

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA**

**FACULTAD DE CIENCIAS**



**TESIS**

**MODELO DE YUKAWA EN LA TEORÍA DE PERTURBACIÓN CAUSAL**

**PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE:**

**LICENCIADO EN FÍSICA**

**ELABORADA POR:**

**OSCAR ADÁN ACEVEDO SÁNCHEZ**

**ASESOR:**

**Dr. BRUTO MAX PIMENTEL ESCOBAR**

**LIMA - PERÚ**

**2023**

## **Agradecimientos**

La Tesis que se presenta al lector ha sido desarrollada en el Brasil, simultáneamente a los estudios doctorales del autor en el *Instituto de Física Teórica* de la *Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”*. El autor expresa su profundo agradecimiento a esta institución, así como al Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar, asesor de este trabajo.

## Resumen

El modelo de Yukawa nació en el estudio fenomenológico de las interacciones nucleares, y su presencia en la física de las partículas ha persistido hasta los días actuales en el modelamiento de la interacción del campo de Higgs con los fermiónicos. Dicho modelo, aunque simple, exhibe las denominadas divergencias ultravioletas, uno de los problemas a los que se enfrenta la teoría del campo cuantificado convencional, requiriendo el uso de técnicas de regularización para la obtención de cantidades físicas finitas.

Una formulación alternativa de la teoría del campo cuantificado es la teoría de perturbación causal (TPC), la cual utiliza al axioma de la causalidad, referido al operador de dispersión, para establecer un procedimiento inductivo para la construcción perturbativa de sus términos. Teniendo en cuenta, además, al carácter distribucional de los operadores de campo cuantificado, la TPC evita el apareamiento de las divergencias ultravioletas, de modo que ningún procedimiento de regularización se utiliza en la obtención de resultados finitos.

En esta tesis, realizamos un estudio del modelo neutro de Yukawa mediante las técnicas de la TPC. Comenzamos introduciendo detalladamente los operadores de campo cuantificado libres como distribuciones operador-valuadas que actúan sobre el espacio de Fock, explicitando el importante papel que en tal definición tienen las soluciones al problema de Cauchy en la teoría del campo clásico. Pasamos entonces a definir el sistema axiomático de Bogoliubov, Medvedev y Polivanov para la construcción del operador de dispersión, y a examinar sus consecuencias en la teoría perturbativa. A continuación, construimos de forma intuitiva el procedimiento inductivo de la TPC, detallando las razones de las definiciones vertidas para la distribución retardada y para la avanzada, así como estableciendo el método de división de la distribución causal en estas dos partes. Mostramos que el método inductivo de la TPC es compatible con el axioma de unitaridad del operador de dispersión y probamos un teorema de factorización de polinomios en la distribución causal que facilita la aplicación práctica del

método.

A continuación, repasamos el desarrollo histórico del modelo fenomenológico de Yukawa y establecemos la distribución de transición del primer orden para el modelo neutro, con el cual construimos, por el procedimiento inductivo, la distribución causal del segundo orden. De entre los diversos términos en los que esta se descompone por virtud del teorema de Wick, estudiamos primeramente aquellos que corresponden a las correcciones radiactivas, a saber, la auto-energía del mesón y la del nucleón, cuyos cálculos son detalladamente realizados y cuyas expresiones explícitas en los diversos intervalos de variación del impulso son obtenidos. Tales distribuciones no son, empero, unívocamente definidas por el axioma de la causalidad, sino que requieren para su fijación completa la imposición de condiciones físicas adicionales, que en el caso en cuestión son el valor físico de las masas de las partículas correspondientes y el de la constante de acoplamiento de su interacción mútua. Semejantes imposiciones son hechas sobre los propagadores completos de los campos.

Mostramos, no embargante, que las condiciones relativas al valor físico de las masas de las partículas involucradas pueden ser substituidas por las condiciones de estabilidad de los sectores de una partícula del espacio de Fock al segundo orden, o séase, por la condición de que el operador de dispersión deje invariantes los estados de una partícula. Estudiamos también la condición de estabilidad del estado del vacío al segundo orden, mostrando que puede ser alcanzado con una elección determinada de los términos de normalización permitidos.

Para concluir, realizamos un estudio de la normalizabilidad de los modelos de interacción generales entre campos bosónicos de espín nulo y fermiónicos de Dirac, probando que el modelo de Yukawa es el único que es normalizable en cuatro dimensiones.

## Abstract

Yakawa's model born in the phenomenological study of nuclear interactions, and its presence in particle physics has persisted until now in the modelling of the interaction between Higgs's field with the fermion ones. That model, although simple, exhibits the so-called ultra-violet divergences, one of the problems with which the standard formulation of quantum field theory must deal, and for which regularization techniques have been developed in order to obtain finite physical quantities.

An alternative formulation of quantum field theory is causal perturbation theory (CPT), that uses the axiom of causality, referred to the scattering operator, to establish an inductive process for the construction of its perturbation terms. Considering, additionally, the distributional character of the quantized field operators, CPT avoid the appearance of ultra-violet divergences, so that no regularization techniques are required to obtain finite quantities.

In this thesis, we study the neutral Yukawa's model through the CPT techniques. We start by introducing in detail the free quantized field operators as operator-valued distributions acting on Fock's space, making explicit the important role that the solutions to classical Cauchy's problem have for that definition. We then define the axiomatic system of Bogoliubov, Medvedev and Polivanov for the construction of the scattering operator, and examine its consequences for the perturbation regime. Next, we construct in an intuitive manner the inductive procedure of CPT, explaining the definition of the retarded distribution and that of the advanced one, and the division of the causal distribution in these two parts. We show that the CPT inductive procedure is compatible with the unitarity axiom for the scattering operator and prove a theorem about factorization of polynomials in the causal distribution which simplifies the practical application of the method.

We then review the historical development of the phenomenological Yukawa's model and establish the transition distribution of first order for the neutral model, with which we construct, through the inductive procedure, the causal distribution of second

order. Among the different terms in which it decomposes by virtue of Wick's theorem, we firstly study those corresponding to the radiative corrections, *id est*, meson's and nucleon's self-energies, whose calculation is exposed in detail and whose explicit expressions are obtained in the different intervals of momentum variation. However, those distributions are not uniquely determined by the causality axiom, but require for its complete definition the imposition of other physical conditions: the physical values of the masses of the corresponding particles and the value of the coupling constant of their mutual interaction. These conditions are imposed on the complete field propagators.

We show, nonetheless, that the condition on the physical value of the particles' masses can be replaced by the condition of stability of the one-particle sector of Fock's space at second order, this is to say, by the condition that the scattering operator leaves invariant the one-particle states. We also study the stability of the vacuum state at second order, showing that it can be reached with an adequate choice of the normalization terms.

To finish, we study the normalizability of the general models of interaction between spinless bosons and Dirac's fermions, to conclude that Yukawa's model is the only one which is normalizable in four dimensions.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<i>Abstract</i>	<b>V</b>
<b>Capítulo I: Introducción</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo 2: Cuantificación del campo</b>	<b>8</b>
2.1. Campo clásico y su problema de Cauchy . . . . .	9
2.2. Espacio de Fock. Operador de campo cuantificado . . . . .	17
2.3. Campo bosónico pseudo-escalar . . . . .	26
2.4. Campo de Dirac . . . . .	27
<b>Capítulo 3: Teoría de perturbación causal</b>	<b>32</b>
3.1. Axiomas de Bogoliubov, Medvedev y Polivanov . . . . .	32
3.2. Expresión perturbativa de los axiomas . . . . .	36
3.3. Construcción inductiva de Epstein y Glaser . . . . .	41
3.4. División de la distribución causal en el espacio real . . . . .	49
3.4.1. Distribución causal con orden singular negativo . . . . .	54
3.4.2. Distribución causal con orden singular no-negativo . . . . .	55
3.5. División de la distribución causal en el espacio de los impulsos . . . . .	58
3.5.1. Distribución causal con orden singular negativo . . . . .	59
3.5.2. Distribución causal con orden singular no-negativo . . . . .	61
3.6. Unitaridad del operador de dispersión . . . . .	66
3.7. Factorización de los polinomios en la distribución causal . . . . .	68
<b>Capítulo 4: Interacción de Yukawa</b>	<b>72</b>
4.1. Modelo fenomenológico de Yukawa . . . . .	72

4.2. Distribución de transición del primer orden . . . . .	76
4.3. Distribución causal del segundo orden . . . . .	79
<b>Capítulo 5: Auto-energía del mesón y del nucleón y sus propagadores completos</b>	<b>82</b>
5.1. Auto-energía del mesón . . . . .	82
5.2. Auto-energía del nucleón . . . . .	87
5.3. Propagadores completos . . . . .	94
5.3.1. Propagador completo del mesón . . . . .	94
5.3.2. Propagador completo del nucleón . . . . .	98
<b>Capítulo 6: Estabilidad del vacío y del sector de una partícula</b>	<b>102</b>
6.1. Estabilidad del estado del vacío . . . . .	104
6.2. Estabilidad del sector de una partícula mesónica . . . . .	110
6.3. Estabilidad del sector de una partícula nucleónica . . . . .	115
<b>Capítulo 7: Normalizabilidad</b>	<b>121</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>134</b>
<b>Apéndice A: Epítome de la teoría de las funciones generalizadas</b>	<b>139</b>
A.1. Definición de distribución y algunas operaciones . . . . .	140
A.2. Transformación de Fourier y distribuciones temperadas . . . . .	146
<b>Apéndice B. Reducción de la solución central a una relación de dispersión</b>	<b>149</b>
<b>Apéndice C. Teorema de Wick</b>	<b>156</b>
<b>Apéndice D. Transformaciones discretas del campo cuantificado</b>	<b>161</b>
D.1. Campo (pseudo-)escalar . . . . .	164
D.2. Campo de Dirac . . . . .	165
<b>Bibliografía</b>	<b>171</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La teoría del campo cuantificado fue inventada por Born y Jordan en 1925 [1] bajo el nombre de «electrodinámica matricial», como la consecuencia natural de aplicar la mecánica matricial de Heisenberg al campo de radiación. En dicho trabajo, la mentada cuantificación se hizo descomponiendo al campo en una infinitud de osciladores armónicos desacoplados, tratando cada uno de ellos como un sistema ondulatorio independiente; este procedimiento es el que se conoce como «cuantificación canónica». El mismo problema fue revisado en 1928 por Jordan y Pauli [2], artículo este en el que introdujeron la ahora llamada «distribución de Jordan-Pauli», y levantando por primera vez el problema de la energía infinita del punto cero, o séase, el hecho de que, como la mínima energía del oscilador armónico no es nula, poblar el espacio con uno de tales osciladores en cada punto llevaría forzosamente a que la mínima energía del campo fuese infinita. Este problema, comúnmente, se desestima aduciendo que no es el valor absoluto de la energía, sino la diferencia de ella entre dos configuraciones, la que tiene significado. Por supuesto, semejante argumento, aunque pueda parecer verosímil, no evita la insatisfacción del físico teórico.

En el mismo año de 1928, Jordan y Wigner [3] mostraron que el principio de exclusión de Pauli requiere la cuantificación con anti-conmutadores más bien que con conmutadores. Luego el método general de la cuantificación canónica fue desarrollado por Heisenberg y Pauli en 1929 [4]. Todos estos resultados –y muchos otros concernientes, por ejemplo, al campo de Dirac y su cuantificación– culminaron en dos famosos artículos de Pauli: El de 1940 sobre la relación entre espín y estadística [5] y su excelente revisión, publicada en 1941, de la cuantificación del campo [6].

Hasta este punto, los problemas eran generalmente abordados estudiando la interacción entre un campo cuantificado y otro clásico (potencial). Por supuesto, el siguiente paso a darse sería el estudio de la interacción entre los campos cuantificados. La solución más difundida a este problema fue aquella que, usando de la teoría de perturbaciones, dieron, independientemente, Tomonaga, Koba, Tati y Kanetsawa [7] en una serie de artículos publicados entre 1946 y 1948, Schwinger [8] entre los años 1948 y 1949, y Feynman [9] en 1949; la equivalencia entre estos tres abordajes fue establecida por Dyson [10] en 1949. En estas propuestas, no embargante, aparecían muchas veces integrales divergentes. Ellas fueron tratadas también por Dyson, quien fue el primero en regularizarlas en el ámbito de la electrodinámica y efectuar la renormalización de la teoría absorbiendo semejantes cantidades infinitas en los valores físicos de la carga eléctrica y de las masas de las partículas [11].

Aunque la teoría construida de esta forma se mostró solvente frente a la comparación con el experimento –importantes en este sentido fueron las mediciones del corrimiento de Lamb y el momento magnético dipolar del electrón–, lo que le valió la aceptación general, hubo así mismo diversos personajes que se inconformaron con ella. En el anhelo de construir la teoría cuantificada libre de defectos nacieron los llamados «abordajes axiomáticos», de los cuales hay diversos. Lo que ellos tienen en común es haber sido motivados por el «programa de la matriz  $S$ », iniciado por Heisenberg [12] en 1943, y según el cual debía abandonarse la posibilidad de describir la teoría en interacción y asumirse a la matriz  $S$  como el objeto fundamental a ser construido. Esta idea fue adoptada por Stückelberg –su historia es contada en el Cap. 7 de la Ref. [13]–, quien en 1946 anunció que una condición de causalidad es necesaria para determinar de forma única a la matriz  $S$ , para lo cual la unitariedad y la invariancia relativista no son suficientes. Stückelberg llevó adelante esta idea con su estudiante Rivier [14], obteniendo una teoría en la que las integrales divergentes son substituidas por términos finitos indeterminados. Además, argumentó que, como la matriz de dispersión será un mapa entre espacios de estados libres, ella debería construirse usando los campos libres

solamente.

Por esos años empezó a cuestionarse la noción de campo cuantificado como un operador actuando en un espacio de Hilbert. En particular, en 1951 Friedrichs [15] estableció que, para que el campo cuantificado pudiera tener una representación espectral, él debe ser una funcional lineal definida sobre las funciones de alguna clase por determinar. Este autor ya nombra, incluso, a los campos como «distribuciones», citando la entonces recientísima teoría de las distribuciones de Schwartz –las primeras ediciones de las Refs. [16], publicadas en 1950 la primera parte, en 1951 la segunda–. El resultado de Friedrichs fue rápidamente aceptado entre los axiómatas y dio lugar a muy importantes contribuciones: Permitió a Cook [17] formalizar, en 1953, la construcción del espacio de Fock, propuesto por este apenas unos años antes [18], como el espacio de Hilbert sobre el que actúa el campo cuantificado libre. Esta construcción evita el apareamiento del problema de la energía infinita del punto cero, que entonces puede relegarse a una mera consecuencia de la aplicación de la correspondencia clásico-ondulatoria, procedimiento este que no es riguroso. Así mismo, fue utilizado por Haag [19] en 1955 al establecer el famoso teorema que lleva su nombre, y según el cual cualquier campo cuantificado local y covariante relativista, conectado unitariamente con un campo cuantificado libre, es libre también. De esto se concluye que, a diferencia de lo que ocurre en la mecánica ondulatoria de finitos grados de libertad, la representación de interacción no existe, pues no hay operador unitario que la realice. Este punto crucial es el motivo por el que las teorías axiomáticas del campo trabajan siempre en la representación de Heisenberg. Así pues, ya en 1956, Wightman [20] estudiaba las propiedades de los campos cuantificados como distribuciones, mientras que al año siguiente, en 1957, Bogoliubov y Parasiuk [21] identificaban como la fuente de las divergencias ultra-violetas que aparecían en los abordajes convencionales al producto de distribuciones en el mismo punto, o el de una distribución por una función discontinua, operaciones inválidas en la teoría de Schwartz.

Con este hallazgo se formaron dos grandes grupos en la comunidad de la teoría

axiomática del campo. En uno de ellos resurgió la esperanza de describir la interacción en sus detalles, apartándose de la propuesta de Heisenberg. Así nació la teoría axiomática de Garding, Streater y Wightman [22, 23], en que los objetos básicos son los campos cuantificados en la representación de Heisenberg y sus valores esperados en el vacío –llamados «funciones de Wightman» o «funciones de correlación»–. Aunque esta propuesta es matemáticamente consistente, pocos modelos no triviales han podido ser construidos y siempre en bajas dimensiones [24]. Otro sistema axiomático es el de Haag, Araki y Kastler [25], en el que se trata de construir el álgebra de observables de von Neumann de la teoría.

En otro sentido, el sistema axiomático de Bogoliubov, Medvedev y Polivanov [26–28] mantuvo la línea de la propuesta de Heisenberg. Incorporando la teoría de las distribuciones, simplificaron la condición de causalidad de Stückelberg y Rivier al través de la introducción de la «función de conmutación adiabática», de la cual el operador de dispersión se vuelve un funcional construido con los bien definidos campos libres solamente.

Sobre esta base axiomática trabajó Stepanov<sup>1</sup> [30], quien en 1965 estableció un procedimiento inductivo para construir la matriz  $S$  perturbativamente, basándose principalmente en el axioma de causalidad. Stepanov consideró el carácter distribucional del campo al estudiar cuidadosamente el espacio de las funciones de prueba sobre el que están definidas las diversas distribuciones numéricas que aparecen en los términos perturbativos de la matriz  $S$ , usando posteriormente el teorema de Hahn-Banach para extender estas a un espacio de funciones más general. Con todo, Stepanov utilizó una formulación del axioma de causalidad en el que la función de conmutación adiabática de Bogoliubov no aparece, lo que implica que en su construcción las divergencias infra-rojas aún no estarían controladas. El trabajo de Stepanov, finalmente, no encontró respuesta de la comunidad.

La solución perturbativa completa de los axiomas de Bogoliubov, Medvedev y Po-

---

<sup>1</sup>Un breve resumen del trabajo de Stepanov se encuentra también en la Sec. 29.2 de la Ref. [27].

livanov fue desarrollada en 1973 por Epstein y Glaser [31], quienes evitaron el uso de los mal definidos productos cronológicos –y con ello el apareamiento de las divergencias ultra-violetas– substituyendo los mentados productos por un procedimiento inductivo basado en la causalidad semejante al creado por Stepanov, y que, diferentemente de este, hacía uso tanto de la función de conmutación de Bogoliubov, controlando así adecuadamente a las divergencias infra-rojas, como de una cuidadosa división de la distribución causal en sus partes retardada y avanzada, según la técnica de división de distribuciones de Łojasiewicz y Malgrange [32]. En la solución de Epstein y Glaser es extremadamente importante caracterizar el grado de singularidad de la distribución causal a ser dividida; para hacerlo, Epstein y Glaser introdujeron sendas definiciones del «orden singular», tanto en el espacio real cuanto en el de los impulsos, que resultaron no ser completamente equivalentes. Al pesar de esta complicación, Scharf aplicó satisfactoriamente el programa de Epstein y Glaser a la electrodinámica –en una monografía que es la primera edición de la Ref. [33], publicada en 1989–. En 1991, Fassari y Scharf [34] solucionaron definitivamente las dificultades asociadas al cálculo del orden singular aplicando el concepto de cuasi-asíntotas inventado por Vladimirov, Drozzinov y Zavialov [36].

Esta es la historia de la teoría que hoy llamamos «teoría de perturbación causal» (TPC), cuyo rango de aplicación a problemas concretos ha sido muy diverso y que ha derivado en resultados notables. Por ejemplo, Dütsch, Krahe y Scharf [35] la aplicaron a la electrodinámica escalar, mostrando que en la TPC basta comenzar el procedimiento inductivo con el conocimiento de la parte de la interacción que es lineal en la constante de acoplamiento, pues el «vértice» cuadrático en él que forma parte de la densidad lagrangiana de interacción en el abordaje convencional es generado automáticamente en el segundo orden al aplicar el procedimiento inductivo. Dütsch, Hurth, Krahe y Scharf [37] desarrollaron la técnica de construcción de las teorías de calibre, luego usado por Dütsch, Scharf y Aste [38] para el estudio de la teoría electro-débil, mostrando que en este abordaje la quiebra espontánea de la simetría no tiene cabida

–véase también la Ref. [39]–. Por otra parte, Grigore [40] estudió la estructura de las anomalías en la TPC. Grigore y Scharf [41], además, establecieron la imposibilidad de construir teorías super-simétricas. La TPC fue también felizmente usada por Scharf, Wreszinski, Pimentel y Tomazelli [42] para resolver por primera vez el problema de la masa dinámicamente generada del fotón en la electrodinámica tri-dimensional. Manzoni, Pimentel y Tomazelli [43] estudiaron también el modelo de Thirring, al tiempo que Lunardi, Pimentel, Valverde, Manzoni, Beltrán y Soto [44] han hecho lo propio para examinar la equivalencia entre las teorías escalares de Klein-Gordon-Fock y de Duffin-Kemmer-Petiau en acoplamiento con el campo electromagnético. La TPC ha sido aplicada también a la electrodinámica del segundo orden de Podolsky por Buffalo, Pimentel y Soto [45], estableciendo su súper-normalizabilidad. Más recientemente, Acevedo, Beltrán, Pimentel y Soto la han usado para estudiar el modelo de Yukawa [46], trabajo este del que se deriva parte de la tesis que el lector ahora lee.

Como bien se sabe, el modelo de Yukawa ha tenido, y tiene todavía, un papel fundamental en la fenomenología, pues se utiliza en la descripción de las interacciones inter-nucleónicas. Todavía más, él posee también un papel fundamental en la física moderna de las partículas, pues aparece en su modelo estándar como la interacción entre el bosón de Higgs y los leptones o cuarks. Además, ella es todavía estudiada en los laboratorios: el acoplamiento de Yukawa entre el leptón  $l_\tau$  y el bosón de Higgs  $H$  es estudiado en la búsqueda por violaciones a la «simetría» CP, al través de experimentos de colisión protón-protón [47]. Este acoplamiento es descompuesto en dos partes, una de ellas par frente a la transformación CP, la otra impar:

$$\mathcal{L} \sim H(\kappa_{l_\tau} \bar{l}_\tau l_\tau + \tilde{\kappa}_{l_\tau} \bar{l}_\tau i \gamma^5 l_\tau); \quad (1.1)$$

y el «ángulo efectivo de mezcla»  $\phi_{\bar{l}_\tau l_\tau} = \tan^{-1}(\tilde{\kappa}_{l_\tau}/\kappa_{l_\tau})$  es medido –el resultado es de alrededor de  $4 \pm 17^\circ$ –. Adicionalmente, acoplamientos de Yukawa tri-dimensionales no masivos a temperatura finita han sido estudiados recientemente por Benghi [48]; parti-

cularmente, los modelos de Gross-Neveau-Yukawa y Nambu–Jona-Lasinio–Yukawa.

En esta tesis, ya lo dijimos, nos proponemos estudiar el modelo de Yukawa en la TPC. Aunque utilizaremos el lenguaje de la teoría nuclear, mantendremos nuestros cálculos abiertos a la posibilidad de que el bosón sea escalar bien como pseudo-escalar, de modo que los resultados obtenidos puedan perfectamente ser aplicados a cualquiera de los dos términos de la Ec. (1.1). La tesis se organiza de la forma que sigue: En el Cap. 2 revisamos cuidadosamente el proceso de cuantificación del campo libre, estableciendo la conexión de tal procedimiento con el problema clásico de Cauchy, construyendo el espacio de Fock y teniendo en cuenta el carácter distribucional de los operadores de campo cuantificado. La teoría de la dispersión es introducida en el Cap. 3, en la que ofrecemos una descripción conceptualmente detallada de la teoría de perturbación causal. Pretendiendo conseguir una introducción didáctica al tema, por otra parte, evitaremos el exceso de análisis matemático y, aún manteniendo el rigor propio de la teoría, preferiremos ofrecer argumentos intuitivos y constructivos más bien que los teoremas y sus pruebas. En el Cap. 4 introduciremos el modelo de Yukawa, estableciendo el término del primer orden del operador de dispersión y la distribución causal del segundo orden. Este será el punto de partida del Cap. 5 en el que las técnicas de la TPC serán usadas para obtener las auto-energías de los mesones y nucleones, así como sus propagadores completos. La estabilidad del estado del vacío y de los sectores de una partícula serán el objeto del Cap. 6; probaremos de esta forma que los dichos estados son estables frente a la interacción de Yukawa y, por lo tanto, los estados asintóticos bien descritos por los estados del espacio de Fock libre. Ya en el Cap. 7 probamos la normalizabilidad del modelo. Finalmente, en el Cap. 8 presentamos nuestras conclusiones y perspectivas. Los apéndices complementan la información del texto principal con la intención de que la tesis sea autocontenida.

# Capítulo 2

## Cuantificación del campo

La mecánica ondulatoria establece la inexistencia de la partícula puntual, al transferir la descripción del movimiento del ente físico a una «función de onda» extendida en el espacio y que evoluciona con el tiempo<sup>1</sup>. El concepto de partícula, así, ya no es el del punto material cuyo movimiento es estudiado en la mecánica clásica, y a la que se puede asignar valores exactos de posición, ímpetu, momento de impulsión, etcétera; en la teoría ondulatoria también estas variables dinámicas pasan a ser descritas al través de funciones (operadores). No embargante, lo que tienen en común la partícula clásica y su contraparte ondulatoria es que su identidad es determinada por un conjunto de «números cuantificadores», que corresponden a sus características intrínsecas invariables, vale decir: su carga eléctrica, su masa, y en la teoría ondulatoria también su espín y otras cargas –de color, de iso-espín, entre otras–. El postulado fundacional de la mecánica del *quantum* que acabamos de referir, y que parece ser muy razonable –entre otras cosas, evita el clásico problema de la divergencia del campo eléctrico en el punto de origen de la carga, al evitar que una tal carga puntual exista–, ha tenido un éxito rotundo al ser aplicado a fenómenos muy diversos, como son la estabilidad de la órbita electrónica en el átomo, el efecto túnel, la radiación del cuerpo negro y muchos otros. Al encuentro de la teoría relativista, no embargante, la presencia de energía en una región del espacio-tiempo, y la posible manifestación de tal energía en formas diversas,

---

<sup>1</sup>Si bien el asunto está todavía lejos de ser definitivamente respondido, la interpretación epistemológica de la función de onda se ve desfavorecida en relación a la ontológica, según lo muestra el teorema de Pusey-Barrett-Rudolph [49]. En esta tesis no entraremos en detalles sobre estos asuntos de los fundamentos de la mecánica cuántica; baste al lector recordar, por ejemplo, que el cálculo del campo eléctrico del electrón lo realiza uno en la mecánica cuántica substituyendo a este por su distribución probabilística de carga,  $\rho = |\psi|^2$ .

obliga a considerar la posibilidad, verificada en la experiencia, de que las partículas que emergen de una colisión no sean las mismas que las que componían inicialmente el sistema; la descripción relativista ondulatoria exige, de esta forma, a considerar los campos cuantificados, cuya definición es objetivo del capítulo que iniciamos.

## 2.1. Campo clásico y su problema de Cauchy

La determinación de cuál sea la función de onda asociada a una partícula determinada significa, en términos matemáticos, dar solución a su ecuación del movimiento sujeta a un conjunto determinado de condiciones iniciales. El estudio de estas soluciones generales constituye la así llamada «teoría del campo clásico», pues en ella, todavía, no han sido incluidas las restricciones apropiadas que les otorgarán un significado real. El primer punto es, pues, determinar cuáles serán las ecuaciones a que deben obedecer las funciones de onda. Tales ecuaciones, siendo leyes de la física, están sujetas a la relatividad considerada, quiera que sea esta la de Galileo-Newton, quiera que sea la de Poincaré-Einstein, o alguna otra. En esta tesis consideramos, como lo parece indicar la experiencia, a la segunda de ellas como la que rige en el espacio-tiempo. Las ecuaciones del movimiento, por lo tanto, deben ser invariantes frente a transformaciones del grupo de Poincaré, y las funciones que les dan solución, transformarse por alguna representación del mismo.

Las ecuaciones relativísticas que utilizaremos son la «ecuación de Klein-Gordon-Fock»:

$$(\square + m^2)\varphi(x) = 0 \quad ; \quad \varphi(x) \in \mathbb{C} \quad , \quad (2.1)$$

y la «ecuación de Dirac»:

$$(i\rlap{-}\not{\partial} - m)\psi(x) = 0 \quad ; \quad \rlap{-}\not{\partial} := \gamma^\mu \partial_\mu \quad , \quad \psi(x) \in \mathbb{C}^{\otimes 2} \oplus \overline{\mathbb{C}}^{\otimes 2} \quad , \quad (2.2)$$

en que las matrices  $\gamma^\mu \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{C})$  son las así llamadas «matrices de Dirac», que

satisfacen a la relación de anti-conmutación:

$$\{\gamma^\mu; \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad . \quad (2.3)$$

Un estudio minucioso de estos campos y de sus propiedades de transformación puede hallarse en las Refs. [27, 50]. Para nuestro interés presente, baste decir que la ecuación de Klein-Gordon-Fock es expresión de la invariancia translacional y debe ser obedecida por cada una de las componentes de cualquier campo existente. Esto se echa de ver, por ejemplo, al aplicar el operador diferencial  $(i\rlap{-}\not{\partial} + m)$  a la Ec. (2.2), de donde se sigue que toda solución a la ecuación de Dirac soluciona así mismo a la de Klein-Gordon-Fock. La ecuación de Dirac es pues, ciertamente, una ecuación vinculante que establece relaciones entre las componentes del bi-espinor  $\psi$ . Esta anotación es importante, pues indica el camino que seguiremos para la cuantificación del campo de Dirac: Sus componentes independientes pueden ser aisladas y cuantificadas del mismo modo que lo son los campos de Klein-Gordon-Fock; el campo completo es entonces reconstruido con las ecuaciones vinculantes que se derivan de la ecuación de Dirac. Este modo de cuantificar el campo posee las siguientes ventajas: (1) explicita cuáles son los grados de libertad físicos del sistema, (2) no requiere del procedimiento de construcción de las llaves de Dirac, pues el campo cuantificado es construido, de inicio, de tal forma a satisfacer a los vínculos de la teoría, (3) reduce el procedimiento de cuantificación de cualquier campo al de sus componentes independientes, que se cuantifican siempre del mismo modo como lo hace el campo de Klein-Gordon-Fock. En la sección siguiente retomaremos el punto de la cuantificación, cuyo significado no ha sido todavía propiamente enunciado.

En la teoría determinista –y la física, por lo menos aquella susceptible de ser enunciada en leyes, ha de serlo–, la función de onda debe ser predecible por medio de su ecuación, dadas ciertas «condiciones iniciales» o «datos de Cauchy». Para la ecuación diferencial parcial del segundo orden del tipo hiperbólico los datos

de Cauchy que determinan unívocamente la solución, según lo dicta el teorema de Cauchy-Kovalevskaya [51, 52, 56], son:

$$\varphi(0; \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{y} \quad \partial_0 \varphi(0; \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad . \quad (2.4)$$

Escribiendo el campo de Klein-Gordon-Fock  $\varphi(x)$  en función de su transformada de Fourier,  $\hat{\varphi}(p)$ , definida según

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-2} \int d^4 p \hat{\varphi}(p) e^{-ipx} \quad , \quad (2.5)$$

hallamos que la Ec. (2.1) es satisfecha si:  $(p^2 - m^2)\hat{\varphi}(p) = 0$ . En el espacio de las funciones esta ecuación solo posee la solución trivial  $\hat{\varphi}(p) \equiv 0$ ; soluciones no triviales solamente pueden obtenerse al considerar la clase de las «funciones generalizadas» –véase el Ap. A–, en la que la relación precedente tiene la solución distribucional:

$$\hat{\varphi}(p) = \delta(p^2 - m^2)\varphi(p) = \frac{1}{2\omega_p} [\delta(p_0 + \omega_p) + \delta(p_0 - \omega_p)] \varphi(p) \quad , \quad (2.6)$$

con la definición:

$$\omega_p := +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad . \quad (2.7)$$

Al introducir la Ec. (2.6) en la (2.5) y después de efectuar la integración elemental en la variable  $p_0$  obtendremos:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{2\omega_p} \left[ \varphi_+(\mathbf{p}) e^{-ipx} \Big|_{p_0=\omega_p} + \varphi_-(\mathbf{p}) e^{-ipx} \Big|_{p_0=-\omega_p} \right] \quad , \quad (2.8)$$

en donde hemos denotado:

$$\varphi_{\pm}(\mathbf{p}) = \varphi(p) \Big|_{p_0=\pm\omega_p} \quad . \quad (2.9)$$

Impongamos en este punto los datos de Cauchy [Ec. (2.4)]:

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_p} [\varphi_+(\mathbf{p}) + \varphi_-(\mathbf{p})] e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad , \quad (2.10)$$

$$g(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_p} (-i\omega_p) [\varphi_+(\mathbf{p}) - \varphi_-(\mathbf{p})] e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad . \quad (2.11)$$

Sendas transformaciones de Fourier inversas nos llevan entonces a obtener, respectivamente:

$$\varphi_+(\mathbf{p}) + \varphi_-(\mathbf{p}) = 2\omega_p(2\pi)^{-1} \int d^3\mathbf{x} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad , \quad (2.12)$$

$$\varphi_+(\mathbf{p}) - \varphi_-(\mathbf{p}) = 2i(2\pi)^{-1} \int d^3\mathbf{x} g(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad , \quad (2.13)$$

ecuaciones de las cuales es posible obtener las amplitudes  $\varphi_{\pm}(\mathbf{p})$ :

$$\varphi_{\pm}(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-1} \int d^3\mathbf{y} [\omega_p f(\mathbf{y}) \pm ig(\mathbf{y})] e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} \quad . \quad (2.14)$$

Esto prueba por su vez que las condiciones iniciales de la Ec. (2.4) efectivamente bastan para dar solución al problema. Reemplazando la Ec. (2.14) en la (2.8):

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (2\pi)^{-3} \int d^3\mathbf{y} \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_p} \left[ (\omega_p f(\mathbf{y}) + ig(\mathbf{y})) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} e^{-ipx} \Big|_{p_0=\omega_p} \right. \\ &\quad \left. + (\omega_p f(\mathbf{y}) - ig(\mathbf{y})) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} e^{-ipx} \Big|_{p_0=-\omega_p} \right] \\ &= (2\pi)^{-3} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \int d^3\mathbf{y} [\omega_p f(\mathbf{y}) + is\text{sgn}(p_0)g(\mathbf{y})] e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} e^{-ipx} \quad . \end{aligned} \quad (2.15)$$

O bien, explicitando que la integración en la variable  $\mathbf{y}$  tiene lugar en el plano  $y^0 = 0$  en el que fueron dados los datos de Cauchy:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \text{sgn}(p_0) \int_{y^0=0} d^3\mathbf{y} [\omega_p \text{sgn}(p_0) f(\mathbf{y}) + ig(\mathbf{y})] e^{-ip(x-y)} \quad . \quad (2.16)$$

Aún más, identificando:

$$\delta(p^2 - m^2)\omega_p \text{sgn}(p_0) = \delta(p^2 - m^2)p_0 = \delta(p^2 - m^2)i\partial_0^x e^{-ip(x-y)} \quad , \quad (2.17)$$

$$f(\mathbf{y}) = \varphi(y)|_{y^0=0} \quad , \quad g(\mathbf{y}) = \partial_0^y \varphi(y)|_{y^0=0} \quad , \quad (2.18)$$

la Ec. (2.16) adopta la forma:

$$\varphi(x) = \int_{y^0=0} d^3\mathbf{y} [-\varphi(y)\partial_0^y D(x-y) + D(x-y)\partial_0^y \varphi(y)] \quad . \quad (2.19)$$

Aquí hemos definido la «distribución de Jordan-Pauli»:

$$D(x) := i(2\pi)^{-3} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \text{sgn}(p_0) e^{-ipx} \quad . \quad (2.20)$$

Esta posee ciertas propiedades significativas. En primer lugar, es antisimétrica bajo el cambio de signo de su argumento:

$$D(x) = -D(-x) \quad ; \quad (2.21)$$

y satisface ella también a la ecuación de Klein-Gordon-Fock:

$$(\square + m^2)D(x) = 0 \quad . \quad (2.22)$$

La forma explícita de esta distribución se revela efectuando la integración en la Ec. (2.20) –véase las Refs. [27, 33]–:

$$D(x) = \frac{1}{2\pi} \text{sgn}(x^0) \left\{ \delta(x^2) - \Theta(x^2) \frac{m}{2\sqrt{x^2}} J_1 \left( m\sqrt{x^2} \right) \right\} \quad , \quad (2.23)$$

con  $J_1$  la función de Bessel del primer orden. De tal solución se ve que el soporte de

esta distribución es:

$$\text{supp}(D) = \left\{ x \in \mathbb{M} \mid x^2 \geq 0 \right\} . \quad (2.24)$$

De esto último decimos que el soporte de la distribución de Jordan-Pauli es causal, pues su aparición en la Ec. (2.19) indica que el campo  $\varphi(x)$  solo es afectado por los valores –y los valores de su derivada temporal– contenidos en su sombra causal –en el cono de luz pasado del punto  $x$ –. La forma final de la solución la obtenemos por aplicación de la Ec. (2.21):

$$\varphi(x) = \int_{y^0=0} d^3\mathbf{y} D(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_0^y \varphi(y) . \quad (2.25)$$

Consideremos ahora la ecuación de Dirac [Ec. (2.2)]. En la representación de Weyl, las matrices de Dirac son:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix} , \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} , \quad (2.26)$$

con  $\sigma_k$  las matrices de Pauli. Así mismo, escribimos el bi-espinor de Dirac como:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \chi_1(x) \\ \chi_2(x) \end{pmatrix} , \quad (2.27)$$

con  $\chi_j$  columnas de dos componentes. De esta suerte, la ecuación de Dirac se escribe como el sistema:

$$i\partial_0\chi_2 = m\chi_1 + i\sigma_k\partial_k\chi_2 , \quad (2.28)$$

$$i\partial_0\chi_1 = m\chi_2 - i\sigma_k\partial_k\chi_1 . \quad (2.29)$$

Según estas ecuaciones, vemos, solo uno de los espinores,  $\chi_1$  o  $\chi_2$ , es independiente, pues el otro puede siempre obtenerse a partir de él. Así por ejemplo, de la Ec. (2.29)

podemos despejar  $\chi_2$ :

$$\chi_2 = \frac{1}{m} (i\partial_0 + i\sigma_k \partial_k) \chi_1 \quad . \quad (2.30)$$

Tal ecuación puede entonces ser considerada una ecuación vinculante, al paso que su substitución en la Ec. (2.28) elimina la presencia de  $\chi_2$  en ella y lleva a la siguiente ecuación dinámica para  $\chi_1$ :

$$(\square + m^2) \chi_1(x) = 0 \quad . \quad (2.31)$$

Así pues, las dos componentes de  $\chi_1$  son los dos grados de libertad físicos del campo de Dirac, sujetos solamente a satisfacer a la ecuación de Klein-Gordon-Fock. Las otras componentes, que corresponden a  $\chi_2$ , son completamente determinadas por ellos.

Porque obedece a la ecuación de Klein-Gordon-Fock, el espinor  $\chi_1(x)$  puede ser escrito como en la Ec. (2.25), dadas las condiciones iniciales  $\chi_1(0; \mathbf{x})$  y  $\partial_0 \chi_1(0; \mathbf{x})$ :

$$\chi_1(x) = \int_{y^0=0} d^3 \mathbf{y} D(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_0^y \chi_1(y) \quad . \quad (2.32)$$

Esta ecuación en conjunto con la Ec. (2.30) ya son la solución a la ecuación de Dirac. Con todo, busquemos una forma compacta para el campo  $\psi(x)$ . Cuando la derivada en la Ec. (2.32) se aplica sobre  $\chi_1(y)$ , substituyamos la Ec. (2.29). Realizando una integración por partes en las derivadas  $\partial_k$  para hacerlas actuar sobre  $D$  más bien que sobre  $\chi_1$ , llegamos a la expresión:

$$\chi_1(x) = -i \int_{y^0=0} d^3 \mathbf{y} \{ (i\partial_0^x - i\sigma_k \partial_k^x) D(x-y) \chi_1(y) + m D(x-y) \chi_2(y) \} \quad . \quad (2.33)$$

Por otro lado, colocando la Ec. (2.32) en la (2.30):

$$\chi_2(x) = \frac{1}{m} \int_{y^0=0} d^3 \mathbf{y} (i\partial_0^x + i\sigma_k \partial_k^x) D(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_0^y \chi_1(y) \quad . \quad (2.34)$$

Como antes, cuando la derivada se aplica sobre  $\chi_1$  sustituimos la Ec. (2.29). Realizando sendas integraciones por partes en las derivadas espaciales y usando la Ec. (2.22) llegamos finalmente a la expresión:

$$\chi_2(x) = -i \int_{y^0=0} d^3\mathbf{y} \{mD(x-y)\chi_1(y) + (i\partial_0^x + i\sigma_k\partial_k^x)D(x-y)\chi_2(y)\} \quad . \quad (2.35)$$

Las Ecs. (2.33) y (2.35) pueden ser aunadas en la forma matricial siguiente [recuérdese la Ec. (2.27)]:

$$\psi(x) = -i \int_{y^0=0} d^3\mathbf{y} \begin{pmatrix} (i\partial_0^x - i\sigma_k\partial_k^x)D(x-y) & mD(x-y) \\ mD(x-y) & (i\partial_0^x + i\sigma_k\partial_k^x)D(x-y) \end{pmatrix} \psi(y) \quad . \quad (2.36)$$

O bien, usando las matrices de Dirac dadas en la Ec. (2.26):

$$\psi(x) = -i \int_{y^0=0} d^3\mathbf{y} S(x-y)\gamma^0\psi(y) \quad , \quad (2.37)$$

con:

$$S(x) := (i\rlap{/}\partial + m) D(x) \quad . \quad (2.38)$$

El lector puede impugnar que hayamos usado, en esta derivación, las condiciones iniciales  $\chi_1(0; \mathbf{x})$  y  $\partial_0\chi_1(0; \mathbf{x})$ , pues siendo la ecuación de Dirac del primer orden, parecería que deberíamos usar las condiciones  $\psi(0; \mathbf{x})$ . Pero vea bien, ambos conjuntos de condiciones iniciales se equivalen: Conocer  $\chi_1(0; \mathbf{x})$  implica conocer también  $\partial_k\chi_1(0; \mathbf{x})$ , que se obtiene por simple derivación; la Ec. (2.29) implica entonces que conocer también  $\partial_0\chi_1(0; \mathbf{x})$  es, ni más ni menos, igual que conocer  $\chi_2(0; \mathbf{x})$  —o, si se prefiere, conocido  $\chi_2(0; \mathbf{x})$  «deducimos» por medio de la mentada ecuación a  $\partial_0\chi_1(0; \mathbf{x})$ , y viceversa—. En cualquier caso, el número de datos de Cauchy es el mismo.

## 2.2. Espacio de Fock. Operador de campo cuantificado

Al campo clásico, que es general en demasía, debemos hacer la siguiente exigencia para decir de él que representa bien a la partícula: La energía debe ser siempre no-negativa<sup>2</sup>. Pero la energía se relaciona con el operador hamiltoniano  $H$  y este con la derivada temporal según la ecuación de Schrödinger:

$$H\varphi(x) = i\hbar\partial_0\varphi(x) \quad . \quad (2.39)$$

De aquí que al substituir la transformada de Fourier del campo  $\varphi(x)$ , solamente los valores  $p_0 > 0$  serán admisibles, y la restricción que al campo clásico debe hacerse es la exclusión de su parte de frecuencias negativas, o séase, mantener en la Ec. (2.8) solo la parte que contiene a  $\varphi_+(\mathbf{p})$ . Esta reconsideración limita la solución general de la Ec. (2.25) a ser solamente:

$$\varphi(x) = \int_{y^0=0} d^3\mathbf{y} D_+(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_0^y \varphi(y) \quad , \quad (2.40)$$

con  $D_+$  la «distribución de Jordan-Pauli de frecuencias positivas» [compárese con la Ec. (2.20)]:

$$D_+(x) := i(2\pi)^{-3} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \Theta(p_0) e^{-ipx} \quad . \quad (2.41)$$

Los campos clásicos restringidos de esta manera se llaman «funciones de onda», y describen a la partícula individual. El conjunto de todos ellos define el «espacio de Hilbert de una partícula», denotado  $\mathcal{H}_1$ . De acuerdo a la Ec. (2.40), la distribución  $D_+$  tiene una función capital, pues relaciona una función de onda consigo misma, ejerciendo así el rol de identidad en el espacio  $\mathcal{H}_1$ . Esta aparición se justifica si se

<sup>2</sup>Esta imposición puede ser entendida así: En la teoría de la relatividad, la partícula posee asociado un tetra-vector de energía-impulso  $\gamma(v)m(c; \mathbf{v})$ , con  $\gamma(v)$  el factor de Lorentz para la 3-velocidad  $\mathbf{v}$  con que se mueve la partícula,  $m$  su masa y  $c$  la velocidad de la luz en el vacío. Como se cumple siempre que  $\gamma \geq 1$ , la energía es siempre no-negativa, cualidad esta que se extrapola a la densidad de energía en la descripción ondulatoria.

define el «producto interior en  $\mathcal{H}_1$ » según:

$$\forall f, g \in \mathcal{H}_1 : \quad \langle f; g \rangle_1 := i \int d^3 \mathbf{x} f^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 g(x) \quad . \quad (2.42)$$

Luego, la Ec. (2.40) es:

$$f(x) = \langle iD_+(x-y)^*; f(y) \rangle_y \quad . \quad (2.43)$$

Aquí, el símbolo  $\langle \bullet; \bullet \rangle$  significa que la distribución es aplicada a la función siguiendo la regla formal que define al producto interior, si bien que tal no es ciertamente un producto interior, pues la distribución no pertenece a  $\mathcal{H}_1$ , ni el resultado de la operación es un número complejo. Introduciendo en este punto la base de funciones<sup>3</sup>  $\{f_j\}$  en  $\mathcal{H}_1$ , la Ec. (2.43) lleva a la relación de completación:

$$\sum_j f_j(x) f_j(y)^* = -iD_+(x-y) \quad . \quad (2.44)$$

Si estuviéramos interesados en la descripción de una única partícula, entonces lo dicho bastaría. Pero la experiencia ha mostrado que cuando las partículas interaccionan unas con otras pueden operarse cambios en su número así como en su identidad. De donde es menester considerar el espacio de número variable de partículas, al que se llamará «espacio de Fock».

Como está en consideración la teoría libre, el espacio de estados de  $n$  partículas será construido por (la cerradura de) el producto tensorial de  $n$  espacios de Hilbert de una partícula:

$$\mathcal{H}_n := \mathcal{H}_1^{\otimes n} = \overbrace{\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_1}^n \quad , \quad (2.45)$$

cuyos estados puros pueden ser identificados con las funciones que son combinaciones

---

<sup>3</sup>Esta base (en el sentido de Schauder, es decir, que permite la construcción de estados por sumas infinitas de elementos de la base) es numerable porque el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_1$  es separable. En efecto, identificaremos más adelante a  $\mathcal{H}_1$  con el espacio  $L^2$ , el cual fue probado separable por von Neumann –véase a este respecto, por ejemplo, las Refs. [53–55].

lineales generales de productos tensoriales de funciones de onda de una partícula, es decir, de la forma:  $\varphi_n(\mathbf{x}_1; \dots; \mathbf{x}_n)$ . Pero estas partículas son idénticas, y entonces la permutación de cualesquiera dos de ellas no se manifiesta en las características físicas del estado y solo podrá, por tanto, afectarlo en un cambio de fase. Y como el cuadrado del operador de permutación es la identidad, se sigue que dicha fase solo podrá ser 0 o  $\pi$ . Así, la permutación solo puede afectar al estado físico por la multiplicación de un factor  $\pm 1$ . Todavía más, si denotamos por  $P_{ij}$  el operador que permuta los índices  $i$  y  $j$ , veremos que, debido a la propiedad

$$P_{rs} = P_{jr}P_{sk}P_{jk}P_{sk}P_{jr} \quad ,$$

una función de onda que sea simétrica en sus índices  $jk$ ,  $P_{jk}\varphi_n = \varphi_n$ , pero antisimétrica en sus índices  $rs$ ,  $P_{rs}\varphi_n = -\varphi_n$ , deberá necesariamente ser la función de onda nula:

$$-\varphi_n = P_{rs}\varphi_n = \text{sgn}(P_{jr})\text{sgn}(P_{sk})\text{sgn}(P_{jk})\text{sgn}(P_{sk})\text{sgn}(P_{jr})\varphi_n = \varphi_n \quad ,$$

de lo que se concluye que las funciones de onda que pueden identificarse con estados físicos puros son solamente aquellas completamente simétricas o completamente antisimétricas. Estas pueden obtenerse a partir de funciones generales al través de los operadores de simetrización y de antisimetrización, definidos según:

$$(S_n^\pm \varphi_n)(\mathbf{x}_1; \dots; \mathbf{x}_n) := \frac{1}{n!} \sum_P \text{sgn}(P) \varphi_n(\mathbf{x}_{P(1)}; \dots; \mathbf{x}_{P(n)}) \quad , \quad (2.46)$$

con  $P$  las permutaciones de  $n$  elementos. Los operadores así definidos poseen las siguientes propiedades, cuya prueba se realiza por cálculo directo:

1.- Ortogonalidad:

$$S_n^+ S_n^- = 0 = S_n^- S_n^+ \quad . \quad (2.47)$$

2.- Nilpotencia:

$$(S_n^\pm)^2 = S_n^\pm \quad . \quad (2.48)$$

3.- Hermiticidad:  $\forall \varphi_n, \psi_n \in \mathcal{H}_n$ :

$$\langle S_n^\pm \varphi_n; \psi_n \rangle_n = \langle \varphi_n; S_n^\pm \psi_n \rangle_n \quad . \quad (2.49)$$

En el punto 3.-, por supuesto, el producto interior  $\langle \bullet; \bullet \rangle_n$  es el definido por las reglas usuales en un espacio producto tensorial. Los espacios de Hilbert físicos de  $n$  partículas, por lo tanto, serán aquellos continentes de las funciones de onda completamente simétricas,  $\mathcal{H}_n^+$ , usados en la descripción de las partículas bosónicas, o aquellos continentes de las funciones de onda completamente antisimétricas,  $\mathcal{H}_n^-$ , usados para la descripción de las partículas fermiónicas. La consideración de todos los posibles números de partículas al unísono es posible por medio de la definición siguiente.

**Definición:** *El espacio de Fock  $\mathcal{F}^\pm$  de los bosones o los fermiones, respectivamente, es la suma directa de los espacios de Hilbert de  $n$  partículas,  $\mathcal{H}_n^\pm$ , extendida a todos los valores no-negativos de  $n$ :*

$$\mathcal{F}^\pm := \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \mathcal{H}_n^\pm \quad ; \quad \mathcal{H}_0 := \mathbb{C} \quad . \quad (2.50)$$

*Sus elementos son:*

$$\Phi \equiv (\varphi_0; \varphi_1; \cdots; \varphi_n; \cdots) \quad ; \quad \varphi_n \in \mathcal{H}_n^\pm \quad . \quad (2.51)$$

*Particularmente, el estado de vacío –de cero partículas– es:*

$$\Omega := (1; 0; \cdots) \quad . \quad (2.52)$$

En el espacio de Fock  $\mathcal{F}^\pm$  se define el producto interior  $\langle \bullet; \bullet \rangle$  por medio de la regla:

$$\langle \Phi; \Psi \rangle := \sum_{n=0}^{+\infty} \langle \varphi_n; \psi_n \rangle_n \quad , \quad (2.53)$$

el cual induce la norma:

$$\|\Phi\|^2 := \sum_{n=0}^{+\infty} \|\varphi_n\|_n^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle \varphi_n; \varphi_n \rangle_n \quad , \quad (2.54)$$

con la restricción –sobre los estados– de poseer un valor finito.  $\square$

Es importante señalar que la separabilidad del espacio de Hilbert de una partícula,  $\mathcal{H}_1$ , es bastante para garantizar la separabilidad del espacio de Fock. Efectivamente, esta característica es mantenida por el producto tensorial de un número finito de espacios de Hilbert, de modo que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{H}_n$  es separable, así como por la suma numerable de espacios de Hilbert, como en la Ec. (2.50) [54]. Esta propiedad, como otrora para  $\mathcal{H}_1$ , permitirá introducir también una base numerable para el espacio de Fock.

Los diversos sectores del espacio de Fock correspondientes a diferentes números de partículas son alcanzados al través de la aplicación de los operadores de emisión y absorción.

**Definición:** El operador de emisión de una partícula con función de onda  $f \in \mathcal{H}_1$  es el operador  $a^*(f) : \text{Dom}(a^*(f)) \subseteq \mathcal{F}^\pm \rightarrow \mathcal{F}^\pm$  definido según:

$$(a^*(f)\Phi)_0 := 0 \quad ; \quad (a^*(f)\Phi)_n := \sqrt{n} S_n^\pm(f \otimes \varphi_{n-1}) \quad (n \in \mathbb{N}) \quad . \quad (2.55)$$

El operador de absorción de una partícula con función de onda  $f \in \mathcal{H}_1$  es el operador  $a(f) : \mathcal{F}^\pm \rightarrow \mathcal{F}^\pm$  definido de forma que:

$$a(f)\Omega := 0 \quad ;$$

$$(a(f)\Phi)_n(\mathbf{x}_1; \dots; \mathbf{x}_n) := \sqrt{n+1} \langle f(\mathbf{x}); \varphi_{n+1}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_1; \dots; \mathbf{x}_n) \rangle_{1,\mathbf{x}} \quad . \quad \square \quad (2.56)$$

El hecho de que los operadores de (anti-)simetrización  $S_n^\pm$  son autoadjuntos implica la siguiente la relación entre los operadores de emisión y absorción:

$$a^*(f) = a(f)^\dagger \equiv a^\dagger(f) \quad , \quad (2.57)$$

Las relaciones de (anti-)conmutación de estos operadores son halladas mediante el uso de sus definiciones recién dadas: Sean  $f, g \in \mathcal{H}_1$ ,  $\Phi \in \text{Dom}([a(f); a^\dagger(g)]_{\mp}) \subset \mathcal{F}^\pm$ . Por cálculo directo:

$$[a(f); a^\dagger(g)]_{\mp} \Phi = \langle f; g \rangle_1 \Phi \quad , \quad (2.58)$$

$$[a(f); a(g)]_{\mp} \Phi = 0 \quad ; \quad [a^\dagger(f); a^\dagger(g)]_{\mp} \Phi = 0 \quad . \quad (2.59)$$

Estas relaciones consideran ya el uso del conmutador cuando se trata del espacio  $\mathcal{F}^+$  y el del anti-conmutador en el  $\mathcal{F}^-$ . Usando la base contable y ortonormal  $\{f_j\}$  de  $\mathcal{H}_1$ ,

$$\langle f_j; f_k \rangle_1 = \delta_{jk} \quad , \quad (2.60)$$

en función de la cual toda función  $f \in \mathcal{H}_1$  se expande como:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_j \langle f_j; f \rangle_1 f_j(\mathbf{x}) \quad . \quad (2.61)$$

Así pues, definiendo los operadores de emisión y absorción sobre los elementos de la mentada base:

$$a_j^\dagger := a^\dagger(f_j) \quad , \quad a_j := a(f_j) \quad , \quad (2.62)$$

obtenemos que  $a_j$  y  $a_k^\dagger$  satisfacen a las siguientes relaciones [ver las Ecs. (2.58), (2.59) y (2.60)]:

$$[a_j; a_k^\dagger]_{\mp} = \delta_{jk} \quad , \quad [a_j; a_k]_{\mp} = 0 = [a_j^\dagger; a_k^\dagger]_{\mp} \quad . \quad (2.63)$$

Consideremos ahora las funciones de onda de una partícula  $f, g \in \mathcal{H}_1$ , y sean  $\hat{f}$  y  $\hat{g}$  sus transformadas de Fourier. Como estas funciones satisfacen a la ecuación de

Klein-Gordon-Fock, la relación entre  $f$  y  $\hat{f}$  es:

$$f(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0} e^{-ipx} \hat{f}(p) \Big|_{p_0=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} , \quad (2.64)$$

y similarmente para  $\hat{g}$ . Substituyendo en la Ec. (2.42) encontramos que el producto interior en  $\mathcal{H}_1$  es:

$$\langle f; g \rangle_1 = \int d\mu_m(p) \hat{f}(p) \hat{g}(p) , \quad (2.65)$$

con  $\mu_m(p)$  la medida invariante relativista definida tal que:

$$d\mu_m(p) := \delta(p^2 - m^2) \Theta(p_0) d^4p = \Theta(p_0) \frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0} \Big|_{p_0=E} ; \quad E := \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} . \quad (2.66)$$

La medida  $\mu_m(p)$ , claramente, está definida sobre la capa másica superior

$$\mathcal{M}^+ := \{p \in \mathbb{R}^4 \mid p^2 = m^2 \wedge p_0 > 0\} , \quad (2.67)$$

de modo que el espacio  $\mathcal{H}_1$  se identifica con el espacio de las (clases de equivalencia de las) funciones (iguales casi en todas partes) cuadráticamente integrables (en el sentido de Lebesgue) sobre  $\mathcal{M}^+$  con respecto a la medida  $\mu_m$ :

$$\mathcal{H}_1 := L^2(\mathcal{M}^+; \mu_m) . \quad (2.68)$$

Citamos a continuación sendos resultados sin ofrecer de ellos una prueba –esta puede ser encontrada, por ejemplo, en la Ref. [33]–.

**Teorema:** *Toda representación irreducible de las relaciones de (anti-)conmutación de las Ecs. (2.58) y (2.59), con estado de vacío  $\Omega$ , son equivalentes a la representación de Fock.*  $\square$

**Corolario:** *Todo operador acotado que actúe sobre el espacio de Fock  $\mathcal{F}^\pm$  puede ser expresado en función de los operadores de emisión y absorción  $a^\dagger(f)$  y  $a(f)$ .*  $\square$

El mapa que lleva las funciones  $f \in \mathcal{H}_1$  a los operadores  $a(f)$  y  $a^\dagger(f)$  es definido

por:

**Definición:** Sea  $f \in \mathcal{H}_1$  una función de onda de una partícula. Los operadores de campo de emisión y absorción en el espacio real,  $a^\dagger(\mathbf{x})$  y  $a(\mathbf{x})$ , respectivamente, son las distribuciones operador-valuadas que llevan  $f$  a los operadores  $a^\dagger(f)$  y  $a(f)$ , respectivamente, por medio de las reglas formales:

$$a^\dagger(f) := \langle f^*; a^\dagger(\mathbf{x}) \rangle \quad ; \quad a(f) := \langle f; a(\mathbf{x}) \rangle \quad , \quad (2.69)$$

Adicionalmente, si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ , definimos los operadores de campo de emisión y absorción en el espacio de los impulsos,  $a^\dagger(\mathbf{p})$  y  $a(\mathbf{p})$ , respectivamente, como las transformadas de Fourier distribucionales de los correspondientes operadores de campo en el espacio real.  $\square$

Las Ecs. (2.61) y (2.69) implican que podemos escribir los operadores de campo de emisión y absorción como:

$$a^\dagger(\mathbf{x}) = \sum_j a_j^\dagger f_j(\mathbf{x})^* \quad , \quad a(\mathbf{x}) = \sum_j a_j f_j(\mathbf{x}) \quad , \quad (2.70)$$

y en el espacio de los impulsos:

$$a^\dagger(\mathbf{p}) = \sum_j \hat{a}_j^\dagger \hat{f}_j(\mathbf{p})^* \quad , \quad a(\mathbf{p}) = \sum_j \hat{a}_j \hat{f}_j(\mathbf{p}) \quad . \quad (2.71)$$

De estas relaciones, juntamente con las Ecs. (2.63) y la relación de completación presentada en la Ec. (2.69):

$$[a(\mathbf{x}); a^\dagger(\mathbf{y})]_{\mp} = -iD_+(0; \mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad , \quad [a(\mathbf{x}); a(\mathbf{y})]_{\mp} = 0 = [a^\dagger(\mathbf{x}); a^\dagger(\mathbf{y})]_{\mp} \quad . \quad (2.72)$$

**Definición:** El operador de campo cuantificado es la distribución operador-valuada  $u(x)$  definida como:

$$u(x) := a(x) + a^\dagger(x) \quad . \quad (2.73)$$

Su parte correspondiente al operador de campo de absorción se denomina su «parte de frecuencias negativas», denotada  $u_-$ ; la correspondiente al operador de campo de emisión, su «parte de frecuencias positivas», denotada  $u_+$ . □

Muchas formas pueden ser dadas a esta definición. Usando la expansión mostrada en la Ec. (2.70):

$$u(x) = \sum_j \left( a_j f_j(x) + a_j^\dagger f_j(x)^* \right) . \quad (2.74)$$

Aquí la dependencia con las coordenadas está contenida en las funciones  $f_j(x)$ . Como  $\{f_k\}$  es una base de  $\mathcal{H}_1$ , la Ec. (2.74) implica que el operador de campo cuantificado satisface a la ecuación de campo clásico (ecuación de Klein-Gordon-Fock). Así mismo, escribiendo la función  $f_j(x)$  en la Ec. (2.74) en función de su transformada de Fourier

$$f_j(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(p) \hat{f}_j(p) e^{-ipx} , \quad (2.75)$$

obtenemos la siguiente expansión como paquete de onda para el operador de campo cuantificado:

$$u(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_j \int d\mu(p) \left( a_j \hat{f}_j(p) e^{-ipx} + a_j^\dagger \hat{f}_j(p)^* e^{ipx} \right) ; \quad p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} . \quad (2.76)$$

Finalmente, aplicando la transformación de Fourier directamente a los operadores de campo de emisión y absorción en la Ec. (2.73):

$$u(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(p) \left( a(\mathbf{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\mathbf{p}) e^{ipx} \right) . \quad (2.77)$$

Nuevamente, los operadores de campo  $a^\dagger(\mathbf{p})$  y  $a(\mathbf{p})$  pueden ser expandidos como en la Ec. (2.71), con el mismo resultado que en la Ec. (2.76); esto prueba que, en lo general:  $\hat{a}_j = a_j$  y  $\hat{a}_j^\dagger = a_j^\dagger$ ; esto no es sorprendente, pues  $a_j$  y  $a_j^\dagger$  son independientes de las coordenadas e impulsos –son operadores y no distribuciones–.

La propiedad más importante del operador de campo cuantificado es la relación

de (anti-)conmutación entre sus partes de frecuencias negativas y la de frecuencias positivas. Usando la expresión de la Ec. (2.74) y las Ecs. (2.63) and (2.68):

$$[u_-(x); u_+(y)]_{\mp} = -iD_+(x - y) \quad . \quad (2.78)$$

Este conmutador desempeña un papel central en la teoría de perturbación causal bajo el nombre de «contracción de Wick»: Como hemos probado, él proviene de la solución al problema de valores iniciales en la teoría clásica. Si lo mismo fuera calculado por medio de la Ec. (2.77), obtendríamos:

$$[u_-(x); u_+(y)]_{\mp} = (2\pi)^{-3} \int d\mu(p)d\mu(q) [a(\mathbf{p}); a^\dagger(\mathbf{q})]_{\mp} e^{-i(px-qy)} \Big|_{p_0=E_p, q_0=E_q} \quad . \quad (2.79)$$

La comparación entre las Ecs. (2.78) y (2.79) permite la obtención de  $[a(\mathbf{p}); a^\dagger(\mathbf{q})]_{\mp}$ .

Consideraremos a continuación los campos particulares que aparecerán en los capítulos siguientes de esta tesis.

## 2.3. Campo bosónico pseudo-escalar

En este caso necesitamos introducir no más que un par de operadores de emisión y absorción,  $a^\dagger(f)$  y  $a(f)$ . El operador de campo cuantificado es:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(p) (a(\mathbf{p})e^{-ipx} + a^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx}) \quad . \quad (2.80)$$

Su distribución de conmutación será la distribución de Jordan-Pauli, pues ella soluciona el problema de valores iniciales asociado en la teoría clásica. Luego:

$$[\varphi_-(x); \varphi_+(y)] = -iD_+(x - y) \quad , \quad (2.81)$$

y:

$$[\varphi(x); \varphi(y)] = -iD(x - y) \quad . \quad (2.82)$$

Recordamos al lector que la distribución de Jordan-Pauli es:

$$D(x) = i(2\pi)^{-3} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \text{sgn}(p_0) e^{-ipx} \quad ; \quad (2.83)$$

y sus partes de frecuencias positivas y negativas son respectivamente dadas por:

$$D_+(x) = i(2\pi)^{-3} \int d\mu_m(p) e^{-ipx} \quad , \quad D_-(x) = -D_+(-x) \quad . \quad (2.84)$$

De las Ecs. (2.81), (2.84) y (2.79) tenemos que:

$$\int d\mu(p) e^{-ip(x-y)} \Big|_{p_0=E_p} = \int d\mu(p) d\mu(q) [a(\mathbf{p}); a^\dagger(\mathbf{q})] e^{-i(px-xy)} \Big|_{p_0=E_p, q_0=E_q} \quad , \quad (2.85)$$

de lo cual se implica que:

$$[a(\mathbf{p}); a^\dagger(\mathbf{q})] = 2p_0 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad . \quad (2.86)$$

Finalmente, el adjetivo «pseudo-escalar» con que hemos calificado al campo bosónico en el título de esta sección se refiere a su comportamiento frente a la transformación de inversión de los ejes espaciales, llamada «transformación de paridad». Ella es descrita, en conjunción con las otras transformaciones discretas de este campo como el de Dirac, en el Ap. D.

## 2.4. Campo de Dirac

Consideremos a continuación el campo de Dirac, que nos exige utilizar los anti-conmutadores. Este campo describe el conjunto de dos partículas, cada una con dos posibles estados de polarización, pues poseen ellas el espín 1/2; de suerte que descri-

biremos su teoría ondulatoria con el uso de cuatro pares de operadores de emisión y absorción: cada par asociado a cada polarización de cada partícula.

La cuantificación del campo de Dirac puede ser realizada por medio del conjunto de ecuaciones (2.27), (2.30) y (2.31), considerando al campo  $\chi_1$  como el campo dinámico y reservando para  $\chi_2$  el papel de componentes no dinámicas. En tal concepción, las componentes de  $\chi_1$  pueden ser cuantificadas como sendos campos escalares complejos de naturaleza fermiónica. Escribamos, pues:

$$\chi_1(x) = \eta_1\alpha(x) + \eta_{-1}\beta(x) \quad , \quad (2.87)$$

con  $\alpha$  y  $\beta$  campos escalares fermiónicos cuantificados, con expresiones:

$$\alpha(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(p) \left( b_1(\mathbf{p})e^{-ipx} + d_1^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx} \right) \quad , \quad (2.88)$$

$$\beta(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(p) \left( b_{-1}(\mathbf{p})e^{-ipx} + d_{-1}^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx} \right) \quad , \quad (2.89)$$

y con operadores de campo de emisión y absorción satisfaciendo a las reglas de anti-conmutación:

$$\{b_s(\mathbf{p}); b_r^\dagger(\mathbf{q})\} = 2p_0\delta_{rs}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \{d_s(\mathbf{p}); d_r^\dagger(\mathbf{q})\} \quad . \quad (2.90)$$

Los espinores  $\eta_s$  en la Ec. (2.88) serán elegidos posteriormente obedeciendo a la exigencia de la normalización de las soluciones completas. Como es lugar común descartar esta especie de campos alegando al teorema de espín-estadística, reproducimos este aquí, extraído de la Sec. 4-4 de la Ref. [23]:

**Teorema** *(de espín-estadística para el campo escalar):* Sea  $u(x)$  un operador de campo cuantificado escalar. Si él satisface que:

$$\{u(x); u^\dagger(y)\} = 0 \quad \text{para} \quad (x - y)^2 < 0 \quad , \quad (2.91)$$

entonces  $u(x) = 0$ .  $\square$

Calculando, no obstante, el anti-conmutador que aparece en el teorema, obtenemos:

$$\{\alpha(x); \alpha^\dagger(y)\} = -iD(x-y) + 2iD_-(x-y) = \{\beta(x); \beta^\dagger(y)\} \quad . \quad (2.92)$$

La distribución de Jordan-Pauli,  $D(x-y)$ , tiene soporte causal, y es nulo para el intervalo del tipo espacio,  $(x-y)^2 < 0$ , pero no cumple este requerimiento su parte de frecuencia negativa,  $D_-(x-y)$ , que puede ser no nulo para los mismos intervalos. Así, la hipótesis del teorema de espín-estadística no se satisface y por consiguiente tampoco su tesis: El teorema no impide la existencia de campos escalares fermiónicos; de hecho, vemos, las componentes dinámicas del campo de Dirac son de este tipo. La causalidad de las relaciones de anticonmutación, sin embargo, parece haberse perdido [vea la Ec. (2.92)], pero esto puede subsanarse y obtener la distribución de Jordan-Pauli re-definiendo los operadores de campo adjunto según:

$$\tilde{\alpha}(x) := (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(p) \left( -d_1(\mathbf{p})e^{-ipx} + b_1^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx} \right) \quad , \quad (2.93)$$

$$\tilde{\beta}(x) := (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(p) \left( -d_{-1}(\mathbf{p})e^{-ipx} + b_{-1}^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx} \right) \quad , \quad (2.94)$$

con los cuales se obtiene reglas de anti-conmutación causales:

$$\{\alpha(x); \tilde{\alpha}(y)\} = -iD(x-y) = \{\beta(x); \tilde{\beta}(y)\} \quad . \quad (2.95)$$

Substituyendo las Ecs. (2.88) y (2.89) en la (2.87), luego usando la Ec. (2.30) para obtener  $\chi_2(x)$  y substituyendo, finalmente, en la Ec. (2.27), obtenemos:

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_s \int d\mu(p) \sqrt{2p_0} \left( u_s(\mathbf{p})b_s(\mathbf{p})e^{-ipx} + v_s(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx} \right) \quad , \quad (2.96)$$

con:

$$u_s(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2p_0}} \begin{pmatrix} \eta_s \\ \frac{1}{m}(p_0 + \sigma_k p_k)\eta_s \end{pmatrix}, \quad v_s(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2p_0}} \begin{pmatrix} \eta_s \\ -\frac{1}{m}(p_0 + \sigma_k p_k)\eta_s \end{pmatrix}. \quad (2.97)$$

Como habíamos anticipado, hallaremos los espinores  $\eta_s$  por la exigencia de que los  $u_s(\mathbf{p})$  y  $v_s(\mathbf{p})$  sean normalizados. Tenemos que:

$$u_s(\mathbf{p})^\dagger u_r(\mathbf{p}) = \frac{1}{2p_0} \left( \eta_s^\dagger \eta_r + \frac{1}{m^2} \eta_s^\dagger (p_0 + \sigma_k p_k)^2 \eta_r \right) = v_s(\mathbf{p})^\dagger v_r(\mathbf{p}) \quad . \quad (2.98)$$

Eligiendo:

$$\eta_s = \sqrt{p_0 - \sigma_k p_k} \xi_s \quad ; \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.99)$$

obtenemos el resultado deseado:

$$u_s(\mathbf{p})^\dagger u_r(\mathbf{p}) = \delta_{rs} = v_s(\mathbf{p})^\dagger v_r(\mathbf{p}) \quad . \quad (2.100)$$

De paso, es importante mencionar que la operación de raíz cuadrada que aparece en la Ec. (2.99) está bien definida, pues  $p_0 - \sigma_k p_k$  es un operador hermitiano definido no-negativo en la capa másica. Con esta elección de  $\eta_s$  ya es posible probar por cálculo directo las siguientes identidades:

$$u_s(\mathbf{p})^\dagger v_r(-\mathbf{p}) = 0 = v_r(-\mathbf{p})^\dagger u_s(\mathbf{p}) \quad , \quad (2.101)$$

$$(\not{p} - m)u_s(\mathbf{p}) = 0 \quad , \quad (\not{p} + m)v_s(\mathbf{p}) = 0 \quad , \quad (2.102)$$

$$\sum_s u_s(\mathbf{p}) \bar{u}_s(\mathbf{p}) = \frac{\not{p} + m}{2p_0} \quad , \quad \sum_s v_s(\mathbf{p}) \bar{v}_s(\mathbf{p}) = \frac{\not{p} - m}{2p_0} \quad . \quad (2.103)$$

Podemos ya calcular el anti-conmutador del campo de Dirac cuantificado con su ad-

junto de Dirac:

$$\begin{aligned} \{\psi_-(x)_a; \bar{\psi}_+(y)_b\} &= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) 2p_0 \sum_s u_s(\mathbf{p})_a \bar{u}_s(\mathbf{p})_b e^{-ip(x-y)} \\ &= (2\pi)^{-3} \int d^4p \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) (\not{p} + m) e^{-ip(x-y)} \quad , \quad (2.104) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\psi_+(x)_a; \bar{\psi}_-(y)_b\} &= (2\pi)^{-3} \int d\mu(\mathbf{p}) 2p_0 \sum_s v_s(\mathbf{p})_a \bar{v}_s(\mathbf{p})_b e^{ip(x-y)} \\ &= -(2\pi)^{-3} \int d^4p \Theta(-p_0) \delta(p^2 - m^2) (\not{p} + m) e^{-ip(x-y)} \quad . \end{aligned} \quad (2.105)$$

Y de aquí, como  $\Theta(p_0) - \Theta(-p_0) = \text{sgn}(p_0)$ , tendremos finalmente que:

$$\{\psi(x); \bar{\psi}(y)\} = (2\pi)^{-3} \int d^4p (\not{p} + m) \text{sgn}(p_0) \delta(p^2 - m^2) e^{-ip(x-y)} \quad , \quad (2.106)$$

de donde identificamos la distribución  $S(x)$  que en la teoría clásica solucionaba el problema de Cauchy del campo de Dirac:

$$\{\psi(x); \bar{\psi}(y)\} = -iS(x-y) \quad , \quad (2.107)$$

con:

$$S(x) = i(2\pi)^{-3} \int d^4p (\not{p} + m) \text{sgn}(p_0) \delta(p^2 - m^2) e^{-ipx} = (i\not{\partial} + m)D(x) \quad . \quad (2.108)$$

Estos son los campos cuantificados libres que utilizaremos en los siguientes capítulos. Ellos definirán los espacios de Fock asintóticos en la teoría de interacción que ahora pasaremos a estudiar.

# Capítulo 3

## Teoría de perturbación causal

En este capítulo expondremos detalladamente la construcción de la teoría de perturbación causal, que servirá de soporte teórico al estudio del modelo de Yukawa que realizaremos en los capítulos subsiguientes.

### 3.1. Axiomas de Bogoliubov, Medvedev y Polivanov

En la teoría axiomática de Bogoliubov, Medvedev y Polivanov <sup>1</sup> se utiliza la operación de conmutación adiabática, definida como sigue:

**Definición:** Sea  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave con valores en el intervalo  $[0; 1]$ . La operación de conmutación adiabática de la interacción consiste en multiplicar la constante de acoplamiento de la teoría de interacción por la función  $g$ , que recibe el nombre de función de conmutación.  $\square$

La función de conmutación ejerce la función de regular la intensidad de la interacción: En aquellas regiones en las que  $g(x) = 0$ , la interacción está ausente, en las que  $g(x) = 1$ , ella ha adoptado su cabal intensidad, y en las que  $0 < g(x) < 1$  se manifiesta con intensidad parcial. Como esta función está contenida en el espacio de Schwartz, ella decae en los confines del espacio-tiempo, eliminando por vez toda influencia de la interacción en las regiones asintóticas y permitiendo en ellas el uso de los bien definidos campos cuantificados libres. Así, el operador de dispersión puede ser construido con estos campos solamente, evitando las dificultades e inconsistencias de los denominados «campos en interacción».

---

<sup>1</sup>El trabajo original es la Ref. [26]; sin embargo, los axiomas también son expuestos en los capítulos 4 y 10 de la Ref. [27] y en el capítulo 14 de la Ref. [28]. Ellos son también recopilados en la Ref. [29].

**Definición:** *Considérese una teoría en la que se ha realizado la operación de conmutación adiabática al través de la función  $g$ . El operador de dispersión  $S(g)$  es la forma cuadrática cuyos elemento de matriz entre cualesquiera dos estados  $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}$ ,*

$$\langle \Psi; S(g)\Phi \rangle \quad , \quad (3.1)$$

*es igual a la amplitud de probabilidad de que, en un proceso de dispersión, el estado inicial  $\Phi$  en el infinito pasado se torne el estado final  $\Psi$  en el infinito futuro.*  $\square$

La interacción real se obtiene al aplicar el «límite adiabático»  $g \rightarrow 1$ . Esta función límite, es claro, no se encuentra en el espacio  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$  en el que se ha asumido la función de conmutación; la existencia del límite, entonces, no es trivial, sino que debe ser probada en cada caso. Esta es la forma en la que se trata el problema del confinamiento en la teoría de perturbación causal: El límite adiabático existe solamente al considerar las secciones de choque inclusivas adecuadas. Por otro lado, de la definición se sigue que a la función de conmutación nula,  $g \equiv 0$ , esto es, en ausencia de interacción, el operador  $S(g)$  está sujeto a la «condición inicial»:

$$S(0) = 1 \quad . \quad (3.2)$$

Definidos los elementos primarios de la teoría, pasaremos a indicar las propiedades a las que el operador de dispersión,  $S(g)$ , está sometido. Ellas constituyen el conjunto de axiomas de Bogoliubov, Medvedev y Polivanov.

(1) **Axioma de unitaridad:** *Para toda función de conmutación,  $g$ , el operador de dispersión es unitario:*

$$S(g)^\dagger S(g) = 1 = S(g)S(g)^\dagger \quad . \quad \square \quad (3.3)$$

Este axioma está claramente ligado a la interpretación probabilística de los elemen-

tos de matriz del operador de dispersión<sup>2</sup>.

(2) **Axioma de invariancia translacional:** Sea  $\mathbf{U}(a; 1)$  el operador unitario que realiza las translaciones  $x \rightarrow x + a$ ,  $a \in \mathbb{R}^4$ , en el espacio de Fock  $\mathcal{F}$ . El operador de dispersión se transforma según:

$$\mathbf{U}(a; 1)S(g)\mathbf{U}(a; 1)^{-1} = S(g_a) \quad ; \quad g_a(x) := g(x - a) \quad . \quad \square \quad (3.4)$$

El tercer axioma se refiere a la causalidad. Por su principalía en el método que desarrollaremos a continuación, lo expondremos más detalladamente. Establezcamos, de inicio, que: «Dos puntos  $x, y \in \mathbb{M}$  están causalmente conectados si el vector que los une,  $x - y$ , es un vector del tipo-tiempo o del tipo-luz.» Así mismo, es preciso indicar la definición del orden cronológico: «Sean  $x, y \in \mathbb{M}$  dos puntos causalmente conectados; si  $x^0 < y^0$  en algún sistema inercial de referencia, entonces  $x$  es un punto en el pasado de  $y$ ; si  $x^0 > y^0$ , entonces  $x$  es un punto en su futuro.» Está claro, el orden cronológico solo puede ser definido de forma «absoluta» entre puntos causalmente conectados; esta noción se extiende a los puntos causalmente desconectados, si bien su relación de orden está en dependencia con el sistema de referencia.

En relación con estos enunciados, definimos el «cono de luz futuro» del punto  $x \in \mathbb{M}$ , así como su «cono de luz pasado», respectivamente, como los conjuntos:

$$V^\pm(x) := \left\{ y \in \mathbb{M} \mid (y - x)^2 > 0; y^0 \gtrless x^0 \right\} \quad . \quad (3.5)$$

Para referencia futura, también, definimos los conjuntos de  $n$  puntos:

$$\Gamma_n^\pm(x) := \left\{ (x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{M}^n \mid x_j \in \overline{V^\pm(x)}; j = 1, \dots, n \right\} \quad . \quad (3.6)$$

---

<sup>2</sup>Debemos mencionar, por exactitud, que este axioma se refiere al espacio de Fock que contiene a los estados físicos solamente, tal como lo hemos definido. Esta propiedad puede ser superada cuando, en las teorías de calibre, el espacio de Fock es extendido y puede contener, además, estados no-físicos, con la finalidad de obtener una formulación covariante de la teoría; en un tal caso el axioma de unitaridad rige apenas en el subespacio físico, mientras que se substituye por uno de pseudo-unitaridad en el espacio extendido. Semejante posibilidad no es explorada en esta tesis, pero puede, al respecto, ser consultada la Ref. [39].

Además, sean  $X, Y \subset \mathbb{M}$  dos conjuntos de puntos del espacio-tiempo de Minkowski. Definimos las siguientes relaciones entre ellos:

$$X < Y :\Leftrightarrow \forall x \in X, y \in Y : x^0 < y^0 \quad ; \quad (3.7)$$

$$X \sim Y :\Leftrightarrow \forall x \in X, y \in Y : (x - y)^2 < 0 \quad . \quad (3.8)$$

El significado de los símbolos « $<$ » y « $\sim$ » es claro:  $X < Y$  significa que los conjuntos  $X$  e  $Y$  pueden ser separados por un plano del tipo-espacio, con los puntos de  $X$  en el pasado de los puntos de  $Y$  —estrictamente, si tales puntos están causalmente conectados, y en algún referencial, cuando no lo están—;  $X \sim Y$  significa que los puntos de  $X$  están espacialmente separados de aquellos de  $Y$ .

(3) **Axioma de causalidad:** Sean  $g_1, g_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$  dos funciones de conmutación. Si sus soportes se relacionan según:  $\text{supp}(g_1) < \text{supp}(g_2)$ , entonces:

$$S(g_1 + g_2) = S(g_2)S(g_1) \quad . \quad (3.9)$$

Si, por otra parte, ellos se relacionan por:  $\text{supp}(g_1) \sim \text{supp}(g_2)$ , entonces la descomposición de la Ec. (3.9) todavía es válida, y adicionalmente los operadores  $S(g_1)$  y  $S(g_2)$  conmutan.  $\square$

(4) **Axioma de invariancia de Lorentz:** Sea  $\mathbf{U}(0; \Lambda)$  el operador unitario que realiza las transformaciones de Lorentz  $x \rightarrow \Lambda x$ ,  $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ , en el espacio de Fock  $\mathcal{F}$ . El operador de dispersión se transforma según:

$$\mathbf{U}(0; \Lambda)S(g)\mathbf{U}(0; \Lambda)^{-1} = S(g_\Lambda) \quad ; \quad g_\Lambda(x) := g(\Lambda^{-1}x) \quad . \quad \square \quad (3.10)$$

(5) **Axioma de estabilidad del vacío y del sector de una partícula:** Para toda función de conmutación  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ , el operador de dispersión deja invariantes los

estados de vacío y de una partícula:

$$\Phi = \Omega \vee \Phi = (0; \varphi; 0; \dots) \Rightarrow S(g)\Phi = \Phi \quad . \quad \square \quad (3.11)$$

## 3.2. Expresión perturbativa de los axiomas

Desarrollar la teoría perturbativa del operador de dispersión consiste en hallar una serie formal de potencias de la función de conmutación –esto es, de la constante de acoplamiento de la teoría de interacción– compatible tanto con la condición inicial de la Ec. (3.2) cuanto con los axiomas recién establecidos. Formalmente, el operador  $S(g)$  es expresado como la siguiente serie:

$$S(g) =: 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T_n(x_1; \dots; x_n) g(x_1) \cdots g(x_n) \quad . \quad (3.12)$$

Esta ecuación, a un tiempo, define las distribuciones operador-valoradas  $T_n(x_1; \dots; x_n) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{4n})$ , a las que se da el nombre de «distribuciones de transición del orden  $n$ » o, también, «distribuciones de  $n$  puntos». Además, como el producto  $g(x_1) \cdots g(x_n)$  es simétrico en sus argumentos  $x_1, \dots, x_n$ , las distribuciones de transición han de serlo igualmente. Así, podemos definir un conjunto de  $n$  puntos en el espacio-tiempo de Minkowski,  $\mathbb{M}$ , por  $X := \{x_j \in \mathbb{M} \mid j = 1, \dots, n\}$ , e introducir la notación:

$$T_n(X) \equiv T_n(x_1; \dots; x_n) \quad , \quad g(X) \equiv g(x_1) \cdots g(x_n) \quad , \quad dX \equiv d^4x_1 \cdots d^4x_n \quad , \quad (3.13)$$

con la cual el operador  $S(g)$  se escribe de forma compacta:

$$S(g) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int dX T_n(X) g(X) \quad . \quad (3.14)$$

El operador inverso de  $S(g)$ ,  $S(g)^{-1}$ , cuya interpretación, visto el axioma de unitariedad, es la de conectar los estados finales del proceso de dispersión con aquellos

iniciales en el sentido contrario al del operador  $S(g)$ , es también formalmente expresado como una serie perturbativa:

$$S(g)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int dX \tilde{T}_n(X) g(X) \quad . \quad (3.15)$$

Las distribuciones  $\tilde{T}_n$  están relacionadas con las distribuciones de transición; dicha relación se obtiene comparando la serie de la Ec. (3.15) que define  $S(g)^{-1}$  con la inversa formal de la serie de la Ec. (3.14), que es:

$$S(g)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{r=1}^n (-1)^r \sum_{\substack{X_1, \dots, X_r \neq \emptyset \\ X_1 \cup \dots \cup X_r = X \\ X_j \cap X_k = \emptyset, \forall j \neq k}} \int dX T_{n_1}(X_1) \cdots T_{n_r}(X_r) g(X) \quad . \quad (3.16)$$

La comparación de las Ecs. (3.15) y (3.16) deriva en la igualdad:

$$\tilde{T}_n(X) = \sum_{r=1}^n (-1)^r \sum_{\substack{X_1, \dots, X_r \neq \emptyset \\ X_1 \cup \dots \cup X_r = X \\ X_j \cap X_k = \emptyset, \forall j \neq k}} T_{n_1}(X_1) \cdots T_{n_r}(X_r) \quad . \quad (3.17)$$

Otras relaciones entre las distribuciones  $T_n$  y  $\tilde{T}_m$  pueden ser obtenidas por medio del reconocimiento de que  $S(g)^{-1}S(g) = 1$ . Definiendo las distribuciones

$$T_0(\emptyset) = 1 = \tilde{T}_0(\emptyset) \quad , \quad (3.18)$$

tendremos que:

$$1 = S(g)S(g)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{X \cup Y = Z \\ X \cap Y = \emptyset}} \int dZ T_{n_1}(X) \tilde{T}_{n-n_1}(Y) g(Z) \quad . \quad (3.19)$$

Como la Ec. (3.19) es satisfecha cualquiera que sea la función de conmutación  $g$ , de

ella se desprende que:

$$\forall Z \text{ con } |Z| \geq 1 : \sum_{\substack{X \cup Y = Z \\ X \cap Y = \emptyset}} T_{n_1}(X) \tilde{T}_{n-n_1}(Y) = 0 \quad . \quad (3.20)$$

El símbolo  $|Z|$  denota el «cardinal del conjunto  $Z$ », esto es, el número de elementos contenidos en él. Análogamente, si en la Ec. (3.19) hubiésemos escrito  $1 = S(g)^{-1}S(g)$  en lugar de  $S(g)S(g)^{-1}$ , obtendríamos la relación:

$$\sum_{\substack{X \cup Y = Z \\ X \cap Y = \emptyset}} \tilde{T}_{n-n_1}(X) T_{n_1}(Y) = 0 \quad . \quad (3.21)$$

Las Ecs. (3.20) y (3.21) serán de gran importancia para la prueba de la consistencia del procedimiento inductivo de la teoría de perturbación causal.

Pasemos a ver ahora las restricciones que los axiomas de Bogoliubov, Medvedev y Polivanov imponen a las distribuciones de transición.

(1) **Unitaridad:** Como la función de conmutación es real, la substitución de las Ecs. (3.14) y (3.15) en la Ec. (3.3) lleva directamente a la condición:

$$\tilde{T}_n(X) = T_n(X)^\dagger \quad . \quad (3.22)$$

(2) **Invariancia translacional:** Reemplazando la serie de la Ec. (3.14) en ambos lados de la Ec. (3.4) llegamos a la relación:

$$\mathbf{U}(a; 1) T_n(x_1; \dots; x_n) \mathbf{U}(a; 1)^{-1} = T_n(x_1 + a; \dots; x_n + a) \quad . \quad (3.23)$$

(3) **Causalidad:** Consideremos dos funciones de conmutación  $g_1$  y  $g_2$ , con  $\text{supp}(g_1) < \text{supp}(g_2)$ , de tal forma que se satisface a la Ec. (3.9). El lado izquierdo de ella es igual

a la siguiente serie perturbativa:

$$S(g_1 + g_2) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int dX T_n(X) (g_1 + g_2)(X) \quad , \quad (3.24)$$

en la cual, recordemos:  $(g_1 + g_2)(X) \equiv (g_1(x_1) + g_2(x_2)) \cdots (g_1(x_n) + g_2(x_n))$ . Luego:

$$(g_1 + g_2)(X) = \sum_{m=1}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} g_2(X_2) g_1(X_1) \quad ; \quad (3.25)$$

$$|X_2| = m \quad , \quad X = X_1 \cup X_2 \quad , \quad X_1 \cap X_2 = \emptyset \quad , \quad X_1, X_2 \neq \emptyset \quad .$$

Así:

$$S(g_1 + g_2) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!(n-m)!} \int dX T_n(X) g_2(X_2) g_1(X_1) \quad . \quad (3.26)$$

Por otra parte, el lado derecho de la Ec. (3.9) se compone del producto formal de dos series, cuyo resultado es:

$$S(g_2)S(g_1) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!(n-m)!} \int dX T_m(X_2) T_{n-m}(X_1) g_2(X_2) g_1(X_1) \quad . \quad (3.27)$$

De la comparación de las Ecs. (3.26) y (3.27), y tomando en consideración que  $\text{supp}(g_1) < \text{supp}(g_2)$ , se deduce que el axioma de causalidad del operador  $S(g)$  es traducido en la condición de que las distribuciones de transición son «cronológicamente ordenadas»:

$$T_n(X) = T_m(X_2) T_{n-m}(X_1) \quad ; \quad X_1 < X_2 \quad . \quad (3.28)$$

Aplicando repetidamente la misma fórmula encontramos que, cuando todos los puntos pueden ser temporalmente ordenados –es decir, cuando no hay presentes puntos con iguales coordenadas temporales  $x^0$ –, podemos escribir la distribución de  $n$  puntos como el «producto cronológico» –denotado por la letra  $\mathfrak{T}$ – de  $n$  distribuciones de un

punto:

$$T_n(x_1; \cdots; x_n) = \mathfrak{T} \{T_1(x_1) \cdots T_1(x_n)\} \quad . \quad (3.29)$$

Este resultado constituye un primer indicio de que la serie perturbativa completa puede ser generada con el solo conocimiento del término del primer orden,  $T_1(x)$ , si un procedimiento de ordenamiento cronológico adecuado es puesto por obra.

En el caso que sea  $\text{supp}(g_1) \sim \text{supp}(g_2)$  el mismo procedimiento es válido, con la conclusión:

$$T_n(X) = T_m(X_2)T_{n-m}(X_1) = T_{n-m}(X_1)T_m(X_2) \quad ; \quad X_1 \sim X_2 \quad . \quad (3.30)$$

Dicho de otra manera, las distribuciones de transición correspondientes a puntos espacialmente separados conmutan:

$$[T_n(X); T_m(Y)] = 0 \quad ; \quad X \sim Y \quad . \quad (3.31)$$

La Ec. (3.30) extiende la validez de la Ec. (3.29) para puntos isócronos excepto en el caso de que ellos sean coincidentes. De esta manera, cualquier indeterminación en la construcción de  $T_n$  a partir de  $T_1$  estará restringida al origen de coordenadas. Semejantes indeterminaciones, además, no pueden ser resueltas por imposición de la causalidad, como acabamos de ver.

Finalmente, invirtiendo la Ec. (3.9) obtenemos una condición de causalidad para el operador  $S(g)^{-1}$ : Si  $\text{supp}(g_1) < \text{supp}(g_2)$ , entonces:

$$S(g_1 + g_2)^{-1} = S(g_1)^{-1}S(g_2)^{-1} \quad , \quad (3.32)$$

de donde, por un procedimiento formalmente idéntico al mostrado para el operador

$S(g)$ , concluimos que las distribuciones  $\tilde{T}_n$  son «anti-cronológicamente ordenadas»:

$$\tilde{T}_n(X) = \tilde{T}_m(X_1)\tilde{T}_{n-m}(X_2) \quad ; \quad X_1 < X_2 \quad . \quad (3.33)$$

(4) **Invariancia de Lorentz:** Introduciendo la serie de la Ec. (3.14) en los dos miembros de la Ec. (3.10) llegamos a la relación:

$$\mathbf{U}(0; \Lambda)T_n(x_1; \dots ; x_n)\mathbf{U}(0; \Lambda)^{-1} = T_n(\Lambda x_1; \dots ; \Lambda x_n) \quad . \quad (3.34)$$

(5) **Estabilidad del vacío y del sector de una partícula:** Colocando la Ec. (3.14) en la Ec. (3.11) obtenemos que:

$$\Phi = \Omega \quad \vee \quad \Phi = (0; \varphi; 0; \dots) \Rightarrow \int dX T_n(X)g(X)\Phi = 0 \quad . \quad (3.35)$$

### 3.3. Construcción inductiva de Epstein y Glaser

En esta sección presentaremos la idea en la que se apoya la construcción inductiva de las distribuciones de transición inventada por Epstein y Glaser [31]. Estos investigadores pararon mientes en el siguiente punto indicado por Bogoliubov y Parasiuk [21] en 1957: La fuente de las divergencias ultra-violetas es la utilización de productos de distribuciones por la función discontinua de Heaviside en la construcción de los productos cronológicamente ordenados. Un claro ejemplo de esto es presentado en la Ref. [61], y reza como sigue: La distribución delta de Dirac, así como la función de Heaviside tienen las siguientes transformadas de Fourier:

$$\hat{\delta}(p) = (2\pi)^{-1/2} \quad , \quad \hat{\Theta}(p) = \frac{i(2\pi)^{-1/2}}{p + i0^+} \quad . \quad (3.36)$$

Su producto, no embargante, no tiene transformada de Fourier, pues haciendo uso del teorema de la convolución encontramos que ella sería:

$$\widehat{\Theta}\delta(p) = (2\pi)^{-1/2} \int dq \widehat{\Theta}(q) \widehat{\delta}(p - q) = i(2\pi)^{-3/2} \int \frac{dq}{q + i0^+} \quad , \quad (3.37)$$

cuyo resultado es divergente. Así pues, el objetivo de Epstein y Glaser fue hallar un método de ordenamiento cronológico que no requiera el uso de las funciones de Heaviside, evitando así la ocurrencia de las divergencias ultra-violetas. Echando la vista atrás encontramos que un tal ordenamiento ya apareció cuando enumerábamos los axiomas de la teoría: La Ec. (3.28), es decir, el axioma de causalidad, implica la siguiente igualdad:

$$T(X_1 \cup X_2) - T(X_2)T(X_1) = \begin{cases} 0 & , \quad X_1 < X_2 \vee X_1 \sim X_2 \quad ; \\ [T(X_1); T(X_2)] & , \quad X_1 > X_2 \quad . \end{cases} \quad (3.38)$$

La especificación de que el primer caso es válido también cuando  $X_1 \sim X_2$  es innecesaria una vez que la Ec. (3.31) rige. La Ec. (3.38) es entonces la versión bien definida del producto indefinido

$$\Theta(X_1 - X_2) [T(X_1); T(X_2)] \quad , \quad (3.39)$$

y constituye una distribución «avanzada» respecto al conjunto  $X_1$ , es decir, una distribución cuyo soporte se ubica en el pasado causal de este. Ocupémonos, en particular, de realizar el ordenamiento cronológico en relación a un dado punto. De inmediato vemos que, con dos puntos disponibles, la única distribución avanzada, con respecto a  $x_2$ , que podemos construir con las distribuciones de transición, es la distribución:

$$A_2(x_1; x_2) = T(x_1; x_2) - T(x_1)T(x_2) \quad , \quad (3.40)$$

definida salvo un factor multiplicativo arbitrario, que consideramos convencionalmente igual a la unidad. Consideremos ahora tres puntos disponibles,  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ , y busquemos la distribución más general que sea avanzada con respecto a  $x_3$ . Para ello escribimos la totalidad de productos de distribuciones de transición que pueden ser escritos para estos tres puntos:

$$\begin{aligned}
A_3(x_1; x_2; x_3) = & T(x_1; x_2; x_3) + \epsilon_1 T(x_1)T(x_2; x_3) + \epsilon_1 T(x_2)T(x_1; x_3) \\
& + \epsilon_2 T(x_1; x_2)T(x_3) + \epsilon_3 T(x_1)T(x_2)T(x_3) + \epsilon_3 T(x_2)T(x_1)T(x_3) \quad . \quad (3.41)
\end{aligned}$$

Aquí, el factor uno que acompaña a  $T(x_1; x_2; x_3)$  ha sido elegido convencionalmente. Así mismo, los coeficientes  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  y  $\epsilon_3$  pueden adoptar los valores  $\pm 1$ , pues toda división causal de las distribuciones de transición se realiza por medio de la Ec. (3.28); los coeficientes  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_3$  aparecen más de una vez debido a la simetría respecto a los puntos  $x_1$  y  $x_2$ : Apenas estamos interesados en que la distribución sea avanzada en relación a  $x_3$ ; las relaciones entre  $x_1$  y  $x_2$  nos son indiferentes. Y finalmente, en todos los términos hemos escrito el punto  $x_3$  al final en concordancia con la Ec. (3.38). Los coeficientes  $\epsilon_k$  deben ser hallados por la exigencia de que la distribución completa se anule cuando alguno de los puntos  $x_1$  o  $x_2$  esté en el futuro causal de  $x_3$ , o que ambos lo estén. Supongamos, por ejemplo, que se cumple:  $x_2 < x_3 < x_1$ , caso en el que  $A_3$  debe anularse. Aplicando el axioma de causalidad obtenemos:

$$\begin{aligned}
A_3(x_1; x_2; x_3) = & (1 + \epsilon_1)T(x_1)T(x_3)T(x_2) + (\epsilon_1 + \epsilon_3)T(x_2)T(x_1)T(x_3) \\
& + (\epsilon_2 + \epsilon_3)T(x_1)T(x_2)T(x_3) \quad , \quad (3.42)
\end{aligned}$$

de donde se deduce que  $\epsilon_1 = -1 = \epsilon_2$  y  $\epsilon_3 = +1$ . La distribución avanzada de tres puntos es por lo tanto:

$$\begin{aligned} A_3(x_1; x_2; x_3) &= T(x_1; x_2; x_3) - T(x_1)T(x_2; x_3) - T(x_2)T(x_1; x_3) \\ &\quad - T(x_1; x_2)T(x_3) + T(x_1)T(x_2)T(x_3) + T(x_2)T(x_1)T(x_3) \quad . \end{aligned} \quad (3.43)$$

El estudio de este caso particular ya nos permite la generalización<sup>3</sup>: El signo de cada término se determina por el número de factores que él posee, siendo positivo caso este sea impar, y negativo cuando sea par.

**Definición:** *La distribución avanzada del orden  $n$  es la distribución:*

$$A_n(Y; x_n) := \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \sum_{\substack{X_1, \dots, X_r \neq \emptyset \\ X_1 \cup \dots \cup X_r = Y \cup \{x_n\} \\ X_j \cap X_k = \emptyset, \forall j \neq k \\ x_n \in X_r}} T_{n_1}(X_1) \cdots T_{n_r}(X_r) \quad , \quad (3.44)$$

cuyo soporte se encuentra, por construcción, en el cono de luz pasado de  $x_n$ :

$$\text{supp}(A_n(Y; x_n)) \subset \Gamma_n^-(x_n) \quad . \quad \square \quad (3.45)$$

Una forma equivalente a esta puede ser obtenida por empleamiento de la Ec. (3.17): Fijando el conjunto  $X_r$ , el resto de la suma es igual a la distribución de transición inversa  $\tilde{T}_{n_1+\dots+n_{r-1}}(X_1 \cup \dots \cup X_{r-1})$ . Luego podemos escribir:

$$A_n(Y; x_n) = \sum_{\substack{X \cup X' = Y \\ X \cap X' = \emptyset}} \tilde{T}_m(X) T_{n-m}(X' \cup \{x_n\}) \quad . \quad (3.46)$$

De idéntico modo puede ser realizada la búsqueda de la distribución más general que sea retardada con respecto a un dado punto, construida con las distribuciones de transición de hasta un determinado orden.

<sup>3</sup>Si, con todo, el lector aún quiere convencerse de que esta generalización es justa, hará bien en consultar las Refs. [31, 33], en que las distribuciones avanzada y retardada son directamente definidas y su soporte es hallado luego.

**Definición:** La distribución retardada del orden  $n$  es la distribución:

$$R_n(Y; x_n) := \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \sum_{\substack{X_1, \dots, X_r \neq \emptyset \\ X_1 \cup \dots \cup X_r = Y \cup \{x_n\} \\ X_j \cap X_k = \emptyset, \forall j \neq k \\ x_n \in X_1}} T_{n_1}(X_1) \cdots T_{n_r}(X_r) \quad . \quad (3.47)$$

cuyo soporte se encuentra, por construcción, en el cono de luz futuro de  $x_n$ :

$$\text{supp}(R_n(Y; x_n)) \subset \Gamma_n^+(x_n) \quad . \quad \square \quad (3.48)$$

Esta vez, fijando el conjunto  $X_1$  identificamos el resto de la suma como una distribución de transición inversa:

$$R_n(Y; x_n) = \sum_{\substack{X \cup X' = Y \\ X \cap X' = \emptyset}} T_{n-m}(X' \cup \{x_n\}) \tilde{T}_m(X) \quad . \quad (3.49)$$

El axioma de causalidad nos ha llevado por un camino inesperado, pues no nos ha permitido, directamente, escribir una fórmula de ordenamiento cronológico para hallar  $T_n$ . Sin embargo, como en las sumas de las Ecs. (3.46) y (3.49) la distribución de  $n$  puntos aparece una única vez, podemos separarla del resto de términos:

$$A_n(Y; x_n) = T_n(Y \cup \{x_n\}) + A'_n(Y; x_n) \quad , \quad R_n(Y; x_n) = T_n(Y \cup \{x_n\}) + R'_n(Y; x_n) \quad , \quad (3.50)$$

con las siguientes definiciones de la «distribución subsidiaria avanzada» y de la «distribución subsidiaria retardada», respectivamente:

$$A'_n(Y; x_n) := \sum_{\substack{X \cup X' = Y \\ X \cap X' = \emptyset \\ X \neq \emptyset}} \tilde{T}_m(X) T_{n-m}(X' \cup \{x_n\}) \quad , \quad (3.51)$$

$$R'_n(Y; x_n) := \sum_{\substack{X \cup X' = Y \\ X \cap X' = \emptyset \\ X \neq \emptyset}} T_{n-m}(X' \cup \{x_n\}) \tilde{T}_m(X) \quad , \quad (3.52)$$

las cuales no contienen a  $T_n$ . Así pues, el axioma de causalidad nos ha ofrecido la siguiente fórmula para la determinación de  $T_n$ :

$$T_n(Y \cup \{x_n\}) = A_n(Y; x_n) - A'_n(Y; x_n) = R_n(Y; x_n) - R'_n(Y; x_n) \quad . \quad (3.53)$$

**Definición:** *La distribución causal del orden  $n$  es la distribución:*

$$D_n(Y; x_n) := R_n(Y; x_n) - A_n(Y; x_n) = R'_n(Y; x_n) - A'_n(Y; x_n) \quad , \quad (3.54)$$

*cuyo soporte se encuentra, en virtud de su definición y de las Ecs. (3.45) y (3.48), contenido en el cono de luz con vértice en el punto  $x_n$ :*

$$\text{supp}(D_n(Y; x_n)) \subset \Gamma_n^+(x_n) \cup \Gamma_n^-(x_n) \quad . \quad \square \quad (3.55)$$

Las Ecs. (3.53) y (3.55) señalan el curso que debe seguir el método perturbativo causal: Como la distribución causal del orden  $n$  puede ser conocida una vez que se han determinado todas las  $T_m$  con  $m \leq n$ , las distribuciones avanzada y retardada pueden ser halladas por la división de aquella en el vértice del cono de luz, hecho lo cual la Ec. (3.53) permite encontrar  $T_n$ . El método causal debe, por fuerza, ser inductivo. Antes de considerar este problema de división, no obstante, debemos asegurarnos de que el método inductivo, medio propuesto, medio encontrado, sea consistente con el axioma de causalidad del que ha provenido.

**Teorema:** *Sea  $D_n(x_1; \dots; x_n)$  una distribución causal, cuyas partes retardada,  $R_n(x_1; \dots; x_n)$ , y avanzada,  $A_n(x_1; \dots; x_n)$ , con soportes en  $\Gamma_n^+(x_n)$  y  $\Gamma_n^-(x_n)$ , respectivamente, han sido halladas al través de cierto método de división. La distribución  $T_n(x_1; \dots; x_n)$  hallada por medio de la Ec. (3.53) satisface a las condiciones de causalidad: Ecs. (3.28) y (3.31).  $\square$*

*Demostración:* Probaremos este teorema por partes:

(I) Sea que el conjunto  $X$  puede ser particionado como  $X = P \cup Q$ , con  $P < Q$

y  $x_n \in Q$ . En este caso  $A_n(x_1; \dots; x_n) = 0$ , pues él tiene soporte avanzado; luego:  $T_n(x_1; \dots; x_n) = -A'_n(x_1; \dots; x_n)$ . Usando la Ec. (3.51) y la hipótesis de que  $P < Q$ , así como la condición de causalidad sobre las distribuciones de transición  $T_m$  con  $m \leq n$ :

$$A'_n(x_1; \dots; x_n) = \sum_{\substack{K \cup K' = Q, K \cap K' = \emptyset \\ J \cup J' = P, J \cap J' = \emptyset \\ K \cap J \neq \emptyset}} \tilde{T}(J) \tilde{T}(K) T(K') T(J') \quad . \quad (3.56)$$

Cuando  $J = \emptyset$ ,  $K$  podrá ser el conjunto vacío; la contribución de esta posibilidad es nula en virtud de la Ec. (3.21). Luego, deberá ser  $J = \emptyset$ ,  $J' = P$ , y así:

$$\begin{aligned} A'_n(x_1; \dots; x_n) &= \sum_{\substack{K \cup K' = Q \\ K \cap K' = \emptyset \\ K \neq \emptyset}} \tilde{T}(K) T(K') T(P) \\ &= \left( \sum_{\substack{K \cup K' = Q \\ K \cap K' = \emptyset}} \tilde{T}(K) T(K') - \tilde{T}(\emptyset) T(Q) \right) T(P) \\ &= -T(Q) T(P) \quad . \end{aligned} \quad (3.57)$$

Para llegar a la última línea hicimos, una vez más, uso de la Ec. (3.21). Se sigue de esto que:  $T_n(x_1; \dots; x_n) = T(Q) T(P)$ .

(II) Sea ahora que  $X = P \cup Q$ , con  $P > Q$  y  $x_n \in Q$ . Ahora  $R_n(x_1; \dots; x_n) = 0$ , pues él tiene soporte retardado, y en consecuencia:  $T_n(x_1; \dots; x_n) = -R'_n(x_1; \dots; x_n)$ . De forma análoga al caso (I) podemos probar que la distribución subsidiaria retardada se descompone según  $R'_n(x_1; \dots; x_n) = -T(P) T(Q)$ , de donde se concluye que:  $T_n(x_1; \dots; x_n) = T(Q) T(P)$ .

(III) Supongamos esta vez que  $X = P \cup Q$ , con  $P \sim Q$  y  $x_n \in Q$ . Por definición de la distribución causal:  $D_n(x_1; \dots; x_n) = 0$ , de lo cual  $R_n(x_1; \dots; x_n) = 0$  y  $T_n(x_1; \dots; x_n) = -R'_n(x_1; \dots; x_n)$ . Usando primero la definición de la distribución subsidiaria retardada y luego la condición de causalidad sobre las distribuciones de

transición de menos de  $n$  puntos:

$$\begin{aligned}
R'_n(x_1; \dots; x_n) &= \sum_{\substack{X_1 \cup X_2 = X \setminus \{x_n\} \\ X_1 \cap X_2 = \emptyset \\ X_1 \neq \emptyset}} T(X_2 \cup \{x_n\}) \tilde{T}(X_1) \\
&= \sum_{\substack{X_1 \cup X_2 = X \setminus \{x_n\} \\ X_1 \cap X_2 = \emptyset \\ X_1 \neq \emptyset}} T(X_2 \cap Q) \left\{ T(X_2 \cap P) \tilde{T}(X_1 \cap P) \right\} \tilde{T}(X_2 \cap P) \quad . \quad (3.58)
\end{aligned}$$

Debido al término encerrado entre llaves, la única contribución en la suma anterior proviene del sumando con  $X_2 \cap P = \emptyset$ , lo que implica que  $X_2 \cap Q = Q$ , y por tanto:

$$R'_n(x_1; \dots; x_n) = -T(Q)T(P) = -T(P)T(Q) \quad . \quad (3.59)$$

Así:  $T_n(x_1; \dots; x_n) = T(P)T(Q) = T(Q)T(P)$ .

(IV) Finalmente, consideremos el producto  $T_n(x_1; \dots; x_n)T_m(Y)$ , con  $X \sim Y$  y  $m \leq n$ . Los conjuntos  $X$  e  $Y$  pueden ser particionados en cualquiera de los casos estudiados [partes (I) a (III) de la prueba]; supongamos que las particiones son:  $X = P \cup Q$  e  $Y = P' \cup Q'$ , tales que:  $T_n(x_1; \dots; x_n) = T(Q)T(P)$  y  $T_m(Y) = T(Q')T(P')$ . Como  $X \sim Y$ , las siguientes relaciones son válidas:  $P \sim P', Q', Q \sim P', Q'$ . Entonces, usando la condición de causalidad sobre estas distribuciones de transición de menos de  $n$  puntos:

$$\begin{aligned}
T_n(x_1; \dots; x_n)T_m(Y) &= T(Q)T(P)T(Q')T(P') \\
&= T(Q')T(P')T(Q)T(P) \\
&= T_m(Y)T_n(x_1; \dots; x_n) \quad . \quad (3.60)
\end{aligned}$$

Es decir,  $T_n(x_1; \dots; x_n)$  conmuta con  $T_m(Y)$  ( $m \leq n$ ) para  $X \sim Y$ . Esto completa la prueba. ■

Note el lector que en la prueba del teorema hemos escrito la distribución de  $n$

puntos como  $T_n(x_1; \dots; x_n)$ , y no como  $T_n(X)$ . Esto ha sido así porque el método inductivo no asegura que la distribución de transición hallada sea simétrica en sus argumentos. Pero esto no representa dificultad ninguna, pues cualquiera que sea la simetría –o la falta de ella– de la distribución encontrada, una vez que sea colocada en la serie perturbativa del operador de dispersión, Ec. (3.12), solo su parte simétrica contribuirá. O séase, si denotamos por  $T'_n(x_1; \dots; x_n)$  la distribución obtenida por el método inductivo, siempre nos será posible definir su parte simétrica como la deseada distribución de  $n$  puntos:

$$T_n(X) := S_n^+ T'_n(x_1; \dots; x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} T'_n(x_{\pi(1)}; \dots; x_{\pi(n)}) \quad . \quad (3.61)$$

Es esta forma simetrizada la que ha de usarse en la construcción de los términos siguientes.

Esto completa, formalmente, la construcción del método. Como podemos ver, este se basa única y exclusivamente en la causalidad, justificando su nombre. A continuación será abordado el problema de la división, que determinará la practicidad del método, y para el que será necesario agregar también el axioma de invariancia translacional. Estos dos axiomas permiten así la construcción completa de la teoría; los restantes servirán para la fijación de los términos indeterminados que, ya lo decíamos, aún remanen en el punto de división.

### 3.4. División de la distribución causal en el espacio real

El método general de la división de una distribución en dos partes cuyos soportes son conjuntos regularmente separables ha sido desarrollado por Łojasiewicz y Malgrange [32]. A este respecto, recordamos al lector que los conjuntos cerrados  $A$  y  $B$  son «regularmente separables por el conjunto compacto  $\Lambda$ » si: (1)  $\Lambda = \emptyset$  y  $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ , o si (2)  $\exists C > 0, \rho > 0: \forall x \in A: d(x; B) \geq C d(x; \Lambda)^\rho$ . Es claro que  $\Gamma_n^+(x)$  y  $\Gamma_n^-(x)$  son

regularmente separables por el conjunto compacto  $\Lambda = \{x; \cdots; x\} = \Gamma_n^+(x) \cap \Gamma_n^-(x)$ , para lo cual basta elegir  $C = 1 = \rho$ .

Sea que la distribución causal del orden  $n$ ,  $D_n(x_1; \cdots; x_n)$ , ha sido construida por el método inductivo. Ella tendrá, por regla general, la forma que sigue:

$$D_n(x_1; \cdots; x_n) = \sum_k d_n^k(x_1; \cdots; x_n) : C_k(u^A) : \quad , \quad (3.62)$$

con  $d_n^k(x_1; \cdots; x_n)$  una distribución numérica y  $: C_k(u^A) :$  un monomio de Wick construido con los diferentes operadores de campo cuantificado  $u^A$  de la teoría. El soporte de la distribución causal es determinado por su parte numérica  $d_n^k$ , entonces causal. La distribución avanzada y la retardada preservan la estructura de campos de la distribución causal:

$$A_n(x_1; \cdots; x_n) = \sum_k a_n^k(x_1; \cdots; x_n) : C_k(u^A) : \quad , \quad (3.63)$$

$$R_n(x_1; \cdots; x_n) = \sum_k r_n^k(x_1; \cdots; x_n) : C_k(u^A) : \quad , \quad (3.64)$$

con  $a_n^k$  y  $r_n^k$  las partes avanzada y retardada, respectivamente, de la distribución numérica  $d_n^k$ :

$$d_n^k(x_1; \cdots; x_n) = r_n^k(x_1; \cdots; x_n) - a_n^k(x_1; \cdots; x_n) \quad ; \quad (3.65)$$

$$\text{supp}(r_n^k) \subseteq \Gamma_n^+(x_n) \quad , \quad \text{supp}(a_n^k) \subseteq \Gamma_n^-(x_n) \quad . \quad (3.66)$$

Usando el axioma de invariancia translacional definimos  $d \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n-4})$  como:

$$d(x) := d_n^k(x_1 - x_n; \cdots; x_{n-1} - x_n; 0) \quad ; \quad \text{supp}(d) \subseteq \Gamma_{n-1}^+(0) \cup \Gamma_{n-1}^-(0) \quad ; \quad (3.67)$$

entonces la división de la Ec. (3.65) se equivale con la:

$$d = r - a \quad ; \quad \text{supp}(r) \subseteq \Gamma_{n-1}^+(0) \quad , \quad \text{supp}(a) \subseteq \Gamma_{n-1}^-(0) \quad . \quad (3.68)$$

En la Ec. (3.67) hemos escrito  $d(x)$ ;  $x$  significa de aquí en adelante:  $(x_1 - x_n; \dots; x_{n-1} - x_n)$ . Aplicaremos en lo sucesivo la notación de Schwartz de los multi-índices, definida, por ejemplo, en la Ref. [62]: Un multi-índice  $k \in \mathbb{R}^N$  es una secuencia de números no negativos,  $k = (k_1; \dots; k_N)$ ,  $k_j \geq 0$ , para la cual son definidas las operaciones:

$$|k| \equiv \sum_{j=1}^N k_j \quad , \quad x^k \equiv \prod_{j=1}^N x_j^{k_j} \quad , \quad k! \equiv \prod_{j=1}^N k_j! \quad , \quad D^k f(x) \equiv \prod_{j=1}^N \partial_{x_j}^{k_j} f(x) \quad .$$

Escribiremos también:  $x^\mu \equiv (x_1^\mu - x_n^\mu; \dots; x_{n-1}^\mu - x_n^\mu)$ . El método propuesto por Epstein y Glaser, como ya dijimos, inspirado en los trabajos de Łojasiewicz y Malgrange, consiste en los siguientes pasos:

- (i) Como  $d(x)$  solo puede ser no nulo cuando  $x$  está, bien en  $\Gamma_{n-1}^+(0)$ , bien en  $\Gamma_{n-1}^-(0)$ , consideremos la  $n-1$ -upla de vectores tipo-tiempo:  $v := (v_1; \dots; v_{n-1})$  y definamos el plano  $v \cdot x = 0$ ,  $x \in \mathbb{M}^{n-1}$ , cuya ecuación es, explícitamente:

$$v \cdot x = v_1 \cdots (x_1 - x_n) + \cdots + v_{n-1} \cdot (x_{n-1} - x_n) = 0 \quad . \quad (3.69)$$

Como  $v \cdot x > 0$  para  $x$  tal que  $x_j - x_n \in V^+(0)$ , mientras que  $v \cdot x < 0$  para  $x$  tal que  $x_j - x_n \in V^-(0)$ , el plano recién definido corta el cono de luz por su vértice.

- (ii) El producto  $v \cdot x$  definido en el paso (i) será usado como argumento de una función continua y monótona no-decreciente tal que:

$$\chi(t) := \begin{cases} 0 & ; \quad t \leq 0 \\ < 1 & ; \quad 0 < t < 1 \\ 1 & ; \quad t \geq 1 \end{cases} \quad . \quad (3.70)$$

Esta función substituirá a la función discontinua de Heaviside, permitiendo que las distribuciones definidas por multiplicación con ella estén bien definidas.

(iii) La distribución «retardada restringida» y la «avanzada restringida» son definidas, respectivamente, como los siguientes procesos de límite:

$$\bar{r}(x) := \lim_{s \rightarrow 0^+} \chi\left(\frac{v \cdot x}{s}\right) d(x) \quad , \quad \bar{a}(x) := - \lim_{s \rightarrow 0^+} \chi\left(-\frac{v \cdot x}{s}\right) d(x) \quad , \quad (3.71)$$

sobre el mayor espacio de funciones de prueba en que dichos límites existan. La distribución retardada y la avanzada son entonces definidas como la extensión de las distribuciones restringidas al espacio de Schwartz completo.

Examinemos la existencia de los límites de la Ec. (3.71). Para ello usaremos la condición de Cauchy para la convergencia de una familia de distribuciones, enunciada, por ejemplo, en la Ref. [57]: La familia de distribuciones  $\{f_\lambda\} \subset \mathcal{S}'$  es convergente en el límite  $\lambda \rightarrow 0$  si y solamente si:

$$\forall \varphi \in \mathcal{S} \quad , \quad \forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad 0 < |\lambda_1|, |\lambda_2| < \delta \Rightarrow |(f_{\lambda_1}; \varphi) - (f_{\lambda_2}; \varphi)| < \varepsilon \quad . \quad (3.72)$$

Consideremos dado un número  $\varepsilon$ ; fijemos  $\lambda_2 = \lambda_2(\varepsilon)$  y elijamos  $\lambda_1 = \lambda_2/k$  para algún número  $k > 0$  arbitrario pero fijo. Es claro que podemos ocuparnos solamente del caso  $k \geq 1$ , una vez que si  $0 < k < 1$  bien podríamos fijar  $\lambda_1$  y escribir  $\lambda_2 = \lambda_1/k$  con  $k > 1$ . La condición de Cauchy adquiere la forma:

$$\forall \varphi \in \mathcal{S} \quad , \quad \forall k \geq 1 \quad , \quad \forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \lambda \in ]-\delta; +\delta[ \Rightarrow |(f_{\lambda/k} - f_\lambda; \varphi)| < \varepsilon \quad . \quad (3.73)$$

O séase, la convergencia de la familia de distribuciones está asegurada por la condición límite:

$$\forall k \geq 1 \quad : \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} (f_{\lambda/k} - f_\lambda) = 0 \quad . \quad (3.74)$$

Aplicando este criterio a los límites de la Ec. (3.71), debemos encontrar el mayor

espacio de funciones de prueba para el que se satisface a la condición:

$$\forall k \geq 1 : \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \psi \left( \frac{v \cdot x}{s} \right) d(x) = 0 \quad ; \quad \psi(t) := \chi(kt) - \chi(t) \quad . \quad (3.75)$$

Sea  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  una función de prueba. Como también  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  –en efecto, ya que  $\psi$  es suave y tiene soporte compacto–, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \left\langle \psi \left( \frac{v \cdot x}{s} \right) d(x); \varphi(x) \right\rangle &= \left\langle \varphi(x) d(x); \psi \left( \frac{v \cdot x}{s} \right) \right\rangle \\ &= s^m \langle \varphi(sx) d(sx); \psi(v \cdot x) \rangle \quad . \end{aligned} \quad (3.76)$$

Nuestros intereses nos han puesto de cara con la siguiente definición [36]:

**Definición:** Sea  $d \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$  una distribución, y sea  $\rho$  una función continua definida positiva. Si el límite

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \rho(s) s^m d(sx) = d_0(x) \quad (3.77)$$

existe<sup>4</sup> en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$  y es no nulo, entonces la distribución  $d_0$  se llama la cuasi-asíntota de  $d$  en el origen de las coordenadas, en relación a la función  $\rho$ .  $\square$

Esta propia definición implica, como es probado en las Refs. [33, 36], que la función  $\rho(s)$  es una «función de auto-modelo», también llamada «función regularmente variable en el origen», lo cual significa que para todo  $a > 0$ :

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\rho(as)}{\rho(s)} = a^\alpha \quad , \quad (3.78)$$

para algún número  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el cual es llamado «orden del auto-modelamiento» o simplemente «auto-modelamiento» de la función  $\rho$ . En particular, es posible usar  $\rho(s) = \rho_0(s) s^\alpha$  en la definición de cuasi-asíntota, con  $\rho_0$  una función de auto-modelo nulo

---

<sup>4</sup>La noción de convergencia requerida es la noción débil [62, 63]: «La distribución  $T_j$  converge hacia  $T$  cuando  $j \rightarrow +\infty$  si para toda  $\varphi \in \mathcal{S}$  la secuencia numérica  $\langle T_j; \varphi \rangle$  converge hacia  $\langle T; \varphi \rangle$  cuando  $j \rightarrow +\infty$ .»

(o función de variación lenta), y el auto-modelamiento de  $\rho$  sirve como un parámetro característico de la distribución. Luego, bajo las mismas hipótesis de la definición anterior:

**Definición:** Si la cuasi-asíntota de la distribución  $d \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$  en el origen de las coordenadas existe para la función  $\rho(s) = \rho_0(s)s^\omega$ , entonces el número  $\omega$  es el orden singular de la distribución  $d$  en el origen.  $\square$

Como la función de prueba  $\varphi$  pertenece al espacio de Schwartz, él posee expansión en serie de Taylor alrededor del origen:  $\varphi(x) = \varphi(0) + D\varphi(0)x + D^2\varphi(0)x^2/2 + \dots$ , de donde se sigue que el producto  $\varphi d$ , que es el que aparece en la Ec. (3.76), tiene orden singular  $\omega - k$ , con  $\omega$  el orden singular de la distribución causal y  $k \geq 0$  el orden de la primera derivada no nula de la función  $\varphi$ . Luego, el siguiente límite existe y es no nulo:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s^{\omega-k} s^m \varphi(sx) d(sx) = (\varphi d)_0(x) \quad . \quad (3.79)$$

Siendo así, podemos reformular la condición de existencia de la Ec. (3.71) como [vea las Ecs. (3.75), (3.76) y (3.79)]:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \left\langle \psi \left( \frac{v \cdot x}{s} \right) d(x); \varphi(x) \right\rangle = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\langle (\varphi d)_0; \psi \rangle}{s^{\omega-k}} = 0 \quad . \quad (3.80)$$

Como el numerador de esta ecuación es un número independiente de  $s$ , la condición es satisfecha siempre que sea  $\omega - k < 0$ , es decir, siempre que sea  $k > \omega$ . Vemos así que el orden singular de la distribución causal se relaciona directamente con el espacio de funciones de prueba sobre el que están definidas las distribuciones restringidas.

### 3.4.1. Distribución causal con orden singular negativo

Cuando  $\omega < 0$  la condición de la Ec. (3.80) es cumplida para todo valor de  $k$ , pues  $k \geq 0$ . Luego, no hay restricción ninguna a la función  $\varphi$  y las distribuciones restringidas están definidas sobre el espacio de Schwartz completo. La extensión para

hallar la distribución retardada y la avanzada es entonces «trivial»:

$$r(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \chi \left( \frac{v \cdot x}{s} \right) d(x) \equiv \Theta(v \cdot x) d(x) \quad ; \quad (3.81)$$

$$a(x) = - \lim_{s \rightarrow 0} \chi \left( -\frac{v \cdot x}{s} \right) d(x) \equiv -\Theta(-v \cdot x) d(x) = (\Theta(v \cdot x) - 1) d(x) \quad . \quad (3.82)$$

La aplicación de estas distribuciones a la función de prueba  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  da por resultado:

$$\langle r; \varphi \rangle = \langle \Theta d; \varphi \rangle = \langle d; \Theta \varphi \rangle \quad ; \quad \langle a; \varphi \rangle = \langle (\Theta - 1)d; \varphi \rangle = \langle d; (\Theta - 1)\varphi \rangle \quad . \quad (3.83)$$

La Ec. (3.83) implica que el orden singular de las distribuciones  $r$  y  $a$  es el mismo que el de la distribución causal  $d$ .

### 3.4.2. Distribución causal con orden singular no-negativo

Cuando, en cambio, es  $\omega \geq 0$ , la desigualdad  $k > \omega$  lleva a la conclusión de que el mayor espacio de funciones de prueba sobre el que las distribuciones restringidas están definidas es aquel que contiene a las funciones que satisfacen:

$$D^b \varphi(0) = 0 \quad \text{para} \quad |b| \leq [\omega] \quad . \quad (3.84)$$

Aquí el símbolo  $\llbracket \bullet \rrbracket$  significa «el mayor número entero menor o igual a  $\bullet$ ».

Para construir la extensión de  $\bar{r}$  al espacio de Schwartz completo comenzamos por notar que toda función  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  puede ser proyectada al espacio encontrado por substracción de los primeros  $[\omega]$  términos de su serie de Taylor alrededor del origen  $x = 0$ . Para operar esa substracción definimos el operador de proyección  $W$  mediante:

$$(W\varphi)(x) := \varphi(x) - w(x) \sum_{|b|=0}^{[\omega]} \frac{x^b}{b!} D^b \varphi(0) \quad , \quad (3.85)$$

con  $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  una función auxiliar cuya tarea es la de mantener a  $W\varphi$  dentro del espacio de Schwartz –recordamos a este propósito que cualquier polinomio de Taylor diverge en lo infinito–. Esta función auxiliar no es cualquiera: Ella es tal que  $W\varphi$  satisfaga a la Ec. (3.84). Con ayuda de la fórmula de Leibniz de derivación de un producto calculamos las primeras  $[\omega]$  derivadas de  $W\varphi$  en el origen:

$$D^c(W\varphi)(0) = D^c\varphi(0) - \sum_{a=0}^c \frac{c!}{a!(c-a)!} D^{c-a}w(0)D^a\varphi(0) \quad ; \quad |c| \leq [\omega] \quad . \quad (3.86)$$

Entonces  $W$  es el operador de proyección requerido siempre que la función  $w$  sea escogida de tal suerte que:

$$w(0) = 1 \quad \text{y} \quad D^c w(0) = 0 \quad \text{para} \quad 1 \leq |c| \leq [\omega] \quad . \quad (3.87)$$

La extensión considerada define entonces a la distribución retardada por medio de la fórmula:

$$\langle r_w; \varphi \rangle := \langle \bar{r}; W\varphi \rangle = \langle d; \Theta W\varphi \rangle \quad . \quad (3.88)$$

Y así mismo define a la distribución avanzada:

$$\langle a_w; \varphi \rangle := \langle \bar{a}; W\varphi \rangle = \langle d; (\Theta - 1)W\varphi \rangle \quad . \quad (3.89)$$

El sub-índice  $w$  que hemos colocado a estas distribuciones explicita el hecho de que

ellas dependen de la función  $w$  usada en el proceso de extensión. De la Ec. (3.88):

$$\begin{aligned}
\langle r_w; \varphi \rangle &= \int d^m x \left\{ \Theta(v \cdot x) d(x) \varphi(x) \right. \\
&\quad \left. - \int d^m y \Theta(v \cdot x) d(x) w(x) \sum_{|b|=0}^{[\omega]} \frac{x^b}{b!} D^b \varphi(y) \delta(y) \right\} \\
&= \int d^m x \left\{ \Theta(v \cdot x) d(x) \right. \\
&\quad \left. - \int d^m y \Theta(v \cdot y) d(y) w(y) \sum_{|b|=0}^{[\omega]} \frac{(-y)^b}{b!} D^b \delta(x) \right\} \varphi(x) \quad .
\end{aligned}$$

Y de aquí conseguimos reconocer:

$$r_w(x) = \Theta(v \cdot x) d(x) - \sum_{|b|=0}^{[\omega]} \int d^m y \Theta(v \cdot y) d(y) w(y) \frac{(-y)^b}{b!} D^b \delta(x) \quad . \quad (3.90)$$

La distribución avanzada tiene una expresión semejante, con  $\Theta-1$  en lugar de  $\Theta$ . Como podemos ver, todos los términos de corrección son proporcionales a derivadas de la distribución delta de Dirac, es decir, tienen soporte en el origen de coordenadas. Como el mayor orden de estas derivadas es  $[\omega]$ , concluimos que la distribución retardada tiene igual orden singular que la distribución causal; lo mismo se aplica a la distribución avanzada.

Una palabra al respecto de estas correcciones. Propiamente, la distribución retardada es aquella a la que hemos llamado «restringida»; el deseo de extender esta tiene por único objetivo la manipulación de la distribución como un ente en sí mismo, antes de aplicarla a la función de prueba; particularmente, queremos aplicar a ella la transformación de Fourier para llevar los cálculos al espacio de los impulsos, en donde ellos se tornan más simples. La extensión es hecha al espacio de Schwartz porque él tiene la propiedad siguiente [63]: La transformación de Fourier es un mapa lineal homeomórfico de  $\mathcal{S}$  –o  $\mathcal{S}'$ , en el caso de las distribuciones– hacia sí mismo. De esta observación surge la conclusión: Es necesario asegurarse de que la extensión de la distribución

retardada no modifique el resultado de su aplicación a una función de prueba originalmente admisible; esto solo ocurrirá si la extensión es hecha partiendo del mayor espacio restringido, es decir, realizando las substracciones con el menor orden singular de cada término de la distribución causal; cuando este cuidado no es tomado en consideración se pierde la información de la distribución retardada como funcional de las funciones desconsideradas, lo cual puede traer de consuno la pérdida de cierta información física<sup>5</sup>.

### 3.5. División de la distribución causal en el espacio de los impulsos

La propia definición de la transformada de Fourier de una distribución dice que para cualesquiera  $d \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ ,  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ :  $\langle d; \varphi \rangle = \langle \hat{d}; \check{\varphi} \rangle$ . Luego el paso de la definición de la cuasi-asíntota dada en el espacio real al de los impulsos es fácilmente dado al aplicar esta a una función de prueba:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \rho(s) s^m \langle d(sx); \varphi(x) \rangle = \langle d_0(x); \varphi(x) \rangle \quad .$$

La aplicación de la igualdad antes señalada nos lleva a la siguiente:

**Definición:** Sea  $\hat{d} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$  una distribución, y sea  $\rho$  una función continua definida positiva. Si el límite

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \rho(s) \left\langle \hat{d} \left( \frac{p}{s} \right); \check{\varphi}(p) \right\rangle = \langle \hat{d}_0; \check{\varphi} \rangle \quad (3.91)$$

existe para toda función de prueba  $\check{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ , entonces  $\hat{d}_0$  es la cuasi-asíntota de la distribución  $\hat{d}$  en  $p \rightarrow +\infty$ , en relación a la función  $\rho$ .  $\square$

---

<sup>5</sup>Este hecho ha sido explícita y concretamente comprobado por Scharf, Wreszinski, Pimentel y Tomazelli [42] en el ámbito de la electro-dinámica cuantificada: En la teoría tetra-dimensional, el uso de substracciones no mínimas lleva a ambigüedades en la predicción del momento dipolar magnético del electrón; en la teoría tri-dimensional, a ambigüedades en la masa dinámicamente generada del fotón.

La definición basada en la existencia de las cuasi-asíntotas, como vemos, tiene la ventaja de que establece de forma muy directa la equivalencia del orden singular en el espacio de los impulsos con aquel calculado en el espacio real.

### 3.5.1. Distribución causal con orden singular negativo

La Eq. (3.81) y el teorema de la convolución establecen que si el orden singular de la distribución causal es negativo entonces la distribución retardada es:

$$\hat{r}(p) = (2\pi)^{-m/2} \hat{\Theta} * \hat{d}(p) = (2\pi)^{-m/2} \int d^m q \hat{\Theta}_v(q) \hat{d}(p - q) \quad . \quad (3.92)$$

Estamos usando aquí la notación  $\Theta_v(x) \equiv \Theta(v \cdot x)$ . Comencemos por calcular la transformada de Fourier de la función de Heaviside; en notación simplificada, sea la función  $\Theta(v_1 x + v_2 y + \dots + v_l z)$ , con  $l$  variables  $x, y, \dots, z$ . Por definición ella es:

$$\hat{\Theta}_v(p; q; \dots; r) = (2\pi)^{-l/2} \int dx dy \dots dz e^{ipx + iqy + \dots + irz} \Theta(v_1 x + v_2 y + \dots + v_l z) \quad . \quad (3.93)$$

Hagamos el cambio de variable  $w = v_1 x + v_2 y + \dots + v_l z$  en substitución de la variable  $x$ . El determinante jacobiano de esta transformación es  $1/v_1$  –recordamos que  $v_1 > 0$  porque el vector  $v$  es del tipo-tiempo:  $v \in \Gamma^+ \setminus \partial\Gamma^+$ ; por lo tanto:

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_v(p; q; \dots; r) &= (2\pi)^{-l/2} \frac{1}{v_1} \int dw dy \dots dz e^{ipw/v_1 + i(q - pv_2/v_1)y + \dots + i(r - pv_l/v_1)z} \Theta(w) \\ &= (2\pi)^{l/2} \frac{1}{2\pi v_1} \delta\left(q - \frac{v_2}{v_1} p\right) \dots \delta\left(r - \frac{v_l}{v_1} p\right) \int dw e^{ipw/v_1} \Theta(w) \quad . \end{aligned} \quad (3.94)$$

El problema ha sido reducido al cálculo de la transformada de Fourier de la función de Heaviside uni-dimensional. Es bien conocido que ella no existe *stricto sensu*. No obstante, como  $\Theta(w) = 0$  para  $w < 0$ , el teorema de Titchmarsh [59] indica que su

transformada puede ser definida por el límite siguiente:

$$\begin{aligned}
\hat{\Theta}(p) &:= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \hat{\Theta}(p + i\epsilon) \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dw e^{i(p+i\epsilon)w} \Theta(w) \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (2\pi)^{-1/2} \left. \frac{e^{i(p+i\epsilon)x}}{i(p+i\epsilon)} \right|_0^{+\infty} \\
&= \frac{(2\pi)^{-1/2} i}{p + i0^+} .
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Con las Ecs. (3.94) y (3.95) y regresando a la notación de multi-índices escribimos el resultado que buscábamos:

$$\begin{aligned}
\hat{\Theta}_v(q) &= (2\pi)^{m/2} \frac{i}{2\pi} \frac{1}{q_{10} + iv_{10}0^+} \\
&\quad \times \delta\left(\mathbf{q}_1 - \frac{\mathbf{v}_1}{v_{10}} q_{10}\right) \delta\left(q_2 - \frac{v_2}{v_{10}} q_{10}\right) \cdots \delta\left(q_{n-1} - \frac{v_{n-1}}{v_{10}} q_{10}\right) .
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Substituyendo este resultado en la Ec. (3.92) e integrando en las variables contenidas en las distribuciones delta de Dirac –llamamos  $k$  lo que otrora  $q_{10}$ –:

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{k + iv_{10}0^+} \hat{d}\left(\left(p_{10} - k; \mathbf{p}_1 - \frac{\mathbf{v}_1}{v_{10}} k\right); p_2 - \frac{v_2}{v_{10}} k; \cdots; p_{n-1} - \frac{v_{n-1}}{v_{10}} k\right) . \tag{3.97}$$

Cuando sea  $p_{10} \neq 0$  podemos introducir la variable  $t = 1 - k/p_{10}$ , en función de la cual la distribución retardada adopta la forma:

$$\begin{aligned}
\hat{r}(p) &= \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(p_{10}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1 - t + i(v_{10}/p_{10})0^+} \\
&\quad \times \hat{d}\left(\left(tp_{10}; \mathbf{p}_1 - \frac{\mathbf{v}_1}{v_{10}} p_{10}(1 - t)\right); p_2 - \frac{v_2}{v_{10}} p_{10}(1 - t); \cdots; p_{n-1} - \frac{v_{n-1}}{v_{10}} p_{10}(1 - t)\right) .
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Una elección posible, válida para cualquier impulso  $p$ , es:  $v_j = (1; \mathbf{0})$ , con la cual:

$$\begin{aligned} \hat{r}(p) &= \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(p_{10}) \int \frac{dt}{1-t+ip_{10}0^+} \\ &\quad \times \hat{d}((tp_{10}; \mathbf{p}_1); (p_{20} - p_{10}(1-t); \mathbf{p}_2); \cdots; (p_{(n-1)0} - p_{10}(1-t); \mathbf{p}_{n-1})) \quad . \end{aligned} \quad (3.99)$$

Una simplificación importante puede obtenerse cuando  $p \in \Gamma^+ \setminus \partial\Gamma^+$  o  $p \in \Gamma^- \setminus \partial\Gamma^-$ , pues en ese caso es posible elegir  $v = \lambda p$ , con  $\lambda > 0$  en el primer caso y  $\lambda < 0$  en el segundo; por ejemplo, es posible decir que sea  $\lambda = \operatorname{sgn}(p_{10})$ . La Ec. (3.98) se reduce entonces a:

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \lambda \int \frac{dt \hat{d}(tp)}{1-t+i\lambda 0^+} \quad . \quad (3.100)$$

Por supuesto, ambas fórmulas se equivalen, pues la distribución retardada obtenida es independiente del vector  $v$  por construcción. En las aplicaciones usaremos la última forma, y los valores de  $\hat{r}(p)$  para impulsos  $p$  del tipo-espacio o del tipo-luz son encontrados por continuación analítica [60].

### 3.5.2. Distribución causal con orden singular no-negativo

Estudiemos ahora la distribución causal con orden singular no-negativo. En el espacio de los impulsos ella tiene la expresión encontrada por transformación de Fourier de la Ec. (3.90):

$$\begin{aligned} \hat{r}_w(p) &= (2\pi)^{-m/2} \int d^m q \hat{\Theta}_v(q) \hat{d}(p-q) \\ &\quad - (2\pi)^{-m/2} \sum_{|b|=0}^{|w|} \int d^m y \Theta_v(y) d(y) w(y) \frac{(-y)^b}{b!} (-ip)^b \quad . \end{aligned} \quad (3.101)$$

Escribimos a continuación:

$$\Theta_v(y) = (2\pi)^{-m/2} \int d^m q e^{-iqy} \hat{\Theta}_v(q) \quad ; \quad (3.102)$$

$$(-y)^b d(y) = (2\pi)^{-m/2} \int d^m k e^{-iky} (iD_k)^b \hat{d}(k) \quad ; \quad (3.103)$$

$$w(y) = (2\pi)^{-m/2} \int d^m q' e^{-iq'y} \hat{w}(q') \quad . \quad (3.104)$$

Siendo así:

$$\begin{aligned} & \int d^m y \Theta_v(y) (-y)^b d(y) w(y) \\ &= (2\pi)^{-3m/2} \int d^m y d^m q d^m k d^m q' e^{-i(q+k+q')y} \hat{\Theta}_v(q) (iD_k)^b \hat{d}(k) \hat{w}(q') \\ &= (2\pi)^{-m/2} \int d^m q d^m k \hat{\Theta}_v(q) (iD_k)^b \hat{d}(k) \check{w}(q+k) \\ &= (2\pi)^{-m/2} \int d^m q d^m p' \hat{\Theta}_v(q) (iD_{p'})^b \hat{d}(p'-q) \check{w}(p') \quad . \end{aligned} \quad (3.105)$$

La substitución de la Ec. (3.105) en la Ec. (3.101) lleva a la solución:

$$\begin{aligned} \hat{r}_w(p) &= (2\pi)^{-m/2} \int d^m q \hat{\Theta}_v(q) \left\{ \hat{d}(p-q) \right. \\ &\quad \left. - (2\pi)^{-m/2} \sum_{|b|=0}^{[\omega]} \frac{p^b}{b!} \int d^m p' \left( D_{p'}^b \hat{d}(p'-q) \right) \check{w}(p') \right\} \quad . \end{aligned} \quad (3.106)$$

Esta es la solución al problema de división, en la que, no embargante, se echa de ver, lo mismo que en el espacio real, una dependencia explícita con la función auxiliar  $w$ . Es posible simplificar esta dependencia del modo siguiente: Supongamos que se conocen las primeras  $[\omega]$  derivadas de la distribución retardada  $\hat{r}_w$  en un determinado valor del impulso  $k$ , que de ahora en adelante llamaremos «impulso de normalización».

Estas derivadas son –ver la Ec. (3.106)–:

$$D^c \hat{r}_w(k) = (2\pi)^{-m/2} \int d^m q \hat{\Theta}_v(q) \left\{ D^c \hat{d}(k - q) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{b=c}^{|\omega|} \frac{k^{b-c}}{(b-c)!} \int d^m p' \left( D_{p'}^b \hat{d}(p' - q) \right) \check{w}(p') \right\} . \quad (3.107)$$

En la extensión de la sumatoria rige la siguiente definición de las relaciones de orden « $\leq$ » y « $>$ » entre multi-índices:

$$c \leq b :\Leftrightarrow \forall i : c_i \leq b_i \quad ; \quad c > b :\Leftrightarrow \exists i : c_i > b_i \quad . \quad (3.108)$$

Entonces:

$$\sum_{|c|=0}^{|\omega|} \frac{(p-k)^c}{c!} D^c \hat{r}_w(k) = (2\pi)^{-m/2} \int d^m q \hat{\Theta}_v(q) \left\{ \sum_{|c|=0}^{|\omega|} \frac{(p-k)^c}{c!} D^c \hat{d}(k-p) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{|b|=0}^{|\omega|} \frac{p^b}{b!} \int d^m p' \left( D_{p'}^b \hat{d}(p' - q) \right) \check{w}(p') \right\} . \quad (3.109)$$

Como podemos ver, la dependencia con la función auxiliar en las Ecs. (3.106) y (3.109) es la misma, de lo cual se sigue que:

$$\hat{r}_w(p) = (2\pi)^{-m/2} \int d^m q \hat{\Theta}_v(q) \left\{ \hat{d}(p - q) - \sum_{|c|=0}^{|\omega|} \frac{(p-k)^c}{c!} D^c \hat{d}(k - q) \right\} + \sum_{|c|=0}^{|\omega|} \frac{(p-k)^c}{c!} D^c \hat{r}_w(k) \quad . \quad (3.110)$$

La segunda línea de la Ec. (3.110) es un polinomio de grado  $|\omega|$  del impulso  $p$ , cuyos coeficientes son determinados tanto por el impulso de normalización cuanto por los valores de  $D^c \hat{r}_w(k)$ ; en efecto, dicho polinomio es:

$$\sum_{|a|=0}^{|\omega|} \alpha_a p^a \quad ; \quad \alpha_a = \sum_{c=a}^{|\omega|} \frac{D^c \hat{r}_w(k) (-k)^{c-a}}{a!(c-a)!} \quad . \quad (3.111)$$

En una palabra, el conocimiento acerca de la función auxiliar  $w$  está codificado en los coeficientes  $\alpha_a$ , que determinan unívocamente la extensión de la distribución retardada al espacio de Schwartz completo. Reconocemos así que la definición exacta de la distribución de transición del orden singular no-negativo  $\omega$  requiere del conocimiento de  $[\omega]$  «condiciones de normalización»; esta observación nos lleva directamente al problema de la normalizabilidad de una dada teoría, cuya clasificación general exponemos en el capítulo 7. También de lo expuesto se implica que, si la división se realizara utilizando un orden singular no-mínimo, entonces se requeriría un número mayor de condiciones de normalización, que de otro modo serían predicciones de la teoría; en otras palabras, aún cuando puede obtenerse una solución bien definida al problema de división utilizando cualquier valor  $\omega \geq \omega[d]$ , la solución adquiere su máximo poder predictivo cuando se usa exactamente  $\omega = \omega[d]$ .

Regresando a la Ec. (3.110), recibe el nombre de «solución normalizada en el impulso  $k$ » la distribución:

$$\hat{r}_k^0(p) = (2\pi)^{-m/2} \int d^m q \hat{\Theta}_v(q) \left\{ \hat{d}(p-q) - \sum_{|c|=0}^{[\omega]} \frac{(p-k)^c}{c!} D^c \hat{d}(k-q) \right\} \quad , \quad (3.112)$$

de la cual toda distribución retardada con impulso de normalización  $k$  difiere apenas por el polinomio antes examinado –note el lector el cambio en la denominación de la distribución retardada, que hace referencia a los coeficientes  $\alpha$  y su impulso de normalización más bien que a la función  $w$ –:

$$\hat{r}_k^\alpha(p) = \hat{r}_k^0(p) + \sum_{|a|=0}^{[\omega]} \alpha_a p^a \quad . \quad (3.113)$$

Usando la expresión de la transformada de Fourier de la función de Heaviside dada en

la Ec. (3.96), obtenemos para  $p$  tipo-tiempo:

$$\hat{r}_k^0(p) = \frac{i}{2\pi} \lambda \int \frac{dt}{1-t+i\lambda 0^+} \left\{ \hat{d}(tp) - \sum_{|c|=0}^{[\omega]} \frac{(p-k)^c}{c!} D^c \hat{d}(k-(1-t)p) \right\}, \quad (3.114)$$

en que se eligió  $v = \lambda p$ ,  $\lambda = \text{sgn}(p_{10})$  y se hizo el cambio de variable  $t = 1 - q_{10}/p_{10}$ . ¿Cómo no?, la elección del impulso de normalización es arbitraria: Cualquier impulso en el que  $\hat{r}_k^0$  exista puede ser utilizado, si se conocen las condiciones de normalización correspondientes. Incluso, es posible calcular la solución normalizada en el impulso  $k$  cuando las condiciones de normalización son conocidas en el  $k'$ : Esto se sigue del hecho de que la Ec. (3.110) es válida para todo valor de  $k$ . En efecto, supongamos que la distribución retardada  $\hat{r}_w$  puede escribirse como  $\hat{r}_k^\alpha$ . Que el impulso de normalización sea  $k'$  significa que son conocidas las derivadas  $D^b \hat{r}_w(k') = D^b \hat{r}_k^\alpha(k')$ , para  $|b| \leq [\omega]$ . Derivando la Ec. (3.113) y evaluando en  $k'$ , obtenemos que los coeficientes  $\alpha_a$  son solución del sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\sum_{a=b}^{|\alpha|=[\omega]} \frac{a!}{(a-b)!} k'^{a-b} \alpha_a = D^b \hat{r}_k^\alpha(k') - D^b \hat{r}_k^0(k') \quad . \quad (3.115)$$

El estudio de las propiedades de las soluciones frente a cambios de normalización nos lleva directamente a la técnica del grupo de renormalización. Este programa, sin embargo, no será abordado en la presente tesis (véase las Perspectivas en el Cap. 8).

La simplificación máxima se obtiene considerando la «solución central»,  $\hat{r}_0^0(p)$ , siempre que esta exista. En el Ap. B se prueba que la solución central puede ser escrita como la siguiente relación de dispersión:

$$\hat{r}_0^0(p) = \frac{i}{2\pi} \lambda \int \frac{dt \hat{d}(tp)}{(t-i\lambda 0^+)^{[\omega]+1} (1-t+i\lambda 0^+)} \quad . \quad (3.116)$$

### 3.6. Unitaridad del operador de dispersión

Consideremos ahora el axioma de unitaridad del operador de dispersión, enunciado en la Ec. (3.3) y cuya expresión perturbativa es la de la Ec. (3.22), siendo esta última la que debemos garantizar, orden a orden, en la filosofía de la TPC.

**Teorema:** *Sea  $T_1(x)$  la distribución de un punto de una teoría de interacción. Si  $T_1$  satisface a la condición de unitaridad perturbativa, Ec. (3.22), entonces las distribuciones de  $n$  puntos pueden ser construidas, por el procedimiento inductivo de la TPC y por medio de la fijación apropiada de los términos de normalización, de tal forma que satisfagan a la misma condición de unitaridad.  $\square$*

*Demostración:* La prueba se basa en el principio de inducción matemática completa. Como el primer paso del procedimiento inductivo es la hipótesis, supongamos que para todo  $m \leq n - 1$  se cumple:

$$\tilde{T}_m = T_m^\dagger \quad . \quad (3.117)$$

Queremos probar que la misma tesis es válida para  $n$ . Denotaremos los conjuntos  $X = \{x_1; \dots; x_n\}$  e  $Y = \{x_1; \dots; x_{n-1}\}$ . La distribución avanzada del orden  $n$  –definida en la Ec. (3.46)– también puede escribirse como:

$$\begin{aligned} A_n(Y; x_n) &= \sum_{\substack{I \cup J = X \\ I \cap J = \emptyset \\ x_n \in I}} \tilde{T}(I)T(J) = \sum_{\substack{I \cup J = X \\ I \cap J = \emptyset}} \tilde{T}(I)T(J) - \sum_{\substack{I \cup J = X \\ I \cap J = \emptyset \\ x_n \in I}} \tilde{T}(I)T(J) \\ &= - \sum_{\substack{I \cup J = X \\ I \cap J = \emptyset}} \tilde{T}(I)T(J) = -\tilde{T}_n(X) - \sum_{\substack{I \cup J = X \\ I \cap J = \emptyset \\ J \neq \emptyset \\ x_n \in I}} \tilde{T}(I)T(J) \quad . \quad (3.118) \end{aligned}$$

Explicuemos: El paso de la segunda igualdad a la tercera es justificado por la Ec. (3.21), y la separación del término  $\tilde{T}_n(X)$  en la segunda igualdad de la segunda línea, por la Ec. (3.18). En el último término de la Ec. (3.118) solo aparecen distribuciones de

menos de  $n$  puntos, sobre las cuales la hipótesis de la Ec. (3.117) es válida; aplicando ella y comparando con la Ec. (3.51) vemos que la citada suma es igual al adjunto de la distribución subsidiaria avanzada,  $A'_n(Y; x_n)^\dagger$ . Por lo tanto, hemos obtenido que:

$$A_n(Y; x_n) = -\tilde{T}_n(X) - A'_n(Y; x_n)^\dagger \quad . \quad (3.119)$$

Análogamente obtenemos para la distribución retardada:

$$R_n(Y; x_n) = -\tilde{T}_n(X) - R'_n(Y; x_n)^\dagger \quad . \quad (3.120)$$

Estas dos ecuaciones, complementadas con las Ecs. (3.50) que repetimos aquí por claridad:

$$\begin{aligned} A_n(Y; x_n) &= T_n(X) + A'_n(Y; x_n) \quad , \\ R_n(Y; x_n) &= T_n(X) + R'_n(Y; x_n) \quad , \end{aligned} \quad (3.121)$$

nos permiten escribir:

$$\begin{aligned} D_n(Y; x_n) &= R_n(Y; x_n) - A_n(Y; x_n) = R'_n(Y; x_n) - A'_n(Y; x_n) \\ &= -R'_n(Y; x_n)^\dagger + A'_n(Y; x_n)^\dagger = -D^\dagger \quad , \end{aligned} \quad (3.122)$$

es decir: La distribución causal es anti-hermitiana. Esta propiedad puede mantenerse en el proceso de división: Sea  $(R_{n,1}; A_{n,1})$  una solución al problema de división. Sus partes anti-hermitianas,

$$R_{n,2} := \frac{1}{2}(R_{n,1} - R_{n,1}^\dagger) = -R_{n,2} \quad \text{y} \quad A_{n,2} := \frac{1}{2}(A_{n,1} - A_{n,1}^\dagger) = -A_{n,2} \quad , \quad (3.123)$$

constituyen también una solución, pues debido a la Ec. (3.122):

$$R_{n,2} - A_{n,2} = \frac{1}{2}(R_{n,1} - A_{n,1}) - \frac{1}{2}(R_{n,1}^\dagger - A_{n,1}^\dagger) = \frac{1}{2}D_n - \frac{1}{2}D_n^\dagger = D_n \quad . \quad (3.124)$$

Luego, si usamos la solución anti-hermitiana, de la Ec. (3.119) se sigue que:

$$\tilde{T}_n(X)^\dagger = -A_{n,2}(Y; x_n)^\dagger - A'_n(Y; x_n) = A_{n,2}(Y; x_n) - A'_n(Y; x_n) = T_n(X) \quad , \quad (3.125)$$

que es la tesis que estábamos probando. ■

Una observación: Hemos colocado ya de inicio que la distribución  $T_n$  es simétrica –tiene argumento  $X-$ . En lo general, como ya hemos dicho, esto no es cierto; el teorema nos asegura que  $T_n(x_1; \dots; x_n)$  puede ser construido unitario; el proceso de simetrización aplicado después no destruye esta propiedad.

Otra observación: La Ec. (3.124) nos informa de lo siguiente: Cuando el orden singular es negativo, la solución obtenida debe ser automáticamente la solución hermitiana, pues esta es única. Cuando el orden singular es no-negativo la solución no es única, pues contiene términos de normalización; la Ec. (3.124) nos dice que estos pueden ser elegidos de forma que la solución sea anti-hermitiana. Luego, el axioma de unitariedad es una condición física que impone ciertas condiciones de normalización.

## 3.7. Factorización de los polinomios

### en la distribución causal

Cerramos este capítulo con un resultado que simplifica notoriamente la aplicación práctica de las fórmulas de división obtenidas.

**Teorema:** *Sea  $\hat{d}(p)$  una distribución causal. Si  $\hat{d}(p)$  puede ser escrito como  $\hat{d}(p) = p^a \hat{d}_1(p)$ , para algún multi-índice  $a$ , entonces  $\hat{r}(p) = p^a \hat{r}_1(p)$ , con  $\hat{r}_1(p)$  la parte retardada de  $\hat{d}_1(p)$ , es una parte retardada de  $\hat{d}$ . □*

*Demostración:* Realizaremos la prueba de este Teorema dividiéndolo en partes, según los valores de los órdenes singulares  $\omega$  y  $\omega_1$  de las distribuciones  $\hat{d}$  y  $\hat{d}_1$ , respectivamente. De la Ec. (3.91) se sigue que ellos están relacionados por la fórmula:  $\omega = \omega_1 + |a|$ , y así se cumple siempre que  $\omega > \omega_1$ , lo que limita el número de ca-

tos a tres. Consideremos además que  $p \in \Gamma^\pm \setminus \partial\Gamma^\pm$ ; el resultado puede entonces ser generalizado para impulsos  $p$  cualesquiera por continuación analítica.

Caso 1: El caso más simple es aquel en el que son  $\omega > 0$  y  $\omega_1 \geq -1$ . Como estamos considerando un impulso del tipo-tiempo, es dada por la Ec. (3.116). Tendremos que:

$$\begin{aligned}\hat{r}_0^0(p) &= \frac{i}{2\pi} \lambda \int \frac{dt t^{|a|} p^a \hat{d}_1(tp)}{(t - i\lambda 0^+)^{|\omega_1| + |a| + 1} (1 - t + i\lambda 0^+)} \\ &= p^a \frac{i}{2\pi} \lambda \int \frac{dt \hat{d}_1(tp)}{(t - i\lambda 0^+)^{|\omega_1| + 1} (1 - t + i\lambda 0^+)} \\ &= p^a \hat{r}_1(p) \quad .\end{aligned}\tag{3.126}$$

En este caso, vemos, la relación se establece incluso entre las respectivas soluciones centrales (o única, cuando  $\omega_1 = -1$ ) de las distribuciones  $\hat{d}$  y  $\hat{d}_1$ .

Caso 2: El siguiente caso que analizaremos será aquel en el que son  $\omega < 0$  y (en consecuencia)  $\omega_1 < 0$ . La Ec. (3.100) dice entonces que:

$$\begin{aligned}\hat{r}(p) &= \frac{i}{2\pi} \lambda \int \frac{dt (tp)^a \hat{d}_1(tp)}{1 - t + i\lambda 0^+} \\ &= p^a \frac{i}{2\pi} \lambda \int \frac{dt t^{|a|} \hat{d}_1(tp)}{1 - t + i\lambda 0^+} \quad .\end{aligned}\tag{3.127}$$

Realicemos una rotación en  $\mathbb{R}^m$  de tal suerte que el impulso  $p$  adopte el valor  $p = ((p_0; \mathbf{0}); 0; \dots; 0)$ . Por otra parte, usando de la fórmula del binomio de Newton, podemos escribir –note que, debido a la reducción recién hecha, pasaremos a escribir los multi-índices como sendos números–:

$$\begin{aligned}t^a &= (1 - (1 - t))^a \\ &= a! \sum_{b=0}^a \frac{(-1)^b (1 - t)^b}{b!(a - b)!} \quad .\end{aligned}$$

Separando el sumando con  $b = 0$ , que es igual a la unidad –y cuyo reemplazo en la Ec. (3.127) nos permite identificar la distribución  $\hat{r}_1(p_0)$ –, en el resto de términos habrá

siempre un factor  $(1 - t)$  que se cancelará con el denominador en la Ec. (3.127). Así tendremos que:

$$\hat{r}(p_0) = p_0^a \hat{r}_1(p_0) + p_0^a \sum_{b=1}^a \frac{a!(-1)^b}{b!(a-b)!} \frac{i}{2\pi} \lambda \int dt \hat{d}_1(tp_0) (1-t)^{b-1} \quad . \quad (3.128)$$

Realizando la substitución  $q = tp_0$  y renombrando el índice  $b$  de tal forma que el sumatorio en él comience en  $b = 0$ :

$$\hat{r}(p_0) = p_0^a \hat{r}_1(p_0) + p_0^{a-1} \sum_{b=0}^{a-1} \frac{a!(-1)^{b+1}}{(b+1)!(a-b-1)!} \frac{i}{2\pi} \int dq \hat{d}_1(q) \left(1 - \frac{q}{p_0}\right)^b \quad . \quad (3.129)$$

Finalmente, aplicando otra vez la fórmula del binomio de Newton, ahora sobre  $(1 - q/p_0)^b$ , obtenemos el resultado final:

$$\hat{r}(p_0) = p_0^a \hat{r}_1(p_0) + \sum_{b=0}^{a-1} \sum_{c=0}^b \left( \frac{a!(-1)^{b+c+1}}{(b+1)(a-b-1)!c!(b-c)!} \frac{i}{2\pi} \int dq \hat{d}_1(q) q^c \right) p_0^{a-c-1} \quad . \quad (3.130)$$

Como las expresiones interparentéticas independen de  $p_0$ , estos términos adicionales constituyen un polinomio en  $p_0$  de coeficientes constantes, y por lo tanto el sumatorio completo tiene soporte puntual (en el espacio real). Luego, la diferencia entre  $\hat{r}(p_0)$  y  $p_0^a \hat{r}_1(p_0)$  es una distribución de soporte puntual, que puede ser modificada por normalización. Se sigue la tesis del teorema.

Caso 3: El último caso es aquel en el que  $\omega \geq 0$  y  $\omega_1 < -1$ . Aquí el procedimiento es análogo al caso 2, teniendo en cuenta que el exponente de  $t$  en el integrando se reduce debido al denominador en la fórmula para  $\omega \geq 0$ . Explícitamente, en lugar de la Ec. (3.127) tendremos –una vez hecha la rotación en  $\mathbb{R}^m$ –:

$$\hat{r}(p_0) = p_0^a \frac{i}{2\pi} \lambda \int \frac{dt t^\sigma \hat{d}_1(tp_0)}{1-t+i\lambda 0^+} \quad , \quad \sigma := -([\omega_1] + 1) > 0 \quad . \quad (3.131)$$

Separando un factor  $p_0^\sigma$ :

$$\hat{r}(p_0) = p_0^{a-\sigma} \left[ p_0^\sigma \frac{i}{2\pi} \lambda \int \frac{dt t^\sigma \hat{d}_1(tp_0)}{1-t+i\lambda 0^+} \right] . \quad (3.132)$$

Ahora el procedimiento del caso 2 puede ser aplicado idénticamente al factor entre corchetes. El resultado es:

$$\hat{r}(p_0) = p_0^a \hat{r}_1(p_0) + \sum_{b=0}^{\sigma-1} \sum_{c=0}^b \left( \frac{\sigma! (-1)^{b+c+1}}{(b+1)(\sigma-b-1)! c! (b-c)!} \frac{i}{2\pi} \int dq \hat{d}_1(q) q^c \right) p_0^{a-c-1} . \quad (3.133)$$

Con las mismas conclusiones que en el caso 2, esto concluye la prueba. ■

Es ya evidente que el resultado recién encontrado permite factorizar ya no solamente monomios en  $p$ , sino también polinomios, pues las relaciones de dispersión son operadores lineales en la distribución causal.

# Capítulo 4

## Interacción de Yukawa

### 4.1. Modelo fenomenológico de Yukawa

El modelo de Yukawa nació para la descripción entre los mesones y los nucleones, considerados estos como partículas «elementales»<sup>1</sup>. El interés por esta interacción, desde luego, se debe a que ella mantiene a los protones y neutrones unidos en el núcleo atómico. Diversos fragmentos de la historia del desarrollo de esta teoría pueden encontrarse, por ejemplo, en las Refs. [65–68]. En los párrafos siguientes queremos indicar las principales ideas y hechos de la experiencia que permitieron su construcción.

Es bien sabido que fue Heisenberg [69] quien propuso considerar a los protones y neutrones como dos estados diferentes de la misma partícula, denominada «nucleón», diferenciando ellos por una nueva propiedad interna a la que se llamó «iso-espín». El estudio de la interacción entre estas partículas llevó, por ejemplo, al desarrollo de la teoría de Fermi de la desintegración- $\beta$  y la inclusión del neutrino [70]. Empero, pronto se vió que la energía de interacción que podría obtenerse con esta teoría no es suficiente para explicar la unidad del núcleo atómico [71]. Frente a esta situación, Yukawa [72] propuso una modificación de la teoría de Heisenberg y Fermi de la forma siguiente: Además de los procesos de emisión de partículas ligeras como en la teoría de Fermi, la transmutación de los nucleones puede también generar la emisión de una partícula masiva. Si la probabilidad de ocurrencia de estos últimos procesos fuera mucho mayor que el las interacciones de Fermi, entonces la energía de ligadura sería capaz de mantener a los nucleones unidos, al tiempo que la probabilidad de emisión de las partículas

---

<sup>1</sup>Y que, de facto, lo son para este modelo, como se probará en el Cap. 6.

ligeras no sería esencialmente afectada. En relación con esto, Yukawa observó que un potencial de corto alcance, como aquel capaz de mantener a los nucleones unidos, esto es, de la forma

$$U \sim \frac{e^{-\varkappa r}}{r} \quad , \quad (4.1)$$

puede obtenerse como la solución estática esféricamente simétrica de la ecuación  $(\square + \varkappa^2)U = 0$ , de cuya comparación con la experiencia (particularmente, de los valores del defecto de masa del deuterón) consiguió, además, estimar el valor del parámetro  $\varkappa \sim 5 \times 10^{-12} \text{ cm}^{-1}$ . Como la ecuación del potencial de Yukawa se identifica con la ecuación de Klein-Gordon-Fock con  $\varkappa = mc/\hbar$ , resultó natural, en la teoría cuantificada, asociar a la mediación de semejante potencial la existencia de una partícula, nombrada por Yukawa «*U-quantum*» o «*heavy quantum*», cuya masa sería aproximadamente docientas veces la masa del electrón. Yukawa propuso así que la interacción inter-nucleónica se debiera a los procesos virtuales  $N \leftrightarrow N' + \pi$ , con  $N$ ,  $N'$  describiendo a los nucleones y  $\pi$  la partícula de Yukawa. El acoplamiento de tal interacción propuesto por Yukawa fue:

$$H_{\text{int}} \sim \bar{N}N\pi \quad . \quad (4.2)$$

Por supuesto, la conservación del momento del impulso y el carácter fermiónico de los nucleones exige que el *U-quantum* exhiba la estadística bosónica, pero no había aún motivos para decidir cuál espín entero él debía poseer. El propio Yukawa atribuye a la mera simplicidad su adopción del campo escalar.

El siguiente paso en el desarrollo del modelo provino de los experimentos de Tuve, Heydenburg y Hafstad [73], quienes realizaron procesos de dispersión de protones por protones, probando que la interacción entre ellos es atractiva y de igual intensidad que la presente entre protones y neutrones. Estos resultados llevaron a Kemmer [74] a establecer la independencia de la carga eléctrica de las interacciones nucleares en 1938. Pero no solamente: En la teoría original de Yukawa solo había dos partículas mediadoras, cada una de carga eléctrica  $\pm e$ , con  $-e$  la del electrón, que obraban en la

transmutación de los estados nucleónicos; la interacción de los nucleones de la misma especie, entonces, ocurría solo al segundo orden (por doble proceso de transmutación), con consecuencias notables en la intensidad de las mismas [75]. A similares resultados llegó Wick [76] al estimar el alcance de la interacción valiéndose de las desigualdades de Heisenberg: si hubiera solamente partículas de Yukawa cargadas, entonces el alcance del potencial entre dos nucleones iguales sería alrededor de la mitad del que se presenta entre los nucleones diferentes. Tales divergencias del modelo original con los datos del laboratorio llevaron a Kemmer a postular la existencia de una partícula de Yukawa adicional con carga eléctrica nula, con la cual la hipótesis de la independencia de la carga eléctrica es completamente satisfecha. A la teoría con tres partículas mediadoras de la interacción nuclear se dio el nombre de «teoría simétrica».

Como a la sazón no había todavía certeza en relación al tipo de partícula que serían los portadores de la interacción nuclear, también Kemmer [77] estableció la posibilidad de que las partículas de Yukawa fueran pseudo-escalares, al tiempo que analizó la posibilidad de que fueran vectoriales, pseudo-vectoriales, e incluso tensoriales antisimétricas del rango dos. Curiosamente, Kemmer eligió a la teoría vectorial como la más apropiada para dar cuenta de la interacción nuclear al comparar sus predicciones teóricas con la evidencia experimental relacionada al estado basal del deuterón, y así también Yukawa, Sakata y Taketani [78] desarrollaron la idea. En este último artículo se estudió, además, el problema del momento magnético del protón y el del neutrón, cuyos valores experimentales distan en buena medida del predicho por la ecuación de Dirac. Este problema ya había sido levantado por Wick [79], quien lo abordó con la teoría de la desintegración beta de Fermi; su resultado, no obstante, no fue positivo, pues las correcciones que obtuvo eran demasiado pequeñas para explicar los valores observados. Este mismo problema fue abordado desde la teoría de Yukawa por Taketani [80], Bhabha [81] y por Fröhlich y Heitler [82]; estos últimos afirmaron que los resultados experimentales pueden explicarse con una partícula con masa del orden de magnitud de cien veces la masa del electrón si las partículas de Yukawa tienen espín

cero. Esta fue una primera señal de que la dirección tomada al construir una teoría vectorial no era la correcta.

La teoría vectorial luego presentó otro problema: Según ella, las fuerzas no centrales entre el protón y el neutrón serían tales que el deuterón debería tener un momento cuadrupolar eléctrico positivo. Las mediciones experimentales, por otra parte, mostraban que él es negativo. Crucial en este sentido fue la contribución de Rarita y Schwinger [83], quienes en un detallado estudio del deuterón, realizado en 1941, mostraron que el modelo pseudo-escalar preveía los signos correctos tanto para las fuerzas nucleares cuanto para el momento cuadrupolar eléctrico del deuterón.

La teoría, así, ya tenía la capacidad de describir adecuadamente los fenómenos conocidos. Cuanto a la observación de la partícula de Yukawa, las principales búsquedas se direccionaban hacia el estudio de los rayos cósmicos<sup>2</sup>, pues se esperaba que las partículas de Yukawa fueran parte de la componente dura de su cascada secundaria. Las observaciones, con todo, fueron desalentadoras, pues los valores medidos de ciertas cantidades como la vida media y secciones de colisión no se correspondían con las estimaciones teóricas. Esto suscitó el apareamiento de la llamada «hipótesis de los dos mesones» [84], según la cual los «mesones»<sup>3</sup> presentes en la componente dura de los rayos cósmicos al nivel del mar no están directamente conectados con las fuerzas nucleares, sino que son producidas en el decaimiento de mesones más pesados que, ellos sí, son los que interactúan fuertemente con los nucleones.

La hipótesis de los dos mesones fue comprobada en 1947 por el equipo experimental liderado por Powell [85]. Al año siguiente, Gardner y Lattes [86] produjeron artificialmente los mesones, permitiendo su estudio controlado y confirmando la men-

---

<sup>2</sup>Ellos son partículas de altísima energía, principalmente electrones, protones, partículas alfa y, en menor medida, núcleos de otros átomos, que, originándose en el Sol, en otras partes de la galaxia e incluso fuera de ella, producen una cascada de partículas secundarias al impactar contra la atmósfera terrestre. Los rayos cósmicos que llegan a la superficie del planeta se dividen en dos componentes: La componente suave, incapaz de atravesar materiales densos, y la componente dura, capaz de hacerlo.

<sup>3</sup>En aquel tiempo, nombre que se daba a las partículas con masa intermedia entre aquella del electrón y la del protón. Diferente es la denominación actual, que asigna este nombre a las partículas compuestas por un cuark y un anti-cuark de color y carga contrarias.

cionada hipótesis. El nuevo esquema fue entonces incorporado [87], y en el tiempo que corre llamamos leptón  $\mu$ , de espín  $1/2$  y carga eléctrica  $-1$ , al mesón más ligero detectado en la componente dura de los rayos cósmicos secundarios, mientras que a las partículas de Yukawa, de espín cero y carácter pseudo-escalar, se dio el nombre de «piones»:  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  y  $\pi^0$ .

La teoría de esta forma construida se puede escribir matemáticamente en el formalismo del iso-espín, introducido por Cassen y Condon [88]. Los nucleones son descritos por un doblete de espinores del grupo de las rotaciones en el espacio del iso-espín,  $\Psi$ , mientras que los piones constituyen un triplete del mismo,  $\pi$ . Dichas rotaciones, en el espacio bi-dimensional, son generadas por las matrices de Pauli  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  y  $\tau_3$ . La densidad lagrangiana de interacción invariante frente al grupo de las rotaciones en el espacio del iso-espín es así<sup>4</sup>:

$$\mathcal{L} = ig : \bar{\Psi} \gamma^5 \tau \Psi \cdot \pi : \quad . \quad (4.3)$$

Por simplicidad, en la presente tesis restringiremos la atención al llamado «modelo neutro»:

$$\mathcal{L} = ig : \bar{\psi} \gamma^5 \psi \varphi : \quad , \quad (4.4)$$

con  $\bar{\psi}$  y  $\psi$  espinores de cuatro componentes, y  $\varphi$  un campo pseudo-escalar real de una sola componente. Como ha sido dicho en la Ref. [27], este modelo simplificado mantiene los elementos principales de la teoría más general.

## 4.2. Distribución de transición del primer orden

Si bien ya adelantamos en la Ec. (4.4) cuál será el modelo que estudiaremos, deseamos todavía ofrecer al lector un breve análisis sobre los tipos de términos de inter-

---

<sup>4</sup>Esta es la densidad lagrangiana de interacción que ya había sido escrita por Kemmer en la Ref. [77] (si bien en su forma hamiltoniana), mientras que en la Ref. [74] aún utilizaba la matriz identidad en lugar de la  $\gamma^5$ , asumiendo mesones escalares.

acción que podrían, en principio, constituir la distribución de un punto,  $T_1(x)$ . Evidentemente, ella deberá ser construida respetando las simetrías exhibidas por el operador de dispersión, pues las simetrías de  $T_1(x)$  serán preservadas en los siguientes órdenes mediante una elección adecuada de los términos de normalización. En este sentido, la construcción de  $T_1(x)$  no es diferente de la construcción de la densidad lagrangiana de interacción. Consideremos, pues, un campo fermiónico,  $\psi(x)$ , y un campo neutro de espín cero,  $\varphi(x)$ .

El primer resultado experimental que deseamos incorporar en el modelo es la invariancia frente a transformaciones de paridad. Las leyes de transformación de los campos cuantificados por esta, como por las otras transformaciones discretas, son discutidas en el Ap. D. Haciendo en ellas las elecciones de fases  $\eta_\varphi(P) = \epsilon = \pm 1$  y  $\eta_\psi(P) = i$ , tendremos:

$$\mathbf{U}_P \psi(x') \mathbf{U}_P^{-1} = i\gamma^0 \psi(x), \quad \mathbf{U}_P \bar{\psi}(x') \mathbf{U}_P^{-1} = -i\psi^\dagger(x), \quad \mathbf{U}_P \varphi(x') \mathbf{U}_P^{-1} = \epsilon \varphi(x). \quad (4.5)$$

Aquí,  $\epsilon = +1$  si  $\varphi$  es un campo escalar, y  $\epsilon = -1$  si es pseudo-escalar. De esta forma, los siguientes términos de interacción son posibles en una teoría invariante frente a transformaciones de paridad<sup>5</sup>:

- (1)  $\varphi$  escalar:  $\bar{\psi}\psi\varphi, \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\varphi, \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\varphi\partial_\mu\varphi, \bar{\psi}\psi\varphi^2, \dots$
- (2)  $\varphi$  pseudo-escalar:  $\bar{\psi}\gamma^5\psi\varphi, \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi\partial_\mu\varphi, \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\varphi\partial_\mu\varphi, \dots$

Estamos usando aquí la siguiente definición de la matriz  $\gamma^5$ :

$$\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (4.6)$$

Note el lector que el último término es admisible en ambos casos; claramente, lo mismo ocurre con todos los términos que posean una potencia par del campo bosónico, siendo

<sup>5</sup>Note que, como  $\mathbf{U}_P$  es lineal y unitario, la última igualdad en la Ec. (4.5) implica que  $\partial_\mu\varphi$  es un vector si  $\varphi$  es un campo escalar, y que es un pseudo-vector si es un campo pseudo-escalar.

que entonces el número de derivadas presentes y el de corrientes, vectoriales o axiales, deben equiparar sus efectos.

Consideremos ahora otra simetría observada: La invariancia frente a la conjugación de carga eléctrica. Esta transformación es realizada por el operador lineal y unitario  $\mathbf{U}_C$ , que actúa sobre los operadores de campo según<sup>6</sup>:

$$\mathbf{U}_C \psi(x) \mathbf{U}_C^{-1} = C \bar{\psi}(x)^T, \quad \mathbf{U}_C \bar{\psi}(x) \mathbf{U}_C^{-1} = -\psi(x)^T C^{-1}, \quad \mathbf{U}_C \varphi(x) \mathbf{U}_C^{-1} = \varphi(x). \quad (4.7)$$

En estas ecuaciones,  $C$  es una matriz unitaria ( $C^\dagger C = 1$ ) con las siguientes propiedades:  $C^T = -C$ ,  $C^{-1} \gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T}$  –véase el Ap. D para mayores detalles–. Frente a esta transformación, la corriente vectorial  $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  cambia su signo, mientras que la corriente axial  $\bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi$  se mantiene la misma. Esto reduce las posibilidades anteriores a las siguientes:

- (1)  $\varphi$  escalar:  $\bar{\psi} \psi \varphi$ ,  $\bar{\psi} \psi \varphi^2$ ,  $\dots$
- (2)  $\varphi$  pseudo-escalar:  $\bar{\psi} \gamma^5 \psi \varphi$ ,  $\bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi \partial_\mu \varphi$ ,  $\dots$

Finalmente, se puede verificar que estos términos poseen la invariancia CPT.

Como ya dijimos, estudiaremos la interacción correspondiente a los términos más simples, y por eso escribiremos para el primer término de la interacción:

$$T_1(x) = -i\mathbf{g} : \bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x) : \varphi(x) \quad ; \quad \Gamma = \begin{cases} 1 & ; \text{ si } \varphi \text{ es escalar} \\ i\gamma^5 & ; \text{ si } \varphi \text{ es pseudo-escalar} \end{cases}, \quad (4.8)$$

con  $\mathbf{g}$  la constante de acoplamiento de la teoría y  $:\ :$ , como otrora, denotando al ordenamiento normal. La condición de unitaridad del operador de dispersión al primer orden implica que la constante  $\mathbf{g}$  sea real –razón por la que la unidad imaginaria le fue puesta al frente–.

<sup>6</sup>En referencia al Ap. D, las elecciones de fases son aquí:  $\eta_\varphi(C) = 1 = \eta_\psi(C)$ .

### 4.3. Distribución causal del segundo orden

Como lo hemos establecido en la exposición de la teoría general, la construcción de los siguientes órdenes de la serie perturbativa es inductiva. Para hallar la distribución de dos puntos, debemos construir primero la distribución causal del segundo orden:

$$D_2(x_1; x_2) = R'_2(x_1; x_2) - A'_2(x_1; x_2) \quad , \quad (4.9)$$

con las distribuciones subsidiarias:

$$A'_2(x_1; x_2) = \tilde{T}_1(x_1)T_1(x_2) \quad \text{y} \quad R'_2(x_1; x_2) = T_1(x_2)\tilde{T}_1(x_1) \quad . \quad (4.10)$$

Usando que  $\tilde{T}_1(x) = -T_1(x)$  y la forma explícita de la distribución de un punto [Ec. (4.8)], obtenemos:

$$A'_2(x_1; x_2) = \mathbf{g}^2 : \psi(x_1)\Gamma\psi(x_1) : : \bar{\psi}(x_2)\Gamma\psi(x_2) : \varphi(x_1)\varphi(x_2) \quad ; \quad (4.11)$$

$$R'_2(x_1; x_2) = A'_2(x_2; x_1) \quad . \quad (4.12)$$

Estas distribuciones son escritas en forma normalmente ordenada por la aplicación del teorema de Wick (Ap. C), con el uso de las siguientes contracciones de Wick:

$$\overline{\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)} = -iS_{ab+}(x-y) \quad , \quad \overline{\bar{\psi}_a(x)\psi_b(y)} = -iS_{ba-}(y-x) \quad , \quad (4.13)$$

$$\overline{\varphi(x)\varphi(y)} = -iD_+(x-y) \quad . \quad (4.14)$$

Necesario es tener presente que las distribuciones  $D$  y  $S$  que aparecen en estas ecuaciones están asociadas a las masas  $m_2$  y  $m_1$ , respectivamente. Encontramos que, usando

la coordenada relativa  $y := x_1 - x_2$ :

$$\begin{aligned}
A'_2(x_1; x_2) = & \mathbf{g}^2 \{ : \bar{\psi}(x_1) \Gamma \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \Gamma \psi(x_2) : + i : \bar{\psi}(x_2) \Gamma S_-(-y) \Gamma \psi(x_1) : \\
& - i : \bar{\psi}(x_1) \Gamma S_+(y) \Gamma \psi(x_2) : - \text{Tr} [S_-(-y) \Gamma S_+(y) \Gamma] \} \\
& \times [ : \varphi(x_1) \varphi(x_2) : - i D_+(y) ] \quad , \quad (4.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R'_2(x_1; x_2) = & \mathbf{g}^2 \{ : \bar{\psi}(x_1) \Gamma \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \Gamma \psi(x_2) : + i : \bar{\psi}(x_1) \Gamma S_-(y) \Gamma \psi(x_2) : \\
& - i : \bar{\psi}(x_2) \Gamma S_+(-y) \Gamma \psi(x_1) : - \text{Tr} [S_-(y) \Gamma S_+(-y) \Gamma] \} \\
& \times [ : \varphi(x_1) \varphi(x_2) : - i D_+(-y) ] \quad . \quad (4.16)
\end{aligned}$$

De esta manera, substituyendo los resultados recién obtenidos en la Ec. (4.9), agrupando convenientemente los términos y usando que  $D_+(-y) = -D_-(y)$ , obtenemos la distribución causal del segundo orden:

$$D_2(x_1; x_2) = \left( D_2^{(\text{NN})} + D_2^{(\text{MN})} + D_2^{(\text{M})} + D_2^{(\text{N})} + D_2^{(\text{V})} \right) (x_1; x_2) \quad , \quad (4.17)$$

con:

$$D_2^{(\text{NN})}(x_1; x_2) = i \mathbf{g}^2 : \bar{\psi}(x_1) \Gamma \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \Gamma \psi(x_2) : D(y) \quad (4.18)$$

describiendo la dispersión de dos nucleones,

$$\begin{aligned}
D_2^{(\text{MN})}(x_1; x_2) = & i \mathbf{g}^2 ( : \bar{\psi}(x_1) \Gamma S(y) \Gamma \psi(x_2) : - : \bar{\psi}(x_2) \Gamma S(-y) \Gamma \psi(x_1) : ) \\
& \times : \varphi(x_1) \varphi(x_2) : \quad (4.19)
\end{aligned}$$

describiendo la dispersión de un mesón por un nucleón,

$$D_2^{(\text{M})}(x_1; x_2) = -\mathbf{g}^2 : \varphi(x_1) \varphi(x_2) : \text{Tr} [S_-(y) \Gamma S_+(-y) \Gamma - S_-(-y) \Gamma S_+(y) \Gamma] \quad , \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
D_2^{(N)}(x_1; x_2) = & \mathbf{g}^2 : \bar{\psi}(x_1) \Gamma (S_+(y) D_+(y) - S_-(y) D_-(y)) \Gamma \psi(x_2) : \\
& - \mathbf{g}^2 : \bar{\psi}(x_2) \Gamma (S_+(-y) D_+(-y) - S_-(-y) D_-(-y)) \Gamma \psi(x_1) :
\end{aligned} \tag{4.21}$$

describiendo, respectivamente, la auto-energía del mesón y la del nucleón, y, finalmente, la distribución:

$$D_2^{(V)}(x_1; x_2) = -i\mathbf{g}^2 \text{Tr} [S_-(y) \Gamma S_+(-y) \Gamma D_-(y) + S_-(-y) \Gamma S_+(y) \Gamma D_+(y)] \tag{4.22}$$

que no representa a ningún proceso físico, pues no contiene en su expresión a ningún operador de campo cuantificado (*vacuum graph*). En el siguiente capítulo nos ocuparemos del estudio de los términos de auto-energía y sus implicaciones en la propagación del campo.

# Capítulo 5

## Auto-energía del mesón y del nucleón y sus propagadores completos

El capítulo que ahora iniciamos tiene por finalidad el estudio de las correcciones radiactivas del modelo de Yukawa en el segundo orden. Este nombre se da a aquellos términos de la serie perturbativa que modifican la propagación del campo. En el segundo orden, como hemos aprendido en el capítulo recién pasado, estas provienen de los términos  $D_2^{(M)}$  y  $D_2^{(N)}$ , caracterizados por exhibir cada uno apenas dos operadores de campo cuantificado sin contraer: dos mesones en el primer caso, dos nucleones en el segundo; el cálculo explícito de las distribuciones de transición a que ellos dan lugar es expuesto en las secciones 5.1 y 5.2 de este capítulo. Estos términos corresponden a las correcciones radiactivas porque modifican el propagador del campo correspondiente en los procesos de dispersión a órdenes mayores; a esto devotaremos la Sec. 5.3.

### 5.1. Auto-energía del mesón

La distribución causal del segundo orden que corresponde a la auto-energía del mesón está dada en la Ec. (4.20). Denotemos la distribución numérica contenida en  $D_2^{(M)}(x_1; x_2)$  por  $d(y)$ , es decir, escribamos  $D_2^{(M)}(x_1; x_2) = : \varphi(x_1) d(y) \varphi(x_2) :$ , con:

$$d(y) = P(y) - P(-y) ; P(y) := \mathbf{g}^2 \text{Tr} [S_+(y) \Gamma S_-(-y) \Gamma] . \quad (5.1)$$

Para efectuar la división de esta distribución como lo exige el programa perturbativo de Epstein y Glaser, iremos al espacio de los impulsos. Como  $P(y)$  es el producto de

dos distribuciones, su transformada de Fourier es dada por la convolución:

$$\begin{aligned}\hat{P}(q) &= (2\pi)^{-2} \mathfrak{g}^2 \int d^4p \text{Tr} \left[ \hat{S}_+(p) \Gamma \hat{S}_-(p-q) \Gamma \right] \\ &= (2\pi)^{-2} \mathfrak{g}^2 \int d^4p \text{Tr} \left[ (\not{p} + m_1) \Gamma (\not{p} - \not{q} + m_1) \Gamma \right] \hat{D}_+(p) \hat{D}_-(p-q) .\end{aligned}\quad (5.2)$$

La traza en esta expresión es calculada usando que  $\gamma^\mu \Gamma = \epsilon \Gamma \gamma^\mu$ , así como que  $\Gamma^2 = \epsilon$ :

$$\text{Tr} \left[ (\not{p} + m_1) \Gamma (\not{p} - \not{q} + m_1) \Gamma \right] = 4 \left( (p^2 - pq) + \epsilon m_1^2 \right) . \quad (5.3)$$

Siendo así, al reemplazar  $\hat{D}_\pm(p) = \pm i (2\pi)^{-1} \Theta(\pm p_0) \delta(p^2 - m_1^2)$  en la Ec. (5.2), obtenemos:

$$\hat{P}(q) = 2(2\pi)^{-4} \mathfrak{g}^2 \left[ 2(1 + \epsilon) m_1^2 - q^2 \right] I(q) , \quad (5.4)$$

con:

$$I(q) := \int d^4p \Theta(p_0) \Theta(q_0 - p_0) \delta(p^2 - m_1^2) \delta(q^2 - 2pq) . \quad (5.5)$$

Aquí los soportes de la distribución delta de Dirac y de la función de Heaviside implican que  $p, q - p \in V^+$ , de donde  $q = p + (q - p) \in V^+$ , y entonces existe un sistema inercial de referencia en el cual  $q = (q_0; \mathbf{0})$ . La integral  $I(q)$  se simplifica grandemente en tal referencial (denotamos  $E_p = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_1^2}$ ):

$$\begin{aligned}I(q) &= \int d^4p \Theta(p_0) \Theta(q_0 - p_0) \delta(p_0^2 - E_p^2) \delta(q_0^2 - 2p_0 q_0) \\ &= \frac{1}{4q_0} \Theta(q_0) \Theta(q_0^2 - 4m_1^2) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{E_p} \delta \left( E_p - \frac{q_0}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{q_0} \Theta(q_0) \Theta(q_0^2 - 4m_1^2) \int_{m_1}^{+\infty} dE_p \sqrt{E_p^2 - m_1^2} \delta \left( E_p - \frac{q_0}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \Theta(q_0) \Theta(q_0^2 - 4m_1^2) \sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{q_0^2}} .\end{aligned}$$

Regresando al sistema general:

$$I(q) = \frac{\pi}{2} \Theta(q_0) \Theta(q^2 - 4m_1^2) \sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{q^2}} . \quad (5.6)$$

Substituyendo este resultado en la Ec. (5.4), y después en la Ec. (5.1), la distribución causal en el espacio de los impulsos es:

$$\hat{d}(p) = \frac{1}{2} (2\pi)^{-3} \mathfrak{g}^2 \text{sgn}(p_0) \Theta(p^2 - 4m_1^2) [2(1 + \epsilon)m_1^2 - p^2] \sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{p^2}} . \quad (5.7)$$

El orden singular de esta distribución es  $\omega = 2 > 0$ . Sin embargo, usando del Teorema presentado al fin del capítulo 3, será útil factorizar de él un polinomio del segundo grado:

$$\hat{d}(p) = \frac{1}{2} (2\pi)^{-3} \mathfrak{g}^2 [2(1 + \epsilon)m_1^2 - p^2] \hat{d}_1(p) , \quad (5.8)$$

con:

$$\hat{d}_1(p) = \text{sgn}(p_0) \Theta(p^2 - 4m_1^2) \sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{p^2}} , \quad (5.9)$$

pues entonces será suficiente efectuar la división de esta distribución, cuyo orden singular es  $\omega [\hat{d}_1] = 0$ , y cuya parte retardada, en consecuencia, se calcula por la relación de dispersión:

$$\hat{r}_1(p) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{d}_1(tp) dt}{(t - i0^+)(1 - t + ip_0 0^+)} . \quad (5.10)$$

Substituyendo aquí la Ec. (5.9), vemos que debido a la presencia de la función de Heaviside el polo aparente que la Ec. (5.10) tiene en  $t = 0$  no es tal. Pasando a usar la variable  $s = p^2 t^2$  y usando la fórmula de Sokhotskiy [63] para tratar el polo en  $s = p^2$

–correspondiente a  $t = 1-$ , se obtiene:

$$\hat{r}_1(p) = \frac{i}{2\pi} \left\{ p^2 \text{V.p.} \int_{4m_1^2}^{+\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{s}}}{s(p^2 - s)} ds + i\pi \text{sgn}(p_0) \Theta(p^2 - 4m_1^2) \sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{p^2}} \right\}. \quad (5.11)$$

Aquí, V.p. significa «valor principal». La parte numérica de la correspondiente distribución de transición,  $\hat{t}(p)$ , es obtenida de  $\hat{r}(p)$  substrayéndole  $\hat{r}'(p)$ ; esta operación tiene el único efecto de cambiar  $\text{sgn}(p_0)$  por 1 en el segundo término de la Ec. (5.11). Como consecuencia, si definimos:

$$\hat{\Pi}(p) := i\hat{t}(p) = i[\hat{r}(p) - \hat{r}'(p)], \quad (5.12)$$

entonces:

$$\hat{\Pi}(p) = -\frac{\mathfrak{g}^2 m_1^2}{2(2\pi)^4} [2(1 + \epsilon)m_1^2 - p^2] \left\{ p^2 J + i\pi \Theta(p^2 - 4m_1^2) \sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{p^2}} \right\}, \quad (5.13)$$

con la integral:

$$J := \text{V.p.} \int_{4m_1^2}^{+\infty} \frac{ds}{s(p^2 - s)} \sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{s}}. \quad (5.14)$$

Esta integral puede hallarse con el uso de la substitución de Euler [91]:

$$\frac{s}{m_1^2} = \frac{(1+x)^2}{x} \quad (0 < x < 1), \quad \frac{ds}{m_1^2} = -\frac{1-x^2}{x^2} dx, \quad \sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{s}} = \frac{1-x}{1+x}, \quad (5.15)$$

y definiendo el parámetro  $\xi$  por:

$$\frac{p^2}{m_1^2} = -\frac{(1-\xi)^2}{\xi}, \quad \xi = \frac{\sqrt{1 - 4m_1^2/p^2} - 1}{\sqrt{1 - 4m_1^2/p^2} + 1}. \quad (5.16)$$

Entonces:

$$J = -\frac{1}{m_1^2} \text{V.p.} \int_0^1 \frac{dx(1-x)^2}{(1+x)^2(x+\xi)(x+1/\xi)}. \quad (5.17)$$

Note el lector que, como estamos trabajando con impulsos del tipo-tiempo –que es lo que permite usar la relación de dispersión para calcular la parte retardada de la distribución causal–, el parámetro  $\xi$  puede adoptar diversos valores. Hay dos partes en las que es menester dividir la región de integración:

(1) Cuando  $0 < p^2 < 4m_1^2$ : En este caso es  $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  con  $|\xi| = 1$  –y, por lo tanto, las mismas propiedades tiene el número  $1/\xi$ –, de manera que en la Ec. (5.17) no hay polos y el valor principal puede ser descartado. Ahora podemos resolver esta integral descomponiendo su integrando en fracciones parciales:

$$\frac{dx(1-x)^2}{(1+x)^2(x+\xi)(x+1/\xi)} = -\frac{\xi}{(1-\xi)^2} \left[ \frac{1+\xi}{1-\xi} \left( \frac{1}{x+1/\xi} - \frac{1}{x+\xi} \right) + \frac{4}{(1+x)^2} \right].$$

La integración se vuelve entonces elemental<sup>1</sup>:

$$J = \frac{\xi}{m_1^2(1-\xi)^2} \left\{ \frac{1+\xi}{1-\xi} \log(\xi) + 2 \right\}. \quad (5.18)$$

Substituyendo en la Ec. (5.13), encontramos:

$$\hat{\Pi}(p) = \frac{\mathbf{g}^2}{2(2\pi)^4} [2(1+\epsilon)m_1^2 - p^2] \left\{ \frac{1+\xi}{1-\xi} \log(\xi) + 2 \right\}. \quad (5.19)$$

Como  $|\xi| = 1$ , podemos representarlo de la forma polar, como:

$$\xi = e^{i\theta}, \quad p^2 = 4m_1^2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right). \quad (5.20)$$

---

<sup>1</sup>Teniendo en cuenta que, en el plano complejo excepto en el semieje real negativo,  $\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} =: \log(z)$  «por definición» (véase, por ejemplo, la Sec. 1.5 de la Ref. [94]).

Entonces:

$$\frac{1 + \xi}{1 - \xi} \log(\xi) = 2\sqrt{\frac{4m_1^2}{p^2} - 1} \cot^{-1} \left( \sqrt{\frac{4m_1^2}{p^2} - 1} \right), \quad (5.21)$$

y la auto-energía del mesón adopta la forma:

$$\hat{\Pi}(p) = \frac{\mathbf{g}^2}{(2\pi)^4} [2(\epsilon + 1)m_1^2 - \epsilon p^2] \left\{ \sqrt{\frac{4m_1^2}{p^2} - 1} \cot^{-1} \left( \sqrt{\frac{4m_1^2}{p^2} - 1} \right) + 1 \right\}. \quad (5.22)$$

Este caso es muy importante, pues contiene a la capa másica  $p^2 = m_2^2$ , una vez que la masa del mesón es menor que la del nucleón.

(2) Cuando  $p^2 > 4m_1^2$ : En este caso  $\xi \in ] - 1; 0[$ . Usando nuevamente la expansión en fracciones parciales, esta vez el factor  $x + \xi$  en el denominador representa un polo, lo cual explica la contribución del término que acompaña a la función de Heaviside en la Ec. (5.13). El resultado es:

$$\hat{\Pi}(p) = \frac{\mathbf{g}^2}{2(2\pi)^4} [2(1 + \epsilon)m_1^2 - p^2] \left\{ \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \log(|\xi|) + 2 - i\pi\sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{p^2}} \right\}. \quad (5.23)$$

(3) Por completitud, mencionamos que, como ya habíamos anticipado, el caso del impulso del tipo-espacio se obtiene por continuación analítica [60, 94] de los casos anteriores. La Ec. (5.19) rige en esta región, con  $\xi \in ]0; 1[$ . Finalmente, los casos límite  $p^2 = 0$ ,  $4m_1^2$  que separan a las diferentes regiones no representan un problema, pues los límites laterales en estos puntos coinciden.

## 5.2. Auto-energía del nucleón

Consideremos a continuación la auto-energía del nucleón, cuya distribución causal en el segundo orden se ha mostrado en la Ec. (4.21). En ella, podemos ver, la segunda línea se ha obtenido de la primera por el mero intercambio de las coordenadas  $x_1$  y  $x_2$ , razón por la que nos concentraremos apenas en el cálculo de la primera. Denotemos

por  $d(y)$  a la distribución numérica

$$d(y) = \mathfrak{g}^2 \Gamma [d_+(y) + d_-(y)] \Gamma ; d_{\pm}(y) = \pm S_{\pm}(y) D_{\pm}(y) . \quad (5.24)$$

Necesitamos obtener la transformada de Fourier de  $d(y)$ . Empezando con  $d_-(y)$ , su transformada de Fourier es la convolución de  $\hat{S}_-$  y  $\hat{D}_-$ :

$$\hat{d}_-(p) = -(2\pi)^{-2} \int d^4 q \hat{S}_-(q) \hat{D}_-(p - q) . \quad (5.25)$$

Usando que

$$\begin{aligned} \hat{S}_-(q) &= -\frac{i}{2\pi} (\not{q} + m_1) \Theta(-q^0) \delta(q^2 - m_1^2) , \\ \hat{D}_-(p - q) &= -\frac{i}{2\pi} \Theta(q^0 - p^0) \delta((p - q)^2 - m_2^2) , \end{aligned} \quad (5.26)$$

obtenemos:

$$\hat{d}_-(p) = (2\pi)^{-4} [m_1 I_1(p) + \gamma^\mu I_{2\mu}(p)] , \quad (5.27)$$

con:

$$I_1(p) = \int d^4 q \Theta(q^0 - p^0) \Theta(-q^0) \delta(q^2 - m_1^2) \delta((p - q)^2 - m_2^2) , \quad (5.28)$$

$$I_{2\mu}(p) = \int d^4 q q_\mu \Theta(q^0 - p^0) \Theta(-q^0) \delta(q^2 - m_1^2) \delta((p - q)^2 - m_2^2) . \quad (5.29)$$

Con el objetivo de facilitar el cálculo de estas integrales nos moveremos al sistema inercial de referencia en el que es  $p = (p_0; \mathbf{0})$ . Este existe porque, debido a los soportes de las funciones de Heaviside y de las distribuciones delta de Dirac, tanto  $q$  cuanto  $p - q$  están en  $V^-$ , de donde su suma  $p = q + (p - q)$  también está contenida en  $V^-$ . En tal sistema de referencia:

$$(p - q)^2 - m_2^2 = p_0^2 - 2p_0 q_0 + (m_1^2 - m_2^2) , \quad (5.30)$$

y

$$\Theta(-q^0)\delta(q^2 - m_1^2) = \frac{1}{2E_q}\delta(q_0 + E_q), \quad (5.31)$$

con la definición  $E_q := +\sqrt{\mathbf{q}^2 + m_1^2}$ .

Empezamos con  $I_1$ . Substituyendo las Ecs. (5.30) y (5.31) en la Ec. (5.28) e integrando en la variable  $q_0$ :

$$I_1 = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{2E_q} \Theta(-E_q - p_0) \delta(p_0^2 + 2E_q p_0 + (m_1^2 - m_2^2)). \quad (5.32)$$

El soporte de la distribución delta de Dirac está en el punto  $p_0 = -E_q \pm \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_2^2}$ . Pero, por la presencia de la función de Heaviside:  $p_0 < -E_q$ , y es necesario elegir el signo negativo en la solución para  $p_0$ :  $p_0 = -E_q - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_2^2}$ . Igualando esta solución con la definición de  $E_q$  [ver la Ec. (5.31)] llegamos a la desigualdad:

$$\frac{(m_1^2 - m_2^2) - p_0^2}{2p_0} = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_2^2} > m_2. \quad (5.33)$$

Si asumimos, como venimos haciendo, que  $m_1 > m_2$  (desigualdad que se satisface para nucleones y piones:  $m_N > m_\pi$ ), entonces la Ec. (5.33) se equivale a:  $p_0^2 > (m_1 + m_2)^2$ . Finalmente, como  $p_0 < 0$ :

$$\delta(p_0^2 + 2E_q p_0 + (m_1^2 - m_2^2)) = \frac{1}{2|p_0|} \delta\left(E_q - \frac{p_0^2 + (m_1^2 - m_2^2)}{2|p_0|}\right). \quad (5.34)$$

La integral  $I_1$  es por lo tanto:

$$I_1 = \frac{\pi}{2} \Theta(-p_0) \Theta(p_0^2 - (m_1 + m_2)^2) \sqrt{1 - \frac{2(m_1^2 + m_2^2)}{p_0^2} + \frac{(m_2^2 - m_1^2)^2}{p_0^4}}. \quad (5.35)$$

Calculamos ahora  $I_{2\mu}(p)$ . En el electo sistema inercial de referencia el integrando de la Ec. (5.29) es impar para  $\mu = 1, 2, 3$ , y así  $I_{2i} = 0$ . Para  $\mu = 0$ , por otra parte,

siguiendo los mismos pasos dados en el cálculo de  $I_1$ :

$$I_{20} = \frac{\pi}{4} \Theta(-p_0) \Theta(p_0^2 - (m_1 + m_2)^2) \left(1 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{p_0^2}\right) \times \sqrt{1 - \frac{2(m_1^2 + m_2^2)}{p_0^2} + \frac{(m_2^2 - m_1^2)^2}{p_0^4}} p_0. \quad (5.36)$$

En forma covariante, las Ecs. (5.35) y (5.36) son:

$$I_1(p) = \frac{\pi}{2} \Theta(-p_0) \Theta(p^2 - (m_1 + m_2)^2) \sqrt{1 - \frac{2(m_1^2 + m_2^2)}{p^2} + \frac{(m_2^2 - m_1^2)^2}{p^4}}, \quad (5.37)$$

$$I_{2\mu}(p) = \frac{p_\mu}{2} \left(1 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{p^2}\right) I_1(p). \quad (5.38)$$

Su sustitución en la Ec. (5.27) lleva al resultado:

$$\hat{d}_-(p) = (2\pi)^{-4} \left\{ m_1 + \frac{\not{p}}{2} \left(1 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{p^2}\right) \right\} I_1(p). \quad (5.39)$$

Para  $\hat{d}_+(p)$  [ver la Ec. (5.24)], el resultado es similar:

$$\hat{d}_+(p) = - (2\pi)^{-4} \left\{ m_1 + \frac{\not{p}}{2} \left(1 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{p^2}\right) \right\} I_1(-p^0; \mathbf{p}). \quad (5.40)$$

Reemplazando las Ecs. (5.39) y (5.40) en la Ec. (5.24), y usando que  $\gamma^\mu \Gamma = \epsilon \Gamma \gamma^\mu$ , así como que  $\Gamma^2 = \epsilon$ , encontramos que:

$$\hat{d}(p) = - \frac{\mathbf{g}^2}{4(2\pi)^3} \text{sgn}(p_0) \Theta(p^2 - (m_1 + m_2)^2) \left\{ \epsilon m_1 + \frac{\not{p}}{2} \left(1 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{p^2}\right) \right\} \times \sqrt{1 - \frac{2(m_1^2 + m_2^2)}{p^2} + \frac{(m_2^2 - m_1^2)^2}{p^4}}. \quad (5.41)$$

Esta es la distribución causal que debemos dividir. Su orden singular es  $\omega = 1 > 0$ .

Como vemos, sin embargo, un polinomio del tercer grado puede ser factorizado de él

$$\hat{d}(p) = -\frac{\mathfrak{g}^2}{4(2\pi)^3} \left[ \epsilon m_1 p^2 + \frac{\not{p}}{2}(p^2 + m_1^2 - m_2^2) \right] \hat{d}_1(p), \quad (5.42)$$

con:

$$\hat{d}_1(p) = \text{sgn}(p_0) \Theta(p^2 - (m_1 + m_2)^2) \frac{1}{p^2} \sqrt{1 - \frac{2(m_1^2 + m_2^2)}{p^2} + \frac{(m_2^2 - m_1^2)^2}{p^4}}. \quad (5.43)$$

El orden singular de esta distribución es  $\omega[\hat{d}_1] = -2$ , de manera que su parte retardada (única) es calculada por la fórmula:

$$\hat{r}_1(p) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{d}_1(tp) dt}{1 - t + ip_0 0^+}. \quad (5.44)$$

Substituyendo aquí la Ec. (5.43), encontramos:

$$\hat{r}_1(p) = i(2\pi)^{-1} \int_{(m_1+m_2)^2}^{+\infty} \frac{\sqrt{s^2 - 2(m_1^2 + m_2^2)s + (m_2^2 - m_1^2)^2}}{s^2(p^2 - s + ip_0 0^+)} ds. \quad (5.45)$$

La parte numérica de la distribución de dos puntos,  $T_2^{(N)}$ , es obtenida por la substracción de  $\hat{r}'(p)$  de  $\hat{r}(p)$ , el único efecto de lo cual es cambiar, en el denominador del integrando de la Ec. (5.45),  $ip_0 0^+$  por  $i0^+$ . De acuerdo con esto, definiendo la auto-energía del nucleón como

$$\hat{\Sigma}(p) := i\hat{t}(p) = i(\hat{r}(p) - \hat{r}'(p)), \quad (5.46)$$

y usando la fórmula de Sokhotskiy para tratar los polos –que existen cuando  $p^2 >$

$(m_1 + m_2)^2$ -, la auto-energía del nucleón es:

$$\hat{\Sigma}(p) = \frac{g^2}{4(2\pi)^4} \left[ \epsilon m_1 p^2 + \frac{\not{p}}{2} (p^2 + m_1^2 - m_2^2) \right] \\ \times \left\{ J_1 - i\pi\Theta(p^2 - (m_1 + m_2)^2) \sqrt{1 - \frac{2(m_1^2 + m_2^2)}{p^2} + \frac{(m_2^2 - m_1^2)^2}{p^4}} \right\}, \quad (5.47)$$

con  $J_1$  la siguiente integral:

$$J_1 = \text{V.p.} \int_{(m_1+m_2)^2}^{+\infty} \frac{\sqrt{s^2 - 2(m_1^2 + m_2^2)s + (m_2^2 - m_1^2)^2}}{s^2(p^2 - s)} ds. \quad (5.48)$$

Desde que el polinomio bajo el signo radical en  $J_1$  tiene raíces reales  $(m_1 \pm m_2)^2$ , podemos usar la tercera substitución de Euler [91] para calcularla. Usaremos la variable  $x$  relacionada a la  $s$  por:

$$s = \frac{(m_1 + m_2)^2 - (m_1 - m_2)^2 x^2}{1 - x^2}, \quad 0 < x < 1. \quad (5.49)$$

Entonces

$$\sqrt{s^2 - 2(m_1^2 + m_2^2)s + (m_2^2 - m_1^2)^2} = 4m_1 m_2 \frac{x}{1 - x^2}, \quad ds = \frac{8m_1 m_2 x dx}{(1 + x)^2 (1 - x)^2}, \quad (5.50)$$

y  $J_1$  se convierte en la integral de una función racional de  $x$ :

$$J_1 = - \frac{32m_1^2 m_2^2}{(m_1 - m_2)^4 (p^2 - (m_1 - m_2)^2)} \\ \times \text{V.p.} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x + a)^2 (x - a)^2 \left[ x^2 - \frac{p^2 - (m_1 + m_2)^2}{p^2 - (m_1 - m_2)^2} \right]}. \quad (5.51)$$

Aquí hemos definido la constante:

$$a^2 = \frac{(m_1 + m_2)^2}{(m_1 - m_2)^2} > 1. \quad (5.52)$$

A continuación debemos distinguir dos casos, de acuerdo al valor que adopta la variable  $p^2$ :

(1) Si  $p^2 < (m_1 - m_2)^2$  o  $p^2 > (m_1 + m_2)^2$ , definimos:

$$b^2 = \frac{p^2 - (m_1 + m_2)^2}{p^2 - (m_1 - m_2)^2}, \quad (5.53)$$

de manera que:

$$J_1 = - \frac{32m_1^2m_2^2}{(m_1 - m_2)^4 (p^2 - (m_1 - m_2)^2)} \text{V.p.} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x+a)^2(x-a)^2(x+b)(x-b)}, \quad (5.54)$$

Ya  $J_1$  puede ser resuelta por descomposición en fracciones parciales. El resultado es:

$$J_1 = \frac{32m_1^2m_2^2}{(m_1 - m_2)^4 (p^2 - (m_1 - m_2)^2)} \frac{1}{2(b^2 - a^2)^2} \times \left\{ \frac{b^2 - a^2}{a^2 - 1} + b \log \left( \left| \frac{1+b}{1-b} \right| \right) - \frac{a^2 + b^2}{2a} \log \left( \frac{a+1}{a-1} \right) \right\}. \quad (5.55)$$

(2) Si  $(m_1 - m_2)^2 < p^2 < (m_1 + m_2)^2$  –este intervalo contiene el importante caso en que  $p^2$  está próximo al valor  $m_1^2$  que define la capa másica–, entonces definimos:

$$b^2 = \frac{(m_1 + m_2)^2 - p^2}{p^2 - (m_1 - m_2)^2}, \quad (5.56)$$

con lo cual:

$$J_1 = - \frac{32m_1^2m_2^2}{(m_1 - m_2)^4 (p^2 - (m_1 - m_2)^2)} \text{V.p.} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x+a)^2(x-a)^2(x^2 + b^2)}, \quad (5.57)$$

que es igual a:

$$J_1 = \frac{32m_1^2 m_2^2}{(m_1 - m_2)^4 (p^2 - (m_1 - m_2)^2)} \frac{1}{4a(a^2 + b^2)^2} \times \left\{ (b^2 - a^2) \log \left( \frac{a+1}{a-1} \right) + 4ab \tan^{-1} \left( \frac{1}{b} \right) - \frac{2a(a^2 + b^2)}{a^2 - 1} \right\}. \quad (5.58)$$

Con  $J_1$  dado en la Ec. (5.55) o en la (5.58), dependiendo del valor de  $p^2$ , la auto-energía del nucleón  $\hat{\Sigma}(p)$  se obtiene como en la Ec. (5.47). Particularmente, vemos que la auto-energía del nucleón es finita en la capa másica ( $p^2 = m_1^2$ ) como consecuencia del valor no nulo de la masa del mesón,  $m_2$ .

### 5.3. Propagadores completos

Veamos por fin la forma en la que la auto-energía del campo cuantificado modifica a la propagación del mismo. Este estudio, por otra parte, permitirá fijar los términos de normalización de estas distribuciones, los cuales se presentan debido a que el orden singular de ellas es no negativo.

#### 5.3.1. Propagador completo del mesón

Como la auto-energía del mesón, Ec. (5.18), posee el orden singular  $\omega = 2$ , su expresión completa debe incluir sendos términos de normalización, de la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}(p) &= \hat{\Pi}(p) + C_0 + c_\mu p^\mu + C_2 p^2 \\ &= \hat{\Pi}(p) + c_\mu p^\mu + b + C_2 (p^2 - m_2^2). \end{aligned} \quad (5.59)$$

Luego vemos que el término lineal en el impulso debe ser nulo, pues la interacción de Yukawa es invariante frente a transformaciones de paridad:  $c_\mu = 0$ . Para fijar las constantes  $b$  y  $C_2$ , por otra parte, estudiaremos la dispersión de dos nucleones con inserciones de auto-energía del mesón. Iniciamos con la Ec. (4.18), que es la distribución

causal para el mentado proceso en el segundo orden. Como la distribución numérica que aparece en ella es la distribución de conmutación del campo (pseudo-)escalar, de orden singular  $\omega = -2$ , su parte retardada será precisamente la distribución retardada  $D^{\text{ret}}$ . Como, además, la distribución subsidiaria retardada correspondiente tiene por distribución numérica a su parte de frecuencias negativas  $D_-$  [véase la Ec. (4.16) y recuérdese que  $D_+(-y) = -D_-(y)$ ], la distribución de transición correspondiente será:

$$T_2^{(\text{NN})}(x_1; x_2) = i\mathfrak{g}^2 : j(x_1)D^F(x_1 - x_2)j(x_2) : ; \quad (5.60)$$

en que:

$$D^F(x) := D^{\text{ret}}(x) - D_-(x) \quad , \quad j(x) = \bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x) .$$

La primera corrección a este proceso, proveniente de las inserciones de auto-energía del mesón en su propagador interno, aparece en la distribución de cuatro puntos,  $T_4(X)$ , en donde hemos escrito:  $X = \{x_1; x_2; x_3; x_4\}$ . Identificando las distribuciones  $P(y)$  y  $d(y)$  definidas en la Ec. (5.1), la distribución causal correspondiente es igual a:

$$\begin{aligned} D_4^{(\text{NN})}(x_1; \dots; x_4) &= \mathfrak{g}^2 : j(x_1)D^F(x_1 - x_3)P(x_3 - x_4)D^F(x_4 - x_2)j(x_2) : \\ &\quad - \mathfrak{g}^2 : j(x_2)D^F(x_2 - x_4)P(x_4 - x_3)D^F(x_3 - x_1)j(x_1) : \\ &= \mathfrak{g}^2 : j(x_1)D^F(x_1 - x_3)d(x_3 - x_4)D^F(x_4 - x_2)j(x_2) : . \end{aligned} \quad (5.61)$$

Como en esta ecuación  $D^F$  tiene orden singular negativo, no habrá problemas al efectuar la división de la distribución  $d(x_3 - x_4)$  solamente, lo que ya será suficiente para asegurar que la distribución completa tenga soporte en el cono de luz futuro del punto

$x_4$ . Obtenemos así:

$$T_4^{(\text{NN})}(x_1; \dots; x_4) = i\mathbf{g}^2 : j(x_1)D^F(x_1 - x_3)\Pi(x_3 - x_4)D^F(x_4 - x_2)j(x_2) : . \quad (5.62)$$

La distribución así obtenida es utilizada en la construcción de la siguiente corrección, que aparece en el término del sexto orden, y que se construye de forma idéntica. Como es evidente que lo mismo ocurre en los siguientes órdenes, pues las contracciones que se presenten al multiplicar estas distribuciones para obtener la distribución causal serán siempre las mismas, la distribución de transición completa para la dispersión de dos nucleones, corregida por inserciones de auto-energía del mesón, será:

$$T^{(\text{NN})}(x_1; x_2) =: i\mathbf{g}^2 : j(x_1)D_{\text{tot}}(x_1 - x_2)j(x_2) : , \quad (5.63)$$

que es la ecuación definitoria del «propagador completo del mesón»,  $D_{\text{tot}}$ . Por la construcción hecha, vemos que ella es, en el límite adiabático, igual a:

$$D_{\text{tot}} = D^F + D^F * (\Pi * D^F) + D^F * \{ \Pi * [D^F * (\Pi * D^F)] \} + \dots \quad (5.64)$$

El símbolo «\*» aquí denota a la convolución. Pasamos al espacio de los impulsos por aplicación de la transformación de Fourier, sirviéndonos del hecho de que ella mapea la convolución de las funciones (o distribuciones)  $A$  y  $B$  a  $(2\pi)^2$  veces el producto de sus transformadas de Fourier:  $\widehat{A * B} = (2\pi)^2 \widehat{A} \widehat{B}$  [véase la Ec. (A.26)]. Así:

$$\begin{aligned} \widehat{D}_{\text{tot}} &= \widehat{D}^F + (2\pi)^4 \widehat{D}^F \widetilde{\Pi} \widehat{D}^F + (2\pi)^8 \widehat{D}^F \widetilde{\Pi} \widehat{D}^F \widetilde{\Pi} \widehat{D}^F + \dots \\ &= \widehat{D}^F \left( 1 + (2\pi)^4 \widetilde{\Pi} \widehat{D}_{\text{tot}} \right) . \end{aligned} \quad (5.65)$$

Substituyendo la expresión para  $\hat{D}^F(p)$ ,

$$\hat{D}^F(p) = -(2\pi)^{-2} \frac{1}{p^2 - m_2^2 + i0^+} ,$$

obtenemos de la Ec. (5.65) que la propagación del mesón es modificado según:

$$\hat{D}_{\text{tot}}(p) = -(2\pi)^{-2} \frac{1}{p^2 - \left( m_2^2 - (2\pi)^2 \tilde{\Pi}(p) \right) + i0^+} . \quad (5.66)$$

Este resultado nos permite estudiar las consecuencias del cambio de la normalización de  $\tilde{\Pi}(p)$ , es decir, la injerencia de las constantes  $b$  y  $C_2$  en la Ec. (5.59). Definimos los coeficientes:

$$\beta := \lim_{p^2 \rightarrow m_2^2} \hat{\Pi}(p) , \quad \alpha := \lim_{p^2 \rightarrow m_2^2} \frac{d\hat{\Pi}(p)}{dp^2} . \quad (5.67)$$

Por virtud de la Ec. (5.59), entonces:

$$\lim_{p^2 \rightarrow m_2^2} \tilde{\Pi}(p) = \beta + b , \quad \lim_{p^2 \rightarrow m_2^2} \frac{d\tilde{\Pi}(p)}{dp^2} = C_2 + \alpha . \quad (5.68)$$

Ahora podemos imponer las siguientes condiciones físicas:

- (1) El parámetro  $m_2$  es la masa física del mesón, o séase, el propagador completo del mesón posee un polo en el valor  $p^2 = m_2^2$ . Según la Ec. (5.68), esto implica que:

$$\lim_{p^2 \rightarrow m_2^2} \tilde{\Pi}(p) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -\beta . \quad (5.69)$$

- (2) El parámetro  $g$  es la constante de acoplamiento física de la interacción. Como el propagador total del mesón será multiplicada por  $g$  veces la corriente para obtener la amplitud de transición y, en última instancia, la sección de colisión del proceso, el factor que acompaña a  $p^2$  en el denominador de  $\hat{D}_{\text{tot}}(p)$  divide efectivamente a la constante  $g$ , cambiando su valor observable; luego la condición de

normalización impuesta se traduce en:

$$\lim_{p^2 \rightarrow m_2^2} \frac{d\tilde{\Pi}(p)}{dp^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\alpha . \quad (5.70)$$

Las Ecs. (5.69) y (5.70) fijan por completo los valores de  $b$  y  $C_2$ . Además, como la expresión explícita para la auto-energía del mesón [Ec. (5.22), pues este es el resultado para la región continente de la capa másica] es regular en la capa másica (no hay divergencias infra-rojas), el cálculo de los límites en la Ec. (5.67) se identifica con la mera evaluación de  $\tilde{\Pi}$  y su derivada en dicho valor.

### 5.3.2. Propagador completo del nucleón

Semejantemente a la subsección anterior, determinaremos ahora las correcciones que la auto-energía del nucleón le impone a su propagación, estudiando para ello la distribución de transición que corresponde a la dispersión de un nucleón por un mesón con inserciones de auto-energía del nucleón. Recordemos a este propósito que el orden singular de la auto-energía del nucleón es  $\omega = 1$ , de acuerdo con lo cual la forma más general de la susodicha distribución es:

$$\tilde{\Sigma}(p) = \hat{\Sigma}(p) + C_0 + C_1 \not{p} = \hat{\Sigma}(p) + c + C_1(\not{p} - m) . \quad (5.71)$$

Limitando nuestra atención a la propagación del nucleón del punto  $x_2$  al  $x_1$ , tomaremos en la Ec. (4.19) solo la parte que reproduce esta situación. Esta vez la distribución numérica se identifica con la distribución de anti-conmutación del nucleón, y su parte retardada es  $S^{\text{ret}}$ . Substrayendo la distribución subsidiaria retardada, que contiene a  $S_-$ , tendremos que la distribución de transición del segundo orden para este proceso es:

$$T_2^{(\text{MN})}(x_1; x_2) = -i\mathbf{g}^2 : \bar{\psi}(x_1) \Gamma S^F(x_1 - x_2) \Gamma \psi(x_2) : : \varphi(x_1) \varphi(x_2) : . \quad (5.72)$$

Las correcciones a esta distribución en órdenes mayores se manifiestan primeramente en el orden cuatro. La distribución causal que le corresponde es:

$$D_4^{(\text{MN})}(x_1; \dots; x_4) = \mathbf{g}^2 : \bar{\psi}(x_1) \Gamma S^F(x_1 - x_3) d(x_3 - x_4) S^F(x_4 - x_2) \Gamma \psi(x_2) : \\ \times : \varphi(x_1) \varphi(x_2) : , \quad (5.73)$$

con  $d$  la distribución numérica definida en la Ec. (5.24). Como, otra vez, los propagadores  $S^F$  tienen el orden singular negativo,  $\omega = -1 < 0$ , bastará realizar la división de la distribución  $d$  solamente, lo que asegurará que el resultado sea retardado en relación al punto  $x_4$ . De acuerdo con la Ec. (5.46), el resultado de esta operación será:

$$T_4^{(\text{MN})}(x_1; \dots; x_4) = -i\mathbf{g}^2 : \bar{\psi}(x_2) \Gamma S^F(x_1 - x_3) \Sigma(x_3 - x_4) S^F(x_4 - x_2) \Gamma \psi(x_2) : \\ \times : \varphi(x_1) \varphi(x_2) : . \quad (5.74)$$

De modo idéntico se evalúa la contribución de los siguientes órdenes. Como resultado, la distribución de transición completa para el proceso en estudio, modificado apenas por las inserciones de auto-energía del nucleón, es:

$$T^{(\text{MN})}(x_1; x_2) = -i\mathbf{g}^2 : \bar{\psi}(x_1) \Gamma S_{\text{tot}}(x_1 - x_2) \Gamma \psi(x_2) : : \varphi(x_1) \varphi(x_2) : , \quad (5.75)$$

con el propagador completo del nucleón,  $S_{\text{tot}}$ , poseyendo la expresión:

$$S_{\text{tot}} = S^F + S^F * (\Sigma * S^F) + S^F * \{ \Sigma * [S^F * (\Sigma * S^F)] \} + \dots , \quad (5.76)$$

cuya forma en el espacio de los impulsos es:

$$\hat{S}_{\text{tot}} = \hat{S}^F + (2\pi)^4 \hat{S}^F \hat{\Sigma} \hat{S}^F + (2\pi)^8 \hat{S}^F \hat{\Sigma} \hat{S}^F \hat{\Sigma} \hat{S}^F + \dots \\ = \hat{S}^F \left( 1 + (2\pi)^4 \hat{\Sigma} \hat{S}_{\text{tot}} \right) . \quad (5.77)$$

Escribiendo aquí la forma explícita del propagador de Feynman de este campo,

$$\hat{S}^F(p) = (2\pi)^{-2} \frac{1}{\not{p} - m_1 + i0^+} ,$$

obtenemos por resultado:

$$\hat{S}_{\text{tot}}(p) = (2\pi)^{-2} \frac{1}{\not{p} - \left( m_1 + (2\pi)^2 \hat{\Sigma}(p) \right) + i0^+} . \quad (5.78)$$

Es claro entonces que las mismas conclusiones a las que llegamos en relación con el propagador completo del mesón pueden ser aplicadas al nucleón: El cambio de normalización modifica la masa física de la partícula (el polo del propagador completo), así como a la constante de acoplamiento física de la interacción, esta vez debido al coeficiente de  $\not{p}$  en el denominador, en el límite en el que  $\not{p}$  se aproxima a  $m_1$ . Defínase los parámetros:

$$\delta := \lim_{\not{p} \rightarrow m_1} \hat{\Sigma}(p) \quad \text{and} \quad \kappa := \lim_{\not{p} \rightarrow m_1} \frac{d\hat{\Sigma}(p)}{d\not{p}} , \quad (5.79)$$

que como otrora se obtienen por la sola evaluación de  $\hat{\Sigma}(p)$  y su derivada en la capa másica, una vez que no hay divergencias infra-rojas. Las condiciones físicas de normalización serán:

- (1) El parámetro  $m_1$  es la masa física del fermión. Debemos demandar entonces que sea:

$$\lim_{\not{p} \rightarrow m_1} \tilde{\Sigma}(p) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -\delta . \quad (5.80)$$

- (2) El parámetro  $g$  es la constante de acoplamiento física de la interacción. Entonces:

$$\lim_{\not{p} \rightarrow m_1} \frac{d\tilde{\Sigma}(p)}{d\not{p}} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\kappa . \quad (5.81)$$

Esto fija por completo los términos de normalización de la auto-energía del nucleón.

Finalizamos este capítulo con una observación: Los términos considerados para la

obtención del propagador completo, ya del mesón, ya del nucleón, no son los únicos que contribuyen a los procesos de dispersión estudiados. Contribuyen también, por ejemplo, las correcciones al vértice y las «auto-energías a  $n$  loops»<sup>2</sup>. Las primeras son desconsideradas, pues no corresponden a correcciones al propagador de la partícula en estudio, sino a correcciones a la interacción. Las segundas, en principio, no son desconsideradas, pues sí corrigen al propagador de la partícula; el «propagador completo» que hemos calculado bien debiera llamarse «propagador completo al primer orden» (o «a un loop», en lenguaje convencional). En el caso más general, las Ecs. (5.66) y (5.78) aún se mantienen válidas, pero las distribuciones  $\Pi$  y  $\Sigma$  contienen las contribuciones a todos los órdenes. La imposición de las condiciones físicas de normalización no son ajenas a este hecho, pero son posibles porque tanto  $\Pi$  cuanto  $\Sigma$  las deben respetar a todos los órdenes en  $g$ .

---

<sup>2</sup>Esto es, aquellas distribuciones que, poseyendo apenas dos operadores de campo cuantificado sin contraer, como en los casos estudiados al segundo orden, no pueden ser descompuestos en productos de estos conectados por propagadores de Feynman. En lenguaje convencional, nos estamos refiriendo a los gráficos irreducibles [27] de mayor orden.

# Capítulo 6

## Estabilidad del vacío

### y del sector de una partícula

En el capítulo que ahora iniciamos fijaremos la consideración en el quinto axioma del sistema de Bogoliubov, Medvedev y Polivanov, a saber, a la estabilidad del sector de una partícula y la del estado de vacío. Su versión exacta ha sido enunciada en la Ec. (3.11), y la perturbativa, en la Ec. (3.35); esta última es la que usaremos en los cálculos explícitos. Con todo, será útil comenzar estudiando la primera. Lo primero que deseamos mostrar es que si  $\Phi$  es un estado normalizado del espacio de Fock, entonces:

$$S(g)\Phi = \Phi \quad \Leftrightarrow \quad \langle \Phi; S(g)\Phi \rangle = 1 \quad . \quad (6.1)$$

La necesidad es evidente porque hemos asumido  $\|\Phi\|^2 = 1$ . Cuanto a la suficiencia, basta ver que  $\langle \Phi; S(g)\Phi \rangle = 1$  implica que  $S(g)\Phi = \Phi + \Psi$ , con  $\langle \Phi; \Psi \rangle = 0$ , de manera que, como  $S(g)$  es unitario:

$$\|\Phi\|^2 = \langle S(g)\Phi; S(g)\Phi \rangle = \|\Phi\|^2 + \langle \Phi; \Psi \rangle + \langle \Psi; \Phi \rangle + \|\Psi\|^2 \quad , \quad (6.2)$$

de donde se sigue que  $\|\Psi\|^2 = 0$ , es decir, que  $\Psi = 0$ . El axioma de estabilidad puede entonces ser rephraseado de la forma que sigue. Escribimos  $S(g) = 1 + T(g)$ .

- 1)  $\Phi = \Omega$ : Debe cumplirse que  $\mathcal{E}_\Omega := \langle \Omega; T(g)\Omega \rangle = 0$ . Teniendo en cuenta los productos de Wick que componen a  $T(g)$ , la única posibilidad de que sea  $\mathcal{E}_\Omega \neq 0$  será proveniente de los términos de  $T(g)$  que no contienen operadores de campo cuantificado, esto es, de las distribuciones puramente numéricas.

2)  $\Phi = (0; \varphi_{\text{mesón}}; 0; \dots)$ : Debe ser  $\mathcal{E}_\Phi := \langle \Phi; T(g)\Phi \rangle = 0$ . Esta igualdad solo podría ser incumplida por acción de los términos en  $T(g)$  de la forma:

$$:\varphi\Pi\varphi: (g) \equiv \int d^4x_1 d^4x_2 g(x_1)g(x_2) : \varphi(x_1)\Pi(x_1 - x_2)\varphi(x_2): \quad . \quad (6.3)$$

3)  $\Psi = (0; \psi_{\text{nucleón}}; 0; \dots)$ : Es preciso que sea  $\mathcal{E}_\Psi := \langle \Psi; T(g)\Psi \rangle = 0$ . Ahora solo podría ser  $\mathcal{E}_\Psi \neq 0$  por virtud de los términos en  $T(g)$  de la forma:

$$:\bar{\psi}\Sigma\psi: (g) \equiv \int d^4x_1 d^4x_2 g(x_1)g(x_2) : \bar{\psi}(x_1)\Sigma(x_1 - x_2)\psi(x_2): \quad . \quad (6.4)$$

Como estaremos interesados en indagar la estabilidad de la teoría física, la herramienta necesaria para el estudio de las consecuencias del axioma de estabilidad es el límite adiabático, el cual realizaremos, como en la Ref. [33], por escalamiento, lo que significa elegir una función  $g_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$  tal que  $g_0(0) = 1$ , y definir la familia de funciones de conmutación:

$$g_\epsilon(x) := g_0(\epsilon x) \quad . \quad (6.5)$$

El límite adiabático corresponde entonces al límite  $\epsilon \rightarrow 0$ , pues, efectivamente, cualquiera que sea el punto  $x \in \mathbb{M}$ :  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_\epsilon(x) = 1$ . Como hemos venido realizando los cálculos en el espacio de los impulsos, será conveniente escribir la transformada de Fourier de la función de prueba  $g_\epsilon$ :

$$\hat{g}_\epsilon(p) = (2\pi)^{-2} \int e^{ipx} g_\epsilon(p) d^4x = (2\pi)^{-2} \int e^{ipx} g_0(\epsilon x) d^4x = \frac{1}{\epsilon^4} \hat{g}_0\left(\frac{p}{\epsilon}\right) \quad . \quad (6.6)$$

Y su límite para  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \hat{g}_\epsilon(p) = (2\pi)^{-2} \int e^{ipx} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_0(\epsilon x) d^4x = (2\pi)^{-2} \int e^{ipx} d^4x = (2\pi)^2 \delta(p) \quad . \quad (6.7)$$

La comparación de las ecuaciones (6.6) y (6.7) nos permite establecer que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^4} \hat{g}_0 \left( \frac{p}{\epsilon} \right) = (2\pi)^2 \delta(p) \quad , \quad (6.8)$$

e integrando a ambos lados de esta igualdad:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^4 p \hat{g}_0(p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^4 p \frac{1}{\epsilon^4} \hat{g}_0 \left( \frac{p}{\epsilon} \right) = \int d^4 p (2\pi)^2 \delta(p) = (2\pi)^2 \quad . \quad (6.9)$$

## 6.1. Estabilidad del estado del vacío

Empecemos, por conveniencia posterior, por estudiar la estabilidad del estado de vacío, cuya ocurrencia significaría la corrección de la teoría sobre él definida; cuya inoocurrencia implicaría que los estados asintóticos que sobre él se han construido no están bien definidos.

El estudio de la estabilidad del estado de vacío al segundo orden debe comenzar, ¿cómo no?, por el estudio de la distribución de transición vacío-vacío que se deriva de la distribución causal del mismo orden. Tenemos que, en el límite adiabático:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\Omega &= \frac{1}{2} \lim_{g \rightarrow 1} \int d^4 x_1 d^4 x_2 g(x_1) g(x_2) \langle \Omega, T_2(x_1; x_2) \Omega \rangle \\ &= \frac{1}{2} \lim_{g \rightarrow 1} \int d^4 x_1 d^4 x_2 g(x_1) g(x_2) T_2^{(V)}(x_1 - x_2) \quad . \end{aligned} \quad (6.10)$$

Expresando la distribución  $T_2^{(V)}$  en función de su transformada de Fourier y utilizando entonces la Ec. (6.6) para realizar el límite adiabático por escalamiento:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\Omega &\sim \lim_{g \rightarrow 1} \int d^4 k \tilde{T}_2^{(V)}(k) \hat{g}(k) \hat{g}(-k) \\ &\sim \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^8} \int d^4 k \tilde{T}_2^{(V)}(k) \hat{g}_0 \left( \frac{k}{\epsilon} \right) \hat{g}_0 \left( -\frac{k}{\epsilon} \right) \quad . \end{aligned} \quad (6.11)$$

Aquí vemos que, si usáramos directamente la Ec. (6.8), entonces obtendríamos el producto  $\delta(k)\delta(-k)$  en el integrando de la ecuación anterior, producto aquel que es in-

definido. Luego el límite adiabático no es trivial. Realicemos entonces el cambio de variable  $k = \epsilon p$ :

$$\mathcal{E}_\Omega \sim \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^4} \int d^4 p \tilde{T}_2^{(V)}(\epsilon p) \hat{g}_0(p) \hat{g}_0(-p) \quad . \quad (6.12)$$

Así vemos que la estabilidad del vacío se asegura por la igualdad:  $\tilde{T}_2^{(V)}(\epsilon p) = \mathcal{O}(\epsilon^5)$ .

Esta relación es la que debemos examinar.

Como fue establecido en la Sec. 4.3, la distribución causal del segundo orden que corresponde a la transición vacío-vacío es dada por:

$$D_2^{(V)}(x_1; x_2) = i \mathbf{g}^2 [d(y) - d(-y)] \quad ; \quad d(y) = \text{Tr} [S_-(y) \Gamma S_+(-y) \Gamma D_-(y)] \quad . \quad (6.13)$$

La transformada de Fourier de la distribución  $d(y)$  es:

$$\begin{aligned} \hat{d}(p) &= (2\pi)^{-2} \int d^4 y \text{Tr} [S_-(y) \Gamma S_+(-y) \Gamma] D_-(y) e^{ipy} \\ &= (2\pi)^{-8} \int d^4 y d^4 q_1 d^4 q_2 d^4 q_3 \text{Tr} [\hat{S}_-(-q_1) \Gamma \hat{S}_+(-q_2) \Gamma] \hat{D}_-(q_3) e^{i(p+q_1-q_2-q_3)y} \\ &= (2\pi)^{-4} \int d^4 q_1 d^4 q_2 \text{Tr} [\hat{S}_-(-q_1) \Gamma \hat{S}_+(-q_2) \Gamma] \hat{D}_-(p+q_1-q_2) \quad . \quad (6.14) \end{aligned}$$

Escribiendo la forma explícita de las distribuciones de (anti-)conmutación que aquí aparecen y haciendo el cambio de variables  $q_{1,2} \rightarrow -q_{1,2}$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \hat{d}(p) &= -i(2\pi)^{-7} \int d^4 q_1 d^4 q_2 \text{Tr} [(\not{q}_1 + m_1) \Gamma (\not{q}_2 + m_1) \Gamma] \Theta(q_2^0) \Theta(-q_1^0) \\ &\quad \times \delta(q_1^2 - m_1^2) \delta(q_2^2 - m_1^2) \Theta(q_1^0 - q_2^0 - p^0) \delta((q_1 - q_2 - p)^2 - m_2^2) \quad . \quad (6.15) \end{aligned}$$

Podemos, convenientemente, multiplicar el integrando por la unidad, escrita como:

$1 = \int d^4 k \delta(q_2 - q_1 - k)$ . Luego, integrando en la variable  $q_2$  llegamos al resultado:

$$\hat{d}(p) = -i(2\pi)^{-3} \mathbf{g}^{-2} \int d^4 k \hat{P}(k) \Theta(-k^0 - p^0) \delta((k+p)^2 - m_2^2) \quad , \quad (6.16)$$

en donde hemos identificado la distribución  $\hat{P}(k)$  que aparecía en el cálculo de la autoenergía del mesón, y cuyo valor es:

$$\hat{P}(k) = \frac{g^2}{2(2\pi)^3} [2(\epsilon + 1)m_1^2 - \epsilon k^2] \Theta(k_0) \Theta(k^2 - 4m_1^2) \sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{k^2}} \quad , \quad (6.17)$$

de modo que:

$$\begin{aligned} \hat{d}(p) = & -\frac{i}{2}(2\pi)^{-6} \int d^4k [2(\epsilon + 1)m_1^2 - \epsilon k^2] \sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{k^2}} \Theta(k_0) \Theta(-k_0 - p_0) \\ & \times \Theta(k^2 - 4m_1^2) \delta((k + p)^2 - m_2^2) \quad . \end{aligned} \quad (6.18)$$

El soporte del integrando requiere que sean  $k \in V^+$  y  $-k - p \in V^+$ , de donde se sigue que  $-p = k + (-k - p) \in V^+$ , es decir, que  $p \in V^-$ . Entonces es posible elegir un sistema inercial de referencia en el que sea  $p = (p_0; \mathbf{0})$ . En él, la Ec. (6.18) adopta la forma:

$$\begin{aligned} \hat{d}(p_0) = & -\frac{i}{2}(2\pi)^{-6} \int d^4k [2(\epsilon + 1)m_1^2 - \epsilon k^2] \sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{k^2}} \Theta(k_0) \Theta(-k_0 - p_0) \\ & \times \Theta(k^2 - 4m_1^2) \delta((k_0 + p_0)^2 - |\mathbf{k}|^2 - m_2^2) \quad , \end{aligned} \quad (6.19)$$

cuya integral en las variables  $k_i$  puede ser inmediatamente realizada apelando a la simetría esférica del integrando al través de la distribución delta de Dirac. Así:

$$\begin{aligned} \hat{d}(p_0) = & -\frac{i}{2}(2\pi)^{-5} \int dk_0 \sqrt{(k_0 + p_0)^2 - m_2^2} \sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{k_0^2 - (k_0 + p_0)^2 + m_2^2}} \\ & \times \{2(\epsilon + 1)m_1^2 - \epsilon [k_0^2 - (k_0 + p_0)^2 + m_2^2]\} \Theta(k_0) \Theta(-k_0 - p_0) \\ & \times \Theta(k_0^2 - (k_0 + p_0)^2 + m_2^2 - 4m_1^2) \Theta((k_0 + p_0)^2 - m_2^2) \quad . \end{aligned} \quad (6.20)$$

Realicemos a continuación el cambio de variables:

$$s^2 = k_0^2 - (k_0 + p_0)^2 + m_2^2 = -p_0^2 - 2p_0k_0 + m_2^2 \quad ; \quad 4m_1^2 \leq s^2 \leq (p_0 + m_2)^2 \quad , \quad (6.21)$$

en función de la cual la Ec. (6.20) se escribe:

$$\hat{d}(p_0) = \frac{im_1}{2p_0^2} (2\pi)^{-5} \Theta(-p_0) \Theta(p_0^2 - 4m_1^2 + m_2^2) \{2(\epsilon + 1)m_1^2 I_1(p_0) - \epsilon I_2(p_0)\} \quad , \quad (6.22)$$

con las integrales  $I_{1,2}(p_0)$  definidas a seguir:

$$I_1(p_0) = \int_{2m_1}^{-p_0 - m_2} ds \sqrt{\frac{s^2}{4m_1^2} - 1} \sqrt{(p_0^2 + m_2^2 - s^2)^2 - 4p_0^2 m_2^2} \quad , \quad (6.23)$$

$$I_2(p_0) = \int_{2m_1}^{-p_0 - m_2} ds s^2 \sqrt{\frac{s^2}{4m_1^2} - 1} \sqrt{(p_0^2 + m_2^2 - s^2)^2 - 4p_0^2 m_2^2} \quad . \quad (6.24)$$

Estas integrales, no embargante, no tienen solución en términos de funciones elementales<sup>1</sup>. Pero no significará eso que no podamos obtener alguna información de ellas.

Con efecto, sea  $l$  un parámetro, al escalar el impulso  $p_0$  por él:

$$\begin{aligned} I_1\left(\frac{p_0}{l}; m_1; m_2\right) &= \int_{2m_1}^{-p_0/l - m_2} ds \sqrt{\frac{s^2}{4m_1^2} - 1} \sqrt{\left(\frac{p_0^2}{l^2} + m_2^2 - s^2\right)^2 - 4\frac{p_0^2}{l^2} m_2^2} \\ &= \frac{1}{l^3} \int_{2lm_1}^{-p_0 - lm_2} dr \sqrt{\frac{r^2}{4l^2 m_1^2} - 1} \sqrt{(p_0^2 + l^2 m_2^2 - r^2)^2 - 4p_0^2 l^2 m_2^2} \quad . \end{aligned} \quad (6.25)$$

El paso de la primera a la segunda línea de este desarrollo ha sido posible por la substitución  $r = ls$ . Lo mismo puede ser hecho de modo idéntico para la integral  $I_2$ . Estas

<sup>1</sup>Como no la tienen, por regla general, las integrales de la raíz cuadrada de un polinomio del tercer grado o más. En este caso, el polinomio bajo el radicando es del sexto grado. Él podría reducirse al producto de un polinomio por la raíz cuadrada de un polinomio del segundo grado si la masa del mesón fuera nula,  $m_2 = 0$ , en cuyo caso la integral puede ser resuelta; el resultado se asimilaría así al de la electrodinámica cuantificada [33]. Mantendremos la discusión, empero, para el caso de  $m_2 \neq 0$ , como hemos venido haciendo en este trabajo. Las condiciones según las cuales una determinada integral puede ser resuelta en términos de funciones elementales fueron estudiadas por Liouville en la Ref. [89].

integrales, encontramos, siguen las siguientes leyes de escala:

$$I_1\left(\frac{p_0}{l}; m_1; m_2\right) = \frac{1}{l^3} I_1(p_0; lm_1; lm_2) \quad , \quad (6.26)$$

$$I_2\left(\frac{p_0}{l}; m_1; m_2\right) = \frac{1}{l^5} I_2(p_0; lm_1; lm_2) \quad . \quad (6.27)$$

Con estas en la Ec. (6.22) y luego en la Ec. (6.13) ya es inmediato probar que la distribución causal se escala, cuando  $s > 0$ , según:

$$\hat{D}_2^{(V)}\left(\frac{p}{s}; m_1; m_2\right) = \frac{1}{s^4} \hat{D}_2^{(V)}(p; sm_1; sm_2) \quad . \quad (6.28)$$

Al efectuar el límite para  $s \rightarrow 0^+$ , entonces, encontramos que la cuasi-asíntota de la distribución causal es igual a su versión de masas nulas,  $\hat{D}_2^{(V)}(p; 0; 0)$ , así como que el orden singular de esta distribución es:

$$\omega\left[D_2^{(V)}\right] = +4 \quad . \quad (6.29)$$

Este resultado es esencial cuando se lo combina con el hecho de que la solución central existe para las distribuciones causales correspondientes a teorías masivas [31, 95]<sup>2</sup>, pues al ser esta la suerte, la distribución retardada central cumplirá la condición de normalización:

$$\forall a \text{ con } |a| \leq 4 : \quad D^a \hat{R}_2^{(V)}(0) = 0 \quad . \quad (6.30)$$

O, en otras palabras:

$$\hat{R}_2^{(V)}(p) = \mathcal{O}(p^5) \quad . \quad (6.31)$$

Todavía más, realmente podemos decir que esta distribución retardada se comporta como  $\mathcal{O}(p^6)$ , pues la invariancia por paridad impide que ella dependa de potencias

---

<sup>2</sup>Y aún en el caso de la electrodinámica, en la que el fotón no tiene masa, la solución central siempre existe [33], lo cual ha sido probado por Blanchard y Seneor [96]. Cuando en la teoría todos los campos no tienen masa, por otra parte, la solución central no existe –este es el caso de la cromodinámica cuantificada en ausencia de materia [39]–.

impares del impulso. Adicionalmente, la distribución subsidiaria es  $\hat{R}'_2^{(V)}(p) \sim \hat{d}(p) \sim \Theta(p^2 - 4m_1^2 + m_2^2)$ , y entonces ella no contribuye en el límite  $p \rightarrow 0$ . Se sigue de esto que la distribución de transición vacío-vacío hereda el comportamiento de  $\hat{R}_2^{(V)}$  de la Ec. (6.31), «a menos de un polinomio de normalización del cuarto grado»:

$$\tilde{T}_2^{(V)}(p) = \mathcal{O}(p^6) + C_0 + C_2 p^2 + C_4 p^4 \quad . \quad (6.32)$$

Al insertar este resultado en la Ec. (6.12), encontramos que:

$$\mathcal{E}_\Omega \sim \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^4} \int d^4 p \{ \mathcal{O}(\epsilon^6) + C_0 + \epsilon^2 C_2 p^2 + \epsilon^4 C_4 p^4 \} \hat{g}_0(p) \hat{g}_0(-p) \quad . \quad (6.33)$$

El límite, pues, existe y es nulo para la parte que comprende a  $\mathcal{O}(\epsilon^6)$ . Cuanto al polinomio de normalización, el límite adiabático existe solo cuando elegimos:

$$C_0 = 0 = C_2 \quad , \quad (6.34)$$

cualquiera que sea el valor de  $C_4$ :

$$\mathcal{E}_\Omega \sim C_4 \int d^4 p p^4 \hat{g}_0(p) \hat{g}_0(-p) \quad . \quad (6.35)$$

La imposición de que el estado del vacío sea estable nos obliga, vemos, a elegir también:

$$C_4 = 0 \quad , \quad (6.36)$$

resultado este que, de paso, asegura que el límite adiabático es independiente de cuál sea la función de conmutación  $g_0$  elegida. Hemos probado así, explícitamente, que los términos de normalización pueden ser elegidos de forma que el estado del vacío sea estable –al segundo orden–.

## 6.2. Estabilidad del sector de una partícula mesónica

Consideremos el estado de una partícula mesónica:

$$\Phi = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{2p_0}} \phi(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{p}) \Omega \quad . \quad (6.37)$$

La parte de la distribución de transición que contribuirá al parámetro de estabilidad será la que corresponde a la auto-energía del mesón:

$$T^{(M)}(g) = \frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 : \varphi(x_1) \Pi(x_1 - x_2) \varphi(x_2) : g(x_1) g(x_2) \quad . \quad (6.38)$$

El parámetro de estabilidad que corresponde a la acción del operador de dispersión sobre el estado  $\Phi$  de la Ec. (6.37) es:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\Phi &= \lim_{g \rightarrow 1} \langle \Phi, T^{(M)}(g) \Phi \rangle \\ &\sim \lim_{g \rightarrow 1} \int d^4x_1 d^4x_2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{2p_0}} \frac{d^3\mathbf{q}}{\sqrt{2q_0}} \phi(\mathbf{p})^* \phi(\mathbf{q}) g(x_1) g(x_2) \Pi(x_1 - x_2) \\ &\quad \times \langle \Omega; a(\mathbf{p}) : \varphi(x_1) \varphi(x_2) : a^\dagger(\mathbf{q}) \Omega \rangle \quad . \end{aligned} \quad (6.39)$$

Usando el teorema de Wick:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\Phi &\sim \lim_{g \rightarrow 1} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{2p_0}} \frac{d^3\mathbf{q}}{\sqrt{2q_0}} \Theta(p_0) \Theta(q_0) \phi(\mathbf{p})^* \phi(\mathbf{q}) \int d^4x_1 d^4x_2 g(x_1) g(x_2) \Pi(x_1 - x_2) \\ &\quad \times (e^{i(px_1 - qx_2)} + e^{i(px_2 - qx_1)}) \quad . \end{aligned} \quad (6.40)$$

Introducimos aquí las transformadas de Fourier de los diferentes factores que aparecen:

$$g(x_l) \sim \frac{1}{\epsilon^4} \int d^4k_l e^{-ik_l x_l} \hat{g}_0 \left( \frac{k_l}{\epsilon} \right) \quad , \quad \Pi(x_1 - x_2) \sim \int d^4q e^{-iq(x_1 - x_2)} \tilde{\Pi}(q) \quad , \quad (6.41)$$

con lo cual:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\Phi &\sim \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^8} \int d^4 k_1 d^4 k_2 d^4 k \frac{d^3 \mathbf{p}}{\sqrt{2p_0}} \frac{d^3 \mathbf{q}}{\sqrt{2q_0}} \Theta(p_0) \Theta(q_0) \phi(\mathbf{p})^* \phi(\mathbf{q}) \hat{g}_0 \left( \frac{k_1}{\epsilon} \right) \hat{g}_0 \left( \frac{k_2}{\epsilon} \right) \tilde{\Pi}(k) \\
&\quad \times \int d^4 x_1 d^4 x_2 \left\{ e^{i(p-k_1-k)x_1 + i(-q-k_2+k)x_2} + e^{i(-q-k_1-k)x_1 + i(p-k_2+k)x_2} \right\} \\
&\sim \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^8} \int d^4 k_1 d^4 k_2 d^4 k \frac{d^3 \mathbf{p}}{\sqrt{2p_0}} \frac{d^3 \mathbf{q}}{\sqrt{2q_0}} \Theta(p_0) \Theta(q_0) \phi(\mathbf{p})^* \phi(\mathbf{q}) \hat{g}_0 \left( \frac{k_1}{\epsilon} \right) \hat{g}_0 \left( \frac{k_2}{\epsilon} \right) \tilde{\Pi}(k) \\
&\quad \times [\delta(p - k_1 - k) \delta(q + k_2 - k) + \delta(q + k_1 + k) \delta(p - k_2 + k)] \quad . \quad (6.42)
\end{aligned}$$

Integrando en las variables  $k_1$  y  $k_2$  en virtud de las distribuciones delta de Dirac:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\Phi &\sim \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^8} \int d^4 k \frac{d^3 \mathbf{p}}{\sqrt{2p_0}} \frac{d^3 \mathbf{q}}{\sqrt{2q_0}} \Theta(p_0) \Theta(q_0) \phi(\mathbf{p})^* \phi(\mathbf{q}) \tilde{\Pi}(k) \\
&\quad \times \left\{ \hat{g}_0 \left( \frac{p-k}{\epsilon} \right) \hat{g}_0 \left( \frac{k-q}{\epsilon} \right) + \hat{g}_0 \left( \frac{-k-q}{\epsilon} \right) \hat{g}_0 \left( \frac{p+k}{\epsilon} \right) \right\} \quad . \quad (6.43)
\end{aligned}$$

Al efectuar el cambio  $k \rightarrow -k$  en la segunda integral notamos que ella se iguala a la primera, pues las distribuciones de transición deben ser simétricas frente a la permutación de sus argumentos, lo que aquí significa que  $\Pi(x_1 - x_2) = \Pi(x_2 - x_1)$ , y así también  $\tilde{\Pi}(-k) = \tilde{\Pi}(k)$ —esto, además, es evidente porque  $\tilde{\Pi}(k)$  depende apenas de  $k^2$ —. Así tendremos que:

$$\mathcal{E}_\Phi \sim \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^8} \int d^4 k \frac{d^3 \mathbf{p}}{\sqrt{2p_0}} \frac{d^3 \mathbf{q}}{\sqrt{2q_0}} \Theta(p_0) \Theta(q_0) \phi(\mathbf{p})^* \phi(\mathbf{q}) \tilde{\Pi}(k) \hat{g}_0 \left( \frac{p-k}{\epsilon} \right) \hat{g}_0 \left( \frac{k-q}{\epsilon} \right) \quad . \quad (6.44)$$

Como podemos ver, el límite adiabático es trivial, pues al aplicarlo según lo indica la Ec. (6.8) e integrar en la variable  $k$ , obtenemos:

$$\mathcal{E}_\Phi \sim \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{2p_0} \frac{d^3 \mathbf{q}}{2q_0} \Theta(p_0) \Theta(q_0) \phi(\mathbf{p})^* \phi(\mathbf{q}) \delta(p - q) \tilde{\Pi}(p) \quad . \quad (6.45)$$

En este punto, reconocemos que el impulso que es argumento de  $\tilde{\Pi}$  es el impulso  $p$  del paquete de ondas de los estados de una partícula. Por supuesto, esto es un abuso de

lenguaje, pues tal estado no tiene «un» impulso definido. Lo que es importante admitir, empero, es que aún cuando esta cantidad esté distribuida en un determinado rango de variación, está en cada valor sujeto a la condición de capa másica, esto es, se cumple en todo valor de  $p$  que  $p^2 = m_2^2$ . Esto es suficiente, pues  $\tilde{\Pi}(p)$  depende únicamente de  $p^2$ . Luego podemos extraer este valor constante de la integral. En lo que refiere al resto de la expresión, escribiendo la distribución delta de Dirac en su forma exponencial y definiendo los paquetes de onda en el espacio real

$$\tilde{\phi}(x) := (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{2p_0}} \Theta(p_0) e^{-ipx} \phi(\mathbf{p}) \quad , \quad (6.46)$$

tenemos la expresión final:

$$\mathcal{E}_\Phi \sim \tilde{\Pi}(p) \Big|_{p^2=m_2^2} \int d^4x \left| \tilde{\phi}(x) \right|^2 \quad . \quad (6.47)$$

Concluimos que la estabilidad del mesón en la teoría de Yukawa se obtiene por la imposición de la condición de normalización:

$$\tilde{\Pi}(p) \Big|_{p^2=m_2^2} = 0 \quad . \quad (6.48)$$

Esta fue, recordamos, la misma condición de normalización que impusimos anteriormente para preservar el significado físico del parámetro  $m_2$  como siendo la masa del mesón. Vemos, pues, que cualquier procedimiento de renormalización de la masa llevaría al incumplimiento de la Ec. (6.48) y con ello a la inestabilidad del mesón.

La condición de la Ec. (6.48) es general, y no se restringe solamente al segundo orden. Todavía hay más: Consideremos dicha ecuación válida para el segundo orden y busquemos las correcciones de órdenes superiores por inserción de estas auto-energías, semejantemente a como hicimos para obtener el propagador completo. Al cuarto orden,

la distribución de transición será

$$\Pi(x_1 - x_3)D^F(x_3 - x_4)\Pi(x_4 - x_2) : \varphi(x_1)\varphi(x_2) : \quad , \quad (6.49)$$

que, gracias al teorema de convolución, se escribe en el espacio de los impulsos:

$$(2\pi)^4 \tilde{\Pi}(p) \hat{D}^F(p) \tilde{\Pi}(p) \quad , \quad (6.50)$$

y esta distribución deberá anularse en la capa másica para satisfacer a la Ec. (6.48). Como  $\hat{D}^F(p)$  tiene un polo en ella, la recién encontrada distribución se vuelve un límite indeterminado en las proximidades de la capa másica, y es menester aplicar la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{p^2 \rightarrow m_2^2} \frac{\tilde{\Pi}(p)^2}{p^2 - m_2^2 + i0^+} = \lim_{p^2 \rightarrow m_2^2} 2\tilde{\Pi}(p) \frac{d\tilde{\Pi}(p)}{dp^2} \quad . \quad (6.51)$$

Este límite se anula debido al anulamiento de  $\tilde{\Pi}(p)$  si y solo si la primera derivada es finita en la capa másica. Esto ocurre siempre en el modelo de Yukawa porque, al ser las dos partículas masivas, las auto-energías son analíticas [27, 95].

De forma general, la contribución del orden  $(2n)$ -ésimo será  $(2\pi)^{4(n-1)} \tilde{\Pi}(p)^n \hat{D}^F(p)^{n-1}$ .

La suma de todas estas correcciones nos lleva a definir la «auto-energía completa al segundo orden», esto es, la auto-energía obtenida como la suma de todas las inserciones de auto-energía del segundo orden:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_{\text{tot}}(p) &= \tilde{\Pi}(p) + (2\pi)^4 \tilde{\Pi}(p) \hat{D}^F(p) \tilde{\Pi}(p) + (2\pi)^8 \tilde{\Pi}(p) \hat{D}^F(p) \tilde{\Pi}(p) \hat{D}^F(p) \tilde{\Pi}(p) + \dots \\ &= \tilde{\Pi}(p) \left( 1 + (2\pi)^4 \hat{D}^F(p) \tilde{\Pi}(p) \right) \quad , \end{aligned} \quad (6.52)$$

de donde se concluye que:

$$\tilde{\Pi}_{\text{tot}}(p) = \frac{\tilde{\Pi}(p)}{1 - (2\pi)^4 \tilde{\Pi}(p) \hat{D}^F(p)} \quad . \quad (6.53)$$

Y colocando la expresión explícita de  $\hat{D}^F(p)$ , finalmente:

$$\tilde{\Pi}_{\text{tot}}(p) = \frac{(p^2 - m_2^2)\tilde{\Pi}(p)}{p^2 - \left[ m_2^2 - (2\pi)^2\tilde{\Pi}(p) \right] + i0^+} . \quad (6.54)$$

Aquí,  $\tilde{\Pi}(p)$ , insistimos, es la auto-energía al segundo orden. Como esta ya satisface a la Ec. (6.48), vemos que tanto el numerador cuanto el denominador de  $\tilde{\Pi}_{\text{tot}}(p)$  se anulan en la capa másica. Luego, para exigir que esta distribución completa satisfaga a la condición de estabilidad es necesario, otra vez, aplicar la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{p^2 \rightarrow m_2^2} \tilde{\Pi}_{\text{tot}}(p) = \lim_{p^2 \rightarrow m_2^2} \frac{\tilde{\Pi}(p) + (p^2 - m_2^2) \frac{d\tilde{\Pi}(p)}{dp^2}}{1 + (2\pi)^2 \frac{d\tilde{\Pi}(p)}{dp^2}} . \quad (6.55)$$

Este límite es nulo siempre y cuando:

$$\left. \frac{d\tilde{\Pi}(p)}{dp^2} \right|_{p^2=m_2^2} \in \mathbb{R} \setminus \{-(2\pi)^{-2}\} . \quad (6.56)$$

Cuando el valor adoptado por la primera derivada es el infinito, el límite se vuelve indeterminado y nada podemos concluir, como se ve claramente de la Ec. (6.51). Así pues, la finitud de la primera derivada de la auto-energía es condición de estabilidad, y junto con la anulación de la auto-energía en la capa másica, es también suficiente a todos los órdenes, a menos que su valor sea exactamente  $-(2\pi)^{-2}$ . En tal caso es necesario aplicar una vez más la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{p^2 \rightarrow m_2^2} \tilde{\Pi}_{\text{tot}}(p) = (2\pi)^{-2} \lim_{p^2 \rightarrow m_2^2} \left\{ (p^2 - m_2^2) + 2 \frac{d\tilde{\Pi}/d(p^2)}{d^2\tilde{\Pi}/d(p^2)^2} \right\} . \quad (6.57)$$

Es evidente que el primer término se anula. Por lo que respecta al segundo, como el numerador adopta un valor finito no nulo, la condición de estabilidad solamente podrá ser satisfecha si el denominador, esto es, la segunda derivada de la auto-energía, es

infinita. Sin embargo insistimos: En el modelo de Yukawa esto no puede ocurrir porque las auto-energías son analíticas. Luego es imperativo que la primera derivada de la auto-energía no asuma el valor  $-(2\pi)^{-2}$  en la capa másica. Note el lector que, fuera de esta condición, el valor de dicha derivada no interfiere en la estabilidad de la partícula, y que como ella se relaciona con el valor de la constante de acoplamiento  $g$  de la forma que vimos en el estudio de los propagadores completos, concluimos que una renormalización de esta es, en principio, perfectamente admisible. Sobre la limitación de que la derivada no pueda ser igual a  $-(2\pi)^{-2}$ , una rápida mirada al propagador completo del mesón [Ec. (5.66)] indica que, si la normalización fuera hecha precisamente en este valor, entonces el propagador completo ya no tendría dependencia con  $p^2$  en su denominador. A falta de mayor análisis de las consecuencias que esto tendría, semejante comportamiento es, como mínimo, indeseable.

### 6.3. Estabilidad del sector de una partícula nucleónica

El análisis de la estabilidad del sector de una partícula nucleónica sigue el mismo camino que el recién recorrido, con apenas ligeras modificaciones debido al carácter matricial de algunos objetos y la presencia de los espinores  $u_s(\mathbf{p})$ . Consideremos a este propósito el estado inicial:

$$\Psi = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{2p_0}} \chi(\mathbf{p}) b_s^\dagger(\mathbf{p}) \Omega \quad . \quad (6.58)$$

En este caso la parte del operador de dispersión que debemos considerar es la que corresponde a la auto-energía del nucleón:

$$T^{(N)}(g) = -\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 g(x_1) g(x_2) : \bar{\psi}(x_1) \Sigma(x_1 - x_2) \psi(x_2) : \quad . \quad (6.59)$$

El parámetro de estabilidad viene entonces dado por la expresión:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\Psi &= \lim_{g \rightarrow 1} \langle \Psi; T^{(N)}(g)\Psi \rangle \\
&\sim \lim_{g \rightarrow 1} \int d^4x_1 d^4x_2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{2p_0}} \frac{d^3\mathbf{q}}{\sqrt{2q_0}} \chi(\mathbf{p})^* \chi(\mathbf{q}) g(x_1) g(x_2) \\
&\quad \times \langle \Omega; b_s(\mathbf{p}) : \bar{\psi}(x_1) \Sigma(x_1 - x_2) \psi(x_2) : b_s^\dagger(\mathbf{q}) \Omega \rangle \quad . \quad (6.60)
\end{aligned}$$

Usando del teorema de Wick, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\Psi &\sim \lim_{g \rightarrow 1} \int d^4x_1 d^4x_2 \int d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q} \Theta(p_0) \Theta(q_0) \chi(\mathbf{p})^* \chi(\mathbf{q}) g(x_1) g(x_2) \\
&\quad \times \bar{u}_s(\mathbf{p}) \Sigma(x_1 - x_2) u_s(\mathbf{q}) e^{ipx_1 - iqx_2} \quad . \quad (6.61)
\end{aligned}$$

Introduciendo la transformada de Fourier de los diferentes factores de modo semejante a como fue hecho en la Ec. (6.41):

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\Psi &\sim \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^8} \int d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q} \Theta(p_0) \Theta(q_0) \chi(\mathbf{p})^* \chi(\mathbf{q}) \int d^4k d^4k_1 d^4k_2 \hat{g}_0\left(\frac{k_1}{\epsilon}\right) \hat{g}_0\left(\frac{k_2}{\epsilon}\right) \\
&\quad \times \bar{u}_s(\mathbf{p}) \tilde{\Sigma}(k) u_s(\mathbf{q}) \int d^4x_1 d^4x_2 e^{i(p_1 - k_1 - q)x_1 - i(p + k_2 - q)x_2} \\
&\sim \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^8} \int d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q} \Theta(p_0) \Theta(q_0) \chi(\mathbf{p})^* \chi(\mathbf{q}) \int d^4k d^4k_1 d^4k_2 \hat{g}_0\left(\frac{k_1}{\epsilon}\right) \hat{g}_0\left(\frac{k_2}{\epsilon}\right) \\
&\quad \times \bar{u}_s(\mathbf{p}) \tilde{\Sigma}(k) u_s(\mathbf{q}) \delta(p - k_1 - k) \delta(q + k_2 - k) \quad . \quad (6.62)
\end{aligned}$$

Integrando en las variables  $k_1$  y  $k_2$  con ayuda de las distribuciones delta de Dirac:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\Psi &\sim \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^8} \int d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q} \Theta(p_0) \Theta(q_0) \chi(\mathbf{p})^* \chi(\mathbf{q}) \\
&\quad \times \int d^4k \bar{u}_s(\mathbf{p}) \tilde{\Sigma}(k) u_s(\mathbf{q}) \hat{g}_0\left(\frac{p - k}{\epsilon}\right) \hat{g}_0\left(\frac{k - q}{\epsilon}\right) \quad . \quad (6.63)
\end{aligned}$$

Nuevamente el límite adiabático puede ser tomado trivialmente al través de la Ec. (6.8).

Integrando entonces en la variable  $k$ :

$$\mathcal{E}_\Psi \sim \int d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{q}\Theta(p_0)\Theta(q_0)\chi(\mathbf{p})^*\chi(\mathbf{q})\bar{u}_s(\mathbf{p})\tilde{\Sigma}(p)u_s(\mathbf{q})\delta(p-q) \quad . \quad (6.64)$$

Reconocemos aquí que el impulso en el que se evalúa la auto-energía del nucleón es el impulso  $p$  que, por ser el que interviene en la construcción del paquete de ondas, está siempre sujeto a la condición de ser  $\not{p} = m_1$ . Como es solo de esta matriz que depende  $\tilde{\Sigma}$ , podemos retirar el valor constante que él adopta en la integral hacia afuera de ella. Si además escribimos la distribución delta de Dirac en su forma exponencial y definimos el paquete de ondas en el espacio real

$$\beta(x) := (2\pi)^{-3/2} \int d^3\mathbf{p}\Theta(p_0)e^{-ipx}\chi(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) \quad , \quad (6.65)$$

entonces la condición de estabilidad se reduce a:

$$\mathcal{E}_\Psi \sim \int \bar{\beta}(x) \tilde{\Sigma}(p) \Big|_{\not{p}=m_1} \beta(x) d^4x \quad . \quad (6.66)$$

De esta manera nos vemos forzados a admitir que la auto-energía del nucleón satisface al axioma de estabilidad del sector de una partícula si es impuesta la condición de normalización:

$$\tilde{\Sigma}(p) \Big|_{\not{p}=m_1} = 0 \quad . \quad (6.67)$$

También esta había sido la condición impuesta en el estudio del propagador completo del nucleón para que el parámetro  $m_1$  tenga el significado de ser la masa de esta partícula, sobre la cual, una vez más, está prohibido aplicar cualquier procedimiento de renormalización una vez que este causaría su inestabilidad.

Al igual que como hicimos con el mesón, recordamos al lector que la condición recién obtenida es general, y pasamos a considerar ahora la auto-energía al segundo

orden y sus múltiples inserciones. Primeramente, en el cuarto orden la distribución de auto-energía es:

$$\tilde{\Sigma}(p)\hat{S}^F(p)\tilde{\Sigma}(p) \quad , \quad (6.68)$$

que deberá anularse en la capa másica. Como  $\hat{S}^F(p)$  tiene un polo en ella, la evaluación de la distribución de la Ec. (6.68) no es trivial. Ocurre, no embargante, que como tanto  $\hat{S}^F(p)$  cuanto  $\tilde{\Sigma}(p)$  son funciones de la misma matriz  $\not{p}$ , estos operadores conmutan y rige sobre ellos una extensión de la regla de l'Hôpital para funciones de matrices con estas características [97]. Luego, derivando numerador y denominador de esta expresión, la condición de estabilidad requiere que sea:

$$2\tilde{\Sigma}(p)\left.\frac{d\tilde{\Sigma}(p)}{d\not{p}}\right|_{\not{p}=m_1} = 0 \quad . \quad (6.69)$$

Esta condición es implicada por la Ec. (6.67) si y solo si la primera derivada de la auto-energía en la capa másica es finita. En el modelo de Yukawa esta condición es satisfecha.

Del modo más general todavía podemos considerar la «auto-energía completa del nucleón al segundo orden»:

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{\text{tot}}(p) &= \tilde{\Sigma}(p) + (2\pi)^4\tilde{\Sigma}(p)\hat{S}^F(p)\tilde{\Sigma}(p) + (2\pi)^8\tilde{\Sigma}(p)\hat{S}^F(p)\tilde{\Sigma}(p)\hat{S}^F(p)\tilde{\Sigma}(p) + \dots \\ &= \tilde{\Sigma}(p) \left( 1 + (2\pi)^4\hat{S}^F(p)\tilde{\Sigma}(p) \right) \quad . \end{aligned} \quad (6.70)$$

De esta ecuación es posible despejar:

$$\tilde{\Sigma}_{\text{tot}}(p) = \frac{\tilde{\Sigma}(p)}{1 - (2\pi)^4\tilde{\Sigma}(p)\hat{S}^F(p)} \quad , \quad (6.71)$$

que, una vez colocada la expresión explícita del propagador de Feynman del nucleón,

es igual a:

$$\tilde{\Sigma}_{\text{tot}}(p) = \frac{(\not{p} - m_1)\tilde{\Sigma}(p)}{\not{p} - [m_1 + (2\pi)^2\tilde{\Sigma}(p)] + i0^+} . \quad (6.72)$$

Aplicando la regla de l'Hôpital para calcular el límite al que se aproxima esta distribución en la capa másica:

$$\lim_{\not{p} \rightarrow m_1} \tilde{\Sigma}_{\text{tot}}(p) = \lim_{\not{p} \rightarrow m_1} \frac{\tilde{\Sigma}(p) + (\not{p} - m_1) \frac{d\tilde{\Sigma}(p)}{d\not{p}}}{1 - (2\pi)^2 \frac{d\tilde{\Sigma}(p)}{d\not{p}}} . \quad (6.73)$$

En consecuencia, la auto-energía completa al segundo orden satisface al axioma de estabilidad si:

$$\left. \frac{d\tilde{\Sigma}(p)}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m_1} \in (\mathbb{R} \setminus \{(2\pi)^{-2}\}) \cdot 1_{4 \times 4} . \quad (6.74)$$

Similarmente al análisis hecho en el caso del mesón, si el valor adoptado aquí es el infinito, entonces nada puede decirse de la estabilidad del nucleón, pues el límite se vuelve indeterminado. Si, por otra parte, el valor adoptado es el  $(2\pi)^{-2}$ , entonces habríamos de aplicar una vez más la regla de l'Hôpital, consiguiendo:

$$\lim_{\not{p} \rightarrow m_1} \tilde{\Sigma}_{\text{tot}}(p) = -(2\pi)^{-2} \lim_{\not{p} \rightarrow m_1} \left\{ (\not{p} - m_1) + 2 \frac{d\tilde{\Sigma}/d\not{p}}{d^2\tilde{\Sigma}/d\not{p}^2} \right\} . \quad (6.75)$$

Como la primera derivada adopta un valor finito, la estabilidad solo podría alcanzarse si la segunda derivada es inifinita en la capa másica, lo que no ocurre en el modelo de Yukawa. Luego el valor  $(2\pi)^{-2}$  para la primera derivada es prohibida por la estabilidad. Este valor, por otra parte, es patológico desde el punto de vista del propagador completo del nucleón, pues anularía la dependencia del denominador de este con  $\not{p}$ .

En suma, el axioma de estabilidad en el esquema de Bogoliubov, Medvedev y Polivanov puede ser satisfecho mediante la elección adecuada de los términos de normalización, tanto para la distribución de transición vacío-vacío cuanto para las auto-energías de las partículas de la teoría. Por supuesto, esto no quiere decir que el pión

neutro sea «verdaderamente» estable, sino que lo es «frente a las interacciones de Yukawa»; efectivamente, se ha encontrado en el experimento que el pión neutro decae por el medio de la interacción electromagnética; una compilación de algunos decaimientos puede encontrarse, por ejemplo, en la Ref. [90]. Lo mismo vale para los nucleones, que pueden sufrir el decaimiento beta, por ejemplo. Los resultados presentados en este capítulo son muy importantes porque justifican el uso de los campos escalar y fermiónico para la descripción de los estados asintóticos: El vacío estable es adecuado para la construcción sobre él de los espacios de Fock de las partículas, las cuales por su vez, debido a su estabilidad, realmente pueden existir como estados asintóticos.

# Capítulo 7

## Normalizabilidad

En este capítulo estudiaremos la normalizabilidad de la interacción de Yukawa, esto es, consideraremos el problema de la posibilidad de fijar todos los términos de normalización por un número finito de condiciones físicas. Semejante punto, de clarísima importancia en sí mismo, es además indispensable para:

- 1.- Conocer los posibles términos de auto-interacción de los campos. Este punto será estudiado al final de este mismo capítulo.
- 2.- Iniciar el estudio del grupo de renormalización [véase las perspectivas en el Cap. 8], al permitir conocer todos los términos que pueden recibir alguna modificación perturbativa.

Como ya dijimos, los términos de normalización son posibles cuando el orden singular de la distribución causal es no-negativo, pues en tal caso existe una ambigüedad en la definición de la distribución retardada, ambigüedad que debe ser resuelta por la imposición de sendas condiciones físicas –como hemos hecho en el capítulo 5 al imponer la invariancia por paridad y la preservación de los valores físicos de las masas de las partículas y la constante de acoplamiento de su interacción–. La mentada ambigüedad, en el espacio de los impulsos, está contenida en los coeficientes de un polinomio del impulso de grado  $[\omega]$ . La siguiente clasificación de las teorías se aplica [27, 33, 92]:

- (i) *No-normalizable*: Si un número infinito de condiciones físicas son necesarias para fijar unívocamente el operador  $S$ . Esto ocurre cuando el orden singular de las distribuciones causales se incrementa sin límite con el orden perturbativo  $n^1$ .

---

<sup>1</sup>Dos anotaciones al respecto de esta clase de teorías: (1) El orden singular puede ser finito en cada

(ii) *Normalizable*: Si un número finito de condiciones físicas basta para fijar por completo todos los términos de normalización; en otras palabras, si el orden singular de la distribución causal es una función acotada del orden  $n$  de la teoría de perturbación. Esto puede ocurrir de dos formas:

(ii-1) Si  $\omega_-[d]$  independe de  $n$ , entonces la teoría se llama simplemente «normalizable».

(ii-2) Si solamente un número finito de distribuciones causales tiene orden singular no-negativo, *id est*, si  $\omega_-[d_n]$  es función decreciente de  $n$ , entonces la teoría se llama «súper-normalizable».

Bien sabemos ya que la construcción de la distribución causal del orden  $n$ ,  $D_n$ , se realiza multiplicando las distribuciones de transición  $T_{n'}$  de menor orden ( $n' < n$ ). Así, el orden singular de cualquier término contenido en  $D_n$  es igual al orden singular del producto  $T_r^1(x_1; \dots; x_r) T_s^2(y_1; \dots; y_s)$  ( $r + s = n$ ), con los super-índices 1 y 2 denotando el hecho de que no son las distribuciones  $T_r$  y  $T_s$  completas las que se usa, sino las partes de ellas que contribuyen al requerido término de la distribución  $D_n$ . Usando el teorema de Wick en este producto aparecerán diversas contracciones de Wick de operadores de campo escalar y fermiónico, que supondremos de cantidad  $l_s$  y  $l_f$ , respectivamente. Luego, si  $t_1$  y  $t_2$  son las partes numéricas de  $T_r^1$  y  $T_s^2$ , respectivamente, entonces la parte numérica del deseado producto con las mencionadas contracciones tendrá la forma:

$$t() := t_1(x_1; \dots; x_r) \prod_{j=1}^{l_s} \partial_j^{\alpha_j} D_+(x_{r_j} - y_{s_j}) \prod_{m=1}^{l_f} S_+(x_{r_m} - y_{s_m}) t_2(y_1; \dots; y_s). \quad (7.1)$$

Aquí hemos incluido la posibilidad de tener una interacción derivativa, con la fina-

---

orden  $n$ , de manera que aunque el número total de condiciones de normalización sea infinito, la teoría todavía tiene poder predictivo; a esta clase corresponden las denominadas «teorías efectivas» [92]. (2) Puede ocurrir, también, que aún cuando se requieran infinitud de condiciones físicas para determinar el operador de dispersión, los correspondientes términos de normalización no tengan ninguna consecuencia física. Esta posibilidad ha sido sugerida, por ejemplo, para la gravedad cuantificada en la sección 5.10 de la Ref. [39], y más recientemente, por Grigore [93] por argumentos topológicos, conjeturando su súper-normalizabilidad, como también la de las teorías de Yang-Mills.

lidad de ampliar nuestros resultados y poder considerar teorías de interacción más generales. En esta ecuación,  $\{x_{r_j}\} \subseteq \{x_1; \dots; x_r\}$  y  $\{y_{s_j}\} \subseteq \{y_1; \dots; y_s\}$  son los puntos conectados por contracciones escalares, mientras que  $\{x_{r_m}\} \subseteq \{x_1; \dots; x_r\}$  y  $\{y_{s_m}\} \subseteq \{y_1; \dots; y_s\}$  son aquellos conectados por contracciones fermiónicas. Finalmente,  $a_j = 0, 1, 2$  es el número de derivadas aplicadas sobre los operadores de campo escalar que se han contraído en la posición  $j$ -ésima. Introducimos las siguientes coordenadas relativas aprovechando la invariancia translacional:

$$\xi_j := x_j - x_r \quad (j = 1, \dots, r-1), \quad \eta_j := y_j - y_s \quad (j = 1, \dots, s), \quad \eta := x_r - y_s. \quad (7.2)$$

Definiendo los vectores

$$\boldsymbol{\xi} := (\xi_1; \dots; \xi_{r-1}), \quad \boldsymbol{\eta} := (\eta_1; \dots; \eta_{s-1}), \quad (7.3)$$

la Ec. (7.1) puede ser puesta en la forma:

$$t(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\eta}; \eta) = t_1(\boldsymbol{\xi}) \prod_{j=1}^{l_s} \partial_j^{a_j} D_+(\xi_{r_j} - \eta_{s_j} + \eta) \prod_{m=1}^{l_f} S_+(\xi_{r_m} - \eta_{s_m} + \eta) t_2(\boldsymbol{\eta}). \quad (7.4)$$

Para estudiar el orden singular de esta distribución aplicaremos la transformación de Fourier –dejamos libre, por el momento, la dimensión del espacio-tiempo,  $D$ –:

$$\hat{t}(\mathbf{p}; \mathbf{q}; q) = (2\pi)^{-D(r+s-1)/2} \int d^{D(r-1)} \boldsymbol{\xi} d^{D(s-1)} \boldsymbol{\eta} d^D \eta t(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\eta}; \eta) e^{i\mathbf{p}\boldsymbol{\xi} + i\mathbf{q}\boldsymbol{\eta} + iq\eta}. \quad (7.5)$$

Substituyendo aquí la Ec. (7.4) y reemplazando las distribuciones de conmutación en el espacio real por sus transformadas de Fourier,

$$\begin{aligned} S_+(x) &= (2\pi)^{-D/2} \int d^D k \hat{S}_+(k) e^{-ikx}, \\ \partial^a D_+(x) &= (2\pi)^{-D/2} \int d^D h (-ih)^a \hat{D}_+(h) e^{-ihx}, \end{aligned} \quad (7.6)$$

obtenemos luego de un agrupamiento conveniente de los términos:

$$\begin{aligned}
\hat{t}(\mathbf{p}; \mathbf{q}; q) &= (-i)^a (2\pi)^{-D(l_s+l_f-1)/2} \int \prod_{j,m} d^D k_m d^D h_j h_j^{a_j} \hat{D}_+(h_j) \hat{S}_+(k_m) \\
&\times \left[ (2\pi)^{-D(r-1)/2} \int d^{D(r-1)} \boldsymbol{\xi} t_1(\boldsymbol{\xi}) e^{i\mathbf{p}\boldsymbol{\xi} - i(\sum_m k_m \xi_{r_m} + \sum_j h_j \xi_{r_j})} \right] \\
&\times \left[ (2\pi)^{-D(s-1)/2} \int d^{D(s-1)} \boldsymbol{\eta} t_2(\boldsymbol{\eta}) e^{i\mathbf{q}\boldsymbol{\eta} + i(\sum_m k_m \eta_{s_m} + \sum_j h_j \eta_{s_j})} \right] \\
&\times \left[ (2\pi)^{-D} \int d^D \eta e^{i(q - \sum_m k_m - \sum_j h_j) \eta} \right], \tag{7.7}
\end{aligned}$$

en donde identificamos la transformada de Fourier de las distribuciones  $t_{1,2}$  y la representación integral de la distribución delta de Dirac en la última línea. Hemos definido en esta expresión, además, el número total de campos escalares contraídos:

$$a := \sum_{j=1}^{l_s} a_j, \tag{7.8}$$

Definiendo, pues, el vector  $\mathbf{p} - \mathbf{k}_r - \mathbf{h}_r$  como aquel cuyas componentes son  $p_i - k_{r_i} - h_{r_i}$  si  $\xi_{r_i}$  es un punto contraído y  $p_i$ , si no lo es, y análogamente el vector  $\mathbf{q} + \mathbf{k}_s + \mathbf{h}_s$ , la Ec. (7.7) adopta la forma:

$$\begin{aligned}
\hat{t}(\mathbf{p}; \mathbf{q}; q) &= (-i)^a (2\pi)^{-D(l_s+l_f-1)/2} \int \prod_{j,m} d^D k_m d^D h_j h_j^{a_j} \hat{D}_+(h_j) \hat{S}_+(k_m) \\
&\times \hat{t}_1(\mathbf{p} - \mathbf{k}_r - \mathbf{h}_r) \hat{t}_2(\mathbf{q} + \mathbf{k}_s + \mathbf{h}_s) \delta \left[ q - \left( \sum_j h_j + \sum_m k_m \right) \right]. \tag{7.9}
\end{aligned}$$

El siguiente paso es aplicar esta distribución a una función  $\check{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{D(r+s-1)})$ :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{t}; \check{f} \rangle &= \int d^{D(r-1)} \mathbf{p} d^{D(s-1)} \mathbf{q} d^D q \hat{t}(\mathbf{p}; \mathbf{q}; q) \check{f}(\mathbf{p}; \mathbf{q}; q) \\
&= (-i)^a (2\pi)^{-D(l_s+l_f-1)/2} \int d^{D(r-1)} \mathbf{p} d^{D(s-1)} \mathbf{q} d^D q \int \prod_{j,m} d^D k_m d^D h_j h_j^{a_j} \\
&\quad \times \hat{D}_+(h_j) \hat{S}_+(k_m) \hat{t}_1(\mathbf{p} - \mathbf{k}_r - \mathbf{h}_r) \hat{t}_2(\mathbf{q} + \mathbf{k}_s + \mathbf{h}_s) \\
&\quad \times \delta \left[ q - \left( \sum_m k_m + \sum_j h_j \right) \right] \check{f}(\mathbf{p}; \mathbf{q}; q) \\
&= \int d^{D(r-1)} \mathbf{p} d^{D(s-1)} \mathbf{q} \hat{t}_1(\mathbf{p}) \hat{t}_2(\mathbf{q}) \psi(\mathbf{p}; \mathbf{q}), \tag{7.10}
\end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbf{p}; \mathbf{q}) &:= (-i)^a (2\pi)^{-D(l_s+l_f-1)/2} \int d^D q \int \prod_{j,m} d^D k_m d^D h_j h_j^{a_j} \hat{D}_+(h_j) \hat{S}_+(k_m) \\
&\quad \times \delta \left[ q - \left( \sum_m k_m + \sum_j h_j \right) \right] \check{f}(\mathbf{p} + \mathbf{k}_r + \mathbf{h}_r; \mathbf{q} - \mathbf{k}_s - \mathbf{h}_s; q). \tag{7.11}
\end{aligned}$$

Para determinar el orden singular de  $\hat{t}$ , precisamos evaluar el límite:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \rho(s) \left\langle \hat{t} \left( \frac{p}{s} \right); \check{f}(p) \right\rangle, \tag{7.12}$$

para lo que empezamos por calcular:

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{t} \left( \frac{p}{s} \right); \check{f}(p) \right\rangle &= s^{D(r+s-1)} \langle \hat{t}(p); \check{f}(sp) \rangle \\
&= s^{D(r+s-1)} \int d^{D(r-1)} \mathbf{p} d^{D(s-1)} \mathbf{q} \hat{t}_1(\mathbf{p}) \hat{t}_2(\mathbf{q}) \psi_s(\mathbf{p}; \mathbf{q}), \tag{7.13}
\end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned} \psi_s(\mathbf{p}; \mathbf{q}) := & (-i)^a (2\pi)^{-D(l_s+l_f-1)/2} \int d^D q \int \prod_{j,m} d^D k_m d^D h_j h_j^{a_j} \hat{D}_+(h_j) \hat{S}_+(k_m) \\ & \times \delta \left[ q - \left( \sum_m k_m + \sum_j h_j \right) \right] \check{f}(s(\mathbf{p} + \mathbf{k}_r + \mathbf{h}_r); s(\mathbf{q} - \mathbf{k}_s - \mathbf{h}_s); sq) . \end{aligned} \quad (7.14)$$

Introduciendo las variables escaladas  $\tilde{k}_m := sk_m$ ,  $\tilde{h}_j := sh_j$  y  $\tilde{q} := sq$ , la Ec. (7.14)

es:

$$\begin{aligned} \psi_s(\mathbf{p}; \mathbf{q}) = & (-i)^a \frac{(2\pi)^{-D(l_s+l_f-1)/2}}{s^a s^{Dl_s} s^{Dl_f}} \int d^D \tilde{q} \int \prod_{j,m} d^D \tilde{k}_m d^D \tilde{h}_j \tilde{h}_j^{a_j} \hat{D}_+\left(\frac{\tilde{h}_j}{s}\right) \hat{S}_+\left(\frac{\tilde{k}_m}{s}\right) \\ & \times \delta \left[ \tilde{q} - \left( \sum_m \tilde{k}_m + \sum_j \tilde{h}_j \right) \right] \check{f}(s\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{k}}_r + \tilde{\mathbf{h}}_r; s\mathbf{q} - \tilde{\mathbf{k}}_s - \tilde{\mathbf{h}}_s; \tilde{q}) . \end{aligned} \quad (7.15)$$

En este punto, supongamos que las distribuciones de conmutación de los campos escalar y fermiónico,  $\hat{D}_+$  y  $\hat{S}_+$ , tienen los órdenes singulares  $\omega_s$  y  $\omega_f$ , respectivamente. Asumamos igualmente que las distribuciones numéricas  $\hat{t}_1$  y  $\hat{t}_2$  tienen respectivamente los órdenes singulares  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Esto se traduce a la existencia y no nulidad de los siguientes límites:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s^{\omega_s} \hat{D}_+\left(\frac{\mathbf{p}}{s}\right), \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} s^{\omega_f} \hat{S}_+\left(\frac{\mathbf{p}}{s}\right), \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} s^{\omega_1} \hat{t}_1\left(\frac{\mathbf{p}}{s}\right), \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} s^{\omega_2} \hat{t}_2\left(\frac{\mathbf{q}}{s}\right) . \quad (7.16)$$

De manera que, si ponemos  $\rho(s) = s^\omega$  en la Ec. (7.12), definimos las variables escala-

das  $\tilde{\mathbf{p}} := s\mathbf{p}$  y  $\tilde{\mathbf{q}} := s\mathbf{q}$ , y agrupamos los términos convenientemente, hallamos:

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0^+} \rho(s) \left\langle \hat{t} \left( \frac{\mathbf{p}}{s} \right); \check{f}(\mathbf{p}) \right\rangle &= \lim_{s \rightarrow 0^+} s^\omega s^{D-\omega_1-\omega_2-(D+\omega_s)l_s-(D+\omega_f)l_f-a} \\
&\times (-i)^a (2\pi)^{-D(l_s+l_f-1)/2} \int d^{D(r-1)} \tilde{\mathbf{p}} d^{D(s-1)} \tilde{\mathbf{q}} \left[ s^{\omega_1} \hat{t}_1 \left( \frac{\tilde{\mathbf{p}}}{s} \right) \right] \left[ s^{\omega_2} \hat{t}_2 \left( \frac{\tilde{\mathbf{q}}}{s} \right) \right] \\
&\times \int d^D \tilde{\mathbf{q}} \int \prod_{j,m} d^D \tilde{k}_m d^D \tilde{h}_j \tilde{h}_j^{a_j} \prod_j \left[ s^{\omega_s} \hat{D}_+ \left( \frac{\tilde{h}_j}{s} \right) \right] \prod_m \left[ s^{\omega_f} \hat{S}_+ \left( \frac{\tilde{k}_m}{s} \right) \right] \\
&\times \delta \left[ \tilde{\mathbf{q}} - \left( \sum_m \tilde{k}_m + \sum_j \tilde{h}_j \right) \right] \check{f} \left( \tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{k}}_r + \tilde{\mathbf{h}}_r; \tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{k}}_s - \tilde{\mathbf{h}}_s; \tilde{\mathbf{q}} \right) . \quad (7.17)
\end{aligned}$$

Por hipótesis, todos los términos encerrados entre corchetes tienen límite bien definido cuando  $s \rightarrow 0^+$ . Luego el límite de la Ec. (7.17) será finito y no-nulo si:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + (D + \omega_s)l_s + (D + \omega_f)l_f + a - D . \quad (7.18)$$

Esta es la ecuación que determina, iniciando con dos distribuciones  $T_r^1$  y  $T_s^2$ , el orden singular de un determinado término de la distribución causal  $D_n$  ( $n = r + s$ ). Debido a su dependencia lineal con las variables  $\omega_i$ ,  $l_s$ ,  $l_f$ ,  $a$ , y  $D$ , proponemos la siguiente expresión general para el orden singular de la distribución causal a cualquier orden  $n$ :

$$\omega = A + BN + CM + Ed + Fn , \quad A, B, C, E, F \in \mathbb{R} , \quad (7.19)$$

siendo  $N$  el número de operadores de campo escalar externos,  $M$  el número de operadores de campo fermiónico externos y  $d$  el número de derivadas actuando sobre los campos escalares externos ( $d \leq 2N$ ). La Ec. (7.18) será usada para determinar el valor de las constantes  $A, B, C, E$  y  $F$  en la Ec. (7.19), una vez que la distribución del primer orden  $T_1$ , es conocida. Procederemos por inducción matemática completa sobre el orden de la distribución  $T_n$ :

(i) **Base inductiva:** La distribución del primer orde  $T_1$  tiene orden singular  $\omega = 0$  y  $n = 1$ . Denotando sus parámetros por  $N_1$ ,  $M_1$  y  $d_1$ , la base inductiva es establecida

por el requerimiento de que la Ec. (7.19) rija para estos valores particulares:

$$0 = A + BN_1 + CM_1 + Ed_1 + F . \quad (7.20)$$

(ii) **Hipótesis inductiva:** Asumiremos, de acuerdo al principio de inducción matemática completa, que todas las distribuciones  $T_m$  con  $m \leq n - 1$  satisfacen a la Ec. (7.19).

(iii) **Paso inductivo:** El paso inductivo será llevado a cabo imponiendo la Ec. (7.19) a las distribuciones  $T_n$  y encontrando el valor de las constantes  $A, B, C, E$  y  $F$  compatibles con la Ec. (7.18) y el cumplimiento de la Ec. (6.24), simultáneamente. Si dichas constantes pueden ser encontradas, entonces la prueba estará completa. Supongamos que estamos interesados en una distribución  $T_n$  generada por  $T_r^1(N_r, M_r, d_r)$  y  $T_s^2(N_s, M_s, d_s)$  por vías de  $l_s$  contracciones escalares con  $a$  derivadas, y  $l_f$  contracciones fermiónicas. Luego la Ec. (7.19) implica que:

$$\omega = A + B(N_r + N_s - 2l_s) + C(M_r + M_s - 2l_f) + E(d_r + d_s - a) + F(r + s) . \quad (7.21)$$

Por otro lado, debido a la hipótesis inductiva:

$$\omega_1 = A + BN_r + CM_r + Ed_r + Fr , \quad \omega_2 = A + BN_s + CM_s + Ed_s + Fs ,$$

con lo cual la Ec. (7.18) establece la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \omega = & 2A + B(N_r + N_s) + C(M_r + M_s) + E(d_r + d_s) + F(r + s) + (D + \omega_s)l_s \\ & + (D + \omega_f)l_f + a - D . \end{aligned} \quad (7.22)$$

Igualando las Ecs. (7.21) y (7.22), llegamos a:

$$A + (2B + D + \omega_s)l_s + (2C + D + \omega_f)l_f + (E + 1)a - D = 0 . \quad (7.23)$$

Esta ecuación debe ser válida cualesquiera que sean los valores de  $l_s, l_e$  y  $a$  (compatibles con el orden de la distribución, es decir,  $l_s, l_f \leq n/2$  para  $n$  par, o  $l_s, l_f \leq (n-1)/2$  para  $n$  impar, y en cualquier caso  $a \leq 2l_s$ ). Tomando  $l_s = l_f = a = 0$ :  $A = D$ . Considerando  $l_s = 0 = a, l_f \neq 0$ :  $C = -(D + \omega_f)/2$ . Poniendo  $l_f = 0 = a, l_s \neq 0$ :  $B = -(D + \omega_s)/2$ . Con estos valores, la Ec. (7.23) se reduce a  $(E + 1)a = 0$ , entonces  $E = -1$ . Finalmente, la constante  $F$  es obtenida de la Ec. (7.20):  $F = -D + (D + \omega_s)N_1/2 + (D + \omega_f)M_1/2 + d_1$ . El resultado es así:

$$\begin{aligned} \omega = & D - \frac{1}{2}(D + \omega_s)N - \frac{1}{2}(D + \omega_f)M - d \\ & + \left[ -D + \frac{1}{2}(D + \omega_s)N_1 + \frac{1}{2}(D + \omega_f)M_1 + d_1 \right] n . \end{aligned} \quad (7.24)$$

Esto completa la prueba inductiva.

Nuestro resultado [Ec. (7.24)] puede ya aplicarse a una amplia gama de teorías de interacción. En primer lugar, restrinjamos la discusión a los campos escalar y fermiónico usados en esta Tesis:  $\omega_s = -2$  y  $\omega_f = -1$ :

$$\begin{aligned} \omega = & D - \frac{1}{2}(D - 2)N - \frac{1}{2}(D - 1)M - d \\ & + \left[ -D + \frac{1}{2}(D - 2)N_1 + \frac{1}{2}(D - 1)M_1 + d_1 \right] n . \end{aligned} \quad (7.25)$$

Como podemos ver, los términos proporcionales a  $N$  y  $M$  dependen únicamente de la dimensión del espacio-tiempo; de esta misma independe la contribución del número de derivadas,  $d$ . Por otra parte, el término proporcional a  $n$ , que determinará la normalizabilidad de la teoría, depende fuertemente de los parámetros  $N_1, M_1$  y  $d_1$  del primer término que define a la interacción, así como de la dimensión del espacio-tiempo.

Consideremos primeramente el modelo con interacción  $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\partial_\mu\varphi$ , esto es, con  $d_1 = 1, N_1 = 1, M_1 = 2$ . Reemplazando estos valores en la Ec. (7.25):

$$\omega = D - \frac{1}{2}(D-2)N - \frac{1}{2}(D-1)M - d + \frac{1}{2}(D-2)n. \quad (7.26)$$

Así, vemos que esta teoría es:

- No-normalizable en las dimensiones  $D \geq 3$ . Este resultado para  $D = 4$  es conocido en la literatura [98].
- Normalizable en dimensión  $D = 2$ .

Por supuesto, nuestro resultado es general, y así nos permite considerar las interacciones más generales. Consideremos la teoría con

$$T_1 = : (\bar{\psi}\gamma^\mu\Gamma\psi\partial_\mu\varphi)^l (\partial\varphi)^{2j}\varphi^k : , \quad (7.27)$$

que tiene  $M_1 = 2l, N_1 = l + 2j + k, d_1 = l + 2j$ . Aquí, la matriz  $\Gamma = 1, i\gamma^5$  es la necesaria para asegurar la invariancia por paridad del modelo, lo cual dependerá de la paridad o imparidad del número total de campos (pseudo-)escalares. Con estos valores en la Ec. (7.25), obtenemos:

$$\omega = D - \frac{1}{2}(D-2)N - \frac{1}{2}(D-1)M - d + \frac{1}{2}[D(3l + 2j + k - 2) - 2(l + k)]n. \quad (7.28)$$

Note el lector, en particular, que el factor que acompaña a  $D$  en el coeficiente de  $n$  es siempre positivo, pues  $l \geq 1$  (en el caso  $l = 0$  no habría campos fermiónicos) y  $j, k \geq 0$ . Luego estas teorías son normalizables en las dimensiones:

$$D \leq \frac{2(l+k)}{3l+2j+k-2}. \quad (7.29)$$

En particular, para  $D = 4$ , debería cumplirse la desigualdad  $5l + 4j + k - 4 \leq 0$ . Como

no hay valores de  $l \geq 1, j, k \geq 0$  que la satisfagan, concluimos que ninguno de estos modelos es normalizable en  $D = 4$ .

Por otro lado se encuentran las teorías de la forma

$$T_1 = : (\bar{\psi} \Gamma \psi)^l (\partial \varphi)^{2j} \varphi^k : , \quad (7.30)$$

que tiene  $M_1 = 2l, N_1 = 2j + k, d_1 = 2j$ . El orden singular de la distribución causal general es:

$$\omega = D - \frac{1}{2}(D-2)N - \frac{1}{2}(D-1)M - d + \frac{1}{2} [D(2l + 2j + k - 2) - 2(l + k)] n . \quad (7.31)$$

Esta vez es  $l \geq 1$  (nuevamente, para que haya campos fermiónicos), mientras que no pueden ser  $j = 0$  y  $k = 0$  simultáneamente (de otra forma, no habría campos bosónicos). Luego sigue siendo válido que el coeficiente de  $D$  en el coeficiente de  $n$  es positivo, y estos modelos son normalizables en las dimensiones:

$$D \leq \frac{2(l + k)}{2l + 2j + k - 2} . \quad (7.32)$$

Para la dimensión  $D = 4$ , los modelos normalizables son aquellos que verifican:  $3l + 4j + k - 4 \leq 0$ . La única solución posible es  $l = 1, j = 0$  y  $k = 1$ ; este es precisamente el modelo de Yukawa. Así hemos llegado al resultado notable de que el modelo de Yukawa es el único modelo de interacción entre campos escalares y fermiónicos que es normalizable en dimensión  $D = 4$ . Substituyendo en la Ec. (7.25), tenemos:

$$\omega = D - \frac{1}{2}(D - 2)N - \frac{1}{2}(D - 1)M + \frac{1}{2}(D - 4)n . \quad (7.33)$$

De aquí se ve que el modelo de Yukawa es:

- No-normalizable en las dimensiones  $D \geq 5$ .
- Normalizable en la dimensión  $D = 4$ . Nuevamente, este resultado es conocido

en la literatura [98].

- Súper-normalizable en las dimensiones  $D = 2, 3$ .

En particular, para la dimensión  $D = 4$  –que aparentemente corresponde al Universo real–, se tiene que:

$$\omega = 4 - N - \frac{3}{2}M \quad . \quad (7.34)$$

Este resultado se condice con los valores particulares de las diversas distribuciones causales estudiadas en los capítulos precedentes. Listamos a continuación el conjunto completo de distribuciones que tienen orden singular no-negativo:

$N$	$M$	$\omega$
0	0	4
0	2	2
0	3	1
0	4	0
2	0	1
2	1	0

Cuadro 7.1: Distribuciones con orden singular no-negativo en el modelo de Yukawa.

La primera línea, que no contiene campos externos, se refiere a las distribuciones de transición vacío-vacío. La segunda, tercera y cuarta líneas corresponden a las distribuciones con campos externos  $:\varphi^2:$ ,  $:\varphi^3:$  y  $:\varphi^4:$ , respectivamente. La quinta línea tiene campos externos  $:\bar{\psi}\psi:$ , mientras que la sexta (última) es la que corresponde al vértice  $:\bar{\psi}\psi:$ .

Recuerde ahora el lector que los términos de normalización tienen soporte puntual, de modo que en ellos los campos externos que antes hemos listado aparecerán evaluados todos en el mismo punto. Esto permite realizar la siguiente identificación:

- Los términos de normalización de  $:\varphi^2:$  son correcciones perturbativas a la masa del mesón. Como hemos visto en el capítulo previo que una corrección a la masa destruiría la estabilidad de la partícula, todos estos términos de normalización deberán ser tomados nulos.

- Los términos de normalización de  $:\varphi^3:$  son interpretados como términos de auto-interacción. Estos pueden existir, en este caso, solamente si  $\varphi$  es escalar. Si, por otra parte, el campo es pseudo-escalar, semejante término destruiría la invariancia por paridad, y todos estos términos de normalización deberían ser tomados nulos.
- Los términos de normalización de  $:\varphi^4:$  son también términos de auto-interacción, y pueden estar presentes tanto en el caso de ser  $\varphi$  escalar cuanto en el de ser él pseudo-escalar. En este caso, no hay motivos físicos para limitar su valor, sino que él debe obtenerse por medio de la experiencia.
- Los términos de normalización de  $:\bar{\psi}\psi:$  son correcciones perturbativas a la masa del nucleón. Otra vez, la estabilidad del nucleón nos exige, hemos visto, elegir nulos todos estos términos.
- Los términos de normalización de  $:\bar{\psi}\psi:\varphi$  son correcciones perturbativas al valor de la constante de acoplamiento  $g$  de la teoría, pues «corrigen» a la distribución  $T_1$ .

Como no hay otras distribuciones con orden singular no-negativo, ninguna otra auto-interacción es permitida en esta teoría.

# Conclusiones

En la tesis que el lector ahora culmina hemos realizado un estudio detallado del modelo de Yukawa neutro. En el transcurso de dicho estudio hemos abordado la construcción de los campos cuantificados que describen a las partículas consideradas, entendiendo por tal proceso la construcción del espacio de Fock de la partícula libre y la definición de los operadores que actúan sobre él. En particular, mostramos la importancia de solucionar el problema clásico de Cauchy, pues él nos lleva directamente a la distribución que ha de actuar como identidad en el espacio de Hilbert de una partícula y, en consecuencia, a la relación de completitud de la base de dicho espacio. De esta forma, la construcción de los operadores de campo del campo cuantificado, definidos como las distribuciones que mapean las funciones de prueba en operadores, se torna natural y no requiere del uso de ninguna prescripción de correspondencia clásico-ondulatoria para su establecimiento: El principio de cuantificación es el mismo que el de Schrödinger, esto es, que la materia es descrita por ondas, y nada más. Adicionalmente, mostramos que la cuantificación de los diversos campos puede realizarse por la de sus grados de libertad independientes, siguiendo siempre el mismo esquema que el del campo de espín cero, y teniendo en cuenta la estadística de las partículas que se desea describir, lo cual no es prohibido por el teorema de espín-estadística. Así cuantificamos el campo de Dirac, reconstruyéndolo después con el uso de las ecuaciones de vínculo y obteniendo, nuevamente, la conexión con su problema de Cauchy clásico.

La interacción de las partículas fue descrita por la teoría de perturbación causal (TPC). En este abordaje no se introducen campos cuantificados en interacción, los cuales no han hecho acto de presencia en ningún punto de la tesis, sino que se trabaja

en todo momento con los campos libres. El motivo para semejante procedimiento es el abandono de cualquier intento de describir la interacción en sus detalles, preocupándonos apenas por la construcción del mapa (operador de dispersión) entre los espacios de Fock inicial y final. Tuvimos en consideración el carácter distribucional del operador de campo cuantificado introduciendo la función de conmutación adiabática, que actúa simultáneamente como un regulador infra-rojo natural. Estudiamos las propiedades de este operador (axiomas de Bogoliubov-Medvedev-Polivanov) en el régimen perturbativo y expusimos de forma conceptualmente detallada la construcción de la solución que a ellas dieron Epstein y Glaser. En particular, vimos que el apareamiento de las divergencias ultra-violetas se debe a la mala definición de los productos cronológicos ordenados según la función de Heaviside, que es inexistente cuando las distribuciones tienen el orden singular no-negativo. En tal caso, aún es posible definir la distribución retardada en un espacio restringido de funciones de prueba, y extenderla después al espacio de Schwartz completo. Semejante extensión, sin embargo, no es única, sino que permite la introducción de términos de normalización con soporte en el vértice del cono de luz, que deben ser fijados atendiendo a diversas condiciones físicas.

La aplicación de la teoría así construída fue sobre el modelo de Yukawa, cuya construcción fenomenológica repasamos brevemente. Establecido el modelo, construimos la distribución causal del segundo orden y estudiamos los términos de ella que corresponden a las correcciones radiactivas y a las fluctuaciones del vacío. En relación a las primeras, obtuvimos expresiones cerradas para la auto-energía del mesón como para la del fermión, y estudiamos los efectos de ellas en la propagación del campo, para lo cual consideramos los procesos de dispersión con inserciones de auto-energía. Las condiciones de normalización de invariancia por paridad y del valor físico de los parámetros de acoplamiento permitieron fijar dichas distribuciones por completo. Para la fluctuación del vacío, por otra parte, no fue posible obtener una expresión cerrada, pues las integrales que se presentaron no poseen solución en términos de funciones elementales. Aún así, debido a la finitud infra-roja de la teoría, fue posible deducir que el vacío

se mantiene estable si se considera la solución central al problema de división y nulos los cinco posibles términos de normalización. Así mismo, mostramos que el axioma de estabilidad de los sectores de una partícula es satisfecho incluso en el límite adiabático, si son impuestas ciertas condiciones de normalización que, coincidentemente, son las mismas que debimos utilizar con anterioridad para dotar a los parámetros  $m_1$  y  $m_2$  del significado de ser las masas de las partículas. Vimos, además, que la estabilidad solo puede ser satisfecha si la primera derivada de la auto-energía es finita, lo que ocurre en el caso estudiado, y si el valor finito que adopta no elimina la dependencia principal con el impulso en el denominador del propagador completo del campo. Así pues, los estados asintóticos en los procesos de dispersión de Yukawa son bien descritos por los espacios de Fock libres, que pueden ser correctamente contruidos sobre el vacío estable de la teoría.

Mostramos que el modelo de Yukawa es la única teoría de interacción entre fermiones y bosones, sin acoplamiento derivativo sobre los fermiones, pero sí posiblemente sobre los bosones, que es normalizable en el espacio-tiempo tetra-dimensional, pues el orden singular de las distribuciones no aumenta con el orden del término perturbativo. Entre las distribuciones que tienen el orden singular no-negativo, y que por lo tanto admiten términos de normalización, se encuentran, además de las que corresponden a las fluctuaciones del vacío, aquellas que corrigen la masa de las partículas –correcciones prohibidas por el axioma de estabilidad– y la constante de acoplamiento de la interacción, así como términos  $\varphi^3$  y  $\varphi^4$  correspondientes a la auto-interacción del campo bosónico. La posibilidad de que estos términos estén presentes se restringe por el carácter del campo frente a las transformaciones de paridad –si él es pseudo-escalar, el término  $\varphi^3$  es imposible– así como a la comparación con el experimento.

Finalmente, en el Cap. 4 hemos hecho una revisión histórica del desenvolvimiento del modelo de Yukawa, resaltando siempre su conexión con los procesos físicos reales. Queremos, empero, subrayar la importancia teórica de este modelo, y es que, siendo un modelo útil en la fenomenología, es a un tiempo lo suficientemente simple para

constituirse en un conveniente punto de partida para el estudio de ciertas propiedades generales de la teoría del campo cuantificado. Primeramente, porque representa una interacción que no es mediada por algún campo de calibre, el cual es difícil de cuantificar –véase, por ejemplo, el Cap. 7 de la Ref. [101]–. Segundamente, debido a que los campos son ambos masivos y no llevan al apareamiento de las divergencias infra-rojas. Esto conecta con nuestras perspectivas de continuación de este trabajo, que son las siguientes:

- 1) El estudio realizado en el Cap. 6 referente a la estabilidad del sector de una partícula ha sido posible, precisamente, porque, al ser las dos partículas masivas, las distribuciones de auto-energía son analíticas en la capa másica, y así la primera derivada de las auto-energías es finita. Lo mismo no ocurre en la electrodinámica cuantificada, y, de modo general, cuando una de las partículas es no masiva [27]. Esto indica que el espacio de Fock de los estados libres no es adecuado para la descripción de los estados asintóticamente libres «en el límite adiabático». Surge, pues, la posibilidad de estudiar los estados compuestos asintóticos de las teorías en que una (o más de una) de las partículas es no masiva mediante la exigencia de la estabilidad en el límite adiabático; esta es una forma de abordar el problema del confinamiento. No estaría fuera de lugar, inclusive, iniciar dicho estudio con el modelo de Yukawa con bosones no masivos, antes de abordar la electrodinámica y otras teorías de calibre.
- 2) Como hemos dicho en diferentes puntos de la tesis, la elección del punto de normalización de las soluciones al problema de la división no es única, sino diversa. Al pesar de lo cual, evidentemente, el operador de dispersión debe ser «el mismo», pues el punto de normalización, aún cuando introduce una escala en las soluciones, no tiene un significado físico. Estas transformaciones de un punto de normalización al otro constituyen, pues, una nueva simetría del operador de dispersión, denominada «grupo de renormalización», cuya implementación lle-

va a la obtención de los llamados «parámetros de acoplamiento móviles». Este programa ha sido estudiado por Scharf [102] para la polarización del vacío en la electrodinámica, y en un abordaje diferente –por la imposición de la invariancia de escala– por Grigore [103]. Un estudio completo en la TPC sería deseable, y el modelo de Yukawa, históricamente útil en el desarrollo de la técnica por Bogoliubov y Shirkov [27], es un modelo ideal para tal propósito. En particular, en el estudio de la estabilidad vimos que una renormalización de las masas no sería posible, mientras que una del parámetro de acoplamiento sí lo es.

# Apéndice A

## Epítome de la teoría

### de las funciones generalizadas

La física ha trabajado siempre y trabaja con conceptos idealizados, el más famoso de los cuales es el de «punto material». Bien sabemos, por supuesto, que semejante concepto se refiere a una masa concentrada en una región muy pequeña del espacio, y como tal puede ser sucesivamente aproximada por una determinada secuencia de funciones. Consideremos, a modo de ejemplo, el cálculo del potencial gravitacional generado en el punto  $P$  por una masa unitaria concentrada alrededor del punto  $P_0$  [56]: Definimos una sucesión de funciones  $\{\rho_n\}$  con la propiedad de anularse fuera de la esfera  $S(\varepsilon_n)$  centrada en el punto  $P_0$  y con radio  $\varepsilon_n$ , que verifica la condición:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ , y tales que para cada  $n$ :

$$\int_{S(\varepsilon_n)} \rho_n(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = 1 \quad . \quad (\text{A.1})$$

A esta sucesión de funciones másicas corresponde la sucesión de potenciales  $\{U_n\}$ , con:

$$U_n = \int \frac{\rho_n(\mathbf{x})}{|P - \mathbf{x}|} d^3 \mathbf{x} \quad . \quad (\text{A.2})$$

Evidentemente, cualquiera que sea la sucesión particular  $\{\rho_n\}$ , la sucesión  $\{U_n\}$  tiene el límite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1}{|P - P_0|} \quad . \quad (\text{A.3})$$

Esta convergencia ocurre aún cuando la sucesión  $\{\rho_n\}$  no tiene límite en la clase de las funciones. Siendo así, se hace necesario ampliar la clase considerada de funciones incluyendo los elementos límite de estas sucesiones; la clase ampliada –generalizada– de elementos se denomina la clase de las «funciones generalizadas» o de las «distribuciones». Así, nos deparamos con las dos definiciones clásicas de la función generalizada: Ella puede ser entendida bien como el elemento límite de una sucesión de funciones, bien como la funcional que hace corresponder a la sucesión  $\{U_n\}$  su límite. Como veremos, ambas concepciones son útiles; la segunda permite la definición matemática rigurosa de su concepto; la primera provee la posibilidad de utilizar la intuición para definir las operaciones sobre ellas.

## A.1. Definición de distribución y algunas operaciones

Consideremos el espacio vectorial de las funciones complejas de  $n$  variables reales. Sea  $\varphi$  una de tales funciones; su «soporte» o «portador»<sup>1</sup>, denotado  $\text{supp}(\varphi)$ , es el menor conjunto cerrado fuera del cual es  $\varphi = 0$ .

**Definición:**  $\mathcal{D}$  es el espacio vectorial de funciones  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  infinitamente derivables –de la clase  $C^{+\infty}$ – con soporte compacto.  $\square$

Sea  $\{\varphi_j\}$  una sucesión de funciones en  $\mathcal{D}$ . Ella converge a la función  $\varphi \in \mathcal{D}$  cuando  $j \rightarrow +\infty$  si: (1)  $\forall j : \text{supp}(\varphi_j) \subset K$ , con  $K$  un conjunto compacto; y (2) para cada orden  $m$ , las derivadas  $\varphi_j^{(m)}$  convergen uniformemente<sup>2</sup> a  $\varphi^{(m)}$  cuando  $j \rightarrow +\infty$ .

Entonces denotamos:  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \varphi_j = \varphi$ .

**Definición:** Una «distribución» o «función generalizada»  $T$  es una funcional lineal y continua definida sobre el espacio vectorial  $\mathcal{D}$ , es decir que a cada función  $\varphi \in \mathcal{D}$

<sup>1</sup>Traducciones de las palabras inglesas *support* y *carrier*, ambas usadas para denotar el concepto que aquí introducimos [62, 63].

<sup>2</sup>Recordamos de paso que la sucesión de funciones  $\{\varphi_j\}$  converge uniformemente si:  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall x : j_1, j_2 > N \Rightarrow |\varphi_{j_1}(x) - \varphi_{j_2}(x)| < \varepsilon$ .

asocia el número complejo  $T(\varphi) \equiv \langle T; \varphi \rangle$  con las propiedades:

$$\langle T; \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle T; \varphi_1 \rangle + \langle T; \varphi_2 \rangle \quad ; \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} : \langle T; \lambda\varphi \rangle = \lambda \langle T; \varphi \rangle \quad ; \quad (\text{A.4})$$

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \varphi_j = \varphi \Rightarrow \lim_{j \rightarrow +\infty} \langle T; \varphi_j \rangle = \langle T; \varphi \rangle \quad , \quad (\text{A.5})$$

el primer límite en el sentido de la convergencia definida en  $\mathcal{D}$ , el segundo, en el sentido de la convergencia de números complejos. Las distribuciones constituyen el espacio vectorial  $\mathcal{D}'$  con las operaciones de suma y producto por un escalar definidas según:

$$\langle T_1 + T_2; \varphi \rangle = \langle T_1; \varphi \rangle + \langle T_2; \varphi \rangle \quad ; \quad \langle \lambda T; \varphi \rangle = \lambda \langle T; \varphi \rangle \quad . \quad \square \quad (\text{A.6})$$

El espacio  $\mathcal{D}'$  está, así, contenido en el espacio dual  $\mathcal{D}^*$ , que contiene a todas las funcionales lineales, continuas o no, definidas sobre  $\mathcal{D}$ . Pero no es igual a él<sup>3</sup>. Entre las distribuciones encontramos aquellas que, en el espíritu de la introducción dada a este apéndice, no requieren de la ampliación de la clase de funciones sobre la que se había definido la sucesión inicial; ellas son denominadas distribuciones «regulares»: La función  $f$  localmente sumable<sup>4</sup> define la distribución regular  $T_f$  por la regla que asigna a cada función  $\varphi \in \mathcal{D}$  el número complejo:

$$\langle T_f; \varphi \rangle = \int f\varphi \quad . \quad (\text{A.7})$$

Por supuesto, dos funciones  $f$  y  $g$  dan lugar a la misma distribución regular  $T_f = T_g$  si ellas son iguales «casi en todas partes»<sup>5</sup>. Las distribuciones que no son regulares se

<sup>3</sup>Schwartz [62] había probado, con el uso del axioma de elección, que existen funcionales lineales discontinuas definidas sobre  $\mathcal{D}$ .

<sup>4</sup>Esto es, sumable sobre todo conjunto compacto.

<sup>5</sup>En inglés *almost everywhere*. Se dice que una propiedad rige «casi en todas partes» de un conjunto  $E$  si el subconjunto  $E_0 \subset E$  en el que no lo hace es un conjunto de medida nula [64]. Por supuesto, esto significa que las integrales a que nos estamos refiriendo son las de Lebesgue.

llaman «singulares». Ejemplos típicos de ellas son los siguientes:

$$\langle T; \varphi \rangle = \int f \partial \varphi \quad ; \quad \langle \delta; \varphi \rangle = \varphi(0) \quad ; \quad \langle T; \varphi \rangle = \partial \varphi(a) \quad . \quad (\text{A.8})$$

Lo dicho prueba, de paso, que la distribución delta de Dirac  $-\delta$  en el segundo ejemplo de la Ec. (A.8)– no es una función, pues si lo fuera sería nula casi en todas partes y definiría la distribución  $\langle T_0; \varphi \rangle = \int 0 \cdot \varphi = 0$ .

**Definición:** La distribución  $T \in \mathcal{D}'$  es «nula» en el conjunto abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  si para toda función  $\varphi \in \mathcal{D}$  con  $\text{supp}(\varphi) \subset \Omega$ :  $\langle T; \varphi \rangle = 0$ . El «soporte» de la distribución  $T$ , denotado por  $\text{supp}(T)$ , es el menor conjunto cerrado fuera del cual  $T$  es nulo.  $\square$

Por regla general, las operaciones definidas en el espacio de las funciones permiten su elevación al de las distribuciones al través de la imposición de compatibilidad con la noción de función generalizada dada en la introducción. Esta operación se llama «transposición» y se define como sigue [63]:

**Definición:** Sea  $W : \mathcal{D}(\Omega') \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$  un operador lineal continuo definido en el espacio de funciones. Él define el «operador transpuesto»  $\widetilde{W} : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega')$  según la fórmula:

$$\langle \widetilde{W}T; \varphi \rangle := \langle T; W\varphi \rangle \quad . \quad \square \quad (\text{A.9})$$

Aquí hemos denotado por  $\mathcal{D}(\Omega)$  el espacio de funciones en  $\mathcal{D}$  cuyo soporte se encuentra contenido en el conjunto abierto  $\Omega$ . Esta definición general permite identificar inmediatamente las operaciones:

(1) **Multiplicación de una distribución por una función:** Sea  $\psi \in C^{+\infty}$  una función,  $T \in \mathcal{D}'$ . El producto  $\psi T$  es la distribución tal que:

$$\langle \psi T; \varphi \rangle = \langle T; \psi \varphi \rangle \quad . \quad (\text{A.10})$$

(2) **Derivada de una distribución:** La derivada  $D^a T$ , con  $a$  un multi-índice, es

definida por:

$$\langle D^a T; \varphi \rangle = (-1)^{|a|} \langle T; D^a \varphi \rangle \quad . \quad (\text{A.11})$$

A continuación recopilamos algunos resultados de la teoría de las distribuciones:

Una distribución  $T$  verifica la igualdad  $xT = 0$  si y solo si ella es proporcional a la distribución delta de Dirac:  $T = C\delta$  [62].

Toda distribución de soporte puntual en el punto  $x_0$  posee representación única de la forma [63]:

$$T(x) = \sum_{|a|=0}^m C_a D^a \delta(x - x_0) \quad . \quad (\text{A.12})$$

La posibilidad de extensión de una distribución de un espacio menor a uno mayor está asegurada por el [63]:

**Teorema de Hahn-Banach:** *Sea  $t$  una funcional lineal continua definida sobre un subespacio  $m$  de un espacio vectorial normado  $M$ . Existe una funcional lineal continua  $T$  definida en  $M$  tal que:*

$$\forall \varphi \in m : \langle T; \varphi \rangle = \langle t; \varphi \rangle \quad ; \quad \|T\|_M = \|t\|_m = \sup_{\|\varphi\| \leq 1, \varphi \in m} \langle t; \varphi \rangle \quad . \quad \square \quad (\text{A.13})$$

La topología en el espacio  $\mathcal{D}'$  es definida por la siguiente noción de convergencia:

**Definición:** *La sucesión de distribuciones  $\{T_j\} \subset \mathcal{D}'$  «converge débilmente» o «simplemente» a la distribución  $T \in \mathcal{D}'$  cuando  $j \rightarrow +\infty$  si, cualquiera que sea la función  $\varphi \in \mathcal{D}$ , la sucesión de números complejos  $\{\langle T_j; \varphi \rangle\}$  converge al número complejo  $\langle T; \varphi \rangle$  cuando  $j \rightarrow +\infty$ .  $\square$*

Por supuesto, es legítimo preguntarse si existe la posibilidad, como la había en el caso de las funciones con que iniciamos este apéndice, de que el valor límite de la sucesión de distribuciones se encuentre fuera de la clase considerada. El siguiente resultado excluye esta posibilidad:

**Proposición:** *Si  $\{T_j\}$  es una sucesión de distribuciones tal que para  $j \rightarrow +\infty$   $\langle T_j; \varphi \rangle$  tiene un límite cualquiera que sea  $\varphi \in \mathcal{D}$ , entonces la sucesión  $\{T_j\}$  tiene un*

límite en el espacio  $\mathcal{D}'$ .  $\square$

Análogas definición y proposición rigen para el establecimiento de la sumabilidad de una serie de distribuciones y de su suma.

Finalmente, la distribución  $T$  con soporte compacto  $K$  puede ser definida como una funcional lineal continua sobre el espacio  $\mathcal{E}$  de funciones  $\varphi$  complejas de  $n$  variables reales, infinitamente derivables, con soporte arbitrario, de la siguiente forma: Sea  $\alpha \in \mathcal{D}$  una función tal que  $\alpha = 1$  en una vecindad del soporte  $K$  de  $T$ . Entonces  $\alpha\varphi \in \mathcal{D}$  y la aplicación  $\langle T; \alpha\varphi \rangle$  está bien definida. Como este número es, además, independiente de la función  $\alpha$  elegida, tal es la definición de  $\langle T; \varphi \rangle$ . A partir de esta observación puede demostrarse que [62]:

**Proposición:** *Las distribuciones con soporte compacto forman el espacio vectorial  $\mathcal{E}'$  de las funcionales lineales continuas sobre el espacio  $\mathcal{E}$ .*  $\square$

Consideremos a continuación los espacios euclidianos  $X^m$  e  $Y^n$ , de dimensiones  $m$  y  $n$ , respectivamente, así como su producto cartesiano  $X^m \times Y^n$ , y denotemos por  $\mathcal{D}_x$ ,  $\mathcal{D}_y$  y  $\mathcal{D}_{x,y}$  los espacios  $\mathcal{D}$  de funciones correspondientes a ellos.

**Definición:** *El «producto tensorial» de las distribuciones  $S_x \in \mathcal{D}'_x$  y  $T_y \in \mathcal{D}'_y$  es la distribución  $W_{x,y} \equiv S_x \otimes T_y \in \mathcal{D}'_{x,y}$ , bien definida y única, que hace corresponder a cada función  $\varphi(x; y) \in \mathcal{D}_{x,y}$  el número:*

$$\langle W_{x,y}; \varphi(x; y) \rangle = \langle S_x; \langle T_y; \varphi(x; y) \rangle \rangle = \langle T_y; \langle S_x; \varphi(x; y) \rangle \rangle \quad . \quad \square \quad (\text{A.14})$$

Es claro de la definición anterior que el soporte de la distribución producto tensorial es:  $\text{supp}(W_{x,y}) = \text{supp}(S_x) \times \text{supp}(T_y)$ . Además, el producto tensorial de más de dos distribuciones puede ser definido por una extensión obvia.

Sea  $S \in \mathcal{D}'$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}$ . La «función convolución»  $S * \varphi \in \mathcal{D}$  es definida como:

$$S * \varphi(\eta) := \langle S_\xi; \varphi(\xi + \eta) \rangle \quad . \quad (\text{A.15})$$

Esta nueva función se llama una «regularización» de la distribución  $S$  por la función  $\varphi$ , y a esta última se da el nombre de «función regularizante».

**Definición:** La «convolución» de dos distribuciones  $S, T \in \mathcal{D}'$  es la distribución  $S * T$ , cuando ella existe, definida por transposición de la convolución definida sobre una función:

$$\langle S * T; \varphi \rangle := \langle S; T * \varphi \rangle = \langle S_\xi \otimes T_\eta; \varphi(\xi + \eta) \rangle \quad . \quad \square \quad (\text{A.16})$$

**Proposición:** La convolución  $S * T$  existe si para  $\xi \in \text{supp}(S)$  y  $\eta \in \text{supp}(T)$ ,  $\xi + \eta$  solo puede permanecer acotado si tanto  $\xi$  cuanto  $\eta$  lo son también. En tal caso, el producto convolutivo es conmutativo:  $S * T = T * S$ .  $\square$

De esta proposición se sigue, en particular, que el producto convolutivo de dos distribuciones existe si al menos una de ellas tiene soporte acotado.

**Proposición:** Si las distribuciones  $S$  y  $T$  son definidas, respectivamente, por las funciones  $f$  y  $g$  definidas y localmente sumables casi en todas partes, y cuyos soportes satisfacen a la condición enunciada en la proposición anterior, entonces la convolución  $S * T$  es la definida por la función  $h$  definida y localmente sumable casi en todas partes por:

$$h(x) = \int f(x - t)g(t)dt = \int f(t)g(x - t)dt \quad . \quad \square \quad (\text{A.17})$$

El producto convolutivo de más de dos distribuciones puede ser definido de manera análoga:

$$\langle R * S * T; \varphi \rangle = \langle R_\xi \otimes S_\eta \otimes T_\zeta; \varphi(\xi + \eta + \zeta) \rangle \quad . \quad (\text{A.18})$$

Cuando, en particular, el producto convolutivo existe dos a dos, él se vuelve asociativo:  $R * S * T = R * (S * T) = (R * S) * T$ .

Finalmente, recogemos que un operador diferencial  $D$  con coeficientes constantes

satisface a la siguiente igualdad:

$$D(S * T) = DS * T = S * DT \quad . \quad (\text{A.19})$$

## A.2. Transformación de Fourier y distribuciones temperadas

Entre las muchas operaciones que son posibles de aplicar a las funciones y a las distribuciones, algunas de las cuales hemos expuesto en la sección anterior, hay una que prima en la física por su significación. La transformación de Fourier permite trabajar en el espacio de los impulsos tan bien como en el espacio real, y posee la interpretación directa de constituir paquetes de onda, es decir, funciones de onda admisibles en la mecánica ondulatoria.

**Definición:** Sea  $\varphi$  una función compleja de  $n$  variables complejas. Su «transformada de Fourier» es la función  $\hat{\varphi}$  definida por:

$$\hat{\varphi}(p) = (2\pi)^{-n/2} \int d^n x \varphi(x) e^{ipx} \quad . \quad (\text{A.20})$$

Su «transformada de Fourier inversa» es la función  $\check{\varphi}$  definida según:

$$\check{\varphi}(p) = (2\pi)^{-n/2} \int d^n x \varphi(x) e^{-ipx} \quad . \quad \square \quad (\text{A.21})$$

De las fórmulas definitorias se desprende que  $\hat{\varphi}(0) = (2\pi)^{-n/2} \int d^n x \varphi(x) = \check{\varphi}(0)$ , y entonces es requisito necesario, para que existan las transformadas de Fourier directa e inversa de una función, que esta sea sumable —de la clase  $L^1$ —. La siguiente proposición establece que tal es también requisito suficiente.

**Proposición:** Toda función sumable tiene transformada de Fourier continua, acotada y que tiene límite nulo cuando  $|p| \rightarrow +\infty$ .  $\square$

La transformación de Fourier es entonces definida en el espacio de las distribuciones por transposición:

**Definición:** Sea  $U$  una distribución. Su «transformada de Fourier»  $\hat{U}$ , así como su «transformada de Fourier inversa»  $\check{U}$ , son respectivamente las distribuciones tales que:

$$\langle \hat{U}; \varphi \rangle = \langle U; \hat{\varphi} \rangle \quad ; \quad \langle \check{U}; \varphi \rangle = \langle U; \check{\varphi} \rangle \quad . \quad \square \quad (\text{A.22})$$

Esta definición pone de manifiesto el siguiente punto: En la transposición aplicamos  $U$  a la función  $\hat{\varphi}$ . Ocurre, empero, que si  $\varphi \in \mathcal{D}$ , entonces  $\hat{\varphi} \notin \mathcal{D}$  a menos que sea  $\varphi \equiv 0$  [62]. Así pues, la transformada de Fourier no existe para una distribución arbitraria  $U \in \mathcal{D}'$ , y en consecuencia es preciso definir la transformación de Fourier en un espacio diferente.

Volvamos a considerar esta transformación definida sobre las funciones. Es claro que la existencia de la transformada de Fourier de la función  $\varphi$  no implica que también exista la de  $\hat{\varphi}$ , pues esta no tiene por qué ser sumable. Siendo así, no sería posible recuperar la función original por medio de la transformación de Fourier inversa: En la física, esto impediría regresar al espacio real una vez que se haya hecho el paso al espacio de los impulsos. Esta situación indeseable se supera si se exige que  $\varphi$  pertenezca a un espacio de funciones tal que  $\hat{\varphi}$  exista y pertenezca al mismo espacio, de forma que esté asegurada la existencia de las sucesivas transformaciones directas e inversas. Dicho espacio es el:

**Definición:** El «espacio de Schwartz»  $\mathcal{S}$  es el espacio de funciones complejas de variables reales, infinitamente derivables, con la propiedad de decrecer en lo infinito más rápidamente que cualquier potencia de  $1/|x|$ , lo mismo que todas sus derivadas, esto es que para todo  $m \in \mathbb{N}$  y todo multi-índice  $a$  con  $|a| \leq m$ :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^m |D^a \varphi(x)| = 0 \quad . \quad \square \quad (\text{A.23})$$

**Proposición:** Si  $\varphi \in \mathcal{S}$ , entonces su transformada de Fourier existe y es  $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$ .  $\square$

En el espacio de Schwartz, ahora es claro, la definición de la Ec. (A.22) adquiere significado. El espacio de las distribuciones sobre  $\mathcal{S}$  es denotado por  $\mathcal{S}'$  y llamado «espacio de las distribuciones temperadas» o «templadas», consistente de las formas lineales continuas sobre  $\mathcal{D}$  que pueden ser extendidas a formas lineales y continuas sobre  $\mathcal{S}$ . ¿Cómo no?, también sobre este espacio la transformación de Fourier es un mapa homeomórfico lineal hacia él mismo.

Ejemplos esenciales de distribuciones temperadas son: (1) Cualquier distribución con soporte acotado, (2) cualquier función sumable de crecimiento lento<sup>6</sup>, (3) cualquier derivada de una distribución temperada, (4) el producto de un polinomio por una distribución temperada.

En los espacios  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{S}'$  las transformaciones de Fourier directa e inversa son operaciones inversas:

$$(\hat{\varphi})^\vee = \varphi \quad ; \quad (\hat{U})^\vee = U \quad . \quad (\text{A.24})$$

Cerramos este apéndice con dos resultados clásicos del cálculo operacional.

**Teorema de Plancherel-Parseval:** *Las transformaciones de Fourier directa e inversa son isometrías en el espacio de funciones  $L^2$  –y particularmente sobre  $\mathcal{S}$ –:*

$$(\varphi; \psi) = (\hat{\varphi}; \hat{\psi}) = (\check{\varphi}; \check{\psi}) \quad . \quad \square \quad (\text{A.25})$$

**Proposición:** *La transformación de Fourier transforma convolución en producto y viceversa:*

$$\begin{aligned} \widehat{S * T} &= (2\pi)^{n/2} \hat{S} \hat{T} \quad ; \quad \widetilde{S * T} = (2\pi)^{n/2} \check{S} \check{T} \quad ; \\ \widehat{ST} &= (2\pi)^{-n/2} \hat{S} * \hat{T} \quad ; \quad \widetilde{ST} = (2\pi)^{-n/2} \check{S} * \check{T} \quad . \quad \square \quad (\text{A.26}) \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Esto es, tal que  $|f(x)| \leq A|x|^k$  para  $|x| \rightarrow +\infty$  y  $A, k$  ciertas constantes.

# Apéndice B

## Reducción de la solución central a una relación de dispersión

En este apéndice encontraremos la forma explícita de  $\hat{r}_k^0$  para  $k = 0$ , que es llamada solución central, en forma de una relación de dispersión, semejantemente a la que expresa la distribución retardada en el caso  $\omega < 0$  [Ec. (3.100)]. Considerando<sup>1</sup>  $p \in \Gamma_{n-1}^+(0)$  o  $p \in \Gamma_{n-1}^-(0)$ , podemos, como antes, elegir  $v = \lambda p$ , con  $\lambda = \text{sgn}(p_{10})$ , y realizar una rotación en  $\mathbb{R}^m$  de forma a obtener  $p = (p_1^0; 0 \cdots ; 0)$ . Hecho esto, podemos usar el resultado de la Ec. (3.96) para la transformada de Fourier de la función de Heaviside. Substituyendo en la expresión para  $\hat{r}_0^0(p)$  en su forma dada en la Ec. (3.112), y usando que

$$D^c \hat{d}(k - q) = (-1)^{|c|} D_q^c \hat{d}(k - q) \quad ,$$

escribimos en forma integral:

$$\begin{aligned} \hat{r}_0 \left( (p_1^0; \mathbf{0}) ; 0 \cdots ; 0 \right) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_1^0}{q_1^0 + i0^+} \left[ \hat{d} \left( (p_1^0 - q_1^0; \mathbf{0}) ; 0; \cdots ; 0 \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{a=0}^{[\omega]} \frac{(p_1^0)^a}{a!} (-1)^{|a|} D_{q_1^0}^a \hat{d} \left( (-q_1^0; \mathbf{0}) ; 0; \cdots ; 0 \right) \right] . \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

---

<sup>1</sup>Los otros casos, como ha sido dicho en el texto principal, pueden obtenerse a partir de este por continuación analítica.

Vamos a trabajar esta expresión en la notación simplificada:

$$F = \int_{-A}^B \frac{dq}{q + i0^+} \left[ d(p - q) - \sum_{a=0}^{|\omega|} \frac{p^a}{a!} (-1)^a D_q^a d(-q) \right] . \quad (\text{B.2})$$

Realizando el cambio de variable  $q' = q - p$  en el primer término:

$$\begin{aligned} \int_{-A}^B \frac{dq}{q + i0^+} d(p - q) &= \int_{-A-p}^{B-p} \frac{dq'}{q' + p + i0^+} d(-q') \\ &= \left( \int_{-A-p}^{-A} + \int_{-A}^B - \int_{B-p}^B \right) \frac{dq'}{q' + p + i0^+} d(-q') . \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

También, integrando por partes el segundo término:

$$\begin{aligned} \int_{-A}^B \frac{dq}{q + i0^+} D_q^a d(-q) &= \frac{1}{q + i0^+} D_q^{a-1} d(-q) \Big|_{-A}^B - \int_{-A}^B dq D_q^1 \left( \frac{1}{q + i0^+} \right) D_q^{a-1} d(-q) \\ &= \dots \\ &= \sum_{b=0}^{a-1} (-1)^b D_q^b \left( \frac{1}{q + i0^+} \right) D_q^{a-b-1} d(-q) \Big|_{-A}^B \\ &\quad + \int_{-A}^B dq (-1)^a D_q^a \left( \frac{1}{q + i0^+} \right) d(-q) . \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Substituyendo las expresiones de las Ecs. (B.3) y (B.4) en la Ec. (B.2), tendremos que:

$$F = \int_{-A}^B dq' \left[ \frac{1}{q' + p + i0^+} - \sum_{a=0}^{|\omega|} \frac{p^a}{a!} D_{q'}^a \left( \frac{1}{q' + i0^+} \right) \right] d(-q') + \Delta , \quad (\text{B.5})$$

con:

$$\Delta := \left( \int_{-A-p}^{-A} - \int_{B-p}^B \right) \frac{dq'}{q' + p + i0^+} d(-q')$$

$$- \sum_{a=0}^{[\omega]} \frac{p^a}{a!} (-1)^a \sum_{b=0}^{a-1} (-1)^b D_q^b \left( \frac{1}{q + i0^+} \right) D_q^{a-b-1} d(-q) \Big|_{-A}^B . \quad (\text{B.6})$$

En este punto, estudiaremos el comportamiento de  $\Delta$  cuando tanto  $A$  cuanto  $B$  tienden al infinito. Para ello, definamos

$$R(M) := f_M(p) + \sum_{a=1}^{[\omega]} (-1)^a \frac{p^a}{a!} \sum_{b=0}^{a-1} (-1)^b D_q^b \left( \frac{1}{q + i0^+} \right) D_q^{a-b-1} d(-q) \Big|_{q=M} , \quad (\text{B.7})$$

con:

$$f_M(p) := \int_{M-p}^M \frac{dq}{q + p + i0^+} d(-q) . \quad (\text{B.8})$$

Entonces:

$$\Delta = R(-A) - R(B) . \quad (\text{B.9})$$

Siendo así, el comportamiento de  $\Delta$  cuando  $A, B \rightarrow +\infty$  puede obtenerse con el conocimiento del comportamiento de  $R(M)$  cuando  $M \rightarrow \pm\infty$ . Este será el procedimiento a seguir.

Se tiene que:

$$D_q^b \left( \frac{1}{q} \right) = (-1)^b \frac{b!}{q^{b+1}} , \quad D_q^{a-b-1} d(-q) = (-1)^{a-b-1} d^{(a-b-1)}(-q) ,$$

con lo cual los términos de frontera en la Ec. (B.7) se reducen a:

$$\begin{aligned} & \sum_{|a|=0}^{[\omega]} (-1)^a \frac{p^a}{a!} \sum_{b=0}^{a-1} \frac{b!}{M^{b+1}} (-1)^{a-b-1} d^{(a-b-1)}(-M) \\ &= \sum_{a=0}^{[\omega]} \frac{p^a}{a!} \sum_{b=1}^a (-1)^b \frac{(b-1)!}{M^b} d^{(a-b)}(-M) \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

También, partiendo de la expresión definitoria dada en la Ec. (B.8), las primeras derivadas de  $f_M$  son:

$$\begin{aligned} f_M^{(1)}(p) &= \frac{d(p-M)}{M} - \int_{M-p}^M \frac{d(-q)}{(q+p+i0^+)^2} dq \quad , \\ f_M^{(2)}(p) &= \frac{d^{(1)}(p-M)}{M} - \frac{d(p-M)}{M^2} + 2! \int_{M-p}^M \frac{d(-q)}{(q+p+i0^+)^3} dq \quad , \\ f_M^{(3)}(p) &= \frac{d^{(2)}(p-M)}{M} - \frac{d^{(1)}(p-M)}{M^2} + 2! \frac{d(p-M)}{M^3} - 3! \int_{M-p}^M \frac{d(-q)}{(q+p+i0^+)^4} dq \quad , \\ & \vdots \end{aligned}$$

De aquí se deduce la expresión general:

$$f_M^{(a)}(p) = - \sum_{b=1}^a \frac{(b-1)!(-1)^b}{M^b} d^{(a-b)}(p-M) + (-1)^a a! \int_{M-p}^M \frac{d(-q)}{(q+p+i0^+)^{a+1}} dq \quad . \quad (\text{B.11})$$

O, en el caso particular de ser  $p = 0$ :

$$f_M^{(a)}(0) = - \sum_{b=1}^a \frac{(b-1)!(-1)^b}{M^b} d^{(a-b)}(-M) \quad . \quad (\text{B.12})$$

Comparando las Ecs. (B.10) y (B.12), observamos que los términos de frontera en la Ec. (B.7) constituyen, con el signo invertido, el polinomio de Taylor de orden  $[\omega]$  de  $f_M(p)$ . Consecuencia de esto es que dichos términos se cancelan entre sí y restan

apenas aquellos que corresponden a las derivadas de  $f_M$  de orden mayor que  $[\omega]$ :

$$R(M) = - \sum_{a=[\omega]+1}^{+\infty} \frac{p^a}{a!} \sum_{b=1}^a \frac{(b-1)!(-1)^b}{M^b} d^{(a-b)}(-M) \quad . \quad (\text{B.13})$$

Vamos a estimar estos términos. De la definición de cuasi-asíntota, tenemos que, con  $t = 1/s$ :

$$\hat{d}(tp) \rightarrow \frac{\hat{d}_0(p)}{\rho(1/t)} \quad \text{para} \quad |t| \rightarrow +\infty \quad . \quad (\text{B.14})$$

Por otra parte, según la ecuación definitoria de orden singular, la función  $\rho$  es una función de auto-modelo. Estas cumplen la propiedad [33] de que, para  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente pequeño, existen constantes  $C, C'$  tales que:

$$C' s^{\omega-\varepsilon} \leq \rho(s) \leq C s^{\omega+\varepsilon} \quad .$$

Siendo así, el recíproco de la función  $\rho$  está acotado de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\rho(1/t)} \leq \frac{|t|^{\omega-\varepsilon}}{C(\varepsilon)} \quad ,$$

y en consecuencia, substituyendo en la Ec. (B.14), tendremos que:

$$\left| \hat{d}(p) \right| < C |p|^{\omega-\varepsilon} \quad \text{para} \quad |p| \rightarrow +\infty \quad . \quad (\text{B.15})$$

También, de la definición de cuasi-asíntota es claro que cada derivación en el espacio de los impulsos disminuye el orden singular en una unidad. Más en general, el orden singular de  $\hat{d}^{(a)}$  será:

$$\omega[D_p^a \hat{d}] = \omega[\hat{d}] - a \quad . \quad (\text{B.16})$$

Luego, en concordancia con la Ec. (B.15):

$$\left| \frac{d^{(a-b)}(-M)}{M^b} \right| < C \frac{|M|^{\omega-a+b-\varepsilon}}{|M|^b} = C |M|^{\omega-a-\varepsilon} \quad ,$$

de forma que para  $a \geq [\omega] + 1$ :

$$\left| \frac{d^{(a-b)}(-M)}{M^b} \right| < C |M|^{(\omega-[\omega])^{-1}-\varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{para} \quad |M| \rightarrow +\infty \quad ,$$

pues  $\omega - [\omega] < 1$  y  $\varepsilon > 0$ . Siendo así, todas las derivadas de  $f_M$  de orden mayor a  $[\omega]$  son nulas en el límite de  $M \rightarrow \pm\infty$ . En la Ec. (B.13), esto implica que:

$$R(M) = 0 \quad \text{para} \quad M \rightarrow \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{A,B \rightarrow +\infty} \Delta = 0 \quad . \quad (\text{B.17})$$

Luego, substituyendo en la Ec. (B.5):

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} dq' \left[ \frac{1}{q' + p + i0^+} - \sum_{a=0}^{[\omega]} \frac{p^a}{a!} D_{q'}^a \left( \frac{1}{q' + i0^+} \right) \right] d(-q') \quad . \quad (\text{B.18})$$

La expresión entre corchetes es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q' + p + i0^+} - \sum_{a=0}^{[\omega]} \frac{p^a}{a!} D_{q'}^a \left( \frac{1}{q' + i0^+} \right) &= \frac{1}{q' + p + i0^+} - \sum_{a=0}^{[\omega]} (-1)^a \frac{p^a}{(q' + i0^+)^{a+1}} \\ &= \left[ (q' + i0^+)^{[\omega]+1} (p + q' + i0^+) \right]^{-1} \left[ (q' + i0^+)^{[\omega]+1} \right. \\ &\quad \left. - (q' + i0^+)^{[\omega]} (q' + i0^+ + p) + p (q' + i0^+ + p) (q' + i0^+)^{[\omega]-1} \right. \\ &\quad \left. + \dots + (-1)^{[\omega]+1} p^{[\omega]} (q' + i0^+ + p) \right] \\ &= \left( -\frac{p}{q' + i0^+} \right)^{[\omega]+1} \frac{1}{p + q' + i0^+} \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Substituyendo en la Ec. (B.18) y efectuando el cambio de variable  $q = -q'$ :

$$F = p^{|\omega|+1} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{d(q)}{(q - i0^+)^{|\omega|+1} (p - q + i0^+)} \quad . \quad (\text{B.20})$$

Así pues, en la notación de la Ec. (B.1):

$$\hat{r}_0((p_1^0; \mathbf{0}); 0; \dots; 0) = \frac{i}{2\pi} (p_1^0)^{|\omega|+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{d}((q_1^0; \mathbf{0}); 0; \dots; 0)}{(q_1^0 - i0^+)^{|\omega|+1} (p_1^0 - q_1^0 + i0^+)} dq_1^0 \quad . \quad (\text{B.21})$$

Haciendo el cambio de variable  $t = q_1^0/p_1^0$ , esta expresión se torna:

$$\hat{r}_0((p_1^0; \mathbf{0}); 0; \dots; 0) = \frac{i}{2\pi} \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{d}((tp_1^0; \mathbf{0}); 0; \dots; 0)}{(t - i\lambda 0^+)^{|\omega|+1} (1 - t + i\lambda 0^+)} dt \quad . \quad (\text{B.22})$$

Y, finalmente, efectuando la rotación en  $\mathbb{R}^m$  inversa a la que llevó  $(p_1; \dots; p_{n-1})$  a  $((p_1^0; \mathbf{0}); 0; \dots; 0)$ , llegamos a la expresión general:

$$\begin{aligned} \hat{r}_0(P) &= \hat{r}_0(p_1; \dots; p_{n-1}) \\ &= \frac{i}{2\pi} \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{d}(tp_1; \dots; tp_{n-1})}{(t - i\lambda 0^+)^{|\omega|+1} (1 - t + i\lambda 0^+)} dt \quad . \quad (\text{B.23}) \end{aligned}$$

Esta es la Ec. (3.116).

# Apéndice C

## Teorema de Wick

La operación de «ordenamiento normal» consiste en reordenar un producto de operadores de emisión y absorción de tal suerte que todos los operadores de emisión estén ubicados en el lado izquierdo del monomio, y en el derecho todos los de absorción. Históricamente, su introducción fue necesaria en la construcción de los observables físicos a fin de que ellos otorguen al estado de vacío valores nulos de sus propiedades, como son la energía, impulso, etcétera. En la teoría que hemos venido desarrollando, no obstante, él se nos aparece no por la necesidad anterior, sino como de considerable interés práctico al momento de evaluar los elementos de matriz de los diferentes términos del operador de dispersión, permitiéndonos discriminar inmediatamente cuáles términos contribuirán al cálculo de un determinado proceso y cuáles otros no.

Comencemos por examinar un ejemplo. Suponiendo que la distribución de transición de un punto contenga una expresión del tipo  $:A_1 A_2:$ , se nos presentará, en la construcción de la distribución causal del segundo orden, productos de operadores de campo de la forma:

$$:A_1 A_2: :A_3 A_4: \quad . \quad (C.1)$$

Queremos reducir esta expresión a una forma normalmente ordenada. Para ello, descomponemos los campos  $A_j$  en sus partes de frecuencia negativa,  $A_{j-}$ , que contiene solo operadores de absorción, y de frecuencia positiva,  $A_{j+}$ , que contiene solo opera-

dores de emisión. Así, tendremos que:

$$\begin{aligned}
:A_1 A_2: &= :A_{1-} A_{2-} + A_{1-} A_{2+} + A_{1+} A_{2-} + A_{1+} A_{2+}: \\
&= A_{1-} A_{2-} + \delta_1 A_{2+} A_{1-} + A_{1+} A_{2-} A_{1+} A_{2+} \\
&= A_1 A_2 - [A_{1-}; A_{2+}]_{\delta_1} \quad , \quad (C.2)
\end{aligned}$$

en donde  $\delta_1 = \pm$  es el signo que corresponde al ordenamiento normal del término  $A_{1-} A_{2+}$ , y que es positivo en el caso de tratarse de un campo bosónico y negativo en el caso de un campo fermiónico. Se define la «contracción de Wick» de los campos  $A_1$  y  $A_2$  según:

$$\overline{A_1 A_2} := [A_{1-}; A_{2+}]_{\mp} \quad , \quad (C.3)$$

en donde el conmutador es tomado para campos bosónicos y el anticonmutador para fermiónicos. Con esto, la ecuación (C.2) se escribe:

$$:A_1 A_2: = A_1 A_2 - \overline{A_1 A_2} \quad , \quad (C.4)$$

y, en consecuencia, la expresión (C.1) adoptará la forma:

$$\begin{aligned}
:A_1 A_2: :A_3 A_4: &= A_1 A_2 A_3 A_4 - \overline{A_1 A_2} \overline{A_3 A_4} - \overline{A_1 A_2} A_3 A_4 + \overline{A_1 A_2} \overline{A_2 A_4} \\
&= A_1 A_2 A_3 A_4 - \overline{A_3 A_4} :A_1 A_2: - \overline{A_1 A_2} :A_3 A_4: - \overline{A_1 A_2} \overline{A_3 A_4} \quad . \quad (C.5)
\end{aligned}$$

Y de aquí se puede despejar:

$$A_1 A_2 A_3 A_4 = :A_1 A_2: :A_3 A_4: + \overline{A_3 A_4} :A_1 A_2: + \overline{A_1 A_2} :A_3 A_4: + \overline{A_1 A_2} \overline{A_3 A_4} \quad . \quad (C.6)$$

La generalización de este resultado constituye el siguiente teorema establecido en 1950 por el físico italiano G.C. Wick [104].

**Teorema de Wick:** *Un producto de  $n$  operadores de campo  $A_1, \dots, A_n$ , es escrito en forma normalmente ordenada como:*

$$A_1 \cdots A_n = :A_1 \cdots A_n: + \sum_{j < k} :A_1 \cdots \overbrace{A_j \cdots A_k} \cdots A_n: \\ + \sum_{j < k, l < m} :A_1 \cdots \overbrace{A_j \cdots A_l \cdots A_k \cdots A_m} \cdots A_n: + \cdots, \quad (\text{C.7})$$

en donde el lado derecho contiene todas las posibles contracciones de los campos involucrados, y en que:

$$:A_1 \cdots \overbrace{A_j \cdots A_k} \cdots A_n: = (\pm 1)^\pi \overbrace{A_j A_k} :A_1 \cdots A_{j-1} A_{j+1} \cdots A_{k-1} A_{k+1} \cdots A_n: , \quad (\text{C.8})$$

siendo  $\pi$  el signo de la permutación que lleva a colocar los campos  $A_j$  y  $A_k$  delante de todos los demás, siendo asignado a cada transposición el signo positivo caso los campos sean bosónicos, el negativo, caso sean fermiónicos.  $\square$

*Demostración:* La prueba del teorema de Wick se apoya en el principio de inducción matemática. La ecuación (C.4) afirma su validez para  $n = 2$  y se constituye en la base inductiva. A continuación, suponemos que la fórmula (C.7) es válida para  $n - 1$ , esto es, supondremos que:

$$A_2 \cdots A_n = :A_2 \cdots A_n: + \sum :A_2 \cdots \overbrace{A_j \cdots A_k} \cdots A_n: \\ + \sum :A_2 \cdots \overbrace{A_j \cdots A_l \cdots A_k \cdots A_m} \cdots A_n: + \cdots, \quad (\text{C.9})$$

y probaremos que ello implica que la fórmula (C.7) es también válida para  $n$ . Evidentemente, dicha empresa solo podrá ser alcanzada con éxito si estudiamos cómo incluir el campo  $A_1$  a la izquierda de la expresión (C.9), y, más en particular, cómo introducirla dentro del producto normalmente ordenado. Con este objetivo en mente, establecemos

el siguiente resultado previo:

$$A_1 : A_2 \cdots A_n : = : A_1 \cdots A_n : + \sum_{k=2}^n : \overline{A_1 \cdots A_k} \cdots A_n : , \quad (\text{C.10})$$

cuya prueba es también por inducción matemática:

- (i) Desde que  $: A : = A$ , la ecuación (C.4) implica la validez de la ecuación (C.10) para  $n = 2$ :

$$A_1 : A_2 : = A_1 A_2 = : A_1 A_2 : + \overline{A_1 A_2} .$$

- (ii) Asumimos que la fórmula (C.10) es válida para  $n - 1$ , es decir:

$$A_2 : A_3 \cdots A_n : = : A_2 \cdots A_n : + \sum_{k=3}^n : \overline{A_2 \cdots A_k} \cdots A_n : .$$

- (iii) Para  $n$ :

$$\begin{aligned} A_1 : A_2 \cdots A_n : &= A_1 : (A_{2+} + A_{2-}) A_3 \cdots A_n : \\ &= A_1 A_{2+} : A_3 \cdots A_n : + A_1 : A_3 \cdots A_n : A_{2-} \\ &= \overline{A_1 A_2} : A_3 \cdots A_n : + A_{2+} A_1 : A_3 \cdots A_n : + A_1 : A_3 \cdots A_n : A_{2-} , \end{aligned}$$

y usando ahora la fórmula para  $n - 1$  para introducir  $A_1$  al producto normalmente

ordenado:

$$\begin{aligned}
A_1 : A_2 \cdots A_n : &= \overbrace{A_1 A_2} : A_3 \cdots A_n : + A_{2+} : A_1 A_3 \cdots A_n : \\
&+ \sum_{k=3}^n : \overbrace{A_1 \cdots A_k} \cdots A_n : + : A_1 A_3 \cdots A_n : \\
&+ \sum_{k=3}^n : \overbrace{A_1 \cdots A_k} \cdots A_n : A_{2-} \\
&= (A_{2+} : A_1 A_3 \cdots A_n : + : A_1 A_3 \cdots A_n : A_{2-}) + : \overbrace{A_1 A_2 A_3} \cdots A_n : \\
&+ \sum_{k=3}^n \left( A_{2+} : \overbrace{A_1 \cdots A_k} \cdots A_n : + : \overbrace{A_1 \cdots A_k} \cdots A_n : A_{2-} \right) \\
&= : A_1 \cdots A_n : + \sum_{k=2}^n : \overbrace{A_1 \cdots A_k} \cdots A_n : ,
\end{aligned}$$

como queríamos probar. Esto demuestra la validez general de la ecuación (C.10).

Siendo así, multiplicamos la expresión (C.9) por  $A_1$  por la izquierda. La aplicación de la ecuación (C.10) lleva inmediatamente a que:

$$A_1 A_2 \cdots A_n = : A_1 \cdots A_n : + \sum_{j < k} : A_1 \cdots \overbrace{A_j \cdots A_k} \cdots A_n : + \cdots ,$$

en donde en el lado derecho se tendrá ahora todas las posibles contracciones, incluyendo aquellas en las que interviene  $A_1$ . Esto demuestra la validez de la ecuación (C.7) para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y por lo tanto el teorema de Wick queda demostrado. ■

# Apéndice D

## Transformaciones discretas del campo cuantificado

En términos vagos, una «simetría» de un determinado objeto matemático es una transformación invertible que deja invariante su estructura más relevante. Así, cuando en la teoría ondulatoria admitimos, en virtud de su primer axioma, que al sistema físico corresponde un espacio de Hilbert, somos llevados a pensar en los operadores unitarios como las simetrías del sistema físico, pues ellos preservan el producto interior. Esto es correcto, desde luego, pero no agota todas las simetrías que se presentan en el mundo físico, pues las cantidades físicas se expresan no en función del producto interior, sino de las probabilidades. Por esta razón, las simetrías de la física no son (solo) las simetrías del espacio de Hilbert, sino las de otros objetos matemáticos; la formulación no es única: En la Ref. [55], por ejemplo, se listan seis estructuras, y así también seis nociones de simetrías, las cuales se prueban equivalentes. Nosotros nos ocuparemos, por ser la forma más habitual, del llamado «espacio normal de estados puros» del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , definido según:

$$\mathcal{P}_1(\mathcal{H}) := \{e \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid e^2 = e^* = e \wedge \text{Tr}(e) = \dim(e\mathcal{H}) = 1\} \quad . \quad (\text{D.1})$$

Aquí,  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  es el espacio de Banach de los operadores acotados definidos sobre  $\mathcal{H}$ , y  $e^*$  es el adjunto del operador  $e$ . El concepto de simetría en este espacio recibe el nombre de «simetría de Wigner», definida como una biyección  $W : \mathcal{P}_1(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$  que

satisface a la condición:

$$\forall e, f \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H}) : \quad \text{Tr}(W(e)W(f)) = \text{Tr}(ef) \quad . \quad (\text{D.2})$$

Esta asegura que  $W$  preserva la probabilidad de transición en  $\mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ . Luego ya puede establecerse el:

**Teorema de Wigner:** *Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert con  $\dim(\mathcal{H}) > 1$ . Toda simetría de Wigner adopta la forma:*

$$W(e) = ueu^* \quad , \quad (\text{D.3})$$

con  $u$  un operador, bien unitario, bien anti-unitario, y únicamente determinado por  $W$  salvo por una fase.  $\square$

Por completez, diremos también que, por definición, el «operador anti-unitario»  $u : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  es invertible y satisface a la condición:

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H} : \quad (u\varphi; u\psi) = (\psi; \varphi) \quad . \quad (\text{D.4})$$

Además, el adjunto del operador anti-unitario es definido tal que, para todo  $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ :

$$(u^* \varphi; \psi) = (u\psi; \varphi) \quad . \quad (\text{D.5})$$

El operador anti-unitario, por fin, es anti-lineal:

$$\forall \psi \in \mathcal{H} \quad \forall z \in \mathbb{C} : \quad u(z\psi) = z^* u(\psi) \quad . \quad (\text{D.6})$$

El teorema de Wigner fue enunciado por primera vez en 1928 por von Neumann y Wigner [105], y su primera demostración fue dada por Wigner en 1931 [106]. Por supuesto, con el tiempo y las aguas fueron dadas otras demostraciones. A nivel bastante técnico, en línea con lo hasta ahora dicho, citamos a la Ref. [55]; un abordaje más

heurístico y aún así suficientemente solvente (y bastante conocido) es el que figura en la Ref. [107]. No es nuestra intención en esta tesis ocuparnos de estos detalles, sino en dar a conocer las leyes de transformación según las llamadas «transformaciones discretas» de los campos cuantificados. Estas, que se erigen en simetrías para los campos libres, por lo que acabamos de decir, serán implementadas por sendos operadores unitarios o anti-unitarios actuando sobre el espacio de Fock de los campos libres. Su importancia radica en que estas propiedades pueden ser estudiadas experimentalmente en los sistemas, permitiendo establecer restricciones a los términos de interacción con los que se construye la distribución de transición del primer orden [véase la Sec. 4.2]: El procedimiento inductivo causal entonces preserva estas simetrías si los términos de normalización son adecuadamente elegidos [33], y el operador de dispersión las manifiesta en concordancia con el experimento.

Las transformaciones discretas son tres: (1) Conjugación de carga, (2) inversión espacial o paridad e (3) inversión temporal. La primera de ellas, (1), se relaciona con el cambio de signo de la carga eléctrica de las partículas descritas por el campo; por su naturaleza, entonces, debe ser estudiada en la interacción con el campo electromagnético. Por supuesto, este estudio en interacción debe asociarse a las ecuaciones del movimiento de los campos clásicos, pues no hemos dicho siquiera –y tampoco es fácil decirlo– qué «es» un campo cuantificado en interacción: Establecida la ley de la función de onda de una partícula, dispensaremos a la interacción y elevaremos el operador al espacio de Fock. Las transformaciones (2) y (3), por otra parte, son transformaciones pertenecientes al grupo de Lorentz, pero que no están conectadas con la identidad y, por lo tanto, no forman parte del grupo de Lorentz propio y ortócrono; un estudio detallado de ellas se realizó en la Ref. [50]. Semejantemente al caso anterior, estas transformaciones serán estudiadas por su acción sobre los campos clásicos primero y serán elevadas al espacio de Fock después.

## D.1. Campo (pseudo-)escalar

Fijando la consideración en el campo real (neutro), no habrá interacción con el campo electromagnético, y por lo tanto las ecuaciones del movimiento serán las libres.

(1) *Conjugación de carga*: Como el campo es neutro, la conjugación de la carga lo deja inalterado: Para  $f \in \mathcal{H}_1$ :

$$f_C(x) = f(x) \quad , \quad (\text{D.7})$$

y la elevación al espacio de Fock es inmediata:

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) : \quad \mathbf{U}_C \varphi(f) \mathbf{U}_C^{-1} = \eta_\varphi(C) \varphi(f_C) \quad , \quad (\text{D.8})$$

con  $\eta_\varphi(C)$  una fase. De aquí se deriva, escribiendo  $\varphi(f)$  en su forma integral y usando la Ec. (D.7), la ley de transformación del operador de campo cuantificado:

$$\mathbf{U}_C \varphi(x) \mathbf{U}_C^{-1} = \eta_\varphi(C) \varphi(x) \quad . \quad (\text{D.9})$$

Además, como  $\mathbf{U}_C^2 = 1$ , deberá ser  $\eta_\varphi(C) = \pm 1$ . Si  $\eta_\varphi(C) = +1$ , el campo se llama «par de carga»; si  $\eta_\varphi(C) = -1$ , «impar de carga» [27].

(2) *Paridad*: El operador de paridad se define de tal suerte que  $x^0 \rightarrow x^0$  y  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ . Correspondientemente,  $\partial_0 \rightarrow \partial_0$  y  $\nabla \rightarrow -\nabla$ . Luego, la ecuación de Klein-Gordon-Fock libre es invariante frente a la transformación de paridad, de donde se sigue que:

$$f_P(x^0; \mathbf{x}) = f(x^0; -\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{D.10})$$

Como antes, este resultado nos permite escribir para el operador de campo cuantificado:

$$\mathbf{U}_P \varphi(x^0; \mathbf{x}) \mathbf{U}_P^{-1} = \eta_\varphi(P) \varphi(x^0; -\mathbf{x}) \quad , \quad (\text{D.11})$$

con  $\eta_\varphi(P)$  una fase. Como  $\mathbf{U}_P^2 = 1$ , pues al invertir los ejes dos veces se regresa a la

configuración original, deberá ser  $\eta_\varphi(P) = \pm 1$ . Si  $\eta_\varphi(P) = +1$ , el campo se denomina «escalar»; si es  $\eta_\varphi(P) = -1$ , «pseudo-escalar».

(3) *Inversión temporal*: El mismo argumento que usamos para establecer la transformación de paridad nos lleva a decir que, frente al cambio  $(x^0; \mathbf{x}) \rightarrow (-x^0; \mathbf{x})$ , la función de onda de una partícula se transforma según:

$$f_T(x^0; \mathbf{x}) = f(-x^0; \mathbf{x}) \quad . \quad (\text{D.12})$$

Luego la transformación es implementada sobre el operador de campo cuantificado según:

$$\mathbf{V}_T \varphi(x^0; \mathbf{x}) \mathbf{V}_T^{-1} = \eta_\varphi(T) \varphi(-x^0; \mathbf{x}) \quad , \quad (\text{D.13})$$

con  $\eta_\varphi(T)$  una fase. Esta vez, como  $\mathbf{V}_T$  es anti-lineal<sup>1</sup>, al aplicar nuevamente  $\mathbf{V}_T$  se tendrá que debe ser  $|\eta_\varphi(T)|^2 = 1$ , lo que no impone restricción alguna a la fase  $\eta_\varphi(T)$ , la cual, por ende, se mantiene arbitraria.

## D.2. Campo de Dirac

El campo de Dirac, a diferencia del (pseudo-)escalar neutro, sí se acopla al campo electromagnético de una forma dictada por la prescripción de acoplamiento mínimo de Utiyama [108]. La ecuación de Dirac en interacción es:

$$\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu(x)) \psi(x) = m\psi(x) \quad . \quad (\text{D.14})$$

(1) *Conjugación de carga*: Buscamos una función  $\psi_C$  que, en lugar de satisfacer a

---

<sup>1</sup>La razón es simple: Al aplicar la transformación de inversión temporal a la ecuación de Schrödinger, el resultado solo puede ser nuevamente una ecuación de Schrödinger si el factor  $i$  que acompaña a la derivada temporal es cambiado por  $-i$ , esto es, si la acción de la transformación es anti-lineal.

la Ec. (D.14), satisfaga a la:

$$\gamma^\mu (i\partial_\mu + eA_\mu(x)) \psi_C(x) = m\psi_C(x) \quad . \quad (\text{D.15})$$

Para encontrar semejante ecuación por transformación de la original, tomemos primeramente el conjugado complejo de la Ec. (D.14):

$$-\gamma^{\mu*} (i\partial_\mu + eA_\mu) \psi^* = m\psi^* \quad . \quad (\text{D.16})$$

Pero como  $\gamma^{\mu*} = g^{\mu\nu} \gamma^{\nu T}$ , también se cumple que  $\{-\gamma^{\mu T}; -\gamma^{\nu T}\} = 2g^{\mu\nu}$ , y  $\{-\gamma^{\mu T}\}$  son otra representación del álgebra de Clifford, de donde existe una matriz unitaria  $C$  tal que:

$$\gamma^{\mu T} = -C^{-1} \gamma^\mu C \quad \Rightarrow \quad \gamma^\mu C^T C^{-1} = C^T C^{-1} \gamma^\mu \quad . \quad (\text{D.17})$$

Las matrices  $\gamma^\mu$ , no embargante, forman una representación irreducible del álgebra de Clifford, y así la matriz  $C^T C^{-1}$  que conmuta con todas ellas debe ser, por el lema de Schur, proporcional a la identidad:  $C^T C^{-1} = \alpha \cdot 1$ , y de aquí, aplicando la transpuesta y substituyendo en la misma ecuación, se obtiene que debe ser  $\alpha^2 = 1$ . Concluimos que  $C^T = \pm C$ , es decir,  $C$  es, bien simétrica, bien antisimétrica. Ocurre, empero, que la primera opción es inviable, pues si así fuera entonces las diez matrices  $C^{-1} \gamma^\mu$  y  $C^{-1} \gamma^\mu \gamma^\nu$  ( $\mu < \nu$ ) serían antisimétricas; esto es imposible, pues ellas son del orden  $4 \times 4$  y además linealmente independientes. Y por esto debemos admitir que la matriz  $C$  es antisimétrica:

$$C^T = -C \quad . \quad (\text{D.18})$$

Sabemos, por otra parte, que  $\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = \gamma^{\mu\dagger}$ . De esto y de la Ec. (D.17) se sigue que  $-C \gamma^0 \gamma^{\mu*} = \gamma^\mu C \gamma^0$ . Así, multiplicando la Ec. (D.16) por  $C \gamma^0$  por la izquierda, llegamos a:

$$\gamma^\mu (i\partial_\mu + eA_\mu) C \gamma^0 \psi^* = m C \gamma^0 \psi^* \quad , \quad (\text{D.19})$$

de donde, por comparación con la Ec. (D.15), reconocemos que el campo de Dirac clásico se transforma por conjugación de carga según:

$$\psi_C(x) = C\gamma^0\psi(x)^* \quad . \quad (\text{D.20})$$

Elevamos entonces este resultado al espacio de Fock:

$$\mathbf{U}_C\psi(x)\mathbf{U}_C^{-1} = \eta_\psi(C)C\gamma^0\psi(x)^* = \eta_\psi(C)C\bar{\psi}(x)^T \quad , \quad (\text{D.21})$$

que puede invertirse para obtener la ley de transformación del adjunto de Dirac:

$$\mathbf{U}_C\bar{\psi}(x)\mathbf{U}_C^{-1} = -\eta_\psi(C)\psi(x)^T C^{-1} \quad . \quad (\text{D.22})$$

La imposición de que sea  $\mathbf{U}_C^2 = 1$  lleva a las posibilidades  $\eta_\psi(C) = \pm 1$ .

Para el estudio de las transformaciones discretas de paridad e inversión temporal, es requerimiento previo conocer las reglas de transformación correspondientes del 4-potencial electromagnético. Para ello se parte de las ecuaciones de Maxwell, en particular, de la ley de Ampère-Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^0} \quad . \quad (\text{D.23})$$

Por su significado físico, el signo de la densidad de corriente  $\mathbf{j}$  debe cambiar frente a cualquiera de las dos transformaciones discretas. En el caso de la inversión temporal, porque reflejaría un movimiento retrógrado de las cargas que le dan origen; en el caso de la paridad, porque el movimiento de dichas cargas mantiene su dirección independientemente de la definición de los ejes. Teniendo en cuenta además que la derivada temporal cambia de signo en una inversión temporal, y que  $\nabla$  lo hace frente a una transformación de paridad, la exigencia de que la ecuación (D.23) se mantenga invariante lleva a las conclusiones siguientes.

a) Paridad:

$$\mathbf{E}(x^0; \mathbf{x}) \rightarrow -\mathbf{E}(x^0; -\mathbf{x}) \quad ; \quad \mathbf{B}(x^0; \mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{B}(x^0; -\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{D.24})$$

b) Inversión temporal:

$$\mathbf{E}(x^0; \mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{E}(-x^0; \mathbf{x}) \quad ; \quad \mathbf{B}(x^0; \mathbf{x}) \rightarrow -\mathbf{B}(-x^0; \mathbf{x}) \quad . \quad (\text{D.25})$$

A partir de aquí, y usando que

$$\mathbf{E} = -\nabla A^0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^0} \quad ; \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad ,$$

se obtiene finalmente la ley de transformación del 4-potencial, que es el campo que aparece en la ecuación de Dirac en interacción [Ec. (D.14)]:

a) Paridad:

$$A^0(x^0; \mathbf{x}) \rightarrow A^0(x^0; -\mathbf{x}) \quad ; \quad \mathbf{A}(x^0; \mathbf{x}) \rightarrow -\mathbf{A}(x^0; -\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{D.26})$$

b) Inversión temporal:

$$A^0(t; \mathbf{x}) \rightarrow A^0(-x^0; \mathbf{x}) \quad ; \quad \mathbf{A}(x^0; \mathbf{x}) \rightarrow -\mathbf{A}(-x^0; \mathbf{x}) \quad . \quad (\text{D.27})$$

Establecidos estos resultados, volvemos a las leyes de transformación del campo de Dirac.

(2) *Paridad*: Buscamos la función que satisfaga a la ecuación:

$$\gamma^\mu (i\partial_\mu^P - eA_\mu^P(x_P))\psi_P(x_P) = m\psi_P(x_P) \quad , \quad (\text{D.28})$$

con  $x_P = (x^0; -\mathbf{x})$ ,  $\partial_\mu^P = (\partial_0; -\nabla)$  y  $A_\mu^P = (A_0; -A_i)$ . Para obtener esta, multiplíquese-

se a la Ec. (D.14) por  $\gamma^0$  por la izquierda. Usando que  $\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma^{\mu\dagger} = (\gamma^0; -\gamma^i)$ , y desplazando el signo negativo así obtenido hacia la derivada y el campo de radiación, obtenemos:

$$\gamma^\mu(i\partial_\mu^P - eA_\mu^P)\gamma^0\psi(x) = m\gamma^0\psi(x) \quad . \quad (\text{D.29})$$

La comparación de esta ecuación con la Ec. (D.28) permite identificar:

$$\psi_P(x^0; \mathbf{x}) = \gamma^0\psi(x^0; -\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{D.30})$$

Elevando al espacio de Fock:

$$\mathbf{U}_P\psi(x^0; \mathbf{x})\mathbf{U}_P^{-1} = \eta_\psi(P)\gamma^0\psi(x^0; -\mathbf{x}) \quad , \quad (\text{D.31})$$

y de aquí:

$$\mathbf{U}_P\bar{\psi}(x^0; \mathbf{x})\mathbf{U}_P^{-1} = \eta_\psi(P)^*\bar{\psi}(x^0; -\mathbf{x})\gamma^0 \quad . \quad (\text{D.32})$$

En relación a la fase  $\eta_\psi(P)$ , esta vez no es preciso imponer la involución de  $\mathbf{U}_P$ , pues, como las reglas de la rotación del espinor indican que apenas una rotación de  $4\pi$  rad devuelve al mismo a su valor original, mientras que la doble aplicación del operador de paridad puede escribirse no solo como la identidad, sino también, por ejemplo, como la rotación por el ángulo  $2\pi$  rad del plano  $O - X^1 - X^2$  alrededor del eje  $O - X^3$  [27], entonces se tendrá en general que  $\mathbf{U}_P^2 = \pm 1$ , y de aquí que  $\eta_\psi(P) = \pm 1, \pm i$ .

(3) *Inversion temporal*: Queremos hallar  $\psi_T$  que satisfaga a la ecuación:

$$\gamma^\mu(i\partial_\mu^T - eA_\mu^T(x_T))\psi_T(x_T) = m\psi_T(x_T) \quad , \quad (\text{D.33})$$

con  $x_T = (-x^0; \mathbf{x})$ ,  $\partial_\mu^T = (-\partial_0; \nabla)$  y  $A_\mu^T = (A_0; -A_i)$ . Para llegar a ella, tomemos el conjugado complejo de la Ec. (D.14) y usemos que  $\gamma^{0*} = \gamma^{0T}$  y  $\gamma^{i*} = -\gamma^{iT}$ , desplazando e signo a las diversas componentes de la derivada y el 4-potencial elec-

tromagnético. Con esto:

$$\gamma^{\mu T} (i\partial_{\mu}^T - eA_{\mu}^T)\psi(x)^* = m\psi(x)^* \quad . \quad (\text{D.34})$$

Usando ahora la Ec. (D.17) y multiplicando por  $C$  por la izquierda:

$$-\gamma^{\mu} (i\partial_{\mu}^T - eA_{\mu}^T)C\psi(x)^* = mC\psi(x)^* \quad . \quad (\text{D.35})$$

Finalmente, como la matriz  $\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  anti-conmuta con todas las  $\gamma^{\mu}$ , si multiplicamos a la Ec. (D.35) por ella por la izquierda encontraremos:

$$\gamma^{\mu} (i\partial_{\mu}^T - eA_{\mu}^T)\gamma^5 C\psi(x)^* = m\gamma^5 C\psi(x)^* \quad . \quad (\text{D.36})$$

Comparando con la Ec. (D.33) reconocemos que:

$$\psi_T(x^0; \mathbf{x}) = \gamma^5 C\psi(-x^0; \mathbf{x})^* \quad . \quad (\text{D.37})$$

Esta transformación es elevada al espacio de Fock según:

$$\mathbf{V}_T\psi(x^0; \mathbf{x})\mathbf{V}_T^{-1} = \eta_{\psi}(T)\gamma^5 C\psi(-x^0; \mathbf{x}) \quad . \quad (\text{D.38})$$

Esta aparentemente difiere de la Ec. (D.37) en que el campo al lado derecho no está conjugado. Tal diferencia se explica porque el operador  $\mathbf{V}_T$  es anti-lineal, de manera que en la expresión para el operador de campo cuantificado pasará por las amplitudes  $u_s$  y  $v_s$  transformándolas según la ley clásica de la Ec. (D.37), como debe de ser [109]. Lo mismo no se aplica para la conjugación de carga porque este operador es lineal. La mentada anti-linealidad, por último, no restringe a la fase  $\eta_{\psi}(T)$ , pues como en el caso del campo (pseudo-)escalar, apenas se exige de ella que cumpla  $|\eta_{\psi}(T)|^2 = 1$ .

Esto concluye la discusión sobre las transformaciones discretas de los operadores

del campo cuantificado que aparecen en esta tesis. Con todo, es útil mencionar que la combinación de las tres transformaciones, PCT (o en cualquier otro orden) constituyen una simetría general de la teoría del campo, o más precisamente, siempre pueden elegirse las fases arbitrarias encontradas en cada uno de los casos de tal forma que lo sea. Los primeros argumentos a favor del carácter general de esta simetría fueron dados por Lüders [110] y Pauli [111]. Una presentación sencilla de él puede ser encontrado en las Refs. [27, 109], mientras que su prueba formal como un teorema de la teoría axiomática en las Refs. [23, 28].

# Bibliografía

- [1] M. Born y P. Jordan. *Zur Quantenmechanik*. Z. Phys. **34**: 858-888 (1925).
- [2] P. Jordan y W. Pauli. *Zur Quantenelektrodynamik ladungsfreier Felder*. Z. Phys. **47**: 151-173 (1928).
- [3] P. Jordan y E. Wigner. *Über das Paulische Äquivalenzverbot*. Z. Phys. **47**: 631-651 (1928).
- [4] W. Heisenberg y W. Pauli. *Zur Quantendynamik der Wellenfelder*. Z. Phys. **56**: 1-61 (1929).
- [5] W. Pauli. *The Connection Between Spin and Statistics*. Phys. Rev. **58**: 716-722 (1940).
- [6] W. Pauli. *Relativistic Field Theories of Elementary Particles*. Rev. Mod. Phys. **13**: 203-232 (1941).
- [7] S. Tomonaga. *On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields*. Prog. Theor. Phys. **1**: 27-42 (1946).  
Z. Koba, T. Tati y S. Tomonaga. *On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields. II*. Prog. Theor. Phys. **2**: 101-116 (1947).  
Z. Koba, T. Tati y S. Tomonaga. *On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields. III*. Prog. Theor. Phys. **2**: 198-208 (1947).  
S. Kanesawa y S. Tomonaga. *On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields. IV*. Prog. Theor. Phys. **3**: 1-13 (1948).  
S. Kanesawa y S. Tomonaga. *On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields. V*. Prog. Theor. Phys. **3**: 101-113 (1948).

- [8] J. Schwinger. *Quantum Electrodynamics. I. A Covariant Formulation*. Phys. Rev. **74**: 1439-1461 (1948).
- J. Schwinger. *Quantum Electrodynamics. II. Vacuum Polarization and Self-Energy*. Phys. Rev. **75**: 651-679 (1949).
- J. Schwinger. *Quantum Electrodynamics. III. The electromagnetic properties of the electron: Radiative corrections to scattering*. Phys. Rev. **76**: 790-817 (1949).
- [9] R.P. Feynman. *Space-Time Approach to Quantum Electro Dynamics*. Phys. Rev. **76**: 769-789 (1949).
- [10] F.J. Dyson. *The Radiation Theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman*. Phys. Rev. **75**: 486-582 (1949).
- [11] F.J. Dyson. *The S matrix in quantum electrodynamics*. Phys. Rev. **75**: 1736-1755 (1949).
- [12] W. Heisenberg. *Die 'Beobachtbaren Grössen' in der Theorie der Elementarteilchen*. Z. Phys. **120**: 513-538 (1943).
- Este artículo puede encontrarse en: W. Blum, H.-P. Dürr y H. Rechenberg (Eds.). *Werner Heisenberg. Gesammelte Werke / Collected Works. Series A / Part II. Original Scientific Papers*. Springer-Verlag (1989).
- [13] J. Lacki, H. Ruegg y G. Wanders (Eds.). *E.C.G. Stueckelberg, An Unconventional Figure of Twentieth Century Physics. Selected Scientific Papers with Commentaries*. Birkhauser (2009).
- [14] E. Stueckelberg y D. Rivier. *Causalité et structure de la matrice S*. Helv. Phys. Acta **23**: 215-222 (1950).
- Este artículo ha sido reimpresso en la Ref. [13].
- [15] K.O. Friedrichs. *Mathematical aspects of the quantum theory of fields*. Interscience Publishers (1953).

- [16] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann, Parte I (1957), Parte II (1959).
- [17] J.M. Cook. *The mathematics of second quantization*. Trans. Am. Math. Soc. **74**: 222-245 (1953).
- [18] V. Fock. *Konfigurationsraum und Zweite Quantelung*. Z. Phys. **75**: 622-647 (1950).
- [19] R. Haag. *On Quantum Field Theories*. Dan. Mat. Fys. Medd. **29**: 12 (1955).
- [20] A.S. Wightman. *Quantum Field Theory in Terms of Vacuum Expectation Values*. Phys. Rev. **101**, 2: 860-866 (1956).
- [21] N.N. Bogoliubow y O.S. Parasiuk, *Über die multiplikation der kausalfunktionen in der quantentheorie der felder*. Acta Math. **97**: 227-266 (1957).
- [22] A.S. Wightman y L. Garding. *Fields as operator-valued distributions in relativistic quantum theory*. Ark. Fys. **28**: 129-189 (1964).
- [23] R.F. Streater y A.S. Wightman. *PCT, Spin and Statistics, and all that*. The Benjamin/Cummings Publishing Company (1964).
- [24] J. Glimm y A. Jaffe. *Quantum Physics*. Springer-Verlag (1981).
- [25] H. Araki. *Von Neumann Algebras of Local Observables for Free Scalar Field*. J. Math. Phys. **5**: 1-13 (1964).  
R. Haag y D. Kastler. *An algebraic approach to quantum field theory*. J. Math. Phys. **5**: 848-861 (1964).
- [26] N.N. Bogoliubov, B.V. Medvedev y M.K. Polivanov. *Voprossy Teorii Dispersionnykh Sootnoshenii*. (En ruso.) Moscow, Fizmatgiz (1958).  
Traducción al inglés: N.N. Bogoliubov, B.V. Medvedev y M.K. Polivanov. *Problems in the Theory of Dispersion Relations*. Institute for Advanced Study, Princeton (1958).

- [27] N.N. Bogoliubov y D. Shirkov. *Introduction to the theory of Quantized Fields*. 3 ed., John Wiley & Sons - Interscience Publishers (1979).
- [28] N.N. Bogolubov, A.A. Logunov, A.I. Oksak y I.T. Todorov. *General Principles of Quantum Field Theory*. Kluwer Academic Publishers (1990).
- [29] O.I. Zavialov. *Renormalized Quantum Field Theory*. Kluwer Academic Publishers (1990).
- [30] B.M. Stepanov. *On the construction of an  $S$ -matrix in accordance with the theory of perturbations* (em russo). *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **29**: 1037-1054 (1965).  
Traducción al inglés en: *Eighteen papers on analysis and quantum mechanics*. American Mathematical Society Translations, Series 2, Volume 91, American Mathematical Society (1970).
- [31] H. Epstein y V. Glaser. *The role of locality in perturbation theory*. *Ann. Inst. H. Poincaré A* **19**: 211-295 (1973).
- [32] S. Lojasiewicz. *Sur le problème de la division*. *Studia Mathematica* T. XVIII: 87-136 (1959).  
B. Malgrange. *Division des distributions. I: Distributions prolongeables*. *Séminaire Schwartz* T. 4, exp. No. 21: 1-5 (1959-1960).  
B. Malgrange. *Division des distributions. II: L'Inégalité de Lojasiewicz*. *Séminaire Schwartz* T. 4, exp. No. 22: 1-8 (1959-1960).
- [33] G. Scharf. *Finite Quantum Electrodynamics. The Causal Approach*. 3 ed., Dover (2014).
- [34] S. Fassari y G. Scharf. *Borel Summability in Finite QED I: Outline and Results*. Em: S. Albeverio, U. Cattaneo and D. Merlini (Eds.). *Stochastic processes, physics and geometry II*. World Scientific: 278-288 (1991).

- [35] M. Dütsch, F. Krahe y G. Scharf. *Scalar QED Revisited*. *Il Nuovo Cimento*, Vol. 106 A, N. 3: 277-307 (1993).
- [36] V.S. Vladimirov, Y.N. Drozzinov y B.I. Zavalov. *Tauberian Theorems for Generalized Functions*. Kluwer Acad. Publ. (1988).
- [37] M. Dütsch, T. Hurth, F. Krahe y G. Scharf. *Causal Construction of Yang-Mills Theories. I*. *Nuovo Cim. A* 106: 1029-1041 (1993).  
M. Dütsch, T. Hurth, F. Krahe y G. Scharf. *Causal Construction of Yang-Mills Theories. II*. *Nuovo Cim. A* 107: 375-406 (1994).  
M. Dütsch, T. Hurth y G. Scharf. *Causal Construction of Yang-Mills Theories. III*. *Nuovo Cim. A* 108: 679-708 (1995).  
M. Dütsch, T. Hurth y G. Scharf. *Causal Construction of Yang-Mills Theories. IV. Unitarity*. *Nuovo Cim. A* 108: 737-773 (1995).
- [38] M. Dütsch y G. Scharf. *Electroweak theory without spontaneous symmetry breaking*. e-Print: hep-th/9612091 (1996)  
A.W. Aste, G. Scharf y M. Dütsch. *Perturbative gauge invariance: Electroweak theory II*. *Ann. Phys.* 8: 389-404 (1999).  
A.W. Aste y G. Scharf. *NonAbelian gauge theories as a consequence of perturbative quantum gauge invariance*. *Int. J. Mod. Phys. A* 14: 3421-3434 (1998).
- [39] G. Scharf. *Gauge Field Theories: Spin One and Spin Two. 100 Years After General Relativity*. Dover (2016).
- [40] D.R. Grigore. *The Structure of the Anomalies of Gauge Theories in the Causal Approach*. *Journ. Phys. A* 35: 1665-1689 (2002).
- [41] D.R. Grigore y G. Scharf. *No-go result for supersymmetric gauge theories in the causal approach*. *Ann. Phys.* 17: 864-880 (1997).

- [42] G. Scharf, W.F. Wreszinski, B.M. Pimentel y J.L. Tomazelli. *Causal Approach to (2+1)-Dimensional QED*. Annals of Physics **231**: 185-208 (1994).
- [43] L.A. Manzoni, B.M. Pimentel y J.L. Tomazelli. *Causal theory for the gauged Thirring model*. Eur. J. Phys. C **8**: 353-361 (1999).  
L.A. Manzoni, B.M. Pimentel y J.L. Tomazelli. *Radiative corrections to the causal Thirring model*. Eur. J. Phys. C **12**: 701-705 (2000).
- [44] J.T. Lunardi, B.M. Pimentel, J.S. Valverde y L.A. Manzoni. *Duffin–Kemmer–Petiau Theory in the Causal Approach*. Int. Journ. of Mod. Phys. A **17**, 2: 205-227 (2002).  
J. Beltrán, B.M. Pimentel y D.E. Soto. *The causal approach proof for the equivalence of  $SDKP_4$  and  $SQED_4$  at tree-level*. Int. J. Mod. Phys. A **35**, 9: 2050042 (2020).
- [45] R. Bufalo, B.M. Pimentel y D.E. Soto. *Causal approach for the electron-positron scattering in generalized quantum electrodynamics*. Phys. Rev. D **90**: 085012 (2014).  
R. Bufalo, B.M. Pimentel y D.E. Soto. *Normalizability analysis of the generalized quantum electrodynamics from the causal point of view*. Int. J. Mod. Phys. A **32**: 1750165 (2017).
- [46] O.A. Acevedo, J.V. Beltrán, B.M. Pimentel y D.E. Soto. *Causal Perturbation Theory Approach to Yukawa’s Model*. Eur. Phys. J. Plus **136**: 895 (2021).
- [47] CMS Collaboration. *Analysis of the CP structure of the Yukawa coupling between the Higgs boson and  $\tau$  leptons in proton-proton collisions at  $\sqrt{s} = 13$  TeV*, CMS-PAS-HIG-20-006 (2020).
- [48] M. Benghi. *Three dimensional Yukawa models and CFTs at strong and weak couplings*. arXiv:2007.03784v1 (2020).

- [49] M.F. Pusey, J. Barrett y T. Rudolph. *On the reality of the quantum state*. Nature Phys. 2309 (2012).
- [50] O.A. Acevedo. *Teorías de gauge clásicas à la Utiyama*. Informe del curso «Tópicos de investigación II», FC-UNI (2016).
- O.A. Acevedo. *Abordaje clásico del modelo estándar electrodébil*. Informe del curso «Proyecto de tesis», FC-UNI (2016).
- [51] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press. (1923).
- [52] E. Goursat. *A Course in Mathematical Analysis. Vol. I*. Ginn and Company (1904).
- [53] J. von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Pinceton University Press (1955).
- [54] E. Prugovečki. *Quantum Mechanics in Hilbert Space*. 2a ed., Dover (2006).
- [55] N.P. Landsman. *Foundations of Quantum Theory. From Classical Concepts to Operator Algebras*. Springer (2017).
- [56] A.N. Tijonov y A.A. Samarsky. *Ecuaciones de la física matemática*. Mir Moscú (1972).
- [57] F.G. Friedlander y M. Joshi. *Introduction to the theory of distributions*. 2 ed. Cambridge University Press (1998).
- [58] A.G. Sveshnikov y A.N. Tikhonov. *The Theory of Functions of a Complex Variable*. Mir Publishers (1971).
- [59] J. Hilgevoord. *Dispersion Relations and Causal Description*. North Holland (1960).

- [60] M. Reed y B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. II: Fourier Analysis, Self-adjointness*. Academic Press (1975).
- [61] A. Aste. *Finite Field Theories and Causality*. Proc. Sci. **LC2008**: 001 (2008).
- [62] L. Schwartz. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. 2 ed., Hermann (1979).
- [63] V.S. Vladimirov. *Methods of the Theory of Functions of Many Complex Variables*. Dover (2007).
- [64] I.P. Natanson. *Theory of Functions of a Real Variable. Volume I*. Frederick Ungar Publishing Co. (1964).
- [65] K. Nishijima. *Fundamental Particles*. W.A. Benjamin (1963).
- [66] V. Mukherji. *A History of the Meson Theory of Nuclear Forces from 1935 to 1952*. Archive for History of Exact Sciences **13**, 1: 27-102 (1974).
- [67] L.M. Brown y H. Rechenberg. *The Origin of the Concept of Nuclear Forces*. CRC Press. (1996).
- L.M. Brown y H. Rechenberg. *Quantum field theories, nuclear forces, and the cosmic rays (1934-1938)*. Am. J. Phys. **59**, 7: 595-605 (1991).
- [68] H. Yukawa. *Meson theory in its developments*. Discurso Nóbel (1949).
- [69] W. Heisenberg. *Über den Bau der Atomkeme* Z. Phys. **77**: 1-11, (1932); *ibid.* **78**: 156-164 (1932); *ibid.* **80**: 587-596 (1933). Translation into English of Part I and a part of Part III in: D.M. Brink. *Nuclear Forces*. Oxford (1965).
- A.I. Miller. *Werner Heisenberg and the beginning of nuclear physics*. Physics Today **38**, 11: 60-68 (1985).
- [70] E. Fermi. *Versuch einer Theorie der  $\beta$ -Strahlen. I*. Zeit. f. Phys. **88**: 161-177 (1934).

- [71] I.G. Tamm. *Exchange Forces between Neutrons and Protons, and Fermi's Theory*. Nature **133**: 981 (1934).
- [72] H. Yukawa. *On the interaction of elementary particles I*. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **17**: 48-57 (1935).
- [73] M.A. Tuve, N.P. Heydenburg y L.R. Hafstad. *The Scattering of Protons by Protons*. Phys. Rev. **50**: 806-825 (1936).
- [74] N. Kemmer. *The charge-dependence of nuclear forces*. Proc. Cambridge Phil. Soc. **34**: 354-364 (1938).
- [75] H. Yukawa y S. Sakata. *On the Interaction of Elementary Particles. II*. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **19**: 1084-1093 (1937).
- [76] G.C. Wick. *Range of Nuclear Forces in Yukawa's Theory*. Nature **142**: 993-994 (1938).
- [77] N. Kemmer. *Quantum theory of Einstein-Bose particles and nuclear interaction*. Proc. Roy. Soc. (London) A **166**: 127-153 (1938).
- [78] H. Yukawa, S. Sakata y M. Taketani. *On the Interaction of Elementary Particles. III*. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **20**: 319-340 (1938).  
H. Yukawa, S. Sakata, M. Kobayashi y M. Taketani. *On the Interaction of Elementary Particles. IV*. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **20**: 720-745 (1938).
- [79] G.C. Wick. *Teoria dei reggi  $\beta$  e momento magnetico del protone*. Rend. Accad. Lincei **21**: 170-173 (1935).
- [80] M. Taketani. *Quantization of Proton and Neutron Fields and Their Magnetic Moments*. (En japonés.) Kagaku **7**: 532-533 (1937).
- [81] H.J. Bhabha. *Nuclear Forces, Heavy Electrons and the  $\beta$ -Decay*. Nature **141**: 117-118 (1938).

- [82] H. Fröhlich y W. Heitler. *Magnetic Moments of the Proton and the Neutron*. Nature **141**: 37-38 (1938).
- [83] W. Rarita y J. Schwinger. *On the Neutron-Proton Interaction*. Phys. Rev. **59**, 5: 436-452 (1941).
- [84] S. Sakata y T. Inoue. *On the Correlations between Mesons and Yukawa Particles*. Progr. Theor. Phys. Kyoto **1**: 143-150 (1946).  
 Y. Tanikawa. *On the Cosmic-Ray Meson and the Nuclear Meson*. Progr. Theor. Phys. Kyoto **2**: 220-221 (1947).  
 R.E. Marshak y H.A. Bethe. *On the Two-Meson Hypothesis*. Phys. Rev. **72**, 6: 506-509 (1947).
- [85] C.M.G. Lattes, H. Muirhead, G.P.S. Occhialini y C.F. Powell. *Processes involving charged mesons*. Nature **159**: 694-697 (1947).
- [86] E. Gardner y C.M.G. Lattes. *Production of Mesons by the 184-Inch Berkeley Cyclotron*. Science **107**: 270-271 (1948).
- [87] H. Yukawa. *Models and Methods in the Meson Theory*. Rev. Mod. Phys. **21**, 3: 474-479 (1949).
- [88] B. Cassen y E.U. Condon. *On Nuclear Forces*. Phys. Rev. **50**, 9: 846-849 (1936).
- [89] J. Liouville. *Premier mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique*. Journal de l'École Polytechnique, Tome XIV: 124–148 (1833).  
 J. Liouville. *Second mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique*. Journal de l'École Polytechnique, Tome XIV: 149–193 (1833).
- [90] M. Anselmino, F. Caruso, J.R. Mahon y V. Oguri. *Introdução à QCD Perturbativa*. LTC (2013).
- [91] N. Piskunov. *Differential and Integral Calculus*. MIR Publishers Moscow (1969).

- [92] T. Hurth y K. Skenderis. *Quantum Noether method*. Nuc. Phys. B **541**: 566-614 (1999).
- [93] D. R. Grigore. *On the Super-Renormalizability of Gauge Models in the Causal Approach*. Romanian Journ. Phys. **58**: 837-865 (2013).
- [94] A.G. Sveshnikov y A.N. Tikhonov. *The theory of functions of a complex variable*. Mir Publishers (1978).
- [95] H. Epstein y V. Glaser. *Adiabatic limit in perturbation theory*. In: G. Velo and A.S. Wightman (eds.), *Renormalization Theory*: 193-254 (1976).
- [96] P. Blanchard y R. Seneor. *Green's functions for theories with massless particles (in perturbation theory)*. Ann. Inst. H. Poincaré A **XXIII**, 2: 147-209 (1975).
- [97] Z.M. Kishka, M. Abul-Ez, M. Saleem y H. Abd-Elmageed. *L'Hospital rule for matrix functions*. J. Egypt. Math. Soc. **21**: 115-118 (2013).
- [98] D. Lurié. *Particles and Fields*. John Wiley & Sons (1968).
- [99] Y. Nambu y G. Jona-Lasinio. *Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I*. Phys. Rev. **122**: 345-358 (1961).
- [100] D. Lurié y A.J. Macfarlane. *Equivalence Between Four-Fermion and Yukawa Coupling, and the  $Z_3 = 0$  Condition for Composite Bosons*. Phys. Rev. **136**: 816-829 (1964).
- J. Zinn-Justin. *Four-fermion interaction near four dimensions*. Nuc. Phys. B **367**: 105-122 (1991).
- [101] F. Strocchi. *An Introduction to Non-Perturbative Foundations of Quantum Field Theory*. Oxford University Press (2013).
- [102] G. Scharf. *Renormalization Group in Finite QED. II*. Nuovo Cim. **107** A, 8, 1427-1432 (1994).

- [103] D.R. Grigore. *Scale invariance in the causal approach to renormalization theory*. Ann. Phys. (Leipzig) **10**, 6-7, 473-496 (2001).
- [104] G.C. Wick. *The Evaluation of the Collision Matrix*. Phys. Rev. **80**, 2: 268-272 (1950).
- [105] J. von Neumann y E.P. Wigner. *Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons*. Zeitschrift für Physik A **49**: 73–94 (1928).
- [106] E.P. Wigner. *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren*. Vieweg (1931).  
Traducción al inglés: E.P. Wigner. *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*. Academic Press Inc. (1959).
- [107] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields. Volume I. Foundations*. Cambridge University Press (1995).
- [108] R. Utiyama. *Invariant Theoretical Interpretation of Interaction*. Phys. Rev. **101**, 5: 1597-1607 (1956).
- [109] C. Itzykson e J.-B. Zuber. *Quantum Field Theory*. Dover (2005).
- [110] G. Lüders. *On the equivalence of invariance under time reversal and under particle-antiparticle conjugation for relativistic field theories*. Dansk. Mat. Fys. Medd. **28**: 1–17 (1954).
- [111] W. Pauli. *Exclusion Principle, Lorentz Group and Reflection of Space-Time and Charge*. En: W. Pauli (ed.), *Niels Bohr and the Development of Physics: Essays dedicated to Niels Bohr on the occasion of his seventieth birthday*, Pergamon Press: 30–51 (1955).