Université de Perpignan Via Domitia
Perpignan-France

Universidad Nacional de Ingeniería
Lima-Pérou

Thèse

Présentée pour obtenir le grade de

Docteur en Mathématiques

par

John Edwin COTRINA ASTO

Título

Inéquation quasi-variationnelle quasi-monotone et programmation semi-continue

Date de soutenance : 5 octobre 2011

Directeurs de la Thèse :

Didier Aussel, Professeur, Université de Perpignan Via Domitia, France.
Wilfredo Sosa Sandoval, Professeur, Universidad Nacional de Ingeniería, Pérou.

Rapporteurs :

Michel Théra, Professeur, Université de Limoges, France.
Juan Enrique Martinez-Legaz, Professeur, Universitat Autonoma de Barcelona, Espagne.

Examinateurs :

Jean-Paul Penot, Professeur, Université de Paris, France.
Stephen Simons, Professeur, University of California Santa Barbara, USA.

à ma femme et à mes parents

Je tiens à remercier mes directeurs de thèse, Didier Aussel et Wilfredo Sosa, pour toute la confiance qu'ils ont exprimé envers moi dans la réalisation de ce travail, pour leur patience et surtout leur amabilité. Je voudrais leur exprimer ici tout ma reconnaissance. Je voudrais remercier particulièrement le professeur Aussel, pour avoir accepté de travailler avec moi dès mon mémoire de Master, me donnant des sages conseils depuis ce moment, et j'espère que notre collaboration continuera ainsi.

Juan-Enrique Martínez Legaz, professeur à Barcelone (Espagne) et Michel Théra, professeur de l'université de Limoge, m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail et d'être mes rapporteurs. Je les en remercie sincèrement.

Je tiens particulièrement à remercier Jean Paul Penot, professeur à Paris et Stephen Simons, professeur à California Santa Barbara (USA), de s'être joint à mon jury.

Mes remerciements vont à l'ICTP en Italie, à CONCYTEC et à l'Ambassade de France au Pérou, qui m'ont financé mes voyages et mes séjours en France.

Mes remerciements s'adressent aussi au professeur Escalante, directeur de l'IMCA et pilier de cet institut. D'autre part, j'exprime ma reconnaissance aux professeurs de l'IMCA, pour m'avoir initié sur le chemin des mathématiques. Notamment aux professeurs Yboon Garcia et Eladio Ocaña, non seulement pour leurs conseilles dans le domaine académique, mais aussi dans le cadre personnel. J'aspire à pouvoir avancer et continuer à compter sur vous.

À mes amis Juan Pablo Luna, Rodolfo Canto, Alba Malaga, Julio Rabanal, Ruben Lizarbe, Percy Abanto et Abraham Zamudio, avec lesquels j'ai partagé la formation en mathématiques à l'UNI et à l'IMCA et que malgré le temps et l'éloignement, sont restes mes amis. Je vous remercie pour votre amitié.

J'exprime ma gratitude au professeur Jean-Noël Corvellec pour m'avoir hébergé chez lui pendant tous mes séjours à Perpignan-France.

Je remercie Matthieu Maréchal, Berenice Reza, Jesus Ortega, Mismé Sanchez-Torres, Michel Sanchez-Torres et Rosa Quintana, ainsi que tous mes amis de Perpignan. Mes remerciement vont aussi à mon ami de toujours, Victor Carrera.

Je remercie Sara Cabrera, pour toute l'aide apportée dans les démarches afin d'obtenir ma thèse et pour son extrême amabilité.

Enfin, je remercie ma femme Phamela d'avoir supporté avec tant de patience les mois d'effervescence qui ont précédé la soutenance.

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions deux problèmes. Le premier est le problème d'inéquation quasi-variationnelle quasi-monotone, c'est-à-dire une inéquation quasi-variationnelle dont l'opérateur associé est quasi-monotone. Dans cette première partie le but sera d'étudier la stabilité et l'existence de la solution. Par stabilité nous entendons les propriétés de continuité (fermeture et semi-continuité) de l'opérateur solution. Les résultats d'existence seront basés sur des propriétés de point fixe de l'opérateur solution associé à une inéquation variationnelle perturbée. Pour conclure la première partie, nous verrons les applications au problème de quasi-optimisation et au problème du traffic dans un réseau dépendent de temps.

La deuxième partie est la programmation semi-continue. Ici on utilisera le théorème de sélection de Michael pour étendre le théorème de séparation des ensembles convexes au cas d'ensembles fermés. Ainsi, grâce à cette extension, nous introduisons une nouvelle théorie de la dualité en utilisant une modification de la conjugaison de Fenchel.

Notations-Conventions

Tout au long de ce manuscrit

X	désigne	un espace de Banach muni de la norme $\\|\cdot\\|$
X^*		son dual topologique muni de la topologie faible*
$\langle\cdot,\cdot\rangle$		produit de dualité
$\mathrm{cl}A$		fermeture du sous-ensemble A dans X
$\mathrm{int}(A)$		intérieur du sous-ensemble A dans X
$\mathcal{V}(x)$		ensemble des voisinages de x
$B(a,\epsilon)$		boule ouverte de centre a, de rayon ϵ $B(a,\epsilon)=\{x\in X \mid \\|x-a\\|<\epsilon\}$
$B_\epsilon(A)$		A sous-ensemble de $X, B_\epsilon(A)=\cup_{a\in A}B(a,\epsilon)$
d_a		fonction distance à un point $\begin{array}{rcl} d_a : X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \\|x-a\\| \end{array}$
d_A		fonction distance à un sous-ensemble A de X $\begin{array}{rcl} d_A : X & \to & [0,+\infty] \\ x & \mapsto & \inf_{a\in A}\\|x-a\\| \end{array}$
$[a,b]$		intervalle fermé $=\{\lambda a+(1-\lambda)b \mid 0\leq\lambda\leq 1\}$
$[a,b[$		intervalle semi-ouvert $=\{\lambda a+(1-\lambda)b \mid 0\leq\lambda< 1\}$
$]a,b[$		intervalle ouvert $=\{\lambda a+(1-\lambda)b \mid 0<\lambda< 1\}$
$\delta(\cdot\|A)$		fonction indicatrice du sous-ensemble A $\delta(x\|A)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\in A \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$
$t\searrow 0$		$t\to 0,\ t>0$
$x\to_f x_0$		convergence graphique : $x\to x_0$ et $f(x)\to f(x_0)$
$(x,\alpha)\to_f x_0$		convergence épigraphique : $x\to x_0,\ \alpha\to f(x_0)$ avec $\alpha\geq f(x_0)$ équivalente à $x\to_f x_0$ si f est s.c.i.
$\mathrm{dom}\, f$		domaine de l'application $f : X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ $=\{x\in X \mid f(x)<+\infty\}$
$\mathrm{epi}(f)$		épigraphe de $f=\{(x,\alpha)\in X\times\mathbb{R} \mid \alpha\geq f(x)\}$
$\mathrm{hyp}(f)$		hypographe de $f=\{(x,\alpha)\in X\times\mathbb{R} \mid \alpha\leq f(x)\}$
$S_f(\lambda)$		le sous-niveau de $f=\{x\in X \mid f(x)\leq\lambda\}$
Gr_f		graphe de l'application $f : X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ $\mathrm{Gr}_f=\{(x,f(x)) \mid x\in X\}$

Table des matières

Introduction

Cette thèse comporte deux parties : la première concerne l'inéquation quasi-variationnelle quasi-monotone et la seconde la programmation semi-continue.

Inéquation quasi-variationnelle quasi-monotone

Le problème de l'inéquation variationnelle a été introduite par Philip Hartman et Guido Stampacchia (1966) dans son célèbre article [50], et a ensuite été prolongé par Stampacchia et J.L. Lions [53], sous la forme suivante : soit K un sous-ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ et $T : K \to \mathbb{R}^n$. Le problème d'inéquation variationnelle associé à T et K est de trouver $x \in K$ tel que

$$\langle T(x), y - x \rangle \geq 0, \ \forall y \in K.$$

L'étude du problème de l'inéquation variationnelle a été principalement menée dans le contexte du calcul des variations de la théorie du contrôle optimal et en liaison avec la solution de problèmes aux limites pour les équations différentielles partielles. Le résultat d'existence proposé par Hartman et Stampacchia dans [50] est le suivant

SI L'OPÉRATEUR EST CONTINU ET L'ENSEMBLE DES CONTRAINTES EST CONVEXE COMPACT. ALORS IL EXISTE AU MOINS UNE SOLUTION AU PROBLÈME DE STAMPACCHIA.

De nombreuses extensions sont obtenues par l'affaiblissement de l'hypothèse de la continuité et l'introduction de la monotonie. L'hypothèse de compacité sur l'ensemble des contraintes est affaiblie par l'introduction de certaines conditions de coercivité. Suggérons [39, 49] pour des résultats d'existence de solution et quelques applications des inéquations variationnelles en dimension finie.

Ensuite, ce problème a été étendu aux opérateurs multivoques (aussi appelée par certains auteurs l'inégalité variationnelle généralisée), c'est à dire : soit K un sous-ensemble convexe et fermé de X et $T : K \to 2^{X^*}$. Le nouveau problème associé à T et K, dénoté par $S(T,K)$, est de trouver $x \in K$ tel qu'il existe $x^* \in T(x)$ avec

$$\langle x^*, y - x\rangle \geq 0, \ \forall y \in K \tag{1}$$

où X est un espace vectoriel topologique et X^* son dual topologique.

En 1967, George J. Minty introduit un autre problème de l'inégalité variationnelle [72], qui est connu aujourd'hui comme le dual du problème introduit par Stampacchia : soit K un sous-ensemble fermé de H un espace de Hilbert, et $T : K \to H$. Le problème d'inéquation variationnelle de Minty associé à T et K est trouver $x \in K$ tel que

$$\langle T(y), y - x\rangle \geq 0, \ \forall y \in K.$$

Minty dans cet article établit un résultat d'existence de solutions pour ce nouveau problème de l'inéquation variationnelle sous l'hypothèse de monotonie sur l'opérateur et de compacité et convexité de l'ensemble des contraintes. Dans ce contexte, N. Hadjisavvas et S. Schaible [51] ont étendu le résultat d'existence dans le cas des opérateurs univoques quasimonotones définis sur un espace de Banach et d'un ensemble de constrainte satisfaisant la propriété de " inner point". J.P. Crouzeix dans [27] donne des résultats d'existence dans le cas des opérateurs multivoques pseudomonotones. Comme avec le problème de Stampacchia, ce problème s'étend aux opérateurs multivoques (aussi appelée par certains auteurs l'inéquation variationnelle de Minty de généralisée) : associé à K un sous-ensemble convexe fermé de X un espace vectoriel topologique et $T : K \to 2^{X^*}$, le nouveau problème d'inéquation variationnelle de Minty, dénoté par $M(T,K)$ est de trouver $x \in K$ tel que

$$\langle y^*, y - x\rangle \geq 0, \ \forall y \in K \text{ et } y^* \in T(y). \tag{2}$$

Le fameux Lemme de Minty [72] établi l'égalité entre les ensembles de solutions aux problèmes de Stampacchia et Minty, dans le cas univoque, c'est-à-dire

Si l'opérateur est monotone et hémi-continu et l'ensemble des contraintes est convexe. Alors chaque solution du problème de Stampacchia est une solution du problème de Minty et réciproquement.

Ainsi on peut voir que R. W. Cottle et J.C. Yao ont étendu le Lemme de Minty dans le cas des opérateurs pseudomonotones sur un espace de Hilbert dans [26]. Ensuite N. Hadjisavvas et S. Schaible [51] ont étendu le Lemme de

Minty dans le cas des opérateurs quasimonotones, sans obtenir l'égalité entre les ensembles solutions. D. Aussel et N. Hadjisavvas dans [12] ont utilisé une extension de l'ensemble solution du problème d'inéquation variationnelle de Minty, appellé, l'ensemble de solution locale de Minty. Ils ont alors montré que si l'opérateur est pseudomonotone et l'ensemble de constrainte est convexe alors l'ensemble de solutions locales coïncide avec l'ensemble solution de Minty. Afin d'étendre le Lemme de Minty, ils montrent l'inclusion de l'ensemble de solutions locales dans l'ensemble de solutions de Stampacchia, sous l'hypothèse de upper sign-continuité (qui a été introduite par N. Hadjisavvas dans [47]) et que l'opérateur multivoque est à valeurs convexes, non vide et faiblement compactes. De plus on peut remarquer qu'ils ont conclu avec un résultat sur l'existence de solution du problème de Stampacchia comme suit

> SI L'OPÉRATEUR EST QUASIMONOTONE ET UPPER SIGN-CONTINU À VALEURS CONVEXES FAIBLEMENT COMPACTES ET L'ENSEMBLE DE CONTRAINTES EST CONVEXE ET COMPACT. ALORS IL EXISTE AU MOINS UNE SOLUTION AU PROBLÈME DE STAMPACCHIA.

Cependant, il est intéressant de noter que diverses variantes de la notion de solution ont été proposées dans la littérature. Ainsi nous pouvons voir celle introduite par Ait Mansour et D. Aussel dans [1], appellé l'ensemble de solution étoile, qui consiste à extraire à l'ensemble solution de Stampacchia les solutions triviales, c'est-à-dire les solutions nulles. Cet notion d'ensemble solution étoile s'avère très utile pour exprimer des conditions nécessaires et suffisantes d'optimilité en optimisation quasi-convexe (voir [13, 14, 15]). Deux autres ensembles considérés dans la littérature sont l'ensemble de solution strictes, c'est-à-dire les solutions dont l'inéquation en (1) est stricte pour tous les points sauf lui-même, et finalement l'ensemble de solutions faibles définie comme dans [12]. Ainsi, afin d'étendre le Lemme de Minty nous allons montrer dans le Chapitre 2 des inclusions de ces ensembles solutions et l'ensemble de solutions de Minty.

Il est intéressant de voir que de nombreux résultats sur l'existence de solution du problème d'inéquation variationnelle demandent que l'opérateur multivoque soit à valeurs convexes. Mais on peut voir que l'opérateur sous-différentiel "limiting", couramment utilisé en optimisation non différentiable pour exprimer des conditions d'optimalité, n'est pas à valeurs convexes tandis que, pour une fonction localement Lipschitz, l'opérateur dont les images sont les enveloppes convexes du sous-différentiel limiting coïncide avec les images du sous-différentiel de Clarke. D'autre part, T. Rockafellar et R. Wets montrent dans [81] que si l'opérateur est semi-continu inférieurement alors l'opérateur enveloppe convexe est semicontinu inférieurement. Alors motivé par ce résultat, dans le Chapitre 2, nous montrons un résultat similaire pour la semi-continuité supérieure sous l'hypothèse supplémentaire de compacité faible étoile des images de l'opérateur. Nous verrons aussi que la propiété de upper (lower) sign-continuité est preservée par l'opérateur enveloppe convexe, plus précisément

Un opérateur est sign-continu si et seulement si son opérateur enveloppe convexe est sign-continu.

Un autre thème important dans le domaine des inéquations variationnelles est l'étude de stabilité, qui est l'évaluation du comportement de la solution à chaque fois que l'opérateur est soumis à des perturbations ou que les données sont partiellement inconnues. Différents concepts de stabilité existent dans la littérature. Si la multi-application solution satisfait certaines propriétés de continuité, c'est-à-dire, semi-continuité supérieure ou inférieure on parle de stabilité qualitative, voir par exemple [1, 18]. Une autre approche, appelée la stabilité quantitative, est d'estimer la distance entre les ensembles solution, voir par exemple [2]. Il convient de noter que dans de nombreuses applications, une propriété de semi-continuité est suffisante. Par exemple, pour prouver l'existence d'un équilibre d'une économie compétitive suivant le modèle de Walras-Ward et le modèle Arrow-Debreu Mekenzie, généralement basée sur des arguments de point fixe, seule la semi-continuité supérieure de la multiapplication de solution d'une inéquation variationnelle est nécessaire, voir par exemple [52]. À cet égard, nous montrons dans le Chapitre 2 que nous pouvons étendre certains résultats de semi-continuité et de fermeture, pour des problèmes de l'inéquation variationnelle Stampacchia et Minty sous une hypothèse de monotonie faible : la quasi-monotonie.

Le problème d'inéquation quasi-variationnelle correspond à un problème d'inéquation variationnelle dont l'ensemble de constrainte est sujet à modifications en fonction du point x considéré. Ce problème a été introduit par U. Mosco dans [74] sous la forme suivante : soient $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $K : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$,

$$\text{Trouver } x \in K(x) \text{ tel que}$$

$$\text{avec } \langle T(x), y - x\rangle \geq 0, \ \forall y \in K(x).$$

Puis cette problématique, a été étendue au cas des opérateurs multivoques sous le forme suivante : soit $T : X \to 2^{X^*}$ et $K : X \to 2^X$ deux opérateurs multivoques ; le problème d'inéquation quasi-variationnelle associé à T et K, dénoté par $QVI(T,K)$ est

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } x \in K(x) \text{ tel qu'il existe } x^* \in T(x) \\ &\text{avec } \langle x^*, y - x\rangle \geq 0, \ \forall y \in K(x) \end{aligned} \tag{3}$$

où X et X^* représentent, respectivement, un espace de Banach et son espace dual topologique. Cette généralisation naturelle de l'inéquation variationnelle fournit un cadre parfait pour la reformulation des problèmes complexes, comme des problèmes d'équilibre de Nash généralisé dans les problèmes de l'économie et le problème de la mécanique du contact. Ces exemples et beaucoup d'autres fournissent une motivation important à l'étude des problèmes des inéquations quasi-variationnelles.

De même, a été introduit le problème de l'inéquation quasi-variationnelle de Minty : soient $T : X \to 2^{X^*}$ et $K : X \to 2^X$ deux opérateurs multivoques, le problème d'inéquation quasi-variationnelle de Minty associé à T et K, dénoté par $MQVI(T,K)$ est

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } x \in K(x) \text{ tel que} \\ &\langle y^*, y - x\rangle \geq 0, \ \forall y \in K(x), \ \forall y^* \in T(y) \end{aligned} \tag{4}$$

Contrairement au cas particulier des inéquations variationnelles, pour le problème de l'inéquation quasi-variationnelle il existe peu de résultats d'existence de solution dans la littérature. Citons alors Kien et al. [62] qui obtiennent un résultat d'existence en dimension finie, sans l'utilisation de la monotonie généralisée. En dimension infinie, Tan dans [94] montre un résultat d'existence en considérant X un espace vectoriel topologique de Hausdorff localement convexe avec l'hypothèses de continuité et sans monotonie : soit C un sous-ensemble convexe, compact et non vide de X et soient $T : C \to 2^{X^*}$ et $K : C \to 2^C$

Si K est continu, à valeurs convexes, compacts et T est semicontinu supérieurement à valeurs convexes et fortement compactes. Alors, $QVI(T,K)$ admet au moins une solution.

On peut aussi citer les travaux de P. Q. Khanh et L. M. Luu dans [59] sur l'existence de solution sans l'hypothèses de monotonie et en utilisant une hypothèses de convergence affaiblissant la semi-continuité inférieure et dans [60] où ils utilisent le théorème de KKM-Fan pour obtenir des résultats d'existence. Néanmoins, il est important de citer le travail de J. Reinhard dans [80] où il montre que le concept de monotonie et le théorème de KKM sont liés, c'est-à-dire

Un opérateur T est proprement quasimonotone si et seulement si G_T [1] est un opérateur KKM [2] et si et seulement si $S(T, K) \neq \emptyset$ pour tout K convexe compact.

Nous fournissons dans le Chapitre 3 des conditions suffisantes pour l'existence de solutions au problème d'inéquation quasi-variationnelle sous l'hypothèse de quasi-monotonie de l'opérateur T. Pour cela nous nous appuyons sur la simple observation que les solutions de $QVI(T, K)$ sont les points fixes de l'opérateur solution de l'inéquation variationnelle perturbée $S(T, K(\cdot))$. Nous allons utiliser le théorème de point fixe de Kakutani-Fan-Glicksberg couplés aux résultats sur la semi-continuité du problème d'inéquation variationnelle perturbée obtenue dans le Chapitre 2.

Comme dans le cas d'inéquation variationnelle, l'étude de la stabilité du problème d'inéquation quasi-variationnelle perturbée est également intéressante. À cet égard, nous pouvons citer les travaux de L. Q. Anh et P. Q. Khanh dans [16, 17] où ils utilisent la quasi-monotonie. Nous étendons dans le Chapitre 3 les résultats obtenus par M. Ait Mansour et D. Aussel dans [1] en utilisant la quasi-monotonie et des propriétés de continuité au sens de Mosco de l'opérateur des constraintes. Nous donnerons de plus quelques conditions suffisantes pour obtenir la continuité au sens de Mosco pour l'opérateur des constraintes.

Enfin, nous verrons dans le Chapitre 3 quelques applications des nos résultats d'existence de solution au problème d'inéquation quasi-variationnelle. Tout d'abord le problème de Quasi-optimisation. Associé à une fontion $f : X \to \mathbb{R}$ et à un opérateur multivoque $K : X \to 2^X$ (l'opérateur de contrainte), le problème de quasi-optimisation dénoté par $QOpt(f, K)$ est

$$\text{Trouver } x \in K(x) \text{ tel que } f(x) = \min_{y \in K(x)} f(y). \tag{5}$$

La terminologie de "quasi-optimisation" a été introduite par F. Facchinei et C. Kanzow dans [37, 38], où ils montrent qu'il permet via les fonctions écart (gap en anglais), de reformuler le problème d'équilibre de Nash généralisé. Ils mettent en évidence les parallèles avec le problème d'inéquation quasi-variationnelle. Notez cependant que le problème de quasi-optimisation ne doit pas être confondu avec le problème d'optimisation suivant

$$\text{Trouver } x \in PF(K)\,^{3} \text{ tel que } f(x) = \min_{y \in PF(K)} f(y).$$

1. Où $G_T(x) = \{y \in X : \ \forall x^* \in T(x),\ \langle x^*, y - x\rangle \leq 0\}$.
2. G_T est un opérateur KKM si pour tout $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ on a que $\operatorname{conv}(\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}) \subseteq \cup_{i=1}^n G_T(x_i)$
3. Où $PF(K)$ dénote l'ensemble de point fixe de K.

En effet, ce dernier problème bien que similaire au problème de quasi-optimisation est de trouver le point fixe de K qui minimisent f, tandis que la solution optimale x du problème de quasi-optimisation est un point fixe de K qui minimise f sur l'ensemble des contraintes $K(x)$.

En programmation quasi-convexe, l'opérateur associée à la formulation variationnelle est l'opérateur normal ajusté introduit par D. Aussel et N. Hadjisavvas dans [13]. L'opérateur normal est quasi-monotone et il a certaines propriétés qui permettent d'obtenir des conditions suffisantes d'optimalité pour la programmation quasi-convexe. Les travaux de D. Aussel et J.J. Ye [14, 15] donnent des conditions d'optimalité dans le cas où l'ensemble de contrainte est localement l'union finie d'ensembles convexes et localement étoilé (en anglais "starshaped"). Ceci nous a motivé à considérer que nos fonctions sont quasi-convexes et à utiliser l'opérateur normal ajusté pour la formulation quasi-variationnelle correspondante. Ainsi, en utilisant les résultats d'existence du problème d'inéquation quasi-variationnelle, nous montrons un résultat d'existence de solution pour le problème de quasi-optimisation. Notons que nous avons besoin d'obtenir certaines propriétés de continuité de l'opérateur normal ajusté (semi-continuité supérieure ou fermeture) qui ont déjà été étudiées pour le cas de dimension finie par J. Borde et J.P. Crouzeix dans [22], que on peut citer comme suit

Si f est une fontion semi-continue inférieurement en un point. Alors son opérateur normal strict est fermé en ce point.

Ensuite J.P Crouzeix et A. Eberhard montrent dans [29] que

Si f est une fonction semi-strictement quasi-convexe et semi-continue inférieurement en un point en dehors de son argument minimum. Alors son opérateur normal est fermé en ce point.

Nous allons montrer dans le Chapitre 3 un résultat similaire pour l'opérateur normal ajusté et en dimension finie que l'opérateur normal ajusté normalisé a la propriété de semi-continuité supérieure.

La première partie de cette thèse contient enfin l'étude de l'équilibre du traffic dans un réseau dont les données dépendent du temps. Le premier auteur qui a étudié les réseaux de transport a été A.C. Pigou dans [78] en 1920, qui considère deux nœuds et deux liaisons du réseau de transport. Citons aussi F.H. Knight dans [63] en 1924. Mais c'est seulement au cours des dernières décennies que le problème de l'équilibre du traffic d'un réseau a attiré l'attention de plusieurs chercheurs. En 1952, J.G. Wardrop dans [95] a jeté les bases pour l'étude de la théorie de traffic des transports. Il a proposé deux principes qui, même aujourd'hui portent son nom. Les principes de Wardrop.

i) Les frais de voyage dans toutes les routes réellement utilisées sont égaux, et moindres que celles qui seraient expérimentées par un seul véhicule sur une route inutilisée.

ii) Le temps moyen de déplacement est minimal.

La formulation mathématique rigoureuse des principes de Wardrop a été proposé par M.J. Beckmann, C.B. McGuire et C.B Winsten en 1956 dans [20]. Ils ont montré l'équivalence entre les conditions d'équilibre et les conditions de Kuhn-Tucker d'un problème d'optimisation bien construit, sous une hypothèse de symétrie sur les fonctions sous-jacentes. En 1979, M.J. Smith dans [91] a montré que la solution d'équilibre peut être exprimée en termes d'inéquation variationnelle. Cela a été une étape cruciale, car elle a permis l'application de la puissante machinerie des inéquations variationnelles pour étudier le problème de l'équilibre du traffic d'un réseau dans le cadre plus général. Depuis, de nombreux auteurs, tels que S. Dafermos dans [30], F. Giannessi et A. Maugeri dans [44, 45] et A. Nagurney dans [76], et d'autres ont étudié le problème l'équilibre du traffic en utilisant la formulation par inéquation variationnelle.

Le modèle de base d'un réseau de traffic se compose d'un ensemble de paires de origine-destination de noeuds désigné par W et constitués de n_W éléments. Notons l'ensemble des chemins joignant la paire origine-destination w par P_w. On suppose que les chemins sont acycliques. On désigne P avec n_P éléments, l'ensemble de tous les chemins joignant toutes les paires origine-destination du réseau. On considère les vecteurs de flux $x \in \mathbb{R}^{n_P}$, où x_r avec $r \in P$ dénote le flux sur le chemin r. Un flux sera réalisable s'il satisfait d'une part aux contraintes de capacité

$$0 \leq x_r \leq \mu_r, \text{ pour tout } r \in P,$$

et, d'autre part, la demande requise

$$\sum_{r \in P_w} x_r = d_w, \text{ pour tout } w \in W,$$

où $\mu \in \mathbb{R}_+^{n_P}$ et $d \in \mathbb{R}_+^{n_W}$.
Introduisons la matrice d'incidence entre paires origine-destination et routes $\Phi = (\Phi_{w,r})$, avec $w \in W$ et $r \in P$ vérifiant

$$\Phi_{w,r} := \begin{cases} 1, & \text{si le chemin } r \text{ joint la paire } w, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

La contrainte de demande peut alors être écrite en notation matricielle-vecteur comme suit

$$\Phi x = d.$$

L'ensemble des flux réalisables est alors donné par

$$K := \{x \in \mathbb{R}^{n_P};\ 0 \leq x \leq \mu, \quad \Phi x = d\}\,.$$

La fontion de coût est donnée par $C : K \to \mathbb{R}^{n_P}$. Alors, à tout flux réalisable $x \in K$, correspond un vecteur de coût $C(x) \in \mathbb{R}^{n_P}$; $C_r(x)$ donne le coût marginal d'envoi d'une unité supplémentaire de flux à travers le chemin r lorsque le flux x déjà est réalisé. Un flux réalisable $x \in K$ est dit flux d'équilibre si : pour tout $w \in W$ et tout $q, s \in P_w$, on a que

$$\text{si } C_q(x) < C_s(x) \text{ alors } x_q = \mu_q \text{ ou } x_s = 0. \tag{6}$$

La condition (6) est appelée "condition de Wardrop".

Plus tard, en 1999, P. Daniele , A. Maugeri et W. Oettli dans [31] ont étudié le problème de l'équilibre du traffic dans un réseau dépendent du temps. Ce nouveau concept est issu de l'observation que la structure physique des réseaux peut rester inchangée, mais que les phénomènes qui se produisent dans ces réseaux varient avec le temps. Ils ont montré le lien entre les problèmes d'équilibre des réseaux dynamiques et des inéquations variationnelles évolutives : les conditions d'équilibre dépendent du temps de ce problème admettent une reformulation en termes d'inéquation variationnelle évolutive. Ensuite P. Daniele, A. Nagurney et D. Parkes dans [32] ont considéré le cas multiclasses. L'une des principales hypothèses, dans [31, 32], pour obtenir l'existence d'équilibre dans le traffic consiste à supposer que la fonction de coût, ici "de dimension infinie", est pseudo-monotone. Dans [19], Barbagallo et dans [18] Barbagallo-Cojocaru ont aussi utilisés une hypothèse de pseudo-monotonie, mais cette fois sur une fonction de coût de dimension finie. Notre objetif est de montrer que cette hypothèse de pseudo-monotonie peut être affaiblie. Notons que F. Raciti et L. Scrimali dans [79], montrent qu'il est possible de connecter ces fonctions de coûts définies dans des espaces différents. Nous étendons dans le Chapitre 3 les résultats d'équilibre de [31, 32] et d'équilibre continue de [19, 18] au cas quasi-monotone et ceci dans le cas des fonctions de coût infinies et des fonctions de coût finies.

Comme dans le cas "statiques", non dépendent du temps, nous considérons que le réseau dynamique est composé d'un ensemble de paires de nœuds origine-destination noté W, composé de n_W éléments. Notons l'ensemble des chemins joignant la paire origine-destination w par P_w. Nous supposons que les routes sont acycliques. On dénote par P, avec n_P éléments, l'ensemble de tous les chemins joignant toutes les paires origine-destination du réseau. Supposons que le traffic est composé de "classes" (en anglais "jobs") de traffic et qu'il y a K "classes" ; les classes seront dénotées par k.

La demande, notée par $d_w^k(t)$, correspond au traffic généré entre la paire origine-destination w au temps t et pour la classe k. Le flux sur le chemin r au temps t de la classe k, qui est supposé être non-négatif, sera noté par $x_r^k(t)$.

Les demandes, supposées connues, impose l'équation de conservation suivante à chaque moment t :

$$d_w^k(t) = \sum_{r \in P_w} x_r^k(t), \quad \forall w \in W,\ k \in K,$$

c'est-à-dire, la demande associée à une paire origine-destination w et de la classe k sera égale à la somme des flux de la même classe sur les chemins reliant la paire origine-destination. Nous supposons que le traffic associé à chaque paire origine-destination est divisible et peut être acheminé par plusieurs chemins. De plus, nous aurons

$$0 \leq x_r^k(t) \leq \mu_r^k(t) \quad \forall k \in K,\ \forall r \in P,$$

où $\mu_r^k(t)$ est la capacité sur le chemin r pour la classe k au temps t.

Les demandes en temps t des différentes classes pour toutes les paires origine-destination sont regroupées dans le vecteur $d(t)$, $K \times n_W$ -dimensionnel. De même, nous avons regroupés tous les types de chemins de flux pour le temps t dans le vecteur $x(t)$, $K \times n_P$ -dimensionnel. Les capacités sur les chemins pour le temps t sont regroupées dans le vecteur $\mu(t)$, $K \times n_P$ -dimensionnel.

Pour des raisons techniques, les flux sur les chemins sont éléments de l'espace de Banach réflexif $L^p([0,T], \mathbb{R}^{K \times n_P})$ avec $p > 1$. Ainsi, nous définissons

$$\mathcal{A} = \left\{x \in L^p([0,T], \mathbb{R}^{K \times n_P}) : 0 \leq x(t) \leq \mu(t) \text{ p.p. en } [0,T]\right\}$$

Nous supposons que le vecteur capacité $\mu \in L^p([0,T], \mathbb{R}^{K \times n_P})$.

Soit $\Phi = (\Phi_{kw,kr})$ la matrice d'incidence entre les paires et les routes de toutes sortes, avec l'élément $\Phi_{kw,kr}$ égal à 1 si le chemin r appartient à P_w, et 0, sinon. Ainsi, l'ensemble des flux réalisables est donné par

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathcal{A} :\ \Phi x(t) = d(t) \text{ p.p. en } [0,T]\}.$$

Nous supposons que le vecteur de demande $d \in L^q([0,T], \mathbb{R}^{K\times n_W})$ et

$$0 \leq d(t) \leq \Phi\mu(t) \text{ p.p. en } [0,T].$$

Les deux fonctions de coût que nous considérons sont

i) Soit $\mathcal{C} : L^p([0,T], \mathbb{R}_+^{K\times n_P}) \to L^q([0,T], \mathbb{R}_+^{K\times n_P})$ la fonction de coût. Un flux $x \in \mathcal{K}$ est dit un flux d'équilibre dépendant du temps en dimension infinie (selon la généralisation du principe de Wardrop), si pour tout $w \in W$, et tout $k \in K$, tout $q, s \in P_w$ et p.p. $[0,T]$ l'implication suivante est satisfaite

$$\text{Si } \mathcal{C}_q(x)(t) < \mathcal{C}_s(x)(t) \text{ alors } x_q(t) = \mu_q(t) \text{ ou } x_s(t) = 0.$$

ii) Soit $C : [0,T] \times \mathbb{R}_+^{K\times n_P}) \to \mathbb{R}_+^{K\times n_P}$ la fonction de coût. Un flux $x \in \mathcal{K}$ est dit un flux d'équilibre dépendant du temps en dimension finie, si pour tout $w \in W$, tout $k \in K$, tout $q, s \in P_w$ et p.p. $[0,T]$ l'implication suivante est satisfaite

$$\text{Si } C_q(t, x(t)) < C_s(t, x(t)) \text{ alors } x_q(t) = \mu_q(t) \text{ ou } x_s(t) = 0.$$

Dans le Chapitre 3, nous prouvons des résultats d'existence d'équilibre pour des problèmes de traffic dans des réseaux gouvernés par une fonction de coût quasi-monotone, généralisant ainsi les résultats de [19, 18, 31, 32].

Dans [79, 17], les auteurs considérent le cas élastique, c'est-à-dire le cas où la demande ne dépend pas seulement du temps mais dépend aussi du flux. En fait, il est très naturel de prendre en compte que la demande de voyages dépend de l'évaluation de la quantité des flux de traffic sur les chemins. Plus précisément, la fonction de demande d sera supposée être dépendante du flux d'équilibre $x(t)$, c'est-à-dire $d : [0,T] \times \mathbb{R}^{K\times n_P} \to \mathbb{R}^{K\times n_W}$. D'où l'opérateur de constrainte est un opérateur multivoque $\mathcal{K}_e : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ défini par

$$\mathcal{K}_e(x) = \{z \in \mathcal{A} : \quad \Phi z(t) = d(t, x(t)) \text{ p.p. en } [0,T]\}.$$

Pour le cas élastique, dans le Chapitre 3, on donne la définition de l'équilibre via la condition de Wardrop et on montre qu'elle coïncide en fait avec la formulation variationnelle définie dans [79]. Des résultats d'existence d'équilibre dans le cas élastique sont aussi donnés.

Enfin, basée sur le fait que les données, et en particulier la demande seule éventuellement peut être déterminée avec une certaine imprécision, la notion d'équilibre du traffic avec tolérance sur la demande a été proposée et étudiée dans les travaux de P.Q. Khanh et L.M. Luu dans [59, 60] et de L. Q. Anh et P. Q. Khanh dans [17]. Dans ces travaux, les problèmes de traffic sont considérés comme statiques dans le sens où ils ne dépendent pas du temps. Aussi dans le Chapitre 3, nous avons adapté l'approche développée ci-dessus au problème du traffic dépendent du temps avec tolérance sur la demande, pour les deux cas élastique et non élastique.

Programmation semi-continue

Le problème de programmation semi-continue (inférieure ou supérieure) consiste à optimiser (minimiser ou maximiser) une fonction semi-continue (inférieurement ou supérieurement) sur un ensemble fermé :

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{t.q.} & x \in X, \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ll} \max & f(x) \\ \text{t.q.} & x \in X, \end{array}.$$

Sans perte de généralité (car tout problème de maximisation se réduit à un problème de minimisation), nous considérons simplement le problème de minimisation

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{t.q.} & x \in X, \end{array} \tag{7}$$

D'autre part, on sait que si $X = \mathbb{R}^n$, le problème est dit problème de minimisation sans contrainte, et ce problème est difficile en général et il y a peu littérature sur le sujet, donc sans perte de généralité nous redéfinissons f, considérant $f(x) = +\infty$ lorsque $x \notin X$, et ainsi on obtient que notre problème de minimisation est un problème de minimisation sans constrainte, c'est-à-dire

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{t.q.} & x \in \mathbb{R}^n. \end{array} \tag{8}$$

Il est bien connu que la programmation convexe se compose de problèmes de minimisation associé à une fonction convexe et un thème central en est la théorie de la dualité. Dans son approche moderne, selon la littérature est principalement due à T. Rockafellar [83, 81]. Le concept de conjugué d'une fonction convexe est due à W. Fenchel [40], et il est fondamental pour la théorie de la dualité en programmation convexe. Etant donnée une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sa fonction conjugué est dénotée par $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et définie par

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x^*, x\rangle - f(x)\}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dénote le produit scalaire euclidien. Ainsi, l'inégalité connue dans la théorie de dualité convexe est

$$\langle x^*, x\rangle \leq f(x) + f^*(x^*) \tag{9}$$

qui est l'extension de l'inégalité de Young.

J.J. Moreau dans [73], prolonge la conjugaison de Fenchel en utilisant les fonctions de couplage en 1970. La $c-$conjugée $f^c : P \to \bar{\mathbb{R}}$ d'une fonction $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ est définie par

$$f^c(p) = \sup_{x \in X}\{c(p,x) - f(x)\}, \tag{10}$$

où X et P sont des ensembles arbitraires, et $c : P \times X \to \bar{\mathbb{R}}$ est une fonction de couplage. Après le travail de Moreau, plusieurs auteurs ont donné des versions différentes de cette extension. Par exemple nous pouvons citer les travaux de J.E. Martínez-Legaz dans [69], de I. Singer et J.E. Martínez-Legaz dans [68, 67] et le livre de I. Singer [88] cas particuliers de l'extension de Moreau, pour l'analyse quasi-convexe et au problème de minimisation dont la fonction objectif est la différence de fonctions convexes, aussi connue comme programmation DC. Dans le travail de A. Rubinov [84] la notion de conjugaison est étendue pour la convexité abstraite.

Nous devons également mentionner les travaux de B. Svaiter dans [93], qui introduit une nouvelle théorie générale de la dualité appelé la dualité de l'homme pauvre qui inclut comme cas particulier la dualisation via les fonctions de couplage. Le cas considéré ici sera un cas particulier de cette dualisation mais nous fournirons des informations supplémentaires sur la fonction conjuguée.

Nous montrons dans le Chapitre 4 que même si la fonction f est convexe, la conjuguée f^c n'est pas convexe en général si on utilise une fonction de couplage arbitraire. Cet exemple nous a motivé à penser à une fonction de couplage qui assure la convexité de la fonction conjuguée qui est la clé de la théorie de la dualité convexe. Ainsi nous pouvons voir les travaux de F. Flores Bazán dans [41, 42] qui prolonge la conjugaison de Fenchel comme un cas particulier du cas de Moreau, mais il a travaillé dans un espace métrique et son espace dual est constitué des fonctions continues à valeurs réelles. Le principal outil dans leur travail est le théorème sélection de Michael. Ainsi, nous introduisons un cas particulier de fonction de couplage avec une légère modification de l'inégalité (9), pour une classe particuliere de fonctions propres. Notre modification est la suivante. soit l'ensemble suivant :

$$\mathcal{C}_n = \{p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid p \text{ est une fonction continue}\} \tag{11}$$

et la fonction de couplage est $\varphi : \mathcal{C}_n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(p,x) = \langle p(x), x\rangle.$$

On peut voir aisément qu'avec les opérations usuelles de somme + et multiplication scalaire réelle $\cdot$, on a que $(\mathcal{C}_n, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Comme nous le savons de la théorie de la conjugaison de Fenchel, la fonction conjuguée est une fonction convexe, mais plus encore c'est une fonction semi-continue inférieurement sur son domaine. Nous introduisons alors une topologie sur $\mathcal{C}_n$ de sorte que nous pouvons assurer que la fonction conjuguée est semi-continue inférieurement. Ainsi, pour chaque $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la fonction $\ell_x : \mathcal{C}_n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\ell_x(p) = \langle p(x), x \rangle \tag{12}$$

est linéaire. Dans le Chapitre 4 nous considérons alors Γ^n la topologie la moins fine de sorte que pour chaque $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la fonction linéaire ℓ_x est continue. Maintenant, étant donné que la topologie euclidienne est Hausdorff, alors une question naturelle est : la topologie $(\mathcal{C}_n, \Gamma^n)$, est-elle Hausdorff ? Nous montrons que la réponse à cette question est négative. Cela nous motive à introduire une autre topologie (qui a déjà été défini par W. Sosa dans [90]), que nous dénoterons par Θ_n et elle est telle que les ensembles ouverts base sont les boules de centre $p \in \mathcal{C}_n$ et rayon $\epsilon > 0$, définis par

$$B(p, \epsilon) = \{q \in \mathcal{C}_n : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|p(x) - q(x)\| < \epsilon\}. \tag{13}$$

Nous allons montrer que $(\mathcal{C}_n, \Theta_n)$ est un espace vectoriel topologique de Hausdorff et que $\Gamma^n \subseteq \Theta_n$.

Il a également été montré par W. Sosa dans [90] et par souci d'exhaustivité, nous allons montrer dans le Chapitre 4, qu'il y a une relation particulière entre $\mathcal{C}_n$ et l'espace $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, où

$$C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \{h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid h \text{ est une fonction continue}\}. \tag{14}$$

Ainsi, afin de comprendre ce dernier résultat, nous définissons l'ensemble suivant, $B(h, \epsilon)$ qui sera ci-après appelé la boule de centre $h \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et rayon $\epsilon > 0$, et qui est définie comme

$$B(h, \epsilon) := \{f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x) - h(x)| < \epsilon\}. \tag{15}$$

Ensuite, on dénote par Γ_n la topologie dont les ensembles ouverts base sont ces boules. Nous montrons que $(C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \Gamma_n)$ est un espace vectoriel topologique de Hausdorff.

Il est bien connu, que pour la topologie Euclidienne de $\mathbb{R}$ les boules ouvertes sont les intervalles centrés en chaque point $\lambda \in \mathbb{R}$ et chaque $\epsilon > 0$,

$B(\lambda, \epsilon)$. Nous utiliserons aussi la même notation pour les boules de $\mathcal{C}_n \times \mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$B((p, \lambda), \epsilon) = \{(q, \beta) \in \mathcal{C}_n \times \mathbb{R} : q \in B(p, \epsilon) \text{ et } , \beta \in B(\lambda, \epsilon)\} \tag{16}$$

et on dénote par Γ_n^n la topologie de $\mathcal{C}_n \times \mathbb{R}$ où les ensembles ouverts base sont ces boules. Nous remarquons que $\mathcal{C}_n \times \mathbb{R}$ avec la topologie Γ_n^n est un espace vectoriel topologique de Hausdorff.

Si nous considérons $\Phi : (\mathcal{C}_n \times \mathbb{R}, \Gamma_n^n) \to (C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \Gamma_n)$ définie par

$$(\Phi(p, \lambda))(x) = \langle p(x), x \rangle + \lambda \tag{17}$$

on peut voir que Φ est une application affine linéaire continue. La relation entre $\mathcal{C}_n$ et l'espace $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est justement que $\Phi(\mathcal{C}_n \times \mathbb{R})$ est dense dans $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Par rapport à notre objectif, les outils fondamentaux dans le développement de la théorie de la conjugaison convexe, sont le théorème de séparation des ensembles convexes, et les théorèmes dus à M. Eidelheit (voir [36]) et à J. Dieudonne (voir [34, 35]). L'intuition géométrique a contribué à démontrer le théorème de séparation. Ici, nous allons changer la convexité par la fermeture, donc nous avons besoin de remplacer l'intuition géométrique par un autre résultat important, connu comme le théorème de sélection de Michael (voir [71]). En fait, W. Sosa dans [90] a montré et nous aussi par souci d'exhaustivité, nous allons montrer dans le Chapitre 4, qu'il y a un lien entre le théorème de séparation et le théorème de sélection de Michael. Ensuite, en utilisant ce lien, nous allons prouver dans le Chapitre 4, un résultat de séparation de deux ensembles fermés disjoints.

Associé à une fonction propre $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ nous définissons sa conjuguée "étendue" $f^* : \mathcal{C}_n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ comme

$$f^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle p(x), x \rangle - f(x)\}.$$

Nous allons montrer dans le Chapitre 4 que la fonction conjuguée d'une fonction propre est une fonction convexe. De plus, la fonction est semi-continue inférieurement si et seulement si sa fonction conjuguée est semi-continue inférieurement.

Une autre propriété aussi importante de la conjugaison de Fenchel est le fait que si la fonction est convexe et semi-continue inférieurement sa bi-conjugué coïncide avec elle-même. Alors, associé une fonction $\phi : \mathcal{C}_n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, nous définissons la fonction $\phi^* : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ par

$$\phi^*(x) = \sup_{p \in \mathcal{C}_n} \{\langle p(x), x\rangle - \phi(p)\}.$$

Ainsi nous pouvons définir la bi-conjuguée d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ propre , $f^{**} : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$, par

$$f^{**}(x) = \sup_{p \in \mathcal{C}_n} \{\langle p(x), x\rangle - f^*(p)\}.$$

Dans le Chapitre 4, nous allons montrer que si la fonction est semi-continue inférieurement si et seulement si elle coïncide avec sa bi-conjuguée.

J.P. Crouzeix dans [28] introduit les fonctions de régularisation semi-continue, convexe et quasi-convexe d'une fonction. Nous montrons que $f^{**} = \overline{f}$, c'est-à-dire que la bi-conjuguée f^{**} est la plus grande minorante semi-continue inférieurement de f. Ainsi, W. Sosa dans [90] a montré et nous par souci d'exhaustivité, nous allons montrer dans le Chapitre 4, qu'on peut étendre le résultat de Fenchel d'égalité entre une fonction et sa bi-conjuguée pour le cas de fonctions semi-continues inférieurement, c'est-à-dire qu'on aura l'involution, selon le travail de B. Svaiter dans [93]. L'égalité entre une fonction et sa bi-conjuguée dans le sens de Fenchel joue un rôle important dans la théorie de dualité convexe, puisque ce résultat nous dit que si la fonction est convexe et semi-continue inférieurement alors il n'y a pas de rupture de dualité. Par conséquent continuant à étendre les résultats de Fenchel, nous allons montrer dans le Chapitre 4 qu'il est possible d'étendre ce résultat au cas des fonctions semi-continues inférieurement.

Ainsi, notre problème originel (8), est formulé comme

$$\begin{array}{lll} (LSCP) & \min & f(x) \\ & \text{t.q.} & x \in \mathbb{R}^n, \end{array}$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est propre et semi-continue inférieurement.

Un concept puissant pour développer et étudier une théorie de la dualité est l'utilisation des perturbations. Ainsi, associé à une fonction de perturbation ϕ de f, nous formulons le problème dual associé à (LSCP) et à ϕ comme

$$\begin{array}{lll} (DLSCP) & \min & \phi^*(0, p) \\ & \text{t.q.} & p \in \mathcal{C}_n. \end{array}$$

Nous montrons dans le Chapitre 4 que le dual de (LSCP) est un problème de programmation convexe. Maintenant, une question naturelle est : toutes les fonctions de perturbation sont-elles utiles pour obtenir des informations sur le dual du problème primal ? La réponse à cette question est négative, en général. Cependant, nous donnons une fonction de perturbation particulière, ce qui nous permet de montrer que le dual de (DLSCP) est (LSCP), évidemment sous cette perturbation.

Puisque notre espace dual est de dimension infinie, on introduit la notion d'espace dual de conjugaison, comme le sous-espace contenant les fonctions constantes de $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^n$ tel que la bi-conjuguée est obtenu de sa définition en changeant tout l'espace $\mathcal{C}_n$ pour cet espace. C'est-à-dire, qu'il sera commode de restreindre f^* à quelque sous-espace de $\mathcal{C}_n$, ainsi nous considérons $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}_n$ contenant toutes les fonctions constantes et on définit $f^{**}_{\mathcal{S}} : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ par

$$f^{**}_{\mathcal{S}} = \sup_{p \in \mathcal{S}} \{ \langle p(x), x \rangle - f^*(p) \}.$$

On dira que $\mathcal{S}$ est un espace dual de conjugaison si $f^{**}_{\mathcal{S}} = f^{**}$.

Nous montrons dans le Chapitre 4 que pour le cas convexe, l'espace dual de conjugaison est réduit à l'espace de constantes. Nous montrons aussi qu'une fonction propre est semi-continue inférieurement si et seulement si son espace dual de conjugaison est $\mathcal{C}_n$. Nous montrons aussi que l'intersection de deux espaces duaux de conjugaison n'est pas d'espace de conjugaison. Enfin nous donnons un exemple montrant que l'espace dual de conjugaison d'une fonction quadratique est un sous-espace propre de $\mathcal{C}_n$. De plus l'espace dual de conjugaison est de dimension finie.

Les travaux présentés dans les Chapitres 2, 3 et 4 sont extraits des articles suivants :

(a) **Fenchel-Moreau conjugation for lower semi-continuous functions**, Optimization 2011, 1-13, iFirst. DOI :10.1080/02331934.2010.-507273. (En collaboration avec, A Karas. Ribeiro, W. Sosa and Y. Yuan.)

(b) **Semicontinuity of the solution map of quasivariational inequalities**, Journal of Global Optimisation, 50 (2011), 93-105. (En collaboration avec D. Aussel)

(c) **Existence of equilibria for time-dependent traffic problem**, Preprint, 2011, 14 pp. (En collaboration avec D. Aussel)

(d) **Existence results for quasimonotone quasivariational inequalities : part I Convergence results**, Preprint, 2011, 14 pp. (En collaboration avec D. Aussel)

(e) **Existence results for quasimonotone quasivariational inequalities : part II Existence and applications**, Preprint, 2011, 18 pp. (En collaboration avec D. Aussel)

Chapitre 1

Notations, définitions et rappels

Dans ce chapitre nous rappellerons les définitions basiques de l'analyse convexe généralisée, de continuité pour les opérateurs multivoques. Nous terminerons ce chapitre en définissant différents problèmes d'inéquation variationnelle et quasi-vairationnelle, et en rappelant quelques résultats classiques concernant ces problèmes.

1.1 Éléments d'analyse convexe

On dit que $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est *propre* si le domaine de f est non vide, où $\operatorname{dom} f = \{x \in X : \ f(x) \in \mathbb{R}\}$.

On dit que $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est *convexe* si pour tout $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f$ et tout $t \in]0,1[$ on a

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

La convexité d'une fonction est aussi caractérisée par la convexité de son épigraphe :

$$f \text{ est convexe si et seulement si epi } f \text{ est un ensemble convexe.}$$

où $\operatorname{epi}(f) = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} : \ f(x) \leq \lambda\}$.

Une fonction $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est *semi-continue inférieurement* (en abrégé s.c.i.) si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, ses sous-niveaux $S_f(\lambda)$ sont fermés, où $S_f(\lambda) = \{x \in X : \ f(x) \leq \lambda\}$. De façon équivalente, f est semi-continue inférieurement si et seulement si $\operatorname{epi} f$ est un ensemble fermé.

D'autre part, on dit qu'une fonction $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est semi-continue supérieurement si $-f$ est semi-continue inférieurment.

Etant donnée une fonction $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, la fonction *enveloppe semi-continue inférieurement* de f, notée par $\overline{f}$, est la fonction dont l'épigraphe est l'ensemble $\operatorname{epi} \overline{f} = \overline{\operatorname{epi} f}$.

À propos du concept de fonction convexe et semi-continue inférieurement on a l'assertion suivante : Si $\{f_i\}_{i \in I}$ est une famille de fonctions convexes (ou semi-continues inférieurement), alors la fonction $\sup_{i \in I} f_i : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, définie par

$$(\sup_{i \in I} f_i)(x) = \sup_{i \in I} f_i(x), \text{ pour tout } x \in X,$$

est convexe (ou semi-continue inférieurement).

On dit que $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est *quasi-convexe* si pour tout $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f$ et tout $t \in [0,1]$ on a

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

De façon équivalente, f est quasi-convexe si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, ses sous-niveaux $S_f(\lambda)$ sont convexes.

On dira qu'une fonction $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est *semi-strictement quasi-convexe* si f est quasi-convexe et pour tout $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f$ avec $f(x_1) < f(x_2)$ on a

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) < f(x_2).$$

On peut voir aisément que toute fontion f semi-continue inférieurement et semi-strictement quasi-convexe satisfait la propriété suivante :

$$\forall\ \lambda > \inf_X f, \quad \mathrm{cl}(S_\lambda^<(f)) = S_\lambda(f).$$

où $S_f^<(\lambda) = \{x \in X :\ f(x) < \lambda\}$. Ceci signifie que pour tout $x \in X$ tel que $f(x) > \inf_X f$, le point x appartient à la frontiere du sous-niveau $S_f(\lambda)$ avec $\lambda = f(x)$.

Afin de développer une analyse variationnelle unifiée pour les fonctions quasi-convexes, D. Aussel et N. Hadjisavvas étaient définis le sous-niveau ajusté d'une fontion f en $x \in X$ dans [13], comme

$$S_f^a(x) = S_f(f(x)) \cap B(S_f^<(f(x)), \rho_x)$$

avec $\rho_x = dist(x, S_f^<(f(x)))$, si $x \notin \operatorname{argmin} f$, et $S_f^a(x) = S_f(f(x))$ sinon.

Proposition 1.1.1 ([13])**.** *f est quasi-convexe si et seulement si pour tout $x \in X$ le sous-niveau $S_f^a(x)$ est convexe.*

Associée une fonction $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on définit *le cône normal, le cône normal stricte et le cône normal ajusté* comme les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} N_f(x) &= \{x^* \in X^* : \langle x^*, y - x\rangle \le 0,\ \forall\ y \in S_f(f(x))\}, \\ N_f^<(x) &= \{x^* \in X^* : \langle x^*, y - x\rangle \le 0,\ \forall\ y \in S_f^<(f(x))\}, \\ N_f^a(x) &= \{x^* \in X^* : \langle x^*, y - x\rangle \le 0,\ \forall\ y \in S_f^a(x)\}. \end{aligned}$$

Comme il a été montré dans [13, 14, 15, 11], cet opérateur a des propriétés très intéressantes

Proposition 1.1.2. *Soit $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction. Alors*

i) N_f^a est (cycliquement) quasi-monotone ;

ii) Si f est quasi-convexe solide et semi-continue inférieurement, alors N_f^a est non trivial (c'est-à-dire $N_f^a(x) \setminus \{0\}$ est non vide sur le domaine de f) ;

iii) (Condition suffisante) si f est quasi-convexe, radialement continue sur $\operatorname{dom} f$ *et $C \subset$* $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$ *est tel que* $\operatorname{conv}(C) \subset \operatorname{dom} f$. *Alors toute solution du problème d'inéquation variationnelle de Stampacchia $x \in S(N_f^a \setminus \{0\}, C)$ est un minimiseur global de f sur C.*

iv) (Condition nécessaire et suffisante) si f est continue semi-strictement quasi-convexe et C est convexe non vide, alors

$$x \in \arg\min_{C} f \Leftrightarrow 0 \in N_f^a(x) \setminus \{0\} + N(C,x)$$

où $N(C,x) =$ est le cône normal en x de l'ensemble convexe C.

La conjuguée de Fenchel

La théorie de la conjugaison convexe est à la base de la théorie de la dualité convexe qui est l'un des sujets de recherche les plus importants pour l'optimisation convexe [82] depuis Fenchel introduit la conjuguée de fonctions convexes et semi-continues inférieures [40].

Associée une fonction propre $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on définit la *fonction conjuguée* au sens de Fenchel $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, voir [40, 82], par

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x^*, x\rangle - f(x)\}$$

On peut voir aisément que cette fonction conjuguée f^* est une fonction convexe et semi-continue inférieurement. D'autre part, l'inéquation suivante

$$\langle x^*, x\rangle \leq f(x) + f^*(x^*) \tag{1.1}$$

est une généralisation de l'inéquation de Young's ([48, pp.111]).

Proposition 1.1.3 ([40, 82])**.** *Si on suppose que f est convexe semi-continue inférieurement et propre. Alors f^* est propre.*

Le résultat suivant est dû à Fenchel-Moreau.

Théorème 1.1.4 ([82])**.** *On suppose que f est une fonction convexe semi-continue inférieurement et propre. Alors*

$$f^{**} = f$$

où $f^{**} = (f^*)^*$.

Le résultat suivant est dû à Fenchel-Rockafellar.

Théorème 1.1.5. *Soient f, g deux fonctions propres.*

i) Si f et g sont convexes, alors

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) + g(x)\} = \sup_{x^* \in \mathbb{R}^n} \{-f^*(-x^*) - g^*(x^*)\}.$$

ii) Si g est convexe et semi-continue inférieurement, alors

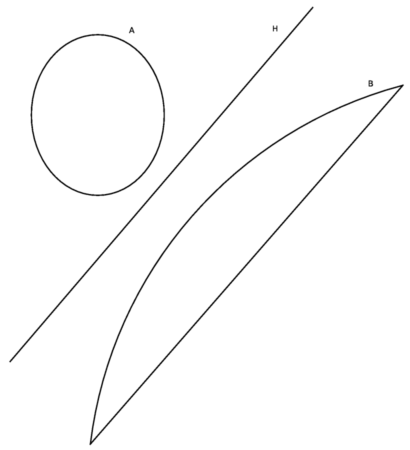
$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) - g(x)\} = \inf_{x^* \in \mathbb{R}^n} \{g^*(x^*) - f^*(x^*)\}.$$

Les théorèmes de séparation

Dans ce qui suis nous utiliserons le théorème de séparation large de Hahn-Banach, que nous rappelons ici en dimension finie.

Théorème 1.1.6 ([82]). *Soient A et B deux sous-ensembles convexes, disjoints et fermés de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe un hyperplan H qui sépare A et B, c'est-à-dire il existe $(x^*, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ tel que :*

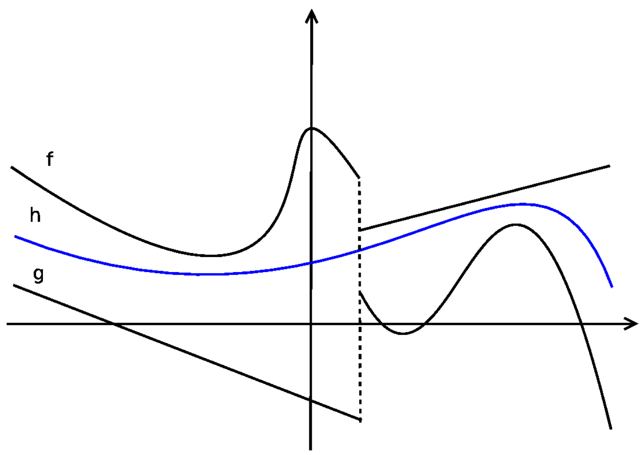
$$\langle x^*, x\rangle \leq \lambda \leq \langle x^*, y\rangle, \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B \tag{1.2}$$



Le théorème de sélection de Michael

L'un des principaux théorèmes de sélection est le théorème de Michael, ici présenté en dimension finie.

Théorème 1.1.7 ([71]). *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement et soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ telle que g est une fonction semi-continue supérieurement. Si $g \leq f$, alors il existe une fonction continue $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $g \leq h \leq f$.*



1.2 Éléments d'analyse multivoque

Un *opérateur multivoque* est une fonction T de X vers 2^Y, c'est à dire, pour tout $x \in X$ on a que $T(x) \subseteq Y$. Nous utiliserons toujours la notation d'un opérateur T du façon suivant $T : X \to 2^Y$. Le domaine de T sera notée par $\mathrm{Dom}\,(T)$, et le graphe de T sera notée par $\mathrm{Gr}(T)$, et correspondent respectivement, aux ensembles :

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Dom}\,(T) & := & \{x \in X; T(x) \neq \emptyset\} \\ \mathrm{Gr}(T) & := & \{(x,y) \in X \times Y; y \in T(x)\}\end{array}$$

Rappelons d'abord qu'un opérateur $T : X \to 2^{X^*}$ est

- *(séquentiellement) fermé* en x_0 si, pour toute suite $(x_n)_n$ de X convergeant vers x_0 et toute suite $(x_n^*)_n$ de X^* telles que, pour tout n, $x_n^* \in T(x_n)$ et $(x_n^*)_n$ converge (fortement) vers un élément x_0^*, on a que $x_0^* \in T(x_0)$.
- *semicontinu inférieurement* en x_0 si, pour toute suite $(x_n)_n$ de X convergeant vers x_0 et n'importe quel élément x_0^* de $T(x_0)$, il existe une suite $(x_n^*)_n$ de X^* convergeant vers x_0^* telle que, pour tout n, $x_n^* \in T(x_n)$.
- *semicontinu supérieurement* en $x_0 \in dom(T)$ si, pour tout voisinage V de $T(x_0)$, il existe un voisinage U de x_0 tel que $T(U) \subset V$.

Sign-continuité

Le concept de *sign-continuité* a été introduit par N. Hadjisavvas dans [47]. Un opérateur $T : X \to 2^{X^*}$ est *lower sign-continu* sur un ensemble convexe K si, pour tout $x, y \in K$, on a :

$$\left(\forall t \in]0,1[, \inf_{x_t^* \in T(x_t)} \langle x_t^*, y - x\rangle \geq 0\right) \Rightarrow \inf_{x^* \in T(x)} \langle x^*, y - x\rangle \geq 0$$

et il est *upper sign-continu* sur un ensemble convexe K si, pour tout $x, y \in K$, on a :

$$\left(\forall t \in]0,1[, \inf_{x_t^* \in T(x_t)} \langle x_t^*, y - x\rangle \geq 0\right) \Rightarrow \sup_{x^* \in T(x)} \langle x^*, y - x\rangle \geq 0.$$

où $x_t = tx + (1-t)y$.

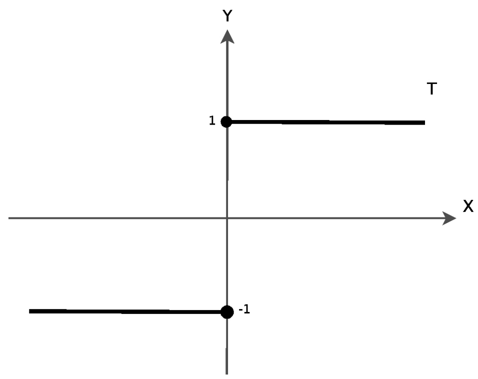
Par exemple, si la restriction de T sur toutes les lignes droites est semicontinue supérieurement par rapport à la topologie faible* dans X^*, c'est-à-dire que T est hemicontinu supérieurement, alors T est upper sign-continu.

De façon symétrique, si la restriction de T sur toutes les lignes droites est semi-continu inférieurement par rapport à la topologie w^* de X^*, c'est-à-dire que T est hemi-continu inférieurement, alors T est lower sign-continu.

L'exemple suivant va montrer que la semi-continuité supérieure n'implique pas en général la lower sign-continuité.

Exemple 1.2.1. *Soit* $T : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ *l'opérateur multivoque défini par*

$$T(x) := \begin{cases} \{-1\} & x < 0 \\ \{-1, 1\} & x = 0 \\ \{1\} & x > 0 \end{cases} .$$



On peut voir aisément que T est semi-continu supérieurement mais il n'est pas lower sign-continu.

Enfin, nous dirons que l'opérateur $T : X \to 2^{X^*}$ est *locally upper sign-continu*, comme dans [1], en x s'il existe un voisinage convexe $\mathcal{V}$ de x et un opérateur upper sign-continu $\Phi_x : \mathcal{V} \to 2^{X^*}$ à valeurs non vide, convexes et w^*-compact satisfaisant, pour tout $v \in \mathcal{V}$, $\Phi_x(v) \subset T(v) \setminus \{0\}$.

Ce concept de locally upper sign-continuité, qui peut sembler être assez technique, est une notion très faible du "type de régularité". Il joue un rôle important dans certains résultats d'existence pour inéquation variationnelle (voir [12, 13]).

Continuité au sens de Mosco

Rappelons d'abord les définitions de *Lower limit* et *Upper limit* au sens de Kuratowski : pour toute suite $(S_n)_n$ de sous-ensembles de l'espace de Banach X,

$$x \in \liminf_n S_n \Leftrightarrow \exists\, (x_n)_n \subset X \text{ tel que } x = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ et } x_n \in S_n,\ \forall\, n.$$

$$x \in \limsup_n S_n \Leftrightarrow \begin{cases} \exists\, (S_{n_k})_k \text{ sous-suite de } (S_n)_n \text{ et } \exists\, (x_{n_k})_k \subset X \\ \text{telles que } x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \text{ et } x_{n_k} \in S_{n_k},\ \forall\, k \end{cases}$$

La version faible de la limite supérieure, notée $w - \limsup_n S_n$, est définie comme l'ensemble des limites faibles de suites $(x_{n_k})_k$, $x_{n_k} \in S_{n_k}$ où $(S_{n_k})_k$ est une sous-suite de $(S_n)_n$. Ce concept a été introduit par U. Mosco dans [75]. On a toujours

$$\liminf_n S_n \subset \limsup_n S_n \subset w - \limsup_n S_n.$$

Ainsi, on dit qu'une suite $(S_n)_n$ de sous-ensembles de X est *Mosco convergente* vers un sous-ensemble S, si les deux inclusions suivantes sont vérifiées :

$$w - \limsup_n S_n \subset S \quad \text{ et } \quad S \subset \liminf_n S_n$$

et une suite $(S_n)_n$ de sous-ensembles de X est *int-Mosco convergente* vers S si et seulement si

$$w - \limsup_n S_n \subset S \quad \text{ et } \quad S \subset \liminf_n \operatorname{int}(S_n).$$

On peut voir aisément que la int-Mosco convergence implique la Mosco convergence, mais l'inverse est faux en général, même pour les sous-ensembles d'intérieur non vide.

Exemple 1.2.2 ([1]). *Considérons la suite de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^2$ définie par $S_n = \mathrm{cl}B(0,1) \cup ([1, 2+1/n] \times \{0\})$. On peut montrer que $(S_n)_n$ est convergente vers $S = \mathrm{cl}B(0,1) \cup ([1,2] \times \{0\})$ au sens de Mosco, mais $(\operatorname{int}(S_n))_n$ est Mosco convergente vers $\mathrm{cl}B(0,1)$.*

Néanmoins, les deux concepts coïncident pour les suites de sous-ensembles convexes ayant un intérieur non vide.

Proposition 1.2.3 ([1]). *Soit $(S_n)_n$ une suite de sous-ensembles convexes de X, avec $\operatorname{int}(S_n) \neq \emptyset$ et S un sous-ensemble de X. Supposons que $\operatorname{int}(S) \neq \emptyset$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

i) $(S_n)_n$ *est Mosco convergente vers* S

ii) $w - \limsup_n S_n \subset S$, $\quad \operatorname{int}(S) \subset \liminf_n \operatorname{int}(S_n)$ *et* S *est convexe*

iii) $(S_n)_n$ *est int-Mosco convergente vers* S.

Notons que si $S : X \to 2^X$, alors

- S a graphe fermé si et seulement si pour toute suite convergente $(x_n)_n$ vers x, on a $\limsup_n S(x_n) \subset S(x)$.
- S est semi-continue inférieurement sur X si et seulement si pour toute suite convergente $(x_n)_n$ vers x, on a $S(x) \subset \liminf_n S(x_n)$.

Ce qui motive la définition suivante

Définition 1.2.4. *Un opérateur $S : X \to 2^X$ est dit :*

i) Mosco continu *en x si, pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers x, la suite $(S(x_n))_n$ est Mosco convergente vers $S(x)$.*

ii) int-Mosco continu *en x si, pour tout suite $(x_n)_n$ convergeant vers x, la suite $(S(x_n))_n$ est* int-*Mosco convergente vers $S(x)$.*

Monotonie généralisée

Un opérateur $T : X \to 2^{X^*}$ est

- quasi-motonone sur un sous-ensemble K si, pour tout $x, y \in K$,

$$\exists\ x^* \in T(x)\ :\ \langle x^*, y - x\rangle > 0 \Rightarrow\ \forall\ y^* \in T(y)\ :\ \langle y^*, y - x\rangle \geq 0.$$

- proprement quasi-monotone sur un sous-ensemble K si, pour tout $x_1, x_2, \cdots, x_n \in K$, et tout $x \in co(\{x_1, x_2, \cdots, x_n\})$, il existe $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tel que

$$\forall x_i^* \in T(x_i) : \quad \langle x_i^*, x_i - x\rangle \geq 0.$$

- pseudo-motonone sur un sous-ensemble K si, pour tout $x, y \in K$,

$$\exists\ x^* \in T(x)\ :\ \langle x^*, y - x\rangle \geq 0 \Rightarrow\ \forall\ y^* \in T(y)\ :\ \langle y^*, y - x\rangle \geq 0.$$

- motonone sur un sous-ensemble K si, pour tout $x, y \in K$ et tout $x^* \in T(x)$ et tout $y^* \in T(y)$,

$$\langle x^* - y^*, x - y\rangle \geq 0.$$

On a toujours que, la monotonie implique la pseudo-monotonie et cette dernière implique la propre quasi-monotonie et qui implique elle même la quasi-monotonie.

1.3 Inéquation variationnelle

Nous notons par $S(T, K)$ l'ensemble de solutions du problème d'inéquation variationnelle de Stampacchia défini par un sous-ensemble K de X et un opérateur multivoque $T : X \to 2^{X^*}$. Les ensembles solution naturels qui peuvent être considéré pour ce type d'inéquation variationnelle sont l'ensemble de solution classique, l'ensemble de solution faible et l'ensemble de solution stricte S, S^w et $S^<$ définie par

$$S(T, K) = \{x \in K; \exists\ x^* \in T(x) \text{ avec } \langle x^*, y - x\rangle \geq 0,\ \forall\ y \in K\},$$

$$S^w(T,K) = \{x \in K;\ \forall\, y \in K\ \exists\, x^* \in T(x) \text{ avec } \langle x^*, y - x\rangle \geq 0\}\,,$$

et

$$S^>(T,K) = \left\{ x \in K \ : \ \begin{array}{l} \exists\, x^* \in T(x) \text{ avec} \\ \langle x^*, y - x\rangle > 0, \quad \forall\, y \in K \setminus \{x\} \end{array} \right\}.$$

Néanmoins, puisque notre objectif est d'étudier le cas des inéquations quasi-monotones, qui correspont aux inéquations variationnelles définies par un opérateur quasi-monotone T, nous allons utiliser un autre concept d'opérateur solution, à savoir l' *opérateur solution étoile* S^*. Cette légère adaptation de l'opérateur solution S s'est avéré plus adapté que S ou $S^<$ pour des inéquations variationnelles quasi-monotones, en particulier pour exprimer les conditions d'optimalité en programmation quasi-convexe (voir [13], [15]). L'opérateur solution étoile S^* est défini par

$$S^*(T,K) = \left\{ x \in K \ : \ \begin{array}{l} \exists\, x^* \in T(x) \setminus \{0\} \\ \text{avec } \langle x^*, y - x\rangle \geq 0, \quad \forall\, y \in K \end{array} \right\}.$$

Ainsi $S^*(T,K)$ est tout simplement construit en enlevant de $S(T,K)$ les solutions triviales (c'est-à-dire points x tels que $0 \in T(x)$). Il est important de noter que toutes les solutions étoiles $x \in S^*(T,K)$ sont sur la frontiere de l'ensemble de contraintes K. En effet, si x est un point intérieur de K et $\rho > 0$, alors pour tout $x^* \in T(x) \setminus \{0\}$ il existe un élément $y \in B(x,\rho) \cap K$ tel que $\langle x^*, y - x\rangle < 0$ montrant que x n'est pas une solution étoile.

Évidemment $S^<(T,K) \subseteq S^*(T,K) \subseteq S(T,K) \subseteq S^w(T,K)$ et si T est quasi-monotone, alors $card(S^<(T,K)) \leq 1$.

Pour adaptation de la preuve de [1, Proposition 2.1], on obtient le lemme suivant qui sera nécessaire pour prouver la proposition ci-dessus.

Lemme 1.3.1. *Soit $x \in S^*(T,K)$ tel que $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$. Soit $x^* \in T(x) \setminus \{0\}$ tel que $\langle x^*, y - x\rangle \geq 0$, pour tout $y \in K$. Alors $\langle x^*, y - x\rangle > 0$, pour tout $y \in \mathrm{int}(K)$.*

D'autre part, nous notons par $M(T,K)$ l'ensemble de solutions de l'inéquation variationnelle de Minty

$$M(T,K) = \{x \in K; \forall\, y \in K,\ y^* \in T(y),\ \langle y^*, y - x\rangle \geq 0\}\,.$$

On peut voir aisément que $M(T,K)$ est convexe et fermé, si K est convexe et fermé aussi.

Un résultat très important de Minty montre la relation entre l'ensemble de solution de Stampacchia et l'ensemble solution de Minty, dans le cas que T univoque.

Théorème 1.3.2 ([72]). *Soit H un espace de Hilbert, K un sous-ensemble convexe compact de H et soit $T : H \to H$ un opérateur monotone et hemicontinu. Alors $S(T, K) = M(T, K)$.*

Les résultats de J. Reinhard dans [80] montrent la relation entre la monotonie généralisée et les problèmes d'inéquation variationnelle.

Proposition 1.3.3 ([80]). *Soit $T : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ un opérateur. Alors,*

i) T est quasi-monotone si et seulement si pour tout $x, y \in X$, on a $M(T, [x, y]) \neq \emptyset$.

ii) T est proprement quasi-monotone si et seulement si pour tout K sous-ensemble compact et convexe de X on a $M(T, K) \neq \emptyset$.

Proposition 1.3.4 ([80]). *Soit $T : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ un opérateur. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes*

i) T est pseudo-monotone

ii) pour tout K sous-ensemble convexe de X on a $S(T, K) \subseteq M(T, K)$

iii) pour tout $x, y \in X$ on a $S(T, [x, y]) \subseteq M(T, [x, y])$.

Existence de solution

Depuis 1960, de nombreux résultats d'existence pour le problème d'inéquation variationnelle ont été obtenus. En 1966, Hartman et Stampacchia ont publié leur célébre résultat d'existence pour le problème d'inéquation variationnelle où l'opérateur T est univoque et continu, X est un espace de dimension finie et K est un sous-ensemble convexe et compact de X. Depuis lors, de nombreuses extensions de leur résultat ont été obtenues.

On présente ici le résultat de D. Aussel et N. Hadjisavvas dans [12]

Proposition 1.3.5 ([12]). *Soit T un opérateur quasi-monotone et K un ensemble convexe et faiblement compacte.*

i) Si T est upper sign-continu et à valeurs w^*-compactes, alors on a $S^w(T, K) \neq \emptyset$.

ii) Si T est upper sign-continu et à valeurs w^*-compactes et convexes, alors on a $S(T, K) \neq \emptyset$.

iii) Si T est locally upper sign-continu, alors on a $S^*(T, K) \neq \emptyset$.

Remarque 1.3.6. *i) L'hypothèse de upper sign-continuité est nécessaire mais non suffisante pour l'existence de solution classique du problème d'inéquation variationnelle, dans la Proposition 1.3.5 partie i). En effet, si on considère $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par*

$$T(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

et on considère $K = [0, \sqrt{2}]$. On peut voir aisément que T est upper sign-continu et qu'il n'est pas quasi-monotone. Finalement, on a $S(T, K) = \emptyset$.

ii) Même si l'opérateur est pseudo-monotone et semicontinu supérieurement, la partie iii) dans la Proposition 1.3.5 est fausse en général. En effet, l'opérateur défini dans l'Exemple 1.2.1 est pseudo-monotone et semi-continue supérieurement, mais il n'est pas à valeurs convexes en 0. Et si nous considérons $K = [-1, 1]$, on a que $S(T, K) = \emptyset$.

Le résultat suivant est une caractérisation d'une solution d'un problème d'inéquation variationnelle en dimension finie, qui a déjà été introduit dans [31]. Soient $\mu \in \mathbb{R}^m_+$, $d \in \mathbb{R}^n$ avec $n < m$. Soit $J = \{I_1, \cdots, I_n\} \subseteq 2^I$, où $I = \{1, \cdots, m\}$, avec $I_i \cap I_j = \emptyset$ si $i \neq j$, et $\bigcup I_i = I$. Maintenant, on définit $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ par

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } j \in I_i, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$K = \{x \in \mathbb{R}^m : \ 0 \leq x \leq \mu, \ Ax = d\}. \tag{1.3}$$

Lemme 1.3.7. *[31, Lemme 2.1] Soit K donné par (1.3), soit $C \in \mathbb{R}^m$ et $x \in K$ un point arbitraire. Alors, Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\langle C, y - x \rangle \geq 0$, pour tout $y \in K$*
2. *pour tout $i \in I$ et tout $q, s \in I_i$*

$$C_q < C_s \textit{ implique } x_q = \mu_q \textit{ ou } x_s = \mu_s.$$

Inéquation variationnelle perturbée

Nous allons considérer le problème d'inéquation variationnelle perturbé

$$(S_\mu) \quad \begin{cases} \text{Trouver } x \in K(\mu) \text{ tel qu'il existe } x^* \in T(x) \\ \\ \text{avec } \langle x^*, y - x \rangle \geq 0, \ \forall y \in K(\mu) \end{cases}$$

où U est un espace topologique et $T : X \to 2^{X^*}$ et $K : U \to 2^X$ sont deux opérateur multivoques.

Proposition 1.3.8 ([1]). *Supposons que les propriétés suivantes sont vérifiés :*

i) l'opérateur K est Mosco-continu à valeurs convexes d'intérieur non vide ;

ii) T est locally upper sign-continu ;

iii) T est quasi-monotone

iv) pour tout $x_n \to x$ et tout $y_n \to y$

$$\liminf_n \sup_{y_n^* \in T(y_n)} \langle y_n^*, x_n - y_n \rangle \leq 0 \Rightarrow \sup_{y^* \in T(y)} \langle y^*, x - y \rangle \leq 0.$$

Alors S^* est fermé.

Nous allons aussi considérer le problème d'inéquation variationnelle perturbé de Minty

$$(M_\mu) \quad \begin{cases} \text{Trouver } x \in K(\mu) \text{ tel que} \\ \\ \langle y^*, y - x \rangle \geq 0, \ \forall y \in K(\mu), \ y^* \in T(y) \end{cases}$$

où U est un espace topologique et $T : X \to 2^{X^*}$ et $K : U \to 2^X$ sont deux opérateurs multivoques.

1.4 Inéquation quasi-variationnelle

Un problème d'inéquation quasi-variationalle correspond à une inéquation variationnelle dans laquelle l'ensemble de contraintes est soumis à modifications en fonction du point considéré : étant donné deux opérateurs multivoques $T : X \to 2^{X^*}$ and $K : X \to 2^X$,

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Trouver } x \in K(x) \text{ tel qu'il existe } x^* \in T(x) \\ \\ \text{avec } \langle x^*, y - x \rangle \geq 0, \ \forall y \in K(x). \end{cases}$$

où X et X^* sont respectivement, un espace de Banach et son dual topologique. Cette généralisation naturelle de l'inéquation variationnelle classique offre un cadre idéal pour reformuler des problèmes complexes comme, par exemple, des problèmes d'équilibre de Nash généralisés (voir [49], [77] ou [37]).

A partir, des travaux de pionnier de Stampacchia et Brézis, des problèmes classiques d'inéquation variationnelle (correspondant donc au problème de (P) avec un opérateur K prenant une valeur constante) a été étudiée à partir de différents points de vue y compris l'existence, unicité (voir [39] et ses références).

Les opérateurs solution naturels qui seront considérés pour ce type d'inéquation quasi-variationnelle perturbée de Stampacchia ($P_{\lambda,\mu}$) sont l'ensemble de solution faible QVI^w, l'ensemble de solution classique QVI, et finalemente l'ensemble de solution étoile QVI^*, définis par

$$QVI(T,K)^w = \{x \in K(x);\ \forall\ y \in K(x)\ \exists\ x^* \in T(x) \text{ avec } \langle x^*, y-x\rangle \geq 0\}$$

$$QVI(T,K) = \{x \in K(x); \exists\ x^* \in T(x) \text{ avec } \langle x^*, y-x\rangle \geq 0,\ \forall\ y \in K(x)\}$$

et

$$QVI^*(T,K) = \left\{ x \in K(x)\ :\ \begin{array}{c} \exists\, x^* \in T(x) \setminus \{0\} \\ \text{avec } \langle x^*, y-x\rangle \geq 0, \quad \forall\, y \in K(x) \end{array} \right\}.$$

On peut voir aisément que

$$QVI^*(T,K) \subseteq QVI(T,K) \subseteq QVI^w(T,K). \tag{1.4}$$

Existence de solution

Théorème 1.4.1 ([94]). *Soient $K : C \to 2^C$ deux opérateurs multivoques, avec C un sous-ensemble convexe et compact de X et $T : C \to 2^{X^*}$. Supposons que les deux propriétés sont satisfaites :*

i) l'opérateur K est fermé et semi-continu inférieurement à valeurs convexes,

ii) T est semi-continu supérieurement à valeurs compactes et convexes,

Alors QVI(T,K) *admet au moins une solution.*

Notons que le résultat existence ci-dessus, ainsi que le suivant sont exprimés en dimension finie puisque le sous-ensemble C est supposé être compact et contient les ensembles $K(x)$ sont d'intérieur non vide. Du Théorème 3.1 dans [62], les auteurs ont obtenu un résultat d'existence de l'inéquation quasi-variationnelle sans supposer ni la fermeture de l'opérateur de contrainte K ni la pseudo-monotonie de T. Mais d'autre part, ils supposent la fermeture de l'ensemble des points fixes de K et que T est à valeurs compactes qui de plus sont supposées convexes pour tout point fixe de K. Plus précisément

Théorème 1.4.2 ([62]). *Soient $K : C \to 2^C$ deux opérateurs multivoques, avec C un sous-ensemble convexe et compact de $\mathbb{R}^m$ et $T : C \to 2^{\mathbb{R}^m}$. Supposons que les trois propriétés sont satisfaites :*

i) l'opérateur K est semi-continu inférieurement à valeurs convexes et l'ensemble $PF(K) = \{x \in C :\ x \in K(x)\}$ est fermé.

ii) $T(x)$ est non vide et compact pour tout $x \in C$ et convexe pour chaque $x \in PF(K)$.

iii) Pour chaque $y \in C$*, l'ensemble* $\{x \in PF(K) : \inf_{x^* \in T(x)} \langle x^*, x-y \rangle \leq 0\}$ *est fermé.*

Alors QVI(T, K) *admet au moins une solution.*

Stabilité

L'étude de stabilité qualitative consiste à considérer la relation liant les pertubations à l'ensemble correspondant de solution de l'inéquation quasi-variationnelle perturbé :

$$(P_{\lambda,\mu}) \quad \begin{cases} \text{Trouver } x \in K(x,\mu) \text{ tel qu'il existe } x^* \in T(x,\lambda) \\ \\ \text{avec } \langle x^*, y-x \rangle \geq 0, \ \forall y \in K(x,\mu) \end{cases}$$

où Λ et U sont deux espaces topologiques et où $T : X \times \Lambda \to 2^{X^*}$ et $K : X \times U \to 2^X$ sont deux opérateurs multivoques avec $T(\cdot, \lambda)$ étant quasi-monotone pour tout paramètre λ.

Les opérateurs solution naturels qui seront considérés pour ce type d'inéquation quasi-variationnelle perturbée de Stampacchia $(P_{\lambda,\mu})$ sont l'ensemble de solution classique , l'ensemble de solution stricte $S^< : \Lambda \times U \to 2^X$ et finalement l'ensemble de solution étoile $S^*(\lambda, \mu)$ définis par

$$S(\lambda,\mu) = \{x \in K(x,\mu); \exists\, x^* \in T(x,\lambda) \text{ avec } \langle x^*, y-x \rangle \geq 0, \ \forall\, y \in K(x,\mu)\},$$

$$S^>(\lambda,\mu) = \left\{ x \in K(x,\mu) \ : \ \begin{array}{l} \exists\, x^* \in T(x,\lambda) \text{ avec} \\ \langle x^*, y-x \rangle > 0, \quad \forall\, y \in K(x,\mu) \setminus \{x\} \end{array} \right\}$$

et

$$S^*(\lambda,\mu) = \left\{ x \in K(x,\mu) \ : \ \begin{array}{l} \exists\, x^* \in T(x,\lambda) \setminus \{0\} \\ \text{avec } \langle x^*, y-x \rangle \geq 0, \quad \forall\, y \in K(x,\mu) \end{array} \right\}.$$

De toute évidence, pour chaque $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times U$ tel que $K(\cdot, \mu)$ n'est pas réduit à un singleton,

$$S^>(\lambda,\mu) \subseteq S^*(\lambda,\mu) \subseteq S(\lambda,\mu). \tag{1.5}$$

Chapitre 2

Résultats préliminaires

Dans ce chapitre nous commençons par donner quelques résultats d'analyse multivoque, plus précisément, de continuité, de upper sign-continuité et de monotonie généralisée. Ensuite on précisera les relations entre différents concepts de solutions pour inéquations variationnelle. Enfin nous terminerons ce chapitre par quelques résultats de stabilité qualitative pour inéquations variationnelles.

2.1 Upper-sign continuité et Mosco-continuité

Nous présentons ici quelques résultats de semi-continué au sens de Painlevé-Kuratoswki. On montrera tout d'abord la préservation de la propriété de lower (upper) sign-continuous lorsque l'on considère l'enveloppe convexe des images d'un opérateur. On montrera ensuite une relation entre la monotonie généralisée et le concept de lower sign-continu. Enfin on évoquera la continuité au sens de Mosco des opérateurs de contraintes définis par inéquations. Tout ceci sera utilisé ultérieurement pour montrer l'existence de solution du problème d'inéquation quasi-variationnelle.

D'abord, on commence par un résultat de convergence d'ensembles.

Lemme 2.1.1. *Soit K_n une suite des sous-ensembles convexes et fermés de $\mathbb{R}^m$ telle que $K = \limsup_n K_n$ est un ensemble compact et non vide. Alors, toute suite $(x_n)_n$ telle que $x_n \in K_n$, pour tout n, admet une sous-suite convergente.*

Preuve: Soit $(x_n)_n$ une suite de $\mathbb{R}^m$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = +\infty$ et $x_n \in K_n$, pour tout n. Soit $r > 0$ un nombre réel tel que $K \subseteq B(0, r)$. Pour chaque $y \in K$, il existe une suite $(y_{n_k})_k$ convergeant vers y et $y_{n_k} \in K_{n_k}$, pour tout k. Mais, les ensembles K_n sont convexes et par conséquence, $[x_{n_k}, y_{n_k}] \subseteq K_{n_k}$. D'autre part, puisque $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = +\infty$, pour k assez grand, on peut trouver au moins un point $z_n \in [x_n, y_n]$ tel que $\|z_n\| = r + 1$. Puisque la sphère $S(0, r+1)$ est compacte, on peut extraire de la suite $(z_{n_k})_k$ une sous-suite convergente et son point limite z satifait en même temps $\|z\| = r + 1$ et $z \in K$ ce qui est impossible. $\square$

L'exemple suivant montre que l'hypothèse de convexité est nécessaire dans le lemme ci-dessus.

Exemple 2.1.2. *Considérons $K_n = \left\{\left(\frac{1}{n}, n\right), (0,0)\right\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il est clair que $\limsup\limits_{n\to+\infty} K_n = \{(0,0)\}$. Mais $\left(\left(\frac{1}{n}, n\right)\right)_n$ n'admet pas de sous-suite convergente.*

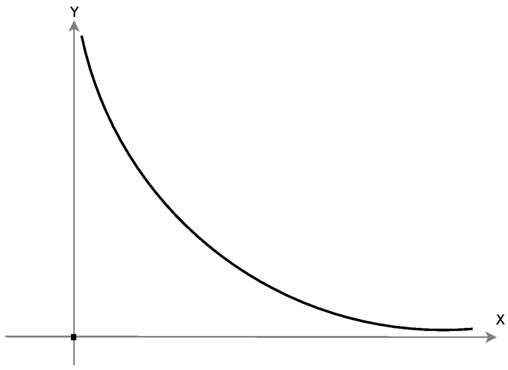
Proposition 2.1.3. *Soit C un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^m$. Soit $K : C \to 2^{\mathbb{R}^m}$ un opérateur multivoque à valeurs compactes, convexes et non vide. Si K est à graphe fermé et est semi-continu inférieurement, alors $\bigcup_{z\in C} K(z)$ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^m$.*

Preuve: Soit (x_n) une suite de $\bigcup_{z\in C} K(z)$. Ainsi pour tout n, il existe $z_n \in C$ tel que $x_n \in K(z_n)$. Par compacité de C, la suite $(z_n)_n$ admet une sous-suite convergente $(z_{n_k})_k$, de limite z_0. Puisque K est à graphe fermé et est semi-continu inférieurement, $\limsup_k K(z_{n_k}) = K(z_0)$ est compact. Par conséquent, selon le Lemme 2.1.1, on peut extraire de la suite $(x_{n_k})_k$ une sous-suite convergente $(x_{n_{k_j}})_j$, $x_0 \in \limsup_j K(z_{n_{k_j}})$ étant sa limite. Ainsi x_0 est un élément de $K(z_0)$ et donc un élément de $\bigcup_{z\in C} K(z)$. $\square$

Comme le montre l'exemple suivant, la semi-continuité inférieure joue un rôle fondamental dans la Proposition 2.1.3.

Exemple 2.1.4. *Soit $K : [0,1] \to \mathbb{R}$ un opérateur défini par*

$$K(z) = \begin{cases} 0, & si\ z = 0; \\ \frac{1}{x}, & si\ 0 < x \leq 1. \end{cases}$$



On peut voir aisément que K est à graphe fermé et il est à valeurs compactes, convexes et non vide. Mais $\bigcup_{z\in[0,1]} K(z)$ n'est pas borné.

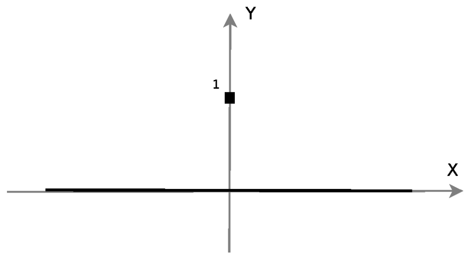
Lemme 2.1.5. *Soient Y, Z deux espaces de Banach et soit $T : Y \to 2^Z$ un opérateur multivoque qui est fermé en y_0 et tel que $T(y_0)$ est un singleton. S'il existe un voisinage V de y_0 tel que T est à valeurs non vide sur V et $T(V)$ est contenu dans un sous-ensemble compact de Z, alors T est semi-continu inférieurement en y_0.*

Preuve: Soit $T(y_0) = \{z_0\}$ et $(y_n)_n$ une suite de Y convergeant vers y_0. Pour n assez grand, $T(y_n)$ est non vide, et soit donc z_n un élément de $T(y_n)$. Par hypothèse, il existe un ensemble compact C de Z tel que la suite $(z_n)_n$ est incluse dans C au moins à partir d'un certain rang et admet donc une sous-suite convergente $(z_{n_k})_k$. Par la fermeture de T, la sous-suite $(z_{n_k})_k$ admet une limite z_0. Ainsi, la preuve est complète, puisque cela est vrai pour toute sous-suite convergente de $(z_n)_n$. $\square$

Remarque 2.1.6. *a) On note que l'Exemple 2.1.4 montre que l'hypothèse de compacité est nécessaire sur le lemme précédent.*

b) Dans le Lemme 2.1.5, si $T(y_0)$ n'est pas un singleton, le résultat est faux en général. En effet, l'opérateur suivant $T : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ défini par

$$T(x) = \begin{cases} \{0,1\} & si\ x = 0, \\ \{0\} & si\ x \neq 0 \end{cases}$$



est fermé. Mais il n'est pas semi-continu inférieurement en 0.

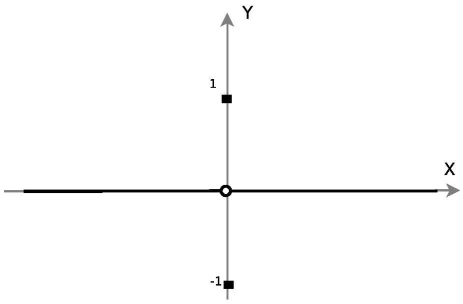
D'après [81, Th. 5.9], partie (c) on sait que, si $T : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^m}$ est semi-continu inférieurement, alors c'est aussi pour le cas conv$T$. Ici, on présente la version de semi-continuité supérieure.

Proposition 2.1.7. *Soit $T : X \to 2^{X^*}$ un opérateur multivoque à valeurs w^*-compactes (respectivement compactes) et $x \in \operatorname{dom} T$. Si T est (respectivement norme-norme) semi-continu supérieurement en x, alors* conv$T$ *est (respectivement norme-norme) semi-continu supérieurement en x.*

Preuve: Tout d'abord, l'opérateur conv$T$ est à valeurs w^*-compactes puisque T est à valeurs w^*-compactes. D'ici T (ou conv$T$) est semi-continu supérieurement en x si et seulement si pour tout voisinage convexe B_* de l'origine, il existe un voisinage U de x tel que $T(u) \subseteq T(x) + B_*$ pour tout $u \in U$.
Notons que, pour tout z, $\operatorname{conv}(T(z) + B_*) \subseteq \operatorname{conv}T(z) + B_*$. Puisque T est semi-continu supérieurement en x, pour tout voisinage convexe B_* de l'origine, il existe un voisinage U de x tel que pour tout $u \in U$, on a que $\operatorname{conv}T(u) \subseteq \operatorname{conv}(T(x) + B_*) \subseteq \operatorname{conv}T(x) + B_*$, prouvant ainsi que conv$T$ est semi-continu supérieurement en x. $\square$

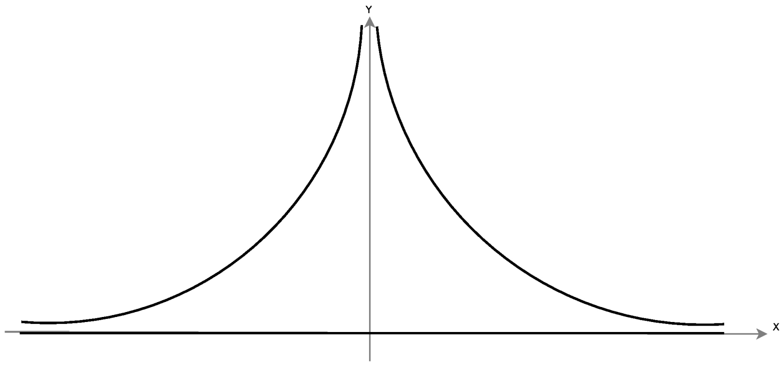
Remarque 2.1.8. *a) La réciproque de la Proposition 2.1.7 est fausse en général. En effet, considérons*

$$T(x) = \begin{cases} \{-1,1\} & si\ x = 0 \\ \{0\} & si\ x \neq 0 \end{cases}$$



cet opérateur n'est pas semi-continu supérieurement mais son opérateur convexe est semi-continu supérieurement.
b) Notons que la Proposition 2.1.7 ne peut pas être établie en terme de fermeture. En effet, l'opérateur suivant $T : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ défini par

$$T(x) = \begin{cases} \{0\} & si\ x = 0, \\ \{0, \frac{1}{|x|}\} & si\ x \neq 0 \end{cases}$$



est fermé, à valeurs compactes, mais conv$T$ *n'est pas fermé.*

Le résultat suivant est une extension de la Proposition 2.1.7 au cas de la sign-continuité.

Proposition 2.1.9. *Soit $T : X \to 2^{X^*}$ un opérateur multivoque. Alors T est upper (lower) sign-continu si et seulement si* conv$T$ *est upper (lower) sign-continu.*

Preuve: Le résultat est conséquence de :

$$\begin{aligned} \inf_{x_t^* \in T(x_t)} \langle x_t^*, y - x \rangle &= \inf_{x_t^* \in \mathrm{conv}T(x_t)} \langle x_t^*, y - x \rangle \\ \sup_{x^* \in T(x)} \langle x^*, y - x \rangle &= \sup_{x^* \in \mathrm{conv}T(x)} \langle x^*, y - x \rangle. \end{aligned}$$

On va faire la preuve de la première égalité. Pour chaque $x_t^* \in \mathrm{conv}T(x_t)$ il existe $x_1^*, \cdots, x_n^* \in T(x_t)$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in [0, 1]$ avec $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ tels que $x_t^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^*$. Puisque, pour tout i on a $\langle x_i^*, y - x \rangle \geq \inf_{x^* \in T(x_t)} \langle x^*, y - x \rangle$ alors

$\langle x_t^*, y-x\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x_i^*, y-x\rangle \geq \inf_{x^*\in T(x_t)}\langle x^*, y-x\rangle$ ainsi $\inf_{x^*\in T(x_t)}\langle x^*, y-x\rangle = \inf_{x^*\in \mathrm{conv}T(x_t)}\langle x^*, y-x\rangle$. De la même façon, on peut que montrer $\sup_{x^*\in T(x)}\langle x^*, y-x\rangle = \sup_{x^*\in \mathrm{conv}T(x)}\langle x^*, y-x\rangle$. Ainsi, il est alors facile de voir que T est upper (lower) sign-continu si et seulement si conv$T$ est upper (lower) sign-continu. □

Le résultat suivant nous indique qu'il existe une relation entre la monotonie généralisée et la notion de lower-sign continous.

Proposition 2.1.10. *Soit K un sous-ensemble convexe de X et $T : K \to 2^{X^*}$ un opérateur multivoque. Si $-T$ est pseudomonotone alors T est lower sign-continu sur K.*

Preuve: Supposons que le résultat est faux, c'est-à-dire que l'on peut trouver $x, y \in K$ tels que pour tout $t \in]0,1[$ on a $\inf_{x_t^*\in T(x_t)} \langle x_t^*, y-x\rangle \geq 0$ et qu'il existe $x^* \in T(x)$ avec $\langle x^*, y-x\rangle < 0$. Puisque $x_t - x = (1-t)(y-x)$ on a $\langle x^*, x_t - x\rangle < 0$ et la pseudo-monotonie de $-T$ implique que $\langle x_t^*, x_t - x\rangle < 0$ pour tout $x_t^* \in T(x_t)$, ce qui contradit l'hypothèse. □

On peut conjecturer que si on change l'hypothèse de pseudo-monotonie par la quasi-monotonie, on peut obtenir l'upper sign-continuité. Mais, l'exemple suivant montre que cette conjecture est fausse.

Exemple 2.1.11. *Soit $T : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction définie par*

$$T(x) = \begin{cases} 0 & x \in]0,1] \\ -1 & x = 0 \end{cases}.$$

On peut voir aisément que que $-T$ est quasi-monotone et elle n'est pas upper sign-continue.

Lemme 2.1.12. *Soient K un sous-ensemble de X d'intérieur non vide et $T : K \to 2^{X^*}$. Soient x un élément de K et $x^* \in T(x)\setminus\{0\}$. Si $\langle x^*, y-x\rangle \geq 0$, pour tout $y \in K$, alors $\langle x^*, y-x\rangle > 0$, pour tout $y \in \mathrm{int}(K)$.*

Preuve: Supposons qu'il existe $y \in \mathrm{int}(K)$ tel que $\langle x^*, y-x\rangle = 0$. Puisque $y \in \mathrm{int}(K)$ on peut trouver un point z tel que $z \in K$ et $\langle x^*, z-x\rangle < 0$ ce qui est absurde. □

Lemme 2.1.13. *Soit $T : X \to 2^{X^*}$ un opérateur multivoque. Soient $x \in$* $\mathrm{Dom}\,(T)$, *$y \in \mathrm{int}(\mathrm{Dom}\,(T))$ et $x^* \in T(x)\setminus\{0\}$ avec $\langle x^*, y-x\rangle = 0$. Si T est quasi-monotone et hemi-continu inférieurement, alors $\langle y^*, y-x\rangle \geq 0$ pour tout $y^* \in T(y)$.*

Preuve: Puisque $y \in \mathrm{int}(\mathrm{Dom}\,(T))$ et $x^* \neq 0$, il existe $z \in \mathrm{Dom}\,(T)$ tel que $\langle x^*, z - x\rangle > 0$ et en plus $[y, z] \subseteq \mathrm{Dom}\,(T)$. Ainsi, pour tout $w \in]y, z]$ on a $\langle x^*, w - x\rangle > 0$. De la quasi-monotonie de T, pour tout $w \in]y, z]$ et tout $w^* \in T(w)$, on a que $\langle w^*, w - x\rangle \geq 0$. Finalement, pour tout $y^* \in T(y)$ et toute suite (w_n) dans $]y, z]$ convergeant vers y, il existe une suite (w_n^*) convergeant vers y^* telle que $w_n^* \in T(w_n)$ pour tout n. De ce qui précéde, on a alors $\langle y^*, y - x\rangle \geq 0$. □

Le résultat suivant est une extension du Corollaire 2.1 dans [28].

Proposition 2.1.14. *Soit* $T : X \to 2^{X^*}$ *un opérateur multivoque tel que* $\mathrm{Dom}\,(T)$ *est ouvert. Si* T *est quasi-monotone, hemi-continu inférieurement et* $0 \notin T(X)$*, alors* T *est pseudo-monotone.*

Preuve: Soient $x, y \in \mathrm{Dom}\,(T)$ et $x^* \in T(x)$ tel que $\langle x^*, y - x\rangle \geq 0$. Si l'inéquation précédente est stricte, de la quasi-monotonie de T on a que $\langle y^*, y-x\rangle \geq 0$ pour tout $y^* \in T(y)$. Considérons donc le cas où $\langle x^*, y-x\rangle = 0$. La conclusion est alors une conséquence directe du Lemme 2.1.13 puisque $\mathrm{Dom}\,(T)$ est ouvert et donc $y \in \mathrm{int}(\mathrm{Dom}\,(T))$. □

Mosco-continuité d'un opérateur de contraintes

Dans cette partie on donnera des conditions suffisantes pour obtenir la Mosco-continuité d'un opérateur multivoque défini par des inéquations. Plus précisément, considérons $K : X \times U \to 2^X$ défini par

$$K(x, \mu) = \{y \in X;\ g_i(y) \leq h_i(x, \mu),\quad \forall i = 1, \ldots, q\}$$

où, pour $i = 1, \ldots, q$, $g_i : X \to \mathbb{R}$ et $h_i : X \times U \to \mathbb{R}$. Associés à l'opérateur K on définit l'opérateur de point fixe $\Phi : U \to 2^X$ de K par

$$\Phi(\mu) = \{x \in X;\quad x \in K(x, \mu)\}.$$

Bien sûr, si l'opérateur K est Mosco-continu et $\mu_0 \in U$ est tel qu'il existe $x_0 \in X$ satisfaisant $\Phi(\mu_0) = K(x_0, \mu_0)$, donc l'opérateur Φ est Mosco-continu en μ_0. Mais ce cas est trop restrictif et donc, dans la suite, nous préférons faire l'hypothèse suivante en μ_0 :

> (H_{μ_0}) Il existe un voisinage U_0 de μ_0 et une famille finie $x_1, \ldots, x_p$ de X telle que, pour tout $\mu \in U_0$, $\Phi(\mu) = \cap_{i=1}^p K(x_i, \mu)$.

A partir des propriétés classiques de la limite supérieure et inférieure des ensembles, on obtient la première condition suffisante suivante :

Proposition 2.1.15. *Supposons que l'opérateur K est à valeurs convexes, Mosco-continu en μ_0 tel que (H_{μ_0}) est vérifiée. Si, pour tout $i = 1, \dots, p-1$, il existe $\rho_i > 0$ et $\gamma_i > 0$ tels que*

$$B(0,\rho_i) \subset \left[\cap_{k=1}^{i} K(x_k,\mu) \cap B(0,\gamma_i)\right] - K(x_{i+1},\mu), \quad \forall\, \mu \in U_0.$$

alors l'opérateur Φ est Mosco-continu en μ_0.

Preuve: Pour plus de simplicité, on va considérer seulement le cas $p = 2$. Pour les autres cas, la preuve peut être aisément déduite par récurrence finie et est laissé au lecteur.

Soit $(\mu_n)_n$ une suite de U_0 convergeant vers μ_0. Puisque, pour tout n et $i \in \{1,2\}$, $[K(x_1,\mu_n) \cap K(x_2,\mu_n)] \subset K(x_i,\mu_n)$, on a

$$\begin{aligned} &w - \limsup_{n\to+\infty} [K(x_1,\mu_n) \cap K(x_2,\mu_n)] \\ &\qquad \subset w - \limsup_{n\to+\infty} K(x_1,\mu_n) \cap w - \limsup_{n\to+\infty} K(x_2,\mu_n). \end{aligned}$$

qui, avec la partie supérieure de la Mosco-continuité de K, implique que

$$\begin{aligned} w - \limsup_{n\to+\infty} \Phi(\mu_n) &= w - \limsup_{n\to+\infty} [K(x_1,\mu_n) \cap K(x_2,\mu_n)] \\ &\subset K(x_1,\mu_0) \cap K(x_2,\mu_0) = \Phi(\mu_0). \end{aligned}$$

D'autre part, par la partie inférieure de la Mosco-continuité de K, on a

$$K(x_1,\mu_0) \cap K(x_2,\mu_0) \subset \liminf_{n\to+\infty} K(x_1,\mu_n) \cap \liminf_{n\to+\infty} K(x_2,\mu_n).$$

Mais, puisqu'il existe $\rho_1 > 0$ et $\gamma_1 > 0$ tels que

$$B(0,\rho_1) \subset [K(x_1,\mu) \cap B(0,\gamma_1)] - K(x_2,\mu), \quad \forall\, \mu \in U_0,$$

la Proposition 1.2.6 de Aubin-Frankowska [4], donne immédiatement que

$$\liminf_{n\to+\infty} K(x_1,\mu_n) \cap \liminf_{n\to+\infty} K(x_2,\mu_n) = \liminf_{n\to+\infty} K(x_1,\mu_n) \cap K(x_2,\mu_n)$$

et par conséquent

$$\Phi(\mu_0) \subset \liminf_{n\to+\infty} K(x_1,\mu_n) \cap K(x_2,\mu_n) = \liminf_{n\to+\infty} \Phi(\mu_n).$$

□

Pour le reste de cette sous-section nous allons nous concentrer sur la description des cas pour lesquels il est possible de prouver, la Mosco-continuité de l'opérateur K.

Proposition 2.1.16. *Supposons que les fonctions g_i sont semi-continues inférieurement sur X et que les fonctions h_i sont continues sur $X \times U$. Si $dim(X) < +\infty$ ou si toutes les fonctions g_i sont quasi-convexes, alors pour toute suite $(x_n, \mu_n)_n$ convergeant vers (x, μ),*

$$w - \limsup_{n \to +\infty} K(\mu_n, x_n) \subseteq K(\mu, x),$$

à condition que les sous-ensembles $K(x, \mu), K(x_n, \mu_n)$ soient non vides.

Preuve: Soit $(K(x_{n_k}, \mu_{n_k}))_k$ une sous-suite de $(K(x_n, \mu_n))_n$ et $(y_k)_k \subset X$ faiblement convergeant vers y avec $y_k \in K(x_{n_k}, \mu_{n_k})$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puisque, pour tout $i \in \{1, \cdots, q\}$, g_i est quasi-convexe (ou $dim(X) < +\infty$) et semi-continue inférieurement, ces fonctions sont aussi faiblement semi-continues inférieurement (semi-continue inférieurement) et

$$g_i(y) \leq \liminf_{k \to +\infty} g_i(y_k) \leq \liminf_{k \to +\infty} h_i(x_{n_k}, \mu_{n_k}) = h_i(x, \mu).$$

Ainsi, on a montré que $y \in K(\mu, x)$. □

Proposition 2.1.17. *Supposons que les fonctions g_i sont semi-continues supérieurement sur X et que les fonctions h_i sont semi-continues inférieurement sur $X \times U$. Si l'une des hypothèses suivantes est satisfaite*

i) toutes les fonctions g_i sont semi-strictement quasi-convexes ;

ii) $X = Z \times \mathbb{R}$ et toutes les fontions $g_i : Z \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont définies par $g_i(x, r) = \varphi_i(x) - \psi_i(r)$ avec ψ_i fonction strictement croissante.

Alors pour toute suite $(x_n, \mu_n)_n$ convergeant vers (x_0, μ_0) on a

$$K(x_0, \mu_0) \subseteq \liminf_{n \to +\infty} int(K(x_n, \mu_n)), \tag{2.1}$$

et

$$\Phi(\mu_0) \subseteq \liminf_{n \to +\infty} int\Phi(\mu_n))$$

si, de plus, l'hypothèse (H_{μ_0}) est vérifiée.

La première partie de cette proposition étend la Proposition 3.3 de [1] (où $h_i(x, \mu) = \mu_i$ pour tout i).

Preuve: D'abord on va prouver que, dans les deux cas $i)$ et $ii)$, on a

$$\text{int}(S_{g_i}(\alpha)) = S^<_{g_i}(\alpha), \quad \forall\, \alpha > \inf_X g_i. \tag{2.2}$$

Comme les fonctions g_i sont semi-continues supérieurement, on a toujours $S^<_{g_i}(\alpha) \subset \text{int}(S_{g_i}(\alpha))$. Pour le cas $i)$ l'autre inclusion est une conséquence immédiate de la semi-stricte quasi-convexité des fonctions g_i. Considérons maintenant le cas ii). Soit (y,r) un élément de $\text{int}(S_\alpha(g_i))$. Ainsi, il existe $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $z \in B(y,\varepsilon)$ et tout $s \in]r-\delta, r+\delta[$, on a $(z,s) \in S_{g_i}(\alpha)$. Puisque ψ_i est strictement croissante, pour tout $s \in]r-\delta, r[$, on a

$$\varphi_i(y) - \psi_i(r) < \varphi_i(y) - \psi_i(s) \leq \alpha$$

ce qui implique que $(y,r) \in S^{<}_{g_i}(\alpha)$ et l'égalité (2.2) est prouvée.

Soit $(x_n,\mu_n)_n$ une suite convergeant vers (x_0,μ_0). Soit y un élément quelconque de $\text{int}(K(x_0,\mu_0))$. Nous allons tout d'abord montrer que, pour n assez grand, y est un élément de $\text{int}(K(x_n,\mu_n))$.

Nous définissons $I = \{i \in \{1,..,q\}; \inf_X g_i = h_i(x,\mu)\}$ et $I^c = \{1,..,q\} \setminus I$.

$$\begin{aligned} y \in \text{int}(K(x,\mu)) &= \text{int}\left(\bigcap_{i=1}^{q} S_{g_i}(h_i(x_0,\mu_0))\right) = \bigcap_{i=1}^{q} \text{int}(S_{g_i}(h_i(x_0,\mu_0))) \\ &= \left[\bigcap_{i\in I} \text{int}(argmin_X g_i)\right] \bigcap \left[\bigcap_{i\in I^c} S^{<}_{g_i}(h_i(x_0,\mu_0))\right]. \end{aligned}$$

De cette formule, on déduit que, pour tout $i \in I^c$, $g_i(y) < h_i(x_0,\mu_0)$. Par conséquence, pour n assez grand (disons $n > N$) et pour tout $i \in I^c$, y est aussi un élément de $S^{<}_{g_i}(h_i(x_n,\mu_n))$, puisque h est semi-continue inférieurement.

D'autre part, si $i \in I$, alors $h_i(x_0,\mu_0) = \inf_X g_i$ et donc pour tout n, on a $h_i(x_0,\mu_0) \leq h_i(x_n,\mu_n)$. Ainsi, pour tout $i \in I$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\text{int}(argmin_X g_i) \subset \text{int}(S_{g_i}(h_i(x_n,\mu_n))).$$

Donc pour $n > N$,

$$y \in \left[\bigcap_{i\in I} \text{int}(S_{g_i}(h_i(x_n,\mu_n)))\right] \bigcap \left[\bigcap_{i\in I^c} S^{<}_{g_i}(h_i(x_n,\mu_n))\right].$$

De (2.2), on a $y \in \text{int}(K(x_n,\mu_n))$ pour n assez grand et par conséquent

$$\text{int}(K(x_0,\mu_0)) \subset \liminf_{n\to+\infty} \text{int}(K(x_n,\mu_n)). \tag{2.3}$$

Dans le cas i), l'inclusion (2.1) est conséquence de [1, Prop. 3.2]. Pour le cas ii), puisque $\liminf_{n\to+\infty} \text{int}(K(x_n,\mu_n))$ est fermé, l'inclusion (2.1) se déduit de (2.3), et du fait que, pour tout (x_0,μ_0), on a

$$K(x_0,\mu_0) \subset \text{cl}(\text{int}(K(x_0,\mu_0))). \tag{2.4}$$

En effet pour montrer l'inclusion (2.4), supposons que $(z,r) \in K(x_0,\mu_0)$, c'est-à-dire, pour tout $i \in \{1,\ldots,q\}$, $\varphi_i(z) - \psi_i(r) \leq h_i(x_0,\mu_0)$. Les fonctions ψ_i étant strictement croissantes, on a, pour tout $s > r$,

$$\varphi_i(z) - \psi_i(s) < \varphi_i(z) - \psi_i(r) \leq h_i(x_0,\mu_0)$$

ce qui implique que, pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$,

$$(z, s) \in S^{<}_{g_i}(h_i(x_0, \mu_0)) = \mathrm{int}(S_{g_i}(h_i(x_0, \mu_0)))$$

et par conséquent

$$(z, s) \in \bigcap_{i=1}^{q} \mathrm{int}(S_{h_i(x_0,\mu_0)}(g_i)) = \mathrm{int}(K(x_0, \mu_0)).$$

Ainsi $(z, r) \in \mathrm{cl}(\mathrm{int}(K(x_0, \mu_0)))$ et la preuve de la première partie est terminée.

Supposons maintenant que l'hypothèse (H_{μ_0}) est satisfaite. De la preuve de (2.3), pour tout $y \in \mathrm{int}(K(x_i, \mu_0))$ et pour tout $i = 1, \ldots, p$, on peut trouver $N_i \in \mathbb{N}$ tel que $y \in \mathrm{int}(K(x_i, \mu_n))$ pour tout $n \geq N_i$. Ainsi, si on pose $N = \max\{N_i \,:\, i = 1, \ldots, p\}$ on a, pour $n \geq N$,

$$\begin{aligned} \mathrm{int}(\Phi(\mu_0)) \quad &= \mathrm{int}(\textstyle\bigcap_{i=1}^{p} K(x_i, \mu_0)) \\ &= \textstyle\bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{int}(K(x_i, \mu_0)) \\ &\subset \textstyle\bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{int}(K(x_i, \mu_n)) \\ &= \mathrm{int}(\textstyle\bigcap_{i=1}^{p} K(x_i, \mu_n)) = \mathrm{int}(\Phi(\mu_n)) \end{aligned}$$

Par conséquent $\mathrm{int}(\Phi(\mu_0)) \subset \liminf_{n\to+\infty} \mathrm{int}(\Phi(\mu_n))$. Maintenant, la conclusion vient directement en prenant la fermeture de l'inclusion précédente puisque, dans le cas $i)$ les valeurs de K sont convexes et $\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{int}(\Phi(\mu_n))$ est fermé et dans le cas $ii)$, l'inclusion (2.4) peut être utilisée. □

Comme conséquence immédiate des résultats précédents, nous obtenons une condition suffisante de Mosco-continuité de l'opérateur K et de l'opérateur de point fixe Φ.

Corollaire 2.1.18. *Supposons que l'opérateur multivoque K est à valeurs non vide et que les fonctions g_i et h_i sont continues (sur X et $X \times U$ respectivement). Si l'une des hypothèses suivantes est vérifié :*

i) toutes les fonctions g_i sont semi-strictement quasi-convexes ;

ii) $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ et toutes les fontions $g_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont définies par $g_i(x, r) = \varphi_i(x) - \psi_i(r)$ avec ψ_i une fonction strictement croisante ;

Alors l'opérateur de constrainte K est int*-Mosco continu sur $X \times U$.*
Si, de plus, (H_{μ_0}) est satisfaite alors l'opérateur Φ est int*-Mosco continu en μ_0.*

Preuve: L'int-Mosco continuité de l'opérateur K est conséquence de la Proposition 2.1.16 et de la Proposition 2.1.17. La partie inferieure de la convergence int-Mosco de Φ correspond à la second partie de la Proposition 2.1.17 et la preuve de la partie supérieure a déjà été donnée dans la preuve de la Proposition 2.1.15 (Remarquons que la convexité de K n'est pas nécessaire ici). □

Remarque 2.1.19. *a) En utilisant la démonstration de l'inclusion (2.3), on obtient immédiatement*

> *Si K est à valeurs non vide, que les fonctions g_i et h_i sont continues (sur X et $X \times U$ respectivement) et que, pour tout i, g_i est semi-strictement quasi-convexe, alors, si $y \in \text{int}(K(x,\mu))$, pour toute suite (x_n,μ_n) qui converge vers (x,μ) il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$, y soit un élément de $\text{int}(K(x_n,\mu_n))$.*

b) En dimension finie, on peut obtenir un résultat similaire à celui obtenu dans la remarque a) ci-dessus sans supposer que l'opérateur de contrainte soit défini par des inéquations :

> *soit $(S_n)_n$ une suite d'ensembles convexes de $\mathbb{R}^m$, soit S un ensemble convexe tel que $S \subseteq \liminf_{n\to+\infty} \text{int}(S_n)$. Si $\text{int}(S) \neq \emptyset$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{int}(S_n) \neq \emptyset$, Alors, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\text{int}(S) \subseteq \text{int}(S_n)$.*

En effet, soit $y \in \text{int}(S)$ et $r > 0$ tel que $B(y,4r) \subseteq S$. On construit alors le vecteur v de $\mathbb{R}^{2m}$ défini, pour $i = 1,\ldots,m$ par $v_i = e_i$, où e_i est le $i^{\text{ième}}$ vecteur de base, et pour $i = m+1,\ldots,2m$, par $v_i = -e_{i-m}$. Ainsi, pour tout $(y_1,\ldots,y_{2m}) \in B(y+2rv_1,r) \times \cdots \times B(y+2rv_{2m},r)$, y est élément de $\text{conv}(y_1,\ldots,y_{2m})$. D'autre part, puisque $S \subseteq \liminf_{n\to+\infty} \text{int}(S_n)$, pour tout $j \in \{1,\ldots,2m\}$, $\text{int}(S_n) \cap B(y+2rv_j,r) \neq \emptyset$. Ainsi, en posant $n_0 = \max\{n_1,\ldots,n_{2m}\}$ et en combinant avec la convexité des ensembles S_n, on obtient, pour tout $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} y &\in \text{conv}\left[\bigcup_{j=1}^{2m} B(y+2rv_j,r) \cap \text{int}(S_n)\right] \\ &= \text{conv}\left[\bigcup_{j=1}^{2m} B(y+2rv_j,r)\right] \cap \text{int}(S_n) \subseteq \text{int}(S_n). \end{aligned}$$

2.2 Remarques sur l'inéquation variationnelle

Dans cette section, on va tout d'abord préciser des relations entre les ensembles solutions du problème d'inéquation variationnelle associés aux opérateurs T et $\text{conv}T$. Ensuite nous décrirons quelques conséquences induites, par des inclusions entre $M(T,K)$ et $(S(T,K))$, sur la monotonie généralisée ou la continuité de K. Enfin, on donnera une extension du lemme de Minty.

Proposition 2.2.1. *Soient K un sous-ensemble de X et $T : K \to 2^{X^*}$ un opérateur multivoque. Alors $M(\mathrm{conv}T, K) = M(T, K)$ et $S(\mathrm{conv}T, K) \subseteq S^w(T, K)$. De plus, si K est convexe et T est à valeurs compactes, alors $S(\mathrm{conv}T, K) = S^w(T, K) = S(T, K)$.*

Preuve: L'égalité des ensembles de solutions Minty est une conséquence directe de la définition de ces solutions. Montrons maintenant que $S(\mathrm{conv}T, K) \subseteq S^w(T, K)$. Soit x un élément de $S(\mathrm{conv}T, K)$. Donc il existe $x^* \in \mathrm{conv}T(x)$ tel que pour tout $y \in K$, $\langle x^*, y - x\rangle \geq 0$. Puisque $x^* \in \mathrm{conv}T(x)$ il existe $x_1^*, \cdots, x_n^* \in T(x)$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in [0, 1]$ avec $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ tels que $x^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^*$. Ainsi, pour l'un au moins des indices i, on a $\langle x_i^*, y - x\rangle \geq 0$, et x est donc un élément de $S^w(T, K)$. L'égalité de $S(\mathrm{conv}T, K)$ et $S^w(T, K)$ est une conséquence du théorème de minimax de Sion. $\square$

Il est important de remarquer que l'égalité $S(\mathrm{conv}T, K) = S(T, K)$ n'est pas vraie en général. Pour voir cela, il suffit de considérer l'opérateur défini dans l'Exemple 1.2.1 et $K = [-1, 1]$. on a alors $S(T, K) = \emptyset$ et $S^w(T, K) = S(\mathrm{conv}T, K) = \{0\}$.

Dans un esprit analogue au travail de J. Reinhard dans [80], on montre ci-dessous que l'inclusion des ensembles solutions de Minty dans ceux de Stampacchia implique la upper sign-continuité de l'opérateur.

Proposition 2.2.2. *Soient K un sous-ensemble convexe de X et $T : K \to 2^{X^*}$ un opérateur multivoque. Si, pour tout $x, y \in K$, on a $M(T, [x, y]) \subseteq S(T, [x, y])$ alors T est upper sign-continu sur K.*

Preuve: Soient x, y deux éléments de K tels que $\inf_{x_t^* \in T(x_t)} \langle x_t^*, y - x\rangle \geq 0$ pour tout $t \in]0, 1[$. Ainsi, pour t fixé et comme $y - x = \frac{x_t - x}{1-t}$, on a que $x \in M(T, [x_t, x])$ et donc, $x \in S(T, [x_t, x])$. Alors il existe $x^* \in T(x)$ tel que $\langle x^*, x_t - x\rangle \geq 0$, ce que implique que $\langle x^*, y - x\rangle \geq 0$ et par conséquent $\sup_{x^* \in T(x)} \langle x^*, y - x\rangle \geq 0$, ce qui compléte la preuve. $\square$

Remarque 2.2.3. *a) En combinant la Proposition 2.2.2 et le résultat analogue de J. Reinhard [80, Th. 2], on a le résultat suivant :*

> *soient K un sous-ensemble convexe de X et $T : K \to 2^{X^*}$ un opérateur multivoque. Si, pour tout $x, y \in K$ on a $M(T, [x, y]) = S(T, [x, y])$ alors T est pseudo-monotone et upper sign-continu sur K.*

b) Après le Lemme 2.1 dans D. Aussel et N. Hadjisavvas [12] on sait que, si l'operateur T est pseudo-monotone, upper sign-continu et il est à valeurs convexes et faiblement compactes, alors pour tout ensemble convexe et faiblement compact K on a que $M(T,K) = S(T,K)$.

Ceci constitue une sorte de réciproque de la Remarque 2.2.3 a) ci-dessus. Mais cette réciproque n'est cependant pas vraie si l'opérateur T n'est pas à valeurs convexes. Par exemple, si l'on considère à nouveau l'opérateur, pseudo-monotone et upper sign-continu défini dans l'Exemple 1.2.1 et $K = [-1,1]$, on a $M(T,K) = \{0\}$ tandis que $S(T,K) = \emptyset$.

En dimension 1, on peut établir le résultat suivant

Proposition 2.2.4. *Soient $T : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ un opérateur multivoque et K un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}$. Si T est quasi-monotone sur K et $S(T,K) \subseteq M(T,K)$. Alors T est pseudo-monotone sur K.*

Preuve: Soient x, y deux éléments différents de K et x^* un élément de $T(x)$ tels que $\langle x^*, y-x\rangle > 0$. Supposons qu'il existe $y^* \in T(y)$ tel que $\langle y^*, y-x\rangle = y^*(y-x) = 0$. Donc, $y^* = 0$, d'où $y \in S(T,K)$. Mais, puisque $S(T,K) \subseteq M(T,K)$, on a $\langle x^*, x-y\rangle \geq 0$, ce qui est absurde. □

En dimension quelconque, la preuve précédente ne tient pas mais on peut malgré tout étendre le résultat sous la forme suivante.

Proposition 2.2.5. *Soient $T : X \to 2^{X^*}$ un opérateur multivoque et $K \subseteq$ Dom (T) tel que $M(T,K) = S(T,K)$. Si T est quasi-monotone, hemi-continu inférieurement et* Dom (T) *est ouvert, alors T est pseudo-monotone sur K.*

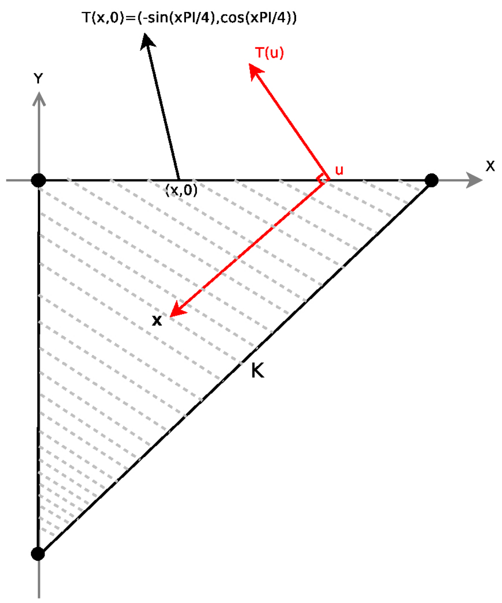
Preuve: Soient x, y deux éléments différents de K et x^* un élément de $T(x)$ tels que $\langle x^*, y-x\rangle = 0$. Si $x^* = 0$, alors $x \in S(T,K)$, ce que implique, $\langle y^*, y-x\rangle \geq 0$, pour tout $y^* \in T(y)$, car $M(T,K) = S(T,K)$. Dans le cas où $x^* \neq 0$, le résultat découle de la Proposition 2.1.13. □

Dans [64, Exemple 2], I. Konnov a mis en évidence des égalités entre les ensembles solutions de Stampacchia et Minty sans quasi-motonie. Dans [56, 58] un autre exemple montrant l'égalité entre les ensembles solutions de Stampacchia et Minty sans la pseudo-monotonie a été donné. Ici, on va montrer que l'opérateur utilisé dans [56, 58] est quasi-monotone.

Exemple 2.2.6. *Soient $K = \mathrm{conv}\{(0,0),(1,0),(0,-1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ et $K_0 = K \setminus \{(x_1,0) : 0 \leq x_1 \leq 1\}$. On définit $T : K \to \mathbb{R}^2$ par :*

1. *Si $x = (x_1, 0)$, on prend $T(x) = (-sin(x_1\pi/4), cos(x_1\pi/4))$.*

2. *Si $x \in K_0$, alors on contruit $T(x)$ en utilisant la propriété suivante : il existe un unique vecteur $u = (u_1, 0) \in K$ avec $x_1 < u_1 \leq 1$ tel que le vecteur $x - u$ soit orthogonal à $T(u)$. Ainsi, on définit $T(x) := T(u)$.*



La Proposition 3.4 dans [56] montre que $S(T,K) = M(T,K) = [(1,0),(0,-1)]$ et que T n'est pas pseudo-monotone sur K. Nous allons montrer que cet opérateur est quasi-monotone. D'abord, on voit que si $x = (0,0)$ alors $T(x) = (0,1)$, et par conséquent il n'y pas d'élément dans K tel que $\langle T(x), y-x\rangle > 0$. Ainsi, si on prend x, y deux éléments différents de K tels que $\langle T(x), y-x\rangle > 0$, alors $x \neq 0$. Ainsi $u_x = (u_x^1, 0) \neq (0,0)$ et par la définition de T, on a que $0 \leq u_y^1 < u_x^1$ avec $u_y = (u_y^1, 0)$. Maintenant, pour chaque $z \in K$, on peut écrire $z = u_z + t_z T(u_z)^\perp$ avec $u_z^1/cos(u_z^1\pi/4) \geq t_z \geq 0$. Ainsi, on a que $\langle T(u_x), u_y - u_x\rangle > 0$ et $\langle T(u_x), T(u_y)^\perp\rangle \geq 0$, mais $\langle T(u_x), T(u_y)^\perp\rangle = -\langle T(u_x)^\perp, T(u_y)\rangle$. Puisque $u_y^1 < u_x^1$ on a $\langle T(u_y), u_y - u_x\rangle \geq 0$. D'où $\langle T(y), y - x\rangle = \langle T(u_y), u_y - u_x\rangle - t_x\langle T(u_x)^\perp, T(u_y)\rangle \geq 0$ montrant aussi que T est quasi-monotone.

Une extension du lemme de Minty

Le célèbre lemme de Minty, Théorème 1.3.2 dans [72], stipule que l'ensemble solution de l'inéquation variationnelle de Stampacchia coïncide avec l'ensemble solution de l'inéquation variationnelle de Minty, c'est-à-dire $S(T,K) = M(T,K)$, à condition que K soit convexe et que T soit un opérateur univoque monotone et hemi-continu. D'autre part, il a été prouvé par D. Aussel et N. Hadjisavvas dans [12, Lemme 2.1] que si K est convexe et T est locally upper sign-continu à valeurs w^*-compactes, alors $M(T,K) \subseteq S^w(T,K)$. D'autre part à partir des définitions, on obtient directement que $S^w(T,K) \subseteq M(T,K)$ si T est pseudo-monotone. Puisque les liens entre les différents concepts de solutions vont jouer un rôle important dans nos résultats d'existence à venir, notre objectif dans cette partie est de résumer les relations entre ces différents ensembles de solutions prolongeant ainsi le lemme de Minty.

Lemme 2.2.7. *Soient K un sous-ensemble convexe de X et $T : K \to 2^{X^*}$ un opérateur multivoque.*

i) Si T est locally upper sign-continu, alors $M(T,K) \subseteq S^*(T,K)$.

ii) Si T est upper sign-continu à valeurs convexes w^*-compactes ou lower sign-continu, alors $M(T,K) \subseteq S(T,K)$.

iii) Si T est quasi-monotone, alors $S^<(T,K) \subseteq M(T,K)$.

iv) Si K est d'intérieur non vide et T est quasi-monotone et semi-continu inférieurement, alors $S^*(T,K) \subseteq M(T,K)$.

v) Si K est d'intérieur non vide et T est locally upper sign-continuous, semi-continu inférieurement et quasi-monotone, alors on a $S^*(T,K) = M(T,K)$.

Preuve: *i*) Soit x un élément de $M(T,K)$. Puisque T est locally upper sign-continu en x, alors il existe un voisinage convexe V_x de x et un sous-opérateur upper sign-continu $\Phi_x : V_x \to 2^{X^*}$ à valeurs convexes, w^*-compactes et non vide satisfaisant, pour tout $v \in V_x$, $\Phi_x(v) \subseteq T(v) \setminus \{0\}$. Soit y un élément de K, alors il existe y_1 tel que $y_1 \in [x,y] \cap V_x$, ainsi, on a que $\langle z^*, z-x\rangle \geq 0$ pour tout $z \in [x,y_1]$ et $z^* \in \Phi_x(z)$. Par conséquence $\sup_{x^* \in \Phi(x)} \langle x^*, y_1 - x\rangle \geq 0$. Par compacité de $\Phi_x(x)$ il existe $x^* \in \Phi_x(x)$ tel que $\langle x^*, y_1 - x\rangle \geq 0$ et par donc $\langle x^*, y - x\rangle \geq 0$. Ainsi, $x \in S^*(T,K)$.

ii) Soit x un élément de $M(T,K)$. Pour tout $y \in K$ et tout $(x_t, x_t^*) \in \mathrm{Gr}T$ avec $x_t = (1-t)x + ty$ on a $\langle x_t^*, x_t - x\rangle \geq 0$. Puisque T est upper sign-continu et à valeur w^*-compacte en x, il s'ensuit que $\max_{x^* \in T(x)} \langle x^*, y-x\rangle \geq 0$ montrant ainsi que $x \in S^w(T,K)$. Ainsi la conclusion est conséquence du théorème de minimax de Sion. La preuve est similaire dans le cas lower sign-continu.

iii) Soit x un élément de $S^<(T,K)$ et $y \in K$, $x \neq y$. Il existe donc $x^* \in T(x)$ tel que $\langle x^*, y - x\rangle > 0$. D'après par la quasi-monotonie de T pour tout $y^* \in T(y)$, $\langle y^*, y - x\rangle \geq 0$ et ainsi $x \in M(T,K)$.

iv) Si $x \in S^*(T,K)$ alors, grâce au Lemma 2.1.12, pour tout $z \in \mathrm{int}K$, on a $\langle x^*, z - x\rangle > 0$. Maintenant, pour tout $y \in K$, il existe une suite $(y_n) \subseteq \mathrm{int}K$ telle que (y_n) converge vers y. En conséquence, pour tout n, $\langle x^*, y_n - x\rangle > 0$ et donc, par la quasi-monotonie, $\langle y_n^*, y_n - x\rangle \geq 0$, pour tout $y_n^* \in T(y_n)$. Enfin, par semi-continuité inférieure de T en y, pour chaque $y^* \in T(y)$ il existe une suite $(\tilde{y}_n^*)_n$ convergeant vers y^* avec $\tilde{y}_n^* \in T(y_n)$, pour tout n.

D'où en prenant la limite, nous obtenons $\langle y^*, y - x\rangle \geq 0$ ce qui implique que $x \in M(T, K)$.

v) Ceci est une conséquence directe de i) et iv). $\square$

Remarque 2.2.8. *a) Considérant l'opérateur T défini dans l'Exemple 1.2.1 et $K = [-1, 1]$, il est clair que on a $M(T, K) = S^w(T, K)$ (ici égal à $\{0\}$) avec T pseudo-monotone et semi-continu supérieurement. Malgré tout, $M(T, K)$ n'est pas inclus dans $S(T, K)$ (ii) ne peut être appliqué car T n'est pas lower sign-continu).*

b) Nous remarquons que dans v) la semi-continuité inférieure de T peut être remplacé par : $x \in K$ et $(y_n) \subseteq K$ tels que $y_n \to y$ l'implication suivante est satisfaite

$$\liminf_n \sup_{y_n^* \in T(y_n)} \langle y_n^*, x - y_n\rangle \leq 0 \Rightarrow \sup_{y^* \in T(y)} \langle y^*, x - y\rangle \leq 0.$$

Il est clair que si T est semi-continu inférieurement alors T satisfait cette propriété. Ce type de propriété sera utilisée dans la prochaine sous-section.

Comme conséquence immédiate de [12, Lemma 2.1 et Proposition 2.1] et le Lemme 2.2.7, on a le lemme suivant.

Lemme 2.2.9. *Soit $T : X \to 2^{X^*}$ un opérateur multivoque et K un sous-ensemble convexe faiblement compact de X. Si T est pseudo-monotone et lower sign-continu sur K, alors $S(T, K)$ admet au moins une solution.*

2.3 Stabilité des inéquations variationnelles

Notre preuve d'existence pour l'inéquation quasi-variationnelle (voir le Chapitre 3) étant basée sur des techniques de perturbation des inéquations variationnelles, nous allons maintenant, tout au long de cette sous-section considérer les inéquations variationnelles perturbées de Stampacchia et Minty et on établira des résultats de fermeture des opérateurs solutions correspondants.

D'abord, on va considérer le problème d'inéquation variationnelle perturbée suivant

$$(S_\mu) \quad \begin{cases} \text{Trouver } x \in K(\mu) \text{ tel qu'il existe } x^* \in T(x) \\ \text{avec } \langle x^*, y - x\rangle \geq 0,\ \forall y \in K(\mu) \end{cases}$$

où U est un espace topologique et $T : X \to 2^{X^*}$ et $K : U \to 2^X$ sont deux opérateurs multivoques. Les problèmes d'inéquations variationnelles perturbées stricte $S^{<}(\mu)$, étoile $S^*(\mu)$ et faible $S^w(\mu)$ peuvent être définis de la même manière.

Proposition 2.3.1. *Supposons que $K : U \to 2^X$ est fermé et semi-continu inférieurement et que l'une des propriétés suivantes est satisfaite :*

i) T est semi-continu supérieurement à valeurs (fortement) compactes et $\mathrm{Dom}\,(T)$ *est fermé.*

ii) T est faible*-fermé et il existe un ensemble faible*-compact B tel que $T(x) \subseteq B$, pour tout $x \in K(U)$.

Alors l'operateur solution S^w est fermé. Si, de plus K est à valeurs convexes et T est à valeurs convexes et faible*-compactes, alors l'opérateur solution S est fermé.

Preuve: Soit $(\mu_n, x_n)_n \subset \mathrm{Gr}(S^w)$ une suite convergente vers (μ, x). Puisque que K est fermé, on a $x \in K(\mu)$. De la semi-continuité inférieure de K, on déduit que pour tout $y \in K(\mu)$ il existe $(y_n)_n$ une suite convergente vers y telle que, pour tout n, $y_n \in K(\mu_n)$. Mais, pour tout n, $x_n \in S^w(T, K(\mu_n))$ et donc on peut trouver $x_n^* \in T(x_n)$ satisfaisant

$$\langle x_n^*, y_n - x_n \rangle \geq 0. \tag{2.5}$$

Cas $i)$: Puisque T est à valeurs compactes, il existe $z_n^* \in T(x)$ tel que $\|z_n^* - x_n^*\| = d(x_n^*, T(x)) = \inf_{z^* \in T(x)} \|z^* - x_n^*\|$. De la suite $(z_n^*)_n$, on peut extraire, par compacité de $T(x)$, une sous-suite $(z_{n_k}^*)_k$ convergente (fortement), de limite $z^* \in T(x)$. Pour tout k, on a

$$\|z^* - x_{n_k}^*\| \leq \|z_{n_k}^* - x_{n_k}^*\| + \|z_{n_k}^* - z^*\| = d(x_{n_k}^*, T(x)) + \|z_{n_k}^* - z^*\|$$

et par semi-continuité supérieure de T, la sous-suite $(x_{n_k}^*)$ est donc convergente vers z^*. En prenant la limite dans (2.5), on obtient $\langle z^*, y - x \rangle \geq 0$. Cette inégalité étant vraie pour tout $y \in K(\mu)$, x est un élément de $S^w(T, K(\mu))$.

Cas $ii)$: Puisque, pour tout n $x_n^* \in B$ et B est faible*-compact il existe une sous-suite généralisée $(x_\alpha^*)_\alpha$ de (x_n^*) telle que $(x_\alpha^*)_\alpha$ est converge faiblement vers un certain x^*. Mais T est faiblement* fermé et donc $x^* \in T(x)$. D'autre part pour tout α on a

$$\langle x_\alpha^*, y_\alpha - x_\alpha \rangle \geq 0.$$

Ainsi, en observant que les suites généralisées $(x_\alpha)_\alpha$ et $(y_\alpha)_\alpha$ ont les mêmes limites, respectivement, que les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$, on obtient immédiatement $\langle x^*, y - x \rangle \geq 0$, prouvant que l'opérateur solution S^w est fermé. La fermeture de S est conséquence de la fermeture de S^w et le Théorème de

Minimax de Sion. □

La fermeture de l'opérateur solution S peut aussi être obtenue avec les hypothèses de régularité plus faibles sur T, si, d'autre part, T est supposé pseudo-monotone et les ensembles de constraintes $K(\mu)$ sont d'intérieur non vide.

Proposition 2.3.2. *Supposons que $T : X \to 2^{X^*}$ est pseudo-monotone et locally upper sign-continu ou lower sign-continu. Si l'une des conditions suivantes est satisfaite pour $K : U \to 2^X$*

i) les espaces U et X sont de dimension finie et l'opérateur K est Mosco-continu à valeurs convexes d'intérieur non vide,

ii) pour tout $u \in U$, $K(\mu) = \{x \in X : \ g_i(x) \leq h_i(\mu), \ \forall i \in \{1, \cdots, q\}\}$ où pour tout i la fonction h_i est continue et la fonction g_i est continue semi-strictement quasi-convexe.

Alors l'opérateur solution S est fermé.

Preuve: Tout d'abord, observons que, d'après le Lemme 2.2.7 et pour tout ensemble convexe non vide C, $S(T, C) = S^*(T, C) = M(T, C) = S^w(T, C)$, si T est locally upper sign-continu $S(T, C) = M(T, C) = S^w(T, C)$, si T est lower sign-continu. Soit maintenant $(\mu_n, x_n)_n \subseteq \mathrm{Gr}(S)$ une suite convergente vers (μ, x). L'opérateur K étant fermé, x est un élément de $K(\mu)$.
Soit y un élément de $\mathrm{int}(K(\mu))$. D'après par la Remarque 2.1.19, on a que pour les deux cas $i)$ et $ii)$, y est un élément de $\mathrm{int}(K(\mu))$, pour n assez grand. Mais $x_n \in S(T, K(\mu_n)) = M(T, K(\mu_n))$, et donc on a que

$$\langle y^*, y - x_n \rangle \geq 0, \text{ pour tout } y^* \in T(y),$$

et ainsi $\langle y^*, y - x \rangle \geq 0$. Or cette inéquation est vraie pour tout élément $y \in \mathrm{int}(K(\mu))$ et par conséquent $x \in M(T, \mathrm{int}(K(\mu))) = S(T, \mathrm{int}(K(\mu)))$. La preuve est alors complète puisque $S(T, \mathrm{int}(K(\mu))) = S(T, K(\mu))$. □

Du façon similaire à la Proposition 2.3.2, la fermeture de l'opérateur solution étoile S^* peut être prouvée en supposant la quasi-monotonie de T.

Proposition 2.3.3. *Supposons que $T : X \to 2^{X^*}$ est quasi-monotone, locally upper sign-continu et satisfait aussi l'hypothèse technique suivante : pour tout $x_n \to x$ et tout $y_n \to y$*

$$\liminf_n \sup_{y_n^* \in T(y_n)} \langle y_n^*, x_n - y_n \rangle \leq 0 \Rightarrow \sup_{y^* \in T(y)} \langle y^*, x - y \rangle \leq 0.$$

Si l'une des conditions suivantes est satisfaite pour $K : U \to 2^X$

i) les espaces U et X sont de dimension finie et l'opérateur K est Mosco-continu à valeurs convexes d'intérieur non vide,

ii) pour tout $u \in U$, $K(\mu) = \{x \in X : \ g_i(x) \leq h_i(\mu), \ \forall i \in \{1, \cdots, q\}\}$ où pour tout i la fonction h_i est continue et la fonction g_i est continue semi-strictement quasi-convexe.

Alors l'opérateur S^* est fermé.

Preuve: D'après le Lemme 2.2.7 et la Remarque 2.2.8 et pour tout ensemble convexe non vide C, $S^*(T, C) = M(T, C)$. Soit $(\mu_n, x_n)_n \subseteq \mathrm{Gr}(S^*)$ une suite convergente vers (μ, x). En utilisant les mêmes arguments que dans la preuve de la Proposition 2.3.2, pour tout $y \in \mathrm{int}(K(\mu))$ on a que $y \in \mathrm{int}(K(\mu_n))$ pour n assez grand et ainsi, puisque $x_n \in S^*(T, K(\mu)) = M(T, K(\mu))$, on a $\langle y^*, y - x_n\rangle \geq 0$ pour n assez grand et considérant la limite, $\langle y^*, y - x\rangle \geq 0$. Cela montre que $x \in M(T, \mathrm{int}(K(\mu))) = S^*(T, \mathrm{int}(K(\mu))) = S^*(T, K(\mu))$ ce qui complète la preuve. □

La proposition ci-dessus généralise, dans le cas où les perturbations sont sur l'opérateur de contrainte, et avec une preuve différente, le Théorème 4.2 de Ait Mansour-Aussel [1, Th.. 4.2], puisque l'hypothèse *iii*) dans [1, Th. 4.2] implique notre hypothèse technique.

Enfin, nous considérons le problème d'inéquation variationnelle perturbé de Minty suivant

$$(M_\mu) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } x \in K(\mu) \text{ tel que} \\ \\ \langle y^*, y - x\rangle \geq 0, \ \forall y \in K(\mu), \ \forall y^* \in T(y) \end{cases}$$

où U est un espace topologique et $T : X \to 2^{X^*}$ et $K : U \to 2^X$ sont deux opérateurs multivoques.

Proposition 2.3.4. *Supposons que U est un espace normé muni de la topologie faible et que les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

i) l'opérateur K est faiblement semi-continu inférieurement et faiblement fermé

ii) pour toute $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ et toute $y_\alpha \xrightarrow{w} y$

$$\liminf_\alpha \sup_{y^*_\alpha \in T(y_\alpha)} \langle y^*_\alpha, x_\alpha - y_\alpha\rangle \leq 0 \Rightarrow \sup_{y^* \in T(y)} \langle y^*, x - y\rangle \leq 0.$$

Alors, l'opérateur solution M est faiblement fermé sur U.

Cette Proposition 4.4 généralise, dans le cas des inéquations variationnelles, le Théorème 3.1 de Lalitha et Bhatia dans [57], puisque la semi-continuité inférieure implique l'hypothèse technique ii).

Preuve: Soit $(\mu_\alpha, x_\alpha) \in \mathrm{Gr}(M)$ une suite généralisée telle que μ_α converge faiblement vers μ et x_α converge faiblement vers x. Par la faible fermeture de K, on a $x \in K(\mu)$. D'autre part, d'après la faible semi-continuité inférieure de K, pour tout $y \in K(\mu)$ il existe une suite généralisée (y_α) faiblement convergente vers y telle que $y_\alpha \in K(\mu_\alpha)$ pour tout α. Puisque, pour tout α, $x_\alpha \in M(\mu_\alpha)$, on déduit immédiatement que

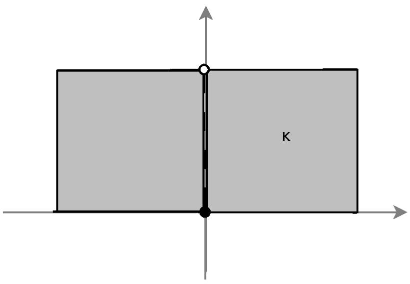
$$\liminf_{\alpha} \sup_{y^*_\alpha \in T(y_\alpha)} \langle y^*_\alpha, x_\alpha - y_\alpha \rangle \leq 0$$

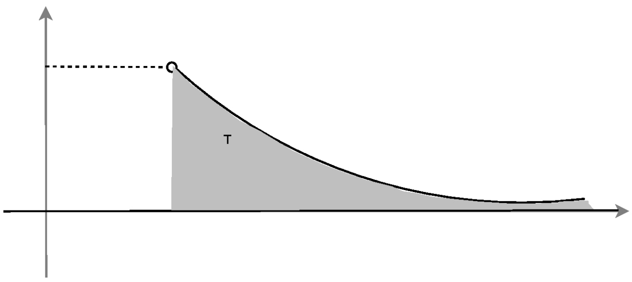
et par l'hypothèse *ii*), $\sup_{y^* \in T(y)} \langle y^*, x - y \rangle \leq 0$, montrant ainsi que x est un élément de $M(\mu)$. □

Dans la proposition ci-dessus, l'hypothèse de fermeture du graphe de l'opérateur K ne peut être omise, en général.

Exemple 2.3.5. *Considèrons par exemple $K : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ et $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définis par :*

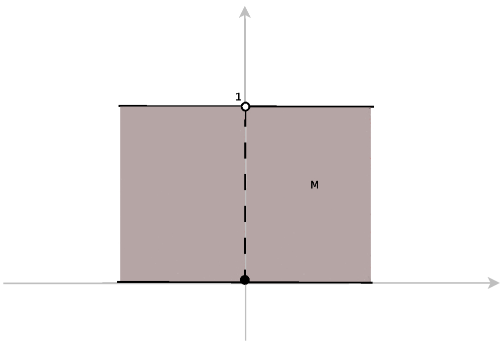
$$K(\mu) = \begin{cases} \{0\} & \mu = 0 \\ [0,1] & \mu \neq 0 \end{cases} \quad \text{et } T(x) = \begin{cases} \{0\} & x \leq 1 \\ [0, 1/x] & x > 1 \end{cases}.$$





On peut voir aisément que K est semi-continu inférieurement à valeurs convexes et T est semi-continu inférieurement. De plus, l'opérateur solution de l'inéquation variationnelle de Minty est donné par

$$M(\mu) = \begin{cases} \{0\} & \mu = 0 \\ [0,1] & \mu \neq 0 \end{cases}$$



Et le graphe de l'application multivoque M n'est pas fermé.

Chapitre 3

Inéquation quasi-variationnelle quasi-monotone

Dans ce chapitre nous allons donner des résultats d'existence de solution et de stabilité pour des inéquations quasi-variationnelles gouvernées par des opérateurs quasi-monotones. Enfin on donnera deux applications : la première au problème de quasi-optimisation et la seconde au problème de traffic dans un réseau dynamique.

3.1 Existence de solution

Dans cette section on va donner des résultats sur l'existence de solution des inéquations quasi-variationnelles.

Dans la proposition suivante, nous mettons en évidence le fait que l'on peut aisément obtenir une version du résultat d'existence de Tan, le Théorème 1.4.1, sans supposer que T soit à valeurs convexes.

Proposition 3.1.1. *Soient $T : X \to 2^{X^*}$ et $K : C \to 2^C$ deux opérateurs multivoques, avec C un sous-ensemble convexe et compact de X et supposons que les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

i) L'opérateur K est Mosco-continu à valeurs convexes,

ii) T est semi-continu supérieurement (norme-norme) à valeurs compactes.

Alors $\mathrm{QVI}^w(T, K)$ *admet au moins une solution.*

Preuve: L'hypothèse *ii*) et la Proposition 2.1.7 montrent que $\mathrm{conv}(T)$ est semi-continu supérieurement à valeurs compactes et convexes. Alors d'après le Théorème 1.4.1 l'inéquation quasi-variationnelle $\mathrm{QVI}(\mathrm{conv}(T), K)$ admet au moins une solution x qui est par conséquent un point fixe de K et donc aussi un élément de $S(\mathrm{conv}(T), K(x))$. D'autre part, selon le Lemme 2.2.1, $S(\mathrm{conv}(T), K(x)) \subseteq S^w(T, K(x))$ et donc finalement $x \in \mathrm{QVI}^w(\mathrm{conv}(T), K)$. □

L'existence de solutions pour $\mathrm{QVI}(T, K)$ peut également être obtenue, en dimension finie, avec des hypothèses de régularité plus faibles sur l'opérateur T si, d'autre part, T est supposé être pseudo-monotone et les ensembles de contraintes $K(\cdot)$ sont d'intérieur non vide.

Proposition 3.1.2. *Soient $T : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ et $K : C \to 2^C$ deux opérateurs multivoques, avec C un sous-ensemble convexe et compact de $\mathbb{R}^n$ et supposons que les propriétés suivantes sont satisfaites :*

i) L'opérateur K est Mosco-continu à valeurs convexes et $\mathrm{int}(K(x)) \neq \emptyset$ *pour tout $x \in C$,*

ii) T est locally upper sign-continu ou lower sign-continu,

iii) T est pseudo-monotone sur C.

Alors $\mathrm{QVI}(T, K)$ *admet au moins une solution.*

Preuve: Pour tout $x \in C$, l'ensemble de contrainte $K(x)$ est compact puisque K est fermé et C est compact. Ainsi, pour tout $x \in C$, $S(T, K(x))$ admet au moins une solution. En effet, puisque T est pseudo-monotone, ceci est une conséquence de [12, Théorème 2.1] si T est locally upper sign-continu et cela résulte du Lemme 2.2.9 si T est lower sign-continuous. On définit alors l'opérateur $\mathcal{S} : C \to 2^C$ par $\mathcal{S}(x) = S(T, K(x))$. Puisque T est pseudo-monotone et locally upper sign-continu (ou lower sign-continu), le Lemme 2.2.7 implique que $\mathcal{S}(x) = S(T, K(x)) = M(T, K(x))$, et ainsi $\mathcal{S}$ est à valeurs convexes. D'autre part, d'après la Proposition 2.3.2, $\mathcal{S}$ est fermé et donc semi-continu supérieurement puisque C est compact. Le Théorème de point fixe de Kakutani, implique alors l'existence d'un point fixe x de $\mathcal{S}$, ce que implique que $x \in \mathrm{QVI}(T, K)$. $\square$

Du façon similaire à la Proposition 3.1.2, l'existence de solutions étoile peut être prouvée en supposant la quasi-monotonie de T.

Proposition 3.1.3. *Soient $T : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ et $K : C \to 2^C$ deux opérateurs multivoques, avec C un sous-ensemble convexe et compact de $\mathbb{R}^n$ et supposons que les propriétés suivantes sont satisfaites :*

i) L'opérateur K est Mosco-continu à valeurs convexes et $\mathrm{int}(K(x)) \neq \emptyset$ pour tout $x \in C$,

ii) T est quasi-monotone et locally upper sign-continu,

iii) pour tout $x_n \to x$ e tout $y_n \to y$

$$\liminf_n \sup_{y_n^* \in T(y_n)} \langle y_n^*, x_n - y_n \rangle \leq 0 \Rightarrow \sup_{y^* \in T(y)} \langle y^*, x - y \rangle \leq 0.$$

Alors $\mathrm{QVI}^*(T, K)$ admet au moins une solution.

Preuve: La preuve suit essentiellement les mêmes arguments que la Proposition 3.1.2. Plus précisément l'opérateur K est à valeurs compactes puisque C est compact et que K est fermé. Par le Théorème 2.1 de [12] et T étant quasi-monotone et locally upper sign-continu, pour tout $x \in C$, $S(T \setminus \{0\}, K(x)) \neq \emptyset$. Ainsi, l'opérateur $\mathcal{S}^* : C \to 2^C$ défini par $\mathcal{S}^*(x) = S^*(T, K(x)) = S(T \setminus \{0\}, K(x))$ est à valeurs convexes non vide. Alors combinant le Lemme 2.2.7 part v) et la Remarque 2.2.8, on a $\mathcal{S}^*(x) = M(T, K(x))$. Finalement, grâce à la Proposition 2.3.3, $\mathcal{S}^* : C \to 2^C$ est fermé à valeurs non vide, convexes et donc $\mathcal{S}^*$ est semi-continu supérieurement par compacité de C. Ainsi, d'après le Théorème de point fixe de Kakutani, il existe un point fixe x de $\mathcal{S}^*$ qui est donc aussi élément de $\mathrm{QVI}^*(T, K)$. $\square$

Remarque 3.1.4. *De manière analogue à la notion d'ensemble solution stricte pour les inéquation variationnelle on peut définir, étant donnés deux opérateurs $T : X \to 2^{X^*}$ et $K : X \to 2^X$, l'ensemble de solutions strictes $\mathrm{QVI}^<(T, K)$, de l'inéquation quasi-variationnelle définie par T et K*

$$\mathrm{QVI}^<(T, K) = \{x \in K(x) : \ \exists x^* \in T(x) \ \textit{avec} \ \langle x^*, y - x \rangle > 0 \ \forall y \in K(x) \setminus \{x\}\}.$$

Comme précédemment, on a alors que $\mathrm{QVI}^<(T,K) = PF(S^<(T,K(\cdot)))$ *et que* $\mathrm{QVI}^<(T,K) \subseteq \mathrm{QVI}^*(T,K) \subseteq \mathrm{QVI}(T,K) \subseteq \mathrm{QVI}^w(T,K)$*. Il est néanmoins important de noter que l'ensemble des solutions strictes d'une inéquation variationnelle est en fait un singleton lorsque T est quasimonotone (voir [2, Lemma 2.3]).*
Dans le cadre plus général des inéquations quasi-variationnelles nous allons préciser cette propriété.

> *Si l'operateur T est quasi-monotone et $QVI^<(T,K)$ est non vide, alors $QVI^<(T,K)$ est un singleton si et seulement si pour tout $x,\ x' \in QVI^<(T,K)$ on a*
>
> $$x' \in K(x) \text{ et } x \in K(x').$$

En effet, s'il existe $x_1,\ x_2 \in QVI^<(T,K)$, $x_1 \neq x_2$, tels que $x_2 \in K(x_1)$ et $x_1 \in K(x_2)$, alors il existe $x_1^* \in T(x_1)$ et $x_2^* \in T(x_2)$ tels que $\langle x_1^*, x_2 - x_1\rangle > 0$ et $\langle x_2^*, x_1 - x_2\rangle > 0$ ce que constitue une contradiction avec la quasi-monotonie de T.

De même, on peut donner des conditions pour obtenir un résultat d'existence de solutions stricte.
Soient $T : X \to 2^{X^*}$ et $K : C \to 2^C$ deux opérateurs multivoques, avec C un sous-ensemble convexe et compact de X. Si pour tout $x \in X$, $S^<(T,K(x))$ est non vide et les propriétés suivantes sont satisfaites :
i) T est quasi-monotone ;
ii) $PF(K)$ est fermé et $PF(K) \subset K(x)$ pour tout $x \in X$;
iii) pour tout $y_n \xrightarrow{w} y$ et tout $x_n \to x$,

$$\sup_{y^* \in T(y)} \langle y^*, x - y\rangle \leq \liminf_n \sup_{y_n^* \in T(y_n)} \langle y_n^*, x_n - y_n\rangle .$$

Alors $\mathrm{QVI}^<(T,K)$ *admet au moins une solution.*

Ici, comme précédement, $PF(K)$ est l'ensemble des points fixes de K.

En effet, grâce à la Proposition 3.2.6, que l'on établira dans la sous-section 3.2 la fonction $\mathcal{S}^< : C \to C$ définie par $\mathcal{S}^<(x) = S^<(T,K(x))$ est continue. Par conséquence il exite un point fixe x de $\mathcal{S}^<$ qui est donc élément de $\mathrm{QVI}^<(T,K)$.

Proposition 3.1.5. *Soient $T : X \to 2^{X^*}$ et $K : C \to 2^C$ deux opérateurs multivoques, avec C un sous-ensemble convexe et compact de X et supposons que les propriétés suivantes sont satisfaites :*

i) L'opérateur K est faiblement fermé et faiblement semi-continu inférieurement à valeurs convexes ;

ii) pour tout $x_n \to x$ et tout $y_n \to y$, l'implication suivante est satisfaite

$$\liminf_n \sup_{y_n^* \in T(y_n)} \langle y_n^*, x_n - y_n \rangle \leq 0 \Rightarrow \sup_{y^* \in T(y)} \langle y^*, x - y \rangle \leq 0;$$

iii) T est proprement quasi-monotone.

Alors $\mathrm{MQVI}(T, K)$ *admet au moins une solution. De plus, si T est upper sign-continu à valeurs convexes w^*-compactes, alors* $\mathrm{QVI}(T, K)$ *admet une solution tandis que si T est locally upper sign-continu, alors* $\mathrm{QVI}^*(T, K) \neq \emptyset$.

Preuve: Selon [33, Th. 5.1], l'inéquation variationnelle $M(T, K(x))$ admet au moins une solution puisque T est proprement quasi-monotone et K est à valeurs compactes. Grâce à la Proposition 2.3.4, l'opérateur $\mathcal{M} : C \to 2^C$ défini par $\mathcal{M}(x) = M(T, K(x))$ est faiblement fermé à valeurs faiblement compactes. Par conséquent $\mathcal{M}$ est semi-continu supérieurement (faible-faible) et admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in \mathrm{MQVI}(T, K)$. Enfin, grâce au Lemme 2.2.7 *ii*), $M(T, K(x)) \subseteq S(T, K(x))$ si T est upper sign-continu et à valeurs convexes w^*-compactes tandis que le Lemme 2.2.7 *i*) implique immédiatement que $\mathrm{MQVI}(T, K) \subseteq \mathrm{QVI}^*(T, K)$ si T est locally upper sign-continu. □

3.2 Stabilité qualitative

Cette section est consacrée à l'étude de stabilité qualitative des inéquations quasi-variationnelles quasi-monotones perturbées. Cela consiste à considèrer la relation de régularité (semi-continuité et fermeture) liant les pertubations aux ensembles solution correspondant de l'inéquation quasi-variationnelle perturbée associée à un opérateur quasi-monotone. Les opérateurs solution naturels qui seront considérés, pour ce type d'inéquation quasi-variationnelle perturbée de Stampacchia $(P_{\lambda,\mu})$, où

$$(P_{\lambda,\mu}) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } x \in K(x, \mu) \text{ tel qu'il existe } x^* \in T(x, \lambda) \\ \\ \text{avec } \langle x^*, y - x \rangle \geq 0, \ \forall y \in K(x, \mu) \end{cases}$$

sont l'ensemble de solution stricte $S^< : \Lambda \times U \to 2^X$ et l'ensemble de solution étoile $S^*(\lambda, \mu) : \Lambda \times U \to 2^X$ définis dans les Préliminaires.

Semi-continuité de S^*

Commençons par un critère de fermeture global sous l'hypothèse de quasi-monotonie. Pour tout $\mu \in U$, on utilise la notation $\mathcal{K}(\mu) = \cup_{x\in X} K(\mu, x)$.

Proposition 3.2.1. *Supposons que les propriétés suivantes sont vérifiées :*

i) l'opérateur K est semi-continu inférieurement, fermé et à valeurs convexes d'intérieur non vide ;

ii) pour tout $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times U$, $T(\cdot, \lambda)$ est quasi-monotone et locally upper sign-continu sur $\mathcal{K}(\mu)$;

iii) pour tout $x_n \to x$, tout $(\lambda_n, \mu_n) \to (\lambda, \mu)$ et tout $z_n \to z$ avec $z \in \mathrm{int}(K(x, \mu))$, $z_n \in \mathrm{int}(K(x_n, \mu_n))$, $x \in K(x, \mu)$, $x_n \in K(x_n, \mu_n)$, on a

$$\sup_{z^* \in T(z,\mu)\setminus\{0\}} \langle z^*, x - z\rangle \leq \liminf_n \sup_{z_n^* \in T(z_n,\lambda_n)\setminus\{0\}} \langle z_n^*, x_n - z_n\rangle\,;$$

Alors S^* est fermé sur $\Lambda \times U$.

Preuve: La preuve suit les mêmes arguments que dans [1, Théorème 4.2]. Soit $((\lambda_n, \mu_n))_n$ une suite de $\Lambda \times U$ convergeant vers (λ, μ). Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe des voisinages $\mathcal{V}$ de λ et $\mathcal{U}$ de μ tels que $S^*(\lambda', \mu')$ est non vide, pour tout $(\lambda', \mu') \in \mathcal{V} \times \mathcal{U}$. Supposons donc qu'il existe une suite convergente $(x_n)_n$ de X avec $x_n \in S^*(\lambda_n, \mu_n)$ pour tout n. Notons x la limite de $(x_n)_n$ et montrons que x est un élément de $S^*(\lambda, \mu)$.

Selon la définition de la locally upper sign-continuité, il existe un voisinage convexe V de x et un opérateur upper sign-continu $\Phi_x : V \to 2^{X^*}$ à valeurs non vides, convexes w^*-compactes satisfaisant, pour tout $v \in V$, $\Phi_x(v) \subset T(v, \lambda) \setminus \{0\}$. Or, puisque $x_n \in K(x_n, \mu_n)$, pour tout n, la fermeture de K donne immédiatement $x \in K(x, \mu)$.

Notre premier objectif est de montrer que, pour tout $y \in \mathrm{int}(K(x, \mu))$, il existe un élément $x_y^* \in \Phi_x(x)$ tel que $\langle x_y^*, y - x\rangle \geq 0$, ce qui signifie que x est une solution du problème d'inéquation quasi-variationnelle faible de Stampacchia défini par les opérateurs multivoques $T(\cdot, \lambda)\setminus\{0\}$ et $\mathrm{int}(K(\cdot, \mu))$. Puisque les ensembles V et $K(x, \mu)$ sont convexes, il suffit de montrer le résultat intermédiaire pour $y \in \mathrm{int}(K(x, \mu)) \cap V$.

Ainsi, soit y un point arbitraire de $\mathrm{int}(K(x, \mu)) \cap V$ (avec $y \neq x$). Le segment $[y, x[$ est inclus dans $\mathrm{int}(K(x, \mu)) \cap V$. Soit $z_t = ty + (1-t)x$ ($t \in]0, 1]$) un élément de $[y, x[$. D'après la Proposition 3.2 de [1] $i) \Rightarrow ii)$, il existe une suite $(z_n)_n$ convergeant vers z_t telle que $z_n \in \mathrm{int}(K(x_n, \mu_n))$, $\forall n$. De plus, par le Lemme 1.3.1, il existe $x_n^* \in T(x_n, \lambda_n) \setminus \{0\}$ vérifiant

$$\langle x_n^*, z_n - x_n\rangle > 0$$

Ainsi, par la quasi-monotonie de $T(\cdot, \lambda_n)$, on déduit que

$$\langle z_n^*, z_n - x_n \rangle \geq 0, \ \forall z_n^* \in T(z_n, \lambda_n) \setminus \{0\}.$$

Puisque T est locally upper sign-continu, l'ensemble $T(z_n, \lambda_n) \setminus \{0\}$ est non vide, pour tout n. L'hypothèse *iii*) conduit maintenant à

$$\begin{aligned} \sup_{z_t^* \in \Phi_x(z_t, \lambda)} \langle z_t^*, x - z_t \rangle &\leq \sup_{z_t^* \in T(z_t, \lambda) \setminus \{0\}} \langle z_t^*, x - z_t \rangle \\ &\leq \liminf_n \sup_{z_n^* \in T(z_n, \lambda_n) \setminus \{0\}} \langle z_n^*, x_n - z_n \rangle \leq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $t \in]0, 1[$,

$$\inf_{z_t^* \in \Phi_x(z_t)} \langle z_t^*, y - x \rangle \geq 0$$

et, selon l'upper sign-continuité de Φ_x,

$$\max_{x^* \in \Phi_x(x)} \langle x^*, y - x \rangle \geq 0$$

ce que complète la preuve du premier objetif.

Maintenant, puisque $K(x, \mu)$ est fermé et convexe, $K(x, \mu) = \text{cl}(\text{int}(K(x, \mu))$ et ainsi

$$\inf_{y \in K(\mu, x)} \max_{x^* \in \Phi_x(x)} \langle x^*, y - x \rangle \geq 0.$$

Finalement, en utilisant le théorème de minimax de Sion, il existe un élément $x^* \in T(x, \lambda) \setminus \{0\}$ tel que

$$\langle x^*, y - x \rangle \geq 0 \ \ \forall y \in K(\mu, x)$$

c'est-à-dire, $x \in S^*(\lambda, \mu)$. □

Comme le montre l'exemple simple suivant, l'hypothèse *ii*) sur l'upper sign-continuité de l'opérateur $T(\cdot, \lambda)$ joue un rôle essentiel dans le résultat de fermeture ci-dessus.

Exemple 3.2.2. *Considérons l'inéquation quasi-variationnelle $QVI(T, K)$ définie par les operateurs $T : \mathbb{R}^2 \to 2^{\mathbb{R}}$ et $K : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$:*

$$T(x, \lambda) = \begin{cases} \{-1\} & \textit{si } x \leq \lambda \\ \{1\} & \textit{sinon} \end{cases}$$

et $K(x) = [x, x + 1]$, pour tout $(\mu, x) \in \mathbb{R}^2$. On peut voir aisément que K est fermé et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $T(\cdot, \lambda)$ est quasi-monotone. Par contre l'operateur $T(\cdot, \lambda)$ n'est pas upper sign-continu (considérer $x = \lambda$ et $y = \lambda + 1$) et, quelque soit λ, on a $S^*(\lambda, \mu) = S^<(\lambda, \mu) = \langle \lambda, +\infty \rangle$, démontrant que S^* n'est pas fermé.

Néanmoins, il existe un cas particulier pour lequel il est possible de prouver la fermeture (et même la semi-continuité inférieure (voir Proposition 3.2.5) de l'opérateur S^* sans supposer, ni l'upper sign-continuité de T ni la quasi-monotonie.

Proposition 3.2.3. *Soit* $(\lambda_0, \mu_0) \in \Lambda \times U$ *tel que* $S^*(\lambda_0, \mu_0)$ *est non vide. Si l'operateur* $K(\cdot, \mu_0)$ *admet exactement un point fixe (noté* x_0*) et* K *est fermé en* (x_0, μ_0) *alors* S^* *est fermé en* (λ_0, μ_0)*.*

Preuve: En effet observons tout d'abord que, $S^*(\lambda_0, \mu_0) = \{x_0\}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que pour tout voisinage V_0 de (λ_0, μ_0), S^* est non vide sur V_0. Donc, soit $((\lambda_n, \mu_n))_n$ une suite convergeant vers (λ_0, μ_0) et soit $(x_n)_n$ une suite de X, convergeant (vers un point $\bar{x}$) et telle que, pour tout n, $x_n \in S^*(\lambda_n, \mu_n)$. Pour tout n, $x_n \in K(x_n, \mu_n)$ et ainsi, par la fermeture de K, $\{\bar{x}\} = \{x_0\} = S^*(\lambda_0, \mu_0)$. □

Notons que le résultat ci-dessus est inutile lorsque l'inéquation quasi-variationnelle considérée est en fait un inéquation variationnelle, c'est-à-dire quand $K(x, \mu)$ ne dépend que de μ. En effet, dans ce cas, l'hypothèse comme quoi $K(\cdot, \mu_0)$ admet exactement un point fixe implique que K est constante et que cette valeur constante est un singleton, qui est aussi l'unique solution de $(P_{(\lambda,\mu)})$ pour tout (λ, μ).

Exemple 3.2.4. *L'exemple suivant montre que l'hypothèse* $K(\cdot, \mu_0)$ *admet exactement un point fixe ne peut être aisément évitée, même si on considère* $S^*(\lambda_0, \mu_0)$ *unitaire. En fait, soit* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *défini par*

$$T(x, \lambda) := \begin{cases} \{1\} & , \textit{si } \lambda \neq 0 \textit{ ou } (\lambda = 0 \textit{ et } x = 0) \\ \{0\} & , \textit{sinon} \end{cases}$$

et considerons $K : \mathbb{R}^2 \to 2^{\mathbb{R}}$ *défini par* $K(x, \mu) := [x, x + |\mu|]$*. Alors* S^* *n'est pas fermé en* $(0, 0)$ *puis* $S^*(0, 0) = \{0\}$ *et* $S^*(\lambda, 0) = \mathbb{R}$*, pour tout* $\lambda \neq 0$*.*

Par des arguments classiques, le semi-continuité supérieure de l'opérateur solution étoile peut être obtenue à partir des résultats de fermeture ci-dessus en supposant une certaine compacité de l'image. Si, en plus des hypothèses de la Proposition 3.2.1 (respectivement de la Proposition 3.2.3 pour tout $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times U$), l'ensemble $K(X \times U)$ est compact alors l'operateur multivoque S^* est semi-continu superieurement (respectivement univoque et continu) sur $\Lambda \times U$. Mais, il est important d'observer que l'hypothèse $i)$ dans la Proposition 3.2.1 combinée avec l'hypothèse de compacité implique que $\dim(X) < +\infty$.

Nous allons maintenant concentrer notre attention sur la semi-continuité inférieure de l'opérateur solution étoile.

Proposition 3.2.5. *Si $X = \mathbb{R}^n$ et, en plus des hypothèses de la Proposition 3.2.3, il existe un voisinnage $\mathcal{V}_0$ de λ_0, un voisinnage $\mathcal{U}_0$ de μ_0 et un ensemble compact $\mathcal{K}$ de X tels que S^* est à valeurs non vide sur $\mathcal{V}_0 \times \mathcal{U}_0$ et l'ensemble $K(\mathbb{R}^n \times \mathcal{U}_0)$ est inclus dans $\mathcal{K}$, alors S^* est semi-continu inférieurement en (λ_0, μ_0).*

Preuve: C'est une conséquence directe du Lemme 2.1.5 avec $Y = \Lambda \times U$, $Z = X$, $\Phi = S^*$ et $y_0 = (\lambda_0, \mu_0)$. En effet, puisque l'opérateur $K(\cdot, \mu_0)$ admet exactement un point fixe (par exemple x_0), en alors $S^*(\lambda_0, \mu_0) = \{x_0\}$. D'autre part, par la Proposition 3.2.3, S^* est fermé en (λ_0, μ_0). Finalement, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathcal{V}_0 \times \mathcal{U}_0$, $S^*(\lambda, \mu) \subset K(\mathbb{R}^n \times \mathcal{U}_0) \subset \mathcal{K}$ et la semi-continuité inférieure de S^* à (λ_0, μ_0) résulte du Lemme 2.1.5. □

Continuité de $S^<$

Considérons maintenant l'opérateur de point fixe $\Phi : U \to 2^X$ défini de l'opérateur de contraintes K par $\Phi(\mu) := \{x \in X; x \in K(x, \mu)\}$.

Proposition 3.2.6. *Soit V_0 et U_0 deux voisinages respectivement de λ_0 et μ_0 tels que pour tout $(\lambda, \mu) \in V_0 \times U_0$, $S^<(\lambda, \mu)$ est non vide et*

i) l'operateur $T(\cdot, \lambda)$ est quasi-monotone, pour tout $\lambda \in V_0$;

ii) pour tout $\mu \in U_0$, $\Phi(\mu) \subseteq K(x, \mu)$ pour tout $x \in X$;

iii) pour tout $y_n \xrightarrow{weakly} y$, tout $x_n \to x_0$ et tout $(\lambda_n, \mu_n) \to (\lambda_0, \mu_0)$,

$$\sup_{x^* \in T(x_0, \lambda)} \langle x^*, y - x \rangle \leq \liminf_n \sup_{x_n^* \in T(x_n, \lambda_n)} \langle x_n^*, y_n - x_n \rangle ;$$

Alors l'opérateur solution stricte $S^<$ est univoque sur $V_0 \times U_0$ et

a) il est continu en (λ_0, μ_0) si Φ est semi-continu inférieurement en μ_0 et à graphe fermé et s'il existe un ensemble compact $\mathcal{K}$ de X tel que $K(X \times U_0) \subset \mathcal{K}$;

b) il est faiblement continu à (λ_0, μ_0) si X est un espace réfléchi, Φ est Mosco-continu en μ_0 et l'ensemble $K(X \times U_0)$ est borné.

Preuve: En combinant de l'hypothèse ii) et la Proposition 3.1.4, on obtient l'opérateur solution strict $S^<$ est univoque.

Soit $((\lambda_n, \mu_n))_n$ suite quelconque de $V_0 \times U_0$ convergeant vers (λ_0, μ_0). Pour tout n, notons par $\bar{x}_n$ l'unique élément de $S^<(\lambda_n, \mu_n)$. On peut supposer, prenant éventuellement une sous-suite, que la suite $(\bar{x}_n)_n$ converge (converge faiblement dans le cas b)) vers un certain point $\bar{x}_0$. Dans le cas a) cela résulte de la compacité de l'ensemble $\mathcal{K}$ tandis que dans le cas b) cela résulte du théorème de l'Eberlein-Smulian.

Supposons, pour mettre en évidence une contradiction, que $x_0 \neq \bar{x}_0$ où $S^<(\lambda_0, \mu_0) = \{x_0\}$. Puis, sans perte de généralité on peut supposer que pour tout n, $x_n \neq \bar{x}_n$. Par la semi-continuité inférieure (ou la partie inférieure de la Mosco-continuité) de Φ, il existe une suite $(x_n)_n$ (fortement) convergeant vers x_0 telle que $x_n \in \Phi(\mu_n)$ pour tout n. Or, puisque, pour tout n, $\bar{x}_n \in S^<(\lambda_n, \mu_n)$, il existe $\bar{x}_n^* \in T(\bar{x}_n, \lambda_n)$ tel que

$$\langle \bar{x}_n^*, y - \bar{x}_n \rangle > 0, \quad \forall y \in K(\bar{x}_n, \mu_n) \setminus \{\bar{x}_n\}$$

et donc, par les hypothèses $i)$ et $ii)$ on a

$$\langle x_n^*, \bar{x}_n - x_n \rangle \leq 0 \quad \forall x_n^* \in T(x_n, \lambda_n).$$

La combinaison de l'inégalité précédente avec l'hypothèse $iii)$ donne

$$\sup_{x^* \in T(x_0, \lambda_0)} \langle x^*, \bar{x}_0 - x_0 \rangle \leq 0. \tag{3.1}$$

Nous allons montrer que $\bar{x}_0$ est un élément de $\Phi(\mu_0)$.
Dans le cas $a)$, comme $\bar{x}_n \in S^<(\lambda_n, \mu_n)$, $\bar{x}_n \in \Phi(\mu_n)$, pour tout n. Puisque $(\bar{x}_n)_n$ converge (fortement) vers $\bar{x}_0$, $\bar{x}_0 \in \liminf_n \Phi(\mu_n) \subset \limsup_n \Phi(\mu_n) \subset \Phi(\mu_0)$ par la semi-continuité inférieure et la fermeture de Φ.
Maintenant, dans le cas $b)$ $\bar{x}_0 \in \Phi(\mu_0)$ comme conséquence directe de la convergence faible de la suite $(\bar{x}_n)_n$ et de la partie supérieure de la Mosco-continuité de Φ.

Finalement une contradiction avec (3.1) est obtenue puisque, par l'hypothèse $ii)$, $\bar{x}_0 \in K(x_0, \mu_0)$ et ainsi, x_0 étant une solution stricte du (P_{λ_0,μ_0}), il existe $x_0^* \in T(x_0, \lambda_0)$ tel que $\langle x_0^*, \bar{x}_0 - x_0 \rangle > 0$. □

Notons qu'il est suffisant, pour montrer, dans la Proposition 3.2.6, la continuité (forte) de $S^<$, de supposer $iii)$ pour les suites (fortement) convergentes $(y_n)_n$.

3.3 Applications

Dans cette section, notre but est de considérer deux types de problème l'un d'entre eux étant un problème d'optimisation particulier, appelé problème de quasi-optimisation et le second étant le problème du traffic dans un réseaux dépendent du temps. Nous allons fournir des résultats d'existence pour ces deux problèmes, à partir des résultats d'existence de l'inéquation quasi-variationnelle prouvés dans la sous-section 3.1.

3.3.1 Quasi-optimisation

Nous allons considérer le problème, QOpt(f,K), suivant :

$$\text{Trouver } x \in K(x) \text{ tel que } f(x) = \min_{z\in K(x)} f(z)$$

où $f : X \to \mathbb{R}$ et $K : C \to 2^C$ avec C un sous-ensemble de X.

Comme indiqué dans l'introduction, la terminologie de "quasi-optimisation" a été introduite par F. Facchinei et C. Kanzow dans [37, 38], où ils montrent qu'il permet via les fonctions écart (gap en anglais), de reformuler le problème d'équilibre de Nash généralisé. Grâce aux propriétés de l'opérateur normal ajusté, nous allons prouver un résultat d'existence du problème de quasi-optimisation

Proposition 3.3.1. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue quasi-convexe, C un sous-ensemble convexe et faiblement compact de $X \setminus \arg\min_X f$ et $K : C \to 2^C$ est faiblement fermé et faiblement semi-continu inférieurement à valeurs convexes et non vide. Supposons, de plus que l'opérateur normal ajusté N^a_f satisfait l'hypothèse suivante : pour tout $y_\alpha \to y$, tout $x_\alpha \to x_0$*

$$\sup_{x^*\in N^a_f(x_0)} \langle x^*, y-x\rangle \le \liminf_{\alpha} \sup_{x^*_\alpha\in N^a_f(x_\alpha)} \langle x^*_\alpha, y_\alpha - x_\alpha\rangle .$$

Alors le problème de quasi-optimisation (QOpt) *admet au moins une solution.*

Preuve: D'abord, par [13, Prop.3.3], l'opérateur normal ajusté est cycliquement quasi-monotone et ainsi, selon [46, Prop. 11.12], N^a_f, et donc aussi $N^a_f \setminus \{0\}$ est aussi proprement quasi-monotone sur C. D'autre part, puisque $C \cap \arg\min_X f = \emptyset$, grâce à [13, Prop. 3.5], l'opérateur normal ajusté N^a_f est cône semi-continu supérieurement sur C, ce que implique que $N^a_f \setminus \{0\}$ est locally upper sign-continu sur C. En appliquant la Proposition 3.1.5, l'inéquation quasi-variationnelle QVI$^*(N^a_f \setminus \{0\}, K)$ admet au moins une solution x qui est solution de QOpt(f,k) grâce à la Proposition 1.1.2. □

En fin de sous-section, nous montrerons qu'en dimension finie il est possible obtenir un résultat d'existence pour QOpt sans l'hypothèse $C \cap \arg\min_X f = \emptyset$. Mais avant de prouver ce résultat, nous avons besoin pour fournir des propriétés supplémentaires de l'opérateur normal.

De Borde-Crouzeix [22], il est bien connu que l'opérateur normal strict $x \mapsto N(S^<_{f(x)}, x)$ est fermé en tout point x_0 du *domf* où f est semi-continue inférieurement. Dans la proposition suivante nous montrons un résultat analogue pour l'opérateur normal ajusté N^a_f.

Proposition 3.3.2. *Soit* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *une fonction quasi-convexe qui est semi-continue inférieurement en* $x_0 \in dom f \setminus \operatorname{argmin} f$. *S'il existe* $\beta < f(y_0)$ *tel que* $\mathrm{int} S_\beta(f) \neq \emptyset$, *alors* N_f^a *est fermé (norme-à-faible***) en* x_0.

Preuve: Nous supposons d'abord que $\beta = \inf f$, par conséquent $\mathrm{int} S_\alpha(f) \neq \emptyset$ pour tout $\alpha \geq \inf f$. Dans ce cas, il est connu (voir Propositions 2.2 et 3.5 dans [13]) qu'il existe un hyperplan w^*-fermé $A = \big\{x^* \in X^* : \langle x^*, z\rangle = 1\big\}$ pour un certain $z \in X$, de telle sorte que l'opérateur $x \mapsto N_f^a(x) \cap A$ est norme-faible* semi-continu supérieurement en x_0, et $N_f^a(x) \cap A$ est une base w^*-compact de $N_f^a(x)$ pour tout x dans un voisinage U de x_0 (voir les deux premières lignes de la preuve dans [13, Prop. 3.5]).

Supposons maintenant que $(x_j, x_j^*)_{j\in J}$ est une suite généralisée dans $\mathrm{Gr} N_f^a$ tel que $\lim x_j = x_0$ et $w^* - \lim x_j^* = x^*$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x^* \neq 0$ car sinon $x^* \in N_f^a(x_0)$ de façon triviale. Donc pour j suffisamment grand, il existe $\lambda_j > 0$, $j \in J$, tel que $x_j^* = \lambda_j y_j^*$ avec $\big\langle y_j^*, z\big\rangle = 1$. Puisque $N_f^a \cap A$ est localement un opérateur semi-continu supérieurement, il existe une sous-suite généralisée $\{y_{j'}^*\}_{j'\in J'}$, $J' \subseteq J$, qui converge vers un élément $y^* \in N_f^a(x_0) \cap A$. Il s'ensuit facilement que $\{\lambda_{j'}\}_{j'\in J'}$ converge vers un $\lambda \in]0, +\infty[$ d'où $x^* = \lambda y^* \in N_f^a(x_0)$ et N_f^a est fermé en x_0.

Le cas plus général où $\beta > \inf f$ peut être réduit à ce qui précède comme suit. Définissons la fonction f_1 par

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) > \beta \\ \beta, & \text{si } f(x) \leq \beta. \end{cases}.$$

Alors f_1 est quasi-convexe puisque ses ensembles sous-niveaux sont convexes. Par la semi-continuité inférieure de f en x_0, f_1 est égal à f dans un voisinage de x_0, $N_{f_1}^a = N_f^a$ dans un voisinage de x_0, et $\mathrm{int} S_\alpha(f_1) \neq \emptyset$ pour tout $\alpha > \inf f_1 = \beta$. D'après la première partie de la preuve, $N_{f_1}^a$ est fermé en x_0, par suite N_f^a est fermé en x_0. □

Néanmoins il n'y a aucun espoir d'obtenir la semi-continuité supérieure de l'opérateur normal ajusté N_f^a puisque cet opérateur est à valeurs coniques et ainsi non bornées. C'est pour cette raison que, pour toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$ semi-continue inférieurement et quasi-convexe, nous définissons l'opérateur normal normalisé $\hat{\mathrm{N}}_f^a : X \to 2^{X^*}$ similaire à celui défini dans [10],

$$\hat{\mathrm{N}}_f^a(x) := \begin{cases} N_f^a(x) \cap S^* & x \notin \operatorname{argmin}_X f \\ \overline{B}^*(0,1) & x \in \operatorname{argmin}_X f \end{cases}$$

où $S^* = \{x^* \in X^* : \ \|x^*\| = 1\}$ et $\overline{B}^*(0,1)$ désigne la fermeture w^* de $B(0,1)$.

La version normalisée de l'opérateur normal possède l'avantage important, en dimension finie, d'être à valeurs compactes. De par la fermeture de N_f^a on peut immédiatement en déduire que l'opérateur tronquée $\hat{\mathrm{N}}_f^a$ est fermé lui aussi. Ainsi, par des arguments classiques en tenant compte du fait que pour tout x, $\hat{\mathrm{N}}_f^a(x)$ est inclus dans la boule compacte $\mathrm{cl}B(0,1)$, on a le résultat suivant.

Proposition 3.3.3. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue quasi-convexe (ou solide quasi-convexe et semi-continue inférieurement). Alors $\hat{\mathrm{N}}_f^a$ est semi-continu supérieurement sur $\mathbb{R}^n$.*

Cette proposition généralise [29, Lemma 6] dans lequel la semi-continuité $C-$supérieure de l'opérateur normal strict a été établie.

Grâce au résultat ci-dessus de régularité de l'opérateur normal ajusté nous allons prouver un résultat d'existence de solution pour le problème de quasi-optimisation qui, contrairement à la Proposition 3.3.1 ne requiert pas que $C \cap \arg\min_X f = \emptyset$.

Proposition 3.3.4. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue quasi-convexe, soit C un sous-ensemble convexe et compact de $\mathbb{R}^n$ et $K : C \to 2^C$ un opérateur fermé et semi-continu inférieurement à valeurs convexes non vide. Alors il existe au moins une solution de (QOpt).*

Preuve: Tout d'abord, on note que, selon la Proposition 3.3.3 et la Proposition 2.1.7, l'opérateur $\mathrm{conv}\hat{\mathrm{N}}_f^a$ est semi-continu supérieurement à valeurs compactes. En appliquant le Théorème 1.4.1, l'inéquation quasi-variationnelle $QVI(\mathrm{conv}\hat{\mathrm{N}}_f^a, K)$ admet au moins une solution x. C'est-à-dire, $x \in K(x)$ et $x \in S(\mathrm{conv}\hat{\mathrm{N}}_f^a, K(x))$. Ainsi, si $x \in \arg\min_{\mathbb{R}^n} f$ donc x est une solution de (QOpt). D'autre part, si $x \notin \arg\min_{\mathbb{R}^n} f$, donc on peut montrer aisément de la continuité et quasi-convexité de f que $S(\mathrm{conv}\hat{\mathrm{N}}_f^a, K(x)) = S(N_f^a \setminus \{0\}, K(x))$ et donc, d'après la Proposition 1.1.2, x aussi est une solution de (QOpt). $\square$

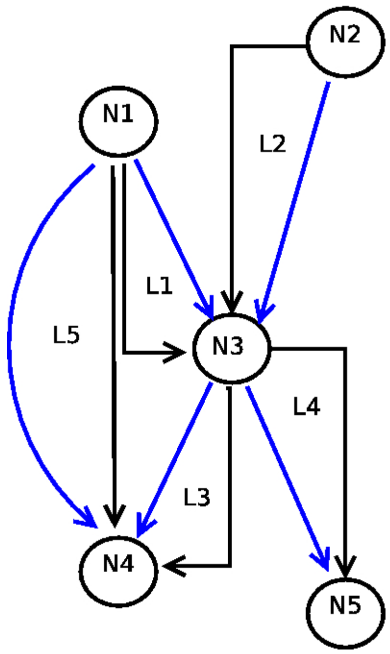
3.3.2 Équilibre dans un réseau de transport

Cette sous-section traite des équilibres de traffic dans le cas où les données numériques du réseau de circulation dépendent du temps. Nous allons discuter les questions suivantes : (i) existence d'équilibres et (ii) la continuité (en fonction du temps) de la solution du problème de traffic dans les cas élastique et inélastique.

Problème de traffic dans un réseau dépendent du temps

Nous considérons que le réseau dynamique est composé d'un ensemble de paires de nœuds origine-destination noté W, composé de n_W éléments. Notons l'ensemble des chemins joignant la paire origine-destination w par P_w. Nous supposons que les routes sont acycliques. On dénote par P, avec n_P éléments, l'ensemble de tous les chemins joignant toutes les paires origine-destination du réseau. Supposons que le traffic est composé de "classes" (en anglais "jobs") de traffic et qu'il y a K "classes" ; les classes seront dénotées par k

Pour fixer les idées sur les notations, nous considérons l'exemple de réseau suivant



Ainsi, les noeuds sont $N = \{N_1, \cdots, N_5\}$, les liens sont $L = \{L_1, \cdots, L_5\}$, les pairs origine-destination sont $W = \{(N_1, N_4), (N_1, N_5), (N_2, N_4), (N_2, N_5)\}$, les chemins pour l'origine-destination $w = (N_1, N_4)$ sont $P_w = \{L_5, L_1 - L_3\}$, et enfin les jobs sont $\{\text{noir}, \text{bleu}\}$.

La demande, notée par $d_w^k(t)$, correspond au traffic généré entre la paire origine-destination w au temps t et pour la classe k. Le flux sur le chemin r au temps t de la classe k, qui est supposé être non-négatif, sera noté par $x_r^k(t)$.

Les demandes, supposées connues, impose l'équation de conservation suivante à chaque moment t :

$$d_w^k(t) = \sum_{r \in P_w} x_r^k(t), \quad \forall w \in W, \; k \in K,$$

c'est à dire, la demande associée à une paire origine-destination w et de la classe k sera égale à la somme des flux de la même classe sur les chemins reliant la paire origine-destination. Nous supposons que le traffic associé à chaque paire origine-destination est divisible et peut être acheminé par plusieurs chemins. De plus, nous aurons

$$0 \leq x_r^k(t) \leq \mu_r^k(t) \;\; \forall k \in K, \; \forall r \in P,$$

où $\mu_r^k(t)$ est la capacité sur le chemin r pour la classe k au temps t.

Les demandes en temps t des différentes classes pour toutes les paires origine-destination sont regroupées dans le vecteur $d(t)$, $K \times n_W$ -dimensionnel. De même, nous avons regroupés tous les types de chemins de flux pour le temps t dans le vecteur $x(t)$, $K \times n_P$ -dimensionnel. Les capacités sur les chemins pour le temps t sont regroupées dans le vecteur $\mu(t)$, $K \times n_P$ -dimensionnel.

Pour des raisons techniques, les flux sur les chemins sont éléments de l'espace de Banach réflexif $L^p([0,T], \mathbb{R}^{K \times n_P})$ avec $p > 1$. Ainsi, nous définissons

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in L^p([0,T], \mathbb{R}^{K \times n_P}) : 0 \leq x(t) \leq \mu(t) \text{ p.p. en } [0,T] \right\}$$

Nous supposons que le vecteur capacité $\mu \in L^p([0,T], \mathbb{R}^{K \times n_P})$.

Soit $\Phi = (\Phi_{kw,kr})$ la matrice d'incidence entre les paires et les routes de toutes sortes, avec l'élément $\Phi_{kw,kr}$ égal à 1 si le chemin r appartient à P_w, et 0, sinon. Ainsi, l'ensemble des flux réalisables est donné par

$$\mathcal{K} = \{ x \in \mathcal{A} : \; \Phi x(t) = d(t) \text{ p.p. en } [0,T] \}.$$

Supposons que le vecteur de demande $d \in L^q([0,T], \mathbb{R}^{K \times n_W})$ et

$$0 \leq d(t) \leq \Phi \mu(t) \text{ p.p. en } [0,T].$$

Les deux fonctions de coût que nous considérons sont

i) *flux d'équilibre en dimension infinie*
Soit $\mathcal{C} : L^p([0,T], \mathbb{R}_+^{K \times n_P}) \to L^q([0,T], \mathbb{R}_+^{K \times n_P})$ la fonction de coût. Un flux $x \in \mathcal{K}$ est dit un flux d'équilibre dépendant du temps en dimension infinie (selon la généralisation du principe de Wardrop), si pour tout $w \in W$, et tout $k \in K$, tout $q, s \in P_w$ et p.p. $[0,T]$ l'implication suivante est satisfaite

$$\text{Si } \mathcal{C}_q(x)(t) < \mathcal{C}_s(x)(t) \text{ alors } x_q(t) = \mu_q(t) \text{ ou } x_s(t) = 0.$$

ii) *flux d'équilibre en dimension finie*
Soit $C : [0,T] \times \mathbb{R}_+^{K\times n_P}) \to \mathbb{R}_+^{K\times n_P}$ la fonction de coût. Un flux $x \in \mathcal{K}$ est dit un flux d'équilibre dépendant du temps en dimension finie, si pour tout $w \in W$, tout $k \in K$, tout $q, s \in P_w$ et p.p. $[0,T]$ l'implication suivante est satisfaite

$$\text{Si } C_q(t,x(t)) < C_s(t,x(t)) \text{ alors } x_q(t) = \mu_q(t) \text{ ou } x_s(t) = 0.$$

Dans [79], on peut voir qu'il est possible, dans certains cas, de construire une fonction de coût de dimension infinie à partir d'une fonction de coût de dimension finie. En effet, si $C : [0,T] \times \mathbb{R}_+^{K\times n_P} \to \mathbb{R}_+^{K\times n_P}$ est une fonction mesurable en t, continue selon le second argument et il existe $\gamma \in L^q([0,T],\mathbb{R})$ tel que

$$\|C(t,u)\| \leq \gamma(t) + \|u\|^{p-1},$$

alors, l'application $\mathcal{T}$ définie par

$$\mathcal{T}(x)(t) = C(t,x(t))$$

est continue de $L^p([0,T],\mathbb{R}_+^{K\times n_P})$ vers $L^q([0,T],\mathbb{R}_+^{K\times n_P})$ (voir [65]).

Le résultat suivant [32, Th. 1] montre une extension au cas multiclasse de [31, Th.3.1], avec la fonction de coût en dimension infinie.

Théorème 3.3.5. *x^* est un flux d'équilibre (en dimension infinie) dépendent du temps si et seulement s'il satisfait l'inéquation variationnelle :*

$$\langle\langle \mathcal{C}(x), y - x\rangle\rangle_{L^p} = \int_0^T \langle \mathcal{C}(x)(t), y(t) - x(t)\rangle\, dt \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{K}. \tag{3.2}$$

En utilisant la transformation de fonction de coût rappelée ci-dessus. On remarque que le problème (3.2) (voir ref [70]) est équivalent au problème suivant : Trouver $x^* \in \mathcal{K}$ tel que

$$\langle C(t,x^*(t)), u - x^*(t)\rangle \geq 0 \quad \forall u \in M(t) \text{ a.e. en } [0,T], \tag{3.3}$$

où

$$M(t) = \left\{u \in \mathbb{R}^{K\times n_P} : 0 \leq u \leq \mu(t) \text{ et } \Phi u = d(t)\right\}.$$

Nous savons que si $\mu \in C([0,T], \mathbb{R}^{K\times n_P})$ et $d \in C([0,T], \mathbb{R}^{K\times n_W})$, par la Proposition 5.1 de [18] on a pour tout $(t_n) \in [0,T]$ convergent vers t alors $M(t_n)$ converge vers $M(t)$. En plus, Par la Proposition 5.2 de [18] $M(t)$ est uniformément bornée.

Tout d'abord nous allons adapter la Proposition 3.2.1 et la Proposition 3.2.6 au cas où l'opérateur est univoque, puisque la fonction de coût est ici univoque :

Proposition 3.3.6. *Supposons que les propriétés suivantes sont vérifiées :*

i) l'opérateur K est fermé et à valeurs convexes d'intérieur non vide ;

ii) pour tout $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times U$, $T(\cdot, \lambda)$ est quasi-monotone sur $\cup_{x \in X} K(x, \mu)$ et upper sign-continu sur $\cup_{x \in X} K(x, \mu)$, à valeurs dans $X^* \setminus \{0\}$;

iii) pour toute $x_n \to x$, toute $(\lambda_n, \mu_n) \to (\lambda, \mu)$ et toute $z_n \to z$ avec $z \in int(K(x, \mu))$, $z_n \in int(K(x_n, \mu_n))$, $x \in K(x, \mu)$, $x_n \in K(x_n, \mu_n)$,

$$\langle T(z, \lambda), x - z \rangle \leq \liminf_{n \to +\infty} \langle T(z_n, \lambda_n), x_n - z_n \rangle \,;$$

Alors l'operateur solution étoile S^* est fermé sur $\Lambda \times U$.

Proposition 3.3.7. *Soit V_0 et U_0 deux voisinages respectivement de λ_0 et μ_0 tels que pour tout $(\lambda, \mu) \in V_0 \times U_0$, $S^<(\lambda, \mu)$ est non vide et*

i) si K est semi-continu inférieurement en μ_0 et à graphe fermé ;

ii) il existe un sous-ensemble compact C de X tel que $K(U_0) \subset C$;

iii) l'opérateur $T(\cdot, \lambda)$ est quasi-monotone, pour tout $\lambda \in V_0$;

iv) pour tout $y_n \to y$, tout $x_n \to x_0$ et tout $(\lambda_n, \mu_n) \to (\lambda_0, \mu_0)$,

$$\langle T(x, \lambda_0), y - x \rangle \leq \liminf_{n \to +\infty} \langle T(x_n, \lambda_n), y_n - x_n \rangle \,;$$

Alors l'opérateur solution stricte $S^<$ est univoque sur $V_0 \times U_0$ et il est continu en (λ_0, μ_0).

Cas non-élastique

Grâce au Théorème 3.3.5, on a un résultat d'existence d'un flux d'équilibre en dimension infinie, qui est une extension de la partie 3) du Théorème 2 dans [32] et aussi de la partie *iii*) du Corollaire 5.2 dans [31].

Proposition 3.3.8. *Si $\mathcal{C}$ est quasi-monotone et upper sign-continu sur $\mathcal{K}$, alors il existe un flux d'équilibre (en dimension infinie) dépendent du temps.*

Preuve: Puisque $L^p([0,T], \mathbb{R}_+^{K \times n_P})$ est un espace de Banach reflexif et $\mathcal{K}$ est un sous-ensemble convexe, fermé et borné de $L^p([0,T], \mathbb{R}_+^{K \times n_P})$, $\mathcal{K}$ est faiblement compact. Le résultat est alors conséquence de la Propostion 1.3.5 *ii*) et du Théorème 3.3.5. □

Nous définissons maintenant $M : [0,T] \to \mathbb{R}^{K \times n_P}$ par

$$M(t) = \left\{ u \in \mathbb{R}^{K \times n_P} : 0 \leq u \leq \mu(t) \text{ et } \Phi u = d(t) \right\}.$$

Nous considérons le problème d'inéquation variationnelle perturbé :

$$(\mathrm{P}_t) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } u \in M(t) \text{ tel que} \\ \langle C(t, u), v - u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in M(t) \end{cases}$$

Ainsi, comme conséquence immédiate du Lemme 1.3.7, on obtient un résultat d'existence d'un flux d'équilibre en dimension finie.

Proposition 3.3.9. *x est un flux d'équilibre (en dimension finie) dépendent du temps si et seulement si $x \in \mathcal{K}$ et, p.p. $[0,T]$, $x(t)$ est solution de* (P_t).

Remarque 3.3.10. *D'après la Proposition 5.1 dans [18] nous savons que, si $\mu \in C([0,T], \mathbb{R}^{K\times n_P})$ et $d \in C([0,T], \mathbb{R}^{K\times n_W})$, M est semi-continue inférieurement et à graphe fermé.*

Nous ne sommes cependant pas capable, dans la Proposition 3.3.8, d'assurer que la solution obtenue est continue dans le temps ; cette continuité sera obtenue en considérant l'hypothèse similaire sur les problèmes associés en dimension finie (P_t), pour tout t.

Proposition 3.3.11. *Supposons que :*

i) *μ et d sont continues,*

ii) *pour tout $t \in [0,T]$, $C(t,\cdot)$ est quasi-monotone et*

iii) *pour toute $y_n \to y$, toute $x_n \to x$ et toute $t_n \to t$,*

$$\langle C(t,x), y-x\rangle \le \liminf_{n\to+\infty} \langle C(t_n,x_n), y_n - x_n\rangle\,;$$

Si l'ensemble de solution stricte de (P_t) *est non-vide pour tout $t \in [0,1]$, alors il existe un flux d'équilibre (en dimension finie) qui soit continu en temps.*

Un résultat de continuité similaire peut être trouvée dans [18] sous certaines hypothèses de pseudo-monotonie sur la fonction de coût. La preuve de cette Proposition 3.3.11 est basée sur le résultat de continuité de la Proposition 3.3.7.

Preuve: Grâce à la remarque 3.3.10, on sait que M est à graphe fermé et semi-continu inférieurement. D'autre part M est à valeurs compactes et donc, par la Proposition 2.1.3, l'ensemble $\bigcup_{t\in[0,1]} M(t)$ est compact. Par conséquent, nous pouvons voir que les hypothèses *ii*) et *iii*) de la Proposition 3.3.7 sont verifiées. Donc l'application $x : [0,T] \to \mathbb{R}^{Kn_P}$ définie par

$$t \mapsto u_t$$

est continue, où $u_t \in S^{<}(C, M(t))$. Alors $x \in \mathcal{K}$ et le résultat est conséquence de la Proposition 3.3.9. □

On remarque que dans [17, 59, 60] les auteurs considèrent un équilibre du trafic sans dépendance du temps, mais envisagent une tolérance sur la demande. Poursuivant ces études, nous nous sommes intéressés à des flux satisfaisant les demandes avec des tolérances comme suit : soit $\beta : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, nous adoptons l'ensemble des flux réalisables avec tolérance :

$$\mathcal{K}^\beta = \{x \in \mathcal{A} :\ \Phi x(t) \in \overline{B}(d(t), \beta(t)) \text{ p.p. } [0,T]\}$$

où $\overline{B}(d(t), \beta(t))$ est la boule fermée de rayon $\beta(t)$ et de centre $d(t)$. Et nous définissons aussi $M^\beta : [0,T] \to \mathbb{R}^{Kn_P}$

$$M^\beta(t) = \left\{u \in \mathbb{R}^{K\times n_P} : \ 0 \leq u \leq \mu(t) \text{ et } \Phi u \in \overline{B}(d(t), \beta(t))\right\}.$$

Définition 3.3.12. *Un flux $x \in \mathcal{K}^\beta$ est dit un flux d'équilibre dépendent du temps avec tolérance, en dimension finie, si $\forall w \in W$, $\forall k \in K$, $\forall q, s \in P_w$ et p.p. $[0,T]$:*

$$\textit{Si } C_q^k(t, x(t)) < C_s^k(t, x(t)) \textit{ alors } x_q^k(t) = \mu_q^k(t) \textit{ ou } x_s^k(t) = 0.$$

Nous considérons le problème d'inéquation quasi-variationnelle perturbé suivant :

$$(\mathrm{P}_t^\beta) \qquad \left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in M^\beta(t) \\ \langle C(u), v-u\rangle \geq 0 \ \ \forall v \in M^\beta(t) \end{array}\right. .$$

Proposition 3.3.13. *Si $x \in \mathcal{K}^\beta$ et p.p. $[0,T]$, $x(t)$ est solution de (P_t^β), alors x est un flux d'équilibre (en dimension finie) dépendent du temps avec tolérance.*

Preuve: Le résultat est conséquence de ce que, pour tout $y \in \mathcal{K}^\beta$, $y(t) \in M^\beta(t)$ pour presque tout $t \in [0,1]$. □

Proposition 3.3.14. *Supposons que :*

i) M^β est semi-continue inférieurement et à graphe fermé, à valeurs d'intérieur non-vide ;

ii) pour tout $t \in [0,T]$, $C(t,\cdot)$ est quasi-monotone et upper sign-continu sur $M^\beta(t)$;

iii) pour tout $x_n \to x$, tout $t_n \to t$ et tout $z_n \to z$ avec $z \in int(M^\beta(t))$, $z_n \in int(M^\beta(t_n))$, $x \in M^\beta(t)$, $x_n \in M^\beta(t_n)$,

$$\langle C(t,z), x-z\rangle \leq \liminf_{n\to+\infty} \langle C(t_n, z_n), x_n - z_n\rangle\,;$$

Si l'ensemble solution étoile du problème (P_t^β) est unique pour tout $t \in [0,1]$, alors il existe un flux d'équilibre (en dimension finie) avec tolérance, continu en temps.

La preuve de la proposition ci-dessus est basée sur le résultat de continuité de la Proposition 3.3.6.
Preuve: De la Proposition 2.1.3 et de l'hypothèse $i)$, $\bigcup_{t\in[0,1]} M^\beta(t)$ est compact. Ainsi, avec les hypothèses $ii)$ et $iii)$, toutes les hypothèses de la

Proposition 3.3.6 sont satisfaites. Ainsi, par des arguments classiques, et l'hypothèse d'unicité de la solution étoile, on peut construire une fonction continue $x : [0,T] \to \mathbb{R}^{K \times n_P}$ telle que

$$\forall t \in [0,T],\ x(t) \in S^*(C(t,\cdot), M^\beta(t)).$$

Ainsi, x est un élément de $\mathcal{K}^\beta$ et la conclusion est conséquence de la Proposition 3.3.6. $\square$

Cas élastique

Nous allons introduire le problème élastique dépendant du temps qui se pose chaque fois que les demandes de voyage ne dépendent pas seulement du temps mais aussi du flux à l'équilibre. En fait, il est clair que les demandes de voyage sont influencées par l'évaluation du montant des flux de traffic sur les chemins, à savoir par les solutions d'équilibre prévu. En particulier, nous supposons que la demande de voyage d dépend sur les flux d'équilibre $x(t)$, c'est-à-dire $d : [0,T] \times \mathbb{R}^{Kn_P} \to \mathbb{R}^{Kn_W}$. Maintenant, nous considérons l'opérateur multivoque $\mathcal{K}_e : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ défini par

$$\mathcal{K}_e(x) = \{z \in \mathcal{A} :\ \Phi z(t) = d(t, x(t)) \text{ p.p. } [0,T]\}.$$

On peut voir aisément que l'opérateur $\mathcal{K}_e$ est à valeurs convexes et bornés.

Définition 3.3.15. *Un flux $x \in \mathcal{K}_e(x)$ est dit un flux d'équilibre élastique dépendant du temps, en dimension infinie, si $\forall w \in W$, $\forall k \in K$, $\forall q, s \in P_w$ et p.p. $[0,T]$:*

$$\textit{Si } \mathcal{C}_q^k(x)(t) < \mathcal{C}_s^k(x)(t) \textit{ alors } x_q^k(t) = \mu_q^k(t) \textit{ ou } x_s^k(t) = 0.$$

Par consequent, l'inéquation quasi-variationnelle qui modélise le problème de traffic dans le cas élastique est le suivant :

Proposition 3.3.16. *x est un flux d'équilibre élastique (en dimension infinie) dépendent du temps si et seulement si $x \in \mathcal{K}_e(x)$ est tel que*

$$\langle\langle \mathcal{C}(x), y - x \rangle\rangle_{L^p} = \int_0^T \langle \mathcal{C}(x)(t), y(t) - x(t) \rangle \, dt \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{K}_e(x).$$

Preuve: Comme l'union d'un nombre fini d'ensembles de mesure nulle est un ensemble de mesure nulle, il découle du Lemme 1.3.7 que, si x est un flux d'équilibre élastique dépendant du temps, alors

$$\langle \mathcal{C}(x)(t), y(t) - x(t) \rangle \geq 0 \text{ p.p. } [0,T].$$

Ainsi, nous avons

$$\int_0^T \langle \mathcal{C}(x)(t), y(t) - x(t) \rangle \, dt \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{K}_e(x).$$

Supposons maintenant que, $x \in \mathcal{K}_e(x)$ n'est pas un flux d'équilibre élastique dépendent du temps. Alors, il existe un k, un $w \in W$ et des chemins $q, s \in P_w$ ainsi qu'un ensemble $E \subseteq [0, T]$ ayant une mesure positive tels que

$$\mathcal{C}_q^k(x)(t) < \mathcal{C}_s^k(x)(t), \quad x_q^k(t) < \mu_q^k(t), \quad x_s^k(t) > 0, \quad \text{p.p. } E.$$

Pour $t \in E$, posons $\delta(t) = \min \left\{ \mu_q^k(t) - x_q^k(t), x_s^k(t) \right\}$. Donc, $\delta(t) > 0$ p.p. E, et on peut construire $y \in \mathcal{K}_e(x)$, tel que $y^k(t) = x^k(t)$ à l'extérieur de E et $y_q^k(t) = x_q^k(t) + \delta(t)$, $y_r^k(t) = x_r^k(t) - \delta(t)$, avec $y_r^k(t) = x_r^k(t)$, pour $r = q, s$. Ainsi on a

$$\int_0^T \langle \mathcal{C}(x)(t), y(t) - x(t) \rangle \, dt = \int_E \delta(t)(\mathcal{C}_q^k(x)(t) - \mathcal{C}_s^k(x)(t))dt < 0.$$

□

Grâce au Théorème 1.4.1, on a le résultat suivant qui est une extension du résultat d'existence de Raciti et Scrimali dans [79].

Proposition 3.3.17. *Si $\mathcal{C}$ est continue sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{K}_e$ est semi-continue inférieurement et à graphe fermé. Alors il existe un flux d'équilibre élastique dépendent du temps, en dimension infinie.*

Preuve: Puisque $\mathcal{K}_e$ est à valeurs convexes, faiblement compactes et non vide, on a que toutes les hypothèses du Théorème 1.4.1 sont satisfaites, et par conséquent la conclusion découle de la Proposition 3.3.16. □

Nous présentons maintenant un autre résultat d'existence de flux d'équilibre élastique dépendant du temps, en dimension infinie, sous hypothèse de monotonie généralisée sur la fonction de coût et de Mosco-continuité sur l'opérateur de contrainte.

Proposition 3.3.18. *Si les assertions suivantes sont satisfaites*

i) *$\mathcal{K}_e$ est Mosco-continu ;*

ii) *$\mathcal{C}$ est proprement quasi-monotone et upper sign-continu sur $\mathcal{A}$;*

iii) *pour tout $x_n \to x$ et tout $y_n \to y$,*

$$\liminf_n \langle\langle \mathcal{C}(y_n), x_n - y_n \rangle\rangle_{L^p} \leq 0 \Rightarrow \langle\langle \mathcal{C}(y), x - y \rangle\rangle_{L^p} \leq 0.$$

Alors, il existe un flux d'équilibre élastique dépendent du temps, en dimension infinie.

Preuve: Grâce à la Proposition 3.3.16 on a que x est un flux d'équilibre élastique dépendent du temps si et seulement si $x \in \text{QVI}(\mathcal{C}, \mathcal{K}_\epsilon)$. Ainsi, le résultat est conséquence de la Proposition 3.1.5. $\square$

Comme dans le cas de demande non-élastique, on s'intéresse à l'étude des flux satisfaisant la demande avec tolérance. Soit $\beta : [0,T] \times \mathbb{R}_+^{K\times n_P} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue. Nous considérons l'ensemble des flux réalisables avec tolérance comme suit :

$$\mathcal{K}_e^\beta(x) = \{z \in \mathcal{A} : \; \Phi z(t) \in B(d(t,x(t)), \beta(t)) \text{ p.p. } t \in [0,T]\}$$

et nous considérons la fonction de coût, en dimension finie, $C : [0,T] \times \mathbb{R}_+^{K\times n_P} \to \mathbb{R}_+^{K\times n_P}$. Ainsi, on définit $M_e^\beta : [0,T] \times \mathbb{R}^{K\times n_P} \to 2^{\mathbb{R}^{K\times n_P}}$ par

$$M_e^\beta(t,u) = \left\{z \in \mathbb{R}^{K\times n_P} : \; 0 \le z \le \mu(t) \text{ and } \Phi z \in B(d(t,u), \beta(t,u))\right\}.$$

On peut voir aisément que M_e^β est un opérateur à valeurs convexes, compactes et non vide. De plus, si $\mu(t) > 0$ alors $M_e^\beta(t,u)$ est d'intérieur non vide.

Définition 3.3.19. *Un flux $x \in \mathcal{K}_e^\beta(x)$ est appelé flux d'équilibre élastique dépendent du temps avec tolerance, en dimension finie, si $\forall w \in W$, $\forall k \in K$, $\forall q, s \in P_w$ et p.p. $[0,T]$:*

$$\text{Si } C_q^k(t,x(t)) < C_s^k(t,x(t)) \text{ alors } x_q^k(t) = \mu_q^k(t) \text{ ou } x_s^k(t) = 0.$$

Ensuite, on va considérer le problème d'inéquation quasi-variationnelle perturbé suivant :

$$(\mathrm{Q}_t^\beta) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } u \in M_e^\beta(t,u) \text{ tel que} \\ \langle C(u), v-u\rangle \ge 0 \;\; \forall v \in M_e^\beta(t,u) \end{cases}.$$

Proposition 3.3.20. *Si $x \in \mathcal{K}_e^\beta(x)$ et, p.p. $[0,T]$, $x(t)$ est solution de (Q_t^β), alors x est un flux d'équilibre élastique dépendant du temps avec tolerance , en dimension finie.*

Preuve: Le résultat est conséquence de ce que pour tout $y \in \mathcal{K}_e^\beta(x)$, $y(t) \in M_e^\beta(t,x(t))$ pour presque tout $t \in [0,1]$. $\square$

Le résultat suivant montre l'existence d'un flux d'équilibre élastique dépendant du temps avec tolérance, en dimension finie, en utilisant une hypothèse de monotonie généralisée, plus précisément la quasi-monotonie.

Proposition 3.3.21. *Supposons que :*

i) $M_e^\beta(\cdot,\cdot)$ est semi-continu inférieurement, à graphe fermé et à valeurs d'intérieur non-vide, *ii) pour tout $t \in [0,T]$, $C(t,\cdot)$ est quasi-monotone et upper-sign continu sur $\cup_{u \in \mathbb{R}^{K\times n_P}} M_e^\beta(t,u)$;*

iii) pour tout $u_n \to u$, tout $t_n \to t$ et tout $v_n \to v$ avec $z \in \operatorname{int}(M_e^\beta(u,t))$, $z_n \in \operatorname{int}(M_e^\beta(u_n,t_n))$, $x \in M_e^\beta(t,u)$, $x_n \in M_e^\beta(t_n,t)$,

$$\langle C(t,v), u-v\rangle \leq \liminf_{n\to+\infty} \langle C(t_n,v_n), u_n - v_n\rangle \, ;$$

Si la solution étoile QVI$(C(t,\cdot), M_e^\beta(t,\cdot))$ de (Q_t^β) est unique pour tout $t \in [0,1]$, alors il existe un flux d'équilibre élastique avec tolérance continue en temps.*

La preuve de la proposition ci-dessus est basée sur le résultat de continuité de la Proposition 3.3.6
Preuve: De la Proposition 2.1.3 et l'hypothèse $i)$, $\bigcup_{(t,u)\in[0,T]\times\Omega} M_e^\beta(t,u)$ est compact, où $\Omega = \mathbb{R}_+^{K\times n_P} \cap B(0,2r)$ avec $r = \max_{t\in[0,T]} \|\mu(t)\|$. Ainsi, avec les hypothèses $ii)$ et $iii)$, toutes les hypothèses de la Proposition 3.3.6 sont satisfaites. Donc, par des arguments classiques et l'unicité de la solution étoile, on peut construire une fonction continue $x : [0,T] \to \mathbb{R}_+^{K\times n_P}$ telle que

$$\forall t \in [0,T],\ x(t) \in S^*(C(t,\cdot), M_e^\beta(t,\cdot)).$$

Ainsi, x est un élément de $\mathcal{K}_e^\beta(x)$ et la conclusion est conséquence de la Proposition 3.3.16. □

Le résultat suivant donne une condition suffisante pour que l'hypothèse $i)$ dans la proposition 3.3.21 soit vérifiée.

Proposition 3.3.22. *Supposons que μ et d sont continues. Alors $\mathcal{M}_e^\beta$ est à graphe fermé. Si, de plus $\beta > 0$ alors $\mathcal{M}_e^\beta$ est semi-continu inférieurement sur $[0,T]\times\mathbb{R}_+^{K\times n_P}$.*

Preuve: Soit $(t_n,u_n)_n$ une suite qui converge vers (t,u) et soit $(z_n)_n$ une suite avec $z_n \in M_e^\beta(t_n,u_n)$ pour tout n telle que $(z_n)_n$ converge vers z. Ainsi on a que $0 \leq z_n \leq \mu(t_n)$ et $||\Phi z_n - d(t_n,u_n)|| \leq \beta(t_n,u_n)$. La continuité de d, μ et β implique immédiatement que $z \in \mathcal{M}_e^\beta(t,u)$.
De plus, si $\beta > 0$, alors pour tout $(t,u) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$, l'ensemble $A(t,u) = \{z \in \mathbb{R}^{K\times n_P} \ : \ \|\Phi z - d(t,u)\| \leq \beta(t,u)\}$ est convexe et d'intérieur non vide. Alors, de la continuité de β et d on déduit, la semi-continuité inférieure de A. Puisque μ est continue, l'opérateur $B : [0,T] \to \mathbb{R}^{K\times n_P}$ défini par $B(t) = \{z \in \mathbb{R}^{K\times n_P} : \ 0 \leq z \leq \mu(t)\}$ est semi-continu inférieurement. Mais, pour tout $(t,u) \in [0,T]\times\mathbb{R}^{K\times n_P}$ on a $\mathcal{M}_e^\beta(t,u) = A(t,u)\cap B(t)$, et par conséquent $\mathcal{M}_e^\beta$ est semi-continu inférieurement. □

Chapitre 4

Programmation semi-continue

Dans ce chapitre, nous allons développer une nouvelle théorie pour la programmation semi-continue. Tout d'abord nous introduisons un nouvel espace dual. Ensuite nous montrons un théorème de séparation d'ensembles fermés. Puis, nous introduisons une extension de la conjuguée de Fenchel et enfin nous donnons un schéma de dualité pour la programmation semi-continue.

4.1 Introduction

Après les travaux dans [73] de J.J Moreau, on peut voir que cependant, même si la fonction f est convexe, la conjuguée f^c n'est pas nécessairement convexe, si nous utilisons une fonction de couplage arbitraire. Il suffit de considérer par exemple, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$ et la fonction couplage $c : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ donnée par $c(p, x) = \log(px)$, avec la convention $\log t = -\infty$ pour $t \leq 0$. Ainsi, on voit aisément que f^c n'est pas convexe. D'autre part, on se rappelle que les résultats clés dans la conjugaison convexe sont les théorèmes de séparation, et qu'en dimension finie l'espace dual de $\mathbb{R}^n$ est lui même. Alors, tout ça nous dit que, si on cherche la convexitée de la fonction conjuguée, on a besoin d'un espace particulier, donc ainsi, on considère l'espace (11) définie dans l'introduction

$$\mathcal{C}_n = \{p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid p \text{ est une fonction continue}\}.$$

Dans la Section 4.2 on montrera certaines propriétés topologiques de l'espace dual.

Étant donnés A et B deux sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$, on définit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \bar{A} \\ +\infty & \text{si} \quad x \notin \bar{A} \end{cases}.$$

De façon analogue on définit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \bar{B} \\ -\infty & \text{si} \quad x \notin \bar{B} \end{cases}.$$

Si $A \cap B = \emptyset$, alors $g \leq f$, en plus f est une fonction convexe, semi-continue inférieurement, et g est une fonction concave et semi-continue supérieurement. En utilisant le théorème de sélection de Michael, Théorème 1.1.7, il existe une fonction continue $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $g \leq h \leq f$. Ainsi pour tout $x \in B$, $g(x) = 0$, alors $B \subset \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \geq 0\}$. De la même manière, pour tout $y \in A$, $f(y) = 0$, donc $A \subset \{y \in \mathbb{R}^n : h(y) \leq 0\}$. D'autre part, en appliquant le Théorème de séparation convexe, Théorème 1.1.6, à A et B, il existe $x^* \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle x^*, x \rangle \leq \lambda \leq \langle x^*, y \rangle, \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B$$

Prenant $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \langle x^*, x \rangle - \lambda$, cette fonction satisfait le Théorème de sélection de Michael, Théorème 1.1.7, pour les deux fonctions g

et f préalablement définies. Ainsi, dans la Section 4.3 on donnera un résultat pour la séparation de deux ensembles fermés, disjoints et non vide.

Ensuite, dans la Section 4.4 on introduit la conjugaison modifiée de Fenchel, et comme dans le cas convexe on montrera que la bi-conjuguée de toute fonction semi-continue inférieure est elle même. Enfin, dans la Section 4.5 on présentera un schéma de dualité pour la programmation semi-continue.

4.2 L'espace de dualité

Dans cette section on montrera quelques propriétés topologique de l'espace dual. Enfin, nous montrons la relation entre l'espace dual $\mathcal{C}_n$ et $C(\mathbb{R}^n : \mathbb{R})$.

Pour chaque $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la fonction $\ell_x : \mathcal{C}_n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\ell_x(p) = \langle p(x), x \rangle \tag{4.1}$$

est linéaire. On considère Γ^n la topologie la moins fine telle que pour chaque $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la fonction linéaire ℓ_x est continue, cette topologie a été dejà introduite dans [25].

L'exemple suivant montre que $(\mathcal{C}_n, \Gamma^n)$ n'est pas de Hausdorff en général.

Exemple 4.2.1. *Soit $n = 2$, et on prend $p(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ et $q(x, y) = (x_2, -x_1)$. Il est facile de voir que $p \neq q$ mais $\ell_x(p) = \ell_x(q) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.*

Ainsi, grâce à l'Exemple 4.2.1, on va définir dans $\mathcal{C}_n$, la rélation suivante, R, par pRq si pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a que $\ell_x(p) = \ell_x(q)$. On peut voir facilement que R est une rélation d'équivalence. On va noter par $[p]$ la classe d'équivalence de p. On peut voir aisément que $[0]$ est un sous-espace vectoriel et pour chaque $q \in \mathcal{C}_n$, on a toujours $[p] = [0] + p$. De plus, chaque classe d'équivalence est un ensemble fermé pour la topologie Γ^n. En effet, on peut aisément montrer que

$$[p] = \bigcap_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \ell_x^{-1}(\ell_x(p))$$

d'où $[p]$ est fermé. Ce dernier résultat nous dit que l'espace quotient $\mathcal{C}_n/R$ est Hausdorff pour la topologie induite par Γ^n.

Nous remarquons, que pour chaque $p \in \mathcal{C}_n$, on peut définir la fonction

$h_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $h_p(x) = \langle p(x), x\rangle$, qui est continue, donc on se pose la question de l'existence d'une relation "particulière" entre $\mathcal{C}_n$ et l'espace $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$?

Théorème 4.2.2. *[90] Soit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors $h \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ si et seulement si $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta \in (0, \epsilon]$, $\exists p \in \mathcal{C}_n$ tels que*

1. $h(x) = \langle p(x), x\rangle + h(0) - \epsilon \ \forall x \notin \bar{B}(0, \delta)$.
2. $0 \leq \langle p(x), x\rangle \leq 2\epsilon \ \forall x \in \bar{B}(0, \delta)$.
3. $|h(x) - \langle p(x), x\rangle - h(0)| \leq \epsilon \ \forall x \in \bar{B}(0, \delta)$.

Preuve: $(\Rightarrow)$ Soit $\epsilon > 0$. De la continuité de h en 0, il existe $\delta \in (0, \epsilon]$, tel que $h(0) - \epsilon \leq h(x) \leq h(0) + \epsilon \ \forall\|x\| \leq \delta$. On considère alors la fonction $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$p(x) = \begin{cases} (h(x) - h(0) + \epsilon)\dfrac{x}{\|x\|^2} & \text{si} \quad \|x\| > \delta \\ \dfrac{x}{\delta^2}(h(x) - h(0) + \epsilon) & \text{si} \quad \|x\| \leq \delta \end{cases}.$$

On peut aisément vérifier que $p \in \mathcal{C}_n$. Ainsi,

$$\langle p(x), x\rangle = \begin{cases} (h(x) - h(0) + \epsilon) & \text{si} \quad \|x\| > \delta \\ \dfrac{\|x\|^2}{\delta^2}(h(x) - h(0) + \epsilon) & \text{si} \quad \|x\| \leq \delta \end{cases}.$$

1. Si $\|x\| > \delta$, alors $h(x) = \langle p(x), x\rangle + h(0) - \epsilon$.
2. Si $\|x\| \leq \delta$, alors $0 \leq \langle p(x), x\rangle \leq 2\epsilon$, puisque, pour chaque $\|x\| \leq \delta$ on a $h(0) - \epsilon \leq h(x) \leq h(0) + \epsilon$.
3. Si $\|x\| \leq \delta$, alors $0 \leq \langle p(x), x\rangle \leq h(x) - h(0) + \epsilon$ (La première inéquation provient du dernier item, et la seconde inéquation se déduit de $\dfrac{\|x\|^2}{\delta^2} \leq 1$). Cela implique que $-\epsilon \leq h(0) - h(x) \leq \langle p(x), x\rangle - h(x) + h(0) \leq \epsilon$ (La première inéquation provient de $h(x) \leq h(0) + \epsilon$).

$(\Leftarrow)$ Si $\|x\| \neq 0$, alors on considère $\epsilon \in (0, \|x\|)$. D'après l'hypothèse, il existe $\delta \in (0, \epsilon]$ et $p \in \mathcal{C}_n$ tels que $h(y) = \langle p(y), y\rangle + h(0) - \epsilon \ \forall\|y\| > \delta$, et ainsi h est continue en x car p est continue et $\|x\| > \epsilon \geq \delta$.

Si $\|x\| = 0$, d'après l'hypothèse on a que $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta \in (0, \epsilon]$, $\exists p \in \mathcal{C}_n$ tel que $|h(y) - \langle p(y), y\rangle - h(0)| \leq \epsilon \ \forall\|y\| \leq \delta$. On considère $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(y) = h(y) - \langle p(y), y\rangle$. La fonction f est continue en $x = 0$ et ainsi h est continue en $x = 0$, puisque p est continue. □

Afin de bien comprendre le Théorème 4.2.2, nous définissons la boule de centre de $h \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et rayon $\epsilon > 0$ par

$$B(h, \epsilon) = \{f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x) - h(x)| < \epsilon\}. \tag{4.2}$$

Nous notons par Γ_n la topologie telle que les ensembles ouverts base sont ces boules. Soient $h, g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tels que $h \neq g$, donc il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $h(x) \neq g(x)$. Ainsi, prenant $\epsilon = \frac{|h(x)-g(x)|}{2} > 0$ on voit que $B(h,\epsilon) \cap B(g,\epsilon) = \emptyset$. Par conséquent $(C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \Gamma_n)$ est un espace vectoriel topologique de Hausdorff.

De même, nous notons par Θ_n la topologie de $\mathcal{C}_n$ telle que les ensembles ouverts base sont les boules suivantes, pour chaque $p \in \mathcal{C}_n$ et chaque $\epsilon > 0$.

$$B(p,\epsilon) = \{q \in \mathcal{C}_n : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|p(x) - q(x)\| < \epsilon\} \tag{4.3}$$

et avec les mêmes arguments que ci-dessus, on voit que $(\mathcal{C}_n, \Theta_n)$ est un espace vectoriel topologique de Hausdorff.

On remarque, que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et $p \in \mathcal{C}_n$, on a $|\ell_x(p)| \leq \|p(x)\|\|x\|$, et ainsi on obtient que $\Gamma^n \subseteq \Theta_n$. Mais cette inclusion est stricte, bien sûr, puisque $\overline{B}^{\Theta_n}(p,\epsilon) = \{q \in \mathcal{C}_n : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|p(x) - q(x)\| \leq \epsilon\}$. Maintenant, si on considère $n = 2$ et p une fonction constante, on voit que $q(x_1, x_1) = (-x_2, x_1) + p$ satisfait $\ell_x(q) = \ell_x(p)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, ainsi q appartient à n'importe quel voisinage de p pour la topologie Γ^2. Mais $\|q(x) - p\| = \|x\|$ et si on prend x ayant une norme plus grande que ϵ, on a une contradiction.

Il est bien connu, que la topologie Euclidienne de $\mathbb{R}$ a pour boules ouvertes les intervalles $]\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon[$.

Aussi, nous utilisons la même notation pour les boules de $\mathcal{C}_n \times \mathbb{R}$ comme suit

$$B((p,\lambda),\epsilon) = \{(q,\beta) \in \mathcal{C}_n \times \mathbb{R} : q \in B(p,\epsilon) \text{ et}, \beta \in B(\lambda,\epsilon)\} \tag{4.4}$$

et nous notons par Γ_n^n la topologie de $\mathcal{C}_n \times \mathbb{R}$ telle que les ensembles ouverts base sont ces boules. Il est facile de vérifier que $\mathcal{C}_n \times \mathbb{R}$ est aussi un espace vectoriel topologique de Hausdorff pour la topologie Γ_n^n.

On considère $\Phi : (\mathcal{C}_n \times \mathbb{R}, \Gamma_n^n) \to (C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \Gamma_n)$ définie par

$$(\Phi(p,\lambda))(x) = \langle p(x), x \rangle + \lambda. \tag{4.5}$$

On peut facilement vérifier que Φ est une application linéaire continue. Nous montrons, dans le résultat suivant, la densité de $\Phi(\mathcal{C}_n \times \mathbb{R})$ dans l'espace $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (bien sûr $\Phi(\mathcal{C}_n \times \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel réel de $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$).

Proposition 4.2.3. *Par chaque* $h \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *et chaque* $\epsilon > 0$*, il existe* $(p, \lambda) \in \mathcal{C}_n \times \mathbb{R}$ *tel que* $\Phi(p, \lambda) \in B(h, \epsilon)$*.*

Preuve: Soient $h \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$. Le résultat se déduit en appliquant le Théorème 4.2.2 pour $\epsilon/2 > 0$ et $\lambda = h(0)$. □

4.3 Théorème de séparation

Le résultat suivant a été présenté par W. Sosa dans [90]. Ici, on donnera une preuve différente.

Proposition 4.3.1. *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *une fonction semi-continue inférieurement. Si* $f(x) > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$*, alors il existe* $h \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *tel que* $0 < h(x) < f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$*.*

Preuve: D'après Théorème de Urysohn, la fonction $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$d((x,\lambda)) = \frac{d_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_-}(x,\lambda)}{d_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_-}(x,\lambda) + d_{\text{epi}\,(f)}(x,\lambda)}$$

est continue. De plus $d_{|\text{epi}\,(f)} = 1$ et $d_{|\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_-} = 0$. Maintenant, pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, on définit $v(x) = \{\lambda \in \mathbb{R} :\ d((x,\lambda)) = \frac{1}{2}\}$. On peut voir aisément que $v(x)$ est fermé et non vide. Tout $\lambda \in v(x)$ satisfait $0 < \lambda < f(x)$. Nous allons montrer que $v(x)$ est unitaire pour tout x. Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in v(x)$. Il est clair que $d_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_-}(x,\lambda_1) = \lambda_1$ et $d_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_-}(x,\lambda_2) = \lambda_2$. Ainsi, on déduit que

$$\frac{1}{2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + d_{\text{epi}\,(f)}(x,\lambda_1)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + d_{\text{epi}\,(f)}(x,\lambda_2)}$$

d'où, $d_{\text{epi}\,(f)}(x,\lambda_1) = \lambda_1$ et $d_{\text{epi}\,(f)}(x,\lambda_2) = \lambda_2$. Maintenant, si $\lambda_1 < \lambda_2$, donc il existe $(x_0, \lambda_0) \in \text{epi}\,(f)$ tel que $d_{\text{epi}\,(f)}(x,\lambda_1) = \|x - x_0\| + |\lambda_1 - \lambda_0|$. Ensuite, si $\lambda_2 \geq \lambda_0$ alors $(x_0, \lambda_2) \in \text{epi}\,(f)$ et ainsi $\lambda_2 = d_{\text{epi}\,(f)}(x,\lambda_2) \leq \|x - x_0\| \leq d_{\text{epi}\,(f)}(x,\lambda_1) = \lambda_1$ ce qui est absurde. D'où, $\lambda_2 < \lambda_0$ et par conséquent $|\lambda_2 - \lambda_0| < |\lambda_1 - \lambda_0|$ et $\lambda_2 = d_{\text{epi}\,(f)}(x,\lambda_2) \leq \|x - x_0\| + |\lambda_2 - \lambda_0| \leq \|x - x_0\| + |\lambda_1 - \lambda_0| = d_{\text{epi}\,(f)}(x,\lambda_1) = \lambda_1$ ce qui est absurde. Donc $\lambda_1 = \lambda_2$.

On définit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $h(x)$ étant l'unique élément de $v(x)$. On va montrer que cette fonction h est continue. Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et une suite quelconque $(x_n)_n$ qui converge vers x_0. Si $(h(x_n))_n$ est bornée alors il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ telle que $h(x_{n_k})$ converge vers un point y_0. Ainsi de la continuité de d, on a que $d(x_{n_k}, h(x_{n_k}))$ converge vers $d(x_0, y_0)$. Mais puisque

$d(x_{n_k}, h(x_{n_k})) = \frac{1}{2}$ on a que $d(x_0, y_0) = \frac{1}{2}$ et par conséquent $y_0 \in v(x_0)$. Ainsi $y_0 = h(x_0)$. Maintenant, supposons que $h(x_n) \to +\infty$. Remarquons qu'il existe $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\mu_0 \geq f(y_0)$ tels que

$$h(x_0) = \|x_0 - y_0\| + |h(x_0) - \mu_0|$$

et pour tout $x, z \in \mathbb{R}^n$

$$h(x) \leq \|x - z\| + |h(x) - \mu|, \quad \forall \mu \geq f(z).$$

Ainsi, pour tout n, on a $h(x_n) \leq \|x_n - y_0\| + |h(x_n) - \mu|$ pour tout $\mu \geq f(y_0)$. Puisque $h(x_n) \to +\infty$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $h(x_n) \geq f(y_0)$. D'après, pour tout $n \geq n_0$, on prend $\mu = h(x_n)$ et ainsi

$$h(x_n) \leq \|x_n - y_0\|.$$

Puisque $(x_n)_n$ converge vers x_0, $(h(x_n))_n$ est bornée, ce qui est absurde. Ainsi h est continue en x_0. □

Maintenant on peut établir le Théorème de Séparation pour deux ensembles fermés non vides et disjoints.

Théorème 4.3.2. *Soient A et B deux ensembles fermés, disjoints et non vide de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe $p \in \mathcal{C}_n \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\langle p(x), x\rangle \geq \lambda \geq \langle p(y), y\rangle, \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B.$$

Preuve: Supposons que $0 \in A$. D'après le Théorème de Urysohn, il existe $h : \mathbb{R}^n \to [-1, 0]$ continue telle que $h(x) = 0$ pour tout $x \in A$ et $h(x) = -1$ pour tout $x \in B$. Puisque $0 \notin B$, on a $d = dist(0, B) > 0$. Prenons $0 < \epsilon < \min\{d, 1\}$. Le Théorème 4.2.2, permet d'obtenir l'existence de $\delta \leq \epsilon$ et $p \in \mathcal{C}_n \setminus \{0\}$ tels que :

a) $h(z) = \langle p(z), z\rangle - \epsilon$ pour tout $z \notin B_\delta[0]$;

b) $0 \leq \langle p(z), z\rangle$ pour tout $z \in B_\delta[0]$.

Puisque $B \cap B_\delta[0] = \phi$ et d'après a), on a $\langle p(x), x\rangle = \epsilon - 1 < 0$ pour tout $x \in B$. Finalement en utilisant b), on obtient $\langle p(x), x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in A \cap B_\delta[0]$ et ainsi, grâce à a) on a $\langle p(x), x\rangle = \epsilon > 0$ pour tout $x \in A$ et $x \notin B_\delta[0]$. Ainsi, on prend $\lambda \in [\sup_{y\in B} \ell_y(p), \inf_{x\in A} \ell_x(p)]$.

Maintenant, si $0 \notin A \cup B$, on pose $A_0 = A \cup \{0\}$ de sorte que A_0 et B sont fermés et disjoints. On applique alors le raisonnement prédécedent à A_0 et B. □

Théorème 4.3.3 ([90]). *Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ une fonction semi-continue supérieurement. Si $g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, et $(0, g(0)) \notin epi(f)$, alors il existe $(p, \lambda) \in \mathcal{C}_n \times \mathbb{R}$ tel que*

1. *$g(y) \leq \langle p(y), y\rangle - \lambda \leq f(y)$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$.*
2. *$\langle p(x), x\rangle - \alpha \leq \lambda \leq \langle p(y), y\rangle - \delta$ $\forall (x, \alpha) \in epi(f)$, $\forall (y, \delta) \in hyp(g)$.*

Preuve: Puisque $(0, g(0)) \notin \mathrm{epi}\,(f)$, il est clair que $g(0) < f(0)$. Soient $\epsilon > 0$ et $\gamma \in (g(0), f(0))$ tels que $g(0) < \gamma - \epsilon < \gamma + \epsilon < f(0)$. On considère $\hat{f}, \hat{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définies par

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \gamma & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \text{ et } \hat{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \gamma & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Alors $\hat{g}$ est semi-continue supérieurement, $\hat{f}$ est semi-continue inférieurement et $\hat{g} \leq \hat{f}$. Ainsi en appliquant le Théorème de Sélection de Michael, il existe $h \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tel que $\hat{g} \leq h \leq \hat{f}$. On remarque que $h(0) = \gamma$, et ainsi $g(0) < h(0) - \epsilon < h(0) < h(0) + \epsilon < f(0)$. En utilisant la semi-continuité supérieure de g, la continuité de h et la semi-continuité inférieure de f, il existe $\eta \in (0, \epsilon]$ tel que

$$g(y) < h(0) - \epsilon < h(y) < h(0) + \epsilon < f(y), \quad \forall \|y\| \leq \eta. \tag{4.6}$$

Pour $\eta > 0$, en appliquant le Théorème 4.2.2, il existe $\theta \in (0, \eta] \subset (0, \epsilon]$ et $p \in \mathcal{C}_n$ tels que

$$h(x) = \langle p(x), x\rangle + h(0) - \eta, \quad \forall x \notin B_\theta[0]; \tag{4.7}$$

$$0 \leq \langle p(x), x\rangle, \quad \forall x \in B_\theta[0]; \tag{4.8}$$

$$-\eta \leq \langle p(x), x\rangle - h(x) + h(0) \leq \eta, \quad \forall x \in B_\theta[0]. \tag{4.9}$$

Si on fait la somme de l'inéquation intermédiaire avec l'équation (4.6) et l'équation (4.9), on obtient $0 \leq \langle p(x), x\rangle < \epsilon + \eta$, $\forall x \in B_\theta[0]$ (la première inéquation provient de l'équation (4.8)). Ceci implique, en combinant avec les inéquations en (4.6), que

$$g(x) < h(0) - \epsilon \leq h(0) - \eta \leq \langle p(x), x\rangle + h(0) - \eta < h(0) + \epsilon < f(x)$$

pour tout $x \in B_\theta[0]$. D'autre part, des équations (4.7) on a

$$g(x) \leq \langle p(x), x\rangle + h(0) - \eta \leq f(x)$$

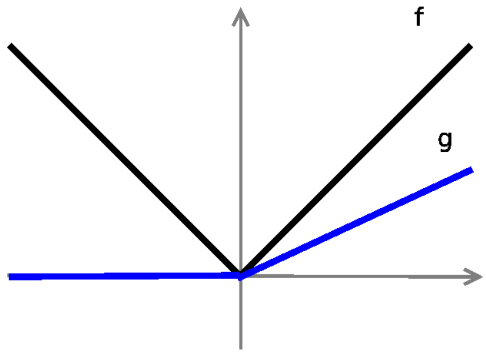
pour tout $x \notin B_\theta[0]$. Ainsi, le résultat se déduit en prenant $\lambda = \eta - h(0)$. En appliquant la seconde inéquation de la dernière partie à un point quelconque (x, α) de $\mathrm{epi}\,(f)$, on obtient $\langle p(x), x\rangle - \alpha \leq \lambda$, pour tout $(x, \alpha) \in$

epi (f). Enfin, en appliquant la première inéquation de la dernière partie à un point quelconque (y,δ) de hyp (g), on a $\lambda \leq \langle p(y), y\rangle - \delta$, $\forall (y,\delta) \in$ hyp (g). $\square$

L'exemple suivant montre que l'hypothèse $(0, g(0)) \notin$ hyp (g) est nécessaire.

Exemple 4.3.4. *Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fontions définies par*

$$f(x) = |x| \text{ et } g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x/2, & x \geq 0 \end{cases}.$$



Supposons qu'il existe $p \in \mathcal{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$g(x) \leq \langle p(x), x\rangle - \lambda \leq f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, pour $x = 0$ on a $\lambda = 0$. Maintenant, il est clair que $0 \leq p(x)x \leq -x$, pour tout $x < 0$ et $x/2 \leq p(x)x \leq x$, pour tout $x > 0$. Ensuite $-1 \leq p(x) \leq 0$ pour tout $x < 0$ et $1/2 \leq p(x) \leq 1$, pour tout $x > 0$. De la contiuinté de p on obtient que $p(0) \in [-1, 0]$ et $p(0) \in [1/2, 1]$ ce qui fournit une contradiction.

Comme conséquence immediate du Théorème 4.3.3, on a la proposition suivante.

Proposition 4.3.5. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement. Si $(x_0, \lambda_0) \notin epi(f)$, alors il existe $(p, \beta) \in \mathcal{C} \times \mathbb{R}$ tel que*

$$\langle p(z), z\rangle - \mu < \beta < \langle p(x_0), x_0\rangle - \lambda_0 \qquad \forall (z,\mu) \in epi(f).$$

4.4 Une modification de la conjugée de Fenchel

Nous introduissons les deux ensembles suivants

$$\mathcal{D}_f = \left\{ p \in \mathcal{C}_n : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle p(x), x\rangle - f(x)\} < +\infty \right\} \tag{4.10}$$

pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et

$$\mathcal{D}_\phi = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sup_{p \in \mathcal{C}_n} \{ \langle p(x), x \rangle - \phi(p) \} < +\infty \right\}, \tag{4.11}$$

pour $\phi : \mathcal{C}_n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Le résultat suivant regroupe les Lemmes 2.5 et 2.6 de [25] tout en fournissant une preuve différente.

Proposition 4.4.1. *Soient* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *et* $\phi : \mathcal{C}_n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *deux fonctions. Alors*

i) $E = \left\{ (p, \lambda) \in \mathcal{C}_n \times \mathbb{R} : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle p(x), x \rangle - f(x) \} \leq \lambda \right\}$ *est convexe et fermé dans* $\mathcal{C}_n \times \mathbb{R}$.

ii) $F = \left\{ (x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \sup_{p \in \mathcal{C}_n} \{ \langle p(x), x \rangle - \phi(p) \} \leq \lambda \right\}$ *est fermé en* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Preuve: *i)* on peut voir aisément que pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $l_{x,\lambda} : \mathcal{C}_n \to \mathbb{R}$ définie par $l_{x,\lambda}(p) = \langle p(x), x \rangle - \lambda$ est affine et continue. Si on considère $\lambda = f(x)$ pour chaque $x \in \operatorname{dom}(f)$, alors on a l'égalité $E = \bigcap_{x \in \operatorname{dom}(f)} \operatorname{epi}(l_{x,f(x)})$. Ainsi E est convexe et fermé.

ii) Maintenant, pour chaque $p \in \mathcal{C}_n$ et $\mu \in \mathbb{R}$ l'application $l_{p,\mu} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $l_{p,\mu}(x) = \langle p(x), x \rangle - \mu$ est continue. Si on considère $\mu = \phi(p)$ pour chaque $p \in \operatorname{dom}(\phi)$, on a alors $F = \bigcap_{p \in \operatorname{dom}(\phi)} \operatorname{epi}(l_{p,\phi(p)})$. Ainsi F est fermé. $\square$

Remarque 4.4.2. *Une conséquence de la Proposition 4.4.1 est que la projection de* E *sur* $\mathcal{C}_n$ *est* $\mathcal{D}_f$, *qui est un ensemble convexe. De plus, si* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est une fonction propre avec* $\mathcal{D}_f \neq \emptyset$, *alors si l'application* $\phi : \mathcal{C}_n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *définie par* $\phi(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} l_{x,f(x)}(p)$ *est convexe. Cette fonction est telle que* $\mathcal{D}_f = \operatorname{dom}(\phi)$ *et* $f(x) + \phi(p) \geq \langle p(x), x \rangle$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *et* $p \in \mathcal{C}_n$.

Si $\phi : \mathcal{C}_n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *une fonction propre avec* $\mathcal{D}_\phi \neq \emptyset$, *alors, on définit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *par* $f(x) = \sup_{p \in \mathcal{C}_n} l_{p,\phi(p)}(x)$ *laquelle est semi-continue inférieurement. Cette fonction vérifie de plus, que* $\mathcal{D}_\phi = \operatorname{dom}(f)$ *et* $f(x) + \phi(p) \geq \langle p(x), x \rangle$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *et* $p \in \mathcal{C}_n$.

Le résultat suivant montre que pour toute fonction propre semi-continue inférieurement $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on a toujours que $\mathcal{D}_f \neq \emptyset$. Ce résultat correspond à la Proposition 3.1 dans [25] et elle a aussi été presentée comme Théorème 8 dans [90]. Ici, nous choisissons de donner la preuve de [90], car cette preuve utilise directement la Proposition 4.3.5.

Théorème 4.4.3. *Considèrons une fonction propre $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si f est semi-continue inférieurement, alors $\mathcal{D}_f \neq \emptyset$.*

Preuve: Si f est semi-continue inférieurement, alors, en appliquant la Proposition 4.3.5, on a $(x, \lambda) \notin \mathrm{epi}\,(f)$ avec $x \in \mathrm{dom}\,(f)$ et il existe $(p, \beta) \in \mathcal{C}_n \times \mathbb{R}$ tel que

$$\langle p(y), y\rangle - f(y) < \beta < \langle p(x), x\rangle - \lambda, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Par conséquent $p \in \mathcal{D}_f$. □

Nous allons, maintenant, donner la définition de l'extension de la conjuguée de Fenchel et que plus tard on a récupéré la classique conjuguée de Fenchel.

Étant données les fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $\phi : \mathcal{C}_n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on définit :

1. La fonction $f^* : \mathcal{C}_n \to \bar{\mathbb{R}}$ par

$$f^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle p(x), x\rangle - f(x)\}.$$

   De la Proposition 4.4.1 partie i) et de la définition de D_f il vient que f^* est convexe et $\mathrm{dom}\,(f^*) = \mathcal{D}_f$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathcal{C}_n$, $f(x) + f^*(p) \geq \langle p(x), x\rangle$, lorsque f est propre.

2. La fonction $\phi^* : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ par

$$\phi^*(x) = \sup_{p \in \mathcal{C}_n} \{\langle p(x), x\rangle - \phi(p)\}.$$

   Par la Proposition 4.4.1 partie ii) et la définition de D_ϕ, on a que ϕ^* est semi-continue inférieurement et $\mathrm{dom}\,(\phi^*) = \mathcal{D}_\phi$. De plus, pour tout $p \in \mathcal{C}_n$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\phi(p) + \phi^*(x) \geq \langle p(x), x\rangle$, lorsque ϕ est propres.

On remarque que les domaines de ces fonctions f et ϕ sont différents, et par conséquent ces fonctions f^* et ϕ^* sont aussi différentes.

Proposition 4.4.4. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ [resp. $\phi : \mathcal{C}_n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$] une fonction. Les propriétés suivantes sont satisfaites.*

i) Pour tout $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ [resp. $\psi : \mathcal{C} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$], $f \leq h$ implique $h^* \leq f^*$ [resp. $\phi \leq \psi$ implique $\psi^* \leq \phi^*$].

ii) Si f [resp. ϕ] est propre, alors $f(x) + f^*(p) \geq \langle p(x), x\rangle$ [resp. $\phi(p) + \phi^*(x) \geq \langle p(x), x\rangle$], pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathcal{C}_n$.

iii) $f^{**}(x) = \sup_{\delta\in\Theta}\{\delta(x) : \delta \le f\} \le f(x)$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *[resp.* $\phi^{**}(p) = \sup_{(x,\lambda)\in\mathbb{R}^{n+1}} \{\ell_{x,\lambda}(p) : \ell_{x,\lambda} \le \phi\} \le \phi(p)$, *pour tout* $p \in \mathcal{C}_n$*], où* $(\cdot)^{**} = ((\cdot)^*)^*$, $\Theta = \{\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \delta(x) = \langle p(x), x\rangle + r, p \in \mathcal{C}_n, r \in \mathbb{R}\}$ *et* $\ell_{x,\lambda}(p) = \langle p(x), x\rangle + \lambda$.

iv) $f^{***} = f^*$ *[resp.* $\phi^{***} = \phi^*$*].*

v) $(\alpha f)^*(p) = \alpha f^*(\frac{1}{\alpha}p)$, *pour tout* $\alpha > 0$.

Preuve: Les items i) et ii) sont triviaux. Pour montrer iii), on définit $s = \sup_{\delta\in\Theta}\{\delta(x) : \delta \le f\}$. De ii) on a que, pour tout $p \in \mathcal{C}_n$ et $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\delta(y) = \langle p(y), y\rangle - f^*(p) \le f(y).$$

De par la définition de s, $s \ge \langle p(x), x\rangle - f^*(p)$, pour tout $p \in \mathcal{C}_n$. En prenant le supremum, on a $s \ge f^{**}(x)$. D'autre part, soit $\alpha < s$. Par définition de s, il existe $p \in \mathcal{C}_n$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que $\delta(x) = \langle p(x), x\rangle + r > \alpha$ et, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\delta(y) = \langle p(y), y\rangle + r \le f(y),$$

que l'on peut aussi écrire

$$\langle p(y), y\rangle - f(y) \le -r.$$

En prenant le supremum, on obtient $f^*(p) \le -r$. D'où l'on déduit que

$$\alpha < \langle p(x), x\rangle + r \le \langle p(x), x\rangle - f^*(p) \le f^{**}(x),$$

montrant ainsi que $f^{**}(x) = \sup_{\delta\in\Theta}\{\delta(x) : \delta \le f\} \le f(x)$.

Pour montrer iv), on remarque tout d'abord que par ii),

$$\langle p(x), x\rangle - f^{**}(x) \le f^*(p),$$

pour tout $p \in \mathcal{C}_n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On prend le supremum, on a $f^{***}(p) \le f^*(p)$, pour tout $p \in \mathcal{C}_n$. L'égalité se déduit alors de iii) et i).

Pour tout $\alpha > 0$, on a que

$$(\alpha f)^*(p) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{\langle p(x), x\rangle - \alpha\ f(x)\} = \alpha \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{\langle \frac{1}{\alpha}p(x), x\rangle - f(x)\right\},$$

ce que montre la partie (v). □

Comme conséquence de la Proposition 4.4.4, on a que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ et $\phi : \mathcal{C}_n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sont deux fonctions, alors $f = \phi^*$ et $\phi = \phi^{**}$ si et seulement si $\phi = f^*$ et $f = f^{**}$.

Définition 4.4.5. *Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $\phi : \mathcal{C}_n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions. On dira que f et ϕ sont fonctions conjuguées, si $\phi = f^*$ et $f = f^{**}$.*

Remarque 4.4.6. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction. Si f et f^* sont fonctions conjuguées, alors la fonction f est propre et $f = f^{**}$. D'après la Remarque 4.4.2 et le Théorème 4.4.3, f est une fonction semi-continue inférieurement et f^* est une fonction convexe, propre et semi-continue inférieurement.*

Le résultat suivant est important pour la dualité.

Théorème 4.4.7. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre. Alors les fonctions f et f^* sont fonctions conjuguées si et seulement si f est semi-continue inférieurement.*

Preuve: D'après la Remarque 4.4.6 on a que si f et f^* sont fonctions conjuguées alors f est semi-continue inférieurement. Maintenant, supposons que f est semi-continue inférieurement. D'après la Proposition 4.4.4, on a toujours $f \geq f^{**}$. Ainsi il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f^{**}(x) < f(x)$ et donc, puisque f est semi-continue inférieurement et propre, la Proposition 4.3.5 permet de montrer que, pour tout $f^{**}(x) < \lambda < f(x)$, il existe $p \in \mathcal{C}_n$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\langle p(y), y\rangle - f(y) < \beta < \langle p(x), x\rangle - \lambda$. Pour ce p, on a $f^*(p) \leq \beta < \langle p(x), x\rangle - \lambda$ et donc $\lambda < \langle p(x), x\rangle - f^*(p) \leq f^{**}(x)$ ce qui fournit une contradiction. □

Comme conséquence du dernier résultat on a

Corollaire 4.4.8. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre. Alors, f est semi-continue inférieurement si et seulement si $f = f^{**}$.*

L'espace dual de conjugaison

Dans la définition de la bi-conjuguée, il est opportun de restreindre f^* à un sous-espace de $\mathcal{C}_n$. En particulier, si $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$ est la classe de tous les opérateurs constants et f est semi-continue inférieurement, convexe et propre, alors la fonction $f^* : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ donne la conjugaison classique de Fenchel [40]. Ainsi, la fonction bi-conjuguée au sens de Fenchel f^{**} est

$$f^{**}_{\mathcal{F}}(x) = \sup_{p \in \mathcal{F}} \{\langle p, x\rangle - f^*(p)\}.$$

Maintenant, pour tout sous-espace vectoriel $\mathcal{S}$ de $\mathcal{C}_n$, nous considérons la fonction $f^{**}_{\mathcal{S}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ définie par

$$f^{**}_{\mathcal{S}}(x) = \sup_{p \in \mathcal{S}} \{\langle p(x), x\rangle - f^*(p)\}.$$

En particulier, si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}_n$, et $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, alors $f_{\mathcal{S}}^{**} \leq f_{\mathcal{T}}^{**}$. De plus, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction convexe et semi-continue inférieurement, la fonction $f_{\mathcal{F}}^{**}$ coïncide avec la bi-conjugée classique de Fenchel.

Remarque 4.4.9. *Si nous considérons $\mathcal{S}$ un sous-espace de $\mathcal{C}_n$. Alors, par la Proposition 4.4.4 on a $f_{\mathcal{S}}^{**}(x) \leq f^{**}(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.*

Théorème 4.4.10. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction semi-continue inférieurement, convexe et propre, alors $f_{\mathcal{S}}^{**} = f$ pour tout $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}_n$ tel que $\mathcal{S} \supset \mathcal{F}$. En particulier, $f^{**} = f$, ce que implique que f et f^* sont fonctions conjuguées.*

Preuve: Puisque f est semi-continue inférieurement et convexe, par la conjugaison classique de Fenchel et la définition de $\mathcal{F}$, $f(x) = f_{\mathcal{F}}^{**}(x)$. puisque $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$, $f_{\mathcal{F}}^{**} \leq f_{\mathcal{S}}^{**}$. Par conséquent le résultat se déduit de la Remarque 4.4.9.
□

D'après dernier résultat, on a que si la fonction f est semi-continue inférieurement et convexe, la fonction $f_{\mathcal{S}}^{**}$ ne depend pas de $\mathcal{S}$ lorsque $\mathcal{F} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{C}_n$. De plus, dans ce cas, $f_{\mathcal{S}}^{**} = f$.

Définition 4.4.11. *Etant donnée une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on définit l'espace dual de conjugaison de f comme l'espace vectoriel reel $\mathcal{S}$, tel que $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ et $f = f_{\mathcal{S}}^{**}$.*

Nous pouvons alors rédiger le Théorème 4.4.10 ainsi : si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction semi-continue inférieurement, convexe et propre, alors $\mathcal{F}$ est l'espace dual de conjugaison de f.

De même le Théorème 4.4.7 peut être reformulé comme suit :*soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre. Alors f est semi-continue inférieurement si et seulement si $\mathcal{C}_n$ est l'espace dual de conjugaison de f.*

Une question naturelle est la suivante : l'intersection de deux espaces dual de conjugaison est-il un espace dual de conjugaison ? L'exemple suivant répond à cette question par la négative.

Exemple 4.4.12. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par*

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

On peut voir aisément que f est semi-continue inférieurement. D'après, de la définition de la conjuguée modifiée, le Corollaire 4.4.8 et le Théorème 4.4.10 *on a que $f^{**} = f$ et $f^{**}_{\mathcal{F}} \neq f$. Considérons maintenant P la classe de tous les polynomes univalués. On peut voir aisément que, $F \subset P$ et ainsi*

$$f^{**}_F \leq f^{**}_P \leq f.$$

On remarque que, pour tout $x \leq 0$, $f^{**}_P(x) = f(x) = 0$. Pour tout $x_0 > 0$, considérons la fonction polynomiel p définie par

$$p(x) := -\frac{3x^3}{x_0^4} + \frac{4x^2}{x_0^3}.$$

On peut vérifier que $p(x_0) = 1/x_0$ et $f^*(p) = 0$. Ainsi, on a $f^*(p) + f(x_0) = x_0 p(x_0)$ ou, de façon équivalente,

$$f(x_0) = x_0 p(x_0) - f^*(p) \leq f^{**}_P(x_0), \tag{4.12}$$

ce qui montre que P est un espace dual de conjugaison de f.

D'autre part, pour tout $x_0 > 0$, considérons la fonction linéaire q définie par

$$q(x) := -\frac{x}{x_0^2} + \frac{2}{x_0}.$$

On peut voir aisément qu'on a le même résultat que dans (4.12) quand $p = q$. Par conséquent, les sous-espaces $Span\{1, x^2, x^3\}$ et $Span\{1, x\}$ sont tous les deux espaces duals de conjugaison de f et l'intersection de ces deux espaces duaux de conjugaison est $F = Span\{1\}$. Mais F n'est pas un espace dual de conjugaison de f.

Nous allons maintenant donner un exemple particulier de fonction quadratique en dimension 1, et on calcule sa fonction conjuguée en considérant des sous-espaces différents de $\mathcal{C}_1$.

Exemple 4.4.13. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction quadratique définie par*

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & si \quad x \in [0, L] \\ +\infty & sinon \end{cases} \tag{4.13}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $L > 0$.

Nous considérons le sous-espace des opérateurs affines

$$\mathcal{A} = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p(x) = mx + n\}.$$

Puisque chaque élément p de $\mathcal{A}$ est défini par deux paramètres m, n, on identifie, dans ce cas, $p \in \mathcal{A}$ avec $(m, n) \in \mathbb{R}^2$.

On définit la fonction profit $l_{m,n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *par*

$$l_{m,n}(x) = p(x)x - f(x) = \begin{cases} (m-a)x^2 + (n-b)x - c & si \quad x \in [0, L] \\ -\infty & sinon. \end{cases}$$

La fonction $f^* : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est obtenue par maximisation de la fonction profit* $l_{m,n}(\cdot)$. *Pour* $m \neq a$, *le point critique de* $l_{m,n}$ *est*

$$\bar{x} = \frac{n-b}{2(a-m)}.$$

Le point $\bar{x} \in (0, L)$ *et* $l_{m,n}$ *est une fonction concave si, et seulement si,* $b < n < b + 2L(a-m)$. *Dans ce cas* $f^*(m,n) = l_{m,n}(\bar{x})$. *Maintenant, analysons la fonction profit sur la frontière de l'intervalle* $[0, L]$. *Nous avon* $l_{m,n}(0) \geq l_{m,n}(L)$ *si, et seulement si,* $n \leq b + L(a-m)$. *Ainsi, la fonction conjuguée est donnée par*

$$f^*(m,n) = \begin{cases} l_{m,n}(0) & si \quad n \leq b \text{ et } n \leq b + L(a-m) \\ l_{m,n}(\bar{x}) & si \quad b < n < b + 2L(a-m) \\ l_{m,n}(L) & si \quad n \geq b + 2L(a-m) \text{ et } n > b + L(a-m) \end{cases}$$

avec $l_{m,n}(0) = -c$, $l_{m,n}(\bar{x}) = \dfrac{(n-b)^2}{4(a-m)} - c$ *et* $l_{m,n}(L) = (m-a)L^2 + (n-b)L - c$.

On remarque que le domaine de f^* *est partitionné en trois régions polygonales délimitées par trois lignes dont intersection est le point commun* (a, b).

De la conjugaison classique de Fenchel, on sait que $f^{**}_{\mathcal{F}} = f$ *lorsque* f *est convexe. Nous allons montrer, en particulier, que* $f^{**}_{\mathcal{A}} = f$ *(c'est-à-dire* $\mathcal{A}$ *est un espace dual de conjugaison de* f*) même si* f *n'est pas convexe.*

Par simplicité, on définit la fontion $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *par*

$$\psi(m,n) = (mx+n)x - f^*(m,n).$$

Ainsi, on a que $\psi(m,n)$ *est égale à*

$$\begin{array}{ll} mx^2 + nx + c & si\ n \leq b \text{ et } n \leq b + L(a-m), \\ mx^2 + nx - \dfrac{(n-b)^2}{4(a-m)} + c & si\ b < n < b + 2L(a-m), \\ (x^2 - L^2)m + (x-L)n + f(L) & si\ n \geq b + 2L(a-m) \text{ et } n > b + L(a-m). \end{array}$$

Par conséquent

$$f^{**}_{\mathcal{A}}(x) = \sup_{(m,n) \in \mathbb{R}^2} \{\psi(m,n)\} \geq \psi(a,b) = f(x).$$

En utilisant que $f(x) \leq f_{\mathcal{A}}^{**}(x)$ *on a que* $f(x) = f_{\mathcal{A}}^{**}(x)$.

Nous allons montrer que l'hypothèse $\mathcal{S} \supset \mathcal{F}$ *dans le Théorème 4.4.10 est essentielle même si la fonction* f *est convexe.*

Nous considérons, $\mathcal{S} = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p(x) = mx\}$ *et* $b > 0$. *On identifie, chaque élément* $p \in \mathcal{S}$ *avec* $m \in \mathbb{R}$. *La fonction* $f^* : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ *est donnée par*

$$f^*(m) = \begin{cases} -c & \text{si } m \leq a + b/L \\ mL^2 - f(L) & \text{si } m > a + b/L \end{cases}$$

et la fonction $f_{\mathcal{S}}^{**} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est donnée par*

$$f_{\mathcal{S}}^{**}(x) = \sup\{mx^2 - f^*(m) : m \in \mathbb{R}\}.$$

En particulier

$$f_{\mathcal{S}}^{**}\left(\frac{L}{2}\right) = f\left(\frac{L}{2}\right) - b\frac{L}{4} < f\left(\frac{L}{2}\right).$$

La proposition suivante montre que l'espace dual de conjugaison d'un problème de programmation quadratique peut être de dimension finie.

Proposition 4.4.14. *Étant donne* $Q \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *une matrice symétrique et* $q \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *une fontion définie par*

$$f(x) := \begin{cases} \langle x, Qx \rangle + \langle q, x \rangle + c, & x \in K \\ +\infty, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où K *est un sous-ensemble fermé et non vide de* $\mathbb{R}^n$. *Alors, il existe un espace dual de conjugasion de* f *de dimension finie.*

Preuve: Puisque f est propre et semi-continue inférieurement, le Corollaire 4.4.8 implique que $f^{**} = f$. Considérons maintenant $M \subset \mathcal{C}_n$ défini par $M = \{p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid p(x) = aQx + bq;\ a, b \in \mathbb{R}\}$. Ainsi, on a, pour chaque $p \in M$,

$$f^*(p) = \sup_{x \in K} \{\langle x, (a-1)Qx \rangle + \langle (b-1)q, x \rangle - c\}.$$

Si nous prenons $b = 1$, on a

$$f^*(p) = \begin{cases} (a-1) \sup\limits_{x \in K} \langle x, Qx \rangle - c, & a > 1 \\ -c, & a = 1 \\ (1-a) \inf\limits_{x \in K} \langle x, Qx \rangle - c, & a < 1. \end{cases}$$

Si on prend $a = 1$, on a

$$f^*(p) = \begin{cases} (b-1)\sup\limits_{x\in K}\langle q, x\rangle - c, & b > 1 \\ -c & b = 1 \\ (1-b)\inf\limits_{x\in K}\langle q, x\rangle - c, & b < 1. \end{cases}$$

On définit $S = M \oplus F$, de dimension $n+1$. Comme $M \subset S$, on a $f_M^{**} \leq f_S^{**} \leq f^{**}$, c'est-à-dire, pour tout $x \in K$,

$$\begin{array}{rcl} f_S^{**}(x) & \geq & \sup\limits_{p\in M}\{\langle x, p(x)\rangle - f^*(p)\} \\ & \geq & \langle x, Qx + q\rangle - f^*(Qx+q) \\ & = & f(x). \end{array}$$

□

4.5 Schèma de dualité

Dans cette sous-section, nous commençons par donner un résultat dans lequel le problème de minimisation est tranformé en un autre problème de minimisation ou maximisation lorsque la fonction objectif est la somme ou la différence de deux fonctions. Ainsi on étend le Théorème 1.1.5. Enfin, on donnera un schéma de dualité pour la programmation semi-continue.

Proposition 4.5.1. *Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions propres.*

i) Si g est semi-continue inférieurement, alors

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\{f(x) - g(x)\} = \inf_{p\in\mathcal{C}_n}\{g^*(p) - f^*(p)\}.$$

ii) Si f et g sont semi-continues inférieurement et de plus $f(0) + g(0) > \inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) + g(x)$. Alors

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) + g(x) = \sup_{p\in\mathcal{C}_n} -f^*(-p) - g^*(p) = \max_{p\in\mathcal{C}_n} -f^*(-p) - g^*(p).$$

Preuve: *i)* Puisque g est semi-continue inférieurement, on a $g^{**} = g$. Ainsi

$$\begin{array}{rcl} \inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\{f(x) - g(x)\} & = & \inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\{f(x) - g^{**}(x)\} \\ & = & \inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\{f(x) - \sup\limits_{p\in\mathcal{C}_n}\{\langle p(x), x\rangle - g^*(p)\}\} \\ & = & \inf\limits_{p\in\mathcal{C}_n}\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\{f(x) - \langle p(x), x\rangle + g^*(p)\} \\ & = & \inf\limits_{p\in\mathcal{C}_n}\{g^*(p) - f^*(p)\}. \end{array}$$

ii) Définissons $a = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) + g(x)$ et $b = \sup_{p\in\mathcal{C}_n} -f^*(-p) - g^*(p)$. On a $f^*(-p) \geq \langle -p(x), x\rangle - f(x)$ et ainsi $f(x) \geq -\langle p(x), x\rangle - f^*(-p)$, et $-g^*(p) \leq -\langle p(x), x\rangle + g(x)$. Par suite $-f^*(-p) - g^*(p) \leq f(x) + g(x)$ et ainsi, on a que $a \geq b$. Maintenant, si $a = -\infty$ alors $a = b$. On considère maintenant $a \in \mathbb{R}$ et les fonctions $f_0, g_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ définies par $g_0(x) = a - f(x)$ et $f_0(x) = g(x)$. Il est clair que g_0 est propre et semi-continue supérieurement et f_0 est semi-continue inférieurement. De plus $f_0(x) \geq g_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $(0, g_0(0)) \notin \operatorname{epi}(f_0)$. D'après par le Théorème 4.3.3 il existe $(p, \lambda) \in \mathcal{C}_n \times \mathbb{R}$ tel que

$$g_0(x) \leq \langle p(x), x\rangle - \lambda \leq f_0(x).$$

On a donc $\langle p(x), x\rangle - g(x) \leq \lambda$, et par suite $-g^*(p) \geq -\lambda$. D'après la première inéquation on a $a - f(x) \leq \langle p(x), x\rangle - \lambda$ et ainsi $\langle -p(x), x\rangle - f(x) \leq -a - \lambda$, d'où $-f^*(-p) \geq a + \lambda$. Cela montre que $-f^*(-p) - g^*(p) \geq a$. □

Pour terminer cette sous-section nous allons préciser le problème primal considéré et donner des résultats qui motivent l'introduction du problème dual.

Notre problème originel (8) est formulé comme

$$\begin{array}{lll} (LSCP) & \min & f(x) \\ & \text{s.t.} & x \in \mathbb{R}^n, \end{array}$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est propre et semi-continue inférieurement.

Définition 4.5.2. *On dit qu'une fonction* $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est une fonction de perturbation de* f*, si*

1. $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est semi-continue inférieurement,*
2. $\phi(x, 0) = f(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$.

Le résultat suivant est la clé pour définir le problème dual associé à (LSCP).

Proposition 4.5.3. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *et* $p \in \mathcal{C}_n$*, on a* $-\phi^*(0, p) \leq f(x)$.

Preuve: La fonction conjuguée modifiée de $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est la fonction $\phi^* : \mathcal{C}_n \times \mathcal{C}_n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$\phi^*(q, p) = \sup_{(x,y)}\{\langle (q, p)(x, y), (x, y)\rangle - \phi(x, y)\} = \sup_{(x,y)}\{\langle (q(x), p(y)), (x, y)\rangle - \phi(x, y)\}.$$

Ainsi, on a que

$$\phi^*(q, p) \geq \langle q(x), x\rangle + \langle p(y), y\rangle - \phi(x, y).$$

Puisque $\phi(x, 0) = f(x)$ pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, le résultat se déduit en prenant $q = 0$ et $y = 0$. □

Définition 4.5.4. *Le problème dual associé à (LSCP) est formulé comme*

$$\begin{array}{lll}(DLSCP) & \min & \phi^*(0,p)\\ & t.q. & p \in \mathcal{C}_n.\end{array}$$

Lemme 4.5.5. *Le dual de (LSCP) est un problème de programation convexe.*

Preuve: D'après la définition de la conjugaison modifiée on a, pour tout $p \in \mathcal{C}_n$, que

$$\phi^*(0,p) = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \{\langle p(y), y\rangle - \phi(x,y)\}.$$

Mais, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, l'application $a_{(x,y)} : \mathcal{C}_n \to \mathbb{R}$ définie par $a_{(x,y)}(p) = \langle p(y), y\rangle - \phi(x,y)$ est (continue) affine.

Puisque $\mathcal{C}_n$ est un ensemble convexe, le résultat se déduit du fait que le supremun d'une famille de fontions affines est une fontion convexe. □

Une question naturelle est de savoir, si toutes les fonctions de perturbations sont utiles pour avoir d'un problème dual, donnant suffisament d'informations sur le problème primal ? La réponse à cette question est négative en général, mais, ici on donnera une fonction de perturbation particulière qui joue un rôle important, voir le Théorème 4.5.6.

On considère une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, associée à la fonction f, définie par

$$\phi(x,y) = \begin{cases} f(x) + \varphi(x,y), & x \in X \\ +\infty, & \text{sinon,} \end{cases} \tag{4.14}$$

où $\varphi(x,y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement et définie de telle sorte que $\varphi(x,0) = 0$. Il est clair que, $\operatorname{dom}(\phi) \subseteq \operatorname{dom}(f) \times \mathbb{R}^n$. Aussi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,0) \in \{(x,y) : \phi(x,y) \leq \lambda\}$, on a $x \in \{x \in X : f(x) \leq \lambda\}$.

On peut voir que si $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}^n$, la fonction *marginal* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ définie par

$$h(y) = \begin{cases} \inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x), & y = 0, \\ \inf_{x\in B(0,\|y\|)} \{f(x) + \varphi(x,y)\}, & y \neq 0, \end{cases}$$

est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et une suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers y telle que $(y_k)_k \subset S_\lambda(h)$. Si $y = 0$ alors $y \in S_\lambda(h)$. Maintenant, si $y \neq 0$, alors, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $y_k \neq 0$. Ainsi, pour tout $k \geq k_0$ il existe $x_k \in B(0, \|y_k\|)$ tel que $h(y_k) = f(x_k) + \varphi(x_k, y_k)$. Puisque $\|x_k\| \leq \|y_k\|$, sans perte de généralité, on peut supposer que la suite

$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un point x et de plus $\|x\| \leq \|y\|$. D'après la semi-continuité inférieure de $f+\varphi$, on a

$$f(\bar{x})+\varphi(\bar{x},\bar{y}) \leq \liminf_{k\to+\infty} f(x_k)+\varphi(x_k,y_k) \leq \lambda,$$

montrant ainsi que $y \in S_\lambda(h)$. Cela permet de conclure que h est semi-continue inférieurement.

Théorème 4.5.6. *Soient (LSCP) et une fonction de perturbation ϕ, définie comme en (4.14). Alors le dual de (DLSCP) est (LSCP).*

Preuve: On considère la fonction marginale h, définie comme précédement. Ainsi, leur fonction conjuguée est donnée par

$$\begin{aligned}
h^*(p) &= \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{\langle p(y),y\rangle - h(y)\} \\
&= \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{\langle p(y),y\rangle - \inf_{x\in\mathbb{R}^n}\phi(x,y)\} \\
&= \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\{\langle p(y),y\rangle - \phi(x,y)\} \\
&= \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\{\langle (0,p(y)),(x,y)\rangle - \phi(x,y)\} \\
&= \phi^*(0,p).
\end{aligned}$$

Le schèma de dualité entre (LSCP) et (DLSCP) est "résumé" comme suit :

$$\begin{array}{rlrl}
 & (LSCP) & & (DLSCP) \\
f(x) = & \phi(x,0) \quad \forall x\in\mathbb{R}^n & h^*(p) = & \phi^*(0,p) \quad \forall p\in\mathcal{C}_n \\
h(y) = & \inf\{\phi(x,y) \mid x\in\mathbb{R}^n\} & g^*(q) = & \inf\{\phi^*(q,p) \mid p\in\mathcal{C}_n\} \\
\alpha = & \inf\{f(x) \mid x\in\mathbb{R}^n\} \ = \ h(0) & \beta = & \inf\{h^*(p) \mid p\in\mathcal{C}_n\} \ = \ g^*(0)
\end{array}.$$

Nous affirmons que ϕ^* est la fonction de perturbation de (DLSCP), et ainsi ϕ^{**} sera la fonction de perturbation du dual de (DLSCP). De même, le schéma de dualité entre (DLSCP) et son dual est :

$$\begin{array}{rlrl}
 & (DLSCP) & & (DDLSCP) \\
h^*(p) = & \phi^*(0,p) \quad \forall p\in\mathcal{C}_n & k(x) = & \phi^{**}(x,0) \quad \forall x\in\mathbb{R}^n \\
g^*(q) = & \inf\{\phi^*(q,p) \mid p\in\mathcal{C}_n\} & j(y) = & \inf\{\phi^{**}(x,y) \mid x\in\mathbb{R}^n\} \\
\beta = & \inf\{h^*(p) \mid p\in\mathcal{C}_n\} \ = \ g^*(0) & \delta = & \inf\{k(x) \mid x\in\mathbb{R}^n\} \ = \ j(0)
\end{array}.$$

Rappellons que ϕ est propre et semi-continue inférieurement, ainsi $\phi^{**}=\phi$. On a donc $k=f$, $j=h$ et $\delta=\alpha$. □

Conclusion

La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude des inéquations variationnelles et quasi-variationnelles et leurs applications. Ainsi, nous donnons quelques liens intéressants entre les différents concepts de solution du problème de l'inégalité variationnelle et proposons une extension du fameux Lemme de Minty. Nous avons établi des résultats sur la stabilité qualitative pour l'inéquation variationnelle perturbée, avec perturbations agissant sur l'ensemble de contraintes.

Nous avons observé que le concept de upper (lower) sign-continuité est indépendant de la convexité des images sur l'opérateur associé, contrairement à la semi-continuité. Nous montrons également la propriété de fermeture (norme-faible étoile) du graphe de l'opérateur nomal ajusté en dimension infinie, ainsi que la semi-continuité supérieure de l'opérateur normal ajusté normalisé en dimension finie.

Nous donnons plusieurs résultats d'existence de solution au problème de l'inéquation quasi-variationnelle quasi-monotone. Nous prouvons quelques résultats de stabilité qualitative pour le problème de l'inéquation quasi-variationnelle quasi-monotone.

Nous donnons des conditions assurant que l'opérateur de contraintes défini par des inéquations a la propriété de Mosco continuité, propriété qui est utilisée pour la stabilité qualitative des inéquations quasi-variationnelles quasi-monotones.

Nous appliquons les résultats précédents pour prouver l'existence d'équilibre d'un problème de traffic dans un réseau. Nous considérons aussi des applications au problème de quasi-optmisation, c'est-à-dire un problème d'optimisation à contraintes dépendant du point considéré. Cela ouvre la voie à de possibles applications aux équilibres de Nash généralisés.

Dans la deuxième partie, nous fournissons la base d'une théorie de la programmation semi-continue. Nous présentons un résultat de séparation pour ensembles fermés et introduisons une nouvel espace de dualité, permettent ainsi d'étendre la conjugaison de Fenchel.

Nous avons prouvé que la fonction conjuguée étendu est semi-continue inférieurement et qu'une fonction est semi-continue inférieurement si et seulement si elle coïncide avec sa bi-conjuguée. Nous montrons que, pour les fonctions quadratiques l'espace dual de conjugaison est de dimension finie.

Enfin, nous donnons un exemple particulier d'une fonction de perturbation qui nous permet de fournir un schéma de dualité pour la programmation semi-continue.

Bibliographie

[1] Ait Mansour, M. and Aussel, D., *Quasimonotone Variational Inequalities and Quasiconvex Programming : Qualitative Stability*, Journal of Convex Analysis, Volume 15 (2008), No. 3,459-472.

[2] Ait Mansour, M. and Aussel, D., *Quasimonotone Variational inequalities and quasiconvex programming : quantitative stability*, Pacific Journal of Optimization, vol 2, 2006, 611-626.

[3] Aubin J. P. and Cellina A., *Differential Inclusion*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[4] Aubin, J.P., and Frankowska, H. *Set-valued Analysis*, Birkhuser Boston, Inc., Boston (1990)

[5] Aussel, D. and Cotrina J., *Semicontinuity of the solution map of quasivariational inequalities*, Journal of Global Optimisation, 2011 Vol. 50, No 1, 93-105.

[6] Aussel, D. and Cotrina J., *Existence results for quasimonotone quasivariational inequalities : part I Convergence results*, Preprint. 14 pp

[7] Aussel, D. and Cotrina J., *Existence results for quasimonotone quasivariational inequalities : part II Existence results*, Preprint. 18 pp

[8] Aussel, D. and Cotrina J., *Existence of time-dependent traffic equilibria*, Preprint. 16 pp

[9] Aussel, D. and Daniilidis, A., *Normal Characterization of the Main Classes of Quasiconvex Functions*, Set-Valued Analysis 8 : 219-236, 2000.

[10] Aussel, D. and Dutta, J. *Generalized Nash equilibrium problem, variational inequality and quasiconvexity*, Operations Research Letters 36 (2008), 461-464.

[11] Aussel, D. and Eberhard, A. *Maximal quasimonotonicity and dense single-directional properties of quasimonotone operators*, Preprint (2011) 26pp.

[12] Aussel, D. and Hadjisavvas, N., *On quasimonotone variational inequalities*, J. Optim. Th. Appl. 121 (2004), 445-450.

[13] Aussel, D. and Hadjisavvas, N., *Adjusted sublevel sets, Normal operator and Quasiconvex Programming*, SIAM J. Optim. 16 (2005), 358-367.

[14] Aussel, D. and Ye, J.J., *Quasiconvex programming with locally starshaped constraint region and applications to quasiconvex MPEC*, Optimization. Vol. 55, 2006, 433-457.

[15] Aussel D. and Ye J.J., *Quasiconvex minimization on locally finite union of convex sets*, J. Optim. Th. Appl., 139 (2008), no. 1, 1-16.

[16] Anh, L. Q. and Khanh, P. Q., *Semicontinuity of solution sets to parametric quasivariational inclusions with applications to traffic networks. I. Upper semicontinuities*, Set-Valued Anal. 16 (2008), no. 2-3, 267-279.

[17] Anh, L. Q. and Khanh, P. Q., *Semicontinuity of solution sets to parametric quasivariational inclusions with applications to traffic networks. II. Lower semicontinuities applications* Set-Valued Anal. 16 (2008), no. 7-8, 943-960.

[18] Barbagallo, A. and Cojocaru, M., *Continuity of solutions for parametric variational inequalities in Banach space*, J. Math. Anal. Appl. 351 (2009) 707–720.

[19] Barbagallo, A. *Regularity results for evolutionary nonlinear variational and quasi-variational inequalities with applications to dynamic equilibrium problems*, J. Glob. Optim. (2008) 40 : 29-39.

[20] Beckmann M. J., McGuire C. B., and Winstein C. B., *Studies in the Economics of Transportation*, Yale University Press, New Haven, Conn, USA, 1956.

[21] Bianchi M., Hadjisavvas N. and Schaible S., *On Pseudomonotone Maps T for which $-T$ is also Pseudomonotone*, Journal of Convex Analysis, Vol. 10 (2003), No. 1, 149-168

[22] Borde, J. and Crouzeix, J.P. *Continuity Properties of the Normal Cone to the Level sets of a Quasiconvex Function*, J. Optim. Theory Appl. Vol. 66 (1990), No. 3, 415-429.

[23] Clarke F.H., *Optimization and Nonsmooth Analysis*, A wiley-interscience publication, John Wiley& sons, 1983.

[24] Cotrina, J., *Desigualdad Variacional de Minty*, Tesis de Maestria, Universidad Nacional de Ingeniería-IMCA, Noviembre 2008, Lima, Perú.

[25] Cotrina, J., Karas E., Ribeiro, A. Sosa, W. and Yuan, J. *Fenchel-Moreau conjugation for lower semi-continuous functions.* Optimization 2011, 1-13 iFirst. DOI :10.1080/02331934.2010.507273.

[26] Cottle, R. W., and Yao J.C., *Pseudo-monotone complementarity-problems in Hilbert spaces.* J. Optim. Theory Appl. 75 (1992), no. 2, 281–295.

[27] Crouzeix, J.P. *Pseudomonotone variational inequality problems : Existence of solutions*, Mathematical Programming 78 (1997) 305-314.

[28] Crouzeix, J.P. *Continuity and differentiability of quasiconvex functions* Handbook in Generalized Convexity and Generalized Monotonicity, Edited by N. Hadjisavvas, S. Komlósi and S. Schaible. 121-149, Springer 2005.

[29] Crouzeix, J.P. and Eberhard, A., *Existence of Closed Graph, Maximal Cycliv Pseudo-Monotone Relations and Revealed Preference Theory*, J. Ind. Manag. Optim. 3 (2007), no. 2, 233-255.

[30] Dafermos S, *Traffic equilibrium and variational inequalities*, Transportation Science, vol. 14 (1980), no. 1, 42-54.

[31] Daniele, P., Maugeri, A., Oettli, W. : *Time-dependent Traffic equilibria.* Journal of Optimization Theory and Applications Vol 103 (1999), No. 3, 543-555.

[32] Daniele, P., Parkes, D. and Nagurney, A., *The Internet, Evolutionary Variational Inequalities, and the Time-Dependet Braess Paradox*, Computational Management Science 4 (2007), 355-375.

[33] Daniilidis, A., and Hadjisavvas, N., Characterization of Nonsmooth Semistrictly Quasiconvex and Strictly Quasiconvex Functions, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 102 (1999), 525-536.

[34] Dieudonne, J., *Sur le Théorème de Hahn-Banach.* Rev. Sci., 79 (1943), 277-278.

[35] Dieudonne, J., *Sur la séparation des ensembles convexes dans un espace de Banach.* Rev. Sci., 81 (1941), 642-643.

[36] Eidelheit, M., *Zur Theorie der konvexen Mengen in linearen normierten Raumen.* Studia Math., 6 (1936) : 104-111.

[37] Facchinei F., Kanzow C., Generalized Nash equilibrium problems, 4OR 5 (2007), 173-210.

[38] Facchinei, F. and Kanzow, C., Generalized Nash equilibrium problems, Ann. Oper. Res. 175 (2010), 177-211

[39] Facchinei F. and Pang, J.S., Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems, Volumes I and II, Springer-Verlag, New York, 2003.

[40] Fenchel W., *On conjugate convex functions.* Canadian Journal Mathematics, 1 (1949), 73-77.

[41] Flores-Bazán F., *On subdifferentiability for non-convex functions.* Optimization, 33 (1995), 1-8.

[42] Flores-Bazán F., *Optimización y cálculo de variaciones sin convexidad : Una introducción.* Monografias del IMCA, 1998.

[43] Getán J., Martínez-Legaz J. E., and Singer I., $(*, s)$*-dualities.* Journal of Mathematical Sciences, 115 (4) (2003) : 2506-2541.

[44] Giannessi F. and Maugeri A., Eds., *Variational Inequalities and Network Equilibrium Problems*, Plenum, New York, NY, USA, 1995.

[45] Giannessi F. and Maugeri A., Eds., *Variational Analysis and Applications*, Springer, New York, NY, USA, 2005.

[46] Hadjisavvas N., *Generalized convexity, generalized monotonicity and nonsmooth analysis*, in Handbook on Generalized Convexity and Generalized Monotonicity, N. Hadjisavvas, S. Komlosi and S. Schaible, Kluwer (2005), 465-499.

[47] Hadjisavvas N., *Continuity and Maximality Properties of Pseudomonotone Operators*, Journal Convex Analysis, vol.10 (2003), No. 2, 459-469.

[48] Hardy G. H. , Littlewood J. E. and Pólya G. . *Inequalities.* Cambridge University Press, 2nd edition, 1952.

[49] Harker P.T., Generalized Nash games and quasivariational inequalities, *Eur. J. Oper. Res.*, Vol 54 (1991), 81-94.

[50] Hartman P. and Stampacchia G., *On some nonlinear elliptic differential functional equations.* Acta mathematica 115 (1966), 153-188.

[51] Hadjisavvas N. and Schable S., *Quasimonotone Variational Inequalities in Banach Spaces.* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 90 (1996), 95-111.

[52] Lancaster, K. *Mathematical Economics.* Macmillan, New York, 1968.

[53] Lions J.L. and Stampacchia G., *Variational inequalities.* Communications on Pure and Applied Mathematics 20 (1967), 493-519.

[54] He, Y. and Li, F., *An algorithm for generalized variational inequality with pseudomonotone mapping*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 228 (2009), 212-218.

[55] Hiriart-Urruty J. B. and Martínez-Legaz J. E., *New formulas for the Legendre-Fenchel transform.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 288 (2003), 544-555.

[56] Iusem, A.N., Kassay, G. and Sosa, W. *On certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems* Math. Program. 116 (2009), no. 1-2, Ser. B, 259-273.

[57] Lalitha, C.S. and Bhatia, G., *Stability of Parametric Quasivariational Inequality of the Minty Type*, Journal of Optimization Theory and Applications Volume 148, 281-300, DOI : 10.1007/s10957-010-9755-5.

[58] Kassay, G., Ansari, Q.H., Yang, M.F. and Lin, L.J. *Existence results for Stampacchia and Minty type implicit variational inequalities with multivalued maps*, Nonlinear Analysis, 61 (2005), 1-19.

[59] Khanh, P.Q. and Luu, L.M., *On the existence of solutions to vector quasi-variational inequalities and quasi-complementarity problems with applications to traffic network equilibria*, Journal of Optimization Theory and Applications, 123 (2004), 533-548.

[60] Khanh, P.Q. and Luu, L.M., *Some existence results for vector quasivariational inequalities involving multifunctions and applications to traffic equilibrium problems* J. Global Optim. 32 (2005), 551-568.

[61] Kien B. T., Yao J.-C. and Yen N. D., *On the solution existence of pseudomonotone variational inequalities*, J. Glob. Optim. 41 (2008), 135-145

[62] Kien B.T., Wong N.C. and Yao J.C., *On the Solution Existence of Generalized Quasivariational Inequalities with Discontinuous Multifunctions* , J. Optim. Theory Appl. 135 (2007), 515-530.

[63] Knight F. H., *Some fallacies in the interpretations of social cost*, Quartery Journal of Economics, vol. 38 (1924), 582-606.

[64] Konnov, I. *A combined relaxation method for variational inequalities with nonlinear constraints.* Mathematical Programming 80 (1998), 239-252.

[65] Krasnoselskii M. K., *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations* Pergamon Press, New York, 1964.

[66] Martínez-Legaz J. E., *Generalized convex duality and its economic applications*, 237-292, in Handbook of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity, Volume 76 of Nonconvex Optimization and its Applications, N. Hadjisavvas, S. Komlosi, and S. Schaible, eds., Springer, Boston, 2005.

[67] Martínez-Legaz J. E. and Singer I., *Some conjugation formulas and subdifferential formulas of convex analysis revisited.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 313 (2006), 717-729.

[68] Martínez-Legaz J. E. and Singer I., *Comparing Fenchel-Moreau conjugates with level set conjugates.* Journal of Convex Analysis, 15 (2) (2008), 285-297.

[69] Martínez-Legaz J. E. and Sosa W., *Duality for equilibrium problems.* Journal of Global Optimization, 35 (2006), 311-319.

[70] Maugeri, A. and Vitanza, C. : *Time-dependent equilibrium problems.* In : Migdalos, A., Pardalos, P., Pitsoulis, L. (eds.) Pareto Optimality Game Theory and Equilibria. Nonconvex Optimization and its Applications Series, Springer, 2006.

[71] Michael E., *Continuous selection I.* Annals of Mathematics, 63 (1956), 361-382.

[72] Minty, George J., *On the generalization of a direct method of the calculus of variations*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 315-321.

[73] Moreau J.-J., *Inf-convolution, sous-additivité, convexité des fonctions numériques.* J. Math. Pures et Appl., 49 (1970), 109-154.

[74] Mosco U., *Implicit Variational Problems and Quasi-Variational Inequalities.* Lecture Notes in Math. Vol. 543, 83-156, Springer Verlag, New York/Berlin, 1976.

[75] Mosco, U., *Convergence of Convex Sets and of Solutions of Variational Inequalities*, Advances in Mathematics 3 (1969), 510-585.

[76] Nagurney A., *Network Economics : A Variational Inequality Approach*, vol. 1 of Advances in Computational Economics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1993

[77] Pang J.-S. and Fukushima M., *Quasi-variational inequalities, generalized Nash equilibria, and multi-leader-follower games*, *Comput. Manag. Sci.*, Vol. 2 (2005), 21-56.

[78] Pigou A. C. , *The Economics of Welfare*, Macmillan, London, UK, 1920.

[79] Raciti, F. and Scrimali L. ; *Time-dependent Variational Inequalities and Applications to Equilibrium Problems*, Journal of Global Optimization 28 (2004), 387-400.

[80] Reinhard, J. *A Note on Minty Variational Inequalities and Generalized Monotonicity* pp 240-246. Lecture notes 502 in economics and mathematical systems, Generalized Convexity and Generalized Monotonicity. 2000.

[81] Rockafellar, R.T.and Wets R. J-B, *Variational Analysis* Springer-Verlag, 1997.

[82] Rockafellar R. T., *Convex Analysis.* Princeton University Press, New Jersey, 1970.

[83] Rockafellar R.T., *Conjugate duality and optimization*, Lectures given at the Johns Hopkins University, Baltimore, Md., June, 1973. Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Applied Mathematics, No. 16. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1974.

[84] Rubinov A., *Abstract Convexity and Global Optimization*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[85] Rudin W., *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, New York, 3rd edition, 1976.

[86] Runde, V., *A taste of topology*, Universitext. Springer, New York, 2005.

[87] Silva D. M., Rubinov A. M., and Sosa W., *G-coupling functions*. Optimization, 58(2) (2009), 193-211.

[88] Singer I., *Dualty for nonconvex approximation and optimization*. CMS books in Mathematics, Canadian Mathematical Society. 2006.

[89] Sosa W., *Iterative Algorithms for the Abstract Equilibrium Problem*. PhD thesis, IMPA, Brazil, 1999.

[90] Sosa W., *Separation theorems for closed sets*. Prepint, 13 pp.

[91] Smith M.J., *The existence, uniqueness and stability of traffic equilibria*, Transportation Research B, vol. 13 (1979), no. 4, 295-304.

[92] Svaiter B. F., *Uma Nova Abordagem para Dualidade em Programação não Linear e Aplicações*. PhD thesis, IMPA, Brazil, 1994. In portuguese.

[93] Svaiter B. F., *A new duality for mathematical programming*, Optimization 2010, 1-23, iFirst.

[94] Tan, N.X. : *Quasi-variational inequality in topological linear locally convex Hausdorff spaces*. Math. Nachr. 122 (1985), 231-245.

[95] Wardrop J. G., *Some theoretical aspects of road traffic research*, Proceedings of the Institute of Civil Engineers, Part II, vol. 1 (1952), 325-378.