

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA**



**TESIS**

“ANÁLISIS DE ESFUERZOS PARA OPTIMIZAR EL DISEÑO DE UN  
REDUCTOR DE TORNILLO SIN FIN Y RUEDA DENTADA, TIPO  
CILÍNDRICO, DE 7 HP POR ELEMENTOS FINITOS”

**PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE INGENIERO  
MECÁNICO**


**ELABORADO POR:**

**BERNALDO CORAC, ARNAO MELGAREJO**

 0009-0008-3278-4432

**ASESOR:**

**Dr. Ing. FORTUNATO, ALVA DÁVILA**

 0009-0008-8168-661X

**LIMA - PERÚ**

**2023**

## **DEDICATORIA**

Agradezco en especial a Dios todopoderoso por darme la fuerza y la capacidad para llevar a cabo este trabajo de investigación.

También quiero dedicarle este logro a mi familia, en especial a mi padre Francisco Arnao Sanchez, mi madre Eugenia Melgarejo Cerna y mis hermanos Basilia, Gilber y Luisa, quienes siempre me han brindado su apoyo incondicional en todos mis proyectos académicos.

## **AGRADECIMIENTOS**

Quiero expresar mi agradecimiento a todas las personas que han contribuido en el desarrollo de esta tesis. En primer lugar, a la Facultad de Ingeniería Mecánica (FIM), por brindarme una excelente formación académica y moral, lo cual ha sido fundamental para llevar a cabo este proyecto de investigación.

En segundo lugar, quiero agradecer a mi asesor, el Dr. Ing. Fortunato Alva Dávila, por su valiosa orientación, paciencia y dedicación en todo momento, lo cual me permitió avanzar en el desarrollo de esta investigación.

También quiero expresar mi agradecimiento a mis amigos: Amancio Linder, Henry Barrientos, José Huacanjulca, Luis Evangelista, María Guardia y Roussel Mucha, por su apoyo y sugerencias enriquecedoras que me brindaron durante todo el proceso.

## RESUMEN

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo optimizar el diseño de un reductor de tornillo sin fin y rueda dentada analizando los esfuerzos en los dientes.

Se genera el modelo en 3D del tornillo sin fin y rueda dentada usando el programa *KissSoft 17* para garantizar la exactitud en su acoplamiento, sin interferencias entre dientes. Posteriormente, se realiza la simulación con el programa *Ansys 19.2* en modo estático para calcular esfuerzos críticos presentes en los dientes de la rueda dentada.

Mediante un ajuste en la fuerza permisible en el diente de la rueda dentada se pretende reducir su tamaño disminuyendo su ancho, con el objetivo de reducir su masa.



## **ABSTRACT**

This research aims to optimize the design of a worm and wormgear reducer by analyzing the stresses on the teeth.

The 3D model of the worm and wormgear is generated using the KissSoft 17 software to ensure accuracy in their coupling, without interference between their teeth. Subsequently, a simulation is performed using the Ansys 19.2 software in static mode to calculate critical stresses in the teeth of the worm gear.

By adjusting the permissible force on the teeth of the worm gear, the objective is to reduce its size by reducing its width, with the aim of reducing its mass.

## ÍNDICE

CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN.....	2
1.1 Generalidades.....	2
1.2 Descripción del Problema de Investigación.....	3
1.3 Objetivos de Estudio.....	4
1.3.1 Objetivo General.....	4
1.3.2 Objetivos Específicos.....	4
1.4 Antecedentes Investigativos.....	5
CAPÍTULO II MARCO TEÓRICO Y CONCEPTUAL.....	7
2.1 Marco teórico.....	7
2.1.1 Esfuerzo infinitesimal.....	7
2.1.2 Círculo de Mohr.....	10
2.1.3 Resistencia.....	15
2.1.4 Análisis de elementos finitos.....	27
2.1.5 Engranajes.....	36
2.2 Marco conceptual.....	52
CAPÍTULO III HIPOTESIS Y OPERACIONALIZACION DE VARIABLES.....	53
3.1 Hipótesis.....	53
3.1.1 Hipótesis General.....	53
3.1.2 Hipótesis Específicas.....	53
3.2 Operacionalización de variables.....	54
CAPÍTULO IV METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.....	55
4.1 Tipo y Diseño de la Investigación.....	55
4.2 Unidad de Análisis.....	55
4.3 Matriz de Consistencia.....	56
CAPÍTULO V DESARROLLO DE LA TESIS.....	57
5.1 Cálculo de los parámetros geométricos y potencias permisibles.....	58
5.1.1 Potencia de diseño.....	58
5.1.2 Distancia entre centros y ángulo de avance aproximados.....	59
5.2 Proporciones habituales del diente.....	63
5.3 Análisis de fuerzas y potencias permisibles.....	66
5.4 Dimensiones de la caja reductora y potencia térmica.....	70
5.5 Fuerzas en el reductor.....	73
5.6 Reacciones y momentos en los ejes.....	76

5.6.1	Tornillo en el plano XY.....	77
5.6.2	Tornillo en el plano XZ.....	79
5.6.3	Reacciones y momentos flectores máximos resultantes del tornillo.....	81
5.6.4	Eje de salida, reacciones y momentos en el plano ZY.....	82
5.6.5	Eje de salida, reacciones y momentos en el plano ZX.....	86
5.6.6	Reacciones y momentos flectores máximos resultantes en el eje de salida .....	87
5.7	Diseño del eje de tornillo sin fin .....	89
5.7.1	Criterio por ASME.....	89
5.7.2	Criterio por deformación lateral.....	97
5.7.3	Criterio por resistencia tomando en cuenta la carga axial.....	100
5.7.4	Criterio por inclinación en el rodamiento .....	102
5.7.5	Criterio por deformación torsional.....	106
5.7.6	Resumen de diámetros para el eje de tornillo sin fin.....	107
5.8	Diseño del eje de salida .....	108
5.8.1	Criterio por ASME.....	108
5.8.2	Criterio por deformación lateral.....	113
5.8.3	Criterio por resistencia, tomando en cuenta la carga axial.....	116
5.8.4	Criterio por inclinación en el rodamiento .....	117
5.8.5	Criterio por deformación torsional.....	120
5.8.6	Resumen de diámetros para el eje de salida.....	121
5.9	Relación de transmisión.....	121
5.10	Esfuerzo de flexión en el tornillo sin fin .....	121
5.11	Esfuerzo de flexión en los dientes de la rueda .....	122
5.12	Geometría de la rueda.....	123
5.12.1	Material .....	123
5.12.2	Geometría.....	123
5.13	Cálculo de rodamientos .....	124
5.13.1	Rodamientos en el tornillo sin fin .....	124
5.13.2	Rodamiento de rodillos cilíndricos en el soporte A.....	125
5.13.3	Rodamientos de rodillo cilíndrico para el soporte B .....	125
5.13.4	Rodamientos para el eje de salida .....	126
5.14	Cálculo de chavetas .....	129
5.14.1	Material .....	129
5.14.2	Esfuerzo por cizalladura .....	129
5.14.3	Esfuerzo por compresión.....	130
5.14.4	Chaveta del tornillo sin fin .....	131
5.14.5	Chaveta que une el eje de salida con la rueda dentada .....	131
5.14.6	Chaveta del eje de salida .....	132
5.15	Tuerca de sujeción.....	133
5.16	Análisis por MEF .....	134
5.16.1	Modelo .....	134

5.16.2	Análisis o Simulación.....	142
5.16.3	Interpretación de resultados .....	143
5.17	PRESUPUESTO .....	147
CAPÍTULO VI ANALISIS Y DISCUSION DE RESULTADOS .....		151
6.1	Análisis .....	151
6.1.1	Esfuerzos por flexión .....	151
6.1.2	Esfuerzo por contacto.....	151
6.1.3	Porcentaje de error de la resistencia a la flexión de Buckingham .....	152
6.1.4	Factor de diseño .....	153
6.1.5	Cálculo de factores por flexión y contacto.....	154
6.1.6	Cálculo de la nueva masa de la rueda dentada .....	156
6.2	Discusión de Resultados .....	159
CONCLUSIONES .....		161
RECOMENDACIONES .....		164
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....		165
ANEXOS.....		168

## FIGURAS

Figura 2.1 Cuerpo irregular de estudio .....	8
Figura 2.2 Tensiones de esfuerzo resultante en cada cara. ....	9
Figura 2.3 Esfuerzos en las caras del cubo infinitesimal.....	9
Figura 2.4 Círculo de Mohr .....	10
Figura 2.5 Esfuerzos principales en una partícula infinitesimal orientada. ....	11
Figura 2.6 Esfuerzo resultante. ....	14
Figura 2.7 Partícula infinitesimal en forma de cubo. ....	16
Figura 2.8 Círculo de Mohr de deformación unitaria.....	17
Figura 2.9 Teoría de Tresca. ....	20
Figura 2.10 Esfuerzo triaxial.....	21
Figura 2.11 Esfuerzo promedio, efecto del volumen. ....	22
Figura 2.12 Esfuerzos del efecto en distorsión .....	23
Figura 2.13 Teoría de Von Mises. ....	25
Figura 2.14 Elipsoide, esfuerzos principales en 3D .....	26
Figura 2.15 Tres problemas de distribución en estado estacionario. ....	29
Figura 2.16 Método de solución aproximada de una EDP. ....	30
Figura 2.17 Metodología general para el MEF. ....	35
Figura 2.18 Tipos de Engranajes.....	38
Figura 2.19 Ancho de la cara del tornillo. ....	41
Figura 2.20 Ancho de la rueda dentada.....	42
Figura 2.21 Dimensiones básicas del tornillo sin fin y rueda dentada. ....	42
Figura 2.22 Relación de empuje, rotación y sentido de engranes helicoidales cruzados.....	43
Figura 2.23 Sentido de giro del tornillo sin fin y rueda dentada. ....	44
Figura 2.24 Diagrama de cuerpo libre en el punto de contacto .....	44
Figura 2.25 Resultante $W$ .....	45
Figura 2.26 Triángulo formado con el ángulo normal .....	45
Figura 2.27 Triángulo formado con el ángulo transversal.....	46
Figura 2.28 Triángulo formado con el ángulo de avance.....	46
Figura 2.29 Componente de velocidad en un engranaje de tornillo sin fin. ....	49
Figura 2.30 Transmitancia de cajas de engranajes. ....	50
Figura 5.1 Diagrama aproximado de potencias. ....	58
Figura 5.2 Estimado de la distancia entre centros del reductor. ....	60
Figura 5.3 Distancia entre centros. ....	61
Figura 5.4 Dimensiones básicas del reductor .....	70
Figura 5.5 Transmitancia VS Área .....	71
Figura 5.6 Sentido de los ejes de entrada y salida.....	74
Figura 5.7 Diagrama de cuerpo libre del tornillo.....	74
Figura 5.8 Diagrama de cuerpo libre de la rueda.....	76
Figura 5.9 DCL del tornillo en el plano $XY$ . ....	77
Figura 5.10 Diagrama de torque en el eje de entrada. ....	78

Figura 5.11 Diagrama de fuerza cortante en el plano $XY$ .....	78
Figura 5.12 Diagrama de momento flectores el plano $XY$ .....	79
Figura 5.13 DCL del tornillo en el plano $XZ$ .....	79
Figura 5.14 Diagrama de fuerza cortante en el plano $XZ$ .....	80
Figura 5.15 Diagrama de momento flector en el plano $XZ$ .....	80
Figura 5.16 DCL del tornillo en el plano $ZY$ .....	82
Figura 5.17 DCL con sección transversal cualquiera.....	84
Figura 5.18 Diagrama de torque de salida. ....	85
Figura 5.19 Diagrama de fuerza cortante en el plano $ZY$ .....	85
Figura 5.20 Diagrama de momento flector en el plano $ZY$ .....	85
Figura 5.21 DCL del tornillo en el plano $ZX$ .....	86
Figura 5.22 Diagrama de fuerza cortante en el plano $ZX$ .....	87
Figura 5.23 Diagrama de momento flector en el plano $ZX$ .....	87
Figura 5.24 Tonillo: Puntos 1, 2, 3 y 4. ....	89
Figura 5.25 Deformación de una carga intermedia y momento en el plano $XY$ . ....	98
Figura 5.26 Deformación de una carga intermedia en el plano $XZ$ .....	98
Figura 5.27. Inclinación angular para una carga. ....	102
Figura 5.28 Diagrama de momento para el cálculo de $\Delta 1$ .....	103
Figura 5.29 Inclinación angular en el plano $XY$ .....	104
Figura 5.30 Inclinación angular en el plano $XZ$ .....	105
Figura 5.31 Eje de salida. ....	108
Figura 5.32 Deformación de una carga intermedia y momento en el plano $ZY$ .....	114
Figura 5.33 Deformación de una carga intermedia y momento en el plano $ZX$ . ....	114
Figura 5.34 Inclinación angular en el plano $ZY$ .....	117
Figura 5.35 Inclinación angular en el plano $ZX$ . ....	118
Figura 5.36 Torque en el eje de salida. ....	120
Figura 5.37 Dimensiones para aligerar la rueda. ....	123
Figura 5.38 Rodamientos en el tornillo sin fin.....	126
Figura 5.39 Caso 1b;cargas radiales y axiales .....	127
Figura 5.40 Rodamientos en el eje de salida. ....	129
Figura 5.41 Chaveta incrustado en el canal chavetero, color rojo. ....	130
Figura 5.42 Área de la chaveta sometida a compresión.....	130
Figura 5.43 Tuerca de sujeción en el eje del tornillo sin fin. ....	133
Figura 5.44 Tipos de engranajes. ....	134
Figura 5.45 Ingreso de datos geométricos I .....	135
Figura 5.46 Ingreso de datos geométricos II. ....	135
Figura 5.47 Selección del tornillo sin fin.....	136
Figura 5.48 Selección de la rueda dentada. ....	136
Figura 5.49 Desviaciones del tornillo sin fin. ....	136
Figura 5.50 Desviaciones de la Rueda dentada. ....	137
Figura 5.51 Contacto entre dientes. ....	137

Figura 5.52 Geometría del diente Sistema en formato $\times_b$ .....	138
Figura 5.53 Geometría del tornillo sin fin y rueda dentada modificados.....	138
Figura 5.54 Árbol de operaciones. ....	139
Figura 5.55 Área de contacto entre dientes. ....	140
Figura 5.56 Condiciones de frontera: Torque de entrada y restricción de desplazamiento.....	140
Figura 5.57 Mallado tipo tetraédrico del tornillo sin fin y rueda dentada. ....	141
Figura 5.58 Acercamiento del tornillo sin fin y rueda dentada. ....	141
Figura 5.59 El Mallado de la rueda es más fino que el tornillo sin fin.....	142
Figura 5.60 Mallado fino de los dientes de la rueda dentada. ....	142
Figura 5.61 Esfuerzos y marcas de la rueda dentada en el tornillo sin fin. ....	143
Figura 5.62 Eje de entrada, lado izquierdo .....	143
Figura 5.63 Eje de entra, lado derecho. ....	144
Figura 5.64 Deformación de los dientes.....	144
Figura 5.65 Esfuerzos de tracción y compresión. ....	145
Figura 5.66 Esfuerzo por contacto.....	146
Figura 5.67 Deformación de los dientes de la rueda dentada.....	147
Figura 5.68 Reductor 40:1.....	149
Figura 5.69 Vista general de los componentes del reductor. ....	150

## TABLAS

Tabla 2.1 EDP de segundo orden y de dos variables. ....	29
Tabla 2.2 Sugerencia del número mínimo de dientes de la rueda dentada. ....	39
Tabla 3.1 Operacionalización de Variables para una Investigación Experimental. ....	54
Tabla 4.1 Matriz de consistencia. ....	56
Tabla 5.1 Parámetros geométricos del tornillo y la rueda. ....	65
Tabla 5.2 Área y dimensiones generales de la caja. ....	71
Tabla 5.3 Resumen de las magnitudes calculadas para el reductor. ....	73
Tabla 5.4 Resumen de fuerzas, reacciones y momentos en el tonillo. ....	82
Tabla 5.5 Resumen de las reacciones y momentos en el eje se salida. ....	88
Tabla 5.6 Parámetros en el factor en la condición superficial de Marin. ....	90
Tabla 5.7 Factor de confiabilidad. ....	91
Tabla 5.8 Factor de temperatura. ....	91
Tabla 5.9 Factor de concentración de esfuerzos por fatiga. ....	92
Tabla 5.10 Resumen de Diámetros. ....	96
Tabla 5.11 Longitudes, fuerzas y módulo de elasticidad del tornillo sin fin. ....	99
Tabla 5.12 Factores combinados de choque y fatiga. ....	100
Tabla 5.13 Factor de condiciones de eje. ....	100
Tabla 5.14 Diámetros del Eje de Tonillo por Criterio. ....	107
Tabla 5.15 Resumen de las magnitudes que se van a reemplazar. ....	109
Tabla 5.16 Resumen de Diámetros. ....	113
Tabla 5.17 Resumen de las magnitudes para el cálculo por deformación lateral. ....	115
Tabla 5.18 Resumen de las magnitudes para el para el Cálculo por Resistencia. ....	117
Tabla 5.19 Resumen de las magnitudes para el cálculo por inclinación de rodamientos. ....	119
Tabla 5.20 Diámetros del eje de salida por criterio. ....	121
Tabla 5.21 Magnitudes para aligerar la rueda. ....	124
Tabla 5.22 Rodamiento axial de doble efecto en el soporte <i>A</i> . ....	125
Tabla 5.23 Rodamiento de rodillos cilíndricos para el soporte <i>A</i> . ....	125
Tabla 5.24 Rodamiento de rodillo cilíndrico para el soporte <i>B</i> . ....	125
Tabla 5.25 Factores de cálculo <i>R</i> . ....	126
Tabla 5.26 Rodamiento de una hilera de bolas con contacto angular en el soporter <i>A</i> . ....	128
Tabla 5.27 Rodamiento de una hilera de bolas con contacto angular en el soporter <i>B</i> . ....	128
Tabla 5.28 Presupuesto de materiales. ....	148
Tabla 5.29 Presupuesto total. ....	149
Tabla 6.1 Resumen de FS y error. ....	154
Tabla 6.2 Resumen de esfuerzos y factores. ....	157
Tabla 6.3 Ancho vs masa de la rueda dentada. ....	158



## NOMENCLATURA

Símbolo	Nombre	Unidades
$\alpha$	Factor de acción de columna	
$\Delta$	Deformación lateral	<i>mm</i>
$\Delta T$	Variación de la temperatura	$^{\circ}C$
$\eta$	Eficiencia del reductor	
$\theta^{\circ}$	Ángulo de giro	<i>grados</i>
$\theta_A$	Inclinación en el apoyo A	<i>rad</i>
$\theta_B$	Inclinación en el apoyo B	<i>rad</i>
$\lambda$	Ángulo de avance	<i>grados</i>
$\mu$	Coefficiente de Poisson	<i>grados</i>
$\sigma$	Esfuerzo normal, matriz de componentes del tensor de tensiones.	<i>MPa</i>
$\sigma_C$	Esfuerzo por contacto	<i>MPa</i>
$\sigma_c$	Esfuerzo por compresión	<i>MPa</i>
$(\sigma_C)_{m\acute{a}x}$	El esfuerzo por contacto máximo	<i>MPa</i>
$\sigma_f$	Esfuerzo por flexión	<i>MPa</i>
$(\sigma_f)_{m\acute{a}x}$	Esfuerzo por flexión máximo	<i>MPa</i>
$\sigma_e$	Esfuerzo equivalente	<i>MPa</i>
$\sigma_p$	Esfuerzo principal, autovectores	<i>MPa</i>
$\sigma_t$	Esfuerzo por tracción	<i>MPa</i>
$\tau$	Esfuerzo cortante	<i>MPa</i>
$\tau_{m\acute{a}x}$	Esfuerzo cortante máximo	<i>MPa</i>
$\phi_n$	Ángulo de presión normal	<i>grados</i>
$A$	Área de la sección transversal del eje, área de las caras laterales del reductor	$m^2$
$C$	Distancia entre centros, capacidad de carga dinámica	<i>mm</i>
$C_m$	Factor de corrección de la razón.	
$C_p$	Coefficiente elástico del bronce al estaño	
$C_s$	Factor de materiales y corrección de dimensiones.	
$C_v$	Factor de velocidad.	
$D$	Diámetro de paso de la rueda dentada, diámetro mayor del eje.	<i>mm</i>
$d$	Diámetro de paso del tornillo sin fin, diámetro menor del eje	<i>mm</i>
$d$	Diámetro nominal de la rosca de sujeción	<i>mm</i>
$d_r$	Diámetro de raíz del tornillo sin fin	<i>mm</i>
$d_r$	Diámetro del núcleo de rosca	<i>mm</i>

$E$	Módulo de elasticidad en tensión	$GPa$
$F_a$	Carga axial pura	$N$
$F_G$	Ancho de la cara de la rueda dentada	$mm$
$F_c$	Fuerza por compresión en la tuerca	$N$
$F_r$	Carga radial pura	$N$
$F_t$	Fuerza por tracción en la tuerca de sujeción	$N$
$(FS)_c$	Factor de seguridad por contacto	
$(FS)_f$	Factor de seguridad por flexión	
$G$	Módulo de elasticidad en cortante	$GPa$
$h$	Altura de la tuerca de sujeción	$mm$
$h_{cr}$	Transmitancia o coeficiente de transferencia de calor	$\frac{kW}{m^2 \cdot ^\circ C}$
$I$	Segundo momento de inercia	$mm^4$
$J$	Momento polar de inercia	$mm^4$
$K_b$	Factor combinado aplicado al momento flector	
$K_t$	Factor combinado aplicado al momento de torsión	
$K_{ev}$	Factor de efectos varios	
$K_{ts}$	Factor de concentración de esfuerzos por flexión y torsión	
$L$	Longitud de avance, longitud de chaveta	$mm$
$L_{10}$	Duración nominal	
$l$	Longitud hasta donde actúa el toque	$mm$
$\ell$	Longitud del canal chavetero	$mm$
$M$	Momento flector	$N \cdot m$
$N$	Número de horas	
$n$	Vector unitario de cosenos directores, autovectores	
$n$	Velocidad de rotación	$rpm$
$n'$	Factor de condiciones de ejes	
$n_d$	Factor de diseño.	
$n_w$	Velocidad de rotación del tornillo sin fin	$rpm$
$n_G$	Velocidad de rotación de la rueda dentada	$rpm$
$P$	Carga dinámica equivalente	
$P_d$	Potencia de diseño	$kW$
$P_i$	Potencia de entrada	$kW$
$P_t$	Potencia térmica	$kW$
$P_o$	Potencia salida efectiva	$kW$
$P_f$	Potencia de pérdida por fricción	$kW$

$P_{otros}$	Perdida de potencia por calor en rodamientos, juntas	$kW$
$p$	Paso circular de la rueda dentada	$mm$
$p$	Paso de la tuerca de sujeción	
$p_x$	Paso axial del tornillo sin fin	$mm$
$p$	Exponente según del tipo de rodamiento de bolas o rodillos	
$Q$	Cantidad de potencia disipada, capacidad de carga térmica	$kW$
$R$	Numero de fuerzas y momentos de reacción	
$r$	Radio del filete, radio de giro	$mm$
$S_f$	Límite de fatiga corregida	
$S_y$	Límite de fluencia en tracción	$MPa$
$S_{sy}$	Límite de fluencia en corte	$MPa$
$S_u$	Esfuerzo último	
$T$	Torque	$N.m$
$t$	Temperatura	$^{\circ}C$
$T_e$	Torque de entrada	$N.m$
$T_s$	Torque de salida	$N.m$
$N_w$	Número de entradas o filetes del tornillo sin fin	
$N_G$	Número de dientes de la rueda dentada	
$m$	Número de partes en que se divide la viga	
$m_G$	Ratio	
$W$	Fuerza resultante	$N$
$W_1$	Fuerza en dirección axial	$N$
$W_2$	Fuerza en dirección tangencial	$N$
$W_3$	Fuerza en dirección de separación o radial	$N$
$W_t$	fuerza tangencial de la rueda dentada	$N$
$W_{tG}$	Fuerza tangencial en la rueda	$N$
$W_f$	Fuerza de fricción	$N$
$y$	Deflexión	$mm$
$y$	Coefficiente de forma de Lewis	
$V_G$	Velocidad en el diámetro de paso de la rueda	$m/s$
$V_s$	Velocidad de deslizamiento	$m/s$
$V_w$	Velocidad en el diámetro de paso del tornillo sin fin	$m/s$

## PRÓLOGO

El presente trabajo de investigación se compone de seis capítulos: en el primero se explica la problemática y objetivos para hacer el análisis de esfuerzos, y diseñar un reductor optimizado. En el segundo capítulo se exponen las teorías de resistencia más usadas, como la de Von Mises, y se presentan las fórmulas que rigen la geometría del engrane y la rueda según AGMA. Los capítulos tercero y cuarto se centran en la formulación de hipótesis y metodologías. El quinto capítulo es el más extenso, ya que se realizan todo tipo de cálculos. Por último, en el capítulo seis se analizan los esfuerzos obtenidos a través de la simulación con el programa *Ansys*.

Se desea al lector que este trabajo de investigación resulte de ayuda en sus dudas respecto al diseño de reductores tipo tornillo sin fin y rueda dentada. Se ha realizado con detalle para no defraudar sus expectativas.

# CAPÍTULO I

## INTRODUCCIÓN

### 1.1 Generalidades

En los diversos campos de la industria, ya sea de manufactura, agraria o pesquera, la mayoría de las máquinas son usadas a bajas revoluciones por minuto y altos torques proporcionados por reductores acopladas a motores eléctricos, ya que son más eficientes a elevadas velocidades.

En el mercado existe una gran variedad de tipos de reductores, entre los cuales se encuentran los formados por dientes rectos, helicoidales, cónicos, tornillos sin fin o una combinación de ellos. El último tipo es el más comúnmente utilizado, aunque es también el menos estudiado debido a la complejidad de los dientes helicoidales de la rueda dentada.

Con el desarrollo de la electrónica a partir de los años 80, se empezó a fabricar computadoras más potentes capaces de procesar rápidamente grandes cantidades de cálculos numéricos. Esto permitió que el Método por Elementos Finitos (MEF) cobrara verdadera efectividad, ya que se podía discretizar un cuerpo a elementos más pequeños y de formas irregulares para obtener respuestas con gran precisión a las magnitudes que se deseaban calcular.

Actualmente, el uso de softwares comerciales para realizar simulaciones se ha vuelto habitual en la industria, permitiendo ahorrar tiempo y dinero al no ser necesario crear prototipos en físico.

## **1.2 Descripción del Problema de Investigación**

La fabricación de reductores de transmisión de potencia es variada. Entre los más complejos de estudiar se encuentra el reductor de tornillo sin fin y rueda dentada, principalmente debido a su geometría. Para su diseño, se suelen usar modelos matemáticos aproximados, pero estos resultan insuficientes para el cálculo de los esfuerzos presentes en el entalle o en la superficie de contacto del diente de la rueda dentada, porque presentan inexactitudes groseras, que influyen en la decisión de un adecuado tamaño y/o material.

Ahora se plantea una pregunta que responderá al objetivo de la tesis: “¿Cómo se podría realizar un análisis de esfuerzos para optimizar el diseño de un reductor de tornillo sin fin y rueda dentada, tipo cilíndrico, de 7 HP utilizando el MEF?”

## 1.3 Objetivos de Estudio

### 1.3.1 Objetivo General

Analizar los esfuerzos para optimizar el diseño de un reductor de tornillo sin fin y rueda dentada, tipo cilíndrico, de 7 HP por elementos finitos.

### 1.3.2 Objetivos Específicos

1. Diseñar el reductor usando las normas AGMA-ASME y otros criterios de diseño matemático.
2. Modelar los prototipos del tonillo sin fin y la rueda dentada con los programas *Autodesk Inventor 2021* y *KISSsoft 17*.
3. Ejecutar la simulación “en modo estático” del prototipo usando el programa *Ansys 19.2*.
4. Calcular los factores de seguridad por flexión y contacto en el diente de la rueda dentada.
5. Reducir la masa de la rueda dentada.

## 1.4 Antecedentes Investigativos

1. Amado (2003) realizó en su tesis: “Diseño y construcción de una caja reductora de velocidad de engrane y tornillo sin fin en baño de aceite con relación de 40:1”

Conclusión: Logró una metodología que sirve al lector o estudiante para diseñar un reductor.

2. Alboreda et al. (2016) realizaron su tesis titulada: “Ingeniería inversa, desarrollo tecnológico y construcción del conjunto corona – eje para un reductor de tornillo sin fin”.

Conclusión: Lograron reproducir el reductor (corona - eje) pues se extrajo todos los datos en un plano tecnológico.

3. García (2017) en su tesis doctoral llamado “Diseño de un reductor de dos etapas de engranajes cilíndricos de dientes rectos con tornillo sin fin para el accionamiento de una criba rotativa para lavado de roca”

Conclusión: Se diseñó un reductor accionado por un motor eléctrico de 6 kW de potencia nominal, con tres etapas para lograr una relación final de 196:1, con una velocidad de entrada de 2 940 rpm. La primera etapa consistió en un tornillo sin fin y rueda dentada con una relación de 30:1, mientras que las etapas 2 y 3 fueron engranajes cilíndricos de dientes rectos con relaciones iguales de 2,55:1 cada una.



4. Ciprian et al. (2018) publicaron el artículo “Equipment for testing the worm and worm gear assembly from "liquid wood" and comparative MEF analyses”

Conclusión: El esfuerzo máximo promedio es de  $12,8 \text{ MPa}$  y se sitúa entre la unión del tornillo sin fin y la superficie frontal de la rueda; y la máxima deformación se ubica en el nivel de las puntas de los dientes de la rueda. Por ende, el Arboblend V2 Naturem es el que cumple con este requisito, pues presenta menor deformación:  $0,068 \text{ mm}$ .

5. Ganesh (2022) publicó el artículo “Simulation of the 3D Model of Worm Gear Using Finite Element Analysis”.

Conclusión: Se logró el objetivo de conseguir un modelo en 3D de la rueda dentada que acople perfectamente al tornillo sin fin mediante la simulación de mecanizado (la rueda va girando y la cuchilla que tiene la forma del tornillo va cortando) con el uso del Programa Auto LISP.

## CAPÍTULO II

### MARCO TEÓRICO Y CONCEPTUAL

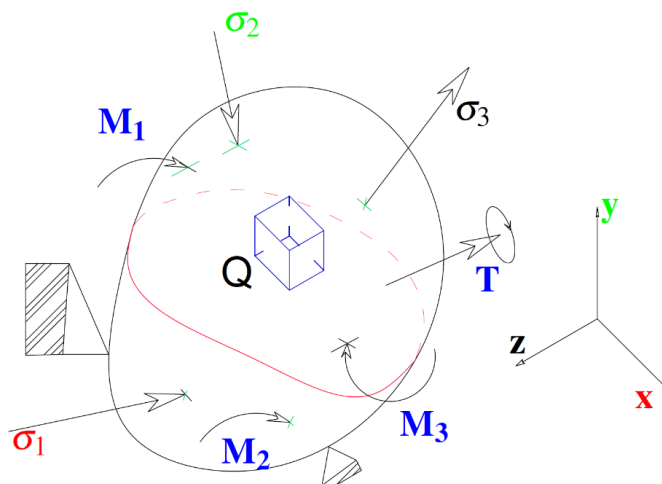
#### 2.1 Marco teórico

En la mecánica clásica se estudia un cuerpo rígido e indeformable, y se asume que está formado por infinitas partículas unidas a una distancia constante. Sin embargo, en la realidad ningún material es perfectamente rígido cuando está sometido a cargas de tracción, compresión, flexión, cortantes o de torsión. Dependiendo de las propiedades mecánicas, como la ductilidad y fragilidad, los esfuerzos externos pueden causar deformaciones elásticas ( $\sigma_e < S_y$ ), permanentes ( $\sigma_e > S_y$ ) o rotura.

Si tenemos, por ejemplo: elementos mecánicos que están sometidos a esfuerzos externos, la principal preocupación del diseñador es que no se produzca una falla en pleno funcionamiento. Para evitar las fallas en elementos mecánicos, el diseñador se vale de las teorías de resistencia.

##### 2.1.1 Esfuerzo infinitesimal

Su análisis comienza tomando una partícula orientada en la parte interna, de tamaño infinitesimal y de geometría regular como cubos; como se muestra en la Figura 2.1.

**Figura 2.1***Cuerpo irregular de estudio*

Fuente: Elaboración propia.

La partícula orientada es un cubo cuyas caras presentan esfuerzos direccionados, los cuales se pueden representar de manera formal como un tensor de tensiones de segundo orden. Sin embargo, en términos prácticos se le denomina matriz simétrica 3x3 de tensiones, y se define a partir de:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

Siendo:

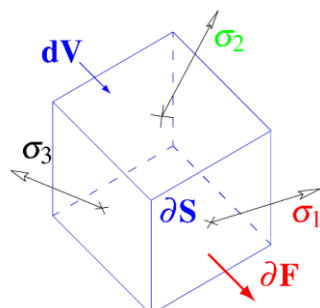
 $\sigma$  = esfuerzo normal $\tau$  = esfuerzo cortante

Se define el tensor de tensiones  $\sigma_i (i = 1, 2, 3)$  al efecto de una fuerza  $F$  por unidad de superficie  $S$  en la cara del cubo:

$$\sigma_i = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{\partial F}{\partial S} \quad (2)$$

**Figura 2.2**

Tensiones de esfuerzo resultante en cada cara.



Fuente: Elaboración propia.

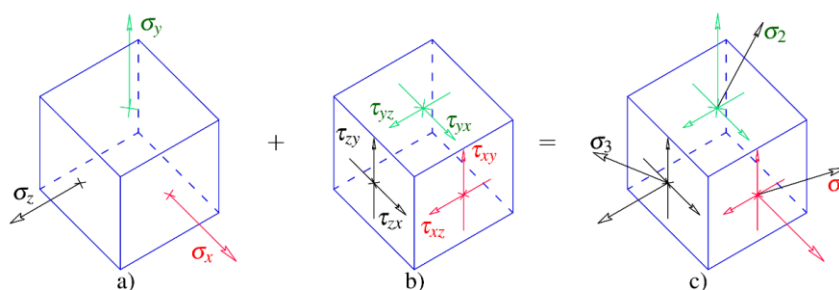
Se considera que  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  son los “esfuerzos resultantes” en cada cara del cubo infinitesimal; más adelante se tomarán esta misma notación para definir los esfuerzos principales:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3)$$

En la Figura 2.3 se puede apreciar que las tensiones están denotadas con subíndices. Por ejemplo:  $\tau_{yz}$ , donde  $y$  indica el plano del esfuerzo transversal al eje  $y$ , luego  $z$  indica la dirección de la tensión en el eje  $z$ .

**Figura 2.3**

Esfuerzos en las caras del cubo infinitesimal.



Nota. a) Normales b) Cortantes c) Resultantes. Fuente: Elaboración propia.

En conclusión, los efectos internos de una partícula se pueden representar mediante la matriz simétrica de nueve componentes (Warren et al., 2012):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (4)$$

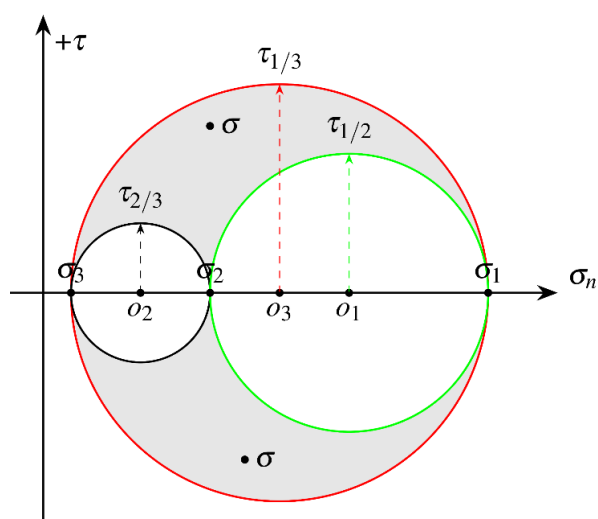
Nota: El número de componentes del tensor para un determinado orden  $n \in \mathbb{N}$  es  $3^n = 1, 3, 9 \dots$ ; de ahí que el tensor se puede representar por un escalar, vector o matriz (Hung et al., 2014).

### 2.1.2 Círculo de Mohr

El ingeniero civil Otto Mohr fue el creador de un círculo que permite calcular los esfuerzos internos de una partícula infinitesimal orientada, como se ve en la Figura 2.4.

**Figura 2.4**

*Círculo de Mohr*



Fuente: Elaboración propia.

Los esfuerzos principales que actúan en las caras del cubo infinitesimal son perpendiculares al eje de las abscisas, es decir, cuando los esfuerzos tangenciales son nulos.

Siendo:

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  = esfuerzos principales normales.

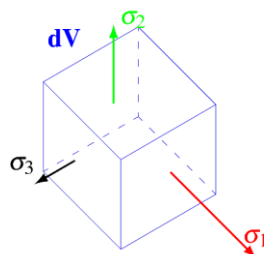
$\tau_{1/3}, \tau_{2/3}, \tau_{1/2}$  = esfuerzos cortantes máximos.

$\sigma$  = esfuerzo resultante de  $\sigma_n$  y  $\tau$ , región sombreada.

También se puede deducir la siguiente relación  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Ello se representa gráficamente en la Figura 2.5.

**Figura 2.5**

*Esfuerzos principales en una partícula infinitesimal orientada.*



*Nota:* Se cumple que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Fuente: Elaboración propia.

Mediante una rotación de planos, la ecuación (4) se puede transformar a una matriz diagonal de esfuerzos principales:

$$\sigma_p = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Esa transformación se realiza hallando su polinomio característico, el cual se halla según la siguiente relación:

$$[\sigma][\mathbf{n}] = [\sigma_p][\mathbf{n}] \quad (6)$$

$$[\sigma - \sigma_p \mathbf{I}] \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (7)$$

Siendo  $\mathbf{I}$  la matriz identidad, si  $\mathbf{n} = \mathbf{0}$ , la solución sería trivial. Ello nos permite hallar los autovectores, pues se necesita que el sistema homogéneo tenga infinitas soluciones. Por lo tanto, desarrollando la ecuación (7) en su forma matricial, se tiene:

$$\left| \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} - \sigma_p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (8)$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_p \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

Luego de desarrollar el determinante, se forma un polinomio característico de tercer grado:

$$\begin{aligned} \sigma_p^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \sigma_p^2 & \\ + (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) \sigma_p & \\ - (\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_x \tau_{zx}^2 & \\ - \sigma_x \tau_{xy}^2) & \end{aligned} \quad (10)$$

Este polinomio de tercer grado se puede simplificar usando la definición de invariantes, que son sus coeficientes, siendo éstos:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_x \tau_{zx}^2 - \sigma_x \tau_{xy}^2 \quad (11)$$

Los coeficientes independientes  $I_1, I_2, I_3$  son conocidos como primera, segunda y tercera invariante respectivamente. Una de sus principales propiedades es que no depende de un sistema de

coordenadas; es decir, permanecen constantes. Por lo tanto, el polinomio característico queda reducida a esta forma más sencilla:

$$\sigma_p^3 - I_1\sigma_p^2 + I_2\sigma_p - I_3 = 0 \quad (12)$$

Resolviendo la ecuación (12), que resulta en un polinomio de tercer grado, se obtiene los esfuerzos principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Por convención, se asume el siguiente orden de desigualdad:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (13)$$

Y con ello las nuevas invariantes para el nuevo estado tensional de esfuerzos principales:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (14)$$

De las ecuaciones (11) y (14) se cumple la propiedad de invariantes:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3$$

$$\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_x\tau_{zx}^2 - \sigma_x\tau_{xy}^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (15)$$

También, los esfuerzos tangenciales máximos se pueden deducir de la Figura 2.4 en función de los esfuerzos principales. Así:

$$\tau_{1/2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \tau_{2/3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \tau_{1/3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (16)$$

La tercera ecuación,  $\tau_{1/3}$ , es conocida como esfuerzo cortante máximo absoluto.

Para el cálculo de los esfuerzos normal y cortante:

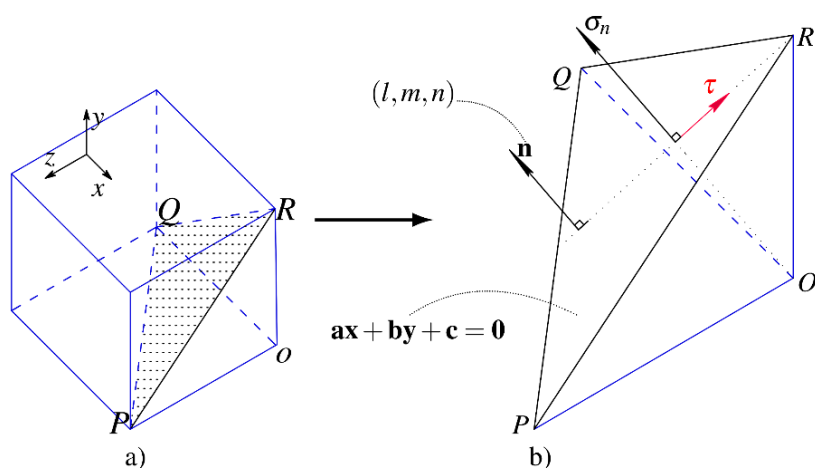


a) La Figura 2.6 muestra un elemento infinitesimal, que es cortando en una sección arbitraria formándose un triángulo PQR.

b) El plano PQR es representado por una ecuación de la forma:  $ax + by + cz = d$ . De aquí se deducen los cosenos directores  $(l, m, n)$  a la superficie normal.

**Figura 2.6**

*Esfuerzo resultante.*



*Nota.* a) Elemento infinitesimal b)  $\sigma_n$  y  $\tau$  en una superficie. Fuente: Elaboración propia.

Los esfuerzos  $\sigma_n$  y  $\tau$  se calculan de la siguiente manera:

$$\sigma_n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} m n + 2\tau_{zx} nl \quad (17)$$

$$\tau = \left[ (\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{zx} n)^2 + (\tau_{xy} m + \sigma_y l + \tau_{yz} n)^2 + (\tau_{zx} m + \sigma_z l + \tau_{yz} n)^2 - \sigma_n^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

De las ecuaciones (17) y (18) se obtiene el esfuerzo resultante.

$$\sigma = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau^2} \quad (19)$$

Siendo:

$\sigma_n$  = esfuerzo perpendicular al plano  $PQR$ .

$\tau$  = esfuerzo tangencial al plano  $PQR$ .

$\sigma$  = esfuerzo resultante, no necesariamente perpendicular al plano  $PQR$ .

$\mathbf{n}$  = vector unitario perpendicular al plano  $PQR$ .

$(l, m, n)$  = cosenos directores.

Nota: Se puede apreciar que el esfuerzo resultante  $\sigma$  se ubica en la región sombreada del Círculo de Mohr (Figura 2.4).

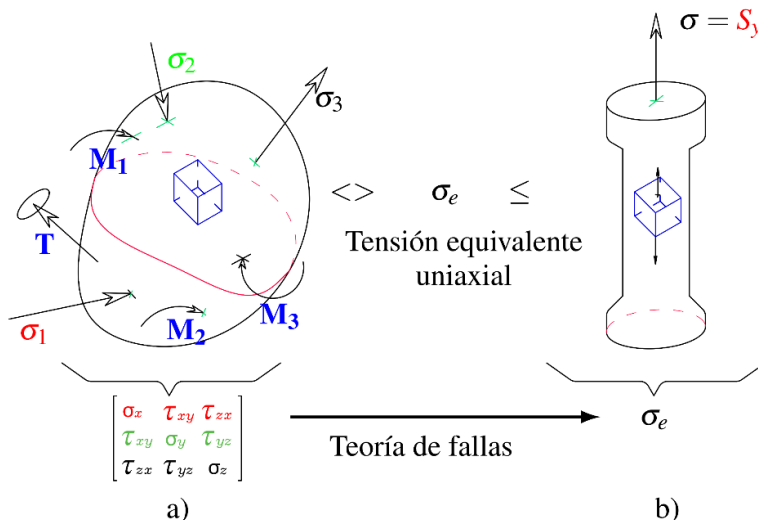
### 2.1.3 Resistencia

#### 2.1.3.1 Esfuerzo equivalente

En términos prácticos, se considera que el esfuerzo  $\sigma_e$  y la matriz de tensiones son equivalentes. Tal comparación es incorrecta, ya que están en dimensiones distintas (el escalar es de una dimensión y la matriz de dimensión 9). Sin embargo, se ha hecho posible tal equivalencia mediante el uso de las cinco teorías de falla, con las cuales se hace combinaciones de las componentes de la matriz de tensiones (Cueva, 2019). El esfuerzo equivalente está limitado por el esfuerzo de fluencia, que se obtiene mediante un ensayo de tracción uniaxial, como se muestra en la Figura 2.7.

**Figura 2.7**

*Partícula infinitesimal en forma de cubo.*



Nota. a) Estado tensional del sólido y b) Ensayo de tracción uniaxial.

Fuente: Elaboración propia.

Lo explicado anteriormente se resume por la siguiente ecuación

$$\sigma_e \leq S_y \tag{20}$$

A continuación, se muestra las teorías de resistencia para calcular el esfuerzo equivalente de la matriz de esfuerzos principales.

### 2.1.3.2 Teoría I

Conocida como Teoría de Máximo Esfuerzo Normal o Teoría de Rankine, para materiales frágiles. De la ecuación (21), el esfuerzo equivalente será el mayor de los esfuerzos principales.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \tag{21}$$

El esfuerzo equivalente sería:

$$\sigma_e = \sigma_1 < S_y \tag{22}$$

### 2.1.3.3 Teoría II

Conocida como Teoría de Máxima Deformación. Esta se sustenta en el criterio del límite de deformación uniaxial máxima,  $\varepsilon$ , que está relacionada de forma lineal mediante el módulo de elasticidad  $E$ .

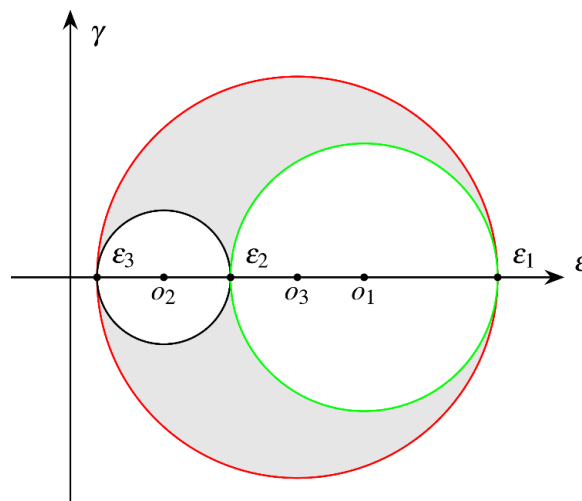
$$\sigma = E\varepsilon \quad (23)$$

En la Figura 5.8 se verifica la siguiente relación de deformaciones unitarias

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3 \quad (24)$$

**Figura 2.8**

*Círculo de Mohr de deformación unitaria.*



Fuente: Elaboración propia.

Relacionando las ecuaciones (23) en (24) se obtiene la siguiente desigualdad

$$\frac{\sigma_1}{E} \geq \frac{\sigma_2}{E} \geq \frac{\sigma_3}{E}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (25)$$

De esta última ecuación (25), el esfuerzo equivalente en función de los esfuerzos principales y coeficiente de Poisson,  $\mu$  ( $0 < \mu < 0,33$ ) del material, se puede calcular de la siguiente forma:

$$\sigma_e = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \quad (26)$$

#### 2.1.3.4 Teoría III

También conocida como Teoría de Tensión Tangencial Máxima, (Criterio de Tresca) establece que el esfuerzo equivalente se deduce de la siguiente desigualdad:

$$\tau_{m\acute{a}x} \geq S_{sy} \quad (27)$$

El primer término  $\tau_{max}$  se puede calcular de forma teórica en función de los esfuerzos principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$ . Así:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (28)$$

El segundo término,  $S_{sy} = S_y/2$ ; se obtiene de forma experimental cuando la probeta es sometida a tracción uniaxial. De las ecuaciones (27) y (28), el esfuerzo equivalente  $\sigma_e$ :

$$\sigma_e = \tau_{m\acute{a}x} = \frac{S_{sy}}{FS} \quad (29)$$

Con la ecuación (29) se asegura que no ocurrirá deformación plástica en el material sometido a distintos estados de tensión, mientras no supere  $\frac{S_{sy}}{FS}$ ; además, el esfuerzo equivalente  $\sigma_e$  tiene la forma de una ecuación lineal  $Ax + By = C$ , o sea,  $\sigma_1 - \sigma_3 = S_y$ . De esa manera, se grafica cuadrante por cuadrante (estados de tracción y compresión).

En la Figura 2.9 se usará los subíndices A y B para los esfuerzos principales  $\sigma_A = \sigma_1$  y  $\sigma_B = \sigma_3$  en el plano. Luego:

$$\sigma_e = OP \quad (30)$$

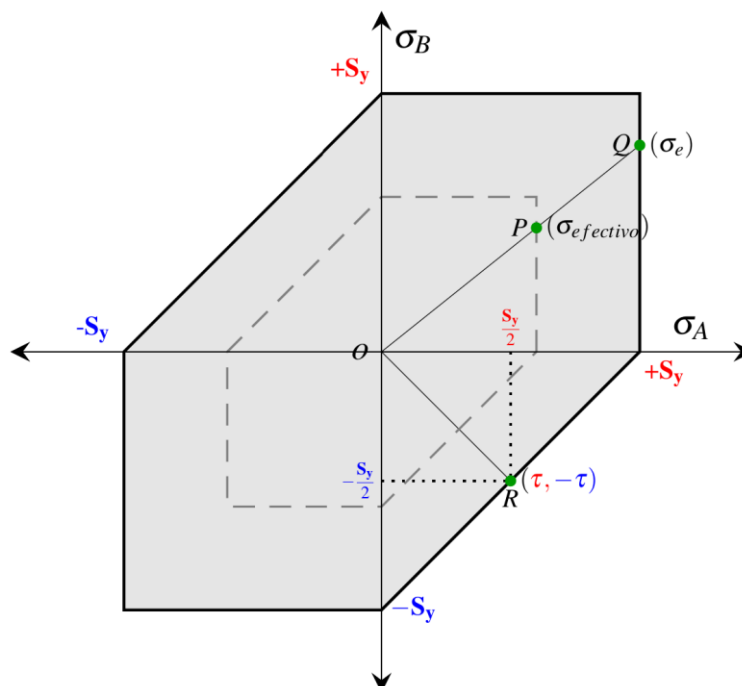
$$\sigma_{Von Mises} = OQ \quad (31)$$

Se define el factor de seguridad

$$FS = \frac{OQ}{OP} \quad (32)$$

Analizando la Figura 2.9 , se puede destacar varias características importantes:

1. En el entorno de la poligonal de Tresca se encuentran los valores admisibles límites del esfuerzo equivalente (fluencia). Por ejemplo, el punto  $Q \in I$  cuadrante.
2. Se da la máxima torsión pura a  $45^\circ$  en el punto  $R \in IV$  cuadrante; es decir,  $\sigma_A = \tau$ ,  $\sigma_B = -\tau$ . O sea, de la ecuación (28) y el grafico  $\tau_{m\acute{a}x} = \tau = S_y/2$ .
3. En la región interior se encuentra el punto  $P$ , la cual define el esfuerzo efectivo, también llamado esfuerzo de diseño, que está en función del factor de seguridad  $FS$ .

**Figura 2.9***Teoría de Tresca.*

Fuente: Adaptado de Budynas &amp; Nisbett (2020, p.249).

**2.1.3.5 Teoría IV**

También conocida como Teoría de la Máxima Energía de Distorsión (MED). Ésta tiene muy buena aceptación para materiales dúctiles, y uno de los primeros principios que se toma en cuenta es la energía de deformación.

Hibbeler (2017) plantea la ED de la siguiente manera:

Cuando se aplica carga a un cuerpo, éstos deforman el material y, siempre que no se pierda energía en forma de calor, el trabajo externo realizado por las cargas se convierte en trabajo interno llamado energía de deformación. Esta energía se almacena en el cuerpo y es causada por la acción del esfuerzo normal o cortante. (p. 725).

La densidad de energía de deformación ( $E/\text{unidades}^3$ ) para un cuerpo sometido a un esfuerzo uniaxial es:

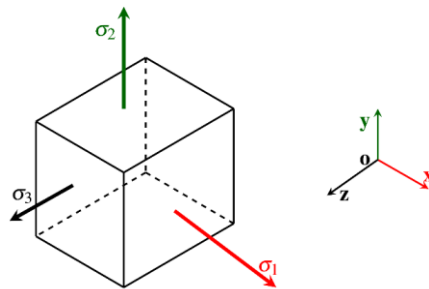
$$u = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \quad (33)$$

Y para el elemento infinitesimal de forma cúbica, sometido por tres esfuerzos principales, la energía de deformación se calcula sumando sus efectos de forma individual. Entonces, de la ecuación (33), para cada esfuerzo principal de la Figura 2.10, se obtiene:

$$u_t = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \varepsilon_3 \quad (34)$$

**Figura 2.10**

*Esfuerzo triaxial.*



*Nota.* Se puede ver claramente que el esfuerzo principal  $\sigma_1$  es el mayor de todos.

Fuente: Elaboración propia.

La densidad energética total de esta ecuación se puede reducir con la ecuación generalizada de la ley de Hooke:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (35)$$

Análogamente para  $\varepsilon_y$  y  $\varepsilon_z$ , reemplazando en la ecuación (34) cambiamos los subíndices  $(x, y, z)$  por  $(1, 2, 3)$  respectivamente, se obtiene:

$$u_t = \frac{1}{2E} \sigma_1 [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] + \frac{1}{2E} \sigma_2 [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ + \frac{1}{2E} \sigma_3 [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$



$$u_t = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3\sigma_2)] \quad (36)$$

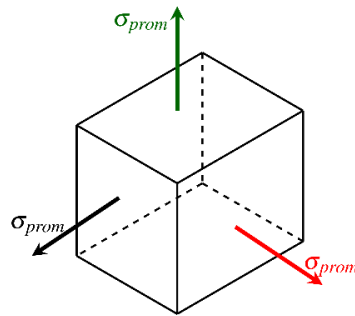
Esta energía se separa en dos efectos: Energía de cambio de volumen y de distorsión.

**Efecto de volumen.** En la Figura 2.11, se puede apreciar al elemento diferencial afectado en las caras por esfuerzos principales promedio  $\sigma_{prom}$  que modifican el volumen unitario.

$$\sigma_{prom} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (37)$$

**Figura 2.11**

Esfuerzo promedio, efecto del volumen.

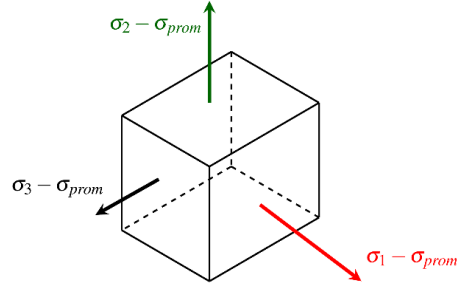


Fuente: Elaboración propia.

La energía de volumen unitario  $u_v$  se obtiene reemplazando el esfuerzo promedio en la ecuación (36). Así:

$$u_v = 3 \frac{\sigma_{prom}^2}{2E} (1 - 2\mu) \quad (38)$$

**Efecto de distorsión.** En la Figura 2.12, el elemento está sometida a esfuerzos axiales diferentes, los cuales realizan trabajo y almacenan energía para modificar la forma del elemento material.

**Figura 2.12***Esfuerzos del efecto en distorsión*

Fuente: Elaboración propia.

La energía de distorsión se calcula de la siguiente manera:

$$\mathbf{u}_{ED} = \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_v \quad (39)$$

De las ecuaciones (36), (37) y (38) en la ecuación (39) se obtiene la

ED:

$$\mathbf{u}_{ED} = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3\sigma_2)] - 3 \frac{\sigma_{prom}^2}{2E} (1 - 2\mu)$$

$$\mathbf{u}_{ED} = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3\sigma_2)] - 3 \frac{\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)^2}{2E} (1 - 2\mu)$$

Desarrollando y simplificando:

$$\mathbf{u}_{ED} = \frac{1 + \mu}{3E} \left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{2} \right] \quad (40)$$

Si reemplazamos las condiciones iniciales  $\sigma_1 = S_y$  y  $\sigma_3 = \sigma_2 = 0$  en la ecuación (40), se obtiene la siguiente solución para un estado uniaxial.

$$u_{ED} = \frac{1 + \mu}{3E} (S_y^2) \quad (41)$$

Se predice que la fluencia no ocurre cuando se cumple la siguiente relación.

$$\frac{1 + \mu}{3E} \left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{2} \right] \leq \frac{1 + \mu}{3E} (S_y^2)$$

$$\sqrt{\left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{2} \right]} \leq S_y$$

$$\sigma_e = \sqrt{\left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{2} \right]} \quad (42)$$

Al  $\sigma_e$  se le conoce como esfuerzo Von Mises. Ello se puede entender como un esfuerzo efectivo o equivalente que se calcula en función de los esfuerzos principales.

Por lo general, en la mayoría de los diseños se trabaja en un estado biaxial, pues una de las componentes de los esfuerzos principales es cero: podrían ser cualesquiera de los esfuerzos  $\sigma_1, \sigma_2$  ó  $\sigma_3$ .

De la ecuación (42) los dos esfuerzos se representan con subíndices  $A$  y  $B$ . Así:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_A^2 - \sigma_A \sigma_B + \sigma_B^2} \quad (43)$$

Este esfuerzo de Von Mises se grafica como se muestra en la Figura 2.13. De ahí se puede destacar varias características importantes:

1. En el contorno de la elipse se encuentran los valores admisibles de Von Mises; por ejemplo, en el punto  $Q \in I$  cuadrante.
2. Se da la máxima torsión pura a  $45^\circ$  en el punto  $R \in IV$  cuadrante; el esfuerzo efectivo, se encuentra en la región interior, punto  $P$ .

Del segundo ítem se destaca la importancia del punto  $R$ , en la cual se cumple la siguiente relación:

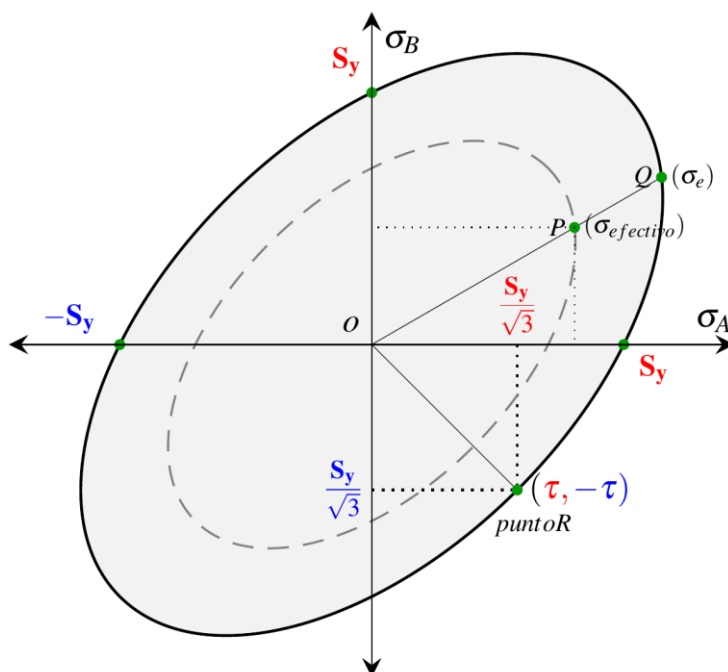
$$\tau = \frac{S_y}{\sqrt{3}} \rightarrow \tau = 0.577S_y \quad (44)$$

Análogamente a la Teoría III se define el factor de seguridad como:

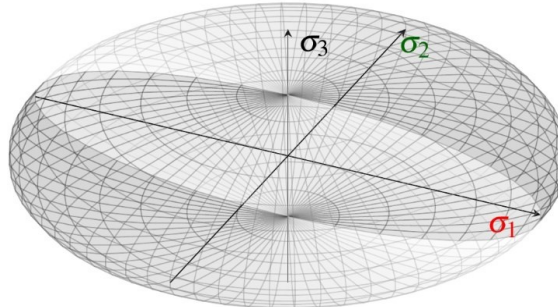
$$FS = \frac{OQ}{OP} = \frac{\sigma_{Von Mises}}{\sigma_e} \quad (45)$$

**Figura 2.13**

*Teoría de Von Mises.*



Fuente: Adaptado de Budynas & Nisbett (2020, p. 251)

**Figura 2.14***Elipsoide, esfuerzos principales en 3D*

Nota: Los esfuerzos principales están sobre *un* elipsoide.

Fuente: Elaboración propia.

### 2.1.3.6 Teoría V

Es llamada también teoría de Coulomb-Mohr. Se considera como una generalización de la Teoría III; mediante un coeficiente  $\nu$  que relaciona los esfuerzos de fluencia de tracción y compresión; así:

$$\nu = \frac{S_y}{S_c} \quad (46)$$

Se cumple:

$$\sigma_e = \sigma_1 - \nu\sigma_3 \quad (47)$$

Es importante aclarar que hay otras teorías de resistencia, pero estas cinco son las más importantes, pues son aplicables para cuerpos en equilibrio, excepto la Teoría de Von Mises, que es aplicable para cuerpos con tensiones cíclicas.

#### 2.1.4 Análisis de elementos finitos

El FEA (Finite Element Analysis) se entiende como una técnica numérica, el Método de Elementos Finitos (MEF), de simulación computacional de un fenómeno físico.

Antes de profundizar en qué consiste el MEF, se verán algunas nociones sobre las ecuaciones diferenciales, ya que están relacionadas. Zill (2015) explicó su definición de la siguiente manera: “Una ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial (ED)” (p. 2).

Las ecuaciones diferenciales se dividen en ordinarias, las cuales tienen derivadas de una o más variables dependientes, pero solo una variable independiente, con coeficientes en términos de la variable independiente o constante. Por ejemplo:

$$\frac{dx}{dt} + 3 \frac{dy}{dt} = 3y + x \quad (48)$$

Y la ecuación diferencial parcial (EDP) se distingue de la ordinaria por tener una o más variables independientes. Por ejemplo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 3u \quad (49)$$

De la ecuación (49): se distingue dos incógnitas independientes  $x$ ,  $y$  además una función dependiente  $u(x, y)$  con exponente uno. Por lo tanto, es una EDP lineal de segundo orden, ya que la mayor derivada de  $u(x, y)$  es 2.

Es importante aclarar que una EDP es lineal sí solo si  $u(x, y)$ , la variable dependiente, y sus derivadas parciales aparecen en primera potencia,  $(u)^1$  y  $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^1$ , y no están multiplicadas entre sí,  $u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ , o se encuentran dentro de una función (sin  $u$ ).

Muchos fenómenos de la Física se modelan por EDP's lineales de segundo orden; entre ellas se tiene a las de tipo elíptica, parabólica e hiperbólica con función incógnita  $u(t, x, y, z)$ , tal que  $t$  es tiempo y las demás son coordenadas cartesianas.

➤ **Ecuación de Laplace o elíptica**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (50)$$

No depende del tiempo.

➤ **Ecuación parabólica o de conducción de calor**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (51)$$

➤ **Ecuación hiperbólica o de ondas**

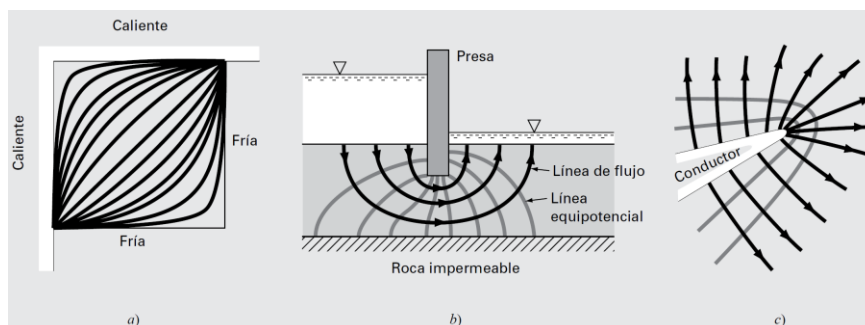
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (52)$$

En la Figura 2.15 se muestran algunos ejemplos prácticos de fenómenos comúnmente estudiados por la ingeniería que se caracterizan por compartir el mismo tipo de EDP elípticas.

- Distribución de temperatura sobre una placa caliente.
- Filtración de agua bajo una presa.
- El campo eléctrico cerca del punto del conductor.

**Figura 2.15**

*Tres problemas de distribución en estado estacionario.*



Fuente: Chapra et al. (2015, p. 659).

La forma general de una ecuación lineal de orden dos en el plano con coeficientes que pueden ser constantes  $A, B, C, D, E$  o dependiente de las variables  $(x, y)$ , es como sigue:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G(x, y) \quad (53)$$

Tal que  $u(x, y)$  es de exponente uno, y si la función  $G(x, y) = 0$ , entonces la ecuación es homogénea. Para distinguir a qué categoría pertenece una EDP general, se usa el criterio del discriminante  $\Delta = B^2 - 4AC$ , como se muestra en la Tabla 2.1.

**Tabla 2.1**

*EDP de segundo orden y de dos variables.*

$B^2 - 4AC$	Categoría
$< 0$	Elíptica
$= 0$	Parabólica
$> 0$	Hiperbólica

Fuente: Adaptado de Chapra et al. (2015).



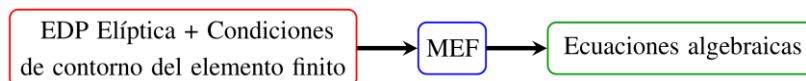
EL profesor Dixit (2009) explica de manera clara sobre en qué consiste el MEF:

El método de elementos finitos (abreviado como MEF) es una técnica numérica para obtener una solución aproximada a una clase de problemas gobernados por ecuaciones diferenciales parciales elípticas. Estos problemas se llaman problemas de valor de contorno ya que constan de una ecuación diferencial parcial y las condiciones de contorno. El método de elementos finitos convierte la ecuación diferencial parcial elíptica en un conjunto de ecuaciones algebraicas que son fáciles de resolver. Los problemas de valor inicial que consisten en una ecuación diferencial parabólica o hiperbólica y las condiciones iniciales (además de las condiciones de contorno) no pueden ser resueltos completamente por el método de elementos finitos. Las ecuaciones diferenciales parabólicas o hiperbólicas contienen el tiempo como una de las variables independientes. Para convertir las derivadas temporales en expresiones algebraicas, se requiere otra técnica numérica como el método de diferencias finitas (MDF). Por lo tanto, para resolver un problema de valor inicial, se necesitan tanto el método de elementos finitos como el método de diferencias finitas donde las derivadas espaciales se convierten en expresiones algebraicas por MEF y las derivadas temporales se convierten en ecuaciones algebraicas por MDF. (Module 1, Lectura 1).

Este enunciado se puede simplificar como se ve en la Figura 2.16:

**Figura 2.16**

*Método de solución aproximada de una EDP.*



*Nota.* Se puede mostrar que el MEF es fundamental para convertir EDP complejas en simples ecuaciones algebraicas. Fuente: Dixit (2009)

### 2.1.4.1 Método de Galerkin

El Método de Galerkin es una técnica que se utiliza para convertir una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) en una ecuación algebraica.

Un cuerpo sólido sometido a diferentes esfuerzos en equilibrio o estado estacionario; siempre y cuando se cumplan las condiciones de contorno establecidas. Esto se expresa mediante la siguiente EDP:

$$L(\mathbf{v}) = \mathbf{q} \quad (54)$$

Siendo:

$L(\mathbf{v})$  = representa una ecuación diferencial.

$\mathbf{v}$  = desplazamiento, Solución exacta.

$\mathbf{q}$  = función distribuida.

La solución aproximada de la ecuación general (54) se obtiene usando la ecuación (55) de desplazamiento:

$$\mathbf{u}^e(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_0} \mathbf{u}_j^e \psi_j^e = \mathbf{u}_1^e \psi_1^e + \mathbf{u}_2^e \psi_2^e + \mathbf{u}_3^e \psi_3^e + \dots + \mathbf{u}_{n_0}^e \psi_{n_0}^e \quad (55)$$

Siendo:

$\mathbf{u}^e(\mathbf{x})$  = son constantes desconocidas. Se calculan con las condiciones de frontera.

$\psi_j^e$  = presunta función de forma, desconocidas.

$n_0$  = número de interpolación de la función de forma.

Al reemplazar la solución aproximada  $u^e$  (la solución verdadera es  $v$ ) se comete un error de exactitud. Es por eso que se corrige la igualdad aumentando  $R$ . Entonces:

$$L(u^e) = q + R \quad (56)$$

De esta ecuación se deduce que el método de Galerkin consiste en reducir el error " $R$ " a cero; ello se conseguirá mediante una integral de la siguiente forma:

$$\int_D R \psi_i^e d_D = 0 \quad (57)$$

Siendo:

$R$  = error de exactitud.

$\psi_i$  = función de forma.

$D$  = subdominio, por ser un elemento enésimo.

Reemplazando la ecuación (56) en la ecuación (57) se tiene:

$$\int_D [L(u^e) - q] \psi_i^e d_D = 0$$

Y reemplazando el desplazamiento, de la ecuación (55):

$$u^e(x) = \sum_{j=1}^{n_0} u_j^e \psi_j^e \Rightarrow \int_D \left[ L \left( \sum_{j=1}^{n_0} u_j^e \psi_j^e \right) - q \right] \psi_i^e d_D = 0$$

Ordenando despejando sumatoria de la integral:

$$\left\{ \int_D [L(\psi_j^e)] \psi_i^e d_D \right\} \left\{ \sum_{j=1}^{n_0} u_j^e \right\} - \left\{ \int_D q \psi_i^e d_D \right\} = 0 \quad (58)$$

Se hace el siguiente cambio de forma en función de matrices:

$$\sum_{j=1}^{n_0} u_j^e = U_j$$

Para la integral:

$$\int_D [L(\psi_j^e)] \psi_i^e d_D = K_{ji} = K_{ij} (\text{Matriz simétrica}); \quad \int_D q \psi_i^e d_D = Q_i$$

Siendo:

$U_j^e$  = vector desplazamiento.

$K_{ij}^e$  = matriz de rigidez.

$Q_i^e$  = vector fuerza.

La ecuación (58) se expresa en función de un sistema de  $n_0$  ecuaciones algebraicas. Así:

$$[K_{ij}^e][U_{j1}^e] - [Q_{i1}] = 0; \quad [K_{ij}^e][U_{j1}^e] = [Q_{i1}] \quad (59)$$

Se resuelve usando las condiciones de contorno, y así se calcula el vector desplazamiento.

#### **2.1.4.2 Metodología analítica para resolver problemas por MEF**

Los pasos generales para resolver de forma analítica usando el MEF:

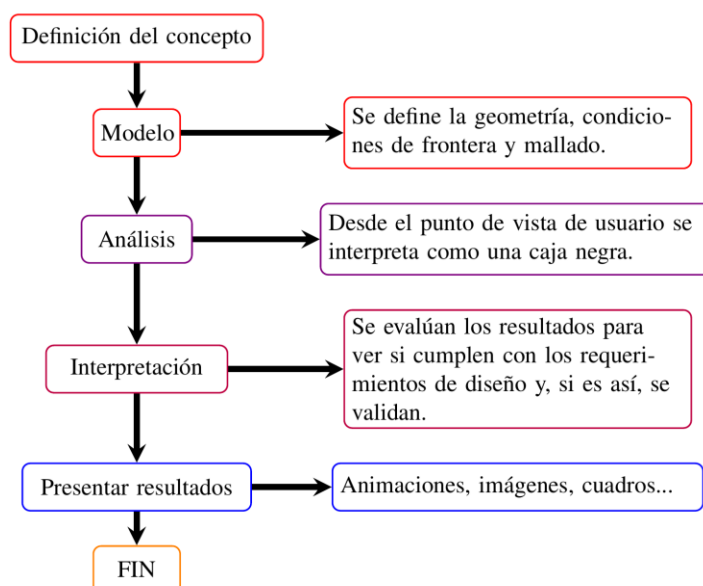
1. Se discretiza el cuerpo sólido de medio continuo en subdominios (elementos): Lineales, triangulares, cuadriláteros, tetraedros, paralelepípedo, unidos por nodos de lados rectos o curvos para sólidos en dos o tres dimensiones.
2. Se identifica condiciones de contorno: Los desplazamientos, fuerzas o, momentos externos, etc.
3. Se aplica el método Galerkin.
4. Por último, se despeja la variable descocida (desplazamiento) usando el método de eliminación gaussiana.

### 2.1.4.3 Metodología para resolver problemas mediante el MEF usando software comercial

Esta metodología tiene una serie de pasos bien definidos para su correcta aplicación, como se muestra en la Figura 2.17. Así:

**Figura 2.17**

*Metodología general para el MEF.*



Fuente: Adaptado de Teixeira et al. ( 2010).

### 2.1.5 Engranajes

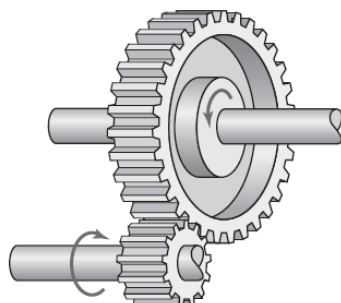
Los engranajes son piezas fundamentales de las máquinas que permiten la transmisión, modificación del movimiento y potencia en sistemas mecánicos. Estos elementos se utilizan en una amplia variedad de dispositivos y máquinas para optimizar la producción y facilitar el mantenimiento de los mismos.

En la Figura 2.18 se muestra una gran variedad de tipos de engranajes, que, se distinguen por la disposición de sus ejes y la forma de sus dientes. Así, Myszka (2012) refiere una breve descripción:

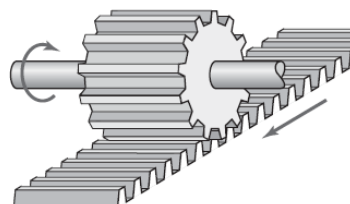
- a) Engranajes rectos: Son lo más comunes y tienen sus ejes de rotación paralelo.
- b) Piñón y cremallera: El piñón recto tiene un movimiento de traslación y rotación. La cremallera es un tipo especial de engranaje recto, de manera que se le asume como un engrane de radio de paso infinito.
- c) Engranajes internos: Son engranes rectos, pero con dientes internos.
- d) Engranajes helicoidales: Sus dientes son inclinados. Se usan para altas velocidades, y reducir ruido.
- e) Engranaje espiga de pescado: Son llamados así por sus dos hélices de sus dientes, una derecha y otra izquierda.

- f)** Engranajes cónicos: Se diseñan siempre en conjunto. El acople presenta un vértice común y los ejes generalmente son perpendiculares, Además, la forma de los dientes pueden ser rectos o helicoidales.
- g)** Engranajes de inglete: Son un par de engranajes cónicos de igual tamaño, y dientes rectos u oblicuos de ejes perpendiculares.
- h)** Engranaje de tornillo sin fin y rueda dentada: Estos reducen rápidamente las rpm de entrada. Tienen ejes que no son paralelos y no se intersectan.

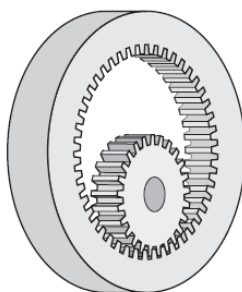


**Figura 2.18***Tipos de Engranajes.*

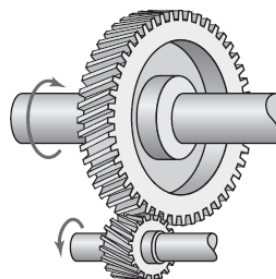
a) Engrane recto



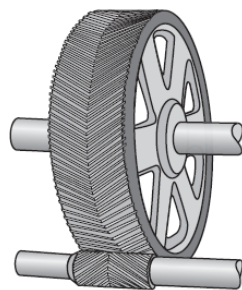
b) Piñón y cremallera



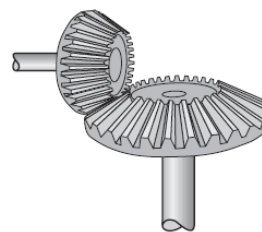
c) Engrane interno



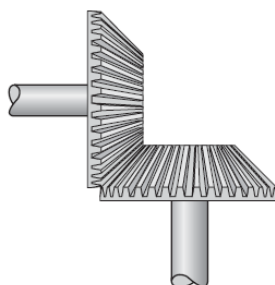
d) Engrane helicoidal



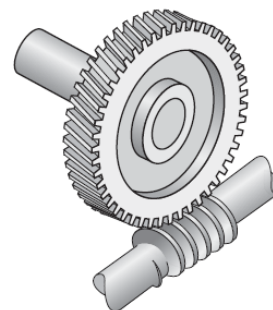
e) Engrane de espina de pescado (helicoidal doble)



f) Engrane cónico



g) Engranes de inglete



h) Engrane sin fin

Fuente: Myszka (2012, p.261).

### 2.1.5.1 Sistema de transmisión por tornillo sin fin y rueda dentada

#### a) Número de dientes en la rueda dentada

En la Tabla 2.2 se muestra el número mínimo de dientes de la rueda dentada en función del ángulo de presión usualmente usadas:

**Tabla 2.2**

*Sugerencia del número mínimo de dientes de la rueda dentada.*

Ángulo de presión normal ( $\phi_n$ )	Número mínimo de dientes de la corona dentada ( $N_G$ )
14,5°	40
17,5°	27
20,0°	21
20,5°	17
25,0°	17
27,5°	12
30,0°	10

Fuente. ANSI/AGMA 6022-C93 (1993, p. 10)

#### b) Número de dientes de la rueda dentada

$$N_w = \frac{N_G}{m_G} \quad (60)$$

#### c) Diámetro de paso del tornillo sin fin

$$\frac{C^{0,875}}{2} \leq d \leq \frac{C^{0,875}}{1.07} \quad (61)$$

#### d) Diámetro de paso de la rueda dentada

$$D = 2C - d \quad (62)$$

#### e) Paso axial del tornillo sin fin

$$p_x = p = \frac{\pi D}{N_G} \quad (63)$$

#### f) Avance del tornillo sin fin

$$L = N_w p_x \quad (64)$$

#### g) Ángulo de avance del tornillo sin fin

$$\lambda = \arctang\left(\frac{L}{\pi d}\right) \quad (65)$$

### 2.1.5.2 Proporciones habituales del filete y diente

a) Adendo del tornillo sin fin y rueda dentada ( $a$ )

$$a = \frac{p_x}{\pi} \quad (66)$$

b) Dedendo del tornillo sin fin y rueda dentada ( $b$ )

Para  $p_x > 4,06mm$

$$b = 0,3683p_x \quad (67)$$

Para  $p_x < 4,06mm$

$$b = 0,3820p_x + 0,050 \quad (68)$$

c) Altura total del filete del tornillo sin fin ( $h_t$ )

Para  $p_x > 4,06 mm$

$$h_t = 0.6866p_x \quad (69)$$

Para  $p_x < 4,06 mm$

$$h_t = 0,7003p_x + 0,050 \quad (70)$$

d) Diámetro exterior del tornillo sin fin ( $d_0$ )

$$d_0 = d + 2a \quad (71)$$

e) Diámetro de raíz de tornillo sin fin ( $d_r$ )

$$d_r = d - 2b \quad (72)$$

f) Diámetro de la garganta de la rueda dentada ( $D_t$ )

$$D_t = D + 2a \quad (73)$$

g) Diámetro de raíz de la rueda dentada ( $D_r$ )

$$D_r = D - 2b \quad (74)$$

h) Diámetro exterior de la rueda dentada ( $D_0$ )

$$D_0 = D_t + a \quad (75)$$

Donde:

i) **Juego (c)**

$$c = b - a \quad (76)$$

j) **Ancho de la cara del tornillo sin fin ( $F_{Wm\acute{a}x}$ )**

$$F_{Wm\acute{a}x} = 2 \sqrt{\left(\frac{D_t}{2}\right)^2 - \left(\frac{D}{2} - a\right)^2} \quad (77)$$

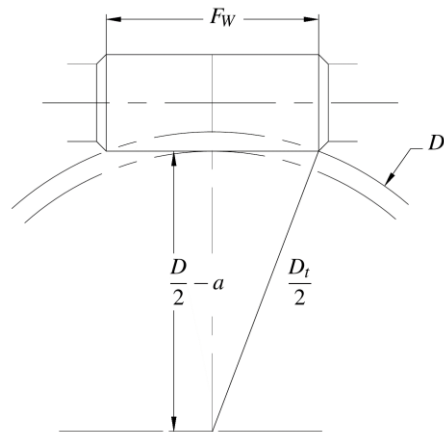
O tambi3n:

$$F_{Wm\acute{i}n} = \left(4.5 + \frac{N_G}{50}\right) p_x \quad (78)$$

En la Figura 2.19 se muestra las posiciones b3sicas del tornillo sin fin y rueda dentada.

**Figura 2.19**

*Ancho de la cara del tornillo.*



Fuente: Adaptado de ANSI/AGMA 6022-C93 (1993, p. 13)

k) **Ancho de la cara de la rueda dentada ( $F_G$ )**

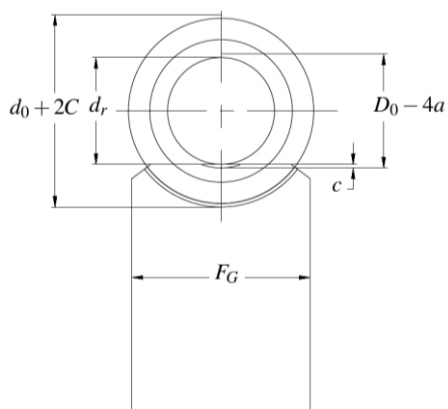
Para  $p_x > 4.06mm$

$$F_G \leq \frac{2}{3} d \quad (79)$$

Los parámetros geométricos se representan en las Figuras 2.20 y 2.21:

**Figura 2.20**

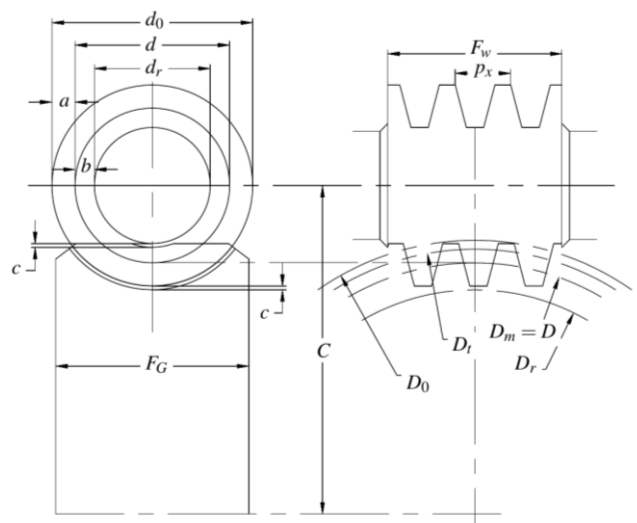
*Ancho de la rueda dentada.*



Fuente. Adaptado de ANSI/AGMA 6022-C93 (1993, p. 14)

**Figura 2.21**

*Dimensiones básicas del tornillo sin fin y rueda dentada.*



Fuente. Adaptado de ANSI/AGMA 6022-C93 (1993, p. 14)

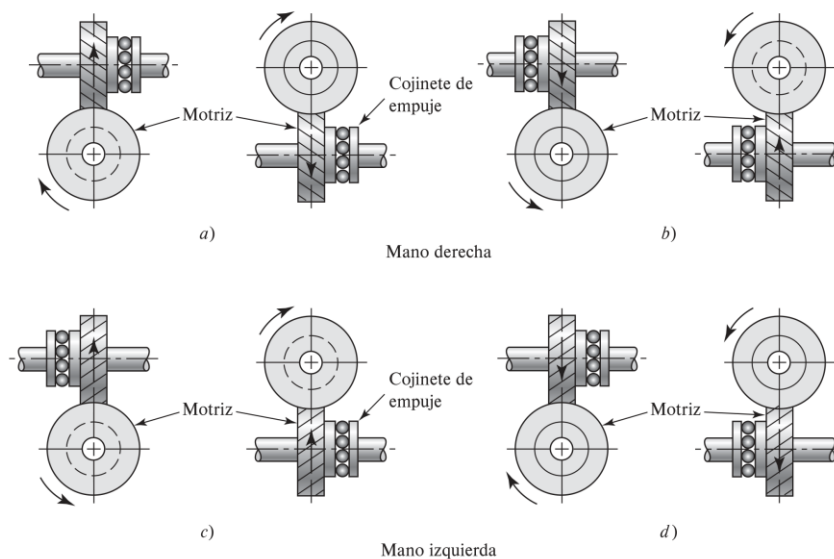
### 2.1.5.3 Análisis de fuerzas en el tornillo sin fin y la rueda dentada

Las fuerzas de contacto en los dientes que transmiten el movimiento al tornillo sin fin al aplicarse torque al eje de entrada son: fuerza tangencial, fuerza radial, fuerza axial y fuerza de fricción.

En la Figura 2.22 se puede notar una característica importante: el sentido de las hélices (derecha o izquierda) son iguales, tanto de conductor y conducido. Además, se muestra la disposición de los rodamientos para impedir el desplazamiento provocado por la fuerza axial.

**Figura 2.22**

*Relación de empuje, rotación y sentido de engranes helicoidales cruzados.*

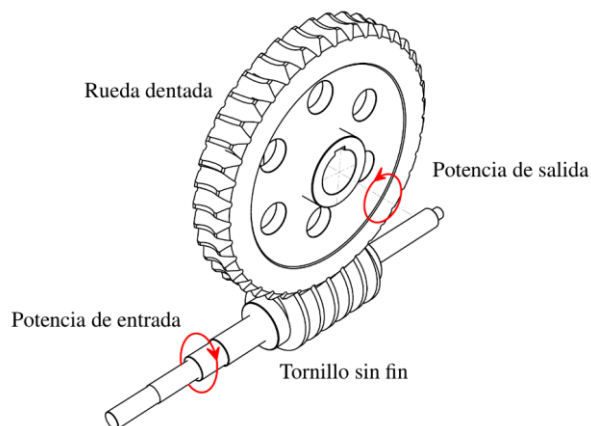


*Nota.* Observe que cada para de dibujos se refiere a un solo par de engranes de tornillo sin fin. Fuente: Budynas & Nisbett (2018, p. 664).

En la Figura 2.23 se muestra un par de engranajes donde sus hélices son de sentido de mano izquierda y torque de entrada sentido horario (la parte "d" de la Figura 2.22).

**Figura 2.23**

*Sentido de giro del tornillo sin fin y rueda dentada.*

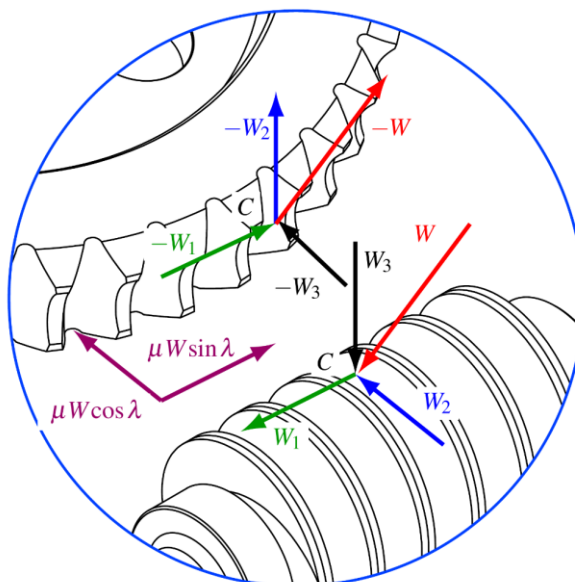


Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 2.24 se muestra un DCL de las fuerzas en contacto entre tornillo sin fin y rueda dentada.

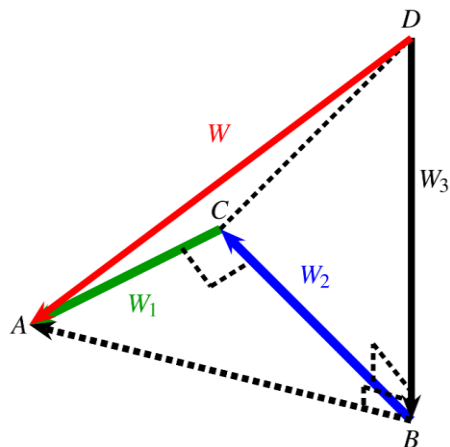
**Figura 2.24**

*Diagrama de cuerpo libre en el punto de contacto*



Fuente: Elaboración propia.

La fuerza resultante  $\mathbf{W} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 + \mathbf{W}_3$ , como se muestra en la Figura 2.25:

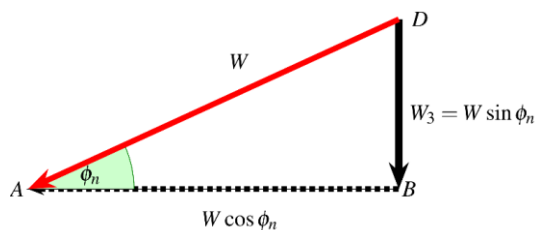
**Figura 2.25**Resultante  $W$ 

Fuente: Elaboración propia.

El vector  $W_3$  es perpendicular al plano formado por los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  y los vectores  $W_1$  y  $W_2$  son perpendiculares entre sí.

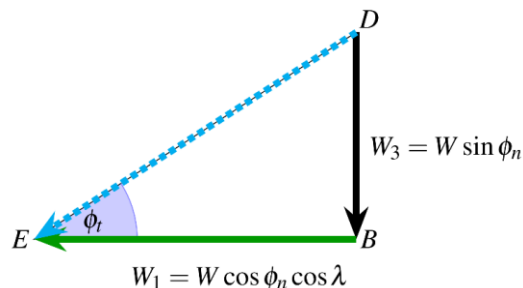
Una manera de relacionar los módulos de estos vectores con su resultante es mediante los ángulos normal, transversal y de avance.

Se muestran de forma detallada en las Figuras 2.26, 2.27 y 2.28 las componentes que se presentan en la Figura 2.24. Luego, se suman vectorialmente para calcular las siguientes fuerzas:

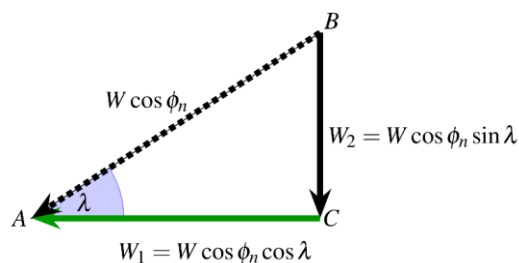
**Figura 2.26***Triángulo formado con el ángulo normal*

Fuente: Elaboración propia.



**Figura 2.27***Triángulo formado con el ángulo transversal*

Fuente: Elaboración propia.

**Figura 2.28***Triángulo formado con el ángulo de avance*

Fuente: Elaboración propia.

Ahora, tomando en cuenta la fuerza de fricción se obtienen las siguientes fórmulas:

**a) Fuerza axial**

$$W_{aw} = W(\cos \phi_n \cos \lambda - \mu \sin \lambda) \quad (80)$$

**b) Fuerza tangencial**

$$W_{tw} = W(\cos \phi_n \sin \lambda + \mu \cos \lambda) \quad (81)$$

**c) Fuerza radial**

$$W_{rw} = W \sin \phi_n \quad (82)$$

Ahora en la rueda actúan estas fuerzas con igual magnitud, pero sentido contrario.

**d) Fuerza tangencial de la rueda**

$$W_{tG} = W_{aw} \quad (83)$$

e) **Fuerza axial de la rueda**

$$W_{aG} = W_{tW} \quad (84)$$

f) **Fuerza radial de la rueda**

$$W_{rG} = W_{rW} \quad (85)$$

g) **Fuerza de fricción**

$$W_f = \frac{\mu W_{tG}}{\cos\phi_n \cos\lambda - \mu \sin\lambda} \quad (86)$$

h) **Fuerza tangencial del tornillo sin fin**

$$W_{tW} = W_{tG} \left( \frac{\cos\phi_n \sin\lambda + \mu \cos\lambda}{\cos\phi_n \cos\lambda - \mu \sin\lambda} \right) \quad (87)$$

#### 2.1.5.4 Eficiencias de contacto

Según la norma ANSI/AGMA 6034-B92 (1992) la eficiencia en función de los parámetros geométricos y el coeficiente de fricción:

a) **Eficiencia de contacto del tornillo sin fin**

Esta eficiencia se da cuando el tornillo sin fin es conductor y la rueda conducida.

$$e_W = \frac{\cos\phi_n - \mu \tan\lambda}{\cos\phi_n + \mu \cot\lambda} \quad (88)$$

b) **Eficiencia de contacto de la rueda dentada**

Esta eficiencia se da cuando la rueda dentada es conductora, y por ende el tornillo sin fin es conducido.

$$e_G = \frac{\cos\phi_n - \mu \cot\lambda}{\cos\phi_n + \mu \tan\lambda} \quad (89)$$

Para que sea segura la conducción de la rueda al tornillo sin fin, condición estática, se verifica:

$$\mu_{estático} < \cos\phi_n \tan\lambda \quad (90)$$

### 2.1.5.5 Potencia y fuerza

Según la norma ANSI -AGMA6034-B92:

#### a) Potencia de entrada

La potencia de entrada se calcula por la suma de la potencia útil en la rueda dentada, perdida por fricción y otros ( $P_{otros} = 2\%P_i$ )

$$P_i = P_o + P_f + P_{otros}$$

$$P_i = \frac{n_w W_{tG} D}{1,91(10^7) m_G} + \frac{v_s W_f}{1\,000} + P_{otros} \quad (91)$$

#### b) Fuerza tangencial permisible

$$W_{tG} = \frac{C_s D^{0,8} F_G C_m C_v}{75,948} \quad (92)$$

#### c) Fuerza de fricción

Esta ecuación es idéntica a la ecuación (86) cuando el  $\sin\lambda \approx 0$ .

$$W_f = \frac{\mu W_{tG}}{\cos\phi_n \cos\lambda} \quad (93)$$

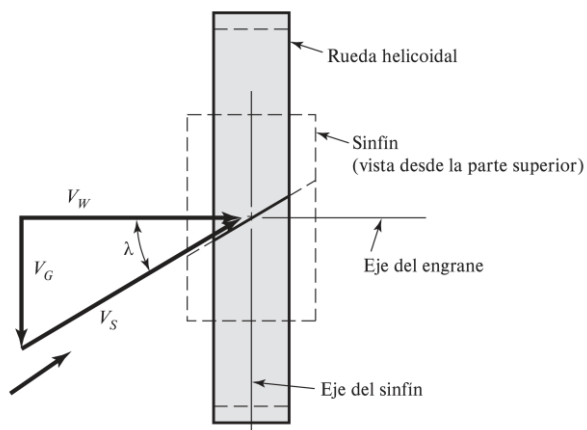
#### d) Velocidad de deslizamiento

$$V_s = \frac{n_w d}{19\,098 \cos\lambda} \quad (94)$$

Como se muestra en la Figura 2.29, las velocidades y el ángulo de avance forman un triángulo rectángulo de velocidades.

**Figura 2.29**

Componente de velocidad en un engranaje de tornillo sin fin.



Fuente: Budynas & Nisbett (2018, p. 697).

#### e) Factores empíricos

Los factores empíricos  $C_m$ ,  $C_v$ ,  $C_s$  y  $\mu$  de la norma ANSI/AGMA 6034-B92 (1992), se aproximan mediante fórmulas empíricas, y se encuentran en el anexo A.

#### f) Torque permisible en la rueda dentada

$$(T_G)_{perm} = \frac{W_{tG}D}{2\ 000} \quad (95)$$

#### g) Eficiencia

La eficiencia de la rueda se calcula:

$$\eta = \frac{P_o}{P_i} \quad (96)$$

$$\eta = \frac{n_w W_t D}{1,91(10^7) m_G P_i} \quad (100) \quad (97)$$

La eficiencia aproximada en porcentaje:

$$\eta = (100 - 0,5m_G)\% \quad (98)$$

### 2.1.5.6 Área de la caja reductora

Área mínima de la superficie lateral de la caja (lisa, sin aletas) sin que se tome en cuenta la superficie de la base:

$$A = 1,14(10^{-4})C^{1,7} \quad (99)$$

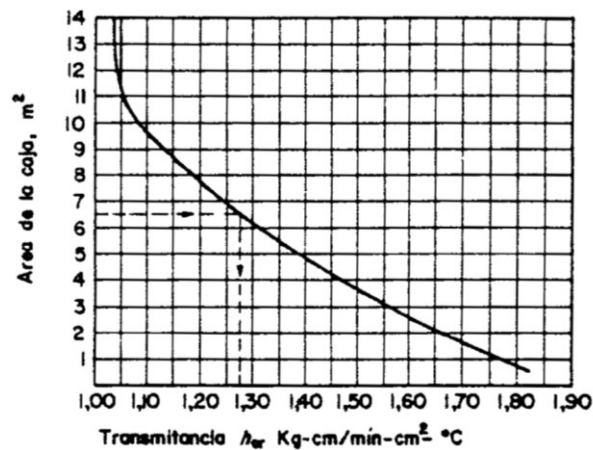
### 2.1.5.7 Capacidad térmica

Se entiende como la cantidad de calor que disipa por convección y radiación en el reductor y se calcula como

$$Q = h_{cr}A\Delta T \quad (100)$$

**Figura 2.30**

*Transmitancia de cajas de engranajes.*



Fuente: Faires (1993, p. 399)

Se toma en cuenta la siguiente conversión equivalente de unidades:

$$1 \frac{kg \cdot cm}{min \cdot cm^2 \cdot ^\circ C} = 0.01635 \frac{kW}{m^2 \cdot ^\circ C}$$

### 2.1.5.8 Potencia térmica

La cantidad de potencia perdida en el reductor es igual a la cantidad de calor disipado.

$$P_t = \frac{Q}{1 - \eta} \quad (101)$$

### 2.1.5.9 Deformación permisible del tornillo sin fin

Según la norma ANSI/AGMA 6034-B92 (1992):

la deformación máxima radial en función de paso axial  $p_x$  es

$$\Delta w_{m\acute{a}x} = 0,025\sqrt{p_x} \quad (102)$$

### 2.1.5.10 Diseño de transmisión de ejes

El primer criterio de los cinco para el diseño de los ejes de transmisión es la norma ANSI/ASME B106.1M (1985), que se basa en la siguiente fórmula:

$$d = \sqrt[3]{\left(\frac{32FS}{\pi}\right) \sqrt{\left(\frac{M}{S_f}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{T}{S_y}\right)^2}} \quad (103)$$

### 2.1.5.11 Resistencia a la flexión

Los dientes de la rueda son menos resistentes que los del tornillo sin fin. La resistencia a la flexión de los dientes de la rueda se estima aproximadamente mediante la ecuación de Buckingham.

$$\sigma_f = \frac{W_{tG}}{p_x F_G y \cos \lambda} \quad (104)$$

Si  $\phi_n = 20^\circ \rightarrow y = 0,125$

## 2.2 Marco conceptual

- a) **Cuerpo rígido:** Material o sistema que mantiene su forma y tamaño constantes bajo la acción de cargas.
- b) **Material homogéneo:** Se refiere a un material cuyas propiedades mecánicas son uniformes en todas sus partes.
- c) **Falla:** Pérdida de la capacidad de un componente para llevar a cabo su función debido a una deformación permanente o rotura.
- d) **Tensor:** Es un objeto matemático que son como vectores y matrices.
- e) **Partícula orientada:** En resistencia de materiales, se entiende aquella partícula de forma cúbica, sometida a esfuerzos direccionados en sus caras. También es aquella partícula que se encuentra definida en el espacio.
- f) **Esfuerzos principales:** Son aquellos esfuerzos máximos que actúan en un punto determinado de un material cuando los esfuerzos cortantes son nulos.
- g) **Condiciones de contorno:** Son restricciones que se aplican al sistema con el fin de obtener una solución particular. Estas limitaciones pueden comprender grados de libertad, desplazamiento, velocidad, fuerzas externas, momentos, etc.
- h) **Estado estacionario:** En se refiere a que no hay cambios relevantes en las propiedades mecánicas. Por ejemplo, cuando los procesos de deformación se mantienen estables, con una velocidad de deformación constante y sin dependencia del tiempo.

## CAPÍTULO III

### HIPOTESIS Y OPERACIONALIZACION DE VARIABLES

#### 3.1 Hipótesis

##### 3.1.1 Hipótesis General

Es posible determinar los esfuerzos para optimizar el diseño de un reductor de tornillo sin fin y rueda dentada, tipo cilíndrico, de 7 HP por elementos finitos.

##### 3.1.2 Hipótesis Específicas

1. Es posible diseñar el reductor usando las normas AGMA-ASME y otros criterios de diseño matemático.
2. Es posible modelar los prototipos del tonillo sin fin y la rueda dentada con los programas *Autodesk Inventor 2021* y *KISSsoft 17*.
3. Ejecutar la simulación “en modo estático” del prototipo usando el programa *Ansys 19.2*.
4. Calcular los esfuerzos máximos en los dientes de la rueda dentada, así como los factores de seguridad por flexión y contacto.
5. Es posible reducir la masa de la rueda dentada.



### 3.2 Operacionalización de variables

TÍTULO: ANÁLISIS DE ESFUERZOS PARA OPTIMIZAR EL DISEÑO DE UN REDUCTOR DE TORNILLO SIN FIN Y RUEDA DENTADA, TIPO CILÍNDRICO, DE 7 HP POR ELEMENTOS FINITOS.

**Tabla 3.1**

*Operacionalización de Variables para una Investigación Experimental.*

Variables	Definición conceptual	Definición operacional	Dimensión	Indicador
Variable independiente: Análisis de esfuerzos.	Esfuerzo: es el valor límite de la fuerza por unidad de área cuando el área se aproxima a cero. (Hibbeler, 2017).	Modelos matemáticos	Esfuerzo de flexión y contacto en la rueda.	$\sigma_f = K_{ts} \frac{W_{tG}}{p_x F_G y \cos \lambda}$ $\sigma_c = C_p \left( \sqrt{\frac{W_{tG}}{D F_G}} K_{ev} \right)$
Variable dependiente: Optimizar.	Buscar la mejor manera de realizar una actividad (RAE, 2022)	Simulación por el método de elementos finitos	Variación de la masa de la rueda dentada.  Factor de seguridad por flexión y contacto	$\Delta m = m_i - m_f$ $m_i: \text{masa inicial.}$ $m_f: \text{masa final.}$ $(FS)_f = \frac{S_y}{(\sigma_f)_{\text{máx}}}$ $(FS)_c = \left[ \frac{(\sigma_c)_{\text{perm}}}{(\sigma_c)_{\text{máx}}} \right]^2$

Fuente: Elaboración propia.

## **CAPÍTULO IV**

### **METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN**

#### **4.1 Tipo y Diseño de la Investigación**

Este proyecto de investigación busca resolver un problema específico (reducir la masa de la rueda dentada) aplicando los conocimientos teóricos. Esta es una investigación aplicada que intenta transferir los resultados a la práctica.

El diseño de investigación es experimental, ya que presenta variables independientes como la fuerza tangencial y el ancho de la cara de la rueda dentada, así como variables dependientes como la masa final de la rueda y el factor de seguridad.

#### **4.2 Unidad de Análisis**

La unidad de análisis es: Un reductor de tornillo sin fin y rueda dentada tipo cilíndrico de 7 HP con ratio 40:1 y 1 750 rpm.

### 4.3 Matriz de Consistencia

**Tabla 4.1**

*Matriz de consistencia.*

<b>Problema general</b>	<b>Objetivo general</b>	<b>Hipótesis general</b>
¿Cómo se podría realizar el análisis de esfuerzos para optimizar el diseño de un reductor de tornillo sin fin y rueda dentada, tipo cilíndrico, de 7 HP por elementos finitos?	Analizar los esfuerzos para optimizar el diseño de un reductor de tornillo sin fin y rueda dentada, tipo cilíndrico, de 7 HP por elementos finitos.	Es posible determinar los esfuerzos para optimizar el diseño de un reductor de tornillo sin fin y rueda dentada, tipo cilíndrico, de 7 HP y por elementos finitos.
<b>Problemas específicos</b>	<b>Objetivos específicos</b>	<b>Hipótesis</b>
1. ¿Cómo se diseña el reductor?	1. Diseñar el reductor usando las normas AGMA-ASME y otros criterios de diseño matemático.	1. Es posible diseñar el reductor usando las normas AGMA-ASME y otros criterios de diseño matemático.
2. ¿Cómo se modela los prototipos del tonillo sin fin y la rueda dentada con los programas <i>Autodesk Inventor 2021</i> y <i>KISSsoft 17</i> ?	2. Modelar los prototipos del tonillo sin fin y la rueda dentada con los programas <i>Autodesk Inventor 2021</i> y <i>KISSsoft 17</i> .	2. Es posible modelar los prototipos del tonillo sin fin y la rueda dentada con los programas <i>Autodesk Inventor 2021</i> y <i>KISSsoft 17</i> .
3. ¿Cómo se ejecuta la simulación “en modo estático” del prototipo usando el programa <i>Ansys 19.2</i> ?	3. Ejecutar la simulación “en modo estático” del prototipo usando el programa <i>Ansys 19.2</i>	3. Es posible ejecutar la simulación “en modo estático” del prototipo usándolo el programa <i>Ansys 19.2</i> .
4. ¿Cómo se calcula los esfuerzos máximos en los dientes de la rueda dentada, así como los factores de seguridad por flexión y contacto?	4. Calcular los esfuerzos máximos en los dientes de la rueda dentada, así como los factores de seguridad por flexión y contacto.	4. Es posible calcular los esfuerzos máximos en los dientes de la rueda dentada, así como los factores de seguridad por flexión y contacto.
5. ¿Cómo se reduce la masa de la rueda dentada?	5. Reducir la masa de la rueda dentada.	5. Es posible reducir la masa de la rueda dentada.

Fuente: Elaboración propia.

## **CAPÍTULO V**

### **DESARROLLO DE LA TESIS**

En este proyecto de investigación se plantea diseñar el reductor usando los criterios de las normas ANSI/ASME B106.1M (1985), ANSI/AGMA 6034-B92 (1992), ANSI/AGMA 6022-C93 (1993) y otros modelos matemáticos vigentes, como los criterios de deformación lateral, resistencia, inclinación en el rodamiento, deformación torsional, esfuerzos por flexión de Buckingham y finalmente por MEF.

Los parámetros iniciales de diseño del reductor son:

Potencia salida o de función,  $P_o = 7 \text{ HP}$

Velocidad de rotación en la entrada =  $1\ 750 \text{ rpm}$

Ratio = 40:1

Factor de diseño,  $n_d = 1,20$

Factor de aplicación (24 horas/día, carga uniforme),  $K_a = 1,25$

Con estos datos iniciales, se definirá la geometría tentativa del reductor y las potencias permisibles. Una vez verificada la validez del diseño, se calculan las fuerzas, potencias y resistencias reales.

## 5.1 Cálculo de los parámetros geométricos y potencias permisibles

### 5.1.1 Potencia de diseño

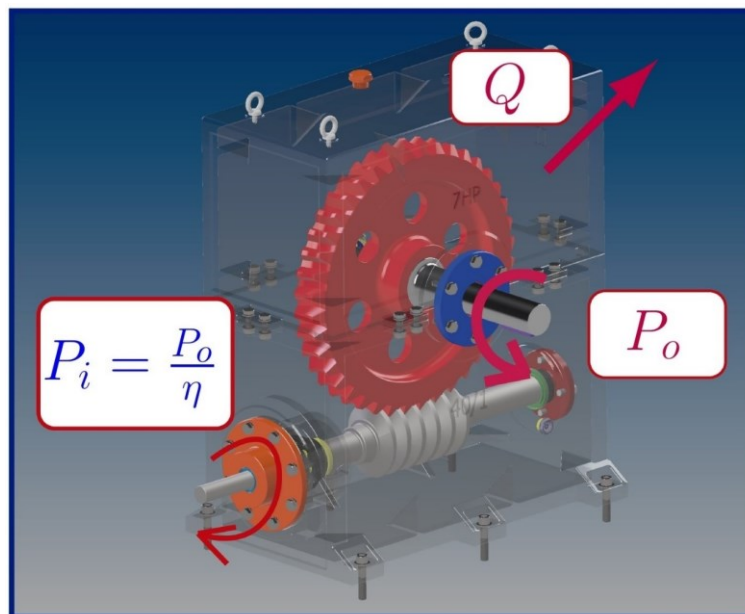
La potencia de diseño es la potencia de entrada en el tornillo sin fin multiplicada por un factor de diseño  $n_d$ . Se calcula mediante las siguientes ecuaciones:

$$P_i = \frac{P_o}{\eta} ; P_d = P_i(n_d K_a) \Rightarrow P_d = P_o \left( \frac{n_d K_a}{\eta} \right)$$

En la Figura 5.1 se muestra gráficamente la potencia de entrada, pérdida y salida en el reductor.

**Figura 5.1**

*Diagrama aproximado de potencias.*



Fuente: Elaboración propia.

Luego, la eficiencia del reductor de forma aproximada se calcula con la siguiente ecuación empírica (98):

$$\eta = (100 - 0,5m_G)\% \Rightarrow [100 - 0,5(40)]\% \approx 80\%$$

Se usa el factor de conversión de potencia de  $0,75 \text{ kW} \approx 1 \text{ HP}$  así:

$$P_i \approx \frac{7}{0,8} \approx 8,75 \text{ HP} \approx 6,56 \text{ kW}$$

La potencia de diseño:

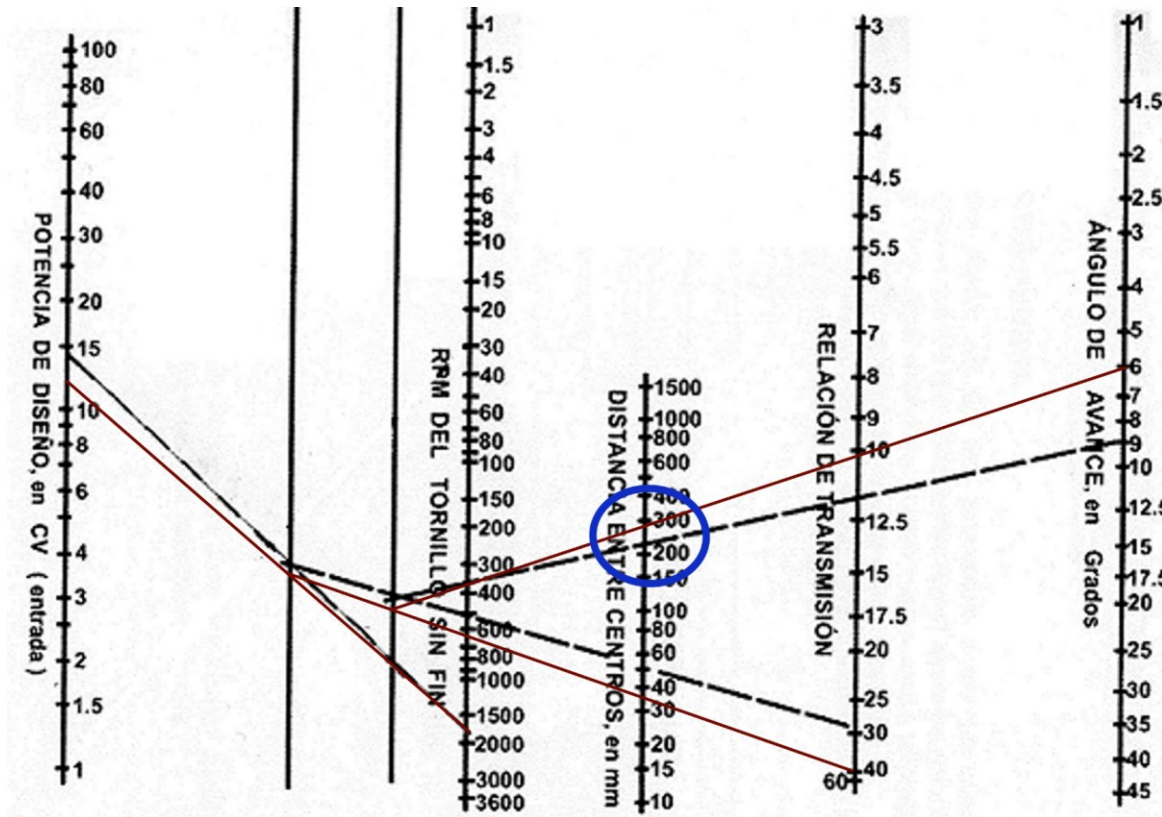
$$P_d = \left(\frac{7}{0,8}\right) (1,2)(1,25) \approx 13,125 \text{ HP} \approx 9,84 \text{ kW}$$

### 5.1.2 Distancia entre centros y ángulo de avance aproximados

Con los datos de potencia de diseño, velocidad de rotación  $1750 \text{ rpm}$  y ratio 40:1 se obtiene una tentativa del valor de la distancia entre centros  $C$  y el ángulo de avance  $\lambda$ , según se muestra en el monograma de la Figura 5.2.

Figura 5.2

Estimado de la distancia entre centros del reductor.

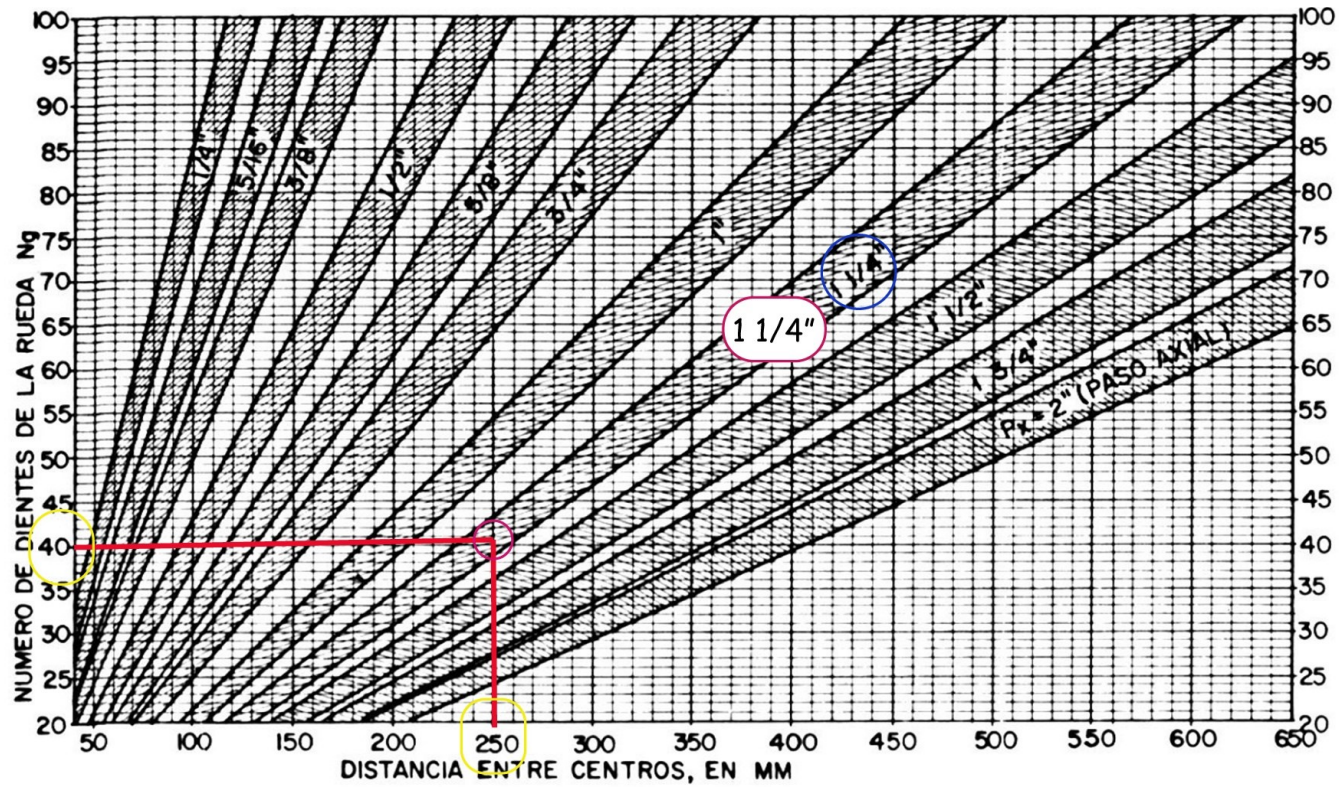


Fuente: Alva (2018, p. 105).

*Nota.* El monograma es útil y se utiliza actualmente. Sin embargo, su fuente original es desconocida.

Figura 5.3

*Distancia entre centros.*



Fuente: Alva (2018, p. 104).

*Nota.* Se desconoce su fuente original.



**a) Distancia entre centros y ángulo de avance hallados**

De la Figura 5.2 se obtiene la distancia entre centros y el ángulo de avance aproximados a partir de la intersección de la línea roja.

$$C \approx 250 \text{ mm y } \lambda \approx 6^\circ$$

**b) Paso axial**

De la ecuación (60) que relaciona el número de dientes

$$N_w = \frac{N_G}{m_G}$$

Y despejando  $m_G$

$$m_G = \frac{N_G}{N_w} = \frac{40}{1}, \frac{80}{2} \dots$$

Para calcular el número posible de dientes, se escoge la primera opción:

$$N_G = 40; \quad N_w = 1$$

De la Figura 5.3, para  $C$  y  $N_G$  se obtiene el paso axial:

$$p_x = 1,25 \text{ pul} = 31,75 \text{ mm}$$

**c) Diámetro de paso de la rueda**

De la ecuación (63), despejando  $D$  se calcula el diámetro de paso:

$$D = \frac{p_x N_G}{\pi} = \frac{(31,75)(40)}{\pi} = 404,254 \text{ mm}$$

**d) Diámetro de paso del tornillo**

De la ecuación (62), despejando  $d$ :

$$d = 2C - D; \quad d = 2(250) - 404,254 = 95,746 \text{ mm}$$

Se corroborará si diámetro de paso satisface la desigualdad de la ecuación (61):

$$\frac{C^{0,875}}{2} \leq d \leq \frac{C^{0,875}}{1,07}; \quad \frac{(250)^{0,875}}{2} \leq d \leq \frac{(250)^{0,875}}{1,07}$$

$$62,68 \leq d \leq 107,17$$

Como se ve  $d = 95,746 \text{ mm}$  satisface la desigualdad.

**e) Avance del tornillo**

El avance del tornillo se calcula con la ecuación (64), entonces:

$$L = N_w p_x = 1(31,75) = 31,75 \text{ mm}$$

**f) Ángulo de avance del tornillo**

El ángulo de avance según la ecuación (65):

$$\lambda = \arctan\left(\frac{L}{\pi d}\right) = \arctan\left(\frac{31,75}{\pi(95,7469)}\right) = 6,025^\circ$$

Se ve que el valor tentativo inicial era el correcto.

## 5.2 Proporciones habituales del diente

Las dimensiones de los dientes son solo referenciales, pues en la práctica los dientes del tornillo y rueda se generan mediante tallado con fresadora que tiene la forma del diente.

**a) Adendo del tornillo y rueda**

Ecuación (66):

$$a = \frac{p_x}{\pi} = \frac{31,75}{\pi} = 10,106 \text{ mm}$$

**b) Dedendo del del tornillo y rueda**

Ecuación (67):

$$b = 0,3683 p_x = 0,3683(31,75) = 11,693 \text{ mm}$$

**c) Altura total del filete del tornillo**

Ecuación (69):

$$h_t = 0,6866(31,75) = 0,6866p_x = 21,799 \text{ mm}$$

**d) Diámetro exterior del tornillo**

Ecuación (71):

$$d_0 = d + 2ad_0 = 95,747 + 2(10,106) = 115,959 \text{ mm}$$

**e) Diámetro de la garganta de la rueda**

Ecuación (73):

$$D_t = D + 2a = 404,254 + 2(10,106) = 424,466 \text{ mm}$$

**f) Diámetro de raíz de tornillo sin fin**

Ecuación (72):

$$d_r = d - 2b = 95,747 - 2(11,693) = 72,361 \text{ mm}$$

**g) Diámetro de raíz de la rueda**

Ecuación (74):

$$D_r = D - 2b = 404,254 - 2(11,693) = 380,868 \text{ mm}$$

**h) Diámetro exterior de la rueda dentada**

Ecuación (75):

$$D_0 = D_t + a = 424,465 + 10,106 = 434,571 \text{ mm}$$

**i) Juego**

Ecuación (76):

$$c = b - a = 11,693 - 10,106 = 1,587 \text{ mm}$$

### j) Ancho de la cara del tornillo

Ecuación (77):

$$F_{W_{\max}} = 2 \left( \sqrt{\left(\frac{D_t}{2}\right)^2 - \left(\frac{D}{2} - a\right)^2} \right) = 2 \left( \sqrt{\left(\frac{424,466}{2}\right)^2 - \left(\frac{404,254}{2} - 10,106\right)^2} \right) \approx 180 \text{ mm}$$

### k) Ancho de la cara de la rueda dentada

Para  $p_x > 4.06 \text{ mm}$

$$F_G \leq \frac{2}{3} d; \quad F_G \leq \frac{2}{3} (95,746) \leq 63,83 \text{ mm}$$

Se toma de forma conveniente:  $F_G = 62 \text{ mm}$ .

Hasta el momento, aquellos parámetros geométricos de la Tabla 5.1 son las posibles dimensiones del reductor (falta verificar por potencias).

**Tabla 5.1**

*Parámetros geométricos del tornillo y la rueda.*

Símbolo	Nombre	Magnitud
$N_w$	Numero de dientes del tornillo	1
$N_G$	Numero de dientes de la rueda	40
$p_x$	Paso axial	31,750 mm
$D$	Diámetro de paso de la rueda	404,254 mm
$d$	Diámetro de paso del tornillo	95,746 mm
$\lambda$	Ángulo de avance del tornillo	6,025°
$a$	Adendo del tornillo y rueda	10,106 mm
$b$	Dedendo del del tornillo y rueda	11,693 mm
$h_t$	Altura total del filete del tornillo	21,799 mm
$d_o$	Diámetro exterior del tornillo	115,959 mm
$D_t$	Diámetro de la garganta de la rueda	424,466 mm
$d_r$	Diámetro de raíz de tornillo sin fin	72,361 mm
$D_r$	Diámetro de raíz de la rueda	380,868 mm
$D_o$	Diámetro exterior de la rueda dentada	434,571 mm
$c$	Juego	1,587 mm
$F_G$	Ancho de la cara del tornillo	62 mm

Fuente: Elaboración propia

### 5.3 Análisis de fuerzas y potencias permisibles

Se ha de calcular las potencias permisibles, que validarán si el reductor diseñado es el correcto o si se necesita uno más grande.

#### a) Velocidad de deslizamiento

La velocidad de deslizamiento del tornillo se calcula con la ecuación (94)

$$V_s = \frac{n_w d}{19\,098 \cos \lambda} = \frac{(1\,750)(95,747)}{(19\,098) \cos(6,025^\circ)} = 8,822 \frac{m}{s}$$

$$= 1\,736,610 \frac{pies}{minuto}$$

#### b) Coeficiente de fricción

El coeficiente de fricción  $\mu$  se calcula con la siguiente fórmula (anexo A) de la norma ANSI/AGMA 6034-B92 (1992).

Para  $V_s > 10 \frac{pies}{minuto}$

$$\mu = 0,103e^{[-0,110v_s^{0,450}]} + 0,012$$

$$\mu = 0,103e^{[-0,110(1\,736,610)^{0,450}]} + 0,012 = 0,004 + 0,012 \approx 0,016$$

#### c) Factor de materiales

El factor de materiales  $C_s$  se calcula con la siguiente fórmula (anexo A) de la norma ANSI/AGMA 6034-B92 (1992).

Para *sand cast* y  $C > 2,5$  pulg

$$C_s = 1\,189,636 - 476,545 \log_{10} D$$

Para  $D = 404,254mm$ , reemplazarse en pulgadas se tiene:

$$C_s = 1\,189,636 - 476,545 \log_{10}(15,92) = 616,860$$

**d) Factor de corrección de ratio**

Factor de corrección de ratio  $C_m$  se calcula con la siguiente fórmula (anexo A) de la norma ANSI/AGMA 6034-B92 (1992).

$$C_m = 0,0107(-m_G^2 + 56m_G + 5\,145)^{0,5}$$

Para ratios  $m_G$  de 20 a 76

$$C_m = 0,0107(-40^2 + 56(40) + 5\,145)^{0,5} = 0,813$$

**e) Factor de velocidad de deslizamiento**

Factor de velocidad de deslizamiento  $C_v$  se calcula con la siguiente fórmula el (anexo A) de la norma ANSI/AGMA 6034-B92 (1992).

Para  $v_s$  de **700 a 3000**  $\frac{\text{pies}}{\text{minuto}}$

$$C_v = 13,31V_s^{-0,571} \Rightarrow C_v = (13,31)(1736,610)^{-0,571} = 0,188$$

**f) Fuerza tangencial permisible**

Ecuación (92):

$$(W_{tG})_{perm} = \frac{C_s D^{0,8} F_e C_m C_v}{75,948} = \frac{(616,860)(404,254)^{0,8}(62)(0,813)(0,188)}{75,948} = 9\,380,27\,N$$

**g) Fuerza de fricción**

Ecuación (86), que tiene forma exacta:

$$(W_f)_{perm} = \frac{\mu W_{tG}}{\cos\phi_n \cos\lambda - \mu \sin\lambda} = \frac{(0,016)(9380,27)}{\cos(20^\circ)\cos(6,025^\circ) - 0,016 \cdot \sin(6,025^\circ)}$$

$$(W_f)_{perm} = 162,55\,N$$

**h) Torque permisible en la rueda dentada**

Ecuación (95):

$$(T_G)_{perm} = \frac{W_{tG} D}{2\,000} = \frac{(9\,380,27)(404,254)}{2\,000} = 1\,896\,N \cdot m$$

**i) Potencia permisible de salida**

Primer término de la ecuación (91):

$$P_o = \frac{n_w W_{tG} D}{1,91(10^7) m_G} = \frac{(1\,750)(9\,380,27)(404,254)}{(1,91 \cdot 10^7)(40)} = 8,69 \text{ kW}$$

**j) Potencia de perdida por fricción**

Segundo término de la ecuación (91):

$$P_f = \frac{V_s W_f}{1\,000} = \frac{(8,822)(162,550)}{1\,000} = 1,43 \text{ kW}$$

**k) Potencia permisible de entrada**

La potencia permisible de entrada se calcula con la ecuación (91). Luego, sumando los términos antes calculados, se tiene:

$$P_i = P_o + P_f + 2\%P_i$$

$$P_i = \frac{(P_o + P_f)}{0,98} \Rightarrow P_i = \frac{(8,69 + 1,43)}{0,98} = 10,33 \text{ kW}$$

Se cumple:

$$(P_i)_{perm} \geq P_d \Rightarrow 10,33 \text{ kW} \geq 9,84 \text{ kW}$$

Es factible, pues la potencia de entrada permitida es mayor que la que se diseñó.

**l) Potencia perdida por efectos varios**

Del apartado anterior la potencia perdida por efectos varios se calcula con una aproximación del 2% de la potencia de entrada  $P_i$ , Así:

$$P_{otros} = 2\%P_i \Rightarrow P_{otros} = 0,02(10,33) = 0,21 \text{ kW}$$

### m) Eficiencia real

Ecuación (96):

$$\eta = \frac{P_o}{P_i} (100\%) \Rightarrow \eta = \frac{8,69 \text{ kW}}{10,33 \text{ kW}} (100\%) = 84,1\%$$

Este resultado verifica la eficiencia con buena aproximación que se calculó anteriormente con ecuación empírica (98) de 80%, con tan solo un error de 4,1% respecto al real.

### n) Potencia mecánica permisible

Es aquella potencia aplicada en el eje de entrada:

$$P_a = \frac{P_i}{K_a} \Rightarrow (P_a)_{perm} = \frac{10,33 \text{ kW}}{1,25} = 8,264 \text{ kW}$$

Como se conoce la eficiencia real es 84,1 % y la potencia en el eje de salida de 5,25 kW. Entonces la potencia mecánica real en el eje de entrada es: 6,24 kW.

Se verifica que la potencia aplicada es mayor a la real. Así:

$$8,264 \text{ kW} \geq 6,24 \text{ kW}$$

Por lo tanto, es factible.

### o) Eficiencia de contacto

Cuando el tornillo es conductor, la eficiencia de contacto se calcula con la ecuación (88), y de la Tabla 2.2 (se toma como ángulo de presión normal  $\phi_n = 20^\circ$ ). Luego:

$$e_w = \frac{\cos\phi_n - \mu \tan\lambda}{\cos\phi_n + \mu \cot\lambda} = \frac{\cos(20^\circ) - 0,016 \cdot \tan(6,025^\circ)}{\cos(20^\circ) + 0,016 \cdot \cot(6,025^\circ)} (100\%)$$

$$= 85,95\%$$

Se puede notar que esta eficiencia es ligeramente mayor a la calculada por potencias.



#### 5.4 Dimensiones de la caja reductora y potencia térmica

El área de la superficie lateral de la caja se calcula con la ecuación (99):

$$A_{\min} = 1,14 \cdot 10^{-4} C^{1.7} \Rightarrow 1,14 \cdot 10^{-4} (250)^{1.7} = 1,36 \text{ m}^2$$

Ahora, la altura, ancho y espesor, tal como se muestra en la Figura 5.4, se tiene:

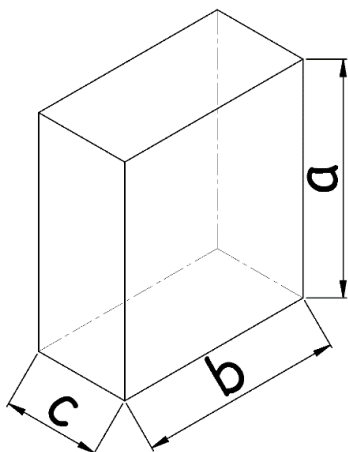
$$a = D + d + h; \quad b = D + h; \quad c = d + h$$

Por lo tanto, el área de la superficie lateral es:

$$A_L = 2a(b + c) + bc \Rightarrow 2(D + d + h)[(D + h) + (d + h)] + (D + h)(d + h)$$

**Figura 5.4**

*Dimensiones básicas del reductor*



Fuente: Elaboración propia

Los diámetros de pasos están definidos. Entonces, el área de la superficie lateral solo está en función de la holgura. Tabulando la holgura en una hoja de cálculo hasta que se llegue al área deseada, se obtienen las dimensiones de la altura, ancho y espesor, como se ve en la siguiente Tabla 5.2:

Tabla 5.2

Área y dimensiones generales de la caja.

Símbolo	Nombre	Magnitud
$D$	Diámetro de paso de la rueda	404,25 mm
$d$	Diámetro de paso del tornillo	95,75 mm
$h$	Holgura	190 mm
$a$	Alto	690 mm
$b$	Ancho	595 mm
$c$	Espesor	286 mm
$ab$	Área lateral	410 550,0 mm <sup>2</sup>
$ac$	Área lateral	197 340,0 mm <sup>2</sup>
$bc$	Área lateral	1701 70,0 mm <sup>2</sup>
Área lateral mínima $\geq 1,36 m^2$		1,386 m <sup>2</sup>

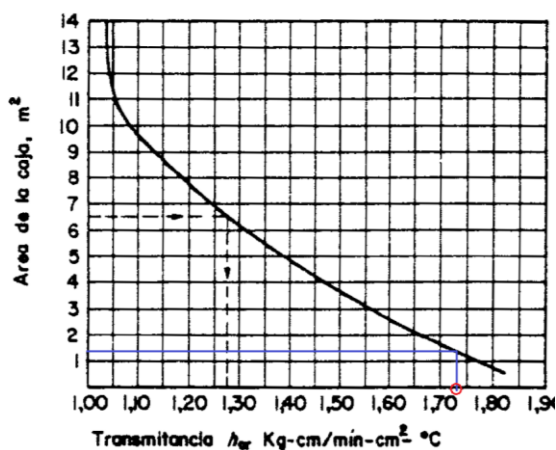
Nota. El área de la base no se toma en cuenta. Fuente: Elaboración propia.

### a) Transmitancia

La transmitancia o coeficiente de transferencia de calor se calcula mediante el uso de la Figura 5.5, así para un área de 1,38 m<sup>2</sup>:

Figura 5.5

Transmitancia VS Área



Nota. Transmitancia para un área de 1.38m<sup>2</sup> Fuente: Faires (1993, p. 778)

La transmitancia según la gráfica:

$$h_{cr} \approx 1,7 + 0,05 \left( \frac{2}{3} \right) h_{cr} \approx 1.733 \left( \frac{\text{kgf.cm}}{\text{min.cm}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \right)$$

Usando la conversión de unidades:

$$1 \frac{\text{kgf} \cdot \text{cm}}{\text{min} \cdot \text{cm}^2 \cdot ^\circ\text{C}} = 0,01635 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

$$h_{cr} \approx 1,733(0,01635) \approx 0,0283 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

**b) Capacidad térmica**

La caja del reductor disipa una potencia a un  $\Delta T = 50^\circ\text{C}$ :

$$Q = h_{cr} A \Delta T \Rightarrow Q = 0,0283 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} (1,386 \text{ m}^2) (50^\circ\text{C}) = 1,96 \text{ kW}$$

**c) Potencia térmica permisible**

$$(P_t)_{perm} = \frac{Q}{1 - \eta} \Rightarrow P_t = \frac{1,96}{1 - 0,841} = 12,33 \text{ kW}$$

**d) Potencia en el eje de entrada**

La potencia en el eje de entrada del reductor, con la verdadera eficiencia, es:

$$P_d = P_o \left( \frac{n_d K_a}{\eta} \right) \Rightarrow P_d = 7(0,75) \left[ \frac{(1,2)(1,25)}{0,841} \right] = 9,36 \text{ kW}$$

$$12,33 \text{ kW} \gg 9,36 \text{ kW}$$

Esta potencia de 12,33 kW es el valor máximo permitido para suministrar al eje del reductor, entonces no se necesita de un medio de refrigeración externo.

**e) Temperatura en el reductor**

La temperatura real que alcanzaría el interior del reductor es:

$$\Delta T = \frac{P_d(1 - \eta)}{h_{cr} A} \Rightarrow \Delta T = \frac{(9,36)(1 - 0,841)}{(0,0283)(1,386)} \approx 38^\circ\text{C}$$

Asumiendo  $T_{ambiente} = 20^\circ$

$$t_{inter} - t_{ambien} \approx 38^\circ \Rightarrow t_{inter} \approx 58^\circ\text{C}$$

Es una temperatura razonable, ya que se recomienda que la temperatura no exceda 71 °C

A continuación, se presenta en la Tabla 5.3 un resumen de todos los resultados hallados que validan el diseño del reductor.

**Tabla 5.3**

*Resumen de las magnitudes calculadas para el reductor.*

<b>Símbolo</b>	<b>Nombre</b>	<b>Magnitud</b>
$v_s$	Velocidad de deslizamiento	$8,822 \frac{m}{s}$
$\mu$	Coefficiente de fricción	0,016
$C_s$	Factor de materiales	616,86
$C_m$	Factor de corrección de ratio	0.813
$C_v$	Factor de velocidad de deslizamiento	0.188
$(W_{tG})_{perm}$	Fuerza tangencial permisible	9 380,27 N
$(W_f)_{perm}$	Fuerza de fricción	162,55 N
$(T_G)_{perm}$	Torque de la rueda permisible	1 896 N.m
$P_o$	Potencia de salida	8,69 kW
$P_f$	Potencia de pérdida por fricción	1.43 kW
$P_i$	Potencia de entrada	10,33 kW
$P_{otros}$	Potencia de pérdida por efectos varios	0,21 kW
$\eta$	Eficiencia real	84,1 %
$P_a$	Potencia de aplicación	8,264 kW
$e_w$	Eficiencia de contacto	85,9 %
$A_L$	Área lateral de la caja reductora	1,386 m <sup>2</sup>
$h_{cr}$	Transmitancia	$0,0283 \frac{kW}{m^2 \cdot ^\circ C}$
$Q$	Capacidad térmica	1,961 kW
$P_t$	Potencia térmica permisible	12,33 kW
$T_{int}$	Temperatura interior	45,3 <sup>o</sup>

Fuente: Elaboración propia.

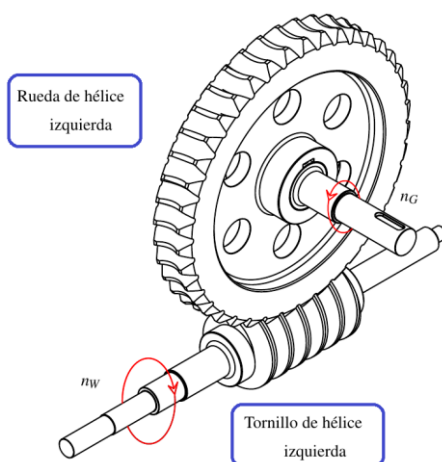
## 5.5 Fuerzas en el reductor

Después de validar el tamaño del reductor, se procederá a calcular las fuerzas, esfuerzos cortantes, momentos flectores, torques, deformaciones, etc., para una potencia en el eje de salida de 7HP.

La Figura 5.6 se muestra el sentido de giro horario del tornillo y antihorario de la rueda, determinados por la inclinación de las hélices (las dos hélices son de mano izquierda).

**Figura 5.6**

Sentido de los ejes de entrada y salida.

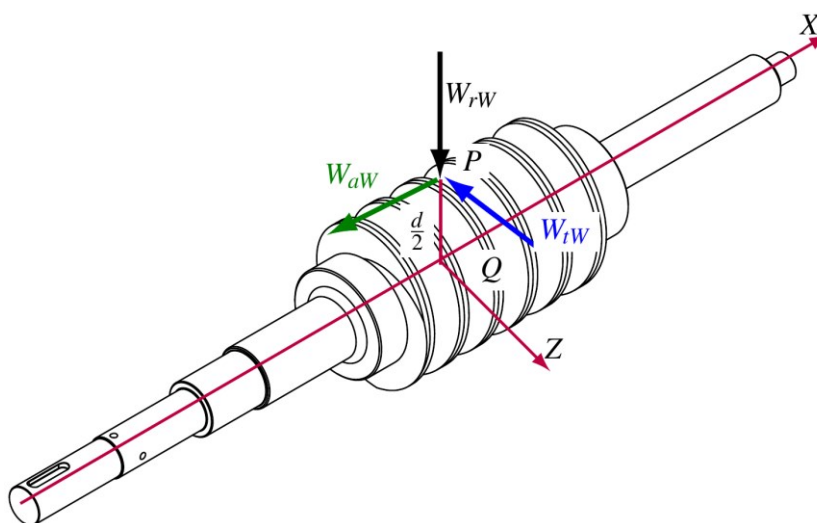


Fuente: Elaboración propia.

En la superficie de contacto se presentan las fuerzas resultantes en el eje axial, tangencial y radial, como se muestran en la Figura 5.7 mediante un DCL.

**Figura 5.7**

Diagrama de cuerpo libre del tornillo.



*Nota.* En el DCL no se muestra la fuerza de fricción, ya que están incluidas en las fuerzas axial  $W_{aW}$  y tangencial  $W_{tW}$ . Fuente: Elaboración propia.

**a) Fuerza axial**

Teniendo en cuenta que la potencia de diseño en el eje de la rueda dentada  $P_G = P_o(n_d K_a) = 5,25(1,2)(1,25) = 9,843 \text{ kW}$ , se asegura que el reductor está protegido si la potencia aplica excede a  $P_o$ . Luego del primer término de la ecuación (91) se tiene:

$$P_G = P_o(n_d K_a) = \frac{W_{tG} D}{1,91 \cdot 10^7 m_G}$$

Recuerde que la fuerza axial del tornillo es igual a la fuerza tangencial de la rueda. Luego se despeja la  $W_{tG}$  y remplazan datos:

$$W_{tG} = \left[ \frac{1,91 \cdot 10^7 P_o m_G}{n_w D} \right] (1,2)(1,25) W_{tG} = \left[ \frac{1,91 \cdot 10^7 (5,25)(40)}{(1750)(404,254)} \right] (1,2)(1,25) \approx 8505 \text{ N}$$

Como la fuerza tangencial permisible es mayor que la fuerza tangencial real  $9380,27 \text{ N} > 8505 \text{ N}$ , se cumple con la condición de carga por desgaste.

**b) Fuerza tangencial**

De la ecuación (87) se obtiene la fuerza tangencial del tornillo:

$$W_{tW} = W_{tG} \left( \frac{\cos \phi_n \sin \lambda + \mu \cos \lambda}{\cos \phi_n \cos \lambda - \mu \sin \lambda} \right)$$

$$W_{tW} = 8504,55 \left[ \frac{\cos(20^\circ) \cdot \sin(6,025^\circ) + 0,01638 \cdot \cos(6,025^\circ)}{\cos(20^\circ) \cdot \cos(6,025^\circ) - 0,01638 \cdot \sin(6,025^\circ)} \right] \approx 1048 \text{ N}$$

**c) Fuerza radial**

De las ecuaciones (81) y (82) se obtiene la siguiente relación:

$$W_{rW} = W_{tW} \left( \frac{\sin(\phi_n)}{\cos \phi_n \sin \lambda + \mu \cos \lambda} \right)$$

$$W_{rW} = 1047,76 \left[ \frac{\sin(20^\circ)}{\cos(20^\circ) \cdot \sin(6,025^\circ) + 0,01638 \cdot \cos(6,025^\circ)} \right] \approx 3119 \text{ N}$$

#### d) Fuerza de fricción

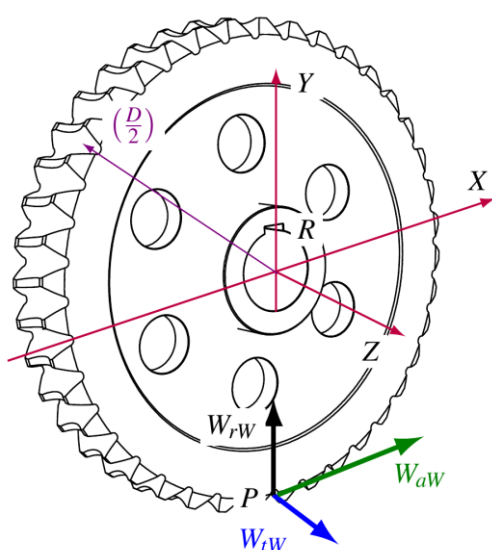
La fuerza de fricción se calcula con ecuación (86):

$$W_f = \frac{\mu W_{tG}}{\cos\phi_n \cos\lambda - \mu \sin\lambda}$$

$$W_f = \frac{(0,016)(8\,504,55)}{\cos(20^\circ)\cos(6,025^\circ) - 0,01638\sin(6,025^\circ)} = 149,34 \text{ N}$$

Figura 5.8

Diagrama de cuerpo libre de la rueda



Fuente: Elaboración propia

### 5.6 Reacciones y momentos en los ejes

Hibbeler (2012) plantea que para comprobar si un cuerpo es isostático, es necesaria y suficiente que se cumpla la siguiente relación (p.48): al representar los ejes (como vigas) en forma simplificada.

$$R = 3m$$

Siendo:

$R$  = número de fuerzas y momentos de reacción.

$m$  = número de partes o vigas.

### 5.6.1 Tornillo en el plano $XY$

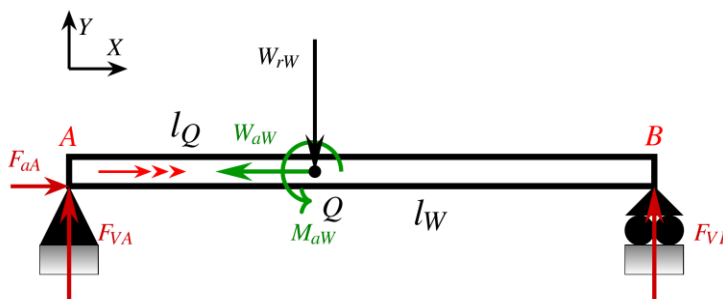
El tornillo de la Figura 5.7 es analizado en el plano  $XY$ , y es representado en la Figura 5.9, como una viga. Se ve tres reacciones (2 en el punto A y 1 en B). Luego:

$$R = 3m \Rightarrow 3 = 3(1)$$

Entonces, es isostática. Análogamente, cumple en los demás casos.

Figura 5.9

DCL del tornillo en el plano  $XY$ .



*Nota.* El apoyo A es una articulación, ya que no está empotrado y tiene dos reacciones. El apoyo B es un rodillo, pues solo actúa una reacción perpendicular en el punto de contacto. Fuente: Elaboración propia.

Tomando en cuenta las dimensiones de la caja, y para una conveniente distancia entre centros:

$$l_Q = 208 \text{ mm}; \quad l_W = 495,5 \text{ mm}$$

El momento por efecto de la fuerza axial en el punto Q es:

$$M_{aW} = W_{aW} \left( \frac{d}{2} \right)$$

$$M_{aW} = 8\,505 \left( \frac{95,747}{2} \right) = 407\,164,12 \text{ N}\cdot\text{mm} \approx 407,16 \text{ N}\cdot\text{m}$$

En la Figura 5.9 se aplican las condiciones de equilibrio para calcular las reacciones en los apoyos A y B.



Primera condición de equilibrio:

$$\sum \vec{F}_Y = \vec{0}; F_{VA} + F_{VB} - W_{rW} = 0 \Rightarrow F_{VA} = W_{rW} - F_{VB}$$

Segunda condición de equilibrio:

$$\begin{aligned} \sum \vec{M}_A = \vec{0}; F_{VB}l_W + M_{aW} - W_{rW}l_Q = 0 &\Rightarrow F_{VB} \\ &= W_{rW} \left( \frac{l_Q}{l_W} \right) - M_{aW} \left( \frac{1}{l_W} \right) \end{aligned}$$

De las dos condiciones se despeja  $F_{VA}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} F_{VA} &= W_{rW} \left( 1 - \frac{l_Q}{l_W} \right) + M_{aW} \left( \frac{1}{l_W} \right) \\ F_{VA} &= 3119 \left( 1 - \frac{208}{495,5} \right) + 407,16 \left( \frac{1}{495,5} \right) = 1\,810,53 \text{ N} \end{aligned}$$

También:

$$F_{VB} = 3119 \left( \frac{208}{495,5} \right) - 407,16 \left( \frac{1}{495,5} \right) = 1308,47 \text{ N}$$

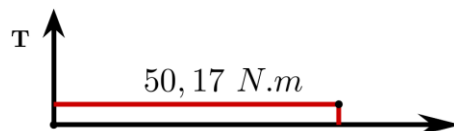
El torque de entrada es:

$$T_e = W_{tW} \left( \frac{d}{2\,000} \right) \Rightarrow T_e = 1\,048 \left( \frac{95,747}{2\,000} \right) = 50,17 \text{ N.m}$$

En las Figuras 5.10, 5.11 y 5.12 se muestra los diagramas en el plano XY de torque, cortante y momento a lo largo del tornillo sin fin.

**Figura 5.10**

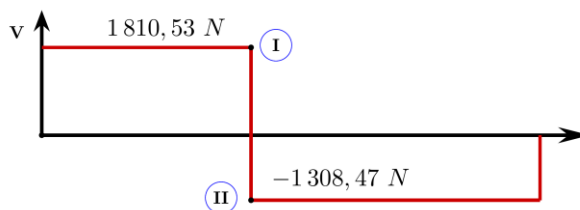
*Diagrama de torque en el eje de entrada.*



Fuente: Elaboración propia.

**Figura 5.11**

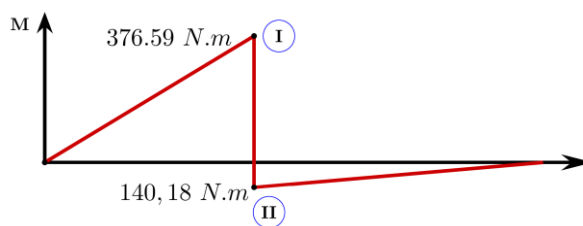
*Diagrama de fuerza cortante en el plano XY*



Fuente: Elaboración propia.

**Figura 5.12**

*Diagrama de momento flectores el plano XY*



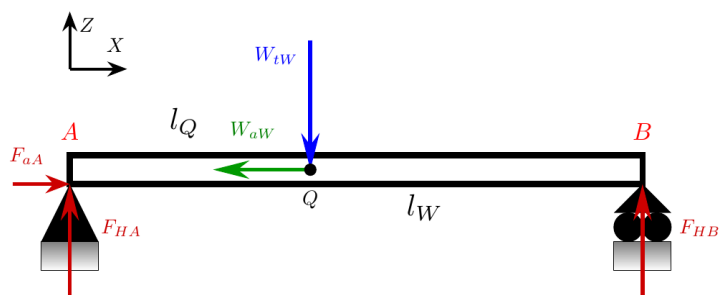
Fuente: Elaboración propia.

## 5.6.2 Tornillo en el plano XZ

Según la Figura 5.13, se aplican las condiciones de equilibrio para calcular las reacciones en los apoyos *A* y *B*.

**Figura 5.13**

*DCL del tornillo en el plano XZ.*



Fuente: Elaboración propia.

Primera condición de equilibrio:

$$\sum \vec{F}_Z = \vec{0}; \quad F_{HA} + F_{HB} - W_{tW} = 0 \Rightarrow F_{HA} = W_{tW} - F_{HB}$$

Segunda condición de equilibrio:

$$\sum \vec{M}_A = \vec{0}; \quad F_{HB}l_W - W_{tW}l_Q = 0 \Rightarrow F_{HB} = W_{tW} \left( \frac{l_Q}{l_W} \right)$$

De las dos condiciones se despeja  $F_{HA}$ , se tiene:

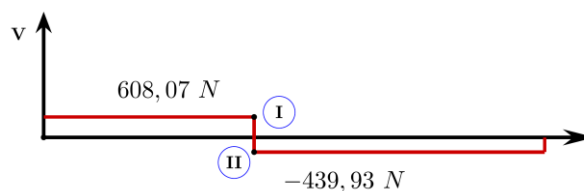
$$F_{HA} + W_{tW} - W_{tW} \left( \frac{l_Q}{l_W} \right) = 0 \Rightarrow F_{HA} = W_{tW} \left( 1 - \frac{l_Q}{l_W} \right)$$

$$F_{HA} = 1\,048 \left( 1 - \frac{208}{495,5} \right) = 608,07 \text{ N}; \quad F_{HB} = 1\,048 \left( \frac{208}{495,5} \right) \\ = 439,93 \text{ N}$$

En las Figuras Figura 5.10 y (5.15) se muestra los diagramas en el plano XZ de cortante y momento a lo largo del tornillo sin fin.

**Figura 5.14**

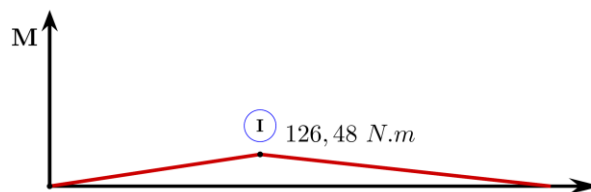
Diagrama de fuerza cortante en el plano XZ.



Fuente: Elaboración propia.

**Figura 5.15**

Diagrama de momento flector en el plano XZ.



Fuente: Elaboración propia.

### 5.6.3 Reacciones y momentos flectores máximos resultantes del tornillo

Las reacciones y momentos se encuentran en planos distintos, tal como se muestran en las Figuras (5.9) y (5.13). Para calcular las resultantes se hará lo siguiente:

La reacción resultante en el apoyo A.

$$F_{rA} = \sqrt{(F_{VA})^2 + (F_{HA})^2} \Rightarrow F_{rA} = \sqrt{(1\,810,53)^2 + (608,07)^2}$$

$$= 1\,909,91\,N$$

La reacción resultante en el apoyo B.

$$F_{rB} = \sqrt{(F_{VB})^2 + (F_{HB})^2} \Rightarrow F_{rB} = \sqrt{(1\,308,47)^2 + (439,93)^2}$$

$$= 1\,380,44\,N$$

El momento máximo para cada plano en el punto 1, como se muestran en las Figuras (5.12) y (5.15) son:

$$(M_I)_{XY} = 376,59\,N.m; \quad (M_1)_{XZ} = 126,48\,N.m$$

El momento resultante máximo en el punto 1 es:

$$(M_I)_{m\acute{a}x} = \sqrt{[(M_I)_{XY}]^2 + [(M_I)_{XZ}]^2}$$

$$(M_I)_{m\acute{a}x} = \sqrt{[376,59]^2 + [126,48]^2} \Rightarrow (M_I)_{M\acute{a}ximo} = 397,26\,N.m$$

Nota: Estas fuerzas y momentos resultantes se utilizarán para calcular los diámetros y selección rodamientos de los ejes.

Tabla 5.4

Resumen de fuerzas, reacciones y momentos en el tornillo.

Símbolo	Nombre	Magnitud
$W_{tG}$	Fuerza axial tornillo	8 505 N
$W_{tW}$	Fuerza tangencia en el tornillo	1 048 N
$W_{rW}$	Fuerza radia en el tornillo	3 119 N
$M_{aW}$	El momento en el punto Q.	407,16 N.m
$F_{VA}$	Fuerza vertical en el apoyo A, paralela al eje y	1 810,53 N
$F_{VB}$	Fuerza vertical en el apoyo B, paralela al eje y	1 308,47 N
$T_e$	Torque de entrada en el tornillo	50,17 N.m
$F_{HA}$	Fuerza horizontal en el apoyo A, paralela al eje z	608,07 N
$F_{HB}$	Fuerza horizontal en el apoyo B, paralela al eje z	439,93 N
$F_{rA}$	Reacción resultante en el punto A	1 909,91 N
$F_{rB}$	Reacción resultante en el punto B	1 380,44 N
$(M_I)_{máx}$	Momento resultante máximo en el punto I	397,26 N.m

Fuente: Elaboración propia.

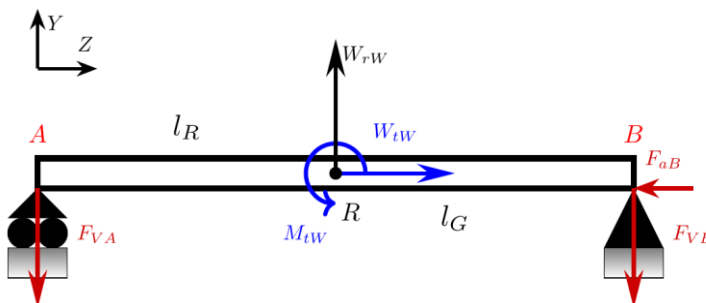
#### 5.6.4 Eje de salida, reacciones y momentos en el plano ZY

En la Figura 5.16 se toman las siguientes longitudes del eje para una conveniente distancia entre centros, tomando en cuenta las dimensiones de la caja reductora.

$$l_R = 127,5 \text{ mm}; \quad l_G = 254,5 \text{ mm}.$$

Figura 5.16

DCL del tornillo en el plano ZY.



Nota. Los apoyos A y B no están empotrados. El apoyo A es un rodillo, ya que solo actúa una reacción perpendicular en el punto de contacto; el apoyo B, en cambio, es una articulación, porque tiene dos reacciones. Fuente: Elaboración propia.

Aplicando las condiciones de equilibrio para calcular las reacciones en los apoyos  $A$  y  $B$ .

El momento por efecto de la fuerza tangencial en el punto  $R$ :

$$M_{tW} = W_{tW} \left( \frac{D}{2} \right) = (1\ 048) \left( \frac{404,254\ mm}{2\ 000} \right) = 211,83\ N.m$$

Primera condición de equilibrio:

$$\sum \vec{F}_Y = \vec{0}; \quad W_{rW} - F_{VA} - F_{VB} = 0 \Rightarrow F_{VA} = W_{rW} - F_{VB}$$

Segunda condición de equilibrio:

$$\begin{aligned} \sum \vec{M}_A = \vec{0}; \quad W_{rW}l_R + M_{tW} - F_{VB}l_G = 0 &\Rightarrow F_{VB} \\ &= W_{rW} \left( \frac{l_R}{l_G} \right) + M_{tW} \left( \frac{1}{l_G} \right) \end{aligned}$$

De las dos condiciones se despeja  $F_{VA}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} F_{VA} &= W_{rW} \left[ 1 - \left( \frac{l_R}{l_G} \right) \right] - M_{tW} \left( \frac{1}{l_G} \right) \\ F_{VA} &= (3\ 119) \left[ 1 - \left( \frac{127,5}{254,5} \right) \right] - (211,83) \left( \frac{1}{254,5} \right) \\ &= 1\ 555,60\ N \end{aligned}$$

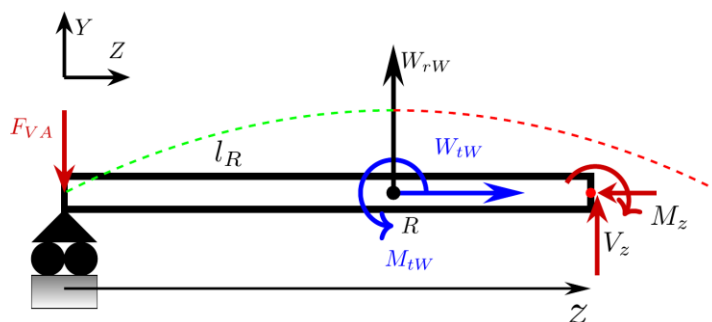
También:

$$\begin{aligned} F_{VB} &= W_{rW} \left( \frac{l_R}{l_G} \right) + M_{tW} \left( \frac{1}{l_G} \right) \\ F_{VB} &= (3119) \left( \frac{127,5}{254,5} \right) + (211,83) \left( \frac{1}{254,5} \right) = 1\ 563,40\ N \end{aligned}$$

**Momento máximo:** Análisis de la viga afectado por un momento externo  $M_{tW}$ : a una distancia  $Z$  la sección recta es como se muestra en la Figura 5.17.

**Figura 5.17**

*DCL con sección transversal cualquiera*



Fuente: Elaboración propia.

Primera condición de equilibrio:

$$\sum \vec{F}_Y = \vec{0}; \quad -F_{VA} + V_Z + W_{rW} = 0 \Rightarrow V_Z = F_{VA} - W_{rW}$$

Segunda condición de equilibrio:

$$\sum \vec{M}_A = \vec{0}; \quad w_{rW}l_R + V_Z z + M_{tW} - M_Z = 0$$

Se reemplaza  $V_Z$ :

$$w_{rW}l_R + (F_{VA} - W_{rW})z + M_{tW} - M_Z = 0$$

$$w_{rW}(l_R - z) + F_{VA}z + M_{tW} = M_Z$$

Ahora para el punto  $Z = l_R$ , el momento flector será:

$$(M_R)_{Máximo} = F_{VA}l_R + M_{tW}$$

Reemplazando valores en  $l_R = 127,5\text{mm}$  para el punto R se tiene:

$$(M_R)_{máx} = \frac{(1\,555,60)127,5}{1000} + 211,83 = 410,16\text{ N}\cdot\text{m}$$

De la Figura 5.17, se observa que la deflexión es cóncava hacia abajo.

Por lo tanto, el momento flector  $M_z$  es negativo (por convención).

Entonces:

$$(M_R)_{\text{máx}} = -410,16 \text{ N.m}$$

En las Figuras Figura 5.10, 5.19 y 5.20 se muestra los diagramas en el plano ZY de torque, cortante y momento a lo largo del eje de salida.

**Figura 5.18**

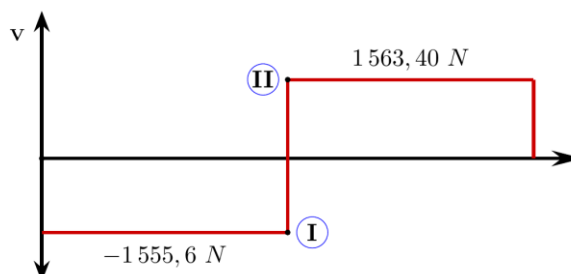
*Diagrama de torque de salida.*



Fuente: Elaboración propia.

**Figura 5.19**

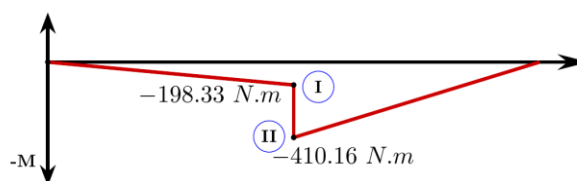
*Diagrama de fuerza cortante en el plano ZY.*



Fuente: Elaboración propia.

**Figura 5.20**

*Diagrama de momento flector en el plano ZY.*



Fuente: Elaboración propia.

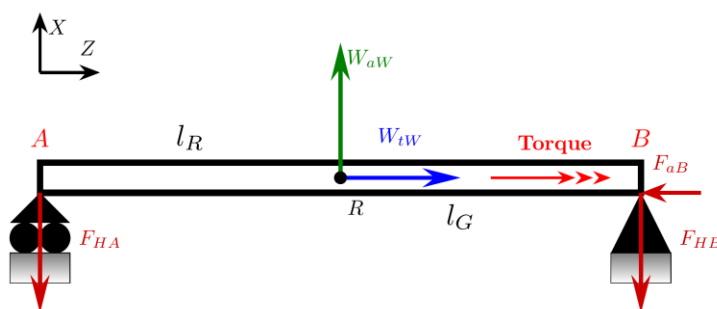


### 5.6.5 Eje de salida, reacciones y momentos en el plano ZX

En la Figura 5.21, el DCL en el eje de salida, se aplica las condiciones de equilibrio para calcular las reacciones en los puntos A y B.

**Figura 5.21**

DCL del tornillo en el plano ZX.



Fuente: Elaboración propia.

Primera condición de equilibrio:

$$\sum \vec{F}_Y = \vec{0}; \quad W_{aW} - F_{HA} - F_{HB} = 0 \Rightarrow F_{HA} = W_{aW} - F_{HB}$$

Segunda condición de equilibrio:

$$\sum \vec{M}_A = \vec{0}; \quad W_{aW}l_R - F_{HB}l_G = 0 \Rightarrow F_{HB} = W_{aW} \left( \frac{l_R}{l_G} \right)$$

De las dos condiciones se despeja  $F_{HA}$  y  $F_{HB}$ , se tiene:

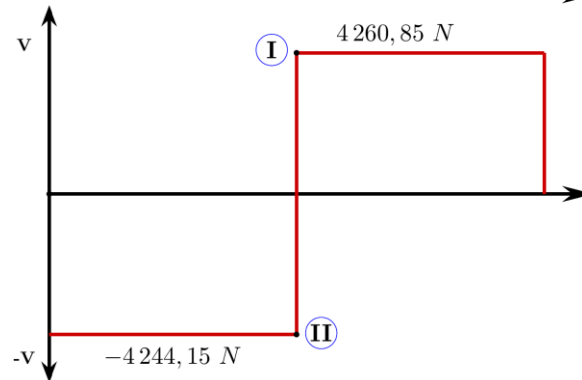
$$F_{HA} = W_{aW} \left[ 1 - \left( \frac{l_R}{l_G} \right) \right] = 8505 \left[ 1 - \left( \frac{127,5}{254,5} \right) \right] = 4\,244,15 \text{ N}$$

$$F_{HB} = W_{aW} \left( \frac{l_R}{l_G} \right) = F_{HB} = 8505 \left( \frac{127,5}{254,5} \right) = 4\,260,85 \text{ N}$$

En las Figuras (5.22) y (5.23) se muestra los diagramas en el plano ZX de torque, cortante y momento a lo largo del eje de salida.

**Figura 5.22**

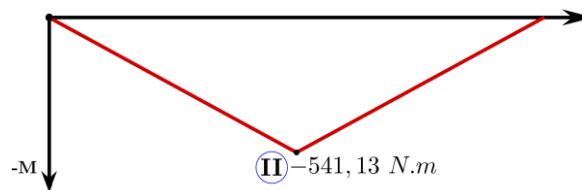
Diagrama de fuerza cortante en el plano ZX.



Fuente: Elaboración propia.

**Figura 5.23**

Diagrama de momento flector en el plano ZX.



Fuente: Elaboración propia.

### 5.6.6 Reacciones y momentos flectores máximos resultantes en el eje de salida

Las reacciones y momentos se encuentran en planos distintos, tal como se muestran en las Figuras 5.16 y 5.21. Para calcular las resultantes se hará lo siguiente:

La reacción resultante en el apoyo A.

$$F_{rA} = \sqrt{(F_{VA})^2 + (F_{HA})^2} = \sqrt{(1\ 555,6)^2 + (4\ 244,15)^2}$$

$$= 4\ 520,53 \text{ N}$$

La reacción resultante en el punto  $B$ :

$$\begin{aligned} F_{rB} &= \sqrt{(F_{VB})^2 + (F_{HB})^2} = \sqrt{(1\,563,40)^2 + (4\,260,85)^2} \\ &= 4\,538,61\,N \end{aligned}$$

El momento máximo para cada plano en el punto 2, como se muestran en las Figuras (Figura 5.20) y Figura 5.23) son:

$$(M_{II})_{ZY} = 410,16\,N.m; \quad (M_{II})_{XZ} = 541,13$$

El momento resultante máximo en el punto 2 es:

$$\begin{aligned} (M_{II})_{m\acute{a}x} &= \sqrt{[(M_2)_{ZY}]^2 + [(M_1)_{XZ}]^2} \\ (M_{II})_{m\acute{a}x} &= \sqrt{[410,16]^2 + [541,13]^2} \left(\frac{1}{1000}\right) \\ (M_{II})_{M\acute{a}ximo} &= 679\,N.m \end{aligned}$$

El signo de  $(M_{II})_{m\acute{a}x}$  es negativo, al actuar por compresión.

**Tabla 5.5**

*Resumen de las reacciones y momentos en el eje de salida.*

Símbolo	Nombre	Magnitud
$M_{tW}$	El momento de la fuerza en el punto $R$ .	211,83 $N.m$
$F_{VA}$	Fuerza vertical en el punto $A$ , paralela al eje $y$	1 555,60 $N$
$F_{VB}$	Fuerza vertical en el punto $B$ , paralela al eje $y$	1 563,40 $N$
$T_s$	Torque de salida de la rueda	1 719 $N.m$
$F_{HA}$	Fuerza horizontal en el punto $A$ , paralela al eje $x$	4 244,15 $N$
$F_{HB}$	Fuerza horizontal en el punto $B$ , paralela al eje $x$	4 260,85 $N$
$F_{rA}$	Reacción resultante en el punto $A$	4 520,53 $N$
$F_{rB}$	Reacción resultante en el punto $B$	4 538,61 $N$
$(M_2)_{m\acute{a}x}$	Momento resultante máximo en el punto dos	679 $N.m$

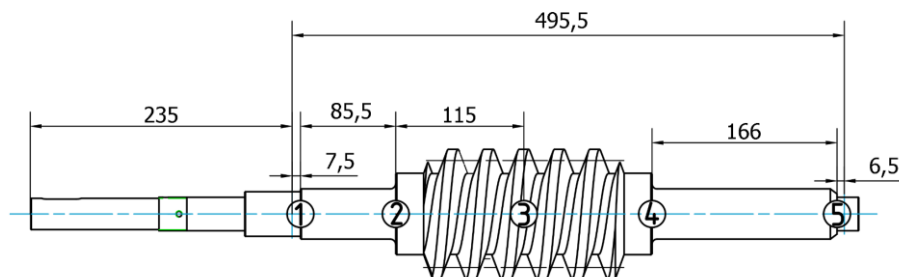
Fuente: Elaboración propia.

## 5.7 Diseño del eje de tornillo sin fin

Para el diseño del eje del tornillo sin fin, se parte de dimensiones tentativas como se muestra en la Figura 5.24, que previamente se han calculado para su verificación.

**Figura 5.24**

Tornillo: Puntos 1, 2, 3 y 4.



Fuente: Elaboración propia.

### 5.7.1 Criterio por ASME

Para el cálculo del diámetro del eje se hace uso de la ecuación (103).

Entonces se procederá a hallar cada término de la ecuación para los puntos 1, 2, 3, 4 y 5 respectivamente.

#### 5.7.1.1 Material del tornillo sin fin

Acero: ECN; AISI 3215; DIN 17Cr Ni

Dureza: **217 BHN**

Límite de fluencia:  $S_y = 650 \text{ MPa}$

Esfuerzo último:  $S_u = 900 \text{ MPa}$

### 5.7.1.2 Cálculo del límite de fatiga corregida

El límite de fatiga corregida  $S_f$  se calcula multiplicando los factores modificatorios por el esfuerzo último de fluencia  $S_u$ , como se verá más adelante. Se procede a calcular los factores. Así:

#### a) Factor de superficie ( $k_a$ )

El factor de superficie se aproxima es:  $k_a = aS_u^b$

**Tabla 5.6**

*Parámetros en el factor en la condición superficial de Marin.*

Acabado superficial	Factor a		Exponente b
	$S_{ut}$ , kpsi	$S_{ut}$ , MPa	
Esmerilado	1.34	1.58	-0.085
Maquinado o laminado en frío	2.70	4.51	-0.265
Laminado en caliente	14.4	57.7	-0.718
Como sale de la forja	39.9	272.	-0.995

Fuente: Budynas & Nisbett (2018, p. 282).

Usando los valores de la Tabla 5.6 para un acabado superficial maquinado  $a = 4,51$  y  $b = -0,265$ , se tiene:  $k_a = 4,51 \cdot 900^{-0,265} = 0,74$

#### b) Factor de tamaño ( $k_b$ )

El cálculo de factor de tamaño está en función del diámetro:

Para diámetro menor a 50mm:  $k_b = \left(\frac{d}{7,6}\right)^{-0,068}$

Para diámetro mayor a 50mm:  $k_b = 1,85d^{-0,19}$

#### c) Factor de confiabilidad ( $k_c$ )

Se usará una confiabilidad de 0,99; ya que el eje es de acero. Por lo tanto, el  $k_c = 0,814$ .

Tabla 5.7

Factor de confiabilidad.

Confiabilidad nominal del eje	$k_c$
0,50	1
0,90	0,897
0,99	0,814
0,999	0,753

Fuente: ANSI/ASME (1985).

**d) Factor de modificación por la temperatura ( $k_d$ )**

En la Tabla 5.8 se muestra el valor modificadorio de temperatura. No varía tanto de la unidad a una temperatura de operación ambiente. Por lo tanto, se tomará para los cálculos  $k_d = 1$

Tabla 5.8

Factor de temperatura

UNS Number [Note (1)] and Condition	Temperature, °F (°C)										Ref.
	-200 (-129)	-100 (-73)	0 (-18)	+70 (+23)	200 (93)	400 (204)	600 (316)	800 (427)	1000 (538)		
G-10350	1.7	1.3	1.1	1.0	1.0	1.2	1.4	1.3	0.8	[12]	
G-10600	1.5	1.2	1.1	1.0	1.0	1.1	1.2	1.0	0.2	[12]	
G-43400	1.3	1.1	1.0	1.0	0.9	0.9	0.9	0.8	0.6	[12]	
G-43400 (notched)	...	...	...	1.0	...	...	0.9	0.9	0.8	[12]	
0,17% carbon	...	...	...	1.0	1.0	1.0	1.4	1.2	0.6	[13]	
G-43400	...	...	...	1.0	...	...	1.0	1.0	0.5	[13]	
Carbon steel	...	1.3	...	1.0	...	...	...	...	...	[13]	
Carbon steel (notched)	...	1.1	...	1.0	...	...	...	...	...	[13]	
Alloy steel (notched)	...	1.1	...	1.0	...	...	...	...	...	[13]	

Nota. Propiedades de Fatiga en Función de las Propiedades a Temperatura Ambiente ( $23^{\circ}\text{C}$ ). Fuente: ANSI/ASME (1985).

**e) Factor de modificación por la carga ( $k_e$ )**

Un valor conservador:  $k_e = 1$

**f) Factor de modificación por concentración de esfuerzos por fatiga ( $k_f$ )**

El eje que está sometido a esfuerzos cíclicos, por lo general falla por fatiga en zonas con imperfecciones superficiales o concentración de esfuerzos, como hombros o cuñeros. Por lo tanto, para su diseño se recomiendan las siguientes proporciones geométricas:

$$1,2 \leq \frac{D}{d} \leq 1,5; \quad 0,02 \leq \frac{r}{d} \leq 0,1$$

En el presente trabajo no se conocen esas proporciones geométricas ya que, se necesitan los diámetros del eje mayor y menor para determinarlas. Sin embargo, los factores de la Tabla 5.9 pueden ser utilizados como valores conservadores:  $k_f = 0.5$  o  $0.63$

**Tabla 5.9**

*Factor de concentración de esfuerzos por fatiga*

Acero	Chavetero Perfilado ( $\frac{r}{d} \approx 0,02$ )	Chavetero bien Redondeado ( $\frac{r}{d} \approx 0,1$ )
Menores a 200 BHN	0,63	0,77
Mayores a 200 BHN	0,50	0,63

*Nota.* Son valores típicos para chaveteros en ejes de acero macizos redondos; estos valores también se usan para los hombros entre ejes. Fuente: Adaptado de ANSI/ASME (1985).

**g) Factor de modificación de efectos varios(  $k_g$  )**

ANSI/ASME (1985) toma en cuenta factores diversos que afectan considerablemente el límite de fatiga. Por lo tanto, se toma como valor conservador  $k_g = 1$ . Una vez que se han considerado todos los factores modificatorios, el límite de fatiga se calcula como:

$$s_f = k_a k_b k_c k_d k_e k_f k_g (0,5S_u)$$

**h) Factor de seguridad**

Para este diseño del eje, se asumirá un factor de seguridad ( $FS$ ) conservador de 3. Se procederá a calcular los momentos máximos en cada punto (1, 2, 3, 4 y 5).

### 5.7.1.3 Cálculo del diámetro para el punto 1

El momento resultante en el punto 1, de acuerdo con la Figura 5.24 para  $l_1 = 7,5 \text{ mm}$  y  $F_{rA} = 1\,909,91 \text{ N}$  es:

$$M_1 = l_1 F_{rA} = 7,5(1\,909,91) \left( \frac{1}{1\,000} \right) = 14,32 \text{ N.m}$$

El límite de fatiga se calcula reemplazando los factores modificatorios. Así, se tiene:

$$s_f = 0,74 \left( \frac{d}{7,6} \right)^{-0,068} (0,814)(1)(1)(0,63)(1)(0,5)(900)$$

El torque de entrada es  $T = 50,17 \text{ N.m}$ , y el límite de fluencia es  $S_y = 650 \text{ MPa}$ .

De la ecuación (103) reemplazamos los valores:

$$d = \sqrt[3]{\left( \frac{32FS}{\pi} \right) \sqrt{\left( \frac{M}{S_f} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{T}{S_y} \right)^2}}$$

$$d = 10 \sqrt[3]{\left( \frac{32(3)}{\pi} \right) \sqrt{\left( \frac{14,32}{0,74 \left( \frac{d}{7,6} \right)^{-0,068} (0,814)(1)(1)(0,63)(1)(0,5)(900)} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{50,17}{650} \right)^2}}$$

$$d = 10 \sqrt[3]{(30,56) \sqrt{\left( \frac{14,32}{196,022 d^{-0,068}} \right)^2 + 0,0045}} \approx 15 \text{ mm}$$



#### 5.7.1.4 Cálculo del diámetro para el punto 2

El momento resultante en el punto 2, de acuerdo a la Figura 5.24 para  $l_2 = 93\text{mm}$  y  $F_{rA} = 1\,909,91\text{ N}$  es:

$$M_2 = l_2 F_{rA} = 93(1\,909,91) \left( \frac{1}{1\,000} \right) = 177,62\text{ N.m}$$

El límite de fatiga se calcula reemplazando los factores modificatorios. Así, se tiene:

$$s_f = 0,74 \left( \frac{d}{7,6} \right)^{-0,068} (0,814)(1)(1)(0,63)(1)(0,5)(900)$$

El torque de entrada es  $T = 50,17\text{ N.m}$  y el límite de fluencia es  $S_y = 650\text{ MPa}$ .

De la ecuación (103) reemplazamos los valores:

$$d = 10 \left[ \sqrt[3]{\left( \frac{32 \times 3}{\pi} \right) \sqrt{\left( \frac{177,62}{0,74 \left( \frac{d}{7,6} \right)^{-0,068} (0,814)(1)(1)(0,63)(1)(0,5)(900)} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{50,17}{650} \right)^2}} \right]$$

$$d = 10 \left[ \sqrt[3]{(30,56) \sqrt{\left( \frac{0,91}{d^{-0,068}} \right)^2 + 0,0045}} \right] \approx 32,75\text{ mm}$$

#### 5.7.1.5 Cálculo del diámetro para el punto 3 o crítico

El momento resultante en el punto 3, de acuerdo a la Figura 5.24 para  $l_3 = 7,208\text{ mm}$  y  $F_{rA} = 2\,700,78\text{ N}$  es:

$$M_3 = (M_I)_{\text{máx}} = 397,26\text{ N.m}$$

El límite de fatiga se puede calcular con un valor conservador de  $k_f = 0,5$ , que corresponde a un punto con muescas perfiladas (dientes del

tornillo sin fin). Reemplazando los factores modificatorios. Así, se tiene:

$$s_f = 0,74 \left( \frac{d}{7,6} \right)^{-0,068} (0,814)(1)(1)(0,5)(1)(0,5)(900)$$

El torque de entrada es  $T = 50,17 N$  y el límite de fluencia  $S_y = 650 MPa$ .

De la ecuación (103) reemplazamos los valores:

$$d = 10 \left[ \sqrt[3]{\left( \frac{32(3)}{\pi} \right) \sqrt{\left( \frac{397,26}{0,74 \left( \frac{d}{7,6} \right)^{-0,068} (0,814)(1)(1)(0,5)(1)(0,5)(900)} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{50,17}{650} \right)^2}} \right]$$

$$d = 10 \left[ \sqrt[3]{(30,56) \sqrt{\left( \frac{2,55}{d^{-0,068}} \right)^2 + 0,0045}} \right] \approx 46,6 \text{ mm}$$

#### 5.7.1.6 Cálculo del diámetro para el punto 4

El momento resultante en el punto 4, de acuerdo con la Figura 5.24 para  $l_4 = 166 + 6,5 = 172,5 \text{ mm}$  y  $F_{rB} = 1380,44 N$  es:

$$M_4 = l_4 F_{rB} = 172,5(1380,44) \left( \frac{1}{1000} \right) = 238,12 \text{ N.m}$$

El límite de fatiga se calcula reemplazando los factores modificatorios. Así, se tiene:

$$s_f = 0,74 \left( \frac{d}{7,6} \right)^{-0,068} (0,814)(1)(1)(0,63)(1)(0,5)(900)$$

El torque es  $T = 0 N.m$ , y el límite de fluencia de la ecuación es  $S_y = 650 MPa$ .

De la ecuación (103) reemplazamos los valores:

$$d = 10 \left[ \sqrt[3]{\left(\frac{32(3)}{\pi}\right) \sqrt{\left(\frac{238,12}{0,74 \left(\frac{d}{7,6}\right)^{-0,068} (0,814)(1)(1)(0,63)(1)(0,5)(900)}\right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{0}{650}\right)^2}} \right]$$

$$d = 10 \left[ \sqrt[3]{\frac{37,12}{d^{-0,068}}} \right] \approx 36,18 \text{ mm}$$

### 5.7.1.7 Cálculo del diámetro para el punto 5

El momento resultante en el punto 5, de acuerdo con la Figura 5.24 para  $l_5 = 6,5 \text{ mm}$  y  $F_{rB} = 1380,44 \text{ N}$  es:

$$M_5 = l_5 F_{rB} = 6,5(1380,44 \text{ N}) \left(\frac{1}{1000}\right) = 8,97 \text{ N.m}$$

El límite de fatiga se calcula reemplazando los factores modificatorios. De esta manera, se obtiene:

$$0,74 \left(\frac{d}{7,6}\right)^{-0,068} (0,814)(1)(1)(0,63)(1)(0,5)(900)$$

Para el torque es  $T = 0 \text{ N.m}$  y el límite de fluencia de la ecuación  $S_y = 650 \text{ MPa}$ .

De la ecuación (103) reemplazamos los valores:

$$d = 10 \left[ \sqrt[3]{\left(\frac{32(3)}{\pi}\right) \sqrt{\left(\frac{8,97}{0,74 \left(\frac{d}{7,6}\right)^{-0,068} (0,814)(1)(1)(0,63)(1)(0,5)(900)}\right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{0}{650}\right)^2}} \right]$$

$$d = 10 \left[ \sqrt[3]{\frac{1,40}{d^{-0,068}}} \right] \approx 11,80 \text{ mm}$$

**Tabla 5.10**

Resumen de Diámetros.

Diámetros[mm]	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$
ASME	15	32,75	46,6	36,18	11,8

Fuente: Elaboración propia.

## 5.7.2 Criterio por deformación lateral

Según ANSI/AGMA (1993), la deformación lateral máxima permisible está en función del paso axial. De la ecuación (102):

$$\Delta = 0,025\sqrt{p_x} \text{ [mm]}$$

Para  $p_x = 31,75 \text{ mm}$ , entonces:

$$\Delta = 0,025\sqrt{31,75} \Rightarrow \Delta \leq 0,14 \text{ mm}$$

Ahora se calculan las deformaciones para el tornillo sin fin en los diferentes planos:

### 5.7.2.1 Deformación en el plano XY

La deformación causada por todas las cargas en el punto  $Q$  se muestra en la Figura 5.25.

**Por efecto de la fuerza radial:**

$$y_{w_{rw}} = \frac{W_{rw}l_Q(l_W - l_Q)[l_Q^2 + (l_W - l_Q)^2 - l_W^2]}{6EI l_W}$$

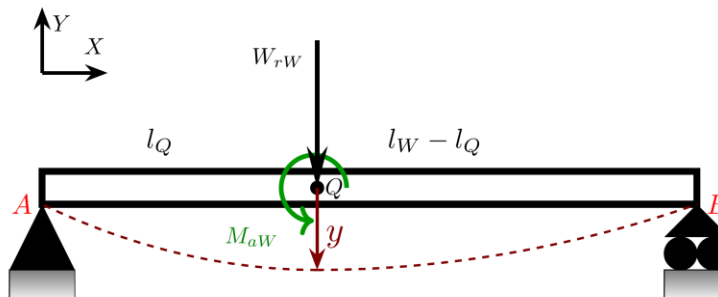
**Por efecto del momento:**

$$y_{M_{aw}} = \frac{M_{aw}l_Q(4l_Q^2 - 6l_Ql_W + 2l_W^2)}{6EI l_W} \approx 0$$

La deformación total  $y$  se calcula usando el principio de superposición.

**Figura 5.25**

Deformación de una carga intermedia y momento en el plano XY.



Nota. Apoyos simples con carga intermedia y de momento. Fuente: Adaptado de Budynas & Nisbett (2018, Tabla-A9)

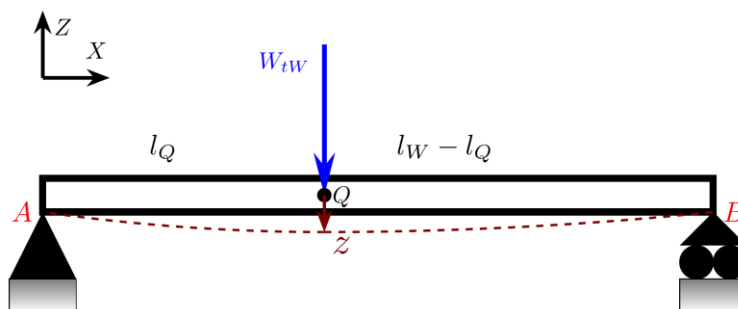
### 5.7.2.2 Deformación en el plano XZ

En la Figura 5.26 se muestra la deformación  $Z$  causada por efecto de la fuerza tangencial y se calcula con la siguiente fórmula:

$$Z_{tW} = \frac{W_{tW} l_Q (l_W - l_Q) [l_Q^2 + (l_W - l_Q)^2 - l_W^2]}{6EI l_W}$$

**Figura 5.26**

Deformación de una carga intermedia en el plano XZ.



Nota. Apoyos simples con carga intermedia. Fuente: Adaptado de Budynas & Nisbett (2018, Tabla-A9)

### 5.7.2.3 Deformación resultante

Reemplazando las deformaciones parciales, la deformación total es:

$$\Delta = \sqrt{(\mathbf{y}_{W_{rW}} + \mathbf{y}_{M_{aW}})^2 + (\mathbf{z}_{tW})^2}$$

$$\Delta = \frac{l_Q(l_W - l_Q) [l_W^2 - l_Q^2 - (l_W - l_Q)^2]}{6EI l_W} \left( \sqrt{(W_{rW})^2 + (W_{tW})^2} \right)$$

Reemplazando el segundo momento de inercia:  $I = \frac{\pi d^4}{64}$ , se tiene:

$$\Delta = \left\{ \frac{32 l_Q(l_W - l_Q) [l_W^2 - l_Q^2 - (l_W - l_Q)^2]}{3\pi d^4 E l_W} \right\} \left( \sqrt{(W_{rW})^2 + (z_{tW})^2} \right) \leq 0.14$$

Despejando el diámetro

$$d \geq \sqrt[4]{\left( \frac{32 l_Q(l_W - l_Q) [l_W^2 - l_Q^2 - (l_W - l_Q)^2]}{3\pi E l_W \Delta} \right) \left( \sqrt{(W_{rW})^2 + (W_{tW})^2} \right)}$$

Reemplazando las magnitudes de la Tabla 5.11.

**Tabla 5.11**

*Longitudes, fuerzas y módulo de elasticidad del tornillo sin fin.*

Símbolo	Nombre	Magnitud
$l_W$	Longitud del eje del tornillo sin fin del apoyo A al B	495,5 mm
$l_Q$	Longitud del apoyo A hasta el punto Q	208 mm
$W_{rW}$	Fuerza radial en el tonillo	3 119 N
$W_{tW}$	Fuerza tangencial en el tornillo sin fin	1 048 N
$E$	Módulo de elasticidad en tensión	207 GPa

Fuente. Elaboración propia.

Se tiene:

$$d = \sqrt[4]{\left( \frac{32(208)(495,5 - 208)[495,5^2 - 208^2 - (495,5 - 208)^2]}{3\pi(207)(495,5)(0,14)} \left( \frac{1}{1000} \right) \right) \left( \sqrt{3\,119^2 + 1\,048^2} \right)}$$

$$d \geq 48,56 \text{ mm}$$

Es la condición necesaria para que la deformación lateral sea menor a 0,14 mm.

### 5.7.3 Criterio por resistencia tomando en cuenta la carga axial

Hall, et al. (2008) sugieren calcular el esfuerzo cortante máximo con la siguiente expresión:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \left\{ \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{\left[ K_b M + \frac{\alpha F_a d}{8} \right]^2 + (K_t T)^2} \right\} (1000) \leq \tau_{perm}$$

**Tabla 5.12**

*Factores combinados de choque y fatiga*

Condiciones de carga	Factor	Factor
Para ejes en rotación	$K_b$	$K_t$
Carga aplicada gradualmente	1,5	1,0
Carga repentina (choque menor)	1,5 a 2,0	1,0 a 1,5
Carga repentina (choque fuerte)	2,0 a 3,0	1,5 a 3,0

Fuente: Hall, et al. (2008, p. 9.2)

Se considera para materiales dúctiles  $S_y = S_c$ . Luego:  $\tau_{perm} = 30\%S_y$  ó  $18\%S_u$  [MPa], si existen cuñeros sería el 75% del esfuerzo permisible.

Para cargas a tracción:  $\alpha = 1$

Para cargas a compresión:

$$\text{Si } \frac{L}{r} < 115 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{1 - 0.0044 \left( \frac{L}{r} \right)}$$

$$\text{Si } \frac{L}{r} > 115 \Rightarrow \alpha = \frac{S_c}{\pi^2 n' E} \left( \frac{L}{r} \right)^2 ; \text{ el factor } n' \text{ se toma se la Tabla 5.13:}$$

**Tabla 5.13**

*Factor de condiciones de eje.*

Condición del eje	$n'$
Para extremos articulados	1
Para extremos fijos	2,25
Para extremos restringidos parcialmente, como el caso de cojinetes	1,6

Fuente: Adaptado de Hall, et al. (2008, p. 9.3)

Además, el radio de giro  $r$ :

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{d}{4}$$

### 5.7.3.1 Esfuerzos permisibles en el tonillo (punto 3)

El esfuerzo permisible con el límite de fluencia

$$\tau_{perm} = 30\%S_y = 30\%(650 \text{ MPa}) = 195 \text{ MPa}$$

El esfuerzo permisible con el esfuerzo último

$$\tau_{perm} = 18\%S_u = 18\%(900 \text{ MPa}) = 162 \text{ MPa}$$

Se escoge el menor esfuerzo cortante permisible: **162 MPa**.

### 5.7.3.2 Primera posibilidad

$$\tau_{m\acute{a}x.} = \left\{ \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{\left( K_b M + \frac{\alpha W_{aw} d}{8} \right)^2 + (K_t T)^2} \right\} \leq \tau_{perm}$$

Se remplazan las siguientes magnitudes para una distancia entre rodamientos con  $L_W = 495,5 \text{ mm}$ :

$$\frac{L_W}{r} = \frac{4L_W}{d} = \frac{4(495,5)}{d} = \frac{1982}{d} < 115; d > 17,23 \text{ mm}$$

Este resultado quiere decir que el diámetro mínimo a lo largo del eje tiene que ser mayor a  $17,23 \text{ mm}$ .

De la Tabla 5.12 para una carga aplicada gradualmente  $k_b = 1,5$  y  $k_b = 1,0$ .

y momento máximo  $m_3 = 397,26 \text{ N}$ , el toque de entrada  $T_e = 50,17 \text{ N.m}$  y una fuerza axial  $F_a = W_{aw} = 8505 \text{ N}$ , se tiene:



$$\left\{ \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{\left[ 1,5(397,26) + \left( \frac{1}{1 - \frac{8,720}{d}} \right) \left( \frac{8\,505d}{8} \right) \left( \frac{1}{1\,000} \right) \right]^2 + [1(50,17)]^2} \right\} (1000) \leq 162$$

$$\left\{ \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{\left[ 595,89 + \frac{1,06d^2}{d - 8,72} \right]^2 + 2517,03} \right\} (1000) \leq 162$$

Tabulando en una hoja de cálculo se cumple la desigualdad para

$$d \geq 27,69 \text{ mm}$$

### 5.7.3.3 Segunda posibilidad

La esbeltez para la distancia entre rodamientos con  $L_W = 495,5 \text{ mm}$ :

$$\frac{1982}{d} > 115 \Rightarrow d < 17,23 \text{ mm}$$

Para  $d < 17,23 \text{ mm}$  no existe solución en la ecuación de resistencia.

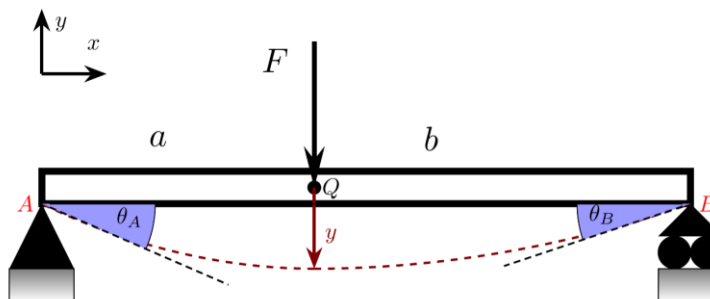
### 5.7.4 Criterio por inclinación en el rodamiento

Como se ve en la Figura 5.27 la fuerza  $F$  causa una deflexión. Luego

cuando  $x = a$ , la deflexión será:  $y = \frac{ab(l^2 - b^2 - a^2)F}{6lEI}$ .

**Figura 5.27.**

*Inclinación angular para una carga.*

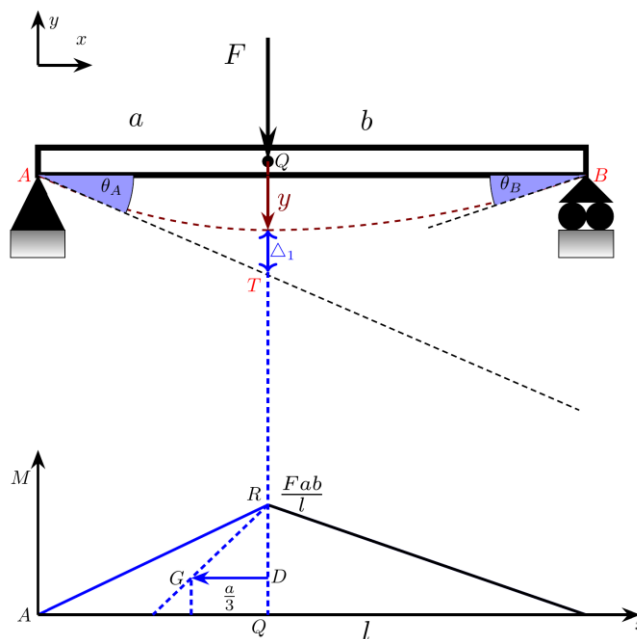


Fuente: Elaboración propia.

La distancia vertical  $\Delta_1$  se define entre la curva elástica y la recta tangente trazada por el punto A hasta su intersección con T, como se muestra en la Figura 5.28. Esta distancia se calcula aplicando el teorema de área de momentos.

**Figura 5.28**

*Diagrama de momento para el cálculo de  $\Delta_1$*



Fuente: Elaboración propia.

$$\Delta_1 = \frac{(\text{Área del triángulo } ARQ)(DG)}{EI} = \frac{\left[ a \left( \frac{Fab}{l} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \right] \left( \frac{a}{3} \right)}{EI}$$

$$= \frac{Fa^3b}{6lEI}$$

De la Figura 5.28 se toma la tangente en el triángulo AQT:

$$\tan(\theta_A) = \frac{y + \Delta_1}{a} = \frac{\frac{ab(l^2 - b^2 - a^2)F}{6lEI} + \frac{Fa^3b}{6lEI}}{a}$$

$$\tan(\theta_A) = \frac{b(l^2 - b^2 - a^2)F}{6lEI} + \frac{Fa^2b}{6lEI} = \frac{ab(l + b)F}{6lEI}$$

Hall, et al. (2008) toma en cuenta el criterio por inclinación en el rodamiento para ángulos límite  $\theta \leq 1^\circ$ . Por lo tanto, la  $\tan(\theta) \approx \theta$  [rad] (hasta una diezmilésima de exactitud). Entonces:

$$\theta_A = \frac{ab(l+b)F}{6lEI}; \quad \theta_B = \frac{ab(l+a)F}{6lEI}$$

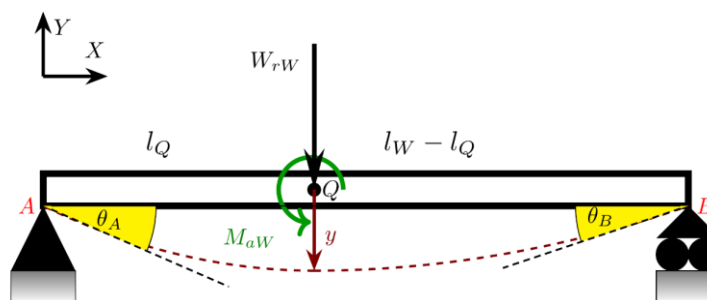
#### 5.7.4.1 Para el plano XY

La inclinación angular en el plano XY del tornillo sin fin de la Figura 5.29 se calcula como:

$$\theta_{xy}^A = \frac{l_Q(l_W - l_Q)(2l_W - l_Q)W_{rW}}{6l_W EI}; \quad \theta_{xy}^B = \frac{l_Q[(l_W)^2 - (l_Q)^2]W_{rW}}{6l_W EI}$$

**Figura 5.29**

Inclinación angular en el plano XY



Fuente: Elaboración propia.

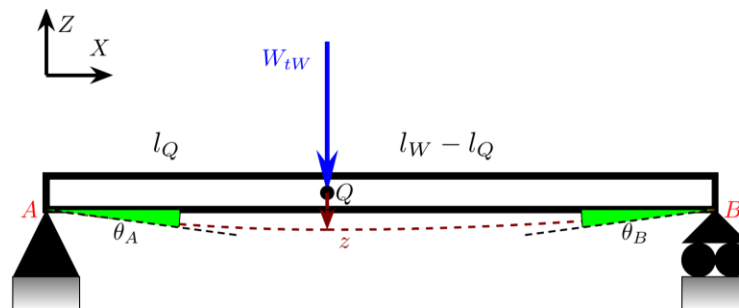
#### 5.7.4.2 Para el plano XZ

La inclinación angular en el plano XY del tornillo sin fin de la Figura 5.30 se calcula como:

$$\theta_{xz}^A = \frac{l_Q(l_W - l_Q)(2l_W - l_Q)W_{tW}}{6l_W EI}; \quad \theta_{xz}^B = \frac{l_Q[(l_W)^2 - (l_Q)^2]W_{tW}}{6l_W EI}$$

Figura 5.30

Inclinación angular en el plano XZ



Fuente: Elaboración propia.

### 5.7.4.3 Inclinación resultante

a) La inclinación resultante del ángulo en el punto A

$$\theta_A = \sqrt{(\theta_{xz}^A)^2 + (\theta_{xz}^A)^2} = \frac{l_Q(l_W - l_Q)(2l_W - l_Q)\sqrt{W_{rW}^2 + W_{tW}^2}}{6l_W E}$$

Considerando un valor conservador de  $\theta_A \leq 1^\circ$  (por lo descrito anteriormente):

$$\theta_A = \frac{l_Q(l_W - l_Q)(2l_W - l_Q)\sqrt{W_{rW}^2 + W_{tW}^2}}{6l_W EI} \leq 1^\circ$$

$$\frac{64l_Q(l_W - l_Q)(2l_W - l_Q)\sqrt{W_{rW}^2 + W_{tW}^2}}{6\pi l_W E d^4} \leq 1^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)$$

Despejando el diámetro se reemplaza las longitudes y fuerzas en:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{1\,920l_Q(l_W - l_Q)(2l_W - l_Q)\sqrt{W_{rW}^2 + W_{tW}^2}}{\pi^2 l_W E}}$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{1\,920(208)(495,5 - 208)[2(495,5) - 208]\sqrt{3\,119^2 + 1\,048^2}}{\pi^2(495,5)(207)}} \left(\frac{1}{1\,000}\right)$$

$$d \geq 23,25 \text{ mm}$$

**b) La inclinación resultante del ángulo en el punto B**

$$\theta_B = \sqrt{(\theta_{xy}^B)^2 + (\theta_{xz}^B)^2}; \quad \theta_B = \frac{l_Q [(l_W)^2 - (l_Q)^2] \sqrt{W_{rW}^2 + W_{tW}^2}}{6l_W EI}$$

Considerando un valor conservador de  $\theta_B \leq 1^\circ$

$$\frac{l_Q [(l_W)^2 - (l_Q)^2] \sqrt{W_{rW}^2 + W_{tW}^2}}{6l_W EI} \leq 1^\circ \left( \frac{\pi}{180^\circ} \right)$$

Despejando el diámetro se reemplaza las longitudes y fuerzas:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{1\,920 l_Q [(l_W)^2 - (l_Q)^2] \sqrt{W_{rW}^2 + W_{tW}^2}}{\pi^2 l_W E} \left( \frac{1}{1000} \right)}$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{1920(208)(495,5^2 - 208^2) \sqrt{3\,119^2 + 1\,048^2}}{\pi^2 (495,5)(207)} \left( \frac{1}{1\,000} \right)}$$

$$d \geq 22,64 \text{ mm}$$

### 5.7.5 Criterio por deformación torsional

Al aplicar un torque a un eje de transmisión con un extremo fijo, se produce una deformación angular que puede calcularse mediante la siguiente ecuación:

$$\theta(\text{rad}) = \frac{Tl}{GJ}; \quad J = \frac{\pi d^4}{32}; \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

#### 5.7.5.1 El módulo de elasticidad teórica

El módulo de elasticidad en corte para aceros se considera  $\mu = 0,3$

$$G = \frac{207}{2(1 + 0,3)}; \quad G = 79,62 \text{ GPa}$$

### 5.7.5.2 Ángulo de giro

$$\theta^{\circ} = \left[ \frac{Tl}{G \left( \frac{\pi d^4}{32} \right)} \right] \left( \frac{180^{\circ}}{\pi} \right) = \frac{584^{\circ} Tl}{Gd^4}$$

Hall et al. (2008) recomienda el ángulo de giro permisible entre los siguientes límites:

$$\frac{0,25^{\circ}}{1000mm} \leq \frac{\theta^{\circ}}{l} \leq \frac{3^{\circ}}{1000mm}$$

Para este eje de transmisión se considera el límite máximo. Luego:

$$\left( \frac{\theta^{\circ}}{l} \right) = \frac{584T}{Gd^4} \leq \frac{3^{\circ}}{1000mm} \Rightarrow d \geq \sqrt[4]{\frac{584(1\,000)T}{3G}}$$

Para un torque  $T = 50,17Nm$ :

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{584(1\,000)(50,17)}{3G}} \geq 18,71 \text{ mm}$$

### 5.7.6 Resumen de diámetros para el eje de tornillo sin fin

Se muestra en la Tabla 5.14 un resumen de los diámetros mínimos para el eje tornillo sin fin, por cada criterio, y la elección del diámetro del eje, tomando en cuenta diámetros normalizados.

**Tabla 5.14**

*Diámetros del Eje de Tonillo por Criterio*

Criterio por:	Diámetros mínimos para el eje de entrada[mm]				
	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$
ASME	15	32,75	46,60	36,18	11,80
Deformación lateral	-	-	48,56	-	-
Resistencia	-	-	30,70	-	-
Inclinación	23,25	-	-	-	22,64
Deformación torsional	18,71	18,71	18,71	-	-
Diámetros asignados	40	45	116	45	30

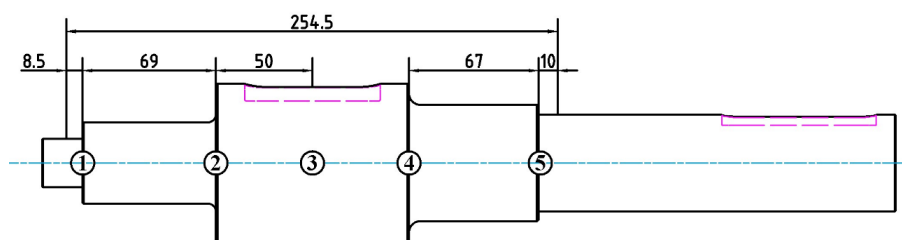
Fuente: Elaboración propia.

## 5.8 Diseño del eje de salida

El diámetro de salida es similar al del tornillo sin fin. El diseñador elige las dimensiones adecuadas según el tamaño de la caja del reductor, como se muestra en la Figura 5.31.

**Figura 5.31**

*Eje de salida.*



Fuente: Elaboración propia.

### 5.8.1 Criterio por ASME

#### 5.8.1.1 Material del eje de salida

Aceros: VCN; AISI 4340H; DIN 34Cr Ni Mo 6.

Dureza: **248 BHN**.

Límite de fluencia:  **$S_y = 785 \text{ MPa}$**

Esfuerzo último:  **$S_u = 980 \text{ MPa}$**

En la Tabla 5.15 se muestra un resumen de todas las magnitudes ya calculadas antes, las cuales servirán para calcular los diámetros en cada punto del eje de salida.

**Tabla 5.15**

Resumen de las magnitudes que se van a reemplazar.

Nombre	Magnitud
$k_a$ , material pulido	0,73
$k_b$ , para $d < 50mm$	$\left(\frac{d}{7,6}\right)^{-0,068}$
$k_b$ , para $d > 50mm$	$1,85d^{-0,19}$
$k_c$ , confiabilidad al 99%	0,814
$k_d$ Factor de modificación por la temperatura	1
$k_e$ Factor de modificación por la carga	1
$k_f$ , Filetes agudos	0,5
$k_f$ , Filetes redondeados	0,63
$k_g$ , Factor de modificación de efectos varios	1
Factor de seguridad	3
Longitud en el punto 1, $l_1$	8,5 mm
Longitud en el punto 2, $l_2$	77,5 mm
Longitud en el punto 4, $l_4$	77 mm
Longitud en el punto 5, $l_5$	10 mm
Reacción resultante en el punto A	4 520,53 N
Reacción resultante en el punto B	4 538,61 N
Momento máximo en el punto 3	679 N.m
Torque de entrada en el punto 1 y 2	0 N.m
Torque de salida en los puntos 3, 4, 5	1 719 N

Fuente: Elaboración propia.

### 5.8.1.2 Cálculo del diámetro para el punto 1

El momento resultante en el punto 1:

$$M_1 = l_1 F_{rA} = 8,5(4\,520,53) \left(\frac{1}{1000}\right) = 38,42 \text{ N.m}$$

El límite de fatiga se calcula usando los factores modificatorios de la

Tabla 5.15:

$$s_f = k_a k_b k_c k_d k_e k_f k_g (0,5 S_u)$$

$$S_f = 0,73 \left(\frac{d}{7,6}\right)^{-0,068} (0,814)(1)(1)(0,63)(1)(0,5)(980)$$

Reemplazando en la ecuación ASME:



$$d = \sqrt[3]{\left(\frac{32FS}{\pi}\right) \sqrt{\left(\frac{M}{S_f}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{T}{S_y}\right)^2}}$$

$$d = 10 \sqrt[3]{\left(\frac{32(3)}{\pi}\right) \sqrt{\left(\frac{38,42}{0,73\left(\frac{d}{7,6}\right)^{-0,068} (0,814)(1)(1)(0,63)(1)(0,5)(980)}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{0}{785}\right)^2}}$$

$$d = 10 \left[ \sqrt[3]{5,57d^{0,068}} \right] \approx 19 \text{ mm}$$

### 5.8.1.3 Cálculo del diámetro para el punto 2

El momento resultante en el punto 2:

$$M_2 = l_2 F_{rA} = 77,5(4\,520,53) \left(\frac{1}{1000}\right) = 350,34 \text{ N.m}$$

El límite de fatiga se calcula usando los factores modificatorios de la Tabla 5.15:

$$s_f = k_a k_b k_c k_d k_e k_f k_g (0,5xS_u)$$

$$S_f = 0,73 \left(\frac{d}{7,6}\right)^{-0,068} (0,814)(1)(1)(0,63)(1)(0,5)(980)$$

Reemplazando en la ecuación ASME:

$$d = \sqrt[3]{\left(\frac{32FS}{\pi}\right) \sqrt{\left(\frac{M}{S_f}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{T}{S_y}\right)^2}}$$

$$d = 10 \sqrt[3]{\left(\frac{32(3)}{\pi}\right) \sqrt{\left(\frac{350,34}{0,73\left(\frac{d}{7,6}\right)^{-0,068} (0,814)(1)(1)(0,63)(1)(0,5)(980)}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{0}{785}\right)^2}}$$

$$d = 10 \left[ \sqrt[3]{50,84d^{0,068}} \right] \approx 40,28 \text{ mm}$$

### 5.8.1.4 Cálculo del diámetro para el punto 3 o crítico

Momento resultante máximo en el punto 3:

$$M_3 = 679 \text{ N.m}$$

El límite de fatiga se calcula usando los factores modificatorios de la Tabla 5.15:

$$s_f = k_a k_b k_c k_d k_e k_f k_g (0,5 S_u)$$

$$S_f = 0,73 \left(\frac{d}{7,6}\right)^{-0,068} (0,814)(1)(1)(0,5)(1)(0,5)(980)$$

$$d = \sqrt[3]{\left(\frac{32FS}{\pi}\right) \sqrt{\left(\frac{M}{S_f}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{T}{S_y}\right)^2}}$$

$$d = 10 \sqrt[3]{\left(\frac{32(3)}{\pi}\right) \sqrt{\left(\frac{679}{(0,73)(1,85 d^{-0,19})(0,814)(1)(1)(0,5)(1)(0,5)(980)}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1719}{785}\right)^2}}$$

$$d = 10 \sqrt[3]{(30,56) \sqrt{5,31 d^{0,38} + 3,60}}$$

Tabulando en una hoja de cálculo el valor del diámetro es:

$$d \approx 56 \text{ mm}$$

### 5.8.1.5 Cálculo del diámetro para el punto 4

El momento resultante en el punto 4:

$$M_4 = l_4 F_{rB} = 77(4538,61) \left(\frac{1}{1000}\right) = 349,47 \text{ N.m}$$

El límite de fatiga se calcula usando los factores modificatorios de la Tabla 5.15:

$$s_f = k_a k_b k_c k_d k_e k_f k_g (0,5 S_u)$$

$$S_f = 0,73 \left( \frac{d}{7,6} \right)^{-0,068} (0,814)(1)(1)(0,63)(1)(0,5)(980)$$

$$d = \sqrt[3]{\left( \frac{32FS}{\pi} \right) \sqrt{\left( \frac{M}{S_f} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{T}{S_y} \right)^2}}$$

$$d = 10 \left[ \sqrt[3]{\left( \frac{32(3)}{\pi} \right) \sqrt{\left( \frac{349,47}{0,73 \left( \frac{d}{7,6} \right)^{-0,068} (0,814)(1)(1)(0,63)(1)(0,5)(980)} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{1719}{785} \right)^2}} \right]$$

$$d = 10 \left[ \sqrt[3]{(30,56) \sqrt{2,75d^{0,136} + 3,60}} \right]$$

Tabulando en una hoja de cálculo el valor del diámetro es:

$$d \approx 44,5 \text{ mm}$$

### 5.8.1.6 Cálculo del diámetro para el punto 5

El momento resultante en el punto 5:

$$M_5 = l_5 F_{rB} = 10(4538,61) \left( \frac{1}{1000} \right) = 45,38 \text{ N.m}$$

El límite de fatiga se calcula usando los factores modificatorios de la

Tabla 5.15:

$$s_f = k_a k_b k_c k_d k_e k_f k_g (0,5S_u)$$

$$S_f = 0,73 \left( \frac{d}{7,6} \right)^{-0,068} (0,814)(1)(1)(0,63)(1)(0,5)(980)$$

$$d = \sqrt[3]{\left( \frac{32FS}{\pi} \right) \sqrt{\left( \frac{M}{S_f} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{T}{S_y} \right)^2}}$$

$$d = 10 \left[ \sqrt[3]{\left(\frac{32(3)}{\pi}\right) \sqrt{\left(\frac{45,38}{0,73 \left(\frac{d}{7,6}\right)^{-0,068} (0,814)(1)(1)(0,63)(1)(0,5)(980)}\right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{1719}{785}\right)^2}} \right]$$

$$d = 10 \left[ \sqrt[3]{(30,56) \sqrt{0,046d^{0,136} + 3,60}} \right]$$

Tabulando en una hoja de cálculo el valor del diámetro es:

$$d \approx 38,95 \text{ mm}$$

**Tabla 5.16**

*Resumen de Diámetros*

Diámetros [mm]	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$
ASME	19	40,28	56	44,5	38,95

Fuente: Elaboración propia.

### 5.8.2 Criterio por deformación lateral

Jagadeesha (2019) recomienda una deformación lateral máxima permisible entre ejes de transmisión para que este sea rígido:

$$\Delta = \frac{0,25 \text{ mm}}{300 \text{ mm}}$$

Como la longitud del eje entre los centros de los rodamientos es 254,5 mm. Entonces:

$$\Delta = \frac{0,25 \text{ mm}}{300 \text{ mm}} (254,5 \text{ mm}) \Rightarrow \Delta = 0,21 \text{ mm}$$

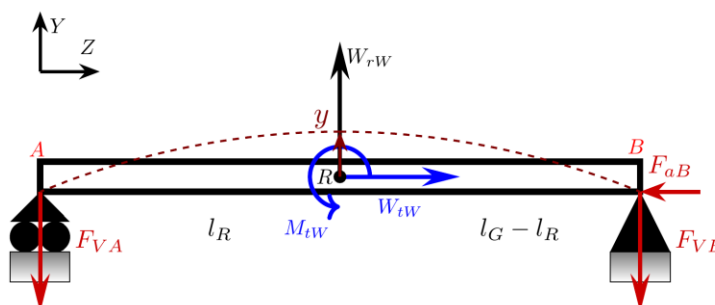
### 5.8.2.1 Deformación en el plano ZY

En la Figura 5.32, la deformación causada por el momento  $M_{tW}$  tiende a cero, es decir  $y_{M_{tW}} \approx 0$ . Por lo tanto, solo se considera la deformación  $y_{W_{rW}}$ .

$$y_{W_{rW}} = -\frac{W_{rW}l_R(l_G - l_R)[l_R^2 + (l_G - l_R)^2 - l_G^2]}{6EI l_G}$$

**Figura 5.32**

*Deformación de una carga intermedia y momento en el plano ZY*



Fuente: Elaboración propia.

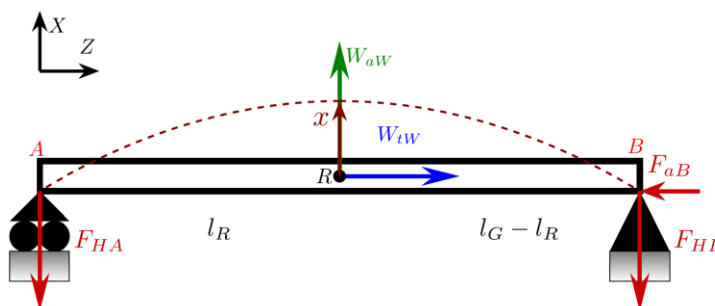
### 5.8.2.2 Deformación en el plano ZX

En la Figura 5.33 se muestra la deformación  $x = x_{W_{aW}}$  causada por la fuerza axial del tornillo en dirección del eje X, la cual se calcula como:

$$x_{W_{aW}} = -\frac{W_{aW}l_R(l_G - l_R)[l_R^2 + (l_G - l_R)^2 - l_G^2]}{6EI l_G}$$

**Figura 5.33**

*Deformación de una carga intermedia y momento en el plano ZX.*



Fuente: Elaboración propia.

### 5.8.2.3 La deformación resultante

$$\Delta = \sqrt{(y_{W_{rW}})^2 + (x_{W_{aW}})^2}$$

$$\Delta = \frac{l_R(l_G - l_R)[l_G^2 - l_R^2 - (l_G - l_R)^2]}{6EI l_G} \left( \sqrt{(W_{rW})^2 + (W_{aW})^2} \right)$$

$$\Delta = \left\{ \frac{32l_R(l_G - l_R)[l_G^2 - l_R^2 - (l_G - l_R)^2]}{3\pi d^4 E l_G} \right\} \left( \sqrt{(W_{rW})^2 + (W_{aW})^2} \right)$$

$$\Delta \leq 0,21 \text{ mm}$$

Despejando el diámetro:

$$d \geq \sqrt[4]{\left\{ \frac{32l_R(l_G - l_R)[l_G^2 - l_R^2 - (l_G - l_R)^2]}{3\pi E l_G \Delta} \right\} \left( \sqrt{(W_{rW})^2 + (W_{aW})^2} \right)}$$

Reemplazando las magnitudes de la Tabla 5.17 en la ecuación:

$$d \geq \sqrt[4]{\left\{ \frac{32(127,5)(254,5 - 127,5)[254,5^2 - 127,5^2 - (254,5 - 127,5)^2]}{3\pi(207)(254,5)(0,21)} \left( \frac{1}{1000} \right) \right\} \left( \sqrt{3119^2 + 8505^2} \right)}$$

$$d \geq 34,75 \text{ mm}$$

Es la condición necesaria para que la deformación lateral sea menor a 0,21 mm.

**Tabla 5.17**

*Resumen de las magnitudes para el cálculo por deformación lateral.*

Símbolo	Nombre	Magnitud
$l_G$	Longitud del eje de la rueda del apoyo A al B	254,5 mm
$l_R$	Longitud del apoyo A hasta el punto R	127,5 mm
$W_{rW}$	Fuerza radia en el tornillo	3 119 N
$W_{aW}$	Fuerza axial en el tonillo	8 505 N

Fuente: Elaboración propia.

### 5.8.3 Criterio por resistencia, tomando en cuenta la carga axial

#### 5.8.3.1 Esfuerzos permisibles (punto 3)

En el punto 3 de la Figura 5.31 se muestra un canal chavetero, por tanto, el esfuerzo permisible disminuye un 25%. Así:

El esfuerzo permisible con el límite de fluencia

$$\tau_{perm} = 75\%(30\%S_y) = 22,5\%(785MPa) = 176,63MPa$$

El esfuerzo permisible con el esfuerzo último

$$\tau_{perm} = 75\%(18\%S_u) = 13,5\%(980MPa) = 132,30MPa$$

Se toma el menor esfuerzo cortante permisible: 132,3MPa.

#### 5.8.3.2 Primera posibilidad

Luego la esbeltez:

$$\frac{L_G}{r} = \frac{4L_G}{d} = \frac{4(254,5)}{d} = \frac{1018}{d} < 115; \quad d > 8,85mm$$

Esfuerzo cortante permisible:

$$\tau_{Máximo} = \left\{ \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{\left[ K_b M + \frac{\alpha W_{tw} d}{8} \right]^2 + (K_t T)^2} \right\} \leq \tau_{permisible}$$

Reemplazando las magnitudes de la Tabla 5.18 en la ecuación:

$$\left\{ \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{\left[ 1,5(679) + \frac{1}{1 - \left(\frac{4,479}{d}\right)} \left(\frac{1048d}{8}\right) \left(\frac{1}{1000}\right) \right]^2 + [1(1719)]^2} \right\} (1000) \leq 132,3$$

Tabulando en una hoja de cálculo se cumple la desigualdad para:

$$d \geq 42.6mm$$

Tabla 5.18

Resumen de las magnitudes para el para el Cálculo por Resistencia.

Símbolo	Nombre	Magnitudes
$W_{tw}$	Fuerza tangencial en el tornillo sin fin, fuerza axial en el eje de salida	1 048 N
$T_s$	Torque de salida	1719 N.m
$M_3$	Momento de flexión crítico en el punto 3	679 N.m
$\tau_{perm}$	Esfuerzo cortante permisible	132,3 N.m
$K_b$	Factor combinado de choque y fatiga, aplicado al momento flector	1,5
$K_t$	Factor combinado de choque y fatiga, aplicado al momento de torsión	1
$\alpha =$	Factor de acción de columna	$\frac{1}{1 - \left(\frac{4,479}{d}\right)}$

Fuente: Elaboración propia.

#### 5.8.4 Criterio por inclinación en el rodamiento

El cálculo del diámetro mínimo por el criterio por inclinación de rodamiento se calcula de manera análoga al del tornillo.

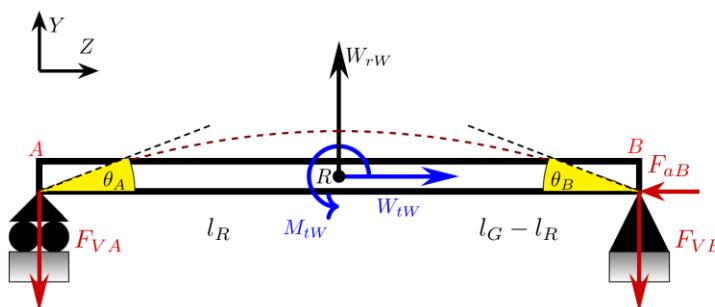
##### 5.8.4.1 Para el plano ZY

La inclinación angular en el plano XY tornillos de la Figura 5.34 se calcula como:

$$\theta_{zy}^A = \frac{l_R(l_G - l_R)(2l_G - l_R)W_{rw}}{6l_G EI}; \quad \theta_{zy}^B = \frac{l_R[(l_G)^2 - (l_R)^2]W_{rw}}{6l_G EI}$$

Figura 5.34

Inclinación angular en el plano ZY



Fuente: Elaboración propia.



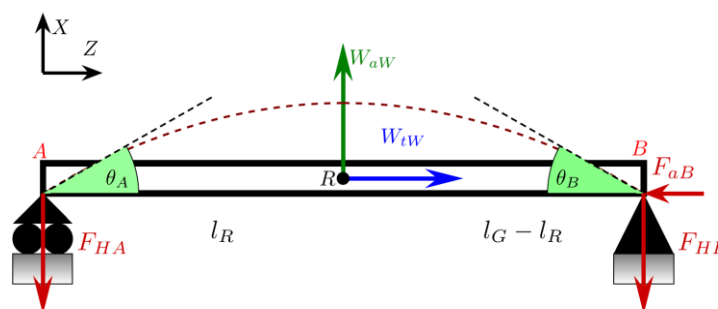
### 5.8.4.2 Para el plano ZX

La inclinación angular en el plano XY tornillos de la Figura 5.35 se calcula como:

$$\theta_{zx}^A = \frac{l_R(l_G - l_R)(2l_G - l_R)W_{aW}}{6l_G EI}; \quad \theta_{zx}^B = \frac{l_R[(l_G)^2 - (l_R)^2]W_{aW}}{6l_G EI}$$

Figura 5.35

Inclinación angular en el plano ZX.



Fuente: Elaboración propia.

### 5.8.4.3 Inclinación resultante

c) La inclinación resultante del ángulo en el punto A

$$\theta_A = \sqrt{(\theta_{zy}^A)^2 + (\theta_{zx}^A)^2} = \frac{l_R(l_G - l_R)(2l_G - l_R)\sqrt{W_{rW}^2 + W_{aW}^2}}{6l_G EI}$$

Considerando un ángulo conservador de  $\theta^\circ \leq 1^\circ$ :

$$\theta_A = \frac{l_R(l_G - l_R)(2l_G - l_R)\sqrt{W_{rW}^2 + W_{aW}^2}}{6l_G EI} \leq 1^\circ$$

$$\frac{64l_R(l_G - l_R)(2l_G - l_R)\sqrt{W_{rW}^2 + W_{aW}^2}}{6\pi l_G E d^4} \leq 1^\circ \left( \frac{\pi}{180^\circ} \right)$$

Se despeja el diámetro y reemplaza las magnitudes mostradas en la Tabla 5.19.

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{1.92l_R(l_G - l_R)(2l_G - l_R)\sqrt{W_{rW}^2 + W_{aW}^2}}{\pi^2 l_G E}}$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{1.920(127,5)(254,5 - 127,5)[2(254,5) - 127,5]\sqrt{3119^2 + 8505^2}}{\pi^2(254,5)(207)}} \left(\frac{1}{1000}\right)$$

$$d \geq 21.32\text{mm}$$

Tabla 5.19

Resumen de las magnitudes para el cálculo por inclinación de rodamientos.

Símbolo	Nombre	Magnitud
$W_{rW}$	Fuerza radia en el tornillo	3 119 N
$W_{aW}$	Fuerza axial en el tonillo	8 505 N
$l_G$	Longitud del eje de la rueda del apoyo A al B	254,5 mm
$l_R$	Longitud del apoyo A hasta el punto R	127,5 mm

Fuente: Elaboración propia.

#### d) La inclinación resultante del ángulo en el punto B

$$\theta_B = \sqrt{(\theta_{zy}^B)^2 + (\theta_{zx}^B)^2} = \frac{l_R(l_G - l_R)(l_G + l_R)\sqrt{W_{rW}^2 + W_{aW}^2}}{6l_W EI}$$

Considerando  $\theta \leq 1^\circ$ :

$$\theta_B = \frac{l_R[(l_G)^2 - (l_R)^2]\sqrt{W_{rW}^2 + W_{aW}^2}}{6l_G EI} \leq 1^\circ$$

$$\frac{64l_R[(l_G)^2 - (l_R)^2]\sqrt{W_{rW}^2 + W_{aW}^2}}{6\pi l_G E d^4} \leq 1^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)$$

Se despeja el diámetro y reemplaza las magnitudes mostradas en la

Tabla 5.19.

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{1.920l_R[(l_G)^2 - (l_R)^2]\sqrt{W_{rW}^2 + W_{aW}^2}}{\pi^2 l_G E}} \left(\frac{1}{1000}\right)$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{1\,920(127,5)(254,5^2 - 127,5^2)\sqrt{3119^2 + 8505^2}}{\pi^2(254,5)(207)}} \left(\frac{1}{1000}\right)$$

$$d \geq 21,33 \text{ mm}$$

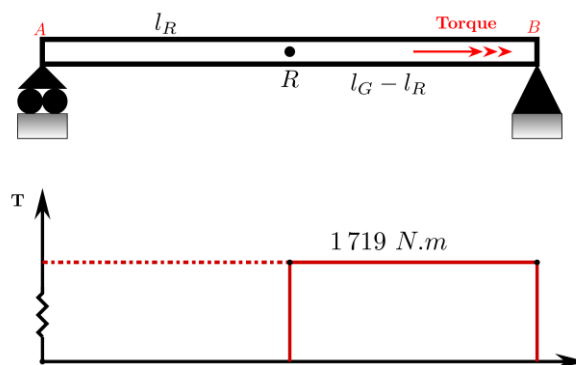
### 5.8.5 Criterio por deformación torsional

La deformación torsional para el eje de salida se resuelve análogamente al del tornillo sin fin, Así la cantidad permisible del ángulo de giro es  $3^\circ/1000 \text{ mm}$ .

En la Figura 5.36 se muestra que el torque de salida  $T_s = 1\,719 \text{ N.m}$  comienza a partir del punto  $R$ .

**Figura 5.36**

*Torque en el eje de salida.*



Fuente: Elaboración propia.

$$\left(\frac{\theta^\circ}{l}\right) = \frac{584T}{Gd^4} \leq \frac{3^\circ}{1000\text{mm}} \Rightarrow d \geq \sqrt[4]{\frac{584(1\,000)T}{3G}}$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{584(1\,000)1\,719}{3(79,62)}} \geq 45,28 \text{ mm}$$

### 5.8.6 Resumen de diámetros para el eje de salida

En la Tabla 5.20 un resumen de los diámetros mínimos para el eje de salida según cada criterio. Se seleccionan diámetros normalizados.

Así se tiene:

**Tabla 5.20**

*Diámetros del eje de salida por criterio.*

Criterio	Diámetros mínimos para el eje de salida[mm]				
	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$
ASME	19	40,28	56	44,5	38,95
Deformación lateral	-	-	34,75	-	-
Resistencia	-	-	42,6	-	-
Inclinación	21,32	-	-	-	21,33
Deformación torsional	-	-	45,28	45,28	45,28
<b>Diámetros asignados</b>	<b>25</b>	<b>42</b>	<b>82</b>	<b>60</b>	<b>50</b>

Fuente: Elaboración propia.

### 5.9 Relación de transmisión

El ratio teórico del reductor es de 40:1, dada por su geometría. Sin embargo, la reducción se ve afectada en términos de rendimiento, ya que la potencia está en relación directa al torque. Por lo tanto, se cumple la siguiente relación:

$$\frac{T_s}{T_e} \approx \frac{n_W}{n_G} \Rightarrow \frac{1719}{50,17} = 34,26$$

### 5.10 Esfuerzo de flexión en el tornillo sin fin

El esfuerzo de flexión máximo de un el tornillo de diámetro de raíz  $d_r$  está dado por:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = K_{ts} \frac{32M}{\pi d_r^3} \Rightarrow \sigma_{perm} = \left( \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{K_{ts}} \right) = \frac{32M}{\pi d_r^3}$$

En el área roscada del tornillo sin fin, según ANSI/AGMA 6022-C93 (1993), se considera que el factor de concentración de esfuerzos  $K_{ts}$  incluye la corrección de esfuerzos de flexión y torsión. Por tanto, el esfuerzo de flexión permisible es:

$$\sigma_{perm} = \frac{32000M}{\pi d_r^3} < 17\%S_u \text{ o } 75\%S_y$$

De la Tabla 5.1 el diámetro de raíz del tornillo sin fin es  $d_r = 70,37 \text{ mm}$ .

Luego:

$$\sigma_{perm} = \frac{32\,000(679)}{\pi(70,37)^3} = 19,85 \text{ MPa}$$

Los valores de los esfuerzos permisible:

$$17\%S_u = 17\%(900) = 153 \text{ MPa}; \quad 75\%S_y = 75\%650 = 487,5 \text{ MPa}$$

$$19,85 \text{ MPa} < 153 \text{ MPa}$$

Cumple satisfactoriamente las condiciones de esfuerzo permisible.

El factor de seguridad es:

$$FS = \frac{153}{19,85} = 7,71$$

### 5.11 Esfuerzo de flexión en los dientes de la rueda

De la ecuación (104) el esfuerzo de flexión en la raíz dientes de la rueda es:

$$\sigma_f = \frac{W_{tG}}{p_x F_G y \text{Cos} \lambda} = \frac{8\,505}{(37,75)(62)(0,125)\text{Cos}(6^\circ)} = 29,23 \text{ MPa}$$

Para el bronce SAE 65 (Bronce B-10.) el límite de fluencia es **170 MPa**.

Entonces el factor de seguridad es:

$$FS = \frac{170}{29,23} = 5,82$$

## 5.12 Geometría de la rueda

### 5.12.1 Material

El bronce fosforoso es una aleación de cobre que tiene propiedades antifricción y se identifica mediante su número de especificación:

ASTM-B505: C90700 o SAE 65.

ISO 1338: CuSn10.

Dureza: **80 BHN**

Elasticidad:  **$E = 90 \text{ GPa}$**

Límite de fluencia:  **$S_y = 170 \text{ MPa}$**

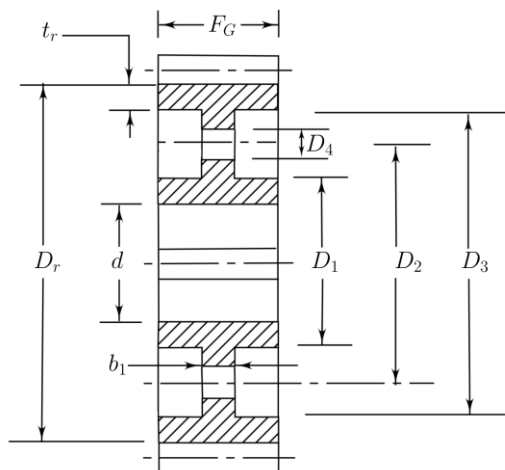
Esfuerzo último:  **$S_u = 280 \text{ MPa}$**

### 5.12.2 Geometría

Bhandari (2010) recomienda para una rueda fundida con un diámetro exterior ( $D_0 < 900 \text{ mm}$ ) las dimensiones de la Figura 5.37 y las magnitudes de la Tabla 5.21. Así:

**Figura 5.37**

*Dimensiones para aligerar la rueda.*



Fuente: Adaptado de Bhandari (2010, p.668).

Tabla 5.21

*Magnitudes para aligerar la rueda*

Geometría	Fórmula	Magnitud
Diámetro de raíz	$D_r$	380 mm
Diámetro del eje	$d$	72 mm
Diámetro exterior del cubo	$1,5d \leq D_1 \leq 2d$	123 mm
Espesor de la rueda	$2m \leq t_r \leq 3m$	30 mm
Grosor del alma	$0,2F_G \leq b_1 \leq 0,3F_G$	15 mm
Diámetro interior de la rueda	$D_3 = D_r - 2t_r$	320 mm
Diámetro del círculo primitivo de los agujeros	$D_2 = \frac{D_1 + D_3}{2}$	221,5 mm
Diámetro de los agujeros en la rueda	$D_4 = \frac{d_3 - d_1}{4}$	49,25 mm

Fuente: Elaboración propia.

### 5.13 Cálculo de rodamientos

Se usarán los rodamientos SKF que se basan en las normas ISO 281.

#### a) Carga dinámica equivalente

$$P = XF_r + YF_a$$

#### b) Vida nominal del rodamiento

$$L_{10} = \frac{60nN}{10^6}$$

#### c) Relación de carga y vida útil

$$L_{10} = \left(\frac{C}{P}\right)^p \Rightarrow C = P(L_{10})^{\frac{1}{p}}$$

#### 5.13.1 Rodamientos en el tornillo sin fin

La vida útil del rodamiento cuando  $n = 1750 \text{ rpm}$  y  $N = 5000$  horas,

en millones de revoluciones es:

$$L_{10} = \frac{60n_w N}{10^6} = \frac{60(1750)(5000)}{10^6} = 525$$

### 5.13.1.1 Rodamiento axial de doble efecto en soporte A

La carga dinámica en el soporte A, Figura 5.38, debido a una fuerza axial  $P = W_{aW} = 8,505 \text{ kN}$ ,  $L_{10} = 525$  y  $p = 3$  es:

$$C = 8,505(525)^{\frac{1}{3}} = 68,6 \text{ kN} < C_{eq}$$

**Tabla 5.22**

*Rodamiento axial de doble efecto en el soporte A*

Diámetro	Código	Carga equivalente
30 mm	52408	95,6 kN

Fuente: SKF (2019, p.486)

### 5.13.2 Rodamiento de rodillos cilíndricos en el soporte A

La carga dinámica en el soporte A, Figura 5.38, debido a una fuerza radial  $F_{rA} = 1,9 \text{ kN}$ ,  $L_{10} = 525$  y  $p = 1/3$  es:

$$C = 1,9(525)^{\frac{3}{10}} = 12,43 \text{ kN} < C_{eq}$$

**Tabla 5.23**

*Rodamiento de rodillos cilíndricos para el soporte A.*

Diámetro	Código	Carga equivalente
40 mm	NU 1008	25,1 kN

Fuente: SKF (2019, p.520)

### 5.13.3 Rodamientos de rodillo cilíndrico para el soporte B

La carga dinámica en el soporte B, Figura 5.38, debido a una fuerza radial  $F_{rB} = 1,3 \text{ kN}$ ,  $L_{10} = 525$  y  $p = 1/3$  es:

$$C = 1,3(525)^{\frac{3}{10}} = 8,5 \text{ kN} < C_{eq}$$

**Tabla 5.24**

*Rodamiento de rodillo cilíndrico para el soporte B.*

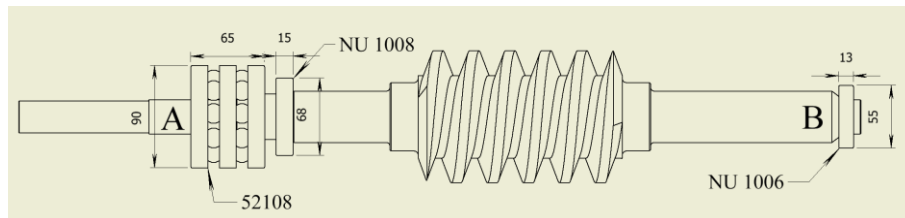
Diámetro	Código	Carga equivalente
30 mm	NU 1006	17,9 kN

Fuente: SKF (2019, p.518)



**Figura 5.38**

Rodamientos en el tornillo sin fin.



Fuente: Elaboración propia.

#### 5.13.4 Rodamientos para el eje de salida

La vida útil del rodamiento cuando  $n = 43,75 \text{ rpm}$  y  $N = 5\,000$  horas, en millones de revoluciones es:

$$L_{10} = \frac{60nN}{10^6} = \frac{60(43,75)(5\,000)}{10^6} = 13,125$$

Rodamiento de una hilera de bolas con contacto angular

El objetivo es calcular las cargas equivalentes dinámicas  $C_A$  y  $C_B$  en cada soporte. Se procede a seguir los siguientes pasos:

##### a) El montaje es en disposición X

Para el cálculo de las fuerzas axiales inducidas, se hace uso de Tabla 5.25 y la Figura 5.39 (caso 1b).

**Tabla 5.25**

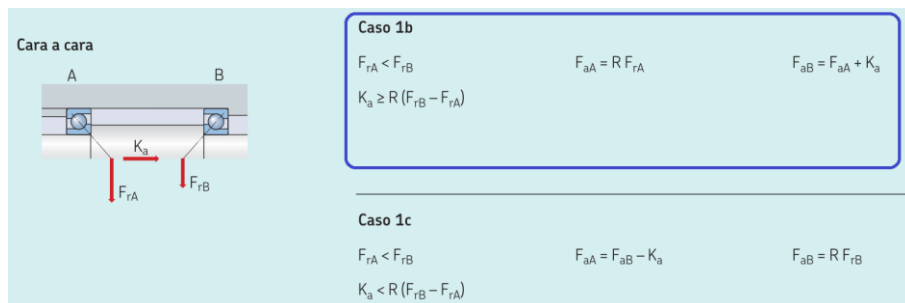
Factores de cálculo R.

SERIE	R	$\frac{Fa}{Fr} \leq R$		$\frac{Fa}{Fr} > R$	
		X	Y	X	Y
72B-73B	1,14	1,0	0,0	0,35	0,57

Fuente: SKF (2019, p.400)

Figura 5.39

Caso 1b; cargas radiales y axiales



Nota. Factor de cálculo:  $R$ . Fuente: SKF (2019, p.401)

Primera condición de carga:

$$F_{rA} < F_{rB}$$

Para los soportes  $A$  y  $B$  las cargas radiales,  $F_{rA} = 4\,520,53\text{ N}$  y  $F_{rB} = 4\,538,61\text{ N}$ . Luego:

$$F_{rA} < F_{rB} \Rightarrow 4\,520,53\text{ N} < 4\,538,61\text{ N}$$

Segunda condición de carga:

$$K_a \geq R(F_{rB} - F_{rA})$$

Y para una carga axial  $K_a = 1\,048\text{ N}$  y un factor  $R = 1,14$ . (Tabla 5.25), se tiene:

$$1\,048\text{ N} > 1,14(4\,538,61 - 4\,520,53)\text{ N} \Rightarrow 1\,048\text{ N} > 20\text{ N}$$

Se cumple las condiciones de carga. Ahora se procede al cálculo de las cargas axiales inducidas en cada uno de los soportes:

b) Carga axial inducida en el soporte  $A$ :

$$F_{aA} = R F_{rA} = 1,14(4\,520,53) = 6\,328,74\text{ N}$$

c) Carga axial inducida en el soporte  $B$ :

$$F_{aB} = F_{aA} + K_a = 6\,328,74 + 1\,048 = F_{aB} = 7\,376,74\text{ N}$$

Finalmente, se compara las cargas axiales inducidas con las fuerzas radiales de cada soporte para obtener los factores  $X$  y  $Y$ .

**d) Factores X y Y en el soporte A**

$$\frac{F_{aA}}{F_{rA}} = 1.14$$

Por lo tanto, según la Tabla 5.25, cuando  $X = 1.0$  y  $Y = 0$ , la carga dinámica equivalente es:

$$P_A = XF_{rA} + YF_{aA} = 1,0(4\,520,53) \left( \frac{1}{1\,000} \right) = 4,5 \text{ kN}$$

**e) Factores X y Y en el soporte B**

$$\frac{F_{aB}}{F_{rB}} = \frac{7\,376,74}{4\,538,61} \Rightarrow \frac{F_{aB}}{F_{rB}} = 1,62 > 1.14$$

Por lo tanto, según la Tabla 5.25, cuando  $X = 0.35$  y  $Y = 0.57$ , la carga dinámica equivalente es:

$$P_B = XF_{rB} + YF_{aB}$$

$$P_B = [0.35(4\,538,61) + 0.57(7\,376,74)] \left( \frac{1}{1\,000} \right) = 5,8 \text{ kN}$$

**f) Capacidad de carga dinámica del soporte A**

$$C_A = P_A (L_{10})^{\frac{1}{p}} = 4,5(13,125)^{\frac{1}{3}} = 10,61 \text{ kN}$$

**Tabla 5.26**

*Rodamiento de una hilera de bolas con contacto angular en el soporte A*

Diámetro	Código	Carga equivalente
25 mm	7305B	24,2 kN

Fuente: SKF (2019, p. 408)

**g) Capacidad de carga dinámica del soporte B**

$$C_B = P_B (L_{10})^{\frac{1}{p}} = 5,1(13,125)^{\frac{1}{3}} = 12,03 \text{ kN}$$

**Tabla 5.27**

*Rodamiento de una hilera de bolas con contacto angular en el soporte B*

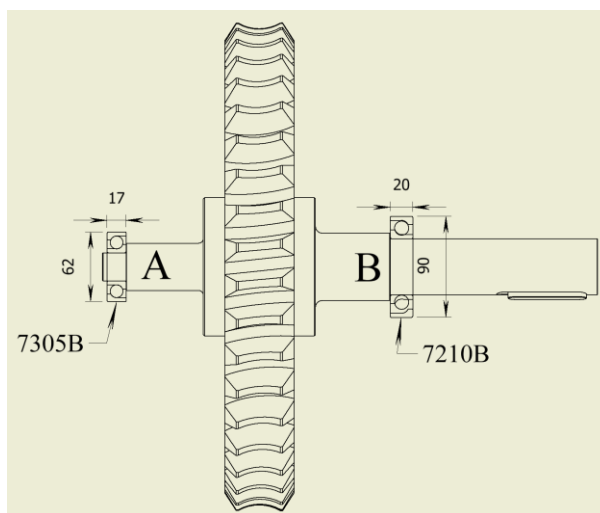
Diámetro	Código	Carga equivalente
50 mm	7210B	37,7 kN

Fuente: SKF (2019, p.412)

En la Figura 5.40, se muestra la disposición en los apoyos A y B del eje de salida.

**Figura 5.40**

*Rodamientos en el eje de salida.*



Fuente: Elaboración propia.

## 5.14 Cálculo de chavetas

### 5.14.1 Material

La chaveta es de menor resistencia que el eje de acoplamiento. Así, el material que se elige es el hierro dulce AISI 1006 laminado en caliente con:

Límite de fluencia:  $S_y = 170 \text{ MPa}$

Esfuerzo último:  $S_u = 330 \text{ MPa}$

### 5.14.2 Esfuerzo por cizalladura

Se calcula como:

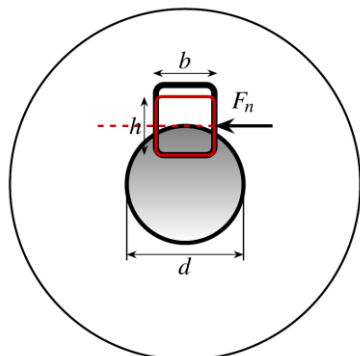
$$\tau = 0,57S_y = 0,57(170) \Rightarrow \tau = 96,9 \text{ MPa}$$

La longitud mínima de la chaveta (Figura 5.41) por cizalladura es:

$$L = \frac{2000T}{\tau bd} [\text{mm}]$$

Figura 5.41

Chaveta incrustado en el canal chavetero, color rojo.



Nota. Se observa una fuerza normal  $F_n$  a la chaveta que actúa tangente al eje de diámetro  $d$ .

Fuente: Elaboración propia.

### 5.14.3 Esfuerzo por compresión

Jagadeesha (2019) recomienda para materiales dúctiles que el esfuerzo de compresión es:

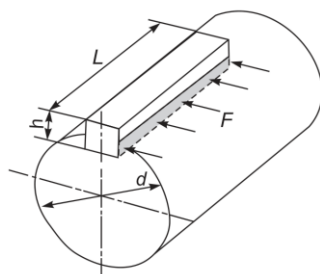
$$\sigma_c \approx 2\tau \approx 2(96,9) \Rightarrow \sigma_c \approx 193,8 \text{ MPa}$$

La longitud mínima de la chaveta por cizalladura es:

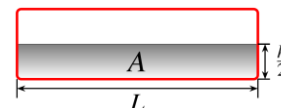
$$L = \frac{4000T}{\sigma_c h d} [\text{mm}]$$

Figura 5.42

Área de la chaveta sometida a compresión.



a) Chaveta de  $b \times h \times L$



b)  $A$  es el área de la sección por compresión.

Fuente: Adaptado de Jagadeesha (2019, p. 576).

Para dimensiones de chavetas conservadoras, longitud  $\ell$  típica del cubo está comprendida entre  $1,25d - 2,4d$ ; y si la longitud requerida de la chaveta es  $L \geq 2d$ , es conveniente usar una segunda chaveta separada  $180^\circ$ .

#### 5.14.4 Chaveta del tornillo sin fin

Para un diámetro  $d = 28 \text{ mm}$ , según la norma UNE 17.102 H1/ ISO 898-1, se tiene una sección transversal de la chaveta de  $8 \text{ mm} \times 7 \text{ mm}$ . Luego, la chaveta tiene una longitud  $L$ :

##### a) Por cizalladura

$$L = \frac{2\,000T}{\tau b d} = \frac{2\,000(51,17)}{(96,9)(8)(28)} \Rightarrow L \geq 4,71 \text{ mm}$$

##### b) Por compresión

$$L = \frac{4\,000T}{\sigma_c h d} = \frac{4\,000(51,17)}{(193,8)(7)(28)} \Rightarrow L \geq 5,39 \text{ mm}$$

Como la longitud típica del cubo es  $1,25d \leq \ell \leq 2,4d$ , entonces:

$$35 \text{ mm} \leq \ell \leq 67,2 \text{ mm}$$

Se asume una canal chavetero de  $\ell = 35 \text{ mm}$  y una chaveta de  $8 \text{ mm} \times 7 \text{ mm} \times 25 \text{ mm}$ .

#### 5.14.5 Chaveta que une el eje de salida con la rueda dentada

Para un diámetro  $d = 72 \text{ mm}$ , según la norma UNE 17.102 H1/ ISO 898-1, se tiene una sección transversal de la chaveta de  $20 \text{ mm} \times 12 \text{ mm}$ . Luego, la chaveta tiene una longitud  $L$ :

## a) Por cizalladura

$$L = \frac{2\,000T}{\tau bd} = \frac{2\,000(1\,719)}{(96,9)(20)(72)} \Rightarrow L \geq 24,64 \text{ mm}$$

## b) Por compresión

$$L = \frac{4\,000T}{\sigma_c hd} = \frac{4\,000(1\,719)}{(139,8)(12)(72)} \Rightarrow L \geq 56,93 \text{ mm}$$

Como la longitud “típica” del cubo está entre  $1,25d \leq \ell \leq 2,4d$ .

Entonces:

$$90 \text{ mm} \leq \ell \leq 172,8 \text{ mm}$$

Se asume un canal chavetero de  $\ell = 90 \text{ mm}$  y una chaveta de  $20 \text{ mm} \times 12 \text{ mm} \times 60 \text{ mm}$

## 5.14.6 Chaveta del eje de salida

## a) Por cizalladura

Para un diámetro de  $50 \text{ mm}$  se asume una sección de  $14 \times 9$ , entonces:

$$L = \frac{2\,000T}{\tau bd} = \frac{2\,000(1\,719)}{(96,9)(14)(50)} \Rightarrow L \geq 50,68 \text{ mm}$$

## b) Por compresión

Para un diámetro de  $50 \text{ mm}$  se asume una sección de  $14 \times 9$ . Entonces:

$$L = \frac{4\,000T}{\sigma_c hd} = \frac{4\,000(1\,719)}{(193,8)(9)(50)} \Rightarrow L \geq 78,84 \text{ mm}$$

Como la longitud típica del cubo es  $1,25d \leq \ell \leq 2,4d$ . Entonces:

$$62,5 \leq \ell \leq 120$$

La longitud del canal chavetero  $\ell = 90\text{mm}$ , por lo tanto, las dimensiones de la chaveta son  $14\text{ mm} \times 9\text{ mm} \times 80\text{ mm}$ .

### 5.15 Tuerca de sujeción

En la Figura 5.43, se muestra la altura  $h$  requerida para la tuerca que impide el deslizamiento, impedido por las roscas. Entonces, se cumple de forma aproximada:

$$F_t \approx F_c$$

$$F_c = \pi d_r h (\tau_{\text{máx}}); \quad F_t = \frac{\pi}{4} (d_r)^2 S_y$$

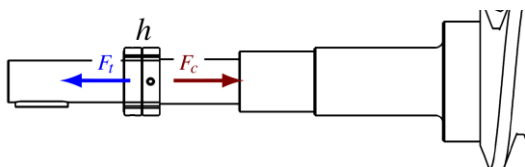
$$\pi d_r h (\tau_{\text{máx}}) \approx \frac{\pi}{4} (d_r)^2 S_y \Rightarrow \pi d_r h \left( \frac{S_y}{\sqrt{3}} \right) \approx \frac{\pi}{4} (d_r)^2 S_y$$

$$h \approx \frac{\sqrt{3}}{4} d_r \approx 0,433 d_r$$

La altura de la rosca está en función del diámetro del núcleo de rosca  $d_r$ .

**Figura 5.43**

*Tuerca de sujeción en el eje del tornillo sin fin.*



*Nota.*  $F_c$  y  $F_t$  son la fuerza de corte y tracción respectivamente. Fuente: Elaboración propia.

Se necesita calcular el número de tuercas estriadas de precisión  $M30 \times 1.5$  de altura  $12\text{mm}$ . Por ello, se usa la siguiente fórmula  $d_r = d - 1,226869p$ , tomada de la norma ANSI B1.1-1974. Así se tiene:

$$d_r = d - 1,226869p = 30 - 1,226869(1,5) = 28,16\text{ mm}$$

Luego la altura de un perno solicitado es:

$$h = 0,433 d_r \approx 0,43(28,16) \approx 12,2\text{ mm}$$

Por lo tanto, se necesita 2 tuercas.



## 5.16 Análisis por MEF

La metodología que será empleada para abordar esta simulación por el MEF es la presentada en la Figura 2.17.

### 5.16.1 Modelo

#### 5.16.1.1 Geometría 3D con KissSoft

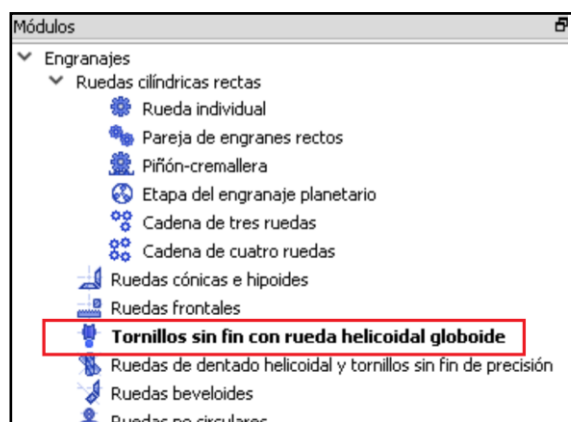
El objetivo es conseguir la geometría del sistema de tornillo-rueda en 3D con el programa *KissSoft* y exportar el archivo en formato *.x\_b*, para su posterior modificación con el software *Autodesk Inventor*. Para lograrlo, se deben seguir los siguientes pasos:

##### a) Selección del tipo de reductor

El usuario debe ingresar al entorno de trabajo del programa *KissSoft* y luego seleccionar la pestaña “módulos”. Posteriormente, seleccionar la opción Tornillo sin fin con rueda helicoidal globoide, tal como se muestra en la Figura 5.44.

**Figura 5.44**

*Tipos de engranajes.*



Fuente: Vista de pantalla adaptado del programa *KissSoft*.

## b) Geometría del tornillo sin fin y rueda dentada

Al ingresar los parámetros básicos de diseño, como se muestra en las Figuras 5.45 y 5.46, tales como el número de dientes, anchos, módulo axial, etc.

**Figura 5.45**

*Ingreso de datos geométricos I*

	Tornillo sin fin	Rueda	
Número de dientes	z	1	40
Ancho del diente	b/b <sub>2x</sub>	180.0000	62.0000 mm
Coefficiente de desplazamiento de perfil	x <sup>*</sup>	0.0000	0.0002
Factor de cambio del espesor del diente	x <sub>s</sub>	0.0000	0.0000
Calidad (DIN 3974)	Q	6	7

Fuente: Vista de pantalla adaptado del programa *KissSoft*.

**Figura 5.46**

*Ingreso de datos geométricos II.*

Geometría	
Módulo axial/transversal	m <sub>a</sub> /m <sub>t</sub> 10.1063 mm
Ángulo de presión normal	α <sub>n</sub> 20.0000 °
Tornillo sin fin	hélice a izquierda
Ángulo de inclinación en la circunferencia primitiva	γ 6.0257 °
Distancia entre centros	a 250.0000 mm

Fuente: Vista de pantalla adaptado del programa *KissSoft*.

## c) Perfil geométrico de los dientes

En este apartado se seleccionará el perfil geométrico de los dientes del tornillo sin fin y rueda dentada. Como se ve en las Figuras 5.47 y 5.48.

**Figura 5.47***Selección del tornillo sin fin.*

Selección de la rueda dentada	Tornillo sin fin
Herramienta del acabado	
Selección de la herramienta	Perfil de referencia, rueda
Seleccionar perfil de referencia	1.25 / 0.25 / 1.0 ISO 53:1998 Perfil C

Fuente: Vista de pantalla adaptado del programa *KissSoft*.**Figura 5.48***Selección de la rueda dentada.*

Selección de la rueda dentada	Rueda
Herramienta del acabado	
Selección de la herramienta	Perfil de referencia, rueda
Seleccionar perfil de referencia	1.25 / 0.38 / 1.0 ISO 53:1998 Perfil A

Fuente: Vista de pantalla adaptado del programa *KissSoft*.**d) Desviaciones**

Al elegir las tolerancias según Niemann, del tornillo sin fin y la rueda dentada se muestran por defecto en las Figuras 5.49 y 5.50.

**Figura 5.49***Desviaciones del tornillo sin fin.*

Desviaciones		Tornillo sin fin	
Tolerancia del espesor del diente		Tornillo sin fin según Niemann	
Desviación del espesor del diente (máximo/mínimo)	$A_{2p}$	0.0000	-0.0747 mm <input checked="" type="radio"/>
Desviación de la medida entre dientes (máximo/mínimo)	$A_{4p}$	0.0000	-0.0702 mm <input type="radio"/>
Juego normal (máximo/mínimo)	$j_p$	0.0000	0.0702 mm <input type="radio"/>
Juego circunferencial (máximo/mínimo)	$j_t$	0.0000	0.0752 mm <input type="radio"/>
Desviación del diámetro de cabeza (máximo/mínimo)	$A_{3d}$	0.0000	-0.0100 mm <input checked="" type="checkbox"/>
Desviación de la circunferencia del pie (máximo/mínimo)	$A_{3p}$	0.0000	-0.2053 mm <input type="checkbox"/>

Fuente: Vista de pantalla adaptado del programa *KissSoft*.

**Figura 5.50**

*Desviaciones de la Rueda dentada.*

Rueda			
	Rueda helicoidal según Niemann		
$A_{2n}$	-0.2992	-0.3739	mm <input checked="" type="radio"/>
$A_{2m}$	-0.2811	-0.3513	mm <input type="radio"/>
$j_n$	0.2811	0.3513	mm <input type="radio"/>
$j_t$	0.3008	0.3759	mm <input type="radio"/>
$A_{2a}$	0.0000	-0.0100	mm <input checked="" type="checkbox"/>
$A_{2r}$	-0.8265	-1.0329	mm <input type="checkbox"/>

Fuente: Vista de pantalla adaptado del programa *KissSoft*.

### e) Generado del sistema tornillo sin fin y rueda dentada

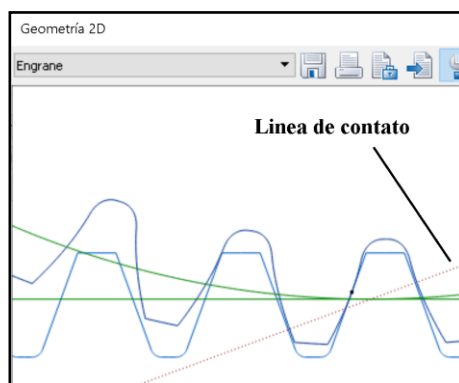
Una vez ingresado los datos geométricos al programa *KissSoft*, se procede a verificar el contacto entre dientes, Figura 5.51, y posteriormente se genera el sólido 3D, Figura 5.52.

Los dientes de esta rueda son ligeramente más grandes que la generada por Autodesk Inventor. Por lo tanto, más pesada:

$$m_{\text{rueda KissSoft}} = 42,14 \text{ kg} > m_{\text{Autodesk Inventor}} = 40,63 \text{ kg}$$

**Figura 5.51**

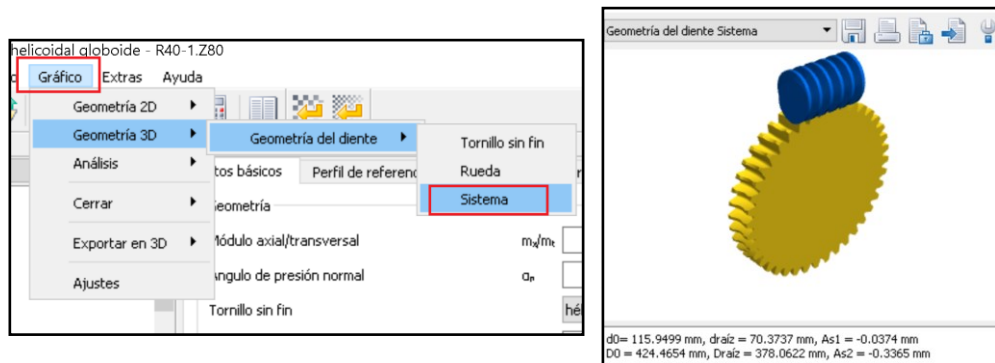
*Contacto entre dientes.*



Fuente: Vista de pantalla adaptado del programa *KissSoft*.

**Figura 5.52**

*Geometría del diente Sistema en formato .x\_b*



a) Pestaña para generado del sistema tornillo – rueda.

b) Sistema tornillo - rueda

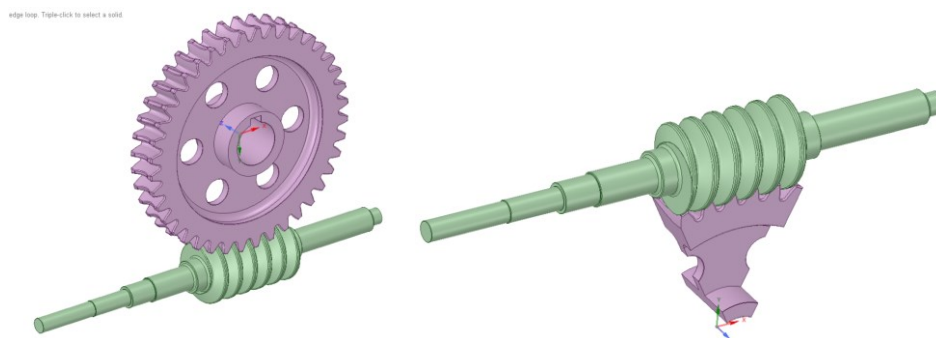
*Nota.* Una vez generado el sólido en 3D guardarlo en formato .x\_b.

Fuente: Vista de pantalla adaptado del programa KissSoft.

Finalmente, el sistema tornillo – rueda se ha modificado mediante el programa *Autodesk Inventor*, tal y como se muestra en la Figura 5.53.

**Figura 5.53**

*Geometría del tornillo sin fin y rueda dentada modificados.*



a) Tornillo sin fin rueda dentada

b) Parte de rueda dentada en contacto.

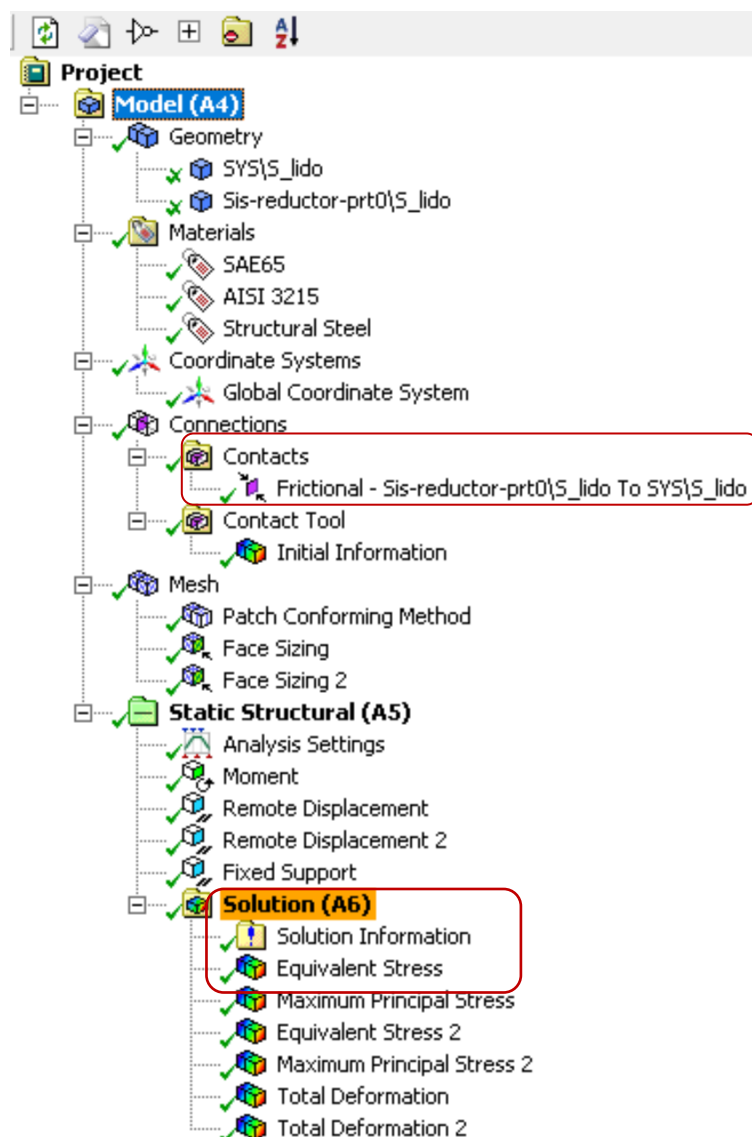
Fuente: Elaboración propia.

### 5.16.1.2 Condiciones de frontera

En la Figura 5.54 se muestra el árbol de operaciones del programa *Ansys*, en el que se aplica las restricciones conocidas como condiciones de frontera.

**Figura 5.54**

*Árbol de operaciones.*

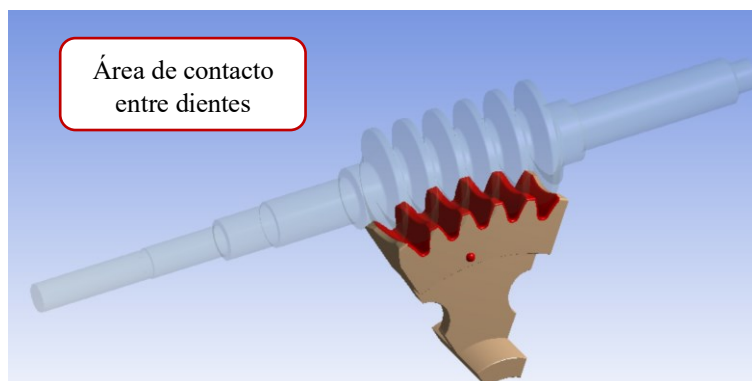


Fuente: Vista de pantalla adaptado del programa *Ansys*.

En la Figura 5.55, se muestra el tornillo sin fin y rueda dentada, coloreado de rojo, aparecen en contacto.

**Figura 5.55**

*Área de contacto entre dientes.*

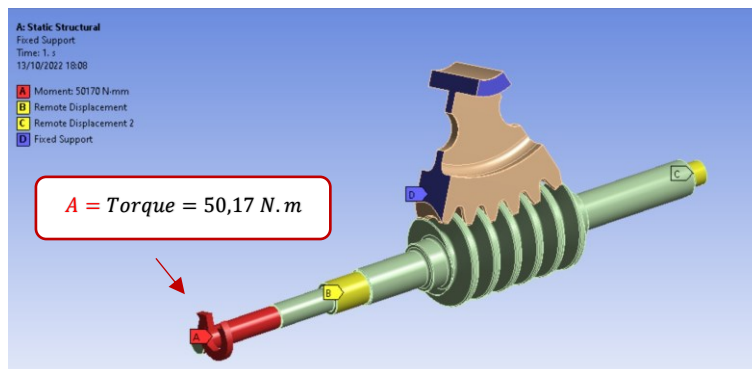


Fuente: Vista de pantalla adaptado del programa *Ansys*.

En la Figura 5.6 se muestran las restricciones de movimiento de los rodamientos, los dientes en contacto y el torque aplicado al apoyo A.

**Figura 5.56**

*Condiciones de frontera: Torque de entrada y restricción de desplazamiento.*



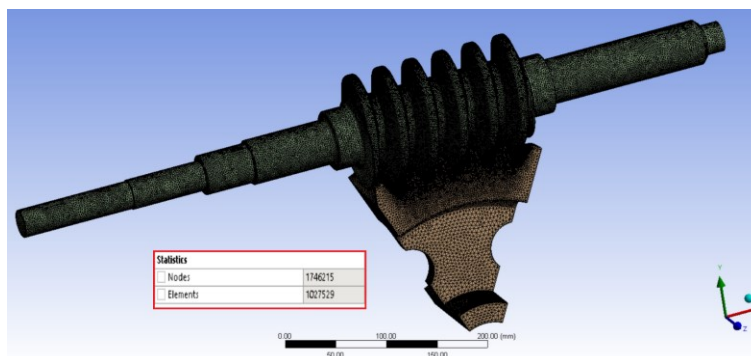
Fuente: Vista de pantalla adaptado del programa *Ansys*.

### 5.16.1.3 Mallado

La discretización del sólido en partes pequeñas de diferentes formas 3D se conoce como mallado; por ejemplo, tetraedros. Cuantos más elementos se discreticen, mayor será la exactitud del resultado. Por ejemplo, el conjunto tornillo sin fin y rueda dentada de las Figura 5.57 y 5.60 se discretizó en 1 027 529 elementos para 1 746 215 nodos.

**Figura 5.57**

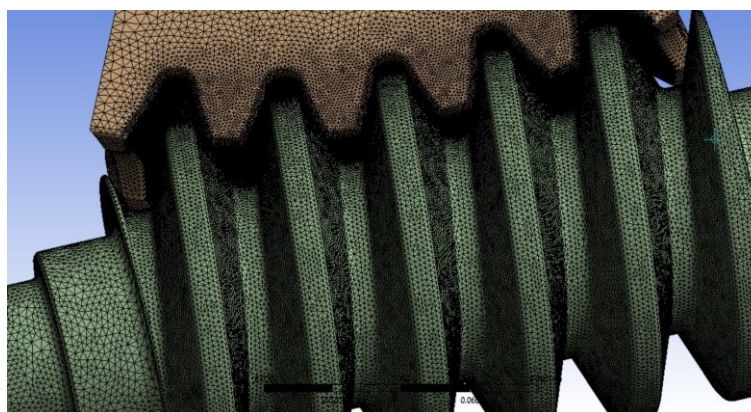
*Mallado tipo tetraédrico del tornillo sin fin y rueda dentada.*



Fuente: Vista de pantalla adaptado del programa *Ansys*.

**Figura 5.58**

*Acercamiento del tornillo sin fin y rueda dentada.*

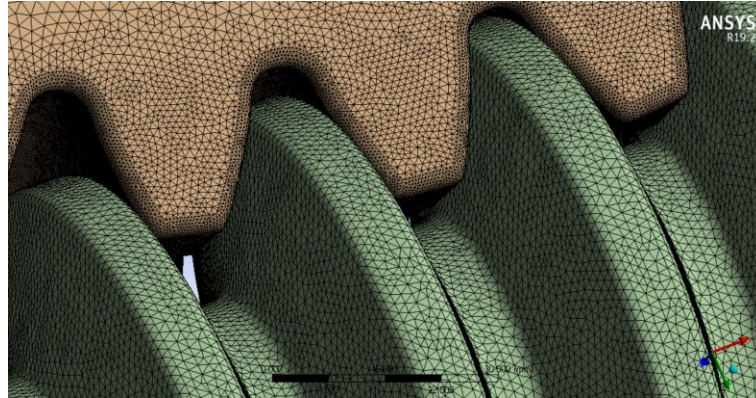


Fuente: Vista de pantalla adaptado del programa *Ansys*.



**Figura 5.59**

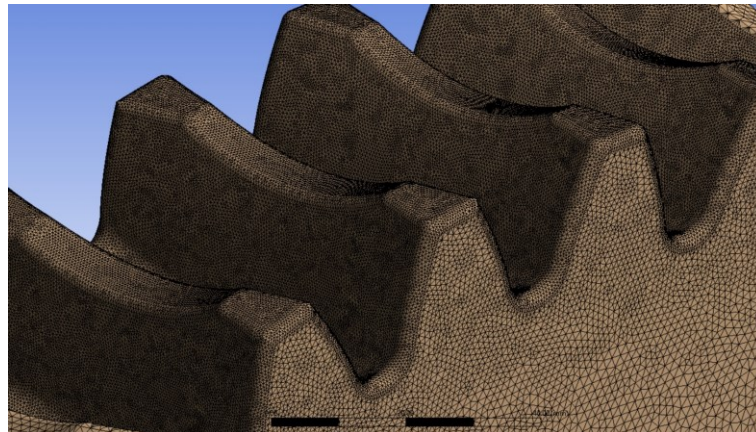
*El Mallado de la rueda es más fino que el tornillo sin fin.*



Fuente: Vista de pantalla adaptado del programa *Ansys*.

**Figura 5.60**

*Mallado fino de los dientes de la rueda dentada.*



Fuente: Vista de pantalla adaptado del programa *Ansys*.

### 5.16.2 Análisis o Simulación

La simulación se interpreta como una caja negra, ya que el proceso de cálculo es desconocido por el usuario. Se utiliza el *Software Ansys* para calcular los esfuerzos y deformaciones.

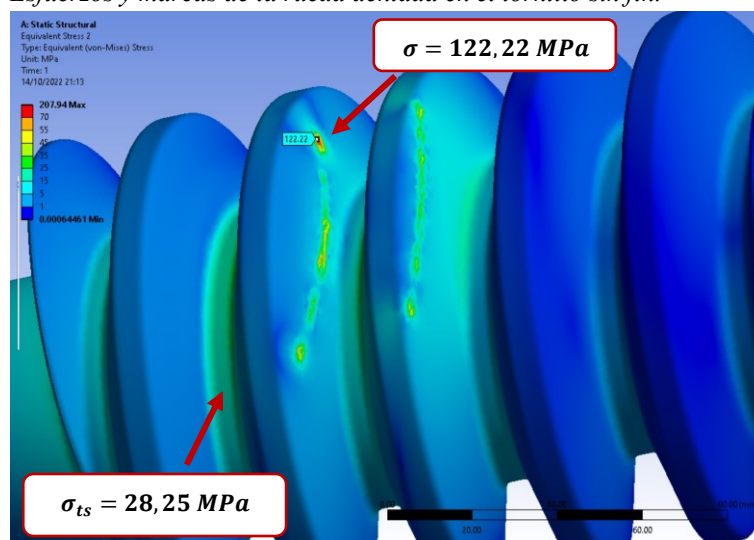
### 5.16.3 Interpretación de resultados

#### 5.16.3.1 Esfuerzos en el tornillo sin fin

En la Figura 5.61 se muestran los esfuerzos máximos en el diámetro de raíz y en la cara del tornillo. Las Figuras 5.62 y 5.63 muestran los esfuerzos máximos en el redondeo.

Figura 5.61

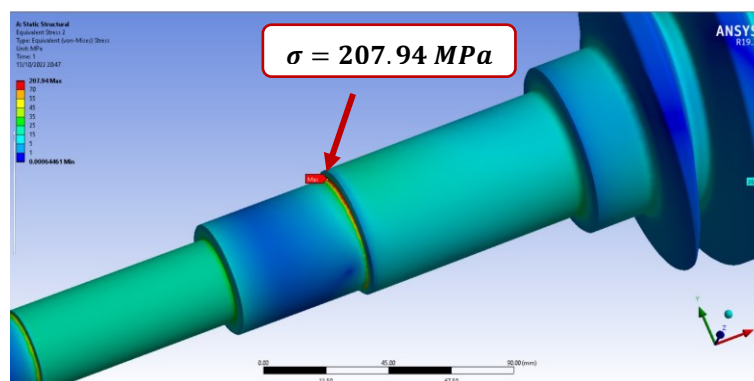
*Esfuerzos y marcas de la rueda dentada en el tornillo sin fin.*



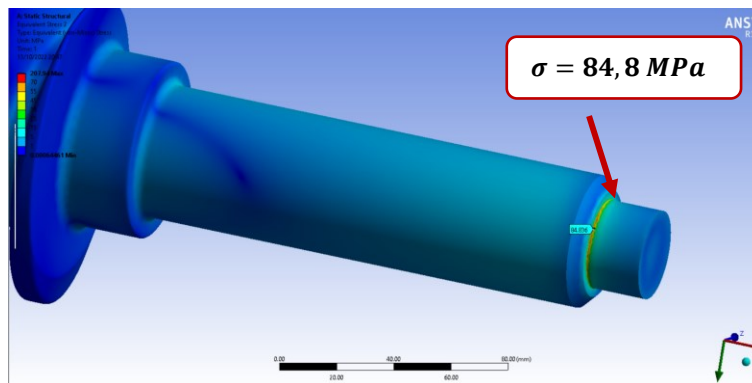
Fuente: Vista de pantalla adaptado del programa *Ansys*.

Figura 5.62

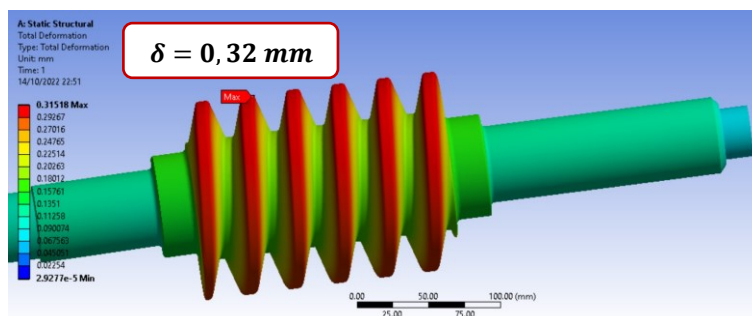
*Eje de entrada, lado izquierdo*



Fuente: Vista de pantalla adaptado del programa *Ansys*.

**Figura 5.63***Eje de entra, lado derecho.*Fuente: Vista de pantalla adaptado del programa *Ansys*.**5.16.3.2 Deformaciones en los dientes del tornillo sin fin.**

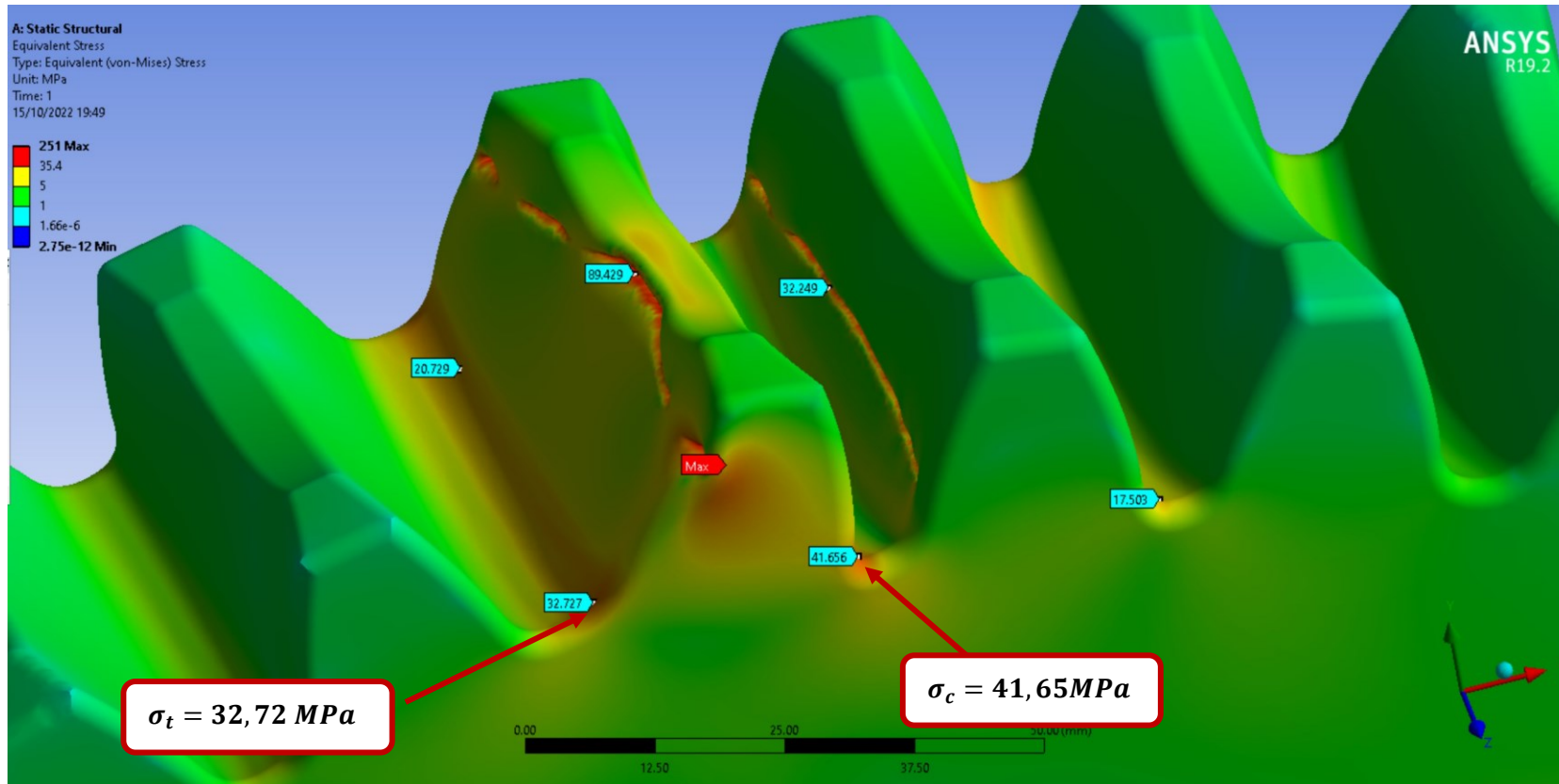
En la Figura 5.64 se muestra exageradamente la deformación máxima para una mejor apreciación.

**Figura 5.64***Deformación de los dientes*Fuente: Vista de pantalla adaptado del programa *Ansys*.**5.16.3.3 Esfuerzos en la rueda dentada**

En la Figura 5.65 se muestran los esfuerzos máximos en los dientes sometidos a tracción y compresión. Mientras que en la Figura 5.66 se muestran los esfuerzos máximos por contacto.

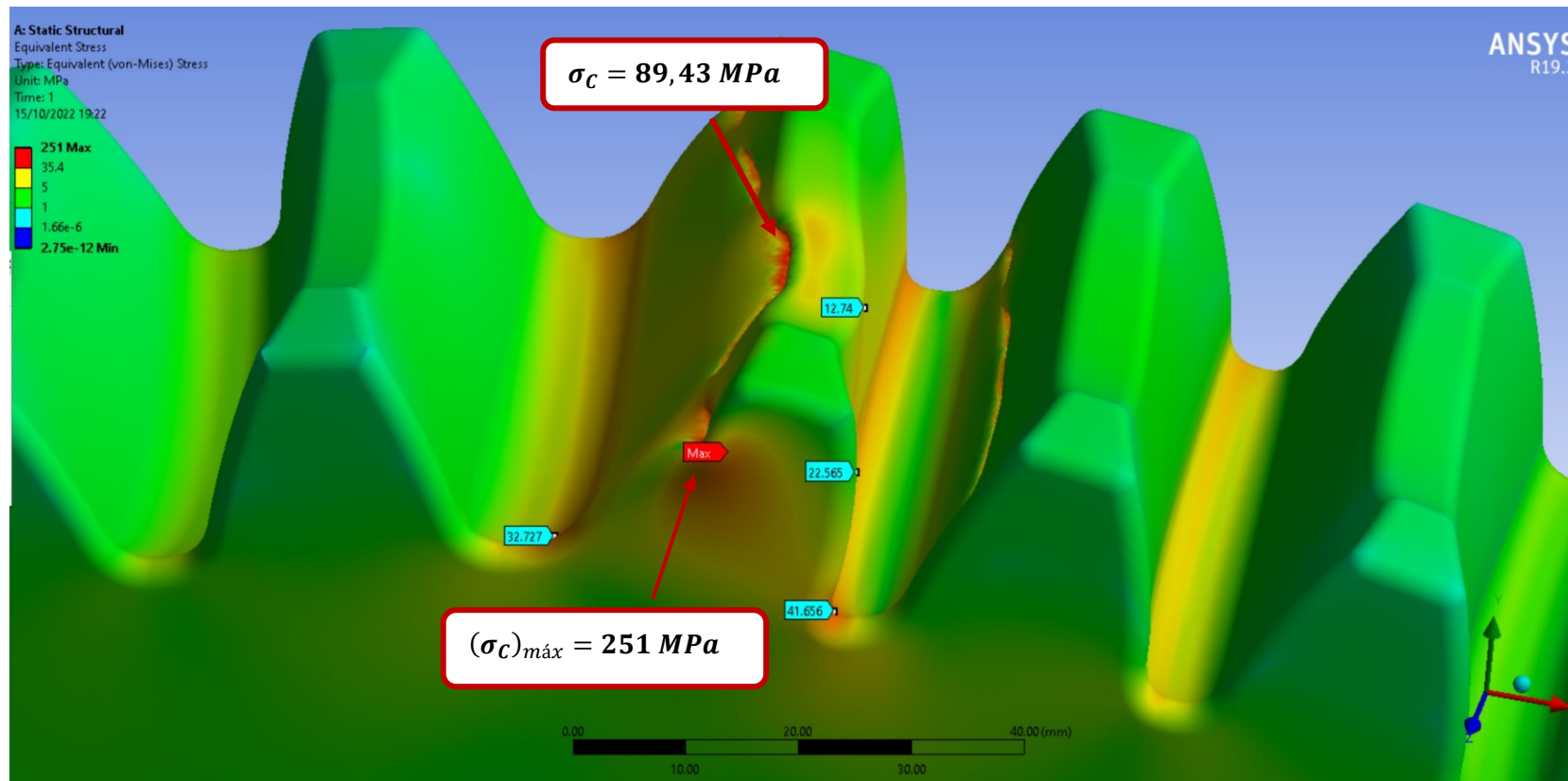
Figura 5.65

*Esfuerzos de tracción y compresión.*



Fuente: Vista de pantalla adaptado del programa *Ansys*.

Figura 5.66

*Esfuerzo por contacto.*Fuente: Vista de pantalla adaptado del programa *Ansys*.

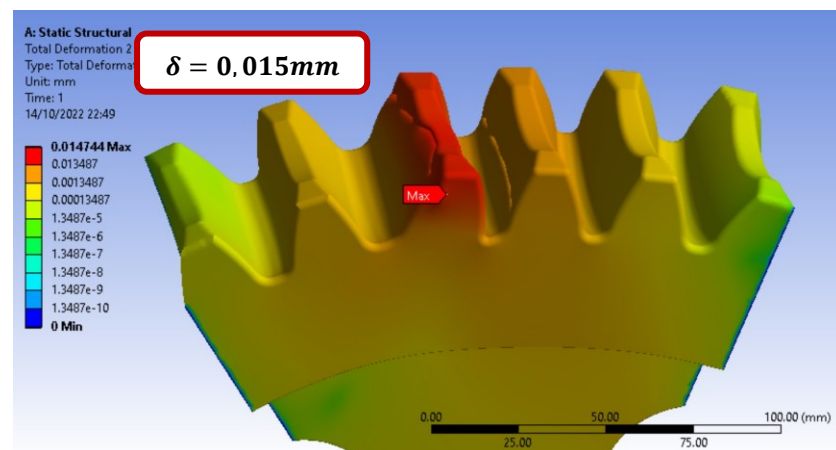


### 5.16.3.4 Deformaciones del diente en rueda

Las deformaciones máximas como se muestra en la Figura 5.67 eta coloreada de rojo y se ha representado de manera exagerada para una mejor visualización.

**Figura 5.67**

*Deformación de los dientes de la rueda dentada*



Fuente: Vista de pantalla adaptado del programa *Ansys*.

## 5.17 PRESUPUESTO

El presupuesto es una parte importante en todo proyecto, considerando los costos de materiales, proyectista y mano de obra, se hace la lista de precios unitarios como se muestra en la Tabla 5.28 para tener un alcance del costo de fabricación del reductor.

**Tabla 5.28***Presupuesto de materiales.*

n.º	Unid.	Nombre	P.Unid[\$]	Costo[\$]
1	1	Tornillo sin fin	721,9	721,92
2	1	Rueda de 40 dientes	607,6	607,62
3	1	Eje de salida	170,2	170,23
4	1	Alojamiento lateral izquierda	26,7	26,74
5	1	Brida lateral izquierda del eje de entrada	13,8	13,83
6	1	Brida lateral derecha del eje de entrada	3,69	3,69
7	1	Brida frontal del eje de salida	7,38	7,38
8	1	Brida posterior del eje de salida	3,32	3,32
9	1	Caja - base	351,74	351,74
10	1	Caja - tapa	458,23	458,23
11	1	Manguito distanciador 56x40	1,9	1,85
12	1	Manguito distanciador 30x38	3,7	3,70
13	1	SKF 52408	13	13,00
14	1	SKF NU1008	9,25	9,25
15	1	SKF NU1006	6,730	6,73
16	1	SKF 7208B	5,75	5,75
17	1	SKF 7305B	5,23	5,23
18	1	ISO 6194 - A 30x40x7	0,57	0,57
19	1	ISO 6194 - A 45x60x8	0,72	0,72
20	1	ISO 6194 - A45x68x8	0,61	0,61
21	1	ISO 6194 - A 50x65x8	0,73	0,73
22	1	ISO R773 - A 8x7x25	1	1,00
23	1	ISO R773 - A 14x9x80	1	3,50
24	1	ISO R773 - A 20x12x60	1	1,00
25	42	ISO 7089 - 10.5 Grado A	0,008	0,33
26	6	ISO 7089 - 8,4 - 140HV	0,004	0,02
27	6	ISO 7089 - 13 Grado A	0,178	1,07
28	42	ISO 4017 M10x1,5x40 - Grado 8,8	0,172	7,22
29	18	ISO 4017 M10x1,5x35 - Grado 8,8	0,16	2,88
30	4	ISO 4017 M10x1,5x25 - Grado 8,8	0,138	0,55
31	6	ISO 4017 M8x1,25x25- Grado 8,8	0,083	0,50
32	6	ISO 4762 M12x1,5x60 - Grado 8,8	0,37	2,22
33	12	ISO 4032 M10 - Grado 6	0,31	3,72
34	2	ZM30x1.5x12	0,8	1,60
35	4	DIN 580 - M8x1,25 - A4	3,5	14,00
36	1	TCR - 26x1,5	2	2,00
37	1	TSD - 20x1,5	5	5,00
38	1	GN 743 -14 -M20x1,5 - A	8	8,00
39	1	TopForce SAE 30 -Chevron 18.9L	50,57	50,57
40	1	Esmalte poliuretano RAL 750mL	24,3	24,30
41	1	Imán	2,9	2,90
42	1	DP300 - 80 mL	14	14,00
43	1	Rueda de 40 dientes	305,5	305,50
44	1	Moldes para hierro nodular	1 389,97	1 389,97
Presupuesto final de materiales			Total	4 256,96

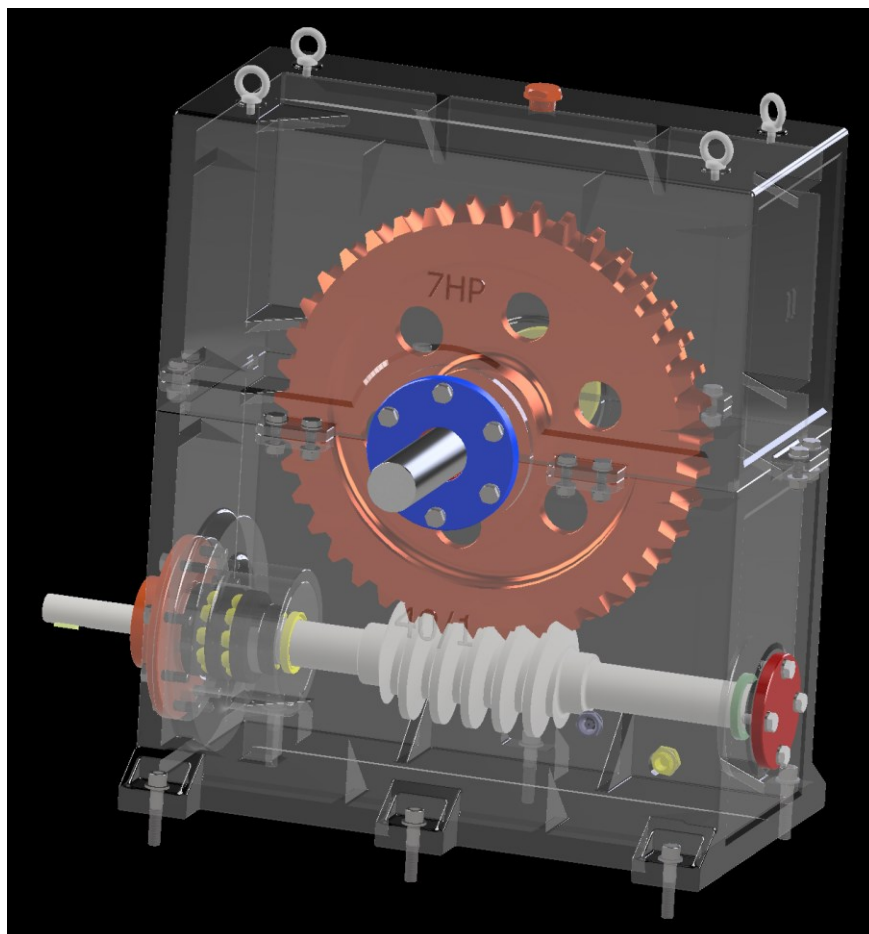
Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 5.29***Presupuesto total.*

Presupuesto	Costo
Materiales	4 256,96
Mano de obra (5%)	212,85
Honorario de proyectista (8%)	340,56
Mantenimiento (7%)	297,99
<b>Total[\$]</b>	<b>5 108,35</b>

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 5.68 se muestra el modelamiento completo del reductor diseñado con el programa *Autodesk Inventor*.

**Figura 5.68***Reductor 40:1*

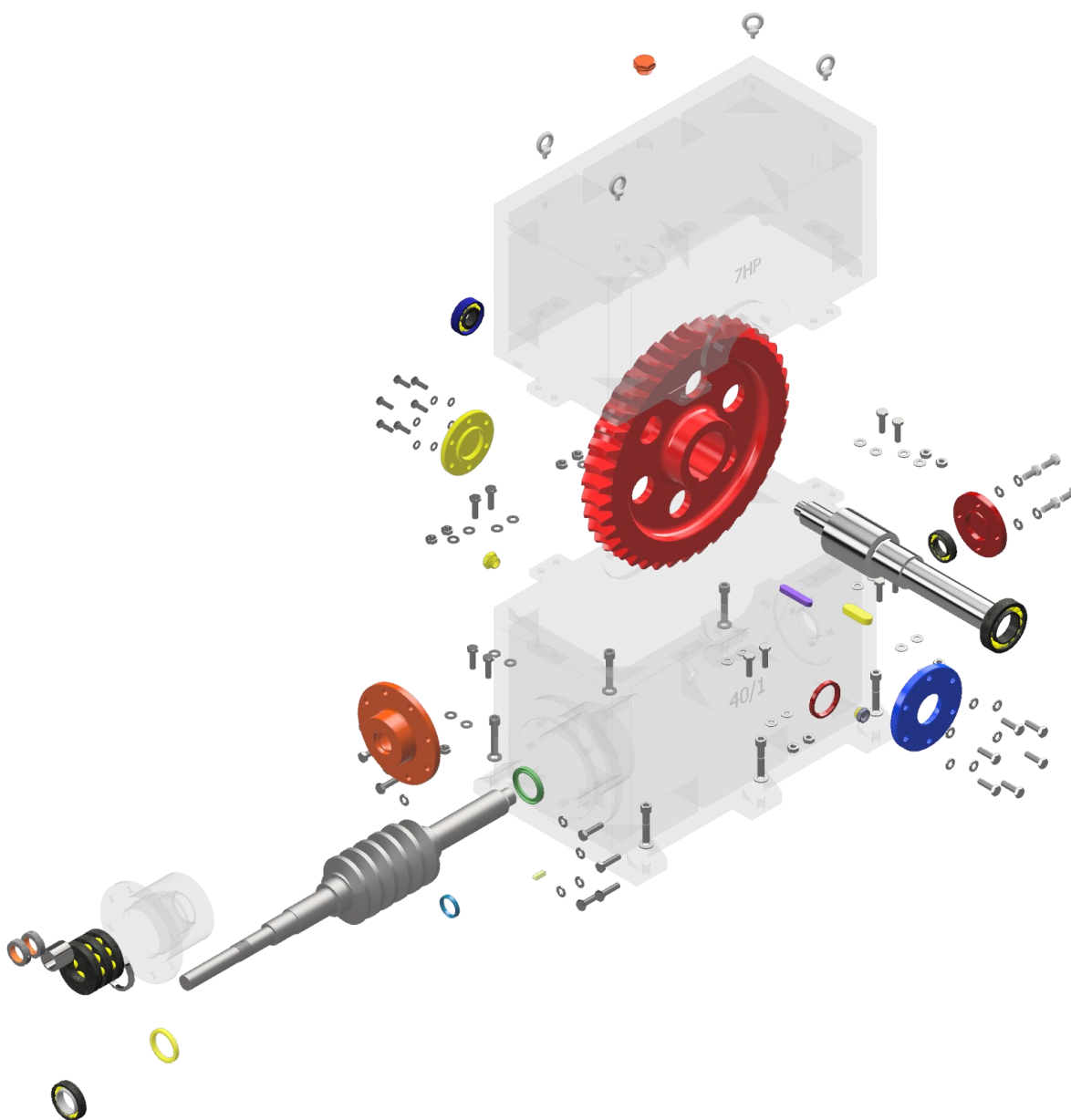
Fuente: Elaboración propia.



En la Figura 5.69 se muestra una vista en explosión de todos los elementos mecánicos que forman parte de su diseño. En los planos adjuntos en este proyecto de investigación se encuentra la descripción de cada pieza.

**Figura 5.69**

*Vista general de los componentes del reductor.*



Fuente: Elaboración propia.

## CAPÍTULO VI

### ANÁLISIS Y DISCUSION DE RESULTADOS

#### 6.1 Análisis

Se calculan los esfuerzos máximos en los entalles de los dientes de la rueda dentada. Esta es considerada el engrane débil, debido a su menor resistencia y a la geometría de sus dientes, los cuales son cortos y delgados en la parte media, y gruesos en la base del diámetro de raíz.

##### 6.1.1 Esfuerzos por flexión

En la Figura 5.65 se muestran los resultados de los esfuerzos máximos por tracción y compresión calculados por el MEF en los entalles de los dientes de la rueda dentada.

$$\sigma_t = 32,72 \text{ MPa}; \quad \sigma_c = 41,65 \text{ MPa}$$

##### 6.1.2 Esfuerzo por contacto

En Figura 5.26 muestra que los  $(\sigma_c)_{m\acute{a}x} \gg (\sigma_f)_{m\acute{a}x}$ , ya que la fuerza actúa en un área pequeña. Debido a la repetición constante del impacto, la falla predominante es por picadura. El esfuerzo por contacto máximo es:

$$(\sigma_c)_{m\acute{a}x} = 251 \text{ MPa}$$

### 6.1.3 Porcentaje de error de la resistencia a la flexión de Buckingham

La resistencia a la flexión de Buckingham, ecuación (104), proporciona resultados conservadores, y se pueden comparar respecto los “resultados más precisos” obtenidos de la simulación por MEF.

#### 6.1.3.1 Esfuerzo de tracción

El esfuerzo por flexión en el diente central de la rueda dentada, según la ecuación Buckingham, es  $\sigma_f = 29,23 \text{ MPa}$ . Sin embargo, de acuerdo a los resultados en la simulación por MEF, como se muestra en la Figura 5.65, el esfuerzo por tracción es  $\sigma_t = 32,72 \text{ MPa}$ , “lo cual es más preciso”.

Por lo tanto, el porcentaje de error por tracción:

$$\% \sigma_t = \left( \frac{\sigma_t - \sigma_f}{\sigma_t} \right) 100\% \Rightarrow \left( \frac{32,72 - 29,23}{32,72} \right) 100\% = 10,7\%$$

#### 6.1.3.2 Esfuerzo de compresión

De manera análoga al caso anterior, para el esfuerzo por flexión  $\sigma_f = 29,23 \text{ MP}$  y compresión  $\sigma_c = 41,65 \text{ MPa}$  (ver Figura 5.65). Se puede calcular el porcentaje de error por compresión:

$$\% \sigma_c = \left( \frac{\sigma_c - \sigma_f}{\sigma_c} \right) 100\% \Rightarrow \left( \frac{41,65 - 29,23}{41,65} \right) 100\% = 29,8\%$$

Este error es significativo ( $\sigma_c \gg \sigma_f$ ), ya que la ecuación de Buckingham “no considera efectos por concentración de esfuerzos”.

De los dos casos analizados, se puede concluir que la ecuación de Buckingham presenta menor error en la raíz del diente de la rueda dentada en el lado a tracción, pero muestra mayor error en el lado a compresión.

#### 6.1.4 Factor de diseño

El factor de seguridad  $FS$  se calcula:

##### 6.1.4.1 Por flexión

$$(FS)_f = \frac{S_y}{(\sigma_f)_{\text{máx}}} = \frac{170}{41,65} = 4,08$$

Este factor de seguridad conservador permite redefinir el ancho de la rueda dentada mediante la ecuación (92) de fuerza tangencial permisible.

##### 6.1.4.2 Por contacto

$$(FS)_c = \frac{(W_{tG})_{perm}}{W_{tG}} = \frac{9\,380}{8\,505} = 1,10$$

En la Tabla 6.1 se presenta un resumen de los esfuerzos obtenidos mediante el método matemático de Buckingham y por MEF. Al comparar el  $FS = 4,08$  de la resistencia por flexión con el  $FS = 1,10$  de resistencia por contacto, se puede concluir que la amenaza para los dientes de la rueda dentada es por desgaste.

**Tabla 6.1**

Resumen de FS y error.

Esfuerzos	Modelo matemático	FS	MEF	FS	Error
Por flexión	29,23[MPa]	5,82	Tracción: 32,72 [MPa]	5,20	10,7%
			Compresión: 41,65[MPa]	4,08	29,8%
Por contacto	-	-	251[MPa]	1,10	-

Fuente: Elaboración propia.

## 6.1.5 Cálculo de factores por flexión y contacto

### 6.1.5.1 Por flexión ( $K_{ts}$ )

Debido a que el factor de concentración de esfuerzos  $K_{ts}$  depende de propiedades mecánicas, especialmente del tipo de entalladura en los dientes de la rueda dentada, su cálculo resulta difícil, ya que esta entalladura no tiene forma circular, sino tronco-cónica. Sin embargo, se puede calcular mediante la siguiente ecuación:

$$(\sigma_f)_{m\acute{a}x} = K_{ts}\sigma_f$$

Reemplazando los siguientes datos:

$$(\sigma_f)_{m\acute{a}x} = 41,65 \text{ MPa}; \quad \sigma_f = 29,23 \text{ MPa}$$

$$K_{ts} = \frac{(\sigma_f)_{m\acute{a}x}}{\sigma_f} = \frac{41,65}{29,23} \Rightarrow K_{ts} = 1,42$$

En este factor ya está incluido los efectos de flexión y torsión.

### 6.1.5.2 Por contacto ( $K_{ev}$ )

Para calcular el factor de efectos varios  $K_{ev}$  en los dientes de la rueda dentada, se toma como referencia la fórmula de esfuerzo por contacto entre dientes para engranajes helicoidales. Esta se redefine de la siguiente manera:

$$\sigma_c = C_p \left( \sqrt{\frac{W_{tG}}{DF}} K_{ev} \right); \quad C_p = 137\sqrt{MPa}$$

El esfuerzo por contacto máximo para  $W_{tG} = 8\,505\text{ N}$ ,  $D = 404,254\text{ mm}$ , y  $F_G = 62\text{ mm}$  es  $251\text{ MPa}$ . Así:

$$\sigma_c = C_p \left( \sqrt{\frac{W_{tG}}{DF_G}} K_{ev} \right) = 251\text{ MPa}$$

$$137 \left( \sqrt{\frac{8\,505}{(404,254)(62)} K_{ev}} \right) = 251\text{ MPa} \Rightarrow K_{ev} = 3,145$$

Ahora se podrá calcular el esfuerzo por contacto máximo permisible, reemplazando con los mismos parámetros para una  $(W_{tG})_{perm} = 9\,380\text{ N}$  entonces:

$$(\sigma_c)_{perm} = 137 \left[ \sqrt{\frac{9\,380}{(404,254)(62)} (3,145)} \right] = 263,584\text{ MPa}$$

Luego, se verifica el factor de seguridad por contacto:

$$(FS)_c = \left( \frac{263,584}{251} \right)^2 = 1,10$$

### 6.1.6 Cálculo de la nueva masa de la rueda dentada

La única forma de reducir la masa de la rueda dentada es disminuir el ancho  $F_G$ . Ya que el material (bronce SAE 65) y diámetro ya están definidos. Esto reducirá la fuerza tangencial permisible de 9 380 N a 8 600 N. Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (92), obtiene:

$$(W_{tg})_{perm} = \frac{C_s D^{0.8} F_G C_m C_v}{75,948} \Rightarrow F_G = (W_{tg})_{perm} \left( \frac{75,948}{C_s D^{0.8} C_m C_v} \right)$$

$$(F_G)_{perm} = 8600 \left[ \frac{75,948}{(616,86)(404,254)^{0.8}(0,813)(0,188)} \right]$$

$$(F_G)_{perm} = 56,85 \text{ mm}$$

#### 6.1.6.1 Esfuerzo por flexión

El esfuerzo por flexión máximo en los entalles de los dientes la rueda dentada se calcula corrigiendo la ecuación de Buckingham con el factor  $K_{ts} = 1,42$ . Así:

$$(\sigma_f)_{m\acute{a}x} = K_{ts} \sigma_f = 1,42 \left( \frac{W_G^t}{p_x F_y \cos \lambda} \right)$$

$$(\sigma_f)_{m\acute{a}x} = 1,42 \left[ \frac{8\,505}{(37,75)(56,85)(0,125) \cos(6^\circ)} \right] = 45,27 \text{ MPa}$$

Luego, el factor de seguridad por flexión tras la modificación del ancho es:

$$(FS)_f = \frac{S_y}{(\sigma_f)_{m\acute{a}x}} = \frac{170}{45,27} = 3,76$$

### 6.1.6.2 Esfuerzos por contacto

Para efectos prácticos en el cálculo del esfuerzo permisible por contacto, se asumirá que el factor de efectos varios es constante, con un valor de  $K_{ev} = 3,145$ . Por lo tanto, todos los resultados presentados son tentativos. Entonces:

$$(\sigma_c)_{perm} = C_p \left( \sqrt{\frac{W_{tG}}{DF_G} K_{ev}} \right) = 137 \left[ \sqrt{\frac{8\,600}{(404,254)(56,85)} (3,145)} \right]$$

$$= 263.571 \text{ MPa}$$

El esfuerzo por contacto para una fuerza de  $W_{tG} = 8505 \text{ N}$ :

$$(\sigma_c)_{m\acute{a}x} = 137 \left[ \sqrt{\frac{8\,505}{(404,254)(56,85)} (3,145)} \right] = 262,111 \text{ MPa}$$

El factor de seguridad por contacto para una rueda dentada de ancho  $F_G = 56,85 \text{ mm}$ :

$$(FS)_c = \left[ \frac{(\sigma_c)_{perm}}{(\sigma_c)_{m\acute{a}x}} \right]^2 = \left( \frac{263,571}{262,111} \right)^2 = 1,01$$

En la Tabla 6.2. Se verifica que  $(FS)_f$  ha disminuido de 4,08 a 3,76 y  $(FS)_c$  de 1,10 a 1,01, por lo que se puede concluir nuevamente que la amenaza para los dientes de la rueda dentada es por desgaste.

**Tabla 6.2**

*Resumen de esfuerzos y factores.*

Modelo matemático	Factores modificatorios	Esfuerzos permisibles [MPa]	Esfuerzos máximos [MPa]	FS
Buckingham corregido	1,420	170	45,27	3,76
esfuerzos por contacto	3,145	263,571	262,11	1,01

Fuente: Elaboración propia.



### 6.1.6.3 La masa final de la rueda dentada

Para un ancho inicial  $F_i = 62 \text{ mm}$ , la masa inicial es  $m_i = 42,14 \text{ kg}$ . Además, para un ancho final  $F_G = 56,85 \text{ mm}$ , la masa final calculado por el programa *Autodesk Inventor* es  $m_f = 37,10 \text{ kg}$ .

Por lo tanto, la variación de la masa:

$$\Delta m = m_i - m_f = 42,14 - 37,10 = 5,0 \text{ kg}$$

En porcentaje:

$$\Delta m\% = \left( \frac{\Delta m}{m_i} \right) 100\% = \left( \frac{5,0}{42,14} \right) 100\% = 11,8 \%$$

En la Tabla 6.3 se muestra un resumen:

**Tabla 6.3**

*Ancho vs masa de la rueda dentada.*

Dimensiones	Fuerza tangencial permisible de <b>9 380 N</b>	Fuerza tangencial permisible redefinida a <b>8 600 N</b>	$\Delta$	$\Delta\%$
Ancho [mm]	62	56.85	5,15	8,3%
Masa [kg]	42,14	37,10	5,0	11,8%

Fuente: Elaboración propia.

## 6.2 Discusión de Resultados

1. Contreras (2003) diseña un reductor tipo tornillo sin fin, en el cual se destaca el uso del criterio para el diseño de ejes. Se basa en la ecuación de Soderberg.

En el presente proyecto de investigación se diseñan los ejes por cinco criterios: ASME, deformación lateral, resistencia, inclinación y deformación torsional, así como un análisis de esfuerzos para optimizar el ancho de la rueda dentada.

2. Alboreda et al. (2016) Lograron fabricar un conjunto corona – eje para un reductor de tornillo sin fin utilizando datos extraídos directamente de un diseño existente para elaborar un plano tecnológico.

En el presente trabajo de investigación, se partió de parámetros teóricos como la potencia, rpm, ratio y factor de diseño, lo cual permitió modelar todo el reductor completo en el programa *Autodesk Inventor* y obtener los planos de fabricación del reductor, incluyendo la caja.

3. García (2017). Diseña un reductor de 3 etapas, empleando fórmulas de la norma AGMA para el tornillo sin fin y rueda dentada, así como la norma ISO 6336 los engranajes cilíndricos de dientes rectos. El modelo 3D y los planos fueron elaborados utilizando el programa *Autodesk Inventor*.

En el presente trabajo de investigación se aplicaron las mismas normas AGMA y el programa *Autodesk Inventor* para el diseño del reductor.

Además, se realizó un análisis detallado de los esfuerzos en los dientes de la rueda dentada. Esto no sólo permitió diseñar el reductor, sino también reducir la masa en la rueda dentada.

4. Ciprian et al. (2018) realizaron una simulación en los dientes de una rueda dentada de tres materiales (rueda dentada) en modo estático usando el *software SolidWorks*.

En el presente proyecto de investigación para la simulación se usó el software Ansys, y de esta manera se pueden calcular los esfuerzos de flexión y contacto en el diente de la rueda dentada.

5. Ganesh (2022) encontró una manera de generar un modelo de la rueda dentada más preciso que el generado por programas de modelamiento en 3D comerciales.

En el presente proyecto de investigación, el programa utilizado para generar el modelo en 3D, tornillo sin fin y rueda dentada, fue el Auto LISP, ya que la simulación es en modo estático. No se consideró necesario tanta exactitud en la curva de los dientes de la rueda dentada.

## CONCLUSIONES

Después de culminar el presente trabajo de investigación se han llegado a las siguientes conclusiones:

1. El logro más importante de este diseño fue reducir la masa de la rueda dentada, ya que así se optimizó el peso del reductor. Lo que más ayudó fue redefinir la fuerza tangencial permisible de  $W_{tG} = 9\,380\text{ N}$  a  $(W_{tG})_{perm} = 8\,600\text{ N}$ , lo que permitió reducir el ancho de la rueda dentada de  $62\text{ mm}$  a  $56,85\text{ mm}$ .
2. Se modelaron los prototipos del tonillo sin fin y la rueda dentada, enfocándose en generar sólidos 3D sin interferencias entre los dientes. La interferencia puede afectar directamente los resultados de la simulación, por lo que es fundamental asegurar la precisión en este aspecto. El programa *KISSsoft 17* resultó de gran ayuda, a diferencia del programa *Autodesk Inventor 2021*, que generó sólidos menos precisos. Sin embargo, este último programa fue útil para la creación de los planos del reductor.

La precisión de los sólidos 3D sin interferencias es esencial para garantizar la exactitud en los resultados de la simulación y el uso de herramientas adecuadas, como el software *KISSsoft 17*, puede mejorar significativamente el proceso.

3. Se ejecutó la simulación del prototipo “en modo estático” usando el programa *Ansys 19.2*. Los resultados iniciales más importantes fueron los esfuerzos máximos en los dientes de la rueda dentada: por tracción,  $32,72 \text{ MPa}$ ; por compresión,  $41,65 \text{ MPa}$ ; y por contacto,  $251 \text{ MPa}$ . Esto permitió comparar los resultados con la ecuación de Buckingham (que no considera efectos por concentración de esfuerzos) y así hallar los factores  $K_{ts} = 1,42$  y  $K_{ev} = 3,145$ , así como los factores de seguridad por tracción,  $5,2$ ; por compresión;  $4,08$ ; y por contacto  $1,10$ .

La parte más sensible consistió en programar las condiciones de frontera, especialmente la restricción del desplazamiento en el tonillo sin fin y en la rueda dentada.

4. Se han calculado los esfuerzos máximos de los dientes para el nuevo diseño de la rueda dentada. El esfuerzo por flexión en la raíz del diente es  $45,27 \text{ MPa}$ , mientras que el esfuerzo por contacto es de  $262,11 \text{ MPa}$ . En consecuencia, sus factores de seguridad son  $3,76$  y  $1,01$ , respectivamente. Es evidente que la principal amenaza es por desgaste, lo que significa que la falla se presentará por picadura.

5. Se ha logrado optimizar el diseño de la rueda dentada al reducir su ancho, lo que ha llevado a una disminución de su masa. En concreto, la masa de la rueda dentada ha pasado de 42,14 kg a 37,10 kg; es decir, varió en 5,0 kg o un 11,8% de su masa inicial.
6. A la vista de los resultados obtenidos, se puede concluir que el método matemático y el MEF son complementarios para el cálculo de los esfuerzos máximos por flexión entre los dientes de la rueda dentada. Aunque el método matemático puede dar una aproximación útil, su imprecisión conduce a un error 29,8% en comparación con los resultados obtenidos mediante el MEF. Por lo tanto, el MEF es una técnica más precisa y recomendable para el cálculo de los esfuerzos máximos en este tipo de análisis.
7. La potencia de diseño aplicada al eje del tornillo sin fin genera esfuerzos entre los dientes de la rueda dentada, los cuales se calculan utilizando el MEF. Esos esfuerzos son inferiores a los valores permisibles de  $(\sigma_c)_{perm} = 263,584 \text{ MPa}$  y  $(\sigma_f)_{m\acute{a}x} = 41,65 \text{ MPa}$ .

Con base a todos los resultados presentados, se puede concluir que los objetivos e hipótesis planteados han sido confirmados, lo que significa que se ha cumplido con éxito el trabajo de investigación realizado.

## RECOMENDACIONES

1. Se recomienda para el diseño de ejes se parta de un pre-dimensionamiento basado en el criterio por deformación torsional, ya que da una buena aproximación de los diámetros necesarios.
2. Se recomienda utilizar *SolidWorks* en lugar del *Autodesk Inventor*, ya que el *SolidWorks* ofrece un amplio repertorio de herramientas para la creación y modificación de sólidos en 3D.
3. Se recomienda utilizar un mallado fino para discretizar los dientes de la rueda dentada y un mallado grueso para el resto, lo que garantiza una simulación precisa de los esfuerzos alrededor de los dientes y reduce el tiempo de ejecución.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alva, F. & Alva, I. (2018). *Diseño de elementos de máquinas* (Tercera ed., Vol. II). Lima, Perú: Grupo Universitario SAC.
- Amado, C. F. (2003). *Diseño y construcción de una caja reductora de velocidad de engrane y tornillo sinfín en baño de aceite con relación 40:1*. Universidad de San Carlos de Guatemala, Guatemala.  
Obtenido de <https://docplayer.es/22214348-Diseno-y-construccion-de-una-caja-reductora-de-velocidad-de-engrane-y-tornillo-sinfin-en-bano-de-aceite-con-relacion-de-40-1.html>
- ANSI/AGMA. (1992). *Practice for Enclosed Cylindrical Wormgear Speed Reducers and Gearmotors*.
- ANSI/AGMA. (1993). *Desing Manuel for Cylindrical Wormgearing*.
- ANSI/ASME. (1985). *Design of Transmission Shafting*. New York, USA.
- Arboleda, D. A. & Soto, J. E. (2016). *Ingeniería inversa, desarrollo tecnológico y construcción del conjunto*. Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira.  
Obtenido de <https://repositorio.utp.edu.co/items/69cfbe6c-b81b-4e0f-a676-4ce68b16f211>
- Arias, J. L. & Covinos Gallardo, M. (2021). *Metodología de la investigación*. Arequipa: Enfoques Consulting EIRL.  
Obtenido de <https://repositorio.concytec.gob.pe/handle/20.500.12390/2260>
- Bhandari, V. B. (2010). *Design of Machine Elements* (Third ed.). USA: McGraw-Hill. Obtenido de <https://libgen.is/search.php?req=Bhandari+MACHINE&open=0&res=25&view=simple&phrase=1&column=def>
- Budynas, R. G. & Nisbett, J. K. (2018). *Diseño en ingeniería mecánica de Shingley* (décima ed.). México: McGraw-Hill.  
Obtenido de <https://library.lol/main/D092D5976B198525C56CFEE75B4151AB>
- Chapra, S. & Canale, R. (2015). *Métodos Numéricos para ingenieros*. México: McGRAW-HILL. Obtenido de <https://libgen.is/book/index.php?md5=E023549A9FDD90A089E96F227B32A114>



- Ciofu, C., Carausu, C. & Nicoleta, S. (2018). Equipment for testing the worm gear assembly y from "Liquid Wood" and comparative MEF analyses. En *International Journal of Modern Manufacturing Technologies*.  
Obtenido de [https://www.researchgate.net/publication/330161152\\_Equipment\\_for\\_testing\\_the\\_worm\\_and\\_worm\\_gear\\_assembly\\_from\\_liquid\\_wood\\_and\\_comparative\\_MEF\\_analyses](https://www.researchgate.net/publication/330161152_Equipment_for_testing_the_worm_and_worm_gear_assembly_from_liquid_wood_and_comparative_MEF_analyses)
- Conference International gear. (2014). *Lyon Villeurbanne*. (Woodhead, Ed.) Francia.  
Obtenido de <http://libgen.gs/ads.php?md5=fd1768d3960e0568d5b5e9b992048097>
- Cueva, R. (2019). *Resistencia de Materiales II para ingeniería mecánica* (UNI ed.). Lima, Perú: Fondo Editorial EDUNI.
- Dias, T., Da Alves, J., Fontes, R. & Alves de Sousa, R. (2010). *Método dos Elementos Finitos*. ETEP -Edições Técnicas e Profissionais. Obtenido de <https://libgen.lc/ads.php?md5=15b97e033ff8c602fe1280a08387f66a>
- Dixit, P. M. (2009). *Finite element method*. Obtenido de Indian Institute of Technology Kanpur: <https://nptel.ac.in/courses/112104116>
- Faires, V. M. (1993). *Diseño de elementos de máquinas*. México.  
Obtenido de <http://library.lol/main/DE3706EF85A845CEB12270845C93BFE2>
- Ganesh, E. N. (2022). Simulation of the 3D Model of Worm Gear Using Finite Element Analysis. *Global Journal of Research in Engineering & Computer Sciences*. Obtenido de [https://www.researchgate.net/publication/362412535\\_Simulation\\_of\\_the\\_3d\\_Model\\_of\\_Worm\\_Gear\\_Using\\_Finite\\_Element\\_Analysis](https://www.researchgate.net/publication/362412535_Simulation_of_the_3d_Model_of_Worm_Gear_Using_Finite_Element_Analysis)
- García, P. J. (2017). *Diseño de un reductor de dos etapas de engranajes cilíndricos de dientes rectos con tornillo sin fin para el accionamiento de una criba rotativa para lavado de roca*. Doctoral dissertation, Universitat Politècnica de València, Valencia. Obtenido de <https://riunet.upv.es/handle/10251/89793>
- Hall, A., Holewenko, A. & Laughlin, H. (2008). *Diseño de máquinas*. México: Schaum-McGraw-Hill. Obtenido de <http://library.lol/main/EFEDE0289C2E6C17E26D31A0A7A5F9CC>
- Hernández, R. & Mendoza, C. (2018). Metodología de la investigación.  
Obtenido de <http://repositorio.uasb.edu.bo:8080/handle/54000/1292>
- Hibbeler, R. C. (2012). *Análisis estructural* (Octava ed.). México: Pearson.  
Obtenido de <http://library.lol/main/E34776502B5C778F178195DC3FE70012>

- Hibbeler, R. C. (2017). *Mecánica de materiales* (Novena ed.). México: Pearson. Obtenido de <https://libgen.is/book/index.php?md5=BA46B5A96E9F468F1A3D7B7EA100AE62>
- Hung, N. S. & Jan, P. S. (2014). *Tensor analysis and elementary differential geometry for physicists and engineers*. New York: Springer. Obtenido de <http://libgen.li/item/index.php?md5=B3FBD5C006C61C0AA997DA6451544DFC>
- Jagadeesha, T. (2019). *Design of Machine Elements* (Vol. 1). India. Obtenido de <https://libgen.is/book/index.php?md5=7E4C7DC6A4655F26FB514662A04F2AD4>
- Kanpur, E. I. (2009). *Mechanical Engineering*. Obtenido de Finite element method: <https://nptel.ac.in/courses/112/104/112104116/#>
- Myszka, D. H. (2012). *Machines and mechanisms* (4th ed.). New York: Pearson Prentice Hall. Obtenido de <https://libgen.lc/ads.php?md5=94f42ae87e7ccc7a48e664693746412b>
- Nachiketa, T. (2016). *Department of Mechanical Engineering*. (I. I. Technology, Productor). Obtenido de Basics of Finite Element Analysis – Part II: <https://nptel.ac.in/courses/112/104/112104205/>
- SKF. (2019). Rodamientos . Obtenido de [skf.com/go/17000](http://skf.com/go/17000)
- Tiwari, N. (2016). *Basics of Finite Element Analysis*. Obtenido de Indian Institute of Technology Kanpur: <https://nptel.ac.in/courses/112104205>
- Warren, C., Richard, G. & Ali , M. (2012). *Roark's Formulas for Stress and Strain* (Eighth ed.). McGraw-Hill. Obtenido de <http://libgen.li/item/index.php?md5=6C6421DCB023BDC116842D6A371C4FF1>
- Zill, D. & Wright, W. (2015). *Ecuaciones Diferenciales con aplicación de modelado*. México: Cengage Learning. Obtenido de <https://libgen.is/book/index.php?md5=6558C412111DFC4260950D8D2D888F87>

## ANEXOS

## Anexo A: Fórmulas

Fórmulas de la norma ANSI -AGMA6034-B92.

## Formulas for rating factors

[This annex is furnished for informational purposes only and should not be construed to be a part of ANSI/AGMA 6034-B92, *Practice for Enclosed Cylindrical Wormgear Speed Reducers and Gearmotors*.]

## C.1 Purpose

The purpose of this annex is to provide formulas for the rating factors given in tables 2, 3 and 5, and in figures 1 and 2, which can be used if the rating formula is programmed for computer solution. The use of these formulas will result in values of factors  $C_m$ ,  $C_v$ ,  $\mu$ , and  $C_s$  approximately equal to those obtained from the appropriate tables and figures.

C.2 Table 2 - Ratio correction factor,  $C_m$ , formulas

For gear ratios,  $m_G$ , from 3 to 20

$$C_m = 0.0200 (-m_G^2 + 40 m_G - 76)^{0.5} + 0.46 \quad \dots(C.1)$$

for gear ratios,  $m_G$ , from 20 to 76

$$C_m = 0.0107 (-m_G^2 + 56 m_G + 5145)^{0.5} \quad \dots(C.2)$$

for gear ratios,  $m_G$ , larger than 76

$$C_m = 1.1483 - 0.00658 m_G \quad \dots(C.3)$$

C.3 Table 3 - Velocity factor,  $C_v$ , formulas

For velocities,  $v$ , from 0 to 700 ft/min

$$C_v = 0.659 e^{(-0.0011v)} \quad \dots(C.4)$$

for velocities,  $v$ , from 700 to 3000 ft/min

$$C_v = 13.31 v^{(-0.571)} \quad \dots(C.5)$$

for velocities,  $v$ , larger than 3000 ft/min

$$C_v = 65.52 v^{(-0.774)} \quad \dots(C.6)$$

NOTE - ( $v$  in m/s)  $\times$  196.5 = ( $v$  in ft/min)

C.4 Table 5 - Coefficient of friction,  $\mu$ , formulas

For  $v = 0$  ft/min

$$\mu = 0.150 \quad \dots(C.7)$$

for  $v$  from 0 to 10 ft/min

$$\mu = 0.124 e^{[-0.074v^{0.645}]} \quad \dots(C.8)$$

for  $v$  larger than 10 ft/min

$$\mu = 0.103 e^{[-0.110v^{0.450}]} + 0.012 \quad \dots(C.9)$$

NOTE - ( $v$  in m/s)  $\times$  196.85 = ( $v$  in ft/min)

C.5 Figures 1 and 2 - Materials factor,  $C_s$ , formulas

For center distance,  $C$ , equal to less than 3 inches

$$C_s = 720 + 10.37 C^3 \quad \dots(C.10)$$

Compare this value to the value from the appropriate equation below and use the smaller value.

For gear pitch diameters,  $D_m$ , associated with center distances greater than three inches:

Sand cast:

for smaller than 2.5 inches

$$C_s = 1000 \quad \dots(C.11)$$

for larger than 2.5 inches

$$C_s = 1189.6365 - 476.5454 \log_{10} D_m \quad \dots(C.12)$$

Static chill cast:

for smaller than 8 inches

$$C_s = 1000 \quad \dots(C.13)$$

for larger than 8 inches

$$C_s = 1411.6518 - 455.8259 \log_{10} D_m \quad \dots(C.14)$$

Centrifugally cast:

For smaller than 25 inches

$$C_s = 1000 \quad \dots(C.15)$$

for larger than 25 inches

$$C_s = 1251.2913 - 179.7503 \log_{10} D_m \quad \dots(C.16)$$

NOTE - ( $C$  or  $D_m$  in mm)  $\times$  0.03937 = ( $C$  or  $D_m$  in inches)

## Anexo B: Materiales

## 1. AISI 3215-Tornillo

### ECN

AISI : 3215  
DIN : 17 Cr Ni 6  
W N°: 1.5919



Tipo de aleación promedio : C 0,17 Cr 1,5 Ni 1,6 Si 0,30 Mn 0,50 %  
Color de identificación : Azul  
Estado de suministro : Recocido 217 HB máx.

**Acero especial de cementación aleado al Cromo-Níquel. Adquiere excelente dureza superficial en el temple de cementación. Insuperable tenacidad en el núcleo.**

APLICACIONES: Partes de maquinaria y repuestos de grandes dimensiones, de los cuales se exige muy alta dureza superficial, tenacidad y resistencia extraordinaria en el núcleo, ideal para la fabricación de piñones, cigüeñales, ejes de cajas.

#### INDICACIONES PARA EL TRATAMIENTO TÉRMICO

Forjado: 1150 - 850 °C  
Recocido: 650 - 700 °C  
Enfriamiento lento en el horno  
Cementar: 900 - 950 °C  
Enfriamiento: en aceite o baño térmico de 160 - 260 °C  
Temple del Núcleo: 830 - 870 °C  
Revenido: mínimo 1 hora 150 - 200 °C  
Dureza obtenible en la capa cementada: 59 - 63 HRC

23

CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS						
En el núcleo de la pieza cementada						Dureza en la superficie HRC
Diám. mín.	Límite de fluencia N/mm <sup>2</sup>	Resistencia a la tracción N/mm <sup>2</sup>	Alargamiento (L=5d) mín. %	Contracción % mín.	Resiliencia según DVM Joule (val. de guía)	
10	700	1000 - 1300	8	35	-	59
30	650	900 - 1200	9	40	69	a
68	550	800 - 1100	10	40	-	63

**Soldadura:** Este acero es relativamente soldable. En este caso se debe precalentar a una temperatura de 180-250°C y después de soldar someterlo a un tratamiento térmico de alivio de tensiones. Electrodo recomendable BÖHLER UTP 76/ 6020. **Se debe retirar capa cementada si se requiere soldar.**

Soldadura: Consultar con Departamento Técnico.

02

## 2. AISI 4340- Eje de Salida

### VCN



AISI : ~ 4340 H  
 DIN : 34 Cr Ni Mo 6  
 W N°: 1.6582

Tipo de aleación promedio : C 0,34 Cr 1,5 Ni 1,5 Mo 0,2 Si 0,30 Mn 0,50%  
 Color de identificación : Verde  
 Estado de suministro : Bonificado 240-380 HB Típico. Ver tabla inf.  
 Largo estándar : 3,5 - 6 metros.

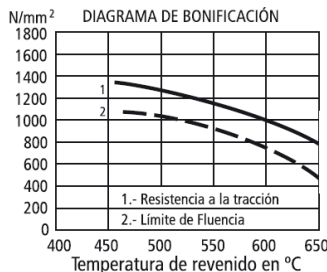
**Acero especial de bonificación al cromo níquel molibdeno, altamente resistente a la tracción, a la torsión y a cambios de flexión. Insensible al sobrecalentamiento en el forjado y libre de propensión a fragilidad de revenido. Por su estado de suministro permite en la mayoría de los casos su aplicación, sin necesidad de tratamiento térmico adicional.**

APLICACIONES: Partes de maquinaria y repuestos de mayores dimensiones, sometidas a muy altos esfuerzos dinámicos y otras altas exigencias mecánicas. Cigüeñales, ejes de leva, árboles de transmisión, barras de torsión, ejes cardán, ejes para bombas, ejes para hélice de aviones, pernos y tuercas de alta tensión, rodillos de transportadora, vástagos y pines, muñones; brazos de dirección, ciertos engranajes, discos de embrague, etc.

26

#### INDICACIONES PARA EL TRATAMIENTO TÉRMICO

**Forjado:** 1050 - 850 °C  
**Recocido:** 650 - 700 °C  
 Enfriamiento lento en el horno  
**Temple:** al aceite 830 - 860 °C  
**Dureza obtenible:** 52 - 56 HRC  
**Revenid :** 540 - 680 °C  
**Normalizado:** 850 - 880 °C  
**Nitrurar:** 580 °C



Resistencia en estado Recocido		CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS EN ESTADO BONIFICADO						
máx. N/mm²	Dureza Brinell máx.	Diámetro mm.		Límite de fluencia N/mm²	Resistencia a la tracción N/mm²	Elongación (Lo = 5d) % mín.	Estricción % mín.	Resiliencia según DVM Joule
		desde	hasta					
800	248	16	16	980	1180 - 1380	9	40	41
		16	40	885	1080 - 1280	10	45	48
		40	100	785	980 - 1180	11	50	48
		100	160	685	880 - 1080	12	55	48
		160	250	590	780 - 930	13	55	48

Soldadura: Consultar con nuestro Departamento Técnico

20

### 3. SAE 65-Rueda dentada

## BRONCE B - 10



ASTM B505 : C90700 (SAE 65)  
 EN 1982 : CuSn10 (CC480K)  
 ISO 1338 : CuSn10

**Bronce Rojo recomendado para cargas estáticas elevadas o en velocidades altas y bajas y buena lubricación. Elevada resistencia a la fatiga. Alta resistencia a la abrasión, erosión y cavitación. Resistente a la corrosión atmosférica, aguas naturales y agua de mar.**

**APLICACIONES:** Apropiado para ruedas directrices y álabes de turbinas. El Bronce B-10 es el clásico para engranes y coronas resistentes a la corrosión. Además se emplea en válvulas y cajas de bombas, cojinetes, tornillos sinfín. Por tanto, se usa cuando el servicio es pesado y es necesario un bronce muy duro.

#### COMPOSICIÓN QUÍMICA (%):

	Cu	Sn	Pb	Zn	P	Fe	Ni	Sb	S
Min.	Resto	9,0							
Max.		12,0	1,0	0,5	0,2	0,2	2,0	0,2	0,05

43

#### PROPIEDADES MECÁNICAS:

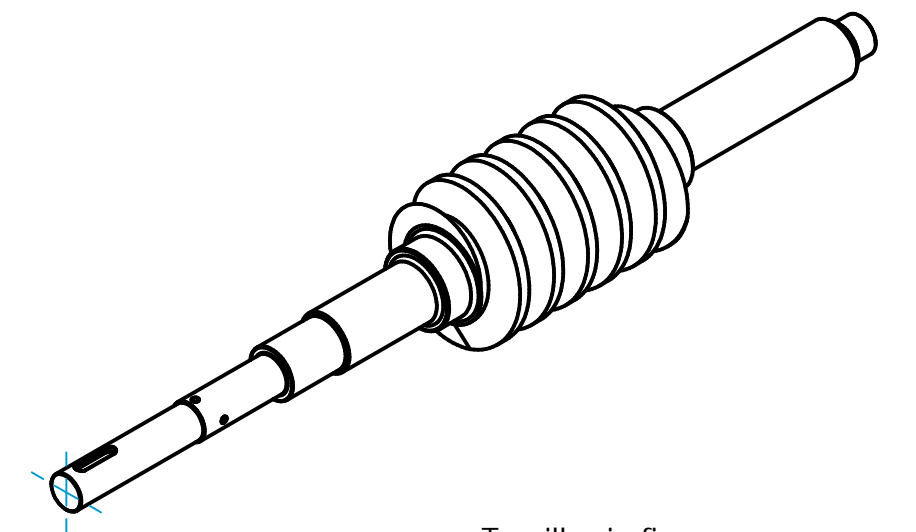
Proceso	Límite Elástico $R_{p0,2}$ (Mpa)	Carga de Rotura $R_m$ (Mpa)	Elongación A5 (%)	Dureza HBW 10/1000	Módulo Elástico Kn/mm <sup>2</sup>
Continuo (GC)	170	280	10	80	90 - 110
Centrífugo (GZ)	160	280	10	80	90 - 110

#### PROPIEDADES FÍSICAS:

Proceso	Densidad kg/dm <sup>3</sup>	Calor Específico J/kg °K	Expansión Térmica 10-6 m. °K/m	Conductividad Térmica W/m. °K	Conductividad Eléctrica m(Ohm.mm <sup>2</sup> )
GC - GZ	8,7	376	18,50	59	7,0

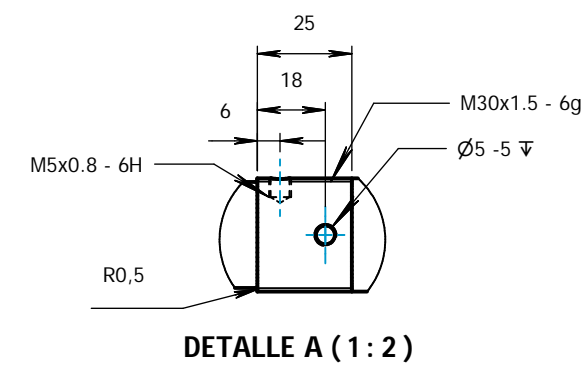
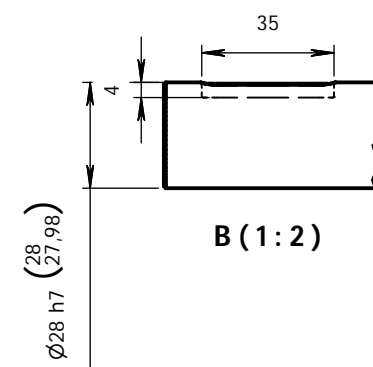
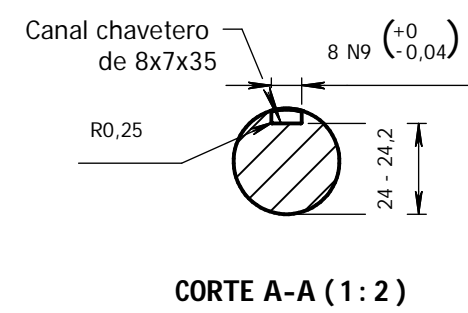
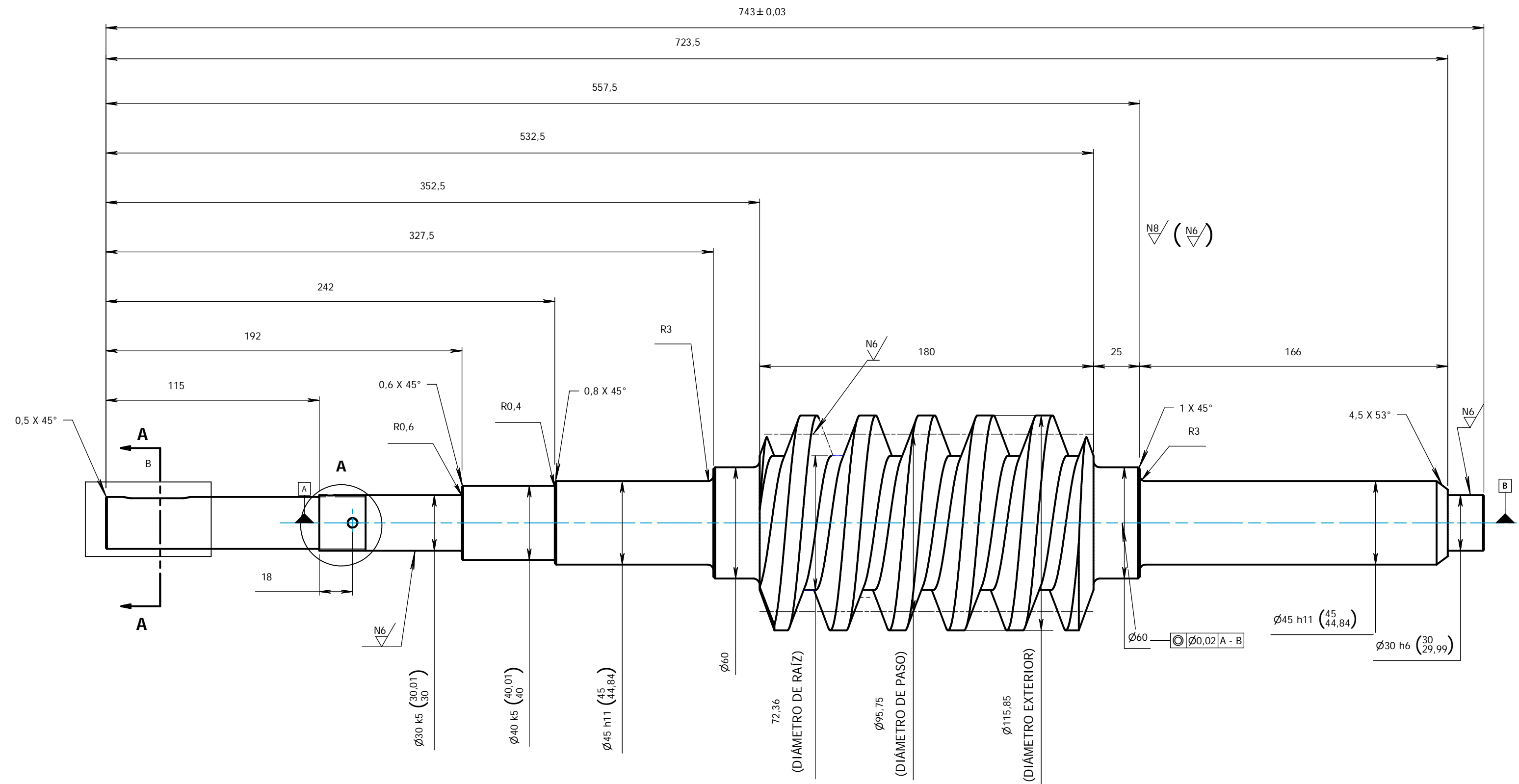
Consultar con Departamento Técnico

88



Tornillo sin fin

Escala 1:5

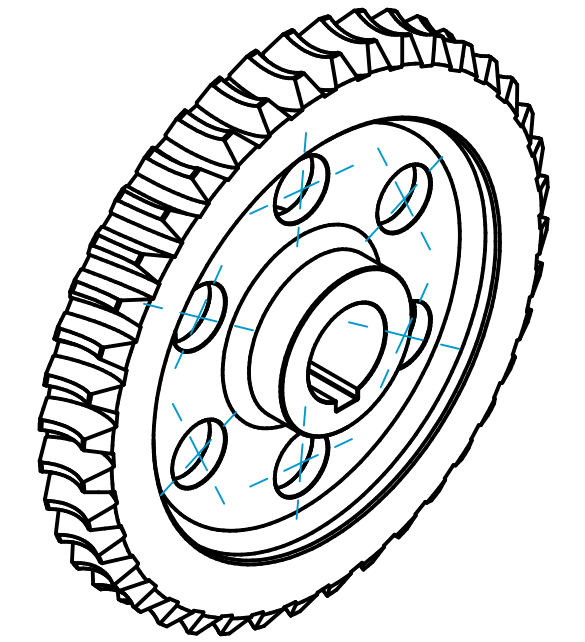
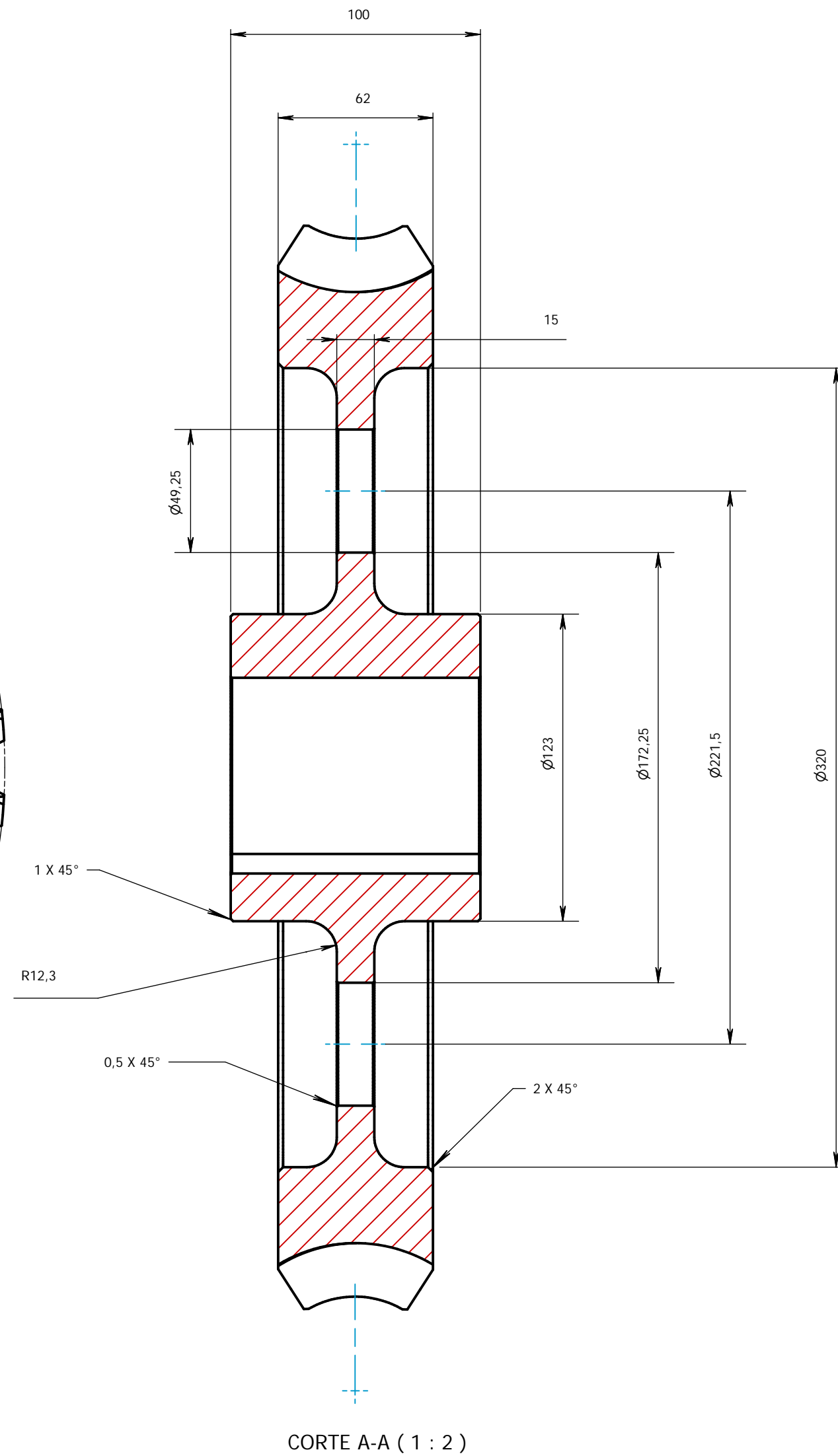
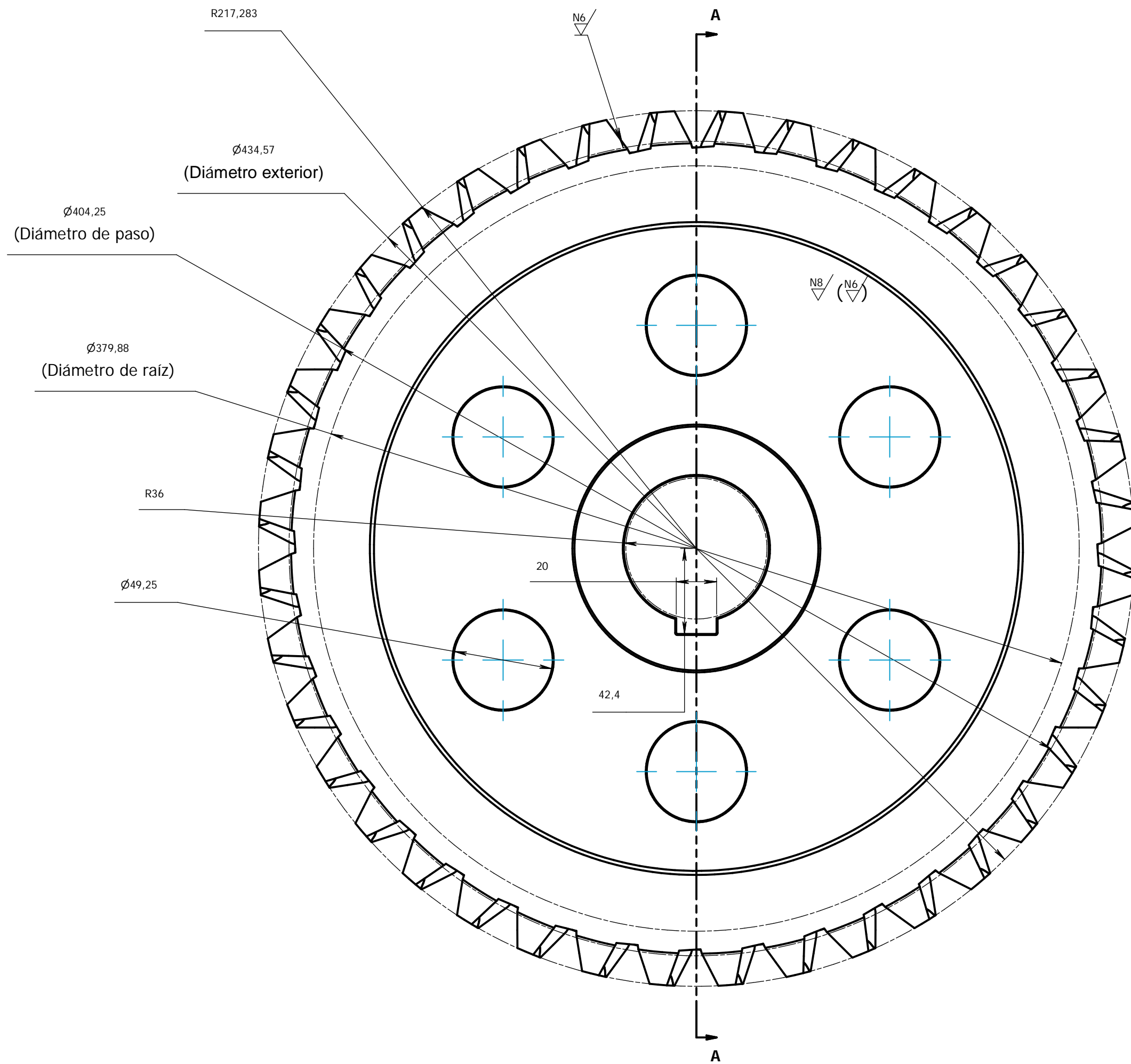


Descripción	
Módulo normal	10,051 mm
Diámetro de paso	95,75 mm
Ángulo de hélice	6,025°
Ángulo de presión	20°
Material	Acero de cementación AISI 3215
Dureza en la superficie	59 - 63 HRC
Tolerancia general según ISO2768 - m	+/-0,3 mm

Facultad de Ingeniería Mecánica	Fecha	Nombre	Firma	ISO A
Dibujado	05/07/2023	Bernaldo Corac, Arnao Melgarejo		
Revisado		Dr. Fortunato Alva		
Escala	Designación		Masa	Formato A2
1 : 2	Tornillo sin fin		15,988 kg	Plano # 1






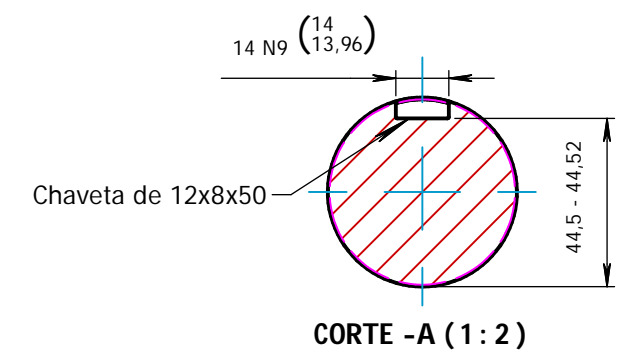
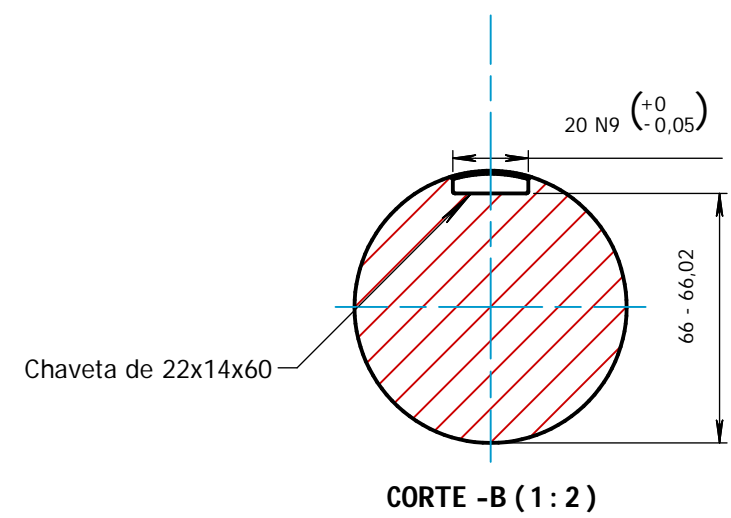
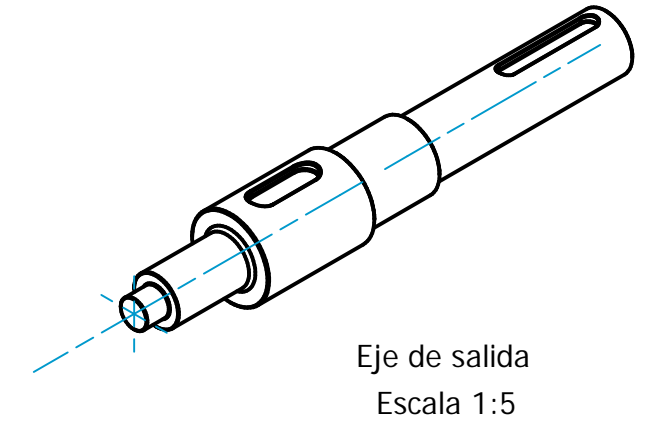
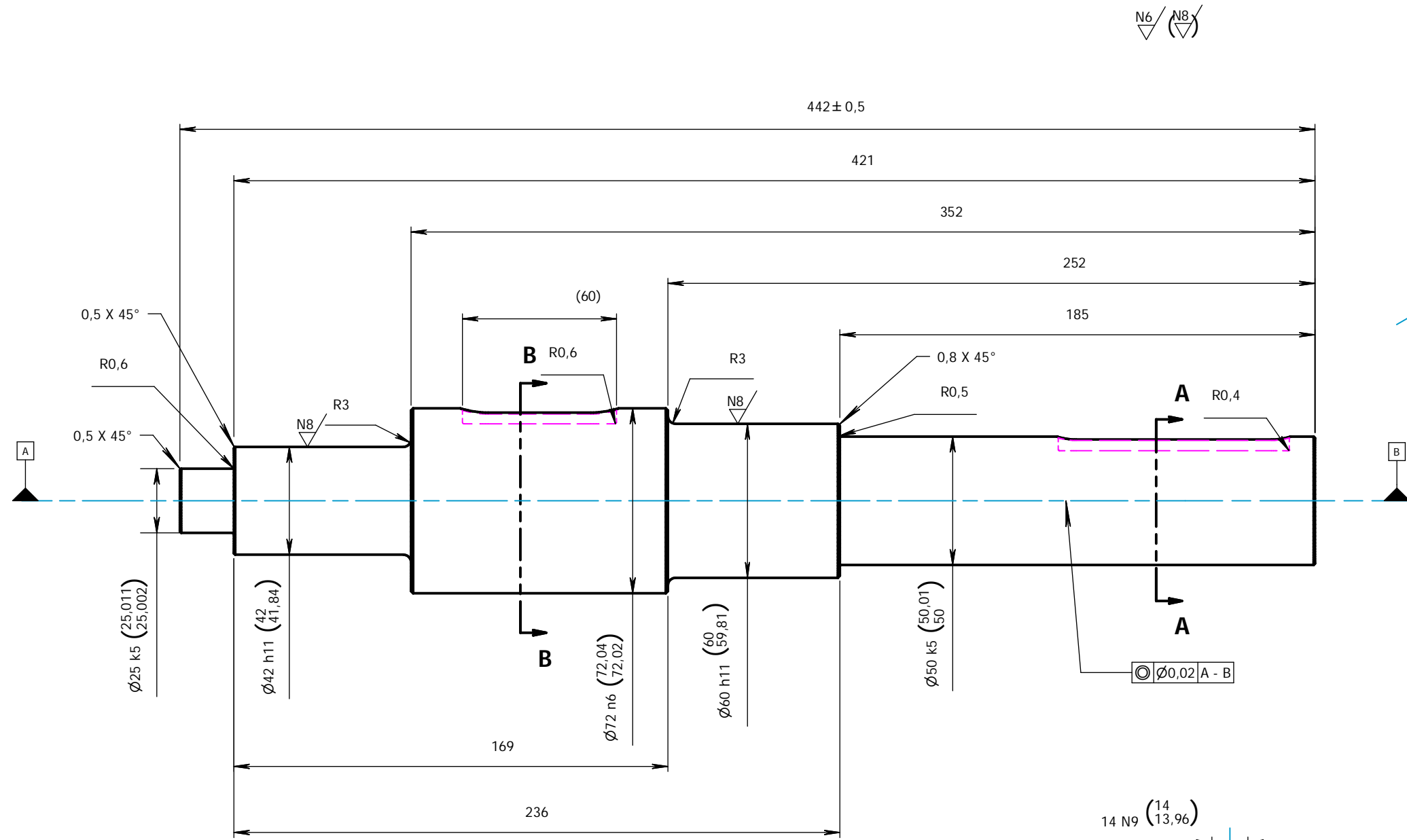


Rueda dentada  
Escala 1:5

Descripción	
Descripción	Datos
Módulo normal	10,051 mm
Diámetro de paso	404,254 mm
Agujeros de aligerado espaciados cada	60°
Ángulo de hélice	6.025°
Ángulo de presión	20°
Distancia entre ejes	250 mm
Material	Bronce fosforado SAE 65
Dureza en la superficie	80 - 102 HB
Tolerancia general según ISO2768 - m	+0,3 mm

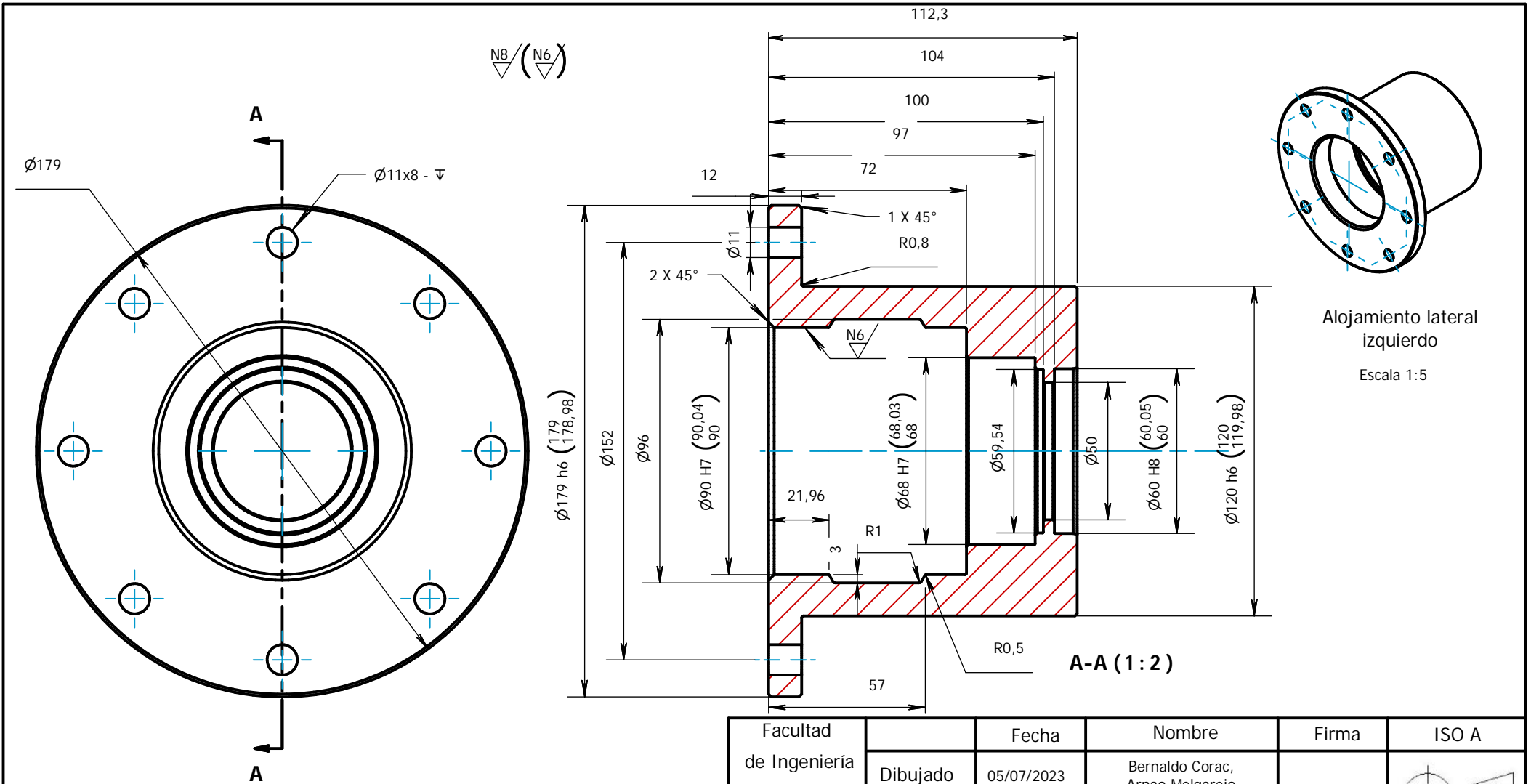
Facultad de Ingeniería Mecánica	Fecha	05/07/2023	Nombre	Bernaldo Corac, Arnao Melgarejo	Firma		ISO A
	Dibujado						
	Revisado		Dr. Fortunato Alva				
	Escala	1 : 2	Designación	Rueda dentada	Masa	40,633 kg	Formato A2 Plano # 2





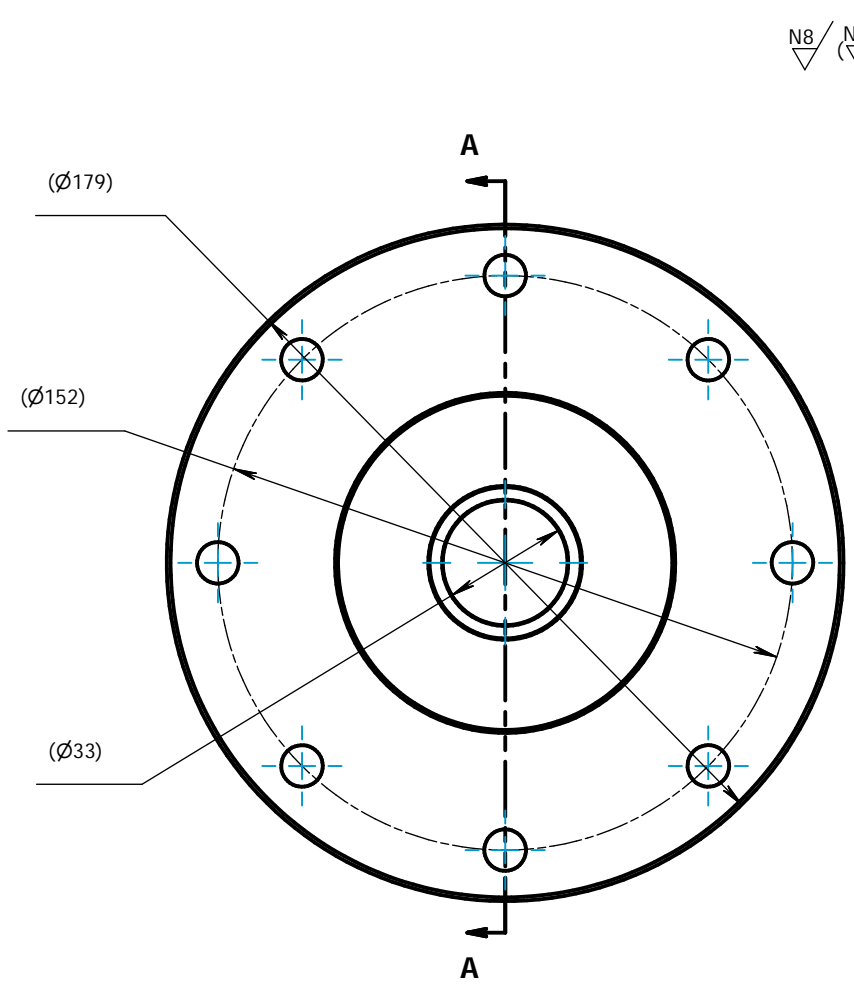
Descripción	
Descripción	Datos
Material	Acero bonificado AISI 4340
Dureza en la superficie	52 - 56 HRC
Tolerancia general segun ISO2768 - m	+/-0,3 mm

Facultad de Ingeniería Mecánica	Fecha	Nombre	Firma	ISO A
	Dibujado	05/07/2023	Bernaldo Corac, Arnao Melgarejo	
	Revisado		Dr. Fortunato Alva	
Escala	Designación		Masa	Formato A3
1 : 2	Eje de salida		8,271 kg	Plano # 3

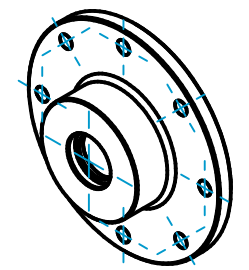
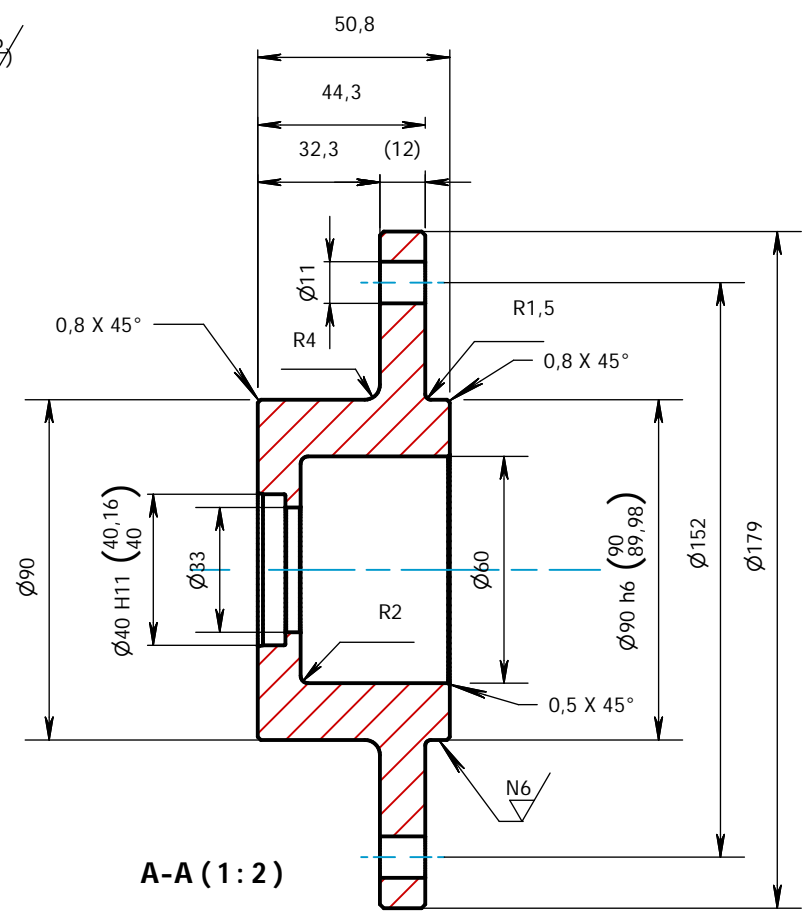


Descripción	
Descripción	Datos
Material	Hierro Nodular - ASTM A536 Grado 60 - 40 - 18
Dureza en la superficie	149 -187 HB
Tolerancia general segun ISO2768 - m	+0,3 mm

Facultad de Ingeniería Mecánica	Fecha	Nombre	Firma	ISO A
	Dibujado	05/07/2023	Bernaldo Corac, Arnao Melgarejo	
	Revisado		Dr. Fortunato Alva	
	Escala	Designación		Masa
	1 : 2	Alojamiento lateral izquierdo		5,779 kg
				Plano # 4



N8 / N6

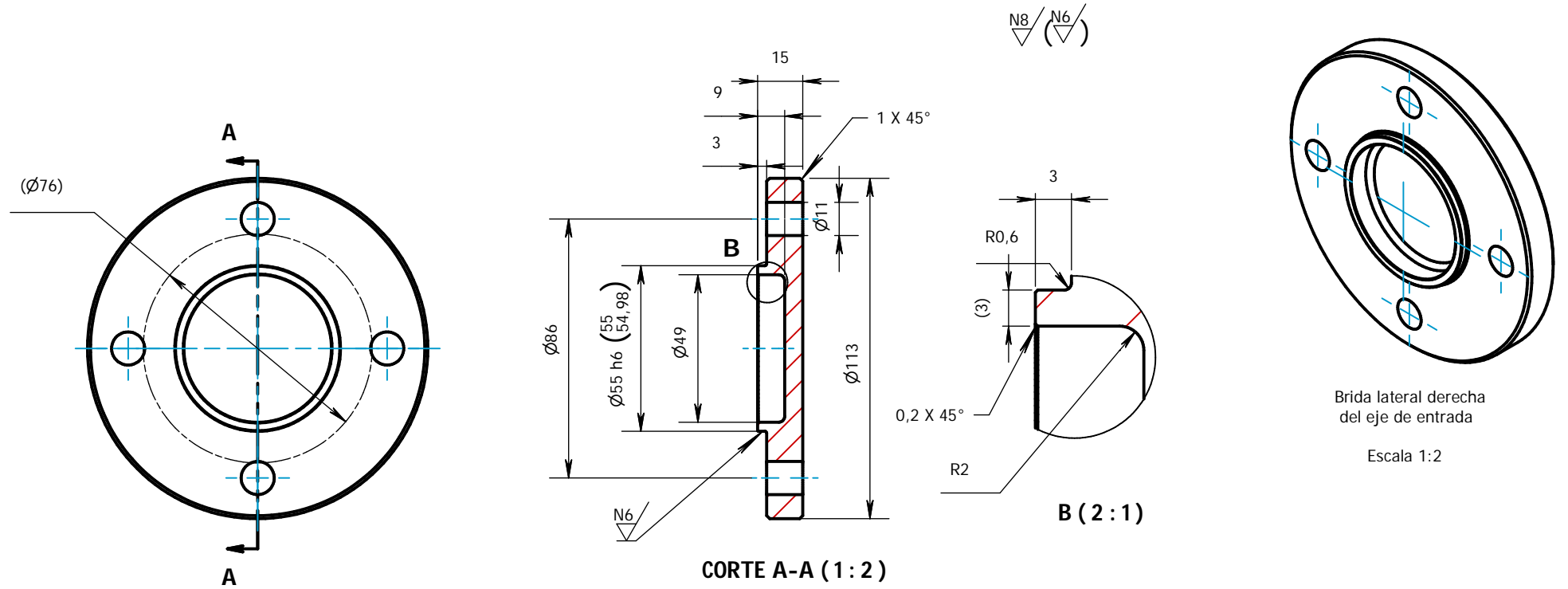


Brida lateral izquierda del eje de entrada  
Escala 1:5

A-A (1:2)

Descripción	
Descripción	Datos
Material	Hierro Nodular - ASTM A536 Grado 60 - 40 - 18
Dureza en la superficie	149 - 187 HB
Tolerancia general segun ISO2768 - m	+0,3 mm

Facultad de Ingeniería Mecánica	Fecha	Nombre	Firma	ISO A
	Dibujado	05/07/2023	Bernaldo Corac, Arnao Melgarejo	
	Revisado		Dr. Fortunato Alva	
	Escala	Designación		Masa
	1 : 2	Brida lateral izquierda del eje de entrada		2,974 kg

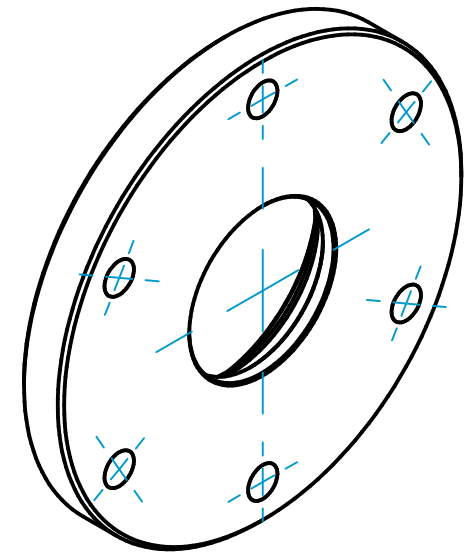
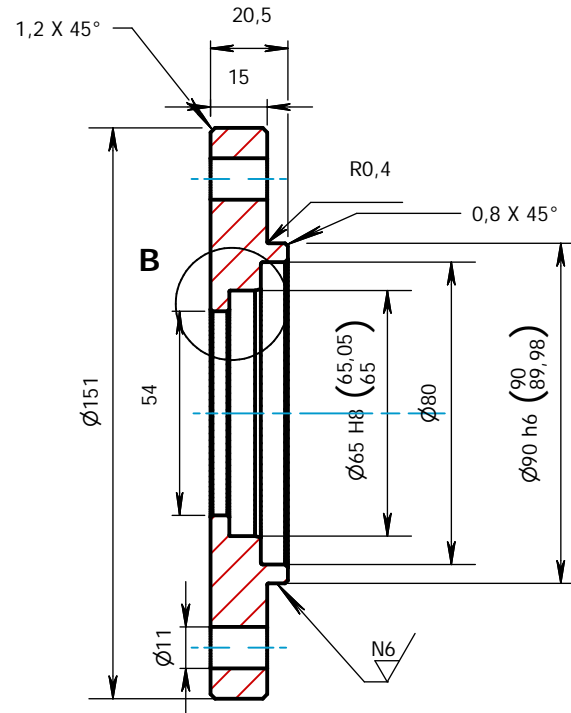
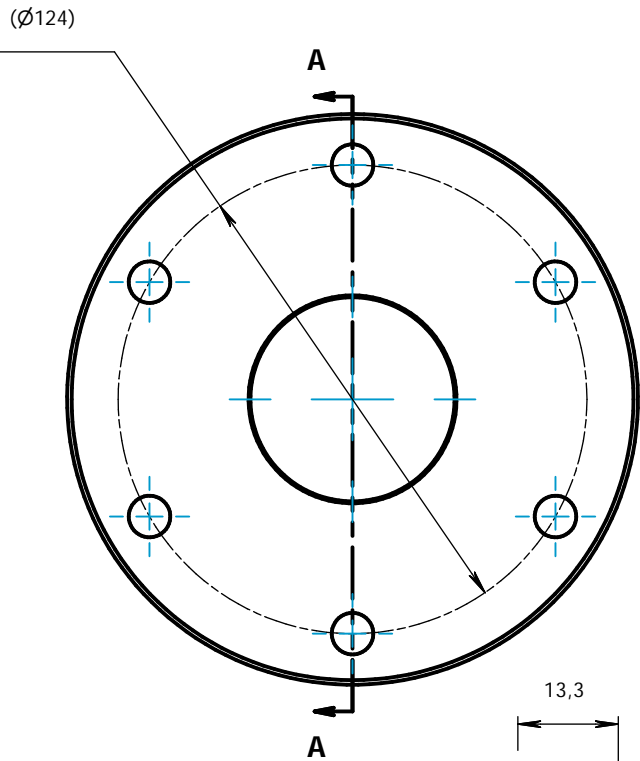


Brida lateral derecha del eje de entrada

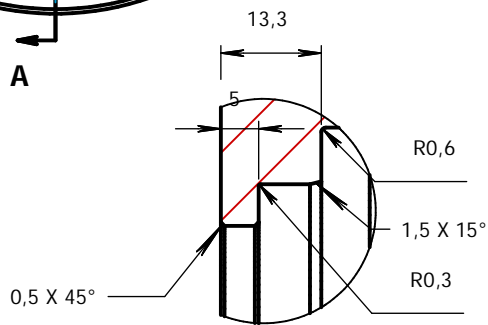
Escala 1:2

Descripción	
Descripción	Datos
Material	Hierro Nodular - ASTM A536 Grado 60 - 40 - 18
Dureza en la superficie	149 -187 HB
Tolerancia general segun ISO2768 - m	+ -0,3 mm

Facultad de Ingeniería Mecánica		Fecha	Nombre	Firma	ISO A
	Dibujado	05/07/2023	Bernaldo Corac, Arnao Melgarejo		
	Revisado		Dr. Fortunato Alva		
	Escala	Designación		Masa	Formato A4
		1 : 2	Brida lateral derecha del eje de entrada		Plano # 6



Brida frontal del eje de salida  
Escala 1:5



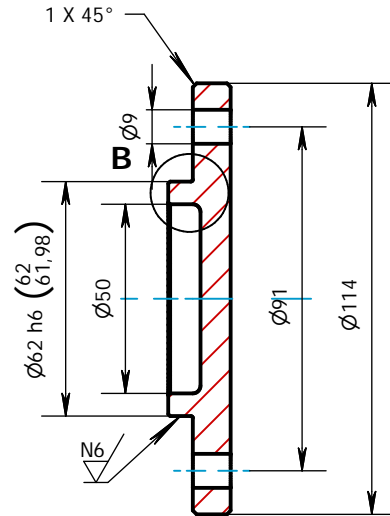
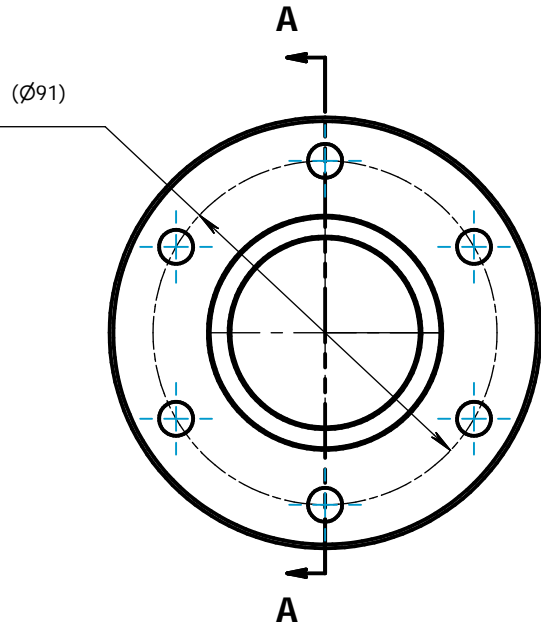
DETALLE B (1:1)

CORTE A - A (1:2)

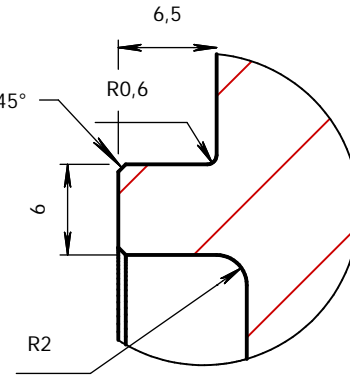
Descripción	
Descripción	Datos
Material	Hierro Nodular - ASTM A536 Grado 60 - 40 - 18
Dureza en la superficie	149 - 187 HB
Tolerancia general segun ISO2768 - m	+0,3 mm

Facultad de Ingeniería Mecánica	Fecha	Nombre	Firma	ISO A
	Dibujado	05/07/2023	Bernaldo Corac, Arnao Melgarejo	
	Revisado	Dr. Fortunato Alva		
	Escala	Designación		Formato
1:2	Brida frontal del eje de salida		Masa	A4
			1,565 kg	Plano #
				7

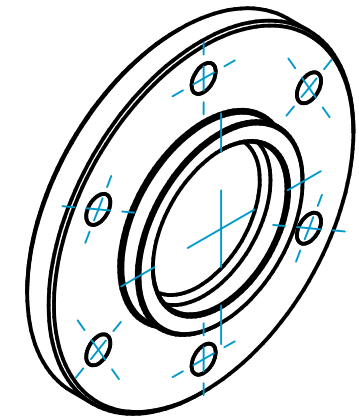
N8 / (N6)



**CORTE A-A (1 : 2)**



**B (2 : 1)**

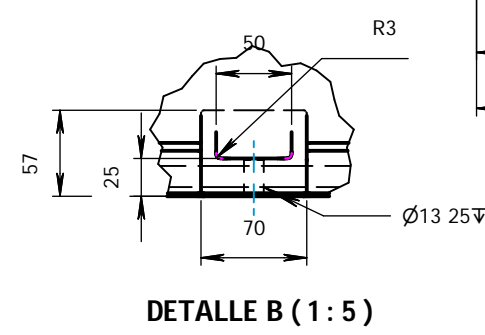
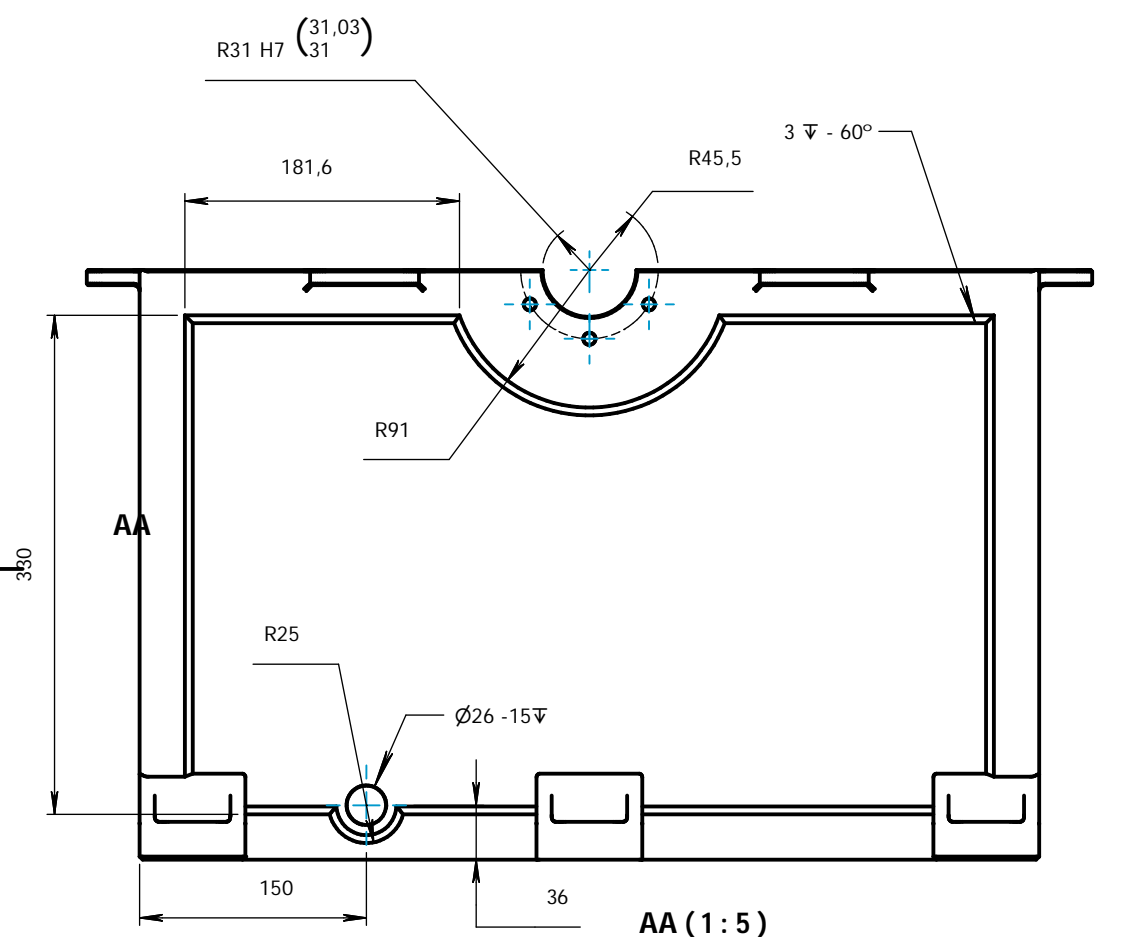
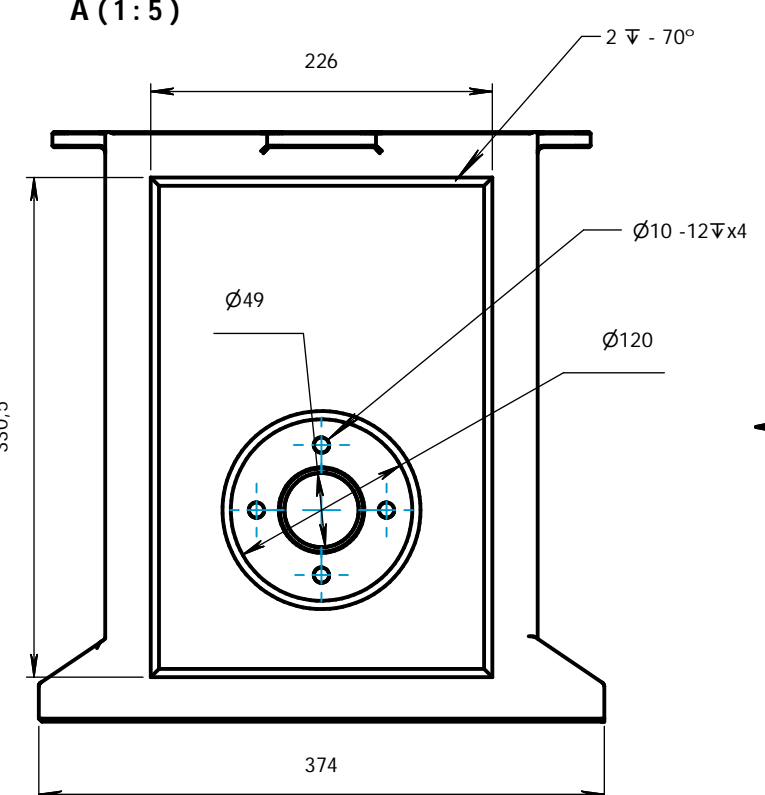
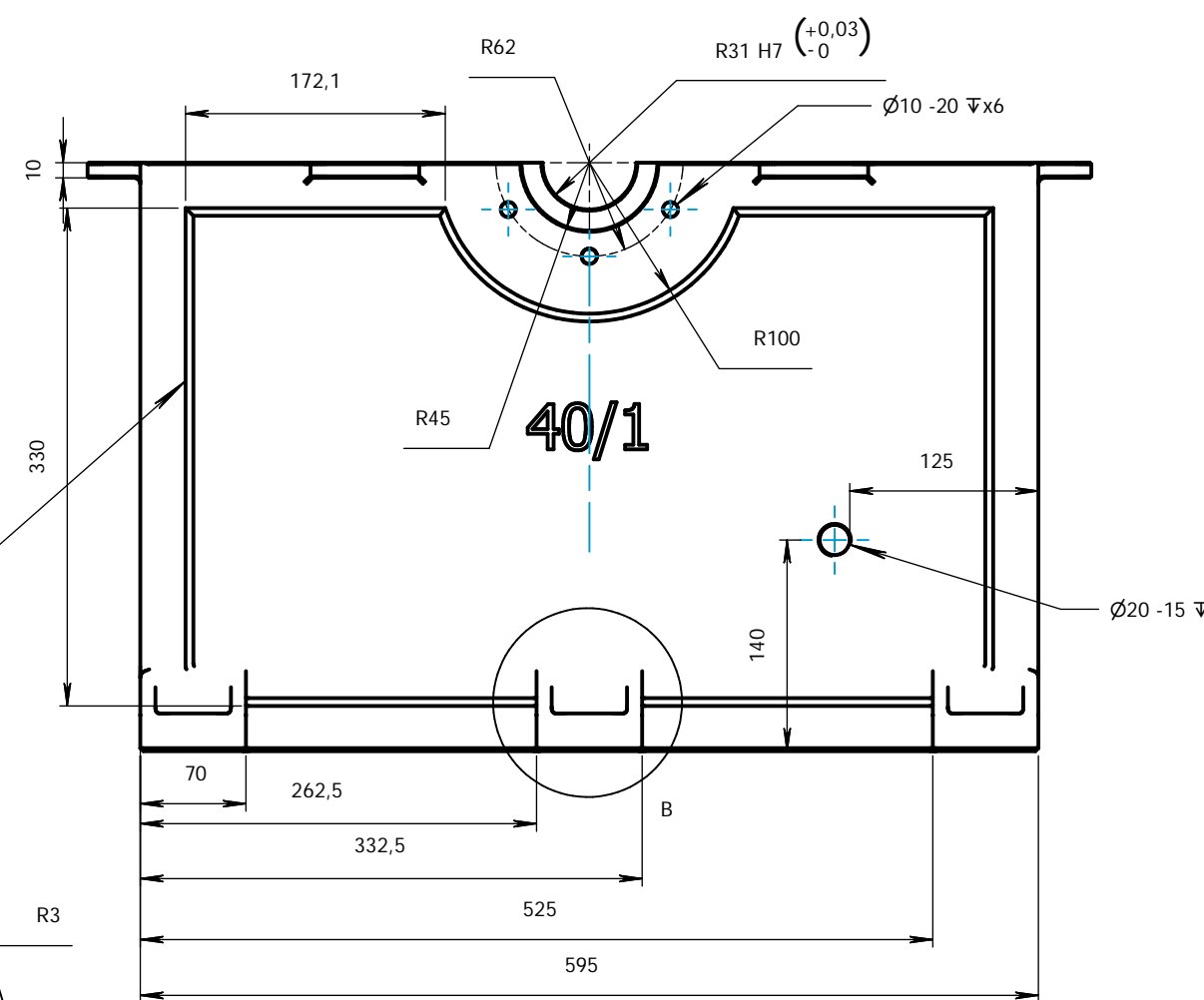
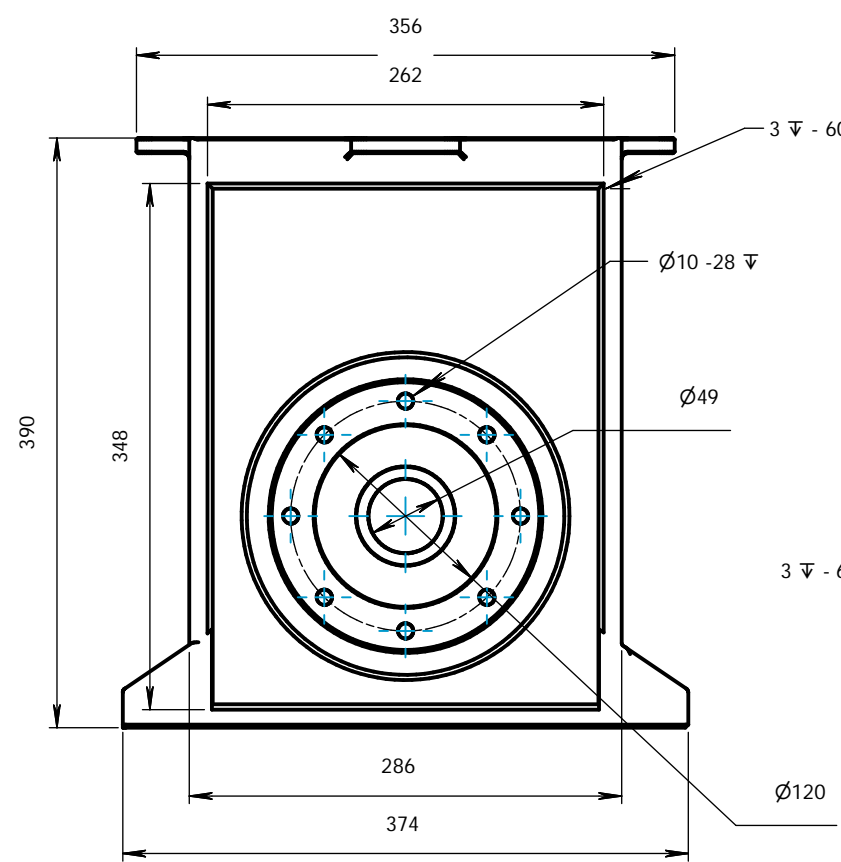
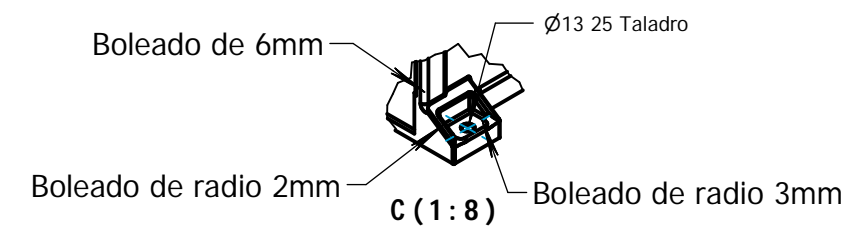
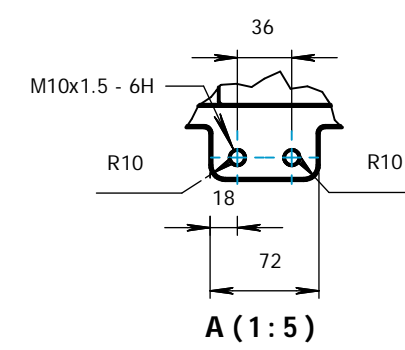
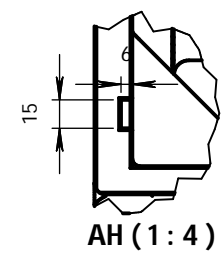
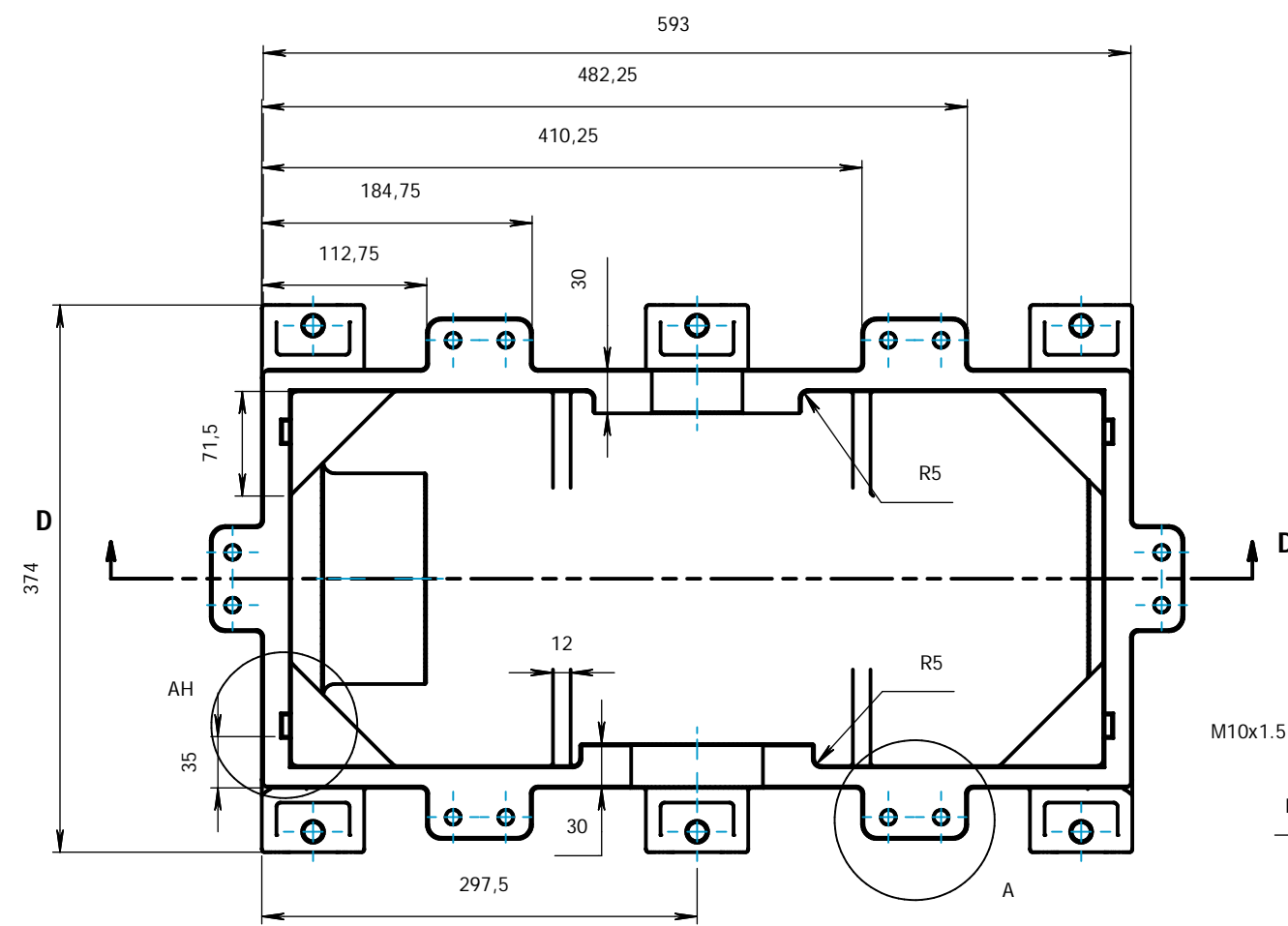
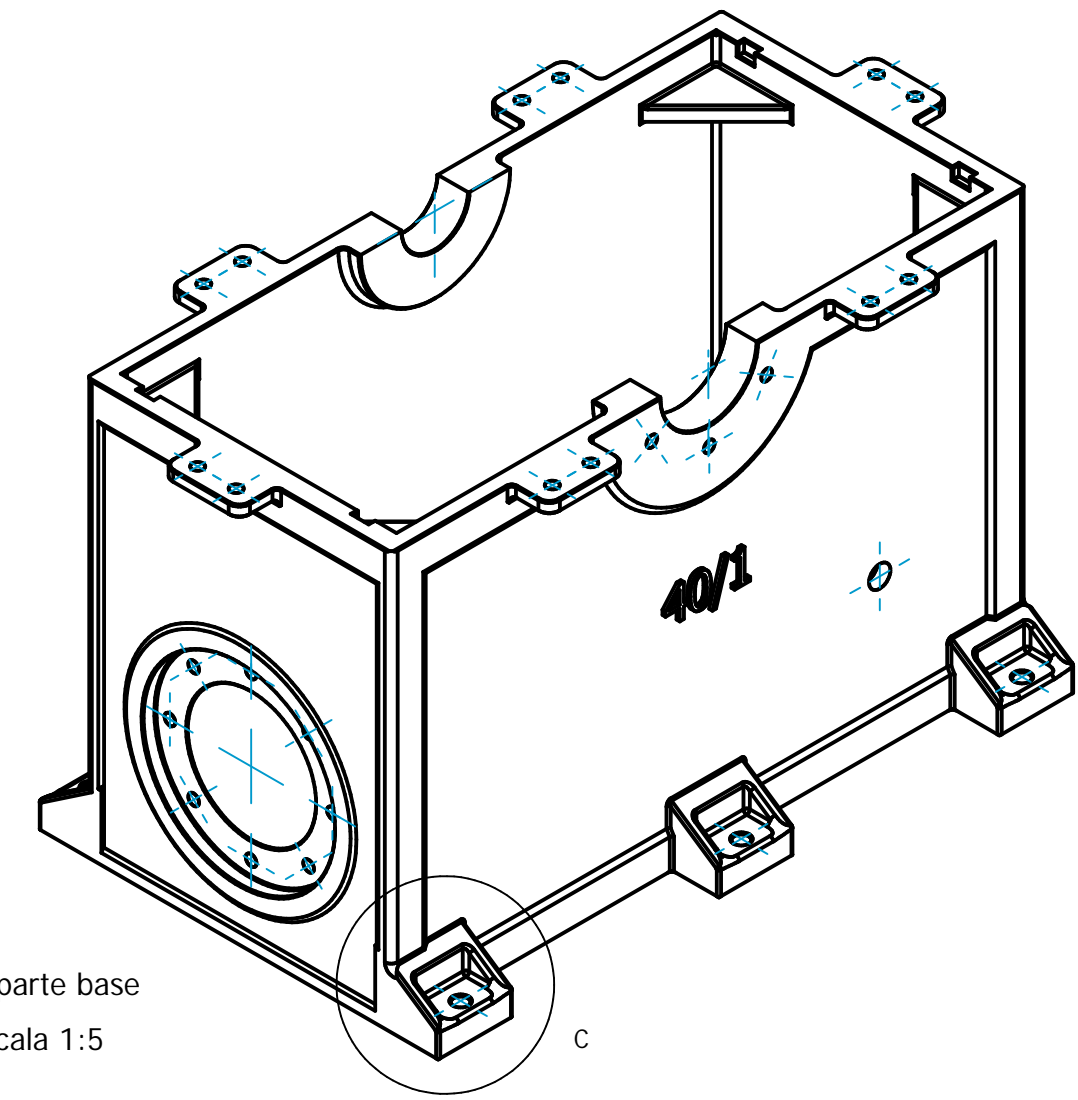
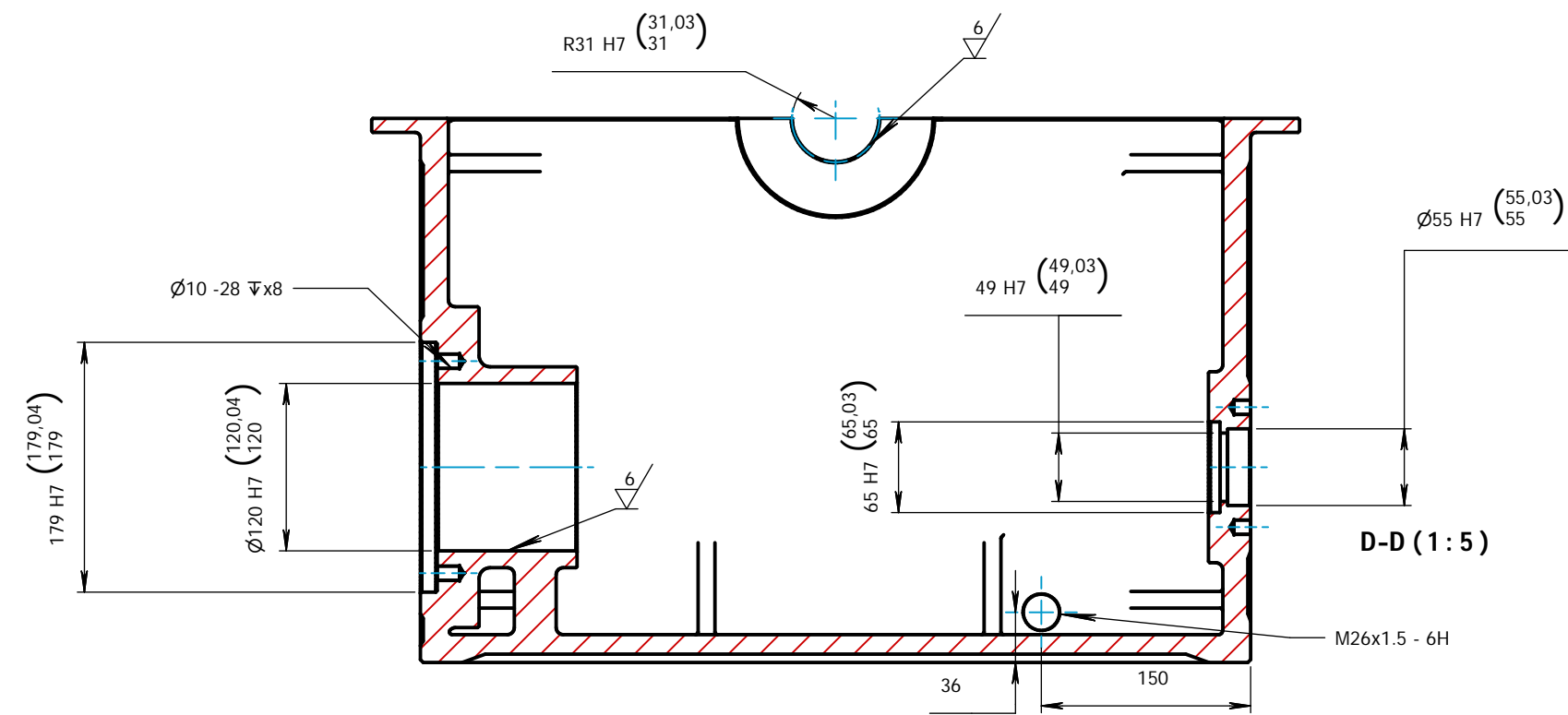


Brida posterior del eje de salida


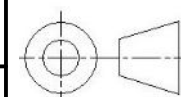
Escala 1:2

Descripción	
Descripción	Datos
Material	Hierro Nodular - ASTM A536 Grado 60 - 40 - 18
Dureza en la superficie	149 -187 HB
Tolerancia general segun ISO2768 - m	+ -0,3 mm

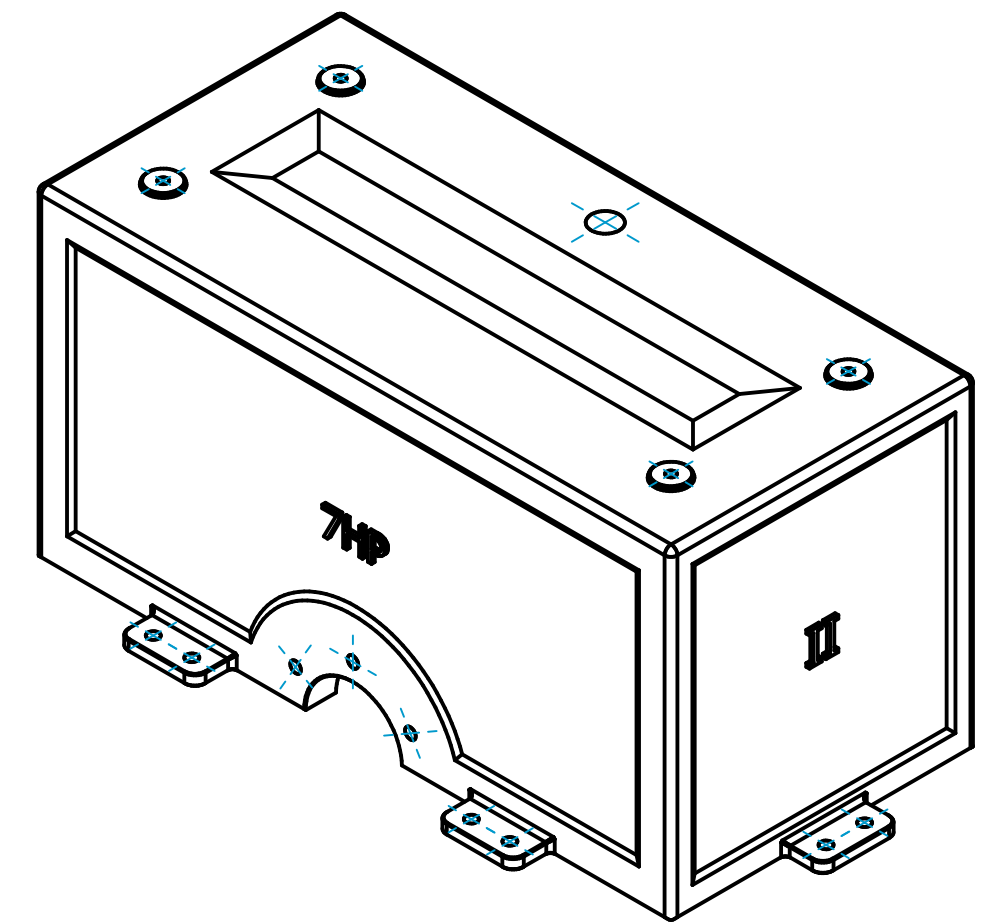
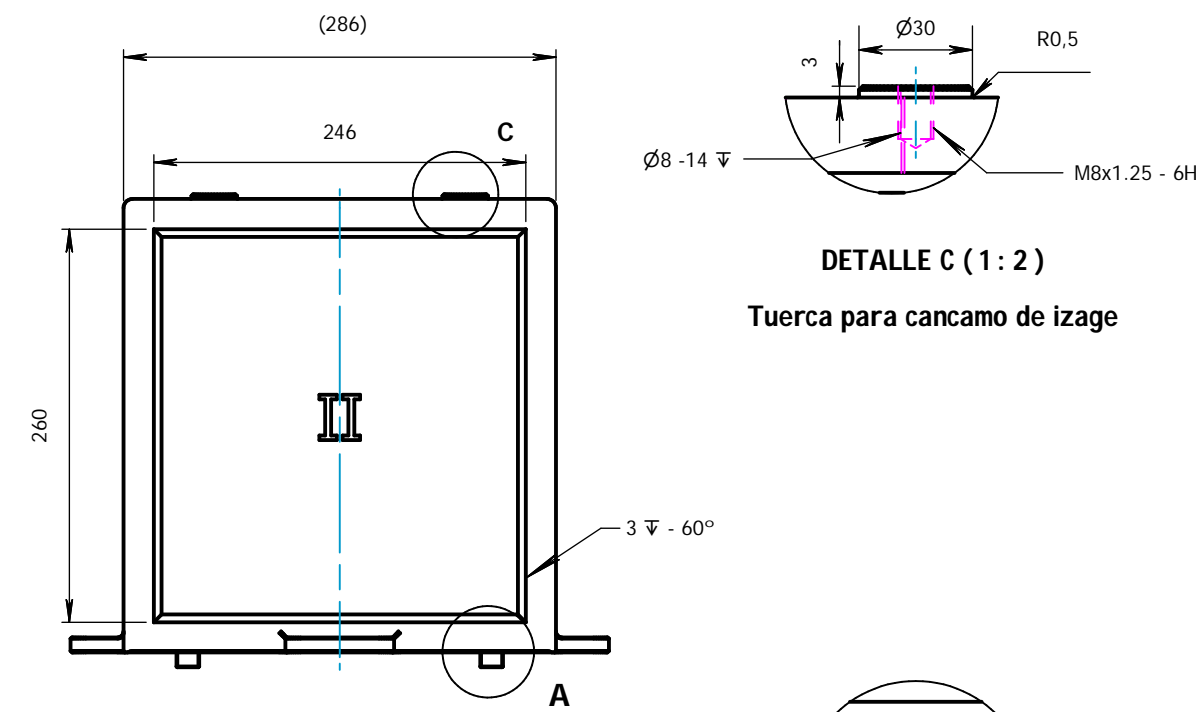
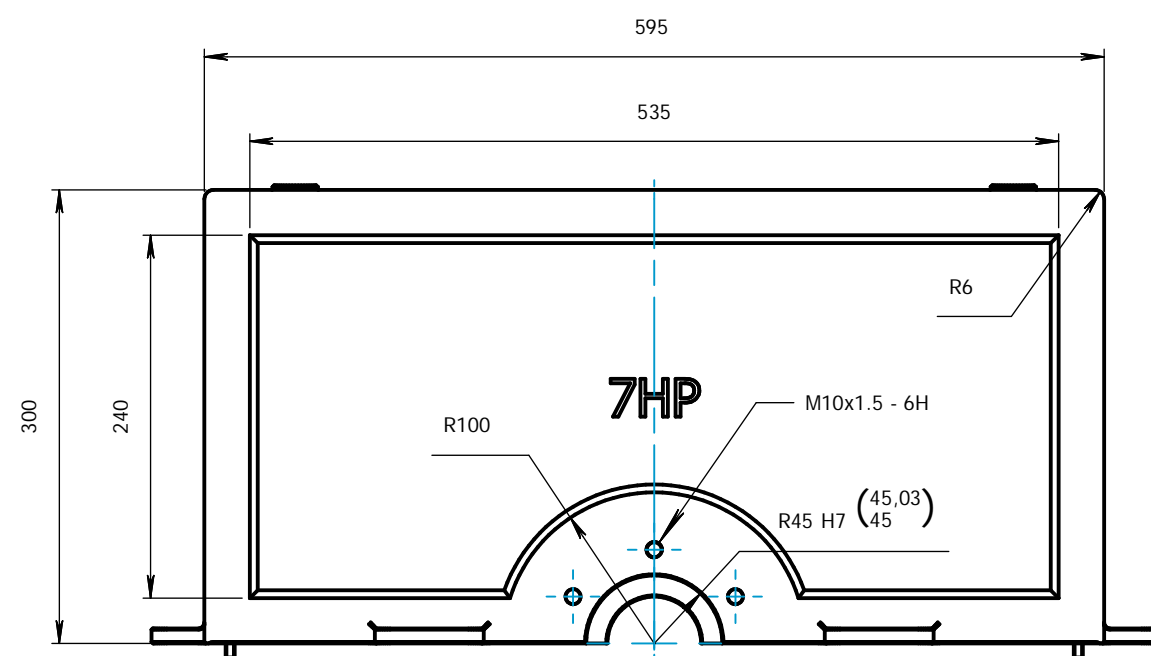
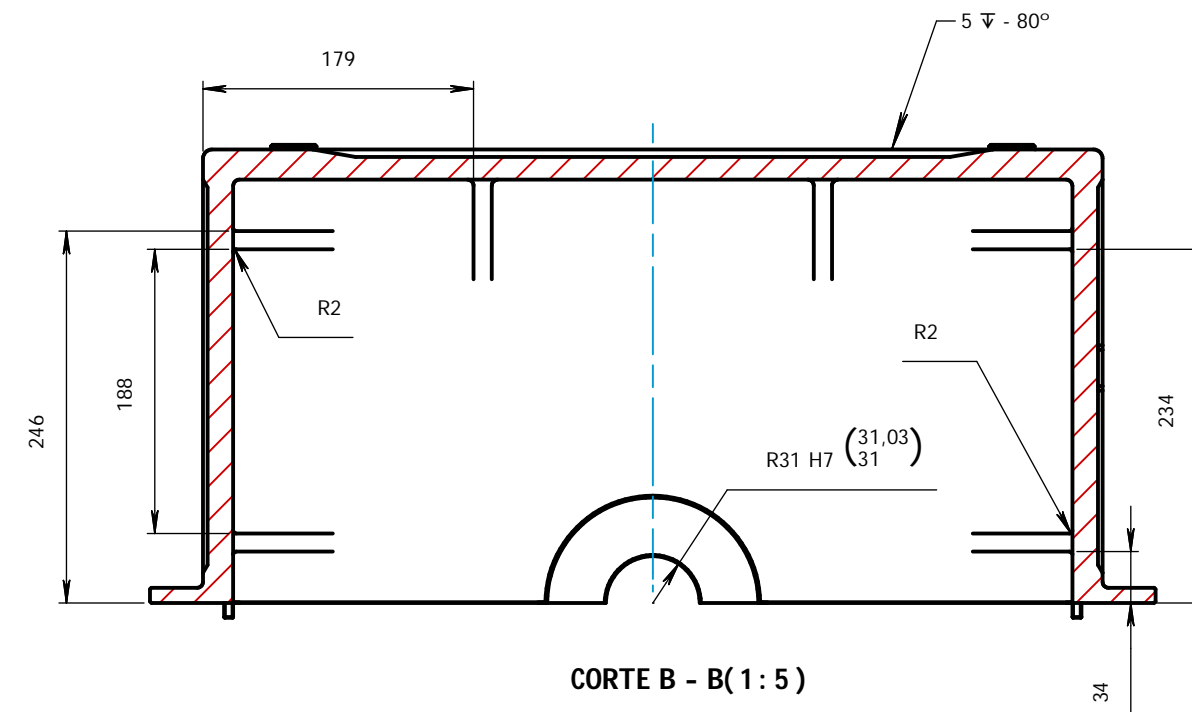
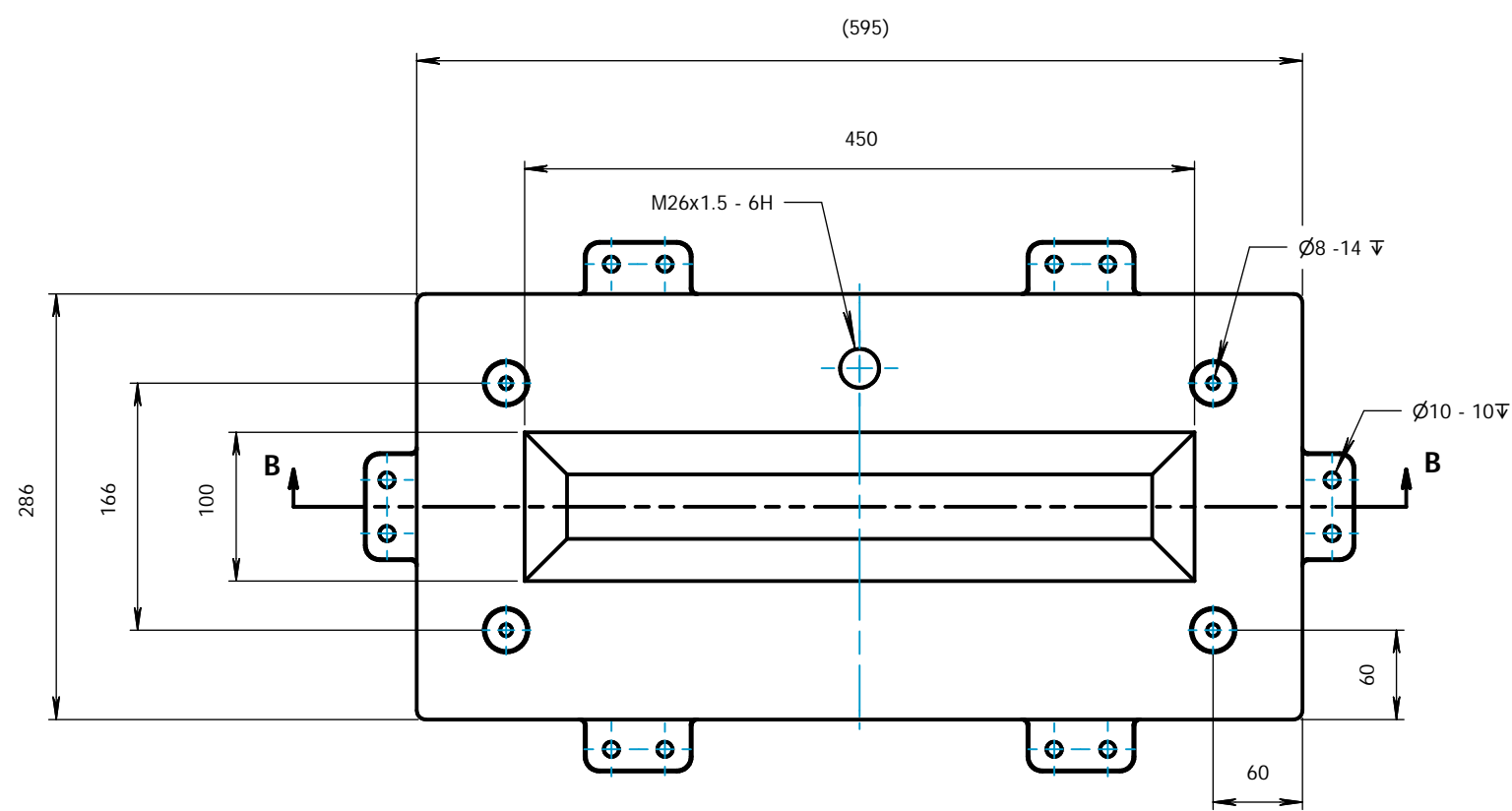
Facultad de Ingeniería Mecánica	Fecha	Nombre	Firma	ISO A
	Dibujado	05/07/2023	Bernaldo Corac, Arnao Melgarejo	
	Revisado		Dr. Fortunato Alva	
	Escala	Designación		Masa
		1 : 2	Brida posterior del eje de salida	
				Plano # 8



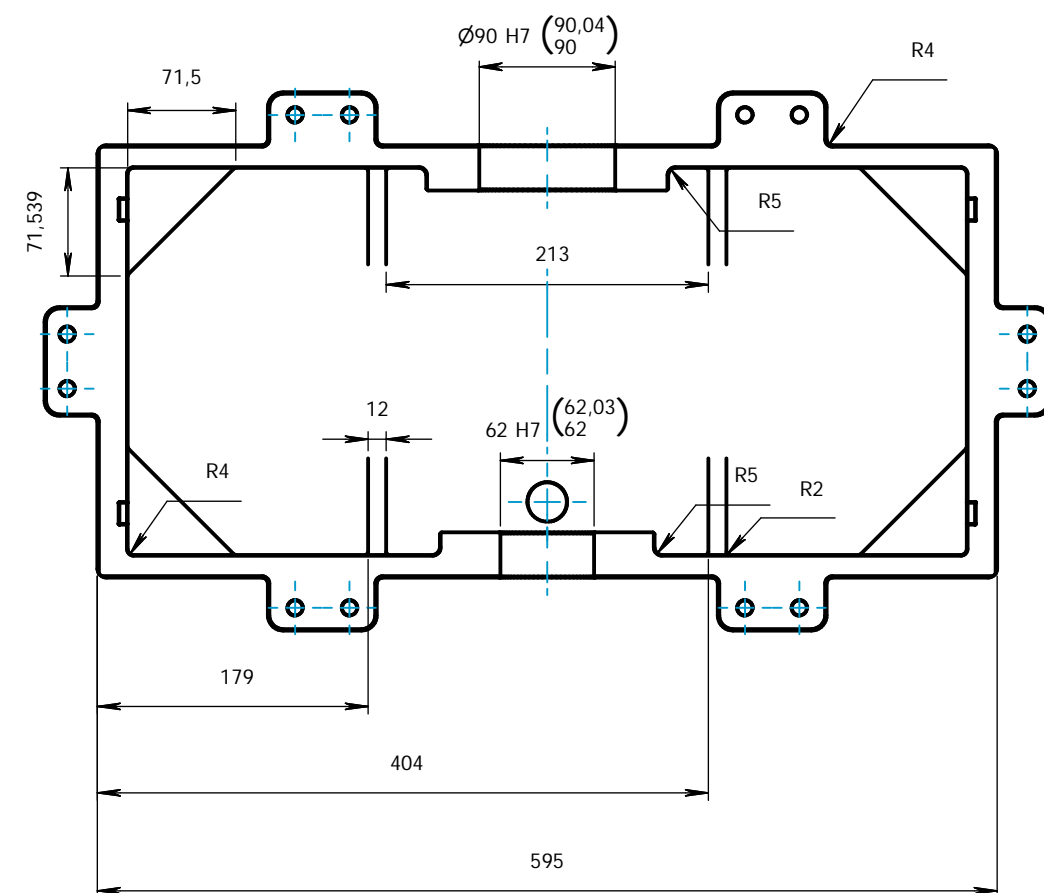
Descripción		Datos
Descripción	Hierro Nodular - ASTM A536 Grado 60 - 40 - 18	
Material	149 - 187 HB	
Dureza en la superficie	+0,3 mm	
Tolerancia general según ISO2768 - m		

Facultad de Ingeniería Mecánica	Fecha	Nombre	Firma	ISO A
	Dibujado	05/07/2023	Bernaldo Corac, Arnao Melgarejo	
	Revisado		Dr. Fortunato Alva	
Escala	Designación		Masa	Formato
1 : 5	Caja parte base		99,398 kg	A2
				Plano #
				9

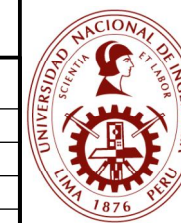
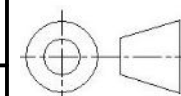




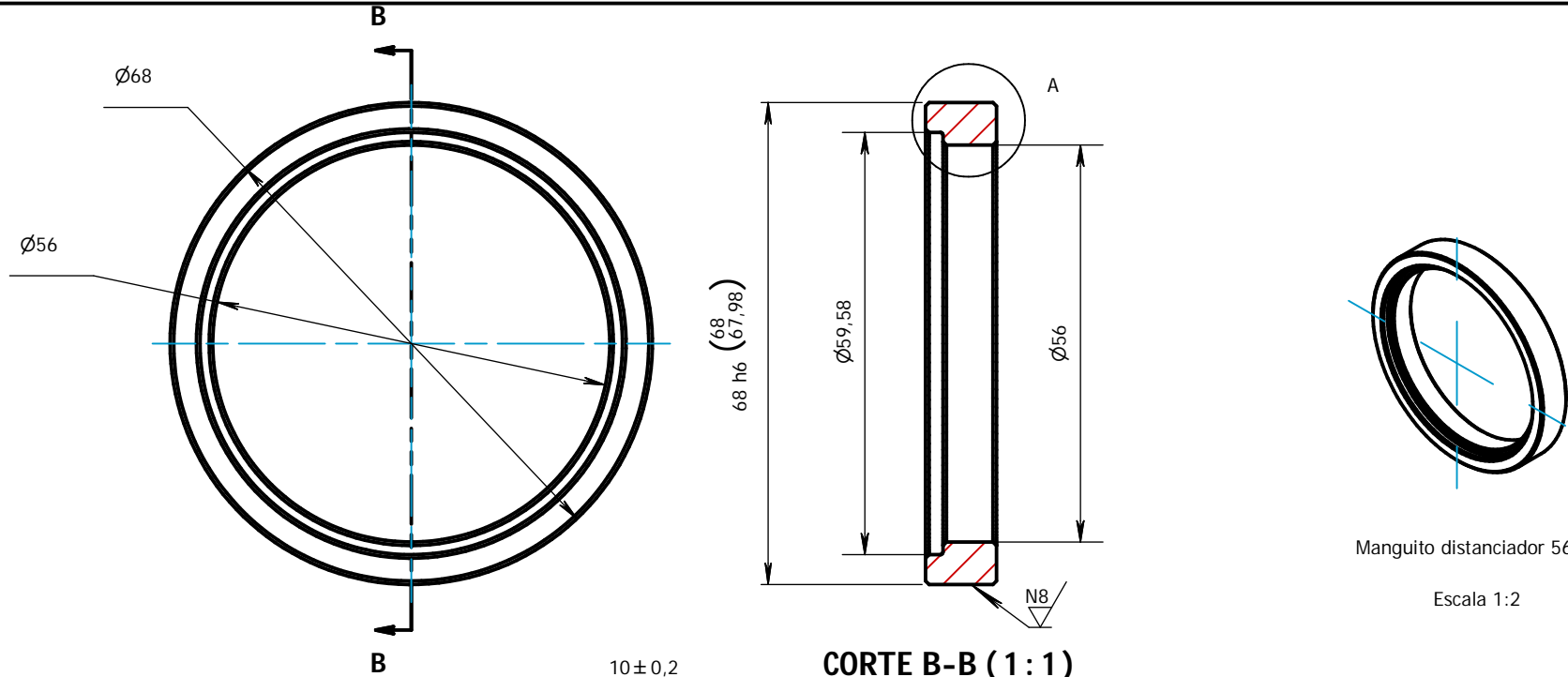
Tapa de la base  
Escala 1:5



Descripción		Datos	
Material	Hierro Nodular - ASTM A536 Grado 60 - 40 - 18	Dureza en la superficie	149 - 187 HB
Tolerancia general segun ISO2768 - m			+0,3 mm

Facultad de Ingeniería Mecánica	Dibujado	Fecha	Nombre	Firma	ISO A
	Revisado		Dr. Fortunato Alva		
	Escala	Designación		Masa	
	1 : 5	Caja parte superior		76,275 kg	Plano # 10





Manguito distanciador 56x40

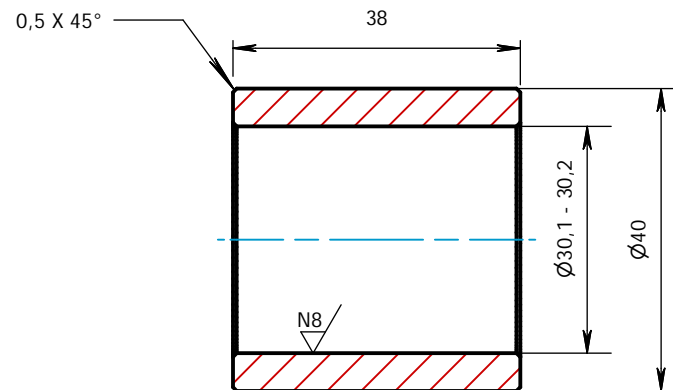
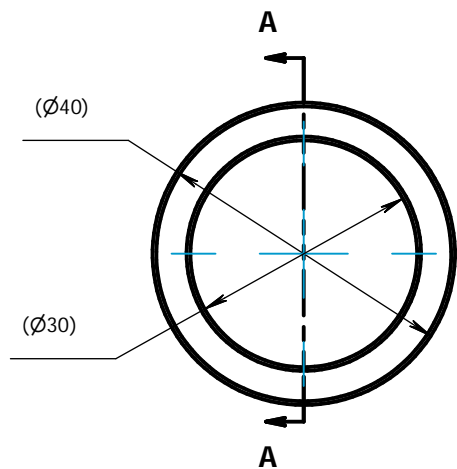
Escala 1:2

**CORTE B-B (1:1)**

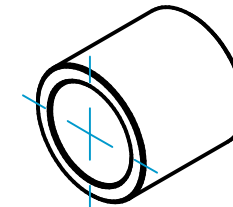
**A (3:1)**

Descripción	
Descripción	Datos
Material	Acero bonificado AISI 4340
Dureza en la superficie	52 - 56 HRC
Tolerancia general segun ISO2768 - m	+0,3 mm

Facultad de Ingeniería Mecánica	Fecha	05/07/2023	Nombre	Bernaldo Corac, Arnao Melgarejo	Firma		ISO A
	Dibujado		Revisado	Dr. Fortunato Alva			
	Escala	1 : 2	Designación		Masa	0,085 kg	Formato A4
			Manguito distanciador 56x40				Plano # 11



**CORTE A-A (1:1)**

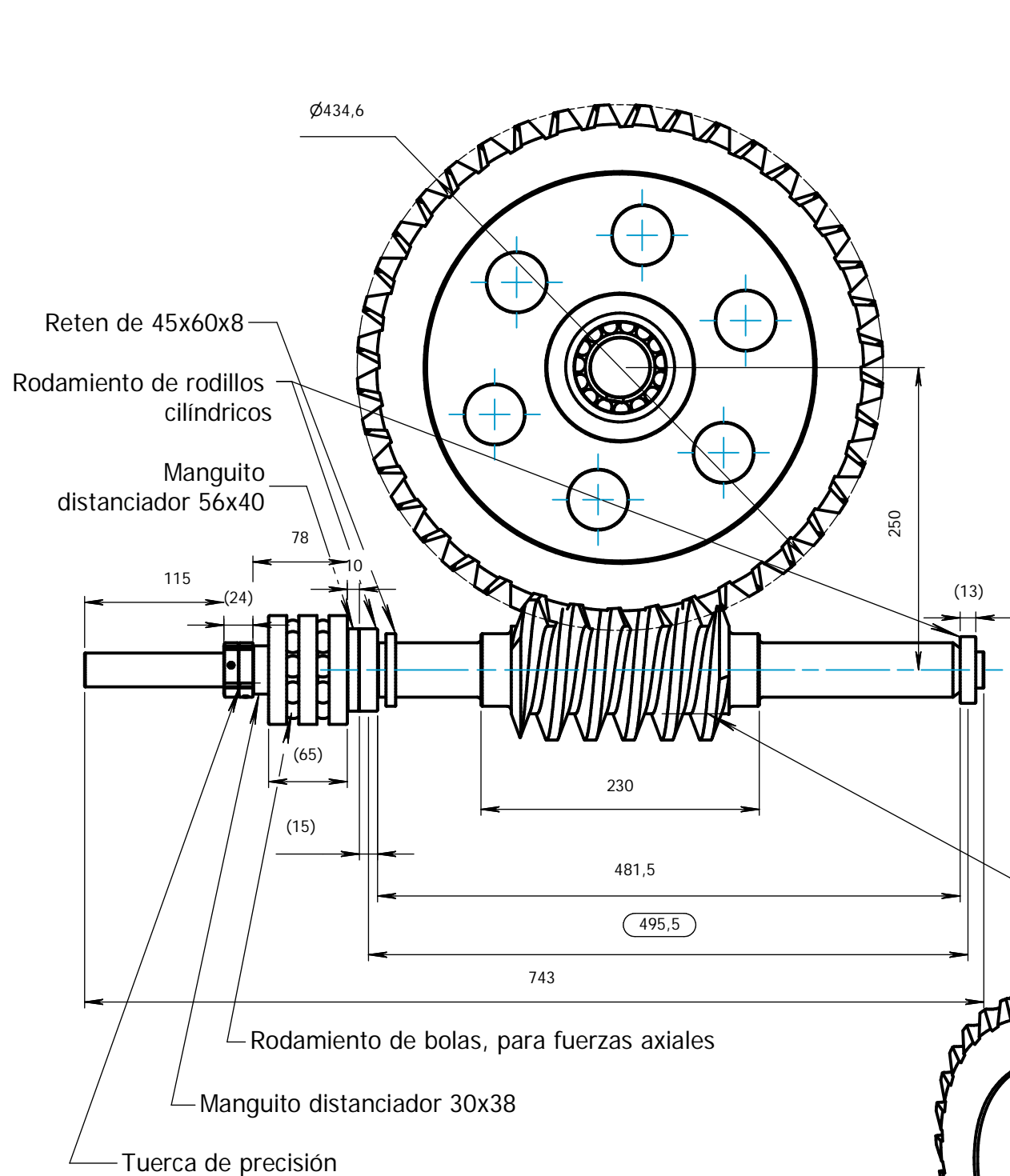


Manguito distanciador 30x38

Escala 1:2

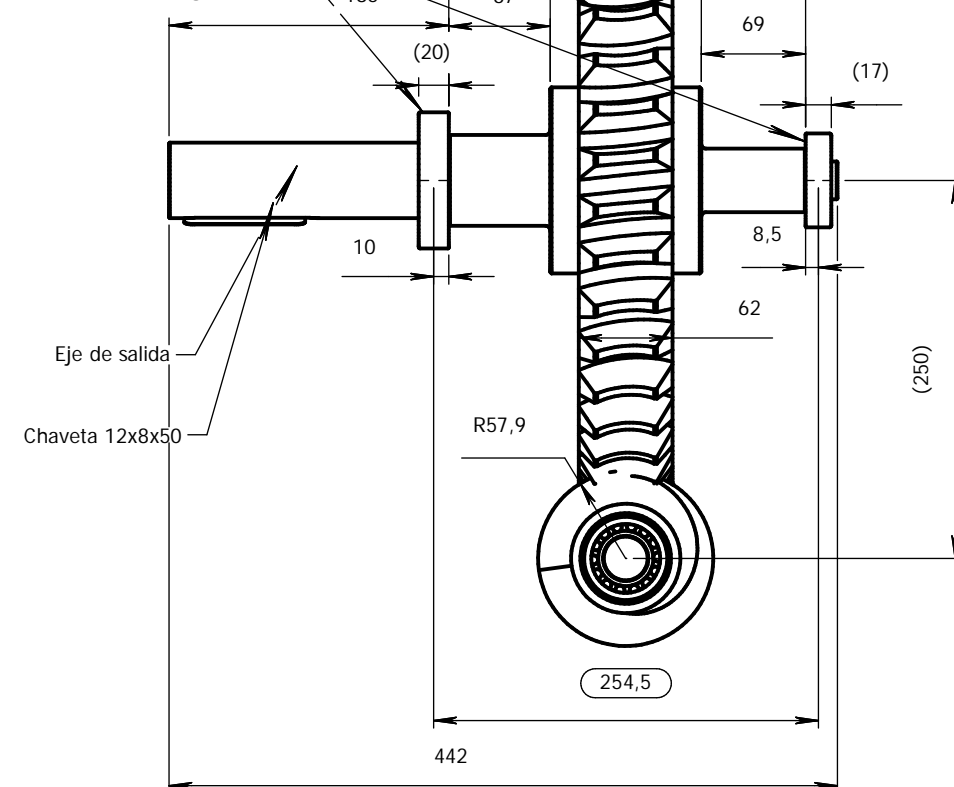
Descripción	
Material	Acero bonificado AISI 4340
Dureza en la superficie	52 - 56 HRC
Tolerancia general segun ISO2768 - m	+ -0,3 mm

Facultad de Ingeniería Mecánica		Fecha	Nombre	Firma	ISO A
	Dibujado	05/07/2023	Bernaldo Corac, Arnao Melgarejo		
	Revisado		Dr. Fortunato Alva		
	Escala	Designación		Masa	Formato A4
		1 : 2	Manguito distanciador 30x38		Plano # 12



Ruedad de 40 dientes  
(Inclinación de la hélices izquierdas)

Rodamiento de una hilera de bolas con contacto angular



Eje de salida

Chaveta 12x8x50

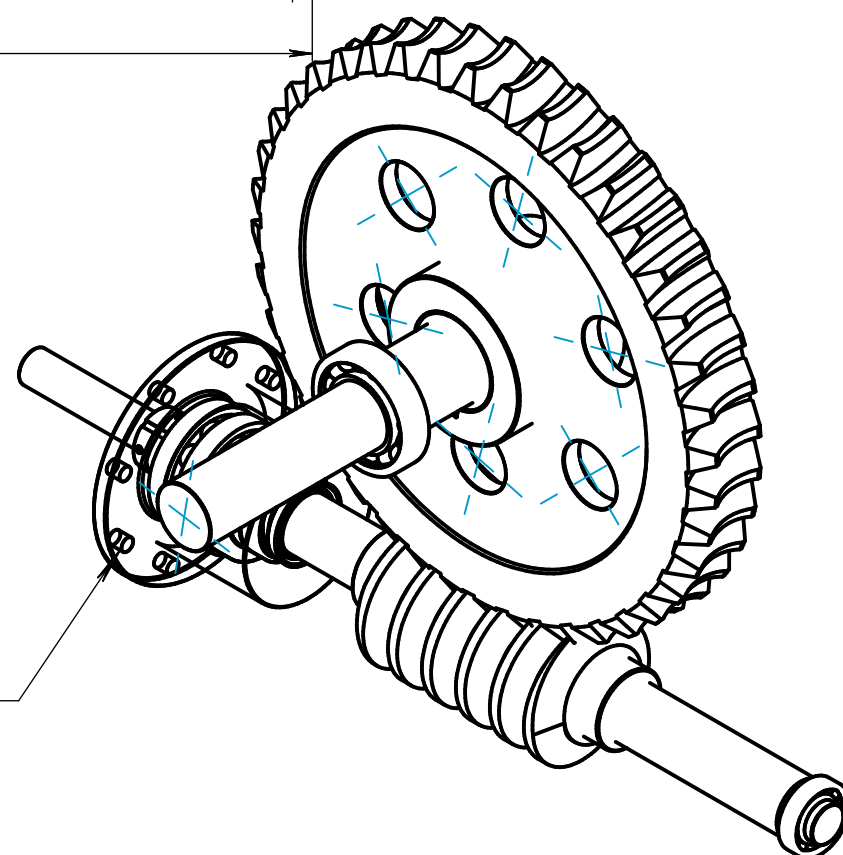
Tornillo sin fin  
(Inclinación de las hélices derecha)

Rodamiento de bolas, para fuerzas axiales

Manguito distanciador 30x38

Tuerca de precisión

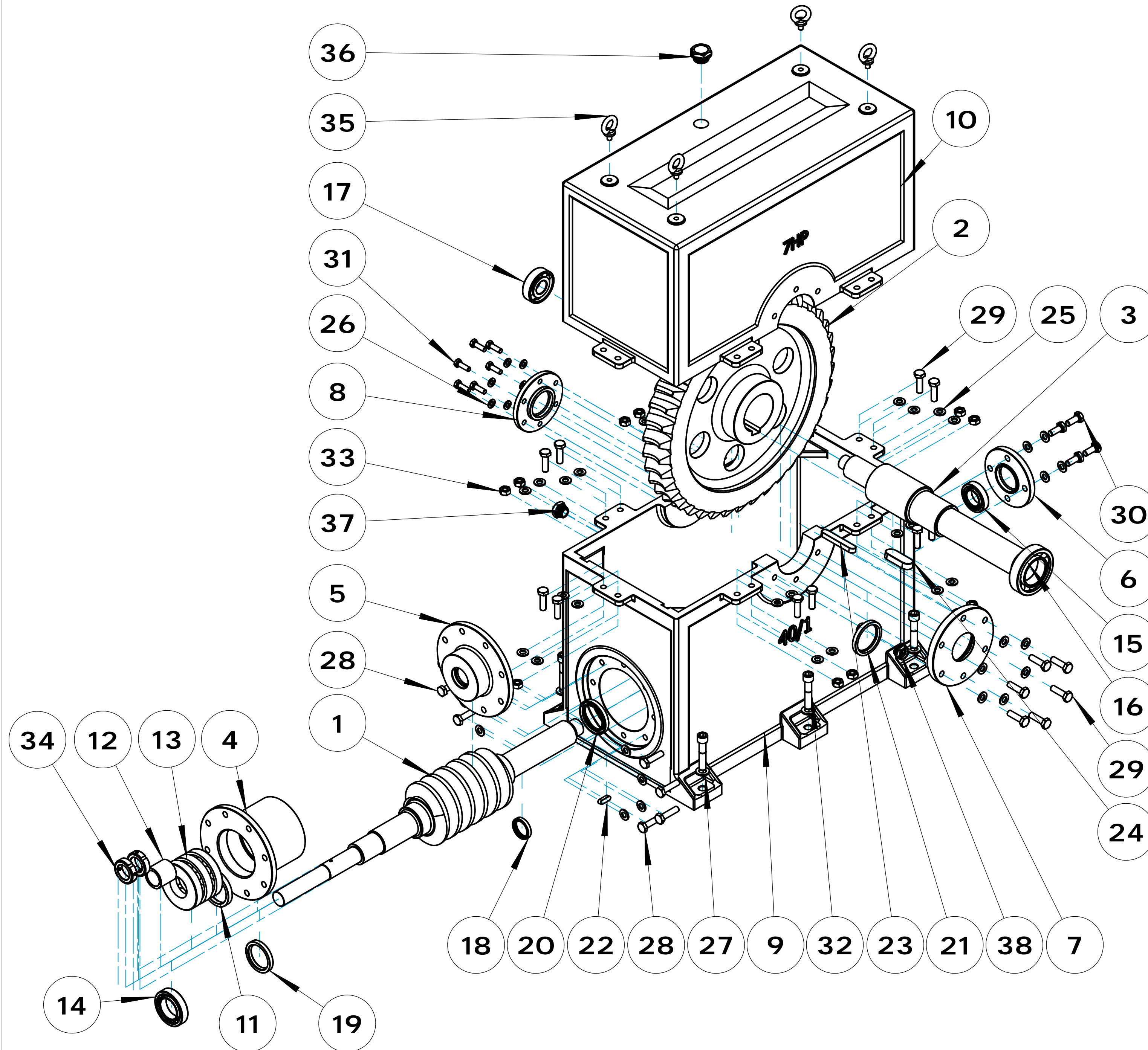
Alojamiento



Facultad de Ingeniería Mecánica	Fecha	Nombre	Firma	ISO A
Dibujado	05/07/2023	Bernaldo Corac, Arnao Melgarejo		
Revisado		Dr. Fortunato Alva		
Escala	Designación		Masa	Formato A3
	1 : 5	Dimensiones generales del Tornillo sin fin y Rueda dentada		Plano # 13



# Vista de explosión



## LISTA DE PARTES

Pieza	Cantidad	Descripción	Nombre
1	1	Acero de cementación AISI 3215	Tornillo sin fin
2	1	Bronce fosforado SAE 65	Rueda de 40 dientes
3	1	Acero bonificado AISI 4340	Eje de salida
4	1	Hierro Nodular - ASTM A536 Grado 80-55-06	Alojamiento lateral izquierda
5	1	Hierro Nodular - ASTM A536 Grado 80-55-06	Brida lateral izquierda del eje de entrada
6	1	Hierro Nodular - ASTM A536 Grado 80-55-06	Brida lateral derecha del eje de entrada
7	1	Hierro Nodular - ASTM A536 Grado 80-55-06	Brida frontal del eje de salida
8	1	Hierro Nodular - ASTM A536 Grado 80-55-06	Brida posterior del eje de salida
9	1	Hierro Nodular - ASTM A536 Grado 80-55-06	Caja parte base
10	1	Hierro Nodular - ASTM A536 Grado 80-55-06	Caja parte superior
11	1	Acero bonificado AISI 4340	Manguito distanciador 56x40
12	1	Acero bonificado AISI 4340	Manguito distanciador 30x38
13	1	Rodamiento de bolas, para fuerzas axiales	SKF 52408
14	1	Rodamiento de rodillos cilindricos, para fuerzas radiales	SKF NU1008
15	1	Rodamiento de rodillos cilindricos, para fuerzas radiales	SKF NU1006
16	1	Rodamiento de una hilera de bolas concontacto angular	SKF 7210B
17	1	Rodamiento de una hilera de bolas concontacto angular	SKF 7305B
18	1	Reten lateral izquierda - Alojamiento	ISO 6194 - A 30x40x7
19	1	Reten lateral izquierda - Alojamiento	ISO 6194 - A 45x60x8
20	1	Reten lateral derecha	ISO 6194 - A45x68x8
21	1	Reten frontal	ISO 6194 - A 50x65x8
22	1	Chaveta del tornillo sin fin	ISO R773 - A 8x7x25
23	1	Chaveta del eje de salida	ISO R773 - A 14x9x80
24	1	Chaveta del eje de salida - Acoplamiento de rueda y eje	ISO R773 - A 20x12x60
25	42	Arandela	ISO 7089 - 10.5 Grado A
26	6	Arandela - Lado posterior	ISO 7089 - 8,4 - 140HV
27	6	Arandela - Anclaje	ISO 7089 - 13 Grado A
28	42	Pernos de cabeza hexagonal, completamente roscados	ISO 4017 M10x1,5x40 - Grado 8,8
29	18	Pernos de cabeza hexagonal, completamente roscados	ISO 4017 M10x1,5x35 - Grado 8,8
30	4	Pernos de cabeza hexagonal, completamente roscados	ISO 4017 M10x1,5x25 - Grado 8,8
31	6	Pernos de cabeza hexagonal, completamente roscados	ISO 4017 M8x1,25x25- Grado 8,8
32	6	Pernos de cabeza cilindrica con hexagono interior, parcialmente roscados	ISO 4762 M12x1,5x60 - Grado 8,8
33	12	Tuerca hexagonal	ISO 4032 M10 - Grado 6
34	2	Tuerca de precisión	ZM30x1,5x12
35	4	Cancamo de izaje, para 140 kg cada uno	ISO 3266 - M8x1,25 - A4
36	1	Tapon, para ingreso de aceite	TCR - 26x1,5
37	1	Tapon, para salida de aceite	TSD - 20X1,5
38	1	Visor o mirilla de aceite	GN 743 -14 -M20x1,5 - A

Facultad de Ingeniería Mecánica		Fecha	Nombre	Firma	ISO A
	Dibujado	05/07/2023	Bernaldo Corac, Arnao Melgarejo		
	Revisado		Dr. Fortunato Alva		
	Escala	Designación		Masa	Formato
	1 : 5	Vista de explosión		257,905 kg	A2
					Plano # 14

