot en el espacio cartesiano respecto de un sistema de coordenadas de referencia.

- En el capítulo 4 se ha desarrollado la *Formulación Dinámica* espacial del manipulador aplicando la ecuación generalizada de *Lagrange* y se han obtenido como resultado una expresión matemática vectorial, estructurada no lineal y diferencial continuamente en el tiempo, que permiten interpretar, analizar y describir físicamente el comportamiento del robot. En la simulación gráfica de la *Dinámica Inversa* de la estructura mecánica del robot, se obtiene el vector de torsión articular que se aplicaría a cada articulación para generar teóricamente las curvas de los vectores de posición, de velocidad y de aceleración articulares propuestas.
- Se han desarrollado las formulaciones dinámicas de los motores *DC* sin escobillas (*Brushless motors*) así como la linealización realizada mediante *software*, porque en la actualidad se están usando y aplicando ampliamente en el campo de la *Robótica*, por presentar buena respuesta de torque y de velocidad en el tiempo, cuyo control se realiza necesariamente con un procesador digital de alta velocidad.
- La *Formulación Dinámica Directa Sistema Robot* o representación matemática del robot incluyendo actuadores y sensores se realiza en el espacio de estados de forma integral, estructurada y compacta y se encuentra en el capítulo 6, así como la solución se determina empleando dos métodos: método de *Euler* en adelante y método de *Runge-Kutta* de orden 4. El método más preciso es el *Runge-Kutta* pero requiere más tiempo de cálculo. Ambos métodos de solución mejoran al disminuir el tiempo de discretización. En una implementación real ya no es necesario solucionar las ecuaciones de la *Dinámica* ya que los transductores incorporados proporcionan los valores reales de las variables de posición y de velocidades articulares en tiempo real.
- El método de *Control por Compensación No lineal Multivariable* o linealización por realimentación no lineal, se puede aplicarlo cuando la *Formulación Dinámica* o los parámetros del robot son conocidos de forma precisa y el efecto de las perturbaciones o incertidumbres es mínimo que se pueden despreciar. La precisión de esta técnica de control baja cuando el robot se mueve a velocidades y aceleraciones altas o cuando hay presencia de disturbios no medibles que se pueden presentar en los actuadores, en los sensores o en la parte mecánica de la estructura del robot. La simulación de esta técnica de control se encuentra elaborada en el capítulo 7 y de acuerdo a los resultados

se deduce que los errores de posición y de velocidad articulares son pequeños para casos ideales y se pueden reducir ajustando las ganancias de los controladores.

- El método de ***Control por Compensación Adaptiva Multivariable*** o realimentación de perturbación adaptiva, se propone aplicarlo cuando la *Formulación Dinámica* del robot se conoce pero que algunos de sus parámetros varía; por ejemplo las diversas herramientas acopladas al efector final del robot para realizar múltiples tareas o el objeto que manipula el robot cambia de tamaño y/o de peso o cuando el efector final se pone en contacto con superficies externas. La simulación gráfica de esta técnica de control se encuentra elaborada en el capítulo 8 y se concluye que el error articular de posición es más pequeño mientras más rápido se realiza el proceso de adaptación y de identificación y los errores de posición y velocidad articulares se pueden reducir ajustando las matrices de ponderación del índice de rendimiento.
- El método de ***Control Óptimo Adaptivo Autosintonizable*** se propone aplicarlo cuando no se conoce de forma precisa la *Formulación Dinámica* y/o cuando el sistema está afectado por perturbaciones, incertidumbres o los parámetros de la herramienta o de los objetos que se manipulan cambian en el tiempo o cuando se presentan contactos superficiales con el exterior. Para aplicar este método se utiliza la identificación multivariable de parámetros en el espacio de estados. La simulación gráfica de esta técnica de control se encuentra elaborada en el capítulo 9, para reducir los errores de posición y velocidad articulares y minimizar el efecto de las perturbaciones e incertidumbres se incluyen integradores adaptando las ganancias del controlador óptimo de forma dinámica. Para obtener una mejor respuesta se pueden ajustar las matrices de ponderación del índice de rendimiento o también se aumenta la velocidad de adaptación y los errores de identificación de parámetros se reducen aumentando la velocidad de procesamiento de información.
- La literatura actual de ***Control Adaptivo Autosintonizado*** trata mayormente de la identificación de parámetros mediante la lectura de las variables de respuesta y la magnitud de la acción de control, pero en esta Tesis se ha realizado la estimación de las matrices en el espacio de estados acoplando de esta forma todos los efectos dinámicos del sistema, realizando en cada instante la lectura de los valores de los estados físicos (posición y velocidad articulares) a costa de usar sensores de posición y de velocidad de precisión, combinado además un conjunto de ecuaciones matemáticas

y de control que por primera vez se describen y aplican como estrategia de control avanzado en esta *Tesis* de investigación obteniendo una buena precisión dinámica.

- El controlador óptimo de paso mejorado utilizado en el sistema de *Control Adaptivo Autosintonizable* es una alternativa que se propone para que el sistema de control sea más preciso porque la ecuación de *Ricatti* cambia de acuerdo como varía la dinámica del sistema robot.
- Para los sistemas de control desarrollados en los capítulos 8 y 9, se emplea el algoritmo del *Método de Mínimos Cuadrados Recursivo* para la identificación de parámetros, por ser el más sencillo pero se puede mejorar aplicando el *Método de Mínimos Cuadrados Recursivo Mejorado*, el *Método de Mínimos Cuadrados Recursivo Ampliado* u otras técnicas de identificación como *Redes Neuronales*, *Algoritmos Genéticos* pero se requiere mayor cálculo computacional.
- De las gráficas obtenidas mediante la simulación, al aplicar los tres métodos de control se concluye que el error que se produce en el método *Control Optimo Adaptivo Autosintonizable* es “error de desfase más que de magnitud” que aumenta de valor, cuando se producen cambios grandes en la trayectoria de referencia, por lo que requiere más tiempo de procesamiento que los otros dos. El error producido por el método *Control por Compensación Adaptiva Multivariable* es “error de desfase y de magnitud”, alterándose tanto la magnitud como la fase de la respuesta respecto de la trayectoria de referencia. El error producido por el método *Control por Compensación Nolineal Multivariable* es “error más de magnitud que de desfase”, alterándose más la magnitud de la respuesta que la fase respecto de la trayectoria de referencia, debido a las posibles incertidumbres y perturbaciones no contempladas en el sistema, este método requiere menos tiempo de procesamiento que los otros dos.
- Las funciones articulares utilizadas como trayectorias de referencia en el desarrollo de las simulaciones de las estrategias de control, son curvas suaves con al menos dos derivadas, con velocidades iniciales y finales nulas con el fin de no producir altas vibraciones en la estructura mecánica. Si se utilizan trayectorias referenciales con cambios bruscos se pueden originar fuertes vibraciones mecánicas exigiendo torsiones de alta magnitud así como señales de voltaje de activación a los motores, que pueden sobrepasar los márgenes establecidos.

- Para realizar la simulación de las tres técnicas de control propuestos, se ha invertido un tiempo de computación mucho mayor que el tiempo establecido para la simulación (10 seg.), esto se debe a que el programa de *MatLab* utiliza cálculo de consistencia numérica y gráfica pero en la implementación en un caso real el tiempo de cálculo disminuye utilizando por ejemplo lenguaje *C++* y no es necesario desarrollar la solución de la *Dinámica Directa*, ya que la información de las variables de estado (posición y velocidad articulares) se obtienen directamente de los transductores y también utilizando sistemas operativos en tiempo real en el *Computador Central* se puede incrementar la velocidad de procesamiento de forma considerable, mejorando por lo tanto la optimabilidad y la velocidad de procesamiento del algoritmo de control.
- Para aplicar cualquiera de los tres métodos de control propuestos en una implementación física en tiempo real se plantea utilizar un sistema multiprocesador utilizando un *Computador Industrial (IPC)* de alta velocidad de procesamiento digital para procesar y ejecutar los algoritmos de control; el *IPC* debe estar operando con un *Sistema Operativo en Tiempo Real* para procesar la información a la velocidad requerida e incluir un procesador digital por articulación de forma apropiada (conectados en red paralela al Computador Central o Industrial), que pueden ser microcontroladores, DSPs, o FPGA's interconectados con buses y protocolos de alta velocidad de comunicación, que generen señales por *Modulación de Ancho de Pulso (PWM)* para activar a cada motor-actuador y así accionar y controlar de forma independiente a cada articulación mediante el control de posición y de velocidad de los motores, además es necesario que las variables de posición y de velocidad sean medidas con alta precisión mediante los transductores internos del sistema de control.
- Para realizar las simulaciones en el contenido de esta Tesis se han elegido elementos básicos de forma cilíndrica en la estructura mecánica del robot, con la finalidad de elaborar un modelamiento dinámico sencillo, pero empleando programas específicos de diseño y simulación de estructuras mecánicas como el *Solid Works* o *Inventor* se puede conseguir un diseño mecánico más realista del robot eligiendo formas geométricas variadas y heterogéneas de los eslabones, indicando el tipo de material, con lo que se puede obtener además la magnitud del juego de los engranajes, valores estimados de la fricciones en los ejes de giro, el centro de masa y el tensor inercial de cada elemento mediante el mismo programa de una manera más exacta.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] Curso de Robótica, *José M. Angulo Usategui, Rafael A. G.*
Editorial PARANINFO 1985.
- [2] Robótica, *Marvin Minsky* Editorial PLANETA 1985.
- [3] Robótica industrial, *J. Amat, J. Ayza, L. basañez, G. Ferraé, F. Ferrer.*
Editorial MARCOMBO 1986.
- [4] Robótica industrial, *Mikell P. Groover, Mitchell Weiss.*
Editorial McGraw-Hill 1989.
- [5] Robótica: manipuladores y Robots Móviles, *Aníbal Ollero Batrone.*
Editorial Alfaomega MARCOMBO 2001.
- [6] Introduction to robotics, *Miomir Vukobratovic.*
Institute Mihajlo Pupin, Beograd, Yugoslavia 1989.
- [7] Fundamentals of Robotics , *Analys, Robert J. Schilling.*
Editorial PRENTICE HALL 1990.
- [8] Robotic, Control, Detection, vision and intelligence, *K. S. Fu, R. C. Gonzales.*
Editorial Mc Graw Hill 1988.
- [9] Robotic Engineering, an Integrated Approach, *R. Klapfer, Chmielewski Negin.*
Editorial PRENTICE HALL 1989.
- [10] Modeling, Identification e Control of Robots, *W. Khalil e Dombre.*
Editorial Taylor & Francis Books 2002.
- [11] Fundamentos de Robótica, *Antonio Barrientos, Luis Felipe peñin, Carlos balager.*
Editorial Mc Graw Hill 1999.
- [12] Control de Movimientos de Robots manipuladores, *Rafael Kelly.*

- Editorial PRENTICE HALL 2003.
- [13] Robot Dynamics and Control, *Mark W. Spong, M. Vidyasagar*.
Editorial JOHN WILEY & SONS 1989.
- [14] Robot Analysis, The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators.
Lung-Wen Tsai. Editorial JHON WILY & SONS, INC. 1999.
- [15] Robotics: Modelling, Planning and Control Bruno Siciliano, *Lorenzo Sciavicco*.
Luigi Villani, Giuseppe Oriolo. Editorial SPRINGER 2009.
- [16] Digital Control and Estimation, *Middaleton Goodwin*.
Editorial PRENTICE HALL 1992.
- [17] Digital Control System, *Loan D. Landau, Gianluca Zito*.
Editorial SPRINGER 2006.
- [18] Multivariable Control Systems, *P. Albertos and, A. sala*.
Editorial SPRINGER 2004.
- [19] Industrial Electronics and Controls, *Newman*.
Editorial PRENTICE HALL 1990.
- [20] Nonlinear Systems, *HasanK. Khalil*.
Editorial PRENTICE HALL 2002.
- [21] Stable Adaptive Systems, *Humpati S. Narendra*.
Editorial PRENTICE HALL 1989.
- [22] Sistemas de control en tiempo discreto, *Katsuhiko Ogata*.
Editorial PRENTICE HALL 1998.
- [23] Electrónica Industrial Moderna, *Thimoty J. Maloney*.
Editorial PRENTICE HALL 1997.
- [24] Permanent Magnet Synchronous and Brushless DC Motor Drives, *R.Krishnan*
Editorial CRC PRESS 2010.

ANEXO A
CONSTANTES Y PARAMETROS DEL SISTEMA

Tabla A.1 Datos de los elementos del Robot de seis grados de Libertad

Articulación <i>i</i>	Masa <i>M_i</i> (Kg)	Longitud <i>L_i</i> (m)	Radio cilin <i>R_i</i> (m)	Coef Fricción <i>B_v_i</i> N/rad/s	Coef Col <i>B_s_i</i> (N)
1	M1 = 5.0	L1 = 0.80	R1 = 0.10	Bv1 = 0.007	Bs1 = 0.006
2	M2 = 4.0	L2 = 0.40	R2 = 0.075	Bv2 = 0.009	Bs2 = 0.008
3	M3 = 1.0	L3 = 0.12	R3 = 0.06	Bv3 = 0.006	Bs3 = 0.006
4	M4 = 3.0	L4 = 0.30	R4 = 0.05	Bv4 = 0.005	Bs4 = 0.004
5	M5 = 0.8	L5 = 0.10	R5 = 0.04	Bv5 = 0.004	Bs5 = 0.002
6	M6 = 2.5	L6 = 0.20	R6 = 0.03	Bv6 = 0.002	Bs6 = 0.001

Tensores de los elementos del Robot de seis grados de Libertad

$$\bar{I}_1 = \begin{bmatrix} M_1 \frac{L_1^2 + 6R_1^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & M_1 R_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & M_1 \frac{L_1^2 + 6R_1^2}{12} \end{bmatrix}$$

$$\bar{I}_2 = \begin{bmatrix} M_2 R_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 \frac{L_2^2 + 6R_2^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \frac{L_2^2 + 6R_2^2}{12} \end{bmatrix}$$

$$\bar{I}_3 = \begin{bmatrix} M_3 \frac{L_3^2 + 6R_3^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & M_3 \frac{L_3^2 + 6R_3^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & M_3 R_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{I}_4 = \begin{bmatrix} M_4 \frac{L_4^2 + 6R_4^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & M_4 R_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & M_4 \frac{L_4^2 + 6R_4^2}{12} \end{bmatrix}$$

$$\bar{I}_5 = \begin{bmatrix} M_5 \frac{L_5^2 + 6R_5^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & M_5 \frac{L_5^2 + 6R_5^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & M_5 R_5^2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{I}_6 = \begin{bmatrix} M_6 \frac{L_6^2 + 6R_6^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & M_6 \frac{L_6^2 + 6R_6^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & M_6 R_6^2 \end{bmatrix}$$

De las fórmulas de los tensores de inercia de los eslabones para efecto de cálculo se escriben como:

$$\begin{aligned} I_{xz1} &= M_1(6R_1^2 + L_1^2)/12 & I_{y1} &= M_1 R_1^2 \text{ esto es } I_{xx1} = I_{zz1}, I_{yy1} = I_{y1} \\ I_{yz2} &= M_2(6R_2^2 + L_2^2)/12 & I_{x2} &= M_2 R_2^2 \text{ esto es } I_{yy2} = I_{zz2}, I_{xx2} = I_{x2} \\ I_{xy3} &= M_3(6R_3^2 + L_3^2)/12 & I_{z3} &= M_3 R_3^2 \text{ esto es } I_{xx3} = I_{yy3}, I_{zz3} = I_{z3} \\ I_{xz4} &= M_4(6R_4^2 + L_4^2)/12 & I_{y4} &= M_4 R_4^2 \text{ esto es } I_{xx4} = I_{zz4}, I_{xx4} = I_{x4} \\ I_{xy5} &= M_5(6R_5^2 + L_5^2)/12 & I_{z5} &= M_5 R_5^2 \text{ esto es } I_{xx5} = I_{yy5}, I_{zz5} = I_{z5} \\ I_{xy6} &= M_6(6R_6^2 + L_6^2)/12 & I_{z6} &= M_6 R_6^2 \text{ esto es } I_{xx6} = I_{yy6}, I_{zz6} = I_{z6} \end{aligned}$$

Vector del referencial de cada elemento hacia el centro de masa respectivo:

$$\begin{aligned} CM1 &= [0 (H_1 - L_1/2) 0]^T \\ CM2 &= [-L_2/2 0 0]^T \\ CM3 &= [0 0 0]^T \\ CM4 &= [0 L_4/2 0]^T \\ CM5 &= [0 0 0]^T \\ CM6 &= [0 0 -L_6/2]^T \end{aligned}$$

Datos de los motores del Robot

Momentos de Inercia del rotor J_{mi} de cada motor:

$$J_{m1} = 7.0E-04 \text{ Kg m}^2$$

$$J_{m2} = 8.0E-04 \text{ Kg m}^2$$

$$J_{m3} = 6.0E-04 \text{ Kg m}^2$$

$$J_{m4} = 5.0E-04 \text{ Kg m}^2$$

$$J_{m5} = 4.0E-04 \text{ Kg m}^2$$

$$J_{m6} = 2.0E-04 \text{ Kg m}^2$$

Coefficientes de Fricción B_{mi} de cada motor:

$$B_{m1} = 8.0E-05 \text{ N-m/(rad/seg)}$$

$$B_{m2} = 9.0E-05 \text{ N-m/(rad/seg)}$$

$$B_{m3} = 7.0E-05 \text{ N-m/(rad/seg)}$$

$$B_{m4} = 5.0E-05 \text{ N-m/(rad/seg)}$$

$$B_{m5} = 4.0E-05 \text{ N-m/(rad/seg)}$$

$$B_{m6} = 2.0E-05 \text{ N-m/(rad/seg)}$$

Valores de las Resistencias de bobinado del estator R_{si} de cada motor:

$$R_{s1} = 18 \text{ Ohm}$$

$$R_{s2} = 20 \text{ Ohm}$$

$$R_{s3} = 16 \text{ Ohm}$$

$$R_{s4} = 13 \text{ Ohm}$$

$$R_{s5} = 12 \text{ Ohm}$$

$$R_{s6} = 10 \text{ Ohm}$$

Valores de las Inductancias bobinado del estator L_{si} de cada motor:

$$L_{s1} = 0 \text{ Henry}$$

$$L_{s2} = 0 \text{ Henry}$$

$$L_{s3} = 0 \text{ Henry}$$

$$L_{s4} = 0 \text{ Henry}$$

$$L_{s5} = 0 \text{ Henry}$$

$$L_{s6} = 0 \text{ Henry}$$

Valores de las ganancias de Voltaje de Fuerza Contraelectromotriz K_{ei} :

$$K_{e1} = 75E-03 \text{ V/rad/s}$$

$$K_{e2} = 80E-03 \text{ V/rad/s}$$

$$K_{e3} = 70E-03 \text{ V/rad/s}$$

$$K_{e4} = 60E-03 \text{ V/rad/s}$$

$$K_{e5} = 50E-03 \text{ V/rad/s}$$

$$K_{e6} = 30E-03 \text{ V/rad/s}$$

Ganancias de torque electromagnético K_{ti} de cada motor:

$$K_{t1} = 1.2E-01 \text{ N-m/A}$$

$$K_{t2} = 5.5E-01 \text{ N-m/A}$$

$$K_{t3} = 2.3E-01 \text{ N-m/A}$$

$$K_{t4} = 5.0E-02 \text{ N-m/A}$$

$$K_{t5} = 5.3E-02 \text{ N-m/A}$$

$$K_{t6} = 8.0E-03 \text{ N-m/A}$$

Ganancia PWM del Amplificador de potencia K_{ai} de cada motor:

$$K_{a1} = 50$$

$$K_{a2} = 60$$

$$K_{a3} = 20$$

$$K_{a4} = 10$$

$$K_{a5} = 10$$

$$K_{a6} = 6$$

Ganancia de Compensación de corriente g_{li} de cada motor:

$$g_{l1} = 1.5$$

$$g_{l2} = 1.5$$

$$g_{l3} = 1.5$$

$$g_{l4} = 1.5$$

$$g_{l5} = 1.5$$

$$g_{l6} = 1.5$$

Relación de engranajes de transmisión de potencia de cada potencia n_i :

$$n_1 = 1/25$$

$$n_2 = 1/20$$

$$n_3 = 1/20$$

$$n_4 = 1/16$$

$$n_5 = 1/16$$

$$n_6 = 1/10$$

Cálculo de constantes para simplificación de los motores según las fórmulas:

$$K_\alpha = \frac{1}{n} \frac{2}{3} J_m \frac{R_s + g_I k_A}{K_t k_A}$$

$$K_\beta = \frac{1}{n} \frac{2}{3} \frac{3/4 P K_t K_e + B_m (R_s + g_I k_A)}{K_t k_A}$$

$$K_T = n \frac{R_s + g_I k_A}{K_t k_A}$$

$$K_{aa1} = (1/n_1)^{(2/3)} * J_{m1} * (R_{s1} + g_{i1} * K_{a1}) / (K_{t1} * K_{a1})$$

$$K_{aa2} = (1/n_2)^{(2/3)} * J_{m2} * (R_{s2} + g_{i2} * K_{a2}) / (K_{t2} * K_{a2})$$

$$K_{aa3} = (1/n_3)^{(2/3)} * J_{m3} * (R_{s3} + g_{i3} * K_{a3}) / (K_{t3} * K_{a3})$$

$$K_{aa4} = (1/n_4)^{(2/3)} * J_{m4} * (R_{s4} + g_{i4} * K_{a4}) / (K_{t4} * K_{a4})$$

$$K_{aa5} = (1/n_5)^{(2/3)} * J_{m5} * (R_{s5} + g_{i5} * K_{a5}) / (K_{t5} * K_{a5})$$

$$K_{aa6} = (1/n_6)^{(2/3)} * J_{m6} * (R_{s6} + g_{i6} * K_{a6}) / (K_{t6} * K_{a6})$$

$$K_{bb1} = (1/n_1)^{(2/3)} * (3/4 * P * K_{t1} * K_{e1} + B_{m1} * (R_{s1} + g_{i1} * K_{a1})) / (K_{t1} * K_{a1})$$

$$K_{bb2} = (1/n_2)^{(2/3)} * (3/4 * P * K_{t2} * K_{e2} + B_{m2} * (R_{s2} + g_{i2} * K_{a2})) / (K_{t2} * K_{a2})$$

$$K_{bb3} = (1/n_3)^{(2/3)} * (3/4 * P * K_{t3} * K_{e3} + B_{m3} * (R_{s3} + g_{i3} * K_{a3})) / (K_{t3} * K_{a3})$$

$$K_{bb4} = (1/n_4)^{(2/3)} * (3/4 * P * K_{t4} * K_{e4} + B_{m4} * (R_{s4} + g_{i4} * K_{a4})) / (K_{t4} * K_{a4})$$

$$K_{bb5} = (1/n_5)^{(2/3)} * (3/4 * P * K_{t5} * K_{e5} + B_{m5} * (R_{s5} + g_{i5} * K_{a5})) / (K_{t5} * K_{a5})$$

$$K_{bb6} = (1/n_6)^{(2/3)} * (3/4 * P * K_{t6} * K_{e6} + B_{m6} * (R_{s6} + g_{i6} * K_{a6})) / (K_{t6} * K_{a6})$$

$$K_{tt1} = n_1 * (R_{s1} + g_{i1} * K_{a1}) / (K_{t1} * K_{a1})$$

$$K_{tt2} = n_2 * (R_{s2} + g_{i2} * K_{a2}) / (K_{t2} * K_{a2})$$

$$K_{tt3} = n_3 * (R_{s3} + g_{i3} * K_{a3}) / (K_{t3} * K_{a3})$$

$$K_{tt4} = n_4 * (R_{s4} + g_{i4} * K_{a4}) / (K_{t4} * K_{a4})$$

$$K_{tt5} = n_5 * (R_{s5} + g_{i5} * K_{a5}) / (K_{t5} * K_{a5})$$

$$K_{tt6} = n_6 * (R_{s6} + g_{i6} * K_{a6}) / (K_{t6} * K_{a6})$$

Numero de polos de cada motor P = 6

g=9.81 m/s² aceleración de la gravedad.

ANEXO B

COMPONENTES DE LA DINAMICA DEL ROBOT

La ecuación de la dinámica del robot está definida en la ecuación 4.38 y se vuelve a escribir como:

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{D}(\mathbf{q}(t))\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) + \mathbf{H}(\mathbf{q}(t)) + \mathbf{B}(\dot{\mathbf{q}}(t))$$

La matriz $D(q(t))$ que describe el efecto inercial de todo el Robot es:

$$D(q(t)) = \begin{bmatrix} d_{11}(q) & d_{12}(q) & d_{13}(q) & d_{14}(q) & d_{15}(q) & d_{16}(q) \\ d_{21}(q) & d_{22}(q) & d_{23}(q) & d_{24}(q) & d_{25}(q) & d_{26}(q) \\ d_{31}(q) & d_{32}(q) & d_{33}(q) & d_{34}(q) & d_{35}(q) & d_{36}(q) \\ d_{41}(q) & d_{42}(q) & d_{43}(q) & d_{44}(q) & d_{45}(q) & d_{46}(q) \\ d_{51}(q) & d_{52}(q) & d_{53}(q) & d_{54}(q) & d_{55}(q) & d_{56}(q) \\ d_{61}(q) & d_{62}(q) & d_{63}(q) & d_{64}(q) & d_{65}(q) & d_{66}(q) \end{bmatrix}$$

Los componentes de la matriz $D(q)$ (simétrica) son $d_{ij}(q)$

$$d_{11}q = d_{11_0} - dd_1*(\cos(q2 + q3)*\cos(q5) - \sin(q2 + q3)*\cos(q4)*\sin(q5))^2 + dd_6*\sin(q2 + q3)*\cos(q2) + d_{11_1}*\sin(q2 + q3)^2 - d_{11_2}*\sin(q2)^2 + dd_4*(\sin(q2 + q3)*\cos(q5) + \cos(q2 + q3)*\cos(q4)*\sin(q5))*\sin(q2 + q3) + dd_5*(\sin(q2 + q3)*\cos(q5) + \cos(q2 + q3)*\cos(q4)*\sin(q5))*\cos(q2)$$

$$d_{12}q = d_{21}q = -dd_1*\sin(q4)*\sin(q5)*(\cos(q2 + q3)*\cos(q5) - \sin(q2 + q3)*\cos(q4)*\sin(q5)) - dd_2*\sin(q4)*\sin(q5)*\cos(q2 + q3) + dd_3*\sin(q4)*\sin(q5)*\sin(q2)$$

$$d_{13}q = d_{31}q = -dd_1*\sin(q4)*\sin(q5)*(\cos(q2 + q3)*\cos(q5) - \sin(q2 + q3)*\cos(q4)*\sin(q5)) - dd_2*\sin(q4)*\cos(q2 + q3)*\sin(q5)$$

$$d_{14}q = d_{41}q = d_{14_1}*\cos(q2 + q3) + lxy5*\sin(q2 + q3)*\sin(q4) + dd_2*\cos(q4)*\sin(q5)*\sin(q2 + q3) + dd_3*\cos(q4)*\sin(q5)*\cos(q2) - d_{14_2}*\cos(q5)*(\cos(q2 + q3)*\cos(q5) - \sin(q2 + q3)*\cos(q4)*\sin(q5))$$

$$d_{15}q = d_{51}q = d_{55_0}*\sin(q2 + q3)*\sin(q4) + dd_2*\sin(q4)*\cos(q5)*\sin(q2 + q3) + dd_3*\sin(q4)*\cos(q5)*\cos(q2)$$

$$d_{16}q = d_{61}q = lz6*(\cos(q2 + q3)*\cos(q5) - \sin(q2 + q3)*\cos(q4)*\sin(q5))$$

$$d22q = d22_0 + dd_6*\sin(q3) + dd_4*\cos(q5) - dd_1*\sin(q4)^2*\sin(q5)^2 + dd_5*(\cos(q5)*\sin(q3) + \cos(q3)*\cos(q4)*\sin(q5))$$

$$d23q = d32q = d33_0 + dd_4*\cos(q5) + dd_3*(\cos(q3)*\sin(q5)*\cos(q4) + \sin(q3)*\cos(q5)) - dd_1*\sin(q4)^2*\sin(q5)^2 + d23_1*\sin(q3)$$

$$d24q = d42q = -dd_1*\cos(q5)*\sin(q4)*\sin(q5) - dd_3*\sin(q4)*\sin(q5)*\sin(q3) - dd_2*\sin(q4)*\sin(q5)$$

$$d25q = d52q = d55_0*\cos(q4) + dd_2*\cos(q4)*\cos(q5) + dd_3*(\cos(q3)*\sin(q5) + \cos(q4)*\cos(q5)*\sin(q3))$$

$$d26q = d62q = lz6*\sin(q4)*\sin(q5)$$

$$d33q = d33_0 + dd_4*\cos(q5) - dd_1*\sin(q4)^2*\sin(q5)^2$$

$$d34q = d43q = -dd_1*\cos(q5)*\sin(q4)*\sin(q5) - dd_2*\sin(q4)*\sin(q5)$$

$$d35q = d53q = d55_0*\cos(q4) + dd_2*\cos(q4)*\cos(q5)$$

$$d36q = d63q = lz6*\sin(q4)*\sin(q5)$$

$$d44q = d44_0 + dd_1*\sin(q5)^2$$

$$d45q = d54q = 0$$

$$d46q = d64q = lz6*\cos(q5)$$

$$d55q = d55_0$$

$$d56q = d65 = 0$$

$$d66q = lz6$$

Donde las constantes involucradas en función de los parámetros definidos en el Anexo A se definen como:

$$lyz_x2 = lyz2-lx2$$

$$lxy_z3 = lxy3-lz3$$

$$lxz_y4 = lxz4-ly4$$

$$lxy_z5 = lxy5-lz5$$

$$lxy_z6 = lxy6-lz6$$

$$d11_0 = ly1 + lyz2 + lz3 + ly4 + lxy5 + lxy6 + M2*L2^2/4 + M3*L2^2 + M4*L2^2 + (M6+M5)*L2^2 + M6*L6^2/4$$

$$d11_1 = lxy_z3+lxz_y4 + M4* L4^2/4 + (M6+M5)*L4^2$$

$$d11_2 = lyz_x2 + M2*L2^2/4 + M3*L2^2 + M4*L2^2 + (M6+M5)*L2^2$$

$$d14_1 = ly4 + lxy6+ M6*L6^2 /4$$

$$d14_2 = lxy_z6 + M6*L6^2/4$$

$$d22_0 = lxy3 + lxy5 + lxy6 + lxz4 + lyz2 + M2*L2^2/4 + M3*L2^2 + M4*(L2^2 + L4^2/4) + M5*(L2^2 + L4^2) + M6*(L2^2 + L4^2 + L6^2/4)$$

$$d22_1 = (M4 + 2*M5 + 2*M6)*L2*L4$$

$$d23_1 = L4*L2*(M4/2+M5+M6)$$

$$d33_0 = lxy3 + lxy5 + lxy6 + lxz4+M4*L4^2/4 + M5*L4^2 + M6*L4^2 + M6*L6^2/4$$

$$\begin{aligned}
d44_0 &= l_{y4} + l_{z5} + l_{z6} \\
d55_0 &= l_{xy5} + l_{xy6} + M6 \cdot L6^2/4 \\
dd_1 &= l_{xy_z5} + l_{xy_z6} + M6 \cdot L6^2/4
\end{aligned}$$

Vector $C(q(t), \dot{q}(t))$ que describe el efecto aceleración centrípeta y de Corioles $C(q)$ de todo el Robot

$$C(q(t), \dot{q}(t)) = \begin{bmatrix} c_1(q, \dot{q}) \\ c_2(q, \dot{q}) \\ c_3(q, \dot{q}) \\ c_4(q, \dot{q}) \\ c_5(q, \dot{q}) \\ c_6(q, \dot{q}) \end{bmatrix}$$

Los componentes del vector $C(q)$ son $c_i(q)$:

$$\begin{aligned}
c1q &= l_{xy5} \cdot dq4^2 \cdot \sin(q2 + q3) \cdot \cos(q4) + l_{xy5} \cdot (dq2 + dq3) \cdot dq4 \cdot \cos(q2 + q3) \cdot \sin(q4) + \\
& l_{z6} \cdot dq4 \cdot dq6 \cdot \sin(q2 + q3) \cdot \sin(q4) \cdot \sin(q5) - l_{z6} \cdot dq5 \cdot dq6 \cdot (\sin(q2 + q3) \cdot \cos(q4) \cdot \cos(q5) + \\
& \cos(q2 + q3) \cdot \sin(q5)) - l_{z6} \cdot (dq2 + dq3) \cdot dq6 \cdot (\sin(q2 + q3) \cdot \cos(q5) + \cos(q2 + \\
& q3) \cdot \cos(q4) \cdot \sin(q5)) + d55_0 \cdot (dq2 + dq3) \cdot dq5 \cdot \cos(q2 + q3) \cdot \sin(q4) + \\
& d55_0 \cdot dq4 \cdot dq5 \cdot \sin(q2 + q3) \cdot \cos(q4) - d11_2 \cdot dq1 \cdot dq2 \cdot \sin(2 \cdot q2) + \\
& d11_1 \cdot dq1 \cdot (dq2 + dq3) \cdot \sin(2 \cdot q2 + 2 \cdot q3) - d14_1 \cdot (dq2 + dq3) \cdot dq4 \cdot \sin(q2 + q3) - \\
& d14_2 \cdot dq4^2 \cdot \sin(q2 + q3) \cdot \cos(q5) \cdot \sin(q4) \cdot \sin(q5) + \\
& d14_2 \cdot (dq2 + dq3) \cdot dq4 \cdot \cos(q5) \cdot (\sin(q2 + q3) \cdot \cos(q5) + \cos(q2 + q3) \cdot \cos(q4) \cdot \sin(q5)) + \\
& d14_2 \cdot dq4 \cdot dq5 \cdot (\sin(q2 + q3) \cdot \cos(q4) \cdot \cos(2 \cdot q5) + \cos(q2 + q3) \cdot \sin(2 \cdot q5)) + \\
& dd_1 \cdot dq1 \cdot (dq2 + dq3) \cdot (\sin(2 \cdot q2 + 2 \cdot q3) \cdot \cos(2 \cdot q5) + \sin(2 \cdot q2 + 2 \cdot q3) \cdot \sin(q5)^2 \cdot \sin(q4)^2 + \\
& \cos(2 \cdot q2 + 2 \cdot q3) \cdot \cos(q4) \cdot \sin(2 \cdot q5)) + dd_1 \cdot dq1 \cdot dq5 \cdot (\cos(q2 + q3)^2 \cdot \sin(2 \cdot q5) + \\
& \sin(2 \cdot q2 + 2 \cdot q3) \cdot \cos(q4) \cdot \cos(2 \cdot q5) - \sin(q2 + q3)^2 \cdot \cos(q4)^2 \cdot \sin(2 \cdot q5)) + \\
& dd_1 \cdot (dq2 + dq3)^2 \cdot \sin(q4) \cdot \sin(q5) \cdot (\cos(q2 + q3) \cdot \cos(q4) \cdot \sin(q5) + \sin(q2 + q3) \cdot \cos(q5)) \\
& + dd_1 \cdot (dq2 + dq3) \cdot dq5 \cdot \sin(q4) \cdot (\sin(q2 + q3) \cdot \cos(q4) \cdot \sin(2 \cdot q5) - \cos(q2 + q3) \cdot \cos(2 \cdot q5)) \\
& + dd_1 \cdot (dq2 + dq3) \cdot dq4 \cdot \sin(q5) \cdot (\sin(q2 + q3) \cdot \cos(2 \cdot q4) \cdot \sin(q5) - \cos(q2 + \\
& q3) \cdot \cos(q4) \cdot \cos(q5)) + 2 \cdot dd_1 \cdot dq1 \cdot dq4 \cdot \sin(q4) \cdot \sin(q2 + q3) \cdot \sin(q5) \cdot (\sin(q2 + \\
& q3) \cdot \cos(q4) \cdot \sin(q5) - \cos(q2 + q3) \cdot \cos(q5)) + dd_2 \cdot ((dq2 + dq3)^2 - (dq4 - dq5)^2) \cdot \sin(q2 + \\
& q3) \cdot \sin(q4) \cdot \sin(q5) + dd_3 \cdot (dq2^2 - dq4^2 - dq5^2) \cdot \cos(q2) \cdot \sin(q4) \cdot \sin(q5) + \\
& dd_4 \cdot dq1 \cdot dq5 \cdot \sin(q2 + q3) \cdot (\cos(q2 + q3) \cdot \cos(q4) \cdot \cos(q5) - \sin(q2 + q3) \cdot \sin(q5)) + \\
& dd_4 \cdot dq4 \cdot dq5 \cdot \sin(q2 + q3) \cdot \cos(q4 + q5) - dd_4 \cdot dq1 \cdot dq4 \cdot \cos(q2 + q3) \cdot \sin(q2 + \\
& q3) \cdot \sin(q4) \cdot \sin(q5) + dd_4 \cdot dq1 \cdot (dq2 + dq3) \cdot (\sin(2 \cdot q2 + 2 \cdot q3) \cdot \cos(q5) + \cos(2 \cdot q2 + \\
& 2 \cdot q3) \cdot \cos(q4) \cdot \sin(q5)) + dd_5 \cdot dq4 \cdot dq5 \cdot \cos(q2) \cdot \cos(q4) \cdot \cos(q5) + \\
& dd_5 \cdot dq1 \cdot (dq2 + dq3) \cdot \cos(q2 + q3) \cdot \cos(q2) \cdot \cos(q5) - \\
& dd_5 \cdot dq1 \cdot dq2 \cdot (\cos(q4) \cdot \sin(q5) \cdot \sin(2 \cdot q2 + q3) + \sin(q2 + q3) \cdot \cos(q5) \cdot \sin(q2)) + \\
& dd_5 \cdot dq1 \cdot dq5 \cdot \cos(q2) \cdot (\cos(q2 + q3) \cdot \cos(q4) \cdot \cos(q5) - \sin(q2 + q3) \cdot \sin(q5)) - \\
& dd_5 \cdot dq1 \cdot dq3 \cdot \sin(q2 + q3) \cdot \cos(q2) \cdot \cos(q4) \cdot \sin(q5) - dd_5 \cdot dq1 \cdot dq4 \cdot \cos(q2 + \\
& q3) \cdot \cos(q2) \cdot \sin(q4) \cdot \sin(q5) + dd_6 \cdot dq1 \cdot dq2 \cdot \cos(2 \cdot q2 + q3) + dd_6 \cdot dq1 \cdot dq3 \cdot \cos(q2 + \\
& q3) \cdot \cos(q2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c2q &= l_{z6} \cdot dq4 \cdot dq6 \cdot \cos(q4) \cdot \sin(q5) + l_{z6} \cdot dq5 \cdot dq6 \cdot \cos(q5) \cdot \sin(q4) + l_{z6} \cdot dq1 \cdot dq6 \cdot (\sin(q2 \\
& + q3) \cdot \cos(q5) + \cos(q2 + q3) \cdot \cos(q4) \cdot \sin(q5)) - l_{xy5} \cdot dq1 \cdot dq4 \cdot \cos(q2 + q3) \cdot \sin(q4) - \\
& d11_1 \cdot dq1^2 \cdot \cos(q2 + q3) \cdot \sin(q2 + q3) + d11_2 \cdot dq1^2 \cdot \cos(q2) \cdot \sin(q2) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d14_1*dq1*dq4*\sin(q2 + q3) - d14_2*dq1*dq4*\cos(q5)*(\sin(q2 + q3)*\cos(q5) + \cos(q2 + q3)*\cos(q4)*\sin(q5)) + d23_1*dq3^2*\cos(q3) - d55_0*dq4*dq5*\sin(q4) - \\
& d55_0*dq1*dq5*\cos(q2 + q3)*\sin(q4) - 0.5*dd_1*dq1^2*(\cos(2*q2 + 2*q3)*\cos(q4)*\sin(2*q5) - \sin(2*q2 + 2*q3)*\cos(q4)^2*\sin(q5)^2 + \sin(2*q2 + 2*q3)*\cos(q5)^2) + \\
& dd_1*dq1*dq4*\sin(q5)*(\sin(q2 + q3)*\cos(2*q4)*\sin(q5) - \cos(q2 + q3)*\cos(q4)*\cos(q5)) - dd_1*dq4*dq5*\sin(q4)*\cos(2*q5) - \\
& dd_1*dq4^2*\cos(q4)*\cos(q5)*\sin(q5) + dd_1*dq1*dq5*\sin(q4)*(\sin(q2 + q3)*\cos(q4)*\sin(2*q5) - \cos(q2 + q3)*\cos(2*q5)) - \\
& dd_1*(dq2+dq3)*dq4*\sin(2*q4)*\sin(q5)^2 - dd_1*(dq2+dq3)*dq5*\sin(2*q5)*\sin(q4)^2 - \\
& dd_2*(dq1^2+dq4^2+dq5^2)*\cos(q4)*\sin(q5) + dd_3*dq1^2*(\sin(2*q2 + q3)*\cos(q4)*\sin(q5) - \cos(2*q2 + q3)*\cos(q5)) + dd_3*(dq3^2+dq5^2)*(\cos(q3)*\cos(q5) - \cos(q4)*\sin(q3)*\sin(q5)) - \\
& dd_3*dq4^2*\cos(q4)*\sin(q3)*\sin(q5) - dd_4*dq4*dq5*\cos(q5)*\sin(q4) - dd_4*(dq2+dq3)*dq5*\sin(q5) + dd_4*dq1^2*\sin(q2 + q3)*(\sin(q2 + q3)*\cos(q4)*\sin(q5) - \cos(q2 + q3)*\cos(q5)) - dd_4*dq1*dq4*\cos(q2 + q3)*\cos(q4)*\sin(q5) - dd_4*dq1*dq5*\cos(q2 + q3)*\cos(q5)*\sin(q4) + \\
& dd_5*(dq2+dq3)*dq5*(\cos(q3)*\cos(q4)*\cos(q5) - \sin(q3)*\sin(q5)) - dd_5*(dq2+dq3)*dq4*\cos(q3)*\sin(q4)*\sin(q5) + dd_5*dq1*dq4*\cos(q4)*\sin(q2)*\sin(q5) + dd_5*dq1*dq5*\cos(q5)*\sin(q2)*\sin(q4) - dd_5*dq4*dq5*\cos(q5)*\sin(q3)*\sin(q4) + dd_5*dq2*dq3*(\cos(q3)*\cos(q5) - \cos(q4)*\sin(q3)*\sin(q5)) + dd_6*dq2*dq3*\cos(q3) - dd_6/2*dq1^2*\cos(2*q2 + q3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c3q = & lz6*dq4*dq6*\cos(q4)*\sin(q5) + lz6*dq5*dq6*\cos(q5)*\sin(q4) + lz6*dq1*dq6*(\sin(q2 + q3)*\cos(q5) + \cos(q2 + q3)*\cos(q4)*\sin(q5)) - lxy5*dq1*dq4*\cos(q2 + q3)*\sin(q4) - \\
& d55_0*dq1*dq5*\cos(q2 + q3)*\sin(q4) - d55_0*dq4*dq5*\sin(q4) - 0.5*d11_1*dq1^2*\sin(2*q2 + 2*q3) + d14_1*dq1*dq4*\sin(q2 + q3) - \\
& d14_2*dq1*dq4*\cos(q5)*(\sin(q2 + q3)*\cos(q5) + \cos(q2 + q3)*\cos(q4)*\sin(q5)) - 0.5*dd_1*dq1^2*(\cos(2*q2 + 2*q3)*\cos(q4)*\sin(2*q5) + \sin(2*q2 + 2*q3)*\cos(2*q5) + \sin(2*q2 + 2*q3)*\sin(q4)^2*\sin(q5)^2) - dd_1*dq4^2*\cos(q4)*\cos(q5)*\sin(q5) + \\
& dd_1*dq1*dq5*\sin(q4)*(\sin(q2 + q3)*\cos(q4)*\sin(2*q5) - \cos(q2 + q3)*\cos(2*q5)) + dd_1*dq1*dq4*\sin(q5)*(\sin(q2 + q3)*\cos(2*q4)*\sin(q5) - \cos(q2 + q3)*\cos(q4)*\cos(q5)) - \\
& dd_1*(dq2+dq3)*dq5*\sin(q4)^2*\sin(2*q5) - dd_1*(dq2+dq3)*dq4*\sin(2*q4)*\sin(q5)^2 - dd_1*dq4*dq5*\cos(2*q5)*\sin(q4) - dd_2*dq4^2*\cos(q4)*\sin(q5) - \\
& dd_2*dq5^2*\cos(q4)*\sin(q5) - dd_2*dq1^2*\cos(2*q2 + 2*q3)*\cos(q4)*\sin(q5) + dd_3*dq2^2*(\cos(q4)*\sin(q3)*\sin(q5) - \cos(q3)*\cos(q5)) + dd_3*dq1^2*\cos(q2)*(\sin(q2 + q3)*\cos(q4)*\sin(q5) - \cos(q2 + q3)*\cos(q5)) - dd_4*(dq2+dq3)*dq5*\sin(q5) - dd_4*dq4*dq5*\cos(q5)*\sin(q4) - dd_4*dq1^2*\cos(q2 + q3)*\sin(q2 + q3)*\cos(q5) - dd_4*dq1*dq4*\cos(q2 + q3)*\cos(q4)*\sin(q5) - dd_4*dq1*dq5*\cos(q2 + q3)*\sin(q4)*\cos(q5) - dd_6*dq1^2*\cos(q2 + q3)*\cos(q2)/2 - dd_6/2*dq2^2*\cos(q3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c4q = & - lz6*dq5*dq6*\sin(q5) - lz6*(dq2+dq3)*dq6*\cos(q4)*\sin(q5) - lz6*dq1*dq6*\sin(q4)*\sin(q5)*\sin(q2 + q3) + lxy5*dq1*(dq2+dq3)*\cos(q2+q3)*\sin(q4) + \\
& d55_0*(dq2+dq3)*dq5*\sin(q4) - d55_0*dq1*dq5*\cos(q4)*\sin(q2 + q3) - d14_1*dq1*(dq2+dq3)*\sin(q2 + q3) + d14_2*dq1*(dq2+dq3)*\cos(q5)*(\sin(q2+q3)*\cos(q5) + \cos(q2 + q3)*\cos(q4)*\sin(q5)) - d14_2*dq1*dq5*\cos(q4)*\sin(q2+q3) + 2*d14_2*dq1*dq5*\cos(q5)*(\cos(q2 + q3)*\sin(q5) + \sin(q2 + q3)*\cos(q4)*\cos(q5)) + dd_1*dq4*dq5*\sin(2*q5) + dd_1*dq2*dq3*\sin(2*q4)*\sin(q5)^2 - dd_1*(dq2+dq3)*dq5*\sin(q4)*\cos(2*q5) + dd_1*dq1*(dq2+dq3)*\sin(q5)*(\cos(q2 + q3)*\cos(q4)*\cos(q5) - \sin(q2 + q3)*\cos(2*q4)*\sin(q5)) + 0.5*dd_1*dq1^2*\sin(2*q4)*\sin(q5)^2*(\cos(2*q2)*\cos(q3)^2 - \cos(q2)^2) + dd_1*(dq2^2+dq3^2)*\cos(q4)*\sin(q4)*\sin(q5)^2 + 0.25*dd_1*dq1^2*\sin(2*q2 + 2*q3)*\sin(q4)*\sin(2*q5) - 0.25*dd_1*dq1^2*\sin(2*q2)*\sin(2*q3)*\sin(2*q4)*\sin(q5)^2 + 0.5*dd_2*dq1^2*\sin(2*q2 + 2*q3)*\sin(q4)*\sin(q5) + dd_3*dq2^2*\cos(q3)*\sin(q4)*\sin(q5) + dd_3*dq1^2*\cos(q2 + q3)*\cos(q2)*\sin(q4)*\sin(q5) +
\end{aligned}$$

$$dd_4*dq1*(dq2+dq3)*cos(q4)*sin(q5)*cos(q2 + q3) - dd_5*dq1*dq2*cos(q4)*sin(q2)*sin(q5)$$

$$c5q = lz6*dq6*dq4*sin(q5) + lz6*dq6*dq1*(cos(q2 + q3)*sin(q5) + sin(q2 + q3)*cos(q4)*cos(q5)) - lz6*dq6*(dq2+dq3)*cos(q5)*sin(q4) - d55_0*(dq2+dq3)*dq4*sin(q4) + d55_0*dq1*(dq2+dq3)*cos(q2+ q3)*sin(q4) + d55_0*dq1*dq4*sin(q2 + q3)*cos(q4) - d14_2*dq1*dq4*(cos(q2 + q3)*sin(2*q5) + sin(q2 + q3)*cos(q4)*cos(2*q5)) - 0.5*dd_1*dq1^2*(cos(2*q2 + 2*q3)*sin(2*q5) + sin(2*q2 + 2*q3)*cos(q4)*cos(2*q5)) - 0.5*dd_1*dq1^2*sin(q4)^2*sin(2*q5)*(sin(q2)^2 + sin(2*q2 + q3)*sin(q3)) + dd_1*dq1*(dq2+dq3)*sin(q4)*(cos(q2 + q3)*cos(2*q5) - sin(q2 + q3)*cos(q4)*sin(2*q5)) + 0.5*dd_1*(dq2+dq3)^2*sin(q4)^2*sin(2*q5) + dd_1*(dq2+dq3)*dq4*cos(2*q5)*sin(q4) - 0.5*dd_1*dq4^2*sin(2*q5) - dd_2*dq1^2*sin(q2 + q3)*cos(q2 + q3)*cos(q4)*cos(q5) + dd_2*dq1^2*sin(2*q2 + q3)*sin(q3)*sin(q5) + dd_2*dq1^2*sin(q2)^2*sin(q5) + dd_4*dq1*(dq2+dq3)*cos(q2 + q3)*sin(q4)*cos(q5) + dd_2*(dq2+dq3)^2*sin(q5) - 2*dd_3*dq1*dq2*sin(q2)*sin(q4)*cos(q5) + dd_3*dq1^2*cos(q2)*(sin(q2 + q3)*sin(q5) - cos(q2 + q3)*cos(q4)*cos(q5)) + dd_3*dq2^2*(sin(q3)*sin(q5) - cos(q3)*cos(q4)*cos(q5))$$

$$c6q = lz6*(dq2+dq3)*dq4*cos(q4)*sin(q5) - lz6*dq1*(dq2 + dq3)*(sin(q2 + q3)*cos(q5) + cos(q2 + q3)*cos(q4)*sin(q5)) - lz6*dq1*dq5*(cos(q2 + q3)*sin(q5) + sin(q2 + q3)*cos(q4)*cos(q5)) + lz6*(dq2+dq3)*dq5*cos(q5)*sin(q4) + lz6*dq1*dq4*sin(q2 + q3)*sin(q4)*sin(q5) - lz6*dq4*dq5*sin(q5)$$

Donde:

$$\begin{aligned} dq1 &= dq1(t)/dt & dq2 &= dq2(t)/dt & dq3 &= dq3(t)/dt \\ dq4 &= dq4(t)/dt & dq5 &= dq5(t)/dt & dq6 &= dq6(t)/dt \end{aligned}$$

Y las constantes involucradas en función de los parámetros definidos en el Anexo A se definen como:

$$\begin{aligned} dd_1 &= lxy_z5 + lxy_z6 + M6*L6^2/4 \\ dd_2 &= M6*L4*L6/2 \\ dd_3 &= M6*L2*L6/2 \\ dd_4 &= M6*L4*L6 \\ dd_5 &= M6*L2*L6 \\ dd_6 &= M4*L2*L4 + 2*(M6+M5)*L4*L2 \end{aligned}$$

Vector $H(q(t))$ que describe el efecto de gravedad $H(q)$ de todo el Robot

$$H(q(t)) = \begin{bmatrix} h_1(q) \\ h_2(q) \\ h_3(q) \\ h_4(q) \\ h_5(q) \\ h_6(q) \end{bmatrix}$$

Los componentes del vector del efecto gravitatorio $H(q)$ son $h_i(q)$:

$$h1q = 0$$

$$h2q = - h10*\cos(q2) - h20*\sin(q2 + q3) - h30*(\sin(q2 + q3)*\cos(q5) + \cos(q2 + q3)*\cos(q4)*\sin(q5))$$

$$h3q = - h20*\sin(q2 + q3) - h30*(\sin(q2 + q3)*\cos(q5) + \cos(q2 + q3)*\cos(q4)*\sin(q5))$$

$$h4q = h30*\sin(q2 + q3)*\sin(q4)*\sin(q5)$$

$$h5q = - h30*(\cos(q2 + q3)*\sin(q5) + \sin(q2 + q3)*\cos(q4)*\cos(q5))$$

$$h6qt = 0$$

Donde las constantes involucradas en función de los parámetros definidos en el Anexo A se definen como:

$$h10 = (M2/2 + M3 + M4 + M5 + M6)*L2*g$$

$$h20 = (M4/2 + M5 + M6)*L4*g$$

$$h30 = M6*L6/2*g$$

Vector $B(q(t))$ que describe el efecto de fricción de todo el Robot

$$B(\dot{q}(t)) = \begin{bmatrix} b_1(\dot{q}) \\ b_2(\dot{q}) \\ b_3(\dot{q}) \\ b_4(\dot{q}) \\ b_5(\dot{q}) \\ b_6(\dot{q}) \end{bmatrix}$$

Los componentes del vector del efecto friccional $B(q)$ son:

$$b1q = Bs1*\text{sign}(dq1) + Bv1*dq1$$

$$b2q = Bs2*\text{sign}(dq2) + Bv2*dq2$$

$$b3q = Bs3*\text{sign}(dq3) + Bv3*dq3$$

$$b4q = Bs4*\text{sign}(dq4) + Bv4*dq4$$

$$b5q = Bs5*\text{sign}(dq5) + Bv5*dq5$$

$$b6q = Bs6*\text{sign}(dq6) + Bv6*dq6$$

Donde los valores de las constantes involucradas se encuentran definidos en el Anexo A

ANEXO C

ESLABONES DEL ROBOT UTILIZADOS EN LA SIMULACION

Los eslabones que conforman la estructura física del robot manipulador de seis grados de libertad con articulaciones angulares, utilizado para realizar la simulación y animación del movimiento del robot en el tiempo, también se han elaborado con *MatLab* utilizando funciones de tratamiento de imágenes para mejorar la apariencia física, dotándoles de la forma metálica y atribuyéndoles de color metálico, brillo y sombra y para obtener la forma tridimensional, se han utilizado ecuaciones matemáticas de geometría diferencial con dimensiones geométricas proporcionales y de forma apropiada. Una vez ensamblado el robot con estos eslabones como se ha mostrado en las figuras 1.5 y 2.7 se aplica las estrategias sofisticadas de control propuestas para realizar el control de trayectorias tanto en el espacio articular como en el espacio cartesiano.

En cada eslabón o elemento de la estructura del robot de seis articulaciones propuesto, se establece o se fija un sistema de coordenadas cartesianas para formular la geometría, cinemática y dinámica del robot y se muestran respectivamente en las figuras que siguen a continuación:

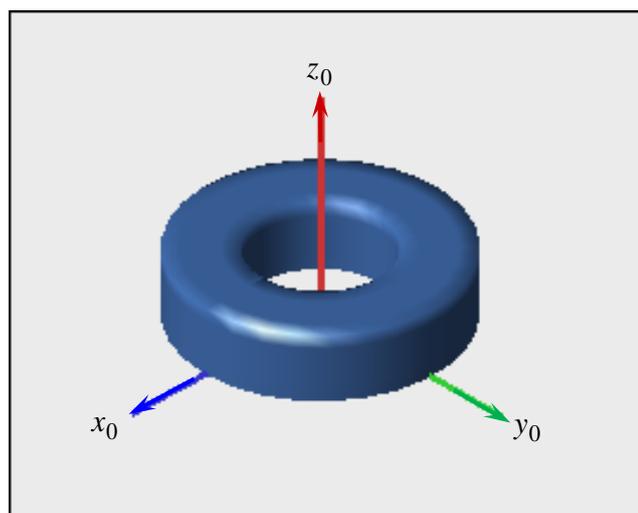


Figura C.1 Gráfica de la forma del eslabón 0.

Gráfica elaborada por el autor mediante *MatLab*

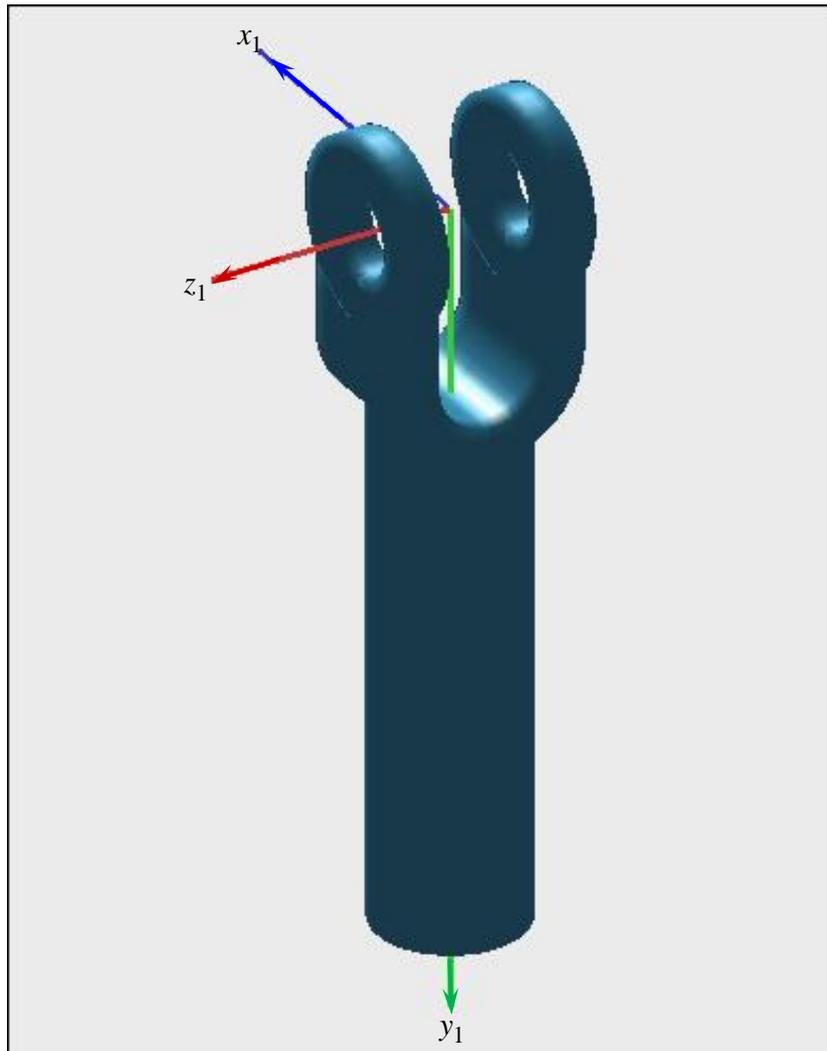


Figura C.2 Gráfica de la forma del eslabón 1.
Fuente: Gráfica elaborada por el autor mediante MatLab

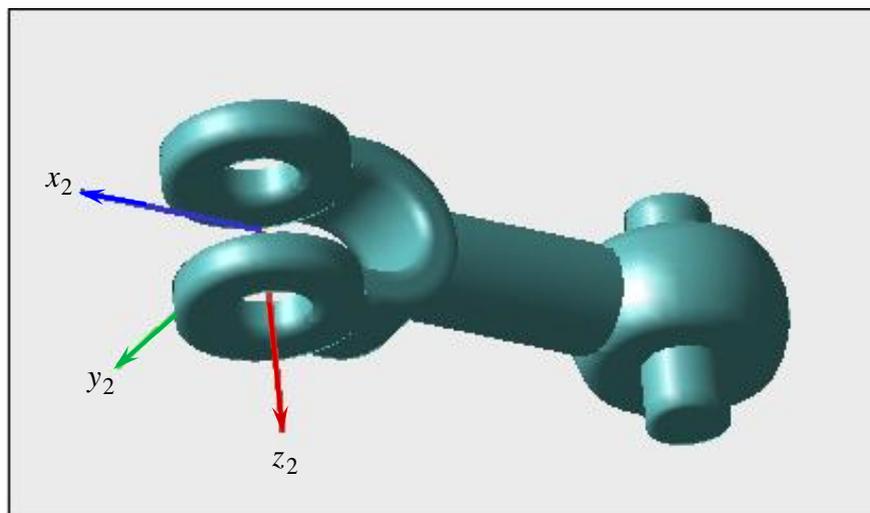


Figura C.3 Gráfica de la forma del eslabón 2.
Gráfica elaborada por el autor mediante MatLab

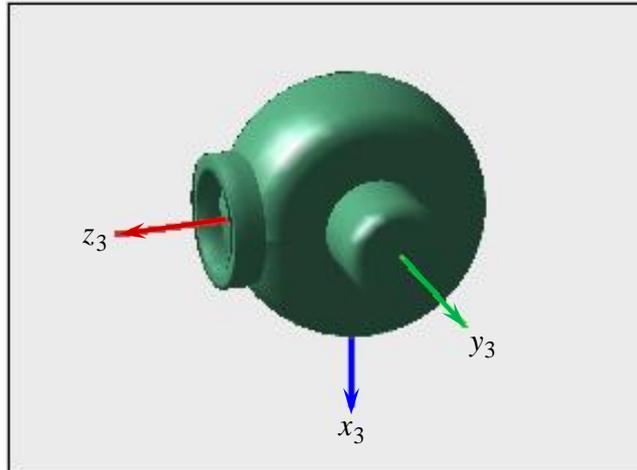


Figura C.4 Gráfica de la forma del eslabón 3.
Gráfica elaborada por el autor mediante MatLab

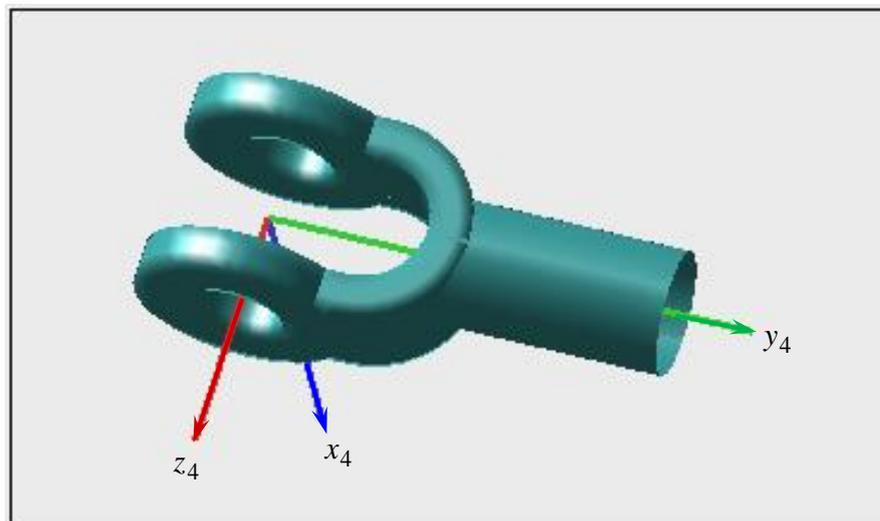


Figura C.5 Gráfica de la forma del eslabón 4.
Gráfica elaborada por el autor mediante MatLab

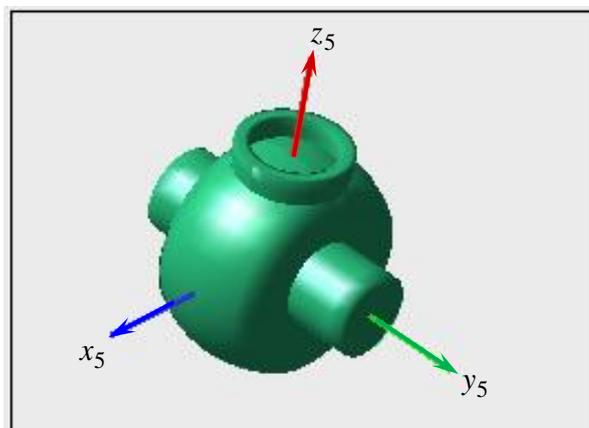


Figura C.6 Gráfica de la forma del eslabón 5.
Gráfica elaborada por el autor mediante MatLab

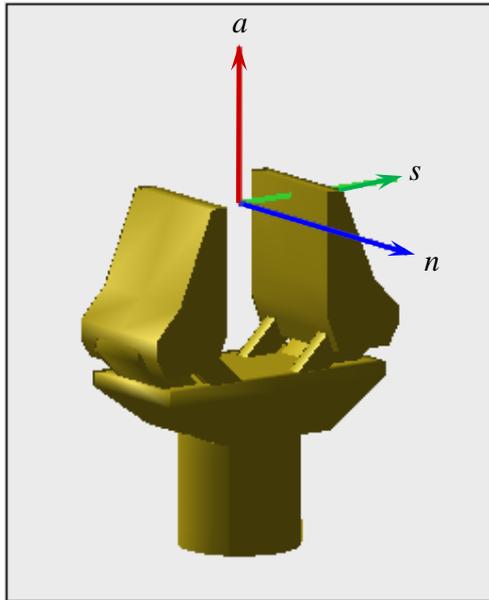


Figura C.7 Gráfica de la forma del eslabón 6 con pinza de dos dedos.
Gráfica elaborada por el autor mediante MatLab

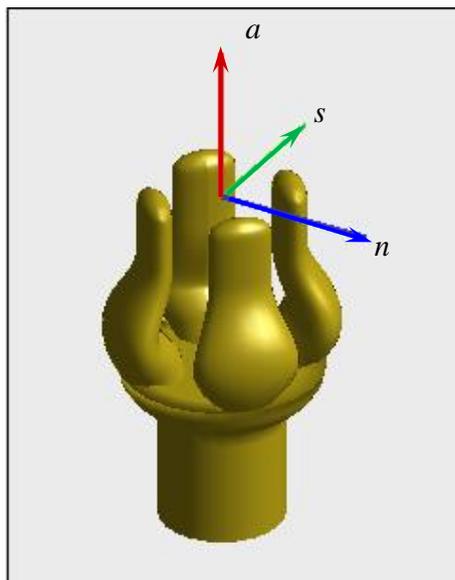


Figura C.8 Gráfica de la forma del eslabón 6 con pinza de cuatro dedos.
Gráfica elaborada por el autor mediante MatLab